



**HAL**  
open science

# Influence de la gravité sur les interactions fluide-structure pour un fluide dans un domaine borné à surface libre

Xin-Jian Chai

► **To cite this version:**

Xin-Jian Chai. Influence de la gravité sur les interactions fluide-structure pour un fluide dans un domaine borné à surface libre. Matière Condensée [cond-mat]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996. Français. NNT : 1996INPL137N . tel-01751126

**HAL Id: tel-01751126**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751126v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

45600 86387

56 L NPL 1971

[M] 1996 CHAI, X.-J.

Institut National Polytechnique de Lorraine

THESE

PRESENTEE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE  
POUR OBTENIR LE TITRE DE

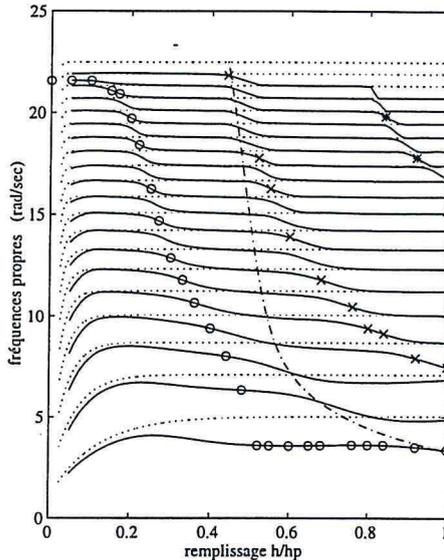
DOCTEUR DE L'I.N.P.L EN MECANIQUE ET ENERGETIQUE

par Xin-Jian CHAI

INFLUENCE DE LA GRAVITE

SUR LES INTERACTIONS FLUIDE - STRUCTURE

POUR UN FLUIDE DANS UN DOMAINE BORNE A SURFACE LIBRE



Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy-Brabois

soutenu publiquement le 31 octobre 1996, devant la commission d'examen :

Rapporteurs : **B. PESEUX**

Professeur, Ecole Centrale Nantes

**R. VALID**

Professeur, ENS de Cachan

Examineurs : **J. P. BRANCHER**

Professeur, INPL Nancy

**F. CORBERAND**

Ingénieur, Aérospatiale

**E. DE LANGRE**

Ingénieur, CEA Gif sur Yvette

**J. M. GENEVAUX**

Maître de Conférences, INPL Nancy

**O. SERO-GUILLAUME**

Directeur de Recherche, LEMTA-CNRS Nancy



## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) sous la direction de Monsieur Jean-Pierre BRANCHER, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'aide inestimable qu'il m'a prodiguée pendant toute la durée de ce travail.

Ma très profonde gratitude va aussi à Monsieur Jean-Michel GENEVAUX, Maître de Conférences à l'INPL, pour le soutien qu'il m'a apporté, ses compétences et son appui constant m'ont permis d'enrichir et approfondir mes connaissances.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Bernard PESEUX, Professeur à l'École Centrale Nantes, et Monsieur Roger VALID, Professeur honoraire à l'École Centrale Paris, qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur François CORBERAND, Ingénieur à l'Aérospatiale et au Monsieur Emmanuel de LANGRE Ingénieur au CEA, pour avoir accepté de participer au jury.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Olivier SERO-GUILLAUME, Directeur de Recherche, LEMTA-CNRS à Nancy, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour avoir accepté de siéger dans ce jury.

Je tiens à remercier tous mes collègues du LEMTA, qui ont su faire rendre ce travail aussi agréable qu'intéressant, par leur amitié et leur conseils, avec une pensée particulière à Marie-Hélène, Daniel, François, Jonathan et Karim.

Je ne peux oublier d'adresser ma profonde gratitude au gouvernement Chinois pour l'aide financière qu'il m'a apportée en m'octroyant une bourse.



# SOMMAIRE

<b>CHAPITRE 1.</b> ....	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE ET ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	<b>1</b>
1.1 LES PROBLÈMES D'INTERACTION FLUIDE - STRUCTURE .....	1
1.1.1 Problèmes extérieurs .....	2
1.1.2 Problèmes intérieurs .....	3
1.2 LES MÉTHODES DE RÉOLUTION .....	4
1.2.1 Les approches analytiques .....	4
1.2.2 Les méthodes numériques.....	4
1.3 LES ÉTUDES ANALYTIQUES DE BALLOTTEMENT DANS UN RÉSERVOIR DÉFORMABLE .....	5
1.4 LE BUT D'ÉTUDE ET LE PLAN DE PRÉSENTATION .....	5
<b>CHAPITRE 2.</b> .....	<b>7</b>
<b>FORMULATION DU PROBLÈME D'INTERACTION FLUIDE - STRUCTURE DANS UN DOMAINE BORNÉ EN PRÉSENCE DE GRAVITÉ</b> .....	<b>7</b>
2.1. INTRODUCTION .....	7
2.2. LES ÉQUATIONS ET LES CONDITIONS AUX LIMITES DU FLUIDE .....	7
2.2.1 Les équations et les conditions aux limites du fluide dans le cas général.....	7
2.2.2 Application au problème de la cuve bidimensionnelle.....	9
2.3 LINÉARISATION .....	13
2.3.1 Transformation de domaine .....	13
2.3.2 Développement asymptotique.....	16
2.4 LA SOLUTION DES ÉQUATION LINÉAIRES D'ORDRE '1' .....	22
2.4.1 Simplification des équations.....	22
2.4.2 Une solution analytique du système à interface mobile .....	24
CONCLUSION .....	26
<b>CHAPITRE 3.</b> .....	<b>27</b>
<b>UN MODÈLE D'INTERACTION FLUIDE - STRUCTURE :</b> .....	<b>27</b>
3.1. INTRODUCTION .....	28
3.1.1. La masse ajoutée .....	28
3.1.2. L'objet de cette étude, le plan de présentation.....	30
3.2. UN MODÈLE D'INTERACTION FLUIDE - STRUCTURE : MASSE - RESSORT - AMORTISSEUR - LIQUIDE (MRAL).....	31
3.2.1. Modèle MRAL.....	31
3.2.2. Equation caractéristique du système couplé .....	33
3.3. RÉPONSE À DES FORCES : MIS EN ÉVIDENCE DU COUPLAGE FLUIDE - STRUCTURE.....	34
3.3.1. Les systèmes non couplés et les pulsations propres non - couplées .....	35

3.3.2. Le système couplé : MRL.....	36
3.4. LES EFFETS DE PARAMÈTRES DU SYSTÈME SUR LES FRÉQUENCES PROPRES COUPLÉES.....	41
3.4.1. Les effets de raideur sur les fréquences couplées.....	43
3.4.2. Les effets de masse sur les fréquences couplées.....	46
3.5. INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DE MASSE AJOUTÉE.....	47
3.6. LES INFLUENCES SUR LA MASSE AJOUTÉE DU NOMBRE DE FROUDE $F_r$ ET DU CONFINEMENT.....	51
3.6.1 Le cas où $F_r \gg 1$ .....	51
3.6.2 Le cas où $F_r \ll 1$ .....	55
3.6.3 Le cas où $F_r \approx 1$ .....	56
3.6.4 Conclusion de la dépendance par rapport au nombre de Froude.....	61
3.6.5 Comparaison des fréquences couplées, à Froude infini et fini.....	62
3.7. INFLUENCE DU TYPE DE CONDITIONS AUX LIMITES SUR DE LA MASSE AJOUTÉE.....	67
3.8. L'INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT DE LA STRUCTURE SUR LE COUPLAGE DU SYSTÈME.....	71
3.8.1. Vibration libre : fréquences propres.....	71
3.8.2 Fonction de réponse en fréquence (FRF).....	71
3.9 CONCLUSION.....	75
<b>CHAPITRE 4. ....</b>	<b>77</b>
<b>INTERACTION ENTRE UNE POUTRE ET UN LIQUIDE CONTENU DANS UN RÉSERVOIR</b>	
<b>RECTANGULAIRE AVEC SURFACE LIBRE.....</b>	<b>77</b>
4.1. INTRODUCTION.....	77
4.1.1 Phénomènes différents et les descriptions associées.....	78
4.1.2 Travaux précédents.....	80
4.1.3 Objet d'étude.....	82
4.2. LES ÉQUATIONS ET LES CONDITIONS AUX LIMITES.....	82
4.3. LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS COUPLÉES.....	85
4.3.1 La recherche des fonctions de forme $u$ et $u_d$ .....	86
4.3.2. Les valeurs propres du système couplée.....	90
4.4. VÉRIFICATION DE LA MÉTHODE À L'AIDE DES RÉSULTATS EXISTANTS.....	90
4.4.1 Nomenclatures.....	91
4.4.2 Vérification par les résultats analytiques et expérimentaux de Veklich et Malyshev (1990).....	91
4.4.3 Vérification à l'aide des résultats numériques de Ousset (1980).....	98
4.5. COMPARAISON AVEC DES RÉSULTATS ANALYTIQUES (BAUER, 1968).....	102
4.5.1 L'évolution de fréquences propres avec la profondeur du liquide $h/h_p$ (remplissage).....	102
4.5.2. Les modes couplés pour $h/h_p = 0,6$ .....	105
CONCLUSIONS.....	108

<b>CHAPITRE 5.</b> .....	<b>110</b>
<b>ETUDE EXPÉRIMENTALE DE L'INTERACTION FLUIDE - STRUCTURE DANS UN RÉSERVOIR AVEC SURFACE LIBRE</b> .....	<b>110</b>
RÉSUMÉ : .....	110
INTRODUCTION .....	110
5.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL .....	111
5.2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX .....	118
5.2.1. <i>Les fréquences propres de la poutre sèche</i> .....	118
5.2.2. <i>Les fréquences et modes propres couplés</i> .....	121
5.3. RÉSULTATS THÉORIQUES .....	124
5.3.1. <i>Les systèmes non couplés</i> .....	125
5.3.2. <i>Les fréquences et modes propres du systèmes couplé : résultats théoriques</i> .....	128
5.3.3. <i>L'évolution des fréquences et modes propres du système couplé en fonction du remplissage : résultats                 théoriques</i> .....	133
5.4. COMPARAISON DES RÉSULTATS ANALYTIQUES ET EXPÉRIMENTAUX .....	136
CONCLUSION.....	137
<b>CHAPITRE 6.</b> .....	<b>138</b>
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</b> .....	<b>138</b>
<b>ANNEXE 1. LOI DE COMPORTEMENT LINÉAIRE ÉLASTIQUE D'UNE POUTRE ET LES EFFORTS GÉNÉRALISÉS AU POINT ACTUEL</b> .....	<b>140</b>
A 1.1 ÉQUILIBRE D'UN TRONÇON DE POUTRE .....	141
A 1.2 LOI DE COMPORTEMENT.....	142
A 1.3 ÉQUATION FINALE .....	143
<b>ANNEXE 2. MASSES AJOUTÉES GÉNÉRALISÉES</b> .....	<b>144</b>
<b>ANNEXE 3. LES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE <math>[\Lambda]_{8 \times 8}</math></b> .....	<b>148</b>
<b>ANNEXE 4. LE DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL DE TYPE BATTEUR DE HOULE</b> .....	<b>149</b>
<b>ANNEXE 5. LE CALCUL DE MODES PROPRES DE LA PLAQUE SÈCHE EN EF</b> .....	<b>151</b>
<b>ANNEXE 6 MESURE PAR UNE MÉTHODE OPTIQUE DU PROFIL DE LA SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE EN MOUVEMENT</b> .....	<b>153</b>
A6.1. INTRODUCTION.....	153
A6.2. PRINCIPE DE LA METHODE .....	153

A6.3. L'EXPERIENCE SIMULATION NUMERIQUE DE ..... 156

A6.4. EXEMPLE DE L'APPLICATION DE LA METHODE ..... 160

A6.5. CONCLUSION ..... 160

**BIBLIOGRAPHIE..... 161**

# Chapitre 1.

## Introduction générale et étude bibliographique

Dans ce document, nous nous intéresserons au problème de vibration d'une structure déformable couplée avec un fluide à surface libre contenu dans un domaine borné. Il est nécessaire de résoudre simultanément les deux sous - systèmes : fluide et structure en tenant compte de leurs conditions d'interface. Par exemple, lorsque la structure est placée dans un écoulement, sa présence perturbe celui-ci. Des efforts hydrodynamiques engendrés sur la structure peuvent être calculés et modifient alors sa position ou sa forme. Les interfaces fluide - structure s'étant déplacés, l'écoulement est à son tour modifié, pouvant ainsi rendre caduque l'évaluation précédente des efforts hydrodynamiques.

### 1.1 Les problèmes d'interaction fluide - structure

La difficulté dans un problème d'interaction fluide - structure provient de la difficulté de définir une "entrée" au problème. Le mécanicien des solides souhaitera connaître le chargement sur la structure et donc les pressions exercées par le fluide sur celle-ci, inconnues du problème. Le mécanicien des fluides souhaitera connaître les conditions aux limites sur le domaine fluide et entre autres la cinématique de l'interface fluide - structure, elle aussi inconnue du problème. Le problème est donc à considérer globalement et à résoudre simultanément dans les deux domaines.

Les problèmes d'interaction fluide - structure peuvent être classés suivant la configuration. Par exemple si l'écoulement du fluide est à l'extérieur ou l'intérieur de la structure, les méthodologies de résolution en dépendent fortement (Genevaux, 1996).

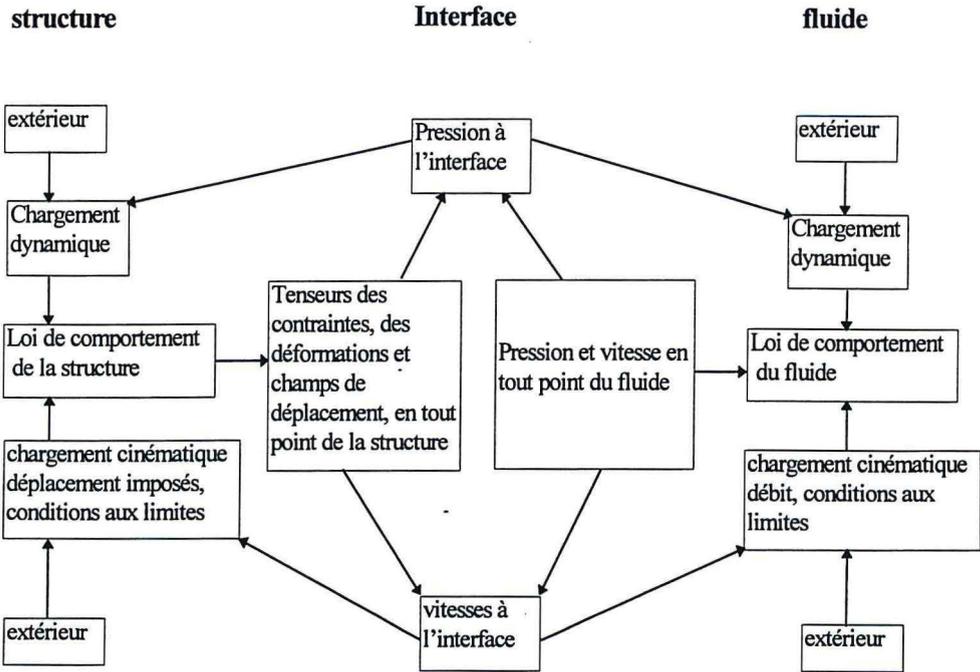


Figure 1.1 La boucle de couplage fluide - structure

### 1.1.1 Problèmes extérieurs

Notre cas d'étude ne concernant pas un problème pour lequel le fluide est à l'extérieur de la structure, nous ne ferons que citer quelques exemples des vibrations observées.

- Structures civiles : hautes cheminées, grands ponts, gratte-ciel, câbles électriques, câbles de téléphérique vibrant sous l'effet du vent.
- Structures marines : navires, plates-formes offshore soumises à la houle,
- Structures aériennes : aile d'avion, pales d'hélice, aubages de turbomachines (turbines à gaz, compresseurs aéronautiques) etc.,
- Installations hydrauliques : vanne segment, aubades de turbines Francis etc..
- Structures de réacteur nucléaire : faisceaux tubulaires de réacteur ou d'échangeur.

L'exemple le plus célèbre de rupture du fait des interactions fluide - structure, est celui du pont suspendu de Tacoma dans l'état de Washington (U.S.A.) sur la côte Ouest. La proximité des deux fréquences propres en torsion et en flexion, ont engendré suite à un vent transversal violent un phénomène de flottement : les efforts aéroélastiques relatifs au mouvement sur l'un des

modes, excitent l'autre mode, lui fournissant de l'énergie. L'amplitude du second mode s'accroissant, les efforts aéroélastiques correspondants transfèrent à leur tour de l'énergie sur le premier mode, qui lui aussi s'amplifie jusqu'à la rupture de l'ouvrage (Dat, 1995).

Citons quelques ouvrages sans plus de commentaires :

Blevins (1979, 1990), Gilbert (1989) : vibration induite par écoulement.

Bisplinghoff (1955, 1962), Fung (1969), Dowell et al. (1978, 1989, 1995) : aéroélasticité, le fluide est compressible.

Bishop (1979), et les thèses de Peseux (1989) et Oudin (1986) : hydroélasticité, études du comportement dynamique des structures marines en présence de houle en prenant en compte la déformation du navire dans le calcul.

Conca et al. (1994), Païdoussis (1982, 1981), Chen J.J. (1975) et Chen S.S. (1991, 1994) : hydroélasticité pour les faisceaux tubulaires en écoulement monophasique ou diphasique.

### **1.1.2 Problèmes intérieurs**

Le fluide peut être aussi à l'intérieur même de la structure.

- tuyauteries mises en vibration par l'écoulement interne : les canalisations industrielles, circuits biologiques de notre organisme (hémodynamique)
- les lanceurs à propergols liquides comme ARIANE.
- les réservoirs : de véhicules, réacteur nucléaire.
- la cavité acoustique.

L'exemple le plus connu de ce type de problème est l'effet "Pogo" des lanceurs à propergols liquides ou une partie de la puissance propulsive est déviée de sa vocation pour entretenir un couplage avec les vibrations des structures.

Citons l'ouvrage de Morand et Ohayon (1995) pour la formulation et les études numériques des interactions fluides - structures dans le domaine fluide borné. En ce qui concerne les problèmes de réacteur nucléaire, nous citons les revues de Belytschko (1977), Au-Yang et Galford (1982) et Engel (1994). Pour les études de problèmes d'interaction fluide - solide dans la cavité acoustique, nous citons l'ouvrage de Lesueur (1988) et Morand et Ohayon (1995).

## 1.2 Les méthodes de résolution

### 1.2.1 Les approches analytiques

En général, les solutions analytiques ne peuvent être trouvées que dans le cas de géométrie simple. Cette connaissance de solutions analytiques permet de valider les modèles numériques utilisés pour des géométries plus complexes.

Dans le cas où la structure est indéformable en mouvement dans le fluide, et en absence de pesanteur, la théorie des masses ajoutées est utilisée. (Lamb, 1932 ; Birkhoff, 1955 ; Brancher, 1995). Dans cette théorie, seuls les effets inertiels du fluide sont pris en compte. On trouvera dans (Blevins, 1979) les masses ajoutées de cylindres de sections droites diverses pour des milieux fluides infinis. En présence d'une surface libre, dans le cas où la pesanteur est présente, il sera nécessaire d'introduire son énergie potentielle. Nous nous placerons dans ce cas-là.

Si la structure est déformable, cette théorie est difficilement applicable, car les coefficients hydrodynamiques dépendent de la forme de celle-ci. Le principe de la résolution est de déterminer dans un premier temps les modes et fréquences propres de la structure sèche, puis d'utiliser cette base modale pour exprimer la vitesse normale à l'interface, ce qui de calculer le potentiel des vitesses. Cette méthode est à rejeter si les bases modales "sèches" et "mouillées" n'ont a priori rien à voir entre elles. Prenons le cas d'un réservoir rempli partiellement : les conditions aux limites sur la structure seront différentes sur les parties immergées et émergées.

### 1.2.2 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques sont très utiles pour résoudre les problèmes pratiques. Les méthodes peuvent être classées comme suit : différences finis, éléments finis, volumes finis et équations intégrales. Le principe de ces méthodes est la discrétisation d'un domaine continu, la recherche des solutions du système discret qui approche le problème. Citons les revues remarquables de Kalinowski (1975), Belytschko (1977), Au-Yang et Galford (1982), Broderick et Léonard (1990), Engel (1994), et l'ouvrage de Morand et Ohayon (1995).

Pour une structure complexe, même si on suppose qu'elle est rigide, le calcul de masse ajoutée nécessite une méthode numérique, éléments finis ou équations intégrales. On consultera la synthèse bibliographique de Rousseau (1994), et le livre de Bousquet (1990) ou potentiel de double couche.

Pour les problèmes généraux d'une structure déformable couplée avec un fluide, il existe plusieurs codes de calcul commerciaux : ANSYS, ADINA pour les problèmes de réacteur nucléaire (Engel, 1994) et MSC/NASTRAN (Fernholz et Robinson, 1996).

### **1.3 Les études analytiques de ballonnement dans un réservoir déformable**

Un exemple type d'interaction fluide - structure dans l'ingénierie structurale est un réservoir flexible sous excitation sismique rempli d'un liquide. Les deux composants sont la structure (le réservoir sec) et le fluide interne.

Hormis les études numériques de Morand et Ohayon (1995) et de Omrani (1992), la plupart des études analytiques disponibles considèrent seulement les effets hydrodynamiques de chargement sur la structure, négligeant les effets de la gravité. Citons les revues remarquables mais anciennes d'Abramson (1968), Kana (1966) et Bauer (1981). On trouvera dans les deux premières, des résolutions pour des réservoirs cylindriques aux parois latérales ou au fond élastique, dans la dernière, pour un réservoir rectangulaire ayant un fond élastique. Dans le cas où la paroi est élastique et le réservoir rectangulaire peu d'études existent. En effet pour une telle géométrie, la méthode de séparation de variable n'aboutit pas.

### **1.4 Le but d'étude et le plan de présentation**

Le but de cette étude est de présenter une résolution analytique du comportement de vibration du système couplé : liquide - réservoir où le liquide est incompressible et non visqueux, les effets de la présence d'une surface libre et de la gravité sont discutés. Le réservoir déformable est modélisé par une paroi rigide mobile, piston en translation, une plaque rigide en rotation ou poutre élastique.

Le mémoire est divisé en 5 chapitres :

Le chapitre 2 présente les équations générales du problème et la linéarisation de celui-ci, ainsi qu'un développement en série du potentiel des vitesses qui permet de satisfaire exactement l'équation d'incompressibilité et les conditions aux limites du fluide.

Le chapitre 3 présente des applications : calcul des modes et fréquences propres d'un système couplé de type rigide (piston en translation ou plaque rigide en rotation). Les phénomènes de couplage solide - fluide avec surface libre sont mis en évidence en utilisant la fonction de réponse en fréquence. La notion de masse ajoutée classique est généralisée en prenant

en compte les effets de la gravité par l'intermédiaire de la surface libre du fluide. La procédure analytique complète peut être programmée facilement. Les résultats de cette méthode sont comparés avec les autres résultats analytiques.

Le chapitre 4 étudie le cas où la paroi de réservoir est flexible. Elle est modélisée par une poutre en flexion. La procédure analytique complète peut être aussi programmée. Les résultats de cette méthode sont comparés avec les résultats numériques de la littérature.

Le chapitre 5 présente une étude expérimentale de ce problème. Les phénomènes couplés sont mis en évidence expérimentalement et comparés aux résultats analytiques.

## Chapitre 2.

# Formulation du problème d'interaction fluide - structure dans un domaine borné en présence de gravité

### 2.1. Introduction

Nous présenterons les équations de base du fluide et de la structure, la linéarisation des équations et les conditions aux limites. Le potentiel qui satisfait les équations et les conditions aux limites linéaires sera déterminé.

### 2.2. Les équations et les conditions aux limites du fluide

La formulation d'écoulement avec une surface libre du fluide peut être trouvée dans Wehausen et Laitone (1960). Nous rappellerons les équations de base du fluide et de la structure, essentiellement afin de définir les notations et les hypothèses utilisées. Nous présenterons la linéarisation des équations et des conditions aux limites.

#### 2.2.1 Les équations et les conditions aux limites du fluide dans le cas général

La figure 2.1 représente un modèle d'interaction fluide - structure dans un réservoir déformable. Nous désignons les coordonnées cartésiennes d'un point géométrique dans le domaine du fluide par  $\bar{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ , le temps par  $t^*$ , le domaine occupé par le fluide par  $\Omega_f^*(\bar{x}^*, t^*)$ , celui de la structure par  $\Omega_s^*(\bar{x}^*, t^*)$ , la surface libre du fluide par  $\Gamma_f^*(\bar{x}^*, t^*)$ , l'interface entre le fluide et la structure par  $\Sigma_m^*(\bar{x}^*, t^*)$ , la surface rigide de la structure par

$\Sigma_r^*(\bar{x}^*, t^*)$ , la surface déformable de la structure par  $\Sigma_d^*(\bar{x}^*, t^*)$  la vitesse du fluide par  $\bar{v}^* = v_i^* \bar{e}_i^*$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), la pression par  $p^* = p^*(\bar{x}^*, t^*)$ , la masse volumique du fluide par  $\rho_f^*$ .

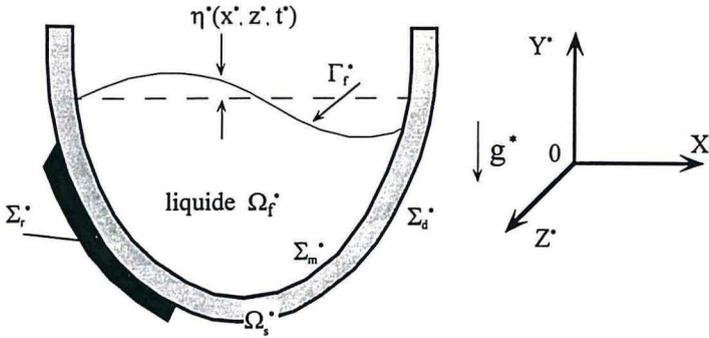


figure 2.1 Un modèle d'interaction fluide - structure dans un réservoir

Les lois de conservation :

Nous nous placerons directement sous l'hypothèse d'un fluide parfait incompressible. La conservation de la matière est traduite par l'équation de continuité du fluide, qui s'exprime par le fait que l'écoulement est isovolume :

$$\operatorname{div} \bar{v}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega_f^*(\bar{x}^*, t^*) \quad (2.2.1)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement donne l'équation d'Euler, où  $\bar{f}^*$  désigne les forces massiques extérieures :

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + (\bar{v}^* \cdot \nabla) \bar{v}^* = \bar{f}^* - \frac{1}{\rho_f^*} \nabla p^* \quad \text{dans } \Omega_f^*(\bar{x}^*, t^*) \quad (2.2.2)$$

Nous travaillerons dans le cas où la température est constante, aussi nous ne présenterons pas l'équation de conservation de l'énergie. La loi de comportement de fluide étant définie, il nous faut maintenant caractériser les conditions aux limites sur les frontières de  $\Omega_f^*(\bar{x}, t)$ .

Les conditions aux limites :

Sur l'interface fluide - air (la surface libre) nous écrivons une condition cinématique et une condition dynamique. La condition cinématique traduit que la surface est matérielle, c'est à dire que le fluide suit le mouvement de celle-ci. Nous introduisons  $F^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  l'équation de la surface libre, et  $\eta^*(x^*, z^*, t^*)$  les déplacements de surface libre par rapport la position moyenne, tels que :

$$F^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = y^* - \eta^*(x^*, z^*, t^*) \quad (2.2.3)$$

La condition d'interface matérielle est :

$$\frac{DF^*}{Dt^*} = \frac{\partial F^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla) F^* = 0 \quad (2.2.4)$$

La condition dynamique traduit que la pression sur  $\Gamma_f^*(\vec{x}^*, t^*)$  est égale à la pression atmosphérique  $p_a$  :

$$p^* = p_a \quad \text{sur } \Gamma_f^*(\vec{x}^*, t^*) \quad (2.2.5)$$

Les autres interfaces peuvent être mobiles ou non et sont de type fluide - solide.

Sur l'interface fluide - solide :

Comme précédemment, nous écrivons deux conditions cinématique et dynamique. La condition cinématique pour un fluide non visqueux traduit l'imperméabilité de la surface. Elle stipule que la vitesse normale du fluide à la paroi est la même que celle du point solide lui correspondant.

$$\vec{v}_s^* \cdot \vec{n} = \vec{v}^* \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Sigma_m^*(\vec{x}^*, t^*) \quad (2.2.6)$$

avec  $\vec{n}$  la normale extérieure au solide.

Si  $Q^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  est l'équation de l'interface entre le fluide et la structure, l'équation est de la même forme que pour l'interface fluide - air :

$$\frac{DQ^*}{Dt^*} = \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \nabla) Q^* = 0 \quad (2.2.7)$$

Si la paroi est immobile  $Q^*$  ne dépend pas du temps, l'équation ci-dessus se simplifie en :

$$(\vec{v}^* \cdot \nabla) Q^* = 0 \Rightarrow \vec{v}^* \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_m^*(\vec{x}^*, t^*) \quad (2.2.8)$$

La condition dynamique traduit la continuité de la pression normale où  $\sigma^*$  désigne le tenseur des contraintes dans la structure :

$$-p^* \cdot \vec{n} = \sigma^* \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Sigma_m^*(\vec{x}^*, t^*) \quad (2.2.9)$$

Nous allons maintenant spécialiser les équation au cas d'une cuve bidimensionnelle.

### 2.2.2 Application au problème de la cuve bidimensionnelle

Nous traiterons le cas d'une cuve bidimensionnelle possédant une seule paroi mobile, deux parois immobiles et une surface libre tel que définie dans la figure ci-dessous :

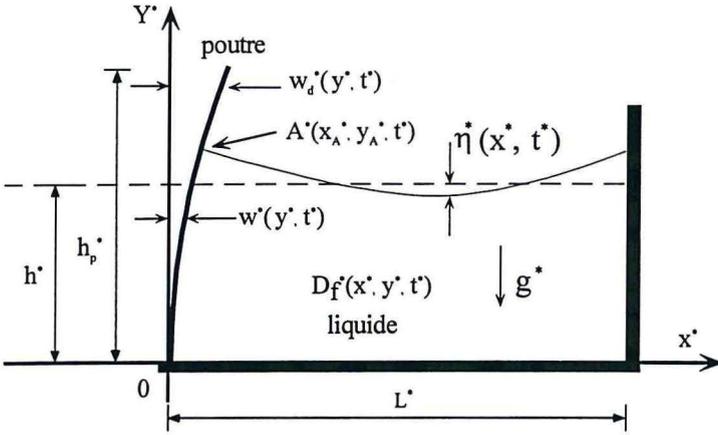


figure 2.2 un modèle bidimensionnel d'interaction fluide - structure

Nous noterons  $w^*(y^*, t^*)$  la position de l'interface mobile fluide - structure car seule une paroi au repos verticale est mobile . Le domaine  $D_f^*(\bar{x}^*, t^*)$  est simplement connexe, aussi pour la résolution du système, nous réécrivons les équations en fonction du potentiel de vitesse du fluide :

$$\bar{v}^* = \bar{\nabla}\varphi^* \quad \text{dans } D_f^*(\bar{x}^*, t^*) \quad (2.2.10)$$

L'incompressibilité en tout point du fluide :

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^{*2}} = 0, \quad \text{dans } D_f^*(\bar{x}^*, t^*) \quad (2.2.11)$$

avec  $D_f^*(\bar{x}^*, t^*)$ , l'ensemble des points  $(x^*, y^*)$  tel que :

$$w^*(y^*, t^*) \leq x^* \leq L^*, \quad 0 \leq y^* \leq h^* + \eta^*(x_A^*, t^*).$$

L'équation d'Eure s'intègre en équation de Bernoulli. Les forces volumiques étant celles de la pesanteur et  $O\bar{y}$  étant dirigé suivant la verticale ascendante ; On a :

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \frac{p^*}{\rho_f} + g^* y^* \right) = 0 \quad (2.2.12)$$

Ce qui donne l'intégrale première de Bernoulli.

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \frac{p^*}{\rho_f} + g^* y^* = A^*(t^*) \quad (2.2.13)$$

Cette équation nous permet de trouver la pression  $p^*$  en fonction de la cinématique du problème. On peut donc séparer le problème cinématique de celui du calcul de pression en remplaçant  $p^*$  par :

$$p^* = -\rho_f^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + g^* y^* - A^*(t^*) \right) \quad (2.2.14)$$

A la surface libre, l'équation (2.2.4) donne :

$$\frac{\partial F^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \frac{\partial F^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \frac{\partial F^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.2.15)$$

En utilisant (2.2.3) :

$$-\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} = 0, \quad (2.2.16)$$

$$y^* = h^* + \eta^*(x^*, t^*), w^*(h^* + \eta^*(x_A^*, t^*) \leq x^* \leq L^*$$

En prenant la pression atmosphérique comme pression de référence nulle, l'équation dynamique à la surface libre donne :

$$0 = \rho_f^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + g^* \eta^*(x^*, t^*) - A^*(t^*) \right) \quad (2.2.17)$$

$$y^* = h^* + \eta^*(x^*, t^*), w^*(h^* + \eta^*(x_A^*, t^*) \leq x^* \leq L^*$$

Nous ferons le même travail pour les autres conditions d'interface. Pour la structure mobile les conditions cinématique et dynamique donnent :

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \frac{\partial Q^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \frac{\partial Q^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.2.18)$$

avec

$$Q^*(x^*, y^*, t^*) = x^* - w^*(y^*, t^*) \quad (2.2.19)$$

d'où :

$$-\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.2.20)$$

Pour traduire la condition dynamique sur l'interface, il nous faut exprimer la pression en ce point. La formule (2.2.14) contient le terme de pression hydrostatique invariant dans le temps pour une cote  $y^*$  donnée. Appelons  $\bar{w}_s^*$  le déplacement de la structure. Il possède une

composante parallèle à  $\bar{x}^*$  égale au mouvement de l'interface  $w^*(y^*, t^*)$ , et une composante parallèle à  $\bar{y}^*$ . Si l'on définit  $\bar{w}_s^*$  comme le déplacement de la structure par rapport à la position d'équilibre sous le chargement hydrostatique, la formule (2.2.14) se simplifie en :

$$p^* = -\rho_i^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \bar{g}^* \cdot \bar{w}_s^* - A^*(t^*) \right) \quad (2.2.21)$$

On retrouve le résultat de Morand et Ohayon (1995).

Sur les parois immobiles, seule la condition cinématique est à écrire. Sur la face rigide de la cuve

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} = 0 \quad x^* = L^*, 0 \leq y^* \leq h^* + \eta^*(L^*, t^*) \quad (2.2.22)$$

Sur le fond de la cuve

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} = 0, \quad y^* = 0, 0 \leq x^* \leq L^* \quad (2.2.23)$$

Il nous faut écrire la loi de comportement de la structure mobile qui dépend de son type. Nous l'appliquerons chapitres 3 et 4 aux cas d'une masse pure en translation horizontale et à celui d'une poutre. Nous ne ferons ici apparaître que le vecteur chargement sur la structure  $\bar{T}(x_s^*, y_s^*, t^*, \bar{n})$  au point de coordonnées  $(x_s^*, y_s^*)$  pour la linéarisation des équations. (2.2.9) s'écrit :

$$\bar{T}(x_s^*, y_s^*, t^*, \bar{n}) = -\rho_i^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \bar{g}^* \cdot \bar{w}_s^* - A^*(t^*) \right) \bar{n} \quad (2.2.24)$$

En générale, l'équation de la structure est non linéaire. Pour simplifier le problème, nous ne considérons que le problème linéaire de la structure. En revanche, nous allons linéariser les équations non linéaires du fluide (les équations de la surface libre et de l'interface fluide - solide).

Dans l'annexe 1, nous présentons l'équation linéaire de la poutre qui est valable dans le cas des faibles pentes  $\left( \frac{\partial w^*(y^*, t^*)}{\partial t^*} \ll 1 \right)$ , avec une cinématique de type Bernoulli, dans le cas d'une loi de comportement linéaire élastique et les efforts généralisés étant calculés au point actuel  $w^*(y^*, t^*)$ . L'effort extérieur est donc représentatif de la pression au point actuel.

Dans le cas d'un système à un DDL : masse - ressort - amortisseur, l'équation du système linéaire est :

$$\bar{T}(x_s^*, y_s^*, t^*, \bar{n}) = m_s^* \ddot{w}^* + c_s^* \dot{w}^* + k_s^* w^* \quad (2.2.25)$$

où  $m_s^*$ ,  $c_s^*$ ,  $k_s^*$  sont la masse, l'amortissement et la rigidité respectivement.

L'équation de la poutre linéaire est :

$$\bar{T}(x_s^*, y_s^*, t^*, \bar{n}) = \rho_s^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + E^* I^* \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^{*4}} \quad (2.2.26)$$

où  $\rho_s^*$ ,  $E^* I^*$  sont la masse volumique et la rigidité de la poutre respectivement.

La conservation du volume pendant le mouvement rajoute une condition qui lie le mouvement de la poutre et de la surface libre :

$$\int_{D^*} dx^* dy^* = h^* L^*, \quad \text{quelque soit } t^*. \quad (2.2.27)$$

Avec, dans toutes les équations qui précèdent,

$$x_A^* = w^*(h^* + \eta^*(w^*(h^* + \eta^*(\dots), t^*), t^*, t^*), t^*). \quad (2.2.28)$$

Nous allons maintenant linéariser ces équations.

## 2.3 Linéarisation

### 2.3.1 Transformation de domaine

Les équations sont non linéaires et en plus écrites dans des domaines qui dépendent du temps. En effet, on notera la difficulté de définir la position du point  $A^*$ , point de contact entre la surface libre et la structure. Deux possibilités se présentent à nous. :

- On peut effectuer un développement de Taylor des fonctions apparaissant dans les équations, puis faire le développement asymptotique.
- On peut effectuer un changement de variables afin de travailler dans un domaine fixe, puis faire le développement asymptotique

Nous choisirons la deuxième méthode, afin de sommer au final, des fonctions aux différents ordres définies sur le même domaine transformé.

Deux types de non - linéarités géométriques sont présentes : à la surface libre et à l'interface fluide structure. Si l'on désire étudier les faibles non - linéarités, nous pouvons introduire les développements des fonctions par rapport à deux petits paramètres, l'un relatif au mouvement de la surface libre  $\varepsilon$ , l'autre relatif au mouvement de la structure  $\xi$ .

Soit les deux transformations suivantes :

d'un espace  $(x, y, t)$  à un espace  $(x', y', t')$  faisant correspondre le domaine  $D_f :$   
 $[0,1].[0,1].[0,1]$  au domaine  $D_f' : [0, 1].[0, h + \eta(x, t)].[0, 1]$ ,

puis de l'espace  $(x', y', t')$  à un espace  $(x^*, y^*, t^*)$  faisant correspondre le domaine  $D_f' : [0,$   
 $1].[0, h + \eta(x, t)].[0, 1]$  au domaine  $D_f^* : [w^*(y^*), L^*], [0, h + \eta(x, t)], [0, 1]$ .

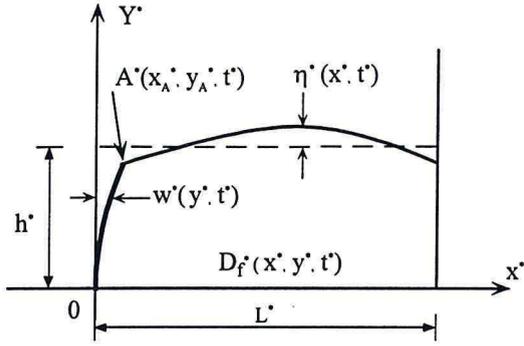
Le changement de variable entre les domaines d'arrivée  $D_f(\bar{x}, t)$  et de départ  $D_f^*(\bar{x}, t)$  a été choisi de telle sorte qu'il fasse correspondre les frontières des domaines :

$$x^* = w^*((h + \eta(x, t)) y) + x (L^* - w^*((h + \eta(x, t)) y)). \quad (2.3.1)$$

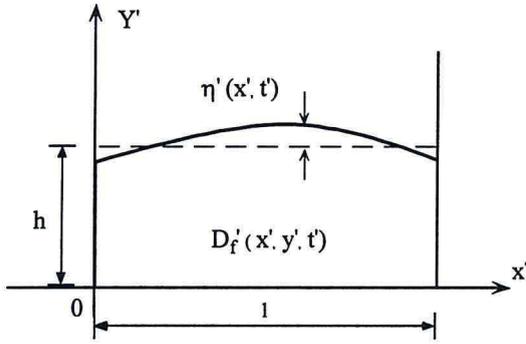
$$y^* = (h + \eta(x, t))y. \quad (2.3.2)$$

$$t^* = t. \quad (2.3.3)$$

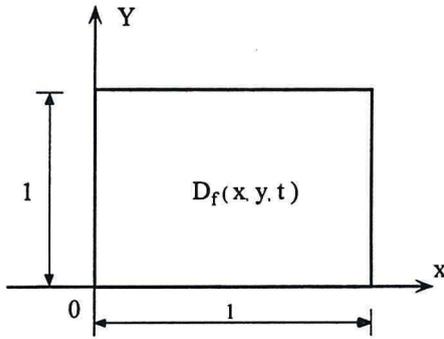
Les équations du problème précédent plus l'équation relative au changement de variable peuvent être réécrites dans le repérage  $(x, y, t)$ . Nous ne les écrivons pas ici du fait de leur complexité. Effectuons maintenant le développement asymptotique.



(a)



(b)



(c)

figure 2.3 transformation de domaine

### 2.3.2 Développement asymptotique

Le domaine est alors fixé et le développement asymptotique pourra être fait dans ce domaine. Le potentiel de vitesse sera développé sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \varphi^{00}(x, y, t) + \varphi^{01}(x, y, t)\varepsilon + \varphi^{10}(x, y, t)\zeta + \\ & \varphi^{02}(x, y, t)\varepsilon^2 + \varphi^{11}(x, y, t)\varepsilon\zeta + \varphi^{20}(x, y, t)\zeta^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Il en sera fait de même avec les fonctions  $\eta$  et  $w$ .

$$\eta(x, y, t) = \eta^{00}(x, y, t) + \eta^{01}(x, y, t)\varepsilon + \eta^{02}(x, y, t)\varepsilon^2 + \dots \quad (2.3.5)$$

$$w(x, y, t) = w^{00}(x, y, t) + w^{10}(x, y, t)\zeta + w^{20}(x, y, t)\zeta^2 + \dots \quad (2.3.6)$$

Développer  $\eta$  uniquement en fonction de  $\varepsilon$ , et  $w$  uniquement en fonction de  $\zeta$  permet de donner une signification physique à ces deux petits paramètres :  $\eta = o(\varepsilon)$  ;  $w = o(\zeta)$ . Ces grandeurs sont liées par la fonction  $\varphi$ . La structure mobile peut présenter une partie émergée. Si l'on note  $w_d$  la position de cette interface émergée (« d » comme « dry »), un développement identique à (2.3.6) sera fait pour exprimer la nullité du chargement sur cette portion.

Une autre solution serait de développer les fonctions inconnues sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \varphi^{00}(x, y, t)(1 + \zeta\varphi^{10}(x, y, t) + \zeta^2\varphi^{20}(x, y, t) + \dots) + \\ & \varepsilon\varphi^{01}(x, y, t)(1 + \zeta\varphi^{11}(x, y, t) + \zeta^2\varphi^{21}(x, y, t) + \dots) + \\ & \varepsilon^2\varphi^{02}(x, y, t)(1 + \zeta\varphi^{12}(x, y, t) + \zeta^2\varphi^{22}(x, y, t) + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Ces deux types de développements sont en fait équivalents. Ceci a été fait à l'aide du logiciel de calcul formel "Maple" car les expressions à manipuler deviennent rapidement très lourdes.

Suivons l'évolution d'une des équations, la condition cinématique à la surface libre que nous rappelons ci-dessous :

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial y^*} = \frac{\partial\eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^*} \frac{\partial\eta^*}{\partial x^*}, \quad y = h + \eta(x^*, t^*), \quad w^*(h^*, t^*) \leq x^* \leq L^* \quad (2.3.8)$$

Nous calculons tout d'abord la matrice Jacobienne reliant les dérivées, puis obtenons dans le nouveau repère aux points tels que  $y = 1$  et  $0 \leq x \leq 1$ , cette condition sous la forme :

$$J = \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial y} - \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial y^*}{\partial x} \quad (2.3.9)$$

$$J = (h + \eta(x, t))L^* - (h + \eta(x, t)) w((h + \eta(x, t))y, t) \quad (2.3.10)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (h + \eta(x, t))L^* - (h + \eta(x, t)) w((h + \eta(x, t))y, t) dx dy = L^* h \quad (2.3.11)$$

On introduit alors les développements précédents, ce qui nous donne en nous limitant dans ce document aux ordres 2.

à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} = \frac{\partial \eta^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{00}}{\partial x}, \quad \text{en } y = 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.12)$$

à l'ordre 2 en  $\varepsilon$

$$\frac{\partial \varphi^{01}}{\partial x} = \frac{\partial \eta^{01}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{01}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{00}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{01}}{\partial x} = 0, \quad \text{en } y = 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.13)$$

à l'ordre 2 en  $\xi$

$$\frac{\partial \varphi^{10}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{00}}{\partial x} = 0, \quad \text{en } y = 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.14)$$

Récapitulons ordre par ordre le jeu d'équations obtenu.

### ordre 00 :

Les équations obtenues à l'ordre 1 sont :

$$\frac{\partial^2 \varphi^{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{00}}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} = 0 \quad x = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.16)$$

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} = 0 \quad y = 0, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} = \frac{\partial \eta^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{00}}{\partial x} \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} \right)^2 \right) + g \eta^{00}(x, t) = k^{00}(t) \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.19)$$

$$\frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} = \frac{\partial w^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} \frac{\partial w^{00}}{\partial y} \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1. \quad (2.3.20)$$

$$\Gamma^{00}(0, y, t, \bar{x}) = -\rho_f \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} \right)^2 \right)$$

$$x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.21)$$

$$T^{00}(0, y, t, \bar{x}) = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.22)$$

$$\int_0^1 \eta^{00}(x, t) dx - \int_0^1 w^{00}(y, t) dy = 0 \quad \text{quelque soit } t. \quad (2.3.23)$$

L'équation (2.3.21) ne fait pas apparaître de terme en  $\bar{g} \cdot \bar{w}^{00}$  car les déplacements infinitésimaux sont perpendiculaires à la gravité. Nous faisons maintenant apparaître la loi de comportement de la structure. Dans le cas d'une poutre en vibrations transverses, il faudrait écrire la loi de comportement non linéaire, puis la linéariser. Pour les ordres 0 et 1, on obtient en fait l'équation classique liant les dérivées secondes par rapport au temps à la dérivée quatrième en espace :

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w^{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w^{00}}{\partial y^4} = \frac{\rho_f^* h^4}{E^* I^*} \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{00}}{\partial y} \right)^2 \right) \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.24)$$

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w_d^{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_d^{00}}{\partial y^4} = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.25)$$

Dans le cas d'un système masse ressort amortisseur, on obtient :

$$m_s \ddot{w}^{00} + c_s \dot{w}^{00} + k_s w^{00} = \int_0^1 T^0(0, y, t, \bar{x}) dy \quad (2.3.26)$$

$w^{00} = 0$ ,  $\eta^{00} = 0$ ,  $k^{00}(t) = 0$  et  $\varphi^{00}(x, y, t) = 0$  est solution du problème à l'ordre 00. Le retour à l'espace réel donne bien sûr une solution nulle.

