HAL
open science

# Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence

Marie-Odile Berger

## To cite this version:

Marie-Odile Berger. Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence. Informatique [cs]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1991. Français. NNT : 1991INPL012N . tel-01750975

**HAL Id: tel-01750975**

**https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750975v1**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

1360077934

**Institut National**
**Polytechnique de Lorraine**
**Inria Lorraine**

**Centre de Recherche en**
**Informatique de Nancy**

91 INPL 012 N

[M] 1991 BERGER, M.O

# Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le **6 février 1991**

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**
**(Spécialité Informatique)**

par

Marie-Odile Berger

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE NANCY

**Composition du jury :**

| | |
|---|---|
| *Président :* | Jean-Pierre FINANCE |
| *Rapporteurs :* | Nicholas AYACHE<br>Pierre LESCANNE |
| *Examinateurs :* | Philippe CINQUIN<br>Jean-Paul HATON<br>Henri MAITRE<br>Roger MOHR |

# Remerciements

*Cette thèse est pour moi l'occasion d'exprimer des remerciements à tous ceux qui m'ont conseillé et aidé à réaliser ce travail dans de bonnes conditions, et je suis heureuse aujourd'hui de remercier plus particulièrement :*

*Monsieur Roger Mohr, Professeur à l"institut Polytechnique de Grenoble, qui m'a proposé un sujet de recherche passionnant et m'a encadré et orienté tout au long de ces années de travail. Je lui suis particulièrement reconnaissante pour ses conseils, ses encouragements et sa confiance.*

*Monsieur Jean-Pierre Finance, Professeur à l'Université de Nancy I, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Monsieur Nicholas Ayache, Directeur de recherches à l'INRIA et Monsieur Pierre Lescanne, Directeur de recherches au CRIN, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de siéger à ce jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'intérêt dont ils ont fait preuve à l'égard de ce travail.*

*Messieurs Henri Maitre, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications à Paris et Philippe Cinquin, Professeur à l'Université Joseph Fourrier de Grenoble qui partagent mon intérêt pour les modèles actifs de contours et dont les remarques ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit.*

*Jean-Paul Haton, Directeur de recherches INRIA au CRIN, pour avoir accepté de siéger dans ce jury.*

*J'exprime des remerciements chaleureux à Yves Demazeau, chargé de recherche au LIFIA pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues ensemble à propos des modèles actifs ainsi qu'à toute l'équipe Vision du CRIN, notamment à Claude Inglebert.*

*Merci également à tous mes collègues et amis du CRIN, pour l'atmosphère de travail sympathique dont j'ai bénéficié, à mes camarades thésards Pierre Nugues, Quan Long, Yves Laprie, Stéphane Paris, Houda Chabbi, Anja Habacha, Bernard Waldmann.*

*Enfin, je tiens à remercier vivement toute ma famille pour les encouragements et le soutien moral qu'ils m'ont prodigués, sans lesquels je n'aurais pu terminer ce travail.*

# Table des matières


**1 Introduction** **1**

**2 Extraction d'indices et fonctions potentielles** **5**

2.1 Exemples d'utilisation de fonctions de coût en vision . . . . . 5

2.2 Fonctions de coût et régularisation . . . . . 6

2.3 L'adaptation des paramètres des fonctions de coût . . . . . 8

2.4 Applications des fonctions potentielles au problème de la navigation . . . . 9

**3 Les modèles élastiques en détection de contours** **13**

3.1 Les méthodes classiques de segmentation . . . . . 13

3.1.1 Les détecteurs classiques de contours . . . . . 15

3.1.2 Les masques en détection de contours . . . . . 15

3.1.3 Approximation et modèle en détection de contours . . . . . 16

3.1.4 L'étape de chaînage . . . . . 17

3.1.5 Détection de régions . . . . . 19

3.1.6 Intégration contours/régions . . . . . 21

3.1.7 Discussion . . . . . 22

3.2 La formulation du problème de détection de contours en terme d'optimisation et le modèle des contours actifs . . . . . 23

3.2.1 Motivations . . . . . 23

3.2.2 Forme générale . . . . . 23

3.2.3 Les familles de fonctionnelles utilisées en détection de régions . . . . 25

3.2.4 Détection de contours et modèles actifs . . . . . 26

3.2.5 Le modèle des SNAKES de Kass Witkin et Terzopoulos . . . . . 31

3.2.6 Epilogue . . . . . 32

**4 Les paramètres de la fonctionnelle** **35**

4.1 Un modèle de spline . . . . . 35

4.2 Quelques études de comportement . . . . . 36

4.2.1 Les équations d'Euler du calcul des variations . . . . . 36
4.2.2 Application à l'énergie interne . . . . . 36
4.2.3 Propriétés intrinsèques du modèle interne . . . . . 38
4.2.4 Influence de $\alpha$ et $\beta$ . . . . . 40
4.3 Discussion du critère . . . . . 43
4.3.1 Un critère normalisé . . . . . 43
4.3.2 La dépendance du paramétrage . . . . . 43
4.3.3 La détection des coins . . . . . 44
4.3.4 Plaidoyer pour une détermination adaptative des paramètres . . . . 47
4.4 Le choix du paramètre de régularisation . . . . . 48
4.5 Quelques conclusions... . . . . 50

**5 Aspects numériques 51**
5.1 Optimisation de la fonctionnelle . . . . . 51
5.1.1 Problèmes généraux de la minimisation . . . . . 51
5.1.2 La discrétisation du problème . . . . . 55
5.1.3 Le schéma itératif de résolution . . . . . 59
5.2 Étude de la convergence . . . . . 62
5.2.1 L'importance de l'initialisation . . . . . 63
5.2.2 La critère d'évaluation . . . . . 64
5.2.3 Les facteurs d'instabilité . . . . . 66
5.2.4 Détermination de $\gamma$ . . . . . 69
5.3 Bilan . . . . . 70
5.3.1 Au niveau du modèle . . . . . 70
5.3.2 Au niveau numérique . . . . . 71

**6 Applications privilégiées des contours actifs 73**
6.1 Les modèles d'inspiration élastique en vision . . . . . 73
6.2 Applications privilégiées . . . . . 76
6.3 Approches connexes . . . . . 80
6.4 Pour conclure . . . . . 81

**7 Extension du modèle des contours actifs par adjonction de méthodes locales. 83**
7.1 Pourquoi introduire des méthodes locales ? . . . . . 83
7.2 Méthode de croissance. . . . . 83
7.2.1 Principe et algorithme . . . . . 83

7.2.2 Exemples de croissance du snake . . . . . 86
7.2.3 Stratégie multisnake . . . . . 86
7.2.4 Discussion . . . . . 90
7.2.5 Améliorations: méthode de la meilleure prolongation . . . . . 92
7.2.6 Bilan . . . . . 94
7.3 Vers une adaptation dynamique des paramètres du snake . . . . . 95
7.3.1 Motivations . . . . . 95
7.3.2 Régularisation des points sur la courbe . . . . . 96
7.3.3 Quel paramètre pour quelle déformation ? . . . . . 99
7.3.4 Expansion et rétraction . . . . . 102
7.3.5 Résultats . . . . . 103
7.3.6 Vers une utilisation dynamique des déformations . . . . . 104
7.3.7 Discussion. Travaux connexes . . . . . 105

**8 Le logiciel réalisé** **109**
8.1 Généralités . . . . . 109
8.2 Les fonctions . . . . . 111

**9 Conclusion** **115**

**A Détermination des valeurs propres de la matrice concernant les snakes fermés** **117**

**B Justification du critère d'évaluation** **121**

**Bibliographie** **125**

# Liste des Figures


1.1 Une image et la nappe d'intensité associée. . . . . 2

2.1 Application de la théorie des potentiels en robotique [Newman 87] . . . . . 11

3.1 Profils théoriques de contours . . . . . 14
3.2 Profils d'une ligne d'intensité pour une image réelle . . . . . 14
3.3 Points de contraste [Ballard 82]. . . . . 18
3.4 Effet du seuillage [Canny 86]. . . . . 19
3.5 Profil de l'intensité. . . . . 21
3.6 Vallées de potentiel . . . . . 28
3.7 Champ de forces généré par l'image . . . . . 28
3.8 Evolution d'un contour actif. . . . . 29
3.9 Visualisation des étapes intermédiaires. . . . . 30

4.1 Utilisation de la tendance naturelle du snake à la rétraction . . . . . 38
4.2 Influence des conditions aux limites $\alpha = 0$, $\beta = 1$ . . . . . 41
4.3 Influence du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ . . . . . 42
4.4 Apparition et disparition de points anguleux. . . . . 46
4.5 Evolutions différentes en fonction des caractéristiques élastiques : (a) $\alpha = 1, \beta = 1$ (b) $\alpha = 5, \beta = 1$ . . . . . 48

5.1 Exemple de minimum non représentatif. . . . . 51
5.2 Problèmes de stabilité [Bakhvalov 73] . . . . . 52
5.3 Fonctionnement de l'algorithme GNC. . . . . 54
5.4 Position d'equilibre apparent atteint par un snake. . . . . 63
5.5 Evolution d'un snake après 0, 20 et 60 itérations. . . . . 64
5.6 Evolution de l'énergie au cours du temps. . . . . 64
5.7 Détermination du voisinage du snake. . . . . 66
5.8 Phénomène d'agglomération des points. . . . . 66

5.9 Problèmes de la complétion . . . . . 67
5.10 Oscillations d'un contour actif. . . . . 68
5.11 Exemples de positions stables non satisfaisantes. . . . . 70
5.12 Courbe présentant des vitesses d'avancée différentes. . . . . 72

6.1 Utilisation du matching élastique en reconnaissance de caractères [Burr 81b] 75
6.2 Stéréovision stochastique. . . . . 76

7.1 Mécanisme de croissance du snake . . . . . 84
7.2 Evaluation d'une extension. . . . . 85
7.3 Phase d'initialisation de la méthode de croissance. . . . . 86
7.4 Quelques étapes de la croissance du snake. . . . . 87
7.5 Croissance du snake sur des images d'angiographie. . . . . 87
7.6 Croissance du snake à partir d'une initialisation quelconque : . . . . . 88
7.7 Suivi de formants utilisant la méthode multisnake. . . . . 89
7.8 Cas d'échec de la méthode de croissance. . . . . 92
7.9 Utilisation de la méthode de la meilleure prolongation. . . . . 93
7.10 Partie du snake réévaluée pour la méthode de la meilleure prolongation. . . 94
7.11 Effet du potentiel de régularisation. . . . . 98
7.12 Comparaison des énergies internes après plusieurs itérations. . . . . 98
7.13 Comparaison de la distribution des points avec la méthode classique (a) et régularisante (b). . . . . 99
7.14 Exemples de rétraction. . . . . 100
7.15 Exemples d'expansion. . . . . 100
7.16 Profil de la courbe des valeurs propres pour différentes valeurs de $\alpha$. . . . . 101
7.17 Expansion régulière du snake. . . . . 102
7.18 Expansion d'un contour actif. . . . . 106
7.19 Expansion sur des cellules de ligneux. . . . . 107
7.20 Rétraction régulière d'un contour actif. . . . . 107
7.21 Stratégie de déformations. . . . . 107
7.22 Détection des sinuosités d'une aile.... . . . . 108

8.1 Le logiciel . . . . . 110

B.1 Justification du critère : les cas possibles . . . . . 122

# 1
# Introduction

L'homme poursuit depuis longtemps le rêve de concevoir un robot doté des mêmes capacités que lui, aussi bien au niveau de la perception (parole, vision) qu'au niveau de sa capacité de raisonnement.

La vision par ordinateur, qui s'est considérablement développée à partir des années soixante-dix dès que l'on a pu disposer de caméras fiables et de matériel informatique performant, vise à doter une machine des immenses possibilités de la perception visuelle que l'on peut schématiquement résumer en quelques mots : reconnaitre, décrire, interpréter, apprendre. L'objectif à long terme est donc de permettre à un robot de reconnaître des objets de son environnement, de se repérer dans cet environnement et également de découvrir et d'apprendre la structure d'objets inconnus ayant été ajoutés.

Les données utilisées sont issues de capteurs d'origines diverses telle que caméra CCD, télémètre laser, RMN... et forment ce qu'il est convenu d'appeler une image, c'est-à-dire une matrice de niveaux de gris, de couleurs, de distance ou d'énergie. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons seulement aux images à niveau de gris qui sont généralement très bruitées comme l'atteste la figure 1.1.

Le processus de reconnaissance débute par ce qu'il est convenu d'appeler *l'extraction d'indices* qui consiste à mettre en évidence les indices images fiables, c'est-à-dire les structures significatives de l'image. La phase de segmentation [Canny 86], [Deriche 87a], [Castan 87] débute l'étape de bas niveau en détectant les points de l'image susceptibles d'appartenir à un contour. Ces points sont ensuite chainés [Giraudon 87] pour former les chaînes de contour. Il faut cependant noter que cette phase de segmentation, sur laquelle vont s'appuyer tous les mécanismes de reconnaissance, est rendue très délicate en raison du bruit très fortement présent dans les images.

Les courbes étant finalement des entités difficiles à manipuler, il s'avère généralement nécessaire de recourir à des primitives plus simples et d'approximer les lignes de contour par une suite de segments. C'est à partir de cette représentation très simplifiée de l'image que commence l'étape d'interprétation visant le plus souvent à mettre en correspondance les données observées avec divers modèles d'objets connus par le système [Ayache 86]. Cependant, puisque les données, même segmentées, sont encore entachées de bruit, l'étape de mise en correspondance procède à partir des données les plus significatives ou même

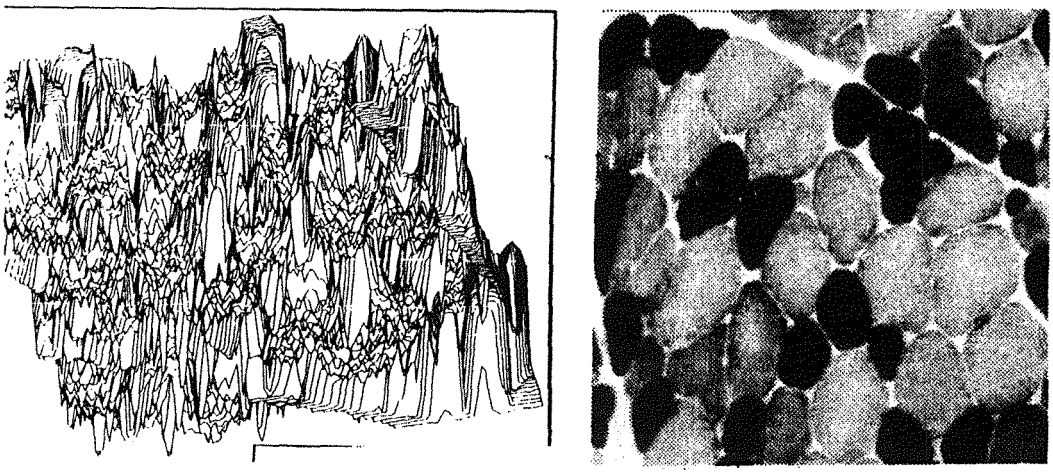

**Figure 1.1.** Une image et la nappe d'intensité associée.

à partir de groupements perceptuels significatifs [Mohan 89], [Shaashua 88], [Ahuja 89] [Quan 88]. Nous avons présenté ici les trois phases d'extraction d'indices, de structuration d'indices et de mise en correspondance comme trois opérations séquentielles. En pratique, l'incertitude subsistant sur les indices de bas niveau rend nécessaire une coopération entre ces différentes étapes permettant de guider les étapes de bas niveau par des hypothèses ou des connaissances sur le niveau supérieur.

Actuellement, un des centres d'intérêt de la vision par ordinateur concerne l'apport de la vision active dans le dispositif d'interprétation. L'analyse de séquences d'images obtenues en déplaçant le robot dans son environnement permet en effet de fusionner de multiples informations concernant un indice [Ayache 87], de récupérer des informations de profondeur, de surface [Blake 90], [Arbogast 90] et bien sûr de mouvement [Rives 87], [Aloimonos 88]. Au-delà des techniques spécifiques à une application, la prise en compte de séquences d'images permet de faire décroître l'incertitude souvent fortement présente lorsqu'on extrait un indice à partir d'une seule image (lorsque c'est possible) et également d'éviter d'avoir à faire des hypothèses trop fortes sur l'indice cherché. On cherche en effet souvent à compenser le manque d'informations par des hypothe ses sur la nature de l'indice telles que sa différentiablité s'il s'agit de courbes, sa compacité s'il s'agit de formes et plus généralement par des hypothèses de régularité.

Le travail réalisé dans cette thèse se situe résolument dans la partie bas-niveau de la vision par ordinateur et plus particulièrement dans la phase de segmentation destinée à extraire les lignes significatives de l'image. Cette étape, traditionnellement traitée de

manière très locale, présente l'inconvénient majeur de ne pas considérer un contour en tant que courbe mais plutôt comme une juxtaposition de points satisfaisant un certain critère.

Pour ces raisons, Kass, Witkin et Terzopoulos [Kass 88] ont proposé le concept de *modèles actifs* consistant en une reformulation du principe de détection de contours basée sur la théorie physique des potentiels et permettant d'inclure une certaine forme de description du type de contour cherché. Le principe est de faire évoluer une courbe vers le contour le plus proche sous l'effet de forces créees par l'image, ce qui justifie le terme de détection *active.*

Ces modèles actifs de contour, bien connus également sous le nom de *snake*, constituent un outil nouveau dont il faut explorer les possibilités, relever les limites, délimiter le cadre des compétences. C'est ce que nous nous sommes attachés à faire dans cette thèse, sans viser aucune application particulière, selon le déroulement suivant :

Le chapitre 2 présente un rapide tour d'horizon concernant l'extraction d'indices pertinents à l'aide de fonctions de coût ou de potentiel et cerne les problèmes fréquemment rencontrés à cette occasion.

Le chapitre 3 concerne plus particulièrement l'utilisation de la minimisation de fonctions potentielles dans le cadre de la détection de contour. La première partie est consacrée à un état de l'art en matière de détection et les faiblesses des méthodes usuelles sont mises en évidence. La suite de ce chapitre est consacrée à la formulation du problème de la détection en terme d'optimisation et à la présentation du modèle des contours actifs.

Comme beaucoup d'utilisateurs en ont fait l'expérience, l'usage des snakes requiert un certain doigté quant à la détermination des valeurs des nombreux paramètres du modèle et le choix de l'initialisation de la méthode est également prépondérant pour la qualité des résultats. Afin de mieux comprendre le comportement des contours actifs et l'influence des divers constituants du modèle, le chapitre 4 présente une étude mêlant des aspects théoriques et des aspects plus qualitatifs sur l'influence des paramètres et le comportement intrinsèque du snake.

Après avoir caractérisé un indice par le minimum d'une fonction, il reste, et ce n'est pas le plus facile, à effectuer le calcul numérique du minimum. Le chapitre 5 est consacré à ce problème et décrit d'abord les solutions envisagées dans la littérature. Le chapitre 5 sont plus techniques et concernent respectivement l'étude de l'influence des paramètres du modèle et le processus de résolution numérique du problème ainsi que les limitations et les problèmes afférents à l'utilisation de ce modèle.

Le chapitre 6 propose un état de l'art des modèles d'inspiration élastique.

Le chapitre 7 est quant à lui consacré à l'introduction de méthodes locales destinées à s'affranchir d'un certain nombre de contraintes exposées dans les chapitres 4 et 5. Ces méthodes permettent d'améliorer la convergence du procédé et contribuent à le doter de possibilités de déformations assurant une détection de qualité.

La description du logiciel et de ses fonctionalités termine cette thèse.

# 2
# Extraction d'indices et fonctions potentielles

Ce chapitre est consacré à la détection *d'indices images* par le biais de fonctions potentielles (souvent appelées fonctions de coût ou fonctions d'énergie), c'est-à-dire de fonctions à valeur réelle dont le minimum caractérise l'indice cherché. A travers quelques exemples significatifs de l'usage des fonctions de coût en vision, nous illustrons les formes courantes de ces fonctions, les problèmes posés par le choix des poids des différents constituants. Notre attention se portera plus particulièrement sur les fonctions potentielles issues de la théorie de la régularisation dont nous reparlerons souvent dans la suite de cette thèse.

## 2.1 Exemples d'utilisation de fonctions de coût en vision

Il est très fréquent en vision par ordinateur de recourir à l'évaluation d'un indice par le biais de fonctions potentielles. Les applications vont de l'estimation des paramètres d'un modèle par une fonction de type moindre carrés à l'estimation d'indices complexes grâce à des méthodes de régularisation [Lowe 90], [Ayache 86], [Tikhonov 76], [Poggio 85],[Suter 88] en passant par les méthodes diverses de classification [Wallace 90] et les méthodes de planification utilisées en robotique [Khatib 86].

L'utilisation fréquente de telles fonctions pour l'estimation de paramètres d'un modèle est rendue nécessaire par la présence du bruit entachant à un degré plus ou moins important les indices extraits de l'image. Il est donc exclu la plupart du temps de procéder à des résolutions exactes d'équations exprimant le paramètre $p$ caractérisant le modèle en fonction des indices extraits $a$ par une relation $f(p,a) = 0$ et ceci d'autant plus que pour pallier l'incertitude on recourt souvent à de multiples mesures $a_i$ directes ou indirectes du paramètre dans plusieurs images. L'intégration de ces différentes mesures dans le processus d'estimation du paramètre est alors généralement réalisée par une résolution de type moindre carrés où l'on cherche à minimiser la fonction $\sum_i ||f_i(p,a_i)||^2$. Prenons un exemple [Faugeras 86] : le problème de trouver le déplacement défini par une rotation et une translation $(R.T)$ permettant de passer *au mieux* d'un ensemble de points $(x_i)$ à un ensemble de points supposés homologues $(x'_i)$ peut se mettre sous la forme du problème

de minimisation :

$$Minimum_{R,T} \sum_i ||Rx_i + T - x'_i||^2 \tag{2.1}$$

Chaque terme de cette somme peut évidemment être pondéré de manière à accorder plus d'importance à certaine mesures qu'à d'autres en fonction de l'incertitude existant sur ces mesures, ce qui peut être fait en recourant par exemple à une distance de Mahalanobis [Ayache 87]. Ceci pose d'ailleurs le problème épineux du choix des coefficients de pondération des fonctions de coût qui influence très fortement l'optimum recherché...

De manière générale, la plupart des fonctions de coût expriment un critère d'erreur traduisant l'adéquation entre modèle théorique et données, cette erreur pouvant être formulée de manière probabiliste.

Jusqu'à présent, les fonctions de coût que nous avons envisagées traduisaient seulement la concordance entre le modèle et les indices extraits sans imposer aucune restriction sur la nature des paramètres du modèle. De telles contraintes peuvent cependant s'avérer nécessaire comme l'avait montré Montanari [Montanari 71] dans le cadre de la recherche de courbes foncées et assez régulières dans une image d'intensité $I$. La fonction de coût à minimiser, ici appelée fonction de mérite, était de la forme

$$g(z_1, \ldots, z_n) = -\sum_{i=1}^{i=N} I(z_i) + q(\sum_{i=2}^{i=N-1} (d(z_{i+1}, z_i) - d(z_i, z_{i-1}))\ mod\ 8) \tag{2.2}$$

où $z_1, \ldots, z_n$ représente les points de la courbe à déterminer et où $d(z_i, z_{i+1})$ est la pente du segment$[z_i, z_{i+1}]$ codée selon les codes de Freeman. Le second terme de l'énergie visait donc à produire des séquences $z_{i-1}, z_i, z_{i+1}$ présentant le moins de variation possible de la pente, c'est-à-dire une courbe $z_{i-1}, z_i, z_{i+1}$ la plus lisse possible.

Cet exemple constitue une petite illustration de la théorie beaucoup plus générale de la régularisation que nous allons exposer maintenant.

## 2.2 Fonctions de coût et régularisation

Lorsqu'on souhaite résoudre un problème mathématique de manière informatique, il est important de savoir si la solution au problème posé est unique et si cette solution est stable vis à vis de petites variations des données initiales. Ce dernier point est fondamental puisqu'il est lié à la possibilité d'utiliser correctement des méthodes numériques pour résoudre le problème à partir de données initiales qui sont généralement approchées. Les problèmes satisfaisant ces propriétés sont dits **bien-posés**. Plus précisément, d'après Tikhonov [Tikhonov 76], un problème consistant à chercher la solution $z$ à partir des données initiales $u$, $z$ et $u$ étant liés par une relation $R(z) = u$, est bien posé au sens d'Hadamard si

1. Pour tout $u$, il existe une solution $z(u)$ unique.

2. La solution dépend continuement des données :
   pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta$ tel que $d(u_1, u_2) < \delta$ entraine $d(z_1, z_2) < \epsilon$ [1]

Qu'en est il des problèmes principaux de la vision ? Appartiennent-ils à la classe enviée des problèmes bien-posés ? La réponse à cette question est malheureusement négative [Poggio 85] : segmentation, shape from shading [2], calcul du flot optique, ... sont des problèmes mal posés. Prenons quelques exemples : la segmentation est un problème mal-posé car la différentiation, qui constitue la pierre d'angle de la segmentation, est un problème mal posé (on peut toujours trouver deux fonctions aussi proches que l'on veut dont les dérivées soient distantes d'une constante donnée à l'avance); la détermination du flot optique est aussi un problème mal posé car la condition d'unicité n'est pas remplie : on ne peut en effet retrouver la composante tangentielle du champ des vitesses le long d'un contour.

La classe des problèmes mal-posés a longtemps été considérée comme dépourvue d'utilité; mais on a pris conscience au fil du temps qu'un problème était souvent mal posé parce qu'on s'intéressait à un ensemble de solutions beaucoup trop vaste, alors que, dans la plupart des cas, la nature même des mesures ou de l'expérimentation physique conduisant au problème imposait des conditions naturelles supplémentaires sur la solution.

La théorie de la régularisation vise précisément à transformer un problème mal-posé en un problème bien-posé en imposant des connaissances a priori permettant de restreindre l'espace de recherche des solutions. Les méthodes classiques font appel à des stabilisateurs de la forme $||P(z)||^2$ où la relation $P(z) = 0$ caractérise les propriétés supplémentaires de $z$ qui sont en général des propriétés de régularité. Deux méthodes sont majoritairement utilisés

1. Parmi les $z$ satisfaisant $||R(z) - u|| < \epsilon$, trouver $z$ minimisant $||P(z)||$. La valeur de $\epsilon$ est dictée par les l'erreur sur les données.

2. Trouver $z$ minimisant $||R(z) - u||^2 + \lambda||P(z)||^2$

La première solution répond mieux au problème posé mais elle est délicate et coûteuse à mettre en œuvre. La seconde solution est en général plus facile à mettre en œuvre mais elle ne réalise finalement qu'un compromis entre la régularité de la solution et son adéquation aux données, l'ampleur du compromis étant gouvernée par la constante de régularisation $\lambda$. Cette valeur mesure en fait le niveau de lissage toléré sur les données . Des méthodes de détermination automatique de $\lambda$ existent [Tikhonov 76] mais elles concernent surtout les problèmes dans lesquels il est facile d'estimer la différence entre la valeur théorique et la valeur courante de l'estimation de la solution (comme pour les systèmes linéaires par exemple) et elles sont généralement très coûteuses à mettre en œuvre. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

Revenons aux problèmes spécifiques à la vision et aux types de stabilisateurs mis en œuvre. Dans le cadre des applications où l'entité cherchée est une courbe, comme par

1. ce qui ne signifie pas que la solution est robuste au bruit.
2. Traduction approximative: Reconstruction à partir d'ombrage

exemple en complétion de contours ou dans l'application de Montanari citée plus haut, le stabilisateur utilisé $\int v''(s)^2 ds$ (où $v$ est un paramétrage de la courbe cherchée) sert à imposer des contraintes sur la courbure de la solution de manière à éviter des solutions trop tourmentées [Bruckstein 90],[Ullman 76], [Young 74].

S'agissant de reconstruction 3D de surface $z = f(x, y)$ [Grimson 81], l'attitude courante est de supposer que la surface à reconstruire est régulière sauf mention explicite du contraire et le stabilisateur utilisé $\int [z_{xx}^2 + 2z_{xy}^2 + z_{yy}^2]^2$ traduisant l'écart entre la surface et son plan tangent, privilégie les surfaces les moins bosselées possibles. Pour de plus amples informations sur les problèmes mal-posés et sur les stabilisateurs utilisés, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Tikhonov 76], [Poggio 84], [Suter 88], [Yasumoto 86].

## 2.3 L'adaptation des paramètres des fonctions de coût

Revenons maintenant sur la détermination du paramètre de régularisation et plus généralement sur le problème du choix des paramètres de fonctions de coût de la forme $f(z) = \sum_i \alpha_i f_i(z)$. Le contexte, certaines propriétés des données où le rapport signal/bruit peuvent servir à déterminer les poids. De telles connaissances ne sont cependant pas toujours disponibles et il faut alors recourir à d'autres techniques. Nous présentons ici succintement deux méthodes : la méthode *mini-max* [Gennert 88] et les méthodes de validation croisée [Girard 87].

### Méthode min-max [Gennert 88]

Considérons la cas d'une fonction de coût $f_\lambda(z) = \lambda f_1(z) + (1 - \lambda) f_2(z)$, où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions de coût et où $\lambda \in [0, 1]$.

Pour chaque $\lambda$, notons $e^*(\lambda)$ la valeur de $z$ fournissant le minimum de $f_\lambda$. On peut montrer que cette fonction est concave est admet donc un seul maximum. La solution préconisée est de choisir ce maximum comme valeur optimale $\lambda^*$, ce qui constitue, en l'absence d'informations extérieures, un moyen d'éviter une sur-représentation de l'un des termes de la fonction. Cette méthode est évidemment coûteuse puisqu'elle nécessite de calculer le minimum de $f_\lambda$ pour de nombreuses valeurs de $\lambda$ afin de déterminer le maximum de $e^*$.

### Méthodes de validation croisée

Le principe de validation croisée [Girard 87], bien que d'usage peu fréquent en vision, est utilisé depuis une dizaine d'années pour déterminer la valeur du paramètre de régularisation dans le cas où le traitement numérique est linéaire c'est-à-dire que si $Y$ est le vecteur de données et $Y_\lambda$ la solution pour le paramètre $\lambda$, alors on a $Y_\lambda = A_\lambda Y$.

La méthode de validation croisée consiste comme son nom l'indique à valider une valeur de $\lambda$ en utilisant une partie des données pour calculer la solution pour un $\lambda$ donné

et en utilisant les reste des données pour voir si la solution trouvée est conforme. Plus précisément, supposons que l'on veuille déterminer une courbe approchant au mieux un ensemble de points $\{M_i(x_i, y_i)\}$. Si on note $f_\lambda^k$ la solution obtenue pour $\lambda$ donné en oubliant la donnée $M_k$ , alors la quantité $f_\lambda^k(x_k) - y_k$ est une mesure de la validité du paramètre $\lambda$. La validation croisée consiste alors à choisir $\lambda$ minimisant la moyenne de ces erreurs

$$minimum_\lambda \sum_i [f_\lambda^i(x_i) - y_i]^2 \tag{2.3}$$

Par rapport à l'approche précédente, cette méthode est basée sur une véritable prise en compte de la conformité du résultat vis-à-vis des données mais elle ne peut s'appliquer que si l'on est capable de mesurer l'écart entre solution estimée et solution théorique. Dans le cas d'une minimisation conduisant à une résolution itérative, il n'est pas toujours facile d'apprécier à quelle distance l'estimation obtenue se situe du minimum...

Après ces généralités, nous allons nous attacher à l'étude d'un exemple, celui de la navigation en robotique, résolu par une méthode de potentiel et très significatif des techniques et problèmes inhérents à ce type de méthode.

## 2.4 Applications des fonctions potentielles au problème de la navigation

Etant donné un robot ou un bras manipulateur situé dans un environnement parsemé d'obstacles, une des tâches essentielle en robotique est de déterminer le chemin le plus court possible pour aller d'un point $A$ donné à un point $B$ donné sans heurter le moindre obstacle. La plupart des algorithmes opéraient trop localement dans la mesure où ils étaient essentiellement basés sur l'évitement de collisions. L'introduction des fonctions potentielles a permis d'apporter un contrôle de plus haut niveau au processus de génération de trajectoire [Khatib 86], [Newman 87]. L'environnement du robot est décrit par une fonction potentielle induisant un champ de forces ainsi défini : le robot évolue donc dans un champ de forces où l'objectif à atteindre constitue un pôle attractif simulé par une force de type ressort: $U_{but} = \frac{1}{2}k(x - B)^2$ et où les obstacles sont des surfaces simulées par un potentiel en $\frac{1}{r^2}$. Le champ de potentiel est ainsi minimal là où il n'y a pas d'obstacles à proximité et les chemins possibles apparaissent comme les vallées de ce potentiel.

Un chemin possible est un ensemble $x$ de points indépendants décrivant les positions successives du robot. Le problème se ramène donc à trouver un chemin $x$ amorcé en $A$ minimisant $T - U$ où $T$ est l'énergie cinétique de la courbe. Quelques aménagements de la méthode ont été nécessaires notamment pour éviter que le point but $B$ n'exerce une trop grande influence en provoquant une agglomération de points dans son voisinage. Une force de la forme $-kx^{\cdot}$ a donc été ajoutée pour stabiliser le processus.

Quelles sont les conclusions de cette approche ? L'utilisation de potentiel semble bien être une idée séduisante en matière de navigation. Cependant, comme le fait remarquer Khatib, la complexité des situations pouvant être résolues par ce type de méthodes est

assez limitée. En effet, lorsque l'environnement devient encombré, le potentiel global qui est la somme de tous les potentiels dus aux obstacles n'a plus une forme aussi claire que lorsque quelques obstacles sont présents et les vallées caractérisant les chemins privilégiés ne sont plus aussi marquées. Dans un environnement confus, la courbe $x$ peut donc se trouver bloquée dans un minimum local. On peut cependant conclure que la méthode des potentiels peut fournir une vue macroscopique du chemin à emprunter qui peut être couplée en cas de problèmes avec des méthodes locales d'évitement de collisions.

Cet exemple montre bien que le choix d'une fonction potentielle est cruciale et que l'addition de termes d'énergie caractérisant chacun un morceau de l'environnement n'est pas forcément une bonne solution. D'ailleurs Newman [Newman 87] préconisait plutôt l'usage d'une fonction potentielle qui ne soit pas additive mais définie en un point comme le maximum des potentiels en ce point. Cette solution semble d'ailleurs assez bien adaptée puisqu'elle a le mérite, à la différence de la solution additive, de conserver les vallées situées entre des obstacles dans le potentiel général (Fig. 2.1.a). Afin d'illustrer les possibilités des fonctions potentielles, terminons par la figure (Fig. 2.1.b) qui montre un résultat très intéressant obtenu par Newman dans le cadre de la simulation de l'interception d'une cible par un robot manipulateur : le parcours du projectile à intercepter est figurée à l'aide des petis carrés noirs; les lignes brisées issues de $A$ montrent l'évolution du bras manipulateur pour intercepter le projectile dans un environnement avec obstacles (les gros carrés noirs).

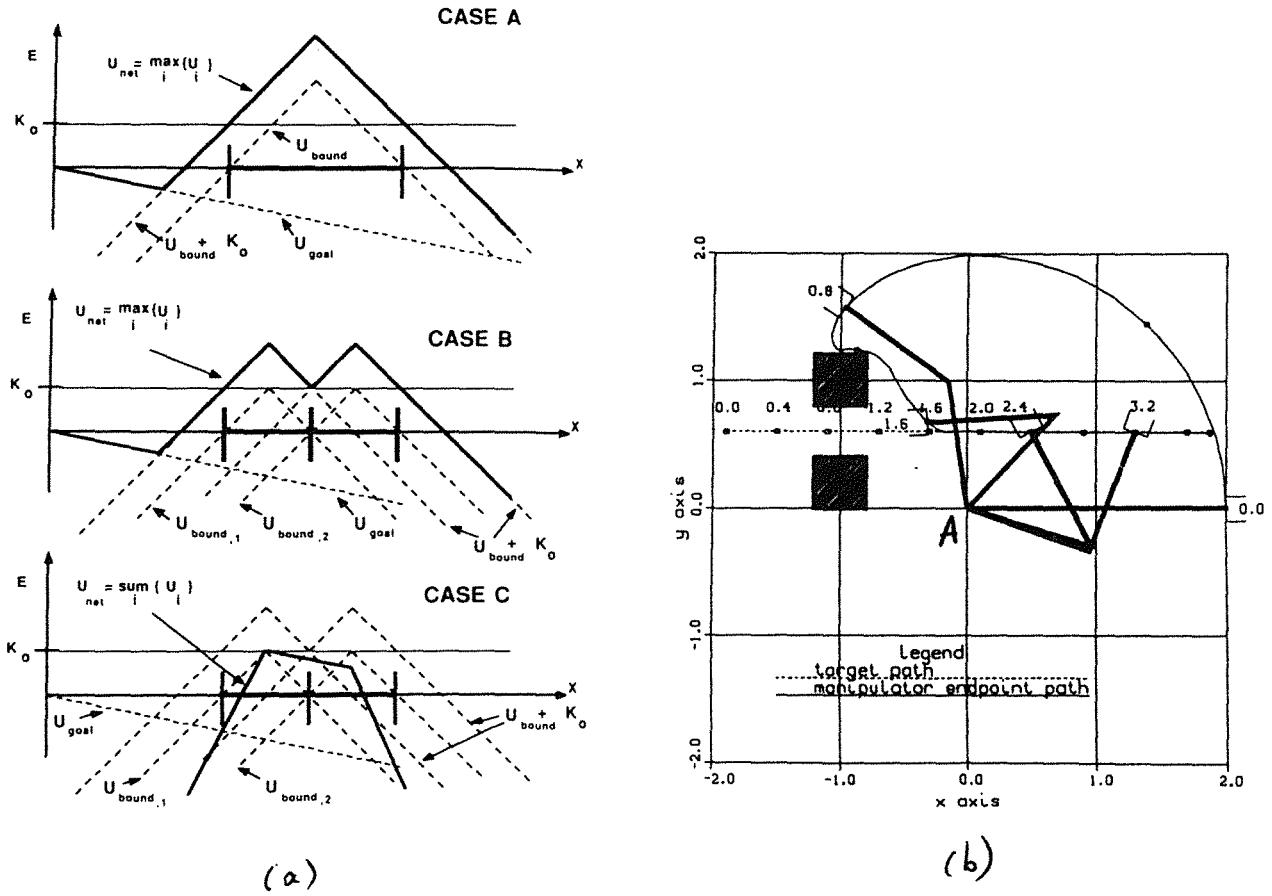


**Figure 2.1**. Application de la théorie des potentiels en robotique [Newman 87]
(a) Combinaison diverses des potentiels (b) Exemple de trajectoire

# 3

# Les modèles élastiques en détection de contours

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la formulation du problème de la segmentation par le biais de fonctions potentielles. Nous procédons d'abord à un tour d'horizon des méthodes classiques de segmentation et mettons en évidence un certain nombre de carences. Le reste du chapitre est consacré aux formulations possibles du problème de détection de contours en termes d'optimisation et à la description du modèle actif de contour.

## 3.1 Les méthodes classiques de segmentation

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, l'extraction des lignes significatives d'une image (ou segmentation de l'image) constitue la première étape du processus devant conduire à l'interprétation.

Des expérimentations portant sur la vision humaine ont montré qu'un objet pouvait être facilement reconnu à partir de la seule donnée, même grossière, de ses frontières ([Ballard 82]). Comme les frontières physiques d'un objet apparaissent généralement sous la forme de discontinuités dans l'intensité de l'image, il semble naturel de rechercher les contours comme les lieux de fortes variations ou de discontinuités de l'intensité, ceux ci étant d'ailleurs caractérisés par une crête dans l'image gradient. On pourra noter [Lux 85] qu'une telle définition est indépendante du niveau d'éclairage et est " relativement robuste " au bruit puisque les crêtes de l'image gradient constituent les endroits où le rapport signal/bruit est maximal.

Il est cependant loin d'être évident de détecter les changements brutaux d'intensité correspondant aux contours car ils présentent en effet des profils très variables en fonction du phénomène physique dont ils sont issus (contour d'occultations, arête d'un objet...) et ils sont de plus fortement bruités. La figure 3.1 propose quelques profils classiques de contours : contour théorique de type toit (Fig3.1.a), contour théorique de type marche (Fig3.1.b) et la figure (Fig. 3.2) représente le profil réel d'un contour le long d'une ligne d'une image.

Il est également possible d'envisager la segmentation avec une approche duale de la précédente. On peut en effet chercher à extraire les zones "uniformes" en intensité ou

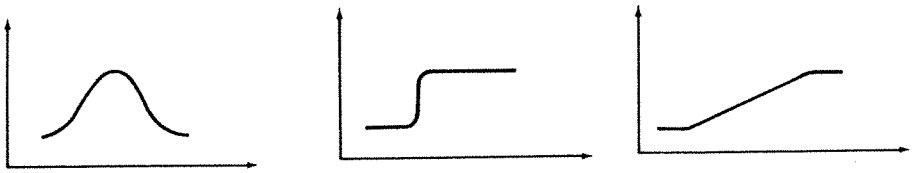

**Figure 3.1**. Profils théoriques de contours

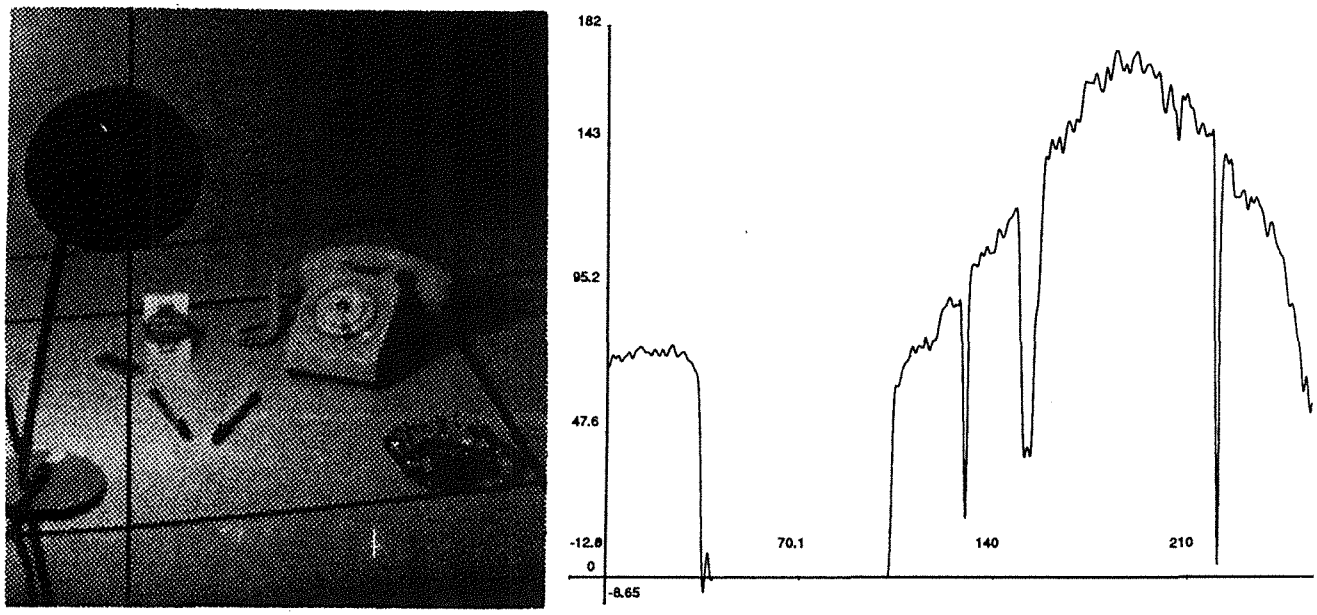


**Figure 3.2**. Profils d'une ligne d'intensité pour une image réelle

en texture, plutôt que les lieux de fortes variations de l'intensité. On parle alors de **segmentation en régions**. Une telle approche nécessite évidemment de définir la propriété commune des pixels d'une région rendant celle ci uniforme. Les critères classiques traduisent généralement une relative constance du niveau d'intensité alors que les segmentations basées sur la texture utilisent des propriétés statistiques de la distribution des niveaux de gris [Derin 87],[Zucker 76b].

