Méthode de décomposition par sous-domaines et intégrales de frontières application à l'étude du contact entre deux solides déformables

Francis Kosior

▶ **To cite this version:**

Francis Kosior. Méthode de décomposition par sous-domaines et intégrales de frontières application à l'étude du contact entre deux solides déformables. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1997. Français. NNT : 1997INPL142N . tel-01750983

HAL Id: tel-01750983
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01750983

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

97INPL142N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE DES MINES DE NANCY

LABORATOIRE DE SCIENCE ET GENIE DES SURFACES

(U.R.A. CNRS 1402)

METHODE DE DECOMPOSITION PAR SOUS-DOMAINES ET INTEGRALES DE FRONTIERES APPLICATION A L'ETUDE DU CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES DEFORMABLES

THESE

présentée devant l'Institut National Polytechnique de Lorraine

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

par

Francis KOSIOR

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Soutenue le 10 décembre 1997 devant la commission d'examen :

Monsieur le professeur	G. DUVAUT	Rapporteur
Monsieur le professeur	B. PESEUX	Rapporteur
Monsieur le professeur	H. ZAIDI	Rapporteur
Madame le professeur	H. LANCHON-DUCAUQUIS	Examinateur
Mo	Y	Examinateur
Mo		Examinateur
Monsieur le professeur	G. MAURICE	Directeur de thèse

D 136 003322 0

13600 33220

97 INPL 142N

[M] 1997 KOSIOR, F.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE DES MINES DE NANCY

LABORATOIRE DE SCIENCE ET GENIE DES SURFACES

(U.R.A. CNRS 1402)

METHODE DE DECOMPOSITION PAR SOUS-DOMAINES ET INTEGRALES DE FRONTIERES APPLICATION A L'ETUDE DU CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES DEFORMABLES

THESE

présentée devant l'Institut National Polytechnique de Lorraine

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

par

Francis KOSIOR

Soutenue le 10 décembre 1997 devant la commission d'examen :

Monsieur le professeur	G. DUVAUT	Rapporteur
Monsieur le professeur	B. PESEUX	Rapporteur
Monsieur le professeur	H. ZAIDI	Rapporteur
Madame le professeur	H. LANCHON-DUCAUQUIS	Examinateur
Monsieur le professeur	M. GUEURY	Examinateur
Monsieur le professeur	J. PADET	Examinateur
Monsieur le professeur	G. MAURICE	Directeur de thèse

A ma Grand-Mère

A mes parents

REMERCIEMENTS

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Science et Génie des Surfaces (L.S.G.S.) de l'Ecole des Mines de Nancy, dirigé par Monsieur le Professeur M. GANTOIS.

Elle a plus particulièrement été réalisée sous la direction de Monsieur le Professeur G. MAURICE, dans le cadre du groupe de Modélisation théorique et numérique qu'il dirige. Je le remercie d'avoir été mon directeur de thèse.

Je remercie, tout particulièrement, Monsieur G. DUVAUT, Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse et de rapporter sur mes travaux malgré ses lourdes responsabilités.

Je suis très honoré par la confiance que m'ont accordé Messieurs B. PESEUX, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et H. ZAIDI, Professeur à l'université de Poitiers, en acceptant la tâche de rapporteur. Je les remercie pour les conseils et les précisions qu'ils m'ont apportés et pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Madame H. LANCHON-DUCAUQUIS, Professeur au L.E.M.T.A, et Monsieur le Professeur M. GUEURY, directeur de l'E.R.I.N, m'ont fait l'honneur de participer à mon jury ; qu'ils en soient vivement remerciés.

Je remercie Monsieur J. PADET, Professeur à l'université de REIMS, d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je ne saurais oublier Monsieur B. BIALES, qui, un certain samedi de 1984, m'a donné le « déclic ». Sans ses encouragements et ses conseils tout au long de mes études, ce mémoire n'aurait sans doute jamais vu le jour.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance et ma sympathie à l'équipe des « potes à moi » (**Nathalie l'enquiquineuse**, Bertrand, les Isabelle, Laurent, Sandrine, Thierry, Valérie....) qui par leur amitié sans faille m'ont aidé et encouragé pendant la réalisation de ce travail.

RESUME

Ce mémoire a pour objectif la modélisation du problème de contact avec frottement par une technique de décomposition par sous-domaines couplée aux éléments frontières.

La méthode de décomposition offre l'avantage de traiter le problème sur chaque solide séparément, ce qui diminue sensiblement la taille des systèmes à résoudre. Le contact étant régi par des conditions portant uniquement sur l'interface, la méthode du complément de **Schur**, technique de décomposition sans recouvrement, est particulièrement bien adaptée. Dans ce cas, seules les informations à l'interface sont transmises d'un sous-domaine à l'autre.

Ceci nous conduit naturellement à l'associer à la méthode des éléments frontières. En effet, celle-ci nécessite simplement la discrétisation des frontières des solides. De plus, les déplacements et les contraintes à la frontière sont calculés directement et de façon plus précise qu'avec les éléments finis.

Ce travail s'est concrétisé par la mise au point de trois codes de calculs sur micro-ordinateur :

- un code d'éléments frontières. Il se compose d'un mailleur et d'un solveur, traitant des structures planes en élasticité classique. Nous le testons avec succès par la résolution de problèmes de référence. Nous comparons ses performances à celles d'autres logiciels d'éléments finis et d'éléments frontières,
- un code de décomposition. Il met en œuvre une variante de la méthode d'**Hennizel**. Il se compose d'un solveur, traitant des structures planes constituées de plusieurs matériaux en élasticité classique,
- un code de résolution du contact. Il résout le problème du contact bilatéral ou unilatéral avec frottement de **Coulomb** entre deux solides déformables. Nous appliquons ce logiciel à l'étude de l'indentation d'un support par un poinçon plat, puis par une bille. Dans ce dernier cas, nos résultats sont conformes à la théorie de **Hertz** et en accord avec la solution analytique de **Spence**.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS 1

RESUME 3

TABLE DES MATIERES 5

INTRODUCTION 11

I. LES ÉLÉMENTS FRONTIÈRES EN ÉLASTICITÉ CLASSIQUE 15

I.1. Introduction 17

I.1.1. Motivations et choix de la méthode *17*

I.1.2. Un bref rappel historique *17*

I.2. Modélisation de l'équilibre statique d'un coprs élastique 19

I.2.1. Hypothèses de l'élasticité classique *19*

I.2.2. Equation et problème modèle *19*

I.3. Solutions fondamentales 21

I.4. Identité de Somigliana et equation intégrale frontière 22

I.4.1. Identité de Somigliana *22*

I.4.2. Equation intégrale frontière *24*

I.5. Détermination des déplacements et du tenseur des contraintes en un point $y \in \Omega$ 26

I.5.1. Déplacements en un point $y \in \Omega$ *27*

I.5.2. Tenseur des contraintes en un point $y \in \Omega$ *27*

I.6. Tenseur des contraintes en un point $\theta \in \Gamma$ 27

I.7. Conclusion 30

II. ELABORATION D'UN LOGICIEL D'ÉLÉMENTS FRONTIÈRES 31

II.1. Introduction 33

II.2. Présentation générale du code 33

II.3. Les problèmes plans 34

II.3.1. Contraintes planes 34

II.3.2. Déformations planes 36

II.3.3. Problèmes axisymétriques 37

II.4. Mise en œuvre de la méthode des éléments frontières 38

II.4.1. Discrétisation de Γ 38

II.4.2. Représentation de la solution 40

II.4.3. Discrétisation de l'équation intégrale frontière 41

II.4.4. Difficultés de la méthode 43

II.4.4.1. Calcul des matrices élémentaires et traitement des singularités 43

II.4.4.2. Non unicité du vecteur normal et matrice singulière 47

II.5. Les principaux modules du code 48

II.5.1. Le mailleur 48

II.5.1.1. Définition de la géométrie 49

II.5.1.2. Réalisation du maillage 51

II.5.2. Le solveur 53

II.5.2.1. Entrée des données du problème 55

II.5.2.2. Les conditions aux limites 57

II.6. Les utilitaires 57

II.7. Exemples 59

II.7.1. Plaque en traction simple 60

II.7.1.1. Données du problème 60

II.7.1.2. Solution analytique 61

II.7.1.3. Résultats 62

II.7.2. Plaque soumise à des sollicitations réparties aux extrémités 63

II.7.2.1. Données du problème 63

II.7.2.2. Solution analytique 66

II.7.2.3. Résultats 66
II.7.3. Traction simple d'une plaque perforée *70*
II.7.3.1. Données du problème 70
II.7.3.2. Solution analytique 72
II.7.3.3. Résultats 72
II.7.4. Cylindre en traction simple *75*
II.7.4.1. Données du problème 75
II.7.4.2. Solution analytique 76
II.7.4.3. Résultats 77
II.7.5. Cylindre creux à paroi épaisse sous pression interne *79*
II.7.5.1. Données du problème 79
II.7.5.2. Solution analytique 80
II.7.5.3. Résultats 81
II.7.6. Réservoir sphérique à paroi épaisse sous pression interne *83*
II.7.6.1. Données du problème 83
II.7.6.2. Solution analytique 85
II.7.6.3. Résultats 85
II.8. Conclusion 87

III. LES MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION PAR SOUS-DOMAINES 89

III.1. Introduction 91
III.1.1. Présentation *91*
III.1.2. Problème modèle *93*
III.2. La méthode de Schwarz (avec recouvrement) 93
III.2.1. Principe *93*
III.2.2. L'algorithme de Schwarz *94*
III.3. La méthode de Schwarz sans recouvrement 96
III.4. Les méthodes du complément de Schur 99
III.4.1. La méthode du complément de Schur conforme *99*
III.4.2. La méthode du complément de Schur hybride *104*
III.5. Conclusion 107

IV. ELABORATION D'UN LOGICIEL DE DÉCOMPOSITION 109

IV.1. Introduction 111

IV.2. Discrétisation de l'interface 111

IV.3. Mise en œuvre de la variante de la méthode d'Hennizel 113

IV.3.1. Discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Seklov et des problémes à l'interface 113

IV.3.2. Variante de la méthode d'Hennizel 116

IV.3.3. Résolution du problème à l'interface par l'algorithme du gmres 119

IV.3.3.1. Principe 119

IV.3.3.2. Algorithme GMRES 122

IV.3.3.3. Algorithme GMRES(m) 123

IV.4. Code de calcul 125

IV.5. Validation du code 125

IV.5.1. Présentation des calculs 126

IV.5.2. Résultats 130

IV.5.3. Conclusion 133

V. ETUDE DU CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES ÉLASTIQUES 135

V.1. Introduction 137

V.2. Présentation du problème 138

V.2.1. Notations 138

V.2.2. Conditions aux limites sur Γ_c 139

V.2.2.1. Définitions 139

V.2.2.2. Conditions de contact bilatéral 141

V.2.2.3. Conditions de contact unilatéral 142

V.2.2.4. Conditions de frottement 142

V.2.3. Equations du problème 144

V.3. Résolution du problème de contact bilatéral 145

V.3.1. Problème à l'interface 145

V.3.2. Résolution du problème à l'interface avec p_n connue 149

V.3.2.1. Problème intermédiaire 149

V.3.2.2. Algorithme de résolution avec p_n connue 152

V.3.3. Résolution du problème à l'interface *154*
V.3.4. Calcul du signe de la contrainte tangentielle *156*
V.3.5. Organigramme *157*
V.4. Résolution du problème de contact unilatéral 158
V.5. Exemples 164
V.5.1. Poinçon plat pressé contre un support élastique *165*
V.5.1.1. Données du problème 165
V.5.1.2. Algorithme de résolution 167
V.5.1.3. Résultats 167
V.5.2. Bille pressée contre un support élastique *172*
V.5.2.1. Données du problème 172
V.5.2.2. Algorithme de résolution 176
V.5.2.3. Résultats sans frottement (Contact de Hertz) 176
V.5.2.3.1. Distribution de pression 176
V.5.2.3.2. Distribution des contraintes 177
V.5.2.3.3. Déformée 179
V.5.2.3.4. Isocontraintes 180
V.5.2.4. Résultats avec frottement 181
V.5.2.4.1. Zones d'adhérence et de glissement 181
V.5.2.4.2. Rayon de contact et distribution de pression 183
V.5.2.4.3. Isocontraintes 184
V.6. Conclusion 186
CONCLUSION 189
ANNEXES 191
A. LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES PLANES 193
B. LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN AXISYMÉTRIE 197
C. CALCUL DES INTÉGRALES ÉLÉMENTAIRES 203
C.1. Définitions et notations 203
C.2. Interpolation constante 205

C.3. Interpolation linéaire 207

D. LE CONTACT DE HERTZ 209

E. LE CONTACT DE HERTZ AVEC FROTTEMENT : SOLUTION ANALYTIQUE DE SPENCE 219

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 223

INTRODUCTION

Les assemblages mécaniques interviennent dans la plupart des problèmes d'ingénierie. La mécanique du contact est donc d'une grande importance dans de nombreux domaines technologiques. Toutefois, à l'heure actuelle, celle-ci n'est pas encore bien comprise du fait de sa complexité.

En pratique, le contact ne peut être étudié qu'à travers l'observation et l'expérience. Cependant, des mesures directes sont généralement impossibles à réaliser, car la zone d'étude est située sous la surface de contact. Et donc seul un comportement global peut être mesuré expérimentalement.

Il n'est alors envisageable d'étudier ce problème avec profit que par des méthodes numériques.

La complexité de l'analyse repose encore sur le fait que le comportement dans le contact dépend non seulement des propriétés mécaniques des matériaux, de la topologie et de la rugosité (responsable du frottement) des surfaces, mais aussi des forces appliquées.

L'existence d'une surface de contact inconnue a priori et la présence de frottement à l'interface rendent alors le problème du contact non linéaire.

L'objectif du travail, présenté dans ce mémoire, est la simulation numérique du problème de contact avec frottement.

La résolution de celui-ci est basée sur une méthode de décomposition par sous-domaines couplée à celle des éléments frontières.

La méthode de décomposition offre l'avantage de traiter le problème sur chaque solide séparément, ce qui diminue sensiblement la taille des systèmes à résoudre. Le contact étant régi par des conditions portant uniquement sur l'interface, nous avons retenu la méthode du complément de **Schur**, qui est une technique de décomposition sans recouvrement. Dans ce cas, seules les informations à l'interface sont transmises d'un sous-domaine à l'autre.

Ceci nous a conduit naturellement à l'associer à la méthode des éléments frontières. En effet, celle-ci nécessite simplement la discrétisation des frontières des solides. De plus, les déplacements et les contraintes à la frontière sont calculés directement et donc de façon plus précise qu'avec les éléments finis.

Ce travail s'est concrétisé par la réalisation d'un ensemble de logiciels sur micro-ordinateur. En effet, l'association de ces deux techniques nous permet de résoudre le problème du contact en ne gérant que des données portant sur les frontières. Ceci minimise l'espace mémoire nécessaire et le temps de calcul.

Nous présentons dans ce mémoire, trois codes de calcul :

- un code d'éléments frontières. Il se compose d'un mailleur et d'un solveur, traitant des structures planes en élasticité classique,

- un code de décomposition. Il met en œuvre la méthode d'**Hennizel**. Il se compose d'un solveur, traitant des structures planes constituées de plusieurs matériaux en élasticité classique,

- un code de résolution du contact. Il résout le problème du contact bilatéral ou unilatéral avec frottement de **Coulomb** entre deux solides déformables.

L'architecture de ces logiciels répond à deux impératifs :

- une programmation par structures et petits modules. Ceci nous permet de modifier facilement les codes et de développer d'autres applications,

- une gestion aisée des résultats et leur exploitation directe sous d'autres logiciels (traitement de textes, outils d'analyse de données).

Notre mémoire se décompose en cinq chapitres.

Le chapitre 1 présente les notions élémentaires nécessaires à la compréhension de la méthode des éléments frontières traitées dans le cadre de l'élasticité classique.

Le chapitre 2 est consacré à la réalisation de notre code d'éléments frontières. Il permet de résoudre des problèmes d'élasticité classique en déformations planes, en contraintes planes et en axisymétrie. Nous le validons par la résolution de six exemples de référence. Nous analysons les performances de notre programme par rapport à celles d'autres logiciels d'éléments frontières et d'éléments finis.

Le chapitre 3 expose les méthodes de décomposition de **Schwarz** avec et sans recouvrement, ainsi que celles du complément de **Schur**.

Le chapitre 4 présente notre code de calcul mettant en œuvre une variante de la méthode d'**Hennizel**. Il est construit à l'aide de la bibliothèque de procédures développées pour notre code d'éléments frontières. Il résout des problèmes d'élasticité classique sur des structures constituées de plusieurs matériaux, en déformations planes, en contraintes planes et en axisymétrie. Nous le validons par l'étude du problème d'une plaque en traction simple.

Le chapitre 5 consiste en l'étude, la réalisation, et la validation de notre code de résolution du problème de contact. Nous utilisons ici la loi de frottement de **Coulomb** statique, car elle est généralement la plus utilisée en ingénierie.

Nous proposons deux algorithmes :

- le premier résout le problème du contact bilatéral. Nous l'appliquons à l'exemple du poinçon plat pressé sur un support,

- le deuxième résout le problème du contact unilatéral. Il reprend notre premier algorithme, auquel nous ajoutons un processus itératif de gestion du contact. Nous l'utilisons pour notre étude de l'indentation d'un support par une bille. Ceci constitue une première approche de la résolution du test de dureté de **Brinell**, largement employé dans l'industrie. Nous avons réalisé des calculs avec et sans frottement. Nous confrontons nos résultats avec les théories de **Spence** et de **Hertz**.

La méthode développée dans ce mémoire, est suffisamment souple et générale pour être appliquée à des exemples variés de problèmes de contact avec frottement.

Chapitre I

LA METHODE

DES ELEMENTS FRONTIERES

EN ELASTICITE CLASSIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons les notions élémentaires nécessaires à la compréhension de la méthode des éléments frontières. Nous nous restreignons au cadre de l'élasticité linéaire classique.

I.1. INTRODUCTION

I.1.1. MOTIVATIONS ET CHOIX DE LA METHODE

La complexité des équations aux dérivées partielles modélisant les problèmes physiques ne permet pas, en général, d'obtenir une solution analytique. Le développement d'outils numériques s'avère donc nécessaire.

Comme techniques de résolution numérique les plus connues, citons les différences finies et les éléments finis. Elles consistent, après discrétisation du domaine, à déterminer une solution approchant l'équation aux dérivées partielles tout en satisfaisant exactement les conditions aux limites.

D'autres méthodes, au contraire, permettent d'obtenir une solution approchant les conditions aux limites mais vérifiant l'équation aux dérivées partielles. Elles transforment celle-ci en une équation intégrale de surface ne faisant intervenir que les inconnues à la frontière (en élasticité, les vecteurs des déplacements et des contraintes). Cette approche présente donc l'avantage de réduire la dimension du problème d'une unité et de mesurer directement l'influence des conditions aux limites sur la solution cherchée.

La petite taille du système à résoudre, une meilleure précision, une plus grande souplesse d'utilisation, une meilleure adaptation au cas de domaines infinis ou semi-infinis sont encore des avantages souvent cités.

Ces atouts sont non négligeables pour l'étude des problèmes de contact, que nous présentons dans le chapitre V. Nous choisissons donc de mettre en œuvre la méthode des éléments frontières dans le cadre de l'élasticité linéaire classique.

I.1.2. UN BREF RAPPEL HISTORIQUE

De nombreux logiciels d'éléments finis ont vu le jour alors que l'intérêt pour les éléments frontières n'était pas encore établi.

Il est pourtant admis que la méthode est particulièrement bien adaptée :

- aux problèmes linéaires,
- au domaine de la mécanique de la rupture,
- aux problèmes transitoires.

Pour les problèmes non linéaires, l'intérêt est moindre. La méthode des éléments finis y est préférée et dans quelques cas précis, un couplage des deux méthodes. En particulier, les éléments finis sont parfois utilisés dans des sous-domaines où le comportement mécanique est non linéaire alors que les éléments frontières s'imposent dans des milieux infinis ou semi-infinis. Le raccordement entre ces deux méthodes s'effectue par des techniques de type décomposition de domaine.

L'histoire des éléments frontières est essentiellement caractérisée par deux grandes périodes :

- les méthodes d'équations intégrales apparaissent dans un premier temps. Ce sont des techniques analytiques, dites « sources », issues des travaux de l'école russe : **Muskhelishvili**[1], **Mikhlin**[2], **Kupradze**[3], **Smirnov**[4]. La méthode dite « directe » apparaît en 1968 avec les travaux de **T.A. Cruse** et de **J.F. Rizzo**[5], concernant l'élastostatique,
- l'aspect numérique est pris en considération à partir des années 70. Les procédés développés pour les éléments finis sont appliqués aux éléments frontières. Pour la première fois, la notion d'éléments finis de frontières est introduite. **Lachat**[6], en 1975, traite les

---

[1] Voir référence [MEF 1]

[2] Voir référence [MEF 2]

[3] Voir référence [MEF 3]

[4] Voir référence [MEF 4]

[5] Voir référence [MEF 6]

[6] Voir référence [MEF 5]

équations intégrales de frontière en utilisant des éléments curvilignes, pendant que **Brebbia** fait le lien entre les équations intégrales de frontières et les techniques d'approximation. Quelques années plus tard, une extension aux problèmes d'évolution non linéaires est proposée.

I.2. MODELISATION DE L'EQUILIBRE STATIQUE D'UN COPRS ELASTIQUE

I.2.1. HYPOTHESES DE L'ELASTICITE CLASSIQUE

Nous nous intéressons à l'état d'équilibre statique d'un corps élastique, soumis à une charge.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cette linéarité repose sur deux hypothèses :

a) les perturbations restent petites. En conséquence, le tenseur des déformations peut être linéarisé. De plus, l'écriture des équations et celle des conditions aux limites peuvent s'effectuer à chaque instant sur la configuration de référence.

b) la loi de comportement élastique s'exprime par une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisées.

Nous rajoutons les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité.

I.2.2. EQUATION ET PROBLEME MODELE

Nous nous plaçons dans un repère cartésien fixe (O, x_1, x_2, x_3).

Soit un corps élastique, caractérisé par un domaine ouvert $\Omega \subset \Re^3$ et une frontière Γ.

A l'état d'équilibre, le problème est régi par les équations suivantes, écrites en notations tensorielles avec la convention d'**Einstein** :

(I.1) $\sigma_{ij,j}(u) + f_i = 0$ dans Ω

u : vecteur des déplacements

σ_{ij} : tenseur des contraintes de **Cauchy-Euler**

f_i : forces volumiques

Afin de poser correctement le problème, nous ajoutons des conditions aux limites de type **Dirichlet** sur Γ_D et **Neumann** sur Γ_N $\left(\Gamma = \Gamma_D \oplus \Gamma_N\right)$.

Pour un matériau élastique linéaire homogène, les équations reliant les contraintes aux déformations sont données par la loi générale de **Hooke** :

(I.2) $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$

avec

(I.3)
$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khij}$$
$$\varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{k,h} + u_{h,k}\right)$$

ε_{kh} : tenseur des déformations

De (I.1) et (I.2), nous obtenons :

(I.4) $a_{ijkh}\, u_{k,jh} + f_i = 0$

Les tractions agissant en un point x appartenant à Γ, de normale extérieure $\vec{n}$, sont données par :

$$p_i(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x) = a_{ijkh}\, n_j(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_h} = \hat{T}_{ik}(n(x), \partial_x) u_k(x)$$

Si nous nous restreignons au cas d'un matériau isotrope, le tenseur a_{ijkh} est défini par la relation :

$$(I.5) \quad a_{ijkh} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kh} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right) = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\delta_{ij}\, \delta_{kh} + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right)$$

λ, μ : coefficient d'élasticité de **Lamé**, homogène à une pression

E : module d'**Young,** homogène à une pression

ν : coefficient de **Poisson**, sans dimension

I.3. SOLUTIONS FONDAMENTALES

La rédaction des paragraphes I.3 à I.6 est inspirée de [MEF 7], [MEF 8], [MEF 9] et [MEF 11].

En s'appuyant sur (I.4), définissons l'opérateur

$$\hat{D}_{ik} = a_{ijkh}\, \partial_j \partial_h$$

et la solution fondamentale U_{mk} , solution de l'équation

$$\hat{D}_{ik} U_{mk}(x,y) = -\delta_{im}\delta(x-y) \qquad \text{dans un domaine infini.}$$

Physiquement, la solution $U_{mk}(x,y)$ représente la k-ième composante du déplacement au point x, d'un corps infini, en réponse à une force unitaire agissant dans la m-ième direction au point y, i.e. $f_i(x) = \delta_{im}\, \delta(x-y)$.

Les tractions associées à ces déplacements fondamentaux U_{mk} sont définies par :

$$P_{im}(x,y) = \hat{T}_{ik}\left(n(x), \partial_x\right) U_{mk}(x,y)$$

I.4. IDENTITE DE SOMIGLIANA ET EQUATION INTEGRALE FRONTIERE

Dans ce paragraphe, nous montrons comment un problème aux valeurs frontières obéissant aux équations de **Navier** peut être transformé en équations intégrales limites.

I.4.1. IDENTITE DE SOMIGLIANA

Les équations (I.1), (I.3) et (I.5) nous donnent les équations de **Navier** :

(I.6) $\mu\, u_{i,hh} + (\lambda + \mu)\, u_{k,ki} + f_i = 0$

Elles peuvent être réécrites sous la forme

(I.7) $\hat{L}_{ik} u_k + f_i = 0$

avec

(I.8) $\hat{L}_{ik} = \mu\, \delta_{ik}\, \partial_h^2 + (\lambda + \mu)\, \partial_k\, \partial_i$

La solution fondamentale associée à (I.6) doit alors vérifier,

(I.9) $\hat{L}_{ik} U_{mk}(x,y) = -\delta_{im}\, \delta(x-y)$ dans un domaine infini.

L'expression des solutions fondamentales en déplacements et en tractions sont données en annexe A.

L'appartenance des solutions fondamentales à $D'(\Omega)$, ensemble des distributions à support compact, est admise.

Remarque

La solution de l'équation (I.7) (I.8), dans un domaine infini, avec décroissance des déformations à l'infini, est l'intégrale :

$$u_k(y) = \int U_{ki}(x,y) f_i(x)\, dV(x)$$

Preuve

En effet,

$$\hat{L}_{ik} u_k(y) = \hat{L}_{ik} \int U_{ki}(x,y) f_i(x)\, dV(x) = \int \hat{L}_{ik}\left(U_{ki}(x,y)\right) f_i(x)\, dV(x)$$
$$= -\int \delta(x-y) f_i(x)\, dV(x) = -f_i(y)$$

❑

Multiplions maintenant (I.7) et (I.8) par $U_{ki}(x,y)$, puis intégrons sur Ω ; pour des fonctions u et f suffisamment régulières, nous obtenons :

$$\int_\Omega U_{ki}(x,y) f_i(x)\, d\Omega(x) = -\int_\Omega U_{ki}(x,y) \hat{L}_{ij} u_j(x)\, d\Omega(x)$$

En appliquant deux fois la formule de **Green**,

$$\text{(I.10)} \quad \int_\Omega U_{ki}(x,y) f_i(x) d\Omega(x) = -\int_\Omega \hat{L}_{ij} U_{ki}(x,y)\, u_j(x) d\Omega(x) + \int_\Gamma \left[P_{ki}(x,y) u_i(x) - U_{ki}(x,y) p_i(x)\right] d\Gamma(x)$$

et en combinant (I.9) et (I.10), nous établissons **l'identité de Somigliana**

$$\text{(I.11)} \quad \Delta(y) u_k(y) = \int_\Omega U_{ki}(x,y) f_i(x)\, d\Omega(x) + \int_\Gamma \left[U_{ki}(x,y) p_i(x) - P_{ki}(x,y) u_i(x)\right] d\Gamma(x)$$

$$\text{avec } \Delta(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in \Omega \\ 0 \text{ si } y \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases}$$

I.4.2. EQUATION INTEGRALE FRONTIERE

L'identité de **Somigliana** est vraie en dimension 2 et en dimension 3. Elle est valable pour un point appartenant à Ω.

Pour un point θ appartenant à Γ, l'identité de **Somigliana** devient l'équation intégrale frontière :

$$C_{ki}(\theta)u_i(\theta) = \int_{\Omega} U_{ki}(x,\theta)f_i(x)\,d\Omega(x) + \int_{\Gamma}\left[U_{ki}(x,\theta)p_i(x) - P_{ki}(x,\theta)u_i(x)\right]d\Gamma(x)$$

$$\text{avec } C_{ki}(\theta) = \delta_{ki} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta)\,d\Gamma(x) \qquad \text{(I.12)}$$

Preuve

Supposons que ce point θ est interne au domaine Ω et qu'il est contenu dans une petite boule de centre θ et de rayon ε, notée $B(\theta,\varepsilon)$ (Cf. Figure I.1).

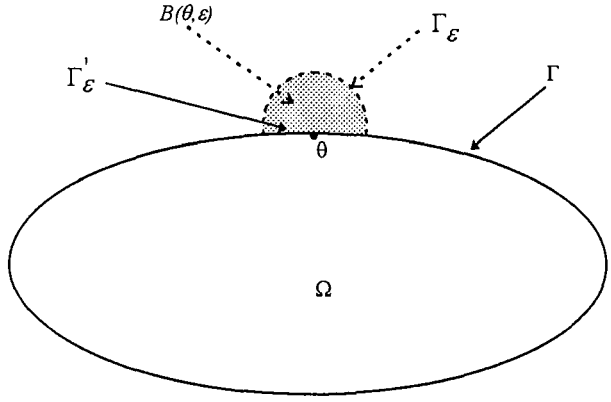


Figure I.1

L'identité de **Somigliana**, au point θ, s'écrit

$$\Delta(\theta)u_k(\theta) = \int_{\Omega'=\Omega\cup B(\theta,\varepsilon)} U_{ki}(x,\theta)f_i(x)\,d\Omega(x) + \int_{\Gamma'=\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'_\varepsilon}\left[U_{ki}(x,\theta)p_i(x) - P_{ki}(x,\theta)u_i(x)\right]d\Gamma(x)$$

Faisons tendre ε vers 0.

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma'} U_{ki}(x,\theta) p_i(x)\, d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ki}(x,\theta) p_i(x)\, d\Gamma(x)$ puisque cette intégrale ne présente aucune singularité spéciale et peut donc être considérée comme une intégrale régulière,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma'} P_{ki}(x,\theta) u_i(x)\, d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta) u_i(x)\, d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon'} P_{ki}(x,\theta) u_i(x)\, d\Gamma(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta) u_i(x)\, d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta) \left[u_i(x) - \left[u_i(\theta) \right] \right] d\Gamma(x) + u_i(\theta) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta)\, d\Gamma(x)$$

Du fait de la continuité de u, la première intégrale à droite de l'égalité disparaît. La forme de la seconde intégrale nous permet de poser :

$$C_{ki}(\theta) = \delta_{ki} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ki}(x,\theta)\, d\Gamma(x)$$

Donc, moyennant une condition de continuité de **Hölder** en θ de la forme

$$\left| u_i(x) - u_i(\theta) \right| \le k\ d(x,\theta)^{\alpha} \quad (\mathrm{k} > 0, 0 < \alpha \le 1)$$

nous obtenons, lorsque ε tend vers 0, l'identité(I.12).

❑

Remarque

Les coefficients du tenseur C_{ki} peuvent être calculés à partir du concept de mouvement rigidifiant. Celui-ci est défini par $u_i(x) = \delta_{ij}$ et $f_i(x) = 0$, ce qui entraîne $p_i(x) = 0$.

L'équation intégrale nous donne alors :

$$C_{ki}(\theta) = -\int_{\Gamma} P_{ki}(x,\theta)\, d\Gamma(x)$$

Si nous injectons cette nouvelle définition dans l'équation intégrale frontière, nous obtenons, pour un point θ appartenant à Γ, l'équation :

$$(\text{I.13}) \quad \int_{\Gamma} P_{ki}(x,\theta)\big(u_i(x)-u_i(\theta)\big)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma} U_{ki}(x,\theta)p_i(x)\,d\Gamma(x)=\int_{\Omega} U_{ki}(x,\theta)f_i(x)\,d\Omega(x)$$

La formule (I.13) ne contient plus d'intégrales à valeurs principales de **Cauchy** puisque sur les déplacements, nous avons la continuité au sens de **Hölder**.

La solution de l'équation (I.12) ou (I.13) est donc calculée à un mouvement rigide près. Il convient par la suite de fixer des conditions aux limites de **Dirichlet** pour que celle-ci soit unique.

❑

En introduisant les conditions aux limites (**Dirichlet** sur Γ_D et **Neumann** sur Γ_N) dans la formule (I.13) nous obtenons, pour tout point θ appartenant à Γ, l'équation :

$$\int_{\Gamma_N} P_{ki}(x,\theta)\big(u_i(x)-u_i(\theta)\big)d\Gamma(x)-\int_{\Gamma_D} U_{ki}(x,\theta)p_i(x)\,d\Gamma(x)-\int_{\Omega} U_{ki}(x,\theta)f_i(x)\,d\Omega(x)$$
$$=-\int_{\Gamma_D} P_{ki}(x,\theta)\big(u_i(x)-u_i(\theta)\big)d\Gamma(x)+\int_{\Gamma_N} U_{ki}(x,\theta)p_i(x)\,d\Gamma(x)$$

I.5. DETERMINATION DES DEPLACEMENTS ET DU TENSEUR DES CONTRAINTES EN UN POINT Y$\in\Omega$

Dans la plupart des applications, l'ingénieur a besoin de déterminer les déplacements et le tenseur des contraintes à l'intérieur du domaine.

I.5.1. DEPLACEMENTS EN UN POINT Y∈Ω

Connaissant les déplacements et le vecteur des contraintes sur Γ, les composantes des déplacements en un point y de Ω sont obtenues par l'identité de **Somigliana**, établie au paragraphe précédent. Nous la rappelons :

$$\Delta(y)u_k(y) = \int_{\Omega} U_{ki}(x,y)f_i(x)\,d\Omega(x) + \int_{\Gamma}\left[U_{ki}(x,y)p_i(x) - P_{ki}(x,y)u_i(x)\right]d\Gamma(x)$$

$$\text{avec } \Delta(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in \Omega \\ 0 \text{ si } y \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases}$$

I.5.2. TENSEUR DES CONTRAINTES EN UN POINT Y∈Ω

L'identité de **Somigliana** est une fonction continue et différentiable de la variable y appartenant à Ω. En combinant les dérivées au point y de cette identité à la loi de **Hooke** (I.5), nous obtenons :

$$(\text{I.14}) \quad \sigma_{ij}(y) = \int_{\Omega} U_{ijk}(x,y)f_k(x)\,d\Omega(x) + \int_{\Gamma}\left[U_{ijk}(x,y)p_k(x) - P_{ijk}(x,y)u_k(x)\right]d\Gamma(x)$$

Les expressions des coefficients des tenseurs U_{ijk} et P_{ijk} sont données en annexe A.

I.6. TENSEUR DES CONTRAINTES EN UN POINT θ∈Γ

Nous avons établi les formules permettant de calculer :

- les vecteurs des déplacements u_i et des contraintes p_i sur Γ
  (Cf. Formule (I.12)),
- le vecteur des déplacements u_i en un point y de Ω (Cf. Formule (I.11)),
- le tenseur des contraintes σ_{ij} en un point y de Ω (Cf. Formule (I.14)).

Il est cependant souhaitable de connaître le tenseur des contraintes sur Γ.

A cette fin, nous pouvons évaluer la limite de l'équation (I.14) lorsqu'un point y de Ω tend vers le point θ appartenant à Γ. Cette technique[1], semble lourde à mettre en œuvre (excepté sur un domaine infini ou semi-infini).

Une alternative est d'exprimer les tractions et les déplacements dans un repère local, construit autour de ce point θ, et d'utiliser les relations entre le tenseur des contraintes et les déplacements sur Γ. Cette méthode présente l'avantage de ne plus faire appel à l'intégration.

Plaçons-nous dans le repère local $(\theta, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ (Cf. Figure I.2).

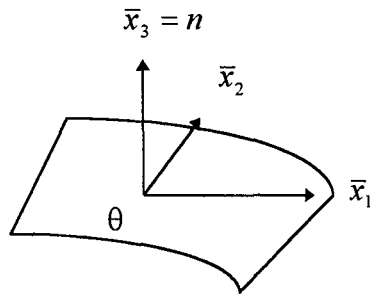


Figure I.2 : Définition du repère local $(\theta, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

Dans ce repère, le tenseur des déformations sur cette surface a pour expression :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i}\right) \quad i,j = 1,2$$

En combinant cette équation à la loi de **Hooke** et aux équations d'équilibre, nous aboutissons à un système qui nous permet de déterminer les six composantes du tenseur des contraintes au point θ, exprimées dans le repère local.

---

[1] Voir référence [MEF 7]

Voici leurs expressions :

$$\bar{\sigma}_{11}(\theta) = \frac{1}{1-\nu}\left(\nu \bar{p}_3(\theta) + \frac{E}{1+\nu}\left(\bar{\varepsilon}_{11}(\theta) + \nu \bar{\varepsilon}_{22}(\theta)\right)\right)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(\theta) = \frac{E}{1+\nu}\ \bar{\varepsilon}_{12}(\theta)$$

$$\bar{\sigma}_{13}(\theta) = \bar{p}_1(\theta)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(\theta) = \frac{1}{1-\nu}\left(\nu \bar{p}_3(\theta) + \frac{E}{1+\nu}\left(\bar{\varepsilon}_{22}(\theta) + \nu \bar{\varepsilon}_{11}(\theta)\right)\right)$$

$$\bar{\sigma}_{23}(\theta) = \bar{p}_2(\theta)$$

$$\bar{\sigma}_{33}(\theta) = \bar{p}_3(\theta)$$

En dimension 2, la démarche est identique. Dans le repère local $(\theta, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (Cf. Figure I.3), nous pouvons écrire :

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1}$$

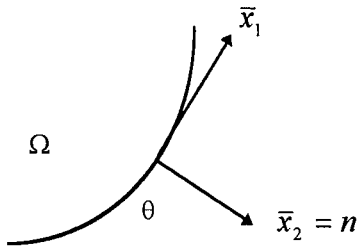


Figure I.3 : Définition du repère local $(\theta, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Le tenseur des contraintes en déformations planes est donné par :

$$\bar{\sigma}_{11}(\theta) = \frac{1}{1-\nu}\left(\nu \bar{p}_2(\theta) + \frac{E}{1+\nu}\bar{\varepsilon}_{11}(\theta)\right)$$

$$\bar{\sigma}_{12}(\theta) = \bar{p}_1(\theta)$$

$$\bar{\sigma}_{22}(\theta) = \bar{p}_2(\theta)$$

En contraintes planes, nous devons remplacer ν par $\overline{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ [1].

I.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode des formulations intégrales en élasticité linéaire. Le chapitre suivant est consacré à la présentation et à la validation de notre code de calcul, mettant en œuvre cette méthode dans un cadre bidimensionnel.

[1] Voir référence [MEF 8]

Chapitre II

ELABORATION D'UN LOGICIEL D'ELEMENTS FRONTIERES

Dans ce chapitre, nous présentons notre code d'éléments frontières.

II.1. INTRODUCTION

Ne disposant pas, au sein du laboratoire L.S.G.S., de logiciels de calcul utilisant la méthode des éléments frontières, nous nous sommes appliqués à concevoir un code spécifique aux micro-ordinateurs indépendant de programmes existants sous d'autres environnements.

Nous nous sommes astreints, en particulier, à une gestion efficace de la mémoire par allocation dynamique et à une programmation sous forme de petits modules ne dépassant pas 1000 instructions : il est incontestablement plus rapide, lors d'une modification ou de tests , de ne compiler que quelques lignes, plutôt que le code tout entier.

Nous avons écrit nos programmes en C, ce langage s'imposant progressivement comme le standard en matière de programmation scientifique. En effet, il présente de nombreux atouts, notamment :

- la gestion par structure de données,
- la rapidité d'exécution des programmes,
- l'accès à la programmation graphique,
- la programmation modulaire.

Notre configuration matérielle est de type P.C., équipé d'un microprocesseur INTEL Pentium 100 MHz avec 8 Mo de R.A.M.

II.2. PRESENTATION GENERALE DU CODE

Notre code d'éléments frontières se compose de deux programmes :

- un mailleur, qui réalise le maillage de la frontière d'une pièce géométrique simple à deux dimensions,

- un solveur, appliqué à l'élasticité linéaire à deux dimensions.

Ces programmes sont à la base de l'étude numérique entreprise dans ce mémoire. Ayant comme objectif la résolution de problèmes de contact (Cf. Chapitre V), nous devions concevoir un ensemble mailleur - solveur simple mais suffisamment riche pour nous permettre de résoudre ces problèmes complexes.

II.3. LES PROBLEMES PLANS

Dans ce mémoire, nous nous restreignons à l'étude de problèmes plans, homogènes par domaines. De plus, nous supposons que les forces de volume agissant sur le corps sont nulles (i.e. $f_i = 0$).

L'élasticité linéaire plane couvre trois types de problèmes :

- les problèmes à contraintes planes,
- les problèmes à déformations planes,
- les problèmes axisymétriques.

II.3.1. CONTRAINTES PLANES

L'hypothèse des contraintes planes, dans le plan (x_1,x_2), se traduit par :

$$\sigma_{33} = 0 \qquad (II.1)$$

Pour un problème plan, nous considérons :

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1,x_2),\ \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1,x_2),\ \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1,x_2)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

Les relations contraintes déformations (I.2) s'écrivent alors :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}, \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \; i,j=1..3 \; i \neq j$$

L'hypothèse des contraintes planes (II.1) est généralement admise dans des structures minces de type poutres, plaques et coques où x_3 représente la direction suivant l'épaisseur.

Cette hypothèse revient à remplacer ν par $\overline{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ [1] dans l'équation intégrale frontière (I.12).

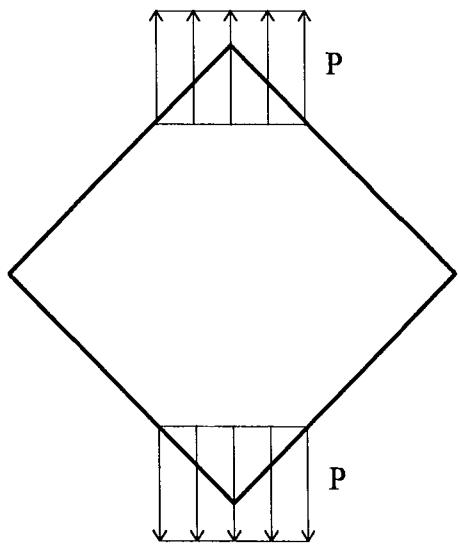


Figure II.1 : Exemple de problème à contraintes planes - Eprouvette de tôle mince en traction

[1] Voir référence [MEF 8]

II.3.2. DEFORMATIONS PLANES

Dans le repère $(0,x_1,x_2,x_3)$, l'hypothèse classique des déformations planes se traduit par :

(II.2) $u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2),\ u_3 = 0$

correspondant à

(II.3) $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$

Les déformations non nulles sont ε_{11}, ε_{12}, ε_{22}.

Les relations contraintes déformations (I.2) s'écrivent alors :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

Ces conditions peuvent être admises lorsque la géométrie, les sollicitations, les conditions aux limites, les propriétés du matériau sont suffisamment indépendantes de x_3.

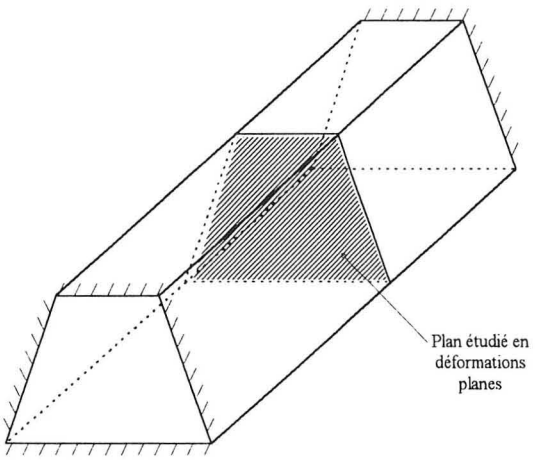


Figure II.2 : Exemple de problèmes à déformations planes - Barrage avec extrémités fixes

II.3.3. PROBLEMES AXISYMETRIQUES

Dans beaucoup d'applications industrielles, l'ingénieur est confronté à l'étude de problèmes tridimensionnels qui présentent de part leur géométrie et leurs conditions aux limites, une symétrie axiale. Ceci permet de ramener l'étude à une analyse bidimensionnelle dans un demi-plan de coupe.

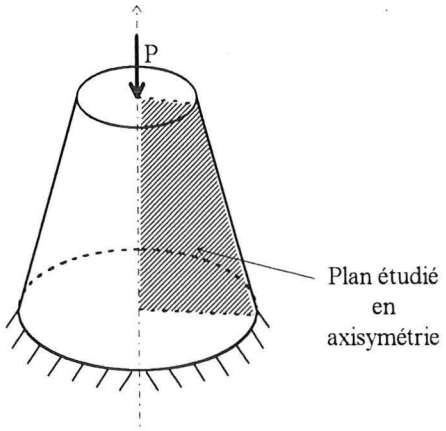


Figure II.3 : Exemple de problème axisymétrique

Pour établir l'équation intégrale frontière dans le cas d'un problème axisymétrique, nous pouvons employer l'une de ces deux techniques :

- intégrer l'équation intégrale frontière (I.12), établie au chapitre I pour un problème tridimensionnel, le long d'un anneau d'axe , l'axe de symétrie[1],

- suivre la démarche présentée au paragraphe I.4 en considérant un chargement radial[2].

