



HAL
open science

Modélisation et simulations numériques de la propagation de feux de forêts

Jonathan Margerit

► **To cite this version:**

Jonathan Margerit. Modélisation et simulations numériques de la propagation de feux de forêts. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1998. Français. NNT : 1998INPL112N . tel-01750866

HAL Id: tel-01750866

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750866>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



inpl
nancy

Institut National
Polytechnique de Lorraine

98 INPL 112N

École doctorale PROMEMA

[7] 1998 MARGERIT S.

MODÉLISATION ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE LA PROPAGATION DE FEUX DE FORÊTS

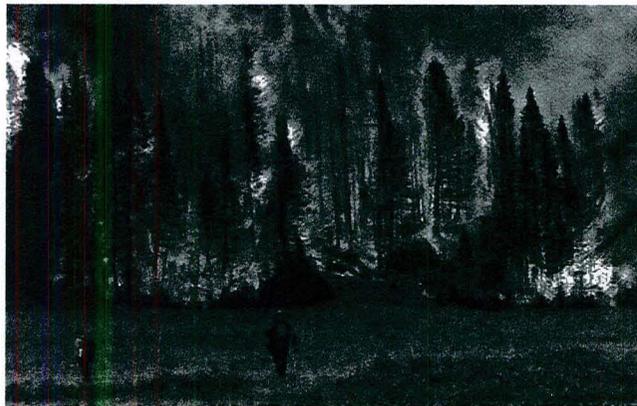
THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 5 novembre 1998
pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
(spécialité Mécanique et Énergétique)

par

Jonathan MARGERIT
(Ingénieur ENSEM)



Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Composition du jury

<i>Président :</i>	J.P. BRANCHER	(Professeur, ENSEM-LEMTA, Nancy)
<i>Rapporteurs :</i>	P. JOULAIN M. QUINTARD	(Directeur de recherche, E.N.S.M.A, Futuroscope) (Directeur de recherche, I.M.F.T., Toulouse)
<i>Examineurs :</i>	X. VIEGAS C. PICARD P. PERRE P. BALABANIS O. SÉRO-GUILLAUME	(Professeur, Dept.Eng.Mecanica, Coimbra, Portugal) (Lieutenant Colonel, CEREN, Gardanne) (Professeur, ENGREF, Nancy) (Docteur, DG XII, Belgique) (Directeur de recherche, LEMTA-CNRS, Nancy)

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (L.E.M.T.A) de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.

Je voudrais ici adresser ma profonde gratitude à Monsieur O. SÉRO-GUILLAUME, Directeur de Recherche CNRS au LEMTA. Il m'a fait découvrir le domaine des feux de forêts. Ses nombreux conseils et encouragements, son expérience et son implication constante dans mon travail m'ont été d'une aide inestimable pour réaliser ce manuscrit.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur J.P. BRANCHER, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Je remercie également Messieurs P. JOULAIN, Directeur de recherche au L.C.D. , et M. QUINTARD, Directeur de recherche à l' I.M.F.T. de Toulouse qui m'ont fait le privilège de rapporter mon travail. Qu'ils sachent que je leur en suis extrêmement reconnaissant.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs X. VIEGAS, Professeur au Departamento de Engenharia de Mecanica de Coimbra , P. PERRE, Professeur à l' ENGREF de Nancy, et P. BALABANIS, Docteur de la Commission de l'Union Européenne à la DG XII en Belgique, pour avoir bien voulu participer à mon jury et pour s'être intéressé à mon travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur C. PICARD, Lieutenant Colonel au CEREN à Gardanne, pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail ainsi que pour l'expérience des feux qu'il m'a apportée.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur D. MARGERIT, Docteur de l'INPL, pour la relecture de ce manuscrit et pour les critiques qu'il a pu en faire.

Je remercie tous mes camarades chercheurs du Laboratoire, et tout particulièrement mon collègue A. CHEIKHI pour son encouragement et l'aide qu'il m'a apportée.

Je tiens à remercier aussi Mesdames C. DENIS et M-H. ZOBERMAN pour leur efficacité, leur disponibilité et leur gentillesse.

*Je dédie cette thèse
à mes parents
à mes frères,
à Danaë.*

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Introduction générale	xix
Bibliographie	xxvii

Chapitre 1	
Description d'une forêt et des mécanismes de propagation du feu	1

1.1	Géométrie de la forêt et de la propagation du feu	1
1.1.1	Stratification de la forêt	1
1.1.2	Différents types de feux de forêts	3
1.1.3	Géométrie d'un feu de surface	4
1.1.4	Hétérogénéité verticale et horizontale	5
1.1.5	L'échelle gigascopique	7
1.2	L'espèce végétale et les différentes échelles d'observation de celle-ci	9
1.2.1	Les trois échelles de description de la phase particule végétale	9
1.2.2	L'échelle macroscopique	11
1.2.3	L'échelle mésoscopique	12
1.2.4	L'échelle microscopique	13
1.3	Mécanismes de la propagation	14
1.3.1	Description des transferts d'énergies à l'échelle macroscopique	14
1.3.2	Mécanisme global de combustion à l'échelle macroscopique : triangle du feu	16
1.3.3	Les mécanismes à l'échelle mésoscopique : combustion dans la zone en feu	16

1.3.4	Les mécanismes à l'échelle microscopique : vaporisation et pyrolyse	17
1.3.5	Les types de transferts de chaleur	20
1.3.6	Les non uniformité du vent d'origine météorologique	21
1.4	Grandeurs évoluant lors d'un feu de forêt	21
1.5	Paramètres de la propagation	22
1.5.1	Les paramètres structuraux	22
1.5.2	Les paramètres météorologiques	23
1.5.3	La topographie	23
1.6	Les modèles existants et les méthodes de modélisation	23
1.6.1	Classification des modèles selon les phénomènes physiques	23
1.6.2	Classification des modèles selon les échelles physiques	23
1.6.3	Démarche de modélisation choisie	24
Bibliographie		27

Chapitre 2
Méthode des enveloppes, formulation variationnelle et lien avec un bilan thermique 2D

2.1	Propagation du front du feu dans une forêt uniforme	31
2.2	Propagation d'un front de feu dans une forêt non uniforme avec vent local	32
2.2.1	Objet d'étude et notations	32
2.2.2	Méthode de modélisation de la dynamique du front du feu	34
2.2.3	Recherche de l'équation d'évolution	35
2.2.4	Modèle d'évolution elliptique	37
2.2.5	Forme intrinsèque	37
2.2.6	Vitesse de propagation	38
2.3	Formulation variationnelle de la méthode d'enveloppe	39
2.3.1	Modèle d'évolution	39
2.3.2	Fonction indicatrice pour une forêt non uniforme	41
2.3.3	Trajectoire des rayons des perturbations	43
2.3.4	Equation cartésienne du front d'onde	44
2.3.5	Expression de la transformation de Legendre	45
2.3.6	Vitesse de propagation	47
2.3.7	Les limites du modèle	48
2.4	Champs thermiques bidimensionnels associés à la propagation du feu	48

2.4.1	Champ thermique hyperbolique	48
2.4.2	Champ thermique vérifiant une équation de réaction diffusion	53

Bibliographie	57
----------------------	-----------

<p>Chapitre 3</p> <p>Système d'équations macroscopiques de la propagation des feux de forêts</p>
--

3.1	Système d'équations macroscopiques de feux de forêt	60
3.1.1	Les différentes phases macroscopiques	60
3.1.2	Equations macroscopiques dans l'air ambiant et dans le sous-sol	62
3.1.3	Phase particule végétale	64
3.1.4	Equation du transfert radiatif	70
3.1.5	Conditions de saut entre la strate végétale et l'air ambiant	72
3.1.6	Discussion à propos du système de feux de forêts	73
3.2	Equations à l'échelle mésoscopique pour la phase particule végétale	73
3.2.1	Les deux phases constituant la phase particule végétale	73
3.2.2	Présentation des équations mésoscopiques	74
3.2.3	Espèces constitutives et nomenclature	75
3.2.4	Phase gaz	76
3.2.5	Phase végétale	77
3.2.6	Expressions des flux et des équations d'état mésoscopiques	78
3.2.7	Conditions de saut entre phase végétale et phase gaz	78
3.3	Méthode de prise de moyenne et obtentions d'équations de bilan macroscopiques	80
3.3.1	Méthode de prise de moyenne	80
3.3.2	Equations bilans du constituant poreux p	83
3.4	Fermeture thermodynamique (le second principe)	86
3.4.1	Obtention de la relation de Gibbs	86
3.4.2	Génération d'entropie	87
3.4.3	Lien entre les forces et les flux macroscopiques	88
3.4.4	Loi de Brinkman et loi de Darcy	89
3.4.5	Lois d'état et cinétique chimiques	90
3.4.6	Discussion sur la dérivation précédente des équations macroscopiques	90
3.5	Conditions de saut entre la strate végétale et l'air ambiant	91
3.6	Rayonnement dans un milieu semi-transparent	92

Chapitre 4

Réduction d'un modèle de feu de forêt 3D à un modèle 2D surfacique

4.1	Simplification des équations de bilan macroscopiques	99
4.1.1	Méthodologie de simplification	99
4.1.2	Bilan d'énergie	101
4.1.3	Expression de la production d'énergie d'origine chimique	104
4.1.4	Variation des concentrations massiques	104
4.1.5	Production chimique ne dépendant que du champ de température .	106
4.1.6	Bilan radiatif: approximation de diffusion	106
4.1.7	Conditions aux limites sur les interfaces zone végétale-air ambiant et zone végétale-sol	107
4.1.8	Bilan thermique unique et conditions aux limites	107
4.1.9	Adimensionnalisation	108
4.2	Coordonnées locales proches de la surface	109
4.2.1	Définition de la surface et métrique associée	109
4.2.2	Expression du gradient et du laplacien sur la surface courbe	110
4.2.3	Définitions des coordonnées locales à la surface et métrique associée	111
4.2.4	Expression du gradient et du laplacien en coordonnées curvilignes .	113
4.3	Réduction bidimensionnelle pour un nombre de Biot faible	114
4.3.1	Ordre de grandeur des paramètres et échelles associées	114
4.3.2	Dilatation normale à la surface	115
4.3.3	Choix de la forme des développements	116
4.3.4	Ordre 0 en Biot	116
4.3.5	Ordre 1 en Biot	117
4.3.6	Ordre 2 en Biot	117
4.3.7	Ecriture différente de l'équation thermique surfacique	119
4.3.8	Cas d'une surface cylindrique avec vent dans le plan (Oxz)	120
4.3.9	Cas d'une surface plane avec vent uniforme dans une direction quel- conque	121
4.4	Simplification du transfert radiatif	124
4.4.1	Le milieu gris	124
4.4.2	Expression de la divergence du flux radiatif	125

4.4.3	Forme intégrale de l'équation de transfert radiatif	127
4.4.4	Expression de l'émittance	129
4.4.5	Simplification du bilan d'énergie proche du front du feu	130
4.4.6	Simplification du bilan d'énergie pour un feu optiquement épais dans une zone	131
4.4.7	Distinction de la zone en feu dans la strate végétale et au-dessus de celle-ci	132
4.4.8	Emittance et fonction de Green bidimensionnelle	133
4.5	Equations 2D avec terme radiatif non local	135
4.5.1	Définitions des domaines géométriques	135
4.5.2	Equations de propagation	136
4.5.3	Échelles et adimensionnalisation	139
4.6	Cas particuliers	142
4.6.1	Le front plan	142
4.6.2	Le front circulaire	143

Bibliographie

145

<p>Chapitre 5</p> <p>Résolution numérique du modèle de feux de forêts 2D surfacique</p>

5.1	Système à résoudre	147
5.2	Différences finies	149
5.2.1	Choix de l'algorithme	149
5.2.2	Avantages et limitations	153
5.3	Automate cellulaire	153
5.3.1	Notion d'automate	153
5.3.2	Fonction de transfert locale	154
5.3.3	Modèle à une discrétisation de la température	155
5.3.4	Rôle des probabilités	155
5.3.5	Avantages et limitations	156
5.4	Résultats de simulations numériques	156
5.4.1	Modèle de végétation	156
5.4.2	Evolution du feu	156
5.4.3	Cas d'une densité d'occupation importante sans vent ni pentes	157
5.4.4	Rôle du vent	157

Table des matières

5.4.5	Rôle de la pente locale	160
5.4.6	Rôle de l'humidité	162
5.4.7	Profil de grandeurs	162
5.4.8	Densité de percolation	163
5.4.9	Résultats quantitatifs	163

Bibliographie	169
----------------------	------------

Conclusion et perspectives

Bibliographie	175
----------------------	------------

Annexes

Annexe A

Les facteurs de la propagation du feu

A.1	L'espèce végétal	177
A.1.1	Les types d'espèces végétales	177
A.1.2	La teneur en eau	178
A.2	Les conditions météorologiques	178
A.2.1	Les précipitations	178
A.2.2	L'humidité relative	178
A.2.3	Le vent	178
A.3	Caractéristiques physiques des constituants végétal et air+gaz	178
A.3.1	Bois	179
A.3.2	Air à pression atmosphérique	179

Annexe B

Modèle de ROTHERMEL (1972)

B.1	Définitions des paramètres	181
B.2	Corrélation donnant la vitesse de propagation	181
B.3	Exemple: données pour la litière de bois mort (Dead Timber (litter))	183

Annexe C

Méthode des enveloppes

Annexe D**Méthode des enveloppes : changement de métrique et stabilité structurelle**

D.1	Changement de métrique	189
D.2	Paramétrage polaire	191
D.3	Solution de base et étude de stabilité structurelle	193

Annexe E**Équations Mésoscopiques**

E.1	Relations de liaison entre les flux	195
E.2	Expression des flux et des équations d'état	196
E.3	Loi de Brinkman et loi de Darcy	197
E.4	Modélisation mésoscopique avec homogénéisation au niveau de l'interface	197

Annexe F**Obtention des équations de bilans macroscopique de quantité de mouvement et d'énergie**

F.1	Equations bilans du constituant poreux	199
F.2	Equations bilans de la phase fluide	200
F.3	Relations de liaison entre les flux	202

Annexe G**Bilan d'entropie**

G.1	Définition des grandeurs thermodynamiques	203
G.2	Bilan d'entropie	204
G.3	Différentes formes d'une équation de bilan	205
G.4	Equations bilans et dérivées particulaire	206

Annexe H**Différentes formes de l'équation de l'énergie**

H.1	L'équation d'état calorique	209
H.2	Terme source d'origine chimique	210
H.3	Nombre de Lewis L_e et simplification pour $L_e \approx 1$	211
H.4	Equation vérifiée par le champ de température	212

Annexe I

Expression de l'enthalpie en fonction de la température

- I.1 Expression de l'enthalpie en fonction de la température 213
- I.2 Relation algébrique entre température et enthalpie en avant du front du feu 214

Annexe J

Organisation du programme numérique

- J.1 Organisation du programme 217
 - J.1.1 Préprocesseur 217
 - J.1.2 Processeur 219
 - J.1.3 Postprocesseur 219

Annexe K

Assimilation de données

- K.1 Assimilation de données 223
 - K.1.1 Notions préliminaires 223
 - K.1.2 Choix de l'expérience 224
 - K.1.3 Choix de la fonction coût 224
 - K.1.4 Algorithme d'optimisation 225
- K.2 Résultats 225

Bibliographie

229

Table des figures

1	Triangle du feu	xix
2	Propagation du feu	xx
3	Rôle de la densité d'occupation du couvert végétal	xxi
4	Simulation de propagation de feu par automate cellulaire	xxii
5	Expérience d'évolution du front du feu, dans une forêt homogène, uniforme, à partir d'un point source (Peet 1971)	xxiii
1.1	Représentation de la couverture végétale	2
1.2	Exemple de feu d'herbe	2
1.3	Types de feux de forêts	3
1.4	Production de braises par fort vent	3
1.5	Vue de coupe de la strate de broussaille en l'absence de feu	4
1.6	Vue de coupe de la strate de broussaille en présence de feu	5
1.7	Coupe de la surface représentant le front du feu	5
1.8	Vue de dessus de la strate de broussaille (présence de feu)	6
1.9	Différentes phases végétales	6
1.10	Hétérogénéité horizontale d'une strate de végétation	7
1.11	Coupe de la strate de broussaille à l'échelle gigascopique	8
1.12	Couche limite hydrodynamique	8
1.13	La phase particule végétale vue à trois échelles de description différentes	9
1.14	Les différentes échelles et les phases associées	10
1.15	Transferts d'énergie et de masse	14
1.16	Différentes zones en avant du front du feu	15
1.17	Pyrolyse du bois	18
1.18	Courbes de pyrolyse avec et sans retardant	19
1.19	Influence de la pente et du vent sur le transfert radiatif	21
1.20	Classification des modèles par échelles	24
1.21	Différents espaces d'étude	25
2.1	Vue de dessus et coupe d'une forêt à l'échelle gigascopique	30
2.2	Evolution du front du feu (vue de dessus de la strate végétale à l'échelle gigascopique)	31
2.3	Paramétrage du front du feu	33
2.4	Principe de Huygens	34
2.5	Front d'onde et rayon en provenance d'une source d'excitation P_0	40

Table des figures

2.6	Fonctions indicatrices pour $f = 1$, $h = 0.5$ et g variant de 0 à 1	43
3.1	Différentes phases végétales	60
3.2	Description des interfaces délimitants une strate végétale unique	61
3.3	Hétérogénéité horizontale d'une strate de végétation	61
3.4	Morceau de phase particule végétale	64
3.5	Angle solide	70
3.6	Diffusion et diffusion incidente	71
3.7	Interface entre zone végétale et air ambiant	72
3.8	Constitution d'une phase particule végétale (à l'échelle mésoscopique)	74
3.9	Interface séparant deux milieux	79
3.10	Exemple de fonctions poids	81
3.11	Grandeurs mésoscopiques associées aux différentes phases	81
3.12	Grandeurs mésoscopiques et grandeurs macroscopiques associées	82
3.13	Interface séparant deux milieux	83
3.14	Interface entre zone végétale et air ambiant	91
4.1	De l'échelle macroscopique à l'échelle gigascopique	100
4.2	Evaporation d'une goutte dans sa vapeur	100
4.3	Paramétrage curviligne de la surface \mathcal{S}	109
4.4	Coordonnées curvilignes associées à une surface	111
4.5	Lignes de niveau associées à la surface \mathcal{S}	119
4.6	Surface cylindrique avec vent dans le plan (Oxz)	121
4.7	Surface plane avec vent dans le plan (Oxz)	121
4.8	Rayon passant par un point M et de direction \vec{u}	127
4.9	Domaine \mathcal{D} entourant un point M	128
4.10	Pavé d'intégration \mathcal{D} et zone en feu	130
4.11	Forme de la flamme	134
4.12	Propagation du feu sur la carte \mathcal{P}	136
4.13	Courbes d'atténuation anisotrope	138
5.1	Réseau carré	150
5.2	Réseau d'automates cellulaires	153
5.3	Discretisation permettant de simuler une densité d'occupation $d=0.6$	157
5.4	Exemple de propagation du feu ($d=0.6$)	158
5.5	Densité d'occupation importante ($d=0.8$, Etape 32)	159
5.6	Evolution du rayon du front du feu et de la surface en feu	159
5.7	Rôle d'un vent ambiant global (Etape 32)	160
5.8	Evolution du front du feu du modèle d'ellipses	160
5.9	Rôle d'une pente locale	161
5.10	Rôle de l'humidité du terrain sur la propagation du feu, cas de 3 largages d'eau	162
5.11	Profil de grandeurs en un noeud du maillage	163
5.12	Percolation	164
5.13	Variation de la densité d'occupation en fonction de l'humidité	165

5.14	Propagation quantitative au temps adimensionnel $t = 5$	165
5.15	Profils de température, de charge et d'humidité	166
5.16	Profils dans la section $y = 0.5$	166
E.1	Les deux types de conditions de saut	198
J.1	Hierarchie de l'objet forêt	217
J.2	Algorithme du préprocesseur	218
J.3	Algorithme du processeur	219
J.4	Fenêtre d'évolution des grandeurs au site (60, 60)	219
J.5	Environnement du postprocesseur	220
J.6	Menus déroulants	220
J.7	Bascule de couleur	220
K.1	Expérience de J.R. Curry	224
K.2	Generation 11	226
K.3	Generation 24	226
K.4	Generation 32	227

Table des figures

Liste des tableaux

1.1	Constitution des différentes phases	10
1.2	Exemple de compacité et de porosité	12
1.3	Caractéristique des particules de combustible	13
1.4	Réactions et cinétiques de pyrolyse	18
4.1	Exemple de jeu de valeurs	137
4.2	Exemple de valeurs des paramètres adimensionnels	141
5.1	Exemple de valeurs des paramètres dimensionnels	149
5.2	Exemple de valeurs des paramètres adimensionnels	149
B.1	Paramètres pour une litière de bois mort	183

Liste des tableaux

Introduction générale

En moyenne, **45 000 hectares** de forêts françaises, soit 0.3% de la surface totale, sont annuellement la proie des flammes (cf. la Recherche [24] 1991). L'étendue des incendies reste donc globalement modeste. La plus grande part, environ 80%, de ces incendies sont localisés au sud de la France. La surface globale ravagée par les flammes en France est plus petite que pour les autres pays méditerranéens comme le Portugal, l'Italie et la Grèce. Cette surface est très petite comparée à la surface brûlée au cours des grands incendies qui ont lieu en Australie ou aux Etats-Unis. Par exemple l'incendie qui a eu lieu dans le parc national de Yellowstone dans les montagnes Rocheuses a brûlé 600 000 hectares en 1988. La France dépense néanmoins plus d'un **milliard de francs** chaque années pour protéger ses forêts contre les incendies. Cette somme se répartie entre prévention des feux de forêt et lutte contre ceux-ci.

Les personnes qui s'occupent de feux de forêt sont en étroites relations. Des personnes s'occupent de l'aménagement global du territoire français, les gardes forestiers entretiennent la forêt de manière à réduire le risque de grands incendies, le commandant des pompiers organise la lutte contre le feu en exploitant le fruit de son expérience ainsi que certains outils d'aide à la décision et les pompiers luttent directement contre l'avancée du feu afin de contenir celui-ci et de protéger les zones habitées.

Le **scientifique** peut améliorer et créer de tels outils d'aide à la décision grâce à une meilleure connaissance des mécanismes physiques de propagation du feu. Il s'agit d'aller un peu plus loin que de considérer uniquement l'information qualitative donnée par le mécanisme élémentaire connu sous le nom de **triangle du feu** (figure 1).

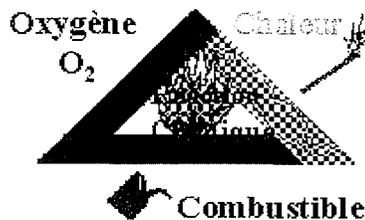


FIG. 1 - *Triangle du feu*

Celui-ci considère qu'il faut que les quatre éléments : oxygène, combustible, chaleur d'inflammation et réaction exothermique soient présents en même temps de manière à produire un feu et à l'entretenir. En tant que physicien, nous voulons faire intervenir

Introduction générale

des paramètres fondamentaux tels que la *vitesse du vent*, le *taux d'humidité* et la *densité d'occupation* de la forêt afin de prédire l'évolution du feu. Le caractère géométrique de l'évolution du feu est aussi très important. Sur la photo 2 ci-dessous, nous pouvons distinguer plusieurs zones :

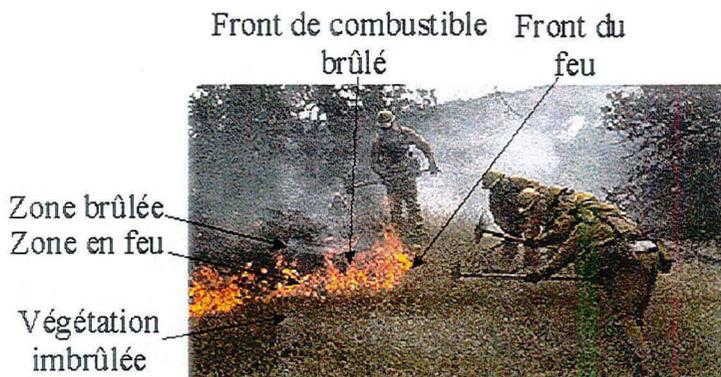


FIG. 2 – Propagation du feu

C'est le mouvement du front du feu et du front de combustible brûlé que nous voulons prédire.

Le besoin de recherche dans ce domaine est grand si l'on veut comprendre et prévoir la propagation des feux de forêt. Les feux de forêt sont en effet complexes, car ils mettent en jeu beaucoup de phénomènes physiques : la combustion dans la zone en feu produit de l'énergie et les transferts de chaleur et de matière conduisent celle-ci de la zone en feu vers le combustible en avant de la zone en feu. Le transfert de chaleur est de type radiatif, convectif et conductif. Tout modèle physique de propagation du feu doit prendre en compte ces différents mécanismes s'il veut être prédictif.

Un modèle, qui fait intervenir des mécanismes physiques si variés que ceux que nous avons explicités ci-dessus, ne peut être obtenu qu'après une étude approfondie qui est loin d'être élémentaire et doit posséder un comportement très riche en fonction de la gamme des paramètres et de la zone géométrique considérée (cf. figure 2). Le rôle de chacun des **mécanismes** de propagation ainsi que leurs caractéristiques principales doivent être mis à jour lors de la création d'un tel modèle. C'est une tâche ardue, car les **paramètres** d'un modèle prédictif de propagation de feu de forêt sont nombreux. Nous voulons un outil de prédiction de la propagation du feu qui donne une meilleure connaissance des mécanismes de propagation du feu, qui soit quantitatif, et dont le temps de simulation soit plus court que le temps de propagation réel du feu. Il n'en reste pas moins que la décision finale incombe à l'homme qui dirige les opérations de lutte. Cette décision ne sera que plus réfléchie et ce sera à lui de juger de la pertinence des résultats de simulations qu'il possèdera.

Les paramètres qui interviennent dans la propagation du feu sont le type de végétaux, la distribution de ce combustible végétal (cf. figure 3), son humidité, la température

ambiante, la pente du terrain et la vitesse et la direction du vent. La connaissance de ces paramètres reste approchée et conditionne la qualité de la prédiction de tout code de propagation du feu.



Des arbres fruitiers et des vignes ont stoppé l'avancée du feu.

(Clichés A. Pita/Sipa press ;
B, J.J. Perrier)

FIG. 3 – Rôle de la densité d'occupation du couvert végétal

Un végétal est caractérisé essentiellement par sa capacité calorifique, sa surface d'échange et l'énergie dégagé par sa combustion. La distribution de ce combustible végétal est caractérisée par sa répartition en strates horizontales dans la couche de combustible végétal, la porosité de celle-ci et la diversité des plantes qui constituent ces différentes zones. La densité d'occupation de la forêt correspond à la fraction surfacique d'occupation de la forêt par de la végétation. La densité d'occupation des strates végétales (présence ou non de clairière, de vignes) et leurs épaisseurs ont un rôle important.

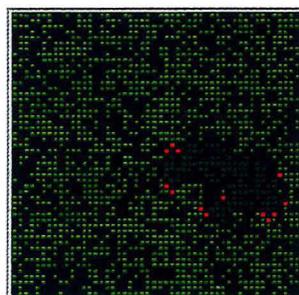
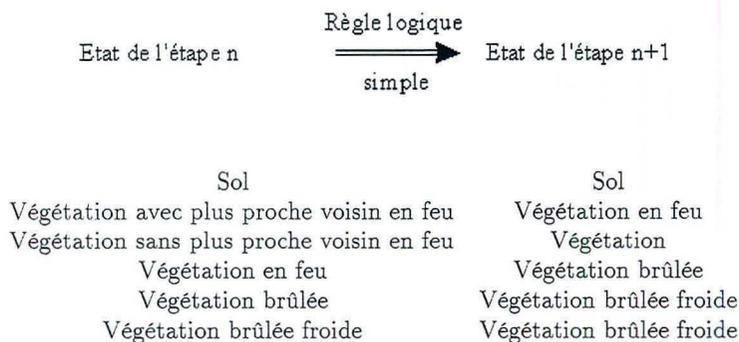
Il existe des ouvrages généraux sur les feux de forêt [1, 3, 14, 16, 20, 24, 25, 26]. Des articles de synthèses sur les mécanismes de la propagation du feu dans les forêts sont [2, 4, 5, 11, 22, 23] ainsi que les livres de R.C. Rothermel [18] (1983) et A.M. Grishin [8] (1997). Quelles sont **les différentes approches qui ont été entreprises** afin de prédire la propagation du feu dans les forêts?

Nous pouvons pour cela reprendre la classification de Weber [23] (1991) des modèles existants en trois groupes : les modèles dits *statistiques*, les modèles *semi empiriques* et les modèles *physiques*.

Les modèles *statistiques* sont des **automates cellulaires**, algorithmes temporels récursifs formés de règles logiques simples appliquées à des grandeurs, dites *variables d'état*, qui ne peuvent prendre que des valeurs discrètes. Ces règles logiques simples forment la *fonction* dites *de transition*. Un exemple classique d'algorithme récursif de propagation de feu est présenté à la figure 4 (Programme Fire de Robert H. Silverman 1995 : <http://alife.fusebox.com>) avec une simulation. Nous distinguons ici 5 états différents qui sont :

le sol (absence de végétation),
la végétation vierge,
la végétation en feu,
la végétation brûlée
et la végétation brûlée froide.

Le sol ne peut pas brûler. La végétation vierge fait partie de la zone non encore atteinte par le feu. La végétation en feu correspond à la végétation qui brûle alors que brûlé correspond à la végétation brûlée mais encore chaude et brûlé froid à la végétation brûlée et qui s'est refroidie. Nous notons *étape* le nombre de fois que la fonction de transition est appliquée depuis l'instant initial. Cet instant correspond à l'étape 0.



- Légende**
- Sol
 - Végétation
 - En feu
 - Brûlé
 - Brûlé froid

<http://alife.fusebox.com>

FIG. 4 – Simulation de propagation de feu par automate cellulaire

Les **automates cellulaires** ont été inventés par J. Von Neumann [21] en 1957. Celui-ci se proposait, d'étudier si les lois d'évolution dans la nature peuvent provenir de règles logiques simples. La première utilisation des automates cellulaires pour modéliser la propagation des feux de forêt est due à Kourtz [10] en 1971. Ce type de modèle est parfois nommé *modèle de contagion*. Il a l'intérêt d'être bidimensionnel, de nécessiter un faible temps de calcul et de pouvoir modéliser la propagation du feu dans une *forêt hétérogène* et *peu dense*. L'existence d'une densité d'occupation de la forêt critique en dessous de laquelle le feu ne peut pas se propager est alors mise en évidence. Cette densité critique est un indice très important de risque pour la forêt (cf. figure 4). La forêt apparaît alors comme un milieu **percolant** [19].

Pendant ces études d'automates dits de **Feux de Forêts** ne font pas le lien entre les règles logiques simples de propagation et les mécanismes physiques fondamentaux de la propagation du feu. Les valeurs des *coefficients* qui interviennent dans la règle

logique simple de l'automate ne peuvent qu'être calées pour une forêt particulière par des campagnes d'expériences. La prédiction est bonne de manière **qualitative** mais la quantification de la propagation est difficile.

La deuxième classe de modèles est constituée des modèles *semi empiriques*. Ces modèles ont été obtenus en utilisant un bilan thermique stationnaire global afin de trouver la vitesse de propagation d'un front de feu rectiligne dans une forêt en absence de vent. Des modifications à effectuer sur la relation donnant la vitesse en absence de vent sont alors postulées pour obtenir l'influence d'un vent de direction perpendiculaire au front du feu, de l'humidité de la végétation et de la pente du terrain. Ceci a conduit au modèle de Rothermel [18] de **1973**. C'est un modèle au caractère essentiellement empirique. Les coefficients de ce modèle sont calés par des campagnes d'expériences pour chaque type de forêt particulière. L'avantage d'un tel modèle et qu'il est quantitatif par nature. Le calcul de la vitesse est de plus très rapide, car elle est donnée par une relation algébrique qui peut se programmer sur une calculatrice.

L'inconvénient de celui-ci est qu'il fait l'amalgame de plusieurs mécanismes physiques différents et que les formes arbitraires choisies pour les corrélations ne sont valables que pour les forêts américaines pour lesquelles elles ont été réalisées. De plus, les formes postulées ne sont pas toutes physiquement homogènes ce qui limite la connaissance apportée par ce modèle et sa capacité à s'adapter à différents types de forêts.

La prise en compte de la non uniformité de la forêt et de la direction du vent par rapport au front du feu a été réalisée par Richards [17] en **1990**. Un feu initié en un point d'une forêt, homogène, uniforme, plane et horizontale, se développe en prenant une forme elliptique, sous l'influence d'un vent global, d'après le résultat d'expériences [15] comme celle montrée à la figure 5. Richards utilise une méthode d'enveloppe de familles de courbes elliptiques, correspondant au développement du feu dans une forêt considérée localement comme homogène pour obtenir un modèle de propagation du feu valable pour une forêt non uniforme. Nous discuterons de manières plus précises de l'obtention de ce modèle au chapitre 2. C'est un modèle différentiel de propagation de front du feu, le front du feu étant vu comme une ligne courbe qui se propage dans un plan horizontal. La simulation numérique qui en résulte est donc très rapide [6]. Cette méthode d'enveloppe

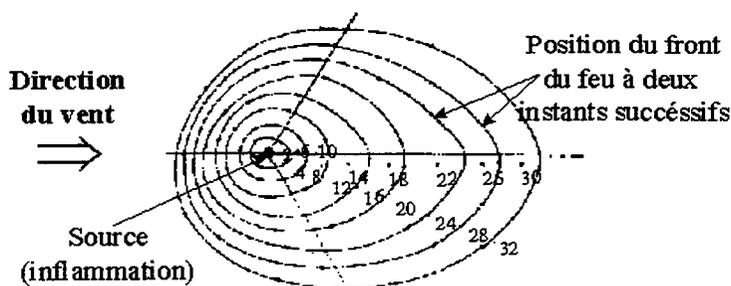


FIG. 5 - *Expérience d'évolution du front du feu, dans une forêt homogène, uniforme, à partir d'un point source (Peet 1971)*

reste cependant empirique. En effet, comme elle n'est que géométrique, elle ne fait pas intervenir la physique réelle de l'interaction entre la zone végétales en feu et celle en avant du front du feu. L'inconvénient est que la connaissance des limites de validité de ce modèle n'est pas connue et qu'il n'y a pas alors de démarche pour l'adapter à des situations où celui-ci n'est plus valable, par exemple lorsque la densité d'occupation de la forêt est faible. Des expériences [15] montrent qu'un point source d'inflammation ne se développe alors plus de manière elliptique. Le front du feu est alors très découpé et la **densité de percolation** est atteinte, densité pour laquelle les hypothèses d'utilisation du modèle d'enveloppe ne sont certainement pas valables. L'extinction du feu suit alors une autre dynamique.

Divers auteurs, depuis Fons [7] en 1946, ont réalisé des modèles de propagation de feux dans les forêts par une approche de mécanique des milieux continus [2, 23]. Ce sont des modèles *physiques* qui utilisent des lois de bilan. Ces lois sont des équations aux dérivées partielles qui tiennent compte de mécanismes physiques tels que la convection et le rayonnement thermique. Les modèles développés correspondent à un bilan d'énergie de la phase végétale pour un front de feu **rectiligne** qui se propage à vitesse constante dans une forêt uniforme. L'avantage de tels modèles est qu'ils distinguent des **mécanismes physiques** élémentaires, ils sont quantitatifs, leurs domaines de validité peuvent être déterminés selon les hypothèses qui sont faites pour l'obtenir et ils sont adaptables à plusieurs types de forêts. L'inconvénient est que la complexité de ceux-ci conduit à ne traiter et à ne tenir compte que d'une partie seulement des mécanismes physiques qui interviennent dans la propagation des feux de forêt.

C'est essentiellement le transfert de chaleur en avant du front du feu qui a été étudié. Les modèles développés actuellement ne sont donc pas complets, car ils nécessitent des données d'expériences comme la hauteur des flammes et que les aspects de combustion chimique dans la zone en feu ne sont pas pris en compte. Ces modèles ne peuvent donc pas être utilisés par les pompiers pour prédire la propagation du feu. Le temps de résolution numérique de tels modèles est long par rapport aux modèles statistiques et semi empiriques. De plus, la restriction à la propagation d'un front du feu rectiligne n'est pas représentative de la propagation d'un feu réel (figure 2). C'est une limitation importante de ces modèles physiques, car il n'est pas certain qu'un front rectiligne est stable. Grishin [23, 9, 8] au contraire tient compte d'aspects chimiques. Il n'a alors pas besoin de données comme la hauteur des flammes. Celle-ci est obtenue par le modèle.

Il est important de trouver les domaines de validité de ces différents modèles ainsi que leur rapport. La comparaison est délicate car, pour une même forêt, les trois types de modèles ci-dessus peuvent s'appliquer à des **échelles** d'observation différentes. C'est à ce type de question que nous proposons d'apporter quelques éléments de réponse. Le cadre de la méthode d'**homogénéisation** dite de *prise de moyenne*, associée à la *thermodynamique des processus irréversibles* des milieux continus homogénéisés (cf. Marie [13] 1983), nous paraît adapté à l'obtention d'un modèle physique **tridimensionnel** assez général qui englobe les modèles physiques déjà étudiés et qui permette une prédiction. Le terme homogénéisation est pris ici dans son sens général de *rendre homogène*. Il n'est pas lié à la technique particulière choisie pour réaliser celle-ci.

Des *hypothèses simplificatrices* doivent nous permettre de retrouver alors les modèles semi-empiriques et modèles statistiques ainsi que leur domaine de validité. Il n'est cepen-

dant pas sûr que le domaine de validité d'un tel modèle physique inclus entièrement celui des modèles semi-empiriques et statistiques.

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres :

Dans le *premier chapitre*, nous donnons une **représentation de la forêt** qui tient compte de la présence de différentes échelles d'observation de celle-ci et qui est adaptée à l'étude de la propagation du feu. Nous rappelons les différents régimes de propagation des feux de forêt. Ceci nous permet alors de réaliser une classification des différents modèles de propagation existants et de présenter les principaux **phénomènes** de la propagation du feu en fonction des échelles d'observation. Nous dégageons alors la méthodologie de modélisation choisie. Nous terminons cette présentation par un bilan des principales grandeurs et paramètres qui interviennent lors de la propagation des feux de forêts.

Dans le *deuxième chapitre*, nous présentons tout d'abord la méthode géométrique monodimensionnelle surfacique des ellipses pour modéliser la propagation du **feu de faible intensité** dans une strate végétale non uniforme assez dense en trouvant une forme **intrinsèque** pour la vitesse normale de propagation du front du feu. Nous obtenons alors une formulation **variationnelle** équivalente à ce modèle. Nous proposons enfin une *équation thermique hyperbolique* et une *équation de réaction diffusion* bidimensionnelles qui rendent compte de ce modèle de propagation de front, ce qui nous conduira à des interprétations physiques possibles des coefficients du modèle géométrique. Nous pouvons donc postuler simplement plusieurs modèles 2D surfaciques de champ thermique qui conduisent au modèle géométrique. Les trois types de modèles géométrique, variationnel et équations thermiques postulées ci-dessus restent donc des modèles ad hoc, dont le domaine de validité reste à préciser.

Le *troisième chapitre* a pour but l'obtention d'un **modèle tridimensionnel générique de phase végétale** de manière à faire apparaître physiquement les différents mécanismes qui influencent la vitesse de propagation du feu dans celle-ci. Ce modèle à l'échelle macroscopique où nous pouvons considérer que la phase végétale est homogène va être obtenu par homogénéisation à partir des deux phases qui constituent celle-ci, à savoir les tiges des végétaux, où sont valables les équations de la mécanique des milieux poreux, et le gaz qui entoure celles-ci. Le système d'équations régissant le transfert radiatif dans ce milieu macroscopique semi-transparent sera alors détaillé. La phase végétale apparaît alors comme un milieu **poreux** avec modèle de **microstructure**.

Dans le *chapitre quatre*, nous nous intéressons à l'étude d'une configuration particulière de forêt. Il s'agit de feux de faible intensité situé sur des collines. La zone en feu peut alors être considérée comme une **couche limite hydrodynamique** aux propriétés particulières. Nous désirons réaliser l'écriture et la simplification du système d'équations de propagation valable à l'échelle macroscopique de la forêt dans cette couche limite. L'écriture des équations dans la phase végétale nécessitait l'homogénéisation du chapitre 3. La première simplification correspond à distinguer les différentes formes prises par les équations bilans dans la zone en avant du front du feu, dans la zone en feu et dans la zone brûlée et par adimensionnaliser celles-ci. Nous utilisons ensuite la **faible épaisseur** de la couche végétale pour réaliser un passage 3D-2D afin d'obtenir un système d'*équations bidimensionnel*. Le système obtenu est un système de réaction diffusion avec pertes convectives et rayonnement à distance. Nous étudions enfin quelques configurations particulières du front du feu et discuterons d'un modèle bidimensionnel hétérogène.

L'objet du *chapitre cinq* est de **simuler numériquement** le système de réaction diffusion bidimensionnel hétérogène de propagation du feu obtenu au chapitre 4 afin de mieux comprendre le comportement des feux de forêt en fonction des valeurs des paramètres de la propagation. Nous choisissons un schéma numérique approprié à la résolution de ce modèle. Le mécanisme de propagation se trouvant dans une fine couche limite de part et d'autres du front du feu, nous sommes conduits à un schéma qui tienne compte de ce caractère local. Nous proposons un schéma de différences finies puis un schéma d'automate cellulaire afin de comparer ces deux approches.

Nous observons ensuite l'*influence de la valeur des paramètres* du modèle sur la propagation du feu. Deux cas limites sont alors intéressants à étudier. Le premier a lieu lorsque la densité d'occupation de la forêt est importante. Le front du feu qui se propage dans une forêt uniforme sous l'influence du vent, à partir d'un point d'inflammation, possède alors une *forme elliptique* semblable à celles obtenues expérimentalement et au modèle de Richards [17] que nous avons étudié au chapitre 1. Le deuxième se produit lorsque la densité d'occupation de la forêt est faible. Nous sommes alors à la limite d'extinction du feu et la notion de percolation joue alors un rôle important. Le front du feu est alors très découpé. Nous étudions donc l'influence des paramètres du modèle sur le *seuil de percolation*.

Nous concluons enfin sur le travail qui a été réalisé et nous donnerons les différentes perspectives d'étude qui se dégagent de celui-ci.

Bibliographie

- [1] **Brown A.A.** and **Davis K.P.**, *Forest Fire: Control and use*, McGraw-Hill: New York , 1973, 686 pp
- [2] **Catchpole E.A.** and **De Mestre N.J.**, Physical models for a spreading line fire, *Aust. For.*, 1986, Vol. 49, No.2, p.102-111.
- [3] **Chandler C.**, **Cheney P.**, **Thomas P.**, **Trabaud L.** and **Williams D.**, Fire in forestry, Forest fire behaviour and effects, Vol. 1, *John Wiley*, 450 pp., 1983.
- [4] **Duarte J.A.M.S.**, Modelling Forest Fires, *Scientific Computing In Europe*, 2-4 sep. 1996.
- [5] **Fernandez-Pello A.C.**, Flame spread modeling, *Comb. Sci. and Technol.*, 1984, vol. 39, pp. 119-134.
- [6] **Finney M.A.**, FARSITE Home Page , http://www.montana.com/sem/public_html/farsite/farsite.html, sept 1997.
- [7] **Fons W.L.**, Analysis of fire spread in light forest fuels, *J. Agric. Res.*, 1946, Vol. 72, pp 93-121.
- [8] **Grishin A.M.**, Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them, translated by Czuma M., Chikina L. And Smokotina L., ed. *Frank Albini*, 1997.
- [9] **Grishin A.M.**, Mathematical Models of Forest Fires [in Russian], *Tomsk Univ.*, Tomsk, 1981, p. 227.
- [10] **Kourtz P.**, **O'Regan W.G.**, A model for a small forest fire ... to simulate burned and burning areas for use in a detection model, *For. Sci.*, 1971, Vol. 17, No. 2, pp. 163-169.
- [11] **Lee S.L.** and **Hellman J.M.**, Heat and mass transfer in fire research, *Adv. Heat Transfer*, 1974, Vol. 10, pp. 219-284.
- [12] **Lidrissi M.**, Modélisation des feux de forêts par Automates cellulaires, *Rapport de DEA*. Septembre 1993. Nancy.
- [13] **Marle C.M.**, On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media, *Int. J. Engng. Sci.*, 1982, Vol. 20, No. 5, pp. 643-662

- [14] **Naville L.**, Etude expérimentale et modélisation de la propagation d'une flamme sur un combustible poreux : Applications aux feux de végétation, *Thèse de l'université Aix-Marseille II*, 1997.
- [15] **Peet G.B.**, The shape of mild fires in Jarrah forest, *Aus. Forestry*, 1967, Vol. 31, pp.121-127.
- [16] **Pyne S.J., Andrews P.L and Laven R.D.**, Introduction to wildland fire, *New York: Wiley*, 1996.
- [17] **Richards G.D.**, An elliptical growth model of forest fire fronts and its numerical solution, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1990, Vol.30, pp. 1163-1179.
- [18] **Rothermel R.C.**, How to predict the spread and intensity of forest and range, *USDA Forest Service* , 1983, General technical report INT-143, Ogden, Utah, USA, 161 p.
- [19] **Stauffer D.**, Introduction to Percolation Theory, *Taylor & Francis*, London, 1985.
- [20] **Trabaud L.**, Les feux de forêts (mécanismes, comportement et environnement), *France Sélection*, Février 1992.
- [21] **Von Neumann J.**, Theory of self reproducing Automata, Edited and completed by A.W. Burks, *University of Illinois Press*, 1970.
- [22] **Von Niessen W. and Blumen A.**, Dynamic simulation of forest fires, *Can. J. For. Res.*, 1988, Vol. 18, pp. 805-812.
- [23] **Weber R.O.**, Modelling fire spread through fuel beds, *Prog. Energy Combust. Sci.*, 1991, vol. 17, pp. 67-82.
- [24] **Les incendies de forêts**, *Supplément La Recherche*, 1991, Vol. , pp. 886-935.
- [25] **Les incendies de forêts Tome 1 et 2**, *Revue Forestière Française*, N° spécial 1974-1975, 552 p.
- [26] **Espaces forestiers et incendies**, *Revue Forestière Française*, N° spécial 1990, 380 p.

Chapitre 1

Description d'une forêt et des mécanismes de propagation du feu

Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une représentation de la forêt appropriée pour l'étude de la propagation du feu. La présence de différentes échelles d'observation de la forêt et les différents types de propagation du feu sont donnés. Nous présentons alors une nouvelle classification des différents modèles de propagation des feux de forêts en fonction de l'échelle d'observation. Ceci nous conduit à présenter la démarche de modélisation adoptée dans le reste du manuscrit. Nous terminons cette présentation par un survol des phénomènes intervenant dans les feux de forêts et rappelons les principales grandeurs et paramètres qui interviennent dans la propagation. Pour une description plus détaillée de certains comportements du feu, l'on se reportera au livre de Traubaud [14].

1.1 Géométrie de la forêt et de la propagation du feu

1.1.1 Stratification de la forêt

La forêt est constituée d'une *couverture végétale* délimitée, pour sa partie inférieure, par le sous-sol sur lequel elle repose et, pour sa partie supérieure, par l'*air ambiant* au-dessus de la forêt (figure 1.1). Notons respectivement Ω , $\bar{\Omega}$ et $\underline{\Omega}$ les domaines occupés par cette couverture végétale, par l'air ambiant et par le sous-sol. La *cime* de la couverture végétale, interface entre Ω et $\bar{\Omega}$, est notée $\bar{\Sigma}$ et le *sol*, interface entre $\bar{\Omega}$ et $\underline{\Omega}$, est notée $\underline{\Sigma}$. Le sol définit la topographie du terrain et le domaine Ω s'étend sur une hauteur h qui dépend de la position considérée de la forêt.

Il nous faut définir un **repérage de l'espace**. Pour les feux de forêts d'étendue inférieure à une centaine de kilomètres, nous pouvons choisir un repère cartésien $(O, (x, y, z))$ avec la demi-droite $[Oz)$ dirigée selon la verticale ascendante pour repérer la topographie du terrain et les positions dans la couverture végétale, sans tenir compte de la courbure du globe terrestre. La direction verticale est alors la même partout. La position verticale z de la surface \mathcal{S} du sol est alors donnée en chaque point (x, y) par la fonction $z(x, y)$ et

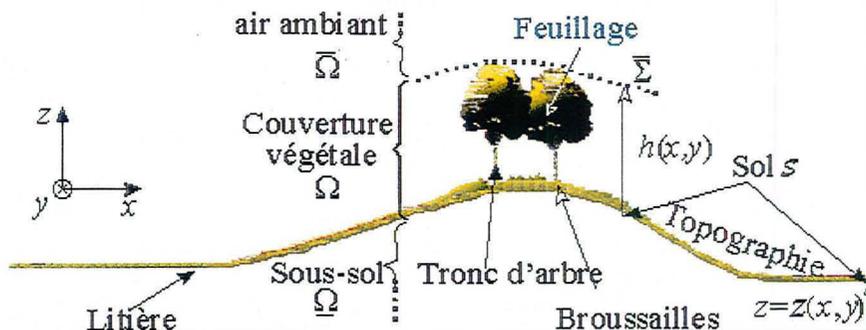


FIG. 1.1 – Représentation de la couverture végétale

la hauteur h de la couverture végétale est donnée par la fonction $h(x, y)$.

La couverture végétale est stratifiée. Nous pouvons distinguer verticalement quatre zones dites *strates de végétation* :

1. La zone occupée par la *litière* et l'humus.
2. La zone formée par les *broussailles*, l'herbe et les débris morts, dites *strates inférieures* ou *sous-bois*.
3. La zone intermédiaire constituée par les *troncs* d'arbre.
4. La zone supérieure constituée de la *couronne* des arbres (feuillages et branchages).



FIG. 1.2 – Exemple de feu d'herbe

Sur la figure 1.2 [20], un feu de forêt se propage au niveau de l'herbe et des broussailles.

La schématisation de la forêt que nous venons de décrire est appropriée à la description de la propagation des feux de forêt. L'air ambiant qui se trouve au-dessus de la forêt peut être considéré comme une strate particulière caractérisée par l'absence de végétaux combustibles. Etudions maintenant les différents types de feux qui peuvent se propager dans une forêt.

1.1.2 Différents types de feux de forêts

Les feux de forêts peuvent être de quatre types [14] (cf. figure 1.3 [19]).



FIG. 1.3 – Types de feux de forêts

1. Les *feux de sol* sont des feux qui se propagent dans la litière et l'humus. Ce sont des feux qui sont difficiles à détecter, car ils sont sans flammes. Leur vitesse de propagation est faible. Ces feux peuvent endommager les racines des arbres.
2. Les *feux de surface*, dits aussi feux courants, se propagent dans les sous-bois des forêts. Ils brûlent l'herbe et les broussailles. Ces feux sont avec flammes et peuvent se propager rapidement. Ce sont les feux les plus communs. Ils peuvent avoir comme origine un feu de sol ou se terminer en un feu de sol susceptible de se transformer en un nouveau feu de surface après l'intervention des pompiers.
3. Les *feux de cimes* sont des feux qui se propagent au niveau de la couronne des arbres. Leur vitesse de propagation est très grande. Ils sont généralement déclenchés par un feu de surface qui gagne en intensité et atteint la couronne des arbres.
4. Enfin, des *feux avec braises* peuvent se produire. Les braises sont produites par des feux de cimes ou pour certaines conditions de vent et de topographie (cf. figure 1.4)



FIG. 1.4 – Production de braises par fort vent

Ces braises sont transportées à distance et sont alors à l'origine de foyers secondaires. De tels feux sont très difficiles à contrôler et leur propagation très rapide est très difficile à prédire.

Nous nous intéresserons uniquement aux feux de surface dans la suite de ce manuscrit, car se sont les moins difficiles à décrire et qu'ils contiennent déjà tous les mécanismes de base de la propagation des feux de forêt. Le feu n'a alors lieu que dans la zone de sous-bois. Le front du feu de cette zone (cf. figure 2) possède une vitesse de propagation unique alors qu'un feu de cime peut être caractérisé par des vitesses de propagation différentes des fronts du feu qui se situent au niveau de la couronne des arbres et au niveau des broussailles.

L'étude de la propagation du feu dans une seule strate de végétation est une étape importante de l'étude de la propagation du feu dans plusieurs strates de végétation. La modélisation de l'interaction des différentes strates [6, 15] entre elles doit alors être entreprise. Dans ce manuscrit, nous n'aborderons donc que l'étude de l'interaction de la strate de végétation qui brûle avec le sol et l'air ambiant. La prise en compte de cette interaction est nécessaire afin de modéliser correctement les conditions aux limites sur les parties inférieures et supérieures de la strate de végétation qui brûle. Nous pouvons maintenant

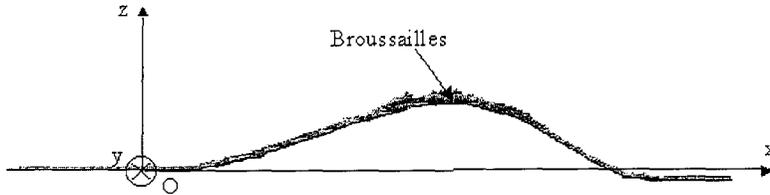


FIG. 1.5 – Vue de coupe de la strate de broussaille en l'absence de feu

étudier plus particulièrement la propagation du feu dans une strate de végétation.

1.1.3 Géométrie d'un feu de surface

En présence d'un feu (cf. figure 1.6), nous distinguons trois zones distinctes dans la strate de végétation (cf. aussi figure

1. Une *zone en feu* Ω_f caractérisée par la présence de flammes. Cette zone en feu se prolonge au-dessus du domaine occupé par la strate de végétation (cf. figure 1.6).
2. Une *zone de végétation vierge* Ω_v , en avant de cette zone en feu. Cette zone est aussi nommée *zone de combustible frais* en empruntant le vocabulaire utilisé pour l'étude de la combustion de milieux prémélangés gazeux [18]. C'est la zone de végétation qui n'a pas encore été enflammée.
3. Une *zone de végétation brûlée* notée Ω_b qui se trouve en arrière de la zone en feu. La hauteur de la strate brûlée est plus faible que celle de la zone de combustible frais.

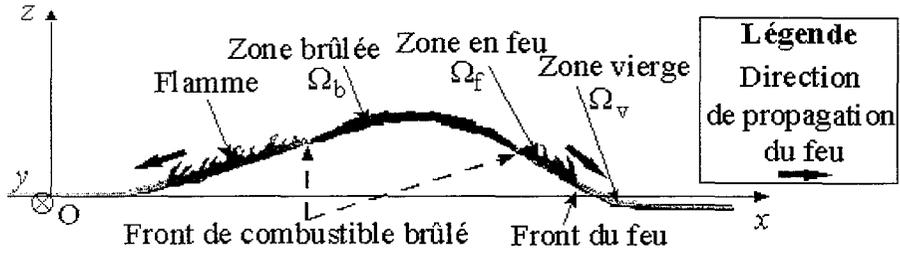


FIG. 1.6 - Vue de coupe de la strate de broussaille en présence de feu

Ces zones sont délimitées par deux fronts : le front du feu qui sépare la zone en feu de la zone de combustible frais et le front de combustible brûlé qui sépare la zone brûlée de la zone en feu. Ces fronts sont des surfaces géométriques. La figure 1.7 ci-dessous représente une coupe de la surface occupée par le front du feu. Cette figure correspond à un zoom d'une région de la figure 1.6. Le front du feu est représenté en pointillés. La figure 1.8

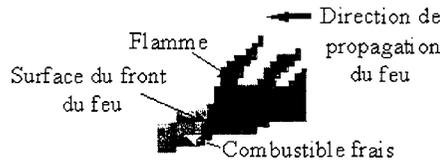


FIG. 1.7 - Coupe de la surface représentant le front du feu

représente une vue de dessus des différentes zones que nous venons de voir. La droite en pointillés définit le plan de coupe qui permet de retrouver la figure 1.6 précédente. Le front du feu de la figure 1.8 est la courbe projetée du front du feu que nous avons vu être une surface.

Nous avons choisi de représenter l'intersection du front du feu avec la partie supérieure de la zone de broussailles. La flamme est donc inclinée et cette courbe est visible sur l'exemple, de feu de broussailles, qui a été choisi, par ce que le feu descend une pente. Cette courbe n'est donc pas cachée par le feu qui se trouve au-dessus de la zone de broussailles. Le front de combustible brûlé est représenté de manière analogue au front du feu sur la figure ci-dessus. La propagation du feu peut être caractérisée par la dynamique de ces deux courbes. Le but est donc d'obtenir cette dynamique. Celle-ci est régit par les mécanismes de la propagation que nous décrivons au paragraphe 1.3.

1.1.4 Hétérogénéité verticale et horizontale

Les quatre strates que nous avons décrites au paragraphe 1.1, et qui constituent la couverture végétale, se distinguent par des valeurs très différentes de *porosité* et de *surface*

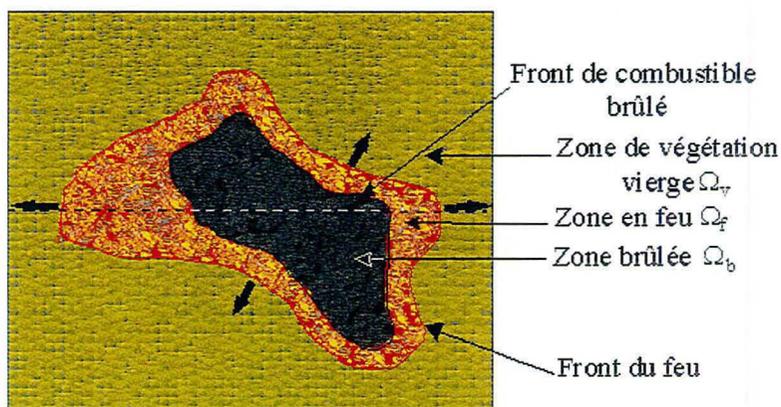


FIG. 1.8 - Vue de dessus de la strate de broussaille (présence de feu)

d'échange entre la végétation et l'air environnant celle-ci, à l'intérieur de la strate végétale. La couverture végétale est donc **verticalement hétérogène**. Considérons que ces zones forment des **phases** différentes. Nous pouvons schématiser leurs formes par la figure 1.9.

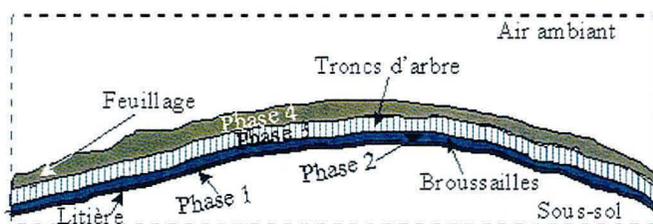


FIG. 1.9 - Différentes phases végétales

La strate de végétation est généralement **anisotrope**. La croissance de la végétation privilégie en effet la direction verticale.

Une strate de végétation est un milieu constitué de phases particules végétales et d'air. La strate de couronne des arbres se représente donc de la même façon qu'une strate de broussailles. La répartition horizontale de particule végétale et d'air peut être hétérogène si l'on distingue des variations rapides horizontales de *porosité* et de *surface d'échange* (cf. figure 1.10). Considérons que l'on a horizontalement soit une phase **particule végétale**, de broussailles par exemple, soit uniquement une phase d'air que nous nommons **sol**, car celui-ci est alors visible lorsque l'on regarde la forêt par au-dessus. La grandeur qui quantifie le pourcentage de présence en surface de ces deux types de phases est la *densité d'occupation* notée d . C'est le rapport de la surface occupée par les particules végétales sur la surface occupée par le sol. Une strate végétale pour laquelle cette quantité vaut 1

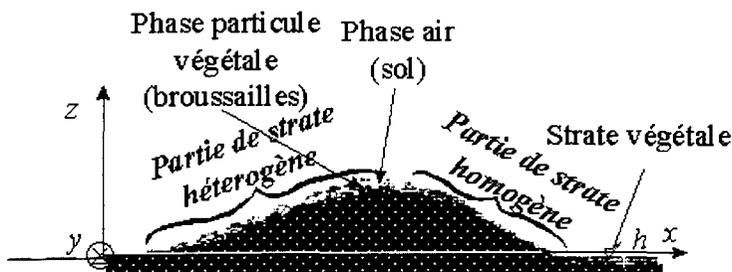


FIG. 1.10 - Hétérogénéité horizontale d'une strate de végétation

est alors une **strate homogène**, car elle n'est constituée que d'une seule phase.

1.1.5 L'échelle gigascopique

La propagation du feu peut être caractérisée par le mouvement de la surface définissant le front du feu, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.3. précédent. Cette description a lieu à l'**échelle macroscopique**. C'est donc un modèle de propagation de feu de végétation à cette échelle qu'il est important d'obtenir. L'obtention de celui-ci est réalisée au chapitre 3. Ce modèle ne prend cependant pas en considération le caractère essentiellement horizontal de la propagation des feux de surface. L'utilisation de cette propriété doit conduire à une simplification du modèle.

Ce sont la différence des ordres de grandeur des longueurs caractéristiques de l'étendue horizontale L (cf. figure 1.11) et verticale h ($h/L \ll 1$) de la strate végétale et les temps caractéristiques de propagation d'un feu de végétation qui sont la cause de cette propagation essentiellement horizontale du feu. La propagation est essentiellement tangente à la topographie du terrain. Nous faisons aussi l'hypothèse que la hauteur h_f des flammes est du même ordre de grandeur que la hauteur de la strate de végétation h . Il est donc intéressant de se placer à cette échelle L afin de décrire la propagation du feu.

A cette échelle, la zone végétale peut être considérée comme une *surface gauche* S sur laquelle le feu se propage. Le front du feu est alors réduit à une courbe qui se propage sur cette surface et l'étude de la propagation du feu devient bidimensionnelle. C'est l'échelle d'observation privilégiée de la propagation du feu. Nous proposons de donner le nom d'*échelle gigascopique* à celle-ci, car giga veut dire géant en grecque. Une projection de la surface S sur le plan horizontal défini par l'équation ($z = 0$) permet d'obtenir un repérage sur une carte. Les phénomènes physiques importants à cette échelle sont l'hydrodynamique du vent au niveau des collines qui conduit à des vents locaux, de vitesse V (cf. figure 1.12), l'engouffrement de l'air dans la couverture végétale (vitesse v), le transfert thermique à partir de la zone en feu dans la zone de combustibles frais ainsi que l'intervention de la topographie du terrain. Les rôles de la pente et du vent doivent donc être considérés à cette échelle. La couverture végétale peut alors être vue comme une couche limite pour le problème hydrodynamique extérieur. Cette couche limite est une surface possédant de nombreuses *propriétés matérielles* à cette échelle (source de chaleur,...). L'on

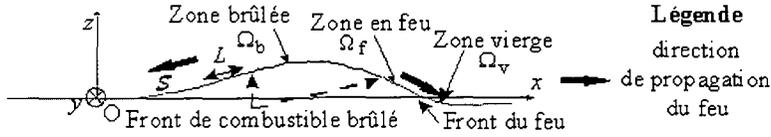


FIG. 1.11 – Coupe de la strate de broussaille à l'échelle gigascopique

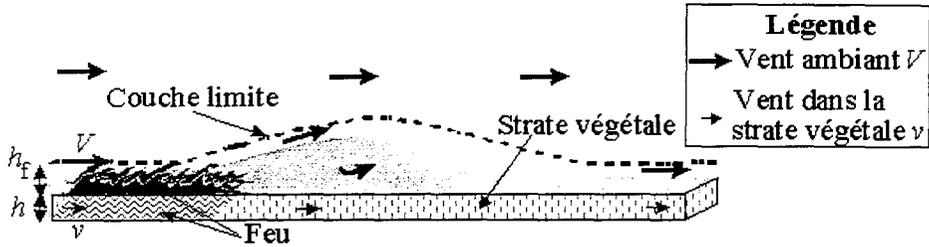


FIG. 1.12 – Couche limite hydrodynamique

se place délibérément dans le cadre des feux de forêt de faible ou moyenne intensité dans la description ci-dessus (les feux de forêt de forte intensité [10] peuvent conduire à une structure du feu essentiellement verticale avec présence d'un important panache de fumée, cependant de tels types de feux interviennent dans des conditions météorologiques très particulières). Une telle description doit conduire à un modèle plus simple de propagation de feu de végétation, car elle est bidimensionnelle alors que la description de la propagation à l'échelle macroscopique est tridimensionnelle.

L'existence d'un modèle d'équations aux dérivées partielles, qui décrit la propagation du feu à cette échelle, n'est pas assurée a priori. L'existence d'un tel modèle sera discutée au chapitre 4 par un passage à la limite permettant de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle gigascopique. Une grandeur importante apparaît alors : c'est la notion classique de *charge de combustible* qui est la quantité de matière végétale par unité de surface au sol.

Plus encore, si le problème de la propagation du feu peut se restreindre à la recherche de la dynamique qui caractérise l'évolution d'une courbe, représentant la position du front du feu bidimensionnel sur la surface \mathcal{S} , la description de la propagation du feu sera alors rendue la plus simple possible. Au chapitre 2, nous postulons directement un modèle simple de dynamique d'un tel front afin de décrire la propagation du feu. Les limitations de ce modèle ad hoc nous conduirons alors aux chapitres suivants à tenter d'obtenir celui-ci à partir des phénomènes physiques qui apparaissent aux différentes échelles sous-jacentes.

L'échelle gigascopique associée à la couverture végétale, en tenant compte de la présence de plusieurs strates végétales, sera dite *échelle du paysage*. C'est la plus grande de toutes et c'est l'échelle d'observation à laquelle les pompiers observent l'évolution du feu à partir des bombardiers d'eau.

1.2 L'espèce végétale et les différentes échelles d'observation de celle-ci

1.2.1 Les trois échelles de description de la phase particule végétale

On dénombre trois échelles successives dans la phase particule végétale. Ces échelles sont représentées sur la figure 1.13 où l'on donne trois zooms successifs.

En partant de la plus grande à la plus petite, ces échelles sont :

1. l'échelle *macroscopique*
2. l'échelle *mésoscopique*
3. l'échelle *microscopique*.

Le vocabulaire ci-dessus est emprunté au domaine de la physique qui s'occupe de l'extraction du pétrole dans des couches poreuses qui possèdent des fissures [9]. Rappelons que macro, méso et micro signifient respectivement long, intermédiaire et petit en grec.

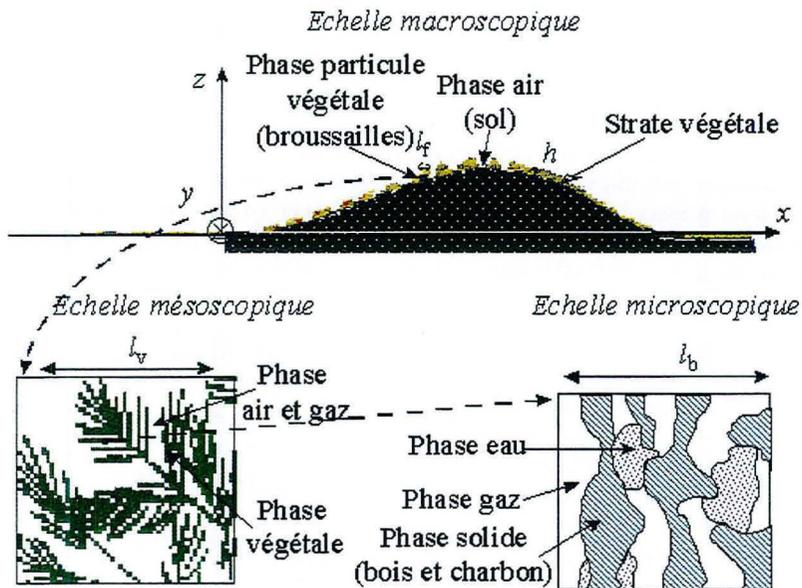


FIG. 1.13 – La phase particule végétale vue à trois échelles de description différentes

L'échelle de description que nous avons employée dans tout le paragraphe 1 est l'échelle macroscopique. A cette échelle, la phase particule végétale est un milieu **homogène**. Elle

apparaît cependant comme un milieu diphasique à l'échelle mésoscopique, constitué d'une phase végétale solide (tiges) et d'une phase constituée d'air et de gaz. La phase particule végétale est donc un milieu poreux de porosité notée Φ (cf. figure 1.14).

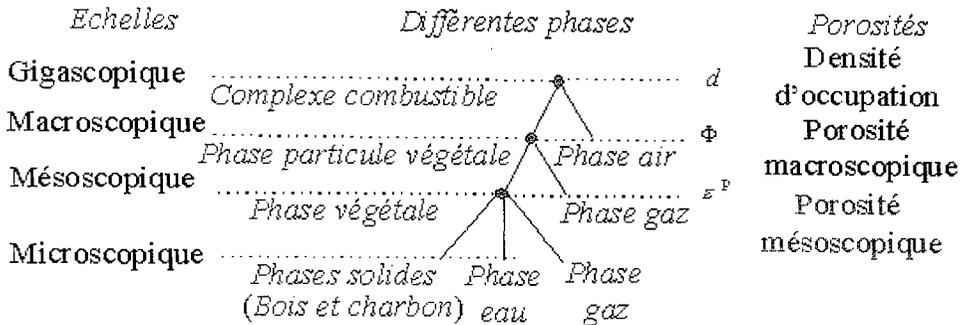


FIG. 1.14 - Les différentes échelles et les phases associées

La phase végétale est elle-même un milieu poreux, car l'on distingue qu'elle est constituée de deux phases solides (bois et charbon), d'une phase liquide formée d'eau et d'une phase gazeuse à l'échelle dite microscopique. La porosité associée à cette phase végétale est notée ε^p avec l'indice p pour poreux. La phase particule végétale est constituée de plusieurs milieux diphasiques en cascade à des échelles différentes. Un tel milieu se nomme *milieu poreux avec modèle de microstructure*. Notons enfin complexe combustible la description de la végétation à l'échelle gigascopique.