Bien qu'il puisse sembler paradoxal d'utiliser deux notions qui semblent a priori équivalentes, il faut savoir que les résultats obtenus ne sont en général pas équivalents. Ceci est dû à la caractérisation que l'on a donnée à ces deux notions : la première fait intervenir des propriétés locales alors que la seconde est beaucoup plus globale et prend en compte des caractéristiques plus diversifiées comme la texture.

Nous allons évoquer plus en détail ces deux grandes familles de segmentation en commençant par les détecteurs que nous qualifierons de classique et qui mettent en évidence les discontinuités de l'intensité.

### 3.1.1 Les détecteurs classiques de contours

Les détecteurs classiques procèdent généralement en deux étapes successives :

1. Extraction des **points de contraste** c'est-à-dire des points au voisinage desquels la variation d'intensité est *significative*. Cette étape est souvent appelée **étape de réhaussement ou d'accentuation**. Cette condition ne suffit évidemment pas à caractériser le fait qu'un point appartienne à un contour puisque les points de contraste dûs à une texture ne sont pas des points de contour.

2. Chaînage des points de contraste pour former les lignes de contours. L'objectif est d'obtenir la meilleure détermination possible des frontières des objets constituant la scène.

Dans l'absolu, l'étape (1) devrait être résolue par simple calcul de gradient même s'il reste à donner un sens au mot significatif. L'étude des différentielles de la fonction $I(x,y)$ devrait en effet permettre de caractériser la variation de l'intensité dans le voisinage du point considéré. Mais la connaissance discrète de $I$, la présence de bruit et la grande sensibilité de la dérivation numérique à ce bruit (le problème de dérivation numérique est en effet mal posé [Torre 86]) rendent l'étape d'extraction particulièrement délicate.

Un point de contour d'orientation $\theta$ est donc classiquement repéré [Haralick 84],[Torre 86] par un maximum de la dérivée directionnelle de $I$ dans la direction orthogonale à $\theta$ ou par un passage par zéro de la dérivée seconde directionnelle. Il est alors facile de voir que

$$\theta = arctg(-\frac{\frac{\partial I}{\partial x}}{\frac{\partial I}{\partial y}}) = \frac{\pi}{2} + arctg(\frac{\frac{\partial I}{\partial x}}{\frac{\partial I}{\partial y}}) \tag{3.1}$$

et que cette définition est équivalente à [Fua 89]

$$\frac{\partial |\nabla I(x,y)|}{\partial g_0} = 0 \tag{3.2}$$

où $g_0$ est le vecteur normé porté par $\nabla I(x,y)$ et de même direction. Les premières tentatives en détection de contours se sont alors orientées vers la recherche de masques de convolution destinés au calcul de $\frac{\partial I}{\partial x}$ et de $\frac{\partial I}{\partial y}$.

### 3.1.2 Les masques en détection de contours

Historiquement, Roberts, Prewitt et Sobel [Prewitt 70] ont proposé des masques permettant de calculer $\frac{\partial I}{\partial x}$ et $\frac{\partial I}{\partial y}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textit{Roberts}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textit{Prewitt}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textit{Sobel}$$

Les calculs du module du gradient et de l'orientation du contour (qui sera utile dans la phase de chaînage) s'en déduisent alors facilement, du moins en théorie, car l'orientation obtenue est en général très grossière. Cet état de fait a conduit à adopter en pratique des filtres directionnels qui calculent les dérivées dans chacune des huit directions cardinales. La valeur retenue étant le maximum des huit réponses obtenues. Le filtre permettant le calcul de la dérivée directionnelle dans la direction nord-est est par exemple donné par

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mais l'extrême sensibilité de ces opérateurs au bruit a rendu indispensable une phase de lissage préalable à la differentiation numérique. Le lissage par un masque de convolution gaussien dont le noyau est donné par

$$g(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{3.3}$$

est sans doute le plus populaire.

Néanmoins, il est apparu très vite qu'il fallait se satisfaire d'un **compromis entre qualité et précision** du contour. Une valeur élevée de $\sigma$ produit en effet un fort lissage sur l'image mais induit une perte de précision sur la localisation du contour alors qu'une petite valeur de $\sigma$ permet une meilleure localisation mais le détecteur est alors très sensible au bruit.

Afin de pallier les inconvénients de la dérivation numérique, d'autres approches basées soit sur l'approximation locale de $I$ par des fonctions bien connues (splines [Cinquin 87], polynômes trigonométriques,...) soit sur un modèle explicite de contours ont été proposées.

### 3.1.3 Approximation et modèle en détection de contours

L' approche fondée sur une approximation locale de $I$ par des fonctions très lisses a l'avantage de permettre une dérivation aisée de $I$. Cette approche a été notamment décrite

par Hueckel [Hueckel 73] puis par Haralick [Haralick 84] qui utilise des combinaisons de polynômes de Tchebicheff jusqu'à l'ordre 3 comme fonctions d'approximation. Un point de contour est alors un point pour lequel la dérivée seconde directionnelle dans la direction du gradient change de signe. Cette approche peut sembler plus satisfaisante, mais nous devons néanmoins garder à l'esprit que la surface ainsi construite n'est qu'une approximation lisse de données potentiellement non différentiables qui dépend fortement de la taille du voisinage et de la famille de fonctions approximantes choisie [Brooks 78].

Une avancée décisive en détection de contour a alors été réalisée par Canny [Canny 86] pour qui un point de contour est un point pour lequel la corrélation entre l'image et un modèle théorique du contour est maximal. Un contour est ici modélisé par une fonction d'Heaviside dégradée par un bruit blanc. Canny a cherché à déterminer un opérateur de convolution satisfaisant aux critères de qualité suivants :

- Bonne détection :
  L'opérateur doit maximiser la probabilité de détecter les vrais points de contraste et minimiser la probabilité de détecter des points non significatifs. Il s'agit donc de maximiser le rapport signal/bruit.

- Bonne localisation :
  Le maximum fourni par l'opérateur doit être le plus proche possible du point de contraste dans l'image.

Le détecteur optimal obtenu, dont une bonne approximation est constituée par la dérivée première d'un filtre gaussien, est l'un des meilleurs disponibles aujourd'hui. R Deriche [Deriche 87a] a proposé une implémentation efficace du filtre optimal à l'aide de deux filtres récursifs.

La multitude de détecteurs de contours publiés dans la littérature [Castan 90] suffit amplement à prouver la difficulté de concevoir mais aussi de juger un détecteur. L'utilisateur se trouve en effet fréquemment face au dilemne suivant :

- Trouver tous les points intéressants ... "noyés" au milieu d'autres points qui sont dus au bruit. La figure 3.3 illustre ce fait.

- Disposer d'un détecteur peu sensible au bruit mais qui laisse échapper de nombreux points.

Plutôt que de chercher un hypothétique détecteur idéal (les résultats seront toujours imparfaits en raison du bruit), on tente généralement d'améliorer les résultats au cours de l'étape de chaînage en utilisant des méthodes ou des connaissances de plus haut niveau.

### 3.1.4 L'étape de chaînage

Une des méthodes les plus simples consiste à ne conserver par seuillage que les points susceptibles d'appartenir à un contour. On cherche donc à obtenir une cohérence spatiale

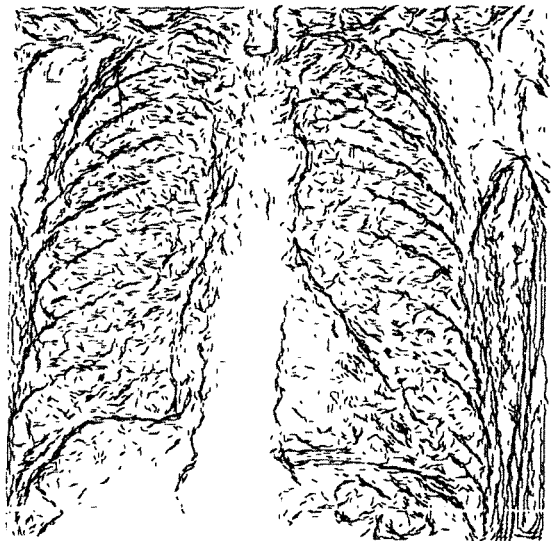

**Figure 3.3**. Points de contraste [Ballard 82].

qui permettra déliminer les accidents isolés. On utilise généralement un seuil haut $M_h$ et un seuil bas $M_b$. Les points $M$ pour lesquels $|\nabla M| \geq M_h$ sont conservés, ceux pour lesquels $|\nabla M| \leq M_b$ sont éliminés et les autres ne sont conservés que si la connexité de la ligne l'exige. Le choix des seuils demeure un des problèmes majeurs en détection de contours. En effet, un seuil trop élevé ne permettra de détecter que les contours très affirmés alors qu'un seuil trop petit conduira à détecter de petits contours parasites dus au bruit (Fig. 3.4).

D'autres méthodes procèdent par relaxation [Prager 80] et visent à relativiser la confiance que l'on a en un point de contraste en fonction de ses voisins ; par exemple, un point de contraste isolé situé entre deux morceaux de segments alignés verra son capital confiance augmenter.

Les deux méthodes mentionnées font intervenir une hypothèse implicite de continuité des contours et en quelque une certaine connaissance sur la nature du contour à détecter. Lorsque des connaissances explicites sur le domaine d'application ou la nature des contours cherchés sont disponibles, il est possible d'utiliser des méthodes telles que la transformée de Hough (si on dispose d'un paramétrage explicite des courbes) ou la programmation dynamique (lorsqu'on sait expliciter la qualité d'un contour par le maximum d'une fonction se décomposant sous la forme $f(x_1, .., x_n) = h_1(x_1, x_2) + h_2(x_2, x_3) + ..h_{n-1}(x_{n-1}, x_n)$ où les $x_1, .., x_n$ sont des points de contraste). Poussant plus avant dans cette direction, certains ont introduit un véritable modèle de contour comme par exemple P. Fua [Fua 89] qui travaille sur des images aériennes et souhaite détecter des batiments dont les formes sont génériques et assez facilement modélisables.

Des tentatives de modélisation complète de la segmentation dans des domaines spécifiques ont été proposés comme le système ANGY [Stansfield 86] destiné à segmenter des images d'angiographie ou le système expert proposé dans [Nazif 84] destiné à la segmen-

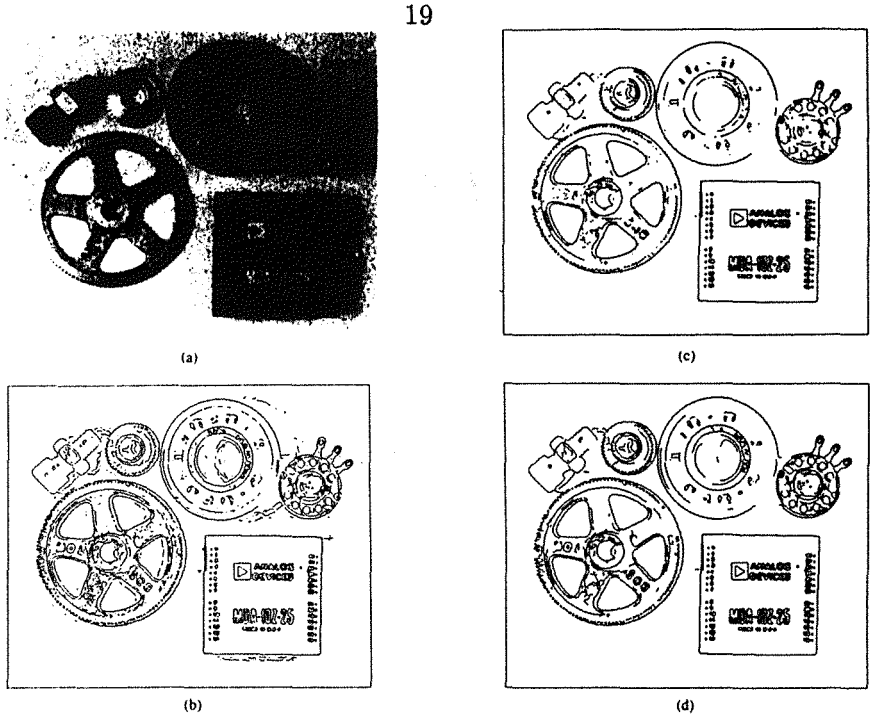


Fig. 7. (a) Parts image, 576 by 454 pixels. (b) Image thesholded at $T_1$. (c) Image thresholded at 2 $T_1$. (d) Image thresholded with hysteresis using both the thresholds in (a) and (b).

**Figure 3.4.** Effet du seuillage [Canny 86].

tation d'images d'extérieur pour un robot mobile. Si ces approches présentent le louable intêret de prendre en compte les connaissances du domaine, il n'en reste pas moins vrai qu'elles sont souvent basées sur l'introduction de règles " ad hoc " et souffrent d'un manque de souplesse évident dans l'introduction de nouvelles connaissances.

Il apparaît donc qu'une des carences fondamentales des détecteurs traditionnels concerne leur **manque de globalité** : les méthodes décrites procèdent en effet de manière très locale en considérant uniquement les compatibilités d'un point de contraste avec ses voisins immédiats. Ceci rend la détection à la fois sensible au bruit (c'est-à-dire aux points de contraste parasites) et à l'absence locale d'informations (trous dans un ensemble de points de contraste).

Notons enfin que les coins et les jonctions sont en général mal détectés. Ceci est dû à la nature des opérateurs utilisées car si on considère par exemple un croisement de deux contours à angle droit sur lesquels le gradient est constant, la variation de l'intensité au point de jonction dans les directions des deux contours est nulle et ce point ne sera donc pas retenu comme point de contraste.

### 3.1.5 Détection de régions

Plutôt que de chercher à détecter les zones de variation brutale de l'intensité, il a semblé plus pertinent de s'intéresser aux régions uniformes en intensité ou en texture [Voorhees 88],[Derin 87],[Zucker 76b] dans l'espoir qu'une région détectée corresponde à

un objet. Il s'agit alors de réaliser une partition de l'image $S$ en un ensemble $R_i$ de régions homogènes pour un prédicat $P$ donné. Les critères généralement retenus pour réaliser une telle partition sont les suivants [Zucker 76a]:

- $S = \cup_{i=1..n} R_i$
- $\forall i, R_i$ est connexe
- $\forall i,\ P(R_i) = vrai$
- $\forall i,\ \forall j,\ i \neq j \in [1, n]$, $R_i$ et $R_j$ ayant une frontière commune, $P(R_i \cup R_j) = faux$

De plus, des propriétés de régularité des frontières des régions sont généralement requises.

Parmi les techniques de segmentation en régions [Haralick 85], on distingue usuellement trois grandes classes d'algorithmes fonctionnant par fusion (on parle aussi de croissance de régions), division et fusion/division (split and merge)[Horowitz 76]. Les méthodes de fusion fonctionnent par fusions successives de régions présentant le même critère d'homogéneité (le point de départ étant souvent constitué par la segmentation la plus fine qu'est l'image). A chaque étape, on choisit parmi les couples de régions adjacentes dont la réunion vérifie le prédicat d'homogéneité, celui pour lequel la qualité de la fusion est optimale. Les algorithmes de division utilisent une démarche inverse en cherchant à chaque étape à diviser les régions jugées non homogènes. La manière de diviser est un problème crucial pour ce type d'algorithme... Quant aux méthodes de fusion/division, elles allient ces deux aspects et fonctionnent à partir d'une partition arbitraire mais le choix de la stratégie à adopter est une difficulté de cet algorithme.

Abordons maintenant le problème du choix du prédicat. Ce choix est très souvent lié à la qualité de l'approximation de l'intensité dans une région par une famille $\mathcal{F}$ de fonctions donnée. La famille des fonctions constantes est la plus fréquemment adoptée et le prédicat utilisé est souvent l'expression d'une limitation des variations du niveau de gris à l'intérieur de la région comme par exemple :
$P(R) = (|max_{X \in R} I(X) - min_{X \in R} I(X)| < seuil)$
ou
$P(R) = (Variance(R) < seuil)$

Comme dans toutes les approches utilisant un modèle, le problème de l'adéquation du modèle et des données se pose avec acuité. Un mauvais choix de la famille $\mathcal{F}$ peut conduire à la création d'un multitude de petites régions. Considérons en effet le profil d'intensité de la figure 3.5.a; si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions constantes, la transition entre les deux plateaux doit être réalisée par une fonction en escaliers, comme par exemple dans la figure 3.5.b ce qui produit des régions parasites de petite taille. Les algorithmes destinés à leur élimination présentent l'inconvénient majeur d'être très sensibles à l'ordre dans lequel sont examinées les régions et comme le dit Pavlidis, les formes de régions tendent plus à refléter la stratégie de traversée de l'image plutôt que les formes perçues.

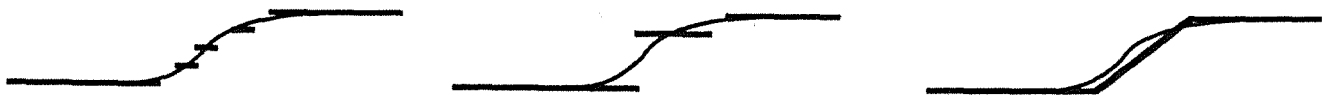

**Figure 3.5**. Profil de l'intensité.

Ce type de problème apparaît de façon flagrante dans des images contenant des dégradés de lumière. Ces zones sont alors intempestivement scindées en régions qui n'ont pas d'interprétation sémantique. L'utilisation d'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions plus complexes (fig3.5.c) permettrait de proposer une solution certes plus coûteuse à ce problème. Dans un contexte un peu différent, Oshima [Oshima 79] décrit à partir de données 3D une scène en terme de régions obtenues par une technique fusion/division. Les régions sont approchées par des plans ou des quadriques et le choix des surfaces d'approximation est ici guidé par la nature des scènes considérées. L'utilisation de ce type de méthodes est plus délicat en segmentation puisque les surfaces et les transitions définissant les régions sont bruitées, variées et bien difficiles à modéliser car elle dépendent du phénomène physique qui leur a donné naissance (ombrage, éclairage, frontière entre deux objets...).

Malgré ces inconvénients, l'utilisation des régions se justifie dans le cas d'images présentant des contours bruités et plus spécialement pour les objets plutôt caractérisés par une texture que par un niveau d'intensité.

### 3.1.6 Intégration contours/régions

La coopération d'un détecteur de régions et d'un détecteur de contours a semblé un bon moyen d'améliorer la segmentation [Deriche 87b]. Une telle méthode est proposée dans [Wrobel 87]. Les points de contraste sont alors utilisés pour guider la croissance des régions. Ce contrôle est effectué en interdisant toute fusion de régions adjacentes pour lesquelles la proportion des points de contraste de la frontière commune dépasse un certain seuil. Les régions croissent soit jusqu'à buter sur les lignes de contraste soit jusqu'à atteindre le seuil maximal définissant l'homogénéité. Les problèmes inhérents aux dégradés de lumière sont donc résolus par ce biais puisque les frontières artificielles obtenues ne contiennent pas de points de contraste.

Plus récemment, Pavlidis [Pavlidis 90] a présenté une méthode sophistiquée combinant ces deux approches. L'algorithme proposé débute par l'utilisation d'une méthode de fusion/division fournissant une sur-segmentation de l'image. Les frontières superflues sont alors éliminées à partir de critères concernant la nature des frontières tels que variation de l'intensité de part et d'autre, régularité... Remarquons néanmoins que cette intégration se fait par le biais de fonctions de coût dont les nombreux paramètres restent à déterminer.

### 3.1.7 Discussion

Malgré des avancées marquantes, la segmentation en contours ou en régions est encore loin de fournir des résultats directement utilisables pour des processus de plus haut niveau consacrés à l'interprétation. La finesse des résultats obtenus est bien souvent le fait de l'ajustement manuel et minutieux de nombreux paramètres. Il faut d'ailleurs noter à ce sujet que l'idée d'une segmentation " semi-interactive " est de mieux en mieux acceptée dans le monde de la vision (surtout dans le cadre d'applications médicales) dans la mesure où il suffit parfois d'une segmentation fine d'une seule image pour pouvoir ensuite analyser une séquence entière. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Si on cherche à faire le point sur les carences des méthodes traditionnelles de segmentation, on peut se rendre compte que :

- Il y a une contradiction entre le fait de lisser une image pour en éliminer le bruit et vouloir détecter les discontinuités.
- L'évaluation de la qualité d'une segmentation est bien difficile à réaliser.
- La détermination des paramètres reste une question ouverte.
- Les détecteurs manquent d'autonomie vis à vis du type d'image étudié.
- Les détecteurs manquent surtout d'une **prise en compte globale** de la segmentation.

C'est sans doute ce dernier point qui explique le mieux les difficultés rencontrées. Le critère retenu pour la détection des points de contraste est en fait très local et fort peu précis (que faut il entendre par " variation significative "?) et ne prend surtout pas en compte **la structure d'un contour** qui est d'abord une **courbe** satisfaisant à un certain nombre de propriétés. On peut donc regretter le manque de formalisation du problème et le séquencement traditionnel de la segmentation en (i) extraction des points de contraste et (ii) formation des contours, qui ne permet pas de prendre en compte la globalité du problème. La formulation de la segmentation en régions est de ce point de vue meilleure puisque les contours sont obtenus comme frontières des régions et tiennent donc a priori davantage compte du contexte. Néanmoins et comme nous l'avons vu précédemment, l'extraction des régions s'est avérée problématique et la région peut difficilement être considérée comme une primitive stable.

## 3.2 La formulation du problème de détection de contours en terme d'optimisation et le modèle des contours actifs

### 3.2.1 Motivations

Face à la multitude de méthodes parfois très sophistiquées et souvent " ad hoc " développées en détection de contours, il est apparu urgent de donner un cadre plus formel à la segmentation.

Pour parvenir à cette fin, il semble d'abord indispensable de pouvoir juger et comparer les qualités respectives de deux segmentations et donc de disposer d'un critère d'estimation globale d'une segmentation. Notons $\phi$ un tel critère; alors

*Soient $S_1$ et $S_2$ deux segmentations, si $\phi(S_1) < \phi(S_2)$ alors la segmentation $S_1$ est plus fine que la segmentation $S_2$*

La meilleure segmentation est donc celle qui minimise $\phi$.

La seconde condition primordiale pour l'obtention d'une segmentation de qualité est de pouvoir définir les contours en tant que courbes. Ce besoin a été mis en évidence dans le paragraphe 1 et il vise à intégrer les étapes d'ordinaire séquentielles de recherche puis de chaînage des points de contraste.

L'idée générale sous tendue par les deux conditions énoncées ci dessus consiste à définir une segmentation par le minimum d'une fonctionnelle intégrant **à la fois** la définition physique d'une segmentation **et** les contraintes de régularité sur les contours. Comme nous allons le voir, ces contraintes sont le plus souvent traduites par des intégrales curvilignes ou surfaciques.

Outre une meilleure prise en compte de la nature des contours, cette formalisation ouvre la perspective d'utilisation de méthodes d'optimisation mathématiques éprouvées et l'étude théorique de la fonctionnelle permettra dans certains cas de définir a priori les propriétés de la segmentation réalisant le minimum.

### 3.2.2 Forme générale

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le problème de la segmentation d'images est mal posé car la dérivation numérique est elle même un problème mal posé. Il est donc nécessaire de restreindre l'espace de recherche des solutions en introduisant dans la fonctionnelle des connaissances a priori sur la nature de la segmentation. Les fonctionnelles utilisées sont donc généralement issues de la théorie de la régularisation et revêtent communément la forme suivante :

$$\phi(S) = \phi_1(S) + \lambda\phi_2(S) \tag{3.4}$$

*où*

- $\phi_1(S)$ *caractérise la qualité de la segmentation*
- $\phi_2(S)$ *caractérise la régularité de la segmentation.*

Intuitivement, on peut dire que le minimum de $\phi_1$ est atteint pour une segmentation sans se préoccuper de contraintes de régularité, alors que le minimum de $\phi_2$ est atteint pour des fonctions régulières. Il est assez légitime d'espérer que le minimum de la somme éventuellement pondérée satisfera assez bien les deux conditions et donnera lieu à une segmentation suffisamment régulière.

Cette formulation n'est évidemment pas propre au seul problème de la détection de contours mais est plus généralement applicable à toute recherche d'indices image dont on puisse caractériser les propriétés photométriques et la régularité. On parle d'ailleurs de *caractéristiques externes* pour $\phi_1$ et de *caractéristiques internes* pour $\phi_2$.

Afin de fixer les idées, considérons l'exemple simple de l'approximation d'une fonction lisse $v$ passant aussi près que possible d'un ensemble de points ($v_i = (x_i, y_i)$) de l'image. Le terme $\phi_1$ va traduire la contrainte sur les points de l'image en considérant

$$\phi_1(v) = \sum_i [v(x_i) - y_i]^2 \tag{3.5}$$

car le minimum de $\phi_1$ est obtenu pour toute fonction passant par les points ($v_i$).

Le caractère interne de la courbe c'est-à-dire ici le fait que la courbe soit lisse est traduit intuitivement par une faible valeur de la dérivée seconde, ce qui nous conduit à prendre pour $\phi_2$

$$\phi_2(v) = \int_0^1 v''(s)^2 ds \tag{3.6}$$

Le critère d'évaluation de l'approximation souhaitée est donc donné par

$$\phi(v) = \sum_i [v(x_i) - v_i]^2 + \lambda \int_0^1 v''(s)^2 ds \tag{3.7}$$

Avant de poursuivre plus avant l'étude de ce type de méthodes, il convient de mettre l'accent sur quelques problèmes qui viennent naturellement à l'esprit.

La question fondamentale qui se pose est évidemment la robustesse et la stabilité d'une telle formulation. Autrement dit, des variations faibles de l'image induisent elles des segmentations proches ?

D'autres questions se posent au niveau de la nature et des méthodes de minimisation de la fonctionnelle. Sans anticiper sur le paragraphe suivant qui aborde la nature des fonctionnelles utilisées en segmentation, il nous faut néanmoins souligner la subtilité du choix d'une fonctionnelle dont le minimum doit bien caractériser l'indice image cherché. Les problèmes techniques plus spécifiquement liés à l'existence de minima et à la minimisation numérique ne sont pas non plus à négliger. On retrouve ici les classiques questions d'existence en analyse numérique : existe-t-il un seul minimum ? parmi les solutions réalisant le minimum, en existe-t-il une qui soit suffisamment régulière pour être utilisable en vision ?

Mais on ne saurait se contenter de connaître l'existence a priori d'une solution; encore faut il savoir en calculer une valeur numérique approchée... et il faut bien reconnaître que la minimisation numérique d'une fonctionnelle s'avère particulièrement ardue dans le cas non convexe. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 4.

### 3.2.3 Les familles de fonctionnelles utilisées en détection de régions

On retrouve dans le type des fonctionnelles utilisées la dualité contours/régions évoquée dans le paragraphe 1.

Nous considérons ici le problème de manière continue. Une image est donc définie par une fonction $g$ sur un domaine $\Omega$ et on a $g|_{IN} = I$.

Revenant à la définition intuitive des régions d'une image comme une partition pour laquelle chacune des composantes connexes possède une certaine homogénéité (on considèrera qu'il s'agit du niveau de gris dans toute la suite), il semble naturel de considérer, comme Mumford et Shah [Mumford 85] et de Blake et Zisserman [Blake 87] une segmentation $S$ comme un couple $S = (u, K)$ composé de l'ensemble des frontières $K$ et d'une fonction lisse $u$ minimisant

$$\phi(u, K) = \int_\Omega (u - g)^2 + \lambda\phi_2(u, K) \tag{3.8}$$

Le terme $\int_\Omega (u - g)^2$ est un terme de pénalité qui mesure l'adéquation de $u$ à l'image donnéee et le minimum de $\phi$ est donc atteint pour une fonction $u$ qui est une version régularisée de $g$ et approche au mieux l'image initiale.

Les caractéristiques internes s'écrivent

$$\phi_2(u, K) = \int_{\Omega - K} |\nabla u|^2 + longueur(K) \tag{3.9}$$

Le terme en gradient signifie que la segmentation obtenue ne varie pas trop fortement dans les régions. Quant au terme additionnel $longueur(K)$, il contrôle la longueur des frontières, assurant que les contours ne forment pas de boucles inutiles et est donc le garant de la régularité des frontières.

La segmentation $u$ ainsi construite est donc la version régularisée de $g$ et représente un compromis entre une bonne qualité de la segmentation et un souhait de régularité sur les frontières des régions. Le " poids " de ce compromis, c'est-à-dire la constante $\lambda$ reste à fixer.

Il restait néanmoins à s'assurer que la fonctionnelle censée réaliser le compromis le réalise effectivement dans la pratique... Des études théoriques [Mumford 85], [Mumford 89], [Maso 89] ont donc été réalisées afin de vérifier l'adéquation de la fonctionnelle avec le résultat pratique souhaité. Il s'agissait de se rendre compte des propriétés implicites des segmentations sous jacentes à une telle formulation.

Une première étude a été amorcée par Mumford et Shah [Mumford 85],[Mumford 89]

en considérant la fonctionnelle " la plus simple ":

$$\phi(u,K) = \int_{\Omega} (u-g)^2 + \lambda longueur(K) \tag{3.10}$$

en choisissant $u$ dans l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur $\Omega - K$. Les propriétés suivantes ont été démontrées :

- Les points de $K$ sont soit réguliers (c'est-à-dire au moins $C_1$), soit singuliers de l'un des deux types suivants :
  - Les points sont triples et les branches se rencontrent à 120 degrés.
  - Les points appartiennent à la frontière $R$ de l'image et l'angle entre la frontière et $R$ est de 90 degrés.
- On a les inégalités suivantes en un point $x$ de la frontière de la segmentation :

$$(u^+(x)-g^-(x))^2-(u^-(x)-g^-(x))^2 \leq courbure(x) \leq (u^-(x)-g^+(x))^2-(u^+(x)-g^+(x))^2 \tag{3.11}$$

où $g^+(x)$ et $g^-(x)$ désignent les valeurs de $g(x)$ de part et d'autre de la frontière.

Ces résultats, notamment ceux concernant les points de jonction, montrent qu'une telle segmentation manque de précision puisqu'elle se montre a priori incapable de segmenter exactement une image comme celle de la figure **??**. Néanmoins, comme le souligne Morel, les résultats peuvent sans doute être largement améliorés en considérant une classe de fonctions plus large pour $u$ comme celle des fonctions linéaires, quadratiques, splines...

D'autres études concernant la fonctionnelle complète sont relatées dans [Maso 89] et [Shah 90]. On pourra en particulier trouver dans [Shah 89] une étude intéressante sur l'influence de certains paramètres du modèle sur la segmentation en régions obtenue. Des travaux d'inspiration similaire concernant la restauration d'images [Geman 84] peuvent également être consultés avec profit.

### 3.2.4 Détection de contours et modèles actifs

En raison des difficultés de méthode mais aussi de coût inhérentes à la minimisation de fonctionnelles non convexes, il peut sembler judicieux de rechercher non pas le minimum global mais seulement des minima locaux de la fonctionnelle. La minimisation locale offre la possibilité d'utiliser des méthodes telles que les diverses méthodes de gradient ... qui sont plus rapides mais il reste néanmoins à s'assurer de la qualité des minima et de la segmentation ainsi obtenus.

Etant données les lourdeurs associées à la minimisation d'une fonctionnelle portant sur des fonctions 2D, il semble bien naturel de s'orienter vers la seule recherche de l'ensemble $K$, c'est-à-dire des contours, en utilisant le même type de fonctionnelle. On peut même pousser le souci d'efficacité plus loin en recherchant non pas l'ensemble des contours mais

un seul d'entre eux dans une zone donnée de l'image. Il faut en effet se rendre compte que de nombreuses applications n'ont pour but que de mettre en évidence un ou plusieurs contours caractéristiques de l'image sur lesquels on possède des informations de localisation. C'est particulièrement le cas dans le domaine médical où les clichés disponibles obéissent à des cadrages souvent stricts et il est alors relativement facile de localiser la zone de présence de l'organe à étudier.

Les modèles basés sur la minimisation d'une énergie ont souvent été employés en vision comme l'a montré le chapitre 1, mais leur utilisation en détection de contours est récente et a été initialement introduite par Kass, Witkin et Terzopoulos [Kass 88] dans l'article " Snakes: Active Contour Models ". L'objectif de ce qui suit est de dresser une rapide esquisse des contours actifs, d'en montrer l'idée de base et le mécanisme de fonctionnement mais également de mettre en évidence les problèmes et les limitations du modèle proposé.

Indépendamment du type de fonctionnelle utilisée, le modèle revêt naturellement une nature **active**. Il est en effet facile de donner dans ce cas une signification physique très visuelle au minimum de la fonctionnelle ou du potentiel $\phi$ et de justifier le concept de **contours actifs**. Si on se place dans la situation décrite précédemment où la localisation d'un contour est grossièrement connue et en plaçant une courbe ( communément appelée Snake [1]) en cet endroit, le snake, suivant une loi physique bien connue, va évoluer et se **déformer** sous l'effet des forces engendrées par le potentiel jusqu'à se trouver dans la position d'équilibre stable la plus proche qui est précisément le minimum local de $\phi$ le plus proche de la courbe initiale.

Supposons par exemple que l'on veuille détecter les lignes les plus foncées d'une image (c'est-à-dire celles pour lesquelles l'intensité est faible) et considérons pour cela $\phi_1(C) = \int I(v(s))ds$ ; le terme $\phi_2$ étant un terme régularisant qui nous importe peu pour l'instant. L'image d'intensité peut être considérée comme un potentiel physique $V$ créé en tout point du domaine de $\mathbb{R}^2$ de définition de l'image dont la valeur est le niveau de gris en ce point. On recherche alors les vallées de cette nappe (Fig3.6.a) d'équation $z = I(x, y)$. Ce potentiel génère en tout point de l'image un **champ de forces** $\vec{A}$ donné par la formule $\vec{A} = -\nabla V$. La figure 3.7 représente une ligne de l'image (ligne de potentiel) et quelques unes des forces générées. Sous l'influence de ce champ de forces, une courbe suffisamment proche d'une vallée va immanquablement tomber au fond, là où elle minimise son potentiel c'est-à-dire aux endroits des lignes sombres.

Si l'on se préoccupe de détection de contours, le champ de potentiel considéré sera ici $V = -|\nabla I|$ car un contour est une courbe sur laquelle le module du gradient est maximal donc son opposé est minimal. La figure 3.8 propose quelques étapes classiques de l'évolution d'un contour actif, la première courbe polygonale étant la courbe d'initialisation proposée par l'utilisateur. Pour une meilleure précision, Fig. 3.9 reprend sur un même graphique les positions intermédiaires du snake.

La matérialisation du concept de contours actifs à l'aide du champ de forces permet de

1. L'appellation de Snake ou de serpent trouve son origine dans les ondulations subies par la courbe pour rejoindre sa position d'équilibre.

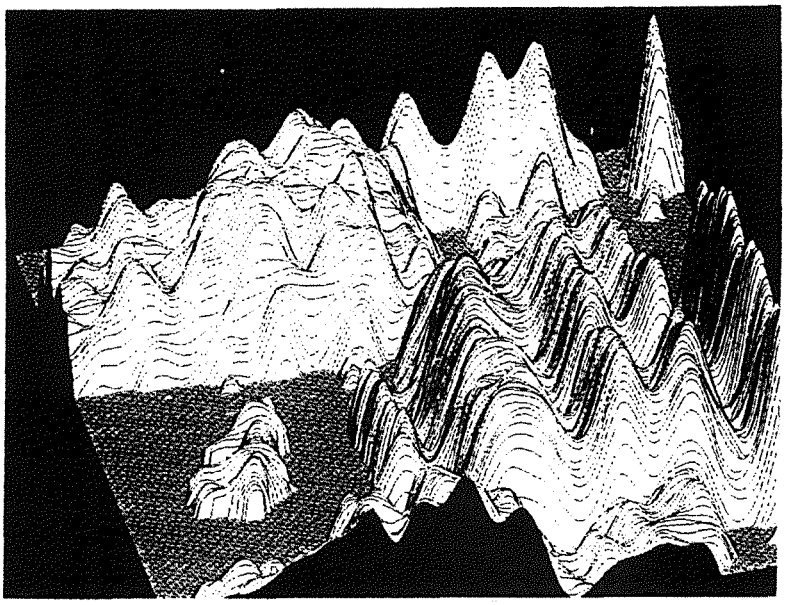

**Figure 3.6**. Vallées de potentiel

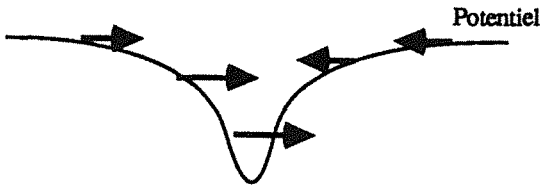


**Figure 3.7**. Champ de forces généré par l'image

se rendre compte du caractère local de cette notion. Une courbe doit en effet nécessairement se trouver dans une zone non nulle du champ de forces pour se mettre à évoluer. Il est par ailleurs permis de se poser des questions sur le comportement du snake lorsque, au cours de son évolution, il rencontre un minimum local qui n'est du qu'à du bruit, ou lorsqu'il se trouve dans le voisinage de plusieurs contours. L'évolution sera t-elle alors stoppée ? Ces questions particulièrement importantes si l'on souhaite faire des contours actifs un outil suffisamment autonome seront débattues au cours des chapitres 5 et 6. Il convient cependant de noter que dans les cas non ambigus, c'est-à-dire par exemple quand le snake est attiré par un contour sauf sur une petite partie qui se focalise sur du bruit, la force exercée par la partie de la courbe déjà positionnée sur le contour est souvent suffisante pour attirer toute la courbe. Car, au fur et à mesure que les points de la courbe adhèrent au contour, leurs voisins entrent dans la zone du contour où le champ de forces est le plus intense et sont à leur tour attirés. Ce fait est bien visible dans Fig. 3.8 au niveau des extrémités.

Cependant, les contours actifs sont actuellement plutôt considérés comme un outil semi interactif permettant de fournir, à partir d'une courbe d'initialisation, le contour

**Figure 3.8**. Evolution d'un contour actif.

le plus proche. L' intervention de l'utilisateur se situe d'abord au niveau du choix de la courbe d'initialisation qui détermine en quelque sorte la zone dans laquelle sera cherché le contour. L'interaction peut aussi occasionnellement être située à un niveau plus élevé d'aide ou d'assistance à la segmentation : l'utilisateur dispose en effet de la possibilité de déplacer le snake dans l'image, de modifier sa forme et de guider son évolution de manière à le rapprocher du contour à détecter. Ces possibilités se manifestent au travers d'outils accessibles de façon conviviale à l'aide de la souris, dont l'action peut être engendrée par un potentiel et qui peuvent donc être intégrés dans la fonctionnelle. Cette interaction trouve sa justification dans le cadre d'applications utilisant des images particulièrement bruitées pour lesquelles le manque d'informations doit être compensé par l'utilisateur et apporte une solution partielle au problème du blocage possible du snake sur une position qui ne serait pas un contour.

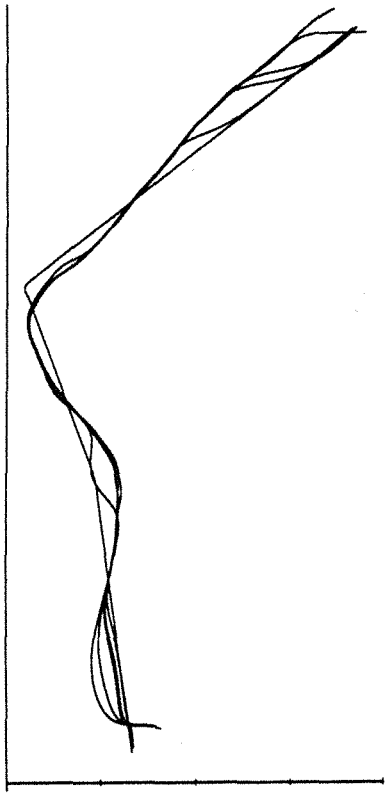

**Figure 3.9**. Visualisation des étapes intermédiaires.

Cet aspect **dynamique mais aussi local** constitue bien évidemment la caractéristique essentielle des modèles actifs de contours et les distingue assez profondément des méthodes décrites en 2.3.1 qui consistent en fait à réaliser une approximation globale de la surface de l'image par des fonctions lisses par morceaux. L'esprit des deux problèmes est différent : les méthodes 2.3.1 ont pour but d'approcher des données 2D (l'image) par une surface 2D; les contours actifs visent en revanche à localiser dans une partie des données 2D une courbe 1D réalisant le minimum de la fonctionnelle et il ne s'agit alors plus d'une approximation d'un ensemble donné par avance.

Il faut enfin souligner que l'aspect dynamique des contours actifs en fait un outil privilégié dans le cadre plus général **d'appariement élastique**. Arrêtons nous quelques instants pour signaler la nécessité de ce type de mise en correspondance : de nombreuses applications consistent à reconnaître des objets d'une scène à partir d'objets de référence aussi appelés modèles. Cependant, le modèle peut n'être qu'une illustration de l'objet recherché. Considérons l'exemple rapporté par Bajcsy [Bajcsy 89] de la recherche d'une partie de cerveau sur des images de tomographies à partir des images de référence contenues dans un atlas ; les structures grossières des cerveaux sont les mêmes mais diffèrent par un certain nombre de détails. Un alignement grossier des deux structures est possible grâce à des considérations sur les axes d'inertie et le barycentre. La structure de référence est alors proche de celle du cerveau étudié et sera utilisé comme courbe de départ pour les

méthodes actives qui vont générer les déformations permettant au contour de référence d'évoluer vers le contour d' étude.

A partir des premières propriétés des contours actifs esquissées ici, il apparaît que ce modèle offre la séduisante perspective d'une détection globale de contours (en ce sens qu'on recherche des courbes) au travers d'un modèle permettant d'inclure à la fois les caractéristiques de l'indice image cherché et la structure interne de cet indice par le biais de termes d'énergie. Il est ainsi possible d'intégrer une sorte de modèle géométrique de l'indice pourvu que ses propriétés soient aisément modélisables sous la forme d'un terme d'énergie à valeur réelle. De surcroît, l'aspect intrinsèquement dynamique du modèle laisse entrevoir de nombreuses possibilités quant à des applications telles que la détection (interactive ou non) de contours, le matching élastique, le suivi de formes (tracking) à travers une séquence d'images, l'étude d'objets se déformant au cours du temps ... Ces nombreuses applications qui sont soit déjà opérationnelles, soit seulement prévisibles feront l'objet du chapitre 6. Dans l'immédiat, nous allons décrire la fonctionnelle de Kass Witkin et Terzopoulos qui est à la base des contours actifs.

### 3.2.5 Le modèle des SNAKES de Kass Witkin et Terzopoulos

La fonctionnelle d'énergie $\phi$ utilisée dans [Kass 88] est composée de trois termes dépendants de la courbe active $C$ :

- Un terme d'énergie image $E_{image}$ décrivant l'indice cherché
- Un terme régularisant $E_{interne}$
- Un terme d'énergie interactive $E_{interactive}$ caractérisant les interventions de l'utilisateur.

La fonctionnelle $\phi$ est donc la somme pondérée

$$\phi(C) = w_1 E_{image}(C) + w_2 E_{interactive}(C) + \lambda E_{interne}(C) \tag{3.12}$$

la détermination des poids $w_1, w_2, \lambda$ étant laissée à l'initiative de l'utilisateur.

(Dans toute la suite, la fonction $v$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $v : s \rightarrow v(s)$ représente un paramétrage de la courbe $C$).