---

[1] Voir références [MEF 7] et [MEF 8]

[2] Voir référence [MEF 11]

L'une ou l'autre technique nous permet d'obtenir une équation intégrale frontière, similaire à l'équation (I.12) :

$$\int_{\Gamma} D_{ki}^{*}(x,\theta)\, d\Gamma(x)\, u_i(\theta) = \int_{\Omega} U_{ki}^{*}(x,\theta) f_i(x)\, d\Omega(x) + \int_{\Gamma} \left[U_{ki}^{*}(x,\theta) p_i(x) + T_{ki}^{*}(x,\theta) \left[u_i(\theta) - u_i(x) \right] \right] d\Gamma(x) \qquad (\text{II.4})$$

$$i,k = r,z$$

L'expression des solutions fondamentales U_{ki}^{*}, T_{ki}^{*} et D_{ki}^{*} est donnée en annexe B.

Précisons qu'à cause de la symétrie axiale, le concept de mouvement rigidifiant (Cf. remarque du paragraphe I.4.2) n'est ici valable que dans la direction de l'axe de symétrie.

Les formules permettant le calcul de σ_{ij} sur Γ et dans Ω sont présentées dans la référence [MEF 7].

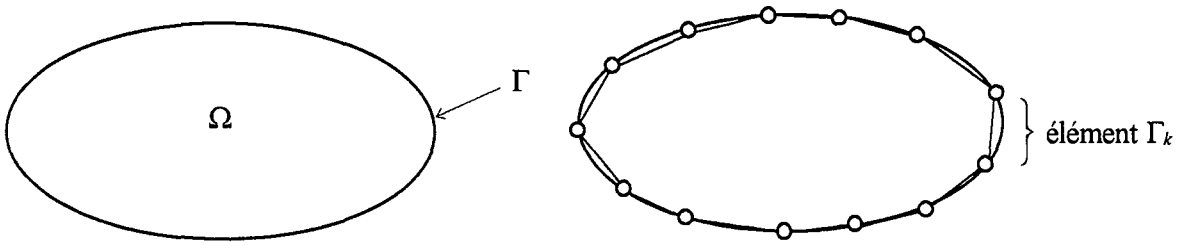
II.4. MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

II.4.1. DISCRETISATION DE Γ

Soit $\Omega \subset \Re^2$, de frontière Γ.

La discrétisation de Γ est représentée par un ensemble fini de M noeuds et de N éléments Γ_k linéaires de longueur l_k, tels que :

- $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$
- $\overset{\circ}{\Gamma}_i \bigcap_{i \neq j} \overset{\circ}{\Gamma}_j = \{\varnothing\}$



a) Géométrie b) Maillage

Figure II.4 : Discrétisation de Γ

Chaque élément Γ_k est obtenu par une transformation bijective de l'élément de référence.

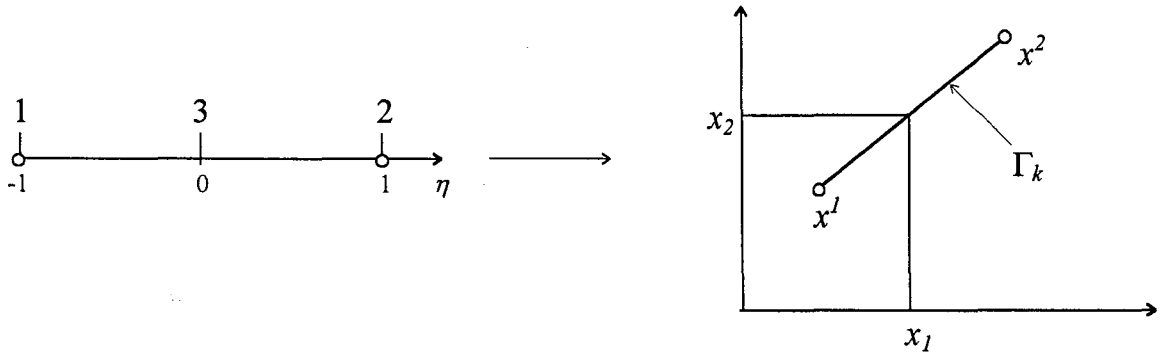


Figure II.5 : Passage de l'élément de référence à l'élément réel

Sur chaque élément Γ_k, les coordonnées (x_1, x_2) d'un point sont calculées par interpolation des coordonnées $\left(x_1^k, x_2^k\right)_{k=1,2}$ à l'aide des fonctions de forme linéaires N_F :

$$\begin{aligned} x_1(\eta) &= \langle N_F(\eta)\rangle\{x_1^k\} \\ & \qquad k = 1,2 \\ x_2(\eta) &= \langle N_F(\eta)\rangle\{x_2^k\} \end{aligned} \qquad (\text{II.5})$$

Celles-ci vérifient :

$N_{F_i}(\eta) = \delta_{ij}$ pour le noeud j.

II.4.2. REPRESENTATION DE LA SOLUTION

De la même manière, le déplacement u est représenté sur chaque élément Γ_k par :

$$\begin{aligned} u_1(\eta) &= \langle N_U(\eta) \rangle \{u_1^k\} \\ u_2(\eta) &= \langle N_U(\eta) \rangle \{u_2^k\} \end{aligned} \qquad (\text{II.6})$$

$\langle u_1^k, u_2^k \rangle$: déplacements des noeuds de l'élément Γ_k

$N_U(\eta)$: fonctions d'interpolation, pouvant être différentes de $N_F(\eta)$

Le vecteur des contraintes p est représenté sur chaque élément Γ_k par :

$$\begin{aligned} p_1(\eta) &= \langle N_P(\eta) \rangle \{p_1^k\} \\ p_2(\eta) &= \langle N_P(\eta) \rangle \{p_2^k\} \end{aligned} \qquad (\text{II.7})$$

$\langle p_1^k, p_2^k \rangle$: vecteurs des contraintes aux noeuds de l'élément Γ_k

$N_P(\eta)$: fonctions d'interpolation, pouvant être différentes de $N_U(\eta)$

Nous notons les équations (II.6) et (II.7) sous la forme suivante :

$$\{u\} = [N_U]\{u^k\} \qquad (\text{II.8})$$

avec

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \{u^k\} = \begin{Bmatrix} . \\ . \\ u_1^k \\ u_2^k \\ . \\ . \end{Bmatrix}, \text{ vecteur élémentaire des déplacements}$$

$[N_U]$: matrice contenant les fonctions d'interpolation

$$(\text{II.9}) \quad \{p\} = [N_P]\{p^k\}$$

avec

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \qquad \{p^k\} = \begin{Bmatrix} . \\ . \\ p_1^k \\ p_2^k \\ . \\ . \end{Bmatrix}, \text{ vecteur élémentaire des contraintes}$$

$[N_P]$: matrice contenant les fonctions d'interpolation

II.4.3. DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE FRONTIERE

A l'aide des équations (II.8) et (II.9), nous pouvons discrétiser l'équation intégrale frontière (I.12), en un noeud *i* du maillage, sous la forme :

$$(\text{II.10}) \quad [C]\begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Gamma_k} [P][N_U]\, d\Gamma \right) \{u^k\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Gamma_k} [U][N_P]\, d\Gamma \right) \{p^k\}$$

$$\text{avec } [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \qquad [P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(Cf. § I.4)}$$

L'équation (II.10) étant valable pour i variant de 1 à M, nous obtenons un système de $2M$ équations que nous écrivons sous la forme matricielle :

(II.11) $[H]\{U\} - [G]\{P\} = 0$

- $\{U\}$ est le vecteur global des déplacements

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} . \\ . \\ u_1^i \\ u_2^i \\ . \\ . \end{Bmatrix}$$

- $\{P\}$ est le vecteur global des contraintes

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} . \\ . \\ p_1^i \\ p_2^i \\ . \\ . \end{Bmatrix}$$

- $[H]$ est construit par assemblage des matrices élémentaires $[h]$, définies par $h_{ij} = \int_{\Gamma_k} [P_{ij}][N_U]\, d\Gamma$ et de la matrice $[C]$

- $[G]$ est construit par assemblage des matrices élémentaires $[g]$, définies par $g_{ij} = \int_{\Gamma_k} [U_{ij}][N_P]\, d\Gamma$

En introduisant les conditions aux limites (**Dirichlet**, **Neumann**, mixte), l'équation (II.11) devient :

(II.12) $[A]\{Y\} = \{b\}$

$\{Y\}$ contient à la fois les inconnues en u et p sur Γ.

Précisons que $[A]$ est une matrice pleine, non symétrique. Cependant, ceci est compensé par le fait qu'elle est de dimension inférieure à celle des éléments finis puisqu'elle ne fait intervenir que les inconnues à la frontière.

II.4.4. DIFFICULTES DE LA METHODE

II.4.4.1. Calcul des matrices élémentaires et traitement des singularités

La construction du système (II.11) nécessite le calcul des matrices élémentaires $[h]$ et $[g]$, contenues dans l'équation (II.10).

Cependant, celui-ci présente une difficulté lorsque l'intégration porte sur un élément singulier.

Définissons ce terme.

Un élément Γ_k est dit singulier relativement au noeud i lorsque ce noeud sur lequel porte l'équation (II.10), appartient à Γ_k..

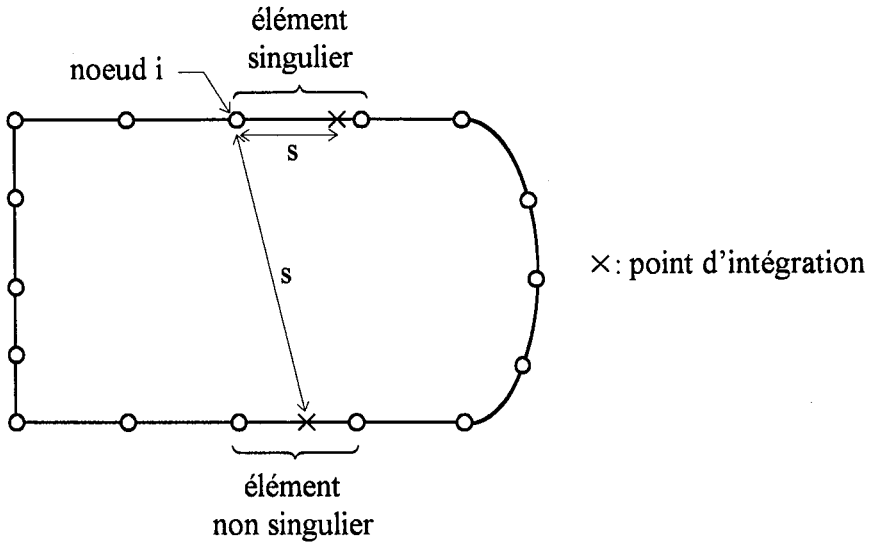


Figure II.6 : Définition d'un élément singulier

Nous notons s, la distance entre le noeud i et un point d'intégration de l'élément Γ_k.

Sur l'élément singulier, s tend vers 0, ce qui entraîne des singularités dans les intégrales.

En déformations et contraintes planes, l'équation intégrale frontière (I.12) possède des singularités de deux types :

- $\frac{1}{s}$. Elle est contenue dans l'expression des P_{ij} (Cf. Annexe A). Moyennant une condition de continuité de **Hölder** sur les déplacements interpolés à la frontière, cette singularité disparaît.

- $\ln s$. Elle est contenue dans l'expression des U_{ij} (Cf. Annexe A). Nous levons celle-ci par un changement de variable du type $s = t^2$ ou par une intégration analytique puisque $\ln s$ est intégrable en 0.

En axisymétrie, la formulation (II.4) possède également des singularités de deux types :

- $\frac{1}{s}$. Elle est contenue dans l'expression des T_{ij}^{*} et des D_{ij}^{*} (Cf. Annexe B). De la même façon, cette singularité disparaît moyennant une condition de continuité de **Hölder** sur les déplacements à la frontière.

- logarithmique. Elle est due au comportement asymptotique de la fonction elliptique de première espèce $K(k)$, présente dans U_{ij}^{*}, T_{ij}^{*} et D_{ij}^{*} (Cf. Annexe B). En effet, nous avons :

$$K(k) = \ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + O(1) \text{ lorsque k tend vers 1,}$$

ce qui nous conduit à

$$K(k) = -\ln(s) + O(s^0) \text{ lorsque s tend vers 0.}$$

Nous levons cette dernière singularité par un calcul se déroulant en deux étapes.

Nous avons donc à évaluer des intégrales de la forme

$$I = \int_{\Gamma_k} A + B\,K(k)\,d\Gamma = I_1 + I_2$$

1ére étape :

Nous calculons les matrices élémentaires $[h]$ et $[g]$ en remplaçant $K(k)$ par $K(k) + \ln(s)$ dans les solutions fondamentales.

Les intégrales, à présent non singulières, sont de la forme :

$$I_1 = \int_{\Gamma_k} A + B\left(K(k) + \ln(s)\right) d\Gamma$$

2ème étape :

Nous complétons ces matrices en rajoutant les termes singuliers manquants.

Ils sont de la forme

$$I_2 = -Cste \int_0^{\alpha} B \ln(s)\, ds$$

A l'aide du changement de variable $s = \alpha t^2$, nous nous ramenons à

$$I_2 = -2\alpha Cste \int_0^1 B\, t \ln\left(\alpha t^2\right) dt$$ qui n'est plus singulière.

Les singularités étant levées, les matrices élémentaires sont calculées :

- en déformations et contraintes planes, de manière analytique. Cette méthode est à la base de la précision de notre code. Nous donnons en annexe C, les informations nécessaires pour entreprendre ces calculs,

- en axisymétrie, à l'aide d'un schéma classique d'intégration numérique de **Gauss**. En effet, un calcul analytique n'est plus possible du fait de la présence des fonctions elliptiques de première et deuxième espèces dans les solutions fondamentales (Cf. Annexe B). Afin de diminuer le temps de calcul sans perte de précision, nous modulons le nombre de points de **Gauss** en fonction de la distance d entre le noeud i et le milieu de l'élément Γ_k. Cette distance mesure la « singularité » des intégrales : plus d diminue, plus l'intégrale est « singulière » et plus ce nombre doit être grand.

II.4.4.2. Non unicité du vecteur normal et matrice singulière

L'autre difficulté de la méthode consiste à définir le vecteur normal en un coin du maillage de la frontière.

En effet, à cet endroit, deux normales $\vec{n}_A$ et $\vec{n}_B$ (Cf. Figure II.7) et deux vecteurs des contraintes $\vec{p}_A$ et $\vec{p}_B$ peuvent être définis. Il n'y a donc plus unicité de la solution en ce point.

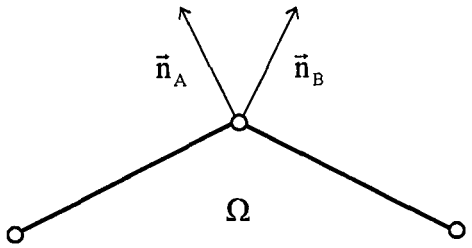


Figure II.7 : Non unicité de la normale en un coin

Il existe plusieurs méthodes pour contourner cette difficulté.

L'une des plus courantes consiste à introduire des équations supplémentaires, appelées quelquefois équations aux contraintes discontinues[1].

Pour notre part, nous préférons une autre technique, développée par **Brebbia** [2], moins lourde à mettre en œuvre et d'une efficacité identique, qui consiste à introduire la notion de point double.

En dimension deux, celui-ci est constitué de deux noeuds identiques sans élément frontière entre eux.

Cependant, cette méthode présente un inconvénient lorsque nous imposons les déplacements sur le noeud double et recherchons les vecteurs des contraintes. En effet, la

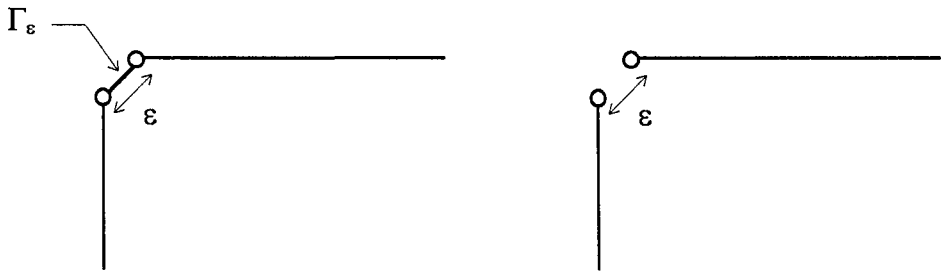
---

[1] Voir référence [MEF 7]

[2] Voir référence [MEF 8]

solution fondamentale U_{ij} (ou U_{ij}^{*}) ne dépendant pas du vecteur normal, nous obtenons une matrice singulière contenant deux lignes identiques.

Nous utilisons alors, pour résoudre ce dernier problème, des éléments discontinus, en positionnant en un coin deux noeuds distants d'une longueur ε ($10^{-10} \leq \varepsilon \leq 10^{-7}$), définissant l'élément Γ_ε (Cf. Figure II.8a). En pratique, celui-ci n'a aucune influence sur les résultats. Il peut donc être supprimé (Cf. Figure II.8b).



a) Définition de l'élément Γ_ε b) Maillage en un coin

Figure II.8

II.5. LES PRINCIPAUX MODULES DU CODE

II.5.1. LE MAILLEUR

Le mailleur discrétise la frontière Γ d'un domaine Ω en N segments de droite Γ_k..

L'organigramme suivant présente le schéma complet du programme.

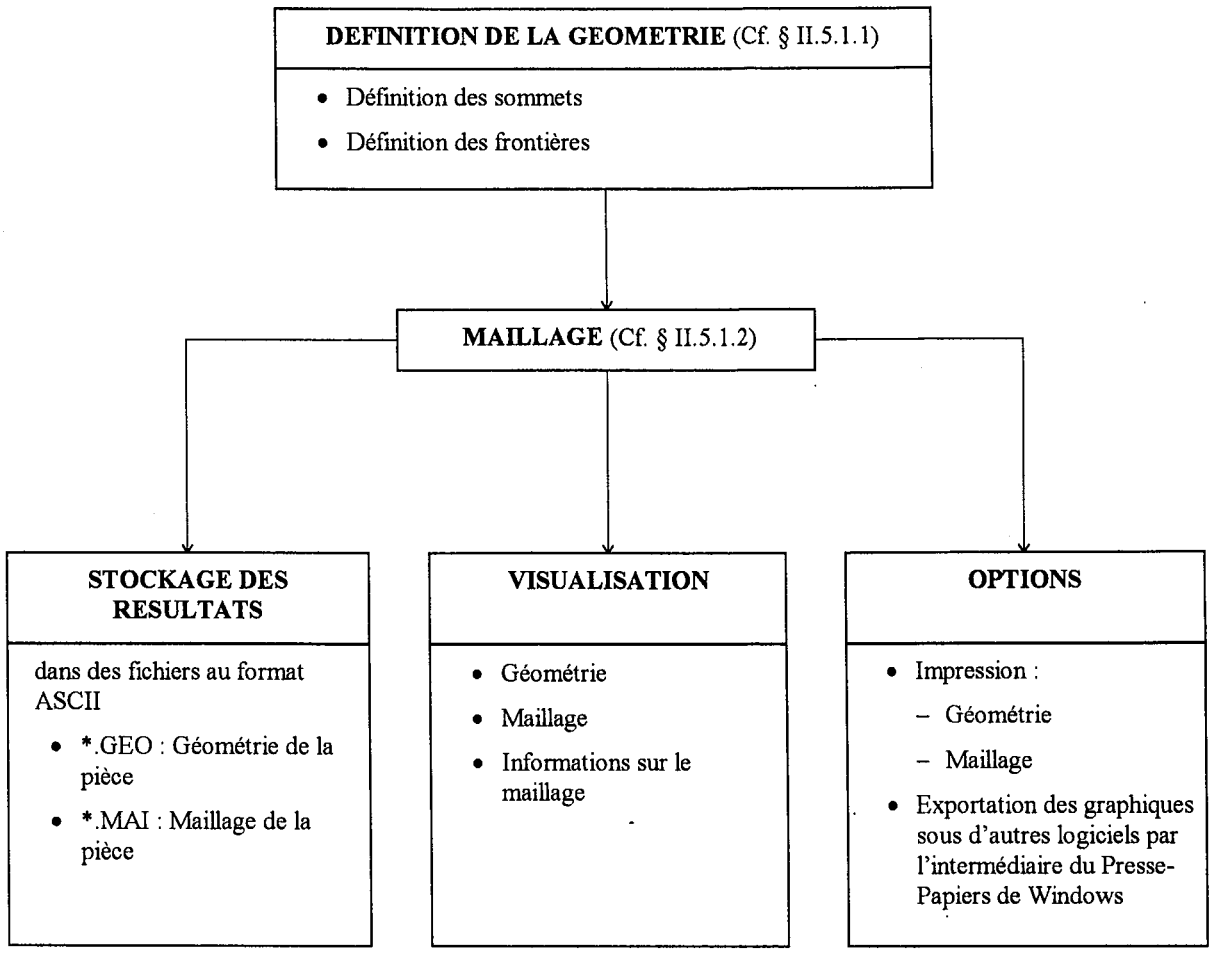


Tableau II.1

II.5.1.1. Définition de la géométrie

La géométrie d'une pièce est définie par ses sommets et ses frontières.

Un sommet est déterminé par : (Cf. Figure II.9)

- son numéro,
- ses coordonnées x_1 et x_2,
- son code frontière,
- l'option Point double (Cf. § II.4.4.2).

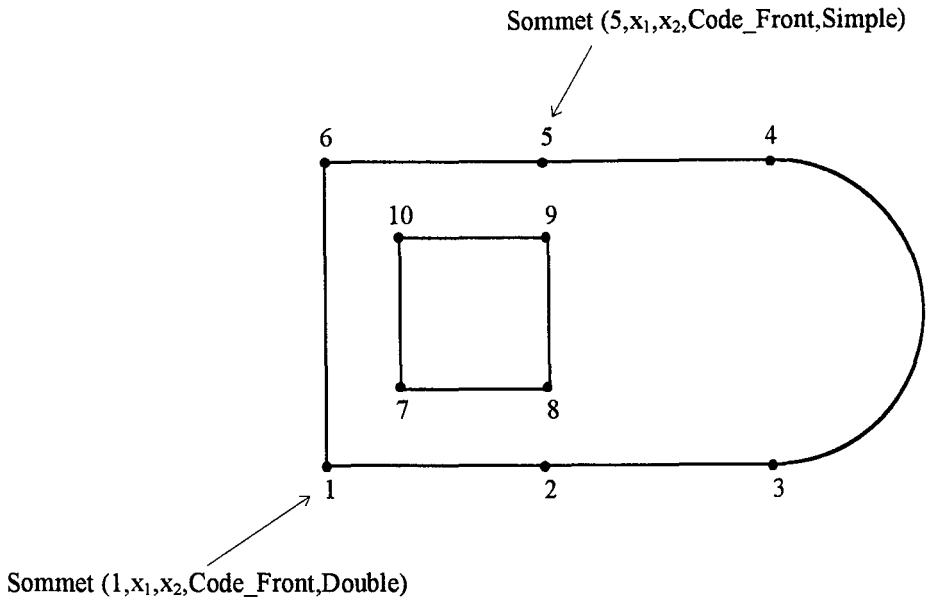


Figure II.9 : Définition d'un sommet

De même, la frontière d'une pièce est définie par : (Cf. Figure II.10)

- son numéro,
- le numéro du sommet initial,
- le numéro du sommet final,
- sa géométrie de type :
  - segment de droite défini par les sommets initial et final,
  - arc de cercle défini par son centre et les sommets initial et final,
- son type de frontière : externe ou interne,
- son code frontière,
- le nombre de noeuds régulièrement espacés.

Dans ce module, nous fixons la valeur de ε (Cf. § II.4.2).

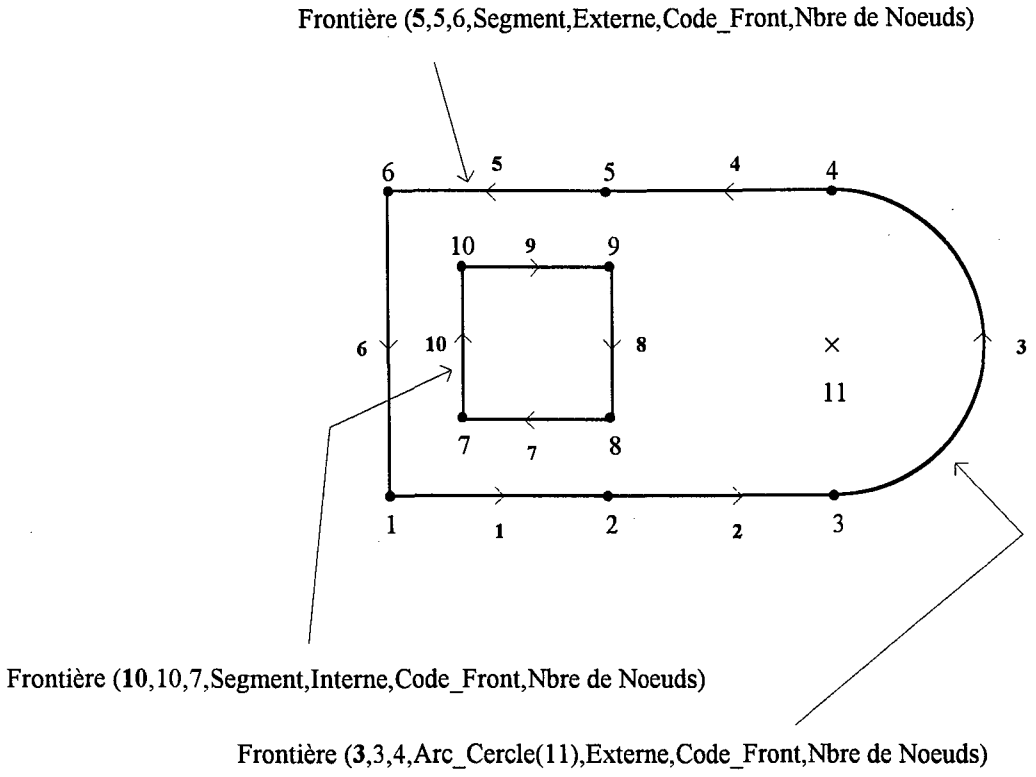


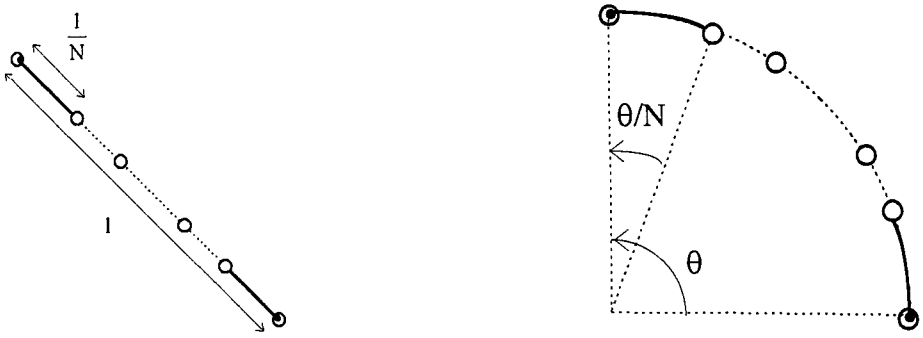
Figure II.10 : Définition d'une frontière

II.5.1.2. Réalisation du maillage

A partir des données saisies dans le module définissant la géométrie de la pièce, le maillage est réalisé de la manière suivante :

- les frontières sont découpées en un nombre déterminé de segments égaux,

- les noeuds des frontières courbes sont positionnés régulièrement sur celle-ci (Cf. Figure II.11a).



a) Maillage d'une frontière droite en N segments

b) Maillage d'une frontière courbe en N segments

Figure II.11 : Maillage d'une frontière

Nous représentons sur la Figure II.12, le maillage final de l'exemple traité tout au long de ce paragraphe.

Deux autres maillages montrant les possibilités de notre logiciel, sont présentés sur la Figure II.13.

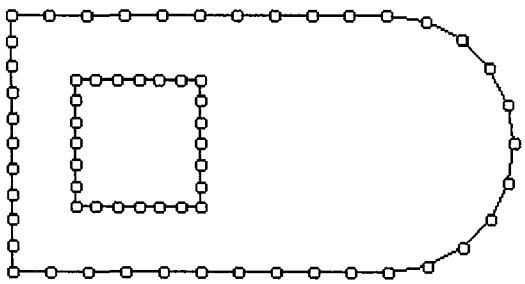
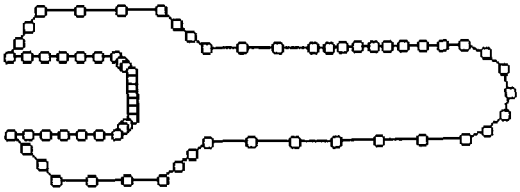
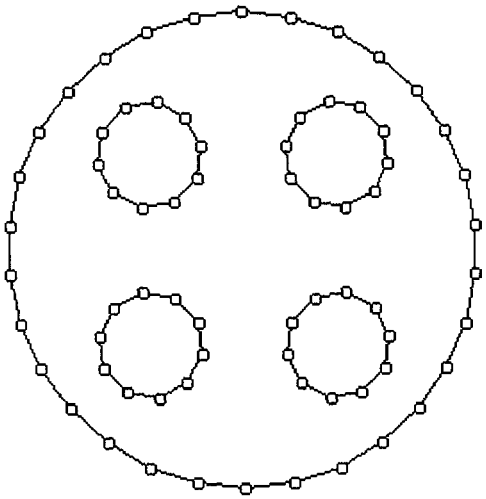


Figure II.12 : Maillage de l'exemple



a) Maillage d'une clef plate



b) Maillage d'une pièce

Figure II.13 : Présentation de quelques maillages

II.5.2. LE SOLVEUR

L'organigramme suivant présente le schéma du déroulement du programme.

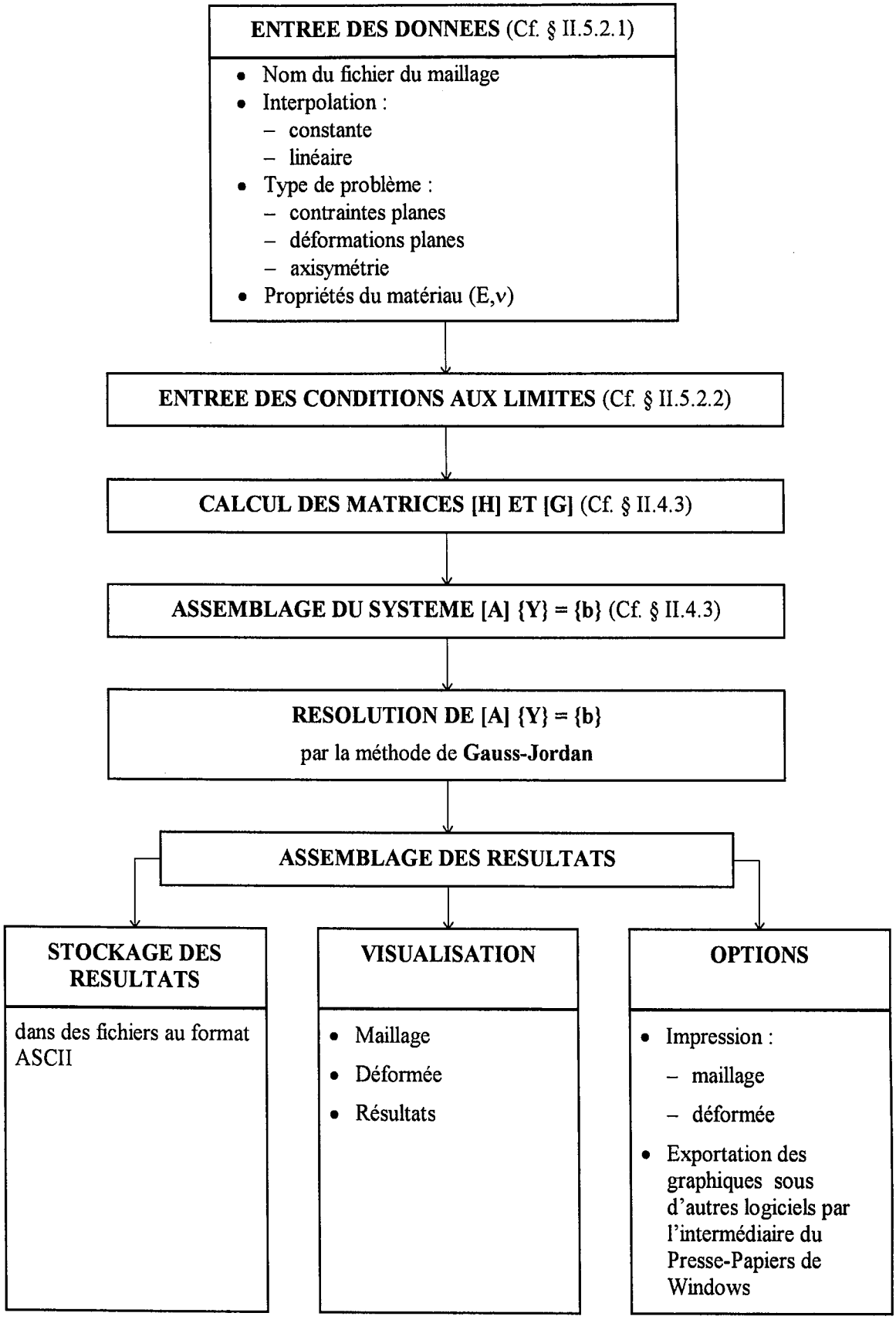

ENTREE DES DONNEES (Cf. § II.5.2.1)
• Nom du fichier du maillage
• Interpolation :
– constante
– linéaire
• Type de problème :
– contraintes planes
– déformations planes
– axisymétrie
• Propriétés du matériau (E,ν)
ENTREE DES CONDITIONS AUX LIMITES (Cf. § II.5.2.2)
CALCUL DES MATRICES [H] ET [G] (Cf. § II.4.3)
ASSEMBLAGE DU SYSTEME [A] {Y} = {b} (Cf. § II.4.3)
RESOLUTION DE [A] {Y} = {b}
par la méthode de Gauss-Jordan
ASSEMBLAGE DES RESULTATS
STOCKAGE DES RESULTATS
dans des fichiers au format ASCII
VISUALISATION
• Maillage
• Déformée
• Résultats
OPTIONS
• Impression :
– maillage
– déformée
• Exportation des graphiques sous d'autres logiciels par l'intermédiaire du Presse-Papiers de Windows

Tableau II.2

II.5.2.1. Entrée des données du problème

Ce solveur utilise les maillages réalisés avec le mailleur décrit au paragraphe précédent.

L'exécution du programme nécessite l'introduction de divers paramètres, notamment :

- le type d'interpolation utilisé (Cf. § II.4.2 et Figure II.14) :

  - constante

$$\begin{Bmatrix} u_1(\eta) \\ u_2(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3(\eta) \\ u_2^3(\eta) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(\eta) \\ p_2(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^3(\eta) \\ p_2^3(\eta) \end{Bmatrix}$$

  - linéaire

$$\begin{Bmatrix} u_1(\eta) \\ u_2(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1(\eta) \\ u_2^1(\eta) \\ u_1^2(\eta) \\ u_2^2(\eta) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(\eta) \\ p_2(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1(\eta) \\ p_2^1(\eta) \\ p_1^2(\eta) \\ p_2^2(\eta) \end{Bmatrix}$$

Remarque

Afin de simplifier la mise en œuvre de la méthode, nous avons choisi des interpolations de même ordre pour u et p.

❑

a) constante b) linéaire

Figure II.14 : Définition des interpolations

- le type de problème :
  - contraintes planes (Cf. § II.3.1),
  - déformations planes (Cf. § II.3.2),
  - axisymétrie (Cf. § II.3.3).
- les propriétés du matériau
  - module d'**Young** E,
  - coefficient de **Poisson** ν.

II.5.2.2. Les conditions aux limites

Le solveur peut gérer différents types de conditions aux limites :

- **Dirichlet**,
- **Neumann**,
- **Dirichlet - Neumann**.

Ceux-ci sont définis par le code affecté aux frontières lors du maillage.

II.6. LES UTILITAIRES

Les utilitaires reposent essentiellement sur la mise en œuvre des méthodes exposées aux paragraphes I.5 et I.6.

Une fois, le calcul de u et de p sur Γ effectué, ils permettent l'évaluation de :

- σ_{ij} sur la frontière Γ (Cf. § I.6 et [MEF 7]),
- u_i dans le domaine Ω (Cf. § I.5.1 et [MEF 7]),
- σ_{ij} dans le domaine Ω (Cf. § I.5.2 et [MEF 7]),
- σ_e, la contrainte équivalente au sens de **Hencky Mises**.

σ_e est définie :

- en déformations et contraintes planes par :

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2+\left(\sigma_{11}-\sigma_{33}\right)^2+\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right)$$

- en axisymétrie par :

$$\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{rz}^2$$

Remarques

L'ensemble des points permettant de définir la solution dans le domaine Ω a été obtenu à partir d'un logiciel commercial de maillage pour les éléments finis. Nous récupérons les coordonnées des noeuds internes dans le fichier de celui-ci.

En ce qui concerne les formules (I.11) et (I.14), un schéma de discrétisation identique à celui présenté au paragraphe II.4 est utilisé.

❑

II.7. EXEMPLES

Afin de valider notre code d'éléments frontières, nous nous proposons de résoudre quelques problèmes d'élasticité linéaire de référence, dont nous connaissons la solution analytique. Nous les présentons dans le tableau suivant :

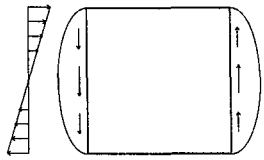
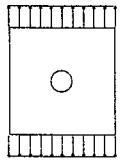
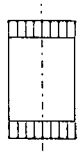
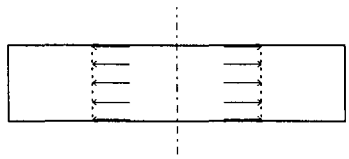
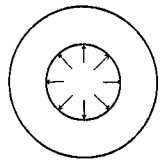
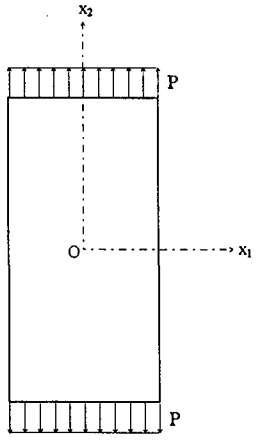
Problème	Géométrie	§	Type de problème plan	Références
Plaque en traction simple		II.7.1	Contraintes planes	[MEC 4]
Plaque soumise à des sollicitations aux extrémités		II.7.2	Contraintes planes	[MEC 1]
Traction simple d'une plaque perforée		II.7.3	Contraintes planes	[INF 4]
Cylindre en traction simple		II.7.4	Axisymétrie	[MEF 7]
Cylindre creux sous pression interne		II.7.5	Axisymétrie	[MEF 7]
Réservoir sphérique sous pression interne		II.7.6	Axisymétrie	[INF 4]

Tableau II.3

II.7.1. PLAQUE EN TRACTION SIMPLE

Nous étudions le problème d'une plaque soumise à une force de traction uniforme P.



épaisseur e = 1 mm

Figure II.15: Plaque en traction simple

II.7.1.1. Données du problème

Ce problème admet une symétrie par rapport à l'axe Ox_1. Nous limitons donc l'étude à la moitié du domaine.

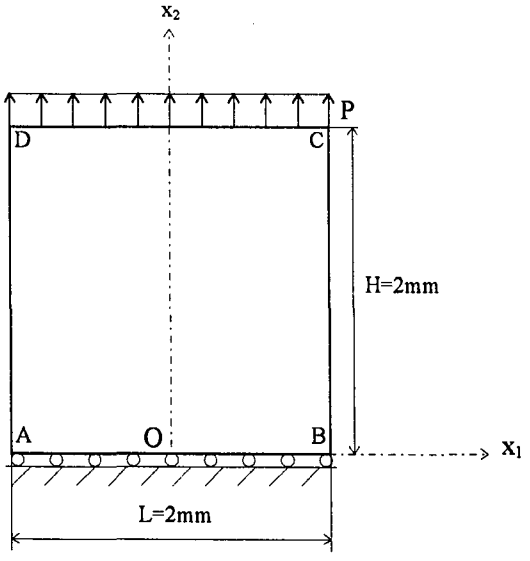


Figure II.16

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 100000 MPa$$
$$\nu = 0.10$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $u_1 = u_2 = 0$ en O
- $\begin{cases} u_2 = 0 \\ p_1 = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur AB
- $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = P = 1 MPa \end{cases}$ force uniforme sur CD

La pièce est maillée en 16 éléments linéaires.

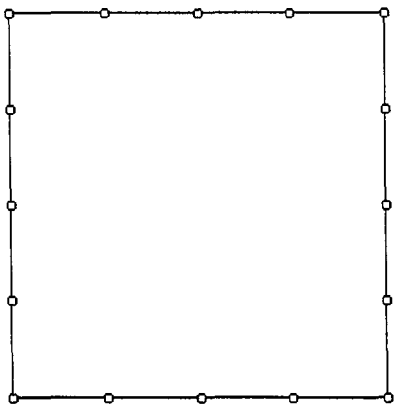


Figure II.17 : Maillage de la pièce

II.7.1.2. Solution analytique

La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x_1) = -\dfrac{\nu P}{E} x_1 \\ u_2(x_2) = \dfrac{P}{E} x_2 \end{cases}$$

II.7.1.3. Résultats

Nous avons résolu ce problème en utilisant les interpolations constante et linéaire (Cf. § II.5.2.1) :

- en interpolation constante, les erreurs relatives sur les déplacements et les contraintes calculés à la frontière sont respectivement inférieures à 0,5% et 1%,

- en interpolation linéaire, cette erreur est égale à la précision de l'ordinateur. Les résultats sont exacts jusqu'à la 15-ième décimale. En effet, la pièce est décrite exactement par les éléments frontières du maillage. De plus, les intégrales composant les matrices H et G (Cf. § II.4.3) sont calculées analytiquement. Ceci nous permet d'obtenir exactement la solution, car celle-ci est linéaire.

Nous avons également effectué :

- le calcul du tenseur des contraintes σ_{ij} à la frontière (Cf. § I.6),

- le calcul des déplacements et des contraintes en divers points intérieurs du domaine (Cf. § I.5).

Nous retrouvons, sur ces résultats, la même précision que ci-dessus, selon l'interpolation utilisée.

II.7.2. PLAQUE SOUMISE A DES SOLLICITATIONS REPARTIES AUX EXTREMITES

Nous nous intéressons au problème d'une plaque isotrope soumise à des sollicitations réparties aux extrémités (Cf. Figure II.18).

Nous retenons la géométrie et les conditions aux limites de l'exemple traité par **Batoz**[1].

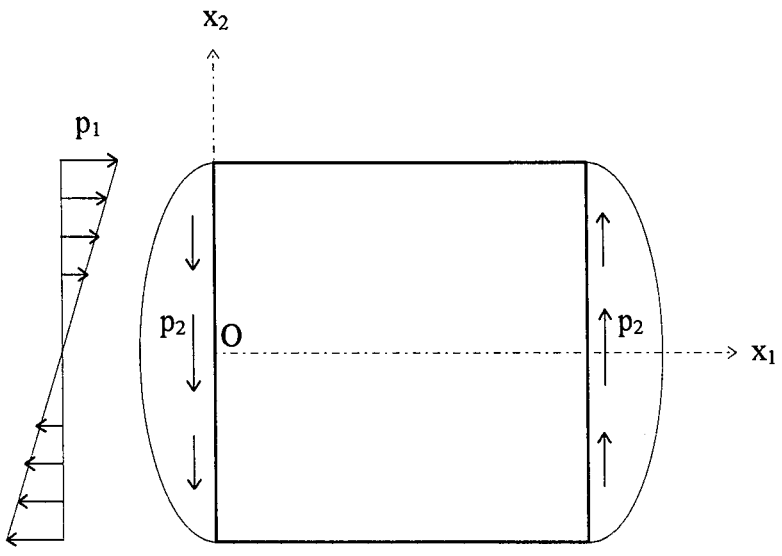


Figure II.18 : Plaque soumise à des sollicitations réparties aux extrémités

II.7.2.1. Données du problème

Du fait de la symétrie par rapport à l'axe Ox_1, nous résolvons le problème sur la moitié du domaine.

