



**HAL**  
open science

# Influence des paramètres architecturaux sur le comportement viscoélastique du matériau bois à ses différentes échelles d'hétérogénéité

Pascal Vieville

► **To cite this version:**

Pascal Vieville. Influence des paramètres architecturaux sur le comportement viscoélastique du matériau bois à ses différentes échelles d'hétérogénéité. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1992. Français. NNT : 1992INPL127N . tel-01751042

**HAL Id: tel-01751042**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751042>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

92 INPL 127 N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE  
LEMTA

THESE

Présentée à  
L'Institut National Polytechnique de Lorraine

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L'I.N.P.L.

en Mécanique et Energétique

par

Pascal VIEVILLE



INFLUENCE DES PARAMETRES ARCHITECTURAUX SUR  
LES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES DU BOIS A  
SES DIFFERENTES ECHELLES D'HETEROGENEITES

Soutenue publiquement le 17 Décembre 1992, devant la commission d'Examen  
membres du jury :



D 136 008317 1

B. THIBAUT  
M. BERVEILLER  
J.M. GENEVAUX  
D. GUITARD  
J.M. LEBAN  
P. LIPINSKI

## RESUME DE LA THESE

La première partie est consacrée à la description des quatre niveaux d'hétérogénéité du matériau bois, définissant pour chaque échelle des facteurs de forme caractérisant la géométrie des différents éléments constitutifs dont le recouvrement réalise le matériau hétérogène.

Cette description morphologique amène du macroscopique (bois massif) au niveau moléculaire qui sera le point de départ des simulations développées dans la troisième partie.

La deuxième partie est consacrée à la description de l'outil de simulation : le schéma autocohérent. Cette méthode, déjà utilisée dans le cas de la mécanique du composite élastique a été adaptée, dans le cadre de ce travail, aux particularités du bois : matériau viscoélastique alvéolé. Le problème de la viscoélasticité a été traité dans le cas de l'analogie harmonique.

La grande hétérogénéité du matériau au niveau de la paroi cellulaire (troisième niveau), la présence d'inclusions vides au deuxième niveau (cernes, rayons ligneux), le caractère viscoélastique du matériau à tous les niveaux ne permet pas l'utilisation du schéma autocohérent classique (existence de fortes distorsions ou de non convergences).

L'adaptation du schéma consiste en une approche autocohérente multi-étapes présentée dans la deuxième partie.

Plusieurs tests permettent de valider les différents schémas autocohérents : confrontation aux bornes viscoélastiques de Foscoe, confrontation aux solutions analytiques et aux expériences disponibles dans la littérature.

La troisième partie est consacrée aux simulations réalisées aux trois niveaux d'hétérogénéité du matériau bois :

-Paroi cellulaire : influence de l'allongement des renforts celluloseux sur les grandeurs techniques et les facteurs de perte. Influence de l'angle des microfibrilles sur le comportement viscoélastique du tissu.

A l'occasion de ces simulations des propriétés d'ordre général sont mises en évidence comme la liaison facteur de forme-transitions : influence des formes sur les températures de transition ou l'existence de bornes sur les facteurs de perte.

-Cerne ou rayon ligneux : influence de l'allongement sur les grandeurs techniques. Mise en évidence de l'importance de l'écrasement des cellules sur l'anisotropie transversale.

Etude de la nature des fonctions grandeurs techniques-densité.

-Au niveau du bois massif : Influence de la forme en plaque des cernes de bois d'été sur l'anisotropie transversale.

Rôle des rayons ligneux au niveau de l'inversion de la relation d'ordre sur les raideurs dans le plan R T et au niveau de la perte en raideur longitudinale (partie réelle du module). Influence de l'écrasement des rayons ligneux sur le module complexe longitudinal.

### MOTS CLES

MATERIAU BOIS, VISCOELASTICITE, ANISOTROPIE, HOMOGENEISATION, SCHEMA AUTO-COHERENT, SCHEMA AUTO-COHERENT MULTI-ETAPES, MATERIAU COMPOSITE, MATERIAU ALVEOLE

## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

INTRODUCTION

P 1

CHAPITRE  $\alpha$

P 3

### ANATOMIE DU MATERIAU BOIS

I BOIS ET HETEROGENEITE. LES QUATRE NIVEAUX D'HETEROGENEITE

- Niveau 1 : le bois massif
- Niveau 2 : Cernes et Rayons ligneux
- Niveau 3 : Le tissu élémentaire
- Niveau 4 : le niveau microscopique

II LES PARAMETRES DESCRIPTIFS DES CONSTITUANTS POUR CHAQUE NIVEAU D'HETEROGENEITE

- II-1 Niveau 1
- II-2 Niveau 2
- II-3 Niveau 3
- II-4 Niveau 4
  - 1 Généralités
  - 2 Cellulose I
  - 3 Hemicellulose et lignine (cas élastique)
  - 4 Viscosité de la matrice hemicellulose-lignine

III CONCLUSION

les facteurs de forme

IV BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE  $\beta$

P31

### VISCOELASTICITE DU MATERIAU HETEROGENE

I GENERALITES

- Approches micro et macroscopiques
- Cas du matériau hétérogène
- Caractérisation du comportement différé
- Influence de la microstructure
- Les analogies élasticité - viscoélasticité

II VISCOELASTICITE DES MATERIAUX HETEROGENES. BIBLIOGRAPHIE

- Généralités
- Les modèles analytiques
- Les bornes

III LE SCHEMA AUTO-COHERENT EN VISCOELASTICITE

- Généralités
- Le schéma autocohérent en viscoélasticité
- Le schéma autocohérent à un site par étapes.

IV BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE  $\gamma$

P 67

### TESTS DES SCHEMAS AUTO-COHERENTS

I COMPARAISON DE LA SOLUTION NUMERIQUE VISCOELASTIQUE AUTO-COHERENTE AVEC LA SOLUTION ANALYTIQUE

II CONFRONTATION AVEC LES BORNES DE ROSCOE

III CONFRONTATION AVEC DIFFERENTES SOLUTIONS ANALYTIQUES ET DIFFERENTES EXPERIENCES

- III-1 Composite à renforts cylindriques à section circulaire
  - 1 Cas élastique
  - 2 Cas viscoélastique

- 3 Influence de la raideur
- 4 Influence du nombre d'étapes
- III-2 Composite à renforts sphériques
- III-3 Composite à renforts discoides
- IV CONFRONTATION AVEC UNE METHODE D'HOMOGENEISATION UTILISANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
- V CAS DE L'INCLUSION VIDE
- VI CONCLUSION GENERALE SUR LES TESTS
- VII BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE Δ

P 121

SIMULATION DES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES  
AUX DIFFERENTES ECHELLES D'HETEROGENEITES INFLUENCE DE DIFFERENTS  
PARAMETRES ARCHITECTURAUX

I LA PAROI CELLULAIRE

- I-1 LES DIFFERENTS MODELES DISPONIBLES
- I-2 LA MODELISATION PAR LA METHODE AUTO-COHERENTE
- I-3 MODELISATION D'UN TISSU ELEMENTAIRE. ETUDE DES GRANDEURS  
TECHNIQUES
- I-4 LIAISON FACTEUR DE FORME ET TRANSITION

II LE CERNE

- II-1 GENERALITES
- II-2 INFLUENCE DES FACTEURS DE FORMES SUR LES GRANDEURS TECHNIQUES
- II-3 ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA DENSITE SUR LES CARACTERISTIQUES  
VISCOELASTIQUES DU CERNE

III LE BOIS MASSIF.

- III-1 GENERALITES
- III-2 INFLUENCE DE L'ECRASEMENT DES CELLULES DE BOIS FINAL SUR  
L'ANISOTROPIE DU BOIS MASSIF
- III-3 LE ROLE DES RAYONS LIGNEUX DANS L'ANISOTROPIE DU BOIS MASSIF

IV BIBLIOGRAPHIE

CONCLUSIONS

P 186

ANNEXES

P 188

## REMERCIEMENTS

Ce travail effectué, au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliqué (LEMTA, UA CNRS 875) sous la direction de Monsieur le Professeur D. Guitard, est le résultat d'une collaboration avec le groupe LPMM-ENIM du laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz (LPMM-ENIM, UA CNRS 1215) dirigé par Monsieur le Professeur M. Berveiller.

Je tiens à remercier Monsieur D. Guitard pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder et pour la qualité de l'encadrement apportée à l'Equipe de Mécanique des Solides et des Structures durant son séjour à l'INPL.

Que Monsieur M. Berveiller reçoive ici l'expression de ma reconnaissance, à la fois pour avoir accepté la charge de Rapporteur, mais aussi pour m'avoir permis d'utiliser les outils de simulations de son laboratoire.

Je remercie Monsieur B. Thibaut, Directeur de Recherche au CNRS, pour la charge de rapporteur qu'il a bien voulu accepter et pour la lecture attentive qu'il a accordée à ce mémoire.

Je remercie Monsieur J.M. Leban pour sa participation au jury et pour le point de vue de spécialiste de l'arbre qu'il a eu sur le présent travail.

Je tiens enfin à témoigner de ma plus vive gratitude à l'égard de Messieurs J.M. Genevaux et P. Lipinski non seulement pour la richesse des apports qu'ils ont su me donner sur le plan scientifique, mais aussi pour les grandes qualités humaines dont ils ont fait preuve durant ces quelques années de collaboration. Ils m'ont fait le plaisir, d'autre part, de participer au jury, qu'ils en soient ici remerciés.



## INTRODUCTION

Au niveau macroscopique, le bois peut-être considéré, en première approximation, comme un matériau viscoélastique linéaire orthotrope. Ce comportement global moyen est le résultat de comportements locaux situés à différentes échelles d'hétérogénéités de la matière ligneuse (premier chapitre). A chaque niveau d'hétérogénéité, un comportement viscoélastique moyen peut-être décrit en fonction des caractéristiques viscoélastiques de chaque constituant mais aussi en fonction de paramètres décrivant leur géométrie (quatrième chapitre). Ces caractéristiques géométriques traduites en facteurs de formes et paramètres d'orientation sont, pour le matériau bois, des grandeurs soumises à de grandes variations et constituent les éléments explicatifs essentiels de l'anisotropie du matériau (les seuls pour ce qui concerne les composantes visqueuses de la matière).

Il existe, dans la littérature consacrée à la matière ligneuse, de nombreux modèles destinés au calcul de grandeurs relatives aux tissus constitutifs du matériau bois à ses différentes échelles d'hétérogénéité mais qui présentent de grandes limites d'utilisation : cas élastique, théorie des plaques stratifiées, lois de mélange et qui, de plus, ne donnent accès qu'à un nombre limité de grandeurs techniques.

Avec le rôle grandissant, dans la Technologie moderne, de matériaux naturels ou artificiels présentant des anisotropies marquées, des méthodes permettant la modélisation tridimensionnelle de ces matériaux ont été développées activement au cours de ces dernières

années. Parmi ces méthodes, dites d'homogénéisation, la méthode autocohérente occupe une place privilégiée de part sa grande souplesse d'accommodation : élasticité linéaire, élasticité non linéaire, élastoplasticité. Elle a été adaptée au cas de la viscoélasticité dans le cadre de l'analogie harmonique (deuxième chapitre).

Si le passage élastique-viscoélastique peut se faire directement sur le plan de la formulation du schéma autocohérent, une adaptation du calcul numérique est nécessaire du fait du comportement aberrant pouvant survenir sur les tenseurs du quatrième ordre (deuxième chapitre).

Une autre difficulté du calcul des grandeurs effectives résulte principalement du caractère alvéolaire du matériau : jusqu'à 90% de vide dans le cas d'un bois de printemps. Pour traiter ce problème, une approche autocohérente multi-étapes est proposée au deuxième chapitre.

Le troisième chapitre permet de confronter les différents schémas autocohérents à des résultats expérimentaux et à des modèles disponibles ou adaptés pour cette occasion.

ANATOMIE DU MATERIAU BOIS

I BOIS ET HETEROGENEITE. LES QUATRE NIVEAUX D'HETEROGENEITE

- Niveau 1 : le bois massif
- Niveau 2 : Cernes et Rayons ligneux
- Niveau 3 : Le tissu élémentaire
- Niveau 4 : le niveau microscopique

II LES PARAMETRES DESCRIPTIFS DES CONSTITUANTS POUR CHAQUE NIVEAU D'HETEROGENEITE

II-1 Niveau 1

II-2 Niveau 2

II-3 Niveau 3

II-4 Niveau 4

-1 Généralités

-2 Cellulose I

-3 Hemicellulose et lignine (cas élastique)

-4 Viscosité de la matrice hemicellulose-lignine

III CONCLUSION

les facteurs de forme

IV BIBLIOGRAPHIE

## I BOIS ET HETEROGENEITE. LES QUATRE NIVEAUX NIVEAUX D'HETEROGENEITE

A l'échelle de la pièce ouvrée : à partir de quelques centimètres, le bois, exempt de défauts (noeuds, fissures ..), peut être considéré comme un matériau homogène au niveau de ses lois de comportement. En fait le matériau bois, comme beaucoup de matériaux, n'est homogène qu'en moyenne, et si cette approche globale est parfaitement justifiée (la seule qui intéresse l'ingénieur), il est évident que la compréhension de la nature profonde de ces comportements moyens nécessite l'analyse de la microstructure du matériau.

Schématiquement, il est possible de distinguer quatre niveaux d'hétérogénéité :

NIVEAU 1 : le bois massif (niveau macroscopique : quelques cm)  
figures I-1 à I-3

A ce niveau, le bois peut être décrit comme un assemblage de couches concentriques de bois initial et de bois final de caractéristiques différentes, qui résultent de l'accroissement saisonnier : *les cernes*. Ceux-ci renforcés radialement par des inclusions cylindriques à section allongée : *les rayons ligneux* .

NIVEAU 2 : cernes et rayons ligneux (quelques dixièmes de mm)  
figures I-4 à I-6

Le cerne, les rayons ligneux, correspondent principalement à l'assemblage de structures tubulaires fermées : les *cellules* notamment les *fibres* (feuillus) ou les *trachéïdes* (résineux),

orientées dans l'axe du tronc pour les cellules ou trachéïdes et selon la direction radiale du tronc pour les cellules de parenchyme des rayons ligneux.

Les feuillus sont de structure plus complexe que celle des résineux (figures I-4 et I-5 ). Ils possèdent en outre des cellules de diamètres plus forts : les *vaisseaux*. Le bois des résineux peut être traversé par des *canaux résinifères* .

Le bois vivant possède de plus des tissus de réserve : les *parenchymes* constituant notamment les rayons ligneux.

Pour le mécanicien ce sont les fibres ou trachéïdes qui revêtent la plus grande importance non seulement à cause de leur présence en grande quantité dans le matériau (70 à 90% du volume total pour les résineux) mais surtout du fait de leur grande influence sur les caractéristiques physiques et mécaniques du matériau.

NIVEAU 3 : la paroi cellulaire ( quelques  $\mu\text{m}$  )

Figures I-7 à I-9

L'observation au microscope électronique montre que le matériau constitutif de la paroi cellulaire peut être décrit schématiquement par un composite en trois couches distinctes : M,P,S la paroi secondaire, elle-même composée des sous couches S1,S2,S3. (figures I-7 et I-8). Chacune des couches est constituée de renforts filamenteux (*microfibrilles* de cellulose) dans une matrice viscoélastique d'hémicellulose et de lignine. Cette organisation est rencontrée aussi bien pour les feuillus que pour les résineux et pour tout type de cellule : trachéïdes, cellules de rayons ligneux, fibres, vaisseaux. Les différentes couches se distinguent principalement par l'orientation (angle  $\alpha$ ) des microfibrilles par

rapport à l'axe des cellules :

Paroi primaire P : orientation aléatoire. Cette couche est souvent associée à la lamelle mitoyenne M qui constitue le liant (à forte concentration de lignine ) entre les cellules.

S1 (sous couche externe) : orientation hélicoïdale croisée à fort angle d'inclinaison (60° à 80° )

S2 : orientation hélicoïdale à faible angle d'inclinaison.(5° à 30°)

C'est cette sous couche qui constitue l'essentiel de la paroi cellulaire.

S3 (couche interne) orientation hélicoïdale à très fort angle d'inclinaison (60° à 90°)

NIVEAU 4 niveau nanoscopique

figures I-10 I-11 I-12

Ce quatrième niveau d'hétérogénéité se situe à l'échelle des différentes molécules constituant les microfibrilles (Cellulose I), et la matrice polymérique (Hémicellulose, Lignine).

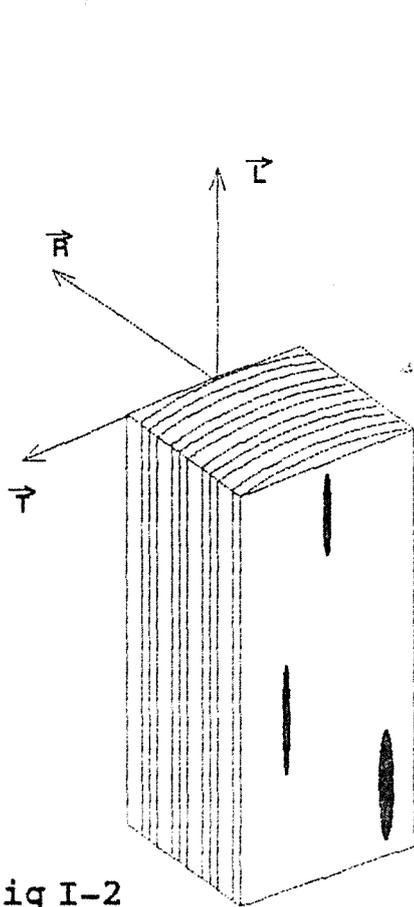


fig I-2

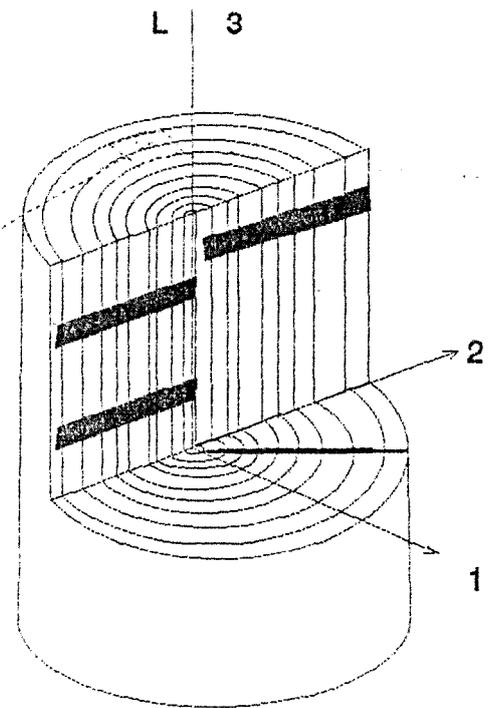
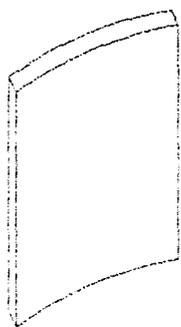


fig I-1

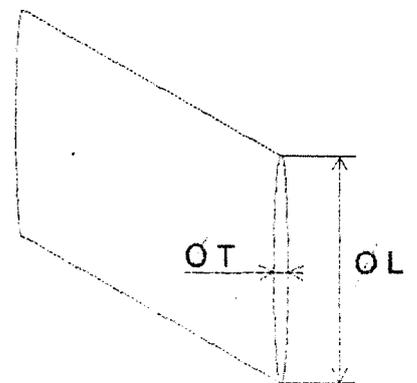
CONSTITUANTS :



Cerne bois initial



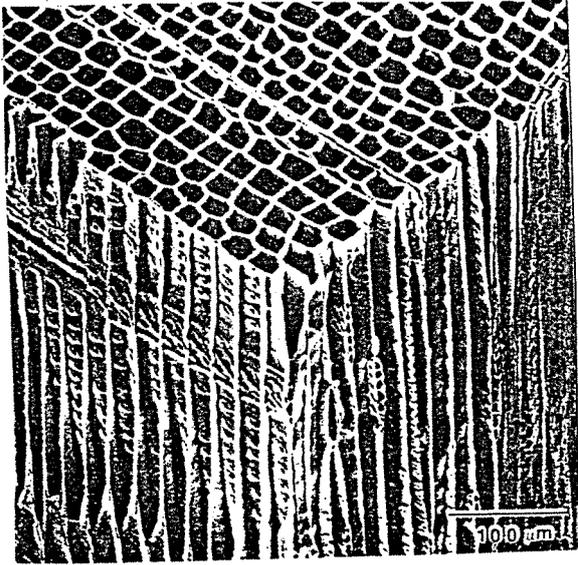
Cerne bois final



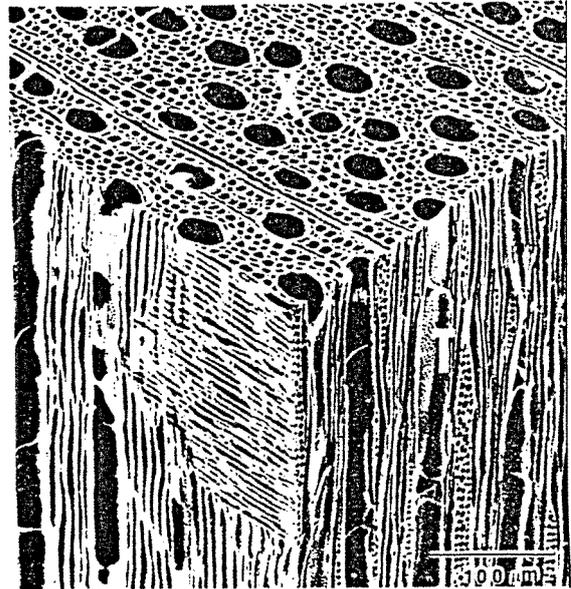
Rayon ligneux

fig I-3

NIVEAU 1

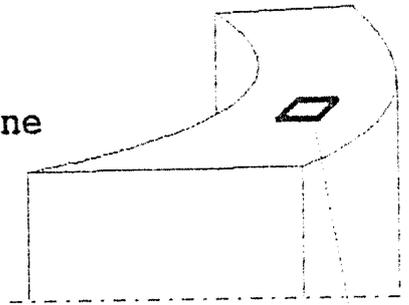


Résineux (Douglas)  
fig I-4

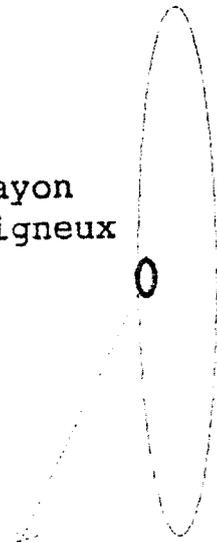


Feuillu (Erable)  
fig I-5

Cerne



Rayon  
ligneux



PRINCIPAUX CONSTITUANTS :

Fibres  
Trachéïdes  
Cellule de parenchyme

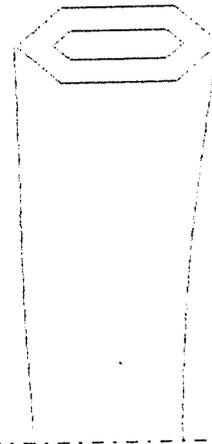
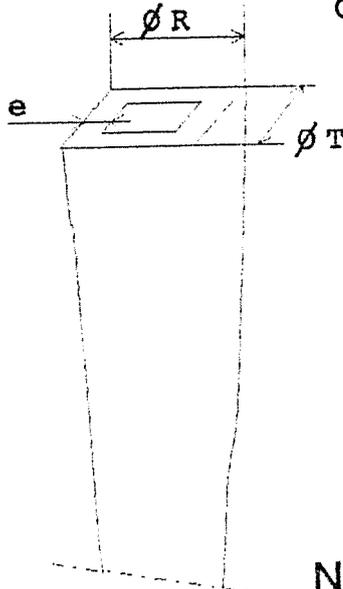


fig  
I-6

NIVEAU 2

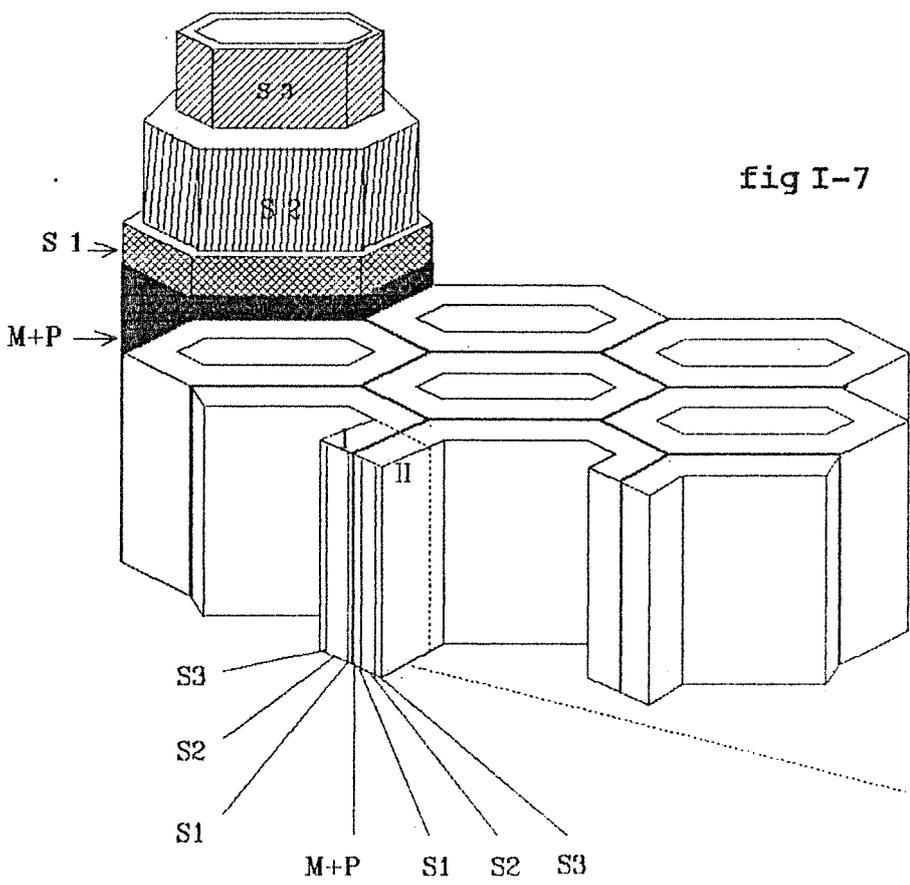


fig I-7

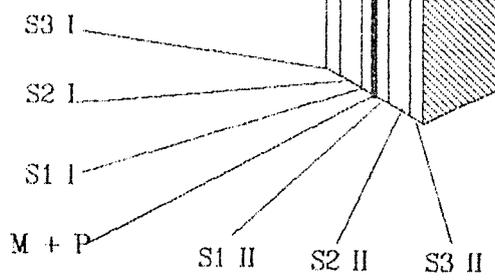
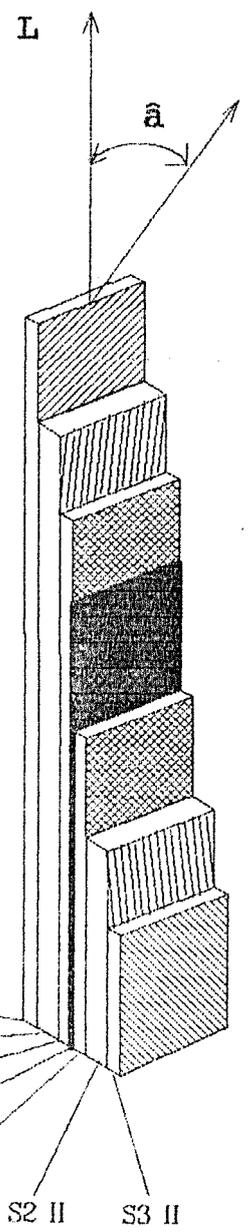


fig I-8

CONSTITUANTS :

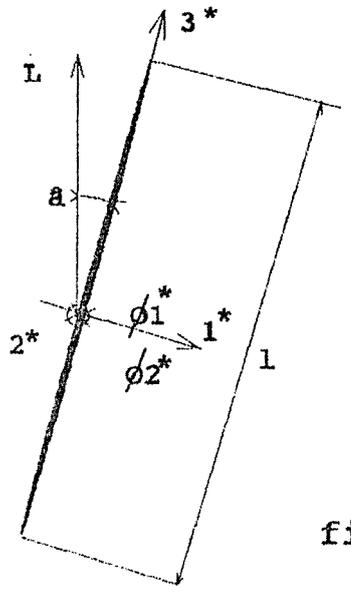
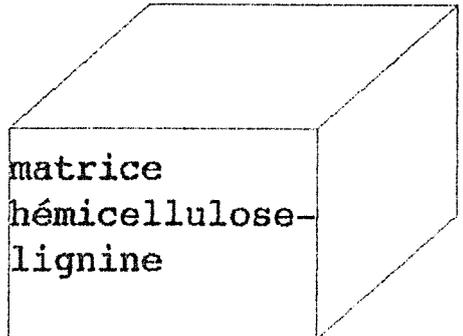


fig I-9

microfibrille



NIVEAU 3

# Phase cristalline

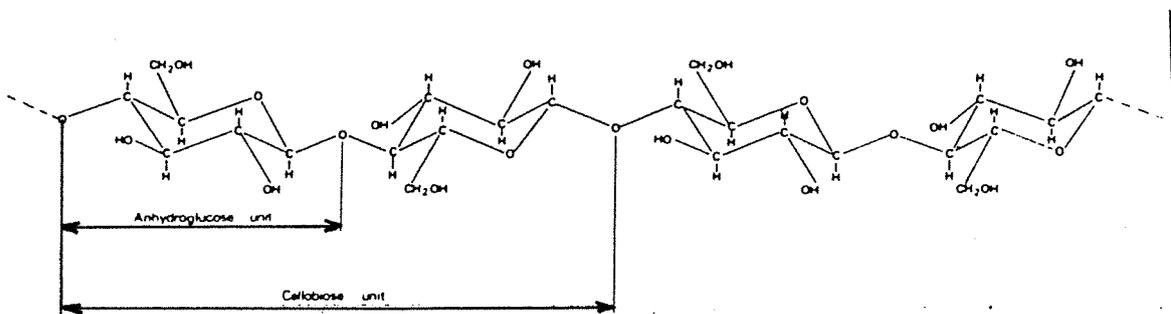


fig I-10 Unité cellulose

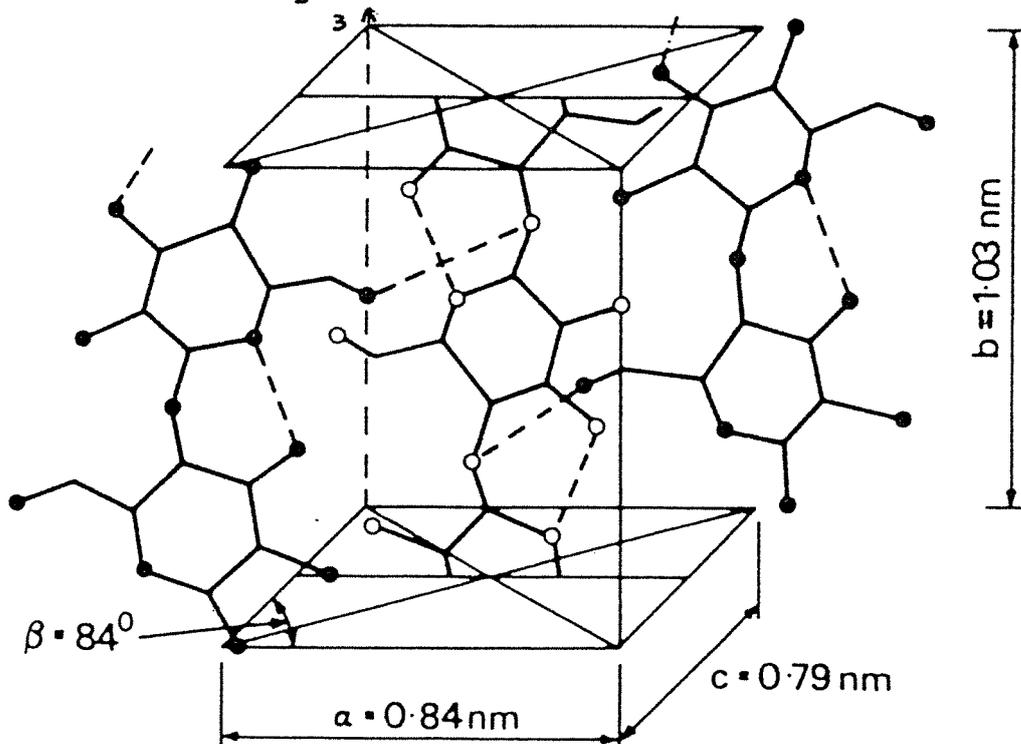
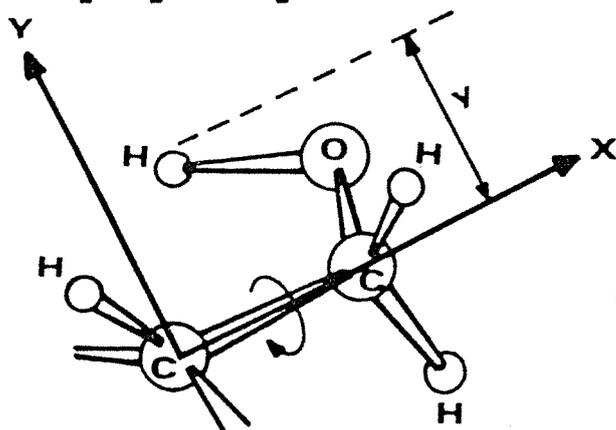


fig I-11 Cellulose I

----- Liaisons hydrogène

## Matrice polymérique



Mouvement autour de la  
liaison C-C d'un groupement  
hydrométhyle

NIVEAU 4

fig I-12

## II LES PARAMETRES DESCRIPTIFS DES CONSTITUANTS POUR CHAQUE NIVEAU D'HETEROGENEITE

II-1 NIVEAU 1 (Bois massif). Constituants : Cernes et rayons ligneux.

-Rayons ligneux

Diamètres  $\phi_L$   $\phi_T$  (fig I-3, fig II-1, figII-2)

Dans le cas des résineux les rayons ligneux sont presque toujours larges d'une seule cellule et leur hauteur varie, selon l'espèce, de 1 à 40 cellules environ. [16]

Pour les feuillus les caractéristiques géométriques des rayons ligneux varient d'une essence à l'autre : ils peuvent être larges d'une seule cellule (*Alnus* sp., *Castanea* sp., *Populus* sp.) ou atteindre une largeur d'une quarantaine de cellules dans le cas du chêne ou du Hêtre. Certaines espèces peuvent présenter la même variation de largeur (de 1 à 40 cellules) au sein d'un même spécimen (Chêne, Hêtre). La hauteur est, en général, de l'ordre du millimètre (quelques mm pour le chêne). [16]

La fraction volumique de rayons ligneux évolue aussi en fonction de l'espèce considérée. Les fractions volumiques sont comprises, en moyenne, entre environ 3% (*Thuja occidentalis*) et 12% (*Pinus ellioti*) pour les résineux, 5% (*Tilia heterophylla*) et 32% (*Quercus virginia*) pour les feuillus [17].

-Cernes

Les caractéristiques géométriques des cernes sont celles de plaques : épaisseur faible vis-à-vis des deux autres caractéristiques.

II-2 NIVEAU2 (Cernes, Rayons ligneux). Constituants : Cellules  
 Diamètres  $\phi_T$ ,  $\phi_R$ , épaisseur e, longueur l (fig I-6) :

Ces caractéristiques dimensionnelles dépendent de l'espèce mais aussi de la position de la cellule dans le tronc. Les principales tendances et ordres de grandeurs sont résumés dans le tableau suivant:

	Longueur l mm	Diamètre moyen $\mu\text{m}$	Diamètre $\phi_R$ $\mu\text{m}$	Diamètre $\phi_T$ $\mu\text{m}$	Epaisseur e $\mu\text{m}$
Feuillus Fibres <sup>a</sup>	[0,2;2,5]	[ 9 ;60]			[1,5;10]
Résineux Trachéïdes <sup>a</sup>	[ 1 ; 5]	[10 ;70]			[2 ;10]
Feuillus vaisseaux <sup>a</sup>	[100;700]	[5 ;400]			[1 ;20]
Evolution <sup>b</sup> bois initial- bois final (Picea marinia trachéïdes)			de 34 à 16	stable à 36	de 2 à 8,5
Evolution <sup>c</sup> coeur-écorce fig II-4 II-5 (Picea sitch.) trachéïdes	de 2 à 4			de 18 à 34 (à 5m)	

Références :

a : [16]      b : [13]      c : [14]

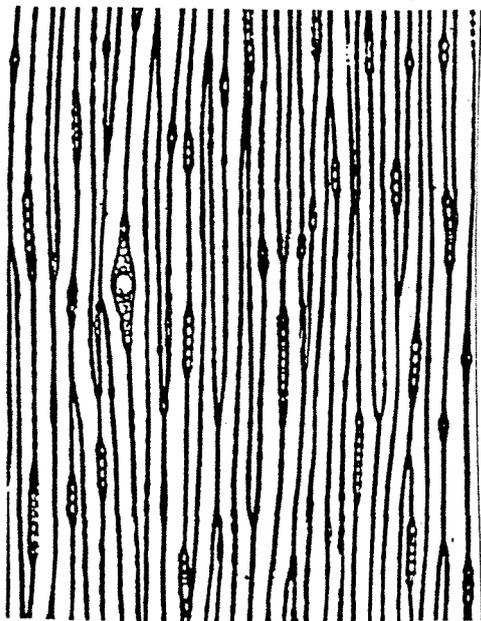


fig II-1

Pin sylvestre

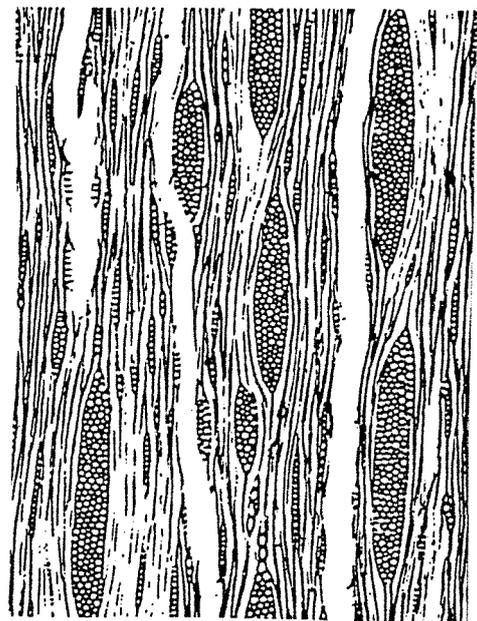


fig II-2

Erable

Coupes tangentielles d'un résineux (fig II-1) et d'un feuillu (fig II-2) présentant différentes sections de rayons ligneux. (d'après [17])

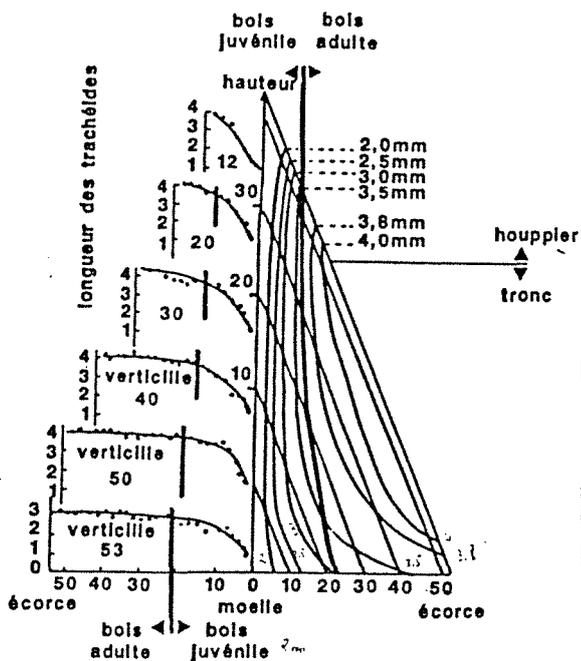


fig II-3

Exemple de la distribution de la longueur des fibres dans le tronc.

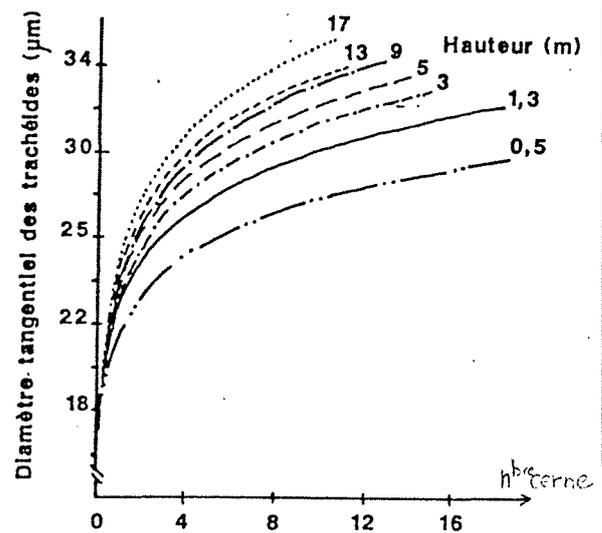


fig II-4

Exemple de la distribution du diamètre de trachéide  $\phi T$  sur le rayon à différentes hauteurs.

(sur *Picea sitchensis* d'après [14])

II-3 NIVEAU 3 (paroi cellulaire). Constituants : microfibrilles de cellulose et matrice hemicellulose-lignine.

- Microfibrille

Diamètres  $\phi_1^*$   $\phi_2^*$   $l$  (figures I-9, II-5 à II-10)

La littérature propose plusieurs descriptions morphologiques de microfibrille. Mark dans son ouvrage [1] fait le point des modèles antérieurs à 1966 et présente les nouvelles descriptions tirées de l'observation au microscope électronique qui rendent caduques les notions précédentes de fibrilles et de micelles issues d'observations aux rayons X.

Plus récemment et dans le même esprit W. Côté [2] présente les modèles des 20 années antérieures aux années 1980.

Ces deux auteurs font ressortir le fait que la nature exacte de l'organisation des molécules de cellulose à l'intérieur d'une microfibrille est sujette à multiples interprétations. Cependant la plupart des descriptions ont en commun la notion de microfibrille qui peut être définie comme une zone de cellulose fortement ordonnée. Cette zone, hautement cristalline peut être décrite comme l'assemblage d'éléments morphologiques élémentaires : fibrilles élémentaires. Kollmann-Côté [7] considèrent par exemple la microfibrille comme un assemblage de 100 à 300 Å de fibrilles de diamètres de 35 Å. D'autres types d'organisations sont proposées dans la littérature : (Fengel, Tang et Hsu, Mark, Frey-Wyssling, Mühlethaler ..figures II-5 à II-10). Ce type de schéma morphologique avec l'alternance de zone cristalline-zone amorphe est confirmé par des observations plus récentes ( Ruel et Barnoud 1982 cité dans [3]) qui décrivent des zones de lignine de diamètre de 7 à 10 nm s'insérant entre les microfibrilles. Ces zones cristallines sont

aussi limitées en longueur : Westman (1980) constate l'existence de zones amorphes intercalant plus ou moins régulièrement les cristallites qui ne représentent donc pas une phase continue. Certains modèles considèrent la phase cristalline fractionnée en tronçons allant de 30 à 60 nm : [4], modèle de Preston (figure II-10) ou de Fengel (figure II-5). Cette fourchette de variation de la longueur des microfibrilles est fréquemment reprise dans la littérature lors des descriptions des microfibrilles ([5] par exemple). Cependant d'autres types de fractionnement sont décrits : certains expérimentateurs en s'intéressant au problème de variation de l'angle des microfibrilles dans les tissus cellulaires ont constaté une corrélation entre l'évolution de la longueur des cristallites (zones entièrement cristallisées) et l'angle que font les microfibrilles avec l'axe de la cellule. El Osta (1974) constate dans des résineux des évolutions allant de 4 à 30 nm et dans les feuillus des évolutions du même ordre de grandeur [6] (voir figure II-11). Ce type de variations est aussi constaté par Marton (1972) sur *Abies* où les cristallites rencontrées ont une longueur allant de 7 à 16 nm .

Les concepts d'arrangements lenticulaires :

Il existe d'autres concepts d'organisation morphologiques des tissus pariétaux qui font suite à des modèles décrivant le processus de formation des tissus.

Le modèle de Scallan (1974) et le modèle de Boyd et Foster (1975) supposent un arrangement de microfibrilles en nappes ondulées, la matrice lignine-hemicellulose occupant les ouvertures lenticulaires orientées : figure II-12 (Pour la clarté de la représentation les ouvertures sont largement agrandies).

Angle des microfibrilles à (fig I-8 I-9)

Une diminution de l'angle des microfibrilles est constatée dans le sens coeur-écorce . L'évolution est en général limitée aux 15 premiers cernes :

de 36° à 25° environ pour le bois initial de *cryptomeria japonica* ,  
de 32° à 10° pour le bois final de la même essence (Moriizumi 1973 cité dans [6])

de 15° à 11° environ pour le bois final de *Fagus crenata* (Okano 1972 [6] )

de 32° à 5° environ pour le bois final de *Picea abies* (Marton 1972 cité dans [6] )

- Couches

Epaisseur ([16])

M : de 0,5  $\mu\text{m}$  à 1,5  $\mu\text{m}$

P : 0,03 à 0,1  $\mu\text{m}$

S1 : 0,1  $\mu\text{m}$  à 0,35  $\mu\text{m}$  (5 à 10 % de l'épaisseur totale )

S2 : 1 à 10  $\mu\text{m}$  (75 à 85 % de l'épaisseur totale )

S3 : 0,5 à 1  $\mu\text{m}$

Composition

Il est possible d'admettre des grandeurs moyennes et les répartitions suivantes par couches [18]:

Paroi ou Bois global	Celluloses	Hémicelluloses	Lignines
M	5%	10%	85%
P	10%	15%	75%
S1	30%	30%	40%
S2	50%	30%	20%
S3	50%	35%	15%
Feuillus	50%	30%	20%
Résineux	50%	25%	25%

### Le cas particulier du bois de réaction

Le bois de réaction se forme pour des arbres soumis à des conditions particulières (tronc incliné, action permanente du vent), il se crée dans la zone de compression (bois de compression) chez les conifères et dans la zone de tension (bois de tension) chez les feuillus.

Des différences sensibles existent pour les bois de réaction au niveau de la morphologie et la composition des tissus élémentaires.

Le bois de compression possède une couche S2 plus épaisse (~ +33%) avec un angle d'inclinaison des microfibrilles beaucoup plus important (45°), le pourcentage de lignine y est plus important alors que celui de cellulose y est plus faible .

Le bois de tension possède souvent une couche gélatineuse sur la face interne de la cellule formée essentiellement de cellulose (95%) avec un angle de microfibrille de l'ordre de 5°. Cette couche peut s'ajouter aux autres ou venir en substitution de la couche S3 ou des couches S2 et S3. [16]

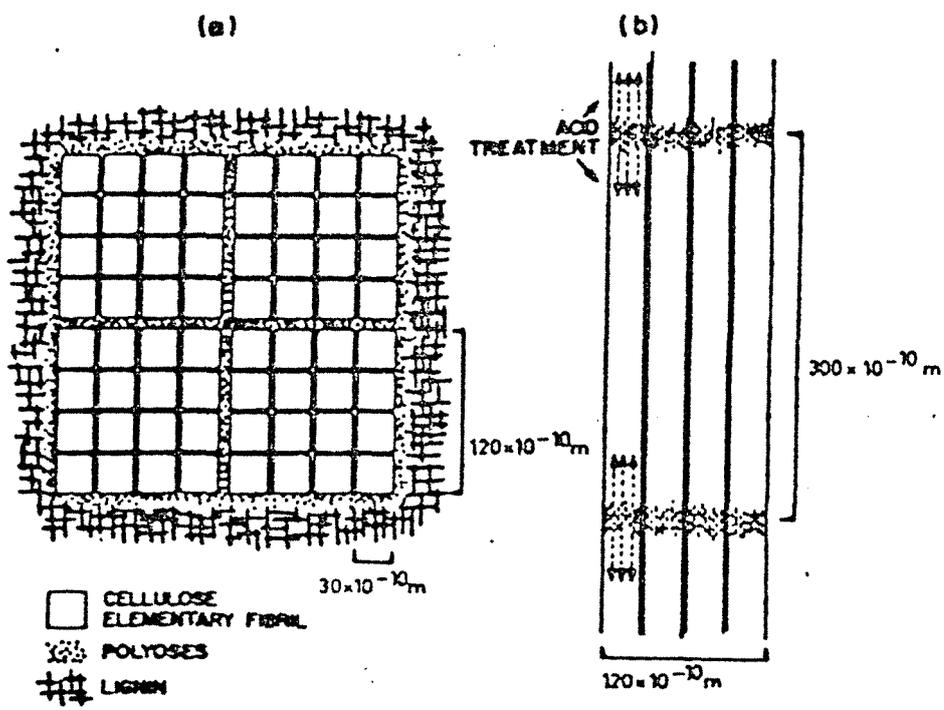


fig II-5

Modèle de Fengel (1971)

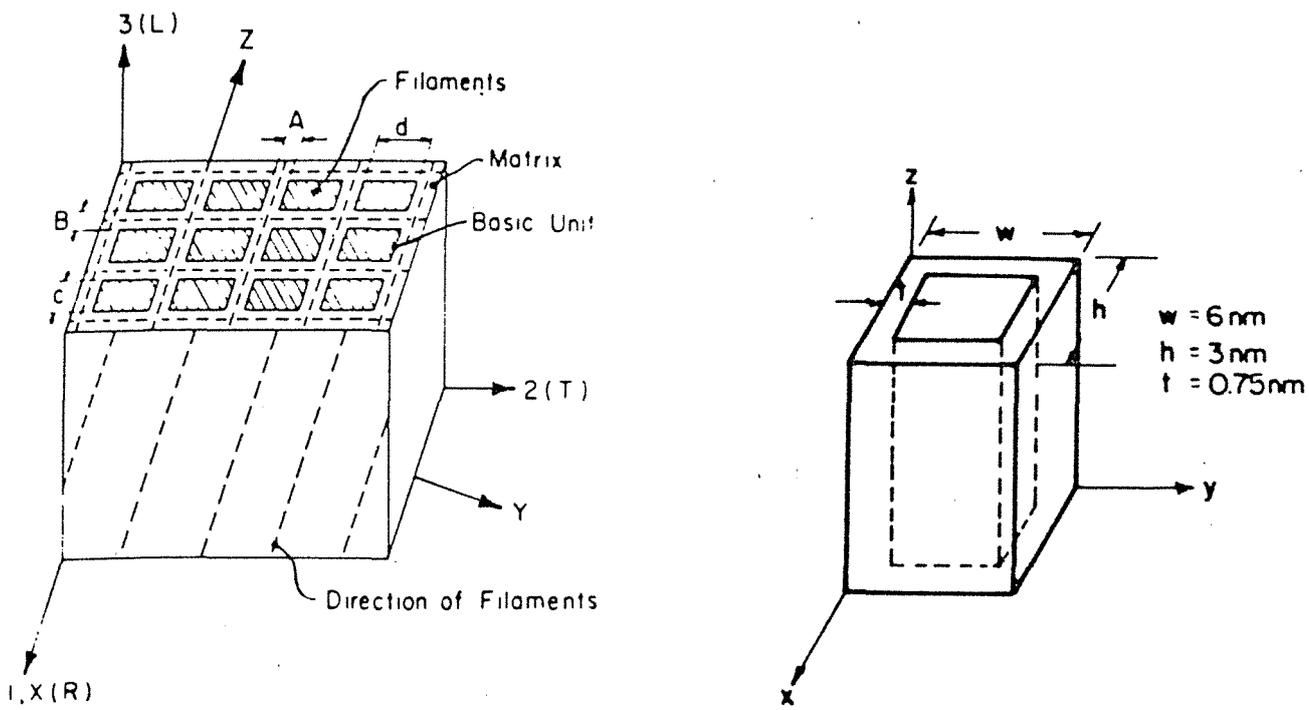


fig II-6 Modèle de Tang et Hsu

Niveau 3 Différents modèles de microfibrilles

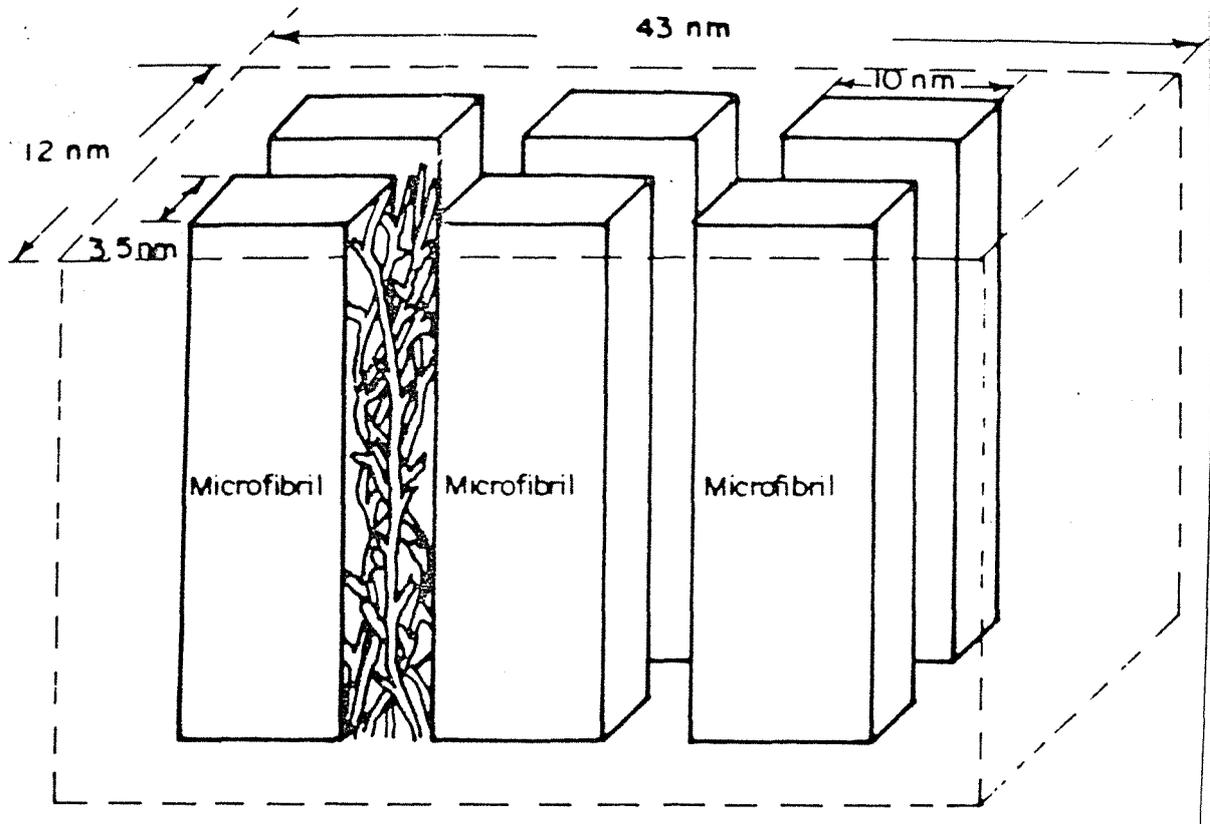


fig II-7

Modèle de Mark (1980)

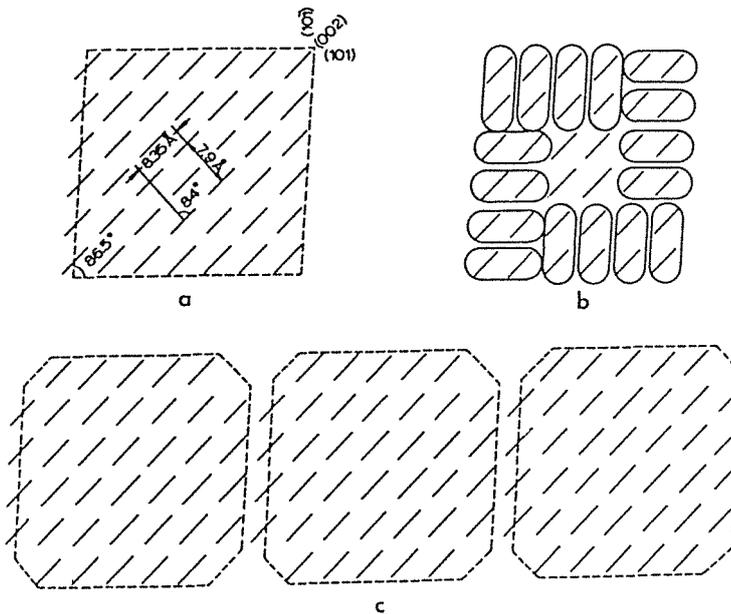


fig II-8 Modèle type Frey-Wyssling et Mühlethaler (d'après Mark)

a et b : Cristallite de 35 Å

c : Association de 3 cristallites pour former une microfibrille

NIVEAU 3 Différents modèles de microfibrilles.

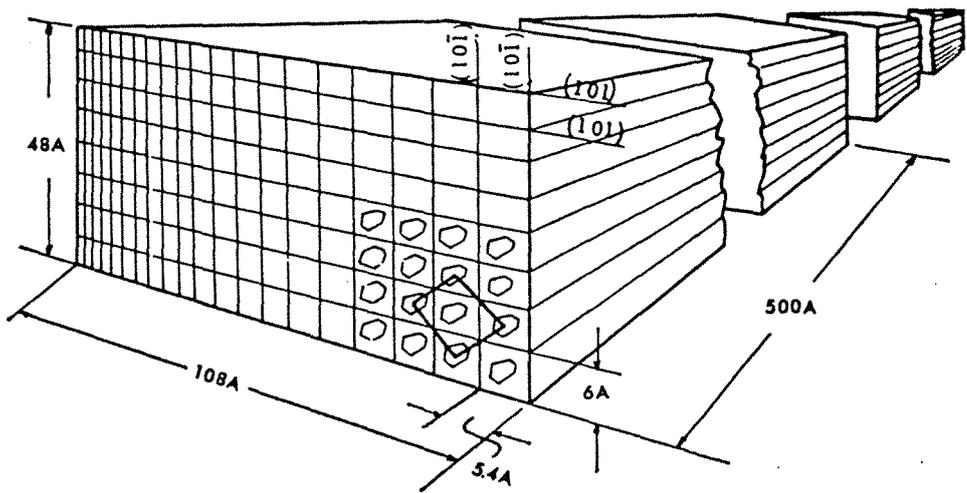


fig II-9

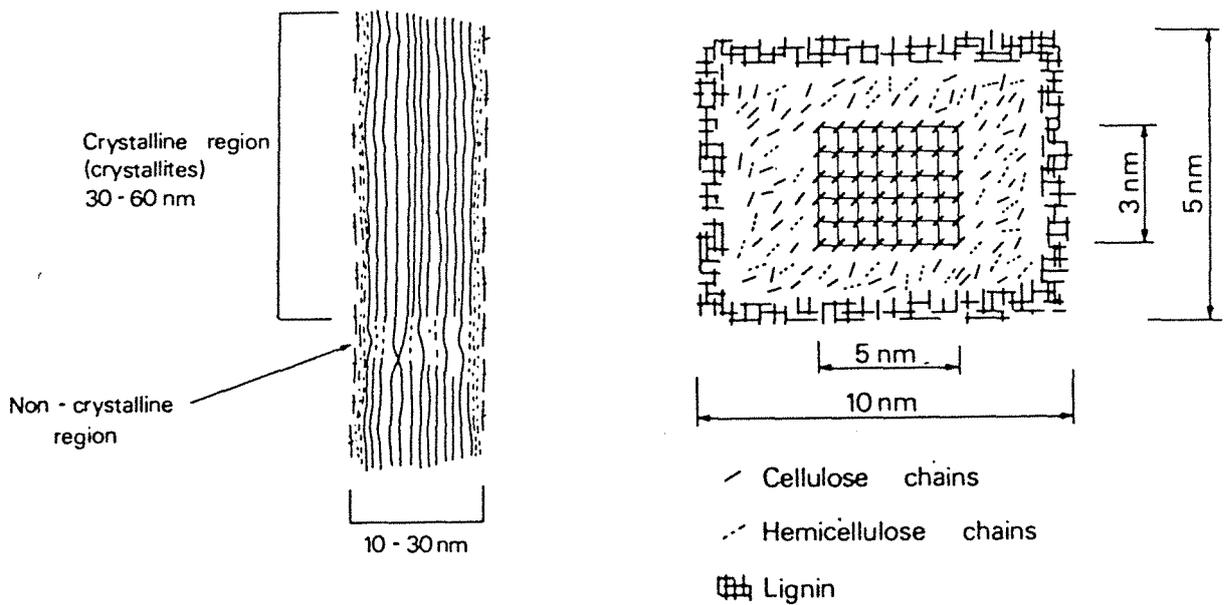


fig II-10

Modèle de Preston

NIVEAU 3 Différents modèles de microfibrilles

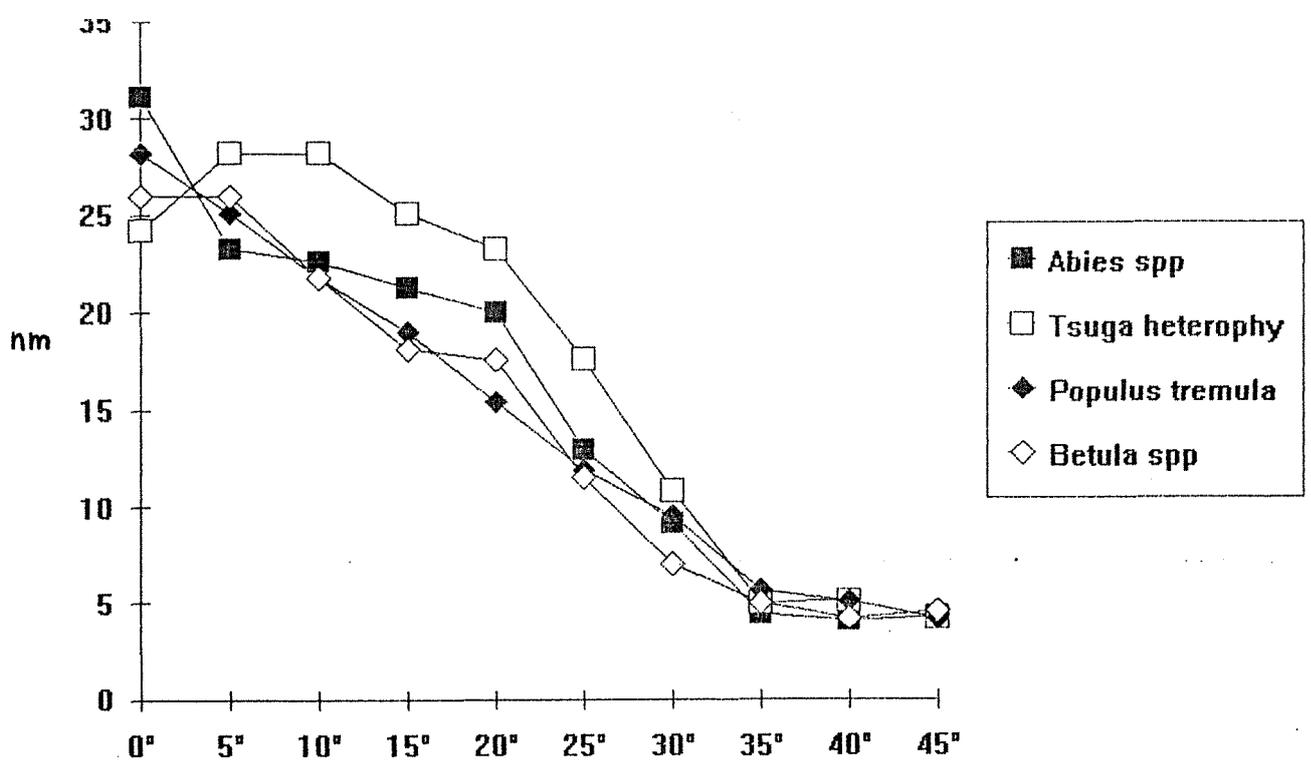


fig II-11

Evolution de la longueur des cristallites avec l'angle formé par les microfibrilles et l'axe de la fibre (d'après El Osta)

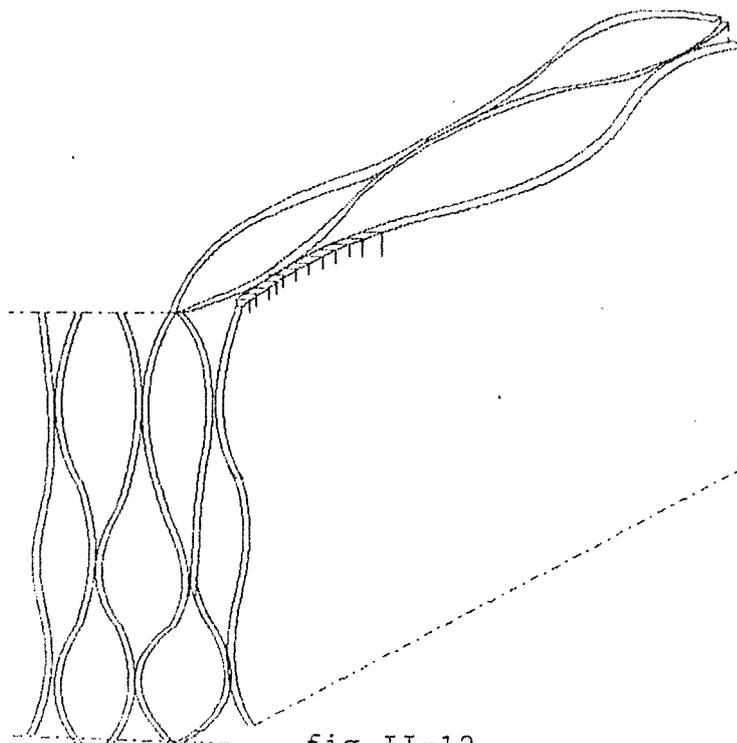


fig II-12

Arrangement lenticulaire de l'ensemble microfibrilles-matrice

## II-4 NIVEAU 4 .Constituants : Cellulose Hemicellulose et Lignine

### II-4-1 Généralités

C'est à ce niveau que se trouve la racine des comportements constatés aux échelles supérieures : élasticité, viscosité, plasticité, rupture... ( : Winandy et Rowell dans [4] proposent pour le matériau bois, des schémas décrivant qualitativement chaque zone type de la caractéristique contrainte-déformation à partir de mécanismes de déformation des liaisons supposés au niveau microscopique et moléculaire).

