



HAL
open science

Entiers friables et formes binaires

Armand Lachand

► **To cite this version:**

Armand Lachand. Entiers friables et formes binaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0189 . tel-01751134v1

HAL Id: tel-01751134

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751134v1>

Submitted on 29 Mar 2018 (v1), last revised 16 Jan 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Entiers friables et formes binaires

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques

par

Armand LACHAND

Soutenue publiquement le 2 décembre 2014 devant le jury composé de

Régis DE LA BRETÈCHE	Professeur, Université Paris Diderot	<i>Rapporteur</i>
Cécile DARTYGE	Maître de conférences, Université de Lorraine	<i>Directrice de thèse</i>
François HENNECART	Professeur, Université de Saint-Etienne	<i>Rapporteur</i>
Joël RIVAT	Professeur, Université d'Aix-Marseille	<i>Président du jury</i>
Gérald TENENBAUM	Professeur, Université de Lorraine	<i>Examineur</i>
Jie WU	Chargé de recherche CNRS, Université de Lorraine	<i>Examineur</i>

au vu des rapports de

Régis DE LA BRETÈCHE	Professeur, Université Paris Diderot
François HENNECART	Professeur, Université de Saint-Etienne
Trevor WOOLEY	Professeur, Université de Bristol

Comme les recherches qui relèvent de la seule intellectualité et qui ont pour objet un savoir abstrait et général, [la recherche de son humanité] nécessite, elle aussi, des connaissances exactes et des déductions rigoureuses, mais elle exige beaucoup plus du chercheur lui-même. [...] La réussite d'un savant est étroitement conditionnée par la réussite de ceux qui l'ont précédé, soit parce que leurs travaux orientent sa recherche, soit parce que ses propres recherches prolongent les résultats acquis dont elles ont profité. [...] La société n'a guère d'action directe sur le chercheur de l'humain. [...] Les recherches humaines sont exclusivement le fait des hommes fidèles au plus profond d'eux-mêmes.

Marcel Légaut, *L'homme à la recherche de son humanité*

Xam-xam bu borom di titaru du ko jariñe dara bissu ëllëg, kuy yé fitnaa, wala di ko woné si xuloo, ak xiroo ak ñayoo. Xam-xam bi jariñé, moy bi xamal nit ki ay ñawtëfam si nimu gëna leeré. Bëgga dëgg, di sellal fo tulu, di jangate, di xalaat ak fo tolu di def lu baax. Xamxam du joxe nit daraaja wala mu xañe ko ko

Cheikh Ahmadou Bamba, *Massàlik al Jinàn*
(d'après une traduction de Serigne Sam Mbaye et Baye Same Mbaye)

Remerciements

Le temps - tant attendu - d'avoir une pensée pour chacun de ceux qui m'ont accompagné au cours de la réalisation de cette thèse arrive au moment de mettre le point final à ce manuscrit.

Ces trois années écoulées m'auront permis de construire de vraies relations, fondées sur des bases sincères et dépassant le seul cadre de la recherche scientifique. Bien au-delà de ma filiation mathématique, c'est une amitié faite de respect, de patience, de confiance et d'estime mutuels, qui a vu le jour avec ma directrice de thèse Cécile Dartyge. Que de chemins parcourus en vue de cet apprivoisement réciproque depuis cette rencontre dans le bureau d'Élie jusqu'à aujourd'hui, en passant par des phases successives d'errance et d'enthousiasme. Merci pour tout cheffe !

Ma reconnaissance se tourne nécessairement vers mes trois rapporteurs Régis de La Bretèche, François Hennecart et Trevor Wooley, qui m'ont fait l'amitié de relire et d'évaluer cette thèse et y ont accordé par la même une part non négligeable de leur temps. Je dois entre autres à Régis de très nombreuses remarques (toujours pertinentes) qui ont permis d'améliorer notablement le manuscrit, à François d'avoir cru en moi depuis mes premiers pas à la fac de Sainté et de m'avoir fort justement conseillé dans mes différents choix qui m'ont mené jusqu'à Nancy et à Trevor d'avoir suggéré en séminaire l'idée à la base du chapitre 4. Des pensées particulières pour Papa - rapporteur "non-officiel" - qui aura relu l'intégralité du présent manuscrit même si ce dernier a pu lui paraître quelque peu obscur par endroits.

C'est un sincère merci que j'adresse aux autres membres du jury - dont je ne pouvais espérer meilleure composition - à savoir Joël Rivat, Gérald Tenenbaum et Jie Wu. Je suis touché de leur intérêt pour mes travaux et de leur présence à ma soutenance.

Nombreux sont ceux qui ont contribué, de près ou de loin, au contenu mathématique de ma thèse. Je pourrai citer un à un tous les enseignants qui ont participé à ma formation, tout le personnel administratif et les chercheurs de l'IECL ainsi que tous ces théoriciens des nombres avec lesquels j'ai pu échanger quelques mots mais dont la liste contiendrait près d'une centaine de noms. Aussi vais-je surtout mettre en exergue les trois François (FF, FG et FH), Georges, Ilia et Olivier et toute l'équipe de théorie des nombres de Nancy pour leur gentillesse et leur soutien sans faille (mention spéciale à Anne!).

Enfin, ce serait fort triste de faire des mathématiques dans un état d'isolement et c'est avec mes coauteurs Gérald et Razvan (dit Julien!) que j'ai pu expérimenter les joies de la réflexion en groupe. Deux expériences qui m'ont beaucoup apporté et que j'espère pouvoir renouveler avec eux !

Nous sommes en marche pour notre pèlerinage de confiance sur la terre. À la croisée des chemins, mes pas ont rencontré ceux de nombreux autres frères et sœurs en humanité. Plus que la thèse à proprement parler, ce sont ces intersections surprises d'itinéraires qui feront date dans mon existence. Tranches de vies, moments partagés, plaisirs multiples et petits (ou grands) bonheurs fugaces - chacun se reconnaîtra dans la liste non-exhaustive ci dessous : quelques bivouacs improvisés à écouter hurler le renard ; du grand frisson dans les manèges allemands ; des séances d'uchi-komi ; le pion que tu poses là, ou là, ou encore là ; toutes ces bières qu'on s'était promis d'aller boire mais qui ne le furent jamais, faute de temps ; des rencontres en covoiturage, avec ou sans crevettes ; le café du dimanche aprèm ; des discussions sur Henry David ; une fondue belge ; quelques plumes envolées ; des compagnons pour désobéir ; un certain soir d'octobre à la MJC

Lillebonne ; retanu Ibru ; la valse des habitants qui vécurent un temps au 90 rue du Placieux ; les inombrables pauses-café réservant sans cesse leur lot de surprises et discussions animées ; la veille du séminaire Caramel ; un lutin vert ; beaucoup de meurtres de zombies (même si le grand méchant aura souvent amené la fin du monde) ; la voie 5 verte 6B ; des kilos de crêpes ; de l'écoute et de l'attention ; les repas pizzas fermières de la cafèt ; taru Soda ; des discussions botaniques et des échanges de graines ; le canap' de Julien et son amie l'herbe de bison ; une absence fâcheuse de bracelets camping ; la carte des Délices du Palais ; du thé à la menthe sous l'arbre à palabres ; les pique-niques du mercredi avec les geeks d'en face ; quelques brassages, plus ou moins réussis ; un déménagement qui aurait pu être plus difficile qu'il ne le fut ; ON LÂCHE RIEN !! ; the Montpellier Bike Tata Team's Trip ; de la rudesse et du décrochage ; toutes ces oreilles attentives et bienveillantes ; des films sur le voyage ; un brin de tendresse à Bourg-en-Bresse ; les folles soirées des gens de la Bresse ; trois types de cuisson au four (traditionnel, électrique, micro-ondes) ; la dernière heure d'une condamnée ; le compagnon de chambrée spécial conf' de Math' ; de nombreuses parties de 7W ; du freeganisme par kilos et ses rencontres insoupçonnées ; les parties de BS ; mes partenaires de chelloise et ma partenaire de valse écossaise ; le chalet numéro 8 ; "t'ain, elle est trop bonne la soupe à l'oignon, qui n'en veut ?" ; les veilles de Noël avec Ernest et Célestine ; le canap de Patoche et Estelle ; Ramon trop canon ! ; une vie qui ne tient qu'à une corde, ces séances de baby avec des (in-)connus ; une voiture à pousser en pleine tempête de neige ; des toilettes sèches ; "Cool, on se revoit bientôt alors ?" ; les cache-caches sardines ; du nettoyage de chaudin ; le billard du Lipopette ; les vigiles du camping du lac de Sanguinet ; quelques ballades - hors champ - dans les calanques ; baaxayu 'Tapha ; sept versions différentes du daron et trois de Ginette ; LES rencontres de l'année 2013 ; 4-5 crabes ; les rando vélos du dimanche matin sur le canal ; les apéros bières-sauc' entre mecs (enfin presque !) ; un début de périple abrégé par la neige à recommencer ; des sacrifices de gallinacées ; tout ce qui s'est passé (et restera) dans le bureau 321 ; quelques soirées avec le babeau ; des heures de boeufs à écouter buzukis et autres cuillers ; trois générations au Chaudron ; "ce soir, ouate de phoque à Scarpone" ; la fraîcheur de Marion : "Allô, Parrain ?" ; de vieilles retrouvailles à Marseille ; une question impertinente sur les livres ; des soirées grillades ; la chaleur du Soggy Bottom, du Dirty Old Town et du Smoking Dog ; quelques vélos à réparer ; des confidences et des secrets à garder ; des décroissants et des croissants ; Marie et F-X qui ont largement contribué à me tenir en bonne santé ; "allô Papa, il se trouve où le gésier ?" ; la deuxième édition (à 3) du repas du mercredi ; les randos vélos dans le Forez ; l'hydromel du Médiéval ; les ballades pieds nus sur le sable à l'océan ; une improvisation mixte d'une durée de 2 min 30 de catégorie Épistolaire ; des disparitions de vélo ; quelques chutes de slack ; les soirées Royal Royal ; des sessions de stop ; le canap' à Colin et les envies d'aller à Rome, bella !! ; un pneu crevé à 20 bornes de Louga : Amul problem ! ; une bien belle journée ... en fusion avec la nature ; la beauté d'un cerf-volant ; le canap' du rez-de-chaussé qui s'abouse ; les rencontres de la chouille des moulins ; un bureau rose ; des parties de Molki ; des anniversaires bretons ; du poulet aux prunes ; les bouffes nancéiennes entre stéphanois ; les soirées feintes ; "toi, tu as le regard de Jésus" ; ... et pour tous ces moments que je n'ai pas cités : Maa ngui sant Yalla !!

À mon père, le premier à croire en moi, dans le profond respect de ma liberté, et dont la filiation me rend plus que fier ;

À ma mère, pour sa douceur, sa présence aimante et les valeurs qu'elles m'a transmises ;

À Mathieu, dont je n'ai fait que suivre les pas, guidé par sa confiance et son appel à réaliser nos rêves ;

À Tintin, pour m'avoir accueilli tel que je suis, en tant que frère, et pour sa manière de voir le monde ;

À Same, sama xarit bu mag, sama séex : xam nga kañ laay jooy, laay ree, laay muuñ ;

À vous cinq : les mots ne suffisent pas pour exprimer ce que vous êtes pour moi.

En frère d'humanité

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Ordres moyens de certaines fonctions multiplicatives	23
1. La formule de Perron et la méthode de Selberg-Delange	23
2. Ordres moyens sur les entiers y -friables	26
3. Ordres moyens sur les entiers y -criblés	30
Chapitre 2. Entiers friables, formes binaires et crible de Legendre-Ératosthène	33
1. Crible de Legendre-Ératosthène	33
2. Généralités sur la fonction arithmétique γ_F	34
3. Une formule conjecturale pour $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ pour une forme binaire F irréductible	36
4. Étude de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ avec F une forme quadratique irréductible	38
5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible	40
Chapitre 3. Fonctions arithmétiques et formes binaires irréductibles de degré 3	51
1. Introduction	51
2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique	57
3. Sommes de Type I et niveau de distribution	63
4. La fonction de densité σ_q	74
5. Description de la méthode	79
6. Premières applications des estimations de sommes de Type I	89
7. Estimations de sommes de Type II	100
8. Démonstration du théorème 1.5 et applications	122
Chapitre 4. Formes affines	127
1. La méthode du cercle de Hardy-Littlewood	129
2. La méthode nilpotente de Hardy-Littlewood (ou méthode de Green-Tao)	131
Annexe A. Note sur les valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques	151
1. Introduction et énoncés	151
2. Preuve	152
Annexe B. Sur l'approximation lisse des indicatrices	155
Annexe. Bibliographie	157

Introduction

La présente thèse comporte quatre chapitres et a pour sujet principal l'étude des valeurs friables de formes binaires. Dans cette introduction, nous commençons par donner un survol historique sur les entiers friables et leur représentation par des polynômes. Dans un second temps, nous présentons les résultats nouveaux obtenus dans ce travail.

Désignons par $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) le plus grand (resp. plus petit) facteur premier d'un entier naturel non nul n avec la convention $P^+(1) = 1$ et $P^-(1) = +\infty$. Étant donné $y \geq 1$, un entier est dit y -friable (resp. y -criblé) s'il satisfait $P^+(n) \leq y$ (resp. $P^-(n) > y$). Le théorème fondamental de l'arithmétique, en assurant l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers des entiers naturels, permet d'introduire les parties y -friable et y -criblée d'un entier n , à travers l'écriture

$$n = n^-(y)n^+(y)$$

où $n^-(y)$ (resp. $n^+(y)$) est y -friable (resp. y -criblé).

Cette dualité entre entiers friables et entiers criblés joue un rôle central en théorie multiplicative des nombres. Cette observation a naturellement conduit au développement conjoint de deux domaines de la théorie analytique des nombres, à savoir l'étude de la répartition des entiers sans grand facteur premier et celle des entiers sans petit facteur premier à travers l'estimation des cardinaux

$$\Psi(x, y) := \#\{1 \leq n \leq x : P^+(n) \leq y\} \quad \text{et} \quad \Phi(x, y) := \#\{1 \leq n \leq x : P^-(n) > y\}.$$

Dickman [Dic30] initie l'étude de $\Psi(x, y)$ en observant que la densité asymptotique des entiers y -friables inférieurs à x est égale à $\rho(u)$ où $u := \frac{\log x}{\log y}$ est fixé et ρ désigne la fonction de Dickman définie par l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0 & \text{si } u > 1. \end{cases}$$

Dans [Hil86], Hildebrand précise ce résultat en montrant que, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément dans le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x,$$

le comportement des entiers y -friables est donné par la formule

$$(1) \quad \Psi(x, y) = x\rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

Par la suite, Saias [Sai89] précise la formule (1) en approchant $\Psi(x, y)$ à l'aide de la méthode du col par la quantité plus régulière $\Lambda(x, y)$ où

$$\Lambda(x, y) := \begin{cases} x \int_0^{+\infty} \rho(u-v) d\left(\frac{\lfloor y^v \rfloor}{y^v}\right) & \text{si } x \notin \mathbf{N}, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \Lambda(t, y) & \text{si } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1. Dans toute la thèse, u désignera le rapport $\frac{\log x}{\log y}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément dans le domaine (H_ε) , il obtient en particulier la formule

$$(2) \quad \Psi(x, y) = \Lambda(x, y) \left(1 + O \left(\exp \left(-(\log y)^{3/5-\varepsilon} \right) \right) \right)$$

qui lui permet d'en déduire un développement asymptotique du cardinal $\Psi(x, y)$. À défaut d'établir dans cette introduction un panorama exhaustif des résultats portant sur les entiers y -friables, le lecteur trouvera dans [HT93] et [Gra08] une description détaillée de résultats liés à la répartition des entiers friables, contenant notamment des estimations de $\Psi(x, y)$ en dehors du domaine (H_ε) ainsi que des formules semi-asymptotiques valables dans de petits intervalles.

L'étude des entiers sans petit facteur premier a suivi un développement similaire, depuis le travail de Buchstab [Buc37] qui a prouvé l'équivalent asymptotique

$$(3) \quad \Phi(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x\omega(u)}{\log y}$$

pour $u > 1$ fixé, où ω désigne la fonction de Buchstab définie comme la solution continue du système

$$\begin{cases} u\omega(u) = 1 & \text{si } 1 \leq u \leq 2, \\ \{u\omega(u)\}' = \omega(u-1) & \text{si } u > 2. \end{cases}$$

À la suite de de Bruijn [dB50], Tenenbaum [Ten08] utilise la méthode du col pour préciser le terme d'erreur impliqué dans (3) et obtient, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément dans le domaine (H_ε) , la formule asymptotique

$$\Phi(x, y) = x\mu_y(u) \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)} + O(\Psi(x, y)E(u, y))$$

où γ désigne la constante d'Euler,

$$\zeta(1, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}, \quad \mu_y(u) := \int_0^{+\infty} \omega(u-v)y^{-v} dv$$

et

$$E(u, y) \ll H(u)^{-c_1} \exp \left(-(\log y)^{3/5-\varepsilon} \right) + \exp \left(-(\log y)^{3/2-\varepsilon} \right)$$

pour une constante $c_1 > 0^2$ avec $H(u) := \exp(u/(\log(u+2))^2)$.

Étant donné une propriété multiplicative \mathcal{P} , un problème récurrent en arithmétique consiste à étudier les entiers satisfaisant \mathcal{P} et appartenant à un ensemble $\mathcal{V} \subset \mathbf{Z}$ défini par des objets de nature algébrique, afin d'obtenir des informations sur la corrélation entre ces deux structures. Dans le cadre des entiers friables et des entiers criblés, il est ainsi naturel de considérer, pour un polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, les cardinaux

$$\Psi_F(x, y) := \# \left\{ 1 \leq n \leq x : F(n) \neq 0 \text{ et } P^+(|F(n)|) \leq y \right\}$$

et

$$\Phi_F(x, y) := \# \left\{ 1 \leq n \leq x : F(n) \neq 0 \text{ et } P^-(|F(n)|) > y \right\}.$$

Introduisons encore, pour un polynôme $F := F_1 \cdots F_t$ où $F_1, \dots, F_t \in \mathbf{Z}[X]$ sont des polynômes irréductibles sur \mathbf{Z} , deux à deux distincts et sans diviseur fixe³, le cardinal

$$\pi_F(x) := \# \left\{ 1 \leq n \leq x : F(n) \neq 0 \text{ et } |F_1(n)|, \dots, |F_t(n)| \text{ sont premiers} \right\}.$$

Puisqu'un entier $n \in]x^{1/2}, x]$ est premier si et seulement s'il est $x^{1/2}$ -criblé, cette dernière quantité est étroitement liée à $\Phi_F(x, y)$. L'étude de $\pi_F(x)$ a fait l'objet de nombreux travaux et a constitué l'une des motivations au développement des méthodes de cribles

2. Tenenbaum [Ten99] montre que l'on peut prendre $c_1 = \frac{\pi^2}{2} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

3. Si F est irréductible et possède un diviseur fixe, alors $\pi_F(x) \leq 1$.

(voir [HR74]). Par exemple, Bateman et Horn conjecturent dans [BH62, BH65] la formule asymptotique

$$(4) \quad \pi_F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (g_1 \cdots g_t)^{-1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-t} \left(1 - \frac{\nu_p}{p}\right) \frac{x}{(\log x)^t}$$

où $g_i \geq 1$ désigne le degré de F_i et, pour tout entier m , la quantité ν_m désigne le nombre de solutions modulo m de la congruence $F(n) \equiv 0 \pmod{m}$.

En supposant que les différents événements " $F_i(n)$ est y -friable" soient décrits par (1) et soient deux à deux indépendants pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on peut conjecturer que la formule

$$(5) \quad \Psi_F(x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \rho(g_1 u) \cdots \rho(g_t u)$$

est valide dans un domaine en (x, y) qu'il conviendrait de préciser. Sous l'hypothèse qu'une version effective de (4) soit vraie uniformément pour les polynômes F dont les coefficients sont bornés par des puissances de x , Martin [Mar02] démontre que la formule asymptotique (5) est valide pour tout $\varepsilon > 0$ et dans le domaine $y \geq x^{g-1/t_g+\varepsilon}$ où $g := \max\{g_1, \dots, g_t\}$ et t_g désigne le nombre de polynômes F_i de degré g .

Dans le cas où $F(X) = a + qX$ c'est-à-dire $t = g = 1$, le théorème de Siegel-Walfisz [Wal36] assure que, pour tout $A > 0$, la formule (4) est vraie uniformément pour les entiers $a, q \leq (\log x)^A$ tels que $(a, q) = 1$. Par analogie, l'étude des entiers friables en progressions arithmétiques a donné lieu à de nombreux travaux (voir l'article de Hildebrand et Tenenbaum [HT93] ainsi que la thèse de Drappeau [Dra13a] pour un panorama des résultats). En particulier, Fouvry et Tenenbaum prouvent dans [FT91] que la formule (5) est vraie uniformément pour les entiers $a, q \leq (\log x)^A$ et dans le domaine $\exp(c(A)(\log \log x)^2) \leq y$ pour une certaine constante $c(A) > 0$.

Établir les formules conjecturales (4) et (5) pour des polynômes F de degré $g \geq 2$ semble hors d'atteinte dans l'état actuel des connaissances : la question de l'existence d'une infinité d'entiers n pour lesquels $|F_1(n)|, \dots, |F_t(n)|$ soient simultanément premiers demeure encore ouverte. À défaut de disposer d'un équivalent asymptotique pour le nombre de valeurs friables de F pour les polynômes de degré au moins 2, il est naturel de chercher des minoration de $\Psi_F(x, y)$. Dans cette optique, définissons, pour F fixé, la quantité

$$(6) \quad \alpha_F := \inf \{ \alpha : \Psi_F(x, x^\alpha) \gg_{\alpha, F} x \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \} \in [0, g]$$

avec de nouveau la notation $g := \max\{g_1, \dots, g_t\}$. La formule conjecturale (5) laisse espérer que $\alpha_F = 0$ pour tout polynôme F . La littérature contient une succession de travaux où sont obtenues des majorations non triviales de α_F :

- si $F(X) = X(qX + a)$, alors $\alpha_F = 0$ (Balog et Ruzsa [BR97]) ;
- si $F(X) = (X + 1) \cdots (X + t)$, alors $\alpha_F \leq \exp(-1/(t - 1))$ (Hildebrand [Hil89]) ;
- si $F(X) = X^2 + 1$, alors $\alpha_F \leq \frac{149}{179}$ (Dartyge [Dar96]) puis $\alpha_F \leq \frac{4}{5}$ (Harman [Har08]) ;
- si F est quelconque, alors $\alpha_F \leq g - \frac{1}{t_g}$ où t_g désigne là encore le nombre de facteurs irréductibles de F de degrés g (Dartyge, Martin et Tenenbaum [DMT01]).

Dans une direction parallèle, la théorie des cribles (voir [HR74]) permet d'obtenir des résultats similaires pour $\Phi_F(x, y)$. Si β_F est défini, de manière analogue à α_F , par la formule

$$(7) \quad \beta_F := \sup \left\{ \beta : \Phi_F(x, x^\beta) \gg_{\beta, F} \frac{x}{(\log x)^t} \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\beta, F) \right\}$$

où t est le nombre de facteurs irréductibles distincts de F , il est possible de minorer β_F en utilisant des méthodes de cribles. À titre d'exemple, le crible de Jurkat-Richert [JR65] permet de montrer que $\beta_F \geq 1/2$ lorsque F est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$. Une immersion

dans la preuve de [DMT01] ainsi que dans les principes des différents cribles exposés dans [HR74] révèle le rôle central joué par les cardinaux

$$A_m(x) := \#\{1 \leq n \leq x : m|F(n)\}.$$

D'une part, quitte à supposer que F est le produit de t polynômes irréductibles de degré g , il est possible de minorer le nombre de valeurs friables de F à l'aide de l'estimation suivante, issue de [DMT01] et valide pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(8) \quad \Psi_F\left(x, x^{g-1/t+\varepsilon}\right) \gg_{\varepsilon, F} \sum_{\substack{x^{1/t-\varepsilon/(2t)} \leq p_1 \leq x^{1/t-\varepsilon/(4t)} \\ \dots \\ x^{1/t-\varepsilon/(2t)} \leq p_t \leq x^{1/t-\varepsilon/(4t)}}} A_{p_1 \dots p_t}(x).$$

D'autre part, les lemmes de crible reposent sur l'introduction d'un poids de crible ξ tel que la convolution $1 * \xi$ soit un minorant de la convolution $1 * \mu$ où μ est la fonction de Möbius, de sorte à pouvoir exploiter la relation suivante, conséquence du principe d'inclusion-exclusion,

$$(9) \quad \Phi_F(x, y) = \sum_{P^+(m) \leq y} \mu(m) A_m(x) \geq \sum_{P^+(m) \leq y} \xi(m) A_m(x).$$

En découpant l'ensemble $[1, x] \cap \mathbf{Z}$ en classes de congruences, il est naturel d'approcher $A_m(x)$ par la quantité $\frac{\nu_m}{m}x$ où ν_m a été introduit dans la formule (4). La somme

$$(10) \quad \sum_{m \leq M} \left| A_m(x) - \frac{\nu_m}{m}x \right|,$$

dite de Type I, est négligeable tant que $M \leq x^{1-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci permet de remplacer $A_m(x)$ par son approximation régulière dans (8) et dans (9) – la fonction ξ est en général à support sur les entiers $m \leq M$ – pour ainsi se ramener à l'estimation d'une somme de la forme $\sum_{p \leq t} \frac{\nu_p}{p}$. Évaluer une telle quantité est standard (voir par exemple [Nag21]) : les travaux de Dedekind sur la décomposition des idéaux en facteurs premiers, combinés au théorème des idéaux premiers, impliquent l'estimation suivante, valide pour $t_2 \geq t_1 \geq 2$,

$$\sum_{t_1 < p \leq t_2} \frac{\nu_p \log p}{p} = \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right) + O\left(\frac{1}{\log t_1}\right).$$

Il est légitime de se demander dans quelle mesure l'utilisation de formules combinatoires plus complexes ne faisant intervenir que les cardinaux $A_m(x)$ permettrait d'obtenir des majorations (resp. minoration) plus fortes de α_F (resp. β_F). Les comportements des entiers friables et criblés révèlent ici une différence essentielle connue sous le nom de phénomène de parité. Ce principe, mis en lumière par Selberg [Sel52] puis étudié par Bombieri [Bom76] (voir aussi le chapitre 16 de [FI10]), stipule essentiellement que la seule utilisation d'estimations de sommes de Type I similaires à (10) ne permet pas de distinguer les entiers dont le nombre de facteurs premiers est pair de ceux ayant un nombre impair de facteurs premiers. Notons que ce phénomène n'intervient pas directement dans l'étude de $\Psi_F(x, y)$.

Considérons à présent la généralisation du problème précédent aux polynômes à plusieurs variables. Soient $d \geq 2$, $F = F_1 \dots F_t \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ un polynôme sans facteur carré où F_1, \dots, F_t sont des polynômes irréductibles sur \mathbf{Z} de degrés respectifs g_1, \dots, g_t et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et satisfaisant $F_i(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$ ⁴. Par analogie à

4. Il est possible de traiter le cas général $\mathcal{K} \subset [-1, 1]^d$ et $F_i(\mathcal{K}) \subset [-1, 1]$ en effectuant un découpage de \mathcal{K} .

$\mathbf{Z}[X]$, définissons

$$\Psi_F(\mathcal{K}.x, y) := \# \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d : F(\mathbf{n}) \neq 0 \text{ et } P^+(F(\mathbf{n})) \leq y \right\},$$

$$\Phi_F(\mathcal{K}.x, y) := \# \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d : F(\mathbf{n}) \neq 0 \text{ et } P^-(F(\mathbf{n})) > y \right\},$$

$$\pi_F(\mathcal{K}.x) := \# \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d : F_1(\mathbf{n}), \dots, F_t(\mathbf{n}) \text{ sont premiers} \right\},$$

$$\alpha_F := \inf \left\{ \alpha : \Psi_F([1, x]^d, x^\alpha) \gg_{\alpha, F} x^d \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \right\}$$

et

$$\beta_F := \sup \left\{ \beta : \Phi_F([1, x]^d, x^\beta) \gg_{\beta, F} \frac{x^d}{(\log x)^t} \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\beta, F) \right\}$$

où t désigne le nombre de facteurs irréductibles distincts de F .

Dans [BBDT12], Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum étendent aux formes binaires de degré au moins 2 la méthode employée dans [DMT01] de manière systématique. Ils obtiennent en particulier la minoration

$$\alpha_F \leq \begin{cases} 0 & \text{si } F \text{ est cubique et réductible dans } \mathbf{Z}[X_1, X_2], \\ e^{-1/2} & \text{si } F \text{ est cubique et irréductible dans } \mathbf{Z}[X_1, X_2], \\ g - 2/t_g & \text{si } t_g \geq 2, \\ g - 1 - 1/(t_{g-1} + 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $g := \max\{g_1, \dots, g_t\}$ et t_g (resp. t_{g-1}) désigne le nombre de facteurs irréductibles distincts de F de degré g (resp. $g - 1$). Le problème dual, à savoir l'étude de β_F , peut être abordé par des résultats de crible, à l'image des polynômes en une variable. En combinant l'utilisation d'un crible standard de minoration (voir [HR74]) aux résultats de Greaves [Gre71] sur le niveau de distribution de la suite des valeurs $F(n_1, n_2)$ d'une forme binaire irréductible F de degré au moins 2, il apparaît que $\beta_F \geq 1$ pour de tels polynômes.

Par la suite, Fouvry [Fou10] considère le cas général $F \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ avec $d \geq 2$. En s'inspirant en partie de l'argument de [BBDT12], il établit entre autres la borne supérieure $\alpha_F \leq g - 4/3$ pour tout polynôme absolument irréductible⁵ de degré $g \geq 3$. Le cas du polynôme $F(X_1, \dots, X_d) = X_1^{a_1} \cdots X_d^{a_d} - 1$ où $a_1, \dots, a_d \geq 1$ a été étudié par une approche complémentaire dans [FS11] : Fouvry et Shparlinski montrent en particulier la majoration $\alpha_F \leq a_1 + \dots + a_d - d/2$.

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier asymptotiquement $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ pour deux classes de polynômes : les formes binaires de degré au plus 3 et les produits de polynômes de degré 1 (ou formes affines) deux à deux affinement indépendants sur \mathbf{Q} .

Considérons dans un premier temps les formes binaires $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ irréductibles sur \mathbf{Z} . Les valeurs friables de formes binaires interviennent de manière fondamentale dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (NFS) dont le lecteur trouvera un exposé dans la monographie [CP05]. Étant donné un entier N à factoriser, on cherche une forme binaire irréductible $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ et un entier m tels que $F(m, 1) \equiv 0 \pmod{N}$. L'étape suivante consiste à détecter un grand nombre d'entiers n_1, n_2 tels que $(n_1, n_2) = 1$ et pour lesquels $F(n_1, n_2)$ et $n_1 - mn_2$ soient simultanément friables. Il est donc important, en vue d'optimiser le choix des paramètres et de calculer la complexité de l'algorithme, d'obtenir des minoration de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ suffisamment précises.

5. Un polynôme est absolument irréductible s'il est irréductible dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$.

Dans le cadre des entiers friables, le crible de Legendre-Ératosthène, basé sur la formule d'inversion de Möbius entrevue dans (9), prend la forme

$$(11) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \sum_{P^-(m) > y} \mu(m) A_m(\mathcal{K}.x)$$

où

$$A_m(\mathcal{K}.x) := \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : m | F(n_1, n_2) \right\}.$$

En approchant $A_m(\mathcal{K}.X)$ par son approximation naturelle

$$\frac{\gamma_F(m)}{m^2} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \quad \text{où} \quad \gamma_F(m) := \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq m : m | F(n_1, n_2)\},$$

on s'attend à pouvoir approcher le cardinal $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ par la quantité

$$\text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \sum_{\substack{m \leq x^g \\ P^-(m) > y}} \mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m^2}.$$

À l'image de ν_m , l'étude de la fonction $\mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m}$ fait intervenir un corps de rupture \mathbf{K} du polynôme $F(1, X)$. En effet, la série de Dirichlet engendrée par $\mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m}$ s'écrit, pour $\text{Re}(s) > 1$, sous la forme

$$(12) \quad \sum_{m \geq 1} \mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m^{s+1}} = \mathcal{G}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-1}$$

où $\mathcal{G}(s)$ est une série développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\text{Re}(s) > 1/2$. En conséquence, l'estimation de moyennes associées à $\mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m}$ s'inscrit dans l'étude générale des fonctions multiplicatives dont la série de Dirichlet est analytiquement proche d'une puissance $\zeta_{\mathbf{K}}^{\kappa}(s)$ de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$.

Le chapitre 1 expose différents résultats issus entre autres de [HTW08] et [BBDT12] sur les moyennes le long des entiers friables ou criblés de fonctions multiplicatives h dont la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ se décompose sous la forme $\mathcal{H}(s) = \mathcal{G}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{\kappa}$ où \mathcal{G} est prolongeable à gauche de l'axe $\text{Re}(s) = 1$. Le cas $\kappa = -1$ a fait l'objet d'un travail commun entre Gérald Tenenbaum et l'auteur. Le fruit de cette collaboration a donné lieu à une note reproduite dans l'annexe A et publiée au Quarterly Journal of Mathematics [LT14].

En appliquant ces résultats à la fonction $\frac{\gamma_F(m)}{m}$, on montre au chapitre 2 la validité de la formule

$$(13) \quad \sum_{\substack{m \leq x \\ P^-(m) > y}} \mu(m) \frac{\gamma_F(m)}{m^2} = \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right)$$

dans le domaine $1 \leq u \leq (\log x)^{3/8-\varepsilon}$ ce qui fournit une heuristique pour la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et satisfaisant $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $y \geq x^\varepsilon$, on a*

$$\Psi_F(\mathcal{K}.x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(gu).$$

Démontrer un tel résultat pour toute forme binaire F constituerait en soi un résultat remarquable et demeure là encore hors d'atteinte des techniques actuelles. L'un des objectifs de cette thèse consiste à obtenir des domaines en (x, y) pour lesquels une telle formule est vérifiée lorsque F est de degré au plus 3.

Un réflexe naturel pour aborder cette conjecture consiste à étudier la contribution des termes de restes qui interviennent en remplaçant dans (11) les cardinaux $A_m(\mathcal{K}.x)$ par leur approximation $\frac{\gamma_F(m)}{m^2} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2$. L'estimation de sommes de Type I analogues à (10) et adaptées au cadre des formes binaires a donné lieu à une succession de travaux [Gre70, Gre71, Dan99, Mar10, dlBT13]. Daniel [Dan99] obtient par exemple la majoration

$$(14) \quad \sum_{m \leq M} \left| A_m(x) - \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \right| \ll x\sqrt{M} (\log 2M)^{g(1+2g)^{g+1}} + M(\log 2M)^{3g-1}$$

pour les formes binaires F de degré g et irréductibles dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$. Il est donc légitime d'utiliser cette approximation pour les entiers $m \leq M = x^{2-\tau}$ où $\tau = o(1)$ décroît de manière suffisamment lente. En évaluant la contribution des entiers m dans l'intervalle $[x^{2-\tau}, x^2]$ à l'aide d'un lemme de crible, on montre au chapitre 2 que la conjecture 1 est vraie dans le domaine

$$\exp\left(\frac{\log x (\log \log \log x)^{1+\varepsilon}}{\log \log x}\right) \leq y,$$

pour les formes quadratiques irréductibles.

Si $\mathcal{K} := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, il est possible de montrer que la conjecture 1 est vraie dans le domaine (H_ε) pour la forme $X_1^2 + X_2^2$ et de donner un développement asymptotique de $\Psi_{X_1^2+X_2^2}(\mathcal{K}.x, y)$. En effet, la formule

$$X_1^2 + X_2^2 = N_{\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}}(X_1 + iX_2)$$

réduit le problème à l'estimation du nombre d'idéaux de $\mathbf{Z}[i]$ dont la norme est y -friable et inférieure à x . Les travaux de Hanrot, Tenenbaum et Wu [HTW08] (voir aussi l'article de Krause [Kra90]) sur la répartition sur les entiers friables d'une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet est analytiquement proche de $\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)$ permettent d'estimer une telle quantité et d'obtenir une formule pour $\Psi_{X_1^2+X_2^2}(\mathcal{K}.x, y)$ de la précision de (2). Cette démarche est en particulier généralisée au cours du chapitre 1 à toute forme quadratique irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$ dont le discriminant est négatif et fondamental.