La constitution des différentes phases homogènes ci-dessus peut être définie à la même échelle de description en considérant le milieu homogène comme un **mélange** d'espèces chimiques aux propriétés particulières. Pour bien distinguer les échelles, désignons par *espèces* les constituants à l'échelle gigascopique, par *constituants* à l'échelle mésoscopique et les *éléments* les constituants à l'échelle microscopique (cf. tableau 1.1).

Différentes phases	Constitution de chaque phase	
Complexe combustible	Espèces	{ végétal air et gaz
Phase particule végétale	Constituants	{ végétal air et gaz
Phase végétale	Éléments	{ bois charbon eau gaz

TAB. 1.1 - Constitution des différentes phases

Il est important de considérer les différentes échelles précédentes pour une description de plus en plus fine des mécanismes des feux de végétation. Etudions maintenant plus en

détail ces trois échelles ainsi que les phénomènes physiques associés, car ces deux notions sont indissociables lorsque l'on veut modéliser la propagation des feux de végétation.

1.2.2 L'échelle macroscopique

L'échelle *macroscopique* est l'échelle que nous avons considérée depuis le début de ce chapitre (cf. figure 1.1 à 1.10). Cette échelle est celle de l'action des pompiers du feu qui se trouvent sur le terrain. C'est donc la plus intuitive et c'est pour cela que nous avons commencé par étudier celle-ci. A cette échelle, le milieu constitué des constituants végétal et d'air+gaz présent dans les broussailles forme un **milieu continu** qui est régi par des équations aux dérivées partielles pour des grandeurs qu'il reste à définir. Les phénomènes physiques importants à cette échelle sont les échanges de chaleur solide gaz par *convection* et par *absorption radiative* au sein du milieu poreux, ainsi que la *perméabilité* de ce milieu et le *frottement* de l'air avec les broussailles. La convection au sein des broussailles due aux zones chaudes joue un rôle important sur la propagation.

L'hypothèse d'une phase particule végétale continue suppose que le milieu diphasique à l'échelle mésoscopique peut être homogénéisé [2]. La longueur l_f d'homogénéisation (cf. figure 1.13) possède donc une valeur maximale. La valeur de l_f doit rester petite devant les dimensions des phases particules végétales considérées, sinon la phase de particule végétale ne peut plus être vue comme un milieu continu. Nous devons donc avoir en particulier $l_f \ll h$ sinon le milieu végétal est un milieu hétérogène pour lequel nous distinguons une phase solide constituée de végétation et une phase gazeuse constituée d'air à cette échelle macroscopique. Les équations valables à l'échelle macroscopique sont alors les mêmes que celles valables à l'échelle mésoscopique. Cette dimension l_f est plus grande pour les broussailles que pour la couronne des arbres.

Dans une forêt, la strate constituée par les arbres est généralement une zone hétérogène au sens que nous venons de définir, car la dimension de la hauteur de la forêt est du même ordre de grandeur que celle de la distance entre les arbres si la forêt n'est pas très dense. Ce modèle n'existe pas toujours. La variété des types de strates de broussailles que l'on rencontre dans la nature conduit même à penser que celui-ci peut ne pas exister dans certaines conditions de broussailles peu denses et lorsque l'on est proche de l'extinction du feu. Le caractère stochastique de la propagation joue alors un rôle important.

La discussion ci-dessus n'est que géométrique alors que le domaine de validité doit faire intervenir des paramètres physiques du modèle de propagation de feu de forêts. Ce domaine donne les limites d'utilisation du modèle de phase particule végétale continu. Dans le domaine où un tel modèle est possible, nous disons que le milieu est *homogénéisable* [1]. Nous supposons que l'on se trouve dans ce domaine dans la suite de cet exposé. Le problème de propagation est alors plus simple à résoudre analytiquement ou numériquement. Dans le cas contraire, nous devons résoudre un problème plus délicat qui est discontinu.

La compacité de l'espèce végétale correspond à la fraction volumique occupée par le constituant végétal (cf. tableau 1.2) dans l'espèce végétale. Notons la β . Elle influe sur le temps d'inflammation et sur la combustion en modifiant l'approvisionnement en oxygène et le transport d'énergie rayonnante entre les phases végétales (tiges des végétaux).

La porosité Φ du constituant végétale est définie par $\Phi = 1 - \beta$. C'est la fraction

volumique occupée par le constituant air+gaz (cf. tableau 1.2 [14]) dans l'espèce végétale. Φ est comprise entre 0 et 1.

Type de combustible	Compacité (β)	Porosité ($\Phi = 1 - \beta$)	porosité ($\gamma = 1/\beta$)
graminées	0.00093	0.9991	1070
buisson	0.00167	0.99833	600
litière de pin	0.03333	0.9667	30
couronne de pin	0.00120	0.9988	830

TAB. 1.2 - Exemple de compacité et de porosité

Une autre porosité notée γ est définie par Trabaud [14] comme l'inverse de la compacité. Elle est comprise entre 1 et l'infini et croît avec Φ . Nous ne l'utilisons pas dans la suite, car nous préférons la définition de la porosité Φ classique en milieu poreux.

L'aptitude à brûler du combustible augmente lorsque la porosité s'accroît, et ce jusqu'à une certaine valeur au delà de laquelle le manque de combustible conduit à une diminution de l'aptitude à brûler du combustible. Il en est de même pour l'intensité du feu et pour la vitesse de propagation du feu. La compacité varie beaucoup entre les différents types de combustibles végétaux. C'est dans la zone de feuilles mortes qui reposent sur le sol qu'elle est la plus importante. Elle est alors telle que la propagation devient très lente par manque d'oxygène.

1.2.3 L'échelle mésoscopique

L'échelle *mésoscopique* correspond à l'échelle à laquelle nous distinguons les tiges des broussailles et l'air qui entoure celles-ci. Soit l_v l'échelle caractéristique correspondante (cf. figure 1.13). Le composant végétal apparaît alors comme un milieu diphasique constitué d'une phase végétale et d'une phase d'air et de gaz combustible. La portion de phase végétale, restreinte à un volume de dimension caractéristique l_v , correspond à des organes ou des fragments d'organes vivant de végétaux (feuilles, rameaux, morceaux d'écorce, tiges), morts ou vivants (cf. figure 1.13). La géométrie de ces fragments agit sur les échanges d'énergie et de matière avec la phase gazeuse. Elle intervient sur l'inflammation du combustible végétal et donc sur la propagation du feu.

Une grandeur qui caractérise la géométrie de ces fragments est le rapport de la surface de la particule sur son volume. Notons σ ce rapport. Des valeurs de σ et de l'épaisseur e des fragments sont données dans le tableau 1.3 [14]. L'épaisseur e n'a un intérêt, de description de la géométrie supplémentaire par rapport à σ et Φ , que lorsque le produit es est d'un ordre grandeur différent de la porosité Φ .

La vitesse à laquelle l'espèce végétale change de température, ainsi que sa teneur en eau, sont directement liés aux paramètres e et σ . En effet, la température et la teneur en eau des fines particules combustibles, qui présentent une valeur de σ élevée, varient généralement plus rapidement que les particules épaisses ayant une valeur de σ faible. Divers travaux ont montré que le temps d'ignition décroît quand σ croît et que la vitesse de propagation des incendies de végétation croît alors.

Les phénomènes physiques qui interviennent dans ce milieu diphasique sont le **dégage** des gaz en provenance de la végétation qui se dégrade thermiquement (pyrolyse)

Type de combustible	Epaisseur ϵ (cm)	σ (cm ² /cm ³)
feuilles de graminées	0.005 - 0.0011	380 - 190
feuilles de hêtre	0.009	222
aiguilles de Pin d'Alep	0.071	56
tiges (brindilles)	0.1 - 2	40 - 2

TAB. 1.3 – Caractéristique des particules de combustible

ainsi que le **mélange** et la **combustion** de ces gaz avec l'air ambiant d'où une production locale d'**énergie**. La combustion sera étudiée au paragraphe 1.3.4. à cette échelle. L'on sait bien que sans oxygène, il ne pourrait pas y avoir de feu de végétation. La vaporisation de l'eau qui se trouve dans les tiges a aussi un rôle important à cette échelle d'observation, car l'énergie nécessaire à cette évaporation est importante. Nous pouvons aussi considérer le *transfert thermique dans la tige* à cette échelle ainsi que le transfert de chaleur par rayonnement et par convection mixte entre les phases solides qui composent le milieu diphasique.

Cette échelle mésoscopique est importante à considérer, car c'est à cette échelle que l'on décrit et que l'on distingue les phénomènes chimiques fondamentaux qui sont à l'origine de la propagation du feu tels que le dégazage de fuel en provenance du constituant végétal qui se pyrolyse, le mélange de l'oxygène et du fuel dans le constituant air+gaz et la combustion. La vaporisation de l'élément eau contenue dans le constituant végétal (tiges des broussailles), la pyrolyse et le dégazage des gaz produits par la pyrolyse sont des phénomènes dont la modélisation fait intervenir la structure poreuse du constituant végétal. Nous sommes donc amené à faire un dernier zoom au niveau des tiges afin de décrire ces phénomènes à l'échelle microscopique.

1.2.4 L'échelle microscopique

L'échelle *microscopique* correspond à une échelle pour laquelle le constituant végétal (bois, broussaille ou feuillage) peuvent être considérés comme un milieu diphasique régie par des équations aux dérivées partielles dans chaque phase qui compose celui-ci. Les phases qui constituent ce milieu sont au nombre des trois. Ce sont les phases solides (bois et charbon), liquide (eau) et gazeuses (cf. figure 1.13). Notons l_b l'échelle microscopique caractéristique associée. Elle est de l'ordre du micromètre. L'échelle mésoscopique l_v que l'on a considérée précédemment au paragraphe 1.2.3. est très supérieure à l_b .

Les phénomènes physiques qui influent de manière notable sur la propagation du feu à l'échelle microscopique sont la **pyrolyse** du bois et la **vaporisation** de l'eau en tenant compte des transferts, de matière et d'énergie, qui ont lieu au sein des tiges. Un tel milieu diphasique est localement le siège d'interfaces libres en mouvement, telles que la zone de pyrolyse et la zone de vaporisation. Les temps caractéristiques propres aux transferts à l'intérieur des tiges et les caractéristiques physiques qui distinguent différents types de constitution des végétaux entre eux peuvent alors être pris en compte. On sait bien par expérience que, sans pyrolyse de la végétation ou lorsque l'humidité de la végétation est trop importante, il ne peut y avoir de propagation de feu. La vaporisation et la pyrolyse seront étudiées au paragraphe 1.3.3. à cette échelle microscopique.

1.3 Mécanismes de la propagation

Dégageons maintenant les principaux mécanismes élémentaires de la propagation du feu. Ces mécanismes de la propagation se décrivent naturellement à des échelles d'observation différentes. Les zooms successifs, que nous avons réalisés au paragraphe 1.2. précédant, étaient nécessaires afin de décrire ces mécanismes.

1.3.1 Description des transferts d'énergies à l'échelle macroscopique

Le feu se propage en consommant des combustibles végétaux grâce au transfert thermique de l'énergie des zones qui brûlent vers les zones qui ne brûlent pas. L'énergie produite à un endroit qui brûle devient la *source de chaleur* nécessaire à l'inflammation d'un endroit qui ne brûle pas encore grâce au phénomène de transport de l'énergie. Cette zone qui ne brûle pas est alors un *puits de chaleur*, car elle absorbe l'énergie en provenance de la zone en feu. Ce transfert peut être représenté par le schéma de la figure 1.15 : L'analyse du mécanisme de propagation du feu, au niveau du front du feu, donne trois

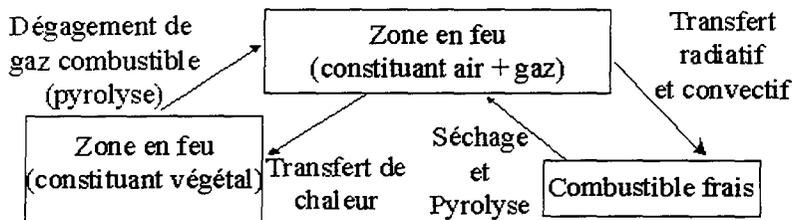


FIG. 1.15 – Transferts d'énergie et de masse

étapes de description du phénomène de propagation :

1. La pyrolyse du constituant végétal qui produit un composant gazeux ainsi que la combustion de ce composant gazeux dans la zone en feu. Cette combustion produit de chaleur dans la zone en feu.
2. Le transfert de cette chaleur, émise par la combustion, vers le combustible frais en avant du front du feu. Ceci est décrit par les flèches du schéma de la figure 1.15.
3. L'absorption de la chaleur reçue par le combustible frais en avant de la zone en feu. Ceci conduit au séchage et à la pyrolyse puis à l'inflammation du combustible végétal.

Une combustion locale intense sans un bon transfert d'énergie conduit à une faible vitesse de propagation du feu. Pour grandir, le feu doit fournir de la chaleur au combustible en avant du front du feu. Plus grand est cet approvisionnement, plus rapide est la croissance du feu. La densité d'occupation d et la porosité Φ du constituant végétal

jouent un rôle important pour le transfert de chaleur. Le rapport σ de l'aire de la surface du combustible végétal à son volume, a un rôle important dans le transfert d'énergie et ainsi que sur la cinétique chimique de la combustion. Les vitesses de combustion et de propagation pour la strate de feuillage est donc plus rapide que pour celle des broussailles et celle de l'herbe. La présence de vent et d'une pente ascendante augmente le transfert thermique en avant du front du feu et donc la vitesse de propagation.

Le transfert thermique en avant du front du feu est source d'une augmentation de la température du combustible frais. Nous distinguons alors plusieurs étapes, dans cette augmentation de température, auxquelles sont associées des zones différentes en avant du front du feu, zones caractérisées par leurs distances au front du feu. Ce sont (cf. figure 1.16) :

1. Une zone de température constante égale à la température ambiante loin du feu car le flux thermique, en provenance de la zone en feu, qui arrive sur cette zone est négligeable.
2. Une zone d'augmentation de la température du constituant végétale, sous l'effet de la chaleur, sans transformation chimique de celui-ci.
3. Une zone de vaporisation de l'eau contenue dans le constituant végétal. Cette zone est aussi dite zone de séchage.
4. Une zone de pyrolyse du constituant végétal, c'est-à-dire de dégradation thermique sous l'effet de la chaleur. Cette pyrolyse produit des gaz inflammables.

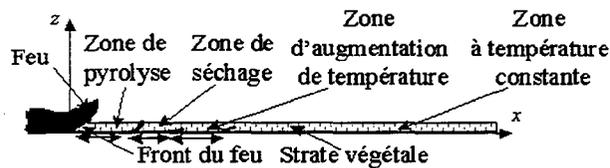


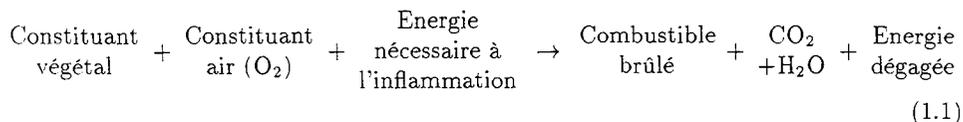
FIG. 1.16 – Différentes zones en avant du front du feu

L'inflammation des gaz de pyrolyse avec l'oxygène de l'air entretient alors la zone en feu tout en produisant la **propagation** du front du feu qui délimite celle-ci.

La description précise des trois phases décrites ci-dessus doit être faite à l'échelle mésoscopique et microscopique. Nous allons la voir maintenant.

1.3.2 Mécanisme global de combustion à l'échelle macroscopique : triangle du feu

Un feu de végétation consiste en une combustion à l'air libre. La chimie du feu de végétation peut être représentée schématiquement par une réaction du type



Le bilan ci-dessus représente à la fois un bilan de matière et un bilan énergétique. Le feu de végétation est donc à la fois un phénomène chimique et physique. La flèche dans le schéma de la réaction (1.1) donne de plus un sens à la transformation et signifie que cette réaction est irréversible. La proportion des trois éléments, *combustibles végétaux*, *oxygène* et *chaleur apportée*, détermine la violence de la combustion.

L'aptitude des végétaux à l'inflammation et à la combustion dépend principalement du type de combustibles (broussaille, litière épaisse, feuillage,...), de son degré d'humidité et de sa température, selon qu'il est exposé ou non au soleil. La masse de combustible végétal par unité de surface au sol a un rôle important dans la quantité de chaleur dégagée par la combustion.

A l'altitude à laquelle apparaissent les feux de végétation, l'atmosphère ambiante contient environ 21% d'**oxygène**. Rappelons que la teneur de l'air en oxygène doit être supérieure à 15% pour que les végétaux puissent brûler. L'agencement de certains végétaux et le dégagement de fumées lors de la combustion peuvent conduire à un taux d'oxygène qui est en quantité insuffisante pour entretenir un feu. La présence de vent provoque par contre un apport d'oxygène qui active la combustion.

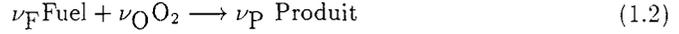
Le transfert de **chaleur** de l'extérieur vers le combustible permet d'augmenter la température du combustible végétale de manière à obtenir l'inflammation de celui-ci. De nombreuses études effectuées sur la température d'inflammation des végétaux conduisent à estimer que ceux-ci s'enflamment tous pour une température d'environ 600°K.

Les trois éléments décrits ci-dessus constituent les trois côtés du triangle du feu que nous avons décrit dans l'introduction (cf. figure 1). Le triangle du feu doit être considéré comme un maillon fondamental dans la compréhension des feux de végétations. Ce bilan est cependant schématique. Il doit être détaillé. L'intervention de la vaporisation de l'eau sur l'énergie nécessaire à l'inflammation et sur l'énergie dégagée par la combustion doit être précisée, le rôle du vent et de la pente aussi. Ce schéma modélise le mécanisme global de combustion, dans la zone en feu, mais ne considère pas les transferts spatio-temporels d'énergie, de masse et de quantité de mouvement qui sont à l'origine de la propagation du feu.

1.3.3 Les mécanismes à l'échelle mésoscopique : combustion dans la zone en feu

La réaction globale (1.1) doit être détaillée si l'on veut décrire les transferts d'énergie et de matière de manière plus précise, de manière à faire intervenir le rôle de paramètres

comme le vent et la pente du terrain. Nous distinguons alors la réaction de combustion de gaz issus de la pyrolyse pour le constituant air+gaz, et celle de sa vaporisation et de la pyrolyse du constituant végétal. Le combustible gazeux, dit aussi fuel, est un composé carboné léger qui est susceptible d'être oxydé par l'oxygène de l'air dans la phase gazeuse suivant la réaction globale totale suivante :



où nous noterons F le fuel, P le produit de la réaction et O l'oxygène de l'air. Notons enfin N l'azote de l'air. Cette réaction d'oxydation est une **réaction en volume** qui a lieu dans la phase gazeuse et dans l'air au-dessus du combustible végétal.

C'est cette réaction qui est la source principale d'énergie. Elle n'aurait cependant pas lieu sans la présence de fuel qui provient du dégazage des gaz produits par la pyrolyse de la végétation. Cette pyrolyse est décrite à l'échelle microscopique à l'intérieur du constituant végétal ainsi que la vaporisation.

1.3.4 Les mécanismes à l'échelle microscopique : vaporisation et pyrolyse

La végétation est un milieu poreux composé de cellules et de pores. Sa porosité ϵ_p varie de 0.4 à 0.7 [10]. Le bois est constitué de cellulose (40%), d'hémicellulose (40%) et de lignine (20%). La cellulose est caractérisée par sa capacité à ne pas être attaquée par des acides. C'est un polymère de masse moléculaire importante (environ 10^6 g par mole) de base $C_6H_{10}O_5$. L'hémicellulose est constituée de polyoses et d'hydrate de carbone. La lignine enfin est la substance qui ne peut pas être convertie en sucre. Elle a une masse moléculaire de 1000 g par mole et pour formule $C_{47}H_{52}O_{16}$. La composition chimique du bois est la suivante :

50% C, 43% O, 6% H, 0.1% N, 0.4% de cendres [10].

La végétation contient de l'eau. Cette quantité d'eau dépend des précipitations des jours antérieurs. Son humidité H_u est la *masse d'eau sur la masse de combustible sec*. Sa valeur peut être obtenue par pesée avant et après séchage. La quantité d'eau intervient de manière notable dans le bilan thermique, au niveau de la zone de préchauffage en avant du front du feu, car l'énergie nécessaire pour vaporiser cette eau est importante. La chaleur de vaporisation de l'eau vaut en effet $L_w = 4180$ J/kg.

Une partie importante de l'énergie sert à vaporiser l'eau contenue dans la végétation. Celle-ci doit être vaporisée afin qu'il puisse y avoir inflammation. La teneur en eau minimale empêchant d'avoir inflammation d'un végétal dans les conditions courantes est appelée humidité d'extinction. Les valeurs mesurées de cette *humidité d'extinction* varient de 12%, pour les graminées, jusqu'à 200%, pour des aiguilles de conifères. Pour beaucoup de combustibles morts, celle-ci se situe entre 25 et 40% et pour beaucoup de combustibles vivants entre 120 et 160%.

La vaporisation se produit entre 90 et 110°C. Nous pouvons considérer pour simplifier que l'évaporation se produit à une température constante égale à $T_{ev} = 100^\circ\text{C}$ pendant

toute la durée de l'évaporation. Nous ne tenons alors pas compte de l'eau liée en première approximation. Lorsque la température du constituant végétal dépasse 110°C, nous considérons que celui-ci est sec. La température de ce constituant végétal augmente alors rapidement et le mécanisme de pyrolyse apparaît alors vers 300°C. Nous pouvons donc considérer que ces deux phénomènes sont dissociés.

Lorsqu'il est fortement chauffé, le bois en vase clos se décompose. Il apparaît des *goudrons*, des *liquides* et des *gaz inflammables* (flamme éclairante). Pendant cette opération, le bois a noirci; il est devenu moins dense et s'est transformé en *charbon de bois*. Il a subi une pyrolyse (cf. figure 1.17). La pyrolyse du bois sous l'action d'un flux de cha-

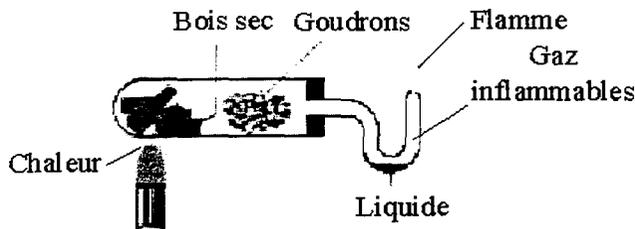


FIG. 1.17 – Pyrolyse du bois

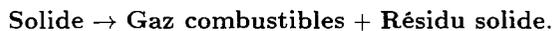
leur est régie par deux ensembles de réactions dites respectivement réactions primaires et secondaires [10] qui sont représentées schématiquement au tableau 1.4 :

Réactions primaires	Réactions secondaires
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bois} \xrightarrow{k_1} \text{Fuel} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_2} \text{Charbon} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_3} \text{Goudron} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Goudron} \xrightarrow{k_4} \text{Charbons} \\ \text{Goudron} \xrightarrow{k_5} \text{Fuel} \end{array} \right.$

TAB. 1.4 – Réactions et cinétiques de pyrolyse

Les espèces bois et charbon sont solides alors que les espèces goudron et fuel sont fluides. Le *charbon* est le résidu solide de la pyrolyse du bois. Le *goudron* est un composé carboné lourd qui est gazeux dans la zone de pyrolyse où les températures peuvent être importantes et liquide à température ambiante.

La pyrolyse est une dégradation thermique du bois sous l'action de la chaleur. C'est une réaction chimique qui peut s'écrire globalement :



Le début de la pyrolyse se produit lorsque le combustible atteint une température de l'ordre de 300°C. Le combustible est alors totalement sec. Des enregistrements de la perte de masse en fonction de la température peuvent être réalisés sur des échantillons de combustible exposés à un certain flux de chaleur. La réaction de pyrolyse possède une chaleur de réaction par masse de combustible ΔH_p qui peut être mesurée. Cette énergie

varie de 370 (réaction endothermique) à -1700 J/g de combustible selon les situations expérimentales. D'après Lee10, nous distinguons deux cas :

Pour $T_s > 320^\circ\text{C}$, $\Delta H_p = -160$ à -240 J/g avec une contribution à hauteur de 65% pour la lignine et de 35% pour la cellulose. ΔH_p est alors faible et environ constant.

Par contre pour $T_s < 320^\circ\text{C}$, ΔH_p dépend beaucoup des conditions expérimentales et peut atteindre -1600J/g. L'origine de cette différence est due à la présence de réactions secondaires qui ont lieu dans le bois pour $T_s < 320^\circ\text{C}$ car le mouvement des gaz de pyrolyse n'est pas libre, les fissures qui apparaissent lors de la pyrolyse n'étant pas encore de taille importante. Notons que le cas d'une réaction endothermique de valeur $\Delta H_p = +370$ J/g est obtenue pour la dégradation de cellulose pure en laboratoire.

L'influence de l'ajout de produits dans la végétation sur la courbe de pyrolyse (figure 1.18 [10]) est importante à prendre en compte, car ce procédé est utilisé par les pompiers pour diminuer la vitesse d'avance du feu. Le produit rajouté se nomme retardants. Son ajout a pour conséquence que la pyrolyse se produit pour une température plus basse qu'en son absence donc plus tôt mais la pyrolyse possède alors une énergie d'activation E_p plus faible. La réaction de pyrolyse est alors moins brutale ce qui conduit finalement à une vitesse de propagation plus faible du feu d'où son nom de retardant. La description

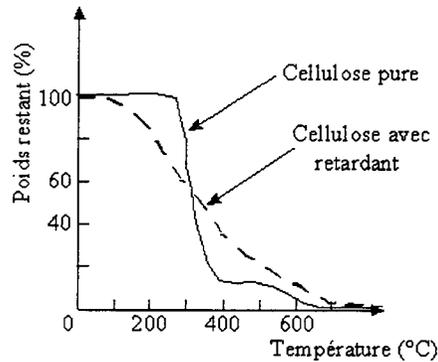


FIG. 1.18 – Courbes de pyrolyse avec et sans retardant

plus précise de l'action du retardant doit être réalisée à cette échelle microscopique afin de confirmer la description mésoscopique ci-dessus du rôle du retardant. Comme le début de pyrolyse est toujours supérieur à 150°C , les zones de vaporisation et de pyrolyse sont découplées.

Des retardants courants sont (le DAP et le MAP) sont des composants phosphatés. Ce sont également des fertilisants. Pour du bois, le feu devient couvant, c'est-à-dire sans flamme éclairante (vive), pour une température inférieure à 270°C et ne se propage pas vite alors que pour une température supérieure à 340°C des flammes apparaissent ce qui conduit à une propagation rapide du feu.

Les mécanismes chimiques associés sont différents. Pour une combustion couvante, la pyrolyse conduit à beaucoup de résidus, du CO_2 , de la vapeur d'eau et peu de gaz

combustibles alors qu'un feu avec flammes vives conduit à peu de résidus de pyrolyse et à beaucoup de gaz combustibles. Les différents mécanismes chimiques de la pyrolyse ne sont cependant pas bien connus.

1.3.5 Les types de transferts de chaleur

Le transfert de chaleur en avant du front du feu est assuré par la conduction, par la convection et par le rayonnement. Ces trois modes de transfert de chaleur agissent simultanément au cours des feux de forêts. Leur description peut être réalisée à différentes échelles d'observation. Détaillons la description de ceux-ci :

Les végétaux sont de mauvais **conducteurs** de la chaleur. C'est-à-dire que leur conductivité mésoscopique est petite. Ce moyen de transfert de chaleur est donc de faible importance lors d'un feu de végétation d'autant plus que la porosité importante de la végétation et l'anisotropie de la répartition de la végétation qui est essentiellement verticale rend le phénomène de conduction horizontale encore plus négligeable à l'échelle macroscopique. Or, nous avons vu que la propagation du feu est essentiellement horizontale. La conduction agit par contre pour la propagation des feux de sol à travers les strates compactes de la litière et de l'humus. La vitesse de propagation du feu dans une telle strate est cependant très faible et le feu est sans flammes vives. Nous n'étudierons pas de telles propagations.

La conduction dans l'air qui entoure les végétaux à l'échelle mésoscopique peut avoir un rôle non négligeable, mais son influence reste faible comparée à celle de la convection et du rayonnement. La conduction de la végétation, bien que faible doit avoir un rôle à l'échelle microscopique dans le phénomène de pyrolyse de la végétation et donc indirectement sur la vitesse de propagation du feu.

La *convection* correspond au transport d'énergie grâce au mouvement des masses gazeuses à l'échelle mésoscopique. Les masses d'air chaudes qui proviennent de la zone en feu peuvent en effet contribuer à l'augmentation de la température des végétaux en avant du front du feu. Cette augmentation est due à un échange local de chaleur entre l'air chaud et le végétal. La porosité Φ , ainsi que le rapport σ de l'aire de la surface du combustible végétal à son volume, doivent jouer un rôle important dans cet échange local d'énergie. La convection peut être de deux types : naturelle ou forcée.

Pour la convection naturelle, la gravitation associée aux profils de température verticaux dus à la pente du terrain et à la présence de zones chaudes en feu conduisent à augmenter le transfert d'énergie par une mise en mouvement des masses d'air.

Pour la convection forcée, le mouvement des masses d'air provient de l'advection par des *vents locaux* à travers la matrice formée par la strate de végétation. Ces vents locaux ont pour origine l'engouffrement du vent d'origine météorologique, qui se trouve au niveau du sommet de la couverture végétale, à l'intérieur de celle-ci et à l'entraînement d'air de la zone en avant de la zone en feu vers celle-ci due, à la convection naturelle importante dans la zone en feu.

Nous reviendrons plus en détail sur ce mécanisme compliqué au chapitre 3. Le résultat de la convection est que lorsque le feu gravit une pente, la végétation à l'avant du front du feu reçoit plus de chaleur d'origine convective que pour une propagation horizontale, alors qu'il en reçoit moins lorsque le feu descend une pente.

Lors d'un feu de végétation, le combustible frais en avant du front du feu est aussi chauffé par la chaleur du **rayonnement** en provenance de la zone en feu. La distance δ_r sur laquelle le rayonnement chauffe le combustible frais en avant du front du feu est approximativement le l'ordre de grandeur de la hauteur de flamme. Cette distance est plus grande que la distance caractéristique δ_c de chauffage due à la convection. Nous pouvons donc penser que le rayonnement a une **action non locale**.

Les variations des ordres de grandeurs précédents, en fonction des nombreux paramètres qui influent sur la propagation du feu, restent cependant à être précisées. Il faut en particulier distinguer le rayonnement en provenance de la zone en feu dans la strate de végétation du rayonnement en provenance de la zone en feu au-dessus de cette strate. Sur la figure 1.19, nous avons représenté l'influence de la pente et du vent sur ces rayonnements: La transmission du rayonnement dépend du facteur de forme entre la surface

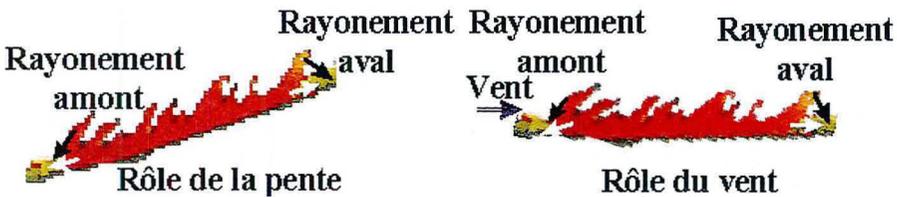


FIG. 1.19 – Influence de la pente et du vent sur le transfert radiatif

formée par le front de flamme à l'échelle macroscopique. Il en résulte que le combustible en aval d'une pente reçoit plus de chaleur que celui qui se trouve en amont de la pente. De même, le vent incline la flamme, ce qui conduit à un apport de chaleur rayonnée plus important au combustible en aval du vent que celui en amont du vent. La strate de végétation est considérée comme un milieu semi-transparent, à l'échelle macroscopique, vis à vis du transfert radiatif à travers celle-ci. Ce transfert sera modélisé à l'échelle macroscopique au chapitre 3.

1.3.6 Les non uniformité du vent d'origine météorologique

A l'échelle gigascopique, les vents d'origine météorologique ne sont pas uniformes et sont le résultat d'une interaction entre un vent global et la présence de l'irrégularité de la topographie du terrain en considérant cette interface comme rugueuse par la présence de la couverture végétale. C'est cette interaction qui donne les conditions aux limites au niveau du sommet de la couverture végétale. Nous préciserons ces conditions aux limites au chapitre 3.

1.4 Grandeurs évoluant lors d'un feu de forêt

L'étude des phénomènes qui interviennent lors des feux de forêt que nous venons de réaliser au paragraphe 1, ainsi que la température 3 ci-dessus, nous permettent de

dégager les grandeurs qui évoluent lors de tels feux. Ces grandeurs au nombre de 7 sont les suivantes :

1. la température du constituant végétal.
2. la quantité de combustible végétal : elle correspond au poids sec total de combustible végétal par unité de surface au sol. Elle exprime la quantité d'énergie disponible potentiellement dans la végétation. Pour des conditions météorologiques données, la vitesse de propagation d'un feu dépend de la quantité de combustible disponible pour la combustion. Cette quantité influence aussi l'intensité du feu et la hauteur des flammes.
3. l'humidité du combustible végétal.
4. le flux de chaleur.
5. la vitesse de déplacement de l'air dans la strate de végétation.
6. la température du constituant air dans la strate de végétation.
7. les quantités d'espèces chimiques gazeuses : l'oxygène nécessaire à la combustion gazeuse des gaz de pyrolyse, ainsi que les espèces chimiques produites par cette réaction.

Ces grandeurs vérifient des équations aux dérivées partielles données au chapitre 3. Ces équations définissent notre modèle de propagation du feu, qui contient les mécanismes de la propagation du feu. La vitesse de propagation du feu se déduit de ce modèle qui fait nécessairement intervenir un certain nombre de **paramètres** qui décrivent les conditions dans lesquelles le feu de végétation se propage. Nous donnons maintenant un classement de ces paramètres.

1.5 Paramètres de la propagation

Les principaux paramètres qui interviennent sur la propagation du feu sont nombreux. Nous pouvons classer ceux-ci en deux catégories.

1.5.1 Les paramètres structuraux

1. le type de couverture végétale : forêt de feuillus, de conifères, landes, ...
2. le type de végétaux dans chaque strate de végétation : broussailles, genets, ...
3. la quantité initiale de végétation.
4. la répartition de la végétation dans chaque strate végétale : dispersée ou non
5. la topographie du terrain.
6. l'humidité initiale de la végétation : cette humidité est en relation avec les précipitations des jours précédents et avec l'humidité de l'air.

1.5.2 Les paramètres météorologiques

1. la température initiale de la végétation.
2. le vent qui provient des conditions météorologiques.

1.5.3 La topographie

Les feux brûlent plus rapidement sur les fortes pentes ascendantes. La vitesse de propagation du feu s'en trouve accru. Des études expérimentales sur le comportement du feu ont montré que la vitesse de propagation double sur une pente de 10 à 15° et quadruple sur une pente de 20° .

1.6 Les modèles existants et les méthodes de modélisation

1.6.1 Classification des modèles selon les phénomènes physiques

Dans l'introduction, nous avons classé les modèles de propagation du feu existant en trois catégories en fonction de la distinction ou non des phénomènes physiques qui interviennent lors des feux de forêt et de la discrétisation ou non de ceux-ci. Rappelons que l'on obtient alors les modèles statistiques, les modèles semi-empiriques et les modèles physiques [3]. Cette distinction introduite par Weber [23] est intéressante mais ne distingue pas l'échelle à laquelle le modèle décrit la propagation du feu. Un classement par échelles permet également de classer les modèles physiques qui sont nombreux. C'est ce que nous allons réaliser au paragraphe suivant.

1.6.2 Classification des modèles selon les échelles physiques

Maintenant que nous avons vu les différentes échelles qui apparaissent dans un feu de forêt au paragraphe 1.1.4., réalisons une nouvelle classification des modèles de propagation de feu de forêt en fonction de l'échelle de description de la forêt et du front du feu. Pour cela, considérons que tous les modèles sont physiques, mais que certains sont plus ou moins validés ou discrétisés que d'autres. Cette classification correspond au schéma de la figure 1.20.

Cette classification se lit de bas en haut lorsque l'on veut passer d'une échelle de description à une échelle supérieure. Nous partons alors d'une description mésoscopique pour obtenir un modèle macroscopique tridimensionnel puis gigascopique bidimensionnel et enfin des cas limites d'un tel modèle bidimensionnel. La distinction horizontale de la classification correspond à des cas particuliers de forme du front qui de curviligne peut être droit ou circulaire en absence de vent, sinon de forme elliptique. Les symétries géométriques et physiques alors introduites peuvent permettre d'obtenir une simplification importante des dimensions du modèle physique et donc de sa résolution.

La classification distingue alors la dimension de l'*espace d'étude* de celle de l'*objet d'étude* dans cet espace. L'espace d'étude est tridimensionnel à l'échelle macroscopique

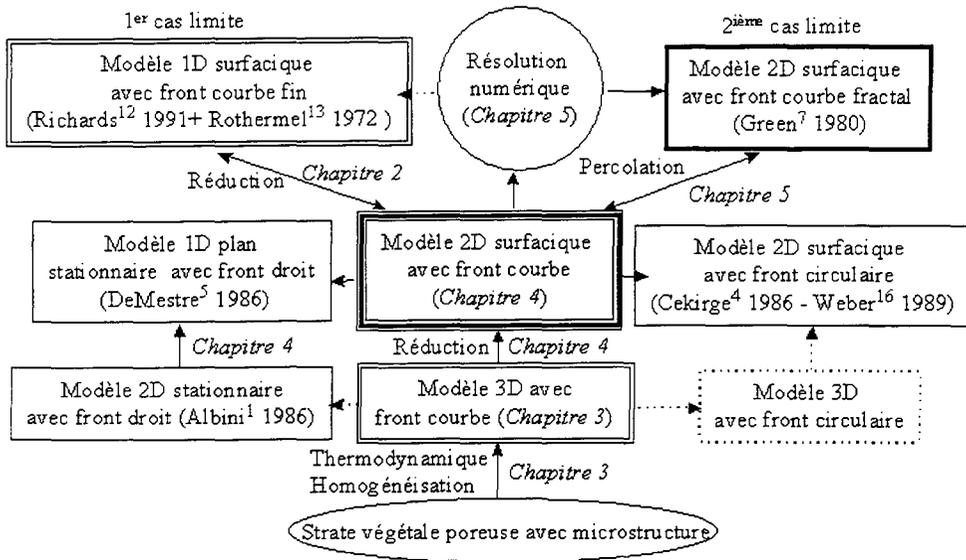


FIG. 1.20 – Classification des modèles par échelles

et bidimensionnel à l'échelle gigascopique, car la propagation s'effectue sur une surface. Nous qualifions alors le modèle de surfacique. L'objet d'étude dans cet espace peut être un champ de température ou une courbe représentant le front du feu. La dimension du modèle dépend alors de l'objet d'étude et des propriétés de symétrie géométriques et physiques de celui-ci. Ceci permet de distinguer un modèle 2D tridimensionnel avec front courbe d'un modèle 2D bidimensionnel avec front courbe (cf. figure 1.21).

Sur la figure 1.20, nous avons indiqué entre parenthèses le nom de l'auteur du modèle qui nous semble le plus représentatif de chaque classe de modèles. Nous avons aussi indiqué les chapitres de ce document. Le modèle 3D avec front circulaire est représenté en pointillés car nous n'avons pas rencontré celui-ci dans la littérature et nous ne nous sommes pas proposés d'étudier celui-ci dans ce document. Les flèches en pointillé correspondent aussi à une réduction qui n'a pas encore été réalisée.

1.6.3 Démarche de modélisation choisie

Nous avons représenté sur le schéma 1.20 l'organisation des chapitres de ce mémoire. Le chapitre 2 décrit la propagation du feu comme une courbe qui se déplace sur une surface, car c'est la description la plus simple de la propagation. Cette description est en effet réalisée à l'échelle la plus grande, l'échelle gigascopique et a pour objet d'étude directement le mouvement du front du feu sans faire intervenir le champ de température. Nous verrons cependant que cette description a ses limites et nous serons alors amenés à réaliser un zoom au niveau du front du feu afin de préciser la forme de l'intervention

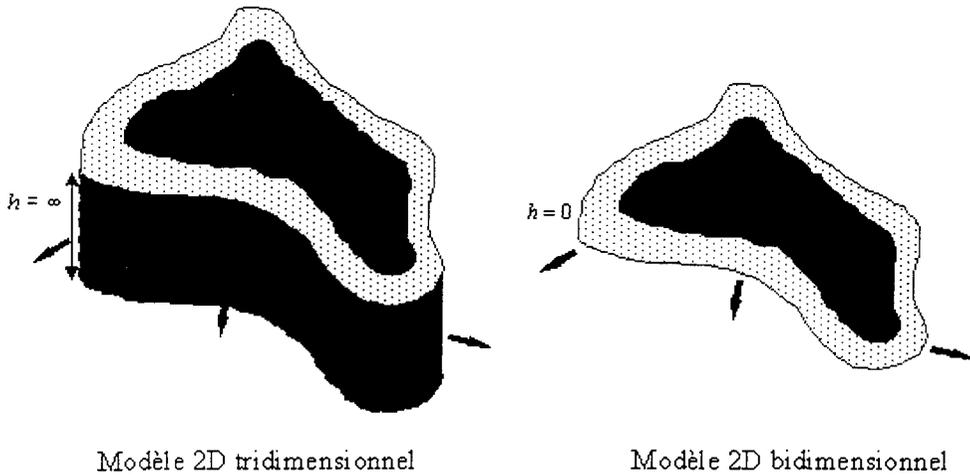


FIG. 1.21 – Différents espaces d'étude

des mécanismes physiques qui sont causes de la propagation plus ou moins rapide du feu. Nous emploierons alors des changements d'échelle successifs, aux chapitres 3 et 4, afin de trouver un modèle à l'échelle gigascopique qui contienne les phénomènes principaux de la propagation du feu.

La démarche que nous allons entreprendre (schéma 1.20) est synthétique au sens où elle cherche à obtenir les modèles qui ont déjà été développés comme cas limites de modèles plus généraux, ce qui doit permettre de justifier les modèles semi-empiriques et statistiques, de les améliorer et de trouver leur domaine de validité. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Le chapitre 3 apparaît comme un chapitre central car il doit conduire à un modèle de feu de végétation tridimensionnel générique qui fait intervenir les phénomènes principaux de la propagation du feu dans les forêts.

Ceci donne un cadre mathématique à la discipline de l'étude des feux de végétation de même que l'équation de Navier Stokes donne un cadre à l'étude de la mécanique des fluides et l'équation de Darcy [2] donne un cadre à l'étude du transfert hydrique dans les milieux faiblement poreux. Nous n'avons pas trouvé un tel modèle dans la littérature lorsque nous avons entrepris cette étude. Seul Grishin propose un modèle semblable de feu de végétation tridimensionnel continu dans son livre [8] de 1997, fruit de trente ans de travail dans l'étude des feux de forêt. Il étudie ensuite son modèle qu'il serait intéressant de comparer au notre. L'étude du modèle obtenu au chapitre 3 sera réalisée aux chapitres 4 et 5 en essayant de simplifier ce modèle en un modèle bidimensionnel au chapitre 4 puis en simulant le modèle bidimensionnel obtenu numériquement au chapitre 5.

Conclusion

Nous connaissons maintenant les principales notions attachées à la propagation des feux de forêt. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous limitons à l'étude d'une strate végétale. Au prochain chapitre, nous présentons le modèle géométrique 1D surfacique avec front courbe des ellipses pour modéliser la propagation du feu de faible intensité dans une forêt hétérogène assez dense, car c'est le modèle le plus simple qui permette de simuler la propagation du front du feu. Dans les chapitres qui suivent, nous tentons ensuite de valider ou d'invalider ce modèle en construisant notre modèle de propagation du feu en partant de la plus petite échelle d'observation pour aller vers la plus grande.

Bibliographie

- [1] **Albini F.A.**, A model for fire spread in wildland fuels radiation, *Comb. Sci. and Technol.*, 1985, vol. 42, p. 229-258.
- [2] **Auriault J.L.**, Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?, *Int. J. Engng. Sci.*, 1991, Vol. 29, No. 7, pp. 785-795.
- [3] **Catchpole E.A.** and **De Mestre N.J.**, Physical models for a spreading line fire, *Aust. For.*, 1986, Vol. 49, No.2, p.102-111.
- [4] **Cekirge H.M.**, Propagation of fire fronts in forests, *Comp. and Maths. with Appls.*, 1978, Vol. 4, p. 325-332.
- [5] **De Mestre N.J.**, **Catchpole E.A.**, **Anderson D.H.** and **Rothermel R.C.**, Uniform propagation of a planar fire front without wind, *Comb. Sci. and Technol.*, 1989, vol. 65, pp. 231-244.
- [6] **Dorrer G.A.**, A model for propagation of curvilinear forest fire fronts, Krasnoyarsk. Translated from *Fizika Goreniya i Vzryva*, 1982, vol. 20, no. 1, pp. 11-19.
- [7] **Green D.G.**, Shapes of fires in discrete fuels, *Ecol. Model.*, 1983, Vol. 20, pp. 21-32.
- [8] **Grishin A.M.**, Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them, translated by Czuma M., Chikina L. And Smokotina L., ed. *Frank Albini*, 1997.
- [9] **Hornung U.**, Homogenization and porous media, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [10] **Lee S.L.** and **Hellman J.M.**, Heat and mass transfer in fire research, *Adv. Heat Transfer*, 1974, Vol. 10, pp. 219-284.
- [11] **Lidrissi M.**, Modélisation des feux de forêts par Automates cellulaires, *Rapport de DEA*. Septembre 1993. Nancy.
- [12] **Richards G.D.**, An elliptical growth model of forest fire fronts and its numerical solution, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1990, Vol.30, pp. 1163-1179.
- [13] **Rothermel R.C.**, A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels, *USDA Forest Service* , 1972, Research paper INT-115, Ogden, Utah, USA, 40 p.

Bibliographie

- [14] **Trabaud L.**, Les feux de forêts (mécanismes, comportement et environnement), *France Sélection*, Février 1992.
- [15] **Von Niessen W.** and Blumen A., Dynamic simulation of forest fires, *Can. J. For. Res.*, 1988. Vol. 18. pp. 805-812.
- [16] **Weber R.O.**, Analytical models for fire spread due to radiation, *Combust. Flame*, 1989, Vol. 78, p.398-408.
- [17] **Weber R.O.**, Modelling fire spread through fuel beds, *Prog. Energy Combust. Sci.*, 1991, vol. 17, pp. 67-82.
- [18] **Williams F.A.**, Combustion Theory, *Addison-Wesley Publishing Co.*, 1985.
- [19] **Firestorm**, <http://www5.ced.berkeley.edu:8005/aegis//home/projects/eastbay/scon.htm>
- [20] **Les incendies de forêts**, *Supplément de La Recherche*, 1991, Vol. 234, pp. 886-935.

Chapitre 2

Méthode des enveloppes, formulation variationnelle et lien avec un bilan thermique 2D

Introduction

La prédiction de la propagation du feu consiste à trouver le **mouvement du front du feu** de forêt. Comme la propagation s'effectue tangentiellement à la topographie, nous avons vu au chapitre 1 que ce front peut être vu comme une courbe qui bouge sur une surface \mathcal{S} : le sol (cf. figure 2.1).

Nous avons de plus vu en introduction que, pour une forêt uniforme avec une pente et un vent uniformes, le front d'un feu initié en un point, est elliptique et se propage à vitesse constante. Utilisant cette solution et le principe de Huygens, Richards [20] a obtenu un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par l'équation paramétrique du front du feu dans une forêt non uniforme possédant une pente et un vent non uniforme. Ce modèle, nommé **méthode des enveloppes**, dépend de 3 coefficients en relations avec la végétation et avec les paramètres météorologiques et topographiques. C'est un modèle monodimensionnel surfacique avec front courbe (cf. paragraphe 1.6.2)

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la méthode des enveloppes. Une expression intrinsèque de la vitesse normale du front du feu, associée à ce modèle elliptique, est alors obtenue. Nous montrons ensuite qu'il existe une formulation variationnelle équivalente du modèle de Richards basée sur les principes de l'optique géométrique. La fonction indicatrice ainsi que l'équation d'Hamilton Jacobi associées sont alors obtenues. Cette équation est une équation aux dérivées partielles pour l'équation cartésienne du front du feu. De nouveaux modèles, qui pourraient mieux vérifier les expériences, peuvent être facilement obtenues en changeant la forme de la fonction indicatrice. Néanmoins, le modèle de Richards et ces nouveaux modèles sont des modèles non justifiés, par ce qu'ils n'ont pas d'interprétation et de justification physique.

Ces modèles sont alors mis en relation avec 2 équations aux dérivées partielles bidimensionnelles différentes vérifiées par un champ de température possible. La première est une équation **hyperbolique** qui possède des hypersurfaces caractéristiques. Ce sont des

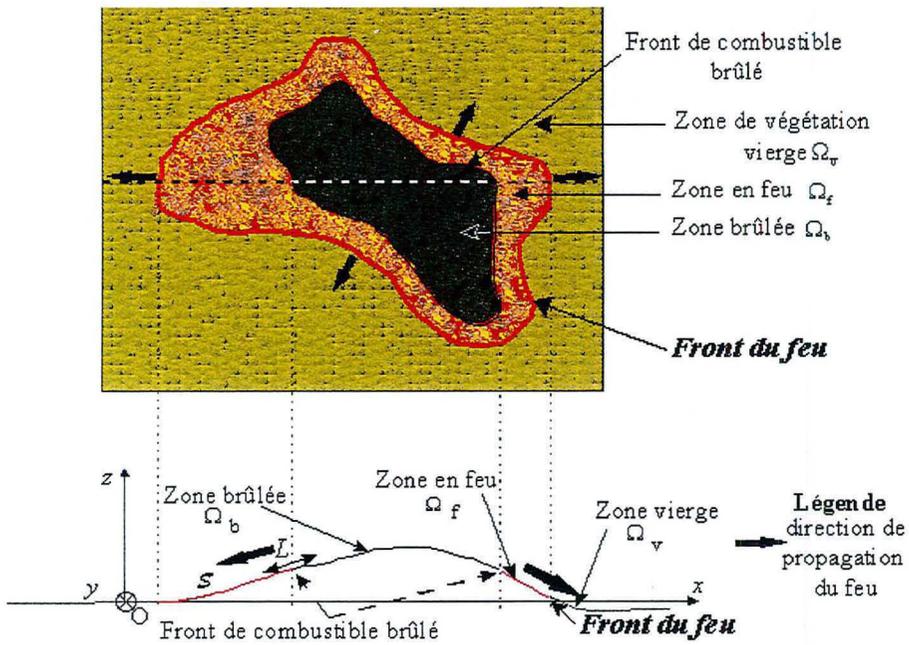


FIG. 2.1 – Vue de dessus et coupe d'une forêt à l'échelle gigascope

ondes dont la vitesse de propagation est due à un déséquilibre thermodynamique local. La seconde équation est une équation de **réaction diffusion** qui possède des ondes pour solutions, dues à la fois à la production d'énergie par une réaction de combustion et au transport de cette énergie par diffusion thermique et par convection. La vitesse de propagation de ces 2 types d'ondes s'avèrent être la même que la vitesse de propagation du front du feu du modèle de Richards, pourvu que les coefficients physiques de ces 2 équations soient reliées aux coefficients du modèle de Richards. Ces deux équations donnent 2 interprétations physiques possibles différentes du modèle de Richards.

Elles ne sont pas physiquement justifiées ce qui nous conduira donc à chercher à obtenir un système d'équations justifiées aux chapitres 3 et 4 à partir d'équations physiques valables à l'échelle mésoscopique.

2.1 Propagation du front du feu dans une forêt uniforme

On veut étudier la propagation du feu dans une forêt **uniforme**, constituée d'une strate homogène verticalement et horizontalement, **plane** et soumise à un vent uniforme et d'intensité constante. Lorsque l'on enflamme une telle forêt en un point, nous savons que le front du feu se développe de manière elliptique (cf. figure 5 et Van Wagner [24] 1969) pour un plan horizontal. L'excentricité de l'ellipse est due au vent ambiant et est alors constante dans le temps et la vitesse de propagation du front aussi. Le grand axe de l'ellipse est de plus dirigé dans la direction du vent ambiant V (cf. figure 2.2).

Un point M de la courbe \tilde{C} du front du feu a pour coordonnées cartésiennes $M(\tilde{X}, \tilde{Y})$. L'origine \tilde{O} des coordonnées cartésiennes (\tilde{x}, \tilde{y}) est le point d'ignition. Notons \tilde{C} le centre de l'ellipse \tilde{C} .

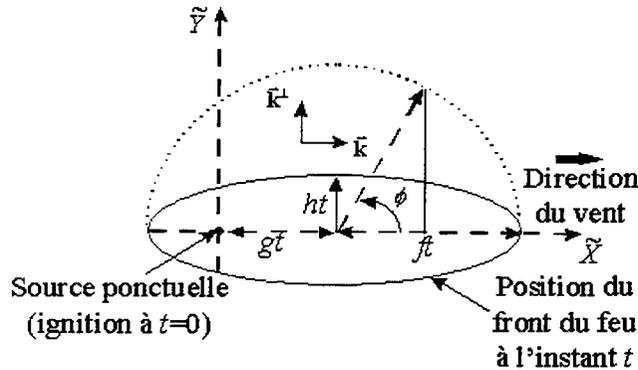


FIG. 2.2 – Evolution du front du feu (vue de dessus de la strate végétale à l'échelle gigantesque)

L'évolution du front du feu \tilde{C} est donnée par le paramétrage en coordonnées carté-

siennes suivant :

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{X}(t, \phi) = t(g + f \cos \phi) \\ \tilde{y} = \tilde{Y}(t, \phi) = th \sin \phi \end{cases} \quad (2.1)$$

où t désigne le temps et ϕ le paramètre angulaire défini sur la figure 2.2. L'excentricité de l'ellipse vaut $e = \sqrt{1 - (h/f)^2}$ et son foyer F se trouve en $\tilde{X} = (g - ef)t$.

Les variables f , g et h ont les dimensions d'une vitesse et sont des fonctions du type de végétation, de l'humidité de celles-ci, de l'intensité du vent et de la pente du terrain. Elles caractérisent donc le type de végétation et les conditions hydrodynamiques avec lesquelles la propagation a lieu. Ces fonctions peuvent être déterminées expérimentalement pour une forêt uniforme donnée. Des corrélations sont alors obtenues pour aboutir au **modèle** dit **des ellipses**. Ce modèle possède une similitude immédiate entre l'espace et le temps.

Comme ces fonctions dépendent cependant d'un grand nombre de paramètres, il est utile d'avoir une **connaissance a priori de leur forme**. Le modèle (2.1) ci-dessus ne peut pas les donner, car il n'est que **géométrique**. Nous pouvons les obtenir par une modélisation physique plus fine de la propagation du feu dans les forêts. C'est ce que nous verrons au chapitre 4.

Ce modèle elliptique tombe en défaut dans certaines conditions expérimentales. C'est le cas, par exemple, si la couverture végétale est peu dense (cf. Peet [19]). Un modèle à 2 ellipses a été proposé, mais il ne rend pas compte de tous les cas. Un tel modèle reste par exemple inadapté lorsque la densité d'occupation est faible. L'on s'approche alors du seuil de percolation, seuil pour lequel le front de flamme possède une forme caractéristique très découpée. Les **limitations** de l'utilisation de ce modèle doivent donc être mises en lumière. Dans ce but, une démarche de modélisation physique plus fine est entreprise au chapitre 3.

Cependant, ceci sous certaines hypothèses de modélisation, nous pouvons obtenir un modèle de propagation du front du feu dans une forêt **non uniforme**, dont les paramètres peuvent varier dans le temps, à partir du modèle uniforme précédent. C'est ce qui est fait au paragraphe suivant. Il n'en reste pas moins que le modèle obtenu possède en particulier les mêmes limitations d'application que le modèle des ellipses ci-dessus. Rappelons enfin que ce modèle représente la propagation du feu à l'échelle gigascopique.

2.2 Propagation d'un front de feu dans une forêt non uniforme avec vent local

2.2.1 Objet d'étude et notations

On désire obtenir un modèle d'évolution du front du feu dans le cas d'une forêt non uniforme repérée sur une carte.

Si M désigne un point de la carte et t le temps, notons alors

$$\begin{cases} f(M, t) \\ g(M, t) \\ h(M, t) \end{cases}$$

les fonctions intervenant dans (2.1), qui caractérisent la non uniformité de la forêt vis à vis de la propagation du feu et $\vec{k}(M, t)$ un vecteur unitaire donnant la direction et le sens du vent ambiant au point M. Soit enfin $\vec{k}^\perp(M, t)$ le vecteur unitaire orthogonal à celui-ci dans le sens direct.

Choisissons un repère cartésien global (O, x, y) sur la carte. Notons $\beta(M, t)$ l'angle $([Ox], \vec{k})$ donnant la direction du vent à l'instant t et au point M (cf. figure 2.3). La position du front du feu sur la carte à l'instant t est repérée par une courbe notée \mathcal{C}_t . Orientons celle-ci de manière à avoir la végétation vierge à l'extérieur du front \mathcal{C}_t .

Soit $\vec{X}(t, \theta)$ le vecteur \vec{OP} qui détermine tous les points courants $P(t, \theta)$ du front du feu \mathcal{C}_t . Soit $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire à \mathcal{C}_t et \vec{n} son vecteur normal (cf. figure 2.3). On a alors :

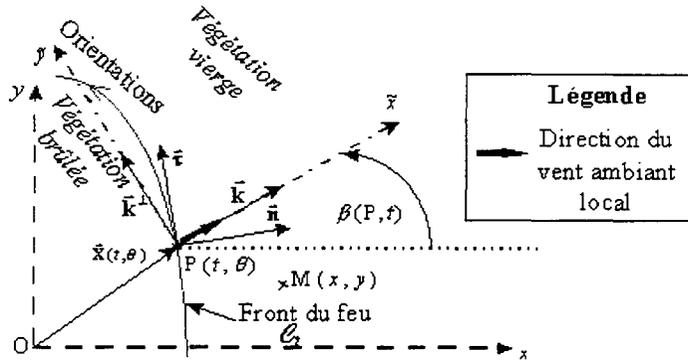


FIG. 2.3 - Paramétrage du front de feu

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} = \rho \vec{\tau} \quad (2.2)$$

avec

$$\rho = \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} \right\| \quad (2.3)$$

où $\| \cdot \|$ est la norme dans \mathcal{R}^2 .

Notons $\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de \vec{X} dans le repère cartésien global (O, x, y) . La courbe \mathcal{C}_t peut être donnée par un paramétrage cartésien (paramètre θ):

$$\begin{cases} x = X(\theta, t) \\ y = Y(\theta, t) \end{cases} \quad (2.4)$$

En projection sur le repère cartésien global (O, x, y) , il vient :

$$\rho = [(\partial X / \partial \theta)^2 + (\partial Y / \partial \theta)^2]^{+1/2} \quad (2.5)$$

$$\rho \vec{\tau} = \begin{vmatrix} \partial X / \partial \theta \\ \partial Y / \partial \theta \end{vmatrix} \text{ et } \rho \vec{n} = \begin{vmatrix} \partial Y / \partial \theta \\ -\partial X / \partial \theta \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$\vec{k} = \begin{vmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix} \text{ et } \vec{k}^\perp = \begin{vmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Notons $\dot{\vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$. La vitesse normale du front du feu C_t est $\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n}$.

2.2.2 Méthode de modélisation de la dynamique du front du feu

Afin de modéliser la dynamique du front du feu, considérons la position C_{t_0} du front du feu à un instant donné t_0 quelconque (cf. figure 2.4).

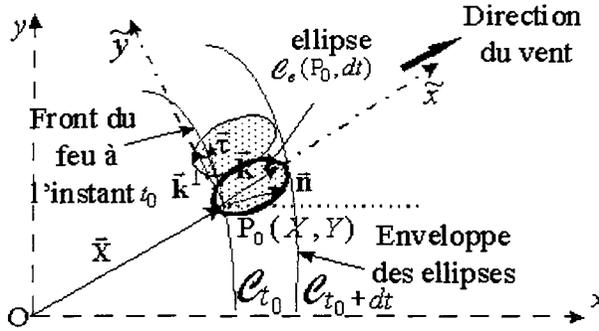


FIG. 2.4 – Principe de Huygens

La forêt, bien que non uniforme sur une longueur caractéristique L gigascopique d'observation, est considérée comme la réunion de petites parcelles de terrains qui sont localement uniformes sur une longueur l très inférieure à L ($l \ll L$). Notons ε le rapport $l \ll L$. Soit enfin τ le temps caractéristique de propagation du front du feu sur une distance de longueur l . L'ordre de grandeur de τ est $l/f(M, t)$. Supposons que l'échelle de variations temporelles T des fonctions $f(M, t)$, $g(M, t)$, $h(M, t)$ et $\beta(M, t)$ soit grande par rapport à τ .

On peut alors considérer les fonctions $f(M, t)$, $g(M, t)$, $h(M, t)$ et $\beta(M, t)$ comme constantes en espace et en temps sur une distance de l'ordre de l et pour un intervalle de temps de l'ordre τ . Ces constantes sont égales à leurs valeurs au point $P(\theta, t)$. Nous avons alors :

$$\begin{cases} \text{grad}(v) = O(1/T) \\ \partial v / \partial t = O(L/T^2) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{grad}(\beta) = O(1/L) \\ \partial \beta / \partial t = O(1/T) \end{cases} \quad (2.8)$$

où v désigne indifféremment la fonction f , g ou h .

Considérons alors qu'en chaque point $P(\theta, t_0)$ du front du feu, un **point source virtuel** se développe, à partir de l'instant t_0 , de manière elliptique, selon le modèle d'ellipse d'un front du feu dans une forêt uniforme (cf. paragraphe 2.1 et figure 2.4), pendant un

intervalle de temps dt de l'ordre de τ . Notons $C_e(P(\theta, t_0), dt)$ l'ellipse qui se développe au point $P(\theta, t_0)$. Ces sources virtuelles se développent de manière indépendante.

L'**interaction** des points sources virtuels entre eux à l'échelle l doit être modélisée, car la forme locale du front de feu et la présence d'une zone brûlée en arrière de celui-ci ne sont pas prises en compte lors du développement des **points sources virtuels**. Un modèle simple peut être obtenu grâce au *principe de Huygens* [7, 10]. Cette modélisation a été proposée initialement par Anderson [2, 3] en 1981 et a été développée ensuite par Richards [17, 21, 22, 23] en 1991. Elle consiste à prendre en compte l'interaction entre les sources de *manière géométrique* en prenant pour nouveau front du feu C_{t_0+dt} à un instant $t_0 + dt$ ultérieur la **courbe enveloppe** des ellipses à cet instant (cf. figure 2.4). L'évolution cinématique instantanée du front du feu C_{t_0} est obtenue lorsque l'on fait tendre l'intervalle de temps dt vers zéros. L'existence de cette limite donne un sens au modèle obtenu. Ce modèle permet alors de tenir compte de la non uniformité du point de vue spatial et temporel des conditions de propagation des feux de forêts.

Le domaine d'application de celui-ci dépend de la plus ou moins bonne modélisation de l'interaction entre parcelles de terrain à l'échelle l et de l'existence de deux échelles de temps (τ et T) et d'espace (l et L) d'ordres de grandeurs différentes. Nous vérifierons aux paragraphes 2.2.3 qu'il est bien **auto cohérent** en obtenant le modèle de l'ellipse lorsque les fonctions f , g , h et β sont des constantes. Nous pouvons penser que ce modèle est valable pour une zone en feu très mince mais ceci reste à être vérifié. Seul un modèle physique global peut nous donner des renseignements sur les domaines de validité du modèle obtenu. Nous allons voir au paragraphe 2.2.5 que la courbure locale du front du feu C_t n'intervient pas dans la vitesse de propagation de celui-ci dans cette modélisation.

2.2.3 Recherche de l'équation d'évolution

Nous nous proposons d'obtenir les équations qui régissent l'évolution du front du feu par le principe de Huygens. Soit C_{t_0} la position du front du feu à un instant t_0 quelconque. Soit alors $P_0(X(\theta, t_0), Y(\theta, t_0))$ un point quelconque de la courbe C_{t_0} .

Pour alléger les notations notons

$$\begin{cases} f_0(\theta) = f(P_0, t_0) \\ g_0(\theta) = g(P_0, t_0) \\ h_0(\theta) = h(P_0, t_0) \\ \beta_0(\theta) = \beta(P_0, t_0) \end{cases} \quad (2.9)$$

Plaçons-nous au **voisinage** de l'instant t_0 et du point P_0 de la courbe C_{t_0} . Considérons alors le repère orthonormé local $(P_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ où la demi-droite $[P_0, \tilde{x})$ est orientée dans la direction \mathbf{k} du vent ambiant. A l'instant $t_0 + dt$, l'ellipse $C_e(P_0, \tilde{x})$ due au point source en P_0 peut être donnée par le paramétrage suivant d'après (2.1) (paramètre ϕ) :

$$\begin{cases} \tilde{X}(\phi, dt) = dt [g(P_0, t_0) + f(P_0, t_0) \cos \phi] \\ \tilde{Y}(\phi, dt) = dt [h(P_0, t_0) \sin \phi] \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans le repère global fixe (O, x, y) , $C_e(P_o, dt)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x = X_e(\phi, dt) = X(\theta, t_0) + \begin{pmatrix} \tilde{X} \cos(\beta_0(\theta)) \\ -\tilde{Y} \sin(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \\ y = Y_e(\phi, dt) = Y(\theta, t_0) + \begin{pmatrix} \tilde{X} \sin(\beta_0(\theta)) \\ +\tilde{Y} \cos(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ceci définit une famille d'ellipses $\mathcal{E}(\theta, dt)$ à l'instant $t_0 + dt$ lorsque $P_o(\theta, t_0)$ parcourt C_{t_0} . Nous nous proposons alors de trouver l'expression de la courbe enveloppe associée. Pour cela, éliminons l'angle ϕ entre les équations du système (2.10) puis inversons le système (2.11) par rapport à \tilde{X} et \tilde{Y} . La substitution de \tilde{X} et \tilde{Y} entre les trois équations alors obtenues conduit à l'expression cartésienne suivante de la famille d'ellipses $\mathcal{E}(\theta, dt)$ dans le repère global (O, x, y) :

$$F(X_e, Y_e, \theta, dt) = 0 \quad (2.12)$$

où la fonction F est défini par :

$$F(X_e, Y_e, \theta, dt) = \frac{1}{f_0^2} [\tilde{X}(X_e) - g_0 dt]^2 + \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y}(Y_e)^2 - dt^2 \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{X}(X_e, Y_e) = \begin{pmatrix} (X_e - X(\theta, t_0)) \cos(\beta_0(\theta)) \\ +(Y_e - Y(\theta, t_0)) \sin(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \\ \tilde{Y}(X_e, Y_e) = \begin{pmatrix} -(X_e - X(\theta, t_0)) \sin(\beta_0(\theta)) \\ +(Y_e - Y(\theta, t_0)) \cos(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.14)$$

L'équation paramétrée de la **courbe enveloppe** est solution du système suivant en $X(\theta, t + dt)$ et $Y(\theta, t + dt)$:

$$\boxed{\begin{cases} F(X, Y, \theta, dt) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(X, Y, \theta, dt) = 0 \end{cases}} \quad (2.15)$$

La résolution de ce système se trouve à l'annexe C. Elle conduit au système :

$$\begin{cases} \tilde{X} - g_0 dt = r p dt f_0^2 \\ \tilde{Y} = -r q dt h_0^2 \end{cases} \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{cases} p(\theta, t_0) = -\frac{\partial X(\theta, t_0)}{\partial \theta} \sin(\beta_0(\theta)) + \frac{\partial Y(\theta, t_0)}{\partial \theta} \cos(\beta_0(\theta)) \\ q(\theta, t_0) = \frac{\partial X(\theta, t_0)}{\partial \theta} \cos(\beta_0(\theta)) + \frac{\partial Y(\theta, t_0)}{\partial \theta} \sin(\beta_0(\theta)) \\ r(\theta, t_0) = [(f_0 p)^2 + (h_0 q)^2]^{-1/2} \end{cases} \quad (2.17)$$

En reportant (2.11) dans la relation (2.16), l'équation paramétrée de la courbe enveloppe est alors obtenue :

$$\begin{cases} \frac{X(\theta, t_0 + dt) - X_0(\theta, t_0)}{dt} = [g_0 + r p f_0^2] \cos(\beta_0) + r q h_0^2 \sin(\beta_0) \\ \frac{Y(\theta, t_0 + dt) - Y_0(\theta, t_0)}{dt} = [g_0 + r p f_0^2] \sin(\beta_0) - r q h_0^2 \cos(\beta_0) \end{cases} \quad (2.18)$$

Par passage à la limite $dt \rightarrow 0$, il vient finalement le résultat que nous énonçons dans le paragraphe suivant :

2.2.4 Modèle d'évolution elliptique

Sous les hypothèses suivantes de faible non uniformité du type (d'après 2.8),

$$\begin{cases} \text{grad}(v) = O(1/T) \\ \partial v / \partial t = O(L/T^2) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \text{grad}(\beta) = O(1/L) \\ \partial \beta / \partial t = O(1/T) \end{cases} \quad (2.19)$$

où v désigne indifféremment la fonction f , g ou h , le front du feu C_t à l'instant t vérifie le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t}(\theta, t_0) = g(\vec{X}, t) \cos(\beta) + r \begin{bmatrix} pf(\vec{X}, t)^2 \cos(\beta(\vec{X}, t)) \\ +qh(\vec{X}, t)^2 \sin(\beta(\vec{X}, t)) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(\theta, t_0) = g(\vec{X}, t) \sin(\beta) + r \begin{bmatrix} pf(\vec{X}, t)^2 \sin(\beta(\vec{X}, t)) \\ -qh(\vec{X}, t)^2 \cos(\beta(\vec{X}, t)) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{cases} p(\theta, t) = -\frac{\partial X}{\partial \theta} \sin(\beta(\vec{X}, t)) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \cos(\beta(\vec{X}, t)) \\ q(\theta, t) = \frac{\partial X}{\partial \theta} \cos(\beta(\vec{X}, t)) + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \sin(\beta(\vec{X}, t)) \\ r(\theta, t) = [(f(\vec{X}, t)p(\theta, t))^2 + (h(\vec{X}, t)q(\theta, t))^2]^{-1/2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Le système (2.20)-(2.21) a été donné par Richards [17] (relation (10)) en 1990. Il permet d'obtenir l'évolution de la courbe C_t à tout instant. Il est facile de vérifier que, pour une forêt uniforme, nous retrouvons le modèle d'ellipse du paragraphe 2.1. Notre démonstration est cependant différente de celle de Richards, car elle met en évidence la notion de parcelles localement uniformes, de manière analogue à la notion d'équilibre thermodynamique local [14], notion qui par la modélisation de l'échange entre particules conduit à obtenir un modèle qui tienne compte des non uniformités à grande échelle.