Pour quantifier la composante élastique, la littérature propose des modèles fondés sur des mécanismes supposés de déformation des liaisons au niveau de la molécule conduisant à une variation d'énergie interne du système : modèle de Gillis pour la cellulose I et de Mark pour la lignine.

Pour la composante viscoélastique il existe pour les polymères plusieurs modèles linéaires issus de théories moléculaires (Rousse, Kirkwood-Auer par exemple) [19]. Cette élasticité retardée est plutôt liée aux variations d'entropie conditionnées par des effets d'orientation des chaînes consécutifs à une mise sous charge. La nature des mécanismes d'orientation est elle-même conditionnée par la flexibilité de la chaîne. Il est possible de construire un modèle mécanique rigoureux pour des solutions diluées de molécules linéaires rigides (un seul temps de relaxation) : modèle de Kirkwood-Auer [20] qui permet de définir les paramètres d'un modèle de type Maxwell à partir des caractéristiques des chaînes et du solvant (longueur de la chaîne, masse molaire du soluté, viscosité du solvant, concentration, longueur de la liaison covalente...). La théorie approchée de Rousse traite du cas des molécules linéaires flexibles (n temps de relaxation) en solution diluée, elle a été

étendue pour des polymères plus courants dans le cas de la modélisation des déformations en cisaillement [19].

Si ces modèles n'apportent de solutions analytiques que dans des cas très typés ils permettent de comprendre et d'analyser les phénomènes constatés aux échelles supérieures à partir des mécanismes situés à l'échelle moléculaire (mouvement de chaîne, de partie de chaîne, justification a posteriori du principe de superposition temps-température découvert empiriquement), de dégager des paramètres explicatifs (mobilité, flexibilité de chaîne) de justifier les modèles phénoménologiques utilisés en rhéologie des polymères .

Pour les composantes viscoélastiques du matériau bois, aucun modèle n'est utilisable directement, aussi nous développerons une approche globale au niveau 3 d'hétérogénéité en rendant compte du comportement de la matrice hémicellulose-lignine par le biais du modèle linéaire minimal possédant une élasticité instantanée : le modèle de Zener (fig II-13).

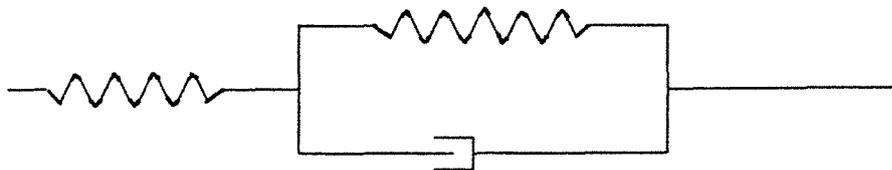


fig II-13 : le modèle de Zener

#### II-4-2 La cellulose

La cellulose est l'élément essentiel de la fibrille élémentaire. C'est un biopolymère linéaire formé de longues chaînes de maillons anhydroglucose chaque maillon étant relié à un autre tourné de 180°

pour former une unité cellulose (figure I-10) .

Une association en cristal monoclinique de ces unités de cellulose forme la cellule unité : cellulose I (figure I-11). Ce sont les liaisons hydrogène entre les unités de cellulose à l'intérieur du cristal de cellulose I qui lui donnent son élasticité. Le cristal monoclinique qui nécessiterait la détermination de 13 constantes élastiques est abandonné au profit du système orthorombique, peu différent, mais qui ne met en jeu que 9 constantes.

Il existe plusieurs possibilités de modéliser l'élasticité du cristal de cellulose I selon le nombre de degrés de liberté retenus. Il en résulte des variations sensibles des constantes (pour la direction longitudinale, variation d'un coefficient de 1 à 6).

D'après Mark (1980) [9] le modèle proposé par Gillis (1969) constituerait le modèle le plus satisfaisant. Ce modèle conduit au tenseur raideur dont une image matricielle  $[C_{ij}]$  dans la base liée au cristal ( figure I-11 ) est:

$$\text{en Gpa} \quad \begin{bmatrix} 16,4 & 0,674 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,674 & 25,2 & 0,847 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,847 & 246,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,173 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,58 \end{bmatrix}$$

Pour les applications numériques Mark [9] suppose que le cristal de cellulose est isotrope transverse ce qui limite la loi de comportement à 5 grandeurs indépendantes.

Pour Cave (1978) [10] aucune des modélisations n'est vraiment entièrement satisfaisante et il retient dans la direction 3 la valeur mesurée par Sakurada (1962) qui a relevé une raideur axiale

de 134 Gpa sur la cellulose des fibres de Ramie. Ce choix est aussi retenu par Salmen-Ruvo (1984) dans [11].

#### II-4-3 Lignine et hémicellulose (modèles élastiques)

Les hémicelluloses sont des hexosanes de même composition élémentaire que la cellulose mais de degré de polymérisation plus faible. Les lignines sont des polymères complexes de nature principalement phénolique et de structure tridimensionnelle encore mal connue, constituée d'unités répétitives de phénylpropane [12]. La lignine joue un rôle essentiel dans la tenue du tissu élémentaire où elle intervient comme un adhésif naturel hydrophobe. Elle se trouve en forte concentration dans la lamelle mitoyenne [1]. L'ensemble lignine-hémicellulose est généralement considéré comme la matrice isotrope entourant les renforts cellulosiques. Ses caractéristiques élastiques moyennes peuvent se déduire de la raideur en rotation autour des liaisons C-C et C-O de groupements hydrométhyle de la figure I-12. La valeur du module de Young est alors de 1,84 Gpa (Mark [9] 1980) ce qui représente l'ordre de grandeur de la valeur expérimentale obtenue pour certaines lignines. Le coefficient de Poisson est en général pris égal à 0,3. Comme Cave (1968), Salmen-Ruvo [11] considèrent deux phases distinctes : hémicellulose isotrope transverse et lignine isotrope. Le module de Young de la lignine est pris égal à 4 Gpa ce qui correspond à la valeur expérimentale proposée par Cousin (1976) le coefficient de Poisson est estimé égal à 0,33. Le module de Young de l'hémicellulose dans l'alignement de la cellulose choisi vaut 8 Gpa (idem Cousin 1978) et de moitié moins grand dans la direction transversale (même rapport que dans Cave [10]). Le coefficient de

Poisson est estimé égal à 0,2.

#### II-4-4 Viscosité de la matrice lignine-hemicellulose

Lignine et hémicellulose sont en fait des polymères amorphes fortement viscoélastiques qui sont les sources principales du comportement différé du matériau bois .(Il est vraisemblable que la cellulose possède elle aussi, mais dans une moindre mesure, ce caractère viscoélastique : [15]).

Ce comportement différé est une caractéristique essentielle de la matière ligneuse qui se trouve affectée par des phénomènes de fluage ou de relaxation. Le phénomène de fluage en particulier peut se traduire au niveau du calcul de déplacement des structures de poutres en bois par l'existence d'un coefficient multiplicatif (coefficient de fluage) pouvant aller jusqu'à 3 dans le cas des résineux dans certaines conditions (10 ans, 20°C ,Hr=100%).

Comme évoqué précédemment, le caractère viscoélastique sera décrit par le modèle de Zener dont l'élément amortisseur sera éventuellement activé thermiquement par une loi d'Arrhenius.

Les paramètres de ce modèle rhéologique seront choisis en fonction des valeurs expérimentales ou théoriques disponibles.

### III CONCLUSION

Pour les trois premiers niveaux d'hétérogénéité du matériau bois, l'anisotropie résulte de la nature anisotropique des lois de comportement des phases en présence, mais aussi et surtout, des particularités géométriques des différents constituants.

Il est possible pour chacun de ces trois niveaux de définir des facteurs de forme caractérisant ces particularités géométriques :

- L'allongement ou élanement qui représente le rapport entre la longueur du constituant l et son diamètre moyen  $\phi_m$ .

$$\text{allongement} = l/\phi_m$$

Ce facteur de forme peut être utilisé pour la fibre (niveau 2) avec

$$\phi_m = \frac{1}{2}(\phi_R + \phi_T)$$

et au niveau de la microfibrille avec

$$\phi_m = \frac{1}{2}(\phi_{1^*} + \phi_{2^*})$$

- L'écrasement qui représente le rapport des diamètres.

Ce facteur de forme est présent :

- au niveau du rayon ligneux (niveau 1)

$$\text{écrasement} = \phi_L/\phi_T$$

- au niveau de la fibre (niveau 2)

$$\text{écrasement} = \phi_T/\phi_R$$

- au niveau de la microfibrille

$$\text{écrasement} = \phi_{1^*}/\phi_{2^*}$$

Les données géométriques de chaque constituant présentées au paragraphe précédent, permettent d'envisager des variations pour les deux facteurs de forme, dont les plages sont données dans le tableau suivant:

Constituant	Facteur de forme	Variation max
Rayon ligneux	Ecrasement	2 à 30
Cerne	Plaque	-
Cellule	Allongement	5 à 250
	Ecrasement	1 à 6
Renfort cristallin	Allongement	4 à $\infty$
	Ecrasement	1 à 3
	Plaque	-

Remarques :

-Dans le cas de la cellule, le facteur de forme allongement est comparable à l'indice de feutrage utilisé par les papetiers pour caractériser la qualité structurelle de la feuille de papier. [12]

-Dans le cas des renforts cristallins le domaine de variation des deux facteurs de forme est différent selon le choix que l'on retient pour l'inclusion élémentaire : soit la fibrille élémentaire (choix adopté par Navi [8] selon le schéma de Tang et Hsu), soit la microfibrille qui constitue pour beaucoup d'auteurs ( Mark par ex) l'élément de base à considérer, ou enfin la cristallite qui représente le plus petit domaine entièrement cristallisé.

#### IV BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.E. MARK 1967  
Cell wall of tracheide New Haven and London Yale university press
- [2] W.A. COTE 1981  
Ultrastructure - Critical domain for wood behavior  
Wood science and technology 15 : 1-29
- [3] C. HUET 1986  
Thermo-hygro-mechanical coupling in wood technology and rheological behaviours . colloque IUTAM Ecole des Mines Paris.
- [4] J. E. WINANDY R. M. ROWELL 1984  
The chemistry of wood strength. American Chemical Society
- [5] C. LE GOVIC Y. TRENARD C. HUET 1984  
Symétries matérielles du matériau bois. Rhéologie des matériaux anisotropes Cepadues-Editions
- [6] V. BUCUR 1982  
L'angle des microfibrilles. Etude bibliographique  
Station de recherches sur la qualité des bois Doc 1982/1
- [7] F. P. KOLLMANN W. A. COTE 1968  
Principles of wood science and technology. Tome I Solid wood  
Spring Verlag
- [8] P. NAVI 1988  
Three dimensional modeling of the wood microstructure for the prediction of fiber elastic properties  
Comportement mécanique du bois : Actes G.S.R.B. Bordeaux
- [9] R. E. MARK 1980  
Molecular and cell wall structure of wood  
Adhesion in cellulosic and wood based composite
- [10] I. D. CAVE 1978  
Modelling moisture-related mechanical properties of wood  
Part I : Properties of the wood constituents Fiber and technology
- [11] L. SALMEN A. DE RUVO 1985  
A model for the prediction of fiber elasticity.  
Wood and fiber science 17(3),1985 pp 336-350
- [12] G. JANIN J.P. HALUK 1983  
Chimie Le matériau bois A.R.BO.LOR
- [13] J. D. BARRETT 1973  
Thèse Berkeley
- [14] G. CHANTRE 1989  
Liaison entre rigidité et densité du bois à l'intérieur du cerne  
D.E.A. Sciences du bois I.N.P.L. Nancy

- [15] J.M. GENEVAUX 1989  
Le fluage à température linéairement croissante : caractérisation  
des sources de viscosité anisotrope du bois Thèse I.N.P.L.
- [16] R. KELLER 1983  
Anatomie Le matériau bois A.R.BO.LOR
- [17] F. EL AMRI 1987  
Contribution à la modélisation élastique anisotrope du matériau bois  
Feuillus et résineux. Thèse I.N.P.L.
- [18] D. GUITARD 1987  
Mécanique du matériau bois et composites Cepadues-éditions
- [18] J.D. FERRY  
Viscoelastic properties of polymers J. Wiley
- [20] PERSOZ  
Introduction à la rhéologie

I GENERALITES

Approches micro et macroscopiques

Cas du matériau hétérogène

Caractérisation du comportement différé

Influence de la microstructure

Les analogies élasticité - viscoélasticité

II VISCOELASTICITE DES MATERIAUX HETEROGENES. BIBLIOGRAPHIE

Généralités

Les modèles analytiques

Les bornes

III LE SCHEMA AUTO-COHERENT EN VISCOELASTICITE

Généralités

Le schéma autocohérent en viscoélasticité

Le schéma autocohérent à un site par étapes

IV BIBLIOGRAPHIE

## I GENERALITES

Caractériser le comportement viscoélastique d'un matériau quelconque s'inscrit dans le cadre de la rhéologie. Il est classique ([1], [2]) d'opposer les deux approches possibles pour cette discipline :

l'approche microscopique et l'approche macroscopique. La première approche, déjà évoquée dans le chapitre précédent, s'appuie sur des modèles descriptifs des phénomènes physiques au niveau de la structure interne : interactions atomiques et moléculaires.

Malheureusement cette approche ne permet une description rigoureuse des phénomènes que dans des cas très typés. Dans des cas moins schématiques, c'est-à-dire plus proche d'une réalité courante, il est nécessaire d'adopter une démarche plus globale, c'est le cas de l'approche macroscopique ou phénoménologique.

Cette approche travaille en terme d'équations d'état cherchant à relier entrée et sortie d'un système sous l'influence d'un environnement : figure I-1

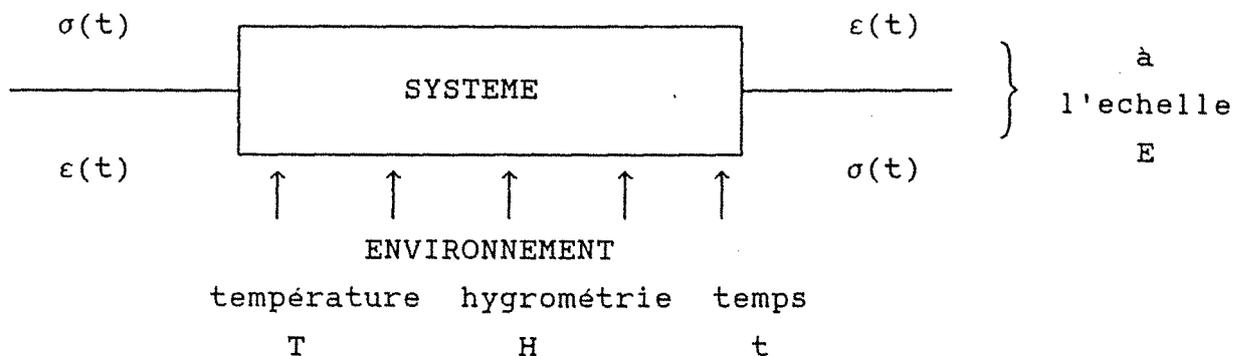


fig I-1

La fonction d'état dans le cas le plus général est une fonction vectorielle

$$f(D_1(\sigma), D_2(\varepsilon), T, H, t, \dots) = 0$$

où  $D_1$  et  $D_2$  sont des opérateurs mathématiques

(différentiels, intégrals ou combinés) en général non linéaires .

L'environnement étant défini par des paramètres comme la température, le degré hygrométrique (qui sont prépondérants dans le cas du matériau bois) et le temps (qui intervient dans le cas des matériaux vieillissants : bétons, polymères à polymérisation lente). Pour le matériau hétérogène cette approche macroscopique est à associer à une notion d'échelle : la liaison entrée-sortie affecte alors des grandeurs moyennes dites homogénéisées, ces liaisons seront différentes selon l'échelle considérée. Pour le matériau bois trois échelles peuvent être analysées : celle du bois massif, celle du cerne et celle du tissu élémentaire (paroi cellulaire). A chacune de ces échelles respectives sont associés les grains d'hétérogénéité (inclusions) suivants : cernes et rayons ligneux, fibres et autres cellules, microfibrilles. Ces trois échelles constituent trois longueurs de références au sens du problème d'homogénéisation. Dans le cas du matériau bois l'approche phénoménologique s'effectue principalement au niveau du bois massif pour déterminer les comportements élastiques ou viscoélastique mais il existe aussi des approches effectuées au niveau du cerne ou même de la fibre dans le cas du comportement élastique. ([3] [4] par exemple).

Pour le matériau bois une première approche consiste à considérer une correspondance fonctionnelle linéaire entre entrée et sortie à une échelle donnée :

$$\varepsilon(t) = \mathcal{F}_1(\sigma(t)) \quad \text{ou} \quad \sigma(t) = \mathcal{F}_2(\varepsilon(t))$$

où  $\varepsilon(t)$  et  $\sigma(t)$  sont les tenseurs de déformation et de contrainte. Le comportement linéaire du système rend la caractérisation du matériau indépendante de la nature de l'entrée.

Plusieurs formes d'entrée sont alors envisageables, chacune correspondant à une expérience fondamentale de l'analyse du comportement différé du matériau, par exemple dans le cas uniaxial :

$$\begin{array}{ll}
 \sigma(t) = \sigma_0 H(t-t_0) & \text{Fluage} \\
 \varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t-t_0) & \text{Relaxation} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{j\omega t} \\
 \sigma(t) = \sigma_0 e^{j\omega t}
 \end{array} \right\} & \text{Essais harmoniques}
 \end{array}$$

où H est la fonction échelon d'Heaviside.

L'avènement des analyseurs à transformées de Fourier rapides rendent classiques d'autres types d'entrée comme l'impact ou l'excitation en large bande (excitation aléatoire ou pseudo - aléatoire)[5].

Ces différentes entrées permettent de couvrir un large domaine d'analyse au niveau des temps de réponses caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu dans les problèmes de comportements différés. Pour le matériau bois la présence de plusieurs phases polymériques donne une réponse riche en mécanismes viscoélastiques. ([6] [7] [8] [9]).

Si la démarche au niveau microscopique ne conduit donc que très rarement à des modèles aboutis, elle permet par contre au rhéologue, d'envisager des schémas explicatifs des phénomènes enregistrés à un niveau macroscopique, de conduire des plans d'expériences de façon plus rationnelle en sélectionnant des paramètres explicatifs pertinents, ce qui permet de réduire le nombre de tests nécessaires [1].

Pour les matériaux hétérogènes, au niveau des différentes échelles

Pour les matériaux hétérogènes, au niveau des différentes échelles d'hétérogénéité il est tout aussi intéressant de créer des outils permettant au mécanicien de relier la microstructure à la macrostructure. Cette liaison s'effectuant par le biais de paramètres décrivant la géométrie des phases constitutives à l'échelle considérée. Ces outils pouvant être, soit prédictifs dans le cas de la création de matériau composite, soit d'investigation dans le cas du matériau bois. Ils permettent d'analyser, par simulations, la sensibilité des fonctionnelles  $\mathcal{F}$  à des paramètres décrivant la géométrie de la microstructure à différentes échelles d'hétérogénéités. C'est le principal objet du présent travail.

#### L'ANALOGIE ELASTICITE - VISCOELASTICITE

L'hypothèse de la linéarité du comportement permet l'application du principe de superposition de Boltzman [10] qui conduit à une algèbre de convolution de Stieltjes liant entrée et sortie dans le domaine temporel. D'autre part, le matériau bois pouvant être considéré en première approche comme non vieillissant, ses propriétés mécaniques sont invariantes au cours d'une translation temporelle ce qui conduit aux deux liaisons entrée-sortie pour les grandeurs homogénéisées dans le cas unidimensionnel: ([13])

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad \text{notation: } \varepsilon = J \otimes \dot{\sigma}$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad \text{notation: } \sigma = R \otimes \dot{\varepsilon}$$

J : fonction fluage

R : fonction relaxation.

En utilisant la transformée de Carson-Laplace définie par

$$\mathcal{E}(f(t)) = f^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

sur les deux relations précédentes on obtient des relations

analogues à celles rencontrées en élasticité [10] soit :

$$\varepsilon^*(p) = J^*(p) \sigma^*(p)$$

$$\sigma^*(p) = R^*(p) \varepsilon^*(p)$$

où  $J^*(p)$  représente la complaisance opérationnelle et  $R^*(p)$  le module opérationnel. L'utilisation de la transformée de Laplace en remplacement de la transformée de Carson-Laplace conduit à définir les modules  $pJ$  et  $pR$  (transform domain (TD) 'effective moduli' de Hashin [11]).

Dans le cas du milieu homogénéisé tridimensionnel la même nature d'algèbre de convolution lie les tenseurs  $\sigma_{ij}(t)$  et  $\varepsilon_{hk}(t)$  [12] :

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijhk} \otimes \sigma_{hk}$$

$$\sigma_{ij} = R_{ijhk} \otimes \varepsilon_{hk}$$

qui conduit aussi aux relations tensorielles analogues à celles de l'élasticité après application des transformées de Carson-Laplace:

$$\varepsilon_{ij}^* = J_{ijhk}^* \varepsilon_{hk}^*$$

$$\sigma_{ij}^* = R_{ijhk}^* \varepsilon_{hk}^*$$

#### Remarques

-L'analogie permet d'étendre toute solution d'élasticité linéaire au cas de la viscoélasticité linéaire non vieillissante (Mandel 1955)

-Comme en élasticité les tenseurs  $J$  et  $R$  possèdent les symétries classiques au niveau des indices  $i$  et  $j, h$  et  $k$  liées aux symétries des tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{hk}$ . Par contre la symétrie des groupes  $ij$  et  $hk$  nécessite ici le recours au principe d'Onsager alors qu'en élasticité elle s'appuie sur l'existence d'un potentiel [13].

#### CAS DU MATERIAU BOIS

Au niveau macroscopique, pour le matériau bois, considéré comme 'bois

massif' le cadre est celui d'une anisotropie viscoélastique linéaire d'un matériau non vieillissant. L'utilisation des symétries matérielles conduit à une orthotropie cylindrique [14], le tenseur fonction fluage est donc constitué de neuf composantes indépendantes dont on peut donner une forme matricielle ([15]) :

$$\begin{bmatrix} J_{1111}(t) & J_{1122}(t) & J_{1133}(t) & 0 & 0 & 0 \\ J_{2211}(t) & J_{2222}(t) & J_{2233}(t) & 0 & 0 & 0 \\ J_{3311}(t) & J_{3322}(t) & J_{3333}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4J_{2323}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4J_{1313}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4J_{1212}(t) \end{bmatrix}$$

ou, avec les conventions classiques de contraction d'indices :

$$\begin{bmatrix} J_{11}(t) & J_{12}(t) & J_{13}(t) & 0 & 0 & 0 \\ J_{21}(t) & J_{22}(t) & J_{23}(t) & 0 & 0 & 0 \\ J_{31}(t) & J_{32}(t) & J_{33}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{55}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{66}(t) \end{bmatrix}$$

La formulation duale conduit, de même, aux neuf fonctions de relaxations indépendantes:

$$\begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) & 0 & 0 & 0 \\ R_{12}(t) & R_{22}(t) & R_{23}(t) & 0 & 0 & 0 \\ R_{31}(t) & R_{32}(t) & R_{33}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66}(t) \end{bmatrix}$$

### L'ANALOGIE ELASTIQUE - VISCOELASTIQUE DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

Les problèmes de viscoélasticité linéaire non vieillissante peuvent se résoudre soit en terme d'algèbre de convolution de Stieltjes dans le domaine du temps soit en algèbre classique sur les transformées de Carson-Laplace des différentes grandeurs ce qui est plus simple au niveau des manipulations algébriques mais reporte la difficulté au niveau du calcul de l'originale de la solution.

Il est cependant possible d'éviter cette difficulté en utilisant l'analogie élastique - viscoélastique dans le domaine fréquentiel. Cette analogie est un cas particulier de la précédente, et possède un caractère plus physique.

Du fait de la linéarité du système, la réponse forcée à une entrée sinusoïdale est, après une période transitoire, une sinusoïde déphasée par rapport à l'excitation. Le module liant dans ce cas entrée et sortie, si les forces d'inerties sont négligées, est le module complexe noté  $C_{klmn}^*$ . On l'obtient en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans l'expression du module opérationnel. La transformée de Laplace se réduit alors à une transformée de Fourier (notée  $\mathcal{F}$ )

Les relations contrainte-déformation sont donc, dans un cas général,

de la forme:

$$\sigma_{kl}^*(j\omega) = C_{klmn}^*(j\omega) \varepsilon_{mn}^*(j\omega) \quad \text{ou}$$

$$\sigma_{kl}(t) = C_{klmn}^*(j\omega) \varepsilon_{mn}(t)$$

avec l'entrée  $\varepsilon_{mn}(t) = \varepsilon_{mn}^*(j\omega) e^{j\omega t}$

et la réponse en excitation forcée :  $\sigma_{kl}(t) = \sigma_{kl}^*(j\omega) e^{j\omega t}$   
 (les termes de phase sont contenus dans  $\sigma_{kl}^*$ )

La formulation duale donne:

$$\varepsilon_{kl}^*(j\omega) = S_{klmn}^*(j\omega) \sigma_{mn}^*(j\omega)$$

ou

$$\varepsilon_{kl}(t) = S_{klmn}^*(j\omega) \sigma_{mn}(t)$$

remarques:

$$C_{klmn}^* = R_{klmn}(p)|_{p=j\omega} = j\omega \int_0^\infty R_{klmn}(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \mathcal{F}(R_{klmn}(t))$$

$$S_{klmn}^* = J_{klmn}(p)|_{p=j\omega} = j\omega \int_0^\infty J_{klmn}(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \mathcal{F}(J_{klmn}(t))$$

-Le module complexe (la souplesse complexe) peut être aussi défini(e) comme l'ensemble des coefficients de la loi linéaire liant la réponse harmonique forcée à une entrée harmonique.

-Dans le cas concret des mesures, l'amplitude de l'entrée est réelle et constante et l'entrée sinusoïdale :  $\varepsilon_{mn}(t) = \varepsilon_{mn}^0 PR(e^{j\omega t})$

il en est alors de même pour la réponse déphasée qui peut s'écrire:

$$\sigma_{kl}(t) = \sigma_{kl}^0 PR(e^{j(\omega t + \phi)})$$

## GRANDEURS TECHNIQUES

Il est possible de définir à partir du tenseur  $S_{klmn}^*$  des grandeurs techniques analogues à celles obtenues dans le cas élastique [14]. La loi de comportement peut avoir l'expression matricielle suivante dans le repère de symétrie matérielle (R,T,L)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3^* \\ \gamma_4^* \\ \gamma_5^* \\ \gamma_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_R^*} & -\frac{\nu_{TR}^*}{E_T^*} & -\frac{\nu_{LR}^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{RT}^*}{E_R^*} & \frac{1}{E_T^*} & -\frac{\nu_{LT}^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{RL}^*}{E_R^*} & -\frac{\nu_{TL}^*}{E_T^*} & \frac{1}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \\ \sigma_4^* \\ \sigma_5^* \\ \sigma_6^* \end{bmatrix}$$

Ce qui met en jeu 12 grandeurs au lieu des 9 grandeurs indépendantes nécessaires : les symétries imposent les conditions de liaison suivantes :

$$\frac{\nu_{RT}^*}{E_R^*} = \frac{\nu_{TR}^*}{E_T^*} \qquad \frac{\nu_{TL}^*}{E_T^*} = \frac{\nu_{LT}^*}{E_L^*} \qquad \frac{\nu_{LR}^*}{E_L^*} = \frac{\nu_{RL}^*}{E_R^*}$$

## II VISCOELASTICITE DU MATERIAU HETEROGENE

### II-1 MODELES ANALYTIQUES , BORNES

#### II-1-1 GENERALITES

Contrairement au cas élastique, assez peu de travaux de fond ont été effectués pour le cas viscoélastique . Les premières références datent d'un peu plus d'une vingtaine d'années avec les travaux de Hashin (1966) et de Christensen (1968).

Dans le cas de la recherche de bornes, la difficulté majeure réside dans le fait que les théorèmes de minimum s'expriment sous forme d'intégrale de convolution ce qui rend impossible leur utilisation directe dans le cas général. Cependant l'analyse est simplifiée dans le cas d'une analogie élastique - harmonique : Christensen ([16] et [17]) présente deux théorèmes de minimum applicables à la viscoélasticité linéaire, formulés en intégrale de convolution mais aussi dans le cas du régime harmonique forcé ce qui permet quelques applications. Ces théorèmes nécessitent le cadre strict du milieu homogène isotrope et une différence réelle entre le champ de déformation solution et le champ de déformation associé au champ cinématique test, ce qui impose des coefficients de Poisson réels. Les applications restent donc très limitées.

#### II-1-2 LES EXPRESSIONS ANALYTIQUES (cas des composites à renforts de géométrie particulière )

Dans ce cas , la principale source de résultats reste l'application du principe de correspondance élasticité - viscoélasticité. La méthode la plus simple consiste à se placer dans le cas du régime harmonique forcé qui permet d'utiliser directement les relations obtenues dans le domaine élastique pour définir des modules complexes (Hashin, Christensen). Dans le cas plus général

d'application des règles de correspondance la difficulté réside toujours dans le calcul de l'originale pour le retour dans le domaine temporel . Le calcul n'est alors possible qu'au prix d'hypothèses extrêmement restrictives. Il est cependant parfois possible d'obtenir des relations temporelles intéressantes en évitant le calcul des transformées inverses en utilisant les théorèmes des valeurs limites des transformées de Laplace (Hashin [11] ). Les tableaux suivants donnent un aperçu des principales relations analytiques pouvant être utilisées en viscoélasticité. Certaines de ces relations seront utilisées dans les tests des modèles autocohérents.

FORME DU RENFORT	GRANDEUR TECHNIQUE	HYPOTHESES	AUTEUR REF	REP	SOLUTION	OBSERVATIONS
CYLINDRES A SECTIONS CIRCULAIRES	MODULE DE COMPRESSIBILITE $K_{23}$	DEFORMATIONS PLANES	HASHIN [11] [18]	F1	EXACTE	-FIGURE II-1 -ELAS. -HARM.
ID	$K_{23}(t)$	-DEFOR. PLANES -FIBRES RIGIDES -MATRICE ELAS EN DILATATION	HASHIN [11]	F2	ID	TIREE DE F1  -VISCO.
ID	MODULE DE CISAILEMENT AXIAL $G_{12}$		HASHIN [11] [18]	F3	ID	ELAS. HARM.
ID	$G_{12}(t)$	-FIBRES RIGIDES	HASHIN [11]	F4	ID	-VISCO. -TIREE DE F3
ID	MODULE AXIAL $E_1$		HASHIN [11] [18]	F5	ID	-ELAS -HARM
ID	COEFFICIENT DE POISSON AXIAL $\nu_{12}$		HASHIN [11] [18]	F6	ID	ELAS HARM
ID	MODULE TRANSVERSAL $E_2$	DEFORMATION PLANE	THEOCARIS [21]	F7	ID	ELAS HARM FIG II-3

FORME DU RENFORT	GRANDEUR TECHNIQUE	HYPOTHESES	AUTEUR REF	REP	SOLUTION	OBSERVATIONS
CYLINDRES A SECTIONS CIRCULAIRES	MODULE $E_2$	DEFORMATION PLANE	WHITNEY & RILEY cités ds [23]	F9	EXACTE	ELAS. HARM.
ID	MODULE DE CISAILLEMENT TRANSVERSAL $G_{23}$		CHRISTENSEN & LO [19]	F10	ID	-ELAS -HARM FIG II-2 (2)
CYLINDRIQUE A SECTIONS QUELCONQUES	BORNE INFE. MODULE CIS. TRANSVERSAL $G_{23}$ $G_{23}(t)$		HASHIN [11]	F11	ID	-ELAS. -VISCO UNIQUEMENT $G_{23}(0)$ $G_{23}(\infty)$
SPHERIQUE	MODULE DE COMPRESSIBILITE $K$	COMPRESSION HYDROSTATIQUE	HASHIN [18] CHRISTENSEN [16]	F12	ID	ELAS HARM
ID	MODULE DE CISAIL. $G$	TRES FAIBLE CONCENTRATION	CHRISTENSEN [16]	F13	ID	ID
ID	ID	TRES FORTE CONCENTRATION	ID	F14	ID	ID
ID	ID	ANALOGIE AVEC F11	CHRISTENSEN [16]	F15	APPROCHEE	RESPECTE LES COND LIMITES: F11, F12. ELAS-HAR
ID	BORNE SUPERIEURE SUR $G$	SPHERES VIDES	ID	F16	EXACTE	ELASTIQUE
ID	BORNE INFERIEURE SUR $G$	ID	ID	F17	ID	ID

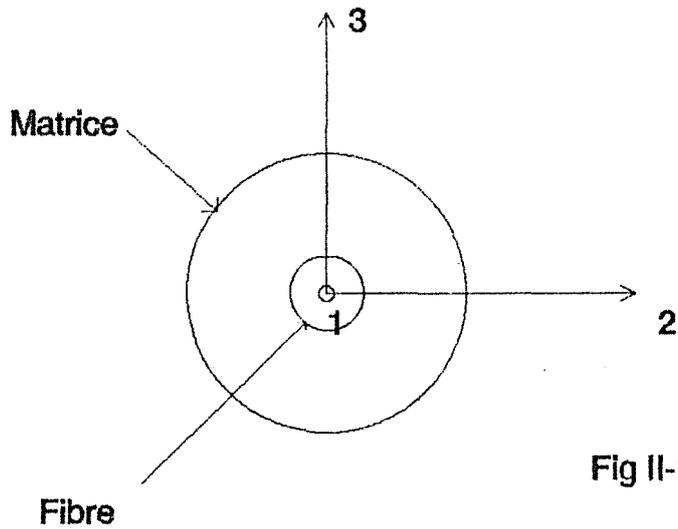
FORME DU RENFORT	GRANDEUR TECHNIQUE	HYPOTHESES	AUTEUR REF	REP	SOLUTION	OBSERVATIONS
SPHERIQUE	BORNES RELATIVES A G	SPHERES VIDES $\nu_m$ réel	CHRISTENSEN	F18 F18b.	EXACTE	HARM. (1)
ID	BORNE SUPERIEURE SUR G	SPHERES PARFAITEMENT RIGIDES	ID	F19	ID	ELASTIQUE
ID	BORNE INFERIEURE SUR G	ID	ID	F20	ID	ID
ID	BORNES RELATIVES A G	-SPHERES PARFAITEMENT RIGIDES - $\nu_m$ réel	ID	F21	ID	HARM. (1)
ID	MODULE DE CISAILLEMENT G		CHRISTENSEN & LO	F22	EXACTE	ELAS. HARM. FIG II-2 (2)
DISQUE	MODULE DE COMPRESSIBILITE K	-COMPOSITE MACRO. ISOTROPE -FAIBLE CONCENTRATION	BOUCHER [22]	F23	ID	ELAS. HARM. (3)
ID	MODULE DE CISAILLEMENT G	ID	ID	F24	ID	ID
ID	ID	COMPOSITE MACROSCOPIQUEMENT ISOTROPE	WU cité ds [36]	F25	ID	ID
ID	MODULE D'YOUNG E	ID + $\nu_m = \nu_f = 0,2$	HIRAI - KLINE [36]	F26	ID	ID

(1) Christensen utilise ses théorèmes de minimum pour obtenir ces bornes. Pour respecter les hypothèses permettant leur utilisation l'application ne porte que sur des vides sphériques ou des sphères infiniment rigides .

(2) La solution est déduite des équations données par Love (1927) pour la sphère ou Saving (1961) pour les cylindres et des résultats donnés par Eshelby pour une inclusion dans un milieu homogène équivalent utilisés aussi dans le schéma autocohérent où la fibre est alors directement incluse dans le milieu homogène équivalent . Ce schéma utilisé aussi dans [20] permet de limiter la distorsion inhérente au schéma auto-cohérent dont les effets seront analysés dans le chapitre  $\gamma$ .

(3) L'auteur en s'appuyant sur les travaux d'Eshelby donne les expressions analytiques des modules effectifs d'un composite macroscopiquement homogène et isotrope constitué de très faibles concentrations d'inclusions élastiques ellipsoïdales de révolution dans une matrice élastique. Les applications portent sur des inclusions à formes limites : sphères, disques, cylindres, qui montrent la forte influence des facteurs de forme sur les modules effectifs , influence d'autant plus grande que les rigidités entre matrice et inclusions sont différentes. L'auteur montre que dans le cas élastique pour ce matériau quasi homogène et quasi isotrope les modules effectifs extrêmes sont obtenus pour les composites à inclusions sphériques et discoïdales.

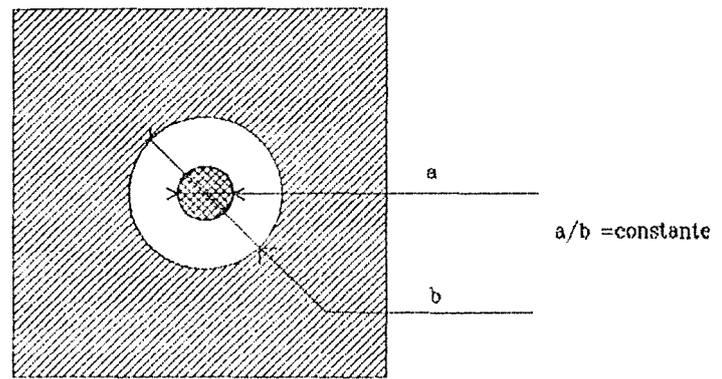
La cinquième colonne des tableaux indique le repère des relations analytiques fournies en annexe dans un formulaire



pour les trois modèles  
la direction des fibres  
est selon l'axe  $X_1$

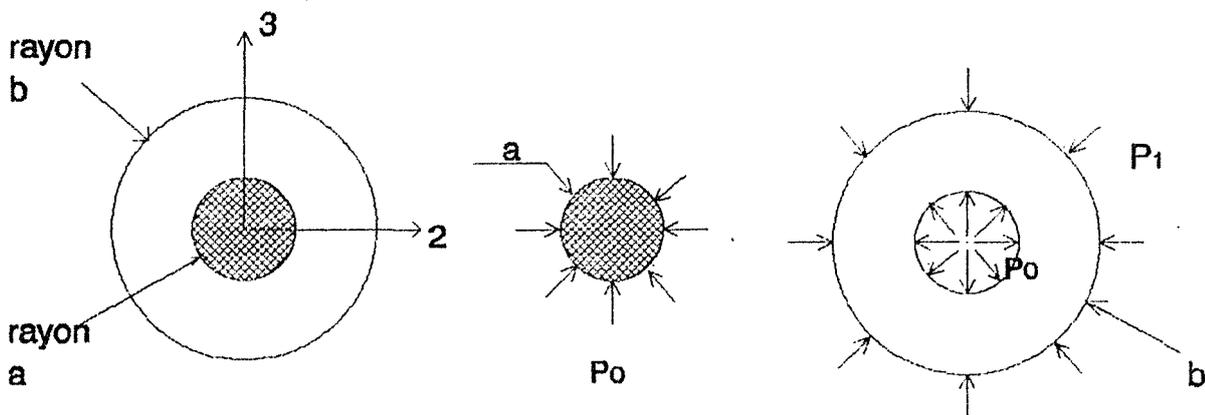
Fig II-1

- Inclusion sphérique ou cylindrique
- Matrice
- Milieu homogène équivalent



MODELE DE KERNER

Fig II-2



Une contrainte est appliquée dans la direction des fibres pour obtenir une déformation constante axialement

fig II-3

Modèles de base utilisés pour le calcul des modules.

## II-1-3 LES BORNES

Pour des inclusions à géométrie quelconque il est intéressant de disposer de valeurs extrêmes pour les modules du composite. Dans le cas élastique ces valeurs extrêmes sont données par les bornes dites élémentaires qui sont celles atteintes par certaines caractéristiques élastiques d'un composite dont la géométrie des phases constitutives respecte l'uniformité du champ des contraintes ou des déformations, sous contraintes ou déformations aux limites uniformes (agencement parallèle de Voigt ou agencement série de Reuss). La différence entre ces deux bornes est fortement liée à la différence de rigidité entre phases.

Dans le cas où d'autres informations statistiques sont disponibles : isotropie au niveau macroscopique par exemple, ces bornes peuvent être affinées : bornes de Hashin-Shtrikman ou de Walpole [24]. Ces bornes sont obtenues à partir des théorèmes de minimum dont on a déjà évoqué la difficulté d'utilisation dans le cas viscoélastique. Roscoe [25] obtient en viscoélasticité linéaire des bornes pour un matériau composite isotrope et homogène à l'échelle macroscopique dans le cadre de l'analogie harmonique pour de faibles fréquences (inerties négligeables). Des bornes inférieures de type Reuss sont obtenues pour les parties réelles et imaginaires pour le module de compressibilité ou le module de cisaillement et leurs inverses en s'appuyant sur le fait que partie imaginaire et partie réelle de ces modules complexes sont toujours positives (deuxième principe de la thermodynamique, stabilité des comportements sous régime harmonique) et en supposant que le tenseur de déformation se réduit soit à sa partie sphérique soit à sa partie déviatrice. De ces inégalités il est alors possible de déduire des bornes supérieures (voir en

annexe). Ces bornes se ramènent aux bornes élémentaires, d'une part dans le cas particulier des solides purement élastiques pour les parties réelles, et d'autre part dans le cas particulier des fluides purement visqueux pour les parties imaginaires.

Les limites obtenues peuvent être très différentes (voir application numérique en annexe et la figure II-2 du chapitre  $\gamma$ ) aussi, afin d'obtenir des frontières plus rapprochées le même auteur, donne un développement à ces notions de bornes de composites viscoélastiques dans [26].

Le composite est toujours macroscopiquement isotrope. La méthode consiste à comparer le composite viscoélastique à un composite purement élastique dont les phases constitutives ont les mêmes propriétés géométriques et dont les valeurs des modules sont égales soit à la partie réelle des phases correspondantes du composite viscoélastique soit à leur partie imaginaire:

-  $\mu^*$  et  $K^*$  sont les modules complexes effectifs de cisaillement et de compressibilité du composite viscoélastique constitué de  $n$  phases viscoélastiques caractérisées chacune par leurs modules complexes

$$\mu_r^* = \mu_r' + j\mu_r'' \quad \text{et} \quad K_r^* = K_r' + jK_r''$$

- si  $\mu_a$  et  $K_a$  sont les modules effectifs du composite élastique constitué des phases élastiques de modules égaux à la partie réelle des phases viscoélastiques  $\mu_r'$ , ce composite élastique est soumis sur ses frontières aux mêmes déplacements que le composite viscoélastique ce qui conduit aux bornes inférieures :

$$\mu' \geq \mu_a \quad \text{et} \quad K' \geq K_a$$

-de même si  $\mu_b$  et  $K_b$  sont les modules effectifs du composite élastique constitué de phases élastiques de modules égaux à la partie imaginaires des phases viscoélastique  $\mu_r''$  on a:

$$\mu'' \geq \mu_b \quad \text{et} \quad K'' \geq K_b$$

La même démarche appliquée dans le cadre d'une formulation duale sur les souplesses conduit à des bornes supérieures sur les parties réelles et imaginaires du module effectif du composite viscoélastique ce qui assure leur encadrement.

Les caractéristiques des composites élastiques utilisés pour cette comparaison ne sont en général pas connus, par contre on en connaît les bornes. Si les bornes utilisées pour ce calcul sont les bornes élémentaires, l'encadrement trouvé pour les parties réelles et imaginaires du composite viscoélastique correspond alors à celui obtenu par d'autres méthodes (Roscoe 1968). Si des bornes affinées sont utilisables, ce qui est le cas ici (macro-isotropie), un encadrement beaucoup plus resserré est obtenu. C'est ce que propose l'auteur lors d'une application qui porte sur un mélange de deux phases incompressibles macroscopiquement isotropes en utilisant les bornes de Hashin-Shtrikman. Cet exemple sera utilisé dans le chapitre test de la méthode autocohérente.

La même méthode de comparaison est utilisée dans [27] pour déterminer un encadrement pour les parties réelles et imaginaire d'un composite viscoélastique anisotrope. Une application numérique porte aussi sur un mélange binaire isotrope à l'échelle macroscopique et avec le même type de restrictions que dans le cas précédent.

## II-2 LES METHODES NUMERIQUES

Le précédent paragraphe présente les différents modèles analytiques disponibles qui n'existent que dans le cas de phases à morphologies simples et applicables pour un nombre restreint de composantes du tenseur de raideur du matériau composite et en général avec des restrictions sur les propriétés caractéristiques des phases constitutives. Dans un cas plus général, il est possible d'utiliser les bornes évoquées précédemment, mais elles nécessitent aussi des restrictions et de plus elles peuvent être très éloignées l'une de l'autre, elles le sont d'autant plus que les caractéristiques entre phases sont différentes, ce qui est le cas du bois au niveau trois d'hétérogénéité où le rapport de raideur cellulose-matrice est de l'ordre de 100 et plus encore au niveau deux où l'inclusion est creuse; l'écart est aussi lié au pourcentage d'inclusions. Les caractéristiques sont donc a priori très sensibles aux formes des inclusions .

Il est possible d'utiliser plusieurs familles de méthodes pouvant modéliser l'influence de ces paramètres : la méthode des éléments finis , les méthodes d'homogénéisation, la méthode autocohérente. La méthode des éléments finis a été utilisée par Barrett [31] au niveau de la cellule, le tissu élémentaire étant modélisé par un composite en plaque dans le cadre d'une loi de mélange pour la détermination des caractéristiques élastiques de chaque couche. Navi [32] a utilisé la même démarche mais en se servant d'une méthode d'homogénéisation pour obtenir les caractéristiques élastiques de la paroi cellulaire. Dans le cas des matériaux composites à structures périodiques assez simples une description éléments finis associée à une méthode d'homogénéisation a été utilisée pour

le cas élastique dans [33]. Mais ce type de calcul est rapidement inutilisable quand l'ultra-structure à décrire est complexe ce qui est le cas d'un tissu élémentaire où 15 familles d'inclusions différentes sont nécessaires pour la description de la microstructure. Plus spécifiques, les méthodes d'homogénéisation ont un développement important lié à celui des matériaux hétérogènes périodiques qu'elles décrivent. Parmi les méthodes d'homogénéisation des matériaux hétérogènes périodiques on peut distinguer la méthode des moyennes (Hill., Sanchez) d'inspiration purement mécanique et la méthode des développements asymptotiques (Bensoussan, Lions, Duvaut) d'argumentations plutôt mathématiques. Dans le cas de la viscoélasticité la méthode d'homogénéisation est possible [34] mais elle conduit à une mise en oeuvre numérique très lourde à cause de la présence d'un terme à mémoire longue qui apparaît dans les expressions des lois de comportement homogénéisées. Cependant le cas du régime harmonique forcé et la notion de modules complexes permettent de contourner la difficulté [35]

-Pour les matériaux ne justifiant pas des hypothèses de périodicité, d'autres méthodes ont été proposées : la théorie systématique de Kröner qui est une méthode statistique donnant un domaine de valeurs possibles ( bornes ) pour les grandeurs homogénéisées, la méthode autocohérente qui est une méthode approchée (exacte dans le cas du désordre parfait) donnant une valeur unique pour les grandeurs effectives. C'est cette méthode particulièrement souple, qui sera utilisée dans le cadre de ce travail, elle sera décrite plus en détail dans le cas de son utilisation en viscoélasticité linéaire .

### III LE SCHEMA AUTO-COHERENT EN VISCOELASTICITE

#### III-1 GENERALITES

Les premiers schémas auto-cohérents appliqués à la mécanique des milieux hétérogènes élastiques datent des années 50 (Hershey, Kroner). Ils consistent à remplacer le milieu réel entourant une hétérogénéité particulière (inclusion) par un milieu homogène qui possède les propriétés effectives que l'on cherche. Il a été évoqué, lors de l'introduction, le fait que les schémas auto-cohérents constituent une classe de méthodes intermédiaires entre la méthode statistique systématique de Kroner (1980), établie à partir de fonctions de corrélation d'ordre croissant qui est rigoureuse, et les modèles simples de Reuss et Voigt. Ces schémas auto-cohérents sont exacts dans le cas du désordre parfait (Kroner).

Le point de départ du "schéma auto-cohérent à un site" est l'étude de "l'hétérogénéité élémentaire" ou inclusion dans son environnement dont la solution est due à Eshelby (1961). La méthode peut s'inscrire dans le cadre général d'un problème d'élastostatique avec incompatibilité : pour le matériau hétérogène la réponse non uniforme obtenue après application d'un champ uniforme offre une situation comparable au problème de contraintes internes que l'on constate dans les milieux exempts de sollicitations externes mais qui sont le siège de phénomènes physiques comme la plasticité, le séchage, le changement de phases, etc... [28]. Une grande partie de ce vaste champ d'application a été exploitée : plasticité (Hill, Kroner, Zaoui, Berveiller), élasticité du matériau composite (Berveiller, Fassi-Ferhi, Chou, Wu). Le schéma auto-cohérent peut être enrichi par le modèle multi site qui permet, en outre, d'améliorer la description d'un milieu périodique en prenant en compte la

texture de répartition par l'intermédiaire d'une "cellule hétérogène élémentaire" constituée de plusieurs inclusions ([29], [30] ). Cet enrichissement donne donc à la méthode autocohérente une grande souplesse d'utilisation puisqu'elle ne se confine pas à un seul type d'organisation des phases (aléatoire- ordonné).

Dans le cas du matériau bois: matériau hétérogène viscoélastique poreux ,la sévérité des conditions :grandes différences de raideurs entre phases ,fractions volumiques importantes de vides dans certains tissus ,nature viscoélastique de certaines phases ,nécessitent l'adaptation du schéma autocohérent mono-site, rendant indispensable l'approche autocohérente par étapes successives.

#### CAS DE LA VISCOELASTICITE

La description du schéma autocohérent en représentation complexe , dans l'analogie élastique harmonique s'établit directement à partir de la formulation élastique ,elle ne pose pas de difficultés supplémentaires [27]. Les principales difficultés sont situées au niveau des calculs numériques aussi ,peu de résultats numériques sont disponibles dans la littérature.

#### III -2 LE SCHEMA AUTO-COHERENT EN VISCOELASTICITE.

Le cadre est celui de l'analogie élastique - harmonique défini précédemment ,c'est-à-dire que le schéma autocohérent s'effectue en représentation complexe. Les forces d'inertie seront négligées ( cas des basses fréquences )

CALCUL DES CARACTERISTIQUES EFFECTIVES  $C_{ijmn}^{*eff}$  :

Soit un milieu hétérogène constitué de N familles géométriques

viscoélastiques linéaires non vieillissantes (figIII-1). Le propos est de trouver les caractéristiques viscoélastiques du milieu homogène équivalent (figIII-2) dans le cadre du schéma autocohérent (figIII-3) où chaque inclusion est considérée seule dans un milieu infini dont les caractéristiques sont celles que l'on cherche.

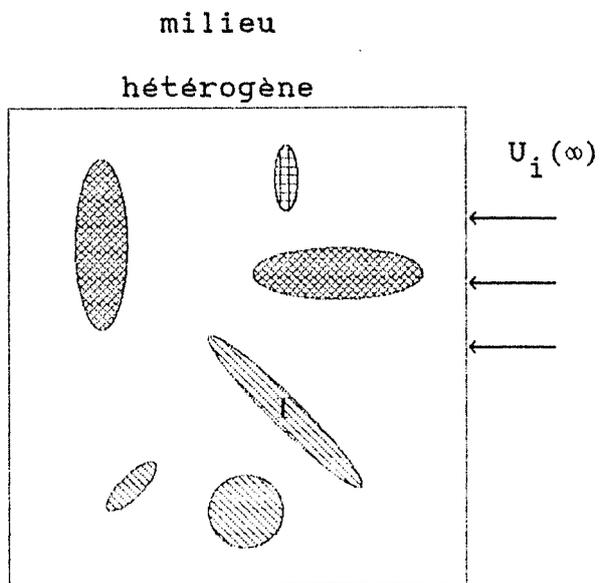


figure III-1

N inclusions

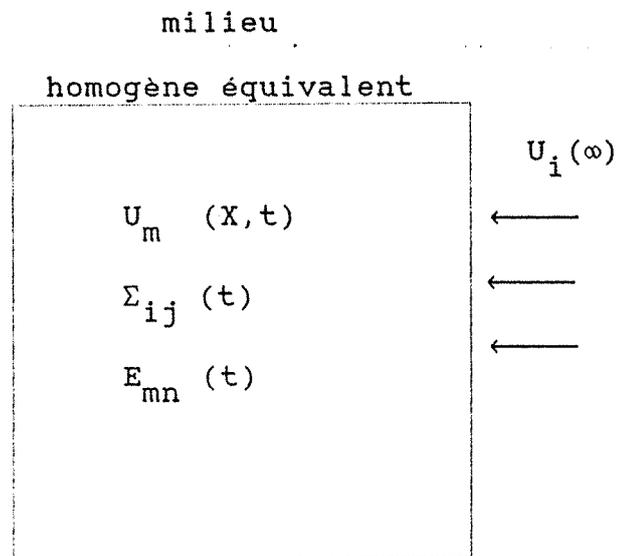


figure III-2

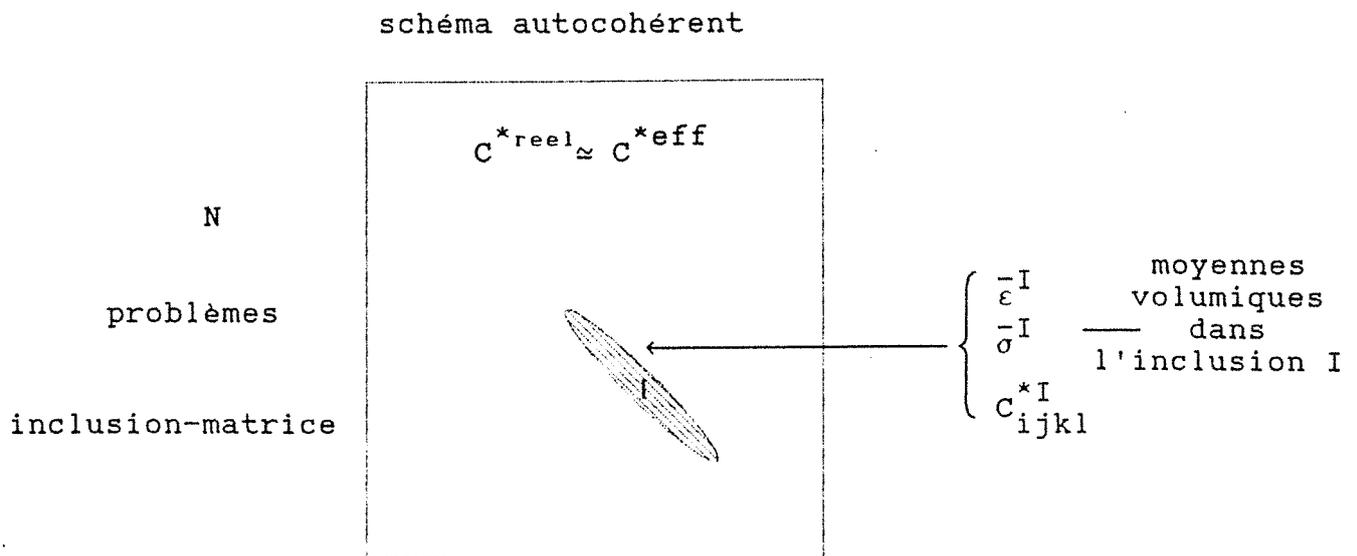


figure III-3

Le problème se ramène donc à N problèmes d'Eshelby inclusion - matrice .Le milieu est soumis à l'infini à des déplacements dont l'amplitude du gradient est constante :

$$U_i(\infty) = (U_{i,j})^0 e^{j\omega t} x_j \quad \text{sur } S$$

qui engendrent localement dans le milieu des champs de contrainte et de déformation  $\sigma_{ij}(r)$  et  $\epsilon_{kl}(r)$  .

Le milieu homogène équivalent possède les caractéristiques viscoélastiques  $C_{ijkl}^{*eff}$  , le champ de déplacement  $U_m$  , le champ de contrainte  $\Sigma_{ij}$  et le champ de déformation  $E_{mn}$  tels que :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijmn}^{*eff} E_{mn} \quad \text{III-1}$$

Dans l'inclusion régne un champ de déformation dont la moyenne volumique vaut  $\bar{\epsilon}_{kl}^I$  et un champ de contrainte dont la moyenne volumique est  $\bar{\sigma}_{ij}^I$  . Si  $C_{ijkl}^{*I}$  représente les caractéristiques viscoélastiques de l'inclusion I alors:

$$\bar{\sigma}_{ij}^I = C_{ijkl}^{*I} \bar{\epsilon}_{kl}^I \quad \text{III-2}$$

Dans le cadre d'une mécanique linéaire on peut poser la relation:

$$\bar{\epsilon}_{kl}^I = A_{klmn}^{*I} E_{mn} \quad \text{III-3}$$

qui définit la relation entre le champ moyen de déformation et la déformation moyenne dans l'inclusion par l'intermédiaire d'un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur de localisation.

Le champ de contrainte du milieu homogène équivalent est la moyenne volumique des contraintes du milieu microhétérogène:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(r) dV = \sum_{I=1}^N f^I \bar{\sigma}_{ij}^I \quad \text{III-4}$$

où  $f^I$  représente la fraction volumique de l'inclusion  $I$  et  $V$  la mesure du volume représentatif moyen (au sens statistique).

(Une relation analogue à III-4 existe pour les déformations.)