Il est possible de reprendre l'argument développé ci-dessus en l'adaptant aux formes binaires cubiques réductibles $F := F_1F_2$ où F_1 est linéaire et F_2 est quadratique et irréductible. Compte tenu de la formule

$$\Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \sum_{\substack{m \leq x^2 \\ P^-(m) > y}} \mu(m) A_m(\mathcal{K}.x; F_1, y)$$

où

$$A_m(\mathcal{K}.x; F_1, y) := \#\left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F_1(n_1, n_2)) \leq y \text{ et } m | F_2(n_1, n_2) \right\},$$

le problème se ramène essentiellement à montrer que les cardinaux $A_m(\mathcal{K}.x; F_1, y)$ peuvent être approchés par $\frac{\gamma_F(m)}{m^2} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(u)$ pour les entiers $m \leq x^{2-\tau}$ et que le terme d'erreur qui en résulte reste négligeable. Pour ce faire, nous prolongeons au chapitre 2 les travaux décrits dans [FI97], où Fouvry et Iwaniec démontrent, pour tout $A > 0$, la formule asymptotique

$$(15) \quad \sum_{n_1^2 + n_2^2 \leq x} \Lambda(n_1^2 + n_2^2) \Lambda(n_1) = 2 \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{(p-1)(p-\chi(p))} \right) x + O\left(x(\log x)^{-A}\right)$$

où Λ désigne la fonction de von Mangoldt et χ le caractère non trivial modulo 4. Leur argument repose entre autres sur les deux inégalités suivantes :

– une estimation de sommes de Type I de la forme

$$(16) \quad \sum_{m \leq D} \left| \sum_{\substack{n_1^2 + n_2^2 \leq x \\ m | n_1^2 + n_2^2}} \Lambda(n_1) - x \frac{\pi \nu_m}{4 m} \right| \leq D^{1/4} x^{3/4 + \varepsilon}$$

où ν_m désigne le nombre de solutions de la congruence $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$;

– une estimation de sommes, dites de Type II, de la forme

$$(17) \quad \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \left| \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} \mu(m_2) \delta(m_1, m_2) \right| \ll \frac{M_1 M_2}{(\log M_1 M_2)^A}$$

où M_1 et M_2 sont des paramètres réels, $A > 0$ et

$$\delta(m_1, m_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 m_2 = n_1^2 + n_2^2 \text{ avec } n_1 \text{ premier,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La borne supérieure (17) constitue l'un des éléments clés de [FI97] : Fouvry et Iwaniec l'utilisent de manière judicieuse pour contourner le phénomène de parité. Pour obtenir la majoration (16), ils s'appuient notamment sur une inégalité de grand crible, démontrée en utilisant la régularité de la répartition sur le tore des racines de $X^2 + 1$ modulo d . La généralisation de cette inégalité de grand crible à toute forme quadratique irréductible $F_2 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ est due à Balog *et al* [BBDT12]. Dans la mesure où le principe de parité a une incidence moindre sur la détection des entiers friables, il n'est pas nécessaire pour le problème considéré ici de disposer d'un analogue de (17). Le résultat suivant, obtenu comme conclusion du chapitre 2 apparaît d'après ce qui précède comme une conséquence de l'application du crible d'Ératosthène, de l'utilisation de sommes de Type I et d'estimations d'ordres moyens de fonctions multiplicatives. Ce travail fait l'objet d'une publication au Quarterly Journal of Mathematics [Lac14].

Théorème 2. *Soient $F_1 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme linéaire primitive, $F_2 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} , $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F_1(\mathcal{K}), F_2(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et dans le domaine*

$$(18) \quad \exp\left(\frac{\log x (\log \log \log x)^{1+\varepsilon}}{\log \log x}\right) \leq y \leq x^2,$$

on a uniformément

$$(19) \quad \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F_1(n_1, n_2)F_2(n_1, n_2)) \leq y\right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(u)\rho(2u)$$

et

$$(20) \quad \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : \begin{array}{l} F_1(n_1, n_2) \text{ premier} \\ \text{et } P^+(F_2(n_1, n_2)) \leq y \end{array} \right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^2}{\log x} \rho(2u).$$

Il convient de noter que ce résultat constitue un pas supplémentaire en vue de prouver l'algorithme de factorisation du crible quadratique (QFS) introduit par Pomerance [Pom82]. La borne de friabilité $y = \exp\left(2^{-1/2+o(1)} \sqrt{\log x \log \log x}\right)$ reste toutefois en dehors du domaine d'application du théorème 2.

Il est possible d'étendre la méthode employée pour démontrer le résultat précédent à des cardinaux de la forme

$$\#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F_2(n_1, n_2)) \leq y \text{ et } F_1(n_1, n_2) \in \mathcal{R}\right\}$$

où \mathcal{R} est un ensemble d'entiers suffisamment dense, c'est-à-dire satisfaisant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- $\#(\mathcal{R} \cap [1, x]) \gg x \frac{\log \log x}{\log y}$;
- $\mathcal{R} \subset \{n : P^-(n) > z\}$ avec $z \geq \exp((\log \log x)^{1+\varepsilon})$ et $\#(\mathcal{R} \cap [1, x]) \gg x \frac{\log \log x}{\log y \log z}$.

Il convient de mentionner le tour de force réalisé par Friedlander et Iwaniec [FI98b]. Considérant l'ensemble éparsé $\mathcal{R} = \{n^2, n \in \mathbf{N}\}$ qui satisfait $\#(\mathcal{R} \cap [1, x]) \leq x^{1/2}$, ils parviennent à démontrer la formule asymptotique

$$\sum_{n_1^2 + n_2^4 \leq x} \Lambda(n_1^2 + n_2^4) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{3\pi^{3/2}} x^{3/4} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right).$$

Il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure les arguments utilisés par Friedlander et Iwaniec peuvent être employés pour étudier $\Psi_{X_1^2 + X_2^4}(\mathcal{K}.x, y)$.

L'approche développée pour obtenir le théorème 2 ne s'applique plus lorsque F est un polynôme irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$ de degré $g \geq 3$: la contribution à (11) des entiers $x^{2-\tau} \leq m \leq x^g$ ne peut pas être traitée en utilisant directement (14) ni considérée comme un terme d'erreur. Dans le chapitre 3, nous développons une démarche alternative et adaptée au cas des formes cubiques qui conduit au théorème suivant, validant en particulier la conjecture 1 lorsque $u \leq (\log \log x)^{1/2-\varepsilon}$.

Théorème 3. *Soient $\varepsilon > 0$, $A \geq 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} , de degré 3 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Dans le domaine*

$$(21) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y$$

et uniformément pour $q \leq (\log x)^A$ et $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$, on a

$$(22) \quad \Psi_{F(a_1+qX_1, a_2+qX_2)}(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2\rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine

$$(23) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

alors le terme d'erreur dans (22) peut être remplacé par $x^2 \exp(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon})$.

La méthode employée dans la preuve de ce théorème s'inspire largement des travaux de Heath-Brown et Moroz [HB01, HBM02, HBM04] relatifs aux nombres premiers représentés par des formes cubiques irréductibles. Dans l'esprit des travaux de Friedlander et Iwaniec [FI98b], quoiqu'avec des arguments différents, ils obtiennent dans [HBM04] la formule asymptotique suivante, comme aboutissement de leurs travaux,

$$\pi_{F(a_1+qX_1, a_2+qX_2)}(\mathcal{K}.x) \sim C(F; a_1, a_2, q) \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^2}{3 \log x}$$

où $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ est une forme binaire cubique irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$, a_1, a_2 et q sont des entiers tels que $F(a_1+qX_1, a_2+qX_2)$ soit sans diviseur fixe et $C(F; a_1, a_2, q) > 0$.

Nous décrivons succinctement dans ce qui suit les différentes étapes de l'argument conduisant au théorème 3 dans le cas de la forme $F(X_1, X_2) = X_1^3 + 2X_2^3$. Au vu de la formule

$$X_1^3 + 2X_2^3 = N_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}}\left(X_1 + \sqrt[3]{2}X_2\right),$$

le problème semble *a priori* analogue à l'étude des idéaux \mathfrak{j} de $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ engendrés par un élément du \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbf{Z}$ et dont la norme $N(\mathfrak{j})$ est y -friable. Dans la mesure où

tout idéal de l'anneau des entiers $\mathbf{Z} \left[\sqrt[3]{2} \right]$ est principal, l'un des points clés de la méthode de Heath-Brown [HB01] consiste à approcher le cardinal

$$S \left(X_1^3 + 2X_2^3; \mathcal{K}.x; m, \mathcal{C}_m^{(j)} \right) := \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : m \mid (n_1^3 + 2n_2^3), \frac{n_1^3 + 2n_2^3}{m} \in \mathcal{C}_m^{(j)} \right\}$$

par un multiple de

$$S \left(\mathbf{Z} \left[\sqrt[3]{2} \right]; x^3; m, \mathcal{C}_m^{(j)} \right) := \# \left\{ \mathfrak{j} \text{ idéal de } \mathbf{Z} \left[\sqrt[3]{2} \right] : N(\mathfrak{j}) \leq x^3, m \mid N(\mathfrak{j}) \text{ et } \frac{N(\mathfrak{j})}{m} \in \mathcal{C}_m^{(j)} \right\},$$

en moyenne sur les entiers $X^{3/2+\tau} \leq m \leq x^{2-\tau}$ satisfaisant $P^-(m) > x^\tau$, où $\tau = o(1)$ et $\mathcal{C}_m^{(j)}$ est un ensemble de la forme

$$(24) \quad \mathcal{C}_m^{(j)} := \left\{ s : \omega(s) = j : x^\tau < P^-(s) < P^-(m) \text{ et } \frac{s}{P^-(s)} \leq x^{1+\tau} \right\}$$

pour un entier $j \geq 1$ donné.

Nous généralisons ce raisonnement au chapitre 3 en montrant, pour une certaine fonction multiplicative σ et une constante $C_0 > 0$, la validité de la formule

$$S \left(X_1^3 + 2X_2^3; \mathcal{K}.x; m, \mathcal{C}_m^{(j)} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C_0 \frac{\text{Vol}(\mathcal{K})}{x} \frac{\sigma(m)}{m} S \left(\mathbf{Z} \left[\sqrt[3]{2} \right]; x^3; m, \mathcal{C}_m^{(j)} \right)$$

en moyenne sur les entiers $X^{3/2+\tau} \leq m \leq x^{2-\tau}$ et sans hypothèse sur $P^-(m)$, et pour une grande classe d'ensembles $\mathcal{C}_m^{(j)}$, contenant en particulier les parties de la forme

$$\left\{ s : \omega(s) = j : x^\tau < P^-(s) \text{ et } y_1 P_1(s) \leq P_2(m) \leq y_2 P_1(s) \right\}$$

où $y_1, y_2 \geq 0$ sont des réels dépendant éventuellement de x tels que l'intervalle $[y_1, y_2]$ soit de taille suffisamment grande et $P_1(s)$ (resp. $P_2(m)$) désigne s , $P^-(s)$ ou $P^+(s)$ (resp. m , $P^-(m)$ ou $P^+(m)$). La démonstration d'une telle formule se base là encore sur deux types d'outils distincts :

- des estimations de sommes de Type I de la précision de (14) ;
- des estimations de sommes de Type II de la forme

$$(25) \quad \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \left| \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} a_{m_1} b_{m_2} \delta(m_1, m_2) \right| \ll \frac{M_1 M_2}{(\log M_1 M_2)^A}$$

où M_1 et M_2 sont des paramètres réels, $A > 0$,

$$\delta(m_1, m_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 m_2 = n_1^3 + 2n_2^3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et (a_m) et (b_m) sont des suites telles que (b_m) soit régulière dans les progressions arithmétiques. L'obtention d'une telle estimation constitue l'apport essentiel de [HB01] et se révèle être l'argument clé permettant de s'affranchir du phénomène de parité dans le cas de la forme $X_1^3 + 2X_2^3$.

Un raisonnement combinatoire permet d'écrire la formule

$$\Psi_{X_1^3 + 2X_2^3}(\mathcal{K}.x, y) = \sum_j \sum_{m \in \mathcal{E}_j} S \left(X_1^3 + 2X_2^3, \mathcal{K}.x; m, \mathcal{C}_m^{(j)} \right) + R$$

où les $\mathcal{E}_j \subset]x^{3/2+\tau}, x^{2-\tau}[$ sont des ensembles d'entiers, les $\mathcal{C}_m^{(j)}$ sont de la forme (24) et R est un terme de reste négligeable. À titre d'exemple, si $y \leq x^{1/2-\tau}$, une telle formule est vraie avec les choix

$$\mathcal{E}_j = \left\{ x^{3/2+\tau} < m < x^{2-\tau} : P^+(m) \leq y \right\}$$

et

$$\mathcal{C}_m^{(j)} := \left\{ s : \omega(s) = j : P^+(m) \leq P^-(s), P^+(s) \leq y, \frac{s}{P^-(s)} \leq x^{1-\tau} \right\}.$$

Ce qui précède suggère donc la validité de l'équivalent

$$\Psi_{X_1^3+2X_2^3}(\mathcal{K}.x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} C_0 \frac{\text{Vol}(\mathcal{K})}{x} \sum_{\substack{m \leq x^3 \\ P^+(m) \leq y}} \frac{\sigma(m)}{m}$$

La fonction σ engendre une série de Dirichlet analytiquement proche de $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})}(s)$. En conséquence, il est possible d'évaluer la somme de droite de cette dernière formule en utilisant les résultats de [HTW08], ce qui fournit l'équivalent attendu de $\Psi_{X_1^3+2X_2^3}(x, y)$.

La méthode précédente, détaillée rigoureusement au chapitre 3, permet également d'évaluer asymptotiquement l'ordre moyen

$$M_h(x; F) := \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(F(n_1, n_2))$$

pour les fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p , où w est un complexe de module 1. Avec le choix $z = -1$, ceci permet d'obtenir une preuve de la conjecture de Chowla pour les formes cubiques irréductibles, à savoir

$$M_\mu(x; F) = o(x^2).$$

Ce résultat avait été auparavant obtenu par Helfgott dans un article non publié [Hel], par une méthode différente quoique fondée sur l'estimation (25) et avec un terme impliqué dans le membre de droite plus précis.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous considérons le problème de la représentation des entiers friables par les formes affines en étudiant asymptotiquement le cardinal $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ pour les polynômes $F := F_1 \cdots F_t$ qui se décomposent dans $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ comme produit de t facteurs de degré 1 deux à deux affinement indépendants sur \mathbf{Q} .

Le cas où $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_t)$ est une famille libre pouvant être traité directement à partir d'un changement de variables du type $Y_i = F_i(X_1, \dots, X_d)$ et de (1), on peut se restreindre aux systèmes de rang au plus $t - 1$. Dans la première partie du chapitre en question, nous présentons les résultats obtenus dans la littérature lorsque (F_1, \dots, F_{t-1}) forme une base du \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par \mathbf{F} . À l'aide d'un changement de variables, on peut supposer que $F_i(X_1, \dots, X_d) = X_i$ pour $i \in \{1, \dots, t - 1\}$ et $F_t(X_1, \dots, X_d) = X_1 + \cdots + X_{t-1}$. La méthode du cercle (voir [Vau97]), initialement développée par Hardy et Littlewood dans leurs travaux sur le problème de Waring, permet d'approcher le problème en considérant la formule

$$\Psi_{X_1 \cdots X_{t-1}(X_1 + \cdots + X_{t-1})}([1, x]^{t-1}, y) = \int_0^1 E(x, y; \vartheta)^{t-1} E((t-1)x, y; -\vartheta) d\vartheta$$

où

$$E(x, y; \vartheta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} e(n\vartheta)$$

avec la notation $e(t) := \exp(2i\pi t)$. En évaluant asymptotiquement la somme d'exponentielles $E(x, y; \vartheta)$ selon que ϑ appartienne à un arc majeur (c'est-à-dire $\vartheta \approx \frac{a}{q}$ où q est un petit dénominateur) ou un arc mineur, il est possible d'obtenir un équivalent de $\Psi_{X_1 \cdots X_{t-1}(X_1 + \cdots + X_{t-1})}([1, x]^{t-1}, y)$. Dans ces dernières décennies, cette approche a connu de nombreuses avancées spectaculaires dans le cas $t = 3$ [dlB99, LS12, dlBG14, Dra13b, Dra14, Har] à travers diverses utilisations de la méthode du col. Dans la première partie du chapitre 4, nous retraçons plus en détail les avancées de ces dernières années et nous ne citons dans cette introduction que le résultat récent de Harper [Har].

Il établit entre autres la validité de la formule

$$\# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : P^+(n_1 n_2 (n_1 + n_2)) \leq y \right\} = \frac{\Psi(x, y)^3}{2x} \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right)$$

dans le domaine $\exp((\log \log x)^{1+\varepsilon}) \leq y \leq x^6$.

Si le rang de \mathbf{F} est compris entre 2 et $t - 2$, la méthode précédente ne permet plus de conclure. Pour de tels systèmes, on adapte dans la dernière partie du chapitre 4 la méthode dite "nilpotente de Hardy-Littlewood" et développée par Green et Tao. Accompagnés de Ziegler pour la dernière étape, ceux-ci démontrent dans [GT10b, GT12a, GTZ12], la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood lorsque F_1, \dots, F_t sont des formes primitives affines deux à deux affinement indépendantes, en obtenant la formule

$$\pi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-t} \left(1 - \frac{\nu_p}{p^d}\right) \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^d}{(\log x)^t}$$

où ν_m désigne le nombre de solutions de la congruence $F_1(\mathbf{n}) \cdots F_t(\mathbf{n}) \equiv 0 \pmod{m}$. Soulignons que l'hypothèse d'indépendance entre les polynômes est nécessaire à la réussite de la méthode de Green et Tao et ne permet pas de considérer les systèmes de complexité dite infinie comme ceux de la forme $(X, X + m)$ avec $m \geq 2$ un entier pair, liés à la conjecture de Polignac. À travers l'introduction des normes de Gowers, leurs arguments permettent en fait de ramener de manière générale l'évaluation des ordres moyens des fonctions arithmétiques h définis par

$$M_h(\mathcal{K}.x; \mathbf{F}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} h(F_1(\mathbf{n})) \cdots h(F_t(\mathbf{n}))$$

à l'estimation des corrélations de h avec les nilsuites

$$\sum_{n \leq x} h(n) F(g(n)\Gamma).$$

La réussite de l'application de la méthode de Green et Tao à diverses fonctions multiplicatives h [GT10b, Mat12a, Mat13, FH] montre sa pertinence pour aborder le problème de l'estimation de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$. Une telle approche, suggérée par Trevor Wooley, est effectivement concluante et conduit au résultat suivant, soumis pour publication.

Théorème 4. *Soient $d, t \geq 1$, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_t) : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes affines deux à deux affinement indépendants et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et satisfaisant $\mathbf{F}(\mathcal{K}) \subset [0, 1]^t$. Pour tout $u_0 \geq 1$ et uniformément en $y \geq x^{1/u_0}$, on a*

$$(26) \quad \Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K}) x^d \rho(u)^t$$

où la fonction impliquée dans le terme d'erreur ne dépend que des coefficients non constants de \mathbf{F} , de \mathcal{K} et de u_0 .

Sauf mention explicite du contraire, les termes d'erreur des résultats présentés dans cette thèse dépendent de manière forte de F . Dans la perspective d'étudier l'algorithme NFS, il serait intéressant de considérer l'influence des coefficients de la forme binaire F (et en particulier de son discriminant) sur $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$. À l'image de ce qu'il advient dans le cas des formes quadratiques, connaître un développement asymptotique de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ où interviennent les puissances de $\frac{1}{\log y}$ permettrait en théorie de détecter les "bons polynômes" pour le crible algébrique. La question de l'existence de résultats uniformes en

6. Harper obtient en fait dans [Har] une évaluation asymptotique du membre de droite dans le domaine $(\log x)^c \leq y$ pour une constante $c > 0$ assez grande.

F a été le sujet d'un travail de Razvan Barbulescu et de l'auteur à travers une étude [BL] qui propose une approche heuristique permettant de conjecturer des formules du type

$$\frac{\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)}{\text{Vol}(\mathcal{K})x^2} \approx \frac{\Psi(x, ye^{c(F, \mathcal{K})})}{x}$$

pour une constante explicite $c(F, \mathcal{K})$.

Ordres moyens de certaines fonctions multiplicatives

Sommaire

1. La formule de Perron et la méthode de Selberg-Delange	23
2. Ordres moyens sur les entiers y -friables	26
3. Ordres moyens sur les entiers y -criblés	30

Dans ce chapitre, on étudie l'ordre moyen de certaines fonctions multiplicatives dont la série de Dirichlet associée est analytiquement proche d'une puissance complexe d'une fonction zêta de Dedekind. Les résultats décrits dans ce qui suit sont essentiellement issus de la littérature, à l'exception du théorème 3.2 qui a été obtenu avec Gérald Tenenbaum [LT14] (voir l'annexe A).

La détermination d'ordres moyens pour de telles fonctions arithmétiques possède un intérêt intrinsèque. En outre, certaines formules obtenues dans ce chapitre constituent des ingrédients essentiels de la discussion du paragraphe 3 du chapitre 2 et du paragraphe 8 du chapitre 3.

1. La formule de Perron et la méthode de Selberg-Delange

Soit \mathbf{K} un corps de nombres de degré g . On rappelle que la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ associée à \mathbf{K} , définie pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par le produit eulérien

$$\zeta_{\mathbf{K}}(s) := \sum_{\mathfrak{j}} \frac{1}{N(\mathfrak{j})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

admet un prolongement analytique sur le plan complexe tout entier, avec pour seul singularité un pôle simple en $s = 1$, dont le résidu est noté $\lambda_{\mathbf{K}}$.

Depuis les travaux de Mitsui [Mit68] et Sokolovskii [Sok68], on connaît l'existence d'une constante $c(\mathbf{K}) > 0$ telle que $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ ne possède pas de zéro dans la région

$$(1.1) \quad \operatorname{Re}(s) > 1 - \frac{c(\mathbf{K})}{(\log(|\operatorname{Im}(s)| + 3))^{2/3} (\log \log(|\operatorname{Im}(s)| + 3))^{1/3}}.$$

Dans un tel domaine, on dispose de majorations précises de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$, comme le montre le résultat suivant, dû à Wu.

Lemme 1.1 ([Wu96], Lemma 7). *Uniformément pour $z \in \mathbf{C}$ et s dans la région*

$$1 - \frac{10c(\mathbf{K})}{(\log(|\operatorname{Im}(s)| + 3))^{2/3} (\log \log(|\operatorname{Im}(s)| + 3))^{1/3}} \leq \operatorname{Re}(s) \leq 2, \quad |\operatorname{Im}(s)| \geq 3,$$

on a l'estimation

$$(1.2) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(s)^z \ll_{\mathbf{K}} (\log |\operatorname{Im}(s)|)^{g|z|}.$$

Il convient de souligner que la constante implicite impliquée dans le symbole de Vinogradov dépend du corps de nombres \mathbf{K} , convention qui sera conservée dans ce qui suit. Déterminer l'uniformité d'une telle formule en fonction du degré g et du discriminant $\operatorname{Disc}(\mathbf{K})$ dans l'estimation de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ constitue une question à la source de nombreux

travaux. Le lecteur trouvera dans les notes du chapitre 7 de [Nar04] une abondante bibliographie relative à ce problème.

En travaillant à partir des majorations de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ sur la droite critique $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ de Kaufman [Kau79], on peut déduire des estimations dans l'ensemble de la bande critique $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

Lemme 1.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément en*

$$\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im}(s)| \geq 3,$$

on a l'estimation

$$(1.3) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(s) \ll_{\mathbf{K}} |\operatorname{Im}(s)|^{g(1-\operatorname{Re}(s))/3+\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION. D'après [Kau79] (voir aussi [HB88] et [HB96]), on a

$$(1.4) \quad \zeta_{\mathbf{K}}\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll_{\mathbf{K}} (|t| + 1)^{g/6}.$$

Au regard de (1.2), on en déduit le résultat en utilisant le théorème de Phragmén-Lindelöf (voir le paragraphe 6 du chapitre II.1 de [Ten08]). \square

Étant donné des réels $M \geq 1$, $c_0 \in]0, 1[$ et un complexe $z \in \mathbf{C}$, on définit – adaptant ainsi à notre problème les notations de [HTW08] – la classe $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(z; c_0; M)$ des fonctions multiplicatives h dont la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{h(n)}{n^s}$ s'écrit sous la forme

$$(1.5) \quad \mathcal{H}(s) = \mathcal{G}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^z$$

où la série de Dirichlet $\mathcal{G}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - c_0$ et satisfait

$$(1.6) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|g(n)|}{n^{1-c_0}} \leq M.$$

Introduisons encore, pour tout réel $z_0 > 0$, le sous-ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(z_0, z; c_0; M)$ des fonctions arithmétiques h dans $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(z; c_0; M)$ pour lesquelles il existe une fonction à valeurs réelles positives \tilde{h} dans $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(z_0; c_0; M)$ satisfaisant $|h(n)| \leq \tilde{h}(n)$ pour tout entier n .

Conséquence immédiate de la définition, un élément h de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(z_0, z; c_0; M)$ possède une série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ qui présente un comportement analytique semblable à celui de la puissance $\zeta_{\mathbf{K}}(s)^z$. En particulier, la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ possède un prolongement analytique dans la région de type "Korobov-Vinogradov" (1.1), dans laquelle elle possède une unique singularité en $s = 1$. Cette observation, combinée à l'utilisation d'outils d'intégration complexe (théorème des résidus, formule de Perron, etc.) est à la base de la méthode dite de Selberg-Delange, détaillée dans le chapitre II.5 de l'ouvrage de Tenenbaum [Ten08]. Les articles originels [Sel54], [Del59] et [Del71a] ne concernaient initialement que des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(z_0, z; c_0; M)$ mais la généralisation de cette méthode à des corps de nombres quelconques est aujourd'hui standard, comme en témoignent les résultats de l'article de Wu [Wu96].

En vue d'évaluer asymptotiquement la fonction sommatoire de h définie par

$$M_h(x) := \sum_{n \leq x} h(n),$$

on peut appliquer la formule de Perron et obtenir la validité de la formule

$$(1.7) \quad M_h(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \mathcal{H}(s)x^s \frac{ds}{s}$$

pour toute abscisse $\kappa > 1$. Ceci laisse augurer que les coefficients $\lambda_k(h; z)$, définis par le développement de Taylor en $s = 1$

$$(1.8) \quad \frac{(s-1)^z \mathcal{H}(s)}{s} = \sum_{k \geq 0} \lambda_k(h; z) (s-1)^k,$$

vont intervenir dans l'étude de $M_h(x)$. Le théorème ci-dessous, application effective de la méthode de Selberg-Delange, donne un développement asymptotique de la fonction sommatoire de h .

Théorème 1.3. *Soient $c_0 \in]0, 1[$ et $A > 0$ des réels. Pour $|z|, |z_0| \leq A$, $N \geq 0$, $M \geq 1$, $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(z_0, z; c_0; M)$ et $x \geq 3$, on a*

$$(1.9) \quad M_h(x) = x(\log x)^{z-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(h; z)}{\Gamma(z-k)(\log x)^k} + O(MR_N(x)) \right)$$

où $R_N(x) := \exp\left(-c_1(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right) + \left(\frac{c_2 N + 1}{\log x}\right)^{N+1}$. Les constantes $c_1, c_2 > 0$ et la constante implicite dans le symbole de Landau ne dépendent que de c_0, A et \mathbf{K} .

De plus, si $z, z_0 \in \mathbf{N}^*$, alors la formule (1.9) est valide en posant

$$(1.10) \quad R_{z-1}(x) := M \left(x^{1-c_0/2+\varepsilon} + x^{1-3/(2gz)+\varepsilon} \right).$$

DÉMONSTRATION. On reprend essentiellement la preuve du théorème II.5.2 de [Ten08] en soulignant les adaptations nécessaires. La formule de Perron [[Ten08], formule (II.2.10)] permet d'écrire, en posant $\kappa := 1 + 1/\log x$, la formule

$$(1.11) \quad \int_0^x M_h(t) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \mathcal{H}(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

Soit $T \geq 2$ un paramètre qui sera rendu explicite ultérieurement. On intègre sur le contour symétrique par rapport à l'axe réel, formé pour sa partie supérieure des quatre chemins suivants (inspirés du contour utilisé dans [[Wu96], p.8]) :

- la courbe, définie pour $0 \leq \text{Im}(s) \leq T$ par $\text{Re}(s) = 1 - \sigma(\text{Im}(s))$ où σ est défini par

$$\sigma(t) := \frac{\min(c_0/2, c_{\mathbf{K}}/2)}{1 + (\log(|t| + 3))^{2/3} (\log \log(|t| + 3))^{1/3}};$$

- le contour de Hankel tronqué Γ entourant le point $s = 1$, de rayon $1/(2 \log x)$ et de partie rectiligne le segment horizontal joignant $1 - 1/(2 \log x)$ à $1 - \sigma(0)$;
- le segment horizontal $[1 - \sigma(T) + iT, \kappa + iT]$;
- la droite verticale $[\kappa + iT, \kappa + i\infty[$.

En utilisant successivement le théorème des résidus et l'estimation (1.2) et en effectuant le choix $T := \exp\left(-c(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)$ pour une constante $c > 0$ convenable, il s'ensuit que l'on a

$$\int_0^x M_h(t) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O\left(Mx^2 \exp\left(-c_3(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)\right).$$

où $c_3 > 0$. La preuve du théorème II.5.2 de [Ten08] s'adapte alors *mutatis mutandis* et permet d'estimer la contribution du contour de Hankel pour en déduire (1.9).

Supposons à présent que z et z_0 sont des entiers positifs non nuls. Compte tenu de (1.10), il suffit de considérer le cas où $c_0 < 3/(gz)$. Partant de la formule de Perron (1.11), intégrons cette fois-ci sur le contour symétrique par rapport à l'axe réel, formé pour sa partie supérieure des trois chemins suivants :

- le segment vertical $[1 - c_0, 1 - c_0 + iT]$;
- le segment horizontal $[1 - c_0 + iT, \kappa + iT]$;

– la droite verticale $[\kappa + iT, \kappa + i\infty[$.

En utilisant les estimations du lemme 1.2 et en effectuant le choix $T := x^{c_0}$, on peut en déduire que l'on a

$$(1.12) \quad \int_0^x M_h(t) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}} \mathcal{H}(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O\left(Mx^{2-c_0+\varepsilon}\right)$$

où \mathcal{R} désigne le contour rectangulaire de sommets $1 - c_0 \pm iT$ et $\kappa \pm iT$. Compte tenu de la définition (1.8) de $\lambda_k(h; z)$, le théorème des résidus assure que la dérivée du terme principal du membre de droite de (1.12), qui est une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, est égale à

$$(1.13) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}} \mathcal{H}(s) \frac{x^s}{s} ds = x(\log x)^{z-1} \sum_{k=0}^{z-1} \frac{\lambda_k(h; z)}{\Gamma(z-k)(\log x)^k}.$$

En suivant alors l'argument détaillé dans la fin de la preuve du théorème II.5.2 de [Ten08], on obtient le résultat attendu. \square

Remarque. Dans le théorème précédent, nous n'avons pas cherché à couvrir une vaste généralité ni à obtenir des résultats optimaux. La méthode, plus que le résultat, importait ici et peut être modifiée selon plusieurs axes :

- (1) en affaiblissant les hypothèses sur $\mathcal{G}(s)$. En supposant par exemple que $\mathcal{G}(s)$ est prolongeable analytiquement dans le domaine $\operatorname{Re}(s) > 1 - c/\log(|\operatorname{Im}(s)| + 2)$ ou en remplaçant (1.6) par une estimation du type $\mathcal{G}(s) \ll M(1 + \operatorname{Im}(s))^\delta$ avec $\delta > 0$, on peut obtenir un résultat similaire avec des termes d'erreur moins précis, en modifiant le contour d'intégration de manière adéquate (voir dans cette direction le théorème III.5.2 de [Ten08] ou [BT98]).
- (2) en supposant que l'on dispose de majorations ponctuelles pour h du type $|h(n)| \leq \tau(n)^c$. On peut alors utiliser le corollaire II.2.4 de [Ten08] et ainsi considérer directement $M_h(x)$ sans passer par l'estimation intermédiaire de $\int_0^x M_h(t) dt$ ce qui permet d'améliorer le terme d'erreur (1.10).
- (3) lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, on peut remplacer (1.4) par l'estimation de [Hux05] de $\zeta(s)$ sur la droite critique, à savoir

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll |t|^{32/305+\varepsilon}, \quad (|t| \geq 3),$$

et ainsi préciser (1.10).

2. Ordres moyens sur les entiers y -friables

Un problème qui apparaît comme naturel dans le sillage du paragraphe précédent consiste à étudier la fonction sommatoire $M_h(x)$ pour des fonctions multiplicatives h qui dépendent de x . Dans cette direction, on considère l'ordre moyen d'une fonction arithmétique h sur les entiers friables en définissant, pour $2 \leq y \leq x$, la fonction sommatoire

$$\Psi_h(x, y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} h(n).$$

L'apparition du paramètre y introduit une nouvelle difficulté : la détermination d'un domaine en (x, y) dans lequel les estimations soient uniformes. Dans le meilleur des cas – c'est à dire en prenant $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ et $h(n) = 1$ pour tout n – et compte tenu des connaissances actuelles sur la fonction zêta de Riemann¹, on ne peut pas espérer faire mieux que le résultat de Saias [Sai89] qui énonce que, uniformément dans le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x,$$

1. Hildebrand étudie dans [Hil84] le lien entre la conjecture de Riemann et les entiers friables.

on a

$$(2.1) \quad \Psi(x, y) = \Lambda(x, y) \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right)$$

où

$$\Lambda(x, y) := \begin{cases} x \int_0^{+\infty} \rho(u - v) \, d\left(\frac{\lfloor y^v \rfloor}{y^v}\right) & \text{si } x \notin \mathbf{N}, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \Lambda(t, y) & \text{si } x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

et $L_\varepsilon(y) := \exp\left((\log y)^{3/5-\varepsilon}\right)$.

Hanrot, Tenenbaum et Wu ont étudié $\Psi_h(x, y)$ dans [HTW08] de manière approfondie pour une large classe de fonctions h , généralisant ainsi de manière systématique la formule (2.1). Leurs résultats s'appliquent en particulier aux éléments h de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(z_0, z; c_0; M)$ avec $z \in]0, +\infty[$ mais n'explicitent pas la dépendance en M . Soucieux de préciser l'uniformité en M et de rendre la lecture de ce chapitre plus fluide, nous redonnons ici les grandes lignes de la preuve du théorème 1.2 de [HTW08] en omettant des calculs. D'autres parts, motivés par nos applications futures et pour ne pas alourdir les arguments, nous ne considérerons dans ce paragraphe que des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; c_0; M)$.

En vue d'utiliser une version y -friable de la formule de Perron (1.7), il est naturel de considérer la série de Dirichlet engendrée par h et restreinte aux entiers y -friables définie pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - c_0$ par

$$(2.2) \quad \mathcal{H}(s, y) := \sum_{P^+(n) \leq y} \frac{h(n)}{n^s}.$$

La formule de Perron nous permet alors d'écrire

$$(2.3) \quad \Psi_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \mathcal{H}(s, y) x^s \frac{ds}{s}$$

où $\alpha_0 = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y}$ et $\xi(u)$ est l'unique racine réelle de l'équation $e^{\xi(u)} = 1 + u\xi(u)$.

L'étape suivante consiste à approcher $\mathcal{H}(s, y)$ par une quantité dans laquelle la fonction h et le paramètre y se comportent de manière indépendante. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.1 ([HTW08], Lemme 4.1). *Soient $c_0 \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. Uniformément pour $M \geq 1$, $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; c_0; M)$, $y \geq 3$ satisfaisant $y^{c_0} L_\varepsilon(y)^{-2} \geq M$ et dans le domaine*

$$(2.4) \quad |\operatorname{Im}(s)| \leq L_\varepsilon(y), \quad \operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{1}{(\log y)^{2/5+\varepsilon}},$$

on a

$$(2.5) \quad \mathcal{H}(s, y) = \mathcal{H}(s)(s-1) \log y \widehat{\rho}((s-1) \log y) \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right).$$

DÉMONSTRATION. La formule (4.2) de [HTW08] assure que, dans le domaine (2.4), on a

$$(2.6) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(s, y) = \zeta_{\mathbf{K}}(s)(s-1) \log y \widehat{\rho}((s-1) \log y) \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right).$$

On observe également que, pour toute abscisse $\sigma \geq 1 - c_0$, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{n>y} \frac{|g(n)|}{n^\sigma} &= \int_y^{+\infty} \frac{1}{t^{\sigma-(1-c_0)}} d \left(\sum_{n \leq t} \frac{|g(n)|}{n^{1-c_0}} \right) \\
 &= -\frac{1}{y^{\sigma-(1-c_0)}} \sum_{n \leq y} \frac{|g(n)|}{n^{1-c_0}} + (\sigma - (1 - c_0)) \int_y^{+\infty} \frac{1}{t^{\sigma+c_0}} \left(\sum_{n \leq t} \frac{|g(n)|}{n^{1-c_0}} \right) dt \\
 (2.7) \quad &\ll \frac{M}{y^{\sigma-(1-c_0)}}.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que g est multiplicative, on en déduit que, pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - c_0$, on a

$$(2.8) \quad \frac{\mathcal{G}(s)}{\mathcal{G}(s, y)} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^-(n) > y}} \frac{g(n)}{n^s} = 1 + O \left(\frac{M}{y^{\operatorname{Re}(s)-(1-c_0)}} \right).$$

ce qui implique le résultat. \square

Cette formule nous conduit à approcher $\Psi_h(x, y)$ par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \mathcal{H}(s)(s-1) \log y \widehat{\rho}((s-1) \log y) x^s \frac{ds}{s}.$$

Au vu de la formule (3.9) de [HTW08], à savoir, pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - c_0$,

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{(1-s)v} d \left(\frac{M_h(e^v)}{e^v} \right) = \frac{(s-1)\mathcal{H}(s)}{s},$$

on peut utiliser le théorème de convolution et le théorème d'inversion de Laplace pour en déduire que

$$(2.9) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \mathcal{H}(s)(s-1) \log y \widehat{\rho}((s-1) \log y) x^s \frac{ds}{s} = x \int_0^{+\infty} \rho(u-v) d \left(\frac{M_h(y^v)}{y^v} \right).$$

En précisant les termes d'erreur qui résultent de l'argument précédent en fonction de M , on obtient la version suivante du théorème 1.2 de [HTW08].