### ordre 01 : $\zeta \ll \varepsilon$

En injectant dans le système d'équation obtenue à l'ordre 2 en  $\varepsilon$  la solution à l'ordre 1 (en faisant disparaître les termes indicés (00)), le problème à l'ordre 01 est :

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \varphi^{01}}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi^{01}}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.27)$$

$$\frac{\partial \varphi^{01}}{\partial x} = 0 \quad x = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.28)$$

$$\frac{\partial \varphi^{01}}{\partial y} = 0 \quad y = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.29)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi^{01}}{\partial y} = \frac{\partial \eta^{01}}{\partial t} \quad y = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.30)$$

$$\frac{\partial \varphi^{01}}{\partial t} + g^* \eta^{01}(x, t) = k^{01}(t) \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.31)$$

$$\frac{1}{L^*} \frac{\partial \varphi^{01}}{\partial x} = 0 \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1. \quad (2.3.32)$$

$$T^{01}(0, y, t, \bar{x}) = -\rho_f^* \frac{\partial \varphi^{01}}{\partial t} \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.33)$$

$$T^{01}(0, y, t, \bar{x}) = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.34)$$

$$\int_0^1 \eta^{01}(x, t) dx = 0 \quad \text{quelque soit } t. \quad (2.3.35)$$

La loi de comportement de la structure sera de la même forme que (2.3.24) et (2.3.25) ce qui nous donne :

$$0 = -\frac{\rho_f^*}{E^* I^*} \left( \frac{\partial \varphi^{01}}{\partial t} \right) \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.36)$$

$$0 = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.37)$$

Dans le cas d'un système masse ressort amortisseur, on obtient :

$$0 = \frac{1}{k_s} \int_0^1 T^{01}(0, y, t, \bar{x}) dy \quad (2.3.38)$$

Pour qu'une solution existe, l'équation (2.3.36) implique que  $\frac{\rho_f^*}{E^* I^*}$  soit de l'ordre de  $\zeta$ , pour rejeter ce terme à un ordre différent. Il suffit pour cela de considérer une structure de grande rigidité. Il en est de même pour un système masse - ressort de rigidité  $k_s$  infinie.

La solution décrivant le fluide qui ballote avec une faible amplitude dans une cuve rigide de même dimensions est solution de ce système. Pour chaque valeur de  $q$  vérifiant  $q = n \pi$  avec  $n$  entier, le potentiel de vitesse est donné par,

$$\varphi^{01}(x, y, t) = \beta \cos(q(x-1)) \cosh(qy) \omega \sin(\omega t) \quad (2.3.39)$$

la surface libre par,

$$\eta^{01}(x, t) = -\beta \frac{\omega^2}{g} \cos(q(x-1)) \cosh(q) \cos(\omega t) \quad (2.3.40)$$

le lien entre pulsation propre et longueur d'onde ( $\frac{2\pi}{q}$ ) est,

$$\omega^{01} = \sqrt{q \frac{g^*}{L^*} \tanh\left(q \frac{h}{L^*}\right)} \quad (2.3.41)$$

$$k^{01}(t) = 0 \quad (2.3.42)$$

**ordre 10** :  $\zeta \gg \varepsilon$

Dans ce cas le mouvement de la surface libre est négligeable devant celui de la structure.

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \varphi^{10}}{\partial x^2} + \frac{1}{h_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{10}}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.43)$$

$$\frac{\partial \varphi^{10}}{\partial x} = 0, \quad x = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.44)$$

$$\frac{\partial \varphi^{10}}{\partial y} = 0 \quad y = 0, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.45)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi^{10}}{\partial y} = 0 \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.46)$$

$$\frac{\partial \varphi^{10}}{\partial x} = k^{10}(t) \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.47)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial \varphi^{10}}{\partial x} = \frac{\partial w^{10}}{\partial t} \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1. \quad (2.3.48)$$

$$T^{10}(0, y, t, \bar{x}) = -\rho_f^* \left( \frac{\partial \varphi^{10}}{\partial t} \right) \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.49)$$

$$T^{10}(0, y, t, \bar{x}) = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.50)$$

$$-\int_0^1 w^{10}(y, t) dy = 0 \quad (2.3.51)$$

On peut détailler la loi de comportement de la structure sous les mêmes hypothèses de petit déplacement pour une poutre et pour une masse rigide en translation :

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w^{10}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w^{10}}{\partial y^4} = -\frac{\rho_f^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial \varphi^{10}}{\partial t} \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.52)$$

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w_d^{10}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_d^{10}}{\partial y^4} = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.53)$$

$$m_s \ddot{w}^{10} + c_s \dot{w}^{10} + k_s w^{10} = \int_0^1 T^{10}(0, y, t, \bar{x}) dy \quad (2.3.54)$$

Ce problème correspond au mouvement de la structure dans une cuve dont la surface libre a été remplacé par une paroi rigide. Nous ne chercherons pas à le résoudre.

**mode couplé (ordre '1') :**  $\zeta = O(\varepsilon)$

Nous pouvons poser  $\zeta = \varepsilon$ . Nous recherchons des solutions pour lesquelles les déplacements de surface libre et de structure sont du même ordre de grandeur. Baptons  $\varphi^1 = \varphi^{01} + \varphi^{10}$ . Le système devient :

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.55)$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x} = 0 \quad x = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.56)$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial y} = 0 \quad y = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.57)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} = \frac{\partial \eta^{01}}{\partial t} \quad y = 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.58)$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial t} + g^* \eta^{01}(x, t) = k^{01}(t) \quad y = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3.59)$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} = \frac{\partial w^{10}}{\partial t} \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1. \quad (2.3.60)$$

$$T^1(0, y, t, \bar{x}) = -\rho_f^* \left( \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} \right) \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.61)$$

$$T^1(0, y, t, \bar{x}) = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.62)$$

$$\int_0^1 \eta^{01}(x, t) dx - \int_0^1 w^{10}(y, t) dy = 0 \quad \text{quelque soit } t. \quad (2.3.63)$$

La loi de comportement de la structure peut être comme précédemment de deux types :

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w^{10}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w^{10}}{\partial y^4} = \frac{\rho_f^* h^4}{E^* I^*} \left( \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} \right) \quad x = 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.3.64)$$

$$\frac{\rho_s^* h^4}{E^* I^*} \frac{\partial^2 w_d^{10}}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_d^{10}}{\partial y^4} = 0 \quad x = 0, 1 \leq y \leq h_p \quad (2.3.65)$$

Dans le cas d'un système masse ressort amortisseur, on obtient :

$$m_s \ddot{w}^{10} + c_s \dot{w}^{10} + k_s w^{10} = \int_0^l T^1(0, y, t, \bar{x}) dy \quad (2.3.66)$$

C'est ce cas qui est développé dans les chapitres suivants. L'originalité de ce problème vient de la prise en compte de la pesanteur dans le couplage. Nous ferons apparaître par la suite le domaine pour lequel est nécessaire ce calcul complet.

### ordres suivants :

Les ordres suivants correspondent à la recherche des solutions en prenant en compte les non - linéarités du système. Nous mettons en garde le lecteur sur le fait que les équations de loi de comportement de structure utilisées ci-dessus sont linéarisées. Il est donc nécessaire pour le système masse - ressort comme pour la poutre, de se placer en grands déplacements (et au besoin grandes déformations) avant que d'utiliser le terme  $w^{20}$ . Nous ne tenterons pas ici de les résoudre. Le travail expérimental de VO (1996) ainsi que notre chapitre 5, mettra pourtant en évidence l'apparition rapide de ces non - linéarités avec l'accroissement d'amplitude du mouvement.

## 2.4 La solution des équation linéaires d'ordre '1'

### 2.4.1 Simplification des équations

Afin de simplifier au maximum les équations à l'ordre 1 avant de les résoudre, faisons un dernier changement de variables. Ce travail est présenté pour la loi de comportement d'une poutre, un calcul similaire a été fait pour le cas plus simple du système masse - ressort :

$$x = x^0 \frac{h}{L} \quad (2.4.1)$$

$$y = y^0 \quad (2.4.2)$$

$$t = t^0 \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (2.4.3)$$

$$\eta^{01} = \eta^0 h \quad (2.4.4)$$

$$w^{01} = w^0 h \quad (2.4.5)$$

$$\varphi^1 = \varphi^0 h \sqrt{g^1 h} \quad (2.4.6)$$

Les grandeurs  $^{\circ}$  sont dimensionnelles. Si le nombre de Froude est donné par

$F_r = \sqrt{\frac{\omega^{\circ 2} h^{\circ}}{g^{\circ}}}$ , on notera que  $\omega^{\circ} = F_r \cdot$ . Le système d'équations (2.3.31 à 2.3.38) se transforme en :

$$\frac{1}{L^{\circ 2}} \frac{h \sqrt{h g^{\circ}}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{1}{h^2} h \sqrt{h g^{\circ}} \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial y^{\circ 2}} = 0, \quad 0 \leq x^{\circ} \leq \frac{L^{\circ}}{h}, \quad 0 \leq y^{\circ} \leq 1 \quad (2.4.7)$$

$$\frac{h \sqrt{h g^{\circ}}}{h} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial x^{\circ}} = 0, \quad x^{\circ} = \frac{L^{\circ}}{h}, \quad 0 \leq y^{\circ} \leq 1 \quad (2.4.8)$$

$$h \sqrt{h g^{\circ}} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial y^{\circ}} = 0 \quad y^{\circ} = 0, \quad 0 \leq x^{\circ} \leq \frac{L^{\circ}}{h} \quad (2.4.9)$$

$$\frac{1}{h} h \sqrt{h g^{\circ}} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial y^{\circ}} = \frac{h}{\sqrt{h/g^{\circ}}} \frac{\partial \eta^{\circ}}{\partial t^{\circ}}, \quad y^{\circ} = 1, \quad 0 \leq x^{\circ} \leq \frac{L^{\circ}}{h} \quad (2.4.10)$$

$$\frac{h \sqrt{h g^{\circ}}}{\sqrt{h/g^{\circ}}} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial t^{\circ}} + g^{\circ} h \eta^{\circ}(x^{\circ}, t^{\circ}) = k(t^{\circ}), \quad y^{\circ} = 1, \quad 0 \leq x^{\circ} \leq \frac{L^{\circ}}{h} \quad (2.4.11)$$

$$\frac{1}{L^{\circ}} \frac{h \sqrt{h g^{\circ}}}{h/L^{\circ}} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial x^{\circ}} = \frac{h}{\sqrt{h/g^{\circ}}} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial t^{\circ}}, \quad x^{\circ} = 0, \quad 0 \leq y^{\circ} \leq 1 \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\rho_s^{\circ} h^4}{E^{\circ} I^{\circ}} \frac{h}{h/g^{\circ}} \frac{\partial^2 w^{\circ}}{\partial t^{\circ 2}} + h \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial y^{\circ 4}} = \frac{\rho_f^{\circ} h^4}{E^{\circ} I^{\circ}} \frac{h \sqrt{h g^{\circ}}}{\sqrt{h/g^{\circ}}} \frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial t^{\circ}}, \quad x^{\circ} = 0, \quad 0 \leq y^{\circ} \leq 1 \quad (2.4.13)$$

$$\frac{\rho_s^{\circ} h^4}{E^{\circ} I^{\circ}} \frac{h}{h/g^{\circ}} \frac{\partial^2 w^{\circ}}{\partial t^{\circ 2}} + h \frac{\partial^4 w^{\circ}}{\partial y^{\circ 4}} = 0, \quad x^{\circ} = 0, \quad 1 \leq y^{\circ} \leq h_p \quad (2.4.14)$$

$$h \int_0^{L^{\circ}/h} \eta^{\circ}(x^{\circ}, t^{\circ}) dx^{\circ} - h \int_0^1 w^{\circ}(y^{\circ}, t^{\circ}) dy^{\circ} = 0, \quad \text{quelque soit } t^{\circ}. \quad (2.4.15)$$

En posant

$$\frac{L^{\circ}}{h} = L, \quad B_0 = \frac{\rho_s^{\circ} g^{\circ} h^3}{E^{\circ} I^{\circ}}, \quad G_0 = \frac{\rho_f^{\circ} g^{\circ} h^4}{E^{\circ} I^{\circ}}$$

ce système peut être simplifié en :

$$\frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial x^{\circ 2}} + \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial y^{\circ 2}} = 0, \quad 0 \leq x^{\circ} \leq L, \quad 0 \leq y^{\circ} \leq 1 \quad (2.4.16)$$

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x^\circ} = 0. \quad x^\circ = 0, 0 \leq y^\circ \leq 1 \quad (2.4.17)$$

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial y^\circ} = 0. \quad y^\circ = 0, 0 \leq x^\circ \leq L \quad (2.4.18)$$

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t^\circ} + \eta^\circ(x^\circ, t^\circ) = \frac{1}{g \cdot h} k(t^\circ). \quad y^\circ = 1, 0 \leq x^\circ \leq L \quad (2.4.19)$$

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{\partial \eta^\circ}{\partial t^\circ} \quad y^\circ = 1, 0 \leq x^\circ \leq L \quad (2.4.20)$$

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x^\circ} = \frac{\partial w^\circ}{\partial t^\circ} \quad x^\circ = 0, 0 \leq y^\circ \leq 1 \quad (2.4.21)$$

$$B_0 \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial t^{\circ 2}} + \frac{\partial^4 w^\circ}{\partial y^{\circ 4}} = G_0 \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t^\circ}, \quad x^\circ = 0, 0 \leq y^\circ \leq 1 \quad (2.4.22)$$

$$B_0 \frac{\partial^2 w_d^\circ}{\partial t^{\circ 2}} + \frac{\partial^4 w_d^\circ}{\partial y^{\circ 4}} = 0 \quad x^\circ = 0, 1 \leq y^\circ \leq h_p \quad (2.4.23)$$

$$\int_0^L \eta^\circ(x^\circ, t^\circ) dx^\circ - \int_0^L w^\circ(y^\circ, t^\circ) dy^\circ = 0 \quad \text{quelque soit } t^\circ. \quad (2.4.24)$$

Du fait que le potentiel des vitesses soit défini à une fonction additive du temps près, on peut toujours supposer  $k(t^\circ)$  constante dans (2.4.19). La condition dynamique sur la surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial t^{\circ 2}} + \frac{\partial \eta^\circ}{\partial t^\circ} = 0 \quad (2.4.25)$$

En éliminant l'élévation de surface libre  $\eta^\circ$  entre la condition (2.4.25) et la condition (2.4.20), on obtient la condition de surface libre portant sur le seul potentiel :

$$\frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial t^{\circ 2}} + \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \quad (2.4.26)$$

Pour simplifier les écritures lors de la présentation de la résolution, nous ferons disparaître pour la suite le signe  $^\circ$  dans les notations.

#### 2.4.2 Une solution analytique du système à interface mobile

Ce paragraphe consiste en une résolution cinématique, elle est donc utilisable pour la poutre comme pour le système masse - ressort. On étudie les mouvements harmoniques du

système. En notant les formes propres de l'interface pour les parties immergée et sèche, respectivement par  $u(y)$  et  $u_d(y)$ , les déplacements de l'interface s'écrivent :

$$w(y,t) = -u(y)\cos(\omega t) \quad (2.4.27)$$

$$w_d(y,t) = -u_d(y)\cos(\omega t) \quad (2.4.28)$$

Le potentiel de vitesse de liquide dans un récipient avec une paroi latérale en mouvement harmonique est donné par :

$$\varphi(x,y,t) = \Phi(x,y) \omega \sin(\omega t) \quad (2.4.29)$$

$$\Phi(x,y) = \left( \beta \frac{\cos(q(x-L))}{\sin(qL)} \cosh(qy) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(p_n(x-L))}{\sinh(p_n L)} \cos(p_n y) \right) \quad (2.4.30)$$

Cette fonction peut être trouvée à partir de Havelock (1928) et Urselle (1960), si l'on considère deux batteurs de houle distants d'une longueur  $2L$  et leur mouvement étant en opposition de phase. La loi de comportement et les conditions aux limites de la poutre permettent de déterminer les inconnues  $\beta$ ,  $\alpha_n$ ,  $q$ ,  $p_n$  et  $\omega$  du potentiel de vitesse, comme montré ci-après.

Injectons le potentiel précédent (2.4.29) dans la condition à la surface libre (2.4.26) :

$$-\omega^2 \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (2.4.31)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & - \left( \beta \frac{\cos(q(x-L))}{\sin(qL)} \cosh(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(p_n(x-L))}{\sinh(p_n L)} \cos(p_n) \right) \omega^3 \sin(\omega t) + \\ & + \left( \beta q \frac{\cos(q(x-L))}{\sin(qL)} \sinh(q) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n \frac{\cosh(p_n(x-L))}{\sinh(p_n L)} \sin(p_n) \right) \omega \sin(\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Cette condition doit être vraie quelque soit  $t$  :

$$\beta \frac{\cos(q(x-L))}{\sin(qL)} (q \sinh(q) - \omega^2 \cosh(q)) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(q(x-L))}{\sinh(qL)} (p_n \sin(p_n) + \omega^2 \cos(p_n)) = 0 \quad (2.4.33)$$

Pour que cette relation soit valide quelque soit  $x$ , les coefficients des fonctions cosinus et cosinus hyperboliques doivent être nuls :

$$\omega^2 = -p_n \tan(p_n) \quad (2.4.34)$$

$$\omega^2 = q \tanh(q) . \quad (2.4.35)$$

Ces deux coefficients  $p_n$  et  $q$  du potentiel dépendent explicitement de la pulsation, mais aussi de la forme par l'intermédiaire de cette pulsation.

Réécrivons la condition à l'interface fluide - solide (2.4.21) en utilisant le potentiel (2.4.29) :

$$\left( -\beta q \frac{\sin(-qL)}{\sin(qL)} \cosh(qy) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n \frac{\sinh(-p_n L)}{\sinh(p_n L)} \cos(p_n y) \right) \omega \sin(\omega t) = u(y) \omega \sin(\omega t) \quad (2.4.36)$$

Après simplification :

$$u(y) = \beta q \cosh(qy) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n \cos(p_n y) \quad (2.4.37)$$

En utilisant les caractéristiques de la fonction  $\cosh(qy)$  et de la fonction  $\cos(p_n y)$  exprimons les coefficients :

$$\beta = \int_0^1 u(y) \cosh(qy) dy \left( q \int_0^1 \cosh^2(qy) dy \right)^{-1} ; \quad (2.4.38)$$

$$\alpha_n = - \int_0^1 u(y) \cos(p_n y) dy \left( p_n \int_0^1 \cos^2(p_n y) dy \right)^{-1} \quad (2.4.39)$$

On peut voir que ces deux coefficients  $\beta$  et  $\alpha_n$  dépendent de la forme de mode de la paroi mobile  $u(y)$  et des fonctions de fréquence :  $q$  et  $p_n$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons linéarisé les équations du système couplé et les avons adimensionnalisées. Le potentiel qui satisfait ce problème est obtenu en fonction de la forme propre de l'interface fluide - structure et de la pulsation. En général, la forme de mode de la paroi mobile est inconnue, et doit être déterminée en vérifiant la loi de comportement de la structure. L'effort que le fluide exerce sur la structure est déterminé par l'intermédiaire de quatre coefficients. Sauf dans le cas particulier d'un solide indéformable traité dans le chapitre suivant, où la forme de mode de la paroi est connue (de type de piston, par exemple), on doit résoudre les systèmes fluide et solide simultanément comme nous le montrerons dans le chapitre 4.

## Chapitre 3.

### Un modèle d'interaction fluide - structure :

### Masse - Ressort - Amortisseur - Liquide (MRAL)

#### Résumé :

En utilisant les résultats obtenus dans le chapitre précédent, on envisage un problème d'interaction fluide - structure dans un réservoir rectangulaire en présence d'une surface libre. Nous modélisons le problème par un système à un degré de liberté (un DDL) : Masse - Ressort - Liquide (MRL) ainsi que Masse - Ressort - Amortisseur - Liquide (MRAL). Les effets du fluide sur la structure sont présents par le terme de masse ajoutée qui se calcule analytiquement et s'exprime en fonction du nombre de Froude et du ratio de la longueur à la profondeur du liquide. Cette masse ajoutée se trouve positive, négative ou nulle. Ces variations seront interprétées à l'aide des énergies du système

L'effet de la surface libre et l'effet du confinement du fluide sur la masse ajoutée sont analysés. Les différentes expressions de masse ajoutée sont obtenues lorsque les domaines de fluide sont bornés, semi-fini et infini.

A l'aide de la fonction de réponse en fréquence, nous avons montré le couplage entre le système de structure et le système de fluide. Les effets des paramètres de la structure sur les fréquences propres du système couplé sont étudiés : l'effet de la masse et de la raideur. Dans le cas d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe, les pressions dynamiques fourniront une inertie ajoutée. Les résultats sont comparés avec ceux existants. [Blevins 1979 ; Gibert 1988; Caillot 1983].

Ce chapitre termine par une mesure de l'influence d'un amortissement du mouvement de la structure sur les fréquences propres et amplitudes des fonctions de réponse en fréquence du solide et du fluide couplés.

### 3.1. Introduction

L'interaction fluide-structure est un problème de système couplé. Dans des termes d'ingénierie, un système couplé est un système dynamique qui peut être décomposé physiquement en plusieurs composants hétérogènes de lois de comportement différentes, reliés entre eux par des équations d'interface.

Un exemple dans l'ingénierie des structures est fourni par un réservoir flexible rempli d'un liquide sous excitation sismique. Les deux composants sont la structure (le réservoir sec) et le fluide interne. Parce que les composants interagissent dynamiquement, une analyse de la réponse du système doit considérer les deux composants : structure et fluide, simultanément.

Des nombreuses études ont été faites sur les interactions fluides - structures, quelles soit analytiques, numériques, ou expérimentales. Mais, il est néanmoins intéressant d'étudier les aspects physiques d'interaction fluide - structure. De plus, une résolution explicite du problème dans un cas « d'école », peut servir de référence pour tester des méthodes numériques qui permettront d'aborder des cas plus complexes.

Dans ce chapitre, pour mettre en évidence les aspects physiques de problème couplé, nous développerons un modèle simple : Masse - Ressort - Liquide (MRL). A l'aide de ce modèle simple, nous mettrons en évidence certaines termes physiques classiques comme la masse ajoutée, les pulsations couplées et les couplages entre fluide et structure.

#### 3.1.1. La masse ajoutée

Les effets de la présence de fluide sur la vibration d'une structure immergée dépendent de la viscosité, la compressibilité, la présence de surface libre, le confinement, les non linéarités éventuelles, l'inertie de fluide etc. On ne peut pas considérer en même temps tous ces effets dans un modèle, du fait de la complexité du problème.

La description fondamentale des effets de fluide sur une structure est la masse ajoutée, notion classique. La notion physique de masse ajoutée est également appelée « masse virtuelle », « masse entraînée » ou « masse induite ». (Cf. Lamb (1932) ; Birkhoff (1955)). La notion de masse ajoutée joue un rôle très important dans les études d'interaction fluide-structure, que les résolutions soit analytiques ou numériques.

Cette notion a été introduite en 1843, quand Stokes étudia un cylindre infini en mouvement avec une accélération uniforme dans un fluide illimité l'écoulement étant considéré

comme potentiel. Le champ de pression du fluide sur la structure est calculé, son intégration sur la surface fournit la force d'interaction du fluide sur la structure. Etant proportionnelle à l'accélération uniforme du cylindre, elle est mise sous la forme  $m_a \ddot{x}$ , où  $m_a$  est appelée « masse ajoutée ». Cette masse ajoutée est égale à la masse du liquide déplacée par le cylindre (Milne Thomson, 1968) :

$$m_a = \rho_f \pi a^2,$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique du liquide,  $a$  est le rayon de cylindre. La masse ajoutée est caractérisée par un scalaire dans le cas des symétries de forme. En général, c'est en tenseur (voir annexe 2). La masse ajoutée d'une poutre de section quelconque en translation dans un liquide infini dans le plan perpendiculaire à sa fibre moyenne, peut être obtenue à partir de cette formule à l'aide de la transformation de Joukovsky (Gibert (1988) ; Blevins(1979)).

Dans le cas d'une sphère, la masse ajoutée correspond à la masse de la moitié du volume de la sphère. La pression sur la structure dépend de l'écoulement autour de celle-ci, c'est donc le calcul de cet écoulement qui fournit la valeur de masse ajoutée.

Généralement, la masse ajoutée se calcule numériquement (sauf pour les formes simples), une étude bibliographique se trouve dans Rousseau (1994). En présence d'une surface libre, l'écoulement est modifié et donc la masse ajoutée aussi. Les valeurs de masse ajoutée présentes dans la bibliographie sont donc à prendre avec circonspection Caillot (1983).

Nous citerons Conca et al. (1994) : "Il est bien connu qu'un corps solide se déplaçant dans un fluide infini subit de la part de celui-ci des forces de pression dont la résultante est le produit de la masse du liquide déplacé par l'accélération : cette masse fluide déplacée est alors appelée masse ajoutée. Cette matrice de masse ajoutée a l'importante propriété d'être symétrique et définie positive dont la principale conséquence est l'abaissement des fréquences propres d'une structure élastique quelconque dès qu'elle est immergée dans un fluide."

La propriété mise en exergue par Conca et al. est que la masse ajoutée est positive. Nous montrerons que ce n'est pas toujours le cas si l'on considère une surface libre dans un champ de pesanteur.

### 3.1.2. L'objet de cette étude, le plan de présentation

L'objectif de cette étude est de compléter la connaissance des effets du fluide sur la structure par la mise en évidence la fonction de réponse en fréquence, et par l'analyse de l'effet du confinement et de l'effet de la surface libre du fluide en présence de la pesanteur.

Il est bien connu que le modèle a un degré de liberté (un DDL) joues un rôle très important dans la théorie de vibration. Pour illustrer notre discussion des problèmes d'interaction fluide-structure, un modèle simple est développé ici : le système consiste en une masse indéformable en translation ou rotation, liée au repère galiléen par un ressort sans masse, en présence d'une surface libre, et contenu dans un réservoir rectangulaire. Le système masse - ressort peut être interprété comme une paroi mobile d'un réservoir.

A l'aide de ce modèle simple, nous étudierons :

- les fréquences et modes propres couplés
- la masse ajoutée
- l'influence de la surface libre
- l'influence des caractéristiques du système (masse, raideur)
- l'influence des caractéristiques géométriques (confinement du fluide)

Nous allons utiliser le potentiel donné dans le chapitre précédent pour effectuer toutes les études. Nous comparerons les modes propres et les masses ajoutées, dans les cas de milieux de fluide borné, semi-infini et infini. Nous montrerons que le confinement du fluide augmente la masse ajoutée et que les fréquences propres en diminuent d'autant.

La présence de la surface libre du fluide est importante. Elle ajoute des degrés de liberté supplémentaires pour le système couplé. Les valeurs propres du système sont alors d'une toute autre nature. Dans le cas où le domaine du fluide est borné, la masse ajoutée peut être positive comme dans la définition classique, mais aussi négative ou nulle. Des interprétations énergétiques sont développées. Dans le cas où le domaine du fluide est semi-infini, la non - réflexion à l'infini des ondes de surface libre est responsable de la dissipation de son énergie.

Dans la section 3.2, nous abordons au modèle MRL. Dans la section 3, nous abordons à la réponse à des forces et mis en évidence du couplage fluide - structure. Dans la section 4, nous allons étudier les effets de paramètres du système sur les fréquences propres. Dans la section 5, nous allons discuter la masse ajoutée. Dans la section 6, les influences de Froude sur la masse

ajoutée seront présentées. Dans la section 7, la masse ajoutée pour plusieurs conditions aux limites sera présentée. Dans la section 8, les effets d'amortissement de la structure seront étudiés.

### 3.2. Un modèle d'interaction fluide - structure : Masse - Ressort - Amortisseur - Liquide (MRAL)

#### 3.2.1. Modèle MRAL

Un modèle de masse - ressort - amortisseur - liquide à surface libre contenu dans un réservoir rectangulaire est présenté dans la figure 3.1. La masse  $m_s^*$  est une paroi rigide mobile en translation horizontale et immergée partiellement dans le liquide contenu dans un réservoir de longueur  $L^*$  et qui est connectée avec un ressort sans masse de rigidité  $k_s^*$ , et un amortisseur de coefficient de frottement  $c_s^*$ .  $h^*$  est la profondeur de liquide au repos.  $\eta^*(x^*, t^*)$  est l'amplitude de la surface libre.  $w^*(x^*, t^*)$  est le déplacement de la masse.  $g^*$  est la pesanteur.

Nous négligerons l'amortissement  $c_s^*$  dans cette première section (le modèle MRAL devient MRL). L'étude avec amortissement est reportée dans la section 3.8.

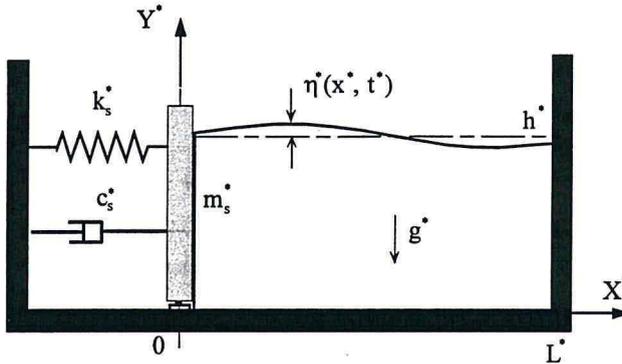


Figure 3.1 Modèle simple d'interaction fluide-structure :

Masse - Ressort - Amortisseur - Liquide à surface libre contenu dans un réservoir rectangulaire.

Nous rappelons les équations et des conditions aux limites obtenues dans le chapitre 2, formules (2.4.16) à (2.4.21) :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1. \quad (3.2.1)$$

- sur la paroi rigide de réservoir,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (3.2.2)$$

- sur le fond de réservoir,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.2.3)$$

- sur la surface libre (voir formule 2.4.26),

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{y=1} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0. \quad (3.2.4)$$

- sur l'interface solide - fluide,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.2.5)$$

L'adimensionnalisation des équations relatives à la structure sera faite à l'aide des relations suivantes :

$$m_s^* = m_s \rho_f^* h^{*2}; \quad k_s^* = k_s \rho_f^* g^* h^*. \quad (3.2.6)$$

Si  $f_c(t)$  est une force extérieure exercée sur la masse. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne :

$$m_s \frac{d^2 w}{dt^2} + k_s w = f_f(t) + f_c(t), \quad (3.2.7)$$

où  $f_f(t)$  est l'effort horizontal intégral de la pression dynamique du fluide exercée sur la masse.

$$f_f(t) = \int_0^1 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x=0} dy, \quad (3.2.8)$$

$\varphi$  est le potentiel des vitesses du fluide qui doit satisfaire les équations et les conditions aux limites du système comme dans le cas de réponse à des déplacements de paroi. (cf. le chapitre précédent)

### 3.2.2. Equation caractéristique du système couplé

L'équation caractéristique du système couplé peut être obtenue par la vibration libre du système. Si la force de sollicitation  $f_e(t)$  est nulle, dans le cas de vibration harmonique, le déplacement de la masse à un instant  $t$  est :

$$w(t) = -\varepsilon \cos(\omega t), \quad (3.2.9)$$

où  $\varepsilon$  est l'amplitude de vibration et  $\omega$  est la fréquence propre du système.

Le potentiel des vitesses qui satisfait les équations et les conditions aux limites est identique à celui où les déplacements de paroi sont imposés : c'est un problème cinématique :

$$\varphi(t) = \Phi(x, y) \omega \sin(\omega t), \quad (3.2.10)$$

$$\Phi = \beta \frac{\cos(q(x-L)) \cosh(qy)}{\sin(qL)} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(p_n(x-L)) \cos(p_n y)}{\sinh(p_n L)}, \quad (3.2.11)$$

où  $\beta$ ,  $q$ ,  $\alpha_n$ ,  $p_n$  sont les coefficients qui peuvent être déterminés par les conditions aux limites.

$$F_r^2 = -p_n \tan(p_n), \quad F_r^2 = q \tanh(q), \quad (3.2.12)$$

$$\alpha_n = \frac{4 \sin(p_n)}{p_n (2p_n + \sin(2p_n))} \varepsilon, \quad \beta = \frac{4 \sinh(q)}{q(2q + \sinh(2q))} \varepsilon, \quad (3.2.13)$$

où le nombre de Froude est  $F_r = \omega = \omega^* \sqrt{h^* g^{*-1}}$ .

En remplaçant le potentiel dans (3.2.8) par la solution donnée, on peut avoir alors l'effort dynamique total du liquide sur la masse :

$$f_r(t) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} dy = \varepsilon \omega^2 \int_0^1 \Phi \Big|_{x=0} dy \cos(\omega t),$$

$$f_r(t) = -\varepsilon \omega^2 \left( -\frac{4 \sinh^2(q) c \tan(qL)}{q^2 (2q + \sinh(2q))} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2(p_n) c \tanh(p_n L)}{p_n^2 (2p_n + \sin(2p_n))} \right) \cos(\omega t), \quad (3.2.14)$$

Posons :

$$m_a = -\frac{4 \sinh^2(q) c \tan(qL)}{q^2 (2q + \sinh(2q))} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2(p_n) c \tanh(p_n L)}{p_n^2 (2p_n + \sin(2p_n))}, \quad (3.2.15)$$

L'équation dynamique du système masse - ressort (3.2.7) devient :

$$m_s \omega^2 \varepsilon - k_s \varepsilon = -\varepsilon \omega^2 m_a,$$

et l'on obtient l'équation caractéristique du système couplé.

$$(m_s + m_a) \omega^2 = k_s, \quad (3.2.16)$$

où  $m_a$  est la masse ajoutée du système couplé, qui traduit l'effet d'inertie du fluide sur le système masse - ressort. Elle est exprimée en fonction du nombre de Froude, du ratio de longueur de réservoir à la profondeur du liquide, et est indépendante de l'amplitude de déplacement de la paroi :  $m_a = m_a(F_r, L)$ . Nous allons trouver que cette masse ajoutée est différente de la masse ajoutée classique qui est toujours positive.

Les fréquences propres couplées du système  $\omega_c$  sont les solutions de l'équation caractéristique (3.2.16), elles sont exprimées en fonction du nombre de Froude, du ratio de longueur de réservoir à la profondeur du liquide, de la masse et la raideur du système sec :  $\omega_c = \omega_c(F_r, L, m_s, k_s)$ .

Si l'on fait apparaître la fréquence propre sèche  $\omega_s = \sqrt{k_s m_s^{-1}}$ , l'équation caractéristique du système couplé (3.2.11) se transforme en :

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{m_a}{m_s}, \quad (3.2.17)$$

Nous pouvons voir que les valeurs de  $\omega_c$  peuvent être inférieures, supérieures ou égales à la fréquence propre de masse - ressort sec  $\omega_s = \sqrt{k_s m_s^{-1}}$ , selon que la masse ajoutée est positive, nulle ou négative. (si  $m_a > 0$ ,  $\Rightarrow \omega < \omega_s$  ; si  $m_a = 0$ ,  $\Rightarrow \omega = \omega_s$  ; si  $m_s \leq m_a < 0$ ,  $\Rightarrow \omega > \omega_s$ ). On a toujours  $m_a \geq -m_s$ . Nous discuterons dans les sections 3.4.1 et 3.6.3 le cas où  $m_a < -m_s$ .

### 3.3. Réponse à des forces : mis en évidence du couplage fluide - structure

Nous nous intéressons ici aux caractéristiques vibratoires du système couplé. Les vibrations du système masse - ressort sont modifiées par la présence du fluide, donc essentiellement au champ de pression induit à la paroi mobile par le fluide vibrant du fait du mouvement de cette paroi. Nous avons déjà mis en évidence la masse ajoutée et l'équation caractéristique.

Le système de fluide - structure couplé est composé de deux systèmes non couplés : le système de masse - ressort et le système du fluide. Pour mettre en évidence les caractéristiques vibratoires du système couplé, nous envisagerons tout d'abord les vibrations forcées de système

non couplé : masse - ressort et le fluide, par la fonction de réponse en fréquences (FRF), et puis le système couplé MAL.

### 3.3.1. Les systèmes non couplés et les pulsations propres non - couplées

Si le fluide est absent, le système masse - ressort est appelé le système non - couplé du solide. Il n'y a qu'une pulsation propre dans ce système (un DDL), elle est appelée la pulsation non - couplée du solide :

$$\omega_s = \sqrt{k_s m_s^{-1}} \quad (3.3.1)$$

Si les parois de réservoir sont rigides, le système est appelé le système non couplé du liquide, et les pulsations propres du liquide contenu (ballotement) sont appelées les pulsations non - couplées du liquide. Pour un réservoir rectangulaire :

$$\omega_f(n) = \sqrt{\frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi}{L}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.3.2)$$

#### Réponse à des forces du système de masse - ressort non - couplé

Pour un système masse - ressort en l'absence du fluide, s'il est sollicité par une force harmonique  $f_c(t) = f_0 e^{i\omega t}$ , le déplacement de la masse rigide en régime harmonique est  $w_s(t) = H_s(\omega) f_0 e^{i\omega t}$ . A partir de l'équilibre du système masse - ressort avec  $f_f(t) = 0$ , on obtient :

$$m_s(i\omega)^2 (H_s F_0 e^{i\omega t}) + k_s (H_s F_0 e^{i\omega t}) = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.3.3)$$

soit, 
$$(m_s(i\omega)^2 + k_s) H_s(\omega) = 1,$$

alors la fonction de réponse en fréquences FRF du solide est :

$$H_s(\omega) = \frac{w_s(t)}{F_c(t)} = \frac{1}{k_s - m_s \omega^2} \quad (3.3.4)$$

### Réponse à des déplacements d'une paroi pour le fluide non couplé : ballonnement du fluide dans un réservoir rigide

Pour une excitation de déplacement d'une paroi mobile  $w_f(t) = -\varepsilon e^{i\omega t}$ , on peut écrire la réponse de la surface libre du liquide comme :  $\eta(x, t) = \varepsilon H_f(x, \omega) e^{i\omega t}$ . La FRF du fluide est alors :

$$H_f(x, \omega) = \frac{\eta(x, t)}{w_f(t)}. \quad (3.3.5)$$

Rappelons l'expression d'amplitude de la surface libre pour une excitation de déplacement d'une paroi mobile harmonique :

$$\eta(x, t) = \left( \beta \frac{\cosh(q)}{\sin(qL)} \cos(q(x-L)) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cos(p_n)}{\sinh(p_n L)} \cosh(p_n(x-L)) \right) \omega^2 e^{i\omega t}, \quad (3.3.6)$$

les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta$  sont proportionnels à l'amplitude de déplacement  $\varepsilon$  et liés à la fréquence d'excitation qui détermine  $p_n$  et  $q$  (équation (3.2.12)).

Le rapport entre l'amplitude de la surface libre et le déplacement d'excitation est alors:

$$H_f(x, \omega) = \left( \frac{2 \sinh(2q) \cos(q(x-L))}{q(2q + \sinh(2q)) \sin(qL)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2p_n) \cosh(p_n(x-L))}{p_n(2p_n + \sin(2p_n)) \sinh(p_n L)} \right) \omega^2 \quad (3.3.7)$$

#### 3.3.2. Le système couplé : MRL

##### Réponse du système de MRL

L'effet du fluide sur le système masse - ressort peut être modélisé par la masse ajoutée qui ne dépend que de la pulsation de sollicitation (le nombre de Froude) et de la dimension du réservoir. Nous considérons le système MRL comme un système masse - ressort couplé, où la masse est la somme de la masse de solide  $m_s$  et de la masse ajoutée  $m_a$ , représentant la force du fluide sur le solide mobile.

Soit  $f_c(t)$  une force de sollicitation harmonique extérieure exercée sur la masse rigide  $m_s$ ,  $f_c(t) = f_0 e^{i\omega t}$ , la pulsation d'excitation est  $\omega$ . Le déplacement de la masse rigide  $m_s$  est :  $w_s^c(t) = H_s^c(\omega) f_0 e^{i\omega t}$ . L'équilibre du système masse - ressort couplé en régime harmonique donne :

$$\left( (m_s + m_a)(i\omega)^2 + k_s \right) H_s^c(\omega) = 1, \quad (3.3.8)$$

on obtient la fonction de réponse de la masse rigide :

$$H_s^c(\omega) = \frac{w_s^c(t)}{f_c(t)} = \frac{1}{k_s - (m_s + m_a)\omega^2} \quad (3.3.9)$$

### **Réponse du fluide dans le cas couplé**

Comme dans le cas non - couplé, la fonction de réponse en fréquences du fluide couplé, peut être défini comme le rapport de l'amplitude de la surface libre au déplacement de la masse rigide :

$$H_f^c(x, \omega) = \frac{\eta_c(x, t)}{w_s^c(t)} = H_f(x, \omega), \quad (3.3.10)$$

Une autre solution serait de définir la fonction de réponse en fréquence pour le fluide par rapport la force de sollicitation :

$$\tilde{H}_f^c(x, \omega) = \frac{\eta_c(x, t)}{f_c(t)}, \quad (3.3.11)$$

Si on suppose que :  $w_f^c(t) = w_s^c(t)$ , ces deux fonctions de réponse en fréquence sont liées par :

$$\tilde{H}_f^c(x, \omega) = \frac{\eta_c(x, t)}{w_s^c(t)} \frac{w_s^c(t)}{f_c(t)} = H_f^c(x, \omega) H_s^c(\omega). \quad (3.3.12)$$

### **Un exemple du couplage MRL**

Soit la masse rigide  $m_s = 1$ , le rapport de la longueur du réservoir à la hauteur du liquide  $L = 2,5$ , la raideur  $k_s = 0,64$ . La pulsation propre du système non couplé du système masse - ressort est :  $\omega_s = 0,8$ . Les pulsations propres du liquide non couplé sont :  $\omega_f(1) = 1,034$ ,  $\omega_f(2) = 1,575$ ,  $\omega_f(3) = 1,971$ .

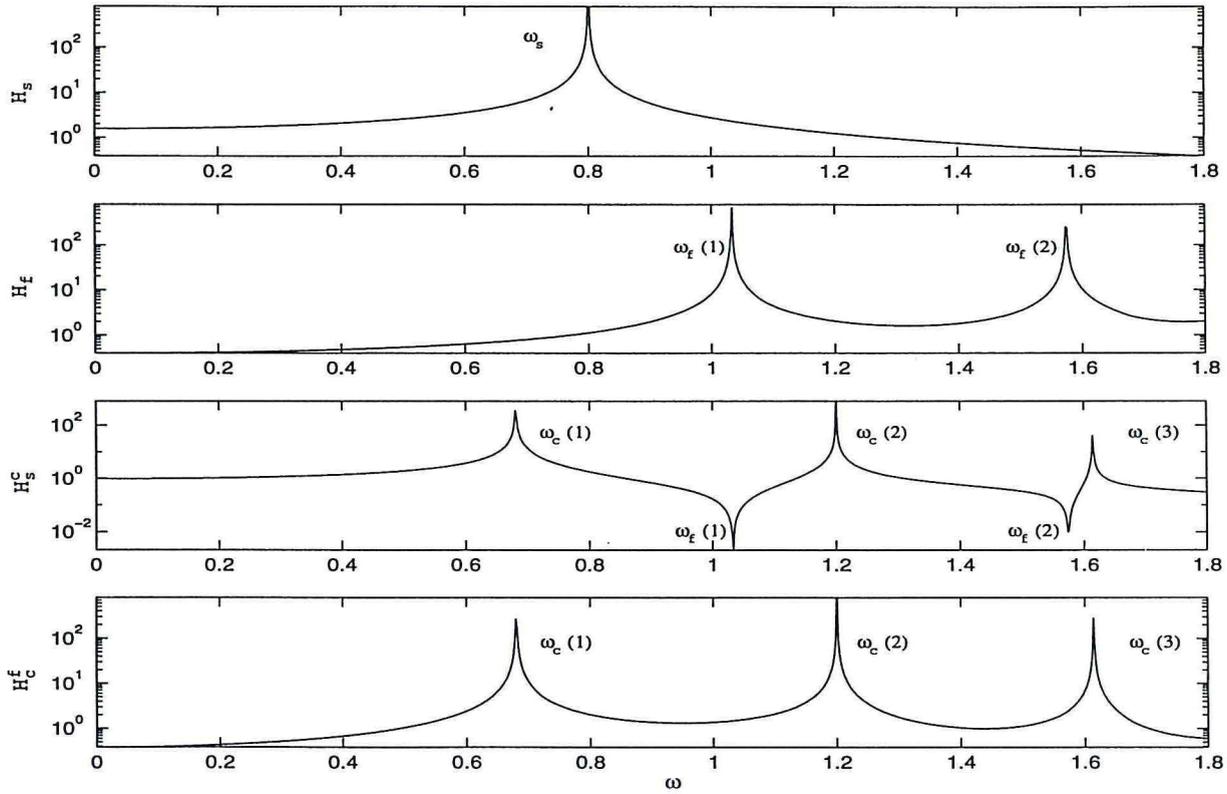


figure 3.2 Les réponses en fréquences du système non couplé et couplé

$\omega_s$  : fréquences propres du solide non-couplé ;

$\omega_f$  : du fluide non-couplé ;

$\omega_c$  : du système couplé.

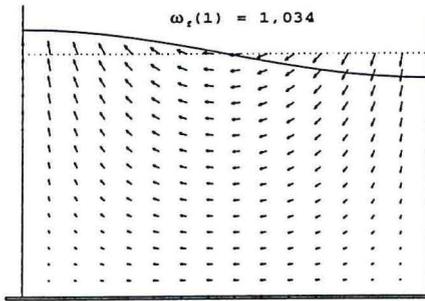
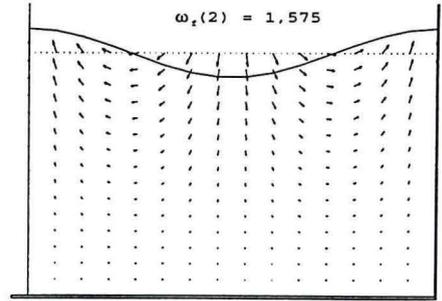
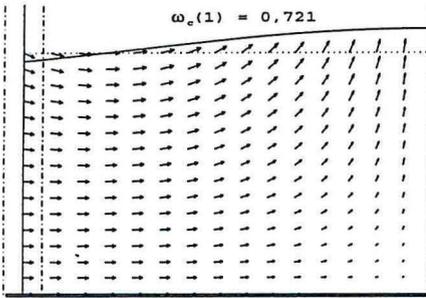
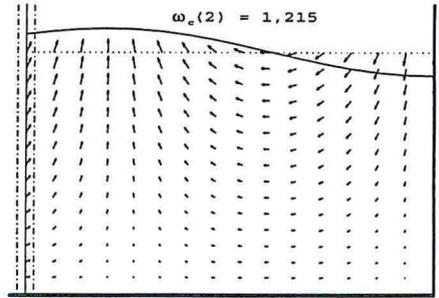
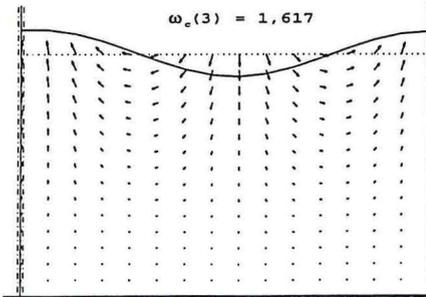
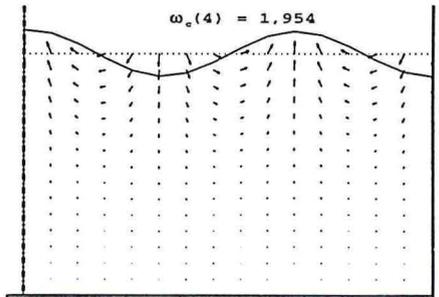
Dans la figure 3.2, nous pouvons voir clairement comment les deux systèmes non couplés du fluide et de masse - ressort interagissent.