III-1, III-2, III-3, III-4, conduisent à l'expression du module effectif:

$$C_{ijmn}^{*eff} = \sum_{I=1}^N f^I C_{ijkl}^{*I} A_{klmn}^{*I} \quad \text{III-5}$$

Le modèle de Voigt (moyenne arithmétique) correspond au cas où le tenseur de localisation est le tenseur unité

$$I_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm})$$

Une formulation duale conduirait à l'expression de la souplesse effective:

$$S_{ijmn}^{*eff} = \sum_{I=1}^N f^I S_{ijkl}^{*I} B_{klmn}^{*I} \quad \text{III-6}$$

avec le tenseur de localisation de contrainte tel que

$$\bar{\sigma}_{kl}^I = B_{klmn}^{*I} \Sigma_{mn}$$

Le modèle de Reuss correspond au cas où  $B_{klmn}^{*I} = I_{klmn}$

Remarques

-  $\bar{A} = I$  et  $\bar{B} = I$

- Dans le cas où une phase peut être considérée comme une matrice de caractéristique  $C_{ijkl}^{*M}$  et de fraction volumique  $f^M = 1 - \sum_{I=1}^{N-1} f^I$

III-5 peut s'exprimer sous une forme plus intéressante sur le plan numérique et qui permet de tenir compte de l'effet de forme dans le cas de l'inclusion vide:

$$C_{ijkl}^{*eff} = C_{ijkl}^{*M} + \sum_{I=1}^{N-1} f^I ( C_{ijmn}^{*I} - C_{ijmn}^{*M} ) A_{mnkl}^{*I} \quad \text{III-7}$$

### Calcul du tenseur de localisation $A_{mnkl}^{*I}$

Contraintes et déformations locales en un point  $r$  du milieu sont liées par la loi de comportement :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}^*(r) \epsilon_{kl}(r) \quad \text{III-8}$$

L'équation d'équilibre local en supposant que les force de volume et d'inertie sont négligeables s'écrit:

$$\sigma_{ij,j}(r) = 0 \quad \text{III-9}$$

Le champ des déformations dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations est de la forme :

$$\epsilon_{ij}(r) = \frac{1}{2} ( u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r) )$$

Les propriétés de symétries du tenseur  $C_{ijkl}^*$  vues précédemment permettent d'écrire :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}^*(r) u_{k,l}(r)$$

III-9 devient:

$$( C_{ijkl}^*(r) u_{k,l}(r) )_{,j} = 0 \quad \text{III-10}$$

Pour le schéma autocohérent on peut considérer que :

$$C_{ijkl}^*(r) = C_{ijkl}^{*eff} + \delta C_{ijkl}^*(r)$$

III-10 prend alors la forme :

$$C_{ijkl}^{*eff} u_{k,l,j}(r) + (\delta C_{ijkl}^*(r) u_{k,l}(r))_{,j} = 0 \quad \text{III-11}$$

Le deuxième terme est un vecteur qui peut être considéré comme une

distribution de forces volumiques fictives  $f_i$  due à l'hétérogénéité du matériau :

$$f_i = (\delta C_{ijkl}^* (r) u_{k,l}(r))_{,j} \quad \text{III-12}$$

le problème défini par III-11 est celui d'un milieu viscoélastique infini de caractéristique  $C^{*eff}$  soumis à une distribution de forces volumiques dont la solution dans le cas élastique est obtenue par l'utilisation du tenseur de Green  $G_{km}(r-r')$ .

Cette technique reste utilisable en viscoélasticité linéaire dans le cadre de l'analogie [27].

Le tenseur de Green permet de relier le déplacement en un point  $r$  du milieu engendré par une force ponctuelle appliquée au point  $r'$ .

$G_{km}^*(r-r')$  est défini par :

$$C_{ijkl}^{*eff} G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0 \quad \text{III-13}$$

où  $\delta_{im}$  est le symbole de Kronecker et  $\delta(r-r')$  la fonction de Dirac.

Pour le volume  $V$  du milieu considéré, la solution de III-11 s'écrit alors :

$$u_m(r) = U_m + \int_V G_{mi}^*(r-r') \left( \delta C_{ijkl}^*(r') u_{k,l}(r') \right)_{,j'} dV'$$

(l'indice prime affecte variables et directions relatives aux forces volumiques).

L'application du théorème de la divergence conduit à :

$$u_m(r) = U_m - \int_V G_{mi,j'}^*(r-r') \delta C_{ijkl}^*(r') u_{k,l}(r') dV'$$

en supposant que  $G_{mi}^*(r-r') \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$  (à la surface)

et, en remarquant que  $G_{mi,j'}^*(r-r') = -G_{mi,j}^*(r-r')$  :

$$u_{m,n}(r) = U_{m,n} + \int_V G_{mi,jn}^*(r-r') \delta C_{ijkl}^*(r') u_{k,l}(r') dv'$$

qui permet d'obtenir la déformation au point r :

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} + \int_V \Gamma_{mnij}^*(r-r') \delta C_{ijkl}^*(r') \varepsilon_{kl}(r') dv' \quad \text{III-14}$$

avec 
$$\Gamma_{mnij}^*(r-r') = \frac{1}{2} ( G_{mi,jn}^*(r-r') + G_{ni,jm}^*(r-r') ).$$

En tenant compte du fait que la déformation est supposée constante à l'intérieur des N inclusions, le champs de déformation est donc constant par morceaux et prend la forme :

$$\varepsilon_{mn}(r) = \sum_{I=1}^N \bar{\varepsilon}_{mn}^I \theta^I(r)$$

avec  $\theta^I(r)$  fonction échelon telle que : 
$$\begin{cases} \theta^I(r) = 1 & \text{si } r \in V^I \\ \theta^I(r) = 0 & \text{si } r \notin V^I \end{cases}$$

et en posant 
$$\delta C^*(r') = (C^{*I} - C^{*eff}) \theta^I(r') = \Delta C^{*I} \theta^I(r')$$

il vient :

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} + \sum_{I=1}^N \int_{V^I} \Gamma_{mnij}^*(r-r') \Delta C_{ijkl}^{*I} \bar{\varepsilon}_{kl}^I \theta^I(r') dv'$$

et finalement :

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} + \sum_{I=1}^N \int_{V^I} \Gamma_{mnij}^*(r-r') \Delta C_{ijkl}^{*I} \bar{\varepsilon}_{kl}^I dv' \quad \text{III-15}$$

avec  $V^I$  qui représente le volume de l'inclusion I

III-15 permet de calculer la valeur moyenne dans une inclusion

quelconque I :

$$\bar{\epsilon}_{mn}^{-I} = E_{mn} + \sum_{J=1}^N \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{mnij}^*(r-r') \Delta C_{ijkl}^{*J} \bar{\epsilon}_{kl}^{-J} dV^I dV^J$$

soit en posant  $T_{mnij}^{*IJ} = \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{mnij}^*(r-r') dV^I dV^J :$

$$\bar{\epsilon}_{mn}^{-I} = E_{mn} + \sum_{J=1}^N \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*IJ} \Delta C_{ijkl}^{*J} \bar{\epsilon}_{kl}^{-J} \quad \text{III-16}$$

Il est possible de décomposer le signe somme en deux termes :

$$\bar{\epsilon}_{mn}^{-I} = E_{mn} + \sum_{I=1}^N \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*II} \Delta C_{ijkl}^{*I} \bar{\epsilon}_{kl}^{-I} + \sum_{I=1}^{N, J \neq I} \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*IJ} \Delta C_{ijkl}^{*J} \bar{\epsilon}_{kl}^{-J} \quad \text{II-16 bis}$$

Si R est la distance entre les deux inclusions I et J,  $T^{*IJ}$  est constitué d'un terme en  $(1/R^3)$  et d'un terme en  $(1/R^5)$  [29]. L'influence se limite donc aux inclusions directement voisines. Le schéma autocohérent à un site consiste à négliger dans l'expression III-16 la contribution des termes de la somme correspondant aux inclusions  $J \neq I$ . Il reste alors :

$$\bar{\epsilon}_{mn}^{-I} = E_{mn} + \sum_{I=1}^N \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*II} \Delta C_{ijkl}^{*I} \bar{\epsilon}_{kl}^{-I}$$

d'où

$$E_{mn} = (I_{mnkl} - \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*II} \Delta C_{ijkl}^{*I}) \bar{\epsilon}_{kl}^{-I}$$

donc

$$A_{mnkl}^{*I} = \left( I_{mnkl} - \frac{1}{V^I} T_{mnij}^{*II} \Delta C_{ijkl}^{*I} \right)^{-1} \quad \text{III-17}$$

Expression de  $C^{*eff}$

III-5 et III-17 donnent:

$$C_{ijkl}^{*eff} = \sum_{I=1}^N f^I C_{ijmn}^{*I} \left( I_{mnkl} - \frac{1}{V^I} T_{mnpq}^{*II} \Delta C_{pqkl}^{*I} \right)^{-1} \quad \text{III-18}$$

Remarques :

- L'expression III-18 n'est pas explicite pour  $C^{*eff}$  puisque ce tenseur apparait aussi dans  $\Delta C^{*I} = C^{*I} - C^{*eff}$ . Il faut donc avoir recours à une méthode itérative. Le  $C^{*eff}$  initial est la moyenne des tenseurs obtenus par les deux lois de mélange : Voigt et Reuss. Le calcul itératif est stoppé lorsque la variation des  $C^{*eff}$  entre deux itérations successives M et M+1 satisfait au critère suivant:

$$\left| \frac{\left( C_{ijkl}^{*eff(M)} \quad \underline{C}_{ijkl}^{*eff(M)} \right)^{1/2}}{\left( C_{ijkl}^{*eff(M+1)} \quad \underline{C}_{ijkl}^{*eff(M+1)} \right)^{1/2}} - 1 \right| < \epsilon_{it}$$

avec  $\underline{C}_{ijkl}^{*eff}$  conjugué de  $C_{ijkl}^{*eff}$

-Le calcul de  $T^{*II}$  ne peut être analytique que dans des cas très simples (: sphères dans une matrice isotrope) , on a donc recours à une méthode numérique déduite du cas élastique qui s'appuie sur la transformée de Fourier du tenseur de Green.

- Les résolutions numériques sur ordinateur dans le cas de la viscoélasticité conduisent à des calculs problématiques à cause de la présence de tenseurs complexes du quatrième ordre. Pour obtenir des algorithmes robustes une solution consiste, soit à vectoriser chaque tenseur complexe du quatrième ordre, soit à les condenser en une matrice du deuxième ordre. C'est cette solution qui a été adoptée ici.

## LE SCHEMA AUTOCOHERENT A UN SITE PAR ETAPES

L'approximation autocohérente qui consiste à remplacer le milieu réel entourant l'inclusion par le milieu homogène équivalent crée une erreur systématique à la fois liée à  $\Delta C^{*I}$  et à la fraction volumique d'inclusions. Cette distorsion peut mener à des erreurs importantes sur certaines composantes du module complexe (voir le chapitre test du schéma autocohérent) ou conduire dans certains cas extrêmes (cas des inclusions vides) à des solutions numériques non convergentes.

Il existe des schémas qui limitent ces effets : le modèle utilisé par Kerner et Oshima permet d'interposer entre l'inclusion et le milieu homogène équivalent un tube constitué par la matrice (figure II-2) mais ce schéma se limite au cas des fibres cylindriques parallèles à section circulaire. Dans [22], l'auteur propose un schéma qui consiste à déterminer par intégration les caractéristiques effectives d'un matériau élastique isotrope à partir de la solution analytique obtenue pour les faibles concentrations d'inclusions. (Differential scheme). Dans le même esprit une méthode plus générale consiste à effectuer des calculs autocohérents en plusieurs étapes. Le principe est de se rapprocher de la solution analytique exacte obtenue pour les faibles concentrations qui est la solution inclusion - matrice utilisée dans le schéma autocohérent en introduisant la concentration d'inclusion en plusieurs étapes.

Cas d'une seule famille d'inclusion:

Soit  $n$  le nombre d'étapes,  $f_m$  la fraction d'inclusions totale,  $f_p = f_m/n$  la fraction virtuelle d'inclusions.

A la  $i^{\text{ième}}$  étape il faut introduire une fraction réelle d'inclusion  $f_i$  dans une matrice constituée du matériau ayant les

caractéristiques viscoélastiques effectives calculées à l'étape précédente qui contenait alors une fraction volumique totale d'inclusions valant  $(i-1)fp$ . Cette fraction d'inclusions déjà acquise vaut  $f_{ia}$  à la  $i^{\text{ième}}$  étape.

Nous avons donc la relation suivante :

$$\frac{f_{ia}}{(1-f_i)} = \frac{(i-1)fp}{1}$$

La fraction volumique totale d'inclusions à la  $i^{\text{ième}}$  étape vaut  $f_i + f_{ia}$ , elle est égale à  $ifp$  donc :

$$f_i + (1-f_i)(i-1)fp = ifp$$

finalement  $f_i = fp / ( 1 - ( i-1 )fp )$

Ce calcul peut être facilement étendu au cas général du matériau à plusieurs familles d'inclusions.

Le calcul autocohérent par étapes sera comparé aux autres modèles et à différentes expériences dans le chapitre test de la méthode autocohérente.

#### IV BIBLIOGRAPHIE

- [1] LAZAN 1968  
Damping of materials and in structural mechanic  
Pergamon press
- [2] NASHIF JONES HANDERSON 1985  
"Vibration damping" J.Wiley & Sons
- [3] G. CHANTRE 1989  
Liaison entre rigidité et densité du bois à l'intérieur du  
cerne D.E.A Sciences du bois I.N.P.L. Nancy
- [4] E.M.L. EHRNROOTH P.KOLSETH 1984  
THE TENSILE TESTING OF SINGLE WOOD PULP FIBERS IN AIR AND IN  
WATER. Wood and fiber science 16(4) 549-566
- [5] N. SOBUE 1986  
Instantaneous measurement of elastic constants by analysis of  
the tap tone of wood. Mokuzai Gakkaishi vol 32 274-279
- [6] J. M. GENEVAUX 1989  
Le fluage à température linéairement croissante :  
caractérisation des sources de viscosité anisotrope du bois  
Thèse I.N.P.L.
- [7] G.M. GUERIN 1990  
Caractérisation en flexion quasi-statique et dynamique d'un  
matériau thermo-hygro-visco-élastique : le bois  
Thèse I.N.P.L.
- [8] KELLEY 1987  
Relaxation behaviour of amorphous components of wood  
Journal of materials sciences vol 22 617-624
- [9] L. SALMEN 1987  
Viscoelastic properties of *in situ* lignin under  
water-saturated conditions  
Journal of materials sciences vol 19 3090-3096
- [10] J. MANDEL 1966  
"Mécanique des milieux continus" tome 2  
Annexe XXI viscoélasticité
- [11] Z. HASHIN 1966  
Viscoelastic fiber reinforced materials  
AIAA journal vol 4 n°8
- [12] J.MANDEL 1960  
"Introduction à l'étude de la rhéologie"  
Chapitre 5
- [13] J.SALENCON 1983  
"Viscoélasticité" Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et  
Chaussées.

- [14] D. GUITARD 1983  
Le matériau bois Propriétés mécanique A.R.B.O.LOR.
- [15] A.P.SCHNIEWIND J.D.BARRETT 1972  
WOOD IS A LINEAR ORTHOTROPIC VISCOELASTIC MATERIAL  
Wood science and technology vol 6 43-57
- [16] R.M. CHRISTENSEN 1969  
Viscoelastic properties of heterogeneous media  
J.Mech. Phys.Solids vol 17 23-41
- [17] R.M. CHRISTENSEN 1971  
"Theory of viscoelasticity" chapitre V A.P.
- [18] Z. HASHIN 1970  
Complex moduli of viscoelastic composites  
I General theory and application to particular composite  
II fiber reinforced materials J. Solids Structures vol 6
- [19] R.M. CHRISTENSEN LO 1979  
Solution for effective shear properties in three phase  
sphere and cylinder models J. Phys. Solids.
- [20] N.OSHIMA S. NOMURA 1985  
A method to calculate effective modules of hybrid composite  
material Journal of composite material
- [21] S.THEOCARIS G.SPATHIS E.SIDERIDIS 1982  
Elastic and viscoelastic properties of fibre-reinforced  
composite material  
fibre science and technologie 17 169-181
- [22] S.BOUCHER 1975  
Modules effectifs de matériaux composites quasi isotropes  
constitués d'une matrice élastique et d'inclusions  
élastiques. I cas des concentrations infinitésimales  
II cas des concentrations finies en inclusions. Revue M
- [23] SADOH SVALBONAS GURTMAN 1973  
"Analysis of structural composite materials"  
M. Dekker inc New-York
- [24] WALPOLE 1966  
On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous  
system I II J. Mech. Phys. vol 14 151-162, vol 14 289-301
- [25] ROSCOE 1969  
Bound for real and imaginary parts of dynamic moduli of  
composite viscoelastic systems J.Phys. Solids vol 17 17-22
- [26] ROSCOE 1971  
Improved bounds for real and imaginary parts of complex  
moduli of isotropic viscoelastic composites.  
J. Mech. Phys. Solids vol 20 91-97

- [27] S.CHETOUI 1985  
EVALUATION DES PROPRIETES EFFECTIVES DES MATERIAUX  
HETEROGENES ANISOTROPES A CONSTITUANTS VISCOELASTIQUES  
Thèse E.N.P.C.
- [28] A.ZAOUI  
"DEFORMATION DES POLYCRISTAUX ET DES MATERIAUX MULTIPHASES"  
chapitre 7 : Aspects fondamentaux de la plasticité des  
polycristaux métalliques
- [29] O.FASSI-FERHI 1985  
LE PROBLEME DE LA PAIRE D'INCLUSIONS PLASTIQUES ET  
HETEROGENES DANS UNE MATRICE ANISOTROPE.  
Thèse d'Etat Université de Metz
- [30] M.BERVEILLER O.FASSI-FERHI A.HIHI 1986  
Détermination du comportement élastique effectif d'un  
matériau composite à partir d'un modèle auto-cohérent à  
plusieurs sites J.N.C. 237-247
- [31] J.D.BARRETT 1973  
Thèse Berkeley
- [32] P.NAVI 1988  
Three dimensional modeling of the wood microstructure for the  
prediction of fiber elastic properties. Actes G.S.R.B.
- [33] BEGIS BESTANO DUVAUT HASSIM NUC 1983  
A new method of computing global elastic moduli for composite  
materials RR 195 I.N.R.I.A.
- [34] SUQUET 1980  
Les méthodes d'homogénéisation en mécanique du solide  
Colloque G.F.R.
- [35] KRUCH  
Calcul par une méthode d'homogénéisation du module complexe  
des matériaux composites.  
Laboratoire de mécanique du solide. Ecole Polytechnique
- [36] T.HIRAI D.E.KLINE 1973  
Dynamic mechanical properties of graphite-epoxy and  
carbon-epoxy composite  
Composite materials

I COMPARAISON DE LA SOLUTION NUMERIQUE VISCOELASTIQUE  
AUTOCOHERENTE AVEC LA SOLUTION ANALYTIQUE

II CONFRONTATION AVEC LES BORNES DE ROSCOE

III CONFRONTATION AVEC DIFFERENTES SOLUTIONS ANALYTIQUES ET  
DIFFERENTES EXPERIENCES

III-1 Composite à renforts cylindriques à section circulaire

- 1 Cas élastique
- 2 Cas viscoélastique
- 3 Influence de la raideur
- 4 Influence du nombre d'étapes

III-2 Composite à renforts sphériques

III-3 Composite à renforts discoides

IV CONFRONTATION AVEC UNE METHODE D'HOMOGENEISATION UTILISANT LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS

V CAS DE L'INCLUSION VIDE

VI CONCLUSION GENERALE SUR LES TESTS

VII BIBLIOGRAPHIE

# I COMPARAISON DE LA SOLUTION NUMERIQUE AVEC LA SOLUTION ANALYTIQUE AUTO-COHERENTE EN VISCOELASTICITE

## 1 INTRODUCTION

Afin de tester la validité des solutions numériques auto-cohérentes, il est classique ([1], [2]) de comparer les résultats obtenus numériquement avec la solution analytique du composite isotrope à renforts sphériques développée à partir de la solution d'Eshelby. Cette solution analytique peut être aisément étendue au cas viscoélastique dans le cadre du module complexe avec les mêmes hypothèses et les mêmes conditions que celles utilisées dans le chapitre  $\beta$  (schéma autocohérent en viscoélasticité). La solution conduit à des expressions implicites du type

$$f(\mu_{inc}, \mu_{mat}, \mu_{eff}, \lambda_{inc}, \lambda_{mat}, \lambda_{eff}) = 0$$

pour les coefficients effectifs de Lamé. Dans le cas de la sphère une solution élastique explicite peut être trouvée dans le cas où les coefficients de Poisson de la matrice et du renfort sont égaux à 0,2 [3] mais pour réaliser le test de la solution numérique viscoélastique il est possible de s'affranchir de cette limitation en testant la convergence vers zéro de la grandeur

$$\varepsilon = f(\mu_{inc}, \mu_{mat}, \mu_{effnum}, \lambda_{inc}, \lambda_{mat}, \lambda_{effnum})$$

au cours du processus itératif lors du calcul numérique des

caractéristiques effectives.

## 2 SOLUTION AUTO-COHERENTE ANALYTIQUE .CAS DES SPHERES VISCO-ELASTIQUES DANS UNE MATRICE VISCO-ELASTIQUE

Soit un composite de coefficients effectifs inconnus complexes  $\mu^{*eff}$  et  $\lambda^{*eff}$ , constitué de sphères viscoélastiques de coefficients  $\mu^{*I}$  et  $\lambda^{*I}$  donnés, dans une matrice viscoélastique de coefficients  $\mu^{*M}$  et  $\lambda^{*M}$  donnés. Les lois de comportement de ces trois différents matériaux étant supposées isotropes sont de la forme :

$$C_{ijkl}^* = \lambda^* \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^* I_{ijkl} \quad I-1$$

avec  $I_{ijkl}$  tenseur identité du 4<sup>ème</sup> ordre :  $I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$

donc  $\mu^* = C_{1212}^* = C_{1313}^* = C_{2323}^*$  et  $\lambda^* = C_{1122}^* = C_{1133}^* = C_{2211}^* = C_{2233}^* = C_{3311}^* = C_{3322}^*$

or  $C_{ijkl}^{*eff}$  dans le schéma auto-cohérent peut avoir pour expression:

$$C_{ijkl}^{*eff} = C_{ijkl}^{*M} + \sum_{I=1}^{N-1} f_I ( C_{ijmn}^{*I} - C_{ijmn}^{*M} ) A_{mnkl}^*$$

dans le cas présent on en déduit:

$$\mu^{*eff} = C_{1212}^{*eff} = C_{1212}^{*M} + f ( C_{12mn}^{*I} - C_{12mn}^{*M} ) A_{mn12}^* \quad I-2$$

$$\lambda^{*eff} = C_{1122}^{*eff} = C_{1122}^{*M} + f ( C_{11mn}^{*I} - C_{11mn}^{*M} ) A_{mn22}^* \quad I-3$$

développons l'expression I-2 en tenant compte de I-1 :

$$\mu^{*eff} = \mu^{*M} + f ( \mu^{*I} - \mu^{*M} ) ( A_{1212}^* + A_{2112}^* )$$

de la même manière on trouve:

$$\lambda^{*eff} = \lambda^{*M} + f(\lambda^{*I} - \lambda^{*M}) (A_{1122}^{*} + A_{2222}^{*} + A_{3322}^{*}) + 2f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) A_{1122}^{*}$$

Pour calculer les composantes du tenseur de localisation, on adapte la proposition d'Eshelby au cas de l'inclusion sphérique isotrope viscoélastique dans une matrice isotrope viscoélastique :

$$A_{ijkl}^{*I} = M^{*} I_{ijkl} + \frac{1}{3} (N^{*} - M^{*}) \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{lm} \quad \text{avec}$$

$$M^{*} = 1 + \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^{*eff}}{1 - \nu^{*eff}} \frac{\mu^{*I} - \mu^{*eff}}{(\mu^{*eff} - \mu^{*I})\beta^{*} - \mu^{*eff}}$$

$$N^{*} = 1 + \alpha^{*} \frac{K^{*I} - K^{*eff}}{(K^{*eff} - K^{*I})\alpha^{*} - K^{*eff}}$$

$$\alpha^{*} = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu^{*eff}}{1 - \nu^{*eff}} \quad \beta^{*} = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^{*eff}}{1 - \nu^{*eff}}$$

d'où

$$\mu^{*eff} - \mu^{*M} - f(\mu^{*eff} - \mu^{*M}) \frac{\mu^{*eff}}{\mu^{*eff} - (\mu^{*eff} - \mu^{*I})\beta^{*}} = 0$$

$$\text{et } \lambda^{*eff} - \lambda^{*M} - f(\lambda^{*I} - \lambda^{*M}) N^{*} - 2f(\mu^{*I} - \mu^{*M})(N^{*} - M^{*})/3 = 0$$

Les critères de test sont les grandeurs

$$\varepsilon_{1R} = PR \left( \mu^{*effnum} - \mu^{*M} - \frac{f(\mu^{*I} - \mu^{*M})\mu^{*effnum}}{\mu^{*effnum} - (\mu^{*effnum} - \mu^{*I})\beta^{*}} \right) / PR(\mu^{*effnum})$$

$$\varepsilon_{1I} = PI \left( \mu^{*effnum} - \mu^{*M} - \frac{f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) \mu^{*effnum}}{\mu^{*effnum} - (\mu^{*effnum} - \mu^{*I}) \beta^*} \right) / PI(\mu^{*effnum})$$

$$\varepsilon_{2R} = PR \left( \lambda^{*effnum} - \lambda^{*M} - f(\lambda^{*I} - \lambda^{*M}) N^* - 2f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) (N^* - M^*) / 3 \right) / PR(\lambda^{*effnum})$$

$$\varepsilon_{2I} = PI \left( \lambda^{*effnum} - \lambda^{*M} - f(\lambda^{*I} - \lambda^{*M}) N^* - 2f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) (N^* - M^*) / 3 \right) / PI(\lambda^{*effnum})$$

Dans ces quatre expressions, les grandeurs effectives sont celles données par le programme numérique. Les critères s'annulent lorsque les valeurs numériques sont égales aux valeurs analytiques.

#### EVOLUTION DES CRITERES AU COURS D'UN CALCUL AUTO-COHERENT

Soit un composite constitué d'un mélange de 50% de renforts sphériques dans une résine viscoélastique tel que

le renfort soit caractérisé par un module d'young  $E^f = 84000$  MPa  
et un coefficient de Poisson  $\nu^f = 0,22$ .

la résine est définie par son module complexe  $E^{*M} = (4000 + j400)$  MPa  
et son coefficient de Poisson  $\nu^M = 0,34$ .

Les figures I-1 I-2 I-3 I-4 représentent l'évolution de ces critères au cours des itérations successives.

Ces évolutions montrent que le processus converge rapidement pour atteindre des valeurs relatives non significatives entre les

deux solutions à partir de la 10<sup>ième</sup> itération. ( écart relatif en moyenne inférieur à 0,2% ).

Remarques.

Le modèle série (Reuss) conduit, en moyenne ,à des écarts plus faibles qu'un modèle parallèle (Voigt), la moyenne harmonique convenant mieux à ce type d'agencement géométrique:

critère	$\epsilon_{1R}$	$\epsilon_{1I}$	$\epsilon_{2R}$	$\epsilon_{2I}$
modèle parallèle	28%	74%	24%	64%
modèle serie	46%	35%	8,6%	4%
M.A.C. 15 itérations	0,06%	0,14%	0,04%	0,09%

TABLEAU I-1

Les figures I-5 à I-8 présentent les évolutions des parties réelles et imaginaires des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

figure I-5: partie réelle de  $\lambda$ , le calcul autocohérent donne une valeur inférieure à celle donnée par le système parallèle et supérieure à celle donnée par le système série.

figure I-6: partie imaginaire de  $\lambda$ , c'est le système série qui donne ici la valeur maximale.

figure I-7: partie réelle de  $\mu$ , même type d'évolution que celle constatée pour la partie réelle de  $\lambda$ .

figure I-8: partie imaginaire de  $\mu$ , dans ce cas le système série ne constitue pas une borne supérieure : la valeur finale de  $PI(\mu)$  donnée par la méthode autocohérente est largement supérieure à celle donnée par le modèle de Reuss.

Evolution des critères au cours des itérations

$\psi'$

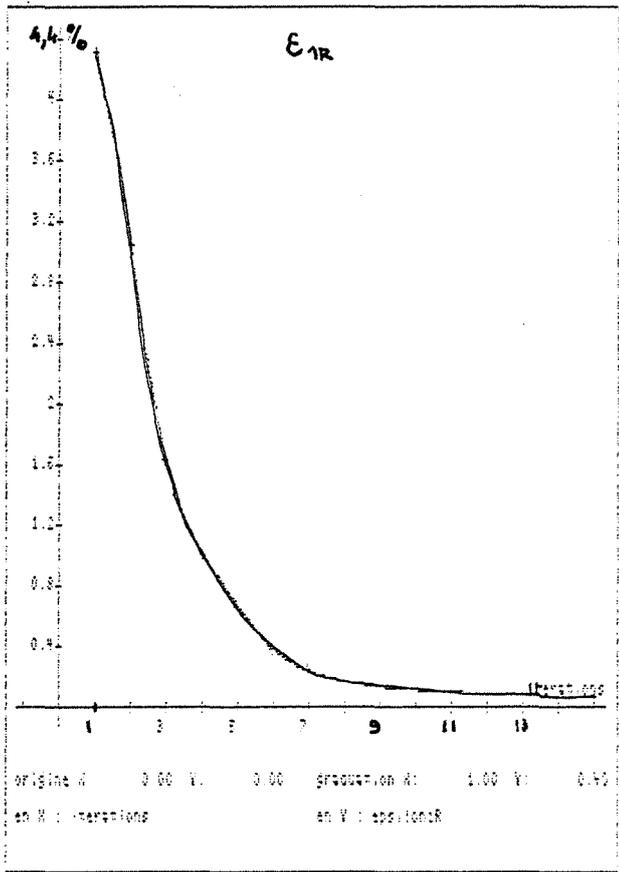


fig I-1

$\lambda'$

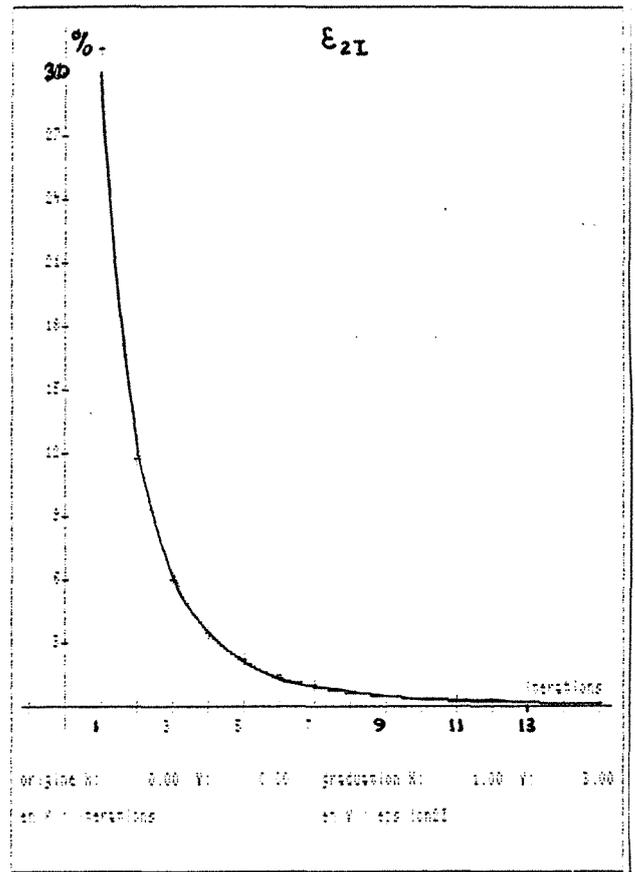


fig I-4

$\psi''$

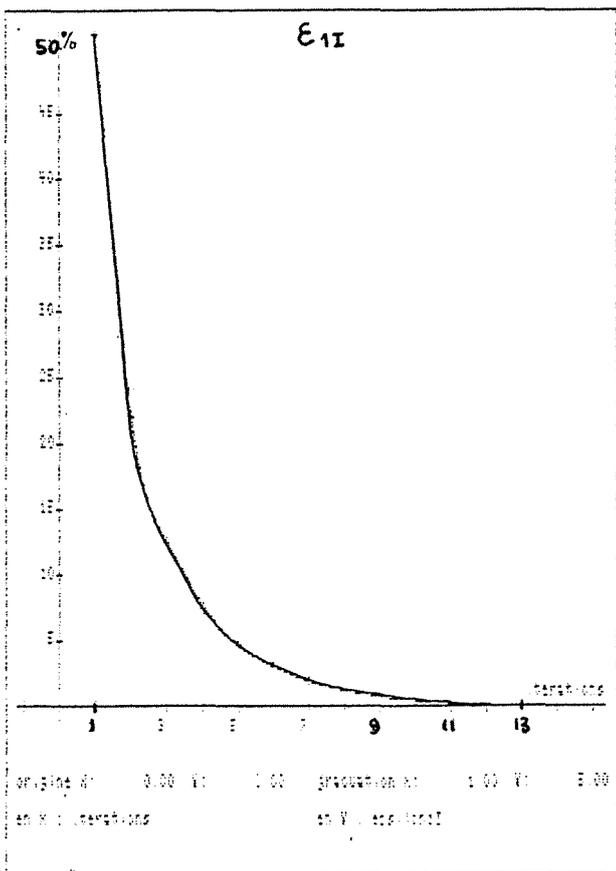


fig I-2

$\lambda''$

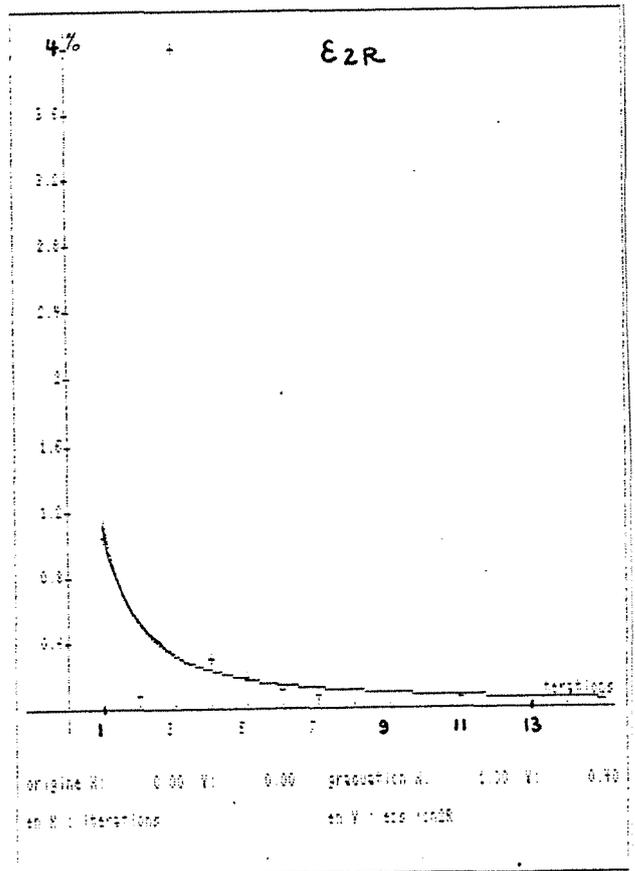


fig I-3

Evolution des parties réelles et imaginaires de  $\lambda$   
 au cours des itérations

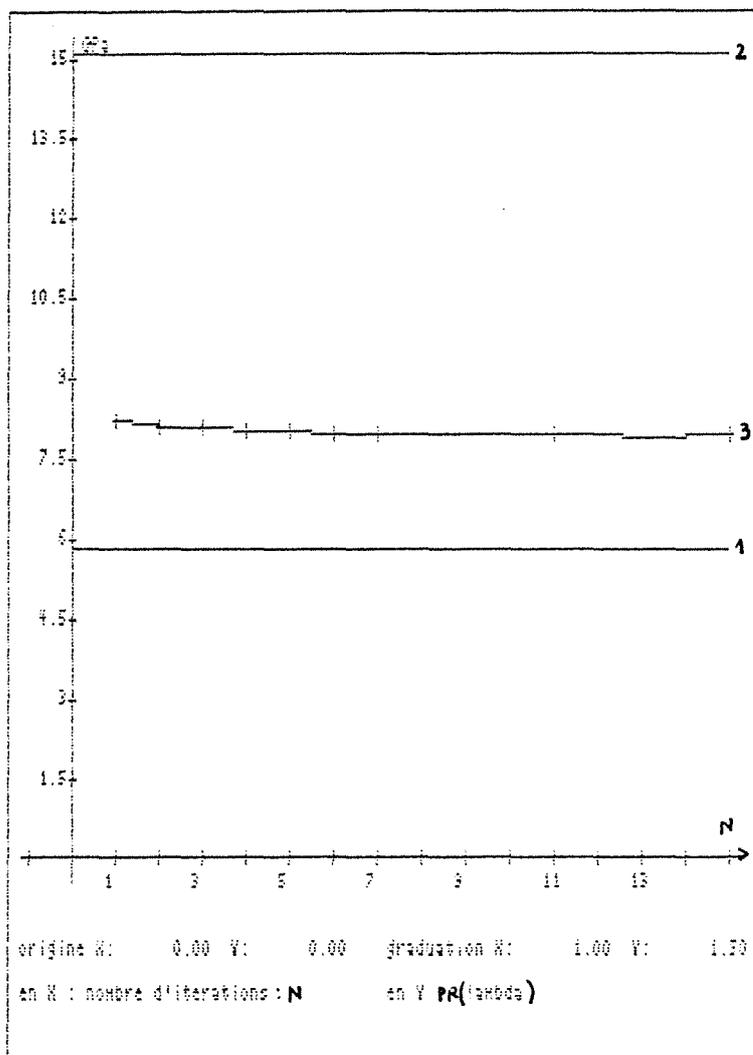


FIG I-5

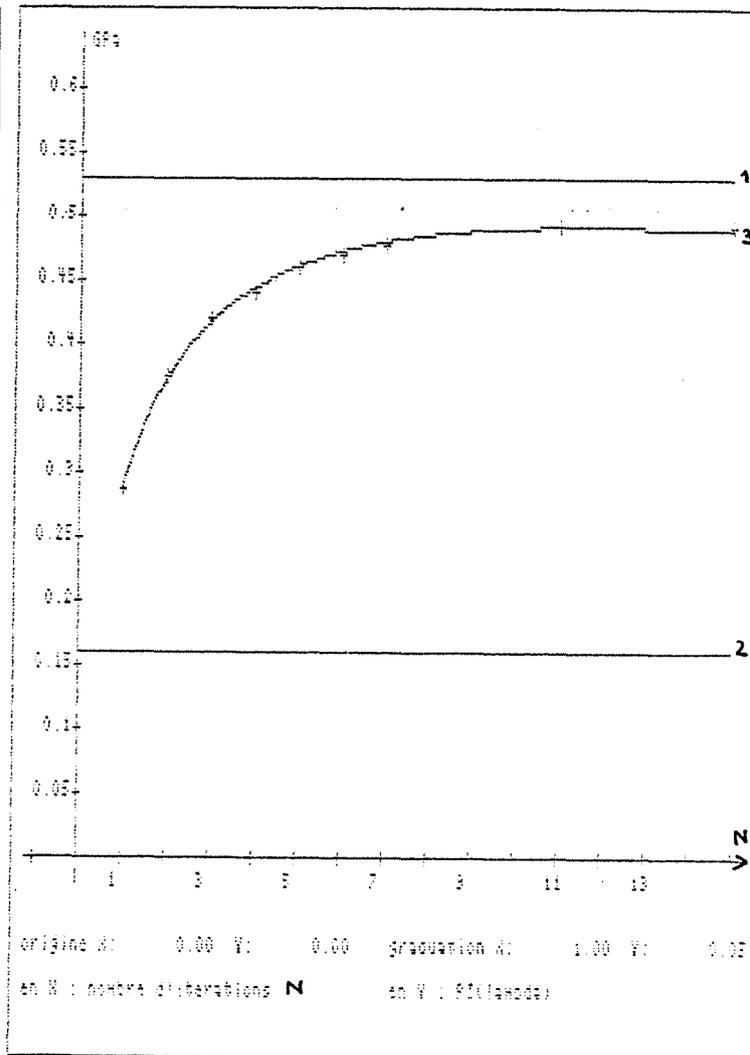


FIG I-6

- 1 : Modèle série
- 2 : Modèle parallèle
- 3 : Méthode autocohérente

Evolution des parties réelles et imaginaires de  $\mu$   
au cours des itérations

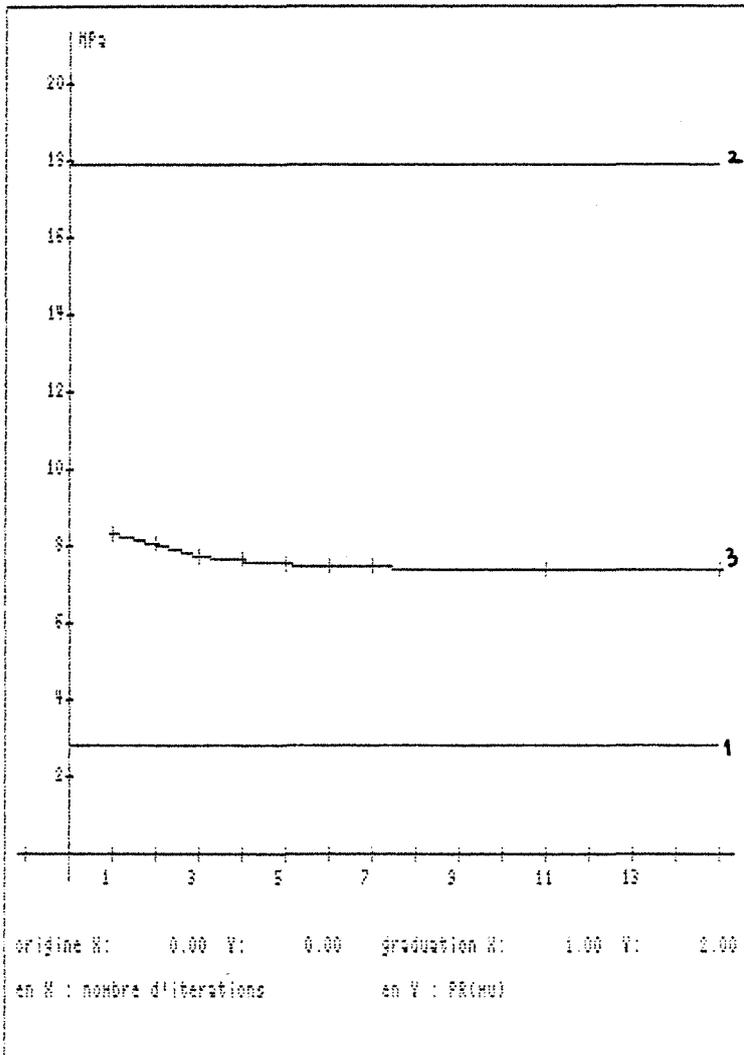


FIG I-7

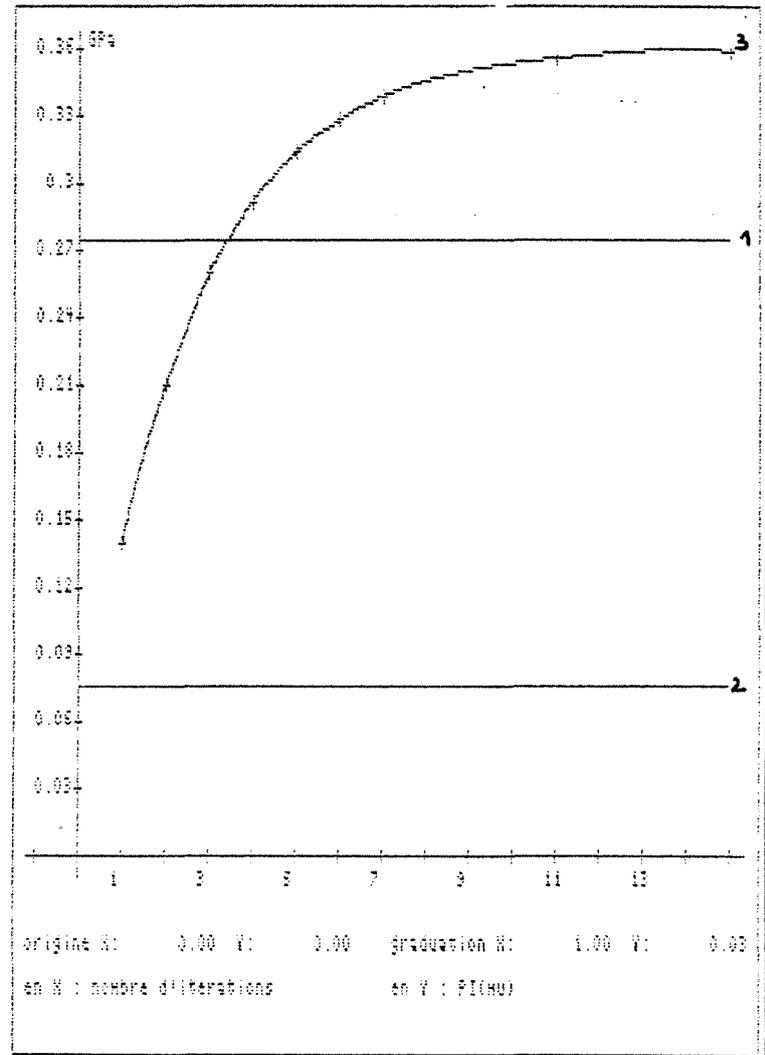


FIG I-8

- 1 : Modèle série
- 2 : Modèle parallèle
- 3 : Méthode autocohérente

EVOLUTION DES CRITERES  $\epsilon$  POUR DIFFERENTS PARAMETRES.

Les critères  $\epsilon$  : écarts relatifs entre la solution numérique et la solution analytique sont liés au critère d'arrêt du calcul itératif  $\epsilon_{it}$ . Pour un  $\epsilon_{it}$  donné il n'existe pas d'évolution des critères  $\epsilon_{1R}$   $\epsilon_{1I}$   $\epsilon_{2R}$   $\epsilon_{2I}$  en fonction du rapport  $\eta = PI(E^{*M}) / PR(E^{*M})$  caractérisant la viscosité de la matrice:

$\eta$	$\epsilon_{1R}$	$\epsilon_{1I}$	$\epsilon_{2R}$	$\epsilon_{2I}$
0,01	0,03%	0,6%	0,003%	0,3%
0,05	0,02%	0,7%	0,01%	0,26%
0,1	0,01%	0,4%	0,06%	0,2 %
0,2	0,005%	0,006%	0,1%	0,4 %
0,5	0,0001%	0,005%	0,08%	0,15%

tableau I-2

De même il n'existe pas de liaison entre ces critères et la fraction volumique d'inclusion (tableau I-3) ni avec le rapport des raideurs  $R = E^f / PR (E^{*M})$  (tableau I-4):

f	$\epsilon_{1R}$	$\epsilon_{1I}$	$\epsilon_{2R}$	$\epsilon_{2I}$	N
0,05	0,3%	0,3%	0,07%	0,09%	3
0,10	0,03%	0,2%	0,09%	0,06%	4
0,20	0,1%	0,05%	0,09%	0,09%	6
0,6	0,05%	0,1%	0,05%	0,02%	10
0,9	0,02%	0,5%	0,04%	0,3%	10

tableau I-3

R	$\epsilon_{1R}$	$\epsilon_{1I}$	$\epsilon_{2R}$	$\epsilon_{2I}$	N
100	0,05%	0,38%	0,04%	0,33%	26
50	0,03%	0,45%	0,08%	0,3%	18
20	0,05%	0,55%	0,10%	0,24%	10
10	0,07%	0,1%	0,07%	0,01%	8
4	0,1%	0,18%	0,03%	0,03%	6

tableau I-4

Le nombre d'itérations N requis pour un  $\epsilon_{it}$  donné est quant à lui lié à certains de ces paramètres , il augmente avec le rapport des raideurs entre phases (  $E^f / PR ( E^{*M})$ ), avec la fraction volumique d'inclusions élastiques f , il est par contre insensible à la viscosité de la matrice.

## II CONFRONTATION AVEC LES BORNES DE ROSCOE

### 1 INTRODUCTION

Nous venons de vérifier la validité du schéma numérique dans le cas de la viscoélasticité en le comparant à une solution analytique dans le cadre d'un schéma autocohérent. Il est intéressant à ce niveau de confronter ce modèle autocohérent à d'autres modèles et dans un premier temps de vérifier son comportement par rapport aux bornes disponibles dans le cas viscoélastique. Nous utiliserons les bornes de Roscoe évoquées précédemment en reprenant l'exemple numérique donné par l'auteur (Roscoe 1971 [4]).

### 2 EXEMPLE

Il s'agit du cas d'un composite viscoélastique biphasé incompressible isotrope de fraction volumique = 0,5. La première phase est un polymère de type amorphe de module de cisaillement  $\mu_1^* = \mu_1' + i\mu_1''$ , la deuxième phase est viscoélastique cristalline et son module est noté  $\mu_2^* = \mu_2' + i\mu_2''$ . Les évolutions des parties réelles et imaginaires en fonction de la pulsation sont données figure II-1. L'auteur utilise les bornes de Hashin-Shtrikman dans le cas de l'incompressibilité, il obtient un encadrement pour la partie réelle et la partie imaginaire du module de cisaillement du composite. La borne supérieure obtenue sur la partie imaginaire est améliorée dans le cas du composite biphasé (voir en annexe un exemple de calcul de ces valeurs). Les bornes de Roscoe ont été

aussi calculées dans le cas où la borne inférieure est donnée par une loi de mélange classique (Reuss).

Les évolutions des bornes en fonction de  $\log(\omega)$  sont représentées sur les figures II-2 et II-3. La figure II-2 présente les évolutions des bornes de Roscoe pour les parties réelles pour le cas du calcul à partir des bornes élémentaires (courbes repérées 1 et 6) et celui effectué à partir des bornes affinées (courbes 2 et 5).

Les courbes 3 et 4 représentent les évolutions du module de cisaillement obtenus par le schéma autocohérent. la courbe 3 correspond au cas de renforts sphériques alors que la courbe 4 correspond au cas d'un composite quasi-isotrope à renforts cylindriques. Ce dernier composite est obtenu à partir de neuf familles de renforts équi-répartis spatialement dans la matrice, l'anisotropie résiduelle est dans ce cas très inférieure au pourcent.

La figure II-3 présente les mêmes évolutions mais pour la partie imaginaire.

Ce type de composite à renforts également répartis dans l'espace a son module de cisaillement peu sensible au facteur d'allongement.

#### Conclusion:

Les évolutions des parties réelles et imaginaires du module de cisaillement effectif données par le modèle autocohérent sont parfaitement encadrées par les bornes affinées de Roscoe.

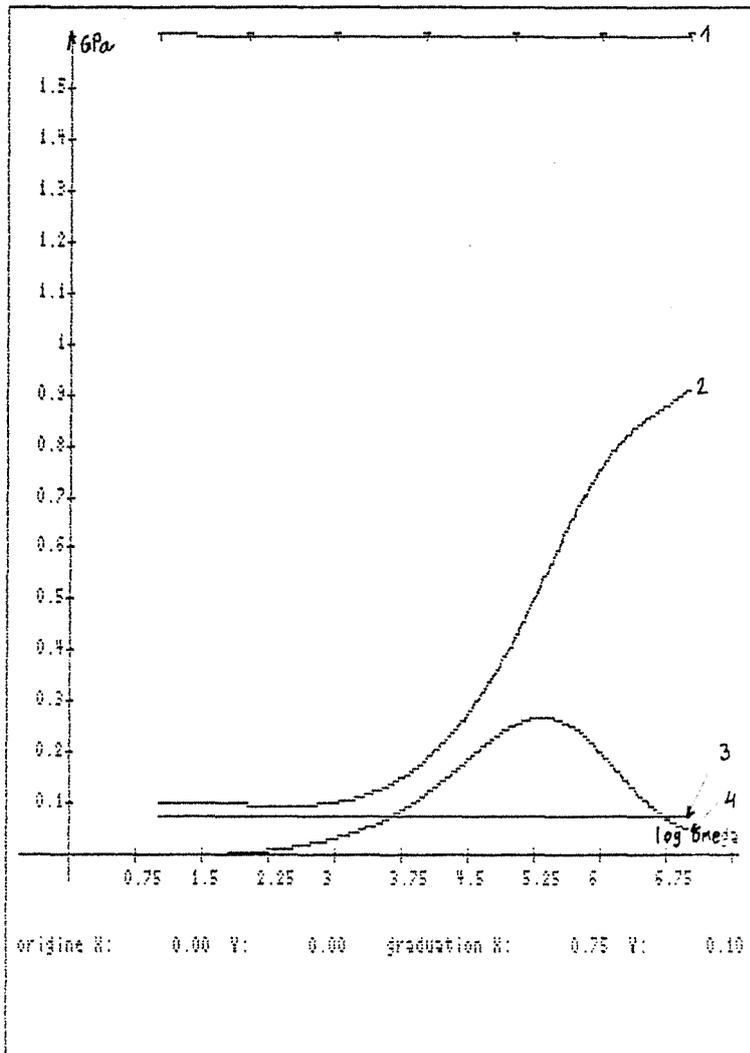
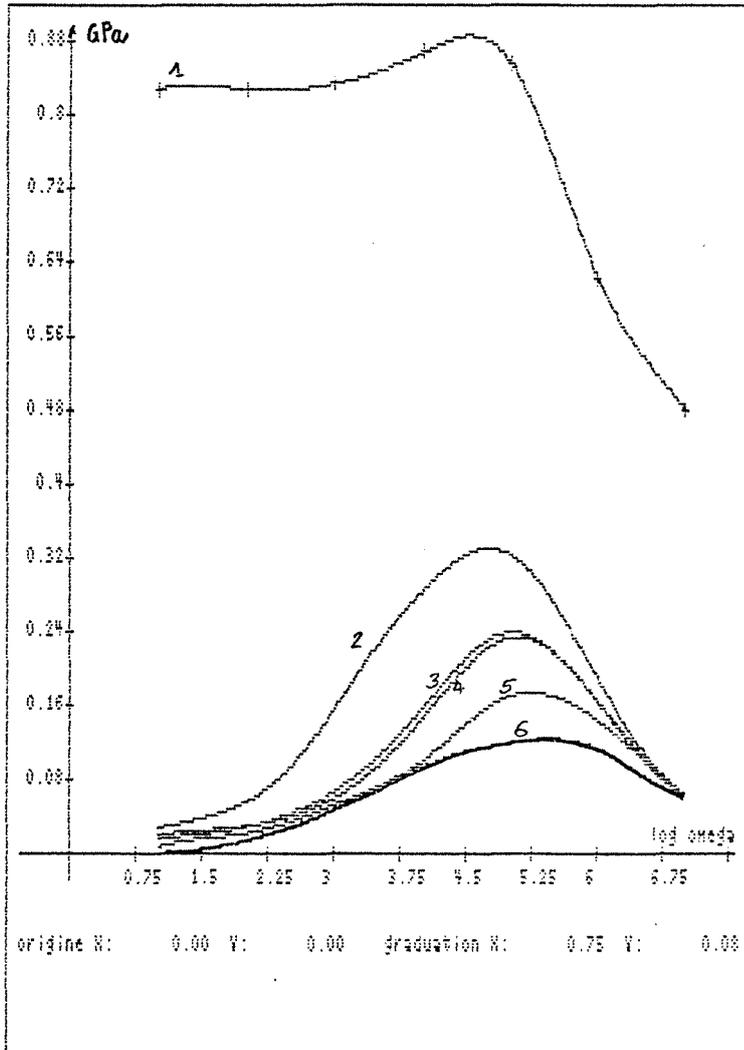


Fig II-1

Evolution des parties réelles et imaginaires en fonction de la pulsation pour les deux phases constitutives.

## BORNES DE ROSCOE CAS DES PARTIES IMAGINAIRES



1 : Borne supérieure de Roscoe calculée à partir de bornes élémentaires

2 : Borne supérieure de Roscoe calculée à partir de bornes affinées

3 : Calcul autocohérent cas du composite quasi-isotrope à renforts cylindrique

4 : Calcul autocohérent cas du composite à renforts sphériques

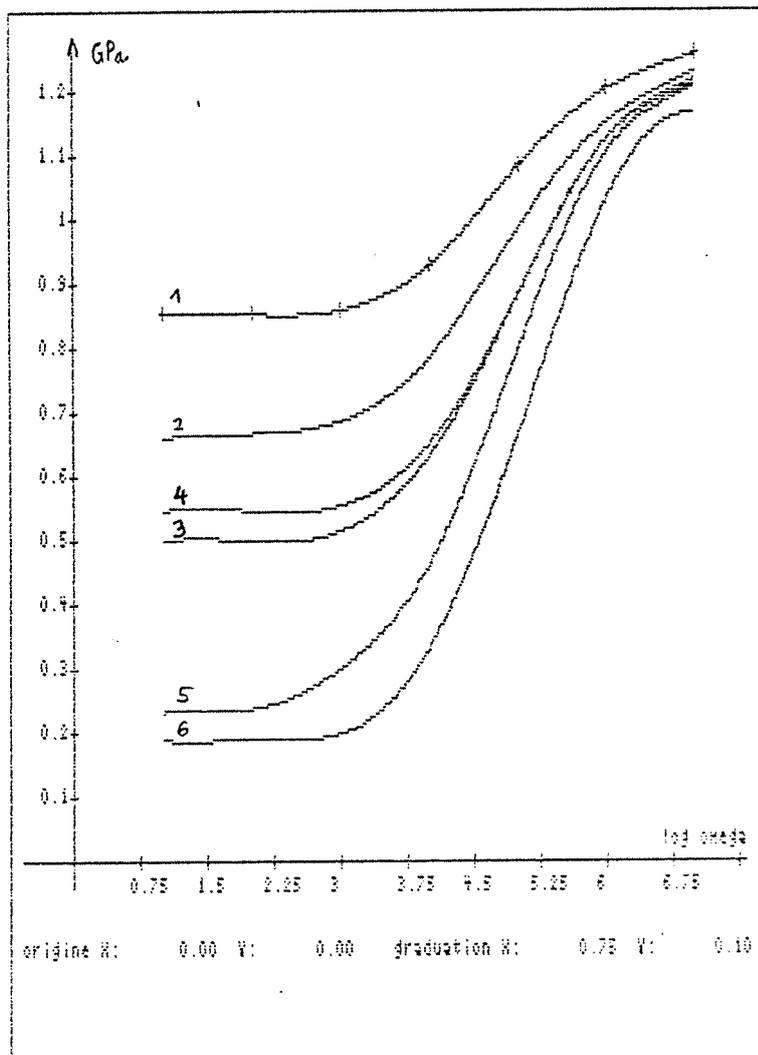
5 : Borne inférieure de Roscoe calculée à partir de bornes affinées

6 : Borne inférieure de Roscoe calculée à partir de bornes élémentaires

fig II-2

Evolution de la partie imaginaire du module de cisaillement en fonction de la pulsation. Comparaison du schéma autocohérent et des bornes de Roscoe.

BORNES DE ROSCOE CAS DES PARTIES REELLES



1 : Borne supérieure de Roscoe calculée à partir de bornes élémentaires

2 : Borne supérieure de Roscoe calculée à partir de bornes affinées

3 : Calcul autocohérent cas d'un composite à renforts sphériques

4 : Calcul autocohérent cas du composite quasi-isotrope à renforts cylindriques

5 : Borne inférieure de Roscoe calculée à partir de bornes affinées

6 : Borne inférieure de Roscoe calculée à partir de bornes élémentaires

fig II-3

Evolution de la partie réelle du module de cisaillement en fonction de la pulsation. Comparaison du schéma autocohérent et des bornes de Roscoe.

### III CONFRONTATION DE LA METHODE AUTO-COHERENTE AVEC DIFFERENTES SOLUTIONS ANALYTIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX DANS LE CAS VISCOELASTIQUE.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il existait dans la littérature un nombre restreint de solutions analytiques donnant les caractéristiques viscoélastiques de composites à agencements simples. Ces solutions viscoélastiques sont toutes dérivées de la solution élastique.

Nous utiliserons dans un premier temps le cas du composite à renforts filamenteux élastiques dont les caractéristiques sont données par les modèles de Whitney-Riley, Hashin-Rosen et Christensen-Lo.

#### 1 CAS DES RENFORTS CYLINDRIQUES A SECTION CIRCULAIRE.

L'élément répétitif est celui de la figure II-1 du chapitre précédent. Nous étudierons les évolutions des modules d'Young transversaux ( $E_2^* = E_3^*$ ), celles du module de cisaillement axial  $G_{12}^*$ , celles du module de compressibilité dans le plan  $K_{23}^*$ , ainsi que celles du module de cisaillement  $G_{23}^*$ . Le module d'Young longitudinal donné par le modèle de Hashin (formule F5) est dans ce cas très proche de celui donné par la loi de mélange du système parallèle et ne présente donc pas d'intérêt.

Les modèles analytiques sont celui de Whitney-Riley dans le cas de  $E_2^*$  (formule F9 du formulaire), celui de Hashin-Rosen (formule F4 du formulaire) pour le module  $G_{12}^*$ , celui de Christensen-Lo (formule F10 du formulaire) pour le module  $G_{23}^*$  (ce modèle utilise le schéma d'inclusion de Kerner : figure II-2 du chapitre précédent) et celui

de Hashin pour le module  $K_{23}^*$  (formule F1). Deux modèles autocohérents seront testés : le modèle à un site et le modèle à un site renforcé par étapes.

#### 1-1 Cas élastique

Le composite est un mélange biphase bore-epoxy pour lequel Sabodh [5] donne des résultats expérimentaux.

Le module d'Young des fibres est  $E^f = 414$  Gpa, le coefficient de Poisson  $\nu^f = 0,2$ . Le module de Young de la matrice est  $E^m = 4,14$  Gpa et son coefficient de Poisson  $\nu^m = 0,35$ .

#### Résultats

La figure III-1 donne les évolutions du module de Young transversal du composite en fonction de la fraction volumique de renforts. Les trois modèles donnent des résultats très proches jusqu'à 30% de renforts, au delà le modèle auto-cohérent classique s'éloigne considérablement des deux autres modèles : modèle analytique de Whitney-Riley et méthode auto-cohérente par étapes.

Les résultats donnés par les mesures sont en accord avec ces deux modèles. Pour les autres modules : figures III-2 à III-4 le même type de comportement est constaté pour chacune des deux approches autocohérentes vis à vis des résultats expérimentaux et analytiques, en remarquant en particulier l'adéquation entre le modèle autocohérent multi-étapes et le modèle de Christensen-Lo qui utilise une inclusion-matrice intermédiaire entre la fibre et le milieu homogène équivalent (modèle de Kerner).

Ces évolutions montrent la distorsion engendrée par le modèle autocohérent que nous avons évoqué dans le chapitre précédent. Dans le cas de ce composite où le rapport de raideur fibre-matrice est très grand des écarts importants existent sur certaines composantes

du tenseur de raideur dès que la fraction volumique de fibres dépasse les 40% . Une approche autocohérente effectuée sur un composite renforcé par étapes améliore très sensiblement le schéma autocohérent. Dans le cas de ce composite un calcul en vingt étapes donne une solution numérique très proche des solutions analytiques et des résultats expérimentaux.

#### 1-2 Test dans le cas viscoélastique.

La résine epoxy est maintenant considérée viscoélastique avec un module de Young complexe  $E^{*M} = E'^M + jE''^M$  tel que  $\eta = E''^M/E'^M = 0,02$  à 20°C (Théocaris [9]). Le renfort est considéré comme étant purement élastique. Les modèles de Whitney-Riley et de Hashin-Rosen sont reformulés dans le cas viscoélastique avec  $E'^M = 4,14$  Gpa et  $E''^M = 8,28 \cdot 10^7$  Pa . Le coefficient de Poisson est supposé réel :  $\nu^M = 0,35$  .