Théorème 2.2. *Soient $c_0 \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. Uniformément en $M \geq 1$, $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; c_0; M)$, $y \geq 2$ tel que $y^{c_0} L_\varepsilon(y)^{-2} \geq M$ et dans le domaine (H_ε) , on a*

$$(2.10) \quad \Psi_h(x, y) = \Lambda_h(x, y) + O \left(\frac{Mx\rho(u)}{L_\varepsilon(y)} \right)$$

où

$$\begin{aligned}
 \Lambda_h(x, y) &:= \begin{cases} x \int_0^{+\infty} \rho(u-v) d \left(\frac{M_h(y^v)}{y^v} \right) & \text{si } x \notin \mathbf{N}, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \Lambda_h(t, y) & \text{si } x \in \mathbf{N}, \end{cases} \\
 (2.11) \quad &= \lambda_0(h; 1)\rho(u)x + O \left(Mx \frac{\rho(u) \log(u+1)}{\log y} \right)
 \end{aligned}$$

et $\lambda_0(h; 1)$ est défini par (1.8).

DÉMONSTRATION. Ce résultat s'obtient en reprenant un par un les arguments de la preuve du théorème 1.2 de [HTW08] et en tenant compte, à chaque étape de la démonstration, de l'uniformité en M . Pour montrer (2.11), on effectue une sommation d'Abel. En supposant sans perte de généralité que $c_0 < 3/g$ et en utilisant le théorème 1.3, on obtient ainsi la formule

$$\begin{aligned}
 \Lambda_h(x, y) &= x\lambda_0(h; 1)\rho(u) + M_h(x) - x\lambda_0(h; 1) + x \int_0^u \rho'(u-v) (M_h(y^v)y^{-v} - \lambda_0(h; 1)) dv \\
 &= x\lambda_0(h; 1)\rho(u) + O \left(M \left(x^{1-c_0/2+\varepsilon} - x \int_0^u \rho'(u-v)y^{-v(c_0/2-\varepsilon)} dv \right) \right),
 \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On conclut en utilisant l'estimation (III.5.82) de [Ten08], à savoir

$$\int_0^u \rho'(u-v)y^{-v} dv \ll \frac{\rho(u) \log(u+1)}{\log y}.$$

□

Terminons ce paragraphe en présentant une première utilisation du résultat précédent dans l'étude des valeurs friables de formes binaires. Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum mentionnent dans l'introduction de [BBDT12] qu'il est possible d'utiliser les caractères de Hecke du groupe de classes $G(\mathbf{K})$ ainsi que le théorème 1.2 de [HTW08] pour en déduire un équivalent asymptotique de

$$\Psi_F(\mathcal{K}_F.x, y) := \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}_F.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(|F(n_1, n_2)|) \leq y \right\}$$

où F est une forme binaire quadratique irréductible et $\mathcal{K}_F := \{x_1, x_2 : |F(x_1, x_2)| \leq 1\}$. On précise cette observation dans le théorème suivant, dans le cas où le discriminant $\text{Disc}(F)$ de F est négatif et fondamental, c'est-à-dire s'il satisfait l'une des conditions suivantes :

- $\text{Disc}(F) \equiv 1 \pmod{4}$ et est sans facteur carré,
- $\text{Disc}(F) = 4m$ où $m \equiv 2$ ou $3 \pmod{4}$ et m est sans facteur carré.

Théorème 2.3. *Soit $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme quadratique primitive et irréductible dont le discriminant $\text{Disc}(F)$ est négatif et fondamental. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément dans le domaine (H_ε) ,*

$$\Psi_F(\mathcal{K}_F.x, y) = \frac{|U(\mathbf{K})|}{|G(\mathbf{K})|} \Lambda_{\mathbf{K}}(x^2, y) \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right)$$

où \mathbf{K} désigne le corps de décomposition de $F(X, 1)$, $U(\mathbf{K})$ le groupe des unités de \mathbf{K} , $G(\mathbf{K})$ le groupe de classes de \mathbf{K} et

$$\Lambda_{\mathbf{K}}(x, y) := \begin{cases} x \int_0^{+\infty} \rho(u-v) d\left(\frac{\{j:N(j) \leq y^v\}}{y^v}\right) & \text{si } x \notin \mathbf{N}, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \Lambda_{\mathbf{K}}(t, y) & \text{si } x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

On a en particulier

$$(2.12) \quad \Psi_F(\mathcal{K}_F.x, y) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\text{Disc}(\mathbf{K})|}} \rho(2x) x^2 \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right).$$

DÉMONSTRATION. La preuve reprend essentiellement la démonstration du théorème 4.2 de [BL] dans lequel est étudié le cardinal

$$\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K}_F.x, y) := \# \left\{ (n_1, n_2) : \text{pgcd}(n_1, n_2) = 1, |F(n_1, n_2)| \leq x^2, P^+(|F(n_1, n_2)|) \leq y \right\}.$$

À la lecture de la démonstration du théorème 6.20 de [Bue89], on observe que les hypothèses faites sur $\text{Disc}(F)$ impliquent l'existence d'un idéal \mathfrak{d} de base (ω_1, ω_2) tel que l'on ait

$$F(X_1, X_2) = \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(X_1\omega_1 + X_2\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}.$$

Le groupe des unités $U(\mathbf{K})$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ étant fini, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Psi_F(\mathcal{K}_F.x, y) &= \# \left\{ (a, b) : \frac{|N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(a\omega_1 + b\omega_2)|}{N(\mathfrak{d})} \leq x^2, P^+\left(\frac{|N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(a\omega_1 + b\omega_2)|}{N(\mathfrak{d})}\right) \leq y \right\} \\ &= |U(\mathbf{K})| \# \left\{ \mathfrak{j} \text{ idéal principal} : \mathfrak{d} | \mathfrak{j}, N(\mathfrak{j}\mathfrak{d}^{-1}) \leq x^2, P^+(N(\mathfrak{j}\mathfrak{d}^{-1})) \leq y \right\}. \end{aligned}$$

Afin de ne sélectionner que les idéaux principaux, on considère le groupe $\widehat{G(\mathbf{K})}$ des caractères multiplicatifs du groupe de classe $G(\mathbf{K})$. Par la propriété d'orthogonalité des caractères, on a la formule

$$\#\{j \text{ principal} : \mathfrak{d}|j, N(j\mathfrak{d}^{-1}) \leq x^2, P^+(N(j\mathfrak{d}^{-1})) \leq y\} = \frac{1}{|G(\mathbf{K})|} \sum_{\chi \in \widehat{G(\mathbf{K})}} \chi(\mathfrak{d}) \Psi_\chi(x^2, y),$$

où

$$\Psi_\chi(x^2, y) = \sum_{\substack{N(j) \leq x^2 \\ P(N(j)) \leq y}} \chi(j).$$

La contribution principale provient du caractère trivial, noté χ_0 . En utilisant le théorème 2.2, on en déduit que, uniformément dans le domaine (H_ε) , on a

$$\Psi_{\chi_0}(x^2, y) = \Lambda_{\mathbf{K}}(x^2, y) + O\left(\frac{x^2 \rho(2u)}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

Les caractères non triviaux contribuent quant à eux en tant que terme d'erreur. En effet, il est possible d'adapter *mutatis mutandis* les arguments de [Ten90a] et [FT91] en considérant la fonction L de Dirichlet engendrée par un caractère de Hecke non trivial χ pour montrer que, uniformément dans le domaine (H_ε) , on a

$$\Psi_\chi(x^2, y) \ll \frac{x^2 \rho(2u)}{L_\varepsilon(y)}.$$

La formule (2.12) est une conséquence de (2.11) et de la formule du nombre de classes. \square

Remarque. En utilisant le théorème 1.1 de [HTW08], on peut en fait déduire un développement asymptotique de $\Lambda_{\mathbf{K}}(x, y)$ en fonction des puissances inverses de $\log y$ et ainsi préciser (2.12).

3. Ordres moyens sur les entiers y -criblés

Le problème dual, à savoir l'étude de l'ordre moyen de h sur les entiers y -criblés

$$\Phi_h(x, y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} h(n),$$

a été abordé par Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum dans le paragraphe 2.2 de [BBDT12], pour les fonctions h appartenant à $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; c_0; M)$. Comme précédemment, on peut reprendre leurs arguments dont on rappelle les grandes lignes ci-dessous – essentiellement inspirées par le chapitre III.6 de [Ten08] – pour en déduire une uniformité en M . On exprimera les termes d'erreur obtenus en fonction de $L_\varepsilon(y) := \exp((\log y)^{3/5-\varepsilon})$, $Y_\varepsilon := \exp((\log y)^{3/2-\varepsilon})$ et $H(u) := \exp\left(\frac{u}{(1+\log u)^2}\right)$.

En premier lieu, rappelons que la multiplicativité de h implique que l'on a, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$(3.1) \quad \frac{\mathcal{H}(s)}{\mathcal{H}(s, y)} = \sum_{P^-(n) > y} \frac{h(n)}{n^s},$$

d'où l'on déduit la formule

$$(3.2) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{\mathcal{H}(s)}{\mathcal{H}(s, y)} x^s \frac{ds}{s}$$

avec $\kappa := 1 + 1/\log x$. En décalant l'axe d'intégration jusqu'à la droite $\operatorname{Re}(s) = \alpha_0$ et en tenant compte de la contribution du pôle simple $s = 1$, on obtient, en utilisant l'estimation (2.8),

$$(3.3) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{\mathcal{H}(s)}{\zeta_{\mathbf{K}}(s, y)} x^s \frac{ds}{s} + \frac{x\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} \left(1 + O\left(\frac{M}{y^{c_0}}\right)\right).$$

On remplace alors $\mathcal{H}(s, y)$ par l'approximation du lemme 2.1, ce qui amène à approcher $\Phi_h(x, y)$ par

$$W_{\mathbf{K}}(x, y) := \frac{x\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{x^s}{(s-1)\log y \widehat{\rho}((s-1)\log y)} \frac{ds}{s}.$$

En remarquant que, pour $s \neq 0$, on a

$$\frac{1}{s\widehat{\rho}(s)} = 1 + \widehat{\omega}(s)$$

où $\widehat{\omega}$ désigne la transformée de Laplace de la fonction ω de Buchstab, on peut alors écrire

$$W_{\mathbf{K}}(x, y) := \frac{x\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} + \frac{x}{2i\pi} \int_{-\xi(u) - i\infty}^{-\xi(u) + i\infty} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds.$$

Dans la mesure où $\widehat{\omega}(s)$ possède un pôle simple en $s = 0$ de résidu $e^{-\gamma}$, on peut décaler l'axe d'intégration jusqu'à $\operatorname{Re}(s) = 1/\log x$ de sorte à avoir

$$W_{\mathbf{K}}(x, y) = \frac{x\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} - \frac{xe^{-\gamma}}{\log y} + \frac{x}{2i\pi} \int_{1/\log x - i\infty}^{1/\log x + i\infty} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds.$$

Par inversion de Laplace (voir [Ten08] p. 542), il s'ensuit que

$$W_{\mathbf{K}}(x, y) = 1 + x \left(\frac{\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} - \frac{e^{-\gamma}}{\log y} + \mu_y(u) \right)$$

où

$$\mu_y(u) := \int_0^{+\infty} \omega(u-v)y^{-v} dv.$$

En utilisant le lemme III.6.11 de [Ten08] et en remarquant que l'on peut déduire d'un article de Lebacque [Leb07] la formule de Mertens généralisée

$$(3.4) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(1, y)^{-1} = \prod_{N(\mathfrak{p}) \leq y} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\lambda_{\mathbf{K}} \log y} + O\left(\frac{1}{L_{\varepsilon}(y)}\right),$$

il s'ensuit que, dans le domaine (H_{ε}) , on obtient l'analogie de la formule (6.61) de [Ten08] suivante

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{K}}(x, y) - x\mu_y(u) \frac{\lambda_{\mathbf{K}} e^{\gamma} \log y}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} &= 1 + x \left(\frac{\lambda_{\mathbf{K}}}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} - \frac{e^{-\gamma}}{\log y} \right) (1 - \mu_y(u) e^{\gamma} \log y) \\ &\ll \frac{x\rho(u)}{H(u)^{c_1} L_{\varepsilon}(y)} \end{aligned}$$

où $c_1 > 0$ est une constante absolue.

En récupérant les différents termes d'erreur engendrés par la démarche précédente, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.1 ([BBDT12], Proposition 1). *Soient $M \geq 1$, $c_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. Uniformément pour $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; c_0; M)$, dans le domaine (H_{ε}) avec $y^{c_0} L_{\varepsilon}(y)^{-2} \geq M$, on a*

$$(3.5) \quad \Phi_h(x, y) = x\mu_y(u) \frac{\lambda_{\mathbf{K}} e^{\gamma} \log y}{\zeta_{\mathbf{K}}(1, y)} + O\left(Mx\rho(u) \left(H(u)^{-c_1} L_{\varepsilon}(y)^{-1} + Y_{\varepsilon}^{-1}\right)\right)$$

où

$$\mu_y(u) := \int_0^{+\infty} \omega(u-v)y^{-v} dv$$

et $c_1 > 0$ est une constante absolue ne dépendant que de c_0 et \mathbf{K} .

En particulier, on a, dans le domaine (H_ε) ,

$$(3.6) \quad \Phi_h(x, y) = (x\omega(u) - y) \frac{e^\gamma}{\zeta(1, y)} + O\left(\frac{Mx\rho(u)}{(\log y)^2} \left(H(u)^{-c_1} + Y_\varepsilon^{-1}\right)\right).$$

Motivés par les applications du chapitre 2, on étend à présent les méthodes précédemment décrites en vue d'obtenir une formule asymptotique de $\Phi_h(x, y)$ lorsque $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, -1; c_0; M)$, c'est-à-dire pour les fonctions multiplicatives h dont la série de Dirichlet est analytiquement proche de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-1}$. Ce travail a été effectué en commun avec Gérald Tenenbaum et a donné lieu à la rédaction conjointe d'une note qui est placée dans l'annexe A. Le théorème suivant reprend le résultat principal obtenu dans la note, en précisant la dépendance en M .

Théorème 3.2. *Soient $c_0 \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. Uniformément pour $M \geq 1$, $y^{c_0} L_\varepsilon(y)^{-2} \geq M$, $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, -1; c_0; M)$, et dans le domaine*

$$(G_\varepsilon) \quad x \geq 2, \quad \exp\left((\log x)^{2/5+\varepsilon}\right) \leq y \leq x,$$

on a

$$(3.7) \quad \Phi_h(x, y) = x \int_0^{u-1} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv + O\left(M \frac{x\rho(u)}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

DÉMONSTRATION. La preuve consiste à reprendre la démonstration du théorème 1.1 de l'annexe A en tenant compte de la dépendance en M . Tous calculs faits, on obtient l'analogie suivant de la formule (2.11) de l'annexe A, estimation en fait valide non seulement dans le domaine $\exp\left((\log x)^{2/5+\varepsilon}\right) \leq y \leq x/2$ considéré dans ladite annexe, mais aussi lorsque $x/2 \leq y \leq x$,

$$\Phi_h(x, y) = \frac{x}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{s\hat{\rho}(s)e^{us}}{s + \log y} ds + O\left(M \frac{x\rho(u)}{L_\varepsilon(y)}\right),$$

où α_0 a été défini dans le paragraphe 2 du présent chapitre. Le résultat suit en remarquant que $s\hat{\rho}(s)/(s + \log y)$ est la transformée de Laplace de $\int_0^\infty \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv$. \square

Entiers friables, formes binaires et crible de Legendre-Ératosthène

Sommaire

1. Crible de Legendre-Ératosthène	33
2. Généralités sur la fonction arithmétique γ_F	34
3. Une formule conjecturale pour $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ pour une forme binaire F irréductible	36
4. Étude de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ avec F une forme quadratique irréductible	38
5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible	40

Dans ce chapitre, on utilise le crible d'Ératosthène pour étudier la quantité

$$\Psi_F(\mathcal{K}.x, y) := \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F(n_1, n_2)) \leq y\}$$

pour une forme binaire F irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$ et de degré $g \geq 2$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifiant $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On décrit en particulier un argument heuristique en faveur de la pertinence de la formule conjecturale

$$\Psi_F(\mathcal{K}.x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(gu).$$

À la fin de ce chapitre, on établit la validité d'une telle formule dans le cas des formes quadratiques irréductibles avant de généraliser la méthode ainsi développée à l'étude de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ où $F = F_1 F_2$ est le produit d'une forme linéaire F_1 et d'une forme quadratique F_2 irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$.

1. Crible de Legendre-Ératosthène

Étant donné un ensemble fini de nombres premiers \mathcal{P} , un problème récurrent en arithmétique consiste à estimer le cardinal de l'ensemble des valeurs de F criblées par les éléments de \mathcal{P} , à savoir

$$S_F(\mathcal{K}.x; \mathcal{P}) := \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : p|F(n_1, n_2) \Rightarrow p \notin \mathcal{P}\}.$$

Compte tenu de l'hypothèse $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$, le principe d'inclusion-exclusion permet de réécrire $S_F(\mathcal{K}.x; \mathcal{P})$ sous la forme

$$(1.1) \quad S_F(\mathcal{K}.x; \mathcal{P}) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq x^g \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu(d) A_d(\mathcal{K}.x)$$

où

$$A_d(\mathcal{K}.x) := \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : d|F(n_1, n_2)\},$$

réduisant ainsi *a priori* notre étude à l'estimation de ces derniers cardinaux.

En découpant l'ensemble $\mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2$ en classes de congruences modulo d , un argument basé sur les réseaux de \mathbf{Z}^2 permet de montrer que l'on a

$$(1.2) \quad A_d(\mathcal{K}.x) = \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 + r_d(\mathcal{K}.x)$$

où

$$\gamma_F(d) := \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq d : d|F(n_1, n_2)\}$$

et

$$r_d(\mathcal{K}.x) \ll_{\mathcal{K}} \gamma_F(d)x$$

en raison de la régularité de \mathcal{K} .

Sous sa forme standard, le crible de Legendre-Ératosthène consiste à introduire l'approximation (1.2) dans la formule (1.1), ce qui conduit à la formule

$$(1.3) \quad S_F(\mathcal{K}.x; \mathcal{P}) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 T_F(x^g; \mathcal{P}) + \sum_{\substack{1 \leq d \leq x^g \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu(d) r_d(\mathcal{K}.x).$$

où, pour tout $t \geq 1$,

$$(1.4) \quad T_F(t; \mathcal{P}) := \sum_{\substack{1 \leq d \leq t \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu(d) \frac{\gamma_F(d)}{d^2}.$$

2. Généralités sur la fonction arithmétique γ_F

La définition de la somme $T_F(t; \mathcal{P})$ suggère de s'attarder sur le comportement de la fonction arithmétique γ_F . Celui-ci a été considéré en détail dans la littérature relative aux formes binaires : citons entre autres le paragraphe 5 de [Gre70], le paragraphe 7 de [Dan99] ainsi que le paragraphe 2 de [dlBT12].

Compte tenu de la multiplicativité de γ_F , conséquence du théorème des restes chinois, il suffit d'étudier $\gamma_F(p^k)$ pour p premier et $k \geq 1$. À l'aide d'une partition de l'ensemble des points entiers du carré $[1, p^k]^2$ en fonction des valeurs du plus grand diviseur commun de (n_1, n_2, p^k) , on retrouve la formule (2.3) de [dlBT12], à savoir

$$(2.1) \quad \gamma_F(p^k) = \sum_{0 \leq j \leq \lceil k/g \rceil} \gamma_F^{(1)}(p^{\max(k-gj, 0)}) p^{2 \min(k, gj) - 2j}$$

où

$$(2.2) \quad \gamma_F^{(1)}(p^k) := \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k : (n_1, n_2, p^k) = 1 \text{ et } p^k | F(n_1, n_2)\}.$$

En profitant de l'homogénéité de F , on a

$$(2.3) \quad \gamma_F^{(1)}(p^k) = (p-1)p^{k-1} \left(\# \{1 \leq n_2 \leq p^k : p^k | F(1, n_2)\} \right. \\ \left. + \# \{1 \leq n_1 \leq p^k : p | n_1 \text{ et } p^k | F(n_1, 1)\} \right).$$

Il apparaît ainsi que le comportement de γ_F est lié à la résolubilité de congruences polynomiales en une variable.

L'étude de cette dernière – qui s'inscrit dans la lignée du lemme de Hensel – a fait l'objet de nombreux articles. En particulier, Nagell [Nag21], Ore [Ore21], Huxley [Hux81] et Stewart [Ste91] ont établi des majorations du nombre de racines modulo p^k d'un élément de $\mathbf{Z}[X]$. Rappelons dans ce sens un résultat de Stewart, essentiellement optimal.

Lemme 2.1 ([Ste91], Corollary 2). *Soit $F \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme primitif de discriminant $\text{Disc}(F) \neq 0$ et de degré $g \geq 2$. Pour tout nombre premier p et $k \geq 1$, on a*

$$\# \{1 \leq n \leq p^k : p^k | F(n)\} \leq 2p^{\text{val}_p(\text{Disc}(F))/2} + g - 2.$$

En injectant cette majoration dans les formules (2.3) et en utilisant (2.1), Daniel [Dan99] en déduit une borne supérieure de $\gamma_F(p^k)$ uniforme en p et k , estimation dont l'uniformité en F a été précisée dans le lemme 2.2 de [dlBT12]. Nous donnons ici une version faible de ces résultats, suffisante pour notre utilisation.

Lemme 2.2. *Soit $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré $g \geq 2$. On a, uniformément en p et $k \geq 1$,*

$$(2.4) \quad \gamma_F(p^k) \ll_F \begin{cases} p & \text{si } k = 1, \\ kp^k & \text{si } g = 2 \text{ et } k \geq 2, \\ p^{2k-2} & \text{si } g \geq 3 \text{ et } 2 \leq k \leq g, \\ p^{2k(1-1/g)} & \text{si } g \geq 3 \text{ et } k > g. \end{cases}$$

De plus, si p ne divise pas $F(0, 1)$, alors

$$(2.5) \quad \gamma_F(p) = (p-1)\nu_p + 1$$

où ν_p est le nombre de racines de la congruence $F(1, X) \equiv 0 \pmod{p}$.

DÉMONSTRATION. Lorsque $g \geq 3$, il s'agit du lemme 3.1 de [Dan99]. Les estimations pour $g = 2$ sont issues du lemme 2.2 de [dlBT12] (voir aussi le lemme 2.2 de [Mar06]). \square

Soient θ_0 une racine de $F(1, X)$ et \mathcal{O}_{θ_0} l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\theta_0)$. La proposition suivante, due à Dedekind, relie ν_p aux nombres d'idéaux premiers de \mathcal{O}_{θ_0} au dessus de p .

Proposition 2.3 ([Ded78]). *Soient $F \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme irréductible sur \mathbf{Z} , p un nombre premier et*

$$F(X) \equiv F_1(X)^{e_1} \dots F_t(X)^{e_t} \pmod{p}$$

la décomposition de $F(X)$ en facteurs irréductibles modulo p .

Si p ne divise pas l'indice $[\mathcal{O}_{\theta_0}, \mathbf{Z}[\theta_0]]$, on a la décomposition de $p\mathcal{O}_{\theta_0}$ en idéaux premiers suivante

$$p\mathcal{O}_{\theta_0} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_t^{e_t}$$

où \mathfrak{p}_i est l'idéal de \mathcal{O}_{θ_0} engendré par p et $F_i(\theta_0)$.

En particulier et sous ces conditions, ν_p est le nombre d'idéaux \mathfrak{p} au-dessus de p tels que $N(\mathfrak{p}) = p$.

La discussion précédente illustre l'interaction entre la distribution des idéaux premiers de \mathcal{O}_{θ_0} et la régularité de γ_F . Nous verrons au paragraphe suivant l'importance de cette observation dans l'étude de sommes où intervient la fonction de densité γ_F . À titre d'exemple, le théorème des idéaux premiers entraîne la formule suivante, uniforme en $x \geq 2$,

$$(2.6) \quad \sum_{p \leq x} \frac{\gamma_F(p)}{p} \log p = x \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(x)}\right) \right)$$

où $L_\varepsilon(x) := \exp\left((\log x)^{3/5-\varepsilon}\right)$.

Dans la mesure où la fonction arithmétique γ_F apparaît dans de nombreux problèmes liés aux formes binaires, l'importance de son étude dépasse le seul cadre de notre propos. Par exemple, La Bretèche et Browning [dlBB06] ont obtenu une majoration de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique h sur les formes binaires, dans laquelle intervenait γ_F . À titre de référence future, on donne dans le théorème suivant une version de leur résultat sans préciser la dépendance en F qui était explicitée dans leurs travaux.

Théorème 2.4 ([dIBB06], Corollary 1). *Soient $A > 0$, $B : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré g et h une fonction positive et sous-multiplicative satisfaisant $h(p) \leq A$ pour tout premier p et $h(n) \leq B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et tout $\varepsilon > 0$. On a, uniformément en $x \geq 2$, l'estimation*

$$(2.7) \quad \sum_{|n_1|, |n_2| \leq x} h(F(n_1, n_2)) \ll_{A, B, F} x^2 \prod_{g < p \leq x} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2} (h(p) - 1) \right) + x(\log x)^{A^g - 1}.$$

Soulignons que La Bretèche et Tenenbaum ont donné dans [dIBT12] une généralisation de ce résultat aux sommes courtes de la forme

$$\sum_{x \leq n_1, n_2 \leq x + x^\alpha} h(F_1(n_1, n_2), \dots, F_t(n_1, n_2))$$

où F_1, \dots, F_t sont des formes binaires irréductibles dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$, $\alpha \in]0, 1]$ et h est une fonction arithmétique satisfaisant certaines conditions de croissance et de sous-multiplicativité.

3. Une formule conjecturale pour $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ pour une forme binaire F irréductible

En appliquant la formule (1.3) avec l'ensemble de premiers criblant $\mathcal{P} := \{p > y\}$, on obtient la relation

$$(3.1) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 T_F(x^g; \{p > y\}) + \sum_{\substack{d \leq x^g \\ P^-(d) > y}} \mu(d)r_d(\mathcal{K}.x).$$

Sous réserve de montrer que la fonction multiplicative $n \mapsto \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}$ est un élément de $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}(\theta_0)}(1, -1; c_0; M)$ pour des constantes c_0 et M convenables – ce que laisse présager la distribution de γ_F étudiée dans le paragraphe précédent –, on peut utiliser les résultats du chapitre 1 pour évaluer la quantité $T_F(x^g; \{p > y\})$ définie par (1.4).

À l'aide du lemme 2.2, on observe que la série de Dirichlet engendrée par la fonction $n \mapsto \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}$, à savoir

$$\mathcal{H}_F(s) := \sum_n \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n^{s+1}},$$

est absolument convergente lorsque $\text{Re}(s) > 1$. De plus, pour $0 < \sigma \leq 1$ et uniformément en p premier, on a l'estimation

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} p^{-k\sigma} \left| \# \{j : N(j) = p^k\} - \# \{j : N(j) = p^{k-1}\} \right| \frac{\gamma_F(p)}{p} \\ & \ll \frac{1}{p^{\sigma+1}} + \sum_{k \geq 2} \frac{\# \{j : N(j) \leq p^k\}}{p^{k\sigma}} \ll \frac{1}{p^{\sigma+1}} + \frac{1}{p^{2\sigma}}. \end{aligned}$$

En remarquant que, pour $\text{Re}(s) > 1$, on a

$$\mathcal{H}_F(s) \zeta_{\mathbf{Q}(\theta_0)}(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{k \geq 1} p^{-ks} \left(\# \{j : N(j) = p^k\} - \# \{j : N(j) = p^{k-1}\} \right) \frac{\gamma_F(p)}{p} \right),$$

on en déduit que $\mathcal{H}_F(s) \zeta_{\mathbf{Q}(\theta_0)}(s)$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\text{Re}(s) > 1/2$ et un raisonnement similaire permet de montrer un résultat analogue pour la série $(\sum_n \gamma_F(n)/n^{s+1}) \zeta_{\mathbf{Q}(\theta_0)}(s)^{-1}$. Par suite, ceci entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_F(\varepsilon)$ telle que la fonction $n \mapsto \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}$ appartienne à l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}(\theta_0)}(1, -1; 1/2 + \varepsilon; M_F(\varepsilon))$.

Appliquons à présent le théorème 3.2 du chapitre 1 à la fonction $n \mapsto \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}$. Il s'ensuit la formule asymptotique, valide uniformément dans le domaine

$$(G_\varepsilon) \quad x \geq 2, \quad \exp\left((\log x)^{2/5+\varepsilon}\right) \leq y \leq x,$$

$$(3.2) \quad \Phi_{n \rightarrow \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}}(x, y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n} = x \int_0^{u-1} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv + O\left(\frac{x\rho(u)}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

À partir de ce résultat, une sommation d'Abel permet d'obtenir un équivalent asymptotique de $T_F(x; \{p > y\})$.

Proposition 3.1. *Uniformément dans le domaine (G_ε) , on a*

$$(3.3) \quad T_F(x; \{p > y\}) = \rho(u) + O\left(\rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

DÉMONSTRATION. On remarque dans un premier temps que, pour $t \in [1, y]$, on a trivialement $\Phi_{n \rightarrow \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}}(t, y) = 1$. À l'aide de la formule (3.2) et d'une sommation d'Abel, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} T_F(x; \{p > y\}) &= \frac{\Phi_{n \rightarrow \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}}(x, y)}{x} + \int_1^y \frac{1}{t^2} dt + \int_y^x \frac{\Phi_{n \rightarrow \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n}}(t, y)}{t^2} dt. \\ &= \int_0^{u-1} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv + 1 + \int_y^x \int_0^{\frac{\log t}{\log y} - 1} \frac{\rho'\left(\frac{\log t}{\log y} - v\right)}{ty^v} dv dt + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \\ &= \int_0^{u-1} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv + 1 + \log y \int_0^{u-1} \int_{v+1}^u \frac{\rho'(w-v)}{y^v} dw dv + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right). \end{aligned}$$

On peut majorer la première intégrale en utilisant l'estimation (voir la formule (III.5.82) de [Ten08])

$$\int_0^u \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv \ll \rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y}.$$

Pour la seconde intégrale, on observe à l'aide d'une intégration par parties que l'on a

$$\begin{aligned} \log y \int_0^{u-1} \int_{v+1}^u \frac{\rho'(w-v)}{y^v} dw dv &= \log y \int_0^{u-1} \frac{\rho(u-v) - 1}{y^v} dv \\ &= \rho(u) - 1 + O\left(\rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat. \square

Remarque. Compte tenu de la présence de $\frac{1}{L_\varepsilon(y)}$ dans le terme d'erreur de (3.3), on observe que l'équivalent

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \mu(n) \frac{\gamma_F(n)}{n^2} = \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

est valide uniformément dans le domaine

$$\exp\left((\log x)^{5/8+\varepsilon}\right) \leq y \leq x.$$

En injectant le résultat précédent dans (3.1), on obtient la formule suivante, uniforme en (G_ε) ,

$$(3.4) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2\rho(gu) + \sum_{\substack{d \leq x^9 \\ P^-(d) > y}} \mu(d)r_d(\mathcal{K}.x) + O\left(x^2\rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{x^2}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

En supposant que la somme des $r_d(\mathcal{K}.x)$ contribue comme un terme de reste négligeable dès que $y \geq x^\varepsilon$, on peut formuler la conjecture suivante.

Conjecture 3.2. *Soient $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} et de degré $g \geq 2$, $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifiant $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. On a, uniformément en $y \geq x^\varepsilon$, la formule*

$$(3.5) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(gu).$$

4. Étude de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ avec F une forme quadratique irréductible

La discussion du paragraphe précédent a permis de réduire l'étude de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ à une estimation des termes de reste $r_d(\mathcal{K}.x)$ définis par (1.2) en moyenne sur les entiers $d \leq x^g$. La distribution multiplicative des valeurs d'une forme binaire, à travers l'étude de $r_d(\mathcal{K}.x)$, a fait l'objet de divers travaux. Dans [Gre70] et [Gre71], Greaves établit l'estimation suivante, valide pour tout $\varepsilon > 0$, toute forme F irréductible de degré $g \geq 2$ et uniforme en $x, D \geq 1$,

$$(4.1) \quad \sum_{d \leq D} |r_d([0, x]^2)| \ll_{F, \varepsilon} D^\varepsilon (x + D).$$

Daniel [Dan99] précise la majoration de cette somme, dite de Type I, tout en l'étendant à des compacts \mathcal{K} plus généraux à travers le résultat suivant.

Lemme 4.1 ([Dan99], Lemma 3.3). *Soient $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré $g \geq 2$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifiant $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On a, uniformément en $x \geq 1$ et $D \geq 1$, l'estimation*

$$(4.2) \quad \sum_{d \leq D} |r_d(\mathcal{K}.x)| \ll_{F, \mathcal{K}} x \sqrt{D} (\log 2D)^{g(1+2g)^{g+1}} + D (\log 2D)^{3g-1}.$$

À la lumière de ce lemme, on observe que l'on peut atteindre un niveau de distribution $D = x^2 (\log x)^{-A}$ pour $A > 0$ assez grand. Il convient de souligner que, pour certaines formes quadriques, La Bretèche et Tenenbaum [dlBT13], parviennent à remplacer dans (4.2) les puissances de $(\log 2D)$ par $(\log \log x)^2$, permettant ainsi le choix $D = x^2 (\log x)^{-A}$ sans restriction de taille sur $A > 0$. Il demeure cependant que x^2 est la limite du niveau de distribution des valeurs de F et qu'il n'est pas possible d'établir la conjecture 3.2 par la seule utilisation du lemme 4.1 dans (3.4) lorsque $g \geq 3$. Pour cette raison, on suppose à présent que F est une forme quadratique irréductible.

Soit $\tau \in [(\log x)^{-1}, 2]$ un paramètre qui sera précisé ultérieurement. On approche dans la formule (1.1) le cardinal $A_d(\mathcal{K}.x)$ par $\text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \frac{\gamma_F(d)}{d}$ pour $d \leq x^{2-\tau}$, de sorte à avoir

$$(4.3) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 T_F(x^{2-\tau}; \{p > y\}) + R_F(\mathcal{K}.x; x^{2-\tau}, y)$$

où

$$(4.4) \quad R_F(\mathcal{K}.x; x^{2-\tau}, y) \ll \sum_{d \leq x^{2-\tau}} |r_d(\mathcal{K}.x)| + \sum_{\substack{d > x^{2-\tau} \\ P^-(d) > y}} A_d(\mathcal{K}.x).$$

En appliquant le lemme 4.1 avec le paramètre $D = x^{2-\tau}$, il vient immédiatement que

$$(4.5) \quad \sum_{d \leq x^{2-\tau}} |r_d(\mathcal{K}.x)| \ll x^{2-\tau/2} (\log 2x)^{250}.$$

Écrivons les termes restants sous la forme $F(n_1, n_2) = md$ avec $x^{2-\tau} < d \leq x^2$, $P^-(d) > y$ et $m \leq x^\tau$. On observe ainsi que l'on a

$$(4.6) \quad \sum_{\substack{d > x^{2-\tau} \\ P^-(d) > y}} A_d(\mathcal{K}.x) \leq \sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; y)$$

où

$$S(\mathcal{K}.x; m; y) := \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : m | F(n_1, n_2) \text{ et } (pm | F(n_1, n_2) \Rightarrow p > y) \right\}.$$

On utilise un lemme de crible pour majorer cette dernière quantité. Au vu du lemme 2.2 et de (2.6), les hypothèses (Ω_1) et $(\Omega_2(1))$ de [HR74] sont vérifiées, à savoir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, si p n'est pas un diviseur fixe de F (c'est-à-dire si $\gamma_F(p) \neq p^2$), on ait

$$(\Omega_1) \quad \frac{\gamma_F(p)}{p^2} \leq 1 - \frac{1}{C}$$

et, pour $2 \leq x_1 \leq x_2$,

$$(\Omega_2(1)) \quad \sum_{x_1 \leq p \leq x_2} \frac{\gamma_F(p) \log p}{p^2} \leq \log \frac{x_2}{x_1} + C.$$

On peut donc appliquer le théorème 4.1 de [HR74] basé sur le crible de Selberg pour en déduire que

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; y) &\ll \sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; \min(y, x^{1/2})) \\ &\ll x^2 \sum_{m \leq x^\tau} \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \prod_{\substack{p \leq \min(y, x^{1/2}) \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \\ &+ \sum_{m \leq x^{1+\tau}} \tau(m)^3 |r_m(\mathcal{K}.x)|. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4) et (2.5), on peut observer la validité des bornes supérieures suivantes, uniformes en $t \geq 2$,

$$(4.8) \quad \sum_{m \leq t} \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \prod_{\substack{p|m \\ \gamma_F(p) \neq p^2}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right)^{-1} \ll \prod_{p \leq t} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \ll \log t$$

et

$$(4.9) \quad \prod_{\substack{p \leq t \\ \gamma_F(p) \neq p^2}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \ll (\log t)^{-1}.$$

Il suit alors de ces estimations que

$$\begin{aligned} &\sum_{m \leq x^\tau} \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \prod_{\substack{p \leq \min(y, x^{1/2}) \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \\ &\ll \prod_{\substack{p \leq \min(y, x^{1/2}) \\ \gamma_F(p) \neq p^2}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \sum_{m \leq x^\tau} \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \prod_{\substack{p|m \\ \gamma_F(p) \neq p^2}} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right)^{-1} \ll \tau \frac{\log x}{\log y}. \end{aligned}$$

Pour traiter la seconde somme de (4.7), on observe tout d'abord que, pour tout $A \geq 0$, le théorème 1.3 du chapitre 1 entraîne la majoration

$$\sum_{m \leq x^{1+\tau}} \tau(m)^A \frac{\gamma_F(m)}{m^2} \ll (\log x)^{2A-1}$$

tandis que le théorème 2.4 permet de montrer que

$$\sum_{m \leq x^{1+\tau}} \tau(m)^A A_m(\mathcal{K}.x) \ll \sum_{|n_1|, |n_2| \leq x} \tau(F(n_1, n_2))^{A+1} \ll x^2 (\log x)^{2A+1-1}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit du lemme 4.1 et de ces deux estimations l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$(4.10) \quad \sum_{m \leq x^{1+\tau}} \tau(m)^3 |r_m(\mathcal{K}.x)| \ll x^{7/4+\tau/4} (\log x)^c.$$

Il s'ensuit finalement que

$$(4.11) \quad \sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; y) \ll \tau x^2 \frac{\log x}{\log y} + x^{7/4+\tau/4} (\log x)^c.$$

La proposition 3.1 implique alors que, dans le domaine (G_ε) , on a

$$T_F(x^{2-\tau}; \{p > y\}) = \rho((2-\tau)u) + O\left(\rho((2-\tau)u) \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

Dans la mesure où la formule (III.5.114) de [Ten08] assure que, uniformément pour $u \geq 0$ et $0 \leq v \leq \min\left(u, \frac{1}{\log(u+2)}\right)$, on a

$$(4.12) \quad \rho(u-v) = \rho(u) (1 + O(v \log(u+1))),$$

il vient, sous le choix $\tau := c_1 \frac{\log \log x}{\log x}$ avec $c_1 > 0$ assez grand et dans le domaine (G_ε) , la formule

$$(4.13) \quad T_F(x^{2-\tau}; \{p > y\}) = \rho(2u) + O\left(\rho(2u) \log(u+1) \left(\frac{\log \log x}{\log y} + \frac{1}{\log y}\right) + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

On obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soient $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 2 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifiant $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On a, uniformément dans le domaine (G_ε) ,*

$$(4.14) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 \rho(2u) + O\left(x^2 \frac{\log \log x}{\log y}\right).$$

DÉMONSTRATION. Compte tenu de la formule (4.3), le résultat est une conséquence des estimations (4.4), (4.5), (4.11) et (4.13). \square

Observons que le théorème précédent ne fournit un équivalent de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ que dans le domaine

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x (\log \log \log x)^{1+\varepsilon}}{\log \log x}\right) \leq y \leq x^2.$$

Ceci est à mettre en comparaison avec le théorème 2.3 qui donne une formule asymptotique de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y)$ lorsque le discriminant de F est négatif et fondamental et pour le compact $\mathcal{K} := \{x_1, x_2 : |F(x_1, x_2)| \leq 1\}$, dans le domaine plus vaste

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x.$$

5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible

Dans le sillon du paragraphe précédent, il est naturel de se demander pour quels ensembles d'entiers \mathcal{R} la méthode employée se généralise-t-elle pour obtenir une formule asymptotique du nombre de valeurs y -friables $F(n_1, n_2)$ où F est une forme quadratique irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$ et n_1 est restreint à \mathcal{R} , c'est-à-dire

$$(5.1) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R}) := \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R} \text{ et } P^+(F(n_1, n_2)) \leq y\right\}.$$

Ce problème trouve son origine dans un article de Fouvry et Iwaniec [FI97] sur les premiers de Gauss qui s'écrivent sous la forme $n_1^2 + n_2^2$ avec n_1 premier. En particulier, ils montrent que, pour tout $A > 0$, on a la formule

$$(5.2) \quad \sum_{n_1^2 + n_2^2 \leq x} \Lambda(n_1^2 + n_2^2) \Lambda(n_1) = 2 \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{(p-1)(p-\chi(p))}\right) x + O(x(\log x)^{-A})$$

où χ désigne le caractère non trivial modulo 4.