---

[1] Voir référence [MEC 1]

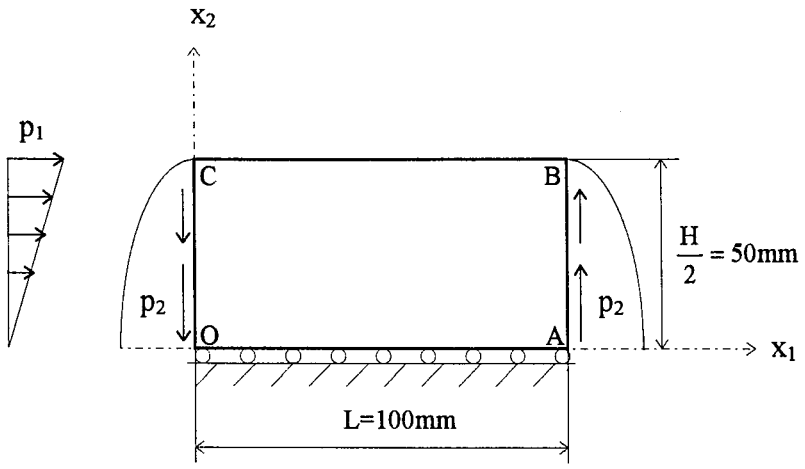


Figure II.19

Le matériau choisi est défini par :

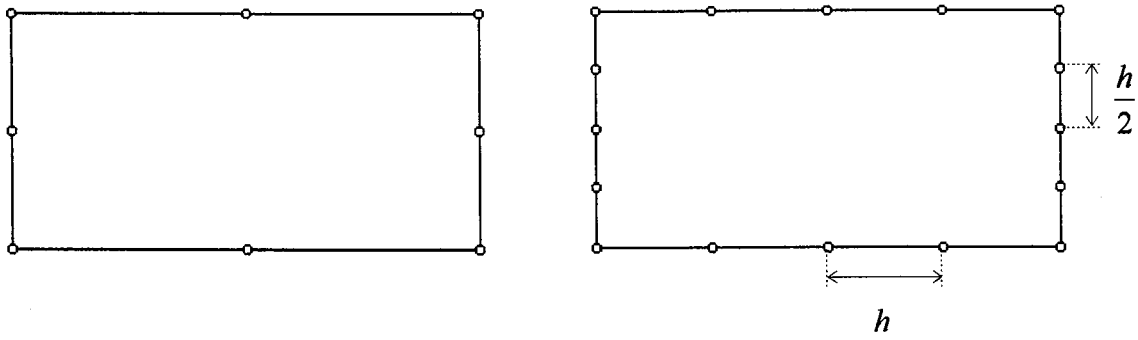
$$E = 100MPa$$
$$\nu = 0.30$$

Les conditions aux limites du problème sont :

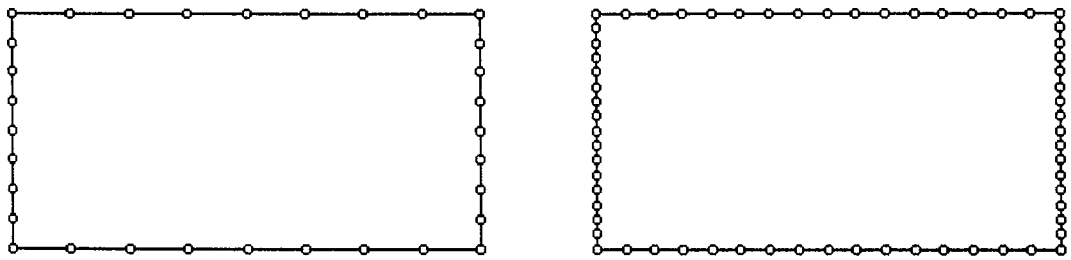
- $u_1 = u_2 = 0$ en O
- $u_1 = 0$ en C
- $\begin{cases} u_2 = 0 \\ p_1 = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur OA
- $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2(x_2) = 1 - \left(\frac{2x_2}{H}\right)^2 MPa \end{cases}$ sollicitations sur AB
- $\begin{cases} p_1(x_2) = \frac{8Lx_2}{H^2} MPa \\ p_2(x_2) = -1 + \left(\frac{2x_2}{H}\right)^2 MPa \end{cases}$ sollicitations sur OC

Nous désignons par h, la taille de l'élément (Cf. Figure II.20). Nous réalisons cinq maillages de la plaque, de telle sorte que h varie de $\frac{L}{2}$ à $\frac{L}{32}$.

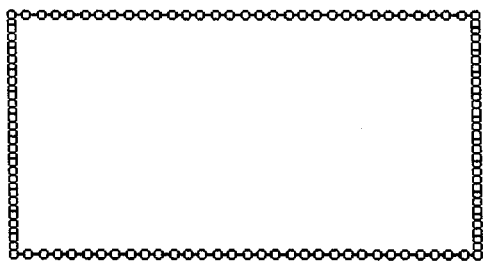
Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).



Maillage M1 - $h = \frac{L}{2}$ Maillage M2 - $h = \frac{L}{4}$



Maillage M3 - $h = \frac{L}{8}$ Maillage M4 - $h = \frac{L}{16}$



Maillage M5 - $h = \frac{L}{32}$

Figure II.20 : Maillages

II.7.2.2. Solution analytique

Le champ des contraintes planes exact est :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1,x_2)=\dfrac{8x_2}{H^2}(x_1-L) \\ \sigma_{12}(x_2)=1-\left(\dfrac{2x_2}{H}\right)^2 \\ \sigma_{22}=0 \end{cases}$$

Le champ des déplacements est :

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2)=\dfrac{4}{EH^2}\left[x_2\left((x_1)^2-2Lx_1\right)+\dfrac{(2+\nu)x_2}{3}\left(\dfrac{H^2}{4}-(x_2)^2\right)\right] \\ u_2(x,y)=\dfrac{4}{EH^2}\left[L(x_1)^2-\dfrac{(x_1)^3}{3}-\nu(x_2)^2(x_1-L)+\dfrac{(4+5\nu)}{12}x_1H^2\right] \end{cases}$$

II.7.2.3. Résultats

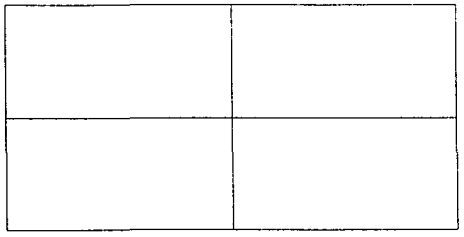
Nous présentons dans le Tableau II.4 :

- les déplacements u_1 et u_2 au point B,

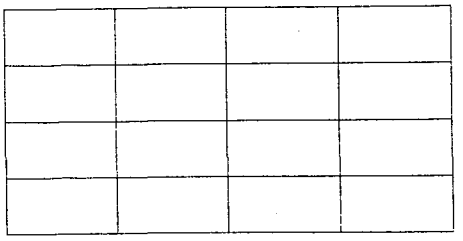
- la contrainte σ_{11} aux points C et O.

Ceci nous permet de comparer nos résultats avec la solution numérique de **Batoz**, calculée par la méthode des éléments finis.

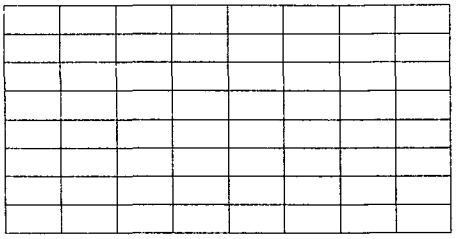
Les maillages utilisés par **Batoz** sont présentés sur la Figure II.21 . Les maillages des frontières de B1, B2, B3 sont respectivement identiques à M1, M2, M3.



Maillage B1 - $h = \frac{L}{2}$ - 4 éléments Q4



Maillage B2 - $h = \frac{L}{4}$ - 16 éléments Q4



Maillage B3 - $h = \frac{L}{8}$ - 64 éléments Q4

Figure II.21 : Maillages de **Batoz**

Maillage	u_1 en B (mm)		u_2 en B (mm)		σ_{11} en C (Mpa)		σ_{11} en O (Mpa)		h
	Num.	**Batoz**	Num.	**Batoz**	Num.	**Batoz**	Num.	**Batoz**	
M1	-1.50	-1.76	3.50	4.01	-3.16	-2.62	1.25	1.51	$\frac{L}{2}$
M2	-1.80	-1.92	4.11	4.33	-3.51	-3.33	1.13	1.33	$\frac{L}{4}$
M3	-1.93	-1.97	4.37	4.44	-3.74	-3.65	1.06	1.18	$\frac{L}{8}$
M4	-1.97	/////	4.46	/////	-3.86	/////	1.03	/////	$\frac{L}{16}$
M5	-1.99	/////	4.48	/////	-3.92	/////	1.01	/////	$\frac{L}{32}$
Solution analytique	-2.00		4.50		-4.00		1.00		

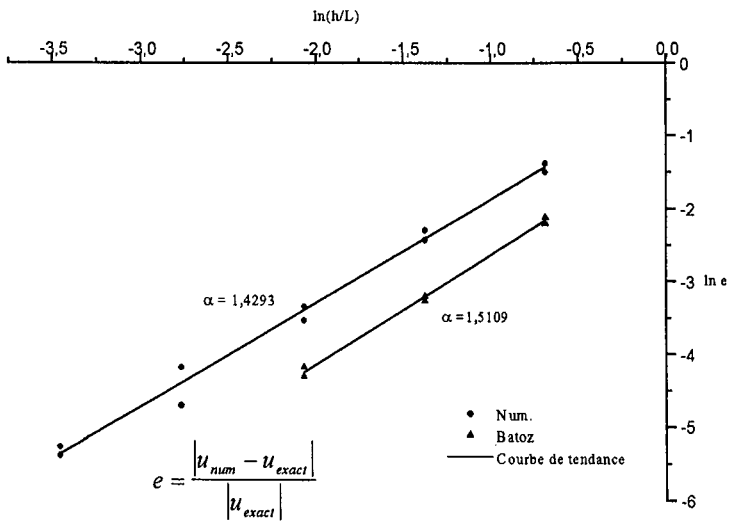
Tableau II.4

Afin de connaître l'ordre de convergence de la méthode en fonction de la taille de l'élément, nous représentons les erreurs relatives sur les déplacements et les contraintes en fonction de $\frac{h}{L}$ en échelle log - log (Cf. Figure II.22).

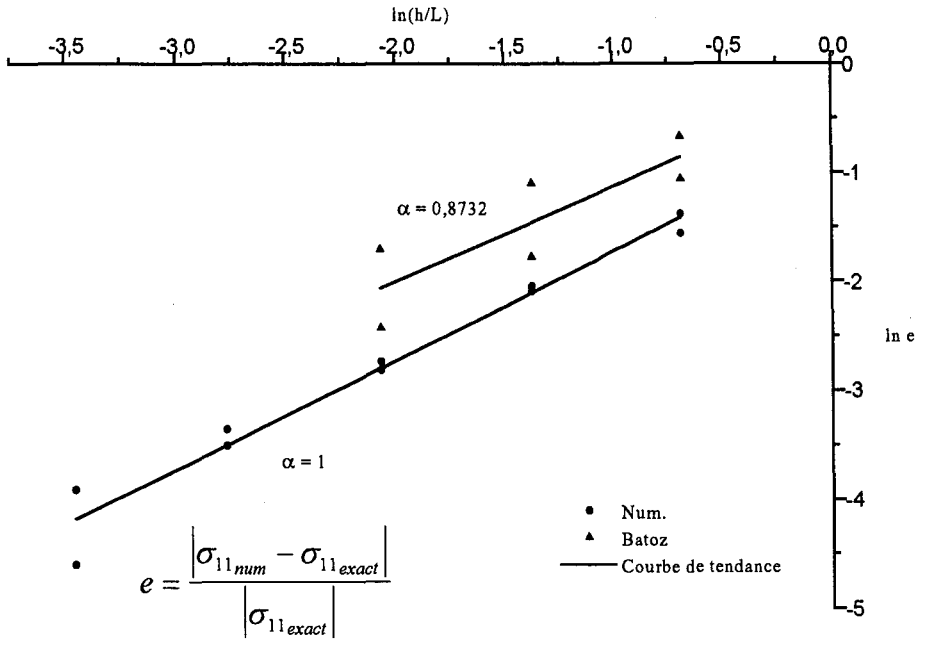
En effet, supposons que

$$\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|}{\|u_{exact}\|} = C\left(\frac{h}{L}\right)^{\alpha} \text{ alors } \ln\frac{\|u_{num} - u_{exact}\|}{\|u_{exact}\|} = \ln C + \alpha \ln\frac{h}{L}$$

La pente de la droite donne alors l'ordre de convergence α.



a) Ordre de convergence sur les déplacements



b) Ordre de convergence sur les contraintes

Figure II.22 : Erreurs relatives des méthodes d'éléments frontières et d'éléments finis (**Batoz**) en fonction du paramètre adimensionnel $\frac{h}{L}$.

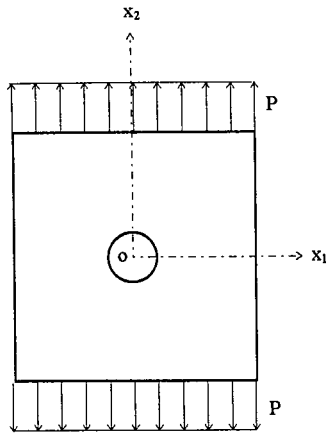
h : taille de l'élément, L : longueur caractéristique du domaine étudié.

Ces courbes montrent que nous obtenons une moins bonne précision des résultats au niveau des déplacements par rapport à la méthode des éléments finis.

Par contre, elle est sensiblement meilleure au niveau des contraintes.

II.7.3. TRACTION SIMPLE D'UNE PLAQUE PERFOREE

Nous étudions le problème d'une plaque perforée soumise à une force de traction uniforme P.



épaisseur e = 1 mm

Figure II.23: Traction simple d'une plaque perforée

II.7.3.1. Données du problème

Ce problème admet une double symétrie par rapport aux axes Ox_1 et Ox_2. Nous limitons donc l'étude à un quart du domaine.

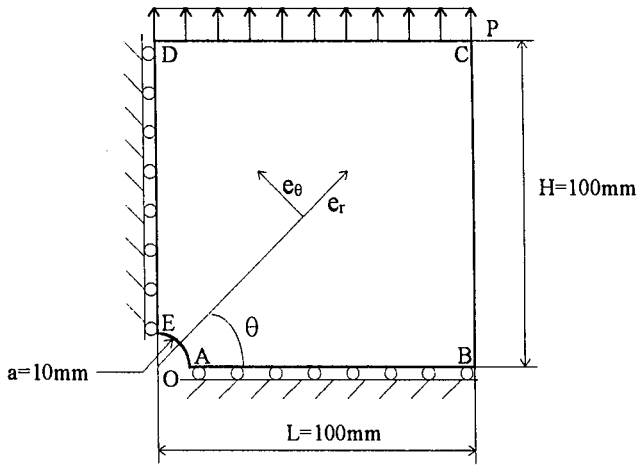


Figure II.24

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 30000MPa$$
$$\nu = 0.25$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} u_2 = 0 \\ p_1 = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur AB

- $\begin{cases} u_1 = 0 \\ p_2 = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur DE

- $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = P = 2.5MPa \end{cases}$ force uniforme sur CD

La pièce est maillée en 72 éléments linéaires.

Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

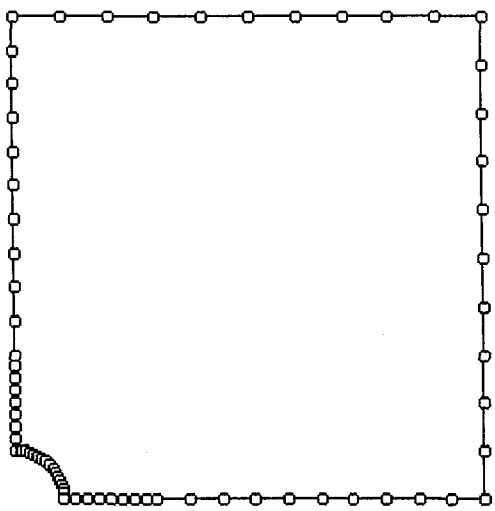


Figure II.25 : Maillage de la pièce

II.7.3.2. Solution analytique

Une solution semi-analytique a été obtenue par **Muskhheliskvili** et **Kolosov** [1] en supposant la plaque infinie.

Nous l'écrivons en coordonnées polaires :

$$\sigma_{rr}(r,\theta) = \frac{P}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos(2\theta)\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta) = \frac{P}{2}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos(2\theta)\right]$$

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta) = \frac{P}{2}\left[1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right]\sin(2\theta)$$

II.7.3.3. Résultats

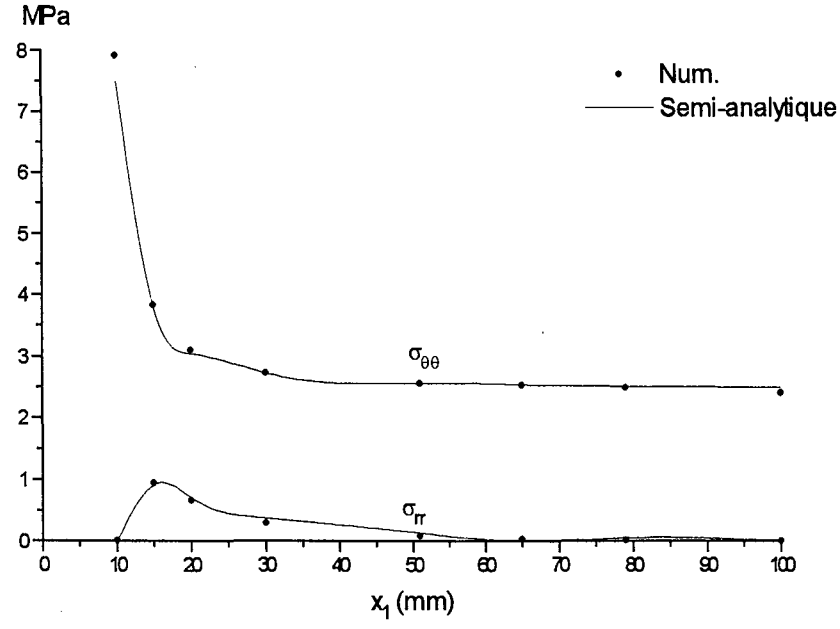
Nous représentons sur la Figure II.26, les résultats obtenus sur AB et DE.

Nous traçons sur la Figure II.27, $\sigma_{\theta\theta}$ calculée sur le quart de cercle AE, en fonction de l'angle θ.

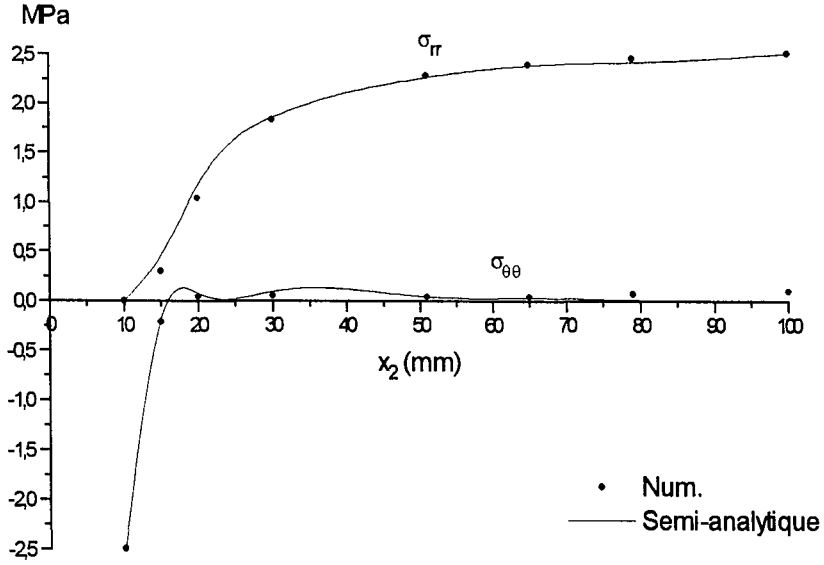
Pour ces deux séries de résultats, nous comparons nos valeurs numériques à la solution semi-analytique.

---

[1] Voir référence [INF 4]



a) Résultats sur AB



b) Résultats sur DE

Figure II.26 : Résultats sur AB et DE

D'après la solution analytique, $\sigma_{r\theta}$ est nulle sur les segments AB et DE. Nos calculs nous donnent $\sigma_{r\theta} = 0$ à 0.01 près.

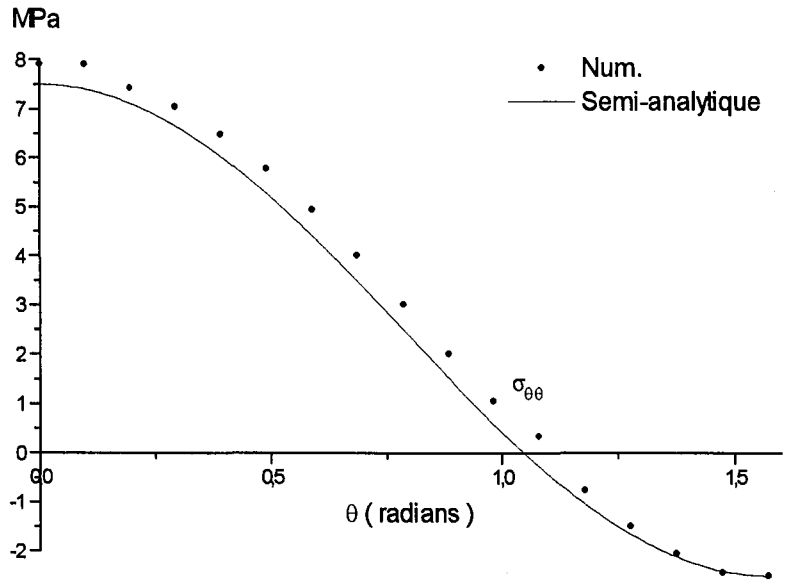


Figure II.27 : Résultats sur l'arc AE

D'après la solution analytique, nous avons $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$ sur l'arc AE, défini par $r=a$.

Nos calculs nous donnent :

$0 \leq \sigma_{rr} \leq 10^{-2}\, MPa$

$0 \leq \sigma_{r\theta} \leq 10^{-1}\, MPa$

II.7.4. CYLINDRE EN TRACTION SIMPLE

Nous étudions le problème du cylindre soumis à une force de traction uniforme P.

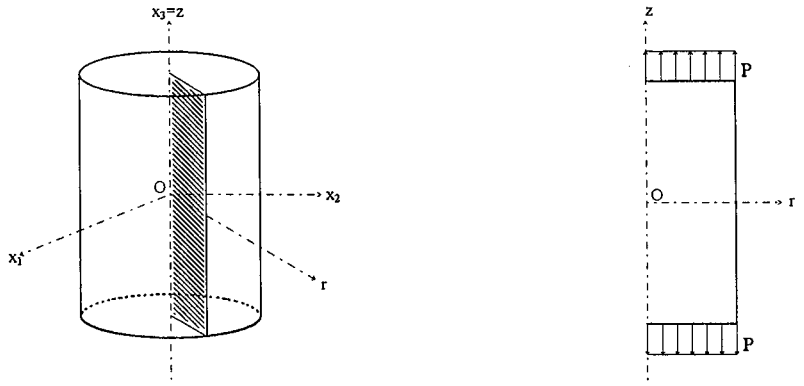


Figure II.28 : Cylindre en traction simple

II.7.4.1. Données du problème

Ce problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe *Oz* et une symétrie par rapport à l'axe *Or*.

Nous limitons donc l'étude à un quart de plan de coupe à l'aide des coordonnées axisymétriques.

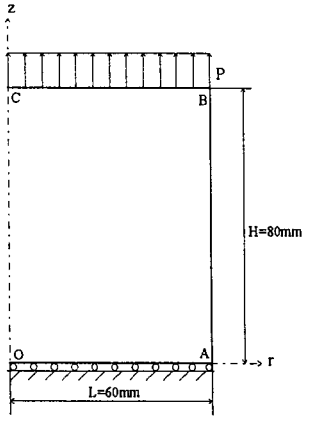


Figure II.29

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 1MPa$$
$$\nu = 0.25$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} u_z = 0 \\ p_r = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur OA

- $\begin{cases} p_r = 0 \\ p_z = P = 10MPa \end{cases}$ force uniforme sur BC

La pièce est maillée en 20 éléments linéaires.

Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

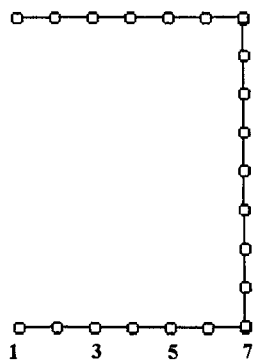


Figure II.30 : Maillage de la pièce

II.7.4.2. Solution analytique

La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$\sigma_{zz} = P$$

Les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls.

$$\begin{cases} u_r(r) = -\dfrac{\nu P}{E} r \\ u_z(z) = \dfrac{P}{E} z \end{cases}$$

II.7.4.3. Résultats

Nous présentons dans le tableau suivant, les résultats obtenus sur OA.

Noeud*	r	$-u_r$:déplacement radial (mm)			$-p_z$:contrainte normale (MPa)		
		Num.	Exact	**Balas**	Num.	Exact	**Balas**
1	0	0.00	0.00	0.00	10.00	10.00	10.12
2	10	25.00	25.00	24.97	9.99	10.00	9.97
3	20	50.00	50.00	49.95	10.00	10.00	10.06
4	30	75.00	75.00	74.93	10.00	10.00	9.98
5	40	99.99	100.00	99.90	10.00	10.00	10.02
6	50	125.00	125.00	124.90	9.99	10.00	9.98
7	60	150.00	150.00	150.00	10.00	10.00	10.03

* Cf. Figure II.30

Tableau II.5 : Résultats sur OA

De plus, nous calculons les déplacements et les contraintes internes en divers points de la droite d'équation *z=40*. Ces résultats sont présentés dans le Tableau II.6.

Nous comparons nos valeurs numériques à la solution analytique et aux résultats obtenus par **Balas** [1].

[1] Voir référence [MEF 7]

Remarque

Balas utilise une interpolation quadratique.

❑

r	$-u_r$ (mm)		u_z (mm)		$-\sigma_{zz}$ (MPa)		
	Num.	Exact	Num.	Exact	Num.	Exact	**Balas**
0	0.00	0.00	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
5	12.50	12.50	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
10	25.00	25.00	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
20	50.00	50.00	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
50	125.00	125.00	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
55	137.50	137.50	400.00	400.00	9.99	10.00	10.00
59	147.51	147.50	399.99	400.00	9.91	10.00	10.01

Tableau II.6

D'après la solution analytique, les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls.

Notre calcul nous donne des valeurs nulles à 0.001 près.

II.7.5. CYLINDRE CREUX A PAROI EPAISSE SOUS PRESSION INTERNE

Nous étudions le problème du cylindre creux à paroi épaisse soumis à une pression interne P.

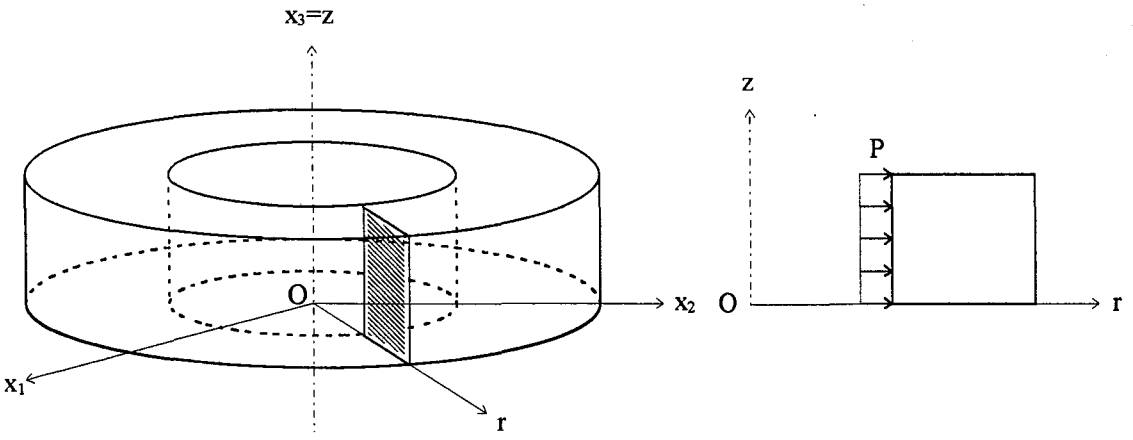


Figure II.31 : Cylindre creux à paroi épaisse sous pression interne

II.7.5.1. Données du problème

Ce problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe *Oz*. Nous limitons donc l'étude à un demi-plan de coupe à l'aide des coordonnées axisymétriques.

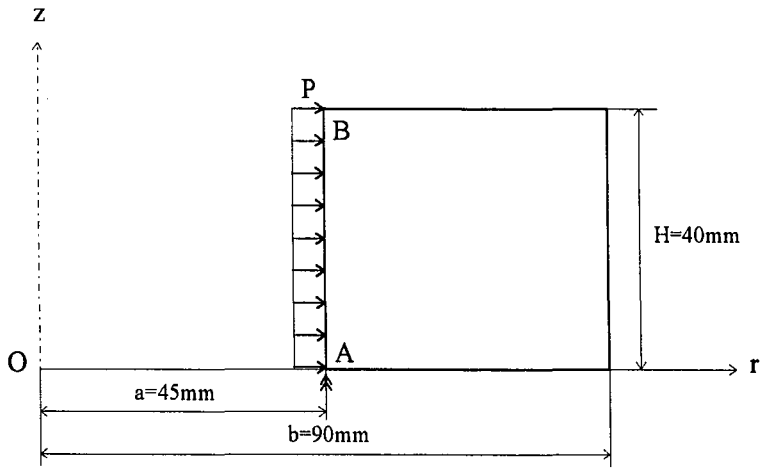


Figure II.32

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 1MPa$$
$$\nu = 0.25$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} p_r = P = 10MPa \\ p_z = 0 \end{cases}$ force uniforme sur AB

Afin de garantir l'unicité de la solution du problème, nous rajoutons la condition

$u_z = 0$ en A

La pièce est maillée en 36 éléments linéaires. Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

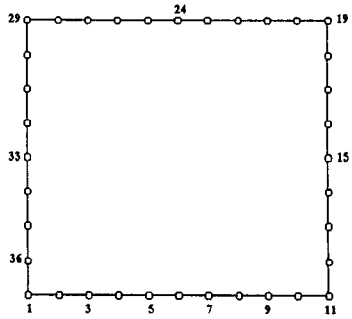


Figure II.33 : Maillage de la pièce

II.7.5.2. Solution analytique

La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = -\sigma_0 \left[\left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right] \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_0 \left[\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 1 \right] \end{cases} \qquad \sigma_0 = \frac{P}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}$$

Les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls.

$$u_r(r) = \frac{\sigma_0 r}{E}\left[(1+\nu)\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 1 - \nu\right]$$

II.7.5.3. Résultats

Nous présentons dans le tableau suivant, le déplacement radial calculé à la frontière.

Noeud *	r	u_r :déplacement radial (mm)		
		Num.	Exact	**Balas**
2	49.50	806.05	805.56	806.90
3	54.00	760.47	760.00	761.20
4	58.50	723.63	723.17	724.30
5	63.00	693.66	693.21	694.30
6	67.50	669.19	668.75	669.80
7	72.00	649.18	648.75	649.70
8	76.50	632.86	632.42	633.30
9	81.00	619.61	619.16	620.00
10	85.50	608.93	608.48	609.30
11-19	90.00	600.42	600.00	600.52
29-1	45.00	863.20	862.50	864.32

* Cf. Figure II.33

Tableau II.7 : Déplacement radial à la frontière

De plus, nous calculons les déplacements et les contraintes internes en divers points de la droite d'équation $z=20$. Ces résultats sont présentés dans le Tableau II.8.

Nous comparons nos valeurs numériques à la solution analytique, et aux résultats obtenus par **Balas**.

Remarque

Balas utilise une interpolation quadratique.

❑

r	u_r (mm)		$-\sigma_{rr}$ (mm)			$\sigma_{\theta\theta}$ (MPa)		
	Num.	Exact	Num.	Exact	**Balas**	Num.	Exact	**Balas**
45.25	858.92	858.98	10.01	9.85	10.11	16.92	16.51	16.60
45.50	856.14	855.50	9.89	9.70	9.68	16.44	16.37	16.37
46.00	849.32	848.69	9.40	9.42	9.42	16.10	16.09	16.09
47.00	836.20	835.58	8.88	8.88	8.88	15.57	15.55	15.56
50.00	800.59	800.00	7.46	7.46	7.46	14.14	14.13	14.13
60.00	713.08	712.50	4.16	4.16	4.16	10.84	10.83	10.83
70.00	657.72	657.14	2.17	2.17	2.17	8.85	8.84	8.84
80.00	622.44	621.87	0.88	0.88	0.88	7.55	7.55	7.55
85.00	610.12	609.55	0.40	0.40	0.40	7.07	7.07	7.07

Tableau II.8 :

D'après la solution analytique, les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls. Notre calcul nous donne des valeurs de l'ordre de 0.001.

II.7.6. RESERVOIR SPHERIQUE A PAROI EPAISSE SOUS PRESSION INTERNE

Nous étudions le problème d'un réservoir sphérique à paroi épaisse soumis à une pression interne uniforme P.

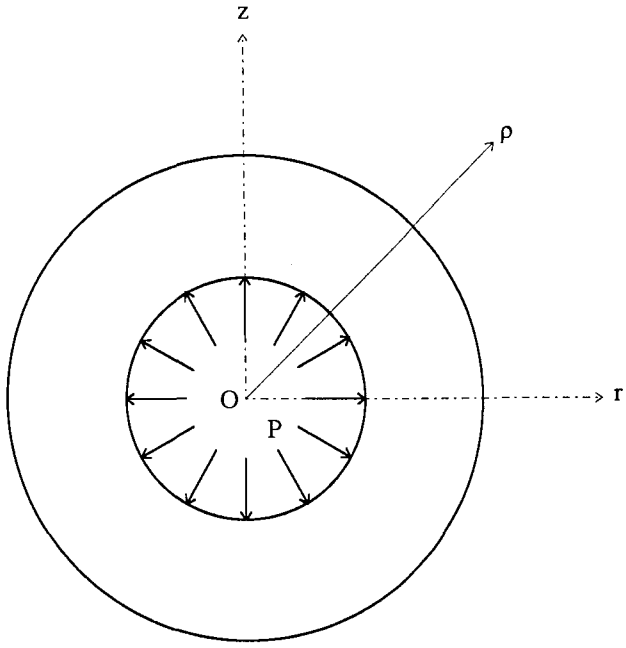


Figure II.34 : Réservoir sphérique à paroi épaisse sous pression interne

Dessin en coupe

II.7.6.1. Données du problème

Ce problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe *Oz*. Nous travaillons donc en coordonnées axisymétriques.

De plus, grâce à la symétrie par rapport à l'axe *Or*, nous limitons l'étude à un quart de plan de coupe.

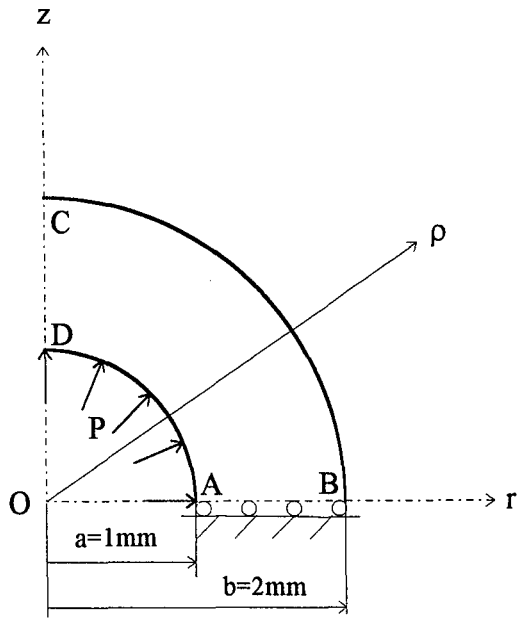


Figure II.35

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 200000MPa$$
$$\nu = 0.25$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} u_z = 0 \\ p_r = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur AB

- $p_\rho = P = 100MPa$ pression radiale uniforme sur AD

La pièce est maillée en 40 éléments linéaires.

Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

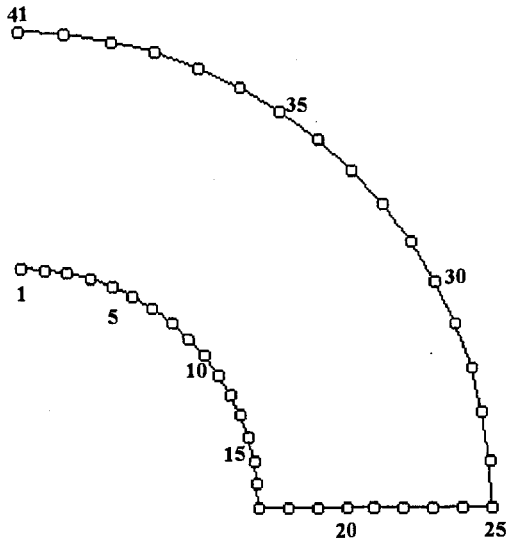


Figure II.36 : Maillage de la pièce

II.7.6.2. Solution analytique

La solution analytique de ce problème est donnée, en coordonnées sphériques, par :

- Contrainte radiale $\sigma_{\rho\rho} = P\dfrac{a^3}{\rho^3}\dfrac{b^3-\rho^3}{b^3-a^3}$
- Contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta} = P\dfrac{a^3}{2\rho^3}\dfrac{b^3+2\rho^3}{b^3-a^3}$
- Déplacement radial $u_\rho = \dfrac{P}{E}\dfrac{a^3}{b^3-a^3}\left[(1-2\nu)\rho+\dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{b^3}{\rho^2}\right]$

II.7.6.3. Résultats

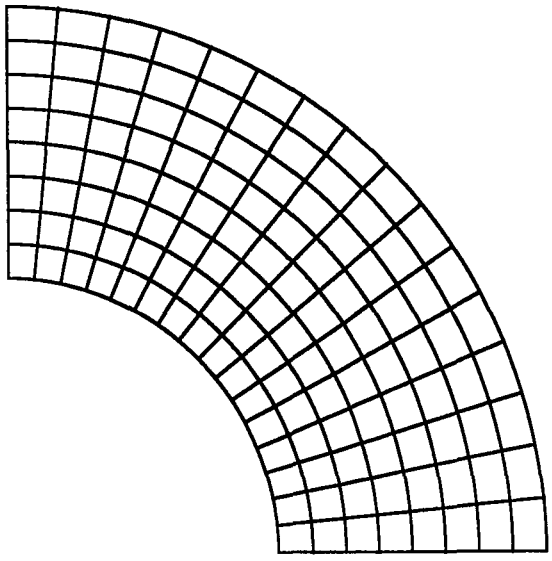
Nous présentons dans le Tableau II.9, les résultats obtenus sur les arcs AD et BC.

Nous comparons nos valeurs numériques à la solution analytique et aux résultats obtenus avec le logiciel **RDM** [1], utilisant la méthode des éléments finis.

---

[1] RDM Yves Debard - Institut Universitaire de Technologie - Département Génie Mécanique et Productique - Le Mans (1992)

Le maillage utilisé par celui-ci est présenté sur la Figure II.37. Sa frontière est maillée de façon identique à notre maillage (Cf. Figure II.36).



128 éléments Q4

Figure II.37 : Maillage RDM

Localisation	Noeud*	u_ρ (10^{-4}mm)			$-\sigma_{\rho\rho}$ (MPa)			$\sigma_{\theta\theta}$ (MPa)		
		Num.	Exact	RDM	Num.	Exact	RDM	Num.	Exact	RDM
Bord	1	3.986	4.000	3.98	99.87	100.00	64.00	70.91	71.43	84.30
intérieur	2 - 16	3.985	4.000	3.96	99.95	100.00	68.00	71.20	71.43	83.70
ρ=a=1 mm	17	3.982	4.000	3.95	98.99	100.00	65.00	69.00	71.43	85.00
Bord	25	1.497	1.500	1.49	0.05	0.00	-2.90	21.33	21.43	19.90
extérieur	26 - 40	1.496	1.500	1.49	0.05	0.00	-2.10	21.30	21.43	20.30
ρ=b=2 mm	41	1.494	1.500	1.50	0.05	0.00	-3.30	21.30	21.43	20.10

* Cf. Figure II.36

Tableau II.9

II.8. CONCLUSION

Le code d'éléments frontières que nous avons mis au point donne des résultats tout à fait satisfaisants.

La précision que nous obtenons, provient essentiellement de la méthode de calcul des intégrales intervenant dans l'assemblage des matrices élémentaires h et g. Cette méthode est analytique en déformations et contraintes planes, numérique en axisymétrie (Cf. § II.4.4.1).

Les résultats en déplacements et en contraintes présentés dans ce chapitre, sont conformes à la solution analytique et en accord avec les valeurs numériques de **Balas**.

Des tests, que nous ne présentons pas ici, ont été réalisés en déformations planes. La précision est identique à celle obtenue en contraintes planes.

L'analyse des exemples II.7.2 et II.7.6 montre que la méthode des éléments frontières donne de meilleurs résultats sur les contraintes à la frontière que la méthode des éléments finis.

Ce constat peut s'expliquer de la manière suivante :

- la méthode des éléments finis est une formulation en déplacements. Les contraintes à la frontière sont obtenues par dérivation des déplacements aux points d'intégration puis extrapolation au bord, ce qui engendre nécessairement une erreur.

- la méthode des éléments frontières est une formulation « mixte ». Nous obtenons ainsi directement la valeur des déplacements et des contraintes à la frontière.

Chapitre III

LES METHODES DE DECOMPOSITION PAR SOUS-DOMAINES

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les méthodes de décomposition par sous-domaines en insistant particulièrement sur celles sans recouvrement.

Ces dernières sont, avec les éléments frontières, à la base de la résolution numérique des problèmes de contact, présentée dans le chapitre V.

III.1. INTRODUCTION

III.1.1. PRESENTATION

L'objectif initial des méthodes de décomposition par sous-domaines est la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique sur des géométries complexes.

Leur principe consiste en un découpage du domaine en petits sous-domaines simples. La solution est alors calculée sur chacun d'eux et ajustée sur les parties communes.

Outre leur application à la résolution de systèmes de grande taille sur des ordinateurs à architecture parallèle, ces méthodes nous ont paru particulièrement intéressantes pour deux raisons :

- elles permettent d'effectuer des calculs sur des maillages fins,

- les méthodes de recouvrement, qui n'ont comme parties communes que les frontières, permettent de réaliser facilement des calculs par les éléments frontières sur des structures mécaniques constituées de plusieurs matériaux. Par conséquent, elles facilitent la gestion et la résolution numériques des problèmes de contact, présentées dans le chapitre V.

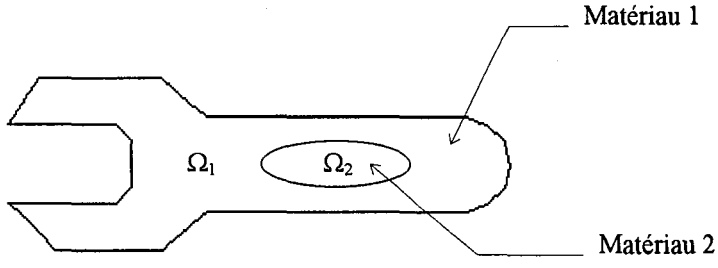


Figure III.1 : Exemple de structure constituée de deux matériaux

Dans ce chapitre, nous présentons un aperçu de ces méthodes selon différentes décompositions :

- avec recouvrement, telle que la méthode de **Schwarz** [1],
- sans recouvrement, ou de partitionnement telles que les méthodes du complément de **Schur** [2].

La décomposition sans recouvrement engendre en particulier deux familles de méthodes :

- celle dite conforme ,pour laquelle la variable calculée à l'interface correspond, en mécanique des solides, à un champ de déplacements,
- celle dite hybride, pour laquelle la variable calculée à l'interface correspond, en mécanique des solides, à un champ de contraintes.

La Figure III.2 résume les différentes méthodes exposées dans ce chapitre.

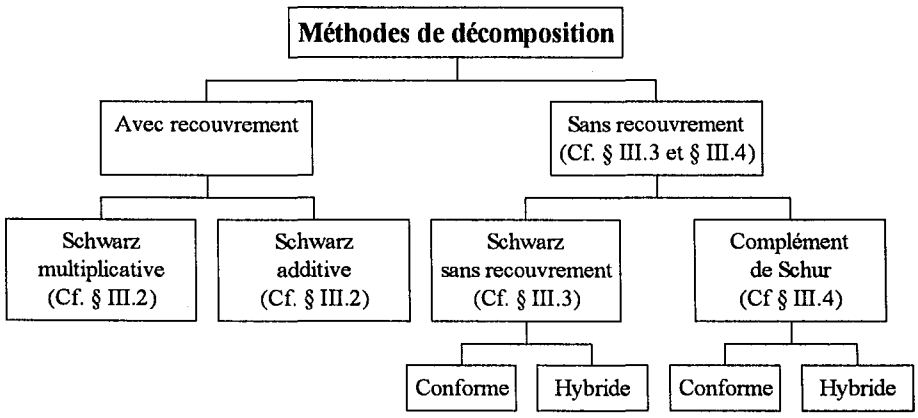


Figure III.2

[1] Voir références [DEC 1] et [DEC 3]

[2] Voir référence [DEC 1]

III.1.2. PROBLEME MODELE

Nous reprenons les notations définies dans le chapitre I.

A titre d'exemple, nous nous proposons de résoudre un problème d'élasticité linéaire type sur un domaine Ω, de frontière Γ.

Celui-ci est défini par les équations suivantes :

$$(\text{Pb III.1}) \qquad \begin{cases} \hat{L}u + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{L}_{ik} = \mu\, \delta_{ik}\, \partial_h^2 \;\; + (\lambda + \mu)\, \partial_k\, \partial_i & \\ u = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

III.2. LA METHODE DE SCHWARZ (AVEC RECOUVREMENT)

III.2.1. PRINCIPE

La méthode de **Schwarz** est une méthode de décomposition avec recouvrement.

Le domaine de calcul Ω est partagé en plusieurs domaines Ω_l ($\Omega = \bigcup_{l=1}^{N} \Omega_l$), chacun d'eux étant constitué d'une zone intérieure et d'une zone de recouvrement.

La solution est alors calculée sur chaque Ω_l et ajustée sur les zones de recouvrement.