Pour les parties réelles des modules, les évolutions constatées sont du même type que celles du cas élastique. Pour les parties imaginaires, le modèle autocohérent par étapes et le modèle de Whitney-Riley ont des évolutions semblables, par contre, le calcul autocohérent en une seule étape conduit, pour les deux modules testés, à des évolutions très différentes. (fig III-5 à III-8)

#### Conclusion:

Pour des composites dont la fraction volumique de renfort dépasse 40% et de rapport  $E^f/E'^M$  important il est nécessaire d'utiliser un schéma autocohérent qui renforce le composite par étapes successives car le modèle classique n'est plus adapté pour le calcul de certaines composantes de raideur. Dans le cas viscoélastique le calcul autocohérent en une seule étape présente une évolution aberrante des parties imaginaires.

COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES. CAS ELASTIQUE

COMPARAISON DES DIFFERENTS MODELES AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

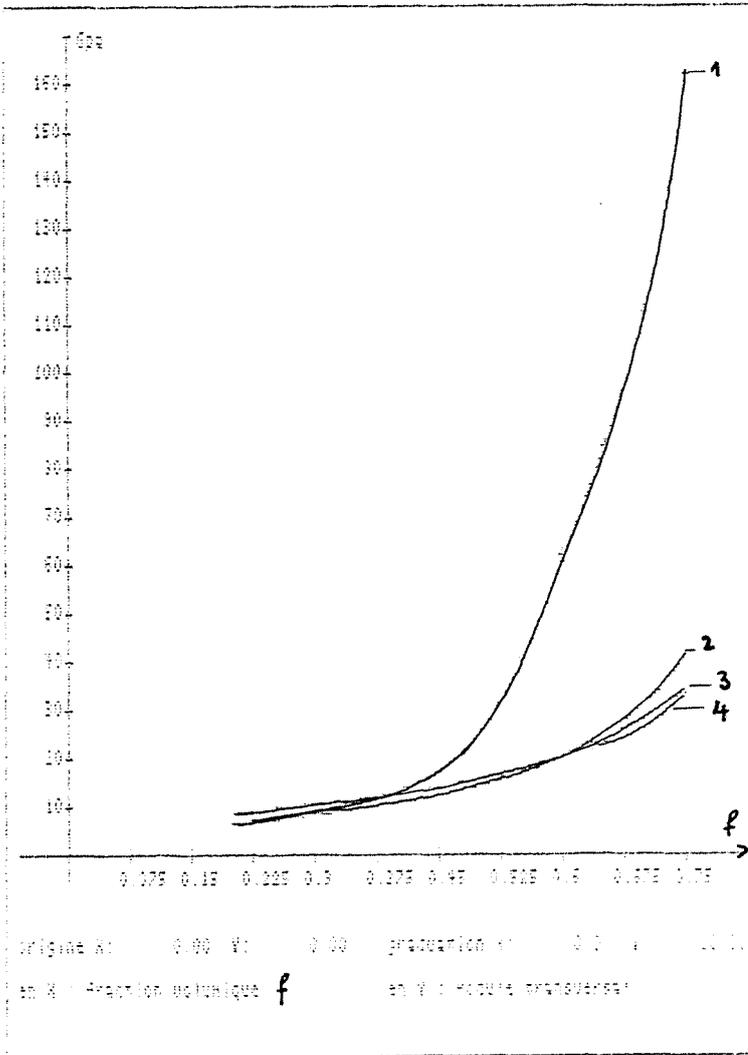


FIG III-1

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL

- 1 : Méthode autocoherente
- 2 : Méthode autocoherente par étapes
- 3 : Modèle de Whitney-Riley
- 4 : Expérience

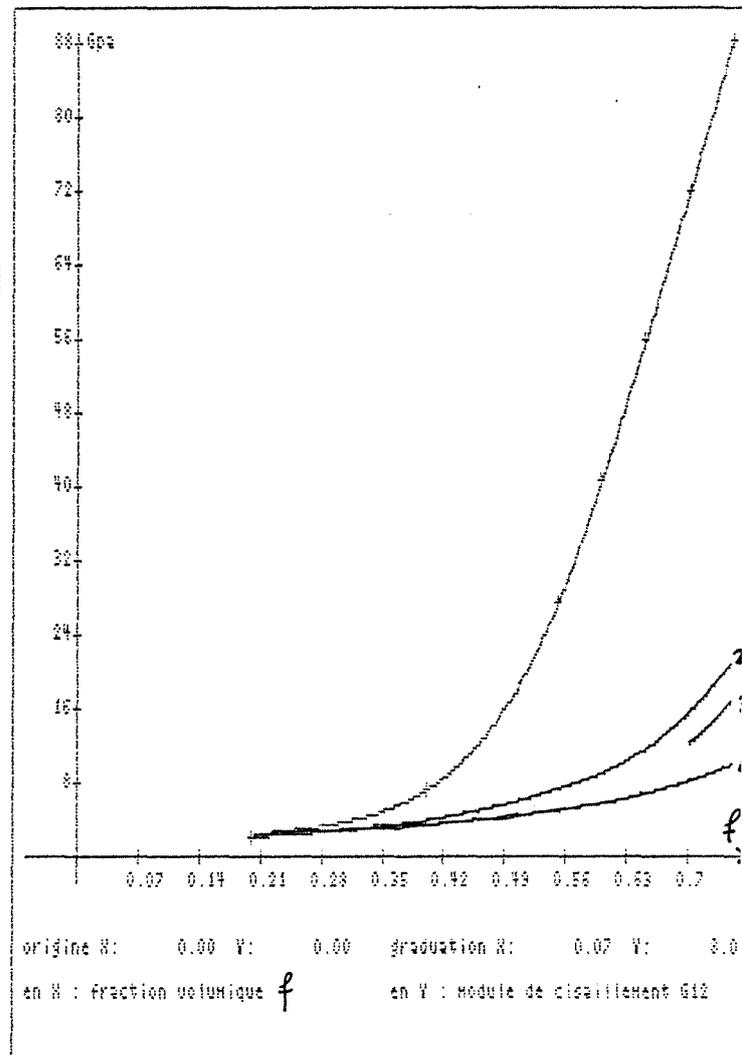


FIG III-2

MODULE DE CISAILLEMENT AXIAL

- 1 : Méthode autocoherente
- 2 : Méthode autocoherente par étapes
- 3 : Expérience
- 4 : Modèle de Hashin-Rosen

COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES. CAS ELASTIQUE  
COMPARAISON DES DIFFERENTS MODELES

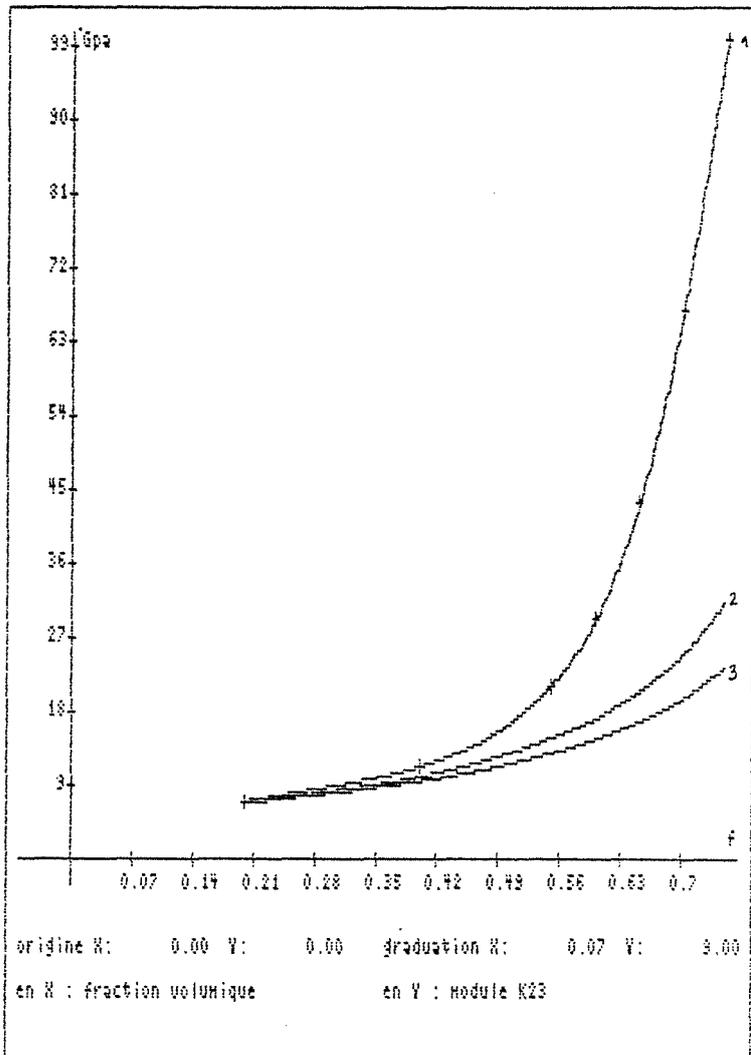


FIG III-3

MODULE DE COMPRESSIBILITE  
DANS LE PLAN

- 1 : Méthode autocoherente
- 2 : Méthode autocoherente par étapes
- 3 : Modèle de Hashin

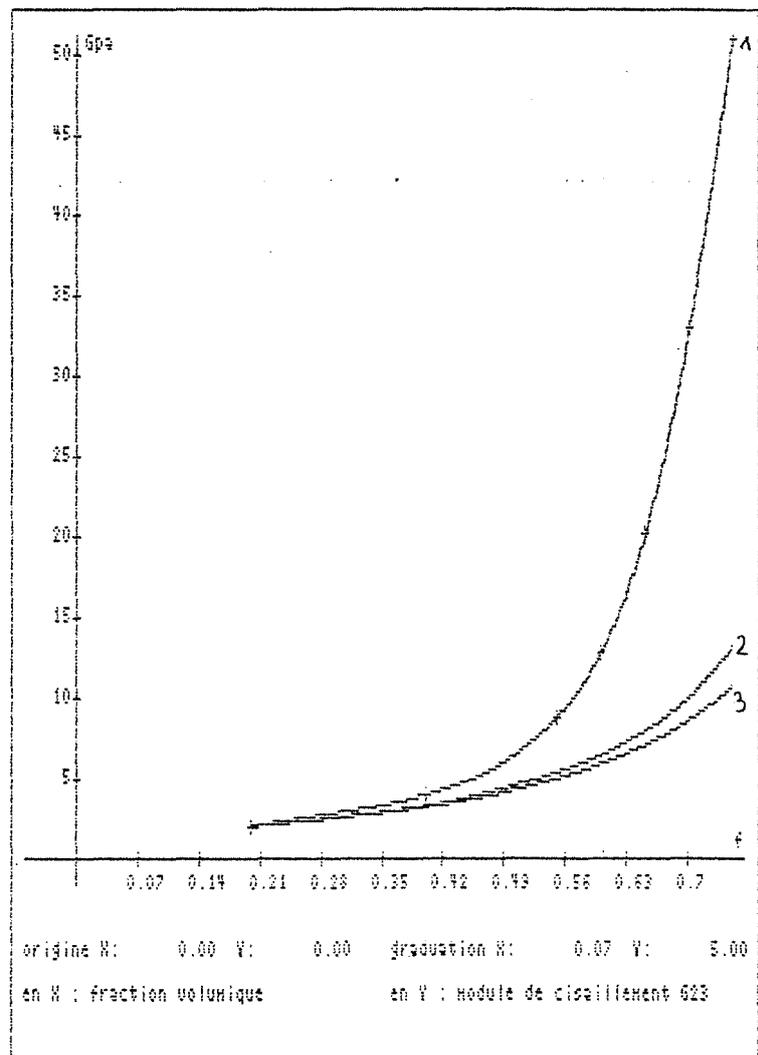


FIG III-4

MODULE DE CISAILLEMENT  
TRANSVERSAL

- 1 : Méthode autocoherente
- 2 : Méthode autocoherente par étapes
- 3 : Modèle de Christensen-Lo

COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES. CAS VISCOELASTIQUE  
COMPARAISON DES DIFFERENTS MODELES

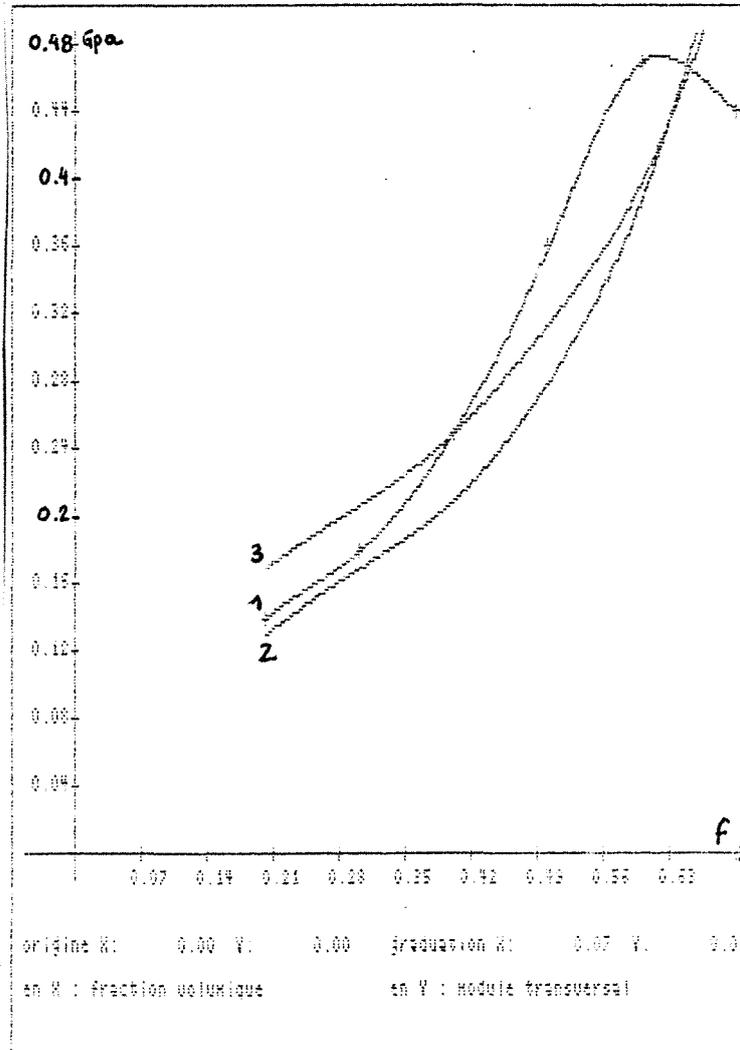
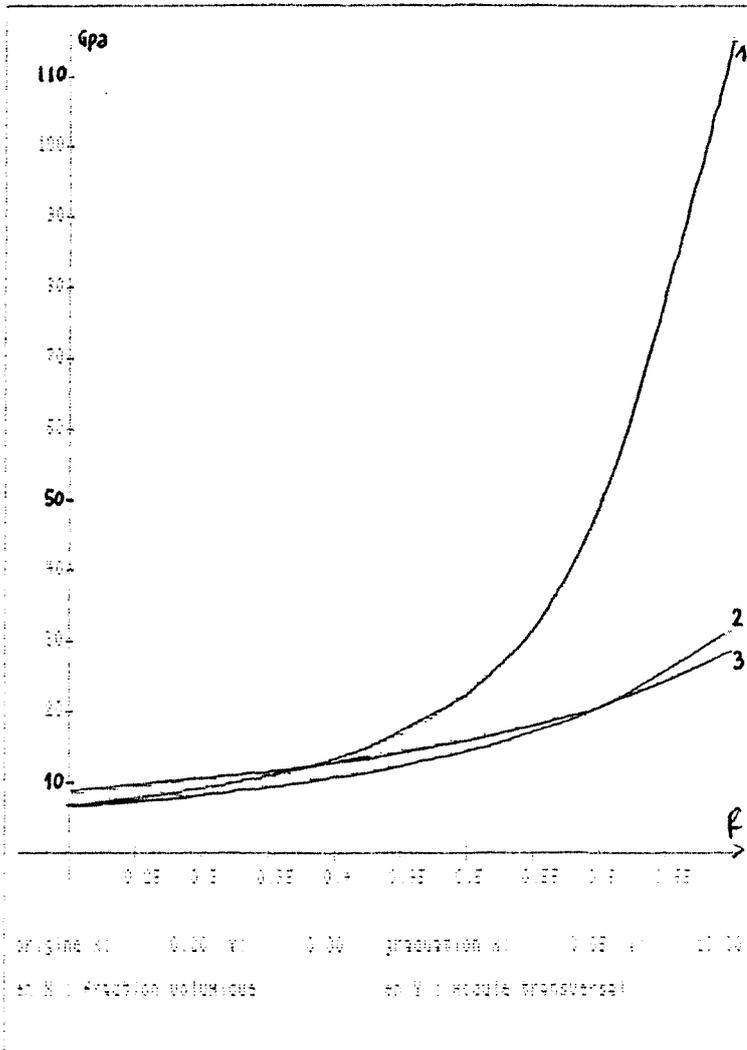


FIG III-5

FIG III-6

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
PARTIE REELLE

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
PARTIE IMAGINAIRE

- 1 : Méthode autocohérente
- 2 : Méthode autocohérente  
par étapes
- 3 : Modèle de Whitney-Riley

COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES. CAS VISCOELASTIQUE  
COMPARAISON DES DIFFERENTS MODELES

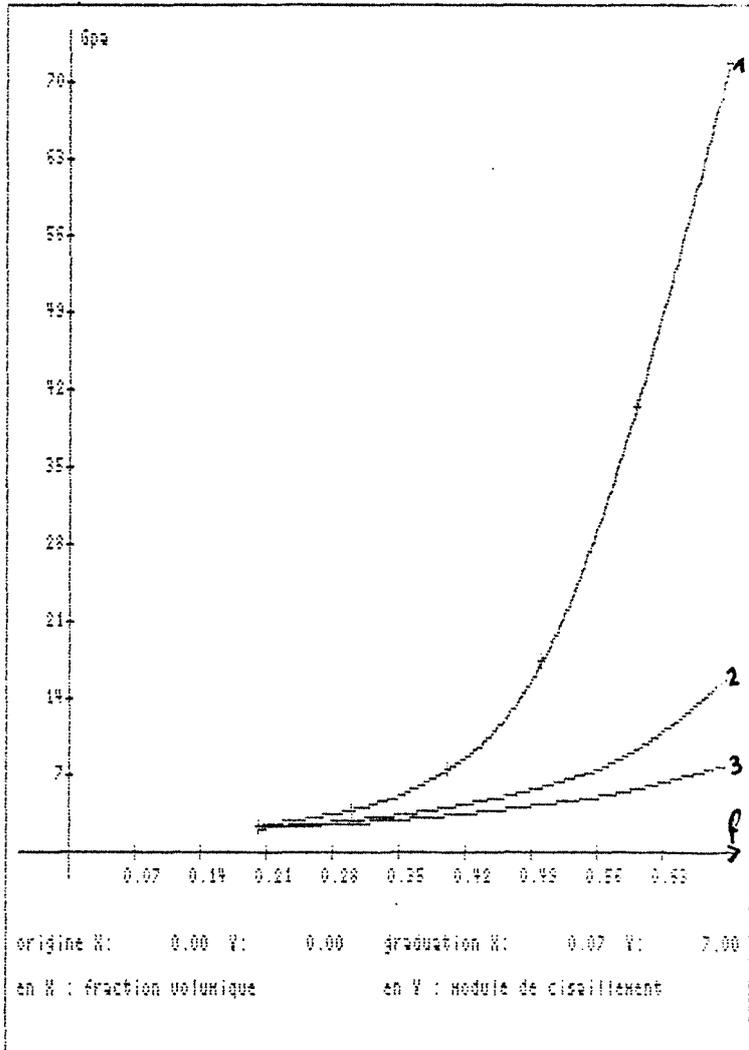


FIG III-7

MODULE DE CISAILLEMENT AXIAL  
PARTIE REELLE

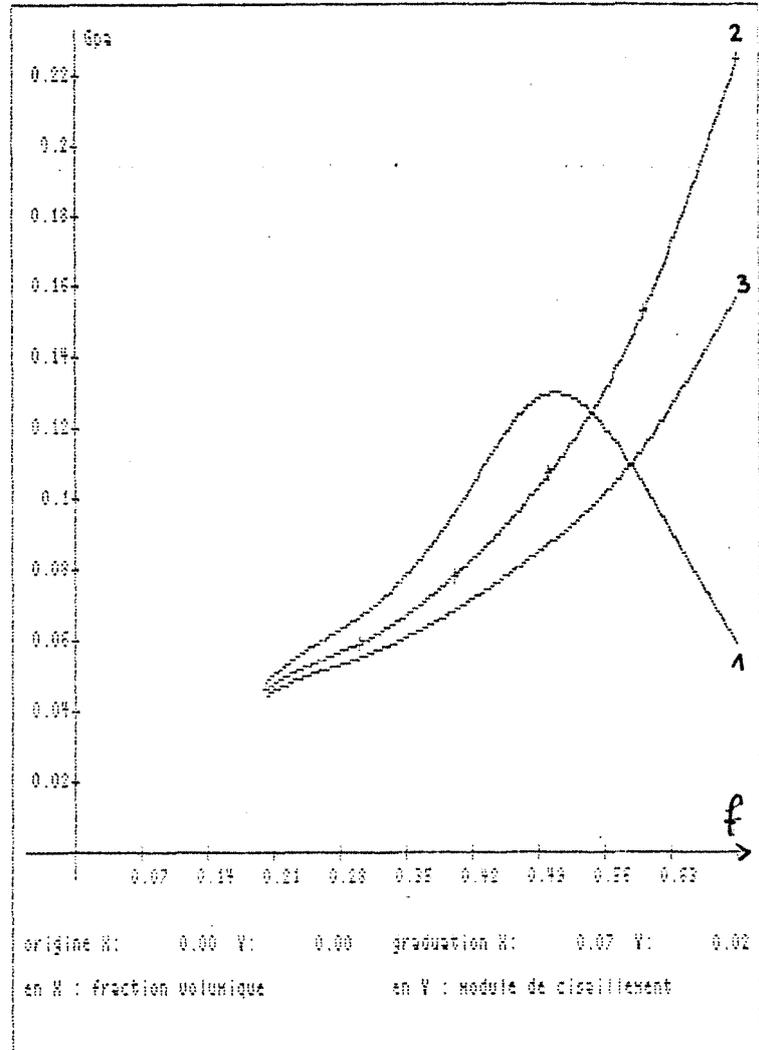


FIG III-8

MODULE DE CISAILLEMENT AXIAL  
PARTIE IMAGINAIRE

- 1 : Méthode autocohérente
- 2 : Méthode autocohérente par étapes
- 3 : Modèle de Hashin-Rosen

### 1-3 Influence de la raideur

Les différents schémas montrent que l'écart entre les solutions autocohérentes et les solutions analytiques augmentent avec la fraction volumique de renforts. Il est par ailleurs intéressant d'étudier l'évolution de cet écart avec le rapport de raideur des fibres sur celle de la matrice.

1-3-1. A titre d'illustration étudions l'évolution du critère :  
(module autocohérent - module analytique)/(module analytique)  
en prenant comme module analytique le module d'Young transversal de Whitney-Riley. Les autres modules analytiques conduisant à des écarts du même ordre de grandeur. Soit :

$\epsilon_{1R}$  le critère dans le cas de la partie réelle du module de Young transversal pour la méthode autocohérente calculée en dix étapes.

$\epsilon_{1I}$  celui pour la partie imaginaire dans les mêmes conditions pour le schéma autocohérent (calcul en 10 étapes)

$\epsilon_{2R}$  celui correspondant au cas de la partie réelle du module de Young transversal pour un calcul autocohérent effectué en une seule étape

$\epsilon_{2I}$  dans le cas de la partie imaginaire pour le module de cisaillement (calcul autocohérent en une étape)

Résultats

fig III-8 et fig III-9

Ces figures présentent l'évolution des quatre critères en fonction du rapport  $R = E^f / PR (E^{*M})$  dans le cas des deux schémas autocohérents (une étape et dix étapes) pour un composite à concentration de fibres égale à 60%. Les différents écarts relatifs pour les deux grandeurs techniques étudiées sont très sensibles au rapport de raideur fibre sur matrice dans le cas d'un calcul

autocoherent effectué en une seule étape . Ils atteignent des valeurs de l'ordre de 150% pour les parties réelles des différents modules et de l'ordre de 50% pour les parties imaginaires dans le cas d'un rapport de raideur inclusion-matrice d'environ 130 ce qui correspond au cas d'un composite bore-epoxy. Dans le cas du matériau bois, au niveau du tissu élémentaire où le rapport de raideur est l'ordre de 100 les écarts relatifs s'établissent autour de 120% pour les parties réelles et de 30% pour les parties imaginaires. L'emploi d'une approche autocohérente par étapes s'avère très intéressante si le souci est d'obtenir des grandeurs techniques transversales précises.

1-3-2 Etude des évolutions des écarts relatifs entre la solution autocohérente en une étape et la solution autocohérente multi-étapes

Les figures III-10 et III-11 présentent les évolutions des écarts relatifs entre la solution autocohérente en une étape et la solution autocohérente réalisée en 25 étapes. Le module testé est pour ces deux figures le module d'Young transversal. Le même type d'évolution est constaté pour le module de glissement axial et le module de glissement transversal avec des écarts du même ordre pour le module axial et légèrement plus grands pour le module transversal.

INFLUENCE DE LA RAIDEUR SUR L'ECART RELATIF ENTRE LA SOLUTION  
 AUTO-COHERENTE ET LA SOLUTION ANALYTIQUE. CAS DU MODULE D'YOUNG  
 TRANSVERSAL POUR LE COMPOSITE CONTENANT 60% DE RENFORTS CYLINDRIQUES  
 A. SECTIONS CIRCULAIRES.

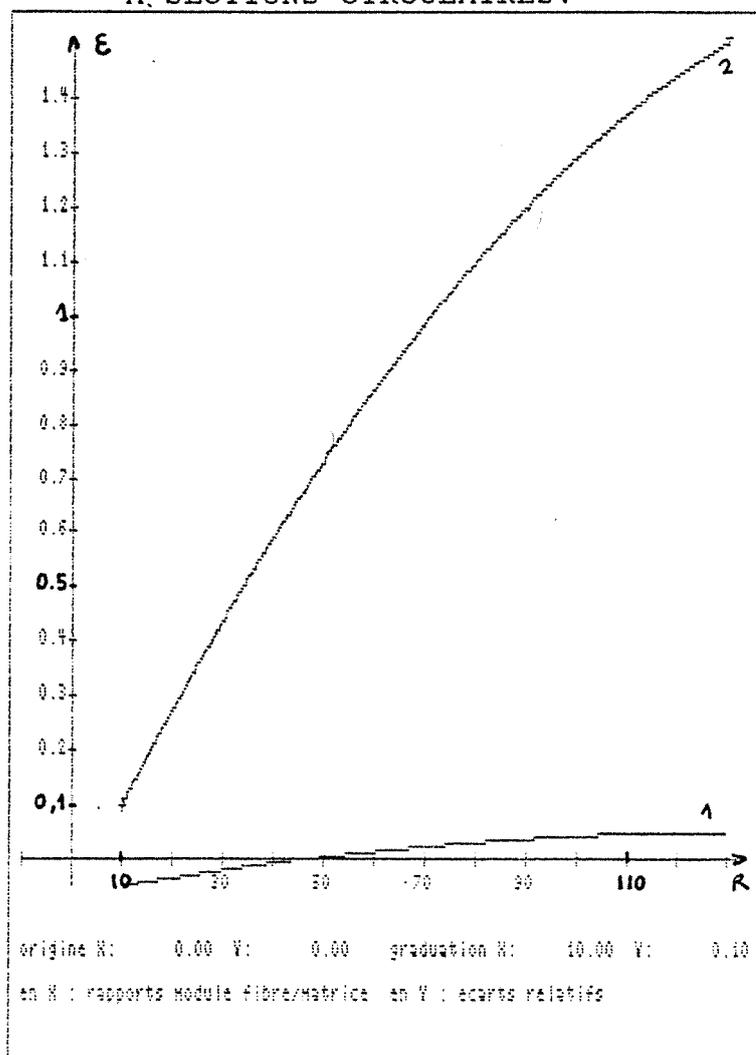


FIG III-8

PARTIE REELLE

- 1 :  $\epsilon_{1R}$  Ecart relatif M.A.C.  
10 étapes - Modèle de Whitney
- 2 :  $\epsilon_{2R}$  Ecart relatif M.A.C.  
1 étape - Modèle de Whitney

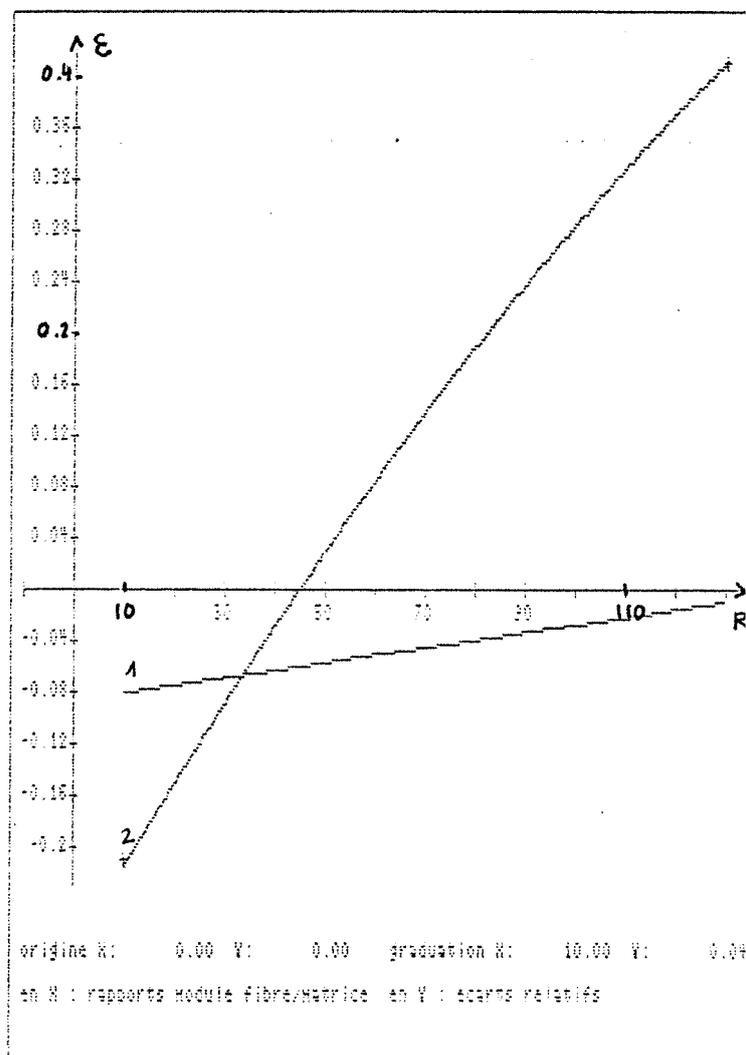


FIG III-9

PARTIE IMAGINAIRE

- 1 :  $\epsilon_{1I}$  Ecart relatif M.A.C.  
10 étapes - Modèle de Whitney
- 2 :  $\epsilon_{2I}$  Ecart relatif M.A.C.  
1 étape - Modèle de Whitney

EVOLUTION DE DES ECARTS RELATIFS ENTRE LA SOLUTION AUTO-COHERENTE  
 UNE ETAPE ET LA SOLUTION AUTO-COHERENTE EN 25 ETAPES EN FONCTION DE  
 LA FRACTION VOLUMIQUE DE RENFORTS CYLINDRIQUES POUR DIFFERENTS  
 RAPPORTS DE RAIDEURS  $R=E^f/E^M$

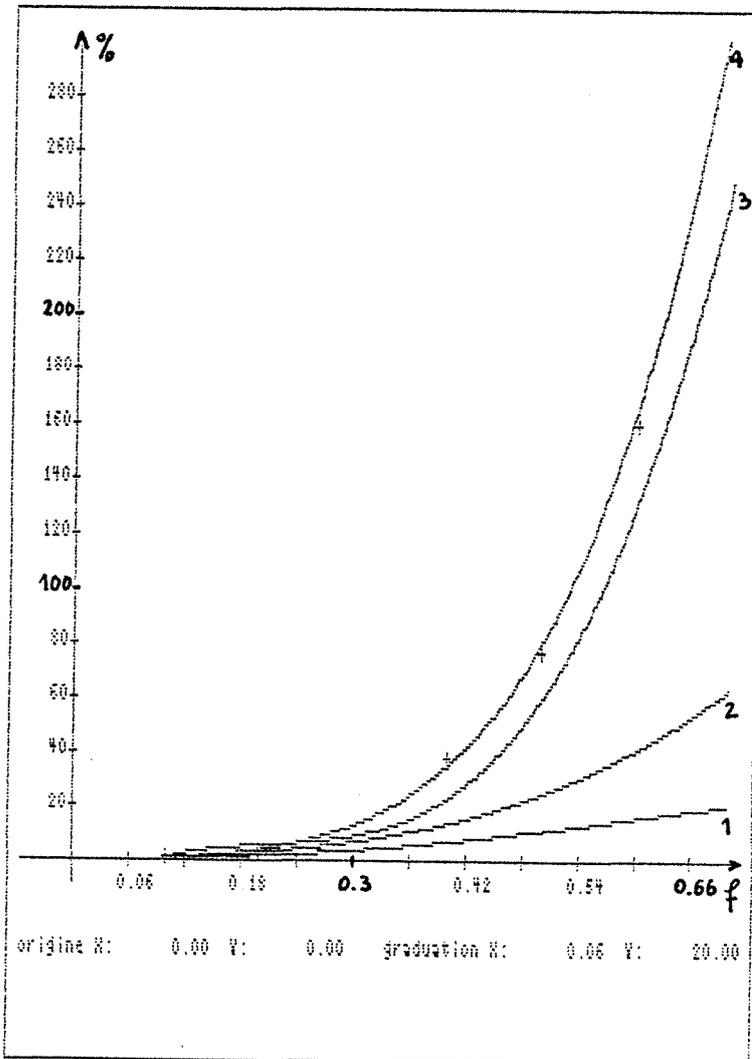


FIG III-10

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
 PARTIE REELLE

- 1 : R = 10
- 2 : R = 25
- 3 : R = 100
- 4 : R = 200

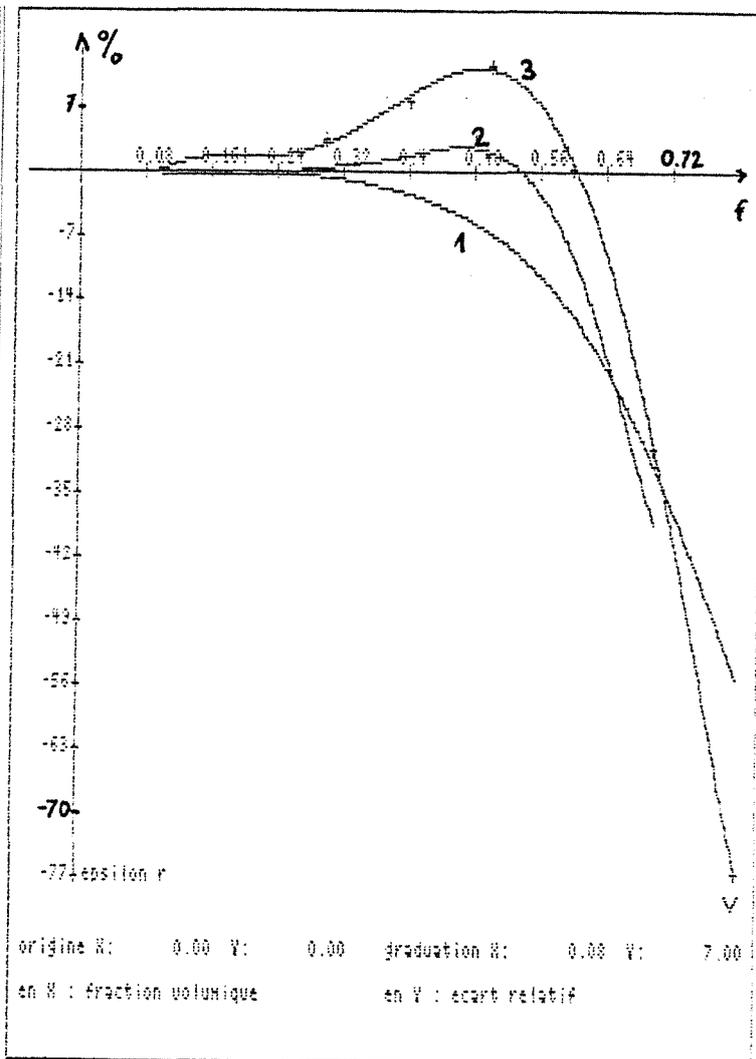


FIG III-11

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
 PARTIE IMAGINAIRE

- 1 : R = 10
- 2 : R = 25
- 3 : R = 100

1-4 Influence du nombre d'étapes sur la valeur de différentes grandeurs techniques calculées par la méthode autocohérente multi-site

#### 1-4-1 Cas élastique

Le matériau est le composite bore-epoxy utilisé en III-1-1 avec une fraction volumique de fibres de 70% . La grandeur de référence est l'expérience pour les grandeurs techniques pour lesquelles des données expérimentales sont disponibles. Les autres références sont obtenues à partir des modèles analytiques.

Les figures III-12 à III-16 montrent que pour ce composite qui correspond à un cas où le calcul autocohérent en une seule étape est mal adapté (70% de renforts ,  $R=100$ ), les grandeurs techniques convergent rapidement vers leur valeur limite : 10 étapes donnent une valeur satisfaisante pour les 5 grandeurs testées.

#### 1-4-2 Cas viscoélastique.(figures III-17 III-18)

La matrice epoxy viscoélastique est la même que celle du II-1-2. Seules, les évolutions du module transversal sont représentées : les autres modules présentant le même comportement.

La partie réelle converge rapidement de la même façon que pour le module dans le cas élastique (figure III-17). Dans le cas d'un composite comportant au moins 70% de renforts, la partie imaginaire présente une zone d'évolution oscillatoire de faible amplitude dans le cas de calculs effectués de 1 à une trentaine d'étapes, au delà de ces trente étapes, il existe peu d'évolution sur les différentes parties imaginaires des grandeurs techniques effectives (figure III-18). Pour des fractions volumiques de fibre inférieures à 70% les évolutions des différentes parties imaginaires sont monotones à l'image de celles constatées pour les parties réelles.

EVOLUTION DE DIFFERENTES GRANDEURS TECHNIQUES EN FONCTION DU  
 NOMBRE D'ETAPES UTILISE AU COURS DE CALCULS AUTOCHERENTS.  
 COMPOSITE BORE-EPOXY A 70% DE RENFORTS CYLINDRIQUES.CAS ELASTIQUE

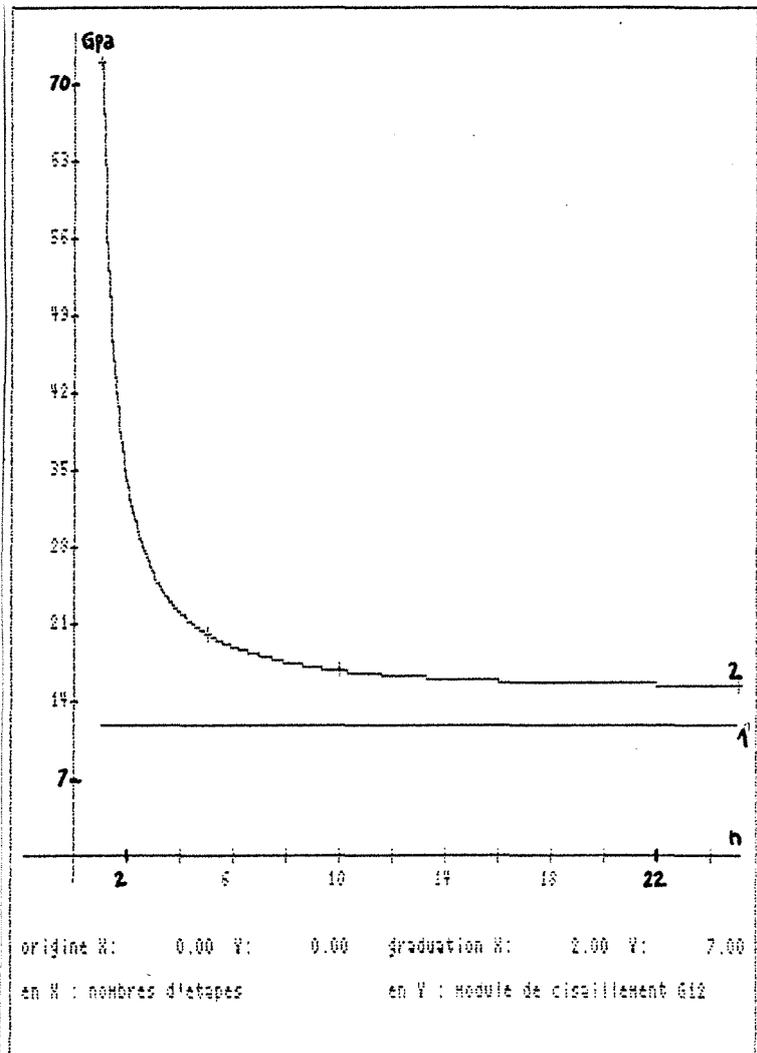
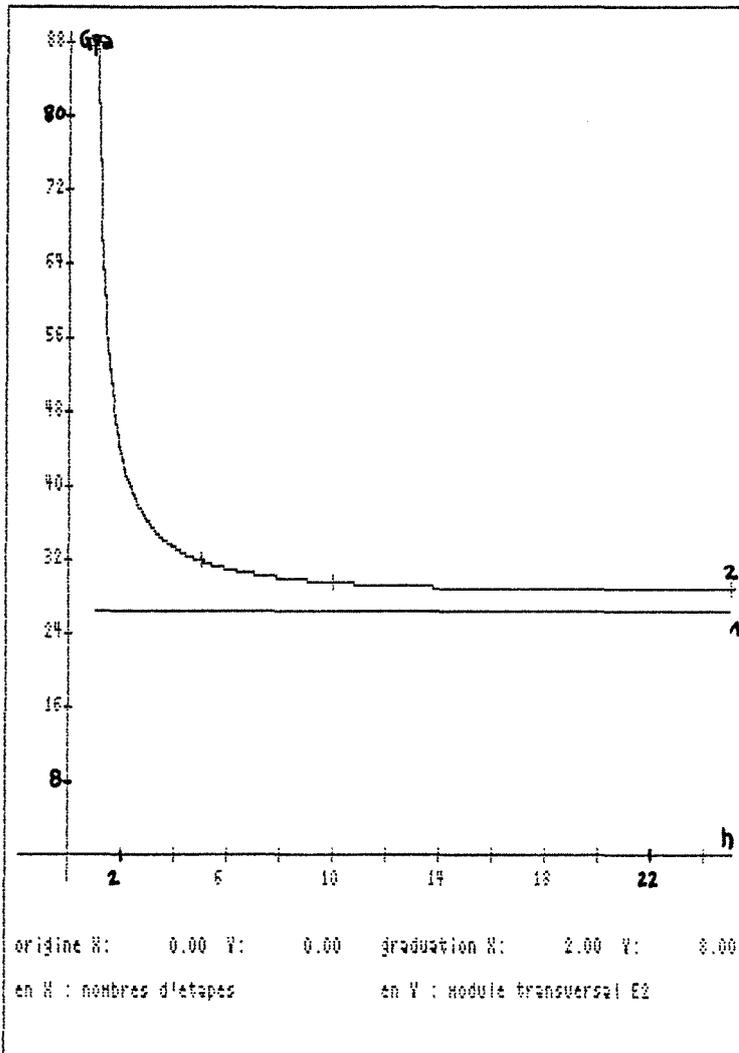


FIG III-12

FIG III-13

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  $E_2$

MODULE DE CISAILLEMENT AXIAL  $G_{12}$

1 : RESULTATS EXPERIMENTAUX

2 : CALCULS AUTOCHERENTS MULTI-ETAPES

EVOLUTION DE DIFFERENTES GRANDEURS TECHNIQUES EN FONCTION DU  
 NOMBRE D'ETAPES UTILISE AU COURS DE CALCULS AUTO-COHERENTS.  
 COMPOSITE BORE-EPOXY A 70% DE RENFORTS CYLINDRIQUES.CAS ELASTIQUE

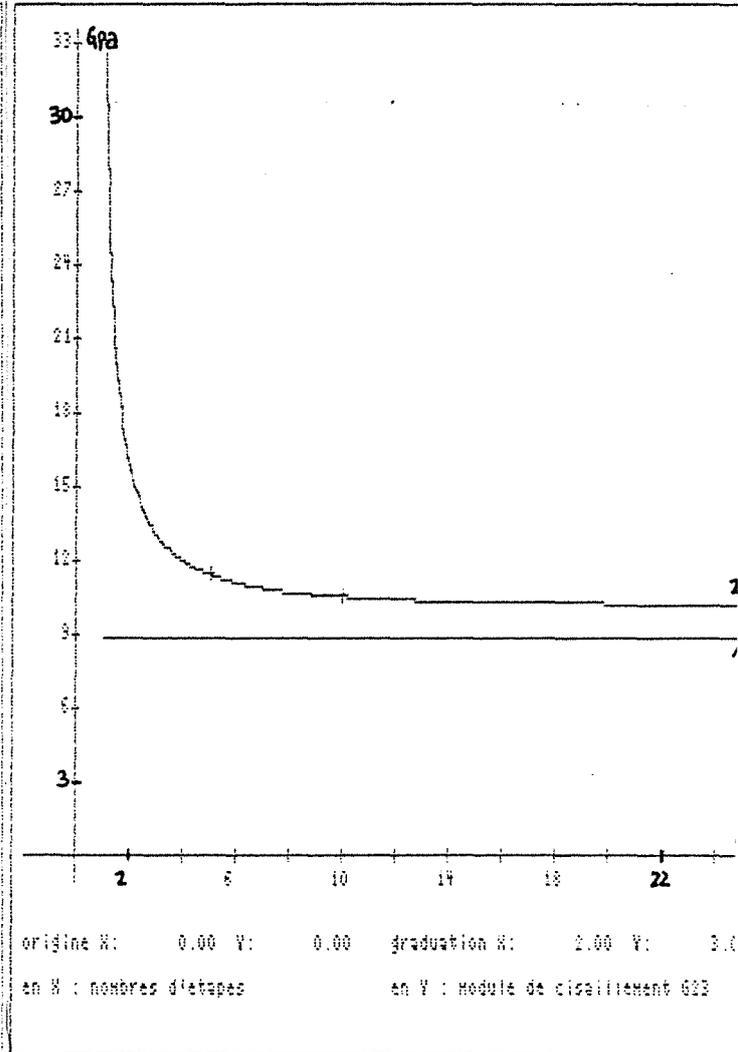
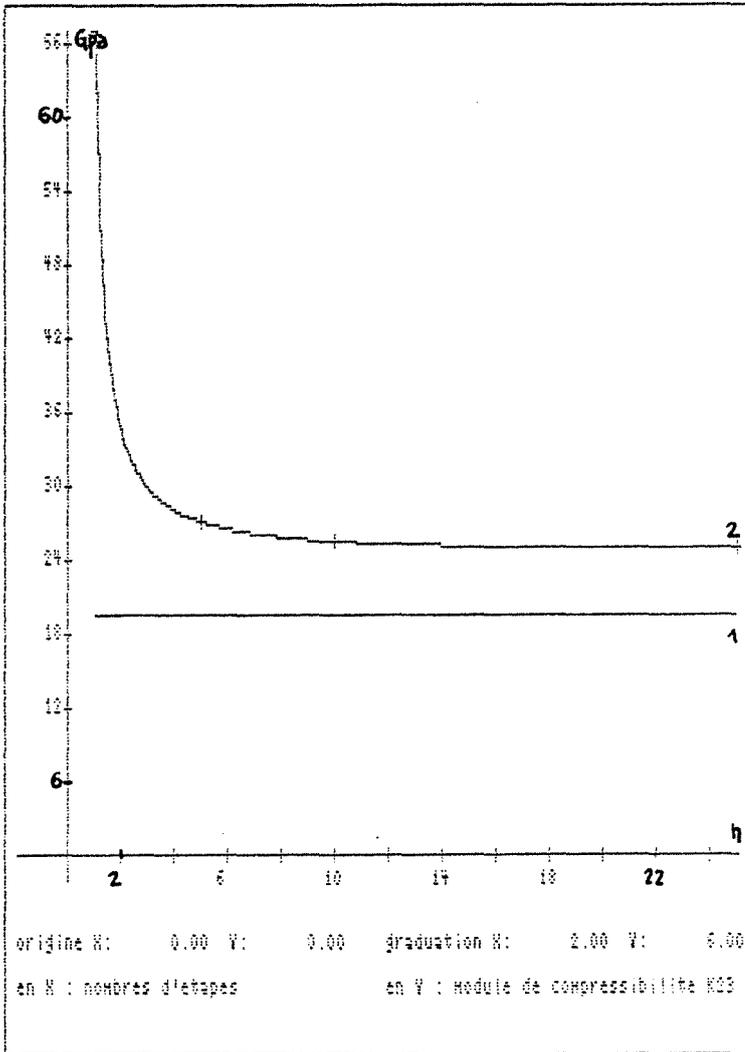


FIG III-14

MODULE DE COMPRESSIBILITE  
 $K_{23}$

- 1 : MODELE DE HASHIN
- 2 : CALCULS AUTO-COHERENTS  
 MULTI-ETAPES

FIG III-15

MODULE DE CISAILLEMENT  
 TRANSVERSAL  $G_{23}$

- 1 : MODELE DE CHRISTENSEN-LO
- 2 : CALCULS AUTO-COHERENTS  
 MULTI-ETAPES

EVOLUTION DE DIFFERENTES GRANDEURS TECHNIQUES EN FONCTION DU  
 NOMBRE D'ETAPES UTILISE AU COURS DE CALCULS AUTO-COHERENTS.  
 COMPOSITE BORE-EPOXY A 70% DE RENFORTS CYLINDRIQUES.CAS ELASTIQUE

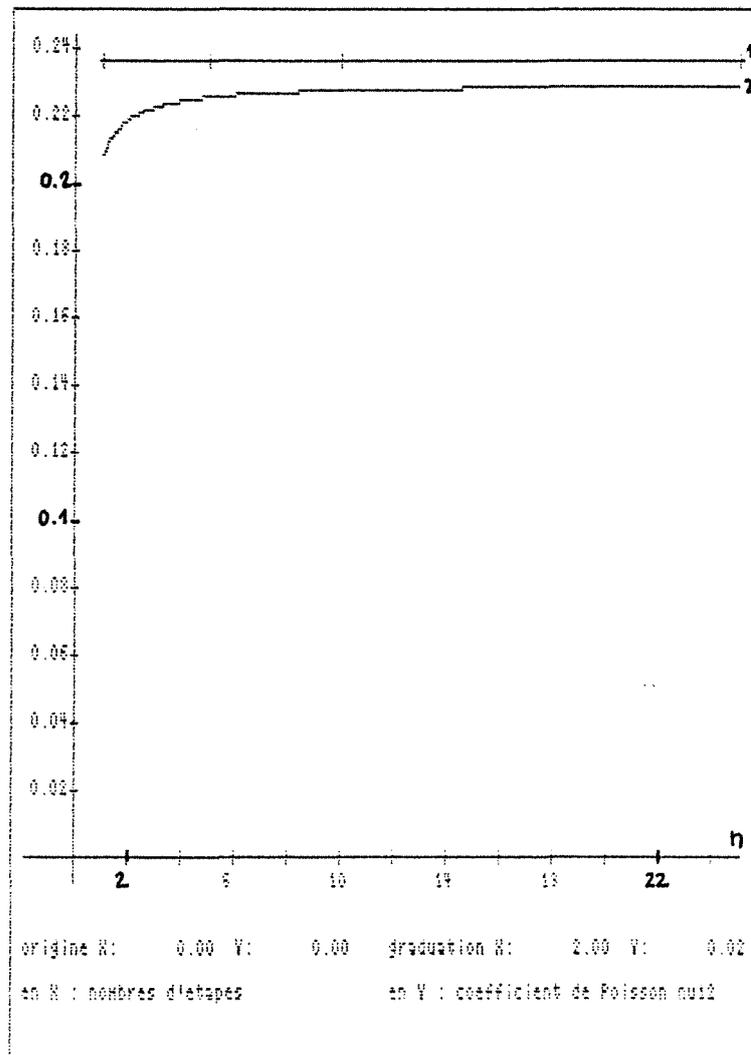


FIG III-16  
 COEFFICIENT DE POISSON  $\nu_{12}$

- 1 : MODELE DE HASHIN
- 2 : CALCULS AUTO-COHERENTS  
 MULTI-ETAPES

CAS VISCOELASTIQUE. EVOLUTION DES PARTIES REELLES ET IMAGINAIRES DES  
 MODULES D'YOUNG TRANSVERSAUX EN FONCTION DU NOMBRE D'ETAPES.  
 CAS DU COMPOSITE A 70% DE RENFORTS CYLINDRIQUES

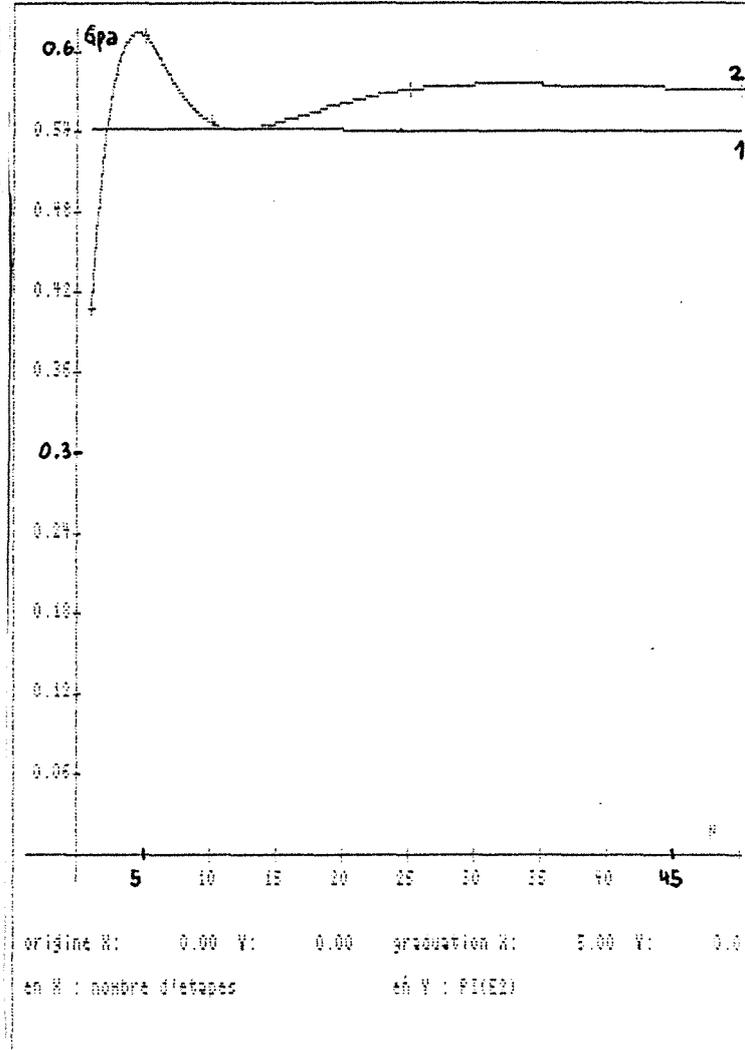
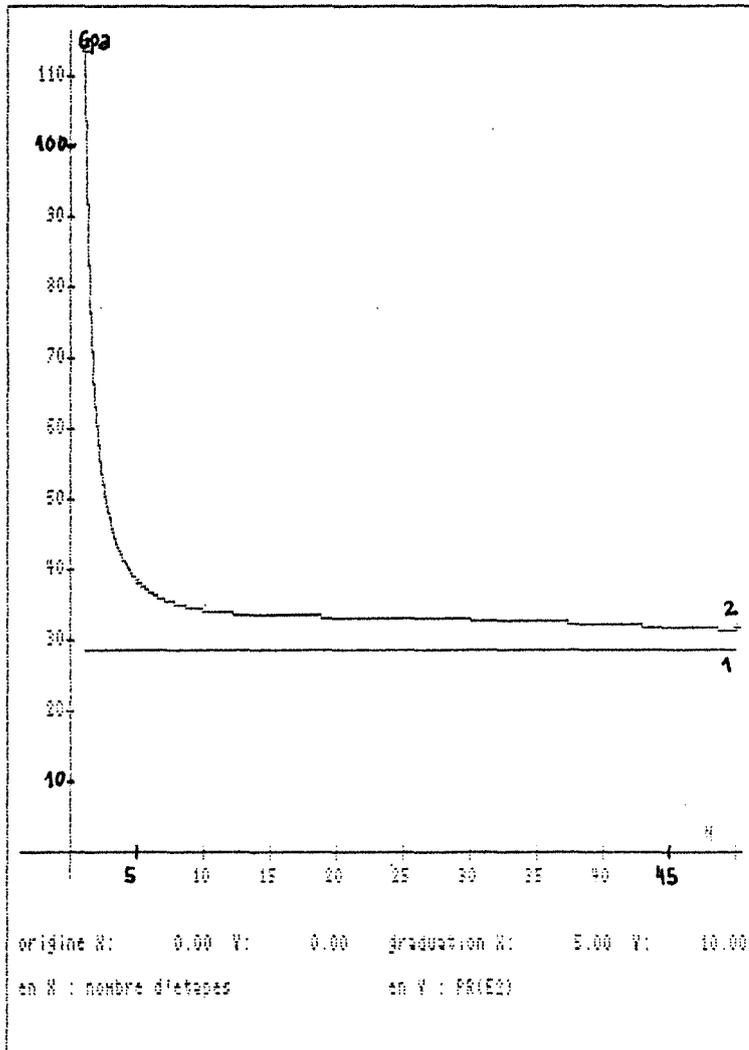


FIG III-17

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
 PARTIE REELLE

FIG III-18

MODULE D'YOUNG TRANSVERSAL  
 PARTIE IMAGINAIRE

1 : MODELE DE WHITNEY-RILEY

2 : METHODE AUTOCHERENTE MULTI-ETAPES

## 2 CAS DES RENFORTS SPHERIQUES DANS UNE MATRICE VISCO-ELASTIQUE

### 2-1 MODELES ANALYTIQUES DE REFERENCE

Le module de compressibilité analytique est celui de Hashin utilisé aussi par Christensen dans le cas viscoélastique il donne la valeur exacte du module  $K^*$  du composite constitué de sphères isotropes dans un milieu viscoélastique isotrope (formule F12 du formulaire).

Le module de cisaillement est modélisé par le modèle approché proposé par Christensen (formule F15 du formulaire).

### 2-1 COMPARAISON DE LA SOLUTION AUTO-COHERENTE MULTI-ETAPE A LA SOLUTION EXACTE INTEGREE NUMERIQUEMENT

Le résultat de la méthode auto-cohérente par étapes étant lié au nombre d'étapes, il est intéressant de confronter les résultats de ce modèle à un modèle obtenu à partir d'intégrations numériques des solutions analytiques existant pour les faibles concentrations (formules F12 pour  $K^*$  et F13 pour  $G^*$ ). Ces solutions numériques (courbes repérées 3 dans les figures III-19 à III-22) constituent dans ce cas une limite de la solution auto-cohérente par étapes quand on fait croître le nombre d'étapes et permet donc de tester, dans ce cas d'agencement géométrique particulier, le schéma auto-cohérent par étapes.

RESULTATS (figures III-19 , III-20, III-21, III-22 )

Les résultats sont très semblables pour les deux modules de ce composite (bore-epoxy). L'intérêt du schéma auto-cohérent à renforcement par étapes est encore confirmé, le schéma classique devenant inadéquat au delà d'une certaine fraction volumique de renforts ( 40% ) pour les parties réelles et inutilisable pour les parties imaginaires . Le modèle obtenu par intégrations numériques des solutions de  $K^*$  et  $G^*$  à faibles concentrations

valide le programme de la solution numérique de la méthode autocohérente à renforcement par étapes .

Des résultats semblables sont obtenus lors de la comparaison des solutions autocohérentes avec celles données par le modèle proposé par Christensen et Lo ( (1979) [10]) appliqués aux même type de composite mais avec le modèle d'inclusion de Kerner.

#### Remarque

Sur le plan des temps de calcul le schéma autocohérent par étapes n'est guère plus lourd que le schéma classique, en effet dans le cas où le calcul par étapes s'impose, la méthode classique a en général une convergence assez lente liée à la forte concentration en renforts et au grand rapport des raideur R. Le fait de procéder par étapes joue sur l'équilibre de ces deux facteurs : pour les premières étapes la fraction volumique est faible pour un rapport de raideur R grand et pour les dernières étapes c'est le rapport R qui diminue pour de plus grandes fractions volumiques de fibres.

Par exemple pour un critère d'arrêt d'itérations  $\epsilon_{it} = 0,001$  dans le cas du composite bore-epoxy en inclusions sphériques 25 itérations sont nécessaires pour une fraction volumique de fibre de 0,45 il faut 35 itérations dans le cas d'un calcul en 10 étapes (3 à 4 itérations par étapes ) pour le même critère  $\epsilon_{it}$ . 2 à 3 itérations par étapes suffisent dans le cas d'un calcul en 20 étapes.