Détaillons chacun de ces termes :

**Energie image :**

L'expression de ce terme dépend de la structure à mettre en évidence. S'il s'agit des lignes sombres, on considèrera

$$E_{image}(C) = \int_0^1 I(v(s))ds \tag{3.13}$$

S'il s'agit de détecter des contours, comme ces derniers sont caractérisés par un maximum du module du gradient sur la courbe, il semble naturel de considérer

$$E_{image}(C) = -\int_0^1 |\nabla(v(s))|^2 ds \tag{3.14}$$

car l'énergie sera alors minimale et négative pour un contour.

**Energie interne :**

C'est la partie régularisante de la fonctionnelle et elle prend ici la forme

$$E_{interne}(C) = \int_0^1 \alpha(s)|v'(s)|^2 + \beta(s)|v''(s)|^2 ds \tag{3.15}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels positifs.

Anticipant quelque peu sur la partie suivante dont le but est l'étude de ce terme et en particulier de l'influence des paramètres, on peut d'ores et déjà indiquer que le terme en $|v'(s)|^2$ influence la longueur de la courbe ( et le minimum de ce terme caractérise donc la **tension** ou la rigidité) alors que le terme en $|v''(s)|^2$ influence sa courbure (et caractérise **l'elasticité**). L'effet conjugué de ces deux termes est de produire une courbe qui soit suffisamment lisse sans pour autant produire des boucles superflues. Notons également la possibilité de définir des caractéristiques élastiques différentes en chaque point de la courbe en choisissant les paramètres $\alpha$ et $\beta$ non constants.

**Energie interactive :**

Cette énergie doit permettre à l'utilisateur de déplacer facilement le snake pour le positionner à l'endroit souhaité et plus spécialement pour affiner la position de la ligne polygonale fournie par l'opérateur à l'aide de la souris. L'outil principalement utilisé permet de simuler des forces de répulsion d'intensité donnée dont le point d'application $v_0$ est désigné par l'utilisateur à l'aide de la souris. Cet objectif est atteint en utilisant un potentiel de la forme $\frac{1}{|v-v_0|^2}$ qui génère des forces de répulsion radiales.

### 3.2.6 Epilogue

Suite à cette étude à grands traits des contours actifs, nous nous proposons de réaliser dans la suite de cette thèse une étude des modèles d'inspiration active mettant en particulier en valeur leur domaine d'application, leur pertinence et les difficultés de mise en oeuvre qu'elles soient très techniques ou plutôt conceptuelles.

Dans cet esprit, le chapitre suivant présente donc une étude du rôle des paramètres de la fonctionnelle car le lecteur aura sans doute remarqué la présence de forts nombreux paramètres [2]

- $\alpha$ et $\beta$ dans le modèle du contour
- $\lambda$ paramètre de régularisation
- les éventuels poids $w_1$ et $w_2$ déterminant l'importance relative de chacune des énergies.

2. On peut cependant immédiatement rétorquer que la détection traditionnelle impose elle aussi son cortège de paramètres nécessaires au lissage puis au seuillage.

Les méthodes numériques d'optimisation et les difficultés sous-jacentes feront l'objet du chapitre 5 tandis que le chapitre 6 sera consacré à un tour d'horizon des modèles élastiques. Le chapitre 7 présente enfin quelques possibilités d'extension des snakes visant à relativiser l'importance de l'initialisation et permettant une adaptation dynamique des snakes.

# 4
# Les paramètres de la fonctionnelle

Ce chapitre offre une ébauche d'étude des liens existant entre la fonctionnelle utilisée et les propriétés des courbes qui en résultent. Nous proposons donc dans un premier temps une étude du terme d'énergie interne afin de mieux comprendre les propriétés intrinsèques des courbes actives et nous discutons de la qualité de ce terme. Nous évoquons également le rôle du paramètre de régularisation et concluons par une réflexion sur la possibilité d'une détermination adaptative des paramètres.

Rappelons que $v: \ s \in [0,1] \rightarrow v(s)$ est un paramétrage de la courbe active.

## 4.1 Un modèle de spline

Le terme $\int \alpha|v'(s)|^2 + \beta|v''(s)|^2 ds$ est couramment utilisé comme terme stabilisateur pour régulariser les problèmes [Terzopoulos 86b] mettant en jeu des courbes et des surfaces. Ces courbes connues sous le nom de *spline sous tension* ont le mérite de disposer d'un comportement analogue à celui des splines traditionnelles et permettent de plus d'éviter l'apparition trop fréquente de points d'inflexion [Cline 74].

Un tel modèle est doté d'une interprétation physique en termes de plaques et membranes : le premier terme $\int \alpha|v'(s)|^2 ds$ correspond, à un coefficient multiplicatif près, à la déflexion d'une membrane, alors que le terme $\int \alpha|v''(s)|^2 ds$ correspond à la déflexion d'énergie d'ondulation d'une plaque fine. La membrane est résistante à l'élongation, continue et peut éventuellement comprendre des discontinuités de la derivée première tandis que la plaque est résistante à la flexion et est de classe $C^1$.

Les paramètres $\alpha$ et $\beta$ permettent donc de définir les qualités élastiques du contour actif et il est par exemple possible, si l'on possède des informations sur le contour à détecter, d'imposer à une partie de la courbe active une grande rigidité. Intuitivement, une grande valeur de $\alpha$ conduit à une faible énergie de la membrane et accroît donc la rigidité du contour. Inversement, une grande valeur de $\beta$ conduit à une faible énergie de flexion de la plaque et produit des contours très lisses ayant une faible courbure. Il est d'ailleurs intéressant de souligner la possibilité théorique d'introduire un point anguleux en un point de paramètre $s_0$ en posant $\beta(s_0) = 0$.

## 4.2 Quelques études de comportement

Ce paragraphe est consacré à une exploration qualitative des courbes réalisant le minimum de l'énergie interne afin de visualiser l'influence des divers paramètres. Dans ce but, livrons nous d'abord à quelques digressions sur la méthode d'Euler qui permet de calculer les extrema d'une fonctionnelle intégrale.

### 4.2.1 Les équations d'Euler du calcul des variations

De nombreux ouvrages ont été consacrés en totalité ou en partie au calcul des variations [Courant 53], [Gumowski 70],... et nous nous contenterons de citer ici le résultat de base.

Considérons le problème le plus simple du calcul des variations, c'est-à-dire la détermination des extrema de la fonctionnelle :

$$\begin{cases} J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

où la fonction $F$ est supposée de classe $C^2$ par rapport à ses trois arguments.

On cherche donc parmi les fonctions $y$ de classe $C^2$ vérifiant $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ celles qui rendent $J(y)$ maximum ou minimum, ou tout du moins stationnaire (c'est-à-dire celles qui annulent la dérivée de la fonctionnelle et qui sont appelées les extrêmales du problème).

Sous les hypothèses indiquées ci dessus, les extrêmales du problème sont les solutions de l'équation différentielle d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \tag{4.1}$$

Notons que d'un point de vue géométrique, le premier membre de l'équation 4.1 peut être considéré comme le gradient de $J$.

Ce théorème s'étend plus généralement au cas où la fonction $F$ dépend de dérivées de $y$ de plus haut degré[1] :

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), y''(x), .., y^{(n)}(x))dx \tag{4.2}$$

l'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \tag{4.3}$$

### 4.2.2 Application à l'énergie interne

Nous supposerons ici les paramètres $\alpha$ et $\beta$ positifs et constants sur toute la courbe. Une application directe de la formule (4.3) à la fonctionnelle d'énergie interne nous fournit :

1. La dérivée $n^{ieme}$ d'une fonction $y(x)$ par rapport à $x$ sera notée $y^{(n)}(x)$

$$-\alpha v''(s) + \beta v^{(4)}(s) = 0 \tag{4.4}$$

qui se décompose, en terme de coordonnées $v = (x, y)$ sous la forme

$$-\alpha x''(s) + \beta x^{(4)}(s) = 0 \tag{4.5}$$
$$-\alpha y''(s) + \beta y^{(4)}(s) = 0 \tag{4.6}$$

Posons $\delta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$; la solution générale de (4.4) est alors de la forme :

$$v(s) = l_1 e^{\delta s} + l_2 e^{-\delta s} + l_3 s + l_4 \tag{4.7}$$

où $l_1, l_2, l_3, l_4$ sont des couples de réels (Si $\beta = 0$, les solutions sont évidemment linéaires en $s$).

Des conditions aux limites destinées à caractériser le type de contour actif souhaité et aussi à assurer dans la mesure du possible l'unicité de la solution sont à adjoindre à l'équation (4.4). Nous avons choisi d'étudier trois sortes de contour actif :

- Les contours fermés caractérisés par $v[0] = v[1]$
- Les contours à extrémités fixes $A$ et $B$ définis par $v[0] = A$ et $v[1] = B$
- Les contours à extrémités libres que nous avons souhaité contraindre le moins possible au niveau des extrémités et pour lesquels nous avons adopté les conditions $v''(0) = v^{(3)}(0) = v''(1) = v^{(3)}(1) = 0$

En tenant compte de ces conditions aux limites, nous obtenons successivement comme solutions des équations d'Euler :

- Contours fermés :
  $v(s) = l_1 e^{\delta s} + l_2 e^{-\delta s} + (-l_1 e^{\delta} + l_1 - l_2 e^{-\delta})s + l_2$
- Contours à extrémités fixes :
  $v(s) = (-l_2 - l_4)e^{\delta s} + l_2 e^{-\delta s} + ((l_2 + l_4)e^{\delta} - l_2 e^{-\delta} - l_4 + 1)s + l_4$
- Contours à extrémités libres :
  $v(s) = l_3 s + l_4$

Remarquons une fois encore que les résultats ci dessus ne représentent que les points stationnaires de la fonctionnelle et pas uniquement les extréma. Mais dans le cas présent, l'énergie interne peut être aisément évaluée sur les extrêmales et il est alors facile d'en calculer les minima en dérivant par rapport à $l_1, l_2, l_3, l_4$. Il en résulte que le minimum de $E_{int}$ vaut toujours 0 et est atteint pour les courbes réduites à un point aussi bien dans le cas des contours fermés que des contours à extrémités libres. En ce qui concerne les contours à extrémités fixes, ce minimum est atteint pour le segment $[A, B]$.

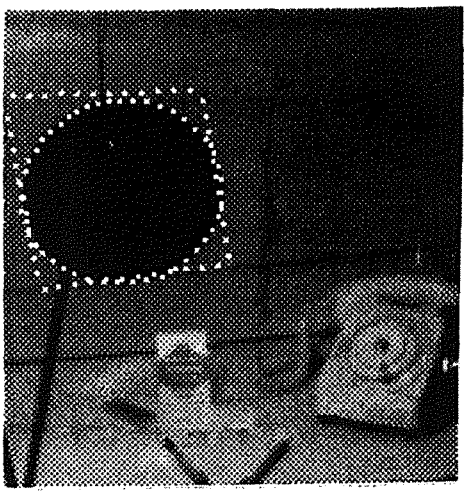

**Figure 4.1**. Utilisation de la tendance naturelle du snake à la rétraction

Ces conclusions appellent deux remarques concernant d'une part le modèle et d'autre part l'aspect numérique du problème. Il est en effet clair d'après ces résultats que la tendance naturelle d'un snake en l'absence de toute force extérieure due à l'image est de se rétracter sur lui même à l'image d'un élastique. Cette propriété s'avère éminemment utile pour un snake fermé car elle lui permet d'évoluer même s'il se trouve dans une partie de l'image à niveau de gris constant et qui ne génère donc aucune force. Une initialisation fermée extérieure à un objet va donc, en se rétractant, permettre au contour actif d'atteindre le secteur proche du contour où le champ de forces est suffisamment intense pour le plaquer sur ce contour (Fig. 4.1).

La deuxième remarque concerne la multiplicité des points stationnaires de la fonctionnelle vis à vis du nombre réduit des extréma dans ce cas. Il conviendra donc, dans l'optique de la minimisation de la fonctionnelle complète se basant sur les équations d'Euler, d'opérer une forte sélection sur les solutions fournies par les équations d'Euler afin de ne conserver que les minima.

### 4.2.3 Propriétés intrinsèques du modèle interne

Nous cherchons ici à mettre en évidence quelques propriétés implicitement satisfaites par le minimum de la fonctionnelle et notamment les conditions aux limites qui seront introduites dans la minimisation numérique de $\phi$ par la méthode des différences finies.

#### Des conditions aux limites implicites

$\phi_2(v) = \int_0^1 \alpha|v'(s)|^2 + \beta|v''(s)|^2 ds$ est une forme quadratique définie positive dont la forme bilinéaire associée, qui est aussi sa différentielle, est

$$B(u,v) = \int_0^1 \alpha v'(s)u'(s) + \beta v''(s)u''(s)ds \tag{4.8}$$

Donc, $\phi_2(v)$ minimum nécessite $B(u,v) = 0 \ \ \forall u \in H^2(0,1)$[2]

Ainsi, $B(u,v) = \int_0^1 \alpha v'(s)u'(s) + \beta v''(s)u''(s)ds = 0 \ \ \forall u \in H^2(0,1)$

Deux intégrations par parties et un choix judicieux d'une famille de fonctions test pour $u$ vont nous permettre de déterminer des conditions implicites nécessairement satisfaites par $v$.

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 v'u'ds = [uv']_0^1 - \int_0^1 uv'' \tag{4.9}$$

et

$$\int_0^1 v''u'' = [u'v'']_0^1 - \int_0^1 u'v^{(3)} = [u'v'']_0^1 - [uv^{(3)}]_0^1 + \int_0^1 uv^{(4)} \tag{4.10}$$

Il en résulte que :

$$B(u,v) = 0 = \int_0^1 \alpha v'u' + \beta v''u'' = [\alpha uv' + \beta(u'v'' - uv^{(3)})]_0^1 - \alpha \int_0^1 uv'' + \beta \int_0^1 uv^{(4)} \tag{4.11}$$

Or $v$ satisfait les équations d'Euler; ce qui nous permet d'écrire :

$$-\alpha \int_0^1 uv'' + \beta \int_0^1 uv^{(4)}) = \int_0^1 -u(\alpha v'' - \beta v^{(4)}) = 0 \tag{4.12}$$

L'équation (4.11) se résume donc à :

$$[\alpha uv' + \beta(u'v'' - uv^{(3)})]_0^1 = 0 \tag{4.13}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$u(1)[\alpha v'(1) - \beta v^{(3)}(1)] - u(0)[\alpha v'(0) - \beta v^{(3)}(0)] + \beta u'(1)v''(1) - \beta u'(0)v''(0) = 0 \ \forall u \in H^2(0,1) \tag{4.14}$$

L'equation (4.14) étant vérifiée pour tout $u$ dans $H^2(0,1)$, elle l'est en particulier pour une fonction $u$ de $H^2(0,1)$ vérifiant $u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u'(1) = 0\ , u(1) \neq 0$ (on peut prendre par exemple $u(s) = -2s^3 + 3s^2$). L'équation (4.14) fournit alors la condition :

$$\alpha v'(1) - \beta v^{(3)}(1) = 0 \tag{4.15}$$

En considérant une fonction $u$ vérifiant $u(1) = 0,\ u'(1) = 0,\ u'(0) = 0\ , u(0) \neq 0$, on obtient :

$$\alpha v'(0) - \beta v^{(3)}(0) = 0 \tag{4.16}$$

Considérant enfin une fonction $u \in H^2(0,1)$ satisfaisant $u(1) = 0,\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0, u'(1) \neq 0$, il vient :

$$\beta v''(1) = 0 \tag{4.17}$$

2. Rappel : $H^2(0,1)$ désigne l'espace des fonctions de $L^2(0,1)$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 sont dans $L^2(0,1)$

et de manière analogue,

$$\beta v''(0) = 0 \tag{4.18}$$

Les conditions aux limites implicites relatives à la minimisation de l'énergie interne sont donc constituées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha v'(0) - \beta v^{(3)}(0) = 0 \\ \alpha v'(1) - \beta v^{(3)}(1) = 0 \\ \beta v''(1) = 0 \\ \beta v''(0) = 0 \end{cases}$$

**Nature de la forme quadratique** $\phi_2(v) = \int_0^1 \alpha|v'|^2 + \beta|v''|^2$

La forme quadratique $\phi_2$ est évidemment positive mais son noyau n'est pas vide puisqu'il contient toutes les courbes réduites à un point et aussi les segments dans le cas des snakes à extrémités libres. La forme $\phi_2$ n'est donc pas coercive [3], ce qui laisse présager de nombreuses difficultés au niveau de la minimisation.

La partie $\phi_2$ de la fonctionnelle est par conséquent définie à une translation près, ce qui est d'ailleurs, à bien réfléchir, dans la nature même du problème : la courbe est implicitement libre d'évoluer dans l'image et c'est le champ de forces induit par l'image (partie $\phi_1$ de la fonctionnelle) qui permet de la stabiliser.

### 4.2.4 Influence de $\alpha$ et $\beta$

#### Etude qualitative

Afin de mieux percevoir l'influence des conditions aux limites d'une part et des paramètres d'élasticité d'autre part, nous avons choisi d'étudier deux exemples simples et de représenter les solutions obtenues pour diverses valeurs des paramètres.

**conditions aux limites** Nous avons choisi dans le premier exemple d'étudier le comportement des minima de la fonctionnelle avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ avec des conditions aux limites simples portant sur les tangentes. Soit $A$ le point de coordonnées $(0,1)$ et $B$ le point de coordonnées $(1,0)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Dans les trois cas étudiés, on pose $v[0] = A$ et $v[1] = B$, et de plus :

- Cas (1) : $v'[0] = \vec{j}$ et $v'[1] = -\vec{j}$
- Cas (2) : $v'[0] = 2\vec{j}$ et $v'[1] = -2\vec{j}$
- Cas (3) : $v'[0] = \vec{j}$ et $v'[1] = -3\vec{j}$

3. La forme $\phi_2$ est coercive si il existe $\nu$ appartenant à $R$ tel que pour tout $u$ appartenant à $\mathcal{U}$, on ait $\phi_2(u) \geq \nu|u|^2$

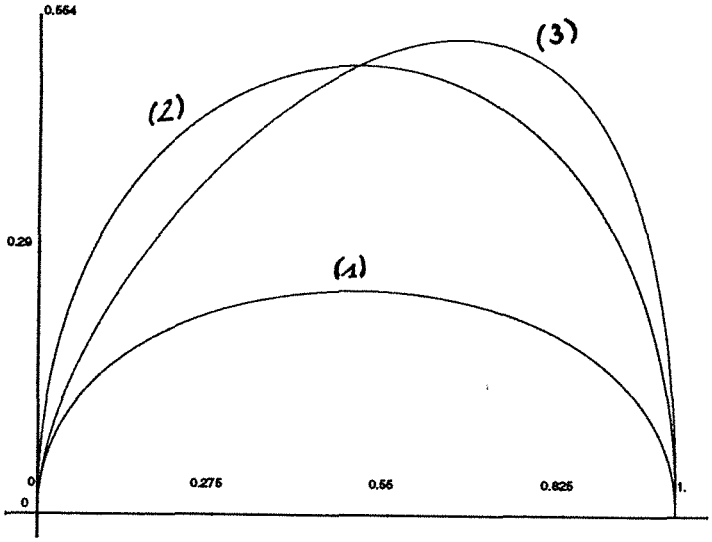


**Figure 4.2.** Influence des conditions aux limites $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Dans ce cas précis la solution générale des équations d'Euler est un polynôme de degré 4 et l'intégration des conditions aux limites fournit alors les solutions suivantes représentées dans (Fig. 4.2) :

- Cas (1) :

$$\begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -t^2 + t \end{cases}$$

- Cas (2) :

$$\begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -2t^2 + 2t \end{cases}$$

- Cas (3) :

$$\begin{cases} x(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ y(t) = -2t^3 + t^2 + t \end{cases}$$

**Influence du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$** Nous avons choisi d'étudier dans ce paragraphe l'influence du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ sur le minimum de l'énergie $\int \alpha|v'(s)|^2 + \beta|v''(s)|^2 ds$ avec pour conditions aux limites $v[0] = A$, $v[1] = B$, $v'[0] = \vec{j}$ et $v'[1] = \vec{i}$. Les solutions obtenues pour un rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ de 0.01 (courbe 1), 1 (courbe 2),16 (courbe 3) et 64 (courbe 4) sont représentées (Fig:4.3) et montrent bien l'influence de $\alpha$ sur la longueur : plus $\alpha$ est grand, plus la courbe est rigide et courte.

Ces deux exemples, bien que très simples, permettent néanmoins de souligner la diversité des courbes extrêmales obtenues en fonction du jeu de paramètres et des conditions aux

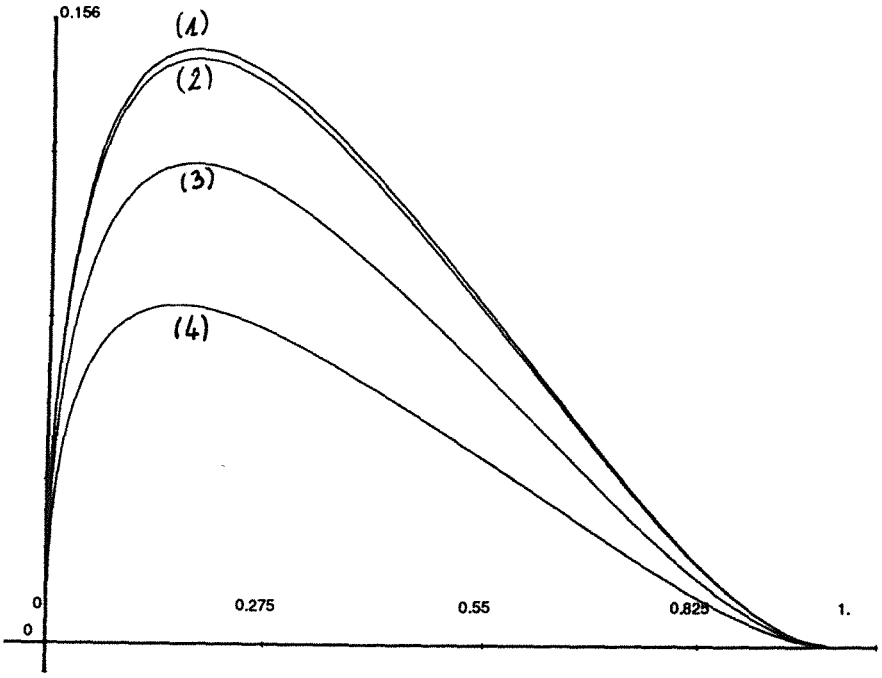


**Figure 4.3**. Influence du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$

limites utilisés. De telles études, concernant notamment les fonctions splines et B-splines [Kochanek 84],[Laurent 87] ont souvent été entreprises dans des domaines comme la CAO ou l'animation graphique, de manière à connaître qualitativement la variation des paramètres à utiliser pour obtenir les déformations souhaitées. Plus récemment, des modèles dynamiques inspirés de la théorie de l'élasticité et rappelant les modèles physiques utilisés dans les contours actifs ont été proposés par Terzopoulos [Terzopoulos 87b] : des objets déformables tels que des élastiques ou des métaux évoluent et se déforment au cours du temps sous l'action de forces externes ou de chocs entre objets. La résolution, en fonction du temps, de l'équation de l'élasticité aux dérivées partielles sous-jacentes permet donc une animation très réaliste des objets. Notons que dans ce cas, les paramètres physiques des objets mis en jeu sont fixés et l'on se contente en quelque sorte d'observer leurs effets sur la déformation résultante.

Dans notre cas, la question qui se pose est finalement d'une nature presque duale : quels sont les paramètres élastiques à adopter pour déformer le snake de manière à l'approcher suffisament du contour à détecter ? En fonction de quel critère ? La valeur de ces paramètres a-t-elle réellement de l'importance ?

En ce qui concerne la nature des paramètres élastiques, la plupart des auteurs [Terzopoulos 87a], [Zucker 88], [Leymarie 90] s'accordent généralement pour reconnaître que $\alpha$ est relié à la notion de « distance » entre deux points voisins du snake alors que $\beta$ est relié à la courbure locale sans être toutefois très précis sur la nature du lien. Terzopoulos propose donc de considérer pour ces paramètres la différence entre la valeur moyenne sur

la courbe et la valeur locale au point de paramètre $s$ en prenant par exemple $\beta(s) = \kappa(s) - courbure - moyenne(C)$. D'autres, à l'image de Cohen [Cohen 90], choisissent les valeurs de ces paramétres sur la base de considérations numériques et proposent de choisir $\alpha$ et $\beta$ de l'ordre de $h$ et $h^3$ où $h$ est le pas de discrétisation sur la courbe. Une discussion sur le bien fondé de ces déterminations sera présenté au chapitre 7.

## 4.3 Discussion du critère

### 4.3.1 Un critère normalisé

Le critère utilisé pour caractériser les propriétés photométriques de la courbe est en effet normalisé, car il est facile de constater que

$$E_{image} = \int_0^1 |\nabla I(v(s))| ds = \frac{1}{L} \int_0^L |\nabla I(v(\frac{s}{L}))| ds \tag{4.19}$$

En conséquence, deux courbes de longueurs différentes présentant, pour simplifier, des profils de gradient constants, fourniront la même valeur de l'énergie interne. Le terme d'énergie image est donc sensible à la densité du gradient sur la courbe indépendamment de la longueur.

Un des inconvénients inhérents à ce critère est le fait qu'un contour actif accroché à un contour n'a aucune chance de s'étendre en longueur pour donner lieu à un meilleur contour. Il faudrait alors pour cela utiliser un critère image non normé de la forme

$$E_{image} = \int_0^L |\nabla I(v(s))| ds \tag{4.20}$$

Mais un tel critère conduirait à augmenter inconsidérément la taille des courbes par le biais de la maximisation de ce terme et aurait l'inconvénient inverse de générer des courbes très longues sans que le gradient soit significatif, la taille de la courbe compensant la faiblesse du gradient.

Pour ces raisons, nous avons donc choisi de conserver la définition initiale de l'énergie image et nous verrons au chapitre 7 les moyens que nous avons développés pour provoquer une extension des snakes.

### 4.3.2 La dépendance du paramétrage

L'entité recherchée dans ce problème est une courbe et il semble donc essentiel que le critère d'évaluation (c'est-à-dire $\phi$) soit indépendant du paramétrage utilisé. Ce n'est malheureusement pas le cas ici comme on peut le constater au niveau de l'énergie interne en considérant les deux paramétrages $v_1(t) = (t, t)$ et $v_2(t) = (t^2, t^2)$ du segment $[A, B]$ pour lesquels $\phi_2(v_1) = 2\alpha$ et $\phi_2(v_2) = \frac{8}{3}\alpha + 8\beta$.

Un critère beaucoup mieux adapté consisterait à utiliser la longueur à la place du terme $|v'(s)|$ et la courbure $\kappa(s)$ à la place de $|v''(s)|$ car ces deux grandeurs sont invariantes par changement de paramétrage.

Afin de fixer le vocabulaire utilisé, rappelons pour mémoire quelques définitions relatives au paramétrage des courbes [Ramis 81] :

Etant donné un paramétrage $v$ de classe $C^1$, on définit l'abscisse curviligne d'origine $v(0)$ par :

$$t \rightarrow s(t) = \int_0^t ||v'(\theta)||d\theta \tag{4.21}$$

Cette fonction permet de définir un *paramétrage intrinsèque* $s \rightarrow M(s)$ de $C$ c'est-à-dire un paramétrage de classe $C^1$ pour lequel le vecteur dérivée est constamment de norme 1.

Enfin, si $s \rightarrow g(s)$ est un paramétrage intrinsèque de $C$, on appelle courbure de $C$ au point $M$ d'abscisse curviligne $s$ le réel $\kappa(s) = ||g''(s)|| = \frac{d\psi(s)}{ds}$, où $\psi(s)$ est l'angle entre l'axe $(O, \vec{i})$ et la tangente au point de paramètre $s$. Dans le cas d'un paramétrage quelconque $v$ de $C$, la courbure s'exprime en coordonneés cartésiennes par :

$$\kappa(M(t)) = \kappa(x(t), y(t)) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.22}$$

Les critères de régularisation employant un terme de courbure plutôt qu'un terme en $||v''||^2$ ont notamment été utilisés dans le cadre de la complétion de courbes [Bruckstein 90]et aussi en analyse de formes [Young 74]. Les préoccupations de ce domaine sont à la fois voisines et plus simples que les nôtres. La complétion s'effectue fréquemment en cherchant la courbe satisfaisant aux conditions de tangente et de contact imposées par les morceaux à compléter et minimisant l'énergie $\int_0^1 \kappa(t)^2 dt$, bien que, un peu contre nature [Horn 83], la solution fournie pour les extrémités $A$ et $B$ avec une tangente verticale ne soit pas un cercle (ce phénomène est du au fait que la longueur de la courbe n'est pas contrainte). Dans le cadre de la complétion de contours, il semblait néanmoins gênant que le critère ne soit pas invariant par changement d'échelle. La courbure est en effet multipliée par $\frac{1}{\gamma}$ lors d'un changement d'échelle de $\gamma$ et le critère adopté pour la recherche d'une courbe de longueur $L$ donnée est plutôt $L \int_0^L \kappa(t)^2 dt$.

L'utilisation d'un critère tel que $\int_0^1 \kappa(t)^2 dt$, bien que mieux définie, pose en fait des problèmes techniques car l'expression de la courbure pour un paramétrage quelconque n'est pas simple et donnera lieu à des équations d'Euler tout à fait non linéaires contrairement au critère habituel. Une solution, qui sera exploitée dans le chapitre 7, consiste à contraindre la recherche de $v$ de manière à ce que $|v'(t)|$ soit constant. De cette façon, on oblige indirectement le paramétrage trouvé à être intrinsèque et l'on sait que dans ce cas $\kappa(t)$ et $|v''(t)|$ coincident.

### 4.3.3 La détection des coins

Un problème posé par toutes ces techniques de régularisation, y compris celles utilisant la courbure, est la quasi impossibité de prendre en compte des coins ou des courbes à variation de tangente rapide. Dans ces deux cas, la courbure (ou le module de la dérivée seconde) est soit infinie, soit définie par une très grande valeur, ce qui ne vaut guère mieux

car leur présence devient prépondérante et pénalise lourdement l'intégrale de la courbure au détriment des portions plus régulières de la courbe.

De ce fait, un critère basé sur le minimum de la dérivée seconde ou de la courbure s'avère incapable de détecter des courbes présentant de fortes aspérités. On peut cependant remarquer que ce comportement est à la fois préjudiciable, car il ne permet pas une détection réellement satisfaisante, mais aussi bénéfique, car la présence de bruit dans l'image se manifestant la plupart du temps par des frontières très irrégulières sur lesquelles la variation de courbure est très importante, il convient donc de réduire au maximum ce bruit. La prise en compte des aspérités doit donc être réalisée avec délicatesse car comme le dit Grimson [Grimson 81] à propos de l'introduction de discontinuités en reconstruction de surface, « pas de nouvelles, bonnes nouvelles » , ce qui signifie qu'il ne faut introduire de fortes variations sur les surfaces (discontinuités...) que si on a de très bonnes raisons de le faire.

Le parallèle entre les contours actifs et la reconstruction de surface est d'ailleurs intéressant à plus d'un titre. Les problèmes qui se posent au niveau de la prise en compte des discontinuités ou des variations brutales sont en fait assez similaires dans l'esprit. Il existe en effet en reconstruction de surface un coefficient analogue au coefficient $\beta$ dont le positionnement à 0 permet de développer une discontinuité ou un pli au point considéré [Terzopoulos 88]. Cependant, l'emplacement des discontinuités est soit déterminé à l'avance à l'aide de statistiques locales [Grimson 85], soit déterminé au cours de l'optimisation en marquant comme discontinuité les points pour lesquels le gradient de la nappe d'approximation déjà réalisée est supérieur à un certain seuil. Mais dans ce dernier cas, comme le fait remarquer Pavlidis, les discontinuités sont davantage détectées à partir de l'approximation courante réalisée plutôt qu'à partir des données elles mêmes. Dans le cadre des contours actifs, une démarche consistant à détecter au préalable les discontinuités semble vouée à l'échec car nous ne disposons pas des moyens a priori permettant d'affirmer qu'un point donné de la courbe initiale sera un point anguleux de la courbe finale.

Le positionnement a priori des coins se révélant illusoire, nous nous sommes orientés vers une méthode générant au cours de l'évolution du snake les points pour lesquels $\beta$ est nul. Une telle approche diffère sensiblement de celle décrite par Terzopoulos car la courbe évolue au cours du temps : alors que dans le cas des surfaces, les itérations successives affinant l'estimation de la surface permettent de s'assurer de l'existence effective d'un pli, elles ne contribuent pas nécessairement, dans le cas des contours actifs et en raison du déplacement de la courbe dans l'image, à confirmer l'existence d'un point anguleux. En effet, et comme l'illustre la figure (Fig. 4.4), une courbe peut être raccrochée au cours de son évolution par des points parasites ou de petits contours et donner naissance à un point anguleux alors que l'évolution finale verra la courbe se décrocher de cette position et finalement ne contenir aucun point anguleux. L'existence des points anguleux peut donc n'être qu'éphémère.

Pour toutes ces raisons, nous avons finalement choisi de ne pas tenir compte des

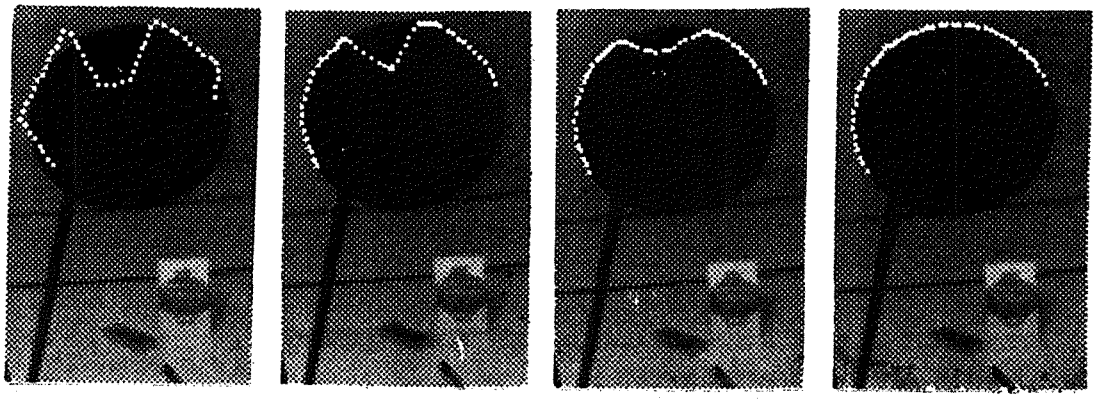

**Figure 4.4.** Apparition et disparition de points anguleux.

éventuels coins dans un premier temps et de réaliser d'abord un ajustement grossier des contours actifs. Une question vient alors immédiatement à l'esprit : comment estimer la qualité de la courbe obtenue pour des paramètres $\alpha$ et $\beta$ donnés ? Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur l'élaboration d'un tel critère mais nous pouvons d'ores et déjà indiquer que le critère retenu repose sur la comparaison des gradients obtenus sur la snake par rapport à la valeur moyenne du gradient dans le voisinage du snake.

L'évaluation grossière étant acquise, il reste maintenant à l'affiner si besoin est en permettant le développement de coins. Les paramètres $s$ susceptibles de correspondre à un point anguleux sont choisis de manière classique [Lux 85] parmi l'ensemble des paramètres pour lesquels la courbure est maximale.

D'un point de vue pratique, nous connaissons un contour actif en un ensemble de paramètres discrets $s_1, \ldots, s_n$ et nous réalisons l'histogramme de la courbure discrète (réalisant une bonne approximation de la courbure) telle que l'a définie Lux :

$$\kappa_d(M_i) = angle(\vec{M_{i-k}M_i}, \vec{M_iM_{i+k}})/(M_iM_{i-k} + M_iM_{i+k}) \tag{4.23}$$

où $k$ caractérise en fait le lissage nécessaire pour éviter une évaluation trop bruitée de la courbure. Sont alors considérés comme coins potentiels les points de paramètre $c_1, \ldots, c_k$ pour lesquels l'histogramme présente un maximum supérieur à la courbure moyenne. A partir de l'initialisation fournie par l'estimation grossière réalisée, une nouvelle minimisation de la fonctionnelle avec $\{\beta(c_i) = 0_{i=1..k}\}$ est alors effectuée.

Il peut évidemment arriver que l'évaluation du paramètre où la courbe est censée developper un coin s'avère légèrement erronée. Il est alors possible, à l'image des méthodes utilisées pour approximer des fonctions dont on connaît le nombre et la position approximative des discontinuités [Mumford 85], [Girard 88a], [Girard 88b], de réaffiner la position des coins en utilisant une sorte de recuit simulé : on teste la valeur de la fonctionnelle lorsqu'on déplace légèrement la position des coins et on conserve la position pour laquelle $\phi$ est minimale. Une telle méthode est cependant coûteuse, d'une part à cause des nombreux

essais de positionnement des coins et d'autre part du fait du coût de la minimisation à chaque essai.

### 4.3.4 Plaidoyer pour une détermination adaptative des paramètres

D'une manière générale et comme l'atteste la complexité des méthodes [Girard 88b] mises en oeuvre pour approximer des fonctions même 1D contenant des discontinuités en nombre connu, le problème du positionnement et de l'estimation des caractéristiques des discontinuités est fort épineux et particulièrement coûteux à résoudre. Le problème de localisation des coins qui nous est posé est du reste plus complexe puisque l'ensemble des points à approximer n'est pas vraiment connu car la position atteinte par le contour n'est pas la meilleure possible. C'est en fait le positionnement des coins qui va permettre d'atteindre le meilleur minimum possible.

Le lecteur pourra bien naturellement objecter que la fonctionnelle $\phi$ utilisée n'est pas la même tout au long du processus puisque le paramètre $\beta$ notamment, est variable. Il est en effet tentant de reformuler le problème en cherchant les fonctions $C$, $\alpha et \beta$ minimisant la fonctionnelle d'énergie $E$ de manière à obtenir le meilleur minimum possible. On chercherait donc à minimiser la fonctionnelle $\phi(\alpha, \beta, C)$ qui possède en particulier la propriété suivante :

$$si \;\; \alpha < \alpha' \;\; et \;\; \beta < \beta' \;\; alors \;\; \phi(\alpha, \beta, C) \leq \phi(\alpha', \beta', C) \tag{4.24}$$

Même en faisant abstraction des problèmes d'explosion combinatoire liés à la minimisation d'une telle fonctionnelle, une telle idée n'est cependant pas viable car le minimum est toujours atteint pour $\alpha$ et $\beta$ constamment nuls ce qui revient à ne poser aucune contrainte sur la nature de la courbe $C$ et occasionnerait des frontières particulièrement tourmentées.

L'utilisation de fonctionnelles utilisant des $\alpha$ et $\beta$ variables au cours du temps ne doit pourtant pas être abandonnée pour autant car ceci nous permettra de guider l'évolution du snake par les données. Deux aspects principaux militent pour cette évolution au cours du temps :

- La vitesse d'évolution : Le contour actif évolue au cours du temps lorsqu'il se déplace de sa position initiale vers le contour le plus proche et sa vitesse dépend évidemment des constantes élastiques adoptées. Ceci est naturellement important vis à vis du temps de calcul nécessaire.

- l'adaptation dynamique : certaines constantes élastiques ne permettent pas au snake d'atteindre le contour souhaité. Ceci est illustré (Fig. 4.5) par l'évolution de deux snakes avec des valeurs de $\alpha$ et $\beta$ différentes. Dans (Fig. 4.5a) le snake reste bloqué sur le reflet alors que dans (Fig. 4.5b) il poursuit son évolution car les contraintes sur la rigidité sont suffisamment élevées.

Dans le dernier cas évoqué, le minimum atteint par la fonctionnelle pour $\alpha$ et $\beta$ donnés ne correspond pas à l'image intuitive que l'on se fait du contour à détecter, ce qui revient à

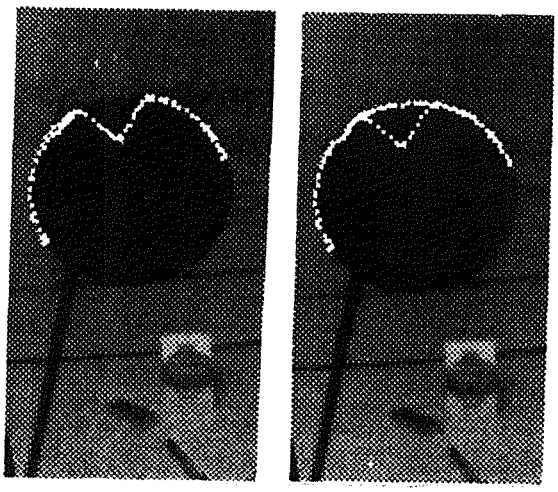

**Figure 4.5**. Evolutions différentes en fonction des caractéristiques élastiques: (a) $\alpha = 1, \beta = 1$ (*b*) $\alpha = 5, \beta = 1$

dire que le minimum obtenu n'est pas satisfaisant et que le critère retenu (la fonctionnelle $\phi$) n'est pas véritablement adaptée. Il semble donc rationnel de faire évoluer le critère c'est-à-dire les coefficients de $\phi$ afin de l'améliorer. Encore faudrait il savoir comment et en fonction de quoi l'améliorer...

Cette estimation retenue repose, comme cela a déjà été mentionné ci-dessus et comme nous le verrons au cours du chapitre suivant, sur la qualité du gradient sur la courbe définie par le snake. Sans anticiper sur le chapitre 8 qui developpera ces idées, on peut néanmoins donner l'idée générale sous-tendant la détermination adaptative: lorsque la courbe du gradient sur le snake présente un trou, il y a fort à parier que soit le contour est effectivement interrompu, soit les caractéristiques élastiques utilisées ne permettent pas de prendre en compte les variations de courbure de contour. Nous verrons ultérieurement que dans ce dernier cas, des rétractions ou même des expansions du contour actif dont l'origine se trouve dans la variation des coefficients élastiques permettent alors de détecter le contour.

## 4.4 Le choix du paramètre de régularisation

Afin de situer la complexité du problème, notons que Tikhonov [Tikhonov 76] déclarait à propos de la détermination du paramètre de régularisation qu'il s'agissait la d'un « problème généralement difficile dans les cas concrets ».

Le ton étant donné, examinons d'abord le rôle intuitif de ce paramètre $\lambda$. Il est clair que $\lambda$ règle le degré de lissage souhaité et qu'une grande valeur de $\lambda$ provoque un fort lissage et peut même conduire à négliger l'influence de l'image, alors qu'une très faible valeur n'induit que fort peu de contraintes sur la nature de la courbe. La valeur de $\lambda$ fixe

ainsi le compromis entre le degré de lissage et l'adéquation à l'image. Il importe donc de donner une valeur convenable à $\lambda$.

Une première méthode, proposée par Fua [Fua 89], consiste à déterminer $\lambda$ en utilisant le fait que l'énergie $\phi = E_{image} + \lambda E_{interne}$ est minimale pour la position finale $C_f$ du contour actif, donc

$$\frac{\partial}{\partial C}\phi(C)|_{C=C_f} = 0 \tag{4.25}$$

La recherche d'un $\lambda$ constant permet donc d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial C}E_{image}|_{C=C_f} + \lambda\frac{\partial}{\partial C}E_{interne}|_{C=C_f} = 0 \tag{4.26}$$

Le passage au module fournit alors la nécessaire valeur de $\lambda$

$$\lambda = \frac{|\frac{\partial}{\partial C}E_{image}|_{C=C_f}|}{|\frac{\partial}{\partial C}E_{interne}|_{C=C_f}|} \tag{4.27}$$

En supposant, ce qui est loin d'être toujours la cas, que la courbe initiale $C_i$ est proche de $C_f$, Fua estime $\lambda$ par

$$\lambda = \frac{|\frac{\partial}{\partial C}E_{image}|_{C=C_i}|}{|\frac{\partial}{\partial C}E_{interne}|_{C=C_i}|} \tag{4.28}$$

Une première remarque, plutôt technique, concerne l'évaluation de $\lambda$ faite à partir de l'équation (4.26) qui gagnerait sans doute à être réalisée par une estimation aux moindres carrés qui fournirait une valeur plus robuste puisque l'équation n'a pas de solution exacte en général.