Peu de temps après, Friedlander et Iwaniec [FI98b] effectuent le tour de force de restreindre la variable n_1 dans un ensemble très lacunaire. En particulier, ils démontrent la formule asymptotique

$$(5.3) \quad \sum_{n_1^4 + n_2^2 \leq x} \Lambda(n_1^4 + n_2^2) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 (1-t^4)^{1/2} dt x^{3/4} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right).$$

Dans ses travaux sur le problème de parité et la conjecture de Chowla, Helfgott étudie un problème analogue en remplaçant la fonction de von Mangoldt Λ par la fonction de Liouville λ . Dans [Hel106], il montre en particulier que, pour tout convexe $\mathcal{K} \subset [-1, 1]$, toute forme linéaire $F_1(X_1, X_2)$ et toute forme quadratique $F_2(X_1, X_2)$ irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$, on a uniformément en $x \geq 3$,

$$(5.4) \quad \sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2} \lambda(F_1(n_1, n_2) F_2(n_1, n_2)) \ll \frac{x^2 \log \log x}{\log x}.$$

Un prolongement logique de l'étude consiste à imposer une condition sur chacune des deux variables. Un prototype de cette situation est considéré par La Bretèche et Browning [dlBB10] qui résolvent le problème des diviseurs pour certaines formes quartiques. En particulier, le théorème 2 de [dlBB10] stipule que, si F_1 et F_2 sont deux formes linéaires non proportionnelles sur \mathbf{Q} , F_3 est une forme quadratique irréductible et $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^2$ est un compact suffisamment régulier tel que $F_i(\mathcal{K}) \subset]0, 1]$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, alors il existe une constante $C(F_1, F_2, F_3) > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait, uniformément en $x \geq 2$,

$$(5.5) \quad \sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2} \prod_{i=1}^3 \tau(F_i(n_1, n_2)) = C(F_1, F_2, F_3) \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 (\log x)^3 + O(x^2 (\log x)^{2+\varepsilon}).$$

Énonçons à présent le résultat principal de ce paragraphe, relatif à l'estimation asymptotique de $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R})$ défini par (5.1), dont la démonstration constituera l'objet de la suite de ce chapitre.

Théorème 5.1. *Soient $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} , $\mathcal{K} \subset [0, 1]$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$ et \mathcal{R} un ensemble d'entiers. Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément dans le domaine (G_ε) , on a*

$$(5.6) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R}) = \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R}\right\} \rho(2u) + O\left(x^2 \frac{\log \log x}{\log y}\right).$$

De plus, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{R} \subset \{P^-(n_1) > z\}$ avec $z \geq \exp((\log \log x)^{1+\varepsilon})$, alors on a

$$(5.7) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R}) = \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R}\} \rho(2u) + O\left(\frac{x^2 \log \log x}{\log z \log y}\right).$$

En raison du phénomène de parité, la seule utilisation du principe d'inclusion-exclusion ne suffit pas pour parvenir aux résultats de [FI97], [FI98b] et [Hel06]. Pour surmonter cette difficulté, il est possible d'utiliser l'identité de Vaughan (voir le paragraphe 7 de [FI97] et [FI98a]) pour faire apparaître des sommes bilinéaires de Type II. Une estimation suffisamment précise de telles sommes constitue le point clé des arguments conduisant aux preuves des résultats précédemment énoncés. À titre d'exemple, Fouvry et Iwaniec montrent que, pour tout $A > 0$, on a

$$(5.8) \quad \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \left| \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} \mu(m_2) \delta(m_1, m_2) \right| \ll \frac{M_1 M_2}{(\log M_1 M_2)^A}$$

où

$$\delta(m_1, m_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 m_2 = n_1^2 + n_2^2 \text{ avec } n_1 \text{ premier,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et M_1 et M_2 sont des paramètres réels.

Dans le cas présent, quitte à considérer un paramètre de friabilité y suffisamment grand, le phénomène de parité n'a pas d'incidence : on peut donc espérer étudier le cardinal $\Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R})$ en utilisant le crible de Legendre-Ératosthène et écrire comme point de départ la formule

$$(5.9) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R}) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq x^2 \\ P^-(d) > y}} \mu(d) A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R})$$

où

$$A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) := \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R}, d|F(n_1, n_2)\}.$$

Pour exploiter cette identité, on étudie la distribution multiplicative des valeurs $F(n_1, n_2)$ lorsque $n_1 \in \mathcal{R}$. Pour des raisons techniques qui apparaîtront au cours de l'argument, on s'intéresse dans un premier temps aux cardinaux

$$A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) := \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R}, (n_1, d) = 1 \text{ et } d|F(n_1, n_2)\}.$$

Lemme 5.2. Soient $B > 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} , $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe C^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$ et \mathcal{R} un ensemble d'entiers. Il existe $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $1 \leq D \leq x^2$, on ait

$$\sum_{d \leq D} \tau(d)^B \left| A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - \frac{\nu_d}{d} \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2, n_1 \in \mathcal{R}, (n_1, d) = 1\} \right| \ll x^{5/3} D^{1/6} \log(2x)^{c(B)}$$

où ν_d est défini dans l'énoncé du lemme 2.2.

La preuve de ce lemme – que nous détaillons ci-dessous – consiste essentiellement à adapter les parties 2 et 3 de [FI97] et le chapitre 20.3 de [FI10] où un analogue de ce résultat est établi pour la forme quadratique $F(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2$. Une généralisation à des formes quadratiques quelconques s'appuie en particulier sur les parties 5.2 et 5.3 de [BBDT12] dans lesquelles Balog *et al.* obtiennent essentiellement le lemme 5.2 avec x^ε au lieu de $\log(2x)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Delta \in [1, x]$ un paramètre dont le choix sera rendu explicite au cours de la preuve. En effectuant la convolution de l'indicatrice de $\mathcal{K}.x$ et d'une suite

5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible

régularisante (voir l'annexe B), on montre l'existence d'une fonction lisse $\chi_{\mathcal{K}.x}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \chi_{\mathcal{K}.x}}{\partial s^j}(x_1, x_2) &\ll \Delta^{-j} \text{ pour } j \in \{0, 1, 2\}, \\ \text{supp } \chi_{\mathcal{K}.x} &\subset \mathcal{K}.x, \\ \chi_{\mathcal{K}.x}(x_1, x_2) &= 1 \text{ dès que } \inf \left\{ d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) : (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{K}.x \right\} > \Delta \end{aligned}$$

où d_2 est la distance euclidienne. On approche $A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R})$ par la quantité

$$A_d^{(1)}(\chi_{\mathcal{K}.x}, \mathcal{R}) := \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{R} \times \mathbf{Z} \\ (n_1, d)=1 \\ d|F(n_1, n_2)}} \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, n_2),$$

l'apparition de $\chi_{\mathcal{K}.x}$ en lieu et place de l'indicatrice de $\mathcal{K}.x$ fournissant un cadre propice à l'utilisation de l'analyse de Fourier.

Le terme d'erreur qui apparaît sous l'effet d'une telle démarche est négligeable. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèses de régularité faites sur le bord de \mathcal{K} , on a

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq D} \left| A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - A_d^{(1)}(\chi_{\mathcal{K}.x}, \mathcal{R}) \right| &\ll \left(\sum_{|n_1|, |n_2| \leq x} \tau(F(n_1, n_2))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, n_2) \neq 1\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dans la mesure où la fonction τ^2 satisfait les hypothèses du théorème 1 de [dlBB06] (que nous avons rappelé dans le théorème 2.4), on peut estimer la somme du membre de droite. Compte tenu de la régularité du bord de \mathcal{K} , on en déduit ainsi que

$$(5.10) \quad \sum_{d \leq D} \left| A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - A_d^{(1)}(\chi_{\mathcal{K}.x}, \mathcal{R}) \right| \ll x^{\frac{3}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} (\log x)^{3/2}.$$

Étudions à présent la quantité $A_d^{(1)}(\chi_{\mathcal{K}.x}, \mathcal{R})$. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, il vient l'identité

$$(5.11) \quad A_d^{(1)}(\chi_{\mathcal{K}.x}, \mathcal{R}) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d)=1}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_{k, n_1}(d) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, t) e\left(-\frac{tk}{d}\right) dt$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$ et

$$\alpha_{k, n_1}(d) = \sum_{\substack{n_2 \bmod d \\ d|F(n_1, n_2)}} e\left(\frac{n_2 k}{d}\right).$$

Au vu de la condition $(n_1, d) = 1$, on remarque que l'on a notamment

$$\alpha_{k, n_1}(d) = \sum_{\substack{\nu \bmod d \\ d|F(1, \nu)}} e\left(\frac{\nu k n_1}{d}\right)$$

ce qui entraîne l'identité $\alpha_{0, n_1}(d) = \nu_d$.

Le terme principal, provenant de la fréquence $k = 0$, est donné par la quantité

$$\frac{\nu_d}{d} \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d)=1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, t) dt.$$

Par suite, on retrouve le terme principal attendu dans l'énoncé du lemme en remarquant que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d \leq D} \frac{\nu_d}{d} \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, t) dt - \#\{n_2 : (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2\} \right| \\
 & \ll \sum_{d \leq D} \frac{\nu_d}{d} \sum_{n_1 \in \mathcal{R}} \left(\#\{n_2 : (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, n_2) \neq 1\} + O(1) \right) \\
 (5.12) \quad & \ll \Delta x \log(2D).
 \end{aligned}$$

Le cas des fréquences non nulles fait appel à une inégalité de grand crible, essentiellement énoncée dans la proposition 3 de [BBDT12]. On précise dans le lemme qui suit ce résultat en remplaçant le terme $(DKR)^\delta$ obtenu dans [BBDT12] par $\log(2D)$, modification qui permettra d'utiliser le lemme 5.2 avec un niveau de distribution suffisamment petit, à savoir $D = x^{2-\tau}$.

Lemme 5.3. *On a, uniformément pour tous entiers $D, K, x \geq 1$ et toute suite de complexes $(\xi_{k,n})$, l'estimation*

$$(5.13) \quad \sum_{d \leq D} \left| \sum_{k \leq K} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, d) = 1}} \xi_{k,n} \alpha_{k,n}(d) \right| \ll D^{1/2} (D + Kx)^{1/2} \left(\sum_{k,n} |\xi_{k,n}|^2 \tau(kn) \right)^{1/2} \log(2D).$$

DÉMONSTRATION. D'après la preuve de la proposition 3 de [BBDT12], on a, pour toute suite de complexes (ξ_n) ,

$$\sum_{D \leq d \leq 2D} \sum_{\substack{F(1, \nu) \equiv 0 \\ (\text{mod } d)}} \left| \sum_{n \leq x} \xi_n e\left(\frac{\nu n}{d}\right) \right|^2 \ll (D + x) \sum_{n \leq x} |\xi_n|^2,$$

ce qui constitue une généralisation du lemme 2 de [FI97] à des polynômes quadratiques irréductibles quelconques. En reproduisant le raisonnement développé à la page 253 de [FI97] basé sur la formule d'inversion de Möbius, il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d \leq D} \sum_{\substack{F(1, \nu) \equiv 0 \\ (\text{mod } d)}} \left| \sum_{\substack{k \leq K, n \leq x \\ (n, d) = 1}} \xi_{k,n} e\left(\frac{\nu kn}{d}\right) \right| \\
 & \ll \sum_{b \leq D} \nu_b \sum_{d \leq D/b} \sum_{\substack{F(1, \nu) \equiv 0 \\ (\text{mod } d)}} \left| \sum_{k \leq K, n \leq x/b} \xi_{k,nb} e\left(\frac{\nu kn}{d}\right) \right| \\
 & \ll D^{1/2} (D + Kx)^{1/2} \left(\sum_{k,n} |\xi_{k,n}|^2 \tau(kn) \right)^{1/2} \log(2D)
 \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat attendu. \square

Reprenons la preuve du lemme 5.2 et découpons l'intervalle de sommation des fréquences k en intervalles dyadiques $K < k \leq 2K$. En effectuant le changement de variable $w = \frac{tk}{x}$ afin de séparer les variables k et d dans l'intégrale, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\mathcal{K}.x}(n_1, t) e\left(-\frac{tk}{d}\right) dt = \frac{x}{k} \int_{-K}^K \chi_{\mathcal{K}.x}\left(n_1, \frac{wx}{k}\right) e\left(-\frac{wx}{d}\right) dw.$$

On déduit alors du lemme 5.3 que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{D < d \leq 2D} \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{K < k \leq 2K} \frac{x}{dk} \alpha_{k, n_1}(d) \int_{-K}^K \chi_{\mathcal{K}.x} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) e \left(-\frac{wx}{d} \right) dw \right| \\
 & \leq \sum_{D < d \leq 2D} \int_{-K}^K \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{K < k \leq 2K} \frac{x}{dk} \alpha_{k, n_1}(d) \chi_{\mathcal{K}.x} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) \right| dw \\
 & \ll x D^{-\frac{1}{2}} (D + Kx)^{\frac{1}{2}} \log(2D) \left(\sum_{k \leq 2K, n_1 \ll x} \tau(kn_1) \right)^{1/2} \\
 (5.14) \quad & \ll x^{\frac{3}{2}} D^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} (D + Kx)^{\frac{1}{2}} \log(2DKx)^{5/2}.
 \end{aligned}$$

Pour les grandes valeurs de K , une telle estimation n'est pas suffisante. En intégrant deux fois par parties, on obtient la formule

$$\int_{-K}^K \chi_{\mathcal{K}.x} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) e \left(-\frac{wx}{d} \right) dw = \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{k^2} \int_{-K}^K \frac{\partial^2 \chi_{\mathcal{K}.x}}{\partial s^2} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) e \left(-\frac{wx}{d} \right) dw.$$

En utilisant là encore l'inégalité du grand crible du lemme 5.3, on en déduit

$$\begin{aligned}
 & \sum_{D < d \leq 2D} \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{K < k \leq 2K} \frac{x}{dk} \alpha_{k, n_1}(d) \int_{-K}^K \chi_{\mathcal{K}.x} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) e \left(-\frac{wx}{d} \right) dw \right| \\
 & \leq \frac{x}{4\pi^2} \sum_{D < d \leq 2D} \int_{-K}^K \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{K < k \leq 2K} \frac{d}{k^3} \alpha_{k, n_1}(d) \frac{\partial^2 \chi_{\mathcal{K}.x}}{\partial s^2} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) \right| dw \\
 & \ll x D^{\frac{3}{2}} K^{-2} (D + Kx)^{\frac{1}{2}} \Delta^{-2} \log(2D) \left(\sum_{k \leq 2K, n_1 \ll x} \tau(kn_1) \right)^{1/2} \\
 (5.15) \quad & \ll x^{\frac{3}{2}} D^{\frac{3}{2}} K^{-\frac{3}{2}} (D + Kx)^{\frac{1}{2}} \Delta^{-2} \log(2DKx)^{5/2}.
 \end{aligned}$$

En utilisant (5.14) si $K \leq D\Delta^{-1}$ et (5.15) sinon, et en sommant sur les puissances de 2 issues des découpages dyadiques en d et k , on en déduit

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d \leq D} \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{R} \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{k \neq 0} \frac{x}{dk} \alpha_{k, n_1}(d) \int_{-K}^K \chi_{\mathcal{K}.x} \left(n_1, \frac{wx}{k} \right) e \left(-\frac{wx}{d} \right) dw \right| \\
 (5.16) \quad & \ll \left(x^{3/2} D^{1/2} \Delta^{-1/2} + x^2 D^{1/2} \Delta^{-1} \right) \log(2x)^{5/2}.
 \end{aligned}$$

En choisissant $\Delta = x^{\frac{1}{3}} D^{\frac{1}{3}}$ et en collectant les termes d'erreur (5.10), (5.12) et (5.16), on en déduit que

$$\sum_{d \leq D} \left| A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - \frac{\nu_d}{d} \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2, n_1 \in \mathcal{R}, (n_1, d) = 1\} \right| \ll x^{5/3} D^{1/6} \log(2x)^{5/2}.$$

On peut alors utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et reproduire l'argument qui avait conduit à (4.10) pour en déduire le lemme. \square

On peut déduire facilement des estimations de $A_d^{(1)}(\mathcal{K}.x, \mathcal{R})$ des résultats concernant le cardinal $A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R})$ lorsque $P^-(d) > y$, en vue de les utiliser dans (5.9). On concentre

dans les deux propositions suivantes les résultats concernant la distribution multiplicative de $A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R})$ que nous utiliserons dans la suite.

Proposition 5.4. *Soient $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en $x, y \geq 1$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$(5.17) \quad \sum_{\substack{d \leq D \\ P^-(d) > y}} \left| A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2, n_1 \in \mathcal{R} \right\} \right| \ll x^{5/3} D^{1/6} \log(2x)^c + \frac{x^2}{y} \left(\log(2x) + \left(\frac{\log(2x)}{\log(2y)} \right)^c \right).$$

Proposition 5.5. *Soient $B > 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Il existe une constante $c(B) > 0$ telle que, uniformément en $x, z \geq 1$, $1 \leq D \leq x^2$ et $\mathcal{R} \subset \{n_1 : P^-(n_1) > z\}$, on ait*

$$(5.18) \quad \sum_{d \leq D} \tau(d)^B \left| A_d(\mathcal{K}.x, \mathcal{R}) - \frac{\nu_d}{d} \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2, n_1 \in \mathcal{R} \right\} \right| \ll \left(x^{5/3} D^{1/6} + \frac{x^2}{z} \right) \log(2x)^{c(B)}.$$

DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS 5.4 ET 5.5. À partir du lemme 2.2, on observe que

$$\frac{\gamma_F(p)}{p^2} = \frac{\nu_p}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

d'où l'on peut déduire que

$$\sum_{\substack{d \leq x^2 \\ P^-(d) > y}} \left| \frac{\nu_d}{d} - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \right| \ll \frac{1}{y} \sum_{\substack{d \leq x^2 \\ P^-(d) > y}} \mu(d)^2 \frac{\tau(d)^c}{d} \ll \frac{1}{y} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\sum_{y < p \leq x^2} \frac{2^c}{p} \right)^k \ll \frac{1}{y} \left(\frac{\log(2x)}{\log(2y)} \right)^{2^c}$$

pour une constante $c > 0$. Au vu du lemme 5.2, il suffit donc de montrer que, pour tout $B > 0$, on a

$$(5.19) \quad \sum_{d \leq x^2} \tau(d)^B \left| \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : (n_1, d) \neq 1, P^-((n_1, d)) > y \text{ et } d \mid F(n_1, n_2) \right\} - \frac{\nu_d}{d} \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : (n_1, d) \neq 1, P^-((n_1, d)) > y \right\} \right| \ll \frac{x^2}{y} \log(2x)^{c(B)}$$

pour une certaine constante $c(B) > 0$. On remarque d'une part que l'on a

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq x^2} \tau(d)^B \frac{\nu_d}{d} \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : (n_1, d) \neq 1, P^-((n_1, d)) > y \right\} \\ & \ll \sum_{p > y} \frac{1}{p} \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : p \mid x_1 \right\} \sum_{d \leq x^2} \tau(d)^B \frac{\nu_d}{d} \\ & \ll \frac{x^2}{y} \log(2x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible

D'autre part, si y est plus grand que les coefficients de F , on peut observer que les hypothèses $p|(n_1, F(n_1, n_2))$ et $p > y$ impliquent $p|n_2$ et donc

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq x^2} \tau(d)^B \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : (n_1, d) \neq 1, P^-((n_1, d)) > y \text{ et } d|F(n_1, n_2) \right\} \\ & \ll \sum_{\substack{p > y \\ p|(n_1, n_2)}} \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq x \\ p|(n_1, n_2)}} \tau(F(n_1, n_2))^{B+1} \\ & \ll \frac{x^2}{y} \log(2x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

En observant que cette dernière estimation est aussi valable trivialement pour y borné d'après le théorème 2.4, on en déduit que (5.19) est vrai pour tout $y \geq 1$ ce qui achève la preuve. \square

Étudions à présent comment déduire des lemmes précédents le théorème 5.1 en conservant le choix $\tau := c_1 \frac{\log \log x}{\log x}$ du paragraphe précédent. En utilisant (5.17) dans la formule du crible de Legendre-Ératosthène (5.9), on obtient la formule analogue de (4.3) suivante, valide pour $y > x^\tau$,

$$(5.20) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y; \mathcal{R}) = T_F(x^{2-\tau}; \{p > y\}) \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2, n_1 \in \mathcal{R} \right\} \\ + O \left(x^{2-\tau/6} \log(2x)^c + \sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; y; \mathcal{R}) \right)$$

où $S(\mathcal{K}.x; m; y; \mathcal{R})$ désigne le cardinal

$$\# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : n_1 \in \mathcal{R}, m|F(n_1, n_2) \text{ et } (pm|F(n_1, n_2) \Rightarrow p > y) \right\}.$$

À l'aide de la majoration triviale

$$(5.21) \quad S(\mathcal{K}.x; m; y; \mathcal{R}) \leq S(\mathcal{K}.x; m; y),$$

on peut utiliser (4.11) pour estimer la somme dans le terme d'erreur de (5.20). En utilisant l'estimation (4.13) de $T_F(x^{2-\tau}; \{p > y\})$, on en déduit bien (5.6).

Dans le cas où $\mathcal{R} \subset \{P^-(n_1) > z\}$ avec $z \geq \exp((\log \log x)^{1+\varepsilon})$, on peut remplacer (5.21) par l'inégalité

$$S(\mathcal{K}.x; m; y; \mathcal{R}) \leq S(\mathcal{K}.x; m; y; \{P^-(n_1) > z\}).$$

Il est alors possible de reproduire l'argument de crible détaillé dans le paragraphe précédent qui a conduit à l'estimation (4.11) en utilisant l'estimation (5.18) au lieu du lemme 4.1. Compte tenu des hypothèses sur z , il s'ensuit que

$$\sum_{m \leq x^\tau} S(\mathcal{K}.x; m; y; \{P^-(n_1) > z\}) \ll \tau \frac{\log x}{\log y} \frac{x^2}{\log z},$$

ce qui permet d'obtenir (5.7) et ainsi de conclure la preuve du théorème 5.1.

On peut déduire de manière assez directe du théorème 5.1 une formule asymptotique concernant le nombre de valeurs y -friables d'une forme cubique $F = F_1 F_2$ qui s'écrit comme produit d'une forme linéaire $F_1(X_1, X_2)$ et d'une forme quadratique irréductible $F_2(X_1, X_2)$.

Théorème 5.6. *Soient $F_1 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme linéaire primitive, $F_2 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire quadratique et irréductible sur \mathbf{Z} , $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord*

est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F_1(\mathcal{K}), F_2(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et dans le domaine

$$(5.22) \quad \exp\left(\frac{\log x (\log \log \log x)^{1+\varepsilon}}{\log \log x}\right) \leq y,$$

on a uniformément

$$(5.23) \quad \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F_1(n_1, n_2)F_2(n_1, n_2)) \leq y\right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K})x^2 \rho(u) \rho(2u)$$

et

$$(5.24) \quad \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : \begin{array}{l} F_1(n_1, n_2) \text{ premier} \\ P^+(F_2(n_1, n_2)) \leq y \end{array}\right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^2}{\log x} \rho(2u).$$

Ce résultat constitue un pas supplémentaire vers la preuve de l'algorithme de factorisation du crible quadratique (voir [Pom08]). Une hypothèse importante dans celui-ci consiste en effet à supposer que la formule (5.23) est valide avec le choix

$$(5.25) \quad y = \exp\left(2^{-1/2+o(1)} \sqrt{\log x \log \log x}\right).$$

En raison des méthodes employées, notre résultat ne permet pas de couvrir ce domaine en (x, y) , mais constitue un argument de plus en faveur de la pertinence d'une telle heuristique. Il améliore aussi sensiblement l'estimation de $\Psi_F(x, y)$ obtenue dans [BBDT12] dans le cas où F est une forme cubique réductible.

DÉMONSTRATION. Puisque la forme linéaire $F_1(X_1, X_2)$ est primitive, écrivons-la sous la forme $F_1(X_1, X_2) = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$ avec $(a_{11}, a_{12}) = 1$. Le théorème de Bacht-Bézout assure l'existence de deux entiers a_{21} et a_{22} tels que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$. Sous l'effet du changement de variables $\begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ où $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$, on remarque alors que l'on a l'identité

$$(5.26) \quad \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : F_1(n_1, n_2) \in \mathcal{R} \text{ et } P^+(F_2(n_1, n_2)) \leq y\right\} = \Psi_G(A(\mathcal{K}).x, y; \mathcal{R})$$

où $G(X_1, X_2) := F_2(A^{-1}(X_1, X_2))$ définit une forme quadratique irréductible dans $\mathbf{Z}[X_1, X_2]$.

En prenant \mathcal{R} l'ensemble des entiers y -friables dans (5.6), on peut utiliser l'estimation de Hildebrand

$$(5.27) \quad \Psi(x, y) = x\rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

valide dans le domaine (H_ε) pour évaluer $\#\{(n_1, n_2) \in A(\mathcal{K}).x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(n_1) \leq y\}$. Pour ce faire, introduisons la fonction f qui à tout réel x_1 associe la mesure de l'ensemble $\{x_2 \in \mathbf{R} : (x_1, x_2) \in A(\mathcal{K}).x\}$. Compte tenu des hypothèses faites sur le bord de \mathcal{K} , on peut écrire f comme la somme de $O_{\mathcal{K}}(1)$ fonctions continues, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Par suite, quitte à effectuer une homothétie, on peut supposer sans perte de généralité que f a pour support $[0, x]$, intervalle sur lequel elle est de classe \mathcal{C}^1 . En utilisant une

5. Étude de $\Psi_{F_1 F_2}(\mathcal{K}.x, y)$ avec F_1 une forme linéaire et F_2 une forme quadratique irréductible

sommation d'Abel et (5.27), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
& \# \left\{ (n_1, n_2) \in A(\mathcal{K}).x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(n_1) \leq y \right\} \\
&= \sum_{\substack{x/(\log x)^2 < n_1 \leq x \\ P^+(n_1) \leq y}} (f(n_1) + O(1)) + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^2}\right) \\
&= f(x^-)\Psi(x, y) - \int_{x/(\log x)^2}^x \Psi(t, y) f'(t) dt + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^2}\right) \\
&= x f(x^-) \rho(u) - \int_{x/(\log x)^2}^x t \rho\left(\frac{\log t}{\log y}\right) f'(t) dt \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right) + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^2}\right).
\end{aligned}$$

La formule (4.12) assure que, dans le domaine (5.22), on a

$$\rho\left(u - \frac{\log \log x}{\log y}\right) = \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log \log x \log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

Puisque la fonction de Dickman ρ est décroissante, il suit finalement que

$$\begin{aligned}
& \# \left\{ (n_1, n_2) \in A(\mathcal{K}).x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(n_1) \leq y \right\} \\
&= \rho(u) \left(x f(x^-) - \int_{x/(\log x)^2}^x t f'(t) dt \right) \left(1 + O\left(\frac{\log \log x \log(u+1)}{\log y}\right)\right) + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^2}\right) \\
&= \rho(u) \text{Vol}(A(\mathcal{K})) x^2 + O\left(x^2 \rho(u) \frac{\log \log x \log(u+1)}{\log y} + \frac{x^2}{(\log x)^2}\right).
\end{aligned}$$

Dans la mesure où $\text{Vol}(A(\mathcal{K})) = \text{Vol}(\mathcal{K})$, on déduit de la formule (5.26) et du théorème 5.1 que l'on a

$$\begin{aligned}
\# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : P^+(F_1(n_1, n_2) F_2(n_1, n_2)) \leq y \right\} &= \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 \rho(u) \rho(2u) \\
&+ O\left(x^2 \frac{\log \log x}{\log y}\right).
\end{aligned}$$

Le terme d'erreur reste finalement négligeable tant que (x, y) parcourt le domaine (5.22), au vu de l'estimation $\rho(u)^{-1} = \exp(O(u \log(u+1)))$.

Un raisonnement analogue, basé sur l'utilisation de (5.7) et du théorème des nombres premiers en lieu et place de (5.27) permet de déduire la formule (5.24) où l'attention est portée sur les valeurs premières de $F_1(X_1, X_2)$. \square

Fonctions arithmétiques et formes binaires irréductibles de degré 3

Sommaire

1. Introduction	51
2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique	57
2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux	59
2.2. Notations et définition des idéaux admissibles	60
2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles	61
3. Sommes de Type I et niveau de distribution	63
3.1. Sommes d'exponentielles	63
3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A}	66
3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B}	73
4. La fonction de densité σ_q	74
4.1. Définition et premières propriétés	74
4.2. Ordre moyen de σ_q	75
5. Description de la méthode	79
6. Premières applications des estimations de sommes de Type I	89
7. Estimations de sommes de Type II	100
8. Démonstration du théorème 1.5 et applications	122
8.1. Démonstration des théorèmes 1.5 et 1.4	122
8.2. Valeurs friables de formes binaires cubiques : preuves du théorème 1.2 et du corollaire 1.3	123

1. Introduction

Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et h une fonction arithmétique. L'objet de ce chapitre est l'obtention de formules asymptotiques de l'ordre moyen

$$M_h(x; F) := \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(F(n_1, n_2))$$

pour diverses fonctions arithmétiques h dont l'indicatrice des entiers friables.

L'intérêt de considérer de telles sommes est multiple. La quantité $M_h(x; F)$ apparaît dans de nombreux problèmes arithmétiques (conjecture de Manin dans [dlBT12] et [dlBT13], crible algébrique (NFS) exposé dans le chapitre 6 de [CP05], etc.). D'autre part, il s'agit d'un angle d'attaque efficace pour étudier l'indépendance entre une propriété arithmétique relative à h et la représentation d'un entier par la forme binaire F . Enfin, les valeurs de F forment un ensemble lacunaire d'entiers, dans la mesure où

$$\frac{\log \# \{(n_1, n_2) : |F(n_1, n_2)| \leq x\}}{\log \#\{|n| \leq x\}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

et la persistance d'un phénomène arithmétique dans un ensemble de densité asymptotique nulle est un sujet important de la théorie des nombres, à l'origine de nombreuses conjectures.

Greaves [Gre70] initie l'étude de telles sommes en considérant $h = \tau$ la fonction de compte des diviseurs. À partir de la convolution $\tau = 1 * 1$, il montre ainsi que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme cubique et irréductible F , il existe des constantes réelles $c_0(F) > 0$ et $c_1(F)$ telles que l'on ait, uniformément en $x \geq 2$, l'estimation

$$M_\tau(x; F) = c_0(F)x^2 \log x + c_1(F)x^2 + O_{\varepsilon, F} \left(x^{27/14+\varepsilon} \right),$$

formule asymptotique précisée par Daniel [Dan99] qui améliore sensiblement le terme d'erreur précédent en le remplaçant par $x^{15/8+\varepsilon}$.

Dans cette direction, il convient de rappeler les travaux de La Bretèche et Browning [dlBB06] déjà mentionnés dans le chapitre précédent, où ils obtiennent une borne supérieure de $M_h(x; F)$ uniforme pour une large classe de fonctions h soumises à certaines conditions de croissance et de sous-multiplicativité, majoration dans laquelle intervient la fonction γ_F définie par la formule

$$\gamma_F(d) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq d : d | F(n_1, n_2)\}$$

qui a été étudiée au chapitre 2.

Théorème 1.1 ([dlBB06], Corollary 1). *Soient $A > 0$, $B : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré $g \geq 1$ et h une fonction positive et sous-multiplicative satisfaisant $h(p) \leq A$ pour tout premier p et $h(n) \leq B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et $\varepsilon > 0$. On a, pour tout $x \geq 2$, l'estimation*

$$(1.1) \quad M_h(x; F) \ll_{A, B, F} x^2 \prod_{g < p \leq x} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2} (h(p) - 1) \right) + x(\log x)^{A^g - 1}.$$

Lorsque h est l'indicatrice $1_{\mathcal{E}}$ d'un ensemble d'entiers \mathcal{E} , l'estimation précédente fournit une borne supérieure non triviale lorsque \mathcal{E} est un ensemble criblé. La question de la détermination d'une minoration de $M_{1_{\mathcal{E}}}(x; F)$ est en général difficile et dépend fortement de l'ensemble \mathcal{E} en question.

Dans [Gre92], Greaves considère l'ensemble \mathcal{E}_k des entiers qui ne sont divisibles par aucune puissance k -ième de nombres premiers. Il montre ainsi que, pour tout $k \geq 2$ et toute forme cubique irréductible F , on a la formule asymptotique, uniforme en $x \geq 2$,

$$(1.2) \quad M_{1_{\mathcal{E}_k}}(x; F) = \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}} \right) x^2 + O_{F, k} \left(\frac{x^2}{\log x} \right)$$

et obtient également des estimations similaires pour les formes F de degré $g \geq 4$ (voir aussi le travail de Browning [Bro11]).

On peut également considérer le choix $h := 1_{S(y)}$ où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables. On retrouve dans ce cas la fonction de comptage des valeurs friables de F , dans la mesure où

$$M_{1_{S(y)}}(x; F) = \Psi_F \left([1, x]^2, y \right).$$

Au cours de leur étude du cardinal $\Psi_F([1, x]^2, y)$, Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum [[BBDT12], Theorem 1] ont montré entre autres que, pour toute forme binaire irréductible F de degré $g \geq 1$, on dispose de l'estimation non triviale

$$(1.3) \quad \alpha_F := \inf \left\{ \alpha : \Psi_F \left([1, x]^2, x^\alpha \right) \gg_{\alpha, F} x^2 \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \right\} < g.$$

En particulier, quand F est de degré 3, ils montrent que $\alpha_F \leq e^{-1/2}$ est admissible.

La motivation principale de ce chapitre est de préciser ce résultat, dans le cas des formes cubiques irréductibles, à travers l'étude de la conjecture 3.2 du chapitre 2, c'est-à-dire de la formule

$$(1.4) \quad M_{1_{S(y)}}(x; F) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \rho(3u)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$.

L'ensemble des résultats cités ci-dessus ont en commun l'emploi récurrent de sommes de Type I, c'est-à-dire des estimations des cardinaux

$$A_d([1, x]^2) = \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : d | F(n_1, n_2)\}$$

en moyenne sur $d \leq x^{2-\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$. Comme observé au chapitre 2, il est naturel d'approcher $A_d([1, x]^2)$ par la quantité $\frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2$. En posant

$$(1.5) \quad r_d([1, x]^2) := A_d([1, x]^2) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2,$$

le lemme 3.3 de [Dan99], rappelé dans le lemme 4.1 du chapitre 2, entraîne que, dans le cas où F est une forme cubique irréductible, on dispose de l'estimation de sommes de Type I suivante

$$(1.6) \quad \sum_{d \leq D} |r_d([1, x]^2)| \ll x\sqrt{D}(\log 2D)^{7203} + D(\log 2D)^8.$$

Lorsque $h(m)$ présente un caractère oscillant au regard du nombre de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité, noté $\Omega(m)$, il n'est en général pas possible de déduire des résultats satisfaisants à partir des seules estimations de sommes de Type I : c'est là l'incidence du phénomène de parité, mentionné dans l'introduction de cette thèse. En principe, il est possible de contourner ce problème si l'on dispose d'une estimation de sommes de Type II, c'est-à-dire d'une majoration non triviale de sommes bilinéaires de la forme

$$\sum_{U < r \leq 2U} \sum_{V < s \leq 2V} a_r b_s \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : rs = F(n_1, n_2)\}$$

pour des choix convenables de U et V , où b_s satisfait une hypothèse de type Siegel-Walfisz, c'est-à-dire présentant un comportement suffisamment régulier dans les progressions arithmétiques de petits modules.

Heath-Brown [HB01] estime une telle quantité pour la forme $F(X_1, X_2) = X_1^3 + 2X_2^3$ à l'aide entre autres d'une inégalité de grand crible et d'un comptage de points sur une hypersurface. Il en déduit l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n_1^3 + 2n_2^3$ à travers la formule asymptotique

$$\#\left\{x < n_1, n_2 \leq x(1 + (\log x)^{-c_0}) : \begin{array}{l} n_1^3 + 2n_2^3 \\ \text{premier} \end{array} \right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_p \left(1 - \frac{\nu_p - 1}{p}\right) \frac{x^2}{3(\log x)^{2c_0+1}}$$

pour une constante $c_0 > 0$ convenablement choisie, où ν_p a été défini au chapitre 2 comme le nombre de racines de la congruence $X^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$. Par la suite, une généralisation de ce travail aux valeurs des polynômes de la forme $F(a_1 + X_1q, a_2 + X_2q)$ où F est une forme cubique irréductible sur \mathbf{Z} à coefficients entiers et $(a_1, a_2, q) = 1$ a été effectuée par Heath-Brown et Moroz [HBM02, HBM04].

Enfin, les estimations de Type II obtenues dans [HBM02] ont été utilisées par Helfgott pour établir la validité de la conjecture de Chowla [Cho65], bien que les identités combinatoires mises en œuvre soient différentes de celles intervenant dans les travaux de Heath-Brown et Moroz¹. Dans le théorème principal de [Hel], il montre en particulier

1. Helfgott utilise des itérations de l'identité de Vaughan en lieu et place de l'identité de Buchstab.

la formule suivante, valide pour toute forme irréductible $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ de degré 3 et $\varepsilon > 0$, et uniforme en $x \geq 16$,

$$(1.7) \quad M_\mu(x; F) = \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \mu(F(n_1, n_2)) \ll_{F, \varepsilon} \frac{(\log \log x)^4 (\log \log \log x)^\varepsilon}{\log x} x^2.$$

Soient $q \geq 1$ et $1 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$. Étant donné une fonction arithmétique h , une forme binaire F et un compact $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$, on définit

$$M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q) := \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \\ (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1}} h(F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)).$$

On cherche une estimation asymptotique de cet ordre moyen, avec une uniformité en $q \leq (\log x)^A$ pour tout $A > 0$ fixé (c'est-à-dire de type Siegel-Walfisz). À l'aide d'un argument standard de convolution, on pourra en général déduire des informations relatives à $M_h(x; F)$ à partir de $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$.

Dans ce travail, nous étudions la somme $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ pour diverses fonctions multiplicatives h . En considérant le cas $h = 1_{S(y)}$ de l'indicatrice des friables, nous retrouvons le cardinal

$$\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K}.x, y; a_1, a_2, q) := \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^2 : (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \right. \\ \left. \text{et } P^+(F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)) \leq y \right\},$$

quantité qui intervient directement dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (voir le chapitre 6.2 de [CP05]).

Théorème 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$, $A \geq 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Dans le domaine*

$$(1.8) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y$$

et uniformément pour $q \leq (\log x)^A$ et $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$, on a

$$(1.9) \quad \Psi_F^{(1)}(\mathcal{K}.x, y; a_1, a_2, q) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 \rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine

$$(1.10) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

alors le terme d'erreur dans (1.9) peut être remplacé par $x^2 \exp(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon})$.

Compte tenu de l'estimation

$$\rho(u) = \exp(-u \log u (1 + o(1))) \quad (u \rightarrow +\infty),$$

on observe aussi que le théorème 1.2 ne donne un équivalent de $\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K}.x, y; a_1, a_2, q)$ que dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y$.

En prenant $q = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ et en utilisant une convolution pour enlever la condition de coprimauté, on peut en déduire le corollaire suivant, qui améliore les résultats de [BBDT12] dans le cas des formes cubiques irréductibles, en établissant la

validité de (1.4) et en augmentant la région dans laquelle on dispose d'une estimation de $\Psi_F([1, x]^2, y)$.

Corollaire 1.3. *Soient $\varepsilon > 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On a, uniformément en $x, y \geq 3$,*

$$(1.11) \quad \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2\rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine (1.10), alors le terme d'erreur dans (1.11) peut être remplacé par $x^2 \exp(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon})$.

Dans le domaine $y \leq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, l'estimation (1.11) est une conséquence du corollaire 1 de [dlBB06] (voir le théorème 1.1). On observe en effet que l'estimation

$$\Psi_F([1, x]^2, y) \ll x^2 \prod_{y < p \leq x} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) + x \ll \frac{x^2}{u} + x$$

implique (1.11) dès que $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$.

Au premier abord, il peut paraître surprenant d'obtenir un résultat plus précis pour les grandes valeurs de u , à savoir lorsque $u > 2$. Ceci est dû notamment à la méthode employée : une partie de la contribution des termes impliqués dans l'identité combinatoire introduite dans le paragraphe 5 disparaît lorsque u devient suffisamment grand (voir aussi le théorème 1.5 *infra*).

Considérons également l'ensemble $\mathcal{M}(w)$ des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p où $w \neq 1$ est un complexe de module 1. La méthode développée dans ce chapitre permet d'évaluer $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ avec une certaine uniformité en w .

Théorème 1.4. *Soient $A \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On a, uniformément en w un complexe de module 1 satisfaisant $|\text{Re}(w) - 1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$, $h \in \mathcal{M}(w)$, $x \geq 3$, $q \leq (\log x)^A$ et $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$,*

$$(1.12) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

En effectuant le choix $h(n) = \mu(n)$, ce résultat permet de retrouver la formule (1.7) due à Helfgott [Hel] avec un terme d'erreur plus faible.

On peut en déduire aussi la majoration de la somme d'exponentielles

$$(1.13) \quad \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \\ (n_1, n_2) = 1}} e(i\theta\omega(F(n_1, n_2))) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$$

avec $e(t) := \exp(2i\pi t)$, valide uniformément pour θ satisfaisant $\|\theta - 1\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}$ où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Soulignons que, pour tout complexe w satisfaisant $|w| < 1$, le corollaire 1 de [dlBB06] (voir le théorème 1.1) permet d'obtenir la borne supérieure

$$M_h(x; F) \leq \sum_{n_1, n_2 \leq x} |h(F(n_1, n_2))| \ll x^2 (\log x)^{|w|-1}$$

pour toute fonction h multiplicative, bornée par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p .

D'autre part, les estimations de sommes de Type I permettent de déterminer un équivalent asymptotique de $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ pour les fonctions h dans $\mathcal{M}(1)$ (c'est-à-dire multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant $h(p) = 1$ pour tout premier p), à l'image de l'argument détaillé par Greaves [Gre92] pour obtenir la formule (1.2).

Soient w un complexe de module 1, $y_1, y_2 > 1$ deux réels (pouvant dépendre de x) ou $y_2 = +\infty$ et $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ l'ensemble des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

Avec ces notations, on vérifie que $1_{S(y)} \in \mathcal{M}(1; 1, y)$ et que les fonctions $h \in \mathcal{M}(w)$ considérées dans le théorème 1.4 sont des éléments de $\mathcal{M}(w; 1, +\infty)$.

Reprenant les travaux de Heath-Brown et Moroz, l'étape cruciale des preuves des théorèmes 1.2 et 1.4 consiste à réduire l'estimation de $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ à l'étude asymptotique de l'ordre moyen

$$(1.14) \quad M_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(x) := \sum_{m \leq x} h(m) \sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)$$

où $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ est une fonction de densité définie par la formule (4.13) au paragraphe 4.1 dont la série de Dirichlet associée $\sum_m \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m^s}$ est analytiquement proche de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ d'un corps cubique \mathbf{K} .

Il nous est apparu plus commode de présenter cette étape dans le cadre plus général des fonctions $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$. Nous espérons que cette généralisation trouvera des applications supplémentaires dans d'autres circonstances. Le théorème 1.5 ci-dessous décrit ce qui précède quand les entiers (n_1, n_2) parcourent un carré de côté $x/(\log x)^{-c_0}$ avec $c_0 > 0$ suffisamment grand pour des raisons techniques exposées au paragraphe 2.

Théorème 1.5. *Soient $A, \varepsilon \geq 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3. Pour toute constante $c_0 \gg_F 1$ suffisamment grande et uniformément en $x \geq 2$, $(M_1, M_2) \in [1, x]^2$ tels que $F(M_1, M_2) > x^3/(\log x)^{3c_0/4}$, $q \leq (\log x)^A$, $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$, $y_2 \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$, on a*

$$(1.15) \quad \sum_{\substack{M_i \leq n_i \leq M_i + x/(\log x)^{-c_0} \\ (n_1, n_2) = 1}} h(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)) = \sigma_q(F) \frac{x^2}{(\log x)^{c_0}} \Delta_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(F(M_1, M_2), (\log x)^{-c_0}) + O\left(\frac{x^2 (\log x)^{-2c_0}}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$$

où $\sigma_q(F) > 0$ est défini par (4.9) et, pour tout $t > 0$,

$$\Delta_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(F(M_1, M_2), t) := \frac{M_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}((1+t)F(M_1, M_2))}{F(M_1, M_2)} - \frac{M_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(F(M_1, M_2))}{F(M_1, M_2)}.$$

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ où $y_1, y_2 \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, alors on a

$$(1.16) \quad \sum_{\substack{M_i \leq n_i \leq M_i + x / (\log x)^{-c_0} \\ (n_1, n_2) = 1}} h(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)) = \sigma_q(F) \frac{x^2}{(\log x)^{c_0}} \Delta_{\sigma_q^Z h}(F(M_1, M_2), (\log x)^{-c_0}) \\ + O\left(\frac{x^2 (\log x)^{-2c_0}}{\log y_1} \frac{\log x}{\log y_1 (\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

Si, de plus, $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y_1 \leq y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$, alors on peut remplacer dans (1.15) et (1.16) le terme $1/(\log \log x)^{1-\varepsilon}$ par $\exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

En général, diverses méthodes d'analyse complexe (méthode de Selberg-Delange, méthode du col, etc.) permettent d'estimer l'ordre (1.14) et donc d'évaluer la différence $\Delta_{\sigma_q^Z h}(F(M_1, M_2), t)$. Dans la mesure où ces outils dépendent de la fonction h considérée, nous n'avons pas donné un résultat général pour estimer cette dernière quantité. Au paragraphe 8, nous montrons comment les théorèmes 1.2 et 1.4 s'obtiennent comme conséquence du théorème 1.5 en utilisant les travaux du chapitre 1.

Convention. Dans la suite de ce chapitre, on fixe $A > 0$. Les entiers q apparaissant dans la forme $F(a_1 + X_1 q, a_2 + X_2 q)$ vérifieront toujours l'inégalité $q \leq (\log x)^A$. Enfin, les constantes impliquées dans les symboles de Vinogradov et de Landau dépendent toutes de F et de A et, sauf mention explicite du contraire, tous les résultats sont valides uniformément en $q \leq (\log x)^A$. On emploie les notations en usage dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir que la lettre c désignera une constante positive dépendant de A et de la forme F et pouvant varier à chaque occurrence. De même, pour tout paramètre B , la lettre $c(B)$ désignera une fonction de B , A et F , éventuellement différente à chaque apparition. Il convient de souligner que, dans [HB01], [HBM02], [HBM04], [Hel] et dans le présent travail, les constantes ne sont pas effectives, en raison de l'incidence du zéro de Siegel dans les arguments utilisés pour établir les estimations de sommes de Type II (voir le paragraphe 7).

Le chapitre présente l'organisation suivante. Au paragraphe 2, nous réduisons le problème à l'étude d'une fonction arithmétique sur les idéaux d'un corps cubique \mathbf{K} ce qui nous conduit, au paragraphe 3, à l'étude la distribution multiplicative de certains ensembles d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Le paragraphe 4 contient la définition et les premières propriétés de la fonction de densité σ_q^Z déjà mentionnée dans cette introduction. Au paragraphe 5, nous donnons un argument combinatoire qui a pour but d'adapter les méthodes d'Heath-Brown et Moroz à notre problème. Les paragraphes 6 et 7 sont essentiellement consacrés à l'estimation des termes d'erreur qui apparaissent dans la discussion du paragraphe qui les précède. Enfin, on illustre l'utilisation de la méthode dans le paragraphe 8 en l'appliquant pour démontrer les théorèmes 1.2 et 1.4.

2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique

Dans de nombreuses situations, un problème de nature multiplicative portant sur les valeurs d'un polynôme trouve un cadre de traitement plus flexible une fois transcrit dans le langage des corps de nombres. On peut justifier le passage entre forme cubique irréductible et corps de nombres à l'aide du lemme 2.1 de [HBM02].

Lemme 2.1 ([HBM02], Lemma 2.1). *Soit $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire cubique, primitive et irréductible sur \mathbf{Z} . Il existe un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et des entiers $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- *le sous-module $\Lambda(\omega_1, \omega_2) := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ est de rang 2,*
- *$\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\theta_0)$ où $\theta_0 := \frac{\omega_2}{\omega_1}$,*
- *si \mathfrak{d} désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ engendré par $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$, $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}$ la norme de \mathbf{K} sur \mathbf{Q} et N la norme des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, alors*

$$(2.1) \quad F(X_1, X_2) = \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(X_1\omega_1 + X_2\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}.$$

Réciproquement, l'équation (2.1) définit une forme binaire cubique, primitive et irréductible sur \mathbf{Z} .

En vue de garder notre exposition autonome, nous détaillons ci-dessous les arguments de preuve du lemme précédent, issus de [HBM02].

DÉMONSTRATION. Soit $F \in \mathbf{Q}[X_1, X_2]$ la forme binaire cubique définie par la formule (2.1). En considérant les valeurs de F aux points $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$, on peut observer que

$$(2.2) \quad \begin{aligned} F(X_1, X_2) = & X_1^3 \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1)}{N(\mathfrak{d})} + X_1^2 X_2 \left(\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 + \omega_2) - N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 - \omega_2)}{2N(\mathfrak{d})} - \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_2)}{N(\mathfrak{d})} \right) \\ & + X_1 X_2^2 \left(\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 + \omega_2) + N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 - \omega_2)}{2N(\mathfrak{d})} - \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1)}{N(\mathfrak{d})} \right) + X_2^3 \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}. \end{aligned}$$

À partir des observations triviales $\mathfrak{d}|\omega_1 \pm \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2 = (\omega_1 - \omega_2) + 2\omega_2$, il s'ensuit que $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 + \omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$ et $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 - \omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$ sont des entiers ayant la même parité. On déduit donc de (2.2) que F est à coefficients entiers.

On remarque que $F(X_1, 1)$ est un polynôme de degré au plus 3 qui s'annule en $-\theta_0$, nombre algébrique de degré 3. Par suite, $F(X_1, 1)$ est un polynôme irréductible de degré 3. Il en est donc de même de $F(X_1, X_2)$.

Soit p un diviseur fixe de F , de sorte que p divise $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1)}{N(\mathfrak{d})}$, $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$ et $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 \pm \omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$. Compte tenu de la définition de \mathfrak{d} , il s'ensuit que $p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ est un idéal totalement décomposé avec $\mathfrak{p}_1|\omega_1\mathfrak{d}^{-1}$, $\mathfrak{p}_2|\omega_2\mathfrak{d}^{-1}$ et $\mathfrak{p}_3|(\omega_1 \pm \omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$. Observons finalement que $\mathfrak{p}_3|2\omega_1\mathfrak{d}^{-1}$ bien que $\mathfrak{p}_3 \nmid \omega_1\mathfrak{d}^{-1}$ d'où $\mathfrak{p}_3|2$ et $p = 2$ donc 2 est l'unique diviseur fixe éventuel de F .

Montrons à présent que F est primitive en vérifiant que 2 ne divise pas tous les coefficients de F . Si tel était le cas, dans la mesure où $\mathfrak{p}_3 \nmid \omega_1\mathfrak{d}^{-1}$, on aurait nécessairement $\omega_1 + \omega_2 \neq \omega_1 - \omega_2 \pmod{\mathfrak{p}_3^2\mathfrak{d}}$. Étant donnée la définition de la norme N , cela entraînerait une différence de parité entre $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 + \omega_2)}{2N(\mathfrak{d})}$ et $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 - \omega_2)}{2N(\mathfrak{d})}$. Finalement, on observe à l'aide de la formule (2.2) que les coefficients de $X_1^2 X_2$, $X_1 X_2^2$, X_1^3 et X_2^3 ne sont pas tous pairs, d'où la primitivité de F .

Réciproquement, soit $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire cubique, irréductible et primitive. Le polynôme $F(X_1, 1)$ étant irréductible de degré 3, il existe $a \in \mathbf{Z}$, $\theta_0 \in \mathbf{R}$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{C}$ tels que

$$F(X_1, 1) = a \prod_{i=0}^2 (X_1 - \theta_i).$$

Soient $m \in \mathbf{N}$ tel que $m\theta_0$ soit un entier algébrique, $\mathbf{K} := \mathbf{Q}(\theta_0)$, $\omega_1 = m$, $\omega_2 = -m\theta_0$ et $\mathfrak{d} = (\omega_1, \omega_2)$. D'après ce qui a été précédemment démontré, le polynôme $\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 X_1 + \omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$

est cubique, irréductible, primitif et s'annule en θ_0 . Par unicité du polynôme minimal de θ_0 , on en déduit que $F(X_1, 1) = \pm \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1 X_1 + \omega_2)}{N(\mathfrak{d})}$, c'est-à-dire que F est bien de la forme (2.1), quitte à multiplier ω_1 et ω_2 par -1 . \square

Dans toute la suite, on considère un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ son anneau d'entiers, $U(\mathbf{K})$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ le monoïde des idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, $G(\mathbf{K})$ le groupe des idéaux fractionnaires, $P(\mathbf{K})$ le sous-groupe des idéaux principaux de $G(\mathbf{K})$ et $H(\mathbf{K}) = G(\mathbf{K})/P(\mathbf{K})$ le groupe de classes. Introduisons également $h(\mathbf{K})$ le nombre de classes de \mathbf{K} , $\lambda_{\mathbf{K}}$ le résidu de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$, σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois plongements de \mathbf{K} et $r(\mathbf{K}) \in \{1, 3\}$ le nombre de plongements réels. Si $r(\mathbf{K}) = 1$ (resp. $r(\mathbf{K}) = 3$), on désigne par ε_1 l'unité fondamentale satisfaisant $\varepsilon_1 > 1$ (resp. on se donne deux unités fondamentales multiplicativement indépendantes ε_1 et ε_2 telles que $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\varepsilon_1) = N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\varepsilon_2) = 1$). Dans toute la suite \mathfrak{p} désignera un idéal premier au dessus de p et \mathfrak{i} , \mathfrak{j} , \mathfrak{l} , \mathfrak{q} , \mathfrak{r} et \mathfrak{s} des idéaux entiers.

En général, l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ n'est pas principal, d'où l'absence de bijection canonique entre $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/U(\mathbf{K})$. En reprenant les arguments du paragraphe 6 de [HBM02] (p. 275–277), on peut néanmoins faire apparaître une correspondance entre idéaux et entiers algébriques qui sera utilisée dans le paragraphe 7 pour l'étude des sommes de Type II. Le groupe de classes $H(\mathbf{K})$ étant abélien et d'ordre fini $h(\mathbf{K})$, il existe des entiers $t \geq 1$ et $h_1, \dots, h_t \geq 1$ tels que

$$h_1 \cdots h_t = h(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad H(\mathbf{K}) \simeq \mathbf{Z}/(h_1 \mathbf{Z}) \times \cdots \times \mathbf{Z}/(h_t \mathbf{Z}).$$

Par suite, il existe des idéaux entiers $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t$ tels que tout idéal fractionnaire non nul \mathfrak{j} se décompose sous la forme $\mathfrak{j} = (\alpha) \mathfrak{a}_1^{l_1} \cdots \mathfrak{a}_t^{l_t}$ où $\alpha \in \mathbf{K}^*$ et $0 \leq l_j < h_j$ pour $j \in \{1, \dots, t\}$. On fixe un entier $\alpha_j \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ tel que $\mathfrak{a}_j^{h_j} = (\alpha_j)$ et γ_j une solution de l'équation algébrique $\gamma_j^{h_j} = \alpha_j$ ce qui permet de construire l'extension $\mathbf{L} := \mathbf{K}(\gamma_1, \dots, \gamma_t)$. Pour tout plongement σ de \mathbf{K} dans \mathbf{C} , on fixe un prolongement à \mathbf{L} , noté encore σ . Soulignons que, par construction, il n'y a pas nécessairement unicité d'une telle extension.

Désignons par $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ le sous-groupe multiplicatif de \mathbf{L} engendré par \mathbf{K}^* et $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$. On peut remarquer que l'on a un isomorphisme canonique $\mathcal{I}(\mathbf{K})/U(\mathbf{K}) \simeq G(\mathbf{K})$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, on note (γ) l'idéal de $G(\mathbf{K})$ qui lui est associé par cet isomorphisme et on fixe δ un générateur de \mathfrak{d} . Notons que la relation $N((\gamma)) = \left| \prod_{i=1}^3 \sigma_i(\gamma) \right|$ pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ est une conséquence du fait que $N((\gamma_j))^{h_j} = \left| \prod_{i=1}^3 \sigma_i(\alpha_j) \right|$ pour $j \in \{1, \dots, t\}$.

La décomposition de $G(\mathbf{K})$ en classes d'idéaux, intrinsèque à la définition de $H(\mathbf{K})$, induit canoniquement une partition de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ en $h(\mathbf{K})$ classes d'équivalence, l'ensemble de ces classes étant naturellement muni d'une structure de groupe abélien, compatible avec le produit du corps \mathbf{L} . Pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, l'ensemble $\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\}$ présente une structure naturelle de \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension 3. Dans la mesure où la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \text{Cl}(\gamma) \times \text{Cl}(\gamma^{-1}) &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (u, v) &\longmapsto \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(uv) \end{aligned}$$

n'est pas dégénérée, il existe, pour toute base (u_1, u_2, u_3) de $\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\}$, une base duale (u_1^*, u_2^*, u_3^*) de $\text{Cl}(\gamma^{-1}) \cup \{0\}$ satisfaisant

$$(2.3) \quad \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(u_i u_j^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En adaptant la preuve standard du fait que $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ est un \mathbf{Z} -module libre de rang 3 (voir le théorème 1 de [Sam67]), on observe que l'on peut choisir la base (u_1, u_2, u_3) de

$\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\}$ de sorte à avoir

$$(\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\}) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{L}} = \{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 : a_i \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

La base duale (u_1^*, u_2^*, u_3^*) trouvera son utilité au paragraphe 7 où elle facilitera la détection des congruences dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$.

2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux. Conséquence de la théorie des anneaux de Dedekind, l'existence et l'unicité de la décomposition d'un idéal en idéaux premiers permet d'étendre aux éléments de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ des notions arithmétiques initialement définies sur les anneaux factoriels². Aussi les notions de valuation \mathfrak{p} -adique, notée $v_{\mathfrak{p}}$, et de plus grand diviseur commun, déjà utilisée dans la définition de \mathfrak{d} , sont-elles sans équivoque. Dans cette direction, on dira qu'une fonction $g : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ est multiplicative si $g(j_1j_2) = g(j_1)g(j_2)$ dès que $(j_1, j_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Des exemples de fonctions multiplicatives sur les idéaux sont donnés par la fonction de Möbius $\mu_{\mathbf{K}}$ et la fonction diviseur $\tau_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, définies comme les fonctions multiplicatives satisfaisant, pour un idéal premier \mathfrak{p} et $k \geq 1$, la formule

$$\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := k + 1.$$

On introduit également les fonctions $\Omega_{\mathbf{K}}$ et $\omega_{\mathbf{K}}$ qui comptent le nombre de facteurs premiers avec ou sans leur ordre de multiplicité, définies par

$$\Omega(j) := \sum_{\mathfrak{p}|j} v_{\mathfrak{p}}(j) \quad \text{et} \quad \omega(j) := \#\{\mathfrak{p}|j\}.$$

Étant donné une fonction arithmétique g définie sur \mathbf{Z} , on lui associe naturellement une fonction définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ notée encore g par la formule $g(j) := g(N(j))$. Réciproquement, on associe à une fonction g définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ la fonction $g^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$g^{\mathbf{Z}}(n) := \sum_{N(j)=n} g(j).$$

Dans la preuve du lemme 4.2 de [HB01], Heath-Brown énonce les inégalités suivantes, conséquences de la décomposition des idéaux en idéaux premiers,

$$(2.4) \quad \tau_{\mathbf{K}}(j) \leq \tau(N(j))^3 \quad \text{et} \quad \#\{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(j) = n\} \leq \tau(n)^2.$$

où $\tau := \tau_{\mathbf{Q}}$ désigne la fonction diviseur standard.

Le lemme 6.1 de [HBM02], reformulé ci-dessous, s'inspire de la preuve de Landreau de l'inégalité de Van der Corput relative à la somme des diviseurs (voir [Lan89]) et fournit une première estimation de l'ordre moyen de $\tau_{\mathbf{K}}$ sur les idéaux de la forme $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$.

Lemme 2.2 ([HBM02], Lemma 6.1). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq 1$ et α, β deux éléments de $\mathcal{I}(\mathbf{K}) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ tels que $\text{Cl}(\alpha) = \text{Cl}(\beta)$. Supposons qu'il existe $r \geq 1$ tel que $|\sigma(\alpha)|, |\sigma(\beta)| \leq x_1^r$ pour tout plongement σ de \mathbf{K} dans \mathbf{C} . Alors, pour tout entier $B \geq 0$, il existe une constante $c(B, r) \geq 0$ telle que*

$$(2.5) \quad \sum_{\substack{|n_1| \leq x_1, |n_2| \leq x_2 \\ n_2 \neq 0}} \left| \tau_{\mathbf{K}}((n_1\alpha + n_2\beta))^B \right| \leq \tau_{\mathbf{K}}((\alpha) + (\beta))^B x_1 x_2 (\log(2x_1))^{c(B, r)}.$$

2. Voir à ce sujet la note 5 du chapitre 9 de [Nar04].

2.2. Notations et définition des idéaux admissibles. Comme observé dans le paragraphe 2 de [HBM02], certains nombres premiers présentent un comportement particulier et nécessiteront un traitement spécifique. On dira qu'un nombre premier est **q -singulier** s'il est ramifié dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ ou s'il divise q , $N(\omega_1\omega_2)$ ou l'indice $[\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}[\theta]]$ avec $\theta := \theta_0 N(\omega_1\mathfrak{d}^{-1})$, et **q -régulier** sinon. Par extension, un idéal premier \mathfrak{p} est dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**) s'il est situé au-dessus d'un nombre premier q -singulier (resp. q -régulier). Un entier ou un idéal dont tous les diviseurs premiers sont q -singuliers (resp. q -réguliers) est également dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**). L'unicité de la décomposition en idéaux premiers dans les anneaux de Dedekind permet de définir, pour un idéal \mathfrak{j} et un entier m , les **parties q -singulières** et **q -régulières** par les formules

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}_{q\text{-r}} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-régulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, & \mathfrak{j}_{q\text{-s}} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-singulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \\ m_{q\text{-r}} &:= \prod_{p \text{ } q\text{-régulier}} p^{v_p(m)} & \text{et} & \quad m_{q\text{-s}} := \prod_{m \text{ } q\text{-singulier}} m^{v_p(m)}. \end{aligned}$$

où v_p désigne la valuation p -adique rationnelle. D'une manière analogue, on définit la **composante y -friable** et la **composante y -criblée** par

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}^-(y) &:= \prod_{p \leq y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, & \mathfrak{j}^+(y) &:= \prod_{p > y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \\ m^-(y) &:= \prod_{p \leq y} p^{v_p(m)} & \text{et} & \quad m^+(y) := \prod_{p > y} p^{v_p(m)}. \end{aligned}$$

On introduit enfin la **composante p -adique** d'un idéal \mathfrak{j} , notée \mathfrak{j}_p , comme l'unique diviseur de \mathfrak{j} satisfaisant $N(\mathfrak{j}_p) = p^{v_p(N(\mathfrak{j}))}$, de sorte que $\mathfrak{j} = \prod_p \mathfrak{j}_p$.

Le comportement des idéaux premiers 1-réguliers qui interviennent dans la décomposition des idéaux $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$ fait l'objet du lemme 2.2 de [HBM02].

Lemme 2.3 ([HBM02], Lemma 2.2). *Soient n_1 et n_2 deux entiers premiers entre eux, p un nombre premier 1-régulier, \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 deux idéaux premiers au dessus de p tels que \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 divisent $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ et $N(\mathfrak{p}_1) = p$.*

DÉMONSTRATION. Dans la mesure où $\mathfrak{p}_1 \nmid \omega_1\omega_2$ et $(n_1, n_2) = 1$, on observe que $(n_1n_2, p) = 1$. Par suite, on a

$$\theta_0 \equiv -n_1n_2^{-1} \pmod{\mathfrak{p}_1}$$

où n^{-1} est défini comme la solution de la congruence $nn^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Il s'ensuit que tout élément de $\mathbf{Z}[\theta_0]$ est congru à un entier rationnel modulo \mathfrak{p}_1 . Étant donné que p ne divise pas l'indice $[\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}[\theta]]$ et que $[\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}_1] = [\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}[\theta] + \mathfrak{p}_1][\mathbf{Z}[\theta] + \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1]$, on en déduit qu'il y a p classes modulo \mathfrak{p}_1 , c'est-à-dire que $N(\mathfrak{p}_1) = p$ d'après la définition de la norme d'un idéal.

Puisque $p \nmid n_2N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\omega_1)$, il s'avère que $-n_1n_2^{-1}$ est racine modulo p de $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(X - \theta_0)$ qui est le polynôme minimal de θ_0 . En effet, on a

$$N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(-n_1n_2^{-1} - \theta_0) = -\left(n_2^{-1}\right)^3 N(\mathfrak{d}^{-1}\omega_1\mathcal{O}_{\mathbf{K}})^{-1} N((n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}) = 0 \pmod{p}.$$

D'après la proposition 2.3 du chapitre 2, il s'ensuit que l'idéal $(p, \theta_0 + n_1n_2^{-1})$ est premier et $N((p, \theta_0 + n_1n_2^{-1})) = p$. Par suite, $(p, \theta_0 + n_1n_2^{-1}) = \mathfrak{p}_1$ et un raisonnement analogue avec \mathfrak{p}_2 permet de déduire que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. \square

Au regard du lemme 2.3, on dira qu'un idéal \mathfrak{j} est **admissible** si sa partie 1-régulière est de la forme

$$\mathfrak{j}_{1\text{-r}} = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{k_n}$$

où $N(\mathfrak{p}_i)$ est premier et $N(\mathfrak{p}_i) \neq N(\mathfrak{p}_j)$ dès que $1 \leq i < j \leq n$.

2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles. Soit $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Recouvrons $\mathcal{K}.x$ en carrés de la forme

$$C(N_1, N_2) := \{(n_1, n_2) : x\eta N_i \leq n_i < x\eta(N_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2\}$$

où $\eta := (\log x)^{-c_0}$ pour une constante $c_0 > 0$ que l'on déterminera *a posteriori* et $0 \leq N_i \leq \eta^{-1}$ pour $i = 1, 2$. On s'attend à ce que les éléments de \mathcal{K} mis à l'écart par cette approche contribuent de manière négligeable puisque l'on a

$$(2.6) \quad \#\{0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : \emptyset \subsetneq C(N_1, N_2) \cap \mathcal{K}.x \subsetneq C(N_1, N_2)\} \ll \eta^{-1}.$$

On définit

$$(2.7) \quad c(N_1, N_2) := |F(N_1\eta, N_2\eta)|.$$

Pour s'assurer que $c(N_1, N_2)$ soit suffisamment grand, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{N}(\eta) := \left\{ 1 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : C(N_1, N_2) \subset \mathcal{K}.x, (N_1\eta, N_2\eta) \notin \bigcup_{j=0}^2 S(\theta_j) \right\}$$

où θ_1, θ_2 et θ_3 désignent les racines de $F(X_1, 1)$ et

$$S(\theta) := \{0 \leq y_1, y_2 \leq 1 : |y_1 - y_2\theta| \leq \eta^{\frac{1}{4}}\}.$$

On a alors, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$(2.8) \quad c(N_1, N_2) \gg \prod_{j=0}^2 |N_1\eta - N_2\eta\theta_j| > \eta^{\frac{3}{4}}$$

et

$$(2.9) \quad \#\left\{ 0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : (N_1\eta, N_2\eta) \in \bigcup_{j=0}^2 S(\theta_j) \right\} \ll \eta^{-\frac{7}{4}}.$$

Considérons l'ensemble d'idéaux

$$(2.10) \quad \mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q) := \left\{ ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) \right. \\ \left. \text{et } (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \right\}$$

que l'on notera plus simplement \mathcal{A} dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté. En s'inspirant du lemme 2.3 de [HBM02], on peut montrer que les éléments de \mathcal{A} sont tous distincts et que $c(N_1, N_2)q^3x^3$ est proche des valeurs de $|F|$ sur $C(N_1, N_2)$.

Lemme 2.4. *On a uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$ l'estimation*

$$(2.11) \quad |F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)| = c(N_1, N_2)q^3x^3 \left(1 + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right) \right).$$

De plus, il existe $x_0 \geq 1$ tel que la relation

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccc} \{(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1\} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (n_1, n_2) & \longmapsto & ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} \end{array}$$

induit une bijection dès que $x \geq x_0$.

DÉMONSTRATION. La relation (2.11) est une conséquence de la formule de Taylor et de la définition (2.7).

Pour établir le caractère bijectif de la correspondance (2.12), on suppose que (n_1, n_2) et $(m_1, m_2) \in C(N_1, N_2)$ engendrent le même idéal et l'on considère l'entier algébrique

$$\alpha = ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)((a_1 + m_1q)\omega_1 + (a_2 + m_2q)\omega_2)^{-1}$$

inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. D'après (2.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) &= \sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) + \sigma_3(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^3 ((a_1 + n_1q)\sigma_i(\omega_1) + (a_2 + n_2q)\sigma_i(\omega_2)) \\ &\quad \times \frac{\prod_{j \neq i} ((a_1 + m_1q)\sigma_j(\omega_1) + (a_2 + m_2q)\sigma_j(\omega_2))}{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}((a_1 + m_1q)\omega_1 + (a_2 + m_2q)\omega_2)} \\ (2.13) \quad &= \frac{(a_1 + n_1q)\partial_1 F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q) + (a_2 + n_2q)\partial_2 F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q)}{F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q)}. \end{aligned}$$

Par suite, (2.8), (2.11) et (2.13) entraînent que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) &= \frac{(a_1 + m_1q)\partial_1 F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q) + (a_2 + m_2q)\partial_2 F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q)}{F(a_1 + m_1q, a_2 + m_2q)} \\ &\quad + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= 3 + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\text{Tr}(\alpha) \in \mathbf{Z}$, il s'ensuit que, $\text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) = 3$ dès que x est assez grand puis $\text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha^{-1}) = 3$ par un raisonnement analogue. Supposons par l'absurde que $\alpha \neq 1$. Si $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) = 1$, alors le polynôme minimal $P_\alpha(X)$ de α est de la forme $X^3 - 3X^2 + aX - 1$ avec $a \in \mathbf{Z}$, c'est à dire $\alpha^3 - 3\alpha^2 + a\alpha - 1 = 0$. Dans la mesure où $\text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha^{-1}) = 3$, on en déduit en multipliant par α^{-3} que $a = 3$ puis que α et α^{-1} sont deux complexes conjugués. Finalement, si β désigne la troisième racine de P_α , alors on a l'égalité $1 = N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) = \alpha\alpha^{-1}\beta = \beta$ ce qui est absurde. Un argument similaire permet de traiter le cas $N(\alpha) = -1$. \square

Compte tenu des observations précédentes, on peut majorer trivialement la contribution des $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$ tels que $(N_1, N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)$ pour écrire

$$(2.14) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K}.x; F; a_1, a_2, q) = \sum_{(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)} M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q)) + O\left(\eta^{1/4}x^2\right)$$

où

$$(2.15) \quad M_h(\mathcal{A}) := \sum_{j \in \mathcal{A}} h(j).$$

Comme souligné dans l'introduction, on verra au paragraphe 5 que la relation (2.11) permet de comparer $M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q))$ à la quantité plus régulière $M_{h\sigma_q}(\mathcal{B}(N_1, N_2; q))$ où σ_q est une fonction de densité qui sera introduite au paragraphe 4,

$$(2.16) \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(N_1, N_2; q) := \left\{ j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : c(N_1, N_2)q^3x^3 < N(j) \leq c(N_1, N_2)q^3x^3(1 + \eta) \right\}.$$

et

$$(2.17) \quad M_{h\sigma_q}(\mathcal{B}) := \sum_{j \in \mathcal{B}} h(j)\sigma_q(j).$$

3. Sommes de Type I et niveau de distribution

Dans cette partie, on étudie la distribution multiplicative des éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} définis par (2.10) et (2.16) en adaptant essentiellement les arguments du paragraphe 5 de [HB01], du paragraphe 3 de [HBM02] ainsi que du paragraphe 2 de [HBM04].

3.1. Sommes d'exponentielles. Étant donné des entiers g_1 et g_2 et un idéal admissible \mathfrak{i} , considérons la somme d'exponentielles

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{i}) = E(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}) \\ \mathfrak{i} | ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right)$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$. L'estimation d'une telle quantité constitue un ingrédient de base dans de nombreux travaux relatifs aux formes cubiques (voir par exemple le paragraphe 2.4 de [Gre71] ou le paragraphe 5 de [HB01]) et intervient fréquemment dans la majoration des sommes de Type I.

Une étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ s'initie en observant la relation de multiplicativité

$$(3.1) \quad E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2) = E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1) E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_2)$$

valable dès que $(N(\mathfrak{i}_1), N(\mathfrak{i}_2)) = 1$. Conséquence directe du théorème des restes chinois (voir le lemme 2.1 de [HBM04]), l'identité (3.1) permet essentiellement de ramener l'étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ à la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ avec $p \nmid qN(\omega_1 \omega_2)$ et $k \geq 1$. On a*

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2) q^{-1}}{p^k}\right) & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où q^{-1} est la solution modulo p^k du système $qq^{-1} \equiv 1 \pmod{p^k}$.

En vue d'établir ce résultat, nous étudions dans un premier temps la somme d'exponentielles

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{p}^k) \\ (n_1, n_2, N(\mathfrak{p})) = 1 \\ \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{p}^k)}\right).$$

Lemme 3.2. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$, $p \nmid N(\omega_1 \omega_2)$ et $k \geq 1$.*

Si $(g_1, g_2, p) = 1$, alors on a

$$(3.2) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ -p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ avec $k_0 < k$, alors on a

$$(3.3) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = p^{k_0} E^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}}, \frac{g_2}{p^{k_0}}, \mathfrak{p}^{k-k_0}\right).$$

DÉMONSTRATION. La preuve s'articule essentiellement autour de l'argument développé dans le paragraphe 6 de [Gre70]. On remarque tout d'abord que

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{1 \leq m \leq p^k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) e\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m)$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2, p) = 1, \quad \mathfrak{p}^k | (n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \quad \text{et} \quad g_1n_1 + g_2n_2 \equiv m \pmod{p^k}.$$

Pour tout couple (m, m') satisfaisant $(m, p^k) = (m', p^k)$, il existe un entier λ premier à p tel que $m' \equiv \lambda m \pmod{p^k}$. Ainsi, la relation

$$(n_1 \pmod{p^k}, n_2 \pmod{p^k}) \rightarrow (\lambda n_1 \pmod{p^k}, \lambda n_2 \pmod{p^k})$$

définit une bijection, d'où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) = N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m')$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^j) \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p^{k-j} \\ (\lambda, p^{k-j})=1}} e\left(\frac{\lambda}{p^{k-j}}\right) \\ (3.4) \qquad \qquad \qquad &= N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) - N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}). \end{aligned}$$

Les rôles de g_1 et g_2 étant symétriques, l'hypothèse $(g_1, g_2, p) = 1$ permet de supposer sans perte de généralité que $(g_1, p) = 1$. Il s'ensuit que $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k)$ est égal au cardinal

$$\#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k, (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (n_1\omega_1 + n_2\omega_2), n_1 \equiv -g_2n_2g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\}$$

d'où l'on déduit que

$$(3.5) \qquad N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2\omega_1 - g_1\omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière similaire, les conditions $p \nmid N(\omega_1)$ et \mathfrak{p} non ramifié entraînent que

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}) &= \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k : (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (p^{k-1}\omega_1 - n_2(g_2\omega_1 - g_1\omega_2)), \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. n_1 \equiv (p^{k-1} - g_2n_2)g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\} \\ (3.6) \qquad \qquad \qquad &= \begin{cases} p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2\omega_1 - g_1\omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.2) est une simple conséquence de (3.4), (3.5) et (3.6).

Supposons à présent que $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$. Sous l'hypothèse $k_0 < k$, on a

$$(3.7) \qquad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{\substack{1 \leq n'_1, n'_2 < p^{k-k_0} \\ (n'_1, n'_2, p)=1}} e\left(\frac{\frac{g_1}{p^{k_0}}n'_1 + \frac{g_2}{p^{k_0}}n'_2}{p^{k-k_0}}\right) N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$$

où $N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2) \equiv (n'_1, n'_2) \pmod{p^{k-k_0}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}^k | (n_1\omega_1 + n_2\omega_2).$$

Puisque \mathfrak{p} n'est pas ramifié, on a

$$\begin{aligned} N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0}) &= \#\left\{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k | ((n'_1 + n_1^*p^{k-k_0})\omega_1 + (n'_2 + n_2^*p^{k-k_0})\omega_2)\right\} \\ &= \#\left\{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k | ((n'_1\omega_1 + n'_2\omega_2) + (n_1^*\omega_1 + n_2^*\omega_2)p^{k-k_0})\right\} \\ (3.8) \qquad \qquad \qquad &= \begin{cases} p^{k_0} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-k_0} | (n'_1\omega_1 + n'_2\omega_2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.3) est donc une conséquence directe de (3.7) et (3.8). \square

PREUVE DU LEMME 3.1. Définissons k_0 et k_1 par les relations $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ et $\mathfrak{p}^{k_1} \parallel (g_2\omega_1 - g_1\omega_2)$, de sorte que $k_0 \leq k_1$. Au vu des hypothèses sur \mathfrak{p} , il vient

$$\begin{aligned}
 E(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k \\ (n_1, n_2, p^k) = p^j \\ \mathfrak{p}^k \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{p^k}\right) \\
 (3.9) \qquad \qquad \qquad &= 1 + \sum_{1 \leq j \leq k} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j).
 \end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq k_0$, on observe que

$$\begin{aligned}
 E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) &= \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^j, (n_1, n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^j \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\} \\
 (3.10) \qquad \qquad \qquad &= (p-1)p^{j-1}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $k_0 < j \leq k$, on applique le lemme 3.2 pour obtenir que

$$(3.11) \qquad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) = \begin{cases} (p-1)p^{j-1} & \text{si } j \leq k_1, \\ -p^{k_1} & \text{si } j = k_1 + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La combinaison des formules (3.9), (3.10) et (3.11) entraîne alors la relation

$$(3.12) \qquad E(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k & \text{si } k \leq k_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $(p, q) = 1$, le lemme 3.1 est une conséquence de la formule (3.12) et de la relation

$$E(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2)q^{-1}}{p^k}\right) E(0, 0, 1; g_1 q^{-1}, g_2 q^{-1}; \mathfrak{p}^k).$$

□

3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A} . Dans ce paragraphe, on cherche des estimations, en moyenne sur \mathfrak{i} , du cardinal de

$$\mathcal{A}_i := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} : \mathfrak{i} \mid \mathfrak{j}\}.$$

Dans le lemme 2.2 de [HBM04], de tels résultats sont obtenus en moyenne sur des idéaux \mathfrak{i} sans facteur carré. Nous généralisons ici la démonstration de Heath-Brown et Moroz à des idéaux quelconques en y introduisant les estimations de sommes d'exponentielles du paragraphe précédent.

Afin de faciliter le traitement de la partie q -singulière des idéaux, introduisons, pour tout réel $z \geq 1$, l'ensemble d'idéaux

$$\mathcal{J}^-(z) := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}_{q\text{-s}}) \leq z \text{ et } \mathfrak{j} \text{ admissible}\}.$$

Omettant dans un premier temps la condition $(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) = 1$, étudions, pour tous réels $\tilde{\eta} \geq 1$ et $x_1, x_2 > 0$, le cardinal de l'ensemble

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \mathcal{S}(\tilde{\eta}, x_1, x_2; a_1, a_2, q; \mathfrak{i}) &:= \left\{ (n_1, n_2) : \tilde{\eta} x_i \leq n_i < \tilde{\eta}(x_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2 \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \text{et } \mathfrak{i} \mid ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} \right\},
 \end{aligned}$$

noté encore $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$. En effectuant une partition de $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ en classes de congruence modulo $N(\mathfrak{i})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) &= \frac{1}{N(\mathfrak{i})^2} \sum_{1 \leq g_1, g_2 \leq N(\mathfrak{i})} E(g_1, g_2; \mathfrak{i}) \sum_{\substack{\tilde{\eta}x_1 \leq n_1 < \tilde{\eta}(x_1+1) \\ \tilde{\eta}x_2 \leq n_2 < \tilde{\eta}(x_2+1)}} e\left(\frac{-g_1n_1 - g_2n_2}{N(\mathfrak{i})}\right) \\
 &= \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2} \left(\tilde{\eta}^2 + O(\tilde{\eta}) \right) \\
 (3.14) \quad &+ O\left(\sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0,0) \pmod{N(\mathfrak{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathfrak{i})}{2}}} \frac{|E(g_1, g_2; \mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2} \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|}\right) \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition des idéaux admissibles, on peut observer que, pour tout idéal admissible \mathfrak{i} et tout premier 1-régulier p , on a

$$(3.15) \quad E(0, 0; \mathfrak{i}_p) \in \left\{ 0, \min\left(p^{v_p(q)} N(\mathfrak{i}_p), N(\mathfrak{i}_p)^2\right) \right\}$$

tandis que $E(0, 0; \mathfrak{i}_p) = 0$ n'est possible que si $p|q$. De plus, en utilisant les estimations de [[Dan99], lemme 3.1], à savoir, uniformément en p premier et $k \geq 1$,

$$(3.16) \quad \gamma_F(p^k) \ll p^{4k/3} \quad \text{et} \quad \gamma_F(p) = p\nu_p + O(1),$$

on a, uniformément en p premier et \mathfrak{i} un idéal tel que $N(\mathfrak{i}_p) > p^{v_p(q)}$,

$$\begin{aligned}
 E(0, 0; \mathfrak{i}_p) &\leq \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}_p) : N(\mathfrak{i}_p) | F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)\} \\
 &\leq p^{2v_p(q)} \gamma_F(N(\mathfrak{i}_p)) \\
 &\ll N(\mathfrak{i}_p)^{4/3} p^{2v_p(q)}.
 \end{aligned}$$

Cette estimation, combinée à la majoration triviale $E(0, 0; \mathfrak{i}_p) \leq N(\mathfrak{i}_p)^2$ lorsque $N(\mathfrak{i}_p) \leq p^{v_p(q)}$ entraîne finalement la borne supérieure, uniforme en p premier,

$$(3.17) \quad E(0, 0; \mathfrak{i}_p) \ll N(\mathfrak{i}_p)^{4/3} \min(p^{2v_p(q)}, N(\mathfrak{i}_p)^{2/3}).$$

Le terme d'erreur, relatif aux fréquences non nulles de (3.14), est estimé dans le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x_1, x_2 \geq 0$, $\tilde{\eta} \geq 1$, $z \geq 1$ et $D \geq 1$, on ait*

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \left| \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) - \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})\tilde{\eta}^2}{N(\mathfrak{i})^2} \right| \ll (\tilde{\eta} + D)z^{1+\varepsilon} (\log(2D))^{c(B)}$$

DÉMONSTRATION. Au vu de (3.14), on peut écrire $\Sigma_1 \ll \Sigma_{11} + \Sigma_{12}$ où

$$\Sigma_{11} := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2} \tilde{\eta}$$

et

$$\Sigma_{12} := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0,0) \pmod{N(\mathfrak{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathfrak{i})}{2}}} \frac{|E(g_1, g_2; \mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2} \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|}\right) \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|}\right).$$

Sous l'hypothèse $\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z)$, les relations (3.15), (3.17) et (2.4) entraînent que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{11} &= \tilde{\eta} \sum_{\substack{\mathbf{i}_1 \text{ } q\text{-singulier} \\ N(\mathbf{i}_1) \leq z}} \frac{E(0, 0; \mathbf{i}_1)}{N(\mathbf{i}_1)} \sum_{\substack{\mathbf{i}_2 \text{ } q\text{-régulier} \\ D < N(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) \leq 2D}} \frac{E(0, 0; \mathbf{i}_2)}{N(\mathbf{i}_2)} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^B}{N(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)} \\
 &\leq \tilde{\eta} z \sum_{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{c(B)}}{N(\mathbf{i})} \\
 (3.18) \quad &\ll \tilde{\eta} z (\log(2D))^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

En suivant l'argument développé dans la preuve du lemme 3.1 de [HBM02], on écrit la décomposition $\Sigma_{12} := \Sigma_{13} + \Sigma_{14}$ où la sommation Σ_{13} (resp. Σ_{14}) porte sur les phases (g_1, g_2) satisfaisant $g_1 g_2 = 0$ (resp. $g_1 g_2 \neq 0$). En utilisant successivement le fait que $(N(\mathbf{i}_{q-r}), qN(\omega_1 \omega_2)) = 1$, le lemme 3.1, l'inégalité $\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \ll_{B, \varepsilon} N(\mathbf{i})^\varepsilon$ et (2.4), il vient

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{13} &\ll \tilde{\eta} z \sum_{0 < g \leq D} \frac{1}{g} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i}_{q-r} | g}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \\
 &\ll \tilde{\eta} z^{1+\varepsilon} \sum_{0 < g \leq D} \frac{\tau(g)^{c(B)}}{g} \\
 (3.19) \quad &\ll \tilde{\eta} z^{1+\varepsilon} (\log(2D))^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

On remarque de même que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{14} &\ll Dz \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{1}{|g_1 g_2|} \sum_{\substack{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ \mathbf{i}_{q-r} | g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \\
 &\ll Dz^{1+\varepsilon} \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}((g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2))^{c(B)}}{|g_1 g_2|}.
 \end{aligned}$$

En découpant le domaine de sommation des variables g_1 et g_2 de manière dyadique et en faisant appel au lemme 2.2, il suit que

$$(3.20) \quad \Sigma_{14} \ll Dz^{1+\varepsilon} (\log(2D))^{c(B)}.$$

Le résultat annoncé est alors une conséquence des estimations (3.18), (3.19) et (3.20). \square

Il est possible de relier le cardinal de $\mathcal{S}(\mathbf{i})$ à celui de \mathcal{A}_i par un argument de convolution. Remarquons pour cela que la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire, sous la condition $(a_1, a_2, q) = 1$, la relation

$$(3.21) \quad \#\mathcal{A}_i = \sum_{(q, d)=1} \mu(d) \# \left\{ (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : \mathbf{i} | ((a_1 + n_1 q) \omega_1 + (a_2 + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \right. \\
 \left. \text{et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}.$$

Pour tout d premier à q et $i = 1, 2$, on définit l'entier $b_i(d) \in \{1, \dots, d\}$ comme l'unique solution de la congruence $a_i - b_i(d)q \equiv 0 \pmod{d}$, ce qui permet d'introduire la correspondance $(n_1, n_2) \mapsto \left(\frac{n_1 + b_1(d)}{d}, \frac{n_2 + b_2(d)}{d} \right)$ entre les ensembles

$$\left\{ (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : \mathbf{i} | ((a_1 + n_1 q) \omega_1 + (a_2 + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \text{ et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}$$

et

$$\mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)$$

où \mathcal{S} est défini par (3.13) et $a_i(d) := \frac{a_i - b_i(d)q}{d}$. Au vu du lemme 3.3 et de la convolution (3.21), on peut ainsi espérer approcher le cardinal de $\mathcal{A}_{\mathbf{i}}$ par

$$\sum_{(d,q)=1} \mu(d) \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2}$$

où $S_d(\mathbf{i})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo $N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)$ tels que

$$\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \mid ((a_1(d) + n_1 q) \omega_1 + (a_2(d) + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1}.$$

Si $S_1(\mathbf{i}) \neq 0$, le théorème des restes chinois implique que $d \mapsto \frac{S_d(\mathbf{i})}{S_1(\mathbf{i})}$ est multiplicative. Ceci permet de faire apparaître un produit eulérien que l'on décompose en 4 parties selon que $p|q$ ou non, $p|N(\mathbf{i})$ ou non. On obtient ainsi

$$(3.22) \quad \sum_{(d,q)=1} \mu(d) \frac{S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} = \frac{S_1(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^2} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{S_p(\mathbf{i}) N((\mathbf{i}, p))^2}{S_1(\mathbf{i}) p^2} \right) = \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2) N(\mathbf{i})}$$

où

$$\zeta_q(s) := \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

et α_q est la fonction multiplicative à support sur les idéaux admissibles définie, pour tout idéal admissible \mathbf{i} , par

$$(3.23) \quad \alpha_q(\mathbf{i}) := \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)} - \frac{S_p(\mathbf{i}_p) N((\mathbf{i}_p, p))^2}{p^2 N(\mathbf{i}_p)} \right) \prod_{p|(N(\mathbf{i}), q)} \frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}.$$

La formule (3.22) demeure vraie si $S_1(\mathbf{i}) = 0$ puisque l'on a alors $S_d(\mathbf{i}) = 0$ pour tout d . On observe que la relation (3.15) et le fait que $N((\mathbf{i}_p, p)) = p$ pour tout idéal \mathbf{i} admissible et tout p premier 1-régulier entraînent que l'on a

$$(3.24) \quad \alpha_q(\mathbf{i}_p) = \begin{cases} (1 + p^{-1})^{-1} & \text{si } p \nmid q, \\ 0 \text{ ou } \min(p^{v_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)) & \text{si } p|q. \end{cases}$$

De même, les majorations (3.17) et $S_p(\mathbf{i}_p) \leq S_1 \left(\frac{\mathbf{i}_p}{(\mathbf{i}_p, p)} \right)$ permettent d'établir la borne supérieure suivante, uniforme pour p premier et \mathbf{i} admissible,

$$(3.25) \quad \begin{aligned} |\alpha_q(\mathbf{i}_p)| &\leq \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \max \left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}, \frac{S_p(\mathbf{i}_p) N((\mathbf{i}_p, p))^2}{p^2 N(\mathbf{i}_p)} \right) \\ &\ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3} \min(p^{2v_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)^{2/3}). \end{aligned}$$

On déduit finalement de ce qui précède que

$$(3.26) \quad \#\mathcal{A}_{\mathbf{i}} = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + r(\mathcal{A}, \mathbf{i})$$

où

$$(3.27) \quad |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \leq \sum_{(d,q)=1} \mu^2(d) \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right)^2} \right|.$$

Le lemme suivant montre que, sous la condition $\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z)$, on a effectivement le niveau de distribution attendu.

Lemme 3.4. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq 1$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_2 := \sum_{\substack{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \ll \left(x^{3/2} + xD^{1/2} \right) z^{1+\varepsilon} (\log x)^{c(B)}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $1 \leq \Delta \leq x^{1/2}$ un paramètre qui sera explicité en toute fin de preuve. La formule (3.27) permet d'écrire la majoration $\Sigma_2 \ll \Sigma_{21} + \Sigma_{22} + \Sigma_{23}$ où

$$\Sigma_{21} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d,q)=1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right)^2} \right|,$$

$$\Sigma_{22} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta, (d,q)=1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right)$$

et

$$\Sigma_{23} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta}} \mu^2(d) \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right)^2} \right|.$$

En écrivant $\mathbf{i} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ avec $\mathbf{a} = (i, d)$, on observe que les facteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} demeurent dans $\mathcal{J}^-(z)$. L'hypothèse sur Δ entraîne que $\frac{\eta x}{d} \geq 1$ si $d \leq \Delta$ ce qui nous permet d'utiliser le lemme 3.3 avec les choix $\tilde{\eta} = \frac{\eta x}{d}$ et $x_i = N_i + \frac{b_i(d)}{\eta x}$ pour $i = 1, 2$. On peut ainsi majorer

Σ_{21} par

$$\begin{aligned}
 &\ll \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{ab}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d, q) = 1 \\ N(\mathbf{a}) | d^3}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{ab})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \mathbf{b} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{ab})}{d^2 N(\mathbf{b})^2} \right| \\
 &\ll \sum_{d \leq \Delta} \sum_{N(\mathbf{a}) | d^3} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{a})^B \left(\frac{D}{N(\mathbf{a})} + \frac{x}{d} \right) z^{1+\varepsilon} (\log x)^{c(B)} \\
 &\ll z^{1+\varepsilon} (x + D) (\log x)^{c(B)} \sum_{d \leq \Delta} \tau(d)^{c(B)} \\
 (3.28) \quad &\ll \Delta z^{1+\varepsilon} (x + D) (\log x)^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

À l'aide du lemme 2.2, on dispose d'autre part de l'estimation

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{22} &\ll \sum_{d > \Delta} \tau(d)^{c(B)} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq q(x+1)/d} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2))^{c(B)} \\
 (3.29) \quad &\ll x^2 \Delta^{-1} (\log x)^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

Enfin, en reprenant la décomposition $\mathbf{i} = \mathbf{ab}$ introduite au cours de l'étude de Σ_{21} et en écrivant $d = N(\mathbf{a}_{1-r})e$, on remarque que $d \asymp N(\mathbf{a})e$ et $S_d(\mathbf{i}) \leq N(\mathbf{b})z$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{23} &\ll zx^2 \sum_{\substack{\mathbf{ab} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{ab}) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{ab})^B}{N(\mathbf{a})^2 N(\mathbf{b})} \sum_{e \gg \Delta N(\mathbf{a})^{-1}} \frac{1}{e^2} \\
 &\ll \Delta^{-1} zx^2 \sum_{\substack{\mathbf{ab} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{ab}) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{ab})^B}{N(\mathbf{ab})} \\
 (3.30) \quad &\ll \Delta^{-1} zx^2 (\log x)^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

En combinant les estimations (3.28), (3.29) et (3.30), il suit

$$\Sigma_2 \ll \left(\Delta^{-1} zx^2 + \Delta(x + D)z^{1+\varepsilon} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

Le choix $\Delta := \min(x^{1/2}, xD^{-1/2})$ conduit au résultat annoncé. \square

Au vu de la définition de $\mathcal{J}^-(z)$, on peut montrer que la contribution des éléments de \mathcal{A}_i avec $\mathbf{i} \notin \mathcal{J}^-(z)$ est négligeable lorsque z est convenablement choisi.

Lemme 3.5. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_3 := \sum_{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \ll \left(x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8} \right) (\log x)^{c(B)}$$

où les $r(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ sont définis par (3.26).

DÉMONSTRATION. Au regard du lemme 2.3 et de la définition de α_q pour les idéaux non admissibles, on observe que la somme Σ_3 ne porte que sur les idéaux admissibles \mathbf{i} .

Remarquons dans un premier temps que les relations (2.4) et (1.5) entraînent

$$(3.31) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \sum_{\substack{D \leq d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq 2qx : d | F(n_1, n_2)\} \\ \ll q^2 x^2 \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} + \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \left| r_d \left([1, 2qx]^2 \right) \right|.$$

La première somme du membre de droite peut être majorée à l'aide de l'inégalité

$$(3.32) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \leq \sum_{\substack{z < d_1 \leq 2D \\ d_1 \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d_1)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_1)}{d_1^2} \sum_{d_2 \leq \frac{2D}{d_1}} \tau(d_2)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_2)}{d_2^2}.$$

En utilisant l'estimation (3.16), on obtient pour la somme sur d_2 la borne supérieure suivante, uniforme en $D \geq 2$,

$$(3.33) \quad \sum_{d \leq D} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll \prod_{p \leq D} \left(1 + 2^{c(B)} \frac{\gamma_F(p)}{p^2} \right) \\ \ll \prod_{p \leq D} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{c(B)} \\ \ll (\log(2D))^{c(B)}.$$

Pour estimer la contribution des entiers d_1 , on utilise la méthode de Rankin. Compte tenu de (3.16), on observe ainsi que

$$(3.34) \quad \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\tau(d)^{c(B)}}{d^{2/3}} \left(\frac{d}{z} \right)^{1/2} \\ \ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)}$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega(q) \ll \log \log x$ dans la dernière estimation. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de (1.6), du corollaire 1 de [dIBB06] et de (3.33) que l'on peut estimer le terme de reste de (3.31) par

$$(3.35) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(qx)| \leq \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(qx)| \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} |r_d(qx)| \right)^{1/2} \\ \ll x \left(x^{1/2} D^{1/4} + D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En combinant les majorations (3.31), (3.32), (3.34) et (3.35), on obtient finalement l'estimation

$$(3.36) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \left(\frac{x^2}{z^{1/2}} + x^{3/2} D^{1/4} + x D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En utilisant la multiplicativité de α_q et les estimations (3.24), (3.25) et (3.34), on a d'autre part que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\mathbf{i} \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} &\ll \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \sum_{N(\mathbf{i})=d} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \\
 &\ll \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \sum_{N(\mathbf{i})=d} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (\log x)^{c(B)} \\
 &\ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)} \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} d^{-1/6} \\
 (3.37) \quad &\ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat escompté en utilisant le lemme 3.4 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, les estimations (3.36) et (3.37) et en choisissant $z = \min(x^{1/4}, x^{1/2} D^{-1/4})$. \square

En conclusion de notre étude relative à la distribution multiplicative de \mathcal{A} , nous considérons le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{A}_{i,d} := \left\{ \mathbf{j} \in \mathcal{A}_i : d | N(\mathbf{j}^{-1}) \right\}$$

où d est sans facteur carré. Suivant l'argument développé à la page 265 de [HBM02], le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la formule

$$(3.38) \quad \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j}_1 | (\mathbf{j}_2, d) \\ d | N(\mathbf{j}_1)}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d | N(\mathbf{j}_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 3.5, la relation (3.38) suggère d'écrire

$$(3.39) \quad \#\mathcal{A}_{i,d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \#\mathcal{A}_{i\mathbf{j}} = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}) \xi_q(\mathbf{i}, d)}{N(\mathbf{i})} + r(\mathcal{A}, \mathbf{i}, d)$$

où

$$(3.40) \quad \xi_q(\mathbf{i}, d) = \begin{cases} \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \frac{\mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \alpha_q(\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i}) N(\mathbf{i})} & \text{si } \alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$(3.41) \quad |r(\mathcal{A}, \mathbf{i}, d)| \leq \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \mu^2(d) \left| \#\mathcal{A}_{i\mathbf{j}} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \right|.$$

Il s'ensuit que, si $\alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0$, la fonction arithmétique $\xi_q(\mathbf{i}, \cdot)$ est multiplicative et à support sur les entiers sans facteur carré. Pour p un nombre premier q -régulier, on a notamment par (3.24) que

$$(3.42) \quad \xi_q(\mathbf{i}, p) = \begin{cases} \frac{1}{p \nu_p} & \text{si } p | N(\mathbf{i}), \\ \text{sinon,} & \end{cases}$$

où ν_p est le nombre d'idéaux \mathfrak{p} tels que $N(\mathfrak{p}) = p$. De plus, si $p|q$ est 1-régulier, alors

$$(3.43) \quad \xi_q(\mathbf{i}, p) \in \left\{ 0, \frac{1}{p}, 1 \right\}.$$

Dans le cas où $\mathbf{i} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on pose $\xi_q(d) := \xi_q(\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, d)$ pour tout entier $d \geq 1$.

Lemme 3.6. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_3 := \sum_{\substack{i, d \\ D < N(i)d \leq 2D}} \mu(d)^2 \tau(N(i)d)^B |r(\mathcal{A}, i, d)| \ll (x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8}) (\log x)^{c(B)}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque la sommation (3.41) ne fait intervenir que des idéaux \mathfrak{j} admissibles et des entiers d sans facteur carré, on observe à l'aide du lemme 2.3 que, dans la sommation de (3.41), on a $N(\mathfrak{j}) \asymp d$. Par suite, on déduit du lemme 3.5 que

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\ll \sum_{N(\mathfrak{l}) \ll D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{l})^{c(B)} \left| \#\mathcal{A}_{\mathfrak{l}} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathfrak{l})}{N(\mathfrak{l})} \right| \\ &\ll (x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8}) (\log x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

□

3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B} . Par analogie à \mathcal{A}_i , on considère dans ce paragraphe le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{B}_i := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} : i|\mathfrak{j}\}.$$

L'étude de la distribution des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ se base sur l'ordre moyen suivant, dû à Weber³.

Théorème 3.7 ([Web99]). *On a, uniformément pour $x \geq 1$,*

$$\#\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) \leq x\} = \lambda_{\mathbf{K}} x + O(x^{2/3}).$$

On définit

$$\mathcal{B}_{i,d} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B}_i : d|N(\mathfrak{j}i^{-1})\}.$$

L'estimation de Type I relative à $\mathcal{B}_{i,d}$ contenue dans le lemme ci-dessous est une généralisation du lemme 3.6 de [HBM02] qui suggère écrire

$$(3.44) \quad \#\mathcal{B}_{i,d} = \lambda_{\mathbf{K}} \frac{c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3}{N(i)} \beta(d) + r(\mathcal{B}, i, d)$$

où β est la fonction multiplicative à support sur les entiers sans facteur carré définie par

$$(3.45) \quad \beta(p) = 1 - \prod_{p|p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

Lemme 3.8. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $D \geq 1$ et i un idéal de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on ait*

$$\sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 |r(\mathcal{B}, i, d)| \ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(i)^{2/3}} (\log(2D))^{c(B)}.$$

DÉMONSTRATION. Au vu de la formule (3.38), on a la formule

$$\#\mathcal{B}_{i,d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j}|d \\ d|N(\mathfrak{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \#\left\{ \mathfrak{b} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{ij})} < N(\mathfrak{b}) \leq (1 + \eta) \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{ij})} \right\}$$

3. On peut également déduire ce résultat du théorème 1.3 du chapitre 1, avec un terme d'erreur différent.

Au vu du théorème 3.7, le résultat se déduit de la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 \sum_{\substack{j|d \\ d|N(j)}} \frac{q^2 x^2}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} &\ll \frac{q^2 x^2}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} \sum_{D < d \leq 2D} \frac{\tau(d)^{c(B)}}{d^{2/3}} \\ &\ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} (\log(2D))^{c(B)}. \end{aligned}$$

□

4. La fonction de densité σ_q

4.1. Définition et premières propriétés. Étant donné un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathbf{N} et un idéal \mathfrak{i} , on considère le cardinal

$$(4.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) := \#\{\mathfrak{q} : \mathfrak{i}\mathfrak{q} \in \mathcal{A} \text{ et } N(\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}\}.$$

En général, on ne peut espérer évaluer $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$ en utilisant uniquement les majorations de sommes de Type I obtenues dans la partie précédente. La seule connaissance de ces estimations est par exemple insuffisante pour approcher $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$ lorsque les éléments de l'ensemble \mathcal{C} ont un nombre fixe de facteurs premiers : c'est là l'incidence du phénomène de parité, mentionné en introduction.

À la suite de Heath-Brown et Moroz, on introduit le cardinal

$$(4.2) \quad S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) := \#\{\mathfrak{q} : \mathfrak{i}\mathfrak{q} \in \mathcal{B} \text{ et } N(\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}\}$$

et l'on cherche à montrer l'existence d'une constante $\sigma_q(F) > 0$ et d'une fonction de densité $\sigma_q : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'approximation

$$(4.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$$

soit vraie, en moyenne sur les idéaux \mathfrak{i} et pour une certaine classe d'ensembles d'entiers \mathcal{C} inclus dans l'ensemble criblé

$$(4.4) \quad \mathcal{C}^-(x^\tau) := \{d : P^-(d) > x^\tau\}$$

où $\tau = o(1)$ est un paramètre qui sera précisé ultérieurement.

Dans ce paragraphe, on obtient des valeurs heuristiques pour $\sigma_q(F)$ et $\sigma_q(\mathfrak{i})$ en étudiant $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$ et $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Au vu des estimations de sommes de Type I contenues dans les lemmes 3.6 et 3.8, l'application d'un lemme fondamental de crible - démarche qui sera effectuée en détail au paragraphe 6 - suggère que l'on a

$$(4.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \xi_q(\mathfrak{i}, p))$$

et

$$(4.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_{\mathbf{K}} c(N_1, N_2) \frac{\eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \beta(p)).$$

L'étude de la singularité de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$ permet d'obtenir l'analogie suivant de la formule (6.8) de [HB01], uniforme pour $t \geq 2$,

$$(4.7) \quad \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1} \left(1 + O\left((\log t)^{-2}\right)\right).$$

Comme observé dans le lemme 3.4 de [HBM02], la formule (3.42) et le théorème des idéaux premiers impliquent de même l'estimation suivante, valide uniformément pour $t > \max(\{1\} \cup \{p : p \text{ est } q\text{-singulier}\})$,

$$(4.8) \quad \prod_{p \geq t} (1 - \xi_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + O\left((\log t)^{-2}\right)\right),$$

où ξ_q est défini par (3.40), d'où l'on déduit la convergence du produit eulérien

$$(4.9) \quad \sigma_q(F) := \left(\prod_{\xi_q(p) \neq 1} (1 - \xi_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{\xi_q(p)=1} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Ce produit eulérien, strictement positif d'après le lemme 3.4 de [HBM02], satisfait, au vu de (3.43), l'estimation uniforme en $q \geq 1$,

$$(4.10) \quad \sigma_q(F), \sigma_q(F)^{-1} \ll \frac{q}{\varphi(q)} \ll \log \log(q+2).$$

On observe également que la formule (3.42) implique les estimations suivantes, uniformes pour $N(\mathbf{i}) \ll q^3 x^3$ et $x^\tau > q$,

$$(4.11) \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi_q(p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right).$$

Sous réserve d'établir les formules (4.5) et (4.6), il s'ensuit la formule uniforme pour $N(\mathbf{i}) \ll q^3 x^3$ suivante

$$(4.12) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$(4.13) \quad \sigma_q(\mathbf{i}) := \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) \prod_{\xi_q(p)=1} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) := \alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ \xi_q(p) \neq 1}} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) (1 - \xi_q(p))^{-1}.$$

On observe en particulier, pour p un premier q -régulier et $k \geq 1$, la formule

$$(4.14) \quad \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) = \nu_p \left(\frac{p-1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)^{-1} = \nu_p + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

De plus, on peut déduire de l'estimation (3.25) la majoration uniforme en p premier

$$(4.15) \quad \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}_p) \ll \alpha_q(\mathbf{i}_p) \ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3} \min\left(p^{2\nu_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)^{2/3}\right).$$

Finalement, au vu de la formule asymptotique (4.7), on a également

$$(4.16) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim c(N_1, N_2) \frac{\eta q^3 x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ce qui justifie la pertinence de (4.3) lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$.

4.2. Ordre moyen de σ_q . On étudie dans ce paragraphe l'ordre moyen $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ défini par la formule (2.17) pour toute fonction arithmétique $h \in \mathcal{M}(w)$ où w est un complexe de module 1, c'est-à-dire h multiplicative, à valeur dans le disque unité et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p . Comme souligné dans l'introduction de ce chapitre, la preuve du théorème 1.4 repose en partie sur une estimation asymptotique de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$. D'autre part, les majorations de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ que nous développons ici seront utilisées à de nombreuses reprises dans les parties 6 et 7.

Compte tenu de la formule (4.14) relative à la valeur de $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ aux entiers q -réguliers, on observe que, uniformément pour p un premier q -régulier et $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, on a

$$(4.17) \quad \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p^s} = \sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\operatorname{Re}(s)}}\right).$$

Il suit alors de (4.14) que la série $\mathcal{H}_q(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}$ où

$$(4.18) \quad \mathcal{H}_q(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)h(n)}{n^s}$$

est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$.

De plus, la relation (4.17) entraîne que, uniformément pour $q \geq 1$ et $\operatorname{Re}(s) > 1/2$,

$$(4.19) \quad \mathcal{H}_q(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w} \ll_{\operatorname{Re}(s)} \prod_{p|q} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}}\right)\right) \ll_{\operatorname{Re}(s)} 2^{\omega(q)}$$

et

$$\mathcal{H}_q(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}|_{s=1} \ll \prod_{p|q} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) \ll \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^c \ll (\log \log(q+2))^c$$

La méthode de Selberg-Delange, sous la forme du théorème 1.3 du chapitre 1 permet d'établir le résultat central de ce paragraphe, à savoir la formule asymptotique de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ contenue dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Il existe des constantes c et $C > 0$ telles que l'on ait, uniformément pour w un nombre complexe tel que $|w| = 1$, $h \in \mathcal{M}(w)$, $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$(4.20) \quad M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2)\eta q^3 x^3 \log\left(c(N_1, N_2)q^3 x^3\right)^{w-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{C^{\omega(q)}(\log(q+1))^c}{\log x}\right)\right)$$

où

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \sigma_q(F, h) := & \prod_{\xi_q(p) \neq 1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \left(1 + (1 - \xi_q(p))^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathfrak{i})=p^k} \alpha_q(\mathfrak{i}) (1 - \xi_q(\mathfrak{i}, p))\right)\right) \\ & \times \prod_{\xi_q(p)=1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathfrak{i})=p^k} \alpha_q(\mathfrak{i}) (1 - \xi_q(\mathfrak{i}, p))\right) \end{aligned}$$

et $\alpha_q(\cdot)$ et $\xi_q(\cdot, \cdot)$ sont définis respectivement par (3.23) et (3.40).

On a en particulier $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1}\zeta_q(2)^{-1}$ et, uniformément pour $x \geq 3$,

$$(4.22) \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \leq x} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} = \frac{1}{\zeta_q(2)\sigma_q(F)} \log x + O\left(C^{\omega(q)}(\log \log x)^c\right).$$

DÉMONSTRATION. On étudie dans un premier temps $\sigma_q h$ sur les entiers q -réguliers avant de se ramener au cas général par convolution. Au vu de ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c(\varepsilon) > 0$ telle que, pour tout $q \geq 1$, la fonction

$$n \mapsto \begin{cases} h(n)\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) & \text{si } n \text{ est } q\text{-régulier,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

soit un élément de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, w; 1/2 + \varepsilon, c(\varepsilon)2^{\omega(q)})$ introduit dans le chapitre 1. Par suite, le théorème 1.3 du chapitre 1 entraîne que l'on a, pour tout entier $N \geq 0$ fixé

et uniformément en $|w| = 1$, $x \geq 2$ et $q \geq 1$,

$$(4.23) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n) = x(\log x)^{w-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(h)}{\Gamma(w-k)(\log x)^k} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{(\log x)^{N+1}}\right) \right)$$

où les $\lambda_k(h)$ sont définis à l'aide du développement de Taylor en $s = 1$

$$(4.24) \quad \frac{(s-1)^w \mathcal{H}_q(s)}{s} := \sum_{k \geq 0} \lambda_k(h) (s-1)^k.$$

En particulier, on a

$$(4.25) \quad \lambda_0(h) = \lambda_{\mathbf{K}}^w \mathcal{H}_q(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w} \Big|_{s=1}$$

tandis que l'estimation (4.19) et l'inégalité de Cauchy entraînent les majorations

$$(4.26) \quad |\lambda_k(h)| \ll \sup_{|s-1| \leq \frac{1}{4}} \{|\mathcal{H}_q(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}|\} \ll 2^{\omega(q)}.$$

Avec le choix $h(n) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$, une sommation par parties entraîne directement la formule uniforme en $q \geq 1$ et $x \geq 3$ suivante

$$(4.27) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} = \lambda_0(\mathbf{1}) \log x + O\left(2^{\omega(q)} \log \log x\right)$$

avec

$$(4.28) \quad \lambda_0(\mathbf{1}) = \prod_{p \text{ } q\text{-régulier}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{\nu_p}{p+1-\nu_p}\right).$$

Attardons-nous à présent sur la contribution des entiers q -singuliers et montrons que pour tout $\sigma > 1/3$, il existe des constantes c et $C(\sigma) > 0$ telles que

$$(4.29) \quad \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \log d}{d^\sigma} \leq q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^c C(\sigma)^{\omega(q)+1}.$$

D'une part, on peut écrire à l'aide de (2.4) et (3.25) les estimations suivantes, valides pour p premier et $1/3 < \sigma < 1$ fixés,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^\sigma} &\ll \sum_{k \leq 3v_p(q)} \tau(p^k)^2 p^{k(1-\sigma)} + p^{2v_p(q)} \sum_{k > 3v_p(q)} \tau(p^k)^2 p^{k(1/3-\sigma)} \\ &\ll_\sigma (\log(q+1))^3 p^{3v_p(q)(1-\sigma)}. \end{aligned}$$

En outre, on observe que (3.24) entraîne l'estimation, uniforme pour \mathfrak{p} un idéal premier 1-régulier et $0 < \sigma < 1$, ci-dessous

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_q(\mathfrak{p}^k) (1 - \xi_q(\mathfrak{p}^k, N(\mathfrak{p})))}{N(\mathfrak{p})^{k\sigma}} \ll N(\mathfrak{p})^{v_p(q)(1-\sigma)}.$$

On en déduit alors en utilisant la définition (4.13) de σ_q que, pour $1/3 < \sigma < 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^\sigma} &\ll_\sigma C(\sigma)^{\omega(q)} \prod_{p \text{ } q\text{-singulier}} \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}) (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p))}{N(\mathbf{i})^\sigma} \right) \\ &\ll_\sigma q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^c C(\sigma)^{\omega(q)} \end{aligned}$$

pour des constantes c et $C(\sigma)$ suffisamment grandes. Puisque $\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \log d}{d^\sigma}$ est la dérivée de la série $\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^s}$, on obtient l'estimation (4.29) en appliquant

l'inégalité de Cauchy dans le cercle de centre σ et de rayon $\frac{c(\sigma)}{\log(q+1)}$ avec $c(\sigma) > 0$ suffisamment petit. Ceci permet de déduire la convergence absolue de $\sigma_q(F, h)$ ainsi que l'estimation suivante, conséquence de la méthode de Rankin,

$$(4.30) \quad \sum_{\substack{d > t \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \leq t^{\sigma-1} \sum_{\substack{d > t \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^\sigma} \\ \ll_\sigma t^{\sigma-1} q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^c C(\sigma)^{\omega(q)}$$

où $1/3 < \sigma < 1$.

En utilisant (4.27) et (4.30), il s'ensuit alors que, uniformément en $q \leq (\log x)^A$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} &= \sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x/d \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} + O \left(\sum_{\substack{d > x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} \right) \\ &= \sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(\mathbf{1}) \log \left(\frac{x}{d} \right) + O \left(C^{\omega(q)} (\log \log x)^c \right) \\ &= \sigma_q(F, \mathbf{1}) \log x + O \left(C^{\omega(q)} (\log \log x)^c \right), \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(\mathbf{1}) = \sigma_q(F, \mathbf{1}).$$

Pour montrer que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$ et ainsi établir (4.22), on commence par remarquer que, pour tout premier p , la définition (3.40) entraîne la formule

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \left(\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + \sum_{\substack{j|p \\ p|N(\mathbf{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \left(1 + \sum_{\substack{j|(i,p) \\ p|N(\mathbf{j}) \\ i \neq j}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \right). \end{aligned}$$

En injectant la formule d'inclusion-exclusion (3.38) dans (4.31), on obtient ainsi l'égalité

$$(4.32) \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) = - \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}) \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \xi_q(p).$$

Compte tenu des définitions (4.21) et (4.9), il s'ensuit que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$.

On conclut la preuve de la proposition en montrant la formule (4.20). Compte tenu des définitions (2.17) et (4.13), on peut écrire

$$(4.33) \quad M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) = \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) h(d) \sum_{\substack{n \text{ } q\text{-régulier} \\ c(N_1, N_2) q^3 x^3 < dn \leq c(N_1, N_2) q^3 x^3 (1+\eta)}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n).$$

Pour estimer la contribution des entiers q -singuliers $d \leq x$, on utilise (4.23) sous la forme

$$\sum_{\substack{n \text{ } q\text{-régulier} \\ x < n \leq x(1+(\log x)^{-B})}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)h(n) = \frac{x(\log x)^{w-1}}{(\log x)^B} \left(\frac{\lambda_0(h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{\log x}\right) \right)$$

valide dès que $B \geq 1$. En majorant trivialement la contribution des entiers q -singuliers $d > x$, on peut vérifier que l'on a, uniformément en $|w| = 1$, $x \geq 2$, $q \leq (\log x)^A$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$M_{\sigma_{qh}}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2)q^3\eta x^3 \left(\log \left(c(N_1, N_2)q^3x^3 \right) \right)^{w-1} \frac{\lambda_0(h)}{\Gamma(w)} \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} + R_1 + R_2 + R_3$$

où

$$|R_1| \ll c(N_1, N_2)q^3\eta x^3 \left(\log \left(c(N_1, N_2)q^3x^3 \right) \right)^{\operatorname{Re}(w)-1} \frac{C^{\omega(q)}}{\log x} \sum_{\substack{d \leq x \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \log d}{d},$$

$$|R_2| \ll c(N_1, N_2)q^3\eta x^3 \left(\log \left(c(N_1, N_2)q^3x^3 \right) \right)^{\operatorname{Re}(w)-1} |\lambda_0(h)| \sum_{\substack{d > x \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d}$$

et

$$|R_3| \leq \sum_{\substack{n \leq c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta) \\ n_{q-s} > x}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

En utilisant les estimations (4.29) et (4.30), on obtient

$$|R_1|, |R_2| \ll c(N_1, N_2)q^3\eta x^3 \left(\log \left(c(N_1, N_2)q^3x^3 \right) \right)^{\operatorname{Re}(w)-1} \frac{(\log(q+1))^c C^{\omega(q)}}{\log x}.$$

On remarque d'autre part en utilisant la méthode de Rankin et les estimations (4.22), (2.4) et (4.15) que, si ω_{1-s} désigne le nombre de premiers 1-singuliers, alors

$$\begin{aligned} |R_3| &\ll \sum_{n \ll q^3x^3} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) \sum_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ x^{1/(\omega(q)+\omega_{1-s})} < p^k \ll q^3x^3/n}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) \\ &\ll q^3x^3 \sum_{n \ll q^3x^3} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} \sum_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ x^{1/(\omega(q)+\omega_{1-s})} < p^k}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \\ &\ll (\log x)^c x^{3-2/3(\omega(q)+\omega_{1-s})}, \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire (4.20) dans la mesure où $\omega(q) \ll \log \log(x+3)$. \square

5. Description de la méthode

Dans toute la suite du chapitre, fixons ϖ_0 dans $]0, 1[$ et introduisons le paramètre $\tau := (\log \log x)^{-\varpi_0}$. Dans la série d'articles [HB01, HBM02, HBM04], Heath-Brown et Moroz réalisent le tour de force de montrer la validité de la formule (avec les notations (4.1) et (4.2))

$$(5.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}),$$

pour certains ensembles \mathcal{C} inclus dans

$$(5.2) \quad \mathcal{C}(m, n) := \left\{ rs : \Omega(r) = \omega(r) = m \text{ et } \Omega(s) = \omega(s) = n, P^-(rs) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{\frac{3}{2}-\tau} \right\}.$$

En adaptant les arguments de Heath-Brown et Moroz, on montrera dans le paragraphe 7 que la formule (5.1) se généralise sous la forme

$$(5.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$$

uniformément pour les ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ avec la définition de $\mathcal{E}(m+n)$ suivante. Pour tout entier k , on désigne par $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des parties de \mathbf{N} qui s'écrivent sous la forme

$$(5.4) \quad E = \bigcap_{j=1}^{D_k} E_j(k)$$

où $D_k \geq 1$ et les $E_j(k)$ sont des ensembles de la forme

$$(5.5) \quad E_j(k) = E_j(k; y, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \prec) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, yP^{(\vec{\alpha})}(m) \prec P^{(\vec{\beta})}(m) \right\}$$

où $y > 0$, \prec désigne l'ordre $<$ ou \leq , $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1})$ avec $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{l_1}$ et $\vec{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_{l_2})$ avec $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{l_2}$ et les termes $P^{(\vec{\alpha})}(m)$ et $P^{(\vec{\beta})}(m)$ sont les produits

$$(5.6) \quad P^{(\vec{\alpha})}(m) := P^{(\alpha_1)}(m) \dots P^{(\alpha_{l_1})}(m) \quad \text{et} \quad P^{(\vec{\beta})}(m) := P^{(\beta_1)}(m) \dots P^{(\beta_{l_2})}(m),$$

les $P^{(i)}(m)$ étant définis par la décomposition de m en facteurs premiers

$$m = P^{(1)}(m) \dots P^{(\Omega(m))}(m) \quad \text{avec} \quad P^{(i)}(m) \leq P^{(i+1)}(m)$$

avec la convention $P^{(\vec{\alpha})}(m) = 1$ (resp. $P^{(\vec{\beta})}(m) = 1$) si $l_1 = 0$ (resp. $l_2 = 0$)⁴. Soulignons que de tels ensembles apparaîtront naturellement au cours de l'argument qui conduit au théorème 5.2 *infra*. Obtenus à l'issue de multiples itérations de l'identité de Buchstab, ils étaient en particulier implicites dans [HB01].

Soient w un complexe de module 1, y_1, y_2 deux réels tels que $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $y_2 > x^\tau$. Soit h un élément de $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, c'est-à-dire une fonction multiplicative bornée par 1 satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

En isolant les idéaux de \mathcal{A} tels que $\mathfrak{j}^+(x^\tau)$ possède au moins un facteur carré, on peut réécrire l'ordre moyen $M_h(\mathcal{A})$ défini par (2.15) sous la forme

$$(5.7) \quad M_h(\mathcal{A}) = \sum_{P^+(N(\mathbf{i})) \leq x^\tau} h(\mathbf{i}) \sum_{k \geq 0} w^k S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)) + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}) \in \mathfrak{Y}(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| \right)$$

où

$$(5.8) \quad (*_k) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, y_1 < P^-(m), P^+(m) \leq y_2 \right\}$$

4. On peut ainsi considérer les inégalités du type $y \prec P^{(\vec{\alpha})}(m)$ ou $P^{(\vec{\alpha})}(m) \prec y$.

et

$$(5.9) \quad \Upsilon(z) := \bigcup_p \bigcup_{\substack{k \geq 2 \\ p^k > z}} p^k \mathbf{Z}.$$

Sous réserve de la validité de (4.3) et en remarquant que (4.11) implique l'estimation

$$(5.10) \quad \sigma_q(\mathfrak{j}) = \sigma_q(\mathfrak{j}^-(x^\tau)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right)$$

dès que $N(\mathfrak{j}) \ll q^3 x^3$, on peut espérer approcher $M_h(\mathcal{A})$ par

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3 x} \sum_{P^+(N(\mathfrak{i})) \leq x^\tau} h(\mathfrak{i}) \sigma_q(\mathfrak{i}) \sum_{k \geq 0} w^k S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &= \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3 x} \left(M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right) + O\left(\sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} \sigma_q(\mathfrak{j}) |h(\mathfrak{j})| \right) \right) \end{aligned}$$

où $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ est défini par (2.17).

Dans la suite de ce paragraphe, on établit un raisonnement combinatoire qui conduira au théorème 5.2, étape intermédiaire en vue de prouver le théorème 1.5. Celui-ci ramène le problème de l'estimation de $M_h(\mathcal{A})$ (resp. $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$) à l'estimation des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$ (resp. $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$) pour des ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$.

Soit $\varpi_1 \in]0, \varpi_0[$. On introduit un paramètre $\tau_1 \geq (\log \log x)^{-\varpi_1}$ suffisamment petit qui sera rendu explicite au cours de l'argument, en vue de contrôler la contribution des idéaux \mathfrak{j} satisfaisant $N(\mathfrak{j}^+(x^\tau)) \geq x^{\tau_1}$.

Considérons, pour un idéal admissible \mathfrak{j} de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ donné, la décomposition de sa partie x^τ -criblée en produits d'idéaux premiers

$$(5.11) \quad \mathfrak{j}^+(x^\tau) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k \text{ avec } N(\mathfrak{p}_i) \leq N(\mathfrak{p}_{i+1}).$$

On effectue une partition de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ où les $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont des ensembles d'idéaux définis par des conditions sur la norme de \mathfrak{p}_k et \mathfrak{p}_{k-1} , à savoir

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} := \left\{ \mathfrak{j} : x^2 < N(\mathfrak{p}_k) \right\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} := \left\{ \mathfrak{j} : x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2 \right\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} := \left\{ \mathfrak{j} : x < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2} \right\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} := \left\{ \mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leq x \text{ et } x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \right\}$$

$$\text{et } \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} := \left\{ \mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leq x \text{ et } N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2} \right\}.$$

Il s'ensuit que

$$M_h(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^5 M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) := \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}} h(\mathfrak{j}).$$

Pour $i \in \{2, \dots, 5\}$, on peut remplacer le terme $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)})$ par une formule où interviennent des cardinaux de la forme $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n))$ où $\mathcal{C}^{(i)}(m, n) \subset \mathcal{C}(m, n)$.

Lemme 5.1. Uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a

$$(5.12) \quad M_h(\mathcal{A}) = M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}\right) + \sum_{i=2}^5 \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} h(i) \sum_{m,n} w^{m+n} S\left(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(m, n)\right) \\ + O\left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|)\right)$$

où

$$(5.13) \quad \mathcal{I} := \left\{m \leq x^{\tau_1} \text{ et } P^+(m) \leq x^\tau\right\},$$

$$(5.14) \quad \mathcal{C}^{(2)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), P^+(r) \leq y_2\} & \text{si } m = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.15) \quad \mathcal{C}^{(3)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq y_2\} & \text{si } n = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.16) \quad \mathcal{C}^{(4)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), P^+(r) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2)\} & \text{si } m = 2, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.17) \quad \mathcal{C}^{(5)}(m, n) := \left\{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2), \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau}\right\}$$

$$(5.18) \quad \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ Y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq Y x^{\tau_1}}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| S\left(\mathcal{A}, i \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right)$$

et

$$(5.19) \quad \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Y x^{\tau_1}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| S\left(\mathcal{A}, i \mathfrak{p}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right).$$

DÉMONSTRATION. À l'image de (5.7), on peut écrire, pour tout $i \in \{2, \dots, 5\}$,

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) = \sum_{P^+(N(i)) \leq x^\tau} h(i) \sum_{k \geq 0} w^k S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}, i, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)\right) \\ + O\left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)|\right).$$

Soit j un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}$. En utilisant la décomposition (5.11) et sous l'hypothèse supplémentaire que $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$, l'encadrement

$$x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2$$

entraîne largement que

$$x^{1-2\tau_1} \ll N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \ll x^{3/2+\tau_1}.$$

En posant $r = N(\mathfrak{p}_k)$, $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$ et $n = k - 1$, on déduit ainsi des définitions (5.13) et (5.14) que

$$\begin{aligned} M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} w^{1+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(2)}(1, n)) \\ &+ O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right). \end{aligned}$$

De même, on peut écrire, en posant maintenant $s = N(\mathfrak{p}_k)$, la formule

$$\begin{aligned} M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m \geq 0} w^{m+1} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(3)}(m, 1)) \\ &+ O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{x \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1+\tau} \\ \text{ou } x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right) \end{aligned}$$

et, avec $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-2})$,

$$\begin{aligned} M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} w^{2+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(4)}(2, n)) \\ &+ O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k) \\ x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right). \end{aligned}$$

Considérons enfin $j \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. Si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) > x^{1/2-2\tau}$, on observe les inégalités

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) \leq N(\mathfrak{p}_k) < x^{1/2+3\tau}.$$

D'autre part, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq x^{1/2-2\tau}$, alors l'hypothèse de majoration $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$ implique l'existence d'un indice $j \geq 2$ tel que

$$N(\mathfrak{p}_{k-j+1} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{3/2-\tau}.$$

Enfin, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \geq x^{1+\tau}$, alors on a trivialement

$$x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{3/2}.$$

En posant $s = N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
 M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m, n \geq 0} w^{m+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(5)}(m, n)) \\
 &+ O \left(\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| \\ &+ \sum_{\substack{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x \\ \text{ou } x^{1/2-2\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1/2+3\tau}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \\ &+ \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Le traitement de $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$ nécessite davantage de travail pour faire apparaître des sous-ensembles de $\mathcal{C}(m, n)$. Au vu du lemme 2.4, on a

$$N(\mathfrak{p}_k) = \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(j^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})} \left(1 + O(\eta^{1/4})\right)$$

ce qui suggère de remplacer la condition $N(\mathfrak{p}_k) \leq y_2$ par l'inégalité

$$N(j^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \geq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{y_2}.$$

Dans la mesure où les éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}$ satisfont $N(\mathfrak{p}_k) \geq x^2$, on peut écrire, en posant $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}$,

$$\begin{aligned}
 M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} \pi(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\
 &+ O \left(\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

où la sommation $\sum^{i,k}$ porte sur les idéaux \mathfrak{q} à $k-1$ facteurs premiers satisfaisant $\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{y_2N(\mathfrak{i})} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1}$ et $P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)$,

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \# \{\mathfrak{p} \text{ premier} : \mathfrak{l}\mathfrak{p} \in \mathcal{A}\}.$$

Pour estimer $\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$, on reproduit le raisonnement combinatoire à l'origine du lemme 4.1 de [HBM02]. En utilisant la notation (4.4), l'identité de Buchstab et le lemme 2.3 assurent que, si

$$\max(\{1\} \cup \{p^3 : p \text{ premier } 1\text{-singulier}\}) < z_1 \leq z_2,$$

alors on a

$$(5.20) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_1)) - S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_2)) = \sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))) \\ + O\left(\sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} \sum_{k \geq 2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}^k, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p})))\right).$$

Ceci permet d'établir par récurrence la formule combinatoire suivante, analogue des formules (4.3) et (4.4) de [HBM02],

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) = S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(x^{3/2+\tau})) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + \sum_{n \geq 1} (-1)^n U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) \\ - S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) - S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + O\left(\#\left(\mathcal{A}_{\mathfrak{l}} \cap \Upsilon(x^{2\tau})\right)\right)$$

où

$$S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1-\tau} \leq N(\mathfrak{p}) < x^{1+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}) \leq x^{3/2+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.21) \quad T^{(0)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \quad U^{(1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.22) \quad T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \quad \text{si } n \geq 1$$

et

$$U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \quad \text{si } n \geq 2.$$

Le niveau de crible x^τ impliqué dans la définition de $T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$ étant suffisamment petit, on établira la formule asymptotique (4.5) en moyenne sur les idéaux \mathfrak{i} tels que $N(\mathfrak{i}) \leq x^{1-3\tau_1}$ au lemme 6.7 en utilisant le crible de Selberg.

Si $n \geq 4$, les conditions

$$x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau}$$

et

$$N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)$$

entraînent que

$$N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}.$$

Par suite, on peut espérer évaluer la contribution de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q})$ lorsque $n \geq 4$ ou $n = 1$ avec $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, en utilisant l'estimation (5.3) puisque l'on peut écrire, en posant $m_1 = k$,

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, n, \mathfrak{i}))$$

où $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$,

$$\mathcal{C}(\mathbf{m}, n) := \left\{ r_1 r_2 s : \omega(r_i) = \Omega(r_i) = m_i \text{ pour } i = 1, 2, \omega(s) = \Omega(s) = n, \right. \\ \left. P^-(r_1 r_2 s) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{3/2-\tau} \right\},$$

$$(5.23) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 1, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), 1) : P^-(r_2) > s, \right. \\ \left. \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$(5.24) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), n) : P^-(r_2) > P^-(s), P^+(s) < x^{1-\tau}, \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau}, \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\},$$

où les triplets (r_1, r_2, s) sont comptés avec multiplicité, en posant $s = N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ et $r_1 = N(\mathbf{q})$ avec les notations de la définition de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$.

Si $n = 2$ ou 3 , l'inégalité

$$N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \leq x^{3/2-\tau}$$

peut faire défaut. On s'inspire alors des identités (4.5) et (4.6) de [HBM02] en écrivant

$$U^{(2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$$

et

$$U^{(3)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$$

où

$$U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{\frac{3}{2}-\tau} < N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1)))$$

et

$$S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \\ N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) > x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))).$$

On peut observer que

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i} \mathfrak{q}) = \sum_{\mathbf{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 2, \mathbf{i}))$$

et

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 3, \mathfrak{i}))$$

où $\mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 2, \mathfrak{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 3, \mathfrak{i})$ sont définis par (5.24).

De plus, on remarque que, si un idéal \mathfrak{j} intervient dans $U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq})$, alors \mathfrak{j} est de la forme $\mathfrak{j} = \mathfrak{iq}|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ avec

$$x^{3/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau} \text{ et } P^-(N(\mathfrak{l})) > N(\mathfrak{p}_1).$$

Il s'ensuit que

$$x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{q}\mathfrak{l}) \leq x^{3/2+2\tau}$$

ce qui suggère d'écrire, en posant $r = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$, $s_1 = N(\mathfrak{q})$, $s_2 = N(\mathfrak{l})$ et $n_1 = k$,

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) = \sum_{\mathfrak{n}} w^{n_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) + O \left(\sum_{\substack{c(N_1, N_2)q^3x^3 \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(y_1, x^\tau)}} \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{3/2+\tau_1} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \right)$$

où

$$\mathcal{C}(m, \mathfrak{n}) := \left\{ r s_1 s_2 : \omega(r) = \Omega(r) = m, \omega(s_i) = \Omega(s_i) = n_i \text{ pour } i = 1, 2, \right. \\ \left. P^-(r s_1 s_2) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau} \right\}.$$

et

$$(5.25) \quad \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}) := \left\{ r s_1 s_2 \in \mathcal{C}(2, (n_1 - 1, n_2)), \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{y_2 N(\mathfrak{i})} \leq s_1 \leq x^{1-4\tau_1}, \right. \\ \left. P^+(r) < x^{1-\tau}, P^-(r) < P^-(s_2), P^-(s_1) > y_1 \right\}$$

où les triplets (r, s_1, s_2) sont comptés avec multiplicité.

On observe que l'on peut majorer la somme sur \mathfrak{i} du terme d'erreur précédent par la quantité $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ défini par (5.18). De même, en remarquant que les conditions de sommations définissant $S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$ impliquent

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_1) < x^{1/2+\tau/2},$$

on a, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, l'estimation

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{c(N_1, N_2)q^3x^3 \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)}} S_i(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) \ll \Delta_2(\mathcal{A}; |h|).$$

où $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$ est défini par (5.18).

On déduit finalement de ce qui précède la formule

$$(5.26) \quad M_h \left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \left(\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right. \\ \left. + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\mathbf{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathfrak{i})) + \sum_{\mathbf{n}} w^{n_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) \right) \\ + O \left(+ \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| \right).$$

L'argument développé ci-dessus s'adapte *mutatis mutandis* pour réécrire $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ à l'aide de cardinaux de la forme $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$. En l'absence d'un analogue du lemme 2.3 adapté aux idéaux de \mathcal{B} , il convient toutefois d'user de précaution en considérant également la contribution des idéaux non admissibles dans l'utilisation de (5.20) au cours du traitement de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$. Cette nouveauté dans la transcription à \mathcal{B} de l'argument combinatoire précédent était déjà implicitement contenue dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à l'image de la formule (6.4) de [HB01] ou encore lors de l'introduction de l'ordre total sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ dans le paragraphe 4 de [HBM02].

Avant d'énoncer la proposition qui résume la discussion de cette partie, on harmonise les notations précédentes en introduisant, pour $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} := (n_1, n_2)$, \mathfrak{i} un idéal et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , les notations

$$(5.27) \quad \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}) := \begin{cases} \left\{ (r, 1, s, 1) : rs \in \mathcal{C}^{(i)}(m_1, n_1) \right\} & \text{si } 2 \leq i \leq 5 \text{ et } m_2 = n_2 = 0, \\ \left\{ (r_1, r_2, s, 1) : r_1 r_2 s \in \mathcal{C}^{(1)}((m_1, m_2), n_1, \mathfrak{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } n_2 = 0, \\ \left\{ (r, 1, s_1, s_2) : r s_1 s_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(m_1, (n_1, n_2), \mathfrak{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } m_2 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) := \# \left\{ (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) : (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2), N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)) \in \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}) \right. \\ \left. \text{et } \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 \in \mathcal{D} \right\}.$$

Théorème 5.2. *On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, l'estimation*

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} M_{\sigma_q h} S(\mathcal{B}) \ll T(|h|) + S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) \\ + \Delta_1(|h|) + \Delta_2(|h|) + \tilde{\Delta}_1(|h|) + \tilde{\Delta}_2(|h|)$$

où

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right|,$$

$T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.22),

$$(5.28) \quad S(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{m, n} \left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|,$$

les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.23), (5.24) et (5.25),

$$(5.29) \quad \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} \sigma_q(j) |h(j)|,$$

$$(5.30) \quad \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} |h(j)| + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} \sigma_q(j) |h(j)| \right),$$

(5.31)

$$\Delta_1(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \\ Y \leq N(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) \leq Yx^{\tau_1}}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))) + \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))) \right)$$

et

$$(5.32) \quad \Delta_2(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathbf{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))) + \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathbf{i}\mathbf{p}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))) \right).$$

Au cours des paragraphes 6 et 7, on établira des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans le théorème 5.2.

6. Premières applications des estimations de sommes de Type I

Dans cette partie, on utilise les estimations de sommes de Type I du paragraphe 3 pour établir des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans le théorème 5.2, à l'exception de $S(|h|)$ qui fera l'objet du paragraphe 7 sur les estimations de sommes de Type II.

Le lemme ci-dessous donne une majoration de la contribution des idéaux dont la norme appartient à $\Upsilon((\log x)^c)$, c'est-à-dire est divisible par un $p^k > (\log x)^c$ avec $k \geq 2$. Il en découle une majoration du terme $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$ défini par (5.30).

Lemme 6.1. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, on ait*

$$(6.1) \quad \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : F(n_1, n_2) \in \Upsilon\left((\log x)^{c(B)}\right)\right\} \ll x^2(\log x)^{-B}$$

et

$$(6.2) \quad \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^{c(B)})}} \sigma_q(j) \ll x(\log x)^{-B}.$$

En particulier, uniformément en $x \geq 2$, w un complexe de module 1, $y_1, y_2 \geq 1$ des réels et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.3) \quad \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Ce résultat – largement inspiré du lemme 2 de [Gre92] – peut être considéré comme une extension du lemme 5 de [Del71b] aux formes binaires.

DÉMONSTRATION. Soit $C > 0$. Pour tout nombre premier p , posons

$$k(p) := \max \left(2, \left\lfloor \frac{C \log \log x}{\log p} \right\rfloor + 1 \right).$$

Étant donné des entiers n_1 et n_2 tels que $(p, n_1 n_2) = 1$ et $p^{k(p)} | F(n_1, n_2)$, il existe ω tel que

$$F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \quad \text{et} \quad n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}}.$$

Par suite, on peut écrire à l'aide du lemme 1 de [Gre92] les inégalités

$$(6.4) \quad \begin{aligned} & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \# \left\{ 0 \leq n_1, n_2 \leq x : n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}} \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \left(\frac{x^2}{p^{k(p)}} + O \left(\frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})} \right) \right) \end{aligned}$$

où

$$M_0(\omega, p^k) := \min_{\substack{(n_1, n_2) \neq (0, 0) \\ n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^k}}} \max(|n_1|, |n_2|).$$

Considérons tout d'abord les premiers $p \nmid F(1, 0)F(0, 1)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \\ & \leq \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} + \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq \frac{x}{p^k} : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)-3k} | F(n_1, n_2) \right\}. \end{aligned}$$

Dans la mesure où le nombre de racines modulo p^k du polynôme $F(X_1, 1)$ est borné uniformément pour p premier et $k \geq 1$, il suit de (6.4) que l'on a

$$\sum_{p \nmid F(1, 0)F(0, 1)} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \ll \sum_{p \leq x^{3/2}} \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} + S_1 + S_2 + S_3$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})}, \\ S_2 &= \sum_{x^{1/2} < p \leq x^{3/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}} \\ p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) > x^{3/4}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})} \end{aligned}$$

et

$$S_3 = \sum_{x^{1/2} < p \ll x^{3/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}} \\ p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) \leq x^{3/4}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})}.$$

Observons que

$$\sum_p \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} \ll \sum_{p \leq (\log x)^{C/2}} \frac{x^2}{(\log x)^{2C/3}} + \sum_{p > (\log x)^{C/2}} \frac{x^2}{p^{4/3}} \ll \frac{x^2}{(\log x)^{C/6}}.$$

En utilisant le fait que $k(p) \ll \log \log x$, l'estimation triviale $M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) \geq 1$ pour S_1 et l'hypothèse $p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) > x^{3/4}$ pour S_2 , il vient aussi les majorations

$$S_1 \ll \frac{x^{3/2} \log \log x}{\log x} \quad \text{et} \quad S_2 \ll \frac{x^{7/4}}{\log x}.$$

De l'estimation

$$S_3 \ll \sum_{1 \leq n_1 \leq x^{3/4}} \frac{x}{n_1} \sum_{0 \leq n_2 \leq n_1} \sum_{\substack{x^{1/2} < p \\ p^2 | F(n_1, n_2)}} 1 \ll x^{7/4},$$

on déduit finalement que

$$\sum_{p | F(1,0) F(0,1)} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \ll x^2 (\log x)^{-C/6}.$$

Étudions à présent la contribution des p , n_1 et n_2 tels que $p | F(1,0) F(0,1)$. Les estimations (1.6) et (3.16) entraînent alors la majoration

$$\begin{aligned} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} &\ll x^2 \frac{\gamma_F(p^{k(p)})}{p^{2k(p)}} + x (\log x)^{C/2} (\log \log x)^{7203} \\ &\ll x^2 (\log x)^{-2C/3}. \end{aligned}$$

En choisissant C suffisamment grand, il s'ensuit l'estimation (6.1).

Pour établir (6.2), on utilise la méthode de Rankin pour écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) &\ll \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) \sum_{N(j) \leq x/p^k} \sigma_q(j) \\ &\ll x \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \sum_{N(j) \leq x} \frac{\sigma_q(j)}{N(j)}. \end{aligned}$$

Au vu de (4.22) et (4.15), il suit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) &\ll \frac{x \log x}{\sigma_q(F)} \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \\ &\ll \frac{x (\log x)^{2A+1}}{\sigma_q(F)} \left(\sum_{p \leq (\log x)^{C/2}} \frac{1}{(\log x)^{2C/3}} + \sum_{(\log x)^{C/2} < p} \frac{1}{p^{4/3}} \right) \\ &\ll \frac{x (\log x)^{2A+1-C/6}}{\sigma_q(F)}, \end{aligned}$$

ce qui implique (6.2) quitte à choisir C suffisamment grand.

L'estimation (6.3) découle alors de (6.1) et (6.2). \square

Les estimations de Type I établies dans la section 3 permettent, au moyen d'un lemme de crible, de donner des bornes supérieures du bon ordre de grandeur des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ et $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ définies au paragraphe 4.1. De telles estimations seront centrales dans les majorations de $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$, $\Delta_1(|h|)$, $\Delta_2(|h|)$.

Lemme 6.2. *Soient B_1 et $B_2 \geq 0$. Il existe $c(B_1, B_2) > 0$ tel que, uniformément pour $z > \log x$, on ait*

$$(6.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(\mathbf{i}^-(z))}{\log z N(\mathbf{i})} + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

et

$$(6.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i}) \log z} + R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$$

où $R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$ et $R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$ sont définis par (6.7) infra et satisfont

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}$$

et

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque la fonction de densité $\xi_q(\mathbf{i}, \cdot)$ définie par (3.40) satisfait (3.42) et (3.43), elle vérifie les hypothèses de crible (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74], dans la mesure où la formule (3.1) du chapitre 3 de [HR74] est satisfaite, à savoir l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, uniformément en q , \mathbf{i} et p , on ait

$$\xi_q(\mathbf{i}, p) \leq \frac{A}{p + A},$$

excepté pour les premiers p tels que $\xi_q(\mathbf{i}, p) = 1$, auquel cas $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) = 0$ dès que $z \geq p$.

On peut donc appliquer le théorème 4.1 de [HR74] ce qui entraîne l'estimation

$$S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \eta^2 x^2 \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq z} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$(6.7) \quad R_{\mathcal{D}}(\mathbf{i}, z) := \sum_{d \leq z^2} \tau(d)^2 \mu(d)^2 |r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)|$$

et $r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)$ est défini par (3.39) et (3.44). En estimant le terme de reste à l'aide du lemme 3.6, on en déduit l'existence d'une constante $c(B_1, B_2) > 0$ pour laquelle on ait

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}.$$

Sous l'hypothèse $z > \log x$, la formule de crible (6.5) est une conséquence de l'estimation uniforme en $N(\mathbf{i}) \leq x^2$ suivante

$$\alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{p \leq z} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) \ll \frac{\sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}^-(z))}{\log z} \prod_{\substack{p|q \\ p > z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

qui vient de (4.8), (4.9) et (4.13).

Pour établir (6.6), il suffit de reproduire le même argument en utilisant le lemme 3.8 (resp. (4.7)) en lieu et place du lemme 3.6 (resp. (4.8), (4.9) et (4.13)). Il suit ainsi que, pour $c(B_2) > 0$ suffisamment grand, on a

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_2)}} \tau_{\mathbf{K}(\mathbf{i})}^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}(\mathbf{i})}^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})}.$$

En utilisant l'estimation $\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m) \ll \tau(m)$ valide pour tout entier q -régulier m ainsi que (4.29), il s'ensuit que l'on a

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}(\mathbf{i})}^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} &\ll \sum_d \tau(d)^{c(B_1)} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{m \leq x^3} \frac{\tau(m)^{c(B_1)}}{m} \\ &\ll (\log x)^{c(B_1)}. \end{aligned}$$

□

Une borne supérieure de la quantité $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ définie par (5.29) peut être obtenue en s'inspirant de travaux antérieurs concernant les ordres moyens de fonctions arithmétiques sur les valeurs polynomiales. Par exemple, Tenenbaum [[Ten90b], Lemme 3.7] montre que, pour tout polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, il existe $c(F) > 0$ tel que, uniformément en $z \geq y \geq 2$ et $x \geq 2$, on ait

$$\# \left\{ n \leq x : \prod_{\substack{p \leq y \\ p^\nu \parallel F(n)}} p^\nu > z \right\} \ll x \exp \left(-c(F) \frac{\log z}{\log y} \right).$$

En vue d'obtenir un analogue de ce résultat au cas des formes binaires et de remplacer le terme $\frac{\log z}{\log y}$ par $\frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right)$, on peut adapter la preuve du théorème 1 de [Shi80], démarche à l'origine du résultat suivant.