La relation (2.20) ci-dessus est projetée dans un repère cartésien. Nous allons nous affranchir de ce repère au paragraphe suivant, ce qui nous conduira à un modèle exprimé de manière intrinsèque.

2.2.5 Forme intrinsèque

Nous allons mettre la relation (2.20)-(2.21) sous forme intrinsèque, c'est-à-dire sous une forme vectorielle qui ne dépende plus du choix de coordonnées.

D'après (2.6), le système (2.11) s'écrit :

$$\dot{\vec{X}} = g(t)\vec{k} + \vec{r} \begin{pmatrix} \cos \beta(M, t) & \sin \beta(M, t) \\ \sin \beta(M, t) & -\cos \beta(M, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{p}f(M, t)^2 \\ \bar{q}h(M, t)^2 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

On obtient alors le modèle intrinsèque suivant d'évolution de la courbe d'après (2.4)-(2.6) :

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} (g(\vec{X}, t) + f(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{p}) \vec{k} \\ -h(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{q} \vec{k}^\perp \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{p}(\theta, t) = \vec{k} \cdot \vec{n} \\ \bar{q}(\theta, t) = \vec{k} \cdot \vec{\tau} = -\vec{k}^\perp \cdot \vec{n} \\ \bar{r}(\theta, t) = [(f(\vec{X}, t)\bar{p})^2 + (h(\vec{X}, t)\bar{q})^2]^{-1/2} \end{cases} \quad (2.24)$$

L'expression ci-dessus permet de voir le rôle des paramètres f , g , h et de la direction \vec{k} du vent ambiant dans la propagation du front du feu.

2.2.6 Vitesse de propagation

Nous nous proposons d'obtenir la vitesse normale de propagation du front du feu. Pour cela, multiplions la relation (2.23) scalairement par le vecteur normal \vec{n} . Il vient :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} (g(\vec{X}, t) + f(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{p}) \vec{k} \cdot \vec{n} \\ +h(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{q} \vec{k}^\perp \cdot \vec{n} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

C'est-à-dire

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} (g(\vec{X}, t)\bar{p} + f(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{p}^2) \\ +h(\vec{X}, t)^2 \bar{r} \bar{q}^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

d'après (2.24). Or $\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \|\vec{k}\|^2 = 1$ donc (2.26) prend la forme simplifiée suivante :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = [g(\vec{X}, t)\bar{p} + 1/\bar{r}] \quad (2.27)$$

En reportant les expressions (2.24) dans (2.27), nous trouvons l'expression suivante de la vitesse normale d'évolution de la courbe \mathcal{C}_t :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = g(\vec{X}, t)\bar{p} + [(f(\vec{X}, t)\bar{p})^2 + (h(\vec{X}, t)\bar{q})^2]^{1/2} \quad (2.28)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{p}(\theta, t) = \vec{k} \cdot \vec{n} \\ \bar{q}(\theta, t) = \vec{k} \cdot \vec{\tau} \end{cases} \quad (2.29)$$

Il est intéressant de faire intervenir dans la relation (2.28) le champ de **tenseur d'anisotropie** $\bar{\mathbf{C}}$ défini par :

$$\bar{\mathbf{C}}(M, t) = \begin{pmatrix} f(M, t) & 0 \\ 0 & h(M, t) \end{pmatrix}_{(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\boldsymbol{\tau}})} \quad (2.30)$$

$$\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\bar{p} \\ h\bar{q} \end{pmatrix}_{(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\boldsymbol{\tau}})} \quad (2.31)$$

d'où

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \|\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{k}}\| \quad (2.32)$$

d'après (2.24) et finalement :

$$\boxed{\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = g(\bar{\mathbf{X}}, t) \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{X}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} + \|\bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}, t) \cdot \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{X}}, t)\|} \quad (2.33)$$

Cette vitesse d'évolution dépend des fonctions $f(M, t)$, $g(M, t)$, $h(M, t)$ et de la direction du vent ambiant.

2.3 Formulation variationnelle de la méthode d'enveloppe

2.3.1 Modèle d'évolution

Nous allons montrer que le modèle d'évolution que nous avons obtenu au paragraphe 2.2 rentre dans le cadre général de l'optique géométrique. Ceci nous permettra d'obtenir une formulation variationnelle de ce modèle. Considérons pour cela la *propagation de perturbations* dans un milieu non uniforme et non isotrope. Définissons le vocabulaire suivant :

1. Les points de la zone en feu sont les points *excités*, ou *perturbés*, et les points de la zone en avant du front du feu (combustible vierge) sont les points au *repos* du milieu. Les points de la zone brûlée sont les points en *latence*. Ils sont insensibles à toute excitation (cf. figure 2.1). Chaque point de la forêt peut donc être dans trois états.
2. La perturbation est formée de l'ensemble des points excités. Comme les points de la forêt peuvent changer d'état, la perturbation évolue dans le temps. Notons \mathcal{C}_t la frontière, à l'instant t , du domaine excité avec le domaine au repos. Cette frontière sera appelée **front d'onde**. Elle correspond au front du feu. Ce front d'onde se propage. Nous disons que *la perturbation se propage*.

3. Si la perturbation atteint un point P , au repos, à un instant t alors ce point passe du repos à l'état excité. Ce point devient alors source ponctuelle d'une *perturbation virtuelle* qui se propage dans le milieu à partir du point P.
4. On se donne une fonction $F(\vec{x}, \vec{x}')$ de deux variables vectorielles \vec{x} et \vec{x}' où \vec{x} correspond à une position et \vec{x}' à une direction. Cette fonction est nommée *fonction indicatrice*. La **vitesse de propagation** $\vec{c}(\vec{x}, \vec{x}')$ d'une perturbation virtuelle au point P(\vec{x}) et dans la direction \vec{x}' est donnée par :

$$\vec{c}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{F(\vec{x}, \vec{x}')} \vec{x}' \quad (2.34)$$

Précisons quelques propriétés que l'on demande de vérifier à la fonction $F(\vec{x}, \vec{x}')$:

i)

$$F(\vec{x}, \vec{x}') > 0 \text{ si } \vec{x}' \neq 0 \quad (2.35)$$

ii) La vitesse de propagation doit ne dépendre que de la direction \vec{x}' indépendamment de la norme de \vec{x}' :

$$F(\vec{x}, \lambda \vec{x}') = \lambda F(\vec{x}, \vec{x}') \forall \lambda > 0 \quad (2.36)$$

iii) La vitesse de propagation est indépendante du sens de la propagation :

$$F(\vec{x}, -\vec{x}') = F(\vec{x}, \vec{x}') \quad (2.37)$$

iv)

$$F(\vec{x}, \vec{x}') \text{ dépend de façon régulière de } \vec{x} \quad (2.38)$$

Soit $P_0(\vec{x}_0)$ un point excité et $P_1(\vec{x}_1)$ un point au repos. Considérons une courbe $\tilde{\gamma}$ qui passe par P_0 et P_1 . Soit enfin P un point courant de $\tilde{\gamma}$ (cf. figure 2.5). Notons $\vec{x}'(P, \tilde{\gamma})$ le vecteur unitaire tangent à la courbe $\tilde{\gamma}$ au point P et dirigé de P_0 vers P_1 .

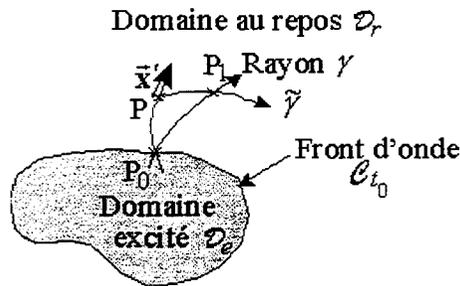


FIG. 2.5 - Front d'onde et rayon en provenance d'une source d'excitation P_0

Si nous notons $\mathbf{x}(s)$ le paramétrage curviligne de la courbe $\tilde{\gamma}$,

$$\vec{x}'(P, \tilde{\gamma}) = \frac{d\vec{x}}{ds}(P) \quad (2.39)$$

La vitesse de propagation de la perturbation virtuelle sur la courbe $\tilde{\gamma}$ et au point P (\vec{x}) est donnée par $\frac{1}{F(\vec{x}, \vec{x}')} \vec{x}'$ d'après (2.34)-(2.38). Posons $dt = F(\vec{x}, \vec{x}') ds$ où dt représente un intervalle de temps.

Le temps $\tau(P_0, P_1, \tilde{\gamma})$ mis par la perturbation virtuelle pour aller du point P_0 au point P_1 en parcourant la courbe $\tilde{\gamma}$ est :

$$\tau(P_0, P_1, \tilde{\gamma}) = \int_{x_0}^{x_1} F(\mathbf{x}(\tilde{\gamma}, s), \mathbf{x}'(\tilde{\gamma}, s)) ds \quad (2.40)$$

Considérons tous les chemins $\tilde{\gamma}$ joignant P_0 à P_1 . Soit $\tau(P_0, P_1)$ le temps de parcours minimum sur toutes les courbes, joignant P_0 à P_1 :

$$\tau(P_0, P_1) = \min_{\tilde{\gamma}} \tau(P_0, P_1, \tilde{\gamma}) \quad (2.41)$$

La courbe γ réalisant ce minimum est nommée *rayon de la perturbation* due à la source P_0 , par analogie avec les rayons lumineux de l'optique géométrique. Toute autre courbe $\tilde{\gamma}$ est dite *rayon virtuel de la perturbation* dû à la source P_0 .

Proposition 1 *Considérons le domaine excité à un instant t_0 quelconque.*

Soit $\tau(P_1)$ le temps de parcours minimum de toutes les perturbations en provenance du domaine excité $\mathcal{D}_e(t_0)$ jusqu'au point P_1 :

$$\tau(P_1) = \min_{P_0 \in \mathcal{D}_e(t_0)} \tau(P_0, P_1) \quad (2.42)$$

Le point P_1 devient excité à l'instant $\tau(P_1)$.

Le principe ci-dessus caractérise l'évolution des perturbations dans la forêt. C'est le **principe de Fermat** de l'optique géométrique. Il donne l'évolution des fronts d'onde à partir de la connaissance de la fonction indicatrice $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ et de la position initiale de la zone excité. Le front d'onde \mathcal{C}_t à l'instant t est obtenu comme *enveloppe* des perturbations virtuelles qui ont comme origine les points sources qui sont sur le front d'onde initial \mathcal{C}_{t_0} d'après le théorème de Huygens [4].

2.3.2 Fonction indicatrice pour une forêt non uniforme

Nous voulons trouver la fonction indicatrice $F(\vec{x}, \vec{x}')$ correspondant au modèle du paragraphe 2.2.

L'ellipse $\mathcal{C}_e(P_0, dt)$ due au point source en P_0 peut être donnée par le paramétrage suivant dans le repère local (\tilde{x}, \tilde{y}) d'après (2.10) (cf. figure 2.4) :

$$\begin{cases} \tilde{X}(\phi, dt) = dt [g(P_0, t_0) + f(P_0, t_0) \cos \phi] \\ \tilde{Y}(\phi, dt) = dt [h(P_0, t_0) \sin \phi] \end{cases} \quad (2.43)$$

d'où l'équation d'évolution suivante en coordonnées cartésiennes, en éliminant l'angle ϕ :

$$G\left(\frac{\tilde{X}}{dt}, \frac{\tilde{Y}}{dt}\right) = 1 \quad (2.44)$$

avec

$$G(x'_1, x'_2) = \frac{1}{f^2}(x'_1 - g)^2 + \frac{1}{h^2}x'^2_2 \quad (2.45)$$

Remarquons que G est une fonction convexe.

La vitesse de propagation $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ dans la direction $\mathbf{x} = (x'_1, x'_2)$ vérifie donc la relation :

$$G(\mathbf{c}x'_1, \mathbf{c}x'_2) = 1 \quad (2.46)$$

D'après (2.34),

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\mathbf{c}} \quad (2.47)$$

F est donc solution de l'équation :

$$G\left(\frac{x'_1}{F}, \frac{x'_2}{F}\right) = 1 \quad (2.48)$$

C'est l'équation d'un cône de centre O et de section $G(x'_1, x'_2) = 1$ pour $F = 1$. D'après (2.48), F est solution de l'équation :

$$A\left(\frac{1}{F}\right)^2 + 2B\frac{1}{F} + C = 0 \quad (2.49)$$

avec

$$\begin{cases} A = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{h}{f}\right)^2 (\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}})^2 + (\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}}^\perp)^2 \right] \\ B = -\frac{h}{f}(g/f)(\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}}) \frac{1}{h} \\ C = (g/f)^2 - 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

L'équation (2.49) est du deuxième degré. Nous pouvons donc obtenir une forme explicite pour la fonction indicatrice associée à une propagation elliptique. Il vient finalement la fonction indicatrice suivante :

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C} \quad (2.51)$$

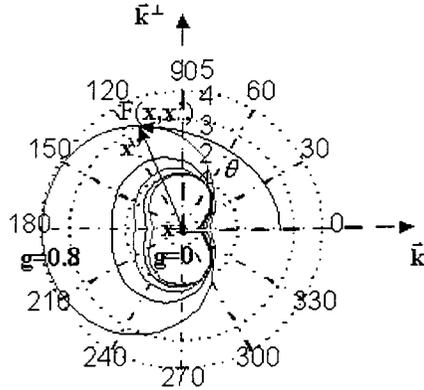
où

$$\begin{cases} A = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{h}{f}\right)^2 (\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}})^2 + (\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}}^\perp)^2 \right] \\ B = -\frac{h}{f}(g/f)(\mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}}) \frac{1}{h} \\ C = (g/f)^2 - 1 \end{cases} \quad (2.52)$$

Si l'on note

$$\begin{cases} x'_1 = \mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}} = \cos \theta \\ x'_2 = \mathbf{x}' \cdot \vec{\mathbf{k}}^\perp = \sin \theta \end{cases} \quad (2.53)$$

pour \mathbf{x}' de norme 1, traçons une représentation polaire de la fonction F . Ceci a été réalisé sur la figure 2.6 pour le cas particulier $f = 1$, $h = 0.5$ et g variant de 0 à 1.


 FIG. 2.6 - Fonctions indicatrices pour $f = 1$, $h = 0.5$ et g variant de 0 à 1

La fonction $F(\vec{x}, \vec{x}')$ ci-dessus vérifie les propriétés i à iv que nous lui avons supposée précédemment. Lorsque $g = 0$, $B = 0$ et $C = -1$ la fonction indicatrice se réduit à :

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{x}' \cdot \vec{k}}{f(\mathbf{x})}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{x}' \cdot \vec{k}^\perp}{g(\mathbf{x})}\right)^2} \quad (2.54)$$

Cette forme est très simple. Elle montre bien l'intervention de l'anisotropie des paramètres sur la propagation lorsque f et h sont différents.

2.3.3 Trajectoire des rayons des perturbations

Le rayon qui passe par les points P_0 et P_1 est la trajectoire γ qui minimise le temps de parcourt $\tau(P_0, P_1)$ de P_0 et P_1 d'après (2.40)-(2.41). Trouver γ revient à un problème de minimisation d'une fonctionnel. L'équation d'Euler-Lagrange [8] conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial x'_1} \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial x'_2} \right] = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Lorsque la forêt est uniforme, $F(\vec{x}, \vec{x}')$ ne dépend pas de \vec{x} , donc (2.55) se réduit à :

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = \text{const1} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x'_2} = \text{const2} \quad (2.56)$$

Or pour la forme particulière de la fonction indicatrice (2.51-2.52) choisie plus haut, le gradient de la fonction F vaut :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x'_1} = \frac{g}{Cf^2} + \frac{1}{Cf^2(CF+B)}x'_1 \\ \frac{\partial F}{\partial x'_2} = -\frac{1}{h^2(CF+B)}x'_2 \end{cases} \quad (2.57)$$

Lorsque $g = 0$, nous obtenons

$$\frac{dx_1}{dx_2} = (f/h)^2 const \quad (2.58)$$

Les rayons (géodésiques) sont donc des lignes droites. En particulier aucune perturbation quittant P_0 ne peut arriver à un autre point P_1 plus vite en parcourant 2 segments de droites non colinéaires, plutôt qu'en parcourant le segment qui joint P_0 à P_1 .

2.3.4 Equation cartésienne du front d'onde

Définissons la fonction $S(\vec{x}, t)$ par

$$S(\vec{x}, t) = -t + \tau(\vec{x}) \quad (2.59)$$

où (d'après (2.42)) :

$$\tau(P(\vec{x})) = \min_{P_0 \in \mathcal{D}_\epsilon(t_0)} \tau(P_0, P(\vec{x})) \quad (2.60)$$

La position du front d'onde \mathcal{C}_t à l'instant t est donnée par l'équation cartésienne :

$$S(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.61)$$

D'après Arnold [4], S est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi suivante :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{x}, \text{grad}_{\vec{x}}(S)) = 0} \quad (2.62)$$

où $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ est la transformée de Legendre généralisée de $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ par rapport au couple $(\mathbf{x}', \mathbf{p})$:

$$\boxed{H(\vec{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\vec{x}'} \frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{\|\vec{x}'\|_F}} \quad (2.63)$$

où $\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle$ est le produit scalaire euclidien et $\|\vec{x}'\|_F = F(\vec{x}, \vec{x}')$ forme une norme sur l'espace tangent $\mathcal{T}(\vec{x})$ au point \vec{x} .

Une expression d'Hamilton Jacobi pour des feux de forêts, a aussi été donnée par Dorrer [9] en 1993. Le terme $\|\vec{x}'\|_F$ est bien une norme d'après les hypothèses que nous avons faites sur $F(\vec{x}, \vec{x}')$ et que nous avons vérifiées ci-dessus pour le cas particulier de propagation de feu sous forme d'ellipse. Notons que si l'on appelle $\mathcal{T}'(\vec{x})$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{T}(\vec{x})$ (espace dual), nous pouvons munir $\mathcal{T}'(\vec{x})$ de la norme :

$$\|\mathbf{p}\| = \sup_{\vec{x}'} \frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{\|\vec{x}'\|_F} \quad (2.64)$$

2.3.5 Expression de la transformation de Legendre

Calculons l'expression de la fonction $H(\vec{x}, \mathbf{p})$. Pour cela définissons $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ et $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ dans le repère (\vec{k}, \vec{k}^\perp) . Nous avons

$$\frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{\|\vec{x}'\|_F} = \frac{p_1 x'_1 + p_2 x'_2}{F(x, x'_1, x'_2)} \quad (2.65)$$

Calculons le gradient de cette fonction par rapport à \mathbf{x}' afin de chercher le maximum atteint par la fonction de la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{\|\vec{x}'\|_F} \right) &= \frac{1}{F} \mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle \frac{1}{F^2} \text{grad}(F) \\ &= \frac{1}{F} \begin{pmatrix} p_1 - \frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{F} \frac{\partial F}{\partial x'_1} \\ p_2 - \frac{\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle}{F} \frac{\partial F}{\partial x'_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le maximum est obtenu en annulant le gradient (2.66) ci-dessus. En éliminant le produit scalaire $\langle \mathbf{p}, \vec{x}' \rangle$ entre les deux relations alors obtenues, nous déduisons alors la relation de liaison suivante :

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial x'_2} - p_2 \frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0 \quad (2.67)$$

C'est-à-dire, d'après (2.51) :

$$-p_1 \frac{1}{h^2(CF + B)} x'_2 = p_2 \left[\frac{g}{Cf^2} + \frac{1}{Cf^2(CF + B)} x'_1 \right] \quad (2.68)$$

La résolution de cette équation en la variable $CF + B$ conduit à :

$$CF + B = -\frac{f^2}{p_2 g} \frac{p_2 x'_1}{f^2} + \frac{p_1 C x'_2}{h^2} \quad (2.69)$$

Or, nous avons aussi, d'après (2.51),

$$CF + B = \sqrt{\frac{x_1'^2}{f^2} - C \frac{x_2'^2}{h^2}} \quad (2.70)$$

ce qui conduit, en posant $p = \frac{p_1 f}{p_2 h}$, à l'équation suivante en la variable $x' = \frac{h x'_1}{f x'_2}$:

$$\sqrt{x'^2 - C} = -\frac{f}{g}(x' + pC) \quad (2.71)$$

Prenons le carré de la relation précédente et tenons compte de la relation $f/g = 1/\sqrt{C+1}$ d'après la définition (2.52) de C . Il vient alors:

$$x'^2 - 2px' - [1 + (p^2 + 1)C] = 0 \quad (2.72)$$

d'où:

$$x' = p + \sqrt{(p^2 + 1)(C + 1)} \quad (2.73)$$

Ceci donne la relation de liaison explicite entre x'_2 et x'_1 . Le terme $\frac{\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{x}}' \rangle}{F}$ prend son maximum sur cette courbe. Il vaut alors:

$$\frac{\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{x}}' \rangle}{F} = p_2 / \frac{\partial F}{\partial x'_2} = -\frac{p_2}{x'_2} h^2 (CF + B) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{x}}' \rangle}{F} &= h \frac{f^2}{g} \left(\frac{p_2 h x'_1}{f f x'_2} + \frac{p_1}{h} C \right) \text{ d'après (2.71).} \\ &= h p_2 \frac{f}{g} (x' + pC) \\ &= \frac{h p_2}{\sqrt{C+1}} \left[p(C+1) + \sqrt{(p^2+1)(C+1)} \right] \text{ d'après (2.73)} \\ &= h p_2 \left[p\sqrt{C+1} + \sqrt{(p^2+1)} \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

d'où

$$\frac{\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{x}}' \rangle}{\|\vec{\mathbf{x}}'\|_F} = g p_1 + \sqrt{(f p_1)^2 + (p_2 h)^2} \quad (2.76)$$

Cette fonction est indépendante de \mathbf{x}' sur toute la courbe définie par la relation (2.73). Nous avons donc finalement:

$$\boxed{H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = g p_1 + \sqrt{(f p_1)^2 + (h p_2)^2}} \quad (2.77)$$

La forme ci-dessus de la transformée de Legendre est très simple. Nous retrouvons la même forme que pour la relation (2.28) de la vitesse intrinsèque du front du feu. Le lien entre la fonction $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ et la vitesse du front du feu va être précisé au paragraphe suivant.

2.3.6 Vitesse de propagation

La vitesse de propagation est donnée par :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\|\text{grad}(S)\|} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.78)$$

C'est-à-dire

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = \frac{H(\vec{x}, \text{grad}_{\vec{x}}(S))}{\|\text{grad}(S)\|}$$

d'après l'équation d'Hamilton Jacobi (2.62). L'expression du vecteur normal au front du feu est :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = \frac{\text{grad}(S)}{\|\text{grad}(S)\|} \quad (2.79)$$

Soit alors $\bar{p} = \vec{n} \cdot \vec{k}$ et $\bar{q} = \vec{\tau} \cdot \vec{k} = -\vec{n} \cdot \vec{k}^\perp$. On a donc :

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \bar{p} \|\text{grad}(S)\| \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \bar{q} \|\text{grad}(S)\| \quad (2.80)$$

En reportant dans l'expression de la vitesse donnée ci-dessus, il vient :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = \frac{H(\mathbf{x}, \bar{p} \|\text{grad}(S)\|, \bar{q} \|\text{grad}(S)\|)}{\|\text{grad}(S)\|} \quad (2.81)$$

d'où finalement

$$\boxed{\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = H(x, \bar{p}, \bar{q})} \quad (2.82)$$

car H est une fonction homogène de degré 1 des variables \bar{p} et \bar{q} . Pour la transformation de Legendre particulière donnée par la relation (2.77), l'expression de la vitesse de propagation s'écrit :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = g(\vec{x}, t) \bar{p} + \left[(f(\vec{x}, t) \bar{p})^2 + (h(\vec{x}, t) \bar{q})^2 \right]^{1/2} \quad (2.83)$$

On retrouve bien la même expression que la relation (2.28) obtenue au paragraphe 2.4. L'équation d'Hamilton Jacobi s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + g(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_1} + \sqrt{(f(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_1})^2 + (h(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_2})^2} = 0} \quad (2.84)$$

Une solution de l'équation ci-dessus est obtenue lorsque le milieu est uniforme :

$$S(x, t) = -t + \sqrt{\left(\frac{x_1 - gt}{f}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{h}\right)^2} \quad (2.85)$$

On retrouve bien le front du feu de forme elliptique donc le modèle est **auto-consistant** avec le modèle d'ellipse du paragraphe 2.1.

2.3.7 Les limites du modèle

Si le front du feu n'est pas convexe la méthode d'enveloppe conduit à l'apparition de boucles (cf. Richards [17, 21, 22, 23]). Celui-ci résout ce problème en utilisant une méthode numérique de reconnections. L'équation d'Hamilton Jacobi (2.62) peut permettre d'utiliser des méthodes numériques appropriées à de telles situations. Il en est de même de la collision de fronts du feu différents [17].

Je pense que le *modèle d'enveloppe* peut être obtenu comme cas limite du *modèle 2D surfacique avec front courbe* (cf. figure 1.20) dans un domaine qu'il reste à préciser. Nous pouvons alors utiliser la méthode des enveloppes qui conduit à un modèle dont la résolution numérique est très simple et très rapide. Des codes numériques de propagation de feux de forêt utilisant ce principe ont vu le jour dans les années 1990 comme Farsite [11]-[25] en Amérique. La méthode variationnelle ci-dessus donne aussi un cadre pour traiter les cas plus délicats comme les interactions de front de flamme.

2.4 Champs thermiques bidimensionnels associés à la propagation du feu

2.4.1 Champ thermique hyperbolique

L'étude de l'équation des ondes [8] nous enseigne que, lorsque $g = 0$, le front d'onde C_t précédent, qui vérifie l'équation d'Hamilton Jacobi (2.84), est une hypersurface caractéristique de l'équation des ondes bidimensionnelle, de variable $T_s(\mathbf{x})$, suivante

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div} \left(\overline{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) \text{grad}(T_s) \right) \quad (2.86)$$

où

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & h(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

est la célérité anisotrope définie précédemment en (2.30) dans le repère local $(\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{k}}^\perp)$ et où τ est un temps caractéristique.

$\overline{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x})$ est fonction des paramètres de la forêt et de son environnement par l'intermédiaire des paramètres f et h . Ces paramètres dépendent en particulier du vent ambiant. La présence d'un vent ambiant peut-être à l'origine du caractère anisotrope ($f \neq h$) de ce modèle. La topographie du terrain aussi.

Lorsque $g \neq 0$, nous allons proposer une équation hyperbolique qui généralise la relation (2.86), lorsque f, g, h sont **constants en espace et en temps**. Etudions pour cela le système hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial T_s}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} + g \frac{\partial T_s}{\partial x} + f^2 \frac{\partial u}{\partial x} + h^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

Godunov [13] a étudié ce système dans le cas où les paramètres f et h sont identiques. Notons alors $g \neq 0$ cette vitesse commune. Il est alors conduit à une expression de la vitesse $g \neq 0$ de la propagation des ondes qui vaut :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = g\bar{p} + c_0 [\bar{p}^2 + \bar{q}^2]^{1/2} = g\bar{p} + c_0 \quad (2.89)$$

Le système ci-dessus conduit donc bien à la relation (2.26) dans le cas particulier où f et h sont identiques. Le terme g peut être interprété comme un **terme de transport convectif global**. Traitons le cas général où f et h sont différents. La dérivation de la première relation du système (2.88) par rapport à la variable x , de la deuxième relation par rapport à la variable y et de la dernière relation rapport au temps permet d'éliminer les variables $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}$ entre les relations du système alors obtenu. Il vient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 T_s}{\partial x \partial t} = f^2 \left(g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \right) + h^2 \left(g \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) \quad (2.90)$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 T_s}{\partial x \partial t} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(f^2 \frac{\partial u}{\partial x} + h^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(h^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + f^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \right) \quad (2.91)$$

Il reste alors à éliminer le terme $f^2 \frac{\partial u}{\partial x} + h^2 \frac{\partial v}{\partial y}$ grâce à la dernière équation du système (2.88) afin d'obtenir une équation vérifiée par la grandeur T_s uniquement, d'où :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + 2g \frac{\partial^2 T_s}{\partial t \partial x} + g^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = \text{div} \left(\overline{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) \text{grad}(T_s) \right) \quad (2.92)$$

Notons alors $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ et $\overline{\overline{\mathbf{B}}}$ le vecteur et la matrice définis dans le repère local (\vec{k}, \vec{k}^\perp) respectivement par :

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{\overline{\mathbf{B}}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

L'équation (2.92) prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}}} \text{grad}(T_s) \right) = \text{div} \left(\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{B}}} \right) \text{grad}(T_s) \right) \quad (2.94)$$

On voit immédiatement que (2.94) se réduit à (2.86) lorsque $g = 0$.

Vérifions que (2.94) conduit bien à des ondes qui ont pour vitesse de propagation celle donnée par la relation (2.26). Etudions pour cela le cas de la propagation d'ondes planes dans un milieu uniforme, c'est-à-dire pour f , h et g constants. Pour cela, cherchons le champ de température T_s sous la forme complexe :

$$T_s = T \exp \left[i(\vec{k}^\top \cdot \vec{x} - \omega t) \right] \quad (2.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_s}{\partial t} = -i\omega T \\ \frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} = -\omega^2 T \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\overline{\mathbf{C}} \operatorname{grad}_x(T_s) \right) = [(fk'_1)^2 + (hk'_2)^2] T \\ 2g \frac{\partial^2 T_s}{\partial t \partial x} + g^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = [2g\omega k'_1 - k_1'^2 g^2] T \end{array} \right. \quad (2.96)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}' = (k'_1, k'_2) = k(\bar{p}, \bar{q}) \\ k = R_e(k) + iI_m(k) = (X + iY)\omega \end{array} \right. \quad (2.97)$$

par définition de X et Y . L'équation (2.94) s'écrit alors :

$$-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - 2\omega g \bar{p} k + k^2 [(f^2 - g^2)\bar{p}^2 + h^2 \bar{q}^2] = 0 \quad (2.98)$$

En séparant parties réelles et imaginaires il vient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 - 2g\bar{p}X + [(f^2 - g^2)\bar{p}^2 + h^2 \bar{q}^2] [X^2 - Y^2] = 0 \\ -\frac{1}{\tau\omega} - 2g\bar{p}Y + [(f^2 - g^2)\bar{p}^2 + h^2 \bar{q}^2] XY = 0 \end{array} \right. \quad (2.99)$$

Posons

$$C^2 = (f^2 - g^2)\bar{p}^2 + h^2 \bar{q}^2 \quad (2.100)$$

La résolution du système précédant en variables (X, Y) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = (\frac{1}{\tau\omega}) / (C^2 X - 2g\bar{p}) \\ -1 - 2g\bar{p}X + C \left[X^2 - \frac{(1/\tau\omega)^2}{(C^2 X - 2g\bar{p})^2} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (2.101)$$

Dans le cas $\tau\omega \gg 1$, il vient $-(\frac{1}{X})^2 + 2g\bar{p}\frac{1}{X} - C = 0$ et finalement la vitesse de phase :

$$\boxed{\dot{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{\omega}{R_e(k)} = \frac{1}{X} = g\bar{p} + [(f\bar{p})^2 + (h\bar{q})^2]^{1/2}} \quad (2.102)$$

Nous retrouvons bien la même forme que pour la relation (2.26).

Nous allons montrer maintenant qu'un point source initial se développe de manière elliptique lorsque les coefficients f, g, h sont indépendants de l'espace et du temps. Nous allons donner de plus la forme générale de l'évolution du champ de température T_s en fonction de sa valeur initiale. Pour cela, nous allons effectuer plusieurs changements de variables successifs de manière à simplifier la forme de l'équation (2.94) :

Effectuons tous d'abord le changement de variable $x_1 = x - gt$ suivant la coordonnée x de manière à obtenir une équation qui ne fasse plus intervenir le coefficient g . Il vient :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} = f^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_1^2} + h^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (2.103)$$

Dilatons alors l'espace de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = (1/f)x_1 \\ Y = (1/h)y \end{array} \right. \quad (2.104)$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial Y^2} \quad (2.105)$$

L'équation précédente ne fait plus intervenir de paramètres. Il reste à la résoudre. Nous reconnaissons l'équation classique des ondes. La solution élémentaire vaut :

$$T_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{X^2 + Y^2}} Y(t^2 - X^2 - Y^2) Y(t) \quad (2.106)$$

où Y est la fonction d'Heaviside. En effectuant les dilatations inverses, nous déduisons le résultat suivant :

La solution élémentaire de l'équation (2.94) est :

$$T_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{f^2}(x-gt)^2 + \frac{1}{h^2}y^2}} Y\left(t^2 - \frac{1}{f^2}(x-gt)^2 - \frac{1}{h^2}y^2\right) Y(t) \quad (2.107)$$

Nous en déduisons [10] alors la forme générale de la solution de (2.94) :

$$\begin{aligned} T_s(t, \mathbf{x}) = & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{Y\left(t^2 - \frac{1}{f^2}(x-x'-g(t-t_0))^2 - \frac{1}{h^2}(y-y')^2\right) Y(t)}{2\pi\sqrt{\frac{1}{f^2}(x-x'-g(t-t_0))^2 + \frac{1}{h^2}(y-y')^2}} \right) \Bigg|_{t_0=0} T_s(0, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ & - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{Y\left(t^2 - \frac{1}{f^2}(x-x'-g(t-t_0))^2 - \frac{1}{h^2}(y-y')^2\right) Y(t)}{2\pi\sqrt{\frac{1}{f^2}(x-x'-g(t-t_0))^2 + \frac{1}{h^2}(y-y')^2}} \frac{\partial T_s}{\partial t}(0, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.108)$$

La solution (2.107) conduit à la possibilité d'avoir des ondes solutions de la forme :

$$\frac{1}{f^2}(x-gt)^2 + \frac{1}{h^2}y^2 - 4t^2 = 0 \quad (2.109)$$

On reconnaît une onde de forme elliptique qui se propage à vitesse constante. Elle possède la même forme que celle donnée par la relation paramétrique (2.1).

La relation (2.109) ne doit être employée qu'en avant du front du feu si l'on se donne la position de celui-ci par une isotherme d'inflammation T_i . Le problème posséderait sinon une condition aux limites en trop.

Nous allons voir enfin que la thermodynamique des processus irréversibles étendue (T.P.I.E.) [14] permet de donner un sens aux coefficients τ et $\bar{C}(\mathbf{x})$ introduits ci-dessus. Cette thermodynamique est dite étendue, car elle ne fait plus l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. Le phénomène de relaxation vers l'équilibre thermodynamique local peut alors être modélisé.

Soit un bilan d'énergie du type :

$$\rho_s C_p \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\text{div}(q_s) \quad (2.110)$$

où ρ_s est la masse volumique. C_p est la capacité calorifique de la végétation et T_s le champ de température.

Choisissons une équation du flux thermique \mathbf{q}_s de la forme suivante :

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}_s}{\partial t} + \mathbf{q}_s = -\text{div}(\lambda(\mathbf{x})\text{grad}(T_s)) \quad (2.111)$$

avec τ un temps caractéristique dit de relaxation et λ la conductivité thermique.

Le système formé par les équations (2.110)-(2.111) est de type hyperbolique. Il rentre dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles étendue. En dérivant la première relation (2.110) par rapport au temps et en utilisant (2.111) nous obtenons l'équation suivante vérifiée par le champ de température T_s :

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\lambda(\mathbf{x})/\tau(\mathbf{x})}{\rho_s C_p} \text{grad}(T_s)\right) \quad (2.112)$$

Identifions les coefficients des deux équations (2.86) et (2.112) pour T_s . Il vient alors :

$$\boxed{\overline{\overline{C}}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda(\mathbf{x})/\tau(\mathbf{x})}{\rho_s C_p}} \quad (2.113)$$

L'intérêt de cette relation est qu'elle permet de relier la matrice $\overline{\overline{C}}(\mathbf{x})$, et donc les coefficients $f(x)$ et $h(x)$ d'après la relation (2.87), aux paramètres physiques ρ_s , C_p , λ et τ .

En thermodynamique des processus irréversibles étendue, le temps de relaxation τ s'interprète comme un temps caractéristique de retour à l'**équilibre thermodynamique local**. Le caractère hyperbolique de l'équation (2.112) conduit à la possibilité d'avoir des ondes qui se propagent comme ceci se produit lorsque l'on expose un solide à un éclair lumineux très bref et assez intense. Nous ne sommes cependant pas pour les feux de forêt dans les mêmes ordres de grandeur de temps caractéristiques du paramètre de relaxation τ que pour la propagation d'une onde thermique suite à un éclair lumineux. Le temps mis pour **évaporer l'humidité du combustible** et amener celui-ci de la température ambiante à sa température d'inflammation via le mécanisme limitant de pyrolyse que nous avons vu au chapitre 1 est plus grand. Ce temps caractéristique peut être modélisé par le coefficient τ .

La forme de dépendance de ce paramètre en fonction de la température ambiante, de la température d'inflammation et de l'humidité initiale de la végétation n'est pas donnée. La **conductivité thermique** λ peut aussi bien être interprétée comme une *conductivité dans la phase gazeuse* que comme une conductivité d'origine *radiative* si l'on admet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, que la conductivité de la végétation ne joue pas de rôle dans le transfert horizontal d'énergie. Les dépendances entre les paramètres précédents doivent être précisées de manière à justifier physiquement la méthode des enveloppes. Ceci doit être réalisé à partir d'un modèle plus complet d'équations de bilans bidimensionnelles sur une surface, équations qui tiennent compte des mécanismes physique de pyrolyse, de

vaporisation de l'eau contenues dans les végétaux et de transfert thermiques. Ces équations seront obtenues au chapitre 4.

Le cadre de l'extension de la démonstration ci-dessus au cas $g \neq 0$ pour obtenir l'équation (2.92) reste à être trouvé. Le système (2.88) est un exemple de problème qui conduit à l'équation (2.92). Le coefficient g apparaît comme un **transfert convectif du au vent local**. La signification physique à donner aux grandeurs u et v n'est cependant pas évidente et reste à être précisée. De plus, le modèle des enveloppes étant un modèle limite, plusieurs système physiques d'équations peuvent conduire à ce modèle. C'est le problème classique d'Hadamard [7] lors de l'étude du principe de Huygens.

Plus encore, des équations de transports non hyperboliques peuvent conduire à la propagation d'ondes du type précédent [10]. C'est le cas pour les équations de type réaction-diffusion que nous allons étudier au paragraphe suivant. Il apparaît donc important d'avoir une démarche déductive qui permette de conduire à un modèle physique de propagation des feux de forêt valide. Ceci sera réalisé au chapitres 3 et 4. Nous pourrons alors tenter de trouver le domaine de validité du modèle non justifié des enveloppes.

2.4.2 Champ thermique vérifiant une équation de réaction diffusion

Nous allons montrer qu'une équation de type réaction-diffusion conduit aussi classiquement à l'existence de front de propagation. Pour cela considérons que le champ de température T_s vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\text{grad}(T_s) = \text{div} \left(\frac{\bar{\mathbf{C}}^2(\mathbf{x})}{\mathbf{F}(\mathbf{x})}\text{grad}(T_s) \right) + \mathbf{F}(\mathbf{x})T_s \quad (2.114)$$

où $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ et $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ ont été définis au paragraphe précédent et où $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ est une fonction supposée connue de l'espace.

C'est une équation de réaction-diffusion. Le terme $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x})^2/\mathbf{F}(\mathbf{x})$ correspond à un **coefficient de diffusion**, le terme $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ est un terme source qui modélise la **chaleur dégagée par une réaction**. Le terme $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ qui possède la dimension d'une vitesse modélise le **transfert convectif**.

Weber [26] (1991) a montré qu'un point source initial se développe de manière elliptique lorsque les coefficients f , g , h sont indépendants de l'espace ainsi que la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ que l'on note alors F . Nous allons retrouver ce résultat et donner la forme générale de l'évolution du champ de température T_s en fonction de sa forme initiale. Pour cela, nous allons effectuer plusieurs changements de variables successifs de manière à simplifier la forme de l'équation (2.114).

Effectuons tous d'abord le changement de variable $x_1 = x - gt$ suivant la coordonnée x de manière à obtenir une équation qui ne fasse plus intervenir le coefficient g . Il vient :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{f^2}{F} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_1^2} + \frac{h^2}{F} \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + FT_s \quad (2.115)$$

Dilatons alors le temps et l'espace de la manière suivante :

$$\begin{cases} t_1 = Ft \\ X = (F/f)x_1 \\ Y = (F/h)y \end{cases} \quad (2.116)$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial Y^2} + T_s \quad (2.117)$$

L'équation précédente ne fait plus intervenir de paramètres. Il reste à la résoudre. Pour cela remarquons que l'on peut encore éliminer le terme source de droite en contractant le champ de température. Posons :

$$\theta_s = T_s e^{-t} \quad (2.118)$$

Nous sommes conduits à :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial Y^2} \quad (2.119)$$

On reconnaît l'équation classique de la thermique. La *solution élémentaire* [8] vaut :

$$\theta_s = \frac{1}{4\pi t} e^{-(X^2+Y^2)/4t} \quad (2.120)$$

En effectuant les dilatations inverses, nous déduisons le résultat suivant :

La solution élémentaire de l'équation (2.114) est :

$$T_s = \frac{1}{4\pi Ft} e^{-\frac{F}{4t} \left[\frac{1}{f^2}(x-gt)^2 + \frac{1}{h^2}y^2 - 4t^2 \right]} \quad (2.121)$$

Nous en déduisons alors la forme générale de la solution de (2.114) :

$$T_s(t, \mathbf{x}) = \int_{R^2} \frac{1}{4\pi Ft} e^{-\frac{F}{4t} \left[\frac{1}{f^2}(x-x'-gt)^2 + \frac{1}{h^2}(y-y')^2 - 4t^2 \right]} T_s(0, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.122)$$

La solution (2.120) conduit à la possibilité d'avoir des ondes solutions de la forme :

$$\frac{1}{f^2}(x-gt)^2 + \frac{1}{h^2}y^2 - 4t^2 = 0 \quad (2.123)$$

On reconnaît une onde de forme elliptique qui se propage à vitesse constante. Elle possède la même forme que celle donnée par la relation paramétrique (2.1).

La propagation de l'onde est d'autant plus rapide que la diffusion est grande et que l'énergie produite par la réaction de combustion est grande. La relation (2.114) ne doit être employée qu'en avant du front du feu si l'on se donne la position de celui-ci par

une isotherme d'inflammation T_i . Le problème posséderait sinon une condition aux limites en trop.

Comparons le résultat précédent au calcul de propagation de flamme de prémélange gazeux. La propagation de flamme de prémélange bidimensionnelle gazeux classique en combustion [27] obéit à des équations de type réaction-diffusion en avant du front de flamme et de type convection-diffusion en arrière du front de flamme lorsque la zone en feu est d'épaisseur très mince. L'étude de celles-ci permet d'obtenir la température d'inflammation et a montré que la vitesse de propagation de la flamme *dépend de manière intrinsèque de la courbure de ce front* par l'intermédiaire d'un coefficient que l'on nomme nombre de Markstein [27]. La méthode des enveloppes apparaît alors comme une approximation qui néglige la courbure de cette flamme. La propagation des feu de végétation est plus complexe que celle de gaz prémélangés au sens où la végétation joue le rôle d'une phase supplémentaire comme nous l'avons vu au chapitre 1. Des caractères similaires doivent cependant être retrouver.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenter la méthode géométrique bidimensionnelle des ellipses et nous en avons donné une formulation variationnelle. Des équations thermiques de deux types différents peuvent conduire à des propagations d'ondes. La première est de type hyperbolique et la deuxième de type réaction-diffusion. La raison de la propagation de l'onde est due à la transmission d'un déséquilibre thermique pour la première et à la transmission par diffusion de la chaleur produite par la combustion pour la seconde. La propagation de l'onde est alors d'autant plus rapide que la diffusion est grande et que l'énergie produite par la réaction de combustion est grande.

Mais comment interpréter le terme de diffusion. Est-ce de la diffusion radiative, de la diffusion effective macroscopique comme nous l'avons définie au chapitre 1?

L'équation thermique hyperbolique qui permet une interprétation physique du rôle du vent et de l'humidité respectivement en temps que terme de retard à l'équilibre thermodynamique et de transport convectif grâce à la thermodynamique des processus irréversibles étendue. Néanmoins, la forme de la corrélation reliant le temps de relaxation à l'humidité du combustible végétal ainsi que le coefficient de transport convectif à la vitesse du vent et à sa direction par rapport au front du feu restent à être déterminée. Cette corrélation pourrait être obtenue par le modèle de Rothermel. Cependant nous avons vu au chapitre 1 que ce modèle a le désavantage de n'être pas dimensionné et de postuler la forme arbitraire des corrections pour tenir compte de l'humidité et du vent sans que cette forme soit déduite de mécanismes physiques.

On perd alors la compréhension du rôle relatif de ceux-ci ainsi que le caractère adaptatif du modèle à une variété importante de régimes différents de propagation du feu selon le type de forêt et les conditions de propagation du feu.

Pire, nous avons vu que la méthode des enveloppes est une méthode générale pour simuler la propagation d'ondes et qu'elle peut être associée à des équations de type réaction-diffusion aussi bien que de type hyperbolique. Nous ne pouvons donc pas postuler simplement le modèle 2D surfacique de champ thermique qui conduit au modèle des

enveloppes, car nous en trouvons alors plusieurs (C'est le problème d'Hadamard [7]). Ces modèles restent donc **des modèles non justifiés**. *Les limites de validité du modèle des ellipses et des corrélations associées ne peuvent donc être estimées ce qui est très limitatif.*

Nous nous proposons donc dans le prochain chapitre de présenter un *modèle physique* tridimensionnel de feux de forêt de manière à faire apparaître physiquement les différents mécanismes qui influencent la vitesse de propagation du feu. Il nous faudra alors réduire celui-ci afin d'obtenir un modèle 2D surfacique de champ thermique non ad hoc. Ceci sera réalisé au chapitre 4.

Bibliographie

- [1] **Andre J.C.S.** and **Viegas D.X.**, A strategy to model the average fireline movement of a light to medium intensity surface forest fire, *2nd International Conference on Forest Fire Research*, Coimbra, Portugal, 1994, Vol. 1, B.02, pp. 221-242.
- [2] **Anderson D.H.**, **Catchpole E.A.**, **De Mestre N.J.**, and **Parkes T.**, Modelling the spread of grassland fires, *J. Austral. Math. Soc. (series B)*, 1982, Vol. 13, pp. 452-466.
- [3] **Anderson D.H.**, A mathematical model for fire containment, *Can. J. For. Res.*, 1989, Vol. 19, pp. 997-1003.
- [4] **Arnold V.I.**, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, *ed. Mir*, 1978.
- [5] **Catchpole E.A.**, **De Mestre N.J.** and **Gill A.M.**, Intensity of fire at its perimeter, *Aust. For. Res.*, 1982, Vol.12, pp. 47-54.
- [6] **Catchpole E.A.**, **Alexander M.E.** and **Gill A.M.**, Elliptical-fire perimeter- and area-intensity distributions, *Can. J. For. Res.*, 1992, Vol. 22, pp. 968-972.
- [7] **Chalykh O.A.** and **Veselov A.P.**, Integrability and Huygens' Principle on symmetric spaces, *Commun. Math. Phys.*, 1996, Vol. 178, pp. 311-338.
- [8] **Courant R.** & **Hilbert D.**, Methods of mathematical physics, Vol. II, *interscience* ; New York-Londres, 1962.
- [9] **Dorrer G.A.**, Modelling forest fire spreading and suppression on basis of Hamilton mechanics methods, in G.A. Dorrer (ed.). *Scientific Siberian A : special issue forest fires modelling and simulation*, 1993, pp. 97-116.
- [10] **Enders P.**, Huygens' principle and the modelling of propagation, *Eur. J. Phys.*, 1996, Vol. 17, pp. 226-235.
- [11] **Finney M.A.**, Modeling the spread and behavior of prescribed natural fires, *Proc. 12th conf. Fire and forest meteorology*, 1994, pp. 138-143.
- [12] **Finney M.A.**, FARSITE Home Page , http://www.montana.com/sem/public_html/farsite/farsite.html, sept 1997.
- [13] **Godounov S.**, Equations de la physique mathématique, *ed. MIR*, Moscou, 1973.

- [14] **Jou D., Casas-Vazquez J. and Lebon G.**, Extended irreversible thermodynamics, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1993.
- [15] **Knight I. and Coleman J.**, A fire perimeter expansion algorithm based on Huygens' wavelet propagation, *Int. J. Wildland Fire*, 1993, Vol. 3, No. 2, pp. 73-84.
- [16] **Lemarchand F.**, Les feux de forêts, d'ellipses en ellipses : un modèle semi-empirique pour prévoir la propagation d'un incendie, *La Recherche*, 1997, Vol. 299, pp. 42-43.
- [17] **McAlpine R.S.**, Temporal variations in elliptical forest fire shapes, *Can. J. For. Res.*, 1989, Vol. 19, pp. 1496-1500.
- [18] **Mess R., Strauss D., Chase R.**, Minimizing the cost of wildland fire suppression : a model with uncertainty in predicted flame length and fire-line width produced, *Can. J. For. Res.*, 1994, Vol. 24, pp. 1253-1259.
- [19] **Peet G.B.**, The shape of mild fires in Jarrah forest, *Aus. Forestry*, 1967, Vol. 31, pp.121-127.
- [20] **Richards G.D.**, An elliptical growth model of forest fire fronts and its numerical solution, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1990, Vol.30, pp. 1163-1179.
- [21] **Richards G.D.**, The properties of elliptical wildfire growth for time dependent fuel and meteorological conditions, *Comb. Sci. and Technol.*, 1993, vol. 92, pp. 145-171.
- [22] **Richards G.D.**, A general mathematical framework for modelling two-dimensional wildland fire spread, *Int. J. Wildland Fire*, 1995, Vol. 5, No. 2, pp. 63-72.
- [23] **Richards G.D. and Bryce W.**, A computer algorithm for simulating the spread of wildland fire perimeters for heterogeneous fuel and meteorological conditions, *Int. J. Wildland Fire*, 1995, Vol. 5, No. 2, pp. 73-79.
- [24] **Van Wagner C.E.**, A simple fire-growth model, *Forestry Chron.*, 1969, Vol 45, No. 2, pp. 103-104.
- [25] **Wallace G.**, A numerical fire simulation model, *Int. J. Wildland Fire*, 1993, Vol. 3, No. 2, pp. 111-116.
- [26] **Weber R.O.**, Toward a comprehensive wildfire spread model, *Int. J. Wildland Fire*, 1991, vol. 1, No.4, pp. 245-248.
- [27] **Zeldovich Ya. B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhvidaze G.M.**, The mathematical theory of combustion and explosions, *New York: Consult. Bur.*, 1985.

Chapitre 3

Système d'équations macroscopiques de la propagation des feux de forêts

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un **système d'équations** macroscopiques pour la propagation de feux de forêt. Ce système doit faire apparaître les différents mécanismes qui influencent la vitesse de propagation du feu. La forêt est un milieu diphasique constitué d'air et de végétation, à travers laquelle le vent s'engouffre. La végétation, dite phase particule végétale (cf. paragraphe 1.3), est un milieu poreux constitué des constituant air et végétal. Le constituant végétal est lui-même un milieu poreux qui se dégrade thermiquement (pyrolyse) et produit ainsi des gaz qui diffusent dans le milieu poreux et brûlent avec l'air pour donner des flammes vives. La forêt apparaît alors comme *un milieu poreux avec modèle de microstructure*. De tels systèmes se rencontrent très fréquemment dans la nature lorsque l'on étudie des phénomènes de grande envergure qui font intervenir le comportement à une échelle plus petite. C'est le cas par exemple pour l'extraction du pétrole dans un sol qui possède de nombreuses cavités [11].

Les équations de la phase particule végétale, du système d'équations macroscopique présenté, ne sont pas immédiates à écrire. Nous nous proposons donc de les obtenir, grâce à une **homogénéisation**, à partir des *équations mésoscopiques* de la mécanique des milieux poreux valables dans la phase végétale et dans la phase gaz (cf. figure 1.14) qui entoure les végétaux. Les équations mésoscopiques de la phase particule végétale sont donc rappelées dans une étape préparatoire.

Pour réaliser l'homogénéisation d'un milieu deux méthodes sont utilisables l'homogénéisation développée par Sanchez-Palencia [22] (cf. aussi Hornung [11]) ou la méthode de prise de moyenne de Quintard et Whitaker [19]. Ces deux méthodes ne sont pas concurrentes mais complémentaires. Il est possible d'obtenir les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Liouville et des prises de moyenne sur les quantités conservées en Mécanique Statistique, par un développement asymptotique ou de postuler la dépendance des contraintes visqueuses à partir de considérations phénoménologiques macroscopiques. Il en va de même pour les milieux poreux : l'homogénéisation à partir d'un choix des échelles dans les équations fournit la forme et l'expression des lois macroscopiques en

fonction des paramètres, par un développement multi échelles, alors qu'il faut postuler les équations de fermeture dans la méthode de prise de moyenne. La notion d'échelle est sous-jacente dans cette dernière méthode mais elle fournit directement des lois dont les paramètres sont accessibles (en principe) à l'expérience. Nous avons choisi d'exposer la modélisation par prise de moyenne, plus précisément celle développée par C.M. Marle [17] en 1982, car celle-ci possède l'avantage d'être directe et de fournir des modèles où le choix d'échelle n'apparaît pas a priori.

Cette méthode consiste à réaliser une **prise de moyenne** des équations mésoscopiques, afin d'obtenir un système d'équations vérifiées par des grandeurs moyennes macroscopiques. Les principes de la thermodynamique des processus irréversibles sont ensuite appliqués afin d'obtenir des relations supplémentaires, dites phénoménologiques, qui permettent d'obtenir un système fermé d'équations à l'échelle macroscopique. Les principes de celle-ci ont été donnés par C.M. Marle [17]. Celui-ci a appliqué cette méthode à un milieu poreux constitué de plusieurs phases au sein desquelles se produit de la diffusion et des réactions chimiques.

L'obtention des conditions de saut entre la phase végétale et la phase air est alors discutée. Nous détaillons enfin le *système d'équations régissant le transfert radiatif*.

3.1 Système d'équations macroscopiques de feux de forêt

3.1.1 Les différentes phases macroscopiques

La description macroscopique des feux de forêt que nous avons réalisée au paragraphe 1.1 montre que la forêt est un milieu hétérogène verticalement, par la présence de strates (cf. figure 1.9), et horizontalement (cf. figure 1.10). Cette hétérogénéité se caractérise par la présence de plusieurs phases :

1. Les strates végétales se distinguent par des valeurs très différentes des caractéristiques physiques telles que sa densité d'occupation d , la porosité macroscopique Φ et la surface d'échange σ (cf. figures 1.14 et 3.1).

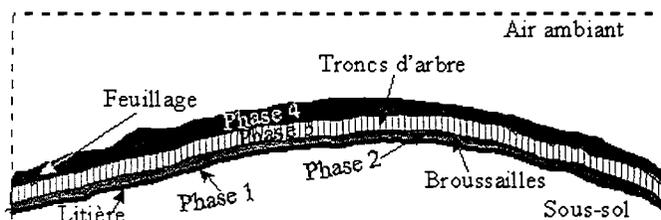


FIG. 3.1 – Différentes phases végétales

L'ensemble de ces strates forme la couverture végétale. Celle-ci est délimitée par le sous-sol pour sa partie inférieure et par l'air ambiant pour sa partie supérieure. Si nous

études une forêt stratifiée constituée de n zones végétales numérotées de bas en haut, la première zone est délimitée par le sous-sol pour sa partie inférieure et la $n^{\text{ième}}$ zone par l'air ambiant pour sa partie supérieure. Notons $\bar{\Sigma}$ l'interface zone végétale - air ambiant et $\underline{\Sigma}$ l'interface zone végétale - sous-sol. Le cas d'une seule zone végétale est déjà significatif de certains feux réels. Nous avons représenté les interfaces $\bar{\Sigma}$ et $\underline{\Sigma}$ sur la figure 3.2.

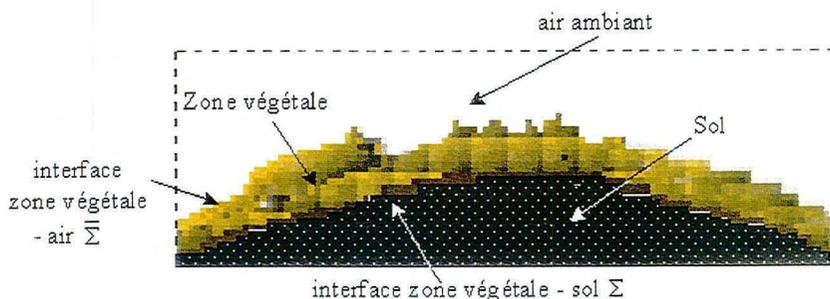


FIG. 3.2 – Description des interfaces délimitants une strate végétale unique

2. Chaque strate végétale est elle-même un milieu polyphasique constituée de phases nommées airs et de phases nommées phases particules végétales (cf. tableau 1.1 et figure 3.3).

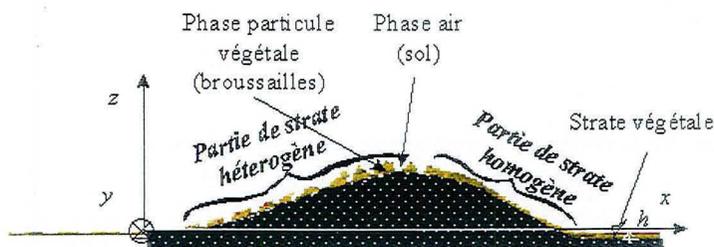


FIG. 3.3 – Hétérogénéité horizontale d'une strate de végétation

Nous allons écrire le système d'équations macroscopique vérifié par les feux de forêts. Les équations qui sont valables dans la phase air sont les mêmes que celles de la phase air ambiant. Nous allons donc écrire les équations qui sont valables dans l'air ambiant, dans le sous-sol, puis dans la phase particule végétale. Les conditions de saut entre ces différentes phases seront alors précisées. Ce système n'est pas immédiat à écrire, car il n'est pas classique : la forêt est un milieu macroscopique avec microstructure. L'obtention de celui-ci par homogénéisation est réalisée aux paragraphes 3.3-3.4.

3.1.2 Equations macroscopiques dans l'air ambiant et dans le sous-sol

L'air ambiant est un mélange de gaz qui sont sujets à participer à des réactions de combustion vive avec présence d'une flamme vive. Ces gaz sont les suivants :

1. l'oxygène de l'air O_2
2. les gaz inertes : principalement l'azote N_2
3. la vapeur d'eau $(H_2O)_v$
4. le fuel dégagé par la pyrolyse noté F (cf. paragraphe 1.3.4)
5. les produits de combustion notés P

Les espèces chimiques indicées par i sont donc au nombre de 5. Par définition, $\bar{\rho}_i$ est la masse volumique de la $i^{ème}$ espèce chimique et \bar{W}_i sa masse molaire.

Nous avons choisi de rajouter une barre au-dessus des grandeurs associées à l'air ambiant, ainsi qu'une barre au-dessous des grandeurs associées au sol, afin de distinguer les grandeurs associées à cette phase de celles associées à la strate de végétation. Nous définissons alors :

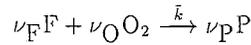
- la masse volumique totale $\bar{\rho}$ par

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^5 \bar{\rho}_i \quad (3.1)$$

- la densité massique de la $i^{ème}$ espèce chimique par

$$\bar{Y}_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} \quad (3.2)$$

Elles participent à la réaction de combustion irréversible suivante :



où ν_F , ν_O et ν_P sont les coefficients stoechiométriques de la réaction et où \bar{k} est la constante spécifique de la réaction.

Soient $\dot{\omega}_i$ la vitesse de production de masse de la $i^{ème}$ espèce chimique. La conservation des espèces chimiques, lors des réactions chimiques, conduit aux relations de liaison suivantes :

$$-\nu_O \dot{\omega}_{O_2} / W_{O_2} = -\nu_F \dot{\omega}_F / W_F = \nu_P \dot{\omega}_P / W_P = \bar{\psi} \quad (3.3)$$

où $\bar{\psi}$ est par définition le rapport constant de la relation (3.3). C'est la vitesse de production de masse de la réaction d'oxydation ci-dessus.

L'oxydation suit une réaction d'ordre total $\nu_F + \nu_O$:

$$\bar{\psi} = \bar{k}(\bar{T})(\bar{\rho}\bar{Y}_F)^{\nu_F}(\bar{\rho}\bar{Y}_{O_2})^{\nu_O} \quad (3.4)$$

où \bar{T} désigne la température de l'air ambiant.

Les équations macroscopiques, dans l'air ambiant $\bar{\Omega}$, sont les équations de Navier-Stokes classiques des mélanges de gaz parfaits :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{Y}_i) + \text{div}(\bar{\rho}\bar{Y}_i\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{J}}_i) = \dot{\omega}_i \quad (3.5)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \text{grad}\bar{\mathbf{V}}\right) - \text{div}(\bar{\mathbf{T}}) = -\text{grad}\bar{P} + \bar{\rho}\mathbf{g} \quad (3.6)$$

Bilan d'énergie interne total :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\bar{E} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{V}}|^2 \right) \right] \\ + \text{div} \left[\bar{\rho} \left(\bar{E} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{V}}|^2 \right) \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \right] \end{array} \right) = \bar{\rho}\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad (3.7)$$

avec $\bar{\mathbf{V}}$ la vitesse barycentrique, \bar{P} la pression et \bar{E} l'énergie interne. On a

$$\sum_{i=1}^5 \bar{Y}_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^5 \bar{\mathbf{J}}_i = 0 \quad (3.8)$$

où l'expression des flux et des lois d'état est classique :

Le tenseur des contraintes $\bar{\mathbf{C}} = -\bar{P}\mathfrak{S} + \bar{\mathbf{T}}$ (pour un fluide Newtonien) vérifie :

$$\bar{\mathbf{C}} = -[\bar{P} + \frac{2}{3}\bar{\mu}\text{div}\bar{\mathbf{V}}]\mathfrak{S} + 2\bar{\mu}\bar{D} \quad (3.9)$$

où $\bar{\mu}$ est la viscosité dynamique, \mathfrak{S} est le tenseur identité et $\bar{D} = \frac{1}{2}(\text{grad}\bar{\mathbf{V}} + \text{grad}^T\bar{\mathbf{V}})$.

Le flux de chaleur $\bar{\mathbf{Q}}$ est donné par la relation :

$$\bar{\mathbf{Q}} = -\bar{\lambda}\text{grad}\bar{T} + \bar{\rho}\sum_{i=1}^N \bar{H}_i\bar{Y}_i\bar{\mathbf{j}}_i + \bar{\mathbf{Q}}_r \quad (3.10)$$

où $\bar{\lambda}$ est la conductivité thermique, $\bar{H}_i(\bar{T})$ est l'enthalpie de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique et $\bar{\mathbf{Q}}_r$ est le flux radiatif.

Les flux de diffusion des espèces $\bar{\mathbf{j}}_i$ peuvent être donnés par des lois de Fick :

$$\bar{Y}_i\bar{\mathbf{j}}_i = -\bar{D}_i\text{grad}\bar{Y}_i \quad (3.11)$$

où \bar{D}_i sont les coefficients de diffusion.

Le flux radiatif $\bar{\mathbf{Q}}_r$ est considéré comme nul dans l'air ambiant.

L'équation d'état :

$$\bar{P} = R^0\bar{T}\sum_{i=1}^5 \bar{Y}_i/\bar{W}_i \quad (3.12)$$

L'équation d'état calorique :

$$\bar{H}_i(T) = \bar{H}_i^0 + \int_{T^0}^{\bar{T}} C_{P,i} dT_i \text{ pour } 1, \dots, 5 \quad (3.13)$$

où \bar{H}_i^0 est l'enthalpie de formation de la i ème espèce chimique à la température de référence T^0 et $C_{P,i}$ est la capacité calorifique, à pression constante, de la i ème espèce chimique.

L'enthalpie massique \bar{H} s'écrit alors $\bar{H} = \sum_{i=1}^5 \bar{Y}_i \bar{H}_i$ et

$$\bar{E} = \bar{H} - \bar{P}/\bar{\rho} \quad (3.14)$$

Les équations dans la phase air de la strate végétale sont les mêmes que celles ci-dessus. Nous indiquerons les grandeurs par a au lieu d'une barre afin de distinguer celles-ci.

Les équations dans le sous-sol $\underline{\Omega}$ se réduisent au bilan énergétique suivant :

$$\underline{\rho} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \text{div} \underline{\mathbf{Q}} = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$\underline{\mathbf{Q}} = -\lambda \text{grad} T \quad (3.16)$$

3.1.3 Phase particule végétale

C'est un milieu poreux avec microstructure (cf. figure 3.3). Il est formé d'un constituant air+gaz, indicé par f pour fluide et d'un constituant végétal, indicé par p pour poreux (cf. figure 3.4).

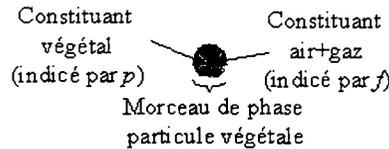


FIG. 3.4 - Morceau de phase particule végétale

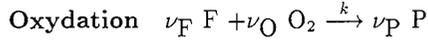
Le constituant air et gaz est formé des mêmes espèces chimiques que la phase air à savoir :

O ₂	N ₂
le fuel F	(H ₂ O) _v
les produits de combustion P	le goudron G

Les éléments du constituant végétal sont :

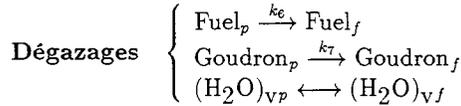
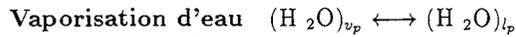
les solides	{ le bois B le charbon C	les gaz	{ fuel F goudron G (H ₂ O) _v	le liquide eau (H ₂ O) _l
-------------	-----------------------------	---------	--	--

Les réactions qui ont lieu au sein de la particule végétale sont la réaction d'oxydation, dans le constituant air, la pyrolyse et la vaporisation d'eau, dans le constituant végétal, et les **dégazages**. Ces dégazages sont des transformations des espèces chimiques du constituant végétal en des espèces chimiques du constituant air+gaz. Nous les notons :



Pyrolyse

Réactions primaires	Réactions secondaires
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bois} \xrightarrow{k_1} \text{Fuel} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_2} \text{Charbon} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_3} \text{Goudron} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Goudron} \xrightarrow{k_4} \text{Charbons} \\ \text{Goudron} \xrightarrow{k_5} \text{Fuel} \end{array} \right.$



Les grandeurs qui caractérisent les espèces précédentes sont leurs masses, leurs vitesses et les énergies qu'elles transportent. Introduisons la nomenclature suivante :

Constituant air et gaz	Constituant végétal
-------------------------------	----------------------------

Géométrie

Φ Porosité de la phase particule végétale	\mathcal{E}^p Porosité du constituant végétal
	S_{bp}, S_{cp} Saturations des éléments solides

La porosité \mathcal{E}^p du constituant végétal est la fraction volumique de phases fluide et gazeuse dans le constituant végétal.

La saturation est la fraction volumique d'un élément dans la phase solide ou fluide correspondante. D'où

$$S_{bp} + S_{cp} = 1$$

Masses

	$\tilde{\rho}_p$ Masse volumique du constituant végétal
$\tilde{\rho}_f$ Masse volumique du constituant air	$\left. \begin{array}{l} \tilde{\rho}_{bp}, \tilde{\rho}_{cp} \\ \tilde{\rho}_{gp} \\ \tilde{\rho}_{ip} \end{array} \right\}$ Masse volumique des éléments bois, charbon, gaz et eau
Y_{if} Densité massique de la $i^{ème}$ espèce dans le constituant gaz	Y_{igp} Densité massique de la $i^{ème}$ espèce dans l'élément gaz du constituant végétal

Vitesses et pressions

V_f Vitesse du constituant gaz	V_{gp} V_{lp}	Vitesses des éléments gaz et eau dans le constituant végétal
P_f Pression du constituant gaz	P_{gp} P_{lp}	

Energies

E_f Énergie interne du constituant gaz	E_p Énergie interne du constituant végétal
H_f Enthalpie du constituant gaz	H_p Enthalpie du constituant végétal
T^f Température du constituant gaz	T^p Température du constituant végétal

Flux

J_{if} Flux de diffusion de la $i^{ème}$ espèce dans le constituant gaz	J_{igp} Flux de diffusion de la $i^{ème}$ espèce dans l'élément gaz du constituant végétal
C_f \mathcal{T}_f } Tenseur des contraintes et de viscosité du constituant gaz	C_p Tenseur des contraintes du constituant végétal
Q_f Flux de chaleur du constituant végétal	Q_p Flux de chaleur du constituant végétal

Sources

$\tilde{\omega}_{if}$ Production de masse de la $i^{ème}$ espèce dans le constituant gaz	$\tilde{\omega}_{igp}$ $i^{ème}$ Production de masse de la espèce dans dans l'élément gaz du constituant végétal
	K_{bg}, K_{bl}, K_{bc} K_{cg}, K_{cl}, K_{cb} $K_{igb}, K_{igc}, K_{igl}$ K_{ig} } Transferts de masse interne au constituant végétal
K_{ig}^{fp} K_{ip}^{fp} } Transferts de masse du constituant végétal vers le constituant gaz	K_{ig}^{pf} K_{ip}^{pf} } Transferts de masse du constituant gaz vers le constituant végétal
	F_{lb}, F_{lc} } Transferts de quantité de mouvement interne au constituant végétal
F^{fp} } Transferts de quantité de mouvement du constituant végétal vers le constituant gaz	F^{pf} } Transferts de quantité de mouvement du constituant gaz vers le constituant végétal
X^{fp} Transferts d'énergie du constituant végétal vers le constituant gaz	X^{pf} Transferts d'énergie du constituant gaz vers le constituant végétal

Le constituant air et gaz vérifie le système suivant, dans le domaine Ω :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi \tilde{\rho}_f Y_{if}) \\ + \operatorname{div}(\Phi \tilde{\rho}_f Y_{if} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{if}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Phi \dot{\omega}_{if} \\ -K_{ig}^{fp} \end{array} \right) \quad (3.17)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\Phi \tilde{\rho}_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \mathbf{V}_f \cdot \operatorname{grad} \mathbf{V}_f \right) - \operatorname{div}(\mathcal{T}_f) = \left(\begin{array}{c} -\Phi \operatorname{grad} P_f + \Phi \tilde{\rho}_f \mathbf{g} \\ -2P_f \operatorname{grad} \Phi - \Phi \mu^f (\bar{k}^f)^{-1} \mathbf{V}_f \end{array} \right) \quad (3.18)$$

Bilan d'énergie interne :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi \tilde{\rho}_f \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) \right] \\ + \operatorname{div} \left[\begin{array}{c} \Phi \tilde{\rho}_f \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) \mathbf{V}_f \\ + \mathbf{Q}_f - \mathbf{V}_f \cdot \mathcal{C}_f \end{array} \right] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Phi \tilde{\rho}_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_f - P_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ - \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 + P_f / \tilde{\rho}_f \right) K^{fp} \\ - X^{fp} \end{array} \right) \quad (3.19)$$

avec

$$\sum_{i=1}^5 Y_{if} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^5 \mathbf{J}_{if} = 0 \quad (3.20)$$

où \bar{k}^f est le tenseur de perméabilité et μ^f la viscosité.