$H_s$  présente un maximum d'amplitude infinie à la fréquence de résonance  $\omega_s$ .  $H_f$  présentent des maxima d'amplitude infinis à chaque fréquence de ballotement  $\omega_f$ . Ces maxima sont en nombre infini discret.

Considérons maintenant les courbes  $H_s^c$  et  $\tilde{H}_f^c$ . Pour chaque courbe, on observe une succession de résonances que nous repérerons par  $\omega_c$ , et des antirésonances pour  $H_s^c$  qui correspondent aux pulsations de ballotement  $\omega_f$ . Aux pulsations  $\omega_c$ ,  $H_s^c$  et  $H_f^c$  présentent simultanément une résonance. La recherche des fréquences couplées pourra donc se faire expérimentalement par une mesure des déplacements de la structure ou de la surface libre. Pour chaque fréquences de ballotement  $\omega_f$ ,  $H_s^c$  présentent une antirésonance. En effet la masse ajoutée dépend de  $\omega$ , et est infinie pour  $\omega_f$ . L'amplitude du mouvement de la paroi mobile est nulle.  $\tilde{H}_f^c(\omega_f)$  n'est pas infinie, car toute l'énergie est transférée à la structure qui l'absorbe. Il n'en serait pas de même si l'excitation avait été appliquée à la surface libre ou dans le fluide. Pour exciter un mode de vibration donné, il ne faut pas se placer en un de ses noeuds de vibration (dans notre cas à  $\omega_f$ , la plaque).

Nous pouvons voir que les fréquences de résonance du système couplé peuvent être considérées comme de fréquences propres modifiées des systèmes non - couplés. En fait,  $\omega_c(1) = 0,721$ ,  $\omega_c(2) = 1,215$ ,  $\omega_c(3) = 1,617$ , la première fréquence couplée est inférieure à la première fréquence non couplée du solide, la masse ajoutée est positive. Mais, la deuxième et troisième fréquences couplées sont supérieures à la fréquence non couplée du solide et aussi supérieures aux fréquences non - couplées du fluide correspondantes, la masse ajoutée est négative. Les interprétations physiques de ces phénomènes se trouvent dans la section suivante.

En conclusion, le balayage de  $\omega$  met en évidence successivement les fréquences couplées et de ballotement : respectivement résonances et antirésonances de  $H_s^c$ . Les divergences vers des amplitudes infinies décrites précédemment ne seraient bien sûr pas obtenues par la prise en compte des non-linéarités dans le modèle. Les champs des vitesses pour les fréquences couplées et de ballotement sont présentées dans la figure 3.3.

(a) 1<sup>ier</sup> mode du ballottement(b) 2<sup>ème</sup> mode du ballottement(c) 1<sup>ier</sup> mode couplé(d) 2<sup>ème</sup> mode couplé(e) 3<sup>ème</sup> mode couplé(f) 4<sup>ème</sup> mode coupléfigure 3.3 Les champs des vitesses  $m_s=1, L=2,5, k_s=0,64$ .

La figure 3.4 montre l'évolution de réponse en fréquence avec la raideur pour  $k_s = 0,64, 1,69$  et  $2,89$  et  $\omega_s = 0,8, 1,3$  et  $1,7$ .

Nous pouvons voir dans la figure 3.4 que les fréquences du système couplé augmentent avec la raideur et approchent les fréquences du fluide (ballottement). C'est logique, si la raideur est assez grande, nous pouvons traiter le problème comme le ballottement du fluide dans un réservoir rigide. Nous discuterons les détails d'évolution de fréquences en raideur dans la section suivante.

### ***3.4. Les effets de paramètres du système sur les fréquences propres couplées***

Dans cette section, nous discuterons les évolutions des fréquences couplées avec la masse et la raideur de la structure.

figure 3.4 Evolution de la réponse en fréquences en la raideur

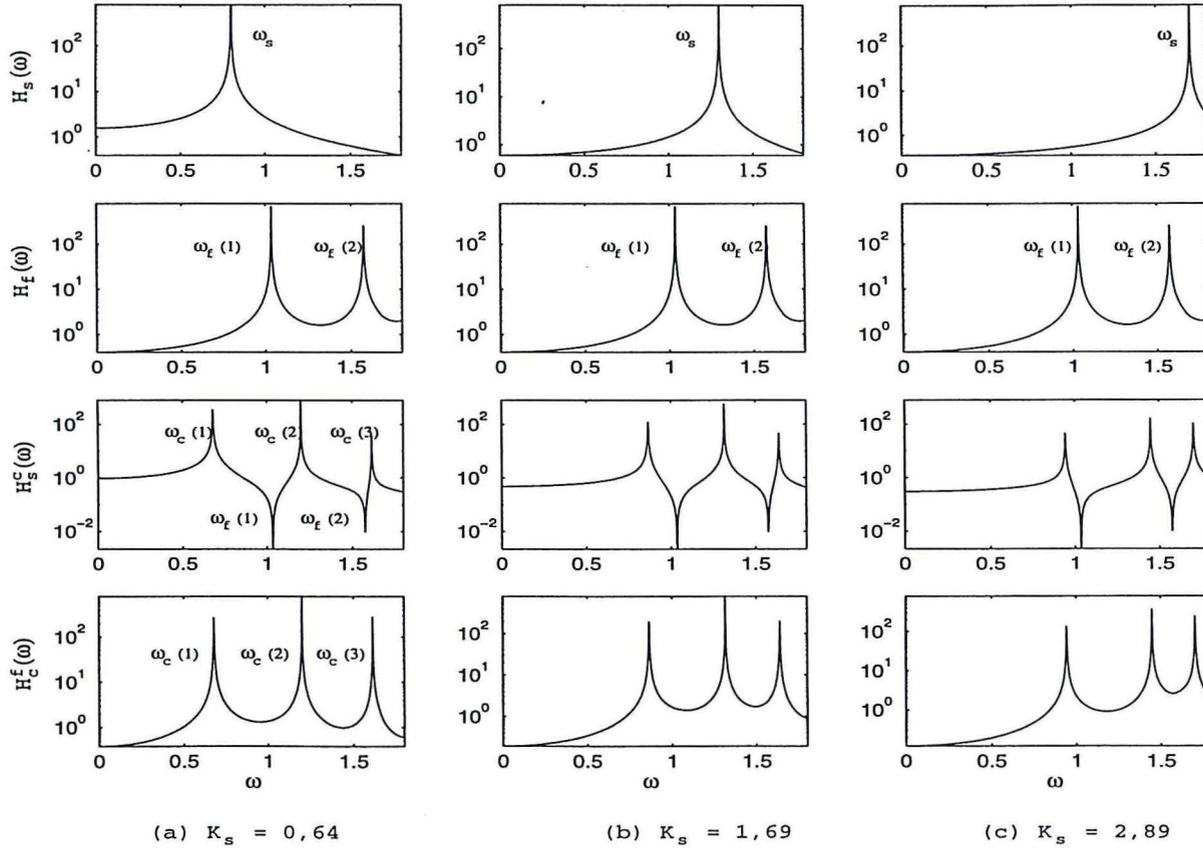


figure 3.4 L'évolution avec la raideur de la réponse en fréquences

### 3.4.1. Les effets de raideur sur les fréquences couplées

La figure 3.5 présente l'évolution avec la raideur  $k_s$  des fréquences couplées  $\omega_c$ . Elles sont comparées aux fréquences de ballottage du liquide contenu dans un réservoir rigide  $\omega_f$  ( $k_s = \infty$ ), et la fréquence propre de système masse - ressort  $\omega_s$ . Pour cet exemple, le réservoir a une longueur adimensionnelle  $L = 2,5$  et une masse adimensionnelle  $m_s = 1$ .

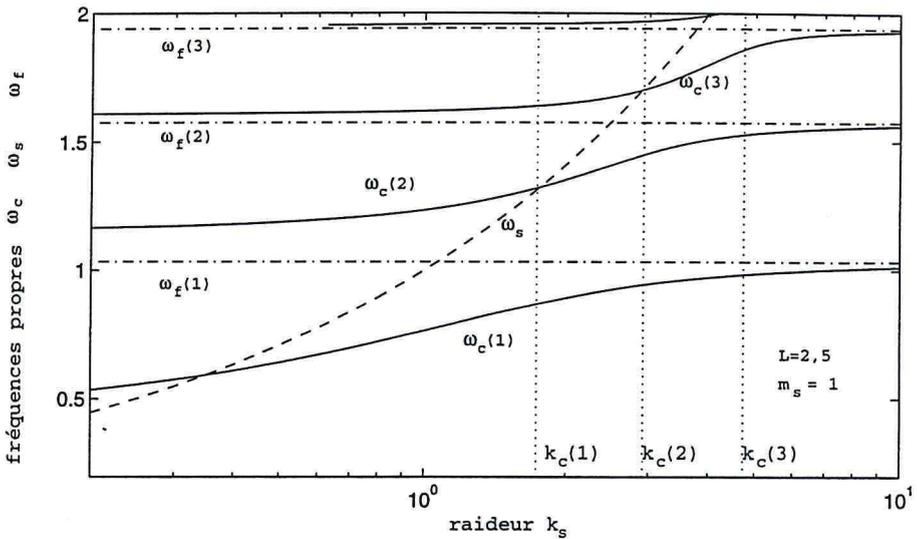


figure. 3.5 Evolutions avec la raideur  $k_s$  des fréquences couplées  $\omega_c$ ,  $m_s = 1$ .

— : les fréquences du système couplé  $\omega_c$ ,

---- : la fréquence du système masse - ressort sec  $\omega_s$ ,

..... : les fréquences de ballottage du liquide dans un réservoir rigide  $\omega_f$  ( $k_s \rightarrow \infty$ ).

Nous pouvons observer tout d'abord que le nombre de fréquences couplées est infini. En fait, le système sec possède un degré de liberté (un DDL) sec (il n'y a que une fréquence propre  $\omega_s$ ). Le liquide à surface libre dans un espace fini possède une infinité discrète de fréquences propres (infinité de DDL). Le couplage de ce système nous fournit un système ayant aussi une infinité discrète de fréquences (différentes).

Deuxièmement nous pouvons voir que, pour une masse donnée, dans notre cas  $m_s = 1$ , les fréquences couplées  $\omega_c(i)$  augmentent avec la raideur  $k_s$ , pour rejoindre les fréquences de ballonnement  $\omega_f(i)$ .

Dans un troisième temps on trouve que chaque mode couplé croise pour une raideur donnée le mode du système masse - ressort sec. Ces points d'intersection sont des cas particuliers. A ces fréquences, il n'y a pas de couplage entre le fluide et la structure, parce que les fréquences couplées  $\omega_c$  sont égales à la fréquence du système masse - ressort sec  $\omega_s$ . Ceci signifie que la masse ajoutée est nulle. Nous montrerons que le champ de pression à l'interface fluide - structure est nulle. Nous dirons qu'en ces points il n'y a pas d'interaction dynamique, la cinématique de l'interface permettant cependant l'existence d'une fréquence couplée. Les interprétations de masse ajoutée se trouvent dans la section suivante.

Remarque sur la figure 3.5  $k_s$  fixée :

Nous devons résoudre l'équation (3.2.17) :

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{m_a}{m_s},$$

Prenons par exemple la cas où  $k_s = 1$ ,  $m_s = 1$  ( $\omega_s = 1$ ). La figure 3.5 montre les solutions de cette équation.  $m_a(\omega_c(1)) > 0$  et  $m_a(\omega_c(j)) < 0$ , ( $j \neq 1$ ).

Pour  $\omega_c(i)$  très grande ( $i \rightarrow \infty$ ), il existe toujours une solution, très proche d'une valeur de ballonnement (voir  $\omega_c(4) \approx \omega_f(3)$ ). Dans ce cas  $\frac{\omega_s}{\omega_c(i)} \rightarrow 0$ , et  $m_a(\omega_c(i)) \rightarrow -m_s$ .

Le cas où  $m_a(\omega_c(i)) = -m_s$  peut donc être attend pour des valeurs de fréquences infinies. D'autres phénomènes (tension superficielle ect.) auront rendre caduque notre modélisation.

Afin d'appréhender la physique des modes couplés du système, nous définissons un rapport d'amplitude de la surface libre à celle de la paroi mobile pour chaque pulsation couplée  $\omega_c(i)$ .

$$\mu(i) = \frac{\max(\eta(x, t, \omega_c(i)))}{\max(w(t, \omega_c(i)))}. \quad (3.4.1)$$

Ce ratio quantifie le mouvement relatif entre le fluide et le solide.

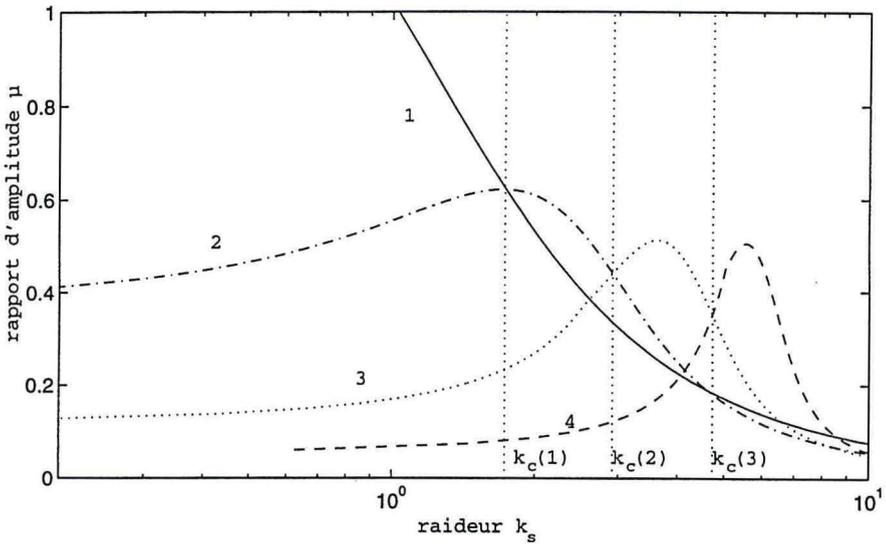


figure 3.6 Rapports d'amplitude de la surface libre à celle de la paroi mobile

On notera que pour une valeur de raideur donnée, ce n'est pas nécessairement le premier mode couplé qui présente le plus grand ratio  $\mu$ . Par exemple, pour  $k_s = 4$ ,  $\mu(3)$  est supérieur aux autres  $\mu(j)$ , tout en restant inférieur à 1. On notera aussi que le maximum de  $\mu(j)$  ne correspond pas au croisement de  $\omega_c(j)$  et de  $\omega_s$ .

Pour les raideurs de plus en plus élevées, les ratios tendent logiquement vers 0 (cas de la cuve rigide). Pour des raideurs de plus en plus faibles ce ratio tend vers une constante différente de 0. Ceci confirme le fait que  $\omega_c$  ne tend pas vers  $\omega_f$  quand la rigidité devient nulle. Le cas d'une paroi séparant deux domaines de fluide de dimensions égales possédant une masse mais non liée par un ressort à la cuve (fluide de part et d'autre), présente donc des fréquences couplées différentes des fréquences de ballonnement, les champs de vitesse étant en effet différents.

Considérons maintenant le cas particulier où  $k_s = 0,9$ . La figure 3.5 montre que cette rigidité correspond à l'égalité  $\omega_c(2) = \omega_s$ . En utilisant l'équation (3.2.10), on constate que les masses ajoutées sont respectivement :

- positive pour  $\omega_c(1)$ ,

- nulle pour  $\omega_c(2)$ ,
- négative pour  $\omega_c(3)$ ,  $\omega_c(4)$  ....

Nous discuterons plus précisément l'évolution de la masse ajoutée dans le paragraphe 3.5.

### 3.4.2. Les effets de masse sur les fréquences couplées

Les effets de la masse sur les fréquences du système couplé  $\omega_c(i)$  sont montrés dans la figure 3.7 pour les cas où la valeur de la raideur adimensionnelle est petite  $k_s = 1$ , moyenne  $k_s = 10$ , et grande  $k_s = 50$ . Les courbes sont repérées respectivement par  $\circ$ ,  $\times$ ,  $\otimes$ .

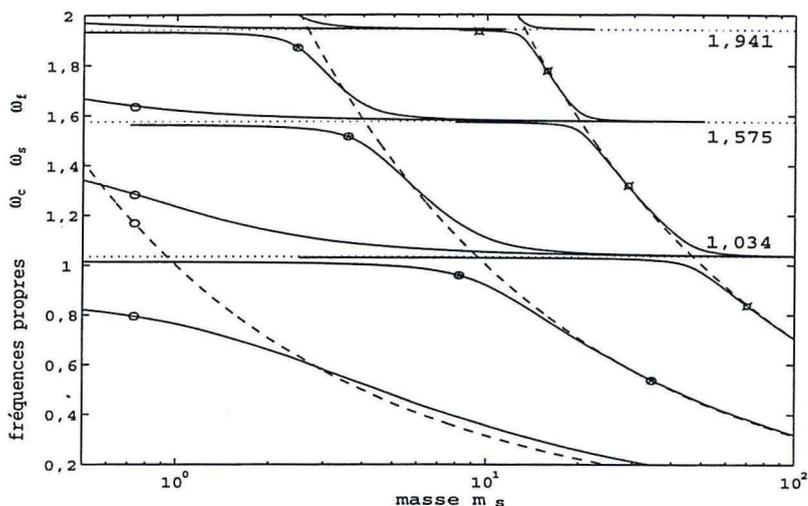


figure 3.7 L'évolution avec la masse des fréquences couplées ( $L=2,5$ )

- : fréquences propres du système couplé;
- - - : fréquences propres du solide non-couplé;
- ... : fréquences propres du fluide non-couplé;

-○- :  $k_s = 1$  ; -●- :  $k_s = 10$  ; -×- :  $k_s = 50$ .

Pour une raideur donnée, les fréquences couplées diminuent avec la masse. Nous retrouverons les points d'intersection des courbes  $\omega_s$  et  $\omega_c$  qui correspondent aux cas sans couplage dynamique entre fluide et structure. Comme précédemment, pour une masse et une raideur donnée, si une fréquence couplée est supérieure à la fréquence sèche, la masse ajoutée est

négative. Si une fréquence couplée est inférieure à la fréquence sèche, la masse ajoutée est positive.

Nous pouvons distinguer que les évolutions des fréquences couplées  $\omega_c(i)$  avec  $m_a$  sont des courbes en S, dont le point d'inflexion est localisé à proximité de la courbe de fréquence propre sèche. Loin de ces points de croisement, les fréquences couplées convergent lorsque  $m_a$  varie vers les fréquences de ballonnement du fluide dans un réservoir rigide, et ceci dans les deux directions.

Nous pouvons remarquer que pour une grande masse adimensionnelle ( $m_s > 10$ ) les fréquences couplées peuvent presque être considérées comme composées par les fréquences de ballonnement et la fréquence sèche. Mais quand  $m_s$  est inférieure à 1 : les fréquences couplées peuvent être très différentes du ballonnement et des fréquences sèches.

### 3.5. Interprétation énergétique de masse ajoutée

Pour bien comprendre les évolutions de la masse ajoutée, nous reprendrons la définition de la masse ajoutée (3.2.10). L'effort dynamique total du liquide sur la masse (3.2.8) est mis sous la forme suivante :

$$f_r(t) = -\omega^2 m_a \varepsilon \cos(\omega t). \quad (3.5.1)$$

On rappelle que dans le système masse - ressort, la force d'inertie de la masse et la force de ressort sur la masse sont :

$$m_s \ddot{w} = m_s \omega^2 \varepsilon \cos(\omega t), \quad (3.5.2)$$

$$k_s w = -k_s \varepsilon \cos(\omega t). \quad (3.5.3)$$

Rappelons la relation entre la masse ajoutée et les fréquences propres :

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{m_a}{m_s}. \quad (3.5.4)$$

A l'aide de ces expressions, on peut voir que :

Si l'intégrale de la pression dynamique du fluide sur la structure est négative, elle est en opposition de phase avec l'accélération de la masse, le fluide empêche le mouvement de la masse, la masse ajoutée est positive, la fréquence propre couplée va être inférieure à celle de masse - ressort sec.

Si la masse ajoutée est nulle, il n'y a pas de couplage dynamique entre solide et fluide et la fréquence propre couplée est égale à celle du système sec.

Si l'intégrale de la pression dynamique du fluide sur la structure est positive, elle est en phase avec l'accélération de la masse, le fluide entraîne la masse dans son mouvement, la masse ajoutée est négative, la fréquence propre couplée va être supérieure à celle du système masse - ressort sec.

Isolons le sous-système masse - ressort, et calculons ses énergies potentielle et cinétique en fonction du temps. L'effet du fluide sur ce système est donné par la pression dynamique. L'énergie cinétique instantanée de la masse vaut :

$$E_{\text{structure}}^c(t) = \frac{1}{2} m_s \dot{w}^2 = \frac{1}{2} m_s \varepsilon^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \quad (3.5.5)$$

L'énergie potentielle instantanée dans le ressort est (nulle lorsque  $\varepsilon \cos \omega t = 0$ ) :

$$E_{\text{structure}}^p(t) = \frac{1}{2} k_s w^2 = \frac{1}{2} k_s \varepsilon^2 \cos^2 \omega t, \quad (3.5.6)$$

alors l'énergie totale instantanée dans la structure est :

$$E_{\text{structure}}(t) = E_{\text{structure}}^c(t) + E_{\text{structure}}^p(t), \quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{structure}}(t) &= \frac{1}{2} m_s \varepsilon^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} k_s \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} m_s \varepsilon^2 (\omega^2 \sin^2 \omega t + \omega_s^2 \cos^2 \omega t) \\ &= \frac{1}{2} m_s \varepsilon^2 \omega_s^2 \left( \frac{\omega^2}{\omega_s^2} (1 - \cos^2 \omega t) + \cos^2 \omega t \right) \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Si l'on pose  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_s}$ ,

$$E_{\text{structure}}(t) = \frac{1}{2} m_s \varepsilon^2 \omega_s^2 (\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \cos^2 \omega t), \quad (3.5.9)$$

au début et à la fin d'une période T, elles sont :

$$E_{\text{structure}}(T) = E_{\text{structure}}(0) = \frac{1}{2} k_s \varepsilon^2. \quad (3.5.10)$$

Le travail de la force exercé par le fluide sur la structure entre  $[0, t]$  est :

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= \int_0^t f(t) \dot{w}(t) dt \\ &= \int_0^t (-\omega^2 m_a \varepsilon \cos(\omega t)) (-\omega \varepsilon \sin(\omega t)) dt \\ &= \omega^2 m_a \varepsilon^2 \int_0^t \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4} m_a \varepsilon^2 \omega^2 (\cos 2\omega t - 1)\end{aligned}\tag{3.5.11}$$

Le terme  $(\cos 2\omega t - 1)$  est négatif, donc si  $m_a > 0$ , la force s'oppose au mouvement ; si  $m_a < 0$ , la force entraîne la structure.

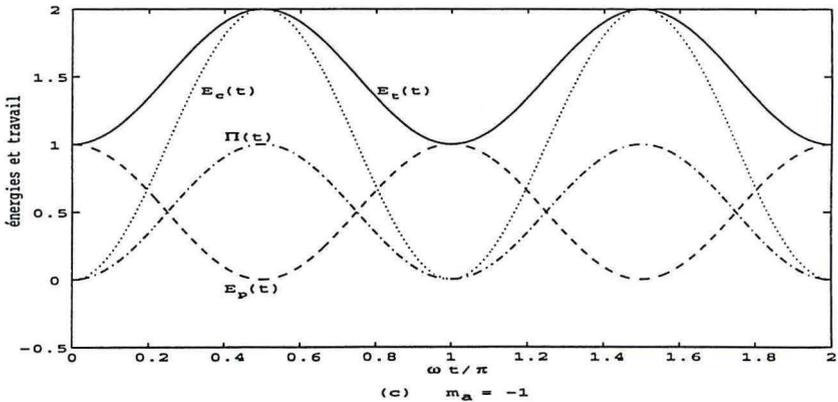
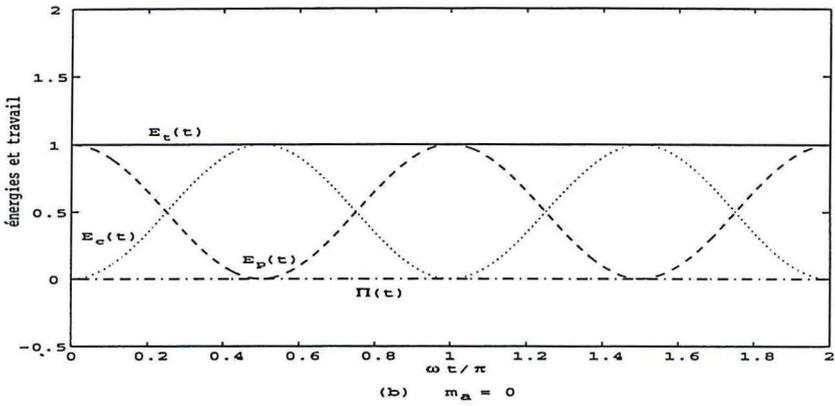
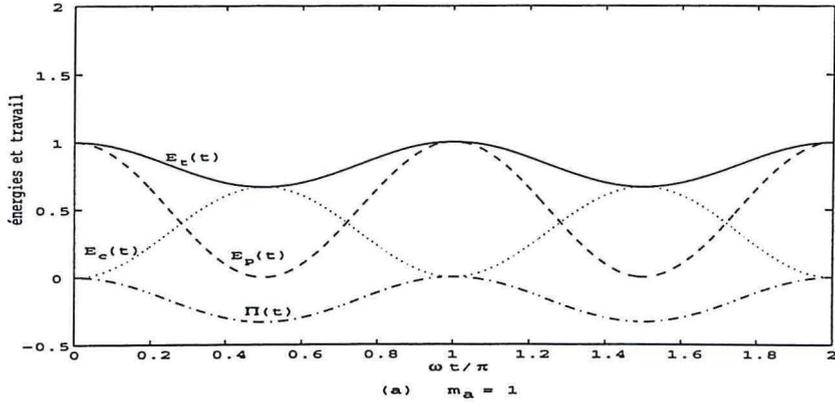


figure 3.8.(a, b, c) (a) les énergies et le travail  $m_a = 1$  ; (b) les énergies et le travail  $m_a = 0$  ;

(c) les énergies et le travail  $m_a = -1$  ( $k_s = 1, \varepsilon = 1$ ).

— :  $E_t(t)$  l'énergie totale du système masse - ressort, ..... :  $E_c(t)$  l'énergie cinétique du système masse - ressort, --- :  $E_p(t)$  l'énergie potentielle du système masse - ressort, -.-.- :  $\Pi(t)$  le travail de la pression du liquide sur le système masse - ressort.

Le bilan d'énergie prend la forme suivante :

$$\Delta E(t) = \Pi(t), \quad (3.5.12)$$

à partir de cette expression, en utilisant le travail de la force exercée par le fluide sur la structure, on obtient donc le transfert d'énergie moyen sur une période T :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (\cos(2\omega t) - 1) dt \\ &= -\frac{1}{4} m_a \varepsilon^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Les courbes ci-dessus font apparaître le transfert d'énergie entre la structure et le fluide. En fonction du signe de  $m_a$  le fluide est récepteur (*figure 3.8 a*) ou moteur (*figure 3.8.c*).

L'énergie totale du système complet masse - ressort - fluide avec surface libre, est conservée à tout instant. Nous n'avons calculé ci-dessus que l'énergie transférée entre le système masse - ressort et le système fluide avec surface libre.

Sur un cycle de période T, l'énergie cinétique moyenne et l'énergie potentielle moyenne sont différentes. Cette différence est proportionnelle à  $m_a$ .

### 3.6. Les influences sur la masse ajoutée du nombre de Froude $F_r$ et du confinement

Le nombre de Froude traduit l'influence de la pesanteur, et la longueur adimensionnelle de la cuve est utilisée pour interpréter l'effet du confinement. Nous discuterons les cas où les nombres de Froude sont grands, petits ou moyens.

#### 3.6.1 Le cas où $F_r \gg 1$

Lorsque le nombre de Froude  $F_r$  tend vers l'infini, les efforts d'inertie sont bien plus grands que ceux dus à la pesanteur. A la pesanteur donné, ceci correspond aux fréquences « suffisamment » élevées.

A partir de l'équation (3.2.12) :

$$F_r^2 = -p_n \tan(p_n), \quad F_r^2 = q \tanh(q),$$

si  $F_r \rightarrow \infty$ , on a :

$$p_n \rightarrow \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (3.6.1)$$

$$q \rightarrow \infty \quad (3.6.2)$$

grâce à (3.2.13),

$$\alpha_n \rightarrow \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}; \quad (3.6.3)$$

$$\beta \rightarrow 0.$$

Le potentiel de vitesse est donc donné par,

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(p_n(x-L)) \cos(p_n y)}{\sinh(p_n L)} \quad (3.6.4)$$

**Remarque :**

Les valeurs de  $p_n$  précédentes fournissent  $\Phi(x,1) = 0$ , qui est dans ce cas la condition aux limites à la surface libre. Nous noterons que cette condition sans interprétation physique

claire est différente d'une condition d'interface fixe :  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0$ .

La force exercée par le fluide sur la plaque est donnée par (3.2.14),

$$f_r(t) = -\varepsilon \omega^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2(p_n) c \tanh(p_n L)}{p_n^2 (2p_n + \sin(2p_n))} \right) \cos(\omega t). \quad (3.6.5)$$

Comme  $\sin(p_n) = (-1)^{n+1}$ ,  $\sin(2p_n) = 0$ ,

$$f_r(t) = -\varepsilon \omega^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{((2n-1)\pi/2)^2 (2n-1)\pi} c \tanh((2n-1)\pi L/2) \right) \cos(\omega t) \quad (3.6.6)$$

$$= -\frac{16\varepsilon \omega^2}{\pi^3} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \tanh((2n-1)\pi L/2)}{(2n-1)^3} \right) \cos(\omega t)$$

En utilisant (3.5.1), la masse ajoutée est donc de la forme,

$$m_a = 16\pi^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-3} c \tanh((2n-1)L\pi/2). \quad (3.6.7)$$

On trouve qu'il n'existe qu'une masse ajoutée dans ce cas là, indépendant du nombre de Froude. La masse ajoutée est fonction de ratio de longueur de réservoir à la profondeur du liquide  $L$ .

Cette expression nous permet d'étudier explicitement l'influence du confinement du liquide sur la masse ajoutée.

Soit  $L$ , le ratio de la longueur de réservoir à la profondeur du liquide,  $\frac{m_a}{m_\infty}$  le ratio de la masse ajoutée. Où  $m_\infty$  est la masse ajoutée du problème semi-infini (la longueur est infinie et la profondeur est finie).

$$m_\infty = 16 \pi^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-3} \tag{3.6.8}$$

Les valeurs et une courbe se trouvent ci-dessous :

L	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	4,0
$\frac{m_a}{m_\infty}$	6,2015	3,1879	1,4997	1,0859	1,0036	1,0000

tableau 3.1 l'influence du confinement sur la masse ajoutée

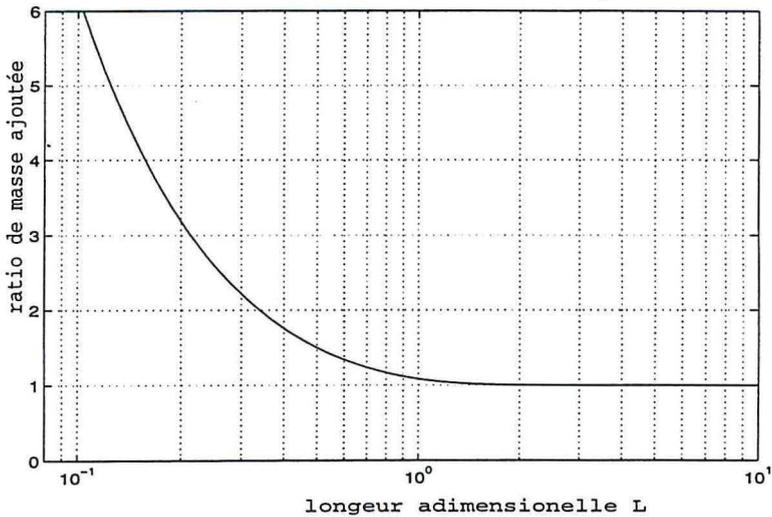


figure 3.9 l'influence du confinement sur la masse ajoutée

On peut observer clairement l'influence du confinement du fluide sur la masse ajoutée. Cette influence est très importante lorsque le ratio  $L$  est inférieur à 1. Si la longueur du réservoir est plus grande que la profondeur, cet effet de confinement disparaît.

Si la longueur de la cuve est supérieure à la profondeur ( $L > 1$ ), le fluide est si peu mis en mouvement que la masse ajoutée ne varie plus. On a :

$$m_a = 0,5428. \quad (3.6.9)$$

La masse ajoutée dimensionnelle est alors :

$$m_a^* = \rho_f^* h^2 m_a. \quad (3.6.10)$$

Le résultat que nous avons obtenu correspond au cas où une seule face de la structure est en contact avec le liquide. Pour une plaque immergée sur ses deux faces, la valeur précédente doit doubler :

$$m_a^* = 1,0856 \rho_f^* h^2. \quad (3.6.11)$$

Ce résultat peut être comparé avec celui de Blevins (1979) qui donne la valeur de la masse ajoutée pour un piston en translation de longueur  $h$  complètement immergé dans un fluide infini dans les deux directions.

$$m_a = \pi \rho_f h^2 / 4 = 0,7854 \rho_f h^2. \quad (3.6.12)$$

La présence des deux conditions aux limites, de fond et de surface libre en absence d'onde de pesanteur, modifie le champ de vitesse et augmente la masse ajoutée par rapport celle dans un domaine infini. C'est aussi un effet de confinement. Il est évidemment moins fort que dans le cas où la surface libre est remplacée par une surface rigide, car alors le fluide ne peut s'échapper « latéralement », et la masse ajoutée devient infinie.

Les différences de ces trois types de conditions aux limites sont reportées dans le tableau II (les variables sont dimensionnelles dans ce tableau).

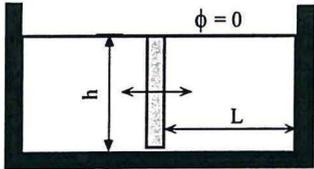
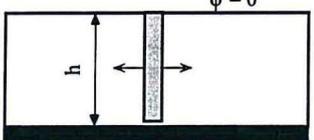
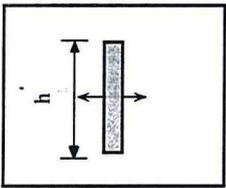
Domaine du fluide	Masse ajoutée
 <p style="text-align: center;">borné</p>	$m_a = 32 \pi^{-3} \rho_f h^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-3} \operatorname{ctanh}((2n-1)L\pi/2)$ <p style="text-align: center;">(cette étude)</p>
 <p style="text-align: center;">semi-infini</p>	$m_a = 16 \pi^{-3} \rho_f h^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-3} = 1,0856 \rho_f h^2$ <p style="text-align: center;">(cette étude)</p>
 <p style="text-align: center;">infini</p>	$m_a = \frac{\pi}{4} \rho_f h^2 = 0,7854 \rho_f h^2$ <p style="text-align: center;">(Blevins, 1979)</p>

tableau 3.2 Masse ajoutée de trois types des conditions aux limites d'une plaque rigide

Les évolutions de masse ajoutée en fonction de domaine du fluide proviennent des champs de vitesse. Dans le cas borné et semi-infini, l'influence du solide sur le fluide est localisée à proximité du piston (à une distance de l'ordre de h). L'énergie cinétique du fluide dans cette zone donne la masse ajoutée.

### 3.6.2 Le cas où $F_r \ll 1$

A partir de l'équation (3.2.12) :

$$F_r^2 = -p_n \tan(p_n), \quad F_r^2 = q \tanh(q),$$

si  $F_r \rightarrow 0$ , on a :

$$p_n \rightarrow n\pi, (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.6.13)$$

$$q \rightarrow F_r \quad (3.6.14)$$

grâce à (3.2.13), le coefficient  $\beta$  peut être calculé. Il n'est ni infini ni nul.

$$\beta \rightarrow 2. \quad (3.6.15)$$

$$\alpha_n \rightarrow 0. \quad (3.6.15)$$

Le potentiel de vitesse est donc donné par,

$$\Phi = \beta \frac{\cos(q(x-L)) \cosh(qy)}{\sin(qL)} \quad (3.6.16)$$

Remarque :

Les valeurs de  $q$  précédentes fournissent  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0$ , qui est dans ce cas la condition aux limites

à la surface libre. Nous noterons que cette condition de type paroi rigide est différente d'une condition :  $\Phi(x,1) = 0$ .

La force exercée par le fluide sur la plaque est donnée par l'intégrale,

$$f_r(t) = \varepsilon \omega^2 \frac{4 \sinh^2(q)c \tan(qL)}{q^2(2q + \sinh(2q))} \cos(\omega t). \quad (3.6.17)$$

Comme  $F_r \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow F_r$ , on a

$$f_r(t) = \varepsilon \omega^2 \frac{4 \sinh^2(F_r)c \tan(F_r L)}{F_r^2(2F_r + \sinh(2F_r))} \cos(\omega t) \quad (3.6.18)$$

En utilisant (3.5.1), la masse ajoutée est donc de la forme,

$$m_a = - \frac{4 \sinh^2(F_r)c \tan(F_r L)}{F_r^2(2F_r + \sinh(2F_r))}. \quad (3.6.19)$$

le terme en cotangente implique que cette masse ajoutée tend vers  $-\infty$  quand  $F_r \rightarrow 0$ . Elle dépend du nombre de Froude  $F_r$  et du ratio de longueur de réservoir à la profondeur du liquide  $L$ .

### 3.6.3 Le cas où $F_r \approx 1$

On envisage le cas où effets d'inertie et de pesanteur sont du même ordre. Cette surface libre dans un champs de pesanteur, apporte une infinité discrète de valeurs propres comme le prouve l'étude du ballottement dans un réservoir rigide. Nous combinons alors un système masse

- ressort à un degré de liberté, avec une surface libre ayant une infinité de degrés de liberté. Les figures 3.5 et 3.7 montrent les évolutions des fréquences propres couplées obtenues.

La masse ajoutée est considérée consiste en deux parties :  $m_a^\alpha$  et  $m_a^\beta$ .

$$m_a = m_a^\alpha + m_a^\beta, \quad (3.6.20)$$

où  $m_a^\alpha$  est correspondant pour inertie du liquide, qui prend la même forme que dans le cas où  $F_r$  est grand, mais la valeur de  $p_n$  est différente que lorsque  $F_r$  est infini.

$$m_a^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2(p_n) c \tanh(p_n L)}{p_n^2 (2p_n + \sin(2p_n))}, \quad (3.6.21)$$

et  $m_a^\beta$  traduit l'effet du champs pesanteur :

$$m_a^\beta = - \frac{4 \sinh^2(q) c \tan(qL)}{q^2 (2q + \sinh(2q))}. \quad (3.6.22)$$

Les ratios  $\frac{m_a^\alpha}{m_a}$  et  $\frac{m_a^\beta}{m_a}$  traduisent les importances relatives de deux contributions.  $q$  et

$p_n$  sont fonctions de  $F_r$ , donc  $m_a^\alpha$  et  $m_a^\beta$  sont fonctions de  $F_r$ . Pour  $L = 2,5$ , on visualise ces fonctions par les figures 3.10 (a, b, c).

Le diagramme « a » représente l'évolution de la partie  $m_a^\alpha$  de la masse ajoutée qui concerne l'inertie du fluide. On note qu'elle est toujours positive comme dans le cas où le domaine du fluide est infini. On note la convergence vers une valeur constante correspondant au cas infini. Lorsque  $F_r$  est inférieure 1, la contribution de  $m_a^\alpha$  à  $m_a$  est négligeable.

La courbe « b » représente l'effet de la surface libre dans un champs de pesanteur. Les points singuliers correspondants aux fréquences de ballotement du liquide dans un réservoir rigide de même dimension. Pour ces valeurs, la masse ajoutée devient infinie et la structure ne bouge pas alors que le fluide ballote. On retrouve lorsque  $F_r \gg 1$ , que  $m_a^\beta$  reste pratiquement nul sauf à ses points singuliers. L'effet de pesanteur devient négligeable. Lorsque  $F_r$  tend vers 0, c'est  $m_a^\beta$  qui conditionne le couplage. On retrouve le résultat du paragraphe précédent.

La courbe « c » représente la somme  $m_a^\alpha$  et  $m_a^\beta$ .

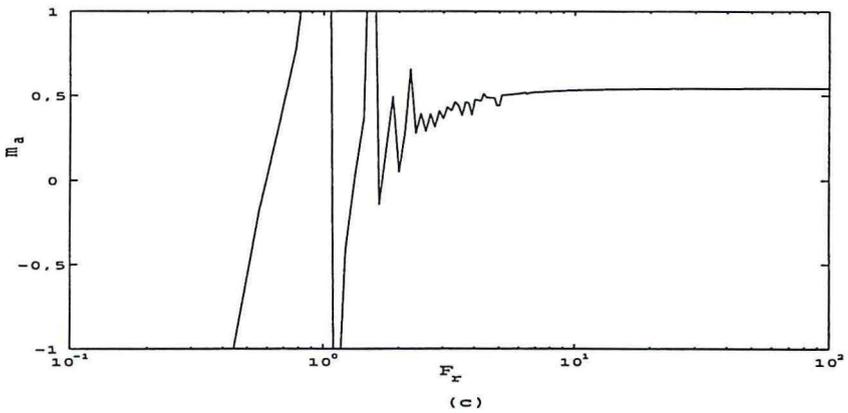
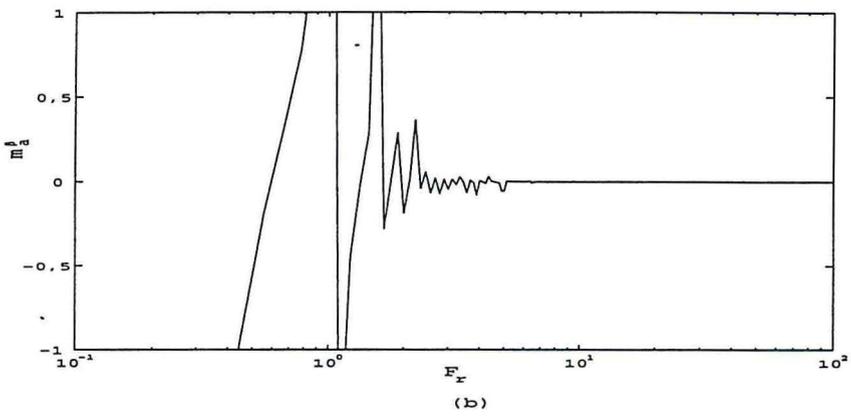
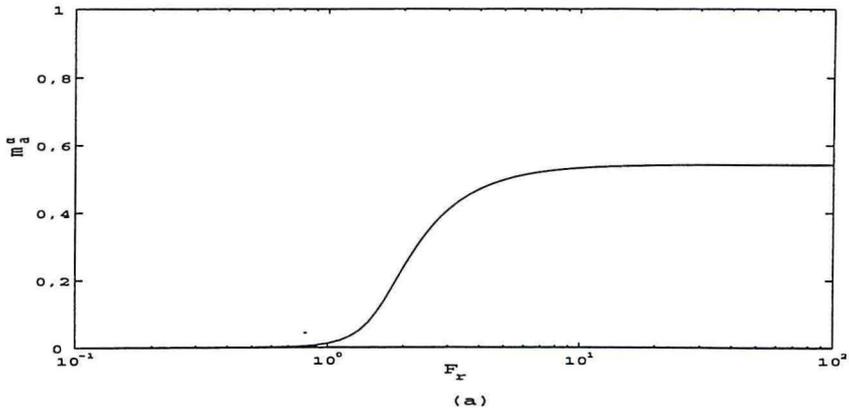
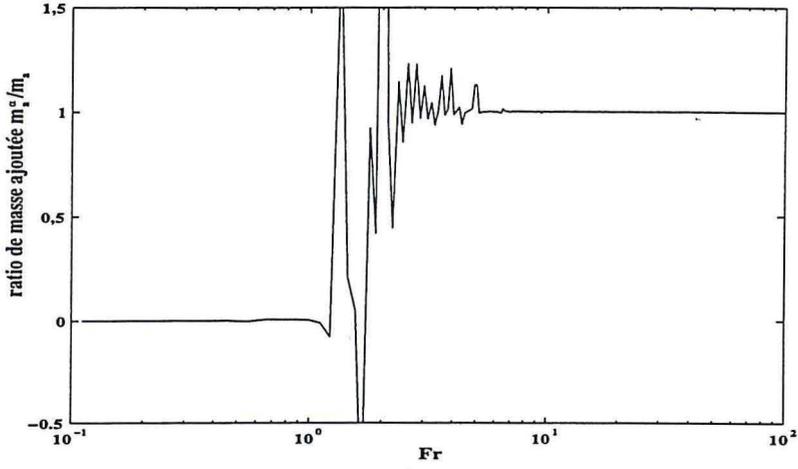
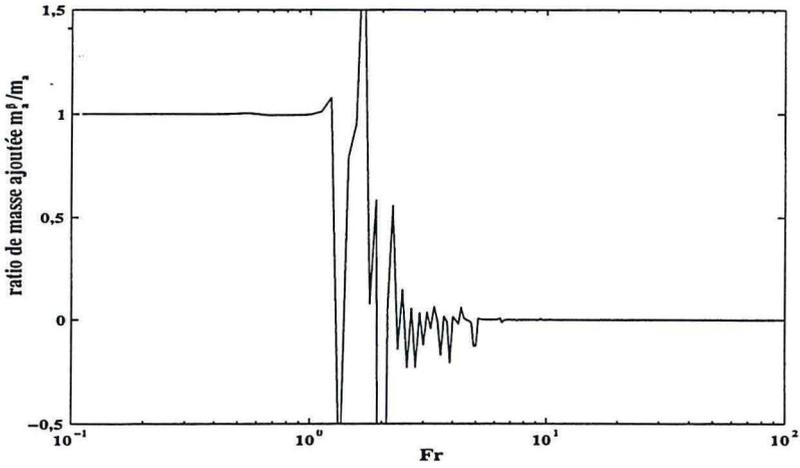


figure 3.10. (a, b, c)  $m_a^\alpha$ ,  $m_a^\beta$ ,  $m_a$  en fonction de  $F_r$

La figure 3.11 représente les ratios de masse ajoutée.



(a)



(b)

figure 3.11 (a, b) Le ratio de masse ajoutée  $\frac{m_a^\alpha}{m_a}$  et  $\frac{m_a^\beta}{m_a}$  en fonction de  $F_r$

La figure 3.12 montre les deux parties de masse ajoutée pour  $F_r$  petit (de 0.5 à 2).

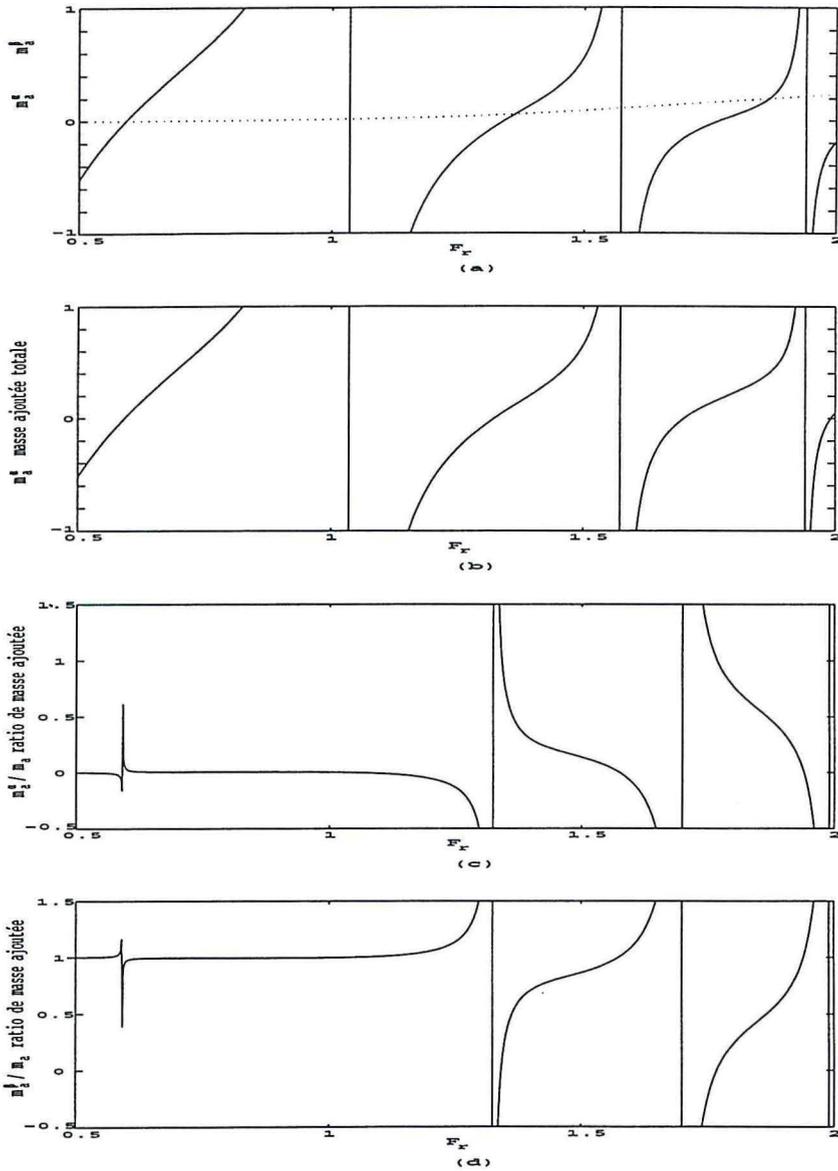


figure 3.12 (a, b, c, d) La masse ajoutée en fonction de  $F_r$  (de 0.5 à 2)

La courbe 3.12 montre que la masse ajoutée peut devenir inférieure à  $(- m_s)$ , ce ne sont plus des solutions du système. En effet résoudre (3.2.17) reviendrait à chercher  $k_s$  tel que :

$$k_s = (m_s + m_a) \omega^2$$

donc de rechercher des  $k_s < 0$ , ce qui est physiquement impossible. La solution pour un mouvement harmonique n'existe pas. Il faudrait rechercher des solutions de type transitoire, ce qui est hors du propos de notre document.

Dans le cas où  $m_a \rightarrow \infty, \Rightarrow k_s \rightarrow \infty$ , on retrouve le ballonnement dans une cuve rigide.

### 3.6.4 Conclusion de la dépendance par rapport au nombre de Froude

Nous obtenons les conclusions suivantes à partir des paragraphes précédents :

- (1.) Pour les valeurs de  $F_r \gg 1$ ,  $m_a$  est indépendant de  $\omega$ . Dans ce cas la pesanteur est négligeable et ce dernier résultat peut être obtenu avec une condition sur la surface libre du fluide :  $\varphi = 0$ .
- (2.) Pour les valeurs de  $F_r \ll 1$ , le résultat qui peut être obtenu avec une condition de surface libre  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  (condition de surface rigide).
- (3.) Pour les valeurs intermédiaires de  $F_r \approx 1$ ,  $m_a$  est perturbée par la présence des fréquences de ballonnement. Les simulations confirme les deux cas précédents.

Nombre de Froude	$F_r^2 \ll 1$	$F_r^2 \approx 1$	$F_r^2 \gg 1$
Masse ajoutée $m_a$	$m_a \approx m_a^\beta$	$m_a = m_a^\alpha + m_a^\beta$ $\geq$ ou $\leq 0$	$m_a \approx m_a^\alpha > 0$
C.L. sur la S.L.(y=1)	$\varphi_y = 0$ (Surface rigide)	$\varphi_y + \varphi_{tt} = 0$ (Surface matérielle)	$\varphi = 0$ (Surface équipotentielle)
Zones de fréquences	$\omega \ll \omega_f$	$\omega \approx \omega_f$	$\omega \gg \omega_f$
Caractéristique de mouvement du fluide	pompage	couplage fort	$m_a$ classique

tableau 3.3 L'influence de Froude sur la masse ajoutée

En fait les trois types de condition à la surface libre peuvent être aussi obtenus directement à partir de l'équation de la surface libre

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{y=1} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad (3.6.23)$$

qui donne sous forme réduite pour des potentiels harmonique  $\varphi = \Phi(x,y)\omega \sin(\omega t)$  :

$$-\omega^2 \Phi|_{y=1} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.6.24)$$

Rappelons la définition de Froude et la fréquence adimensionnelle :

$$\omega = \omega^* \sqrt{\frac{h^*}{g^*}}, \quad F_r = \sqrt{\frac{\omega^{*2} h^*}{g^*}}, \quad (3.6.25)$$

on a :

$$-F_r^2 \Phi|_{y=1} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.6.26)$$

Si  $F_r \ll 1$ ,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.6.27)$$

Si  $F_r \gg 1$ ,

$$\Phi|_{y=1} = 0 \quad (3.6.28)$$

### 3.6.5 Comparaison des fréquences couplées, à Froude infini et fini.

Pour comparer les différentes conditions aux limites sur la surface libre, on désigne la fréquence propre du système masse - ressort par  $\omega_{cs}$  dans le cas de Froude infini :

$$\omega_{cs} = \sqrt{\frac{k_s}{m_s + m_a}}$$

où la masse ajoutée est donnée par (3.6.7) pour une longueur de réservoir de L,

$$m_a = 16\pi^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-3} c \tanh((2n-1)L\pi/2).$$

Si L est supérieur à 2, la masse ajoutée est une constante (3.6.9) :  $m_a = 0,5428$ .

La figure 3.13 présente les fréquences propres dans ce cas, pour  $L = 2,5$  et une masse adimensionnelle  $m_s = 1$ . La courbe --o-- présente l'évolution avec la raideur de la fréquence propre, par rapport à l'évolution de la fréquence sèche (courbe ----)

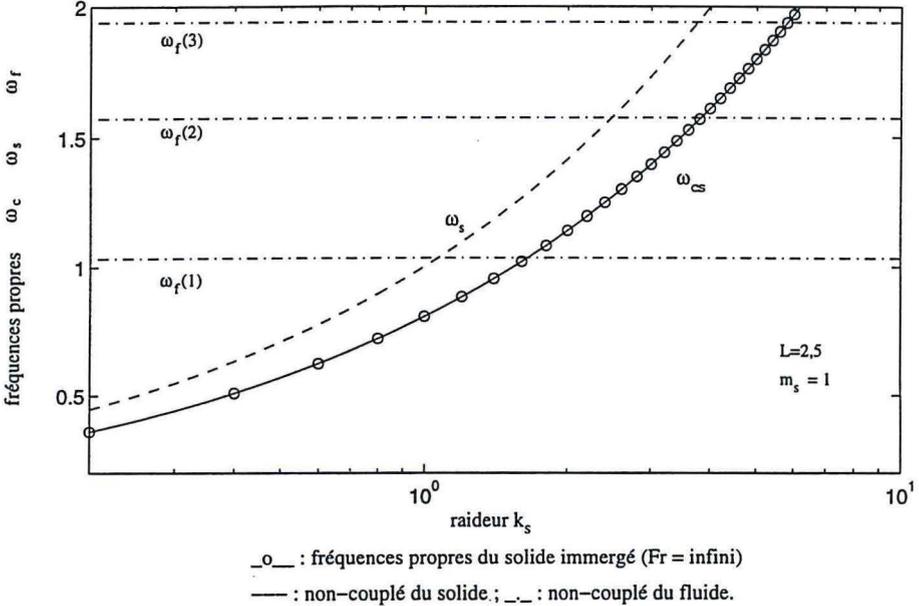


figure 3.13 L'évolution de la fréquence sèche et la fréquence propre avec la raideur (Fr, infini)

La figure 3.14 (a, b) présente le cas où le Froude est fini. Sont tracées les fréquences de ballottage (qui maintenant existent), la fréquence sèche, et les fréquences couplées. Est retracée aussi pour comparaison, la fréquence couplée à Froude infini du graphe précédent.

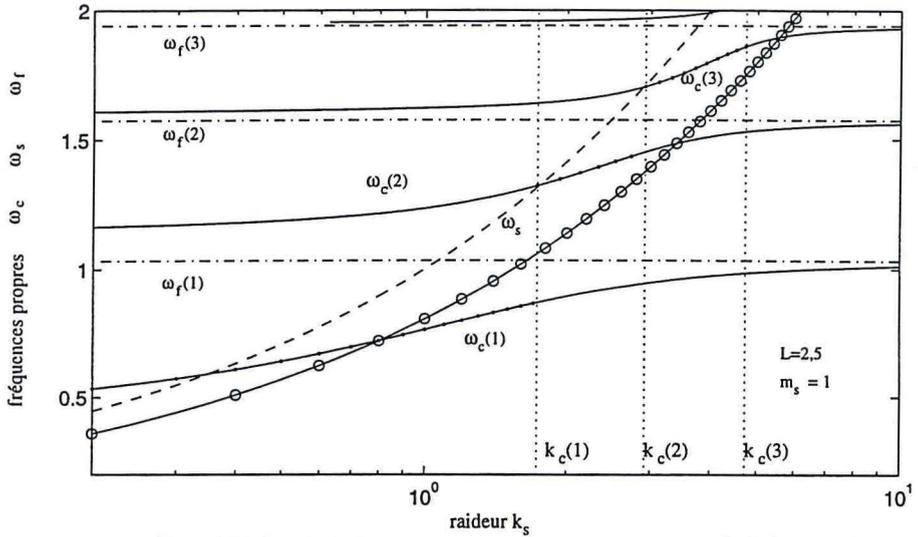


figure 3.14a Les évolutions avec la raideur des fréquences propres  $L=2,5$ ,  $m_s = 1$

couplées : \_\_\_ Froude fini, -o- Froude infini ; non-couplées : — solide sec, - - - ballottement.

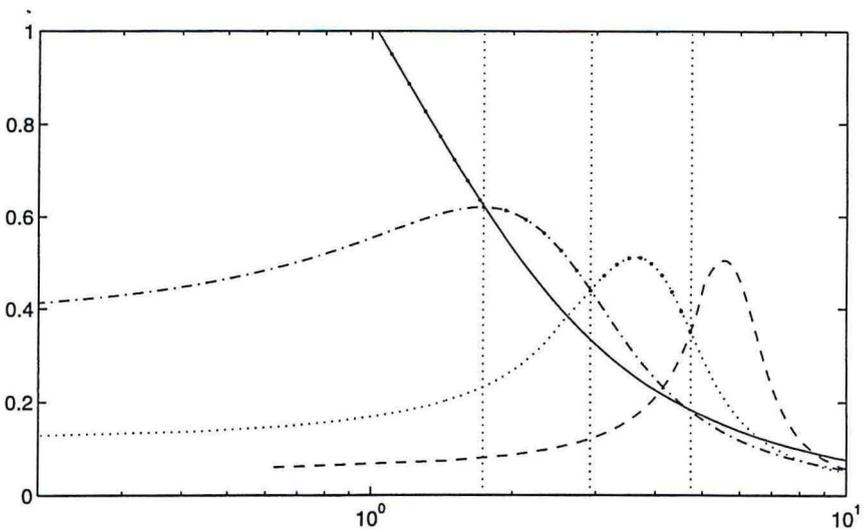


figure 3.14 (a, b) L'évolution de la fréquence sèche et la fréquence propre avec la raideur ( $F_f$ , fini)

On notera que l'on est passé logiquement d'une fréquence couplée à plusieurs. L'approximation à Froude infini est ici inacceptable. Lorsque  $k_s$  tend vers 0, la première fréquence couplée à Froude fini tend vers une constante, alors que  $\omega_s$  et  $\omega_{cs}$  tendent vers 0.

La même étude peut être faite en fonction de la masse sur la figure 3.15. Il apparaît que l'approximation à Froude infini est aussi inacceptable, sauf pour une masse adimensionnelle supérieure à 3 et pour le premier mode couplé.

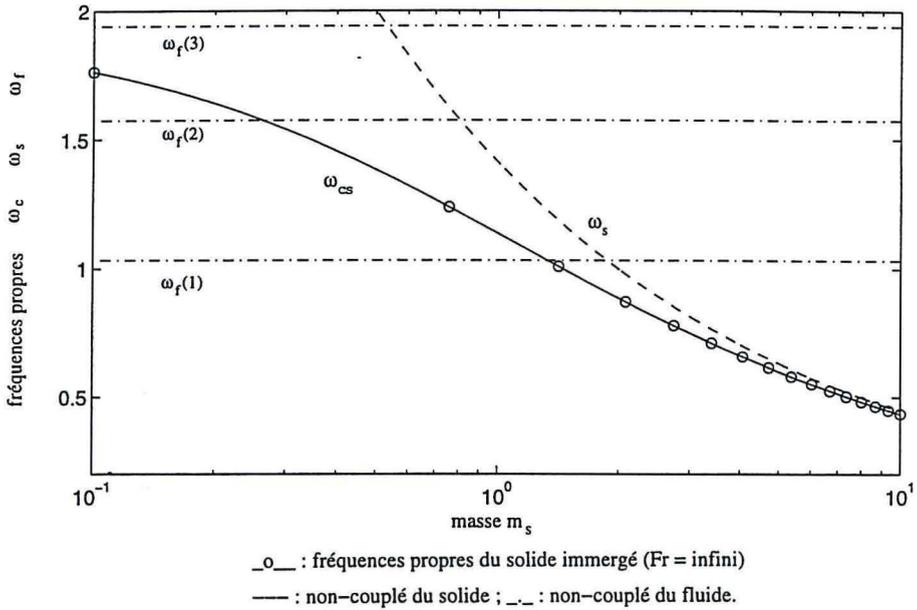


figure 3.15 L'évolution de la fréquence sèche et la fréquence propre avec la masse ( $Fr$ , infini)

Comme nous avons vu dans la figure 3.14, la figure 3.16 montre que l'évolution avec la masse des fréquences propres du système pour des nombre de Froude infinis et finis. Lorsque la masse  $m_s$  est supérieure à 3, le premier mode couplé quand le nombre de Froude est fini, est identique au mode couplé pour le cas où le nombre de Froude est infini.

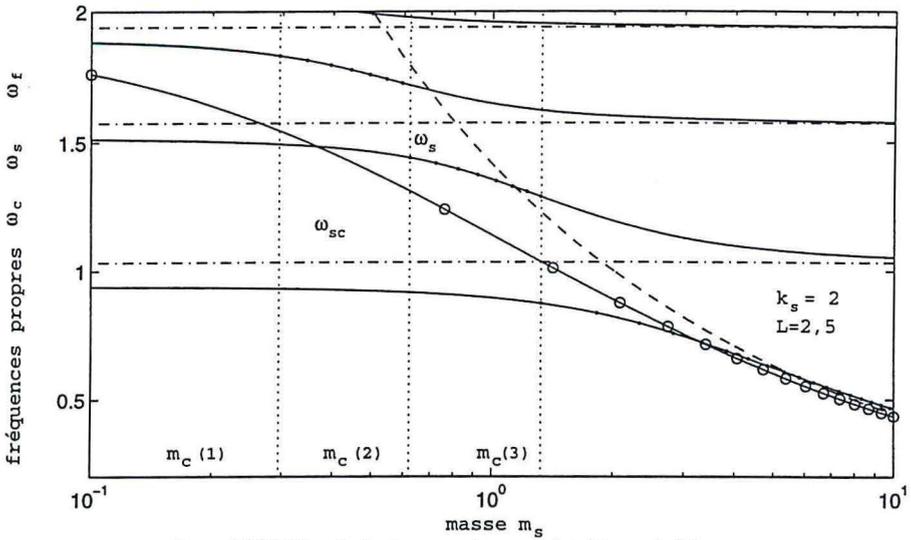


figure 3.16 (a) Les évolutions avec la masse des 4 types de fréquence propre

couplées :  $\text{---}$  Froude fini,  $\text{---o---}$  Froude infini ; non-couplées :  $\text{---}$  solide sec ,  $\text{- - -}$  ballottement.

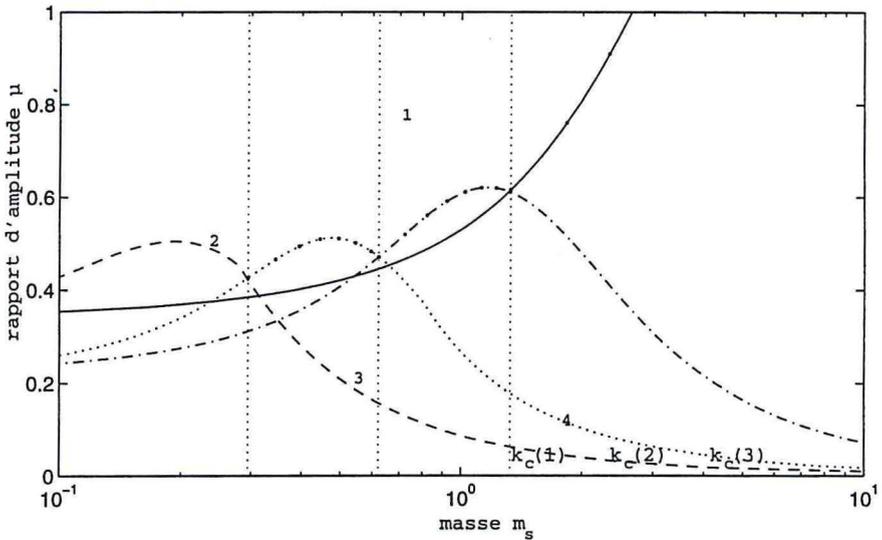


figure 3.16 (a, b) L'évolution de la fréquence sèche et la fréquence propre avec la masse (F, infini)

### 3.7. Influence du type de conditions aux limites sur de la masse ajoutée

A l'aide du modèle MRL, nous avons mis en évidence certains aspects de couplage fluide-structure. Entre autres les influences du nombre de Froude sur la masse ajoutée, permettent de dégager quelques idées essentielles qui faciliteront l'approche des structures complexes couplées avec un fluide. Afin de comparer notre démarche à d'autres résultats théoriques (Caillot, 1983) et Blevins (1979)), une extension directe du modèle MRL est le calcul des modes couplés lorsque la paroi rigide pivote autour d'un axe (voir figure 3.17).

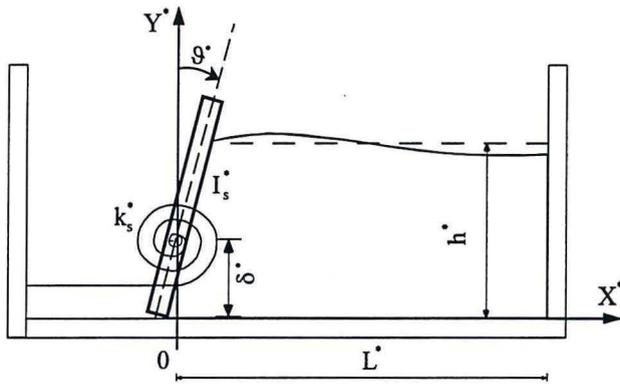


figure 3.17 Une paroi rigide pivotante autour d'un axe

Pour  $F_r \rightarrow \infty$ ,  $\delta = 0,5$  et  $L = \infty$ , Blevins présente l'inertie ajoutée dans un milieu infini sans surface libre, Caillot pour une cuve fermée (voir tableau 3.4). calculons les valeurs que nous obtenons si la surface libre est équipotentielle.

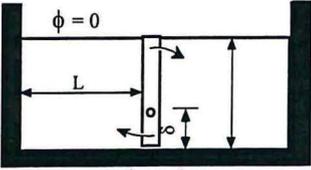
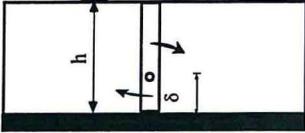
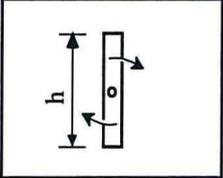
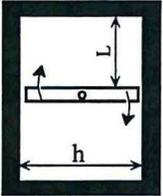
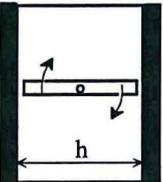
Domaine du fluide	Inertie ajoutée
 <p style="text-align: center;">borné</p>	$I_a = \frac{128}{\pi^5} \rho_f h^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(p_n L)}{(2n-1)^5} (-1 + p_n(1-\delta)(-1)^{n+1})^2$ $\delta \in [0, 1], p_n = (2n-1) \pi / 2$ <p style="text-align: center;">(cette étude)</p>
 <p style="text-align: center;">semi-infini</p>	$I_a = 128 \pi^{-5} \rho_f h^4 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-5} (1 + (-1)^n (1-\delta) p_n)^2$ $\delta \in [0, 1],$ $\text{si } \delta = 0,5 : I_a = 0,0836 \rho_f h^4$ <p style="text-align: center;">(cette étude)</p>
 <p style="text-align: center;">infini</p>	$I_a = \frac{\pi}{128} \rho_f h^4 = 0,02454 \rho_f h^4$ <p style="text-align: center;">(Blevins, 1979)</p>
 <p style="text-align: center;">fermé</p>	$I_a = 16 \pi^{-5} \rho_f h^4 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-5} \text{ctanh}(\alpha_n L)$ $\alpha_n = (2n-1) \pi, \delta = 0,5,$ <p style="text-align: center;">(Caillot, 1983)</p>
 <p style="text-align: center;">semi-infini</p>	$I_a = 16 \pi^{-5} \rho_f h^4 = 0,05228 \rho_f h^4$ <p style="text-align: center;">(Caillot, 1983)</p>

tableau 3.4. L'inertie ajoutée pour différentes conditions aux limites d'une paroi rigide en rotation dans un fluide

Soit  $\delta^*$  la position de l'axe de rotation de la paroi,  $\vartheta^*(t)$  l'angle de rotation.  $I_s^*$  l'inertie de rotation de la paroi par rapport à l'axe et  $k_s^*$  la raideur du ressort en torsion.

Afin de trouver l'équation caractéristique du problème, on ne considère que la vibration libre du système,  $\vartheta^* = -\Theta^* \cos(\omega^* t^*)$ , où  $\Theta^*$  est l'amplitude de rotation.

Si  $u(y)^*$  est l'amplitude de déplacement dans la direction  $X^*$  et  $\varepsilon^* = u(h^*)^*$ , et dans l'hypothèse de petit déplacement :

$$\Theta^* = \frac{\varepsilon^*}{h^* - \delta^*}, \quad u^*(y^*) = \frac{y - \delta^*}{h^* - \delta^*} \varepsilon^*. \quad (3.7.1)$$

L'équation dynamique de la paroi est :

$$I_s^* \ddot{\vartheta}_s^* + k_s^* \vartheta^* = M_f^*, \quad (3.7.2)$$

où le moment de la pression du fluide est :

$$M_f^* = \rho_f^* \int_0^{h^*} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} (y^* - \delta^*) dy^*. \quad (3.7.3)$$

L'adimensionnalisation des variables est faite par rapport la profondeur du liquide  $h^*$  comme précédemment excepté pour les variables suivantes :

$$\vartheta = \vartheta^*, \quad \Theta = \Theta^* = \frac{\varepsilon}{1 - \delta}, \quad u(y) = \frac{u^*(y^*)}{h^*} = \frac{y - \delta}{1 - \delta} \varepsilon, \quad (3.7.4)$$

$$k_s = k_s^* \rho_f^* h^{*3} g^*, \quad I_s = I_s^* \rho_f^* h^{*4}. \quad (3.7.5)$$

Le potentiel de vitesses du fluide est de la même forme que celle de modèle MRL. Les coefficients  $p_n$  et  $q$  sont donnés par les mêmes relations comme (3.2.12). A l'aide de la relation entre  $u(y)$ ,  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  (voir le chapitre précédent), on a :

$$\alpha_n = \frac{-4\varepsilon((1-\delta)p_n \sin(p_n) + \cos(p_n) - 1)}{(1-\delta)p_n^2(2p_n + \sin(2p_n))}, \quad (3.7.6)$$

$$\beta = \frac{4\varepsilon((1-\delta)q \sinh(q) + \cosh(q) - 1)}{(1-\delta)q^2(2q + \sinh(2q))}. \quad (3.7.7)$$

On trouve alors l'équation caractéristique du système couplé :

$$(I_s + I_a)\omega^2 = k_s \quad (3.7.8)$$

où l'inertie ajoutée est :

$$I_a = -\frac{1}{\Theta} \int_0^1 \Phi(0, y)(y - \delta) dy \quad (3.7.9)$$

que l'on développe sous la forme :

$$I_a = 8 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \tanh(p_n L) ((1-\delta)p_n \sin(p_n) + \cos(p_n) - 1)^2}{p_n^4 (2p_n + \sin(2p_n))} - \frac{c \tan(q) ((1-\delta)q \sinh(q) - \cosh(q) + 1)^2}{q^4 (2q + \sinh(2q))} \right) \quad (3.7.10)$$

Cette inertie ajoutée, similaire à la masse ajoutée du modèle MRL, est fonction du nombre de Froude et des paramètres géométriques du système.

Comme dans le cas d'une masse en translation, montrons que si le nombre de Froude est très supérieur à 1, l'influence sur la paroi des ondes de surface libre en présence de pesanteur est négligeable par rapport à l'influence de l'inertie du fluide. En effet, nous pouvons simplifier l'expression (3.7.10) et la mettre sous la forme suivante,

$$I_a = 128\pi^{-5} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-5} c \tanh(p_n L) \left( 1 + (-1)^n p_n (1-\delta) \right)^2. \quad (3.7.10)$$

Car pour  $F_r \rightarrow \infty$  dans (3.2.12), on peut obtenir  $p_n = \frac{2n-1}{2} \pi$  et  $q \rightarrow \infty$ , et donc  $\beta = 0$ .

De notre côté, à partir de (3.7.10), si  $\delta = 0,5$ , on peut obtenir pour une cuve avec surface libre et Froude infini :

$$I_a = 8\pi^{-5} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-5} c \tanh(p_n L) \left( 4 + (-1)^n (2n-1)\pi \right)^2. \quad (3.7.11)$$

Si  $\delta = 0,5$ ,  $L \rightarrow \infty$  :

$$I_a = 8\pi^{-5} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-5} \left( 4 + (-1)^n (2n-1)\pi \right)^2. \quad (3.7.12)$$

Le tableau 3.4 compare les résultats pour ces différentes conditions aux limites. On remarque que l'inertie ajoutée est multiplié par 2 entre Belvins et Caillot du fait du confinement du à la présence de deux parois rigides, et que si l'une des surface est considérée comme équipotentielle (notre cas), l'inertie est encore 3 fois plus grande que dans le cas d'une surface rigide. La condition de surface équipotentielle fait donc apparaître un effet de confinement très fort.

### 3.8. L'influence de l'amortissement de la structure sur le couplage du système

L'amortissement existe toujours dans une structure réelle. Son influence est importante, car il borne l'amplitude des résonances et modifie les fréquences propres. Pour approcher le système réel couplé, nous allons étudier le modèle avec amortissement que nous symboliserons par MRAL (Masse - Ressort - Amortisseur - Liquide).

#### 3.8.1. Vibration libre : fréquences propres

S'il n'y a pas d'excitation extérieure, l'équation dynamique adimensionnelle de la structure est :

$$m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial w}{\partial t} + k_s w = f_r(t) \quad (3.8.1)$$

où  $f_r(t)$  est l'effort du fluide sur la structure qui peut être représenté par la masse ajoutée du fluide. On pourra écrire :

$$(m_s + m_a) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial w}{\partial t} + k_s w = 0 \quad (3.8.2)$$

où  $m_a$  est donnée par (3.2.15), les fréquences propres du système amorti couplé peuvent être trouvées grâce à l'équation caractéristique suivante si on pose  $w(t) = e^{\lambda t}$

$$(m_s + m_a(\lambda))\lambda^2 + c_s \lambda + k_s = 0 \quad (3.8.3)$$

Dans l'expression 3.8.3 la masse ajoutée  $m_a$  est fonction de  $\omega$ , partie imaginaire de  $\lambda$ . Cette équation ne peut donc pas être résolue comme dans le cas où masse et amortissement sont indépendants de la fréquence, en faisant apparaître un amortissement relatif ( $2\zeta\omega_c = \frac{c_s}{m_s + m_a}$ ) et

une fréquence propre corrigée ( $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_c$ ).

Une résolution par dichotomie a été menée. Nous présenterons directement la fonction de réponse en fréquence du système sous sollicitation.

#### 3.8.2 Fonction de réponse en fréquence (FRF)

Soit  $f_c(t)$  une sollicitation extérieure sur la masse rigide, l'effort du fluide sur la structure étant prise en compte par la masse ajoutée, l'équation de vibration forcée est :

$$(m_s + m_a) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial w}{\partial t} + k_s w = f_c(t) \quad (3.8.4)$$

Soit  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ , notons  $w(t) = -H(i\omega) F_0 e^{i\omega t}$ , où  $H(i\omega)$  est la fonction de réponse en fréquence (ratio d'un déplacement et d'un effort).

(3.8.4) devient

$$((m_s + m_a)(i\omega)^2 + c_s(i\omega) + k_s)H(i\omega) = 1$$

donc :

$$H(i\omega) = \frac{1}{(m_s + m_a(\omega))(i\omega)^2 + c_s(i\omega) + k_s} \quad (3.8.5)$$

Les figures 3.18 et figure 3.19 montrent le comportement des fonctions de réponse en fréquence, pour  $m_s=1$ ,  $k_s=0,64$  et  $c_s$  de 0 à 1.

De haut en bas, figure 3.18:

- FRF du solide sec pour plusieurs amortissements ( $H_s$  : ligne continue) et FRF du fluide non couplé ( $H_f$  en pointillé).
- modules des FRF du fluide du système couplé amorti
- parties réelles des FRF du fluide du système couplé amorti.
- parties imaginaires des FRF du fluide du système couplé amorti.

De haut en bas, figure 3.19 :

- FRF du solide sec pour plusieurs amortissements ( $H_s$  : ligne continue) et FRF du fluide non couplé ( $H_f$  en pointillé).
- modules des FRF du solide du système couplé amorti
- parties réelles des FRF du solide du système couplé amorti.
- parties imaginaires des FRF du solide du système couplé amorti.

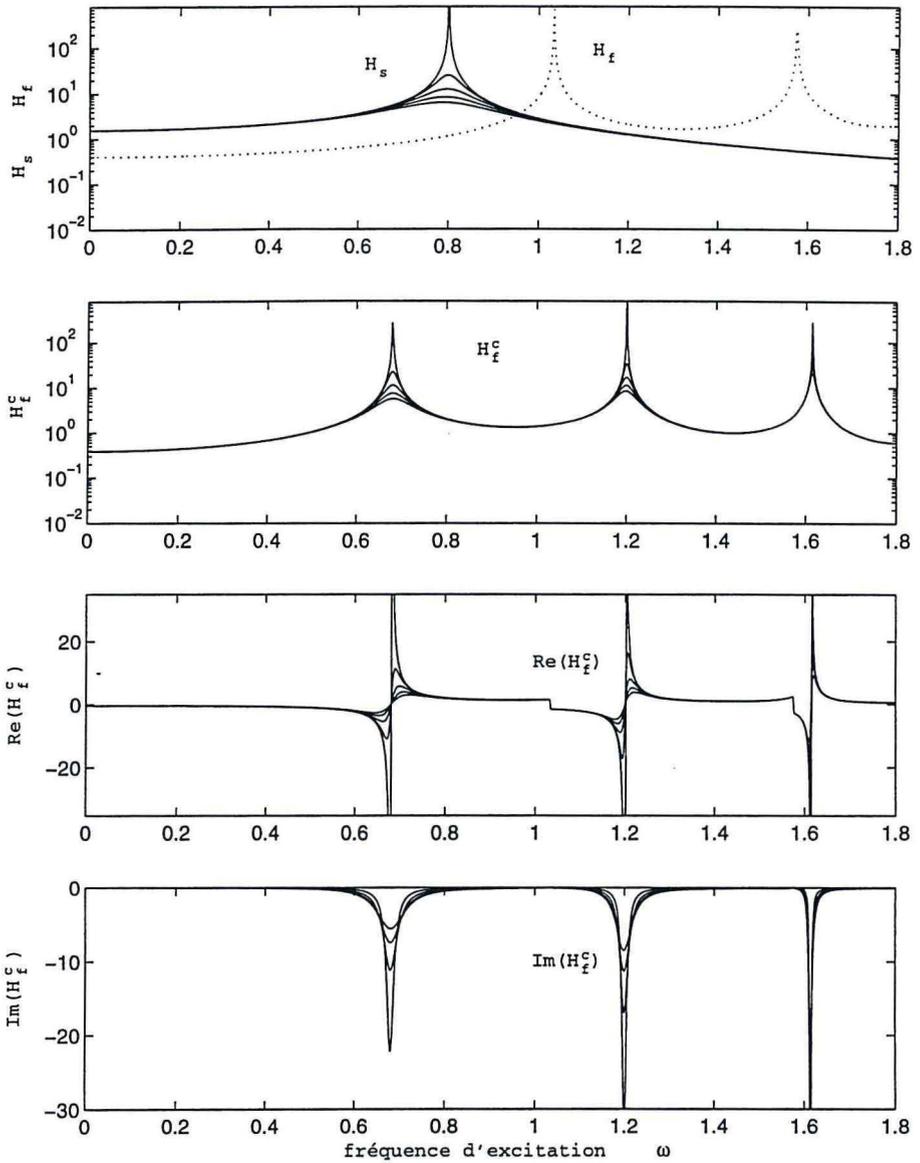


figure 3.18 La réponse en fréquence à des forces du système amorti à un DDL (pour le fluide)

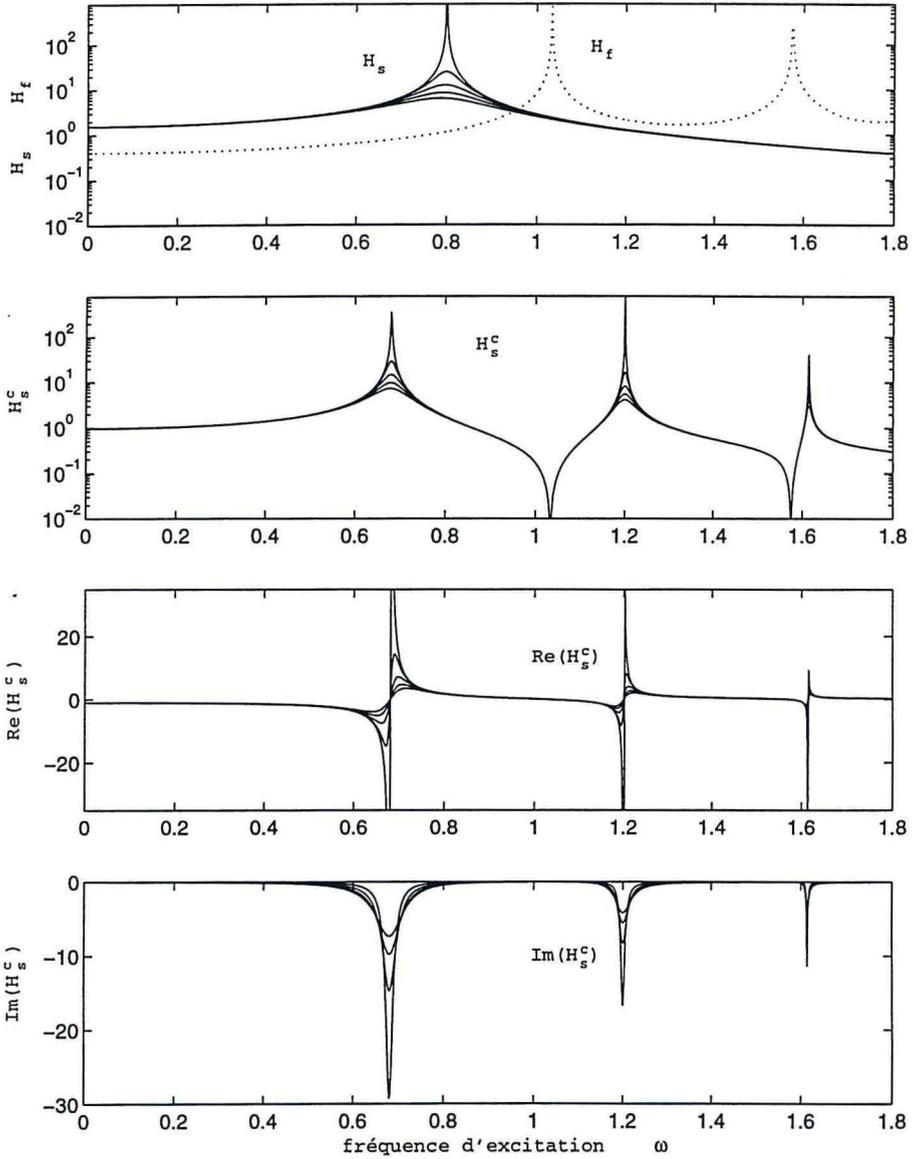


figure 3.19 La réponse en fréquence à des forces du système amorti à un DDL (pour le solide)

On peut voir dans ces figures que l'amortissement implique :

- des valeurs finies de FRF aux résonances,
- une légère décroissance de la fréquence couplée lorsque l'amortissement croit,
- à une valeur d'amortissement donné, la largeur de bande d'une résonance couplée est plus petite que la largeur de bande de la résonance de structure non couplée.

### 3.9 Conclusion

Ce chapitre concerne uniquement une structure à un degré de liberté. La masse ajoutée, image de la pression du fluide sur la structure, pour un liquide contenu dans un réservoir présentant une surface libre est très différente de celle obtenue pour un domaine de fluide infini. Nous avons étudié trois cas : Froude  $\gg 1$ ,  $\ll 1$  et  $\approx 1$ . Si la gravité n'est pas négligeable ( $F_r \approx 1$  et  $\ll 1$ ), et si le domaine est borné, cette masse ajoutée peut être positive, négative ou nulle. En effet on montre que la surface libre peut échanger de l'énergie avec la structure. Lorsque le nombre de Froude est de l'ordre de 1, le nombre et les valeurs des fréquences propres dépend fortement de celui-ci. Dans le cas où le nombre de Froude est très supérieur à 1 (lorsque l'effet de la pesanteur sur la surface libre est faible) une seule masse ajoutée positive existe. La condition de surface libre est celle d'une surface équipotentielle, qui peut engendrer une masse ajoutée supérieure à la condition de surface rigide (dans le cas d'une structure en rotation)

Dans le cas où le domaine de fluide est semi-infini (à profondeur finie), des vagues sont émises par la structure, envoyant de l'énergie à l'infini : c'est un tout autre problème.



## Chapitre 4.

# Interaction entre une poutre et un liquide contenu dans un réservoir rectangulaire avec surface libre

**Résumé.** - L'interaction fluide - structure dans un réservoir rectangulaire est étudiée analytiquement en prenant en compte l'influence de la pesanteur. Une des parois latérales du réservoir est élastique et modélisée comme une poutre verticale. Les équations couplées du système sont développées et résolues. Les expressions des valeurs propres sont obtenues. Les effets de la présence de la pesanteur sont étudiés en faisant varier le nombre de Froude.

Dans le cas où la pesanteur est négligeable, notre résolution explicite est comparée aux résultats analytiques et expérimentaux de Veklich et Malyshev (1990), ainsi qu'à ceux numérique de Ousset (1980). De plus, lorsque la pesanteur est prise en compte, une comparaison avec les résultats de Bauer et al. (1968) est présentée.

Pour une poutre encastrée - libre immergée dans un réservoir rectangulaire nous détaillons les effets des paramètres du système sur les fréquences couplées. Plusieurs comportements du système sont observés. Les résultats obtenus sont peuvent être prolongés au cas d'un réservoir rectangulaire complètement flexible et au cas de domaine du fluide non borné.

### 4.1. Introduction

Un exemple d'interaction fluide - structure dans l'ingénierie structurale est un réservoir flexible rempli d'un liquide sous excitation sismique. Les deux composants sont la structure (le réservoir sec) et le fluide interne. Parce que les composants communiquent dynamiquement, une analyse de la réponse du système doit considérer les deux simultanément, structure et fluide.

Le but de cette étude étant d'appréhender les phénomènes de couplage, nous nous sommes orientés vers la résolution d'un système simple bidimensionnel, où la seule structure mobile est l'une des parois du réservoir considérée comme une poutre.

#### 4.1.1 Phénomènes différents et les descriptions associées

Pour le système couplé qu'est un liquide à surface libre contenu dans un recevoir flexible, des phénomènes très différents se présentent suivant les caractéristiques vibratoires de systèmes non - couplés et le type d'excitation.

La structure non couplée avec le fluide, que nous dénommerons par "structure sèche", possède un nombre infini de fréquences propres se répartissant sur l'axe des fréquences de façon discrète. Nous les noterons dans ce document  $\omega_s$ . Si l'on considère le fluide avec surface libre dans un réservoir rigide de même dimension, ce fluide présente des fréquences de ballonnement que nous noterons  $\omega_f$ , qui sont aussi en nombre infini discret. Les fréquences couplées seront notées  $\omega_c$ . Quelque soit les positions relatives des premières fréquences  $\omega_s(1)$  et  $\omega_f(1)$ , l'existence dans les deux cas d'une infinité de fréquences propres, implique qu'il existe nécessairement une gamme de fréquences où fréquences de structure sèche et fréquences de ballonnement sont du même ordre de grandeur. En fonction de la gamme de fréquences étudiée et de la position des fréquences  $\omega_s(1)$  et  $\omega_f(1)$ , plusieurs cas peuvent se présenter.

(a) Par exemple si  $\omega_s(1)$  est bien supérieur à  $\omega_f(1)$ , l'étalement des fréquences non couplées peut être schématisé par le diagramme ci-dessous. Dans la gamme de fréquence suffisamment petites devant  $\omega_s(1)$ , les modes de ballonnement sont excités sans contribution importante de la structure. La structure peut être considérée comme rigide à ces niveaux de fréquences et les fréquences de ballonnement sont aussi les fréquences couplées (Moiseev 1964, Moiseev et Petrov 1966). Dans la gamme de fréquences où  $\omega_s$  et  $\omega_f$  sont présentes, une résolution complète du système couplé doit être faite pour connaître les fréquences  $\omega_c$ . Nous verrons dans ce cas que le modèle avec seulement les effets de masse ajoutée est généralement suffisant.

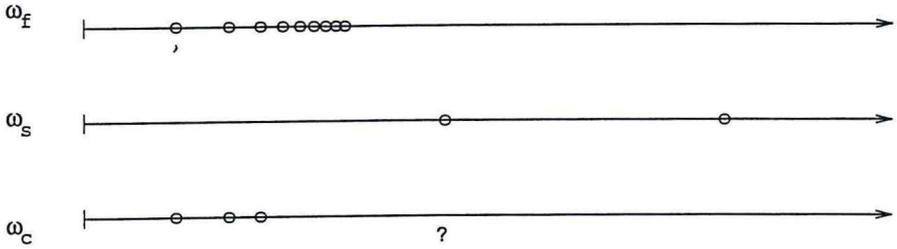


figure 4.1 Les fréquences propres du système couplé et non couplé, le cas où  $\omega_s(1) \gg \omega_f(1)$

(b) Par exemple si  $\omega_s(1)$  est bien inférieure à  $\omega_f(1)$ , le même raisonnement peut être tenu, si ce n'est que le calcul des fréquences couplées dans tout le domaine nécessite non seulement de prendre en compte les effets de pression dynamique du fluide sur la paroi (communément mis sous la forme d'une masse ajoutée) mais aussi les effets dus à la pesanteur. Les fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_c$  sont donc différentes dans ce cas. Nous reviendrons dans le document sur cette idée, en faisant varier le type de condition écrite à la surface libre (suivant le nombre de Froude).

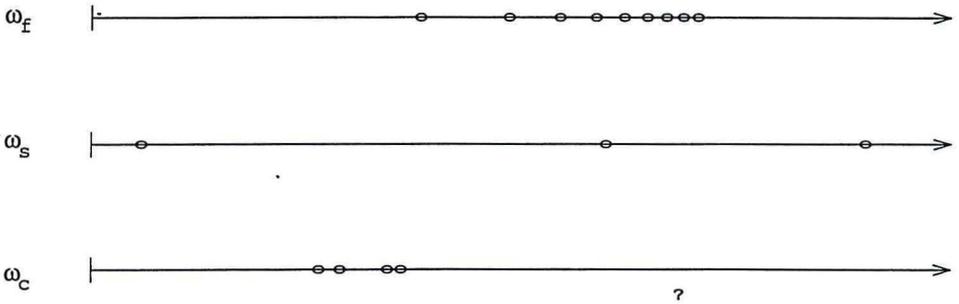


figure 4.2 Les fréquences propres du système couplé et non couplé, le cas où  $\omega_s(1) \ll \omega_f(1)$

(c) Le cas où  $\omega_s(1)$  et  $\omega_f(1)$  sont du même ordre de grandeur, est un cas particulier du cas précédent. Les termes de gravité doivent aussi être considérés.

Nous aborderons donc ce cas. Le chapitre 2 a montré comment obtenir les équations linéarisées de ce problème. Dans cette étude, seule la méthode analytique sera utilisée.

#### 4.1.2 Travaux précédents

Les analyses disponibles considèrent seulement les effets inertiels de chargement sur la structure, négligeant les effets de pesanteur sur la surface libre. Seules certaines études considèrent les deux effets. Détaillons les.

Miles (1958) est un des premiers qui étudie le ballonnement dans un réservoir flexible. En utilisant une mise en équation grâce à la méthode de Lagrange, il a obtenu l'équation aux fréquences couplées de la flexion d'un réservoir cylindrique contenant un liquide à surface libre. Ses hypothèses essentielles sont : écoulement potentiel, effets d'inertie du fluide et pesanteur non négligeables, forme de mode couplé de la flexion du cylindre connue (comme une fonction linéaire ou parabolique). Dans le cas des réservoirs cylindriques minces, il a montré numériquement que le ballonnement fait croître la fréquence couplée de flexion du cylindre (par rapport à celle dans le cas où le réservoir est fermé par un couvercle, donc sans ballonnement). Le choix a priori de la fonction de forme de la paroi déformable a logiquement une grande influence sur la fréquence couplée trouvée. Miles ne détaille pas cette influence. Il ne met pas non plus en évidence les formes propres de la surface libre à ces fréquences couplées.

Ces résultats théoriques ont été confrontés à des résultats expérimentaux, par Lindholm et al. (1963). L'influence de la forme du mode de flexion choisie y apparaît clairement : les résultats de Miles encadrent néanmoins les résultats expérimentaux avec une précision acceptable.

Depuis beaucoup d'autres études ont été faites pour des réservoirs cylindriques ayant soit une paroi latérale élastique soit un fond élastique. Une revue exhaustive bien qu'ancienne des résultats a été faite par Bauer (1981). Mais pour le problème d'interaction dans un réservoir rectangulaire avoir une paroi élastique, les études sont limitées. Pour une telle géométrie la méthode de séparation de variable n'est plus utilisable.

Bauer et al. (1968) ont étudié le problème d'un réservoir rectangulaire avec une ou plusieurs parois latérales élastiques. La paroi latérale était traitée comme une poutre. Cependant, pour la portion immergée dans le liquide et pour la portion sèche de la poutre, les équations de mouvement et les conditions aux limites étaient considérées comme les mêmes. Ceci est évidemment faux car pour la partie immergée les pressions dues au mouvement du fluide interagissent avec la structure, alors que pour la partie émergée celles-ci ne sont pas présentes. Seule la première fréquence propre couplée était présentée et il manquait une vision globale de l'évolution de toutes les fréquences couplées. De plus des problèmes numériques empêchaient de

suivre l'évolution de cette première fréquence couplée pour les faibles hauteurs de fluide. Ces résultats nous semblent faux et sont donc trop partiels mais nous ne manquerons pas les comparer néanmoins aux nôtres.

Bauer (1981) étudiait l'interaction d'un réservoir avec un fond flexible avec le liquide contenu dans celui-ci, il trouvait que les fréquences étaient inférieures à celles non - couplées de la structure, et supérieures à celles de ballonnement. Il constatait que les fréquences couplées  $\omega_c$  vérifiaient les relations :  $\omega_c < \omega_s$  et  $\omega_c > \omega_f$ . Les systèmes non couplés possédant une infinité de fréquences propres, les relations dégagées ci-dessus manquaient pour le moins de précision quant aux numéros de modes à considérer.

Caillot (1983) dans sa thèse déjà cité au chapitre 3, étudiait aussi les vibrations d'une poutre élastique immergée dans un volume d'eau rectangulaire avec parois rigides sans surface libre. Cela revenait donc à coupler la structure avec un système ne possédant pas de fréquences propres. Le problème était donc bien différent. Nous ne comparerons pas nos résultats aux siens.

Veklich et Malyshev (1990) ont traité le problème de vibration d'une poutre immergée dans un réservoir, en utilisant une méthode de décomposition du potentiel en fonctions de variables complexes. La surface libre est bien plus haute que l'extrémité de la poutre et une condition de surface équipotentielle y a été écrite. Des résultats expérimentaux sont aussi présentés. Nous comparerons nos résultats aux siens.

Schulkes (1990) simplifiait le problème en remplaçant la paroi latérale élastique d'un réservoir par une membrane. La loi de comportement de la structure étant différente que dans le cas d'une poutre, nous ne pourrions comparer nos résultats aux siens.

Soedel S. M. et Soedel W.(1994) étudiait la vibration forcée et libre d'une poutre portant un liquide. La surface libre est alors parallèle à la poutre. Sur les faces latérales, une condition de surface équipotentielle est écrite, qu'ils dénomment « hypothèse de grand réservoir ». Leur configuration est différente de la nôtre. Le parallélisme de la surface libre et de la poutre a le bon goût de rendre possible une solution analytique par séparation de variable.

En fait, pour un réservoir rectangulaire avec des parois latérales élastiques, peu d'études ont été publiées pour dégager le comportement couplé de ce système.

### 4.1.3 Objet d'étude

Nous nous attacherons à résoudre analytiquement le cas d'un réservoir rempli partiellement, ayant une de ses parois perpendiculaire à la surface libre, déformable et ayant un comportement de poutre. Dans les problèmes d'interaction fluide - structure, le mouvement de la portion élastique de la structure est habituellement inconnu avant que la solution ne soit trouvée. La résolution de ce problème est présentée en détail dans ce chapitre.

Dans la section 2, les équations et les conditions aux limites du système couplé sont rappelées.

Dans la section 3, les équations couplées du système sont résolues et les expressions de valeurs propres et formes propres sont obtenues.

Dans la section 4, la méthode est confrontée aux résultats de la littérature existants. Pour le cas particulier où la pesanteur est négligeable, nous allons vérifier la méthode grâce aux résultats analytiques et expérimentaux de Veklich et Malyshev (1990), ainsi qu'avec les résultats numériques d'Ousset (1980). Une comparaison avec les résultats analytiques de Bauer et al (1968) est aussi faite. La section 5, présente nos conclusions.

## 4.2. Les équations et les conditions aux limites

Nous considérons ici le problème d'interaction dans un réservoir rectangulaire qui a une paroi latérale élastique comme le montre la figure 4.3. La paroi latérale élastique est traitée comme une poutre, l'autre paroi latérale et le fond du réservoir sont rigides. Nous définissons un système de coordonnées cartésien de sorte que  $X^*$  soit l'axe parallèle au fond du réservoir,  $Y^*$  est l'axe perpendiculaire. L'origine de l'axe  $X^*$  correspond à la position moyenne de la paroi latérale élastique. La gravité est dirigée suivant  $-Y^*$ .

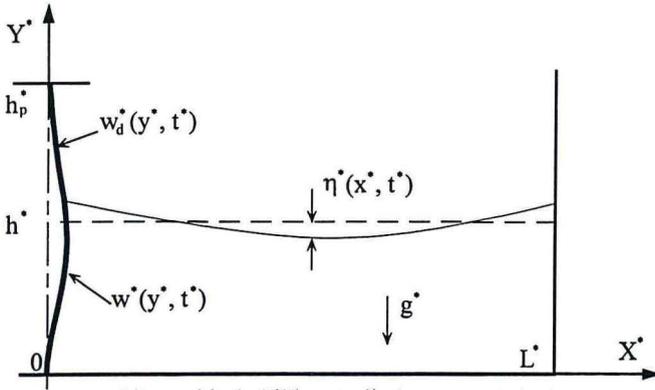


figure. 4.3 Un réservoir rectangulaire avec une paroi flexible

Rappelons les notations du chapitre 2.  $L^*$  est la longueur du réservoir,  $h^*$  est la hauteur moyenne du liquide,  $h_p^*$  est la longueur de la paroi latérale élastique,  $t^*$  est le temps,  $h^*$  est la hauteur de la surface libre du liquide au repos,  $w^*(y^*, t^*)$ ,  $w_d^*(y^*, t^*)$  respectivement les déplacements selon l'axe de  $X^*$  de la partie immergée et émergée de la paroi. L'accélération de pesanteur est notée  $g^*$ .

Les équations dimensionnelles obtenues au chapitre 2 sont ici rappelées :

- dans le domaine du fluide,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h. \quad (4.2.1)$$

- sur la paroi rigide du réservoir,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (4.2.2)$$

- sur le fond du réservoir,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (4.2.3)$$

- sur la surface libre,

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{y=h} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=h} = 0. \quad (4.2.4)$$

- sur l'interface solide - fluide,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.2.5)$$

La condition cinématique à l'interface ayant déjà été écrite, il ne reste plus qu'à écrire la loi de comportement de la structure.

#### Les équations de mouvement de la poutre

Les équations de vibration transverse de faible amplitude d'une poutre (Timoshenko et al., 1974) sont données pour chacun des segments immergé et émergé (voir formules 2.4.22 et 2.4.23):

$$B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = G_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad x=0, 0 \leq y \leq 1 \quad (4.2.6)$$

$$B_0 \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_d}{\partial y^4} = 0, \quad x=0, 1 < y < h_p \quad (4.2.7)$$

avec

$$B_0 = \frac{\rho_s \cdot g \cdot h^3}{E^* I^*}, \quad G_0 = \frac{\rho_f \cdot g \cdot h^4}{E^* I^*} \quad (4.2.8)$$

Le membre de droite de ces équations représente la pression du liquide sur la structure et est nul pour la portion sèche de la poutre.

$B_0$  et  $G_0$  sont deux paramètres.  $B_0$  caractérise la poutre, et donne ses fréquences propres sèches adimensionnelles.  $G_0$  caractérise l'intensité du couplage avec le fluide. Par exemple, plus la masse volumique du fluide  $\rho_f^*$  est importante, plus les forces de pression du fluide seront grandes ( $G_0$  croît), par contre  $B_0$  reste inchangé.  $\rho_s^*$  est la densité massique de la poutre,  $\rho_f^*$  du liquide.  $A^*$  est l'aire de la section de la poutre,  $E^* I^*$  est la raideur en flexion de la poutre.

Il nous reste à écrire les relations aux extrémités de la poutre, ainsi que le raccordement entre les deux fonctions de forme émergée ( $w_d$ ) et immergée ( $w$ ).

$$\left. \begin{aligned}
 w &= 0, & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, & y &= 0, \\
 w_d &= w, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w_d}{\partial y}, & y &= 1, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2}, & \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= \frac{\partial^3 w_d}{\partial y^3}, & y &= 1, \\
 w_d &= 0, & \frac{\partial w_d}{\partial y} &= 0, & y &= h_p.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.9)$$

Nous avons écrits ci-dessus en  $y = h_p$  la nullité de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Pour une poutre avec les deux extrémités encastées, la dernière des conditions ci-dessus doit être remplacée par :

$$w_d = 0 ; \quad \frac{\partial w_d}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = h_p$$

Les équations couplées du système sont (4.2.1)-(4.2.9). Les valeurs propres du système couplé doivent maintenant être recherchées. L'expression du potentiel du chapitre 2 est encore valable :

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y) \omega \sin(\omega t)$$

$$\Phi(x, y) = \beta \frac{\cos(q(x-L))}{\sin(qL)} \cosh(qy) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\cosh(p_n(x-L))}{\sinh(p_n L)} \cos(p_n y)$$

La loi de comportement et les conditions aux limites de la poutre permettent de déterminer les inconnues  $\beta$ ,  $\alpha_n$ ,  $q$ ,  $p_n$  et  $\omega$  du potentiel de vitesse, comme montré ci-après.

### 4.3. La résolution des équations couplées

On étudie les mouvements harmoniques du système. En notant les formes propres de la poutre pour les parties immergée et sèche respectivement par  $u(y)$  et  $u_d(y)$ , les déplacements de la poutre s'écrivent :

$$w(y, t) = -u(y) \cos(\omega t) \quad (4.3.1)$$

$$w_d(y, t) = -u_d(y) \cos(\omega t) \quad (4.3.2)$$

En portant (4.3.1)-(4.3.2) dans les équations de mouvement de poutre (4.2.6) et (4.2.7) qui doivent être vérifiées à tout instant, nous obtenons :

$$\frac{d^4 u}{dy^4} - B^4 u(y) = G \left( \beta c \tan(qL) \cosh(qy) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c \tanh(p_n L) \cos(p_n y) \right) \quad (4.3.3)$$

$$\frac{d^4 u_d}{dy^4} - B^4 u_d(y) = 0 \quad (4.3.4)$$

où le couple (B, G) est relié à (B<sub>0</sub>, G<sub>0</sub>) par :

$$B^4 = B_0 \omega^2 \quad (4.3.5)$$

$$G = - G_0 \omega^2 \quad (4.3.6)$$

Dans le cas d'une poutre encastree - encastree ces conditions aux limites s'ecrivent :

$$\left. \begin{aligned} u(y) = 0, & \quad \frac{du}{dy} = 0, & y = 0, \\ u_d = u, & \quad \frac{du}{dy} = \frac{du_d}{dy}, & y = 1, \\ \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2 u_d}{dy^2}, & \quad \frac{d^3 u}{dy^3} = \frac{d^3 u_d}{dy^3}, & y = 1, \\ u_d = 0, & \quad \frac{du_d}{dy} = 0, & y = h_p. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.7)$$

#### 4.3.1 La recherche des fonctions de forme u et u<sub>d</sub>

Recherchons la solution de l'equation couplee (4.3.3) comme la somme de la solution generale de l'equation homogene (u<sub>1</sub>) et des solutions particulieres de l'equation complete (u<sub>2</sub>) :

$$u(y) = u_1(y) + u_2(y) \quad (4.3.8)$$

u<sub>1</sub>(y) est une superposition des fonctions fondamentales F<sub>i</sub>(y) :

$$u_1(y) = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) \quad (4.3.9)$$

tel que celle-ci soient :

$$F_1(y) = \cos(By), F_2(y) = \sin(By), F_3(y) = \cosh(By), F_4(y) = \sinh(By) \quad (4.3.10)$$

C<sub>i</sub> sont des coefficients inconnus à déterminer.

Compte tenu de la forme du potentiel nous chercherons la solution particuliere u<sub>2</sub>(y), sous la forme :

$$u_2(y) = \xi \beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \alpha_m \cos(p_m y) \quad (4.3.11)$$

où les coefficients à déterminer sont :  $\xi$ ,  $\beta$ ,  $\zeta_m$ ,  $\alpha_m$ .

Portant (4.3.10) et (4.3.11) dans (4.3.9) on obtient,

$$u(y) = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) + \left( \xi \beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \alpha_m \cos(p_m y) \right) \quad (4.3.12)$$

Reportons cette expression dans l'équation de la poutre (4.3.3),

$$\xi \beta (q^4 - B^4) \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \alpha_m (p_m^4 - B^4) \cos(p_m y) =$$

$$G \left( \beta c \tan(qL) \cosh(qy) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c \tanh(p_n L) \cos(p_n y) \right)$$

Puisque la relation doit être vérifiée pour tout  $y \in [0, 1]$ , on identifie terme à terme,

$$\xi = \frac{c \tan(qL)}{q^4 - B^4} G, \quad \zeta_m = \frac{c \tanh(p_m L)}{p_m^4 - B^4} G. \quad (4.3.13)$$

Rappelons les expressions de coefficients de potentiel de fluide qui ont été donnée dans le chapitre 2 (formules 2.4.38 et 2.4.39):

$$\beta = \frac{\int_0^1 u(y) \cosh(qy) dy}{q \int_0^1 \cosh^2(qy) dy}; \quad (4.3.14)$$

$$\alpha_n = \frac{-\int_0^1 u(y) \cos(p_n y) dy}{p_n \int_0^1 \cos^2(p_n y) dy} \quad (4.3.15)$$

Posons pour alléger les écritures :

$$D_\beta = \left( \int_0^1 \cosh^2(qy) dy \right)^{-1}, \quad D_{\alpha_n} = \left( \int_0^1 \cos^2(p_n y) dy \right)^{-1} \quad (4.3.16)$$

$\beta$  et  $\alpha_n$  sont alors donnés par :

$$\beta q D_\beta = \int_0^1 u(y) \cosh(qy) dy \quad (4.3.17)$$

$$\alpha_n p_n D_n = - \int_0^1 u(y) \cos(p_n y) dy \quad (4.3.18)$$

Il suffit alors de réinjecter la forme de  $u(y)$ . Portons (4.3.12) dans (4.3.17) et (4.3.18) on obtient :

$$\beta q D_\beta = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) + \xi \beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \alpha_m \cos(p_m y) \right) \cosh(qy) dy \quad (4.3.19)$$

$$\alpha_n p_n D_n = - \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) + \xi \beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \alpha_m \cos(p_m y) \right) \cos(p_n y) dy \quad (4.3.20)$$

en utilisant l'orthogonalité des fonctions de base :

$$\int_0^1 \cos(p_m y) \cosh(qy) dy = 0$$

$$\int_0^1 \cos(p_m y) \cos(p_n y) dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ D_{\alpha_n} & m = n \end{cases}$$

compte tenu que l'on a :

$$F_r^2 = -p_n \tan(p_n)$$

$$F_r^2 = q \tanh(q) .$$

Posons encore :

$$I_i^\beta = \int_0^1 F_i(y) \cosh(qy) dy \quad (4.3.21)$$

$$I_i^{\alpha_n} = \int_0^1 F_i(y) \cos(p_n y) dy \quad (4.3.22)$$

Les expressions (4.3.19) et (4.3.20) s'écrivent alors :

$$\beta q D_\beta = \sum_{i=1}^4 C_i I_i^\beta + \xi \beta D_\beta$$

$$\alpha_n p_n D_{\alpha_n} = - \sum_{i=1}^4 C_i I_i^{\alpha_n} - \alpha_n \zeta_n D_{\alpha_n}$$

alors on peut obtenir :

$$\beta = \frac{D_\beta}{q - \xi} \sum_{i=1}^4 C_i I_i^\beta \quad (4.3.23)$$

$$\alpha_n = \frac{-D_{\alpha_n}}{p_n + \zeta_n} \sum_{i=1}^4 C_i I_i^{\alpha_n} \quad (4.3.24)$$

Reportant (4.3.14), (4.3.15), (4.3.23) et (4.3.24) dans (4.3.13), on obtient :

$$u(y) = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) + \left( \xi \frac{D_\beta}{q - \xi} \sum_{i=1}^4 C_i I_i^\beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m \frac{-D_{\alpha_m}}{p_m + \zeta_m} \sum_{i=1}^4 C_i I_i^{\alpha_m} \cos(p_m y) \right) \quad (4.3.25)$$

En posant :

$$K_i^\beta = \xi \frac{D_\beta}{q - \xi} I_i^\beta \quad (4.3.26)$$

$$K_i^{\alpha_m} = \zeta_m \frac{-D_{\alpha_m}}{p_m + \zeta_m} I_i^{\alpha_m} \quad (4.3.27)$$

(4.3.25) se présente sous la forme suivante :

$$u(y) = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(y) + \left( \sum_{i=1}^4 C_i K_i^\beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 C_i K_i^{\alpha_m} \cos(p_m y) \right) \quad (4.3.28)$$

Si l'on met les constantes  $C_i$  à déterminer en facteur, en posant

$$H_i(y) = F_i(y) + K_i^\beta \cosh(qy) + \sum_{m=1}^{\infty} K_i^{\alpha_m} \cos(p_m y) \quad (4.3.29)$$

Nous avons trouvé le mouvement de la poutre pour la portion immergé :

$$u(y) = \sum_{i=1}^4 C_i H_i(y) \quad (4.3.30)$$

Pour la portion sèche de la poutre,  $u_d(y)$  est la solution de l'équation homogène (4.3.4), qui est aussi une superposition des fonctions fondamentales,  $D_i$  sont les coefficients inconnus à déterminer :

$$u_d(y) = \sum_{i=1}^4 D_i F_i(y) \quad (4.3.31)$$

On remarquera à cet instant que nous avons 8 inconnues (4  $C_i$  et 4  $D_i$ ) et que les fonction  $F_i$ ,  $H_i$  dépendent de  $\omega$  la pulsation à laquelle vibre tout le système par l'intermédiaire de nombreux coefficients. De façon tout à fait classique, ce sont les 8 conditions aux limites qui définirons les valeurs de  $\omega$ .

### 4.3.2. Les valeurs propres du système couplé

En satisfaisant les conditions aux limites de la poutre aux deux extrémités ( $y = 0$  et  $y = h_p$ ), au point de raccordement ( $y = 1$ ), cette fonction de forme du déplacement de la poutre permet de calculer les valeurs propres du système.

D'après (4.3.30) et (4.3.31), les conditions aux limites de la poutre (4.3.7) forment un système homogène à 8 inconnues  $[Z]$  :

$$[\Lambda]_{8 \times 8} [Z]^T = [0] \quad (4.3.32)$$

où  $[Z] = [C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4]$  est le vecteur des 8 coefficients à déterminer. Les éléments de  $[\Lambda]_{8 \times 8}$  sont donnés en annexe 3.

Pour qu'il existe des solutions non nulles, il faut que la matrice  $\Lambda$  soit singulière. Les paramètres du système couplé étant donnés, cette matrice ne dépend que de la pulsation adimensionnelle  $\omega$ . L'équation caractéristique (4.3.33) fournit les valeurs propres.

$$\det([\Lambda]) = 0 \quad (4.3.33)$$

Pour chaque valeur de  $\omega_c$  trouvée, on calcule les ratios  $C_i / C_1$  et  $D_i / C_1$  ainsi que le potentiel  $\varphi / C_1$ , ce qui nous donne la forme propre du mode considéré. On notera que cette forme propre correspond à une forme de poutre et un champ de vitesse pour le fluide, l'amplitude relative de ceux-ci dépendant du mode considéré.

#### Remarque :

Dans le cas particulier où le nombre  $Fr$  est  $\gg 1$ , c'est à dire où l'influence de la pesanteur est négligeable devant les effets d'inertie du fluide, les coefficients du potentiel de vitesses peuvent être obtenus en posant la condition aux limites sur la surface libre comme équipotentielle  $\varphi(x, 1, t) = 0$ . Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, lorsque  $Fr$  tend vers l'infini, on a :

$$p_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \text{ et } q \rightarrow \infty.$$

### 4.4. Vérification de la méthode à l'aide des résultats existants

A fin de vérifier la validité de la méthode présentée ci-dessus, nous allons comparer nos résultats à trois types de résultats disponibles. Tout d'abord, avec ceux analytiques et expérimentaux de Veklich et Malyshev (1990) ; puis avec l'exemple numérique de Ousset (1980) et enfin nous discuterons les résultats analytiques de Bauer (1967).

#### 4.4.1 Nomenclatures

Avant la présentation de ces exemples, redéfinissons certains termes en fonction des coefficients que nous venons d'introduire.

- Fréquences propres de la poutre non couplées (en absence de fluide). Les fréquences adimensionnelles sont :  $\omega_s(k) = (\gamma_k h_p)^2 \sqrt{1/h_p^4 B_0}$ , pour  $k=1, 2, 3, \dots$ , et  $\gamma_k h_p = (4,730 ; 7,853 ; 10,99 ; \dots)$  pour une poutre encastrée - encastrée (Timoshenko 1954),  $B_0$  est le paramètre adimensionnel définis dans la section 4.2.2,  $h_p$  est la longueur adimensionnelle de poutre.

- Fréquences de ballonnement du liquide dans un réservoir rigide de même dimension

$$\omega_f(j) = \sqrt{\frac{j \pi}{L} \tanh\left(\frac{j \pi}{L}\right)}, \quad (j=1, 2, 3, \dots).$$

- Fréquences couplées du système  $\omega_c$  ;

- Rapport d'amplitude de la surface libre à l'amplitude de la poutre :

$$\mu = \frac{\max(w(y, t), w_d(y, t))}{\max(\eta(x, t))}$$

#### 4.4.2 Vérification par les résultats analytiques et expérimentaux de Veklich et Malyshev (1990)

Veklich et Malyshev (1990) ont étudié une poutre verticale immergée complètement dans un réservoir rectangulaire par une méthode de variables complexes. (voir figure 4.4) Ils n'ont pas pris en compte les influences de la gravité dans leur modèle théorique et ont posé la condition de potentiel nul sur la surface libre. Les expériences ont été réalisées dans un réservoir qui est si profond que les influences de la surface libre du liquide sont négligeable. La poutre est sollicitée par un électro-aimant près du fond du réservoir. Les résultats théoriques sont bien en accord avec ceux de leur expérience.

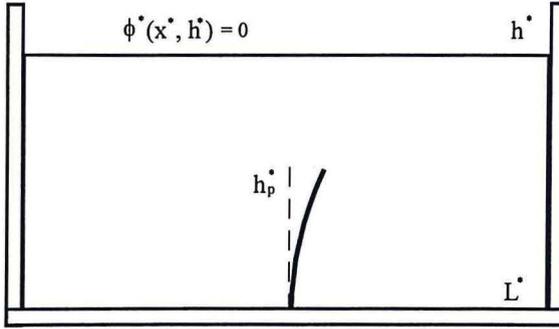


Figure 4.4. Une poutre immergée dans un réservoir profond (Veklich et Malyshev, 1990)

Les paramètres de la poutre et de la cuve sont :

$$L^* = 0,265 \text{ m}, h_p^* = 0,12 \text{ m}, e^* = 0,001 \text{ m}, \rho_s^* = 7490 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_f^* = 1000 \text{ kg/m}^3, E^* = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Les paramètres dimensionnels correspondants à cette étude sont :

$$B_0 = 92,47 \text{ et } G_0 = 0,00725$$

Dans l'étude que nous menons, la hauteur du fluide ne dépasse jamais celle de la poutre. Néanmoins nous comparerons nos résultats à ceux de Veklich et Malyshev en choisissant comme hauteur d'eau la hauteur de la poutre ( $h_p = 1$ ). Nous nous attendons à ce que les champs de vitesse dans les deux configurations soient différents, car dans notre étude le fluide ne peut contourner la structure, mais nous comparerons les effets de masse ajoutée. En effet poser comme Veklich et Malyshev la nullité du potentiel sur la surface, revient à travailler pour un nombre de Froude infini, et donc à ne prendre en compte que les effets d'inertie et non potentiels dus à l'élévation de la surface libre. Cependant il est à noter qu'écrire  $\varphi = 0$  quelque soit  $x$  pour  $y = 1$  implique que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$  en  $y = 1$ , ce qui est contradictoire avec la condition cinématique

d'interface fluide - structure :  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \omega u(1)$ . La nullité obligatoire de  $u(1)$  ne serait possible que lorsque la poutre est encastree à son extrémité supérieure, ce qui n'est pas le cas considéré ici.

Trois types des fréquences propres théoriques ou expérimentales apparaissent dans les tableaux suivants pour deux longueurs de poutre. Elles sont exprimées en Hertz.

$\omega_s$  : fréquences propres de la poutre sèche,

$\omega_c$  : fréquences propres du système couplée ou de la poutre immergée,

$\omega_f$  : fréquences propres du ballonnement;

thé : théorique, exp : expérimental, <sup>v</sup> : résultats de Veklich et Malyshev (1990).

$h_p^* = 0,12 \text{ m}$  :

		Modes	1	2	3	
Veklich et Malyshev (1990)	Théoriques	$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}^v$	<b>0,337</b>	<b>0,357</b>	<b>0,432</b>	
	dans l'air (expérimental)	$\omega_s \Big _{\text{exp}}$	51,8	329	936	
	dans l'eau (expérimental)	$\omega_c \Big _{\text{exp}}$	17,3	119	409	
		$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{exp}}$	<b>0,334</b>	<b>0,362</b>	<b>0,437</b>	
Cette étude (théorique)	dans l'air	$\omega_s \Big _{\text{thé}}$	59,4	372	1042	
	dans l'eau	$\omega_c \Big _{\text{thé}}$	20,1	133	451	
	( $F_r = \infty$ )	$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}$	<b>0,338</b>	<b>0,358</b>	<b>0,433</b>	
	couplée		$\omega_c \Big _{\text{thé}}$	1,61	2,41	2,97
		( $F_r \neq \infty$ )	$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}$	0,0272	0,00065	0,00028
	Ballonnement	$\omega_f$	1,619	2,418	2,971	
	$\frac{\omega_c}{\omega_f} \Big _{\text{thé}}$	0,9969	0,9983	0,9990		

tableau 4.1 résultats d'exemple de Veklich et Malyshev (1990)

$$h_p^* = 0,10 \text{ m}$$

Modes			1	2	3
Veklich et Malyshev (1990)	Théoriques	$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}^v$	<b>0,360</b>	<b>0,375</b>	<b>0,460</b>
	dans l'air (expérimental)	$\omega_s \Big _{\text{exp}}$	75,4	483	1375
	dans l'eau (expérimental)	$\omega_d \Big _{\text{exp}}$	28,0	183	650
		$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{exp}}$	<b>0,371</b>	<b>0,379</b>	<b>0,473</b>
Cette étude (théorique)	dans l'air	$\omega_s \Big _{\text{thé}}$	85,5	536	1500
	dans l'eau	$\omega_c \Big _{\text{thé}}$	31,3	206	696
	( $F_r = \infty$ )	$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}$	<b>0,367</b>	<b>0,385</b>	<b>0,464</b>
	couplée ( $F_r \neq \infty$ )	$\omega_d \Big _{\text{thé}}$	1,56	2,40	2,97
		$\frac{\omega_c}{\omega_s} \Big _{\text{thé}}$	0,0183	0,00045	0,00020
	Ballotement	$\omega_f$	1,562	2,405	2,969
		$\frac{\omega_c}{\omega_f} \Big _{\text{thé}}$	0,999	0,999	1.00

tableau 4.2 résultats d'exemple de Veklich et Malyshev (1990)

Les résultats montrent que les valeurs des fréquences propres dans l'eau sont inférieures aux celles de la poutre dans l'air. Les effets du liquide sur les deux premiers modes sont presque les mêmes (les ratios de fréquences propres sont identiques), mais lorsque les ordres de mode augmentent, les effets du liquide diminuent (les ratios de fréquences augmentent).

Ceci est logique. Avec l'accroissement de fréquence, le nombre de noeuds de vibrations de la structure augmente. Face à ces noeuds, le fluide est moins mis en mouvement que face aux

ventres de vibration. L'augmentation du nombre de noeuds s'accompagne donc logiquement d'une diminution des effets d'inertie dus au fluide et se traduit donc par une décroissance de l'effet de masse ajoutée. Ceci est visible sur la figure 4.5, tracée pour  $h_p^* = 0,12$  m. Les résultats théoriques de Veklich et Malyshev sont en très bon accord avec ce comportement.

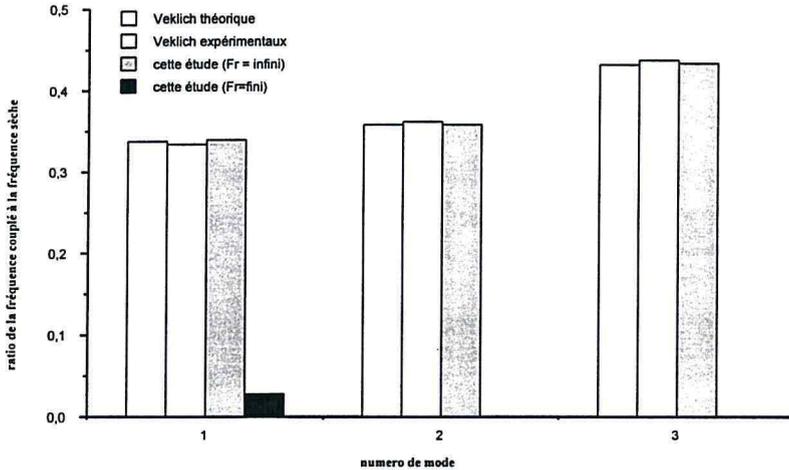


figure 4.5. Une comparaisons avec les résultats de Veklich et Malyshev (1990)

Dans notre modèle si l'on ne tient pas compte de la pesanteur ( $F_r = \infty$ ), si on compare dans le graphe ci-dessus les rapports de fréquences propres de la poutre dans l'eau à celles dans

l'air  $\left. \frac{\omega_c}{\omega_s} \right|_{\text{exp}}$ ,  $\left. \frac{\omega_c}{\omega_s} \right|_{\text{thé}}^v$  et  $\left. \frac{\omega_c}{\omega_s} \right|_{\text{thé}}$ , on peut observer un très bon accord entre les résultats de cette étude

analytique et ceux de V. & M. (l'erreur relative est inférieure à 2%). Si on observe les valeurs absolues, les erreurs sont plus importantes (10 - 15% environ) : Nos résultats majorent les résultats expérimentaux autant pour les résultats dans l'air que dans l'eau. Ceci peut être du au choix que nous avons fait pour l'une des grandeurs (le module de Young E) qui n'était pas fourni dans les travaux de Veklich. Une autre raison peut être l'utilisation d'un modèle de poutre alors que la largeur de la structure représente 4 fois la longueur, et nous inciterait à prendre plutôt un modèle de plaque.

Il est à noter que malgré la proximité de la surface libre (affleurant la poutre dans notre modèle) alors que dans la manipulation elle se situe deux fois plus loin, la condition  $\varphi = 0$  qui y est écrite permet quand même une bonne prise en compte des effets de masse ajoutée. Les champs de vitesses ne doivent pas être fondamentalement différents.

Pour mettre en évidence les effets de la présence du fluide sur la déformée de la poutre, on présente les trois premières modes couplés et non couplé de la poutre dans les figures suivantes :

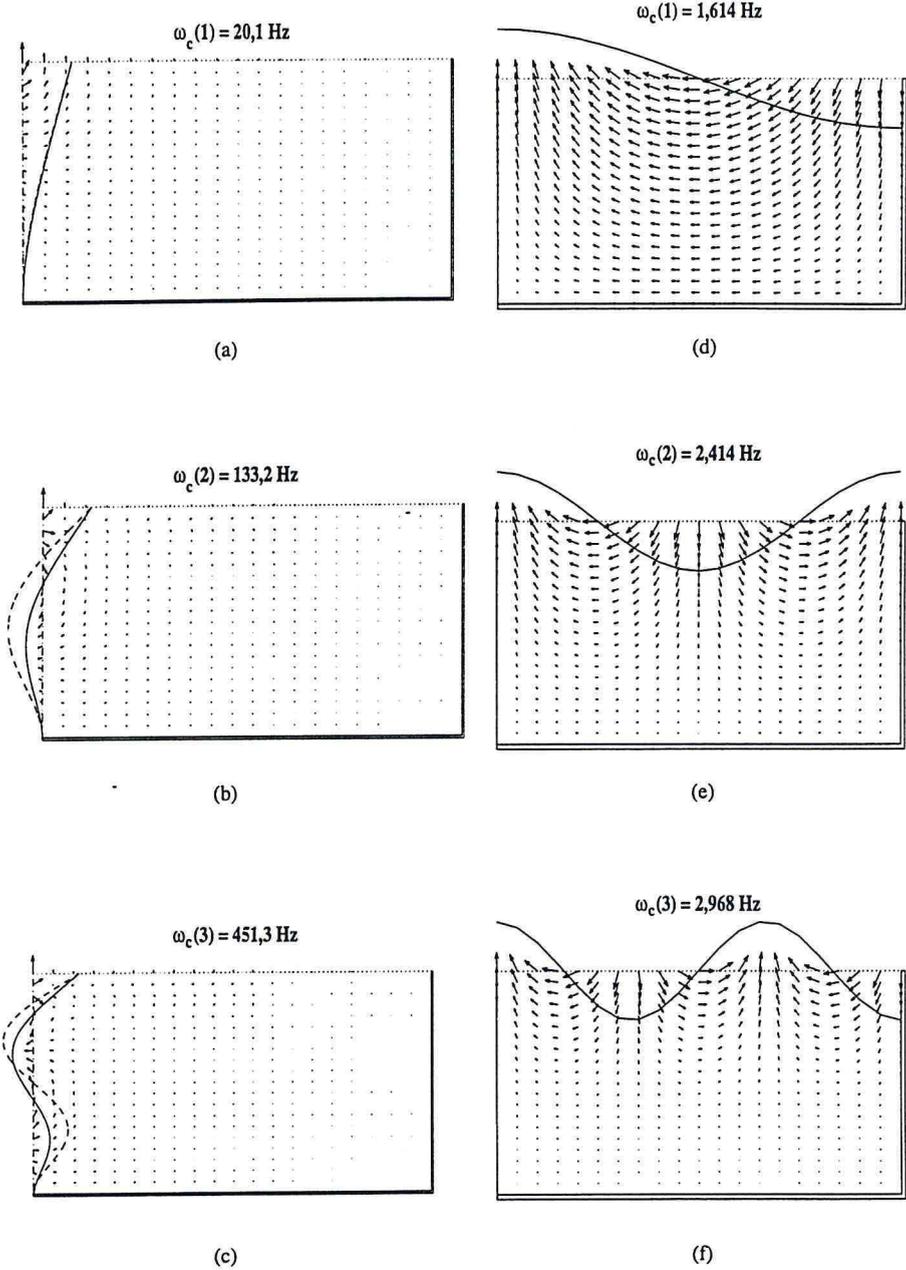


figure 4.6 Les déformées de la poutre immergées complètement dans un réservoir profond (a,b,c) sans prise en compte de l'effet de la gravité, (d,e,f) avec la gravité

\_\_\_\_\_ : mode propre dans l'eau, ----- : mode propre dans l'air ayant le même nombre de noeud de vibration

On peut trouver que le premier mode couplé est presque le même que celui non couplé, c'est à dire l'effet de la présence du fluide sur le premier mode propre n'est pas important, quoique la fréquence soit divisée par 3. Mais pour le deuxième et troisième modes, le mode couplé de la poutre est différent par rapport celui non couplé. En plus, les noeuds se déplacent vers l'extrémité encastree de la poutre. On peut conclure que les modes couplés sont différents de ceux dans l'air, donc on ne peut pas utiliser les modes sec de la poutre pour calculer les fréquences propres couplées (Liaw et Chopra, 1974). Une combinaison de ceux-ci, comme forme propre couplé reste cependant acceptable dans la plus part des cas. (DONEA et al., 1988).

Par contre dans le cas où l'on tient compte de la gravité, les trois premières fréquences couplées sont pratiquement égales aux fréquences de ballotement du liquide dans un réservoir rigide. Elles sont d'une toute autre nature que les fréquences décrites précédemment. Le tracé de celles-ci sur la figure précédente est donc un peu abusif, mais permet au lecteur de voir l'importance à venir de l'écriture correcte de la condition de surface libre. On peut observer que les fréquences couplées sont légèrement inférieures aux les fréquences de ballotement. On peut juger que dans le cas où les fréquences propres non couplées (dans l'air) de la poutre sont de beaucoup supérieures aux fréquences propres non couplées du liquide (ballotement dans un réservoir rigide), les fréquences couplées du système sont pratiquement les fréquences de ballotement.

#### 4.4.3 Vérification à l'aide des résultats numériques de Ousset (1980)

Ousset (1980) a développé une méthode numérique pour étudier les vibrations hydroélastiques d'une structure contenant un liquide incompressible avec surface libre. La méthode peut être considérée comme un couplage de la méthode des éléments finis (Berge et al., 1975) et la méthode d'intégrale de frontière (Deruntz et Geers, 1978).

Un exemple bidimensionnel a été présenté, celui d'un réservoir rectangulaire avec un fond rigide et des parois verticales déformables, traitées comme des poutres encastrees à leur bases (figure 4.5). Le réservoir est rempli de liquide. La condition de surface libre écrite par Ousset ne tient pas compte de la pesanteur (équipotentiel).

Les modes obtenus par Ousset sont soit symétriques (les deux poutres vibrent en opposition de phase) soit antisymétriques. Les modes symétriques peuvent être calculés par notre

modèle, en considérant pour notre configuration à une seule paroi flexible, un réservoir de longueur moitié

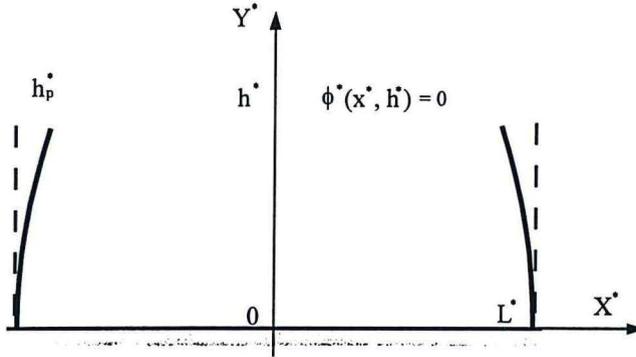


figure 4.7. Un réservoir rectangulaire avec les parois de type de poutre (Ousset, 1980)

Les dimensions de la poutre et du réservoir sont :

$$L^* = 1 \text{ m}, h_p^* = 1 \text{ m}, e^* = 0,01 \text{ m}, \rho_s^* = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_f^* = 1000 \text{ kg/m}^3, E^* = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, g^* = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Les paramètres adimensionnels correspondants de cette étude sont :

$$B_0 = 8,176, G_0 = 0,5886.$$

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant, en ne gardant que 4 chiffres significatifs pour nos résultats :

ordre de mode	Dans l'air $\omega_s(i)$	Ousset (1980)			cette étude		$\frac{\omega_c^{EI} - \omega_c}{\omega_c} \times 100$
		équation intégrale $\omega_c^{EI}(i)$	$\frac{\omega_c^{EI}(i)}{\omega_s(i)}$	élément finis $\omega_c^{EF}(i)$	analytique $F_r = \text{infini}$ $\omega_c(i)$	$\frac{\omega_c(i)}{\omega_s(i)}$	
1	8,176	4,1699	0,5100	4,1752	3,974	0,4861	+ 4,9
2	51,24	26,7453	0,5220	26,8177	25,46	0,4969	+ 5,0
3	143,50	89,1585	0,6213	89,4836	84,85	0,5913	+ 5,1

tableau 4.3 résultats d'exemple d'Ousset (1980)

où :  $\omega_s(i)$  : les fréquences propres de la poutre dans l'air ;

$\omega_c^{EI}(i)$  : les fréquences propres de la poutre dans l'eau, obtenues par la méthode d'équation intégrale (avec 25 éléments de plaque) ;

$\omega_c^{EF}(i)$  : les fréquences propres de la poutre dans l'eau, obtenues par la méthode des éléments finis (avec 25 éléments de plaque) ;

$\omega_c(i)$  : les fréquences propres de la poutre dans l'eau, obtenues par la méthode analytique de cette étude.

On peut trouver que les fréquences propres obtenues par la méthode numérique sont supérieures à celles analytiques de 5% environ. Cet écart peut être expliqué par l'augmentation de la rigidité induite par la discrétisation d'une structure continue. Pour ce problème, même si la méthode d'équation intégrale a plusieurs avantages par rapport à la méthode d'éléments finis comme l'explique Ousset (1980), on peut quantifier les écarts de la méthode numérique grâce à cette étude analytique.

La figure 4.8 montre les modes couplés du système avec et sans pesanteur. On peut voir qu'en présence de la pesanteur (figures d-e-f), les deux premiers modes couplés du système sont des modes de ballottement (la poutre vibre à peine), le troisième mode faisant lui intervenir de façon non négligeable la poutre. En absence de pesanteur (figures a-b-c), les modes couplés sont très différents de ceux avec pesanteur.

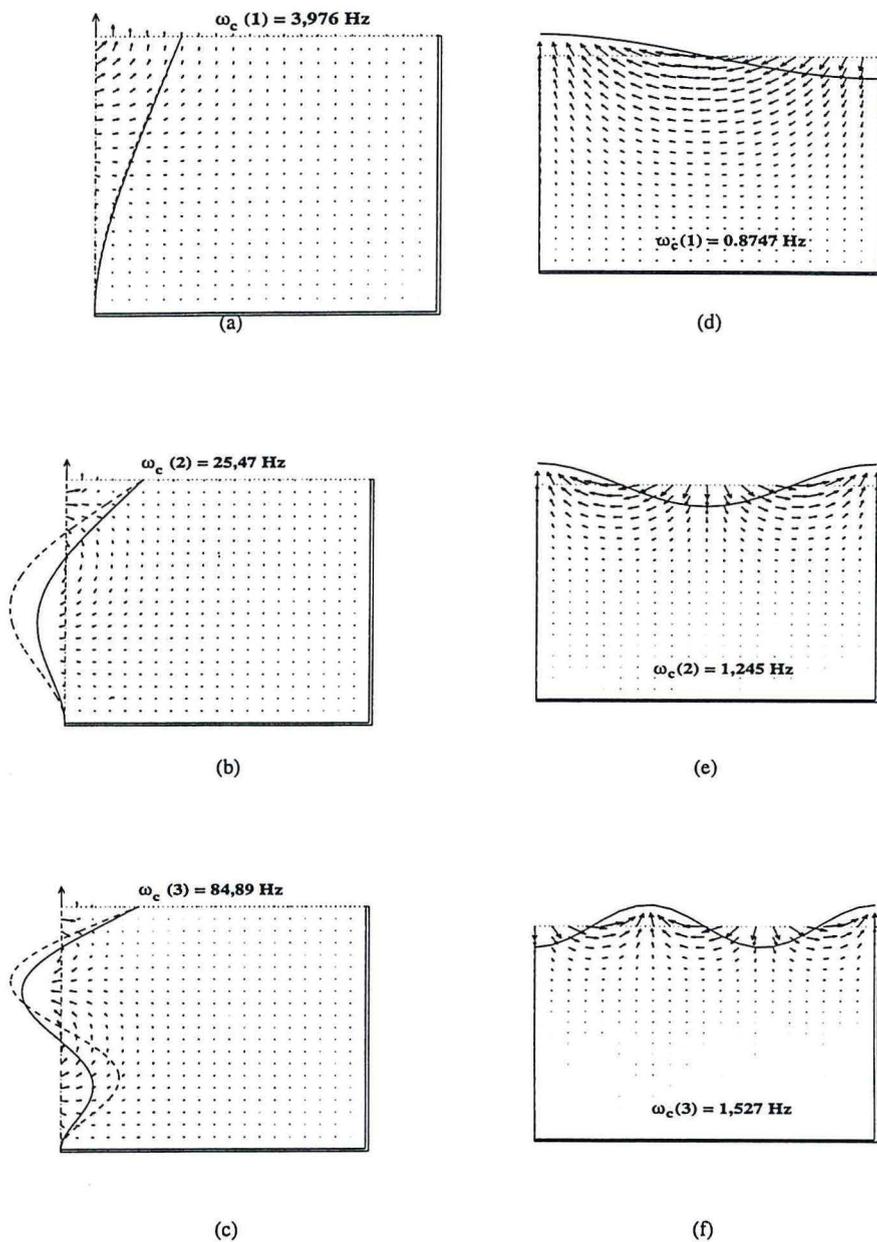


figure 4.8 Modes couplés du système en absence de pesanteur (a-b-c) et en présence de pesanteur (d-e-f)

#### 4.5. Comparaison avec des résultats analytiques (Bauer, 1968)

L'exemple de Bauer et al (1968) dans cette section, concerne le cas de réservoir rectangulaire avec une paroi flexible modélisée comme une poutre encastree - encastree. Les résultats de Bauer et al. seront comparés aux nôtres. Les effets des paramètres du système sur les valeurs propres seront discutés. Les paramètres de la poutre et du réservoir se trouvent dans la figure 4.3. Les caractéristiques du système sont :

$$L^* = 1,2192 \text{ m}, h_p^* = 1,524 \text{ m}, e^* = 0,0015 \text{ m}, \rho_s^* = 2689 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_f^* = 1041 \text{ kg/m}^3, E^* = 0,6895 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Nos paramètres adimensionnels correspondants sont :

$$B_0 = 3,582, G_0 = 1109,$$

Les fréquences sèches (non couplées) adimensionnelles de la poutre sont :

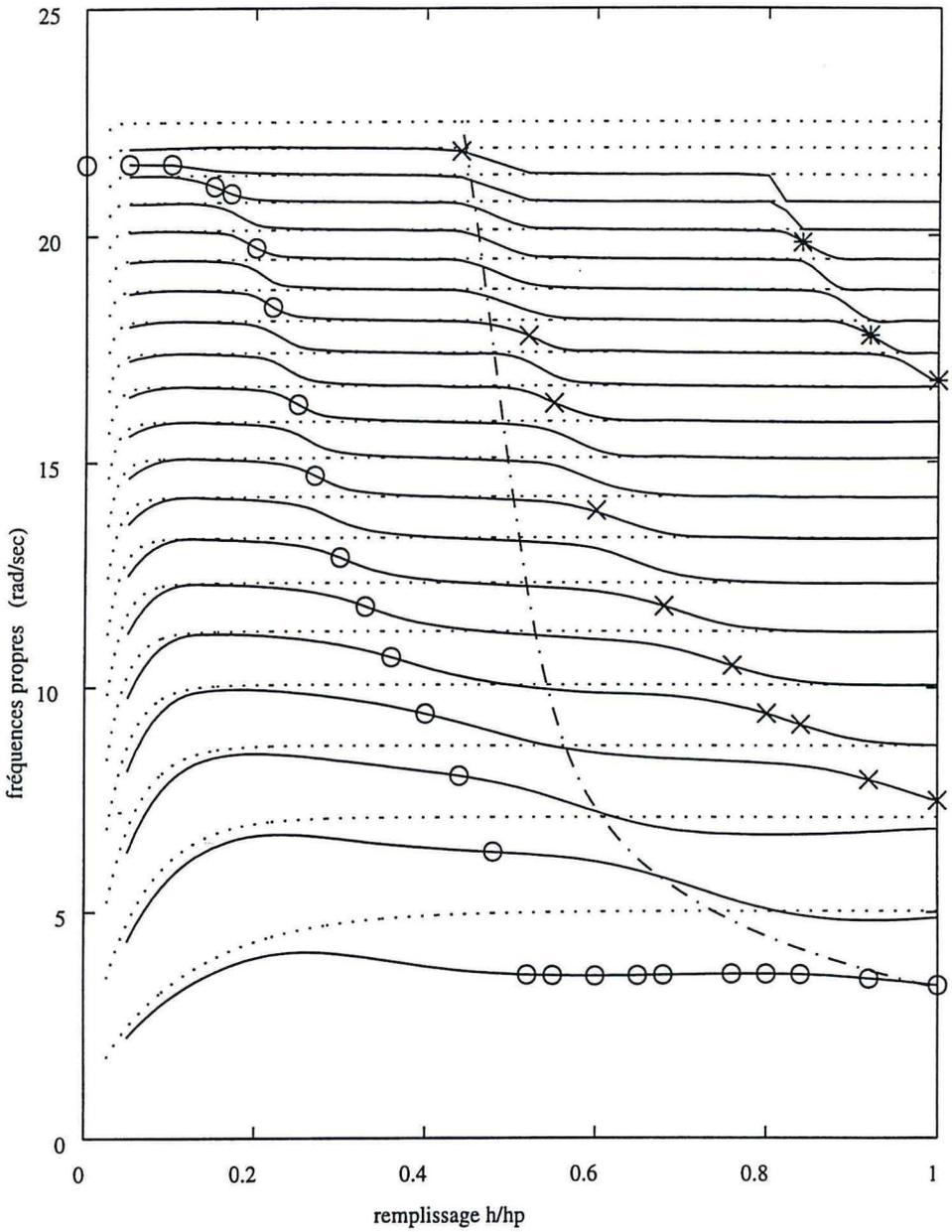
$$\omega_s(1) = 7,566, \omega_s(2) = 20,85, \omega_s(3) = 40,88.$$

Les résultats présentés par Bauer (1968) ne concernent que la première fréquence couplée du système, pour le rapport de la hauteur du liquide à la longueur de la poutre :  $\left(\frac{h}{h_p}\right)$  compris entre 0.4 et 1 (dans la figure 4.9, en trait mixte).

De notre côté, nous calculons les vingt premiers modes et fréquences couplés du système par la méthode donnée dans la section 4.3. Différentes profondeurs du liquide sont considérées pour montrer les effets sur les fréquences propres et modes propres. Le mouvement relatif entre le liquide et la structure est quantifié par le rapport  $\mu$  de l'amplitude maximum de la poutre à l'amplitude maximum de la surface libre. Si ce rapport est très inférieur à 1 le mouvement relatif est faible.

##### 4.5.1 L'évolution de fréquences propres avec la profondeur du liquide $h/h_p$ (remplissage)

Trente termes sont utilisés dans le développement en série du potentiel car aucune différence n'est trouvée entre les résultats de fréquence obtenus avec 30 termes et 90 termes. La profondeur du liquide  $h/h_p$  varie de 0,05 à 1.0. La figure 4.9 présente la variation avec la profondeur liquide  $h/h_p$  des fréquences couplées du système et les fréquences non - couplées de la poutre et liquide.



— : les modes couplés du système ; ..... : les modes de ballonnement non couplés ;  
 - - - : les modes secs de la poutre ; o ; x ; \* : les modes de type structure

figure. 4.9 L'évolution de fréquences propres avec le remplissage

Dans Bauer (1968), seule la première fréquence couplée est présentée pour  $h/h_p$  variant de 0.4 à 1 (la ligne pointillée sur la figure 4.9). Une grande différence est trouvée entre leur résultat et notre première fréquence couplée (la ligne continue la plus basse en fréquence). La différence provient du fait que dans Bauer (1968) une seule fonction était employée pour décrire la forme du mode de la partie immergée et la partie sèche de la poutre. Ici deux fonctions différentes sont employées pour les parties sèches et mouillées ( $w$  et  $w_d$ ), et deux types de modes couplés peuvent être trouvés ainsi que le montre la figure 4.9 : un mode couplé de type "ballotement" et un mode couplé de type "structure".

- Les modes de type "ballotement" :

La figure 4.9 montre que quand  $h/h_p$  est petit, les fréquences couplées d'ordre bas sont très proches des fréquences propres non - couplées du liquide (ballotement). Leur forme propre (figure 4.11 (b)) est aussi de celles de ballotement . Ces types de modes sont repérés comme des modes de type "ballotement" du système couplé.

Quand  $h/h_p$  est petit, les mouvements de la surface libre du liquide peuvent être significatifs, car  $h$  peut être grand, même pour  $h/h_p$  petit. Près de l'extrémité encastree, le mouvement de la poutre est plus faible qu'à l'autre extrémité ainsi les effets des mouvements de cette poutre sur le fluide sont faibles quand  $h/h_p$  est petit. Les formes de modes couplés peuvent dans ce cas être similaires aux modes de ballotement du liquide dans un réservoir rigide. Quand  $h/h_p$  croît, les effets de mouvement de poutre sur l'écoulement de fluide s'accroissent et les fréquences couplées diminuent comparativement aux fréquences de ballotement  $\omega_f$ . Si l'évolution de la neuvième fréquence couplée avec  $h/h_p$  est considérée, on remarque qu'elle suit la fréquence de ballotement tant que  $h/h_p$  est petit, puis diminue brutalement au passage de  $h/h_p$  voisin de 0.3, afin de suivre la fréquence de ballotement immédiatement inférieure. Une seconde décroissance est alors observée lorsque  $h/h_p$  voisine 0.6. Le comportement de toutes les autres fréquences couplées est le même.

- Les modes de type "structure" :

Ils peuvent être trouvés quand  $h/h_p$  est petit, pour des modes proches du mode non couplé de la poutre  $\omega_s$ . Il existe un mode dont la fréquence est différente des fréquences de ballotement. Il est montré ultérieurement que la forme propre de ce mode est similaire à celle du

mode sec de structure le plus proche. Du point de vue de la poutre, les effets du fluide sur le mouvement de la poutre peuvent être expliqués par des considérations de masse ajoutée.

Pour des valeurs de  $h/h_p$  plus éloignées de 0, on peut suivre ces modes de type "structure". Avec l'accroissement du paramètre  $h/h_p$ , une fréquence couplée présente des décroissances brusques entre deux modes de type "ballotement". Elles s'accompagnent toujours d'un accroissement de l'amplitude relative du mouvement de la poutre par rapport à celui du fluide (figure 4.10). Ces points de maximum sont repérés par des ronds, des croix et des étoiles sur la figure 4.9.

#### 4.5.2. Les modes couplés pour $h/h_p = 0,6$

La figure 4.10 présente la variation du rapport d'amplitude avec l'ordre de mode pour  $h/h_p = 0,6$ .

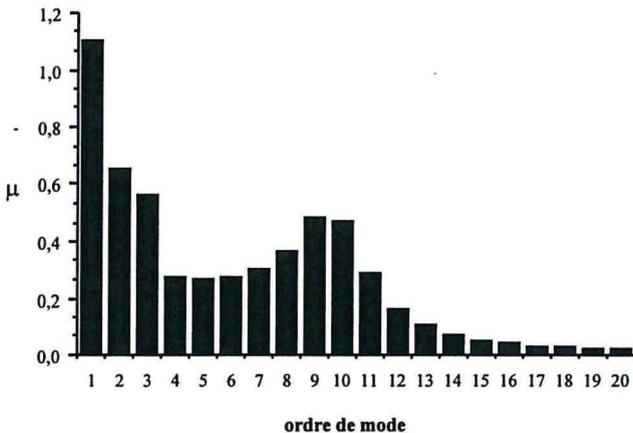
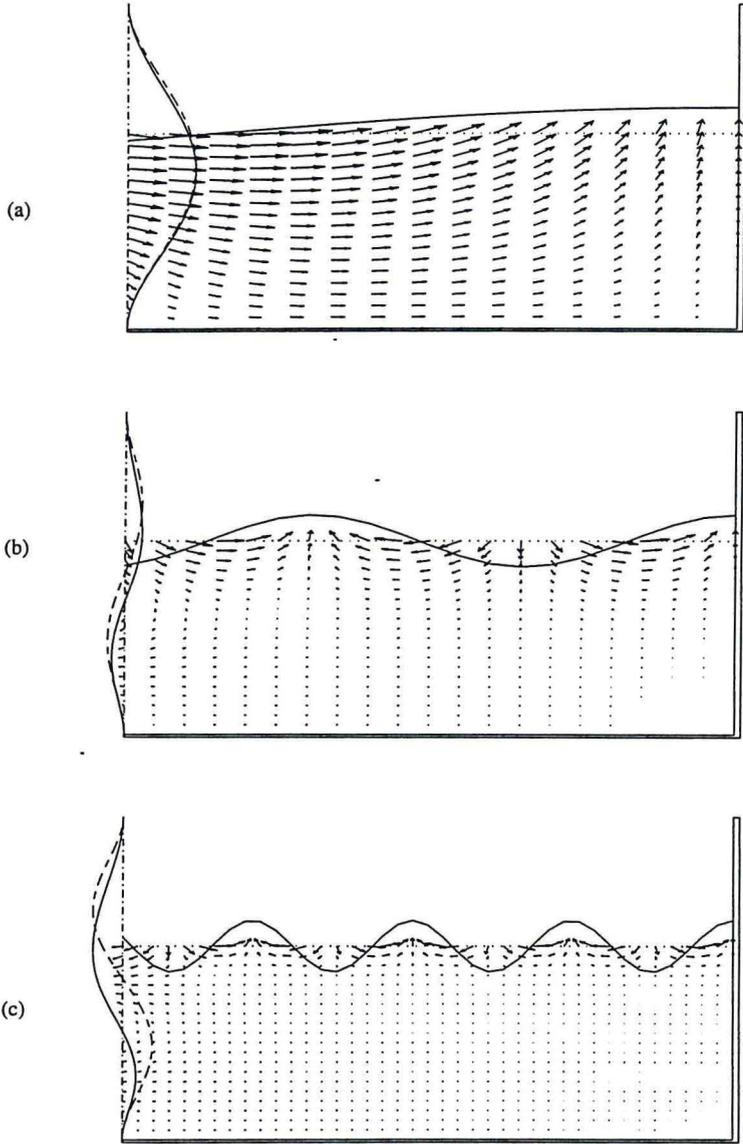


figure 4.10 L'évolution du rapport d'amplitude avec l'ordre de mode

Si l'ordre de mode croît, le rapport d'amplitude commence par diminuer et passe par un minimum au cinquième mode. A partir du sixième mode, ce rapport d'amplitude augmente à nouveau et atteint un maximum pour le neuvième mode. Les formes de mode pour certains rapports d'amplitude sont présentées dans les figures 4.11 (a, b, c). Les champs de vitesse du

fluide, le mode couplé de la surface libre du liquide et de la poutre, et la forme du mode non - couplée de la poutre la plus ressemblante sont dessinés.



(a) le premier mode couplé ; (b) le quatrième mode couplé ; (c) le neuvième mode couplé.

figure 4.11 (a, b, c) Les champs de vitesse de 3 modes couplés

Le premier mode couplé est montrée dans la figure a, où le rapport d'amplitude est de 1,1. Il est trouvé que la forme couplée de ce mode est très similaire celle de  $\omega_s(1)$ . Pour cette hauteur d'eau, c'est le premier mode de type " structure " du système. Cette fréquence couplée est de (1,26), beaucoup plus petite que la première fréquence sèche de la poutre (7,57).

Le quatrième mode couplé est présenté dans la figure 4.11 (b). Le rapport d'amplitude est de 0,27. Cela signifie que le mouvement de la surface libre fluide est quatre fois plus important que celui de la poutre. Il est trouvé que la forme couplée de mode de la surface libre de liquide est très semblable au troisième mode de ballonnement. La fréquence couplée est 3,01, légèrement inférieure à la troisième fréquence de ballonnement qui est 3,07. C'est pourquoi ce mode est appelé un mode de type " ballonnement " du système couplé. On notera que la ligne tangente au point de contact avec la poutre n'est pas horizontal, preuve de l'existence d'une interaction avec la poutre.

La figure 4.11 (c) présente le neuvième mode couplé correspondant au deuxième maximum local de rapports d'amplitude. Ce rapport est proche de (0,5) et est voisin des septième et huitième modes de ballonnement du fluide dans un réservoir rigide. Un maximum d'amplitude de la surface libre est toujours présent contre la paroi rigide, mais sur la paroi mobile, existe pratiquement un noeud de vibration. Le mouvement de la poutre à cette fréquence est relativement grand comparé avec les modes voisins. Ce mode peut être considéré comme le deuxième mode de type " structure ".

## **Conclusions**

Une solution linéaire analytique a été obtenue pour l'interaction entre une structure élastique et un liquide à surface libre dans un réservoir, basée sur l'hypothèse d'un mouvement potentiel du fluide et en tenant compte des effets de pesanteur. Les modes et fréquences propres du système couplé sont donnés. Les effets des paramètres du système sur les fréquences couplées sont discutés .

Si les fréquences propres de la poutre sèche sont bien supérieure à celles des premières fréquences de ballonnement dans une cuve rigide, les premiers modes couplés obtenus sont les fréquences de ballonnement, la structure restant immobile. Les premiers modes faisant intervenir de façon significative la structure, peuvent être obtenus par un calcul où seule l'inertie du fluide est prise en compte et non la gravité. Dans tous les autres cas, caractérisés par un nombre de

Froude plus petit ou de l'ordre de l'unité, le couplage tenant compte des termes de gravité est alors nécessaire.

La résolution est faite en décomposant la forme des modes en deux fonctions inconnues, pour la portion émergée et immergée. Cette méthode a été vérifiée par les résultats expérimentaux, analytique et numérique dans le cas où la pesanteur est négligeable (nombre de Froude infini). En présence de pesanteur, les résultats de Bauer et al (1968) sont très différents des nôtres et bien moins complets. Nous avons dégagé une vision globale du comportement des fréquences propres couplées en fonction de la hauteur de remplissage du réservoir. Les modes pour lesquels le mouvement de la structure est du même ordre de grandeur que celui de la surface libre, ont été repérés et appelés les modes de type « structure ».

Cette résolution dans le cas où seule l'une des parois du réservoir est flexible peut être prolongée au cas où toutes les parois sont déformables.



# Etude expérimentale de l'interaction fluide - structure dans un réservoir avec surface libre

### Résumé :

Pour mettre en évidence les phénomènes d'interaction fluide - structure dans un réservoir rectangulaire en présence d'ondes de gravité, ainsi que pour vérifier la méthode analytique, nous avons testé plusieurs dispositifs expérimentaux que nous présentons. Nous avons finalement choisi une excitation électromagnétique et avons mesuré alors les fréquences propres et les modes propres d'un système pour lequel les effets de pesanteur ne sont pas négligeables. Ces résultats expérimentaux sont comparés aux résultats théoriques du modèle linéarisé du chapitre précédent.

### Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude expérimentale des phénomènes d'interaction fluide - structure avec surface libre dans un réservoir rectangulaire, nous nous intéresserons essentiellement à la mesure des fréquences propres et modes propres du système couplé.

Des études expérimentales classiques de plaques immergées dans un fluide infini ont été effectuées par Lindholm et al. (1965). Les plaques sont encastrées à l'une de leur extrémités et libres à l'autre, la surface libre du fluide est parallèle ou perpendiculaire à la plaque. Leurs études expérimentales sont faites dans un domaine fluide infini pour lequel les modes de ballotement existent pas.

Dans le cas de cylindre à base circulaire, les études expérimentales sont nombreuses : cylindre complètement flexible (Bauer, 1963a), avec fond de cylindre flexible (Chiba, 1993).



Pour un réservoir rectangulaire, Costa et al. (1991) ont étudié le cas où le fond du réservoir est une plaque flexible.

Veklich et Malyshev (1990) ont présenté les résultats expérimentaux d'une plaque complètement immergée verticalement dans un réservoir rectangulaire. La surface libre est éloignée de l'extrémité supérieure de la plaque d'une distance au moins égale à la longueur de celle-ci. Les phénomènes de couplage entre les ondes de gravité et la structure n'ont pas été observés.

La présence de la surface libre du fluide et de la pesanteur se prêtent bien à l'étude des couplages entre les ondes de gravité et la structure. La principale difficulté de cette étude est la mise en évidence des résonance du système couplé, mettant en jeu simultanément des mouvements de la surface libre et de la structure. Pour aborder ce domaine, nous nous limiterons à l'étude des phénomènes couplés dans des milieux finis.

Nous allons présenter tout d'abord les principales étapes de l'expérience : les essais pour mettre en évidence des résonances couplées, la méthode de mesure, puis nous comparerons les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques.

### **5.1. Dispositif expérimental**

Pour pouvoir mettre en évidence les phénomènes du couplage fluide - structure en présence des ondes de gravité dans un réservoir rectangulaire, nous avons testé plusieurs dispositifs expérimentaux présentés dans la figure 5.1.

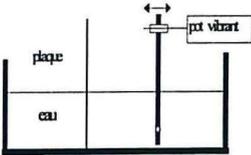
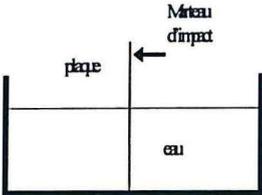
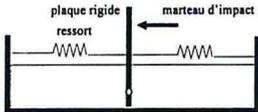
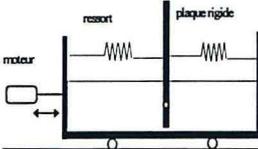
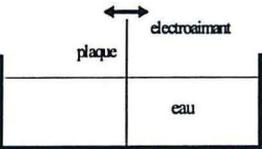
essai	schéma du dispositifs expérimentaux	méthode d'excitation et de mesure	remarques
1		pot vibrant fixé sur une plaque rigide qui pivote, accéléromètre sur la plaque située au milieu du réservoir.	les ballottements ont été excités, mais pas de modes couplés observés
2		excitation par un marteau d'impact, accéléromètre sur la plaque encastrée	Pour un temps inférieur au temps de retour de l'onde sur la plaque, la réponse de la surface libre correspond à celle pour un milieu fluide infini. Pour un temps supérieur, d'un milieu fluide fini. La séparation des comportements est donc difficile.
3		marteau d'impact, accéléromètre sur la plaque qui pivote autour d'un axe,	idem à ci-dessus
4		une excitation en translation de toute la cuve, accéléromètres sur la plaque rigide qui pivote et sur la paroi.	les modes couplés ont été excités, mais il est impossible de solliciter les modes pairs.
5		excitation de la plaque par un électroaimant, déplacement de la plaque mesurée par une caméra et une vis micrométrique. Mesure de la surface libre par une caméra.	les modes couplés du système sont excités

figure 5.1 Les cinq dispositifs expérimentaux

Puisque nous ne pouvions maîtriser la largeur de bande d'excitation, l'idée fut d'utiliser un impact pour lesquelles toutes les fréquences d'excitation sont présentes avec la même

amplitude. Deux types de structure ont été sollicitées ainsi : une plaque encadrée à sa base, une plaque rigide en rotation autour d'un axe en présence d'un couple de rappel (essais 2 et 3 de la figure 5.1). Nous avons mesuré les fonctions de réponse en fréquence par un analyseur "Brüel et Kjaer", de type bicanal. Dans les deux essais, nous avons pu mesurer les fréquences propres de la plaque, modifiées par les influences d'inertie du fluide (la masse ajoutée). Mais nous n'avons pas observé le couplage entre les ondes de gravité et la plaque. Ces résultats sont logiques, car le temps d'acquisition des signaux étant de 2 secondes, l'onde de surface libre émise par la plaque lors de l'impact avait à peine le temps de se propager vers le bord rigide et de revenir. Nous faisons en fait un essai dans un milieu fluide infini, pour lequel les modes de ballonnement n'existent pas. Il fallait donc revenir à une excitation forcée périodique de spectre étroit, si possible en déplacement.

Le quatrième essai est un réservoir sur deux rouleaux, un système bielle - manivelle et d'un moteur électrique suivi d'un réducteur et d'une tige fournissant une translation de tout le système. Un balayage de fréquence de la rotation de moteur, nous permet d'exciter le système (le fluide et la plaque) en même temps par un mouvement de translation sinusoïdal. En se plaçant dans le référentiel non Galiléen lié à la paroi du réservoir, l'excitation apparaît comme une force répartie dans le fluide et dans la plaque. Nous avons mesuré les réponses en fréquences sur la plaque ainsi que sur les parois rigides du bac. Les mouvements de ballonnement ainsi que couplés ont pu être observés mais la puissance insuffisante de moteur - réducteur, si elle avait réussi à diminuer la largeur de bande d'excitation, ne l'avait pas pour autant rendue purement sinusoïdale. Ceci a été constaté en mesurant les mouvements du réservoir. L'extraction d'un mode propre restait impossible : ce système était insuffisant.

Le cinquième dispositif nous permet d'observer les phénomènes de couplage entre les ondes de gravité et la plaque (figure 5.2).

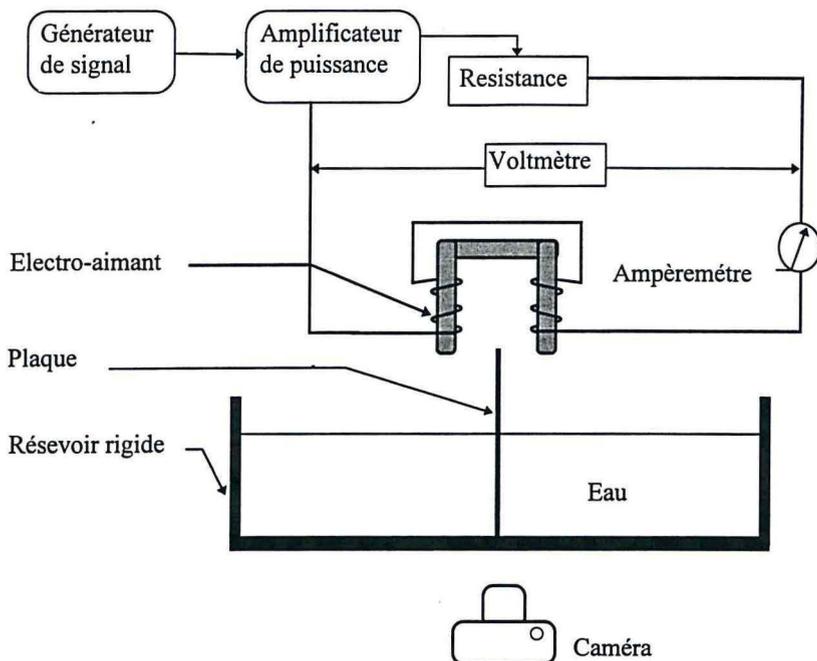


figure 5.2 chaîne de mesure du dispositif expérimental

La plaque est encastrée à sa base sur le fond du réservoir, le réservoir est fixe comme dans les premiers trois cas. La plaque est excitée par un électro - aimant qui est commandé par un amplificateur de puissance relié à un générateur sinusoïdal. Un voltmètre et un fréquencemètre permettent de déterminer avec précision la fréquence et la tension de ce signal. Le balayage en fréquence nous permet d'observer les résonances du système couplé. Un rhéostat variable est utilisé pour changer l'intensité de courant dans l'électro-aimant, ce qui permet de changer l'effort d'excitation, comme le montre le paragraphe suivant.

Montrons que l'effort sur la plaque est proportionnel au carré de l'intensité.

Soit un champ magnétique  $H(P,t)$  en un point  $P$  de l'espace à un instant  $t$ . L'effort sur un volume élémentaire de cette plaque au point  $P$  est proportionnel à  $H \text{ grad } H$  :

$$\vec{f}(P) = H(P(t),t) \nabla(H(P(t),t)) \chi$$

Le champ  $H$  est proportionnel à l'intensité  $I$  dans les bobines, ce que nous noterons :

$$H(P(t),t) = I(t) h(P(t))$$

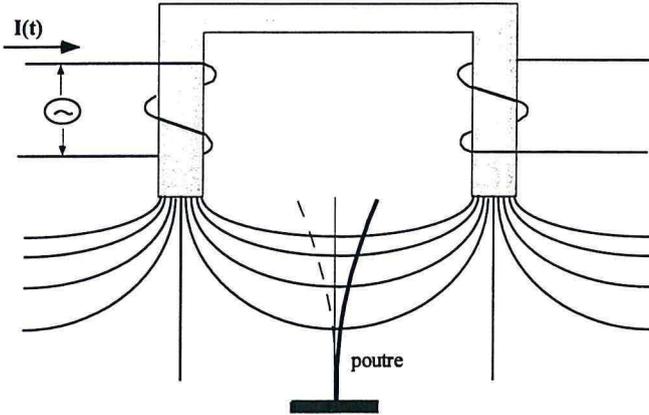


figure 5.3 une structure déformable dans un champ magnétique

Si l'on considère l'ensemble des points  $P(t)$  d'une structure rigide en mouvement la résultante du torseur des efforts extérieurs est du type

$$\bar{F}(t) = I^2(t) \chi \int_{\text{structure}} h(P(t)) \nabla(h(P(t))) dv$$

Sous l'hypothèse que les mouvements de la structure sont suffisamment petits pour que le champ magnétique en chaque point  $P$  ne dépende pas des mouvements de la structure, on peut considérer que la force globale est du type :

$$\bar{F}(t) = I^2(t) \chi \int_{\text{structure}} h(P) \nabla(h(p)) dv$$

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale en intensité, nous obtenons :

$$\bar{F}(t) = (I \sin(\omega t))^2 \chi \int_{\text{structure}} h(P) \nabla(h(p)) dv$$

Que l'on décompose en

$$\bar{F}(t) = I^2 \chi \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \int_{\text{structure}} h(P) \nabla(h(p)) dv$$

On peut poser :

$$\bar{F}(t) = I^2 (\bar{F}_0 + \bar{F} \cos(2\omega t)).$$

Pour que l'excitation soit nulle quelque soit  $I$  il faut que :

$$\int_{\text{structure}} h(P) \nabla(h(p)) dv = 0.$$

Ceci correspond dans notre expérience à une structure parfaitement centrée dans le champ magnétique. On notera de plus que c'est un équilibre instable et qu'à la moindre perturbation (qui ne tarde jamais à arriver) la plaque oscille autour d'une position moyenne inclinée.

Le cas d'une structure souple est plus complexe à traiter car cet équilibre doit être écrit en tout point de la structure. Nous retiendrons que l'effort sur la structure reste proportionnel à  $I^2$ .

### *Mesure de l'excitation*

La tension aux bornes de l'électroaimant et l'intensité le parcourant sont mesurées avec les précisions suivantes ( $u \pm 0.2$  volts pour  $u \approx 0.5$  à 5 volts ;  $R=3$  Ohm ;  $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R}$  soit

$$I = \frac{U_{\text{mes}}}{3} \left( 1 \pm \left( \frac{0,5}{U_{\text{mes}}} + \frac{0,1}{3} \right) \right) \text{ A.}$$

Si la précision de cette mesure est faible, cela ne portera pas à conséquence car nous ne connaissons pas le coefficient qui permet de passer de l'intensité à l'effort sur la plaque. Lors de la variation de tension, la résistance restant constante, la variation d'intensité lui est proportionnelle, donc la variation d'effort est proportionnelle à son carré. L'éventuelle non - linéarité sera mise en évidence par un glissement des fréquences couplées, et non par la mesure de l'amplitude de la fonction de réponse en fréquence. La fréquence d'excitation est affichée à  $\pm 0.001$  Hz près.

### *Mesure de la réponse*

Les modes couplés sont caractérisés par des mouvements de structure et de fluide, les mesures expérimentales portent donc sur ces deux milieux.

Pour la structure, les mouvements de la partie haute de la plaque ont été mesurés de deux façons. Tout d'abord à l'aide d'une caméra en vue rapprochée sur cette zone, une règle étant présente dans le champ de visualisation (précision de  $\pm 0.5$  mm). Pour améliorer la précision, la seconde méthode utilise une vis micrométrique fixée sur la paroi de la cuve (le contact plaque - vis ferme un circuit électrique et allume une ampoule). La précision est meilleure  $\pm 0.08$  mm, mais l'on ne possède que l'information de déplacement maximal dans l'un des sens de déplacement de la plaque. La caméra par contre permet de visualiser en continu son mouvement.

Pour le fluide, une information globale est recherchée. La caméra est utilisée de face (vision de l'interface air - fluide avec les problèmes de ménisque) ou de dessus, en mesurant les déformations apparentes d'une grille placée dans le fond du réservoir (Chai et al, 1993). La première méthode utilisée par Vo (Vo,1996) donne une précision sur l'interface de l'ordre de  $\pm 0,63$  mm, la seconde méthode nécessite un recalcul de l'interface par la méthode développée en annexe 6 qui nous a posé des problèmes de sensibilité des résultats à la précision des données non encore résolus. Cette deuxième méthode pourtant prometteuse a donc été abandonnée pour l'instant.

Les dimensions de la poutre et la cuve de la manipulation sont :

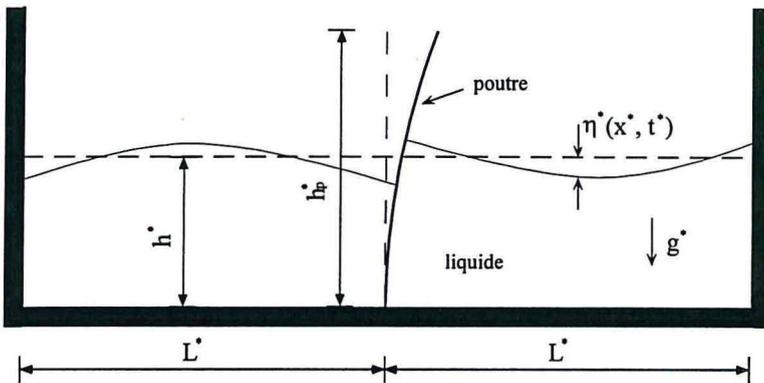


figure 5.4 la dimension de disposition expérimental

- [1] longueur de la cuve :  $L^* = 0.231 \pm 0.0005$  m ;
- [2] profondeur d'eau  $h^* = 0$  à  $0.23 \pm 0.0005$  m ;
- [3] largeur de la cuve est  $0.099 \pm 0.0005$  m ;
- [4] longueur de la poutre :  $h_p^* = 0.266 \pm 0.0005$  m ;
- [5] épaisseur de la poutre :  $e^* = 6 \pm 0.01$  mm ;
- [6] masse volumique la poutre :  $\rho_s^* = 7800 \pm 168$  kg/m<sup>3</sup> ;
- [7] masse volumique d'eau :  $\rho_f^* = 1000 \pm$  kg/m<sup>3</sup> ;
- [8] module de Young :  $E^* = 2,1 \cdot 10^{11} \pm 0.05 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>

## 5.2. Résultats expérimentaux

Nous allons présenter les résultats expérimentaux d'une poutre couplée avec le liquide contenu dans un réservoir. Avant tout, nous avons mesuré les fréquences propre de la poutre sèche, puis les fréquences propres du système pour différentes profondeurs d'eau.

### 5.2.1. Les fréquences propres de la poutre sèche

La première fréquence propre de la plaque est mesurée par la méthode utilisant la caméra et la règle. Pour une tension d'excitation donnée, un balayage en fréquence permet de mettre en évidence la résonance, en mesurant l'amplitude d'un point sur la poutre.

Pour une tension de 2 volts, nous avons mesuré la position minimale et maximale d'un point de la poutre en fonction de la fréquence d'excitation, (figure 5.5). On peut voir clairement un pic sur la courbe qui correspond à la résonance (près de la première fréquence de la poutre).

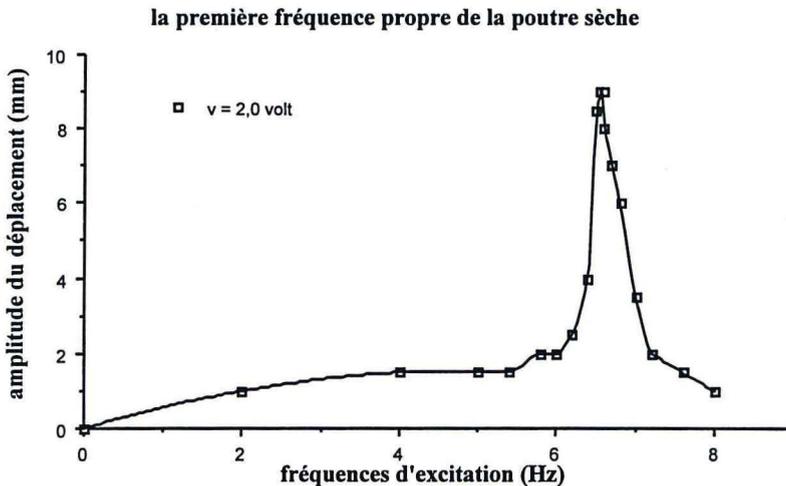


figure 5.5 Une tension d'excitation donné (2 volts), la réponse en fréquence de la poutre sèche

La reproductibilité de la mesure est présenté dans la figure 5.6.

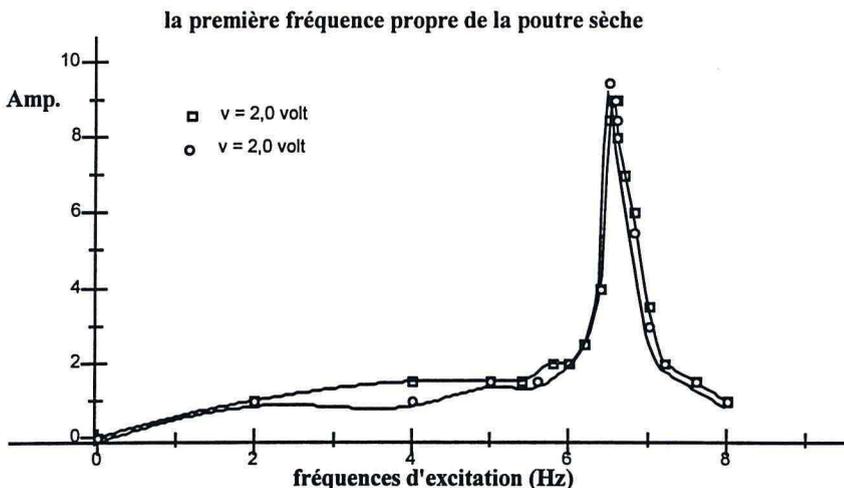


figure 5.6 La reproductibilité de la mesure ( v= 2 volts)

**Balayage en effort :**

Nous avons utilisé quatre tensions d'excitation : 1, 1.5, 2 et 3 volts pour étudier les influences de la tension sur la résonance.

Dans cette étude les courbes sont tracées en fonction de la tension. Sous réserve de mesurer le rapport entre tension et intensité de notre montage, et que celui-ci soit constant dans la gamme de fréquences et de tensions explorées, nous pouvons considérer que la figure 5.7 doivent permettre d'observer les éventuelles non - linéarité de réponse par rapport à l'effort d'excitation.

On constate ci-dessus, la non - linéarité de la réponse de la structure sèche. Nous devons donc nous limiter à des déplacements de structure inférieurs à 1.5 mm. Une vision plus globale peut être obtenue sur le graphe ci-dessous.

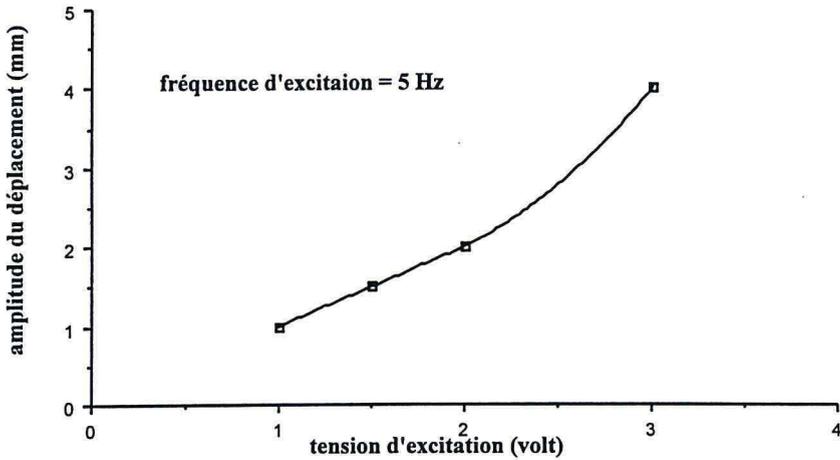


figure 5.7 Pour une fréquence donnée, la réponse en amplitude de la structure sèche pour un balayage en effort

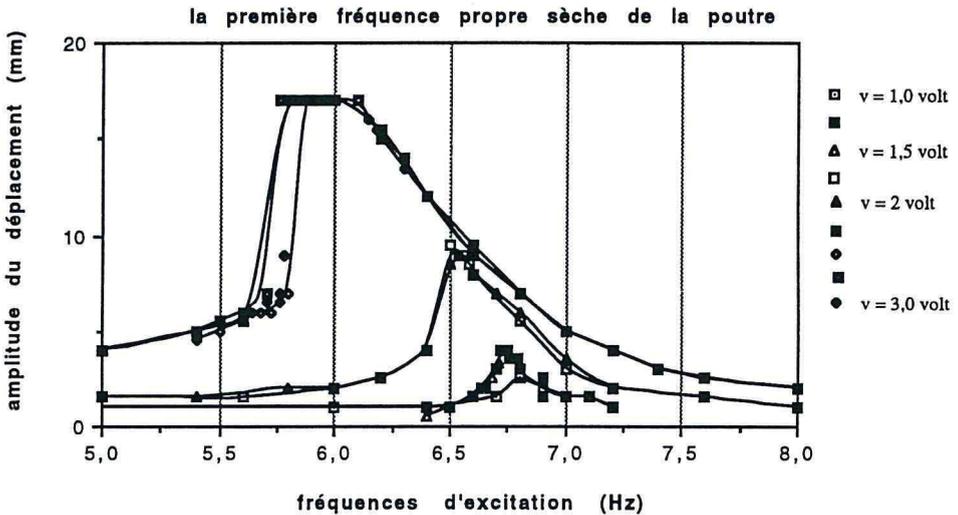


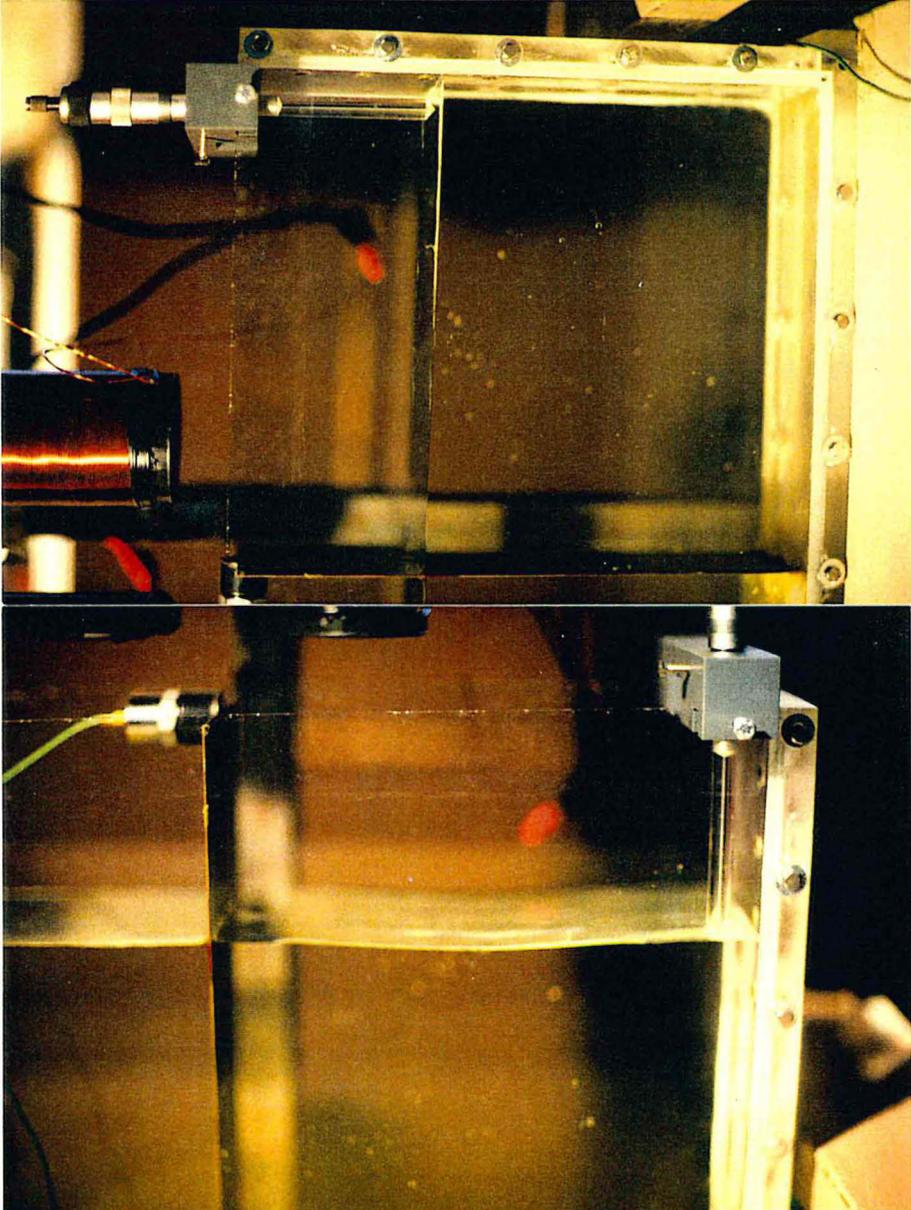
figure 5.8 La mesure de la première fréquence propre de la poutre sèche : les réponses en fréquence de l'amplitude de la poutre pour différentes tensions d'excitation (1, 1.5, 2, 3 volts).

Les comparaisons avec les fréquences propres du modèle linéarisé devront donc se faire pour les tensions les plus basses. Le balayage en tension permet néanmoins d'avoir une idée de la

gamme où l'approximation de linéarisation est valide, gamme qui varie pour la structure sèche et la structure mouillée.

### 5.2.2. Les fréquences et modes propres couplés

Lorsque la profondeur d'eau est de 210 mm, nous avons trouvé les résonances du système couplé en faisant un balayage en fréquences. Les premiers trois modes propres du système sont présentés dans la figure 5.9 :



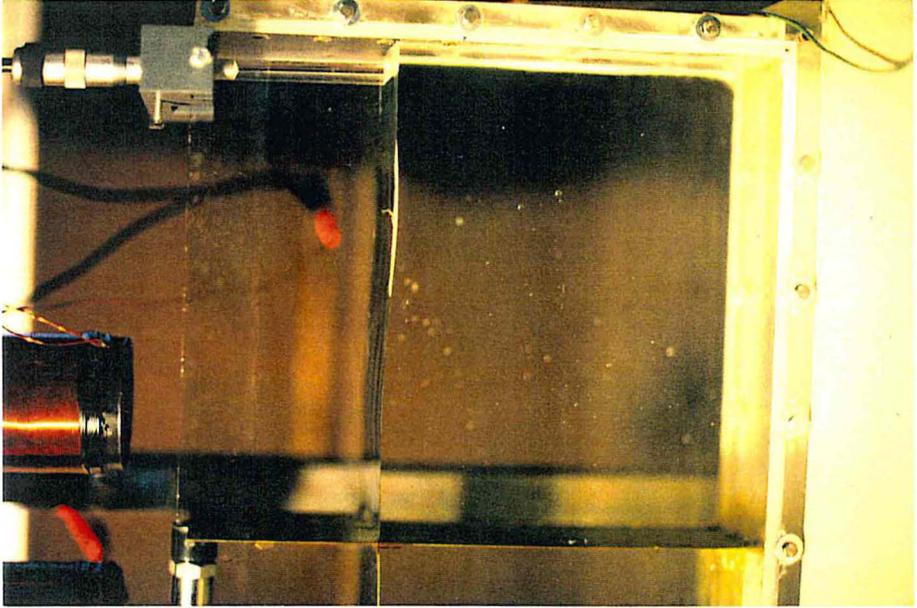


figure 5.9 modes propres du système

La réponse en fréquences de l'amplitude du mouvement de la surface libre est présentée dans la figure 5.10 (la tension d'excitation est de 1.65 volts).

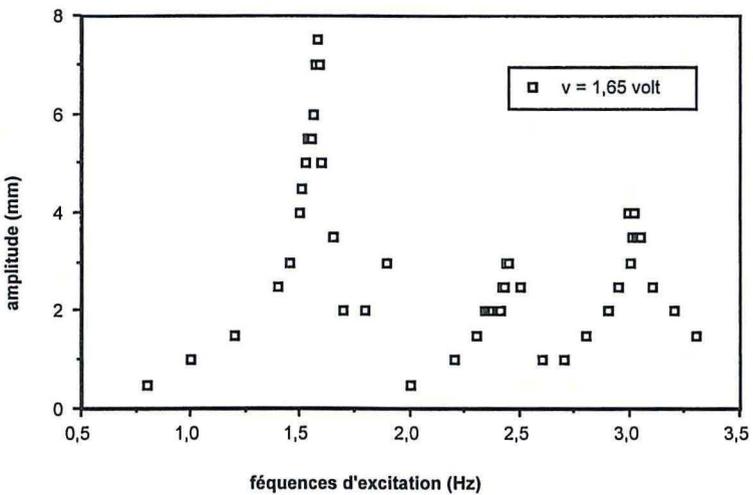


figure 5.10 fréquences propres du système (la tension d'excitation est 1.65 volts)

Pour déterminer les fréquences propres du système, il nous faut mesurer les amplitudes de la plaque et de la surface libre. Comme nous avons vu dans la mesure de la plaque sèche, la tension d'excitation est un facteur important qui peut changer les fréquences de résonance du système si les effets non linéaires se font sentir. Dans la figure 5.11, nous présentons les réponses en fréquences pour la tension d'excitation est 2 volts et 3 volts, à proximité du deuxième mode propre du système.

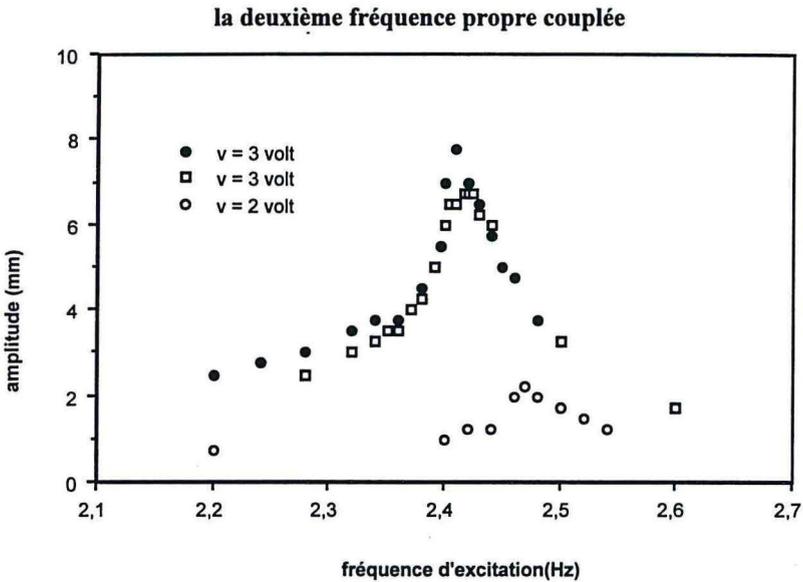


figure 5.11 la réponse en fréquence de la surface libre du fluide (la tension est 2 et 3 volts)

Dans la figure 5.11, nous pouvons voir que la fréquence de résonance du deuxième mode propre est :

pour 3 volts, 2,42 Hz

pour 2 volts, 2,47 Hz

Ce décalage en fréquence peut être imputé aux non - linéarités du système.

Les amplitudes de la surface libre du fluide (la figure 5.12), sont tracées pour des tension d'excitation de 4,5 et 5,3 volts.

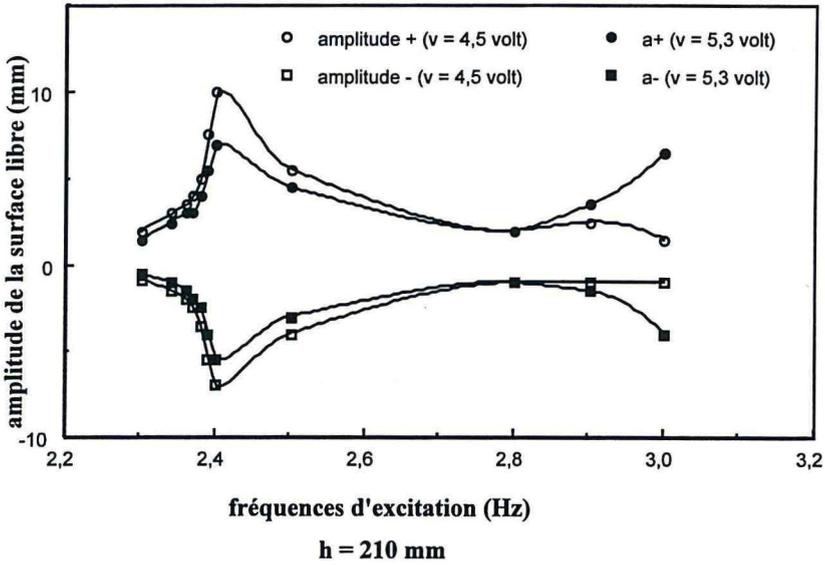


figure 5.12 La réponse en fréquence de la surface libre du fluide

Nous pouvons voir que la fréquence de résonance est voisine de 2,4 Hz, et les amplitudes de crête (a+) de la surface libre sont supérieures de celles de creux (a-). Cette asymétrie de mouvement est due la non linéarité de grande amplitude de la surface libre du fluide. Elle a été aussi observée par .Vo ( 1996).

### 5.3. Résultats théoriques

Tout d'abord, nous allons calculer les fréquences propres du système non couplé : le ballonnement du liquide dans un réservoir rigide et les modes secs de la plaque dans vide. Le système réel du dispositif expérimental est tridimensionnel. Notre étude théorique, le considère bidimensionnel pour la plaque et le liquide. Nous pouvons quantifier dans quelle gamme le modèle à 2 dimensions est applicable en calculant les modes de ballonnement du fluide et les modes de la plaque en trois et en deux dimensions respectivement.

Deuxièmement, nous allons présenter les résultats théoriques obtenus par la méthode mentionnée dans le chapitre 4 (fréquences propres et modes couplés) pour une profondeur du

liquide fixée. Nous insisterons sur l'originalité de ce travail en comparant les deux hypothèses : avec ou sans gravité.

Dans une dernière partie, nous allons présenter les évolutions avec la profondeur d'eau, des fréquences couplées théoriques pour les trois premiers modes.

### 5.3.1. Les systèmes non couplés

#### Le ballottement du liquide dans un réservoir rectangulaire rigide

Les fréquences de ballottement dans un réservoir parallélépipédique ayant une profondeur de liquide  $h$ , et de largeur  $a^*$  et de longueur  $L^*$ , sont données par : (Moiseev, 1964)

$$\omega_r^{3D*2}(m,n) = g^* k \tanh(k h^*), \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$k^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{L^{*2}} + \frac{n^2}{a^{*2}} \right). \quad (5.3.1)$$

avec  $m$  qui correspond à l'ordre du mode dans la direction de la longueur de la cuve, et  $n$  dans la direction de la largeur de la cuve. Les modes pour lesquels  $n = 0$  correspondent à des mouvements bidimensionnels dans le plan de la figure 5.4.

Le tableau ci-dessous présente les différentes valeurs de fréquences (Hz) pour nos caractéristiques de cuve ( $L^* = 0,231$  m ; largeur de cuve = 0,0995 m) pour une hauteur d'eau de 0,21 m.

m	0	1	2	3	4	5
n						
0	0	<b>1.83</b>	<b>2.599</b>	<b>3.18</b>	<b>3.68</b>	<b>4.11</b>
1	2.81	2.93	<u>3.22</u>	3.58	3.96	4.32
2	3.97	4.02	4.14	4.33	4.56	4.81
3	4.86	4.89	4.96	5.07	5.22	5.39
4	5.61	5.63	5.68	5.76	5.86	5.98
5	6.28	6.29	6.32	6.38	6.46	6.54

tableau 5.1 Les fréquences de ballottement en 2D et 3D (la profondeur du liquide est 210 mm)

On remarque lorsque la fréquence augmente, que les modes à  $n \neq 0$  s'intercalent entre les modes bidimensionnels qui nous intéressent (en caractères gras dans le tableau ci-dessus). Pour exciter expérimentalement ces modes de façon significative il faudrait désaxer l'électroaimant ce qui n'est pas le cas. Il faudra néanmoins vérifier lors de la comparaison que les modes expérimentaux correspondent bien à notre modélisation. Le modèle de ballonnement bidimensionnel peut être calculé par :

$$\begin{aligned} \omega_r^{2D*2}(m) &= g^* k \tanh(k h^*), \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ k &= \frac{m\pi}{L^*}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Pour la longueur de la cuve :  $L^* = 0,231$  m, la largeur de la cuve  $0,099$  m ; nous avons calculé les trois premières fréquences de ballonnement en 2D pour toutes les hauteurs d'eau possible de notre manipulation.

#### La plaque sèche :

Les fréquences propres et les modes propres de la plaque sèche sont calculés en utilisant un code de vibration de plaque en éléments finis (Hinton et al.,1988). L'élément est de type plaque Lagrange Mindlin 9 noeuds et avec interpolation de l'effort tranchant. Le calcul avec le maillage présenté figure A5.1 fournit les modes présentés dans l'annexe 5. Les premières fréquences de flexion sont : 6.897 Hz, 43.07Hz, 121.2 Hz. La première fréquence de torsion est 38.38 Hz.

Lorsque la dimension de la plaque est assez petite par rapport les deux autres, la plaque peut être modélisée par une poutre. Les fréquences propres d'une poutre encastree - libre sont données par : (Géradin et Rixen, 1996).

$$\begin{aligned} \omega_s^2(n) &= \mu_n^4 \frac{EI}{\rho_s A h_p^4} \\ \mu_n &= 1.875, 4.694, 7.855, \dots \left( n > 3, \mu_n \approx (2n-1) \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Si l'on désire évaluer la précision sur ces fréquences propres sèches théoriques, il est facile de le faire dans le cas du modèle poutre. Nous pouvons écrire la fréquence en fonction des grandeurs mesurées, où E est le module de Young estimé, b la largeur de la plaque, e l'épaisseur

de la plaque,  $m$  la masse de la plaque,  $h_p$  la longueur de la plaque,  $h_{pt}$  est longueur totale (partie encastree comprise, il y a trois trous de fixation qui ont un diamètre :  $d = 5$  mm) :

L'équation (5.3.3) se transforme comme :

$$f_s(n) = \frac{\mu_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E \frac{b e^3}{12}}{\rho_s b e h_p^4}}$$

$$\text{donc : } \frac{\Delta f_s}{f_s} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta E}{E} + 2 \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} + 4 \frac{\Delta h_p}{h_p} \right)$$

$$\rho_s = \frac{m}{v},$$

$$\frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta v}{v}$$

$$v = e h_{pt} b - 3\pi e (d/2)^2$$

$$\frac{\Delta v}{v} = e h_{pt} b \left( \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h_{pt}}{h_{pt}} \right) + 3\pi e \left( \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{\Delta e}{e} + 2 \frac{\Delta d}{d} \right)$$

Les valeurs sont :

$$E = (2,1 \pm 0,05) 10^{11} \text{ P}$$

$$b = 0,099 \pm 0,001 \text{ m}$$

$$e = (0,057 \pm 0,010) 10^{-3} \text{ m}$$

$$m = (121,80 \pm 0,01) 10^{-3} \text{ kg}$$

$$h_p = 0,265 \pm 0,001 \text{ m}$$

$$h_{pt} = 0,275 \pm 0,001 \text{ m}$$

$$d = (5 \pm 0,01) 10^{-3} \text{ m}$$

La précision sur  $f_s$  est donc :

$$\frac{\Delta f_s}{f_s} = 4,1 \text{ \%}$$

Les trois premières fréquences propres de flexion sont comparées pour les deux modèles dans le tableau suivant :

modes	$\omega_s^{\text{poutre}}$ (Hz) théorie de poutre	$\omega_s^{\text{plaque}}$ (Hz) théorie de plaque	$\frac{\omega_s^{\text{poutre}} - \omega_s^{\text{plaque}}}{\omega_s^{\text{plaque}}}$ (%)
1	$6.52 \pm 0.28$	6,89	-5,7
2	$40,9 \pm 1.75$	43,1	-5.4
3	$114 \pm 4.9$	121	-6.1

Tableau 5.2 les fréquences propres de la plaque sèche

Si l'ordre de grandeur de la précision du résultat par éléments finis est le même que pour le modèle poutre, les premières fréquences propres des deux modèles présentent une zone commune (figure 5.13). Bien que légèrement inférieure, nous considérerons le modèle poutre comme valide.

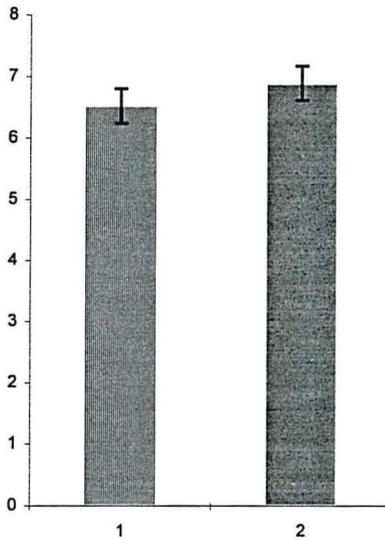


figure 5.13 : Les fréquences propres de la plaque sèche et leurs incertitudes  
(1 : modèle de poutre ; 2 : modèle de plaque)

### 5.3.2 Les fréquences et modes propres du systèmes couplé : résultats théoriques

Les valeurs moyennes :

Lorsque la profondeur du liquide est de 210 mm, nous avons calculé les fréquences et modes propres du système en considérant et ou non la gravité. Elles sont exprimées en Hertz dans le tableau 5.3 et la figure 5.14.

Modes		1	2	3
poutre sèche	$\omega_{s thé}$	6,52	40,9	114
ballotement	$\omega_{f thé}$	1,83	2,60	3,18
couplées I (sans gravité)	$\omega_{c thé}^{\infty}$	2,13	7,61	13,1
couplées II (avec gravité)	$\omega_{c thé}$	1,58	2,42	2,97

Tableau 5.3 Les fréquences propres du système, résultats théorique pour H=0,21 m.

$\omega_{s|thé}$  : fréquences propres non - couplées de la poutre (sèche),

$\omega_{f|thé}$  : fréquences propres du liquide contenu dans un réservoir rigide (ballotement) ;

$\omega_{c|thé}^{\infty}$  : fréquences propres couplée de la poutre immergée sans ondes de gravité ( $F_r \infty$ ) ;

$\omega_{c|thé}$  : fréquences propres du système couplé avec ondes de gravité ( $F_r$  fini) ;

thé : théorique.

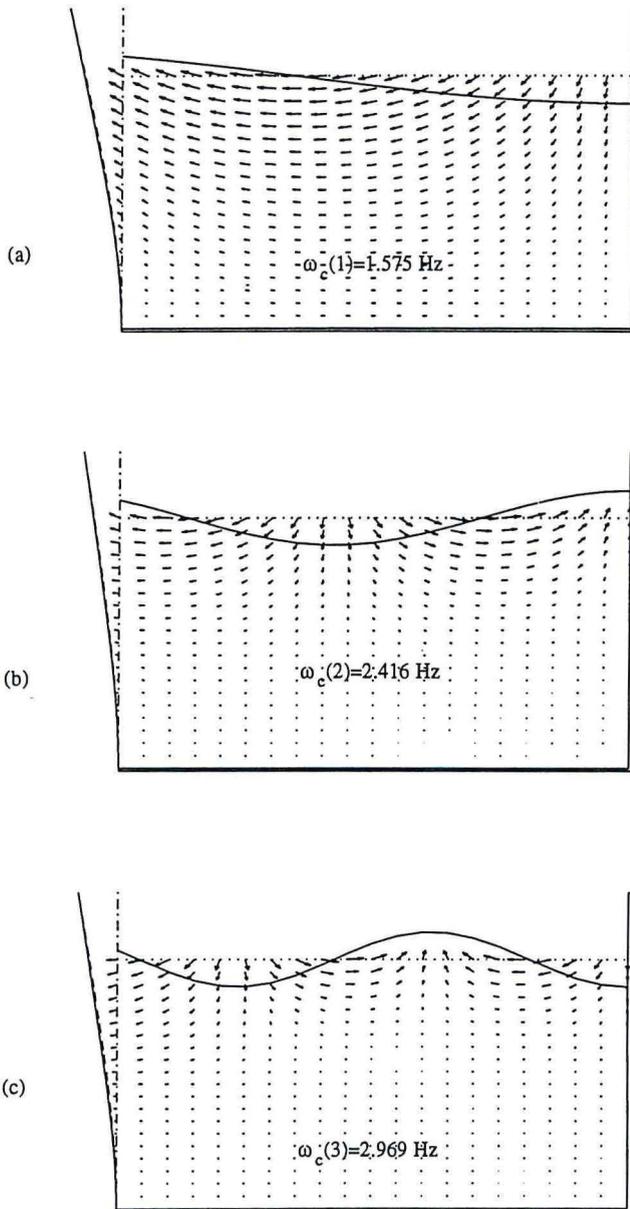


figure 5.14 (a-c) Les fréquences et modes propres théoriques du système couplé et non couplé ( $h = 210$  mm), la gravité est prise en compte, (d-f) la gravité est négligée.

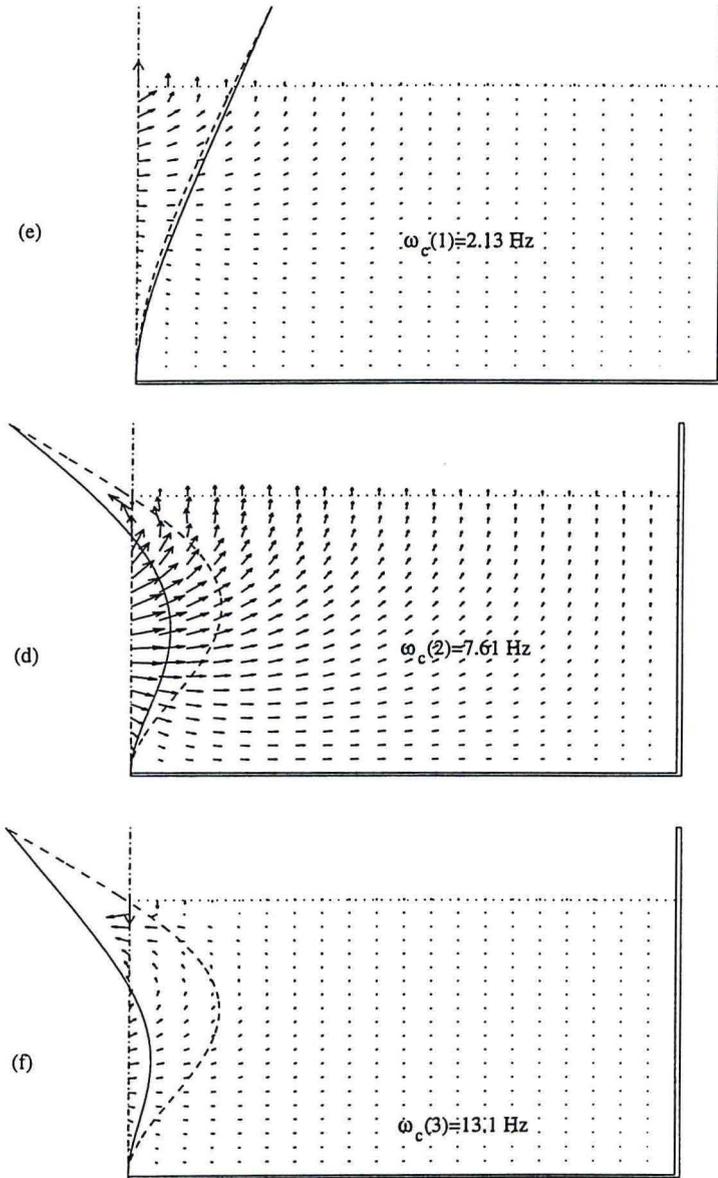


figure 5.14 (d-f) Les fréquences et modes propres théoriques du système couplé et non couplé ( $h = 210$  mm), la gravité est négligée.

Dans la figure 5.14, nous pouvons voir que :

- lorsque la gravité est prise en compte, le premier modes propre couplé de la poutre est similaire au premier mode, mais la différence entre le mode couplé et non couplé du fluide est importante : le noeud de vibration de la surface libre et la fréquence ont changés. La condition cinématique sur l'interface fluide solide tracée sur la figure 5.14 est bien vérifiée dans ce cas là.
- dans le cas où la gravité est négligée, la condition cinématique sur l'interface fluide - poutre n'est pas vérifiée en un seul point (le point de triple ligne sur l'interface fluide - poutre). Ceci est une conséquence de l'hypothèse de nombre de Froude infini. En effet, la condition à la surface libre du fluide ( $\Phi(x, 1) = 0$ ) implique que la composante horizontale de vitesse du fluide doit être nulle sur la surface libre, ce qui est contradictoire avec la condition de la continuité de vitesse sur l'interface fluide - poutre. On a donc une discontinuité de vitesse en ce point triple.
- Incertitudes :  $\omega_c$  est une fonction continue des paramètres fondamentaux ( $h^*$ ,  $L^*$ ,  $B_0$ ,  $G_0$ ,  $g^*$ ), pour étudier l'incertitude sur  $\omega_c$  obtenu par la méthode analytique, il faudrait balayer tous les paramètre de façon aléatoire et retenir les valeurs extrêmes. Si l'évolution de  $\omega_c$  est monotone par rapport à chacun des paramètres, il suffit de calculer sa valeur pour chaque combinaison de valeurs extrêmes possibles. Si de plus la gamme des variations est faible, on peut calculer les dérivées locales et estimer l'incertitude sur  $\omega_c$  en moyennant les variations obtenues. C'est cette méthode simple que nous utiliserons, en prenant soin de faire varier chaque paramètre dans les deux sens et d'évaluer ainsi la linéarité locale.

paramètre	précision n en %	$\omega_c(1)$	$\omega_c(1)$	$\omega_c(2)$	$\omega_c(2)$	$\omega_c(3)$	$\omega_c(3)$
		si + x%	si - x%	si + x%	si - x%	si + x%	si - x%
fréquence de référence en Hz		1,5753	1,5753	2,4160	2,4160	2,9688	2,9688
$h^* = 0,210 \pm 0,001$	0,48	1.5720	1.5786	2.4134	2.4187	2.9644	2.9732
$h_p^* = 0.266 \pm 0.001$	0.37	1.5751	1.5754	2.4158	2.4163	2.9683	2.9693
$L^* = 0,230 \pm 0,001$	0,43	1.5717	1.5789	2.4111	2.4210	2.9637	2.9739
$\rho_s^* = 7800 \pm 168$	2.15	1.5751	1.5755	2.4157	2.4164	2.9681	2.9696
$E I^* = 0.3225 \pm 0.0253$	7.8	1.5894	1.5597	2.4265	2.4048	2.9833	2.9537
$\rho_r^* = 1000 \pm 0$	0	1,5753	1,5753	2,4160	2,4160	2,9688	2,9688
$g^* = 9,81 \pm 0$	0	1,5753	1,5753	2,4160	2,4160	2,9688	2,9688

tableau 5.4 L'incertitude sur  $\omega_c$  obtenu par la méthode analytique (h=0,21 m)

La précision de chaque valeur théorique est donnée par la somme des valeurs absolues des perturbations :

$$\Delta\omega_c(i) = \Delta\omega_c^h(i) + \Delta\omega_c^L(i) + \Delta\omega_c^{\rho_s}(i) + \Delta\omega_c^{EI}(i)$$

Nous obtenons donc :

$$\omega_c(1) = 1,57 \pm 0.022 \text{ Hz}$$

$$\omega_c(2) = 2,42 \pm 0.014 \text{ Hz}$$

$$\omega_c(3) = 2,97 \pm 0.018 \text{ Hz}$$

### 5.3.3 L'évolution des fréquences et modes propres du système couplé en fonction du remplissage : résultats théoriques

Nous avons calculé les fréquences propres du système couplé et les fréquences du ballonnement du fluide dans un réservoir rigide pour différentes profondeur d'eau (figure 5.15).

Les évolutions sont similaires à celle d'une plaque encastree - encastree (l'exemple de Bauer dans le chapitre précédent).

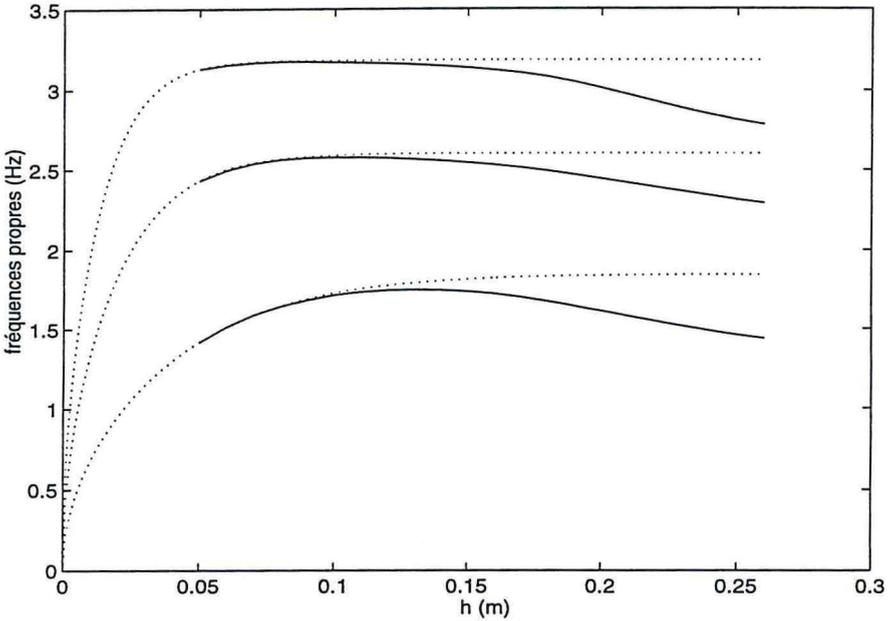


figure 5.15 L'évolution des fréquences couplées théoriques en fonction du niveau d'eau

— : fréquence de ballonnement dans un réservoir rigide de même dimension,

— o — : fréquences couplées du système

Pour une profondeur d'eau « suffisante », on remarque que les fréquences couplées s'éloignent des fréquences de ballonnement : le mouvement de la structure commence à ne plus être négligeable devant celui du fluide. L'approximation par une paroi rigide n'est plus valable.

Comparons les deux hypothèses de nombre de Froude infini et fini sur la figure 5.16.

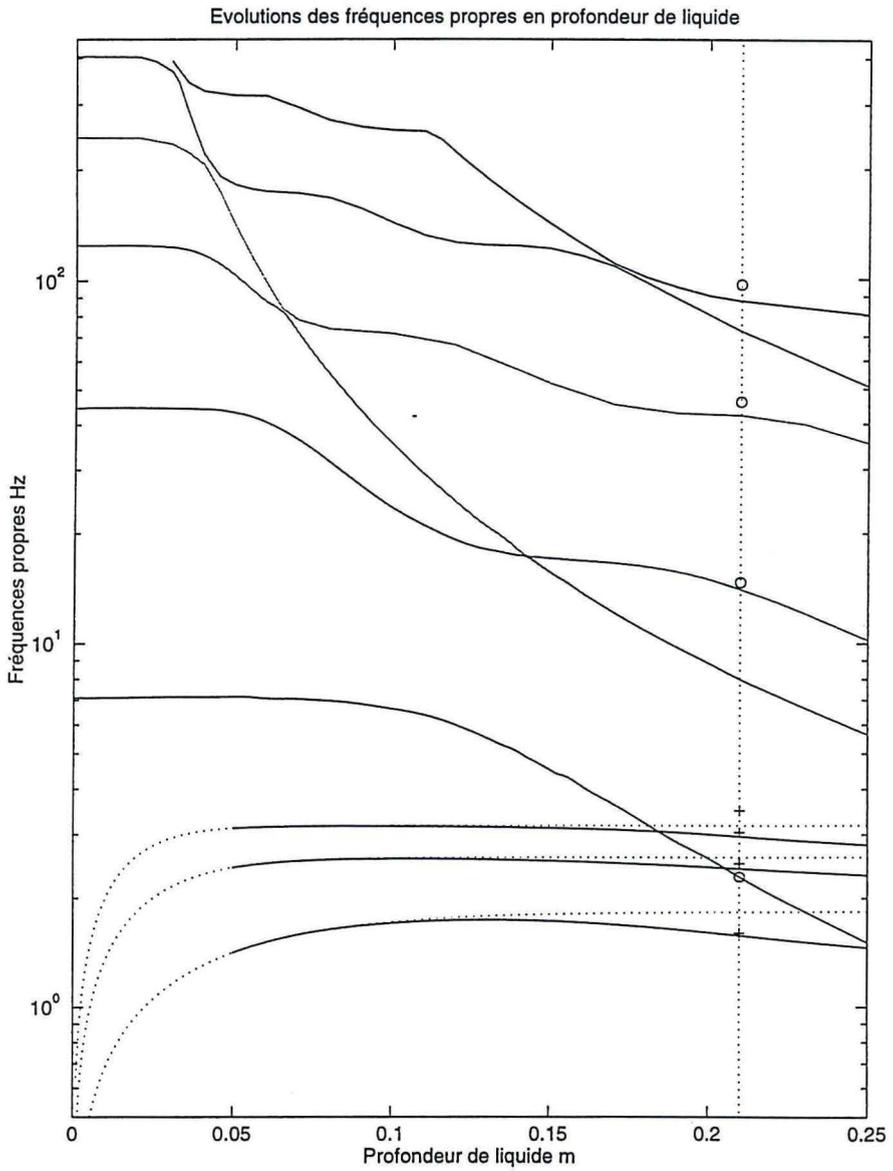


figure 5.16 Les fréquence propres du système couplé -.-.- :  $Fr = \infty$  ; \_\_\_\_ :  $Fr = \text{fini}$  ; ..... : du fluide non couplé.

Dans la figure 5.16, nous pouvons voir que les deux hypothèses donnent des résultats significativement différents. Si nous prenons en compte la gravité, la première fréquence propre du système est proche de la première fréquence propre du ballonnement du fluide, pour une profondeur d'eau petite. Lorsque la profondeur est assez grande, la fréquence couplée est significativement inférieure de celle du ballonnement. Si nous ne prenons pas en compte la gravité, la première fréquence du système peut être considérée comme la fréquence de la plaque sèche modifiée par l'inertie du fluide : sa nature est donc toute autre. Lorsque la profondeur d'eau est aussi petite, l'influence du fluide sur la plaque est petite aussi, donc la fréquence couplée est voisine de la fréquence de la plaque sèche. En revanche, lorsque la profondeur d'eau augmente, la fréquence couplée diminue rapidement car la masse ajoutée du fluide sur la plaque est plus importante dans ce cas. Ce sont ces évolutions que nous constatons sur la figure ci-dessus.

#### 5.4. Comparaison des résultats analytiques et expérimentaux

Pour la profondeur d'eau est 0,210 m, et pour une tension d'excitation de 1.65 volts, les fréquences propres expérimentales du système couplé sont présentées dans le tableau 5.5 et la figure 5.17 : (en Hz). Il en est fait de même avec les fréquences couplées théoriques.

ordre du mode	$\omega_s$ thé. poutre	$\omega_s$ thé. plaque	$\omega_f$ thé. ballt.	$\omega_c$ théorique	$\omega_c$ exp.
1	$6.52 \pm 0,28$	7,24	1,83	$1,57 \pm 0.022$	$1,56 \pm 0.02$
2	$40,8 \pm 1,75$	45,2	2,59	$2,42 \pm 0.014$	$2,39 \pm 0.02$
3	$114 \pm 4,9$	127	3,18	$2,97 \pm 0.018$	$2,95 \pm 0.02$

tableau 5.5 Les fréquences propres du système couplé et non couplé théoriques et expérimentaux

Nous pouvons voir que les résultats de la méthode analytique sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Nous les reportons dans la figure 5.17.

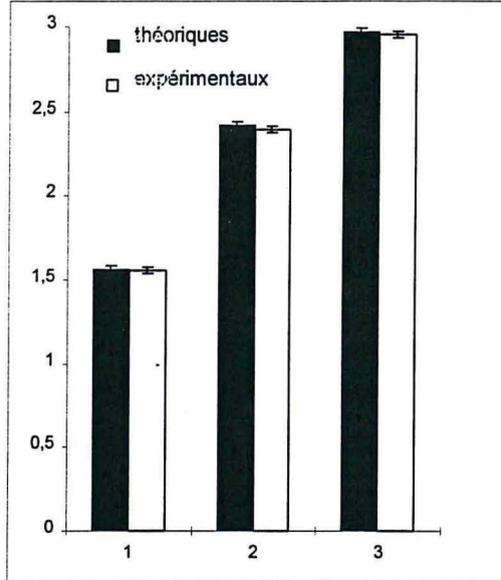


figure 5.17 Les fréquences propres du système couplé pour la profondeur d'eau est 210 mm, théoriques et expérimentaux

### Conclusion

Nous avons détaillé les différents montages expérimentaux qui ont été faits pour observer les couplages entre une plaque et les ondes de gravité dans un réservoir et avons utilisé finalement une excitation électromagnétique de la structure. On a ainsi la possibilité de mettre en évidence les modes couplés du système dans le plan qui nous intéresse. Pour mesurer les amplitudes de réponse de la plaque et de la surface libre, plusieurs méthodes ont aussi été essayées. La précision de la mesure d'amplitude de la surface libre est difficile à améliorer. On pourra envisager une cellule basée sur une fibre optique montée sur un vernier en translation verticale. Les fréquences de résonance du système obtenues par la méthode analytique présentée au chapitre 4 sont en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux établis pour une seule hauteur d'eau et pour les 3 premiers modes propres.

### Conclusion générale et perspectives

L'analyse du comportement dynamique des réservoirs déformables contenant un liquide avec une surface libre passe nécessairement par la détermination de leurs fréquences et modes propres afin d'éviter tout phénomène de résonance. Les effets d'inertie du fluide sur la structure (la masse ajoutée classique) sont bien connus, par contre les effets dus à la présence de la surface libre du fluide et de la gravité (le ballotement) le sont moins. C'est ce type de problème qui a été étudié analytiquement et expérimentalement.

De façon classique, nous développons les fonctions inconnues (potentiel de l'écoulement, déplacements dynamiques de la structure) en série, puis nous écrivons les équations du problème sous la forme d'équations de compatibilité entre les coefficients de ces développements. L'existence de solutions non nulles est alors donnée par la nullité du déterminant, ce que nous avons résolu numériquement.

Dans notre étude, à l'aide d'un modèle simple (masse - ressort - amortisseur - liquide), nous mettons en évidence le couplage entre le mode de la structure et les modes de ballotement du fluide. Ce type de modèle n'est valide que pour la structure rigide mobile, pour laquelle la forme du mode couplé pour la structure est connue. Cette étude est faite en fonction du nombre de Froude. Nous avons trouvé que la masse ajoutée d'un liquide contenu dans un réservoir avec surface libre en présence de la gravité peut être très différente de celle obtenue si les effets d'inertie sont seulement pris en compte (le nombre de Froude infini). La masse ajoutée, image de la pression du fluide sur la structure, peut être positive, négative ou nulle. Lors de ses oscillations, la surface libre échange de l'énergie avec la structure.

Pour une structure déformable, nous avons étudié le couplage entre les ballottements et une poutre immergée dans un réservoir. Dans ce cas là, la forme propre de la poutre est inconnue.

Une solution linéaire analytique a été obtenue en décomposant la forme propre de mode en deux fonctions inconnues, l'une pour la portion émergée et l'autre pour la portion immergée. Cette méthode a été vérifiée à l'aide de résultats existants dans la littérature (dans le cas où la gravité n'était pas prise en compte). Lorsque la pesanteur n'est plus négligeable cette méthode est comparée aux résultats de Bauer et al (1968).

Une expérience a été mise en oeuvre pour une poutre couplée avec un fluide dans le cas où la pesanteur devait être considérée. Les résultats expérimentaux ont confirmé ceux obtenus analytiquement.

La possibilité d'accéder à des solutions analytiques, présente un double avantage. D'une part, ce type d'approche permet d'accéder à une meilleure compréhension des phénomènes physiques et de leur évolution en fonction des différents paramètres concernés. D'autre part, les résultats ainsi obtenus, permettent de valider les programmes de calcul numérique nécessaires pour traiter les structures plus complexes. Etudes analytiques et numériques sont complémentaires, la mise au point d'un calcul numérique performant pour une classe de problèmes donnés, devient un prolongement naturel de notre travail.

Il nous faudra aussi prolonger cette étude par la prise en compte des non-linéarités du système, la méthode d'obtention des équations ayant été déjà présentée dans ce mémoire. Le travail expérimental sur l'aspect non linéaire du couplage est déjà entamé au sein de notre équipe.

**Annexe 1. Loi de comportement linéaire élastique d'une poutre et les efforts généralisés au point actuel**

Nous reprendrons les hypothèses classiques d'une cinématique de section de type Bernoulli :

- une section plane avant déformation, reste plane après déformation,
- une section perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation reste perpendiculaire à la fibre moyenne déformée.

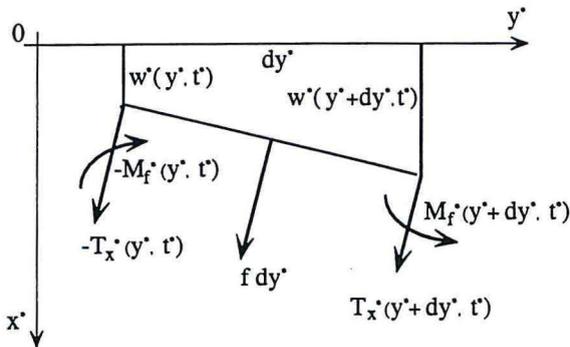


Figure A1.1 Equilibre d'un tronçon de poutre

La loi de comportement locale sera choisie comme élastique linéaire et fera apparaître le module de Young ( $E^*$ ). La théorie des poutres liera les efforts généralisés aux déformations généralisées par l'intermédiaires de coefficients de rigidité. Dans la mesure où nous nous intéressons aux mouvements transverses de cette fibre moyenne, notés  $w^*(y^*, t^*)$ , la rigidité qui apparaît est composée du module de Young et du moment quadratique de la section droite autour de l'axe  $z^*$ , noté  $I^*$ . Si l'on note  $M_f$  le moment fléchissant autour de l'axe  $z^*$  et  $T_x$  l'effort tranchant dans la direction perpendiculaire à la fibre moyenne. Montrons que l'on a pour une poutre à fibre moyenne droite d'axe  $y^*$  :

$$T_x = \frac{\partial M_f}{\partial y^*} \quad (A1.1)$$

$$M_f = - E^* I^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \quad (A1.2)$$

La première équation provient de l'équilibre d'un tronçon de poutre, la seconde, de la loi de comportement.

### A1.1 équilibre d'un tronçon de poutre

Si l'on note  $T_x$  l'effort tranchant perpendiculaire à la position de la ligne moyenne déformée, soumise à un chargement linéique noté  $f$ , on aura le schéma ci-contre, où  $f dy^*$  représente l'effort extérieur appliqué sur le tronçon de longueur  $dy^*$  au milieu de celui-ci. Le vecteur  $f$  sera ultérieurement la valeur de la pression portée par la normale au segment. On notera tout de suite que l'on ne précise pas ici comment sont calculés les efforts généralisés : on pourra donc les supposer ici calculés au point actuel  $w^*(y^*, t^*)$  et non au point de position moyenne :

$$w_0^*(y^*, t^*) = w_0 \quad (A1.3)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au tronçon en translation dans la direction  $x^*$  avec  $\rho_s^*$  la masse linéique de la poutre nous donne :

$$\left( T_x(y^* + dy^*, t^*) - T_x(y^*, t^*) + f dy^* \right) \cos\left( \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) = \rho_s^* dy^* \frac{\partial^2 w^*(y^* + dy^*/2, t^*)}{\partial t^{*2}} \quad (A1.4)$$

En rotation autour de l'axe  $z$  en négligeant les inerties de rotation on obtient :

$$M_f(y^* + \frac{dy^*}{2}, t^*) - M_f(y^*, t^*) + \left( - f dy^* \frac{dy^*}{2} - T_x(y^* + dy^*, t^*) dy^* \right) = 0 \quad (A1.5)$$

Si l'on développe les termes par rapport à leur valeur en  $y^*$  :

$$T_x(y^* + dy^*, t^*) = T_x(y^*, t^*) + dy^* \frac{\partial T_x(y^*, t^*)}{\partial y^*} + o(dy^*) \quad (A1.6)$$

$$M_f(y^* + dy^*, t^*) = M_f(y^*, t^*) + dy^* \frac{\partial M_f(y^*, t^*)}{\partial y^*} + o(dy^*) \quad (A1.7)$$

Les deux équations ci-dessus se simplifient en :

$$\left( \frac{\partial T_x(y^*, t^*)}{\partial y^*} dy^* + f dy^* \right) \cos\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right) = \rho_s^* dy^* \left( \frac{\partial^2 w^*(y^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + \frac{dy^*}{2} \frac{\partial^3 w^*(y^*, t^*)}{\partial t^{*2} \partial y^*} \right) \quad (\text{A1.8})$$

$$\frac{\partial M_f(y^*, t^*)}{\partial y^*} dy^* + \left( -f dy^* \frac{dy^*}{2} - \left( T_x(y^*, t^*) + dy^* \frac{\partial T_x(y^*, t^*)}{\partial y^*} \right) dy^* \right) = 0 \quad (\text{A1.9})$$

Pour les mouvements de faibles amplitude, et de faible pente,

$$\cos\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right) = 1 - o\left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right) \quad (\text{A1.10})$$

On obtient en divisant chaque équation par  $dy^*$  et en faisant tendre  $dy^*$  vers 0 :

$$\left( \frac{\partial T_x(y^*, t^*)}{\partial y^*} + f \right) = \rho_s^* \frac{\partial^2 w^*(y^*, t^*)}{\partial t^{*2}} \quad (\text{A1.11})$$

$$\frac{\partial M_f(y^*, t^*)}{\partial y^*} - T_x(y^*, t^*) = 0 \quad (\text{A1.12})$$

Soit en les combinant :

$$\rho_s^* \frac{\partial^2 w^*(y^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial^2 M_f(y^*, t^*)}{\partial y^{*2}} = f \quad (\text{A1.13})$$

## A1.2 Loi de comportement

Nous reprendrons simplement le chapitre 14 du livre de Kerguignas et Caignaret (1977), en faisant simplement remarquer que la loi de comportement est locale et ne préjuge donc pas de la manière dont sera calculé le moment fléchissant et l'effort tranchant. Dans le cas de la flexion simple, le rayon de courbure  $R(y^*, t^*)$  est lié à la flèche  $w^*(y^*, t^*)$  par :

$$R(y^*, t^*) = \frac{\left( 1 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}} \quad (\text{A1.1.14})$$

Sous l'hypothèse que les pentes restent faibles, au premier ordre on obtient classiquement

$$R(y^*, t^*) = \frac{1}{\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}} \quad (\text{A1.15})$$

Cette courbure est liée au moment fléchissant et on a :

$$M_f^* = -E^* I^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \quad (\text{A1.16})$$

avec l'intégrale dans la section droite  $(G, x^*, z^*)$  si elle est rectangulaire d'épaisseur  $e^*$  de largeur  $b^*$ ,

$$I^* = \int_{z^* = -\frac{b^*}{2}}^{\frac{b^*}{2}} \int_{x^* = -\frac{e^*}{2}}^{\frac{e^*}{2}} x^{*2} dx^* dz^* \quad (\text{A1.17})$$

### A1.3 équation finale

Nous combinons la loi de comportement de la fibre moyenne et le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho_s^* \frac{\partial^2 w^*(y^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + E^* I^* \frac{\partial^4 w^*(y^*, t^*)}{\partial y^{*4}} = f \quad (\text{A1.18})$$

Cette équation est donc valable dans le cas des faibles pentes  $\left( \frac{\partial w^*(y^*, t^*)}{\partial t^*} \ll 1 \right)$ , avec une cinématique de type Bernoulli, dans le cas d'une loi de comportement linéaire élastique et les efforts généralisés étant calculés au point actuel  $w^*(y^*, t^*)$ .  $f$  est donc représentatif de la pression au point actuel.

### Annexe 2. Masses ajoutées généralisées

La théorie des masses ajoutées consiste à remplacer l'obstacle et le fluide par un système équivalent d'un point de vue inertiel (masse et moment d'inertie).

Calculons la masse ajoutée dans le cas d'une translation et une rotation de l'obstacle, pour un domaine fluide infini.

Le repère  $Oxyz$  est lié au corps ( $O$  est le centre gravité par exemple), le mouvement de l'obstacle sera une translation et une rotation :  $\bar{V}_0$  et  $\bar{\Omega}_0$ .

La vitesse d'un point  $S$  de l'obstacle repéré par rapport à

$O$  par  $\bar{x}$  est tel que :

$$\bar{V}_s = \bar{V}_0 + \bar{\Omega}_0 \wedge \bar{x}$$

où :

$$\bar{V}_0 = V_{0i} \bar{e}_i$$

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_{0i} \bar{e}_i$$

L'énergie cinétique du fluide :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega_e} (\varphi_{,i})^2 d\Omega$$

où  $\varphi$  est le potentiel de vitesse du fluide qui doit être régulier à l'infini et satisfaire:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta\varphi = 0, & \text{dans } \Omega_e \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \bar{V}_s \cdot \bar{n}, & \text{sur } \partial\Omega_e \end{cases}$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique du fluide :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{\partial\Omega_e} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma$$

Décomposons  $\varphi$  pour les mouvements de translation et de rotation.