Notre seconde remarque est plus fondamentale et revient sur le rôle de ce paramètre de régularisation. Ce paramètre régit en fait la précision sur la solution : plus $\lambda$ sera petit, meilleure sera la solution du problème consistant à minimiser $E_{image}$ (en ce sens que la solution obtenue collera le mieux à l'image). La meilleure précision à laquelle on puisse prétendre, c'est-à-dire la plus petite valeur de $\lambda$ utilisable (puisque $\phi$ est une fonction décroissante de $\lambda$), est donc nécessairement déterminée comme une fonction de l'erreur entachant les données initiales.

Mais, dans notre cas, que faut il entendre par erreur sur les données ? Si l'erreur sur les données a une véritable existence physique dans les problèmes dont la forme directe est du type $Az = u$ ( $A$ est donné et $u$ est par exemple une mesure) , l'erreur devient plus délicate à estimer dans le cas qui nous intéresse. Il ne peut être en effet formulé sous la forme d'une équation sauf si l'on considère les équations d'Euler du problème, mais comment déterminer alors une erreur tolérable sur le premier membre qui est fort complexe ? L'erreur sur les données peut donc difficilement être évaluée et les méthodes classiques (chapitre2) pour les problèmes pouvant être formalisés par une équation de type $Az = u$, consistant à utiliser une séquence décroissante $\{\lambda_i\}$ de valeurs, à déterminer la solution $z_{\lambda_i}$ correspondante et à choisir $\lambda_i$ de manière que $|Az_{\lambda_i} - u|$ soit inférieur à l'erreur $\delta$ sont inenvisageables pour un problème de recherche de minimum.

Cependant, tel que le problème est formulé, le sort du paramètre $\lambda$ est intimement lié à celui des paramétres élastiques $\alpha$ et $\beta$ et on pourrait d'ailleurs poser $\alpha_1 = \lambda\alpha$ et $\beta_1 = \lambda\beta$, ce qui reporte le problème du choix de $\lambda$ sur les problèmes de détermination de $\alpha$ et $\beta$ qui ont été évoqués plus haut et qui devraient précisément prendre en compte l'erreur que l'on peut tolérer sur la position d'un contour par le biais du critère de qualité. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 7, le problème du choix de $\alpha$ et $\beta$ n'est pas plus facile à résoudre que le problème du choix de $\lambda$.

## 4.5 Quelques conclusions...

Si l'on tente de tirer des conclusions de l'étude menée jusqu'ici, il convient de constater que la détermination de paramètres corrects est cruciale mais aussi délicate pour le comportement général des contours actifs puisqu'ils conditionnent d'une part le poids relatif des forces images et des forces internes et d'autre part la finesse de la courbe obtenue. Un poids trop grand accordé aux forces internes conduirait le contour actif à négliger les forces images et à « passer au travers du contour » , presque uniquement soumis aux seules contraintes élastiques, tandis qu'un poids trop petit contraindrait insuffisamment le snake, le laissant libre de former des contours déchiquetés peu utilisables par un processus de plus haut niveau.

Parmi tous les paramétres à régler, le choix de $\alpha$ et $\beta$ est sans doute le plus fondamental puisque ces caractéristiques interdiront ou autoriseront le contour actif à approximer le contour de façon satisfaisante. Comme nous avons pu le voir, une détermination adaptative de $\alpha$ et $\beta$ en fonction de l'espace (c'est-à-dire de la position $s$ sur la courbe) mais aussi du temps $t$ s'avère indispensable car cette évolution de la fonctionnelle d'estimation $\phi$ au cours du temps traduit la nécessaire adaptation du critère afin de guider l'évolution du snake vers le meilleur contour possible. La détermination adaptative que nous avons réalisée et qui sera détaillée au cours du chapitre 7 permet de plus d'obtenir des expansions des contours actifs qui étaient impossibles avec le modèle initial des snakes. Il faut cependant noter qu'une détermination adaptative des coefficients conduit à une complexité accrue des algorithmes de minimisation (chapitre 5).

Enfin, on peut sans trop de problèmes, reporter la détermination des coins d'un contour après la phase d'optimisation car cette recherche peut sans dommage être considérée comme l'étape ultime de raffinement de la solution et elle est d'autant moins utile que les paramètres élastiques utilisés sont faibles.

# 5
# Aspects numériques

## 5.1 Optimisation de la fonctionnelle

### 5.1.1 Problèmes généraux de la minimisation

La fonction de coût ayant été choisie, il reste donc à minimiser la fonctionnelle en tenant compte des conditions aux limites imposées par le problème et d'éventuelles contraintes.

L'abondance de la littérature sur ce sujet [Ciarlet 82], [Bakhvalov 73], [Cea 71], [Faurre 88 illustre bien la complexité de ce problème ce qui ne doit pas pour autant faire croire qu'optimiser une fonctionnelle est une tentative vouée à l'échec. Le calcul d'un optimum n'étant presque jamais accessible par calcul formel dans les cas concrets, et c'est bien évidemment notre cas, les algorithmes utilisés procèdent par construction d'une suite $(u_n)$ convergeant vers l'optimum à partir d'une initialisation $u_0$. Les écueils traditionnels auxquels se heurtent les algorithmes d'optimisation concernent plus particulièrement:

#### La présence de bruit et la fiabilité de l'algorithme

Comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, l'image, même lissée, reste bruitée et la fonctionnelle présente donc des minima locaux non représentatifs (Fig5.1).

Par ailleurs, les contours forment des vallées de faible largeur (d'autant plus faible

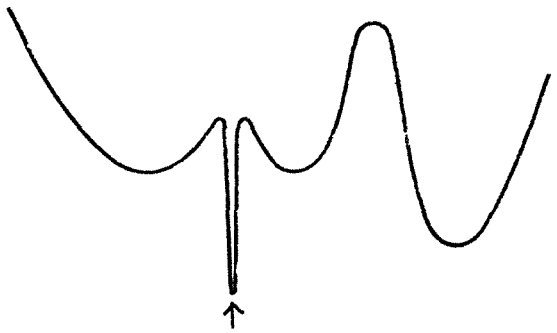

**Figure 5.1**. Exemple de minimum non représentatif.

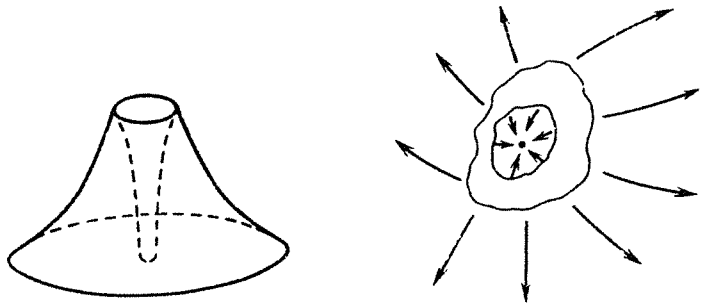

**Figure 5.2**. Problèmes de stabilité [Bakhvalov 73]

qu'ils sont fins et marqués), ce qui contribue à affaiblir la stabilité d'un algorithme de minimisation. Considérons en effet (Fig. 5.2.b) la cas d'une fonctionnelle présentant un minimum dans un puit très étroit, puis s'accroissant brusquement dans une zone très étroite et décroissant ensuite. Une minimisation traditionnelle du style gradient réalisée en se déplaçant le long de la ligne de plus grande pente, nécessite une initialisation du processus très proche de la solution. Seule une initialisation contenue dans une zone très petite (Fig. 5.2.b) permettra d'atteindre le minimum.

### La minimisation d'une fonctionnelle non convexe

La difficulté soulevée dans le paragraphe précédent est essentiellement due à la non convexité de la fonctionnelle $\phi$ qui résulte de la présence du terme d'énergie image. Malheureusement, la majorité des algorithmes de minimisation assurent la convergence vers le minimum pourvu que la fonctionnelle soit convexe ou même fortement convexe, ce qui garantit de plus que tout minimum local est un minimum global.

L'utilisation de ces méthodes ne peut donc se révéler efficace que si l'initialisation est assez proche de la solution pour être située dans un domaine ou la fonctionnelle est localement convexe. Les algorithmes permettant la minimisation de fonctionnelles non convexes sont malheureusement peu nombreux, on peut néanmoins citer les méthodes de recuit simulé [Metropolis 53],[van Laarhoven 87],[Kirkpatrick 83] qui connaissent actuellement un grand succès et qui reposent sur une optimisation stochastique permettant d'éviter qu'un point ne soit bloqué dans un minimimum local et l'algorithme GNC [Blake 87].

1. Le recuit simulé

   Cette méthode est inspirée du recuit utilisé en métallurgie permettant d'atteindre l'état d'équilibre stable d'un système par abaissement progressif de la température alors qu'un refroidissement très rapide fournit seulement un état d'équilibre instable. L'analogie entre le refroidissement progressif d'une matière jusqu'à ce qu'elle atteigne sa position d'équilibre et la minimisation d'une fonction de coût $f$ a donné lieu à

l'algorithme du recuit simulé:

*A partir d'une solution $s$ réalisable et d'un voisinage $V(s)$,*
*on tire au hasard $s' \in V(s)$.*
*Si $f(s') < f(s)$ ,*
*$s'$ remplace $s$ et on recommence*
*Sinon*
*la solution $s'$ est a priori moins bonne que $s$,*
*mais on peut néanmoins décider de remplacer $s$ par $s'$*
*à l'issue d'un tirage aléatoire dont la probabilité de succès est*
*$P_T = 1 - e^{-k(T-T_0)}$ ($k$ est une constante donnée).*
*Fin si*

Ainsi, au début du processus, lorque $T$ est grand, $P_T$ est proche de 1, donc presque tous les changements sont autorisés alors que lorsque $T$ se rapproche de $T_0$, seuls les changements bénéfiques sont autorisés. L'idée de base repose ainsi sur le fait que les mouvements locaux désavantageux a priori permettent de ne pas se laisser piéger par un optimim local. Si la décroissance de $T$ (correspondant à la température dans un système physique) est bien contrôlée (c'est-à-dire suffisamment lente), on obtient des résultats spectaculaires. Des résultats théoriques [Geman 84] ont d'ailleurs prouvé que le processus de recuit convergeait en probabilité vers la configuration d'énergie minimale dès que la température à l'itération $i$ satisfait l'inégalité $T(i) \geq \frac{c}{1+i}$, ce qui donne lieu à une décroissance très lente de la température peu utilisable en pratique.

Nous relatons à la fin de ce chapitre la tentative d'utilisation des méthodes de recuit que nous avons réalisée. Les résultats ne sont pas vraiment convaincants dans la mesure où l'initialisation doit être proche du contour pour que le processus converge. La difficulté majeure dans notre cas est due au fait que l'inconnue $s$ est ici une courbe et qu'il est difficile de définir une procédure de choix au hasard d'une courbe dans un voisinage car les possibilités sont innombrables et la décroissance de la température doit donc être particulièrement lente.

2. L'algorithme GNC

Si l'algorithme de recuit simulé peut être utilisé pour n'importe quel type de fonction, l'algorithme GNC [1] developpé par Blake et Zisserman [Blake 87] pour optimiser la fonctionnelle décrite dans le chapitre 3, permet d'optimiser certaines classes de fonctions non convexes. Dans cet algorithme la fonction de coût $F$ à optimiser est d'abord approchée par une fonction $F^*$ qui est convexe et ne peut donc posséder qu'un seul minimum calculé par une méthode traditionnelle de gradient. Une suite de fonctions ($F^0 = F, ..., F^{\frac{1}{2^n}}, ..., F^{\frac{1}{2}}, F^1 = F^*$) non forcément convexes est alors

1. The Graduated Non Convexity Algorithm

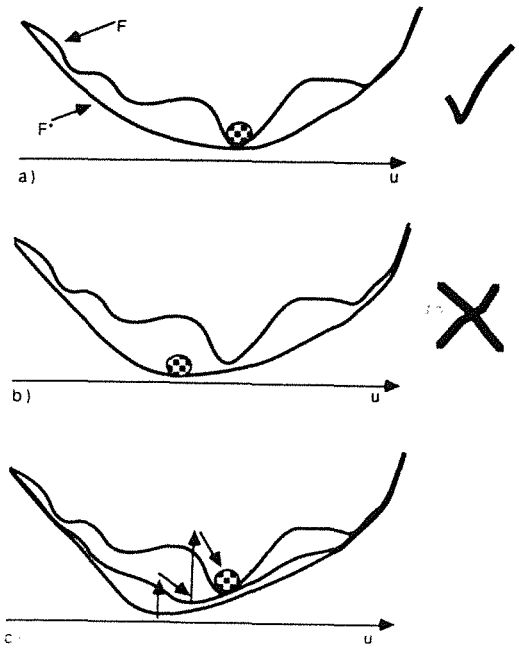


**Figure 5.3**. Fonctionnement de l'algorithme GNC.

construite et l'optimum trouvé pour $F^{\frac{1}{2^n}}$, est utilisé comme valeur initiale de l'algorithme minimisant $F^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ (Fig. 5.3). Comme le font remarquer les auteurs, cette méthode ne peut convenir à n'importe quelle fonction puisqu'il est nécessaire que le minimum obtenu à une étape pour $F^{\frac{1}{2^i}}$ soit situé dans le puit de minimum de la fonction de rang inférieur $F^{\frac{1}{2^{i+1}}}$. Le résultat de l'algorithme dépend de plus de l'approximation convexe $F^*$ réalisée au départ et une approximation convexe plausible peut néanmoins conduire à l'échec de cet algorithme. L'utilisation en est donc délicate d'autant plus que notre fonctionnelle comprend une intégrale curviligne rendant dès le départ l'approximation par une fonction convexe malaisée.

Comme on peut le constater, la minimisation de fonctionnelles non convexes pose de redoutables problèmes puisque dans notre cas, l'initialisation peut ne pas être située dans une seule vallée du potentiel. C'est pourquoi nous avons choisi d'opter pour une méthode décrite dans le chapitre 7 consistant à générer un contour actif qui soit (presque) toujours situé dans une même vallée de potentiel.

### Le coût de l'optimisation

Le coût de l'optimisation revêt évidemment une certaine importance ici puisque les contours actifs sont en particulier utilisés de manière interactive et il est donc raisonnable de ne pas abuser de la patience de l'utilisateur par l'emploi de méthodes numériques interminables. Cette exigence, liée à l'efficacité de l'algorithme, peut être partiellement satisfaite

en ayant recours à des méthodes multigrilles [Terzopoulos 86a], [Brandt 77], [Lascaux 87] qui permettent de résoudre le problème à une échelle grossière et de l'affiner au fur et à mesure. Une implantation de cette méthode est actuellement à l'étude.

Passons maintenant à la résolution numérique effective du problème. Nous avons choisi d'utiliser la méthode par différences finies décrite initialement dans [Kass 88] en l'adaptant au type de snake utilisé ici. Il est cependant à noter qu'une méthode par éléments finis, notamment utilisée dans [Cohen 90], est mieux adaptée de part sa nature à la prise en compte des conditions aux limites mais plus complexe à mettre en œuvre [Gardan 87], [Lascaux 87].

### 5.1.2 La discrétisation du problème

Comme l'ont fait remarquer plusieurs auteurs, [Cohen 90], [Zucker 88], le problème considéré est en fait un problème d'évolution puisque la position du snake au cours du temps est une fonction des variables temporelles $t$ et spatiales $s$, $(t,s) \rightarrow v(t,s)$ pour laquelle $v(0,s) = v_0(s)$ est la position initiale du snake.

D'après le théorème d'Euler Lagrange [Courant 53], si un système évolutif a une énergie potentielle $U$ et une énergie cinétique $T$, alors la fonctionnelle $J = \int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ est stationnaire. Dans notre cas, $T = \int \frac{1}{2}m\frac{\partial v}{\partial t}^2 ds$ et $U$ est l'énergie du snake décrite dans le chapitre 3 ($U = \int \alpha(s)|v_s|^2 + \beta(s)|v_{ss}|^2 - |\nabla I(v)|^2$) . L'application des équations d'Euler généralisées fournit alors les équations qui sont utilisées dans [Zucker 88]

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial v_s} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial f}{\partial v_{ss}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial f}{\partial v_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial v \partial s}\frac{\partial f}{\partial v_{st}} = 0 \tag{5.1}$$

où
$f(v) = \frac{1}{2}m\frac{\partial v}{\partial t}^2 - \alpha(s)|v_s|^2 - \beta(s)|v_{ss}|^2 + |\nabla I(v)|^2$

Cependant, ces équations sont relativement compliquées et ne sont de plus valides que pour les systèmes conservatifs. Comme nous nous intéressons seulement à la solution stationnaire de ce problème d'évolution, il est plus simple de considérer l'équation d'évolution simplifiée :[2]

$$\gamma\frac{\partial v}{\partial t} - (\alpha v')' + (\beta v'')'' = \frac{\partial |\nabla I|^2}{\partial v} \tag{5.2}$$

puisque la solution de (5.2) lorsque $v$ se stabilise (c'est-à-dire $v \rightarrow 0$) est précisément la solution du problème statique qui nous intéresse. Le terme $\gamma\frac{\partial v}{\partial t}$ s'apparente à un terme d'énergie cinétique et $\gamma$ joue en quelque sorte le rôle de « poids » de la courbe. Nous allons revenir dans le paragraphe 1.3 sur le rôle (en particulier numérique) de $\gamma$.

Discrétisons maintenant l'équation (5.2) et considérons pour cela l'ensemble des points équidistants $(v_i(t) = (x_i(t), y_i(t)))_{0 \leq i < N})$ représentant la courbe active à l'instant $t$. Les valeurs des constantes élastiques en un point de paramètre $s = i$ sont notées $\alpha_i$ et $\beta_i (i \in 0..N-1)$. Elles peuvent également dépendre du temps.

2. Pour des raisons de simplicité, les dérivées par rapport à la variable spatiale $s$ seront notées par $v'$, $v''$, $v^{(3)}$, $v^{(4)}$, ....

Notons d'abord que si $\mathcal{L}$ désigne la longueur du snake $C$, on a:

$$\phi(C) = \int_0^1 E(v(s))ds = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} E(v(\frac{s}{\mathcal{L}}))ds \tag{5.3}$$

Si on suppose que la longueur du snake ne varie pas trop au cours du temps (ou que le pas de temps est suffisamment petit pour que la longueur évolue peu), alors la variation de longueur de la courbe est négligeable vis-à-vis de la variation de $\int_0^{\mathcal{L}} E(\frac{s}{\mathcal{L}})ds$ et les minima de $\int_0^1 E(v(s))ds$ et de $\int_0^{\mathcal{L}} E(v(\frac{s}{\mathcal{L}}))ds$ sont atteints pour des courbes voisines.

Si $h$ désigne la distance moyenne entre deux points de discrétisation (donc $h = 1$ si la discrétisation est de l'ordre du pixel), nous considérons donc l'ensemble des points $(v_i(t) = v(t, \frac{i}{N-1}))_{0 \leq i < N})$ et nous pouvons approximer la dérivée première en un point de paramètre $i \in \{0 \ldots N-1\}$ par la différence

$$v'_i(t) = \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{h} \tag{5.4}$$

et la dérivée seconde par

$$v''(t)_i = \frac{v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)}{h^2} \tag{5.5}$$

Avant de poursuivre plus avant la discrétisation du processus, il convient de noter que les deux formules précédentes présupposent que la distance entre les points de discrétisation est assez faible afin que l'approximation de la limite par le quotient ait un sens et également que cette distance soit relativement constante afin que la discrétisation réalisée soit homogène. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 7.

L'équation (5.2) fournit donc au point de paramètre $i$:

$$\begin{aligned} &\gamma(v_i(t) - v_i(t-1)) + \\ &\tfrac{1}{h^2}(\alpha_i(v_i(t) - v_{i-1}(t)) - \alpha_{i+1}(v_{i+1}(t) - v_i^i)) + \tfrac{1}{h^4}(\beta_{i-1}(v_{i-2}(t) - 2v_{i-1}(t) + v_i(t)) \\ &-2\beta_i(v_{i-1}(t) - 2v_i(t) + v_{i+1}(t)) + \beta_{i+1}(v_i(t) - 2v_{i+1}(t) + v_{i+2}(t))) = \tfrac{\partial|\nabla I|^2}{\partial v} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ce qui peut aisément s'écrire sous forme matricielle:

$$(A + \gamma I)V(t) = \gamma V(t-1) - \frac{\partial f}{\partial v}(V(t-1)) \tag{5.7}$$

où $V(t)$ désigne le vecteur $[v(t)_0, \ldots, v(t)_{n-1}]$ et $f(v) = -|\nabla I(v)|^2$.

et où la matrice $A$ est une matrice carrée dont la taille est le nombre $N$ de points de discrétisation et qui est *presque* pentadiagonale de bande:

$$\begin{cases} a_{i-2,i} &= \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \\ a_{i-1,i} &= \frac{1}{h^4}(-h^2\alpha_i - 2\beta_{i-1} - 2\beta_i) \\ a_{i,i} &= \frac{1}{h^4}(h^2(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) \\ a_{i,i+1} &= \frac{1}{h^4}(-h^2\alpha_{i+1} - 2\beta_i - 2\beta_{i+1}) \\ a_{i,i+2} &= \frac{\beta_{i+1}}{h^4} \end{cases}$$

Cette matrice n'est en effet pas toujours réellement pentadiagonale en raison des diverses conditions aux limites adoptées qui tiennent compte de la nature du snake et affectent les premiers et les derniers termes de $V$. Aussi, les discrétisations écrites en (5.6) ne sont elles valables que si $1 \leq i \leq N-2$. Détaillons la forme de cette matrice pour chacun des trois types de snake et en particulier le snake à extrémités libres qui est à notre connaissance peu étudié dans la littérature. Pour des raisons de simplicité d'écriture évidentes, la matrice $A$ est écrite dans chacun des cas pour $\alpha$ et $\beta$ constants et pour $h = 1$, ce qui fournit une matrice dont la bande est notée:

$$[\beta\ ,\ -\alpha - 4\beta\ ,\ 2\alpha + 6\beta\ ,\ -\alpha - 4\beta\ ,\ \beta] \tag{5.8}$$

Dans les cas où l'initialisation est proche du contour, l'utilisation de paramètres $\alpha$ et $\beta$ constants est en géneral suffisante et la matrice $A$ est alors symétrique. Cependant, il peut être nécessaire, comme nous le verrons au chapitre 7, d'adopter des constantes élastiques différentes en chaque point du contour de manière à permettre une bonne adaptation locale du snake. La matrice $A$ n'est alors plus symétrique.

**1. Snake fermé**

Ce cas est en fait très simple à traiter car il suffit de remplacer les termes $v_{-1}(t)$, $v_{-2}(t)$, $v_N(t)$, $v_{N+1}(t)$ respectivement par $v_{N-1}(t)$, $v_{N-2}(t)$, $v_0(t)$, $v_1(t)$. Ceci donne donc lieu à la matrice $A$ circulaire suivante de taille $N \times N$:

$$\begin{bmatrix}
2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta \\
-\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta \\
\beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
0 & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta \\
\beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta \\
-\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta
\end{bmatrix}$$

**2. Snake à extrémités libres**

Les conditions aux limites adoptées sont, rappellons le $v''(t,0) = v^{(3)}(t,0) = v''(t,1) = v^{(3)}(t,1) = 0$. La discrétisation des termes faisant intervenir la dérivée d'ordre 4 en 0 et 1 doit être recalculée en tenant compte de ces conditions. A titre d'exemple, on obtient

$$v_0^{(4)}(t) \simeq \frac{\beta_2 v_2\,''(t) - 2\beta_1 v_1\,''(t) + \beta_0 v_0\,''(t)}{h^2} \tag{5.9}$$

Et puisque $v''(t,0) = 0$, alors

$$v_0^{(4)}(t) \simeq \frac{\beta_2(v_3(t) - 2v_2(t) + v_1(t)) - 2\beta_1(v_2(t) - 2v_1(t) + v_0(t))}{h^4} \tag{5.10}$$

On obtient une formule analogue pour le calcul de $v^{(4)}_{N-2}(t)$.

Passons maintenant à la discrétisation du terme $(\beta v'')''$ en 0. On sait que $(\beta v'')'' = \beta v^4 + \beta'' v'' + 2\beta' v^{(3)}$ ce qui, compte tenu des conditions aux limites, nous permet d'écrire en 0 : $(\beta v'')'' = \beta v^4$.

Or

$$v^{(4)}(t,0) = (v^{(3)})'(t,0) \simeq \frac{v^{(3)}(t,1) - v^{(3)}(t,0)}{h} = \frac{v^{(3)}(t,1)}{h} = \frac{v''(t,1) - v''(t,0)}{h^2} \tag{5.11}$$

donc,

$$v^{(4)}(t,0) = \frac{v_2(t) - 2v_1(t) + v_0(t)}{h^4} \tag{5.12}$$

Ceci nous conduit finalement à la matrice :

$$\begin{bmatrix}
\beta & -2\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
-\alpha-2\beta & 2\alpha+5\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
0 & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+5\beta & -\alpha-2\beta \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -2\beta & \beta
\end{bmatrix}$$

### 3. Snake à extrémités fixes

Les extrémités du snake restent dans ce cas fixées au cours du temps et $v_0(t)$ et $v_{n-1}(t)$ sont respectivement égaux à $v(0,0)$ *et* $v(0,1)$. Il reste donc à déterminer les $N-2$ composantes $v_1(t) \dots v_{N-2}(t)$. La matrice de discrétisation $A$ de taille $N-2 \times N-2$, est obtenue simplement en reportant dans le second membre les termes faisant intervenir $v_0(t)$ et $v_{N-1}(t)$. Considérons par exemple le calcul des coefficients de la première ligne de $A$, c'est-à-dire le calcul de $-(\alpha v')' + (\beta v'')''$ au point de paramètre $s = 1$. Nous avons successivement :

$$-(\alpha v')'(t,1) \simeq \frac{\alpha_1(v_1(t) - v_0(t)) - \alpha_2(v_2(t) - v_1(t))}{h^2} \tag{5.13}$$

$$(\beta v'')''(t,1) \simeq \frac{(\beta v'')(t,2) - 2(\beta v'')(t,1) + (\beta v'')(t,0)}{h^4} \tag{5.14}$$

Or, d'après les conditions aux limites intrinsèques établies dans le chapitre 4, $\beta v''(t,0) = 0$, ce qui nous permet d'écrire la discrétisation du terme $-(\alpha v')' + (\beta v'')''$ au point de paramètre $s = 1$ sous la forme :

$$\frac{1}{h^4}(v_1(t)(h^2(\alpha_1+\alpha_2)+\beta_2+4\beta_1)+v_2(t)(-h^2\alpha_2-2\beta_2-2\beta_1)+v_3(t)\beta_2)+v_0(t)(-h^2\alpha_1-2\beta_1)) \tag{5.15}$$

et justifie donc la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2\alpha+5\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+5\beta \end{bmatrix}$$

et le second membre de l'équation matricielle comprend de plus le vecteur colonne de taille $N-2$ :

$$\begin{bmatrix} (\alpha+2\beta)v_0 \\ -\beta v_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\beta v_{N-1} \\ (\alpha+2\beta)v_{N-1} \end{bmatrix}$$

### 5.1.3 Le schéma itératif de résolution

Le phénomène étant évolutif, le paramétrage s'écrit en fait $v_i(t)$ et la discrétisation de l'équation d'évolution (5.2) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$(A+\gamma I)V(t) = \gamma V(t-1) - \frac{\partial f}{\partial v}(V(t-1)) \tag{5.16}$$

puisque $\gamma\frac{\partial v}{\partial t}$ peut se discrétiser sous la forme $\gamma(v_i(t) - v_i(t-1))$.

Ceci donne donc finalement lieu au schéma itératif suivant [Kass 88] :

$$V(t) = (A+\gamma I)^{-1}(\gamma V(t-1) - \frac{\partial f}{\partial v}(V(t-1))) \tag{5.17}$$

1. **Conditionnement du problème**

Comme pour tout processus numérique destiné à résoudre itérativement un problème, il convient de s'assurer que le schéma adopté est stable c'est-à-dire qu'une petite perturbation sur les données n'entraîne qu'une faible variation de la solution. Dans le cas des systèmes linéaires $Ax = b$, qui nous intéresse particulièrement puisque le schéma (5.17) est sensiblement de cette forme, on peut montrer que [Ciarlet 82] :

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A|| * ||A^{-1}|| \frac{||\Delta b||}{||b||} \tag{5.18}$$

où la notation $||A||$ désigne la norme matricielle de l'application linéaire $A$ définie sur l'espace vectoriel $E$ et est définie par $Max_{x\in E^*}\frac{||Ax||}{||x||}$.

Le réel $cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$ est appelé **conditionnement** de $A$ et est une mesure de la sensibilité de la solution aux changements du second membre : plus $cond(A)$ est petit, meilleur est le conditionnement du système. Le conditionnement est évidemment lié aux valeurs propres de la matrice $A$ par la relation $cond(A) = \frac{\lambda_N(A)}{\lambda_1(A)}$ où $\lambda_1(A)$ et $\lambda_N(A)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières d'une matrice $A$ de taille $N \times N$ (c'est-à-dire les racines carrées positives des valeurs propres de $A^tA$). Le conditionnement n'est certes pas défini a priori pour une matrice non inversible, mais il est bien clair que dans ce cas, le problème est très mal conditionné.

Signalons qu'en plus du conditionnement, le signe des valeurs propres a aussi son importance dans le cadre d'un tel processus puisque la présence d'une valeur propre négative crée des oscillations hautement préjudiciables à la stabilité de la solution espérée.

Qu'en est il pour notre problème ?

Le conditionnement de la matrice $A$ dépend évidemment du type de snake utilisé mais aussi des paramètres $\alpha$ et $\beta$. Lorsque $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas constants, un calcul théorique du conditionnement se révèle particulièrement délicat ; aussi nous sommes nous limités dans cette étude au cas de paramètres élastiques constants.

Dans le cas de snakes fermés ayant des paramètres élastiques constants le long de la courbe ($\alpha_0 = \ldots = \alpha_{N-1}$ *et* $\beta_0 = \ldots = \beta_{N-1}$), 0 est une valeur propre associée au vecteur propre $[1, 1, 1 \ldots, 1, 1]$ et nous avons montré en annexe A que les valeurs propres de $A$ étaient toujours positives et s'exprimaient par :

$$\frac{4}{h^4} \sin^2 \frac{k\pi}{N} (4\beta \sin^2 \frac{k\pi}{N} + h^2\alpha) \tag{5.19}$$

et la matrice $A$ est donc particulièrement mal conditionnée (en fait singulière) puisque 0 est valeur propre.

Dans le cas des autres types de snakes, le calcul est plus délicat mais des évaluations numériques nous ont montré qu'elles étaient aussi mal conditionnées. Dans cette optique, la résolution directe du problème statique discrétisé $AV(t) = -f_v(V(t-1))$ est fort compromise et c'est là qu'apparaît l'importance du paramètre $\gamma$ dans la stabilité du processus.

2. **Rôle de $\gamma$**

En effet, plus $\gamma$ est grand, meilleur est le conditionnement de $(A+\gamma I)$. Le paramètre $\gamma$ joue ici le rôle intuitif de poids de la courbe active : plus la masse de la courbe est grande, plus son inertie est forte et plus son évolution est régulière et lente. En effectuant des approximations très grossières pour $\gamma$ grand, on obtient en effet :

$$A + \gamma I \approx \gamma I \tag{5.20}$$

$$et\ \gamma V(t-1) - \frac{\partial f}{\partial v}(V(t-1)) \approx \gamma V(t-1), \tag{5.21}$$

ce qui conduit à

$$V(t) \approx V(t-1) \tag{5.22}$$

et prouve que le snake est presque stationnaire dès que $\gamma$ est grand.

Alors que dans le cas d'un $\gamma$ petit, la courbe a une faible inertie et elle est fortement soumise aux forces dues à l'image ce qui induit des comportements très oscillants. Le paramètre $\gamma$ règle donc la vitesse moyenne d'avancée du snake.

3. **Évolution du snake en terrain plat**

Afin de mieux comprendre le comportement naturel du snake issu du schéma itératif, étudions en détail le cas très simple d'une image d'intensité constante pour laquelle le champ de forces est nul. Nous supposons ici que les paramètres élastiques sont constants.

Considérons d'abord le cas d'un snake fermé et intéressons nous à la limite $V^\infty$ de $V(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Puisque $f_x = 0$ *et* $f_y = 0$, le schéma itératif se résume à:

$$V(t) = (\frac{A}{\gamma} + I)^{-1} V(t-1) \tag{5.23}$$

ce qui s'écrit encore

$$V(t) = (\frac{A}{\gamma} + I)^{-t} V(0) \tag{5.24}$$

où $V(0)$ est la courbe d'initialisation.

Soient $(u_0, \ldots, u_N)$ les vecteurs propres de $A$ qui existent toujours puisque toute matrice symétrique est diagonalisable.

Le vecteur $V(0)$ se décompose sous la forme

$$V(0) = \sum_i V_i(0) u_i, \tag{5.25}$$

on en déduit donc que

$$V(t) = \sum_i (\mu_i^t V_i(0) u_i) \tag{5.26}$$

où les $(\mu_i)$ sont les valeurs propres de $(\frac{A}{\gamma} + I)^{-1}$ c'est-à-dire:

$$\mu_i = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_i}{\gamma}} \tag{5.27}$$

et admettent $(u_0, \ldots, u_N)$ pour vecteurs propres.

Comme $\lambda_i \geq 0$ et que $\gamma > 0$, alors

$$1 \leq 1 + \frac{\lambda_i}{\gamma} \leq 1 + 4(4\beta + \alpha), \tag{5.28}$$

ce qui prouve que $(\frac{A}{\gamma} + I)^{-1}$ a une unique valeur propre égale à 1 et que toutes les autres sont strictement inférieures à 1. Donc $lim_{t \to \infty} \mu_i^t = 0$ sauf pour $\mu_0 = 1$ qui est

associé au vecteur $u_0 = [1, 1, ..1]$. Nous en déduisons finalement que $lim_{t\to\infty} V(t) = V_0(0)u_0$.

Or

$$V_0(0) = \frac{< V(0), u_0 >}{||u_0||^2} = \frac{\sum_i V_i(0)}{N}. \tag{5.29}$$

Ainsi,

$$V_i^\infty = \frac{\sum_i V_i(0)u_0}{N}, \tag{5.30}$$

ce qui prouve que la suite $V(t)$ converge vers le centre de gravité de l'initialisation.

Justifions maintenant théoriquement, toujours dans le cas d'un snake fermé, que $\gamma$ règle la vitesse de convergence du procédé. Notons $Z(t) = \vec{V(t)V(t-1)}$ le vecteur d'avancée du snake à l'instant $t$. Il est clair que

$$Z(t) = (\frac{A}{\gamma} + I)^{-1} Z(t-1) \tag{5.31}$$

En utilisant comme précédemment une base de vecteurs propres qui peut être choisie orthonormée puisque $A$ est symétrique, il vient

$$||Z(t)||^2 = \sum (Z(t)_i)^2 = \sum \mu_i^2 (Z(t-1)_i)^2 \tag{5.32}$$

Comme $\gamma \to \mu_i = \frac{1}{1+\frac{\lambda_i}{\gamma}}$ est une fonction décroissante de $\gamma$, il est alors clair que la vitesse d'avancée du snake est inversement proportionnelle à $\gamma$.

Avant de passer à l'étude de la convergence du schéma numérique, disons quelques mots sur la méthode d'inversion matricielle retenue. Comme les matrices étudiées ne sont pas forcément symétriques puisque les coefficients élastiques ne sont pas obligatoirement constants, nous avons eu recours à la traditionnelle méthode du pivot de Gauss consistant à factoriser la matrice $A$ sous forme $LU$ où $L$ est triangulaire inférieure et $U$ est triangulaire supérieure. Le nombre des opérations est cependant faible puisque si la matrice est vraiment pentadiagonale, 10*n opérations sont au plus nécessaires pour déterminer $U$. Dans le cas des snakes fermés, le coût est un peu plus élevé puisque les coins inférieurs et supérieurs de la matrice vont générer dans la matrice $U$ une colonne de largeur 2 de termes non nuls.

## 5.2 Étude de la convergence

Comme nous venons de le voir, la convergence et la stabilité du processus itératif dépendent fortement de la valeur de $\gamma$. Mais d'autres données telles que les paramètres élastiques ou le choix de l'initialisation jouent aussi un rôle crucial dans l'évolution du processus. Nous allons procéder dans ce paragraphe à un tour d'horizon des problèmes liés au contrôle de l'évolution d'un contour actif et nous aborderons en particulier la question du choix d'un critère approprié pour l'évaluation de la qualité d'un snake. Ce dernier point est d'importance, puisque, rappelons le, les solutions des équations d'Euler ne fournissent que les points stationnaires de la fonctionnelle.

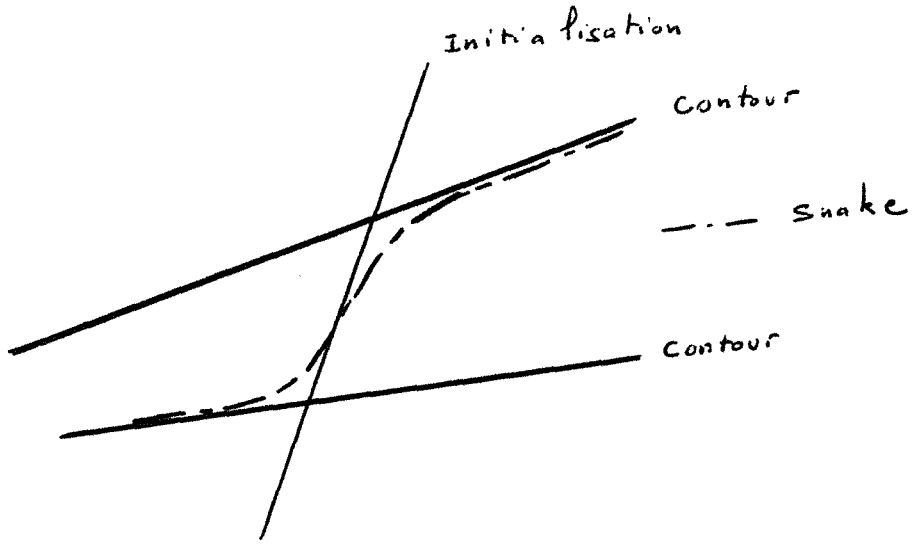


**Figure 5.4**. Position d'equilibre apparent atteint par un snake.

### 5.2.1 L'importance de l'initialisation

Dans une methode d'inspiration interactive telle que les contours actifs, l'amorce du processus réalisé par la courbe d'initialisation constitue évidemment une étape prépondérante. Si l'on fait abstraction des problèmes numériques liés à la minimisation, deux problèmes majeurs peuvent entraver l'évolution du snake vers un contour. Le contour actif peut d'abord se trouver hors de la zone d'influence d'un contour, ce qui peut arriver non seulement en raison de la maladresse de l'opérateur mais aussi parce que le contour que l'on veut détecter est très fin et crée un champ de forces dans une zone très étroite.

Une solution employant des techniques de multirésolution peut cependant être utilisée pour venir à bout de ce problème. L'utilisation d'un masque de lissage de grande taille permet au contour d'être situé dans la zone d'influence du contour. Une réduction progressive de la taille des masques de lissage permet d'affiner l'estimation de la position du contour.

Le second problème, beaucoup plus fréquent, pouvant entraver l'évolution du contour actif est lié à l'existence éventuelle de plusieurs contours dans le voisinage de l'initialisation $S_0$. Dans ce cas (Fig. 5.4), le contour actif se trouve sous l'influence simultanée des champs de forces créés par chacun des contours et parvient à une position d'équilibre apparent sans avoir atteint pour autant un contour.

Une situation analogue apparaît également dans de nombreux cas où l'initialisation est mal adaptée. Passé un laps de temps durant lequel l'évolution est rapide (Fig:5.5), le snake atteint en quelque sorte un « régime stationnaire » où l'énergie à minimiser est presque constante (Fig. 5.6). Dans le cas de l'exemple considéré ici, cela correspond au moment où les forces dues à l'image sont insuffisantes pour faire progresser le snake car il devrait commencer à se dilater.

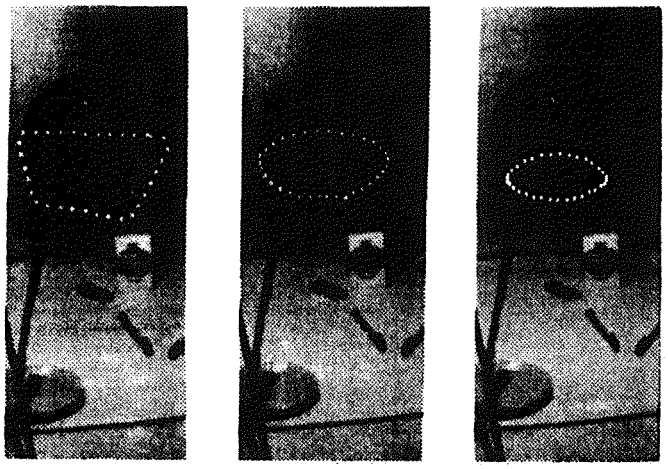

**Figure 5.5**. Evolution d'un snake après 0, 20 et 60 itérations.

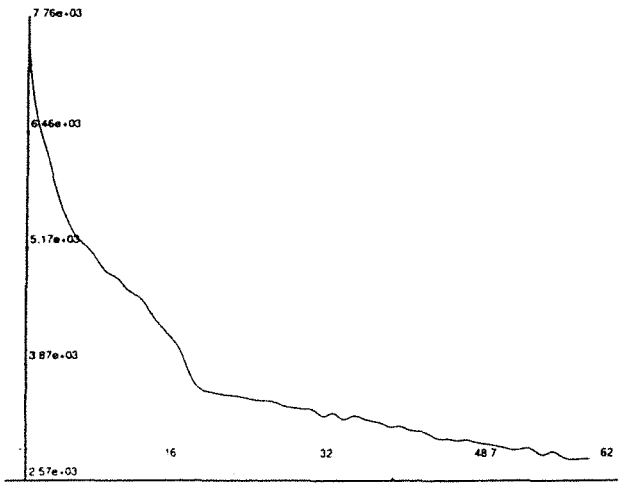


**Figure 5.6**. Evolution de l'énergie au cours du temps.

Ces deux cas de figure, aboutissant à la stationarité de l'énergie totale, posent un problème sémantique car l'évolution du snake produit une courbe qui n'est pas vraiment un contour mais plutôt un assemblage de morceaux de contours. Mais cela soulève également un problème lié à l'arrêt de l'algorithme : les algorithmes itératifs traditionnels sont généralement stoppés dès que la solution obtenue n'évolue presque plus. Dans notre cas, l'énergie totale pouvant être stationnaire sans que soit atteint pour autant un contour, un tel critère est inopérant.

### 5.2.2 La critère d'évaluation

L'analyse des deux cas fait apparaître plusieurs raisons de blocage d'un contour actif :

1. (Fig. 5.4) : l'initialisation est à cheval sur plusieurs contours, ce qui donne lieu à un équilibre du contour actif qui n'a pas de signification sémantique.

2. (Fig. 5.6) : les constantes élastiques adoptées sont telles qu'elles ne permettent pas une bonne détection du contour.

Il est donc nécessaire de pouvoir distinguer entre une énergie stable due à un faux optimum et une énergie stable due à un véritable optimum de manière à pouvoir déclencher des stratégies telles qu'une variation des coefficients élastiques (cf chapitre 7) qui permettent d'améliorer la détection. Nous avons choisi d'opérer cette distinction sur la base des données images seules en considérant le profil du gradient image sur la courbe active. On pourrait penser à adopter, comme l'a fait Fua [Fua 89], un critère caractérisant exactement un contour. Un contour $C$ peut en effet être caractérisé par le fait que le module du gradient est maximal dans la direction normale à la courbe, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial|\nabla I(v(s))|}{\partial n(v(s))} = 0 \tag{5.33}$$

L'évaluation d'une courbe est alors réalisée en considérant la proportion de points de la courbe satisfaisant le critère « à un epsilon près ».