Le constituant végétal vérifie le système suivant, dans le domaine Ω :

Elément bois et charbons :

Bilan de masse de l'élément bois

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) S_{bp} \tilde{\rho}_{bp}) = -(1 - \Phi)(K_{bg} + K_{bl} + K_{bc}) \quad (3.21)$$

Bilan de masse de l'élément charbon

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p) S_{cp} \tilde{\rho}_{cp}) = -(1 - \Phi)(K_{cg} + K_{cl} + K_{cb}) \quad (3.22)$$

Elément gaz :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp}) \\ + \operatorname{div} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp} \mathbf{V}_{gp} + \mathbf{J}_{igp}) \end{array} \right) = \left(-(1 - \Phi) \left(\begin{array}{c} K_{igb} + K_{igc} \\ + K_{igt} - \tilde{\omega}_{igp} \end{array} \right) - K_{ig}^{pf} \right) \quad (3.23)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\mathbf{V}_{gp} = -\frac{\bar{k}_{gp}}{\mu_{gp}}(\text{grad}P_{gp} - \tilde{\rho}_{gp}\mathbf{g}) \quad (3.24)$$

avec

$$\sum_{i=1}^3 Y_{igp} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{igp} = 0 \quad (3.25)$$

Elément eau :

Bilan de masse de l'eau :

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{lp}) + \text{div}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{lp} \mathbf{V}_{lp}) = -(1 - \Phi)K_{lg} \quad (3.26)$$

Bilan de quantité de mouvement de l'eau :

$$\mathbf{V}_{lp} = -\frac{\bar{k}_{lp}}{\mu_{lp}}(\text{grad}P_{lp} - \tilde{\rho}_{lp}\mathbf{g}) \quad (3.27)$$

Bilan global d'énergie interne :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - \Phi)\tilde{\rho}_p \left(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 \right) \right] \\ + \text{div} \left[\begin{array}{c} (1 - \Phi)\tilde{\rho}_p \left(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 \right) \\ + \mathbf{Q}_p - \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{C}_p \end{array} \right] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -P_p \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (1 - \Phi)\tilde{\rho}_p \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{g} \\ - \left[\left(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 + P_p / \tilde{\rho}_p \right) K^{pf} + X^{pf} \right] \end{array} \right) \quad (3.28)$$

où \bar{k}_{gp} et \bar{k}_{lp} sont des tenseurs de perméabilité relative et μ_{gp} et μ_{lp} sont des coefficients de viscosité.

Nous avons écrit le système d'équations macroscopique qui est vérifié par la phase particule végétale. C'est un **modèle avec microstructures**. Les liens entre les flux macroscopiques et les gradients des grandeurs macroscopiques s'expriment simplement par les relations suivantes, si nous nous plaçons dans le cas linéaire sans couplage :

Les lois de Fick :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{if} &= -d_{if} \text{grad}(Y_{if}) \\ \mathbf{J}_{igp} &= -d_{igp} \text{grad}(Y_{igp}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

où d_{if} et d_{igp} sont les coefficients de diffusions.

Les lois vérifiées par le tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} C_{gp} &= -[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p P_{gp} + \frac{2}{3}\mu_{gp} \text{div} \mathbf{V}_{gp}] \mathfrak{I} + 2\mu_{gp}^p \mathbf{D}_{gp} \\ &= -(1 - \Phi)\mathcal{E}^p P_{gp} \mathfrak{I} + \mathcal{T}_{gp} \\ C_f &= -[\Phi P_f + \frac{2}{3}\mu_f \text{div} \mathbf{V}_f] \mathfrak{I} + 2\mu_f \mathbf{D}_f \\ &= -\Phi P_f \mathfrak{I} + \mathcal{T}_f \end{aligned} \quad (3.30)$$

où μ_{gp} et μ_f sont les viscosités dynamiques, \mathfrak{I} est le tenseur identité et où :

$$\mathbf{D}_{gp} = \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{V}_{gp} + \text{grad}^T \mathbf{V}_{gp}) \text{ et } \mathbf{D}_f = \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{V}_f + \text{grad}^T \mathbf{V}_f)$$

Les lois de Fourier généralisées (échange de chaleur entre particules) :

$$\begin{aligned} T^p{}^{-1} \alpha_p \frac{d^p \mathbf{Q}^p}{d^p t} + \mathbf{Q}^p &= -\kappa_p \text{grad}\left(\frac{1}{T^p}\right) + \sum_{i=1}^5 H_{igp} \tilde{\rho}_{igp} \mathbf{J}_{igp} + \mathbf{Q}_r^p \\ T^f{}^{-1} \alpha_f \frac{d^f \mathbf{Q}^f}{d^f t} + \mathbf{Q}^f &= -\kappa_f \text{grad}\left(\frac{1}{T^f}\right) + \sum_{i=1}^5 H_i^f \tilde{\rho}_i^f \mathbf{J}_i^f + \mathbf{Q}_r^f \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $H_{i\alpha}^p(T^p)$ et $H_i^f(T^f)$ sont les enthalpies et où \mathbf{Q}_r^p et \mathbf{Q}_r^f sont les flux d'origine radiatif. Leurs expressions seront données au paragraphe suivant.

L'échange de chaleur à l'intérieur de la particule :

$$X^{pf} = \chi (T^f - T^p) \quad (3.32)$$

La cinétique chimique linéaire :

$$\begin{aligned} -[(1 - \Phi)(K_{gb} + K_{gc} + K_{gl}) + K_{gp}] \sum_{i=1}^5 \frac{\mu_{igp} Y_{igp}}{T^p} \\ - (1 - \Phi) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{c \in S} K_{igc} + \sum_{b \in A, b \neq a} K_{igb} - \dot{\omega}_g \right) + K_{ia}^{pf} \frac{\mu_{igp}}{T^p} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

où μ_{igp} sont les potentiels chimiques.

Les lois de cinétiques chimiques ne peuvent cependant pas être considérées comme linéaire. La conservation des espèces chimiques, lors des réactions chimiques, conduit aux relations de liaison suivantes :

$$-\nu_O \dot{\omega}_{O_2} / W_{O_2} = -\nu_F \dot{\omega}_F / W_F = \nu_P \dot{\omega}_P / W_P \quad (3.34)$$

Soit $\tilde{\psi}$ par définition ce rapport constant. C'est la vitesse de production de masse de la réaction d'oxydation ci-dessus. L'oxydation suit une réaction d'ordre total $\nu_F + \nu_O$:

$$\tilde{\psi} = \tilde{k}(T^f) (\tilde{\rho} Y_F)^{\nu_F} (\tilde{\rho} Y_{O_2})^{\nu_O} \quad (3.35)$$

Nous pouvons supposer que les réactions chimiques, dans le constituant végétal, suivent une loi de Vant'Hoff du 1^{ère} ordre :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \tilde{k}_1(T) \tilde{\rho}_B \\ \dot{\omega}_2 = \tilde{k}_2(T) \tilde{\rho}_B \\ \dot{\omega}_3 = \tilde{k}_3(T) \tilde{\rho}_B \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\omega}_4 = \tilde{k}_4(T) \tilde{\rho}_G \\ \dot{\omega}_5 = \tilde{k}_5(T) \tilde{\rho}_G \end{cases} \quad (3.36)$$

Les coefficients \tilde{k}_α sont donnés par une loi d'Arrhenius :

$$\tilde{k}_\alpha(T) = A_\alpha e^{-(E_\alpha/R^0 T^p)}, \quad \alpha = 1 \text{ à } 5 \quad \tilde{k}(T) = A e^{-(E/R^0 T^f)} \quad (3.37)$$

où E_α est l'énergie d'activation de la $\alpha^{\text{ième}}$ réaction, R^0 est la constante des gaz parfaits.

Les lois d'état sont les suivantes :

L'équation d'état :

$$P_f = R^0 T^f \sum_{i=1}^5 Y_{if} / W_{if} \quad (3.38)$$

L'équation d'état calorique :

$$H_{if}(T^f) = H_{if}^0 + \int_{T^0}^{T^f} C_{P,if} dT \text{ pour } i=1,\dots,5 \quad (3.39)$$

où H_{if}^0 est l'enthalpie de formation de la i ème espèce chimique à la température de référence T^0 et H_{if}^0 est la capacité calorifique, à pression constante, de la i ème espèce chimique.

L'enthalpie massique H_f s'écrit alors $H_f = \sum_{i=1}^5 Y_{if} H_{if}$ et

$$E_f = H_f - P_f / \tilde{\rho}_f \quad (3.40)$$

Les équations d'état du constituant végétal ont des expressions semblables.

Un tel système est complet si ce n'est qu'il reste à exprimer les flux radiatifs macroscopiques \mathbf{Q}_r^p et \mathbf{Q}_r^f . Ces flux sont exprimés au paragraphe suivant.

3.1.4 Equation du transfert radiatif

Le transfert radiatif a lieu dans la phase gazeuse. Il est régi par l'équation dite *de transfert radiatif* que nous allons voir ci-dessous. Nous l'appliquerons à la phase particule végétale en considérant le constituant végétal (tiges) comme des particules solides. Mais avant de voir cette équation, il nous faut définir quelques nouvelles grandeurs macroscopiques.

Le vecteur flux radiatif \mathbf{Q}_r^p est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{Q}_r^p(\mathbf{M}, t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} L_\lambda(\mathbf{M}, \vec{\mathbf{u}}, t) \vec{\mathbf{u}} d\Omega d\lambda \quad (3.41)$$

où λ est la longueur d'onde, Ω est l'angle solide (cf. figure 3.5) et où $L_\lambda(\mathbf{M}, \vec{\mathbf{u}}, t)$ est la *luminance monochromatique*. C'est une grandeur qui dépend de la position donnée \mathbf{M} dans la zone végétale ainsi que de la direction de l'espace donnée par le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}$ (cf. figure 3.5). De manière générique l'indice λ désignera une grandeur spectrale.

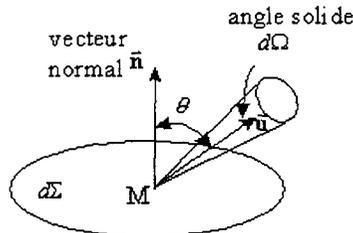


FIG. 3.5 - Angle solide

Le transfert radiatif est régi par l'équation dite de **transfert radiatif** suivante vérifiée par la luminance monochromatique en régime stationnaire :

$$\boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial L_\lambda}{\partial t} + \text{div}(L_\lambda \vec{u}) = -K_\lambda L_\lambda(M, \vec{u}, t) + I_\lambda(M, \vec{u}, t)} \quad (3.42)$$

c désigne la célérité de la lumière. Le premier terme de droite de l'équation de transfert radiatif correspond aux pertes radiatives par absorption et par diffusion. Le coefficient K_λ est le *coefficient d'extinction* (ou opacité). Il est somme du coefficient d'*absorption* a_λ et de *diffusion* $\sigma_{s\lambda}$. Ces termes sont supposés **isotropes** et non homogènes. Nous pouvons négliger la dépendance temporelle de l'intensité dans la relation (3.42) ci-dessus, car la vitesse de la lumière c est très grande devant la vitesse de propagation du feu [27].

Enfin $I_\lambda(M, \vec{u}, t)$ est la fonction source définie par :

$$I_\lambda(M, \vec{u}, t) = \left(\begin{array}{l} a_\lambda L_\lambda^o[T^p(M, t)] \\ + \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(M, \vec{u}', t) \Phi_\lambda(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \end{array} \right) \quad (3.43)$$

Le premier terme de la fonction source correspond au gain radiatif par émission. L'exposant o indique l'**émission du corps noir**. Nous supposons que nous sommes à l'**équilibre thermodynamique local** pour la phase solide. Les lois de Planck et de Kirchhoff sont donc applicables.

Le deuxième terme de la fonction source correspond à la *diffusion incidente* dans les différentes directions de l'espace qui se trouvent être dirigées dans la direction du rayon au point considéré (cf. figure 3.6). La grandeur $\Phi_\lambda(M, \vec{u}, \vec{u}')$ est nommée *indicatrice de diffusion*. C'est une donnée du problème. Elle vérifie la relation de normation :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_\lambda(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' = 1 \quad (3.44)$$

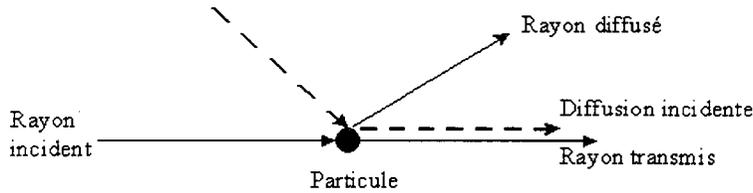


FIG. 3.6 - Diffusion et diffusion incidente

Le terme de diffusion est important dans des phénomènes tels que le brouillard. Définissons enfin l'*albédo* ω_λ par :

$$\omega_\lambda = \frac{\sigma_{s\lambda}}{K_\lambda} \quad (3.45)$$

Le flux macroscopique \mathbf{Q}_f^f dans le constituant air est considéré comme nul car nous supposons que c'est un milieu transparent. Il reste à exprimer les conditions de saut entre la strate végétale et l'air ambiant.

3.1.5 Conditions de saut entre la strate végétale et l'air ambiant

Les grandeurs macroscopiques des équations du milieu poreux écrites au paragraphe 3.1.2 et 3.1.4 sont continues avec des dérivées continues dans les phases particule végétale, ambiante et sous-sol et ont des discontinuités lorsque l'on traverse les interfaces qui séparent celles-ci. Nous devons compléter le système précédent par des conditions de sauts entre la strate végétale et l'air ambiant. Notons $\mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}$ le vecteur vitesse de l'interface $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\mathbf{n}}^f$ le vecteur normale à cette interface (cf. figure 3.7). Cette interface n'ayant qu'une description géométrique, seule la partie normale du vecteur vitesse de l'interface aura une intervention dans les équations.

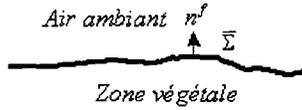


FIG. 3.7 – Interface entre zone végétale et air ambiant

Notons $[G]_f^f$ le saut d'une grandeur G macroscopique quelconque à travers l'interface $\bar{\Sigma}$.

Définissons \dot{M}^f et \bar{M}^f par :

$$\dot{M}^f = \Phi R^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) \cdot \mathbf{n}^f \quad (3.46)$$

et

$$\bar{M}^f = -\bar{R}^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) \cdot \mathbf{n}^f \quad (3.47)$$

Les équations de saut s'écrivent alors, sur l'interface $\bar{\Sigma}$:

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left[\Phi R^f Y_i^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) + \mathbf{j}_i^f \right]_f^f \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.48)$$

Bilans de quantité de mouvement :

$$\dot{M}^f [\mathbf{V}^f]_f^f - [\mathcal{C}^f]_f^f \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.49)$$

Bilans d'énergie interne :

$$\left[\Phi \hat{\rho}^f \left(E^f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}^f|^2 \right) (\mathbf{V}^f - \mathbf{w}^{\bar{\Sigma}}) - (\mathbf{Q}^f - \mathbf{V}^f \cdot \mathcal{C}^f) - \Phi P^f \mathbf{w}^{\bar{\Sigma}} \right]_f^f \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.50)$$

où nous avons supposé P^f continu à travers l'interface.

D'autres conditions de sauts doivent être rajoutées afin d'avoir un problème bien posé. C'est le cas de l'égalité des températures au niveau de l'interface $\bar{\Sigma}$:

$$[T^f]_f^{\bar{f}} = 0 \quad (3.51)$$

L'hypothèse d'égalité des composantes tangentielles des vitesses est de plus classiquement utilisée lorsque lorsqu'il y a transfert de matière au niveau d'une interface :

$$[\mathbf{V}^f - (\mathbf{V}^f \cdot \mathbf{n}^f)\mathbf{n}^f]_f^{\bar{f}} = 0 \quad (3.52)$$

Si nous considérons une forêt constituée de plusieurs zones végétales différentes, chaque zone étant caractérisée par une porosité d'ordre de grandeur différente, nous pouvons écrire des équations de saut entre zones végétales du même type que les équations (3.46) à (3.52).

3.1.6 Discussion à propos du système de feux de forêts

L'intérêt du système de *feu de forêt* précédent est que celui-ci définit clairement notre objet d'étude. Nous pourrions lui appliquer les méthodes classiques de la mécanique afin de l'étudier. Ce système fait apparaître les différents mécanismes qui influencent la vitesse de propagation du feu. Il distingue, pour la particule végétale, la température T^f du constituant air de la température T^p du constituant végétal. Nous supposons donc que la phase particule végétale n'est pas localement à l'équilibre thermodynamique. Ceci se traduit par l'existence d'un transfert d'énergie, au sein de la particule, qui s'exprime par la relation (3.32) et a la présence de deux bilans d'énergies qui sont (3.19) et (3.28). Les constituants air et végétal ont aussi des vitesses différentes d'où la présence de plusieurs équations de quantité de mouvement qui sont (3.18), (3.24) et (3.27). Cette approche permet de prendre en compte l'hydrodynamique dans la couverture végétale. L'écoulement des gaz permet en effet l'apport d'oxygène pour les réactions de combustion. C'est le mécanisme de *tirage*, qui est un élément déterminant de la hauteur des flammes.

Nous allons maintenant donner une dérivation du système ci-dessus par prise de moyenne à partir des équations valables à l'échelle mésoscopiques.

3.2 Equations à l'échelle mésoscopique pour la phase particule végétale

3.2.1 Les deux phases constituant la phase particule végétale

A l'échelle mésoscopique, la phase particule végétale est constituée d'une phase végétale et d'une phase gaz (cf. figure 3.8). La phase végétale constitue les tiges. Elle est un milieu poreux et est solide. La phase gazeuse est constituée d'air, des produits de pyrolyse et des produits de combustion. La forêt est donc constituée de **deux** phases : une solide (milieu poreux indicé par p), et une phase gazeuse (indicé par f).

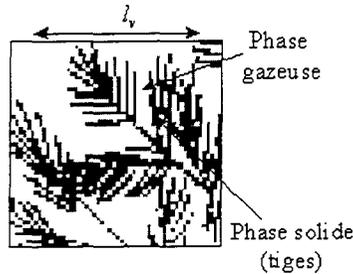


FIG. 3.8 – Constitution d'une phase particule végétale (à l'échelle mésoscopique)

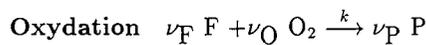
La phase air+gaz est formée des espèces chimiques suivantes :

O_2	N_2
le fuel F	$(H_2O)_v$
les produits de combustion P	le goudron G

Les éléments de la phase végétale sont :

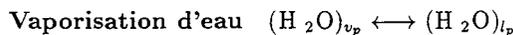
les solides	le bois B	les gaz	fuel F	le liquide eau $(H_2O)_l$
	le charbon C		goudron G $(H_2O)_v$	

Des réactions ont lieu au sein des phases gaz et végétale. La réaction d'oxydation du fuel a lieu dans la phase gaz. La pyrolyse et la vaporisation d'eau, ont lieu dans la phase végétale. Nous les notons :



Pyrolyse

Réactions primaires	Réactions secondaires
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bois} \xrightarrow{k_1} \text{Fuel} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_2} \text{Charbon} \\ \text{Bois} \xrightarrow{k_3} \text{Goudron} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Goudron} \xrightarrow{k_4} \text{Charbons} \\ \text{Goudron} \xrightarrow{k_5} \text{Fuel} \end{array} \right.$



3.2.2 Présentation des équations mésoscopiques

Pour la phase végétale, nous choisissons les équations qui ont été données par Di Blasi [4] (1993). Ces équations peuvent être obtenues par prise de moyenne sur les équations de la mécanique valables dans les différentes phases du milieu poreux de la même façon

que les équations de la mécanique peuvent être obtenues par prise de moyenne. Marle [13] donne une dérivation de ce type des équations du milieu poreux ce qui peut permettre de donner un cadre d'obtention des équations données par Di Blasi [4]. Comme notre but est d'obtenir des équations de la propagation du feu à l'échelle macroscopique, nous allons postuler directement les équations du milieu poreux comme étant la connaissance que nous avons de la zone végétale au niveau mésoscopique sans réaliser de prise de moyenne. Nous donnons cependant une présentation de ces équations de milieu poreux en exprimant les relations des flux, grâce à la thermodynamique des processus irréversibles, par cohérence avec la présentation thermodynamique qui a été réalisée à l'échelle macroscopique au paragraphe 3.1. Ceci permet de donner une autre vision des équations des milieux poreux que celle proposée par Di Blasi [4] où le même système d'équations est écrit sans parler de thermodynamique. Nous nous attacherons ensuite au paragraphe 3.3 à obtenir les équations macroscopiques (3.17) à (3.33) vérifiées au niveau de la végétation en appliquant la méthode de Marle [13] à ce système d'équations.

3.2.3 Espèces constitutives et nomenclature

Les grandeurs qui caractérisent les espèces chimiques du paragraphe 3.2.2. sont leurs masses, leurs vitesses et les énergies qu'elles transportent. Introduisons la nomenclature suivante :

<i>Phase gaz</i>	<i>Phase végétale</i>
------------------	-----------------------

Géométrie

ε^p Porosité de la phase végétale
s_{bp}, s_{cp} Saturations des éléments solides

La porosité ε^p de la phase végétale est la fraction volumique de phases fluide et gazeuse dans la phase végétale.

La saturation est la fraction volumique d'un élément dans la phase solide ou fluide correspondante. D'où

$$s_{bp} + s_{cp} = 1$$

Masses

ρ_f Masse volumique de la phase gaz	ρ_p Masse volumique de la phase végétale
	$\left. \begin{array}{l} \rho_{bp}, \rho_{cp} \\ \rho_{gp} \\ \rho_{lp} \end{array} \right\}$ Masse volumique des éléments bois, charbon, gaz et eau
y_{if} Densité massique de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans la phase gaz	y_{igp} Densité massique de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz de la phase végétale

Vitesses et pressions

v_f Vitesse dans la phase gaz	v_{gp} v_{lp}	Vitesses des éléments gaz et eau dans la phase végétale
p_f Pression dans la phase gaz	p_{gp} p_{lp}	

Energies

e_f Énergie interne dans la phase gaz	e_p Énergie interne dans la phase végétale
h_f Enthalpie dans la phase gaz	h_p Enthalpie dans la phase végétale
T^f Température dans la phase gaz	T^p Température dans la phase végétale

Flux

\mathbf{j}_{if} Flux de diffusion de la $i^{\text{ème}}$ espèce la phase gaz	\mathbf{j}_{igp} Flux de diffusion de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz de la phase végétale
$\left. \begin{matrix} \sigma_f \\ \tau_f \end{matrix} \right\}$ Tenseur des contraintes et de viscosité de la phase gaz	σ_p Tenseur des contraintes dans la phase végétale
\mathbf{q}_f Flux de chaleur dans la phase gaz	\mathbf{q}_p Flux de chaleur dans la phase végétale

Sources

$\dot{\omega}_{if}$ Production de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans la phase gaz	$\dot{\omega}_{igp}$ Production de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz de la phase végétale
	$\left. \begin{matrix} k_{bg}, k_{bi}, k_{bc} \\ k_{cg}, k_{cl}, k_{cb} \\ k_{igb}, k_{igc}, k_{igl} \\ k_{lg} \end{matrix} \right\}$ Transferts de masse interne la phase végétale
	$\{f_{ib}, f_{ic}\}$ Transferts de quantité de mouvement interne la phase végétale

3.2.4 Phase gaz

Le constituant air et gaz vérifie le système suivant :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left(\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_f y_{if}) \\ + \text{div}(\rho_f y_{if} \mathbf{v}_f + \mathbf{j}_{if}) \end{matrix} \right) = \dot{\omega}_{if} \quad (3.53)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \mathbf{v}_f) + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f - \sigma_f) = \rho_f \mathbf{g} \quad (3.54)$$

où nous notons \otimes le produit tensoriel.

Bilan d'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_f \left(e_f + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_f|^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[\begin{array}{c} \rho_f \left(e_f + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_f|^2 \right) \mathbf{v}_f \\ + \mathbf{q}_f - \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\tau}_f \end{array} \right] = \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_f \quad (3.55)$$

avec

$$\sum_{i=1}^5 y_{if} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^5 \mathbf{j}_{if} = 0 \quad (3.56)$$

3.2.5 Phase végétale

Le système d'équations vérifié par la phase végétale est le suivant :

Eléments bois et charbons :

Bilan de masse de l'élément bois

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \varepsilon^p) s_{bp} \rho_{bp}) = -(k_{bg} + k_{bl} + k_{bc}) \quad (3.57)$$

Bilan de masse de l'élément charbon

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \varepsilon^p) s_{cp} \rho_{cp}) = -(k_{cg} + k_{cl} + k_{cb}) \quad (3.58)$$

Elément gaz :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp}) \\ + \operatorname{div} (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp} \mathbf{v}_{gp} + \mathbf{j}_{igp}) \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} k_{igb} + k_{igc} \\ + k_{igl} - \dot{\omega}_{igp} \end{array} \right) \quad (3.59)$$

avec

$$\sum_{i=1}^3 y_{igp} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^3 \mathbf{j}_{igp} = 0 \quad (3.60)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_{gp} \mathbf{v}_{gp}) \\ + \operatorname{div} (\varepsilon \rho_{gp} \mathbf{v}_{gp} \otimes \mathbf{v}_{gp} - \boldsymbol{\sigma}_{gp}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \varepsilon \rho_{gp} \mathbf{g} \\ -(k_{gb} + k_{gc} + k_{gl}) \mathbf{v}_{gp} \\ -f_{gb} - f_{gc} \end{array} \right) \quad (3.61)$$

Elément eau :

Bilan de masse de l'eau :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p \rho_{lp}) + \operatorname{div} (\varepsilon^p \rho_{lp} \mathbf{v}_{lp}) = -k_{lg} \quad (3.62)$$

Bilan de quantité de mouvement de l'eau :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho_{lp} \mathbf{v}_{lp}) \\ + \operatorname{div}(\varepsilon \rho_{lp} \mathbf{v}_{lp} \otimes \mathbf{v}_{lp} - \sigma_{lp}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \varepsilon \rho_{lp} \mathbf{g} \\ -(k_{lb} + k_{lc} + k_{lg}) \mathbf{v}_{lp} \\ -f_{lb} - f_{lc} \end{array} \right) \quad (3.63)$$

Bilan global d'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_p (e_p + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_p|^2) \right] + \operatorname{div} \left[\begin{array}{c} \rho_p (e_p + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_p|^2) \\ + q_p - v_p \cdot \sigma_p \end{array} \right] = \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{g} \quad (3.64)$$

3.2.6 Expressions des flux et des équations d'état mésoscopiques

Les expressions entre des flux ne sont pas données explicitement dans ce paragraphe, car nous n'en aurons pas besoin pour réaliser l'homogénéisation en utilisant la thermodynamique des processus irréversibles. Les expressions correspondantes sont données en annexe E.

Les équations d'état sont les suivantes :

$$\epsilon_a = \sum_{i=1}^n h_{ia} y_{ia} - p_a / \rho_a \quad (3.65)$$

$$h_{ia} = \int_{T^0}^T C p_{ia} dT \quad (3.66)$$

$$p_a = \rho_a RT \sum_{i=1}^n y_{ia} / W_{ia} \quad (3.67)$$

où W_{ia} est la masse molaire de la $i^{\text{ème}}$ espèce gazeuses de la phase a .

Il nous reste à exprimer les conditions de saut entre phase végétale et phase gaz afin d'obtenir un système d'équations complet à l'échelle mésoscopique.

3.2.7 Conditions de saut entre phase végétale et phase gaz

La phase particule végétale contient une phase poreuse p , et une phase fluide f séparées par une interface Σ^{pf} . Nous pouvons considérer que toutes les grandeurs qui interviennent dans les équations du milieu poreux, écrites au paragraphe 3.2.3 et 3.2.4, sont continues avec des dérivées continues dans chaque phase et ont des discontinuités lorsque l'on traverse les interfaces. Notons par l'indice muet a indifféremment la phase air et la phase végétale.

Soit $[g]_p^f$ le saut de g à travers l'interface Σ en allant de p à f (cf. figure 3.9), c'est-à-dire la limite de g sur Σ du côté f moins la limite de g sur Σ en venant du côté de la phase p .

Les équations de saut entre phases s'écrivent :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left[\varepsilon s_a \rho_a y_{ia} (\mathbf{v}_a - \mathbf{w}^\Sigma) + \mathbf{j}_{ia} \right]_p^f \cdot \mathbf{n}^p = 0 \quad (3.68)$$

Bilans de quantité de mouvement :

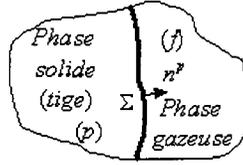


FIG. 3.9 – Interface séparant deux milieux

$$[\varepsilon s_a \rho_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{w}^\Sigma) \otimes \mathbf{v}_a - \sigma_a]_p^f \cdot \mathbf{n}^p = 0 \quad (3.69)$$

Bilans d'énergie interne :

$$\left[\varepsilon s_a \rho_a \left(e_a + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_a|^2 \right) (\mathbf{v}_a - \mathbf{w}^\Sigma) - (\mathbf{q}_a - \mathbf{v}_a \cdot \sigma_a) - \varepsilon s_a p_a \mathbf{w}^\Sigma \right]_p^f \cdot \mathbf{n}^p = 0 \quad (3.70)$$

où nous avons supposé p_a continu à travers l'interface.

Définissons \dot{m}_a^p et \dot{m}_a^f par :

$$\dot{m}_a^p = \varepsilon^p s_a^p \rho_a^p (\mathbf{v}_a^p - \mathbf{w}^\Sigma) \cdot \mathbf{n}^p \quad (3.71)$$

et

$$\dot{m}_a^f = -\rho_a (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}^\Sigma) \cdot \mathbf{n}^p \quad (3.72)$$

Par sommation sur i , le bilan de masse (3.68) conduit à la relation :

$$\dot{m}_a^p + \dot{m}_a^f = 0 \quad (3.73)$$

Lorsque nous tenons compte de la relation (3.73) ci-dessus, la relation de saut de quantité de mouvement (3.69) prend alors la forme plus simple suivante :

$$\dot{m}_a^p [\mathbf{v}_a]_p^f - [\sigma_a]_p^f \cdot \mathbf{n}^p = 0 \quad (3.74)$$

D'autres conditions de sauts doivent être rajoutées afin d'avoir un problème bien posé. C'est le cas de l'égalité des températures au niveau de l'interface Σ :

$$[T]_p^f = 0 \quad (3.75)$$

L'hypothèse d'égalité des composantes tangentielles des vitesses est de plus classiquement utilisée lorsque lorsqu'il y a transfert de matière au niveau d'une interface :

$$[\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}^p]_p^f = 0 \quad (3.76)$$

Ces conditions supplémentaires peuvent être obtenues par des considérations thermodynamiques sur l'équation d'entropie et le deuxième principe de la thermodynamique d'après Delhaye [7].

3.3 Méthode de prise de moyenne et obtentions d'équations de bilan macroscopiques

Nous allons obtenir un système d'équations décrivant le transfert de matière et d'énergie dans une phase particule végétale à l'échelle macroscopique. Pour réaliser cela, nous allons tout d'abord prendre une prise de moyennes des équations mésoscopiques que nous avons écrit au paragraphe 3.2.

3.3.1 Méthode de prise de moyenne

Nous désirons définir des grandeurs macroscopiques pour la phase particule végétale à partir des grandeurs mésoscopiques, quantités qui sont des champs de l'espace et du temps, continues et possédant des dérivées continues en tout point de la strate végétale. Nous voulons, de plus, établir les équations vérifiées par ces grandeurs. Nous reprenons pour cela les idées générales qui sont exposées dans l'article de Marle [13] et qui permettent d'obtenir un système homogénéisé grâce à une prise de moyenne et à la thermodynamique des processus irréversibles. Notre système d'équation de départ est le système d'équations du paragraphe 3.2 valable à l'échelle mésoscopique.

L'idée générale pour définir une grandeur macroscopique en un point \mathbf{x} et à un instant t est de faire une prise de moyenne locale de la grandeur correspondante valable à l'échelle mésoscopique. Nous obtenons alors un lissage des petites variations et des discontinuités. Cette prise de moyenne locale s'effectue sur un volume élémentaire autour du point \mathbf{x} au temps t . Elle correspond mathématiquement à la convolution par une fonction de poids que nous notons $m(\mathbf{x})$. Cette fonction est positive, à support compact dans l'espace \mathbb{R}^3 et vérifie la condition de normation,

$$\int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (3.77)$$

On peut par exemple prendre pour $m(\mathbf{x})$ une fonction isotrope, décroissante, indéfiniment dérivable et ayant pour support une boule de rayon r . Soit $V = \frac{3}{4}\pi r^3$ le volume de cette boule. Un exemple classique de fonction poids est (cf. Marle[13] et figure 3.10) :

$$m(\mathbf{x}) = \begin{cases} C e^{-(1-(|\mathbf{x}|/r)^2)^{-1}} & \text{si } |\mathbf{x}|/r < 1 \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}|/r \geq 1 \end{cases} \quad (3.78)$$

où nous notons $|\mathbf{x}|$ la distance de \mathbf{x} à l'origine et où C est choisi de manière à satisfaire la condition de normation (3.77). Nous trouvons $C = 9.496/V$;

Le rayon r doit être de l'ordre de grandeur d'une longueur mésoscopique. Il doit être aussi inférieur à l'épaisseur de la zone de végétation sinon il faudrait tenir compte des conditions de saut d'une zone végétale à une autre zone végétale dans le calcul qui va suivre.

Le produit de convolution d'une grandeur *quelconque* $g(\mathbf{x}, t)$ par la fonction $m(\mathbf{x})$ est noté $g * m$ et est défini par :

$$(g * m)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) m(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.79)$$

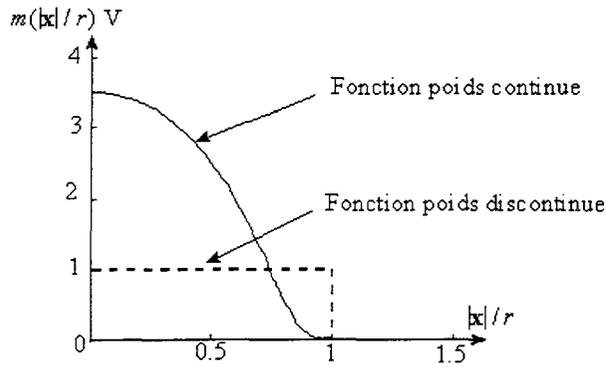


FIG. 3.10 – Exemple de fonctions poids

Cette nouvelle fonction $g * m$ est par définition la *grandeur macroscopique* associée à la grandeur mésoscopique g . Elle est en effet indéfiniment dérivable en espace si la fonction m l'est. Cette grandeur macroscopique moyenne est notée aussi $\langle g \rangle (\mathbf{x}, t)$.

Il nous faut maintenant connaître les grandeurs mésoscopiques il va être intéressant de convoler par la fonction $m(\mathbf{x})$ pour obtenir des grandeurs macroscopiques. Rappelons pour cela que nous avons deux phases (cf. figure 3.1), une phase poreuse constituée des tiges des végétaux et une phase fluide gazeuse constituée des gaz qui entourent les tiges. A la phase p , associons la fonction caractéristique, notée $\chi_p(\mathbf{x}, t)$, égale à 1 dans cette phase et à zéro à l'extérieur de celle-ci. De même, la fonction $\chi_f(\mathbf{x}, t)$ est égale à 1 dans la phase gazeuse et à zéro à l'extérieur de celle-ci.

Notons g_p la grandeur mésoscopique définie par la multiplication $g_p = \chi_p g$. Nous identifions cette fonction avec la distribution $\{g_p\}$ associée. Notons de même g_f la grandeur mésoscopique définie par la multiplication $\{g_f\}$. Nous identifions cette fonction avec la distribution $\{g_f\}$ associée. Nous définissons donc une grandeur différente par phase comme ceci est représenté sur la figure 3.11 ci-dessous.

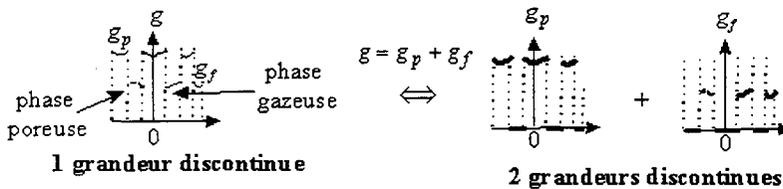


FIG. 3.11 – Grandeurs mésoscopiques associées aux différentes phases

Ce sont à ces grandeurs mésoscopiques g_p et g_f que l'associe des grandeurs macroscopiques. La *porosité* Φ de la végétation contenue dans la zone végétale est une grandeur macroscopique qui est définie par :

$$\Phi = \chi_f * m \quad (3.80)$$

Intéressons-nous maintenant à la manière d'obtenir des équations d'évolution pour les grandeurs macroscopiques $\langle g_p \rangle(x, t)$ et $\langle g_f \rangle(x, t)$ (figure 3.12). Ces équations sont déduites des équations à l'échelle mésoscopique par convolution par la fonction m en se rappelant que le produit de convolution commute avec les dérivées spatiales et temporelles uniquement lorsque ces dérivées sont prises au sens des distributions.

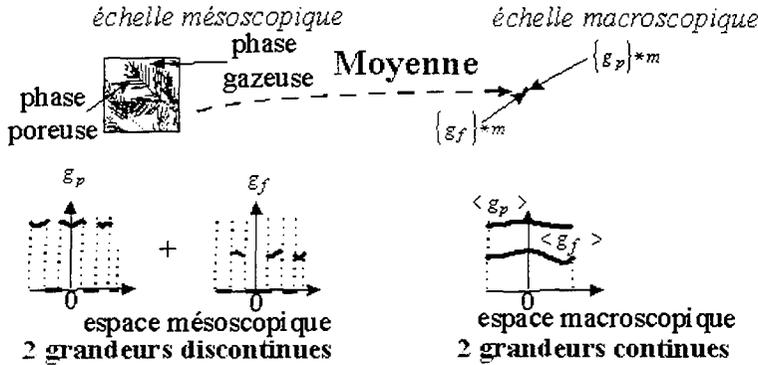


FIG. 3.12 – Grandeurs mésoscopiques et grandeurs macroscopiques associées

Nous savons qu'une dérivée au sens des distributions d'une distribution associée à une fonction, discontinue par morceaux sur une surface, peut s'écrire comme la somme de la distribution associée à la dérivée de la fonction au sens des fonctions et d'une distribution de Dirac surfacique. De manière générale, si g est une telle fonction de l'espace-temps $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ et si nous notons $\{g\}$ la distribution associée à une fonction g , g vérifie les relations [23]:

$$\begin{cases} \mathbf{grad} \{g\} = \{\mathbf{grad} g\} + [g]_p^f \mathbf{n}^p \delta^\Sigma \\ \text{div} \{g\} = \{\text{div} g\} + [g]_p^f \mathbf{n}^p \cdot \delta^\Sigma \\ \frac{\partial}{\partial t} \{g\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} g \right\} - [g]_p^f \mathbf{w}^\Sigma \cdot \mathbf{n}^p \delta^\Sigma \end{cases} \quad (3.81)$$

où $[g]_p^f$ est le saut de g à travers l'interface Σ en allant de p à f , c'est-à-dire la limite de g sur Σ du côté f moins la limite de g sur Σ en venant du côté de la phase p . Ici, \mathbf{w}^Σ , \mathbf{n}^p et δ^Σ sont respectivement la vitesse de l'interface Σ , la normale extérieure à la phase p (cf. figure 3.13) et la distribution surfacique de Dirac définie par :

$$\langle \delta^\Sigma, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma} \varphi(x, t) dS dt \quad (3.82)$$

Pour toute fonction $\varphi(x, t)$ indéfiniment dérivable, à support compact dans l'espace-temps, avec dS l'élément de surface de Σ .

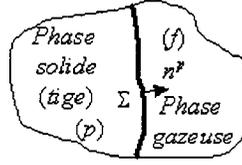


FIG. 3.13 – Interface séparant deux milieux

L'écriture des équations à l'échelle mésoscopique sous forme de distribution pour les grandeurs indicées par les phases fait intervenir des distributions de Dirac surfaciques δ_Σ qui représentent les transferts au travers des interfaces à partir de la phase correspondante.

L'équation sous forme de distribution vérifiée par les fonctions indicées pour le bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique dans la phase gaz des tiges s'obtient ainsi à partir de l'équation (3.59) non écrite sous forme de distribution en utilisant les relations (3.81) :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp}) \\ + \text{div} (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp} \mathbf{v}_{gp} + \mathbf{j}_{igp}) \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} k_{igb} + k_{igc} \\ + k_{igl} - \dot{\omega}_{igp} \end{array} \right) + \left[\begin{array}{c} \varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp} (\mathbf{v}_{gp} - \mathbf{w}^\Sigma) \\ + \mathbf{j}_{igp} \end{array} \right]_p \cdot \mathbf{n}^p \delta_\Sigma \quad (3.83)$$

La différence $\left[\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp} (\mathbf{v}_{gp} - \mathbf{w}^\Sigma) + \mathbf{j}_{igp} \right]_p$ correspond au transfert de masse à travers l'interface végétation-gaz à partir du végétal, car les grandeurs indicées par p sont nulles dans la phase gazeuse. Nous obtenons, de la même façon, toutes les équations, sous forme de distributions, vérifiées par les fonctions indicées pour les autres bilans que nous avons écrits au paragraphe 3.1.

Ce sont à ces équations, écrites sous forme de distribution, que nous appliquons l'opérateur de convolution par la fonction $m(\mathbf{x})$ au paragraphe 3.3.2 ci-dessous. Si nous voulions absolument raisonner dans l'espace des fonctions discontinues par morceaux pour réaliser la convolution par la fonction $m(\mathbf{x})$ au lieu d'écrire les équations tout d'abord sous forme de distribution, nous devrions utiliser les relations plus complexes suivantes (cf. Schwartz [23]), au lieu de la commutativité de la convolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad} (\{g\} * m) = \{\mathbf{grad} g\} * m + ([g]_p^f \mathbf{n}^p \delta^\Sigma) * m \\ \text{div} (\{g\} * m) = \{\text{div} g\} * m + ([g]_p^f \mathbf{n}^p \delta^\Sigma) * m \\ \frac{\partial}{\partial t} (\{g\} * m) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} g \right\} * m - ([g]_p^f \mathbf{w}^\Sigma \cdot \mathbf{n}^p \delta^\Sigma) * m \end{array} \right. \quad (3.84)$$

Nous allons maintenant écrire au paragraphe 3.3.2 les équations bilans macroscopiques que nous obtenons grâce à la convolution.

3.3.2 Equations bilans du constituant poreux p

Chaque équation du paragraphe 3.2 doit être écrite sous forme de distribution, comme nous l'avons montré au paragraphe précédant pour le bilan de masse (3.83). Nous pouvons

alors effectuer le produit de convolution des équations ainsi obtenues par la fonction m . Nous obtenons des équations macroscopiques.

Le produit de convolution du bilan de masse (3.83) de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans l'élément gaz du constituant végétal par la fonction m conduit à :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp}) + \text{div}((1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp} \mathbf{V}_{gp} + \mathbf{J}_{igp}) \right) = \left(-(1 - \Phi) \left(\begin{array}{c} K_{igb} + K_{igc} \\ + K_{igl} - \dot{\omega}_{igp} \end{array} \right) - K_{ig}^{pf} \right) \quad (3.85)$$

Dans cette équation, les grandeurs macroscopiques ε^p , $\tilde{\rho}_{gp}$, Y_{igp} , \mathbf{V}_{gp} et \mathbf{J}_{igp} sont définies successivement par les relations :

$$\begin{aligned} (1 - \Phi) [\mathcal{E}^p] &= \varepsilon^p * m \\ (1 - \Phi) \mathcal{E}^p [\tilde{\rho}_{gp}] &= (\varepsilon^p \rho_{gp}) * m \\ (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} [Y_{igp}] &= (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp}) * m \\ (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} [\mathbf{V}_{gp}] &= (\varepsilon^p \rho_{gp} \mathbf{v}_{gp}) * m \\ (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp} \mathbf{V}_{gp} + [\mathbf{J}_{igp}] &= (\varepsilon^p \rho_{gp} y_{igp} \mathbf{v}_{gp} + \mathbf{j}_{igp}) * m \end{aligned} \quad (3.86)$$

Le terme qui est défini par chaque équation est noté entre crochets ci-dessus afin de mieux repérer celui-ci.

Les termes macroscopiques K_{igb} , K_{igc} , K_{igl} et $\dot{\omega}_{igp}$ sont enfin définis par :

$$\begin{cases} (1 - \Phi) K_{igb} = k_{igb} * m \\ (1 - \Phi) K_{igc} = k_{igc} * m \\ (1 - \Phi) K_{igl} = k_{igl} * m \end{cases} \quad (3.87)$$

$$(1 - \Phi) \dot{\omega}_{igp} = \dot{\omega}_{igp} * m \quad (3.88)$$

Le terme K_{ig}^{pf} est la masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce qui quitte la phase p à travers l'interface Σ^{pf} , par unité de temps et par unité de volume du milieu macroscopique. Il est défini par la relation :

$$K_{ig}^{pf} = -[[\rho_{gp} y_{igp} (\mathbf{v}_{gp} - \mathbf{w}^{\Sigma^{pf}}) + \mathbf{j}_{igp}] \cdot \mathbf{n}^p \delta^{\Sigma^{pf}}] * m \quad (3.89)$$

Le bilan de masse (3.23), que nous avons postulé au paragraphe 3.1, correspond à l'équation (3.85). Nous avons donc trouvé celle-ci grâce à une prise de moyenne. La prise de moyenne précédente permet de relier les grandeurs macroscopiques avec les grandeurs mésoscopiques. Nous n'avons pas pris pour \mathbf{J}_{igp} uniquement la valeur moyenne de \mathbf{j}_{igp} . Ce terme inclut aussi les effets de la différence entre les flux convectifs locaux $\rho_{gp} y_{igp} \mathbf{v}_{gp}$ et la valeur moyenne $(1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} Y_{igp} \mathbf{V}_{gp}$ de celui-ci. C'est un choix délibéré du même type que celui que fait Marle [17] lors de l'obtention des équations des milieux poreux à partir des équations valables à l'échelle microscopique où nous distinguons les différentes phases.

Williams [28] réalise un choix du même type à l'annexe C de son livre de combustion lorsqu'il présente une théorie macroscopique des mélanges de milieux continus. Ce choix est alors réalisé pour obtenir formellement la même forme d'équations que celles que nous pouvons obtenir au premier ordre à partir des équations microscopiques de la physique grâce à une homogénéisation. Les hypothèses d'une telle dérivation sont alors effectuées

lors du choix de la forme de développement asymptotique que nous choisissons pour réaliser l'homogénéisation. Les formes que Marle [17] choisit pour obtenir les équations des milieux poreux sont par ailleurs partiellement obtenues par les méthodes d'homogénéisation [11]. Une dérivation des équations à l'échelle macroscopique, par méthode d'homogénéisation, dans la phase particule végétale est de même souhaitable. Cependant, cette étude étant plus précise, elle est aussi plus difficile à réaliser et ne se justifie donc pas dans un premier temps.

Des relations (3.86) ci-dessus, nous en déduisons les relations de liaison :

$$\sum_{i=1}^5 Y_{igp} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^5 \mathbf{J}_{igp} = 0 \quad (3.90)$$

En sommant les bilans de masse (3.85) pour i variant de 1 à 5, nous obtenons les équations de continuité macroscopiques suivantes :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp}) \\ + \operatorname{div}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} \mathbf{V}_{gp}) \end{array} \right) = -K_g^{pf} \quad (3.91)$$

où le terme K_g^{pf} est défini par :

$$K_g^{pf} = \sum_i K_{ig}^{pf} \quad (3.92)$$

Les autres relations (3.21)-(3.28) s'obtiennent de la même manière. Nous réalisons les prises de moyenne correspondantes, avec lien entre les grandeurs macroscopiques et les grandeurs mésoscopiques, en annexe F. La prise de moyenne fait intervenir des grandeurs macroscopiques supplémentaires par rapport au nombre d'équations. Ces termes supplémentaires sont nommés flux ou sources. Ce sont

Flux	Source
$\mathbf{J}_{if}, \mathbf{J}_{igp}$	$\left. \begin{array}{l} K_{bg}, K_{bl}, K_{bc} \\ \dot{\omega}_{if}, \dot{\omega}_{igp}, \\ K_{cg}, K_{cl}, K_{cb} \\ K_{igb}, K_{igc}, K_{igl} \\ K_{lg} \end{array} \right\}$
C_f, C_p	$\left. \begin{array}{l} K_{ig}^{fp} \\ K_{if}^{gp} \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} K_{ig}^{pf} \\ K_{if}^{gp} \end{array} \right\}$
$\mathbf{Q}_f, \mathbf{Q}_p$	$\left. \begin{array}{l} F_{ib}, F_{ic} \end{array} \right\}, F^{fp}, F^{pf}$
	X^{fp}, X^{pf}

Nous allons donner des liens entre les flux et les sources macroscopiques ci-dessus et les autres grandeurs macroscopiques. Pour cela nous allons utiliser les principes de la thermodynamique des processus irréversibles afin d'obtenir une fermeture algébrique entre les flux et sources macroscopiques et les gradients de certaines grandeurs macroscopiques, termes que l'on nomme classiquement forces thermodynamiques.

3.4 Fermeture thermodynamique (le second principe)

3.4.1 Obtention de la relation de Gibbs

La phase particule végétale est un milieu constitué de deux phases, une phase poreuse p et une phase gazeuse f . Postulons l'existence d'une grandeur entropie généralisée S pour le milieu macroscopique, grandeur qui dépend des paramètres macroscopique suivant :

$$S = S \left(\begin{array}{l} E_p, E_f, \\ \left(\begin{array}{l} 1/\tilde{\rho}_{bp}, 1/\tilde{\rho}_{cp}, \\ 1/\tilde{\rho}_{gp}, 1/\tilde{\rho}_{tp} \end{array} \right), 1/\tilde{\rho}_f, \\ Y_{igp}, Y_{if}, \\ Q^p, Q^f \end{array} \right) \quad (3.93)$$

Cette grandeur qui possède les trois propriétés suivantes :

- i) C'est une grandeur extensive.
- ii) C'est une fonction convexe de l'ensemble de ses variables.
- iii) Son taux de production est localement positif.

Nous allons utiliser les principes de la thermodynamique des processus irréversibles étendus [12] afin de trouver une forme généralisée de la relation de Gibbs.

L'entropie S est fonction des deux énergies internes E_p et E_f des constituants respectivement poreux et gazeux, car ces phases peuvent ne pas être à l'équilibre thermodynamique local entre elles. Nous distinguons alors la température des phases poreuses et gazeuses. Nous sommes alors conduits à distinguer aussi des flux de chaleur différents pour chaque constituant.

Remarquons que nous choisissons de ne définir qu'une entropie S pour le système macroscopique sans définir d'entropie macroscopique pour les différents constituants ceci car l'entropie correspond à l'inverse de l'information que l'on peut obtenir d'un système. Cette notion n'a donc de sens que globalement. D'après (3.93), la forme différentielle de l'entropie S est alors :

$$dS = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial E_p} dE_p + \frac{\partial S}{\partial E_f} dE_f \\ + \left(\begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial(1/\tilde{\rho}_{bp})} d(1/\tilde{\rho}_{bp}) + \frac{\partial S}{\partial(1/\tilde{\rho}_{cp})} d(1/\tilde{\rho}_{cp}) \\ + \frac{\partial S}{\partial(1/\tilde{\rho}_{gp})} d(1/\tilde{\rho}_{gp}) + \frac{\partial S}{\partial(1/\tilde{\rho}_{tp})} d(1/\tilde{\rho}_{tp}) \end{array} \right) + \frac{\partial S}{\partial(1/\tilde{\rho}_f)} d(1/\tilde{\rho}_f) \\ + \sum_i \frac{\partial S}{\partial Y_{igp}} dY_{igp} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial Y_{if}} dY_{if} \\ + \frac{\partial S}{\partial Q^p} dQ^p + \frac{\partial S}{\partial Q^f} dQ^f \end{array} \right) \quad (3.94)$$

C'est la relation de Gibbs généralisée, car elle fait intervenir les variations des flux.

3.4.2 Génération d'entropie

Reportons les relations obtenues au paragraphe 3.3 dans l'équation de l'entropie globale (3.94). Celle-ci prend alors la forme suivante d'après l'annexe G :

$$\tilde{\rho} \frac{dS}{dt} + \text{div}(\mathbf{J}_s) = \sigma_s \quad (3.95)$$

avec \mathbf{J}_s le flux d'entropie et σ_s la génération d'entropie qui sont définis comme suit :

$$\mathbf{J}_s = (T^p)^{-1} \left[\begin{array}{l} \frac{P_{gp}}{\tilde{\rho}_{gp}} (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \mathbf{V}_{gp} + \frac{P_{lp}}{\tilde{\rho}_{lp}} (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \mathbf{V}_{lp} \\ + \sum_{i=1}^5 \mu_{igp}^c \mathbf{J}_{igp} - \alpha^p \frac{d\mathbf{Q}^p}{dt} \end{array} \right] + (T^f)^{-1} \left[\begin{array}{l} \frac{P^f}{\tilde{\rho}^f} \Phi \mathbf{V}_f \\ + \sum_{i=1}^5 \mu_{if}^c \mathbf{J}_{if} - \alpha^f \frac{d\mathbf{Q}^f}{dt} \end{array} \right] \quad (3.96)$$

La génération d'entropie σ_s^T est la somme des générations d'entropie dans chaque phase :

$$\sigma_s = \sigma_{sp} + \sigma_{sf} \quad (3.97)$$

où les générations d'entropies dans chaque phase sont définies par :

$$\begin{aligned} \sigma_{sgp} = & - \left(\mathbf{V}_{gp} T^{p-1} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{grad}(E_p) - \frac{P_{gp}}{\tilde{\rho}_{gp}^2} \text{grad}(\tilde{\rho}_{gp}) \\ - \mu_{igp}^c \text{grad}(Y_{igp}) - \alpha^p \text{grad}(\mathbf{Q}^p) \end{array} \right] \right) \\ & - \left(\mathbf{V}_{lp} T^{p-1} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{grad}(E_p) - \frac{P_{lp}}{\tilde{\rho}_{lp}^2} \text{grad}(\tilde{\rho}_{lp}) \\ - \alpha^p \text{grad}(\mathbf{Q}^p) \end{array} \right] \right) \\ & + \mathbf{J}_{if} \cdot \sum_{i=1}^5 \text{grad} \left(\frac{\mu_{igp}^c}{T^f} \right) - \left[T^{p-1} \alpha^p \frac{d\mathbf{Q}^p}{dt} - \mathbf{Q}^p \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{T^p} \right) \right] \\ & - [(1 - \Phi)(K_{gl} + K_{gb} + K_{gc}) + K_g^{pf}] \sum_{i=1}^5 \frac{\mu_{igp}^c Y_{igp}^c}{T^p} \\ & - (1 - \Phi) \sum_{i=1}^5 (K_{igb} + K_{igc} + K_{igl} - \tilde{\omega}_{ig} + K_{ig}^{pf}) \frac{\mu_{ig}^c}{T^p} \\ & + \mathbf{V}_{gp} \cdot (F_{gp} + T^{p-1} P_{gp} \text{grad}((1 - \Phi) \mathcal{E}^p) + T^{p-1} (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \mathbf{g}) \\ & + \mathbf{V}_{lp} \cdot (F_{lp} + T^{p-1} P_{lp} \text{grad}((1 - \Phi) \mathcal{E}^p) + T^{p-1} (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \mathbf{g}) \\ & - \frac{X^{pf}}{T^p} \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^f = & \\
 & - \left(\mathbf{V}_f T^{f-1} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{grad}(E_T^p) - \frac{P_a^p}{R_a^{p^2}} \text{grad}(R_a^p) \\ -\mu_{ij}^c \text{grad}(Y_{ij}) - \alpha^p \text{grad}(\mathbf{Q}^f) \end{array} \right] \right) \\
 & + \mathbf{J}_{ij} \cdot \sum_{i=1}^5 \text{grad}\left(\frac{\mu_{ij}^c}{T^f}\right) - \left[T^{f-1} \alpha^f \frac{d\mathbf{Q}^f}{dt} - \mathbf{Q}^f \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{T^f}\right) \right] \\
 & - [K^{fp}] \sum_{i=1}^5 \frac{\mu_{ij}^c Y_{ij}}{T^f} \\
 & - (1 - \Phi) \sum_{i=1}^5 (-\dot{\omega}_{ij} + K^{fp}) \frac{\mu_{ij}^c}{T^f} \\
 & + V_f \cdot (F_f + T^{f-1} P_f \text{grad}\Phi + T^{f-1} \Phi \hat{\rho}_f g) \\
 & - \frac{X^{fp}}{T^f}
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

3.4.3 Lien entre les forces et les flux macroscopiques

La génération d'entropie (3.94) prend alors la forme d'une somme de produits de flux et de forces généralisées conjuguées. Chaque force correspond à un écart à l'équilibre thermodynamique. Cet écart peut correspondre soit à un déséquilibre spatial du milieu, soit à un déséquilibre massique, cinétique, thermique ou temporelle du milieu. Nous pouvons alors postuler des relations entre les forces et les flux afin d'obtenir une fermeture des équations. Ces relations doivent vérifier un certain nombre de principes (objectivité,...). L'interprétation physique de ces relations est alors immédiate. Si nous plaçons dans le cas linéaire sans couplage, il vient alors les relations suivantes :

Les lois de Fick :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{gp} &= d_{igp} \text{grad}\left(\frac{\mu_{igp}^c}{T^p}\right) \\
 \mathbf{J}_{ij} &= d_{ij} \text{grad}\left(\frac{\mu_{ij}^c}{T^f}\right)
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Les lois de comportement rhéologiques :

$$\begin{aligned}
 C_{gp} &= -[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p P_g + \frac{2}{3}\mu_{gp} \text{div}\mathbf{V}_{gp}] \mathfrak{S} + 2\mu_{gp} \mathbf{D}_{gp} \\
 &= -(1 - \Phi)\mathcal{E}^p P_g \mathfrak{S} + \mathcal{T}_{gp} \\
 C_f &= -[\Phi P_f + \frac{2}{3}\mu^f \text{div}\mathbf{V}^f] \mathfrak{S} + 2\mu^f \mathbf{D}^f \\
 &= -\Phi P_f \mathfrak{S} + \mathcal{T}_f
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

où μ_{gp} est la viscosité dynamique, \mathfrak{S} est le tenseur identité et :

$$\mathbf{D}_{gp} = \frac{1}{2}(\text{grad}\mathbf{V}_{gp} + \text{grad}^T \mathbf{V}_{gp})$$

Les lois de Fourier généralisée (échange de chaleur entre constituants végétal et gaz) :

$$\begin{aligned}
 T^{p-1} \alpha^p \frac{d\mathbf{Q}^p}{dt} + \mathbf{Q}^p &= -\kappa^p \text{grad} \left(\frac{1}{T^p} \right) + \sum_{i=1}^5 H_{igp} \tilde{\rho}_{igp} \mathbf{J}_{igp} + \mathbf{Q}_r^p \\
 T^{f-1} \alpha^f \frac{d\mathbf{Q}^f}{dt} + \mathbf{Q}^f &= -\kappa^f \text{grad} \left(\frac{1}{T^f} \right) + \sum_{i=1}^5 H_{if} \rho_{fi} \mathbf{J}_{if} + \mathbf{Q}_r^f
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

où $H_{igp}(T^p)$ et $H_{if}(T^f)$ sont les enthalpies et où \mathbf{Q}_r^p et \mathbf{Q}_r^f sont les flux d'origine radiatif. Leurs expressions seront données au paragraphe suivant.

Lien entre la vitesse et les forces de frottement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{gp} &= \frac{\bar{k}_{gp}}{\mu_{gp}(1-\Phi)\Phi} \cdot (F_{gp} - P_{gp} \text{grad}((1-\Phi)\mathcal{E}^p)) \\
 \mathbf{V}_f &= \frac{\bar{k}}{\mu^f \Phi} \cdot (F_f - P_f \text{grad}\Phi)
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

L'échange de chaleur à l'intérieur de la particule :

$$X^{pf} = \chi (T^f - T^p) \tag{3.104}$$

La cinétique chimique linéaire :

$$\begin{aligned}
 & - \left[(1-\Phi) \left(\sum_{b \in A, b \neq a} K_{ab} + \sum_{c \in S} K_{ac} \right) + K_a^{pjc} \right] \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{ia}^p Y_{ia}^p}{T^p} \\
 & - (1-\Phi) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{c \in S} K_{iac} + \sum_{b \in A, b \neq a} K_{iab} - \sum_{\alpha=1}^m \nu_{i\alpha} \Psi_\alpha \right) + K_{ia}^{pf} \left(\frac{\mu_{ia}^p}{T^p} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Les lois de cinétiques chimiques ne peuvent cependant pas être considérées comme linéaire. Nous prendrons donc les relations (3.27) à (3.31) valables pour les grandeurs macroscopiques au lieu des relations (3.105) ci-dessus.

3.4.4 Loi de Brinkman et loi de Darcy

En utilisant l'équation de continuité (3.78) et l'expression (3.111) du tenseur des contraintes, le bilan de quantité de mouvement (3.80), dans le gaz,

$$\Phi R^f \left(\frac{\partial \mathbf{V}^f}{\partial t} + \mathbf{V}^f \cdot \text{grad} \mathbf{V}^f \right) - \text{div}(\mathcal{T}^f) - \Phi R^f \mathbf{g} + \text{div}(\Phi P^f \mathfrak{S}) + F^{fp} = 0 \tag{3.106}$$

L'élimination du terme F^{fp} entre (3.116) et (3.113) conduit à une loi de type Brinkman :

$$\begin{aligned}
 & \Phi \tilde{\rho}_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \mathbf{V}_f \cdot \text{grad} \mathbf{V}_f \right) - \text{div}(\mathcal{T}_f) + \Phi \text{grad} P_f - \Phi R^f \mathbf{g} \\
 & + 2 P_f \text{grad} \Phi + \Phi \mu^f (\bar{k}^f)^{-1} \mathbf{V}_f = 0
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Cette équation est une équation de quantité de mouvement plus générale que l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes car elle fait intervenir un terme de frottement $\mu^f \Phi \bar{k}^f \mathbf{V}_f$ en plus qui s'oppose au mouvement fluide. Un nouveau paramètre lié à la perméabilité k_a du milieu poreux intervient alors à cause de la présence de la phase solide. Lorsque la porosité Φ tend vers 1, pour un milieu fluide sans phase poreuse, la norme du tenseur perméabilité \bar{k}^f doit tendre vers l'infini si nous voulons obtenir l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes. C'est en ce sens que l'équation (3.117) ci-dessus est plus générale que l'équation de Navier-Stokes. Pour la plupart des zones végétales, la porosité est proche de 1. Nous ne pouvons donc pas faire l'approximation $\Phi \rightarrow 0$, qui conduirait simplifier la relation (3.117) en une loi de Darcy, pour la phase fluide.

L'équation de quantité de mouvement (3.68) dans la partie a (g ou l) de la phase poreuse p change aussi de forme si nous utilisons l'équation de continuité (3.62), l'expression (3.111) du tenseur des contraintes et la relation (3.113). Nous obtenons alors une **loi de type Brinkman** :

$$(1 - \Phi) \mathcal{E}^p \bar{\rho}_{ap} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{ap}}{\partial t} + V_{ap} \cdot \text{grad} \mathbf{V}_{ap} \right) - \text{div} (\mathcal{T}_{ap}) + (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \text{grad} P_{ap} - (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \bar{\rho}_{ap} \mathbf{g} + 2P_{ap} \text{grad} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p) + (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \mu_a^p (\bar{k}_a^p)^{-1} \mathbf{V}_{ap} = 0 \quad (3.108)$$

L'équation de quantité de mouvement (3.118) prend une forme simplifiée, car la porosité \mathcal{E}^p est petite dans les tiges végétales comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.1.3. La vitesse \mathbf{V}_a^p de la phase a est alors faible ce qui conduit à ne garder que trois termes dans la relation (3.118) et conduit à la loi de **Darcy généralisée** :

$$\mathbf{V}_{gp} = - \frac{\bar{k}_{gp}}{\mu_{gp}} (\text{grad} P_{gp} - \bar{\rho}_{gp} \mathbf{g}) \quad (3.109)$$

3.4.5 Lois d'état et cinétique chimiques

Les lois d'états et les cinétiques chimiques vérifiées par les grandeurs macroscopiques sont les mêmes que celles vérifiées par les grandeurs mésoscopiques dans les différentes phases et que nous avons vu au paragraphe 3.1.1.2.

3.4.6 Discussion sur la dérivation précédente des équations macroscopiques

Withaker [29] donne une dérivation d'équations des milieux poreux par prise de moyennes en tenant compte des ordres de grandeur des paramètres. Il serait intéressant de compléter l'étude précédente en tenant compte des **ordres de grandeur** des paramètres physiques lors de la dérivation du système ci-dessus.

Des **modèles avec microstructures** dans des milieux poreux ont été obtenus grâce à des méthodes d'homogénéisation par Hornung [11]. Notons de plus que l'hydrodynamique dans une zone végétale en absence de feu a été étudiée par Raupach [20]. Celui-ci tient compte de *fluctuations* que nous avons omises lors de la dérivation du système précédent.

Grishin [9] enfin propose un autre *système de feu de forêt* où il distingue aussi la température des tiges végétales de la température du gaz qui l'entoure et il étudie celui-ci. Il serait intéressant de comparer le système que nous avons obtenu avec celui qu'il propose.

3.5 Conditions de saut entre la strate végétale et l'air ambiant

Les grandeurs macroscopiques des équations du milieu poreux écrites au paragraphe 3.1.2 et 3.1.4 sont continues avec des dérivées continues dans les phases particule végétale, ambiante et sous-sol et ont des discontinuités lorsque l'on traverse les interfaces qui séparent celles-ci. Par définition, toute quantité indicée est nulle à l'extérieur de la phase correspondante. Par exemple, la grandeur $\hat{\rho}^f$ est la masse volumique dans la phase particule végétale, et vaut zéro à l'extérieur de cette phase.

Les dérivées qui apparaissent dans les équations du paragraphe 3.1.2 et 3.1.4 doivent alors être prises au sens des distributions, car elles font intervenir des fonctions qui sont continues par morceaux. (Ceci est valide au sens d'un passage à la limite vers une interface, dans les équations du paragraphe 3.1). Notons $\mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}$ le vecteur vitesse de l'interface $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\mathbf{n}}^f$ le vecteur normale à cette interface (cf. figure 3.14). Cette interface n'ayant qu'une description géométrique, seule la partie normale du vecteur vitesse de l'interface aura une intervention dans les équations.

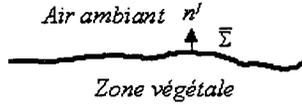


FIG. 3.14 – Interface entre zone végétale et air ambiant

L'utilisation des relations (3.41) conduit aux équations précédentes valables au sens des fonctions dans les différentes phases et à des conditions de sauts à travers l'interface $\bar{\Sigma}$.

Nous noterons $[G]_f^{\bar{\Sigma}}$ le saut d'une grandeur G quelconque à travers l'interface $\bar{\Sigma}$. Les équations de saut s'écrivent alors :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left[\Phi R^f Y_i^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) + \mathbf{j}_i^f \right]_f^{\bar{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.110)$$

Bilans de quantité de mouvement :

$$\left[\Phi R^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) \otimes \mathbf{V}^f - \mathcal{C}^f \right]_f^{\bar{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.111)$$

Bilans d'énergie interne :

$$\left[\Phi R^f (E^f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}^f|^2) (\mathbf{V}^f - \mathbf{w}^{\bar{\Sigma}}) - (\mathbf{Q}^f - \mathbf{V}^f \cdot \mathcal{C}^f) - \Phi P^f \mathbf{w}^{\bar{\Sigma}} \right]_f^{\bar{J}} \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.112)$$

où nous avons supposé P^f continu à travers l'interface.