EVOLUTION DU MODULE DE COMPRESSIBILITE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE RENFORTS SPHERIQUES . CAS VISCOELASTIQUE

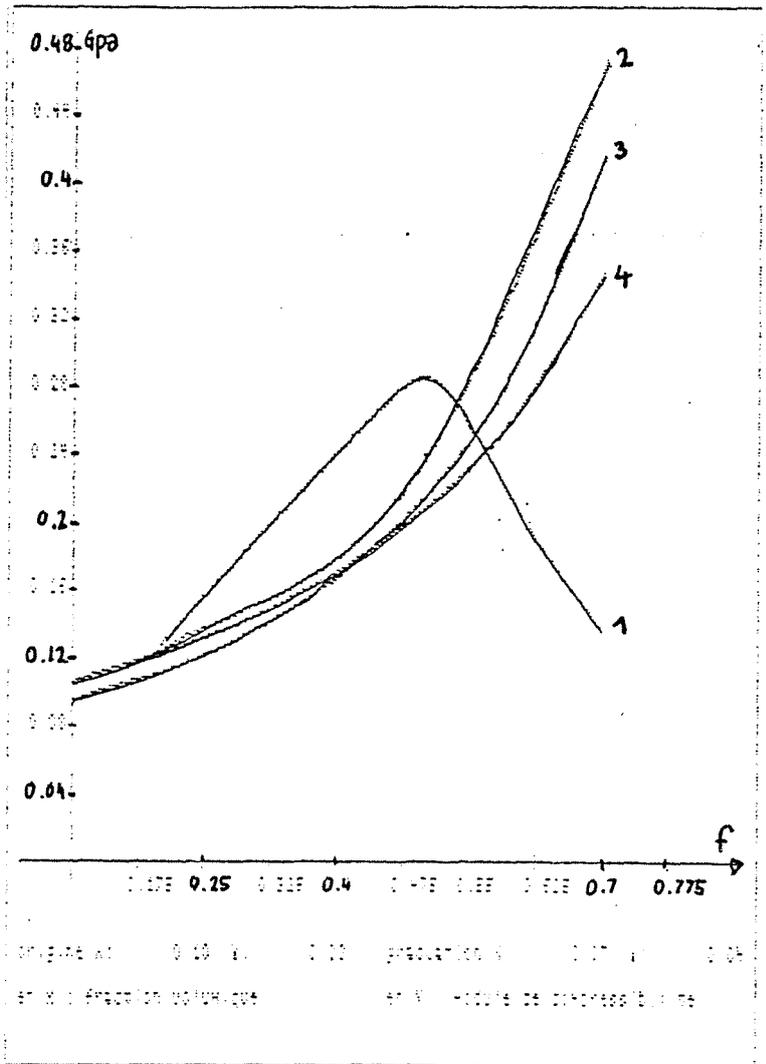
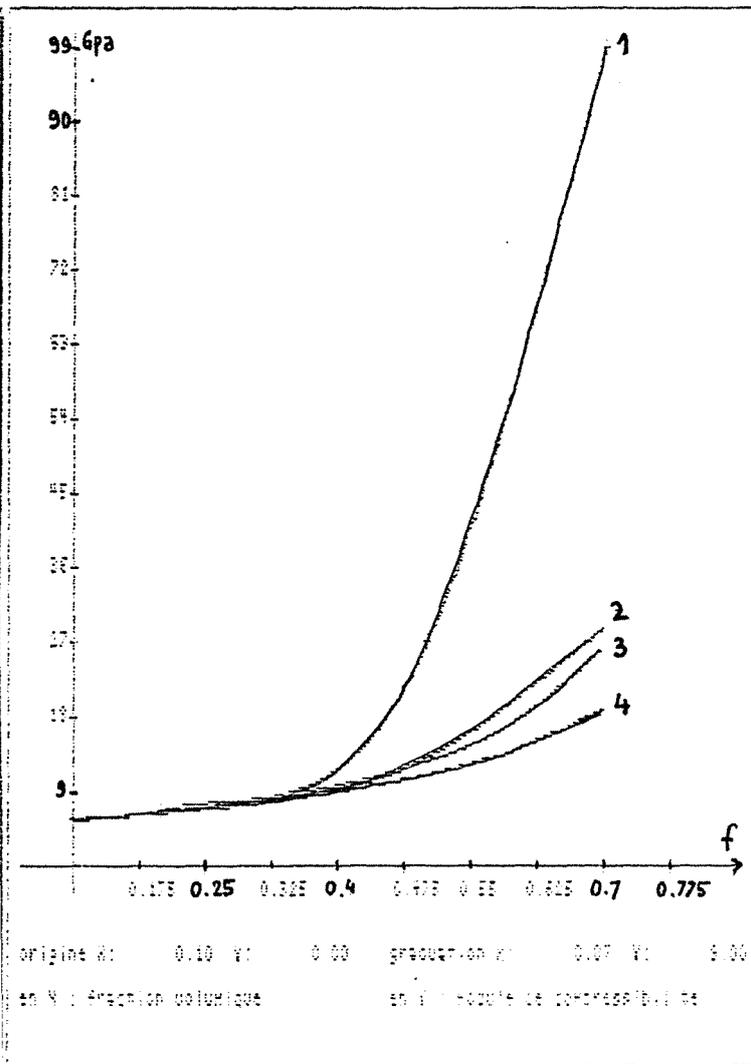


FIG III-19

MODULE DE COMPRESSIBILITE  
PARTIE REELLE

FIG III-20

MODULE DE COMPRESSIBILITE  
PARTIE IMAGINAIRE

- 1 Méthode autocohérente
- 2 Méthode autocohérente par étapes
- 3 Intégration de la solution à faible concentration
- 4 Modèle de Hashin

EVOLUTION DU MODULE DE CISAILLEMENT EN FONCTION DE LA FRACTION  
VOLUMIQUE DE RENFORTS SPHERIQUES CAS VISCOELASTIQUE

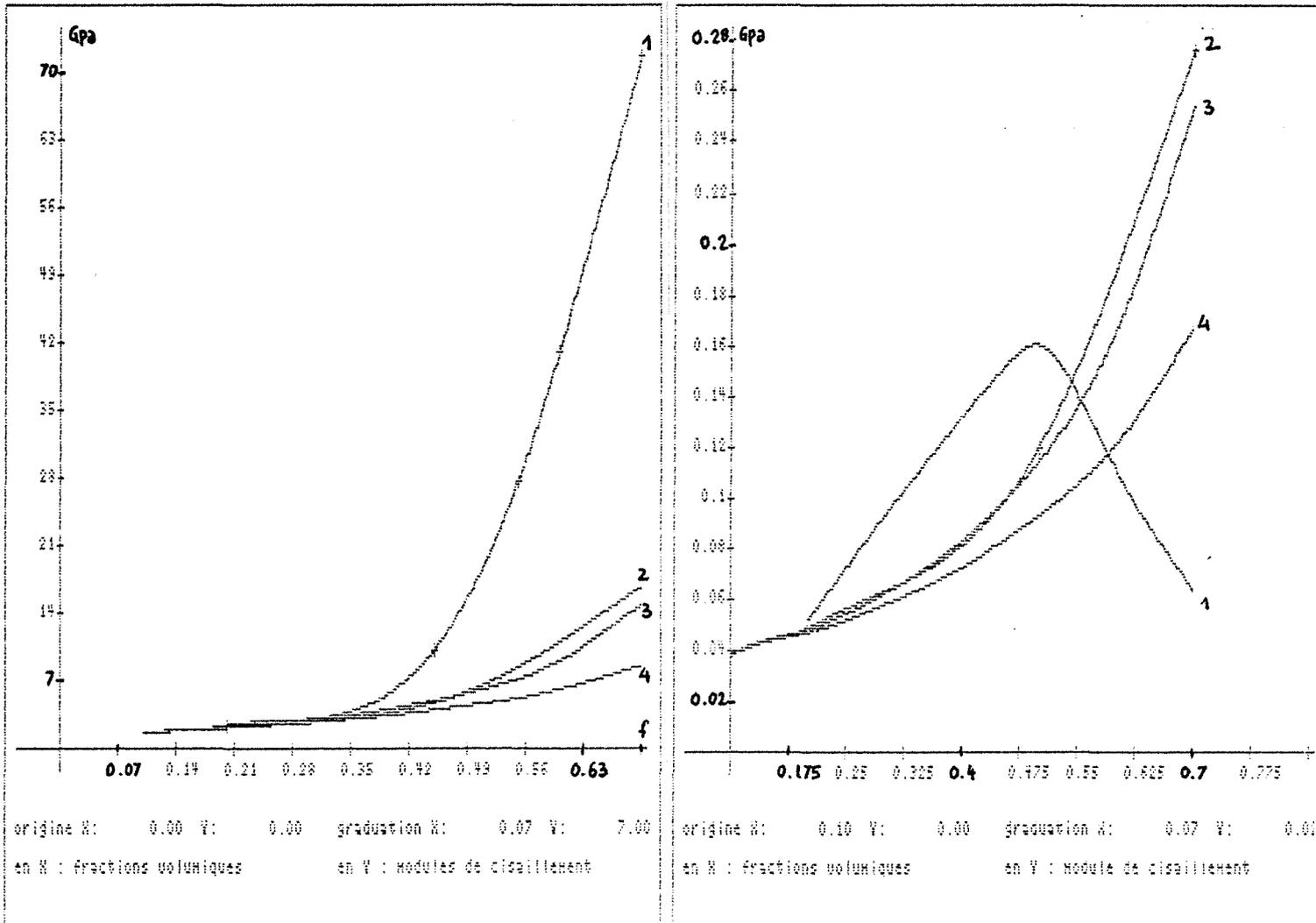


FIG III-196

MODULE DE CISAILLEMENT  
PARTIE REELLE

FIG III-206

MODULE DE CISAILLEMENT  
PARTIE IMAGINAIRE

- 1 Méthode autocohérente
- 2 Méthode autocohérente par étapes
- 3 Intégration de la solution à faible concentration
- 4 Modèle approché de Christensen

### 3 CAS DU COMPOSITE A RENFORTS DISCOIDES . CONFRONTATION AVEC DES MESURES ET LE MODELE DE WU

Les mesures portent sur des composites dont les renforts sont constitués de disques circulaires de  $30\mu$  de diamètre et de  $0,5\mu$  d'épaisseur en graphites disposés aléatoirement dans une matrice époxy [12]. Les évolutions du module de Young des composites sont analysées à  $85^\circ\text{K}$  et  $297^\circ\text{K}$  pour deux traitements de préparation : l'un effectué à température ambiante durant 2 à 4 mois (BT), l'autre effectué à  $120^\circ\text{C}$  pendant 25 heures (HT). Les mesures ont été déduites d'essais classiques de vibration de flexion réalisés sur des poutres : la partie réelle du module de Young est calculée à partir de la première pulsation propre, le facteur de perte est déduit de la largeur du pic de résonance à  $-3\text{dB}$ .

Ces composites sont simulés dans le schéma autocohérents par 9 familles d'inclusions élastiques en forme de disques équi-répartis spatialement dans une matrice viscoélastique. Une approche par étapes donne dans ce cas des résultats très proches du calcul autocohérent classique.

Résultats : (figures III-21 à III-26)

En reprenant les valeurs du module de Young évalué à  $56\text{ Gpa}$  par Hirai [12] le modèle autocohérent donne une évolution de la partie réelle du module de Young en fonction de la fraction volumique des disques très proche des points expérimentaux dans les deux cas de température (fig III-21 et fig III-24). La figure III-22 présente les résultats relatifs au facteur de perte où les résultats expérimentaux sont représentés par un nuage de points centrés sur l'évolution donnée par le schéma autocohérent. Le manque de précision dans l'évaluation des frottements internes ne permet pas

de constater expérimentalement, dans ce cas, d'évolutions significatives du facteur de perte en fonction de fraction volumique d'inclusions. Si, par contre, les mesures de frottements internes sont effectués au moment d'une transition de la phase viscoélastique du composite, l'augmentation de l'amortissement interne rend significative l'évolution expérimentale du facteur de perte du composite qui est alors très proche de celle résultant du schéma autocohérent (figure III-23).

Pour montrer l'influence du facteur de forme de l'inclusion sur la partie réelle du module de Young du composite la figure III-25 présente l'évolution de cette grandeur pour l'inclusion discoïde et l'inclusion sphérique de carbone. Le composite à inclusion discoïde est représenté par le modèle autocohérent utilisé à la figure III-21 (courbe n°2) le modèle autocohérent pour le composite à renforts sphériques (courbe n°1) donne une évolution proche des deux points expérimentaux. Si l'influence du facteur de forme est très sensible sur les parties réelles son influence sur les facteurs de perte n'est pas significative au plan expérimental pour des raisons liées au manque de précision des mesures.

La nature du traitement de préparation n'a pas d'influence sur la partie réelle du module de Young dans le cas du comportement des composites à 85°K, par contre son influence est sensible à 297°K où le traitement HT diminue la raideur du composite d'environ 20% mais les évolutions sont identiques à celles constatées figure III-24. Dans les deux cas de température, le traitement a une influence sur la valeur du frottement interne : il est sensiblement plus fort dans le cas d'un traitement à température ambiante, les comportements vis à vis des modèles restant identiques à ceux

constatés figure III-22.

L'évolution du rapport de la partie réelle du module du composite sur la partie réelle de la matrice dans le cas du schéma autocohérent est confrontée à celle que l'on peut déduire du modèle de Wu utilisé dans [12] en prenant des coefficients de Poisson égaux à 0,2 (formule F26 du formulaire). Les deux évolutions sont presque confondues : figure III-26.

INCLUSIONS DISCOIDES EN GRAPHITE DANS UNE MATRICE EPOXY A 85°K  
 EVOLUTIONS EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE D'INCLUSIONS

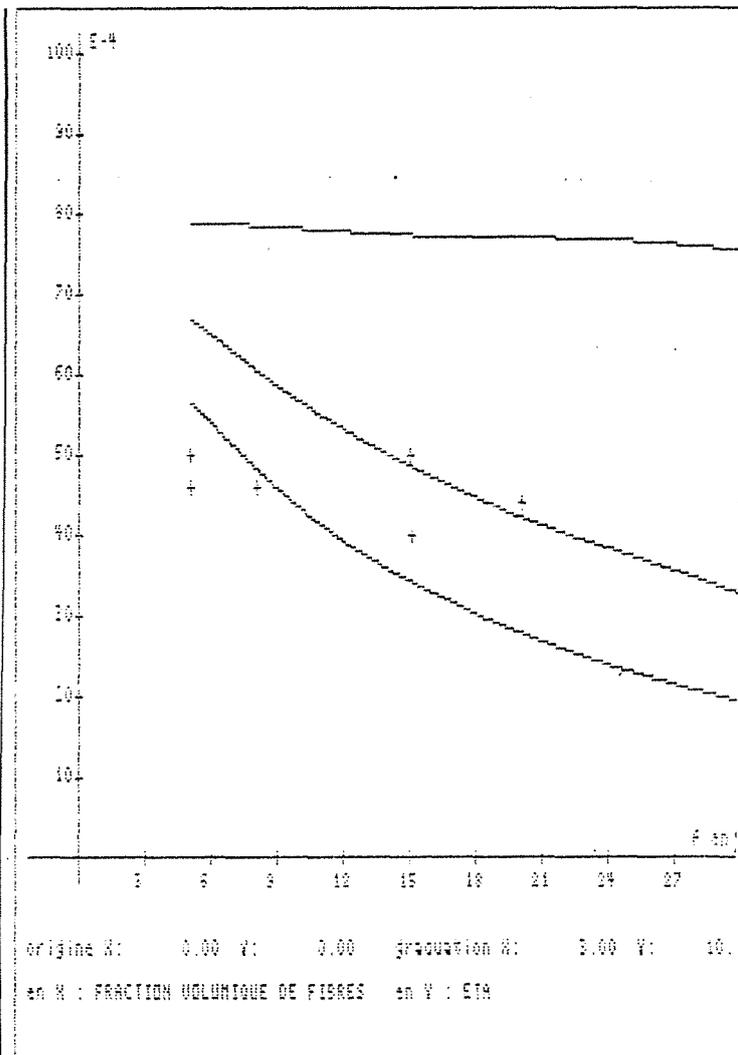
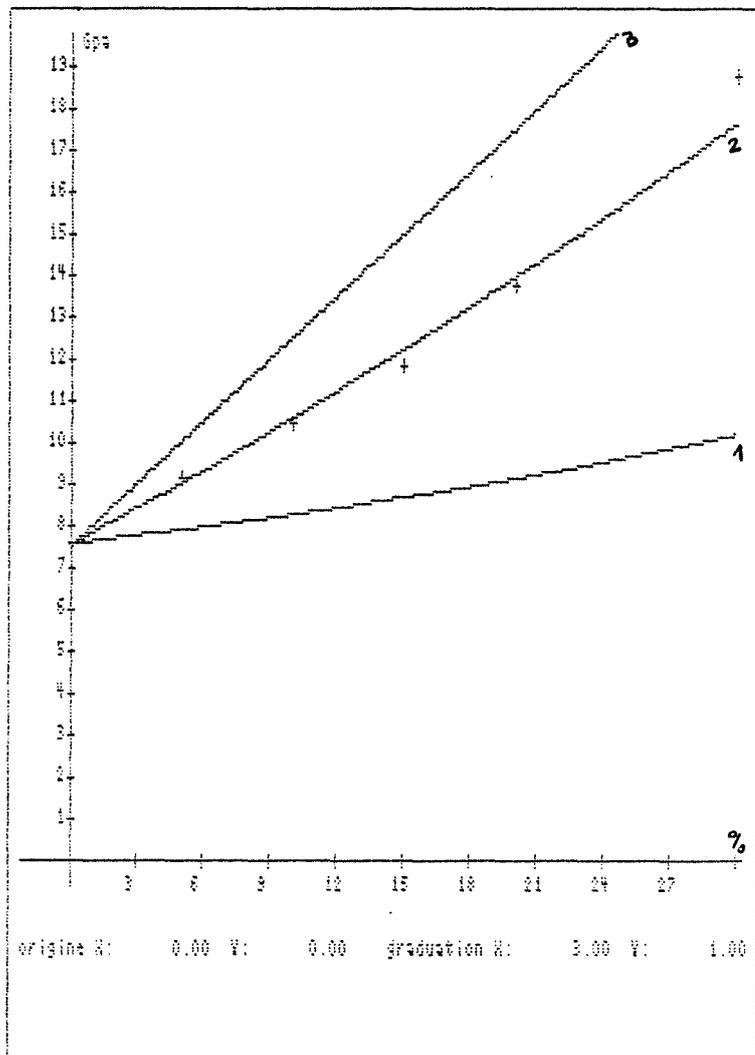


figure III-21

PARTIE REELLE DU MODULE D'YOUNG

figure III-22

FACTEUR DE PERTE

- 1 modèle série
- 2 modèle autocohérent
- 3 modèle parallèle
- + points expérimentaux

COMPOSITE GRAPHITE-EPOXY                      INCLUSIONS DISCOIDES.  
 EVOLUTIONS EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE D'INCLUSIONS

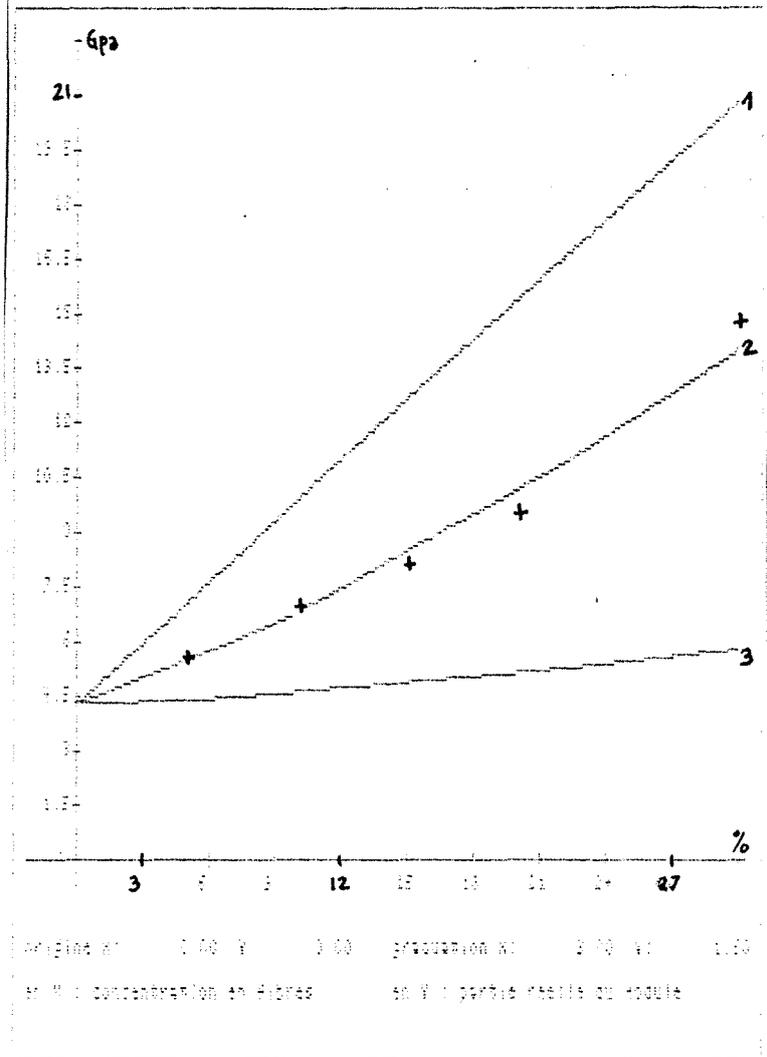
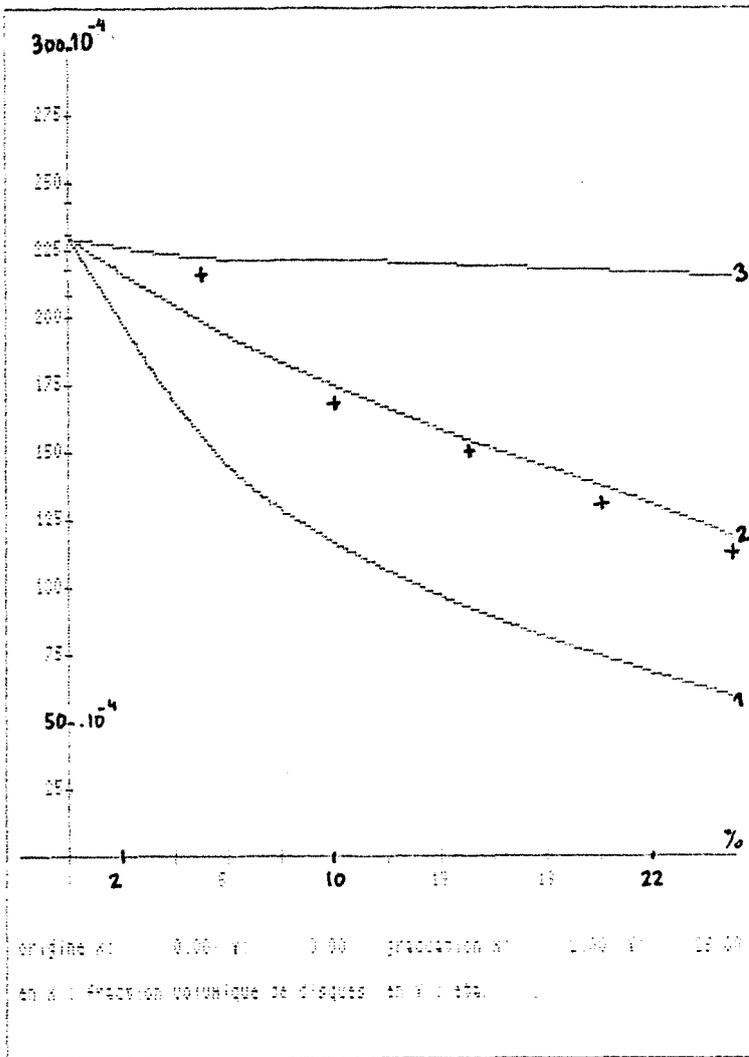


FIGURE III-23  
 FACTEUR DE PERTE A LA TRANSITION  $\gamma$   
 150°K

FIGURE III-24  
 MODULE D'YOUNG  
 PARTIE REELLE A 297°K

- 1            modèle parallèle
- 2            modèle auto-cohérent
- 3            modèle série
- +            points expérimentaux

COMPOSITE GRAPHITE-EPOXY. INCLUSIONS DISCOIDES  
 EVOLUTIONS EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE D'INCLUSIONS

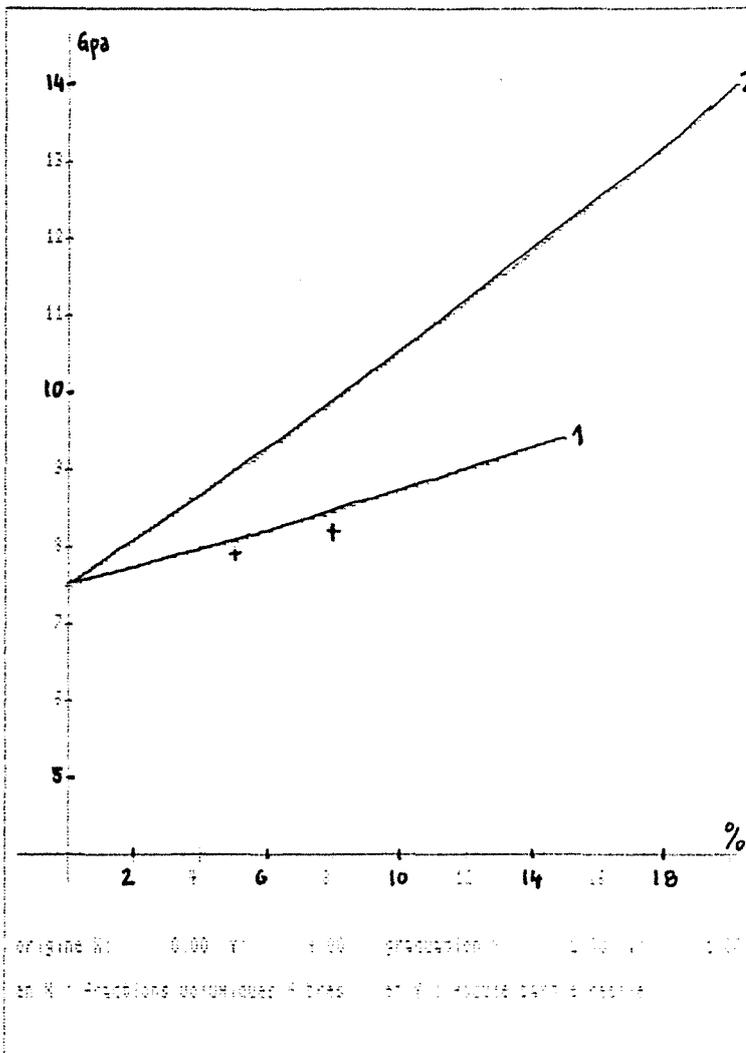


FIG III-25

INFLUENCE DU FACTEUR DE FORME SUR LA  
 PARTIE REELLE DU MODULE D'YOUNG  
 A 85°K

- 1 : Modèle autocohérent cas des renforts sphériques
- 2 : cas des inclusions discoïdes
- + : points expérimentaux cas des renforts sphériques

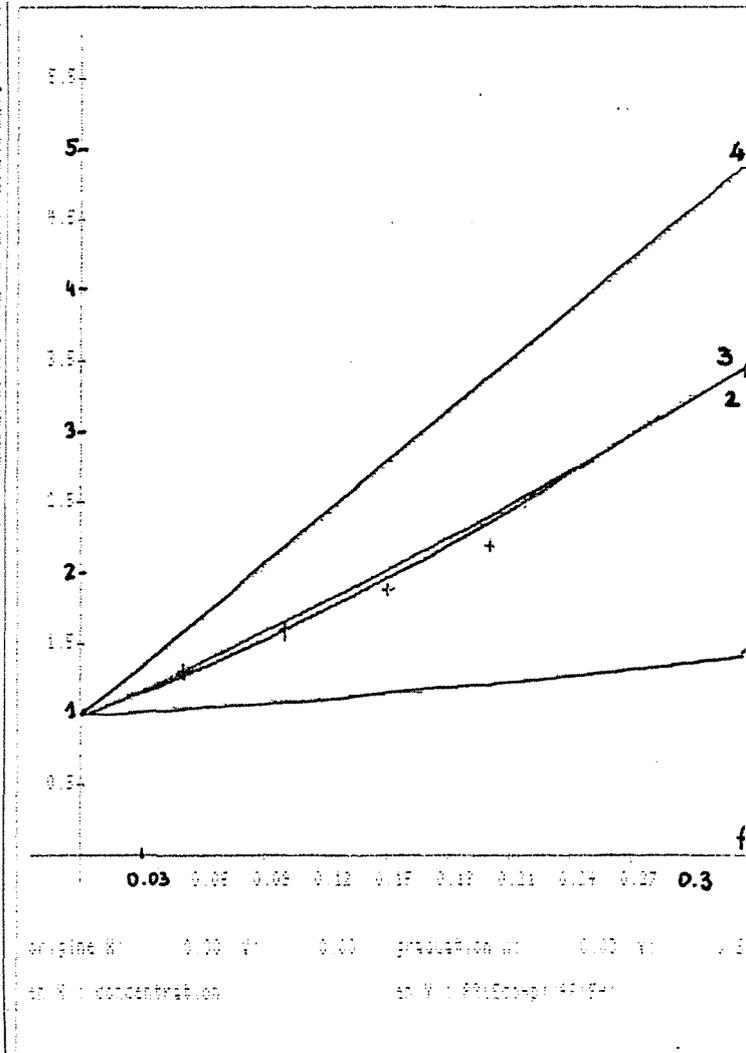


FIG III-26

EVOLUTION A 297°K DU  
 RAPPORT DE RAIDEUR  
 $PR(E^*_{composite})/PR(E^*_{M})$

- 1 : Modèle série
- 2 : Modèle autocohérent
- 3 : Modèle de Wu
- 4 : Modèle parallèle
- + : Points expérimentaux

#### IV COMPARAISON AVEC UNE METHODE D'HOMOGENEISATION UTILISANT LES ELEMENTS FINIS (CAS ELASTIQUE)

La méthode des éléments finis permet d'obtenir l'ensemble des composantes du tenseur de raideur d'un composite avec des hypothèses moins restrictives que celles qu'il est nécessaire de poser dans le cas de la recherche d'une solution analytique.

Pour obtenir les grandeurs techniques relatives à différents composites, la méthode des éléments finis peut être utilisée dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation [6].

Il s'agit de définir les modules de composites élastiques biphasés. Les fibres parallèles sont cylindriques avec des sections circulaires ou faiblement élargées transversalement.

Comme dans les cas des calculs purement élastiques précédents, les programmes autocohérents viscoélastiques seront testés en prenant les parties imaginaires nulles.

Résultats.

tableau IV-1

Le composite est à 64% de renforts cylindriques à sections circulaires en matériau élastique isotrope caractérisé par son module de Young  $E^f=84$  Gpa et un coefficient de Poisson  $\nu^f=0,22$  dans une matrice élastique isotrope telle que  $E^M= 4$  Gpa et  $\nu^M = 0,34$  .

Les renforts sont parallèles à la direction 1.

cas	Gpa E <sub>1</sub>	Gpa E <sub>2</sub>	Gpa E <sub>3</sub>	$\nu_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	Gpa G <sub>23</sub>	Gpa G <sub>12</sub>	Gpa G <sub>13</sub>
phase f	84	84	84	0,22	0,22	0,22	34,42	34,42	34,42
phase M	4	4	4	0,34	0,34	0,34	1,49	1,49	1,49
Homog.	54,8	13,4	13,4	0,48	0,25	0,25	8,1	6,3	6,3
M.A.C	54,2	27,1	27,1	0,29	0,23	0,23	9,18	12,27	12,02
M.A.C 16 ét.	53	18,4	18,4	0,36	0,24	0,24	5,8	7,5	7,5
modèle analy.	F5 55	F9 18,1	F9 18,1	F8 0,26	F6 0,26	F6 0,26	F10 4,32	F3 5,73	F3 5,73
Mesure	55	17	17	/	0,26	0,26	/	5,6	5,6
$\epsilon_r$ M.A.C.	1%	100%	100%	39%	8%	8%	14%	94%	94%
$\epsilon_r$ 16 ét.	3%	38%	38%	25%	4%	4%	28%	19%	19%

tableau IV-1

La ligne 7 fournit les valeurs données par les différents modèles analytiques utilisables ici ainsi que le repère de chacune des relations concernées (formulaire en annexe).

Les  $\epsilon_r$  représentent les écarts relatifs des deux schémas autocohérents avec la méthode d'homogénéisation-éléments finis.

Les résultats relatifs au plan transversal 2-3: ( $E_2$   $E_3$   $\nu_{23}$   $G_{23}$ ) ainsi que les modules de glissement  $G_{12}$   $G_{13}$  sont très différents, un calcul autocohérent par étapes réduit fortement les écarts relatifs pour les modules de glissement. Cependant il subsiste une différence relative d'environ 40% sur le module d'Young transversal différence du même ordre que celle qui affecte le modèle de

Whitney-Riley utilisable ici. Cet écart est lié à l'anisotropie géométrique du composite (même problème pour  $\nu_{23}$  et  $G_{23}$ ). Le modèle Homogénéisation-éléments finis tient compte de l'agencement des fibres (cylindres disposés en mailles carrées) alors que le modèle autocohérent à un site conduit à un matériau isotrope transverse dans le cas de phases isotropes. Pour un matériau anisotrope transverse la variation du module transversal  $E(\theta)$  dans la direction repérée par l'angle  $\theta$  est régie par la relation de changement de base sur les souplesses qui donne:

$$1/E(\theta) = 1/E_2 \cos^4\theta + 1/E_3 \sin^4\theta + \sin^2\theta \cos^2\theta (-2\nu_{23}/E_2 + 1/G_{23}) \quad \text{IV-1}$$

(avec  $E_2 = E(0)$  et  $E_3 = E(90^\circ)$   $\rightarrow$  direction des fibres ) .

Cette relation conduit à l'encadrement  $13390 \text{ Mpa} \leq E(\theta) \leq 19890 \text{ Mpa}$  pour le cas des cylindres à section circulaire agencés en maille carrée. La méthode autocohérente à un site ne peut pas donner de bonnes valeurs des caractéristiques dans le plan 2-3 puisqu'elle ne tient pas compte des agencements géométriques qui créent des anisotropies.

remarque

Pour ce composite les mesures disponibles [6] pour la direction  $\theta=45^\circ$  donnent des valeurs expérimentales proches de celles données par le modèle autocohérent par étapes.

tableau IV-2

Le composite est ici constitué d'une phase élastique anisotrope dans une phase élastique isotrope dans les proportions 50%-50% .

cas	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$G_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$
f	380	14,5	14,5	0,25	0,22	0,22	20	38	38
M	3,52	3,52	3,52	0,38	0,38	0,38	1,28	1,28	1,28
Hom.	191	7,62	7,62	0,44	0,29	0,29	2,75	3,66	3,66
M.A.C.	184	7,64	7,64	0,45	0,29	0,29	3,5	7,01	7,2
M.A.C. 10 ét	171	7,45	7,45	0,46	0,29	0,29	3,17	4,2	4,2
$\epsilon_r$ M.A.C.	4%	0,2%	0,2%	2%	0%	0%	27%	94%	94%
$\epsilon_r$ 10 ét.	10%	2%	2%	4%	0%	0%	15%	15%	15%

tableau IV-2

Les modules sont donnés en Gpa.

tableau IV-3

Le matériau est constitué des mêmes phases que dans le cas précédent avec une fraction volumique de fibres de 35% .

Les modules sont donnés en Gpa.

cas	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$G_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$
f	380	14,5	14,5	0,25	0,22	0,22	20	38	38
M	3,52	3,52	3,52	0,38	0,38	0,38	1,28	1,28	1,28
Hom.	133	6,21	6,21	0,5	0,32	0,32	2,13	2,53	2,53
M.A.C	125	6,26	6,26	0,5	0,32	0,32	2,4	3,57	3,49
M.A.C 8 ét.	110	6,17	6,17	0,5	0,32	0,32	2,29	2,72	2,72
$\epsilon_r$ M.A.C.	6%	1%	1%	0%	0%	0%	11%	41%	41%
$\epsilon_r$ 8 ét.	10%	0,6%	0,6%	0%	0%	0%	7%	7%	7%

tableau IV-3

Dans ces deux derniers cas le modèle autocohérent donne des résultats très proches de ceux donnés par homogénéisation hormis pour les modules de glissement dans le plan du renfort où une approche autocohérente par renforcements successifs réduit notablement les écarts. (le composite est ici faiblement anisotrope transversalement :  $7620 \text{ Mpa} \leq E(\theta) \leq 7833 \text{ Mpa}$  cas du tableau IV-2 et  $6210 \leq E(\theta) \leq 6344 \text{ Mpa}$  dans le cas du tableau IV-3).

Conclusion:

Le schéma autocohérent classique ou par étapes donne en général des résultats proches de ceux donnés par la méthode d'homogénéisation utilisée pour ce test. Pour des composite possédant un agencement ordonné des fibres et des valeurs techniques particulières (cas présenté sur le tableau IV-1) une approche autocohérente multisite [1] peut fournir un modèle plus adapté pour les caractéristiques transversales ( $E_2, E_3, \nu_{23}, G_{23}$ ).

## V CAS DE L'INCLUSION VIDE

Le matériau bois étant une structure alvéolaire, il est nécessaire de tester le schéma autocohérent dans le cas de l'inclusion vide.

### 1 CAS DES CAVITES SPHERIQUES DANS UNE MATRICE VISCOELASTIQUE

Il existe des solutions analytiques pour les bornes du module de cisaillement dans le cas viscoélastique pour le matériau contenant des cavités sphériques déduites des théorèmes de minimum en viscoélasticité de Christensen [11]. Ces bornes seront utilisées pour analyser les évolutions des solutions autocohérentes (formule F18 et F18 bis du formulaire).

Par ailleurs la solution viscoélastique autocohérente peut être adaptée au cas des vides sphériques à partir des relations présentées au paragraphe I -2 :

$$\mu^{*eff} = \mu^{*M} + f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) \frac{\mu^{*eff}}{\mu^{*eff} - (\mu^{*eff} - \mu^{*I}) \beta^*}$$

$$\lambda^{*eff} = \lambda^{*M} + f(\lambda^{*I} - \lambda^{*M}) N^* + 2f(\mu^{*I} - \mu^{*M}) \frac{(N^* - M^*)}{3}$$

en prenant les modules de l'inclusion nuls, les relations précédentes deviennent:

$$V-1 \quad \mu^{*eff} = \mu^{*M} \left( 1 - \frac{f(15\lambda^{*eff} + 30\mu^{*eff})}{9\lambda^{*eff} + 14\mu^{*eff}} \right)$$

V-2 ....

$$\lambda^{*eff} = \lambda^{*M} - \left( \lambda^{*M} + \frac{2}{3} \mu^{*M} \right) \frac{f(3\lambda^{*eff} + 6\mu^{*eff})}{8\mu^{*eff}} + \frac{2}{3} f\mu^{*M} \frac{(15\lambda^{*eff} + 30\mu^{*eff})}{9\lambda^{*eff} + 14\mu^{*eff}}$$

Ces deux coefficients de Lamé peuvent être déterminés par une méthode itérative, la valeur initiale du coefficient effectif est telle que  $\lambda^{*eff}(1) = \lambda^{*M}$  dans la relation V-1 qui conduit à une équation du second degré en  $\mu^{*eff}$  dont la seule solution physiquement possible est  $\mu^{*eff}(1)$  qui est alors utilisée dans la relation V-2 pour donner  $\lambda^{*eff}(2)$ , les calculs sont prolongés jusqu'à la réalisation du critère :

$$\frac{\lambda^*(i) \cdot \bar{\lambda}^*(i) - \lambda^*(i-1) \cdot \bar{\lambda}^*(i-1)}{\lambda^*(i) \cdot \bar{\lambda}^*(i)} < \text{valeur choisie.}$$

$\bar{\lambda}^*(i)$  grandeur conjuguée de  $\lambda^*(i)$

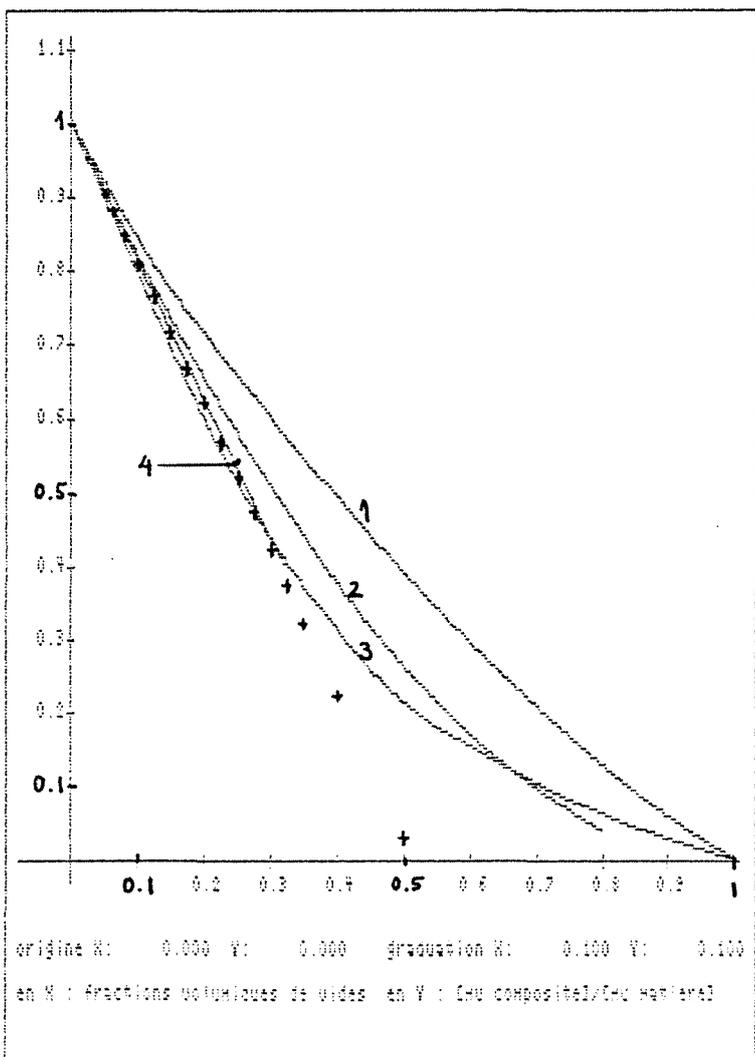
Ce modèle est représenté par la courbe reperée 4 sur la figure V-1.

Résultats:

Les courbes de la figure V-1 représentent les évolutions du rapport  $|\mu^{*composite}| / |\mu^{*matière}|$  en fonction de la fraction de vide pour les différents modèles utilisés. Les solutions autocohérentes numériques et analytiques sortent de la borne inférieure pour une concentration de vides de l'ordre de 30% . La solution autocohérente numérique et la solution autocohérente analytique (croix et courbe 4) donnent des résultats identiques, la solution numérique n'est donc pas affectée par la faible raideur qu'il est nécessaire de donner aux renforts sphériques ( $1/1000^e$  de celle de la matrice). Le

modèle analytique n'a plus de solution physique à partir d'environ 30% de vides, le déterminant de l'équation du second degré devenant négatif. La solution autocohérente par étapes est centrée par rapport aux bornes de Christensen jusqu'à environ 67% de vides ce qui est supérieur au taux maximum de remplissage pour une répartition aléatoire de sphères de mêmes diamètres (64%).

### CAVITES SPHERIQUES CAS VISCOELASTIQUE



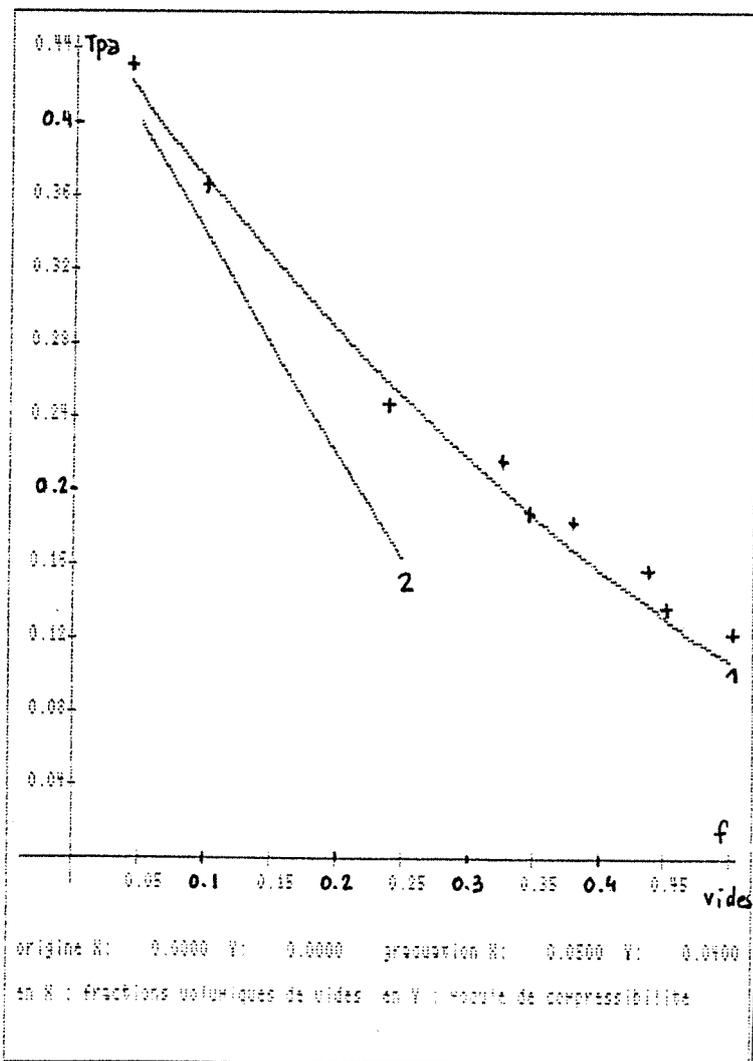
- 1 et 3 Bornes de Christensen
- 2 : Méthode autocohérente par étapes (14 étapes) et intégration numérique de la solution à faible concentration
- 4 : Solution autocohérente analytique
- + : Solution autocohérente numérique

fig V-1

2 CAS ELASTIQUE: COMPARAISON DES MODELES AUTOCOHERENTS AVEC LES MESURES DU MODULE DE COMPRESSIBILITE DU VERRE POREUX.

La figure V-2 confronte les évolutions données par les modèles autocohérents avec celles obtenues expérimentalement sur le verre poreux pour différentes fractions volumiques de vides [8].

Le verre a un module de Young  $E = 750$  Gpa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,23$  soit un coefficient de compressibilité de 463 Gpa. Les vides sont sphériques. Le modèle autocohérent par étapes suit l'évolution des points expérimentaux alors que le schéma autocohérent classique ne convient que pour les très faibles concentrations.



- + : Points expérimentaux
- 1 : Méthode autocohérente par étapes
- 2 : Solution analytique

fig V-2.

## VI CONCLUSION GENERALE SUR LES TESTS

Les différents tests ont permis, dans un premier temps, de valider le schéma autocohérent viscoélastique numérique par rapport à la solution autocohérente analytique, puis de vérifier le parfait encadrement de la solution autocohérente par les bornes viscoélastiques affinées de Roscoe.

Dans un deuxième temps, la confrontation avec les solutions analytiques obtenues pour différentes grandeurs techniques d'un composite isotrope transverse, montre l'intérêt d'une approche autocohérente multi-étapes.

1-Intérêt, nécessité du schéma autocohérent multi-étapes :

- Dans le cas de l'inclusion à raideur supérieure à celle de la matrice, le calcul autocohérent par étapes devient intéressant dès que la fraction volumique d'inclusion est supérieure à 40% pour des rapports de raideur R supérieur à 50. Pour la partie réelle 10 étapes sont suffisantes pour effectuer un calcul autocohérent satisfaisant. Pour la partie imaginaire 10 étapes sont aussi suffisantes hormis les cas où la fraction volumique est supérieure ou égale à 70% pour lesquels 20 étapes sont nécessaires pour obtenir des résultats stabilisés.

- Dans le cas où l'inclusion a une raideur plus faible que celle de la matrice, un calcul autocohérent à une étape qui utilise une phase comme matrice i.e. dont l'expression du  $C^{*eff}$  est :

$$C_{ijkl}^{*eff} = C_{ijkl}^{*M} + \sum_{I=1}^{N-1} f^I (C_{ijmn}^{*I} - C_{ijmn}^{*M}) A_{mnkl}^{*I} \quad (III-7 \text{ § } \beta)$$

ne converge pas. Il est alors possible d'utiliser l'expression

III-5 du chapitre  $\beta$  pour le  $C^{*eff}$  qui donne, dans ce cas, des calculs convergents

$$C_{ijkl}^{*eff} = \sum_{I=1}^N f^I C_{ijmn}^{*I} A_{mnkl}^{*I} \quad (\text{III-5 } \S \beta)$$

Cette expression, utilisée lors du dernier test, ne permet pas de tenir compte de l'effet de forme de l'inclusion, contenu dans le tenseur de localisation  $A^{*I}$ , lorsque la raideur de cette inclusion est nulle. Elle ne peut donc traiter que le cas du vide sphérique. L'approche autocohérente multi-étapes est donc indispensable dans le cas du matériau bois au niveau du calcul des raideurs effectives du cerne.

2-Choix du nombre d'étapes :

Le nombre de paramètres influençant la sensibilité de la solution autocohérente au nombre d'étapes étant important (rapport de raideur fibre-matrice  $R$ , fraction volumique, nombre de familles d'inclusions en présence, géométrie des inclusions...), il est intéressant de tester systématiquement cette sensibilité en comparant les résultats obtenus pour une et deux étapes et d'en déduire s'il est opportun ou inutile d'affiner le calcul.

## VII BIBLIOGRAPHIE

- [1] FASSI- FERHI 1985  
LE PROBLEME DE LA PAIRE D'INCLUSIONS PLASTIQUES ET  
HETEROGENES DANS UNE MATRICE ANISOTROPE.  
Thèse d'Etat Université de Metz
- [2] K.AHOUARI 1990  
CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA THERMOELASTICITE ET DE  
L'ACOUSTOELASTICITE DES MATERIAUX MICROHETEROGENES  
Thèse Université de Metz
- [3] T.T.WU 1966  
THE EFFECT OF INCLUSION SHAPE ON THE ELASTIC MODULI OF A TWO  
PHASE MATERIAL J. Solids Structures vol 2 1-8
- [4] ROSCOE 1971  
Improved bounds for real and imaginary parts of complex  
moduli of isotropic viscoelastic composites.  
J. Mech. Phys. Solids vol 20 91-97
- [5] SADOH SVALBONAS GURTMAN 1973  
"Analysis of structural composite materials"  
M. Dekker inc New-York
- [6] BEGIS BESTANO DUVAUT HASSIM NUC 1983  
A new method of computing global elastic moduli for composite  
materials RR 195 I.N.R.I.A.
- [7] R.M. CHRISTENSEN 1969  
Viscoelastic properties of heterogeneous media  
J.Mech. Phys.
- [8] S.BOUCHER 1975  
Modules effectifs de matériaux composites quasi isotropes  
constitués d'une matrice élastique et d'inclusions  
élastiques.  
II cas des concentrations finies en inclusions. Revue M
- [9] S.THEOCARIS G.SPATHIS E.SIDERIDIS 1982  
Elastic and viscoelastic properties of fibre-reinforced  
composite material  
fibre science and technologie 17 169-181
- [10] R.M. CHRISTENSEN K.H. LO 1979  
Solution for effective shear properties in three phase  
sphere and cylinder models J. Phys. Solids. vol 17 315-330
- [11] R.M. CHRISTENSEN 1971  
"THEORY OF VISCOELASTICITY" chapitre V A.P.
- [12] T.HIRAI D.E.KLINE 1973  
Dynamic mechanical properties of graphite-epoxy and  
carbon-epoxy composite  
Composite materials

## CHAPITRE Δ

### SIMULATION DES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES AUX DIFFERENTES ECHELLES D'HETEROGENEITES INFLUENCE DE DIFFERENTS PARAMETRES ARCHITECTURaux

#### I LA PAROI CELLULAIRE

##### I-1 LES DIFFERENTS MODELES DISPONIBLES

##### I-2 LA MODELISATION PAR LA METHODE AUTO-COHERENTE

##### I-3 MODELISATION D'UN TISSU ELEMENTAIRE. ETUDE DES GRANDEURS TECHNIQUES

##### I-4 LIAISON FACTEUR DE FORME ET TRANSITION

#### II LE CERNE

##### II-1 GENERALITES

##### II-2 INFLUENCE DES FACTEURS DE FORMES SUR LES GRANDEURS TECHNIQUES

##### II-3 ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA DENSITE SUR LES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES DU CERNE

#### III LE BOIS MASSIF.

##### III-1 GENERALITES

##### III-2 INFLUENCE DE L'ECRASEMENT DES CELLULES DE BOIS FINAL SUR L'ANISOTROPIE DU BOIS MASSIF

##### III-3 LE ROLE DES RAYONS LIGNEUX DANS L'ANISOTROPIE DU BOIS MASSIF

#### IV BIBLIOGRAPHIE

## I LA PAROI CELLULAIRE

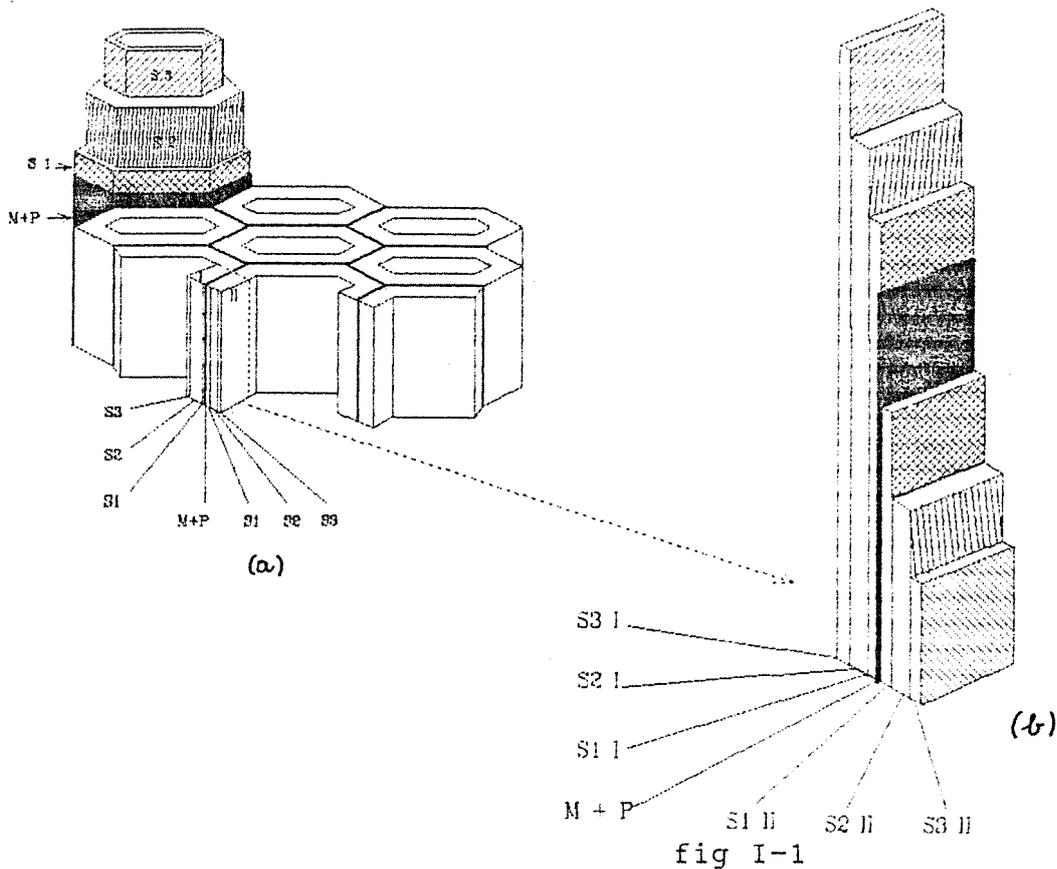
### I-1 LES DIFFERENTS MODELES DESCRIPTIFS

La plupart des modélisations proposées dans la littérature depuis plus de vingt ans, sont à deux dimensions, elles sont obtenues à partir du modèle composite en couches :

Mark (1968) [4] utilise des lois de mélange pour déterminer les propriétés élastique d'une couche (moyenne arithmétique dans le sens des fibres et harmonique dans les sens transversal). Une loi de mélange est aussi utilisée pour décrire le comportement global du composite. Le propos est d'évaluer les distributions de contrainte dans chaque couches.

Le même auteur (1972) dans [5] décrit l'influence de l'angle des renforts cellulose dans la couche S1 sur le module de Young longitudinal et transversal et le module de cisaillement dans le plan pour un élément de la paroi cellulaire à partir du modèle 2 D . Ce modèle est repris dans [6] (1980) pour décrire une paroi constituée de 50% de cellulose et 50% de matrice.

Schniewind (1972) dans [7] présente le modèle de Mark (1968) et propose un modèle équilibré incluant les parois de deux cellules adjacentes qui rend mieux compte du comportement global du matériau. L'équilibre résulte de l'enroulement hélicoïdal dans les couches S2 et S3 identiques dans chaque cellule conduisant à des angles d'inclinaisons opposés dans les couches S2 et S3 symétriques par rapport à la lamelle mitoyenne ( figure I-1 : couches S2 I et S2 II , couches S3 I et S3 II ) . Ce modèle est utilisé pour déterminer les caractéristiques élastiques de la paroi et les concentrations de contraintes dans chaque couche.



Le modèle double paroi

Barrett (1973) [8] propose un modèle qui permet de tenir compte de différences entre le côté radial et le côté tangentiel d'une cellule à section rectangulaire pour une meilleure évaluation du module d'Young longitudinal quand il existe des différences significatives dans les parois.

Cave (1969) dans [9] établit un modèle qui permet de tenir compte d'une nature aléatoire de la distribution angulaire des microfibrilles dans la couche S2. La fraction volumique  $f(\theta)$  de renforts filamenteux celluloseux inclinés de  $\theta$  par rapport à l'axe de la cellule est une distribution gaussienne périodisée. L'auteur donne l'évolution du module d'Young en fonction de l'angle principal des microfibrilles pour différentes déviations standards.

Une confrontation avec des données expérimentales sur pinus radia est réalisée pour l'évolution du module d'Young en fonction de l'angle des microfibrilles.

Salmén et De Ruvo (1985) [10] reprennent la schématisation des plaques stratifiées équilibrées du type de celle proposée par Schniewind. Le modèle est ici obtenu en supposant une cellule écrasée : le lumen a disparu au profit d'une liaison parfaite entre les deux couches S3 opposées (voir figure I-2). La cellulose et l'hémicellulose sont considérées isotropes transverses, la lignine est considérée isotrope et localisée entre chaque couche. Le modèle est utilisé pour mettre en évidence l'influence de différents paramètres sur l'évolution du module d'Young de la fibre en fonction de l'angle des microfibrilles dans la couche S2. Les paramètres étudiés sont : la raideur du cristal de cellulose dans la direction longitudinale, l'épaisseur relative de la couche S2, l'angle des microfibrilles dans S1 et S3. L'influence de l'allongement du renfort filamentaire sur le module longitudinal d'une fibre est aussi étudiée à partir du modèle de Tsai-Halpin.

La modélisation proposée par Navi (1988) [11], utilise une méthode d'homogénéisation utilisant des courbes de dispersion d'onde qui permet d'obtenir les composantes du module élastique effectif pour chaque couche en supposant un agencement de microfibrilles selon le schéma de Tang et Hsu (1973) (voir figure II-6 chapitre  $\alpha$ ). L'auteur analyse l'influence de l'angle d'inclinaison des microfibrilles sur le module d'Young longitudinal et transversal dans le domaine élastique.

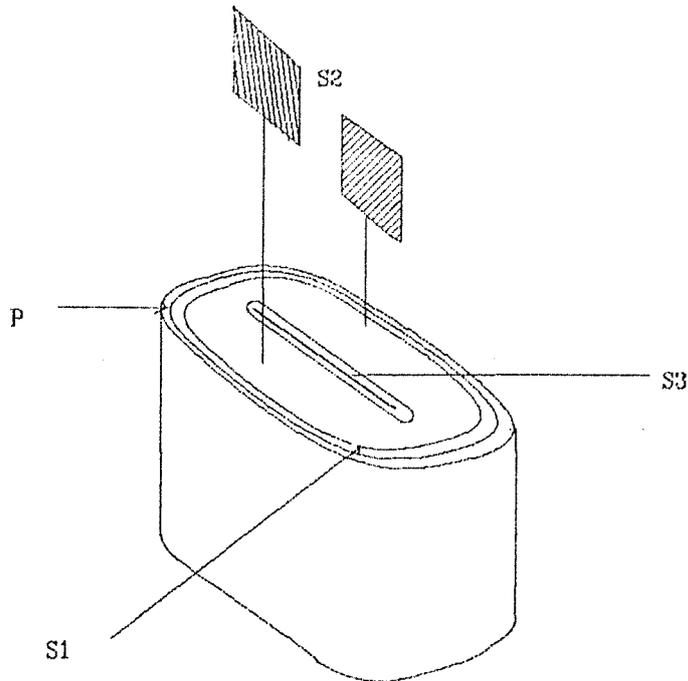


figure I-2

Le Modèle de la cellule écrasée de Salmén-De Ruvo

REMARQUES

- L'ensemble de ces modélisations ne traite que du cas élastique.
- La modélisation du composite en couches utilisée dans la quasi totalité des schémas nécessite une épaisseur de plaque faible vis à vis des autres dimensions ce qui n'est pas le cas pour toutes les couches de la paroi cellulaire.
- Ces méthodes ne donnent accès qu'à un nombre restreint de composantes de raideur du composite (hormis la méthode d'homogénéisation).

## I-2 LA MODELISATION DES PAROIS PAR LE SCHEMA AUTOCOHERENT

### -BUTS

Le propos est à ce niveau d'hétérogénéité, d'une part d'analyser l'influence de facteur de forme caractérisant la géométrie du renfort filamentaire, d'autre part de faire suite aux précédentes analyses en traitant, sur le plan viscoélastique, l'influence de l'angle des microfibrilles sur les propriétés de différents tissus élémentaires. Dans un premier temps, les résultats de la méthode autocohérente seront confrontés à ceux donnés par les méthodes décrites ci-dessus et par rapport aux données expérimentales disponibles, les calculs s'effectueront en élastique (parties imaginaires des phases constitutives nulles).