Un tel critère n'est cependant pas totalement satisfaisant d'abord d'un point de vue numérique car les dérivées directionnelles sont sensibles au bruit contenu dans l'image mais aussi parce que ce critère n'est pas réellement adapté à nos besoins : l'utilisation de certains paramètres élastiques ne permet pas d'atteindre exactement certains contours qui ne sont pas suffisamment lisses et il faut néanmoins savoir si la position exacte du snake est acceptable, même si ce n'est pas la meilleure possible. La présence du paramètre $\gamma$, réglant la vitesse de la convergence justifie d'autant mieux l'adoption d'un tel critère. En effet, nous avons vu qu'un $\gamma$ trop petit pouvait induire des oscillations et il est alors souhaitable de savoir si on se trouve dans le voisinage d'un contour de manière à adopter un $\gamma$ plus grand permettant une bonne convergence.

C'est pourquoi nous proposons d'adopter le critère suivant : comparer la moyenne $M_{snake}$ du gradient sur le snake avec la moyenne $M_{vois}$ du gradient dans une bande de largeur donnée encadrant le snake. La bande est obtenue de manière assez rudimentaire en considérant la direction générale de la courbe, par une régression linéaire par exemple. Si cette direction est plus proche de l'axe $Ox$ que de l'axe $Oy$, on génère la bande en traçant en chaque point de la courbe un segment vertical dont la longueur est la largeur de la bande. Dans le cas contraire, on génère des segments horizontaux (Fig. 5.7).

Ce critère trouve une justification intuitive par le fait qu'il est évidemment satisfait si le contour actif coincide avec un contour et qu'il en est de même s'il est assez proche du contour. On trouvera dans l'annexe B une justication théorique de l'emploi de ce critère dans le cadre idéal d'un contour rectiligne de type crête. On y étudie les différentes réponses du critère en fonction de la position d'un snake rectiligne par rapport à la crête du contour.

Cette brève étude réalisée dans un cadre théorique simple prouve que le critère utilisé répond à nos exigences puisqu'il est satisfait dès que la bande centrée sur le snake contient un contour et il est de plus très simple à mettre en œuvre. Il ne traduit cependant, tout comme celui de Fua, qu'une adéquation **globale** du contour actif mais nous verrons dans

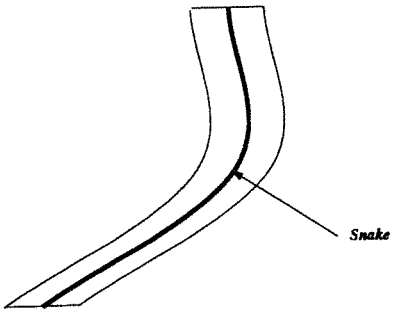


**Figure 5.7**. Détermination du voisinage du snake.

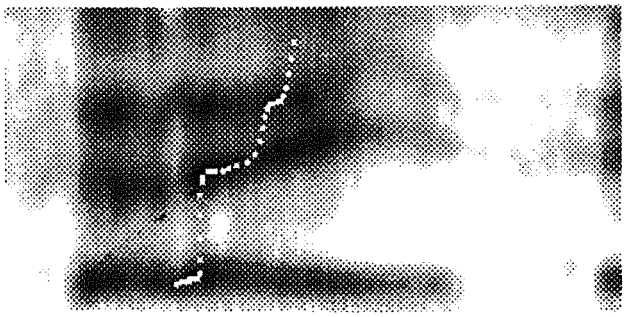

**Figure 5.8**. Phénomène d'agglomération des points.

le chapitre 7 que la comparaison du gradient sur le snake avec la valeur moyenne $M_{vois}$ permet d'extraire du contour actif des morceaux de courbes qui peuvent être considérés comme des contours et qui constitueront le point de départ de contours actifs dotés de la possibilité de croître autorisant une convergence plus rapide.

### 5.2.3 Les facteurs d'instabilité

Nous regroupons dans ce paragraphe les phénomènes d'instabilité au sens large du terme, qu'ils se traduisent par des comportements oscillatoires ou par des résultats insolites.

#### Instabilité due à la modélisation

Commençons donc par évoquer la tendance que présentent les points du snake discrétisé à s'agglomérer en certains endroits de fort gradient. La figure (5.8) illustre cette tendance sur une image de spectrogramme empruntée à la reconnaissance de la parole. Le problème consiste à extraire les formants, c'est-à-dire les lignes qui caractérisent les courbes d'énergie maximale du spectrogramme.

Il n'est cependant pas très surprenant d'obtenir un tel résultat car les points de la

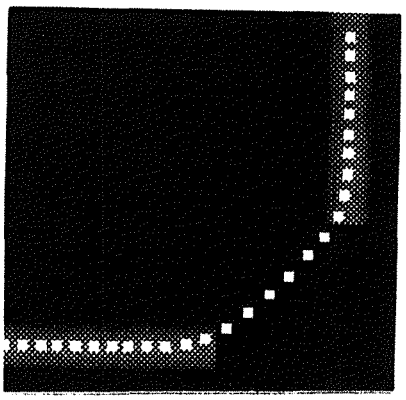

**Figure 5.9**. Problèmes de la complétion

courbe active sont attirés par les points de l'image produisant une force d'intensité la plus grande possible c'est-à-dire les points présentant un fort gradient. La densité du gradient sur le snake s'en trouve ainsi accrue.

Un tel résultat va néanmoins à l'encontre de la philosophie de la méthode qui est censée rendre possible la détection d'un contour en tant que courbe et permettre de passer outre les trous ou les irrégularités locales du contour. En effet, si les points du snake sont regroupés aux endroits où le gradient est le plus important, nous ne disposons alors que de fort peu d'informations là où on souhaiterait précisément en avoir. Ceci rendrait en particulier l'utilisation de méthodes actives en détection de contours délicate, la distribution de points sur la partie à compléter étant relativement lacunaire (5.9). Remarquons néanmoins que les effets d'agglomération ou de dispersion de points sont les plus marqués lorsque le contour actif occupe une position presque perpendiculaire au contour (Fig. 5.8) puisque c'est là que le champ de gradient créé par le contour est le plus intense alors qu'il est faible dans la direction du contour.

La raison de ce comportement résulte du fait que la nature intrinsèque du paramétrage n'est pas explicitement prise en compte alors qu'elle est sous entendue autant au niveau de la modélisation du problème (le terme d'énergie interne représente l'énergie d'ondulation à condition que le paramétrage soit intrinsèque) que de la discrétisation des équations du mouvement.

Il convient donc d'imposer l'équidistance des points de discrétisation au cours du processus de minimisation. Des contraintes de ce type ont été imposées dans [Amini 88] au cours d'une minimisation par programmation dynamique.

Pour notre part, nous avons développé une méthode permettant d'obtenir une assez bonne équidistance des points basée sur l'adjonction d'un terme d'énergie dans la fonctionnelle. Ce formalisme nous permet de plus, comme nous le verrons au cours du chapitre 7, de réaliser des expansions et des rétractions du snake.

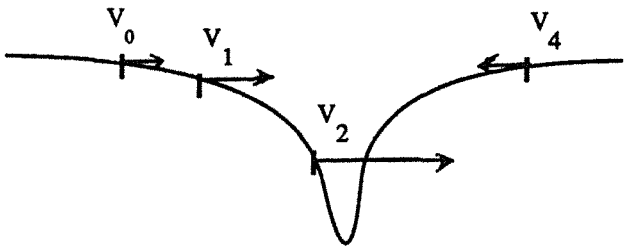


**Figure 5.10**. Oscillations d'un contour actif.

### Instabilité d'origine numérique

Comme tout utilisateur ayant une certaine pratique des contours actifs pourra le constater [Cohen 90], [Amini 88], [Berger 90b], le comportement des snakes est souvent instable et sujet à de nombreuses oscillations en fonction des paramètres employés. Il est d'ailleurs souvent difficile de savoir si l'instabilité est d'origine numérique ou si elle provient de la nature de l'image.

Les problèmes numériques sont bien sûr liés à la nécessité de calculer des dérivées d'ordre élevé sur le contour actif et aussi des dérivées de l'énergie par rapport à l'image, ce qui pose évidemment des problèmes puisque l'image est particulièrement discontinue.

Les problèmes proviennent également de l'usage de la géométrie discrète et de la seule connaissance du gradient de l'image aux points à coordonnées entières alors que les points de discrétisation du snake sont à coordonnées réelles. Cela nécessite donc la réalisation d'une interpolation du gradient en un point $v$ à coordonnées réelles en fonction de la valeur de ses 4 voisins à coordonnées entières $V_1, V_2, V_3, V_4$, et nous avons choisi d'utiliser simplement

$$|\nabla v| = \frac{\sum_{i=1}^{4} d(V, V_i)|\nabla(V_i)|}{\sum_{i=1}^{4} d(V, V_i)} \tag{5.34}$$

### Instabilité due à la nature de l'image

Outre ces facteurs d'instabilité purement numériques, la nature de l'image est également à l'origine de comportements instables des contours actifs. Le champ de forces créé par le gradient de l'intensité est en effet d'autant plus intense que la pente du contour est prononcée. C'est donc lorsque le contour actif parvient à proximité du contour que la force qu'il subit est la plus intense, ce qui a pour effet immédiat de le faire passer sur l'autre versant du contour, voir même de la déplacer hors du puit de potentiel définissant le contour et de créer un comportement oscillant (Fig. 5.10).

Il était alors tentant de chercher à normaliser le champ de forces afin d'éviter des oscillation de grande ampleur et deux approches ont été proposées dans ce sens. Ainsi Cohen [Cohen 89] propose-t-il de normaliser le champ de forces par $F = -k\frac{\nabla I}{|\nabla I|}$, ce qui

a pour effet de produire un champ de forces d'intensité 0 ou $k$ et donc de doter les contours faibles ou forts de la même influence. Cette approche ne va pas sans poser quelques problèmes car il semble souhaitable dans les situations confuses où plusieurs contours sont présents de voir le snake attiré par le contour le plus fort. De plus, la présence de bruit, même faible, se trouve considérablement amplifiée par ce procédé.

La normalisation proposée dans [Leymarie 90] consiste en une redistribution des modules du champ de force en considérant pour intensité $inf(|\nabla(I)|, Val_{max})$, où $Val_{max}$ est une constante fixée, ce qui revient à fixer une borne supérieure aux déplacements du snake. Cependant, de telles approches permettent seulement de réduire les oscillations sans assurer la convergence pour autant. L'utilisation de valeurs croissantes de $\gamma$ est alors nécessaire pour assurer la stabilité du contour actif et permettre une évolution assez lente du snake.

### 5.2.4 Détermination de $\gamma$

D'après ce que nous savons de l'influence de $\gamma$, il semble difficile d'adopter une unique valeur de $\gamma$ pour une application. Il paraît en effet souhaitable d'utiliser en début de processus une faible valeur de $\gamma$ permettant au snake de se déplacer rapidement et de revenir à une valeur forte permettant une évolution fine lorsque le snake est assez proche du contour.

Dans [Fua 89] est faite une proposition de détermination adaptative de $\gamma$ qui vise à contrôler le déplacement moyen $\Delta$ du contour actif en utilisant une suite décroissante de pas $\Delta$ et qui est basée sur l'équation 5.17 pouvant être mise sous la forme

$$\gamma \frac{\partial V}{dt} + \frac{\partial E}{\partial V} = 0 \tag{5.35}$$

En passant aux modules, il vient

$$\gamma |\frac{\partial V}{\partial t}| = |\frac{\partial E}{\partial V}| \tag{5.36}$$

Or

$$\frac{\partial V}{\partial t}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial V_i}{\partial t}|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 \tag{5.37}$$

et si $\Delta$ représente la valeur moyenne d'avancée du snake, on a $\sum \Delta_i^2 = n\Delta^2$, d'où

$$\gamma = \frac{|\frac{\partial E}{\partial V}|}{\sqrt{n}\Delta} \tag{5.38}$$

Il reste néanmoins à choisir la séquence décroissante de pas qui doit être utilisée, ce qui revient à avoir une idée a priori sur la façon dont va évoluer le snake. Même si, comme l'indique Fua, il est possible de revenir sur le choix du pas si l'énergie ne diminue pas d'une étape à une autre, une telle approche n'est cependant guère utilisable dès que le contour actif est « accroché » au cours de son évolution par un petit contour qui contribue à faire croître momentanément l'énergie.

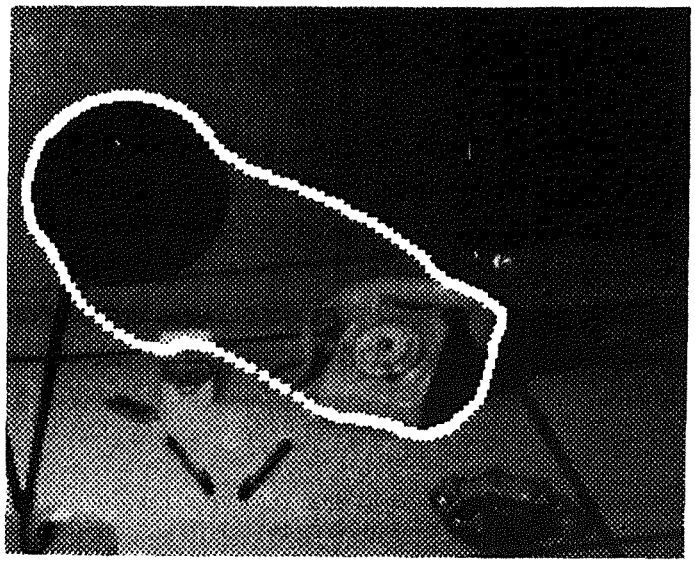

**Figure 5.11**. Exemples de positions stables non satisfaisantes.

## 5.3 Bilan

Puisque nous avons décrit le modèle initial des contours actifs et procédé à un tour d'horizon des méthodes numériques nécessaires à son implantation, il est temps maintenant de dresser un bilan de la mise en œuvre et de l'utilisation des contours actifs.

Comme nous l'avons souligné auparavant, il est souvent difficile, lorsque le résultat fourni par la méthode n'est pas visuellement satisfaisant, de faire la part des choses entre les problèmes d'origine numérique, les problèmes dûs à la nature de l'image et les problèmes résultant d'une mauvaise adaptation des différents paramètres de la fonctionnelle. La position d'un snake peut être en effet stationnaire soit parce qu'un minimum est réellement atteint, soit parce que la vitesse d'évolution du processus numérique est momentanément très faible ce qui ne présage en rien de son évolution ultérieure.

Tentons néanmoins d'opérer une distinction entre les problèmes de modélisation et les problèmes de minimisation afin de mettre en lumière quelques insuffisances du modèle existant.

### 5.3.1 Au niveau du modèle

Le fait que le snake ne détecte pas une entité complète mais se stabilise sur un ensemble de contours (Fig. 5.11) est l'un des problèmes soulevés par l'usage des contours actifs. La position atteinte correspond bien à un minimum local de l'énergie sans qu'elle soit pour autant dotée d'une véritable signification.

Il est donc souhaitable de disposer d'un outil d'analyse permettant de scinder un

contour actif de manière à pouvoir détecter les contours d'un même objet. Des stratégies permettant de compléter les contours actifs ainsi crées sont alors nécessaires et font l'objet du chapitre 7.

La tendance naturelle des contours actifs à la rétraction est également une entrave au bon fonctionnement de la méthode car une initialisation intérieure à un contour n'est pas soumise à l'influence du champ de forces créé par ce contour et conduit à une rétraction du contour actif sur lui même. Cette tendance, certes naturelle pour un élastique, est cependant fâcheuse, car, dans l'optique d'un fonctionnement autonome de la méthode, il semble plus simple de fournir une initialisation ponctuelle qui va se dilater permettant ainsi de détecter le contour englobant le plus proche, plutôt que de partir d'initialisations extérieures qui peuvent difficilement être obtenues automatiquement. C'est pourquoi nous avons cherché à doter les contours actifs de la possibilité d'expansion et le chapitre 7 relate nos travaux sur ce thème.

### 5.3.2 Au niveau numérique

Il faut bien constater que la résolution numérique du problème donne lieu à une accumulation impressionnante de problèmes délicats et numériquement instables : il s'agit en effet de minimiser une fonctionnelle non convexe donnant lieu à un schéma numérique mal conditionné. Il n'est donc pas étonnant, dans ces conditions, de se trouver confronté à quelques désagréments lors de l'application de la méthode à des cas difficiles. Aussi tentons nous de décrire dans ce paragraphe les situations dans lesquelles le modèle des contours actifs s'avère efficace.

Il semble d'abord important de travailler avec une image relativement propre afin d'éviter une amplification du phénomène d'oscillation déjà naturellement présent dans le schéma numérique adopté. Il est donc raisonnable de travailler sur une image préalablement lissée.

La second condition concerne le choix de l'initialisation. La fonctionnelle étant non convexe, si l'initialisation ne se trouve pas à proximité d'une même vallée de potentiel, des problèmes de convergence vont surgir. Des méthodes telles que le recuit simulé devraient permettre de passer outre ces conditions somme toute draconiennes, mais elles sont délicates à mettre en œuvre car l'inconnue est ici une courbe et difficiles à contrôler au niveau de la décroissance de la température. Elles sont donc coûteuses mais les travaux sur la parallélisation de cette méthode actuellement en cours [Virot 90] et la démocratisation des machines parallèles permettent d'espérer...

Reste enfin à aborder le problème du choix de $\gamma$. Des solutions ont été proposées mais elles ne sont pas réellement satisfaisantes dans la mesure où elles sont basées sur la vitesse d'évolution du snake qui est loin d'être régulière. La valeur est de plus généralement calculée de manière global pour toute la courbe, ce qui rend difficile la prise en compte de courbes ayant des vitesses d'avancée très différentes selon l'endroit de la courbe (Fig. 5.12).

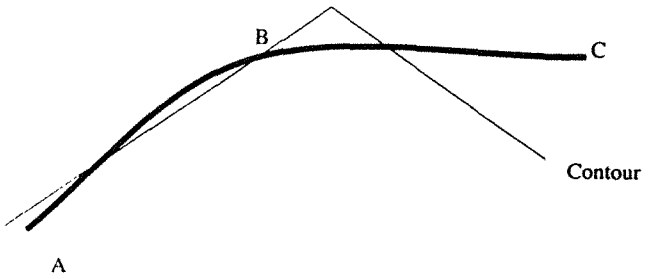


**Figure 5.12**. Courbe présentant des vitesses d'avancée différentes.

C'est pour pallier ces inconvénients que nous nous sommes acheminés vers une construction incrémentale de contours actifs décrite dans le chapitre 7, permettant de générer un contour actif qui est (en général) situé dans une seule vallée du potentiel et pour lequel la convergence est bien meilleure. Mais avant d'exposer ces techniques et puisque nous sommes maintenant à même de mieux comprendre le comportement du snake, nous pouvons donc réfléchir aux applications les mieux adaptées aux contours actifs et plus généralement aux modèles déformables.

# 6
# Applications privilégiées des contours actifs

L'une des grandes tendances actuelles de l'intelligence artificielle repose sur le développement d'outils et de méthodes basées sur des concepts d'origine chimique, biologique ou physique [Steels 88]. On peut entre autre citer l'essor des méthodes connexionnistes [Gupta 90], [Kononenko 89] et l'apparition des algorithmes génétiques mimant certains mécanismes biologiques afin de résoudre par exemple des problèmes d'optimisation [Brady 85].

Quelles sont les raisons d'un tel engouement ? La réponse tient sans doute aux deux points: d'un point de vue technique, l'arrivée d'ordinateurs massivement parallèles rend maintenant envisageable l'utilisation de techniques biologiques nécessitant généralement le traitement d'immenses quantités d'informations. Mais surtout, ces méthodes visent à copier l'extraordinaire flexibilité des systèmes biologiques dont la caractéristique principale estt leur tolérance aux fautes, ce dernier point faisant souvent cruellement défaut dans les systèmes de reconnaissance.

Les contours actifs sont quant à eux issus de la théorie physique du potentiel. De part leur comportement, ils s'apparentent plus généralement à la famille des modèles élastiques ou déformables car, ce que l'on peut finalement considérer comme une mise en correspondance entre l'initialisation et le contour recherché est effectué par déformations successives de la donnée initiale. Nous allons donc faire un tour d'horizon des méthodes d'inspiration élastique en vision avant de faire le point sur les applications des contours actifs.

## 6.1 Les modèles d'inspiration élastique en vision

L'idée du matching élastique est déjà assez ancienne et l'un des premiers articles traitant de ce sujet a été publié par B. Widrow [Widrow 73] dans le cadre de l'identification de chromosomes. L'identification visuelle de chromosomes d'après les images d'un microscope électronique est rendue délicate par la nature même des images extrêmement bruitées et par le fait que de nombreux chromosomes se recouvrent. L'utilisation de techniques standard d'appariement était donc vouée à l'échec en raison de leur incapacité à prendre en

compte le bruit et les distorsions éventuelles présentes dans les images naturelles. Étant donné un chromosome de l'image, la technique proposée consistait à déformer progressivement les chromosomes modèles jusqu'à parvenir à une mise en correspondance correcte avec la donnée. Ces déformations, consistant à allonger, raccourcir, changer l'angle ou la courbure des branches du chromosome, peuvent être interprétées comme l'évolution d'un motif élastique d'où le vocable d'appariement ou de matching élastique. Le chromosome était alors identifié comme appartenant au stéréotype pour lequel la déformation nécessaire était minimale, sous réserve qu 'elle soit inférieure aux déformations tolérées par l'application.

Le système basé sur des modèles élastiques réalisé par Burr [Burr 81b],[Burr 81a] dans le cadre de la reconnaissance de chiffres manuscrits a été également conçu de manière à pouvoir réaliser une mise en correspondance avec un modèle parfait et tolérant la présence de déformations ou de distorsions locales. L'objectif était donc de construire une suite de déformations de plus en plus locales permettant de passer du chiffre observé au modèle (Fig. 6.1).

La détermination de la déformation élastique est progressive évoluant d'une assez grande rigidité au début permettant une mise en correspondance de la structure globale, vers une plus grande élasticité à la fin de manière à récupérer les déformations de détail. Dans ce travail, l'unité plus ou moins grande de la déformation était assurée par des fonctions de Gauss assurant la similarité des déformations dans un voisinage donné. Au début du processus, les voisinages sont grands et il sont réduits au fur et à mesure des itérations pour assurer l'adaptation des détails.

Les techniques utilisées dans les deux modèles précédents étaient cependant « ad hoc » au niveau de la distorsion géométrique tolérée. Des méthodes plus élaborées ont été proposées afin de pouvoir tenir compte de distorsions quelconques. On peut en particulier citer l'approche développée dans [Wu 86],[Maitre 89] dans le cadre de recalage de photos satellites avec une carte. Les distorsions présentes dans les photos satellites sont très nombreuses et proviennent par exemple d'une prise de vue sous un angle inhabituel, de la présence de nuages masquant les côtes,... Dans ces conditions, étant donnée la diversité des déformations, il s'avère impossible de donner un quelconque modèle de la distorsion géométrique. Comme le montre H. Maitre, la mise en correspondance se ramène finalement à trouver le meilleur chemin dans un graphe dont les noeuds sont des couples (primitives du modèle, primitives images) au sens d'une certaine fonction de coût optimisée ici par programmation dynamique. La fonction de coût le long d'un chemin est constituée par l'erreur de prédiction d'un modèle autorégressif portant sur le vecteur de mise en correspondance entre primitives. Le modèle auto-régressif décrit ainsi les possibles distorsions géométriques assurant la cohésion et la continuité des déformations par la minimisation de l'erreur de prédiction.

Comme on peut le voir au travers de ces exemples, l'utilisation d'une mise en correspondance tolérant déformations et distorsions du motif recherché est souvent indispensable dès lors que l'on travaille sur des images bruitées ou partiellement occultées. Les tech-

Fig. 4. Example showing the recognition process for one unknown numeral. Each of the reference shapes (left) is stretched onto the unknown shape (right), and the template match is computed (bottom). The number is recognized correctly as a "five" since the reference five produced the best template match. Notice the tolerance to segmentation irregularity and spurious lines.

**Figure 6.1.** Utilisation du matching élastique en reconnaissance de caractères [Burr 81b]

niques de stéréovision relèvent évidemment de ce cas de figure. Rappelons succintement la problématique de la stéréovision : étant données deux (ou plusieurs) images d'une même scène prise sous des angles différents, on cherche à mettre en correspondance les indices homologues des deux images afin d'en déterminer les coordonnées 3D. On cherche donc en quelque sorte à plaquer une partie de l'image sur l'autre en la déformant le moins possible afin de trouver les indices homologues. Alors que de nombreuses méthodes fonctionnent de manière locale en cherchant à trouver le correspondant le plus semblable d'une fenêtre de l'image dans l'autre image [Henderson 78], [Castan 84] des procédés plus globaux visant à effectuer une mise en correspondance tolérante à certaines distorsions ont vu le jour. On peut notamment citer [Poggio 85] qui propose de déterminer la disparité $D(x, y)$ entre les deux images en minimisant la fonctionnelle

$$\int\int (I_L(x,y) - I_R(x + D(x,y), y))^2 + \lambda(\nabla D)^2 dxdy \tag{6.1}$$

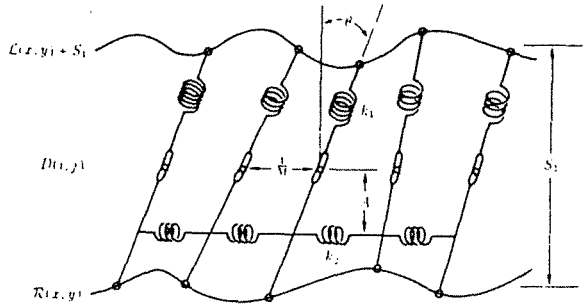

**Figure 6.2.** Stéréovision stochastique.

où $I_L$ et $I_R$ sont les intensités dans les images gauche et droite. A l'instar de la formulation de la détection de contour en terme d'optimisation, le premier terme assure la mise en correspondance des deux images sous réserve que la disparité ne varie pas trop.

Dans un article plus récent, Barnard [Barnard 89] est revenu sur cette formulation globale de la stéréovision en interprétant la stéréovision comme un système physique ainsi constitué: chaque point d'une image est en relation avec un homologue avec une certaine disparité $D$, le lien étant représenté par un ressort. Afin d'assurer une cohérence locale dans les appariements, un ressort est relié à ses voisins par un ressort latéral (Fig. 6.2) de façon à éviter que des points voisins dans une image aient leurs homologues dispersés dans l'autre image. L'ensemble constitue donc un système physique doté d'une certaine énergie dont on cherche la position stationnaire qui correspond à la meilleure mise en correspondance. Notons que la procédure de minimisation utilisée repose sur une méthode hiérarchique de recuit simulé permettant une mise en correspondance progressive.

Ces quelques exemples mettent bien en évidence tout l'intêret que l'on peut tirer des modèles élastiques et en particulier de leur aptitude à surmonter les anomalies ou les distorsions locales d'une image au cours d'une mise en correspondance. Revenons maintenant sur le cas particulier de modèles déformables que constituent les contours actifs et examinons les applications qui leur sont propres.

## 6.2 Applications privilégiées

Les applications spécifiques aux contours actifs sont évidemment liées aux deux propriétés que nous avons mises en exergue lors de la présentation du modèle: d'une part la recherche de l'indice s'effectue globalement permettant presque d'ignorer les phénomènes traditionnels comme les trous dans les contours et d'autre part une description de l'indice, certes assez sommaire et définissant surtout la régularité de l'indice, est prise en compte dans le modèle. Pour ces raisons, les applications de contours actifs sont avant tout liées à la capacité des snakes de combler des vides locaux et à détecter des formes suffisamment

régulières.

On peut finalement discerner deux grandes classes d'application des contours actifs : la première est purement liée à la détection de contour qu'elle soit interactive ou liée à une détection à partir d'un modèle ; la seconde concerne davantage l'utilisation des snakes dans le cadre d'applications dynamiques de suivi de formes dans une séquence d'images.

**Extraction d'indices dans une image**

Les contours actifs ont été initialement conçus comme un outil avant tout interactif d'aide à la segmentation. Cette approche de la segmentation se justifie amplement dans les situations confuses où il s'avère effectivement nécessaire de guider la segmentation en apportant finalement des connaissances de plus haut niveau soit parce que l'image est bruitée, soit parce que le réseau de contours est tellement dense que la détection traditionnelle ne fournit aucun résultat tangible.

Par ailleurs, les facilités mises à la disposition de l'utilisateur permettent d'ajuster la position de l'initialisation et donc de se focaliser sur un contour bien particulier de l'image ce qui se révèle utile dans des applications d'ordre biologique où seuls certains éléments de l'image sont importants.

D'une manière générale, on peut dire que les contours actifs présentent un intérêt dès que l'on cherche à se focaliser sur un indice particulier que l'on sait grossièrement cerner dans une image. Ils peuvent en particulier s'avérer de précieux auxilliaires au niveau des techniques de détourage dont le but est d'extraire proprement un élément de l'image pour le placer dans une autre image. Dans le même ordre d'idées, l'utilisation des contours actifs dans le cadre de la détermination de contours subjectifs semble prometteuse [Demazeau 89], [Kass 88] bien que l'énergie image utilisée doive être adaptée a priori selon la nature du contour subjectif à mettre en évidence.

Revenons maintenant sur la comparaison entre méthode traditionnelle de détection et contours actifs. Il semble peu plausible d'espérer faire des contours actifs une méthode générale d'extraction des contours d'une image en raison de la nature même du fonctionnement à partir d'une initialisation proche. Cependant, cette méthode peut se révéler un allié efficace de la détection traditionnelle en raison de son aptitude à boucher les trous indésirables. Illustrons ce point par les travaux de P. Fua [Fua 89] portant sur la détection des routes dans des images aériennes. Deux techniques basées sur les snakes ont été proposées permettant respectivement une détection interactive et une détection automatique. La route était modélisée dans ce travail par une courbe formant le centre de la route et par une largeur $w_i$ de la route pour chaque point $i$ du milieu de la route.

En mode interactif, un cartographe dessine grossièrement la localisation des bords de route. L'utilisation des modèles actifs, dans lequel un terme d'énergie additif $\sum(w_i - w_{i-1})^2$ permet de contraindre le parallelisme de la route, permet alors d'obtenir de bons résultats. Comme le fait remarquer l'auteur, ceci consitue un bon exemple pour lequel le détecteur de Canny est inopérant car il ne parvient à détecter que des fragments de route.

Le mode automatique utilise lui aussi le modèle des snakes mais il se pose alors un problème d'initialisation. La solution retenue consiste à utiliser le détecteur de Canny avec des seuils différents et à procéder à l'étape de chaînage, les chaines obtenues étant utilisées comme initialisation des contours actifs. Une sélection des courbes obtenues basée sur un critère de gradient est ensuite réalisée de manière à ne conserver que les véritables chaines de contours. Ce travail est réalisé pour chacune des images fournies par le détecteur de Canny et seules les plus grandes chaines obtenues dans l'une des images sont retenues. Une recherche des chaînes parallèles à l'intérieur de cet ensemble fournit alors les candidats à l'initialisation de la méthode active. Même si le processus de fusion des morceaux de contour dépend beaucoup de la fiabilité de l'étape de chaînage, cet exemple illustre bien le bénéfice que l'on peut tirer de la coopération entre contours actifs et détection traditionnelle.

Pour terminer le panorama des possibilités des contours actifs en détection de contours à partir d'une seule image, revenons sur les méthodes de détection utilisant un modèle type du contour à mettre en évidence. Les contours actifs peuvent jouer un rôle important dans ce cadre puisque le modèle peut être utilisé en tant qu'initialisation. Cette idée a été exploitée dans [Bajcsy 89], [Solina 90] dans le cadre d'une application médicale destinée à localiser certaines parties du cerveau à partir d'un atlas disponible. Dans un premier temps une mise en correspondance globale est réalisée en utilisant les axes principaux afin de déterminer la translation la rotation et le changement d'échelle nécessaire pour passer du modèle à l'objet. Des contours actifs sont ensuite utilisés de manière à affiner le contour tenant ainsi compte des différences locales entre le cerveau observé et le cerveau de référence figurant dans l'atlas.

Dans ce type d'application, il s'avère généralement très utile d'utiliser des techniques de multi-résolution de manière à affiner à chaque étape l'estimation obtenue. Cette technique utilisée dans [Kass 88] et [Bajcsy 89] est particulièrement efficace dans la cas des snakes car elle permet une meilleure convergence du processus. Le snake est en effet attiré de très loin par le contour lorsque l'échelle est forte et une estimation grossière du contour est donc rapidement obtenue ; l'utilisation d'échelles plus petites rend alors possible une estimation plus précise du contour. L'espoir sous-tendant ces techniques de multi-résolution est que la fonction à minimiser est convexe à une grande échelle, ce qui assure la convergence de la méthode, et que le résultat de la convergence à une échelle fournira une courbe placée dans un voisinage convexe de la solution à une échelle plus fine. Cette stratégie semble être efficace pour récupérer la structure fine des contours les plus forts ou les plus isolés qui apparaissent à forte échelle. Elle est cependant plus délicate à mettre en œuvre pour détecter des contours moins apparents ou lorsque de nombreux contours sont présents car le lissage tend à confondre les contours entre eux. De plus, comme dans tous les systèmes utilisant l'aspect multi échelle, se pose le problème de savoir quelle est la meilleure progression d'échelles à utiliser. Toutefois, dans le cas d'applications médicales bien délimitées réalisées dans des circonstances toujours similaires, le choix des échelles est établi grâce à l'expérience.

**Applications dynamiques**

Dès leur apparition, les contours actifs ont suscité un grand intérêt dans le domaine du *tracking*, c'est-à-dire du suivi d'un objet dans une séquence d'images réalisé à des fins de poursuite de cibles en mouvement, ou plus pacifiquement de contrôle. En effet, si l'on possède les contours de l'objet dans une image, et pourvu que les images soient prises à des intervalles de temps assez rapprochés, ces contours sont suffisamment proches de l'objet dans l'image suivante pour servir d'initialisation au processus des snakes. Il est ainsi possible de suivre un objet d'une image à l'autre pourvu que le déplacement ne soit pas trop rapide car, dans le cas contraire, la position de l'objet dans l'image précédente n'est plus assez proche pour constituer une initialisation correcte.

En particulier, lorsqu'on tente de réaliser un suivi d'objets dans une séquence d'images prises à partir d'un véhicule, la distance parcourue entre deux prises de vue est beaucoup trop grande pour que la détection de l'objet à une étape puisse être utilisée à l'étape suivante. Cependant, si l'on dispose d'informations sur la vitesse du véhicule et la géométrie de la caméra, il est possible de prédire la position de l'objet dans l'image suivante et de s'en servir comme initialisation.

Dans l'analyse d'une séquence d'images et sous les réserves imposées à la fréquence des prises de vue, il convient donc finalement de disposer d'une détection fiable de l'objet dans la première image pour le suivre, sans trop de problèmes, à travers la séquence. Il est donc indispensable d'obtenir une détection fine de l'objet initial qui peut être obtenue, à l'aide des contours actifs, en choisissant une initialisation fine.

Nous venons de parler de suivi d'objets sans spécifier s'il s'agissait d'objets rigides ou d'objets déformables. Il est clair que la méthodologie des contours actifs autorise le suivi d'objets se déformant au cours du temps à condition toutefois que les déformations survenant d'une image à l'autre ne soient pas anarchiques et puissent être atteintes à partir de l'état précedent. Le suivi d'un organe grossissant brutalement au cours du temps est ainsi inenvisageable car l'initialisation ne serait alors plus située dans la zone d'influence du contour à détecter.

Cette qualité des snakes jointe à leur faculté d'adaptation aux irrégularités d'un organe d'un patient à l'autre, justifie, à n'en pas douter, le formidable essor des modèles actifs dans les applications médicales puisqu'elle permet de suivre l'évolution d'un organe au cours du temps. Parmi les recherches à dominate médicale actuellement menées sur les contours actifs, citons en particulier les travaux de [Cohen 90], [Ayache 89] sur la reconstruction 3D des ventricules du coeur à partir de coupes 2D, les contours étant extraits à l'aide de snakes, [Bajcsy 89] dont nous avons déjà parlé, [Leymarie 90] sur le suivi de cellules polypodes, [Marque 89],...

Le travail récent [Leymarie 90] est venu renforcer l'intêret des contours actifs en description des formes et plus particulièrement en squelétisation. Notons au passage que de nombreux travaux sur la théorie des formes sont actuellement basés sur les modèles déformables [Kimia 90], [Pentland 90]. Dans un domaine tel que la biologie cellulaire où les

formes des cellules sont très variables au cours du temps, le squelette se révèle un moyen efficace d'étudier et de mesurer les déformations observées. Le squelette constitue ainsi un moyen privilégié pour suivre l'évolution des cellules polypodes, car un pied peut apparaître ou disparaître d'une vue à l'autre. Le squelette étant généralement défini comme le lieu des centres des cercles de rayon maximum inscrits dans la forme $\mathcal{O}$ à squelétiser, on peut voir la squelétisation comme la recherche des vallées d'une nappe de potentiel définie en un point $p$ par :

$$E(p) = -Min_{p' \in \overline{\mathcal{O}}} dist(p, p') \tag{6.2}$$

Les snakes sont alors utilisés pour déterminer les vallées du potentiel en prenant pour initialisation la frontière de $\mathcal{O}$. Cette méthode a permis également d'intégrer des informations sur les contours dans le processus de squelétisation de manière à obtenir un squelette dont chacune des branches symbolise le pied d'une cellule.

## 6.3 Approches connexes

Nous mentionnons dans ce paragraphe les approches qui ne ressortissent pas directement des contours actifs mais qui en conservent l'esprit et nous mentionnons plusieurs extensions possibles.

L'algorithme du gabarit élastique [Demazeau 89] fait partie de la classe des algorithmes de contours actifs et fournit par rapport aux contours actifs usuels la possibilité d'un contrôle local en chaque point de la courbe et la perspective d'une parallélisation massive. L'idée générale n'est pas très différente de celles de snakes et consiste en une rélisation discrète du modèle physique : les points de contraste les plus significatifs de l'image sont extraits et vont constituer des pôles d'attraction (forces images) pour les points de la courbe active. La courbe active est quant à elle modélisée par un ensemble de points reliés entre eux par des ressorts (forces internes) et évolue donc sous l'influence de la résultante des forces internes et des forces images. La différence la plus marquante avec l' algorithme des snakes réside dans l'utilisation de contraintes locales associées aux forces internes qui permettent de décider si la résultante des forces appliquées sur un point doit modifier ou non la position de ce point. Ceci permet d'assurer une certaine stabilité de la solution même si cette solution n'est pas forcément la meilleure possible. Notons enfin que de par ce traitement attaché à chaque point, l'algorithme est évidemment parallélisable [Demazeau 90] mais, en contrepartie, la répartition des points le long de la courbe est hautement hétérogène, ce qui semble gênant quand l'objectif est de détecter une courbe.

Tout en conservant les idées générales des contours actifs, une équipe de Grenoble [Leitner 90] a développé une implantation intéressante des snakes sous le nom de *spline-snakes*. Comme leur nom l'indique, les snakes sont ici implantés à l'aide de fonctions splines ce qui présente d'abord l'avantage de fournir une résolution des équations beaucoup plus simple que dans la méthode classique : une courbe $M$ peut en effet s'écrire sous la forme

$$M(u) = \sum_{i=1}^{n} B_i(u)\alpha_i \tag{6.3}$$

où $\alpha_i \in I\!R^2$ et $B_i$ est la base traditionnelle des fonctions splines.

Si $M = (M_k)_{\{0 \leq k \leq m\}}$ désigne la courbe discrétisée alors les coefficients $\alpha = (\alpha_k)_{\{0 \leq k \leq m\}}$ se calculent par $\alpha = B^{-1}M$.

Le fait que la courbe soit soumise à un champ de forces $F$ se traduit alors par $\frac{dM}{dt} = F$, ce qui se traduit dans ce formalisme par $\frac{d\alpha}{dt} = B^{-1}F$.

Ce formalisme beaucoup plus agréable est essentiellement dû au fait que la régularité de la courbe est implicite dans le modèle des fonctions splines qui, rappelons le, minimisent $\int_0^1 x''^2 + y''^2$. On peut cependant constater que le terme régissant la tension du snake ($\int_0^1 x'^2 + y'^2$) n'est pas pris en compte, ce qui fait qu'une initialisation externe à un objet n'évoluera pas contrairement au snake traditionnel qui se rétracte naturellement et finit par rencontrer le contour.

C'est d'ailleurs afin d'éviter cette situation de blocage qu'est proposé un calcul de potentiel différent. Les auteurs analysent la situation de blocage comme une conséquence du fait que chaque point de l'image n'a qu'une influence locale sur la courbe. Aussi proposent-ils de considérer un nouveau potentiel en chaque point égal à la somme inversement pondérée par la distance de tous les potentiels de l'image ; ce qui peut être facilement implanté sous forme d'une convolution. Cette solution, mentionnée d'ailleurs dans [Demazeau 89], semble cependant contestable car si elle permet de faire évoluer un point même s'il est situé dans une zone d'intensité constante risque aussi d'attirer le snake vers des zones à forte concentration du gradient en perdant ainsi la propriété de convergence vers le contour le plus proche.

## 6.4 Pour conclure

Comme on peut le constater après ce tour d'horizon des méthodes actives en vision et malgré une mise en œuvre parfois délicate au niveau des paramètres et de l'initialisation, les contours actifs fournissent un outil attrayant dans de nombreuses applications particulièrement liées aux points suivants :

- L'indice obtenu est toujours **régulier** et une paramétrisation explicite n'est pas nécessaire. Les contours actifs constituent donc un moyen efficace d'obtenir une courbe suffisamment lisse satisfaisant des contraintes images.

- Le caractère élastique du modèle en fait un outil de choix dans tous les domaines où une mise en correspondance non rigide, tolérant certaines déformations est nécessaire. Ceci est en particulier applicable lorsqu'on dispose d'un objet type à reconnaître sachant que les instances de l'objet possèdent les caractéristiques grossières du modèle.

- L'aptitude au suivi de formes rigides ou déformables est essentiellement liée au fait que dans le cas d'une séquence d'images suffisamment rapprochées, le problème de l'initialisation est résolu par la forme de l'objet détecté dans l'image précédente.

Au-delà de la pure application à la détection de contours, c'est surtout l'idée de la méthode qu'il convient de retenir. Car toute recherche d'indices qui puisse être formulée sous les traits d'une fonction potentielle se composant d'une caractéristique image de l'indice cherché et de la caractéristique de la nature interne de l'indice peut relever de cette méthodologie.

Même si l'esprit des snakes était de fournir une courbe lisse sans poser aucune restriction de paramétrisation, il est envisageable de détecter des formes données dans une image un peu à la manière de [Lipson 90] ou de [Quan 90].

Supposons en effet que l'on souhaite détecter dans une image un contour appartenant à une famille de formes $\mathcal{F}$ paramétrée par $(x_a(t), y_a(t))$ dont la description fait intervenir un vecteur $\vec{a}$ de paramètres (par exemple, pour une ellipse, ce vecteur contient les dimensions des petits et grands axes, les coordonnées du centre et l'orientation de l'ellipse). On cherche donc la forme paramétrée par le vecteur $\vec{a}$ telle que le gradient soit maximal sur la courbe ainsi définie et on peut chercher à minimiser

$$\phi(\vec{a}) = -\int |\nabla I(x(t), y(t))| dt \tag{6.4}$$

On peut aussi chercher à trouver un motif fixé paramétré par $(x(t), y(t))$ déplacé ou éventuellement agrandi. Il s'agit alors de chercher un déplacement $D = \theta, T_x, T_y$ permettant de passer du motif modèle au motif image. On pourrait alors penser à minimiser

$$\phi(D) = -\int |\nabla I(D((x, y)))| dt \tag{6.5}$$

Comme le montrent ces deux exemples, il est facile de concevoir une fonction dont le minimum semble caractériser l'indice recherché. Rien ne prouve cependant que cette fonction ait des propriétés de convexité suffisantes pour assurer une bonne convergence numérique... dans le cas contraire, il sera alors nécessaire d'être très près de l'indice pour le détecter et la méthode présente alors beaucoup moins d'intérêt...

# 7

# Extension du modèle des contours actifs par adjonction de méthodes locales.

## 7.1 Pourquoi introduire des méthodes locales ?

Les modèles actifs proposent une méthode globale de recherche de contours dont l'un des interêts majeurs est d'éviter de prendre en compte les anomalies locales de l'image. Cependant, dans la pratique, nous avons souvent ressenti le besoin de raisonner plus localement et en particulier par morceaux. Nous nous attachons donc à mettre en évidence dans ce chapitre la nécessité d'utiliser des stratégies locales visant à satisfaire deux impératifs d'ailleurs intimement liés :

- Améliorer les conditions et la vitesse de convergence du processus numérique
- Favoriser une adaptation locale des contours actifs

Deux extensions des modèles actifs sont proposées ici dans ce but : la méthode de croissance des snakes et la méthode d'expansion [Berger 90b], [Berger 90a].

## 7.2 Méthode de croissance.

### 7.2.1 Principe et algorithme

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, l'obstacle sans doute le plus important au bon fonctionnement des modèles actifs provient de l'éventuel positionnement du snake à un moment donné à cheval sur plusieurs vallées de potentiel, c'est-à-dire dans la zone d'influence de plusieurs contours. Du fait de la non convexité de la fonctionnelle, une telle situation conduit selon les cas à une évolution très lente ou à une stabilisation du snake en un lieu qui n'est pas forcément un contour.

Afin d'éviter ces incontournables problèmes de convergence, nous avons choisi de mettre en oeuvre une méthode dite de **croissance du snake** procédant à une construction

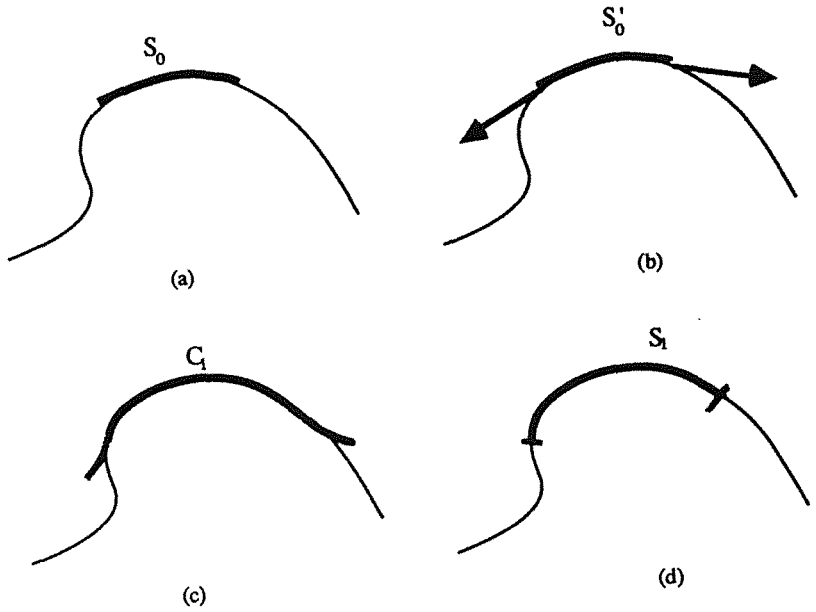


**Figure 7.1**. Mécanisme de croissance du snake
(a) Point de départ (b) Elongation (c) après convergence (d) Résultat de l'évaluation

incrémentale d'un contour actif de manière à générer une courbe (presque toujours) située dans une même vallée du potentiel.

### Idée de base

Supposons que nous ayons à notre disposition une courbe $S_0$, même de petite taille, qui soit un contour $\mathcal{L}$ ou qui en soit très proche (Fig. 7.1.a).

L'allongement de la courbe $S_0$ obtenu en générant aux extrémités de $S_0$ un segment de longueur donnée tangent aux extrémités engendre une courbe $S_0'$ qui est intuitivement proche de $\mathcal{L}$ (Fig. 7.1.b). L'algorithme traditionnel des contours actifs utilisant $S_0'$ pour initialisation converge alors très rapidement vers une courbe $C_1$ (Fig. 7.1.c) en raison de la proximité de l'initialisation et du contour à detecter.

La qualité de la convergence étant difficile à apprécier, nous avons choisi de procéder à partir de $S_0'$ à un nombre fixé d'itérations de la méthode. Il se peut donc que la courbe $C_1$ atteinte à ce moment ne soit pas entièrement un contour. Nous procédons alors à une phase d'évaluation de la courbe $C_1$ afin de déterminer une courbe $S_1$ contenue dans $C_1$ qui puisse être considérée comme un contour (Fig. 7.1.d).

L'évaluation d'un contour actif est réalisée selon les idées exposées dans le chapitre 5. $S_1$ est la plus grande courbe contenue dans $C_1$ pour laquelle la valeur moyenne du gradient soit supérieure à la valeur moyenne du gradient au voisinage de $C_1$. L'évaluation que nous

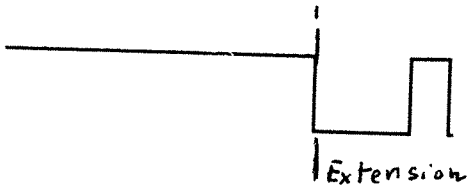


**Figure 7.2**. Evaluation d'une extension.

utilisons en pratique est toutefois un peu plus simple. La comparaison du gradient en chaque point du snake avec la valeur moyenne $M_{gra}$ au voisinage, permet de déterminer un ensemble d'intervalles $[A_i, B_i]_{i\in\{0,Nbint\}}$ dont tous les points ont un gradient supérieur à $M_{gra}$. La courbe retenue est la courbe limitée par les points $A_0$ et $B_{Nbint}$ à condition que la valeur moyenne du gradient sur l'extension réalisée soit supérieure à la valeur moyenne du gradient sur le snake de départ à un coefficient multiplicatif près que nous avons fixé à 0.7 en pratique. De cette façon, une extension telle que celle présentée dans (Fig. 7.2) ne pourra être validée.

L'évaluation proposée revient en fait à comparer la qualité de la prolongation avec la qualité du contour actif déjà existant, ce qui semble légitime puisque de part le mode de construction retenu, ce contour actif a de très fortes chances d'être un contour.

### Algorithme

L'algorithme de croissance du snake consiste donc en la construction d'une suite $S_1, \ldots, S_n$ de snakes de longueur croissante selon la technique décrite pour le passage de $S_0$ à $S_1$. Ceci donne lieu à l'algorithme suivant comprenant trois étapes fondamentales :

1. Croissance dans la direction des tangentes
2. Convergence de la méthode
3. Evaluation du contour obtenu

*Algorithme de croissance du Snake :*

- *Choisir une initialisation $S_0$ proche du contour,*
- *Utiliser l'algorithme traditionnel avec $S_0$ pour initialisation,*

*ce qui fournit la courbe $S_1$.*

- *Tant que l'élongation est possible, faire:*

*(*Construction d'une suite $S_i$ de contours dont la longueur est croissante*)*

*- Etendre $S_i$ dans la direction des tangentes aux extrémités pour obtenir la nouvelle courbe d'initialisation $S'_i$.*

*- Utiliser l'algorithme traditionnel qui converge vers $C_{i+1}$*

*- Evaluation de la courbe $C_{i+1}$ qui fournit $S_{i+1}$*

**Figure 7.3**. Phase d'initialisation de la méthode de croissance.

### 7.2.2 Exemples de croissance du snake

Afin d'illustrer notre méthode, nous avons choisi de détecter les contours de la main dans l'image (Fig. 7.3). L'étape d'initialisation (Fig. 7.3.a) procède à partir d'un petit segment proche du contour pour lequel la méthode itérative converge très vite (Fig. 7.3.b) en raison du faible nombre de points de discrétisation et de la proximité du contour. Les étapes ultérieures d'élongation, de convergence et d'évaluation sont illustrées par (Fig. 7.4). Les résultats sont tout à fait satisfaisants.

Nous avons également testé notre méthode sur des images d'angiographies qui sont par essence mal contrastées et assez bruitées. Les résultats sont là encore tout à fait honorables (Fig. 7.5).

### 7.2.3 Stratégie multisnake

Dans les exemples présentés ci dessus, le point de départ était toujours constitué d'un petit segment, fourni par l'utilisateur, proche du contour à détecter. Cependant, notre méthode se révèle également efficace dans le cas d'une initialisation quelconque et en particulier inadaptée (Fig. 7.6.a). Comme nous l'avons déjà vu, le snake se stabilise sur une position qui n'est pas satisfaisante (Fig. 7.6.b). La stratégie d'évaluation permet alors de déterminer la partie de la courbe qui est effectivement un contour et la stratégie de croissance permet finalement de détecter correctement la lampe.

Nous pouvons plus généralement définir une **stratégie multisnake** permettant, à partir d'une initialisation quelconque, de déterminer les portions $C_1, \ldots, C_p$ de la courbe pouvant être considérées comme des contours. Illustrons cette étape sur une image de formant que nous avons déjà rencontrée. A partir de l'initialisation fournie, quelques étapes de l'algorithme numérique traditionnel (Fig. 7.7.a) fournissent une courbe dont l'étude du profil de gradient (Fig. 7.7.b) permet de mettre en évidence 3 morceaux de courbe (Fig. 7.7.c) sur lesquels la valeur du gradient est supérieure à la valeur moyenne du gradient sur

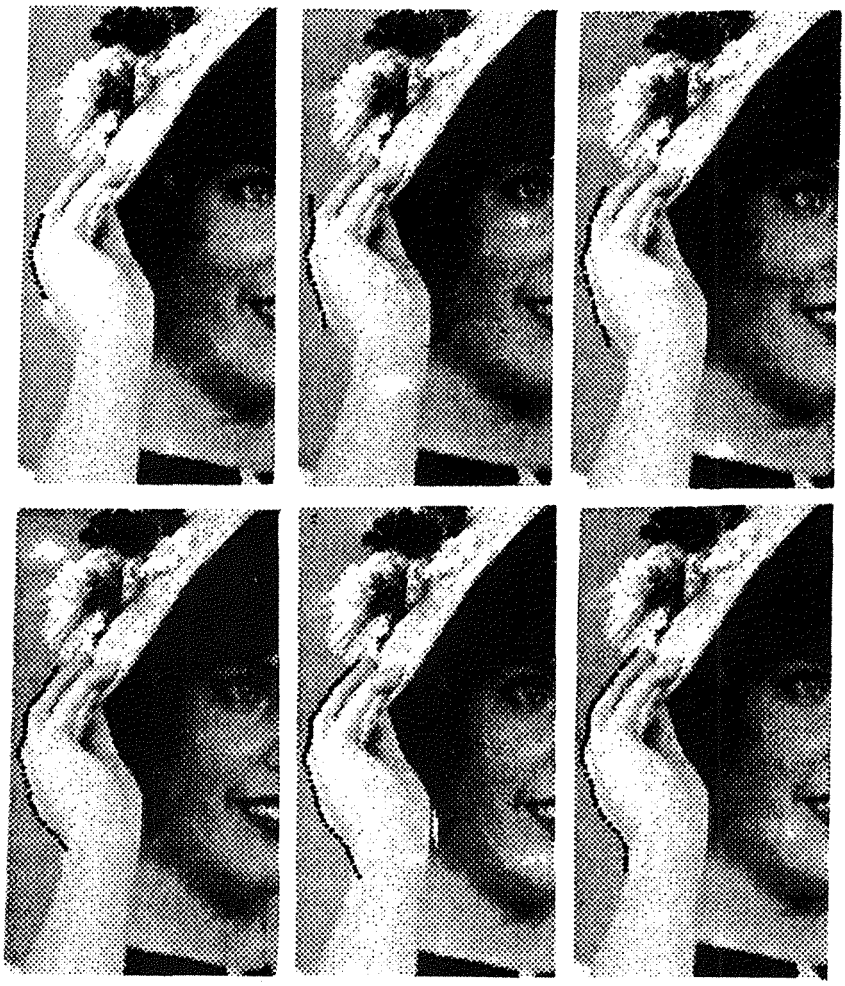

**Figure 7.4**. Quelques étapes de la croissance du snake.

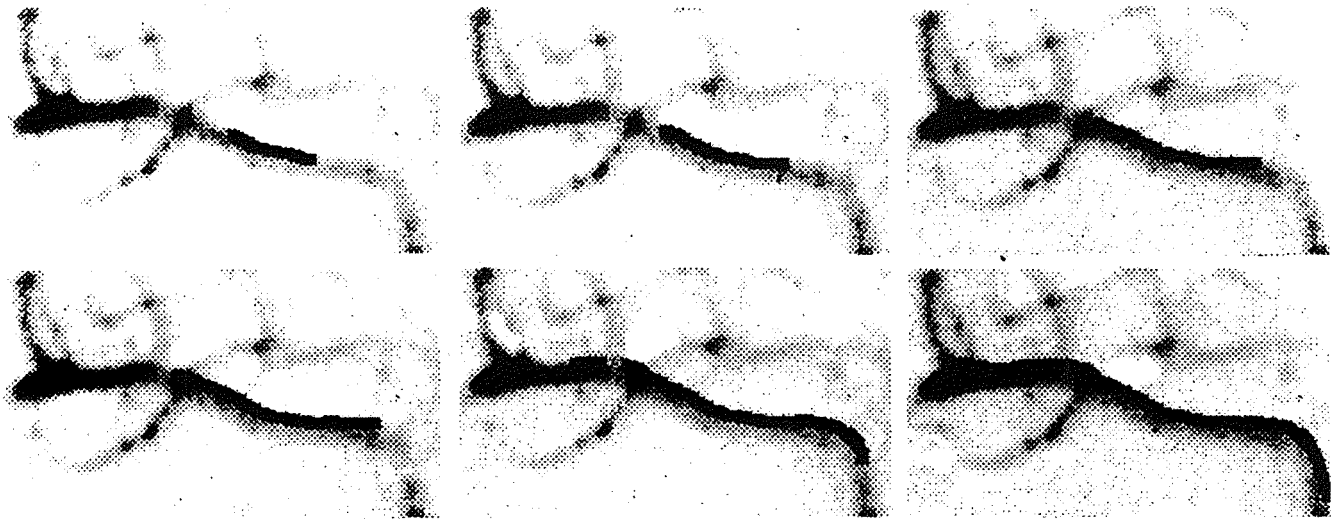

**Figure 7.5**. Croissance du snake sur des images d'angiographie.

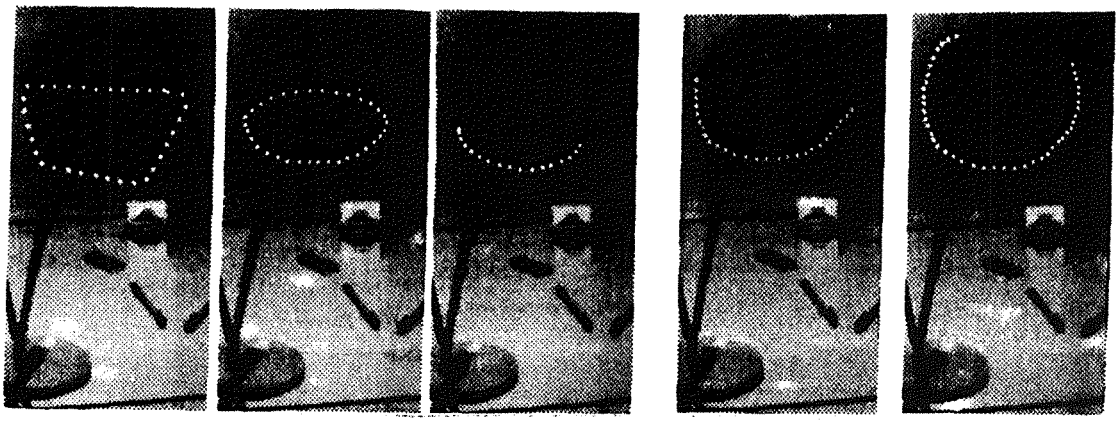

**Figure 7.6**. Croissance du snake à partir d'une initialisation quelconque : (a) initialisation, (b) position stationnaire, (c) Evaluation, (d) et (e) Résultats de la croissance.

le snake. Ces trois courbes, dont il est légitime de penser qu'elles sont des contours, vont constituer autant de points de départ pour la méthode de croissance du snake. Le résultat final de cette approche multisnake est illustré par (Fig. 7.7.d).

Revenons quelques instants sur la détermination des courbes $C_1, \ldots, C_p$. Dans l'exemple utilisé, seuls trois intervalles de taille conséquente sont supérieurs à la moyenne. Les choses ne sont pas toujours aussi simples et il peut arriver que de nombreux intervalles, parfois de faible amplitude, vérifient cette propriété et il importe donc de ne garder que les plus significatifs. Fixer un simple seuil sur la longueurs de ces intervalles, c'est-à-dire sur le nombre de points de discrétisation de la courbe satisfaisant la propriété ne saurait suffire, car, comme nous l'avons fait remarquer précédemment, les points du contour actif ont parfois tendance à s'agglomérer et dans ce cas, un nombre important de points de discrétisation agglomérés ayant un module de gradient supérieur à la moyenne n'a pas grande signification. C'est pourquoi nous avons choisi de ne conserver que les intervalles $[i, j]$ pour lesquels la courbe limitée par les points $M_i$ et $M_j$ a une longueur supérieure à 10 pixels.

Cela dit, la perspective d'une stratégie multisnake étendue n'est sans doute pas si simple à mettre en oeuvre puisque certains morceaux de contours peuvent faire partie du même contour ou générer un contour circulaire et il importe donc d'être en mesure de reconnaitre une telle situation et d'opérer la fusion.

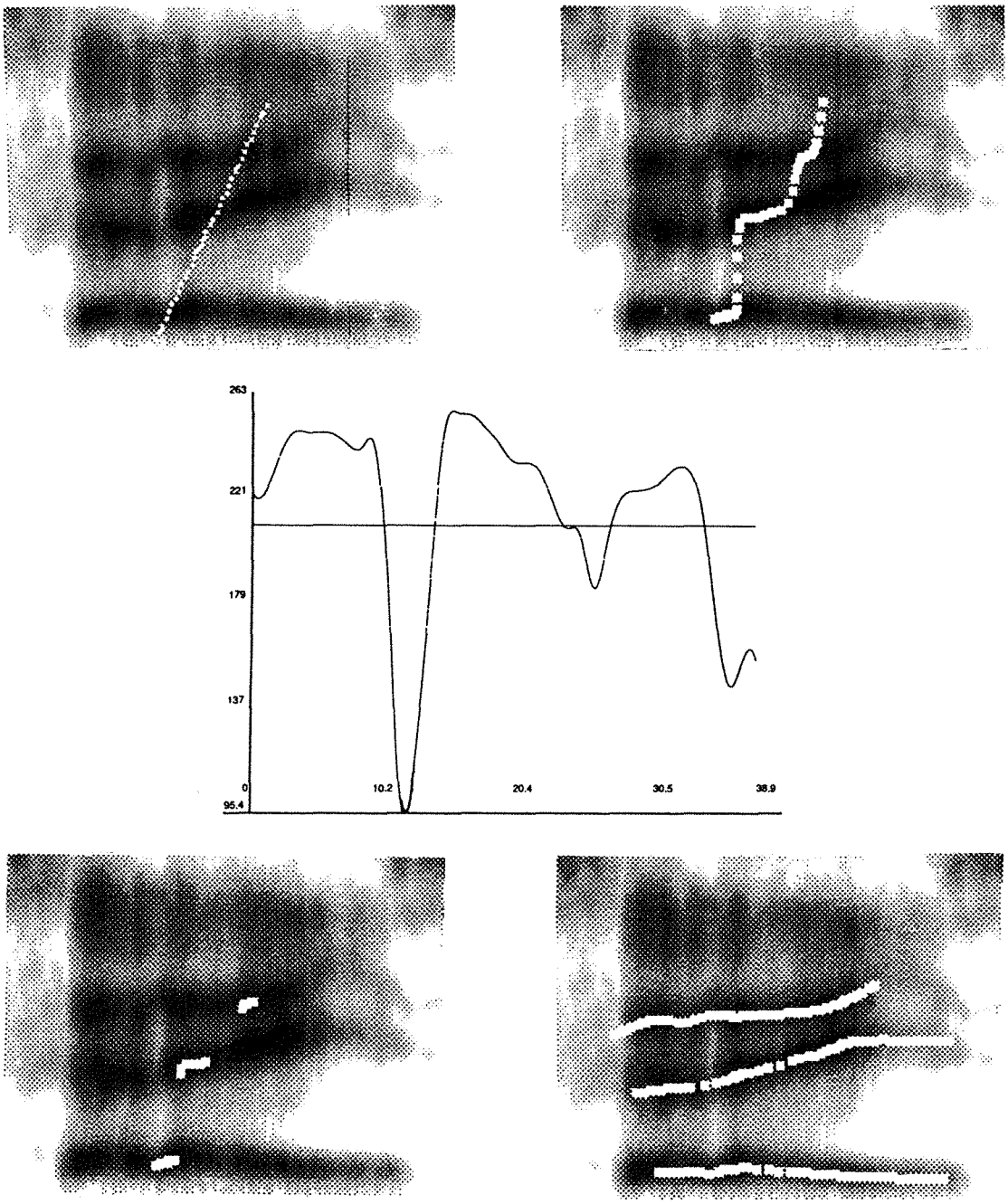


**Figure 7.7**. Suivi de formants utilisant la méthode multisnake.
(a) initialisation et position après quelques itérations, (b) profil du gradient sur le snake, (c) Evaluation, (d) Application de la méthode multisnake.

### 7.2.4 Discussion

#### Mérites de l'approche

Il est temps maintenant de discuter des mérites de l'approche par croissance et des éventuelles améliorations pouvant lui être apportées.

De part sa nature incrémentale, il est clair que la méthode proposée contribue à améliorer la convergence du processus (puisque le snake s'allonge dans la même vallée de potentiel) et concourt également à résoudre partiellement le délicat problème de l'initialisation puisque la méthode ne prend en compte que les parties de la courbe pouvant être considérées comme des morceaux de contour qui sont ensuite utilisés pour construire une suite de courbes d'initialisation très proche du contour à détecter. Cette méthode présente de plus l'avantage de détecter un contour dans sa continuité puisque l'on suit le contour que l'on souhaite mettre en évidence. Cela dit, nous ne détectons pas pour autant le contour d'un objet au sens des régions puisque dans le cas où un contour présente un embranchement, seule la partie située dans la continuité du contour déjà mis en évidence (ie la plus proche de la tangente) sera détectée. Le fait de privilégier le contour le plus régulier possible n'est d'ailleurs pas propre à la méthode de croissance mais au concept de contour actif, qui, par le biais du terme $\int_0^1 v''^2$, privilégie la recherche de contours les moins tourmentés possibles.

Au chapitre des désagréments, le lecteur pourra bien naturellement objecter que la croissance du snake s'avère plus coûteuse que la méthode traditionnelle. La méthode de croissance nécessite en effet une nouvelle inversion de la matrice $A$ à chaque fois que l'on augmente la taille du snake alors qu'une seule inversion est usuellement requise à condition que les paramètre $\alpha$ et $\beta$ soient constants. Cependant, le surcoût occasionné par ces multiples inversions n'est en fait qu'apparent car il est compensé par le **faible nombre d'itérations nécessaire** à la convergence de la méthode en raison de la proximité de l'initialisation et du contour. Il faut surtout avouer que les coûts des deux méthodes ne sont guère comparables car elles ne sont pas utilisées dans les mêmes conditions. C'est précisément lorsqu'une initialisation quelconque de la méthode standard est incapable de fournir un résultat correct qu'il est souhaitable de recourir à la stratégie de croissance qui construit en quelque sorte sa propre initialisation par élongations successives.

#### Comparaison avec des travaux connexes

Tentons maintenant de comparer notre méthode avec d'autres stratégies d'inspiration un peu similaire développées en détection de contour. Deux types de travaux nous semblent en effet relever d'idées voisines : (i) les travaux de Lux et Nevatia [Lux 85], [Nevatia 80] (ii) les travaux de Parents et Zucker [Parent 85], [Zucker 88].

L'approche (i) a été développée dans la phase de chaînage de la détection traditionnelle pour déterminer à partir du point courant $P_i$ son successeur $P_{i+1}$. La position de $P_{i+1}$ est ici recherchée parmi les quelques points voisins de $P_i$ situés dans la direction de la ligne

déjà constituée de manière à n'en retenir que celui présentant le plus fort gradient. Notre méthode diffère cependant assez nettement de cette approche car elle est certes basée sur une même analyse du contexte local mais elle autorise un prolongement de taille suffisante qui permet non pas une détection de contour presque aveugle, au coup par coup, mais au contraire une détection dans un voisinage de l'extrémité permettant de ne pas se laisser piéger par les anomalies locales du contour comme les trous.

L'approche (ii) est quant à elle à la fois plus proche et plus éloignée de nos préoccupations. Il s'agit de déterminer les lignes d'une image en calculant d'abord la structure de *champ tangent* c'est-à-dire déterminer en chaque point de l'image les directions et les courbures possibles d'un éventuel contour à l'aide des masques classiques, le nombre de valeurs possibles de ces deux grandeurs étant fixé. Chaque point susceptible d'être un contour est ainsi étiqueté par au moins une orientation et une courbure. L'utilisation de techniques de relaxation permet d'obtenir une consistance locale de l'étiquetage et d'éliminer les directions de champs a priori incompatibles entre voisins. A l'issue de cette étape, la visualisation du champ tangent fournit la structure grossière des lignes de l'image. Il reste ensuite à synthétiser les contours à partir de ces informations d'ordre local en construisant une *couverture* de la courbe par de petits morceaux de courbes issus des caractéristiques du champ tangent qui évoluent à la manière des snakes et dont l'ensemble des positions finales fournit les lignes de l'image. L'optique retenue ici est donc délibérément locale et s'apparente davantage dans l'idée à une technique de chaînage car l'étape de détermination du champ tangent est assez similaire à l'étape d'extraction des points de contraste. Cette étape est ici coûteuse en raison de l'utilisation de techniques de relaxation et on peut d'ailleurs se demander quel serait le résultat fourni pour une image bruitée dont les contours seraient quelque peu lacunaires.

### Quelques précisions

Revenons maintenant sur quelques points de la méthode laissés quelque peu dans l'ombre. Considérons d'abord le problème du choix de l'élongation du snake à chaque étape. L'élongation est choisie interactivement par l'utilisateur et elle peut donc être constante ou variable au cours de l'application. La méthode peut également fonctionner de manière autonome enchainant les phases d'élongation, de convergence et d'évaluation. Notons que le nombre d'itérations nécessaire entre deux élongations peut être adapté par l'utilisateur en fonction du contexte.

Dans notre logiciel, l'élongation est fixée par défaut à 4*pas de discrétisation. Il est cependant concevable de faire évoluer cette longueur en fonction des résultats fournis par l'évaluation de la façon suivante: si le snake ainsi allongé est reconnu comme un contour, la valeur de l'élongation peut être augmentée tandis qu'un mauvais résultat de l'évaluation sur la partie agrandie du snake donnera lieu à un abaissement de l'élongation. Dans la pratique, l'élongation ne peut être inférieure à 2*(pas de discrétisation). Cette borne inférieure est nécessaire eu égard à la tendance d'une prolongation de faible longueur à se ramasser sur elle-même davantage soumise aux forces internes qu'aux forces de l'image.

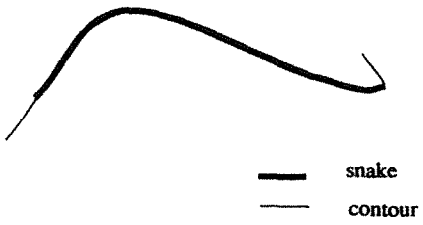


**Figure 7.8**. Cas d'échec de la méthode de croissance.

Notons enfin que l'arrêt de la méthode de croissance a naturellement lieu lorsque la prolongation engendrée n'apporte pas d'améliorations c'est-à-dire lorsque l'évaluation élimine les points de discrétisation issus de la dernière élongation.

### 7.2.5 Améliorations : méthode de la meilleure prolongation

Une amélioration simple à apporter (du moins en théorie) à la méthode de croissance consisterait à générer une élongation du snake qui ne soit pas un segment mais un morceau d'arc de cercle dont l'inverse du rayon est la courbure aux extrémités du snake, calculée en utilisant la notion de courbure discrète [Lux 85]. Cette méthode se révèle particulièrement efficace pour la détermination de formes régulières, à condition que l'image ne soit pas trop bruitée. Le calcul de la courbure est, comme chacun sait, très sensible au bruit et il faudrait calculer la courbure discrète sur un grand nombre de points pour disposer d'une estimation correcte ce qui est aberrant si la courbure varie relativement rapidement le long du snake.

L'algorithme de croissance ne représente évidemment pas le remède miracle aux divers maux dont sont affligés les contours actifs et il est clair que, de par sa conception, la méthode pose quelques problèmes lorsque le contour à détecter présente de brutales variations de courbure (Fig. 7.8).

L' élongation engendrée par la tangente est alors très éloignée du contour et le snake ainsi généré n'améliore pas le résultat déjà obtenu. L'évolution du snake se trouve ainsi bloquée. Il reste alors à savoir si le blocage provient d'un fin effective du contour ou d'une forte variation de courbure qui n'a pu être détectée. L'évaluation de la dérivée seconde du gradient dans la direction du contour [Kass 87], [Zucker 85] permet évidemment de savoir si le contour est terminé mais il ne permet pas de savoir si le contour se prolonge dans une autre direction.

Nous avons donc choisi de résoudre ce problème en étudiant le résultat d'élongations réalisées dans plusieurs directions. Nous avons considéré en pratique les huit directions cardinales qui déterminent des secteurs suffisamment fins pour autoriser la détection correcte de n'importe quelle variation de courbure. A l'issue d'un nombre fixé d'itérations

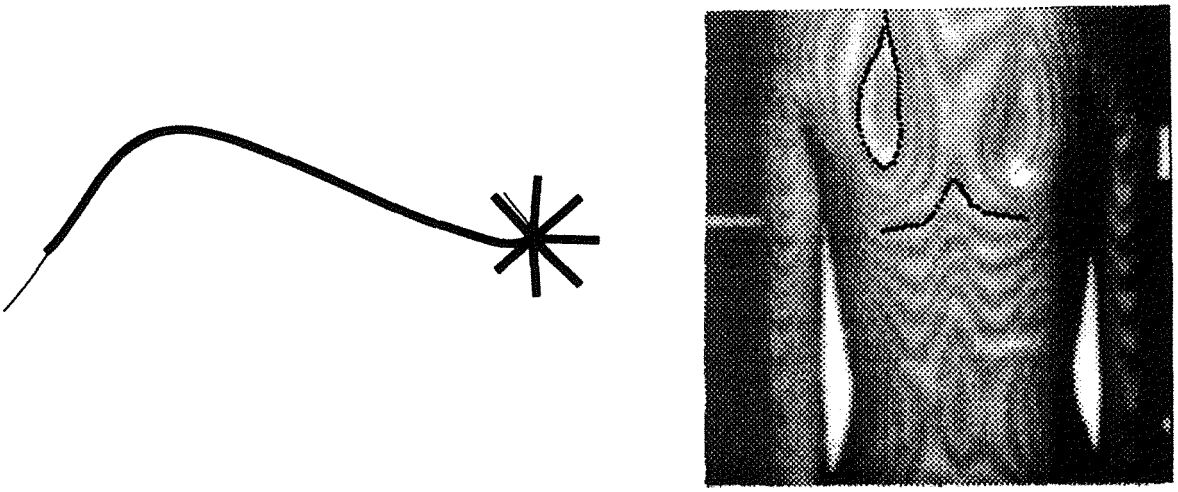

**Figure 7.9**. Utilisation de la méthode de la meilleure prolongation.

de la méthode pour chacune de ces huit élongations, seule la prolongation fournissant la meilleure évaluation est retenue. Après cette étape, il est légitime de penser que la partie de contour présentant une forte variation de courbure est maintenant détectée et la méthode de croissance peut à nouveau être utilisée jusqu'à ce que la présence d'une nouvelle variation de courbure ne nécessite le retour à la méthode de la meilleure prolongation.

Remarquons que la méthode proposée permet de déterminer la fin d'un contour (lorsqu'aucune des prolongations ne satisfait le critère d'évaluation) et qu'elle autorise également la détermination de points de jonction puisque qu'on peut retenir apres évaluation les prolongations ayant donné lieu aux meilleurs résultats. Notons cependant que la méthode de prolongation étant utilisée seulement lorsque la méthode de croissance ne permet plus de faire évoluer le snake, les points de jonction détectés sont ceux pour lesquels les branches ne sont pas situées dans l'alignement du contour.

Nous avons utilisé cette méthode pour le détection de courbes de niveau dans des images de moiré portant sur images de dos (Fig. 7.9). La technique de moiré permet, en produisant des franges alternativement claires et obscures sur la surface du dos, de récupérer des informations de relief qui sont utilisées en médecine pour diagnostiquer des anomalies telles que les scolioses. Nous avons testé notre méthode sur ces images qui sont généralement assez bruitées et peu contrastées. Les courbes de niveau présentent de fortes variations de courbure notamment au niveau de la colonne vertébrale et constituent de plus un réseau de courbes assez dense qui interdit presque l'usage de la méthode traditionnelle tant la position de l'initialisation devrait être précise pour éviter que le snake ne soit influencé par plusieurs courbes de niveau. La méthode de croissance nous a permis de détecter dans un premier temps la courbe de niveau jusqu'au niveau de la colonne vertébrale où se produit une forte variation du contour. L'utilisation de la meilleure prolongation nous a alors permis de conclure (Fig. 7.9). Cette méthode s'est également révélée efficace

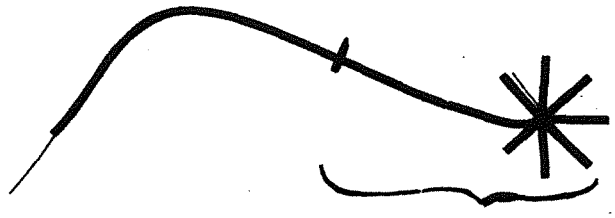

**Figure 7.10.** Partie du snake réévaluée pour la méthode de la meiileure prolongation.

dans la détection des omoplates.

Notons enfin pour conclure sur cette méthode que l'essai de diverses prolongations peut sembler coûteux. C'est pourquoi, s'agissant de l'étude d'un phénomène local, nous considérons pour la détermination de la meilleure direction non pas le snake dans son entier mais seulement une partie de cette courbe (fig7.10). Le coût de l'opération est donc modique puiqu'on travaille sur un nombre faible de points de discrétisation.

### 7.2.6 Bilan

Au sein d'une méthode d'inspiration très globale telle que les contours actifs, la méthode de croissance et son corollaire, la méthode de la meilleure prolongation, s'inscrivent donc dans une perspective d'introduction de considérations locales avant tout destinées ici à éviter les problèmes nés d'une initialisation située à proximité de plusieurs contours.

Outre la création d'une situation propice à la convergence de l'algorithme à chaque étape, cette méthode permet de plus de s'affranchir d'un certain nombre de problèmes d'initialisation et permet également une détection simple des points anguleux du contour.

Mais l'utilisation de méthodes locales va bien au delà de ce qui a été présenté jusqu'à présent et il est possible d'imaginer des moyens permettant d'imposer localement des contraintes au snake de manière à introduire des connaissances à priori sur le contour recherché (c'est par exemple ce qui est fait lorsque $\beta(j) = 0$ impose le developpement d'un coin au point de paramètre $j$) ou à adapter dynamiquement les coefficients du snake de manière à pouvoir détecter à la fois plus finement et plus rapidement les contours. Nous allons nous attacher dans le paragraphe suivant à la description de telles méthodes.

## 7.3 Vers une adaptation dynamique des paramètres du snake

### 7.3.1 Motivations

Les contours actifs sont encore loin à l'heure actuelle de constituer un outil autonome et ce fait est en partie imputable à certaines lacunes dans le modèle du snake et également à une absence de stratégies d'évolution dynamique. Expliquons nous sur ces deux points :

#### Lacunes dans le modèle des contours actifs

Nous avons vu que le comportement naturel d'un snake en l'absence de forces extérieures est de se rétracter, ce qui convient bien pour des initialisations externes mais pose des problèmes dans les autres cas. Il importe donc de doter le snake de possibilités d'expansion.

Nous avons également remarqué que la distribution des points de discrétisation sur la courbe n'était pas régulière et que les points avaient tendance à s'agglomérer aux endroits présentant le plus fort gradient. Cette prédisposition s'avère gênante à plus d'un titre : d'abord parce qu'elle va à l'encontre de la philosophie des contours actifs dont le but est justement de pallier d'éventuels trous ou anomalies en construisant une courbe satisfaisant au mieux le critère de contour et il est donc étrange d'accepter de perdre de l'information là où on souhaiterait précisément en avoir ; ensuite parce que l'analogie réalisée avec le modèle physique des plaques et membranes au travers des énergies de flexion et d'ondulation requiert un paramétrage intrinsèque pour $v$ (c'est-à-dire que les points $v(ih)$ sont équidistants) ; enfin parce qu'au niveau de la discrétisation des équations, l'hypothèse d'équidistance des points est implicite.

#### Nécessité de stratégies d'évolution des snakes

Comme nous avons pu le constater à plusieurs reprises, la finesse de la détection réalisée ainsi que la vitesse de convergence du processus dépendent des constantes élastiques adoptées. Une constante de rigidité trop grande interdit par exemple de saisir les détails d'un contour. Il apparaît donc souhaitable d'adapter localement les coefficients élastiques de manière à permettre au snake une meilleure détection de contour, ce qui revient d'ailleurs à le doter de possibilités de déformations (expansion ou rétraction). L'adaptation de paramètres autorisant des déformations diverses ne se justifie pas seulement par un besoin d'ajustement mais aussi par des considérations numériques : des coefficients élastiques inadaptés et une initialisation peu précise peuvent rendre la convergence vers le contour très lente voire même impossible. Seule la variation des paramètres élastiques peut permettre de sortir de cette situation. Signalons de plus que le suivi d'une forme dans une séquence d'images étant une application privilégiée des contours actifs, il est nécessaire dans le cas d'objets déformables de disposer de moyens permettant de détecter et de s'adapter aux

changements survenus. Ceci est particulièrement manifeste dans le cas d'une application biologique telle que l'étude des cellules polypodes [Leymarie 90], qui comme leur nom l'indique developpent très rapidement, entre deux prises de vues, des pieds supplémentaires qu'il convient de détecter.

Nous allons nous livrer dans la suite à l'étude des points soulevés ici en commençant par le problème de la régularisation de la position des points sur le snake. Nous nous attacherons ensuite à l'élaboration de méthodes permettant l'expansion et la rétraction puis nous tenterons de définir une stratégie dynamique d'utilisation de ces méthodes.

### 7.3.2 Régularisation des points sur la courbe

Revenons quelques instants sur la discrétisation effectuée. Si l'on considère le paramétrage $s \rightarrow v(s)$ d'une courbe d'un point de vue cinématique comme étant l'observation de la position d'un mobile parcourant la courbe au "temps" $s$, la discrétisation effectuée $V_i = V(ih)$ correspond à l'observation de la courbe à intervalle régulier. Comme nous n'accordons pas d'importance à l'interprétation cinématique de $s \rightarrow v(s)$ puisque seul le support de la courbe nous intéresse, il est donc souhaitable de ne rechercher pour $v$ qu'un paramétrage intrinsèque, c'est-à-dire un paramétrage pour lequel la distance parcourue est proportionnelle à $s$ de manière à obtenir l'information la plus régulière possible. Un agglomérat de points à un endroit nous est en effet peu utile puisqu'il signifie simplement qu'il y a un fort gradient à cet endroit ce que nous pouvons aisément retrouver en regardant le profil du gradient le long de la courbe.

Un paramétrage $V$ fournira une distribution régulière si $||V'(s)||$ est constante pour tout $s$. Cette contrainte, si elle est sous entendue à plusieurs reprises dans le modèle, n'est cependant pas prise en compte au niveau de la résolution. Aucun élément n'oblige donc les points de discrétisation à être équidistants et tout se passe presque comme s'ils étaient libres de se déplacer de manière indépendante le long de la courbe, ce qui explique la tendance à l'agglomération rencontrée. Pour prendre explicitement en compte la régularité, il conviendrait donc de résoudre le problème d'optimisation contraint :

$$Minimum_{\{v \ tq \ ||v'|| = cste\}} \phi(v) \tag{7.1}$$

Mais la minimisation sous contraintes est un problème fort délicat d'autant plus que l'espace sur lequel on minimise n'est pas très explicite puisque la constante d'équidistance varie au cours du temps lorsque la taille du snake évolue. Quelques tentatives [Amini 90] visant à assurer non pas l'équidistance mais à éviter simplement les accumulations de points, utilisent la programmation dynamique pour imposer des *contraintes dures* en imposant une distance minimale $d$ entre les points ce qui oblige à avoir une idée de la longueur finale du contour pour donner une valeur censée à $d$.

En raison des problèmes d'optimisation contrainte, nous avons choisi de ne pas résoudre exactement (7.1) mais d'introduire un terme additif à l'énergie globale dont l'effet est d'inciter les points à l'équidistance. Ce terme, comme les autres composants de l'énergie, peut être pondéré afin d'en augmenter l'influence.

Si $v : [0,1] \to I\!R^2$ est un paramétrage d'une courbe $C$ de longueur $\mathcal{L}$, la paramétrage sera donc régulier si

$$\forall s \in [0,1], ||v'(s)|| = \mathcal{L} \tag{7.2}$$

ce qui signifie au niveau de la discrétisation que

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\},\ d(M_i, M_{i+1}) = \frac{\mathcal{L}}{N} \tag{7.3}$$

On a en effet

$$V_i' = v'(s = \frac{i}{N}) = \frac{v(\frac{i}{N} + \frac{1}{N}) - v(\frac{i}{N})}{\frac{1}{N}} = N\vec{M_i M_{i+1}} \tag{7.4}$$

ce qui prouve que

$$||v'(s)|| = \mathcal{L} \Leftrightarrow ||M_i M_{i+1}|| = \frac{\mathcal{L}}{N} \tag{7.5}$$

Considérons donc l'énergie

$$E_{reg} = \int_0^1 (||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2)^2 ds \tag{7.6}$$

se subsituant au terme $\int_0^1 ||v'(s)||^2 ds$, de sorte que l'énergie interne est maintenant

$$E_{int} = \int_0^1 \alpha(||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2)^2 + \beta||v''(s)||^2 ds \tag{7.7}$$

Le minimum de $E_{reg}$ étant obtenu lorsque $||v'(s)|| = \mathcal{L}$ presque partout, l'influence de ce terme est donc d'assurer au mieux une distribution régulière des points de discrétisation. La version *discrétisée* de $E_{reg}$ s'apparente en effet au terme

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} N^4 (M_i M_{i+1}^2 - \frac{\mathcal{L}}{N}^2)^2$$

Examinons de plus près cependant l'influence de ce terme en considérant le cas d'une courbe $C$ rectiligne. L'énergie potentielle $P(s) = (||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2)^2$ induit donc une force

$$F(s) = -\nabla P = -\frac{\partial(||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2)^2}{\partial s} = -2\frac{\partial||v'(s)||^2}{\partial s}(||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2) \tag{7.8}$$

Considérons l'effet de cette force dans le cas de la répartition de points indiquée dans la figure 7.11 et examinons la force générée par le potentiel dans deux situations significatives

- Lorsque les points tendent à s'agglutiner en un point A
  Aux points de paramètres $s_1$ et $s_2$, nous avons $||v'(s)||^2 - \mathcal{L}^2 < 0$. Nous avons de plus $\frac{\partial||v'(s_1)||^2}{\partial s} < 0$, donc $F(s_1) < 0$. En ce qui concerne $s_2$, $\frac{\partial||v'(s_2)||^2}{\partial s} > 0$, donc $F(s_2) > 0$. Les forces générées au voisinage du point d'accumulation $A$ tendent donc à augmenter l'espace entre les points ce qui est bien l'effet escompté.

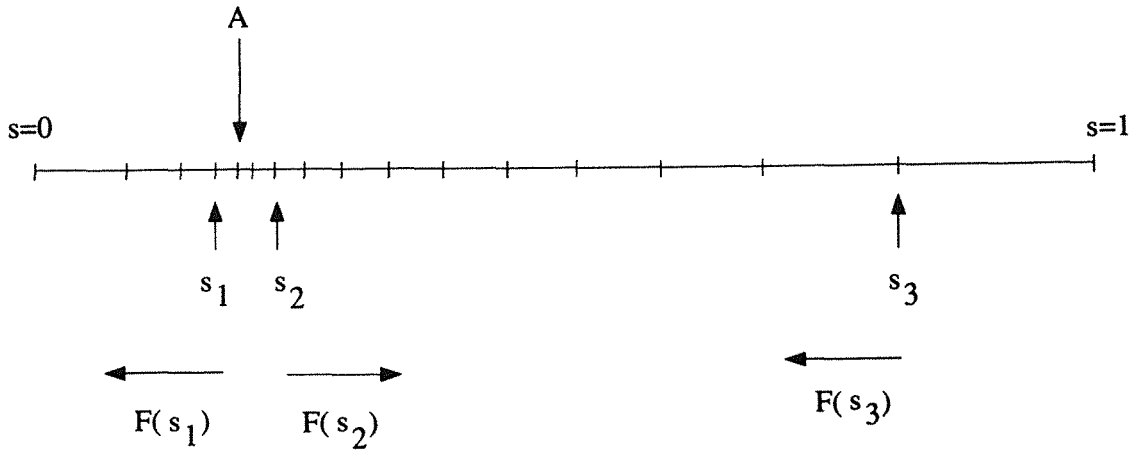


**Figure 7.11**. Effet du potentiel de régularisation.

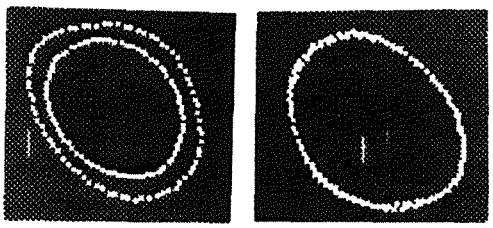

**Figure 7.12**. Comparaison des énergies internes après plusieurs itérations.
(a) Energie classique (b) Energie régularisante

- Lorsque les points deviennent très espacés :
  C'est le cas du point de paramètre $s_3$ (Fig. 7.11). Nous avons alors $||v'(s_3)||^2 - d^2 > 0$ et $\frac{\partial ||v(s_3)||^2}{\partial s} > 0$, ce qui fournit $F(s_3) > 0$. L'effet de la force est la encore de ramener un espace régulier entre points.

Ainsi, l'énergie de régularisation utilisée induit elle en quelques sortes des **forces de cohésion** destinées à maintenir un écart constant entre les points.

Dans le cas d'une image à niveau de gris constant, une courbe seulement soumise à l'énergie interne va donc se stabiliser, sa longueur étant fixe puisque les distances entre points sont alors constantes égales à $\frac{\mathcal{L}}{N}$. Le recours à cette méthode permet donc d'obtenir des snakes de longueur fixe, ce qui est une différence notable avec le modèle traditionnel (Fig. 7.12).

Das le cas reél, lorsqu'une image est présente, le terme régularisant, étant seulement un des constituants de l'énergie, ne force pas à respecter une stricte équidistance entre les points puisque l'énergie image reste prépondérante, mais a seulement un effet régularisant

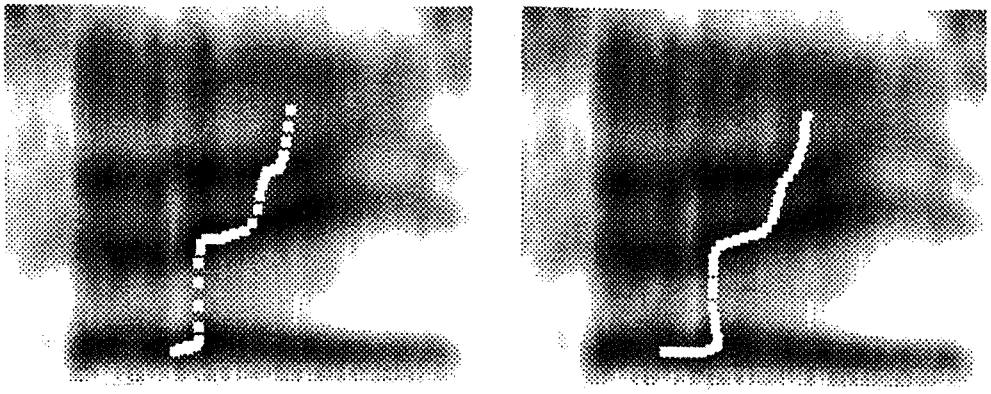

**Figure 7.13**. Comparaison de la distribution des points avec la méthode classique (a) et régularisante (b).

sur la distribution des points. Les résultats sont cependant honorables comme on pourra en juger (Fig. 7.13) sur l'image présentant les résultats obtenus à partir d'une même initialisation avec la méthode traditionnelle (Fig. 7.13.a) et la méthode régularisante (Fig. 7.13.b).

Puisque nous disposons maintenant d'un moyen de régulariser au mieux la distribution des points, portons maintenant nos efforts vers l'étude de moyens permettant de déformer le snake selon les besoins. Avant de passer à la description de la méthode que nous avons adoptée, commençons d'abord par une étude qualitative de l'influence des paramètres élastiques sur la déformation du snake.

### 7.3.3 Quel paramètre pour quelle déformation ?

Nous nous intéressons ici à l'influence de $\alpha$ et $\beta$ dans le modèle classique, les autres paramètres de la fonctionnelle étant fixés. Afin d'étudier le comportement intrinsèque du snake, nous supposons ici qu'il n'y a pas de forces images.

Lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont positifs, la courbe tend à se rétracter sur elle-même, et plus $\alpha$ est grand, plus la rétraction est rapide comme l'illustre (Fig. 7.14) représentant la position de contours actifs issus de la même initialisation (la ligne brisée) et obtenus après le même nombre d'itérations.

Inversement, quel est donc l'influence d'un $\alpha$ négatif sur le snake ? Intuitivement, le minimum de $\alpha \int_0^1 ||v'(s)||^2 ds$ sera alors $-\infty$ puisque l'intégrale est d'autant plus grande en valeur absolue que la courbe est longue. L'effet d'un $\alpha$ négatif est donc de produire une suite de courbes dont les longueurs s'accroissent, se déformant dans la direction de la courbure. Quelques exemples de telles expansions sont montrées (Fig. 7.15) avec diverses

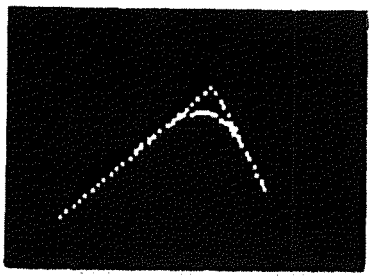

**Figure 7.14**. Exemples de rétraction.

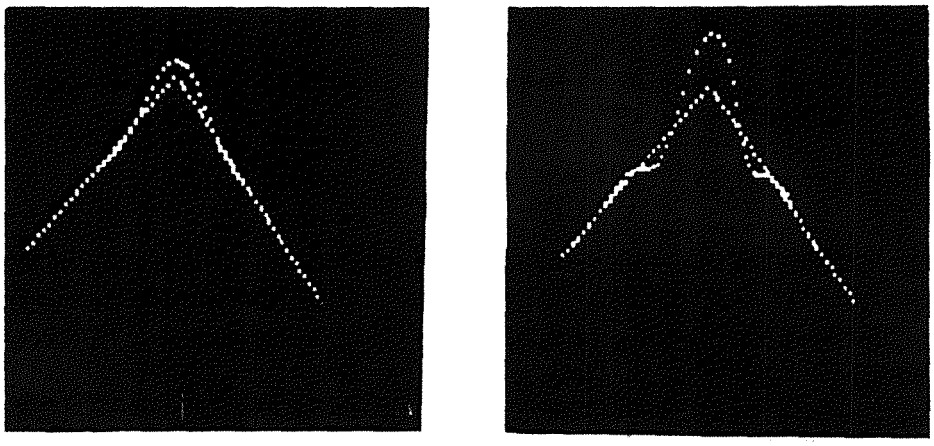

**Figure 7.15**. Exemples d'expansion.
(a) $\alpha = -2,\ \beta = 1$ (b)$\alpha = -3,\ \beta = 1$

valeurs de $\alpha$ et toujours le même nombre d'itérations.

D'un point de vue mathématique, il peut paraître néanmoins surprenant d'utiliser des valeurs propres négatives pour $\alpha$ car le processus numérique n'est plus assuré de converger. Nous nous sommes donc intéressé à l'influence d'un $\alpha < 0$ sur les valeurs propres de la matrice $A$ qui, rappelons le, gouvernent la convergence : si les valeurs propres restent positives, le processus est non oscillant.

Nous avons vu, dans le cas d'un snake fermé, que les valeurs propres sont

$$4sin^2\tfrac{k\pi}{n}(4\beta sin^2\tfrac{k\pi}{n} + h^2\alpha)$$

$\alpha$ étant négatif, les valeurs propres ne sont donc plus forcément positives. Etudions donc la fonction

$$f(x) = 4sin^2x(4\beta sin^2x + h^2\alpha)\ sur\ [0, \pi]$$

Il est clair que

$$f'(x) = 4sin2x(8\beta sin^2x + h^2\alpha)$$

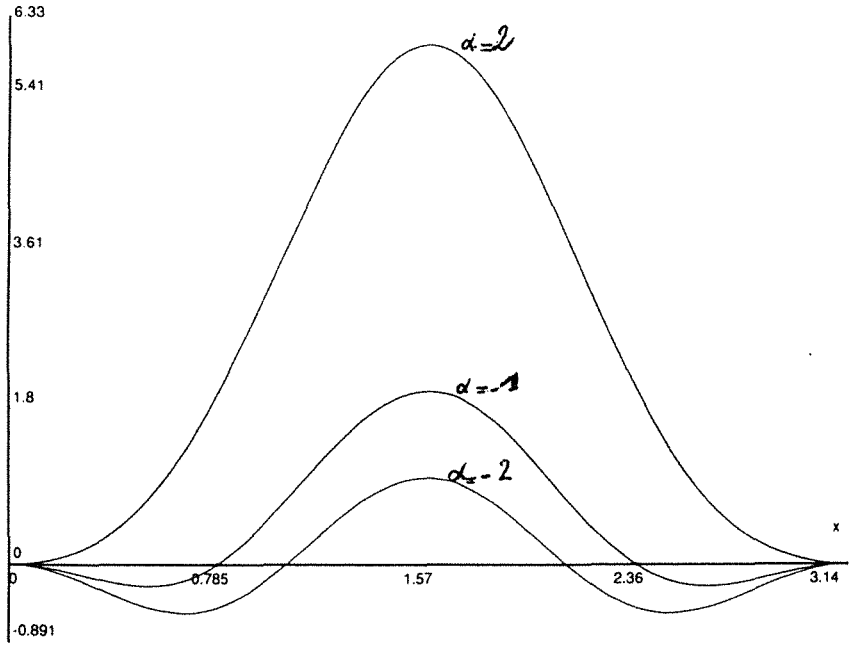


**Figure 7.16.** Profil de la courbe des valeurs propres pour différentes valeurs de $\alpha$.

Si $\alpha < 0$, la quantité entre parenthèses s'annule si $\frac{-h^2\alpha}{8\beta} < 1$, et il existe alors $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $f'(x_0) = f'(\pi x_0) = 0$. Ce qui fournit les variations suivantes de $f$ :

| x | 0 | $x_0$ | $\pi/2$ | $\pi - x_0$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | 0 ↘ | $\frac{-\alpha^2 h^4}{4\beta}$ ↗ | $4(4\beta+h^2\alpha)$ ↘ | $\frac{-\alpha^2 h^4}{4\beta}$ ↗ | 0 |

Les valeurs propres de $f$ ne sont donc pas toutes positives (Fig. 7.16) dès que $\alpha < 0$, ce qui occasionne un processus numérique oscillant si on ne prend pas garde d'utiliser une valeur de $\gamma$ suffisante pour que les valeurs propres de $A + \gamma I$ soient positives. Dans le cas évoqué ci dessus, il convient donc de choisir $\gamma$ tel que $-\frac{\alpha^2}{4\beta} + \gamma > 0$.

De fait, comme nous allons le voir, le contrôle de la contraction-dilatation nous conduira très naturellement à des $\alpha$ négatifs pour lesquels il faut assurer la convergence du processus numérique.

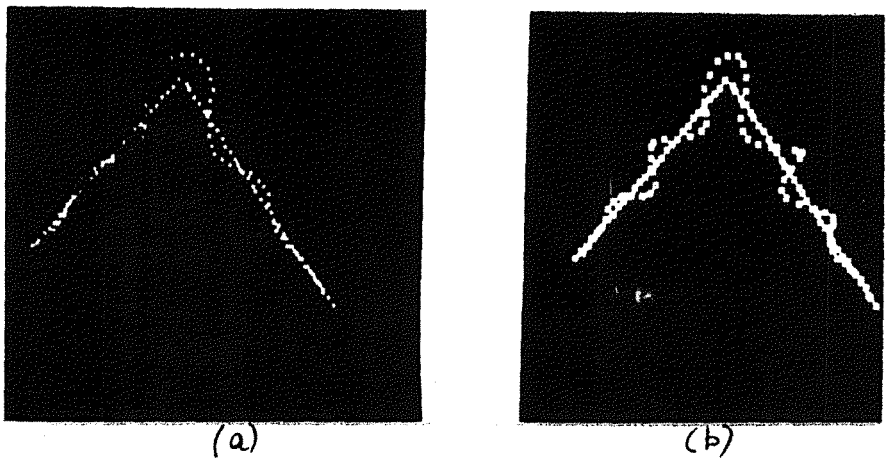


**Figure 7.17**. Expansion régulière du snake.
(a): $\frac{\epsilon}{N} = 1,\ \alpha = 1$, (b): $\frac{\epsilon}{N} = 2,\ \alpha = 1$

### 7.3.4 Expansion et rétraction

La méthode que nous utilisons consiste en fait en une généralisation de l'énergie régularisante $E_{reg}$. Partant d'une courbe de longueur $\mathcal{L}$, il suffit intuitivement, pour passer à une courbe de longueur $\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}$ d'avoir $||v'(s)|| = \mathcal{L}+\delta\mathcal{L}$, c'est-à-dire $d(M_iM_{i+1}) = \frac{\mathcal{L}}{N}+\frac{\delta\mathcal{L}}{N}$. Inversement, il suffit de passer à $||v'(s)|| = \mathcal{L} - \delta\mathcal{L}$, pour obtenir un raccourcissement de la courbe. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser :

$$E_{reg} = \int_0^1 (||v'(s)||^2 - d^2)^2 ds \ avec$$
$$d = \mathcal{L} + \epsilon \ pour\ une\ expansion$$
$$d = \mathcal{L} - \epsilon \ pour\ une\ rétraction$$

Dans le cas où$d = \mathcal{L} + \epsilon$, la courbe va s'étendre jusqu'à ce que $||v'(s)||$ soit égal à $d = \mathcal{L} + \epsilon$ en conservant la distribution régulière des points sur la courbe (Fig. 7.17) , et dans le cas où $d = \mathcal{L} - \epsilon$, la courbe va se rétracter. Ce dernir cas est cependant moins intéressant puisque la rétraction est dans la nature même du snake.

L'énergie totale $E = E_{image} + E_{reg} + \beta \int_0^1 v''(s)^2 ds$ va donc provoquer une déformation du snake (expansion ou rétraction) compatible avec les données images, ce qui va permettre au snake de se dilater là où c'est possible, c'est-à-dire là où les forces dues au contour sont faibles.

Passons maintenant à la mise en œuvre numérique de cette méthode, qui, comme nous le verrons, est facile et ne nécessite que peu de changements par rapport à la méthode traditionnelle.

Ecrivons donc les équations d'Euler relatives à $E$ . Nous avons :

$$\begin{cases} -\frac{\partial|\nabla(x(s),y(s))|^2}{\partial x} - \frac{d}{ds}(2(x'(s)^2 + y'(s)^2 - d^2) * 2x'(s)) + 2\frac{d^2}{ds^2}(\beta x'') = 0 \\ -\frac{\partial|\nabla(x(s),y(s))|^2}{\partial y} - \frac{d}{ds}(2(x'(s)^2 + y'(s)^2 - d^2) * 2y'(s)) + 2\frac{d^2}{ds^2}(\beta y'') = 0 \end{cases}$$

alors,

$$-\frac{\partial|\nabla(x(s),y(s))|^2}{\partial x} - 4\frac{d}{ds}(x'(s)((x'(s)^2+y'(s)^2-d^2)) + 2\beta x^{iv} = 0 \tag{7.9}$$

car $\beta$ est ici supposé constant.

Dans l'expression,

$$\frac{d}{ds}(x'(s)(x'(s)^2+y'(s)^2-d^2)) = x''(s)(x'(s)^2+y'(s)^2-d^2)+x'(s)\frac{d}{ds}(x'(s)^2+y'(s)^2-d^2), \tag{7.10}$$

nous pouvons supposer en première approximation que $\nu(s) = x'(s)^2+y'(s)^2-d^2$ ne varie pas trop rapidement, donc que $\frac{d}{ds}\nu(s)$ peut être négligé en première approximation. En pratique, les coefficients $\nu(s)$ sont lissés pour justifier cette approximation et éviter des comportements anarchiques. Sous cette hypothèse, l'équation (7.9) s'écrit donc

$$-\frac{\partial|\nabla(x(s),y(s))|^2}{\partial x} - 4\nu(s)x''(s) + 2\beta x^{iv} = 0; \tag{7.11}$$

Il est alors facile de constater que l'équation (7.11) n'est autre que l'équation d'Euler issue de la méthode traditionnelle en considérant $\nu(s) = x'(s)^2+y'(s)^2-d^2$. L'usage de la méthode de rétraction ou d'expansion est donc très simple puisqu'il suffit de remplacer $\alpha$ par cette valeur calculée dynamiquement.

Nous pouvons de plus remarquer que l'usage de paramètres négatifs apparaît naturellement ici lorsque $\nu(s) = x'(s)^2+y'(s)^2-d^2 < 0$ et induit une expansion comme nous l'avions observé dans le paragraphe précédent.

Voyons maintenant quelques résultats.

### 7.3.5 Résultats

La technique d'expansion a d'abord été testée pour détecter la lampe (Fig. 7.18) à partir d'une initialisation interne excentrée. Plusieurs étapes de l'expansion sont représentées et permettent de se rendre compte, au cours de l'évolution, que les forces d'expansion sont prédominantes jusqu'à ce que le snake rencontre un contour. D'un point de vue pratique, puisqu'on ne sait pas au début quelle est l'ampleur de l'expansion à générer, il importe de procéder par expansions successives de faible importance, laissant le « temps » au snake de gérer cet accroissement de longueur : une augmentation trop brutale de la longueur provoque en effet des forces d'expansion trop violentes faisant immanquablement passer le snake au travers du contour cherché. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons choisi d'utiliser $\frac{c}{N} = 1$, c'est-à-dire d'augmenter la distance entre les points de discrétisation de 1 à chaque étape, le résultat final étant finalement atteint après 6 élongations de ce type.

La figure (Fig. 7.19) présente également des résultats d'expansion sur des cellules de ligneux.

Nous avons également testé les possibilités de rétraction en mettant en évidence les contours du pied de lampe à partir d'une large initialisation externe avec une diminution de 1 à chaque étape (Fig. 7.20).

### 7.3.6 Vers une utilisation dynamique des déformations

Les exemples étudiés ci-dessus concernent des situations où l'on connait a priori la position du contour initial vis-à-vis du contour cherché. Dans les deux premiers exemples, il s'agissait d'une initialisation interne alors que le second concerne une initialisation externe. Une telle connaissance n'est pas aberrante puisque les snakes constituent un outil semi interactif, mais la question du choix des déformations à adopter dans le cas d'un contour quelconque doit cependant être soulevée. Cette question se pose d'ailleurs avec acuité au niveau du choix de la déformation et également au niveau de détermination de la partie de la courbe concernée par cette déformation. Il semble en effet clair que, même pour des courbes actives dont on connaît la situation interne ou externe, il n'y a pas lieu de poursuivre la déformation sur les parties de la courbe stabilisées sur un contour et qu'il convient plutôt de poursuivre l'évolution sur les parties complémentaires (Fig. 7.21).

C'est ce que nous avons fait dans le cadre de la détection des contours de l'aile de papillon (Fig. 7.22). A partir de l'initialisation polygonale proposée, l'algorithme traditionnel fournit en quelque sorte la structure grossière du contour mais ne permet pas de détecter les profonds découpages de l'aile, car sur ces parties, le snake est quasiment perpendiculaire au contour à détecter ce qui rend le champ de forces créé par le contour quasiment inopérant. Les parties de la courbe active n'ayant pas atteint le contour sont identifiées d'après le profil du gradient (Fig. 7.22). La méthode d'expansion est utilisée seulement sur ces parties, ce qui permet d'assurer une détection satisfaisante de détails de l'aile du papillon (Fig. 7.22).

Il ne faut cependant pas se méprendre sur l'utilisation qui peut être faite d'une éventuelle adaptation dynamique des stratégies de déformation, car, en l'absence de connaissances quelconques sur le contour recherché, il apparaît illusoire de prétendre savoir quel type de déformations pourrait bien contribuer à se rapprocher du contour. En revanche, cette approche peut se révéler intéressante dans les cas suivants :

- Connaissance de la position (interne-externe) du contour actif par rapport au contour cherché.
- Affinage de la détection d'un contour présentant de fortes variations de courbure afin d'adapter localement le snake. (cas du papillon)
- Détection des changements de forme d'un objet d'une prise de vue à la suivante.

Le traitement des ces deux derniers cas relève finalement d'une méthodologie assez identique à celle utilisée pour traiter l'aile de papillon. On dispose en effet de la structure grossière du contour cherché et on cherche à déformer localement le contour actif, c'est-à-dire à modifier localement les contraintes élastiques, de manière à détecter au mieux le contour.

Dans cette optique, il est envisageable et peu coûteux de penser à un algorithme générant les déformations nécessaires pour parvenir petit à petit à une bonne détection qui

agirait récursivement sur les portions de courbe non identifiées comme contour et essayerait chacune des stratégies d'expansion ou de rétraction en ne retenant que celle fournissant la meilleure évaluation. Etant donnés les problèmes de convergence, l'évaluation des stratégies serait faite après un nombre fixé d'itérations, fournissant alors un nouvel ensemble de courbes logiquement contenu dans le précédent sur lequel sera réitérée cette stratégie. Ces idées sont en cours d'implantation.

### 7.3.7 Discussion. Travaux connexes

Nous avons essayé de doter les snakes de possibilités plus étendues que dans le modèle initial en gardant la philosophie des potentiels. Nous sommes ainsi parvenu à régulariser, rétracter ou dilater les snake. D'autres propositions ont été faites en ce sens. Il est en particulier possible, étant donnée la nature physique du modèle, d'imposer des forces dirigées selon la normale extérieure au snake afin de le dilater. C'est la méthode employée par Cohen [Cohen 90], connue sous le nom de *balloon model.* Le problème reste comme toujours de régler l'intensité de ces forces de manière à ne pas provoquer un éclatement de la courbe.

Au point de vue du coût, comme pour la méthode de croissance, la matrice $A$ évolue à chaque itération et une inversion de matrice est donc nécessaire à chaque itération. Une fois encore, ceci peut sembler coûteux mais est difficilement comparable avec la méthode traditionnelle puisque qu'elles ne s'appliquent pas dans les mêmes conditions et dépendent du nombre d'itérations nécessaires.

Signalons d'ailleurs que la méthode par formulation explicite de forces comme dans [Cohen 90] permet d'éviter une inversion de matrice à chaque étape car l'expression des forces générées se place dans le second membre du système au même titre que $\frac{\partial|\nabla I|^2}{\partial v}$.

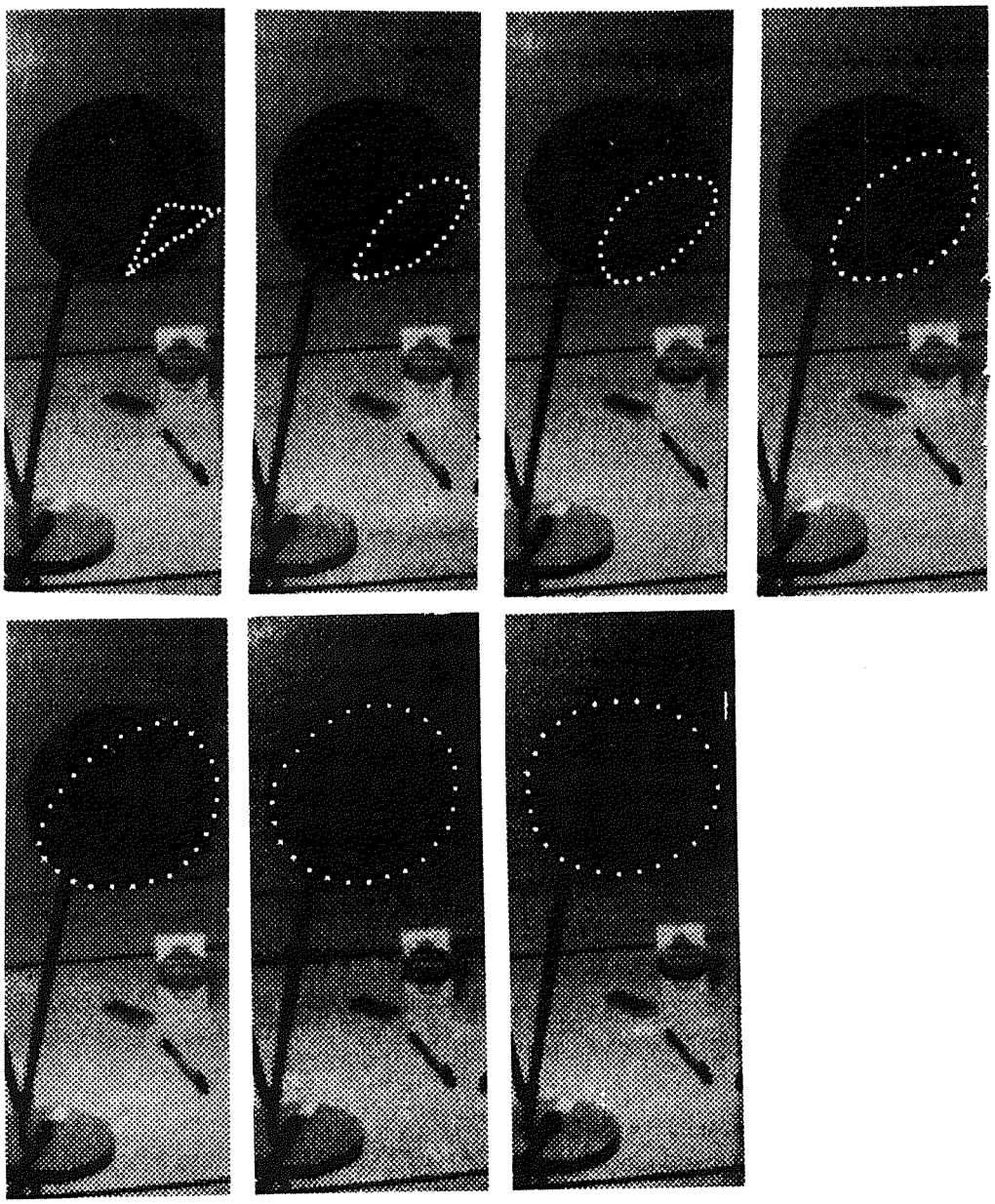

**Figure 7.18.** Expansion d'un contour actif.

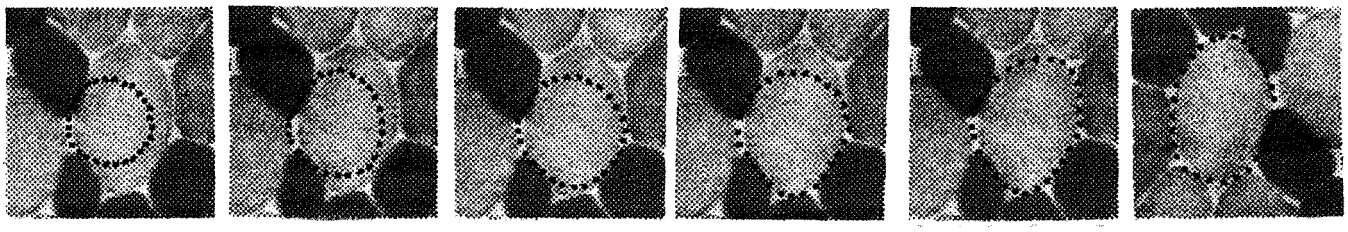

**Figure 7.19**. Expansion sur des cellules de ligneux.

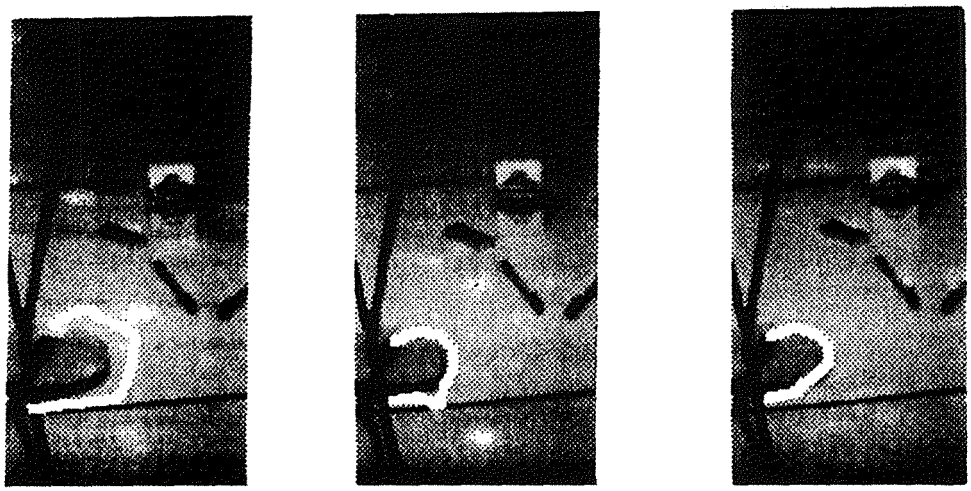

**Figure 7.20**. Rétraction régulière d'un contour actif.

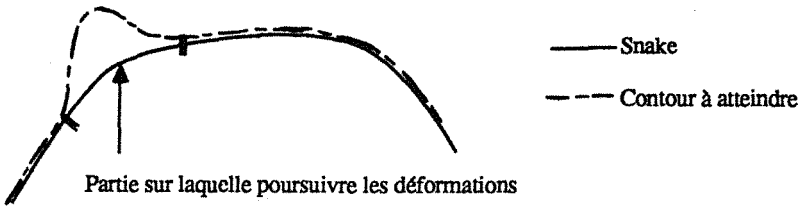


**Figure 7.21**. Stratégie de déformations.

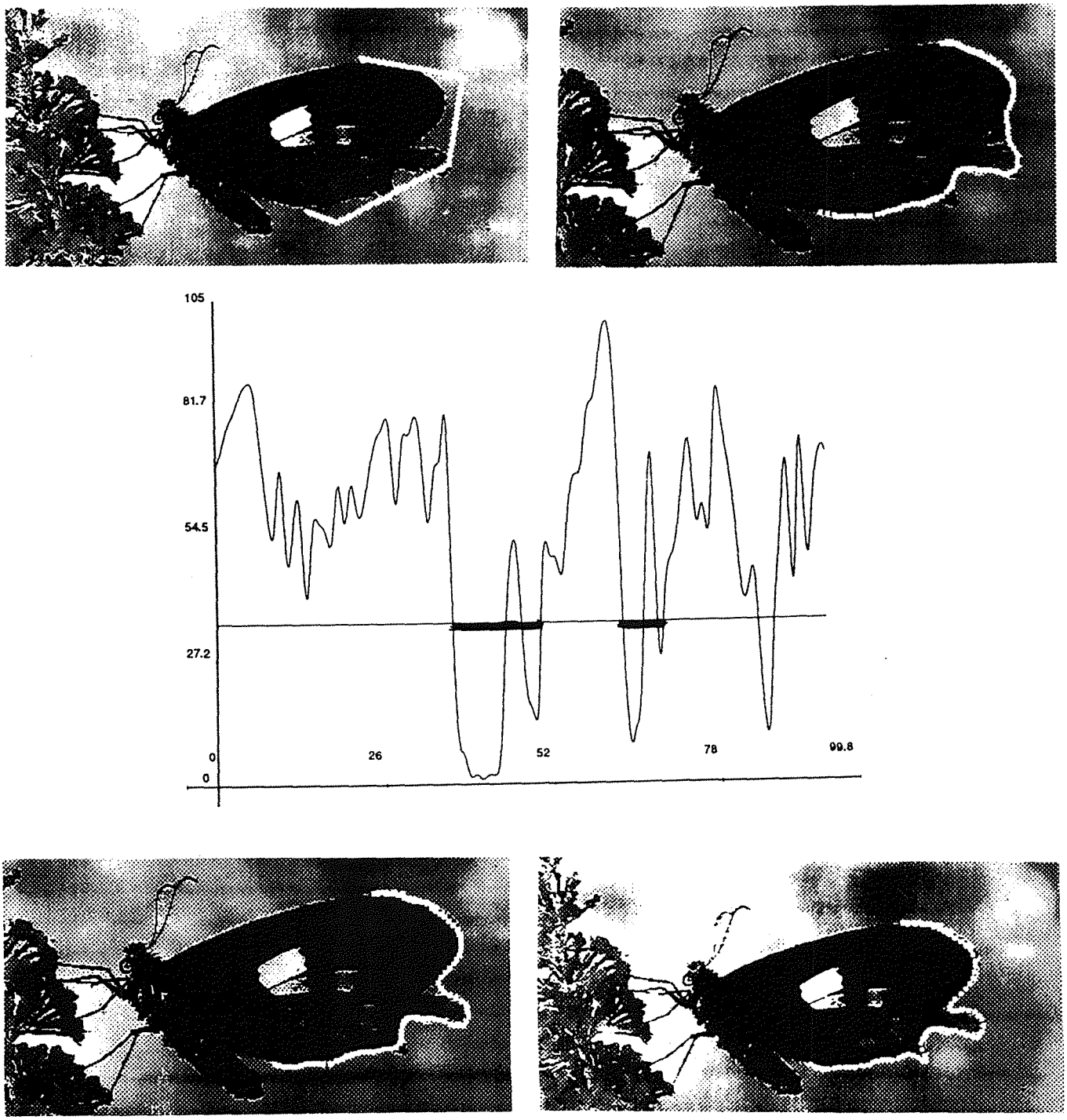


**Figure 7.22**. Détection des sinuosités d'une aile....
(a) Initialisation (b) Position stationnaire (c) Détermination des parties sur lesquelles seront appliquées les expansions (d) Une étape intermédiaire (e) Résultat final

# 8
# Le logiciel réalisé

La conception d'un logiciel assez important de manipulation de snakes et donc d'images s'accompagne inévitablement d'une réflexion sur la meilleure façon de structurer les objets manipulés et d'organiser les fonctions. Nous décrivons donc ici les structures principales de notre logiciel.

## 8.1 Généralités

Les contours actifs constituant avant tout un outil interactif, il était essentiel de concevoir un logiciel à la fois convivial et robuste permettant de créer des snakes, de les manipuler, de sauvegarder ou de réutiliser un contexte d'étude... De plus, comme cet outil en est encore au stade de l'expérimentation, il convenait de développer des outils permettant d'introduire, de modifier et de visualiser facilement la valeur des nombreux paramètres utilisés sous forme écrite ou graphique. Une impression de la fenêtre courante et des graphiques réalisés est d'ailleurs possible.

Ces considérations nous on conduit à concevoir un logiciel interactif répondant à ces exigences et permettant une manipulation rapide et simple des diverses fonctionalités disponibles à l'aide de la souris. La figure (Fig. 8.1) présente une vue d'ensemble du logiciel en cours d'utilisation qui se compose de 6 fenêtres :

1. Groupes de fonctionalités
2. Fenêtre de dialogue avec l'utilisateur pour la saisie des diverses données.
3. Fenêtre d'affichage
4. Fenêtre de visualisation des images
5. Changement de tables de fausses couleurs
6. Fenêtre d'affichage des graphiques

On peut voir sur cette figure une image d'intensité sur laquelle est affichée l'initialisation fournie par l'utilisateur et le snake résultat. Sur la fenêtre graphique à droite, on

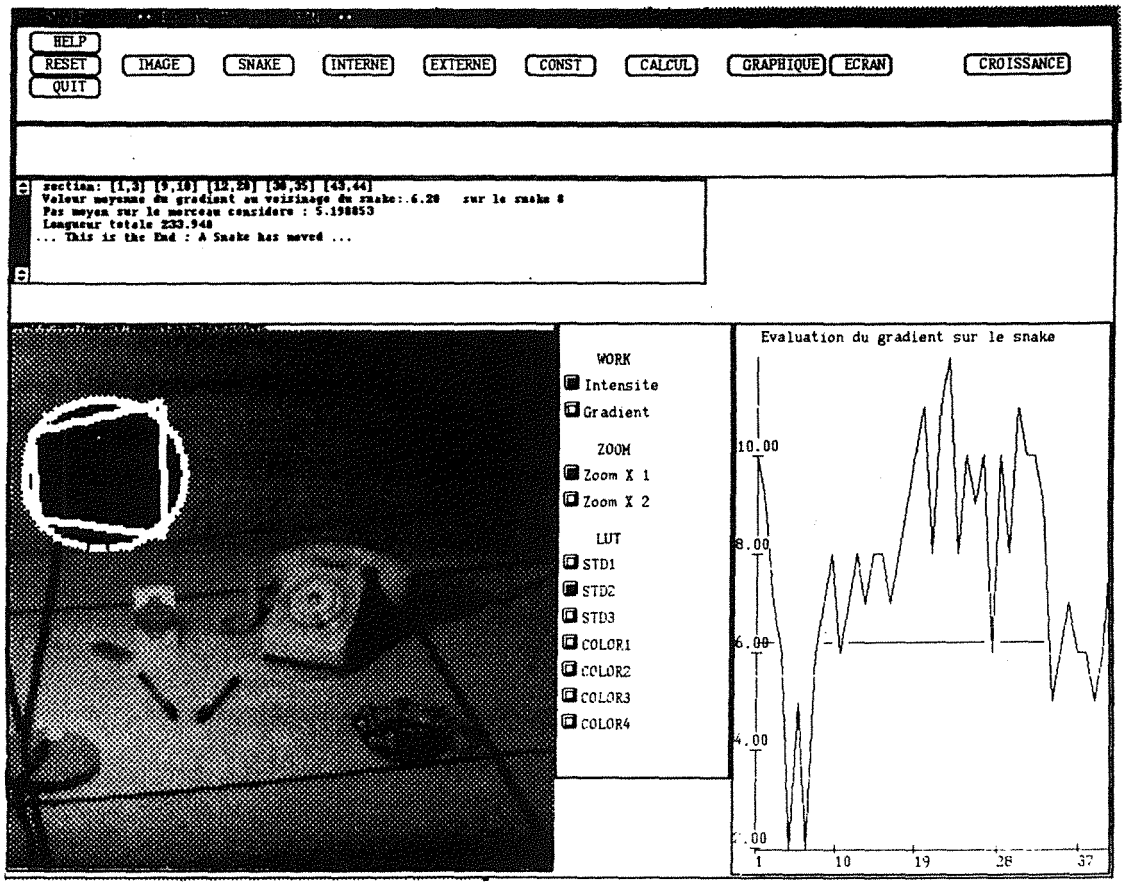


**Figure 8.1.** Le logiciel

peut observer le profil du gradient sur le snake final ainsi que la valeur moyenne du gradient au voisinage du snake. Les valeurs importantes attachées au snake telles que valeur du gradient sur et au voisinage du snake, longueur finale, distance moyenne entre chaque point figurent dans la fenêtre d'affichage.

Passons maintenant à une description plus technique du logiciel et des entités manipulées.

Le logiciel réalisé a été écrit en langage C sous Suntools et représente plus de 12000 lignes de programme. Toutes les fonctions sont accessibles par menus déroulant et sont groupées par thèmes concernant successivement la saisie des images utilisées, la manipulation de la structure de snake, la saisie des constantes concernant l'énergie interne, la saisie des différentes constantes de la méthode numérique, les méthodes d'optimisation, la visualisation de graphiques divers, l'utilisation de la méthode de croissance. Nous décrivons dans la section suivante les fonctionalités précises de chacun de ces groupes.

Outre les objets graphiques traditionnellement manipulés dans les programmes d'imagerie, l'entité essentielle manipulée ici est l'objet de type *typesnake*, qui regroupe au sein

d'une même structure la courbe, c'est-à-dire un ensemble de points de discrétisation, ainsi que tous les paramètres ayant conduit à ce snake : l'initialisation, la valeur des paramètres numériques, la valeur des paramètres internes, le nombre d'itérations ayant conduit à cette situation, la nature du snake (ouvert,fermé,...), le type de la méthode d'optimisation utilisée...

Comme nous avons de plus souhaité sauvegarder et restituer tous les paramètres définissant le contexte d'une application, la structure *typesnake* contient de plus le noms des images gradient et intensité utilisées ainsi que le nom du fichier de sauvegarde. Il est ainsi très facile de restaurer un contexte et d'en poursuivre l'étude après réflexion...

Les procédures propres au traitement du snake étant généralement d'ordre numérique, le langage C paraissait tout à fait adapté à cette application. Au terme de cette étude, et vu notamment la possibilité de gérer plusieurs snakes dans une même image, il semblerait opportun d'utiliser un langage plus évolué permettant d'assurer la cohésion des diverses entités de l'image : comme indiqué dans le chapitre 7 consacré aux méthodes de croissance, il peut arriver que plusieurs snakes croissent en même temps et il se peut donc que certains de ces snakes fassent partie du même contour. Il conviendrait dans ce cas de disposer d'outils permettant de détecter que deux snakes dans l'image doivent être fusionnés (car ils font partie d'un même contour) et de réflexes permettant d'effectuer cette fusion. De même, dans le cas de l'éclatement d'un snake en sous-snakes susceptibles de converger vers des contours différents, il serait souhaitable de faire hériter tous ces snakes des propriétés du snake initial. Des langages tels que *Smalltalk* ou *Objective−C*, par le biais de mécanismes d'héritage et de communication, peuvent alors se réveler utiles.

## 8.2 Les fonctions

Les fonctionalités disponibles sont réparties en 9 groupes : IMAGE, SNAKE, INTERNE, EXTERNE, CONST, CALCUL, GRAPHIQUE, ECRAN, CROISSANCE dont nous détaillons ci après le contenu.

### Groupe IMAGE

- initialisation : Cette fonction permet l'initialisation par défaut de toutes les variables du logiciel.
- Répertoire : Cette fonction permet
  - l'affichage du répertoire courant
  - le choix d'un répertoire de travail
  - l'affichage des images et des fichiers de sauvegarde contenant les snakes présents dans le répertoire
- Lecture : permet la lecture des images d'intensité et de gradient.