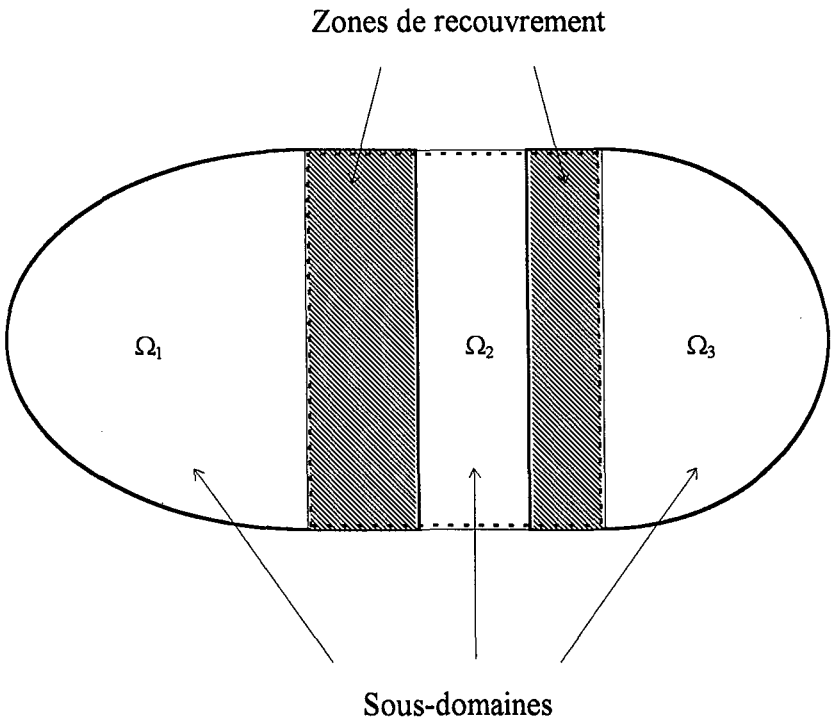


Figure III.3 : Exemple de partage avec recouvrement de Ω

III.2.2. L'ALGORITHME DE SCHWARZ

Proposé en 1870, l'algorithme de **Schwarz**[1] est initialement une technique de décomposition avec recouvrement à deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2. ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$). Il résout le problème (Pb III.1) successivement sur Ω_1 et Ω_2.

Nous notons :

- Γ la frontière de Ω,
- $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, les frontières respectives de Ω_1 et Ω_2,
- $\Gamma_1 = \Gamma \cap \partial\Omega_1$, $\quad \Gamma_2 = \Gamma \cap \partial\Omega_2$,

[1] Voir références [DEC 1] et [DEC 3]

- $\gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, \qquad \gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2,$

- ${}^1u$ (respectivement ${}^2u$), la restriction de la fonction u au domaine Ω_1 (respectivement Ω_2),

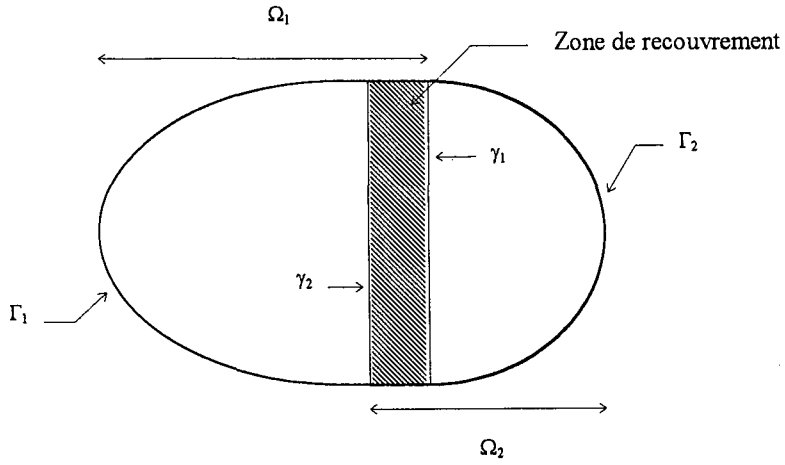


Figure III.4 : Exemple de partage avec recouvrement de Ω en deux sous-domaines

La résolution directe du problème (Pb III.1) est alors remplacée par le schéma itératif suivant :

(Alg III.1)

Tant que $\left|{}^1u^n - {}^2u^n\right|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} > \xi,$

- Calculer ${}^1u^{n+1}$ solution du problème :

$$(1)\quad \begin{cases} \hat{L}\,{}^1u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ {}^1u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_1 \\ {}^1u^{n+1} = {}^2u^n \text{ sur } \gamma_1 \end{cases}$$

- Calculer ${}^2u^{n+1}$ solution du problème :

$$(2)\quad \begin{cases} \hat{L}\,{}^2u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ {}^2u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_2 \\ {}^2u^{n+1} = {}^1u^{n+1} \text{ sur } \gamma_2 \qquad (*) \end{cases}$$

- Dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, nous posons $u^{n+1} = \frac{1}{2}\left[{}^1u^{n+1} + {}^2u^{n+1}\right]$

La convergence de la méthode a été démontrée, entre autres par **P. L. Lions**[1].

Dans la méthode de **Schwarz** « multiplicative » présentée ici, nous résolvons le problème original (Pb III.1) successivement sur les deux sous-domaines : par exemple, le calcul sur le domaine Ω_2 nécessite la mise à jour de la solution sur le domaine Ω_1 afin d'imposer les conditions aux limites de **Dirichlet** (*) .

Cette technique, étendue à N sous-domaines, nous oblige donc à mettre à jour les domaines voisins.

Pour pallier à cet inconvénient, nous pouvons utiliser la méthode de **Schwarz** « additive[2] » qui découple les étapes (1) et (2) dans l'algorithme (Alg III.1).

Il suffit pour cela de remplacer la condition (*) par :

$${}^{2}u^{n+1} = {}^{1}u^{n} \text{ sur } \gamma_2$$

III.3. LA METHODE DE SCHWARZ SANS RECOUVREMENT

La méthode de **Schwarz** avec recouvrement présentée au paragraphe précédent, est facile à mettre en œuvre sur des codes existants, excepté pour la gestion du recouvrement. En effet, il est difficile de transmettre les données d'une frontière à l'autre.

Il a donc été proposé une version sans recouvrement de cette méthode dite de « **Dirichlet - Neumann** [3] ». Elle consiste à choisir Ω_1 et Ω_2 tels que :

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \gamma_{12} = \gamma_{21}$$

---

[1] Voir référence [DEC 4]

[2] Voir référence [DEC 1]

[3] Voir référence [DEC 3]

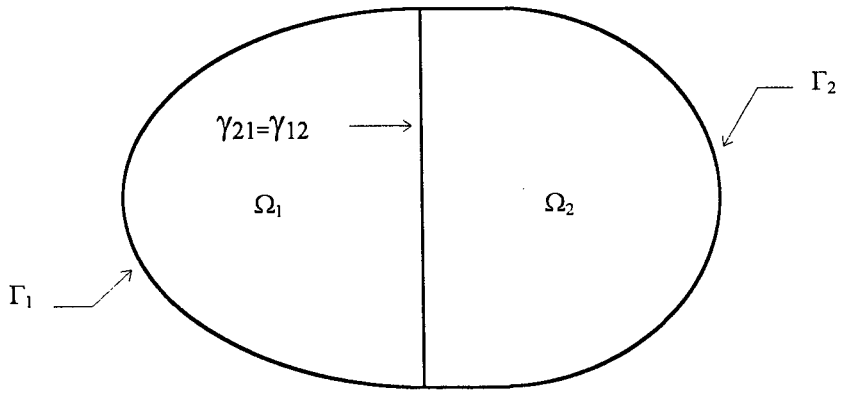


Figure III.5 : Exemple de partage sans recouvrement de Ω en deux sous-domaines

(Alg III.1) est alors remplacé par (Alg III.2).

(Alg III.2)

Initialisation : $\lambda^0 = 0$

Tant que $\left|{}^1u^n - {}^2u^n\right|_{\gamma_{12}} > \xi,$

- Calculer ${}^1u^{n+1}$ solution du problème :

(1)
$$\begin{cases} \hat{L}\,{}^1u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ {}^1u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_1 \\ {}^1u^{n+1} = \lambda^n \text{ sur } \gamma_{12} \end{cases}$$

- Calculer ${}^2u^{n+1}$ solution du problème :

(2)
$$\begin{cases} \hat{L}\,{}^2u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ {}^2u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_2 \\ p\left({}^2u^{n+1}\right) = -p\left({}^1u^{n+1}\right) \text{ sur } \gamma_{21} \\ p(u) \text{ : vecteur des contraintes (Cf. chapitre I)} \end{cases}$$

- $\lambda^{n+1} = (1-\theta)\lambda^n + \theta\,{}^2u^{n+1} \quad 0 < \theta < 1$

Afin de garder la symétrie des calculs sur chaque sous-domaine, il est quelquefois proposé dans la littérature, la version modifiée suivante :

(Alg III.3)

Initialisation : $\lambda^0 = 0$

Tant que $\left| {}^1u^n - {}^2u^n \right|_{\gamma_{12}} > \xi,$

- Calculer ${}^1u^{n+1}$ solution du problème :

$$(1)\quad \begin{cases} \hat{\mathrm{L}}\,{}^1u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ {}^1u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_1 \\ {}^1u^{n+1} = \lambda^n \text{ sur } \gamma_{12} \end{cases}$$

- Calculer ${}^2u^{n+1}$ solution du problème :

$$(2)\quad \begin{cases} \hat{\mathrm{L}}\,{}^2u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ {}^2u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_2 \\ {}^2u^{n+1} = \lambda^n \text{ sur } \gamma_{21} \end{cases}$$

- $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \dfrac{\theta}{2}\left[\mathrm{p}\left({}^1u^{n+1}\right) + \mathrm{p}\left({}^2u^{n+1}\right)\right] \quad 0 < \theta < 1$

λ représente la valeur des déplacements u sur l'interface $\gamma_{12} = \gamma_{21}$.

Dans cette méthode de décomposition, dite conforme, nous imposons la continuité des déplacements à l'interface et nous calculons leurs valeurs de sorte que les contraintes associées soient continues.

A l'inverse, la méthode hybride[1] impose la continuité des contraintes à l'interface et calcule celles-ci de sorte que les déplacements associés soient continus.

Nous présentons, ci-dessous, un algorithme de cette méthode sur une décomposition à deux sous-domaines.

---

[1] Voir référence [CON 1]

(Alg III.4)

Initialisation : $\lambda^0 = 0$

Tant que $\left| p\left({}^1u^n\right) + p\left({}^2u^n\right) \right|_{\gamma_{12}} > \xi,$

- Calculer ${}^1u^{n+1}$ solution du problème :

$$(1)\quad \begin{cases} \hat{L}\,{}^1u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ {}^1u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_1 \\ p\left({}^1u^{n+1}\right) = \lambda^n \text{ sur } \gamma_{12} \end{cases}$$

- Calculer ${}^2u^{n+1}$ solution du problème :

$$(2)\quad \begin{cases} \hat{L}\,{}^2u^{n+1} + f = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ {}^2u^{n+1} = \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_2 \\ p\left({}^2u^{n+1}\right) = -\lambda^n \text{ sur } \gamma_{21} \end{cases}$$

- $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \dfrac{\theta}{2}\left[{}^1u^{n+1} - {}^2u^{n+1}\right] \quad 0 < \theta < 1$

λ représente ici la valeur des contraintes $p(u)$ sur l'interface $\gamma_{12} = \gamma_{21}$.

Remarque

L'algorithme de **Dirichlet - Neumann** (Alg III.2) a une convergence indépendante du maillage, alors que les algorithmes (Alg III.3) et (Alg III.4) sont des algorithmes de **Schur** non préconditionnés dont la convergence est en $O(h)$.

❑

III.4. LES METHODES DU COMPLEMENT DE SCHUR

III.4.1. LA METHODE DU COMPLEMENT DE SCHUR CONFORME

Dans ce paragraphe, nous associons à λ, défini dans l'algorithme (Alg III.2), l'opérateur de **Poincaré-Seklov** (ou du complément de **Schur**).

Nous supposons que le domaine Ω de frontière Γ est partagé en N sous-domaines Ω_l tels que :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{N} \overline{\Omega}_l$
- $\Omega_l \bigcap_{l \neq k} \Omega_k = \{\varnothing\}$

Pour l variant de 1 à N, nous notons :

- $\partial\Omega_l$, la frontière de Ω_l
- $\Gamma_l = \Gamma \cap \partial\Omega_l$
- $\gamma_l = \partial\Omega_l \setminus \Gamma_l$
- $\gamma_{lk} = \gamma_l \cap \gamma_k = \gamma_{kl} \quad (k = 1..N)$
- $\gamma = \bigcup_{l=1}^{N} \gamma_l = \bigcup_{l,k=1}^{N} \gamma_{lk}$
- ${}^{l}u$, la restriction de la fonction u au domaine Ω_l.

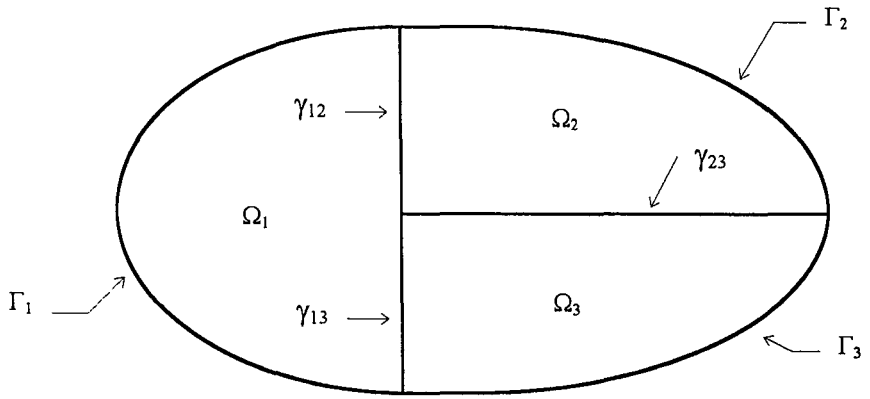


Figure III.6 : Exemple de partage de Ω en trois sous-domaines

Afin d'introduire l'opérateur de **Poincaré-Seklov**, reformulons le problème (Pb III.1) sous une forme équivalente en utilisant les conditions de continuité sur les interfaces γ_{lk}.

Le problème (Pb III.1) est équivalent à :

$$\text{(Pb III.2)} \quad \begin{cases} \hat{L}^l u + f = 0 & \text{dans } \Omega_l \quad \text{(a)} \\ {}^l u = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_l \quad \text{(b)} \quad l,k = 1..N \\ {}^l u = {}^k u & \text{sur } \gamma_{lk} \quad \text{(c)} \quad k > l \\ p\left({}^l u\right) = -p\left({}^k u\right) & \text{sur } \gamma_{lk} \quad \text{(d)} \end{cases}$$

Introduisons maintenant les fonctions ${}^l u_0$ (l variant de 1 à N), solutions du problème suivant :

$$\text{(Pb III.3)} \quad \begin{cases} \hat{L}^l u_0 + f = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^l u_0 = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_l \quad l = 1..N \\ {}^l u_0 = {}^l \lambda & \text{sur } \gamma_l \end{cases}$$

${}^l\lambda$ est une fonction choisie arbitrairement, définie sur γ_l telle que :

$${}^l\lambda\big|_{\gamma_{lk}} = {}^k\lambda\big|_{\gamma_{kl}}$$

Nous posons :

$${}^l v = {}^l u - {}^l u_0 \quad (l=1..N)$$

Les fonctions ${}^l v$ sont alors solutions du problème :

$$\text{(Pb III.4)} \quad \begin{cases} \hat{L}^l v = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^l v = 0 & \text{sur } \Gamma_l \quad l = 1..N \\ {}^l v = {}^l u - {}^l \lambda & \text{sur } \gamma_{lk} \quad k = 1..N \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opérateur de **Poincaré-Seklov**[1] ${}^{l}S$ associé au problème (Pb III.4) et défini sur le domaine Ω_l (l variant de 1 à N).

A un champ de déplacements ${}^{l}v$ sur la frontière γ_l, il associe le vecteur des contraintes $p({}^{l}v)$ selon l'identité :

(III.1) $${}^{l}S({}^{l}v) = p({}^{l}v)$$

où ${}^{l}v$ satisfait $\hat{L}^{l}v = 0$ dans Ω_l, ${}^{l}v = 0$ sur Γ_l, et ${}^{l}v$ donnée sur γ_l.

Nous obtenons alors :

(III.2) $${}^{l}S({}^{l}v)={}^{l}S({}^{l}u-{}^{l}\lambda)={}^{l}S({}^{l}u)-{}^{l}S({}^{l}\lambda) \quad l = 1..N$$

Nous définissons l'opérateur de restriction R_{lk} par :

(III.3) $$R_{lk}\left({}^{l}w\big|_{\gamma_l}\right)={}^{l}w\big|_{\gamma_{lk}}$$

En appliquant la relation (III.3) à $p(v)$, la continuité des contraintes (Equation (d) du problème (Pb III.2)) sur l'interface $\gamma = \bigcup_{l,k=1}^{N}\gamma_{lk}$ s'écrit alors :

(Pb III.5) $$\begin{cases} \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right)p({}^{l}v)+\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right)p({}^{l}v)\right] = \Psi_0 \quad \text{sur } \gamma \\ \Psi_0 = -\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right)p({}^{l}u_0)+\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right)p({}^{l}u_0)\right] \end{cases}$$

---

[1] Voir référence [DEC 1]

En définissant l'opérateur de relèvement ${}^{t}R_{lk}$ par :

$$(\text{III.4})\quad {}^{t}R_{lk}\left({}^{l}w_{|\gamma_{lk}}\right)=\begin{cases}{}^{l}w_{|\gamma_{lk}}\\ 0_{|\gamma_l\setminus\gamma_{lk}}\end{cases}$$

et en utilisant les relations (III.1) et (III.2), nous pouvons alors réécrire le problème (Pb III.5) sous la forme :

$$(\text{Pb III.6})\quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{l}u_{|\gamma_{lk}}\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{l}u_{|\gamma_{kl}}\right)\right]\\ =\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\right]\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{l}u_{|\gamma_{lk}}\right)\ \text{d'après (c)}\\ =\Psi\quad\text{sur }\gamma\\ \Psi=\Psi_0+\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\right]\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{l}\lambda_{|\gamma_{lk}}\right)\end{cases}$$

L'introduction de l'opérateur de **Poincaré-Seklov** ${}^{l}S$ permet donc de ramener la résolution du problème (Pb III.1) à la résolution du problème (Pb III.7) condensé sur l'interface γ.

$$(\text{Pb III.7})\quad \begin{cases}BU=\Psi\quad\text{sur }\gamma\\ B=\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)+\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right]\\ \quad=\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right]\\ U=\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{N}\left({}^{l}u_{|\gamma_{lk}}\right)=u_{|\gamma}\\ \Psi=\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S\left(\sum_{k=1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N}\left({}^{l}\lambda_{|\gamma_{lk}}\right)\right)\right.\\ \qquad\left.-\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right)\left(p\left({}^{l}u_0\right)\right)+\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right)\left(p\left({}^{l}u_0\right)\right)\right)\right]\end{cases}$$

Après avoir initialisé Ψ en résolvant le problème (Pb III.3) portant sur ${}^{l}u_0$, (l variant de 1 à N), la solution du problème (Pb III.7) nous donne les déplacements u sur l'interface γ.

Nous pouvons alors déterminer les fonctions ${}^{l}v$ définies sur Ω_l, en résolvant le problème (Pb III.4).

La solution globale du problème (Pb III.1) est donnée par la relation :

(III.5) ${}^{l}u={}^{l}v+{}^{l}u_0$ dans Ω_l (l=1..N)

La méthode que nous venons d'exposer est dite conforme (λ représente un champ de déplacements sur l'interface).

Nous présentons maintenant la méthode hybride. Nous associons alors à λ un champ de contraintes sur l'interface.

III.4.2. LA METHODE DU COMPLEMENT DE SCHUR HYBRIDE

En reprenant la démarche établie au paragraphe précèdent, introduisons les fonctions ${}^{l}u_0$ (l variant de 1 à N), solutions du problème suivant :

(Pb III.8)
$$\begin{cases} \hat{L}\,{}^{l}u_0 + f = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^{l}u_0 = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_l \\ p\left({}^{l}u_0\right) = {}^{l}\lambda & \text{sur } \gamma_l \end{cases} \qquad l = 1..N$$

${}^{l}\lambda$ est maintenant une fonction choisie arbitrairement, définie sur γ_l telle que :

$${}^{l}\lambda\big|_{\gamma_{lk}} = -{}^{k}\lambda\big|_{\gamma_{kl}}$$

Les fonctions ${}^{l}v$,définies dans le paragraphe III.4.1 sont alors solutions du problème :

$$(\text{Pb III.9}) \quad \begin{cases} \hat{L}\,{}^{l}v = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^{l}v = 0 & \text{sur } \Gamma_l \qquad l = 1..N \\ p\left({}^{l}v\right) = p\left({}^{l}u\right) - {}^{l}\lambda & \text{sur } \gamma_{lk} \quad k = 1..N \end{cases}$$

Remarque

Pour garantir l'unicité des solutions des problèmes (Pb III.8) et (Pb III.9), nous devons supposer que $mes(\Gamma_l)>0$ pour l variant de 1 à N. Cela interdit en particulier le type de décomposition présenté sur la Figure III.7. En effet, seule une condition aux limites de **Neumann** est imposée sur la frontière de Ω_2, puisque celle-ci représente l'interface γ.

Cependant, nous pouvons facilement nous en affranchir en utilisant la méthode d'**Hennizel** [1] (Cf. Chapitre IV) ou la technique développée par **Farhat** et **Roux** [2] qui consiste à supprimer les mouvements rigides.

❑

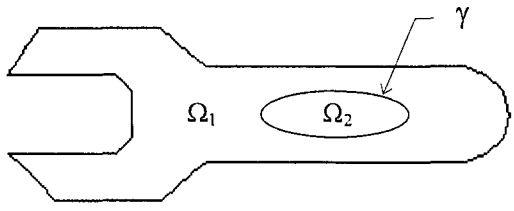


Figure III.7

[1] Voir référence [DEC 1]

[2] Voir référence [DEC 11]

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'inverse de l'opérateur de **Poincaré-Seklov** ${}^{l}S^{-1}$ associé au problème (Pb III.9) et défini sur le domaine Ω_l (l variant de 1 à N).

A un champ de contraintes $p({}^{l}v)$ sur la frontière γ_l, il associe le vecteur des déplacements ${}^{l}v$ selon l'identité :

(III.6) $${}^{l}S^{-1}\left(p({}^{l}v)\right) = {}^{l}v$$

où ${}^{l}v$ satisfait $\hat{L}^{l}v = 0$ dans Ω_l, ${}^{l}v = 0$ sur Γ_l, et $p({}^{l}v)$ donnée sur γ_l.

Nous obtenons alors :

(III.7) $${}^{l}S^{-1}\left(p({}^{l}v)\right) = {}^{l}S^{-1}\left(p({}^{l}u)-{}^{l}\lambda\right) = {}^{l}S^{-1}\left(p({}^{l}u)\right) - {}^{l}S^{-1}\left({}^{l}\lambda\right) \quad l=1..N$$

En appliquant la relation (III.3) à v, la continuité des déplacements (Equation (c) du problème (Pb III.2)) sur l'interface $\gamma = \bigcup_{l,k=1}^{N}\gamma_{lk}$ s'écrit alors :

(Pb III.10) $$\begin{cases} \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}v-\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}v\right]=\Delta_0 \quad \text{sur } \gamma \\ \Delta_0 = -\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{N}\left[\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}u_0-\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}u_0\right] \end{cases}$$

En utilisant les relations(III.4) et (III.7), nous réécrivons le problème (Pb III.10) sous la forme :

(Pb III.11) $$\begin{cases} \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N}p({}^{l}u)\big|_{\gamma_{lk}}\right)-\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N}p({}^{l}u)\big|_{\gamma_{kl}}\right)\right] \\ =\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\right]\left(\sum_{k=l+1}^{N}p({}^{l}u)\big|_{\gamma_{lk}}\right) \quad \text{d'après (d)} \\ =\Delta \quad \text{sur } \gamma \\ \Delta=\Delta_0+\sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{lk}\right)\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N}R_{kl}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{t}R_{kl}\right)\right)\right]\left(\sum_{k=l+1}^{N}{}^{l}\lambda\big|_{\gamma_{lk}}\right) \end{cases}$$

L'introduction de l'opérateur ${}^{l}S^{-1}$ permet donc de ramener la résolution du problème (Pb III.1) à la résolution du problème condensé sur l'interface γ suivant :

(Pb III.12)

$$\begin{cases} B'P = \Delta \quad \text{sur } \gamma \\ B' = \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N} R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N} {}^{t}R_{lk}\right)\right)+\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N} R_{kl}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=l+1}^{N} {}^{t}R_{kl}\right)\right)\right] \\ \quad = \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N} {}^{t}R_{lk}\right)\right] \\ P = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{N}\left(p({}^{l}u)\big|_{\gamma_{lk}}\right) = p(u)\big|_{\gamma} \\ \Delta = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=l+1}^{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} R_{lk}\right){}^{l}S^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N} {}^{t}R_{lk}\right)\left(\sum_{k=l+1}^{N} {}^{l}\lambda\big|_{\gamma_{lk}}\right)\right. \\ \qquad \left.-\left(\left(\sum_{k=l+1}^{N} R_{lk}\right){}^{l}u_0-\left(\sum_{k=l+1}^{N} R_{kl}\right){}^{l}u_0\right)\right] \end{cases}$$

Donc, après avoir initialisé Δ en résolvant le problème (Pb III.8) portant sur ${}^{l}u_0$ (l variant de 1 à N), la solution du problème (Pb III.12) nous donne les contraintes $p(u)$ sur l'interface γ.

Nous pouvons alors déterminer les fonctions ${}^{l}v$ définies sur Ω_l, en résolvant le problème (Pb III.9).

La solution globale du problème (Pb III.1) est donnée par la relation :

(III.8) ${}^{l}u={}^{l}v+{}^{l}u_0$ dans Ω_l (l=1..N)

III.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs méthodes de décomposition.

Les techniques de décomposition sans recouvrement semblent plus faciles à mettre en œuvre que celles avec recouvrement. En effet, elles évitent le difficile transfert de l'information entre les frontières d'une même zone de recouvrement.

Parmi celles-ci, les méthodes du complément de **Schur** nous ont semblé particulièrement intéressantes car elles ramènent la résolution du problème global (Pb III.1) à la résolution d'un problème condensé sur l'interface (Cf. § III.4).

En effet, l'objectif de ce mémoire est d'étudier le contact entre deux solides déformables. Or celui-ci est régi uniquement par des conditions portant sur la zone de contact. Une méthode permettant d'aboutir à la résolution d'un problème condensé sur l'interface semble donc toute indiquée.

Dans le chapitre suivant, nous présentons donc un code basé sur les méthodes du complément de **Schur** conforme et hybride. En particulier, nous mettons en œuvre une variante de la méthode d'**Hennizel** qui couple ces deux techniques.

Chapitre IV

ELABORATION D'UN LOGICIEL DE DECOMPOSITION

Nous consacrons ce chapitre à la mise en œuvre d'une variante de la méthode d'**Hennizel**, introduite dans le chapitre précédent.

IV.1. INTRODUCTION

Nous avons développé un code permettant d'effectuer des calculs sur des structures constituées de plusieurs matériaux, par la méthode des éléments frontières. Ce programme consiste en la mise en œuvre d'une variante de la méthode d'**Hennizel** qui réalise une décomposition de **Schur** conforme sur une partie de l'interface et une décomposition de **Schur** hybride sur la partie complémentaire.

Ce nouveau code s'appuie sur la bibliothèque de programmes présentée dans le chapitre II :

- le maillage des pièces est réalisé avec notre mailleur présenté dans le paragraphe II.5.1,

- la résolution des problèmes d'élasticité linéaire sur chaque sous-domaine est effectuée à l'aide des modules du solveur présenté dans le paragraphe II.5.2.

La variante de la méthode d'**Hennizel** proposée permet de ramener la résolution du problème discrétisé à celle d'un système linéaire portant sur les inconnues à l'interface (Cf. § IV.3.2). Cependant, avant de pouvoir résoudre celui-ci, il convient de créer un maillage des interfaces qui nous permette de transmettre correctement l'information d'un sous-domaine à un autre contigu. Ce point est développé dans le paragraphe suivant.

IV.2. DISCRETISATION DE L'INTERFACE

Nous supposons :

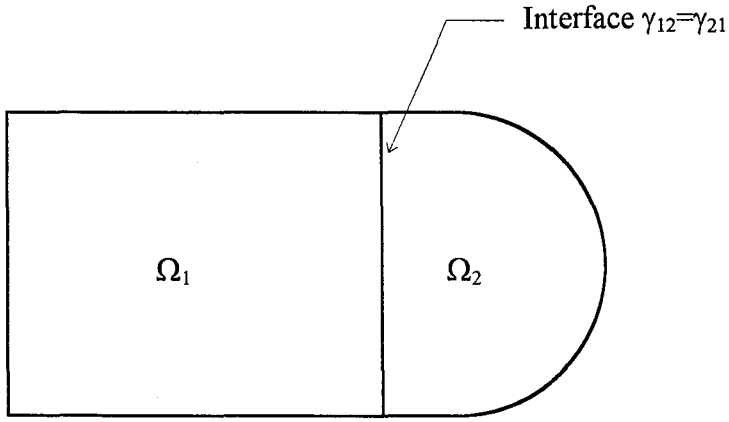
- avoir réalisé une partition du domaine Ω en N sous-domaines Ω_I, sans coins, ni domaines flottants, tels que

$$\Omega = \bigcup_{I=1}^{N} \Omega_I$$

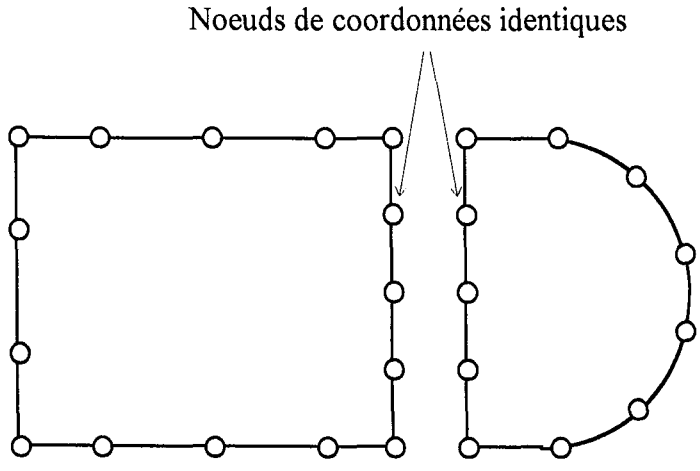
$$\Omega_l \bigcap_{l \neq k} \Omega_k = \{\varnothing\}$$

- avoir maillé ces sous-domaines à l'aide de notre mailleur.

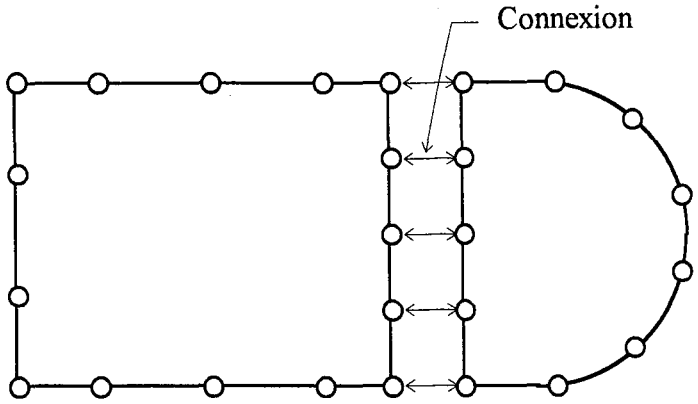
Nous maillons les frontières communes de façon à ce que les noeuds en vis-à-vis coïncident parfaitement lors du recollement des sous-domaines. Nous créons alors une table de connexion reliant chaque noeud de la frontière à son noeud en vis-à-vis. Ceci permet par la suite de transmettre facilement les informations (déplacements, contraintes) de part et d'autre de l'interface.



a) Partage sans recouvrement de Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2



b) Maillage de $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$



c) Création de la table de connexion

Figure IV.1 : Discrétisation de l'interface

IV.3. MISE EN ŒUVRE DE LA VARIANTE DE LA METHODE D'HENNIZEL

La mise en œuvre de la variante de la méthode d'**Hennizel** comporte une difficulté majeure qui est la résolution du problème condensé à l'interface. Nous consacrons les trois paragraphes suivants à celle-ci. Nous reprenons les notations définies dans le chapitre précédent.

IV.3.1. DISCRETISATION DE L'OPERATEUR DE POINCARE-SEKLOV ET DES PROBLEMES A L'INTERFACE

Dans ce paragraphe, nous présentons la discrétisation de l'opérateur de **Poincaré-Seklov** associé au problème (Pb III.4), ainsi que des problèmes (Pb III.7) et (Pb III.12).

L'opérateur ${}^{l}S$ est défini par le problème suivant : (Cf. § III.4)

(Pb IV.1)

$$\begin{cases} \hat{L}\,{}^{l}v = 0 & \text{dans } \Omega_l & \text{(a)} \\ \hat{L}_{ik} = \mu\,\delta_{ik}\,\partial_h^2 + (\lambda+\mu)\,\partial_k\,\partial_i & & \\ {}^{l}v = 0 & \text{sur } \Gamma_l & \text{(b)} \\ {}^{l}S({}^{l}v) = p({}^{l}v) & \text{sur } \gamma_l & \text{(c)} \\ {}^{l}v \text{ donnée sur } \gamma_l & & \\ \Gamma_l \cap \gamma_l = \{\varnothing\} & & \end{cases}$$

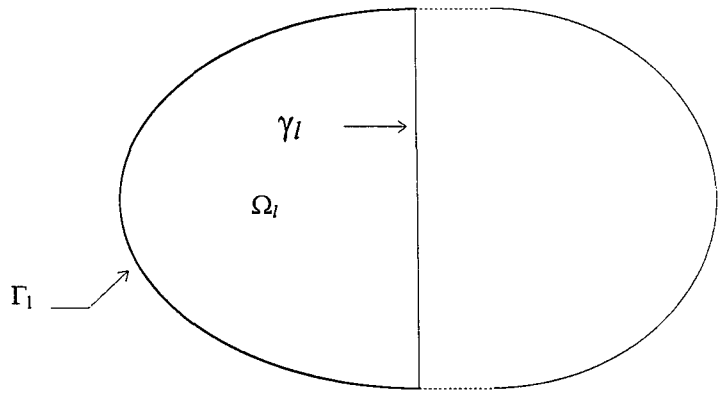


Figure IV.2

Dans ce chapitre, nous notons :

- v_{Γ_l} le vecteur des déplacements sur Γ_l
- p_{Γ_l} le vecteur des contraintes sur Γ_l
- v_{γ_l} le vecteur des déplacements sur γ_l
- p_{γ_l} le vecteur des contraintes sur γ_l

La discrétisation de l'équation (a) par la méthode des éléments frontières (Cf. Chapitre I) s'écrit :

$$(\text{IV.1})\quad \left[{}^{l}H\right]\begin{Bmatrix} v_{\Gamma_l} \\ \cdots\cdots \\ v_{\gamma_l} \end{Bmatrix} = \left[{}^{l}G\right]\begin{Bmatrix} p_{\Gamma_l} \\ \cdots\cdots \\ p_{\gamma_l} \end{Bmatrix}$$

Nous obtenons alors

$$(\text{IV.2})\quad \left\{p_{\gamma_l}\right\} = \left[0 \;\vdots\; \text{Id}\right]\left[{}^{l}G^{-1}\right]\left[{}^{l}H\right]\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \text{Id} \end{bmatrix}\left\{v_{\gamma_l}\right\}$$

ou encore

$$(\text{IV.3})\quad \left\{p_{\gamma_l}\right\} = \left[{}^{l}S\right]\left\{v_{\gamma_l}\right\} \qquad \text{avec } \left[{}^{l}S\right] = \left[0 \;\vdots\; \mathrm{Id}\right]\left[{}^{l}G^{-1}\right]\left[{}^{l}H\right]\begin{bmatrix}0\\ \cdots\\ \mathrm{Id}\end{bmatrix}$$

$\left[{}^{l}S\right]$ est la matrice associée à l'opérateur ${}^{l}S$ défini par le problème (Pb IV.1). Elle n'est pas symétrique puisque l'opérateur est construit à l'aide de la méthode des éléments frontières.

Nous notons $\left[R_{lk}\right]$ et $\left[{}^{t}R_{lk}\right]$, les matrices associées aux opérateurs R_{lk} et ${}^{t}R_{lk}$.

La discrétisation du problème (Pb III.7) aboutit alors au système linéaire suivant, défini sur l'interface γ :

$$(\text{IV.4})\quad [B]\left\{u_{\gamma}\right\} = \{\Psi\}$$

avec

$$[B] = \sum_{l=1}^{N}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\left[R_{lk}\right]\right)\left[{}^{l}S\right]\left(\sum_{k=1}^{N}\left[{}^{t}R_{lk}\right]\right)\right)$$

De même, la discrétisation du problème (Pb III.12) aboutit au système linéaire suivant, défini sur l'interface γ :

$$(\text{IV.5})\quad \left[B'\right]\left\{p_{\gamma}\right\} = \{\Delta\}$$

avec

$$\left[B'\right] = \sum_{l=1}^{N}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\left[R_{lk}\right]\right)\left[{}^{l}S^{-1}\right]\left(\sum_{k=1}^{N}\left[{}^{t}R_{lk}\right]\right)\right)$$

IV.3.2. VARIANTE DE LA METHODE D'HENNIZEL

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi :

- le système linéaire (IV.4), relatif à la mise en œuvre de la méthode du complément de **Schur** conforme,

- le système linéaire (IV.5), relatif à la mise en œuvre de la méthode du complément de **Schur** hybride.

Cependant, afin d'utiliser cette dernière, nous avons montré (Cf. remarque du paragraphe III.4.2) qu'il nous fallait supposer que $mes(\Gamma_l) > 0$ pour l variant de 1 à N. Cela interdit, en particulier, le type de décomposition présentée sur la figure III.7.

Pour pallier à cet inconvénient, nous pouvons utiliser la technique développée par **Farhat** et **Roux** [1], consistant à supprimer les mouvements rigides.

Pour notre part, nous préférons employer la méthode d'**Hennizel** [2] ou plutôt une variante de la méthode d'**Hennizel** (puisque dans le problème du contact (Cf. chapitre V), nous n'avons que la continuité des contraintes mais pas celle des déplacements à l'interface) qui couple les méthodes du complément de **Schur** conforme et hybride,. En effet, cette méthode consiste à remplacer, sur chaque sous-domaine, la résolution d'un problème avec conditions aux limites de **Dirichlet** (méthode conforme) ou de **Neumann** (méthode hybride) sur l'interface, par la résolution d'un problème avec conditions aux limites mixtes de **Dirichlet - Neumann** sur l'interface.

Le principe de cette technique peut être résumé de la façon suivante : nous décomposons l'interface γ en deux parties γ_d et γ_c. Sur γ_d (respectivement γ_c), nous imposons la continuité des déplacements (méthode conforme), (respectivement des contraintes - méthode

---

[1] Voir référence [DEC 11]

[2] Voir référence [DEC 1]

hybride) de telle sorte que les problèmes (Pb III.8) et (Pb III.9) avec conditions aux limites mixtes de **Dirichlet - Neumann** sur l'interface γ_{lk} aient des solutions uniques.

En reprenant une démarche identique à celle établie au paragraphe III.4, l'imposition de la continuité des déplacements sur γ_d (respectivement des contraintes sur γ_c) aboutit à la résolution du système linéaire suivant, défini sur l'interface γ :

(IV.6) $[K]\{Y\} = \{F\}$

K est une matrice non symétrique et non définie positive.

Ce système peut être résolu par une méthode directe qui impose le calcul des matrices $\left[{}^{l}S\right]$ et $\left[{}^{l}S^{-1}\right]$, nécessaires à la construction de $[K]$. Cependant, ces opérations sont difficiles à réaliser et coûteuses en temps.

Nous préférons donc employer une méthode itérative du type GMRES pour laquelle nous n'avons pas besoin de connaître la matrice $[K]$, mais simplement le produit $[K]\{\widetilde{Y}\} = [K]\begin{Bmatrix} \widetilde{u}|_{\gamma_d} \\ \widetilde{p}|_{\gamma_c} \end{Bmatrix}$.

L'algorithme (Alg IV.1) permet de calculer ce produit $[K]\{\widetilde{Y}\}$.

L'initialisation du second membre *{F}* est décrite par l'algorithme (Alg IV.2).

(Alg IV.1)

Etape n°1

Nous résolvons les problèmes d'élasticité linéaire suivant :

$$(\text{Pb IV.2}) \quad \begin{cases} \hat{L}^{l}u = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ \hat{L}_{ik} = \mu\,\delta_{ik}\,\partial_h^2 + (\lambda+\mu)\,\partial_k\,\partial_i & \\ {}^{l}u = 0 & \text{sur } \Gamma_l \\ {}^{l}u = \tilde{u} & \text{sur } \gamma_{lk} \cap \gamma_d \quad l,k = 1..N \\ p({}^{l}u) = \tilde{p}.n & \text{sur } \gamma_{lk} \cap \gamma_c \\ n : \text{normale sortante à } \gamma_{lk} \cap \gamma_c & \\ (\gamma_l = \bigcup_{k=1}^{N} \gamma_{lk}) & \end{cases}$$

Nous obtenons $p({}^{l}u)$ (resp. ${}^{l}u$) sur $\gamma_{lk} \cap \gamma_d$ (resp. sur $\gamma_{lk} \cap \gamma_c$)

Etape n°2

Le produit $[K]\{\tilde{Y}\}$ est alors donné par la relation :

$$(\text{IV.7}) \quad [K]\{\tilde{Y}\} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=l+1}^{N} \left(\left(p({}^{l}u)\big|_{\gamma_{lk} \cap \gamma_d} + p({}^{k}u)\big|_{\gamma_{kl} \cap \gamma_d} \right) + \left({}^{l}u\big|_{\gamma_{lk} \cap \gamma_c} - {}^{k}u\big|_{\gamma_{kl} \cap \gamma_c} \right) \right)$$

(Alg IV.2)

Etape n°1

Nous résolvons les problèmes d'élasticité linéaire suivant :

$$(\text{Pb IV.3})\quad \begin{cases} \hat{L}^l u_0 + f = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ \hat{L}_{ik} = \mu\,\delta_{ik}\,\partial_h^2 + (\lambda+\mu)\,\partial_k\,\partial_i & \\ {}^l u_0 = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_l \\ {}^l u_0 = 0 & \text{sur } \gamma_{lk} \cap \gamma_d \quad l,k = 1..N \\ p({}^l u_0) = 0 & \text{sur } \gamma_{lk} \cap \gamma_c \\ n : \text{normale sortante à } \gamma_{lk} \cap \gamma_c & \\ (\gamma_l = \bigcup_{k=1}^{N} \gamma_{lk}) & \end{cases}$$

Nous obtenons $p({}^l u_0)$ (resp. ${}^l u_0$) sur $\gamma_{lk} \cap \gamma_d$ (resp. sur $\gamma_{lk} \cap \gamma_c$)

Etape n°2

Le second membre $\{F\}$ est alors donné par la relation :

$$(\text{IV.8})\quad \{F\} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=l+1}^{N} \left(\left(p({}^l u_0)\big|_{\gamma_{lk} \cap \gamma_d} + p({}^k u_0)\big|_{\gamma_{kl} \cap \gamma_d} \right) + \left({}^l u_0\big|_{\gamma_{lk} \cap \gamma_c} - {}^k u_0\big|_{\gamma_{kl} \cap \gamma_c} \right) \right)$$

IV.3.3. RESOLUTION DU PROBLEME A L'INTERFACE PAR L'ALGORITHME DU GMRES

IV.3.3.1. Principe

Nous devons donc résoudre le système linéaire (IV.6):

$$[K]\{Y\} = \{F\}$$

$[K]$ étant construite à l'aide des méthodes des éléments frontières et d'**Hennizel**, elle

est non symétrique et non définie positive. Nous proposons donc de résoudre ce système par l'algorithme du GMRES[1] (Generalized Minimal Residual Method).

Son principe s'appuie sur celui du gradient conjugué.

L'algorithme du gradient conjugué s'applique à des matrices symétriques définies positives. Il consiste à minimiser la fonctionnelle J, définie sur $\Re^n$ par :

$$J(y) = \frac{1}{2}\langle Ky, y\rangle - \langle F, y\rangle$$

La solution y^n, obtenue à l'itération n, réalise le minimum de J sur l'espace affine $y_0 + K_n$. K_n est l'espace de **Krylov** défini par :

$$K_n = Vect\{r^0, Kr^0, \ldots, K^{n-1}r^0\} = Vect\{r^0, r^1, \ldots, r^{n-1}\} = Vect\{h^0, h^1, \ldots, h^{n-1}\}$$

r^i désigne le résidu à l'étape i de l'algorithme ($r^i = F - Ky^i$).

$h^o = r^0, h^1, \ldots, h^{n-1}$ sont les directions de descente successives.

La notation $Vect\{u^0, u^1, \ldots, u^{n-1}\}$ désigne l'espace vectoriel engendré par les n vecteurs u^i.

S'inspirant de cette idée, l'objectif dans l'algorithme du GMRES est de minimiser la norme euclidienne du résidu $\|F - Ky^n\|_2$ dans l'espace $y_0 + K_n$.

La méthode consiste alors à rechercher la solution approchée à l'étape n sous la forme : $y^n = y^0 + z^n$, $z^n \in K_n$. z^n est choisi de façon à minimiser le résidu sur K_n, de telle sorte que :

$$(\text{IV.9})\ \|r^0 - Kz^n\|_2 \leq \|r^0 - Kz\|_2 \quad \forall\, z \in K_n$$

---

[1] Voir référence [DEC 1] et [MAT 6]

Pour cela, nous appliquons, dans un premier temps, l'algorithme d'**Arnoldi** (étape 1 de l'algorithme (Alg IV.3)). Il nous permet en n itérations, de construire une base $\left(v^1, v^2, \ldots, v^{n+1}\right)$ de l'espace de **Krylov** K_{n+1} ainsi qu'une matrice $(n+1)\times n$, notée $\overline{H}^n$, dont les éléments non nuls sont les coefficients h_{ij} générés par cet algorithme. Cette matrice est définie comme suit :

$$(\text{IV.10})\quad \overline{H}^n = \begin{bmatrix} & H^n & \\ 0 \cdots 0 & & h_{(n+1)n} \end{bmatrix} \qquad H^n = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \cdots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{(n-1)n} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de type **Hessenberg**. Elle vérifie la relation :

$$(\text{IV.11})\quad KV^n = V^{n+1}\overline{H}^n$$

V^n : matrice de dimension $\dim(K)\times n$ dont la i-ième colonne est le vecteur de base v^i, i variant de 1 à n ($V^n_{ij} = v^i_j$).