### CONFRONTATION AVEC LES MESURES DE PAGE (1967)

(Valeurs tirées de Salmén-De Ruvo [10] (1985))

Les mesures de module d'élasticité du tissu cellulaire ont été effectuées à partir de fibres extraites d'une pâte d'holocellulose. Le tissu exempt de lignine est supposé contenir 35% d'hémicellulose, le reste étant constitué de cellulose. Les valeurs des caractéristiques des phases utilisées dans la méthode autocohérente sont les mêmes que celles utilisées par Salmen et Ruvo (1985) [10] :

cellulose

$$E_x = 134 \text{ Gpa} \quad (\text{Sakurada } 1962)$$

$$E_y = 27,2 \text{ Gpa} \quad (\text{Mark } 1967)$$

$$G = 4,4 \text{ Gpa} \quad (\text{Mark } 1967)$$

$$\nu_x = 0,1 \quad (\text{Mark } 1967)$$

hémicellulose

$E_x$	= 8 Gpa	(Cousin 1978 )
$E_y$	= 4 Gpa	(Salmén-Ruvo 1985 estimation)
G	= 2 Gpa	(Salmén-Ruvo 1985 estimation)
$\nu_x$	= 0,2	(Salmén-Ruvo 1985 estimation)

Le test de la modélisation par confrontation avec l'expérience est à mener avec prudence, d'une part à cause de la difficulté qu'il existe à prélever les tissus sans dommage, d'autre part à cause des incertitudes concernant les valeurs des caractéristiques des phases constitutives (pourcentages et raideurs). Cependant il est intéressant de constater que le fractionnement des cristallites peut être à lui seul un élément explicatif des dispersions constatées sur les mesures de l'évolution du module d'Young en fonction de l'angle des microfibrilles. La figure I-4 présente les évolutions simulées par le schéma autocohérent pour des tissus élémentaires dont les renforts cellulose ont des facteurs d'allongement allant de 1 à 1000. Les inclusions sont dans ce cas représentées par quatre familles modélisant l'enroulement des microfibrilles dans les quatre paroi de la cellule (figure I-3). L'allure des évolutions est bien décrite par le modèle numérique utilisant ces quatre inclusions alors qu'un schéma n'utilisant que deux familles selon le modèle de la fibre écrasée (figure I-2) est moins adapté pour les tissus présentant un fort angle d'inclinaison de microfibrilles: figure I-5

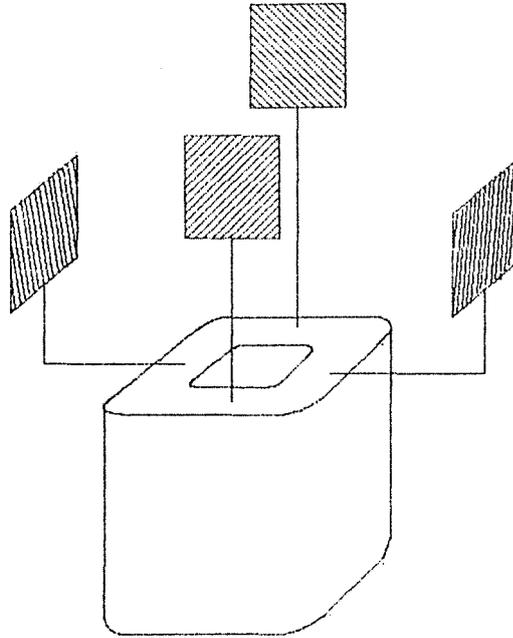


figure I-3

Les quatre familles d'inclusions utilisées dans le schéma autocohérent de la figure I-4.

CONFRONTATION AVEC LES MESURES DE PAGE

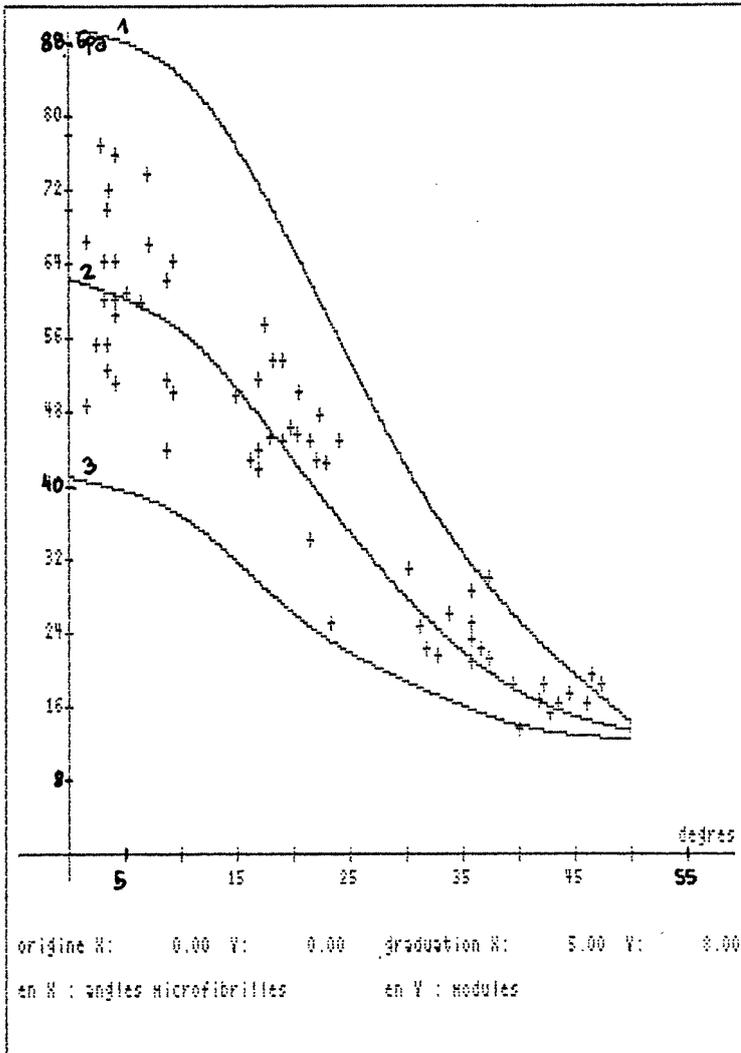


fig I-4

- 1: Allongement de 1000
- 2: Allongement de 3
- 3: Allongement de 1
- +: Mesures

Cas d'un tissu décrit par 4 familles de renforts cellulosiques dans une matrice d'homocellulose

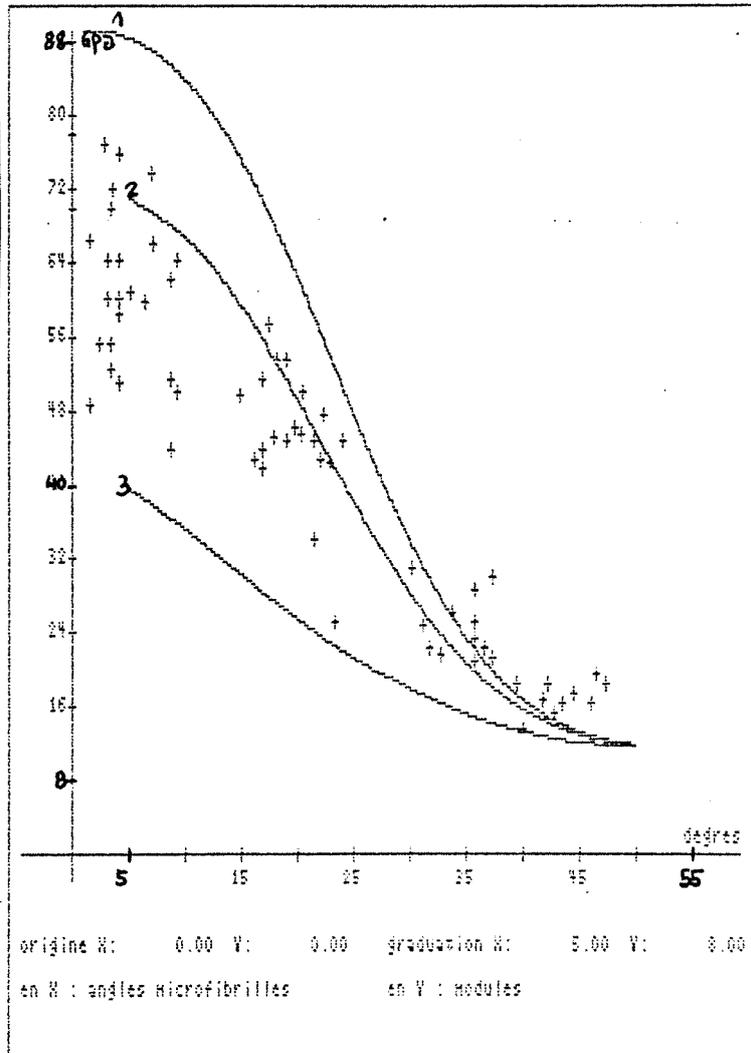


fig I-5

- 1 : Allongement de 1000
- 2 : Allongement de 5
- 3 : Allongement de 1
- + : Mesures

Cas d'un tissu décrit par 2 familles de renforts cellulosiques dans une matrice d'homocellulose

## CONFRONTATION AVEC LES MESURES DE CAVE (1968) [9]

Les mesures sont effectuées sur le bois de printemps de *Pinus Radiata*. Elles représentent les évolutions du module d'Young pour des tissus cellulaires en fonction de l'angle des microfibrilles. La proportion de la couche S2 est fortement évolutive du bois de printemps au bois d'été puisqu'elle passe de 20% à 80% [7]. Page propose un pourcentage de 66% pour les tissus concernés ce qui correspond à des valeurs relatives à du bois prélevé dans une zone de transition. Les autres couches seront représentées par un mélange biphasé de cellulose (renforts inclinés à  $\pm 90^\circ$ ) dans une matrice d'hémicellulose-lignine. Les constantes élastiques de la cellulose sont celles utilisées précédemment, les constantes élastiques de la matrice isotrope sont celles de Cousin [11].

Si, dans un premier temps, il est supposé un mélange 50%-50% dans chaque couche les évolutions simulées par le schéma autocohérent ne sont pas satisfaisantes, une évolution du paramètre d'allongement affectant globalement les fibres ne suffit pas à expliquer convenablement les évolutions constatées (figure I-6). Cave [9] invoque le problème de l'évolution de la contenance en cellulose qui chute avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison des renforts celluloses, mais l'autre paramètre fortement évolutif est la valeur de la longueur des cristallites évoqué au chapitre  $\alpha$ .

Il est remarquable de constater que chacun de ces paramètre pris seul ne suffit pas à rendre compte convenablement de l'évolution constatée : figure I-7 et figure I-8 alors que la combinaison de ces deux paramètres conduit à une simulation par le schéma autocohérent très proche de l'évolution moyenne mesurée : figure I-9.

Grandeurs prises en compte pour le schéma autocohérent:

Cellulose:

$E_x$	= 134 Gpa	( Sakurada 1962 )
$E_y$	= 27,2 Gpa	( Mark 1967 )
$G$	= 4,4 Gpa	( Mark 1967 )
$\nu_x$	= 0,1	(Mark 1967 )

Lignine:

$E$	= 4 Gpa	( Cousin 1976 )
$G$	= 1,5 Gpa	(Salmen-Ruvo 1985 )
$\nu$	= 0,3	(Salmen-Ruvo 1985)

Evolution du pourcentage de cellulose et de l'allongement des cristallites en fonction de l'angle d'inclinaison des renforts cellulosiques :

Angles d'inclinaison	0°	10°	20°	30°	40°	Réf
Pourcentage de Cellulose	60%	58%	53%	48%	30%	Moriizumi (1973) [1]
Allongement des Renforts	9	6,5	5,5	3	1,5	El-Osta figure II-11 ch.α

Le diamètre des cristallites est pris égal à 35 Å .

CONFRONTATION AVEC LES MESURES DE CAVE

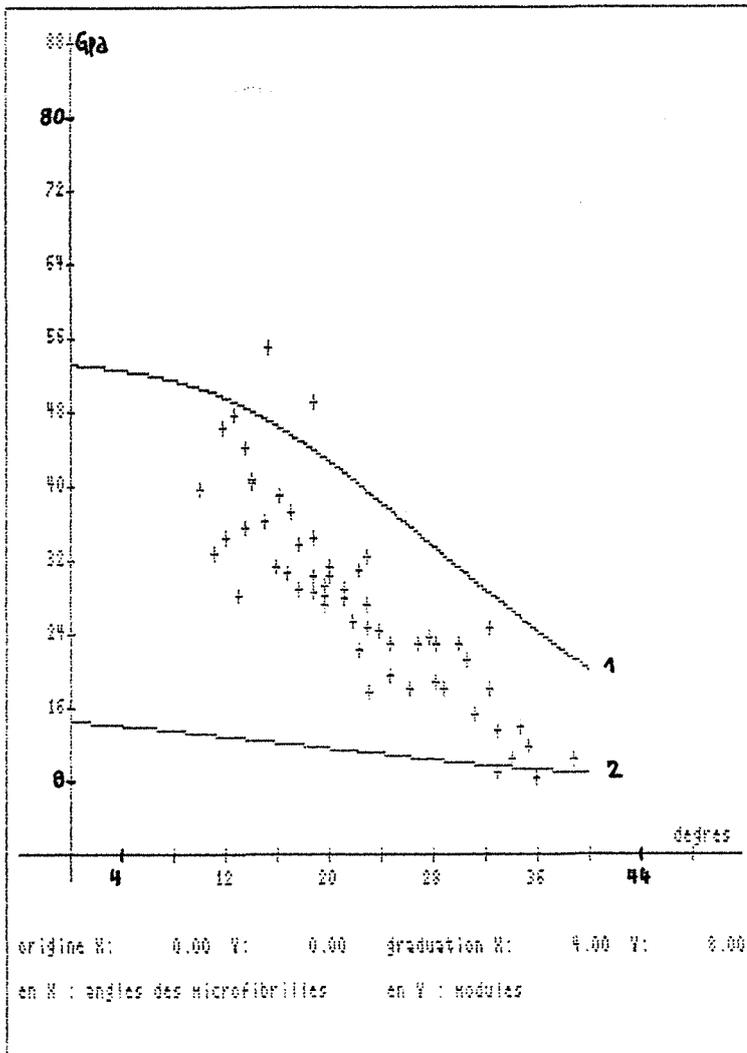


Fig I-6

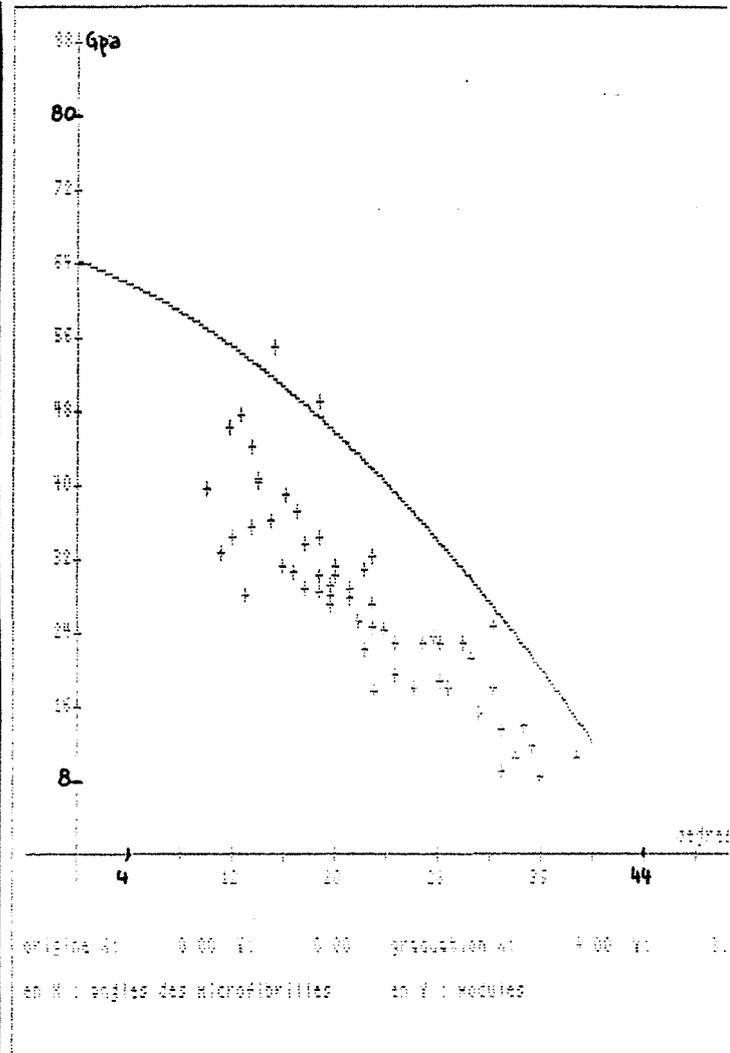


Fig I-7

- 1 : Allongement de 1000
- 2 : Allongement de 1
- + : Mesures

- : Modèle
- + : Mesures

Cas du tissu élémentaire de couche S2 occupant 66% du volume total avec 50% de renforts cellulosiques. Evolution du module d'Young pour 2 allongements extrêmes

Cas du tissu élémentaire à 66% de S2 dont la proportion en cellulose évolue en fonction de l'angle à des renforts. (allongement = 1000 )

CONFRONTATION AVEC LES MESURES DE CAVE

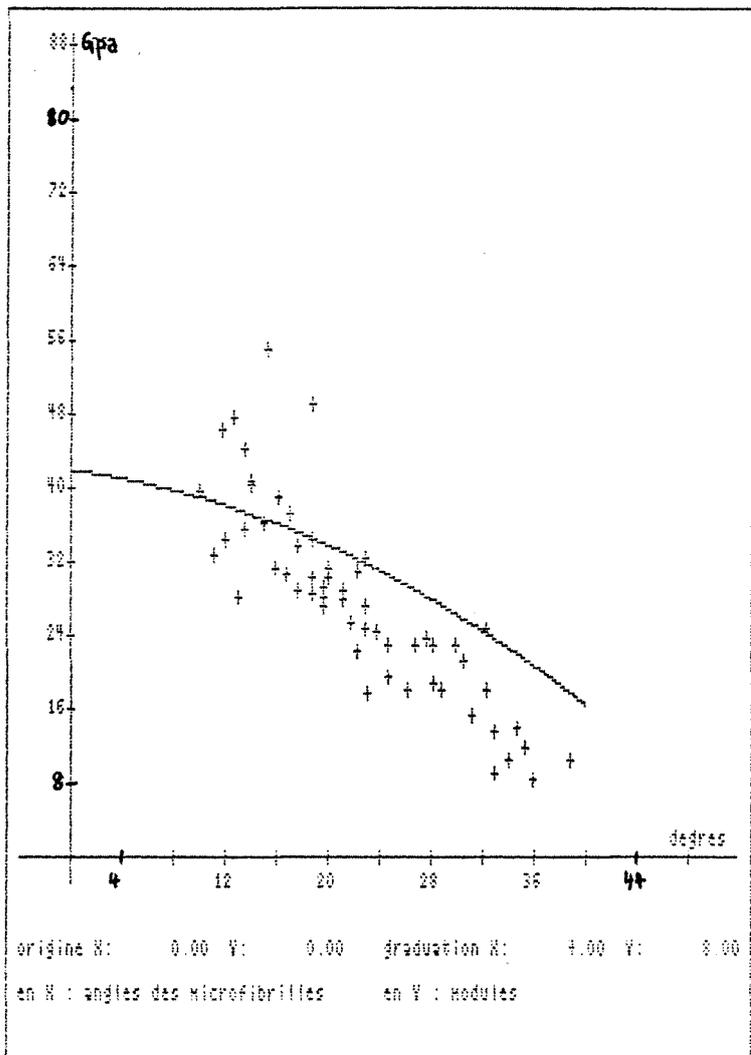


Fig I-8

— : Modèle  
 + : Mesures

Cas du tissu élémentaire à 66% de S2 contenant 50% de cellulose sous forme de renforts dont les allongements sont fonction de leur angle d'inclinaison  $\alpha$ .

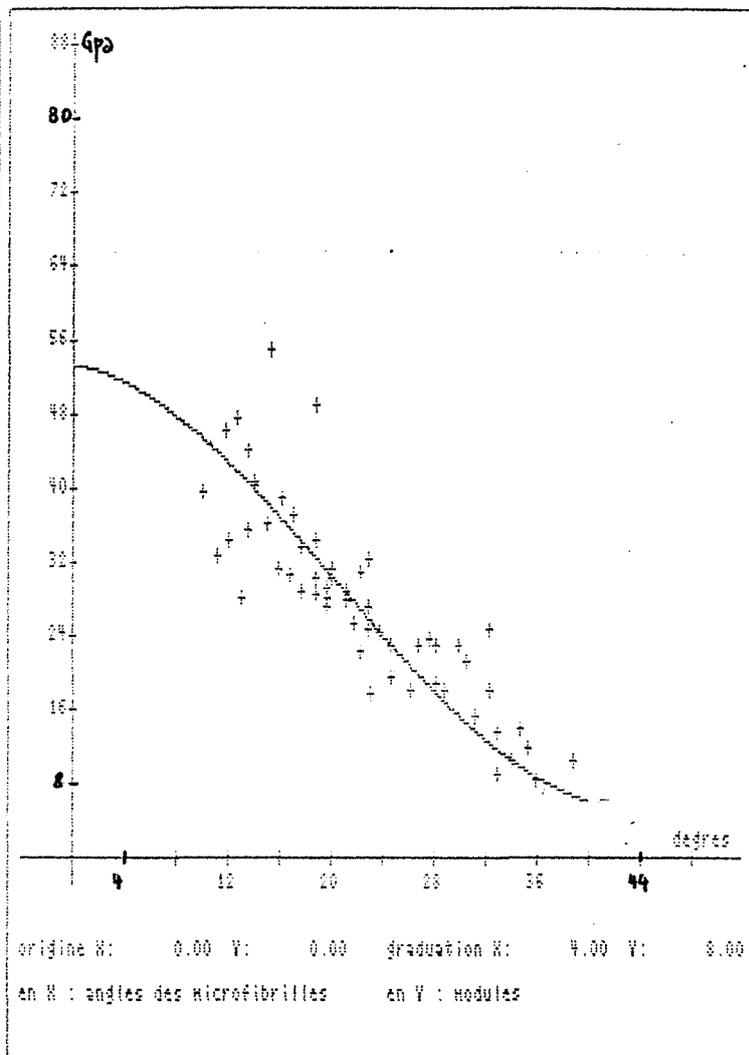


Fig I-9

— : Modèle  
 + : Mesures

Cas du tissu élémentaire à 66% de S2 avec une phase cellulosique à concentration et allongement variables en fonction de l'angle  $\alpha$

COMPARAISON AVEC LES CALCULS OBTENUS PAR HOMOGENEISATION (Navi 1988)

Il s'agit dans ce cas de calculer le module effectif d'une couche du tissu élémentaire, l'agencement géométrique des renforts étant défini par le modèle de Tang et Hsu (figure II-2 chapitre  $\alpha$ ).

Les caractéristiques élastiques utilisées pour la cellulose sont définies dans le repère  $(\vec{1}, \vec{2}, \vec{3})$  de la figure I-10 par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 246,5 & 0,774 & 0,774 & 0 & 0 & 0 \\ 0,774 & 20,8 & 0,774 & 0 & 0 & 0 \\ 0,774 & 0,774 & 20,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,58 \end{bmatrix} \quad \text{en Gpa}$$

Ces valeurs sont obtenues à partir de celles calculées par Mark d'après le modèle de cellulose I proposé par Gillis (chapitre  $\alpha$  p22) mais avec une inversion entre les modules de cisaillement G12 (ou G13) et G23.

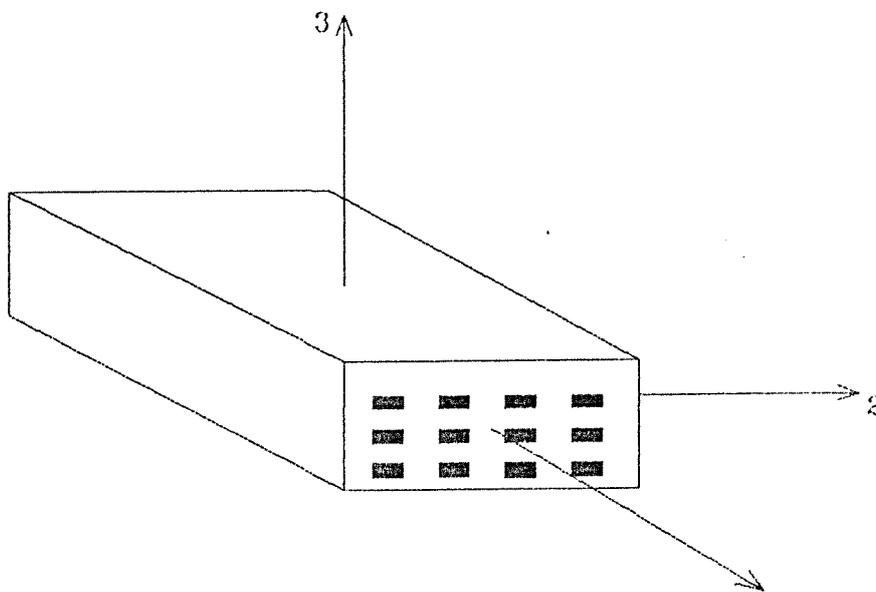


figure I-10

Les caractéristiques de la matrice d'hémicellulose-lignine supposée isotrope sont celles de Mark :  $E = 1,84 \text{ Gpa}$  et  $\nu = 0,3$

Résultats: en Gpa

$$\begin{bmatrix} 91,04 & 1,01 & 0,64 & & & \\ & 1,01 & 5,21 & 0,64 & & \\ & 0,64 & 0,64 & 3,83 & & \\ & & & & 0,36 & \\ & & & & & 0,36 \\ & & & & & & 0,99 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 87,32 & 1,01 & 1,02 & & & \\ & 1,01 & 5,13 & 1,34 & & \\ & 1,02 & 1,34 & 4,2 & & \\ & & & & 0,42 & \\ & & & & & 0,42 \\ & & & & & & & 1,18 \end{bmatrix}$$

Méthode d'homogénéisation

Méthode autocohérente

Loi de mélange:

$$\begin{bmatrix} 93,96 & 0,94 & 0,94 & & & \\ & 0,94 & 9,31 & 0,94 & & \\ & 0,94 & 0,94 & 9,31 & & \\ & & & & 0,5 & \\ & & & & & 0,5 \\ & & & & & & 1,4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3,76 & 1,5 & 1,5 & & & \\ & 1,5 & 3,58 & 1,46 & & \\ & 1,5 & 1,46 & 3,58 & & \\ & & & & 0,56 & \\ & & & & & 0,36 \\ & & & & & & & 0,95 \end{bmatrix}$$

Voigt

Reuss

Les valeurs obtenues par la méthode autocohérente sont proches des résultats obtenus par la méthode d'homogénéisation hormis les termes  $C_{13}$  et  $C_{23}$  sensiblement plus faibles dans le cas de la méthode d'homogénéisation qui donne des valeurs extérieures au domaine de variation des raideurs donné par les lois de mélange.

D'autre part on peut constater qu'il est possible d'obtenir des valeurs convenables pour certaines composantes du tenseur de raideur à partir des deux modèles élémentaires dans le cas de ce composite à renforts très longs à facteur de forme faible dans le sens transversal .

### I-3 MODELISATION D'UN TISSU ELEMENTAIRE. ETUDE DES GRANDEURS TECHNIQUES

Le tissu élémentaire est le matériau constitutif de la cellule qui représentera l'inclusion dans le niveau deux d'hétérogénéité .

Il doit représenter les couches S1 S2 S3 les couches M et P pouvant être considérées comme la matrice du niveau deux.

A cette échelle c'est la cristallite, la fibrille ou la microfibrille qui représente l'inclusion. Ces entités celluloses peuvent avoir des formes et des inclinaisons très variables à l'intérieur des couches constitutives du tissu élémentaire et peuvent éventuellement se fractionner sous l'influence de l'humidité (Salmén [10]).

Si cette inclusion de cellulose est caractérisée par ses dimensions (3 paramètres) sa position angulaire dans l'espace (3 angles d'Euler) sa proportion et ses caractéristiques élastiques, un tissu élémentaire décrivant l'organisation hexagonale de la figure I-1 (a) nécessite 6 inclusions différentes par couches soit 18 inclusions , une structure alvéolaire en carré en nécessite 12, le modèle de la fibre écrasée de Salmén n'en nécessite que 6.

Pour simuler le comportement viscoélastique d'un tissu élémentaire aux variations des paramètres d'allongement et d'inclinaison, une première approche consiste à ne considérer que la couche S2 qui constitue l'élément structurel prépondérant sur le modèle le plus simple : fibre écrasée ou modèle double paroi de Schniewind. (figure I-2 réduite à la couche S2 ou figure I-1 (b) limitée aux couches S2 I et S2 II ).

## CAS D'UNE PAROI S2 EQUILIBREE

Ce modèle ne nécessite que deux inclusions de cellulose dans une matrice d'hémicellulose-lignine (mélange 50%-50%).

Les caractéristiques élastiques de la cellulose sont celles utilisées dans les modélisations précédentes (paragraphe I-2). Les caractéristiques viscoélastiques de la matrice seront décrites par un modèle de Zener (figure I-11) dont les deux éléments élastiques ont une raideur de 4 Gpa qui conduit à un module relaxé de 2 Gpa (ordre de grandeur du module statique proposé par Mark 1980). Le coefficient de Poisson est supposé réel égal à 0,3. L'élément amortisseur est thermiquement activé par une loi de type Arrhénius dont l'énergie d'activation est de 350 kJ/mol ce qui correspond à l'ordre de grandeur de l'énergie d'activation pour la transition  $\alpha_1$  d'une lignine (Kelley 1987 [12]), l'amortissement est fixé à  $10^5$  Ns/m ce qui conduit (relation I-1) à une température de transition de l'ordre de 7°C à 10Hz qui est une valeur plausible. Ce modèle utilisé par Genevaux (1989) [13] admet une raideur instantanée  $E_1$  et un module relaxé supposés indépendants de la température. Il est limité dans ce cas à un seul élément visqueux.

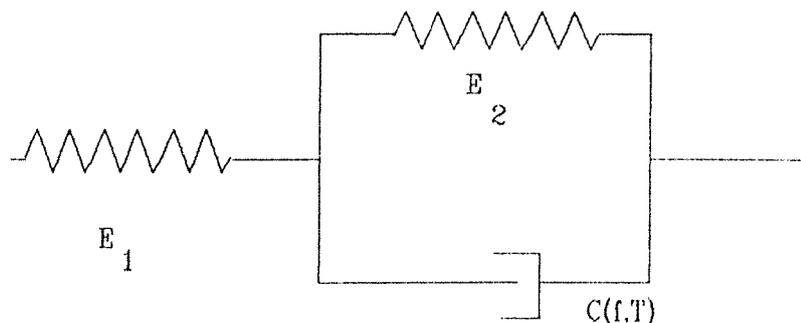


figure I-11

Liaison entre température de transition, énergie d'activation  
amortissement et fréquence pour le modèle de Zener thermiquement  
activé :

L'impédance mécanique globale Z du modèle de Zener est telle que

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{E_1}{j\omega}} + \frac{1}{C + \frac{E_2}{j\omega}}$$

(loi de sommation des impédances ou des mobilités pour les éléments  
en série ou en parallèle)

Si  $M^*$  est le module complexe  $M^* = M'(1 + j\eta)$  alors  $M^* = j\omega Z$  d'où :

$$\frac{1}{M^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{Cj\omega + E_2} = \frac{E_2 + E_1 + jC\omega}{E_1(E_2 + jC\omega)}$$

$$\Rightarrow M^* = \frac{1 + j\omega \frac{C}{E_2}}{\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} + j\omega \frac{C}{E_1 E_2}}$$

d'où  $M^* = M^\infty \frac{1 + j\omega \tau_\sigma}{1 + j\omega \tau_\epsilon}$  avec  $M^\infty = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$  module relaxé

et  $\tau_\sigma = \frac{C}{E_2}$  temps de fluage à contrainte constante

$\tau_\epsilon = \frac{C}{E_1 + E_2}$  temps de fluage à déformation constante ([14])

on en déduit  $M' = M^\infty \frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\epsilon}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2}$  et  $M'\eta = M^\infty \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\epsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2}$

avec  $C = C_0 e^{\frac{\delta W}{RT}}$  ce qui conduit à  $\eta = \frac{A\omega e^{\frac{\delta W}{RT}}}{1 + B\omega^2 e^{\frac{2\delta W}{RT}}}$

où  $A = C_0 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1 + E_2} \right)$  et  $B = \frac{C_0^2}{E_2(E_1 + E_2)}$

La transition apparait avec un maximum de facteur de perte à la température notée  $T_g$  quand  $\frac{\partial \eta}{\partial T} = 0$

qui conduit à la relation :  $B\omega^2 e^{\frac{2\delta W}{RT_g}} = 1$

finalement  $T_g = - \frac{2\delta W}{R \text{Log}(B\omega^2)}$  I-1

La simulation de l'influence du facteur d'allongement et d'inclinaison s'effectuera à fréquence et température constante (10Hz et 287°K )

## EVOLUTION DES GRANDEURS TECHNIQUES

Le rapport des raideurs renforts-matrice et la proportion d'inclusions sont suffisamment importants pour qu'un calcul autocohérent par étapes soit préférable à un calcul direct. Cinq étapes sont ici suffisantes (il n'existe plus d'évolutions significatives des grandeurs au-delà de 5 étapes). Les différentes figures présentent les résultats des évolutions des principales grandeurs techniques en fonction de l'angle d'inclinaison à des renforts cellullosiques pour différents allongements (longueur sur diamètre moyen de l'inclusion), l'écrasement (diamètre maxi sur diamètre mini) est égal à un (figure I-11).

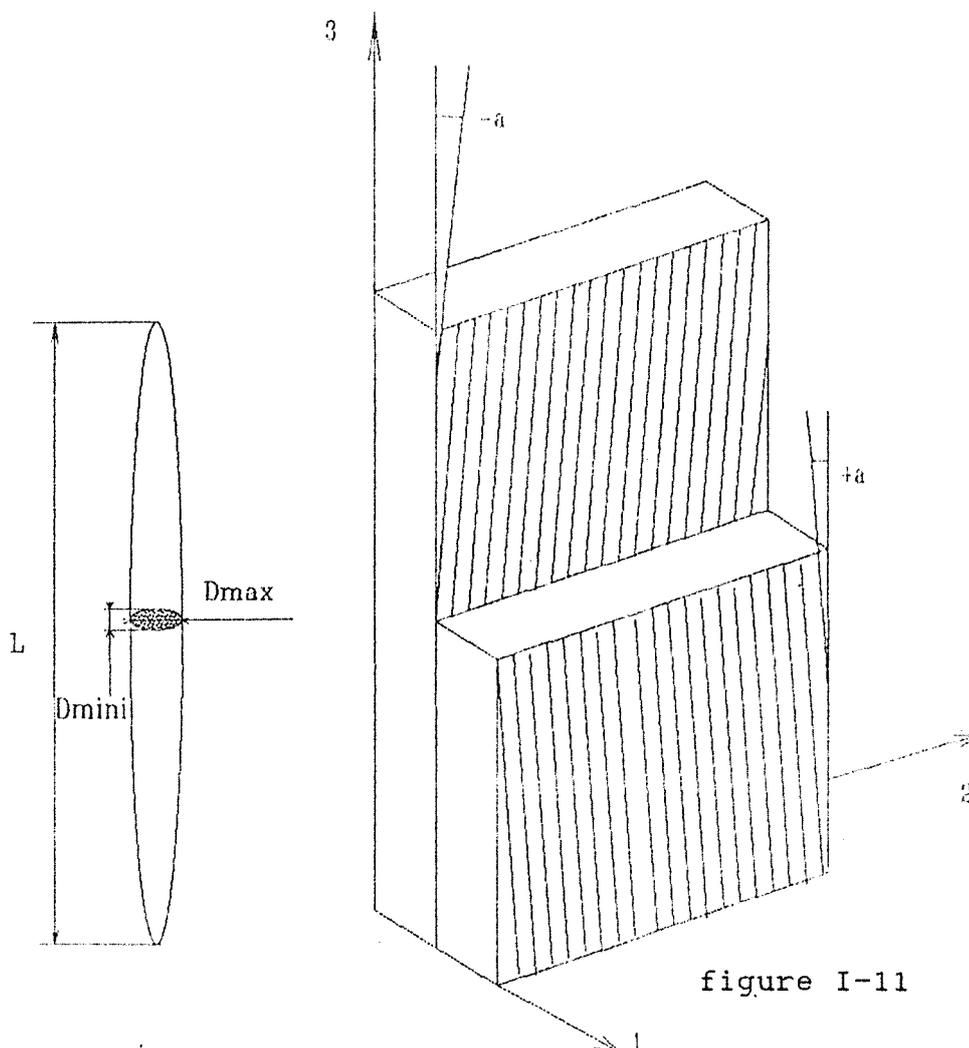
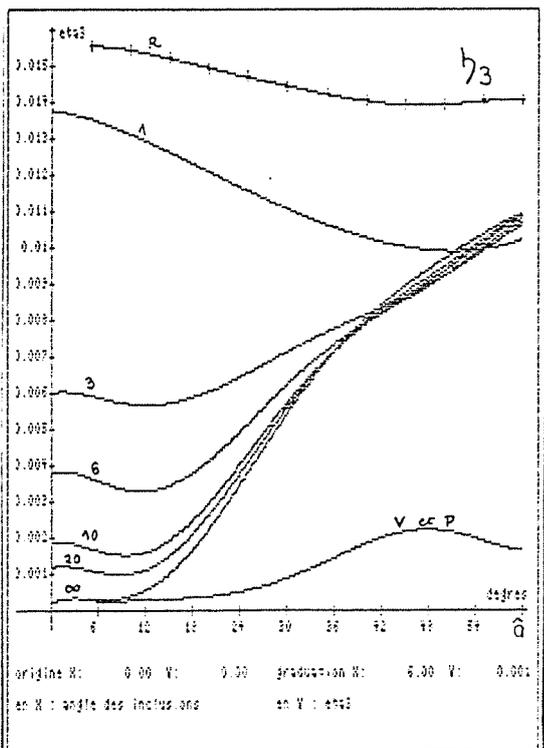
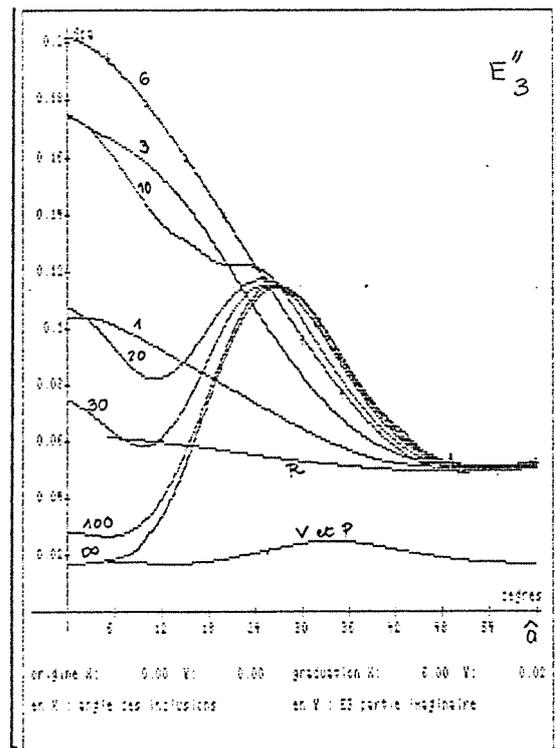
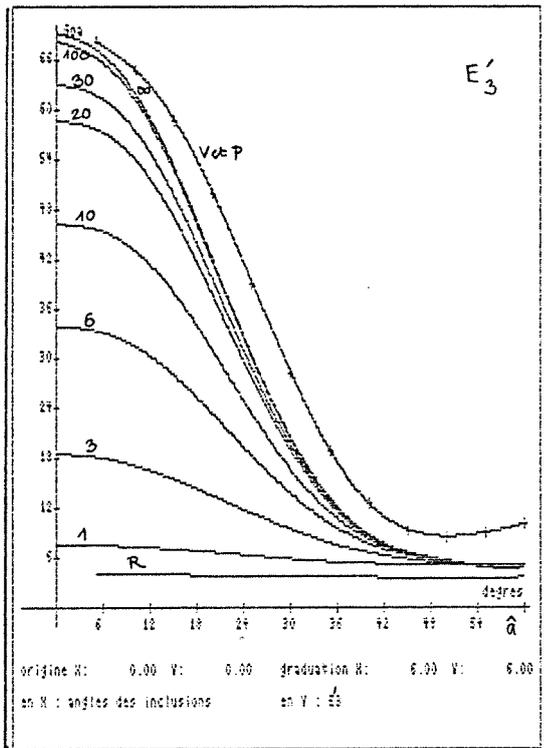


figure I-11

EVOLUTION DE  $E_3^*$  ET  $\eta_3$  EN FONCTION DE  $\hat{\alpha}$  POUR DIFFERENTS ALLONGEMENTS



V : Voigt, R : Reuss  
P : plaque, chiffres : al

Commentaires:

Influence de l'allongement al sur :  $E_3'$  (fig I-12)

Cette influence est particulièrement sensible pour les valeurs de  $\hat{\alpha} < 25^\circ$ . Pour  $\hat{\alpha} = 0^\circ$ , évolution de  $E_3'$  dans un rapport de 9 pour des al variant de 1 à 30. Pour  $\hat{\alpha} = 10^\circ$  ( $\approx$  inclinaison de la microfibrille dans un bois d'été) ce rapport vaut 8,5 pour des al variant de 1 à 100000; il vaut encore 8 pour des al évoluant de 1 à 30. La plaque constitue la forme de renfort la plus performante, l'évolution de  $E_3'$  est dans ce cas parfaitement confondue avec celle du modèle de Voigt

$E_3''$  (fig I-13)

Il existe 2 types d'évolutions :

- Décroissance monotone pour le modèle de Reuss et les faibles allongement (de 1 à 6)
- Evolution présentant plusieurs extremums pour le modèle de Voigt

et les allongements supérieurs à 6 ( de 10 à la fibre continue). Le renfort en plaque présente la valeur la plus faible et est parfaitement confondu avec le modèle de Voigt qui coïncide avec le cas de la fibre continue pour les faibles angles d'inclinaison. Les valeurs de  $E_3''$  pour les fibres circulaires tendent vers le modèle de Reuss quelque soit l'allongement pour les grands angles d'inclinaison. Pour ce tissu l'allongement de 6 donne un  $E_3''$  maximum pour les  $\alpha < 25^\circ$  (fig I-15)

$\eta_3$  (figI-14)

Hormis pour l'allongement de 1,  $\eta_3$  a tendance à augmenter au-delà d'un angle de  $12^\circ$  le facteur de perte étant beaucoup plus faible dans le sens des fibres que transversalement. Pour des angles inférieurs à  $12^\circ$  l'évolution est relativement faible, elle présente un minimum aux environs de  $10^\circ$  pour les allongements de 6 à 30. Les évolutions sont toutes comprises entre celles données par les modèles élémentaires. Le modèle de Voigt donne une évolution superposée à celle du renfort en plaques.

Remarque

Ce type de tissu à renforts croisés, qui reste orthotropique quelque soit l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , est beaucoup moins sensible à cette valeur qu'un tissu ayant la même proportion de renforts mais réalisé par une seule inclusion. Dans ce cas l'évolution de  $E_3'$  suit la loi de changement de repère : relation IV-1 du chapitre  $\gamma$ . (Il est possible, au passage, de vérifier que les calculs autocohérents effectués pour chaque angle d'inclusion donnent des résultats qui coïncident avec les valeurs déduites de la relation de changement de repère dont les valeurs de départ sont issues d'un seul calcul autocohérent effectué pour  $\alpha=0$ ).

EVOLUTION  $E''_3(a_1)$  ET COMPARAISON DE L'EVOLUTION  $E'_3(\hat{a})$  D'UN TISSU A UNE SEULE INCLUSION ET D'UN TISSU A INCLUSIONS CROISEES.

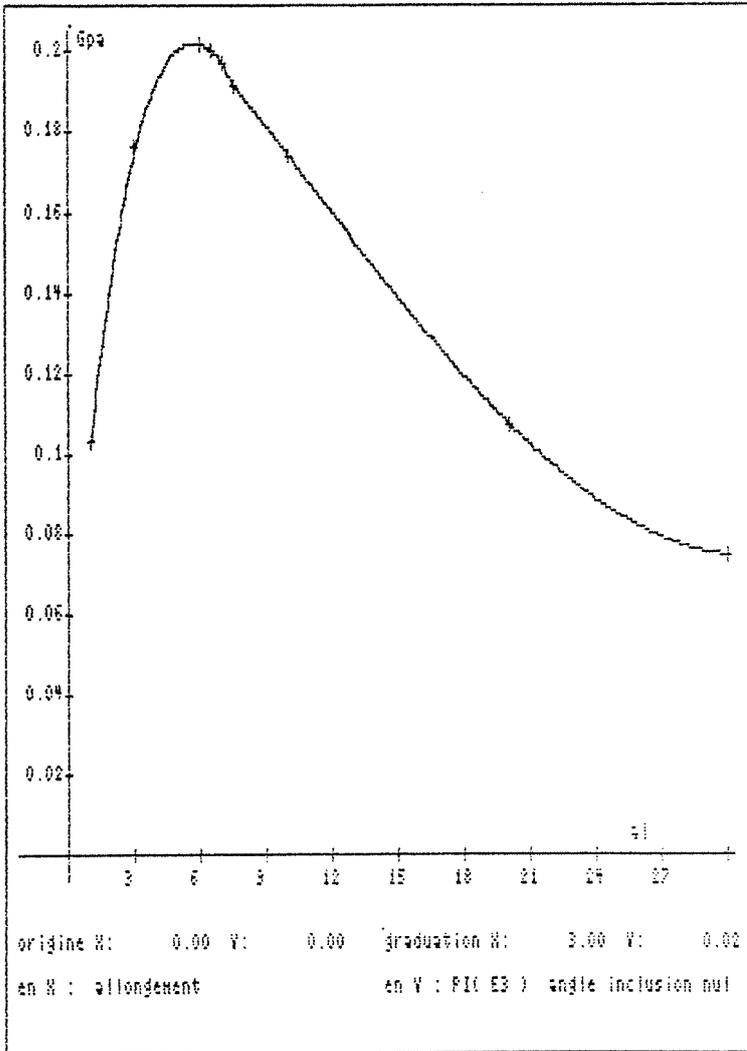


fig I-15

Evolution de  $E''_3$  en fonction de l'allongement pour un angle d'inclinaison à nul.

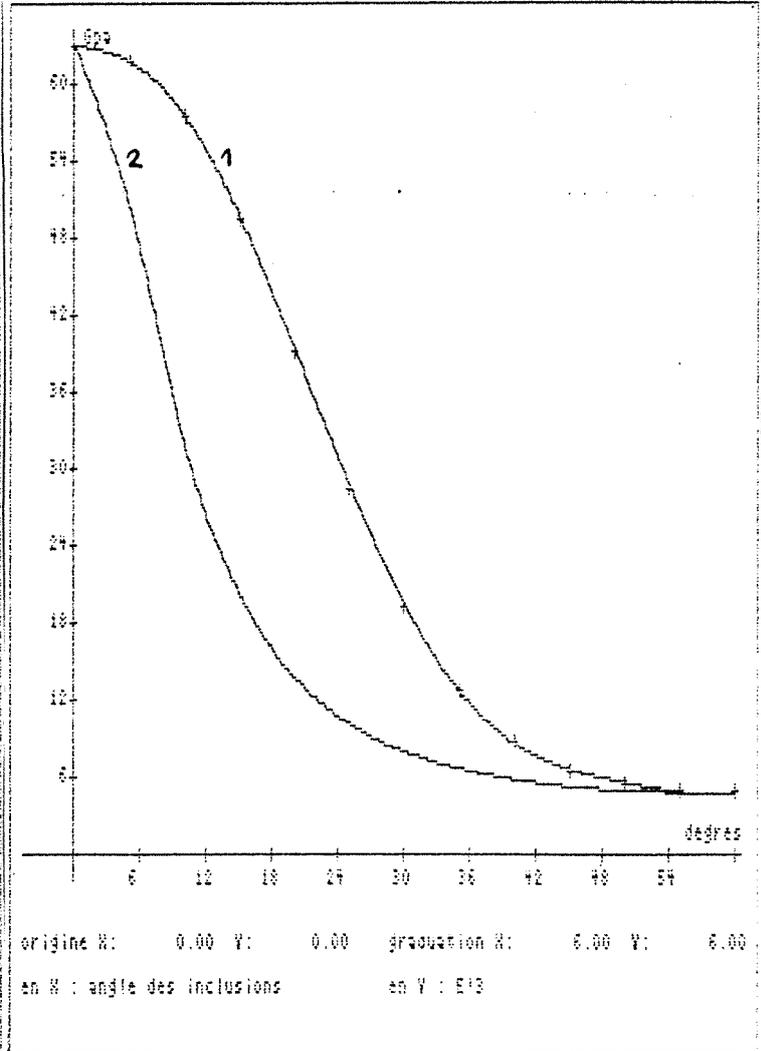


fig I-16

Comparaison d'un tissu à 2 inclusions croisées et d'un tissu à une inclusion (tissu 50%-50%,  $a_1=30$ )

- 1 : Tissu à 2 inclusions croisées inclinées de  $\pm \hat{a}$
- 2: Tissu à une seule inclusion inclinée de  $\hat{a}$ .

EVOLUTION DE  $E_2^*$  ET  $\eta_2$  EN FONCTION DE  $\alpha$  POUR DIFFERENTS ALLONGEMENTS

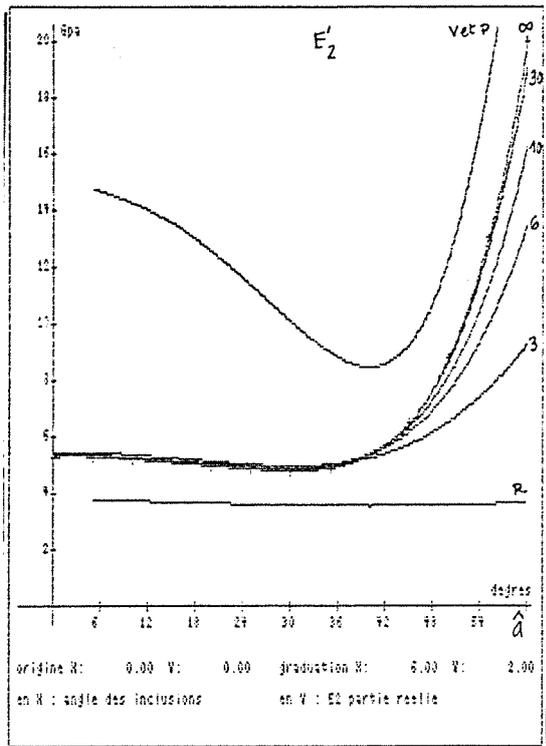


Fig I-17

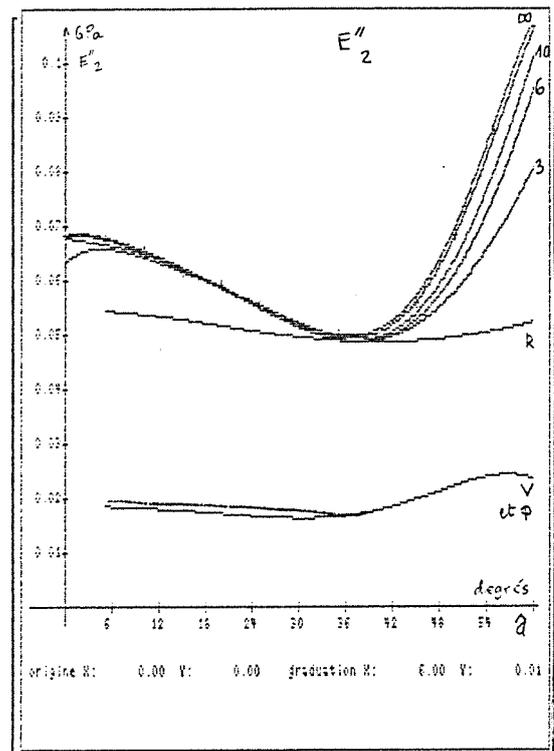


Fig I-18

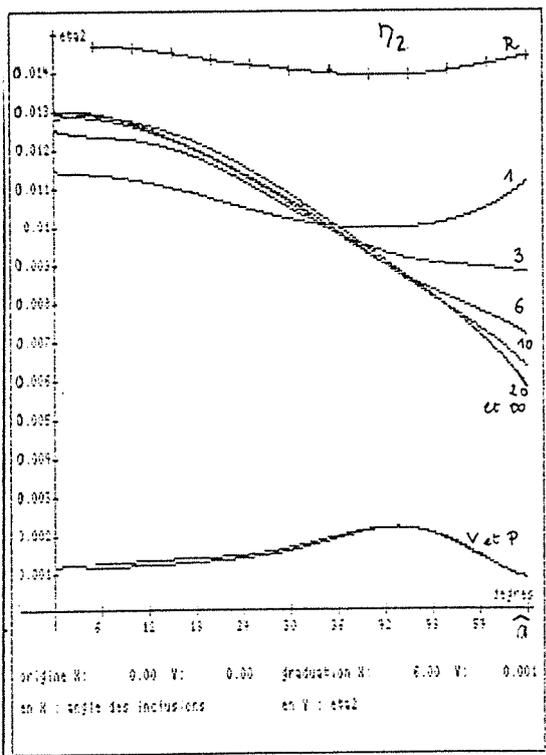


Fig I-19

P : plaque, chiffres :  $\alpha$   
V : Voigt, R : Reuss

Commentaires:

Influence de l'allongement  $\alpha$  sur :  
 $E'_2$  (fig I-18)

Pour ce tissu à renforts symétriques par rapport à la direction 3  
 $E_2^*(\alpha) = E_3^*(\pi/2 - \alpha)$ .  $E'_2$  est peu sensible à l'allongement jusqu'à une inclinaison de 45° des renforts.

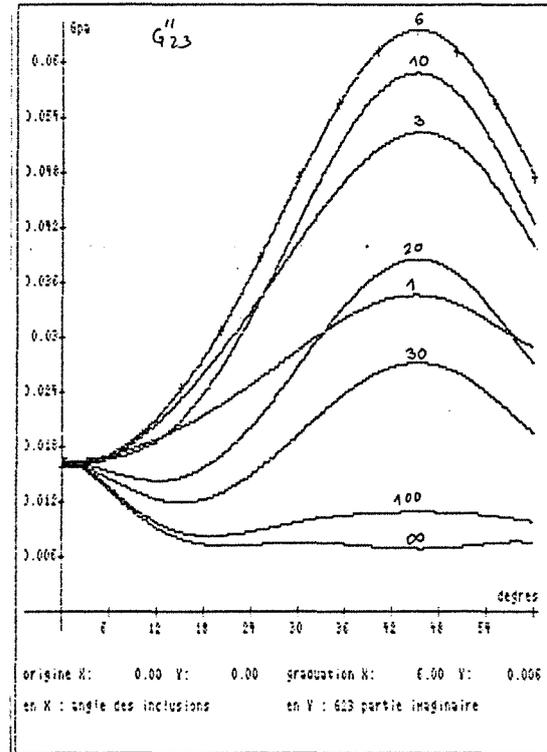
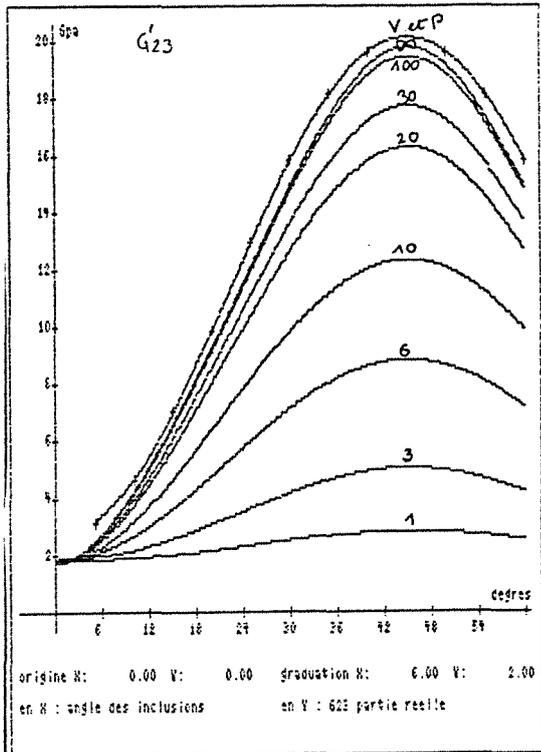
$E''_2$  (fig I-19)

Les évolutions sont extérieures à celles données par les modèles élémentaires pour des renforts cylindriques. Le renfort en plaques a une réponse légèrement différente de celle donnée par le modèle de Voigt pour les petits  $\alpha$ .

$\eta_2$  (fig I-19)

Les évolutions sont très semblables quelque soit  $\alpha$ . Elles sont encadrées par celles données par les modèles de Reuss et Voigt.

EVOLUTION DE  $G_{23}^*$  EN FONCTION DE  $\alpha$  POUR DIFFERENTS ALLONGEMENTS  $a_l$



V : Voigt, R : Reuss, P : Renforts en plaques, Repères =  $a_l$

Pour ce type de tissu le module de cisaillement dans le plan  $G_{23}^*$  est symétrique par rapport à la direction  $45^\circ$  où l'influence des élargissements est la plus sensible. Cette influence s'effectue principalement pour les élargissements de 1 à 30. La forme de renfort la plus performante en cisaillement est aussi la plaque dont l'évolution est confondue à celle donnée par le modèle de Voigt. Le même phénomène que pour  $E_3''$  est constaté pour  $G_{23}''$  : un maximum est atteint aux alentours de l'élargissement de 6, et il est possible de distinguer deux familles d'évolutions.

Le renfort en plaques, comme dans les deux cas précédents, donne les valeurs minimales de la partie imaginaire du module .

## Conclusions

Pour ce tissu élémentaire simplifié, l'influence de la forme des inclusions est particulièrement sensible pour les grandeurs techniques où intervient la direction 3, elle est importante pour les faibles angles d'inclinaison des renforts. Pour les allongements des microfibrilles ou des cristallites décrits dans la littérature qui peuvent, de plus, être modifiés par les conditions physiques de l'environnement (humidité), des variations allant de quelques unités à la fibre continue doivent être envisagées. Pour de telles variations d'allongements des variations de 1 à 4 sont possibles pour  $E_3'$  elles peuvent être de plus de 10 pour  $E_3''$  et pour  $\eta_3$ . Des variations du même ordre de grandeur sont constatées pour le module de cisaillement dans le plan.

L'influence de l'allongement sur les parties réelles des modules est d'allure monotone alors que dans le cas des parties imaginaires il existe un maximum pour un allongement de l'ordre de 6 .

Les modèles élémentaires ne constituent pas des bornes pour les parties imaginaires par contre ils encadrent toujours les facteurs de perte. C'est le renfort en plaques qui donne la meilleur raideur et le facteur de perte le plus faible dans une direction quelconque contenue dans le plan du renfort, par contre c'est la forme de renfort la moins performante dans une direction perpendiculaire au plan et donc la forme de renfort conférant au composite la plus grande anisotropie.

Le facteur de perte  $\eta_3$  est relativement peu sensible à l'angle d'inclinaison des renforts jusqu'à  $10^\circ$  mais évolue rapidement au-delà.

## I-4 LIAISON FACTEUR DE FORME ET TRANSITIONS

### 1. Etude de $\eta_3$ autour de la transition pour le tissu élémentaire simplifié:

Le tissu précédent possède une matrice viscoélastique qui présente une transition à une température de 279,8°K.

La figure I-22 donne les évolutions du facteur de perte  $\eta_3$  en fonction de la température pour différents élargissements des renforts dont l'angle d'inclinaison  $\hat{\alpha}$  vaut 10°. Les calculs autocohérents ont été réalisés en cinq étapes.

Il existe un léger décalage de la température pour laquelle il apparaît un maximum de facteur de perte pour les différentes réponses calculées. Ce décalage est de l'ordre du degré au maximum. Il représente la différence de température de transition pour le composite à renfort sphérique et celui à renfort en plaques. Les modèles de Reuss et de Voigt encadrent de nouveau les évolutions de  $\eta_3$ . Le décalage des températures de transition pour ces deux modèles est aussi de l'ordre du degré.

Fig I-22

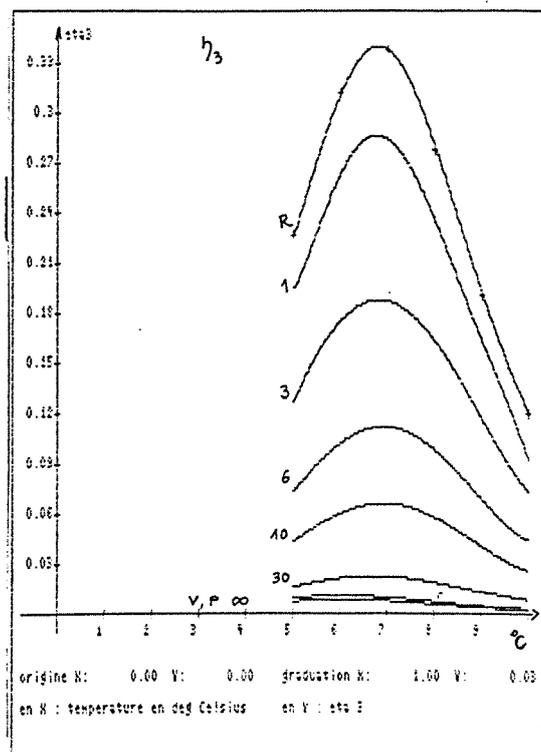
Evolution de  $\eta_3$  en fonction de la température pour le tissu élémentaire simplifié ( $\hat{\alpha} = 10^\circ$  à 10 Hz)

R : Reuss

V : Voigt

P : Plaque

Les courbes sont repérées par l'allongement.



## 2. Cas d'une matrice à plusieurs phases viscoélastiques.

Le caractère viscoélastique du matériau bois est dû principalement la présence des deux phases viscoélastiques lignine et hemicellulose. La lignine est fortement présente dans la lamelle mitoyenne. Dans la couche S2, certains modèles donnent des formes lenticulaires à ces phases viscoélastiques. (Scallan, Boyd-Foster). Il est donc intéressant de tester l'influence de variations de forme d'inclusions viscoélastique sur les évolutions autour des transitions.

Le composite est constitué de deux phases viscoélastiques dont les comportements viscoélastiques sont décrits par des modèles identiques au précédent (modèle de Zener activé thermiquement), il est donc caractérisé par les grandeurs  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $C_1$ ,  $\delta W_1$  et  $E_{21}$ ,  $E_{22}$ ,  $C_2$ ,  $\delta W_2$  :

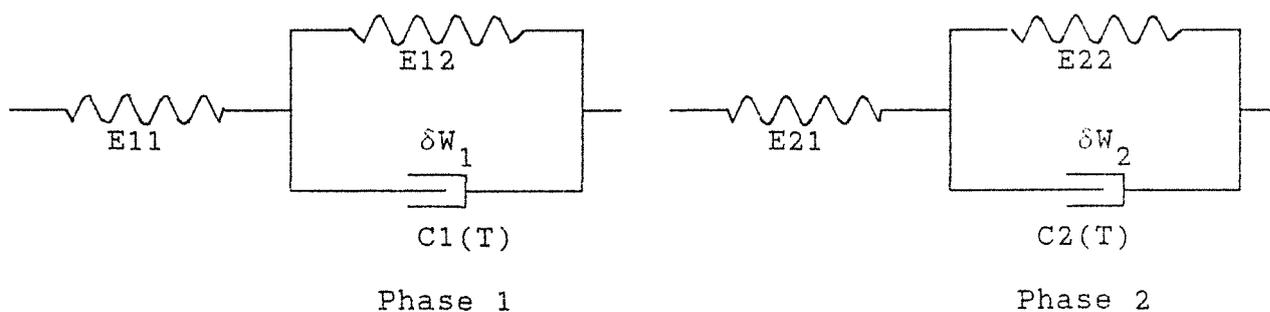


fig I-23 Les deux phases viscoélastiques.