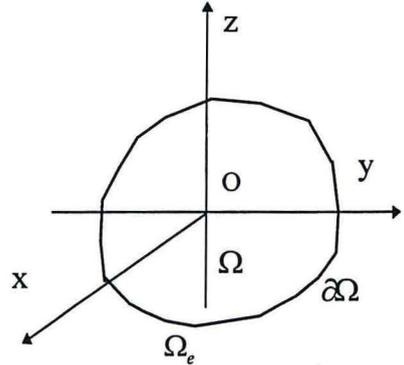
Soit  $\varphi_i$  tel que  $\bar{V}_0 = \bar{e}_i$  et  $\bar{\Omega}_0 = \bar{0}$ ,

$\varphi'_i$  tel que  $\bar{V}_0 = \bar{0}$ , et  $\bar{\Omega}_0 = \bar{e}_i$

Le système (1) étant linéaire :

$$\varphi = V_{0i} \varphi_i + \Omega_{0i} \varphi'_i,$$

$$\Delta \varphi_i = \Delta \varphi'_i = 0, \text{ dans } \Omega$$



$$\frac{\varphi_i}{n} = n_i, \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\varphi'_i}{n} = \varepsilon_{ijk} \Omega_{0j} x_k, \text{ sur } \partial\Omega$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{\partial\Omega} (V_{0i} \varphi_i + \Omega_{0i} \varphi'_i) \left( V_{0j} \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} + \Omega_{0j} \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \left( \int_{\partial\Omega} \varphi_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} d\sigma \right) V_{0i} V_{0j} + \frac{1}{2} \rho \left( \int_{\partial\Omega} \varphi'_i \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} d\sigma \right) \Omega_{0i} \Omega_{0j} \\ + \frac{1}{2} \rho \left( \int_{\partial\Omega} \varphi_i \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} d\sigma \right) V_{0i} \Omega_{0j} + \frac{1}{2} \rho \left( \int_{\partial\Omega} \varphi'_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} d\sigma \right) \Omega_{0i} V_{0j}$$

Soit

$$E_c = \frac{1}{2} m_{ij} V_{0i} V_{0j} + \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_{0i} \Omega_{0j} + \frac{1}{2} K_{ij} V_{0i} \Omega_{0j} + \frac{1}{2} \bar{K}_{ij} \Omega_{0i} V_{0j}$$

Il est clair que  $m_{ij} = m_{ji}$  et  $I_{ij} = I_{ji}$ , mais par la formule de Green :

$$\int_{\Omega_c} \varphi_i \varphi'_{j,kk} d\Omega = 0 = \int_{\partial\Omega} \varphi_i \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega_c} \varphi_{i,k} \varphi'_{j,k} d\Omega$$

et

$$\int_{\Omega_c} \varphi'_j \varphi'_{i,kk} d\Omega = 0 = \int_{\partial\Omega} \varphi'_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega_c} \varphi_{i,k} \varphi'_{j,k} d\Omega$$

on a :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi'_i \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \varphi'_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} d\sigma$$

donc  $K_{ij} = \bar{K}_{ji}$ .

$$E_c = \frac{1}{2} m_{ij} V_{0i} V_{0j} + \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_{0i} \Omega_{0j} + K_{ij} V_{0i} \Omega_{0j}$$

avec

$$m_{ij} = \rho \int_{\partial\Omega} \varphi_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} d\sigma,$$

$$I_{ij} = \rho \int_{\partial\Omega} \varphi'_i \frac{\partial\varphi'_j}{\partial n} d\sigma,$$

$$K_{ij} = \rho \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j'}{\partial n} d\sigma$$

où

$$\varphi_i : \begin{cases} \Delta \varphi_i = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \bar{e} \cdot \bar{n} \end{cases}$$

$$\varphi_i' : \begin{cases} \Delta \varphi_i' = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i'}{\partial n} = (\bar{e} \wedge \bar{x}) \cdot \bar{n} \end{cases}$$

On peut introduire le tenseur de masse ajoutée généralisée  $M_{\bar{i}\bar{j}}$  (dans  $\mathbb{R}^6$ ),  $\bar{i}, \bar{j} = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

$$M_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{bmatrix} m_{ij} & K_{ij} \\ K_{ij} & I_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{\bar{i}} = \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_i' \end{Bmatrix}, \quad \varphi_i : i = 1, 2, 3, \quad \varphi_i' : i = 4, 5, 6.$$

$$V_{\bar{o}\bar{i}} = \begin{Bmatrix} V_{oi} \\ \Omega_{oi} \end{Bmatrix}, \quad V_{oi} : i = 1, 2, 3, \quad \Omega_{oi} : i = 4, 5, 6.$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_{\bar{i}\bar{j}} V_{\bar{o}\bar{i}} V_{\bar{o}\bar{j}}$$

$M_{\bar{i}\bar{j}}$  a 21 composantes. Il faut faire attention  $K_{\bar{i}\bar{j}} \neq K_{\bar{j}\bar{i}}$  ( $\bar{i} = 1$  à 6), mais  $K_{\bar{i}\bar{j}} = \bar{K}_{\bar{j}\bar{i}}$  ( $\bar{i} = 1$  à 3)

La matrice est diagonalisable, et ses valeurs propres sont réelles et non négatives.

Pour une sphère :

$$M_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{bmatrix} \frac{\rho \Lambda_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho \Lambda_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho \Lambda_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\Lambda_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3$  est le volume de la sphère.  $\frac{\rho \Lambda_0}{2}$  est la moitié de la masse d'eau que pourrait contenir la sphère.

Si le corps est de révolution d'axe  $\bar{X}$  :

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, I_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

Pour un cylindre circulaire :

$$\bar{V}_0 \cdot \bar{e}_3 = 0, \bar{\Omega}_0 \cdot \bar{e}_1 = \bar{\Omega}_0 \cdot \bar{e}_2 = 0$$

$\lambda_0 = \pi r_0^2$  est l'aire de la section du cylindre.  $\rho\lambda_0$  est la masse d'eau que pourrait contenir le cylindre.

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} \rho\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Annexe 3. Les éléments de la matrice  $[\Lambda]_{8 \times 8}$**

Les éléments de la matrice  $[\Lambda]_{8 \times 8}$  sont donnés comme suit ;  $i = 1, 2, 3$  ou  $4$  et  $j = 5, 6, 7$  or  $8$ .

$$\Lambda(1, i) = H_i(0) = F_i(0) + K_i^\beta + \sum_{m=1}^{\infty} K_i^{\alpha_m} ,$$

$$\Lambda(1, j) = 0 ,$$

$$\Lambda(2, i) = H_i'(0) ,$$

$$\Lambda(2, j) = 0 ,$$

$$\Lambda(3, i) = H_i(h) = F_i(h) + K_i^\beta \cosh(qh) + \sum_{m=1}^{\infty} K_i^{\alpha_m} \cos(p_m h) ,$$

$$\Lambda(3, j) = - F_{j-4}(h) ,$$

$$\Lambda(4, i) = H_i'(h) = F_i'(h) + q K_i^\beta \sinh(qh) - \sum_{m=1}^{\infty} p_m K_i^{\alpha_m} \sin(p_m h) ,$$

$$\Lambda(4, j) = - F_{j-4}'(h) ,$$

$$\Lambda(5, i) = H_i''(h) = F_i''(h) + q^2 K_i^\beta \cosh(qh) - \sum_{m=1}^{\infty} p_m^2 K_i^{\alpha_m} \cos(p_m h) ,$$

$$\Lambda(5, j) = - F_{j-4}''(h) ,$$

$$\Lambda(6, i) = H_i'''(h) = F_i'''(h) + q^3 K_i^\beta \cosh(qh) + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^3 K_i^{\alpha_m} \sin(p_m h) ,$$

$$\Lambda(6, j) = - F_{j-4}'''(h) ,$$

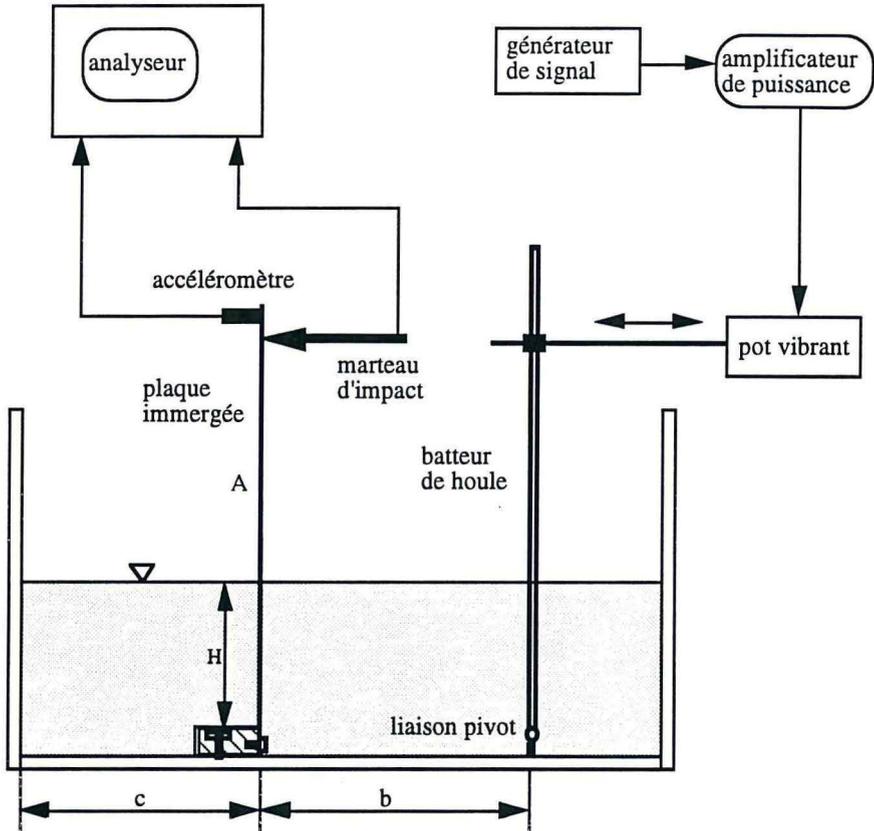
$$\Lambda(7, i) = 0 ,$$

$$\Lambda(7, j) = F_{j-4}(h_p) ,$$

$$\Lambda(8, i) = 0 ,$$

$$\Lambda(8, j) = F_{j-4}'(h_p) .$$

*Annexe 4. Le dispositif expérimental de type batteur de houle*



$A$ =longueur de plaque  
 $t$ =épaisseur de plaque  
 $b=201$  mm  $c=188$  mm

$W$ =largeur de plaque  
 $H$ =profondeur d'eau  
 $d=1-2$  mm

figure A4.1 Le dispositif expérimental de type de générateur de houle



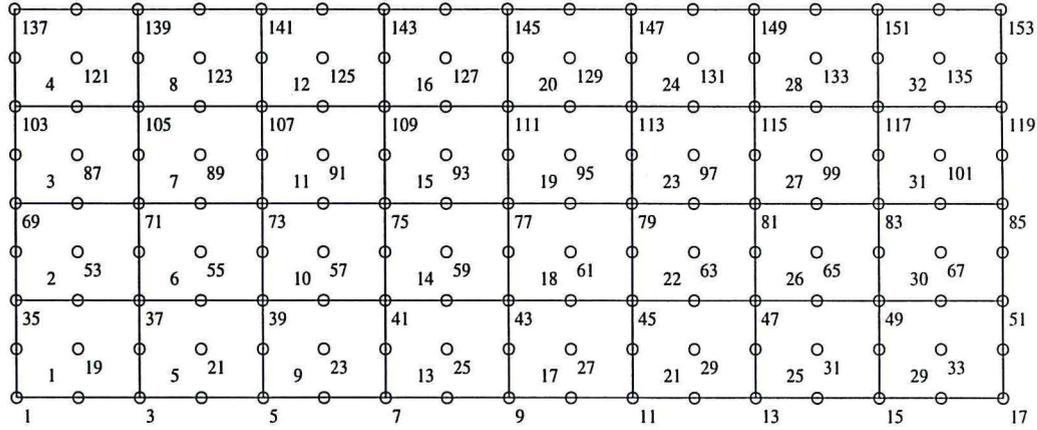
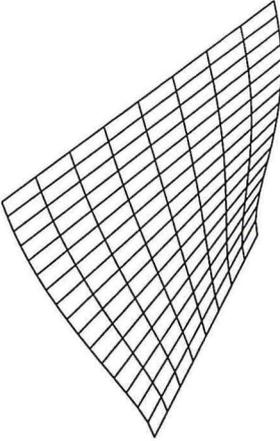
*Annexe 5. Le calcul de modes propres de la plaque sèche en EF*

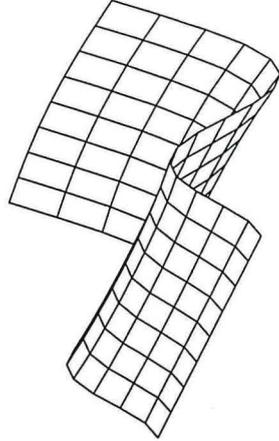
Figure A5.1 Le maillage de calcul en EF

Le maillage du calcul en EF pour la plaque

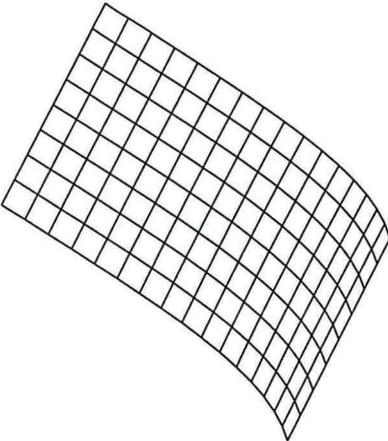
mode (0,1) (38,38 Hz)



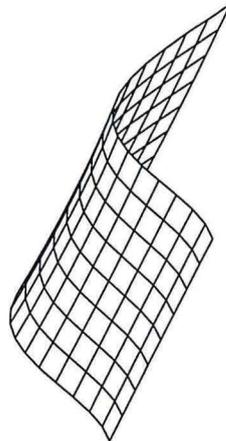
mode (3,0) (121,2 Hz)



mode (1,0) (6,897 Hz)



mode (2,0) (43,07 Hz)



Les modes propres de la plaque sèche

figure A5.2 Les modes propres de la plaque calculés par la méthode de éléments finis

## ***Annexe 6 Mesure par une méthode optique du profil de la surface libre d'un liquide en mouvement***

Nous décrivons la méthode adoptée pour mesurer le profil de la surface libre d'un liquide transparent contenu dans un réservoir. Le principe de cette méthode est fondé sur la loi de la réfraction de la lumière. Sur le fond du réservoir est tracé un quadrillage, on calcule le profil de la surface par un traitement numérique des images du quadrillage. La simulation numérique de l'expérience permettra d'étudier la précision de la méthode. Le résultat de l'expérience dans le cas d'un réservoir rectangulaire à une paroi mobile confirme la faisabilité de la méthode adoptée.

### **A6.1. INTRODUCTION**

Nous nous proposons de mesurer le profil de la surface d'un liquide transparent : le profil d'une onde stationnaire dans un réservoir.

La méthode que nous adoptons utilise la loi de la réfraction de la lumière. Sur le fond du réservoir est tracé un quadrillage. L'image de ce quadrillage, à travers la surface libre, est déformée, si la surface n'est pas plane. Des photos permettent de comparer le quadrillage à son image déformée. Les déplacements de noeuds sont liées à la forme de la surface et la profondeur du liquide.

Pour estimer théoriquement la sensibilité de la méthode et détecter l'erreur systématique, on effectue une simulation numérique de l'expérience.

Les résultats expérimentaux obtenus par cette méthode, pour un réservoir rectangulaire à une paroi mobile, sont présentés dans le paragraphe A6.4.

### **A6.2. PRINCIPE DE LA METHODE**

Une onde stationnaire d'un réservoir rectangulaire est représentée sur la figure A6.1. Nous nous placerons dans la cas des hypothèses simplificatrices suivantes : la largeur du réservoir est suffisamment petite par rapport à la longueur de celui-ci, le problème est considéré plan. (toute coupe dans le plan  $(x, y)$  donne la même image de surface).

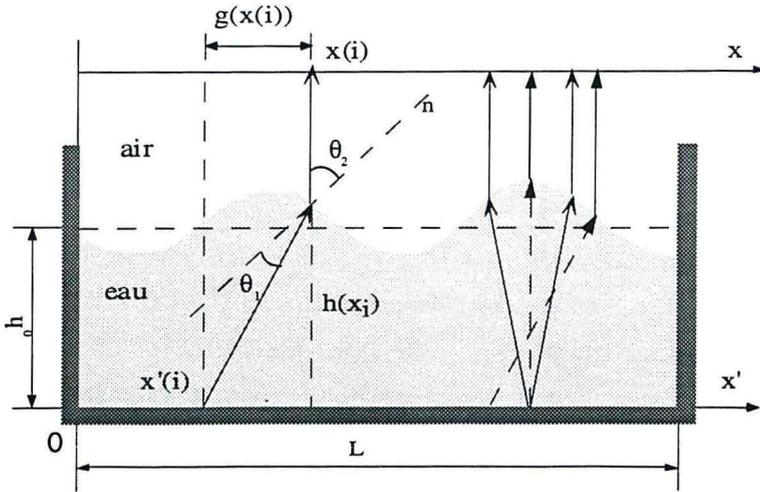


figure A6.1. Le principe de la méthode

Sur le fond est tracé un quadrillage avec noeuds, soit  $x'$  l'abscisse de noeud,  $x$  l'abscisse de l'image de  $x'$  à travers la surface. L'ordonnée  $h(x)$  est le profil de surface libre. La loi de la réfraction de la lumière est :

$$\beta = \frac{\sin(\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1)}$$

( $\beta = 1,33$  pour l'eau et l'air) , pour des angles  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  suffisamment petits :

$$\beta = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \quad (\text{A6.1})$$

Les relations géométriques sont :

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\frac{x - x'}{h(x)} \quad (\text{A6.2})$$

$$\frac{x - x'}{h(x)} = -\frac{dh(x)}{dx} \quad (\text{A6.3})$$

La fonction :

$$g(x) = x - x' \quad (\text{A6.4})$$

est mesurée sur la photo, image du quadrillage.

Des équations précédentes, on peut déduire la relation qui lie  $h(x)$  à  $g(x)$  :

$$h(x) dh(x) = \frac{\beta}{\beta-1} g(x) dx$$

$$d'où : \int_0^x h(x) dh(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\beta-1} g(x) dx \quad (A6.5)$$

Si  $L$  est la longueur,  $h_0$  la profondeur du liquide au repos, la condition de la conservation de volume sera :

$$\int_0^L h(x) dx = L h_0 \quad (A6.6)$$

Par résolution numérique de (A6.5) et (A6.6), on en déduit le profil  $h(x)$ .

Cette méthode ne peut être utilisée que pour des angles de réfraction relativement faibles. Cela correspond à définir, une amplitude  $A_{\max}$  (figure A6.2) au-dessus de laquelle on ne peut retrouver l'ordre dans lequel apparaissent les valeurs  $x(i)$ . Cette amplitude maximale dépend du numéro du mode ( $N_w$ ). Ceci peut être provoqué comme le montre la figure ci-dessous, par le croisement de deux images ( $x(i+1) < x(i)$ ), par le fait qu'une ligne  $x'(i)$  se dédouble pour donner deux valeurs  $x_1(i)$  et  $x_2(i)$ , ou que le rapport  $\frac{a}{h_0}$  est si grand que le calcul de l'intégrale dans l'équation (6) ne fournit qu'une très mauvaise précision sur la valeur de  $h(o)$ .

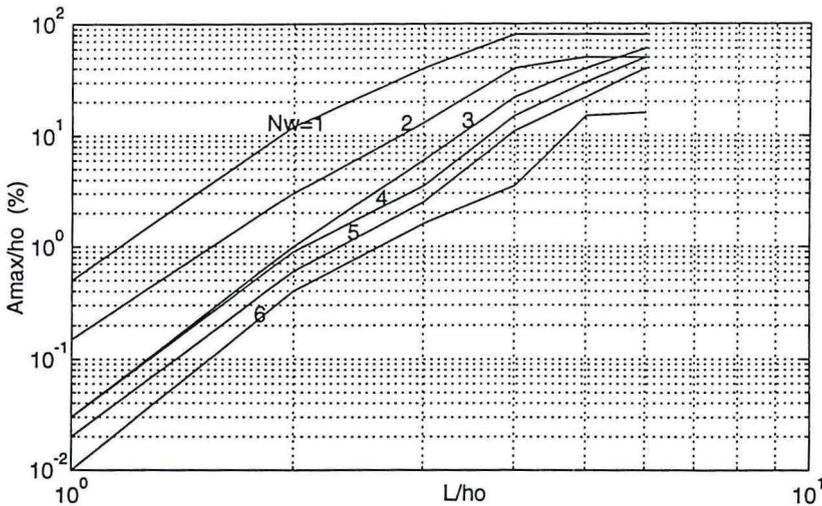


figure A6.2. L'amplitude maximale

### A6.3. L'EXPERIENCE SIMULATION NUMERIQUE DE

Pour estimer l'erreur systématique et l'erreur aléatoire de la méthode, on simule un jeu de points expérimentaux : on calcule l'image du quadrillage à travers une surface simple que nous donnons (par exemple, une surface sinusoïdale) :

$$h_{théo} = h_0 + a \cos(ax) \quad (A6.7)$$

où :  $a = \frac{N_w \pi}{L}$ , ( $N_w = i$ ,  $i$  est le  $i^{ème}$  mode),  $h_0$  est la profondeur du liquide au repos et  $a$  est l'amplitude d'une onde stationnaire.

On génère alors par calcul la fonction  $g(x)$ , puis on recherche à la aide du logiciel le profil  $h_{cal}(x)$  par (A6.5) et (A6.6). La différence entre  $h_{cal}(x)$  et  $h_{théo}(x)$  est définie comme l'erreur systématique :

$$E_s(x) = \frac{h_{cal}(x) - h_{th}(x)}{a} \quad (A6.8)$$

Les influences sur  $E_s(x)$  de  $L$  et  $a$  sont représentées sur la figure A6.3, pour deuxième mode ( $N_w = 2$ ).

De plus, il existe une incertitude sur la mesure du  $g(x)$ . Pour simuler cette situation, on ajoute une erreur aléatoire  $E_0(x)$  sur le  $g(x)$  calculé précédemment. La réponse due à  $E_0(x)$  est l'erreur aléatoire de  $h_{\text{cal}}(x)$  :

$$E_r = \text{moyenne} \left( \max \left( \frac{h_{\text{cal}}(x + E_0(x)) - h_{\text{cal}}(x)}{a} \right) \right) \quad (\text{A6.9})$$

Chaque essai est fait  $N_r$  fois. Soit  $N_r$  le nombre de distributions aléatoires du  $E_0(x)$ . Pour  $N_r = 300$  et  $|E_0(x)| = 0,05 a$ , la réponse est représentée sur figure A6.4. L'erreur totale due à la méthode :

$$E = E_r + E_s \quad (\text{A6.10})$$

ou :

$$E = \text{moyenne} \left( \max \left( \frac{h_{\text{cal}}(x + E_0(x)) - h_{\text{thé o}}(x)}{a} \right) \right)$$

est représenté sur la figure A6.4.

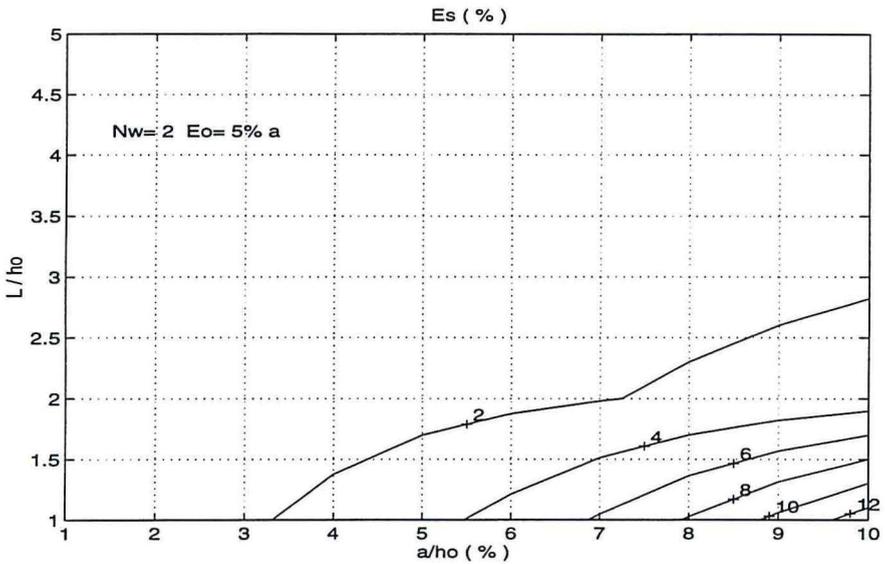


figure A6.3. L'erreur systématique

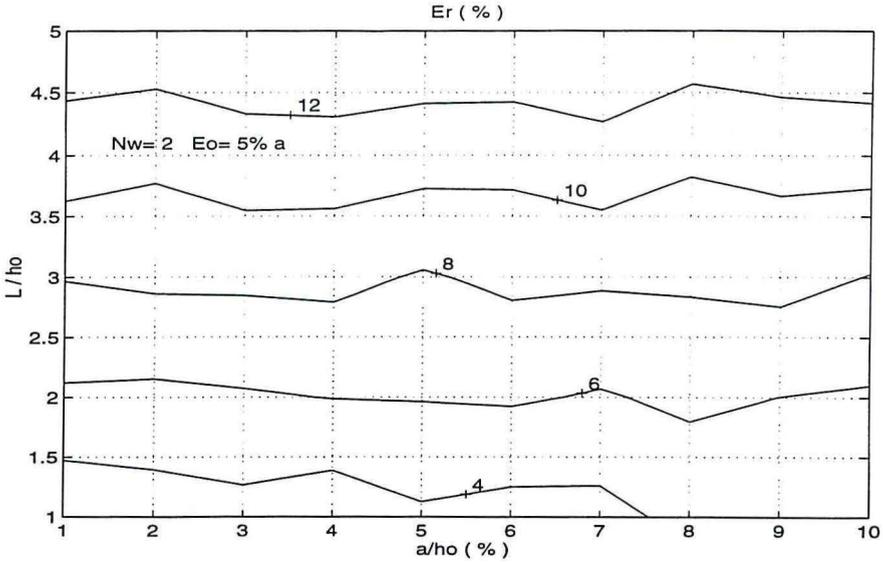


figure A6.4. L'erreur aléatoire

Pour un rapport  $\frac{L}{h_0} = 2$  et une amplitude du mode  $\frac{a}{h_0} = 8\%$ , la méthode donne  $h_{théo}$  à 3 % près (figure A6.3). Ces courbes « iso-erreur systématique » montrent l'augmentation de  $E_s$  avec l'augmentation de l'amplitude des modes ( $\frac{a}{h_0}$ ).

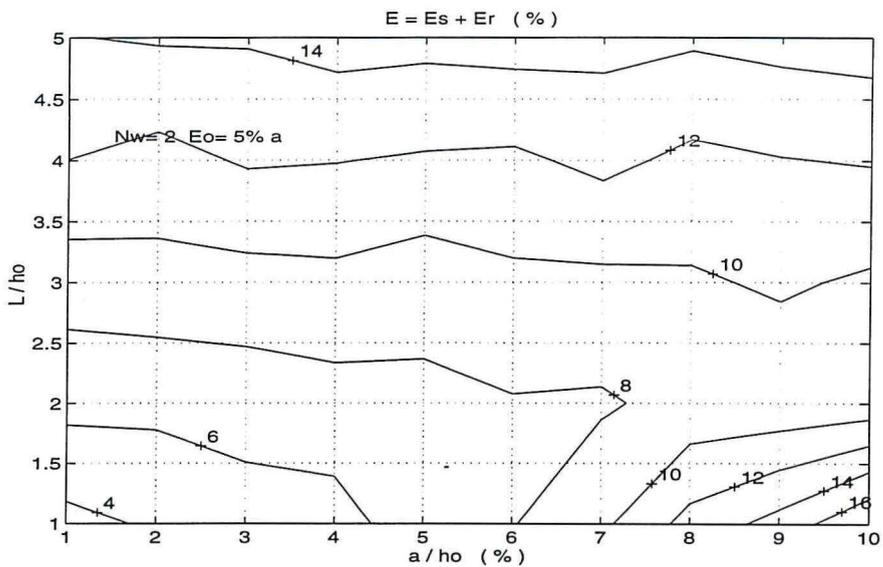


figure A6.5. L'erreur totale

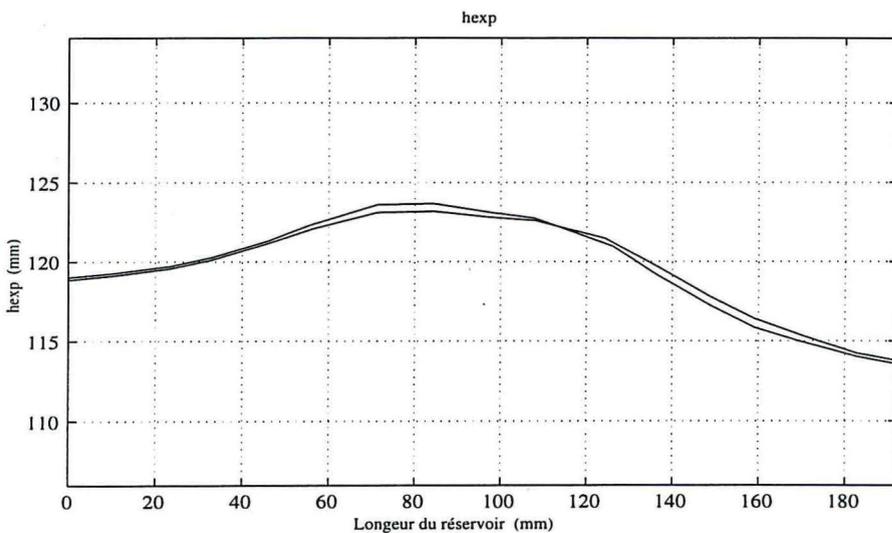


figure A6.6 Exemple

#### A6.4. EXEMPLE DE L'APPLICATION DE LA METHODE

On utilise cette méthode dans le cas d'une onde stationnaire pour un réservoir rectangulaire à une paroi mobile. La dimension du liquide au repos dans le réservoir est :  $L = 192$  mm,  $h_0 = 120$  mm, largeur = 99 mm. Les résultats de l'expérience à la deuxième fréquence propre sont représentés sur la figure A6.6. Avec  $\frac{L}{h_0} = 2$ , pour  $N_w = 2$ , les mesures de  $x$  sont

faites à  $\left| \frac{E_o(x)}{a_{\text{exp}}} \right| = 5 \%$ , ce qui implique, d'après les graphes ci-dessus une précision sur  $h_{\text{exp}}$  de 7 %.

#### A6.5. CONCLUSION

On a montré le principe de la méthode adoptée pour mesurer le profil de la surface, la position de la surface libre peut être ainsi mesurée, et la précision sur celle-ci quantifiée. L'estimation de l'erreur permet d'évaluer le domaine de validité de la méthode. La méthode est pratique pour mesurer le profil de la surface libre à deux dimensions. Cette méthode n'est valable que pour les petites amplitudes ( $a < A_{\text{max}}$ ). Il faudrait étendre cette méthode aux problèmes tridimensionnels.

## Bibliographie

- [1] ABRAMSON H. N., 1967, Dynamique des propulseurs à liquides, Manuel d'aéroélasticité, révision et compléments, éditeur Mazet R., A.G.A.R.D., pp. I/VIII 1-89.
- [2] AU-YANG M. K., GALFORD J. E., 1982, Fluid-structure interaction -A survey with emphasis on its application to nuclear steam system design, Nuclear Engineering and Design, Vol. 70, pp. 387-399.
- [3] BAMBERGER Y., DONEA J., LAVAL H., PLANCHARD J., SHAW R. P., 1988, Aspects théoriques et numériques de la dynamique des structures, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 70, Editions Eyrolles, Paris.
- [4] BAUER H. F., 1963a, Liquid sloshing in a cylindrical quarter tank, AIAA J., **1(11)**, 2601-2606.
- [5] BAUER H. F., 1963b, Theory of liquid sloshing in compartmented cylindrical tanks due to bending excitation, AIAA J., **1(7)**, 1590-1596.
- [6] BAUER H. F., HSU T. M. and WANG J. T. S., 1968, Interaction of a sloshing liquid with elastic containers, ASME J. Basic Eng., **90(3)**, 373-377.
- [7] BAUER H. F., 1981, Hydroelastic vibrations in a rectangular container, Int. J. Solids Struct., **17**, 639-652.
- [8] BELYTSCHKO T., 1977, Methods and programs for analysis of fluid-structure systems, Nuclear Engineering and design, **42**, 41-52.
- [9] BERGER H., BOUJOT J. and OHAYON R., 1975, On the spectral problem in vibration mechanics : computation of elastique tanks, J. Math. Anal. & Appel., **51**, 272-298.
- [10] BIRKHOFF G., 1955, Hydrodynamique, Chapitre 5 : masse virtuelle et théorie des groupes, pp.188-223, Dunod, Paris.
- [11] BISHOP R. E. D. & PRICE W. G., 1979, Hydroelasticity of ships , Cambridge.
- [12] BISPLINGHOFF R. L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Co, Cambridge, Mass.
- [13] BISPLINGHOFF R. L., ASHLEY H., 1962, Principles of Aeroelasticity, John Wiley and Sons, NY.

- [14] BLEVINS R. D., 1977, Flow-induced vibration, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [15] BLEVINS R. D., 1979, Formulas for natural frequency and mode shape, chapitre 14, Structureal vibrations in a fluid, pp 386-424, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [16] BOUJOT J., 1972, Sur l'analyse des caractéristiques de vibrations d'un liquide contenu dans un réservoir, *J. Mécanique*, **11**(4), 649-671.
- [17] Boujot J., 1987, Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems, *Math. Model. & Numer. Anal.*, 21(2), 239-260.
- [18] BOUSQUET J., 1990, Méthode des Singularités, Cepadues-Editions, Toulouse.
- [19] BRODERICK L. L. & LEONARD J. W., 1990, Selective review of boundary element modeling for interaction of deformable structure, *Engineering structures*, 12 (4), 269-276.
- [20] BRANCHER J. P. 1995, Fluides parfaits incompressibles, Interaction fluide - structure, cours 2ème année, ENSEM, INPL, Nancy.
- [21] Caillot G., 1983, Contribution à la recherche de méthodes analytiques pour l'étude de l'influence du confinement sur la vibration des structures en présence de milieu fluide. Thèse de l'Université Scientifique et Médicale et l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [22] Chai X. J., Genevaux J. M. et Brancher J. P., 1993, Mesure par une méthode optique du profil de la surface libre d'un liquide en mouvement, Ecole du printemps de génie Procédés, Résumés des communications par affiche, Nancy, 10 Dec. 1993, pp.10-12.
- [23] CHAI X. J., GENEVAUX J. M. ET BRANCHER J. P., 1993, Résultats expérimentaux de vibration d'une plaque immergée partiellement, rapport du LEMTA, ENSEM, INPL.
- [24] CHEMOUL B. ET ABOUT G., 1995, Vibrations des systèmes de transport spatial, *Revue française de Mécanique*, N°2, 107-125.
- [25] CHEN J. J., 1975, Vibration of nuclear fuel bundles, *Nuclear Engineering and design*, 35, pp. 399-422.

- [26] CHEN S. S., 1991, Flow-induced vibrations in two-phase flow, *Trans of ASME : J. of pressure vessel technology*, 113(2), pp. 234-241.
- [27] CHIBA M., 1993, Non - linear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid ; Part II : linear axisymmetric vibration analysis, *J. Fluids & Struct.*, 7, 57-73.
- [28] CLOUGH R.W. ET PENZIEN J., *Dynamique des Structures. Tome 1. Principes fondamentaux* Ed. Pluralis, Paris.
- [29] CONCA C., PLANCHARD J., THOMAS B., VANNINATHAN M., 1994, *Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure, application aux faisceaux tubulaires*, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 85, Editions Eyrolles, Paris.
- [30] COSTA B. ; BALBI J. H. ; GABRIELLI P., 1991, Etude expérimentale des modes propres d'une plaque en contact avec un fluide lourd, *Journal d'acoustique*, Vol. 4 (6), pp.588-597.
- [31] DAT R., 1995, Sur les mécanismes de couplage écoulement - structure, *Revue Française de Mécanique*, 1, pp.13-22.
- [32] de LANGRE E. ET GRANGER S., *Couplage structure - écoulement axial confiné*, *Revue française de Mécanique*, N°1, 49-55.
- [33] DERUNT J. A. and GEERS T. L., 1978, Added-mass computation by the boundary integral method, *Int. J. of Num. Methods in Eng.*, 12(3), 531-550.
- [34] DONEA J., LAVAL H., BAMBERGER Y., SHAW R. P., PLANCHARD J., 1988, *Aspects théoriques et numériques de la dynamique des structures*, collection de la direction des études et recherches d'EDF, éditeur Eyrolles, Paris.
- [35] DOWELL E. H., et al., 1978, *A modern course in Aeroelasticity*, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands.
- [36] DOWELL E. H., CURTISS H. C., 1989, *A modern course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- [37] DOWELL E. H., CRAWLEY E. F., CURTISS H. C., PETERS D. A., SISTO F., 1995, *Modern course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

- [38] ENGEL R., 1994, Analysis of fluid-structure interaction problems in nuclear reactor engineering, *Int. J. of Computer Applications in Technology*, Vol. 7, pp. 193-205.
- [39] EUVRARD D., FERNANDEZ G., JAMI A., SOIZE C., 1985, Problèmes d'hydrodynamique navale et méthodes numériques associées, E.N.S.T.A., Paris, 1985.
- [40] FERNHOLS C. M. & FOBINSON J. H., 1996, Fully-coupled fluide/structure vibration Analysis using MAC/NASTRAN, NASA-TM-110215.
- [41] FUNG Y. C., 1969, An introduction to the theory of Aeroelasticity, Dover Publishing, Inc., NY.
- [42] GENEVAUX J. M., 1996, A propos d'interaction fluide - structure, cours de 2ème année, ENSEM, INPL, Nancy.
- [43] GERADIN M. ET RIXEN D., 1996, Théorie des vibrations, Applications à la dynamique des structures, Masson, Paris.
- [44] GIBERT R. J., 1988, Vibration des structures. Interactions avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 69, Editions Eyrolles, Paris.
- [45] GRANGER S. ET de LANGRE E. , Vibrations sous écoulement et instabilité dynamique des faisceaux de tubes des échangeurs de chaleur, *Revue Française de Mécanique*, N°1, 37-47.
- [46] GUPTA R. K. and HUTCHINSON G. L., 1988, Free vibration analysis of liquid storage tanks, *J. Sound & Vib.*, **122(3)**, 491-506.
- [47] KANA D. D., 1966, Interaction between liquid propellants and the elastic structure, ABRAMSON H.N. 1966, The dynamic behavior of liquid in moving containers, NASA-SP-106.
- [48] HAVELOCK T.H., 1929, Forced surface wave on water, *Philosophical Magazine*, 8(f), 569-576.
- [49] HINTON E., 1988, Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells Pineridge Press, Swansea, U.K. 1988.
- [50] KALINOWSKI A. J., 1975, Fluid structure interaction, "Shock and Vibration Computer Programs", Ministry of Defense of USA, 1975.

- [51] KANA D. D., 1966, Interaction between liquid propellants and the elastic structure, ABRAMSON H.N. 1966, The dynamic behavior of liquid in moving containers, NASA-SP-106.
- [52] KERGUIGNAS M. ET CAIGNAERT G, 1977, Résistance des matériaux, Dunod Université, Quatrième édition.
- [53] LAMB H., 1932, Hydrodynamics, Cambridge University Press.
- [54] LAMB K. G., TENTI G. ET HUI W. H., 1987, General theory of wavemaking, Journal of Applied Mathematical Physic (ZAMP), 38, 391-408.
- [55] LESUEUR C., 1988, Rayonnement acoustique des structure, vibroacoustique, Interactions fluide-structure, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 66, Editions Eyrolles, Paris.
- [56] LINDHOLM, U. S. ET AL., 1963, Bending vibrations of circular cylindrical shell containing an internal liquid with free surface, AIAA Journal, Vol. 1, pp. 2092-2099.
- [57] MILES J. W., 1958, On the sloshing of a liquid in a flexible tank, J. Appl. Mech., 25, 277-283.
- [58] MILNE THOMSON L. M., 1968, Theoretical hydrodynamicis, Chp. IX, Macmillan & Co. Ltd., London.
- [59] MORAND H. and OHAYON R., 1979, Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems, finite element results, Int. J. Numer. Methods Eng., 14, 741-755.
- [60] MORAND H. J. P., OHAYON R., 1995, (traduit par C.A. JAMES) Fluid Structure Interaction, applied numerical methods, John Wiley & Sons, Masson.
- [61] MOISEEV N. N., 1964, Introduction to the theory of oscillations of liquid - containing bodies, Advanced in Applied Mechanics, Vol. 8, Academic Press, New York.
- [62] MOISEEV N. N., 1966, The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container, Advanced in Applied Mechanics, Academic Press, New York.
- [63] NAUDASCHER E., ROCKELL D., 1979, Pratical experiences with flow induced vibrations, Springer-Verlag.

- [64] OHAYON R. ET VALID R., 1984, True symmetric variational formulations for fluid-structure interaction in bounded domains - Finite Element results, Numerical methods in coupled systems, edited by Lewis R.W., Pettess P. & Hinton E, John Wiley & Sons Ltd., pp.293-325.
- [65] OMRANI A., 1992, Calcul de modes de ballonnement de liquides et de modes hydroélastique de réservoirs par une méthode d'éléments finis de frontière, application à l'industrie aérospatiale, Thèse de doctorat, UTC, Compiègne.
- [66] OUDIN H., 1986, Etude de comportement hydroélastique de structures marines par une formation mixte : équations intégrales - éléments finis. thèse de doctorat, E.N.S.M., Nantes.
- [67] OUSSET Y., 1980, Hydroelastic vibration of tanks : added-mass computation with an integral equation method, Proc. of the second Int. Symp. on Inn. Num. Anal. Appl. Eng. Sci., The University Press of Virginia, Charlottesville
- [68] PAPP L., CHEN S. S., 1994, Turbulence - induced vibration of tube arrays in two-phases flow, Trans of ASME, J. Pressure Vessel Technology, 116(3), pp. 312-316.
- [69] PESEUX B., 1989, Contribution à l'étude de structure partiellement ou totalement immergées en matériaux homogène ou en composite, Thèse de doctorat d'état, E.N.S.M., Nantes.
- [70] ROUSSEAU G., 1994, Prise en compte d'un fluide parfait incompressible au repos comme masse ajoutée sur une structure . synthèse bibliographique, Rapport Interne EDF - DER, HP 61/94/009.
- [71] PALIX D. 1996, Etude théorique des interactions fluide - structure en non linéaire, résolution analytique du ballonnement, rapport de DEA de Mécanique Energétique (NANCY).
- [72] SERO-GUILLAUME O. et Kazemi C., 1996, Domain perturbation and asymptotique expansion for free surface problemes.
- [73] SERO-GUILLAUME O. et Er-Riani M., 1996, Domaine perturbation method and shape of a drop in a uniform flow of an inviscid liquid.

- [74] SCHULKES R.M.S.M., 1990, Fluid oscillations in an open flexible container, *J. Eng. Math.*, **24**, 237-259.
- [75] SCHULKES R.M.S.M., 1992, Interaction of an elastic solid with a viscous fluid : eigenmode analysis, *J. Comput. Phys.*, **100**, 270-283.
- [76] SOEDEL S. M. AND SOEDEL W., 1994, On the free and forced vibration of a plate supporting a freely sloshing surface liquid, *J. Sound Vib.*, **171(2)**, 159-171.
- [77] SOEDEL W., 1982, On the free and forced vibration of a plate supporting a freely sloshing surface liquid, *J. Sound Vib.*, **85(3)**, 345-353.
- [78] TADJBAKHSI I. ET KELLER J., 1960, Standing surface waves of finite amplitude, *Journal of Fluid Mechanics*, **8**, 442-451.
- [79] TIMOSHENKO S., YOUNG D. H. et WEAVER W., 1974, *Vibration problems in engineering*, John Wiley & Sons, 424-425.
- [80] URSELL F., DEAN R. G. and YU G. S., 1960, Forced small-amplitude water waves : a comparison of theory and experiment, *J. Fluid Mech.*, **7**, 33-52.
- [81] VALID R., 1977, *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*, Eyrolles, Paris.
- [82] VALID R. et OHAYON R., 1974, Influence du ballonnement dans les réservoirs des bouts d'ailes sur les modes propres de vibration d'un avion, *La Recherche Aéronautique*, **5**, 319-325.
- [83] VALID R., OHAYON R. et BERGER H., 1974, Le calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquides, pour la prévision de l'effet POGO, *La Recherche Aéronautique*, **6**, 367-379.
- [84] VEKLIČ N. A. ET MALYSHEV B. M., 1990, Vibration of an elastic plate in a rectangular volume of fluid, *Mech. Solids*, **25(4)**, 164-172.
- [85] VO D., 1996, Contribution expérimentale sur l'interaction fluide - structure dans un réservoir avec surface libre en non - linéaire, Rapport de DEA mécanique et énergétique Nancy.

- [86] WEHAUSEN J. W. ET LAITONE E. V., 1960, Surface waves, Handbuch der Physik, Tome IX, Springer Verlag.
- [87] YAMAMOTO Y., 1981, A variational principle of solid-water interaction system, Int. J. Eng. Sci., **19**, 1757-1762.
- [88] ZHOU D., 1994, Free bending vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in the consideration of surface wave, Appl. Math. and Mech., **15(9)**, 831-839.
- [89] ZIENKIEWICZ O. C. and BETTESS P., 1978, Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment, Int. J. Numer. Eng, **13**, 1-16.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur VALID Roger, Professeur Honoraire, Ecole Centrale de Paris,  
Monsieur PESEUX Bernard, Professeur, Ecole Centrale de Nantes.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur CHAI Xin Jian**

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Influence de la gravité sur les interactions fluide-structure pour un  
fluide dans un domaine borné."**

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE**

Spécialité : **"MECANIQUE & ENERGETIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **17 Octobre 1996**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIUS



The stamp is circular with the text "INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE NANCY" around the perimeter and a small star at the bottom.

NANCY BRABOI  
2, AVENUE DE L  
FORET-DE-HAY  
BOITE POSTALE  
F - 5 4 5 0  
VANDŒUVRE CEDE



## Résumé

Nous proposons dans ce mémoire une méthode analytique et expérimentale pour étudier l'interaction fluide-structure dans un réservoir rectangulaire avec une surface libre en présence de gravité lorsque son influence est importante. Plus particulièrement nous nous attacherons au calcul des fréquences et modes propres du système couplé dans le cas particulier d'un problème bidimensionnel, où les mouvements de structure sont perpendiculaires à la direction de la pesanteur. Un potentiel de vitesse du fluide qui satisfait les équations et les conditions aux limites linéarisées est utilisé dans deux configurations pour un solide rigide en mouvement et pour une structure déformable. Dans le cas du solide en mouvement, le couplage avec les ondes de gravité, permet de généraliser le concept de la masse ajoutée classique, et d'étudier les influence de confinement et de la gravité à l'aide de nombre de Froude. Lorsque la paroi verticale du réservoir est modélisée par une poutre, l'évolution des fréquences et modes propres avec le Froude, le niveau de remplissage sont étudiés. Une expérience a été réalisée dans le cas d'une structure souple, et a montré la validité des résultats théoriques. La solution analytique obtenue permettra de valider les codes numériques.

**Mots clés :** interaction fluide-solide(- structure), méthode analytique, étude expérimentale, réservoir déformable, surface libre, ballonnement, masse ajoutée, vibration couplée, nombre de Froude.

## Summary

In this dissertation we attempt an analytical and experimental study of the fluid-structure interaction in a flexible rectangular container with a free surface, which consists in determining the coupled natural frequencies and modes and taking account the effects of liquid sloshing. We shall only consider the case of linearized free surface and interface conditions. The elastic side wall of the container is assumed as being either a vertical beam or a mass-spring system. In each case, the coupled natural frequencies and modes of the system are obtained. For the rigid structure motions, the classical concept of the added mass is generalised due to the coupling with gravity waves. The effects of the side walls are also considered. In the case of a beam-type side wall, the evolution of the coupled frequencies and modes with liquid depth and Froude number are presented. In the case of flexible structures, the experimental results have confirmed the theoretical ones. The results obtained here should be helpful for the understanding of vibrations in a coupled system, and for verifying numerical codes. The method given here may be extended to the problem of completely flexible rectangular containers.

**Key words :** fluid-solid(-structure) interaction, analytical method, experimental study, flexible container, free surface, sloshing, added mass, coupled vibrations, Froude number.