Définissons \dot{M}^f et \overline{M}^f par :

$$\dot{M}^f = \Phi R^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) \cdot \mathbf{n}^f \quad (3.113)$$

et

$$\overline{M}^f = -\bar{R}^f (\mathbf{V}^f - \mathbf{W}^{\bar{\Sigma}}) \cdot \mathbf{n}^f \quad (3.114)$$

Par sommation sur i , le bilan de masse (3.110) conduit à la relation :

$$\dot{M}^f + \overline{M}^f = 0 \quad (3.115)$$

Lorsque nous tenons compte de la relation (3.115) ci-dessus, la relation de saut de quantité de mouvement (3.111) prend alors la forme plus simple suivante :

$$\dot{M}^f [\mathbf{V}^f]_f^{\bar{J}} - [\mathcal{C}^f]_f^{\bar{J}} \cdot \mathbf{n}^f = 0 \quad (3.116)$$

D'autres conditions de sauts doivent être rajoutées afin d'avoir un problème bien posé. C'est le cas de l'égalité des températures au niveau de l'interface $\bar{\Sigma}$:

$$[T^f]_f^{\bar{J}} = 0 \quad (3.117)$$

L'hypothèse d'égalité des composantes tangentielles des vitesses est de plus classiquement utilisée lorsque lorsqu'il y a transfert de matière au niveau d'une interface :

$$[\mathbf{V}^f - (\mathbf{V}^f \cdot \mathbf{n}^f) \mathbf{n}^f]_f^{\bar{J}} = 0 \quad (3.118)$$

La relation de saut de quantité de mouvement (3.116) que nous avons obtenues ci-dessus pourrait être précisée par une étude par homogénéisation. Viegas [26] a étudié le rôle de la contrainte tangentielle sur l'interface $\bar{\Sigma}$ comme un paramètre de la vitesse de propagation du feu sachant que cette contrainte est en relation avec la vitesse locale du vent. Des modèles plus précis de l'interaction végétation-air ambiante ont été développés en absence de feu mais en tenant compte des fluctuations turbulentes [15].

3.6 Rayonnement dans un milieu semi-transparent

Afin de modéliser le transfert radiatif à l'échelle macroscopique, nous avons supposer que la zone végétale est un milieu semi-transparent. Le transfert radiatif est alors régit par l'équation du transfert radiatif vue au paragraphe 3.1.4. Une telle équation macroscopique est valable dans un milieu gazeux qui possède des particules solides. Nous l'avons donc appliquée à la phase particule végétale en considérant les tiges végétales comme des

particules solide afin d'exprimer les flux radiatifs macroscopiques Q_r^p . La phase gazeuse de la zone végétale est par contre supposée transparente ce qui conduit à une **expression nulle du terme Q_r^f** .

La prise en compte de particules de suie dans les flammes où de la présence de fumées conduirait à faire intervenir un flux radiatif dans l'expression du flux q_f qui intervient dans l'équation (3.55) et à rajouter une équation de transfert radiatif en considérant la phase gazeuse comme ensemençé d'une multitude de particules solides à l'échelle microscopique. Nous en déduirions alors le même type d'équation en variables macroscopique Q_r^f pour la phase gazeuse. Nous ferons cependant l'approximation que la phase gazeuse est transparente.

L'équation du transfert radiatif est présentée de par Siegel [24] et Viskantas [27]. Tien [25] et Whitaker [29] discutent de son domaine de validité. Whitaker [30] en donne une dérivation à partir de l'échelle mésoscopique où nous distinguons les différentes phases solide et gazeuse. Nous ne reprendrons donc pas l'homogénéisation des termes radiatifs qui sont présents dans les équations mésoscopiques.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode d'obtention d'équations de transfert de masse et de matière régissant la propagation des feux de forêt et nous avons obtenu un tel système d'équations. Ce système d'équations est tridimensionnel et décrit la propagation des feux de végétations à l'échelle macroscopique. Le système complet obtenu est caractéristique des feux de végétation. Nous pourrions donc le nommer **système de feu de végétation**. Son étude ultérieure constituera le domaine de l'étude mécanique des feux de végétation.

Le domaine d'utilisation d'un tel modèle peut être discuté en fonction des hypothèses qui sont propres à son obtention. Ce domaine doit en particulier englober celui des ellipses que nous avons exposé au chapitre 2 et qui, nous l'avons vu, décrit la propagation du feu à l'échelle **gigascopique** du paysage (cf. chapitre 1).

Nous allons nous attacher maintenant au chapitre 4 à passer du système de feu de végétation valable à l'échelle macroscopique à un système d'équations bidimensionnel valable à l'échelle gigascopique du paysage en tenant compte que la propagation du feu est essentiellement tangentielle aux collines, car l'épaisseur de la couverture végétale est petite. Cette étude devrait en particulier conduire à obtenir le domaine de validité du modèle non justifié des enveloppes que nous avons étudié au chapitre 2.

Bibliographie

- [1] **Albini F.A.**, Transport of firebrands by line thermals, 1983, *Comb. Sci. and Technol.*, vol. 32, pp. 277-288.
- [2] **Albini F.A.**, A model for fire spread in wildland fuels radiation, *Comb. Sci. and Technol.*, 1985, vol. 42, p. 229-258.
- [3] **Auriault J.L.**, Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?, *Int. J. Engng. Sci.*, 1991, Vol. 29, No. 7, pp. 785-795.
- [4] **Di Blasì C.**, Modeling and simulation of combustion process of charring and non-charring solid fuels, *Prog. Energy Combustion Sci.*, 1993, Vol. 19, pp. 71-104.
- [5] **Carrier G.F., Fendell F.E. and Wolff M.F.**, Wind-Aided fire spread across arrays of Discrete fuel elements. I. Theory, *Comb. Sci. and Technol.*, 1991, vol. 75, pp. 31-51.
- [6] **Catchpole E.A., Hatton T.J. and Catchpole W.R.**, Fire spread through non homogenous fuel modelled as a Markov process, *Ecological Modelling*, 1989, Vol. 48, pp. 101-112.
- [7] **Delhaye J.M.**, Fire Basic equations for two-phase flow modeling, Two phase flow and heat transfer in the power and process industries., *Hemisphere publishing corporation*, p. 40-97, 1982.
- [8] **Frandsen W.H.**, Fire spread through porous fuels from the conservation of energy, *Combust. Flame*, 1971, Vol.16, pp. 9-16.
- [9] **Grishin A.M.**, Mathematical modeling of forest fires and new methods of fighting them, translated by Czuma M., Chikina L. And Smokotina L., ed. *Frank Albini*, 1997.
- [10] **De Groot et Mazur J.**, Non-equilibrium Thermodynamics, *North-Holland pub. Cy. Amsterdam*, 1961.
- [11] **Hornung U.**, Homogenization and porous media, Interdisciplinary Applied Mathematics, *Springer-Verlag New York, Inc.*, 1997.
- [12] **Jou D., Casas-Vazquez J. and Lebon G.**, Extended irreversible thermodynamics, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1993.
- [13] **Lee S.H. and Emmons H.W.**, A study of natural convection above a line fire, *J. Fl. Mech.*, 1961, Vol. 11, pp. 353-368.

- [14] **Levy T.** and **Sanchez-Palencia E.**, On boundary conditions for fluid flow in porous media. *Int. J. Engng. Sci.*, 1975, Vol. 13, pp. 923-940.
- [15] **Liu J.**, **Chen J.M.**, **Black T.A.** and **Novak M.D.**, E-e modelling of turbulent air flow downwind of a model forest edge, *Boundary-Layer Meteorology.*, 1996, vol. 77, pp.21-44.
- [16] **Lopes A.M.G.**, **Sousa A.C.M.** and **Viegas D.X.**, Numerical simulation of the wind field and fire propagation in Mountain Canyons, *2nd International Conference on Forest Fire Research, Coimbra, Portugal*, 1994, Vol. 1, B.10, pp. 289-299.
- [17] **Marle C.M.**, On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media, *Int. J. Engng. Sci.*, 1982, Vol. 20, No. 5, pp. 643-662.
- [18] **Miranda A.I.** and **Borrego C.**, A prognostic meteorological model applied to the study of forest fires, *2nd International Conference on Forest Fire Research, Coimbra, Portugal*, 1994, Vol. 1, B.17, pp. 355-365.
- [19] **Quintard M.** and **Whitaker S.**, One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems, *Advances in heat transfer*, 1993, Vol. 23, pp. 368-464.
- [20] **Raupach M.R.** and **Shaw R.H.**, Averaging procedures for flow within vegetation canopies, 1982, *Boundary layer meteorology*, Vol. 22, pp. 79-90.
- [21] **Sahraoui M.** and **Kaviani M.**, Direct simulation vs volume-averaged treatment of adiabatic, premixed flame in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1994, Vol. 37, No. 18, pp. 2817-2834.pp.
- [22] **Sanchez-Palencia L.**, Non-Homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, *Springer Verlag, New York*, 1980.
- [23] **Schwartz L.**, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Hermann, Paris*, 1965.
- [24] **Siegel R.** and **Howell J.R.**, Thermal Radiation Heat Transfer, *second Edn.*, *Ney York: McGraw-Hill*, 1981.
- [25] **Tien C.L.**, Thermal radiation in packed and fluidized beds, *J. Heat Transfer*, 1988, Vol. 110, pp. 1230-1242.
- [26] **Viegas D.X.** and **Neto L.P.C.**, Wall shear-stress as a parameter to correlate the rate of spread of a wind induced forest fire, *Int. J. Wildland Fire*, 1991, Vol. 1, No. 3, p.177-188.
- [27] **Viskantas**, Advances in Heat Transfer, *Adv. Heat Transfer*, 1974, Vol.?, pp. 219.
- [28] **Williams F.A.**, Combustion theory, *Addison-Wesley Publishing Co.*, 1985.

-
- [29] **Whitaker S.**, Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media: A theory of drying, J.P. Hartnett and T.F. Irvine, Jr., *Ed.*, *Academic Press, New York, N. Y.*, 1977, Vol. 13, pp. 119-201.
- [30] **Whitaker S.**, Radiant energy transport in porous media, *I. E. Chem. Fund.*, 1980, Vol. 19, pp. 210-218.

Bibliographie

Chapitre 4

Réduction d'un modèle de feu de forêt 3D à un modèle 2D surfacique

Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de simplifier le système d'équations de propagation valable à l'échelle macroscopique de la forêt en obtenant un système d'équations bidimensionnel valable à l'échelle gigascopique du paysage (cf. figure 4.1).

Le système obtenu sera un système de **réaction diffusion** avec perte convective. Il tient compte de l'énergie et du temps nécessaire à la vaporisation de l'eau contenue dans le couvert végétal. Le terme d'origine radiative sera alors simplifié et nous distinguerons les différentes formes prises par les équations bilans dans les différentes zones que nous avons définies au chapitre 1 relativement à la position du front du feu. Le système obtenu sera alors mis sous forme adimensionnelle et nous étudierons enfin quelques configurations particulières du front du feu.

4.1 Simplification des équations de bilan macroscopiques

4.1.1 Méthodologie de simplification

La démarche du chapitre 3 nous a permis d'obtenir un système complet de feux de forêt valable à l'échelle macroscopique. La fin de ce document s'attachera donc à étudier celui-ci par différentes méthodes analytiques et numériques. Un préliminaire à toute étude doit être l'adimensionalisation d'un tel système afin de faire apparaître le minimum de paramètres suivi d'une analyse phénoménologique (cf. Darrozes [8]) afin de faire apparaître les différents régimes possibles de feu. Un exemple d'une telle démarche a été utilisé par Margerit et Sero-Guillaume [15] pour l'étude du **mouvement de l'interface** d'une goutte sphérique qui s'évapore dans sa propre vapeur (cf. figure 4.2).

Le système alors étudié était plus simple que celui d'un feu de forêt. La dynamique de l'évaporation est gouvernée par un bilan hydrodynamique, thermique et par une équation de saut à l'interface de la goutte qui tient compte de l'énergie nécessaire à l'évaporation. La réduction de modèle avait alors permis *de modéliser l'écoulement extérieur à la goutte*

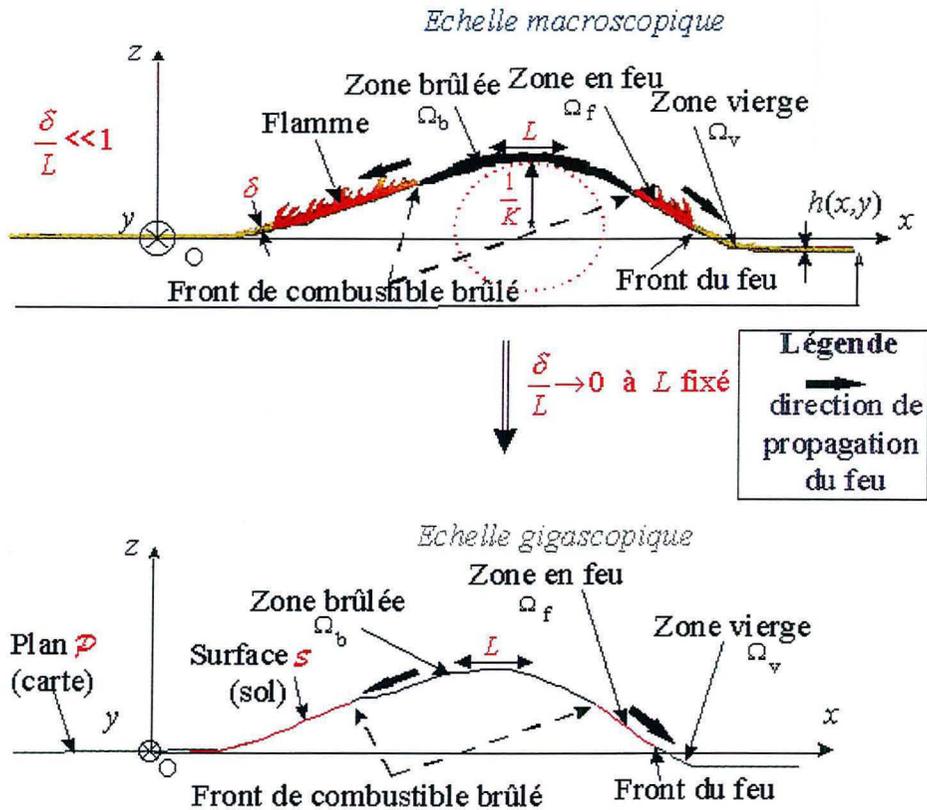


FIG. 4.1 – De l'échelle macroscopique à l'échelle gigascopique

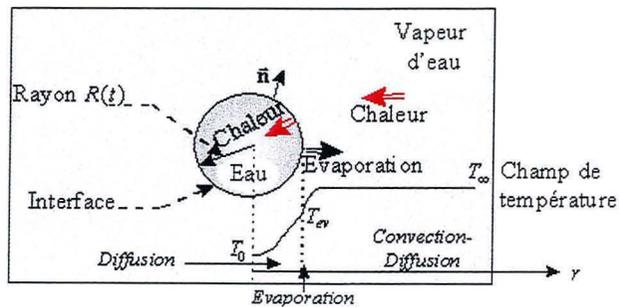


FIG. 4.2 – Evaporation d'une goutte dans sa vapeur

par un coefficient d'échange et de trouver la forme de celui-ci. Le système de feux de forêt étant plus compliqué, nous allons en première approximation réaliser une simplification de celui-ci au paragraphe 4.2. ci-dessous sans faire apparaître les groupements adimensionnelles correspondant. L'adimensionnalisation sera réalisée sur le système simplifié ainsi obtenu. Une étape ultérieure devrait être d'obtenir le domaine de validité de ces simplifications de manière plus précise en faisant apparaître les groupements adimensionnelles correspondants directement dans le système de feux de forêt puis en procédant comme dans [8] et [15]).

4.1.2 Bilan d'énergie

Récrivons l'équation de bilan d'énergie (3.28) de la particule végétale :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \left(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 \right) \right] \\ + \text{div} \left[(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \left(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 \right) \mathbf{Q}_p - \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{C}_p \right] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} -P_p \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{g} \\ - \left[(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{pf} + X^{pf} \right] \end{array} \right) \quad (4.1)$$

Nous allons simplifier cette équation. Les vitesses \mathbf{V}_p sont faibles. Ceci est dû à la **structure rigide de ces tiges** et à la **condition aux limites** qui impose la fixation des végétaux au niveau du sol par l'enracinement de la végétation. Rappelons que le transport des braises (cf. figure 1.3) a été négligé dans notre étude et que la prise en compte de ce transport devrait être réalisée à l'échelle mésoscopique. L'énergie cinétique $\frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2$ est donc négligeable. Il vient alors :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p E_p] \\ + \text{div} [(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p E_p + \mathbf{Q}_p] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} -P_p \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ -(E_p + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{pf} \\ -X^{pf} \end{array} \right) \quad (4.2)$$

L'énergie $(E_p + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{pf}$ due au transfert de masse des tiges vers la zone fluide qui l'entoure est faible, car le transfert de masse K^{pf} est faible. La variation temporelle de la porosité de la végétation est faible si nous supposons que la structure solide de la végétation reste conservée lors de la combustion. L'équation (4.2) se réduit alors à :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p E_p] \\ + \text{div} [(1 - \Phi) \tilde{\rho}_p E_p + \mathbf{Q}_p] \end{array} \right) = -X^{pf} \quad (4.3)$$

Cette équation est couplée avec le bilan énergétique (3.19) par l'intermédiaire de l'échange d'énergie X^{pf} , due au déséquilibre local du champ de température entre les 2 phases, dont l'expression est donnée par la relation (3.32).

Faisons l'hypothèse que les coefficients α_p et α_f sont faibles dans la loi de Fourier généralisée (3.31). L'annexe H donne alors l'expression des équations thermiques associées aux bilans d'énergies (4.3) et (3.19) respectivement dans le constituant végétal (tiges) et

dans le constituant air de la phase particule végétale si nous supposons que le nombre de Lewis est proche de 1. Ce sont :

$$\left(\begin{array}{l} (1 - \Phi)\tilde{\rho}_p C p^p \frac{\partial T^p}{\partial t} \\ + \operatorname{div} [-\lambda^p \operatorname{grad}(T^p) + \mathbf{Q}_r^p] \end{array} \right) = R_c^p - X^{pj} \quad (4.4)$$

et

$$\left(\begin{array}{l} \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \frac{\partial T^f}{\partial t} \\ + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \operatorname{grad}(T^f) \\ + \operatorname{div} [-\lambda^f \operatorname{grad}(T^f) + \mathbf{Q}_r^f] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} +\Phi \frac{\partial P^f}{\partial t} \\ + \mathcal{T}^f : \mathbf{V}^f - P^f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ + X^{pj} + R_c^f \end{array} \right) \quad (4.5)$$

où les capacités globales $C p^p$ et $C p^f$ ainsi que les termes sources d'origine chimique R_c^p et R_c^f sont définis en annexe H.

Rappelons enfin la relation (3.32) donnant l'expression de l'énergie X^{pj} :

$$X^{pj} = \chi(T^f - T^p) \quad (4.6)$$

Nous pouvons maintenant résoudre le système (4.4)-(4.6) de trois équations aux trois inconnues T^f , T^p et X^{pj} .

L'élimination du terme X^{pj} entre (4.4) et (4.6) et entre (4.4) et (4.5) conduit aux bilans :

$$\left(\begin{array}{l} (1 - \Phi)\tilde{\rho}_p C p^p \frac{\partial T^p}{\partial t} \\ + \operatorname{div} [-\lambda^p \operatorname{grad}(T^p) + \mathbf{Q}_r^p] \end{array} \right) = +R_c^p - \chi(T^f - T^p) \quad (4.7)$$

$$\left(\begin{array}{l} \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \frac{\partial T^f}{\partial t} \\ + (1 - \Phi)\tilde{\rho}_p C p^p \frac{\partial T^p}{\partial t} \\ + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \operatorname{grad}(T^f) \end{array} \right) + \operatorname{div} \left[\begin{array}{l} -\lambda^f \operatorname{grad}(T^f) \\ -\lambda^p \operatorname{grad}(T^p) \\ + \mathbf{Q}_r^f + \mathbf{Q}_r^p \end{array} \right] = \left(\begin{array}{l} +\Phi \frac{\partial P^f}{\partial t} \\ + \mathcal{T}^f : \mathbf{V}^f - P^f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ + R_c^f + R_c^p \end{array} \right) \quad (4.8)$$

La relation (4.7) permet d'obtenir l'expression du champ de température T^f en fonction du champ de température T^p :

$$T^f = T^p - (1 - \Phi) \frac{\tilde{\rho}_p C p^p}{\chi} \frac{\partial T^p}{\partial t} - \frac{1}{\chi} \operatorname{div} \left[\begin{array}{l} -\lambda^p \operatorname{grad}(T^p) \\ + \mathbf{Q}_r^p \end{array} \right] + \frac{R_c^p}{\chi} \quad (4.9)$$

En reportant alors l'expression (4.9) de T^f dans la relation (4.8), il vient finalement l'équation thermique vérifiée par T^p . Si nous faisons l'hypothèse que le coefficient d'échange χ est important, il vient au premier ordre en $1/\chi$:

$$T^f = T^p \quad (4.10)$$

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \\ +(1-\Phi) \tilde{\rho}_p C p^p \end{array} \right] \frac{\partial T^p}{\partial t} \\ + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \text{grad}(T^p) \end{array} \right) + \text{div} \left[\begin{array}{c} -(\lambda^f + \lambda^p) \text{grad}(T^p) \\ + \mathbf{Q}_r^f + \mathbf{Q}_r^p \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} + \Phi \frac{\partial P^f}{\partial t} \\ + \mathcal{T}^f : \mathbf{V}^f - P^f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ + R_c^f + R_c^p \end{array} \right) \quad (4.11)$$

Le premier ordre correspond donc à l'équilibre thermodynamique local.

Définissons les grandeurs $\tilde{\rho}_v$, $C p^v$ et λ^v par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_v &= \Phi \tilde{\rho}_f + (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \\ \tilde{\rho}_v C p^v &= \Phi \tilde{\rho}_f C p^f + (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p C p^p \\ \lambda^v &= \lambda^f + \lambda^p \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'équation thermique (4.11) s'écrit alors :

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\rho}_v C p^v \frac{\partial T^p}{\partial t} \\ + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \text{grad}(T^p) \end{array} \right) + \text{div} \left[\begin{array}{c} -\lambda^v \text{grad}(T^p) \\ + \mathbf{Q}_r^f + \mathbf{Q}_r^p \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} + \Phi \frac{\partial P^f}{\partial t} \\ + \mathcal{T}^f : \mathbf{V}^f - P^f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ + R_c^f + R_c^p \end{array} \right) \quad (4.13)$$

Nous négligeons les variations temporelles de P^f et Φ et la dissipation visqueuse. L'équation précédente prend alors la forme :

$$\tilde{\rho}_v C p^v \frac{\partial T^p}{\partial t} + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \text{grad}(T^p) = \text{div} \left[\begin{array}{c} \lambda^v \text{grad}(T^p) \\ - \mathbf{Q}_r^f - \mathbf{Q}_r^p \end{array} \right] + (R_c^f + R_c^p) \quad (4.14)$$

Nous pouvons négliger le terme conductif $\lambda^v \text{grad}(T^p)$ devant le terme radiatif $-\mathbf{Q}_r^f - \mathbf{Q}_r^p$.

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\tilde{\rho}_v C p^v \frac{\partial T^p}{\partial t} + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \mathbf{V}^f \cdot \text{grad}(T^p) = -\text{div} [\mathbf{Q}_r^f + \mathbf{Q}_r^p] + (R_c^f + R_c^p)} \quad (4.15)$$

C'est une équation macroscopique 3D qui est plus générale que celle d'Albini [1, 2] car elle tient compte de la convection dans la phase gazeuse de la zone végétale. Cette équation est aussi plus générale que celle donnée par Weber [25], car elle est tridimensionnelle et tient compte d'un rayonnement, dans un milieu semi-absorbant, qui ne se limite pas à un terme diffusif de type laplacien. Nous discuterons les conditions de validité de ce cas limite au paragraphe 4.4.3. ci-dessous. Notons enfin que l'équation (4.15) ci-dessus est une équation de réaction-diffusion du même type que l'équation (2.114) si nous supposons, de plus, que le terme de production chimique $R_c^f + R_c^p$ s'exprime linéairement en fonction de la température T^p , pour T^p variant proche d'une température de référence.

Considérons que la vitesse \mathbf{V}^f est une donnée du problème ce qui nous évite de résoudre l'hydrodynamique, gouvernée par l'équation de Brinkman (3.18), dans le constituant air. Les termes $\tilde{\rho}_v$, $\tilde{\rho}_f$, $C p^v$ et $C p^f$ sont supposés constants dans la zone végétale en avant du front du feu. Il reste à exprimer la production d'énergie d'origine chimique $R_c^f + R_c^p$.

4.1.3 Expression de la production d'énergie d'origine chimique

Le terme $R_c^f + R_c^p$ correspond à la chaleur dégagée par les réactions chimiques respectivement dans les tiges et autour de celles-ci. D'après l'annexe H, leurs expressions sont données par :

$$R_c^p = \sum_{i=1}^5 \tilde{\omega}_i H_i^0 \quad \text{et} \quad R_c^f = \sum_{i=1}^5 \tilde{\omega}_i h_i^0 \quad (4.16)$$

$$R_c^p = - \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha Q_\alpha \quad (4.17)$$

où Q_α est la *chaleur standard de la $\alpha^{i\text{ème}}$ réaction* à la température de référence T^0 . C'est une constante. Nous supposons que l'oxygène ne pénètre pas dans les tiges des végétaux. Il vient alors d'après (3.36) :

$$R_c^p = -((1 - \mathcal{E}^p) S_B^p \tilde{\rho}_{bp} Q_B + \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g Q_G) \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} Q_B &= k_1(T^p) Q_1 + k_2(T^p) Q_2 + k_3(T^p) Q_3 \\ Q_G &= k_4(T^p) Q_4 + k_5(T^p) Q_5 \end{aligned} \quad (4.19)$$

La seule réaction chimique considérée dans la phase gazeuse est la combustion entre les produits de pyrolyse des tiges végétales et l'oxygène de l'air :

$$R_c^f = -k_6(T^f) (\tilde{\rho}_f Y_{F_f})^{\nu_F} (\tilde{\rho}_f Y_{O_f})^{\nu_O} Q_6 \quad (4.20)$$

Les coefficients k_α sont donnés par une **loi d'Arrhenius** d'après (3.37) :

$$k_\alpha(T) = A_\alpha e^{-(E_\alpha/R^0 T^p)}, \quad \alpha = 1 \text{ à } 5 \quad k_6(T) = A_6 e^{-(E/R^0 T^f)} \quad (4.21)$$

Nous avons vu en (4.10) que nous pouvons identifier les températures T^p et T^f si nous faisons l'hypothèse que le coefficient d'échange χ est important. Simplifions l'étude en supposant qu'il n'y a pas production de Goudron lors de la pyrolyse des tiges végétales. La relation (4.18) prend alors la forme simplifiée :

$$R_c^p = -(1 - \mathcal{E}^p) S_{bp} \tilde{\rho}_{bp} Q_B \quad (4.22)$$

Il reste à exprimer les variations des grandeurs S_{bp} , Y_{F_f} et Y_{O_f} qui interviennent dans les cinétiques chimiques ci-dessus. Pour cela utilisons les bilans de masse obtenus au chapitre précédent.

4.1.4 Variation des concentrations massiques

Le bilan de masse (3.21) de l'espèce bois dans le constituant végétal s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p)S_{bp}\tilde{\rho}_{bp}) = -(1 - \Phi)(K_{bg} + K_{bl} + K_{bc}) \quad (4.23)$$

D'après l'équation d'état du bois, $\tilde{\rho}_{bp}$ est constant. Comme, de plus, nous négligeons la formation de goudron, le bilan de masse du bois (4.23) s'écrit :

$$\frac{\partial S_{bp}}{\partial t} = \frac{W_B}{1 - \mathcal{E}^p} k_b(T^p) S_{bp} \quad (4.24)$$

avec

$$k_b(T^p) = k_1(T^p) + k_2(T^p) \quad (4.25)$$

Cette équation sera dite **équation de pyrolyse**.

Pour l'obtention des grandeurs Y_{Ff} et Y_{Of} , écrivons les bilans de masse (3.17) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Ff}) + \text{div}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Ff} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{Ff}) = \Phi\nu_{F6}\Psi_6 - K_{Fg}^{fp} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Of}) + \text{div}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Of} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{Of}) = \Phi\nu_{O6}\Psi_6 - K_{Og}^{fp} \quad (4.27)$$

Comme nous supposons que l'oxygène ne pénètre pas dans les tiges végétales, $K_{Oa}^{fp} = 0$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Of}) + \text{div}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Of} \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{Of}) = \Phi\nu_{O6}\Psi_6 \quad (4.28)$$

K_{Fg}^{fp} est enfin la quantité de combustible gazeux qui provient des tiges végétales. Son expression est donnée, en négligeant la formation de goudron, par le bilan de masse suivant de quantité de combustible dans le constituant végétal :

$$K_{Fg}^{fp} = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}) \\ + \text{div}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}V_{gp}) \\ + (1 - \Phi)W_F k_B(T^p)S_{bp} \end{array} \right) \quad (4.29)$$

La vitesse V_{gp} est enfin donnée par la loi de Darcy (3.24).

L'élimination de K_{Fg}^{fp} entre (4.29) et (4.26) conduit à :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{Ff} + (1 - \Phi)\mathcal{E}^p R_g^p) \\ + \text{div} \left[\begin{array}{l} \Phi\tilde{\rho}_f Y_{Ff} \mathbf{V}_f \\ + \mathbf{J}_{Ff} \\ + (1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} V_{gp} \end{array} \right] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} + \Phi\nu_{F6}\Psi_6 \\ - (1 - \Phi)W_F k_b(T^p)S_{bp} \end{array} \right) \quad (4.30)$$

Les deux équations (4.28) et (4.30) seront dites **équations de combustion**.

Les variations des grandeurs S_{bp} , Y_{Ff} et Y_{Of} sont donc exprimées par les trois relations (4.24), (4.28) et (4.30). Les deux termes de production d'énergie chimique (4.20) et (4.22) permettent alors de trouver de la production chimique $R_c^f + R_c^p$ qui intervient dans le bilan énergétique (4.15).

4.1.5 Production chimique ne dépendant que du champ de température

On peut considérer que le terme de production chimique $R_c^f + R_c^p$ ne dépend que du champ de température T^p dans la zone en avant du front du feu et que l'équation de pyrolyse (4.24) fait intervenir une température T^p qui est constante. Ceci permet de découpler les deux équations (4.15) et (4.24) dans des domaines différents et évite ainsi de résoudre la *structure de la flamme*, problème classique en combustion [26], et qui correspond ici à l'étude au front du feu lorsque l'épaisseur de celui-ci est petit. Notons alors

$$R_c^f(T^p) = R_c^f + R_c^p \quad (4.31)$$

Le découplage fait cependant intervenir une inconnue supplémentaire qui est la position du front du feu. Nous devons alors faire intervenir une *température d'inflammation* T^i du combustible végétal, température qui est une donnée supplémentaire du problème. La position du front du feu est alors déterminée par l'*isotherme* $T^p = T^i$. Nous nous plaçons dans cette hypothèse dans toute la suite de ce document afin de simplifier les calculs parce que c'est une hypothèse couramment employée dans l'étude des feux de forêts. Cette hypothèse est cependant critiquable et une étude ultérieure plus précise ne doit pas l'utiliser. Ceci conduit alors à tenir compte de la combustion de manière non élémentaire et à étudier la **structure** du front du feu.

4.1.6 Bilan radiatif: approximation de diffusion

Notons H la longueur caractéristique de variation notable de la densité d'énergie radiative i' et l_m la longueur caractéristique à partir de laquelle nous pouvons considérer que le rayonnement est négligeable :

$$l_m = 1/K \quad (4.32)$$

Plaçons-nous dans le cas où $l_m/H \ll 1$. Cette hypothèse est dite *approximation de diffusion*. Le milieu correspondant est dit *optiquement épais*.

Si nous considérons une strate végétale suffisamment peu poreuse, alors nous pouvons utiliser cette hypothèse dans le cas d'une diffusion isotrope. Le flux radiatif \mathbf{Q}_r qui apparaît dans l'équation thermique (4.15) prend alors la forme d'une loi de type Fourier [22] :

$$\mathbf{Q}_r = -\lambda_r(T^p)\nabla T^p \quad (4.33)$$

où la conductivité radiative $\lambda_r(T^p)$ s'exprime par :

$$\lambda_r(T^p) = \frac{16}{3K} B(T^p)^3 \quad (4.34)$$

Cette hypothèse est critiquable, car les phases particules végétales ont généralement une porosité importante. Nous l'utiliserons quand même au paragraphe 4.2. suivant, lors de la réduction tridimensionnelle-bidimensionnelle, car ceci rend la compréhension de la réduction plus simple et permet de simplifier la prise en compte de l'hydrodynamique au-dessus de la zone végétale. Nous nous affranchirons ensuite de cette hypothèse au paragraphe 4.3. où nous réaliserons un passage tridimensionnelle-bidimensionnelle pour un milieu qui n'est pas optiquement épais.

4.1.7 Conditions aux limites sur les interfaces zone végétale-air ambiant et zone végétale-sol

Les conditions aux limites du problème (4.15) sur les interfaces $\bar{\Sigma}$ et $\underline{\Sigma}$ doivent être précisées. Ces conditions sont données par les relations de sauts (3.50). Elles sont donc couplées avec le bilan énergétique (3.7) et le bilan hydrodynamique (3.6) dans l'air ambiant pour la condition sur $\bar{\Sigma}$, et par les équations (3.15)-(3.16) pour la condition sur $\underline{\Sigma}$.

Simplifions cette relation de saut (3.50) en la remplaçant par une condition aux limites de type Fourier sur $\underline{\Sigma}$:

$$-\lambda_r \text{grad}(T^p) \cdot \vec{n} = h_L(T^p - \bar{T}^a) \text{ sur l'interface } \bar{\Sigma} \quad (4.35)$$

où \bar{T}^a est la température ambiante supposée constante loin de l'interface $\underline{\Sigma}$ et où h_L est le coefficient d'échange convectif avec le milieu ambiant.

L'intervention de nouveau paramètre h_L permet de s'affranchir de la résolution des équations (3.5)-(3.50) dans le milieu ambiant. L'expression de h_L en fonction de la **vitesse locale \bar{V} du vent au-dessus** de la zone végétale est supposée connue ce qui correspond à connaître l'hydrodynamique dans le milieu ambiant.

Le sol peut être considéré comme un **isolant** en première approximation :

$$\text{grad}(T^p) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur l'interface } \underline{\Sigma} \quad (4.36)$$

La condition (4.36) ci-dessus conduit à un découplage avec les équations (3.15)-(3.16).

4.1.8 Bilan thermique unique et conditions aux limites

Rappelons le système tridimensionnel simplifié de feux de forêts, constitué d'une seule équation thermique, que nous avons obtenu dans ce paragraphe.

Nous supposons de plus que la conductivité radiative λ_r est constante et uniforme. Notons enfin Ω_v le domaine occupé par la zone végétale.

Nous aboutissons à l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

$$\tilde{\rho}_v C p^v \frac{\partial T^p}{\partial t} + \Phi \tilde{\rho}_f C p^f \vec{V}_f \cdot \text{grad}(T^p) = -\lambda_r \Delta T^p + R_c(T^p) \text{ dans } \Omega_v \quad (4.37)$$

$$-\lambda_r \text{grad}(T^p) \cdot \vec{n} = h_L(T^p - \bar{T}^a) \text{ sur l'interface } \bar{\Sigma} \quad (4.38)$$

$$\text{grad}(T^p) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur l'interface } \underline{\Sigma} \quad (4.39)$$

Nous allons maintenant passer de ce système tridimensionnel à un système bidimensionnel.

4.1.9 Adimensionnalisation

A partir des grandeurs physiques et de L nous pouvons définir un temps caractéristique

$$\tau = \frac{\bar{\rho}_v C_p^v L^2}{\lambda_r} \quad (4.40)$$

Nous avons aussi la vitesse caractéristique V associée à $\vec{\mathbf{V}}_f$ et une production d'énergie caractéristique R associée R_c . Définissons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad (4.41)$$

$$T^{p*} = \frac{T^p - T^a}{T^a} \quad \vec{\mathbf{V}}_f^* = \frac{\vec{\mathbf{V}}_f}{V} \quad \text{et} \quad R_c^* = \frac{R_c}{R} \quad (4.42)$$

Avec les définitions ci-dessus, le problème de réaction-diffusion prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T^p}{\partial t} + G_v \vec{\mathbf{V}}_f \cdot \text{grad}(T^p) = -\Delta T^p + C_i R(T^p) \quad \text{dans } \Omega_v \quad (4.43)$$

$$-\text{grad}(T^p) \cdot \vec{\mathbf{n}} = B_i T^p \quad \text{sur l'interface } \bar{\Sigma} \quad (4.44)$$

$$\text{grad}(T^p) \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur l'interface } \underline{\Sigma} \quad (4.45)$$

où nous omettons d'indicer les grandeurs par une étoile pour alléger les notations et où apparaissent les paramètres adimensionnels suivants :

Le nombre de Biot B_i est défini par :

$$B_i = \frac{h_L L}{\lambda_r} \quad (4.46)$$

$$G_v = \frac{V}{\lambda_r / (\Phi R^f C_p^f L)} \quad (4.47)$$

$$C_i = \frac{R}{T^a \lambda_r / L^2} \quad (4.48)$$

Soit δ l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la zone végétale (cf. figures 4.1). La longueur δ caractérise les dimensions de l'échelle **macroscopique**.

Notons $\varepsilon = \delta/L$ le paramètre caractérisant la géométrie. Les nombres adimensionnels du problème sont B_i , G_v , C_i et ε .

4.2 Coordonnées locales proches de la surface

4.2.1 Définition de la surface et métrique associée

Un point P lié à la surface \mathcal{S} du sol est défini par une abscisse curviligne X, Y sur la surface. Choisissons le paramétrage curviligne suivant de la surface \mathcal{S} (cf. figure 4.3) :

$$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z(x, y)\vec{z} \quad (4.49)$$

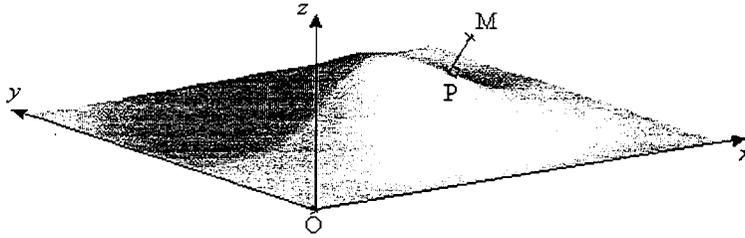


FIG. 4.3 – Paramétrage curviligne de la surface \mathcal{S}

La différentiation de cette relation conduit à :

$$d\vec{OP} = (\vec{x} + \frac{\partial z}{\partial x}\vec{z})dx + (\vec{y} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{z})dy \quad (4.50)$$

Définissons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ et } q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4.51)$$

L'expression précédente prend la forme simplifiée :

$$d\vec{OP} = (\vec{x} + p\vec{z})dx + (\vec{y} + q\vec{z})dy \quad (4.52)$$

$$d\vec{OP} = \vec{X}_s dx + \vec{Y}_s dy \quad (4.53)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{X}_s &= \vec{x} + p\vec{z} \\ \vec{Y}_s &= \vec{y} + q\vec{z} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Les vecteurs X_s et Y_s vérifient alors :

$$\vec{X}_s = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial x} \Big|_y \quad \text{et} \quad \vec{Y}_s = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial y} \Big|_x \quad (4.55)$$

Notons que le vecteur normale à la surface \mathcal{S} s'écrit :

$$\vec{n} = \frac{-p\vec{x} - q\vec{y} + \vec{z}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad (4.56)$$

Le tenseur métrique G_s est défini par la forme quadratique :

$$d\vec{OP}^2 = du_s^T \cdot G_s \cdot du_s \quad (4.57)$$

où du_s est le vecteur $du_s = (dx, dy)$.

Nous avons donc

$$G_s = \begin{pmatrix} \vec{X}_s \cdot \vec{X}_s & \vec{X}_s \cdot \vec{Y}_s \\ \vec{Y}_s \cdot \vec{X}_s & \vec{Y}_s \cdot \vec{Y}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^s & g_{12}^s \\ g_{21}^s & g_{22}^s \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Les relations précédentes conduisent alors aux expressions suivantes pour les composantes covariantes g_{ij}^s :

$$\begin{aligned} g_{11}^s &= 1 + p^2 \\ g_{22}^s &= 1 + q^2 \\ g_{12}^s &= g_{21}^s = pq \end{aligned} \quad (4.59)$$

Soit g^s le déterminant du tenseur métrique G_s :

$$\begin{aligned} g^s &= g_{11}^s g_{22}^s - g_{12}^s{}^2 \\ &= 1 + p^2 + q^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Définissons

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad u = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (4.61)$$

Les courbures totales K et moyennes H s'expriment par [5] :

$$K = \frac{ru - s^2}{1 + p^2 + q^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{1(1 + p^2)u - 2pqs + (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad (4.62)$$

4.2.2 Expression du gradient et du laplacien sur la surface courbe

Notons $(u^1, u^2) = (x, y)$ les coordonnées curvilignes sur la surface \mathcal{S} . L'expression du gradient du champ scalaire $T(x, y)$ en coordonnées curvilignes est la suivante :

$$\text{grad}^s T \cdot \vec{V} = \frac{\partial T}{\partial x} V_x + \frac{\partial T}{\partial y} V_y \quad (4.63)$$

pour tout vecteur

$$\vec{V} = V_x \vec{X}_s + V_y \vec{Y}_s \quad (4.64)$$

L'expression du laplacien du champ scalaire $T(x, y)$ en coordonnées curvilignes est la suivante :

$$\Delta^s T = \frac{1}{\sqrt{g^s}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g^s} g^{sij} \frac{\partial T}{\partial u^j} \right) \quad (4.65)$$

où g^{sij} sont les composantes contravariantes du tenseur métrique, c'est-à-dire les éléments de la matrice inverse de celle des g_{ij}^s .

Les g^{sij} sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g^{s11} &= g_{22}^s / g^s \\ g^{s22} &= g_{11}^s / g^s \\ g^{12} = g^{21} &= -g_{21} / g \end{aligned} \quad (4.66)$$

Le laplacien prend donc la forme suivante :

$$\Delta_S^s T^p = \frac{1}{\sqrt{g^s}} \left[\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{22}^s}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial T^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g_{11}^s}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{21}^s}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g_{12}^s}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial T^p}{\partial x} \right) \end{aligned} \right] \quad (4.67)$$

4.2.3 Définitions des coordonnées locales à la surface et métrique associée

Un point M de l'espace est repérée par rapport au point P lié à la **surface S du sol**. Nous avons vu que P est défini par une abscisse curviligne X, Y sur la surface. La troisième coordonnée curviligne est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{PM} = \rho \vec{n}} \quad (4.68)$$

où \vec{n} est la normale à la surface au point P (cf. figure 4.4).

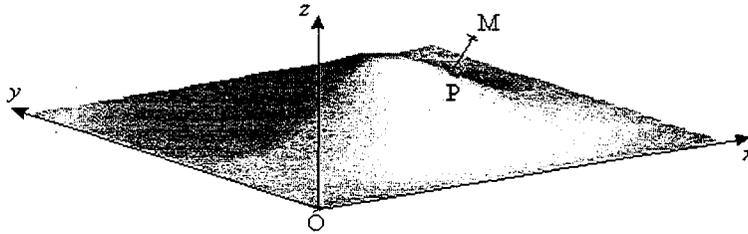


FIG. 4.4 – Coordonnées curvilignes associées à une surface

Les coordonnées définies ci-dessus établissent une bijection entre les points de l'espace et les coordonnées (x, y, z) d'un point M proche de la surface. Le terme εK doit rester

petit devant l'unité :

$$\boxed{\varepsilon k \ll 1} \quad (4.69)$$

La relation vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \rho \vec{n}} \quad (4.70)$$

conduit à :

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OP} + d\rho \vec{n} + \rho d\vec{n} \quad (4.71)$$

L'expression de la différentielle $d\overrightarrow{OP}$ est donnée par la relation (4.52). De plus, la différentiation du vecteur normale (4.56) donne :

$$d\vec{n} = -\frac{(r\vec{x} + sy)dx + (s\vec{x} + uy)dy}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}(1 + p^2 + q^2) - \frac{-p\vec{x} - qy + z}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}((pr + qs)dx + (ps + qu)dy) \quad (4.72)$$

$d\overrightarrow{OM}$ a donc la forme suivante :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{X}dx + \vec{Y}dy + \vec{n}d\rho \quad (4.73)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{X}_s - \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} ((1 + q^2)r - pqs)\vec{x} \\ +((1 + p^2)s - pqr)\vec{y} \\ + (pr + qs)\vec{z} \end{pmatrix} \rho \\ \vec{Y} &= \vec{Y}_s - \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} ((1 + q^2)s - pqu)\vec{x} \\ +((1 + p^2)u - pqs)\vec{y} \\ + (ps + qu)\vec{z} \end{pmatrix} \rho \end{aligned} \quad (4.74)$$

Les vecteurs \vec{X} , \vec{Y} et \vec{n} vérifient alors :

$$X = \left. \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \right|_{y, \rho}, \quad Y = \left. \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \right|_{x, \rho} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \left. \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right|_{x, y} \quad (4.75)$$

Le tenseur métrique G est alors défini par la forme quadratique :

$$d\overrightarrow{OM}^2 = du^T \cdot G \cdot du \quad (4.76)$$

où du est le vecteur $du = (dx, dy, d\rho)$. On a donc

$$G = \begin{pmatrix} \vec{X} \cdot \vec{X} & \vec{X} \cdot \vec{Y} & \vec{X} \cdot \vec{n} \\ \vec{Y} \cdot \vec{X} & \vec{Y} \cdot \vec{Y} & \vec{Y} \cdot \vec{n} \\ \vec{n} \cdot \vec{X} & \vec{n} \cdot \vec{Y} & \vec{n} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Les relations précédentes conduisent alors aux expressions suivantes pour les composantes covariantes g_{ij} :

$$g_{11} = g_{11}^s - \frac{2}{\sqrt{g^s}} r \rho + \frac{k_{11}}{(g^s)^3} \rho^2 \quad (4.78)$$

$$g_{22} = g_{22}^s - \frac{2}{\sqrt{g^s}} u \rho + \frac{k_{22}}{(g^s)^3} \rho^2 \quad (4.79)$$

$$g_{33} = 1 \quad (4.80)$$

$$g_{12} = g_{21} = g_{12}^s - \frac{2}{\sqrt{g^s}} s \rho + \frac{k_{12}}{(g^s)^3} \rho^2 \quad (4.81)$$

et

$$g_{13} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0 \quad (4.82)$$

Soit g le déterminant du tenseur métrique G :

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (4.83)$$

avec :

$$\begin{aligned} k_{11} = & [(1+q^2)^2 + (pq)^2 + (1+p^2)^2 + p^2]r^2 \\ & - 2pq(1+q^2+p^2)sr \\ & + q^2(1+p^2)s^2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} k_{22} = & [(1+q^2)^2 + (pq)^2 + (1+p^2)^2 + q^2]u^2 \\ & - 2pq(1+q^2+p^2)su \\ & + p^2(1+q^2)u^2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} k_{12} = & [(1+p^2)^2 + (pq)^2 + q^2]su \\ & + [(1+q^2)^2 + (pq)^2 + p^2]sr \\ & - pq(1+p^2+q^2)(rt+s^2) \end{aligned} \quad (4.86)$$

La condition (4.69) est satisfaite pour $K = \mathbf{O}(1)$ ou pour K pas très grand ($K \ll 1/\varepsilon$). Plaçons-nous dans ce cas. Plus précisément, considérons que les dérivées secondes r , u et s définies par (4.61) sont de l'ordre de 1. Les coefficients k_{11} , k_{22} et k_{12} sont donc de l'ordre 1. Il en est de même pour g_{11}^s , g_{22}^s , g_{12}^s et g^s .

4.2.4 Expression du gradient et du laplacien en coordonnées curvilignes

Notons $(u^1, u^2, u^3) = (x, y, \rho)$ les coordonnées curvilignes. L'expression du gradient du champ scalaire $T(x, y, \rho)$ en coordonnées curvilignes est la suivante :

$$\text{grad } T \cdot \vec{V} = \frac{\partial T}{\partial x} V_x + \frac{\partial T}{\partial y} V_y + \frac{\partial T}{\partial \rho} V_\rho \quad (4.87)$$

pour tout vecteur

$$\vec{V} = V_x X + V_y \vec{Y} + V_\rho \vec{n} \quad (4.88)$$

L'expression du laplacien du champ scalaire T en coordonnées curvilignes est la suivante [4]:

$$\text{grad } T \cdot \vec{V} \quad (4.89)$$

où g^{ij} sont les composantes contravariantes du tenseur métrique, c'est-à-dire les éléments de la matrice inverse de celle des g_{ij} .

Les g^{ij} sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} g^{11} &= g_{22}/g \\ g^{22} &= g_{11}/g \\ g^{33} &= g_{33} \\ g^{12} = g^{21} &= -g_{21}/g \\ g^{13} = g^{23} &= g^{31} = g^{32} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Le laplacien prend donc la forme simplifiée suivante:

$$\Delta T = \Delta_S T + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) \quad (4.91)$$

avec

$$\Delta_S T = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial T}{\partial u^j} \right) \quad (4.92)$$

Les coordonnées de la vitesse du vent \vec{V}_f , dans la strate végétale, sont les suivantes:

$$\vec{V}_f = V^J \vec{X} + V_y^J \vec{Y} + V_\rho^J \vec{n} \quad (4.93)$$

4.3 Réduction bidimensionnelle pour un nombre de Biot faible

Nous désirons passer du modèle 3D précédant à un modèle 2D surfacique. Pour cela, nous allons utiliser la présence d'un petit paramètre géométrique. La longueur δ est en effet petite devant la longueur caractéristique L de l'étendue horizontale de cette zone, c'est-à-dire:

$$\varepsilon \ll 1 \quad (4.94)$$

La longueur L caractérise les dimensions de l'échelle *gigascope*. Nous ne la connaissons qu'en ordre de grandeur. C'est l'échelle d'observation caractéristique de la propagation du feu.

4.3.1 Ordre de grandeur des paramètres et échelles associées

Nous supposons que les nombres G_v et C_i sont de l'ordre de 1. Le nombre de Biot B_i est pris de l'ordre de ε ,

$$B_i = b_i \varepsilon \quad (4.95)$$

afin d'étudier le régime intéressant pour lequel les pertes convectives vers la phase ambiante sont du même ordre de grandeur que les autres termes qui apparaissent dans l'équation (4.43).

Lorsque l'on effectue le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le système (4.43)-(4.45), le problème devient singulier, car le domaine Ω_V devient de dimension nulle. Nous sommes donc conduit à définir des coordonnées locales proches de la surface afin de dilater la coordonnées normales à la surface pour éliminer la singularité.

La vitesse du vent V_ρ^f dans la direction normale à la surface est supposée très petite. Prenons la de l'ordre de ε^3 ,

$$\boxed{V_\rho^f = v_\rho^f \varepsilon^3} \quad (4.96)$$

alors que V_x^f et V_y^f sont choisies de l'ordre de 1.

L'étude plus précise de l'équation de Brinkman (3.18) donnerait l'ordre exact de V_ρ^f par rapport à ε .

4.3.2 Dilatation normale à la surface

Nous choisissons de ne dilater que la distance ρ à la surface \mathcal{S} dans le système (4.43)-(4.45) afin de résoudre le problème de passage à la limite singulier $\varepsilon \rightarrow 0$ que nous avons vu au paragraphe 4.3.1. Définissons les variables dilatées suivantes :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \frac{t}{\varepsilon} \quad (4.97)$$

Ces variables sont caractéristiques de l'échelle d'observation macroscopique. Nous nous plaçons alors à l'intérieur de la strate végétale.

Le système (4.43)-(4.45) s'écrit alors :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial T^p}{\partial t} + G_v^2 \varepsilon \vec{V}^f \cdot \text{grad}(T^p) = \left(\begin{array}{l} \varepsilon^2 \Delta_S T^p \\ + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} \right) \\ + \varepsilon^2 R_c(T^p) \end{array} \right) \quad \text{en } 0 < \tilde{\rho} < \tilde{h}(x, y, \varepsilon) \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} = -b_r \varepsilon^2 T^p \quad \text{en } \tilde{\rho} = \tilde{h}(x, y, \varepsilon) \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \quad \text{en } \tilde{\rho} = 0 \quad (4.100)$$

avec

$$\vec{V}_f \cdot \text{grad}(T^p) = V_x^f \frac{\partial T^p}{\partial x} + V_y^f \frac{\partial T^p}{\partial y} + \varepsilon^2 v_\rho^f \frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} \quad (4.101)$$

$$\Delta_S T^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right) \right] \quad (4.102)$$

$$g_{11} = g_{11}^s - \varepsilon \frac{2r}{\sqrt{g^s}} \tilde{\rho} + \varepsilon^2 \frac{k_{11}}{(g^s)^3} \tilde{\rho}^2 \quad (4.103)$$

$$g_{22} = g_{22}^s - \varepsilon \frac{2u}{\sqrt{g^s}} \tilde{\rho} + \varepsilon^2 \frac{k_{22}}{(g^s)^3} \tilde{\rho}^2 \quad (4.104)$$

$$g_{12} = g_{21} = g_{12}^s - \varepsilon \frac{2s}{\sqrt{g^s}} \tilde{\rho} + \varepsilon^2 \frac{k_{12}}{(g^s)^3} \tilde{\rho}^2 \quad (4.105)$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (4.106)$$

4.3.3 Choix de la forme des développements

Définissons les variables dilatées suivantes :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\varepsilon},$$

Le champ de température T^p dépend a priori des variables x , \tilde{x} , y , \tilde{y} , ρ , $\tilde{\rho}$, t , \tilde{t} et ε .

Choisissons pour T^p un développement asymptotique de la forme :

$$T^p(t, \tilde{t}, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \rho, \tilde{\rho}, \varepsilon) = T_0^p(t, x, y, \tilde{\rho}) + T_1^p(t, x, y, \tilde{\rho})\varepsilon + \dots \quad (4.107)$$

Ceci signifie que nous cherchons un champ de température avec des variations lentes en x , y et t .

A l'ordre principal, la hauteur \tilde{h} de la couche végétale que nous étudions ne possède pas de variations en x , y :

$$\tilde{h}(x, y, \varepsilon) = 1 + \tilde{h}_1(x, y)\varepsilon + \dots \quad (4.108)$$

Etudions une forêt de hauteur \tilde{h} constante et indépendante de ε . On choisit le développement suivant pour le terme source d'origine chimique :

$$R(t, \tilde{t}, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, \rho, \tilde{\rho}, \varepsilon) = R_0(t, x, y, \tilde{\rho}) + R_1(t, x, y, \tilde{\rho})\varepsilon + \dots \quad (4.109)$$

4.3.4 Ordre 0 en Biot

La limite $\varepsilon = 0$ donne

$$\frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\sqrt{g^s} \frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} \right) = 0 \text{ en } 0 < \tilde{\rho} < 1 \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \text{ en } \tilde{\rho} = 1 \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial T^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \text{ en } \tilde{\rho} = 0 \quad (4.112)$$

Nous en déduisons que $\tilde{\rho} = 0$ est indépendante de l'abscisse $\tilde{\rho}$:

$$T_0^p(t, x, y, \tilde{\rho}) = T_0^p(t, x, y) \quad (4.113)$$

Le champ de température est donc uniforme dans le segment normale à la surface. Définissons la moyenne de $T_0^p(t, x, y, \tilde{\rho})$ sur le segment $0 < \tilde{\rho} < 1$ par :

$$\theta_0^p(t, x, y) = \int_0^1 T_0^p(t, x, y, \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} \quad (4.114)$$

La fonction T_0^p est identique avec la moyenne $\theta_0^p(t, x, y)$:

$$T_0^p = \theta_0^p(t, x, y) \quad (4.115)$$

$$T_0^p(t, x, y, 1) = \theta_0^p(t, x, y) \quad (4.116)$$

$T_0^p(t, x, y)$ n'est pas déterminée explicitement à cet ordre. Nous devons résoudre les ordres suivants afin de trouver son expression.

4.3.5 Ordre 1 en Biot

L'ordre 1 conduit au système:

$$\frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\sqrt{g^s} \frac{\partial T_1^p}{\partial \tilde{\rho}} \right) = 0 \text{ en } 0 < \tilde{\rho} < 1 \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial T_1^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \text{ en } \tilde{\rho} = 1 \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial T_1^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \text{ en } \tilde{\rho} = 0 \quad (4.119)$$

Nous en déduisons que $\tilde{\rho} = 0$ est indépendante de l'abscisse $\tilde{\rho}$:

$$T_1^p(t, x, y, \tilde{\rho}) = T_1^p(t, x, y) \quad (4.120)$$

4.3.6 Ordre 2 en Biot

L'ordre 2 conduit au système:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\frac{\partial T_2^p}{\partial \tilde{\rho}} \right) = \left(\frac{\partial T_0^p}{\partial t} + G_v \vec{\nabla}_j^s \cdot \text{grad}^s(T_0^p) \right) - \left(\frac{\Delta_s^s T_0^p}{+ R_c(T_0^p)} \right) \text{ en } 0 < \tilde{\rho} < 1 \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial T_2^p}{\partial \tilde{\rho}} = -b_r T_0^p \text{ en } \tilde{\rho} = 1 \quad (4.122)$$

$$\frac{\partial T_2^p}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \text{ en } \tilde{\rho} = 0 \quad (4.123)$$

avec :

$$\vec{V}_f^s = V_x^f \vec{X}_s + V_y^f \vec{Y}_s \quad (4.124)$$

$$\vec{V}_f^s \cdot \text{grad}^s(T_0^p) = V_x^f \frac{\partial T_0^p}{\partial x} + V_y^f \frac{\partial T_0^p}{\partial y} \quad (4.125)$$

et Δ_s^s est le laplacien surfacique défini par la relation (4.67).

Le membre de droite de (4.121) est un terme source indépendant de $\tilde{\rho}$. Notons le $s_0(t, x, y)$. L'intégration de (4.121) en tenant compte de la condition aux limites (4.123) conduit à :

$$\frac{\partial T_2^p}{\partial \tilde{\rho}} = s_0(t, x, y) \tilde{\rho} \quad (4.126)$$

La condition aux limites (4.122) conduit à la relation de compatibilité sur T_0^p .

$$s_0(t, x, y) = -b_r T_0^p \quad (4.127)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial T_0^p}{\partial t} + G_v \vec{V}_f^s \cdot \text{grad}^s(T_0^p) = \Delta_s^s T_0^p + (R_c(T_0^p) - b_r T_0^p) \quad (4.128)$$

De (4.126)-(4.128), nous déduisons alors le profil du champ de température dans le segment de la phase végétale :

$$T_2^p(t, x, y, \tilde{\rho}) = -b_r T_0^p(t, x, y) \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2 + \hat{T}_2^p(t, x, y) \quad (4.129)$$

où $\hat{T}_2^p(t, x, y)$ est une fonction indépendante de $\tilde{\rho}$ qui peut être déterminée en résolvant les ordres supérieurs. Il en est de même pour $T_1^p(t, x, y)$.

L'expression (4.129) permet de voir que le **profil de température est parabolique dans la section**.

Dans le cas particulier où il n'y a pas de réaction chimique ($R \equiv 0$) ni de vent ($\mathbf{V}^{s'} = 0$), (4.128) permet de retrouver le *modèle de l'ailette* utilisé en thermique pour une couche de faible épaisseur avec un nombre de Biot petit.

Dans le cas général, l'équation (4.128) ci-dessus donne l'évolution du champ de température au premier ordre. C'est une **équation de réaction diffusion bidimensionnelle**. Le modèle de réaction diffusion obtenu fait alors intervenir une compétition entre un terme source d'énergie provenant des réactions chimiques et un terme de perte d'origine convectif

4.3.7 Écriture différente de l'équation thermique surfacique

L'équation (4.128) est du même type que l'équation de réaction diffusion (2.114) que nous avons étudiées au paragraphe 2.4.2. Posons en effet (cf. figure 4.5)

$$\text{grad}^{\mathcal{P}}(T_0^p) = \frac{\partial T_0^p}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T_0^p}{\partial y} \vec{y} \quad (4.130)$$

Soit $\vec{V}_f^{\mathcal{P}}$ le vecteur vitesse du plan \mathcal{P} de même intensité que le vecteur vitesse \vec{V}_f et dirigé dans la direction de la projection orthogonale de \vec{V}_f sur le plan \mathcal{P} :

$$\vec{V}_f^{\mathcal{P}} = V_x^{fp} \vec{x} + V_y^{fp} \vec{y} \quad (4.131)$$

avec

$$\begin{cases} V_x^f = p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) V_x^{fp} \\ V_y^f = p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) V_y^{fp} \end{cases} \quad (4.132)$$

et

$$p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) = \left(1 + \frac{(pV_x^{fp} + qV_y^{fp})^2}{V_x^{fp2} + V_y^{fp2}} \right)^{-1/2} \quad (4.133)$$

Soit enfin $\bar{A}(\mathbf{x})$ définie par :

$$\bar{A}(\mathbf{x}) = G_v \begin{bmatrix} V_x^f(\mathbf{x}) \\ V_y^f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

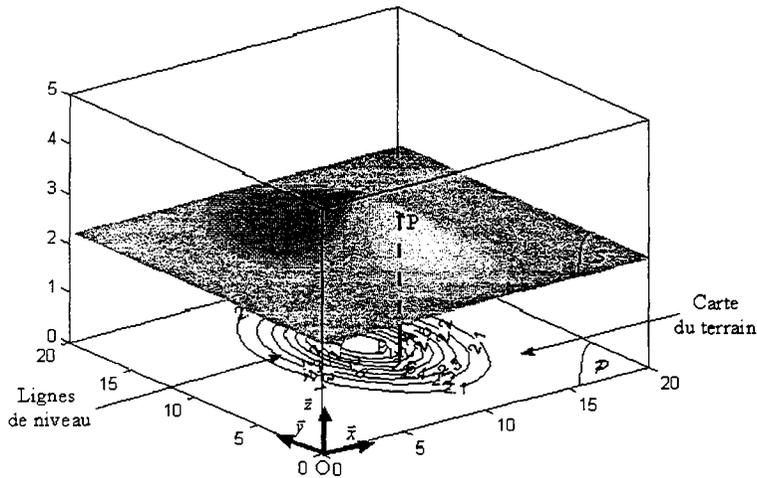


FIG. 4.5 - Lignes de niveau associées à la surface S

Avec les notations ci-dessus et (4.58), le terme de convection dans la phase végétale (4.125) prend alors la forme :

$$\bar{\mathbf{V}}_f^s \cdot \text{grad}^S(T_0^p) = \bar{A}(\mathbf{x})\text{grad}^P(T^p) \quad (4.135)$$

Supposons que le terme source d'origine chimique a une dépendance linéaire en fonction de la température :

$$R_c(T_0^p) = \alpha_c(\mathbf{x})T_0^p \quad (4.136)$$

Posons alors

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) - b_i \quad (4.137)$$

L'équation (4.128) s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial T_0^p}{\partial t} + \bar{A}(\mathbf{x})\text{grad}^P(T_0^p) = \Delta_S^s T_0^p + \mathbf{F}(\mathbf{x})T_0^p} \quad (4.138)$$

Cette équation est du même type que l'équation (2.114) si ce n'est que la forme du laplacien surfacique est différente. Les expressions (4.137) de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ et la forme (4.67) la laplacien n'étaient pas immédiates.

Nous allons maintenant écrire l'équation précédente pour des surfaces particulières et transformer l'équation précédente sous forme canonique afin de reprendre l'étude des ondes que nous avons réalisée sur l'équation (2.114) au paragraphe 2.4. Ceci doit nous permettre de trouver la forme des corrélations reliant les paramètres f , g , h , avec les paramètres physiques de l'équation (4.138) si les ondes sont de forme elliptiques.

4.3.8 Cas d'une surface cylindrique avec vent dans le plan (Oxz)

Traisons le cas particulier d'une surface cylindrique avec vent dans le plan (Oxz) (cf. figure 4.6) :

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (4.139)$$

$$V_y^f = 0 \quad (4.140)$$

D'après (4.59)-(4.60), la métrique se réduit à :

$$\begin{aligned} g_{11}^s &= 1 + p^2 \\ g_{22}^s &= 1 \\ g_{12}^s &= g_{21}^s = 0 \\ g^s &= 1 + p^2 \end{aligned} \quad (4.141)$$

Le laplacien (4.67) se réduit à :

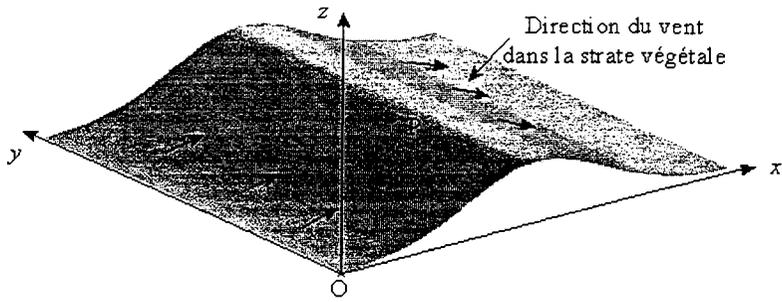


FIG. 4.6 – Surface cylindrique avec vent dans le plan (Oxz)

$$\Delta_s^s T^p = \frac{1}{\sqrt{g^s}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial T^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{g^s} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right) \right] \quad (4.142)$$

La relation (4.134) devient :

$$\bar{A}(x) = \begin{bmatrix} V_x^j(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

4.3.9 Cas d'une surface plane avec vent uniforme dans une direction quelconque

Traisons le cas particulier d'une surface plane avec un vent uniforme dans le plan (Oxz) (cf. figure 4.7) :

p et q constants

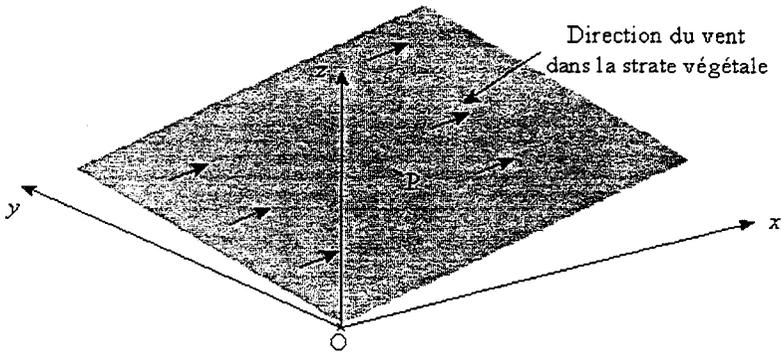


FIG. 4.7 – Surface plane avec vent dans le plan (Oxz)

Le laplacien (4.67) se réduit à :

$$\Delta_s^s T^p = \frac{1+q^2}{g^s} \frac{\partial^2 T^p}{\partial x^2} - 2 \frac{pq}{g^s} \frac{\partial^2 T^p}{\partial x \partial y} + \frac{1+p^2}{g^s} \frac{\partial^2 T^p}{\partial y^2} \quad (4.144)$$

avec

$$g^s = 1 + p^2 + q^2 \quad (4.145)$$

et

$$\bar{\mathbf{A}} = G_v \begin{bmatrix} V_x^f \\ V_y^f \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

La direction de plus grande pente est donnée par le vecteur $\bar{\mathbf{P}}$ suivant :

$$\bar{\mathbf{P}} = p \bar{\mathbf{X}}_s + q \bar{\mathbf{Y}}_s \quad (4.147)$$

où $(\bar{\mathbf{X}}_s, \bar{\mathbf{Y}}_s)$ est défini par la relation (4.55).

Soit $\bar{\mathbf{k}}$ le vecteur normé du plan \mathcal{P} , dirigé dans la direction de la projection sur \mathcal{P} du vecteur $\bar{\mathbf{P}}$. D'après la relation (4.54),

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \bar{\mathbf{x}} + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \bar{\mathbf{y}} \quad (4.148)$$

Soit $\bar{\mathbf{k}}^\perp$ le vecteur normé orthogonal au vecteur $\bar{\mathbf{k}}$. Soient alors les vitesses V_k^f et $V_{k^\perp}^f$ définies par :

$$\bar{\mathbf{V}}_f^p = V_k^f \bar{\mathbf{k}} + V_{k^\perp}^f \bar{\mathbf{k}}^\perp \quad (4.149)$$

D'après (4.131), $\bar{\mathbf{V}}_f^p = V_x^{fp} \bar{\mathbf{x}} + V_y^{fp} \bar{\mathbf{y}}$, d'où

$$\left(V_x^{fp} = \frac{pV_k^f - qV_{k^\perp}^f}{\sqrt{p^2+q^2}}, V_y^{fp} = \frac{qV_k^f + pV_{k^\perp}^f}{\sqrt{p^2+q^2}} \right) \quad (4.150)$$

D'après (4.150) et (4.132), le vecteur $\bar{\mathbf{A}}$ donné par la relation (4.146) prend la forme :

$$\bar{\mathbf{A}} = G_v \frac{p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp})}{\sqrt{p^2+q^2}} \begin{bmatrix} p V_k^f - q V_{k^\perp}^f \\ q V_k^f + p V_{k^\perp}^f \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

où $p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp})$ est donné par la relation (4.133).

Plaçons-nous dans le repère (O, \bar{x}, \bar{y}) dirigé par le couple de vecteurs locaux $(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}^\perp)$. Le laplacien (4.144) prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\Delta_s^s T^p = \frac{1}{g^s} \frac{\partial^2 T^p}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T^p}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.152)$$

où n'intervient plus le terme de dérivée croisé. Le vecteur $\bar{\mathbf{A}}$ devient alors :

$$\bar{\mathbf{A}} = G_v p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) \begin{bmatrix} V_k^f \\ V_{k^\perp}^f \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Soit la matrice $\bar{\mathbf{C}}$ définie par :

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{F}} \\ \frac{\sqrt{\mathbf{F}}}{\sqrt{g^s}} 0 \\ 0 \sqrt{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

L'équation (4.147) prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial T_0^p}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}} \text{grad}^p(T_0^p) = \text{div}((\bar{\mathbf{C}}^2 / \mathbf{F}) \text{grad}(T_0^p)) + \mathbf{F} T_0^p \quad (4.155)$$

Cette relation possède la même forme que la relation (2.114) si ce n'est que le vecteur $\bar{\mathbf{A}}$ possède une deuxième composante non nulle. **Elle est donc plus générale que la relation (2.114)** et se réduit à celle-ci lorsque $V_{k\pm}^f = 0$, c'est-à-dire lorsque la direction du vent dans la strate végétale est colinéaire avec la direction de plus grande pente.

Dans le cas général, le modèle ci-dessus dépend des cinq paramètres $p, q, V_k^f, V_{k\pm}^f$ et \mathbf{F} . Posons alors :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} g_k \\ g_{k\pm} \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

La mise sous forme canonique de l'équation (4.155) est identique à celle du paragraphe 2.4.2 si ce n'est que la translation qui élimine le terme $\bar{\mathbf{A}} \text{grad}^p(T_0^p)$ vaut maintenant :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x} - g_k t \\ \tilde{y}_1 = \tilde{y} - g_{k\pm} t \end{cases} \quad (4.157)$$

Les relations (2.87), (4.154), (4.153) et (4.156) conduisent à la forme suivant des paramètres f, h, g_k et $g_{k\pm}$:

$$\begin{cases} f = \frac{\sqrt{\mathbf{F}}}{\sqrt{g^s}} \\ h = \sqrt{\mathbf{F}} \\ g_k = G_v p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) V_k^f \\ g_{k\pm} = G_v p_c(V_x^{fp}, V_y^{fp}) V_{k\pm}^f \end{cases} \quad (4.158)$$

où (V_x^{fp}, V_y^{fp}) et $(V_k^f, V_{k\pm}^f)$ sont reliés par la relation (4.150), avec

$$g^s = 1 + p^2 + q^2 \quad (4.159)$$

et d'après (4.137),

$$\mathbf{F} = \alpha - b_i \quad (4.160)$$

Les paramètres f, h, g_k et $g_{k\pm}$ ont donc été exprimés en fonction des coefficients physiques et de la topographie du terrain dans ce cas particulier.

Les relations (4.158)-(4.160) ci-dessus sont encore valables pour un feu de forêt non uniforme décrite par la relation (4.138). Il suffit alors de réaliser l'identification ci-dessus localement.

La vitesse \bar{V} du vent ambiant n'apparaît pas explicitement dans les expressions de f et h mais en dépend implicitement par l'intermédiaire du nombre de Biot b_i . La conductivité radiative λ_r , définie par la relation (4.34), n'apparaît pas non plus dans les expressions (4.158) car les expressions ci-dessus de f , h , g_k et $g_{k\perp}$ sont adimensionnelles.

Pour un feu de forêt uniforme, le front du feu a un développement elliptique sur le plan \mathcal{P} . Le développement du front du feu est cependant circulaire sur le plan incliné \mathcal{S} . Ce n'est cependant pas ce que l'on observe expérimentalement. Comment expliquer cette différence?

Le vent ambiant peut rendre la conductivité λ_r anisotrope en inclinant les flammes au-dessus de la strate végétale. Ceci peut rendre le développement du feu elliptique sur le plan incliné \mathcal{S} . Le transfert peut de plus être non local dans les forêts classiques qui sont de faible porosité ce qui peut rendre la propagation du feu non elliptique.

Nous nous proposons donc de traiter l'intervention du rayonnement de manière plus précise aux paragraphes 4.4 et 4.5 qui suivent.

4.4 Simplification du transfert radiatif

4.4.1 Le milieu gris

Lorsque le coefficient d'extinction $K_\lambda(M)$, l'albédo $\omega_\lambda(M)$ et l'indicatrice de diffusion $\Phi_\lambda(M, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}')$, définis au paragraphe 3.1.4, ne dépendent pas de la longueur d'onde λ , la phase particule végétale est dite grise. Cette hypothèse de milieu macroscopique gris peut être grossière [22], car le spectre d'émissions des gaz possède des raies assez étroites. Une dérivation précise des équations du rayonnement macroscopique (3.41)-(3.45) à partir des équations mésoscopiques du rayonnement devrait trancher cette question. La taille des constituants végétaux doit alors jouer un rôle important dans l'intervention ou non de la longueur d'onde. Une telle homogénéisation n'a pas été réalisée au chapitre 3.

Nous effectuerons cependant dans ce mémoire l'hypothèse d'une phase particule végétale grise pour une première approche, en considérant que les constituants végétaux sont de taille importante, d'autant plus que je ne connais personne qui étudie les feux de végétations sans supposer que le milieu macroscopique est gris.

Notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(M) = K_\lambda(M) \\ \omega(M) = \omega_\lambda(M) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a(M) = a_\lambda(M) \\ \sigma_s(M) = \sigma_{s\lambda}(M) \end{array} \right. \quad (4.161)$$

et

$$\Phi(M, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}') = \Phi_\lambda(M, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}') \quad (4.162)$$

les coefficients indépendants de la longueur d'ondes [1].

Définissons alors la luminance $L(M, \bar{\mathbf{u}}, t)$ par :

$$L(M, \bar{\mathbf{u}}, t) = \int_0^\infty L_\lambda(M, \bar{\mathbf{u}}, t) d\lambda \quad (4.163)$$

Le vecteur flux radiatif $\mathbf{Q}_r^p(M, t)$ donné par la relation (3.41) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{Q}_r^p(M, t) = \int_{4\pi} L(M, \vec{u}, t) \vec{u} d\Omega \quad (4.164)$$

La forme quasi-statique de l'équation de transfert radiatif (3.42) intégrée pour λ variant de 0 à l'infini, s'écrit alors :

$$\boxed{\operatorname{div}(L(M, \vec{u}, t)\vec{u}) + K(M)L(M, \vec{u}, t) = K(M)I(M, \vec{u}, t)} \quad (4.165)$$

où la fonction source $I(M, \vec{u}, t)$ et donnée par :

$$I(M, \vec{u}, t) = \left(\begin{array}{l} \frac{a(M)}{K(M)} L^\circ[T^p(M, t)] \\ + \frac{\sigma_s(M)}{4\pi K(M)} \int_{4\pi} L(M, \vec{u}', t) \Phi(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \end{array} \right) \quad (4.166)$$

où $L^\circ[T^p(M, t)]$ est donnée par la loi de Stefan Boltzman :

$$L^\circ[T^p(M, t)] = \frac{B}{\pi}(T^p)^4 \quad (4.167)$$

avec B , le nombre de Boltzman :

$$B = 5,6710^{-8} W/(m^2 K^4) \quad (4.168)$$

Utilisons le coefficient d'extinction $K(M)$ et l'albédo $\omega(M)$ pour caractériser le transfert radiatif au lieu des coefficients d'absorption $a(M)$ et de diffusion $\sigma_s(M)$. La fonction source $I(M, \vec{u}, t)$ (4.166) s'écrit alors :

$$I(M, \vec{u}, t) = \left(\begin{array}{l} (1 - \omega(M)) L^\circ[T^p(M, t)] \\ + \frac{\omega(M)}{4\pi} \int_{4\pi} L(M, \vec{u}', t) \Phi(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \end{array} \right) \quad (4.169)$$

L'équation de transfert radiatif (4.165) est une équation intégral-différentielle d'après la forme de la fonction source (4.169).

4.4.2 Expression de la divergence du flux radiatif

La divergence du flux radiatif $\mathbf{Q}_r^p(M, t)$ apparaît dans le bilan d'énergie interne (3.28) du constituant végétal, en tenant compte de la loi de Fourier (3.31). Cette divergence peut être exprimée en fonction de la luminance $L(M, \vec{u}, t)$ de la manière suivante :

Prenons la divergence de la relation (4.164) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{Q}_r(M, t)) &= \operatorname{div}\left(\int_{4\pi} L(M, \vec{u}, t)\vec{u}d\Omega\right) \\ &= \int_{4\pi} \operatorname{div}(L(M, \vec{u}, t)\vec{u})d\Omega \end{aligned} \quad (4.170)$$

En utilisant la forme quasi-statique (4.165) de l'équation de transfert radiatif, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{Q}_r(M, t)) &= \int_{4\pi} (-K(M)L(M, \vec{u}, t) + K(M)I(M, \vec{u}, t)) d\Omega \\ &= -K(M) \int_{4\pi} L(M, \vec{u}, t) d\Omega + K(M) \int_{4\pi} I(M, \vec{u}, t) d\Omega \end{aligned} \quad (4.171)$$

Or d'après l'expression (4.169) de la fonction source $I(M, \vec{u}, t)$:

$$\int_{4\pi} I(M, \vec{u}, t) d\Omega = \left(\begin{array}{l} 4\pi(1 - \omega(M)) L^0(T^p(M, t)) \\ +\omega(M) \int_{4\pi} L(M, \vec{u}', t) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \right) d\Omega' \end{array} \right) \quad (4.172)$$

La condition de normation (3.44) et la loi de la loi de Stefan Boltzman conduit alors à :

$$\int_{4\pi} I(M, \vec{u}, t) d\Omega = \left(\begin{array}{l} 4B(1 - \omega(M)) (T^p)^4 \\ +\omega(M) \int_{4\pi} L(M, \vec{u}', t) d\Omega' \end{array} \right) \quad (4.173)$$

Reportons la relation (4.173) dans la relation (4.171). Il vient alors l'expression suivante de la divergence du flux radiatif :

$$\operatorname{div}(\mathbf{Q}_r(M, t)) = a(M) * 4\pi \left(\frac{B(T^p)^4}{\pi} - \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L(M, \vec{u}, t) d\Omega \right) \quad (4.174)$$

car $a(M) = K(M)(1 - \omega(M))$.

Définissons l'émittance $\mathcal{M}(M, t)$ par :

$$\mathcal{M}(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L(M, \vec{u}, t) d\Omega \quad (4.175)$$

L'émittance du corps noir est définie par :

$$\mathcal{M}^0(T^p(M, t)) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L^0(T^p(M, t)) d\Omega = L^0(T^p(M, t)) \quad (4.176)$$

Finalement d'après (4.167), (4.175) et (4.176) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{Q}_r(M, t)) = 4\pi a(M)(\mathcal{M}^0(T^p(M, t)) - \mathcal{M}(M, t)) \quad (4.177)$$

Les expressions des coefficients radiatifs effectifs a et σ_s peuvent être obtenues par un modèle mésoscopique de la phase particule végétale. Cette phase particule végétale est caractérisée par deux coefficients géométriques $\beta = 1 - \Phi$ et σ , définis au paragraphe 1.2.2 et 1.2.3, et par une émissivité radiative ε_p . Φ est la porosité macroscopique, σ le rapport de la surface d'une particule végétale sur le volume de la particule de végétation et ε_p

est l'émissivité des particules végétales considérées comme grises. D'après Albini [2], une répartition isotrope de particules végétales convexes conduit aux expressions suivantes de a et σ_s .

$$\boxed{a = \varepsilon_p \frac{\beta\sigma}{4} \quad \sigma_s = (1 - \varepsilon_p) \frac{\beta\sigma}{4}} \quad (4.178)$$

Nous en déduisons :

$$K = \frac{\beta\sigma}{4} \quad \text{et} \quad \omega = 1 - \varepsilon_p \quad (4.179)$$

L'expression du coefficient d'extinction K ne fait intervenir que la géométrie du milieu. Il ne dépend pas de la température T^p .

4.4.3 Forme intégrale de l'équation de transfert radiatif

Considérons un rayon passant par un point O donné et de direction \vec{u} (cf. figure 4.8). Soit M un autre point sur ce rayon :

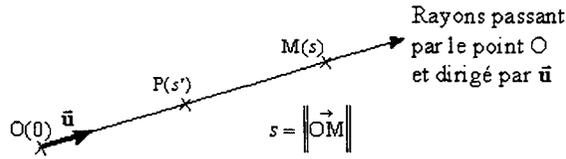


FIG. 4.8 - Rayon passant par un point M et de direction \vec{u}

Ce rayon peut être paramétré par une abscisse s d'origine le point O . Sur ce rayon, l'équation de transfert radiatif (4.165) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial L(s, \vec{u}, t)}{\partial s} + K(s)L(s, \vec{u}, t) = K(s)I(s, \vec{u}, t) \quad (4.180)$$

Cette équation du premier ordre s'intègre, par la méthode de variation de la constante, pour donner :

$$L(k(s), \vec{u}, t) = L(0, \vec{u}, t) \exp(-k(s)) + \int_0^{k(s)} I(k', \vec{u}, t) \exp[-(k(s) - k')] dk' \quad (4.181)$$

où

$$k(s) = \int_0^s K(s') ds' \quad (4.182)$$

$k(s)$ est un paramétrage adimensionnel sur le rayon passant par O et dirigé par le vecteur \vec{u} .

L'équation (4.180), vérifiée par la luminance $L(s, \vec{u}, t)$, est une équation intégrale, car la fonction source $I(s, \vec{u}, t)$ fait intervenir la luminance par l'intermédiaire d'une intégrale d'après (4.169). C'est la **forme intégrale** de l'équation de transfert radiatif.

Soit maintenant un point M et un domaine \mathcal{D} entourant le point M (cf. figure 4.9). Soit $\partial\mathcal{D}$ le bord de ce domaine.

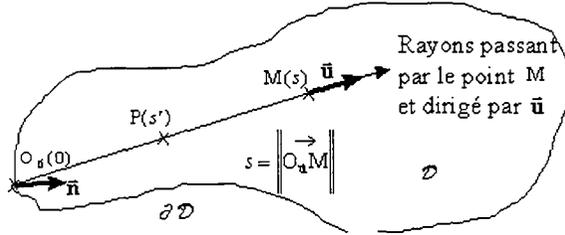


FIG. 4.9 - Domaine \mathcal{D} entourant un point M

Soit \vec{u} un vecteur unitaire. Considérons le rayon passant par le point M et dirigé par le vecteur \vec{u} . Notons $O_{\vec{u}}$ l'intersection du rayon avec la surface $\partial\mathcal{D}$.

Nous pouvons éliminer la luminance $L(s, \vec{u}, t)$ entre les deux relations (4.181) et (4.169). Il vient alors :

$$I(M, \vec{u}, t) = \left(\begin{array}{l} (1 - \omega(M)) L^o[T^p(M, t)] \\ + \frac{\omega(M)}{4\pi} \int_{4\pi} L(0_{\vec{u}'}, \vec{u}', t) \exp[-k(\|\vec{0_{\vec{u}'} M}\|)] \Phi(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \\ + \frac{\omega(M)}{4\pi} \int_{\int_0}^{k(\|\vec{0_{\vec{u}'} M}\|)} I(k', \vec{u}', t) \exp[-(k(\|\vec{0_{\vec{u}'} M}\|) - k')] dk' \Phi(M, \vec{u}, \vec{u}') d\Omega' \end{array} \right) \quad (4.183)$$

La luminance $L(0_{\vec{u}'}, \vec{u}', t)$ est donnée par la condition aux limites sur la surface $\partial\mathcal{D}$.

L'équation (4.183) est une équation implicite en la fonction source $I(M, \vec{u}, t)$ du type $I = g(T^p, I)$. Elle peut être résolue, à T^p fixée, par une méthode de zéro (cf. Siegel et Howell [22]). Cette équation est nommée *équation de la fonction source*. Elle est non linéaire et sa résolution conduit à la connaissance de la fonction source et donc de la luminance $L(M, \vec{u}, t)$ grâce à la relation (4.181). La divergence du flux radiatif dont nous avons besoin pour résoudre le bilan d'énergie (3.28), qui fait intervenir la température T^p du constituant végétal, est alors obtenu grâce aux relations (4.175)-(4.177). Ces deux équations (3.28) et (4.183) sont donc couplés.

Faisons alors l'hypothèse simplificatrice que les particules de végétation sont des **corps noirs** ($\varepsilon_p = 1$), ce qui est approximativement vrai d'après Albin [2] et ne modifie pas le bilan radiatif de manière significative. D'après (4.178) :

$$\sigma_s(M) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(M) = 0 \quad (4.184)$$

Les coefficients d'extinction $K(M)$ et d'absorption $a(M)$ deviennent alors égaux.

L'équation (4.183) de la fonction source se simplifie alors énormément, car elle devient explicite :

$$I(M, \vec{u}, t) = L_{\lambda}^{\circ}[T^p(M, t)] \quad (4.185)$$

La fonction source se limite au terme d'émission radiative.

La relation (4.181) donne alors une expression formelle explicite de la luminance au point M :

$$L(M, \vec{u}, t) = \left(\begin{array}{l} L(0_{\vec{u}}, \vec{u}, t) \exp(-k(s)) \\ + \int_0^{k(s)} L^{\circ}[T^p(k', t)] \exp[-(k(s) - k')] dk' \end{array} \right) \quad (4.186)$$

où

$$k(s) = \int_0^s K(s') ds' \quad \text{et} \quad s = \|\overrightarrow{O_{\vec{u}}M}\| \quad (4.187)$$

La luminance dans une direction donnée, en un point M, est alors somme de deux contributions : un terme d'absorption pure et un terme d'émission locale au point P(s') de l'espace atténué par l'absorption entre les points P(s') et M.

4.4.4 Expression de l'émittance

On désire calculer l'émittance $\mathcal{M}(M, t)$ qui intervient dans la relation (4.177) en un point M de la forêt représentée à la figure 4.9. La définition (4.175) de $\mathcal{M}(M, t)$ et la relation (4.186) conduisent à :

$$\mathcal{M}(M, t) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L(0_{\vec{u}}, \vec{u}, t) \exp(-k(s)) d\Omega \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{k(s)} L^{\circ}[T^p(k', t)] \exp[-(k(s) - k')] dk' d\Omega \end{array} \right) \quad (4.188)$$

Posons

$$k'' = k - k' \quad (4.189)$$

Le nouveau paramétrage des rayons possède alors pour origine le point M fixe et la relation précédente prend la forme :

$$\mathcal{M}(M, t) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L(0_{\vec{u}}, \vec{u}, t) \exp(-k(s)) d\Omega \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{k(s)} L^{\circ}[T^p(k'', t)] \exp[-k''] dk'' d\Omega \end{array} \right) \quad (4.190)$$

Les éléments différentiels surfaciques dS et volumique dV s'expriment en fonction de la différentielle $d\Omega$ de l'angle solide :

$$\begin{cases} dS = \frac{\|\overrightarrow{MO_{\vec{u}}}\|^2}{\vec{n} \cdot \vec{u}} d\Omega \\ dV = \frac{\|\overrightarrow{MP}\|^2}{K(P)} dk d\Omega \end{cases} \quad (4.191)$$

où \vec{n} est la normale intérieure à la surface $\partial\mathcal{D}$ au point $O_{\vec{u}}$. Il vient alors :

$$\mathcal{M}(M, t) = \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{D}^*} L(0_{\vec{u}}, \vec{u}, t) \exp[-k(\|\overrightarrow{MO_{\vec{u}}}\|)] \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{\|\overrightarrow{MO_{\vec{u}}}\|^2} dS \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}^*} L^{\circ}[T^p(P, t)] \exp[-k(\|\overrightarrow{MP}\|)] \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dV \end{aligned} \right) \quad (4.192)$$

Les intégrations ne sont à réaliser que sur la partie visible \mathcal{D}^* et $\partial\mathcal{D}^*$ du domaine \mathcal{D} et de la surface $\partial\mathcal{D}$ à partir du point M. Cette expression de l'émittance fait intervenir une intégrale surfacique, qui tient compte de la condition aux limites $L(0_{\vec{u}}, \vec{u}, t)$ et une intégrale volumique qui tient compte de l'émission locale $L^{\circ}[T^p(P, t)]$ au point P et de son atténuation sur le rayon de P à M.

4.4.5 Simplification du bilan d'énergie proche du front du feu

Le domaine perturbé par la présence du feu contient la flamme qui dépasse au-dessus de la zone végétale (cf. figure 4.10). L'épaisseur δ de la strate végétale et la hauteur de cette flamme jouent un rôle dans la propagation du feu. Supposons que cette hauteur soit du même ordre de grandeur que δ , c'est-à-dire que nous étudions des feux de forêts de faible intensité. Soit alors M un point de la strate végétale en avant de la zone en feu.

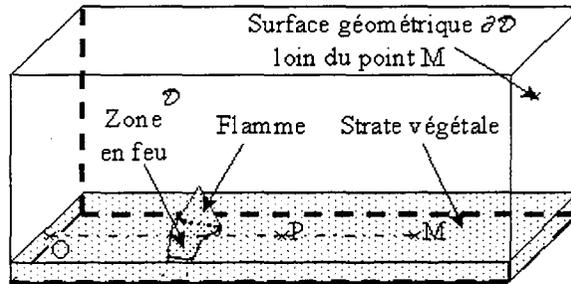


FIG. 4.10 - Pavé d'intégration \mathcal{D} et zone en feu

Lorsque le parallélépipède \mathcal{D} devient très grand, le premier terme de droite de la relation (4.192) tend vers zéro si nous négligeons l'ensoleillement. A la limite :

$$\mathcal{M}(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{R}^3} L^\circ[T^p(P, t)] \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dV \quad (4.193)$$

L'espace \mathcal{R}^3 est l'union de la zone en feu, notée Ω_f , et de la zone en avant du feu, notée Ω_v . L'émittance $\mathcal{M}(M, t)$, donnée par la relation (4.193), est alors la somme de deux intégrales $\mathcal{M}_f(M, t)$ et $\mathcal{M}_v(M, t)$ respectivement prises sur les volumes Ω_f et Ω_v :

$$\mathcal{M}(M, t) = \mathcal{M}_f(M, t) + \mathcal{M}_v(M, t) \quad (4.194)$$

D'après la relation (4.191) de l'élément de volume dV , il est clair que l'intégrale $\mathcal{M}_v(M, t)$ n'est pas singulière au point M.

La température de la zone en feu est très supérieure à celle du combustible en avant du front du feu. Comme la luminance $L^\circ[T^p(P, t)]$ est proportionnelle à la puissance quatrième de la température $T^p(P, t)$, d'après la relation (4.167), nous pouvons négliger $\mathcal{M}_v(M, t)$ par rapport à $\mathcal{M}_f(M, t)$ lorsque le point M se trouve proche de la zone en feu. Il vient alors :

$$\mathcal{M}(M, t) \cong \mathcal{M}_f(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} L^\circ[T^p(P, t)] \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dV \quad (4.195)$$

L'étude asymptotique loin de la zone en feu reste à être réalisée. Cette question a été étudiée par Albin [2] et Weber [25] dans le cas d'un front du feu rectiligne.

4.4.6 Simplification du bilan d'énergie pour un feu optiquement épais dans une zone

Si nous nous plaçons dans l'hypothèse où l'atténuation du rayonnement est très importante dans la zone en feu Ω_f . L'expression du terme $\mathcal{M}_f(M, t)$ est alors :

$$\mathcal{M}_f(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{Sfv} \int_0^{\delta^\circ} L^\circ[T^p(P, t)] \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dl dS \quad (4.196)$$

où Sfv est la surface de flamme visible depuis le point M et δ° est l'épaisseur de la couche limite optique :

$$\delta^\circ = O(1/K(P)) \quad (4.197)$$

où P est un point du bord de la flamme Sfv . $\mathcal{M}_f(M, t)$ se réduit donc à une intégrale surfacique au niveau du front de flamme :

$$\mathcal{M}_f(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{Sfv} L^\circ[T^p(P, t)] \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dS \quad (4.198)$$

Si nous supposons de plus que la flamme est homogène et de température T_F , il vient enfin :

$$\mathcal{M}_f(M, t) = \frac{BK(P)}{\pi} T_F^4 \int_{Sfv} \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \frac{1}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} dS \quad (4.199)$$

Le domaine d'intégration de $\mathcal{M}_f(M, t)$ se limite alors au bord de la zone en feu. Dans le cas particulier de l'étude d'un front du feu rectiligne et stationnaire, Albin [2] utilise les relations (4.198)-(4.199) ci-dessus. L'utilisation de la relation (4.199) nous permet d'obtenir la même modélisation qu'Albin généralisée au régime non stationnaire et à un transfert tridimensionnel.

Il faut distinguer la température d'inflammation T_{ig} du constituant végétal et la température de flamme T_F . L'inégalité $T_F > T_{ig}$ est toujours vérifiée. Il y a donc un saut de température au niveau de l'interface de la flamme. Ceci est classique lors de l'étude du transfert radiatif (cf. Siegel [22]).

4.4.7 Distinction de la zone en feu dans la strate végétale et au-dessus de celle-ci

La zone en feu Ω_f est l'union de la zone en feu dans la strate végétale, notée Ω_{fp} , et de la zone en feu au-dessus de la strate végétale, notée Ω_{fa} . L'émittance $\mathcal{M}_f(M, t)$, donnée par la relation (4.195), est alors la somme de deux intégrales $\mathcal{M}_{fp}(M, t)$ et $\mathcal{M}_{fa}(M, t)$ respectivement prises sur les volumes Ω_{fp} et Ω_{fa} :

$$\mathcal{M}_f(M, t) = \mathcal{M}_{fp}(M, t) + \mathcal{M}_{fa}(M, t) \quad (4.200)$$

Posons

$$\begin{cases} \Phi(P, t) &= \frac{K(P)}{4\pi} L^\circ[T^p(P, t)] \\ \xi(P, M) &= \frac{1}{\|\overrightarrow{MP}\|^2} \exp \left[-k \left(\|\overrightarrow{MP}\| \right) \right] \end{cases} \quad (4.201)$$

La grandeur Φ a l'unité d'un flux et $\xi(P, M)$ est une fonction de Green. Les deux intégrales $\mathcal{M}_{fp}(M, t)$ et $\mathcal{M}_{fa}(M, t)$ peuvent alors être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{fp}(M, t) &= \int_{\Omega_{fs}} \Phi(P, t) \xi(P, M) dV \\ \mathcal{M}_{fa}(M, t) &= \int_{\Omega_{fa}} \Phi(P, t) \xi(P, M) dV \end{cases} \quad (4.202)$$

L'ensemble des relations (4.200)-(4.202) ci-dessus est comparable à celle utilisée par Dorrer [10] (1984) :

$$\mathcal{M}_f(M, t) = \int_{\Omega_f} \Phi(P, t) \xi(P, M) dV \quad (4.203)$$

avec

$$\xi(R, M) = \frac{\alpha_0 \eta (z - z_1)}{\cos \alpha_f} \exp \left[-K(P, \widehat{MPD}) \|\overrightarrow{MP}\| \right] \quad (4.204)$$

Dans cette relation, α_0 caractérise la fraction d'énergie de combustion transformée en rayonnement en direction du sol, η définit l'atténuation du rayonnement suivant la verticale ascendante, α_f est l'angle d'inclinaison de la flamme dû au vent par rapport à la normale au terrain et $\widehat{\text{MPD}}$ est l'angle entre la direction d'inclinaison de la flamme et la demi droite [PM).

Le coefficient d'extinction anisotrope $K(P, \widehat{\text{MPD}})$ est donnée par la relation suivante :

$$K(P, \widehat{\text{MPD}}) = K(P) \frac{(1 + 2 \sin \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f) \cos(\widehat{\text{MPD}})}{2 \cos \alpha_f} \quad (4.205)$$

avec φ_D correspondant à la direction du vent et φ la direction de la droite (MP). La signification physique et l'expression du terme $\Phi(P,t)$ ne sont pas précisées par Dorrer. Bien que l'atténuation ait une forme exponentielle dans les deux cas, le terme en $1/r^2$ de la relation (4.200) n'apparaît pas ici. Les domaines d'application de cette formule restent à être précisés. Le cas d'une propagation du feu par conduction gazeuse (conduction dite par contact) doit conduire à une fonction de Green sans terme en $1/r^2$ d'après Green [12] (1983). Ceci reste cependant à être vérifié.

Nous choisissons d'utiliser l'expression (4.201) de $\Phi(P,t)$, la relation (4.205) donnant le coefficient d'extinction et de garder le terme d'atténuation en $1/r^2$ dans l'expression de la fonction de Green $\xi(R,M)$.

4.4.8 Emittance et fonction de Green bidimensionnelle

Nous nous proposons de réduire le terme d'émittance tridimensionnelle donnée par la relation (4.195) à un terme bidimensionnel valable au niveau de la surface du sol noté \mathcal{S} que nous considérons localement comme un plan incliné (cf. figure 4.11). Nous supposons pour cela que ce terme d'émittance correspond à la partie $\mathcal{M}_{fa}(M, t)$ dans l'air ambiant de l'émittance $\mathcal{M}_f(M, t)$. Le rapport d'échelles que nous choisissons d'étudier est le suivant :

$$\delta \ll L \quad h_f = \mathbf{O}(\delta) \quad \text{et} \quad 1/K = \mathbf{O}(\delta)$$

Notons Ω_f^z la zone en feu qui se trouve sur le plan \mathcal{S} . Considérons un point M, du plan \mathcal{S} , en avant de la zone en feu et un point P, du plan \mathcal{S} , dans la zone en feu. Soit alors φ est l'angle entre le segment [P, M] et la droite de plus grande pente \mathbf{p} au point P. Cette droite \mathbf{p} est dirigée par le vecteur unitaire noté $\bar{\mathbf{k}}$. Soit $\bar{\mathbf{k}}^\perp$ le vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\bar{\mathbf{k}}$ et de la normale $\bar{\mathbf{n}}$ au plan \mathcal{S} au point P.

La géométrie de la flamme, au point P est définie par une droite \mathbf{D} qui passe par le point P et par sa hauteur h_f . Nous considérons que cette hauteur est une donnée de notre problème. Soit \mathbf{d} la projection orthogonale de la droite \mathbf{D} sur le plan \mathcal{S} . La direction de la droite \mathbf{D} est repérée par l'angle α_f entre la direction de la normale $\bar{\mathbf{n}}$ au plan \mathcal{S} au point P et la droite \mathbf{D} et par l'angle φ_f entre la droite \mathbf{d} et la droite de plus grande pente \mathbf{p} au point P.

Soit respectivement $P_{\mathcal{P}}$ et $M_{\mathcal{P}}$ les projections des points M et P sur le plan horizontal \mathcal{P} . La relation (4.202) devient :

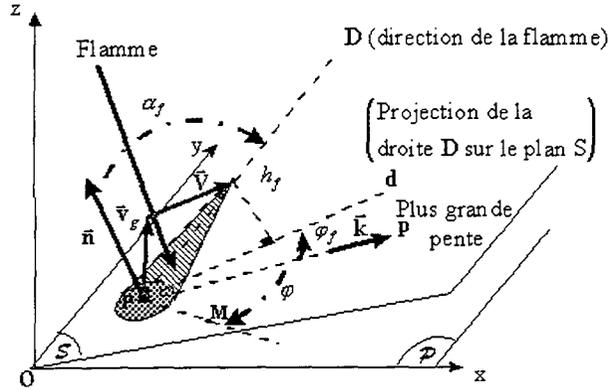


FIG. 4.11 - Forme de la flamme

$$\mathcal{M}(M, t) = \int_{\Omega_f^s} \varphi(P, t) \xi^s(P, M) dS \quad (4.206)$$

avec $\xi^s(P, M)$ une fonction d'atténuation qui tient compte de la structure quasi 2D de la flamme et de la topographie. D'après les relations (4.204)-(4.205), cette fonction d'atténuation possède l'expression suivante :

$$\xi^s(P, M) = \frac{K(P)}{\|\vec{MP}\|} \exp \left(-K(P) \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_f))}{\cos^2 \alpha_f} \|\vec{MP}\| \right) \quad (4.207)$$

La direction \mathbf{D} est obtenue par composition de la vitesse ascensionnelle \vec{v}_g des gaz qui proviennent de la pyrolyse et de la vitesse \vec{V} du vent ambiant. La vitesse \vec{v}_g est due à la convection naturelle et a pour expression :

$$\vec{v}_g = \sqrt{gh_f} \vec{z} \quad (4.208)$$

où \vec{z} est le vecteur unitaire dans la direction verticale ascendante, g est l'accélération de pesanteur. La vitesse du vent ambiant est tangente à la surface S . Elle s'exprime par :

$$\vec{V} = V(\cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp) \quad (4.209)$$

Considérons que la droite \mathbf{D} est dirigée par le vecteur \vec{v}_{fl} (fl comme flamme) défini comme somme des vecteurs \vec{v}_g et \vec{V} :

$$\vec{v}_{fl} = \vec{v}_g + \vec{V} \quad (4.210)$$

Ceci permet de trouver l'expression des deux angles α_f et φ_f qui déterminent la direction de la droite \mathbf{D} .

$$\cos(\alpha_f) = \vec{V}_{fl} \cdot \vec{n} / \|\vec{V}_{fl}\| \quad (4.211)$$

et

$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|} \quad (4.212)$$

où

$$\vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (4.213)$$

est la projection du vecteur vitesse \vec{V}_{fl} sur le plan \mathcal{S} .

Si nous faisons enfin l'hypothèse que le milieu végétal de la strate végétale est assez absorbant, pour pouvoir utiliser l'approximation de diffusion que nous avons introduite au paragraphe 4.1.6., l'émittance $\mathcal{M}_{fp}(M, t)$ dans la strate végétale s'écrit sous la forme d'un opérateur laplacien :

$$\mathcal{M}_{fp}(M, t) = \lambda_r(T^p)\Delta T^p \quad (4.214)$$

avec

$$\lambda_r = \frac{16}{3K}B(T^p)^3 \quad (4.215)$$

Le terme $BT^4(M)$ de la relation (4.177) a été ici négligé devant $\mathcal{M}_{fp}(M, t)$.

4.5 Equations 2D avec terme radiatif non local

4.5.1 Définitions des domaines géométriques

Soit un repère d'espace (O, x, y, z) avec (O, z) dirigé dans le sens vertical ascendant. Nous distinguons la zone en feu (domaine Ω_f^*) de la zone imbrulée qui se trouve devant le front de flamme (domaine Ω_v^*). La zone brûlée est enfin notée Ω_b^* (cf. figure 4.12) :

Un transfert thermique existe de la zone en feu vers la zone imbrulée en avant du front du feu. Celui-ci conduit à l'augmentation de température de la zone imbrulée, au séchage, puis à sa pyrolyse et enfin l'oxydation du combustible gazeux ainsi dégagé comme nous l'avons précisé au chapitre 1. Ceci conduit à la propagation du feu. Les équations bidimensionnelles associées à cette propagation ont été exprimées en partie aux paragraphes 4.3 et 4.4 ci-dessus. Celles-ci modélisent typiquement un feu d'une strate uniforme de forêt (broussailles ou feuillage).

La position du front du feu est déterminée par la température d'ignition T_{ig} du constituant végétal. C'est une isotherme. Nous ne résolvons pas le bilan thermique dans la zone en feu. La température de flamme T_f ainsi que la hauteur h_f de flamme et la température d'ignition T_{ig} doivent alors être considérées comme des données du modèle. Dans l'hypothèse d'une zone en feu avec un coefficient d'extinction important, la relation (4.180) exprime une condition aux limites en flux au niveau du front du feu. La condition aux limites $T^p = T_{ig}$ sur le front du feu en est une deuxième qui est de type Dirichlet. Nous avons donc deux conditions aux limites au niveau du front du feu ce qui permet de trouver l'évolution de celui-ci. L'évolution du front du feu est alors modélisée comme un problème à frontière libre.

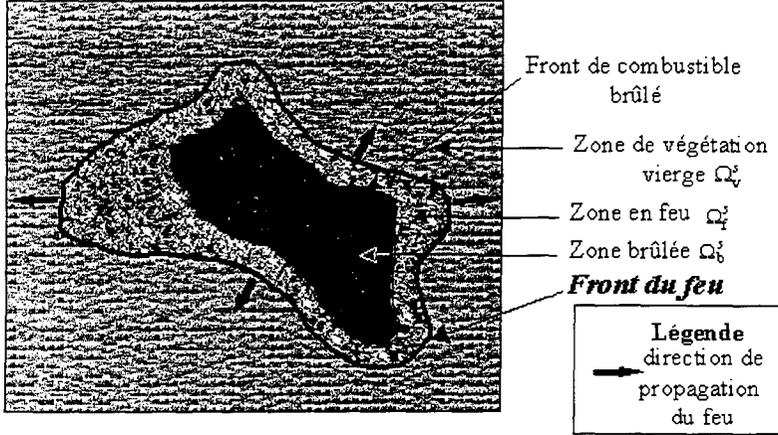


FIG. 4.12 – Propagation du feu sur la carte \mathcal{P}

4.5.2 Equations de propagation

Nous allons maintenant rassembler les équations bidimensionnelles obtenues précédemment, puis nous les rendrons adimensionnelles. Nous choisissons d'écrire les équations thermiques pour la variable température au lieu de les écrire avec la variable enthalpie thermique comme elles étaient écrites précédemment. Le lien entre l'enthalpie thermique et la température est donné à l'annexe I. Ce lien fait intervenir la vaporisation de l'eau contenue dans le constituant végétal. Notons H_u l'humidité du constituant végétal et P_p la charge de combustible végétal définies au chapitre 1. La température de vaporisation est notée T_{ev} et est considérée comme constante. Nous ne tenons pas compte de la présence d'eau liée dans notre modélisation. Notons enfin P_{ext} la charge de combustible en-dessous de laquelle la combustion ne peut plus avoir lieu. Nous distinguons alors les trois zones que nous avons rappelé au paragraphe 4.5.1.

i) Zone en avant du front de flamme ($T^p \leq T_{ig}$ et $P_p \geq P_{ext}$)

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$\begin{cases} P_p(C_s + H_u C_w) \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - \delta K \bar{h}(T^p - T_a) & \text{si } T^p < T_{ev} \\ -P_p L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} = \mathcal{M}_f - \bar{h}(T_{ev} - T_a) & \text{si } T^p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ P_p C_s \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - \bar{h}(T^p - T_a) & \text{si } T^p > T_{ev} \end{cases} \quad (4.216)$$

où :

C_s est la capacité calorifique de la végétation.	C_w est la capacité calorifique de l'eau.
δ est l'épaisseur de la couche de combustible	$K = \frac{\beta\sigma}{4}$ est le coefficient d'extinction.
h est le coefficient de perte convective.	L_{ev} = chaleur latente d'évaporation de l'e
T_a est la température ambiante	

Enfin $\mathcal{M}(M, t)$ correspond à la diffusion radiative. Ce terme de diffusion est non local. D'après (4.206)-(4.207), (4.201) et (4.167), son expression est :

$$\mathcal{M}(M, t) = \int_{\Omega_f^*} \varphi(P, t) \xi^s(P, M) dS \quad (4.217)$$

avec

$$\varphi(P, t) = \delta h_f \frac{K(P)}{4\pi} \frac{B}{\pi} T_f^4(P) \quad (4.218)$$

et

$$\xi^s(P, M) = \frac{K(P)}{\|\overrightarrow{MP}\|} \exp\left(-K(P) \frac{(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_f))}{\cos^2 \alpha_f} \|\overrightarrow{MP}\|\right) \quad (4.219)$$

Ci-dessus, h_f désigne la hauteur des flammes et T_f la température des flammes. Les angles α_f et φ_f décrivant la forme des flammes d'inclinaison de la flamme sont donnés par les relations (4.208) à (4.213).

Un exemple de valeurs possible des constantes précédentes est donné dans le tableau 4.1 :

$C_s \approx 2400 \text{ J/kg.K}$	$C_w \approx 4180 \text{ J/kg.K}$
$\delta \approx 1 \text{ m}$	$K = \frac{\beta\sigma}{4} \approx 0,2 \text{ m}^{-1}$
$h \approx 44 \text{ J/m}^2 \cdot \text{s.K}$	$L_{ev} = 2,250.10^6 \text{ J/kg}$
$T_a = 300 \text{ K}$	$T_{ev} = 373 \text{ K}$
$h_f \approx 2 \text{ m}$	$T_f = 1200 \text{ K}$

TAB. 4.1 - Exemple de jeu de valeurs

avec

$$\beta = 2.10^{-3} \quad \text{et} \quad \sigma = 400 \text{ m}^{-1}$$

Considérons un vent d'intensité $V \approx 10 \text{ m/s}$ et notons $r = \|\overrightarrow{MP}\|$ la distance du point M au point P. L'expression du facteur d'atténuation exponentiel a été donnée en coordonnées polaires. L'atténuation est elliptique, de grand axe dirigé par la direction du vent. Nous avons tracé à la figure 4.13 les courbes isovaleurs de $r^2 \xi(r)$ en fonction de l'angle α_f . Les courbes d'atténuation sont des ellipses ayant point P pour foyer, de grand axe f_a , de petit axe h_a et d'excentricité ε_a qui valent respectivement :

$$f_a = \frac{1/\cos \alpha_f}{1 + \sin \alpha_f^2} \quad (4.220)$$

$$h_a = \frac{1}{1 + \sin \alpha_f^2} \quad (4.221)$$

et

$$\varepsilon = \sin \alpha_f \quad (4.222)$$

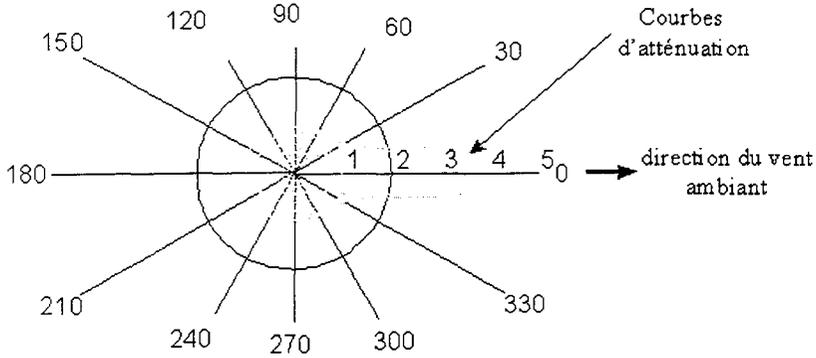


FIG. 4.13 - Courbes d'atténuation anisotrope

La charge P_p diminue dans la zone en avant du feu par pyrolyse (cf. figure 1.16). Définissons la vitesse de production de gaz pyrolysé par :

$$\dot{m}'' = -\partial P_p / \partial t \quad (4.223)$$

D'après le paragraphe 4.1, la cinétique chimique suit une loi d'Arrhénius du premier ordre :

$$\dot{m}'' = A_s P_s \exp(-E_s / RT_s) \quad (4.224)$$

où E_s est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits et A_s un coefficient.

On peut en première approximation considérer que la température de début de pyrolyse (environ 130°C) correspond à la température d'inflammation (environ 300°C). Les fronts de pyrolyse et de flamme sont alors confondus. Cette hypothèse est cependant à remettre en question si la pyrolyse devient le mécanisme limitant de la propagation. La charge P_p est constante dans cette zone, égale à sa valeur initiale :

$$P_p = P_{p,ini} \quad (4.225)$$

ii) **Zone en feu** ($T^p \geq T_{ig}$ et $P_p \geq P_{ext}$):

Dans la zone en feu, la température du combustible est supposée constante et égale à la température d'inflammation.

$$T^p = T_{ig} \quad (4.226)$$

La cinétique chimique peut alors prendre la forme générale suivante :

$$\frac{\partial P_p}{\partial t}(P, t) = -v_r(P, t - t_{ig}) P_p(P, t_{ig}) \quad (4.227)$$

où t_{ig} est l'instant de début d'inflammation et $P_p(P, t_{ig}) = P_p(P, 0)$ est la charge initiale de combustible. Ici r est une fonction qui caractérise une cinétique chimique quelconque. Dans le cas de la lois d'Arrhénius du type (4.224), la décroissance de la charge de végétation est exponentielle :

$$v_r(P, t - t_{ig}) = A_s \exp(-E_s/RT_s) \quad (4.228)$$

Le choix d'une décroissance linéaire de la charge peut aussi être envisagé.

$$v_r(x, y, t - t_{ig}) = A_s \exp(-E_s/RT_s)$$

Nous pouvons prendre les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_s &= 5.10^3 \text{ s}^{-1} \\ E_s &= 1,398.10^5 \text{ J/mole} \\ R &= 8.314 \text{ J/mole.K} \end{aligned}$$

iii) **Zone brûlée** ($T^p \leq T_{ig}$ et $P_p = P_{ext}$) :

Considérons que la température de la zone brûlée est froide, égale à la température ambiante T^a . Le bilan d'énergie est alors le suivant :

$$T^p = T_a \quad (4.229)$$

La charge est constante égale à sa valeur d'extinction :

$$P_p = P_{s,ext} \quad (4.230)$$

Il nous faut maintenant rendre adimensionnel le système bidimensionnel ci-dessus.

4.5.3 Échelles et adimensionnalisation

Choisissons pour longueur caractéristique de référence, la longueur d'observation L de la forêt. Choisissons de plus pour temps caractéristique τ celui que nous avons défini au paragraphe 4.40 :

$$\tau = \frac{P_r C_s (T_{ig} - T_a)}{\delta h_f B T_f^4 K_r^2} \quad (4.231)$$

où nous avons choisi une masse surfacique caractéristique P_r et un coefficient d'extinction caractéristique K_r . Prenons pour P_r la masse surfacique maximale de la zone d'observation de la forêt avant inflammation de celle-ci. τ a le sens d'un temps d'inflammation.

Les grandeurs caractéristiques ci-dessus vont nous permettre d'adimensionnaliser le système d'équations du paragraphe précédent. Le temps de référence τ ci-dessus est choisi de façon à ce que le bilan d'énergie en avant du front de flamme qui fasse intervenir des termes d'ordre 1.

Effectuons alors l'adimensionalisation suivante :

$$r^* = \frac{r}{L} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad (4.232)$$

$$T^{p*} = \frac{T_p - T_a}{T_{ig} - T_a} \quad \text{et} \quad P_p^* = \frac{P_p}{P_r} \quad (4.233)$$

$$T_f^* = T_f/T_r, \quad \text{et} \quad K^*(M) = K(M)/K_r \quad (4.234)$$

Réécrivons le système ci-dessus après changement de variables et en omettant d'indicer les grandeurs par une étoile pour ne pas surcharger l'écriture. Il vient :

i) **Zone en avant du front de flamme** ($T^p \leq 1$ et $P_p \geq P_{ext}$)

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$\begin{cases} P_p(1 + H_u C_w) \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p < T_{ev} \\ -P_p L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ P_p \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p > T_{ev} \end{cases} \quad (4.235)$$

où :

$$\mathcal{M}_f(M) = \int_{M_1 \in \text{Zone en feu}} \Phi(M_1) \xi(R) dS \quad (4.236)$$

avec

$$\Phi(M_1) = \frac{1}{\pi} T_f^4(M_1) \quad (4.237)$$

et

$$\xi(r) = \frac{a(M_1)}{r} \exp\left(-Ar \frac{(1 + \sin \alpha_f^2)(1 - \sin \alpha_f \cos \varphi)}{\cos \alpha_f}\right) \quad (4.238)$$

Les angles α_f et φ_f qui apparaissent dans la relation (4.238) sont enfin donnés par :

$$\cos(\alpha_f) = \vec{V}_{fl} \cdot \vec{n} / \|\vec{V}_{fl}\| \quad (4.239)$$

et

$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t \cdot \overrightarrow{PM}}{\|\vec{V}_{fl}^t\| \cdot \|\overrightarrow{PM}\|} \quad (4.240)$$

où

$$\vec{V}_{fl} = \vec{v}_g + \vec{V} \quad (4.241)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{v}_g = \vec{z} \\ \vec{V} = \mathbf{V}_g(\cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp) \\ \vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n}) \vec{n} \end{cases} \quad (4.242)$$

Les paramètres adimensionnels qui apparaissent dans les relations ci-dessus sont :

$$P_{ext} = P_{ext}/P_r \quad \text{et} \quad L_{ev} = \frac{L_{ev}}{C_s(T_{inf} - T_a)}$$

$$h = \frac{(T_r - T_a)K\bar{h}}{h_f a^2 B T_f^4} \quad \text{et} \quad C_w = \frac{C_w}{C_s} \quad (4.243)$$

$$A = \alpha_2 a L \quad \text{et} \quad T_{ev} = \frac{T_{ev} - T_a}{T_{ig} - T_a} \quad (4.244)$$

et

$$v_g = \frac{V}{\sqrt{gh_f}} \quad (4.245)$$

Bilan de charge :

$$P_s = P_{s,ini} \quad (4.246)$$

ii) **Zone en feu** ($T^p \geq 1$ et $P_p \geq P_{ext}$) :

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T^p = 1 \quad (4.247)$$

Bilan de charge :

$$\frac{\partial P_s}{\partial t}(x, y, t) = -v_r P_s(x, y, t_{ig}) \quad (4.248)$$

avec

$$v_r = t_r/t_c \quad (4.249)$$

où nous avons posé

$$t_c = 1/[A_s \exp(-E_s/RT_f)] \quad (4.250)$$

iii) **Zone brûlée** ($T^p \leq 1$ et $P_p = P_{ext}$) :

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T^p = 0 \quad (4.251)$$

Bilan de charge :

$$P_p = P_{ext} \quad (4.252)$$

Les paramètres du modèle ci-dessus sont au nombre de huit. L'ordre de grandeur des paramètres adimensionnels peut être obtenue à partir des valeurs dimensionnelles que nous avons choisies au tableau 4.2. Il vient alors pour $L = 100$ m le tableau 4.2 :

$$t_r = 306 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_c = 244$$

Préchauffe	$C_w = 1,74$	$A = 20$	$h = 0,28$
Combustion	$v_r = 0,79$	$P_{ext} = 0,1$	
Humidité	$T_{ev} = 0,24$	$L_{ev} = 3,12$	
Vent et pente	$0 < v_g < 2,27$	$\Rightarrow \cos(\alpha_f) = 1$	

TAB. 4.2 - Exemple de valeurs des paramètres adimensionnels

4.6 Cas particuliers

4.6.1 Le front plan

Dans le cas d'un front du feu droit, le champ de température bidimensionnel T^p n'est fonction que d'une coordonnée notée x et du temps. Notons $X(t)$ la position du front du feu. Le champ de température $T^p(x,t)$ vérifie l'équation (4.235) suivante :

$$\begin{cases} P_p(1 + H_u C_w) \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p < T_{ev} \\ -P_p L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ P_p \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p > T_{ev} \end{cases} \quad (4.253)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T^p = 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty \\ T^p = 1 \text{ sur le front de flamme } X(t) \end{cases} \quad (4.254)$$

Recherchons une solution stationnaire. Pour cela effectuons le changement de variables :

$$x \rightarrow \bar{x} = x - X(t) \quad (4.255)$$

avec

$$X(t) = (\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}})t \quad (4.256)$$

où $\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ est la vitesse constante de propagation du front du feu. Il vient alors :

$$\begin{cases} (\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) P_p(1 + H_u C_w) \frac{dT^p}{dx} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p < T_{ev} \\ -(\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) P_p L_{ev} \frac{dH_u}{dx} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ (\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) P_p \frac{dT^p}{dx} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p > T_{ev} \end{cases} \quad (4.257)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons omis la barre sur la variable x afin d'alléger les notations.

Lorsque $h = 0$, nous pouvons trouver facilement la valeur de la vitesse $\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$. Pour cela intégrons la relation ci-dessus pour x allant de 0 à l'infini :

$$[P_p(1 + H_u C_w)(1 - T_{ev}) + L_{ev} H_u + T_{ev}] (\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = \int_0^{\infty} \mathcal{M}_f(x) dx \quad (4.258)$$

d'où

$$\boxed{\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{\int_0^{\infty} \mathcal{M}_f(x) dx}{P_p(1 + H_u C_w)(1 - T_{ev}) + L_{ev} H_u + T_{ev}}} \quad (4.259)$$

L'intégration de l'émittance $\mathcal{M}_f(x)$ conduit alors à l'obtention de la vitesse de propagation du front du feu. Les formes (4.217)-(4.219) de l'émittance peuvent être comparées aux formes données par De Mestres [9] et Baines [3]:

$$\mathcal{M}_{fa}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{h_f/L}{x}\right) \quad (4.260)$$

et

$$\mathcal{M}_{fp}(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{z=-L}^L \int_{y=0}^{\delta} \xi^{-3} e^{-K\xi} dy dz \right) x \quad (4.261)$$

où

$$\xi^2 = (x + y \tan \theta_c)^2 + y^2 + z^2 \quad (4.262)$$

4.6.2 Le front circulaire

Cekirge [7] et Weber [24] ont modélisé et étudié de manière précise la propagation bidimensionnelle d'un front de feu circulaire. Les solutions obtenues donnent un point de comparaison intéressant avec le modèle bidimensionnel que nous avons obtenu au paragraphe 4.5, modèle valable pour un front du feu curviligne quelconque.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu un système d'équations bidimensionnel valable à l'échelle gigascopique du paysage à partir du modèle tridimensionnel de propagation du feu que nous avons exposé au chapitre 3. Le système obtenu est un système de réaction diffusion avec perte convective et terme radiatif non local. Il tient compte de l'énergie et du temps nécessaire à la vaporisation de l'eau. Le temps mis pour que la végétation perde son humidité conduit à une vitesse de propagation plus faible. L'influence du vent ambiant est tenue en compte sous la forme d'une atténuation exponentielle non isotrope du flux radiatif en supposant connue la hauteur du front du feu. Cependant, aucun entraînement convectif n'est considéré proche de la zone en feu. L'hydrodynamique n'est donc pas entièrement représentée dans le système ci-dessus.

La réduction de modèle que nous avons réalisée n'est en aucune manière complète et demande à être approfondie à l'aide de développements asymptotiques. Nous avons cependant obtenu un système de réaction diffusion qui fait intervenir les paramètres principaux de la propagation des feux de forêt ce qui était notre but. Ce système bidimensionnel est valable aussi bien pour une forêt dense que peu dense. Le domaine de validité du modèle bidimensionnel obtenu doit contenir celui du modèle des ellipses que nous avons étudié au chapitre 2. L'obtention de ce modèle unidimensionnel à partir du système bidimensionnel obtenu dans ce chapitre reste à être précisée.

Nous allons maintenant simuler numériquement le système de réaction diffusion bidimensionnel afin de mieux comprendre le comportement des feux de forêt en fonction des valeurs des paramètres de la propagation que nous avons fait apparaître dans ce chapitre.

Bibliographie

- [1] **Albini F.A.**, A model for fire spread in wildland fuels radiation, *Comb. Sci. and Technol.*, 1985, vol. 42, p. 229-258.
- [2] **Albini F.A.**, Wildland fire spread by radiation: a model including fuel cooling by convection, *Comb. Sci. and Technol.*, 1985, vol. 45, p. 101-113.
- [3] **Baines P.G.**, Physical mechanisms for the propagation of surface fires, *Mathematical and Computer Modelling*, 1990, vol. 13, pp.83-94.
- [4] **Bass J.**, Cours de Mathématiques Tome I, *Masson et Cie Éditeurs*, 1968.
- [5] **Berger M. et Gostiaux B.**, Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces, *Presses Universitaires de France*, 1987.
- [6] **Carrier G., Fendell F. and Fink S.**, « Towards Wind-Aided Flame Spread Along a Horizontal Charring Slab: The Steady-Flow Problem, *Combust. Sci. Tech.*, 1983, vol. 32, pp.161-209.
- [7] **Cekirge H.M.**, Propagation of fire fronts in forests, *Comp. and Maths. with Appls.*, 1978, Vol. 4, p. 325-332.
- [8] **Darrozes J.S. et Monavon A.**, Analyse phénoménologique des écoulements ou comment traiter un problème de mécanique des fluides avant de résoudre les équations, *Polycopié de cours de l'ENSTA*, 1988.
- [9] **De Mestre N.J., Catchpole E.A., Anderson D.H. and Rothermel R.C.**, Uniform propagation of a planar fire front without wind, *Comb. Sci. and Technol.*, 1989, vol. 65, pp. 231-244.
- [10] **Dorrer G.A.**, A model for propagation of curvilinear forest fire fronts, Krasnoyarsk. Translated from *Fizika Goreniya i Vzryva*, 1982, vol. 20, no. 1, pp. 11-19.
- [11] **Duh F.C. and Chen C.H.**, Flame spread over thermally-thin solid fuel in zero gravity, *Wärme- und Stoffübertragung*, 1993, Vol. 28, pp. 81-88.
- [12] **Green D.G.**, Shapes of fires in discrete fuels, *Ecol. Model.*, 1983, Vol. 20, pp. 21-32.
- [13] **Kanury A.M. and Blackshear P.L.**, *Combust. Sci. Tech.*, 1970, Vol. 1, pp. 339-.

- [14] **Liu J., Chen J.M., Black T.A. and Novak M.D.**, E-e modelling of turbulent air flow downwind of a model forest edge, *Boundary-Layer Meteorology.*, 1996, vol. 77, pp.21-44.
- [15] **Margerit J. and Sero-Guillaume O.**, Study of the evaporation of a droplet in its stagnant vapor by asymptotic matching, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1996, Vol. 39, No. 18, pp. 3887-3898.
- [16] **Pagni J. and Peterson G.**, Flame spread through porous fuels, *14 th Symposium (International) on Combustion.*, 1973, pp. 1099-1107.
- [17] **Provatas N., Ala-Nissila T., Grant M., Elder K.R. and Piche L.**, Scaling, Propagation, and Kinetic Roughening of Flame Fronts in Random Media, *Journal of Statistical Physics*, 1995, Vol. 81, No. 3/4, pp.737-759.
- [18] **Provatas N., Ala-Nissila T., Grant M., Elder K.R. and Piche L.**, Flame propagation in random media, *Physical Review E*, 1995, Vol. 51, No. 5, pp.4232-4236.
- [19] **Richards G.D.**, Numerical simulation of forest fires, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1988, Vol. 25, pp. 625-634.
- [20] **Roberts A.F.**, *Combust. Flame*, 1970, Vol. 14, pp. 261-.
- [21] **Roberts A.F.**, *Combust. Flame*, 1971, Vol. 17, pp. 79-.
- [22] **Siegel R. and Howell J.R.**, Thermal Radiation Heat Transfer, second Edn., *New York: McGraw-Hill*, 1981.
- [23] **Viegas D.X. and Neto L.P.C.**, Wall shear-stress as a parameter to correlate the rate of spread of a wind induced forest fire, *Int. J. Wildland Fire*, 1991, Vol. 1, No. 3, p.177-188.
- [24] **Weber R.O.**, Analytical models for fire spread due to radiation, *Combust. Flame*, 1989, Vol. 78, p.398-408.
- [25] **Weber R.O.**, Toward a comprehensive wildfire spread model, *Int. J. Wildland Fire*, 1991, vol. 1, No.4, pp. 245-248.
- [26] **Williams F.A.**, Combustion Theory, *Addison-Wesley Publishing Co.*, 1985.

Chapitre 5

Résolution numérique du modèle de feux de forêts 2D surfacique

Introduction

Le chapitre précédent nous a permis d'obtenir un système bidimensionnel d'équations modélisant la propagation des feux de forêts. Nous allons maintenant proposer deux méthodes de résolution numérique de celui-ci. Ces résolutions devront tenir compte que le flux de chaleur est localisé autour du front du feu et que ce front du feu est une frontière libre qui se propage. Nous choisissons deux méthodes numériques à maillage fixe. Nous allons tout d'abord proposer un schéma de différences finies.

Nous discuterons ensuite des automates cellulaires. La présence d'une couche limite thermique proche du front du feu nous conduit à prendre des maillages avec une forte discrétisation. Les calculs ne sont cependant pas réalisés sur tout le maillage mais sur une zone de faible épaisseur autour du front du feu. L'épaisseur de celle-ci dépend de la valeur du coefficient d'extinction.

La possibilité de considérer une densité d'occupation d de la forêt différente de 1 est introduite en tirant la répartition de la végétation de manière probabiliste. Ceci nous permet de pouvoir tenir compte de situations de propagation de feu pour lesquelles la forêt est horizontalement hétérogène et de simuler des situations où la percolation a un rôle important. Des résultats de simulations numériques sont alors donnés. Nous concluons enfin sur les avantages relatifs de ces deux schémas.

5.1 Système à résoudre

Rappelons le système d'équations bidimensionnelles que nous avons trouvé au chapitre 4 et que nous désirons résoudre. Les paramètres du modèle sont au nombre de trois : la température T^p (K°) de la végétation, l'humidité H_u du combustible et de la charge P_p (kg/m^2) de végétation par unité de surface au sol.

Le critère d'inflammation est défini par la température d'inflammation T_{ig} . Le critère d'extinction est quant à lui défini par la charge critique P_{ext} . Nous avons vu au chapitre

3 que nous sommes amenés à distinguer trois zones : la zone en avant du front de flamme, la zone en feu et la zone brûlée.

Le système à résoudre numériquement est écrit ci-dessous en variables adimensionnelles :

i) **Zone en avant du front de flamme** ($T^p \leq 1$ et $P_p \geq P_{ext}$)

$$\begin{cases} P_p(1 + H_u C_w) \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p < T_{ev} \\ -P_p L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ P_p \frac{\partial T^p}{\partial t} = \mathcal{M}_f - hT^p \text{ si } T^p > T_{ev} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$P_s = P_{s,ini} \quad (5.2)$$

où :

$$\mathcal{M}_f(M) = \int_{M \in \text{Zone en feu } \Omega_f^s} \varphi(M) \xi(R) dS \quad (5.3)$$

avec

$$\varphi(M_1) = \frac{1}{\pi} T_f^4(M_1) \quad (5.4)$$

et

$$\xi(r) = \frac{a(M_1)^2}{r} \exp\left(-Ar \frac{(1 + \sin \alpha_f^2)(1 - \sin \alpha_f \cos \varphi)}{\cos \alpha_f}\right) \quad (5.5)$$

Les angles α_f et α_f qui apparaissent dans la relation (5.5) sont enfin donnés par :

$$\cos(\alpha_f) = \vec{V}_{fl} \cdot \vec{n} / \|\vec{V}_{fl}\| \quad (5.6)$$

et

$$\cos(\varphi - \alpha_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \quad (5.7)$$

où

$$\vec{V}_{fl} = \vec{v}_g + \vec{V} \quad (5.8)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{v}_g = \vec{z} \\ \vec{V} = V_g(\cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp) \\ \vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n}) \vec{n} \end{cases} \quad (5.9)$$

ii) **Zone en feu** ($T^p \geq 1$ et $P_p \geq P_{ext}$):

$$T^p = 1 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial t}(x, y, t) = -v_r P_s(x, y, t_{ig}) \quad (5.11)$$

iii) **Zone brûlée** ($T^p \leq 1$ et $P_p = P_{ext}$):

$$T_p = 0 \quad (5.12)$$

$$P_p = P_{ext} \quad (5.13)$$

C'est un problème de **diffusion** avec loi de transfert non locale. Les paramètres du modèle ci-dessus sont au nombre de huit. L'ordre de grandeur des paramètres adimensionnels peut être obtenue à partir de valeurs dimensionnelles données dans le tableau 5.1 :

Géométrie	$L_f = 100 \text{ m}$	$\delta = 1 \text{ m}$	$h_f = 2 \text{ m}$
Micro	$C_s = 2400 \text{ J/kg.K}$	$C_w = 4180 \text{ J/kg.K}$	$L_{ev} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$
Coeff. effectif	$a = K = 0,2 \text{ m}^{-1}$	$h = 44 \text{ J/m}^2 \cdot \text{s.K}$	$P_r = 4 \text{ kg.m}^{-2}$
Températures	$T_a = 300 \text{ K}$	$T_{ev} = 373 \text{ K}$	$T_{inf} = 600$
Flamme	$B = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$	$T_f = 1200 \text{ K}$	
Pyrolyse	$A_s = 0,7 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$		$E_s = 1,4 \cdot 10^5 \text{ J/mol.K}$
Vent	$V \leq 10 \text{ m/s}$	$g = 9,8 \text{ m/s}^2$	

TAB. 5.1 - Exemple de valeurs des paramètres dimensionnels

Pour $L = 100 \text{ m}$, nous obtenons les valeurs suivantes des paramètres adimensionnels :

$$t_r = 306 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_c = 244$$

Préchauffe	$C_w = 1,74$	$A = 20$	$h = 0.28$
Combustion	$v_r = 0.79$	$P_{ext} = 0.1$	
Humidité	$T_{ev} = 0.24$	$L_{ev} = 3.12$	
Vent et pente	$0 < v_g < 2,27$	$\Rightarrow \cos(\alpha_f) = 1$	

TAB. 5.2 - Exemple de valeurs des paramètres adimensionnels

Il nous faut maintenant résoudre numériquement le système à frontière libre ci-dessus.

5.2 Différences finies

5.2.1 Choix de l'algorithme

Le système précédent est caractérisé par la présence de cinq zones distinctes :

1 ^{ère} zone	$T^p < T_{ev}, H_u > 0$ et $P_p \geq P_{ext}$	zones en avant du feu (végétation vierge, pyrolyse et vaporisation)
2 ^{ième} zone	$T^p = T_{ev}, H_u > 0$ et $P_p \geq P_{ext}$	
3 ^{ième} zone	$T_{ev} < T^p < 1, M = 0$ et $P_p \geq P_{ext}$	
4 ^{ième} zone	$T^p = 1, H_u = 0$ et $P_p > P_{ext}$	zone en feu
5 ^{ième} zone	$T^p \leq 1, H_u = 0$ et $P_p = P_{ext}$	zone brûlée

Nous aurions pu distinguer une 6^{ième} zone si nous avons tenu compte d'une température de pyrolyse T_{pyr} différente de la température d'inflammation (cf. figure 1.16, G.F. Carrier [4] 1980 et L. Naville [15] 1997).

Le problème à résoudre numériquement est donc un problème à plusieurs frontières libres [13]. Nous allons utiliser une résolution numérique à maillage fixe afin de trouver l'évolution du feu. Choisissons pour maillage un réseau carré sur le plan \mathcal{P} . Les équations (5.1) à (5.13) sont donc écrites sur les coordonnées orthogonales associées à ce plan. La distorsion pour passer de la surface \mathcal{S} au plan \mathcal{P} a été étudié au paragraphe 4.2. Rappelons que cette transformation fait intervenir les coefficients p et q qui caractérisent les pentes locales de la surface \mathcal{S} . La dimension du réseau carré est 1×1 en variables réduites. Soit n le nombre de mailles horizontales du réseau. Le réseau possède alors $(n + 1)^2$ noeuds (cf. figure 5.1) :

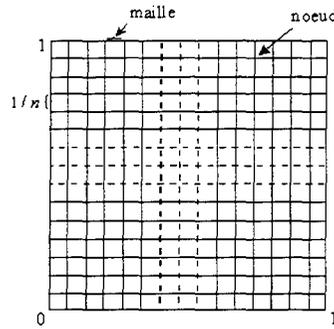


FIG. 5.1 - Réseau carré

Les grandeurs dont nous devons calculer l'évolution sont T^p , P_p et H_u . Choisissons un schéma explicite. Nous devons alors faire attention à choisir un pas de temps dt suffisamment petit en fonction du pas de discrétisation $dl = 1/n$ pour que le schéma numérique soit stable. De plus le transfert étant non local, nous définissons une longueur réduite de troncature Δl du transfert par rayonnement. C'est la distance à partir de laquelle nous pouvons considérer qu'un élément en feu n'a plus d'influence, par rayonnement, sur l'évolution de température de la végétation vierge en avant du front du feu.

La longueur caractéristique d'observation L_f de la forêt doit être donnée a priori. Elle caractérise l'échelle gigascopique à laquelle le modèle ci-dessus est valable. Le schéma numérique est alors le suivant :

Nous discrétisons spatialement et temporellement les grandeurs. Indiquons par i et j l'espace et par k le temps.

i) **Zone en avant du front de flamme** ($T_{pk}^{i,j} \leq 1$ et $P_s^{i,j} \geq P_{ext}$)

Nous discrétisons l'intégrale (5.3) en une somme notée $\mathcal{M}_{fk}^{i,j}$:

$$\mathcal{M}_{fk}^{i,j} = \sum_{i',j' \in \text{Zone en feu } \Omega_j^s} \frac{1}{\pi} (T_{fk}^{i',j'})^4 \frac{(a_k^{i',j'})^2}{r} \exp \left(-Ar \frac{(1 + \sin \alpha_f^2)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_f))}{\cos \alpha_f} \right) \quad (5.14)$$

avec

$$\cos(\alpha_f) = \vec{V}_{fl} \cdot \vec{n} / \|\vec{V}_{fl}\| \quad (5.15)$$

et

$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \quad (5.16)$$

où

$$\vec{V}_{fl} = \vec{v}_g + \vec{V} \quad (5.17)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{v}_g = \vec{z} \\ \vec{V} = V_g(\cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp) \\ \vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n})\vec{n} \end{cases} \quad (5.18)$$

Si $T_{pk}^{i,j} \leq T_{ev}$:
soit

$$Infl^{i,k} = (\mathcal{M}_v^{i,k} - 4hT_s^{i,k}) * dt \quad (5.19)$$

soit alors

$$\Delta^{i,k} = P_s^{i,k}(1 + M^{i,k}C_w)(T_{ev} - T_s^{i,k}) \quad (5.20)$$

si $(\Delta^{i,k} > 0)$

$$\begin{cases} T_s^{i,k+1} = T_s^{i,k} + Infl^{i,k} / P_s^{i,k}(1 + MC_w)^{i,k} \\ M^{i,k+1} = M^{i,k} \\ P_s^{i,k+1} = P_s^{i,k} \\ Infl_1^{i,k} = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

sinon

$$\begin{cases} T_{s_1}^{i,k} = T_{ev} \\ M_1^{i,k} = M^{i,k} \\ P_{s_1}^{i,k} = P_s^{i,k} \\ Infl_1^{i,k} = -\Delta^{i,k} \end{cases} \quad (5.22)$$

Si $(Infl_1^{i,k} > 0)$ et $(T_{s_1}^{i,k} = T_{ev})$:
soit

$$\Delta_1^{i,k} = P_{s_1}^{i,k} L_{ev} M_1^{i,k} - Infl_1^{i,k} \quad (5.23)$$

si $(\Delta_1^{i,k} > 0)$

$$\begin{cases} T_s^{i,k+1} = T_{ev} \\ M^{i,k+1} = M_1^{i,k} - Infl_1^{i,k} / P_{s_1}^{i,k} L_{ev} \\ P_s^{i,k+1} = P_{s_1}^{i,k} \\ Infl_2^{i,k} = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

sinon

$$\begin{cases} T_{s_2}^{i,k} = T_{ev} \\ M_2^{i,k} = 0 \\ P_{s_2}^{i,k} = P_{s_1}^{i,k} \\ Infl_2^{i,k} = -\Delta_1^{i,k} \end{cases} \quad (5.25)$$

Si ($Infl_2^{i,k} > 0$) et ($T_{s_2}^{i,k} \geq T_{ev}$):

soit

$$\Delta_2^{i,k} = P_{s_2}^{i,k}(1 - T_{s_2}^{i,k}) - Infl_2^{i,k} \quad (5.26)$$

si ($\Delta_2^{i,k} > 0$)

$$\begin{cases} T_s^{i,k+1} = T_{s_2}^{i,k} + Infl_2^{i,k} / P_{s_2}^{i,k} \\ M^{i,k+1} = 0 \\ P_s^{i,k+1} = P_{s_2}^{i,k} \end{cases} \quad (5.27)$$

sinon

$$\begin{cases} T_s^{i,k+1} = 1 \\ M^{i,k+1} = 0 \\ P_s^{i,k+1} = P_{s_2}^{i,k} \end{cases} \quad (5.28)$$

ii) **Zone en feu** ($T_s^{i,k} \geq 1$ et $P_s^{i,k} \geq P_{ext}$):

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T_s^{i,k+1} = 1 \quad (5.29)$$

Bilan de charge :

Soit

$$P_{s_1}^{i,k} = P_s^{i,k} - v_r P_s^{i,k} * dt \quad (5.30)$$

si ($P_{s_1}^{i,k} \geq P_{ext}$)

$$P_s^{i,k+1} = P_{s_1}^{i,k} \quad (5.31)$$

sinon

$$P_s^{i,k+1} = P_{ext} \quad (5.32)$$

iii) **Zone brûlée** ($T_s \leq 1$ et $P_s = P_{ext}$):

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T_s^{i,k+1} = 1 \quad (5.33)$$

Bilan de charge :

$$P_s^{i,k+1} = P_{ext} \quad (5.34)$$

5.2.2 Avantages et limitations

Le schéma numérique précédent permet de simuler la propagation du feu dans une forêt en tenant compte du caractère non local de l'intervention du rayonnement qui intervient dans une bande autour du front du feu. Le pas de temps doit être assez petit en fonction du pas d'espace. Le calcul de la propagation du feu est alors relativement lente par rapport à la méthode des enveloppes et par rapport au modèle d'automates cellulaires, même si nous nous restreignons à ne calculer que sur la bande d'influence du flux d'énergie autour du front du feu. Nous allons maintenant étudier plus en détail cette classe de schéma.

5.3 Automate cellulaire

5.3.1 Notion d'automate

Nous avons vu dans l'introduction qu'un automate est caractérisé à chaque instant t par son état. Cet état est un vecteur de nombres **entiers** noté ω_α^t :

$$\omega_\alpha^t = (Pp, Tp, Hu) \quad (5.35)$$

Un réseau d'automates est un réseau carré $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ dont chaque élément, appelé site ou noeud, est un automate (cf. figure 5.2).

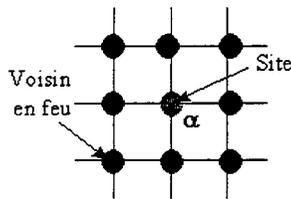


FIG. 5.2 – Réseau d'automates cellulaires

Chaque noeud du réseau réactualise son état à l'instant $t + 1$ à l'aide d'une loi faisant intervenir l'état à l'instant t du voisinage, c'est-à-dire des automates voisins en feu qui influencent son état. Cette loi est nommée *fonction de transfert locale*. Elle est de la forme :

$$\omega_\alpha^{t+1} = f(\omega_\alpha^t, \omega_{\text{voisins}}^t) \quad (5.36)$$

La taille du voisinage d'un site est le nombre de sites qu'il contient. Elle dépend du vent, de la pente et de la température de la flamme.

Les automates cellulaires sont des outils numériques intéressants pour simuler des comportements naturels. La mécanique des milieux avec transferts thermiques, diffusifs en présence de réactions chimiques (cf. le modèle de gaz sur réseaux de Bernardin D. et Séro-Guillaume O. [3, 18]), les milieux excitable (cf. Weimar J.R. et Tyson J.J. [24, 25]) et les systèmes de réaction-diffusion (cf. Weimar J.R. and Boon J.P. [22]) sont des exemples d'application de cet outil à la mécanique. Ils sont utilisés depuis longtemps pour l'étude de

la propagation de feux de forêt [1, 6, 8, 9, 12, 14, 20] dans un but de simulation qualitative de la propagation.

5.3.2 Fonction de transfert locale

La fonction de transfert locale peut être obtenue en discrétisant en plus les grandeurs dans le schéma numérique du paragraphe précédent. La fonction de transfert est telle qu'elle satisfasse un certain nombre de **bilans locaux** de la masse et d'énergie. La discrétisation peut être obtenue par exemple par troncature à l'ordre entier le plus près des équations du paragraphe 5.2.

Le nombre d'éléments de discrétisation de l'espace vaut n_L et celui du temps vaut n_t . Les nombres de discrétisations des différentes grandeurs Pp , Tp et Hu sont notés respectivement n_T , n_P et n_M .

Comme nous choisissons de ne travailler qu'en nombre entiers, il nous faut dilater les grandeurs Pp , Tp et Hu . Effectuons donc le nouveau changement de variables suivant :

$$T'_s = T_s * n_T, P'_s = P_s * n_P \text{ et } M' = M * n_M$$

$$r' = r * n_L, t' = t * n_t \text{ avec } n_t = t_{sim}/t_r \quad (5.37)$$

Dans la suite de l'exposé, nous omettrons l'apostrophe pour simplifier la notation. Il vient alors :

i) **Zone en avant du front de flamme** ($T^f \leq n_T$ et $Pp \geq P_{ext} * n_p$)

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$\begin{cases} P_p(n_M + H_u C_w) \frac{\partial T^f}{\partial t} = n_T n_P n_M \mathcal{M}_f - h n_P n_M T^f \text{ si } T^f < T_{ev} * n_T \\ -P_p L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} = n_P n_M \mathcal{M}_f - h n_P n_M T^f \text{ si } T^f = T_{ev} * n_T \text{ et } H_u \neq 0 \\ P_p \frac{\partial T^f}{\partial t} = n_T n_P \mathcal{M}_f - h n_P T^f \text{ si } T^f > T_{ev} * n_T \end{cases} \quad (5.38)$$

où :

$$\mathcal{M}_{f_k}^{i,j} = \sum_{i',j' \in \text{Zone en feu } \Omega_f^s} \frac{1}{\pi} (T_{f_k}^{i',j'})^4 \frac{(a_k^{i',j'})^2}{r} \exp\left(-Ar \frac{(1 + \sin \alpha_f^2)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_f))}{\cos \alpha_f}\right) \quad (5.39)$$

avec

$$\cos(\alpha_f) = \vec{V}_{fl} \cdot \vec{n} / \|\vec{V}_{fl}\| \quad (5.40)$$

et

$$\cos(\varphi - \varphi_f) = \frac{\vec{V}_{fl}^t}{\|\vec{V}_{fl}^t\|} \cdot \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \quad (5.41)$$

où

$$\begin{cases} \vec{v}_g = \vec{z} \\ \vec{V} = V_g(\cos \varphi_v \vec{k} + \sin \varphi_v \vec{k}^\perp) \\ \vec{V}_{fl}^t = \vec{V}_{fl} - (\vec{V}_{fl} \cdot \vec{n})\vec{n} \end{cases} \quad (5.42)$$

Bilan de charge :

$$P_p = P_{p,ini} \quad (5.43)$$

ii) **Zone en feu** ($T^f \geq 1$ et $P_p \geq P_{ext}$):

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T_p = 1 \quad (5.44)$$

Bilan de charge :

$$\frac{\partial P_p}{\partial t}(x, y, t) = -v_r P_p(x, y, t_{ig}) \quad (5.45)$$

iii) **Zone brûlée** ($T_p \leq 1$ et $P_p = P_{ext}$):

Le bilan d'énergie est le suivant :

$$T_p = 1 \quad (5.46)$$

Bilan de charge :

$$P_p = P_{ext} \quad (5.47)$$

5.3.3 Modèle à une discrétisation de la température

Choisissons que deux éléments de discrétisation de la température et de la charge de combustible dans le cas d'une végétation sèche. La température adimensionnelle est donc soit égale à zéro, soit égale à la température d'inflammation. L'algorithme précédent se réduit alors aux états frais, en feu et brûlé. Si nous avons bien choisi les échelles de discrétisation de manière à avoir une absorption de l'énergie qui s'effectue sur une distance d'une ou deux cellules, la sommation (5.39) précédente se réduit alors à compter le nombre de voisins les plus proches. L'algorithme est alors du même type que celui que nous avons présenté en introduction (cf. figure 4).

5.3.4 Rôle des probabilités

La discrétisation des grandeurs physiques, que nous avons réalisée au paragraphe 5.3.2, correspond à prendre l'entier le plus proche lors du calcul du flux qui arrive sur la végétation en avant du front du feu. Mais trouver l'entier le plus proche est assez long à réaliser. Faire intervenir des probabilités peut permettre d'augmenter le choix d'algorithme numérique [24]. Nous pouvons par exemple prendre l'entier supérieur avec une probabilité de 50% et l'entier inférieur avec une probabilité de 50% lors de la troncation.

Le but est de conserver les bilans de masse et d'énergie en moyenne lorsque nous réalisons cette troncature. Les calculs supplémentaires de troncature sont palliés par la possibilité d'exécuter ces calculs une fois pour toute, car la loi de transition étant discrète, le nombre de combinaisons possibles de cette loi est fini. Ces résultats sont alors stockés dans une grande table. Nous aurons alors juste à aller chercher la valeur de la loi de transition correspondant à chaque noeud dans cette table.

5.3.5 Avantages et limitations

Les calculs sont effectués en nombres entiers donc sont exactes et un tel schéma numérique est obligatoirement stable. Il donne rapidement des résultats qualitatifs sur le système que nous étudions. Le calcul en nombres entiers est rapide si nous allons lire le résultat dans grande table où a été calculé, une fois pour toute, tous les cas possibles de loi de transition. La consistance du schéma numérique est cependant difficile à réaliser ce qui rend l'obtention de résultats quantitatifs très délicate. Ce travail est cependant très important dans une étape d'accélération de la rapidité d'exécution de la résolution numérique.

Le schéma numérique que nous obtenons lorsque la densité d'occupation est faible peut conduire à une modélisation virtuelle de la réalité comme c'est le cas pour les gaz sur réseau [18].

Un aperçu de l'organisation du programme qui a été réalisé en langage C++ est donné en annexe J.

5.4 Résultats de simulations numériques

5.4.1 Modèle de végétation

Afin de simuler une densité d'occupation d de forêt différente de 1, la forêt a été générée au hasard avec une probabilité homogène d'occupation des sites égale à d . La répartition de la végétation est donc obtenue par un générateur aléatoire uniforme. Nous distinguons le sol en brun de la végétation en vert. La forêt a été modélisée par un réseau d'automates de taille 100×100 sites (cf. figure 5.3). Les zones en jaune correspondent à la présence de feu et celles en noir à la végétation brûlée.

Une moyenne sur un nombre important de cellules permet de retrouver une évolution continue du champ de température lorsque la densité d'occupation de la forêt est proche de 1.

5.4.2 Evolution du feu

Montrons un exemple de propagation du feu. La forêt a été modélisée par un réseau d'automates de taille 100×100 sites. La température initiale est de 25°C , l'humidité du combustible est uniforme et vaut 77% . La charge est de 120 et la densité d'occupation du sol est 60%. Le feu est initié par un disque de feu au centre de la figure 5.4. Il n'y a ni

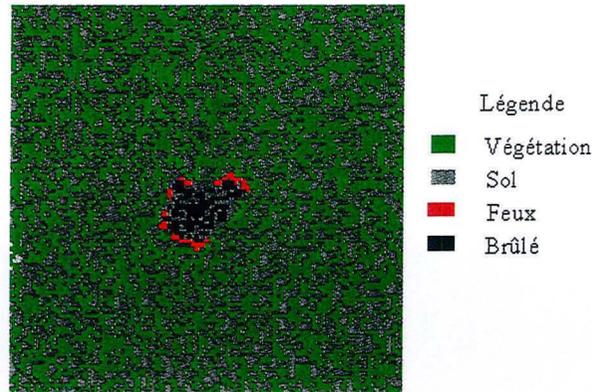


FIG. 5.3 – *Discretisation permettant de simuler une densité d'occupation $d=0.6$*

vent, ni pente. La $n^{\text{ième}}$ étape de calcul (Etape = n_t) correspond à l'instant $n_t * dt$ où dt est le pas de discrétisation temporel (cf. paragraphe 5.3.2).

La simulation ci-dessus est qualitative, car nous n'avons pas calé les dimensions d'une cellule de l'automate par rapport à une situation de feu de forêt réel. Le front du feu est très découpé, car la densité d'occupation n'est pas proche de 1. Un développement du feu de ce type est observé classiquement par les pompiers lors de feux de forêts réels.

5.4.3 Cas d'une densité d'occupation importante sans vent ni pentes

Réalisons une simulation pour une densité d'occupation du sol importante. Nous choisissons une densité de 0.7. Il n'y a ni vent, ni pente. Le feu est ensuite initié par un disque de feu au centre de la forêt et nous le laissons se développer jusqu'à l'étape 32. Nous obtenons alors un développement du feu axisymétrique comme le prévoit la symétrie du problème.

Nous avons représenté l'évolution du rayon du front du feu et de la surface de la zone en feu et brûlé en fonction du temps sur la figure 5.6. L'unité de longueur du rayon est le nombre de cellules entre 2 points et l'unité de surface et le nombre de cellules constituant celle-ci. La vitesse de propagation devient constante après un régime transitoire d'accélération de l'ordre de 20 étapes. C'est bien ce qui est observé expérimentalement [5] et ce qui est obtenu théoriquement [5, 21] (cf. paragraphe 4.6.2).

5.4.4 Rôle du vent

La présence d'un vent ambiant globale conduit à un développement du feu de forme elliptique caractéristique des feux observés expérimentalement dans le cas d'incendie d'une strate végétale de densité d'occupation importante. Notre simulation numérique donne la

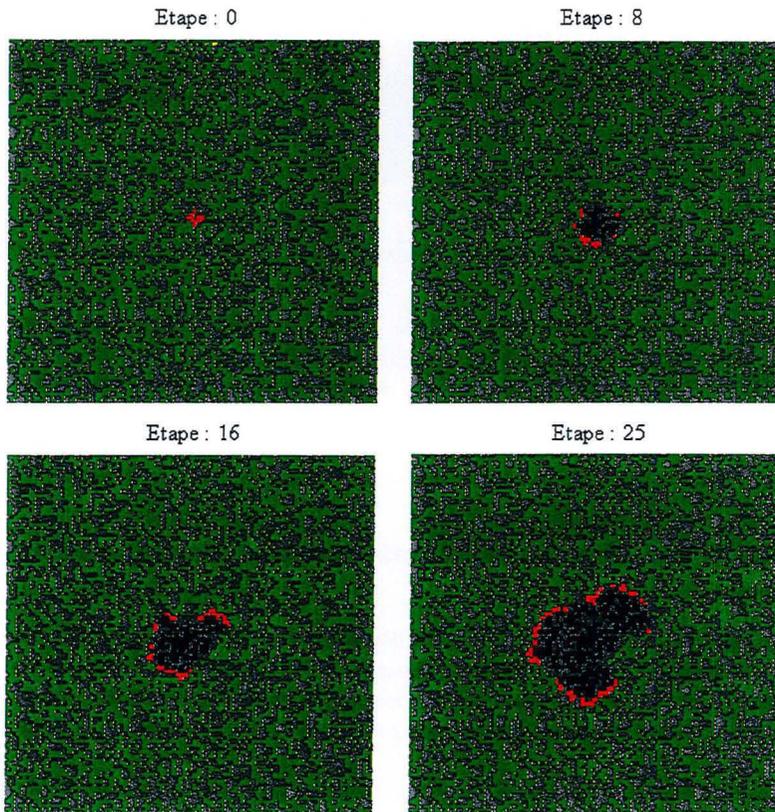


FIG. 5.4 – Exemple de propagation du feu ($d=0.6$)

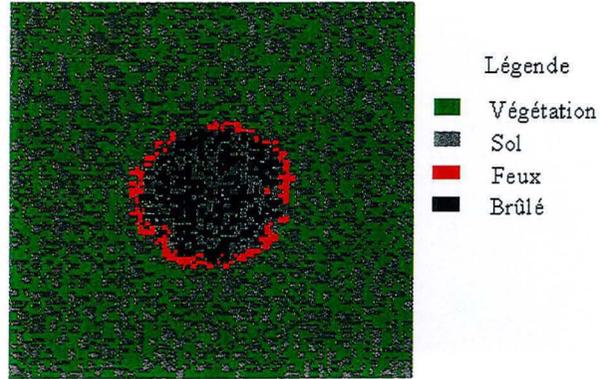


FIG. 5.5 - Densité d'occupation importante ($d=0.8$, Etape 32)

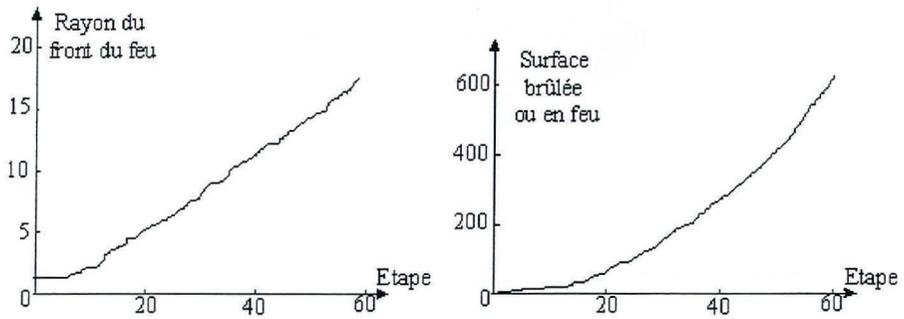


FIG. 5.6 - Evolution du rayon du front du feu et de la surface en feu

propagation représentée ci-dessous à la figure 5.7 pour une forêt de 100×100 cellules au bout de 32 pas de temps et pour un vent ambiant dans la direction ouest-est :



FIG. 5.7 – Rôle d'un vent ambiant global (Etape 32)

La forme est semblable à la forme elliptique, du front du feu, obtenue au chapitre 2. Nous avons simulé l'équation différentielle 2.21 du chapitre 2. Nous obtenons l'évolution suivante du front du feu en fonction du temps.

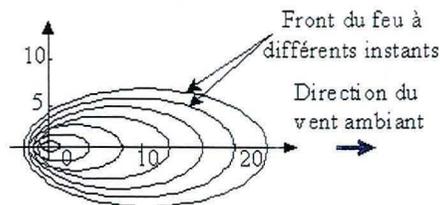


FIG. 5.8 – Evolution du front du feu du modèle d'ellipses

5.4.5 Rôle de la pente locale

Il est important de prendre en compte la pente du terrain lorsque celle-ci existe. Ceci se voit sur la simulation de la figure 5.9 où nous avons allumé le feu entre deux collines.

Le feu se propage plus vite lorsqu'il monte une forte pente. Nous n'avons pas fait de simulation en présence à la fois de vent et de collines. De telles simulations nécessitent de connaître le vent ambiant local au niveau du sol. Une simulation de l'écoulement du vent autour de collines est alors nécessaire au préalable à l'utilisation de notre code de calcul de propagation du feu.

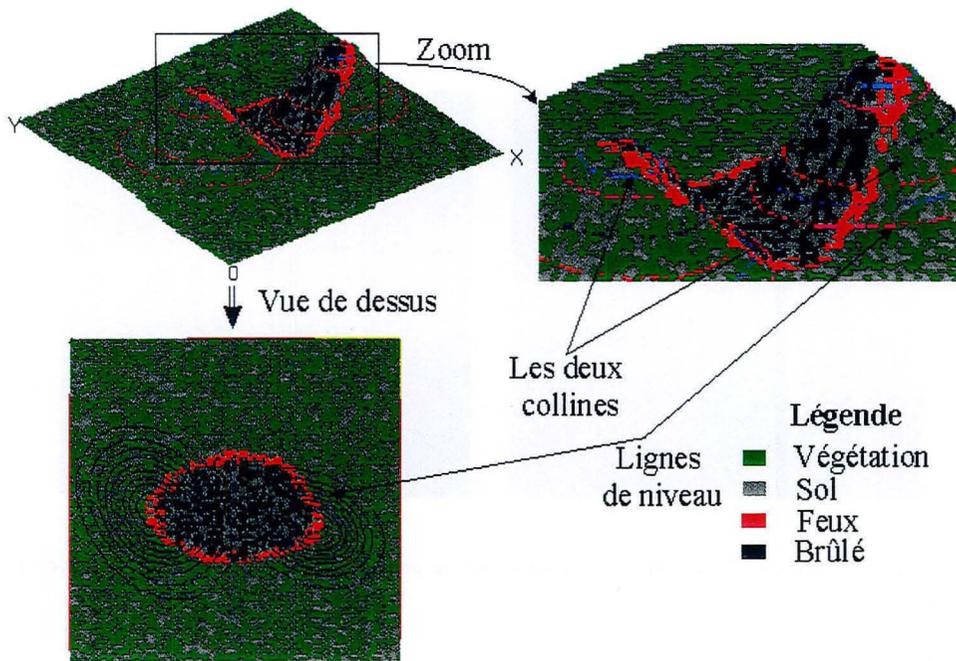


FIG. 5.9 – Rôle d'une pente locale

5.4.6 Rôle de l'humidité

Le rôle de l'humidité est aussi pris en compte par notre code de calcul. Nous avons simulé par exemple à la figure 5.10 la propagation du feu lors de la présence de trois zones humide, zones dues au largage d'eau par bombardier d'eau. Les zones très humides de forme elliptique sont représentées en couleur bleu à l'instant initial d'inflammation. L'inflammation a lieu au centre de la figure. Nous représentons alors la forme de la zone en feu après 15 étapes de simulation numérique. Nous observons alors que l'avance du front du feu a été ralentie par la présence des zones de forte humidité. La présence de retardant dans le largage d'eau peut être prise en compte au niveau de la vitesse de réaction chimique v_r , de la relation (5.45). Cette vitesse de réaction est en effet fonction d'une énergie d'activation, énergie qui est modifiée par la présence de retardant.

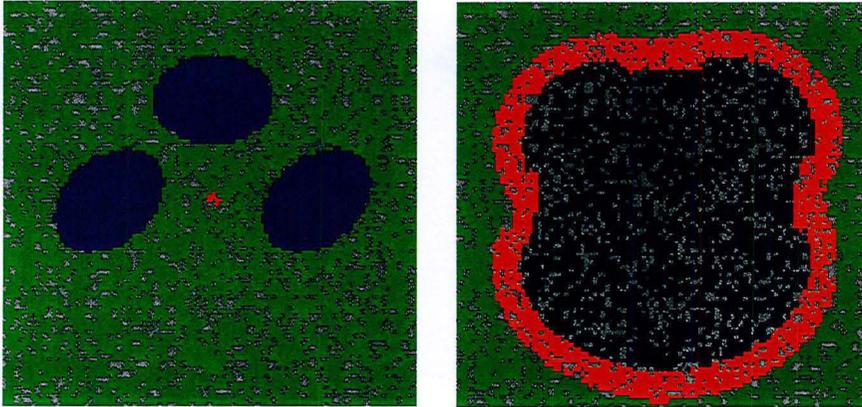


FIG. 5.10 – Rôle de l'humidité du terrain sur la propagation du feu, cas de 3 largages d'eau

La chimie complète, liée au retardant, reste cependant à être modélisée, de manière plus précise, aux échelles mésoscopique et microscopique. La présence de retardants modifie en effet localement la loi de pyrolyse.

5.4.7 Profil de grandeurs

Les profils de grandeurs types obtenues en chaque noeud (ou site) du maillage peuvent être tracés en fonction du temps. Un exemple d'évolution est donné à la figure 5.11 ci-dessous pour un site où la végétation est présente. C'est le site (60, 60) d'un réseau d'automates de taille 100×100 .

La température est exprimée en Kelvin, l'humidité en pour mille. Le temps correspond au nombre d'étapes de calcul. L'inflammation de la végétation, lorsque celle-ci atteint une température de 600 K, se produit à la 16^{ième} étape.

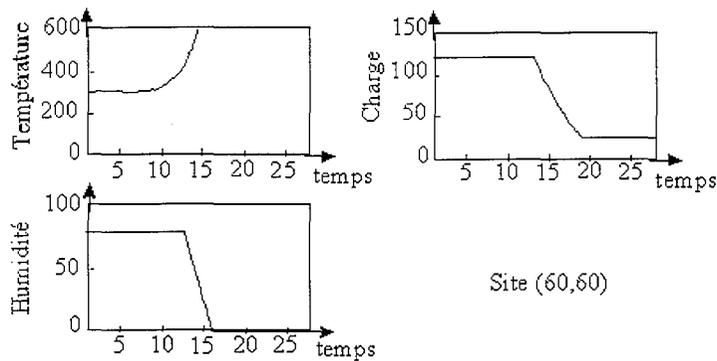


FIG. 5.11 – Profil de grandeurs en un noeud du maillage

5.4.8 Densité de percolation

Étudions l'influence de la densité de la forêt sur la propagation du feu. Le feu est toujours initié au centre de la forêt qui est ici de densité homogène. La densité de percolation est le seuil de la densité d'occupation de la forêt au-dessous duquel le feu ne peut plus se propager à toute la forêt, quelle que soit la forêt qui possède cette densité d'occupation.

Cette densité dépend des paramètres de la simulation. Nous avons réalisé des simulations numériques pour différentes densités d'occupation à la figure 5.12, pour une hauteur de flamme, conduisant à un voisinage d'influence de taille 30, et une humidité de 7% fixes. Nous trouvons alors une densité critique de 0.39 pour un voisinage de taille 30. Nous observons de plus qu'au seuil de percolation, le front de flamme a une forme très irrégulière et que la zone brûlée ressemble à un **ensemble de type fractal**.

Nous pouvons alors réaliser une étude paramétrique de la densité de percolation en fonction des paramètres de la simulation. Nous avons pour cela fait varier l'humidité de la végétation sur la figure 5.13. Nous trouvons une valeur limite d'humidité au-dessus de laquelle le feu ne se propage pas dans tous les cas. Cette valeur limite de l'humidité est de 73% pour les autres paramètres de la forêt fixés. Nous nommons cette humidité l'*humidité d'extinction*.

5.4.9 Résultats quantitatifs

Donnons quelques résultats quantitatifs obtenus par le schéma de différence finis. Nous choisissons les conditions de propagation du tableau 5.2 avec un coefficient d'échange h nulle et un vent nul. La forêt est discrétisée en 250×250 maille et nous choisissons un pas de temps de 0.5. Il y a alors convergence du schéma numérique pour de telles valeurs de discrétisation. La densité d'occupation choisie vaut 0.7. A l'instant adimensionnel $t = 5$, la zone en feu qui a été initié au centre de la figure gauche de 5.14 par un disque de feu de diamètre 0.04 a alors la position de la figure 5.14.

Nous pouvons tracer le champ des grandeurs du modèle grâce à une barre de couleur

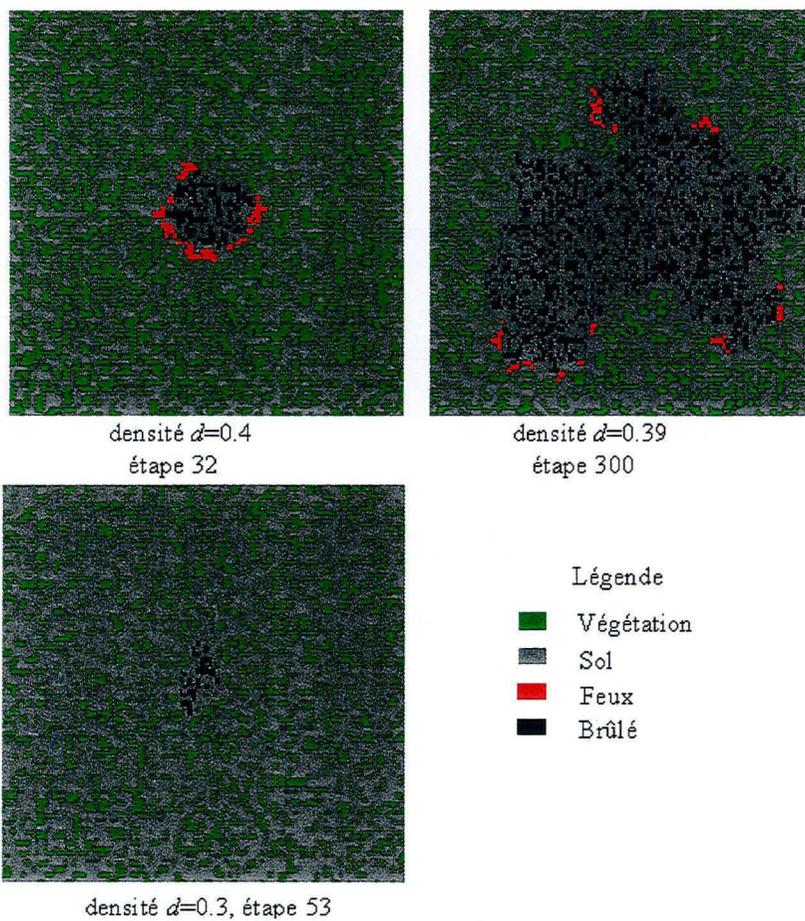


FIG. 5.12 – Percolation

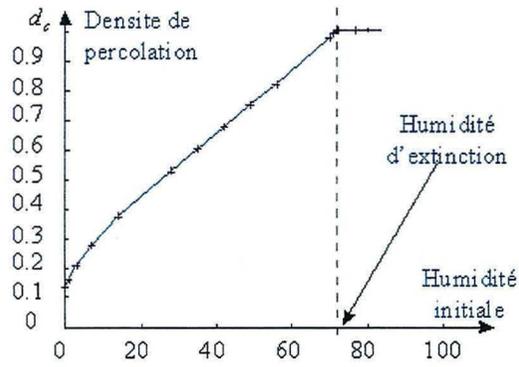


FIG. 5.13 – Variation de la densité d'occupation en fonction de l'humidité

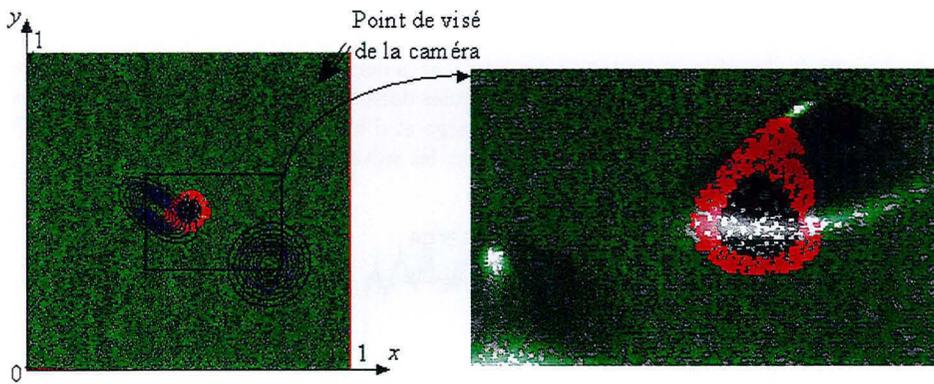


FIG. 5.14 – Propagation quantitative au temps adimensionnel $t = 5$

qui va du noir au blanc pour des valeurs allant de 0 à 1. Nous obtenons alors la figure 5.15 à cet instant.

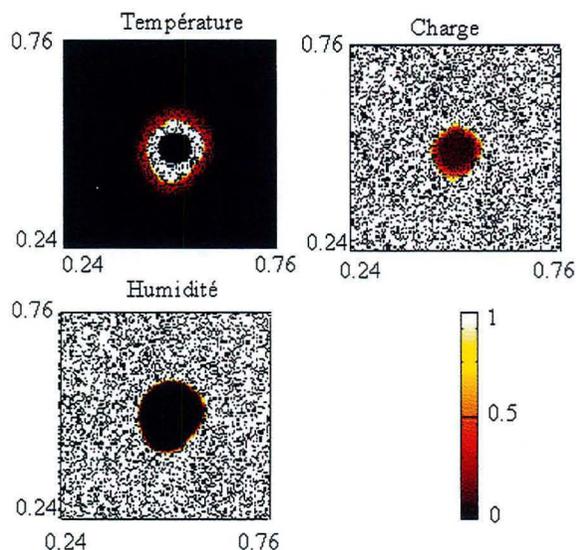


FIG. 5.15 – Profils de température, de charge et d'humidité

Les profils de grandeurs sont très irréguliers, car la densité d'occupation d est différente de 1. Par une moyenne sur des carrés de 10 cellules dans la direction x , nous obtenons des profils lissés. Les profils de température de charge et d'humidité, dans la section $y = 0.5$ trouvés pour la simulation de la figure 5.14 sont les suivants :

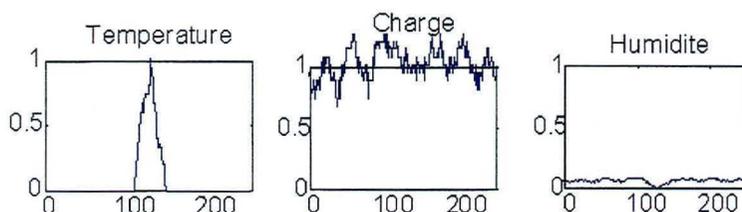


FIG. 5.16 – Profils dans la section $y = 0.5$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé deux algorithmes différents de résolution numérique du modèle de propagation bidimensionnel obtenu au chapitre 4. Les avantages et les inconvénients de chacun ont été discutés. L'automate cellulaire a l'avantage de donner des résultats qualitatifs rapidement mais il est difficile de le rendre quantitatif contrairement au schéma de différences finies. La flexibilité du programme informatique implanté, dû à la programmation en langage objet C++, est un atout pour les améliorations futures du code. Nous avons ensuite étudié quelques résultats numériques qui permettent de montrer les caractéristiques essentielles du modèle de propagation bidimensionnel.

Lorsque la densité de peuplement de la forêt est importante, les simulations conduisent à un développement du front de flamme de type elliptique lors de la présence d'un vent ambiant uniforme. Le modèle réagit donc qualitativement comme dans le cas d'expérience de propagation de feux de forêt. Le vent est considéré comme uniforme dans les simulations actuelles avec collines alors que celui-ci est influencé par leur présence. Lors des simulations numériques pour des faibles densités d'occupation de la végétation, nous avons trouvé que la densité de **percolation** dépend des paramètres de la simulation.

La comparaison des résultats numériques de propagation avec des résultats d'expériences reste cependant à compléter. Le schéma de différence fini est intéressant pour réaliser cette étude, car il est toujours quantitatif. Une comparaison des résultats numériques avec le modèle des ellipses lorsque la densité de peuplement de la forêt est assez importante serait intéressante afin de préciser le domaine de validité de celle-ci.

Bibliographie

- [1] **Albinet G.**, Searby G. and Stauffer D., Fire propagation in a 2-D random medium, 1986, *J. Physique*, Vol. 47, pp. 1-7.
- [2] **Beer T.**, Percolation theory and fire spread, *Comb. Sci. and Technol.*, 1990, vol. 72, No. 4-6, p. 297-304.
- [3] **Bernardin D.**, **Sero-Guillaume O.**, Lattice Gas mixtures models for mass diffusion, *European Journal of Mechanics B/ Fluids.* , 1990, Vol 9, no. 1, pp 21-46.
- [4] **Carrier G.**, **Fendell F.** and **Fink S.**, « Towards Wind-Aided Flame Spread Along a Horizontal Charring Slab: The Steady-Flow Problem, *Combust. Sci. Tech.*, 1983, vol. 32, pp.161-209.
- [5] **Cekirge H.M.**, Propagation of fire fronts in forests, *Comp. and Maths. with Appls.*, 1978, Vol. 4, p. 325-332.
- [6] **Frandsen W.H.** and **Andrews P.L.**, Fire behavior in nonuniform fuels, *USDA Forest Service* , 1979, Research paper INT-232, Ogden, Utah, USA, 34 p.
- [7] **French I.A.**, Visualisation techniques for the computer simulation of brushfires in two dimensions, *M.S. thesis*, University of New South Wales, Australian Defence Force Academy, 1992, 140 p.
- [8] **Goncaves P.P.** and **Diogo P.M.**, Forest fire propagation modeling: a new methodology using cellular automata and geographic information systems, *2nd International Conference on Forest Fire Research, Coimbra, Portugal*, 1994, Vol. 1, B.10, pp. 209-219.
- [9] **Green D.G.**, Shapes of fires in discrete fuels, *Ecol. Model.*, 1983, Vol. 20, pp. 21-32.
- [10] **Green D.G.**, **Gill A.M.** and **Noble I.R.**, Fire shapes and the adequacy of spread models, *Ecol. Model.*, 1983, Vol. 20, pp. 33-45.
- [11] **Green D.G.**, **Tridgell A.** and **Gill A.M.**, Interactive simulation of bushfires in heterogeneous fuels, *Math. Comput. Modelling*, 1990, Vol. 13, No. 12, pp. 57-66.
- [12] **Kourtz P.** and **O'Regan W.G.**, A model for a small forest fire ... to simulate burned and burning areas for use in a detection model, *For. Sci.*, 1971, Vol. 17, No. 2. pp. 163-169.

- [13] **Magnaudet J.**, Méthodes numériques pour les problèmes d'interfaces, *Ecole de printemps en mécanique numérique*, 25 au 31 mai 1997 à Lalonde les Maures, pp. 1-71.
- [14] **Mossner W.K., Drossel B. and Schwabl F.**, Computer simulations of forest-fire model, *Physica A*, 1992, Vol. 190, pp. 205-217.
- [15] **Naville L.**, Etude expérimentale et modélisation de la propagation d'une flamme sur un combustible poreux: Applications aux feux de végétation, *Thèse de l'université Aix-Marseille II*, 1997.
- [16] **Ohtsuki T. and Keyes T.**, Biased percolation: forest fires with wind, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 1986, Vol. 19, p. L281-L287.
- [17] **Quintard M., Kaviany M. and Whitaker S.**, Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties, *Advances in water resources*, 1997, Vol. 20, No. 2-3, pp.77-94.
- [18] **Sero-Guillaume O., Bernardin D.**, A lattice Gas model for heat transfer and chemical reactions. *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, 1990, vol 9, no 2, pp 177-196.
- [19] **Stauffer D.**, Introduction to Percolation Theory, *Taylor & Francis, London*, 1985.
- [20] **Von Niessen W. and Blumen A.**, Dynamic simulation of forest fires, *Can. J. For. Res.*, 1988, Vol. 18, pp. 805-812.
- [21] **Weber R.O.**, Analytical models for fire spread due to radiation, *Combust. Flame*, 1989, Vol. 78, p.398-408.
- [22] **Weimar J.R. and Boon J.P.**, Class of cellular automata for reaction-diffusion systems, *Physical review E*, 1994, Vol. 49, No. 2, pp. 1749-1752.
- [23] **Weinstein D., Green K., Campbell J. and Finney M.**, Fire growth modeling in an integrated GIS environment, *Réseau*, 1996 .
- [24] **Weimar J.R., Tyson J.J. and Watson L.T.**, Diffusion and wave propagation in cellular automaton models of excitable media, *Physica D*, 1992, Vol. 55, pp. 309-327.
- [25] **Weimar J.R., Tyson J.J. and Watson L.T.**, Third generation cellular automaton for modeling excitable media, *Physica D*, 1992, Vol. 55, pp. 328-339.

Conclusion et perspectives

L'étude du modèle mododimensionnel de propagation du feu sous forme d'ellipses, entreprise au chapitre 2, nous a permis d'obtenir l'expression suivante intrinsèque du vecteur vitesse $\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n}$ du front du feu :

$$\dot{\vec{X}} \cdot \vec{n} = g(\vec{x}, t) \vec{k}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} + \left\| \overline{\vec{C}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{k}(\vec{x}, t) \right\|$$

avec

$$\overline{\vec{C}}(M, t) = \begin{pmatrix} f(M, t) & 0 \\ 0 & h(M, t) \end{pmatrix}_{(\vec{n}, t)}$$

Cette vitesse d'évolution dépend des fonctions $f(M, t)$, $g(M, t)$, $h(M, t)$ et de la direction $\vec{k}(\vec{x}, t)$ du vent ambiant.

Une formulation équivalente variationnelle de ce modèle en utilisant les principes de l'optique géométrique nous a conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante vérifiée par une équation cartésienne du front du feu de la forme $S(\mathbf{x}, t) = 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + g(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_1} + \sqrt{(f(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_1})^2 + (h(x_1, x_2, t) \frac{\partial S}{\partial x_2})^2} = 0$$

Nous avons enfin proposé plusieurs équations physiques qui conduisent à des ondes qui se propagent à la même vitesse que le front du feu du modèle des ellipses. L'interprétation physique des coefficients qui interviennent dans ce modèle est alors controversée. La forme de dépendance de ces coefficients avec les paramètres physiques qui interviennent dans la propagation du feu est une autre limitation de ce modèle d'ellipse. Les limites d'utilisation de ce modèle, en choisissant des formes acceptables pour la dépendance des coefficients, est un problème qui se surajoute au problème du choix de celles-ci. Ceci nous a conduit à rechercher à obtenir un modèle physique général qui contienne le modèle des enveloppes et permette de l'obtenir.

Nous avons alors obtenu un modèle tridimensionnel de la propagation du feu au chapitre 3 grâce à une homogénéisation et à l'utilisation de la thermodynamique des processus irréversibles. Cette démarche a de plus l'intérêt de distinguer les principales échelles qui interviennent dans la propagation des feux de forêt et qui s'avèrent être nombreuses.

Une simplification du système tridimensionnel obtenu au chapitre 3 et une réduction bidimensionnelle sur une surface gauche nous ont alors permis d'obtenir un modèle bidimensionnelle, qui tient compte des principaux paramètres de la propagation des feux de forêts, et qui fait intervenir la forme d'intervention des principaux mécanismes de la

propagation. Une réduction dans le cas d'une forêt optiquement épaisse, nous a conduit à l'équation de réaction diffusion (4.138) suivante vérifiée par le champ de température :

$$\frac{\partial T_0^p}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\text{grad}^P(T_0^p) = \Delta_S^s T_0^p + \mathbf{F}(\mathbf{x})T_0^p$$

où Δ_S^s est le laplacien surfacique, qui tient compte de la topographie du terrain et est donné par la relation (4.67), $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ est un vecteur anisotrope qui tient compte du vent dans la strate végétale et $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ est le bilan entre l'énergie produite par la combustion et l'énergie perdue par convection.

C'est une équation du même type que la relation (2.114) postulée à la fin du chapitre 2. Elle fait intervenir 4 coefficients dont la forme de dépendance avec les paramètres de la propagation est donnée par la relation (4.158). Cette forme tient compte de la topographie du terrain et du vent dans la strate végétale ainsi que des pertes convectives.

La prise en compte du caractère non local de l'intervention du flux radiatif en provenance de la zone en feu qui se trouve au-dessus de la végétation a alors été réalisé. Ceci nous a permis de tenir en compte de l'influence du vent ambiant qui incline la flamme proche de la strate végétale et ainsi change le bilan thermique.

Des simulations numériques, de ce modèle bidimensionnel de propagation du feu avec terme de rayonnement non local, ont enfin été réalisées par un schéma de différences finies et par des automates cellulaires au chapitre 5 en tenant compte du caractère localisé du transfert d'énergie dans une bande de faible épaisseur autour du front du feu.

Un intérêt de nos simulations est que l'on peut traiter une forêt hétérogène sans augmenter la complexité du calcul. Les forêts réelles sont toujours hétérogènes. La présence de zones plus humides dues au largage d'eau par Canadair et la présence de retardants qui modifient la loi de pyrolyse localement peuvent aussi être prises en compte facilement.

Une assimilation de données afin de confronter les modèles présentés dans ce manuscrit à des expériences caractéristiques qui sont mises en lumière par ces mêmes modèles doit être entreprise afin de valider ceux-ci et de trouver les valeurs des coefficients correspondants. Nous avons déjà entrepris cette démarche pour des simulations d'automates cellulaires en confrontant les résultats de simulation [1] (cf. annexe K) avec une expérience réalisée par Fons [2] en 1945. Les résultats sont concluants mais ne sont que partiels, car les données de cette expérience ne sont que des vitesses de propagations alors que l'on doit aussi connaître des champs de températures, de charge et d'humidité afin de valider nos modèles qui font intervenir ces grandeurs physiques. Le modèle des ellipses qui est de nature géométrique se prête bien à une assimilation de données qui ne fait intervenir que les vitesses de propagation du front du feu, mais son domaine de validité est restreint. Des expériences de brûlages dirigés (écobuages), instrumentées pour mesurer des champs de température et les vitesses de propagation du feu, réalisées par les pompiers français de Valabre, vont être très utiles pour calibrer les modèles présentés dans ce manuscrit.

Parallèlement, une homogénéisation par méthode de développements asymptotiques doit permettre de déduire les relations tridimensionnelles du chapitre 3 avec une connaissance plus précise, en ordre de grandeur, du domaine de validité du système d'équations obtenues grâce à la thermodynamique des processus irréversibles.

La prise en compte de la convection dans la réduction bidimensionnelle du chapitre 4 doit être améliorée afin de mieux tenir compte du couplage entre la flamme et le vent

ambiant et de trouver la valeur de la vitesse du vent dans la strate végétale en fonction du vent ambiant et de la position considérée par rapport au front du feu.

Une prise en compte plus précise des équations de combustion doit permettre de s'affranchir des données sur zone en feu, telle que les hauteurs de flamme et les températures de flamme et d'inflammation. Nous devons alors aussi résoudre des équations dans la zone en feu. Ceci doit nous conduire à une connaissance de la structure de la flamme qui est très importante pour obtenir une compréhension précise de la propagation des feux de forêt. Une comparaison de notre modèle de propagation avec celui de Grishin, qui tient compte de la chimie de la combustion dans la zone en feu, est à entreprendre.

L'obtention du domaine de validité du modèle des enveloppes à partir du modèle bidimensionnel de propagation du feu que nous avons obtenu au chapitre 4 doit pouvoir être réalisé à l'aide d'un développement asymptotique lorsque l'épaisseur de la bande de feu est très faible. Ceci peut conduire à une correction de ce modèle faisant intervenir la courbure du front du feu.

La prise en compte de manière précise du rôle des retardants dans la dynamique de propagation du front du feu doit être entreprise à l'échelle mésoscopique et microscopique. Son intervention aux échelles macroscopique et gigascopiques pourra alors être obtenue grâce en utilisant les démarches des chapitres 3 et 4 précédents.

Bibliographie

- [1] **Margerit J., Sero-Guillaume O., Bernardin D. and Felici T.**, Forest fire cellular automata model and data assimilation, *Workshop on wildfire management-systems, Models & Techniques*, Fire prevention planning session, June 3-4 1996, Athens Greece.
- [2] **Fons W.L.**, Analysis of fire spread in light forest fuels, *J. Agric. Res.*, 1946, Vol. 72,pp 93-121.

Bibliographie

Annexe A

Les facteurs de la propagation du feu

Dans cette annexe, nous présentons les différents facteurs de la propagation du feu. Ces facteurs sont classés en deux catégories. Ce sont les propriétés des espèces végétales et les conditions météorologiques. Les caractéristiques physiques des constituants végétal et air+gaz en fonction de la température sont aussi données afin d'avoir des ordres de grandeurs des paramètres physiques.

A.1 L'espèce végétal

A.1.1 Les types d'espèces végétales

Il existe deux catégories principales de combustible végétal :

1. Les combustibles de surface :

- la litière : dans les forêts méditerranéennes, la couverture des feuilles sur le sol provient principalement des feuillus (chênes, hêtres, châtaigniers) ou des résineux (pins, sapins). Les aiguilles des pins sont parmi les plus inflammables. En outre, leur grande taille, leur abondance et leur forme conduisent à un arrangement lâche permettant une libre circulation de l'air. Les feuilles de feuillus s'enflamment moins facilement, car elles sont beaucoup plus densément tassées sur le sol.

- l'herbe : Les graminées, les fougères, les plantes herbacées en général, sont des combustibles importants qui selon leur degré de dessèchement influencent la vitesse de propagation du feu de forêt. Des herbes gorgées d'eau peuvent jouer le rôle de barrière, alors que les feux d'herbes sèches possèdent les plus grandes vitesses de propagation.

2. Les combustibles aériens :

- les broussailles hautes : ces peuplements broussailleux sont très facilement inflammables.

- les troncs, les branches et le feuillage des arbres : ce type de combustible se caractérise essentiellement par son temps de combustion très long, ce qui en fait une source de chaleur persistante au cours du temps.

A.1.2 La teneur en eau

La sécheresse du combustible végétal exerce une influence capitale sur l'inflammation. A l'inverse, une humidité trop importante empêche la propagation du feu. De nombreuses études montrent que l'inflammation ne peut avoir lieu que pour une teneur en eau inférieure à 7%. Par conséquent, la nature du combustible, mort ou vivant, influe sur le temps nécessaire à l'inflammation. La teneur en eau influe à la fois sur l'inflammabilité de la végétation mais aussi sur leur combustibilité.

A.2 Les conditions météorologiques

A.2.1 Les précipitations

Le principal effet de la pluie est de mouiller les végétaux et de leur fournir de l'eau, ce qui entraîne un accroissement de la teneur en eau des végétaux. La pluie a des effets divers selon les différents types de combustibles. Pour les graminées et les aiguilles de pin, une petite quantité de pluie suffit pour ralentir rapidement la combustion mais l'effet est de courte durée. Une quantité de pluie plus importante est nécessaire pour empêcher ou ralentir la combustion des brindilles et lorsque de tels combustibles sont mouillés, l'effet est alors plus durable que pour les végétaux de petites tailles. L'état des troncs d'arbre n'est enfin que légèrement modifié par les précipitations.

A.2.2 L'humidité relative

L'humidité relative influe sur l'inflammabilité des combustibles. Le lien reste cependant très qualitatif. Nous avons le tableau suivant :

Humidité relative (%)	Inflammabilité
> 70	Peu de risque
46 - 70	Risque faible
26 - 45	Risque Fort
< 25	Risque élevé

A.2.3 Le vent

Le vent accélère le dessèchement du combustible végétal. Il avive les flammes d'un feu qui progresse et apporte de la chaleur aux combustibles adjacents. Il augmente donc la vitesse de combustion et la vitesse de propagation du feu.

A.3 Caractéristiques physiques des constituants végétal et air+gaz

Nous donnons les valeurs des masses volumiques ρ , des capacités calorifiques C_p , de la conductivité thermique λ et de la diffusivité a du bois et de l'air à différentes températures.

A.3.1 Bois

à 20°C	à 300°C
$\rho \approx 600 \text{ kg/m}^3$ $C_p = 2400 \text{ J/kg.K}$ $\lambda = 0.1 \text{ 0.3 W/m.K}$ $a = 7 \text{ 21} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	Valeurs semblables

A.3.2 Air à pression atmosphérique

à 20°C	à 1000°C
$\rho \approx 1.205 \text{ kg/m}^3$	$\rho \approx 0.277 \text{ kg/m}^3$
$C_p = 1005 \text{ J/kg.K}$	$C_p = 1185 \text{ J/kg.K}$
$\lambda = 2.59 \cdot 10^{-2} \text{ W/m.K}$	$\lambda = 8.07 \cdot 10^{-2} \text{ W/m.K}$
$a = 21.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$a = 246 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Annexe B

Modèle de ROTHERMEL (1972)

Dans cette annexe, nous présentons la relation de Rothermel qui a été écrite en unités de mesure internationales par A. Wilson, Jr.

B.1 Définitions des paramètres

σ	Rapport de la surface au volume particule de combustible (cm-1)
δ	épaisseur de la couverture végétale (m).
C_0	Charge de combustible sec (kg/m ²)
ρ_p	Masse volumique de particule sèche (kg/m ³)
H	Chaleur contenue dans la particule de combustible (kJ/kg)
V	Vitesse du vent à mi hauteur de flamme (m/min)
$\tan \varphi$	Pente (augmentation verticale / distance horizontale)
M_f	Humidité des particules de combustible (gm eau / gm bois sec)
M_x	Humidité d'extinction.
S_T	Pourcentage massique de minéraux des particules de combustible (gm minéraux / gm bois sec)
S_E	Pourcentage massique de minéraux effectifs des particules de combustible (gm minéraux sans silice/ gm bois sec)

B.2 Corrélation donnant la vitesse de propagation

La vitesse de propagation R du front du feu rectiligne stationnaire dépend des paramètres précédents :

$$R = f(\sigma, \delta, C_0, \rho_p, H, V, \tan \varphi, M_f, M_x, S_T, S_E)$$

Nous allons donner dans ce paragraphe la corrélation utilisée par Rothermel.

Corrélation initiales

Masse volumique

$$\rho_b = C_0/\delta$$

Compacité

$$\beta = \rho_b/\rho_p$$

Vitesse de réaction maximale ($min.^{-1}$)

$$\Gamma_{pmax} = 1/(0.0591 + 2.926\sigma^{-1.5})$$

Compacité optimale

$$\beta_{op} = 0.204\sigma^{-0.8189}$$

Vitesse de réaction optimale ($min.^{-1}$)

$$\Gamma_p = (\beta/\beta_{op})^A * e^A * (1 - \beta/\beta_{op}) * \Gamma_{pmax}$$

avec $A = 1/(6.723\sigma^{0.1} - 7.27)$ Masse volumique nette (kg./m²)

$$C_N = \frac{1}{1 + S_T} C_0$$

Coefficient d'humectage humide

$$\eta_M = 1 - 2.59 \frac{M_f}{M_x} + 5.11 \left(\frac{M_f}{M_x}\right)^2 - 3.52 \left(\frac{M_f}{M_x}\right)^3$$

Coefficient d'humectage minéral

$$\eta_S = 0.174 S_E^{-0.19}$$

Corrélations intermédiaires

Intensité de réaction (kJ/min)/m².

$$I_r = \eta_M \eta_S \Gamma_p C_N H$$

Pourcentage du flux produit qui sert pour le préchauffage

$$\xi = \frac{1}{192 + 0.259 * \sigma} e^{(0.792 + 0.681 * \sigma^{0.5})(\beta + 0.1)}$$

$$C = 7.47 e^{-0.8711\sigma^{0.55}}$$

$$B = 0.1599\sigma^{0.54}$$

$$E = 0.715 e^{-0.01094\sigma}$$

Coefficient du vent

$$\Phi_W = C * V^B * (\beta/\beta_{op})^{-E}$$

Facteur de pente

$$\Phi_S = 5.275 \beta^{-0.3} (\tan\varphi)^2$$

Coefficient de chauffage effectif

$$\chi = e^{-4.528/\sigma}$$

Chaleur de préchauffage (kJ/kg)

$$Q_{ig} = 581 + 2594 M_f$$

Corrélation finale

Vitesse de propagation (m/min).

$$R = (1 + \Phi_W + \Phi_S) \frac{\xi I_r}{\rho_B \chi Q_{ig}} \quad (\text{B.1})$$

B.3 Exemple : données pour la litière de bois mort (Dead Timber (litter))

Etudions un exemple de propagation dans une litière de bois mort. Les paramètres de la strate correspondante sont donnés dans le tableau A.2.1. ci-dessous :

$\sigma = 81.3 \text{ cm1}$	$\Omega_0 = 0.138 \text{ lb./ft}^2$
$\delta = 1.27^{-2} \text{ m}$	$\rho_p = 466 \text{ kg./m}^3$
	$H = 17550 \text{ kJ/kg}$
$V = 1056 \text{ m/min}$	$M_f = 0.04$
$\tan \varphi = 0$	$M_x = 0.30$
	$S_T = 0.00347$
	$S_E = 0.00322$

TAB. B.1 - Paramètres pour une litière de bois mort

La valeur de l'humidité limite d'extinction M_x nécessite une détermination expérimentale. Nous choisissons ici 0.30, car c'est le point de saturation des fibres de nombreux combustibles morts. Pour les combustibles aériens ($b < 0.02$) avec une vitesse du vent faible ($< 5 \text{ m.p.h.}$) $M_x = 0.15$.

Annexe C

Méthode des enveloppes

Dans cette annexe, nous présentons le calcul de la méthode des enveloppes d'une familles d'ellipses $\mathcal{E}(\theta, dt)$ d'expression cartésienne suivante dans le repère global (O, x, y) :

$$F(X_e, Y_e, \theta, dt) = 0 \quad (\text{C.1})$$

où la fonction F est défini par :

$$F(X_e, Y_e, \theta, dt) = \frac{1}{f_0^2} [\tilde{X}(X_e) - g_0 dt]^2 + \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y}(Y_e)^2 - dt^2 \quad (\text{C.2})$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{X}(X_e, Y_e) = \begin{pmatrix} (X_e - X(\theta, t_0) \cos(\beta_0(\theta))) \\ +(Y_e - Y(\theta, t_0)) \sin(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \\ \tilde{Y}(X_e, Y_e) = \begin{pmatrix} -(X_e - X(\theta, t_0)) \sin(\beta_0(\theta)) \\ +(Y_e - Y(\theta, t_0)) \cos(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

L'équation paramétrée de la courbe enveloppe des ellipses est obtenue par le système suivant :

$$\begin{cases} F(X, Y, \theta, dt) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(X, Y, \theta, dt) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Il nous faut donc calculer la dérivée de F par rapport à l'angle θ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_0^2} [\tilde{X} - g_0 dt] \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \theta} + \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{f_0^2} [\tilde{X} - g_0 dt]^2 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} - \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y}^2 \frac{\partial h_0}{\partial \theta} - \frac{dt}{f_0^2} [\tilde{X} - g_0 dt] \frac{\partial g_0}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

De plus, dans le repère global fixe (O, x, y) , l'ellipse $\mathcal{C}_e(P_0, dt)$ a pour équation :

$$\begin{cases} x = X_e(\phi, dt) = X(\theta, t_0) + \begin{pmatrix} \tilde{X} \cos(\beta_0(\theta)) \\ -\tilde{Y} \sin(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \\ y = Y_e(\phi, dt) = Y(\theta, t_0) + \begin{pmatrix} \tilde{X} \sin(\beta_0(\theta)) \\ +\tilde{Y} \cos(\beta_0(\theta)) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

La dérivée de (C.6) par rapport à θ conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \theta} = -\frac{\partial X_0}{\partial \theta} \cos(\beta_0) - \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} \sin(\beta_0) + \tilde{Y} \frac{\partial \beta_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \theta} = +\frac{\partial X_0}{\partial \theta} \sin(\beta_0) - \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} \cos(\beta_0) - \tilde{X} \frac{\partial \beta_0}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Posons

$$\begin{cases} p(\tilde{X}(X, Y), t_0) = -\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \theta} \\ q(\tilde{Y}(X, Y), t_0) = -\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \theta} \end{cases} \text{ et } \tilde{X}_1 = \tilde{X}(X, Y) - g_0 dt \quad (\text{C.8})$$

Le système (C.4) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{f_0^2} \tilde{X}_1^2 + \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y}^2 - dt^2 = 0 \\ \frac{q}{f_0^2} \tilde{X}_1 + \frac{p}{h_0^2} \tilde{Y} - \frac{1}{f_0^3} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \tilde{X}_1^2 - \frac{1}{h_0^3} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \tilde{Y}^2 - \frac{dt}{f_0^2} \frac{\partial g_0}{\partial \theta} \tilde{X}_1^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

D'après la première relation

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \mathcal{O}(f_0 dt) \\ \tilde{Y} = \mathcal{O}(f_0 dt) \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

La dérivée par rapport à θ d'un champ scalaire G est donnée par :

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \text{grad}(G) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{C}\mathbf{P}_0}}{\partial \theta} \quad (\text{C.11})$$

où

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{C}\mathbf{P}_0}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (\text{C.12})$$

et G correspond indifféremment à f , g , h ou β .

Comme les gradients spatiaux $\text{grad}(G)$ des paramètres f , g , h et β sont faibles, nous obtenons à l'ordre principal en dt :

$$\begin{cases} \frac{1}{f_0^2} \tilde{X}_1^2 + \frac{1}{h_0^2} \tilde{Y}^2 - dt^2 = 0 \\ \frac{q}{f_0^2} \tilde{X}_1 + \frac{p}{h_0^2} \tilde{Y} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

où p et q sont les ordres principaux en dt des expressions (C.7-C.8). C'est-à-dire :

$$\begin{cases} p = -\frac{\partial X_0}{\partial \theta} \sin(\beta_0) + \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} \cos(\beta_0) \\ q = +\frac{\partial X_0}{\partial \theta} \cos(\beta_0) + \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} \sin(\beta_0) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Le système (C.13) s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\frac{f_0}{h_0} \right)^2 \left[\left(\frac{f_0 p}{h_0 q} \right)^2 + 1 \right] \tilde{Y}^2 = f_0^2 dt^2 \\ \tilde{X}_1 = -\left(\frac{f_0}{h_0} \right)^2 \frac{p}{q} \tilde{Y} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Posons alors

$$r(\theta, t_0) = [(f_0 p)^2 + (h_0 q)^2]^{-1/2} \quad (\text{C.16})$$

Il vient finalement :

$$\begin{cases} \dot{X} - g_0 dt = r p dt f_0^2 \\ \dot{Y} = -r q dt h_0^2 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\begin{cases} p(\theta, t_0) = -\frac{\partial X(\theta, t_0)}{\partial \theta} \sin(\beta_0(\theta)) + \frac{\partial Y(\theta, t_0)}{\partial \theta} \cos(\beta_0(\theta)) \\ q(\theta, t_0) = \frac{\partial X(\theta, t_0)}{\partial \theta} \cos(\beta_0(\theta)) + \frac{\partial Y(\theta, t_0)}{\partial \theta} \sin(\beta_0(\theta)) \\ r(\theta, t_0) = [(f_0 p)^2 + (h_0 q)^2]^{-1/2} \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Les signes ont été choisis de manière à satisfaire la relation :

$$pX - qY > 0 \quad (\text{C.19})$$

Cette relation (C.19) correspond à une propagation du front du feu de la zone en flamme vers la zone en avant du front du feu.

Annexe D

Méthode des enveloppes : changement de métrique et stabilité structurelle

Dans cette annexe, nous nous proposons d'écrire le système d'équations (2.20)-(2.21) dans des coordonnées où l'ellipse prend la forme d'un cercle. La stabilité structurelle de la solution de base elliptique du paragraphe 2.1 est alors étudiée en faisant fluctuer les paramètres f, g, h et β en fonction du temps.

D.1 Changement de métrique

Nous nous plaçons dans le cas où les paramètres f, g et h ainsi que la direction du vent β sont indépendants de la position. Les paramètres $f(t), g(t), h(t)$ ne sont donc fonction que du temps alors que $\beta(M, t) = \beta(t)$.

Le vent est alors global et la forêt homogène comme au paragraphe 2.1 mais avec des fluctuations imposées des paramètres. A chaque instant t , nous définissons le rapport $e_r(t)$ des ellipses génératrices par :

$$e_r(t) = h(t)/f(t) \quad (\text{D.1})$$

L'excentricité vaut :

$$e = \sqrt{1 - e_r^2} \quad (\text{D.2})$$

Effectuons une dilatation de $1/e(t)$ dans la direction \vec{k}^\perp . Soit un point M de coordonnées (x, y) dans le repère (\vec{k}, \vec{k}^\perp) :

$$\overline{\vec{M}} = x\vec{k} + y\vec{k}^\perp \quad (\text{D.3})$$

et soit M^* le transformé de M par la dilatation :

$$\overline{\vec{M}^*} = X\vec{k} + Y\vec{k}^\perp \quad (\text{D.4})$$

La transformation s'écrit :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y/e_r \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Il vient alors si l'on note la dérivée temporelle par une apostrophe :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t} \vec{k} + \frac{\partial Y}{\partial t} \vec{k}^{\perp} \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \vec{k} + \left[\left(\frac{1}{e_r} \right)' y + \frac{1}{e_r} \frac{\partial y}{\partial t} \right] \vec{k}^{\perp}\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}}}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \vec{k} + \left[\left(\frac{1}{e_r} \right)' y + \frac{1}{e_r} \frac{\partial y}{\partial t} \right] \vec{k}^{\perp} \\ &= \left(\frac{1}{e_r} \right)' y \vec{k}^{\perp} + \frac{\partial x}{\partial t} \vec{k} + \frac{1}{e_r} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{k}^{\perp}\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

d'où finalement en utilisant l'équation (2.21)-(2.22) :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}}}{\partial t} = e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' (\overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}} \cdot \vec{k}^{\perp}) \vec{k}^{\perp} + g(t) \vec{k} + \bar{\tau} f [f \bar{p} \vec{k} - h \bar{q} \vec{k}^{\perp}] \quad (\text{D.8})$$

Les vecteurs $\vec{\tau}$ et \vec{n} ont pour expressions :

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \bar{q} \vec{k} + \bar{p} \vec{k}^{\perp} \\ \vec{n} = \bar{p} \vec{k} - \bar{q} \vec{k}^{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Par la dilatation, $\vec{\tau}$ est transformé en

$$\vec{\tau}^* = \bar{q} \vec{k} + \frac{1}{e_r} \bar{p} \vec{k}^{\perp} \quad (\text{D.10})$$

La normal \vec{n}^* à la courbe transformée s'écrit alors :

$$\vec{n}^* = \frac{1}{e_r} \bar{p} \vec{k} - \bar{q} \vec{k}^{\perp} \quad (\text{D.11})$$

Notons que \vec{n}^* n'est pas le transformé de \vec{n} par la dilatation. Définissons alors

$$\begin{cases} \bar{p}^* = \vec{n}^* \cdot \vec{k} = \frac{1}{e} \bar{p} \\ \bar{q}^* = \vec{\tau}^* \cdot \vec{k} = \bar{q} \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

L'expression de la cinématique du front de flamme est alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}}}{\partial t} &= e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' (\overline{\mathbf{C M}^{\vec{k}}} \cdot \vec{k}^{\perp}) \vec{k}^{\perp} + g(t) \vec{k} + f(t) \bar{r}^* \vec{n}^* \\ \text{avec } \bar{r}^* &= [\bar{p}^{*2} + \bar{q}^{*2}]^{-1/2}\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

D.2 Paramétrage polaire

Nous allons de nouveau changer de paramétrage du front de flamme. Un paramétrage polaire permet en effet d'obtenir une évolution du front de flamme qui ne fait intervenir qu'une seule équation scalaire au lieu de deux. Ce paramétrage est bien approprié au front du feu si celui-ci forme un ouvert étoilé. Introduisons alors le changement de paramétrage suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \theta \\ t \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} \phi = \mathcal{F}(\psi, t) \\ \bar{t} \end{array} \right.$$

et posons :

$$\overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}} = G(t)\vec{\mathbf{k}} + R(\phi, t)\vec{\mathbf{u}}_r(\phi) \quad (\text{D.14})$$

avec

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \quad (\text{D.15})$$

Les nouveaux vecteurs de bases sont :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_r = \cos(\phi)\vec{\mathbf{k}} + \sin(\phi)\vec{\mathbf{k}}^\perp \\ \vec{\mathbf{u}}_\phi = -\sin(\phi)\vec{\mathbf{k}} + \cos(\phi)\vec{\mathbf{k}}^\perp \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{k}} = \cos(\phi)\vec{\mathbf{u}}_r - \sin(\phi)\vec{\mathbf{u}}_\phi \\ \vec{\mathbf{k}}^\perp = \sin(\phi)\vec{\mathbf{u}}_r + \cos(\phi)\vec{\mathbf{u}}_\phi \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Par dérivation de fonctions composées, il vient alors :

$$\left. \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial t} \right|_\theta = \left. \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial t} \right|_\phi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial \psi} \quad (\text{D.18})$$

avec

$$\left. \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial t} \right|_\phi = \frac{\partial R}{\partial t} \vec{\mathbf{u}}_r \quad (\text{D.19})$$

De plus :

$$\left. \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial \phi} \right|_\phi = \frac{\partial R}{\partial \phi} \vec{\mathbf{u}}_r + R \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_r}{\partial \phi} = \frac{\partial R}{\partial \phi} \vec{\mathbf{u}}_r + R \vec{\mathbf{u}}_\phi \quad (\text{D.20})$$

D'où :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}}^* = r_\phi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \vec{\mathbf{u}}_r + \vec{\mathbf{u}}_\phi \right) \\ \vec{\mathbf{n}}^* = r_\phi \left(\vec{\mathbf{u}}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \vec{\mathbf{u}}_\phi \right) \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

avec

$$r_\phi = \left[1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{D.22})$$

Le système (D.13) s'écrit donc de la manière suivante dans le nouveau repère :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}}}{\partial \phi} = e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' (\overrightarrow{\mathcal{C}\mathbf{M}^{\ddagger}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^\perp) \vec{\mathbf{k}}^\perp + f(t) \vec{\mathbf{r}}^* \vec{\mathbf{n}}^* \quad (\text{D.23})$$

C'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \bar{\mathbf{u}}_r + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} R \bar{\mathbf{u}}_\phi = \begin{pmatrix} e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' R \sin \phi (\sin \phi \bar{\mathbf{u}}_r + \cos \phi \bar{\mathbf{u}}_\phi) \\ + f(t) \bar{r}^* r_\phi (\bar{\mathbf{u}}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{D.24})$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} = e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' \sin^2 \phi + \frac{f(t) \bar{r}^* r_\phi}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' \sin \phi \cos \phi - \frac{f(t) \bar{r}^* r_\phi}{R} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Finalement

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} = e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' \left(\sin \phi - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \sin \phi + \frac{f(t) \bar{r}^* r_\phi}{R} \left[1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right] \quad (\text{D.26})$$

De plus

$$\begin{cases} \bar{p}^* = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = r_\phi \left(\cos \phi + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \sin \phi \right) \\ \bar{q}^* = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{k}} = r_\phi \left(-\sin \phi + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \cos \phi \right) \end{cases} \quad (\text{D.27})$$

donc

$$\bar{r}^* = [(\bar{p}^*)^2 + (\bar{q}^*)^2]^{-1/2} = \frac{1}{r_\phi} \left[1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{-1/2} = 1 \quad (\text{D.28})$$

La cinématique du front du feu est donc régie par l'équation :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} &= e_r \left(\frac{1}{e_r} \right)' \left(\sin \phi - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \sin \phi + \frac{f(t)}{R} \frac{1}{r_\phi} \\ \text{avec } r_\phi &= \left[1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned}} \quad (\text{D.29})$$

Le système ci-dessus possède une structure plus simple que le système (D.13). Il a cependant été obtenu pour une forêt homogène avec vent global. Il permet de vérifier de nouveau que la cinématique du front du feu obtenue est compatible avec celle du paragraphe 1. En effet si nous choisissons $f(t) = f$, $g(t) = g$ et $h(t) = h$ constants, nous obtenons alors :

$$e(t) = e \text{ constant} \quad (\text{D.30})$$

$R(t, \phi) = ft$ est alors solution du système précédent. C'est un cercle de rayon ft .

Nous obtenons donc le développement elliptique du paragraphe 2.1 lorsque nous revenons dans les coordonnées non dilatées. La méthode des enveloppes conduit donc à un modèle de propagation qui se réduit bien au cas du paragraphe 2.1 lorsque le feu se propage dans un milieu à propriétés homogènes et constantes. L'extension de modélisation du paragraphe 2.2 est donc cohérente avec le paragraphe 2.1. Le système (D.29) possède une classe de solutions générales que nous allons étudier maintenant.

D.3 Solution de base et étude de stabilité structurelle

Lorsque l'excentricité est constante le système (D.29) possède la solution de base :

$$R(t, \phi) = F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad (D.31)$$

Nous pouvons alors chercher une solution de la forme :

$$R(t, \phi) = F(t) + R_1(t, \phi)\epsilon \quad (D.32)$$

associée à la perturbation

$$e(t) = 1 + k(t)\epsilon \quad (D.33)$$

où ϵ est un petit paramètre et $k(t)f(t)$ est une fonction périodique de période T et de moyenne nulle. Il vient alors :

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = k'(t) \sin^2 \phi \quad (D.34)$$

D'où

$$R_1(t, \phi) = \left[\int k'(t)F(t) \right] \sin^2 \phi + R_1(0, \phi) \quad (D.35)$$

Cependant, le front de forêt étant de plus en plus grand, la longueur caractéristique de mesure de celui-ci doit varier aussi en fonction du temps. Nous choisissons donc pour longueur de normation :

$$L(t) = F(t) \quad (D.36)$$

Il vient alors :

$$\bar{R}(t, \phi) = \bar{R}(t, \phi)/F(t) = 1 + R_1(t, \phi)\epsilon \quad (D.37)$$

et

$$\bar{R}_1(t, \phi) = k(t) \sin^2 \phi + \bar{R}_1(0, \phi) \quad (D.38)$$

Nous obtenons donc un mode 2 qui oscille à la période du forçage.

Annexe D. Méthode des enveloppes : changement de métrique et stabilité structurelle

Annexe E

Équations Mésoscopiques

Dans cette annexe, nous exprimons les flux mésoscopiques et nous discutons des équations de Brinkman et de Darcy à l'échelle mésoscopique ainsi que d'une dérivation plus précise des conditions de saut à l'interface entre les végétaux et l'air qui les entoure.

E.1 Relations de liaison entre les flux

Les flux k_{iab} , f_{ab} et x_{ab} mésoscopiques, du paragraphe 3.2.1, ne sont pas tous indépendants entre eux. Les liens correspondent à des conditions de bilan à travers l'interface Σ_{ab} des phases a et b . Les relations sont les suivantes :

$$k_{iab} + k_{iba} = 0$$

$$k_{ab}\mathbf{v}_a + f_{ab} + k_{ba}\mathbf{v}_b + f_{ba} = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$(e_a + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_a|^2 + \frac{p_a}{\rho_a})k_{ab} + x_{ab} + p_a z_{ab} = (e_b + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_b|^2 + \frac{p_b}{\rho_b})k_{ba} + x_{ba} + p_b z_{ba}$$

où $z_{ab} = z_{ba}$ est par définition le volume balayé par l'interface Σ_{ab} par unité de temps et par unité de volume du milieu poreux.

Chaque phase est caractérisée par une *vitesse différente* qui peut ne pas être du même ordre de grandeur et par une *même température*. La vitesse est en effet nulle dans les phases solides, moyenne dans la phase liquide et importante dans la phase gazeuse. C'est ce qui distingue ces équations des équations de la mécanique des milieux diffusifs classiques vérifiées par les mélanges où il n'y a qu'une vitesse barycentrique et des diffusions des espèces qui sont d'ordres inférieurs. D'où la présence de plusieurs bilans de quantité de mouvement au lieu d'un seul. Il n'y a par contre qu'un seul bilan d'énergie à considérer, car nous supposons que les phases sont en équilibre thermique entre elles. La température est alors la même pour chaque phase en présence.

E.2 Expression des flux et des équations d'état

Les expressions des flux σ_a , \mathbf{q} , \mathbf{j}_{ia} , f_{ab} , f_{ac} , k_{ab} , k_{ac} , k_{sc} et ψ_a en fonctions des grandeurs mésoscopiques que l'on a défini ci-dessus doivent permettre d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles fermé pour le milieu poreux qui forme les tiges des végétaux. Les formes de telles relations peuvent être postulées à l'aide de la thermodynamique des processus irréversibles comme ceci a été réalisé par Marle [4]. Les cinq premiers flux ont une expression qui peut être linéaire en fonction des forces thermodynamiques.

Les expressions des flux σ_a , \mathbf{q} et \mathbf{j}_{ia} doivent permettre d'obtenir un système fermé d'équations aux dérivées partielles. Leurs expressions sont données par des relations phénoménologiques qui relient les flux aux forces thermodynamiques. Ces expressions sont les suivantes :

Le tenseur des contraintes σ_a (pour un fluide Newtonien) vérifie :

$$\sigma_a = -[\varepsilon s_a p_a + \frac{2}{3}\mu_a \operatorname{div} \mathbf{v}_a] \mathfrak{I} + 2\mu_a \bar{D} \quad (\text{E.2})$$

où μ_a est la viscosité dynamique, \mathfrak{I} est le tenseur identité et

$$\bar{D} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{v}_a + \operatorname{grad}^T \mathbf{v}_a) \quad (\text{E.3})$$

Le flux de chaleur \mathbf{q} est donné par la relation :

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T + \rho \sum_{i=1}^N h_i Y_i \mathbf{j}_{ia} + \mathbf{q}_r \quad (\text{E.4})$$

où λ est la conductivité thermique, $h_i(T)$ est l'enthalpie de la i ème espèce chimique et \mathbf{q}_r est le flux radiatif.

Les flux de diffusion des espèces \mathbf{j}_{ia} peut être données par des lois de Fick :

$$y_{ia} \mathbf{j}_{ia} = -D_{ia} \operatorname{grad} y_{ia} \quad (\text{E.5})$$

où D_{ia} sont les coefficients de diffusion.

Les relations entre f_{ab} , f_{ac} et les vitesses \mathbf{v}_a sont de la forme suivante d'après Marle [4] :

$$\mathbf{v}_a = \frac{k_a}{\mu_a \varepsilon s_a} \left(\sum_{b \in \mathcal{S}, a \neq b} f_{ab} + \sum_{c \in \mathcal{S}} f_{ac} - p_a \operatorname{grad} \varepsilon s_a \right) \quad (\text{E.6})$$

où k_a est la perméabilité de la tige vis à vis de la phase a .

Les termes k_{ab} , k_{ac} , k_{sc} et ψ_a , qui correspondent respectivement aux transferts de matière à travers les interfaces des phases et aux transformations des espèces en volume à l'intérieur d'une même phase, doivent être exprimés à l'aide de relations qui sont fondamentalement non linéaires. Nous pouvons alors considérer tous ces transferts comme des réactions chimiques. Le cas de la pyrolyse et de la combustion du bois ainsi que son séchage est un exemple instructif d'une telle modélisation.

E.3 Loi de Brinkman et loi de Darcy

En utilisant l'équation de continuité (3.59) et l'expression (E.2) du tenseur des contraintes le bilan de quantité de mouvement (3.61) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon s_a \rho_a \left(\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \text{grad} \mathbf{v}_a \right) - \text{div}(\tau_a) - \varepsilon s_a \rho_a \mathbf{g} \\ + \text{div}(\varepsilon s_a p_a \mathfrak{S}) + \sum_{c \in S} f_{ac} + \sum_{b \in A, b \neq a} f_{ab} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

L'élimination des termes f_{ab} et f_{ba} entre (E.6) et (E.7) conduisent à une loi de type *Brinkman*.

$$\begin{aligned} \varepsilon s_a \rho_a \left(\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \text{grad} \mathbf{v}_a \right) - \text{div}(\tau_a) + \varepsilon s_a \text{grad} p_a - \varepsilon s_a \rho_a \mathbf{g} \\ + 2p_a \text{grad}(\varepsilon s_a) + \varepsilon s_a \frac{\mu_a}{k_a} \mathbf{v}_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Cette équation est une équation de quantité de mouvement plus générale que l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes, car elle fait intervenir un terme de frottement $\varepsilon s_a \frac{\mu_a}{k_a} \mathbf{v}_a$ en plus qui s'oppose au mouvement fluide. Un nouveau paramètre lié à la perméabilité k_a du milieu poreux intervient alors à cause de la présence de la phase solide qui constitue la tige. Lorsque la porosité ε converge vers 1, pour un milieu fluide sans phase solide, la perméabilité ε doit converger vers l'infini si l'on veut obtenir l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes. C'est en ce sens que l'équation (E.8) est plus générale que l'équation de Navier-Stokes.

L'équation de quantité de mouvement (E.8) prend une forme simplifiée lorsque la porosité ε est petite, ce qui est le cas des tiges végétales. La vitesse \mathbf{v}_a de la phase a est alors faible ce qui conduit à ne garder que trois termes dans la relation (E.8) et conduit à :

$$\mathbf{v}_a = -\frac{k_a}{\mu_a} ((\text{grad})p_a - \rho_a \mathbf{g}) \quad (\text{E.9})$$

C'est la loi la **loi de Darcy généralisée** pour le bilan de quantité de mouvement, loi qui est postulée directement par Di Blasi [2].

E.4 Modélisation mésoscopique avec homogénéisation au niveau de l'interface

Levy [3] a réalisé une étude précise de l'obtention des conditions de sauts à l'interface entre un milieu poreux et une phase fluide grâce à une homogénéisation au niveau de l'interface entre la phase poreuse et la phase fluide. Une telle étude complète l'obtention des équations de Darcy des milieux poreux par homogénéisation à l'intérieur de la phase poreuse. Elle se limite cependant à un écoulement de Stokes dans la phase fluide. Le résultat est que l'on distingue alors deux cas de conditions de saut (cf. figure E.1) :

Cas A : Le gradient de pression n'est pas normal à la surface du milieu poreux. La vitesse \mathbf{v}_f est alors beaucoup plus grande que la vitesse de filtration \mathbf{v}_f^p dans la phase

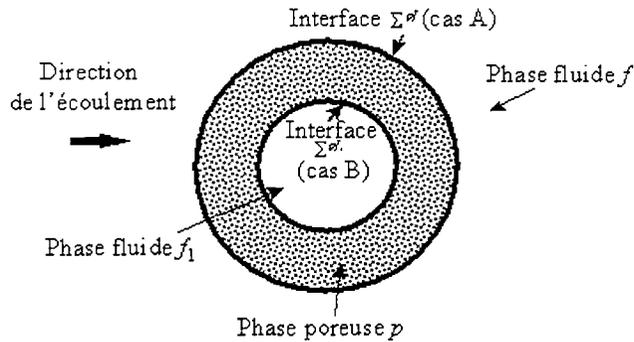


FIG. E.1 - Les deux types de conditions de saut

poreuse. La condition de saut à imposer à l'interface Σ^{pf} est l'égalité des pressions à l'ordre principal.

Cas B : Le gradient de pression est normal à la surface du milieu poreux au niveau de cet interface. Le gradient de pression est alors beaucoup plus grand à l'intérieur de la phase poreuse que dans la phase fluide. La condition de saut à imposer à l'interface $\Sigma^{p f_1}$ est l'égalité de la composante normale des vitesses v_a^p et v_f à l'ordre principal. La composante tangentielle de la vitesse v_f est de plus nulle lorsque le nombre de Reynolds dans la phase fluide est faible devant 1 ou de l'ordre de 1.

Je pense que nous sommes dans une situation semblable au cas B à l'interface entre une tige végétale et le gaz qui l'entoure car le transfert de matière \dot{m}_a^p dû aux gaz qui s'échappent de la tige par pyrolyse sous l'action de la dégradation thermique est important. La relation (3.74) se réduit alors à l'égalité des vitesses v_a^p et v_f .

Annexe F

Obtention des équations de bilans macroscopique de quantité de mouvement et d'énergie

Dans cette annexe, nous obtenons les équations de bilans macroscopiques de quantité de mouvement et d'énergie, à partir des équations mésoscopiques, en utilisant la démarche expliquée au chapitre 3.

F.1 Equations bilans du constituant poreux

La même procédure que celle du paragraphe 3.3.1 appliquée aux équations de bilan de masse dans la phase solide, de quantité de mouvement et à l'équation de l'énergie conduit aux bilans qui sont écrits ci-dessous. La dénomination des grandeurs qui interviennent dans les relations ci-dessous sont celles qui sont données au chapitre 3 pour les grandeurs macroscopiques et mésoscopiques. Nous obtenons alors :

Bilan de masse de l'élément bois :

La relation (3.57) conduit à l'équation macroscopique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p)S_{bp}\tilde{\rho}_{bp}) = -(1 - \Phi)(K_{bg} + K_{bl} + K_{bc}) \quad (\text{F.1})$$

où les grandeurs macroscopiques S_s^p et $\tilde{\rho}_{bp}$ sont définies successivement par :

$$(1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p)[S_{bp}] = ((1 - \epsilon^p)s_{bp}) * m$$

$$(1 - \Phi)(1 - \mathcal{E}^p)S_{bp}[\tilde{\rho}_{bp}] = ((1 - \epsilon^p)s_{bp}\rho_{bp}) * m \quad (\text{F.2})$$

Le terme qui est défini par chaque équation est noté entre crochets ci-dessus afin de mieux repérer celui-ci. Les termes macroscopiques K_{bg} , K_{bl} et K_{bc} sont définis par :

$$\begin{cases} (1 - \Phi)K_{bg} = k_{bg} * m \\ (1 - \Phi)K_{bl} = k_{bl} * m \\ (1 - \Phi)K_{bc} = k_{bc} * m \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

Bilan de quantité de mouvement dans la partie fluide a de la phase poreuse p :

La relation (3.7) conduit à l'équation macroscopique suivante :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial((1-\Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}\mathbf{V}_{gp})}{\partial t} + \\ \text{div}((1-\Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}\mathbf{V}_{gp} \otimes \mathbf{V}_{gp} - \mathcal{T}_{gp}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -(1-\Phi)\mathcal{E}^p\text{grad}P_{gp} + (1-\Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}\mathbf{g} \\ -P_{gp}\text{grad}((1-\Phi)\mathcal{E}^p) \\ -K_g^{pf}\mathbf{V}_{gp} - F_{gp} \end{array} \right) \quad (\text{F.4})$$

où les grandeurs macroscopiques C_{gp} et F_{gp} sont définis successivement par les relations :

$$\begin{aligned} (1-\Phi)\mathcal{E}^p\tilde{\rho}_{gp}\mathbf{V}_{gp} \otimes \mathbf{V}_{gp} - [C_{gp}] &= (\varepsilon^p\rho_{gp}\mathbf{v}_{gp} \otimes \mathbf{v}_{gp}^p - \sigma_{gp}) * m \\ K_g^{pf}\mathbf{V}_{gp} + [F_{gp}^{pf}] &= [[\rho_{gp}\mathbf{v}_{gp}(\mathbf{v}_{gp} - \mathbf{w}^p) \cdot \mathbf{n}^p - \sigma_{gp} \cdot \mathbf{n}^p]\delta^{\Sigma^{pf}}] * m \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Bilan d'énergie interne dans la phase poreuse p :

La relation (3.9) conduit à l'équation macroscopique suivante :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-\Phi)\tilde{\rho}_p(E_p + \frac{1}{2}|\mathbf{V}_p|^2) \right] \\ + \text{div} \left[\begin{array}{c} (1-\Phi)\tilde{\rho}_p(E_p + \frac{1}{2}|\mathbf{V}_p|^2) \\ + \mathbf{Q}_p - \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{C}_p \end{array} \right] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -P_p\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (1-\Phi)\tilde{\rho}_p\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{g} \\ -[(E_p + \frac{1}{2}|\mathbf{V}_p|^2 + P_p/\tilde{\rho}_p)K^{pf} + X^{pf}] \end{array} \right) \quad (\text{F.6})$$

où les grandeurs macroscopiques $\tilde{\rho}_p$, \mathbf{V}_p , E_p et \mathbf{Q}_p sont définis successivement par les relations :

$$\begin{aligned} (1-\Phi)\mathcal{E}^p[\tilde{\rho}_p] &= \mathcal{E}^p(\tilde{\rho}_{bp} + \tilde{\rho}_{cp}) + (1-\mathcal{E}^p)\tilde{\rho}_{gp} \\ \tilde{\rho}_p[\mathbf{V}_p] &= \tilde{\rho}_{gp}\mathbf{V}_{gp} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$(1-\Phi)\tilde{\rho}_p([E_T^p] + \frac{1}{2}|\mathbf{V}_p|^2) = [\rho_p(e_p + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_p|^2)] * m$$

$$(1-\Phi)\tilde{\rho}_p(E_p + \frac{1}{2}|\mathbf{V}_p|^2)\mathbf{V}_p + [\mathbf{Q}_p] - \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{C}_p = [\rho_p(e_p + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_p|^2)\mathbf{v}_p + q_p - \mathbf{v}_p \cdot \sigma_p] * m$$

F.2 Equations bilans de la phase fluide

Les équations macroscopiques de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont obtenues de manière semblable à celles de la phase poreuse du paragraphe précédent. Les relations correspondantes sont alors les suivantes :

Bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{if}) \\ + \text{div}(\Phi\tilde{\rho}_f Y_{if}\mathbf{V}_f + \mathbf{J}_{if}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Phi\dot{\omega}_{if} \\ -K_{ig}^{fp} \end{array} \right) \quad (\text{F.8})$$

Dans cette équation, les grandeurs macroscopiques $\tilde{\rho}_f$, Y_{if} , \mathbf{V}_f et \mathbf{J}_{if} sont définies successivement par les relations :

$$\begin{aligned}\Phi[\tilde{\rho}_f] &= \rho_f * m \\ \Phi\tilde{\rho}_f[Y_{if}] &= (\rho_f y_{if}) * m \\ \Phi\tilde{\rho}_f[\mathbf{V}_f] &= (\rho_f \mathbf{v}_f) * m \\ \Phi\tilde{\rho}_f Y_{if} \mathbf{V}_f + [\mathbf{J}_{if}] &= (\rho_f y_{if} \mathbf{v}_f + \mathbf{j}_{if}) * m\end{aligned}\tag{F.9}$$

Le terme macroscopique $\dot{\omega}_{if}$ est défini par :

$$\Phi\dot{\omega}_{if} = \dot{\omega}_{if} * m\tag{F.10}$$

Le terme K_{ig}^{fp} est la masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce qui quitte la phase f à travers l'interface Σ^{pf} , par unité de temps et par unité de volume du milieu macroscopique. Il est défini par la relation :

$$K_{ig}^{fp} = -[[\rho_f y_{if}(\mathbf{v}_f - \mathbf{w}^{\Sigma^{pf}}) + \mathbf{j}_{if}] \cdot \mathbf{n}^p \delta^{\Sigma^{pf}}] * m\tag{F.11}$$

En sommant les bilans de masse (F.8), nous obtenons les équations de continuité macroscopiques suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\rho_f) + \text{div}(\Phi\rho_f \mathbf{V}_f) + K^{fp} = 0\tag{F.12}$$

où le terme K^{fp} est défini par :

$$K^{fp} = \sum_i K_i^{fp}\tag{F.13}$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial(\Phi\tilde{\rho}_f \mathbf{V}_f)}{\partial t} + \\ \text{div}(\Phi\tilde{\rho}_f \mathbf{V}_f \otimes \mathbf{V}_f - \mathcal{T}_f) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\Phi \text{grad} P_{gp} + \Phi\tilde{\rho}_{gp} \mathbf{g} \\ -P_f \text{grad}(\Phi) \\ -K^{pf} \mathbf{V}_f - F_f \end{array} \right)\tag{F.14}$$

où les grandeurs macroscopiques \mathcal{C}_f et F_f sont définis successivement par les relations :

$$\Phi\tilde{\rho}_f \mathbf{V}_f \otimes \mathbf{V}_f - [\mathcal{C}_f] = (\varepsilon^p \rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f^p - \sigma_f) * m$$

$$K^{pf} \mathbf{V}_{gp} + [F^{pf}] = [[\rho_f \mathbf{v}_f(\mathbf{v}_f - \mathbf{w}^p) \cdot \mathbf{n}^p - \sigma_f \cdot \mathbf{n}^p] \delta^{\Sigma^{pf}}] * m\tag{F.15}$$

Bilan d'énergie interne :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi\tilde{\rho}_f \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) \right] \\ + \text{div} \left[\Phi\tilde{\rho}_f \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) \mathbf{V}_f \right] \\ + \mathbf{Q}_f - \mathbf{V}_f \cdot \mathcal{C}_f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Phi\tilde{\rho}_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_f - P_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ -(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 + P_f / \tilde{\rho}_f) K^{fp} \\ -X^{fp} \end{array} \right)\tag{F.16}$$

où les grandeurs macroscopiques E_f et \mathbf{Q}_f sont définis successivement par les relations :

$$\Phi \tilde{\rho}_f \left([E_f] + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) = \left[\rho_f (e_f + \frac{1}{2} |v_f|^2) \right] * m \quad (\text{F.17})$$

$$\Phi \tilde{\rho}_f \left(E_f + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_f|^2 \right) \mathbf{V}_f + [\mathbf{Q}_f] - \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{C}_f = \left[\rho_f (e_f + \frac{1}{2} |v_f|^2) \mathbf{v}_f + q_f - \mathbf{v}_f \cdot \sigma_f \right] * m$$

F.3 Relations de liaison entre les flux

Les relations de saut mésoscopiques conduisent aux relations de liaison suivante pour les flux :

$$K_{ig}^{pf} + K_{ig}^{fp} = 0$$

$$K^{pb} \mathbf{V}_{gp} + F_g^{pb} + K^{bp} \mathbf{V}_{gp} + F_g^{bp} = 0, \forall b \quad (\text{F.18})$$

$$\left(\begin{array}{c} (E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{pf} \\ + X^{pf} + P_p Z^{pf} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} (E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{fp} \\ + X^{fp} + P_p Z^{fp} \end{array} \right) = 0$$

Annexe G

Bilan d'entropie

Dans cette annexe, nous donnons l'expression du bilan d'entropie utilisée au chapitre 3.

G.1 Définition des grandeurs thermodynamiques

Pour cela, postulons l'existence d'une grandeur entropie généralisée S pour le milieu macroscopique, grandeur qui dépend des paramètres macroscopique suivant :

$$S = S \left(\begin{array}{c} E_p, E_f, \\ \left(\begin{array}{c} 1/\tilde{\rho}_{bp}, 1/\tilde{\rho}_{cp}, \\ 1/\tilde{\rho}_{gp}, 1/\tilde{\rho}_{lp} \end{array} \right), 1/\tilde{\rho}_f, \\ Y_{igp}, Y_{if}, \\ \mathbf{Q}^p, \mathbf{Q}^f \end{array} \right) \quad (\text{G.1})$$

Définissons alors les températures de non équilibre T^p et T^f des phases poreuses p et gazeuses f , et les pressions de non équilibre P_a^p et P^f respectivement par :

$$\frac{(1 - \Phi)\mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}} (T^p)^{-1} = \frac{\partial S}{\partial E_T^p} \left(E_T^p, E_T^p, 1/\tilde{\rho}_a^p, 1/\tilde{\rho}^f, Y_{ia}^p, Y_i^f, \mathbf{Q}^p, \mathbf{Q}^f \right) \quad (\text{G.2})$$

$$\frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}} (T^f)^{-1} = \frac{\partial S}{\partial E^f} \left(E_T^p, E^f, 1/\tilde{\rho}_a^p, 1/\tilde{\rho}^f, Y_{ia}^p, Y_i^f, \mathbf{Q}^p, \mathbf{Q}^f \right) \quad (\text{G.3})$$

$$\frac{(1 - \Phi)\mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}^T} (T^p)^{-1} P_a^p = \frac{\partial S}{\partial (1/\tilde{\rho}_a^p)} \left(E_T^p, E^f, 1/\tilde{\rho}_a^p, 1/\tilde{\rho}^f, Y_{ia}^p, Y_{ia}^f, \mathbf{Q}^p, \mathbf{Q}^f \right) \quad (\text{G.4})$$

$$\frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}^T} (T^f)^{-1} P^f = \frac{\partial S}{\partial (1/\tilde{\rho}^f)} \left(E_T^p, E^f, 1/\tilde{\rho}_a^p, 1/\tilde{\rho}^f, Y_{ia}^p, Y_{ia}^f, \mathbf{Q}^p, \mathbf{Q}^f \right) \quad (\text{G.5})$$

Les dérivées partielles restantes sont notées respectivement :

$$\frac{\partial S}{\partial Y_{ia}^p} = -(T^p)^{-1} \frac{(1 - \Phi)\mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}} \mu_{ia}^p(E_T^p, 1/\tilde{\rho}_a^p, Y_{ia}^p, \mathbf{Q}^p) \quad (\text{G.6})$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i^f} = -(T^f)^{-1} \frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}} \mu_i^f(E^f, 1/\tilde{\rho}^f, Y_i^f, \mathbf{Q}^f) \quad (\text{G.7})$$

où les μ_{ia}^p et μ_i^f sont, par définition, les potentiels chimiques.

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}^p} = -(T^p)^{-1} \frac{1}{\tilde{\rho}^p} \alpha^p(E_T^p, 1/\tilde{\rho}_a^p, Y_{ia}^p, \mathbf{Q}^p) \quad (\text{G.8})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}^f} = -(T^f)^{-1} \frac{1}{\tilde{\rho}^f} \alpha^f(E_T^f, 1/\tilde{\rho}_a^f, Y_{ia}^f, \mathbf{Q}^f) \quad (\text{G.9})$$

Supposons pour simplifier que les coefficients α^p et α^f soient proportionnels respectivement aux flux \mathbf{Q}^p et \mathbf{Q}^f :

$$\begin{aligned} \alpha^p &= \alpha^p(E_T^p, 1/R_a^p, Y_{ia}^p) \mathbf{Q}^p \\ \alpha^f &= \alpha^f(E_T^f, 1/R_a^f, Y_{ia}^f) \mathbf{Q}^f \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

G.2 Bilan d'entropie

En reportant les relations ci-dessus (G.2)-(G.10) dans l'expression (3.94) de la différentielle de l'entropie, donnée par la relation (G.1), il vient :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{(1-\Phi)\mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}} \sum_a \left((T^p)^{-1} dE_T^p - (T^p)^{-1} \frac{P_a^p}{\tilde{\rho}_a^{p2}} d(\tilde{\rho}_a^p) - \sum_{i=1}^{n_p} (T^p)^{-1} \mu_{ia}^p dY_{ia}^p \right) \\ &+ \frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}} \left((T^f)^{-1} dE^f - \frac{P^f}{\tilde{\rho}^{f2}} (T^f)^{-1} d\tilde{\rho}^f - \sum_{i=1}^{n_p} \mu_{if}^f (T^f)^{-1} dY_i^f \right) \\ &- \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_a \left((T^p)^{-1} \alpha^p d\mathbf{Q}^p + (T^f)^{-1} \alpha^f d\mathbf{Q}^f \right) \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

C'est la **relation de Gibbs** généralisée, car elle fait intervenir les variations des flux. Afin de tenir compte du mouvement, la différentielle (G.11) doit être associée à une dérivée particulière où la dérivée particulière d'une grandeur G dans un mouvement de référence de vitesse $\vec{\mathbf{V}}_r$ est définie par :

$$\frac{d^r G}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}}_r \cdot \text{grad}(G) \quad (\text{G.12})$$

La relation (G.11) est vraie dans le mouvement de référence de vitesse $\vec{\mathbf{V}}_r$:

$$\begin{aligned} \frac{d^r S}{dt} &= \frac{(1-\Phi)\mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}} (T^p)^{-1} \sum_a \left(\frac{d^r E_T^p}{dt} - \frac{P_a^p}{\tilde{\rho}_a^{p2}} \frac{d^r \tilde{\rho}_a^p}{dt} - \sum_{i=1}^{n_p} \mu_{ia}^p \frac{d^r Y_{ia}^p}{dt} - \alpha^p \frac{d^r \mathbf{Q}^p}{dt} \right) \\ &+ \frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}} (T^f)^{-1} \left(\frac{d^r E^f}{dt} - \frac{P^f}{\tilde{\rho}^{f2}} \frac{d^r \tilde{\rho}^f}{dt} - \sum_{i=1}^{n_p} \mu_{if}^f \frac{d^r Y_i^f}{dt} - \alpha^f \frac{d^r \mathbf{Q}^f}{dt} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

Le choix du mouvement de référence est important, car il conduit à une expression différente du bilan d'entropie. Pour les mélanges, rappelons que l'on prend le mouvement barycentrique pour mouvement de référence. Choisissons comme vitesse de référence la vitesse nulle des tiges des végétaux

$$\vec{\mathbf{V}}_r = 0 \quad (\text{G.14})$$

La dérivée particulière de G dans le mouvement de référence de la vitesse barycentrique du composant a de la phase p , est :

$$\frac{d^{ap}G}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}}_a^p \cdot \text{grad}(G) \quad (\text{G.15})$$

La formule de changement de mouvement de référence est la suivante :

$$\frac{d^r G}{dt} = \frac{d^{ap}G}{dt} - (\vec{\mathbf{V}}_a^p - \vec{\mathbf{V}}^r) \cdot \text{grad}(G) \quad (\text{G.16})$$

Le bilan d'entropie prend donc la forme suivante d'après (G.13) et (G.16) :

$$\begin{aligned} \frac{d^r S}{dt} = & - (T^p)^{-1} \sum_a \frac{(1 - \Phi) \mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{R^T} \left((\mathbf{V}_a^p - \mathbf{V}^r) \cdot \left[\begin{array}{l} \text{grad}(E_T^p) - \frac{P_a^p}{\tilde{\rho}_a^p} \text{grad}(\tilde{\rho}_a^p) \\ -\mu_{ia}^p \text{grad}(Y_{ia}^p) - \alpha^p \text{grad}(\mathbf{Q}^p) \end{array} \right] \right) \\ & - \frac{\Phi \tilde{\rho}^f}{\tilde{\rho}} (T^f)^{-1} \left((\mathbf{V}^f - \mathbf{V}^r) \cdot \left[\begin{array}{l} \text{grad}(E^f) - \frac{P^f}{\tilde{\rho}^f} \text{grad}(\tilde{\rho}^f) \\ -\mu_i^f \text{grad}(Y_i^f) - \alpha^f \text{grad}(\mathbf{Q}^f) \end{array} \right] \right) \\ & + (T^p)^{-1} \sum_a \frac{(1 - \Phi) \mathcal{E}^p S_a^p \tilde{\rho}_a^p}{\tilde{\rho}} \left(\begin{array}{l} \frac{d^{ap} E_T^p}{d^{ap} t} - \frac{P_a^p}{\tilde{\rho}_a^p} \frac{d^{ap}(\tilde{\rho}_a^p)}{d^{ap} t} \\ - \sum_{i=1}^n \mu_{ia}^p \frac{d^{ap} Y_{ia}^p}{d^{ap} t} - \alpha^p \frac{d^{ap} \mathbf{Q}^p}{d^{ap} t} \end{array} \right) \\ & + \frac{\Phi \tilde{\rho}_a^f}{\tilde{\rho}} (T^f)^{-1} \left(\begin{array}{l} \frac{d^f E^f}{d^f t} - \frac{P^f}{\tilde{\rho}^f} \frac{d^f(\tilde{\rho}^f)}{d^f t} \\ - \sum_{i=1}^n \mu_i^f \frac{d^f Y_i^f}{d^f t} - \alpha^f \frac{d^f \mathbf{Q}^f}{d^f t} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

G.3 Différentes formes d'une équation de bilan

La conservation de la masse pour le constituant g de la phase p s'écrit :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d^{gp}}{dt} ((1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp}) \\ + (1 - \Phi) \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_{gp} \text{div}(\vec{\mathbf{V}}_{gp}) \end{array} \right) = \left(-(1 - \Phi) \left(\begin{array}{l} K_{igb} + K_{igc} \\ + K_{igt} - \tilde{\omega}_{igp} \end{array} \right) - K_{ig}^{pf} \right) \quad (\text{G.18})$$

Pour toute grandeur G ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G) + \operatorname{div}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G \vec{\mathbf{V}}_g^p) \\
 &= \frac{d^{gp}}{dt}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G) + (1 - \Phi)S^p \mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G \operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_g^p) \\
 &= \left[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \right] \frac{d^{gp} G}{dt} + \left[\begin{array}{l} \frac{d^a}{d^a t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p) \\ + (1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_g^p) \end{array} \right] G \\
 &= \left[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \right] \frac{d^{gp} G}{dt} - \left[(1 - \Phi) \left(\sum_{b \in A, b \neq a} K_{gb} + \sum_{c \in S} K_{gc} \right) + K_g^{pf} \right] G
 \end{aligned} \tag{G.19}$$

d'après l'équation de conservation de la masse (A.7.18) ci-dessus d'où le résultat suivant :
 Pour toute grandeur G ,

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G) \\ + \operatorname{div}((1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p G \vec{\mathbf{V}}_g^p) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \left[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \right] \frac{d^{gp} G}{dt} \\ - \left[(1 - \Phi) \left(\sum_{b \in A, b \neq a} K_{gb} + \sum_{c \in S} K_{gc} \right) + K_g^{pf} \right] G \end{array} \right) \tag{G.20}$$

G.4 Equations bilans et dérivées particulaire

Il nous faut maintenant écrire les équations bilans en dérivées particulières. Utilisons pour cela la relation (G.20). L'équation du bilan de masse de la $i^{\text{ème}}$ espèce vérifiée dans la phase p s'écrit alors :

$$\left[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \right] \frac{d^{gp} Y_{igp}}{dt} + \operatorname{div}(\mathbf{J}_{igp}) = \left(\begin{array}{l} -(1 - \Phi) \left(\begin{array}{l} K_{igb} + K_{igc} \\ + K_{igl} - \tilde{\omega}_{igp} \end{array} \right) - K_{ig}^{pf} \\ \left[(1 - \Phi) \left(\sum_{b \in A, b \neq a} K_{gb} + \sum_{c \in S} K_{gc} \right) + K_g^{pf} \right] Y_{igp} \end{array} \right) \tag{G.21}$$

Le bilans de quantité de mouvement dans la partie fluide a de la phase poreuse p s'écrit :

$$\left[(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p \right] \frac{d^{gp} \mathbf{V}_g^p}{dt} - \operatorname{div}(\mathbf{C}_g^p) = \left(\begin{array}{l} -(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \rho_g^p \mathbf{g} \\ -(1 - \Phi) \left(\sum_{c \in S} F_{gc}^p + \sum_{b \in A, b \neq a} F_{gb}^p \right) - F_g^{pf} \end{array} \right) \tag{G.22}$$

L'équation de conservation de l'énergie donne quant à elle :

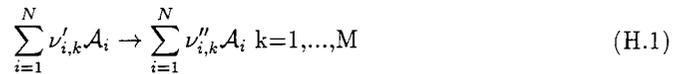
$$\left(\begin{array}{l} [(1 - \Phi)\mathcal{E}^p \tilde{\rho}_g^p] \frac{d^{gp}(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2)}{dt} \\ + \text{div} [+ \mathbf{Q}_p - \mathbf{V}_p \cdot \mathcal{C}_p] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} -P_p \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (1 - \Phi) \tilde{\rho}_p \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{g} \\ - \left[(E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2 + P_p / \tilde{\rho}_p) K^{pf} + X^{pf} \right] \\ [(1 - \Phi) \left(\begin{array}{l} \sum_{b \in A, b \neq a} K_{gb} \\ + \sum_{c \in S} K_{gc} \end{array} \right) + K_g^{pf}] (E_p + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_p|^2) \end{array} \right) \quad (\text{G.23})$$

Nous pouvons écrire des équations en dérivées particulières semblables pour le bilan de la phase solide s dans la phase poreuse p et pour les équations de bilan dans la phase fluide qui entoure les végétaux.

Annexe H

Différentes formes de l'équation de l'énergie

Nous considérons un système fluide constitué de N espèces chimiques. Notons \mathcal{A}_i la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique. Ces espèces sont susceptibles de participer aux M réactions chimiques indépendantes suivantes :



où $\nu'_{i,k}$ et $\nu''_{i,k}$ sont les coefficients stoechiométriques de la $k^{\text{ème}}$ réaction.

H.1 L'équation d'état calorique

L'équation d'état calorique est la suivante :

$$h_i(T) = h_i^0 + \int_{T^0}^T C_{P,i} dt \quad i=1, \dots, N \quad (\text{H.2})$$

où h_i^0 est l'enthalpie de formation de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique à la température de référence T^0 et $C_{P,i}$ est la capacité calorifique, à pression constante, de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique. Les valeurs de ces paramètres sont données dans des tables .

Nous définissons alors la capacité calorifique par :

$$C_p = \sum_{i=1}^N Y_i C_{p,i} \quad (\text{H.3})$$

L'enthalpie massique h s'écrit alors $h = \sum_{i=1}^N Y_i h_i$.

L'équation d'état calorique conduit donc à la relation

$$h = h_c + h_T \quad (\text{H.4})$$

où

$$h_c = \sum_{i=1}^N Y_i h_i^0 : \text{enthalpie chimique,} \quad (\text{H.5})$$

et

$$h_T = \int_{T^0}^T C_p dT : \text{enthalpie thermique.} \quad (\text{H.6})$$

H.2 Terme source d'origine chimique

La vitesse de production $\dot{\omega}_i$ de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique vaut :

$$\dot{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^m \dot{\omega}_i^\alpha \quad (\text{H.7})$$

où $\dot{\omega}_i^\alpha$ est la vitesse de production de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique par la $\alpha^{\text{ème}}$ réaction chimique. La conservation des espèces chimiques lors des réactions chimiques conduit aux relations de liaison suivantes :

$$\dot{\omega}_{i\alpha}/W_i(\nu''_{i\alpha} - \nu'_{i\alpha}) = \dot{\omega}_{j\alpha}/W_j(\nu''_{j\alpha} - \nu'_{j\alpha}) \doteq \psi_\alpha \quad \forall i, j \quad (\text{H.8})$$

où ψ_α est par définition ce rapport constant. C'est la vitesse de production de masse de la $\alpha^{\text{ème}}$ réaction chimique.

La vitesse de production ψ_α peut donc s'écrire :

$$\dot{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^m W_i(\nu''_{i\alpha} - \nu'_{i\alpha})\psi_\alpha \quad (\text{H.9})$$

Nous supposons que le milieu est gazeux et que les réactions suivent la loi de Vant'Hoff,

$$\psi_\alpha = K_\alpha(T) \prod_{j=1}^N (\rho Y_j W_j)^{\nu'_{j\alpha}} \quad (\text{H.10})$$

où : R^0 est la constante des gaz parfaits

$\rho Y_j W_j$ est la concentration de la $j^{\text{ème}}$ espèce chimique

$K_\alpha(T)$ est la constante spécifique de la $\alpha^{\text{ème}}$ réaction. Son expression est donnée par la loi d'Arrhenius :

$$K_\alpha(T) = A_\alpha e^{-(E_\alpha/R^0T)} \quad (\text{H.11})$$

avec E_α l'énergie d'activation de la $\alpha^{\text{ème}}$ réaction.

A_α est une fonction de la température T . La relation de Vant'Hoff ci-dessus est une relation phénoménologique qui correspond à un comportement global si les m réactions indépendantes ne correspondent pas à un mécanisme élémentaire. Les paramètres A_α et E_α sont alors des paramètres globaux.

H.3 Nombre de Lewis L_e et simplification pour $L_e \approx 1$

Les simplifications des bilans d'enthalpie que nous allons voir utilisent les lois de Fick. Nous supposons de plus que les forces extérieures sont uniquement dues aux forces de gravitation.

_ Le flux de chaleur \mathbf{q} a alors l'expression simplifiée suivante :

$$\mathbf{q} = \rho D(L_e - 1) \sum_{i=1}^N h_i \text{grad}(Y_i) - L_e \rho D \text{grad}(h) + \mathbf{q}_r \quad (\text{H.12})$$

avec $L_e \hat{=} \frac{\lambda}{\rho DC_p}$ par définition. C'est le nombre de Lewis.

Le bilan d'enthalpie s'écrit alors :

$$\rho \frac{dh}{dt} + \text{div} \left[\begin{array}{l} \rho D(L_e - 1) \sum_{i=1}^N h_i \text{grad}(Y_i) \\ -L_e \rho D \text{grad}(h) + \mathbf{q}_r \end{array} \right] = \frac{dP}{dt} + \bar{\tau} : \text{grad}(\mathbf{v}) \quad (\text{H.13})$$

Dans les gaz, généralement $L_e \approx 1$ ce qui simplifie considérablement la relation ci-dessus. Les termes de droites sont de plus généralement négligeables comme nous l'avons vu précédemment.

_ Sous les mêmes hypothèses, nous pouvons aussi exprimer le flux de chaleur \mathbf{q} en fonction de l'enthalpie thermique :

$$\mathbf{q} - \rho Y_i \mathbf{V}_i h_i^0 - \mathbf{q}_r = -\rho DC_p \left[\frac{1}{C_p} \text{grad}(h_T) + (L_e - 1) \text{grad}(T) \right] \quad (\text{H.14})$$

Le bilan d'enthalpie prend alors la forme du bilan d'enthalpie thermique h_T :

$$\rho \frac{dh_T}{dt} + \text{div} \left[\begin{array}{l} -\rho DC_p (L_e - 1) \text{grad}(T) \\ -\rho D \text{grad}(h_T) + \mathbf{q}_r \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \dot{\omega}_i h_i^0 + \frac{dP}{dt} + \bar{\tau} : \mathbf{v} \quad (\text{H.15})$$

Comme $L_e \approx 1$, nous sommes conduit alors de nouveau à une simplification de ce bilan.

Le terme $\sum_{i=1}^N \dot{\omega}_i h_i^0 \hat{=} R_c$ est le **terme source d'origine chimique**. Il correspond à la chaleur dégagée par les réactions chimiques.

D'après les expressions (H.9)-(H.10) pour la vitesse de production $\dot{\omega}_i$ de la $i^{\text{ème}}$ espèce chimique, R_c prend la forme simplifiée :

$$R_c = - \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha Q_\alpha \quad (\text{H.16})$$

où par définition

$$Q_\alpha = - \sum_{i=1}^n W_i (\nu''_{i\alpha} - \nu'_{i\alpha}) h_i^0 \quad (\text{H.17})$$

C'est la **chaleur standard** de la $\alpha^{\text{ème}}$ réaction à la température de référence T^0 . Sa valeur constante est donnée dans des tables. Dans le cas d'une seule réaction chimique, ce terme prend la forme simplifiée :

$$R_c = -\psi Q \quad (\text{H.18})$$

L'hypothèse d'une réaction chimique unique ($m = 1$) est couramment utilisée en combustion. Cette hypothèse donne de bons résultats. Son utilisation est guidée par un souci de simplification lorsque l'on veut pousser le traitement analytique des équations de la combustion plus à fond sans recourir à une résolution numérique.

H.4 Equation vérifiée par le champ de température

Une hypothèse couramment employée en combustion mais qui n'est pas toujours bien vérifiée, est qui n'est pas fondamentale, est de considérer que la capacité calorifique totale C_p est constante (indépendante de la température et des concentrations des espèces). Le bilan d'enthalpie thermique devient alors un bilan vérifié par le champ de température T :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \text{div}[-\rho D C_p L_e \text{grad}(T) + \mathbf{q}_r] = R_c + \frac{dP}{dt} + \bar{\tau} : \mathbf{v} \quad (\text{H.19})$$

Cette hypothèse peut être omise sans grandes complications lors de la résolution numérique.

Annexe I

Expression de l'enthalpie en fonction de la température

Dans cette annexe, nous donnons l'expression de l'enthalpie en fonction de la température en tenant compte de la vaporisation de l'eau contenue dans les végétaux.

I.1 Expression de l'enthalpie en fonction de la température

Le milieu poreux est constitué de combustible végétal qui contient de l'eau et de l'air. Soit β le rapport du volume occupé par les particules végétales sur le volume total du milieu et σ le rapport de la surface d'une particule de végétation sur le volume de la particule de végétation. Ces deux grandeurs sont caractéristiques de la répartition du combustible végétal au sein de la forêt. Notons alors H_u le rapport de masse d'eau sur la masse de combustible sec.

Soit ρ_b la masse de combustible sec sur le volume du milieu poreux. Si nous définissons aussi ρ_0 comme la masse volumique intrinsèque des particules sèches, alors $\rho_b = \beta\rho_0$. La masse volumique ρ_s apparente de végétation est alors donnée par :

$$\rho_s = (1 + H_u)\rho_b \quad (\text{I.1})$$

Ecrivons le bilan d'énergie dans la zone non encore enflammée Ω_v , zone qui est considérée comme un milieu poreux :

$$\underbrace{\rho_s \frac{dH_p}{dt}}_{\text{Élévation de l'enthalpie massique}} = \underbrace{-\text{div}(\mathbf{Q}_r)}_{\text{Apport de chaleur par rayonnement}} - \underbrace{\beta B \bar{h}(T_p - T_a)}_{\text{Pertes convectives}} \quad (\text{I.2})$$

où H_p est l'enthalpie massique, \mathbf{Q}_r le vecteur flux radiatif défini plus haut et $\frac{d}{dt}$ la dérivée particulaire. \bar{h} est le coefficient d'échange dû à la convection naturelle autour des com-

bustibles chauds et T_p est la température du combustible. La dérivée particulière s'écrit $\frac{dH_p}{dt} = \frac{\partial H_p}{\partial t}$, car les particules végétales sont immobiles.

Notons Φ le terme de gauche de l'équation précédente. Ce terme est relié à la température T_p et à l'humidité H_u du combustible végétal par la relation suivante :

$$\Phi = \begin{cases} \rho_s(C_s + H_u C_w) \frac{\partial T_p}{\partial t} & \text{si } T_p < T_{ev} \\ -\rho_s L_{ev} \frac{\partial H_u}{\partial t} & \text{si } T_p = T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \\ \rho_s C_s \frac{\partial T_p}{\partial t} & \text{si } T_p > T_{ev} \end{cases} \quad (I.3)$$

où C_s et C_w sont les capacités calorifiques respectivement du combustible et de l'eau, L_{ev} est la chaleur latente d'évaporation de l'eau et t est le temps. T_{ev} est la température d'évaporation de l'eau. Pratiquement $T_{ev} \cong 373K$. Nous ne tenons pas compte ici de la présence d'eau liée dans le végétal.

Notons que dans les bilans d'énergies explicités précédemment, nous avons implicitement omis la pression d'origine radiative par rapport à la pression hydrodynamique.

I.2 Relation algébrique entre température et enthalpie en avant du front du feu

La relation entre l'enthalpie et la température est la suivante :

$$\rho_s H_p = \begin{cases} \rho_s(C_s + H_u C_w)(T_p - T_a) & \text{si } T_p < T_{ev} \text{ et } H_u = H_{u0} \\ q_1 + \rho_s L_{ev}(H_{u0} - H_u) & \text{si } T_p = T_{ev} \text{ et } H_u \geq 0 \\ q_2 + \rho_s C_s(T_p - T_{ev}) & \text{si } T_p \geq T_{ev} \text{ et } H_u = 0 \end{cases} \quad (I.4)$$

où H_{u0} est l'humidité initiale du combustible, où q_1 et q_2 sont deux constantes qui sont obtenues par continuité de la fonction $H_p(T_p, H_u)$ et où nous avons choisi $H_p(T_a, H_u)$ comme enthalpie de référence. Alors :

$$\begin{cases} q_1 = \rho_s(C_s + M C_w)(T_{ev} - T_a) \\ q_2 = q_1 + \rho_s L_{ev} M_0 \end{cases} \quad (I.5)$$

Définissons enfin

$$q_i = q_2 + \rho_s C_s (T_{ig} - T_{ev}) \quad (I.6)$$

où T_{ig} est la température d'inflammation du combustible. L'inversion analytique de la relation (I.4) précédente conduit à :

$$T_p = \begin{cases} T_a + (T_{ev} - T_a) \rho_s H \\ T_{ev} q_1 \\ T_{ev} + \frac{(T_{ig} - T_{ev})(\rho_s H_p - q_2)}{q_i - q_2} \end{cases} \quad (I.7)$$

et

$$H_u = \begin{cases} H_{u0} & \text{si } \rho_s H_p < q_1 \text{ et } H_u = H_{u0} \\ H_{u0} + \frac{q_1 - \rho_s H}{\rho_s L_{ev}} & \text{si } q_1 \leq \rho_s H_p \leq q_2 \text{ et } H_u \geq 0 \\ 0 & \text{si } \rho_s H_p \geq q_2 \text{ et } H_u = 0 \end{cases} \quad (I.8)$$

Annexe I. Expression de l'enthalpie en fonction de la température

Annexe J

Organisation du programme numérique

J.1 Organisation du programme

Le logiciel est réparti en trois étages qui sont respectivement le préprocesseur, le processeur et le postprocesseur. Au deux premiers étages correspond le programme principal `maintest.cc` écrit en langage objet C++. Le postprocesseur est quant à lui géré par le programme principal `Feux.m` écrit en matlab car nous avons choisi d'utiliser ce logiciel comme outil de visualisation. Nous allons détailler ci-dessous la structure de ces trois parties successivement.

J.1.1 Préprocesseur

Le programme principal `maintest.cc` s'occupe de gérer le préprocesseur et le processeur. Il est constitué d'un objet forêt et des objets zone en feu, zone non brûlée et zone brûlée. La forêt possède la structure hiérarchique suivante: Le préprocesseur ainsi défini

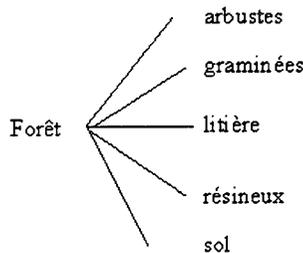


FIG. J.1 – Hiérarchie de l'objet forêt

est convivial. Il pose une dizaine des questions auxquelles l'utilisateur doit répondre.

J.1.2 Processeur

Le processeur est la partie motrice du code. Il est écrit en langage C++ pour avoir un bon compromis entre vitesse d'exécution et convivialité de développement.

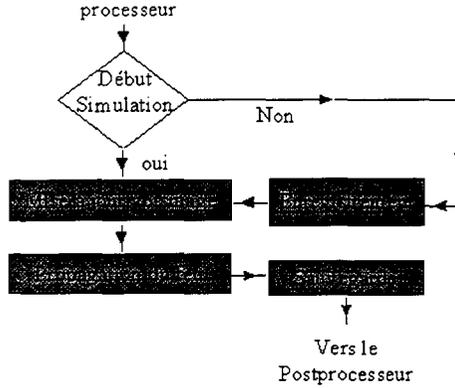


FIG. J.3 – *Algorithme du processeur*

J.1.3 Postprocesseur

Le programme matlab **Feux.m** est le programme d'initialisation du postprocesseur. Ce programme gère les résultats de simulation. La commande matlab **Feux** démarre celui-ci. L'environnement graphique du postprocesseur apparaît alors à l'écran. Il est constitué d'une fenêtre principale de commande et de visualisation représentée figure J.4 ainsi que des fenêtres graphiques annexes afin de préciser les données de la simulation, les courbes de grandeurs physiques en un point donné de la forêt (cf. figure J.4) et la légende de la visualisation de la propagation du feu (cf. figure J.5). Cet environnement se veut convivial.

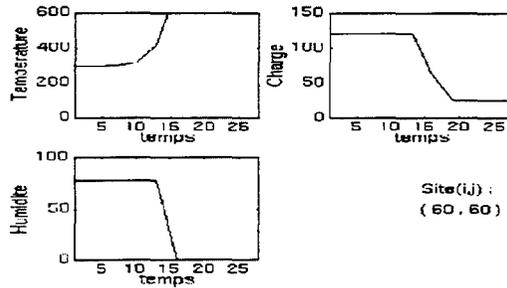


FIG. J.4 – *Fenêtre d'évolution des grandeurs au site (60, 60)*

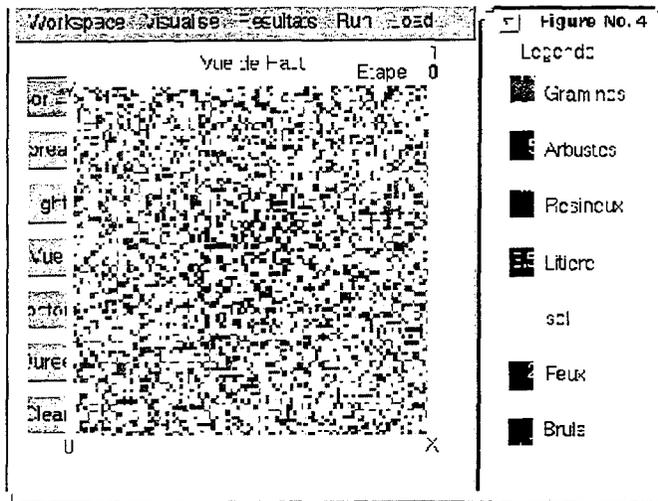


FIG. J.5 - Environnement du postprocesseur

Pour cela il est constitué de plusieurs *menus* déroulants dans sa partie supérieure et de *boutons* de contrôle de la forme de représentation des visualisations de la propagation du feu dans sa partie gauche (cf. figure J.5).



FIG. J.6 - Menus déroulants

Les menus déroulants sont des interruptions qui sont gérées par le programme **Vis.m**. Celui-ci est lancé à la fin du programme **Feux.m**. Il s'occupe aussi des boutons. Notons que certains boutons sont des bascules comme c'est le cas par exemple pour le bouton **or** qui permet de permuter entre deux jeux de couleurs différents notés respectivement **Color** et **Col3d** (cf. fig. J.7).



FIG. J.7 - Bascule de couleur

Le centre de la fenêtre d'environnement est constituée de la visualisation de la propagation du feu. Nous exploitons les données des trois fichiers **paramsim.dat**, **Visualise.dat**

et **Résultats.dat** créées par le processeur afin de représenter les résultats de simulation. Notre programme peut être exécuté indifféremment sur une station que sur un ordinateur PC.

Annexe K

Assimilation de données

Introduction

Dans cette annexe, nous confrontons le modèle de réaction diffusion que nous avons obtenu au chapitre 4 avec des résultats expérimentaux afin de montrer comment trouver un jeu de paramètres qui convient pour une situation de propagation du feu donné. Cette assimilation de donnée sera tout d'abord présentée puis on étudiera les résultats de celle-ci. Le but de ce chapitre n'est pas d'être exhaustif mais d'introduire le problème de l'assimilation de données, car cette notion est importante. C'est elle qui va en effet définir ce qui est important de mesurer lorsque l'on réalise une expérience. En retour, celle-ci jugera du caractère pertinent ou non du modèle de propagation envisagé vis-à-vis du choix d'expérience de propagation du feu.

K.1 Assimilation de données

K.1.1 Notions préliminaires

L'introduction de paramètres non justifiées ou de conditions initiales dans un modèle de feu de forêt est un problème similaire à celui rencontré en météorologie. On le nomme alors **assimilation de données**. Les différentes étapes de l'assimilation sont alors les suivantes :

- i) définir les paramètres d'état du modèle tels que la carte géographique, le combustible, le vent, etc. Ces paramètres sont les grandeurs d'entrée du modèle.
- ii) construire un modèle direct qui puisse simuler un feu de forêt.
- iii) définir les grandeurs de sortie du modèle telles que la surface de la zone brûlée, de la zone en feu, le champ de température, etc.
- iv) définir le critère d'assimilation : en quel sens est-ce que les grandeurs de sortie correspondent plus ou moins bien aux résultats de certaines expériences.
- v) Utiliser enfin une procédure d'optimisation afin de trouver les paramètres d'entrée du modèle qui conviennent le mieux vis-à-vis des expériences que l'on possède.

Notons que le modèle de feu de forêt, le modèle d'assimilation de données et un modèle de suppression du feu sont intimement liés. Le modèle d'assimilation de données a besoin

du modèle de propagation, le modèle de suppression du feu nécessite le modèle d'assimilation de données parce que l'intervention des pompiers du feu change les paramètres d'entrée du modèle de propagation du feu.

L'utilisation d'une procédure d'optimisation demande un très grand nombre de calculs par ce que le modèle direct doit alors être exécuté de nombreuses fois jusqu'à convergence. Nous devons donc avoir un modèle direct de simulation qui doit être le moins coûteux possible en temps de calcul et qui soit stable. De plus le code d'optimisation doit être global et doit pouvoir optimiser une fonction coût qui ne soit pas différentiable, car celle-ci est obtenue comme résultat d'un calcul numérique.

Le modèle de propagation de forêts que nous allons utiliser pour réaliser l'assimilation de données est le réseau d'automates cellulaires que nous avons étudié au paragraphe 5.2. Le code d'optimisation est un algorithme génétique qui donne des optima globaux. Cet algorithme est adapté pour des fonctions très irrégulières.

K.1.2 Choix de l'expérience

Les résultats qui sont présentés ici sont des résultats préliminaires. L'assimilation que l'on se propose de réaliser se fonde sur les résultats d'expériences de J.R. Curry [1] en 1938. Notons le manque important de résultats expérimentaux dans la littérature. La récente thèse de L. Naville [7] 1997 a contribué à réduire celle-ci.

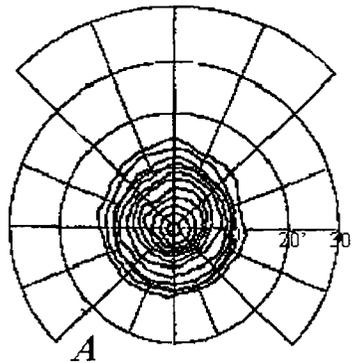


FIG. K.1 - Expérience de J.R. Curry

K.1.3 Choix de la fonction coût

La fonction coût Obj que l'on se propose de minimiser est le cumul temporel de la différence entre la surface brûlée et en feu, obtenue par notre modèle de propagation, et celle obtenue expérimentalement :

$$Obj = \int_0^T (\int_{S_{mod}(t) - S_{ex}(t)} dS) dt$$

Comme aucune quantité physique autre que des longueurs et des temps n'intervient dans le choix de définition de cette fonction coût, telle que des températures, des vitesses de vent ou une humidité, cette l'assimilation est purement géométrique.

Les paramètres d'entrée qui sont pris en compte sont la chaleur latente de vaporisation L_{ev} de l'eau contenue dans la végétation, l'énergie d'activation E_s de la pyrolyse de celle-ci. et les paramètres de la fonction de Green qui modélise le transfert par rayonnement : le coefficient d'absorption r_{o0} , la taille l_{ma} du voisinage et l'amplitude aa de la fonction de Green.

K.1.4 Algorithme d'optimisation

Nous avons choisi une procédure d'optimisation de type génétique fondée sur « the shuffled complex evolution strategy » (cf. O. Sero-Guillaume et al 1996 [10]). L'algorithme général est le suivant :

- 1) Des points sont générés de manière à avoir une disposition uniforme dans le domaine des paramètres d'entrée plausibles. Ceux-ci sont alors stockés dans un vecteur noté D .
- 2) Ranger ces points dans l'ordre croissant des valeurs associées de la fonction coût.
- 3) Faire une partition du domaine D en p sous domaines nommés complexes et notés A_1, \dots, A_p , ceux-ci comportant chacun m points.
- 4) Faire évoluer chaque complexe dits *Shuffle complexes*, i.e. remplacer A_1, \dots, A_p dans D . La population migre alors vers le minimum. La procédure 4 se termine si la taille du domaine D est devenue suffisamment petite. Sinon on retourne à l'étape 2.

L'évolution de la taille de la population peut être visualisée en dessinant les projections 2D de la population du domaine D aux différentes étapes de l'optimisation.

K.2 Résultats

Nous pouvons voir sur les figures K.2, K.3 et K.4 que la population converge vers un sel point. Le temps et l'échelle de longueur choisit dans le code numérique sont tels que la vitesse de propagation du front du feu sont les mêmes numériquement et expérimentalement. L'assimilation est intimement liée au modèle à causes de la nature des paramètres d'entrées du code et de sortie du code.

Choix du critère d'assimilation : Géométrique, physique (Champs de temperature ...)

Conclusion

L'assimilation de données que nous venons de réaliser peut être considérée comme satisfaisante car la différence entre la zone en feu et brûlée entre le modèle et l'expérience peut être réduite à moins de 1%. Ce résultat n'est cependant en aucun cas probant. L'assimilation de données dépend des données de terrain que l'on possède et aussi de manière crucial du modèle considéré. Le choix de la fonction coût s'en déduit.

L'assimilation de données pour les feux de forêt est un vaste domaine de recherche qu'il reste à exploiter pour la modélisation de la propagation des feux de forêt. Un modèle

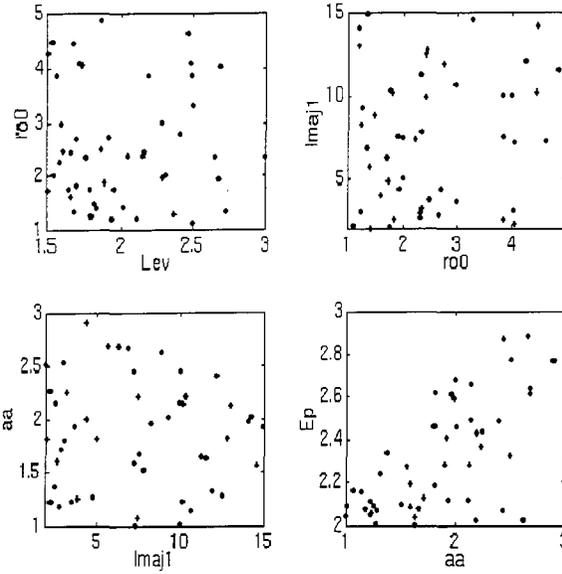


FIG. K.2 - Generation 11

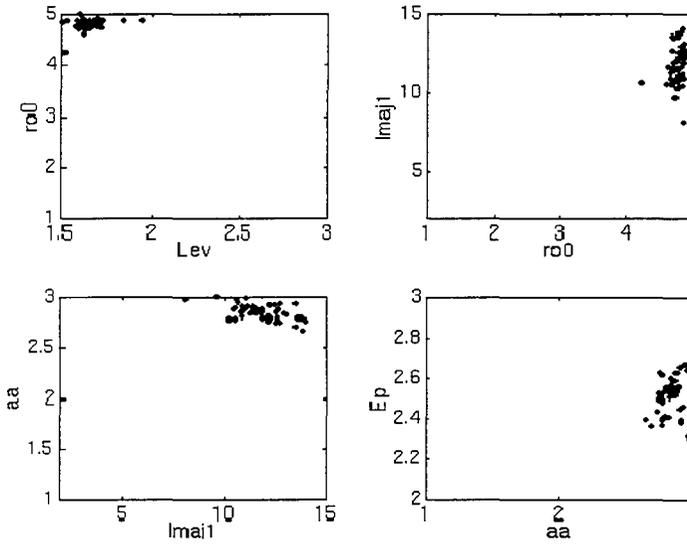
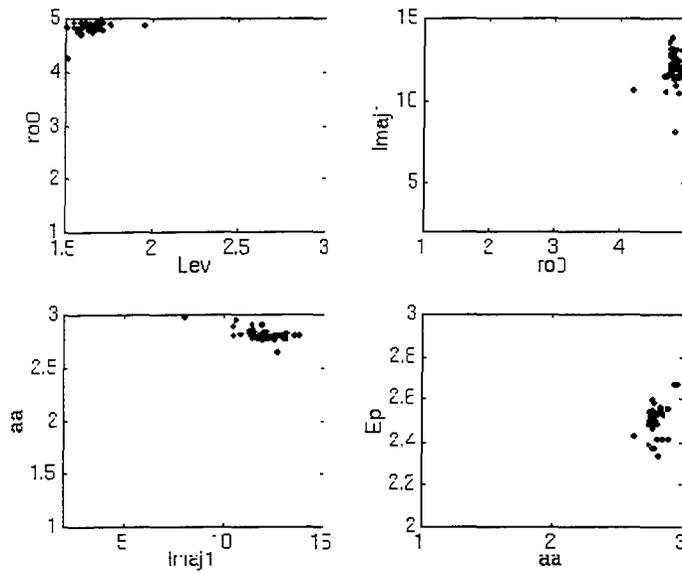


FIG. K.3 - Generation 24

FIG. K.4 - *Generation 32*

bien conçu pour évaluer les dommages du feu sur la végétation ne va pas nécessiter le même type de fonction coût qu'un modèle qui doit prédire la position du front de flamme comme c'est le cas pour notre étude.

Bibliographie

- [1] **Curry J.R.** and **Fons W.L.**, Rate of spread of surface fires in the Panderosa pine type of California, *J. Agric. Res.*, 1938, Vol. 57, No. 3, pp 239-267.
- [2] **Di Blasi C.**, Modeling and simulation of combustion process of charring and non-charring solid fuels, *Prog. Energy Combustion Sci.*, 1993, Vol. 19, pp. 71-104.
- [3] **Levy T.** and **Sanchez-Palencia E.**, On boundary conditions for fluid flow in porous media, *Int. J. Engng. Sci.*, 1975, Vol. 13, pp. 923-940.
- [4] **Marle C.M.**, On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media, *Int. J. Engng. Sci.*, 1982, Vol. 20, No. 5, pp. 643-662.
- [5] **Mees R.**, **Strauss D.** and **Chase R.**, Minimizing the cost of wildland fire suppression: a model with uncertainty in predicted flame length and fire-line width produced, *Can. J. For. Res.*, 1994, Vol. 24, pp. 1253-1259.
- [6] **Nahmias J.**, **Tephany H.** et **Guyon E.**, Propagation de la combustion sur un réseau hétérogène bidimensionnel, *Revue Phys. Appl.*, 1989, Vol. 24, pp. 773-777.
- [7] **Naville L.**, Etude expérimentale et modélisation de la propagation d'une flamme sur un combustible poreux: Applications aux feux de végétation, *Thèse de l'université Aix-Marseille II*, 1997.
- [8] **Peet G.B.**, The shape of mild fires in Jarrah forest, *Aus. Forestry*, 1967, Vol. 31, pp.121-127.
- [9] **Rothermel R.C.**, A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels, *USDA Forest Service*, 1972, Research paper INT-115, Ogden, Utah, USA, 40 p.
- [10] **Sero-Guillaume O.**, **Bernardin D.**, **Felici T.**, **Zouaoui D.** and **Antonicelli M.**, Optimal time re-entry of vehicles by asymptotic matching, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, Vol. 19, No. 1, pp. 223-230.
- [11] **Wilson R.A., Jr.**, A reexamination of fire spread in free-burning porous fuel beds, *USDA Forest Service*, 1982, Research paper INT-289, Ogden, Utah, USA, 28 pp.

Bibliographie

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur JOULAIN P., Directeur de Recherches, ENSMA Futuroscope,
Monsieur QUINTARD M., Directeur de Recherches, IMFT Toulouse.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur MARGERIT Jonathan

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une
thèse intitulée :

**"Modélisation et simulations numériques de la propagation de feux de
forêts."**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"MÉCANIQUE & ÉNERGÉTIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **22 Octobre 1998**

Le Président de l'I.N.P.L.,


J. HARDY


NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX





Résumé :

La prédiction de la propagation des feux de forêts consiste à trouver l'évolution du front du feu. Cette thèse reprend le modèle monodimensionnel de propagation du feu sous forme d'ellipses de Richards afin de trouver l'expression intrinsèque de la vitesse de ce front. Une formulation équivalente variationnelle de ce modèle en utilisant les principes de l'optique géométrique est aussi dérivée. Un modèle tridimensionnel de la propagation du feu grâce à une homogénéisation par prise de moyennes et à l'utilisation de la thermodynamique des processus irréversibles est alors obtenu. Une simplification de ce modèle, suivie d'une réduction bidimensionnelle sur la surface gauche du sol, nous conduisent alors à un modèle bidimensionnelle, qui tient compte des principaux paramètres de la propagation des feux de forêts. Celui-ci permet d'obtenir des formes de corrélations utilisées par le modèle des ellipses. Le caractère non local de l'intervention du flux radiatif en provenance de la zone en feu qui se trouve au-dessus de la végétation est alors introduit. Des simulations numériques, de ce modèle bidimensionnel de propagation du feu avec terme de rayonnement non local, ont enfin été réalisées.

Mots clés : Rayonnement, combustion, milieux poreux, frontières libres, systèmes complexes homogénéisation, thermodynamique des processus irréversibles, développements asymptotiques, automates cellulaires

Abstract :

The prediction of forest fire propagation consists in finding the motion of the forest fire front. This thesis deals with the Richards' one dimensional elliptical growth forest fire propagation so as to find an intrinsic expression of the fire front. An equivalent optical geometric variational formulation of this model is given too. A tridimensional model of forest fire propagation is then found thanks to an homogenisation by volume averaging and irreversible thermodynamic processes. Simplifications of this model followed by a reduction to the bidimensional soil surface leads to a bidimensional model, that deals with principal parameters of the propagation of forest fire. The shape of correlations used by the elliptical growth forest fire model is then deduced. The non local influence of the radiated flux issuing from fire area that is above the vegetation is then introduce too. Numerical simulations of this bidimensional model with non local radiation have been performed at least.

Key words : Radiation, combustion, porous media, free boundaries, complex systems homogenisation, irreversible thermodynamic processes, asymptotic expansions, cellular automata.