### 2.1 Etude des maximums de facteur de perte

La relation d'ordre entre les facteurs de perte des modèles de Voigt et Reuss : respectivement  $\eta_v$  et  $\eta_r$  peut changer de sens en fonction des caractéristiques du matériau qui transite. Le paramètre le plus sensible dans ce cas est la raideur  $E_{i2}$  du matériau  $i$  qui transite. Prenons pour ce test un matériau équilibré (50%-50%) tel que  $E_{11}$

=E21 = E22 = 4 Gpa (grandeur-type matrice lignine-hémicellulose ),  
des énergies d'activation  $\delta W1=350$  kJ/mol et  $\delta W2=100$  kJ/mol et des  
amortissements à 20°C tels que  $C1=10^8$  Ns/m et  $C2=10^5$  Ns/m. La  
figure I-24 présente les évolutions des facteurs de perte à  
une transition, pour les deux modèles élémentaires et différentes  
formes d'une des phases viscoélastiques, en fonction de la raideur  
E12 de la phase qui transite. (Les calculs autocohérents sont  
effectués directement : le calcul par étapes donne des résultats  
identiques)

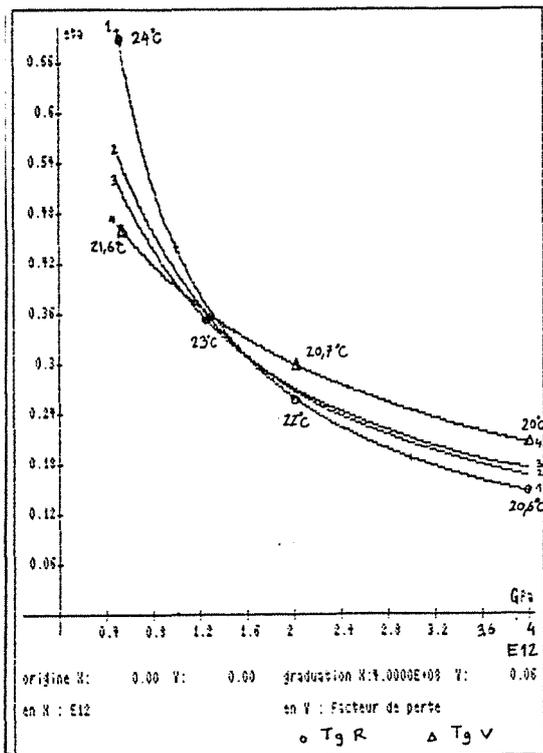


fig I-24

Evolution des facteurs de perte d'une matrice à 2 phases viscoélastiques à une transition en fonction de la raideur E12 pour différentes géométries de la phase 1 (à 10 Hz)

Commentaires:

L'inversion de la relation d'ordre apparaît pour une raideur E12 inférieure à 2 Gpa. Les facteurs de perte de la matrice biphasée restent encadrés par les évolutions données par les modèles de Voigt et Reuss qui se coupent pour  $E12 \approx 1,2$  Gpa. Le modèle de Voigt donne une évolution parfaitement confondue à celle du facteur de perte dans la direction longitudinale dans le cas des allongements supérieurs à 100 et dans le cas de la phase en plaques. Le modèle de Reuss rend compte de l'évolution du facteur de perte transversal dans une géométrie en plaques.

- o : Tg cas modèle de Reuss
- Δ : Tg cas modèle de Voigt
- 1 :  $\eta$  cas du modèle de Reuss et  $\eta$  transversal cas des renfort en plaques
- 2 :  $\eta$  transversal cas de l'allongement de 100
- 3 :  $\eta$  cas de l'allongement de 1
- 4 :  $\eta$  cas du modèle de Voigt et  $\eta$  longitudinal cas  $al=100$  et  $\eta$  plaque pour direction  $\epsilon$  plaque

Etude de l'influence de la forme d'une phase sur les températures de transition du composite ( à 10 HZ )

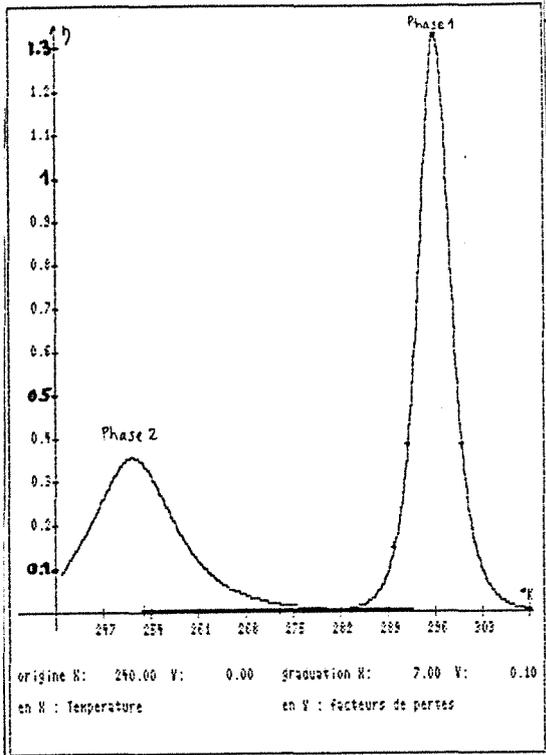


fig I-25

$\eta$ (température) pour les 2 phases constitutives.

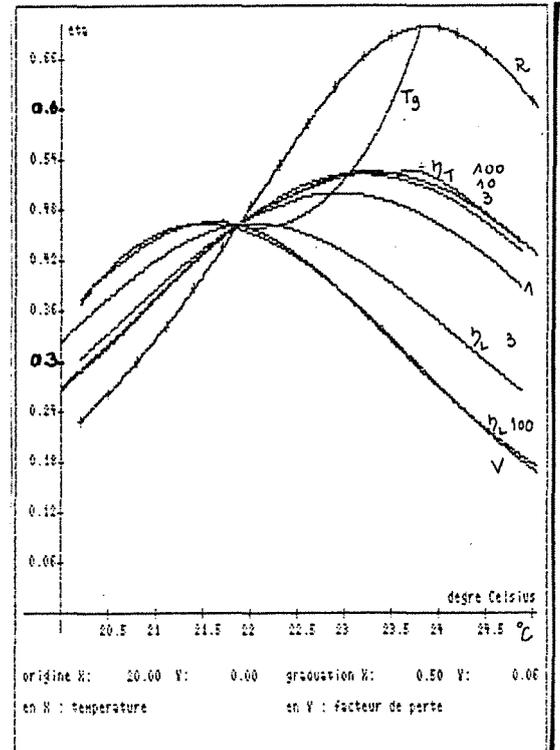


fig I-26

$\eta$ (température) composite

- $\eta_T$  : facteur de perte transversal
- $\eta_L$  : facteur de perte longitudinal
- R : Reuss; V : Voigt; 100,10,3 : al
- Tg : Températures de transition

Le composite est réalisé à partir de deux phases viscoélastiques dont les caractéristiques sont les mêmes que celles du cas précédent, avec une raideur  $E_{12}$  fixée à 500 Mpa. La phase 1 transite alors à 296°K et la phase 2 à 251°K (fig I-25). La figure I-26 présente les évolutions des facteurs de perte du composite en fonction de la température dans la zone de la transition de la phase 1 à laquelle on affecte différents facteurs de forme. On constate une influence sensible de la forme de la phase sur le

comportement du composite. Les deux comportements limites coïncident avec les modèles de Reuss et Voigt. Le modèle de Voigt correspond à l'évolution du facteur de perte dans la direction longitudinale du composite à partir d'un élanement de 100, dans ce cas la température de transition est de 294,6°K.

Le modèle de Reuss correspond à l'évolution du facteur de perte dans la direction transversale du composite dans le cas de la phase en plaques. La transition apparaît alors aux alentours de 297°K.

Le facteur de forme des phases constitutives d'un composite affecte donc, non seulement ses facteurs de perte, mais aussi les températures de transition. Comme lors de l'étude de l'évolution des grandeurs techniques, les plus grandes différences sont celles qui existent entre les valeurs obtenues pour les deux directions remarquables du composite en plaques.

La différence de température de transition est au maximum de 2° pour les deux phases utilisées ici. Elle correspond aux deux agencements géométriques extrêmes : agencement série ou parallèle modélisés par les lois de mélange de Reuss ou Voigt. Soit  $\Delta T_g$  cette différence de température maximum, elle peut changer selon les caractéristiques des phases en présence : elle augmente avec la raideur instantanée du matériau qui transite (matériau 2) : figure I-29, elle augmente avec la valeur de l'amortissement à 20°C de ce matériau : figure I-28, elle augmente quand la raideur en parallèle au mécanisme d'amortissement E22 diminue, c'est-à-dire quand le comportement du solide tend vers celui d'un fluide visqueux : figure I-30, elle croît quand l'énergie d'activation  $\delta W_2$  diminue : figure I-31. Elle est par contre peu sensible aux variations des caractéristiques du second matériau.

Evolution de la différence de la température de transition obtenue pour des agencements géométriques de phases extrêmes en fonction de l'amortissement C22 (à 10Hz)

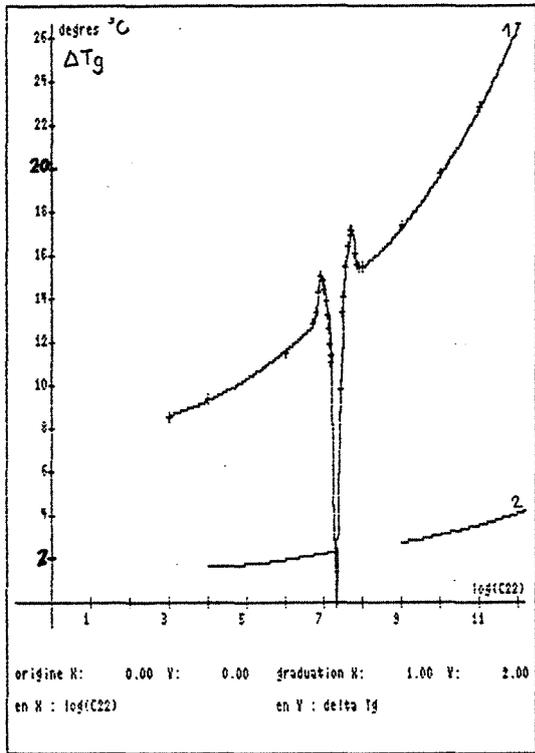


fig I-27

$\Delta T_g(C22)$

Courbe 1 :  $E11=E21=4\text{Gpa}$ ,  $E12=E22=10^8\text{Pa}$ ,  $\delta W_1=350\text{kJ/mol}$ ,  $\delta W_2=100\text{kJ/mol}$ ,  $C1=10^8\text{Ns/m}$

Courbe 2 : id sauf pour  $E21=4\text{Gpa}$

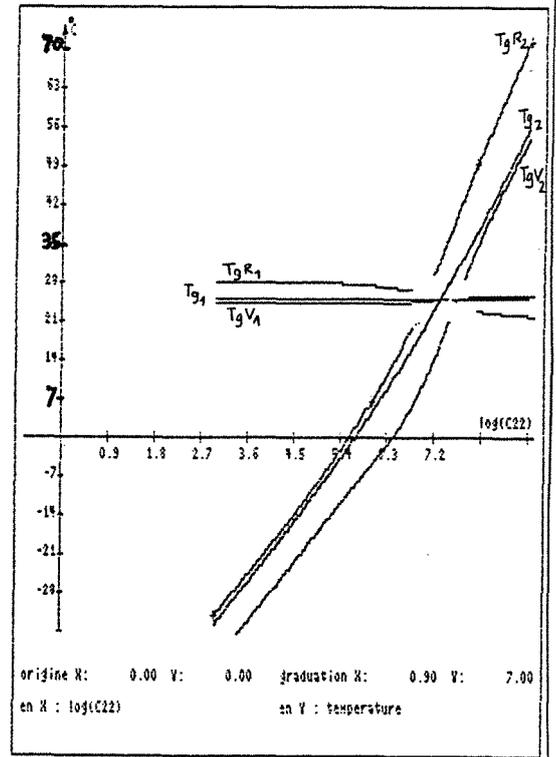


fig I-28

Evolution des températures de transition en fonction de C22

$E11=E21=4\text{Gpa}$ ,  $E12=E22=10^8\text{Pa}$ ,  $\delta W_1=350\text{kJ/mol}$ ,  $\delta W_2=100\text{kJ/mol}$ ,  $C1=10^8\text{Ns/m}$

i=1 ou 2 : repère de la phase  
V : cas du modèle de Voigt  
R : cas du modèle de Reuss

Dans le cas de la figure I-27 l'allure globale de la courbe est une évolution croissante. Il existe une zone de perturbation qui correspond à la période de confusion du pic de transition du mécanisme évolutif (phase 2) avec l'autre qui reste fixe pour chacun des modèles (modèle de Reuss puis de Voigt),  $\Delta T_g$  s'annule durant cette zone quand les températures de transition des deux phases sont égales. Ces évolutions respectent la relation d'ordre  $T_{gR_i} \geq T_{g_i} \geq T_{gV_i}$  : figure I-28.

Evolutions  $\Delta T_g(E21)$ ,  $\Delta T_g(E22)$ ,  $\Delta T_g(\delta W_2)$  cas des géométries extrêmes

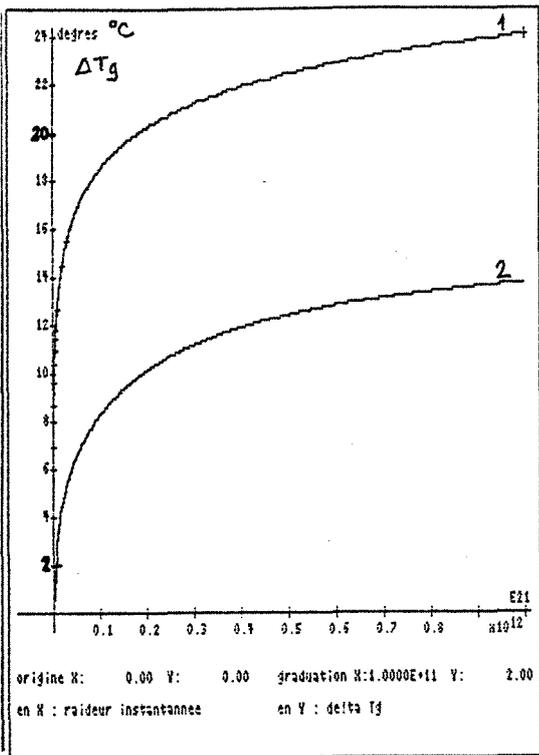


fig I-29  
 $\Delta T_g(E21)$

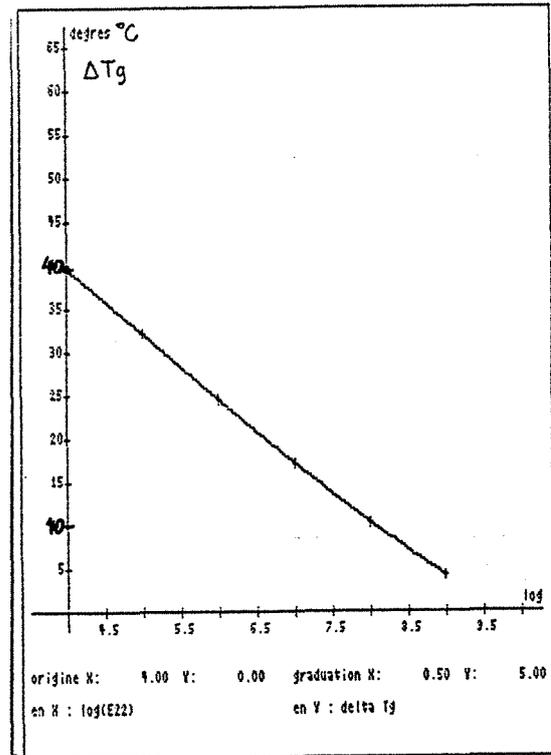


fig I-30  
 $\Delta T_g(E22)$

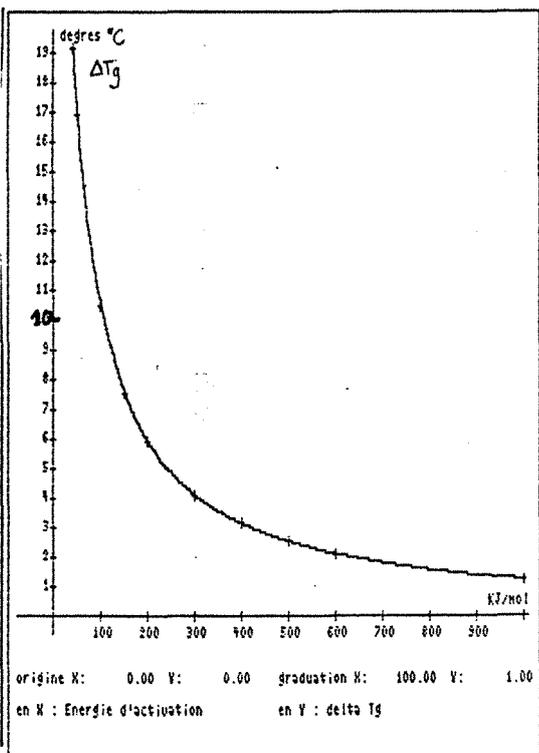


fig I-31  
 $\Delta T_g(\delta W_2)$

fig I-29 :

Courbe 1 :  $E11=E12=E22=4\text{Gpa}$   
 $\delta W_1=350\text{kJ/mol}$ ,  $C1=10^8\text{Ns/m}$   
 $C2=10^5\text{Ns/m}$ ,  $\delta W_2=100\text{kJ/mol}$

Courbe 2 : id sauf pour  
 $E11$  et  $E22 = 0,1\text{ Gpa}$   
 Les évolutions sont d'allure  
 logarithmique .

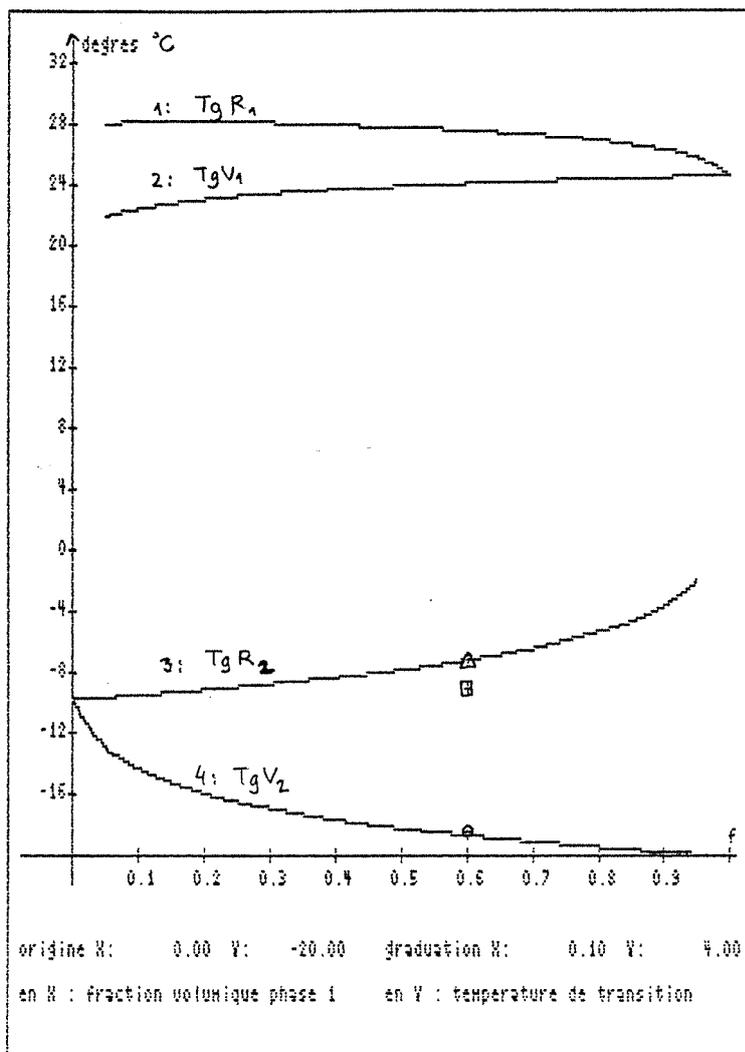
figI-30 :

$E11=E21=4\text{Gpa}$ ,  $E12=10^8\text{Pa}$   
 $\delta W_1=350\text{kJ/mol}$ ,  $\delta W_2=100\text{kJ/mol}$ ,  
 $C1=10^8\text{Ns/m}$ ,  $C2=10^5\text{Ns/m}$

fig I-31 :

$E11=E21=4\text{Gpa}$ ,  $E12=E22=10^8\text{Pa}$   
 $\delta W_1=350\text{kJ/mol}$ ,  $C2=10^5\text{Ns/m}$   
 $C1=10^8\text{Ns/m}$

Evolution des températures de transition pour les agencements géométriques extrêmes en fonction de la fraction volumique des



phases ( à 10 HZ )

Tg

- 1: Evolution de Tg phase 1 cas de l'agencement série
- 2: Evolution de Tg phase 1 cas de l'agencement parallèle
- 3: Evolution de Tg phase 2 cas de l'agencement série
- 4: Evolution de Tg phase 2 cas de l'agencement parallèle

+ : Calculs autocohérents

- △: -7°C Tg direction  $\perp$  plaque
- ⊞: -9°C Tg allongement de 3
- ⊕: -18,5°C Tg direction  $\in$  plaque

Caractéristiques des phases

E1 = E21 = 4Gpa, E12 = E22 = 0,1Gpa  
 $\delta W_1 = 350 \text{ kJ/mol}$ ,  $\delta W_2 = 100 \text{ kJ/mol}$   
 C1  $10^8 \text{ Ns/m}$ , C2 =  $10^5 \text{ Ns/m}$

Figure I-32

Le composite est constitué de deux phases viscoélastiques. Les courbes représentatives des évolutions des  $T_g$  pour les deux agencements géométriques de phase extrêmes, se rejoignent, pour chaque phase à sa température de transition : 24,7°C pour la phase 1 et -9.66°C pour la phase 2. Elles donnent l'écart maximum, à une concentration donnée, de la température de transition lié à la forme de la phase dans une direction donnée. Les points donnent les résultats de calculs autocohérents effectués sur un composite avec

une phase 2 ayant un allongement de 3 où la température de transition est identique dans toutes les directions et un composite dont la phase 2 est plane pour lequel les températures de transition sont différentes selon la direction et confondues avec celles données par les modèles de Voigt et Reuss.

### Conclusions

La forme d'une phase peut aussi affecter la valeur de la température à laquelle apparaît un maximum de facteur de perte. Cette sensibilité aux facteurs de forme est liée aux caractéristiques viscoélastiques de la phase. Pour un composite donné, une anisotropie de transition peut donc résulter d'une anisotropie géométrique. La plus grande anisotropie est donnée par la forme d'une phase en plaques, cette anisotropie est alors d'autant plus marquée, que le matériau qui transite, est en faible proportion au sein du composite. Dans le cas du matériau bois, cet effet d'anisotropie peut être envisagé pour la phase viscoélastique de lignine fortement présente dans la lamelle mitoyenne (fig I-8 chapitre  $\alpha$ ) avec une fraction volumique égale au maximum à 25% du volume de matière (hors vides). Les courbes précédentes établies pour des composites viscoélastiques à caractéristiques proches de celles de la matrice hémicellulose - lignine donnent des ordres de grandeur de cette anisotropie de température (quelques degrés).

## II LE CERNE

### II-1 GENERALITES

Le tissu constitutif du cerne ou du rayon ligneux peut être considéré comme un ensemble d'inclusions (cellules : trachéïdes ou fibres) dont la phase matérielle est décrite par le tissu élémentaire précédent (couches S1 ,S2 ,S3) et le lumen par une phase vide ( de caractéristiques viscoélastiques nulles ou quasi-nulles). Ces inclusions sont liées entre-elles par une phase viscoélastique (couche M+P ) jouant le rôle de matrice.

L'inclusion est aussi soumise à des variations dimensionnelles importantes (voir chapitre  $\alpha$ ) dont l'influence peut être étudiée grâce au schéma autocohérent. les deux facteurs de forme et leur domaine de variation ont précédemment été décrits : l'allongement qui représente le rapport entre la longueur de la cellule sur son diamètre moyen et l'écrasement qui représente le rapport entre le diamètre tangentiel et le diamètre radial. L'allongement varie au maximum de 5 à 250. L'écrasement varie en général de 1 à 6.

Le tissu élémentaire sera ici décrit par 12 inclusions (structure alvéolaire en carré).

Deux méthodes sont possibles pour simuler le cerne :

-Une première méthode consiste à calculer au cours d'un premier temps, les caractéristiques effectives d'un matériau constitué d'une inclusion fibre pleine en tissu élémentaire dans une matrice représentant les couches M et P, le deuxième temps consiste alors à vider par étapes le matériau viscoélastique obtenu pour tenir compte de la partie creuse de la cellule (lumens).

-La deuxième méthode consiste à tenir compte dans le premier temps des cavités dans le tissu élémentaire, le deuxième temps se

composant alors du calcul des grandeurs effectives de l'inclusion-fibre creuse dans une matrice M+P.

Les deux méthodes donnent des résultats très proches les uns des autres. Dans la deuxième méthode les caractéristiques obtenues au cours du premier temps sont très proches de celles obtenues lors du deuxième.

Pour chacune des deux méthodes, l'approche autocohérente par étapes est nécessaire. Dans le cas du bois initial où la proportion de vides est très grande 30 à 80 étapes sont nécessaires (voire 100 pour obtenir des coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  convenables dans le cas de 90% de vides). La faible proportion de la matrice du deuxième temps de la deuxième méthode nécessite au moins un calcul autocohérent en 30 étapes.

## II-2 INFLUENCE DES FACTEURS DE FORMES SUR LES PRINCIPALES GRANDEURS TECHNIQUES

La simulation s'effectue sur un bois initial et un bois final typiques dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

Nature du Cerne	% S1 et à	% S2 et à	% S3 et à	% M+P	% de vides sur mat.totale
Bois Initial	13% 80°	63% 40°	9% 70°	15%	75%
Bois Final	8% 80°	80% 10°	5% 70°	7%	10%

à: angle des cristallites de diamètre moyen de 35Å et de longueur de 30nm. Mélange 50%-50% fibres-matrice.

INFLUENCE DE L'ALLONGEMENT DES FIBRES SUR LES MODULES COMPLEXES  
BOIS INITIAL (BI) ET BOIS FINAL (BF) ( 10Hz 15°C )

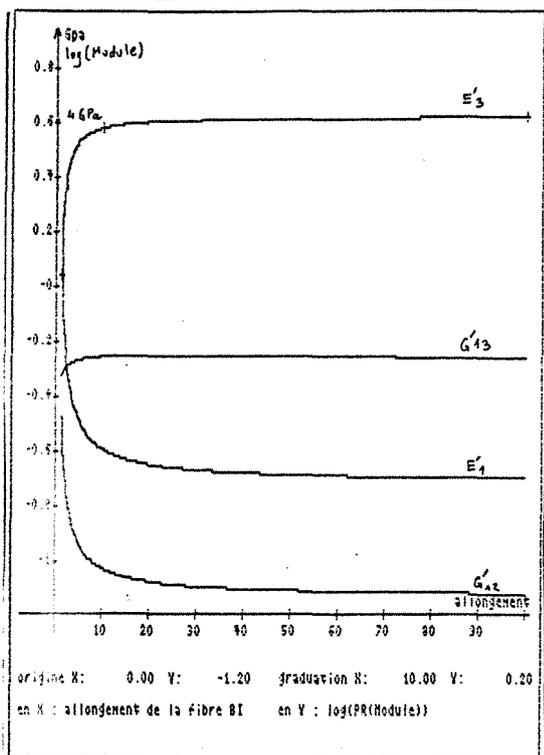


fig II-1

Parties réelles bois initial

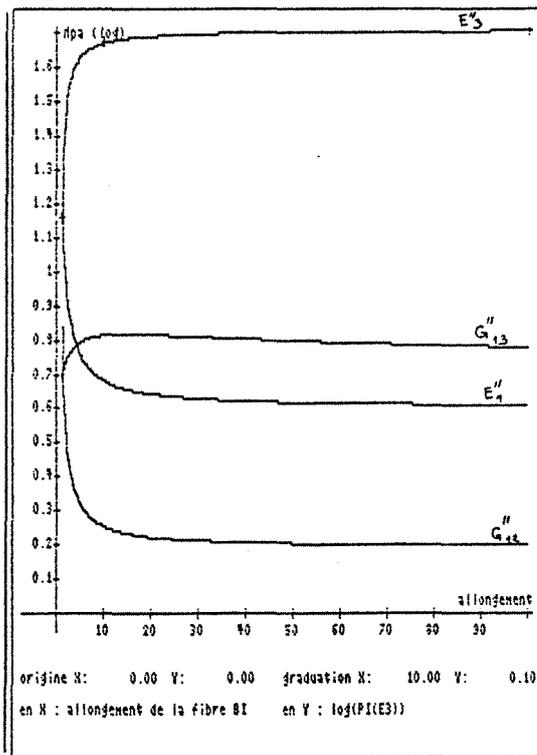


fig II-2

Parties imaginaires bois initial

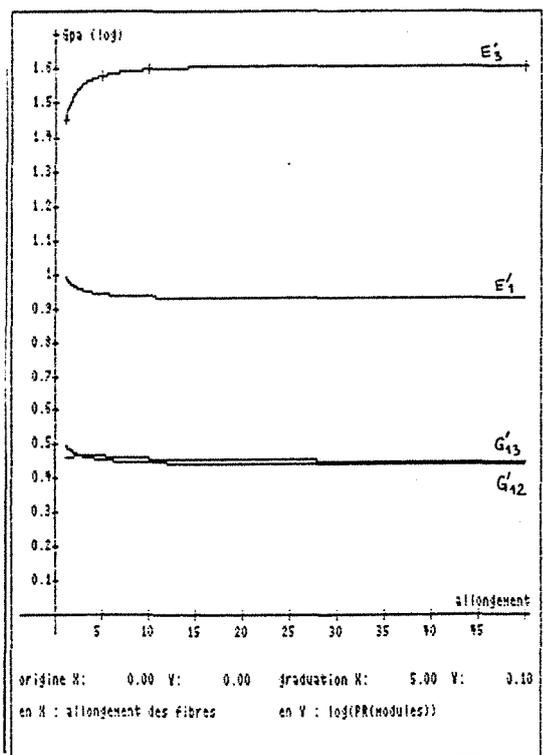


fig II-3

Parties réelles bois final

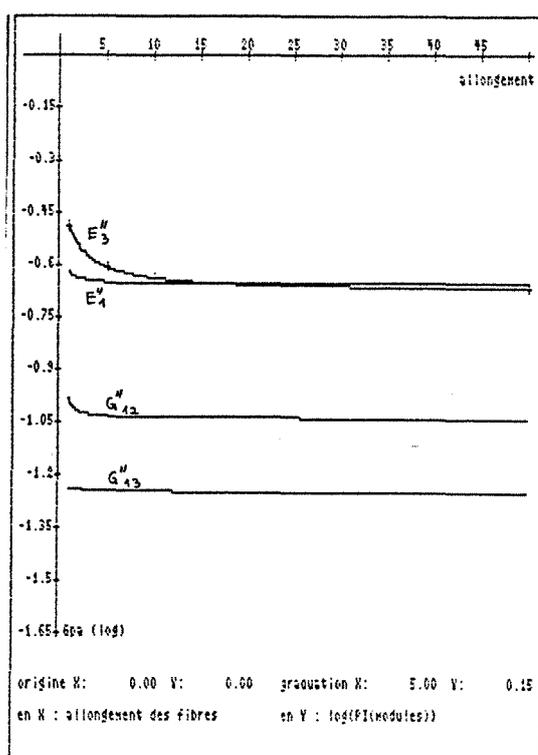


fig II-4

Parties imaginaires bois final

C'est dans la zone d'allongement allant de 1 à 10 que s'effectuent les plus grandes progressions pour les différentes grandeurs testées. La progression des grandeurs est plus importante entre les allongements de 10 et 20 qu'entre l'allongement de 20 et la fibre quasi-continue, sauf pour la partie réelle du module d'Young longitudinal et le facteur de perte transversal  $\eta_1$  qui continuent de progresser de façon sensible au delà d'un allongement de 20. Les 3 premières colonnes du tableau suivant présentent les progressions relatives :  $(\text{module}(a1) - \text{module}(a2)) / (\text{module max} - \text{module mini})$ . La dernière colonne donne la valeur de la progression relative obtenue pour des allongements allant de 5 à 250 qui est la plage de variation retenue pour les cellules :

$$(\text{module}(250) - \text{module}(5)) / \text{module}(5).$$

Comme prévu, les grandeurs techniques sont d'autant plus sensibles aux facteurs de forme que la présence de vides est importante.

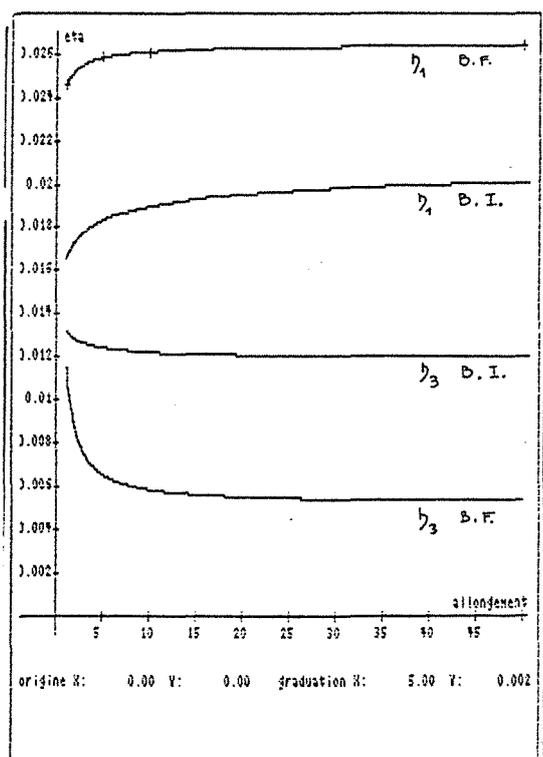


fig II-5  
 $\eta(a1)$

Grand. techn.	[1; 10]	[10; 20]	[20; ∞]	[5; 250]
E'3 BI	86%	6%	8%	32%
E"3 BI	86%	8%	6%	32%
E'1 BI	-94%	-3%	-3%	-38%
E"1 BI	-94%	-3%	-3%	-32%
G'12 BI	-94%	-4%	-2%	38%
G"12 BI	-96%	-3%	-1%	-23%
G'13 BI	100%	0%	0%	4%
G"13 BI	100%	-3%	-32%	1%
η3 BI	77%	15%	8%	3%
η1 BI	65%	8%	27%	11%
E'3 BF	88%	2%	10%	8%
E"3 BF	90%	7%	3%	12%
E'1 BF	-100%	-6%	0%	-3%
E"1 BF	-100%	0%	0%	-5%
G'12 BF	-88%	-6%	-6%	-3%
G"12 BF	-87%	-13%	0%	-2%
G'13 BF	valeurs ~ constantes			
G"13 BF	valeurs ~ constantes			
η3 BF	-91%	-7%	-2%	-18%
η1 BF	79%	10%	11%	2%

Progression relative des grandeurs pour différentes zones d'allongements

INFLUENCE DE L'ECRASUREMENT DES FIBRES SUR L'ANISOTROPIE TRANSVERSALE.

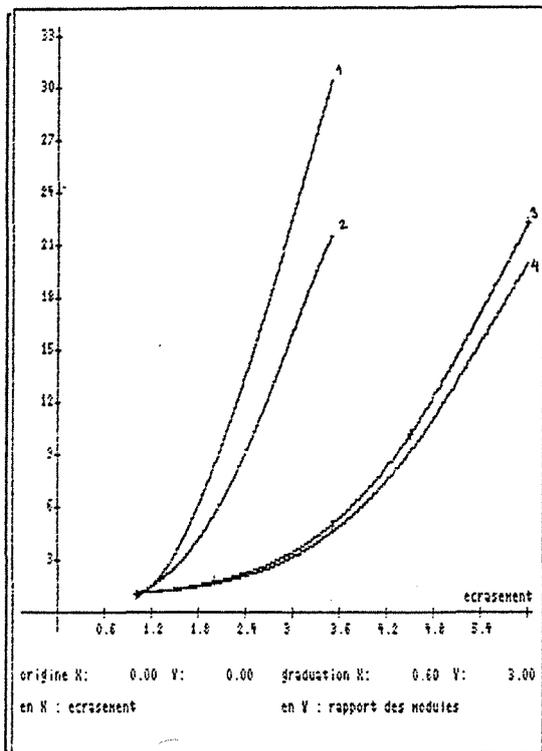


FIG II-6

$$\frac{E'_T}{E'_R} \quad \frac{E''_T}{E''_R}$$

fonction de l'écrasement des fibres

- 1 :  $E'_T/E'_R$  Bois Initial
- 2 :  $E''_T/E''_R$  Bois Initial
- 3 :  $E'_T/E'_R$  Bois Final
- 4 :  $E''_T/E''_R$  Bois Final

Le tissu constitutif des cernes ou des rayons ligneux est isotrope transverse si les cellules ont un facteur d'écrasement  $\phi_T/\phi_R$  égal à 1. L'écrasement de la cellule détruit cette anisotropie en créant des relations d'ordre sur des grandeurs qui étaient égales :  $E'_T > E'_R$ ;  $E''_T > E''_R$ ;  $\eta_R > \eta_T$ ;  $G'_{LT} > G'_{LR}$ ;  $G''_{LT} > G''_{LR}$ ;  $\nu_{TR} > \nu_{RT}$ . La figure II-6 présente les évolutions des rapports  $E'_T/E'_R$  et  $E''_T/E''_R$  en fonction de l'écrasement pour un bois initial et un bois final. Les rapports d'anisotropie sur les coefficients de Poisson  $\nu_{TR}/\nu_{RT}$  suivent les mêmes évolutions. Les rapports sur les modules de cisaillement  $G'_{LR}/G'_{LT}$  et  $G''_{LR}/G''_{LT}$  sont moins sensibles à l'écrasement (2,2 maximum dans le cas du bois final). Il en est de même pour les autres rapports d'anisotropie.

Comme pour l'allongement, c'est aussi le bois initial le plus sensible aux variations d'écrasement, mais ce facteur de forme affecte surtout le bois d'été. Pour un bois d'été le rapport maximum d'anisotropie sur les modules d'Young est de l'ordre de 20.

## II-3 ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA DENSITE SUR LES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES DU CERNE

### II-3-1 Généralités

Le matériau bois grâce à la nature alvéolée de sa microstructure utilise au mieux la matière organique. La densité (ou la masse volumique) est alors un paramètre essentiel pour le matériau, d'une part, du fait qu'elle définit la quantité de matière contenue dans un volume donné de bois, mais surtout du fait de son influence sur les caractéristiques viscoélastiques macroscopiques du matériau.

La nature des évolutions des grandeurs techniques  $G^*$  sont des fonctions puissance de la densité ( $G^*(d^\zeta)$ ) l'exposant  $\zeta$  dépend du type de sollicitation de la matière il donc lié à des facteurs de forme et sera différent selon la direction considérée (figure II-6).

### Le problème d'optimisation de l'arbre

Si on considère que la fonction mécanique de l'arbre est de porter au mieux ses feuilles à la lumière (envergure maximum des branches inférieures, hauteur maximum) avec une masse de matière organique donnée, le problème est alors de chercher une microstructure adaptée à la réalisation d'une structure autoportante optimisée i.e. qui résiste au mieux à la flexion et au flambement.

#### \* Le problème de flexion simplifié

On dispose d'une masse  $M$  d'une matière possédant le module d'Young  $E_m$  et la masse volumique  $\rho_m$  pour réaliser le matériau alvéolé, de module d'Young  $E$  et de masse volumique  $\rho$ , constitutif d'une poutre console de longueur  $L$  et de diamètre  $D$ . Le problème élémentaire de R.D.M. conduit à une flèche en bout de poutre:

$$f = \frac{gL^5 \pi \rho^2}{2EM}$$

Si on considère l'ensemble des poutres de flèches relative  $f/L$  constante, on trouve pour la longueur  $L$  la relation classique

([16], [17]) :

$$L=K \left(\frac{M}{g}\right)^{1/4} \left(\frac{E}{\rho^2}\right)^{1/4} \quad \text{III-3-1}$$

où K est une constante. L'envergure L sera maximum pour une masse M du matériau alvéolée ayant le rapport  $E/\rho^2$  maximum.

\*cas du flambement

En considérant la masse M de la poutre comme étant la cause de la charge critique la formule d'Euler conduit à

$$g = \frac{n^2 EM}{4\rho^2 L^4}$$

où n est le coefficient numérique dépendant des conditions aux limites et des modes de chargement de la poutre. On retrouve la même relation que précédemment et la hauteur L maximum sera donc elle aussi obtenue pour un rapport  $E/\rho^2$  maximum.

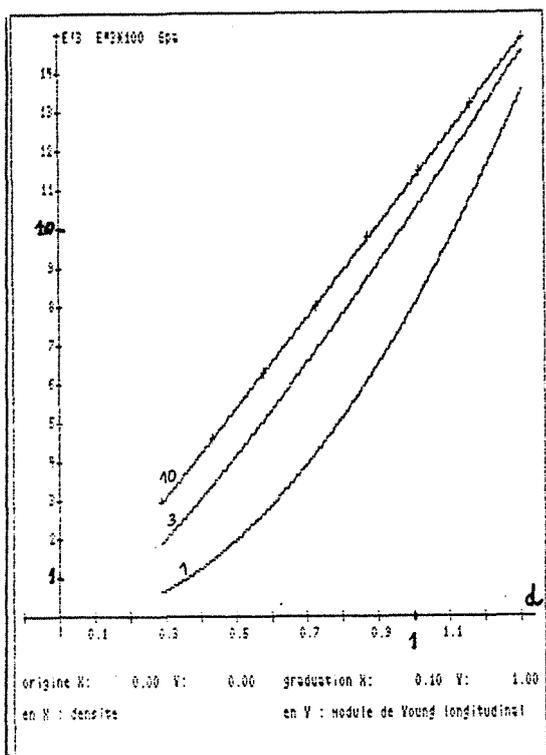
Il faut donc une variation des modules en fonction de la puissance de la densité ayant un exposant  $\zeta$  inférieur à 2 pour qu'il existe un gain de performance pour le matériau alvéolée par rapport à son matériau constitutif.

III-3-2 Cas de la direction longitudinale.

Dans la direction des fibres la valeur minimum de  $\zeta$  est 1 ce qui correspond à une loi de mélange de type Voigt entre matière et cavités qui ne sera atteinte que si les fibres sont suffisamment allongées. La figure II-6 montre que la linéarité de l'évolution  $E'_3(d)$  (et de  $E''_3$ ) est atteinte dès que les fibres atteignent un allongement de 10 qui est une valeur inférieure à la plupart de celles que l'on rencontre pour les fibres d'un bois standard.

Les calculs autocohérents sont effectués selon le schéma proposé au paragraphe précédent : les inclusions vides (lumens) sont introduites par étapes dans un matériau représentant le tissu élémentaire

(couches S1, S2, S3 ). La densité du matériau est calculée à partir d'une densité de 1,45 pour la matière ligneuse sans vides. Le nombre d'étapes du calcul autocohérent dépend de la fraction volumique de vide : (5 étapes dans le cas de 10% de vides à 100 étapes dans le cas de 90% de vides). Dans le cas élastique des modèles prédictifs de type statistique ont été construits sur le bois massif [3] ou au niveau du cerne [15]. Les modèles autocohérents seront confrontés à ces modèles empiriques.(figures II-7 II-8 II-9)



Evolution de la partie réelle et imaginaire du module d'Young dans la direction des fibres en fonction de la densité pour différents allongements du lumen.

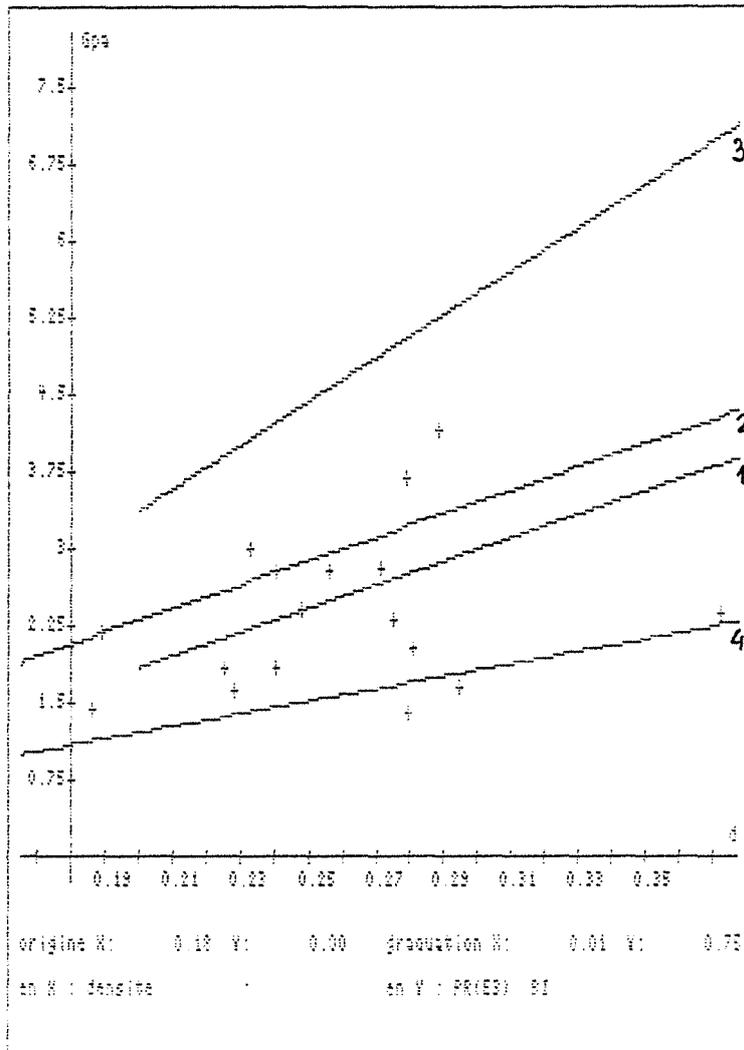
Les courbes sont repérées par l'allongement  $\alpha$

fig II-6

Le tissu élémentaire est celui d'un bois initial décrit au paragraphe II-2 (à 10Hz et 15°C).

Parties réelles et parties imaginaires ont le même type d'évolution :  $E'_3(d)$  et  $E''_3(d)*100$  sont pratiquement confondues.

EVOLUTION DE  $E'_3$  ET DE  $E''_3$  EN FONCTION DE LA DENSITE  
CAS DU BOIS INITIAL (10 Hz 15°C ALLONGEMENT LUMEN DE 100)



- + :  $E'_3$  points expérimentaux  
( sur Sugi tiré de [15])
- 1: Régression sur les points expérimentaux
- 2:  $E'_3$  Calculs autocohérents
- 3:  $E'_3$  droite de régression sur Epicea bois juvénile  
(Tiré de [15])
- 4:  $E''_3$  Calculs autocohérents  
( $E''_3$  est multiplié par 50)

Figure II-7

Le modèle autocohérent par étapes donne une évolution très semblable à celle obtenue sur le bois initial de Sugi.

Partie réelle et partie imaginaire évoluent linéairement en fonction de la densité.

EVOLUTION DE  $E'_3$  EN FONCTION DE LA DENSITE CAS DU BOIS FINAL

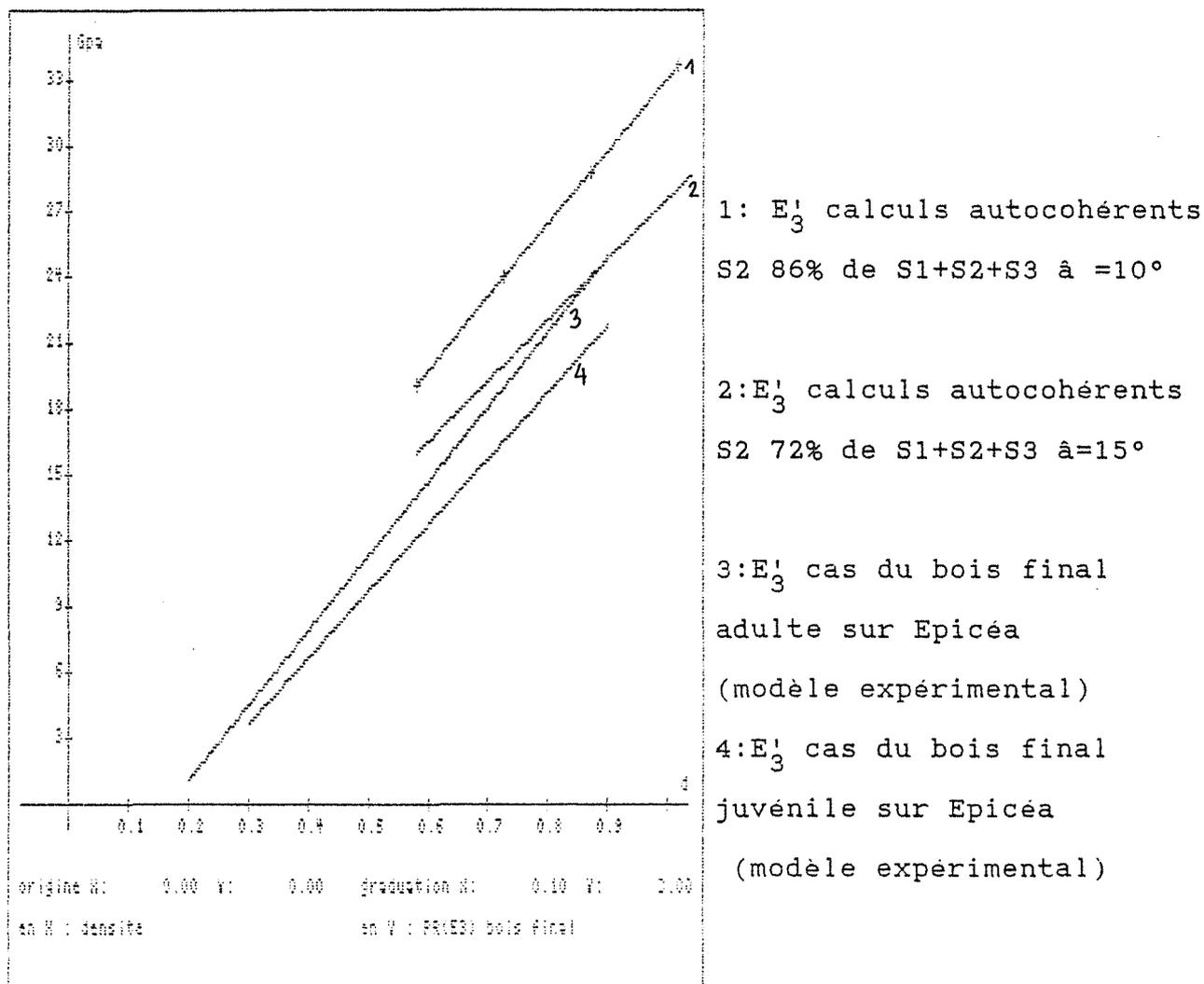


Figure II-8

Les modélisations fournissent des évolutions semblables à celles données par les régressions obtenues sur le bois final d'Epicéa ([15]). Les droites 1 et 3 et les droites 2 et 4 ont mêmes pentes. Les modèles donnent des raideurs plus importantes dans ce cas, mais plus faibles dans le cas d'une confrontation avec les modèles obtenus sur le bois total multi-essences (Modèle de Guitard et El- Amri [3]) : figure II-9

EVOLUTION DE  $E'_3$  EN FONCTION DE LA DENSITE. CONFRONTATION AVEC LES  
MODELES EXPERIMENTAUX DE BOIS TOTAL

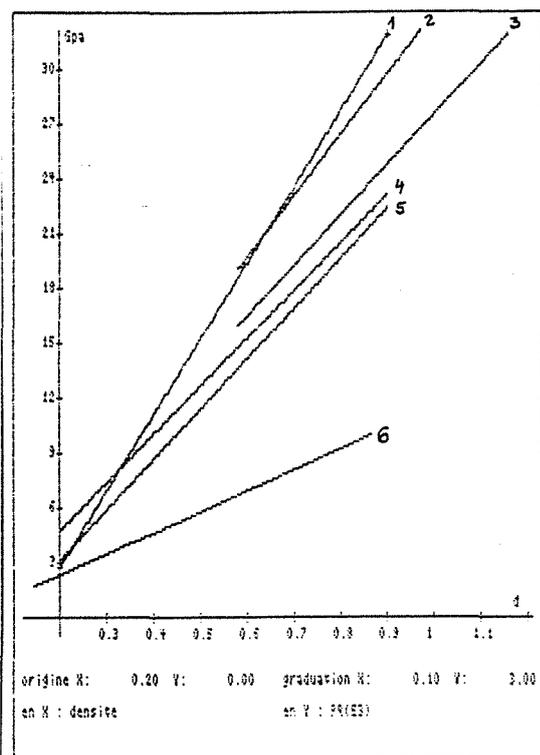


Figure II-9

- 1:Modèle de Guitard-El Amri  
Bois total multi-essence  
résineux
- 2:Calculs autocohérents  
S2 80% à=10° Bois final
- 3:Calculs autocohérents  
S2 72% à=15° Bois final
- 4:Modèle de Reboul-Leban  
bois total sur Epicéa
- 5:Modèle de Chantre  
bois total Epicéa
- 6:Calcul autocohérents  
Bois initial

Remarque :

Pour rendre les comparaisons graphiques plus lisibles, seules les droites de régression ont été tracées mais il faut avoir à l'esprit l'importance de la dispersion des points expérimentaux : figure II-9a

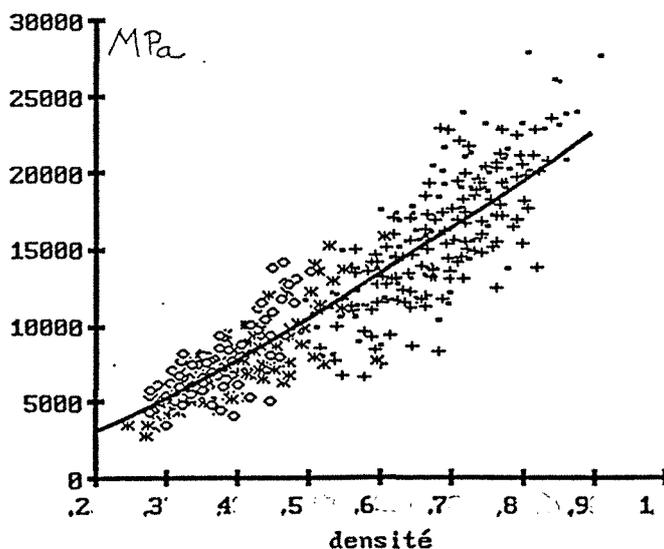


Fig II-9a

Bois total Epicéa  
 points expérimentaux  
 et Modèle de  
 Reboul-Leban

II-3-3 Module d'Young transversal, modules de cisaillement  
EVOLUTION DES PARTIES REELLES ET IMAGINAIRES DU MODULE D'YOUNG  
TRANSVERSAL ET DES MODULES DE CISAILLEMENT

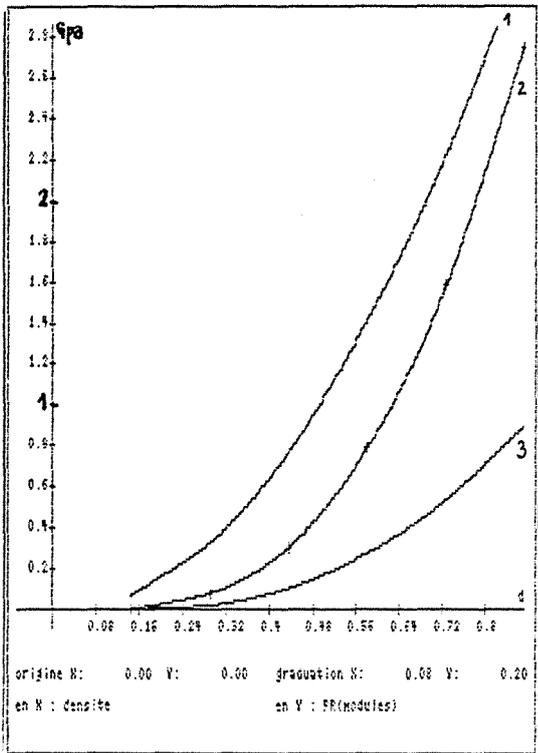


Fig II-10

- 1 :  $PR(G_{13})$
- 2 :  $PR(E_1)$
- 3 :  $PR(G_{12})$

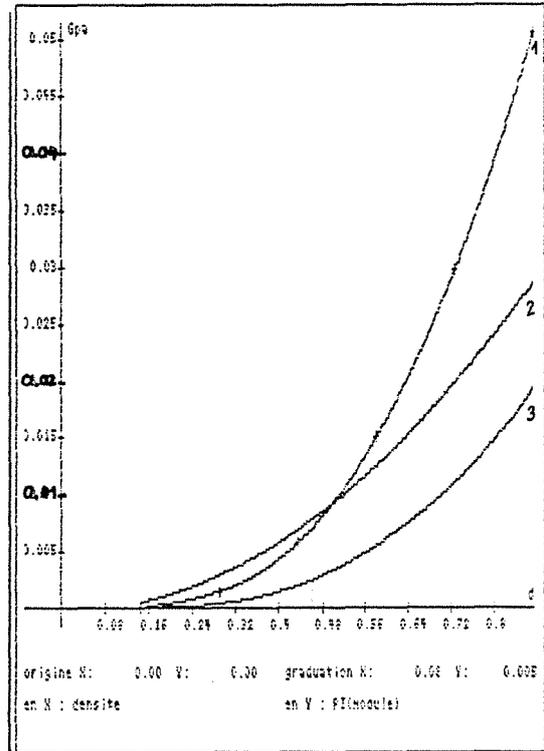


Fig II-11

- 1 :  $PI(E_1)$
- 2 :  $PI(G_{13})$
- 3 :  $PI(G_{12})$

L'évolution des parties réelles et imaginaires (figures II-10 et II-11) du module d'Young transversal et du module de cisaillement ne sont plus linéaires en fonction de la densité. Il en est de même des parties réelles des coefficients de Poisson (figure II-24). La figure II-19 montre que les modules complexes de cisaillement  $G_{12}$  et le module complexe transversal sont de la forme  $k^* d^3$  ( $k^*$  étant une constante complexe) ce qui témoigne de phénomènes de flexion de plaques dans le sens transversal:

## Etude du problème de plaque simplifié

-Cas du module d'Young :

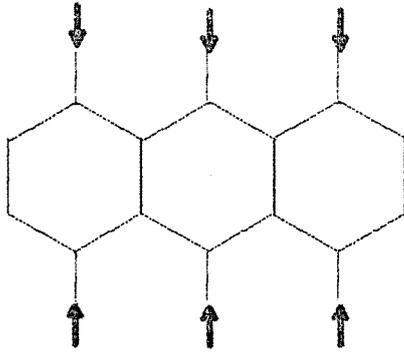
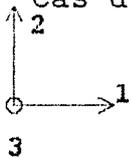


figure II-12

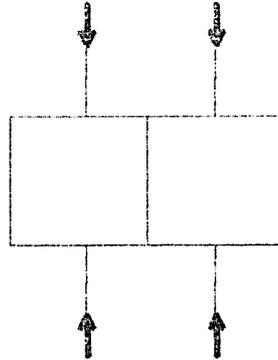


figure II-13

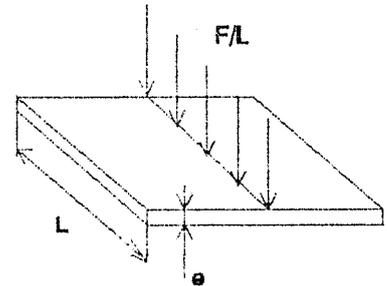


figure II-14

Reprenons la démarche utilisée par Gibson et Ashby [18] : des agencements alvéolaires du type de ceux donnés par les figures II-12 et II-13 donnent naissance à des phénomènes de flexion de plaques. Soit  $L$  la dimension caractéristique du matériau alvéolaire. Une plaque carrée de côté  $L$  (figure II-14) sous l'action de l'effort linéique  $F/L$  a une flèche  $v$  proportionnelle à  $(1-\nu_m^2)FL^2/E_m e^3$  où  $E_m$  et  $\nu_m$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau constitutif supposé isotrope. La contrainte apparente pour le matériau alvéolaire est  $\sigma = F/L^2$  et sa déformation relative apparente est  $\varepsilon = v/L$  d'où le module apparent  $E = \sigma/\varepsilon$  proportionnel à  $E_m (e/L)^3$  donc

$$\frac{E}{E_m} = K \left(\frac{e}{L}\right)^3 = K \left(\frac{d}{d_m}\right)^3 \quad \text{où } d \text{ est la densité du matériau alvéolaire}$$

$d_m$  la densité du matériau constitutif et  $K$  une constante. le module du matériau alvéolaire est donc, dans ce cas, proportionnel au cube de sa densité.

-Cas des modules de cisaillement

Gibson-Ashby ([18]) propose le même type de mécanisme de déformation dans le cas du cisaillement dans les matériaux alvéolaire ce qui conduit aussi à des modules de cisaillement proportionnels au cube de la densité :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad \gamma = \frac{v}{L} \quad v = k \frac{FL^2}{E_m e^3} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{G}{E_m} \right) = k' \left( \frac{d}{d_m} \right)^3 \quad (k \text{ et } k' \text{ constantes})$$

Le module de cisaillement correspond alors au module  $G_{12}$  (ou  $G_{21}$ ) et la relation précédente ne dépend pas du type d'agencement des cellules (figures II-17, II-18).