- Energie : permet la saisie des poids attribués aux images d'intensité et de gradient.
- coupe : visualisation du profil d'une colonne ou d'une ligne d'une image.

**Groupe SNAKE**

- Création : fonction destinée à la saisie de la ligne polygonale d'initialisation des snakes à l'aide de la souris.
- Destruction : Destruction du snake courant
- Sauvegarde : Sauvegarde dans un fichier du snake courant ainsi que du snake d'initialisation. Les paramètres élastiques, les poids attribués aux diverses énergies et le nombre d'itérations nécessaires pour parvenir à ce résultat sont également sauvegardés.
- Chargement : Affectation au snake courant des information contenues dans un fichier de sauvegarde.
- Evaluation : réalise l'évaluation du snake courant et calcule en particulier
  - La valeur moyenne du gradient sur le snake
  - La valeur moyenne du gradient au voisinage du snake
  - La liste des intervalles du snakes pour lesquels le gradient est supérieur à la valeur moyenne du gradient dans le voisinage du snake.
  - L'écart moyen entre deux points du snake
- Echange : permet l'échange des anciens et nouveaux snakes
- Intervalle : permet de définir un sous intervalle de la courbe active sur lequel seront effectués les calculs.
- Reéchantillonage : permet la rediscrétisation du snake en points équidistants.

**Groupe INTERNE**

- elasticité : permet la saisie du paramètre d'élasticité $\alpha$ constant pour toute la courbe ou seulement pour une partie de la courbe.
- rigidité : Même fonctionalité pour $\beta$.

**Groupe EXTERNE**

- Répulsifs, Acttractifs : Procédure de positionnement de points attractifs et répulsifs proposé dans l'article initial sur les snakes.
- Coins : permet le positionnement d'un coin en un point de paramètre donné.

### Groupe CONST

Ce groupe permet la saisie de la plupart des constantes du système et en particulier

- Elongation : Saisie de la constante d'élongation qui est positive si on souhaite une expansion et négative si on souhaite une rétraction.
- Gamma : Saisie de la constante $\gamma$ réglant la vitesse de convergence du processus.
- Discret : Saisie du nombre de points de discrétisation désiré. Le nombre de points de discrétisation peut aussi être automatiquement fixé de manière à ce que l'écart entre les points soient de 2 pixels.
- Itérations : Nombre d'itérations souhaité.
- Fermeture : Saisie du type de snake souhaité (fermé, à extrémités fixes, à extrémités libres).

### Groupe CALCUL

- Exécution : exécution de la procédure de minimisation.
- Voir paramètres : Affichage de tous les paramètres du snake.
- Méthode : Saisie de la méthode d'optimisation souhaitée (Euler, Euler respectant le paramétrage intrinsèque, recuit simulé).

### Groupe GRAPHIQUE

Ce groupe rassemble les différents graphiques qu'il est possible de générer

- Erreur : Evolution de la position du snake au cours des itérations en calculant la somme cumulée des distance entre chaque point homologue du snake à deux étapes successives.
- Energie : Visualisation de l'énergie totale du snake au cours des itérations.
- Evaluation snake : Visualisation du gradient de l'image obtenue pour la position finale du snake. La valeur moyenne du gradient au voisinage du snake figure également sur le dessin.
- Evolution taille : Evolution de la longueur totale du snake au cours des itérations.
- Courbure : Visualisation de la courbure discrète en chaque point du snake.

### Groupe ECRAN

Ce groupe sert seulement à saisir les couleurs des snakes.

**Groupe CROISSANCE**

- Allongement : Détermination de la longueur de l'allongement des extrémités.
- Croissance : Gestion de la procédure de croissance qui peut être
  - Rectiligne
  - Curviligne
  - Automatique
- Rotation : Implantation de la méthode de la meilleure direction

# 9
# Conclusion

Au terme de cette étude consacrée aux modèles actifs de contours, il est temps de dresser le bilan des possibilités de ce genre de modèle.

Par rapport aux techniques de segmentation traditionnelles, les contours actifs permettent une prise en compte **globale** d'un contour en tant que courbe et regroupent les deux étapes usuelles de détection de points de contraste et de chaînage. Mais l'un des aspects peut être le plus important de ce modèle réside dans la possibilité d'effectuer une détection utilisant des connaissances de plus haut niveau : la détection est en effet guidée par les caracteristiques photométriques de l'indice cherché et il est de plus possible de définir, certes assez sommairement, certaines caractéristiques de la forme du contour à détecter.

Les contours actifs présentent donc, malgré un certain nombre de problèmes techniques, un visage séduisant pour de multiples raisons :

- De part la nature du modèle, les contours actifs fournissent des **indices réguliers** qui sont donc utilisables directement par des processus de plus haut niveau.
- Leurs domaines d'application sont très variés puisque de tels modèles sont utilisables dès que l'on sait caractériser l'indice cherché par le minimum d'une fonction potentielle. Ils sont d'ores et déjà utilisés pour la détection de contours, de lignes de contraste, de fin de ligne, de contours subjectifs... et ils ont également prouvé leur efficacité comme technique d'appariement, par exemple en stéréovision. Enfin leur bonne aptitude au suivi de formes en mouvement subissant des déformations différentiables en fait un outil de grand interêt notamment dans le domaine médical.
- Par rapport aux autres méthodes en détection des formes, les modèeles actifs permettent une **détection naturellement tolérante aux anomalies locales** permettant de résoudre des problèmes d'appariement approximatif ou partiel ce que fait si bien la vision humaine.
- Le modèle permet d'intégrer facilement des contraintes extérieures comme des forces appliquées sur certaines parties du contour.

Nous avons cependant pu constater au cours de cette thèse que certaines difficultés de mise en œuvre subsistaient. La qualité de l'image et en particulier son caratère suffisammant lisse sont des critères importants pour le bon fonctionnement de la méthode. Par

ailleurs, l'adaptation des nombreux paramètres reste un problème délicat. Ce problème ne se pose cependant pas avec la même acuité dans toutes les situations : lorsque l'initialisation est proche ou lorsque les snakes sont utilisés en tant que méthode d'approximation, la convergence du snake vers le contour pose généralement peu de problèmes. Lorsque les snakes sont utilisés pour traiter des images très semblables, comme pour l'examen de clichés médicaux de patients différents, on peut espérer que quelques expérimentations suffisent à ajuster les paramètres.

Le problème est par contre très délicat dans le cas général où l'initialisation est assez lointaine du contour à détecter. Cette situation peut se produire aussi bien en mode interactif qu'au cours d'un suivi de formes évoluant rapidement d'une image à l'autre. Dans ce cas, des techniques locales, comme celles introduites dans le chapitre 7, s'avèrent nécessaires pour tirer parti au mieux des morceaux du snake accrochés par le contour qui constituent des ilots de confiance à partir desquels sera amorcée la convergence du snake. Ces méthodes constituent un premier pas vers un fonctionnement autonome des snakes...

Il reste pour finir à se poser la question des extensions souhaitables à donner aux contours actifs. Il est bien clair que de nombreux problèmes numériques restent à résoudre en vue de faciliter la convergence du processus. Il faut d'ailleurs distinguer les problèmes purement numériques d'adaptation d'une constante gouvernant la vitesse de convergence, dès lors que l'on est assuré de se trouver au voisinage d'une solution, des problèmes d'adaptation dynamique des paramètres de la fonctionnelle destiné à évoluer vers cette solution. Et c'est sans doute au niveau de la recherche des stratégies d'adaptation dynamique du comportement du snake que les plus intéressants travaux restent à faire.

On peut également s'interroger sur la forme des fonctions de coût à utiliser ; de nombreuses fonctionnelles conduisent en effet à un même minimum - par exemple et pour ne prendre que l'ensemble des réels, les fonctions $f(x) = (x-a)^2$, $g(x) = (x-a)^4$-, quelle est alors la fonction de coût la mieux adaptée ? Ce problème est important car la forme du potentiel détermine le champ de forces et une nappe de potentiel présentant des vallées abruptes va créer un champ de forces très intense au voisinage des contours accentuant les instabilités numériques.

Un long chemin reste sans doute à parcourir avant de parvenir à l'autonomie des snakes...

# Annexe A

# Détermination des valeurs propres de la matrice concernant les snakes fermés

Dans le cas de snakes fermés, nous cherchons ici à déterminer les valeurs propres de la matrice circulante $A$ afin d'estimer son conditionnement et donc la stabibilité du processus numérique décrit dans le chapitre 5. On note $N$ le nombre de points de discrétisation de la courbe.

Nous nous limitons ici au cas simple où les paramètres élastiques sont constants ($\alpha_0 = \ldots = \alpha_N = \alpha$ *et* $\beta_0 = \ldots = \beta_N = \beta$). La matrice $h^4 * A$ de taille $N \times N$ s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix}
2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta \\
-\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta \\
\beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta \\
\beta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta \\
-\alpha-4\beta & \beta & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta
\end{bmatrix}$$

Puisque la somme des coefficients d'une ligne est nulle, 0 est valeur propre associée au vecteur propre $[1, 1, ..., 1, 1]$. Déterminons maintenant l'ensemble des valeurs propres.

Posons d'abord

$$\begin{cases} a &= \beta \\ b &= -h^2\alpha - 4\beta \\ c &= -2a - 2b \end{cases}$$

La matrice $A$ s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} c & b & a & 0 & \dots & \dots & 0 & a & b \\ b & c & b & a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \\ a & b & c & b & a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & b & c & b & a & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & a & b & c & b & a & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a & b & c & b & a \\ a & 0 & \dots & \dots & 0 & a & b & c & b \\ b & a & 0 & \dots & \dots & 0 & a & b & c \end{bmatrix}$$

Considérons le polynôme $Q(X) = -2a - 2b + bX + aX^2 + \ldots + aX^{N-2} + bX^{N-1}$ et la matrice $J$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors $A = cI + bJ + aJ^2 + aJ^{N-2} + bJ^{N-1} = Q(J)$

Puisque $J^N = I$, le polynôme caractéristique de $J$ est $X^N - 1$ et les valeurs propres de $j$ sont donc les racines $N^{ieme}$ de l'unité. Les valeurs propres de $A$ sont donc les $Q(e^{\frac{2ik\pi}{N}})_{0 \leq k < N}$

Posons $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$. Alors $\lambda_k^N = 1$ donc $\lambda_k^{N-1} = \frac{1}{\lambda_k}$ et $\lambda_k^{N-2} = \frac{1}{\lambda_k^2}$.

Finalement,

$$\begin{aligned} Q(\lambda_k) &= a \quad (-2 + e^{\frac{4ik\pi}{N}} + e^{\frac{-4ik\pi}{N}}) + b(-2 + e^{\frac{2ik\pi}{N}} + e^{\frac{-2ik\pi}{N}}) && \text{(A.1)} \\ &= a(-2 + 2cos\frac{4k\pi}{N}) + b(-2 + 2cos\frac{2k\pi}{N}) && \text{(A.2)} \\ &= -4asin^2\frac{2k\pi}{N} - 4bsin^2\frac{k\pi}{N} && \text{(A.3)} \\ &= -4(4asin^2\frac{k\pi}{N}cos^2\frac{k\pi}{N} + bsin^2\frac{k\pi}{N}) && \text{(A.4)} \\ &= -4sin^2\frac{k\pi}{N}(4acos^2\frac{k\pi}{N} + b) && \text{(A.5)} \end{aligned}$$

En remplaçant $a$ et $b$ par leur valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\lambda_k) &= -4sin^2\frac{k\pi}{N}(4\beta cos^2\frac{k\pi}{N} - h^2\alpha - 4\beta) && \text{(A.6)} \\ &= 4sin^2\frac{k\pi}{N}(4\beta sin^2\frac{k\pi}{N} + h^2\alpha) && \text{(A.7)} \end{aligned}$$

## Ordre de grandeur des valeurs propres (chapitre 7)

On étudie

$$f(x) = 4sin^2x(4\beta sin^2x + h^2\alpha) \qquad \text{(A.8)}$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$ puique $\frac{k\pi}{N} \in [0, \pi]$ On a alors :

$$f'(x) = 4sin2x(4\beta sin^2x + h^2\alpha) + 16\beta sin2xsin^2x \quad (A.9)$$

$$= 4sin2x(8\beta sin^2x + h^2\alpha) \quad (A.10)$$

Puisque $\alpha \geq 0$, le terme entre parenthèse est positif et le signe de $f'$ est donc le signe de $sin2x$. Ce qui permet d'en déduire que les valeurs propres de $A$ sont contenues dans l'intervalle $[0, 4(8\beta + h^2\alpha)]$.

# Annexe B
# Justification du critère d'évaluation

Rappelons que $M_{vois}$ désigne la valeur moyenne du gradient dans un voisinage du snake, alors que $M_{gra}$ est la valeur moyenne du gradient sur le snake.

Nous avons choisi (chapitre 5) de comparer $M_{vois}$ et $M_{snake}$ afin de décider si le snake est situé à proximité d'un contour. Il semble en effet intuitif de penser que si le snake est près d'un contour, alors $M_{snake} > M_{vois}$.

Nous justifions ici le choix du critére d'évaluation retenu dans le cas d'un contour rectiligne idéal de type ligne de crête centré en $x_0$ dont les cotés admettent pour équation : $y = a(x - x_0) + b$ *et* $y = -a(x - x_0) + b$ et observons le résultat obtenu pour un contour actif positionné en 0, la largeur de bande étant $\nu$. Plusieurs cas de figure sont possibles (Fig.B.1.a,b,c,d).

1. $[x_0 - \frac{b}{a}, x_0 + \frac{b}{a}] \subset [0, \nu]$ (Fig.B.1.a)
   Alors $M_{snake} = 0$ et $M_{vois} > 0$. La position du snake n'est donc pas satisfaisante.

2. $x_0 \in ]-\infty, -\nu[\cup]\nu, \infty[$ (Fig.B.1.b)
   On a $M_{snake} = -aX_0 + b$

$$M_{vois} = \frac{1}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu} a(x - x_0) + bdx \tag{B.1}$$
$$= -ax_0 + b \tag{B.2}$$

   Par conséquent, l'inéquation $M_{vois} < M_{snake}$ n'est satisfaite pour aucun $\nu$.

3. $[x_0 - \frac{b}{a}, x_0 + \frac{b}{a}] \supset [-\nu, \nu]$ et $x_0 \in [-\nu, \nu]$ (Fig.B.1.c)
   Alors $M_{snake} = -ax_0 + b$. Calculons $M_{vois}$.

$$M_{vois} = \frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{x_0} a(x - x_0) + bdx + \int_{x_0}^{\nu} -a(x - x_0) + bdx\right) \tag{B.3}$$
$$= \frac{1}{2\nu}(2b\nu - a\nu^2 - ax_0^2) \tag{B.4}$$

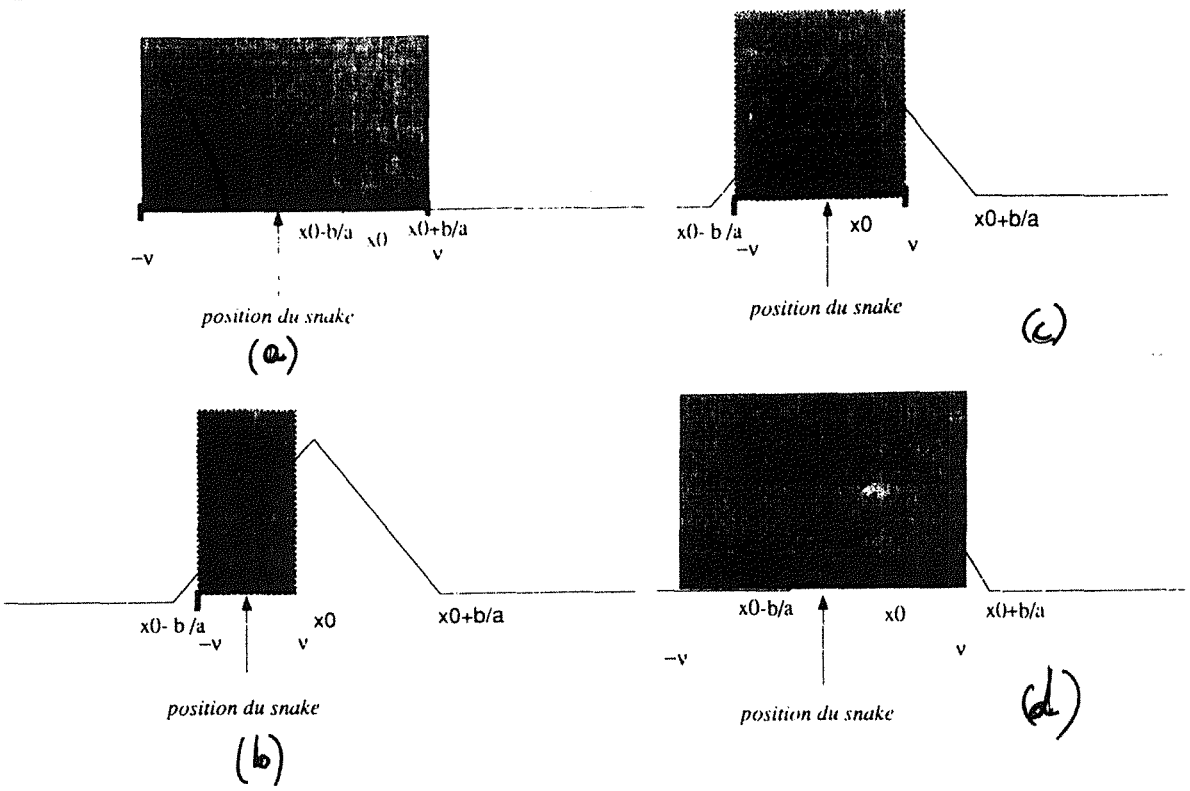


**Figure B.1.** Justification du critère : les cas possibles

La résolution de l'inéquation fournit successivement

$$M_{vois} < M_{snake} \tag{B.5}$$

$$2b\nu - a\nu^2 - ax_0^2 < -ax_0 + b \tag{B.6}$$

$$-a(\nu - x_0)^2 < 0 \tag{B.7}$$

Ainsi, si la bande définissant le voisinage du snake contient un contour, le critère sera satisfait.

4. $x_0 > 0,\ x_0 - \frac{b}{a} \in [-\nu, 0]$ *et* $x_0 + \frac{b}{a} > \nu$ (Fig.B.1.d)

Cette situation implique naturellement que $x_0 < \frac{b}{a}$. On a

$$M_{vois} = \frac{1}{2\nu}\left(\int_{x_0-\frac{b}{a}}^{x_0} a(x-x_0) + bdx + \int_{x_0}^{\nu} -a(x-x_0) + bdx\right) \tag{B.8}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{a^2x_0^2 - b^2 + 2bx_0a - 2a^2x_0\nu + a^2\nu^2 - 2b\nu a}{a\nu} \tag{B.9}$$

La solution de l'équation $M_{vois} = M_{snake}$ admet 2 solutions

$$\nu_1 = \frac{3x_0a - b - 2\sqrt{2}ax_0 + \sqrt{2}b}{a} \tag{B.10}$$

$$\nu_2 = \frac{3x_0a - b + 2\sqrt{2}ax_0 + \sqrt{2}b}{a} \tag{B.11}$$

Si $x_0 > \frac{b}{2a}$, on a $\nu_1 < \nu_2$ et on doit nécessairement avoir $\nu_1 > x_0$, ce qui est équivalent à $x_0 < \frac{b}{2a}$ et $\nu_2 > x_0$ ce qui équivaut à $x_0 > \frac{b}{2a}$. La valeur $\nu_1$ est donc exclue puisque nous nous trouvons dans le cas $\frac{b}{2a} < x_0 < \frac{b}{a}$. L'inéquation $M_{vois} < M_{snake}$ est donc équivalente à $\nu > \nu_2$.

De manière analogue, si $x_0 < \frac{b}{2a}$, on a $\nu_1 > \nu_2$ et dans ce cas, la valeur $\nu_2$ est exclue. L'inéquation $M_{vois} < M_{snake}$ est donc équivalente à $\nu > \nu_1$. A titre d'exemple, si $x_0 = .5, a = 1, b = 1$, on obtient $\nu_1 = .517$ *et* $\nu_2 = 1.08$. Donc le critère est satisfait dès que $\nu > 1.08$.

Ce résultat traduit bien notre intuition, à savoir plus la bande est large, plus la chance d'y voir un contour présent est forte.

# Bibliographie


[Ahuja 89] N. Ahuja et M. Tuceryan. Extractions of Early Perceptual Structure in Dot Patterns: Integrating Region, Boundary and Component Gestalt. *Proceedings of International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 48:304–356, 1989.

[Aloimonos 88] J. Aloimonos, I. Weiss, et A. Bandyopadhyay. Active vision. *International Journal of Computer Vision*, pages 333–356, 1988.

[Amini 88] A. Amini, S. Tehrani, et T. Weymouth. Using Dynamic Programming for Minimizing the Energy of Active Contours in the Presence of Hard Constraints. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer Vision, Tampa, Florida (USA)*, pages 95–99, 1988.

[Amini 90] A. Amini, T. Weymouth, et R. Jain. Using Dynamic Programming for Solving Variational Problems in Vision. *IEEE Transactions on PAMI*, 12(9):855–867, september 1990.

[Arbogast 90] E. Arbogast et R. Mohr. 3D Structures Inference from Images Sequences. H.S. Baird, éditeur, *Pre-proceedings of IAPR Workshop on Syntactic and Structural Pattern Recognition, Murray Hill, NJ (USA)*, pages 21–37, 1990.

[Ayache 86] N. Ayache et O.D. Faugeras. HYPER: a New Approach for the Recognition and Positioning of 2D Objects. *IEEE Transactions on PAMI*, 8(1):44–54, 1986.

[Ayache 87] N. Ayache et O.D. Faugeras. Building, Registrating, and Fusing Noisy Visual Maps. *Proceedings of 1st International Conference on Computer Vision, London*, pages 73–82, 1987.

[Ayache 89] N. Ayache, J.D. Boissonnat, E. Brunet, L. Cohen, J.P. Chiese, B. Geiger, O. Monga, J.M. Rocchisani, et P. Sander. Building Highly Structured Volume Representations in 3D Medical Images. *Comp. Ass. Rad., Proc. Int. Symp*, pages 765–772, Berlin, 1989.

[Bajcsy 89] R. Bajcsy et S. Kovacic. Multiresolution Elastic Matching. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 46:1–21, 1989.

[Bakhvalov 73] N. Bakhvalov. *Méthodes numériques.* MIR, 1973.

[Ballard 82] D.H. Ballard et C.M. Brown. *Computer Vision.* Englewood Cliffs New-Jersey, 1982.

[Barnard 89] S.T. Barnard. Stochastic Stereo Matching over Scale. *International Journal of Computer Vision*, 3:17–32, 1989.

[Berger 90a] M.O. Berger. Snake Growing. O. Faugeras, éditeur, *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 570–572. Springer Verlag, April 1990. Lecture Notes in Computer Science, 427.

[Berger 90b] M.O. Berger et R. Mohr. Towards Autonomy in Active Contour Models. *Proceedings of 10th International Conference on Pattern Recognition, Atlantic City, NJ (USA)*, pages 847–851. IEEE, June 1990.

[Blake 87] A. Blake et A. Zisserman. *Visual Reconstruction.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[Blake 90] A. Blake et R. Cipolla. Robust Estimation of Surface Curvature from Deformation of Apparent Contours. *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 465–474, april 1990. Lecture Notes in Computer Science, 427.

[Brady 85] R. M. Brady. Optimization Strategies Gleaned From Biological Evolution. *Nature*, 317:804–807, October 1985.

[Brandt 77] A. Brandt. Multi Level Solutions to Boundary Value Problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):33–390, april 1977.

[Brooks 78] M.J. Brooks. Rationalizing Edge Detectors. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 8:277–285, 1978.

[Bruckstein 90] A.M. Bruckstein et A.N. Netravali. On Minimal Energy Trajectories. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 49(3):283–296, march 1990.

[Burr 81a] D. J. Burr. A Dynamic Model for Image Registration. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 15:102–112, 1981.

[Burr 81b] D. J. Burr. Elastic matching of Line Drawings. *IEEE Transactions on PAMI*, 3(6):708–713, november 1981.

[Canny 86] J. Canny. A Computational Approach to Edge Detection. *IEEE Transactions on PAMI*, 8(6):679–698, 1986.

[Castan 84] S. Castan et J. Shen. A Stereo Vision Algorithm taking into account the Perspective Distorsions. *Proceedings of 7th International Conference on Pattern Recognition, Montreal*, pages 444–446, 1984.

[Castan 87] S. Castan, J. Zhao, et J. Shen. Une famille de détecteurs de contours basée sur le filtre exponentiel optimal. *Actes 6ème Congrès AFCET de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Antibes*, pages 23–36, Novembre 1987.

[Castan 90] S. Castan, J. Zhao, et J. Shen. Optimal Filter for Edge Detection Methods and Results. *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 13–17, april 1990.

[Cea 71] J. Cea. *Optimisation, théorie et algorithmes.* Dunod, 1971.

[Ciarlet 82] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson, 1982.

[Cinquin 87] P. Cinquin. *Application des fonctions splines au traitement d'images numériques.* Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourrier, Grenoble, 1987.

[Cline 74] A.K. Cline. Scalar and Planar Valued Curve Fitting Using Splines under Tension. *Communications of the ACM*, 17:218–220, 1974.

[Cohen 89] L. Cohen. On Active Contour Models. Rapport, INRIA, Aout 1989.

[Cohen 90] L. Cohen et I. Cohen. A Finite Element Method Applied to New Contour Models and 3D Reconstruction From Cross Sections. *Proceedings of 3rd International Conference on Computer Vision, Osaka (Japan)*, 1990.

[Courant 53] R. Courant et D. Hilbert. *Method of Mathematical Physics.* Interscience Publishers, 1953.

[Demazeau 89] Y. Demazeau, O. Bourdon, et M. Lebrasseur. Contours et illusions de contours: un gabarit elastique pour l'extraction de formes. *Premier Worshop régional de Sciences Cognitives*, Chichilianne, Mars 1989. Version révisée en rapport de recherche LIFIA 92.

[Demazeau 90] Y. Demazeau et F.V. Aeken. Elastic Patterns, a New but Flexible Wave. Rapport, AI-Lab/VUB, Brussels, 1990.

[Deriche 87a] R. Deriche. Using Canny's Criteria to Derive a Recursively Implemented Optimal Edge Detector. *Computer Vision*, 1(2):167, 1987.

[Deriche 87b] R. Deriche et J.P. Cocquerez. Extraction de composantes connexes basee sur une detection optimale des contours. *Actes du Congrès MARI-87, Paris*, pages 1–9, Tome 2, 1987.

[Derin 87] H. Derin et H. Elliott. Modeling and Segmentation of Noisy and Textured Images Using Gibbs Random Fields. *IEEE Transactions on PAMI*, 9(1):39–55, 1987.

[Faugeras 86] O.D. Faugeras et M. Hebert. The Representation, Recognition, and Locating of 3d Objects. *The International Journal of Robotics Research*, 5(3):27–52, 1986.

[Faurre 88] P. Faurre. *Analyse numérique: notes d'optimisation.* Ecole polytechnique, 1988.

[Fua 89] P. Fua et Y. Leclerc. Model Driven Edge Detection. *Machine Vision and Applications*, 1989.

[Gardan 87] Y. Gardan. Méthodes de base. *Mathématiques et CAO*, volume 1. HERMES, 1987.

[Geman 84] S. Geman et D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on PAMI*, 6:721–741, 1984.

[Gennert 88] M. A. Gennert et A. Yuille. Determining the Optimal Weights in Multiple Objective Function Optimization. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer Vision, Tampa, Florida (USA)*, pages 87–89. IEEE, December 1988.

[Girard 87] D. Girard. Un algorithme simple et rapide pour la validation croisée généralisée sur des problèmes de grande taille. Rapport no. RR 665-M TIM3-IMAG, IMAG, mai 1987.

[Girard 88a] D. Girard. Détection de discontinuités dans un signal (ou une image) par Inf-convolution spline et validation croisée: un algorithme rapide non paramétré. Rapport no. RR 702 I M, IMAG, Grenoble, Janvier 1988.

[Girard 88b] D. Girard et P.J. Laurent. Splines et estimation de paramètres non linéaires. Academic Press, éditeur, *Mathematical methods for CAGD*, Juin 1988. Rapport IMAG RR 750 M.

[Giraudon 87] G. Giraudon. An Efficient Edge Following Algorithm. *Proceedings of 5th Scandinavian Conference on Image Analysis, Stockholm*, pages 547–554, 1987.

[Grimson 81] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces. A Computational Study of the Human Early Visual System.* The Massachussets Institute of Technology Press, 1981.

[Grimson 85] W. Grimson. Discontinuity Detection for Visual Surface Reconstruction. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 30:316–330, 1985.

[Gumowski 70] I. Gumowski et C. Mira. *L'optimisation, la théorie et ses problèmes.* Monographies universitaires de mathématiques. dunod, Paris, 1970.

[Gupta 90] L. Gupta, M. R. Sayeh, et R. Tammana. A Neural Network Approch to Robust Shape Classification. *Pattern Recognition*, 23(6):563–568, 1990.

[Haralick 84] R.M. Haralick. Digital Step Edges from Zero Crossing of Second Directional Derivatives. *IEEE Transactions on PAMI*, 6(1):58–68, january 1984.

[Haralick 85] R.M. Haralick et L. Shapiro. "Survey": Image Segmentation Techniques. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 29:100–132, 1985.

[Henderson 78] R.L. Henderson, W.J. Miller, et C.B. Grosh. A Flexible Approach to Digital Stereo Matching. *Photogrammetry Engineering and Remote Sensing*, pages 1499–1512, 1978.

[Horn 83] B. K. P. Horn. The Curve of Least Energy. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9(4):441–460, 1983.

[Horowitz 76] S.L. Horowitz et T. Pavlidis. Picture Segmentation by a Tree Traversal Algorithm. *Journal of the ACM*, 23(2):368–388, April 1976.

[Hueckel 73] M.H. Hueckel. A local Visual Operator which Recognizes Edges and Lines. *Journal of the ACM*, 20(4):634–647, October 1973.

[Kass 87] M. Kass et A. Witkin. Analizing Oriented Patterns. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 37:362–385, 1987.

[Kass 88] M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes: Active Contour Models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.

[Khatib 86] O. Khatib. Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *International Journal of Robotics Research*, 5(1):90–98, 1986.

[Kimia 90] B. Kimia, A. tennenbaum, et S. Zucker. Toward a Computational Theory of Shape: An Overview. O. Faugeras, éditeur, *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 387–396. Springer Verlag, April 1990. Lecture Notes in Computer Science, Vol 427.

[Kirkpatrick 83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, et M.P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[Kochanek 84] D. Kochanek et R. Bartels. Interpolating Splines with Local Tension, Continuity, and Bias Control. *Computer Graphics*, 18(3):33–41, july 1984.

[Kononenko 89] I. Kononenko. ID3, Sequential Bayes, Naïve Bayes and Bayesian Neural Networks. *European Working Session on Learning*, pages 91–98, 1989.

[Lascaux 87] P. Lascaux et R. Theodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, volume 2. Masson, 1987.

[Laurent 87] P.J. Laurent. Courbes ouvertes ou fermées par B Splines régularisantes. Rapport, IMAG, Grenoble, Mars 1987.

[Leitner 90] F. Leitner, I. Marque, S. Lavallee, et P. Cinquin. Dynamic Segmentation: Finding the edge with differential equations and spline snakes, 1990.

[Leymarie 90] F. Leymarie. *Tracking and Describing Deformable Objects Using Active Contour Models.* Thèse de Doctorat, MacGill Research Centre for intelligent Machines, Montreal, Quebec, Canada, February 1990.

[Lipson 90] P. Lipson, A. Yuille, D. O. Keeffe, J. Cavanaugh, J. Taafe, et D. Rosenthal. Deformable Templates for Feature Extraction from Medical Images. O. Faugeras, éditeur, *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 413–417. Springer Verlag, April 1990. Lecture Notes in Computer Science, 427.

[Lowe 90] D. Lowe. Stabilized Solution for 3D Model Parameters. O. Faugeras, éditeur, *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 408–412. Springer Verlag, April 1990. Lecture Notes in Computer Science, 427.

[Lux 85] A. Lux. *Algorithmique et contrôle en vision par ordinateur.* Thèse d'état, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1985.

[Maitre 89] H. Maitre et Yifeng Wu. A Dynamic Programming Algorithm for Elastic Registration of Distorded Pictures Based on Autoregressive Model. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.*, 37(2):288–297, February 1989.

[Marque 89] I. Marque et P. Cinquin. Segmentation d'images 3D par construction d'un système différentiel. *Actes 7ème Congrès AFCET de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Paris*, pages 907–921. AFCET, 1989.

[Maso 89] G. D. Maso, J. M. Morel, et S. Solimini. Une approche variationnelle en traitement d'images : résultats d'existence et d'approximation. *Compte rendu de l'académie des sciences*, volume 308, pages 549–554. Académie des sciences, Paris, 1989.

[Metropolis 53] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, A.H. Teller, et E. Teller. Equations of state Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys*, 21:1087–1092, 1953.

[Mohan 89] R. Mohan et R. Nevatia. Using Perceptual Organization to Extract 3-D Structures. *IEEE Transactions on PAMI*, 11(11):1121–1139, november 1989.

[Montanari 71] U. Montanari. On the Optical Detection of Curves in Noisy Pictures. *Communications of the ACM*, pages 337–345, 1971.

[Mumford 85] D. Mumford et J. Shah. Boundary Detection by Minimizing Functionals. *Proceedings of International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 22–26, San Francisco, 1985.

[Mumford 89] D. Mumford et J. Shah. Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions Functions and Associated Variational Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989.

[Nazif 84] A.M. Nazif et M.D. Levine. Low Level Image Segmentation: An Expert System. *IEEE Transactions on PAMI*, 6(5):555–577, 1984.

[Nevatia 80] R. Nevatia et K.R. Babu. Linear Feature Extraction. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 13:257–269, 1980.

[Newman 87] W.S. Newman et N. Hogan. High Speed Robot Control and Obstacle Avoidance Using Dynamic Potential Functions. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 14–24, Raleigh, 1987.

[Oshima 79] M. Oshima et Y. Shirai. A Scene Description Method Using Three-dimensional Information. *Pattern Recognition*, 11:9–17, 1979.

[Parent 85] P. Parent et S.W. Zucker. Trace inference, curvature consistency and curve detection. Rapport no. CIM-86-3, Mc Gill University, Montreal, 1985.

[Pavlidis 90] T. Pavlidis et Y.-T. Liow. Integrating Region Growing and Edge Detection. *IEEE Transactions on PAMI*, 12(3):225–233, 1990.

[Pentland 90] A. Pentland. Automatic Extraction of Deformable Part models. *International Journal of Computer Vision*, 4:107–126, 1990.

[Poggio 84] T. Poggio et V. Torre. Ill-posed Probelms and Regularisation Analysis in Early Vision. AI memo no. 773, MIT, April 1984.

[Poggio 85] T. Poggio, V. Torre, et C. Koch. Computational Vision and Regularization theory. *Nature*, pages 314–319, 1985.

[Prager 80] J.M. Prager. Extracting and Labeling Segments in Natural Scenes. *IEEE Transactions on PAMI*, 2(1):16–27, January 1980.

[Prewitt 70] J.M.S. Prewitt. *Object Enhancement and Extraction.* Academic Press, New York, 1970.

[Quan 88] Long Quan et Roger Mohr. Matching Perspective Images Using Geometric Constraints and Perceptual Grouping. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer Vision, Tampa, Florida (USA)*, pages 679–683, 1988.

[Quan 90] L. Quan et R. Mohr. Using Geometric Model Guided Active Contour Method For Traffic Sign Detection. *Proceedings of IAPR Workshop on Machine Vision Applications, Tokyo*, pages 417–420. IAPR, november 1990.

[Ramis 81] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Applications de l'analyse à la géométrie*, volume 5, série *Cours de mathématiques spéciales.* Masson, 1981.

[Rives 87] P. Rives. Dynamic Vision : Theoretical Capabilities and Pratical Problems. *Nato Workshop on Kinematic and Dynamic Issues on Sensor Based Issues*, Il Ciocco, 1987.

[Shaashua 88] A. Shaashua et S. Ullman. Structural Saliency: The Detection of Globally Salient Structures Using a Locally Connected Network. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer Vision, Tampa, Florida (USA)*, pages 321–327, 1988.

[Shah 89] J. Shah. Properties of Energy Minimizing Segmentations. Rapport no. CICS-P-105, Center for Intelligent Control Systems, MIT, Cambridge, Mass, 1989.

[Shah 90] J. Shah. Parameter Estimation, Multiscale Representation and Algorithms for Energy-minimizing Segmentations. *Proceedings of 10th International Conference on Pattern Recognition, Atlantic City, NJ (USA)*, pages 815–819, June 1990.

[Solina 90] F. Solina et R. Bajcsy. Recovery of Parametric Models from Range Images: The Case for Superquadrics with Global Deformations. *IEEE Transactions on PAMI*, 12(2):131–147, 1990.

[Stansfield 86] S.A. Stansfield. ANGY: A Rule Based Expert System for Automatic Segmentation of Coronary Vessels From Digital Substracted Angiograms. *IEEE Transactions on PAMI*, 8(2):188–199, March 1986.

[Steels 88] L. Steels. Artificial Intelligence and Complex Dynamics. Rapport no. AI Memo 88-2, Vrije Universiteit Brussels, January 1988.

[Suter 88] D. Suter et H. A. Cohen. Incorporating Knowledge via Regularization Theory: Applications in Vision and Image Processing. C. Barter et M. J. brooks, éditeurs, *AI 88*, pages 379–394, Adelaid (Australia), 1988. Springer Verlag. Lecture notes in artificial intelligence, 406.

[Terzopoulos 86a] D. Terzopoulos. Image Analysis Using Multigrid Relaxation Methods. *IEEE Transactions on PAMI*, 8:129–139, 1986.

[Terzopoulos 86b] D. Terzopoulos. Regularizarion of Inverse Visual Problems Involving Discontinuities. *IEEE Transactions on PAMI*, 8:413–424, 1986.

[Terzopoulos 87a] D. Terzopoulos. On Matching Deformable Models to Images. Optical Society of America, éditeur, *Topical Meeting on Machine Vision. Technical digest series.*, pages 160–167, 1987.

[Terzopoulos 87b] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, et K. Fleischer. Elastically Deformable Models. *Computer Graphics*, 21(4):205–214, july 1987.

[Terzopoulos 88] D. Terzopoulos. The Computation of Visible-Surface Representations. *IEEE Transactions on PAMI*, 10(4):417–438, 1988.

[Tikhonov 76] A. Tikhonov et V. Arsenine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés.* MIR, 1976.

[Torre 86] V. Torre et T.A. Poggio. On Edge Detection. *IEEE Transactions on PAMI*, 8(2):147–163, 1986.

[Ullman 76] S. Ullman. Filling in the gaps: The Shape of Subjective Contours and a Model for their Generation. *Biol. Cybernet*, 25:1–6, 1976.

[van Laarhoven 87] P. van Laarhoven et E.H.L. Aarts. *Simulated Annealing: theory and Applications.* Mathematics and its Applications. D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1987.

[Virot 90] B. Virot. Parallelization of the Simulated Annealing Algorithm: Application to the Placement Problem. Rapport no. Liens-90-2, Laboratoire d'Informatique de l'Ecole Normale Superieure, janvier 1990.

[Voorhees 88] H. Voorhees et T. Poggio. Computing Texture Boundaries from Images. *Nature*, 333:364–367, may 1988.

[Wallace 90] R.S. Wallace et T. Kanade. Finding Natural Clusters having Minimum Description Length. *Proceedings of 10th International Conference on Pattern Recognition, Atlantic City, NJ (USA)*, pages 438–442, June 1990.

[Widrow 73] B. Widrow. The Rubber Mask Technique (Part 1 and 2 ). *Pattern Recognition*, 5:175–197, 1973.

[Wrobel 87] B. Wrobel et O. Monga. Segmentation d'images naturelles : Coopération entre un détecteur-contour et un détecteur-région. *Actes du 11ème Colloque sur le Traitement du Signal et des Images (*GRETSI*), Nice*, pages 539–542, 1987.

[Wu 86] Y. Wu et H. Maitre. Registration of Rotated Picture with Hidden Parts Using Dynamic Programming. *Proceedings of 8th International Conference on Pattern Recognition, Paris*, pages 792–794, October 1986.

[Yasumoto 86] Y. Yasumoto et G. Medioni. Robust Estimation of Three Dimensional Motion Parameters From a Sequence of Image Frames Using Regularization. *IEEE Transactions on PAMI*, 8(4):464–471, july 1986.

[Young 74] I. Young, J. E. Walker, et E. Bowie. An Analysis Technique for Biological Shape. *Information and Control*, 25:357–370, 1974.

[Zucker 76a] S. Zucker. "Survey": Region Growing: Childhood and Adolescence. *Computer Vision and Image Processing*, 5:382–399, 1976.

[Zucker 76b] S.W. Zucker. Toward a Model of Texture. *Computer Graphics and Image Processing*, 5:190–202, 1976.

[Zucker 85] S. Zucker. Early Orientation Selection: Tangent Fields and the Dimensionality of the Support. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 32:74–103, 1985.

[Zucker 88] S. Zucker, C. David, A. Dobbins, et L. Iverson. The Organization of Curve Detection: Coarse Tangent Fields and Fine Spline Coverings. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer Vision, Tampa, Florida (USA)*, pages 568–577, December 1988.

INPL
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

# AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

---

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur AYACHE, Directeur de Recherche INRIA, Rocquencourt,
Monseiur LESCANNE, Directeur de Recherche CNRS, CRIN/Université Nancy I.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Mademoiselle BERGER Marie-Odile**

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence"

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité : **"INFORMATIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, 6 Février 1991

Le Président de l'I.N.P.L.,
M. GANTOIS

2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 3 - 54501 VANDŒUVRE CEDEX
Téléphone : 83. 59. 59. 59 - Télex : 961 715 F - Télécopie : 83. 59. 59. 55

# Remerciements

*Cette thèse est pour moi l'occasion d'exprimer des remerciements à tous ceux qui m'ont conseillé et aidé à réaliser ce travail dans de bonnes conditions, et je suis heureuse aujourd'hui de remercier plus particulièrement :*

*Monsieur Roger Mohr, Professeur à l"institut Polytechnique de Grenoble, qui m'a proposé un sujet de recherche passionnant et m'a encadré et orienté tout au long de ces années de travail. Je lui suis particulièrement reconnaissante pour ses conseils, ses encouragements et sa confiance.*

*Monsieur Jean-Pierre Finance, Professeur à l'Université de Nancy I, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Monsieur Nicholas Ayache, Directeur de recherches à l'INRIA et Monsieur Pierre Lescanne, Directeur de recherches au CRIN, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de siéger à ce jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'intérêt dont ils ont fait preuve à l'égard de ce travail.*

*Messieurs Henri Maitre, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications à Paris et Philippe Cinquin, Professeur à l'Université Joseph Fourrier de Grenoble qui partagent mon intérêt pour les modèles actifs de contours et dont les remarques ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit.*

*Jean-Paul Haton, Directeur de recherches INRIA au CRIN, pour avoir accepté de siéger dans ce jury.*

*J'exprime des remerciements chaleureux à Yves Demazeau, chargé de recherche au LIFIA pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues ensemble à propos des modèles actifs ainsi qu'à toute l'équipe Vision du CRIN, notamment à Claude Inglebert.*

*Merci également à tous mes collègues et amis du CRIN, pour l'atmosphère de travail sympathique dont j'ai bénéficié, à mes camarades thésards Pierre Nugues, Quan Long, Yves Laprie, Stéphane Paris, Houda Chabbi, Anja Habacha, Bernard Waldmann.*

*Enfin, je tiens à remercier vivement toute ma famille pour les encouragements et le soutien moral qu'ils m'ont prodigués, sans lesquels je n'aurais pu terminer ce travail.*