Nous pouvons alors écrire le résidu $r^n = F - Ky^n = r^0 - Kz^n$ sous la forme :

$$(\text{IV.12})\quad r^n = r^0 - KV^n w^n = r^0 - V^{n+1}\overline{H}^n w^n$$

En notant e^{n+1}_k, le k-ième vecteur de base de $\Re^{n+1}$ ($\left(e^{n+1}_k\right)_l = \delta_{kl}$), r^n devient :

$$(\text{IV.13})\quad r^n = V^{n+1}\left(\left\|r^0\right\|_2 e^{n+1}_1 - \overline{H}^n w^n\right)$$

La matrice V^{n+1} étant orthogonale, elle conserve la norme euclidienne, et nous obtenons :

$$(\text{IV.14})\quad \left\|r^n\right\|_2 = \left\|\left\|r^0\right\|_2 e^{n+1}_1 - \overline{H}^n w^n\right\|_2$$

Nous devons alors rechercher y^n telle que :

(IV.15) $y^n = y^0 + V^n w^n$

où $w^n \in \Re^n$ vérifie : $\forall w \in \Re^n, J^n(w^n) \leq J^n(w)$ avec $J^n(w) = \left\| \|r^0\|_2 e_1^{n+1} - \overline{H}^n w \right\|_2$

IV.3.3.2. Algorithme GMRES

L'algorithme de résolution du système linéaire $[K]\{Y\} = \{F\}$ utilisant l'algorithme du GMRES est le suivant :

(Alg IV.3)

Initialisation

y^0 choisi

$r^0 = F - Ky^0$

$v^1 = \dfrac{r^0}{\|r^0\|_2}$

Etape n°1 (Algorithme d'**Arnoldi)**

Pour $j = 1,2,.....$

$h_{ij} = \langle Kv^j, v^i \rangle \quad i = 1,2,...,j$

$\tilde{v}^{j+1} = Kv^j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} v^i$

$h_{(j+1)j} = \|\tilde{v}^{j+1}\|_2$

Si $h_{(j+1)j} = 0$, aller à l'étape 2 $(n = j)$

sinon $v^{j+1} = \dfrac{\tilde{v}^{j+1}}{\|\tilde{v}^{j+1}\|_2}$

Etape n°2

$y^n = y^0 + V^n w^n$

où $w^n \in \Re^n$ vérifie :

$\forall w \in \Re^n, J^n(w^n) \leq J^n(w)$ avec $J^n(w) = \left\| \|r^0\|_2 e_1^{n+1} - \overline{H}^n w \right\|_2$

IV.3.3.3. Algorithme GMRES(*m*)

L'algorithme du GMRES, que nous venons de présenter, converge théoriquement en un nombre d'itérations n au plus égal à la dimension du système N. Cependant, pour des valeurs de n élevées, la taille mémoire (de l'ordre de n N) et le temps de calcul pour le processus d'orthogonalisation (en $O(n^2 N)$) peut devenir prohibitif.

Pour remédier à cette difficulté, l'idée est alors de limiter arbitrairement les itérations à un nombre m fixé à l'avance et de réinitialiser l'algorithme, après chaque groupe de m itérations, jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment petit. Cette version itérative de l'algorithme du GMRES, présentée dans (Alg IV.4), est notée GMRES(m). Nous la retenons pour l'élaboration de notre code.

Remarque

Supposons que K soit diagonalisable, c'est-à-dire que nous puissions écrire $K = X D X^{-1}$ (D, matrice diagonale). Nous pouvons montrer que l'algorithme du GMRES(m) converge pour tout vecteur initial y^0 si m est supérieure à une valeur[1] ne dépendant que des valeurs propres de K et du conditionnement de la matrice de changement de base X. En particulier, cette constante ne dépend pas de la taille N du système à résoudre.

❑

[1] Voir référence [MAT 6]

(Alg IV.4)

Initialisation

y^0 choisi

$r^0 = F - Ky^0 = r^{00}$

Etape n°1 (Algorithme d'**Arnoldi)**

$$v^1 = \frac{r^0}{\|r^0\|_2}$$

Pour $j = 1,2,\ldots,m$

$$h_{ij} = \langle Kv^j, v^i \rangle \quad i = 1,2,\ldots,j$$

$$\tilde{v}^{j+1} = Kv^j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} v^i$$

$$h_{(j+1),j} = \|\tilde{v}^{j+1}\|_2$$

Si $h_{(j+1),j} = 0$, aller à l'étape 2 $(n = j)$

$$\text{sinon } v^{j+1} = \frac{\tilde{v}^{j+1}}{\|\tilde{v}^{j+1}\|_2}$$

$(n = m)$

Etape n°2

$y^n = y^0 + V^n w^n$

où $w^n \in \Re^n$ vérifie :

$\forall w \in \Re^n, J^n(w^n) \leq J^n(w)$ avec $J^n(w) = \left\| \|r^0\|_2 e_1^{n+1} - \overline{H}^n w \right\|_2$

Etape n°3

$r^n = F - Ky^n$

Le test de convergence porte sur l'erreur relative calculée sur le résidu.

Si $\frac{\|r^n\|_2}{\|r^{00}\|_2} < \xi$ (ξ choisi « petit »), le processus s'arrête, sinon

nous retournons à l'étape n°1 en posant : $y^0 = y^n; r^0 = r^n$

IV.4. CODE DE CALCUL

Nous avons développé un code permettant d'effectuer des calculs sur des structures constituées de plusieurs matériaux, par la méthode des éléments frontières. Il met en œuvre la méthode d'**Hennizel**, exposée dans le paragraphe précédent. L'organigramme suivant présente le schéma complet du programme.

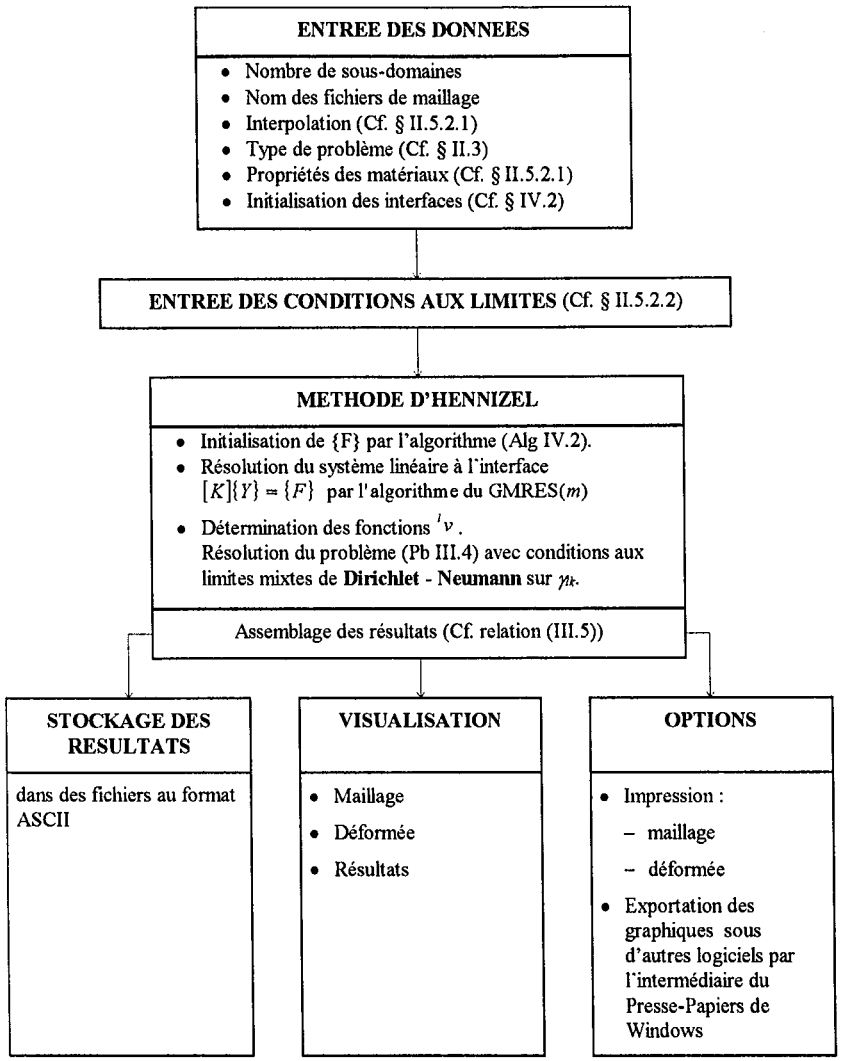


Tableau IV.1

IV.5. VALIDATION DU CODE

Afin de valider notre code de décomposition, nous reprenons le problème de la plaque en traction simple et nous effectuons des calculs sur plusieurs décompositions de celle-ci.

IV.5.1. PRESENTATION DES CALCULS

Nous nous intéressons de nouveau au problème de la plaque en traction simple, traité dans le paragraphe II.7.1.

Ce problème admet une symétrie par rapport à la droite Ox_1 (Cf. Figure II.16). Nous limitons donc l'étude au domaine $\Omega =]-1,1[\times]0,2[$.

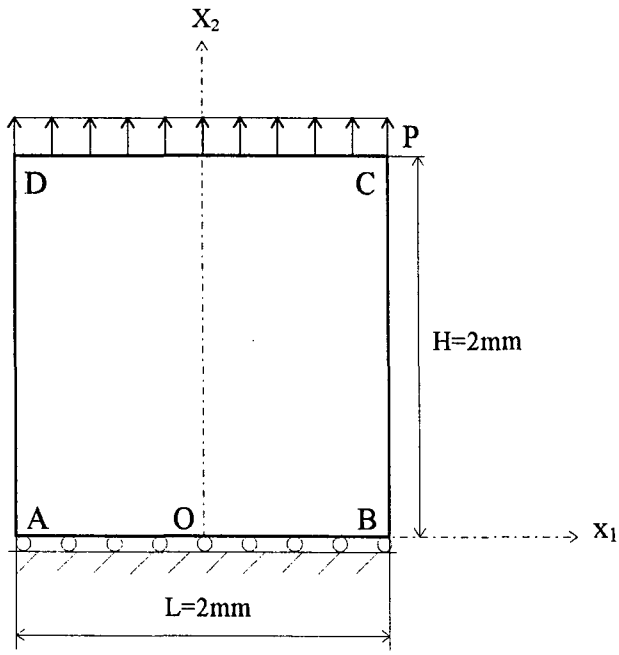


Figure IV.3 : Définition de Ω

Le matériau choisi est défini par :

$$E = 100000 MPa$$
$$\nu = 0.10$$

Les conditions aux limites du problème sont :

- $u_1 = u_2 = 0$ en O
- $\begin{cases} u_2 = 0 \\ p_1 = 0 \end{cases}$ antisymétrie sur AB
- $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = P = 1MPa \end{cases}$ force uniforme sur CD
- Sur les interfaces γ_{lk} : nous imposons la continuité des déplacements (au centre) et des contraintes afin de garantir l'unicité des problèmes (Pb III.8) et (Pb III.9)

Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

Nous fixons le paramètre ξ (Cf. (Alg IV.3)) à 10^{-8}.

Nous désignons par h (respectivement T) la taille de l'élément (respectivement du sous-domaine).

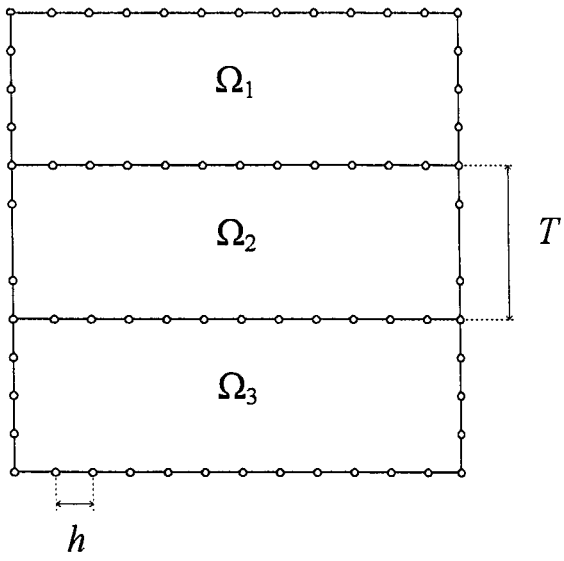


Figure IV.4 : Définition de h et T

Afin d'analyser les performances de l'algorithme GMRES (Cf. (Alg IV.2)), nous réalisons, dans un premier temps, deux séries de tests :

- Tout d'abord, nous fixons h à $\frac{1}{6}$ et nous faisons varier T. Pour cela, nous décomposons le domaine Ω en deux, trois et quatre sous-domaines égaux (Cf. Tableau IV.2).

- Ensuite, nous fixons T à 1 et nous faisons varier h (Cf. Tableau IV.3).

Enfin, nous réalisons une troisième série de tests, validant les performances de l'algorithme GMRES(m) : nous reprenons alors le test n°1 en faisant varier m.

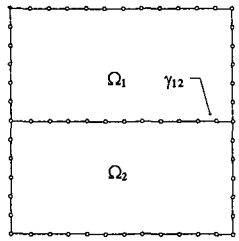
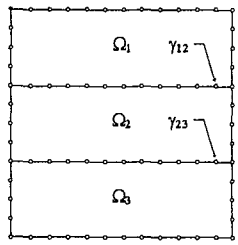
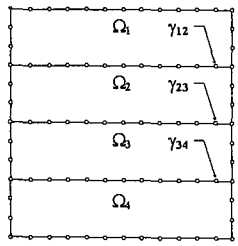
Test	Nombre de domaines	Définition des domaines	Maillage	Nombre d'éléments	T
1	2	$\Omega_1 =]-1,1[\times]1,2[$ $\Omega_2 =]-1,1[\times]0,1[$		2×36	1
2	3	$\Omega_1 =]-1,1[\times \left]\frac{4}{3},2\right[$ $\Omega_2 =]-1,1[\times \left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right[$ $\Omega_3 =]-1,1[\times \left]0,\frac{2}{3}\right[$		3×32	$\frac{2}{3}$
3	4	$\Omega_1 =]-1,1[\times \left]\frac{3}{2},2\right[$ $\Omega_2 =]-1,1[\times \left]1,\frac{3}{2}\right[$ $\Omega_3 =]-1,1[\times \left]\frac{1}{2},1\right[$ $\Omega_4 =]-1,1[\times \left]0,\frac{1}{2}\right[$		4×30	$\frac{1}{2}$

Tableau IV.2 : Présentation de la première série de tests ($h = \frac{1}{6}$)

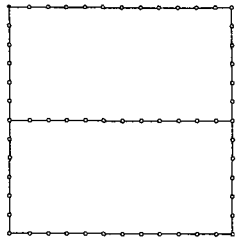
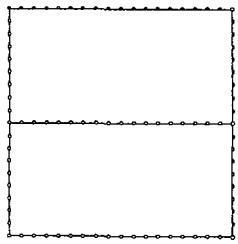
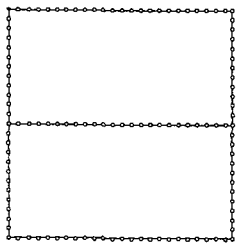
Test	Maillage	Nombre d'éléments	h
4		2×36	$\frac{1}{6}$
5		2×54	$\frac{1}{9}$
6		2×72	$\frac{1}{12}$

Tableau IV.3 : Présentation de la deuxième série de tests ($T = 1$)

IV.5.2. RESULTATS

Nous présentons les résultats à l'interface de nos deux premiers tests dans le Tableau IV.4 et le Tableau IV.5 et nous les comparons à la solution analytique (Cf. § II.7.1.2).

Pour chacun de ces deux tests, nous donnons :

- la mesure de la continuité de la solution (déplacements ou contraintes) à l'interface, définie pour une fonction f par

$$[f] = \max_{i=1..N} \frac{\left\| f_i|_{\gamma_{lk}} - f_i|_{\gamma_{kl}} \right\|_2}{\left\| f_{i\,exact}|_{\gamma_{lk}} \right\|_2} \qquad (IV.20)$$

- l'erreur sur les déplacements u, définie par

$$\max_{i=1..N} \frac{\left\| u_i|_{\gamma_{lk}} - u_{i\,exact}|_{\gamma_{kl}} \right\|_2}{\left\| u_{i\,exact}|_{\gamma_{lk}} \right\|_2} \qquad (IV.21)$$

- les contraintes p. La solution analytique est :

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = P = 1MPa \end{cases}$$

Test	T	$[u]$	$[p]$	Erreur sur u_1	Erreur sur u_2	p_1	p_2
1	1	$1{,}79\ 10^{-3}$	$7{,}00\ 10^{-4}$	$1.82\ 10^{-3}$	$1{,}73\ 10^{-4}$	$0 \pm 1{,}05\ 10^{-4}$	$1 \pm 1{,}66\ 10^{-3}$
2	$\frac{2}{3}$	$2{,}54\ 10^{-2}$	$1{,}50\ 10^{-3}$	$1.87\ 10^{-2}$	$2{,}19\ 10^{-3}$	$0 \pm 1{,}85\ 10^{-3}$	$1 \pm 4{,}79\ 10^{-3}$
3	$\frac{1}{2}$	$4{,}04\ 10^{-2}$	$1{,}00\ 10^{-3}$	$4.03\ 10^{-2}$	$1{,}83\ 10^{-3}$	$0 \pm 2{,}03\ 10^{-3}$	$1 \pm 4{,}53\ 10^{-3}$

Tableau IV.4 : Résultats de la première série de tests

Test	h	$[u]$	$[p]$	Erreur sur u_1	Erreur sur u_2	p_1	p_2
4	$\frac{1}{6}$	$1{,}79\ 10^{-3}$	$7{,}00\ 10^{-4}$	$1.82\ 10^{-3}$	$1{,}73\ 10^{-4}$	$0 \pm 1{,}05\ 10^{-4}$	$1 \pm 1{,}66\ 10^{-3}$
5	$\frac{1}{9}$	$3{,}87\ 10^{-4}$	$6{,}00\ 10^{-5}$	$2{,}43\ 10^{-4}$	$1{,}50\ 10^{-5}$	$0 \pm 2{,}08\ 10^{-5}$	$1 \pm 9{,}00\ 10^{-5}$
6	$\frac{1}{12}$	$1{,}92\ 10^{-4}$	$2{,}00\ 10^{-5}$	$5.68\ 10^{-4}$	$6{,}00\ 10^{-5}$	$0 \pm 2{,}02\ 10^{-5}$	$1 \pm 1{,}18\ 10^{-5}$

Tableau IV.5 : Résultats de la deuxième série de tests

Nous reprenons maintenant le test n° 1 ($h = \frac{1}{6}, T = 1$). Nous résolvons alors le problème par l'algorithme GMRES(m) (Cf. (Alg IV.3)).

Nous traçons sur la Figure IV.5, l'erreur relative calculée sur le résidu en fonction du temps d'exécution (et du nombre d'itérations symbolisées par les points sur la courbe) pour différentes valeurs de m : l'algorithme diverge pour $m<6$. A partir de m égal à 6, il converge d'autant plus vite que m est grand.

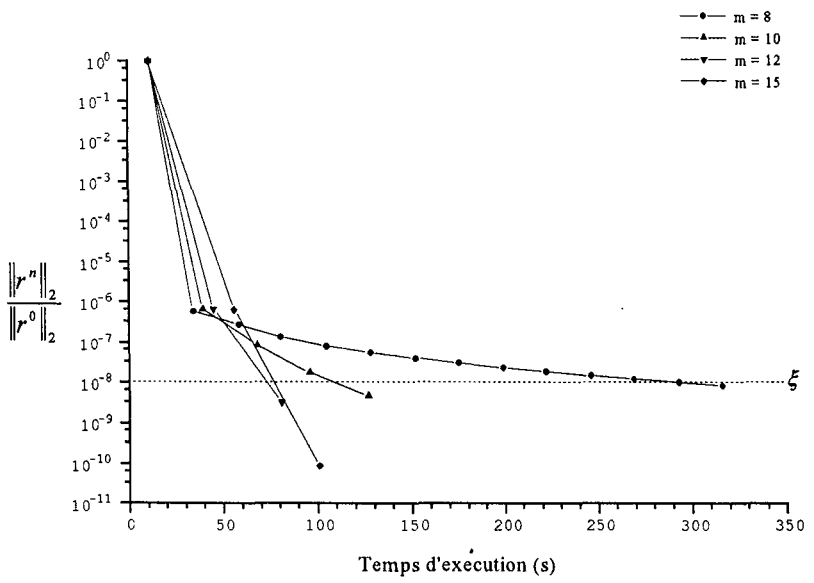


Figure IV.5

IV.5.3. CONCLUSION

L'ensemble des résultats obtenus est très satisfaisant aussi bien au niveau de la continuité de la solution à l'interface, qu'en ce qui concerne la précision sur les déplacements et les contraintes.

L'analyse des résultats, présentés dans le Tableau IV.4 et le Tableau IV.5, montre une dépendance des erreurs par rapport aux paramètres h et T, contrairement à la méthode initiale d'**Hennizel** qui garantit une vitesse de convergence indépendante du pas de discrétisation. Cependant, il nous a fallu modifier légèrement la méthode, puisque nous n'avons pas la continuité des déplacements à l'interface pour un problème de contact (Cf. chapitre V) .

Pour une décomposition donnée, la précision est améliorée lorsque h diminue, c'est à dire lorsque le nombre d'éléments augmente.

Pour une décomposition en quatre sous-domaines, la précision est moins bonne qu'une décomposition en deux ou trois sous-domaines. En effet, plus le nombre de sous-domaines augmente, plus la transmission de l'information d'une interface à l'autre est difficile.

La théorie[1] prévoit cette dégénérescence et confirme une augmentation du nombre d'itérations avec le nombre de sous-domaines.

Dans nos calculs, lorsque le nombre de sous-domaines est supérieur à 6, le processus converge difficilement. La méthode, présentée dans ce chapitre, trouve ici sa limite.

Pour remédier à cette difficulté, il est conseillé d'introduire un maillage grossier[2] du domaine Ω, afin de réinitialiser la solution périodiquement et de minimiser ce phénomène de divergence. Nous n'avons pas mis en œuvre cette technique. En effet, notre objectif dans ce mémoire consiste à étudier le contact entre deux solides déformables. Lors de nos calculs, nous utiliserons donc simplement une technique de décomposition à deux sous-domaines.

---

[1] Voir référence [DEC 1]

[2] Voir référence [DEC 1]

Chapitre V

ETUDE DU CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES ELASTIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions le problème du contact avec frottement entre deux solides déformables à l'aide d'une méthode de décomposition par sous-domaines couplée aux éléments frontières.

V.1. INTRODUCTION

Nous consacrons ce chapitre à la résolution du problème de contact avec frottement entre deux solides déformables.

Pour modéliser le frottement, nous utilisons la loi de **Coulomb** statique. En effet, celle-ci est la plus utilisée en ingénierie mécanique.

Nous avons développé un logiciel de calculs basé sur la méthode du complément de **Schur** (Cf. § III.4), couplée à celle des éléments frontières (Cf. chapitre I).

Il est composé :

- d'un mailleur présenté au paragraphe II.5.1,
- d'un solveur dérivé du code de décomposition présenté dans le chapitre IV.

Il résout :

- le problème du contact bilatéral avec frottement (Cf. § V.3),
  (décollement impossible des noeuds en contact)
- le problème du contact unilatéral avec frottement (Cf. § V.4)
  (décollement possible des noeuds en contact)

Nous l'appliquons à l'étude de l'indentation d'un support :

- par un poinçon plat (Cf. § V.5.1),
- par une bille (Cf. § V.5.2).

V.2. PRESENTATION DU PROBLEME

V.2.1. NOTATIONS

Dans ce chapitre, nous étudions le problème du contact entre deux solides élastiques occupant respectivement :

- un domaine ouvert $\Omega_1 \subset \Re^2$ borné, de frontière $\partial\Omega_1 = \Gamma_{u_1} \oplus \Gamma_{p_1} \oplus \Gamma_{c_1}$,
- un domaine ouvert $\Omega_2 \subset \Re^2$ borné, de frontière $\partial\Omega_2 = \Gamma_{u_2} \oplus \Gamma_{p_2} \oplus \Gamma_{c_2}$.

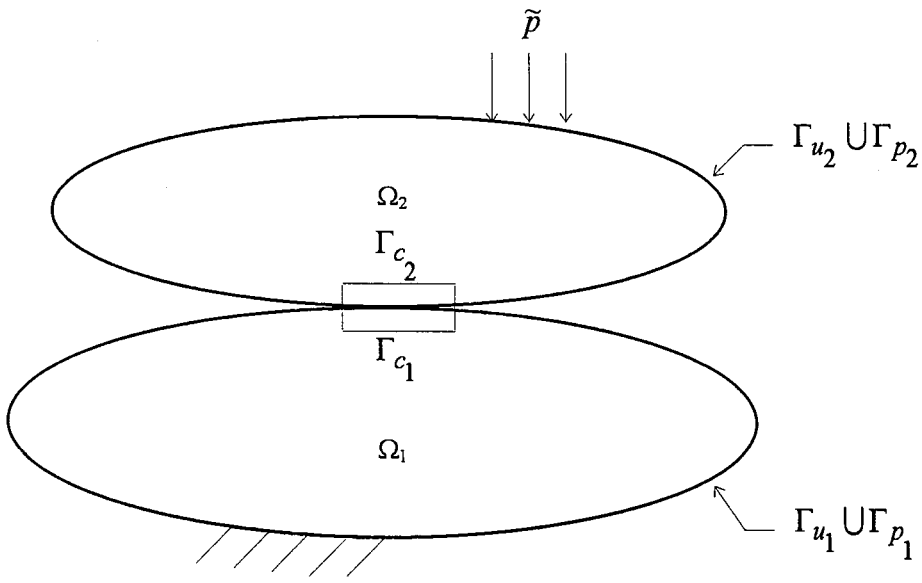


Figure V.1

Nous désignons par :

- Γ_{u_1} (respectivement Γ_{u_2}), la partie de la frontière $\partial\Omega_1$ (respectivement $\partial\Omega_2$) où nous imposons les déplacements,
- Γ_{p_1} (respectivement Γ_{p_2}), la partie de la frontière $\partial\Omega_1$ (respectivement $\partial\Omega_2$) où nous imposons les contraintes,

- $\Gamma_c = \Gamma_{c_1} \cup \Gamma_{c_2}$, la zone de contact potentielle.

Les conditions aux limites imposées sur $\left(\Gamma_{u_l}\right)_{l=1,2}$ et $\left(\Gamma_{p_l}\right)_{l=1,2}$ sont les suivantes :

$$(V.1)\quad \begin{cases} u = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\ p(u) = \tilde{p} & \text{sur } \Gamma_p = \Gamma_{p_1} \cup \Gamma_{p_2} \end{cases}$$

Nous devons maintenant écrire les conditions aux limites sur Γ_c.

V.2.2. CONDITIONS AUX LIMITES SUR Γ_C

V.2.2.1. Définitions

Nous considérons deux points $M_1 \in \Gamma_{c_1}$ et $M_2 \in \Gamma_{c_2}$ en vis-à-vis de coordonnées respectives $\left({}^1x_1, {}^1x_2\right)$ et $\left({}^2x_1, {}^2x_2\right)$, susceptibles d'entrer en contact.

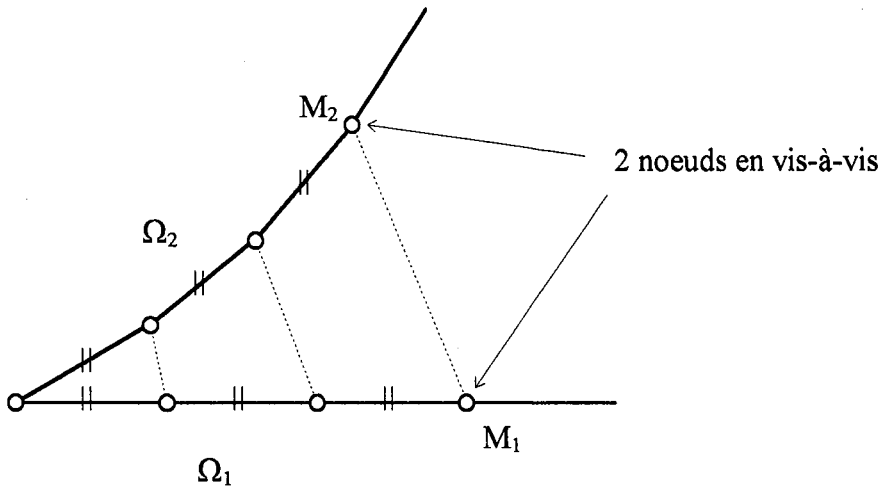


Figure V.2 : Noeuds en vis-à-vis

Nous désignons par ${}^1n = \left({}^1n_1, {}^1n_2\right)$ et ${}^2n = \left({}^2n_1, {}^2n_2\right)$, les normales unitaires, extérieures à Γ_c, en M_1 et M_2.

Nous définissons alors une normale commune[1] $n=(n_1,n_2)$ à Γ_c aux points M_1 et M_2 (Cf. Figure V.3) par :

$$(V.2)\quad n={}^1\overline{n}=-{}^2\overline{n}=\frac{{}^1n-{}^2n}{\left|{}^1n-{}^2n\right|}$$

Nous désignons par d la distance entre ces deux points. Nous mesurons celle-ci le long de la normale commune n.

d est alors définie par la relation :

$$(V.3)\quad d=\left|{}^1x_1-{}^2x_1\right|n_1+\left|{}^1x_2-{}^2x_2\right|n_2\ \geq\ 0$$

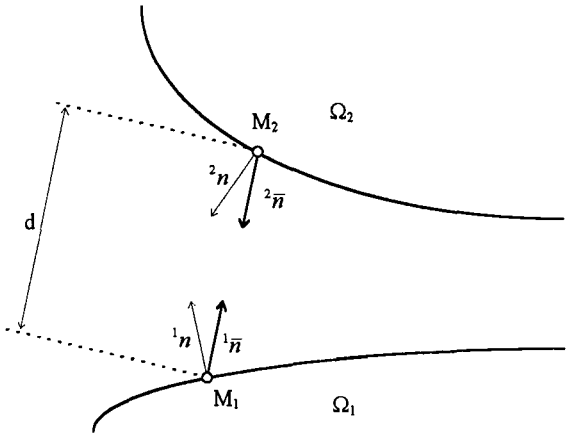


Figure V.3 : Définition de la normale commune

Remarques

Géométriquement, la distance d peut être interprétée de la manière suivante : lorsque d est positive, les deux corps ne sont pas initialement en contact. Ils le sont lorsque d est nulle.

---

[1] Voir référence [CON 3]

La formule (V.3) n'a de sens que si nous pouvons supposer que

$$n \approx {}^1n \approx {}^2n \approx \frac{M_1M_2}{|M_1M_2|}.$$

❑

Nous notons :

- ${}^1u$ (respectivement ${}^2u$), la restriction des déplacements u au domaine Ω_1 (respectivement Ω_2),
- ${}^1p$ (respectivement ${}^2p$), la restriction des contraintes p au domaine Ω_1 (respectivement Ω_2),
- $[u_n] = \langle {}^1u - {}^2u, n \rangle$, le déplacement normal relatif entre M_1 et M_2,
- $[u_t] = {}^1u - {}^2u - [u_n] \cdot n$, le déplacement tangentiel relatif entre M_1 et M_2,
- ${}^1p_n = \langle {}^1p, n \rangle \cdot n$ et ${}^2p_n = \langle {}^2p, n \rangle \cdot n$, les réactions normales en M_1 et M_2,
- ${}^1p_t = {}^1p - {}^1p_n$ et ${}^2p_t = {}^2p - {}^2p_n$, les réactions tangentielles en M_1 et M_2.

Nous imposons sur Γ_C des conditions de contact bilatéral ou unilatéral avec frottement, celui-ci obéissant à la loi de **Coulomb**.

V.2.2.2. Conditions de contact bilatéral

Le contact bilatéral est défini par la relation suivante :

$$(V.4) \quad [u_n] = 0$$

Cette condition signifie que les points en contact restent toujours dans le contact.

V.2.2.3. Conditions de contact unilatéral

Le contact unilatéral est défini par la relation suivante :

$$(V.5)\quad \begin{cases} p_n = {}^1p_n = -{}^2p_n \\ [u_n] - d < 0 \Rightarrow p_n = 0 \\ [u_n] - d = 0 \Rightarrow p_n \leq 0 \end{cases}$$

La condition $[u_n] - d \leq 0$ signifie qu'il n'y a pas de pénétration entre les deux solides :

- Si $[u_n] - d < 0$, il n'y a pas de contact,
- Si $[u_n] - d = 0$, il y a contact.

La condition $p_n \leq 0$ traduit le fait que la contrainte normale doit être compressive pour maintenir en contact les noeuds en vis-à-vis.

V.2.2.4. Conditions de frottement

Les conditions précédentes portent sur les contraintes et les déplacements normaux. Les conditions de frottement font intervenir les contraintes et les déplacements tangentiels.

La loi de **Coulomb** est définie par les relations suivantes :

$$(V.6)\quad \begin{cases} p_n = {}^1p_n = -{}^2p_n \\ p_t = {}^1p_t = -{}^2p_t \\ |p_t| \leq \beta |p_n| \\ \quad \text{avec} \begin{cases} |p_t| < \beta |p_n| \Rightarrow [u_t] = 0 \\ |p_t| = \beta |p_n| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \; [u_t] = -\lambda p_t \end{cases} \end{cases}$$

β : coefficient de frottement supposé constant.

Elle est représentée sur la figure suivante.

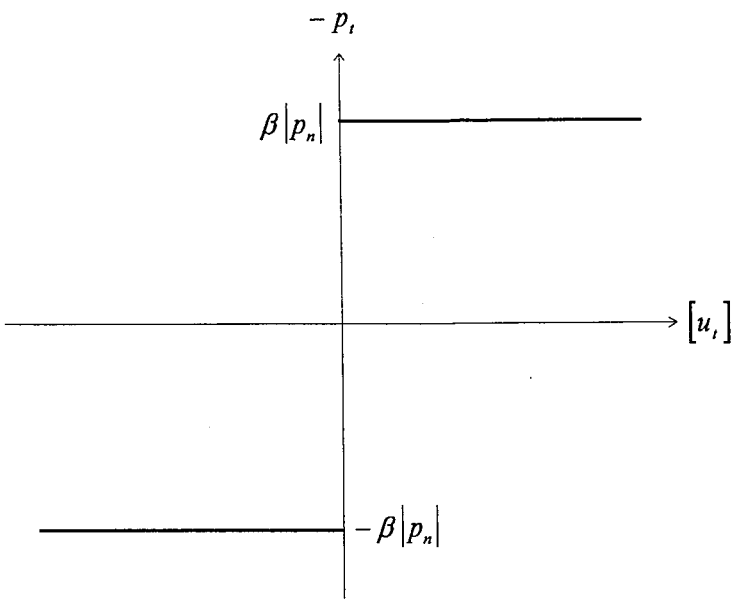


Figure V.4 : Allure de la loi de **Coulomb**

Physiquement, cette loi peut être interprétée de la manière suivante :

- Lorsque $|p_t| < \beta|p_n|$, il n'y a pas de mouvement relatif entre les deux particules M_1 et M_2. p_t, appelée aussi contrainte de frottement, est suffisante pour s'opposer au mouvement relatif des deux solides et assurer l'équilibre statique.

- Lorsque $|p_t| = \beta|p_n|$, il se produit un glissement entre les deux solides. La contrainte de frottement n'est alors plus suffisante pour s'opposer au mouvement.

Remarques

En dynamique, la loi de frottement fait intervenir la vitesse de glissement et non le déplacement tangentiel. Notre étude se limitant au cas statique, nous utilisons ici une formulation écrite en déplacements[1].

[1] Voir référence [MAT 5]

Nous soulignons le caractère rudimentaire de la loi de **Coulomb** en comparaison avec la complexité des problèmes physiques survenant au cours d'un contact avec frottement. Cependant, cette loi est encore la plus utilisée en ingénierie.

La relation (V.5) reste valable lorsque les deux solides ne sont pas en contact. En effet, en l'absence de contact, nous avons $p_n = 0$. La loi de **Coulomb** impose alors $p_t = 0$. Nous obtenons $p=0$ qui représente bien la condition de bord libre.

❑

V.2.3. EQUATIONS DU PROBLEME

Nous pouvons maintenant écrire les équations qui régissent le problème du contact entre deux solides élastiques :

(Pb V.1)

$$
\begin{cases}
\hat{L}u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\
\hat{L}_{ik} = \mu\, \delta_{ik}\, \partial_h^2 + (\lambda + \mu)\, \partial_k\, \partial_i \\
u = \tilde{u} \quad \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\
p(u) = \tilde{p} \quad \text{sur } \Gamma_p = \Gamma_{p_1} \cup \Gamma_{p_2} \\
\text{Conditions sur } \Gamma_c : \\
\quad p_n = {}^1p_n = -{}^2p_n,\ p_t = {}^1p_t = -{}^2p_t \ \Rightarrow\ {}^1p = -{}^2p \\
\quad \bullet \text{ contact bilatéral :} \\
\quad\quad [u_n] = 0 \qquad \text{(toujours en contact)} \\
\quad \bullet \text{ ou contact unilatéral :} \\
\quad\quad [u_n] - d < 0 \ \Rightarrow\ p_n = 0 \qquad \text{(pas de contact)} \\
\quad\quad [u_n] - d = 0 \ \Rightarrow\ p_n \le 0 \qquad \text{(contact)} \\
\quad \bullet \text{ frottement de } \textbf{Coulomb} : \\
\quad\quad |p_t| < \beta |p_n| \ \Rightarrow\ [u_t] = 0 \qquad \text{(adhérence)} \\
\quad\quad |p_t| = \beta |p_n| \ \Rightarrow\ \exists \lambda \ge 0,\ [u_t] = -\lambda\, p_t \qquad \text{(glissement)}
\end{cases}
$$

V.3. RESOLUTION DU PROBLEME DE CONTACT BILATERAL

V.3.1. PROBLEME A L'INTERFACE

Nous nous proposons, dans un premier temps, d'appliquer la méthode du complément de **Schur** à la résolution du problème de contact bilatéral avec frottement entre deux solides élastiques déformables.

La résolution du problème du contact unilatéral est traitée dans le paragraphe V.4.

Le contact bilatéral avec frottement entre deux solides élastiques est décrit par le problème suivant (Cf. § V.1.3) :

(Pb V.2)

$$
\begin{cases}
\hat{L}u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\
\hat{L}_{ik} = \mu\, \delta_{ik}\, \partial_h^2 + (\lambda + \mu)\, \partial_k\, \partial_i \\
u = \tilde{u} \qquad \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\
p(u) = \tilde{p} \qquad \text{sur } \Gamma_p = \Gamma_{p_1} \cup \Gamma_{p_2} \\
\text{Conditions sur } \Gamma_c : \\
\quad {}^1p = -{}^2p \qquad \text{(a)} \\
\quad [u_n] = 0 \qquad \text{(b)} \\
\quad |p_t| \le \beta |p_n| \qquad \text{(c)} \\
\quad \text{avec} \begin{cases} |p_t| < \beta |p_n| \Rightarrow [u_t] = 0 \\ |p_t| = \beta |p_n| \Rightarrow \exists \lambda \ge 0,\ [u_t] = -\lambda p_t \end{cases}
\end{cases}
$$

Pour résoudre ce problème, nous choisissons la méthode du complément de **Schur** hybride (Cf. § III.4.2) puisque nous imposons la continuité des contraintes sur l'interface Γ_c.

Afin de ramener la résolution du problème (Pb V.2) à la résolution d'un problème condensé sur l'interface Γ_c, nous reprenons la démarche présentée dans le paragraphe III.4.2.

Nous définissons ${}^1u_0$ et ${}^2u_0$, solutions du problème :

$$(\text{Pb V.3})\quad \begin{cases} \hat{L}^l u_0 + f = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^l u_0 = \tilde{u} & \text{sur } \Gamma_{u_l} \\ p\left({}^l u_0\right) = \tilde{p} & \text{sur } \Gamma_{p_l} \\ p\left({}^l u_0\right) = {}^l\lambda & \text{sur } \Gamma_{c_l} \end{cases} \qquad l = 1,2$$

${}^l\lambda$ est une fonction choisie arbitrairement, définie sur γ_l telle que :

$${}^1\lambda\Big|_{\Gamma_{c_1}} = -{}^2\lambda\Big|_{\Gamma_{c_2}}$$

Les fonctions ${}^1v$ et ${}^2v$,définies dans le paragraphe III.4.1 sont alors solutions du problème :

$$(\text{Pb V.4})\quad \begin{cases} \hat{L}^l v = 0 & \text{dans } \Omega_l \\ {}^l v = 0 & \text{sur } \Gamma_{u_l} \\ p\left({}^l v\right) = 0 & \text{sur } \Gamma_{p_l} \\ p\left({}^l v\right) = p\left({}^l u\right) - {}^l\lambda & \text{sur } \Gamma_{c_l} \end{cases} \qquad l = 1,.2$$

Nous pouvons décomposer une fonction ${}^l w$ appartenant à Γ_{c_l} selon l'identité :

$$(\text{V.7})\quad \begin{cases} {}^l w = {}^l w_t + {}^l w_n \\ {}^l w_n = \left\langle {}^l w, n \right\rangle \cdot n \\ {}^l w_t = {}^l w - \left\langle {}^l w, n \right\rangle \cdot n \end{cases}$$

En utilisant la définition des fonctions ${}^1v$ et ${}^2v$ et la relation (V.7), nous écrivons :

$$(\text{V.8})\quad {}^l u_n = {}^l v - {}^l v_t + {}^l u_{0n} \quad \text{sur } \Gamma_{c_l} \quad l = 1,2$$

Par définition (Cf. § III.4.2),

$$ {}^{l}v = {}^{l}S^{-1}\left(p\left({}^{l}v\right)\right) = {}^{l}S^{-1}\left(p\left({}^{l}u\right) - {}^{l}\lambda\right) = {}^{l}S^{-1}\left(p\left({}^{l}u\right)\right) - {}^{l}S^{-1}\left({}^{l}\lambda\right) \quad \text{sur } \Gamma_{c_l} \quad l = 1,2 $$

d'où

$$ (\text{V.9}) \quad {}^{l}u_n = {}^{l}S^{-1}\left(p\left({}^{l}u\right)\right) - {}^{l}S^{-1}\left({}^{l}\lambda\right) - {}^{l}v_t + {}^{l}u_{0n} \quad \text{sur } \Gamma_{c_l} \quad l = 1,2 $$

La continuité des déplacements normaux (Equation (b) du problème (Pb V.2)) s'écrit alors :

$$ (\text{V.10}) \quad {}^{1}S^{-1}\left(p\left({}^{1}u\right)\right) - {}^{2}S^{-1}\left(p\left({}^{2}u\right)\right) = {}^{1}S^{-1}\left({}^{1}\lambda\right) - {}^{2}S^{-1}\left({}^{2}\lambda\right) + {}^{1}v_t - {}^{2}v_t - \left({}^{1}u_{0n} - {}^{2}u_{0n}\right) \quad \text{sur } \Gamma_c $$

En remarquant que

$$ (\text{V.11}) \quad {}^{1}v - {}^{2}v = {}^{1}v_t - {}^{2}v_t - \left({}^{1}u_{0n} - {}^{2}u_{0n}\right) $$

l'identité (V.10) devient

$$ (\text{V.12}) \quad \begin{aligned} {}^{1}S^{-1}\left(p\left({}^{1}u\right)\right) - {}^{2}S^{-1}\left(p\left({}^{2}u\right)\right) &= {}^{1}S^{-1}\left({}^{1}\lambda\right) - {}^{2}S^{-1}\left({}^{2}\lambda\right) + {}^{1}v - {}^{2}v \\ &= {}^{1}S^{-1}\left({}^{1}\lambda\right) - {}^{2}S^{-1}\left({}^{2}\lambda\right) + {}^{1}u - {}^{2}u - \left({}^{1}u_0 - {}^{2}u_0\right) \quad \text{sur } \Gamma_c \end{aligned} $$

En utilisant la continuité des contraintes (Cf. équation (a) du problème (Pb V.2)) et la condition de frottement (Cf. équation (c) du problème (Pb V.2)), nous obtenons le problème condensé suivant :

(Pb V.5)
$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in K = \left\{ p \in \Gamma_c, |p_t| \le \beta |p_n| \right\} \text{ telle que} \\ B' p = \Delta + [u] \\ B' = {}^1S^{-1} + {}^2S^{-1} \\ \Delta = \left({}^1S^{-1} + {}^2S^{-1} \right) {}^1\lambda - \left({}^1u_0 - {}^2u_0 \right) \\ [u] = {}^1u - {}^2u = [u_t] \quad \text{d'après (b)} \end{cases}$$

En résumé, après avoir initialisé Δ en résolvant le problème (Pb V.3) portant sur ${}^1u_0$ et ${}^2u_0$, la solution du problème (Pb V.5) nous donne les contraintes *p(u)* sur la zone de contact Γ_c.

Ceci nous permet de déterminer les fonctions ${}^1v$ et ${}^2v$, en résolvant le problème (Pb V.4).

La solution globale du problème (Pb V.2) est donnée par la relation :

$$\begin{cases} {}^1u = {}^1v + {}^1u_0 \\ {}^2u = {}^2v + {}^2u_0 \end{cases}$$

Remarque

Dans sa présentation, le problème (Pb V.5) est similaire au problème (Pb III.12) présenté dans le paragraphe III.4.2. Il se distingue de ce dernier par la présence du terme $[u]$ dans le second membre et par l'appartenance de p à l'ensemble K. Ces modifications en font un problème non linéaire.

❑

V.3.2. RESOLUTION DU PROBLEME A L'INTERFACE AVEC P_N CONNUE

Dans ce paragraphe, nous supposons p_n, la composante normale de la force de réaction connue. Nous introduisons alors la fonction seuil $g = \beta |p_n|$.

V.3.2.1. Problème intermédiaire

Nous montrons maintenant que, sous cette dernière hypothèse, le problème (Pb V.5) est équivalent à un problème d'optimisation avec contrainte.

Théorème

En supposant que g est donnée sur Γ_C, le problème (Pb V.5) est équivalent au problème formel :

(Pb V.6)
$$\begin{cases} \text{Trouver } p' \in K \text{ telle que } f(p') \le f(p) \ \ \forall p \in K \\ f(p) = (B'p - \Delta, B'p - \Delta) \end{cases}$$
$$(f,g) = \int_{\Gamma_C} f \cdot g \ d\Gamma$$

Preuve

Nous pouvons réécrire le problème (Pb V.5) sous la forme suivante :

(Pb V.7)
$$\begin{cases} \text{Trouver } p \text{ telle que} \\ B'p - \Delta = 0 \qquad\qquad \text{si } |p_t| < g \\ B'p - \Delta = [u_t] = -\lambda p_t \quad \text{si } |p_t| = g;\ \lambda \ge 0 \end{cases}$$

$K = \{p \in \Gamma_C, |p_t| \le g\}$ est un ensemble convexe fermé non vide.

Définissons la fonction φ_K par :

$$\varphi_K(-p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est convexe propre.

Nous avons alors

(V.13) $\left(B'p - \Delta\right) \in \partial\varphi_K(-p)$ $\quad \partial\varphi_K$: sous - différentielle de φ_K

$\hat{L}$ (Cf. (Pb V.2)) étant un opérateur symétrique, B' l'est aussi[1].

Ainsi

$${}^tB'\left(B'p - \Delta\right) \in \partial\varphi_K(-B'p)$$

et donc

(V.14) $\left({}^tB'\left(B'p - \Delta\right), p - p'\right) \leq 0 \quad \forall p' \in K$

ou encore

(V.15) $\left({}^tB'B'p, p\right) - \left({}^tB'\Delta, p\right) \leq \left({}^tB'B'p, p'\right) - \left({}^tB'\Delta, p'\right) \quad \forall p' \in K$

Puisque

$$\begin{aligned} 0 \leq \left({}^tB'B'\left(p - p'\right), p - p'\right) &= \left({}^tB'B'p, p\right) + \left({}^tB'B'p', p'\right) - \left({}^tB'B'p, p'\right) - \left({}^tB'B'p', p\right) \\ &= \left({}^tB'B'p, p\right) + \left({}^tB'B'p', p'\right) - 2\left({}^tB'B'p, p'\right) \quad \forall p, p' \in K \end{aligned}$$

---

[1] Voir références [DEC 7] et [DEC 8]

nous avons

$$(V.16)\quad \left({}^{t}B'B'p,p\right)-\left({}^{t}B'\Delta,p\right)\le\frac{1}{2}\left[\left({}^{t}B'B'p,p\right)+\left({}^{t}B'B'p',p'\right)\right]\quad\forall p,p'\in K$$

En injectant la relation (V.16) dans l'inégalité (V.15), nous obtenons

$$(V.17)\quad \frac{1}{2}\left({}^{t}B'B'p,p\right)-\left({}^{t}B'\Delta,p\right)\le\frac{1}{2}\left({}^{t}B'B'p',p'\right)-\left({}^{t}B'\Delta,p'\right)\quad\forall p'\in K$$

ou encore

$$(V.18)\quad \frac{1}{2}\left(B'p,B'p\right)-\left(\Delta,B'p\right)+\frac{1}{2}(\Delta,\Delta)\le\frac{1}{2}\left(B'p',B'p'\right)-\left(\Delta,B'p'\right)+\frac{1}{2}(\Delta,\Delta)\quad\forall p'\in K$$

Cette dernière inégalité démontre le théorème.

❑

Remarque

Pendant la démonstration, nous avons utilisé le fait que l'opérateur B' était un opérateur symétrique. Cependant, la matrice $\left[B'\right]$, obtenue lors de la discrétisation de cet opérateur par la méthode des éléments frontières, ne l'est pas. Néanmoins, $\left[S^{l}\right]$ (Cf. formules IV.3 et IV.5) approche un opérateur continu symétrique défini positif, de telle sorte que la non symétrie de $\left[B'\right]$ est suffisamment faible pour ne pas être remarquée.

❑

V.3.2.2. Algorithme de résolution avec p_n connue

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un algorithme de résolution du problème :

$$\min_{y \in Y} \|KY - F\|_2$$

Notre but ici est de résoudre le problème (Pb V.6),

$$\min_{p \in K} \|B' p - \Delta\|_2 \text{ avec } K = \left\{ p \in \Gamma_c, |p_t| \leq g \right\}$$

Il ne diffère du précédent que par la contrainte $p \in K$.

Afin de résoudre ce problème avec contrainte, nous adaptons la méthode d'optimisation sans contrainte, présentée dans le paragraphe IV.3.3 en la modifiant le moins possible. Pour cela, nous projetons, à chaque itération, p sur l'ensemble K de telle sorte que la nouvelle valeur de p appartienne bien à l'ensemble des solutions.

L'algorithme de résolution du problème (Pb V.6) suivant s'appuie donc sur l'algorithme du GMRES(m), présenté dans le paragraphe IV.3.3.3.

(Alg V.1)

Initialisation

p^0 choisi

$r^0 = \Delta - B' p^0$

Etape n°1 (Algorithme d'**Arnoldi)**

$$v^1 = \frac{r^0}{\|r^0\|_2}$$

Pour $j = 1,2,\ldots,m$ (Cf. remarque suivante sur m)

$$h_{ij} = \langle B' v^j, v^i \rangle \quad i = 1,2,\ldots,j$$

$$\tilde{v}^{j+1} = B' v^j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} v^i$$

$$h_{(j+1),j} = \|\tilde{v}^{j+1}\|_2$$

Si $h_{(j+1),j} = 0$, aller à l'étape 2 $(n = j)$

$$\text{sinon } v^{j+1} = \frac{\tilde{v}^{j+1}}{\|\tilde{v}^{j+1}\|_2}$$

$(n = m)$

Etape n°2

$p^n = p^0 + V^n w^n$

où $w^n \in \Re^n$ vérifie :

$\forall w \in \Re^n, J^n(w^n) \leq J^n(w)$ avec $J^n(w) = \left\| \|r^0\|_2 e_1^{n+1} - \overline{H}^n w \right\|_2$

Etape n°3

Si $p^n \notin K$ alors $p^n = proj_K(p^n)$

Le test de convergence porte sur l'erreur relative calculée sur les contraintes.

Si $\dfrac{\|p^{n+1} - p^n\|_2}{\|p^n\|_2} < \xi$ (ξ choisi « petit »), le processus s'arrête,

sinon nous retournons à l'étape n°1 en posant :

$p^0 = p^n ; r^0 = \Delta - B' p^n$

$proj_K(p)$ = projection de p sur la frontière de K

Remarques

Le test de convergence, défini dans Alg (IV.3) n'est plus valable. En effet, le résidu calculé ici ne tend plus vers 0, mais vers *[u]* (Cf. (Pb V.5)). Nous sommes donc amenés à utiliser un nouveau test de convergence, calculé à partir des contraintes p.

En théorie, nous devons projeter p à chaque itération sur l'ensemble K, c'est-à-dire imposer la valeur de m à 1. En pratique, cela s'est avéré quelquefois impossible car l'algorithme divergeait. Il nous alors fallu fixer m à 2 ou 3. Cette divergence s'explique par le fait que m doit être supérieure à une variable ne dépendant que des valeurs propres de K et du conditionnement de la matrice de changement de base X (Cf. remarque du paragraphe IV.3.3.3).

❑

V.3.3. RESOLUTION DU PROBLEME A L'INTERFACE

Dans ce paragraphe, nous présentons la résolution du problème à l'interface (Pb V.5) par une méthode d'approximations successives[1] portant sur la fonction seuil $g = \beta |p_n|$.

A chaque itération, nous résolvons le problème intermédiaire (Pb V.6), c'est-à-dire le problème (Pb V.5) avec g fixé.

La résolution du problème intermédiaire a fait l'objet du paragraphe précédent.

---

[1] Voir référence [CON 1]

Le schéma général de cet algorithme est le suivant :

(Alg V.2)

Initialisation

$g^0 = 0$

Nous résolvons le problème intermédiaire (Pb V.6)

avec g^0 fixé correspondant à la résolution du problème

de contact sans frottement.

Nous obtenons p_n^1 et nous posons $g^1 = \beta \left| p_n^1 \right|$.

Pour *n*=2,3, ...

Nous supposons g^{n-1} connue.

Nous résolvons le problème intermédiaire (Pb V.6)

avec g^{n-1} fixé.

Nous obtenons p_n^n et nous posons $g^n = \beta \left| p_n^n \right|$.

Remarque

Le test de convergence porte ici sur l'erreur relative calculée sur g. Il est défini par :

(V.19) $\dfrac{\left\| g^{n+1} - g^n \right\|_2}{\left\| g^n \right\|_2} < \xi$ (ξ choisi « petit »),

❑

V.3.4. CALCUL DU SIGNE DE LA CONTRAINTE TANGENTIELLE

Dans les équations (V.6) définissant la loi de **Coulomb**, nous pouvons définir deux modes de contact :

- le mode adhérant correspondant à $|p_t| < \beta |p_n|$. Il se traduit par les équations :

(V.20) ${}^1p_t + {}^2p_t = 0$, ${}^1p_n + {}^2p_n = 0$, $[u_t] = 0$, $[u_n] = 0$.

- le mode glissant correspondant à $|p_t| = \beta |p_n|$. Il se traduit par les équations :

(V.21) ${}^1p_t + {}^2p_t = 0$, ${}^1p_n + {}^2p_n = 0$, $p_t = \pm \beta p_n$, $[u_n] = 0$

Dans ce dernier cas, une difficulté apparaît. En effet, pour imposer le signe de la contrainte tangentielle p_t, il nous faut connaître la direction de glissement relatif $[u_t]$ (Cf. équation (V.6)). Or, celle-ci est a priori une inconnue du problème puisqu'à chaque itération de l'algorithme (Cf. (Alg V.2)) nous ne calculons que p^n.

Afin de la déterminer, diverses techniques sont employées. Elles consistent essentiellement à construire un schéma itératif traitant les différentes possibilités quant au signe de p_t. Ces méthodes sont généralement délicates à mettre en œuvre et leur convergence est hasardeuse.

Pour notre part, nous préférons la technique, développée par **Man et al.** [1], consistant à déterminer la direction de $[u_t]$ avant la résolution proprement dite du problème de contact avec frottement.

---

[1] Voir référence [CON 3]

En effet, considérons le problème sans frottement. En posant β=0, les équations (V.21) deviennent :

(V.22) ${}^1p_t = {}^2p_t = 0$, ${}^1p_n + {}^2p_n = 0$, $[u_n] = 0$.

Une fois ce problème résolu, nous pouvons déterminer le signe de p_t grâce à la direction de glissement relatif $[u_t]$, obtenue dans le contact.

En effet, d'après la loi de **Coulomb** (V.6), lorsqu'il y a du frottement ($\beta \neq 0$), la contrainte tangentielle p_t doit s'opposer au mouvement relatif, défini par $[u_t]$. Or, pour un même problème, qu'il y ait frottement ou non, $[u_t]$ garde le même signe. Il est simplement plus grand dans le deuxième cas.

Nous pouvons donc choisir pour le signe de p_t, l'opposé du signe de $[u_t]$, obtenu sans frottement. Les conditions (V.21) sont alors complètement définies pour résoudre le problème avec frottement.

V.3.5. ORGANIGRAMME

L'organigramme suivant présente le schéma complet de résolution du problème de contact bilatéral avec frottement.

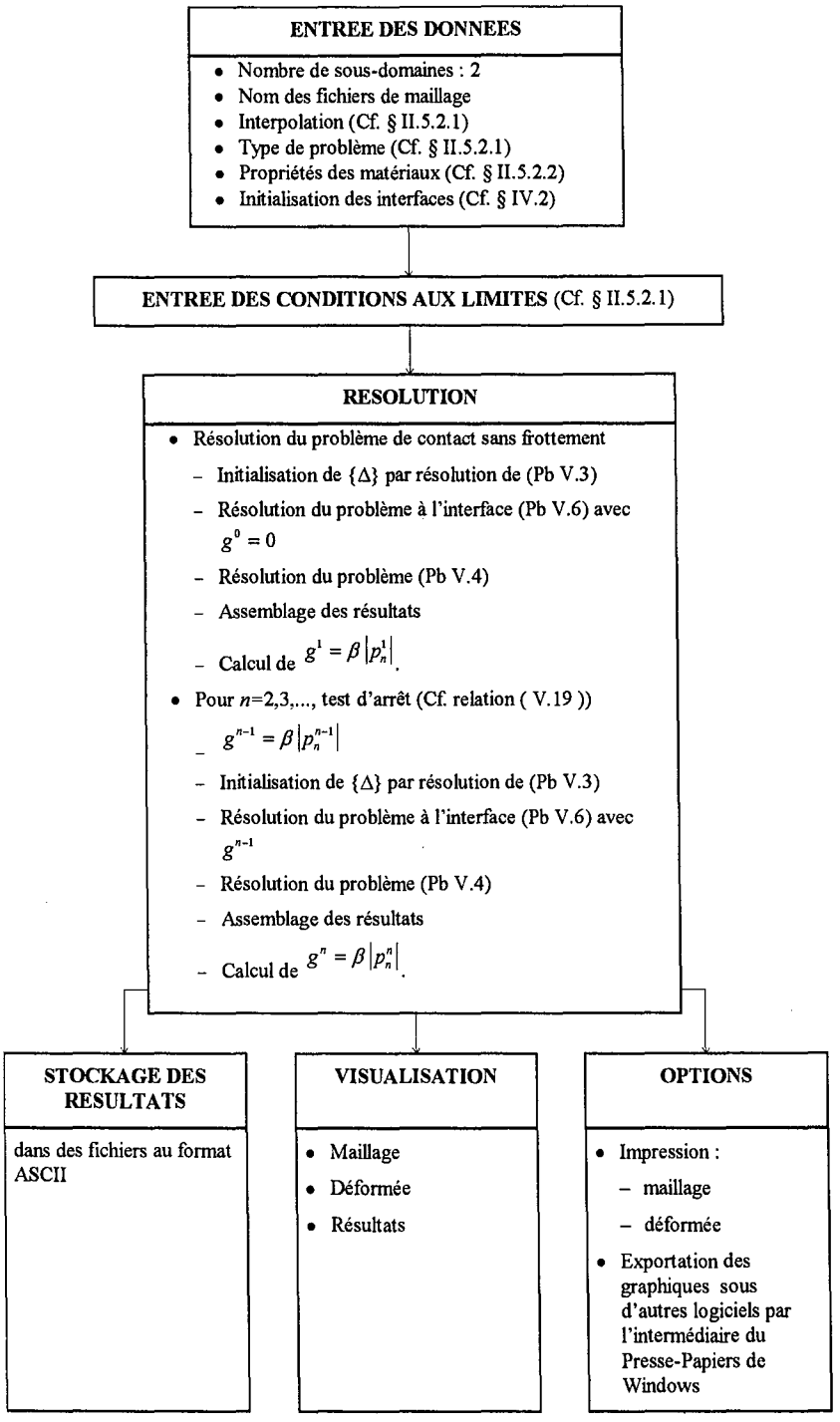


Tableau V.1

V.4. RESOLUTION DU PROBLEME DE CONTACT UNILATERAL

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent, un algorithme de résolution du problème de contact bilatéral avec frottement entre deux solides élastiques.

Nous étudions maintenant la résolution du problème de contact unilatéral avec frottement, décrit par les équations suivantes.

(Pb V.8)

$$
\begin{cases}
\hat{L}u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\
\hat{L}_{ik} = \mu\, \delta_{ik}\, \partial_h^2 + (\lambda + \mu)\, \partial_k\, \partial_i \\
u = \tilde{u} \qquad \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\
p(u) = \tilde{p} \qquad \text{sur } \Gamma_p = \Gamma_{p_1} \cup \Gamma_{p_2} \\
\text{Conditions sur } \Gamma_c : \\
\quad {}^1p = -{}^2p \qquad \text{(a)} \\
\quad [u_n] - d < 0 \Rightarrow p_n = 0 \qquad \text{(b)} \\
\quad [u_n] - d = 0 \Rightarrow p_n \le 0 \\
\quad |p_t| \le \beta |p_n| \qquad \text{(c)} \\
\quad \text{avec} \begin{cases} |p_t| < \beta |p_n| \Rightarrow [u_t] = 0 \\ |p_t| = \beta |p_n| \Rightarrow \exists \lambda \ge 0\ [u_t] = -\lambda p_t \end{cases}
\end{cases}
$$

Dans sa forme, celui-ci est similaire au problème (Pb V.5). Il ne diffère que par la condition (b).

Γ_c se décompose ici naturellement en deux zones :

(V.23) $\Gamma_c = \Gamma_{rc} \oplus \Gamma_{hc}$

Γ_{rc} : région de contact réelle
Γ_{hc} : région hors du contact

Sur ces régions, la condition (b) s'écrit :

(V.24) Sur Γ_{rc} : $[u_n] - d = 0 \Rightarrow p_n \leq 0$

(V.25) Sur Γ_{hc} : $[u_n] - d < 0 \Rightarrow p_n = 0$

Γ_{rc} et Γ_{hc} sont des inconnues du problème.

Pour les déterminer, nous proposons une méthode s'appuyant sur un algorithme, développé initialement par **Kalker** [1] pour résoudre le problème du contact unilatéral entre un solide élastique et un support rigide.

Sous la réserve de quelques modifications (Cf. remarque suivante), cette méthode utilise l'algorithme de résolution du problème de contact bilatéral et converge vers les conditions aux limites (V.24) et (V.25).

L'algorithme (Alg V.3) se décompose en quatre étapes principales.

Nous désignons par :

- Γ_{rc}^{i}, la région de contact à l'itération *i*,
- Γ_{hc}^{i}, la région hors du contact à l'itération *i*.

Remarque

L'introduction de la distance *d* dans l'équation (V.10) modifie le second membre du problème (Pb V.5).

---

[1] Voir référence [CON 16]

$[u_t]+\Delta$ est alors remplacé par $[u_t]+\Delta-d\cdot n$.

Le problème (Pb V.6) devient alors

$$(\text{Pb V.9}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } p' \in K \text{ telle que } f(p') \le f(p) \ \ \forall p \in K \\ f(p) = (B'p-\Delta+d\cdot n, B'p-\Delta+d\cdot n) \end{cases}$$

❑

(Alg V.3)

Etape n° 0 :

Nous initialisons Γ_{rc}^{i} et Γ_{hc}^{i} en posant

$\Gamma_{rc}^{0} = \Gamma_c \ (\Gamma_{rc} \subset \Gamma_c)$, $\Gamma_{hc}^{0} = \{\varnothing\}$

Etape n° 1 :

A l'itération *i*, nous résolvons le problème du contact bilatéral associé au problème (Pb V.1) en supposant que Γ_{rc}^{i} est la région de contact. Nous obtenons alors des déplacements u^i et des contraintes $p(u^i)$ vérifiant les conditions :

(V.26) $^1p_t^i + {}^2p_t^i = 0,\ ^1p_n^i + {}^2p_n^i = 0,\ p_t^i = \pm\beta p_n^i,\ \left[u_n^i\right] - d = 0 \ \text{sur}\ \Gamma_{rc}^{i}$

(V.27) $^1p^i = {}^2p^i = 0 \ \text{sur}\ \Gamma_{hc}^{i}$

Etape n° 2 :

Afin de déterminer Γ_{rc}^{i+1} et Γ_{hc}^{i+1}, nous prenons à présent en compte les conditions :

$$p_n \le 0 \ \text{sur}\ \Gamma_{rc},\ [u_n] - d < 0 \ \text{sur}\ \Gamma_{hc}$$

Si, pour un point appartenant à Γ_{rc}^{i}, nous avons :

$$p_n^i > 0,$$

celui-ci est retiré de la région de contact et rajouté dans la région hors du contact Γ_{hc}^{i+1}. Les contraintes $p(u)$ sont alors mises à zéro pour respecter la condition de bord libre (V.27).

Si, pour un point appartenant à Γ_{hc}^{i}, nous avons :

$$\left[u_n^i\right] - d > 0,$$

celui-ci est retiré de la région hors du contact et remis dans la région de contact.

Etape n° 3 :

Si $\Gamma_{rc}^{i+1} = \Gamma_{rc}^{i}$, nous arrêtons le déroulement de l'algorithme et retenons Γ_{rc}^{i+1} comme étant la région de contact Γ_{rc}, sinon nous retournons à l'étape n°1.

La résolution du problème de contact unilatéral avec frottement revient donc à résoudre successivement des problèmes de contact bilatéral avec frottement (Cf. § V.3), de façon à vérifier la condition (b) du problème (Pb V.8) et à déterminer la surface de contact réelle.

L'organigramme associé est, dans sa forme, identique à celui présenté dans le paragraphe précédent (Cf. § V.3.5). Il ne diffère que par l'étape de résolution que nous remplaçons par l'algorithme (Alg V.3).

V.5. EXEMPLES

Nous appliquons ici les méthodes décrites dans les paragraphes précédents à deux problèmes de contact, traités de la littérature.

Nous les présentons brièvement dans le tableau suivant :

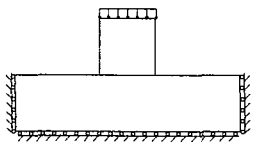
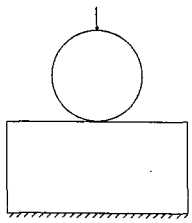
Problème	Géométrie	§	Type de contact	Type de problème plan	Loi de frottement	Références
Poinçon plat pressé contre un support élastique		V.5.1	Bilatéral	Contraintes planes	**Coulomb**	[CON 12]
Bille pressée contre un support élastique		V.5.2	Unilatéral	Axisymétrie	**Coulomb**	• sans frottement : théorie de **Hertz** [1] • avec frottement : solution analytique de **Spence** [2]

Tableau V.2

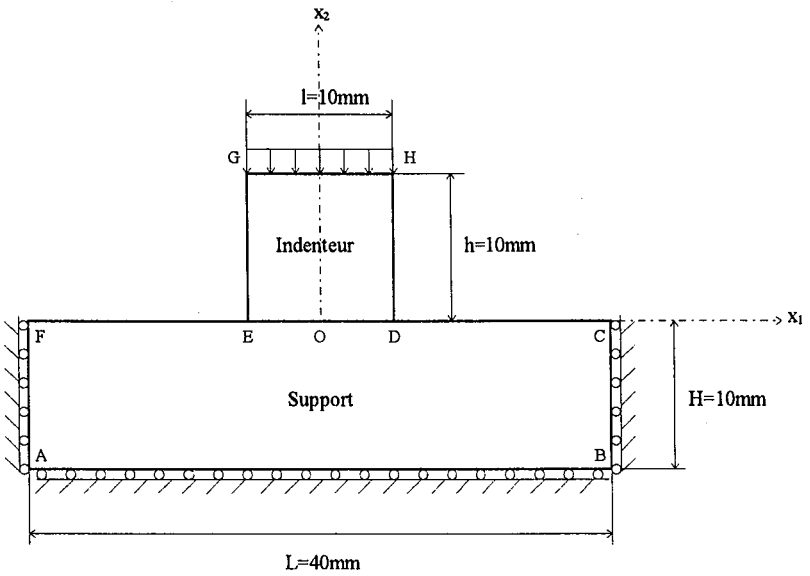
[1] Voir référence [CON 2]

[2] Voir référence [CON 13]

V.5.1. POINÇON PLAT PRESSE CONTRE UN SUPPORT ELASTIQUE

V.5.1.1. Données du problème

Nous nous intéressons ici au problème d'un poinçon plat peu déformable pressé contre un support élastique, constituant une approche simplifiée du test industriel d'indentation. Afin de valider notre code, nous retenons la géométrie et les conditions aux limites de l'exemple traité par **B. Deshoullieres** [1] pour lequel les résultats sont déjà connus.



épaisseur 1 mm

Figure V.5

Les matériaux sont définis par :

- Indenteur

$$E_I = 400000 MPa$$
$$\nu_I = 0.48$$

[1] Voir référence [CON 12]

L'indenteur est considéré ici, comme quasiment indéformable.

- Support

$$E_S = 6.89 MPa$$
$$\nu_S = 0.48$$

Ces constantes correspondent à un matériau facilement déformable du type polyuréthanne.

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} u_2 = 0 \\ p_1 = 0 \end{cases}$ blocage sur AB

- $\begin{cases} u_1 = 0 \\ p_2 = 0 \end{cases}$ blocage sur BC et AF

- $\begin{cases} p_1 = 0 \\ u_2 = -2mm \end{cases}$ déplacement uniforme sur GH

- Sur DE ($=\Gamma_c$), nous imposons des conditions de contact bilatéral avec frottement, celui-ci obéissant à la loi de **Coulomb** statique.

L'indenteur et le support sont respectivement maillés en 52 et 80 éléments linéaires.

Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

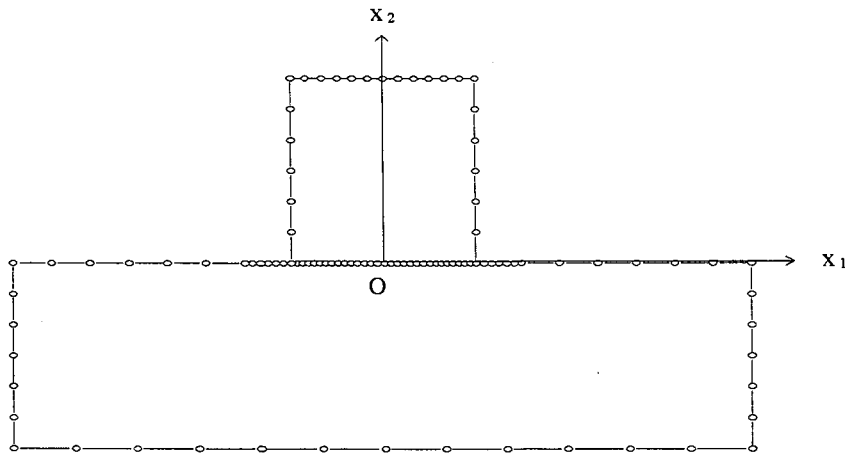


Figure V.6 : Maillage

V.5.1.2. Algorithme de résolution

Nous résolvons ce problème à l'aide de l'algorithme de résolution du problème de contact bilatéral, exposé au paragraphe V.3. Les tests d'arrêt portent sur les erreurs relatives calculées sur les contraintes et la fonction g (Cf. (Alg V.1) et relation (V.19)). Le paramètre ξ est fixé à 10^{-4}.

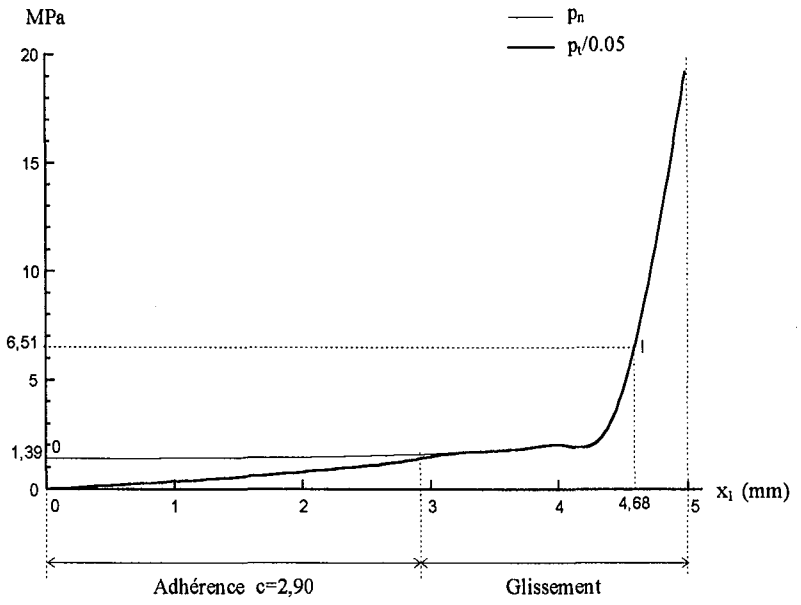
V.5.1.3. Résultats

Le problème admettant une symétrie par rapport à l'axe Ox_2, nous représentons les résultats sur la moitié de la zone de contact ($0 \le x_1 \le \frac{l}{2}$).

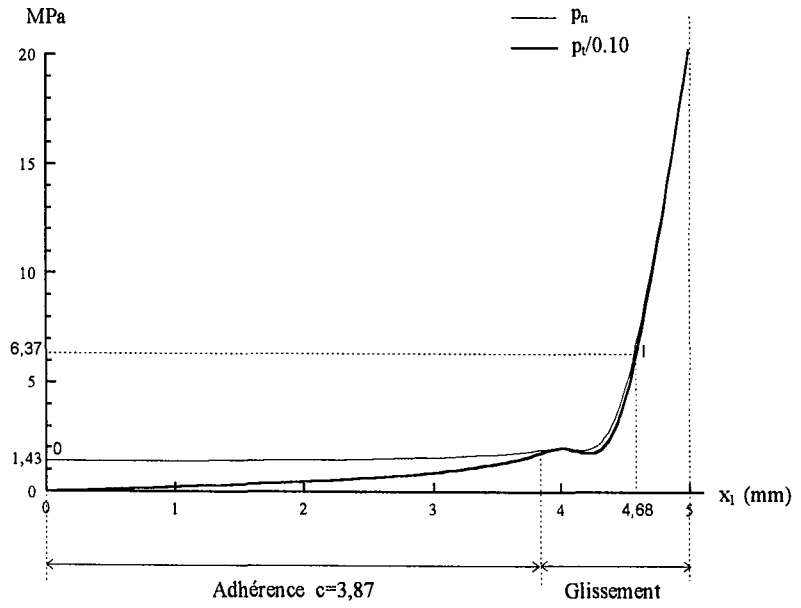
Nous traçons sur la Figure V.7, les contraintes normale p_n et tangentielle $\frac{p_t}{\beta}$ en fonction de x_1 pour deux valeurs du coefficient de frottement β :

- β=0.05
- β=0.10

Afin d'établir une comparaison, nous représentons sur la Figure V.8 les résultats obtenus par **B. Deshoullieres**.

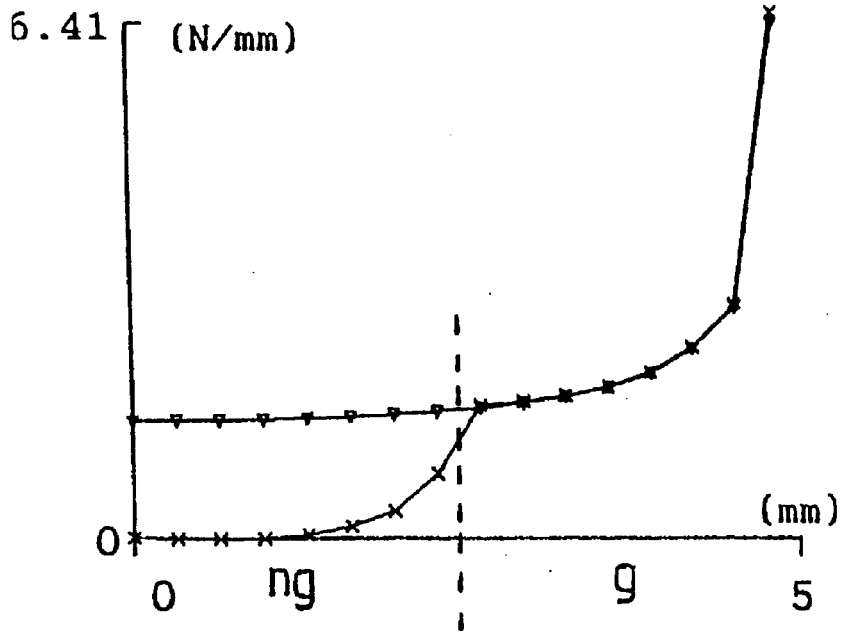


a) β=0.05

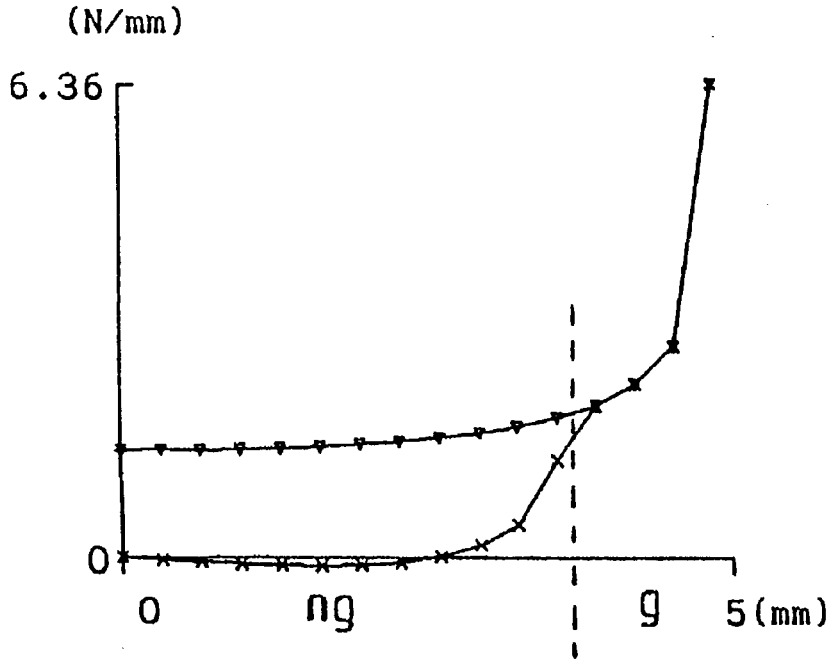


b) β=0.10

Figure V.7 : Contraintes normale et tangentielle sur la surface de contact



a) β=0.05 (ng : adhérence, g : glissement)



b) β=0.10 (ng : adhérence, g : glissement)

Figure V.8 : Contraintes normale et tangentielle sur la surface de contact (**B. Deshoullieres**)

Nous observons que la contrainte normale est minimale au centre et maximale au bord du contact.

Les figures font apparaître une singularité des courbes de p_n et p_t au point D et, par symétrie au point E. En effet, p_n et p_t tendent vers des valeurs très importantes (20 MPa), lorsque x_1 tend vers $\frac{l}{2}$ par valeurs inférieures. Or, nous imposons des conditions de bord libre, c'est-à-dire $p_n = p_t = 0$, à l'extérieur de la zone de contact et donc lorsque x_1 tend vers $\frac{l}{2}$ par valeurs supérieures. Cette singularité est due au caractère local de la modélisation du frottement par la loi de **Coulomb** et n'a pas de sens physique.

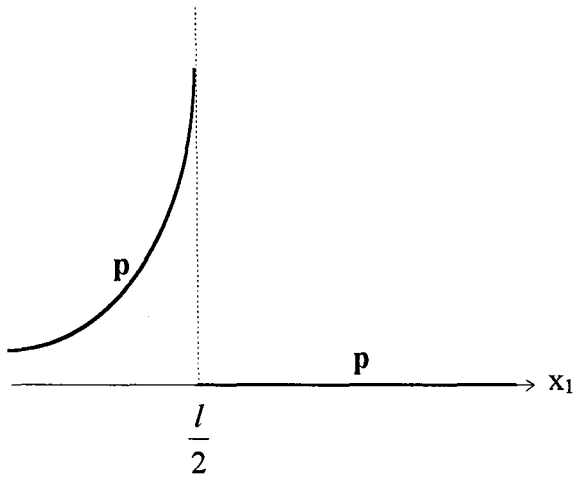


Figure V.9 : Singularité des contraintes en $x_1 = \frac{l}{2}$

En suivant **B. Deshoullieres**, nous reportons, maintenant, les valeurs de p_n, calculée au point $0(0,0)$ et $I(4.68,0)$ dans le Tableau V.3.

β	p_n au point 0 (MPa)		p_n au point I (MPa)	
	Num.	**Deshoullieres**	Num.	**Deshoullieres**
0,05	1,39	1,41	6,51	6,41
0,10	1,43	1,41	6,37	6,36

Tableau V.3

Nous observons sur la Figure V.7, que la demi-zone de contact est divisée en :

- une zone d'adhérence sur laquelle $|p_t| < \beta |p_n|$: $O \le x_1 \le c$,
- une zone de glissement sur laquelle $|p_t| = \beta |p_n|$: $c < x_1 \le \frac{l}{2}$.

La valeur de c est donnée dans le tableau suivant en fonction de β. Nous les comparons aux résultats de **B. Deshoullieres**.

β	c (mm)	
	Num.	**Deshoullieres**
0,05	2,90	2,58
0,10	3,87	3,87

Tableau V.4

Pour $\beta = 0.05$, nous obtenons une valeur de c légèrement supérieure à celle calculée par **B. Deshoullieres**. Ce léger écart peut être imputé aux erreurs numériques des deux méthodes.

Pour $\beta = 0.10$, la valeur de c et donc les zones de glissement et d'adhérence sont identiques à celles obtenues par **B. Deshoullieres**.

V.5.2. BILLE PRESSEE CONTRE UN SUPPORT ELASTIQUE

Nous nous intéressons maintenant au problème d'une bille pressée contre un support élastique, constituant une première approche de la modélisation du test industriel d'indentation de **Brinell**.

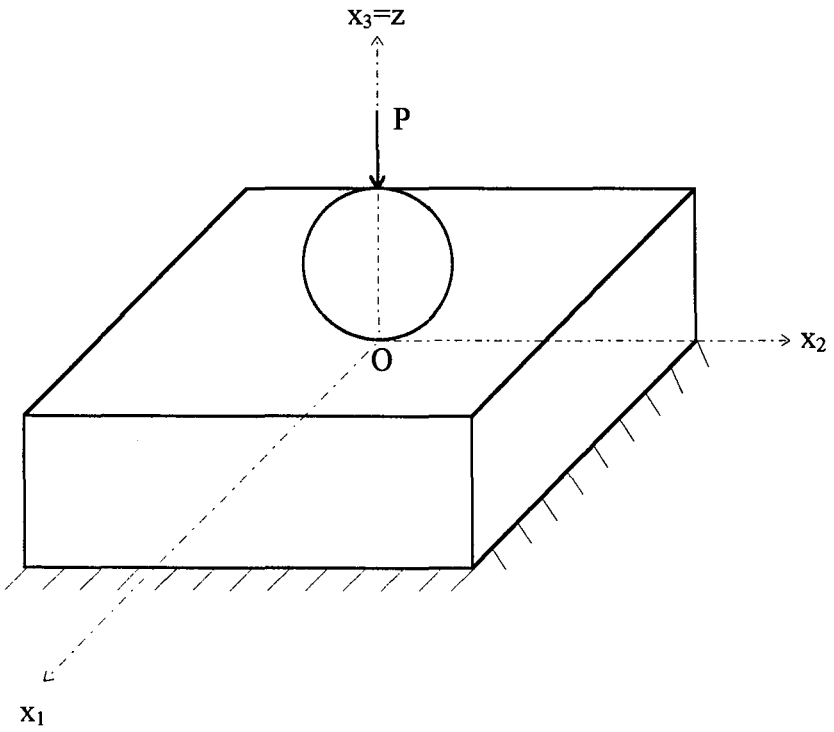


Figure V.10 : Bille pressée contre un support élastique

V.5.2.1. Données du problème

Ce problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe Ox_3.

Nous limitons donc l'étude à un demi-plan de coupe à l'aide des coordonnées axisymétriques.

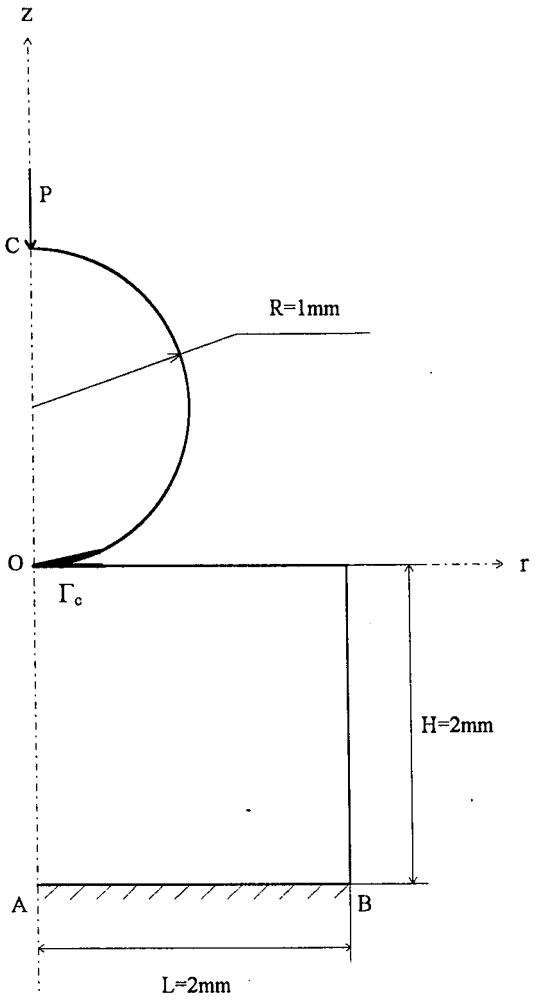


Figure V.11

E_B, ν_B (respectivement E_s, ν_s) désignent le module d'**Young** et le coefficient de **Poisson** de la bille (respectivement du support).

Nous choisissons pour le support, les valeurs :

$$E_S = 72000MPa$$
$$\nu_S = 0.32$$

Ces constantes correspondent à celles de l'aluminium.

Nous effectuons trois séries de calcul avec trois billes différentes, de telle sorte que le rapport $\frac{E_B}{E_s}$ varie de 1 à 6.

ν_B reste constant : $\nu_B = 0.32$.

Cas	E_B (MPa)	E_s (MPa)	$\frac{E_B}{E_S}$
1	72000	72000	1
2	216000	72000	3
3	432000	72000	6

Tableau V.5

Les cas 2 et 3 correspondent respectivement à une bille en acier, et en carbure.

Pour chacun des trois cas, nous étudions le contact sans frottement (β=0, Cf. § V.5.2.3).

Nous étudions ensuite le contact avec frottement ($0.10 \leq \beta \leq 0.60$, Cf. § V.5.2.4) dans le cadre du cas n°3.

Les conditions aux limites du problème sont :

- $\begin{cases} u_r = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$ encastrement sur AB

- $\begin{cases} p_r = 0 \\ p_z = -P \end{cases}$ force uniforme au point C

- Sur Γ_c, nous imposons des conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement, celui-ci obéissant à la loi de **Coulomb**.

La bille et le support sont respectivement maillés en 40 et 56 éléments linéaires. Nous utilisons une interpolation linéaire (Cf. § II.5.2.1).

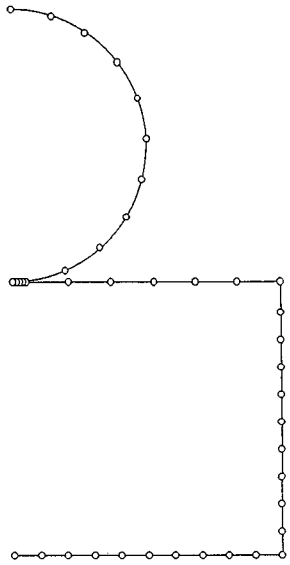


Figure V.12 : Maillage

Un grossissement du maillage de la zone de contact potentielle est présenté sur la figure suivante :

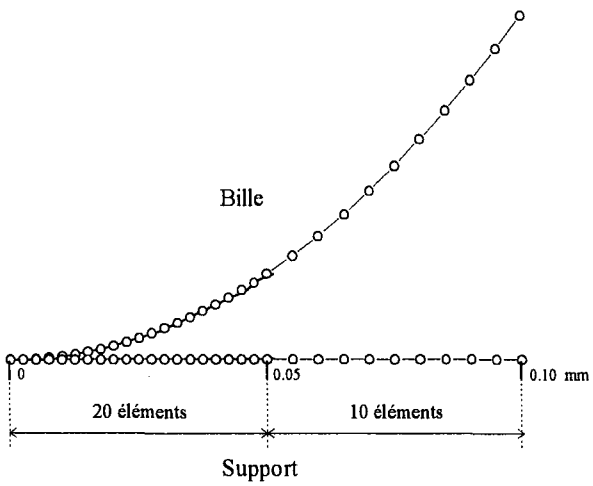


Figure V.13: Maillage de la zone de contact potentielle

V.5.2.2. Algorithme de résolution

Nous résolvons ce problème en utilisant l'algorithme de résolution du problème de contact unilatéral, exposé au paragraphe V.4.

Les tests d'arrêt portent sur les erreurs relatives calculées sur les contraintes et la fonction g (Cf. (Alg V.1) et relation (V.19)). Le paramètre ξ est fixé à 10^{-4}.

V.5.2.3. Résultats sans frottement (Contact de Hertz)

Dans ce paragraphe, nous étudions le contact sans frottement (β=0).

Nous comparons nos résultats à la solution analytique obtenue par la théorie de **Hertz** [1].

V.5.2.3.1. Distribution de pression

La solution numérique en terme de géométrie de contact et de distribution de pression est présentée dans le Tableau V.6 et sur la Figure V.14.

Cas	P : charge totale appliquée au point C (N)	a : rayon de contact (mm)		p_0 : pression normale au centre (MPa)		δ : profondeur d'indentation (mm)	
		Num.	**Hertz**	Num.	**Hertz**	Num.	**Hertz**
1	10.00	$5.79\ 10^{-2}$	$5.72\ 10^{-2}$	1470	1460	$3.25\ 10^{-3}$	$3.27\ 10^{-3}$
2	10.00	$5.00\ 10^{-2}$	$5.00\ 10^{-2}$	1902	1913	$2.45\ 10^{-3}$	$2.50\ 10^{-3}$
3	10.00	$4.84\ 10^{-2}$	$4.78\ 10^{-2}$	2086	2091	$2.26\ 10^{-3}$	$2.28\ 10^{-3}$
3	31.50	$7.07\ 10^{-2}$	$7.00\ 10^{-2}$	3069	3065	$4.80\ 10^{-3}$	$4.91\ 10^{-3}$

Tableau V.6

[1] Voir annexe D

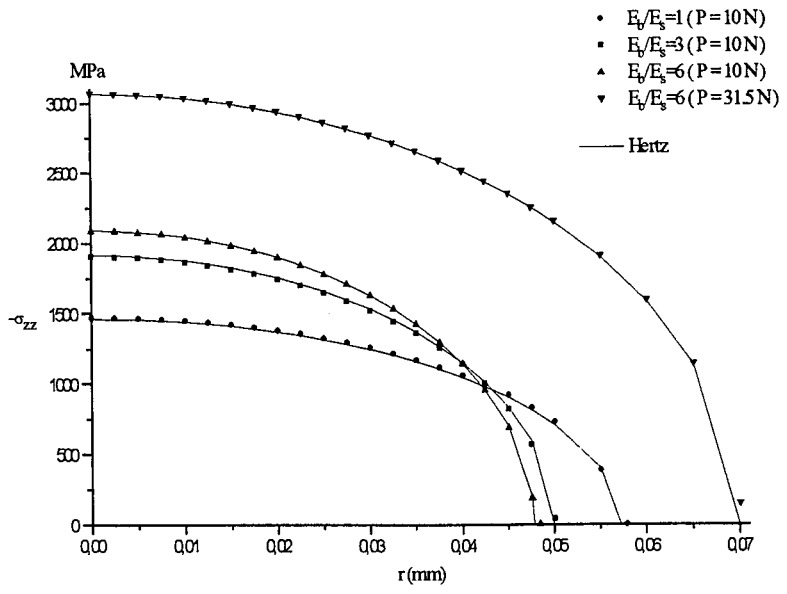


Figure V.14 : Distribution de pression sur la surface de contact

Pour la suite, nous nous plaçons dans le cas n°3, défini dans le Tableau V.5. En effet, les autres cas donnent des courbes similaires.

V.5.2.3.2. Distribution des contraintes

Nous représentons la distribution des contraintes,

- sur la surface de contact (Cf. Figure V.15) : $\frac{\sigma_{rr}}{p_0}$ et $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{p_0}$ en fonction de $\frac{r}{a}$,
- le long de l'axe de symétrie (Cf. Figure V.16) : $\frac{\sigma_{rr}}{p_0}$, $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{p_0}$, $\frac{\sigma_{zz}}{p_0}$ et $\frac{\tau}{p_0}$ en fonction de $\frac{z}{a}$.

τ est le cisaillement principal défini par :

$$\tau = \frac{1}{2}\left|\sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right|$$

Comme le prévoit la théorie de **Hertz**, les contraintes sur la surface de contact sont toutes compressives.

En dehors du cercle et sur celui-ci , σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont égales en intensité, σ_{rr} devenant positive et $\sigma_{\theta\theta}$ restant négative.

σ_{rr} est maximale en $r = a$.

Nous obtenons $\left(\frac{\sigma_{rr}}{p_0}\right)_{\max} \approx 0.092$ en $\frac{r}{a} \approx 1{,}05$.

La théorie de **Hertz** nous donne $\left(\frac{\sigma_{rr}}{p_0}\right)_{\max} = \frac{1-2\nu}{3} = 0.120$ en $\frac{r}{a} = 1{,}00$.

Le long de l'axe de symétrie, les contraintes sont toutes compressives.

Le cisaillement principal τ atteint un maximum $\tau_{\max} \approx 0.29 p_0$ en $\frac{z}{a} \approx -0.50$.

La théorie de **Hertz** nous donne $\tau_{\max} = 0.30 p_0$ en $\frac{z}{a} = -0.49$.

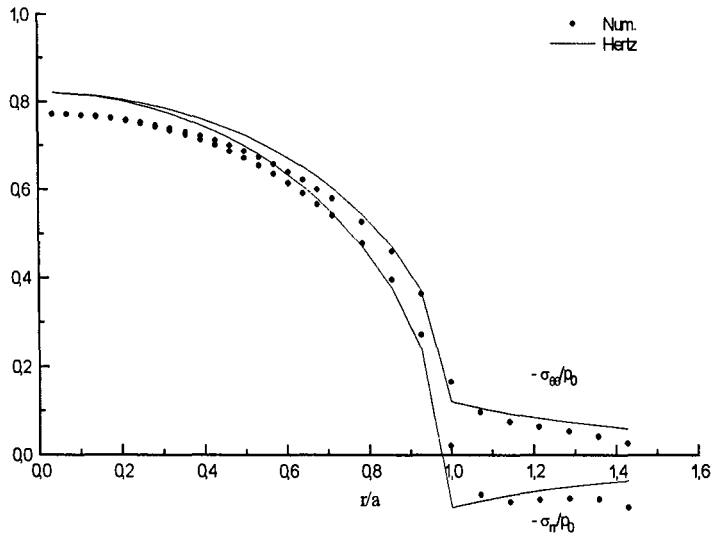


Figure V.15 : Contraintes sur la surface de contact

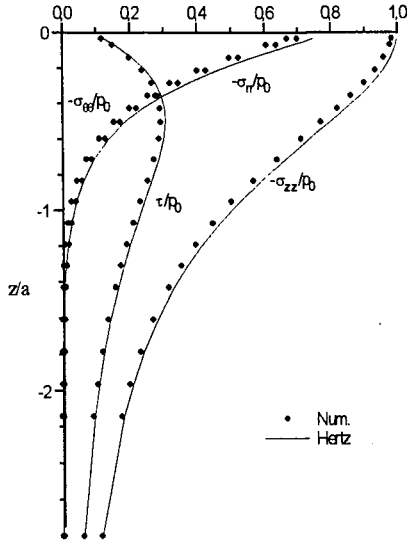


Figure V.16 : Contraintes le long de l'axe de symétrie

V.5.2.3.3. Déformée

La solution numérique en déplacements est présentée en terme de profil déformé, et comparée à la solution analytique.

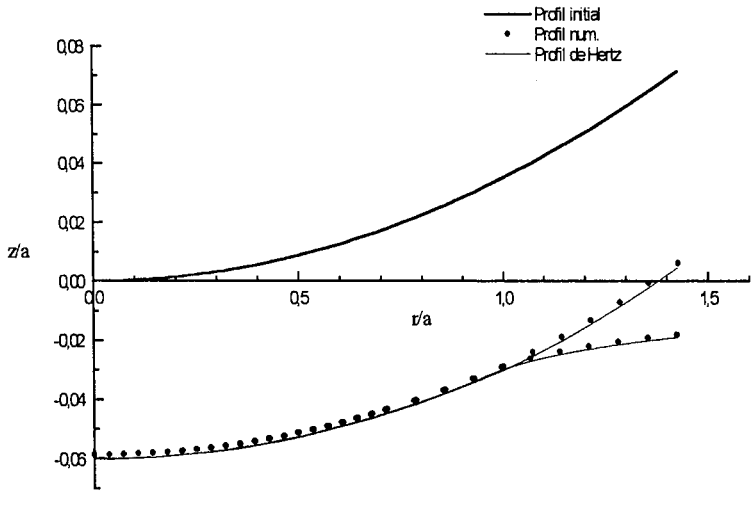


Figure V.17 : Profil déformé

V.5.2.3.4. Isocontraintes

Nous traçons les isocontraintes σ_{eq} [1] normalisées par p_0 dans le support.

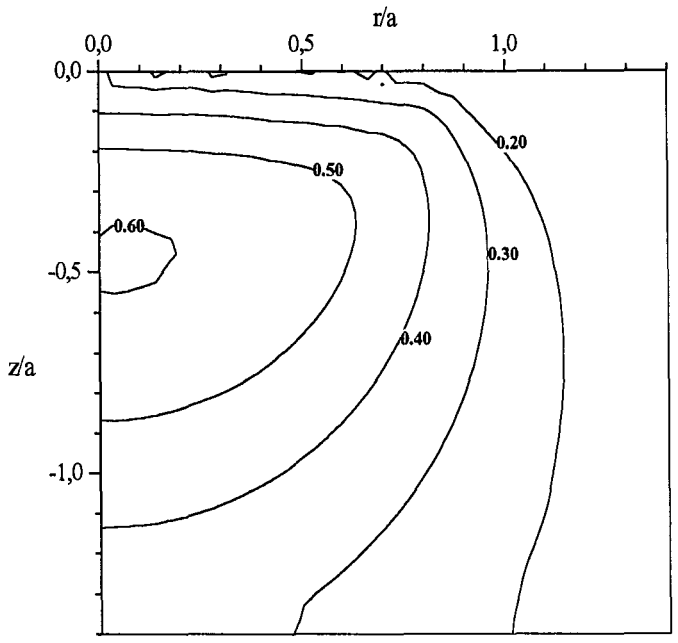


Figure V.18 : Isocontraintes σ_{eq} / p_0

Conformément à la théorie de **Hertz**, les isocontraintes se referment autour d'une valeur maximale, égale à 0.608 p_0, sous l'indenteur à une profondeur $z \approx -0.50\ a$.

Nous constatons sur l'ensemble de ces courbes une bonne adéquation de nos résultats avec la théorie de **Hertz**.

---

[1] Cf. § II.6

V.5.2.4. Résultats avec frottement

Dans ce paragraphe, nous étudions le contact avec frottement ($\beta \neq 0$).

Nous présentons nos résultats en les comparant à la solution analytique de **Spence** [1].

Nous avons effectué deux séries de calculs pour des valeurs de β égales à 0.10 et 0.60, dans le cas du contact entre une bille en carbure et un support en aluminium (Cas n°3 du Tableau V.6)

Dans chaque cas, nous avons imposé une force appliquée P de 31.5 N.

V.5.2.4.1. Zones d'adhérence et de glissement

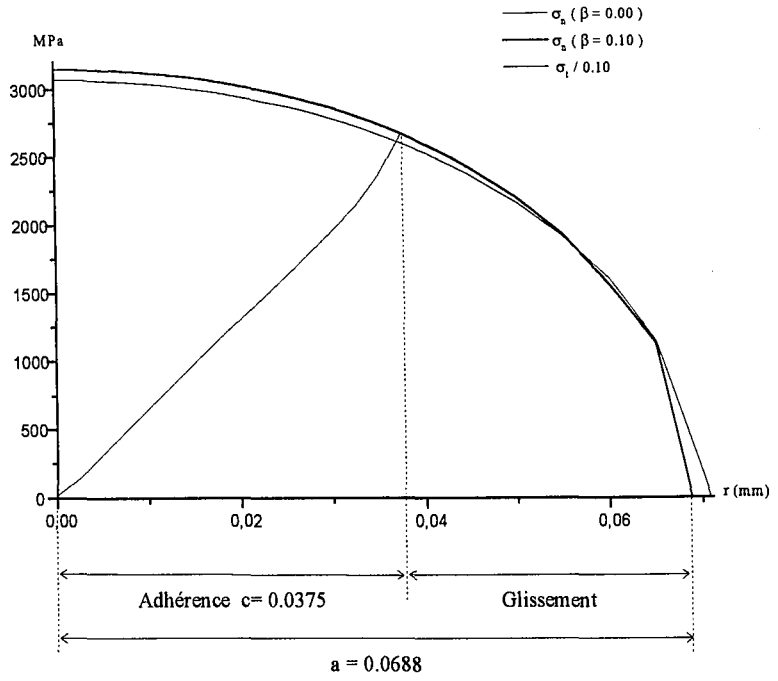
Les courbes de la Figure V.19, représentant les contraintes $\frac{p_t}{\beta}$ et p_n sur la surface de contact, révèlent, conformément à l'analyse de **Spence** :

- une région centrale $(0 \leq r \leq c)$ sur laquelle $|p_t| < \beta |p_n|$,
- une région externe $(c < r \leq a)$ sur laquelle $|p_t| = \beta |p_n|$.

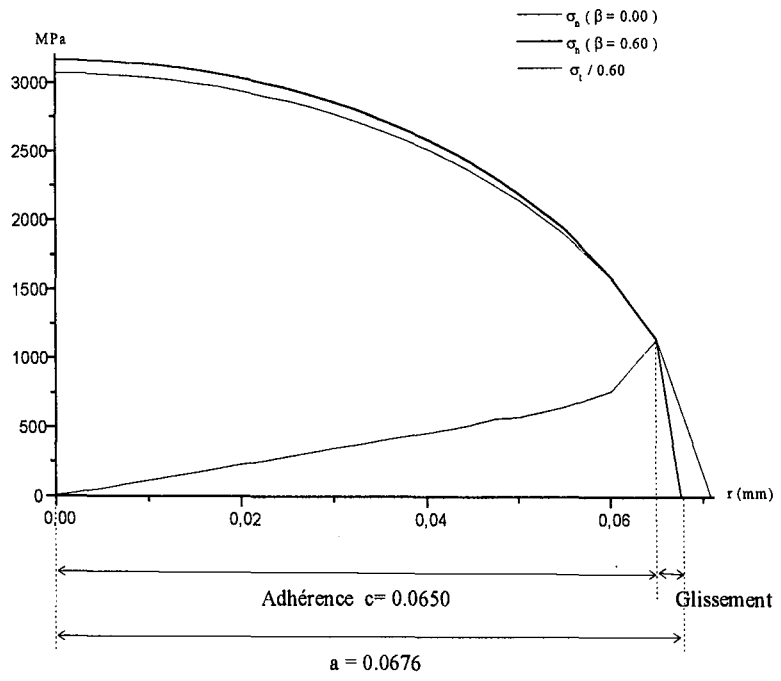
Nous présentons, dans le Tableau V.7, les rapports $\frac{c}{a}$ obtenus lors de nos calculs, pour les divers coefficients de frottement. Nous les comparons à la solution analytique, donnée par l'analyse de **Spence** (Cf. Figure V.20).

---

[1] Voir annexe E



a) $\beta = 0.10$



b) $\beta = 0.60$

Figure V.19 : Contraintes normales et tangentielles sur la surface de contact

β	P (N)	a (mm)	c (mm)	c/a	
				Num.	**Spence**
0.00	31.5	0.0707	0.0000	0.000	0.000
0.10	31.5	0.0688	0.0375	0.545	0.535
0.60	31.5	0.0676	0.0650	0.961	0.999

Tableau V.7 : Extension de la zone de glissement

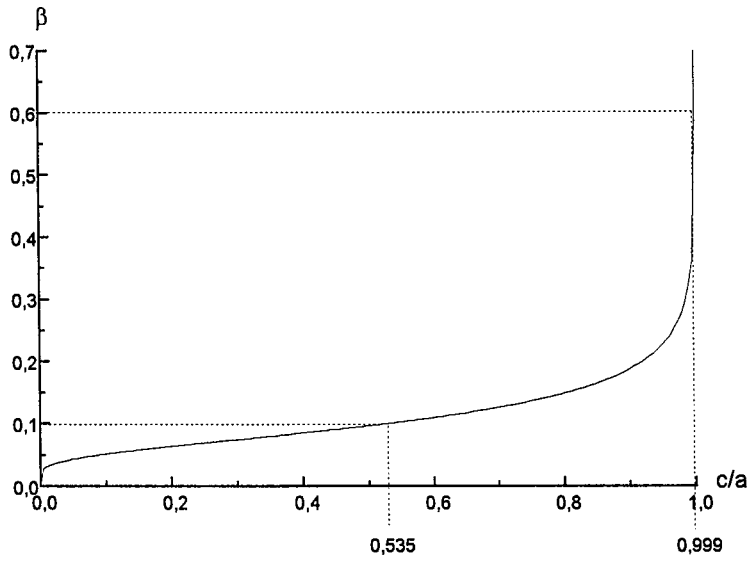


Figure V.20 : Extension de la zone de glissement (**Spence**)

V.5.2.4.2. Rayon de contact et distribution de pression

Nous présentons, dans le Tableau V.8, le rayon de contact a ainsi que la pression normale au centre p_o ,en fonction des coefficients de frottements.

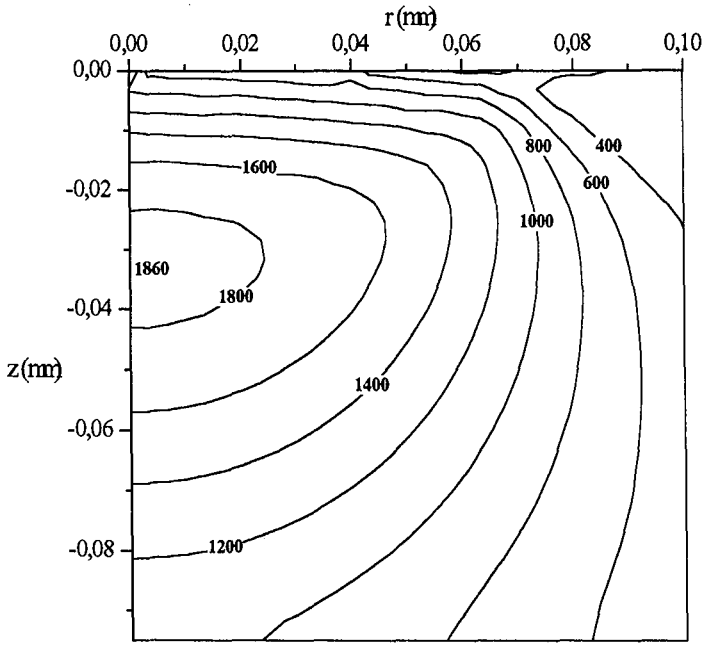
L'analyse de ces résultats montre que l'introduction du frottement conduit à une légère diminution du rayon de contact a, et à une augmentation de la pression normale au centre p_0 par rapport au cas sans frottement. Par exemple, pour un coefficient de frottement égal à 0.60, nous obtenons une diminution de a de 4.3 % et une augmentation de p_0 de 3.1 %.

β	a (mm)	p_o (MPa)
0.00	0.0707	3069
0.10	0.0688	3147
0.60	0.0676	3167

Tableau V.8

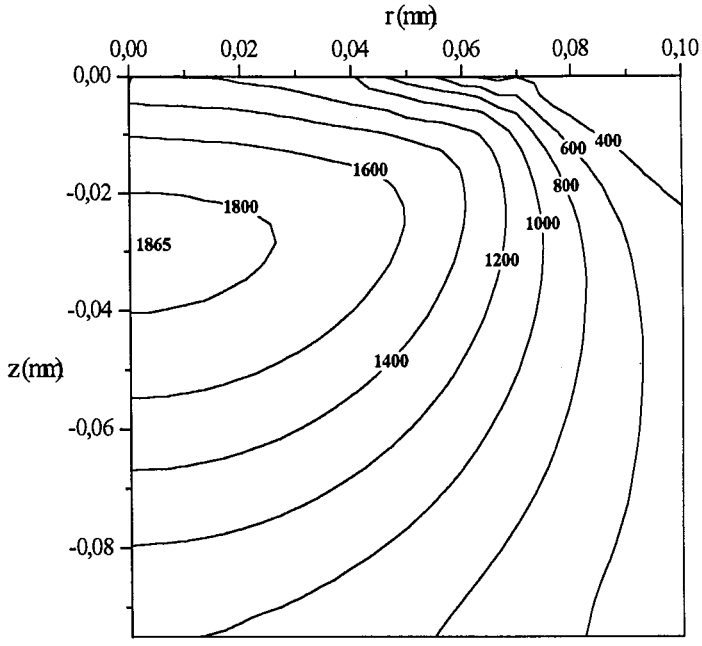
V.5.2.4.3. Isocontraintes

Nous représentons sur la Figure V.21, les isocontraintes σ_{eq} [1] dans le support en fonction des coefficients de frottement.

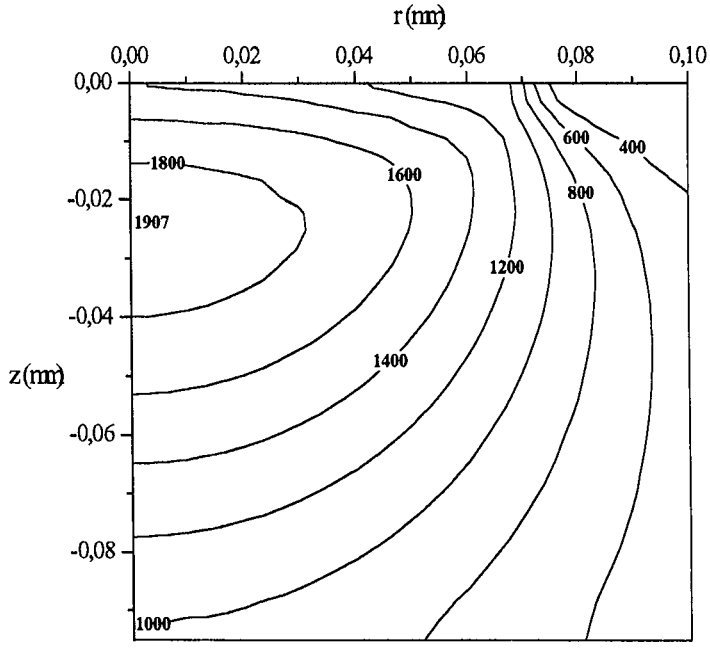


a) $\beta = 0.00$

[1] Cf. § II.6



b) $\beta = 0.10$



c) $\beta = 0.60$

Figure V.21 : Isocontaintes σ_{eq} (MPa)

Les isocontraintes σ_{eq} se referment autour d'une valeur maximale $\sigma_{eq\max}$, situé sous l'indenteur sur l'axe de symétrie à une profondeur z_m. Nous présentons, dans le tableau suivant, ces deux valeurs, en fonction du coefficient de frottement β.

β	$\sigma_{eq\max}$ (MPa)	z_m *(mm)*
0.00	1860	0.035
0.10	1865	0.030
0.60	1907	0.025

Tableau V.9

Nous observons que le frottement a pour effet de développer des contraintes de cisaillement τ (τ étant proportionnelle à σ_{eq}) sur la surface de contact. En effet, en l'absence de frottement (β=0) , les contraintes de cisaillement à la surface décroissent du centre vers le bord du contact de 740 MPa à 356 MPa. Pour un coefficient de frottement égal à 0.60, elles décroissent toujours du centre vers le bord du contact, mais de 1527 MPa à 1110 MPa.

De plus, l'analyse des résultats du Tableau V.9 montre que le maximum $\sigma_{eq\max}$ des contraintes équivalentes augmente avec le coefficient de frottement. Il est toujours situé sur l'axe de symétrie, mais se rapproche de la surface de contact.

V.6. CONCLUSION

La méthode, exposée dans ce chapitre, s'adapte particulièrement bien à l'étude du problème de contact entre deux solides déformables.

Les deux algorithmes de contact que nous proposons, convergent vers la solution recherchée en quelques itérations avec une bonne précision.

La méthode des éléments frontières nécessite simplement la discrétisation de la frontière de chaque solide. Et, grâce à la méthode de décomposition, le système d'équations linéaires que nous résolvons à chaque itération, ne porte que sur un seul domaine.

Ces deux techniques limitent considérablement la taille du système à résoudre, et donc le temps de calcul.

La résolution numérique du problème du poinçon plat rigide pressé contre un support élastique, et la comparaison de nos résultats avec ceux de **B. Deshoullieres** nous permet de valider notre algorithme de résolution du contact bilatéral avec frottement.

Cette étude montre, en particulier, la limite de la loi de **Coulomb** à modéliser le frottement. En effet, les courbes des contraintes normale et tangentielle présentent des singularités au bord du contact (Cf. Figure V.9). L'emploi d'une loi non locale de type **J.T. Oden** et **E.T. Pires** [1] permet de régulariser les courbes à ce niveau. Les contraintes sont alors continues sur le bord du contact. Nous avons effectué des calculs avec cette loi. Nous retrouvons les mêmes résultats que **B. Deshoullieres** tant au niveau des déplacements que des contraintes.

De même, nous avons résolu le problème d'une bille pressée contre un support élastique. La confrontation de nos résultats avec la théorie de **Hertz** et la solution analytique de **Spence** nous permet de valider notre algorithme de résolution du contact unilatéral avec frottement.

Pour cet exemple, nous avons également étudié l'influence du frottement. Celui-ci induit une légère diminution du rayon de contact et une augmentation sensible de la pression normale au centre par rapport au problème de **Hertz**. Le frottement a, de plus, pour effet de développer des contraintes de cisaillement sur la surface de contact.

---

[1] Voir référence [CON 12]

CONCLUSION

Les quatre premiers chapitres de ce mémoire sont consacrés à la présentation des logiciels d'éléments frontières et de décomposition, élaborés par nos soins. Ils donnent des résultats tout à fait satisfaisants. Ils ont, en effet, été testés avec succès sur des exemples relativement complexes.

La précision de notre code d'éléments frontières repose essentiellement sur la méthode de calcul des intégrales intervenant dans l'assemblage des matrices élémentaires. En effet, celle-ci est analytique en déformations et contraintes planes.

L'analyse des résultats des exemples II.7.2 et II.7.3 montre que la méthode des éléments frontières est plus précise au niveau du calcul des contraintes à la frontière que les éléments finis.

Notre code de décomposition est basé sur la programmation d'une variante de la méthode d'**Hennizel**. Il nous permet d'effectuer des calculs sur des structures mécaniques constituées de plusieurs matériaux. Il offre également l'avantage de traiter les problèmes sur chaque sous-domaine séparément, et donc de résoudre des systèmes de grande taille avec un temps de calcul raisonnable.

De plus, ces deux logiciels peuvent être utilisés pour résoudre un grand nombre de problèmes mécaniques avec plus de facilité qu'un code d'éléments finis, car seule la discrétisation de la frontière des domaines est nécessaire.

Dans le chapitre 5, nous avons appliqué ces techniques de décomposition par sous-domaines et d'éléments frontières à l'élaboration d'un code de résolution numérique du problème de contact avec frottement, obéissant à la loi de **Coulomb** statique.

Nous avons présenté deux algorithmes convergeant en quelques itérations et avec une bonne précision vers la solution recherchée.

Le premier algorithme résout le problème du contact bilatéral. Il a été testé de façon satisfaisante, sur l'exemple du poinçon plat pressé contre un support élastique. Ce test montre, en particulier, la limite de la loi de **Coulomb** dans la modélisation du frottement.

Le deuxième algorithme résout le problème du contact unilatéral. Il a été testé avec succès sur l'exemple de la bille pressée contre un support élastique. En l'absence de frottement, nos résultats sont conformes à la théorie de **Hertz**. En présence de frottement, ils sont en accord avec la solution analytique de **Spence**.

De plus, nous avons étudié l'influence du frottement sur la dimension du rayon de contact et la pression normale au centre. Nos résultats rejoignent ceux de **Kikuchi** [1].

Enfin , le travail présenté dans ce mémoire nous paraît être une approche nouvelle, alliant les méthodes de décomposition par sous-domaines aux éléments frontières pour l'étude des problèmes de contact.

Les résultats sont très encourageants du point de vue de la précision et de la rapidité des calculs.

Ainsi, comme perspective de développement, il serait souhaitable d'étendre cette première approche à l'étude du frottement en utilisant des lois non classiques comme, par exemple, celles énoncées par **J. T. Oden** et **E. Pires** [2] et à l'étude du contact entre corps élastoplastiques, plus réaliste sur un plan industriel.

---

[1] Voir référence [CON 14]

[2] Voir référence [CON 12]

ANNEXES

Annexe A

LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN DEFORMATIONS ET CONTRAINTES PLANES

Dans cette annexe, nous donnons l'expression des solutions fondamentales[1] présentées dans le chapitre I.

Les solutions fondamentales sont exprimées en fonction de la distance s d'un point M d'intégration de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à un noeud i de coordonnées (y_1, y_2, y_3) (Cf. Figure II.6).

Nous rappelons les notations suivantes :

E : module d'**Young** du matériau

ν : coefficient de **Poisson** du matériau

$\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, coefficient de **Lamé**

n : normale extérieure en un point M appartenant à Γ

---

[1] Voir références [MEF 7] et [MEF 8]

Nous définissons les variables suivantes :

$$s_i = x_i - y_i$$
$$s_{,i} = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{s_i}{s}$$
$$s = (s_i\ s_i)^{\frac{1}{2}}$$

Les solutions fondamentales s'écrivent alors sous la forme :

En dimension 2,

$$u_{ij}(x,y) = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ \ln(s)\ \delta_{ij} - s_{,i}\ s_{,j}\right\}$$

$$p_{ij}(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)s}\left\{\left((1-2\nu)\ \delta_{ij} + 2\ s_{,i}\ s_{,j}\right)\ \frac{\partial s}{\partial n} - (1-2\nu)\left(s_{,i}\ n_j - s_{,j}\ n_i\right)\right\}$$

$$u_{ijk}(x,y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)s}\left\{(1-2\nu)\left(s_{,k}\ \delta_{ij} + s_{,j}\ \delta_{ik} - s_{,i}\ \delta_{jk}\right) + 2\ r_{,i}\ r_{,j}\ r_{,k}\right\}$$

$$\begin{aligned} p_{ijk}(x,y) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)s^2}\Bigg\{2\ \frac{\partial s}{\partial n}\Big[(1-2\nu)\ \delta_{ij}\ s_{,k} + \nu\left(\delta_{ik}\ s_{,j} + \delta_{jk}\ s_{,i}\right) - 4\ s_{,i}\ s_{,j}\ s_{,k}\Big] \\ + 2\nu\left(n_i\ s_{,j}\ s_{,k} + n_j\ s_{,i}\ s_{,k}\right) + (1-2\nu)\left(2\ n_k\ s_{,i}\ s_{,j} + n_j\ \delta_{ik} + n_i\ \delta_{jk}\right) \\ - (1-4\nu)\ n_k\ \delta_{ij}\Bigg\} \end{aligned}$$

En dimension 3,

$$u_{ij}(x,y) = \frac{-1}{16\pi\mu(1-\nu)s}\left\{(3-4\nu)\ \delta_{ij} + s_{,i}\ s_{,j}\right\}$$

$$p_{ij}(x,y) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)s^2}\left\{\left((1-2\nu)\ \delta_{ij} + 3\ s_{,i}\ s_{,j}\right)\ \frac{\partial s}{\partial n} - (1-2\nu)\left(s_{,i}\ n_j - s_{,j}\ n_i\right)\right\}$$

$$u_{ijk}(x,y)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)s^2}\left\{(1-2\nu)\left(s_{,k}\,\delta_{ij}+s_{,j}\,\delta_{ik}-s_{,i}\,\delta_{jk}\right)+3\,r_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k}\right\}$$

$$p_{ijk}(x,y)=\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)s^3}\left\{3\,\frac{\partial s}{\partial n}\left[(1-2\nu)\,\delta_{ij}\,s_{,k}+\nu\left(\delta_{ik}\,s_{,j}+\delta_{jk}\,s_{,i}\right)-5\,s_{,i}\,s_{,j}\,s_{,k}\right]\right.$$
$$+3\,\nu\left(n_i\,s_{,j}\,s_{,k}+n_j\,s_{,i}\,s_{,k}\right)+(1-2\nu)\left(3\,n_k\,s_{,i}\,s_{,j}+n_j\,\delta_{ik}+n_i\,\delta_{jk}\right)$$
$$\left.-(1-4\nu)\,n_k\,\delta_{ij}\right\}$$

Annexe B

LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN AXISYMETRIE

Dans cette annexe, nous donnons l'expression des solutions fondamentales[1] définies dans le paragraphe II.3.3.

Nous nous plaçons dans le système de coordonnées cylindriques (e_r, e_φ, e_z) (Cf. Figure B.1).

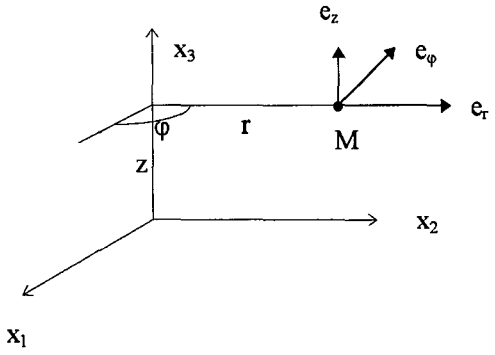


Figure B.1 : Définition du système de coordonnées cylindriques

Les solutions fondamentales sont exprimées en fonction de la distance s d'un point M d'intégration de coordonnées $(r,0,z)$ à un noeud i de coordonnées $(R,0,Z)$.

---

[1] Voir référence [MEF 7]

Nous rappelons les notations suivantes :

E : module d'**Young** du matériau

ν : coefficient de **Poisson** du matériau

$\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, coefficient de **Lamé**

n : normale extérieure en un point M appartenant à Γ

$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha$, intégrale elliptique complète de première espèce

$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}\ d\alpha$, intégrale elliptique complète de deuxième espèce

Nous définissons les variables suivantes :

$b = r - R,\ c = z - Z,\ s = \sqrt{b^2 + c^2}$,

$a = 4Rr + s^2,\ d = 2Rr + s^2,\ k = 2\dfrac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{a}}$.

Les solutions fondamentales s'écrivent alors sous la forme :

$$U_{rr}^*(r,z,R,z) = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}}$$

$$\left\{\left[(3-4\nu)\left(r+\frac{s^2}{2R}\right)+\frac{c^2}{2R}\right]K(k) - \left[(3-4\nu)\left(2r+\frac{s^2}{2R}\right)+r\left(\frac{c}{s}\right)^2+\frac{c^2}{2R}\right]E(k)\right\}$$

$$U_{zr}^{*}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}}\left\{\frac{c}{2}K(k)+\left(r\frac{c}{s}\frac{b}{s}-\frac{c}{2}\right)E(k)\right\}$$

$$U_{rz}^{*}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}}\left\{-\frac{c}{2}\frac{r}{R}K(k)+\left(r\frac{c}{s}\frac{b}{s}+\frac{c}{2}\frac{r}{R}\right)E(k)\right\}$$

$$U_{zz}^{*}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)\sqrt{a}}r\left\{(3-4\nu)K(k)+\left(\frac{c}{s}\right)^{2}E(k)\right\}$$

$$\begin{aligned}T_{rr}^{*}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}\Bigg\{\Bigg(\Bigg[&\frac{s^4}{4aRr}+\frac{bs^2}{a}\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{R}\right)+b^2\left(\frac{3}{2Rr}+\frac{r}{Ra}-\frac{2}{a}\right)\\&+\frac{16\nu-17}{4Rr}s^2+b\left(\frac{3}{2R}+\frac{2r}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2\right)+(2\nu-1)\left(4-\frac{r}{R}\right)\Bigg]n_r\\&+\frac{c}{R}\left[\frac{b^2-c^2}{2a}+\frac{2Rr}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2+\frac{5}{2}-2\nu\right]n_z\Bigg)K(k)+\Bigg(\Bigg[\left(\frac{5-8\nu}{2Rr}+\frac{2R}{ar}\right)s^2+3\frac{c^2-b^2}{2Rr}\\&+2\frac{b}{R}\left(\nu-6\frac{R^2}{a}\right)+10-14\nu+\left(\frac{b}{s}\right)^2\left(\frac{24Rr}{a}-\frac{r}{R}-6\right)-2\frac{r}{s}\frac{b}{s}\left(1-2\nu+\frac{8Rr}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2\right)\Bigg]n_r\\&-\left[c\left(\frac{4R}{a}+2\frac{1-\nu}{R}\right)+\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left(3+\frac{r}{R}-16\frac{Rr}{a}\right)+\frac{2r}{s}\frac{c}{s}\left(1-2\nu+\frac{8Rr}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2\right)\right]n_z\Bigg)E(k)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{zr}^{*}(r,z,R,z)=&\frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}\\&\Bigg\{\Bigg(\frac{c}{r}\left[\frac{1}{2a}\left(2r\frac{b}{s}-s\right)^2-\frac{3}{2}\right]n_r+\left[\left(\frac{c}{s}\right)^2\frac{2rb-s^2}{a}+2\nu-1\right]n_z\Bigg)K(k)\\&+\Bigg(\Bigg[\frac{c}{r}\left(3-2\frac{d}{a}\right)-2\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left(3-4\frac{d}{a}\right)+\frac{2r}{s}\frac{c}{s}\left(1-2\nu-\frac{4d}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2\right)\Bigg]n_r\\&-\left[2\nu-1+\left(3-4\frac{d}{a}\right)\left(\frac{c}{s}\right)^2+\frac{2r}{s}\frac{b}{s}\left(1-2\nu+\frac{4d}{a}\left(\frac{c}{s}\right)^2\right)\right]n_z\Bigg)E(k)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$T^*_{rz}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}$$
$$\left\{\left(\frac{c}{R}\left[\frac{b^2-c^2}{2a}+\frac{2Rr}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2+\frac{5}{2}-2\nu\right]n_r+\frac{r}{R}\left[\left(\frac{c}{s}\right)^2\frac{2Rb+s^2}{a}+2\nu-1\right]n_z\right)K(k)\right.$$
$$+\left(-\left[c\left(\frac{4R}{a}+2\frac{1-\nu}{R}\right)+\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left(3+\frac{r}{R}-16\frac{Rr}{a}\right)+\frac{2r}{s}\frac{c}{s}\left(1-2\nu+\frac{8Rr}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2\right)\right]n_r\right.$$
$$\left.\left.+r\left[\frac{1-2\nu}{R}+\left(\frac{c}{s}\right)^2\left(\frac{8R}{a}-\frac{1}{R}\right)+\frac{2}{s}\frac{b}{s}\left(1-2\nu-\frac{8Rr}{a}\left(\frac{c}{s}\right)^2\right)\right]n_z\right)E(k)\right\}$$

$$T^*_{zz}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}\left\{\left(\left[\left(\frac{c}{s}\right)^2\frac{2rb-s^2}{a}+2\nu-1\right]n_r+\frac{2rc}{a}\left(\frac{c}{s}\right)^2n_z\right)K(k)\right.$$
$$+\left(-\left[2\nu-1+\left(3-4\frac{d}{a}\right)\left(\frac{c}{s}\right)^2+\frac{2r}{s}\frac{b}{s}\left(1-2\nu+\frac{4d}{a}\left(\frac{c}{s}\right)^2\right)\right]n_r\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2r}{s}\frac{c}{s}\left[4\frac{d}{a}\left(\frac{c}{s}\right)^2+1-2\nu\right]n_z\right)E(k)\right\}$$

$$D^*_{rr}(r,z,R,z)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}\left\{\left(\left[\frac{s^4}{4aR}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)+\frac{bs^2}{2a}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{R^2}\right)+b^2\left(\frac{3}{2Rr}-\frac{r}{Ra}-\frac{1}{a}\right)\right.\right.$$
$$\left.+\frac{16\nu-17}{4Rr}s^2+\frac{3}{2}\frac{b}{R}+6\nu+\frac{r}{R}(1-2\nu)-\frac{9}{4}\frac{d}{R^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]n_r$$
$$\left.+\frac{c}{R}\left[\frac{b^2-c^2}{2a}-\frac{r}{R}\frac{s^2}{2a}-\frac{2rb}{a}+\frac{5}{2}-2\nu+\frac{3}{2}\frac{r}{R}\right]n_z\right)K(k)$$
$$+\left(\left[\left(\frac{5-8\nu}{2Rr}+\frac{2R}{ar}\right)s^2+3\frac{c^2-b^2}{2Rr}+\frac{b}{R}\left(2\nu+3-12\frac{R^2}{a}\right)+9-12\nu\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{b}{s}\right)^2\left(\frac{8r}{a}-\frac{3}{R}\right)(r+R)+\frac{3}{4}\frac{a}{R^2}+\frac{5}{4}\left(\frac{s}{R}\right)^2-\left(\frac{b}{R}\right)^2+\frac{2}{a}\left(c^2-b^2\right)-4\frac{rb}{a}\right]n_r$$
$$\left.\left.+\left[-c\left(\frac{4}{a}(r+R)+2\frac{1-\nu}{R}+\frac{r}{R^2}\right)-\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left(\frac{3}{R}-\frac{8r}{a}\right)(r+R)\right]n_z\right)E(k)\right\}$$

$$D^*_{zr}(r,z,R,z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}}$$
$$\left\{\left(c\left[-\frac{s(R+r)}{2aRr}\left(2r\frac{b}{s}-s\right)-\frac{3}{2r}-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}+2\nu\right)\right]n_r+\left(1+\frac{r}{R}\right)\left(2\nu-1-\frac{c^2}{a}\right)n_z\right)K(k)\right.$$
$$+\left(\left[\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left(\frac{r}{R}-3\right)+\frac{8bc}{a}-\frac{8rc}{a}\left(\frac{b}{s}\right)^2+2\nu\frac{c}{R}+\frac{c}{r}\left(3-\frac{2s^2}{a}\right)\right]n_r\right.$$
$$\left.\left.+\left[(1-2\nu)\left(1+\frac{r}{R}\right)+\left(\frac{c}{s}\right)^2\left(-3+\frac{r}{R}-\frac{8rb}{a}\right)+4\frac{c^2}{a}\right]n_z\right)E(k)\right\}$$

$$D^*_{rz}(r,z,R,Z) = D^*_{zz}(r,z,R,Z) = 0$$

Dans le cas où le noeud *i* appartient à l'axe de symétrie, les formules précédentes se simplifient :

$$U^*_{rr}(r,z,0,Z) = U^*_{rz}(r,z,0,Z) = 0$$

$$U^*_{zr}(r,z,0,Z) = \frac{1}{8\mu(1-\nu)}\left(\frac{b}{s}\right)^2\frac{c}{s}$$

$$U^*_{zz}(r,z,0,Z) = \frac{1}{8\mu(1-\nu)}\frac{b}{s}\left[3-4\nu+\left(\frac{c}{s}\right)^2\right]$$

$$T^*_{rr}(r,z,0,Z) = T^*_{rz}(r,z,0,Z) = 0$$

$$T^*_{zr}(r,z,0,Z) = \frac{1}{4(1-\nu)s}\left\{\frac{b}{s}\frac{c}{s}\left[3\left(\frac{c}{s}\right)^2-2(1+\nu)\right]n_r-\left(\frac{b}{s}\right)^2\left[1-2\nu+3\left(\frac{c}{s}\right)^2\right]n_z\right\}$$

$$T^*_{zz}(r,z,0,Z) = \frac{1}{4(1-\nu)s}\frac{b}{s}\left(\frac{b}{s}n_r+\frac{c}{s}n_z\right)\left[2\nu-1-3\left(\frac{c}{s}\right)^2\right]$$

$$D^*_{rr}(r,z,0,Z) = D^*_{zr}(r,z,0,Z) = 0$$

Lorsque r est nul, D_{rr} *et* D_{zr} se simplifient :

$$D_{rr}^{*}(0,z,R,Z) = D_{zr}^{*}(0,z,R,Z) = 0$$

Annexe C

CALCUL DES INTEGRALES ELEMENTAIRES

Dans cette annexe, nous donnons la liste des primitives permettant le calcul analytique des matrices élémentaires *h* et *g*, définies au paragraphe II.4.3. Ces formules sont valables pour des problèmes à contraintes ou déformations planes et des fonctions d'interpolation constante ou linéaire.

C.1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Les solutions fondamentales sont exprimées en fonction de la distance *s* d'un point *M* d'intégration de coordonnées (x_1, x_2) à un noeud *i* de coordonnées (y_1, y_2) (Cf. Figure C.1).

(x_1^1, x_2^1) et (x_1^2, x_2^2) sont les coordonnées des extrémités de l'élément d'intégration.

Les coordonnées x_1 et x_2 du point M s'expriment en fonction de $\left(x_1^1, x_2^1\right)$ et $\left(x_1^2, x_2^2\right)$ par :

$$\begin{cases} x_1(\eta) = \frac{1}{2}\left[\left(x_1^1 + x_1^2\right) + (x_1^2 - x_1^1)\eta\right] \\ x_2(\eta) = \frac{1}{2}\left[\left(x_2^1 + x_2^2\right) + (x_2^2 - x_2^1)\eta\right] \\ \eta \in [-1,1] \end{cases}$$

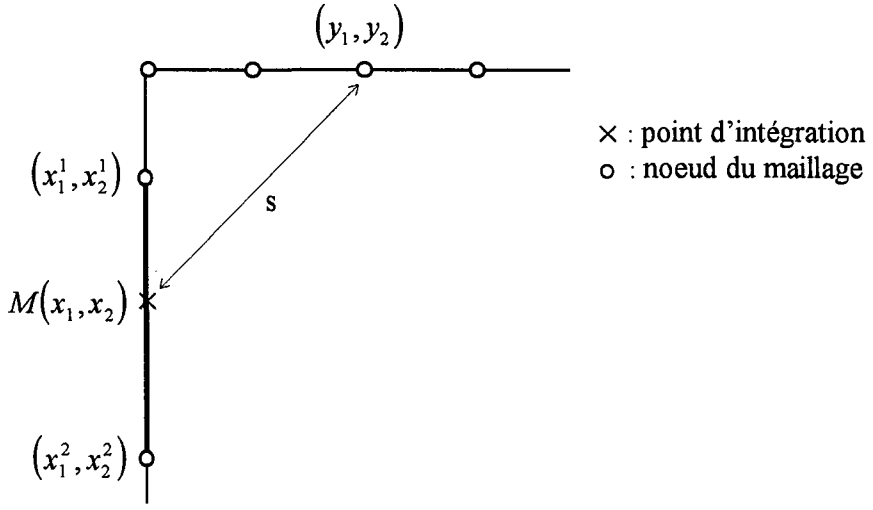


Figure C.1

s est défini par la relation suivante :

$$s^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

En posant,

$$l^2 = \left(x_1^2 - x_1^1\right)^2 + \left(x_2^2 - x_2^1\right)^2$$

$$A = \left(x_1^2 - x_1^1\right)\left(x_1^2 + x_1^1 - 2y_1\right) + \left(x_2^2 - x_2^1\right)\left(x_2^2 + x_2^1 - 2y_2\right)$$

$$B=\left(x_1^2+x_1^1-2y_1\right)^2+\left(x_2^2+x_2^1-2y_2\right)^2$$

nous obtenons :

$$s^2=\frac{1}{4}\left\{l^2\eta^2+2A\eta+B\right\}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_1}=\frac{(x_1-y_1)}{s}=\frac{(x_1^2+x_1^1-2y_1)+(x_1^2-x_1^1)\eta}{\sqrt{l^2\eta^2+2A\eta+B}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2}=\frac{(x_2-y_2)}{s}=\frac{(x_2^2+x_2^1-2y_2)+(x_2^2-x_2^1)\eta}{\sqrt{l^2\eta^2+2A\eta+B}}$$

Pour les intégrations, il est préférable de changer la forme de s^2.

$$s^2=\frac{1}{4}\left\{l^2\eta^2+2A\eta+B\right\}=\frac{l^2}{4}\left[\eta^2+\frac{2A\eta}{l^2}+\frac{B}{l^2}\right]=\frac{l^2}{4}\left[\left(\eta+\frac{A}{l^2}\right)^2+\frac{Bl^2-A^2}{l^4}\right]$$

$$Bl^2-A^2=\left[\left(x_2^2-x_2^1\right)\left(x_1^2+x_1^1-2y_1\right)-\left(x_1^2-x_1^1\right)\left(x_2^2+x_2^1-2y_2\right)\right]^2$$

En posant $\alpha=\frac{A}{l^2}$ et $\beta^2=\frac{Bl^2-A^2}{l^4}$, nous obtenons :

$$s^2=\frac{l^2}{4}\left\{\left(\eta+\alpha\right)^2+\beta^2\right\}$$

C.2. INTERPOLATION CONSTANTE

Nous donnons ici la liste des primitives nécessaires au calcul analytique des intégrales élémentaires *h* et *g*, dans le cas de fonctions d'interpolation constantes.

$$\int d\eta = \eta$$

$$\int \ln|\eta|\, d\eta = \eta \ln|\eta| - \eta$$

$$\int \ln\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right] d\eta = \begin{cases} 2(\eta+\alpha)\left[\ln|\eta+\alpha| - 1\right] & si\ \beta = 0 \\ (\eta+\alpha)\ln\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right] - 2\eta + 2\beta \arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{d\eta}{(\eta+\alpha)^2 + \beta^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\eta+\alpha)} & \text{si } \beta = 0 \\ \dfrac{1}{\beta} \arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{(\eta+\alpha)\, d\eta}{(\eta+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \ln\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]$$

$$\int \frac{(\eta+\alpha)^2\, d\eta}{(\eta+\alpha)^2 + \beta^2} = \begin{cases} \eta & \text{si } \beta = 0 \\ (\eta+\alpha) - \beta \arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3(\eta+\alpha)^3} & \text{si } \beta = 0 \\ \dfrac{(\eta+\alpha)}{2\beta^2\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]} + \dfrac{1}{2\beta^3} \arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{(\eta+\alpha)\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]^2} = -\frac{1}{2\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]}$$

$$\int \frac{(\eta+\alpha)^2\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\eta+\alpha)} & \text{si } \beta = 0 \\ -\dfrac{(\eta+\alpha)}{2\left[(\eta+\alpha)^2 + \beta^2\right]} + \dfrac{1}{2\beta} \arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{(\eta+\alpha)^3\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]^2} = \frac{\beta^2}{2\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]} + \frac{1}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]$$

C.3. INTERPOLATION LINEAIRE

Pour des fonctions d'interpolation linéaires, il nous faut rajouter les primitives suivantes :

$$\int \eta\, d\eta = \frac{\eta^2}{2}$$

$$\int \eta \ln|\eta|\, d\eta = \frac{\eta^2}{2}\left[\ln|\eta| - \frac{1}{2}\right]$$

$$\int \eta \ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] d\eta = \begin{cases} \left(\eta^2-\alpha^2\right)\ln|\eta+\alpha| + \eta\alpha - \dfrac{\eta^2}{2} + \dfrac{3}{2}\alpha^2 & si\ \beta = 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\eta^2+\beta^2-\alpha^2\right)\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] + \eta\alpha - \dfrac{1}{2}\eta^2 - 2\alpha\beta\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta\, d\eta}{(\eta+\alpha)^2+\beta^2} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{(\eta+\alpha)} + \ln|\eta+\alpha| & \text{si}\ \beta = 0 \\ -\dfrac{\alpha}{\beta}\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta(\eta+\alpha)\, d\eta}{(\eta+\alpha)^2+\beta^2} = \begin{cases} \eta - \alpha\ln|\eta+\alpha| & si\ \beta = 0 \\ \eta - \beta\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) - \dfrac{\alpha}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta(\eta+\alpha)^2\, d\eta}{(\eta+\alpha)^2+\beta^2} = \begin{cases} \dfrac{\eta^2}{2} & \text{si}\ \beta = 0 \\ \dfrac{(\eta+\alpha)^2}{2} - \dfrac{\beta^2}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] - \alpha(\eta+\alpha) + \alpha\beta\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]^2} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3(\eta+\alpha)^3} - \dfrac{1}{2(\eta+\alpha)^2} & \text{si } \beta = 0 \\ \dfrac{1}{2\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]} - \alpha\left[\dfrac{(\eta+\alpha)}{2\beta^2\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]} + \dfrac{1}{2\beta^3}\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right)\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta(\eta+\alpha)\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]^2} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2(\eta+\alpha)^2} - \dfrac{1}{(\eta+\alpha)} & \text{si } \beta = 0 \\ -\dfrac{\eta}{2\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]} + \dfrac{1}{2\beta}\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta(\eta+\alpha)^2\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]^2} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{(\eta+\alpha)} + \ln|\alpha+\eta| & \text{si } \beta = 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{2\beta}\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int \frac{\eta(\eta+\alpha)^3\, d\eta}{\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]^2} = \begin{cases} \eta - \alpha\ln|\alpha+\eta| & \text{si } \beta = 0 \\ \eta + \dfrac{\beta^2\eta}{2\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right]} - \dfrac{3}{2}\beta\arctan\left(\dfrac{\eta+\alpha}{\beta}\right) - \dfrac{\alpha}{2}\ln\left[(\eta+\alpha)^2+\beta^2\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le calcul des intégrales intervenant dans les formules (I.11) et (I.14), la démarche est identique.

Annexe D

LE CONTACT DE HERTZ

Le problème de la bille s'appuyant sur un massif élastique (ou du contact de deux sphères élastiques) a été résolu par **Hertz** en 1882[1].

Il a donné la répartition des contraintes dans l'aire de contact, l'enfoncement δ du poinçon (ou le rapprochement δ des deux sphères) et le rayon de contact a en fonction de la charge exercée P.

Le calcul du tenseur des contraintes a été résolu par **Huber** en 1904.

Nous considérons donc deux sphères S_1 et S_2 de rayon R_1 et R_2. Si aucune pression n'est exercée entre les deux sphères, le contact n'a lieu qu'en un seul point O. Sous l'action d'un petit chargement P, les centres C_1 et C_2 des deux sphères se rapprochent d'une quantité $\delta=\delta_1+\delta_2$ parallèlement à l'axe Oz et le contact s'effectue sur un cercle de rayon a.

---

[1] Voir référence [CON 2]

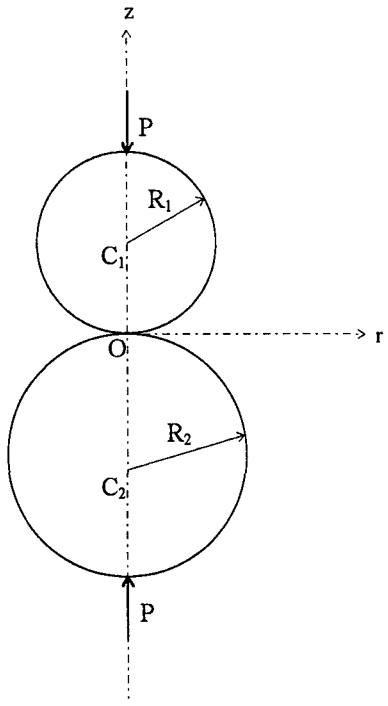


Figure D.1

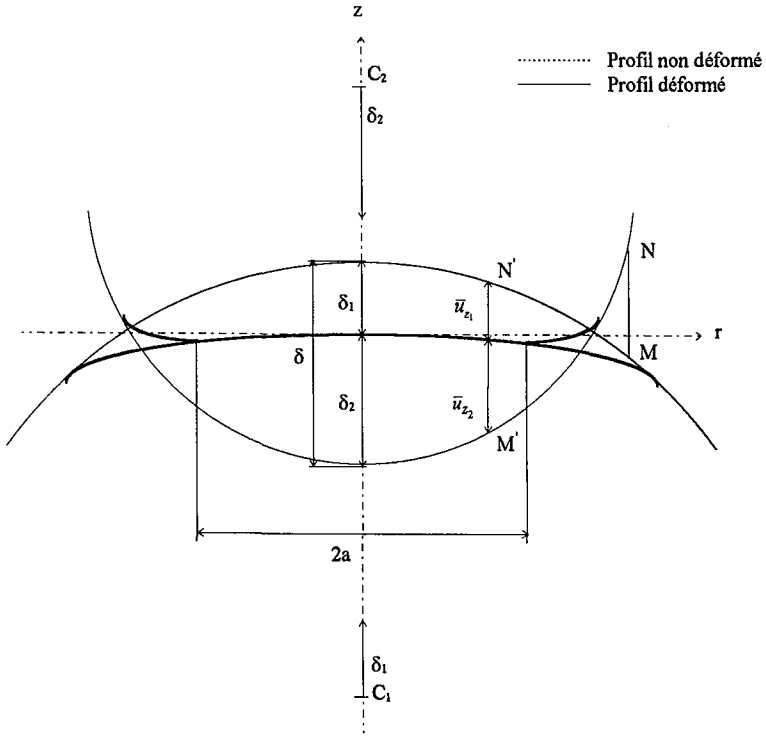


Figure D.2

La théorie de **Hertz** permet, sous certaines hypothèses, de déterminer ce rayon a ainsi que la distribution des déformations et des contraintes en fonction de la pression de contact et des caractéristiques mécaniques des solides.

Ces hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

- chaque solide est assimilé à un demi-espace élastique. Il est chargé sur une petite zone de sa surface considérée comme plane,

- le rayon a est petit devant la dimension caractéristique des corps. Ainsi, les contraintes étant concentrées dans la zone de contact et décroissant rapidement en module à partir de son centre, les conditions aux limites imposées sur les bords des solides n'influent pas sur le champ des contraintes,

- les rapports $\frac{a}{R_1}$ et $\frac{a}{R_2}$ sont petits. Ainsi, les surfaces autour de la région de contact sont considérées comme planes. De plus, les déformations dans le contact peuvent être considérées comme suffisamment faibles pour que la théorie de l'élasticité classique puisse être appliquée,

- le frottement est nul à l'interface. Ainsi, seule une distribution de pression normale agit sur chaque surface de contact,

- Il n'y a pas de forces d'attraction moléculaire.

Les deux sphères S_1 et S_2 ont pour équation :

$$(D.1)\quad \begin{cases} r^2 + (z - R_1)^2 = R_1^2 \\ r^2 + (z - R_2)^2 = R_2^2 \end{cases}$$

Au voisinage de l'axe z, z^2 est négligeable devant $2zR_1$ et $2zR_2$. La distance h qui sépare deux points M et N voisins de O (Cf. Figure D.2) est alors définie par :

$$(D.2)\quad h = z_1 + z_2 = \frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2}$$

En posant,

$$(D.3)\quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

nous obtenons :

$$(D.4)\quad h = \frac{r^2}{2R}$$

Si nous admettons que la déformation reste localisée au voisinage du contact, les centres des deux sphères ainsi que tous les couples (M,N) hors du cercle de contact se rapprochent de la quantité δ.

Par contre, du fait de l'impénétrabilité des deux sphères, les couples de points (M',N') (Cf. Figure D.2) se rapprochent d'une quantité moindre, égale à leur séparation initiale h.

Si nous désignons par u_{z_1} et u_{z_2}, les déplacements normaux locaux (Cf. Figure D.2), le problème consiste alors à calculer la distribution de pression agissant sur l'aire de contact S entre les deux solides telle que :

$$(D.5)\quad \begin{cases} \overline{u}_{z_1} + \overline{u}_{z_2} = \delta - h & \text{sur S} \\ \overline{u}_{z_1} + \overline{u}_{z_2} > \delta - h & \text{hors de S} \\ \overline{u}_z : \text{mesure positive} \end{cases}$$

La distribution de pression proposée par **Hertz**, vérifiant les équations (D.5), est donnée par la relation :

$$(D.6)\quad p(r) = p_0\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}$$

Cette pression est nulle sur les bords et maximale au centre.

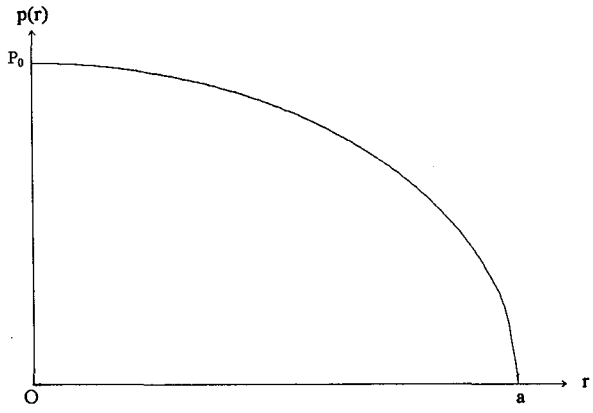


Figure D.3 : Distribution de pression sur la zone de contact S

La valeur maximale p_0 s'exprime en fonction de la charge totale P et du rayon a par :

$$(D.7)\quad p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}$$

Le rayon de contact a et la compression δ sont donnés par :

$$(D.8)\quad a = \left(\frac{3PR}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(D.9)\quad \delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

avec

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$: courbure relative,

$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$: module d'**Young** équivalent,

E_1 et E_2 : modules d'**Young** des sphères S_1 et S_2,

ν_1 et ν_2 : coefficients de **Poisson** des sphères S_1 et S_2.

Nous détaillons ci-dessous les solutions en déplacements et en contraintes. Nous désignons par E et ν, le module d'**Young** et le coefficient de **Poisson** du solide S_1 ou S_2.

La solution en déplacements s'écrit :

- dans la zone de contact : $r \leq a$

$$(\text{D.10}) \quad \begin{cases} \overline{u}_r(r) = -\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)}{3E}\dfrac{p_0 a^2}{r}\left(1-\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ \overline{u}_z(r) = \dfrac{1-\nu^2}{E}\dfrac{\pi p_0}{4a}\left(2a^2 - r^2\right) \end{cases}$$

- hors de la zone de contact : $r > a$

$$(\text{D.11}) \quad \begin{cases} \overline{u}_r(r) = -\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)}{3E}\dfrac{p_0 a^2}{r} \\ \overline{u}_z(r) = \dfrac{1-\nu^2}{E}\dfrac{p_0}{2a}\left[\left(2a^2 - r^2\right)\arcsin\left(\dfrac{a}{r}\right) + r^2\dfrac{a}{r}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{r^2}}\right] \end{cases}$$

Le tenseur de **Huber** s'écrit :

- sur la surface z=0

Si $r \le a$

$$(D.12)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_{rr}}{p_0} = \dfrac{1-2\nu}{3}\dfrac{a^2}{r^2}\left(1-\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \sqrt{1-\dfrac{r^2}{a^2}} \\ \dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{p_0} = -\dfrac{1-2\nu}{3}\dfrac{a^2}{r^2}\left(1-\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - 2\nu\sqrt{1-\dfrac{r^2}{a^2}} \\ \dfrac{\sigma_{zz}}{p_0} = -\sqrt{1-\dfrac{r^2}{a^2}} \end{cases}$$

Si $r>a$

$$(D.13)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_{rr}}{p_0} = -\dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{p_0} = \dfrac{1-2\nu}{3}\dfrac{a^2}{r^2} \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

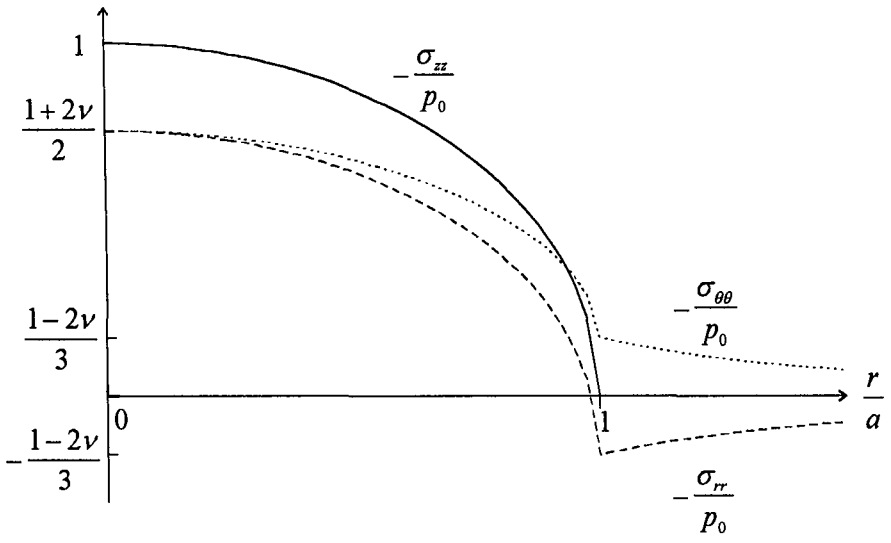


Figure D.4 : Contraintes sur la surface z=0

En surface, les contraintes σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sont principales.

A l'intérieur du cercle, elles sont compressives.

En dehors du cercle et sur celui-ci, σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont en intensité égales et opposées. Il se produit donc un cisaillement simple $\tau = \frac{1}{2}\left|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right| = \frac{1-2\nu}{2\pi}\frac{P}{r^2}$ qui atteint son maximum $\tau_{\max} = \frac{1-2\nu}{3} p_0$ en $r=a$.

La contrainte σ_{rr} est maximale en $r=a$. Elle est responsable des ruptures en anneaux observées lors de l'indentation de matériaux tels que le verre. En effet, ceux-ci se rompent facilement en tension, et une fissure s'initie le long du cercle en s'enfonçant sous la surface. C'est la fracture de **Hertz**.

- le long de l'axe de symétrie Oz

$$(\text{D.14}) \quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_{rr}}{p_0} = \dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{p_0} = -(1+\nu)\left(1 - \dfrac{z}{a}\arctan\left(\dfrac{a}{z}\right)\right) + \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{z^2}{a^2}\right)} \\ \dfrac{\sigma_{zz}}{p_0} = -\dfrac{1}{1+\dfrac{z^2}{a^2}} \end{cases}$$

Le long de l'axe de symétrie, les contraintes σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sont principales.

Le cisaillement principal s'écrit $\tau = \frac{1}{2}\left|\sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right|$. Celui-ci passe par un maximum sous la surface :

$\tau_{\max} = 0.32\, p_0$ en $z = 0.47\, a$ pour $\nu = 0.25$
$\tau_{\max} = 0.31\, p_0$ en $z = 0.48\, a$ pour $\nu = 0.30$
$\tau_{\max} = 0.26\, p_0$ en $z = 0.54\, a$ pour $\nu = 0.50$

Pour un matériau élasto-plastique, c'est en ce point, dit « point de **Hertz** », que débutent les déformations plastiques.

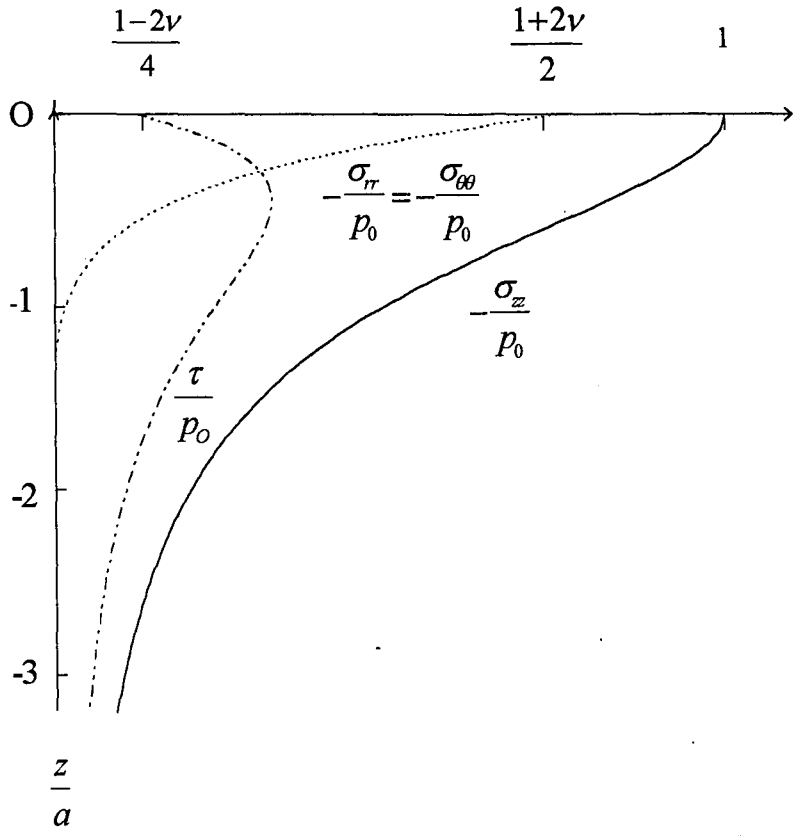


Figure D.5 : Contraintes le long de l'axe de symétrie

Annexe E

LE CONTACT DE HERTZ AVEC FROTTEMENT : SOLUTION ANALYTIQUE DE SPENCE

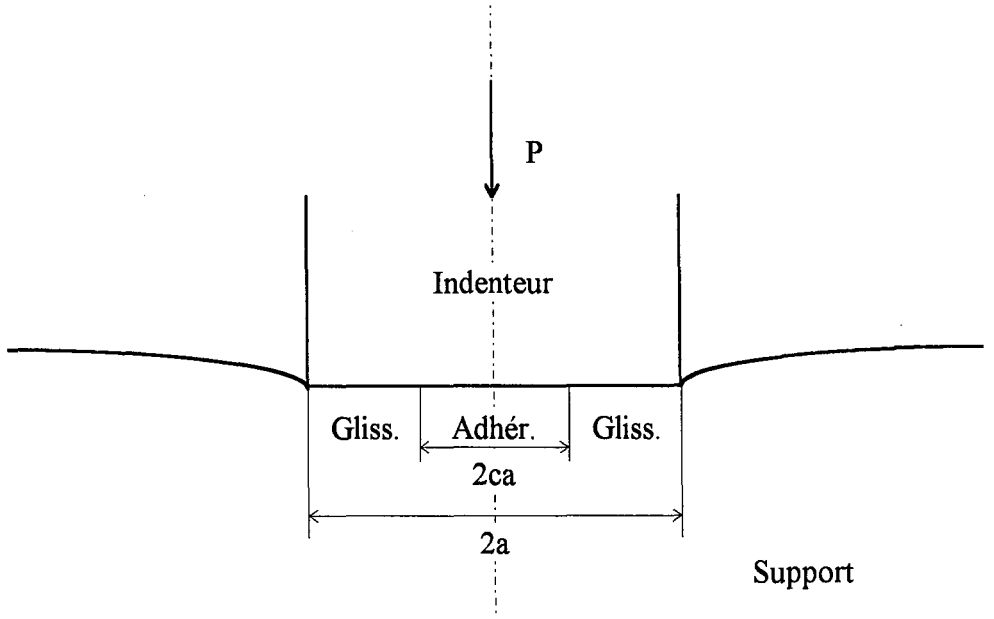
Spence a établi la solution analytique[1], en terme de contrainte normale et de dimension de la zone d'adhérence, dans le cas du contact élastique avec frottement entre un demi-espace et un indenteur axisymétrique. Il suppose, pour cela, que le frottement est régi par la loi de **Coulomb**.

Ses calculs reposent sur l'observation expérimentale suivante : la région de contact $(|r| \le a)$ se décompose en deux parties,

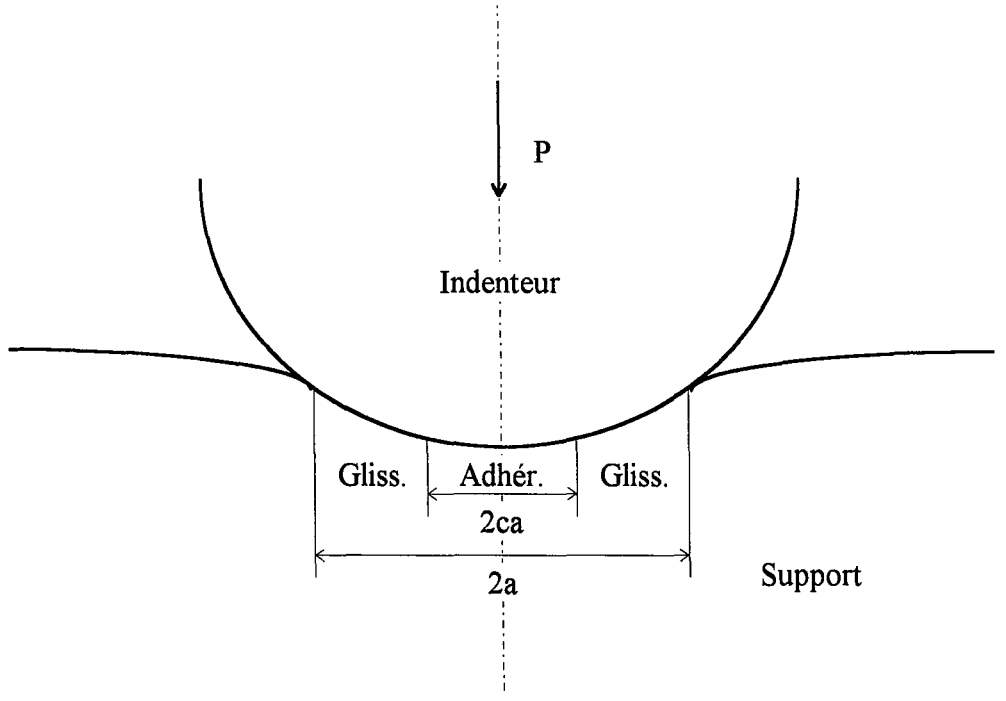
- une région centrale d'adhérence $\left(\left|\frac{r}{a}\right| \le c\right)$ sur laquelle $|p_t| < \beta |p_n|$,
- une région complémentaire de glissement $\left(c < \left|\frac{r}{a}\right| \le 1\right)$ sur laquelle $|p_t| = \beta |p_n|$.

p_n, p_t : contraintes normale et tangentielle
β : coefficient de frottement
a : rayon de la surface de contact
c : dimension de la zone d'adhérence, exprimée en pourcentage de a

[1] Voir référence [CON 13]



a) Indenteur plat



b) Indenteur hertzien

Figure E.1 : Partage de la zone de contact

En faisant l'hypothèse que la charge P (Cf. Figure E.1) est appliquée de façon monotone, à l'aide d'incréments de charge suffisamment faibles de façon à rester dans l'hypothèse quasi-statique, **Spence** établit que le paramètre c ne dépend que des propriétés mécaniques des matériaux et du coefficient de frottement β.

c, représentant le rapport du rayon de la zone d'adhérence sur celui de la zone de contact, est donc indépendant de la charge P.

La relation établie par **Spence** est la suivante :

$$(E.1) \quad \beta = \frac{\gamma}{2cK_1(c)} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$$

γ est défini par la relation :

$$(E.2) \quad \gamma = \frac{\frac{1-2\nu_1}{2G_1} - \frac{1-2\nu_2}{2G_2}}{\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2}}$$

E_i : module d'**Young**
ν_i : coefficient de **Poisson** } du solide n° i

$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$: module de cisaillement

Dans le cas particulier d'un indenteur rigide, la relation (E.2) se simplifie

$$(E.3) \quad \gamma = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

ν : coefficient de **Poisson** du support

La fonction K_1 est définie par :

$K_1(x) = K\left(\sqrt{1-x^2}\right)$, où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Remarque

La relation (E.1) est valable pour un indenteur plat ou de forme elliptique.

❑

La Figure E.2 représente la courbe de β en fonction de c, pour une valeur de γ fixée à 0.375.

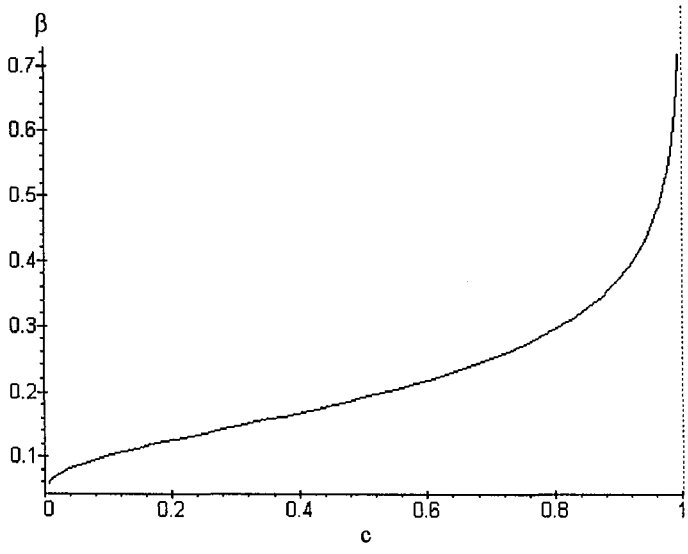


Figure E.2 : Extension de la zone de glissement

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I. THEME : CONTACTS ENTRE DEUX SOLIDES

[CON 1] **B. RADI**
« *Méthode de calcul par sous-domaines. Application au problème de contact entre deux solides déformables* »
Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, 17 avril 1992.

[CON 2] **K.L. JOHNSON**
« *Contact Mechanics* »
Cambridge University Press, 1987.

[CON 3] **K. MAN, M.H. ALIABADI, et D.P. ROOKE**
« *Analysis of contact friction using the boundary element method* »
Computational Methods in Contact Mechanics, Elsevier, 1993,
pp. 1-60.

[CON 4] **S. TAKAHASHI, et C.A. BREBBIA**
« *Elastic contact analysis with friction using boundary element flexibility approach* »
Computational Methods in Contact Mechanics, Elsevier, 1993,
pp. 61-98.

[CON 5] **K. YAMAZAKI**
« *Penalty function method using BEM* »
Computational Methods in Contact Mechanics, Elsevier, 1993,
pp. 155-190.

[CON 6] **A. FOCES, J. A. CARRIDO, et F. PARIS**
« *Three-dimensional contact using BEM* »
Computational Methods in Contact Mechanics, Elsevier, 1993,
pp. 191-232.

[CON 7] **A. GAKWAYA, et X. KONG**
« *Application of boundary element and mathematical programming approach in contact problems* »
Computational Methods in Contact Mechanics, Elsevier, 1993,
pp. 265-304.

[CON 8] **K.W. MAN, M.H. ALIABADI, et D.P ROOKE**
« *Frictional contact analysis using boundary element method* »
Contact Mechanics (Computational techniques),
Computational Mechanics Publications (Southampton Boston), 1993,
pp. 163-174.

[CON 9] **M.W HEINSTEIN, S.W. ATTAWAY, J.W. SWEGLE, et F.J. MELLO**
« *A general contact detection algorithm for finite element analysis* »
Contact Mechanics (Computational techniques),
Computational Mechanics Publications (Southampton Boston), 1993,
pp. 219-226.

[CON 10] **O.A. OLUKOKO, A.A. BECKER, et R.T. FENNER**
« *Analysis of two-dimensional and axisymmetric contact and friction problems using boundary element software* »
Contact Mechanics (Computational techniques),
Computational Mechanics Publications (Southampton Boston), 1993,
pp. 243-252.

[CON 11] **C. ALESSANDRI, et A. TRALLI**
« *BEM sensitivity analysis for unilateral contact problems* »
Contact Mechanics (Computational techniques),
Computational Mechanics Publications (Southampton Boston), 1993,
pp. 261-270.

[CON 12] **B. DESHOULLIERES,**
« *Contact avec frottement sec entre solides. Résolution pour la loi de Coulomb et des lois non classiques par la méthode des équations intégrales de frontière* »
Thèse de doctorat de l'université de Poitiers, 4 juillet 1990.

[CON 13] **D. A. SPENCE,**
« *The hertz contact problem with finite friction* »
Journal of elasticity, Novembre 1975, Vol. 5, N° 3-4, pp. 297-319.

[CON 14] **N. KIKUCHI , et J.T. ODEN**
« *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods* »
S.I.A.M., 1988.

[CON 15] **L.T. CAMPOS, J.T. ODEN , et N. KIKUCHI**
« *A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics* »
Computer methods in applied mechanics and engineering, 1982,
Vol. 34, pp. 821-845.

[CON 16] **J.J. KALKER**
« *On the contact problem in elastostatics*, Proceeding of the second meeting on unilateral problems in structural analysis »
Ravello, 22-24 Septembre 1983, pp. 81-118.

[CON 17] **M. COCU, E. PRATT, et M. RAOUS**
« Formulation and approximation of quasistatic frictional contact »
International journal of engineering science, 1996, Vol. 34, N° 7, pp. 783-798.

[CON 18] **L. GREGO, et M. RAOUS**

« Méthodes multiniveaux pour des problèmes de contact avec frottement »

1995, Thèse de doctorat de l'université de Montpellier 2.

[CON 19] **F. JOURDANT, et M. JEAN**

« Simulation numérique de l'emboutissage : contact et frottement en régularisation dynamique »

1995, Thèse de doctorat de l'université de Montpellier 2.

[CON 20] **F. DUBOIS, P. CHABRAND, et M. RAOUS**

« Contact, frottement, grandes déformations élastoplastiques - Application à l'emboutissage »

1994, Thèse de doctorat d'ingénieur de l'université d'Aix - Marseille 2.

[CON 21] **P. CHABRAND, O. CHERTIER, F. DUBOIS, et D. GRAILLET**

« Contact avec frottement entre solides déformables en grandes déformations »

13-ième Congrès Français de Mécanique - Poitiers - Futuroscope, 1-5 septembre 1997.

[CON 22] **M. COCU, E. PRATT, et M. RAOUS**

« Existence d'une solution du problème quasi-static de contact unilatéral avec frottement non local »

Compte rendu de l'académie des sciences, Série 1, 1995, Vol. 320, N° 11, pp. 1413-1417.

II. THEME : LES METHODES DE DECOMPOSITION PAR SOUS-DOMAINES

[DEC 1] **P. LE TALLEC**
« *Domain decomposition methods in computational mechanics* »
Computional mechanics advances, 1994 Tome 1, pp. 121-230.

[DEC 2] **P. LE TALLEC**
« *Méthodes de décomposition de domaines* »
Séminaire du 25-26 mai 1994, Centre Charles Hermites, Nancy.

[DEC 3] **B. LUCQUIN, et O. PIRONNEAU**
« *Introduction au calcul scientifique* »
Masson, 1996.

[DEC 4] **P.L. LIONS**
« *On the Schwarz alternating I.* »
In First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations,
Paris, 1987, SIAM, Philadelphia, PA, pp. 1-42.

[DEC 5] **C. BERNARDI**
« *La méthode d'éléments avec joint* »
Séminaire du 25-26 mai 1994, Centre Charles Hermites, Nancy.

[DEC 6] **V.I. AGOSHKOV, et V.I. LEBEDEV**
« *Variational algorithms of the domain decomposition method* »
Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1990, Vol. 5, N° 1, pp. 27-46.

[DEC 7] **V.I. AGOSHKOV, et E. OVCHINNIKOV**
« *Projection Domain Decomposition Method* »
CRS4, Rapport N°2, Février 1993.

[DEC 8] **V.I. AGOSHKOV, et V.I. LEBEDEV**
« *Generalized Schwarz algorithm with variable parameters* »
Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1990, Vol. 5, N° 1, pp. 1-26.

[DEC 9] **V.I. AGOSHKOV**
« *Domain Decomposition Method : Some Results of Theory and Applications* »
Proceeding of Fourth international Symposium on domain decomposition methods for partial differential equations,
21-25 mai 1990, Moscou, pp. 1-18.

[DEC 10] **V.I. AGOSHKOV**
« *Poincaré-Seklov's Operators and Domain Decomposition Methods in Finite Dimensional Spaces* »
Proceeding of First international Symposium on domain decomposition methods for partial differential equations,
1988, Philadelphie, pp. 73-112.

[DEC 11] **C. FARHAT et F.X. ROUX**
« *Implicit parallel processing in structural mechanics* »
Computational Mechanics Advances, Version corrigée Nov. 1993.

III. THEME : INFORMATIQUE

[INF 1] Borland C++ 4.0
« *Manuels d'utilisation* »
1993.

[INF 2] Maple V
« *Manuels d'utilisation* »
1994.

[INF 3] **C. PETZOLD**
« *Programmer sous Windows 3.1* »
Microsoft Press, 1994, 4ième tirage.

[INF 4] **SFM**
« *Guide de validation des progiciels de calcul de structures* »
Afnor technique, 1990.

IV. THEME : MATHEMATIQUE

[MAT 1] **M. ABRAMOWITZ, et A. STEGUN**
« *Handbook of mathematical functions* »
Dover Publications, 1972, 9ième édition.

[MAT 2] **R. DAUTRAY, et J.L. LIONS**
« *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* »
Tome 1, Masson, 1987.

[MAT 3] **P. LASCAUX, et R. THEODOR**
« *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur* »
Masson, 1993, Tome 1 et 2, 2ième édition.

[MAT 4] **P.D. PANAGIOTOPOULOS**
« *Inequality problems in mechanics and applications* »
Birkhauser,1985.

[MAT 5] **G. DUVAUT , et J.L. LIONS**
« *Les inéquations en mécanique et physique* »
Dunod, 1972.

[MAT 6] **Y. SAAD , et M.H. SCHULTZ**
« *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems* »
S.I.A.M. J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, N° 3, 1986.

V. THEME : MECANIQUE DES SOLIDES

[MEC 1] **J.L. BATOZ, et G. DHATT**
« *Modélisation des structures par éléments finis* »
Hermès, 1990.

[MEC 2] **G. DUVAUT**
« *Mécanique des milieux continus* »
Masson, 1990.

[MEC 3] **G. DUVAUT, et J.L. LIONS**
« *Les inéquations en mécanique et en physique* »
Dunod 1972.

[MEC 4] **P. GERMAIN, et P. MULLER**
« *Introduction à la mécanique des milieux continus* »
Masson, 1995, 2^{ième} édition.

[MEC 5] **J. SALENÇON**
« *Mécanique des milieux continus* »
Ellipses, 1988, Tome 2.

[MEC 6] **D. FRANÇOIS, A. PINEAU, et A. ZAOUI**
« *Elasticité et Plasticité* »
Hermès, 1992, 2^{ième} édition.

[MEC 7] **D. FRANÇOIS, A. PINEAU, et A. ZAOUI**
« *Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact* »
Hermès, 1992, 2ième édition.

VI. THEME : LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

[MEF 1] **N.I. MUSKHELISHVILI**
« Some basic problems of the mathematical theory of elasticity »
Noordhoff, Groningen, 1953.

[MEF 2] **S.G. MIKHLIN**
« *Integral Equations*, Pergamon, »
New York, 1957.

[MEF 3] **O.D. KUPRADZE**
« *Potential methods in the theory of elasticity* »
Daniel Davey & Co., New York, 1965.

[MEF 4] **V.J. SMIRNOV**
« *Integral equations and partial differential equations* »
A course in Higher Mathematics, Vol. 4, Addison-Wesley, London, 1964.

[MEF 5] **J.C. LACHAT**
« *A further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics* »
Thèse de doctorat de l'université de Southampton, 1975.

[MEF 6] **T.A. CRUSE, et F.J. RIZZO,**
« *A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem* »
J. Math. Anal. Appl., Vol. 22, 1968, pp. 244-259.

[MEF 7] **J. BALAS, J. SLADEK, et V. SLADEK**
« *Stress analysis by Boundary Element Methods* »
Elsevier, 1989, Tome 23, pp. 11-276.

[MEF 8] **C.A. BREBBIA, J.C.F. TELLES, et L.C. WROBEL**
« *Boundary Element Techniques* »
Springer-Verlag, 1984, pp. 177-236.

[MEF 9] **CROUCH, ET A.M. STARFIELD**
« *Boundary element method in solid mechanics* »
Springer-Verlag, 1987.

[MEF 10] **F. HARTMANN**
« *Computing the C-Matrix in non-smooth boundary points, New development in boundary element methods* »
Butterworths London 1980, CML Southampton,1983, pp. 367-379.

[MEF 11] **T.A. CRUSE, D.W. SNOW, et R.B. WILSON**
« *Numerical solutions in axisymmetric elasticity* »
Computers and Structures, Vol. 7, pp. 445-451,
Pergamon Press, 1977.

[MEF 12] **M. BONNET, et S. MUKHERJEE**
« *Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept* »
International Journal of Solids and Structures, 1996, Vol. 33, N° 30, pp. 4461-4480.

[MEF 13] **M. BONNET**

« Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire »

Compte rendu de l'académie des Sciences, Série 2 , 1994, Vol. 318, N° 4, pp. 429-434.

[MEF 14] **F. KOSIOR**

« *Vers l'application d'une méthode de formulation inverse aux problèmes de* contact »

Mémoire de D. E. A., Ecole des Mines de Nancy,1993.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur DUVAUT, Professeur, Univeristé Pierre & Marie Curie Paris,
Monsieur PESEUX, Professeur, Ecole Centrale de Nantes,
Monsieur ZAIDI, Professeur, Université de Poitiers

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur KOSIOR Françis

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDE

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :
"Méthode de décomposition par sous-domaines et intégrales de frontières. Application à l'étude du contact entre deux solides déformables".

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"MÉCANIQUE & ÉNERGÉTIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **25 Novembre 1997**
Le Président de l'I.N.P.L.,

J. HARDY

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE NANCY

TEL. 33/83.59.59.5
FAX. 33/83.59.59.5

Résumé

Ce mémoire a pour objectif la modélisation du problème de contact avec frottement par une technique de décomposition par sous-domaine couplée aux éléments frontières.

La méthode de décomposition offre l'avantage de traiter le problème sur chaque solide séparément, ce qui diminue sensiblement la taille des systèmes à résoudre. Le contact étant régi par des conditions portant uniquement sur l'interface, la méthode du complément de **Schur**, technique de décomposition sans recouvrement, est particulièrement bien adaptée. Dans ce cas, seules les informations à l'interface sont transmises d'un sous-domaine à l'autre.

Ceci nous conduit naturellement à l'associer à la méthode des éléments frontières. En effet, celle-ci nécessite simplement la discrétisation des frontières des solides. De plus, les déplacements et les contraintes à la frontière sont calculés directement et de façon plus précise qu'avec les éléments finis.

Ce travail s'est concrétisé par la mise au point de trois codes de calculs sur micro-ordinateur :

- un code d'éléments frontières. Il se compose d'un mailleur et d'un solveur, traitant des structures planes en élasticité classique. Nous le testons avec succès par la résolution de problèmes de référence. Nous comparons ses performances à celles d'autres logiciels d'éléments finis et d'éléments frontières,
- un code de décomposition. Il met en œuvre une variante de la méthode d'**Hennizel**. Il se compose d'un solveur, traitant des structures planes constituées de plusieurs matériaux en élasticité classique,
- un code de résolution du contact. Il résout le problème du contact bilatéral ou unilatéral avec frottement de **Coulomb** entre deux solides déformables. Nous appliquons ce logiciel à l'étude de l'indentation d'un support par un poinçon plat et une bille. Dans ce dernier cas, nos résultats sont conformes à la théorie de **Hertz** et en accord avec la solution analytique de **Spence**.

Abstract

This study deals with the simulation of contact problem with friction by a domain decomposition technique coupled with boundary elements.

This decomposition method solves the problem on each solid separately, which reduces the size of systems. The contact is governed only by boundary conditions. So, the method of **Schur** complement operator, a decomposition technique without overlapping, is particularly recommended. In this case, only information on interface is transmitted from one sub-domain to another.

This leads us naturally to associate it with boundary elements method. Indeed, this one needs only discretisation of boundaries of solids. Moreover, displacements and stresses on boundary are calculated directly and more precisely than by finite elements.

Our work has taken shape by the working out of three softwares on micro-computer :

- a boundary elements program. It is made up of a mesher and a solver, which deals with plane structures in elasticity. We test it successfully by solving reference problems. We compare its performance to those of another softwares of finite elements and of boundary elements,
- a domain decomposition program. It uses a variant of the method of **Hennizel**. It is made up of a solver which deals with plane structures constituted by several materials in elasticity,
- a program of solution of contact. It solves the problem of bilateral or unilateral contact with **Coulomb** friction between two deformable solids. We apply this software to the study of indentation of a support by a plane punch and a sphere. In the last case, our results are consistent with **Hertz** theory and analytical solution of **Spence**.