Dans le cas du plan 13 (ou 23) la nature de l'agencement intervient dans la relation module-densité :

Soit un agencement de cellules, donné par la figure II-15, que l'on rencontre dans certains résineux

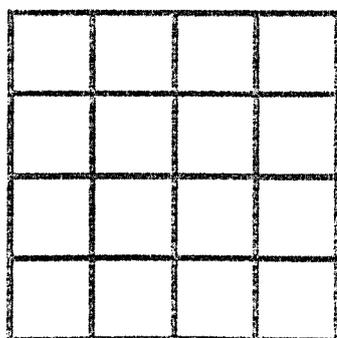
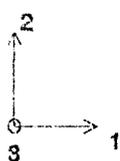


Fig II-15

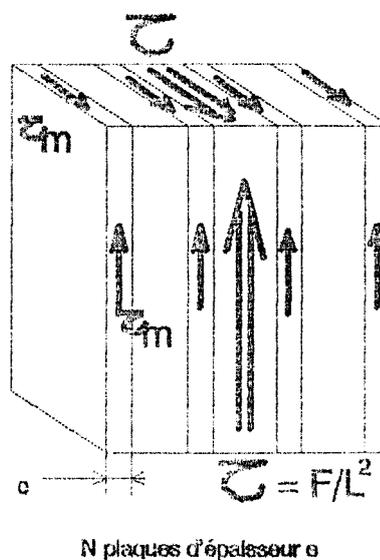


Fig II-16

En supposant la continuité des parois parallèles au plan 23 et en négligeant l'action des parois parallèles au plan 13 (figure II-16) Le module de cisaillement est alors proportionnel à la densité :

$$\tau_m = \frac{F}{NLe} \quad G = \frac{\tau}{\gamma} \quad \gamma = \gamma_m \quad \left(\frac{G}{G_m}\right) = \frac{F/L^2}{\tau_m} = \left(\frac{e}{L}\right)N = \left(\frac{d}{d_m}\right)$$

Dans le cas d'agencement de cellules du type de ceux représentés sur les figures II-12 et II-13, il existe des contributions non négligeables, dues à des flexions pour les parois non parallèles au plan 32, pour des sollicitations dans le plan 23 ou 13 .

Le calcul autocohérent montre que dans les modules de cisaillements  $G_{13}$  (ou  $G_{23}$ ) sont proportionnels au carré de la densité (figure II-21)

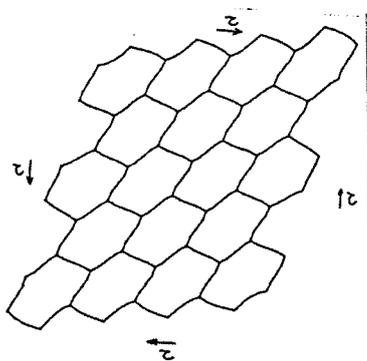


Fig II-17

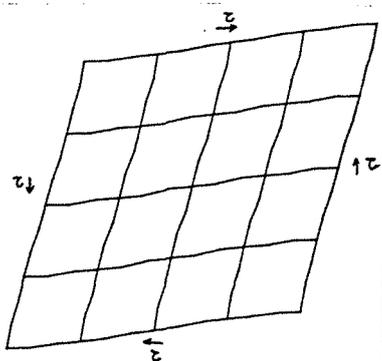


Fig II-18

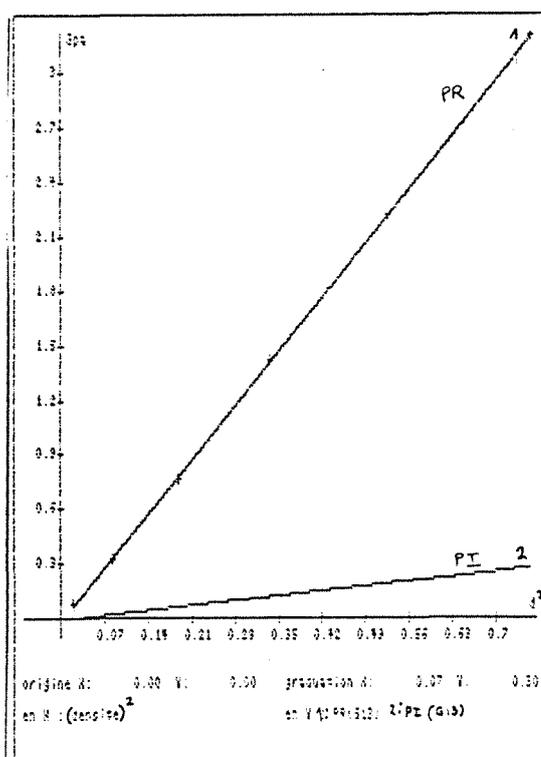


Fig II-21

$$PR(G_{13}) = f(d^2) \quad PI(G_{13}) = f(d^2)$$

EVOLUTION DES MODULES DE CISAILLEMENT ET DU MODULE D'YOUNG  
 TRANSVERSAL EN FONCTION DU CUBE DE LA DENSITE

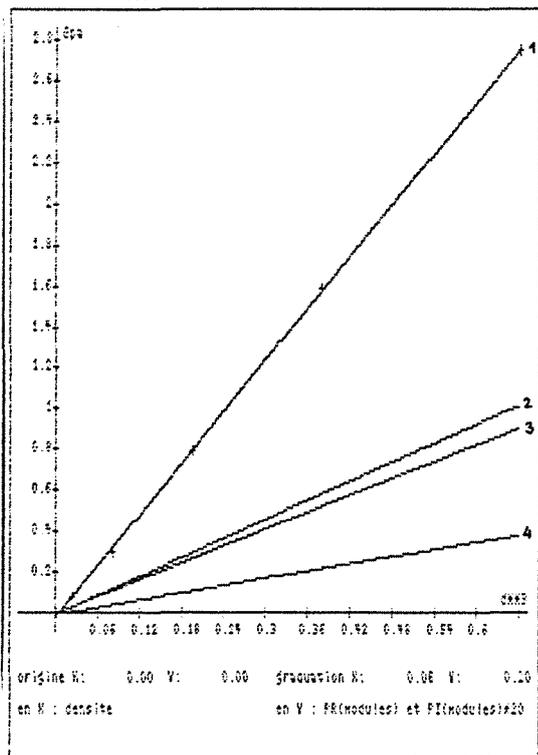


Fig II-19

- 1 :  $PR(E_1) = f(d^3)$
- 2 :  $PI(E_1) = f(d^3)$
- 3 :  $PR(G_{12}) = f(d^3)$
- 4 :  $PI(G_{12}) = f(d^3)$

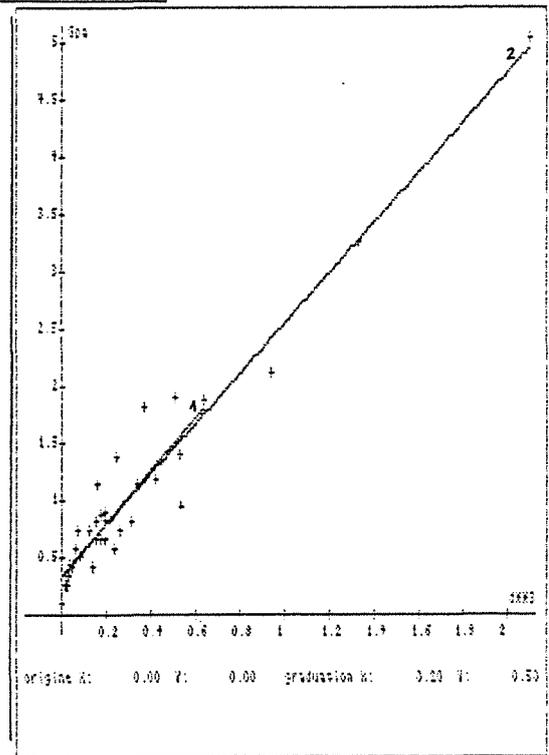


Fig II-20 :  $E_1 = f(d^3)$

- + Points expérimentaux
- 1 Régression sur les N- premiers points
- 2 Régression sur les N points expérimentaux.

L'évolution linéaire du module d'Young élastique en fonction du cube de la densité est aussi constatée expérimentalement dans la direction tangentielle pour le bois massif de feuillus. La figure II-20 présente les évolutions du module d'Young élastique tangentiel en fonction du cube de la densité (évolutions tirées de [3]).

Les deux régressions ont été effectuées sur les densités inférieures à 0,9 et sur l'intégralité des données.

-Ce type d'évolution est moins flagrant pour les résineux pour lesquels la plage de variation en densité est plus modeste.

-Pour le matériau bois, dans la direction radiale, les évolutions ne sont plus linéaires en fonction du cube de la densité à cause de la présence des rayons ligneux.

cas des coefficients de Poisson :

$\nu_{31}, \nu_{32}$

Dans ce cas les vides n'interviennent que très peu et le coefficient de Poisson du matériau alvéolaire est proche du coefficient de Poisson correspondant ( $\nu_{31}$  ou  $\nu_{32}$ ) du matériau constitutif (0,39) quelque soit le type d'agencement des cellules. Le calcul autocohérent donne une valeur presque constante de l'ordre de 0,39. (figure II-22 )

$\nu_{12}, \nu_{21}$

Dans le cas des grandes fractions volumiques de vides, le modèle plaque est admissible, des calculs par éléments finis menés sur différents agencements montrent que le motif carré de la figure II-15 donne des coefficients de Poisson faibles pour le repère  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  (1, 2, 3) défini figure II-15 alors que le motif hexagonal de la figure II-12, le motif circulaire, ou le motif carré dans un repère  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  (1, 2, 3) tourné de  $\pi/4$  donnent des coefficients de Poisson très supérieurs au coefficient  $\nu_{12}$  ( $\nu_{21}$ ) du matériau constitutif qui est proche de 0. Ces coefficients de Poisson sont alors peu sensibles à la densité du matériau alvéolaire. Dans le cas d'un matériau constitutif isotrope le calcul par éléments finis donne un coefficient de Poisson de l'ordre de 0,9 pour les cellules à sections circulaires ou hexagonales pour une densité variant de 0,1 à 0,25.

Dans le cas des fractions volumiques de vides plus faibles le modèle plaque ne convient plus. Un calcul autocohérent donne l'évolution présentée par la courbe 2 de la figure II-24 où  $\nu_{12}$  décroît quand la densité augmente pour tendre vers la valeur limite constituée par le  $\nu_{12}$  du matériau constitutif.

$\nu_{13}$  ,  $\nu_{23}$

Pour ces coefficients de Poisson la forme de la cellule intervient aussi. Pour des motifs et des sollicitations pour lesquels des phénomènes de flexion de plaques sont mis en jeu (motif hexagonal, motif carré tourné de  $\pi/4$ , motif circulaire) les coefficients  $\nu_{13}$  des matériaux alvéolaires sont plus faibles que celui du matériau constitutif vers lequel ils tendent quand la densité augmente (courbe 3 figure II-22). Le calcul autocohérent montre que cette évolution est linéaire en fonction du carré de la densité (figure II-23)

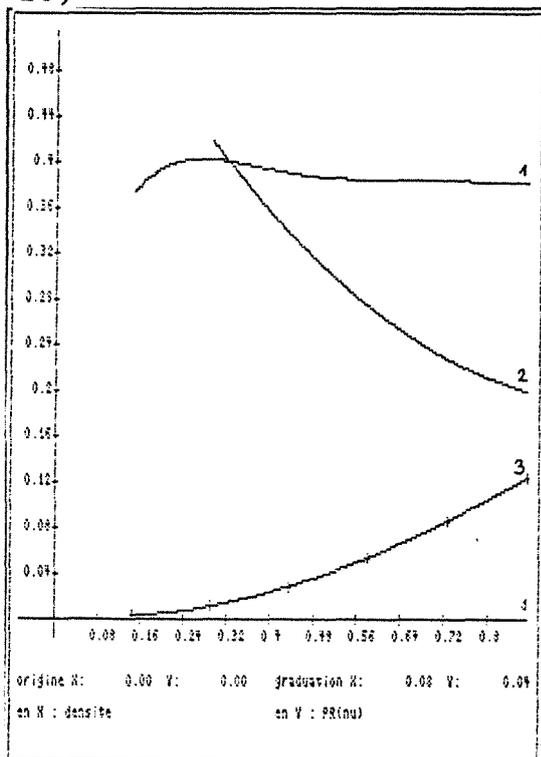


Fig II-23

EVOLUTION DE LA PARTIE REELLE DES COEFFICIENTS DE POISSON EN FONCTION DE LA DENSITE

- 1 :  $PR(\nu_{31})$
- 2 :  $PR(\nu_{12})$
- 3 :  $PR(\nu_{23})$

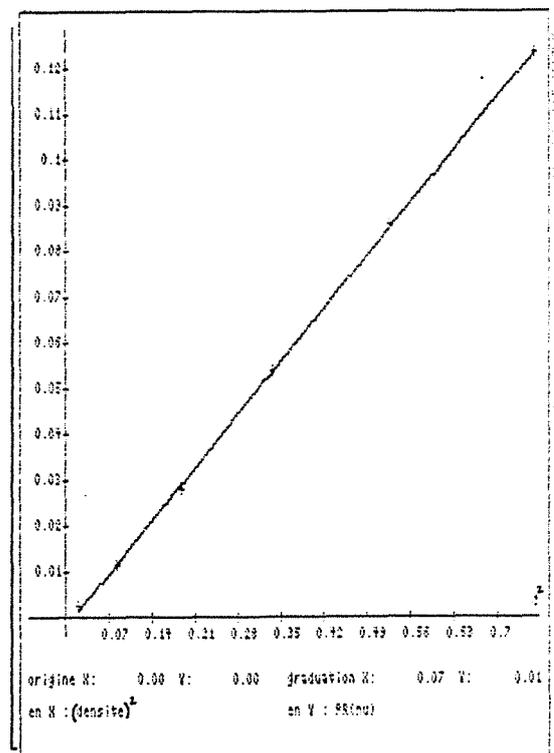


Fig II-24

EVOLUTION DE LA PARTIE REELLE DE  $\nu_{23}$  EN FONCTION DU CARRE DE LA DENSITE

### III LE BOIS MASSIF

#### III-1 GENERALITES.

A ce dernier niveau d'hétérogénéité, l'anisotropie provient de la forme en plaque des cernes et de la présence des rayons ligneux. Dans le cas de la direction longitudinale, les facteurs de forme rencontrés aux différents niveaux, concourent à privilégier la raideur du matériau : allongements des renforts cristallins et des fibres, écrasement des rayons ligneux.

Dans le plan transversal, une anisotropie peut déjà exister au niveau des tissus constitutifs des cernes ou des rayons ligneux. Cette anisotropie est surtout présente dans les cernes de bois final, elle découle de l'écrasement des fibres (II-2). La forme en plaque des cernes et l'écrasement des fibres ont tout deux tendance à rigidifier la matière ligneuse dans le sens tangentiel, or le matériau bois présente toujours une anisotropie transversale inverse avec un rapport  $E_R/E_T$  de l'ordre de 1,6 pour les résineux et de 1,7 pour les feuillus dans le cas élastique [3]. Ce sont les rayons ligneux qui réalisent ce renforcement.

Des simulations par le schéma autocohérent permettent d'évaluer, au niveau du bois massif, la part de chacun des facteurs anatomiques sur l'anisotropie globale du matériau.

#### III-1 INFLUENCE DE L'ECRASEMENT DES FIBRES DANS LES CERNES DE BOIS FINAL.

Pour cette simulation, le matériau est constitué de cernes de bois final disposés en plaques dans une matrice de bois initial (fig III-1). Les fibres composant les cernes de bois initial ne présentent pas d'écrasement.

Les caractéristiques viscoélastiques des tissus constitutifs sont

tirées des calculs effectués au paragraphe II-2.

Un des facteurs d'anisotropie retenus (III-1) est celui de Barkas redéfini par Guitard et El Amri dans [19]. Ce facteur représente aussi la fraction volumique de rayons ligneux dans le cas de l'utilisation de lois de mélange sur des tissus constitutifs isotropes transverses [19].

$$n = \frac{E'_R - E'_T}{(E'_L - E'_T) + (E'_R - E'_T)} \quad \text{III-1}$$

Les autres facteurs d'anisotropie sont définis par les relations suivantes :

$$fa1 = E'_L / E'_T \quad fa2 = E'_L / E'_R \quad fa3 = E'_R / E'_T \quad \text{III-2}$$

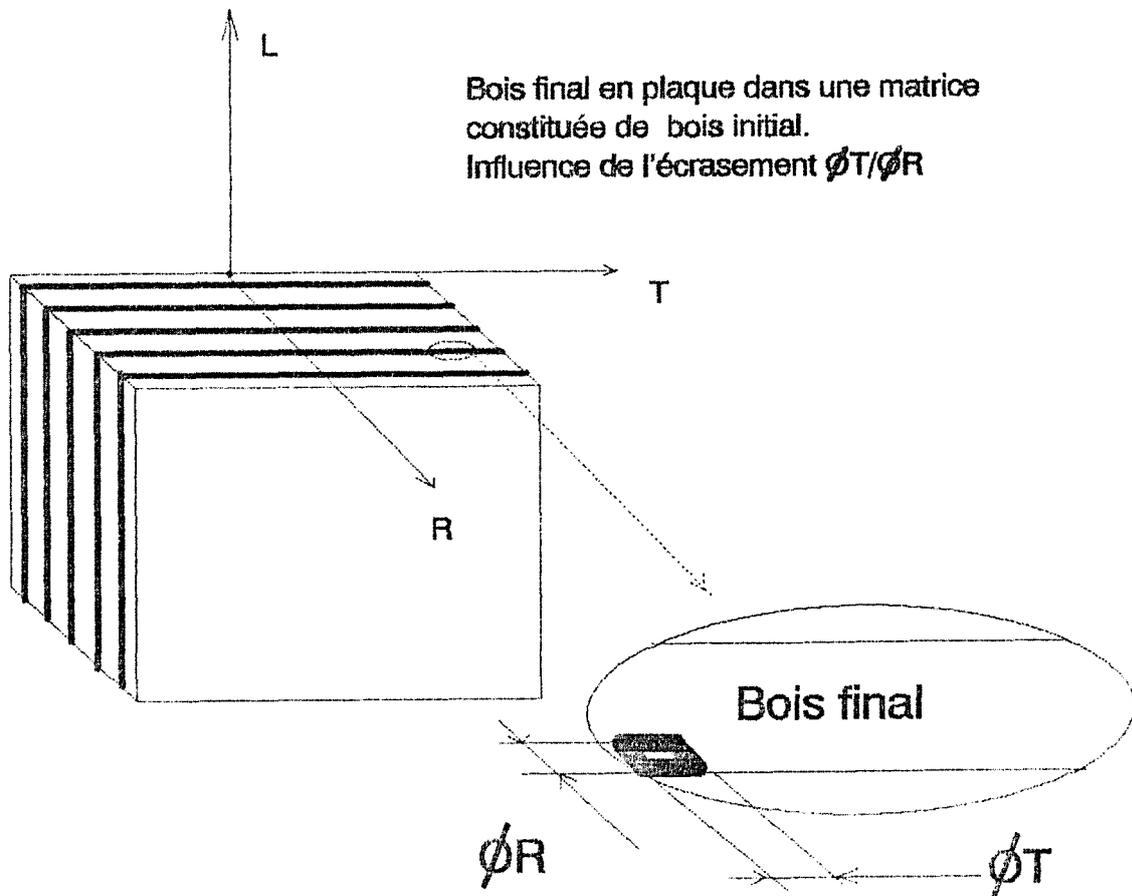


fig III-1

EVOLUTION DES FACTEURS D'ANISOTROPIE ET DES FACTEURS DE PERTE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE (f) DE BOIS FINAL POUR DIFFERENTS ECRASEMENTS DE LA CELLULE DU BOIS FINAL.

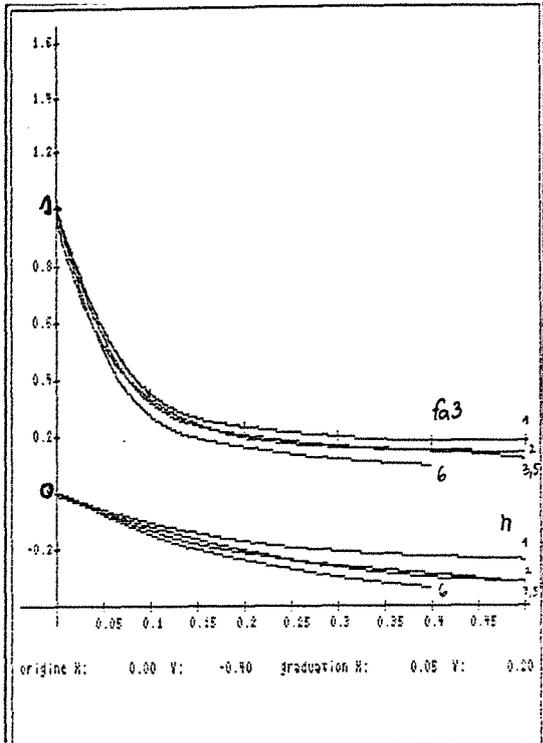


fig III-2 :  $n(f)$  et  $fa_3(f)$

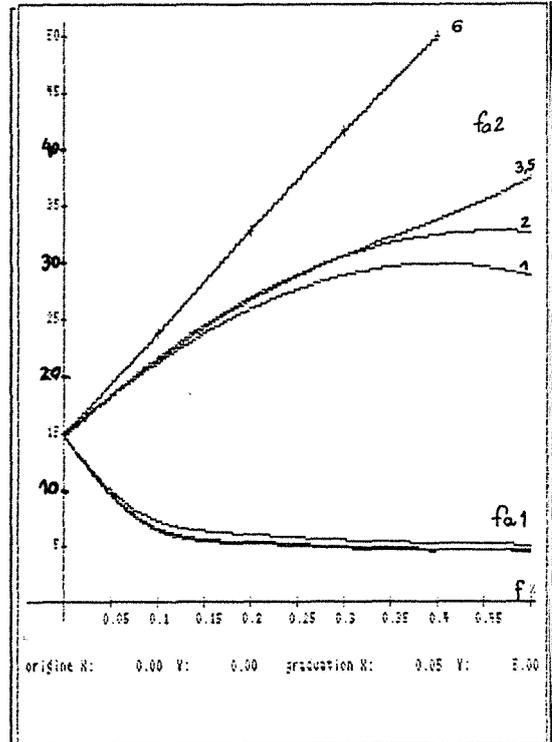


fig III-3 :  $fa_1(f)$  et  $fa_2(f)$

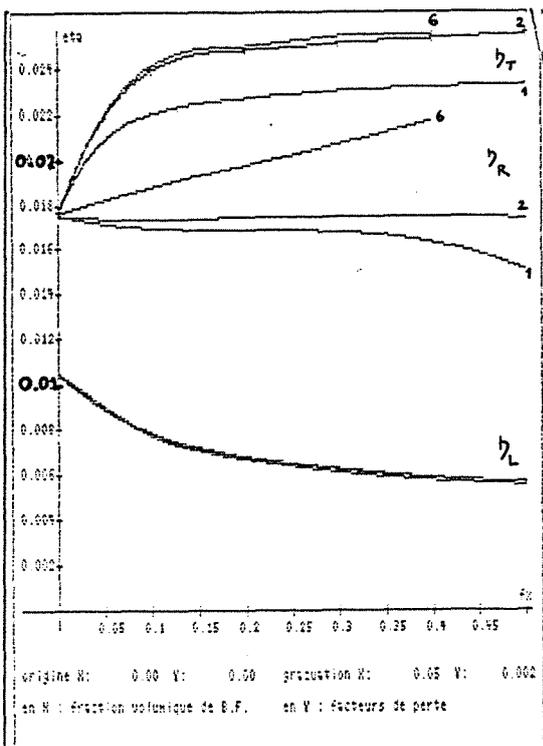


fig III-4 :  $\eta_T(f)$ ,  $\eta_R(f)$ ,  $\eta_L(f)$

fig III-2 et fig III-3 :

Le facteur de forme "écrasement de la cellule" est sensible sur les facteurs d'anisotropie  $fa_3 = E'_R / E'_T$  et  $fa_2 = E'_L / E'_R$  : un bois massif à 40% de bois final présente un facteur d'anisotropie  $fa_3$  qui est réduit de moitié pour une évolution d'écrasement allant de 1 à 6. Pour la même variation d'écrasement et la même proportion de bois final le facteur  $fa_2$  est quasiment doublé. Les variations sur  $n$  et  $fa_1$  sont plus faibles ( $\approx 50\%$  pour  $n$  et  $25\%$  pour  $fa_1$ )

(Les courbes sont repérées par l'écrasement)

fig III-4 :  $\eta_T(f)$ ,  $\eta_R(f)$ ,  $\eta_L(f)$

L'influence de l'écrasement sur les facteurs de perte est surtout sensible sur  $\eta_R$  : augmentation de l'ordre de 70% pour une évolution d'écrasement variant de 1 à 6 pour un bois massif à 40% de bois final.

remarque :

Pour un écrasement donné, l'allure des courbes des figures III-2 à III-4 est la combinaison des effets de forme (cerne de bois final en plaque) et de ceux dûs à la différence des caractéristiques bois final-bois initial. Ces effets jouent dans le même sens pour  $E'_L$ ,  $E'_T$ , (augmentation) et  $\eta_L$  (diminution), ils sont antagonistes dans le cas de  $E'_R$  et  $\eta_T$

### III-2 LE ROLE DES RAYONS LIGNEUX AU NIVEAU DU BOIS MASSIF

Le dernier paramètre morphologique jouant un rôle important au niveau du comportement du bois est le rayon ligneux. Les deux variables caractérisant cette inclusion sont la fraction volumique et le facteur de forme d'écrasement.

Pour ces simulations on suppose, pour fixer les ordres de grandeurs, un bois total de densité d'environ 0,6 constitué d'une matrice viscoélastique orthotrope réalisée à partir de 50% de bois de printemps moyen et 50% de cernes de bois d'été moyen dont les cellules ne présentent aucun écrasement et dont les densités respectives sont de l'ordre de 0,4 et 0,7. Cette matrice est renforcée radialement par des rayons ligneux dont on supposera une microstructure proche de celle d'un bois initial à 50% de vide. Les calculs autocohérents effectués au niveau du cerne et du rayon

ligneux, issus de ceux réalisés au chapitre II (10Hz 15°C), donnent alors pour les trois tissus constitutifs des caractéristiques principales proches de celles mesurées par Schniewind sur un chêne de Californie [20]. Ce bois est choisi à cause de la grande plage de variation de fraction volumique de rayons ligneux qu'il présente (de 6% à plus de 40%).

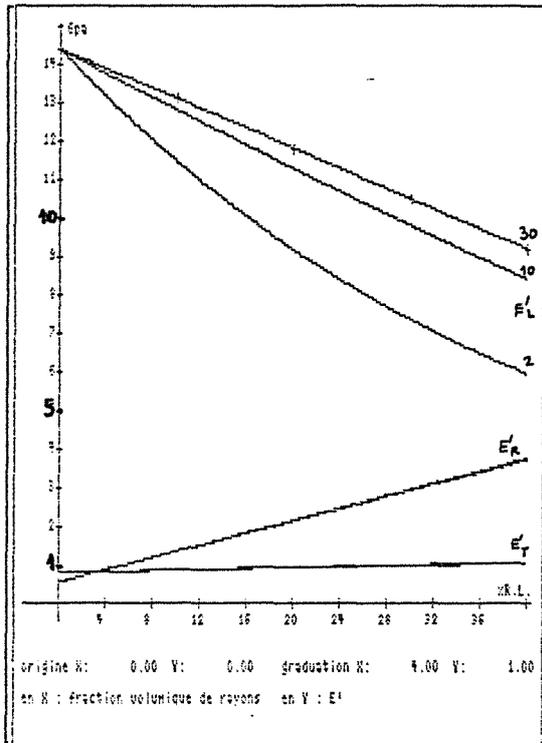


fig III-5

Evolution des parties réelles des modules d'Young en fonction de la fraction volumique des rayons ligneux pour différents écrasements du rayon.

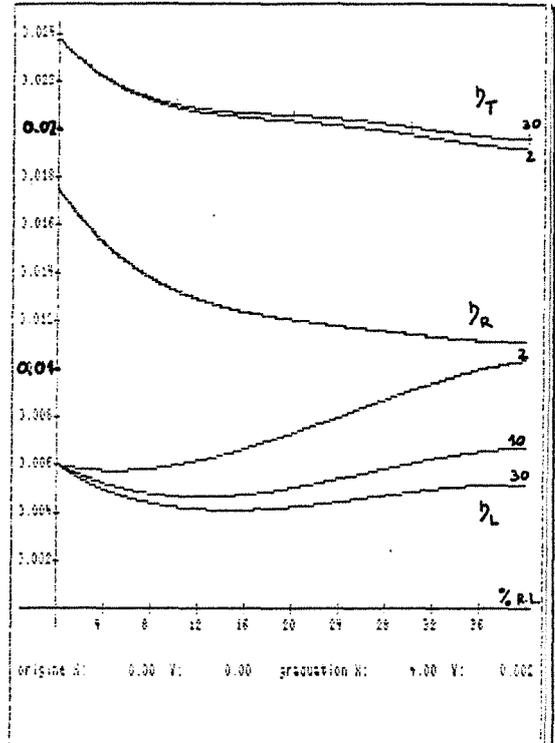


fig III-6

Evolution des facteurs de pertes dans les trois directions en fonction de la fraction volumique des rayons ligneux pour différents écrasements du rayon.

Les deux figures montrent que le facteur d'écrasement du rayon ligneux a une influence sensible sur les caractéristiques longitudinales d'un bois massif puisqu'il est possible d'envisager une progression de 13% sur la partie réelle du module d'Young longitudinal dans le cas d'un bois contenant 10% de rayons ligneux

pour des écrasements évoluant entre les limites possibles. Cette progression est de l'ordre de 40% dans le cas d'une fraction volumique en rayon ligneux de 30% dans les mêmes conditions d'évolution de l'écrasement.

Le facteur de perte longitudinal diminue avec l'écrasement des rayons ligneux, l'amplitude maximum de cette évolution est de l'ordre de 25% pour un bois à 10% de rayons, elle atteint 46% pour un bois massif contenant 30% de rayons ligneux.

Les autres grandeurs techniques sont relativement insensibles au facteur d'écrasement du rayon ligneux hormis pour le module  $G_{RT}^*$  et les parties réelles des coefficients de Poisson  $\nu_{RL}$  et  $\nu_{LR}$ .

#### Influence de la fraction volumique de rayons ligneux

La relation d'ordre entre  $E'_R$  et  $E'_T$  s'inverse pour un pourcentage en rayons inférieur à 4% et il faut au moins 10% de rayons ligneux pour obtenir un rapport  $E'_R/E'_T$  aux environs de 1,7.

Quelque soit la valeur de l'écrasement du rayon ligneux, la partie réelle du module d'Young longitudinal décroît avec la fraction volumique de rayons ce qui constitue un des éléments explicatifs de la moindre rigidité, à densité égale, des feuillus par rapport aux résineux.

A partir d'un écrasement de 10, les évolutions des parties réelles des trois modules en fonction du pourcentage de rayons ligneux est quasi-linéaire ce qui est constaté sur les tissus de bois massif dans [20] pour le module élastique radial.

Le tissu constitutif du rayon ligneux des simulations précédentes (bois initial à 50% de vide) correspond au maximum de raideur relevé sur un tissu de rayon ligneux par Schniewind. Les valeurs moyennes de raideur mesurées dans la direction du rayon sont

proches de celles d'un bois initial à 70% de vide. Dans ce cas de figure, les évolutions données par le schéma autocohérent sont conformes à celles mesurées par Schniewind sur le module radial de plusieurs spécimens de chêne de Californie au niveau du bois massif : figure II-7.

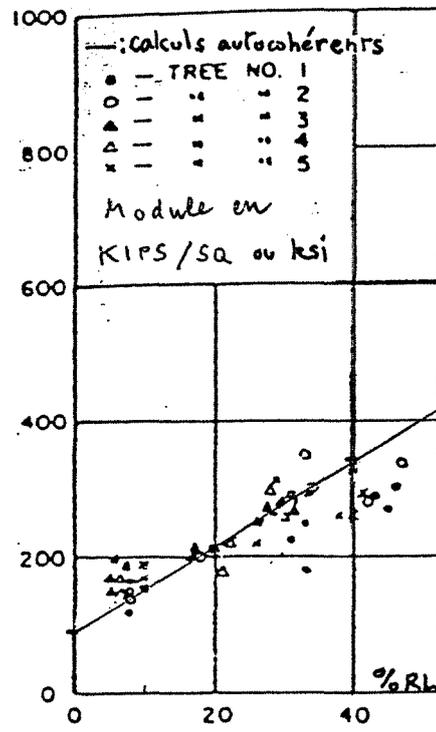


fig II-7

Evolution de  $E'_R$  en fonction du pourcentage de rayons ligneux donnée par le schéma autocohérent et mesures du module élastique radial pour différentes fractions volumiques de rayons ligneux (tirées de [20])

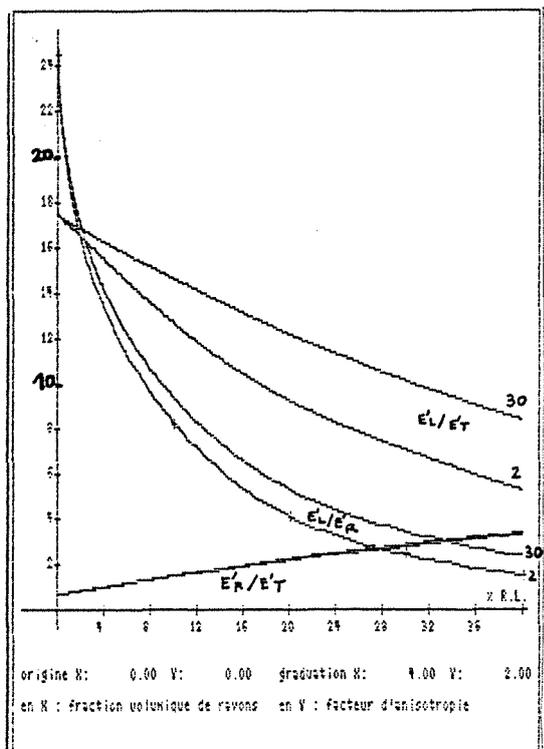


fig III-8

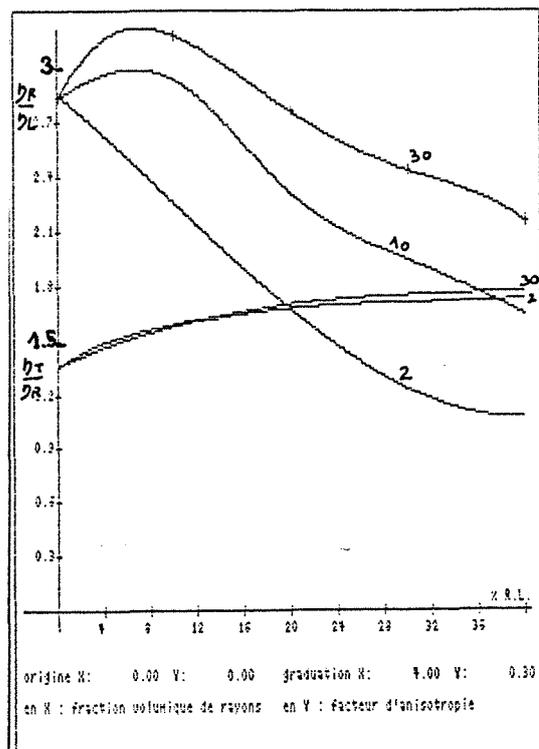


fig III-9

Evolution de différents facteurs d'anisotropie du bois massif en fonction de la fraction volumique de rayons ligneux pour différents facteurs d'écrasement du rayon ligneux (tissu à 50% de vides).

(Les courbes sont repérées par l'écrasement du rayon)

Le facteur d'anisotropie  $E'_L/E'_R$  est particulièrement sensible à la fraction volumique de rayons ligneux dans la zone des faibles proportions en rayons, par contre, l'influence de l'écrasement des rayons ligneux n'est tangible que pour un pourcentage conséquent (au delà de 10% de rayons).

Pour une fraction volumique de 15% en rayons ligneux, ce qui représente une valeur moyenne pour ce type de feuillu, les facteurs d'anisotropie donnés par le schéma autocohérent sont :

$$E'_R/E'_T \approx 1,9 \quad E'_L/E'_R \approx 7 \quad E'_L/E'_T \approx 10 \text{ à } 14 \text{ (selon l'écrasement)}$$

Ces valeurs appartiennent toutes au domaine de variation des facteurs d'anisotropie d'un chêne [3].

Les facteurs d'anisotropie relatifs aux facteurs de perte sont moins sensibles que les précédents au pourcentage de rayons. Par contre pour le facteur  $\eta_R/\eta_L$  est en général très sensible au facteur de forme 'écrasement du rayon ligneux'.

### Conclusions (paragraphe II et III)

Pour les deux derniers niveaux d'hétérogénéité, les facteurs de forme des constituants jouent un rôle sensible sur le comportement viscoélastique du tissu considéré.

- Au niveau du cerne, pour le domaine d'amplitude retenu pour l'allongement des fibres, la variation sur la partie réelle et imaginaire du module d'Young longitudinal  $E_3^*$  peut atteindre plus de 30% pour un bois initial. La sensibilité des grandeurs techniques aux facteurs de formes dépend de la densité du matériau : dans le cas d'un bois final, il existe trois fois moins de variation sur  $E_3^*$  que dans le cas d'un bois initial.

Mais le paramètre morphologique le plus influant au niveau du cerne est l'écrasement de la cellule puisqu'une évolution des grandeurs  $E_T'/E_R'$  et  $E_T''/E_R''$  de l'ordre de 20 est possible.

Le schéma autochérent multi-étapes a permis, d'autre part, de déceler la nature des évolutions des grandeurs techniques en fonction de la densité, évolutions qui sont confirmées par l'expérience dans le cas où l'on dispose de suffisamment de données. Ces simulations numériques montrent aussi que l'arbre bénéficie pleinement de la nature alvéolaire de sa structure dès

que le facteur d'allongement de ses cellules atteint 10 qui représente une valeur plutôt faible pour un allongement standard.

- Au niveau du bois massif, c'est la présence des rayons ligneux qui permet d'obtenir les facteurs d'anisotropie constatés sur le bois massif. Dans le plan transversal, les premières fractions de rayons permettent d'annuler rapidement l'anisotropie résultant de l'effet conjoint de la forme en plaque des cernes et de l'écrasement des cellules du bois final pour ensuite inverser la relation d'ordre entre  $E'_R$  et  $E'_T$ . L'écrasement du rayon ligneux joue un rôle notable sur la partie réelle du module d'Young et sur le facteur de perte dans la direction longitudinale.

Un élément essentiel des différences constatées entre résineux et feuillus tient dans la particularité des proportions en rayons ligneux de ces deux familles.

Les valeurs des modules d'Young, des modules de cisaillement et des facteurs de pertes au niveau du bois massif, obtenues à l'issue des différentes simulations réalisées par la méthode autocohérente aux trois échelles d'hétérogénéité du matériau en prenant des valeurs moyennes pour chacun des paramètres influants, sont remarquablement comparables aux valeurs expérimentales typiques du bois simulé. Pour les coefficients de Poisson, les relations d'ordre [3] sont respectées mais les valeurs trouvées par les simulations sont sensiblement plus faibles pour  $\nu_{RT}$ . Comme pour beaucoup de composites artificiels, les parties imaginaires de ces coefficients de Poisson sont ici négligeables (à toutes les échelles d'hétérogénéité).

#### IV BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.BUCUR 1982  
L'angle des microfibrilles. Etude bibliographique  
Station de recherche sur la qualité du bois
- [2] R.KELLER 1983  
"Le matériau bois" Anatomie A.R.BO.LOR.
- [3] D.GUITARD 1987  
"Mécanique du matériau bois et composites" Cepadues-éditions
- [4] R.E.MARK 1967  
"Cell wall of tracheide" New Haven and London Yale University  
press
- [5] R.E.MARK 1972  
Mechanical behaviour of the molecular components of fibers  
"Theory and design of wood fiber composite materials"  
B.A.JAYNE Editor.
- [6] R.E.MARK 1980  
Molecular and cell wall structure of wood
- [7] A.SCHNIEWIND 1972  
Elastic behavior of the wood fiber  
"Theory and design of wood fiber composite materials"  
B.A.JAYNE Editor.
- [8] J.D.BARRETT 1973  
Theoretical models of wood shrinkage and elasticity  
Ph d University of California, Berkeley
- [9] I.D.CAVE 1968  
The anisotropic elasticity of the plant cell wall  
W.S.T. vol 2 268-278
- [10] L.SALMEN A. DE RUVO 1985  
A model for the prediction of fiber elasticity.  
Wood and fiber science 17(3) 336-350
- [11] P.NAVI 1988  
Three dimensional modeling of the wood microstructure for the  
prediction of fiber properties  
Comportement mécanique du bois : Actes G.S.R.B. Bordeaux
- [12] KELLEY 1987  
Relaxation behaviour of amorphous components of wood  
Journal of materials sciences vol 22 617-624
- [13] J.M.GENEVAUX 1989  
Le fluage à température linéairement croissante :  
caractérisation des sources de viscosité anisotrope du bois  
Thèse I.N.P.L.

- [14] D.GUITARD 1983  
Le matériau bois A.R.BO.LOR.
- [15] G.CHANTRE 1989  
Liaison entre rigidité et densité du bois à l'intérieur du cerne D.E.A Sciences du bois I.N.P.L. Nancy
- [16] W.KURZ J.P.MERCIER G.ZAMBELLI 1987  
"INTRODUCTION A LA SCIENCE DES MATERIAUX"  
presses polytechniques Romandes
- [17] M.F. ASHBY L.J.GIBSON 1983  
The mechanics properties of cellular solids
- [18] L.J.GIBSON M.F.ASHBY 1982  
The mechanics of three-dimensional cellular materials  
Proc. R. soc. Lond. A 382 43-59
- [19] D.GUITARD F.EL AMRI 1987  
La fraction volumique en rayons ligneux comme paramètre explicatif de la variabilité de l'anisotropie élastique du matériau bois. Colloque Sciences et Industrie du bois Nancy
- [20] A.P. SCHNIEWIND 1959  
Transverse anisotropy of wood. Forest products journal Oct 1959

## CONCLUSION

Pour le matériau bois, comme pour les composites artificiels, la géométrie des phases constitutives représente un élément essentiel parmi ceux qui conditionnent les caractéristiques viscoélastiques macroscopiques. Elle affecte dans des proportions sensibles les grandeurs techniques : au niveau d'un tissu élémentaire l'allongement des renforts cristallins peut conduire à des variations de 1 à 4 du module d'Young longitudinal, dans le même contexte, des variations de 1 à 10 sont possibles pour le facteur de perte dans la même direction; au niveau des fibres, c'est l'écrasement qui représente l'élément géométrique influant, des variations de 1 à 20 du rapport des parties réelles et imaginaires des modules transversaux ( $E'_T/E'_R$ ,  $E''_T/E''_R$ ) sont possibles pour un bois final; au niveau du bois massif, l'écrasement du rayon ligneux constitue le seul paramètre géométrique variable, des écarts de l'ordre de 40% pour la partie réelle du module d'Young et le facteur de perte dans la direction longitudinale pour un feuillu à 30% de rayons ligneux sont alors concevables.

Les facteurs de forme peuvent aussi affecter la température à laquelle apparaît un facteur de perte maximum. Comme pour les grandeurs techniques c'est la forme en plaque de la phase qui transite qui donne la plus grande anisotropie. Cette anisotropie de température peut atteindre, dans certains cas, une dizaine de degrés.

Les différentes simulations montrent que les modèles de Reuss et de Voigt donnent les valeurs extrêmes pour les facteurs de perte

d'un composite quelconque, mais qu'il peut exister une inversion de la relation d'ordre entre ces deux valeurs extrêmes.

Des simulations autocohérentes multi-étapes au niveau du tissu alvéolaire constitutif des cernes montrent que le facteur d'allongement des cellules est tel qu'il permet à l'arbre d'être une structure naturellement optimisée pour les sollicitations de flexion et de flambement.

Les différents tests menés sur la méthode autocohérente montrent la nécessité de procéder à une approche multi-étapes dans le cas des fortes proportions de renforts et dans les cas où la raideur de l'inclusion est plus faible que celle de la matrice.

Des confrontations des schémas autocohérents avec diverses expériences et solutions analytiques prouvent leur fiabilité dans la plupart des cas et démontrent leur capacité en tant qu'outils d'analyse ou de prédiction des caractéristiques d'un composite à comportement viscoélastique linéaire.

Ces outils pourraient être encore améliorés en introduisant l'influence des inclusions proches de l'inclusion principale dans le cadre d'un schéma multi-site qui permettrait la prise en compte de l'éventuelle texture de répartition des inclusions du composite.

ANNEXE I

FORMULAIRE

COMPOSITE A RENFORTS CYLINDRIQUES

Module de compressibilité dans le plan

$$K_{23} = k_m + \frac{v_f}{\left( \frac{1}{(k_f - k_m)} \right) + \left( \frac{v_m}{(k_m + G_m)} \right)} \quad \text{F1}$$

$$K_{23}(t) = K_m(t) + \frac{1}{3} G_m(t) + \left( K_m(t) + \frac{4}{3} G_m(t) \right) (v_f / v_m) \quad \text{F2}$$

Module de cisaillement axial

$$G_{12} = G_m \frac{v_m G_m + G_f (1 + v_f)}{G_m (1 + v_f) + G_f v_m} \quad \text{F3}$$

$$G_{12}(t) = \left( (1 + v_f) / v_m \right) G_m(t) \quad \text{F4}$$

Module de Young axial

$$E_1 = E_m v_m + E_f v_f + \frac{4 v_f v_m (\nu_f - \nu_m)^2}{v_m / k_f + v_f / k_m + 1 / G_m} \quad \text{F5}$$

Coefficient de Poisson axial

$$\nu_{12} = v_m \nu_m + v_f \nu_f + \frac{v_m v_f (\nu_f - \nu_m) (1 / k_m - 1 / k_f)}{v_m / k_f + v_f / k_m + 1 / G_m} \quad \text{F6}$$

Module de Young transversal (Théocaris)

$$E_2 = \left( \left( \left( \frac{\Gamma^2 v_f (1 - \nu_f)}{E_f} + \frac{1}{E} \left( \nu_m (\Gamma^2 v_f - 1) + \frac{(v_f + 1) (\Gamma^2 v_f + 1) - 4 \Gamma v_f}{1 - v_f} \right) + \frac{2 \nu^2}{E_1} \right) \right) \frac{1}{1 - \nu_{23}} \right)^{-1} \quad \text{F7}$$

avec  $\Gamma = \frac{2 E_f}{(v_f (1 - \nu_m) + (1 + \nu_m)) E_f + (1 - \nu_f) (1 - v_f) E_m}$

$$\bar{\nu} = \nu_m - \frac{2(\nu_m - \nu_f)(1 - \nu_m^2)E_f \nu_f}{E_m(1 - \nu_f)(1 - \nu_f - 2\nu_f^2) + ((1 - \nu_m - 2\nu_m^2)\nu_f + (1 + \nu_m))E_f}$$

( $\bar{\nu}$  appelé dans [21] coefficient de Poisson majeur correspond en fait au  $\nu_{12}$  donné par la relation F6)

$$\nu_{23} \text{ défini par une loi de mélange : } \nu_{23} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad \text{F8}$$

et  $E_1$  module d'Young défini par F5

Module transversal (Whitney-Riley)

$$E_2 = (2K_{23}E_1(1 - \nu_{23})) / (E_1 + 4\nu_{12}^2 K_{23}) \quad \text{F9}$$

avec  $K_{23}$ ,  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$  définis par les relations précédentes

Module de cisaillement transversal

$$\left(\frac{G_{23}}{G_m}\right)^2 A + \left(\frac{G_{23}}{G_m}\right) B + D = 0 \quad \text{F10}$$

avec :

$$D = 3\nu_f \nu_m^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f\right) + \left(\left(\frac{G_f}{G_m}\right)\eta_m + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right)\nu_f + 1\right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\left(\frac{G_f}{G_m}\right)\eta_m - \eta_f\right)\nu_f^3\right)$$

$$B = -6\nu_f \nu_m^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f\right) + \left(\frac{G_f \eta_m}{G_m} + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right)\nu_f + 1\right) \left((\eta_m - 1) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f\right) - 2\nu_f^3 \left(\frac{G_f \eta_m}{G_m} - \eta_f\right)\right) \\ + (\eta_m + 1)\nu_f \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_f}{G_m \eta_m} - \eta_f\right)\nu_f^3\right)$$

$$A = 3\nu_f \nu_m^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f\right) + \left(\frac{G_f}{G_m \eta_m} + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_f}{G_m \eta_m} - \eta_f\right)\nu_f^3\right) \left(\eta_m \nu_f \left(\frac{G_f}{G_m} - 1\right) - \left(\frac{G_f}{G_m \eta_m} + 1\right)\right)$$

$$\eta_m = (3 - 4\nu_m)$$

$$\eta_f = (3 - 4\nu_f)$$

COMPOSITE CYLINDRIQUE A SECTION QUELCONQUE

Borne inférieure module de cisaillement

$$G_{23} = G_m + \frac{v_f}{(1/(G_f - G_m)) + ((k_m + 2G_m)v_m / 2G_m(k + G_m))} \quad \text{F11}$$

COMPOSITE A RENFORT SPHERIQUE

Module de compressibilité

$$K = K_m \left( 1 + \frac{3(1-\nu_m)(K_f/K_m - 1)v_f}{2(1-2\nu_m) + (1+\nu_m)(K_f/K_m - (K_f/K_m - 1)v_f)} \right) \quad \text{F12}$$

Module de cisaillement (faible concentration)

$$G = G_m \left( 1 - \frac{15(1-\nu_m)(1-G_f/G_m)v_f}{7-5\nu_m + 2(4-5\nu_m)G_f/G_m} \right) \quad \text{F13}$$

Module de cisaillement (forte concentration)

$$G = G_f \left( 1 - \frac{(1-G_m/G_f)(7-5\nu_m + 2(4-5\nu_m)G_f/G_m)}{15(1-\nu_m)} (1-v_f) \right) \quad \text{F14}$$

Module de cisaillement (calcul approché)

$$G = G \left( 1 + \frac{15(1-\nu_m)(G_f/G_m - 1)v_f}{7-5\nu_m + 2(4-5\nu_m)(G_f/G_m - (G_f/G_m - 1)v_f)} \right) \quad \text{F15}$$

Module de cisaillement (cas des sphères vides)

-borne supérieure  $G_2$  (élasticité)

$$\frac{G_2}{G_m} = 1 - \left( \frac{15(1-\nu_m)((7+5\nu_m)\rho^7 + 4(7-10\nu_m))}{((7-5\nu_m) + 2(4-5\nu_m)\rho^3)(4(7-10\nu_m) + (7+5\nu_m)\rho^7) + 126\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f}$$

...F16

$$= \alpha_1$$

-borne inférieure  $G_1$  (élasticité)

$$\frac{G_1}{G_m} = \frac{1}{1 + \left( \frac{15(1-\nu_m)(7+5\nu_m)(\rho^7-1)}{(7-5\nu_m)(7+5\nu_m)(1-\rho^3)(\rho^7-1) + 126\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f}}$$

F17

-bornes cas module complexe

$$PR(G) \leq \alpha_1 PR(G_m) = \tilde{G}_1$$

$$PI(G) \leq \alpha_1 PI(G_m) = \tilde{G}_2$$

F18

$$PR\left(\frac{1}{G}\right) \leq \alpha_2 PR\left(\frac{1}{G_m}\right) = \tilde{J}_1$$

$$PI\left(\frac{1}{G}\right) \geq \alpha_2 PI\left(\frac{1}{G_m}\right) = \tilde{J}_2$$

avec  $\alpha_1$  défini dans F16 et  $\alpha_2$  tel que :

$$\alpha_2 = 1 + \left( \frac{15(1-\nu_m)(7+5\nu_m)(\rho^7-1)}{(7-5\nu_m)(7+5\nu_m)(1-\rho^3)(\rho^7-1) + 126\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f}$$

En mettant  $G^*$  sous la forme  $G^* = G_0 e^{j\phi}$  les relations F18 donnent :

$$\left( \frac{1}{(\tilde{J}_1)^2 + (\tilde{J}_2)^2} \right)^{1/2} \leq G_0 \leq \left( \tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2 \right)^{1/2}$$

F18bis

Module de cisaillement (cas des sphères parfaitement rigides)

-borne supérieure

$$\frac{G_2}{G_m} = 1 + \left( \frac{30(1-\nu_m)(7-10\nu_m)(\rho^7-1)}{4(4-5\nu_m)(7-10\nu_m)(1-\rho^3)(\rho^7-1)+63\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f} = \beta_1 \quad \text{F19}$$

-borne inférieure

$$\frac{G_1}{G_m} = \frac{1}{1 - \left( \frac{15(1-\nu_m)(4(7-10\nu_m)\rho^7+(7+5\nu_m))}{(2(4-5\nu_m)+(7-5\nu_m)\rho^3)(4(7-10\nu_m)\rho^7+(7+5\nu_m))+126\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f}}$$

..... F20

-bornes cas du module complexe

$$\text{PR}(G) \leq \beta_1 \text{PR}(G_m)$$

$$\text{PI}(G) \leq \beta_1 \text{PI}(G_m)$$

F21

$$\text{PR}\left(\frac{1}{G}\right) \leq \beta_2 \text{PR}\left(\frac{1}{G_m}\right)$$

$$\text{PI}\left(\frac{1}{G}\right) \geq \beta_2 \text{PI}\left(\frac{1}{G_m}\right)$$

avec  $\beta_1$  défini par F19 et  $\beta_2$  par :

$$\beta_2 = 1 - \left( \frac{15(1-\nu_m)(4(7-10\nu_m)\rho^7+(7+5\nu_m))}{(2(4-5\nu_m)+(7-5\nu_m)\rho^3)(4(7-10\nu_m)\rho^7+(7+5\nu_m))+126\rho^3(1-\rho^2)^2} \right)^{\nu_f}$$

Module de cisaillement (Christensen et Lo)

$$\left(\frac{G}{G_m}\right)^2 A + \left(\frac{G}{G_m}\right) B + D = 0 \quad \text{F22}$$

avec

$$A = 8 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (4 - 5\nu_m) \eta_1 v_f^{10/3} - 2 \left( 63 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right) v_f^{7/3} + 252 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 v_f^{5/3} \\ - 25 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (7 - 12\nu_m + 8\nu_m^2) \eta_2 v_f + 4(7 - 10\nu_m) \eta_2 \eta_3$$

$$B = -4 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (1 - 5\nu_m) \eta_1 v_f^{10/3} + 4 \left( 63 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right) v_f^{7/3} - 504 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 v_f^{5/3} \\ + 150 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (3 - \nu_m) \nu_m \eta_2 v_f + 3(15\nu_m - 7) \eta_2 \eta_3$$

$$D = 4 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (5\nu_m - 7) \eta_1 v_f^{10/3} - 2 \left( 63 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right) v_f^{7/3} + 252 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \eta_2 v_f^{5/3} \\ + 25 \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (\nu_m^2 - 7) \eta_2 v_f - (7 + 5\nu_m) \eta_2 \eta_3$$

$$\eta_1 = \left( \frac{G_f}{G_m} - 1 \right) (49 - 50\nu_f \nu_m) + 35 \left( \frac{G_f}{G_m} \right) (\nu_f - 2\nu_m) + 35(2\nu_f - \nu_m)$$

$$\eta_2 = 5\nu_f \left( \frac{G_f}{G_m} - 8 \right) + 7(G_f/G_m + 4)$$

$$\eta_3 = (G_f/G_m)(8 - 10\nu_m) + (7 - 5\nu_m)$$

#### COMPOSITE A RENFORT DISCOIDE

Module de compressibilité

$$\frac{K - K_m}{K_f - K_m} = \frac{1}{1 + \frac{K_f - K_m}{K_m + 4/3 G_f}} v_f \quad \text{F23}$$

Module de cisaillement

-Boucher (faible concentration)

$$\frac{G - G_m}{G_f - G_m} = \frac{1}{1 + \frac{G_f - G_m}{G_m + G_d}} v_f \quad \text{F24}$$

$$\text{avec } G_d = \frac{G_f(9K_f + G_f)}{6(K_f + 2G_f)}$$

-Wu

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_m} \left( 1 + \frac{v_f}{5} \left( \frac{2}{1+A} + 1 + \frac{2+(2-4R/3)A+2(3-4R)B}{1+A+(3-4R)B} \right) \frac{G_m - G_f}{G} \right) \quad \text{F25}$$

avec

$$A = \frac{G_f}{G_m} - 1 \quad B = \frac{1}{3} \left( \frac{K_f}{K} - \frac{G_f}{G} \right) \quad R = \frac{3G}{3K + 4G}$$

Module de Young

$$\frac{E}{E_m} = \frac{2 - v_f + v_f (E_f/E_m)}{2 - v_f + v_f (E_m/E_f)} \quad \text{F26}$$

avec:

m, f indices correspondant à la matrice ou aux fibres

$v_i$  fraction volumique

$K_{23}$   $k_i$  modules de compressibilité dans le plan

$K$   $K_m$   $K_f$  modules de compressibilité

$$\rho = v_f^{1/3}$$

les autres symboles sont habituels

## ANNEXE II

### UN EXEMPLE DE CALCUL DE BORNES DE ROSCOE

Reprenons le cas numérique proposé par l'auteur pour  $\log \omega = 3$ .

Le composite est caractérisé par son module de cisaillement complexe:

$$\mu^* = \mu' + i\mu''$$

l'inverse de  $\mu^*$  est noté  $j^* = j' - ij''$

Deux phases constituent le composite:

- une phase amorphe caractérisée par son module  $\mu_1^* = \mu_1' + i\mu_1''$

$$\text{d'inverse } j_1^* = j_1' - ij_1''$$

- une phase visco-élastique cristalline de module  $\mu_2^* = \mu_2' + i\mu_2''$

$$\text{d'inverse } j_2^* = j_2' - ij_2'' \quad (\mu_2' \text{ et } \mu_2'' \text{ constants } \forall \omega)$$

Les bornes utilisées sont celles d'Hashin-Strickman qui donnent dans le cas du matériau incompressible:

$$A3-1 \quad \mu' \geq \mu_1' [5\mu_1' + (\mu_2' - \mu_1')(5 - 3C_1)] / [5\mu_1' + (\mu_2' - \mu_1')2C_1]$$

$$A3-2 \quad \frac{1}{j'} = \frac{1}{j_2'} [5\mu_1' + (\mu_2' - \mu_1')(5 - 3C_2)] / [5j_1' + (j_2' - j_1')2C_2]$$

$C_1$  et  $C_2$  représentent les fractions volumiques des phases 1 et 2

Une amélioration peut être apportée dans le cas du matériau biphasé avec:

$$\begin{array}{l}
 \text{A3-3} \qquad f\mu' > g\mu''+1 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 f = \frac{\mu_2'' - \mu_1''}{\mu_1'' \mu_2'' - \mu_2' \mu_1''} \\
 g = \frac{\mu_2' - \mu_1'}{\mu_1'' \mu_2'' - \mu_2' \mu_1''}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{A3-4} \qquad hj' > kj''+1 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 h = \frac{j_2'' - j_1''}{j_1'' j_2'' - j_2' j_1''} \\
 k = \frac{j_2' - j_1'}{j_1'' j_2'' - j_2' j_1''}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Pour  $\log \omega = 3$  on a  $\mu_1' = 0,105$   $\mu_1'' = 0,036$   $\mu_2' = 1,6$   $\mu_2'' = 0,08$   
 (unités arbitraires). L'application de A3-1 conduit à

$$\mu' \geq 0,299 \quad (a) \qquad \mu'' \geq 0,0536 \quad (b)$$

or 
$$j' = \frac{\mu_1'}{\mu_1'^2 + \mu_1''^2} \quad (\text{A3-5}) \Rightarrow j' = 8,522 \quad \text{et} \quad j' = 0,6234$$

de A3-2 on tire  $1/j' \leq 0,695$  qui avec A3-5 et (a) donne

$$\mu'' \leq 0,344 \quad (c) \quad \text{et avec A3-5 et (b) donne} \quad \mu' < 0,69 \quad (d)$$

Une amélioration de la borne supérieure de  $\mu''$  peut être obtenue en utilisant A3-4 et la relation  $j_1'' = 1/(\mu_1'^2 + \mu_1''^2)$  ce qui donne

$$j_1'' = 2,922 \quad \text{et} \quad j_2'' = 0,03117 \quad \text{donc} \quad h = 1,858 \quad \text{et} \quad k = 5,076$$

de A3-4 on déduit alors l'inégalité  $\mu''^2 + 5,076\mu'' + (\mu_1'^2 - 1,858\mu') < 0$   
 qui avec l'encadrement trouvé sur  $\mu'$  conduit à  $\mu'' < 0,154$

donc finalement on obtient les encadrements suivants:

$$0,299 \leq \mu' \leq 0,69$$

et

$$0,0536 \leq \mu'' < 0,154$$

Remarque:

Dans le cas où on utilise comme borne inférieure le résultat donné par la loi de mélange sur les inverses on obtient :

$$\mu' \geq \left[ \sum_r \frac{fr}{\mu'_r} \right] \quad \mu' \geq \left[ \frac{0,5}{0,105} + \frac{0,5}{1,6} \right] \quad \text{soit } \mu' \geq 0,197$$

$$\mu'' \geq \left[ \sum_r \frac{fr}{\mu''_r} \right] \quad \mu'' \geq \left[ \frac{0,5}{0,036} + \frac{0,5}{0,08} \right] \quad \text{soit } \mu'' \geq 0,0496$$

les bornes supérieures sont obtenues à partir des relations I-7 et II-8 :

$$\mu'^2 \leq \left( \frac{1}{\left( \frac{0,5}{8,522} + \frac{0,5}{0,65234} \right)^{-2} + \left( \frac{0,5}{2,922} + \frac{0,5}{0,3117} \right)^{-2}} \right) - \left( \frac{0,5}{0,036} + \frac{0,5}{0,08} \right)^{-2}$$

$$\mu''^2 \leq \left( \frac{1}{\left( \frac{0,5}{8,522} + \frac{0,5}{0,65234} \right)^{-2} + \left( \frac{0,5}{2,922} + \frac{0,5}{0,3117} \right)^{-2}} \right) - \left( \frac{0,5}{0,105} + \frac{0,5}{1,6} \right)^{-2}$$

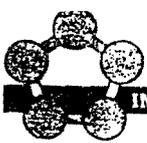
d'où

$$0,197 < \mu' < 0,858$$

et

$$0,0496 \leq \mu'' \leq 0,836$$





**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE**

o o o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur THIBAUT, Directeur de Recherche, USTL Montpellier,  
Monsieur BERVEILLER Marcel, Professeur, ENIM Metz.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur VIEVILLE Pascal**

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Influence des paramètres architecturaux sur les caractéristiques viscoélastiques du bois à ses différentes échelles d'hétérogénéité"

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité : "MECANIQUE & ENERGETIQUE"



Fait à Vandoeuvre le, 1<sup>o</sup> Décembre 1992

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIUS