



HAL
open science

Développement d'une méthodologie conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement des propriétés d'un système complexe

Manal Dakil

► **To cite this version:**

Manal Dakil. Développement d'une méthodologie conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement des propriétés d'un système complexe. Autre. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0133 . tel-01750979v2

HAL Id: tel-01750979

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750979v2>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

(Spécialité Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique)

par

Manal DAKIL

Développement d'une méthodologie conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement des propriétés d'un système complexe.

<i>Rapporteurs :</i>	Vincent COCQUEMPOT	Professeur à l'Université de Lille
	Abdessamad KOBI	Professeur à l'Université d'Angers
<i>Examineurs :</i>	Benoit IUNG	Professeur à l'Université de Lorraine
	Frédéric KRATZ	Professeur à l'INSA Centre Val de Loire
	Vicenç PUIG CAYUELA	Professeur à l'Université Polytechnique de Catalogne
<i>Directeurs de thèse :</i>	Taha BOUKHOBZA	Professeur à l'Université de Lorraine
	Christophe SIMON	Maître de conférences à l'Université de Lorraine

À la femme qui m'a enseigné la patience ;
À l'homme qui m'a appris le courage ;
À Ayoub, Hajar et Rim ;
À toute ma famille ;
À mon homme.

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout, les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. **Vincent Cocquempot**, Professeur à l'Université de Lille, pour avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit et d'avoir examiné minutieusement ce travail.

Je remercie M. **Abdessamad Kobi**, Professeur à l'Université d'Angers, pour avoir bien voulu rapporter sur ce manuscrit et pour ses remarques objectives et constructives.

J'adresse mes remerciements à M. **Benoit Iung**, Professeur à l'Université de Lorraine, M. **Frédéric KRATZ**, Professeur à l'Université de Bourges et M. **Vicenç Puig Cayuela**, Professeur à l'Université Polytechnique de Catalogne pour leur participation au jury, leurs remarques pertinentes et leur regard critique pour ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, M. **Taha Boukhobza**, Professeur à l'Université de Lorraine et M. **Christophe Simon**, Maître de conférences à l'Université de Lorraine, pour m'avoir accueillie dans leur équipe de recherche au sein du CRAN, pour leurs directives scientifiques et pédagogiques, pour m'avoir toujours poussée à aller plus loin dans mes recherches et pour leurs encouragements tout au long de ces 3 années de thèse.

Mes sincères remerciements vont également à tous les permanents de l'IUT Nancy-Brabois avec lesquels j'ai passé 3 années de joie et de bonne humeur.

Merci à mes amis doctorants du 4^{ème} étage, **Ahmed**, **Amine**, **Shaik**, **Teju**, **Krish** et **Jingwen**. Un grand merci à l'aimable **Sabine Huraux** pour sa disponibilité à résoudre tous nos soucis administratifs et bien sûr pour son esprit joyeux et bienveillant.

Je tiens à remercier vivement mes parents **Mohamed** et **Fatiha** et, mon frère **Ayoub** pour leurs amour, encouragement, soutien, etc.

Je remercie toute ma famille, et notamment M. **Abdelilah Fekkek** Professeur à l'Université Chouaïb Doukkali et M. **Mohamed Benacer** Professeur à l'Université Moulay Ismaïl pour m'avoir soutenue depuis mon obtention du baccalauréat et jusqu'à l'obtention du doctorat.

Enfin, le dernier mais pas le moindre, **Mohamed Ghassane**. Un grand merci pour tout ce qu'il a fait pour moi, entre autre ses encouragements et son soutien tout au long de la durée de cette thèse.

Table des matières

Notations et abréviations	1
Introduction générale	3
1 Méthodes et outils	21
1.1 Représentations graphiques d'un système structuré	22
1.1.1 Graphe orienté	23
1.1.1.1 Cas des systèmes linéaires	24
1.1.1.2 Cas des systèmes bilinéaires	25
1.1.1.3 Cas des systèmes linéaires à commutations	28
1.1.2 Graphe biparti	30
1.1.2.1 Cas des systèmes linéaires	31
1.1.2.2 Cas des systèmes bilinéaires	31
1.1.2.3 Cas des systèmes linéaires à commutations	32
1.1.3 Définitions et notations	33
1.2 Paramètres de la sûreté de fonctionnement étudiés	36
1.2.1 Fiabilité	37
1.2.1.1 Définition	37
1.2.1.2 Hypothèses pour le calcul de la fiabilité	38
1.2.1.3 La fiabilité des propriétés structurelles	39
1.2.2 Disponibilité	40
1.2.2.1 Définition	40
1.2.2.2 Hypothèses pour le calcul de la disponibilité	40
1.2.2.3 La disponibilité des propriétés structurelles	41
1.3 Quelques outils de la sûreté de fonctionnement	42
1.3.1 Blocs diagramme de fiabilité	42
1.3.2 Réseaux de fiabilité de Kaufmann	45
1.3.3 Chaînes de Markov	50
1.3.4 Réseaux Bayésiens (RB) et Réseaux Bayésiens Dynamiques (RBD)	52
1.4 Conclusion	56

2	Les conditions élémentaires graphiques pour les propriétés structurelles	59
2.1	Introduction	59
2.2	Condition de connectivité	62
2.2.1	Définition	62
2.2.2	Expression booléenne de la condition de connectivité	63
2.3	Condition de lien	78
2.3.1	Définition	78
2.3.2	Expression booléenne de la condition de lien	79
2.4	Condition de distance	84
2.4.1	Définition	84
2.4.2	Expression booléenne de la condition de distance	86
2.5	Condition de couplage complet	94
2.5.1	Définition	94
2.5.2	Expression booléenne de la condition de couplage complet	95
2.6	Conclusion	101
3	Sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles	105
3.1	Introduction	105
3.2	Association arc-composants	107
3.2.1	Définition	107
3.2.2	Exemple	108
3.3	Fiabilité des propriétés structurelles	110
3.3.1	Calcul de la fiabilité	110
3.3.2	Bloc diagramme de fiabilité	110
3.3.3	Réseaux Bayésiens (RB) et Réseaux Bayésiens dynamiques (RBD)	113
3.4	Fiabilité de la commandabilité totale de l'état	118
3.5	Disponibilité des propriétés structurelles	126
3.5.1	Calcul de la disponibilité	127
3.5.2	Chaînes de Markov	127
3.6	Disponibilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations	131
3.7	Interprétation des résultats	137
3.7.1	Résultats/exigences d'un cahier des charges	137
3.7.2	Classement des composants du système	139
3.7.3	Mesures à prendre au niveau des composants du système	141
3.8	Conclusion	143
	Conclusion et perspectives	147
A	DM Décomposition	173

B Généralités sur la sûreté de fonctionnement

175

Notations et abréviations

Notations :

$\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Graphe orienté composé de l'ensemble de sommets \mathcal{V} et de l'ensemble d'arcs \mathcal{E} .
$\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$	Graphe biparti composé des deux ensembles de sommets V^+ et V^- et, de l'ensemble d'arcs \mathcal{E}_B .
$CC(V_1, V_2)$	Expression booléenne de la condition de connectivité entre chaque élément de l'ensemble V_1 et au moins un élément de l'ensemble V_2 .
$\mathbf{conn}(V_1, V_2)$	Expression booléenne de la condition de connectivité entre les ensembles V_1 et V_2 en considérant un parcours de graphe en profondeur.
$Con(v_i)$	Expression booléenne de la condition de connectivité entre chaque sommet $v_i \in V_1$ et l'ensemble V_2 en considérant un parcours de graphe en largeur.
$\mathcal{L}(V_1, V_2, \mathcal{V})$	Expression booléenne de la condition de lien entre les ensembles V_1 et V_2 en considérant l'ensemble de sommet \mathcal{V} .
$\mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, P_{(V_1, V_2, V_3)})$	Expression booléenne de la condition de distance entre les ensembles V_1 et V_2 en considérant l'ensemble de sommet V_3 et l'ensemble de chemins $P_{(V_1, V_2, V_3)}$.
$MC(V^+, V^-)$	Expression booléenne de la condition de couplage complet entre les ensembles V^+ et V^- .

\wedge “ET” logique.

\vee “OU” logique.

φ Association arc-composants associant à chaque arc une expression booléenne basée sur les défaillances des composants.

C_i Défaillance d’un composant c_i .

λ_i Taux de défaillance d’un composant c_i .

μ_i Taux de réparation d’un composant c_i .

Abréviations :

BDF Blocs Diagrammes de Fiabilité.

RB Réseaux Bayésiens.

RBD Réseaux Bayésiens Dynamiques.

CTP Table de probabilité conditionnelles (*Conditional Probability Table* en anglais).

MIF Facteur d’Importance Marginal (*Marginal Importance Factor* en anglais).

NTD Niveau de Tolérance aux Défaillances.

Introduction générale

Les systèmes sont devenus plus complexes avec l'augmentation de la demande et les exigences des clients ainsi que le développement technologique. Par conséquent, l'étude de ces systèmes est devenue plus difficile à mener. Afin de garantir le fonctionnement des systèmes complexes en régime nominal, il est important qu'ils soient commandables, observables, diagnosticables, etc. Cette thèse porte sur les diverses propriétés des systèmes dont les plus connues d'entre elles sont la commandabilité, l'observabilité, la diagnosticabilité, la solvabilité du problème de rejet de perturbations. L'étude des propriétés d'un système est une étape très importante dans son cycle de vie puisqu'elle permet de mieux en assurer la maîtrise par une meilleure compréhension de son fonctionnement, de ses limites et de ses capacités.

Pour étudier la vérification de ces propriétés, les composants physiques ne doivent pas être complètement exclus de l'analyse. En effet, puisque tout système est constitué de composants électriques, mécaniques, etc, la défaillance de ces derniers peut impacter la validité des propriétés du système. Il est donc pertinent de prendre en compte les composants physiques du système et leurs défaillances lors de l'étude des propriétés. Ainsi, l'étude des propriétés des systèmes peut être associée aux durées de vie des composants et à leurs défaillances principalement étudiées dans le domaine de la sûreté de fonctionnement des systèmes.

L'étude des propriétés structurelles utilise généralement des outils géométriques ou algébriques (Kailath, 1980; Kalman, 1968; Rosenbrock, 1970; Wonham, 1985; Zadeh and Desoer,

1963). Pour cette étude qui est basée sur des outils géométriques ou algébriques, les valeurs numériques des paramètres du système sont indispensables. Toutefois, ces valeurs ne sont pas toujours disponibles surtout pendant les premières phases du cycle de vie du système. Par conséquent, certains travaux de recherche se sont focalisés sur ce qui est appelé la “structure” du système puisque les propriétés les plus importantes d’un système en dépendent (Willems, 1986). La structure d’un système correspond à ses variables et les relations qui les lient. Ainsi, certains travaux comme (Murota, 1987a; Murota and van der Woude, 1991; Svaricek, 1985) traitent les propriétés en considérant la structure du système sans valeurs numériques précises de ses paramètres. Cette approche s’intéresse alors aux propriétés dites structurelles pour des systèmes structurés. Les systèmes structurés sont souvent représentés par des modèles d’état dont les matrices sont constituées d’éléments nuls et/ou non-nuls.

À partir des années 1970, l’analyse structurelle des systèmes s’est basée sur une nouvelle approche reposant sur leur représentation par un graphe orienté. (Lin, 1974) est l’un des travaux originels relatifs aux systèmes structurés. L’auteur a abordé la commandabilité des systèmes linéaires mono-entrée. Les résultats proposés s’exprimaient de façon très simple et intuitive. La condition de commandabilité s’interprétait graphiquement en termes de chemins et de cycles. La caractérisation graphique des propriétés structurelles est aussi intéressante du point de vue pédagogique, puisqu’elle permet de visualiser clairement certaines propriétés sur des systèmes de taille importante. Les résultats de (Lin, 1974) qui portaient uniquement sur les systèmes linéaires mono-entrée ont été étendus aux systèmes multi-entrées dans (Glover and Silverman, 1976) et (Shields and Pearson, 1976). Depuis, plusieurs travaux se sont intéressés à l’analyse structurelle. (Dion and Commault, 1993; Linnemann, 1981; Yamada and Saga, 1985) traitent les conditions de solvabilité des problèmes classiques de découplage. Le problème de rejet de perturbations par retour d’état est également traité dans (Commault et al., 1991; van der Woude and Murota, 1995) ou par retour de sortie (Commault et al., 2011; van der Woude, 1996). Les travaux (Boukhobza, 2008; Commault and Dion, 2003; Staroswiecki, 2002) s’intéressent à l’étude de la génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts. L’observabilité et

la commandabilité sont traitées dans (Boukhobza et al., 2006; Commault and Dion, 2013; Murota, 1987a). Un travail plus complet regroupant des résultats obtenus sur l'analyse structurelle par approche graphique est proposé dans (Dion et al., 2003). Dans la littérature, les propriétés structurelles sont étudiées principalement sur 3 types de systèmes structurés : linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations (Boukhobza and Hamelin, 2011b; Murota, 1987c; Reinschke, 1988; Reinschke and Wiedemann, 1997; Svaricek, 1993).

Les avantages des modèles structurés et des représentations graphiques ont été soulignés dès les résultats de (Lin, 1974). En effet, cette représentation reste élégante et simple d'abord pour représenter un système structuré puis pour analyser ses propriétés structurelles. Pendant la phase de conception d'un système, ses paramètres ne sont pas encore numériquement fixés et les composants physiques ne sont pas encore dimensionnés. De plus, une représentation graphique permet d'avoir une visualisation des variables du système ainsi que les relations qui les lient. Cette représentation est très utile quand il s'agit de l'analyse d'un système structuré complexe ou de grande dimension. Enfin, la vérification des propriétés structurelles par approche graphique fait appel le plus souvent à des algorithmes classiques de la théorie des graphes dont des versions optimisées peuvent être utilisées pour obtenir des implémentations d'ordre de complexité polynomiale et non combinatoire (Martinez-Martinez et al., 2007). En effet, la théorie des graphes offre usuellement des algorithmes de complexité polynomiale plutôt que combinatoire.

Dans le même esprit que l'étude des propriétés structurelles en se basant sur des graphes orientés, les Bond Graphs, également appelés graphes à liaisons, sont une représentation graphique des systèmes dynamiques qui représente les transferts d'énergie (Samantaray et al., 2006; Ould Bouamama et al., 2000). Des propriétés structurelles telles que la commandabilité, l'observabilité, la structure à l'infini sont analysées avec les Bond Graphs (Pichardo-Almarza et al., 2005; A.Rahmani, 1993; Sueur and Dauphin-Tanguy, 1989). Ils sont aussi utilisés pour les problèmes de détection et localisation de défauts (Khemliche et al., 2006; Rahmani and Dauphin-Tanguy, 2006). Une approche basée sur le

comportement du système est proposée dans (Blanke et al., 2006).

La majorité des travaux d'analyse structurelle concerne principalement l'aspect fonctionnel des propriétés structurelles, c'est-à-dire l'analyse du graphe représentant le système pour savoir si le système étudié vérifie ou non des propriétés structurelles nécessaires pour son bon fonctionnement. À partir de la structure du système représentée graphiquement, l'analyse des propriétés structurelles, qui est basée sur l'existence de chemins ou de cycles, considère que tous les arcs et les sommets du graphe sont toujours valides. Par conséquent, si une propriété structurelle est vérifiée graphiquement pour un système, il n'y a pas de précision sur l'impact de la défaillance d'un ou plusieurs composants du système sur la validité de cette propriété structurelle. Cet aspect dysfonctionnel et l'étude des défaillances des composants représentent un des objectifs de l'étude de sûreté de fonctionnement.

La sûreté de fonctionnement des systèmes constitue un enjeu important tant sur le plan économique que sur le plan scientifique. Dans le cadre des systèmes à risques, la capacité à effectuer les tâches pour lesquelles le système a été conçu peut être entravée par l'apparition de phénomènes dysfonctionnels. Il peut alors s'en suivre des fonctionnements non désirés ou catastrophiques notamment dans le domaine de l'aéronautique (BEASAC, 2012)¹, de la chimie (Directive 96/82/CE, 1996), ou des sites industriels classés SEVESO, etc. Pour palier les problèmes liés à l'apparition des défaillances, les communautés scientifique et industrielle, se sont tournées vers l'étude des dysfonctionnements des systèmes ainsi que sur les moyens de maintenir le système en régime nominal tout au long de sa mission. L'aspect dysfonctionnel est principalement traité par les paramètres de la sûreté de fonctionnement.

La sûreté de fonctionnement repose sur l'analyse de 4 paramètres qui forment le sigle FMDS : Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité et Sécurité (*RAMS* en anglais) (Kaanichea et al., 2002).

1. Bureau d'enquêtes et d'analyses pour la sécurité de l'aviation civile

La fiabilité est un critère significatif dans l'étude des systèmes car elle caractérise la capacité du système à assurer ses fonctions pendant une période de temps spécifiée sous certaines conditions de fonctionnement (AFNOR, 1977). La fiabilité dépend de l'architecture fonctionnelle/dysfonctionnelle du système. Elle est exprimée en fonction de la fiabilité de ses sous-systèmes ou composants. La fiabilité des composants est exprimée en fonction de certains événements indésirables (défaillances) sur les composants du système qui sont imprévisibles (Dhillon, 1999). La fiabilité est donc de nature probabiliste.

La disponibilité est un paramètre important pour l'étude du fonctionnement d'un système. Elle consiste à ce qu'un composant, une unité réparable, une unité remplaçable ou un système soit dans un état de bon fonctionnement à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné. Le calcul de la disponibilité est principalement basé sur la connaissance des taux de défaillances et de réparations des composants du système (H.Wang and Pham, 2006).

La maintenabilité d'un composant ou d'un système caractérise l'aptitude de ce dernier à être maintenu ou remis en état de fonctionnement. La sécurité correspond à l'aptitude d'un composant ou un système à ne pas conduire à des accidents inacceptables. Ces deux paramètres de la sûreté de fonctionnement dépendent principalement des facteurs humain et logistique. Dans l'approche présentée dans cette thèse, ces deux facteurs ne sont pas considérés. Ainsi, nous nous intéressons uniquement à la fiabilité et la disponibilité.

Plusieurs approches et outils pour le calcul de la fiabilité et de la disponibilité ont été proposés dans la littérature. Un outil classique est utilisé pour le calcul de la fiabilité qui est le bloc diagramme de fiabilité. Ils représente l'architecture du système et les relations entre les composants par un diagramme où les composants sont représentés par des blocs (Staley and Sutcliffe, 1974). Ces blocs diagrammes de fiabilité permettent de représenter deux modes de fonctionnement des composants qui sont l'état de bon fonctionnement et

l'état de panne. L'état de fonctionnement ainsi que la fiabilité du système sont obtenus à partir de l'état de fonctionnement et la fiabilité des composants. Ainsi, cet outil sert à effectuer une analyse qualitative (booléenne) ou quantitative de la fiabilité (Kim, 2011; Lisnianski, 2007).

Les réseaux bayésiens (Jensen, 1996; Weber et al., 2012) et les réseaux bayésiens dynamiques (Kjaerulff, 1995; Murphy, 2002a) sont principalement utilisés pour le calcul de la fiabilité et éventuellement de la disponibilité (Weber, 2002). Ils sont considérés comme un outil efficace au niveau de l'analyse des systèmes puisqu'ils représentent un formalisme puissant pour exprimer les dépendances complexes entre les composants du système. Les réseaux bayésiens dynamiques sont basés sur un aspect temporel correspondant à la dynamique de la fiabilité des composants du système en fonction du temps et, un aspect architectural qui correspond aux relations liant les composants. Les réseaux bayésiens sont considérés comme un outil très efficace de la sûreté de fonctionnement puisqu'ils permettent de mettre à jour la fiabilité des composants en fonction des observations de leur état de fonctionnement sur le terrain.

Les chaînes de Markov sont un outil très utilisé en sûreté de fonctionnement (Schoenig et al., 2006). Elles permettent la modélisation de l'état de fonctionnement du système en fonction de l'état de fonctionnement des composants. Pour chaque composant du système, ce type de représentation graphique décrit à la fois sa défaillance et sa réparation (Prowell and Poore, 2004). Puisque cet outil peut prendre en compte les réparations des composants, il est bien adapté au calcul de la disponibilité des systèmes (El-Damcese and Temraz, 2011).

Ces 4 outils pour le calcul de la fiabilité et la disponibilité utilisent un formalisme graphique permettant le calcul de la fiabilité et/ou de la disponibilité. Ce formalisme repose sur l'architecture interne du système, c'est-à-dire ses composants et les relations qui les lient. Il est à noter que les formalismes graphiques utilisés en sûreté de fonctionnement sont différents des graphes associés à la structure du système et utilisés pour l'analyse des pro-

propriétés structurelles. Les graphes utilisés pour le calcul de la fiabilité et la disponibilité sont basés sur l'architecture fonctionnelle du système (série, parallèle, mixte). Les composants du système sont représentés par des blocs ou des nœuds reliés par des arcs, tandis que les graphes utilisés dans l'analyse structurelle représentent les variables du système par des sommets et leurs relations par des arcs.

A notre connaissance, il y a peu de travaux qui s'intéressent à l'étude des propriétés structurelles en interaction avec la sûreté de fonctionnement où l'aspect dysfonctionnel est introduit dans l'étude des propriétés des systèmes.

Parmi les études qui regroupent l'analyse structurelle et la sûreté de fonctionnement, les résultats présentés dans (Maza et al., 2012) propose l'évaluation de la fiabilité de la commandabilité structurelle pour un système linéaire. Toutefois, cette approche considère que seuls les actionneurs peuvent tomber en panne. Aucune défaillance des composants internes n'est considérée. (Maza et al., 2012) est considéré comme le travail initiateur de cette thèse puisque la validité de la commandabilité est étudiée en considérant les défaillances des actionneurs du système. Dans (Staroswiecki, 2007), l'auteur s'intéresse au problème de tolérance aux défauts grâce à une analyse structurelle. En se basant sur une approche graphique, l'auteur présente une analyse structurelle en intégrant les défaillances des composants. Cette analyse porte sur l'observabilité structurelle en utilisant un diagramme de flux de données dans les deux cas où les composants du système sont en bon fonctionnement ou défectueux. L'auteur présente également la relation entre les défauts critiques des composants et la fiabilité. Dans (Conrard et al., 2011), les auteurs s'intéressent à un niveau de tolérance de défauts d'un système tolérant aux défauts (FTC : *Fault Tolerant Control*). L'objectif du niveau de tolérance aux défauts est de quantifier le nombre de défaillances tolérables pour être conforme aux exigences des utilisateurs. Dans (Commault et al., 2007, 2011), les auteurs proposent une étude des propriétés structurelles par approche graphique qui considère que seuls les capteurs peuvent tomber en panne. Ces capteurs sont classés en capteurs essentiels, inutiles et utiles. Les capteurs essentiels ne doivent pas tomber en panne afin de garantir la vérification des propriétés structurelles,

tandis que la panne des capteurs inutiles n'a aucun impact sur la vérification de ces propriétés.

Dans les travaux cités précédemment, les propriétés structurelles des systèmes sont étudiées en considérant les défaillances des composants. Ces travaux s'intéressent principalement à une analyse qualitative. Toutefois, aucune analyse quantitative sur les propriétés structurelles n'est proposée, c'est-à-dire les paramètres de sûreté de fonctionnement ne sont pas calculés pour ces propriétés. Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à l'étude de la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles. Cette étude permet d'effectuer les deux analyses qualitative et quantitative des propriétés structurelles en utilisant une approche graphique.

Les propriétés structurelles peuvent être vérifiées graphiquement à partir de la représentation graphique du système structuré étudié. Avant de développer la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles, une étude bibliographique sur les conditions graphiques de la validité des propriétés structurelles pour les systèmes linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations nous a permis de tirer une conclusion très importante pour notre étude. Dans la littérature, la validité des propriétés structurelles nécessite principalement la vérification de 4 catégories de conditions graphiques élémentaires. Il s'agit des conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. Par exemple, l'observabilité totale de l'état d'un système à entrée inconnue nécessite la vérification des 2 types de conditions qui sont la connectivité et le couplage complet entre les variables d'état et les variables de sortie. Ainsi, nous nous intéressons particulièrement à ces 4 catégories de conditions graphiques élémentaires puisque ces dernières interviennent dans la plupart des propriétés structurelles des systèmes structurés considérés dans ce travail de thèse. Ceci permettra de ne pas traiter plusieurs propriétés structurelles pour les 3 types de systèmes structurés considérés mais plutôt traiter les 4 catégories de conditions graphiques élémentaires. De plus, le fait d'étudier les conditions élémentaires donne à notre étude un aspect générique puisque nous effectuons 4 analyses des conditions graphiques au lieu d'analyser toutes les combinaisons propriétés structurelles/type de système structuré.

Les conditions de connectivité, de lien et de distance sont vérifiables sur un graphe dit orienté qui représente les variables du système par des sommets et leurs relations par des arcs. En revanche, la condition de couplage complet est vérifiable sur un graphe dit biparti composé de deux ensembles de sommets représentant les variables du système reliés par des arcs représentant les relations entre ces variables.

Les résultats présentés dans ce travail de thèse se décomposent principalement en deux parties. La première partie concerne l'étude des propriétés structurelles d'un système et, la deuxième partie est dédiée à l'analyse de la sûreté de fonctionnement de ces propriétés. Dans la première partie, les 4 catégories de conditions graphiques élémentaires sont traitées de telle sorte qu'elles soient associées à des expressions booléennes basées sur les arcs dans la représentation graphique du système. Ainsi, nous proposons au moins un algorithme par condition élémentaire qui permet de vérifier la validité d'une expression booléenne basée sur l'état de validité des arcs. Puisque la validité des propriétés structurelles dépend d'une combinaison de conditions élémentaires graphiques, ces propriétés peuvent également être associées à des expressions booléennes basées sur les arcs.

Les expressions booléennes basées sur les arcs associées aux propriétés structurelles sont utilisées pour le calcul de la fiabilité et/ou de la disponibilité de ces propriétés structurelles. Etant donné que le calcul de la fiabilité et la disponibilité est basé sur l'état de fonctionnement des composants du système, il est donc nécessaire de disposer d'une relation entre les expressions basées sur les arcs et les composants du système. Les arcs dans les graphes représentant le système, caractérisent les relations entre ses variables. Par conséquent, ils sont liés aux paramètres non nuls des matrices de la représentation d'état du système. Ces paramètres non nuls dépendent généralement des composants du système puisque les relations entre les variables sont assurées par ces composants. L'état de validité des arcs dépend donc de l'état de fonctionnement des composants. Quand les composants sont défectueux, c'est-à-dire n'assurent plus leurs fonctions requises, les arcs correspondant ne sont plus valides. Dans le cas où ces arcs sont invalides, ils ne peuvent plus être considérés

dans des chemins ou des cycles pour la vérification graphique des propriétés structurelles. En effet, pour assurer la validité d'une ou plusieurs propriétés structurelles, les valeurs de certains paramètres du système doivent être non nuls et, certains arcs doivent être valides et les composants correspondant doivent être en bon fonctionnement.

Ainsi, les arcs des représentations graphiques sont naturellement liés à tous les composants du système (internes et externes). Nous considérons ainsi une association arc-composants. Cette association permet d'associer la validité de chaque arc à la valeur booléenne 1 (arc toujours valide et ne dépendant pas des composants) ou à une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement physique d'un ou de plusieurs composants du système. L'état de validité d'un arc (valide/invalidé) est donc associé à une expression booléenne basée sur les défaillances des composants correspondant.

Dans le même ordre d'idée, A. Kaufmann (Kaufmann et al., 1975) a considéré le lien entre les arcs d'une représentation graphique et les composants du système. En effet, dans les réseaux de fiabilité de Kaufmann, l'architecture fonctionnelle des systèmes est représentée par un graphe composé d'arcs et de nœuds. Les arcs représentent les composants du système et les nœuds correspondent aux relations entre ces composants. Ainsi, chaque arc est associé à un ou plusieurs composants du système. Compte tenu qu'un composant peut admettre deux états (bon fonctionnement/défaillance), l'arc correspondant admet également deux états (valide/invalidé). L'association arc-composants considérée dans ce travail de thèse affecte à chaque arc une expression booléenne basée sur la défaillance d'un ou plusieurs composants, tandis que dans (Kaufmann et al., 1975), chaque arc est associé à un seul composant.

En utilisant l'association arc-composants considérée dans ce travail de thèse, les expressions booléennes basées sur les arcs et associées aux propriétés structurelles peuvent être réécrites sous forme d'expressions booléennes basées sur les défaillances des composants du système. Cette association correspond à la jonction entre la première partie de ce travail

de thèse qui est consacrée à l'étude des conditions graphiques élémentaires et la deuxième partie qui porte sur l'étude de la sûreté de fonctionnement.

Après avoir formulé les propriétés structurelles comme des expressions booléennes basées sur les arcs du graphe puis sur les défaillances des composants, nous passons à la deuxième partie consacrée à la sûreté de fonctionnement. Nous nous intéressons dans cette partie de la thèse à la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles sachant les caractéristiques de sûreté de fonctionnement des composants du système. Ces deux paramètres de la sûreté de fonctionnement sont classiquement utilisés pour les systèmes. Dans ce travail de thèse, les définitions de la fiabilité et de la disponibilité est étendue pour couvrir les propriétés structurelles. Le calcul de ces deux paramètres est effectué en utilisant les outils de sûreté de fonctionnement. Il s'agit des blocs diagramme de fiabilité, des chaînes de Markov ainsi que les réseaux bayésiens et les réseaux bayésiens dynamiques. Ces outils permettent une représentation graphique de l'architecture du système c'est-à-dire les relations entre les composants (montage série, parallèle, série/parallèle, etc).

L'originalité du travail proposé dans ce manuscrit réside dans plusieurs éléments :

- Nous nous intéressons à la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles. Les définitions de la fiabilité et la disponibilité sont étendues pour couvrir les propriétés structurelles. Nous parlons donc de la fiabilité et la disponibilité de l'observabilité, de la commandabilité, etc.
- Nous considérons 4 catégories de conditions graphiques élémentaires qui sont les conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet au lieu d'étudier plusieurs combinaisons propriété structurelle/type de système. Nous proposons ainsi des algorithmes à complexité polynomiale et non combinatoire permettant de formuler ces catégories de conditions ainsi que les propriétés structurelles sous forme d'expressions booléennes basées sur les arcs des graphes.
- Compte tenu de l'utilisation d'une association arc-composants, notre étude graphique des propriétés structurelles est basée sur les arcs et non pas sur les sommets comme

proposé dans la littérature. Cela permet de considérer aussi bien les pannes actionneurs et capteurs (composants externes) que les défaillances de composants internes au système (les ressorts, résistances, poulies, moteurs, etc).

- En calculant la fiabilité et la disponibilité d'une propriété structurelle, il est possible d'en déduire la probabilité que cette dernière reste satisfaite si un ou plusieurs composants tombent en panne et pour combien de temps. Il est également possible de prendre en compte les exigences du cahier des charges du système. Dans le cas où ces exigences ne sont pas respectées, des actions de maintenance doivent être effectuées sur les composants du système afin d'améliorer la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles.

L'étude menée dans ce travail de thèse est différente des travaux proposés dans la littérature sur une étude jointe entre l'automatique et la sûreté de fonctionnement.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit est considéré comme une continuité des résultats proposés dans (Maza et al., 2012). En effet, l'approche proposée dans (Maza et al., 2012) porte sur l'évaluation de la fiabilité de la commandabilité structurelle pour un système linéaire. Les auteurs se sont intéressés à la fiabilité de la commandabilité structurelle. Pour ce travail de thèse, l'approche est plus générique puisqu'elle porte sur les 4 types de conditions graphiques élémentaires qui interviennent dans plusieurs propriétés structurelles et pour 3 types de systèmes structurés. De plus, nous nous intéressons aux défaillances des composants internes et externes contrairement aux résultats de (Maza et al., 2012) qui ne considèrent que les défaillances des actionneurs. Dans notre approche, nous pouvons considérer les défaillances mais également les réparations des composants. Ainsi, nous calculons la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles.

L'approche proposée dans ce manuscrit nous permet de considérer les défaillances de tous les composants du système et non pas les capteurs seulement tel que le résultat proposé dans (Commault et al., 2007). De plus, il est possible de classer les composants du système en essentiels, utile et inutile, par rapport à la validité de la propriété structurelle étudiée, à

partir de l'expression booléenne associée à la propriété étudiée, et de déterminer la façon dont les défaillances des composants peuvent affecter la validité des propriétés structurelles. Dans l'approche que nous proposons, il est possible de calculer le nombre de défaillances maximal tout en ayant des propriétés structurelles vérifiées contrairement au travail présenté dans (Conrard et al., 2011) où les auteurs proposent un indice qui correspond au nombre de défaillances tolérables pour être conforme à certaines exigences par rapport à la sûreté de fonctionnement. De plus, les composants responsables de la non vérification des propriétés structurelles sont facilement identifiables ainsi que comment cette non vérification est provoquée.

Les contributions du travail de thèse proposées dans ce manuscrit peuvent être résumées dans la Figure 1. Cette figure montre le point d'entrée de notre étude qui est le modèle d'état du système et l'association arc-composants fournis par un analyste et, les exigences du cahier des charges par rapport à la sûreté de fonctionnement. Le point de sortie de l'approche proposée est représenté par des actions de maintenance à effectuer sur des composants du système par le service maintenance et le service méthode. Cette figure montre également les contributions de cette thèse qui portent sur une analyse structurelle des propriétés effectuée conjointement avec une étude de la sûreté de fonctionnement. La jonction entre les deux disciplines est assurée par une fonction qui reformule l'écriture booléenne des propriétés structurelles.

Le manuscrit se structure en 3 principaux chapitres. Les divers résultats présentés dans ce manuscrit sont illustrés par des exemples pédagogiques permettant de mieux comprendre les développements de notre travail :

Le premier chapitre introduit les différentes représentations graphiques d'un système structuré par un ensemble de sommets représentant les variables du système et un ensemble d'arcs reliant les sommets et caractérisant les relations de causalité entre ces variables. La suite de ce chapitre est dédiée à la présentation de la fiabilité et la disponibilité. Les

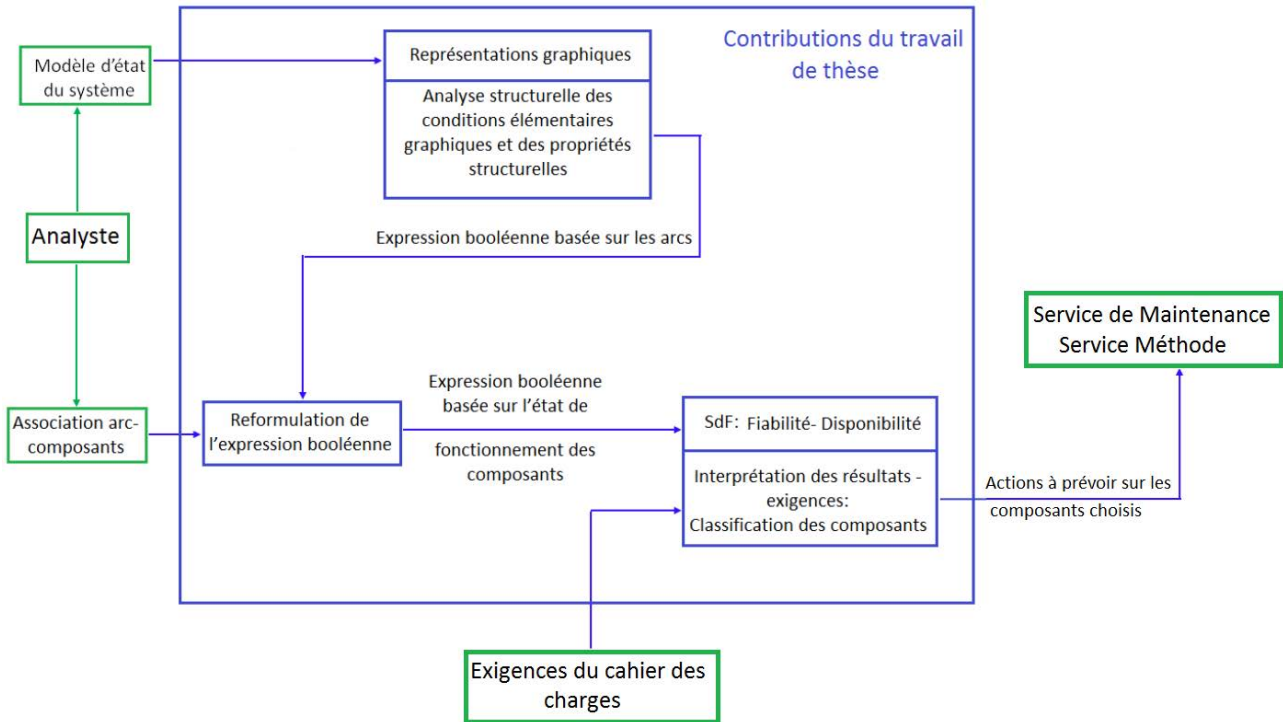


FIGURE 1 – Contributions de la thèse

définitions générales de ces deux paramètres sont données, suivies des hypothèses de travail pour notre étude. Ensuite, les notions étendues de la fiabilité et la disponibilité pour couvrir les propriétés structurelles sont rappelées. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de 3 outils de la sûreté de fonctionnement qui sont les blocs diagrammes de fiabilité, les réseaux bayésiens et la chaînes de Markov que nous utilisons pour le calcul de la fiabilité et/ou de la disponibilité des propriétés structurelles.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les premières contributions de notre travail qui sont relatives aux conditions élémentaires graphiques. Tout d'abord, une étude bibliographique a été menée afin de dresser un tableau récapitulatif qui montre les 4 principales catégories de conditions graphiques élémentaires qui interviennent dans la validité des propriétés structurelles pour les systèmes structurés linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations. Ce chapitre est ensuite constitué essentiellement de 4 parties liées aux 4 catégories de conditions graphiques étudiées. Pour chacune des 4 conditions, nous proposons au moins un algorithme permettant de les écrire sous forme d'expressions booléennes basées sur les arcs des graphes représentant le système. Nous présentons ensuite

3 exemples illustratifs pour ces conditions. Les conditions de lien et de distance sont étudiées sur un système linéaire et, la condition de couplage complet est étudiée sur un système bilinéaire.

En utilisant ces expressions booléennes ainsi que le tableau résumant les conditions à vérifier pour les combinaisons propriétés structurelles/type de système, il est possible d'exprimer la validité des propriétés structurelles par des expressions booléennes en fonction de la validité des arcs.

Le troisième chapitre est consacré à la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles. Tout d'abord, nous présentons l'association arc-composants. Cette association est très importante pour notre étude puisqu'elle assure la relation entre les arcs des graphes représentant le système et les composants physiques du système. La validité d'un arc dépend donc de l'état de fonctionnement des composants correspondant. Ainsi, la validité d'un arc peut être associée à une expression booléenne basée sur les défaillances des composants. En utilisant l'association arc-composants, une expression booléenne associée à une propriété structurelle peut être réécrite en fonction des défaillances des composants du système.

Dans un deuxième temps, nous présentons la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles ainsi que leur calcul en utilisant les outils de sûreté de fonctionnement présentés dans le premier chapitre. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons l'analyse de la fiabilité et la disponibilité respectivement des deux propriétés structurelles de commandabilité totale de l'état et de solvabilité du problème de rejet de perturbations d'un système linéaire. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'interprétation des résultats de calcul de la fiabilité et la disponibilité. En calculant la probabilité de validité d'une propriété structurelle, il est possible de savoir dans combien de temps cette propriété structurelle ne sera probablement plus satisfaite. De plus, ces résultats de calcul permettent de savoir si les exigences du cahier des charges du système sur la fiabilité et/ou la disponibilité d'une propriété structurelle sont respectées pendant le temps de mission du système. Dans le cas où ces exigences ne sont pas respectées, des propositions d'amélioration de la fiabilité et/ou de la disponibilité sont fournies.

Enfin, un ensemble de conclusions permettent de faire la synthèse des résultats présentés dans ce manuscrit. Les originalités de ce travail de thèse sont également énoncées. L'identification des limites de notre travail permet de proposer des perspectives à ce dernier et de nouvelles pistes pour de futurs travaux.

Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes :

- Revue internationale :

RI1 : **Dakil, M.**, Simon, C., et Boukhobza, T. “*Generic methodology for the probabilistic reliability assessment of some structural properties : A graph theoretical approach*”, International Journal of System Science, 2015, DOI : 10.1080/00207721.2013.837540.

RI2 : **Dakil, M.**, Simon, C., et Boukhobza, T. “*Reliability and availability analysis of the structural observability of bilinear systems : A graph-theoretical approach*”, Journal of Risk and Reliability, Volume 228, Issue 3, pp. 218 - 229, June 2014, DOI : 10.1177/1748006X13519620.

RI3 : **Dakil, M.**, Boukhobza, T. et Simon, C. “*Disturbance rejection problem solvability : from structural approach to reliability/availability analysis*”, European Journal of Control, 2014. (en 3^{ème} révision).

- Conférences internationales avec comité de lecture :

CI1 : **Dakil, M.**, Simon, C., et Boukhobza, T. “*Connectivity condition for structural properties using a graph theoretical approach : Probabilistic reliability assessment*”, In proceeding du 5^{me} IFAC SSSC, Grenoble, France, pp. 72-77, 2013.

CI2 : **Dakil, M.**, Simon, C., Boukhobza, T et Join, C. “*Probabilistic reliability assessment of elementary graphical conditions for structured systems : A graph theoretical approach*”, European Control Conference, Strasbourg, France, 2014.

- Conférences nationales avec comité de lecture :

CN1 : **Dakil, M.**, Simon, C., et Boukhobza, T. “*Evaluation probabiliste de la fiabilité de l’observabilité structurelle des systèmes bilinéaires : Approche graphique*”, QUALITA, Compiègne, France, 2013.

Chapitre 1

Méthodes et outils

Pour leur étude, les systèmes complexes peuvent être représentés de différentes manières selon qu'un point de vue évènementiel ou continu est adopté (représentation d'état, grafcet, réseau de Pétri, Bond Graph, etc.). Dans ce travail de thèse, à la jonction entre les systèmes continus et les systèmes à événements discrets, nous nous intéressons à la sûreté de fonctionnement des systèmes continus. La structure d'un système correspond à ses variables et aux relations qui les lient indépendamment des valeurs numériques des paramètres du système. Cette structure peut être représentée par un graphe mettant en évidence les interactions entre les variables du système. Ainsi, le graphe associé à la structure du système permet l'analyse des propriétés du système en se basant sur des critères graphiques.

Ce chapitre a pour objectif d'énoncer les méthodes et outils de base utiles aux développements menés dans le cadre de ce travail de thèse. Ainsi, nous introduisons dans une première partie les outils permettant de représenter un système sous forme de graphes orientés et bipartis (Boukhobza, 2012; Dion et al., 2003; Reinschke and Wiedemann, 1997). Nous nous intéressons à 3 types de systèmes qui seront utilisés tout au long du manuscrit.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, les deux paramètres de la sûreté de fonctionnement que sont la fiabilité et la disponibilité sont rappelés. Ces deux paramètres sont très utilisés pour l'étude et la conception des systèmes puisqu'ils permettent la maîtrise de leurs risques et le contrôle de leur fonctionnement inhérents à leur utilisation.

Le calcul de la fiabilité et de la disponibilité peut s'effectuer en utilisant plusieurs outils de la sûreté de fonctionnement. Nous avons privilégié 4 outils de modélisation et de calcul des paramètres de sûreté de fonctionnement qui font l'objet de la troisième section de ce chapitre.

1.1 Représentations graphiques d'un système structuré

Les systèmes sont de plus en plus performants et complexes pour satisfaire les différents besoins de la société moderne. Ils doivent répondre à des critères de sûreté de fonctionnement, de performance, de coût, de qualité de produits ou service, etc.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à l'étude des propriétés des systèmes (observabilité, commandabilité, rejet de perturbations, etc.). Les recherches ont montré que les propriétés les plus importantes d'un système dépendent essentiellement de sa structure (Willems, 1986). Aussi, notre étude se concentre sur les propriétés structurelles des systèmes structurés.

Afin de pouvoir représenter graphiquement la structure d'un système, nous faisons appel à des graphes orientés. Ces graphes contiennent toute l'information du modèle et permettent une analyse plus efficace et de moindre complexité qu'en utilisant des équations d'état. De plus, cette représentation graphique permet la visualisation simple et intuitive de certaines propriétés structurelles du système représenté.

L'objectif principal de cette section est de présenter deux types usuels de représentations graphiques pour les systèmes structurés : le graphe orienté et le graphe biparti. Des définitions et notations relatives à ces deux représentations graphiques utilisées dans la suite du manuscrit sont également introduites.

1.1.1 Graphe orienté

Un système structuré noté Σ peut être associé à un graphe orienté noté $\mathcal{G}(\Sigma)$. Ce graphe orienté est composé de deux ensembles finis non vides. Le premier est un ensemble noté \mathcal{V} contenant les sommets. Le deuxième est un ensemble noté \mathcal{E} contenant des couples ordonnés de sommets appelés arcs. L'ensemble des sommets \mathcal{V} est associé aux variables d'état, d'entrée, de sortie, de perturbation, de défaut du système, etc. L'ensemble des arcs \mathcal{E} représente l'existence de relations causales entre les variables du système. Plus précisément, pour deux sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j appartenant à l'ensemble \mathcal{V} , un arc orienté allant de \mathbf{v}_i vers \mathbf{v}_j , et noté $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$, signifie que la variable associée au sommet \mathbf{v}_i affecte la variation de la variable associée au sommet \mathbf{v}_j .

Tout modèle d'état associé à un système structuré linéaire, bilinéaire ou linéaire à commutations correspond aux variables du système et de matrices dites structurées composées d'éléments nuls et d'éléments non nuls indépendants notés α_i avec $i = 1, \dots, h$. Les variables d'un système sont généralement les vecteurs d'état $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, d'entrée (les commandes) $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ et de sortie (les mesures) $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T \in \mathbb{R}^p$. Si tous les paramètres α_i sont fixés numériquement, nous obtenons une réalisation du système structuré Σ_α . Plus précisément, la réalisation de Σ_α est un système Σ ayant la même structure que Σ_α .

Nous considérons qu'une propriété structurelle (van der Woude, 1999) est génériquement vérifiée si elle est vérifiée pour presque toutes les réalisations du système structuré Σ_α exceptées pour quelques particularités numériques.

Les vecteurs de variables $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ sont associés respectivement aux ensembles de sommets dans le graphe orienté $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ et $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ tel que $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{Y}$. Les paramètres α_i sont représentés graphiquement par des arcs appartenant à l'ensemble \mathcal{E} dans le graphe orienté.

Remarque 1 *Les variables de perturbations ou de défauts additifs peuvent aussi être représentées dans le graphe orienté par des sommets de la même façon que les variables d'état,*

d'entrée et de sortie.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons principalement à 3 types de systèmes, les systèmes structurés linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations. La représentation graphique par un graphe orienté est décrite pour chacun d'entre eux.

1.1.1.1 Cas des systèmes linéaires

Considérons un système linéaire structuré ayant la représentation d'état suivante :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

$x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ représentent respectivement les relations entre les variables d'état, entre les variables d'état et les entrées, entre les sorties et les variables d'état et, entre les sorties et les entrées.

Le graphe orienté associé à un système linéaire est constitué de l'ensemble de sommets $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{Y}$ et de l'ensemble d'arcs $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A \cup \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_C \cup \mathcal{E}_D$, avec $\mathcal{E}_A = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) | A(i, j) \neq 0\}$, $\mathcal{E}_B = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i) | B(i, j) \neq 0\}$, $\mathcal{E}_C = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) | C(i, j) \neq 0\}$ et $\mathcal{E}_D = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_i) | D(i, j) \neq 0\}$.

Exemple 1 Soit un système linéaire structuré de la forme (1.1), défini par ses matrices structurées :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & \alpha_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{15} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{18} & 0 & \alpha_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{20} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

ou, de façon équivalente, par ses équations d'état :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_{11} u_1 & ; \quad y_1 = \alpha_{16} x_1 + \alpha_{21} u_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_5 & ; \quad y_2 = \alpha_{17} x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_4 & ; \quad y_3 = \alpha_{18} x_5 + \alpha_{19} x_7 \\ \dot{x}_4 = \alpha_{12} u_2 & ; \quad y_4 = \alpha_{20} x_8 + \alpha_{22} u_3 \\ \dot{x}_5 = \alpha_7 x_5 + \alpha_8 x_6 & \\ \dot{x}_6 = \alpha_{13} u_2 + \alpha_{14} u_3 & \\ \dot{x}_7 = \alpha_9 x_8 & \\ \dot{x}_8 = \alpha_{10} x_6 + \alpha_{15} u_3 & \end{array} \right.$$

Le graphe orienté associé à ce système linéaire est donné à la Figure 1.1.

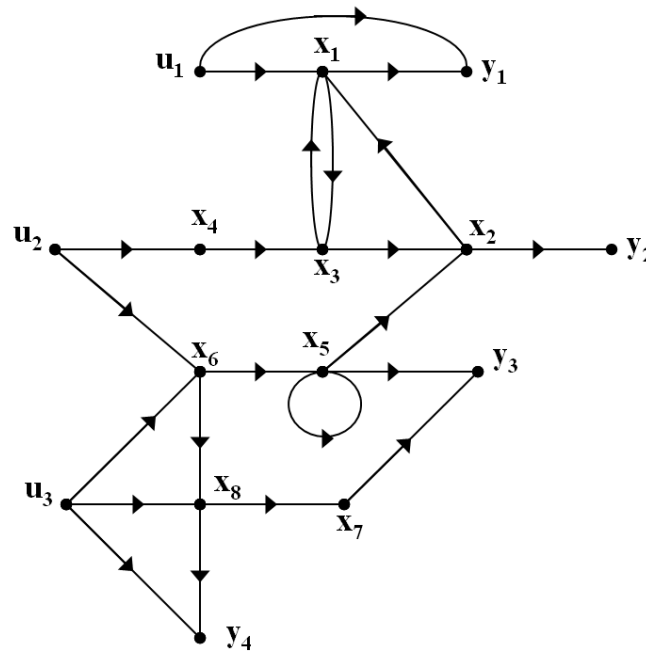


FIGURE 1.1 – Graphe orienté de l'Exemple 1

1.1.1.2 Cas des systèmes bilinéaires

Considérons un système bilinéaire structuré ayant la représentation d'état suivante :

$$\Sigma_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x(t) + B u(t) \\ y(t) = C_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) C_i x(t) + D u(t) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Les matrices $B, D, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ pour $i = 0, \dots, m$ sont des matrices de dimensions appropriées où m représente le nombre d'entrées du système. Le graphe orienté associé à ce système bilinéaire est constitué de l'ensemble de sommets $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{U}$ et de l'ensemble d'arcs $\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_D \cup \left(\bigcup_{i=0}^m \mathcal{E}_{A_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^m \mathcal{E}_{C_i} \right)$.

Chaque arc appartenant à \mathcal{E}_{A_i} et \mathcal{E}_{C_i} pour $i = 0, \dots, m$ est associé à un indice u_i afin de préserver l'information sur la correspondance des arcs avec les matrices A_i ou C_i . Les indices u_i sont associés aux entrées du système et représentent ses actionneurs. Les arcs relatifs aux matrices A_0 et C_0 ne sont pas associées à des actionneurs et représente les relations directes entre les variables d'état et, les variables d'état et les variables de sortie. Pour différencier ces arcs relatifs aux matrices A_0 et C_0 ainsi que ceux relatifs aux matrices B et D par rapport aux autres, nous leur associons les indices u_0 .

Pour les systèmes bilinéaires, nous utilisons pour les arcs du graphe orienté la même notation que dans (Kaufmann et al., 1975) : les arcs ayant l'indice u_i sont notés $(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_j)_{u_i}$. Les ensembles d'arcs sont donc donnés par : $\mathcal{E}_B = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_\ell)_{u_0} | B(\ell, j) \neq 0\}$, $\mathcal{E}_D = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_\ell)_{u_0} | D(\ell, j) \neq 0\}$, $\mathcal{E}_{A_i} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_\ell)_{u_i} | A_i(\ell, j) \neq 0\}$ et $\mathcal{E}_{C_i} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_\ell)_{u_i} | C_i(\ell, j) \neq 0\}$ pour $i = 0, \dots, m$.

Exemple 2 *Considérons un système bilinéaire sous la forme (1.2), défini par ses équations d'état :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_{10} u_2 x_1 + \alpha_{19} u_2 & ; \quad y_1 = \alpha_{16} x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_{11} u_2 x_1 + \alpha_{12} u_2 x_6 & ; \quad y_2 = \alpha_{17} x_3 \\ \dot{x}_3 = \alpha_4 u_1 x_2 + \alpha_{13} u_2 x_2 + \alpha_{14} u_2 x_4 & ; \quad y_3 = \alpha_{18} x_8 + \alpha_{22} u_1 \\ \dot{x}_4 = \alpha_5 u_1 x_5 + \alpha_6 u_1 x_8 & \\ \dot{x}_5 = \alpha_2 x_6 + \alpha_3 x_7 + \alpha_7 u_1 x_4 & \\ \dot{x}_6 = \alpha_{20} u_2 & \\ \dot{x}_7 = 0 & \\ \dot{x}_8 = \alpha_8 u_1 x_5 + \alpha_9 u_1 x_7 + \alpha_{15} u_2 x_5 + \alpha_{21} u_1 & \end{array} \right.$$

ou par ses matrices structurées :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 & 0 & \alpha_9 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{13} & 0 & \alpha_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{18} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{19} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{20} \\ 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe orienté associé à ce système bilinéaire est donné à la Figure 1.2.

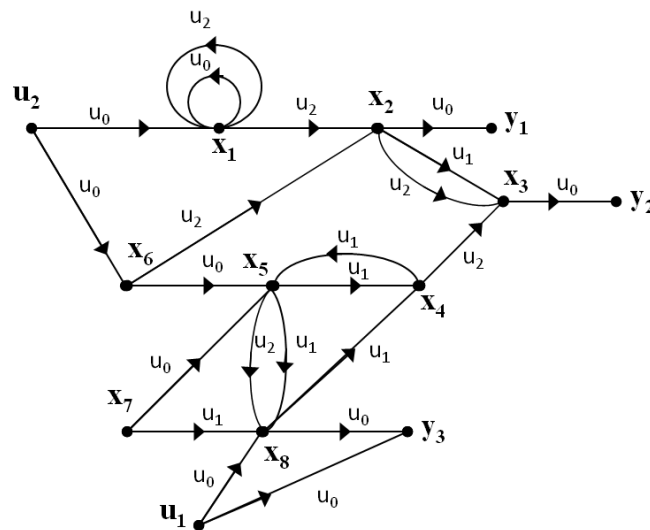


FIGURE 1.2 – Graphe orienté pour l'Exemple 2

Dans ce graphe orienté associé à un système bilinéaire, il est possible d'avoir plusieurs arcs $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ entre deux mêmes sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j . Ces arcs sont différenciés par les indices u_i . Ce type de graphe est dit coloré puisque ses arcs peuvent avoir les couleurs u_0, u_1, \dots, u_m .

Dans cet exemple, nous avons les 3 couleurs u_0, u_1 et u_2 . Nous rappelons que les arcs relatifs aux matrices A_0 et C_0 ne sont pas associés à des actionneurs et ils sont différenciés des autres par des indices u_0 .

1.1.1.3 Cas des systèmes linéaires à commutations

Considérons un système linéaire à commutations ayant la représentation d'état suivante :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{r(t)}x(t) + B_{r(t)}u(t) \\ y(t) = C_{r(t)}x(t) + D_{r(t)}u(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Les éléments des matrices $A_r(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_r(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_r(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D_r(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ peuvent changer en fonction de la variable $r(t)$ (ou signal de commutation) du mode discret Q du système défini par $r(t) : [0, \infty) \rightarrow Q = \{1, \dots, Z\}$. Un système linéaire à commutations combine une dynamique événementielle et une dynamique temporelle.

Comme dans (Babaali and Pappas, 2005), le signal $r(t)$ est continu et seul un nombre fini de commutations peut se produire.

Considérons un système linéaire à commutations pouvant admettre deux modes de commutations q tels que $q \in \{1, 2\}$. Pour chacun de ces deux modes, il n'est pas réaliste de supposer que tous les paramètres α_i de A_{q_1} , B_{q_1} , C_{q_1} et D_{q_1} sont complètement indépendants de ceux de A_{q_2} , B_{q_2} , C_{q_2} et D_{q_2} . Ainsi, chaque matrice $M \in \{A, B, C, D\}$ est décomposée en deux parties afin de déterminer les similitudes et les différences entre les modes. La première partie correspond aux éléments communs aux deux modes, elle est notée M_0 . La deuxième partie est spécifique à chaque mode en plus de la partie commune, elle est notée M_q^s . Ainsi, pour $q \in \{1, 2\}$, nous avons $M_q = M_0 + M_q^s$. Les paramètres des matrices M sont considérés indépendants et chaque élément de M_q est exclusivement dans M_0 ou M_q^s .

Exemple 3 Soit un système linéaire à commutations ayant la forme de l'équation (1.3) et

défini par ses équations d'état comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Mode 1 :} \\ \dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 + \alpha_7 u_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_8 u_1 \\ \dot{x}_4 = \alpha_5 x_3 + \alpha_6 x_5 \\ \dot{x}_5 = \alpha_4 x_3 \\ y_1 = \alpha_{11} x_2 + \alpha_{12} x_4 \\ y_2 = \alpha_{13} x_4 \\ y_3 = \alpha_{14} x_5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Mode 2 :} \\ \dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 + \alpha_7 u_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_8 u_1 + \alpha_9 u_2 \\ \dot{x}_4 = \alpha_5 x_3 + \alpha_6 x_5 \\ \dot{x}_5 = \alpha_{10} u_2 \\ y_1 = \alpha_{11} x_2 + \alpha_{12} x_4 \\ y_2 = \alpha_{13} x_4 \\ y_3 = \alpha_{14} x_5 \end{array} \right.$$

ou par ses matrices structurées :

La partie commune aux deux modes est donnée par les matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_0 = \begin{pmatrix} \alpha_7 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \end{pmatrix} \text{ et } D_0 = 0.$$

Les matrices spécifiques au mode $q = 1$ sont déterminées telles que les éléments de A_1^s sont nuls sauf $A_1^s(5,3) = \alpha_4$ et $B_1^s = C_1^s = D_1^s = 0$. Les matrices spécifiques du mode $q = 2$ sont déterminées telles que $A_2^s = 0$. Les éléments de B_2^s sont nuls exceptés $B_2^s(3,2) = \alpha_9$ et $B_2^s(5,2) = \alpha_{10}$ et $C_2^s = D_2^s = 0$. Les graphes orientés associés aux 2 modes de ce système à commutations sont donnés à la Figure 1.3.

Les 2 graphes de la Figure 1.3 peuvent être représentés par un seul graphe en précisant l'appartenance des paramètres α représentés par des arcs à une matrice M_0 ou M_q^s selon le mode. Les arcs de ce graphe sont associés à des indices $i \in \{0,1,2\}$ où les arcs ayant un indice $i = 0$ sont communs aux 2 modes et relatifs à des paramètres appartenant à M_0 et, les arcs ayant un indice $i = 1$ (resp. $i = 2$) sont relatifs à des paramètres appartenant à la matrice M_1^s (resp. M_2^s). Le graphe résultant est donné à la Figure 1.4.

Puisque les arcs de ce graphe sont associés à des indices i , ce type de graphe est considéré comme étant coloré.

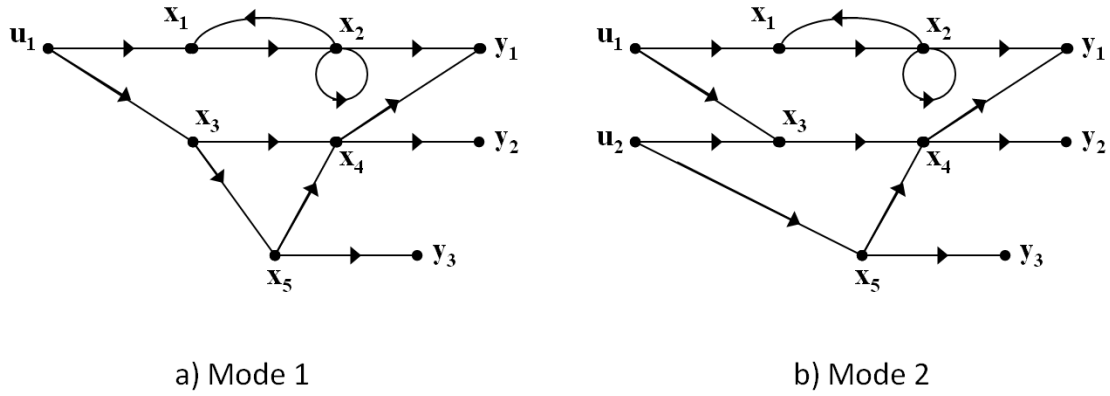


FIGURE 1.3 – Graphes orientés des modes 1 et 2 de l'Exemple 3

Le graphe orienté coloré et associé à ce système linéaire à commutations est constitué de l'ensemble de sommets $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{Y}$ et de l'ensemble d'arcs $\mathcal{E} = \bigcup_{M \in \{A, B, C, D\}} \mathcal{E}_M$ avec $\mathcal{E}_M = \{(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)_t | M_q(i, j) \neq 0\}$ et $M_q = M_0 + M_q^s$.

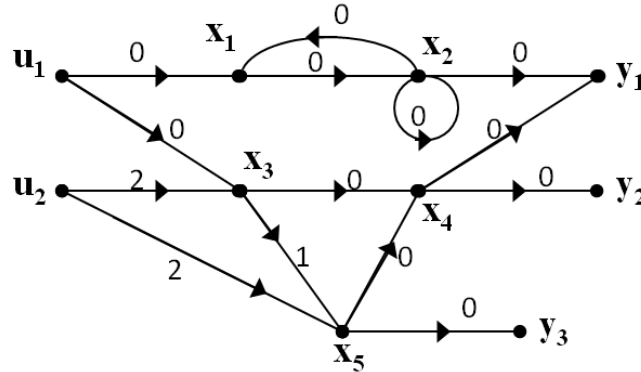


FIGURE 1.4 – Graphe orienté de l'Exemple 3

1.1.2 Graphe biparti

Un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ est un graphe qui est orienté et facilement déduit du graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Le graphe biparti est composé de deux ensembles de sommets disjoints $V^+ \subseteq \mathcal{V}$ et $V^- \subseteq \mathcal{V}$ connectés par des arcs dans \mathcal{E}_B . Il est utilisé pour l'étude de certaines propriétés comme l'observabilité, placement de capteurs, etc (van der Woude and Murota, 1995). Le rang de matrices est égal à la taille du couplage maximal dans le graphe biparti associé à ces matrices. L'utilisation du graphe biparti est donc plus pratique et immédiate

(Poljak, 1989).

Pour les 3 types de systèmes présentés en Section 1.1.1 (systèmes linéaire, bilinéaire et linéaire à commutations), la construction du graphe biparti est détaillée ainsi que les graphes bipartis correspondant aux graphes orientés présentés dans les Exemples 1, 2 et 3 sont donnés.

1.1.2.1 Cas des systèmes linéaires

Pour les systèmes linéaires, l'ensemble V^+ contient tous les sommets ayant des arcs sortants dans le graphe orienté correspondant $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et l'ensemble V^- contient tous les sommets ayant des arcs entrants dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Les arcs dans \mathcal{E}_B relient les sommets des deux ensembles V^+ et V^- . Les éléments de V^+ sont notés $\mathbf{v}_i^+ \in V^+$ et les éléments de V^- sont notés $\mathbf{v}_j^- \in V^-$. Le graphe biparti associé au système linéaire de l'Exemple 1 est donné à la Figure 1.5 avec $V^+ = \{\mathbf{u}_1^+, \mathbf{u}_2^+, \mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+, \mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^+\}$ et $V^- = \{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{x}_6^-, \mathbf{x}_7^-, \mathbf{x}_8^-, \mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \mathbf{y}_3^-, \mathbf{y}_4^-\}$.

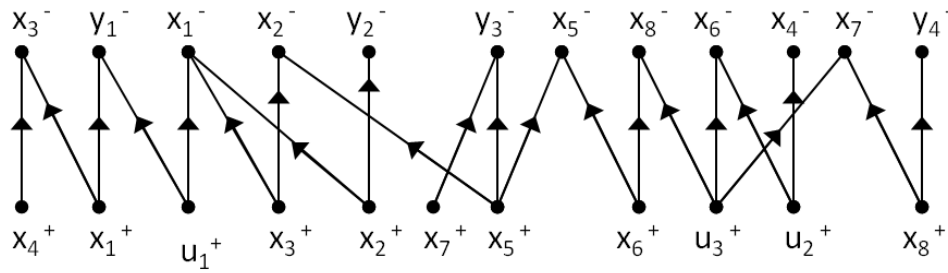


FIGURE 1.5 – Graphe biparti du système de l'Exemple 1

1.1.2.2 Cas des systèmes bilinéaires

Dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ associé à un système bilinéaire, les arcs ayant un indice u_i sont notés $(\mathbf{v}_t^+, \mathbf{v}_j^-)_{u_i}$. Dans le graphe biparti correspondant, l'ensemble V^+ contient tous les sommets ayant des arcs sortants dans le graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ correspondant. Ces sommets sont notés $\mathbf{v}_t^+ \in V^+$. L'ensemble V^- contient tous les sommets ayant des arcs portants un

indice u_i et entrants dans le graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ correspondant. Ces sommets sont notés $\mathbf{v}_{i,j}^- \in V^-$.

Dans ce manuscrit, la notation $\mathbf{v}_{j,i}^-$ des éléments de V^- est utilisée dans $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ afin de différencier les arcs ayant les mêmes sommets de début et de fin mais des indices différents. Dans ce cas, nous pouvons dire que le graphe biparti est décoloré puisque la couleur n'est plus sur les arcs mais sur les sommets $\mathbf{v}_{j,i}^-$ de l'ensemble V^- . Cette décoloration du graphe biparti est utile lors de la DM décomposition (Murota, 1987b) (cf. Annexe A) utilisée dans le chapitre 2.

Le graphe biparti associé au système bilinéaire structuré de l'exemple 2 est donné à la Figure 1.6 avec $V^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+, \mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^+\}$ et $V^- = \{\mathbf{x}_{1,0}^-, \mathbf{x}_{1,2}^-, \mathbf{x}_{2,2}^-, \mathbf{x}_{3,1}^-, \mathbf{x}_{3,2}^-, \mathbf{x}_{4,1}^-, \mathbf{x}_{5,0}^-, \mathbf{x}_{5,1}^-, \mathbf{x}_{8,1}^-, \mathbf{x}_{8,2}^-, \mathbf{x}_{4,1}^-, \mathbf{y}_{3,0}^-, \mathbf{x}_{5,1}^-, \mathbf{x}_{3,2}^-, \mathbf{x}_{3,1}^-, \mathbf{y}_{1,0}^-, \mathbf{y}_{2,0}^-, \mathbf{y}_{3,0}^-\}$.

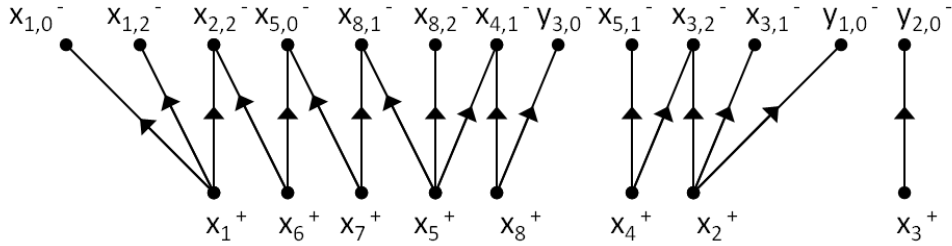


FIGURE 1.6 – Graphe biparti du système de l'Exemple 2

1.1.2.3 Cas des systèmes linéaires à commutations

Pour les systèmes linéaires à commutations, l'ensemble V^+ contient tous les sommets ayant des arcs sortants dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et l'ensemble V^- contient les sommets ayant des arcs entrants dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Les arcs reliant les éléments de l'ensemble V^+ avec ceux de l'ensemble V^- gardent les mêmes indices $i \in \{0, 1, 2\}$ que dans le graphe orienté tel que $i = 0$ est relatif aux arcs communs à tous les modes du système linéaire à commutations et, $i = 1$ ou $i = 2$ est relatif aux arcs spécifiques au mode $q = 1$ ou $q = 2$. Les éléments de V^+ sont notés $\mathbf{v}_i^+ \in V^+$ et les éléments de V^- sont notés $\mathbf{v}_j^- \in V^-$.

Contrairement aux systèmes bilinéaires, le graphe biparti associé à un système linéaire à

commutations n'est pas décoloré et ses arcs gardent leurs indices qui correspondent aux différents modes du système. Compte tenu qu'un système linéaire à commutations ne peut se trouver qu'à un seul mode à la fois, la décoloration du graphe biparti n'est pas nécessaire et le système est traité séparément en fonction du mode.

Le graphe biparti associé au système linéaire à commutations de l'Exemple 3 est donné à la Figure 1.7 avec $V^+ = \{\mathbf{u}_1^+, \mathbf{u}_2^+, \mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+\}$ et $V^- = \{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \mathbf{y}_3^-\}$.

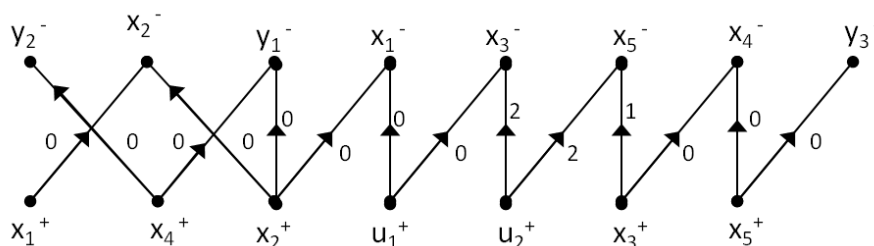


FIGURE 1.7 – Graphe biparti du système de l'Exemple 3

Remarque 2 *Les graphes orientés associés à un systèmes structurés sont orientés et cycliques. Tandis que les graphes biparties sont orientés et acycliques.*

1.1.3 Définitions et notations

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques définitions et notations pour les graphes orientés et bipartis utiles aux analyses présentées lors des chapitres suivants.

Plusieurs définitions relatives à l'étude graphique des systèmes ont été utilisées dans la littérature (Boukhobza, 2010; Commault and Dion, 2013; Svaricek, 1993; van der Woude, 1991) :

- Dans un graphe orienté, deux arcs sont disjoints s'ils n'ont aucun sommet commun.
- Deux arcs $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ et $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_t)$ sont v -disjoints si leurs sommets de début et de fin sont distincts *i.e.* $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_k$ et $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{v}_t$.
- k arcs sont v -disjoints (resp. disjoints) s'ils sont mutuellement v -disjoints (resp. disjoints).

- Un chemin p qui couvre les sommets $\mathbf{v}_{r_0}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}$ est noté $p = \mathbf{v}_{r_0} \rightarrow \mathbf{v}_{r_1} \dots \rightarrow \mathbf{v}_{r_i}$ où pour $j = 0, 1, \dots, i-1$, $(\mathbf{v}_{r_j}, \mathbf{v}_{r_{j+1}}) \in \mathcal{E}$.
Un chemin est dit “simple” s’il ne passe pas plus d’une fois par un même sommet.
- Un cycle est un chemin de la forme $\mathbf{v}_{r_0} \rightarrow \mathbf{v}_{r_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_{r_i} \rightarrow \mathbf{v}_{r_0}$, où tous les sommets $\mathbf{v}_{r_0}, \mathbf{v}_{r_1}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}$ sont distincts.
- Des chemins sont disjoints s’ils n’ont aucun sommet commun.
- Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux sous-ensembles de sommets de \mathcal{V} . Un chemin p est dit “chemin $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ ” si son sommet de début est dans \mathcal{V}_1 et son sommet de fin est dans \mathcal{V}_2 . De plus, si les seuls sommets de p appartenant à $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ sont ses sommets de début et de fin, alors p est dit “chemin $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ direct”.
- $\mathcal{P}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est l’ensemble de tous les chemins simples et directs $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ qui connectent chaque élément \mathbf{v}_i de \mathcal{V}_1 à au moins un élément \mathbf{v}_j de \mathcal{V}_2 .
- Un chemin p ayant \mathbf{v}_{r_0} comme premier sommet (resp. \mathbf{v}_{r_i} comme dernier sommet) est dit $\{\mathbf{v}_{r_0}\}$ -racine (resp. $\{\mathbf{v}_{r_i}\}$ -feuille).
- $Succ(\mathcal{V}_1)$ est l’ensemble des sommets \mathbf{v}_j successeurs des $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_1$, *i.e.* il existe un sommet $\mathbf{v}_j \in Succ(\mathcal{V}_1)$ tel qu’il y a un chemin $\{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\}$. De plus, l’ensemble $Succ_I(\mathcal{V}_1)$ regroupe les successeurs immédiats de \mathcal{V}_1 , *i.e.* il existe un arc $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ tel que $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_1$ et $\mathbf{v}_j \in Succ_I(\mathcal{V}_1)$.
- $Pred(\mathcal{V}_1)$ est l’ensemble des sommets \mathbf{v}_i prédécesseurs des $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_1$, *i.e.* il existe un chemin de $\mathbf{v}_i \in Pred(\mathcal{V}_1)$ à $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_1$.
- Un ensemble de k chemins disjoints $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ forme un lien $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$. Les liens consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens maximaux. La taille d’un lien est le nombre de ses chemins.
- $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ représente le nombre de chemins dans un lien $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ maximal ou autrement dit le nombre maximal de chemins disjoints partant de \mathcal{V}_1 et arrivant à \mathcal{V}_2 .

- L'ensemble de sommets noté $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ regroupe les sommets contenus dans tous les liens $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ maximaux. Ces sommets sont dits essentiels dans les liens $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ maximaux.
- $\theta(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est le nombre maximal d'arcs v -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .
- $\gamma(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ caractérise le nombre minimal de sommets couverts par un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal.
- $card(\mathcal{V}_1)$ caractérise la cardinalité de l'ensemble \mathcal{V}_1 *i.e.* le nombre d'éléments inclus dans cet ensemble \mathcal{V}_1 .
- Dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, deux sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont dits fortement connectés s'il existe un chemin de \mathbf{v}_i à \mathbf{v}_j et un chemin de \mathbf{v}_j à \mathbf{v}_i . La relation "est fortement connecté à" est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de cette relation est dite "composante fortement connexe" de $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et, est notée $CFC(\mathbf{v}_i)$ (Murota, 1987a). Ces composantes peuvent être ordonnées en utilisant une relation d'ordre partiel " \preceq " définie entre deux composantes fortement connexes $CFC(\mathbf{v}_i)$ et $CFC(\mathbf{v}_j)$ comme $CFC(\mathbf{v}_i) \preceq CFC(\mathbf{v}_j)$ s'il existe un chemin d'un élément de $CFC(\mathbf{v}_j)$ vers un élément de $CFC(\mathbf{v}_i)$.
- Un couplage dans un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ est un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ tels que tous les arcs de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ sont disjoints. Un couplage est dit complet si sa cardinalité est égale à $card(V^+)$ ou $card(V^-)$ selon les besoins de l'étude. Par exemple, pour l'étude de l'observabilité (resp. la commandabilité), un couplage complet est égal à $card(V^+)$ (resp. $card(V^-)$).
- Un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ peut être décomposé en composantes irréductibles et uniques partiellement ordonnées en utilisant la décomposition de Dulmage-Mendelsohn (Dulmage and Mendelsohn, 1958; Murota, 1987a) présentée en Annexe A.

Dans ce travail de thèse, d'autres définitions liées à la représentation graphique des systèmes ont été développées. Elles sont présentées ci-dessous.

- Le nombre d'arcs dans un chemin p est appelé la longueur de ce chemin et est noté $\ell(p)$.
- $\Psi(p)$ représente l'ensemble des sommets couverts par p .
- $\Upsilon(p)$ est l'ensemble des arcs dans \mathcal{E} couverts par le chemin p .
- $\mathbf{IP}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_0)$ représente l'ensemble des chemins simples \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 couvrant uniquement des sommets de l'ensemble \mathcal{V}_0 .
- L'ensemble des arcs non disjoints avec un arc $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)$ est noté $\mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)}$.
- Nous considérons que tous les chemins et tous les arcs sont associés à des valeurs booléennes qui correspondent à leur état de validité. Un chemin p_t est associé à une valeur booléenne \mathbf{p}_t et un arc $e_k = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ est associé à une valeur booléenne \mathbf{e}_k . Quand un chemin p_t (resp. un arc e_k) est valide, la variable booléenne \mathbf{p}_t (resp. \mathbf{e}_k) vaut “vrai” et elle vaut “faux” dans le cas contraire.
- Un chemin p_t est dit “valide” quand l'ensemble de ses arcs sont valides *i.e.* $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(p_t)} \mathbf{e}_i$. En conséquence, p_t n'est pas “valide” si au moins un de ses arc n'est pas valide *i.e.* $\bar{\mathbf{p}}_t = \bigvee_{e_i \in \Upsilon(p_t)} \bar{\mathbf{e}}_i$.

1.2 Paramètres de la sûreté de fonctionnement étudiés

La sûreté de fonctionnement (*dependability* en anglais) est un ensemble d'outils très importants pour l'étude des systèmes. Il s'agit d'un domaine scientifique transverse qui nécessite une connaissance du système, des conditions d'utilisation, des risques extérieurs, et des architectures fonctionnelle et matérielle. Beaucoup d'avancées en sûreté de fonctionnement sont le fruit du retour d'expériences et des rapports d'analyse d'accidents. La sûreté de fonctionnement consiste à évaluer les risques potentiels, prévoir l'occurrence des défaillances et tenter de minimiser les conséquences des situations catastrophiques lorsqu'elles se présentent. Elle est aussi définie comme un ensemble de caractéristiques qui permet aux utilisateurs du système de placer une confiance justifiée dans le service que ce dernier leur délivre pendant son

utilisation (Villemeur, 1992).

La sûreté de fonctionnement englobe principalement 4 paramètres : la fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité, et la sécurité qui forment le sigle FMDS (ou *RAMS* en anglais). Dans cette section, nous présentons la fiabilité et la disponibilité qui sont deux paramètres importants de la sûreté de fonctionnement et qui sont traitées dans ce travail de thèse.

1.2.1 Fiabilité

1.2.1.1 Définition

D'après la norme AFNOR¹ (AFNOR, 1977), la fiabilité (*Reliability* en anglais) est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise ou à satisfaire les besoins des utilisateurs dans des conditions de fonctionnement données et pendant une durée donnée.

La fiabilité notée $\mathbf{R}(t)$ est exprimée par la probabilité P_r que le système accomplisse sa fonction requise dans les conditions d'utilisation et pour un intervalle de temps $[0, T]$ déterminé.

Quand un système est au début de sa vie, sa fiabilité est proche de 1. Cette fiabilité diminue en fonction du temps jusqu'à ce qu'elle soit proche de 0 et le système probablement non fonctionnel (O'Connor, 2002).

D'autres fonctions peuvent être déterminées à partir de $\mathbf{R}(t)$, par exemple $\mathbf{F}(t) = 1 - \mathbf{R}(t)$. Il s'agit de la fonction complémentaire de la fiabilité ou "la défiabilité" définie par la probabilité que le système ou le composant soit défaillant pendant un intervalle de temps $[0, T]$ donné (Pagès and Gondran, 1980).

L'intervalle de temps $[0, T]$ est souvent associé au temps de mission du système pendant lequel ce dernier doit accomplir sa mission d'une manière satisfaisante. Pour le calcul de la fiabilité, seules les défaillances des composants, des sous-systèmes ou du système sont considérées. La notion de réparation n'est pas prise en compte dans le calcul de la fiabilité.

1. AFNOR : Association française de normalisation

Ainsi, dans un système non réparable **où la maintenance des composants défaillants en mission est impossible** (exemple : avion, sous-marin, satellite, etc.), le calcul de la fiabilité est utilisé pour évaluer la probabilité de défaillance du système en fonction de celle de ses composants (Al-Garni et al., 1997).

1.2.1.2 Hypothèses pour le calcul de la fiabilité

Pour l'étude de la fiabilité dans ce travail, nous considérons cinq hypothèses.

H₁ : Nous considérons qu'un système ou un composant ne peut avoir que deux états de fonctionnement possibles : l'état de bon fonctionnement noté "*Up*" (ou 1) et l'état de défaillance noté "*Down*" (ou 0). Dans ce travail de thèse, nous ne considérons pas les systèmes multi-états où ces derniers possèdent plusieurs niveaux de performances ou les composants avec plusieurs modes de panne (Lisnianski and Levitin, 2003; Yingkui and Jing, 2012).

H₂ : Cette hypothèse concerne les facteurs pris en compte lors du calcul de la fiabilité. Dans cette étude, nous supposons que le calcul de la fiabilité ne dépend que de la fiabilité des composants du système. Les facteurs humains, environnementaux ou autres n'ont pas d'influence sur la fiabilité du système. Nous notons donc pour $i = 1, \dots, N$, $\mathbf{R}(t) = f(\mathbf{R}_{c_i}(t))$ tel que $\mathbf{R}(t)$ représente la fiabilité du système et $\mathbf{R}_{c_i}(t)$ correspond à la fiabilité de ses composants c_i (Villemeur, 1992; Dhillon, 1999).

H₃ : La troisième hypothèse pour la fiabilité porte sur les événements (défaillances) concernant les composants du système. Ces événements sur les composants sont considérés indépendants les uns des autres. Les composants peuvent tomber en panne indépendamment (Kuo and Zhu, 2012). Les défaillances sur les composants du système sont aléatoires et imprévisibles. Par ailleurs, l'occurrence de défaillances sur un composant c_i est obtenue à l'aide du taux de défaillance instantané noté $\lambda_i(t)$. Ce taux peut être constant ou variable en fonction de la loi de probabilité de défaillance utilisée pour le calcul de la fiabilité (cf. Annexe B).

\mathbf{H}_4 : Concernant les défaillances des composants du système et contrairement à d'autres travaux (Maza et al., 2012; Wang et al., 2012a,b), tous les composants peuvent tomber en panne. Dans notre étude, les composants externes, *i.e.* les capteurs et les actionneurs ainsi que les composants internes (composants mécaniques, électriques, etc) peuvent impacter le calcul de la fiabilité quand ils sont défaillants.

\mathbf{H}_5 : Le temps de détection des défaillances des composants ainsi que celui de défaillance du système sont considérés négligeables par rapport à la dynamique du système. Nous considérons donc que le système ne peut pas se trouver en état de défaillance non détecté (Lasnier, 2011).

Remarque 3 *Ces hypothèses permettent de clairement borner la validité de notre travail. Si elles peuvent paraître restrictives, elles sont classiques et implicites dans de nombreux travaux.*

1.2.1.3 La fiabilité des propriétés structurelles

Les propriétés structurelles ainsi que la fiabilité d'un système dépendent de son architecture fonctionnelle interne et de ses composants. Dans ce travail, la définition de la fiabilité est étendue au maintien de la validité des propriétés structurelles d'un système structuré. Nous parlons donc de la fiabilité de l'observabilité, de la commandabilité, etc. Cette fiabilité correspond à la probabilité que les propriétés structurelles restent vérifiées pendant le temps de mission du système étudié. Ainsi, l'état de vérification d'une propriété structurelle peut être exprimé en fonction de l'état de fonctionnement de certains composants du système. Nous notons pour $i = 1, \dots, N$, $\mathbf{R}(t) = f(\mathbf{R}_{c_i}(t))$ tel que $\mathbf{R}(t)$ représente la fiabilité d'une propriété structurelle et $\mathbf{R}_{c_i}(t)$ correspond à la fiabilité des composants c_i du système. Par exemple, l'observabilité d'un système peut devenir non vérifiée si un ou plusieurs capteurs sont défaillants, ou la commandabilité d'un système peut être non vérifiée si un ou plusieurs actionneurs sont défaillants. De plus, une panne au niveau d'un composant interne peut également causer la perte d'une ou plusieurs propriétés structurelles.

1.2.2 Disponibilité

1.2.2.1 Définition

La disponibilité (*availability* en anglais) est un paramètre important pour l'étude des systèmes. Elle est définie par l'aptitude d'un système ou d'un composant à être en état d'accomplir sa fonction dans des conditions données, à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné $[T_1, T_2]$. La disponibilité est notée $\mathbf{A}(t)$. Elle est exprimée par la probabilité que le système remplisse sa fonction requise dans certaines conditions (AFNOR, 1977).

Contrairement à la fiabilité, le calcul de la disponibilité n'est pas limité aux systèmes non réparables. La réparation des composants défectueux est possible. Le calcul de la disponibilité peut donc s'effectuer pour des systèmes réparables pendant la durée de leur mission.

Pendant les premières heures de fonctionnement du système, sa disponibilité est proche de 1. En fonction de la fréquence des défaillances et celle des réparations et contrairement à la fiabilité, la disponibilité ne tend pas nécessairement vers 0 puisque les composants qui tombent en panne peuvent être réparés. Après quelques heures de fonctionnement, la disponibilité peut donc rester constante. Cette valeur est appelée la disponibilité asymptotique (Bahri et al., 2009).

Remarque 4 *Le calcul de la disponibilité des systèmes non réparables est équivalent au calcul de leur fiabilité.*

1.2.2.2 Hypothèses pour le calcul de la disponibilité

Pour l'étude de la disponibilité, nous considérons les mêmes cinq hypothèses que pour l'étude de la fiabilité. L'étude de la disponibilité d'un système respecte l'hypothèse d'état binaire (cf. \mathbf{H}_1) et ne dépend que de la disponibilité de ses composants (cf. \mathbf{H}_2). Les

événements sur les composants du système sont considérés indépendants (cf. \mathbf{H}_3). Les composants internes ainsi que les composants externes du système sont susceptibles de tomber en panne (cf. \mathbf{H}_4). Le temps de détection de défaillances est considéré négligeable (cf. \mathbf{H}_5).

En plus des cinq hypothèses considérées pour le calcul de la fiabilité, nous considérons une hypothèse \mathbf{H}_6 concernant la réparation et le remplacement des composants défaillants.

\mathbf{H}_6 : Dans le cas de la défaillance des composants du système, nous considérons que pour chaque composant défaillant devant être remplacé, le service de maintenance dispose des pièces de rechange nécessaires en stock. Tous les éléments logistiques sont disponibles pour tout remplacement ou réparation immédiate des composants défaillants.

Nous considérons aussi que pour toute réparation de composant défaillant, une équipe de maintenance est disponible afin d'effectuer les réparations ou les changements nécessaires pour assurer le bon fonctionnement des composants défaillants (Bargallo et al., 2013).

À l'instar des hypothèses pour la fiabilité, les hypothèses posées pour la disponibilité peuvent paraître restrictives mais elles sont implicites dans de nombreux travaux.

1.2.2.3 La disponibilité des propriétés structurelles

Comme pour la fiabilité, la disponibilité et les propriétés structurelles dépendent de la structure du système. La définition de la disponibilité est donc étendue pour couvrir la validité des propriétés structurelles du système. La disponibilité d'une propriété structurelle correspond à la probabilité que le système étudié vérifie cette propriété structurelle pendant un intervalle de temps donné.

En effet, dans ce manuscrit, la disponibilité des propriétés structurelles est calculée en se basant sur l'état de fonctionnement des composants du système. Elle s'exprime en fonction des taux de défaillance et de réparation des composants du système (Ford et al., 2010).

1.3 Quelques outils de la sûreté de fonctionnement

En sûreté de fonctionnement, plusieurs outils sont utilisés pour la modélisation des systèmes et le calcul de leur fiabilité et disponibilité. Cette section est dédiée à la présentation des différents outils de modélisation utilisés dans cette thèse. Nous nous sommes focalisés sur les Blocs Diagramme de Fiabilité (BDF) (Staley and Sutcliffe, 1974), les Réseaux de fiabilité de Kaufmann (Kaufmann et al., 1975), des Chaînes de Markov (Prowell and Poore, 2004), des Réseaux Bayésiens (Jensen, 1996) et Réseaux Bayésiens dynamiques (Weber, 2002), qui sont des outils d'évaluation largement utilisés dans le domaine de la sûreté de fonctionnement. Une brève description de chacun de ces outils est fournie.

1.3.1 Blocs diagramme de fiabilité

Les blocs diagramme de fiabilité (BDF) (*RBD : Reliability Block Diagrams* en anglais) sont un outil d'évaluation de la fiabilité reposant sur une représentation graphique du comportement fonctionnel du système.

L'utilisation des BDF consiste en la construction d'un diagramme composé de blocs, chacun d'eux représentant une entité (composant ou sous-système) soumise à des événements indépendants reliés par des arcs non orientés indiquant les relations des entités entre elles afin d'assurer le fonctionnement du système. En considérant les hypothèses \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_3 énoncées dans le paragraphe 1.2.1.2, le comportement des composants est binaire (bon fonctionnement/défaillance) et chaque bloc de ce diagramme est indépendant des autres blocs (Kim, 2011).

Les diagrammes sont composés d'une entrée \mathbf{E} , d'un corps diagrammatique associé aux composants c_i et d'une sortie \mathbf{S} . Des exemples de BDF modélisant des systèmes de composants en série (Figure 1.8.a) et de composants en parallèle (Figure 1.8.b) sont présentés. Pour les systèmes mixtes, les BDF correspondant (Figures 1.8.c et 1.8.d) représentent une combinaison entre les deux représentations série et parallèle.

Le système est considéré comme fonctionnel s'il existe un cheminement du point d'entrée \mathbf{E}

vers le point de sortie **S** passant par des blocs fonctionnels du corps diagrammatique. Si les pannes des composants empêchent tout cheminement, alors le système est défaillant. Dans un BDF, la défaillance d'un composant entraîne l'arrêt du signal au niveau du bloc qui lui est associé.

Le cheminement du point **E** vers le point **S** peut être associé à une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement des composants. Cette expression booléenne est composée de "ET" et "OU" logique et dépend de l'architecture du système *i.e.* les relations entre ses composants. Les règles de cheminement de l'entrée **E** vers la sortie **S** sont les suivantes :

- En série : N composants en série : c_1, c_2, \dots, c_N .

Tous les composants doivent fonctionner pour que le signal de l'entrée **E** passe vers la sortie **S** (Figure 1.8.a). Ceci correspond à un "ET" logique pour une étude fonctionnelle et un "OU" logique pour une étude dysfonctionnelle. Cette configuration correspond à l'équation suivante : $c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_N$.

- En parallèle : N composants en parallèle : c_1, c_2, \dots, c_N .

Il suffit qu'une entité fonctionne pour que le signal de l'entrée **E** passe vers la sortie **S** (Figure 1.8.b). Ceci correspond à un "OU" logique pour une étude fonctionnelle et "ET" logique pour une étude dysfonctionnelle. Cette configuration correspond à l'équation suivante : $c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_N$.

- En parallèle-série : P systèmes en parallèle composés de N éléments c_{ij} en série avec $i = 1, \dots, P$ et $j = 1, \dots, N$ (Figure 1.8.c). Ceci correspond à un "OU" de "ET" pour une étude fonctionnelle et inversement pour une étude dysfonctionnelle. Cette configuration correspond à l'équation suivante : $(c_{11} \wedge \dots \wedge c_{1N}) \vee \dots \vee (c_{P1} \wedge \dots \wedge c_{PN})$.

- En série-parallèle : P systèmes en série composés de N éléments c_{ij} en parallèle avec $i = 1, \dots, P$ et $j = 1, \dots, N$ (Figure 1.8.d). Ceci correspond à un "ET" de "OU" pour une étude fonctionnelle et inversement pour une étude dysfonctionnelle. Cette configuration correspond à l'équation suivante : $(c_{11} \vee \dots \vee c_{1N}) \wedge \dots \wedge (c_{P1} \vee \dots \vee c_{PN})$.

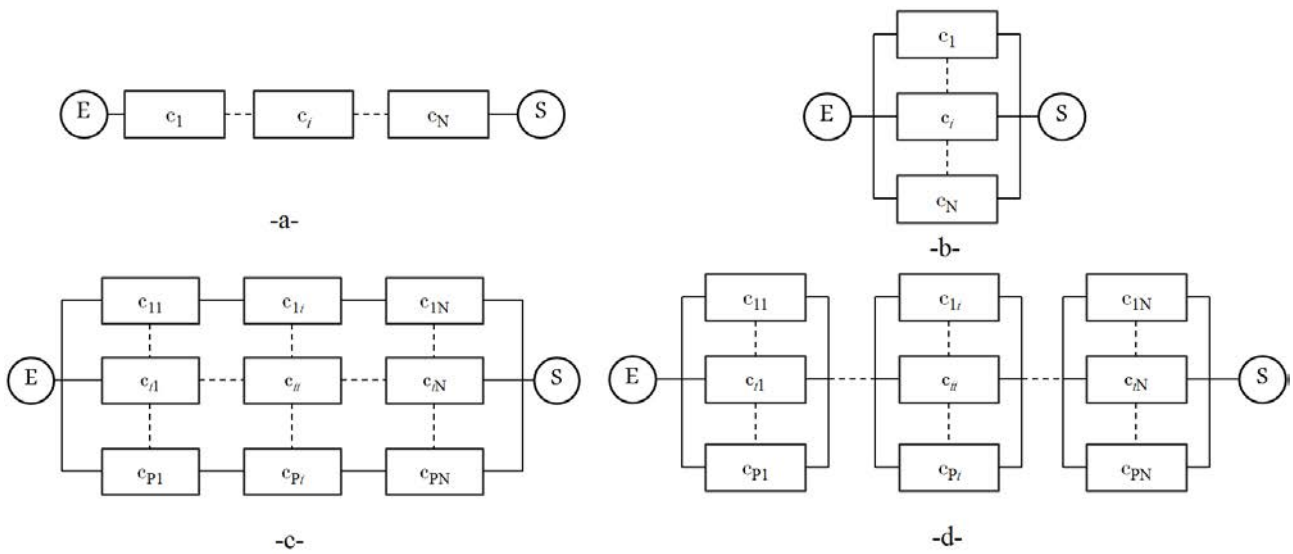


FIGURE 1.8 – Exemples de Blocs Diagrammes de Fiabilité

Les systèmes complexes au sens de la fiabilité, comme le précise Villemeur dans (Villemeur, 1992), ne permettent pas la factorisation des variables. Pour ce type de systèmes, il est possible d'obtenir une représentation graphique par les BDF comme décrit ci-dessus en considérant l'état de fonctionnement de certains composants.

Dans la Figure 1.9 qui montre 2 exemples de systèmes complexes, la complexité est due au composant c_3 . Chacun de ces systèmes peut être décomposé en sous-systèmes suivant 2 événements qui s'excluent mutuellement et qui sont : le composant c_3 est en bon fonctionnement ou défaillant. Ainsi, ces systèmes complexes peuvent être représentés sous forme de BDF correspondant à un montage parallèle, série/parallèle ou parallèle/série en fonction de l'état de fonctionnement du composant c_3 . La complexité est donc réduite grâce à une approche conditionnelle.

Nous nous intéressons, dans ce manuscrit, aux combinaisons des défaillances de composants élémentaires pouvant conduire à la défaillance du système. Ces combinaisons sont appelées "coupes". Les coupes ne contenant aucune autre coupe sont dites "coupes minimales". Tandis que l'ensemble des composants dont le bon fonctionnement est nécessaire au succès de la mission du système sont appelés "chemins de succès". Les chemins de succès ne contenant aucun autre chemin de succès sont dits "chemins de succès minimaux". En utilisant les BDF,

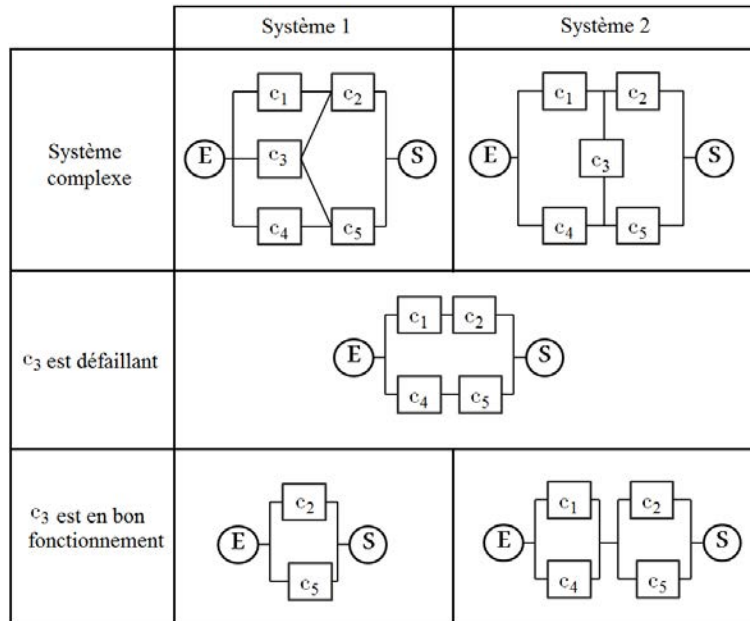


FIGURE 1.9 – Exemples de système complexes

il est possible de déterminer l'ensemble des coupes (minimales) et également les chemins de succès (minimaux) du système.

Les BDF peuvent être utilisés de deux manières :

- L'analyse qualitative (ou booléenne) permet de savoir si le système fonctionne lorsqu'un ou plusieurs composants sont défaillants et ainsi de déterminer les coupes minimales et les chemins de succès minimaux.
- L'analyse quantitative : la fiabilité globale du système peut être déterminée sachant la fiabilité des composants associés aux blocs du diagramme.

Ce type de représentation est ancien, mais il est toujours très utilisé dans le domaine de la sûreté de fonctionnement.

1.3.2 Réseaux de fiabilité de Kaufmann

Les réseaux de fiabilité de Kaufmann représentent un outil intéressant pour calculer la fiabilité des systèmes (Kim, 1972; Misra, 1970). Ils sont utilisés dans l'étude des réseaux de communication ou de distribution d'énergie (Satyanarayana and Chang, 1983). Cette

représentation graphique constitue un outil de modélisation pour de nombreux problèmes où les BDF sont peu appropriés. Les réseaux de fiabilité de Kaufmann peuvent être considérés comme une forme d’extension des BDF. Ainsi, ces réseaux de fiabilité offrent un moyen simple pour traiter la fiabilité des systèmes. Les réseaux de fiabilité permettent de représenter la structure et les connexions dans un système sous forme graphique en exprimant les relations entre les composants.

Un réseau de fiabilité est défini par Kaufmann (Kaufmann et al., 1975) comme un graphe dirigé noté $G = \langle \mathcal{N}, \mathcal{A} \rangle$ composé d’un ensemble de sommets \mathcal{N} et un ensemble d’arcs orientés \mathcal{A} . Les sommets de \mathcal{N} sont reliés entre eux par des arcs de l’ensemble \mathcal{A} notés (N_i, N_j) avec $N_i \in \mathcal{N}$ et $N_j \in \mathcal{N}$. Deux sommets $S \in \mathcal{N}$ et $T \in \mathcal{N}$ sont distingués et appelés respectivement “sommets source” et “sommets terminaison”. S n’ayant que des arcs sortants et T n’ayant que des arcs entrants.

Un réseau de fiabilité de Kaufmann se différencie d’un BDF par ses arcs orientés. Dans un réseau de fiabilité de Kaufmann, les arcs représentent les composants du système étudié et les sommets représentent les connexions entre ces composants. Les arcs de \mathcal{A} sont associés aux composants du système en utilisant une fonction notée Δ . Plusieurs arcs peuvent correspondre à un même composant et il est possible qu’aucun arc ne corresponde à un composant donné.

Il est possible d’avoir, entre certains sommets, non pas un arc (au plus), mais deux ou plusieurs arcs. Le concept correspondant est appelé r -graphe où r est le nombre maximal d’arcs ayant la même extrémité initiale et la même extrémité terminale. Deux sommets de \mathcal{N} peuvent être reliés par $s \leq r$ arcs. Par exemple dans le cas de la redondance, nous pouvons avoir s composants en parallèle assurant la même fonction. Ceci est traduit dans un r -graphe par s arcs reliant les deux mêmes sommets. Ainsi, les r -graphes sont considérés comme une nouvelle représentation reflétant l’architecture fonctionnelle d’un système. Dans un r -graphe, chaque arc (N_i, N_j) de l’ensemble \mathcal{A} est associé à un indice t afin de pouvoir

différencier les r arcs reliant les mêmes sommets N_i et N_j . Les arcs du graphe sont donc notés $(N_i, N_j)_t$.

Un exemple de réseau de fiabilité est donné à la Figure 1.10 où les ensembles \mathcal{N} et \mathcal{A} sont : $\mathcal{N} = \{S, T, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\} = \{(S, N_2)_1, (S, N_3)_1, (N_3, N_4)_1, (N_3, N_4)_2, \dots, (N_5, T)_1, (N_5, T)_2\}$.

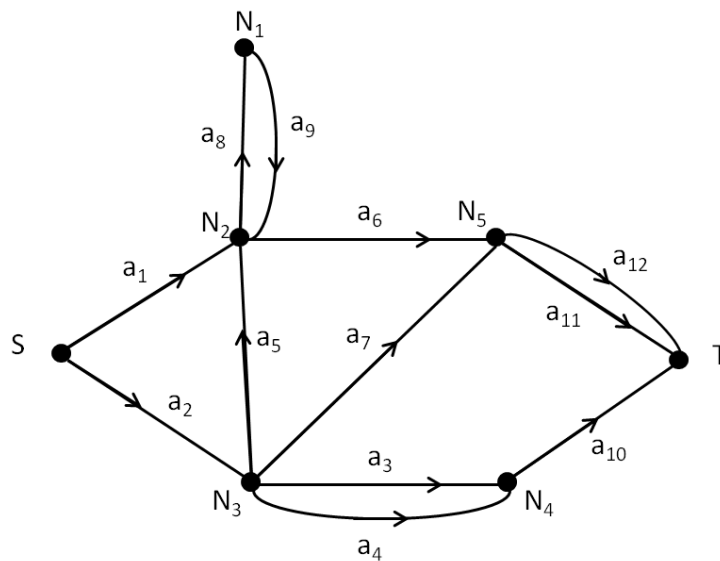


FIGURE 1.10 – Exemple de réseau de fiabilité de Kaufmann

Dans ce type de représentation graphique, le système et ses composants admettent deux états binaires : bon fonctionnement/défaillance (cf. \mathbf{H}_1 du paragraphe 1.2.1.2). Ainsi, A. Kaufmann (Kaufmann et al., 1975) a montré qu'un réseau de fiabilité est une représentation graphique qui caractérise l'état binaire du système en fonction des états binaires de ses composants. Le bon fonctionnement ou la défaillance du système dépend uniquement de l'état de ses N composants (cf. \mathbf{H}_2 du paragraphe 1.2.1.2) en utilisant une "fonction de structure" binaire notée ϕ .

L'état de fonctionnement d'un composant c_i peut être associé à une variable binaire s_i où :

- $s_i = 1$ quand le composant c_i est en bon fonctionnement ;
- $s_i = 0$ quand le composant c_i est défaillant.

L'état de fonctionnement des l composants peut être exprimé par le vecteur des états binaires des composants $\mathcal{S}_l = (s_1, \dots, s_l)$ où s_i ($i = 1, \dots, l$) correspond à l'état de fonctionnement du composant c_i .

L'état de fonctionnement du système est également associé à une variable binaire notée \mathcal{S} . \mathcal{S} est défini par la fonction de structure tel que $\mathcal{S} = \phi(\mathcal{S}_l)$ où :

- $\mathcal{S} = 1$ quand le système est en bon fonctionnement ;
- $\mathcal{S} = 0$ quand le système est défaillant.

Pour un réseau de fiabilité de Kaufmann, 4 configurations d'architecture fonctionnelle de système sont fournies dans la Figure 1.11. Il s'agit de composants montés en série (Figure 1.11.a), montés en parallèle (Figure 1.11.b), montés en série-parallèle (Figure 1.11.c) et montés en parallèle-série (Figure 1.11.d)

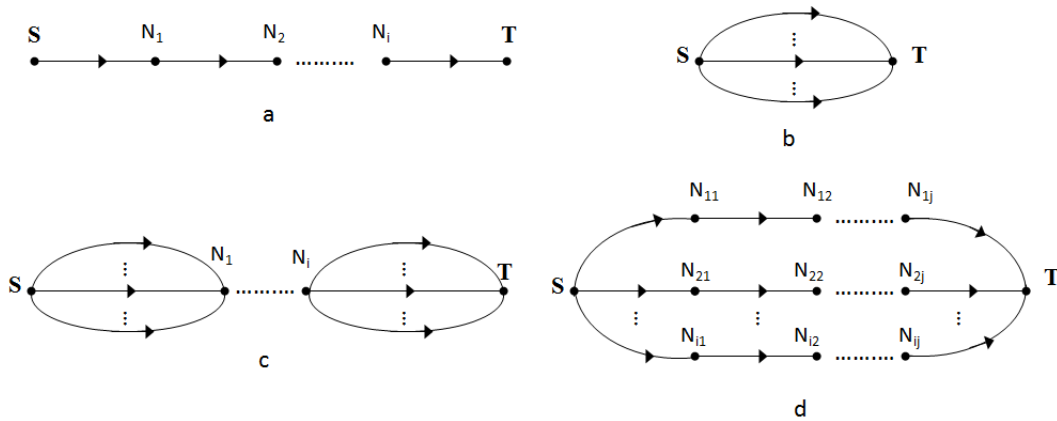


FIGURE 1.11 – Exemples de Réseaux de fiabilité de Kaufmann

Pour ces 4 configurations, la fonction de structure $\mathcal{S} = \phi(\mathcal{S}_h) = \phi(s_1, s_2, \dots, s_h)$ est définie comme suit :

- En série : l composants en série : c_1, c_2, \dots, c_h :

$$\phi(\mathcal{S}_h) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_h = \prod_{i=1}^h s_h$$

- En parallèle : l composants en parallèle : c_1, c_2, \dots, c_h :

$$\phi(\mathcal{S}_h) = 1 - (1 - s_1) \cdot (1 - s_2) \cdot (1 - s_h) = 1 - \prod_{i=1}^h (1 - s_i)$$

- En série-parallèle : p systèmes en série composés de k éléments c_{ij} en parallèle :

$$\phi(\mathcal{S}_h) = \prod_{i=1}^k (1 - \prod_{j=1}^p (1 - s_{ij}))$$

- En parallèle-série : p systèmes en parallèle composés de k éléments c_{ij} en série :

$$\phi(\mathcal{S}_h) = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \prod_{j=1}^p s_{ij})$$

En utilisant la fonction de structure ϕ , l'état de l'expression booléenne est exprimé en fonction de l'état de fonctionnement des composants du système. Ainsi, la fiabilité de la propriété structurelle correspondant à cette expression booléenne est exprimée en fonction de la fiabilité des composants du système.

Avec un tel réseau, il est possible d'énumérer l'ensemble des coupes (minimales) qui représentent un ensemble de composants dont la défaillance peut provoquer la défaillance du système et également les chemins de succès (minimaux) correspondant aux composants dont le bon fonctionnement assure le succès de la mission du système (cf. section 1.3). Grâce à la fonction injective Δ , les coupes ou les chemins de succès ne s'expriment plus en fonction des arcs mais en fonction des composants.

Les réseaux de fiabilité de Kaufmann adoptent le même principe de calcul de fiabilité que celui des BDF. L'avantage qu'ils présentent par rapport aux BDF réside dans le fait qu'ils sont représentés par des graphes dirigés. Il est donc possible de définir le sens de l'acheminement du point S au point T en fonction de l'architecture fonctionnelle du système contrairement aux BDF. A titre d'exemple, les réseaux de fiabilité correspondant aux

systèmes complexes de la Figure 1.9 sont beaucoup moins ambigus que les BDF comme le montre la Figure 1.12 sur un exemple.

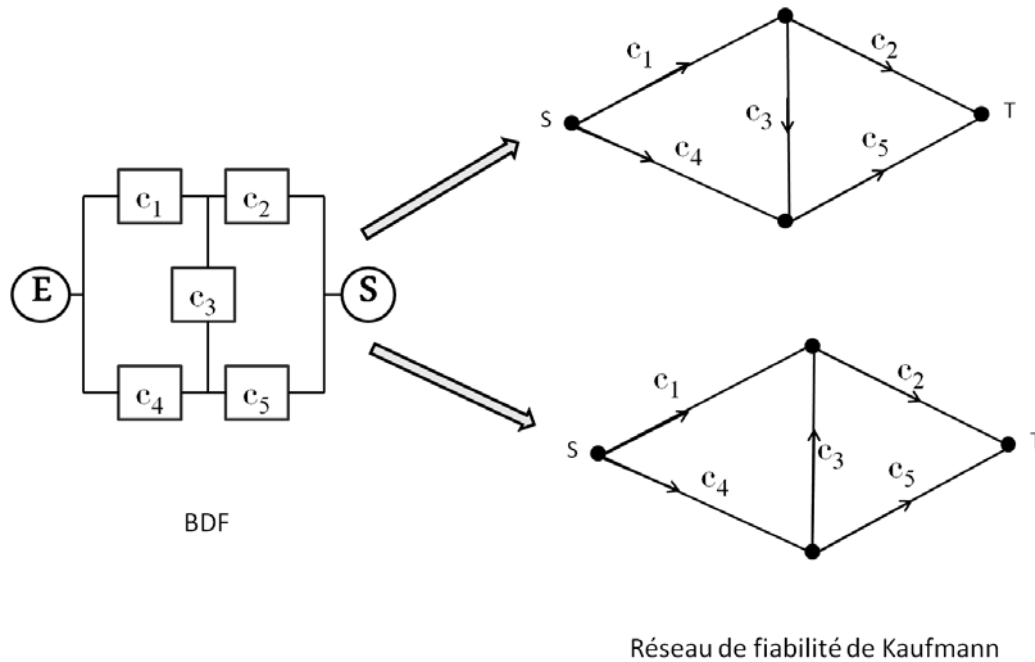


FIGURE 1.12 – BDF/Réseaux de fiabilité de Kaufmann d'un système complexe

1.3.3 Chaînes de Markov

La modélisation par les chaînes de Markov est un outil très utilisé dans l'étude des paramètres de la sûreté de fonctionnement et dans de nombreux domaines scientifiques comme, par exemple, en analyse de données de précipitations, de marché du travail ou de transfert de données dans un réseau (Bui et al., 2010; Fougère and Kamionka, 1992; Lazri et al., 2007). Cet outil fait l'objet aujourd'hui d'une utilisation très répandue.

Les chaînes de Markov sont simples à définir. Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires X_k , dans un espace d'état E , qui permettent de modéliser l'évolution dynamique de l'état d'un système aléatoire *i.e.* X_k représente l'état du système à l'instant k avec $k \geq 0$. Les k variables X_k sont associées à une probabilité notée $P_r(X_0, \dots, X_k)$. Les variables aléatoires sont liées par une dépendance dite Markovienne que l'on peut décrire

intuitivement de la façon suivante : étant donnée une matrice de transition Q sur E tel que pour $P_r(X_0, \dots, X_{k+1}) = P_r(X_0, \dots, X_k) \cdot Q(X_k, X_{k+1})$. L'état futur de la chaîne de Markov dépend donc du passé à travers son état actuel. Autrement dit, il est possible de déterminer $X_{k+q}, \forall q > 1$ sachant X_k .

Les chaînes de Markov sont représentées par un graphe constitué d'un ensemble de sommets et un ensemble d'arcs orientés. Les sommets caractérisent les différents états du système et les arcs orientés relient les sommets. Nous considérons que les états d'une chaîne de Markov correspondent au bon fonctionnement ou la défaillance du système (cf. **H**₁). Considérons par exemple un système contenant deux composants c_1 et c_2 montés en série. Ce système peut admettre jusqu'à $2^2 = 4$ états correspondant à 4 sommets dans la chaîne de Markov. De manière générale, pour n composants, la chaîne de Markov peut admettre jusqu'à 2^n sommets. Ces derniers peuvent correspondre à l'état "Up" (ou 1) ou l'état "Down" (ou 0) du système. L'état du système dépend du vecteur des états binaires des composants noté $V = (c_1, c_2)$. Les arcs dans une chaîne de Markov correspondent à la probabilité que le système passe d'un état à un autre suite à une défaillance ou une réparation de composants.

La chaîne de Markov correspondante à cet exemple est donnée à la Figure 1.13. Dans cette chaîne de Markov, l'arc liant les sommets **1** et **2** qui correspond respectivement à $V_1 = (1, 1)$ et $V_2 = (0, 1)$ représente la probabilité que le système passe de l'état lié au sommet **1** à celui lié au sommet **2**. Cette probabilité est notée p_{12} et représente la probabilité que le composant c_1 tombe en panne. p_{21} correspond à la probabilité que le système passe de l'état du sommet **2** à celui du sommet **1**. Elle caractérise la probabilité que le composant c_1 soit réparé. Un taux de défaillance constant est une hypothèse courante dans l'analyse de la fiabilité et la disponibilité des systèmes basée sur les chaînes de Markov (processus homogènes). Le calcul de la fiabilité est donc basé sur une distribution exponentielle. Dans la Figure 1.13, quand le système est en bon fonctionnement (resp. défaillant), ceci est représenté par \checkmark (resp. \times) dans la chaîne de Markov.

L'inconvénient majeur des chaînes de Markov est l'explosion combinatoire du nombre d'états

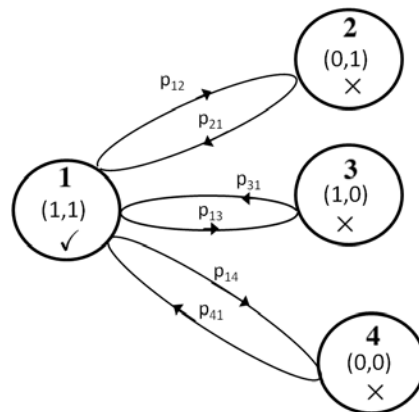


FIGURE 1.13 – Exemple de chaîne de Markov

quand la taille du système, *i.e.* le nombre de ses composants, augmente. Les représentations graphiques des systèmes d'importante dimension sont généralement très grandes, compliquées et difficiles à construire. Dans ce contexte, les constructions automatisées des chaînes de Markov sont préférées.

1.3.4 Réseaux Bayésiens (RB) et Réseaux Bayésiens Dynamiques (RBD)

Les réseaux Bayésiens (RB) constituent un outil efficace utilisé pour la résolution des problèmes de sûreté de fonctionnement (Langseth and Portinale, 2007; Weber et al., 2012). Ils ont été appliqués à la sûreté de fonctionnement depuis la fin des années 90 (Torres-Toledano and Sucar, 1998; Kang and Golay, 1999). Les RB sont des modèles graphiques probabilistes permettant de représenter de façon intuitive la loi jointe d'une suite de variables aléatoires $X = \{X_1, \dots, X_N\}$. Les RB sont intéressants pour modéliser la sûreté de fonctionnement des systèmes complexes car ils permettent une modélisation très flexible et compacte des relations liant les états de fonctionnement des composants aux états de fonctionnement du système. Grâce à ce mécanisme d'inférence (Jensen, 1996), les RB peuvent tenir compte de la connaissance sur l'état de fonctionnement du système et des composants.

Les RB sont représentés sous forme de graphes orientés acycliques (DAG : *Directed*

Acyclic Graphs en anglais). La représentation graphique d'un RB traduit les relations d'(in)dépendance conditionnelle entre les variables *i.e.* la relation de causalité entre ces variables. Ce graphe représente de manière compacte les distributions conjointes de probabilité des variables aléatoires. Il simplifie également la compréhension du modèle puisque les différentes relations d'(in)dépendance entre les variables peuvent être lues directement à partir du DAG.

Les DAG sont définis comme : $DAG = \langle (\mathcal{N}, \mathcal{A}), \mathbb{P} \rangle$. $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ représente la partie graphique où \mathcal{N} est un ensemble de nœuds et \mathcal{A} est un ensemble d'arcs orientés reliant les nœuds. \mathbb{P} représente l'ensemble des distributions de probabilités conditionnelles (CPT : *Conditional Probability Tables*). Les nœuds de l'ensemble \mathcal{N} représentent les variables aléatoires reliées par des arcs orientés qui représentent les influences entre ces nœuds. Puisque le DAG est acyclique, il est commode de classer les nœuds comme nœud parent ou nœud enfant. Un nœud parent est un nœud qui a un ou plusieurs arcs sortants vers d'autres nœuds. Un nœud enfant est un nœud connecté à d'autres nœuds par des arcs entrants. Un nœud sans parent est désigné nœud racine et un nœud sans enfant est désigné nœud terminal. Chaque nœud n_i dans un DAG est associé à une distribution de probabilité marginale $P_r(n_i)$ appartenant à \mathbb{P} et chaque nœud enfant n_j à une loi de probabilité conditionnelle associée $P_r(n_j|pa(n_j))$ où $pa(n_j)$ représente l'ensemble des parents de n_j . Les relations d'indépendance entre les nœuds du graphe permettent de factoriser la distribution jointe tel que
$$P_r(n) = \prod_{i=1}^N P_r(n_i|n_{pa(n_i)}).$$

Dans le domaine de la sûreté de fonctionnement, les réseaux bayésiens sont des graphes causaux auxquels sont associées des informations probabilistes. Les nœuds racines du réseau représentent des variables aléatoires associées aux composants du système étudié et, les arcs orientés désignent les relations entre ses variables aléatoires. Chaque nœud peut prendre une valeur qui correspond à l'état de fonctionnement du composant représenté.

Inspiré du formalisme des RB classiques, le cadre des réseaux bayésiens dynamiques (RBD)

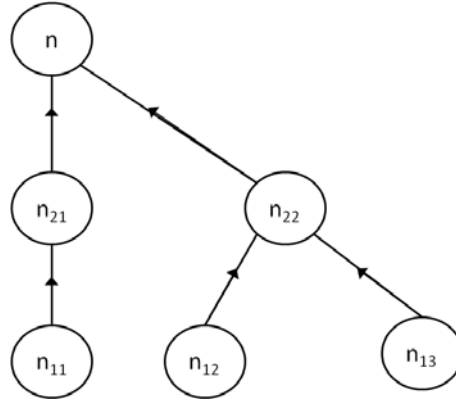


FIGURE 1.14 – Exemple de réseau Bayésien

a permis d'unifier de nombreuses approches issues de la modélisation des séries temporelles telles que les HMM, le filtrage de Kalman, etc. (Murphy, 2002a; Weber and Jouffe, 2003).

Un RBD est un RB qui prend en compte l'aspect temporel par l'utilisation de variables aléatoires indexées au temps. Les variables sont donc notées X_i^t . Dans un RBD, nous faisons l'hypothèse que les nœuds correspondant aux variables X_i peuvent être partitionnés en deux ensembles de nœuds : ceux correspondant à l'état des variables à l'instant t et ceux correspondant à l'état des variables à l'instant $t + 1$. Dans ce cas, une variable est représentée à deux instants successifs. L'évolution temporelle est donc représentée en deux instants t et $t + 1$. Ce réseau est donc appelé RBD à deux instants et noté 2-TBN (*two-Time slices Bayesian Network*).

Un réseau 2-TBN est défini comme étant une paire, (B_1, B_2) . B_1 représente un RB qui définit la probabilité a priori $P_r(n)$. B_2 caractérise la partie temporelle du RB qui définit $P_r(n^{t+1}|n^t)$ entre t et $t + 1$ au moyen d'un DAG comme suit : $P_r(n^{t+1}|n^t) = \prod_{i=1}^N P_r(n_i^{t+1}|n_{pa(n_i^t)}^t)$. Les arcs reliant les nœuds n_i^{t+1} et n_i^t sont appelés arcs temporels (Weber, 2002; Murphy, 2002a).

Considérons un système comprenant des composants c_i . Dans le RBD représentant ce système, les nœuds racines représentent l'état des composants c_i à l'instant t . Ces nœuds sont notés n_i^t . Ils sont reliés par des arcs temporels aux nœuds n_i^{t+1} représentant l'état des composants c_i à l'instant $t + 1$. L'ensemble des nœuds n_i^t et n_i^{t+1} ainsi que les arcs temporels

les reliant représentent la partie dynamique du réseau Bayésien. Pour la partie qui modélise l'architecture du système, les nœuds n_i^t sont reliés à d'autres nœuds n_j^t en fonction des liaisons entre les composants du système.

Un exemple d'un réseau Bayésien dynamique correspondant à un système composé de 3 composants c_1 , c_2 et c_3 montés en parallèle est donné à la Figure 1.15.

Dans ce RBD représentant ce système, les nœuds racines n_i^t correspondent aux variables aléatoires associées aux composants à l'instant t reliés par des arcs temporels aux nœuds n_i^{t+1} pour $i = 1, \dots, 3$. Dans la partie qui modélise l'architecture du système, les nœuds n_i^t sont reliés au nœud n_p^t qui correspond à la liaison parallèle des composants du système. C'est la CPT (table de probabilités conditionnelles) de ce nœud n_p^t qui porte la fonction parallèle car ce même schéma pourrait également correspondre à une liaison série.

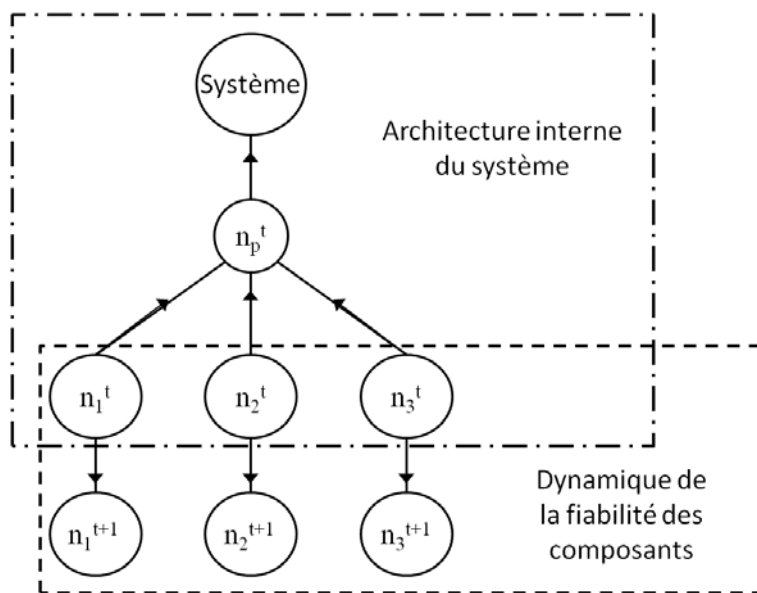


FIGURE 1.15 – Exemple de réseau Bayésien dynamique

Le calcul de la fiabilité des systèmes complexes est généralement réalisé par des outils basés sur une analyse combinatoire tels que les blocs diagramme de fiabilité. Cependant, ce procédé n'est pas très utile pour représenter d'une part, l'influence du temps et des variables exogènes et des observations sur le fonctionnement du système et d'autre part, les interdépendances entre les composants. Contrairement aux BDF, les RBD représentent un outil efficace au

niveau de la modélisation et de l'analyse et ils se sont avérés être un formalisme puissant pour exprimer les dépendances complexes entre les variables aléatoires (Weber and Simon, 2013a,b).

Par ailleurs, la structure d'un RBD est nettement plus compacte et lisible qu'une chaîne de Markov. La dépendance entre les composants ainsi que leurs états de fonctionnement sont facilement modélisés par un RBD même si la taille du système augmente. Tandis que la représentation graphique des systèmes à grande dimension par une chaîne de Markov reste compliquée à cause de l'explosion combinatoire des états du système à modéliser.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, divers outils et méthodes de l'analyse des propriétés structurelles et de l'étude de la sûreté de fonctionnement ont été résumés. En premier lieu, deux types de représentations graphiques des systèmes structurés ont été présentés. Il s'agit du graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et du graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ qui est orienté et déduit de $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Ces représentations graphiques permettent de représenter de façon intuitive les variables des systèmes étudiés ainsi que leurs relations. Pour l'illustration de ces représentations graphiques, 3 exemples ont été présentés sur différents types de systèmes structurés : systèmes linéaire, bilinéaire et linéaire à commutations. Les exemples présentés dans la suite de ce manuscrit correspondent à ces 3 types de systèmes structurés. Plusieurs notations et définitions, relatives aux graphes orienté et biparti ont été fournies. Ces notations et définitions sont utiles à l'expression et l'établissement des résultats sur les propriétés structurelles exposées dans le chapitre 2.

Puisque nous nous intéressons, dans ce travail de thèse, à la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelle d'un système, la fiabilité et la disponibilité sont présentées dans la deuxième partie de ce chapitre. L'étude de la fiabilité et la disponibilité permet de contrôler l'impact des défaillances survenant au niveau des composants du système sur la vérification des propriétés structurelles étudiées. Ainsi, nous pouvons améliorer le fonctionnement des systèmes et la qualité de leurs produits ou services en étudiant

leurs propriétés structurelles. Les hypothèses de travail considérées pour le calcul de la fiabilité et la disponibilité ont été énoncées afin de borner l'étude à leur périmètre de validité.

Pour le calcul de la fiabilité et de la disponibilité, plusieurs outils de représentation graphique peuvent être utilisés couplés à un calcul probabiliste. Nous avons présenté des outils dans la troisième section de ce chapitre permettant la représentation de l'architecture fonctionnelle/dysfonctionnelle interne du système étudié *i.e.* les relations entre ses composants ainsi que le calcul de sa fiabilité et/ou de sa disponibilité. Ces outils de représentation graphique sont utilisés dans le chapitre 3 pour la modélisation et le calcul de la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles des systèmes structurés.

Chapitre 2

Les conditions élémentaires graphiques pour les propriétés structurelles

2.1 Introduction

Il est important, pour le bon fonctionnement des systèmes structurés, que certaines propriétés structurelles soient vérifiées. Un système peut assurer sa mission dans des conditions convenables si toutes ses variables ou une partie d'entre elles sont commandables, observables, s'il est possible de détecter et d'isoler d'éventuels défauts, de rejeter les perturbations, etc. La non vérification de ces propriétés peut parfois causer de graves problèmes de fonctionnement voire des catastrophes comme des crashes aériens (BEASAC, 2012)¹, fuites de gaz ou de produits chimiques (Directive 96/82/CE, 1996), etc.

Les propriétés structurelles d'un système structuré peuvent être vérifiées graphiquement *i.e.* en se basant sur la représentation graphique du système (graphe orienté ou graphe biparti). Dans la littérature, plusieurs travaux tels que (Boukhobza, 2012; Dion et al., 2003; Murota, 1987a; Reinschke and Wiedemann, 1997; Svaricek, 1993) montrant que la vérification de la plupart des propriétés structurelles dépend principalement de la vérification de 4 types de conditions graphiques élémentaires qui sont les conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. La Table 2.1 résume ces conditions graphiques

1. Bureau d'enquêtes et d'analyses pour la sécurité de l'aviation civile

élémentaires nécessaires et suffisantes pour la vérification des propriétés structurelles pour 3 types de systèmes structurés : linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations. Les cases vides correspondent à une combinaison propriété structurelle/type de système structuré qui, à notre connaissance, n'est pas encore complètement et exactement caractérisée dans la littérature.

	Système linéaire structuré	Système bilinéaire structuré	Système linéaire à commutations structuré
Commandabilité totale de l'état	Condition de connectivité Condition de couplage complet (Dion et al., 2003; Reinschke, 1988)	—————	—————
Commandabilité partielle de l'état	Condition de connectivité Condition de couplage complet Condition de distance (Murota, 1987c)	—————	—————
Observabilité totale de l'état	Condition de connectivité Condition de couplage complet (Boukhobza, 2008)	Condition de connectivité Condition de couplage complet (Boukhobza and Hamelin, 2007) (Svaricek, 1993)	—————
Observabilité totale/partielle de l'état et des entrées	Condition de connectivité Condition de couplage complet Condition de distance (Boukhobza et al., 2014, 2009)	Condition de connectivité Condition de couplage complet Condition de distance (Boukhobza, 2008) (Canitrot et al., 2008)	Condition de connectivité Condition de couplage complet Condition de distance (Boukhobza and Hamelin, 2011b)
DéTECTABILITÉ et isolabilité de défauts	Condition de connectivité Condition de lien (Commault et al., 2008)	Condition de connectivité Condition de lien (Boukhobza et al., 2008) (Boukhobza, 2008)	—————
Rejet de perturbations	Condition de lien Condition de distance (Do, 2011; van der Woude, 1991)	—————	—————

TABLE 2.1 – Propriétés structurelles/Types de systèmes

Dans la Table 2.1, la vérification des propriétés structurelles pour les 3 types de systèmes structurés nécessite une combinaison de deux ou plusieurs des 4 catégories de conditions élémentaires de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. Ces conditions doivent être vérifiées par rapport à des ensembles de sommets définis en accord avec la propriété structurelle étudiée. Par exemple, dans un graphe orienté, la condition de

connectivité est définie entre les variables d'entrée et les variables d'état pour l'étude de la commandabilité tandis qu'elle est définie entre les variables d'état et les variables de sortie pour l'étude de l'observabilité.

Au lieu d'étudier toutes les combinaisons propriété structurelle/type de système structuré, nous nous intéressons dans ce travail de thèse à la vérification des 4 types de conditions élémentaires graphiques. Comme présenté dans la Table 2.1, la validité de propriétés structurelles dépend de la vérification de certaines conditions élémentaires graphiques. Ainsi, en s'intéressant aux conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet, il n'est pas nécessaire d'étudier plusieurs propriétés structurelles pour les systèmes linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations. L'étude de ces conditions élémentaires graphiques permet donc de donner à l'analyse des propriétés structurelles proposée dans ce travail de thèse un caractère générique.

Puisque nous nous intéressons à la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles, nous considérons que ces propriétés structurelles sont vérifiées et donc les conditions graphiques élémentaires. Nous étudions donc l'aspect dysfonctionnel des propriétés structurelles. Ainsi, nous nous intéressons au maintien de la vérification de ces conditions. L'objectif de ce chapitre est d'exprimer la vérification de ces conditions élémentaires en fonction de la validité des arcs dans la représentation graphique du système. Ainsi, à partir de la représentation graphique, les 4 conditions élémentaires de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet sont représentées sous forme d'expressions booléennes. Dans notre étude, les expressions booléennes sont basées sur les arcs dans les graphes représentant le système contrairement à d'autres travaux qui sont basés sur les sommets des graphes (Maza et al., 2012; Commault et al., 2007). En fonction des arcs impliqués dans ces expressions booléennes, ces dernières sont associées à la valeur "*vrai*" quand la condition étudiée est vérifiée et à la valeur "*faux*" quand elle ne l'est pas. Il est à noter que ces conditions élémentaires sont définies par rapport à des ensembles de sommets et elles sont associées à des expressions booléennes en fonction de l'état de validité des arcs.

Les expressions booléennes des 4 catégories de conditions élémentaires proposées dans ce chapitre ainsi que le résumé fourni dans la Table 2.1 permettront l'étude de la validité des propriétés structurelles pour les systèmes linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations. Ainsi, avec des combinaisons logiques des expressions booléennes relatives aux 4 conditions élémentaires graphiques, la vérification de plusieurs propriétés structurelles peut être exprimée de façon booléenne.

Pour les 4 conditions élémentaires, les expressions booléennes fournies dans ce chapitre seront utilisées pour le calcul de la fiabilité et de la disponibilité des propriétés structurelles présenté dans le chapitre 3.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Pour chacune des conditions élémentaires (connectivité, lien, distance et couplage complet), une définition est d'abord fournie, suivie du développement de l'expression booléenne correspondante ainsi que de sa preuve. Des applications sur des exemples de systèmes linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations sont fournies afin d'illustrer les 4 expressions booléennes. Une conclusion est développée en fin de chapitre.

2.2 Condition de connectivité

2.2.1 Définition

La condition de connectivité est une condition graphique basée sur la connectivité entre deux ensembles de sommets. Dans un graphe orienté, plusieurs propriétés structurelles nécessitent la vérification de cette condition graphique telles que l'observabilité, la commandabilité, la diagnosticabilité, etc. (Boukhobza, 2010). Comme nous l'avons représenté dans la Table 2.1, cette condition graphique élémentaire est largement impliquée dans l'étude des propriétés structurelles et importante pour le fonctionnement d'un système, d'où l'intérêt prépondérant de son étude.

Dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, la condition de connectivité est définie entre deux ensembles de sommets non vides $V_1 \subseteq \mathcal{V}$ et $V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Afin de vérifier la condition de connectivité entre V_1 et V_2 , chaque élément de V_1 doit être connecté à au moins un élément de V_2 par un chemin valide. Les éléments des ensembles V_1 et V_2 sont définis en fonction de la propriété étudiée. Par exemple, pour la propriété de l'observabilité de l'état, il faut assurer la connectivité entre les sommets de l'ensemble X représentant les variables d'état et les sommets de l'ensemble Y représentant les variables de sortie. Dans ce cas, $V_1 = X$ et $V_2 = Y$. Pour la propriété de commandabilité de l'état, il faut assurer la connectivité entre les sommets de l'ensemble U représentant les variables d'entrée et les sommets de l'ensemble X représentant les variables d'état. Dans ce cas, $V_1 = U$ et $V_2 = X$.

Pour l'étude de cette condition graphique élémentaire, deux approches sont proposées. La première approche est basée sur un parcours de graphes en profondeur et la seconde approche est basée sur un parcours de graphes en largeur.

Dans ces deux approches, la condition de connectivité entre les deux ensembles V_1 et V_2 est représentée par une expression booléenne basée sur les arcs du graphe orienté associé au système étudié. Cette expression booléenne est égale à “*vrai*” quand la condition est vérifiée et “*faux*” dans le cas contraire.

2.2.2 Expression booléenne de la condition de connectivité

La condition de connectivité consiste à vérifier que tous les éléments de V_1 soient connectés à au moins un élément de V_2 . Elle peut s'écrire comme une expression booléenne en fonction des arcs dans le graphe associé au système. Au préalable, nous définissons deux ensembles de sommets $V_0 \subseteq \mathcal{V}$ et $V_T \subseteq \mathcal{V}$ comme suit :

$$\begin{cases} V_0 = \bigcup_{\mathbf{v}_i \in V_1} \left(V_{ess}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2) \setminus \{\mathbf{v}_i\} \right) \\ V_T = V_1 \setminus (V_0 \cup V_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

En utilisant l'ensemble de sommets V_T , il n'est pas nécessaire d'étudier la connectivité de tous

les sommets de V_1 . En effet, tous les éléments de V_1 sont connectés à V_2 si et seulement si tous les éléments de V_T sont connectés à V_2 . L'ensemble V_T ne contient pas les éléments de V_0 et de V_2 . V_0 est l'ensemble des sommets essentiels pour la connectivité entre V_1 et V_2 *i.e.* quelque soient les chemins connectant les éléments de V_1 à V_2 , les sommets de V_0 sont couverts. La condition de connectivité entre V_1 et V_2 est notée $CC(V_1, V_2)$. Pour obtenir la condition de connectivité $CC(V_1, V_2)$, nous avons abordé le problème de deux façons différentes.

Parcours de graphes en profondeur

La condition de connectivité entre les ensembles V_1 et V_2 est vérifiée si tous les éléments de V_T sont connectés à V_2 . Cette condition peut être écrite comme suit :

$$CC(V_1, V_2) = \mathbf{conn}(V_T, V_2) \quad (2.2)$$

où $\mathbf{conn}(V_T, V_2)$ est une fonction qui calcule l'expression booléenne correspondant à la condition de connectivité entre V_T et V_2 . Pour le calcul de $\mathbf{conn}(V_T, V_2)$, nous proposons une expression booléenne récursive de la condition de connectivité entre tout ensemble de sommets $V \subseteq V_T$ et V_2 comme suit :

$$\mathbf{conn}(V, V_2) = \bigvee_{p_j \in \mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)} \left(\left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \wedge \mathbf{conn}(V \setminus \Psi(p_j), V_2) \right) \quad (2.3)$$

où $\mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)$ est l'ensemble de tous les chemins simples et directs $\{\mathbf{v}_i\} - V_2$ qui connectent chaque élément \mathbf{v}_i de V à au moins un élément de V_2 et $\Psi(p_j)$ représente l'ensemble de sommets $\mathbf{v}_m \in V$ couverts par le chemin p_j .

Quand nous choisissons de traiter la connectivité d'un sommet \mathbf{v}_i de V en premier, la connectivité des sommets restants, qui ne sont pas encore traités, est abordée dans la dernière partie de l'équation (2.3) *i.e.* $\mathbf{conn}(V \setminus \Psi(p_j), V_2)$. L'expression \mathbf{conn} est appelée plusieurs fois de manière récursive jusqu'à l'obtention d'un seul élément de V à traiter.

Quand $(V \setminus \Psi(p_j)) = \emptyset$, nous pouvons en conclure que la connectivité à V_2 de tous

les éléments de V est traitée. Ainsi, nous considérons que $\mathbf{conn}(\emptyset, V_2) = \text{“vrai”}$. Notons que le contenu de l'ensemble V dans $\mathbf{conn}(V, V_2)$ est réduit à chaque récurrence des éléments de $\Psi(p_j)$. Par conséquent, cette expression $\mathbf{conn}(V, V_2)$ n'est jamais appelée avec les mêmes arguments.

Quand l'ensemble V ne contient qu'un seul élément $\{\mathbf{v}_i\}$ devant être connecté à V_2 , l'expression correspondante qui clôt la récurrence est donnée par :

$$\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2) = \bigvee_{p_j \in \mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k) \right) \quad (2.4)$$

Evidemment, si $\mathbf{v}_i \in V_2$, \mathbf{v}_i est toujours connecté à V_2 , alors $\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2) = \text{“vrai”}$ et si $\mathbf{v}_i \notin \text{Pred}(V_2)$ alors $\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2) = \text{“faux”}$.

De cette analyse, il vient la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. La condition de connectivité entre chaque élément de $V_1 \subseteq \mathcal{V}$ et au moins un élément de $V_2 \subseteq \mathcal{V}$ est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne $CC(V_1, V_2)$ calculée par les expressions (2.2) à (2.4), et basée sur les arcs de \mathcal{E} est égale à “vrai”.*

Preuve : Pour vérifier la condition de la connectivité entre V_1 et V_2 , chaque sommet $\mathbf{v}_i \in V_1$ doit être relié à au moins un sommet de V_2 par un chemin valide. La preuve est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à prouver que la condition de la connectivité entre V_T et V_2 est nécessaire et suffisante pour la condition de connectivité entre V_1 et V_2 . Nous montrons dans la deuxième partie que l'expression booléenne $CC(V_1, V_2)$ est “vraie” si et seulement si la condition de connectivité entre V_1 et V_2 est vérifiée.

Nous prouvons d'abord que la connectivité de tous les éléments de V_T à V_2 est nécessaire et suffisante pour assurer la connectivité de tous les éléments de V_1 à V_2 . Évidemment, $V_T \subseteq V_1$, la connectivité de V_1 à V_2 , implique que tous les éléments de V_T soient reliés à V_2 . Donc, connecter tous les éléments de V_T est nécessaire pour la condition de connectivité $CC(V_1, V_2)$. De plus, nous avons $V_1 = V_T \cup V_0$. Il faut donc prouver que

la connectivité de tous les éléments de V_T est suffisante pour assurer la connectivité de V_1 à V_2 . Prouvons maintenant que la connectivité de tous les éléments de V_T implique la connectivité de tous les éléments de V_0 . Selon la définition de V_0 , nous avons $\mathbf{v}_j \in V_0 \Rightarrow \exists \mathbf{v}_i \in V_T$ tels que $\mathbf{v}_i \in V_{ess}(\{\mathbf{v}_j\}, V_2)$. Cela signifie que si \mathbf{v}_i est connecté à V_2 , alors \mathbf{v}_j est également connecté à V_2 . Si chaque élément $\mathbf{v}_i \in V_T$ est connecté à V_2 , alors chaque élément $\mathbf{v}_j \in V_0$ est également connecté à V_2 . Par conséquent, afin de connecter les éléments de V_1 à V_2 , il est **nécessaire et suffisant** de connecter les éléments de V_T à V_2 .

De toute évidence, la connectivité de chaque élément $\mathbf{v}_\ell \in V_2$ à V_2 est toujours vérifiée. Ainsi, $\forall \mathbf{v}_\ell \in V_2$, $\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_\ell\}, V_2) = \text{“vrai”}$. Pour les sommets \mathbf{v}_m qui ne sont pas prédécesseurs de V_2 , il n’y a pas de chemin pouvant assurer leur connectivité à V_2 . Par conséquent, $\forall \mathbf{v}_m \notin \text{Pred}(V_2)$, $\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_m\}, V_2) = \text{“faux”}$.

Le calcul de $CC(V_1, V_2)$ est principalement basé sur le calcul de $\mathbf{conn}(V, V_2)$ donnée dans l’équation (2.3) où $V \subseteq V_T$. Prouvons maintenant par récurrence, en considérant la cardinalité de V , que $\mathbf{conn}(V, V_2)$ est l’expression qui correspond à la connectivité entre V et V_2 . Quand $\text{card}(V) = 1$, il n’y a qu’un seul élément \mathbf{v}_i prédécesseur de V_2 dans l’ensemble V . \mathbf{v}_i peut être connecté à V_2 par un chemin $\{\mathbf{v}_i\} - V_2$ dans l’ensemble de chemins $\mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)$. Donc, l’expression \mathbf{conn} est représentée par un “OU” logique entre des éléments du chemin p_j appartenant à l’ensemble des chemins $\mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)$ sachant que le chemin p_j est représenté par un “ET” logique entre ses arcs $(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k)$. Ainsi,

$$\mathbf{conn}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2) = \bigvee_{p_j \in \mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k) \right).$$

Nous supposons que $\forall n_0 \leq \text{card}(V)$, pour tous les sous-ensembles $V_0^k \subseteq V$ de cardinalité inférieur à n_0 , $\mathbf{conn}(V_0^k, V_2)$ est l’expression qui correspond à la validité de la condition de connectivité *i.e.* tous les éléments de V_0^k sont connectés à V_2 si et seulement si $\mathbf{conn}(V_0^k, V_2)$ est égal à “vrai”. Montrons que l’expression booléenne \mathbf{conn} est “vrai” $\forall V_1^k \subseteq V$ de cardinalité $n_0 + 1$. L’expression correspondante est :

$$\mathbf{conn}(V_1^k, V_2) = \bigvee_{p_j \in \mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)} \left(\left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \wedge \mathbf{conn}(V \setminus \{\mathbf{v}_m \text{ couverts par } p_j\}, V_2) \right).$$

Le chemin p_j couvre au moins \mathbf{v}_i dans $V \setminus \{\mathbf{v}_m \text{ couverts par } p_j\}$ qui est de cardinalité inférieure à n_0 , alors $\mathbf{conn}(V \setminus \{\mathbf{v}_m \text{ couverts par } p_j\}, V_2)$ donne l'expression juste selon l'hypothèse de récurrence, car $\text{card}(V \setminus \{\mathbf{v}_m \text{ couverts par } p_j\}) \leq n_0$. Si le chemin p_j est valide, alors tous les sommets couverts par p_j sont connectés à V_2 , par conséquent, la connectivité des sommets restants qui ne sont pas encore traités doit être assurée en utilisant l'expression : $\mathbf{conn}(V \setminus \{\mathbf{v}_m \text{ couverts par } p_j\}, V_2)$.

De là, la première partie de l'expression $\mathbf{conn}(V_1^k, V_2)$ est l'expression qui correspond à la connectivité de \mathbf{v}_i à V_2 par un chemin $p_j \in \mathcal{P}(\{\mathbf{v}_i\}, V_2)$, et la deuxième partie est une expression qui correspond à la connectivité des éléments qui ne sont pas encore traités à V_2 . Par conséquent, pour tout $V_1^k \subseteq V$ de cardinalité $n_0 + 1$, $\mathbf{conn}(V_1^k, V_2)$ est correspond à la connectivité des éléments de V_1^k à au moins un élément de V_2 .

Nous avons prouvé que si l'expression $\mathbf{conn}(V, V_2)$ est l'expression qui correspond à la connectivité à V_2 de l'ensemble V de cardinalité n_0 , alors elle correspond à la connectivité à V_2 de V de cardinalité $n_0 + 1$. Nous avons également prouvé que $\mathbf{conn}(V, V_2)$ correspond à la connectivité à V_2 de $V = \{\mathbf{v}_i\}$ où la cardinalité de V est $n_0 = 1$. De là, par récurrence, l'expression $\mathbf{conn}(V, V_2)$ correspond à la connectivité de tous les sommets de l'ensemble V de cardinalité n , donc, pour tous les sommets de V_T . \triangle

Afin d'illustrer l'approche présentée, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 4 *Un bâtiment de 3 bureaux B_1 , B_2 et B_3 ayant les températures ambiantes uniformes T_1 , T_2 et T_3 est représenté sur la Figure 2.1. Les températures T_i sont relatives aux puissances de chauffe F_1 , F_2 et F_3 . La température extérieure est notée T_0 .*

Pour ce système, il y a deux modes de fonctionnement :

Mode 1 : Fonctionnement normal :

Les bureaux B_1 et B_2 sont occupés par des employés, tandis que le bureau B_3 qui est réservé

aux visiteurs n'est pas occupé. Dans ce cas, les chauffages F_1 et F_2 sont en état de marche et F_3 est à l'arrêt. Seule, la température du bureau B_2 est mesurée.

Mode 2 : Fonctionnement en présence de visiteurs :

Pour ce mode de fonctionnement, les 3 bureaux sont occupés. Les chauffages F_1 et F_3 sont en état de marche et le chauffage F_2 est à l'arrêt. Le bureau B_2 est donc chauffé à travers les bureaux B_1 et B_3 . Les températures des bureaux B_2 et B_3 sont mesurées.

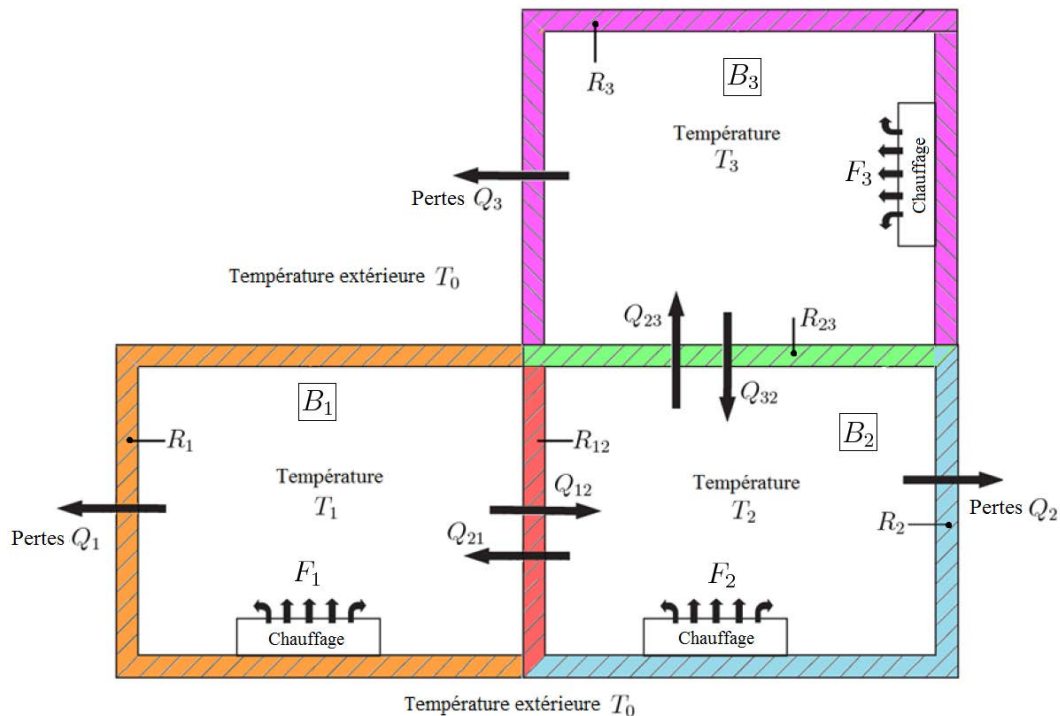


FIGURE 2.1 – Système de chauffage de bâtiment

Autour d'un point de fonctionnement, le modèle linéarisé de ce système est donné par les équations suivantes :

$$\text{Mode 1 : } \begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_1} \right) T_1 + \frac{2}{R_{12}} T_2 + \frac{1}{R_1} T_0 + F_1 \\ C_2 \dot{T}_2 = \frac{1}{R_{12}} T_1 - \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_2 + \frac{1}{R_{23}} T_3 + \frac{1}{R_2} T_0 + F_2 \\ C_3 \dot{T}_3 = \frac{1}{R_{23}} T_2 - \left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_3} \right) T_3 + \frac{1}{R_3} T_0 \end{cases}$$

$$\text{Mode 2 : } \begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_1} \right) T_1 + \frac{1}{R_{12}} T_2 + \frac{1}{R_1} T_0 + F_1 \\ C_2 \dot{T}_2 = \frac{1}{R_{12}} T_1 - \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_2 + \frac{1}{R_{23}} T_3 + \frac{1}{R_2} T_0 \\ C_3 \dot{T}_3 = \frac{2}{R_{23}} T_2 - \left(\frac{2}{R_{23}} + \frac{1}{R_3} \right) T_3 + \frac{1}{R_3} T_0 + F_3 \end{cases}$$

où C et R représentent respectivement les capacités calorifiques des bureaux et les résistances thermiques des murs.

Pour ce système linéaire à commutations ayant la forme :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{r(t)}x(t) + B_{r(t)}u(t) \\ y(t) = C_{r(t)}x(t) \end{cases}$$

considérons le vecteur d'état $X = (T_1, T_2, T_3)^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^T$, le vecteur d'entrée $U = (T_0, F_1, F_2, F_3) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4)$ et le vecteur de sortie $Y = (T_2, T_3)^T = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^T$. Les matrices A_r , B_r et C_r sont données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_1} \right) & \frac{1}{C_1 R_{12}} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_{12}} & \frac{-1}{C_2} \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{23}} \right) & \frac{1}{C_2 R_{23}} \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_{23}} & \frac{-1}{C_3} \left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_3} \right) \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_3 R_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices spécifiques au mode $q = 1$ sont déterminées telles que les éléments de A_1^s sont nuls sauf $A_1^s(1, 2) = \frac{1}{C_1 R_{12}}$, les éléments de B_1^s sont nuls sauf $B_1^s(2, 2) = 1$ et $C_1^s = 0$.

Les matrices spécifiques du mode $q = 2$ sont déterminées telles que les éléments de A_2^s sont nuls sauf $A_2^s(3,2) = \frac{1}{C_3 R_{23}}$ et $A_2^s(3,3) = \frac{-1}{C_3 R_{23}}$, les éléments de B_2^s sont nuls sauf $B_2^s(3,3) = 1$ et les éléments de C_2^s sont nuls sauf $C_2^s(3,3) = 1$.

Le graphe orienté représentant ce système est donné à la Figure 2.2.

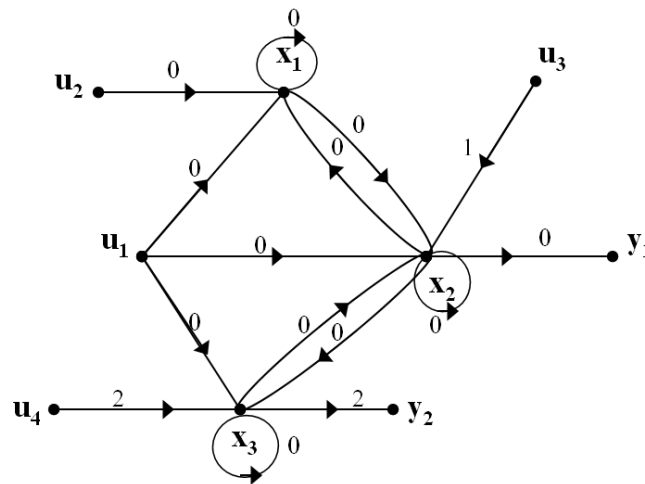


FIGURE 2.2 – Graphe orienté pour l'Exemple 4

Dans ce graphe orienté, calculons la condition de connectivité $CC(X, Y)$ entre les variables d'état dans X et les variables de sorties dans Y . L'expression $CC(X, Y)$ peut être utilisée dans l'étude l'observabilité totale de l'état d'un système structuré.

Pour ce système et dans les deux modes, nous avons $V_T = \{x_1, x_3\}$. La condition de connectivité entre les ensembles X et Y est donc égale à $CC(X, Y) = \text{conn}(V_T, Y)$. L'ordre de traitement des sommets $x_i \in X$ est arbitraire i.e. l'expression booléenne obtenue est la même quelque soit l'ordre de traitement des sommets x_i . Il est à noter que, pour la condition de connectivité, les cycles unaires (arcs (x_i, x_i)) ne sont pas pris en compte lors du calcul de $CC(X, Y)$. Ceci nous permet de simplifier le graphe en éliminant ces cycles unaires.

L'expression $CC(X, Y)$ est calculée pour chaque mode du système :

Mode 1 :

Sans perte de généralité, commençons, par exemple, par traiter la connectivité de \mathbf{x}_1 vers Y .

$$\mathbf{conn}(V_T, Y) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \wedge \mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y)$$

De la même façon, nous calculons l'expression $\mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y)$:

$$\mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y) = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \wedge \mathbf{conn}(\emptyset, Y)$$

avec $\mathbf{conn}(\emptyset, Y) = \text{“vrai”}$.

Après avoir remplacé $\mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y)$ et $\mathbf{conn}(\emptyset, Y)$ dans $\mathbf{conn}(V_T, Y)$, nous obtenons la condition de connectivité entre X et Y pour le mode 1 :

$$CC(X, Y) = \mathbf{conn}(X, Y) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \quad (2.5)$$

Mode 2 :

Sans perte de généralité, commençons par traiter la connectivité de \mathbf{x}_1 vers Y .

$$\mathbf{conn}(V_T, Y) = \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \wedge \mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y) \right) \vee \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \wedge \mathbf{conn}(\emptyset, Y) \right)$$

Nous avons $\mathbf{conn}(\emptyset, Y) = \text{“vrai”}$. De la même façon, nous calculons l'expression $\mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y)$:

$$\mathbf{conn}(\{\mathbf{x}_3\}, Y) = (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \right)$$

Tout calcul fait, l'expression $CC(X, Y)$ pour le mode 2 est donnée par :

$$CC(X, Y) = \mathbf{conn}(V_T, Y) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \left(\left((\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \right) \right) \quad (2.6)$$

À partir des expressions booléennes 2.5 et 2.6, nous remarquons que la condition de connectivité n'est pas la même pour les deux modes du système. Ceci peut être expliqué par le fait que la température du bureau B_2 est mesurée pour les deux modes du système, tandis que

celle du bureau B_3 n'est mesurée qu'au mode 2.

Pour les deux modes de ce système, nous constatons que l'arc $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0$ est essentiel pour la connectivité entre X et Y de ce système puisqu'il représente la seule possibilité de connectivité entre \mathbf{x}_1 et Y . Donc, si cet arc n'est plus valide, la condition $CC(X, Y)$ est égale à "faux" pour les deux modes du système.

Parcours de graphes en largeur

L'approche précédente est basée sur un parcours de graphes en profondeur *i.e.* un sommet \mathbf{v}_i est connecté à V_2 par un chemin p et tous les sommets couverts par ce chemin sont considérés comme connectés à V_2 quand le chemin p est valide. Contrairement à l'approche présentée en 2.2.2, l'approche basée sur un parcours de graphe en largeur traite la connectivité d'un sommet à V_2 à travers la connectivité à au moins un sommet successeur qui est connecté à V_2 .

Comme pour l'approche précédente, la condition de connectivité entre V_1 et V_2 est vérifiée si et seulement si cette même condition est vérifiée entre V_T et V_2 . Elle est donnée par l'expression suivante :

$$CC(V_1, V_2) = \bigwedge_{\mathbf{v}_i \in V_T} Con(\mathbf{v}_i) \quad (2.7)$$

où la fonction $Con(\mathbf{v}_i)$ caractérise la connectivité du sommet \mathbf{v}_i à V_2 . Cette expression est donnée par :

$$Con(\mathbf{v}_i) = Con_d(\mathbf{v}_i) \vee \left(\bigvee_{\mathbf{v}_j \in CFC(\mathbf{v}_i) \setminus \{\mathbf{v}_i\}} \left(\bigvee_{p_j \in \text{chemin } \{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\} \text{ direct}} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \right) \wedge Con_d(\mathbf{v}_j) \right) \quad (2.8)$$

$Con_d(\mathbf{v}_i)$ représente la connectivité directe de l'élément \mathbf{v}_i de V_1 en utilisant uniquement les successeurs immédiats de \mathbf{v}_i (liés à \mathbf{v}_i par un arc) n'appartenant pas à sa composante fortement connexe $CFC(\mathbf{v}_i)$. $Con_d(\mathbf{v}_i)$ est donnée par l'équation suivante :

$$Con_d(\mathbf{v}_i) = \left(\bigvee_{\mathbf{v}_r \in Succ_I(\{\mathbf{v}_i\}) \setminus CFC(\mathbf{v}_i)} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_r) \wedge Con(\mathbf{v}_r) \right) \quad (2.9)$$

$Con(\mathbf{v}_i)$ et $Con_d(\mathbf{v}_i)$ sont des expressions booléennes basées sur les arcs et peuvent prendre les valeurs dans $\{vrai, faux\}$. $Con(\mathbf{v}_i) = "vrai"$ si $\mathbf{v}_i \in V_2$ et $Con(\mathbf{v}_i) = "faux"$ si \mathbf{v}_i n'est

pas un prédécesseur d'au moins un élément de V_2 , si tous les arcs du graphe sont considérés comme valides, puisqu'il n'y a pas de chemin de \mathbf{v}_j à V_2 .

Quand l'expression $Con_d(\cdot)$ donnée par l'équation (2.9) est remplacée dans l'expression $Con(\cdot)$ donnée par l'équation (2.8), nous obtenons l'équation (2.10).

$$Con(\mathbf{v}_i) = \left(\bigvee_{\mathbf{v}_t \in Succ_I(\{\mathbf{v}_i\}) \setminus CFC(\mathbf{v}_i)} \left((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_t) \wedge Con(\mathbf{v}_t) \right) \right) \vee \left(\bigvee_{\mathbf{v}_j \in CFC(\mathbf{v}_i) \setminus \{\mathbf{v}_i\}} \left(\bigvee_{p_j \in \text{chemin } \{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\} \text{ direct}} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \right) \wedge \left(\bigvee_{\mathbf{v}_h \in Succ_I(\{\mathbf{v}_j\}) \setminus CFC(\mathbf{v}_j)} \left((\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_h) \wedge Con(\mathbf{v}_h) \right) \right) \right) \quad (2.10)$$

Le sommet \mathbf{v}_i peut être connecté à travers ses successeurs immédiats connectés à V_2 ou à travers un sommet appartenant à $CFC(\mathbf{v}_i)$ connecté directement à V_2 *i.e.* sans passer par les sommets de sa composante fortement connexe.

De cette analyse, il vient la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. La connectivité de chaque élément de $V_1 \subseteq \mathcal{V}$ à au moins un élément de $V_2 \subseteq \mathcal{V}$ est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne $CC(V_1, V_2) = \bigwedge_{\mathbf{v}_i \in V_T} Con(\mathbf{v}_i)$ basée sur les arcs et calculée par l'équation (2.10) est "vraie".*

Preuve : Tout d'abord, nous avons montré dans la preuve de la Proposition 1 que pour connecter les éléments de V_1 à V_2 , il est nécessaire et suffisant de connecter tous les éléments de V_T à V_2 .

Maintenant, prouvons que $Con(\mathbf{v}_i) = \text{"vrai"}$ si et seulement si le sommet \mathbf{v}_i est connecté à V_2 . Tout d'abord, notons que tous les éléments de V_2 sont évidemment liés à V_2 et donc $\forall \mathbf{v}_\ell \in V_2, Con(\mathbf{v}_\ell) = \text{"vrai"}$. De même, si un sommet \mathbf{v}_i n'est pas un prédécesseur d'un élément de V_2 , alors $Con(\mathbf{v}_i) = \text{"faux"}$. Ainsi, nous nous intéressons uniquement aux prédécesseurs de V_2 et nous notons $\mathcal{V}^* = \{\mathbf{v}_i \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v}_i \in Pred(V_2)\}$.

Considérons tous les éléments prédécesseurs de \mathcal{V}^* et appartenant à des composantes fortement connexes ayant un ordre minimal en utilisant la relation d'ordre partiel \preceq .

Notons V_m^0 le sous-ensemble de sommets contenant ces éléments. Puisque les éléments considérés appartiennent à des composantes ayant un ordre minimal par rapport à la relation d'ordre partiel \preceq , ces éléments sont soit dans la même composante qu'un élément de V_2 soit inclus dans V_2 . De plus, pour être connectés à V_2 , ils ne peuvent pas utiliser un chemin recouvrant une autre composante fortement connexe puisqu'ils appartiennent à une composante avec un ordre minimal *i.e.* la composante la plus proche de V_2 . Donc, dans ce cas, pour chaque $\mathbf{v}_i \in V_m^0$, $Con(\mathbf{v}_i)$ est "vrai" si et seulement si les arcs reliant \mathbf{v}_i à un élément de V_2 , en restant dans sa propre composante, sont valides *i.e.*

$Con(\mathbf{v}_i) = \bigvee_{\mathbf{v}_j \in CFC(\mathbf{v}_i) \setminus \mathbf{v}_i} \left(\bigvee_{p_j \in \text{chemin } \{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\} \text{ direct}} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \right)$. Donc, pour tout élément \mathbf{v}_i de V_m^0 , $Con(\cdot)$ est l'expression exacte qui correspond à la condition de connectivité.

Maintenant, considérons tous les éléments prédécesseurs de V_2 qui ne sont pas dans V_m^0 et appartenant à une composante fortement connexe d'ordre minimal par rapport à la relation d'ordre partiel *i.e.* $\mathcal{V}^* \setminus V_m^0$. Nous notons V_m^1 le sous-ensemble de sommets contenant ces éléments. Il existe, dans ce cas, des chemins liant les éléments de V_m^1

aux éléments de V_m^0 *i.e.* $V_m^0 \preceq V_m^1$. Puisque les éléments considérés appartiennent à des composantes d'ordre minimal en utilisant une relation d'ordre partiel \preceq , ils sont dans la même classe qu'un élément ayant seulement les sommets de V_m^0 comme successeurs immédiats. Pour chaque $\mathbf{v}_i \in V_m^1$, nous avons $Succ_I(\{\mathbf{v}_i\}) \cup \mathcal{V}^* \subseteq V_m^0 \cup CFC(\mathbf{v}_i)$. En

outre, pour être connectés à un élément de V_2 , ils peuvent utiliser uniquement les chemins couvrant des éléments de leur propre composante fortement connexe et les éléments de V_m^0 . Donc, dans ce cas, pour tout $\mathbf{v}_i \in V_m^1$, $Con(\mathbf{v}_i)$ est "vrai" si et seulement si les arcs reliant \mathbf{v}_i à un élément \mathbf{v}_j de V_m^0 sont valides et $Con(\mathbf{v}_j)$ est "vrai" *i.e.*

$Con(\mathbf{v}_i) = \left(\bigvee_{\mathbf{v}_j \in V_m^0} \left((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \wedge Con(\mathbf{v}_j) \right) \right) \vee \left(\bigvee_{\mathbf{v}_t \in CFC(\mathbf{v}_i) \setminus \mathbf{v}_i} \left(\bigvee_{p_j \in \text{chemin } \{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_t\} \text{ direct}} \left(\bigwedge_{(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \in p_j} (\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k) \right) \right) \wedge \bigvee_{\mathbf{v}_h \in V_m^0} \left((\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_h) \wedge Con(\mathbf{v}_h) \right) \right)$. Par conséquent, pour tous les éléments de V_m^1 , $Con(\cdot)$ est l'expression booléenne exacte qui correspond à la condition de connectivité.

Ce raisonnement se généralise assez facilement car en utilisant l'ordre partiel \preceq , nous

pouvons construire la séquence de sous-ensembles disjoints de composantes fortement connexes $V_m^\kappa \succ V_m^{\kappa-1} \dots \succ V_m^2 \succ V_m^1 \succ V_m^0$ tel que $\mathcal{V}^* = \bigcup_{i=0}^{\kappa} V_m^i$ i.e. pour tout $i \leq n$, V_m^i regroupe tous les successeurs de V_2 .

En utilisant la même approche, si pour tous les éléments de V_m^i , $Con(\cdot)$ caractérise exactement l'expression booléenne de la connectivité, alors pour tous les éléments de V_m^{i+1} , $Con(\cdot)$ caractérise exactement l'expression booléenne de la condition de connectivité.

Enfin, $\bigwedge_{\mathbf{v}_i \in V_T} Con(\mathbf{v}_i)$ caractérise exactement l'expression booléenne de la connectivité de tous les sommets de V_T et selon la première partie de la preuve, elle caractérise exactement la condition de connectivité $CC(V_1, V_2)$. \triangle

Afin d'illustrer l'approche proposée, nous appliquons cette dernière au même système que celui de l'Exemple 4.

Exemple 5 Soit le système donné à la Figure 2.1 correspondant au graphe orienté représenté à la Figure 2.2.

Pour les deux modes 1 et 2, nous avons $V_T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$ puisque le sommet \mathbf{x}_2 est essentiel pour le traitement de la connectivité de \mathbf{x}_1 et, $CFC(\mathbf{x}_1) = CFC(\mathbf{x}_2) = CFC(\mathbf{x}_3) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$.

Mode 1 :

Pour la connectivité entre X et Y , nous calculons d'abord la connectivité directe $Con_d(\mathbf{x}_i)$ de chaque élément $\mathbf{x}_i \in X$:

- $Con_d(\mathbf{x}_1) = faux$: \mathbf{x}_1 est connecté à Y à travers $\mathbf{x}_2 \in CFC(\mathbf{x}_1)$;
- $Con_d(\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0$: \mathbf{x}_2 est immédiatement connecté à Y à travers $\mathbf{y}_1 \notin CFC(\mathbf{x}_2)$;
- $Con_d(\mathbf{x}_3) = faux$: \mathbf{x}_3 est connecté à Y à travers $\mathbf{x}_2 \in CFC(\mathbf{x}_3)$.

L'expression $Con(\mathbf{x}_i)$ de chaque élément \mathbf{x}_i est donnée par :

- $Con(\mathbf{x}_1) = Con_d(\mathbf{x}_1) \vee \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge Con_d(\mathbf{x}_2) \right) \vee \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge Con_d(\mathbf{x}_3) \right)$
 $= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0$;

- $Con(\mathbf{x}_2) = Con_d(\mathbf{x}_2) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)_0 \wedge Con_d(\mathbf{x}_1) \right) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge Con_d(\mathbf{x}_3) \right)$

$$= (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 ;$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Con}(\mathbf{x}_3) &= \text{Con}_d(\mathbf{x}_3) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_2) \right) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_1) \right) \\ &= (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0. \end{aligned}$$

La condition de connectivité entre X et Y pour le mode 1 est donc donnée par :

$$CC(X, Y) = \text{Con}(\mathbf{x}_1) \wedge \text{Con}(\mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \quad (2.11)$$

Mode 2 :

Calculons la connectivité directe $\text{Con}_d(\mathbf{x}_i)$ de chaque élément $\mathbf{x}_i \in X$:

- $\text{Con}_d(\mathbf{x}_1) = \text{faux}$: \mathbf{x}_1 est connecté à Y à travers $\mathbf{x}_2 \in \text{CFC}(\mathbf{x}_1)$;
- $\text{Con}_d(\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0$: \mathbf{x}_2 est immédiatement connecté à Y à travers $\mathbf{y}_1 \notin \text{CFC}(\mathbf{x}_2)$;
- $\text{Con}_d(\mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2$: \mathbf{x}_3 est connecté à Y à travers $\mathbf{y}_2 \notin \text{CFC}(\mathbf{x}_3)$.

L'expression $\text{Con}(\mathbf{x}_i)$ de chaque élément \mathbf{x}_i est donnée par :

$$\begin{aligned} \bullet \text{Con}(\mathbf{x}_1) &= \text{Con}_d(\mathbf{x}_1) \vee \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_2) \right) \vee \left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_3) \right) \\ &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) \right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Con}(\mathbf{x}_2) &= \text{Con}_d(\mathbf{x}_2) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_1) \right) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_3) \right) \\ &= (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Con}(\mathbf{x}_3) &= \text{Con}_d(\mathbf{x}_3) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_2) \right) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)_0 \wedge \text{Con}_d(\mathbf{x}_1) \right) \\ &= (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \right). \end{aligned}$$

La condition de connectivité entre X et Y pour le mode 2 est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
CC(X, Y) &= \text{Con}(\mathbf{x}_1) \wedge \text{Con}(\mathbf{x}_3) \\
&= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_0 \wedge \left(\left((\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)_0 \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)_2 \right) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)_0 \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_0 \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Il est à noter que cette approche de calcul de la condition de connectivité basée sur le parcours de graphes en largeur fournit les équations 2.11 et 2.12 qui correspondent au même résultat trouvé en utilisant l'approche basée sur le parcours de graphes en profondeur et donnée par les équations 2.5 et 2.6.

Comparaison entre les deux approches proposées

Comme montré sur l'exemple d'illustration, les deux approches proposées fournissent la même expression $CC(V_1, V_2)$. Ainsi, du point de vue des résultats, les deux méthodes sont équivalentes. Toutefois, elles se distinguent sur le plan de la complexité algorithmique.

La complexité d'un algorithme joue un rôle important pour son efficacité dans le traitement des données. Nous notons N le nombre de sommets du graphe associé au système qui correspond également au nombre de variables du système.

L'algorithme proposé dans l'approche par parcours de graphe en profondeur est basé sur le calcul de l'expression $\mathbf{conn}(V, V_2)$. Pour chaque sommet $\mathbf{v}_i \in V$, la liste des chemins $\{\mathbf{v}_i\} - V_2$ est fournie avec une complexité $O(N^3)$ (Papadimitriou, 1976). Afin d'éviter les difficultés combinatoires pour trouver l'expression $\mathbf{conn}(V, V_2)$, le contenu de l'ensemble V décroît à chaque récurrence. Dans le pire des cas, le calcul de $\mathbf{conn}(V, V_2)$ nécessitera le calcul de $\mathbf{conn}(V \setminus \Psi(p_j), V_2)$ n fois. Ceci correspond à une complexité de $O(N^2)$. La complexité globale de cet algorithme est donc de $O(N^5)$.

Dans l'algorithme proposé dans l'approche par parcours de graphe en largeur, la première étape est le calcul des composants fortement connexes qui peut être fait en utilisant un algorithme dont la complexité est de $O(N^4)$ (Ford and Fulkerson, 1962). Après avoir

trouvé les composantes fortement connexes, nous devons calculer pour chaque $\mathbf{v}_i \in V_1$, les deux expressions $con(\mathbf{v}_i)$ et $cond(\mathbf{v}_i)$. Dans le pire des cas, le calcul de chaque $con(\mathbf{v}_i)$ nécessitera le calcul de $cond(\mathbf{v}_i)$ N fois. Ceci peut être représenté par une complexité $O(N^2)$ puisque $con(\mathbf{v}_i)$ est calculée N fois. Ainsi, pour la condition de connectivité $CC(V_1, V_2)$, l'exécution de l'algorithme nécessite $N \times O(N^2) = O(N^3)$. D'après cette analyse, l'approche proposée peut être implémentée en utilisant un algorithme global ayant une complexité polynomiale égale à $O(N^4)$.

D'après l'étude comparative des complexités algorithmiques des deux approches proposées, l'avantage de l'approche basée sur le parcours de graphe en largeur est démontré. Puisque les deux approches fournissent la même expression booléenne de la condition de connectivité, l'approche basée sur un parcours de graphe en largeur est plus intéressante car son calcul présente moins de complexité et permet donc de traiter des problèmes sur des système de plus grande taille à coût calculatoire équivalent.

2.3 Condition de lien

2.3.1 Définition

La condition de lien est une condition graphique élémentaire qui dépend du nombre de chemins disjoints entre deux ensembles de sommets dans un graphe orienté. D'après la Table 2.1 de la Section 3.1, cette condition doit être égale à "vrai" pour assurer la vérification de plusieurs propriétés structurelles comme la diagnosticabilité ou la solvabilité du problème de rejet de perturbations (Boukhobza and Hamelin, 2009; Commault et al., 2007).

Dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, la condition de lien est étudiée entre deux ensembles de sommets $V_1 \subseteq \mathcal{V}$ et $V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Cette condition consiste à avoir un nombre maximal de chemins disjoints entre V_1 et V_2 qui doit être suivant le type de propriétés étudiées :

- Égale, inférieur ou bien supérieur à un nombre donné ;
- Égale, inférieur ou bien supérieur à $card(V_1)$;

- Égale, inférieur ou bien supérieur à $\text{card}(V_2)$

Dans notre étude, nous nous intéressons à la dernière possibilité parmi celles citées : une condition de lien nécessitant un lien maximal entre les éléments de V_1 et de V_2 de la taille $\text{card}(V_2)$. Cela signifie que chaque élément de V_2 doit être relié à au moins un des éléments de V_1 en utilisant un lien maximal de taille $\text{card}(V_2)$ *i.e.* $\text{card}(V_2)$ chemins $V_1 - V_2$ disjoints valides ce qui est imposé, par exemple, à la propriété de solvabilité du problème de rejet de perturbations.

Pour l'étude de la condition de lien, nous cherchons à exprimer cette dernière sous la forme d'une expression booléenne basée sur les chemins du graphe orienté. Cette expression booléenne doit être égale à "*vrai*" si la condition de lien entre V_1 et V_2 est vérifiée et égale à "*faux*" dans le cas contraire. Compte tenu que l'état booléen d'un chemin dépend des états booléens de ses arcs, la condition de lien peut être réécrite comme une expression booléenne basée sur les arcs. L'expression booléenne correspondante à la condition de lien est notée " \mathcal{L} ".

2.3.2 Expression booléenne de la condition de lien

La condition de lien est vérifiée quand tous les éléments de V_2 sont liés aux éléments de V_1 en utilisant des chemins disjoints. Dans le cas où les ensembles V_1 et V_2 contiennent un seul élément, *i.e.* $V_1 = \{\mathbf{v}_i\}$ et $V_2 = \{\mathbf{v}_j\}$, la condition de lien entre V_1 et V_2 en utilisant les sommets d'un ensemble $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{p_k \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)} \mathbf{p}_k \quad (2.13)$$

Nous rappelons que $\mathbf{IP}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_0)$ représente l'ensemble des chemins simples $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ couvrant uniquement des sommets de l'ensemble \mathcal{V}_0 et que \mathbf{p}_k correspond à la valeur booléenne du chemin p_k *i.e.* $\mathbf{p}_k = \text{"vrai"}$ quand le chemin p_k est valide et $\mathbf{p}_k = \text{"faux"}$ sinon.

Nous rappelons que \mathbf{p}_k est la valeur booléenne associée au chemin p_k telle que $\mathbf{p}_k = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(p_k)} \mathbf{e}_i$.

L'expression \mathcal{C} est une expression qui peut admettre l'ensemble vide " \emptyset " comme paramètre dans le cas où $V_1 = \emptyset$ ou $V_2 = \emptyset$. Donc, pour tout ensemble non-vide $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$, $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$, nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \emptyset, \mathcal{V}_0) = \text{vrai} \\ \mathcal{L}(\emptyset, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0) = \text{faux} \end{cases} \quad (2.14)$$

Quand l'ensemble \mathbf{V}_j ne contient qu'un seul élément *i.e.* $\mathbf{V}_j = \{\mathbf{v}_j\}$, l'expression correspondante $\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i} \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) \quad (2.15)$$

Pour tout ensemble non-vide $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$ et $\mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\} \subseteq V_2$, l'expression de la condition de lien peut s'écrire comme suit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \text{Pred}(\{\mathbf{v}_j\}) \cap \mathbf{V}_i} \left(\bigvee_{p_\ell \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)} \left(p_\ell \wedge \mathcal{L}(\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0 \setminus \Psi(p_\ell)) \right) \right) \quad (2.16)$$

où $\Psi(p_\ell)$ représente l'ensemble des sommets couverts par p_ℓ .

Nous remarquons que, par construction, l'expression \mathcal{L} est récursive. En effet, le calcul de \mathcal{L} nécessite l'utilisation de la même fonction, mais avec des paramètres différents et de cardinalité décroissante *i.e.* le nombre de sommets dans \mathbf{V}_i diminue strictement à chaque appel de \mathcal{L} ainsi que l'ensemble des sommets de \mathcal{V}_0 pouvant être couverts par les liens associés.

De cette analyse, il vient la proposition suivante :

Proposition 3 *Considérons un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. La condition de lien entre deux ensembles de sommets $V_1 \subseteq \mathcal{V}$ et $V_2 \subseteq \mathcal{V}$ est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne $\mathcal{L}(V_1, V_2, \mathcal{V})$ calculée en utilisant l'équation (2.16) est "vrai".*

Preuve : La Proposition 3 est prouvée en utilisant l'aspect récursif de l'expression $\mathcal{L}(\cdot, \cdot, \cdot)$. Pour assurer la validité de la condition de lien entre $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$ et $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$, les éléments $\mathbf{v}_j \in V_j$

doivent être reliés à au moins un élément $\mathbf{v}_i \in V_i$ en utilisant les chemins dans $\mathbf{IP}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0)$. Quand $\mathbf{V}_i = \emptyset$ ou $\mathbf{V}_j = \emptyset$, nous avons $\mathcal{L}(\emptyset, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0) = \text{“faux”}$ ou $\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \emptyset, \mathcal{V}_0) = \text{“vrai”}$ (cf. 2.14). En premier lieu, considérons que $\mathbf{V}_i = \{\mathbf{v}_i\}$ et $\mathbf{V}_j = \{\mathbf{v}_j\}$. Afin d’assurer la condition de lien entre \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j , au moins un chemin appartenant à $\mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)$ doit être valide.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{p_k \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)} p_k.$$

Nous supposons maintenant que pour tout ensemble $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$, $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$ et $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$, l’expression $\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0)$ fournit une expression booléenne qui est “vrai” si et seulement si la condition de lien entre \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j est vérifiée lorsque nous considérons un graphe constitué uniquement par les sommets dans \mathcal{V}_0 . Soit $\mathbf{v}_j \in V_2 \setminus \mathbf{V}_j$, la condition de lien entre \mathbf{V}_i et $\mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}$, en considérant le graphe constitué par les sommets de \mathcal{V}_0 , est vérifiée si et seulement si les conditions suivantes sont toutes vérifiées :

- Il existe un chemin valide p_ℓ reliant \mathbf{v}_j à \mathbf{V}_i *i.e.* reliant \mathbf{v}_j à au moins un élément $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$. Ceci est traduit par la validité du chemin $p_\ell \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)$,
- La condition de lien entre les autres éléments de \mathbf{V}_i , *i.e.* $\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}$, et \mathbf{V}_j est “vrai”. Pour cette condition, nous considérons un graphe constitué uniquement de sommets dans $\mathcal{V}_0 \setminus \Psi(p_\ell)$ afin d’utiliser uniquement des chemins disjoints *i.e.* non couverts par p_ℓ .

Cela peut se traduire par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \text{Pred}(\{\mathbf{v}_j\}) \cap \mathbf{V}_i} \left(\bigvee_{p_\ell \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V}_0)} \left(p_\ell \wedge \mathcal{L}(\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}_0 \setminus \Psi(p)) \right) \right).$$

Donc, d’une part, nous avons montré que pour un élément de V_2 , l’expression booléenne proposée représente la validité de la condition de lien et d’autre part, nous avons montré que si l’expression booléenne correspond à la condition de lien pour un ensemble \mathbf{V}_j , elle correspond toujours à la condition de lien quand un élément \mathbf{v}_j est ajouté *i.e.* de $\mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}$. Ainsi, la construction récursive de la fonction $\mathcal{C}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est compatible avec la condition de lien. △

Illustrons l’analyse proposée sur un exemple.

Exemple 6 Soit le moteur à courant continu illustré par la Figure 2.3. Ce système est composé de deux sous-systèmes :

▷ Un sous-système électrique :

L l'inductance de fuite, R la résistance de l'armature, k_m la constante de fcem, et $u(t)$ la tension d'induit.

▷ Un sous-système mécanique :

L'indice "m" correspond au moteur et l'indice "L" correspond à la charge. J est l'inertie, b est la constante d'amortissement, T_r est le couple exercé sur la charge, et i le courant de l'induit qui commande le sous-système mécanique. L'arbre d'accouplement dispose d'un ressort k . On note $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire.

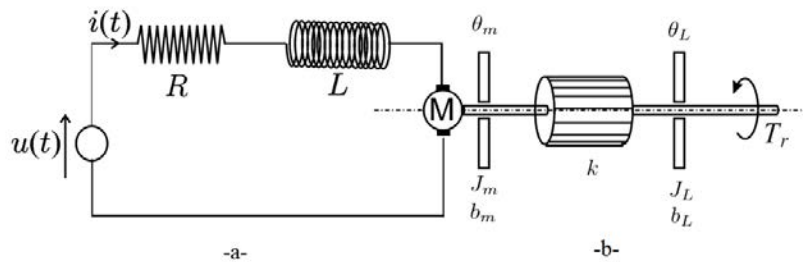


FIGURE 2.3 – Moteur électrique

Les expressions qui régissent la dynamique de ce système sont présentées comme suit :

$$\begin{cases} J_m \dot{\omega}_m + b_m \omega_m + b_L (\omega_m - \omega_L) + k(\theta_m - \theta_L) - k_i i & = 0 \\ J_L \dot{\omega}_L - b_L (\omega_m - \omega_L) - k(\theta_m - \theta_L) & = T_r \\ L \dot{i} + R i + k_m \omega_m & = u \end{cases} \quad (2.17)$$

Dans cet exemple, nous avons un système linéaire ayant la forme :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Nous considérons le vecteur d'état $X = (i, \theta_m, \omega_m, \theta_L, \omega_L)^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)^T$, le vecteur d'entrée $U = (\mathbf{u})$ et le vecteur de sortie $Y = (\omega_m, \omega_L) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)$. Les matrices A , B , C et D sont donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & \frac{-k_m}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{J_L} & \frac{-k}{J_m} & \frac{-(b_L + b_m)}{J_m} & \frac{k}{J_m} & \frac{b_L}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{J_L} & \frac{b_L}{J_L} & \frac{-k}{J_L} & \frac{-b_L}{J_L} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T_r}{J_L} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D = 0.$$

Le graphe orienté représentant ce système est donné à la Figure 3.11.

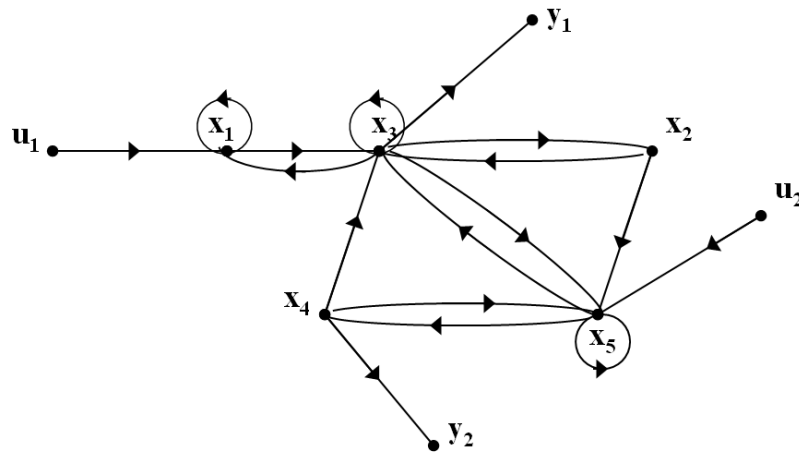


FIGURE 2.4 – Graphe orienté correspondant à l'Exemple 2.3

Dans ce graphe orienté, nous pouvons énumérer les chemins $U - Y$ suivants :

$$p_1 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1$$

$$p_4 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_2$$

$$p_2 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_2$$

$$p_5 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1$$

$$p_3 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_2$$

$$p_6 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1$$

Calculons maintenant la condition de lien $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ entre les ensembles U et Y en utilisant les sommets de $\mathcal{V} = U \cup X \cup Y$. L'expression $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ peut être utilisée dans l'analyse de la propriété structurelle de rejet de perturbations ou de diagnosticabilité.

Commençons le calcul de $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ en reliant, par exemple, U à \mathbf{y}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, \{\mathbf{y}_1\} \cup \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V}) = & \left(\mathbf{p}_1 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) \right) \\ & \vee \left(\mathbf{p}_5 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) \right) \\ & \vee \left(\mathbf{p}_6 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) \right) \end{aligned}$$

De la même façon, nous calculons les expressions :

- $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) = \mathbf{p}_4$,
- $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) = \text{faux}$,

et

- $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) = \text{faux}$.

Après simplification, la condition de lien entre les éléments de U et les éléments de Y est donnée par :

$$\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_4 \quad (2.18)$$

En utilisant la définition : $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(\mathbf{p}_t)} \mathbf{e}_i$ tel que e_i correspond à un arc $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$, l'expression $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ peut être exprimée en fonction de la validité des arcs comme suit :

$$\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_2) \quad (2.19)$$

À partir de l'expression booléenne $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$, tous ses arcs sont essentiels pour la vérification de la condition de lien entre U et Y . Donc, dès qu'un de ces arcs n'est plus valide, l'expression $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ est égale à "faux" et la condition de lien entre U et Y n'est plus vérifiée.

2.4 Condition de distance

2.4.1 Définition

La condition de distance est une condition graphique élémentaire basée sur la distance entre les éléments de deux ensembles de sommets qui se traduit par des contraintes de type égalité ou inégalité entre deux distances entre des ensembles de sommets ou, entre une distance et un nombre prédéfini. Plus précisément, les distances utilisées sont généralement

liées à la longueur minimale d'un lien de taille maximal entre des paires d'ensembles.

La condition de type distance peut être définie, dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, selon deux catégories. La première consiste à comparer la distance entre deux ensembles de sommets V_1 et V_2 à un nombre prédéfini ℓ qui dépend du problème à traiter. Dans ce cas, la condition de distance entre V_1 et V_2 est vérifiée si la distance entre V_1 et V_2 suivant la propriété à étudier est soit supérieure, inférieure ou bien égale au nombre prédéfini ℓ .

La deuxième catégorie consiste à comparer les longueurs des chemins reliant deux ensembles de sommets V_1 et V_2 avec les longueurs des chemins reliant deux ensembles de sommets V_3 et V_2 . Dans ce cas, la condition de distance entre V_1 et V_2 est vérifiée si la distance entre V_1 et V_2 est supérieure, inférieure ou bien égale à la distance entre V_3 et V_2 . L'ensemble V_3 peut inclure une partie ou tout l'ensemble V_1 comme c'est le cas pour l'observabilité à entrée inconnue et la solvabilité du problème de rejet de perturbations où cette condition de distance intervient (Boukhobza et al., 2014; van der Woude, 1991) (voir Table 2.1).

Nous nous intéressons, dans ce travail de thèse, à la deuxième catégorie de la condition de distance. Cette condition porte sur les distances des chemins $V_1 - V_2$ et $V_3 - V_2$. Plus précisément, la condition de distance à laquelle nous nous intéressons est du type $\gamma(V_1, V_2) \leq \gamma(V_3, V_2)$. Elle dépend de l'existence de chemins p valides dans un lien entre V_1 et V_2 au moins aussi courts que les chemins p' dans un lien entre $V_3 \setminus V_1$ et V_2 . Nous rappelons que $\ell(p)$ représente la longueur du chemin p *i.e.* le nombre d'arcs dans ce chemin. Afin de simplifier la notation, l'ensemble $V_3 \setminus V_1$ est noté $V_{3 \setminus 1}$ pour l'étude de la condition de distance.

Dans ce manuscrit, la condition de distance est représentée sous forme d'une expression booléenne basée sur les chemins du graphe orienté associé au système étudié. Compte tenu que l'état booléen d'un chemin dépend de l'état booléen de ses arcs, la condition de distance peut être réécrite en fonction des arcs du graphe. Cette expression booléenne est notée \mathcal{D} , elle est égale à “*vrai*” quand la condition de distance entre V_1 et V_2 est vérifiée et égale à “*faux*” dans le cas contraire.

2.4.2 Expression booléenne de la condition de distance

À partir de la définition de la condition de distance, nous nous intéressons à la validité des chemins $V_1 - V_2$ de longueur plus petite ou égale à celle des chemins $V_3 - V_2$. Les chemins reliant $V_{3 \setminus 1}$ à V_2 plus courts que ceux reliant V_1 à V_2 sont groupés dans un ensemble de chemins noté $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ tel que :

$$P_{(V_1, V_2, V_3)} = \left\{ p' = V_{3 \setminus 1} - V_2 \mid \exists p \in \mathbf{IP}(V_1, V_2, \mathcal{V}) \text{ ayant le même sommet feuille,} \right. \\ \left. \text{avec } \ell(p') < \ell(p) \right\}$$

L'ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ contient donc des chemins $V_{3 \setminus 1} - V_2$ plus courts qu'au moins un chemin $V_1 - V_2$. Les chemins dans cet ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ représentent donc une contrainte par rapport à la condition de distance puisqu'ils doivent être de longueur inférieure ou égale à celle des chemins $V_1 - V_2$. Par conséquent, les chemins appartenant au lien V_1 à V_2 doivent être plus courts que ceux dans $P_{(V_1, V_2, V_3)}$. Si cet ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ est vide, la condition de distance est toujours vérifiée.

Dans cette sous-section, une hypothèse \mathbf{H}_7 est considérée :

\mathbf{H}_7 : Une condition de lien $\mathcal{L}(V_1, V_2, \mathcal{V})$ est préalablement vérifiée, *i.e.* le nombre de chemins entre V_1 et V_2 est égal à $\text{card}(V_2)$, lors de l'étude de la condition de distance $\mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ entre V_1 et V_2 en prenant en considération des chemins $V_{3 \setminus 1} - V_2$ plus courts. Nous avons donc des chemins valides entre V_1 et V_2 dont il faut étudier la longueur par rapport à celle des chemins $V_{3 \setminus 1} - V_2$ pour établir la condition de distance entre eux.

Cette hypothèse n'est pas souvent restrictive. Par exemple, pour le cas du rejet de perturbations où $V_1 = U$, $V_2 = Y$, $V_3 = Q \cup U$ et $V_{3 \setminus 1} = Q$, la condition de lien entre U et Y doit être vérifiée. Ainsi, les sorties dans Y sont connectés aux entrées dans U par des chemins disjoints. Quand cette condition de lien est vérifiée, nous nous intéressons à la condition de distance et donc à la longueur des chemins reliant U à Y et, Q à Y .

Les chemins qui ne sont pas inclus dans l'ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ ne sont pas considérés dans la condition de distance. En effet, quand il n'y a pas de chemin dans l'ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ *i.e.* il n'existe que des chemins $V_1 - V_2$ plus courts que les chemins $V_3 \setminus V_1 - V_2$, la condition de distance, avec $P_{(V_1, V_2, V_3)} = \emptyset$, dépend uniquement de la condition de lien tel que :

$$\mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, \emptyset) = \mathcal{L}(V_1, V_2, \mathcal{V}) \quad (2.20)$$

Pour tout $\mathbf{v}_i \in V_1$, $\mathbf{v}_j \in V_2$, $\mathbf{v}_t \in V_3 \setminus V_1$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$, nous définissons l'ensemble de chemins $L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3 \setminus V_1, P_0)$ qui suit :

$$L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \left\{ p = \{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\} \vee p' = \{\mathbf{v}_t\} - \{\mathbf{v}_j\} \text{ dans } P_0 \mid \ell(p) \leq \ell(p') \right\}$$

Nous définissons l'expression \mathcal{D}^l avec $\mathbf{v}_i \in V_1$, $\mathbf{v}_j \in V_2$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$:

$$\mathcal{D}^l(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)} \mathbf{p}_k \quad (2.21)$$

Nous rappelons que \mathbf{p}_k correspond à la valeur booléenne du chemin p_k *i.e.* $\mathbf{p}_k = \text{vrai}$ quand le chemin p_k est valide et $\mathbf{p}_k = \text{faux}$ sinon. \mathbf{p}_k est la valeur booléenne associée au chemin p_k telle que $\mathbf{p}_k = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(p_k)} \mathbf{e}_i$. $\Upsilon(p_k)$ caractérise l'ensemble des arcs couverts par le chemin p_k .

Quand $V_1 = \emptyset$, la condition de distance est toujours “*vrai*” et, quand $V_2 = \emptyset$, la condition de distance est toujours “*fausse*” quelque soit l'ensemble $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^l(V_1, \emptyset, V_3, P_0) = \text{vrai} \\ \mathcal{D}^l(\emptyset, V_2, V_3, P_0) = \text{faux} \end{cases} \quad (2.22)$$

Quand l'ensemble $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$ ne contient qu'un seul élément *i.e.* $\mathbf{V}_j = \{\mathbf{v}_j\}$, l'expression correspondante $\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)$ est donnée par :

$$\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i} \mathcal{D}^l(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) \quad (2.23)$$

Pour tout $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$, $\mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\} \subseteq V_2$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$, nous avons :

$$\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \text{Pred}(\{\mathbf{v}_j\}) \cap \mathbf{V}_i} \left(\bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)} \left(\mathfrak{p}_k \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{V}_j, V_3, P_0) \right) \right) \quad (2.24)$$

En d'autres termes, $\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$ est obtenue comme $\mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathcal{V})$ en ne considérant que les chemins dans $L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)$ au lieu des chemins dans $\mathbf{IP}(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, \mathcal{V})$ pour chaque lien $\{\mathbf{v}_i\}$ - $\{\mathbf{v}_j\}$.

Lors du calcul de D^l , tous les chemins $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$ sont considérés comme valides. Ainsi, pour $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$ et $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$, l'expression $\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$ traite les chemins $\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j$ de longueur inférieure ou égale à celle des chemins $V_{3 \setminus 1} - \mathbf{V}_j \subseteq P_0$. À partir de ce qui précède, pour chaque ensemble $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$, $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$, et pour chaque chemin $p'_0 \in P_{(V_1, V_2, V_3)}$, nous définissons la condition de distance comme suit :

- Si $P_{(V_1, V_2, V_3)} = \{p'_0\}$

$$\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, \{p'_0\}) = \left(\bar{\mathfrak{p}}'_0 \wedge \mathcal{C}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathcal{V}) \right) \vee \left(\mathfrak{p}'_0 \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, \{p'_0\}) \right) \quad (2.25)$$

- Si $P_{(V_1, V_2, V_3)} = P_0 \cup \{p'_0\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\}) &= \left(\bar{\mathfrak{p}}'_0 \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0) \right) \\ &\vee \left(\mathfrak{p}'_0 \wedge \left(\bigwedge_{p'_i \in P_0} \mathfrak{p}'_i \right) \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\}) \right) \\ &\vee \left(\bigvee_{p'_i \in P_0} \left(\bar{\mathfrak{p}}'_i \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\} \setminus \{p'_i\}) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

De cette analyse, il vient la proposition suivante :

Proposition 4 *Considérons un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. La condition de distance entre deux ensembles de sommets $V_1 \subseteq \mathcal{V}$, $V_2 \subseteq \mathcal{V}$, $V_3 \subseteq \mathcal{V}$ et $V_{3 \setminus 1} = V_3 \setminus V_1$, en utilisant les chemins dans $P_{(V_1, V_2, V_3)}$, est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne $\mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ calculée par les équations (2.25) et (2.26) est "vrai" et l'expression $\mathcal{L}(V_1, V_2, \mathcal{V})$ qui corres-*

pond à la condition de lien entre V_1 et V_2 est “vrai”.

Preuve : Le résultat de ce paragraphe est prouvé en utilisant l’aspect récursif de l’expression $\mathcal{D}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Quand il n’y a aucun élément dans l’ensemble $V_3 \setminus 1$, l’ensemble $P_{(V_1, V_2, V_3)}$ est vide. Dans ce cas, la condition de distance est équivalente à la condition de lien pour tout ensemble $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$, $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$ et $V_3 \subseteq \mathcal{V}$. Donc, $\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, \emptyset) = \mathcal{L}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathcal{V})$.

Prouvons d’abord que l’expression $\mathcal{D}^l(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ correspond à la condition de distance. Pour $\{\mathbf{v}_i\} = V_1$, $\{\mathbf{v}_j\} = V_2$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$, \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j ne peuvent être liés que par des chemins dans $L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)$ qui sont de longueur plus petite ou égale à celle des chemins dans P_0 . Ainsi, $\mathcal{D}^l(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)} \mathfrak{p}_k$.

Nous supposons maintenant que pour tout ensemble $\mathbf{V}_j \subseteq V_2$, $\mathbf{V}_i \subseteq V_1$ et $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$, l’expression $\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$ fournit une expression booléenne qui est “vraie” si et seulement si la condition de distance entre \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j est vérifiée lorsque nous considérons les chemins dans P_0 . Soit $\mathbf{v}_j \in V_2 \setminus \mathbf{V}_j$, la condition de distance entre \mathbf{V}_i et $\mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}$, est vérifiée si et seulement si les conditions suivantes sont toutes vérifiées :

- \mathbf{v}_j est lié à \mathbf{V}_i par un chemin p_k de longueur inférieure ou égale à celle de tous les chemins dans P_0 . Ceci est traduit par la validité du chemin $p_k \in L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)$,
- La condition de distance entre les autres éléments de \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j , *i.e.* la condition de distance entre $\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}$ et \mathbf{V}_j est égale à “vrai”.

Cela peut se traduire par :

$$\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \cup \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0) = \bigvee_{\mathbf{v}_i \in \text{Pred}(\{\mathbf{v}_j\}) \cap \mathbf{V}_i} \left(\bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)} \left(\mathfrak{p}_k \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i \setminus \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{V}_j, V_3, P_0) \right) \right)$$

D’autre part, supposons que pour tout ensemble $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$ et pour tout \mathbf{V}_j , \mathbf{V}_i et V_3 , $\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$ fournit une expression booléenne qui est “vrai” si et seulement si \mathbf{V}_i est lié à \mathbf{V}_j uniquement par des chemins de longueur inférieure ou égale à celle des chemins dans P_0 . Considérons un chemin $p'_0 \in P_{(V_1, V_2, V_3)} \setminus P_0$ un chemin reliant $V_3 \setminus 1$ à V_2 . La condition de distance entre \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j est vérifiée si et seulement si au moins une des conditions suivantes

est vérifiée :

- Quand p'_0 n'est pas valide. Dans ce cas, il faut que \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j soient liés en utilisant uniquement des chemins de longueur inférieure ou égale à celle des chemins dans P_0 *i.e.* la condition $\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$ est “vrai”. Ceci correspond à $\bar{p}'_0 \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)$.
- Quand p'_0 et tous les chemins de P_0 sont valides. Dans ce cas, nous utilisons l'expression \mathcal{D}^l qui assure le lien entre les éléments $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$ et $\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}_j$ en ne considérant que des chemins dans $L_d(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}, V_3, P_0)$ de longueur inférieure ou égale à celle de tous les chemins dans P_0 . Ainsi, \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j peuvent être liés par des chemins de longueur inférieure ou égale à celle des chemins dans $\{p'_0\} \cup P_0$ malgré la validité de ces derniers.
- Quand un chemin $p'_i \in P_0$ n'est pas valide *i.e.* \bar{p}'_i . Dans ce cas, seuls les chemins dans $P_0 \cup \{p'_0\} \setminus \{p'_i\}$ peuvent être considérés dans le calcul de la condition de distance entre \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j *i.e.* $\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\} \setminus \{p'_i\})$.

Ceci peut être traduit par l'expression :

$$\mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\}) = (\bar{p}'_0 \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0)) \vee \left(p'_0 \wedge \bigwedge_{p'_i \in P_0} p'_i \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\}) \right) \vee \left(\bigvee_{p'_i \in P_0} (\bar{p}'_i \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, V_3, P_0 \cup \{p'_0\} \setminus \{p'_i\})) \right).$$

Par conséquent, nous avons montré que pour chaque chemin $V_{3 \setminus 1} - V_2$, l'expression booléenne proposée représente la validité de la condition de distance. Ainsi, la construction récursive de la fonction $\mathcal{D}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ est compatible avec la condition de distance. \triangle

Illustrons l'approche proposée par un exemple de rejet de perturbations.

Exemple 7 Soit le système thermique illustré par la Figure 2.5.

Ce système est composé de 5 réservoirs tels que chaque réservoir est alimenté par un flux d'eau fixe. Le système est commandé par deux entrées de chauffage w_1 et w_2 placées respectivement dans les réservoirs 2 et 3. La sortie régulée est le débit de sortie du réservoir 5. Les perturbations sont des variations de température du flux d'entrée du 1^{er} et 2^{ème} réservoirs

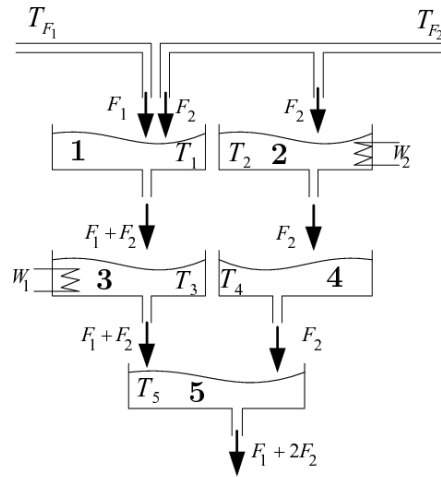


FIGURE 2.5 – Système thermique

notées T_{F_1} et T_{F_2} .

Ce système correspond aux équations suivantes où C_i , F_i et T_i représentent respectivement la capacité calorifique, le flux d'eau et la température du $i^{\text{ème}}$ réservoir.

$$\begin{cases} C_1 \Delta \dot{T}_1 = -(F_1 + F_2) \Delta T_1 + F_1 \Delta T_{F_1} + F_2 \Delta T_{F_2} \\ C_2 \Delta \dot{T}_2 = -F_2 \Delta T_2 + F_2 \Delta T_{F_2} + \Delta w_2 \\ C_3 \Delta \dot{T}_3 = (F_1 + F_2) \Delta T_1 - (F_1 + F_2) \Delta T_3 + \Delta w_1 \\ C_4 \Delta \dot{T}_4 = F_2 \Delta T_2 - F_2 \Delta T_4 \\ C_5 \Delta \dot{T}_5 = (F_1 + F_2) \Delta T_3 + F_2 \Delta T_4 - (F_1 + 2.F_2) \Delta T_5 \end{cases}$$

Ce système thermique est un système linéaire ayant la forme suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Nous considérons le vecteur d'état $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5)^T = (\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4, \Delta T_5)^T$, le vecteur d'entrées $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^T = (\Delta w_1, \Delta w_2)^T$, le vecteur de sorties $Y = (\mathbf{y}_1)^T = (\Delta T_5)^T$ et le vecteur de perturbations $Q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)^T = (\Delta T_{F_1}, \Delta T_{F_2})^T$. Les matrices A , B , C et E sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-(F_1 + F_2)}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_2}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_1 + F_2}{C_3} & 0 & \frac{-(F_1 + F_2)}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{C_4} & 0 & \frac{-F_2}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_1 + F_2}{C_5} & \frac{F_2}{C_5} & \frac{-(F_1 + 2.F_2)}{C_5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \text{ et } E = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{C_1} & \frac{F_2}{C_1} \\ 0 & \frac{F_2}{C_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

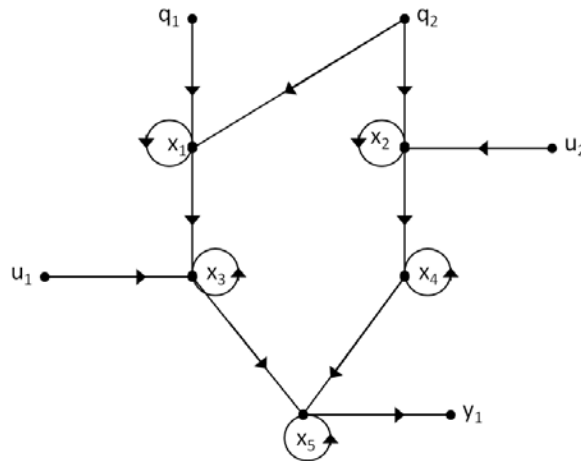


FIGURE 2.6 – Graphe orienté correspondant à l'Exemple 7

Le graphe orienté représentant ce système est donné sur la Figure 2.6. En analysant le graphe de la figure 2.6, les perturbations \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 peuvent affecter la sortie \mathbf{y}_1 . Nous pouvons énumérer, dans ce graphe orienté, les chemins suivants où p_i désigne un chemin $U - Y$ et p'_j désigne un chemin $Q - Y$:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p_4 &= \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1 \\ p'_2 &= \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p_5 &= \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1 \\ p'_3 &= \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous nous intéressons à la condition de distance entre $V_1 = U$ et $V_2 = Y$

en utilisant des chemins $U - Y$ plus courts que les $Q - Y$. Pour ce faire, la condition de lien entre $V_1 = U$ et $V_2 = Y$ doit être vérifiée i.e. $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = \text{“vrai”}$.

Après le calcul de la condition de lien en utilisant l'équation (2.16), nous obtenons :

$$\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = \mathbf{p}_4 \wedge \mathbf{p}_5$$

Pour le calcul de la condition de distance $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{V_1, V_2, V_3})$, nous avons :

$$\begin{cases} L_d(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_1\}, V_3, P_{V_1, V_2, V_3}) = p_4 \\ L_d(\{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_1\}, V_3, P_{V_1, V_2, V_3}) = \emptyset \\ P_{(V_1, V_2, V_3)} = \{p'_1, p'_2, p'_3\} \end{cases}$$

Considérons que $P_0 = \{p'_1, p'_2\}$ et $P_{(V_1, V_2, V_3)} = P_0 \cup \{p'_3\}$. La condition de distance correspondante est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U, Y, Q, P_0 \cup \{p'_3\}) &= (\bar{\mathbf{p}}'_3 \wedge \mathcal{D}(U, Y, Q, P_0)) \vee \left(\mathbf{p}'_3 \wedge \bigwedge_{p'_i \in P_0} \mathbf{p}'_i \wedge \mathcal{D}^l(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) \right) \\ &\vee \left(\bigvee_{p'_i \in P_0} (\bar{\mathbf{p}}'_i \wedge \mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)} \setminus \{p'_i\})) \right) \end{aligned}$$

L'expression $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ peut être utilisée dans l'analyse de la propriété structurelle de rejet de perturbations.

En utilisant l'expression (2.24), la condition de distance pour cet exemple est donnée par :

$$\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{V_1, V_2, V_3}) = \mathbf{p}_4 \vee (\mathbf{p}_5 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_1 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_2 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_3)$$

Avec la définition : $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(\mathbf{p}_t)} \mathbf{e}_i$ tel que e_i correspond à un arc $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_t)$, l'expression

$\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ peut être exprimée en fonction de la validité des arcs comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) = & (\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1) \wedge \left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) \right) \vee \left((\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \wedge \right. \\ & \left. \overline{(\mathbf{q}_2, \mathbf{x}_2)} \wedge \left(\overline{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)} \vee \overline{(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5)} \vee \left(\overline{(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1)} \wedge \overline{(\mathbf{q}_2, \mathbf{x}_1)} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

À partir de l'expression booléenne $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$, l'arc $(\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1)$ est essentiel pour la vérification de la condition de distance entre U et Y . Donc, si cet arc n'est plus valide, l'expression $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ est égale à "faux" et la condition de distance entre U et Y n'est plus vérifiée.

2.5 Condition de couplage complet

2.5.1 Définition

La condition de couplage complet est une condition basée sur le nombre d'arcs entre deux ensembles de sommets dans un graphe biparti. Comme présenté sur la Table 2.1 dans la Section 3.1, cette condition est utilisée afin de garantir la vérification de plusieurs propriétés structurelles telles que la commandabilité, l'observabilité et la diagnosticabilité (Boukhobza and Hamelin, 2007; Commault and Dion, 2013).

Dans un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$, la condition de couplage complet est définie entre les deux ensembles V^+ et V^- . Sans perte de généralité, nous considérons dans cette section que le couplage est complet. La condition de couplage complet consiste à avoir entre V^+ et V^- un couplage de taille t égale à $\text{card}(V^-)$ ou $\text{card}(V^+)$. Pour l'observabilité par exemple, le couplage complet doit être de taille $\text{card}(V^+)$, et pour la commandabilité, le couplage complet doit être de taille $\text{card}(V^-)$.

Cette condition peut être considérée comme un cas particulier de la condition de lien quand elle est appliquée sur des chemins ayant la longueur 1 (chemins composés d'un seul arc) dans un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$.

Dans ce paragraphe, nous cherchons à exprimer la condition de couplage complet sous forme d'une expression booléenne basée sur les arcs du graphe biparti représentant le système. Cette expression est notée MC et elle est égale à “*vrai*” quand la condition de couplage complet est vérifiée et égale à “*faux*” dans le cas contraire.

2.5.2 Expression booléenne de la condition de couplage complet

À partir de la définition, la condition de couplage complet est définie entre les deux ensembles de sommets V^+ et V^- du graphe biparti. Elle consiste à ce qu'un couplage complet entre V^+ et V^- égal à $\theta(V^+, V^-)$, *i.e.* le nombre d'arcs disjoints reliant V^+ et V^- est égale à $card(V^+)$, soit vérifié. La condition de couplage complet entre deux ensembles de sommets V^+ et V^- est notée $MC(V^+, V^-)$.

Après la DM décomposition (cf. Annexe A) du graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$, soit $\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}_B$ un ensemble d'arcs intra-classes *i.e.* des arcs reliant deux sommets appartenant à la même composante. Seuls les arcs appartenant à \mathcal{E}^* peuvent être utilisés dans un couplage complet. Les arcs dans $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_B \setminus \mathcal{E}^*$ ne sont jamais couverts par un couplage complet et par conséquent ils ne sont pas considérés dans notre étude. Ainsi, $MC(V^+, V^-)$ ne dépend que des arcs de $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_B \setminus \mathcal{E}_\mu$. L'expression $MC(V^+, V^-)$ est donnée par l'équation (2.28) :

$$MC(V^+, V^-) = Exp(V^+, \mathcal{E}^*) \quad (2.28)$$

$Exp(V^+, \mathcal{E}^*)$ est une expression booléenne qui correspond à la condition de couplage complet entre V^+ et V^- en utilisant les arcs inclus dans l'ensemble \mathcal{E}^* . Le prototype de l'expression $Exp(W, E)$ est donnée ci-dessous où $W \subseteq V^+$ et $E \subseteq \mathcal{E}^*$.

$$Exp(W, E) = \bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \in E} \left((\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \wedge Exp\left(W \setminus \{\mathbf{v}_i^+\}, f(W \setminus \{\mathbf{v}_i^+\}, E \setminus \{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \cup \mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)}\})\right) \right) \quad (2.29)$$

où $f(W, E)$ est une fonction qui calcule la DM décomposition du graphe biparti $\mathcal{B}(W, V^-, E)$ et retourne l'ensemble des arcs reliant deux sommets de la même composante fortement connexe (Dulmage and Mendelsohn, 1958; Murota, 1987a) . $\mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)}$ représente l'ensemble des arcs non disjoints avec $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)$.

Lorsque l'ensemble des sommets W ne contient qu'un seul élément \mathbf{v}_i^+ , l'expression $Exp(W, E) = Exp(\{\mathbf{v}_i^+\}, E)$ est donnée par :

$$Exp(\{\mathbf{v}_i^+\}, E) = \bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \in E} (\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \quad (2.30)$$

Quand $card(W) = 0$, l'expression $Exp(W, E) = Exp(\emptyset, E)$ est égale à “vrai” puisqu'il n'y a pas de sommet dans W à relier avec les éléments de V^- . Quand $card(W) \neq 0$ et $card(E) = 0$, $Exp(W, E) = 0$ parce qu'il n'y a pas d'arc dans E pour assurer le lien entre les éléments de W et l'ensemble V^- .

À partir de cette analyse, il vient la proposition suivante :

Proposition 5 *Soit un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$. Le couplage maximal entre V^+ et V^- est complet i.e. il est de cardinalité $card(V^+)$ si et seulement si l'expression booléenne $MC(V^+, V^-) = Exp(V^+, \mathcal{E}^*)$ calculée récursivement en utilisant les équations (2.29) et (2.30) est “vrai”.*

Preuve : En utilisant la DM décomposition qui caractérise le couplage complet (Murota, 1987b), nous obtenons des composantes fortement connexes V_i pour $i = 0, 1, 2, \dots, r, \infty$. Considérons \mathcal{E}_μ l'ensemble des arcs $(\mathbf{v}_\ell^+, \mathbf{v}_m^-)$ reliant les deux sommets \mathbf{v}_ℓ^+ et \mathbf{v}_m^- appartenant à deux composantes fortement connexes différentes. Il est bien connu (Dulmage and Mendelsohn, 1958) que les composantes de la DM décomposition caractérisent tous les couplages complets possibles, car ces composantes sont les mêmes quel que soit le couplage complet choisi. Par conséquent, les arcs de l'ensemble \mathcal{E}_μ ne peuvent pas appartenir à un couplage complet et ils sont donc inutiles dans la constitution d'un couplage complet pour le graphe biparti considéré. Ainsi, nous ne considérons que les arcs inclus dans $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_B \setminus \mathcal{E}_\mu$. Tous les éléments de \mathcal{E}^* appartiennent à au moins un couplage complet, i.e. $\forall (\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in \mathcal{E}^*$, $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$ est utilisable dans un couplage complet. Ainsi, un couplage complet ne peut contenir que des éléments de l'ensemble \mathcal{E}^* .

Maintenant, nous prouvons que $Exp(V^+, \mathcal{E}^*)$ est “vrai” lorsque le graphe biparti vérifie un couplage complet de taille $card(V^+)$ et “faux” sinon. Nous montrons par récurrence

que pour chaque ensemble $W \subseteq V^+$ et $E = f(W, \mathcal{E}_B)$, $Exp(W, E)$ est l'expression correspondant à la validité de la condition de couplage complet entre W et V^- . Pour ce faire, nous prouvons d'abord que $Exp(W, E)$ correspond à la condition de couplage complet pour $card(W) = 1$ puis pour $card(W) = 2$. Ensuite, en considérant que $Exp(W, E)$ correspond à la condition de couplage complet pour $card(W) = n_0$, nous montrons que cette expression correspond à la condition de couplage complet pour tout ensemble W de cardinalité $n_0 + 1$. Quand W ne contient qu'un seul élément \mathbf{v}_i , ce dernier peut être relié à V^- en utilisant l'un des arcs de l'ensemble E . Ainsi, il y a un \vee logique entre les éléments de E :

$\bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in E} (\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$. Cette partie de $MC(V^+, V^-)$ est égale à "faux" si tous les arcs de E connectant \mathbf{v}_i^+ à V^- ne sont pas valides.

Quand $card(W) = 2$, notons $W = \{\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^+\} \subseteq V^+$. Deux cas se présentent :

- (1) \mathbf{v}_i^+ et \mathbf{v}_k^+ ne sont pas dans la même composante DM, ou
- (2) \mathbf{v}_i^+ et \mathbf{v}_k^+ sont dans la même composante DM.

Dans le cas (1), \mathbf{v}_i^+ et \mathbf{v}_k^+ appartiennent à deux composantes DM différentes, chacun de ces deux sommets peut être relié à V^- par un arc appartenant à l'ensemble E et à sa composante DM. Par conséquent, $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$ et $(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-)$ sont toujours disjoints. L'expression

est donc donnée par : $\left(\bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in E} (\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \right) \wedge \left(\bigvee_{(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-) \in E} (\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-) \right)$.

Dans le cas (2), si le sommet \mathbf{v}_i^+ est traité en premier, alors l'expression booléenne est

$\bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in E} \left((\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \wedge Exp(\{\mathbf{v}_k^+\}, E_1) \right)$ où $E_1 = f(\{\mathbf{v}_k^+\}, E \setminus \{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \cup \mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)}\})$

contient tous les arcs disjoints avec $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$ pouvant appartenir à un couplage complet. Comme il est indiqué au début de la preuve, dans l'expression $Exp(\{\mathbf{v}_k^+\}, E_1)$,

$card(W) = 1$. Ainsi, l'expression booléenne de la condition de couplage complet dans ce

cas est $\bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in E} \left[(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \wedge \left(\bigvee_{(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-) \in E_1} (\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-) \right) \right]$. L'arc $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$ est dans E et l'arc

$(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-)$ est dans E_1 et ils sont toujours disjoints grâce à la fonction f qui calcule la DM décomposition du graphe biparti.

Supposons maintenant que pour tous les sous-ensembles $V_0^k \subseteq V^+$ de cardinalité $n_0 < \text{card}(V^+)$, $\text{Exp}(V_0^k, \mathcal{E}_0^k)$ est l'expression correspondant à la validité de la condition de couplage complet. \mathcal{E}_0^k définit un sous-ensemble d'arcs où au moins un couplage complet de taille n_0 est possible, *i.e.* le couplage complet entre V_0^k et V^- est égal à $\text{card}(V_0^k)$. Maintenant, prouvons que Exp est "vrai" $\forall V_1^k \subseteq V^+$ de cardinalité $n_0 + 1$. Il est évident qu'il est toujours possible de trouver un ensemble V_0^k de cardinalité n_0 tel que $V_1^k = V_0^k \cup \{\mathbf{v}_i^+\}$. En utilisant l'équation (2.29), nous avons $\text{Exp}(V_1^k, \mathcal{E}_1^k) = \bigvee_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \in \mathcal{E}_1^k} \left((\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-) \wedge \text{Exp}(V_0^k, \mathcal{E}_{0ij}^k) \right)$, où \mathcal{E}_1^k définit un sous-ensemble d'arcs où au moins un couplage complet de taille $n_0 + 1$ est possible et $\text{Exp}(V_0^k, \mathcal{E}_0^k)$, par hypothèse, est l'expression du couplage complet entre V_0^k et V^- en utilisant l'ensemble d'arcs $\mathcal{E}_{0ij}^k \subseteq \mathcal{E}_0^k$ où $\mathcal{E}_{0ij}^k = f\left(V_0^k, \mathcal{E}_0^k \setminus \{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \cup \mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)}\}\right)$. Le sommet \mathbf{v}_i est toujours relié à V^- par un arc $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$ dans \mathcal{E}_1^k où \mathbf{v}_j^- est un successeur de \mathbf{v}_i^+ . Ainsi, la première partie de $\text{Exp}(V_1^k, \mathcal{E}_1^k)$ correspond à la condition de couplage complet. De plus, lorsque nous choisissons d'utiliser $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)$ pour joindre \mathbf{v}_i^+ à V^- , puisque tous les arcs utilisables dans un couplage complet sont dans $f(W \setminus \{\mathbf{v}_i^+\}, E \setminus \{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \cup \mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)}\})$, alors, selon l'hypothèse de récurrence, $\text{Exp}(V_0^k, f(V_0^k \setminus \{\mathbf{v}_i^+\}, \mathcal{E}_0^k \setminus \{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-) \cup \mathcal{E}_{(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_k^-)}\}))$ donne l'expression correspondant à la validité du couplage complet pour V_0^k . Par conséquent, l'expression $\text{Exp}(V_1^k, \mathcal{E}_1^k)$ est un \wedge logique entre des expressions booléennes qui correspondent à la condition de couplage complet, et donc Exp correspond à la condition de couplage complet pour tous les sous-ensembles V_1^k de cardinalité $n_0 + 1$.

Par conséquent, $\text{Exp}(V, E)$ correspond à l'état de validité de l'expression booléenne correspondante au couplage complet dans un graphe biparti selon l'état de validité des arcs. △.

Illustrons l'analyse précédente par l'exemple suivant :

Exemple 8 *Nous considérons l'exemple d'un modèle bilinéaire pour un actionneur électromécanique constitué d'un moteur à courant continu avec un accouplement et d'une charge, donné à la Figure 2.7.*

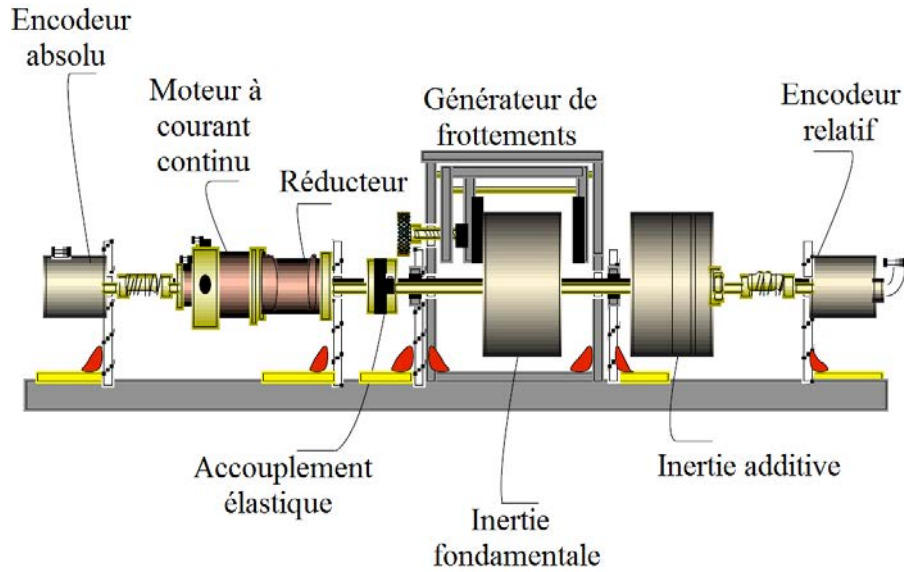


FIGURE 2.7 – Actionneur électromécanique

Ce système obéit aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a \dot{i}_a + R_a i_a + k_a i_e \omega_m = 0 \\ J_m \dot{\omega}_m - K_a i_e i_a + F_m \omega_m = -K_r \Delta_\Gamma \\ \dot{\Delta}_\Gamma - \frac{1}{N} \omega_m + \omega_c = 0 \\ J_c \dot{\omega}_c - F_c \omega_c + K_r \Delta_\Gamma = 0 \\ \dot{\theta}_m = \omega_m \end{array} \right.$$

où J_m et J_c sont les moments d'inertie du moteur et de la charge, F_m et F_c sont les coefficients de frottements visqueux du moteur et de la charge, k_a est la constante du couple du moteur, k_r est le coefficient de la rigidité du couplage, R_a et L_a sont la résistance et l'inductance du rotor, et N est le rapport d'engrenage. Le vecteur d'état du système est composé du courant du rotor i_a , de la vitesse de rotation de l'arbre du moteur ω_m , de la position angulaire de l'arbre du moteur θ_m , de la rotation angulaire Δ_r entre les arbres du moteur et de la charge due à l'accouplement élastique, et de la vitesse de rotation de l'arbre de la charge ω_c . Le vecteur des commandes est composé du courant du stator i_e .

Pour ce système ayant la forme :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x(t) + B u(t) \\ y(t) = C_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) C_i x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Nous notons $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)^T = (i_a, \omega_m, \theta_m, \Delta_\Gamma, \omega_c)^T$, $U = (\mathbf{u}_1) = (i_e)$ et $Y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)^T = (i_a, \theta_m, \omega_c)^T$. Le graphe biparti représentant ce système bilinéaire est donné sur la Figure 2.8. Nous avons $V^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+\}$ et $V^- =$

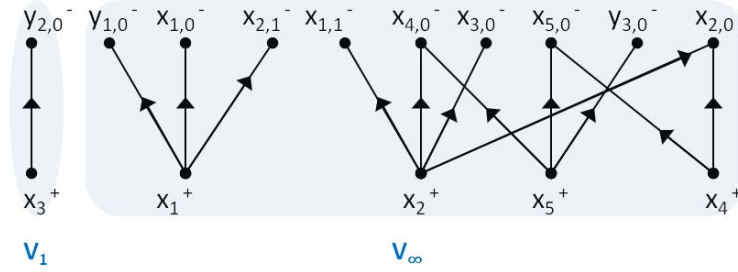


FIGURE 2.8 – Graphe biparti pour l'Exemple 8

$\{\mathbf{x}_{1,0}^-, \mathbf{x}_{1,1}^-, \mathbf{x}_{2,0}^-, \mathbf{x}_{2,1}^-, \mathbf{x}_{3,0}^-, \mathbf{x}_{4,0}^-, \mathbf{x}_{5,0}^-, \mathbf{y}_{1,0}, \mathbf{y}_{2,0}, \mathbf{y}_{3,0}\}$.

Dans ce graphe biparti, nous avons deux DM composantes V_1 et V_∞ , et il n'y a pas d'arcs reliant deux sommets de composantes différentes. Nous avons donc pour cet exemple $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_B$. Calculons maintenant l'expression booléenne $MC(V^+, V^-) = MC(X^+, X^- \cup Y^-) = Exp(V^+, \mathcal{E}_B)$. L'expression $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$ peut être utilisée dans l'analyse de l'observabilité. Le développement de l'expression $Exp(V^+, \mathcal{E}_B)$ peut commencer par la connexion de \mathbf{x}_3^+ à V^- . Il vient :

$$Exp(V^+, \mathcal{E}_B) = (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-) \wedge Exp(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-))$$

Continuons par le calcul de $Exp(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-))$ en connectant \mathbf{x}_4^+ à V^- comme suit :

$$Exp(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-)) = \left((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{y}_{1,0}^-) \wedge Exp(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-), (\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{2,0}^-)\}) \right)$$

$$\vee \left((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{1,0}^-) \wedge \text{Exp} \left(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-), (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{5,0}^-)\} \right) \right)$$

Remarque 5 *L'ordre de traitement des sommets \mathbf{x}_i^+ est arbitraire. Le résultat final i.e. l'expression booléenne $\text{Exp}(V^+, \mathcal{E}_B)$ est toujours le même quelque soit l'ordre de traitement des sommets \mathbf{x}_i^+ .*

De la même façon, nous calculons les expressions booléennes :

$$\text{Exp} \left(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-), (\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{2,0}^-)\} \right) \text{ et}$$

$$\text{Exp} \left(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_5^+\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-), (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{5,0}^-)\} \right).$$

Nous obtenons ainsi l'expression booléenne de la condition de lien complet donnée par :

$$\begin{aligned} MC(V^+, V^-) = \text{Exp}(V^+, \mathcal{E}_B) = & (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-) \wedge \left((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{y}_{1,0}^-) \vee (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{1,0}^-) \vee (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,1}^-) \right) \wedge \\ & \left(\left(\left((\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{1,1}^-) \vee (\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{3,0}^-) \right) \wedge \left(((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{y}_{3,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{5,0}^-)) \vee \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{4,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{y}_{3,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{4,0}^-)) \right) \right) \vee \right. \\ & \left. \left((\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{4,0}^-) \wedge \left(((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{y}_{3,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{5,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{y}_{3,0}^-)) \right) \right) \vee \right. \\ & \left. \left. \left. \left((\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge \left(((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{5,0}^-)) \vee ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{5,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{y}_{3,0}^-)) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

À partir de l'expression booléenne $MC(V^+, V^-)$, nous constatons que l'arc $(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{y}_{2,0}^-)$ est essentiel pour la vérification de la condition de distance entre $V^+ = X^+$ et $V^- = X^- \cup Y^-$. Donc, si cet arc n'est plus valide, l'expression $MC(V^+, V^-)$ est égale à "faux" et la condition de couplage complet entre V^+ et V^- n'est plus vérifiée.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats concernant les conditions graphiques élémentaires ont été présentés. En premier lieu, une table de synthèse bibliographique des conditions nécessaires

et suffisantes pour la vérification des propriétés structurelles a été donnée. Cette table montre que 4 catégories de conditions élémentaires graphiques sont essentiellement utilisées pour l'analyse de la vérification des propriétés structurelles pour 3 classes de systèmes structurés. Il s'agit des conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. Ces 4 catégories de conditions élémentaires graphiques sont traitées dans ce chapitre .

Après avoir énoncé la définition de chacune de ces conditions élémentaires, nous avons développé des expressions booléennes caractérisant l'état de validité de ces conditions. Les expressions booléennes sont basées sur les arcs dans les représentations graphiques du système. Ces arcs peuvent admettre deux états : valide ou non valide, ce qui détermine les valeurs (“*vrai*” ou “*faux*”) des expressions booléennes et donc l'état de validité des conditions élémentaires correspondantes. L'expression booléenne associée à la condition de connectivité est construite récursivement en utilisant deux approches graphiques différentes. La première est basée sur un parcours de graphes en profondeur et la seconde est basée sur un parcours de graphes en largeur. Les deux approches sont équivalentes en terme de résultat. Donc, une étude comparative basée sur leur complexité a été présentée. Cinq propositions sont donc fournies ainsi que leurs preuves pour les 4 conditions élémentaires traitées. Les approches proposées pour les conditions de lien, de distance et de couplage complet correspondent à des complexités polynomiales et non combinatoire quelque soit l'ordre du système.

Après avoir énoncé les résultats de ce chapitre sur les conditions élémentaires graphiques, des exemples ont illustré la construction des expressions booléennes associées aux conditions. Les expressions booléennes sont obtenues d'une façon récursive en utilisant des algorithmes à complexité polynomiale. Sachant ces expressions booléennes, leur combinaison en “ET” logique permet d'obtenir une expression booléenne associée à une propriété structurelle, par exemple l'expression booléenne associée à la capacité d'un système à rejeter les perturbations nécessite les expressions booléennes associées aux conditions de lien et de distance. Ainsi, les propriétés structurelles peuvent être écrites comme des expressions

booléennes basées sur les arcs des graphes associés au système.

La condition de distance est la seule condition à être développée sous l'hypothèse que la condition de lien soit vérifiée. La condition de distance n'est pas toujours associée à la condition de lien pour la vérification d'une propriété structurelle comme c'est le cas pour l'observabilité partielle. Ainsi, cette hypothèse est donc considérée comme une limite de notre étude.

La formulation des conditions élémentaires graphiques ainsi que les propriétés structurelle sous forme d'expressions booléennes basées sur les arcs des graphes associées au système permet de lier la vérification des propriétés structurelles à l'état de validité des arcs. Ainsi, il est possible de savoir l'impact de la non validité d'un ou plusieurs arcs sur la vérification des propriétés structurelle.

Ces expressions booléennes permettront ensuite le calcul de la fiabilité et/ou de la disponibilité des propriétés structurelles dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles

3.1 Introduction

Les propriétés structurelles jouent un rôle très important pour le bon fonctionnement d'un système et la sécurité de ses utilisateurs. En effet, il est nécessaire que certaines propriétés structurelles comme l'observabilité, la commandabilité, la solvabilité du problème de rejet de perturbations, la détectabilité et l'isolabilité des défauts, etc., soient vérifiées pendant toute la durée de la mission du système.

Nous avons présenté, dans le deuxième chapitre, 4 catégories de conditions graphiques élémentaires intervenant dans la validité de plusieurs propriétés structurelles. Il s'agit des conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. Ces conditions graphiques élémentaires ont été associées à des algorithmes permettant le calcul des expressions booléennes basées sur les arcs des graphes représentant la structure du système étudié. Les propriétés structurelles sont associées à des expressions booléennes par la combinaison logique des expressions booléennes associées à deux ou plusieurs conditions graphiques élémentaires (cf. Table 2.1) et leur instantiation par des ensembles spécifiques dans les graphes considérés. Par exemple, l'observabilité de l'état nécessite la vérification

des conditions de connectivité et de couplage complet, alors que la solvabilité du problème de rejet de perturbations nécessite la vérification des conditions de lien et de distance.

Dans ce chapitre, il s'agit d'exploiter les résultats du deuxième chapitre pour l'analyse de la sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles. Cette analyse est principalement basée sur le mode de fonctionnement des composants du système (bon fonctionnement ou défaillance). Par conséquent, les expressions booléennes, associées aux propriétés structurelles et basées sur les arcs, doivent être liées aux composants du système afin de pouvoir évaluer la fiabilité et la disponibilité de ces propriétés structurelles.

En effet, les arcs appartenant aux graphes représentant le système, peuvent être liés à ses composants grâce à une association arc-composants dans l'esprit de la fonction injective proposée par A. Kaufmann (Kaufmann et al., 1975) (cf. chapitre 1). Ainsi, l'état de validité des arcs, qui est égale à "*vrai*" ou "*faux*", dépend de l'état de fonctionnement des composants du système. En utilisant l'association arc-composants, les expressions booléennes, associées aux propriétés structurelles et basées sur les arcs, peuvent être réécrites en fonction des défaillances des composants du système.

Après avoir associé les propriétés structurelles aux expressions booléennes basées sur les défaillances des composants du système au travers des conditions graphiques élémentaires, leur fiabilité et/ou leur disponibilité peuvent être calculées. Pour ce faire, nous utilisons les outils de sûreté de fonctionnement présentés dans le premier chapitre.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'association des deux disciplines d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement qui est, à notre connaissance, peu abordée dans la littérature (Conrard et al., 2011; Maza et al., 2012; Staroswiecki, 2007). L'objectif de ce chapitre est de présenter le calcul de la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles en utilisant des outils de sûreté de fonctionnement. Aussi, les résultats de ce calcul sont interprétés en fonction des exigences dans le cahier des charges du système. L'association arc-composants est définie dans un premier temps. Le calcul de la fiabilité et

de la disponibilité, en utilisant 3 outils de la sûreté de fonctionnement qui sont les blocs diagramme de fiabilité, les réseaux bayésiens et les chaînes de Markov, sont ensuite détaillés. La fiabilité et la disponibilité de la commandabilité totale de l'état ainsi que de la solvabilité du problème de rejet de perturbations sont calculées pour un cas d'étude. Les résultats du calcul de ces deux paramètres de la sûreté de fonctionnement sont ensuite interprétés en relation avec les exigences du cahier des charges du système afin de prévoir des actions sur les composants en cas de non respect de ces exigences pendant la mission du système. Une conclusion est développée en fin du chapitre.

3.2 Association arc-composants

3.2.1 Définition

Dans un graphe orienté, les arcs représentent les relations entre les variables d'état, d'entrée, de sortie, de perturbation, etc., du système. Pour tout graphe orienté ou biparti représentant le système, ses arcs sont associés aux paramètres des matrices A , B , C , D , E , etc. de sa représentation d'état. Les paramètres de ces matrices sont naturellement liés aux composants physiques du système. Par exemple, un arc $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ correspond à un capteur puisqu'il lie une variable d'état à une sortie qui est une mesure, un arc $(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i)$ correspond à un actionneur puisqu'il lie une variable d'entrée qui est une commande à une variable d'état, ou un arc $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ qui lie 2 variables d'état et peut correspondre à un ou plusieurs composants internes.

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à l'étude des propriétés structurelles en se basant sur la représentation graphique du système étudié. La vérification de ces propriétés structurelles dépend de l'état de validité des arcs dans les graphes associés au système.

L'état des arcs et des composants obéit à l'hypothèse d'état binaire (cf. hypothèse \mathbf{H}_1) où chaque arc ou composant peut admettre deux états (valide/invalidé ce qui équivaut à bon fonctionnement/défaillant). Puisque l'état de validité des arcs dépend de l'état de fonctionnement des composants, nous matérialisons ceci par une association arc-composants.

En effet, pour cette association arc-composants, nous exploitons l'idée originale des réseaux de fiabilité de Kaufmann (Kaufmann et al., 1975) où cette association est donnée à travers une fonction injective. L'association entre les arcs et les composants du système utilisés dans ce travail de thèse est notée φ . Pour l'utilisation de cette association, nous considérons l'hypothèse que cette association est connue. Elle est définie entre un ensemble d'arcs et un ensemble d'expressions booléennes basées sur l'état de fonctionnement des composants du système et plus précisément leur défaillance. La défaillance d'un composant c_i est notée $C_i \in \{vrai, faux\}$ (\bar{C}_i représente son bon fonctionnement). Notons $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(C)$ où \mathcal{E} est l'ensemble d'arcs et $\mathcal{F}(C)$ est une expression booléenne basée sur les défaillances des composants. Par exemple $\varphi((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)) = \bar{C}_1 \wedge \bar{C}_2 \wedge (\bar{C}_3 \vee \bar{C}_4)$ avec \wedge et \vee représentent respectivement les "ET" et "OU" logiques. L'arc $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ est valide quand ni c_1 ni c_2 ni l'un des deux composants c_3 ou c_4 ne sont défaillants. Dans certains cas, aucune défaillance de composants n'est affectée à un arc. Par exemple, dans le cas de la dérivation, l'arc reliant les sommets représentant les variables \mathbf{v}_i et sa dérivée \mathbf{v}_j est toujours valide et $\varphi(arc) = \text{"vrai"}$. Puisque chaque arc correspond à un élément non nul dans les matrices d'état du système, il n'est pas supprimé du graphe quand il est invalide. Il est important de ne pas supprimer cet arc invalide du graphe car il redevient valide quand les composants défaillants correspondant sont réparés.

3.2.2 Exemple

Considérons un système électrique donné sur la Figure 3.1.

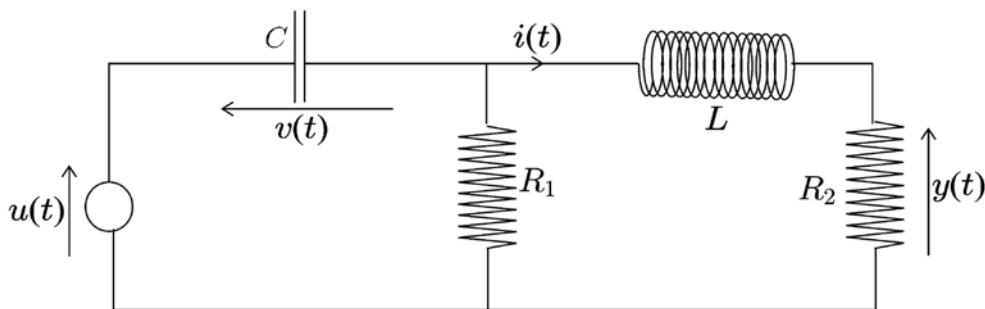


FIGURE 3.1 – Circuit électrique RLC

L'entrée est la tension représentée par $u(t)$ et la sortie est la tension représentées par $y(t)$. C , L , R_1 et R_2 caractérisent respectivement un condensateur, une bobine et deux résistances. $v(t)$ est la tension aux bornes de C et $i(t)$ est le courant qui passe à travers L et R_2 .

Ce système correspond aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= \frac{-1}{CR_1}v(t) + \frac{1}{C}i(t) + \frac{1}{CR_1}u(t) \\ \dot{i}(t) &= \frac{-1}{L}v(t) - \frac{R_2}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ y(t) &= R_2i(t) \end{cases}$$

Cet exemple correspond à un système linéaire de la forme :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{i}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{CR_1} & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ R_2) \begin{pmatrix} v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce système est représenté par le graphe orienté de la Figure 3.2. Les variables $u(t)$, $v(t)$, $i(t)$, $y(t)$ sont respectivement représentées par les sommets \mathbf{u}_1 , \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{y}_1 . Sur ce graphe orienté, les paramètres des matrices A , B et C sont représentés sur leurs arcs associés. La relation entre les arcs et les composants du système apparaît donc très clairement dans la Figure 3.2. L'arc $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$ est lié à la résistance R_2 , l'arc $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ est lié à l'inductance L , l'arc $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)$ est lié au condensateur C et à la résistance R_1 , etc.

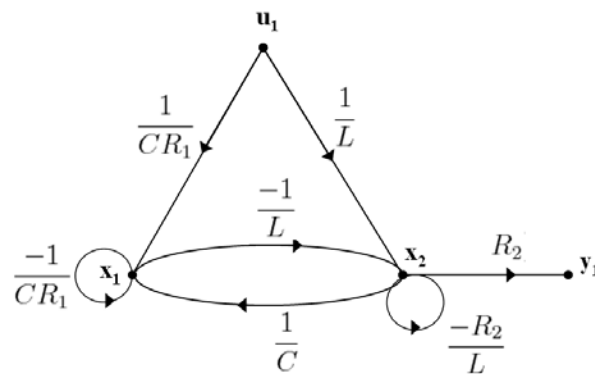


FIGURE 3.2 – Graphe orienté associé au circuit électrique RLC

Pour les 4 composants $c_1 = R_1$, $c_2 = R_2$, $c_3 = C$ et $c_4 = L$, toutes les associations entre les arcs et les défaillances des composants sont représentées sur la Table 3.1.

Arc	$\varphi(\text{Arc})$	Arcs	$\varphi(\text{Arc})$
$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1)$	$\overline{C_1} \wedge \overline{C_3}$	$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$	$\overline{C_4}$
$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2)$	$\overline{C_4}$	$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$	$\overline{C_3}$
$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)$	$\overline{C_1} \wedge \overline{C_3}$	$(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$	$\overline{C_2}$
$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)$	$\overline{C_2} \wedge \overline{C_4}$		

TABLE 3.1 – Association φ pour le circuit électrique RLC

Par exemple, un cas de défaillance de la résistance R_2 peut correspondre à ce que cette résistance soit équivalente à un interrupteur ouvert (une résistance fortement surchauffée et donc détruite). Par conséquent, le lien physique et fonctionnel entre $y(t)$ et $i(t)$ représentés par les sommets \mathbf{y}_1 et \mathbf{x}_2 n'existera plus et l'arc $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$ non valide.

3.3 Fiabilité des propriétés structurelles

3.3.1 Calcul de la fiabilité

Le calcul de la fiabilité des propriétés structurelles est basé sur des expressions booléennes en fonction des défaillances des composants du système. Pour ce calcul, nous utilisons les outils graphiques de modélisation et de calcul présentés dans le premier chapitre.

Remarque 6 *Pour le calcul de la fiabilité des propriétés structurelles, les hypothèses \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_3 , \mathbf{H}_4 et \mathbf{H}_5 énoncées dans le chapitre 1 sont considérées.*

3.3.2 Bloc diagramme de fiabilité

Les propriétés structurelles sont associées à des expressions booléennes basées sur les défaillances des composants du système correspondant. Ces expressions booléennes peuvent être représentées par des blocs diagramme de fiabilité (BDF) où les composants dans ces expressions sont représentés par des blocs. Le BDF correspondant permet de réaliser deux analyses de la fiabilité des propriétés structurelles. Une analyse qualitative (ou booléenne)

qui permet de savoir si une propriété structurelle est vérifiée lorsqu'un ou plusieurs composants du système sont défaillants et de déterminer les coupes minimales et les chemins de succès minimaux. La deuxième analyse est quantitative. Le calcul de la fiabilité globale du système est effectué sachant la fiabilité des composants associés aux blocs du diagramme.

En fonction de l'architecture fonctionnelle du système *i.e.* les interconnexions de ses composants (parallèle, série, parallèle/série, etc), la fiabilité est calculée comme suit :

$$P(\Sigma|t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^N P(\overline{C}_i|t) & \text{Pour les systèmes en série} \\ 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P(\overline{C}_i|t)) & \text{Pour les systèmes en parallèle} \end{cases} \quad (3.1)$$

Chaque composant c_i possède un taux de défaillance noté $\lambda_{c_i}(t)$ (cf. Annexe B). La fiabilité d'un composant c_i est donnée par :

$$P(\overline{C}_i|t) = R_{c_i}(t) = e^{-\int_0^T \lambda_{c_i}(t) dt} \quad (3.2)$$

Exemple 9 *Considérons la propriété structurelle correspondant à l'expression booléenne EB_1 basée sur les défaillances des composants et donnée comme suit :*

$$EB_1 = \overline{C}_1 \wedge \overline{C}_2 \wedge (\overline{C}_3 \vee (\overline{C}_4 \wedge \overline{C}_5))$$

Cette expression peut être représentée par le bloc diagramme de fiabilité donné sur la Figure 3.3.

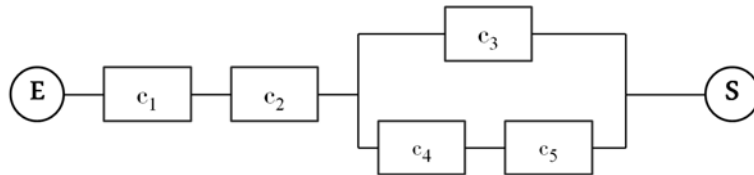


FIGURE 3.3 – BDF correspondant à l'expression booléenne EB_1

Dans ce BDF, nous avons 5 composants liés par des relations "ET" et "OU" logiques notés respectivement \wedge et \vee dans EB_1 .

Analyse qualitative :

Pour cet exemple, il y a 2 coupes minimales d'ordre 1 qui sont $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ et, 2 coupes minimales d'ordre 2 qui sont $\{c_3, c_4\}$ et $\{c_3, c_5\}$. Dans le même esprit que les résultats présentés dans (Conrard et al., 2011), il est possible de calculer le nombre minimal de défaillances tolérées. Afin de maintenir l'expression EB_1 égale à "vrai", aucune défaillance n'est tolérée. Par exemple, si le composant c_1 ou c_2 est défaillant, EB_1 n'est plus "vraie".

Analyse quantitative :

Nous notons $R_{EB_1}(t)$ la fiabilité de l'expression booléenne EB_1 et $R_{c_i}(t)$ la fiabilité du composant c_i .

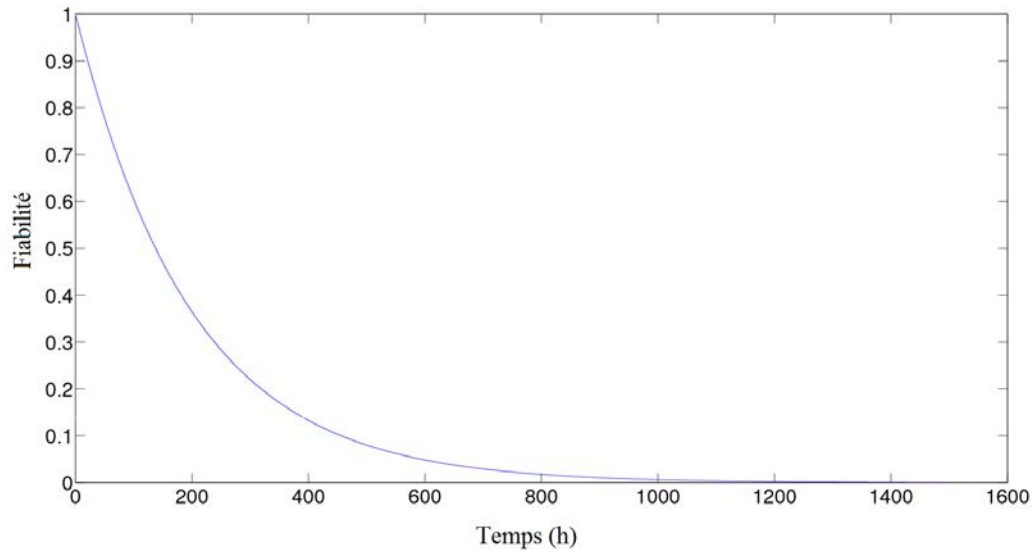
Selon l'équation 3.1, la fiabilité de l'expression EB_1 est donnée par :

$$R_{EB_1}(t) = R_{c_1}(t) \cdot R_{c_2}(t) \cdot \left(1 - \left(1 - R_{c_3}(t) \right) \cdot \left(1 - R_{c_4}(t) \cdot R_{c_5}(t) \right) \right) \quad (3.3)$$

Sans perte de généralité, considérons que la fiabilité des composants c_2 , c_3 et c_4 suit une loi exponentielle où $\lambda_{c_2}(t) = 0.0002$, $\lambda_{c_3}(t) = 0.0003$ et $\lambda_{c_4}(t) = 0.0004$. Pour les composants c_1 et c_5 , leur fiabilité suit une loi de Weibull où $\beta_{c_1} = 1$, $\beta_{c_5} = 0.9$, $\eta_{c_1} = 100$, $\eta_{c_5} = 200$, $\gamma_{c_1} = \gamma_{c_5} = 0$ (cf. Annexe B).

La Figure 3.4 montre l'évolution de la fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression booléenne EB_1 qui dépend de la fiabilité des composants du système.

À partir de la Figure 3.4 qui représente la fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression EB_1 , cette propriété structurelle ne sera probablement plus vérifiée après 1000 heures de fonctionnement du système.

FIGURE 3.4 – Fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression EB_1

3.3.3 Réseaux Bayésiens (RB) et Réseaux Bayésiens dynamiques (RBD)

Réseaux Bayésiens (RB)

Les Réseaux Bayésiens (RB) sont présentés sous forme d'un graphe dirigé acyclique composé d'un ensemble de nœuds noté \mathcal{N} et d'un ensemble d'arcs noté \mathcal{A} . Ce graphe représente l'état de validité de la propriété structurelle étudiée ainsi que l'état de fonctionnement des composants du système. Chaque nœud représente une variable aléatoire X pouvant être associée à l'état de fonctionnement d'un composant ou à une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement de 2 ou plusieurs composants.

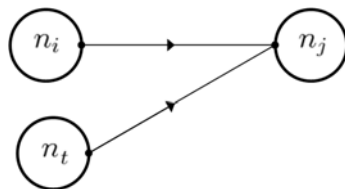


FIGURE 3.5 – Exemple de réseau Bayésien

Dans la Figure 3.5, nous présentons un exemple de RB. Considérons que le nœud représente l'état de validité d'une expression booléenne associée à une propriété structurelle. Cette

expression booléenne est basée sur le fonctionnement de deux composants représentés par les nœuds n_i et n_t représentant l'état de fonctionnement d'un composant ou une expression booléenne basée sur les états de fonctionnement de plusieurs composants. Le nœud n_j est associé à une distribution de probabilité conditionnelles dans \mathbb{P} représentées par une table et qui dépend de l'état de n_i et n_t .

La CPT (*Conditional Probability Table*) du nœud n_j , donnée à la Table 3.2, est définie par la probabilité conditionnelle qui dépend de la relation liant ce nœud n_j aux nœuds n_i et n_t (relation "ET" ou "OU").

		n_j	
n_i	n_t	$n_j = n_i \wedge n_t$	$n_j = n_i \vee n_t$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

TABLE 3.2 – CPT du nœud n_j

Réseaux Bayésiens dynamiques (RBD)

Un RBD est une version étendue des RB qui prend en compte l'aspect temporel. La Figure 3.6 représente le nœud n_i correspondant à la variable aléatoire X_i aux instants t et $t + 1$. La matrice de probabilité $\mathbf{P}(n_{(i,t+1)}|pa(n_{(i,t+1)}))$ respecte les propriétés de Markov ce qui signifie que l'état futur d'un nœud conditionnellement dépendant du passé compte tenu du présent (Kjaerulff, 1995).

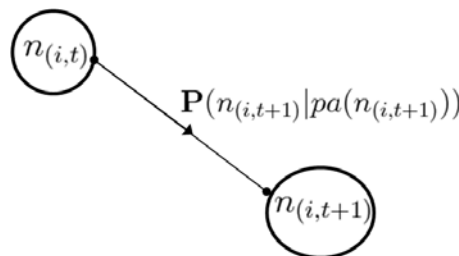


FIGURE 3.6 – Un RBD pour la variable aléatoire X_i sur 2 instants

A partir d'une situation à l'instant t , la distribution de probabilité sur les états de n_i est calculé par l'inférence du RBD.

Pour calculer cette distribution de probabilité, plusieurs solutions sont proposées dans la littérature (Kjaerulff, 1995; Murphy, 2002b). L'une de ces solutions est basée sur les inférences itératives. L'inférence est un point clé dans un RBD puisqu'elle permet d'introduire la notion de temps. Il est donc possible de calculer le comportement de la distribution de la variable X_i par rapport à ses états à l'instant $t + \delta t$ connaissant la distribution des états à l'instant t .

Pour effectuer des inférences successives, les nœuds d'entrée et les nœuds de sortie sont définis. Les nœuds d'entrée sont des nœuds qui permettent de décrire l'état de la variable correspondante à l'instant t . Les nœuds de sortie représentent le résultat sur les variables après déduction à l'instant $t + \delta t$. Pour suivre l'évolution de la fiabilité des composants en fonction du temps, le processus itératif d'inférences est initialisé à chaque instant t . Les résultats sur les nœuds $n_{(i,t)}$ sont considérés comme de nouveaux états. $n_{(i,t)}$ est ainsi initialisé par une rétroaction en temps comme le montre la Figure 3.7 pour l'exemple de 2 instants.

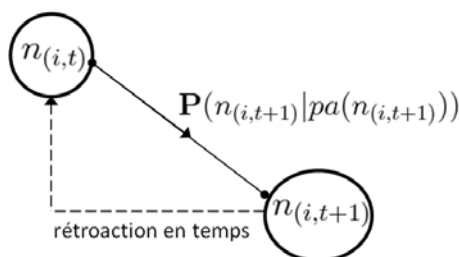


FIGURE 3.7 – Un RBD sur 2 instants avec rétroaction en temps

Considérons que l'état du $n_{(i,t)}$ (resp. $n_{(i,t+1)}$) est égal à 1 (resp. 0) et. La probabilité conditionnelle de $n_{(i,t+1)}$ est définie par l'équation 3.4.

$$\mathbf{P}(n_{(i,t+1)} | pa(n_{(i,t+1)})) = I + Q \quad (3.4)$$

avec Q une matrice caractérisant les probabilités de transition entre l'état $s_1^{n_i}$ et l'état $s_0^{n_i}$. Q est donnée par la Table 3.3 où λ_{c_i} représente le taux de défaillance du composant associé à la variable aléatoire X_i .

À partir de l'expression booléenne représentant une propriété structurelle, un RBD est

$$\begin{array}{c}
 n_{(i,t+1)} \\
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 n_{(i,t)} \begin{array}{c|c}
 0 & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 1 & \begin{array}{c} \lambda_{c_i} \\ -\lambda_{c_i} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$
TABLE 3.3 – La matrice Q correspondant au nœud n_i à l'instant t et $t + 1$

construit selon les points suivants :

- Dans la partie dynamique du RBD, un nœud racine correspond à une variable aléatoire représentant l'état de fonctionnement d'un composant dans l'expression booléenne à l'instant t . Par des arcs temporels, ce nœud est relié à un autre nœud qui correspond à l'état de fonctionnement du même composant à l'instant $t + 1$.
- Dans la partie modélisant l'expression booléenne, les nœuds racines sont liés à d'autres nœuds associés à des variables aléatoires qui représentent des parties de l'expression booléenne.
- Ces nœuds correspondant à des parties de l'expression booléenne sont ensuite liés au nœud terminal qui représente la variable aléatoire associée à l'état de validité de l'expression booléenne.

Le calcul de la fiabilité est donc effectué en utilisant les tables CPT de probabilité conditionnelle ainsi que les taux de défaillances des composants.

Exemple 10 *Considérons la propriété structurelle correspondant à l'expression booléenne EB_2 basée sur les défaillances des composants et donnée comme suit :*

$$EB_2 = \bar{C}_1 \wedge \left((\bar{C}_2 \wedge \bar{C}_3) \vee \bar{C}_4 \right)$$

Cette expression correspond au RBD donné à la Figure 3.8 où les nœuds n_i correspondent à l'état de fonctionnement des composants c_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et, n_5 et n_6 représentent respectivement aux expressions booléennes $(\bar{C}_2 \wedge \bar{C}_3)$ et $((\bar{C}_2 \wedge \bar{C}_3) \vee \bar{C}_4)$.

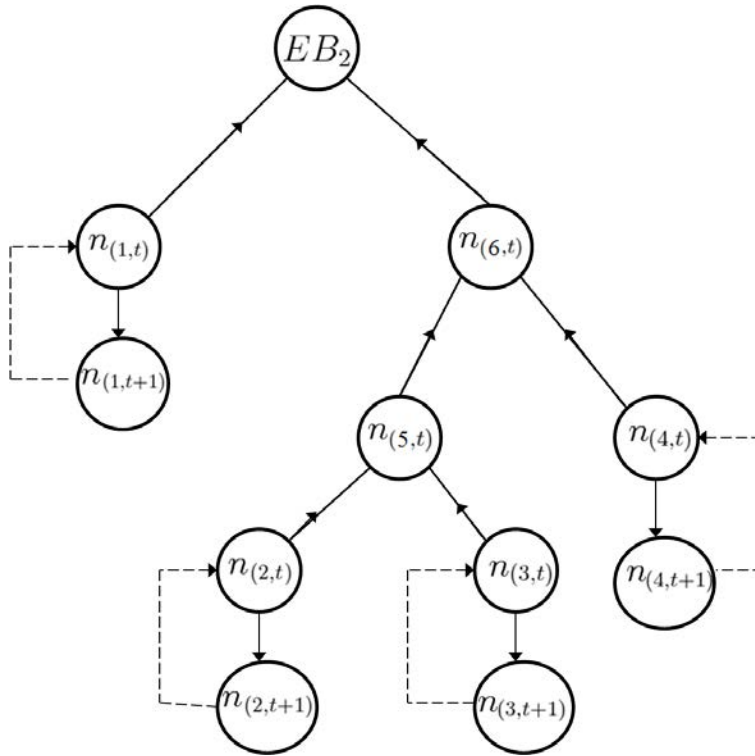


FIGURE 3.8 – RBD correspondant à l’expression booléenne EB_2

La table des probabilités conditionnelles CPT du nœud n_5 par exemple est donnée par :

n_2	n_3	$n_5 = c_2 \wedge c_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chaque nœud n_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ à l’instant t et $t + 1$ est associé à une matrice Q_i qui dépend du taux de défaillances λ_{c_i} du composant c_i correspondant.

		$n_{(i,t+1)}$	
		0	1
$n_{(i,t)}$	0	1	0
	1	λ_{c_i}	$-\lambda_{c_i}$

TABLE 3.4 – La matrice Q_i correspondant au nœud n_i à l’instant t et $t + 1$

La probabilité $\mathbf{P}(n_{(i,t+1)}|n_{(i,t)})$ est calculée à partir de l’équation 3.4.

Nous considérons que les taux de défaillances des composants c_1, c_2, c_3 et c_4 sont donnés

par : $\lambda_{c_1} = 0.0001$, $\lambda_{c_2} = 0.0002$, $\lambda_{c_3} = 0.0003$ et $\lambda_{c_4} = 0.0004$.

La Figure 3.9 montre l'évolution de la fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression booléenne EB_2 .

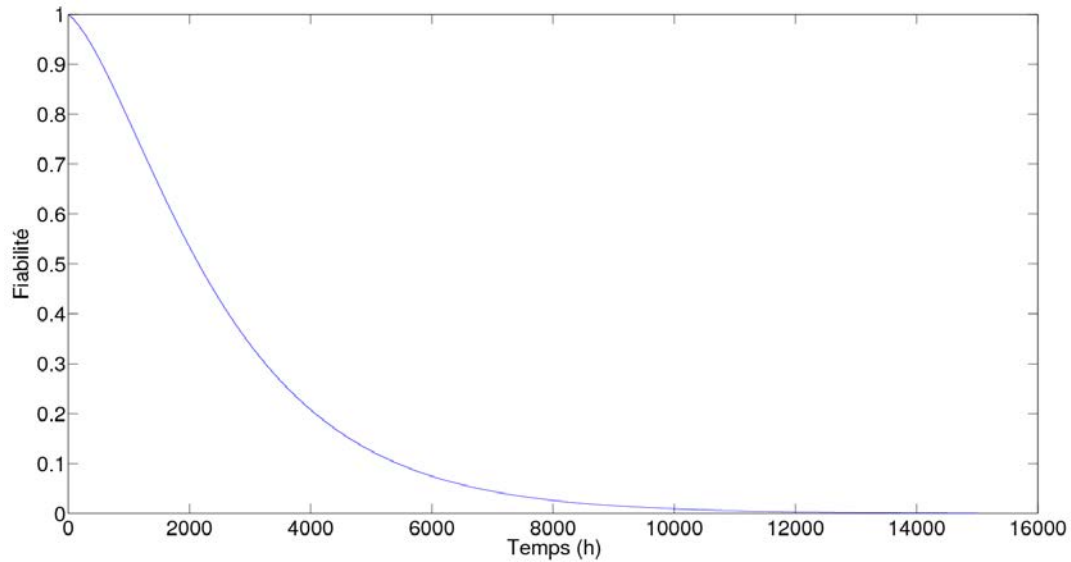


FIGURE 3.9 – Fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression EB_2

À partir de la Figure 3.9 qui représente la fiabilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression EB_2 , cette propriété structurelle ne sera probablement plus vérifiée après 11000 heures de fonctionnement du système.

3.4 Fiabilité de la commandabilité totale de l'état

Dans cette section, nous illustrons le calcul de la fiabilité d'une propriété structurelle sur un cas d'étude. Nous nous intéressons à la fiabilité de la commandabilité totale d'un système linéaire.

Soit le système masses-ressorts illustré par la Figure 3.10. Ce système est composé de 4 masses m_1 , m_2 , m_3 et m_4 repérées par leurs positions p_1 , p_2 , p_3 et p_4 . Les 4 masses sont reliées en série par 3 ressorts dont les coefficients de raideur sont respectivement k_1 , k_2 et k_3 et les coefficients de frottement visqueux sont respectivement c_1 , c_2 et c_3 . Le système

est excité par des forces F_i exercées par des actionneurs (moteurs) A_i et agissant sur m_1 , m_3 et m_4 . F_{q1} et F_{q3} représentent respectivement des forces exercées par des perturbations déstabilisatrices P_1 et P_2 au niveau des masses m_1 et m_3 . Les positions p_2 , p_3 et p_4 sont mesurées par des capteurs S_i .

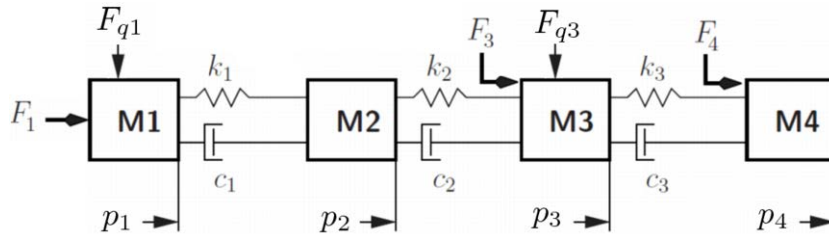


FIGURE 3.10 – Système masses-ressorts

L'analyse de ce système masses-ressorts permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{p}_1 = -k_1 p_1 - c_1 \dot{p}_1 + k_1 p_2 + c_1 \dot{p}_2 + A_1 F_1 \\ m_2 \ddot{p}_2 = k_1 p_1 + c_1 \dot{p}_1 - (k_1 + k_2) p_2 - (c_1 + c_2) \dot{p}_2 + k_2 p_3 + c_2 \dot{p}_3 \\ m_3 \ddot{p}_3 = k_2 p_2 + c_2 \dot{p}_2 - (k_1 + k_2) p_3 - (c_1 + c_2) \dot{p}_3 + k_3 p_4 + c_3 \dot{p}_4 + A_2 F_3 \\ m_4 \ddot{p}_4 = k_3 p_3 + c_3 \dot{p}_3 - k_3 p_4 - c_3 \dot{p}_4 + A_3 F_4 \end{cases}$$

Dans cet exemple, nous avons un système linéaire de la forme :

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Nous considérons le vecteur d'état $X = (p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, p_3, \dot{p}_3, p_4, \dot{p}_4)^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8)^T$, le vecteur d'entrées $U = (F_1, F_3, F_4) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, le vecteur de perturbations $Q = (F_{q1}, F_{q3})^T = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)^T$ et le vecteur de sorties $Y = (p_2, p_3, p_4)^T = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)^T$. Les matrices A , B , C , D et E sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{k_2+k_3}{m_3} & -\frac{c_1+c_2}{m_3} & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_4} & \frac{c_3}{m_4} & -\frac{k_3}{m_4} & -\frac{c_3}{m_4} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2}{m_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{m_4} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et}$$

$$D = 0.$$

Le graphe orienté représentant ce système est donné à la Figure 3.11.

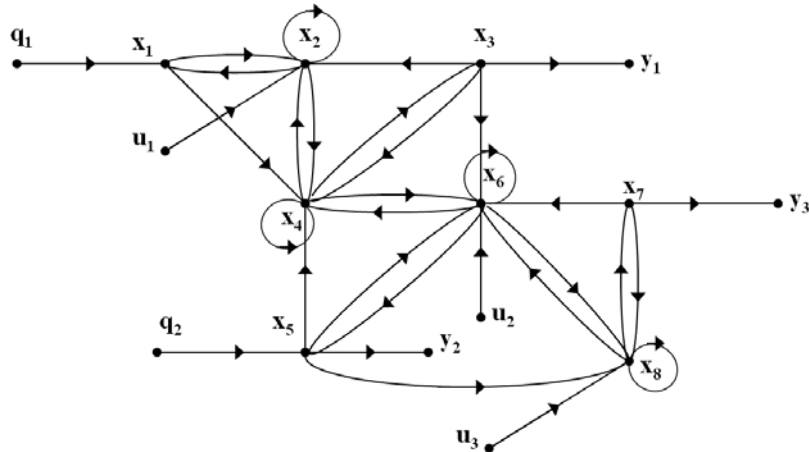


FIGURE 3.11 – Graphe orienté correspondant à l'Exemple 2.3

La commandabilité totale de l'état d'un système linéaire nécessite la vérification de deux conditions graphiques élémentaires (cf. Table 2.1). Il s'agit de la condition de connectivité et la condition de couplage complet. L'expression booléenne associée à cette propriété structu-

relle est notée Cmd . Elle correspond à un "ET" logique entre les conditions de connectivité entre les entrées et les états $CC(X, U)$ et la condition de couplage complet entre les entrées et les états et, les états $MC(X^-, U^+ \cup X^+)$. Cette expression Cmd peut donc s'exprimer par ce qui suit :

$$Cmd = CC(X, U) \wedge MC(X^-, U^+ \cup X^+)$$

Maintenant, développons ces deux conditions graphiques élémentaires pour ce système linéaire selon les algorithmes présentés dans le chapitre 2.

Condition de connectivité :

Pour l'étude de la commandabilité totale de l'état de ce système linéaire, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les perturbations et les sorties du système. Par conséquent, le graphe peut être simplifié pour cette étude et ne représente que les entrées et les états du système comme le montre la Figure 3.12.

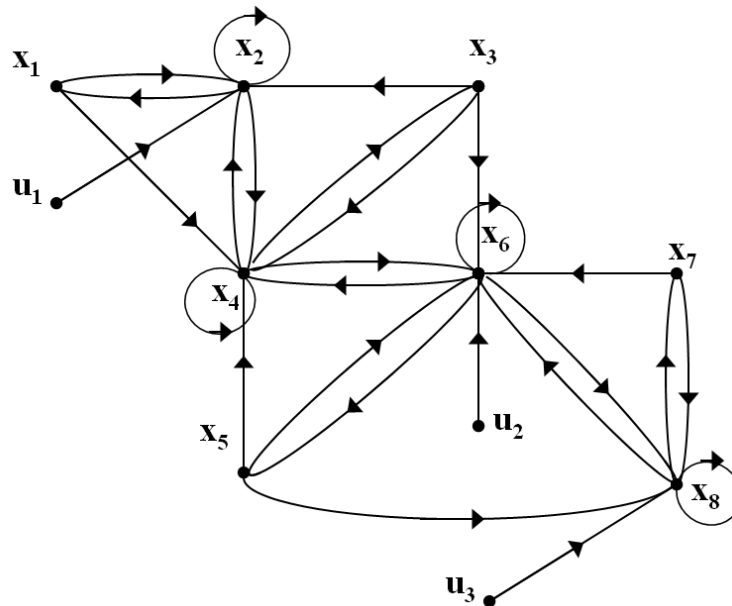


FIGURE 3.12 – Graphe orienté associé au système pour l'étude de la commandabilité

Pour le calcul de l'expression $CC(X, U)$, nous utilisons l'approche présentée dans le chapitre 2, section 2.2.2.

Avant de commencer le traitement de la connectivité de chaque élément de X à au

moins un élément de U , il est nécessaire de déterminer l'ensemble V_T (cf. équation 2.1). Pour ce système, $V_T = \{\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_5 \ \mathbf{x}_7\}$ puisque \mathbf{x}_2 est essentiel pour la connectivité de \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_4 est essentiel pour la connectivité de \mathbf{x}_3 , \mathbf{x}_6 est essentiel pour la connectivité de \mathbf{x}_5 et \mathbf{x}_8 est essentiel pour la connectivité de \mathbf{x}_7 . Nous nous intéressons donc à la connectivité entre V_T et U .

La condition de connectivité entre V_T et U peut s'exprimer de la manière suivante :

$$CC(X,U) = \bigwedge_{\mathbf{x}_i \in V_T} Con(\mathbf{x}_i) \quad (3.5)$$

Nous calculons d'abord la connectivité directe $Con_d(\mathbf{x}_i)$ de chaque élément $\mathbf{x}_i \in V_T$ sachant que pour ce système, tous les éléments $\mathbf{x}_i \in X$ appartiennent à une seule et unique composante fortement connexe.

- $Con_d(\mathbf{x}_1) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2)$
- $Con_d(\mathbf{x}_3) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_4) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_5) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_6) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6)$
- $Con_d(\mathbf{x}_7) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_8) = faux$
- $Con_d(\mathbf{x}_9) = (\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_9)$

Le sommet \mathbf{x}_1 peut être connecté à U à travers \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 , \mathbf{x}_4 , \mathbf{x}_5 , \mathbf{x}_6 , \mathbf{x}_7 ou \mathbf{x}_8 . L'expression $Con(\mathbf{x}_1)$ est donc un "OU" logique entre sa connectivité directe $Con_d(\mathbf{x}_1)$ ainsi que les expressions assurant la connectivité entre \mathbf{x}_1 et U à travers les différents sommets de sa composante fortement connexe. Par exemple, la connectivité entre \mathbf{x}_1 et U à travers \mathbf{x}_2 est :

$$\mathbf{x}_2 : Con_d(\mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

et la connectivité entre \mathbf{x}_1 et U à travers \mathbf{x}_3 est :

$$\mathbf{x}_3 : Con_d(\mathbf{x}_3) \wedge \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right) \vee \left((\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right)$$

De cette manière, nous calculons $Con(\mathbf{x}_i)$. Selon l'expression 3.5, la condition $CC(X,U)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
CC(X, U) = & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7) \wedge \\
& \left(\left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8) \wedge \left((\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \vee (\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_6) \right) \right) \vee \right. \\
& \left(\left((\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8) \vee (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_8) \right) \wedge \left(\left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4) \right) \vee \left((\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4) \right) \right) \vee \right. \\
& \left. \left. \left. \left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Condition de couplage complet :

Le développement de la condition de couplage complet est effectué sur un graphe biparti. Pour ce système, le graphe biparti associé à ce système pour l'étude de la commandabilité est donné à la Figure 3.13.

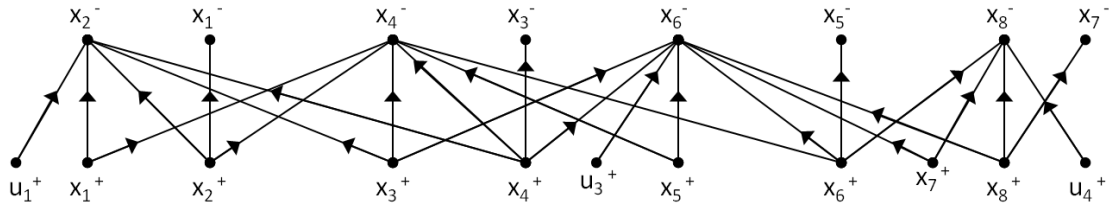


FIGURE 3.13 – Graphe biparti associé au système

Dans ce graphe biparti, nous avons cinq DM composantes (cf. Annexe A) V_∞, V_1, V_2, V_3 et V_4 et, plusieurs arcs reliant deux sommets de composantes différentes ne sont pas considérés dans notre étude. Par conséquent, nous considérons le graphe biparti sur la Figure 3.14 avec l'ensemble d'arcs \mathcal{E}^* .

Calculons maintenant l'expression booléenne $MC(X^-, U^+ \cup X^+) = Exp(X^-, \mathcal{E}^*)$. Le développement de l'expression $Exp(X^-, \mathcal{E}_B)$ peut commencer par la connexion de \mathbf{x}_8^+ à V^- . Il vient :

$$\begin{aligned}
Exp(X^-, \mathcal{E}_B) = & \left((\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-) \wedge Exp\left(\{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{x}_6^-, \mathbf{x}_7^-\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-)\}\right) \right) \\
& \left((\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-) \wedge Exp\left(\{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{x}_6^-, \mathbf{x}_7^-\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_6^-)\}\right) \right)
\end{aligned}$$

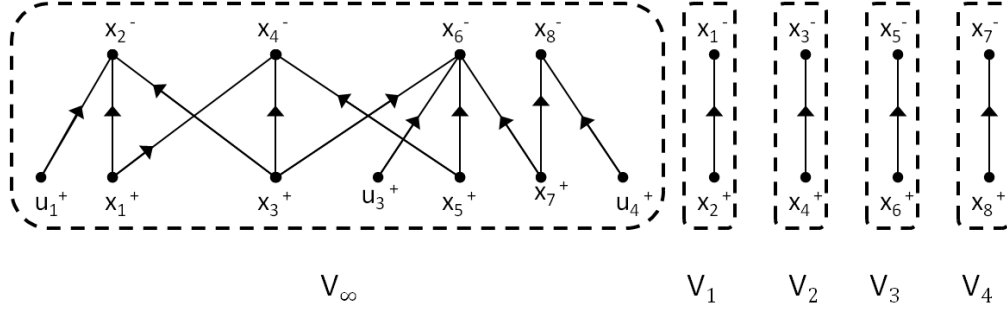


FIGURE 3.14 – Graphe biparti associé au système après la DM décomposition

Remarque 7 L'ordre de traitement des sommets \mathbf{x}_i^- est arbitraire. Le résultat final i.e. l'expression booléenne $Exp(X^-, \mathcal{E}_B)$ est toujours la même quelque soit l'ordre de traitement des sommets \mathbf{x}_i^+ .

De la même façon, nous calculons les expressions booléennes :

$$Exp\left(\{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{x}_6^-, \mathbf{x}_7^-\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-)\}\right) \text{ et}$$

$$Exp\left(\{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \mathbf{x}_3^-, \mathbf{x}_4^-, \mathbf{x}_5^-, \mathbf{x}_6^-, \mathbf{x}_7^-\}, \mathcal{E}_B \setminus \{(\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-), (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_6^-)\}\right).$$

Nous obtenons ainsi l'expression booléenne de la condition de lien complet donnée par :

$$\begin{aligned} MC(X^-, U^+ \cup X^+) = & (\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_1^-) \wedge (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_3^-) \wedge (\mathbf{x}_6^+, \mathbf{x}_5^-) \wedge (\mathbf{x}_8^+, \mathbf{x}_7^-) \wedge \left(\left((\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-) \vee (\mathbf{x}_7^+, \mathbf{x}_8^-) \right) \wedge \right. \\ & \left((\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^-) \vee (\mathbf{u}_3^+, \mathbf{x}_8^-) \vee (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_8^-) \right) \wedge \left((\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_4^-) \vee (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_2^-) \right) \wedge \left((\mathbf{u}_1^+, \mathbf{x}_2^-) \vee (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^-) \vee (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_2^-) \right) \right) \vee \\ & \left((\mathbf{u}_2^+, \mathbf{x}_6^-) \wedge (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^-) \right) \wedge \left((\mathbf{u}_1^+, \mathbf{x}_2^-) \vee (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^-) \right) \vee \\ & \left((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_4^-) \wedge \left((\mathbf{u}_1^+, \mathbf{x}_2^-) \vee (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_2^-) \right) \wedge \left((\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_6^-) \vee (\mathbf{u}_2^+, \mathbf{x}_6^-) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Après avoir calculé les conditions de connectivité $CC(X, U)$ et de couplage complet $MC(X^-, U^+ \cup X^+)$ pour la commandabilité de ce système, nous obtenons l'expression Cmd suivante :

$$\begin{aligned} Cmd = & CC(X, U) \wedge MC(X^-, U^+ \cup X^+) \\ = & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \\ & \wedge \left((\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \vee (\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_6) \right) \end{aligned}$$

Grâce à l'association arc-composants φ donnée dans la Table 3.5, l'expression booléenne Cmd qui est basée sur les arcs peut être réécrite en fonction des défaillances des composants.

Arc	Composant(s) correspondant(s)	$\varphi(\text{Arc})$
$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2)$	m_1, A_1	$\overline{C}_{m_1} \wedge \overline{C}_{A_1}$
$(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6)$	m_3, A_3	$\overline{C}_{m_3} \wedge \overline{C}_{A_2}$
$(\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8)$	m_4, A_4	$\overline{C}_{m_4} \wedge \overline{C}_{A_3}$
$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_6)$	k_3, m_3	$\overline{C}_{k_3} \wedge \overline{C}_{m_3}$
$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)$	k_1, m_2	$\overline{C}_{k_1} \wedge \overline{C}_{m_2}$

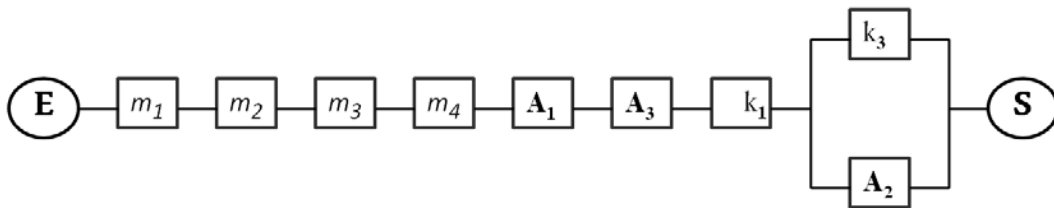
TABLE 3.5 – Association arcs-composants

La défaillance d'une masse correspond à l'absence de cette masse *i.e.* $m = 0$. Ceci peut correspondre au détachement de la masse de son support. Un ressort est défaillant quand il est cassé. Dans ce système, les actionneurs sont des moteurs. Ils sont défaillants quand ils n'assurent plus leurs missions *i.e.* tourner et exercer des forces sur les masses.

Après avoir remplacé chaque arc dans Cmd par $\varphi(\text{arc})$ et simplifié l'expression, nous obtenons l'expression booléenne de la commandabilité basée sur les défaillances des composants notée Cmd_φ :

$$Cmd_\varphi = \overline{C}_{m_1} \wedge \overline{C}_{m_2} \wedge \overline{C}_{m_3} \wedge \overline{C}_{m_4} \wedge \overline{C}_{A_1} \wedge \overline{C}_{A_3} \wedge \overline{C}_{k_1} \wedge (\overline{C}_{A_2} \vee \overline{C}_{k_3})$$

Sans perte de généralité, nous calculons la fiabilité de la commandabilité de ce système en utilisant les BDF. L'expression Cmd_φ correspond donc au BDF suivant :

FIGURE 3.15 – BDF correspondant à Cmd_φ

Considérons les taux de défaillances des composants m_1 , m_2 , m_3 et m_4 donnés dans la

Table 3.6.

Composant c_i	λ_i	Composant c_i	λ_i
m_1	0.0001	A_1	0.0006
m_2	0.0002	A_2	0.0007
m_3	0.0003	A_3	0.0008
m_4	0.0004	k_1	0.0009
k_3	0.0005		

TABLE 3.6 – Taux de défaillances

La fiabilité R_{Cmd_φ} est donnée par :

$$R_{Cmd_\varphi} = R_{m_1}(t) \cdot R_{m_2}(t) \cdot R_{m_3}(t) \cdot R_{m_4}(t) \cdot R_{A_1}(t) \cdot R_{A_3}(t) \cdot R_{k_1}(t) \cdot \left(1 - (1 - R_{A_2}(t)) \cdot (1 - R_{k_3}(t))\right)$$

La fiabilité de la commandabilité de l'état est donnée par la Figure 3.16.

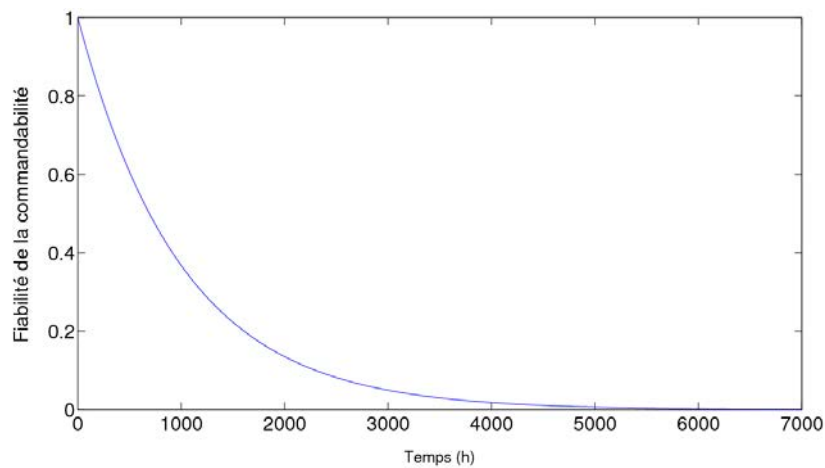


FIGURE 3.16 – Fiabilité de la commandabilité de l'état

Si aucune réparation au niveau des composants $m_1, m_2, m_3, m_4, A_1, A_2, A_3, k_1$ et k_3 n'est réalisée, la commandabilité de ce système ne sera probablement plus vérifiée après 5000 heures de fonctionnement du système. Afin d'améliorer la fiabilité de cette propriété structurelle, il est nécessaire d'améliorer celle des composants du système.

3.5 Disponibilité des propriétés structurelles

La disponibilité est un paramètre important de la sûreté de fonctionnement. Elle est définie par la probabilité qu'un système soit opérationnel à un instant t . La disponibilité est

notée $\mathbf{A}(t)$. Le calcul de la disponibilité est basé sur les taux de défaillances et les taux de réparations des composants du système.

3.5.1 Calcul de la disponibilité

Le calcul de la disponibilité des propriétés structurelles est basé sur leurs expressions booléennes associées. Pour ce calcul, nous utilisons des outils graphiques de modélisation et de calcul. Dans ce qui suit, nous présentons les chaînes de Markov introduits dans le chapitre 1.

Remarque 8 *Pour le calcul de la disponibilité des propriétés structurelles, les hypothèses $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4, \mathbf{H}_5$ et \mathbf{H}_6 énoncées dans le chapitre 1 sont considérées.*

3.5.2 Chaînes de Markov

La modélisation par les chaînes de Markov est une approche citée dans de nombreux travaux sur les études de sûreté de fonctionnement (Chen and Hwang, 2013; Li and Zhang., 2008). Elles sont utilisés dans de nombreux domaines scientifiques, y compris l'analyse de la disponibilité. Nous considérons pour les chaînes de Markov que les taux de défaillances et de réparations sont constants.

Une chaîne de Markov est un modèle où l'état de la propriété structurelle représentée transite d'un état i à un état j avec une probabilité q_{ij} qui ne dépend que des états i et j . Pour les r sommets de la chaîne de Markov, nous définissons une matrice $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ qui représente la matrice de transition construite à partir des taux de transition associés à q_{ij} . Soit $P(t) = (P_1(t), \dots, P_r(t))$ le vecteur de probabilité des états de la propriété structurelle étudiée, où $P_i(t)$ représente la probabilité que le système se trouve dans l'état i à l'instant t . La loi de transition d'une chaîne de Markov est définie par l'équation suivante :

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^r P_j(t) \cdot q_{ji} \quad (3.7)$$

Nous pouvons écrire cette équation pour tous les états du système de 1 à n . Nous obtenons alors un système d'équations différentielles du premier ordre qui peut être écrit sous forme matricielle comme indiqué ci-dessous :

$$\left(\frac{dP_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dP_r(t)}{dt}(t) \right) = (P_1(t), \dots, P_r(t)).M \quad (3.8)$$

où M est la matrice de transition donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^r q_{1j} & q_{12} & \cdot & q_{1i} & q_{1r} \\ q_{21} & -\sum_{j=1, j \neq 2}^r q_{2j} & \cdot & \cdot & q_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{i1} & \cdot & \cdot & -\sum_{j=1, j \neq i}^r q_{1j} & q_{ir} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdot & \cdot & -\sum_{j=1}^{r-1} q_{rj} \end{bmatrix}$$

L'équation (3.8) peut être réécrite sous la forme compacte :

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t).M \quad (3.9)$$

$P(0) = (P_1(0), \dots, P_r(0))$ est la distribution de probabilité initiale et $P_i(0)$ est la probabilité d'être dans l'état i à l'instant $t = 0$. De l'équation (3.9), nous obtenons la formule de Chapman-Kolmogorov :

$$P(t) = P(0).e^{M.t} \quad (3.10)$$

Nous considérons que \mathcal{P}_1 est un ensemble d'états de la chaîne de Markov pour lesquels l'expression booléenne est égale à "vrai" et \mathcal{P}_0 l'ensemble des états où l'expression booléenne est égale à "faux". La disponibilité asymptotique notée $A(\infty)$ est la probabilité que l'expression booléenne soit dans un état stationnaire où elle est "vraie" quand $t \rightarrow \infty$, *i.e.* quand $\frac{dP(t)}{dt} = 0$. Il vient :

$$A(\infty) = \sum_{r \in \mathcal{P}_1} P_r(t \rightarrow \infty) \quad (3.11)$$

Remarque 9 *En utilisant les chaînes de Markov, il est possible de calculer la fiabilité des propriétés structurelles en considérant que les composants ne peuvent pas être réparés i.e. leurs taux de réparation μ_i sont nuls (cf. Annexe B).*

Exemple 11 *Considérons la propriété structurelle correspondant à l'expression booléenne EB_3 basée sur les défaillances des composants et donnée par :*

$$EB_3 = \overline{C}_1 \wedge C_2 \wedge (\overline{C}_3 \vee \overline{C}_4)$$

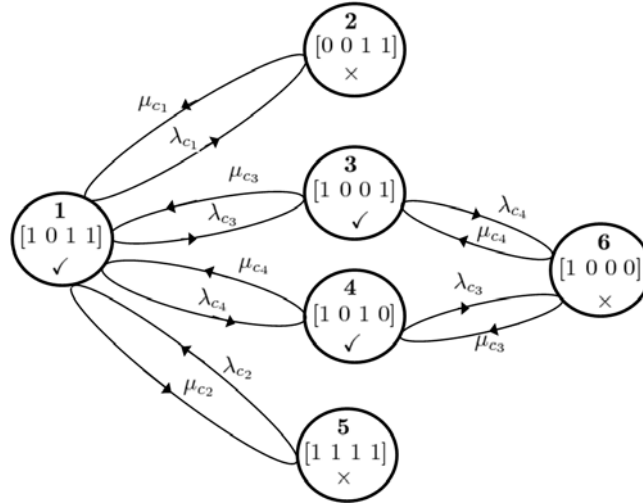
Cette expression EB_3 correspond à une propriété structurelle non cohérente. La notion de cohérence obéit aux conditions suivantes :

- *Condition suffisante : Une propriété structurelle est cohérente si elle est égale à "vrai" lorsque tous ses composants fonctionnent.*
- *Condition nécessaire : Une propriété structurelle est cohérente si elle est égale à "faux" lorsque tous ses composants sont défaillants.*
- *Condition de semi-cohérence : Une propriété structurelle est semi-cohérente si quand elle est égale à "faux", la défaillance d'un composant du système ne la rend pas égale à "vrai". De façon similaire, une propriété structurelle est semi-cohérente si quand elle est égale à "vrai", une réparation d'un composant ne la rend pas égale à "faux".*

La propriété structurelle associée à l'expression EB_3 ne satisfait pas la condition suffisante de cohérence. Elle est vérifiée quand le composant c_2 est défaillant (C_i caractérise la défaillance du composant c_i et \overline{C}_i son bon fonctionnement).

En considérant le vecteur des états des composants $(\overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, \overline{C}_4)$, l'expression EB_3 correspond à la chaîne de Markov donnée sur la Figure 3.17 avec μ_i et λ_i les taux de réparation et de défaillances des composants (cf. Annexe B). Le premier nœud de cette chaîne de Markov correspond à la validité de la propriété étudiée mais pas au fonctionnement de tous les composants.

Quand l'état de EB_3 est "vrai" (resp. "faux"), ceci est représenté par \checkmark (resp. \times) dans la chaîne de Markov. Dans cette chaîne de Markov, nous n'avons que 6 nœuds accessibles parmi les 2^4 pour les 4 composants. Pour tous les autres nœuds, la propriété structurelle

FIGURE 3.17 – Chaîne de Markov correspondant à l'expression booléenne EB_3

est non vérifiée. Ces nœuds ne sont donc pas représentés car ils sont non atteignables. Ces nœuds correspondent aux états de l'expression EB_3 qui dépendent du vecteur des états des composants $(\overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, \overline{C}_4)$.

La matrice M correspondant à cet exemple est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} -(\lambda_{c_1} + \lambda_{c_3} + \lambda_{c_4} + \mu_{c_2}) & \lambda_{c_1} & \lambda_{c_3} & \lambda_{c_4} & \mu_{c_2} & 0 \\ \mu_{c_1} & -\mu_{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{c_3} & 0 & -(\mu_{c_3} + \lambda_{c_4}) & 0 & 0 & \lambda_{c_4} \\ \mu_{c_4} & 0 & 0 & -(\mu_{c_4} + \lambda_{c_3}) & 0 & \lambda_{c_3} \\ \lambda_{c_2} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{c_4} & \mu_{c_3} & 0 & -(\mu_{c_4} + \mu_{c_3}) \end{bmatrix}$$

Nous considérons que, initialement, l'expression booléenne EB_3 se trouve dans l'état 4. Nous notons donc $P_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$. Les taux de défaillances et de réparations des composants c_1, c_2, c_3 et c_4 sont donnés dans le tableau suivant :

	c_1	c_2	c_3	c_4
λ_{c_i}	1.10^{-4}	2.10^{-4}	3.10^{-4}	4.10^{-4}
μ_{c_i}	1.10^{-2}	2.10^{-2}	3.10^{-2}	4.10^{-2}

La Figure 3.18 montre l'évolution de la disponibilité de la propriété structurelle correspon-

dant à l'expression booléenne EB_3 .

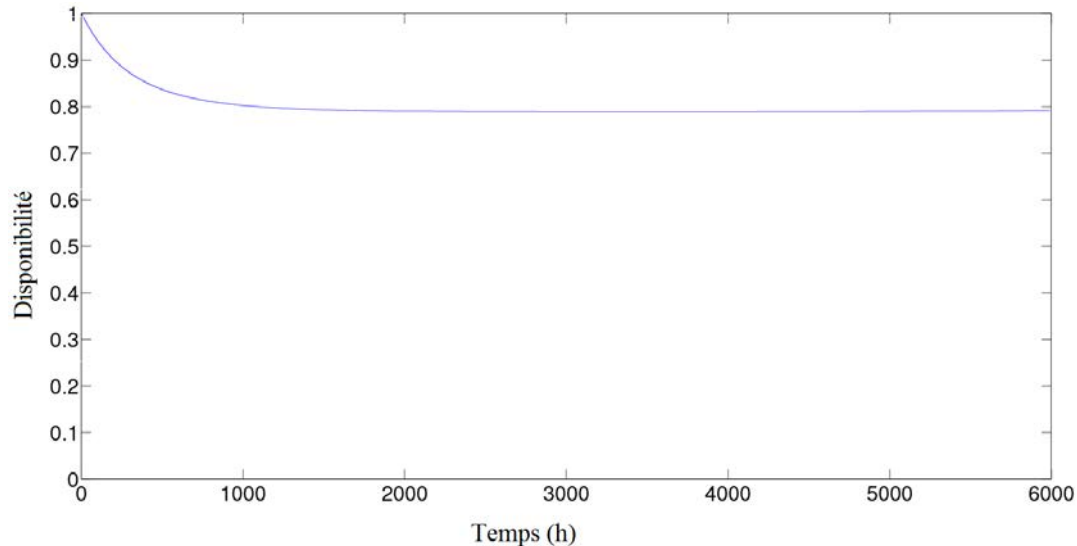


FIGURE 3.18 – Disponibilité de la propriété structurelle correspondant à l'expression EB_3

La propriété correspondant à l'expression EB_3 est complètement disponible à l'instant $t = 0$. La disponibilité asymptotique de cette propriété est égale à 0.78 *i.e.* quand $t \rightarrow \infty$, la propriété structurelle étudiée est disponible avec une probabilité de 78%.

3.6 Disponibilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations

Considérons le système linéaire masses-ressorts présenté dans la Section 3.4. Le graphe orienté représentant le système est donné dans la Figure 3.11.

La propriété de solvabilité du problème de rejet de perturbations d'un système linéaire nécessite la vérification de deux conditions graphiques élémentaires. Il s'agit de la condition de lien et la condition de distance. L'expression booléenne associée à cette propriété structurelle est notée Rej et, elle est égale à un "ET" logique de la condition

de lien entre les entrées et les sorties $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ en considérant tous les sommets dans \mathcal{V} et, de la condition de distance entre les entrées et les sorties $\mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, P_{(V_1, V_2, V_3 \setminus 1)})$ en considérant les chemins entre les perturbations et les sorties. Cette expression Rej peut donc s'exprimer par ce qui suit :

$$Rej = \mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) \wedge \mathcal{D}(V_1, V_2, V_3, P_{(V_1, V_2, V_3 \setminus 1)})$$

Maintenant, développons ces deux conditions graphiques élémentaires pour ce système linéaire.

Condition de lien

Dans le graphe orienté associé à ce système et représenté sur la Figure 3.12, nous pouvons énumérer les chemins $U - Y$ suivants :

$$\begin{array}{ll} p_1 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p_6 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_3 \\ p_2 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p_7 = \mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 \\ p_3 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p_8 = \mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_3 \\ p_4 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_3 & p_9 = \mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_2 \\ p_5 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_2 & p_{10} = \mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_2 \end{array}$$

Calculons maintenant la condition de lien $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ entre les ensembles U et Y en utilisant les sommets de $\mathcal{V} = U \cup X \cup Y$. Commençons le calcul de $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ en reliant, par exemple, U à \mathbf{y}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, \{\mathbf{y}_1\} \cup \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V}) &= \left(p_1 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1\}) \right) \\ &\vee \left(p_2 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1\}) \right) \\ &\vee \left(p_3 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) \right) \\ &\vee \left(p_7 \wedge \mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_3\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\}) \right) \end{aligned}$$

De la même façon, nous calculons les expressions $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1\})$, $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1\})$, $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\})$ et $\mathcal{L}(U \setminus \{\mathbf{u}_3\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1\})$.

Après simplification, la condition de lien entre les éléments de U et les éléments de Y est

donnée par :

$$\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = (\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2) \wedge \mathbf{p}_6 \wedge \mathbf{p}_9 \quad (3.12)$$

En utilisant la définition : $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_i \in \Upsilon(p_t)} \mathbf{e}_i$ tel que e_i correspond à un arc $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_t)$, l'expression $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ peut être exprimée en fonction de la validité des arcs comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V}) = & \left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \right) \right) \right) \wedge \\ & (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1) \wedge (\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{x}_7, \mathbf{y}_3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Condition de distance

Pour le calcul de la condition de distance, nous considérons que la condition de lien $\mathcal{C}(U, Y, \mathcal{V})$ est vérifiée.

En plus des chemins U - Y donnés dans le développement de la condition de lien, nous pouvons énumérer les chemins Q - Y suivants :

$$\begin{aligned} p'_1 &= \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 & p'_4 &= \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_2 \\ p'_2 &= \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_3 & p'_5 &= \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_1 \\ p'_3 &= \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la condition de distance $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$, nous avons :

$$P_{(V_1, V_2, V_3)} = \{p'_1, p'_3, p'_4, p'_5\}$$

Considérons que $P_0 = \{p'_3, p'_4, p'_5\}$ et $P_{(V_1, V_2, V_3)} = P_0 \cup \{p'_1\}$. La condition de distance correspondante est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U, Y, Q, P_0 \cup \{p'_1\}) = & (\bar{\mathbf{p}}'_1 \wedge \mathcal{D}(U, Y, Q, P_0)) \vee \left(\mathbf{p}'_1 \wedge \bigwedge_{p'_i \in P_0} \mathbf{p}'_i \wedge \mathcal{D}^l(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) \right) \\ & \vee \left(\bigvee_{p'_i \in P_0} (\bar{\mathbf{p}}'_i \wedge \mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)} \setminus \{p'_i\})) \right) \end{aligned}$$

De la même façon sont calculées les expressions $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_0)$ et $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ et, $\mathcal{D}^l(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ en utilisant l'expression (2.24).

Sachant que la condition de lien $\mathcal{L}(U, Y, \mathcal{V})$ est “vrai”, la condition de distance pour cet exemple est donnée par :

$$\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) = \mathbf{p}_6 \wedge \mathbf{p}_9 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_4 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_5 \wedge \left(\left(\mathbf{p}_1 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_1 \right) \vee \left(\mathbf{p}_2 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_1 \wedge \bar{\mathbf{p}}'_3 \right) \right)$$

Avec la définition : $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_i \in \mathcal{Y}(p_t)} \mathbf{e}_i$ tel que e_i correspond à un arc $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_t)$, l'expression $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ peut être exprimée en fonction de la validité des arcs comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) &= (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1) \wedge (\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{x}_7, \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5) \wedge \\ &(\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7) \wedge \overline{(\mathbf{q}_2, \mathbf{x}_5)} \wedge \overline{(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_4)} \wedge \left((\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \wedge \left(\left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \wedge \overline{(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1)} \wedge \overline{(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)} \right) \right) \right) \\ &\vee \left((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) \wedge \left(\overline{(\mathbf{q}_1, \mathbf{x}_1)} \vee \overline{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les conditions de distance et de lien sont toutes les deux vérifiées quand l'expression $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ est égale à “vrai”. Par conséquent, $Rej = \mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$.

Grâce à l'association arc-composants φ dans la Table 3.7, l'expression booléenne Rej qui est basée sur les arcs peut être réécrite en fonction des défaillances des composants.

La défaillance d'une masse correspond à l'absence de cette masse *i.e.* $m = 0$. Un ressort est défaillant quand il est cassé. Dans ce système, les actionneurs sont des moteurs. Ils sont défaillants quand ils n'assurent plus leurs missions *i.e.* tourner et exercer des forces sur les masses.

Après avoir remplacé chaque arc dans $\mathcal{D}(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)})$ par $\varphi(\text{arc})$ et simplifié l'expression, nous obtenons l'expression booléenne de la solvabilité du problème de rejet de pertur-

Arc	Composant(s) correspondant(s)	$\varphi(\text{Arc})$
$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2)$	m_1, A_1	$\overline{C}_{m_1} \wedge \overline{C}_{A_1}$
$(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6)$	m_3, A_2	$\overline{C}_{m_3} \wedge \overline{C}_{A_2}$
$(\mathbf{u}_3, \mathbf{x}_8)$	m_4, A_3	$\overline{C}_{m_4} \wedge \overline{C}_{A_3}$
$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7)$	<i>aucun</i>	<i>vrai</i>
$(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_4)$	k_2, m_2	$\overline{C}_{k_2} \wedge \overline{C}_{m_2}$
$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)$	k_1, m_2	$\overline{C}_{k_1} \wedge \overline{C}_{m_2}$
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)$	c_2, m_2	$\overline{C}_{c_2} \wedge \overline{C}_{m_2}$
$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4)$	c_1, m_2	$\overline{C}_{c_1} \wedge \overline{C}_{m_2}$
$(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1)$	S_1	\overline{C}_{S_1}
$(\mathbf{x}_7, \mathbf{y}_2)$	S_2	\overline{C}_{S_2}
$(\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_3)$	S_3	\overline{C}_{S_3}

TABLE 3.7 – Association arcs-composants

bations basée sur les défaillances des composants notée Rej_φ :

$$Rej_\varphi = \overline{C}_{S_1} \wedge \overline{C}_{S_2} \wedge \overline{C}_{S_3} \wedge \overline{C}_{A_1} \wedge \overline{C}_{A_2} \wedge \overline{C}_{A_3} \wedge \overline{C}_{m_1} \wedge \overline{C}_{m_3} \wedge \overline{C}_{m_4} \wedge \overline{C}_{k_2} \wedge \overline{C}_{c_1} \wedge C_{P_2} \wedge C_{m_2} \wedge (C_{P_1} \vee C_{k_1})$$

Sans perte de généralité et dans le but de simplifier la représentation de la chaîne de Markov correspondant à l'expression Rej , nous considérons que les composants $S_2, S_3, A_2, A_3, m_1, m_3, m_4, k_2$ et c_1 sont complètement fiables (*i.e.* leurs taux de défaillances sont nuls).

La solvabilité du problème de rejet de perturbations dépend donc des composants S_1, A_1, P_1, P_2, m_2 et k_1 . Nous considérons donc le vecteur des états de fonctionnement des composants suivant : $(\overline{C}_{S_1}, \overline{C}_{A_1}, \overline{C}_{P_1}, \overline{C}_{P_2}, \overline{C}_{m_2}, \overline{C}_{k_1})$.

Cette expression Rej_φ correspond à la chaîne de Markov donnée dans la Figure 3.19 avec $P_0 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Pour la solvabilité du problème de rejet de perturbations de ce système, nous avons la matrice M suivante :

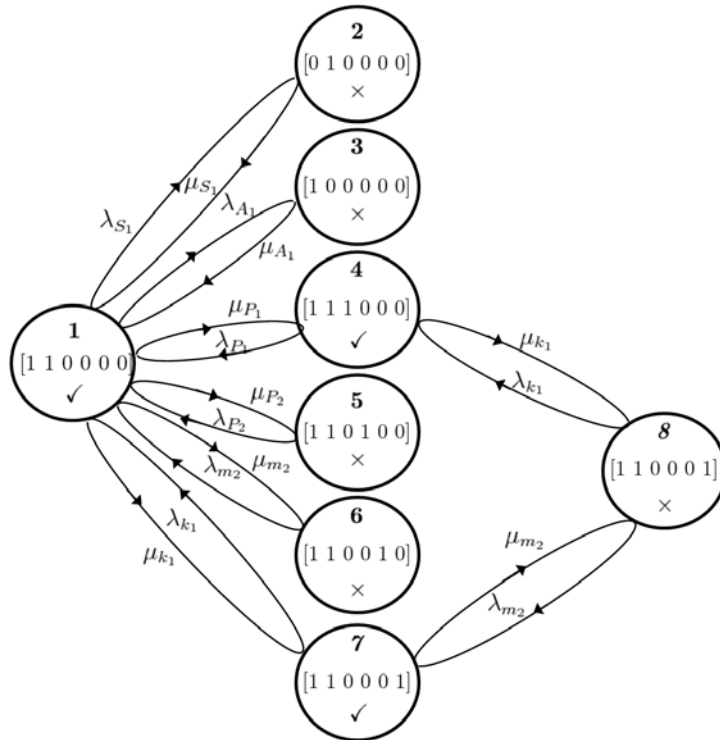


FIGURE 3.19 – Chaîne de Markov correspondant à l’expression Rej

$$M = \begin{bmatrix}
 -(\lambda_{S_1} + \lambda_{A_1} + \mu_{P_1} + \mu_{P_2} + \mu_{m_2} + \mu_{k_1}) & \lambda_{S_1} & \lambda_{A_1} & \mu_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mu_{S_1} & -\mu_{S_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mu_{A_1} & 0 & -\mu_{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{P_1} & 0 & 0 & -(\lambda_{P_1} + \mu_{k_1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{P_2} & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_{P_2} + \mu_{k_1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_{m_2} + \mu_{k_1}) & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_{k_1} + \mu_{m_2}) & \mu_{m_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{k_1} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

avec les taux de défaillances et de réparations λ_{c_i} et μ_{c_i} regroupés dans la Table 3.8.

La Figure 3.20 représente l'évolution de la disponibilité de la solvabilité du problème du rejet de perturbations pendant 4000 h de fonctionnement.

Cette disponibilité correspond à la probabilité que le problème de rejet de perturbations soit

Composant	Taux de défaillances λ_{c_i}	Taux de réparations μ_{c_i}
S_1	1.10^{-4}	1.10^{-2}
A_1	1.10^{-4}	1.10^{-2}
P_1	1.10^{-4}	1.10^{-2}
P_2	1.10^{-4}	1.10^{-2}
m_2	1.10^{-4}	1.10^{-2}
k_1	1.10^{-4}	1.10^{-2}

TABLE 3.8 – Taux de défaillances et de réparations

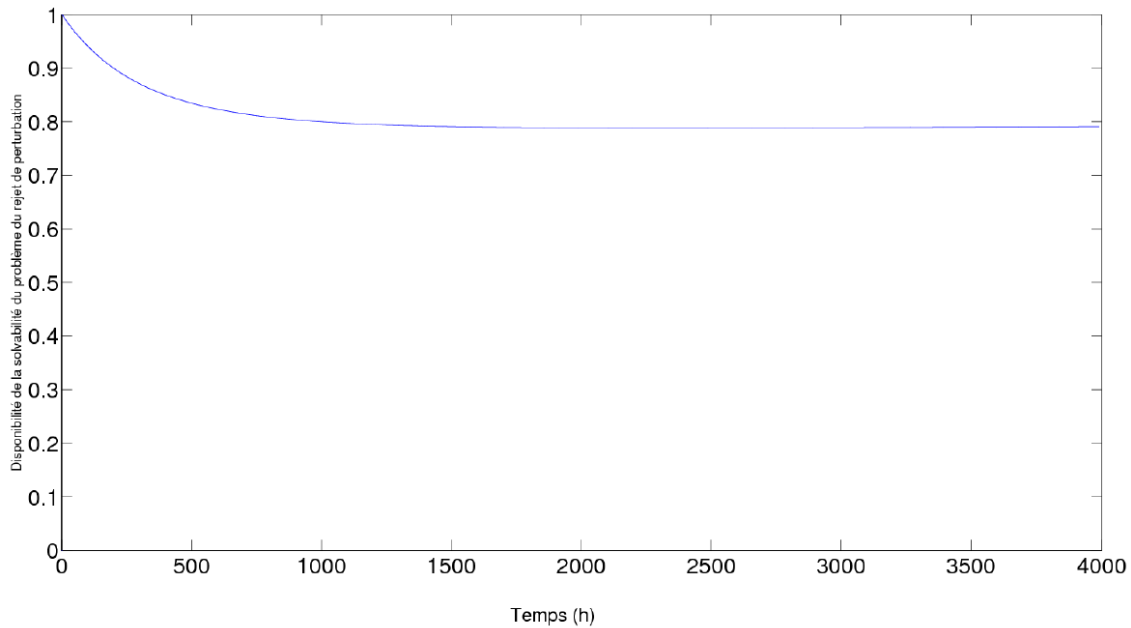


FIGURE 3.20 – Disponibilité de la solvabilité du problème du rejet de perturbations

solvable à un instant t *i.e.* cette solvabilité soit dans l'état 1, 4 ou 7 de la chaîne de Markov à l'instant t . La propriété étudiée est complètement disponible à l'instant $t = 0$. Sachant les taux de réparation et de défaillance des composants $m_1, m_2, m_3, m_4, A_1, A_2, A_3, k_1$ et k_3 de ce système masse-ressort, la solvabilité du problème de rejet de perturbations est 79% disponible quand $t \rightarrow \infty$.

3.7 Interprétation des résultats

3.7.1 Résultats/exigences d'un cahier des charges

Dans le cahier des charges d'un système, les exigences de ce dernier sont classées généralement en deux catégories :

- Exigences fonctionnelles : Elles décrivent les caractéristiques du système et des proces-

sus que le système doit exécuter (les règles du métiers, etc.). Elles correspondent aux fonctions principales du système.

- Exigences non fonctionnelles : Elles décrivent les contraintes du système. Par exemple les exigences techniques de sécurité, de performance, d'accessibilité, selon des critères définis. Elles correspondent aux fonctions de contrainte de l'analyse fonctionnelle.

Nous nous intéressons, dans cette section, aux exigences non fonctionnelles.

Dans le cahier des charges d'un système complexe, nous pouvons trouver une exigence non fonctionnelle qui correspond à un seuil minimal de fiabilité et/ou de disponibilité à respecter.

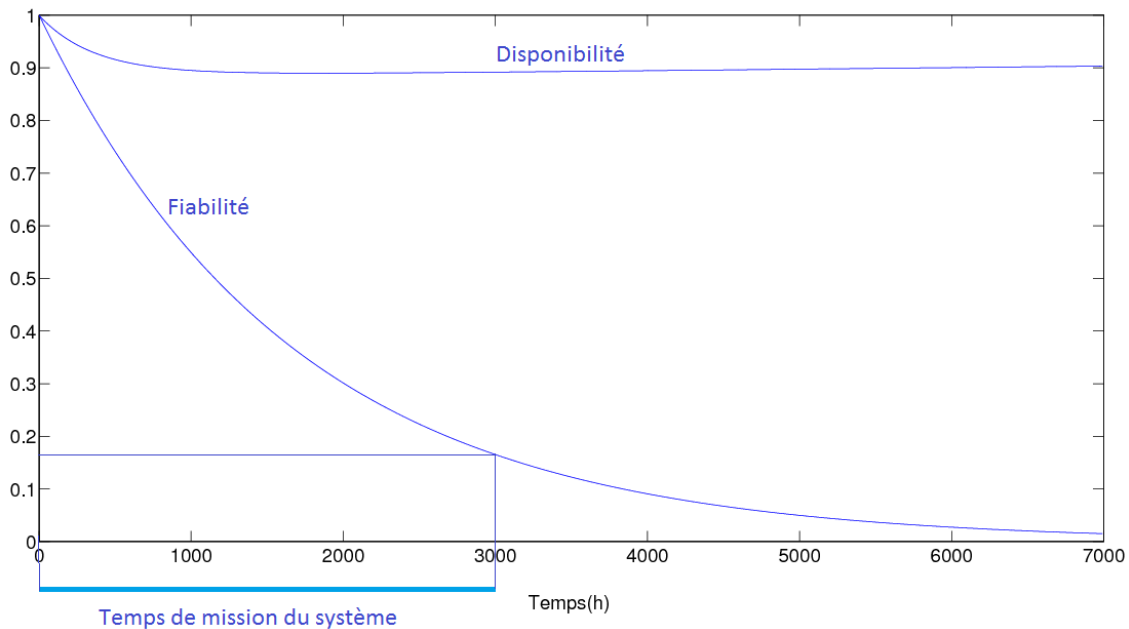


FIGURE 3.21 – Fiabilité et disponibilité d'une propriété structurelle d'un système

Considérons une propriété structurelle associée à l'expression booléenne suivante :

$$EB_4 = \bar{C}_1 \vee \left(\bar{C}_2 \wedge \left(\bar{C}_3 \vee \bar{C}_4 \right) \wedge \left(\bar{C}_5 \vee \bar{C}_6 \right) \right) \quad (3.15)$$

À partir de l'expression booléenne EB_4 , la Figure 3.21 montre la fiabilité et la disponibilité sur la propriété structurelle associée. Nous pouvons remarquer sur cette figure que la propriété structurelle étudiée sera probablement non vérifiée après 7000 heures de fonctionnement, où la fiabilité est proche de 0, si aucune réparation n'est effectuée sur les composants du système (voir la courbe de fiabilité).

Pour ce système, les exigences du cahier des charges par rapport à la sûreté de fonctionnement correspondent à des seuils minimaux à respecter de fiabilité égal à 0.85 et, de disponibilité égal à 0.9. Le temps de mission représenté sur cette figure est inclus entre 0 *h* et 3000 *h*.

Nous remarquons que pour le temps de mission de ce système, l'exigence relative à la disponibilité (> 0.9) est respectée tandis que celle relative à la fiabilité (> 0.85) ne l'est pas. En effet, avant la fin de la mission du système, la fiabilité passe en dessous du seuil fixé par le cahier des charges et, à la fin de sa mission, elle est inférieure à 0.2.

L'étude de la fiabilité et/ou de la disponibilité d'une propriété structurelle est effectuée de manière prévisionnelle avant le lancement de la mission du système. Dans le cas où l'étude révèle que les exigences du cahier des charges par rapport à la fiabilité et/ou à la disponibilité ne sont pas respectées, il est nécessaire d'améliorer la fiabilité et/ou la disponibilité de la propriété structurelle en prenant des mesures au niveau des composants concernés soit en augmentant leur fiabilité et disponibilité, soit en prévoyant une redondance matérielle ou des actions de maintenance. Afin d'optimiser les mesures prises au niveau des composants du système, il est utile de les classer et de cibler ces mesures.

3.7.2 Classement des composants du système

L'amélioration de la fiabilité et/ou de la disponibilité des propriétés structurelles dépend de la fiabilité et/ou de la disponibilité des composants du système. La validité d'une propriété structurelle dépend de l'état de fonctionnement de plusieurs composants du système. Ces composants n'influencent pas la validité de cette propriété de la même façon. Il est donc intéressant de les classer par rapport au niveau d'impact de leurs défaillances sur la vérification des propriétés structurelles. Pour ce faire, nous utilisons les facteurs d'importance (Bicking et al., 2009).

Parmi ces facteurs d'importance, nous nous intéressons particulièrement au facteur d'importance marginal ("Marginal Importance Factor", MIF). Le MIF, introduit par Birnbaum (Birnbaum and Krishnaiah, 1969), est défini comme une mesure de la variation de la fiabilité d'un système, et d'une propriété structurelle pour notre étude, en fonction de la fiabilité d'un composant donné.

Notons que $\mathcal{S} \in \{0, 1\}$ représente l'état binaire de l'expression booléenne EB associée à la propriété structurelle étudiée, et que $s_i \in \{0, 1\}$ représente l'état binaire d'un composant c_i . Le facteur MIF du composant c_i peut être calculé de la manière suivante :

$$MIF(c_i) = \frac{\partial R_{EB}(t)}{\partial R_{c_i}(t)} \quad (3.16)$$

$$= P\{\mathcal{S} = 1 | s_i = 1\} - P\{\mathcal{S} = 1 | s_i = 0\} \quad (3.17)$$

À partir de l'équation (3.16), le MIF d'un composant c_i peut être défini, dans le cas où son calcul est basé sur une expression analytique, comme la dérivée partielle de la fiabilité de la propriété structurelle par rapport à la fiabilité de c_i . Ce facteur est également calculé par la probabilité qu'une défaillance sur c_i provoque la non vérification de la propriété structurelle comme présenté par l'équation (3.17). Cette expression est utilisée dans le cas d'un calcul basé sur une simulation ou un Réseau Bayésien.

Après avoir effectué le calcul du MIF pour chaque composant c_i dont la défaillance peut impacter la validité de la propriété structurelle, il est possible de classer les composants du système du plus critique au moins critique *i.e.* du composant ayant le plus grand MIF à celui ayant le petit MIF.

Exemple 12 *Considérons l'expression booléenne EB_4 (expression 3.15). Si nous considérons, le calcul de fiabilité donnée dans l'expression 3.1, la fiabilité correspondant à cette expression est donnée par :*

$$R_{EB_4}(t) = 1 - (1 - R_{c_1}(t)) \cdot \left(1 - R_{c_2}(t) \cdot \left(1 - \left(1 - R_{c_3}(t) \right) \cdot \left(1 - R_{c_4}(t) \right) \right) \cdot \left(1 - \left(1 - R_{c_5}(t) \right) \cdot \left(1 - R_{c_6}(t) \right) \right) \right) \quad (3.18)$$

Les MIF de chaque composant c_i peuvent être calculés par la dérivée partielle $\frac{\partial R_{EB_4}(t)}{\partial R_{c_i}(t)}$. La Figure 3.22 représente les MIF des composants du système. À partir de cette figure, il apparaît clairement que les composants c_1 et c_2 ont les MIF les plus élevés comparés aux composants c_3 , c_4 , c_5 et c_6 . Il est donc plus judicieux d'agir sur les composants c_1 et c_2 .

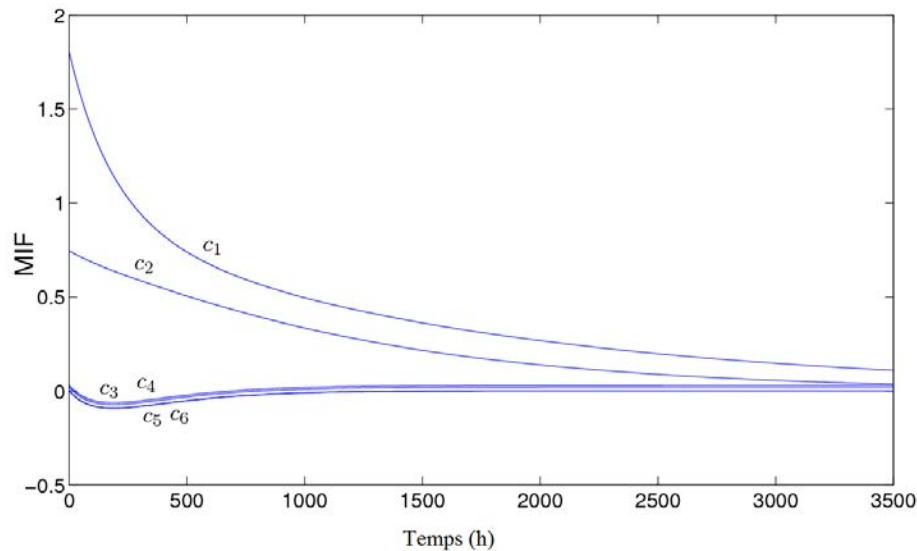


FIGURE 3.22 – Les indices MIF des composants c_i du système

3.7.3 Mesures à prendre au niveau des composants du système

Grâce au MIF, les composants sont classés en fonction de l'impact de leur défaillance sur la vérification de la propriété structurelle étudiée. Ainsi, les mesures prises au niveau de ces composants sont optimales quand elles ciblent les composants impactant le plus la validité des propriétés structurelles.

L'amélioration de la fiabilité et/ou de la disponibilité de la propriété structurelle peut être réalisée en augmentant la fiabilité et/ou la disponibilité des composants ayant le plus grand MIF, en prévoyant une redondance matérielle ou des actions de maintenance.

Redondance matérielle

Afin d'optimiser l'utilisation de la redondance matérielle, il est important de prévoir cette dernière sur les composants ayant le plus d'impact sur la vérification de la propriété structurelle étudiée, c'est-à-dire ayant le plus grand MIF (les composants c_1 et c_2 dans l'Exemple 12).

La redondance matérielle considérée consiste à prévoir pour chacun des composants choisis, un autre composant monté en parallèle et ayant les mêmes caractéristiques techniques. Dans ce cas, chaque composant principal dispose d'un autre composant redondant.

Augmentation de la fiabilité et/ou de la disponibilité des composants du système

Pour les composants critiques qui ont le plus d'impact sur la vérification de la propriété structurelle étudiée, cette deuxième mesure possible consiste à prévoir des composants plus performants c'est-à-dire plus fiables/réparables, une durée de vie plus longue, etc.

Ainsi, la fiabilité de la propriété structurelle est améliorée en améliorant la fiabilité des composants ayant la plus grande valeur du MIF et qui contribuent le plus à la vérification ou non de la propriété structurelle.

Actions de maintenance préventive

La troisième possibilité pour améliorer la fiabilité/disponibilité des composants ayant le plus grand MIF consiste à prévoir des actions de maintenance préventive. Elle est effectuée selon un échéancier établi en fonction du temps, de la production, le nombre de cycles effectués, etc. Cette périodicité d'intervention est déterminée à partir de la mise en service ou après une révision complète ou partielle.

Afin de mener de façon optimale ces actions de maintenance préventive, les équipes de maintenance peuvent se servir d'indicateurs en relation avec la validité des propriétés structurelles en fonction des défaillances ou du bon fonctionnement des composants.

Le nombre minimal de défaillances :

À partir de l'expression booléenne associée à la propriété structurelle étudiée, il est possible de définir d'une manière similaire à (Conrard et al., 2011) le nombre minimal de défaillances tolérables sur les composants du système à l'aide d'un indice appelé "niveau de tolérance aux défaillances" (NTD). Cet indice est basé sur les coupes minimales de l'expression booléenne qui peut inclure plusieurs coupes minimales notées C_{min_i} . L'indice

NTD d'une expression booléenne peut être calculé de la manière suivante :

$$NTD = \min(\text{card}(C_{\min_i})) - 1$$

Cet indice permet de calculer le nombre de défaillances minimal à ne pas dépasser. Sinon, la propriété structurelle étudiée est non vérifiée. Ainsi, il faut que le nombre de défaillances de composants soient maintenu au-dessous du NTD afin de garder la propriété structurelle vérifiée.

Remarque 10 *L'indice NTD n'est utilisé que pour les propriétés structurelles cohérentes. Par conséquent, cet indice n'est plus utile quand la propriété structurelle dépend de la panne d'un ou plusieurs composants.*

Observation des composants du système :

Nous avons détaillé dans ce chapitre l'utilisation des RBD. En effet, parmi les utilisations des RBD, la plus importante concerne la possibilité de réaliser des observations réelles de défaillances sur les composants et de réviser les probabilités sur le RBD. De cette manière, l'inférence calcule les probabilités autorisées pour un nœud, connaissant l'état d'une ou plusieurs variables (à partir de l'observation sur le composant). Si la connaissance sur les défaillances n'est pas disponible alors le calcul est basé sur des probabilités a priori. Ainsi, l'équipe de maintenance peut effectuer des inspections régulières au niveau des composants du système.

La Figure 3.23 représente la fiabilité d'une propriété structurelle avec et sans les observations effectuées au niveau des composants. À chaque observation, la fiabilité des composants en bon fonctionnement (resp. défaillants) est mise à jour à sa valeur maximale égale à 1 (resp. minimale égale à 0).

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au calcul de la fiabilité et de la disponibilité de propriétés structurelles. Tout d'abord, nous avons présenté une association arc-composants assurant le lien entre les graphes orienté et biparti, représentant les variables du système

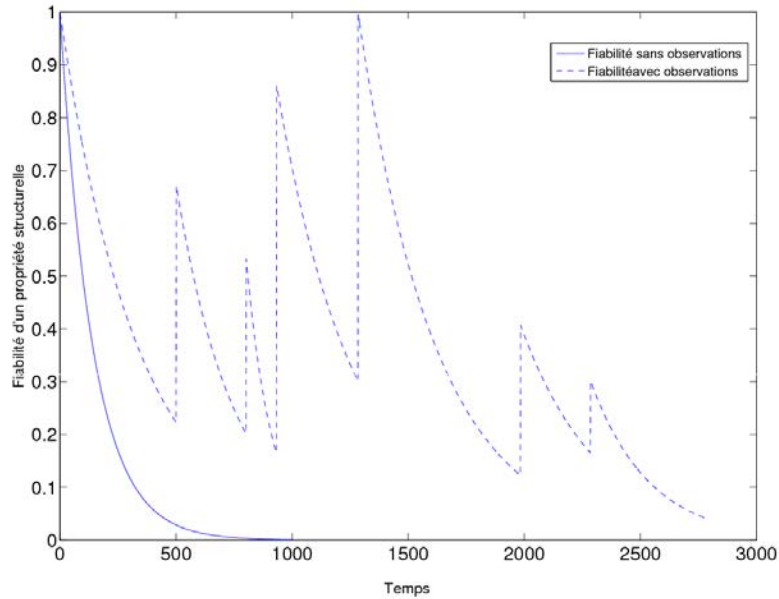


FIGURE 3.23 – Fiabilité avec et sans des observations

(d'état, d'entrée, de sortie, de défaut, de perturbations, etc.) et leurs relations, et les composants internes et externes du système. Le lien entre ces deux types de graphes est effectué par le fait que chaque arc dans les graphes orienté et biparti est affecté à une expression booléenne basée sur les défaillances des composants du système.

La fiabilité et/ou la disponibilité des propriétés structurelles sont calculées en deuxième partie. Ce calcul est basé sur 3 outils de sûreté de fonctionnement présentés en chapitre 1 en utilisant un mécanisme automatisable.

Pour chacun des deux paramètres de sûreté de fonctionnement étudiées, deux exemples de propriétés structurelles ont été traités sur un système linéaire. La première propriété est l'observabilité totale de l'état qui nécessite la vérification des conditions graphiques élémentaires de connectivité et de couplage complet. La fiabilité de cette propriété est ensuite calculée en utilisant les blocs digramme de fiabilité.

La deuxième propriété structurelle étudiée est la solvabilité du problème de rejet de perturbations qui nécessite la vérification des conditions graphiques élémentaires de lien et de distance. La disponibilité de cette propriété structurelle est ensuite calculée en utilisant les chaînes de Markov.

Après avoir calculé la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles, ces résultats sont interprétés et exploités afin d'améliorer le fonctionnement du système. Les résultats obtenus sont interprétés par rapport aux exigences d'un cahier des charges du système. Dans le cas où ces exigences ne sont pas respectées, nous avons présenté des mesures à prendre au niveau des composants dont les défaillances impactent le plus la validité des propriétés structurelles. Ces mesures doivent être mises en place afin d'améliorer la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles étudiées et répondre aux exigences du client.

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de calculer la fiabilité et/ou la disponibilité des propriétés structurelles. Ils permettent également de classer les composants du système en fonction de leur niveau d'impact sur la validité des propriétés structurelles. L'amélioration de la fiabilité et/ou de la disponibilité peut être effectuée par des équipes de maintenance en s'appuyant sur des propositions en dernière partie de ce chapitre permettant d'optimiser les interventions de maintenance. Ces propositions porte sur une analyse qualitative basée sur les composants considérés comme des coupes minimales dans l'expression booléenne associée à la propriété structurelle étudiée et, à la tolérance aux défaillances.

Conclusion et perspectives

Le travail de thèse, présenté dans ce document, est consacré à l'analyse de paramètres de sûreté de fonctionnement des propriétés structurelles. À partir du modèle d'état du système, ce dernier est associé à un graphe représentant sa structure *i.e.* ses variables (entrées, sorties, états, perturbations, etc) et les relations qui les lient. De nombreuses propriétés structurelles d'un système, telles que la commandabilité, l'observabilité, etc, peuvent être vérifiées graphiquement en fonction des conditions graphiques qui peuvent être classées principalement en 4 catégories de conditions élémentaires graphiques qui sont la condition de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. La vérification de ces conditions élémentaires dépend de l'état de validité des arcs du graphe associé à la structure du système. La première partie du travail consiste à proposer des algorithmes pour formuler la validité de chacune des conditions graphique élémentaires sous forme d'expressions booléennes basées sur l'état de validité des arcs. Puisque la validité des propriétés structurelles dépend de la vérification de deux ou trois conditions élémentaires graphiques.

Par ailleurs, les arcs sont naturellement liés aux composants physiques du système, la validité de ces arcs dépend de l'état de fonctionnement des composants du système. Ainsi, en utilisant une association arc-composants supposée connue, chaque arc peut être associé à une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement des composants.

Grâce à l'association arc-composants considérée, les propriétés structurelles peuvent alors être réécrites sous forme d'expressions booléennes basées sur l'état de fonctionnement des composants. Dans la deuxième partie du travail, à partir de ces expressions booléennes, nous calculons la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles en utilisant des outils de sûreté de fonctionnement tels que les blocs diagrammes de fiabilité, les réseaux

bayésiens et les chaînes de Markov.

Contributions

La première contribution de ce travail de thèse est que chacune des conditions élémentaires graphiques de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet est associée à au moins un algorithme de calcul à complexité polynomiale afin d'exprimer sa validité sous forme d'expression booléenne basée sur l'état de validité des arcs. Ceci permet d'écrire également des propriétés structurelles sous forme d'expressions booléennes basées sur la validité des arcs en effectuant des combinaisons logiques de conditions graphiques élémentaires.

Le deuxième apport de cette thèse est que semblablement à (Kaufmann et al., 1975), nous considérons une association arc-composants qui lie chaque arc à la valeur booléenne "1" ou, à un ou plusieurs composants. La validité des propriétés structurelles sont formulées comme des expressions booléennes basées sur l'état de fonctionnement des composants. Cette association arc-composants assure la jonction entre l'étude des propriétés structurelles et la sûreté de fonctionnement.

Le troisième apport de ce travail de thèse réside dans le fait qu'à partir de l'écriture booléenne de la validité des propriétés structurelles, la fiabilité et/ou la disponibilité de ces propriétés structurelles peuvent être calculées.

Le quatrième résultat obtenu est que les composants dans les expressions booléennes associées aux propriétés structurelles peuvent être classés. Ce classement est en fonction de l'impact des défaillances de ces composants sur la non validité des propriétés structurelles.

Enfin, afin d'améliorer la fiabilité et/ou la disponibilité des propriétés structurelles, les caractéristiques de sûreté de fonctionnement des composants dont la défaillance a le plus d'impact sur la validité de ces propriétés peuvent être améliorées. Pour ce faire, des propositions d'actions sur ces composants sont fournies telles que l'amélioration de leur

fiabilité et/ou leur disponibilité, prévention d'une redondance matérielle ou des actions de maintenance.

Originalités

Le problème posé dans ce travail de thèse, l'approche utilisée ainsi que les résultats obtenus peuvent être considérés comme originaux. En effet, dans la littérature, les propriétés structurelles sont classiquement étudiées graphiquement en considérant que la structure du système reste inchangée et que les arcs du graphe représentant cette structure sont toujours valides (Boukhobza, 2008; Dion et al., 2003). À notre connaissance, aucune étude des propriétés structurelles ne propose le calcul de leurs fiabilité et disponibilité. Ainsi, la première originalité de cette thèse réside dans l'extension de la définition de la fiabilité et/ou de la disponibilité pour couvrir les propriétés structurelles.

La sûreté de fonctionnement, notamment la fiabilité et la disponibilité, est principalement basée sur l'occurrence des événements sur les composants (défaillances, réparations, etc.). Dans ce travail de thèse, nous avons pu exprimer les propriétés structurelles de systèmes structurés continus (linéaires ou bilinéaires) en fonction des défaillances des composants qui sont basées sur un raisonnement événementiel. Cette étude conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement nous a permis de fusionner les deux approches continue et événementielle.

Les systèmes étudiés dans ce travail de thèse ont été représentés graphiquement par des graphes orientés ou bipartis. Une étude bibliographique nous a permis de classer les conditions graphiques nécessaires et suffisantes à la vérification des propriétés structurelles pour chacun des 3 types de systèmes structurés linéaires, bilinéaires et linéaires à commutations considérés. Il s'est avéré que pour presque toutes les associations propriété structurelle/type de système, il y a toujours les mêmes catégories de conditions graphiques élémentaires qui interviennent qui sont les conditions de connectivité, de lien, de distance

et de couplage complet. Ainsi, notre étude est redirigée vers ces conditions élémentaires graphiques au lieu de traiter chaque association propriété structurelle/type de système. Ceci donne à notre étude un aspect plus générique compte tenu que chaque propriété structurelle est une combinaison de 2 ou 3 conditions graphiques élémentaires. En plus des 3 types de systèmes structurés considérés dans cette thèse, notre approche est applicable à d'autres types de système tant que l'étude de leurs propriétés structurelles est du même type que les 4 conditions élémentaires étudiées.

Chaque condition élémentaire graphique est formulée comme une expression booléenne basée sur la validité des arcs. Cette écriture booléenne est obtenue grâce à des algorithmes basés sur les arcs des graphes associés au système. L'avantage que présentent ces algorithmes réside dans le fait que le calcul des expressions booléennes nécessite une complexité polynomiale et non combinatoire. Cette caractéristique rend le calcul des expressions booléennes moins coûteux et plus intéressant pour des applications à des systèmes à grande dimension.

Dans le but de calculer la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles, nous nous sommes intéressés à une association naturelle entre les arcs de la représentation graphique et les composants du système inspirée des résultats dans (Kaufmann et al., 1975). Nous nous intéressons également aux composants du système et à leurs défaillances. En effet, notre étude a porté principalement sur les arcs et non pas sur les sommets des graphes contrairement aux travaux d'analyse structurelle dans la littérature (Boukhobza, 2008; Dion et al., 2003; Svaricek, 1993; Reinschke and Wiedemann, 1997) où l'étude des propriétés structurelles repose principalement sur les sommets.

Nous avons pu mener une étude conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement. Les arcs de la représentation graphique d'un système structuré sont associés à ses composants physiques. Ainsi toute analyse portant sur les arcs des graphes et leur validité sera forcément liée aux composants du système et à leur fonctionnement. La vérification des propriétés structurelles est donc écrite sous forme d'expressions booléennes

basées sur les défaillances des composants. En utilisant cette expression booléenne et les coupes minimales, il est possible de déterminer le nombre de défaillances maximale que le système peut tolérer tout en gardant la propriété structurelle étudiée vérifiée. De façon similaire au résultat proposé dans (Conrard et al., 2011), le nombre de défaillance maximale proposé dans ce travail de thèse peut être considéré comme un niveau de tolérance aux défaillances.

En considérant l'association entre les arcs et les composants, pour la majorité des systèmes, les arcs sont associés à tous les composants du système. Par exemple, un arc $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ est associé à un capteur, un arc $(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_j)$ est associé à un actionneur, un arc $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ est associé à un ou plusieurs composants internes (une résistance, un arbre mécanique, un ressort, une poulie, etc.). Ainsi, les expressions booléennes basées sur les arcs correspondant aux propriétés structurelles peuvent être reformulées sous forme d'expressions booléennes basées sur les composants du système. La validité des propriétés structurelles dépend de l'état de fonctionnement des composants du système qu'ils soient internes ou externes et non pas que sur les composants externes comme c'est le cas dans (Maza et al., 2012). À partir de cette analyse, il est possible de déterminer comment les défaillances au niveau des composants du système peuvent influencer la validité des propriétés structurelles.

En utilisant les expressions booléennes basées sur les composants, il est possible de classer ces composants en essentiels, utiles et inutiles dans le même esprit que (Boukhobza, 2012; Boukhobza and Hamelin, 2011a; Commault et al., 2011). En se basant sur les coupes minimales de ces expressions, nous pouvons retrouver le même type de résultat : un composant qui correspond à une coupe minimale d'ordre 1 est essentiel. Quand il est défaillant, la propriété structurelle n'est plus vérifiée. Un composant qui correspond à une coupe minimale d'ordre supérieur à 1 est utile. Cependant, quand il est défaillant, la propriété structurelle n'est pas forcément non vérifiée. Un composant qui n'est pas considéré dans l'expression booléenne est inutile. Sa défaillance n'a aucun impact sur la vérification de la propriété structurelle. L'avantage de l'approche proposée, dans ce travail

de thèse, est que les résultats vont au delà de la classification des composants du système en intégrant l'impact des défaillances des composants du système sur la validité des propriétés structurelles.

La fiabilité et/ou la disponibilité des propriétés structurelles ont été calculées. Les résultats de ce calcul sont interprétés par rapport aux exigences du cahier des charges du système sur la fiabilité et/ou la disponibilité. Quand ces exigences ne sont pas respectées pendant la mission du système, il est important d'améliorer la fiabilité et/ ou la disponibilité des propriétés structurelles. Dans ce travail de thèse, nous avons classé les composants du système en fonction du niveau d'impact de leurs défaillances sur la validité des propriétés structurelles. Ce classement a été effectué en utilisant un facteur d'importance marginale introduit par Birnbaum (Birnbaum and Krishnaiah, 1969) et défini comme une mesure de la variation de la fiabilité d'une propriété structurelle en fonction de la fiabilité d'un composant donné. Des mesures doivent donc être prises au niveau des composants dont la défaillance présente plus d'impact sur la validité de la propriété structurelle étudiée. Ces mesures doivent être effectuées par des équipes de maintenance. Nous avons proposé quelques pistes de maintenance en utilisant des indicateurs permettant d'optimiser les interventions sur les composants.

Limites et contraintes de l'approche

Les principales limites de l'approche proposée et des résultats sont liées tant à la méthode utilisée qu'à des aspects techniques. En premier lieu, l'analyse proposée dans ce travail de thèse sur la validité des propriétés structurelles est basée sur la représentation graphique du système étudié. Cette représentation graphique nécessite au moins un modèle relationnel qui met en évidence les relations entre les variables du système. Notre approche n'est donc pas basée sur les données et n'est pas applicable sur des systèmes ne disposant pas de modèle d'état prédéfini. De plus, pour passer de l'expression booléenne basée sur l'état de validité des arcs à une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement des

composants du système, nous considérons une association arc-composants. Cette association est considérée connue et affecte à chaque arc une expression booléenne basée sur l'état de fonctionnement des composants. La connaissance de la structure du système ainsi que l'association arc-composants sont nécessaires dans l'étude proposée dans cette thèse.

Parmi les limites techniques de notre approche, la condition de distance est la seule à être traitée sous l'hypothèse que la condition de lien telle qu'elle est définie dans ce manuscrit soit vérifiée. Or, certaines propriétés structurelles comme l'observabilité ou la commandabilité partielles de l'état, qui dépendent des conditions de connectivité, couplage complet et distance, ne nécessitent pas forcément la vérification de cette condition de lien maximal particulière en plus de celle de la condition de distance. Ainsi, afin d'enlever la contrainte de lien maximal et rendre la condition de distance plus applicable, il est intéressant de l'associer à un algorithme qui ne prend pas en compte la condition de lien. Aussi, pour les mêmes conditions élémentaires graphiques, l'analyse peut être complétée en considérant des conditions plus générales. Par exemple, pour les conditions de lien et de couplage complet, nous considérons des égalités entre des tailles de liens ou de couplages. Il serait plus intéressant de généraliser les définitions des conditions étudiées et de considérer des inégalités entre ces tailles de liens ou de couplages.

Perspectives

L'approche proposée dans ce travail est basée sur un formalisme graphique. En utilisant les résultats de cette thèse, les propriétés structurelles d'un système de systèmes représentés graphiquement et liés entre eux par des arcs peuvent être étudiées.

Quand les exigences du cahier des charges par rapport à la fiabilité et/ou à la disponibilité des propriétés structurelles ne sont pas satisfaites, des actions de maintenance sont envisageables. Certaines actions de maintenance, comme par exemple la redondance matérielle, peuvent provoquer le changement de la structure du système. Il y a donc une

possibilité que le graphe orienté représentant la structure du système ainsi que l'association arc-composants considérée soient modifiés. Dans ce cas, il est possible de reprendre toute ou une partie de l'analyse des propriétés structurelles proposées dans ce travail de thèse. Une autre possibilité peut être envisageable qui consiste à considérer pour le système étudié plusieurs modes où ce dernier commute d'un mode à un autre en fonction des composants sujets à des actions de maintenance.

Afin de rendre plus concret l'apport des résultats proposés dans ce travail de thèse, il est intéressant d'implémenter les 5 algorithmes présentés dans ce manuscrit. En effet, une boîte à outil peut être développée en relation avec les algorithmes correspondant aux expressions booléennes associées aux conditions élémentaires graphiques. Ceci permettra d'automatiser une étape importante de l'analyse d'un système complexe qui concerne ces propriétés structurelles et, de mettre à disposition un outil pertinent d'analyse liée à la sûreté de fonctionnement. Une première étape de cette implémentation a été effectuée dans le cadre d'un stage de fin d'étude effectué au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy par 2 étudiants de l'école Télécom-Nancy et encadré par M. Dakil et C. Simon. Pendant ce stage, des programmes permettant d'obtenir sous Matlab les graphes orientés associés aux systèmes structurés à partir des matrices d'états du système ont été développés.

Pour le calcul de la fiabilité et de la disponibilité des propriétés structurelles, nous avons considéré l'hypothèse que les défaillances des composants sont indépendantes. Il serait donc intéressant d'écarter cette hypothèse et d'envisager une dépendance entre les défaillances des composants, notamment des défaillances de cause commune. En effet, il existe en général 3 types de défaillances de cause commune. Le premier type correspond aux dépendances liées à des systèmes supports, par exemple une alimentation électrique défaillante peut provoquer l'arrêt de plusieurs sous-systèmes ou composants. Le deuxième type correspond aux dépendances liées aux causes internes ou externes, par exemple un incendie, une inondation ou un séisme ce qui correspond à une occurrence simultanée d'un événement initiateur de défaillances. Le dernier type est les défaillances liées à des

causes diverses agissant sur les composants de même famille, par exemple des erreurs de conception, de fabrication ou d'exploitation. Ces 3 types de défaillances de cause commune peuvent être pris en considération lors du calcul de la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles. Ces défaillances de cause commune sont donc variables en fonction de plusieurs paramètres dans le système. Par exemple, le types de composants installés sur le système ou encore l'emplacement géographique et l'environnement du système.

Dans l'analyse de la sûreté de fonctionnement, il y a 4 paramètres : fiabilité, maintenabilité, disponibilité et sécurité. Dans ce travail de thèse, nous avons considéré l'hypothèse que tout calcul relatif à la sûreté de fonctionnement ne dépend pas du facteur humain et logistique. Or, l'étude de la maintenabilité et la sécurité dépends de ces deux facteurs. Par exemple, la maintenabilité d'un composant dépend des moyens en personnel de maintenance, appareillages, outillages, rechanges, etc. Ainsi, nous nous sommes intéressés uniquement à l'étude de la fiabilité et la disponibilité. Il serait intéressant d'écarter cette hypothèse en considérant les facteurs humain et logistique et, étudier ainsi la maintenabilité et la sécurité par rapport aux propriétés structurelles. Par exemple, prendre en considération les facteurs liés au constructeur (conception, qualité du service après vente, facilité d'obtention et le coût des pièces de rechange), les facteurs liés à la maintenance (préparation et formation des personnels, maintenance améliorative), les facteurs liés aux dispositifs de sécurité (formation en sécurité, moyens de protection), etc.

Résumé

Ce travail de thèse concerne le développement de méthodes et d'outils d'analyse conjointe de propriétés structurelles et de sûreté de fonctionnement.

Plus précisément, l'étude porte sur des systèmes structurés tels que des systèmes linéaires, bilinéaires ou linéaires à commutations. Ces systèmes doivent vérifier des propriétés structurelles importantes (observabilité, commandabilité, etc) pour l'accomplissement de leurs missions. La structure du système peut être représentée par un graphe composé de sommets et d'arcs. Les sommets représentent les variables du système et les arcs représentent les relations entre ces variables.

La vérification des propriétés structurelles dépend principalement de 4 conditions élémentaires graphiques qui sont les conditions de connectivité, de lien, de distance et de couplage complet. Ces conditions sont combinées selon la propriété structurelle à vérifier ce qui donne un aspect générique à notre approche. En outre, nous avons développé des algorithmes avec leurs preuves afin d'exprimer ces conditions et de manière induite les propriétés structurelles qui en dépendent sous forme d'expressions booléennes basées sur les arcs de la représentation graphique du système.

Dans la représentation graphique d'un système structuré, les relations entre ses variables sont assurées par un ensemble de lois physiques et de composants que l'on peut habilement associer aux arcs du graphe. Ainsi, chaque arc du graphe est lié à un ou plusieurs composants externes (capteurs/actionneurs) ou internes du système. Une défaillance au niveau d'un ou plusieurs composants du système peut provoquer la modification structurelle du système, et peut rendre une propriété structurelle insatisfaite. Grâce à une association arc-composants, les propriétés structurelles peuvent être reformulées sous forme d'expressions booléennes basées sur l'état de fonctionnement des composants.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à l'évaluation probabiliste des propriétés structurelles. En utilisant les expressions booléennes associées aux propriétés structurelles, leurs fiabilité et/ou disponibilité peut être calculée sachant les caractéristiques de sûreté de fonctionnement des composants concernés. Le calcul de la fiabilité et la disponibilité des propriétés structurelles est effectué à l'aide d'outils de la sûreté de fonctionnement tels que les blocs diagrammes de fiabilité, les chaînes de Markov, les réseaux Bayésiens et les réseaux Bayésiens dynamiques.

A travers cette étude, le calcul de la fiabilité et/ou la disponibilité des propriétés structurelles permettra de vérifier si, pendant le temps de mission du système, la propriété structurelle étudiée restera satisfaite et/ou respectera un niveau de performance exigé dans le cahier des charges du client. Dans le cas où ce niveau de performance n'est pas respecté, il est nécessaire de prendre des mesures de maintenance au niveau des composants concernés telles que augmenter leurs fiabilité et disponibilité ou prévoir une redondance matérielle.

Abstract

This thesis concerns the development of methods and tools of a joint analysis of structural properties and dependability.

More specifically, the study focuses on structured systems such as linear, bilinear or switched systems. These systems must verify important structural properties (observability, controllability, etc) for the accomplishment of their missions. The structure of a system can be represented by a graph consisting of vertices and edges. Vertices represent the system variables and edges represent the relationships between these variables.

The verification of structural properties depends mainly on four elementary graphical conditions which are connectivity, linking, distance and complete matching conditions. These conditions are combined according to the structural property which gives a generic aspect of our approach. Moreover, we have developed algorithms with their proofs to express these conditions and so the structural properties that depend on this conditions as boolean expressions based on the edges of the system graph. In the graphical representation of a structured system, the relationships between its variables are provided by physical laws and components that can be cleverly associated to edges of the graph. Thus, each edge of the graph is related to one or more external components (sensors/actuators), or internal components. A failure on one or several components can cause structural changes in the system, and can make a structural property unsatisfied. Thanks to a association edge-components, structural properties can be reformulated as boolean expressions based on the operating state of the components.

In this thesis, we focus on the probabilistic assessment of structural properties. Using Boolean expressions associated to structural properties, their reliability and/or availability can be calculated knowing the dependability characteristics of the involved components. The calculation of reliability and availability of the structural properties is performed using

some dependability tools, such as reliability diagrams blocks, Markov chains, Bayesian networks and dynamic Bayesian networks.

Through this study, the calculation of reliability and/or availability of structural properties allows us to verify if, during the mission time of the system, the studied structural property remain satisfied and/or respect a level of performance required in the system specification. When this level of performance is not respected, it is necessary to take some measures to maintain on the the system components such as increase their reliability and availability or provide hardware redundancy.

Bibliographie

- AFNOR (Novembre 1977). AFNOR statistique et qualité, introduction à la fiabilité, X NF 06-501.
- Al-Garni, A., Sahin, A., and Al-Farayedhi, A. (1997). A reliability study of fokker f-27 airplane brakes. *Reliability Engineering and System Safety*, 56(2) : 143–150.
- A.Rahmani (1993). *Bond Graph Approach for Structural Study of Linear Systems*. PhD thesis, Université de Lille.
- Babaali, M. and Pappas, G. J. (2005). Observability of switched linear systems in continuous time. *Lecture Notes in Computer Science*, 3414 : 103–117.
- Bahri, S., Ghribi, F., and Bacha, H. B. (2009). A study of asymptotic availability modeling for a failure and a repair rates following a weibull distribution. *Reliability & Risk Analysis : Theory & Applications*, 2(3) : 30–42.
- Bargallo, E., Giralt, A., Martinez, G., Weber, M., Regidor, D., Arroyo, J., Abal, J., Dies, J., Tapia, C., Blas, A. D., Mendez, P., Ibarra, A., and Molla, J. (2013). Availability, reliability and logistic support studies of the RF power system design options for the IFMIF accelerator. *Fusion Engineering and Design*, 88(9) : 2732–2735.
- BEASAC (2012). Accident de l’airbus A330-203, vol AF 447 Rio de Janeiro - Paris. Technical report.
- Bicking, F., Simon, C., M. Sallak, M., and Aubry, J.-F. (2009). Aide à la conception de Systèmes Instrumentés de Sécurité par les réseaux de fiabilité de Kaufmann. In *2ème Work-*

- shop Surveillance, Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes, 3SGS'09*, page CDROM, Nancy, France.
- Birnbaum, Z. W. and Krishnaiah, P. (1969). On the importance of different components in a multi-component system II. *Academic Press*.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., and Staroswiecki, M. (2006). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Boukhobza, T. (2008). *Analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de diagnostabilité des systèmes linéaires et bilinéaires - Approche graphique -*. Habilitation à Diriger les Recherches, Université Henri Poincaré Nancy 1, France.
- Boukhobza, T. (2010). Partial state and input observability recovering by additional sensor implementation : a graph-theoretic approach. *International Journal of Systems Science*, 41(11) : 1281–1291.
- Boukhobza, T. (2012). Sensor location for discrete mode observability of switching structured linear systems with unknown input. *Automatica*, 48(7) : 1262–1272.
- Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2007). Observability analysis for structured bilinear systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, 43(11) : 1968–1974.
- Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2009). State and input observability recovering by additional sensor implementation : a graph-theoretic approach. *Automatica*, 45(7) : 1737–1742.
- Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2011a). Observability analysis and sensor location study for structured linear systems in descriptor form with unknown inputs. *Automatica*, 47(12) : 2678–2683.
- Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2011b). Observability of switching structured linear systems with unknown input : a graph-theoretic approach. *Automatica*, 47(2) : 395–402.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., and Canitrot, S. (2008). A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems. *International Journal of Control*, 81(4) : 661–678.

- Boukhobza, T., Hamelin, F., Martinez-Martinez, S., and Sauter, D. (2009). Structural analysis of the partial state and input observability for structured linear systems. Application to distributed control systems. *European Journal of Control*, 15(5) : 503–517.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., and Sauter, D. (2006). Observability of structured linear systems in descriptor form : a graph-theoretic approach. *Automatica*, 42(4) :629–635.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., and Simon, C. (2014). Partial state observability recovering for linear systems by additional sensor implementation. *Automatica*, 50(3) : 858–863.
- Bui, V., Zhu, W., Botta, A., and Pescape, A. (2010). A markovian approach to multi-path data transfer in overlay networks. *IEEE Transaction on parallel and distributed systems*, 21(10) : 1398–1411.
- Canitrot, S., Boukhobza, T., and Hamelin, F. (2008). Observability recovering by additional sensor implementation in structured bilinear systems. *I.E.T. Control Theory & Applications*, 2(10) : 860–865.
- Chen, T.-L. and Hwang, C.-R. (2013). Accelerating reversible markov chains. *Statistics and Probability Letters*, 83 : 1956–1962.
- Commault, C. and Dion, J. (2003). Optimal sensor location for fault detection and isolation in linear structured systems. *European Control Conference, ECC'03, Cambridge, United Kingdom*.
- Commault, C., Dion, J., and Do, T. (2011). Sensor location and classification of disturbance rejection by measurement feedback. *Automatica*, 47 :2584–2594.
- Commault, C. and Dion, J.-M. (2013). Controllability through input addition for graph-based systems. *In proceedings of the 5th IFAC SSSC Grenoble, France*.
- Commault, C., Dion, J.-M., and Agha, S. (2008). Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation. *Automatica*, 44 : 2074–2080.
- Commault, C., Dion, J.-M., and Agha, S. Y. (2007). Sensor classification for the Fault Detection and Isolation problem. *IFAC SSSC, Foz do Iguaçu, Brazil*, pages 661–666.

- Commault, C., Dion, J. M., and Perez, A. (1991). Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7) :884–887.
- Conrard, B., Cocquempot, V., and Mili, S. (2011). Fault-tolerant system design in multiple operating modes using a structural model. *In proceeding of the European Safety & Reliability Conference, Troyes, France.*
- Dhillon, B. S. (1999). *Design reliability : Fundamentals and Applications*. CRC Press LLC.
- Dion, J. M. and Commault, C. (1993). Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1132–1135.
- Dion, J. M., Commault, C., and van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) : 1125–1144.
- Directive 96/82/CE (1996). Concernant la maîtrise des dangers liés aux accidents majeurs impliquant des substances dangereuses. Technical report, SEVESO II.
- Do, T. (2011). *Analyse structurelle des réseaux de capteurs pour la commande et l'observation*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- Dulmage, A. L. and Mendelsohn, N. S. (1958). Coverings of bipartite graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 10 : 517–534.
- El-Damcese, M. A. and Temraz, N. S. (2011). Availability and reliability measures for multistate system by using Markov reward model. *RT&A*, 2.
- Ford, D., Labelle, F., Popovici, F., Stokely, M., Truong, V., Barroso, L., Grimes, C., and Quinlan, S. (2010). Availability in globally distributed storage systems. In *Proceedings of the 9th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation, Vancouver, BC, Canada*, pages 61–74.
- Ford, L. R. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press.
- Fougère, D. and Kamionka, T. (1992). Un modèle markovien du marché du travail. *Annales d'économie et de statistique*, 27 : 149–188.

- Glover, K. and Silverman, L. M. (1976). Characterization of structural controllability approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(4) : 534–537.
- H.Wang and Pham, H. (2006). Availability and maintenance of series systems subject to imperfect repair and correlated failure and repair. *European Journal of Operational Research*, 174 :1706 – 1722.
- Jensen, F. (1996). *An Introduction to Bayesian Networks*. London.
- Kaanichea, M., Lapriea, J., and Blanquartb, J. (2002). A framework for dependability engineering of critical computing systems. *Safety Science*, 40(9) :731–752.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice Hall Information and system science series. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Kalman, R. E. (1968). Lectures on controllability and observability. In *Proceedings of C.I.M.E. (International Mathematical Summer Center)*, Bologna, Italy.
- Kang, C. and Golay, M. (1999). A bayesian belief network-based advisory system for operational availability focused diagnosis of complex nuclear power systems. *Expert Systems with Applications*, 17 : 21–32.
- Kaufmann, A., Grouchko, D., and Cruon, R. (1975). *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes*. Masson et Cie éditeurs, Paris.
- Khemliche, M., Bouamama, B. O., and Haffaf, H. (2006). Sensor placement for component diagnosability using bond-graph. *Sensors and Actuators : A Physical*, 132(2) :547–556.
- Kim, M. C. (2011). Reliability block diagram with general gates and its application to system reliability analysis. *Annals of Nuclear Energy*, 38 : 2456–2461.
- Kim, Y. (1972). A method for computing complex system reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, 21(4) : 215–219.
- Kjaerulff, U. (1995). dHugin : a computational system for dynamic time-sliced bayesian networks. *International Journal of Forecasting*, 11(1) : 89–111.

- Kuo, W. and Zhu, X. (2012). Some recent advances on importance measures in reliability. *IEEE Transaction on Reliability*, 61(2) : 344–360.
- Langseth, H. and Portinale, L. (2007). Bayesian networks in reliability. *Reliability Engineering and System Safety*, 92(1) : 92–108.
- Lasnier, G. (2011). *Sûreté de fonctionnement des équipements et calculs de fiabilité*. Hermès/Lavoisier.
- Lazri, M., Ameer, S., and Haddad, B. (2007). Analyse de données de précipitations par approche markovienne. *Larhyss Journal*, 6 : 7–20.
- Li, W. and Zhang, C. (2008). A single-chain-based multidimensional markov chain model for subsurface characterization. *Environmental and Ecological Statistics*, 15 : 157–174.
- Lin, C. T. (1974). Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(3) : 201–208.
- Linnemann, A. (1981). Decoupling of structured systems. *System & Control Letters*, 1(2) :79–86.
- Lisnianski, A. (2007). Extended block diagram method for a multi-state system reliability assessment. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(12) :1601–1607.
- Lisnianski, A. and Levitin, G. (2003). *Multi-State System Reliability : Assessment, Optimization and Applications*, volume 6. World Scientific.
- Martinez-Martinez, S., Mader, T., Boukhobza, T., and Hamelin, F. (2007). LISA : a linear structured system analysis program. In *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brésil.
- Maza, S., Simon, C., and Boukhobza, T. (2012). The impact of actuator failures on the structural controllability of linear systems : A graph theoretical approach. *I.E.T. Control Theory & Applications*, 6(3) : 412–419.

- Misra, K. (1970). An algorithm for the reliability evaluation of redundant networks. *IEEE Transactions on Reliability*, 19(4) : 146–151.
- Murota, K. (1987a). Refined study on structural controllability of descriptor systems by means of matroids. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(4) : 967–989.
- Murota, K. (1987b). *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- Murota, K. (1987c). *Systems Analysis by Graphs and Matroids - Structural Solvability and Controllability*. Springer-Verlag, Berlin.
- Murota, K. and van der Woude, J. (1991). Structure at infinity of structured descriptor systems and its applications. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29 :878–894.
- Murphy, K. (2002a). *Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning*. PhD thesis, University of California, Berkeley.
- Murphy, K. (2002b). *Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning*. PhD thesis, Dept. Computer Science. UC, Berkeley.
- O'Connor, P. (2002). *Practical Reliability Engineering, 4th edition*. Wiley.
- Ould Bouamama, B., Dauphin-Tanguy, G., Staroswiecki, M., and Amo-Bravo, D. (2000). Bond graph analysis of structural FDI properties in mechatronic systems. In *In proceeding of the 1st Conference on Mechatronic Systems*, pages 1057–1062, Darmsdadt, Germany.
- Pagès, A. and Gondran, M. (Eyrolles, 1980). *Fiabilité des systèmes*.
- Papadimitriou, C. (1976). On the complexity of edge traversing. *ACM*, 23(3) : 544–554.
- Pichardo-Almarza, C., Rahmani, A., Dauphin-Tanguy, G., and Delgado, M. (2005). Proportional-integral observer for systems modelled by bond graphs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 13(3) : 179–211.

- Poljak, S. (1989). Maximum rank of powers of a matrix of a given pattern. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4 :1137–1144.
- Prowell, S. and Poore, J. (2004). Computing system reliability using markov chain usage models. *Journal of Systems and Software*, 73(2) :219–225.
- Rahmani, A. and Dauphin-Tanguy, G. (2006). Structural analysis of switching systems modelled by bond-graphs. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12 : 235–247.
- Reinschke, K. J. (1988). *Multivariable Control. A Graph Theoretic Approach*. Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- Reinschke, K. J. and Wiedemann, G. (1997). Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 266 : 199–217.
- Rosenbrock, H. (1970). *State-space and multivariable theory*. Studies in dynamical systems. Nelson Wiley, London.
- Samantaray, A., Medjaher, K., Bouamama, B. O., Staroswiecki, M., and Dauphin-Tanguy, G. (2006). Diagnostic bond graphs for online fault detection and isolation. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 14(3) :237–262.
- Satyanarayana, A. and Chang, M. K. (Spring 1983). Network reliability and the factoring theorem. *Networks*, 13(1) : 107–120.
- Schoenig, R., Aubry, J.-F., Cambois, T., and Hutinet, T. (2006). An aggregation method of markov graphs for the reliability analysis of hybrid systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(2) :137–148.
- Shields, R. W. and Pearson, J. B. (1976). Structural controllability of multi-input linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(2) : 203–212.
- Staley, J. and Sutcliffe, P. (1974). Reliability block diagram analysis. *Microelectronics Reliability*, 13(1) : 33–47.

- Staroswiecki, M. (2002). Structural analysis for fault detection and isolation and for fault tolerant control. In Frank, P. and Blanke, M., editors, *Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Oxford, U.K.
- Staroswiecki, M. (2007). *Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis*, volume 353 of *Advances in Control Theory and Application*, pages 257–278. Springer Berlin Heidelberg. C. Bonivento, A. Isidori, L. Marconi and C. Rossi.
- Sueur, C. and Dauphin-Tanguy, G. (1989). Structural Controllability/Observability of linear systems represented by bond-graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 326(6) : 869–883.
- Svaricek, F. (1985). Computation of the structural invariants of linear multivariable systems with an extended version of the program. *System & Control Letters*, 6(4) :261–266.
- Svaricek, F. (1993). A graph-theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. In *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, volume 4, pages 351–354, Sydney, Australia.
- Torres-Toledano, J. and Sucar, L. (1998). Bayesian networks for reliability analysis of complex systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 1484 : 195–206.
- van der Woude, J. (1991). A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(1) : 33–40.
- van der Woude, J. (1991). On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Application*, 148 : 145–169.
- van der Woude, J. (1996). Disturbance decoupling by measurement feedback for structured transfer matrix systems. *Automatica*, 32(3) :357–363.
- van der Woude, J. (1999). The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 38(1) : 1–21.

- van der Woude, J. and Murota, K. (1995). Disturbance decoupling with pole placement for structured Systems : a graph-theoretic approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16(3) : 922–942.
- Villemeur, A. (1992). *Reliability, availability, maintainability and safety assessment : methods and techniques*. Wiley ; Volume 1 by A. Cartier & M.C. Lartisien.
- Wang, L., Mo, S., Zhou, D., Gao, F., and Chen, X. (2012a). Robust delay dependent iterative learning fault-tolerant control for batch processes with state delay and actuator failures. *Journal of Process Control*, 22(7) : 1273–1286.
- Wang, Y., Enachescu, M., Cotofana, S., and Fang, L. (2012b). Variation tolerant on-chip degradation sensors for dynamic reliability management systems. *Microelectronics Reliability*, 52(9) : 1787–1791.
- Weber, P. (2002). Dynamic bayesian networks model to estimate process availability. In *8th International Conference Quality, Reliability, Maintenance, CCF'02. Sinaia, Romania*.
- Weber, P. and Jouffe, L. (2003). Reliability modeling with dynamic bayesian networks. In *5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS'03), Washington, USA*.
- Weber, P., Medina-Oliva, G., Simon, C., and Iung, B. (2012). Overview on bayesian networks applications for dependability, risk analysis and maintenance areas. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(4) : 671–682.
- Weber, P. and Simon, C. (2013a). Réseaux bayésiens : méthodologies de modélisation en sûreté de fonctionnement. In AFNOR, I., editor, *BIVI Maîtrise des risques*, pages 1–29. AFNOR.
- Weber, P. and Simon, C. (2013b). Réseaux bayésiens : un nouveau formalisme de modélisation pour la sûreté de fonctionnement. In AFNOR, I., editor, *BIVI Maîtrise des risques*, Articles d’auteur, pages 1–16. AFNOR.

- Willems, J. L. (1986). Structural controllability and observability. *System & Control Letters*, 8(1) : 5–12.
- Wonham, W. M. (1985). *Linear multivariable control : a geometric approach*, volume 10 of *Applications of mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition.
- Yamada, T. and Saga, T. (1985). A sufficient condition for structural decouplability of linear nonsquare systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(9) :918–921.
- Yingkui, G. and Jing, L. (2012). Multi-state system reliability : A new and systematic review. *Procedia Engineering*, 29 : 531–536.
- Zadeh, L. and Desoer, C. (1963). *Linear system theory*. MacGraw-Hill Book Company.

Annexe A

DM Décomposition

Comme défini dans le chapitre 1, un couplage dans un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ est un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_B$ tels que tous les arcs de \mathcal{E}_M sont disjoints. Un couplage est dit complet si sa cardinalité est égale à $\text{card}(V^+)$ ou $\text{card}(V^-)$ selon les besoins de l'étude. Par exemple, pour l'étude de l'observabilité (resp. la commandabilité), un couplage maximal est complet et égal à $\text{card}(V^+)$ (resp. $\text{card}(V^-)$).

Considérons un couplage complet $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_B$. Chaque couplage complet \mathcal{E}_M est associé à un graphe biparti non orienté noté $\mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_B})$ où $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \overline{\mathcal{E}_B} \Leftrightarrow (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathcal{E}_B$ où $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \in \mathcal{E}_M$. Notons par S_0^+ (resp. S_0^-) l'ensemble des sommets dans V^+ (resp. dans V^-) non couvert par les arcs appartenant à \mathcal{E}_M .

Le graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ peut être décomposé en composantes irréductibles et uniques partiellement ordonnées en utilisant la décomposition Dulmage-Mendelsohn décrite comme suit :

- ▷ Trouver un couplage complet dans $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$.
- ▷ Soit $V_0^+ = S_0^+ \cup \{\mathbf{v}^+ \in V^+ | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_B}) \text{ de } S_0^+ \text{ vers } \mathbf{v}^+\}$
- ▷ $V_0^- = \{\mathbf{v}^- \in V^- | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_B}) \text{ de } S_0^+ \text{ vers } \mathbf{v}^-\}$
- ▷ $V_0 = V_0^- \cup V_0^+$ (La partie sous déterminée)
- ▷ Let $V_\infty^+ = \{\mathbf{v}^+ \in V^+ | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_B}) \text{ de } \mathbf{v}^+ \text{ vers } S_0^-\}$

- ▷ $V_\infty^- = S_0^- \cup \{\mathbf{v}^- \in V^- \mid \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_{\mathcal{B}}}) \text{ de } \mathbf{v}^- \text{ vers } S_0^-\}$
- ▷ $V_\infty = V_\infty^+ \cup V_\infty^-$ (La partie surdéterminée)
- ▷ Pour $i = 1, \dots, r$, soit V_i les composantes fortement connexes du graphe obtenu de $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}_{\mathcal{B}}})$ après l'élimination des sommets de V_0 et V_∞ . L'union des composantes fortement connexes V_i forme la partie exactement déterminée.
- ▷ Pour $i = 1, \dots, r$, $V_i^+ = V^+ \cap V_i$ et $V_i^- = V^- \cap V_i$ où r est le nombre de composantes fortement connexes.

Il est important de noter que les sous-ensembles obtenus V_i^+ et V_i^- pour $i = 0, \dots, r, \infty$ sont les mêmes quelque soit le couplage complet $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ choisi.

Annexe B

Généralités sur la sûreté de fonctionnement

Taux de défaillance et de réparation

Taux de défaillance :

Le taux de défaillance, $\lambda(t)$, est une des mesures caractéristiques de la fiabilité. La valeur $\lambda(t)dt$ représente la probabilité conditionnelle d'avoir une défaillance dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

Ainsi, en appliquant le théorème des probabilités conditionnelles, puis le théorème des probabilités totales, $\lambda(t)$ s'écrit :

$$\lambda(t)dt = \frac{Pr(\text{défaillance sur } [t, t + dt] \text{ sans défaillance sur } [0, t])}{Pr(\text{ aucune défaillance sur } [0, t])}$$

ou :

$$\lambda(t)dt = \frac{Pr(\text{défaillance sur } [t, t + dt]) - Pr(\text{défaillance sur } [0, t])}{Pr(\text{ aucune défaillance sur } [0, t])}$$

ou encore :

$$\lambda(t)dt = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$$

Il est fréquent de représenter l'évolution du taux de défaillance $\lambda(t)$ au cours du temps t selon une courbe caractéristique dite "en baignoire" donnée par la Figure B.1.

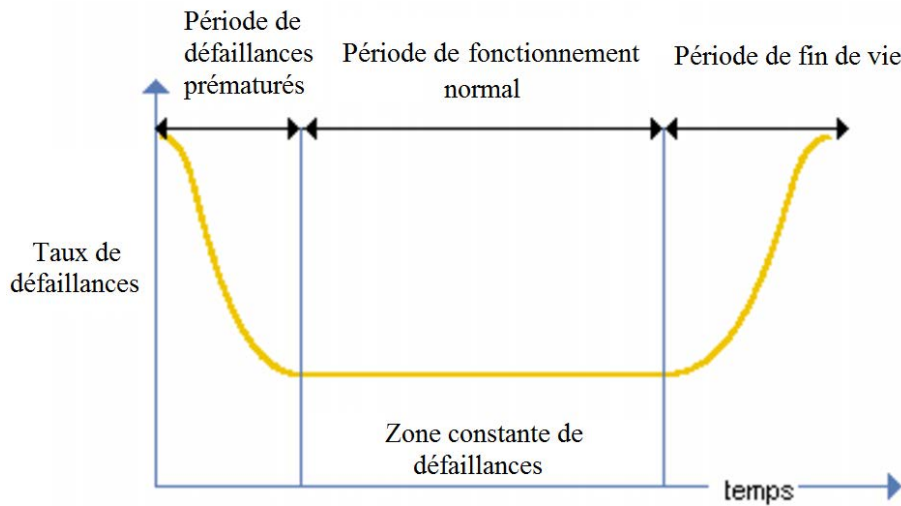


FIGURE B.1 – La courbe en baignoire

Nous observons sur la courbe de la Figure B.1 3 principales périodes. Il s'agit de la période de jeunesse qui est considérée comme la phase de correction, suivie de la phase de vie utile qui est la période où le taux de défaillance est constant et finalement la période de fin de vie utile lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets.

La période de jeunesse concerne les défaillances précoces dues à des problèmes de conception ou de production. La période utile, plus au moins importante selon le type de matériel, est caractéristique des défaillances aléatoires. Enfin, la période d'usure ou de vieillissement correspond aux défaillances dues à des phénomènes d'usure, de vieillissement, etc.

Taux de réparation :

La valeur $\mu(t)dt$ représente la probabilité que le système n'étant pas réparé à l'instant t le soit à l'instant $t + dt$. Le taux de défaillance $\mu(t)$ s'écrit alors :

$$\mu(t) = \frac{1}{1 - M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt}$$

où $M(t)$ correspond à la maintenabilité, c'est-à-dire la capacité du système à être remis à un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise. Elle s'exprime par :

$$M(t) = P_r(\text{ le système est réparable sur } [0, t])$$

Quelques lois de probabilité

Loi exponentielle :

La loi exponentielle a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales. La loi exponentielle est la plus couramment utilisée en fiabilité électronique pour décrire la période durant laquelle le taux de défaillance des équipements est considéré comme constant (défaillance aléatoire). Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance, où l'intervalle de temps entre deux défaillances. Elle est définie par un seul paramètre, le taux de défaillance λ . Elle est caractérisée par ce qui suit.

La fiabilité :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

La loi de probabilité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \lambda$$

Loi de Weibull :

La loi de Weibull est souvent utilisée en fiabilité des systèmes mécaniques ; elle caractérise le comportement du produit dans les trois phases de vie selon la valeur du paramètre de forme β : période de jeunesse ($\beta < 1$), période de vie utile ($\beta = 1$) et période d'usure ou vieillissement ($\beta > 1$). La loi de Weibull est définie par les paramètres η (paramètre d'échelle), β (paramètre de forme) et γ (paramètre de position). Elle est caractérisée par ce qui suit.

La fiabilité :

$$R(t) = e^{-\frac{(t-\gamma)^\beta}{\eta}}$$

La loi de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\frac{(t-\gamma)^\beta}{\eta}}$$

Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

Loi normale :

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. La loi normale est définie par une moyenne μ et un écart type σ :

La fiabilité :

$$R(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

La densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Loi log-normale :

Une variable aléatoire continue et positive t est distribuée selon une loi lognormale si son logarithme est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est utilisée en fiabilité pour modéliser les défaillances par fatigue. La loi lognormale a deux paramètres μ et σ :

La fiabilité :

$$R(t) = 1 - \Phi \left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right)$$

La densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{t \int_0^{\infty} \sigma\sqrt{2\pi} f(t) dt}$$