Lemme 6.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $z \geq y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$, on ait*

$$(6.9) \quad \# \{ j \in \mathcal{A} : N(j^-(y)) > z \} \ll \eta^2 x^2 (\log \log(q+2))^{c_1} \exp \left(-c_2 \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right)$$

et

$$(6.10) \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j^-(y)) > z}} \sigma_q(j) \ll \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 (\log \log(q+2))^{c_1} \exp \left(-c_2 \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right).$$

En particulier, on a, sous les conditions précédentes et uniformément en w un complexe de module 1, $y_2 \geq 1$ et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$,

$$\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) \ll \eta^2 x^2 (\log \log(q+2))^{c_1} \exp \left(-c_2 \frac{\tau_1}{\tau} \log \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right) \right).$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $y \leq z^{1/4}$ et $z \leq x$, le résultat étant trivial autrement, au vu de (4.10). Étant donné un idéal j et la décomposition de la norme de sa partie q -régulière et y -friable

$$N(j_{q\text{-r}}^-(y)) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_i < p_{i+1},$$

considérons $j \geq 0$ le plus grand entier, s'il existe, tel que

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \leq z^{1/2}$$

et définissons les diviseurs j_1 et j_2 de $j_{q-r}^-(y)$ par les conditions

$$N(j_1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad N(j_2) = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

On scinde l'ensemble des différents j tels que $N(j^-(y)) > z$ en quatre classes :

- classe I : $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$,
- classe II : $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- classe III : $p_{j+1} \leq \log x \log \log x$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- classe IV : $\log x \log \log x < p_{j+1} \leq y$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,

et on estime la contribution de chacune de ces classes séparément.

Contribution de la classe I. Compte tenu de l'hypothèse $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$, il existe un premier q -singulier p et un entier $k \geq 1$ tels que $p^k > z^{1/(2\omega(q)+2\omega_{1-s})}$ où ω_{1-s} désigne le nombre de premiers 1-singuliers. Au regard des conditions $q \leq (\log x)^A$ et $z > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, on en déduit que l'estimation $p^k \gg_c (\log x)^c$ est valide pour tout $c > 0$, ce qui implique $k \geq 2$. Par suite, le lemme 6.1 entraîne que, pour tout $B > 0$, on ait

$$\#\{j \in \mathcal{A} : N(j_{q-s}) > z^{1/2}\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j_{q-s}) > z^{1/2}}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe II. Dans la mesure où les idéaux de cette classe vérifient les inégalités $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-r}^-(y)) > z^{1/2}$, il s'ensuit que $p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} > z^{1/4}$. Sous l'hypothèse $y \leq z^{1/4}$, on a également $\alpha_{j+1} \geq 2$ ce qui signifie que les idéaux de cette classe ont leur norme dans $\Upsilon(z^{1/4})$. En utilisant là encore le lemme 6.1, on en déduit que, pour tout $B > 0$, on a

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \text{ dans la classe II}}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe III. En utilisant successivement le lemme 3.5 puis la majoration $\alpha_q^{\mathbf{Z}}(m) \ll m^{1/2} (\log x)^c$ consécutive à (3.25), on remarque que, sous l'hypothèse $z \leq x$, on obtient par la méthode de Rankin l'estimation

$$\begin{aligned} & \#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \\ & \ll \eta^2 x^2 \sum_{\substack{z^{1/4} < N(\mathbf{i}) \leq z^{1/2} \\ P^+(N(\mathbf{i})) \leq \log x \log \log x}} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^{15/8} (\log x)^c \\ & \ll x^2 (\log x)^c \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log \log x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/4}}\right)^{1/2} + x^{15/8} (\log x)^c \\ & \ll x^2 z^{-1/8} \Psi(x^{1/2}, \log x \log \log x) (\log x)^c + x^{15/8} (\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de $\Psi(x, t)$ due à de Bruijn [[dB66], Theorem 1] et uniforme en $x \geq t > 2$, à savoir

$$\log \Psi(x, t) = \left(\frac{\log x}{\log t} \log \left(1 + \frac{t}{\log x} \right) + \frac{t}{\log t} \log \left(1 + \frac{\log x}{t} \right) \right) \times \left(1 + O \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log \log(x+2)} \right) \right),$$

entraîne la majoration $\Psi(x^{1/2}, \log x \log \log x) \ll \exp \left(O \left(\frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right) \right)$. Par suite, il suit de l'hypothèse $z \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$, que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

De façon similaire, le théorème 3.7 et les estimations (4.15), (5.10) et (4.22) impliquent

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe III}}} \sigma_q(j) &\ll x^3 (\log x)^c \sum_{\substack{z^{1/4} < m \leq z^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log \log x}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^{7/3} (\log x)^c \\ &\ll x^3 (\log x)^c \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log \log x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/4}} \right)^{1/2} + x^{7/3} (\log x)^c \\ &\ll x^3 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que les contributions des classes I, II et III sont négligeables dans (6.9) et (6.10). La contribution principale proviendra ainsi des idéaux de la classe IV.

Contribution de la classe IV. Commençons par découper l'ensemble des p_{j+1} en sous-intervalles du type $\left] z^{1/(s+1)}, z^{1/s} \right]$ avec $s_1 \leq s \leq s_2$ où

$$s_1 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log y} \right\rfloor \text{ et } s_2 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log(\log x \log \log x)} \right\rfloor.$$

On observe alors que

$$\begin{aligned} &\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \\ &\ll \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \sum_{\substack{i \text{ } q\text{-singulier} \\ N(i) \leq z^{1/2}}} \sum_{\substack{j_1 \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq N(j_1) < z^{1/2} \\ P^+(N(j_1)) < z^{1/s}}} S(\mathcal{A}, ij_1, \mathcal{C}^-(z^{1/(s+1)})). \end{aligned}$$

Puisque $z^{1/(s+1)} > \log x$ si $s \leq s_2$, on peut utiliser la formule (6.5) du lemme 6.2 pour en déduire que, pour tout $B > 0$, la contribution des idéaux de la classe IV est majorée par

$$\frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} (s+1) \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d^-(z^{1/(s+1)}))}{d} \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m < z^{1/2} \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où la fonction $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ restreinte aux entiers q -réguliers satisfait les hypothèses du lemme 4 de [Shi80], celui-ci entraîne l'estimation de la somme intérieure, uniforme

en $s \leq \log z / \log \log z$, suivante

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} &\ll \exp \left(\sum_{\substack{p \text{ } q\text{-régulier} \\ p \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p} - \frac{1}{20} s \log(s/2) \right) \\ &\ll \frac{\log z}{s} \exp \left(-\frac{1}{20} s \log(s/2) \right) \end{aligned}$$

De plus, si $s \leq \log z / \log \log x$, on remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d^-(z^{1/(s+1)}))}{d} &= \prod_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ p \leq z^{1/(s+1)}}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \right) \prod_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ p > z^{1/(s+1)}}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \\ &\ll \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \ll \log \log(q+2)^c \end{aligned}$$

d'après (4.10) ce qui implique finalement l'estimation

$$\begin{aligned} &\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \\ &\ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \log \log(q+2)^c \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \exp \left(-\frac{1}{20} s \log(s/2) \right) + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Au vu de l'hypothèse $z \geq y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$ et de l'estimation (4.10), on en déduit que

$$\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \ll \eta^2 x^2 (\log \log(q+2))^c \exp \left(-\frac{1}{20} \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{2 \log y} \right) \right).$$

En utilisant (6.6) au lieu de (6.5), on obtient de même que

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe IV}}} \sigma_q(j) \ll \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 (\log \log(q+2))^c \exp \left(-\frac{1}{20} \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{2 \log y} \right) \right)$$

ce qui permet de déduire (6.10). \square

À partir de maintenant, nous n'emploierons le lemme 6.2 qu'avec un niveau de crible $z \geq x^\tau$. Le lemme suivant précise la borne supérieure disponible dans un tel cadre.

Lemme 6.4. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c_1(B)$ et $c_2(B) > 0$ tels que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq (\log x)^{c_1(B)}$ et $\mathcal{C} \subset \left(\mathcal{C}^- \left((\log x)^{c_1(B)} \right) \right)^2$ où $\mathcal{C}^-(\cdot)$ est défini par (4.4), et, pour tout idéal \mathfrak{i} tel que $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, on ait*

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ (6.11) \quad &\ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}). \end{aligned}$$

et

$$(6.12) \quad \sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^3(\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ \ll \frac{c(N_1, N_2)\eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i}) \log z} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})$$

où ν_d est le nombre d'idéaux \mathfrak{j} tels que $N(\mathfrak{j}) = d$ et

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i})| \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathfrak{i}) |R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})| \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

DÉMONSTRATION. Une application directe du lemme 6.2 donne

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F) \sigma_q((\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)^-(z))}{\log z N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, z)$$

avec

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c_2(B)}}} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, z) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Quitte à supposer $z > (\log x)^{\max(A, 1)}$, on remarque que, uniformément pour les idéaux \mathfrak{q}_1 et \mathfrak{q}_2 satisfaisant $N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) \leq x^2$, on a

$$\sigma_q((\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)^-(z)) \ll \sigma_q(\mathfrak{i}).$$

En choisissant $c_1(B)$ suffisamment grand, on peut alors majorer la contribution des $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ avec facteur carré par

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \\ P^-(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)) \geq (\log x)^{c_1(B)} \\ \mu(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)) = 0 \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) \ll x^2}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} \ll (\log x)^{-c_1(B)} \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau(\mathfrak{j})^2 \sigma_q(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \ll (\log x)^{-B}$$

ce qui achève la preuve de (6.11), compte tenu de (6.8). Un raisonnement similaire permet d'établir (6.12). \square

Le lemme suivant, qui rappelle essentiellement les estimations (7.1) et (7.2) de [HB01], sera utilisé pour estimer les membres de droite de (6.11) et (6.12).

Lemme 6.5. *On a, uniformément en $t \geq z \geq 2$*

$$(6.13) \quad \sum_{t \leq p \leq tz} \frac{\nu_p}{p} \ll \frac{\log z}{\log t}$$

et

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1 \dots p_k}}{p_1 \dots p_k} \ll \frac{\left(\log \frac{\log t}{\log z} + O(1)\right)^k}{k!}.$$

DÉMONSTRATION. La première majoration, analogue de la formule (7.1) de [HB01], est une conséquence du théorème des idéaux premiers. Au vu de la multiplicativité de ν_d , la seconde estimation provient de l'inégalité

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1} \dots \nu_{p_k}}{p_1 \dots p_k} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{z \leq p \leq t} \frac{\nu_p}{p} \right)^k \ll \frac{\left(\log \frac{\log t}{\log z} + O(1)\right)^k}{k!}.$$

\square

On établit dans le lemme suivant des estimations de $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$ définies par les formules (5.31) et (5.32), suffisantes pour nos applications mais qui pourraient être précisées pour des fonctions h spécifiques.

Lemme 6.6. *Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$, on a*

$$(6.14) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2.$$

D'autre part, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.15) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log y_1)^2}.$$

DÉMONSTRATION. Observant qu'un idéal ne contribue qu'un nombre fini de fois dans chaque $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, il vient

$$\begin{aligned} \Delta_1(|h|) \ll \max_{Y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{Y \leq N(j) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, j, \mathcal{C}^-(x^{1/2})) \right. \\ \left. + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(j) S(\mathcal{B}, j, \mathcal{C}^-(x^{1/2})) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_2(|h|) \ll \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right. \\ \left. + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right). \end{aligned}$$

Pour majorer $\Delta_2(|h|)$, on peut faire appel aux lemmes 6.4 et 6.5. Dans l'intervalle $x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$, on a la majoration suivante, valide pour tout $B > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right) \\ \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq p \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ \ll \tau_1 \eta^2 x^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$(6.16) \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \leq \prod_{p \leq x^\tau} \sum_k \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \ll \frac{\tau \log x}{\sigma_q(F)}$$

qui découle de (4.27). En utilisant (4.22), on peut borner la contribution des $Y > x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$ par

$$\begin{aligned} \max_{Y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{Y \leq N(j) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, j, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(j) S(\mathcal{B}, j, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\ \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \max_{Y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{Y \leq N(j) \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\sigma_q(j)}{N(j)} + x^2 (\log x)^{-B} \\ \ll \tau_1 \eta^2 x^2 \end{aligned}$$

et on montre de même que $\Delta_1(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2$.

Supposons désormais que h est à support sur les entiers y_1 -criblés. En procédant comme précédemment, on peut majorer $\Delta_2(|h|)$ par

$$\begin{aligned}
 &\ll \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) \right) \\
 &\quad + \max_{Y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{\substack{Y \leq N(\mathfrak{i}) \leq Yx^{\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{i})) > y_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\
 &\ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq p \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \\
 &\quad + \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_k \sum_{y_1 < p_2 < \dots < p_k \leq x^{3/2}} \frac{\nu_{p_2 \dots p_k}}{p_2 \dots p_k} \max_{y_1 < Y} \sum_{Y \leq p_1 \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} + x^2 (\log x)^{-B} \\
 &\ll \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log y_1)^2}.
 \end{aligned}$$

Une estimation identique est valable pour $\Delta_1(|h|)$. \square

Avec le choix de paramètre de crible $z = x^\tau$, on peut reproduire l'argument du paragraphe 6 de [HB01], basé sur le crible de Selberg, pour obtenir un équivalent asymptotique de $S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Ceci valide en particulier la pertinence de (4.3) avec le choix de l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$, conduisant ainsi à une borne supérieure de

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right|$$

où $T^{(n)}(\mathcal{A}, \cdot)$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \cdot)$ sont définis par (5.22).

Lemme 6.7. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a*

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau^3 \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

DÉMONSTRATION. Ayant remarqué au cours de la preuve du lemme 6.2 que $\gamma(\mathfrak{i}, \cdot)$ et β satisfont les hypothèses (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74], on peut appliquer le théorème 7.1 de [HR74] avec les choix de paramètres $z = x^\tau$ et $\xi = x^{\tau_1}$. On obtient ainsi les formules

$$\begin{aligned}
 S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathfrak{i}) \alpha_q(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
 &\quad \times \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|\right)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \frac{c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|\right).
 \end{aligned}$$

Au vu de la définition (3.24), on observe alors que, pour tout idéal x^τ -criblé \mathfrak{j} admissible tel que $N(\mathfrak{j}) \ll x^2$, on a $\alpha_q(\mathfrak{j}) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$.

La contribution des idéaux $\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ dont la norme possède des facteurs carrés peut être majorée par

$$(6.17) \quad \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) \ll x^{-\tau/2} \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})},$$

ce qui permet de déduire que

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_n \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \cdots < N(\mathfrak{p}_n) \\ N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} \frac{|\alpha_q(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) - 1|}{N(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)} \ll \left(\tau^{-1} x^{-\tau} + x^{-\tau/2} \right) \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \ll x^{-\tau/2} (\log x)^c.$$

Dans la mesure où $N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{2-3\tau_1+\tau}$, la contribution des termes de restes $|r(\mathcal{D}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)|$ est négligeable au vu des lemmes 3.6 et 3.8. On en déduit alors que, pour tout $B > 0$,

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\tau \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

En utilisant le lemme 6.5 pour estimer la contribution des idéaux \mathfrak{j} dont la norme est sans facteur carré et la majoration (6.17) pour les autres idéaux, il suit

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} &\ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) + \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \mu^2(N(\mathfrak{j})) \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n 2^n \sum_{x^\tau < p_1 < \cdots < p_n \ll x^2} \frac{\nu_{p_1 \cdots p_n}}{p_1 \cdots p_n} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n \frac{2^n}{n!} (-\log \tau + O(1))^n \ll \tau^{-2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. \square

7. Estimations de sommes de Type II

Dans cette partie, on établit (cf. Proposition 7.7 *infra*) une majoration de

$$S(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} \left| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S\left(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) \right|$$

où les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sont définis par (5.27) et (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) (5.23), (5.24) et (5.25), ce qui permet de valider (5.3). On étend pour ce faire l'approche développée dans les travaux de Heath-Brown et Moroz [HB01, HBM02], à travers l'introduction de sommes de Type II adéquates.

On peut réécrire les différents ensembles $\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sous la forme

$$\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}) = \bigcup_{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathfrak{n}, \mathfrak{i})} \mathcal{R}^{(i)}(\mathfrak{m}, (s_1, s_2), \mathfrak{i}) \times \{(s_1, s_2)\}$$

avec

$$\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ (s_1, s_2) : \Omega(s_i) = \omega(s_i) = n_i, (s_1, s_2) \text{ satisfait } (E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i})) \text{ pour } 1 \leq j \ll 1 \right\}$$

où $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon \prec P^{(\vec{\alpha}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\alpha}^{(2)})}(s_2)$$

avec $Y > 0$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, \prec désigne l'ordre \leq , $<$, \geq ou $>$ et les $P^{(\vec{\alpha})}$ sont définis dans (5.6), et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) := & \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, P^-(r_1 r_2) > x^\tau, \right. \\ & \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})) \text{ pour } 1 \leq j \ll 1 \right\} \end{aligned}$$

où $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon P^{(\vec{\beta}^{(1)})}(r_1)P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(r_2) \prec P^{(\vec{\gamma}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\gamma}^{(2)})}(s_2).$$

Soulignons que les $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ et $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ introduits ci-dessus correspondent non seulement aux hypothèses sur le support de h mais aussi aux contraintes relatives à la définition des $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$, en particulier aux conditions $x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau}$ et $P^-(s_1 s_2) > x^\tau$.

La première étape dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à rendre les ensembles $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})$ indépendants de (s_1, s_2) et \mathbf{i} . Pour ce faire, on introduit un paramètre $\xi = o(\tau)$ que l'on explicitera dans les applications du paragraphe 8. Dans leurs travaux, Heath-Brown et Moroz effectuent le choix $\xi = (\log \log x)^{-\varpi_2}$ où $\varpi_0 < \varpi_2 < 1$. À la lecture de [HB01] et [HBM02], il apparaît en fait que leurs arguments demeurent valables pour des ξ satisfaisant $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi$ où $0 < \varpi_2 < 1$, hypothèse que l'on suppose à présent. Une étape importante dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à trier les facteurs $P^{(\vec{\alpha})}(s_i)$ dans des intervalles du type $[x^{v\xi}, x^{(v+1)\xi}]$ puis à remplacer les occurrences de $P^{(\vec{\alpha})}(s_i)$ par $x^{v\xi}$ dans les inégalités, procédure que l'on détaille ci-dessous. Posant $v_0 := \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$, on introduit les ensembles d'exposants

$$(7.1) \quad \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) := \left\{ \vec{v} \in \mathbf{Z}^{n_1} \times \mathbf{Z}^{n_2} : \vec{v} \text{ satisfait } (\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) \text{ pour } 1 \leq j \ll 1 \right. \\ \left. \text{et } v_i \neq v_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

où $\vec{v} := (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)})$ et $(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ définie par

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{k=1}^{k_1} v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k_2} v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)}$$

si \prec désigne $<$ ou \leq et

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0) > \sum_{k=1}^{k_1} (v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + 1) + \sum_{k=1}^{k_2} (v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)} + 1)$$

sinon, ainsi que

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, P^-(r_1 r_2) > x^\tau, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) \text{ pour } 1 \leq j \ll 1 \right\}$$

où $(\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), i))$ définie par

$$\frac{\log \left(YP(\vec{\beta}^{(1)})(r_1) P(\vec{\beta}^{(2)})(r_2) \right)}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{l=1}^{l_1} v_{\gamma_l}^{(1)} + \sum_{l=1}^{l_2} v_{\gamma_l}^{(2)}.$$

si \prec désigne \leq ou $<$ et

$$\frac{\log \left(YP(\vec{\beta}^{(1)})(r_1) P(\vec{\beta}^{(2)})(r_2) \right)}{\xi \log x} + \varepsilon v_0 > \sum_{l=1}^{l_1} (v_{\gamma_l}^{(1)} + 1) + \sum_{l=1}^{l_2} (v_{\gamma_l}^{(2)} + 1).$$

sinon.

Dans ce qui suit, nous adaptons la méthode du paragraphe 3 de [HB01] et du paragraphe 5 de [HBM02]. Introduisons, pour $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{N}^{n_1} \times \mathbf{N}^{n_2}$, le poids $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}})$ en posant

$$(7.2) \quad d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}) = \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(1)}) \cdots \log N(\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)}) \log N(\mathfrak{p}_1^{(2)}) \cdots \log N(\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)})}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}}$$

si $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2$ où $\Omega(N(\mathfrak{s}_i)) = \Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}_i) = n_i$, $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{p}_1^{(i)} \cdots \mathfrak{p}_{n_i}^{(i)}$ avec $x^{v_k^{(i)}} \xi \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ pour $1 \leq k \leq n_i$ et $i \in \{1, 2\}$, et $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}) = 0$ sinon. Posons également, pour tout sous-ensemble \mathcal{R} de \mathbf{N}^2 et toute paire d'idéaux $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ la quantité,

$$(7.3) \quad b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2)) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'esprit du lemme 3.7 de [HB01] et du lemme 5.1 de [HBM02], il est naturel d'approcher $S(\mathcal{D}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i))$ par la quantité

$$\widehat{S}(\mathcal{D}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) := \sum_{\vec{\mathbf{v}} \in \iota(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}(\mathcal{D}, i, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0))$$

où

$$(7.4) \quad \widehat{S}(\mathcal{D}, i, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) := \sum_{\substack{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ i\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{D}}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}).$$

Il en résulte l'apparition de termes d'erreur

$$(7.5) \quad R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) := \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| \left(R(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right. \\ \left. + \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(i) R(\mathcal{B}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$R(\mathcal{D}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) = \left| S(\mathcal{D}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) - \widehat{S}(\mathcal{D}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right|.$$

On peut obtenir une borne supérieure de telles quantités en reproduisant les différentes étapes de la démonstration du lemme 3.7 de [HB01].

Lemme 7.1. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, $y_2 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ et $\xi \leq \tau^2$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$,*

$$(7.6) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-6} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

DÉMONSTRATION. On ne décrit ci-dessous que la contribution des termes d'erreur $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$, le traitement de $R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ étant en tout point similaire. Soient \mathbf{i} un idéal tel que $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$ et $v_0 = \lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \rfloor$. Écrivons le terme d'erreur $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ sous la forme

$$R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \leq R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$$

où le terme $R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ est défini comme la différence

$$\left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})) \right|$$

et résulte de l'introduction de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, le terme $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ provient du remplacement de 1 par $d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})$ et vaut ainsi

$$\sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} |1 - d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})| b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}))$$

et le terme $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaît en remplaçant $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})$ par l'ensemble $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)$, c'est-à-dire

$$R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2} d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i})$$

où

$$\Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i}) := \# \left\{ (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) : \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \right. \\ \left. (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2)) \in \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}) \Delta_{\text{sym}} \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right\},$$

où Δ_{sym} désigne la différence symétrique.

Au vu de la définition des $(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, on observe que tous les idéaux \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 comptés dans $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaissent dans $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Par suite, dans la mesure où

$$(7.7) \quad \begin{aligned} & 1 - d_n(\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdots \mathfrak{p}_{n_1}^{(1)} \mathfrak{p}_1^{(2)} \cdots \mathfrak{p}_{n_2}^{(2)}, \vec{v}) \\ &= 1 - \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(1)})}{v_1^{(1)} \xi \log x} \cdots \frac{\log N(\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)})}{v_{n_1}^{(1)} \xi \log x} \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(2)})}{v_1^{(2)} \xi \log x} \cdots \frac{\log N(\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)})}{v_{n_2}^{(2)} \xi \log x} \\ &\ll \xi \tau^{-2} \end{aligned}$$

dès que $x^{v_k^{(i)}\xi} \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ (cf [[HB01] p.44]), il vient l'inégalité

$$(7.8) \quad R_2(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \ll \xi \tau^{-2} S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)).$$

On sépare la suite de la démonstration en deux parties selon que $i = 1$ ou non.

Cas $i \in \{2, \dots, 5\}$. Au vu des définitions (5.14), (5.15), (5.16) et (5.17) de $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$, il existe au plus un couple (m, n) pour lequel un idéal \mathfrak{rs} donné appartienne à $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$. Par suite, on peut observer, en suivant l'argument de la preuve du lemme 3.7 de [HB01] que l'on a, pour tout $N(i) \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , l'estimation

$$\sum_{\mathbf{m}} R_1(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, (n, 0), i)) \ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j^{(i)}(n)} S(\mathcal{A}, i\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau))$$

où

$$\Delta_j^{(i)}(n) := \{(p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n, \\ x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } E_j^{(i)}(n)\}$$

et $E_j^{(i)}(n)$ désigne une inégalité de la forme

$$y_1 \leq p_1 \leq y_1 x^\xi, \quad y_2 x^{-\xi} \leq p_n \leq y_2, \quad x^{1-\tau_1-\xi} \leq p_n \leq x^{1-\tau_1}, \quad p_1 \cdots p_{n-1} = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \text{ ou } p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il suit ainsi l'estimation

$$\sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_1(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \ll \xi \tau^{-5} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \frac{|h(i)| \sigma_q(i)}{N(i)} + x^2 (\log x)^{-B}$$

valide pour tout $B \geq 0$.

Compte tenu de la borne triviale $\sum_{m, n} S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(m, n)) \leq S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^-(x^\tau))$, la majoration

$$\sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_2(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \ll \xi \tau^{-3} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \frac{|h(i)| \sigma_q(i)}{N(i)} + x^2 (\log x)^{-B}$$

est aussi une conséquence immédiate du lemme 6.4 combiné à (7.8).

Considérons à présent $R_3(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i))$. On remarque que les termes d'erreur qui apparaissent proviennent des idéaux $i\mathfrak{rs}$ qui satisfont les conditions

$$P^-(N(\mathfrak{s}))x^{-\xi} \leq P^+(N(\mathfrak{r})) \leq P^-(N(\mathfrak{s})) \text{ ou } P^+(N(\mathfrak{s})) \leq P^-(N(\mathfrak{r})) \leq P^+(N(\mathfrak{s}))x^\xi.$$

Lorsque $i \in \{4, 5\}$, on a alors, d'après les lemmes 2.4, 6.4 et 6.5, l'estimation suivante, valide pour $B > 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \\ & \ll \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) \leq x^{1-\tau_1} \\ N(\mathfrak{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A}, i\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\tau \log x} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| \frac{\sigma_q(i)}{N(i)} \sum_{\substack{x^\tau < p_1 \leq x^{1-\tau_1} \\ p_2 = p_1 x^{O(\xi)}}} \frac{\nu_{p_1 p_2}}{p_1 p_2} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \xi \tau^{-3} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \frac{|h(i)| \sigma_q(i)}{N(i)} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

D'autre part, si $j \in \{2, 3\}$, les lemmes 2.4, 6.4 et 6.5 permettent d'obtenir, en posant $\mathbf{j} = \mathbf{ip}_1\mathbf{p}_2\mathbf{l}$, la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) &\ll \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathbf{p}_1) \\ N(\mathbf{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathbf{p}_1)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ip}_1\mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &\ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathbf{p}_1) \\ N(\mathbf{ip}_1\mathbf{l}) \leq x^{2-\tau} (\log x)^c \\ N(\mathbf{p}_1) = \frac{x^{3+O(\xi)}}{N(\mathbf{i})} \\ P^-(N(\mathbf{p}_1)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ip}_1\mathbf{l}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &\ll \xi \tau^{-4} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

valide pour tout $B > 0$.

Ceci achève l'estimation de $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ lorsque $i \in \{2, \dots, 5\}$.

Cas $i = 1$. Dans un premier temps, considérons la contribution issue des ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0), \mathbf{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}, \mathbf{i})$. En observant que le nombre de couples (\mathbf{m}, \mathbf{n}) dans lequel intervient chaque idéal $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ est borné si $N(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) \ll x^3 (\log x)^c$, les arguments précédents s'adaptent sans difficulté nouvelle, conduisant aux bornes supérieures

$$\sum_{\mathbf{m}} R^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0)) \ll \xi \tau^{-3} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\mathbf{n}} R^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-4} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

pour tout $B > 0$.

Supposons donc à présent que $n \geq 2$. Au vu de la définition (5.24) de $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})$, on a la majoration

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{m}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\ &\ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{ir}_1\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_j(n) := &\left\{ (p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n < x^{1-\tau}, \right. \\ &\left. p_2 \cdots p_n \leq x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } E_j(n) \right\} \end{aligned}$$

et $E_j(n)$ désigne une inégalité de la forme :

$$x^\tau \leq p_1 \leq x^{\tau+\xi}, \quad p_2 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{ou} \quad p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

On traite la contribution des inégalités

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{et} \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5. En effet, le lemme 2.4 nous amène à estimer la contribution des idéaux \mathbf{i} , \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 satisfaisant

$$N(\mathbf{ir}_1\mathbf{r}_2) = Y x^{O(\xi\tau^{-1})} (\log x)^c,$$

avec $Y = x^{3/2+\tau}$ ou $x^{2-\tau}$ et l'on observe que l'on a alors

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{P^-(N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)) > x^\tau \\ N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = Y x^{O(\xi\tau^{-1})} (\log x)^c}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-5} \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Supposons $n \geq 3$. Pour les ensembles $\Delta_j(n)$ restants, au moins l'un des p_i n'apparaît pas dans la définition de $E(n)$, disons p_n . Observant que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & \ll \tau^{-1} \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-1}) \\ (N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n-1}), 1) \text{ satisfait } E_j(n) \\ N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \end{aligned}$$

on déduit, en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}} \sum_{n \geq 3} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\ & \ll \xi\tau^{-6} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, l'argument précédent échoue uniquement pour l'inégalité $p_1 < p_2 \leq p_1 x^\xi$. Le cas échéant, il apparaît que $x^{1/2} < p_1 < x^{3/4-\tau/2}$ ce qui permet de majorer cette contribution par

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi \leq x^{\frac{3}{4}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-1} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires, les estimations (7.7) et (7.8) permettent de majorer la contribution des termes $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ par

$$\begin{aligned} & \ll \xi\tau^{-2} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{n \geq 2} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_2) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-5} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Achevons la démonstration du lemme en étudiant $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$. Les arguments précédents s'adaptent sans difficulté pour estimer les différentes contributions, à l'exception de l'inégalité

$$P^-(s) \leq P^-(r_2) \leq P^-(s) x^\xi.$$

Si $n \geq 3$, on majore ce terme d'erreur par

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} \sum S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}))) \\ & \ll \tau^{-2} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-2}) \\ N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-2}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-2}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, il advient que $P^-(s) \leq x^{3/4}$ et la contribution de tels idéaux est inférieure à

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{1/2} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} \sum S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & + \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{3/4} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} \sum S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p} \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-4} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

□

Au vu du lemme précédent, il convient de montrer que, en moyenne sur m et \mathbf{i} , la quantité $\frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x^3} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ constitue une bonne approximation de $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Estimer $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ se réduit essentiellement à étudier les idéaux $\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n_1+n_2}$ tels que le n -uplet $(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n_1+n_2}))$ appartienne à l'ensemble

$$G(\vec{v}, t) := \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^{n_1+n_2} : x_i \in \left[x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi} \left[\text{ pour } 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \text{ et } \prod_{i=1}^{n_1+n_2} x_i \leq t \right. \right\}$$

Pour considérer de tels idéaux, Heath-Brown obtient dans [HB01] la généralisation suivante du théorème des idéaux premiers.

Lemme 7.2 ([HB01], Lemma 4.10). *Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en $t \geq 1$, $x \geq 2$, $1 \leq n \ll \tau^{-1}$ et $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ satisfaisant $\tau \leq v_j \xi$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on ait*

$$(7.9) \quad \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in G(\vec{v}, t)} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i) = w(t) + O\left(t \exp\left(-c\sqrt{\log x^\tau}\right)\right)$$

où $w(t) = w(\vec{v}, t)$ désigne la mesure de $G(\vec{v}, t)$.

Le comportement analytique de la fonction w définie dans le lemme 7.2 a été étudié dans le paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.3 (Formules (8.3) et (8.4) de [HB01]). *Pour $t > 0$, $h \geq 0$ et $n \geq 2$, on a*

$$|w'(t+h) - w'(t)| \leq \frac{h}{t} (\xi \log x)^{n-2}$$

et

$$0 \leq w'(t) \leq (\xi \log x)^{n-1}.$$

De plus, si $n = 1$, alors la dérivée à droite $w'(v_1, t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[x^{v_1 \xi}, x^{(v_1+1)\xi} \right[$.

En reproduisant l'argument développé dans le paragraphe 10 de [HB01], on peut utiliser les lemmes 7.2 et 7.3 pour obtenir une estimation de $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$.

Lemme 7.4. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $v_0 \geq 0$ et $I \in \mathcal{I}$ tel que $N(\mathbf{i}) \in [x^{v_0\xi}, x^{(v_0+1)\xi}]$, on a l'estimation*

$$(7.10) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{\eta c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i})} \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) q^3 x^3}{\xi^2 N(\mathbf{i})}$$

où, pour tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbf{N}^2$,

$$(7.11) \quad \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}, \vec{v}) := \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R})}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2} N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

DÉMONSTRATION. Compte tenu des définitions (7.1), (7.4) et (7.3), il suffit de montrer que, uniformément pour $n \geq 1$, $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ tel que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, $\tau \leq \xi v_i$ et tout ensemble $\mathcal{R}(\mathbf{m})$ tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{m}) \subset \{(r_1, r_2) : \Omega(r_1) = \omega(r_1) = m_1, \Omega(r_2) = \omega(r_2) = m_2 \text{ et } P^-(r_1 r_2) > x^\tau\},$$

on a

$$(7.12) \quad \sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - c(N_1, N_2) q^3 x^3 \eta \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i}) v_1 \dots v_n}$$

où

$$\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) := \sum_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{B}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) d_n(\mathbf{s}, \vec{v}),$$

$$d_n(\mathbf{s}, \vec{v}) = \begin{cases} \frac{\log N(\mathbf{p}_1) \dots \log N(\mathbf{p}_n)}{v_1 \dots v_n (\xi \log x)^n} & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \text{ avec } N(\mathbf{p}_i) \in [x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi}] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \dots v_n (\xi \log x)^n N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

Une fois cette estimation établie, la majoration (7.10) se déduira directement de l'inégalité

$$(7.13) \quad \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\vec{v} \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)} \frac{1}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}} \leq \left(\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{n!} \left(\sum_{v \leq \xi^{-1}} \frac{1}{v} \right)^n \right)^2 \ll \xi^{-2}.$$

Observons tout d'abord que

$$(7.14) \quad \begin{aligned} & \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) \\ &= \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \dots v_n (\xi \log x)^n} \sum_{\substack{x^{v_1 \xi} \leq N(\mathbf{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n \xi} \leq N(\mathbf{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} < N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n) \leq \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (1+\eta)} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i). \end{aligned}$$

Estimant la somme intérieure à l'aide du lemme 7.2, il vient

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathbf{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathbf{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} < N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n) \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)}(1+\eta)}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i) \\
 &= w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) \\
 (7.15) \quad &+ O \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau}) \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses faites sur $\mathcal{R}(\mathbf{m})$, les formules (7.14), (7.15) et (6.18) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{m}} \left| \sum_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2} b(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) \left(w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) \right| \\
 (7.16) \quad & \ll \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{i})v_1 \dots v_n} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau}).
 \end{aligned}$$

Supposons que $n \neq 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis et le lemme 7.3, on remarque que

$$\begin{aligned}
 & w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) \\
 (7.17) \quad &= \frac{c(N_1, N_2)\eta q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \left(w' \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) + O(\eta(\xi \log x)^{n-2}) \right).
 \end{aligned}$$

Au vu de (7.16), (7.17) et (6.18), il s'ensuit que

$$\sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - \eta c(N_1, N_2)q^3x^3 \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{i})v_1 \dots v_n}.$$

Supposons à présent que $n = 1$. La dérivée à droite w' étant la fonction caractéristique de $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$, on en déduit que l'estimation

$$w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)}(1+\eta) \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) = \eta \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right)$$

est valide sauf éventuellement lorsque $\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \leq x^{v\xi} \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)}$ avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$, auquel cas on dispose de la borne triviale

$$w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)}(1+\eta) \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)} \right) \ll \eta \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{it}_1\mathbf{t}_2)}.$$

Par suite, il vient l'estimation

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), v_1) - \eta c(N_1, N_2)q^3x^3 \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), v_1)}{N(\mathbf{i})} \right| \\
 & \ll \frac{\eta c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{i})v_1\xi \log x} \sum_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2}^{(i)} \frac{b(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} + \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{i})v_1} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau})
 \end{aligned}$$

où la sommation $\sum^{(i)}$ porte sur les idéaux \mathfrak{r}_1 et \mathfrak{r}_2 satisfaisant

$$\frac{c(N_1, N_2)q^3x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} \leq N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})}(1 + \eta)$$

avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. En utilisant le fait que $\tau_{\mathbf{K}}(j^-(x^\tau)) \ll e^{O(\tau^{-1})}$ si $N(\mathfrak{j}) \ll q^3x^3$ ainsi que la majoration

$$\sum_{Y \leq N(\mathfrak{j}) \leq Y(1+\eta)} \frac{1}{N(\mathfrak{j})} \ll \eta + Y^{-1/3},$$

estimation valide pour $Y > 1$ et conséquence du théorème 3.7, on en déduit finalement (7.12). \square

L'argument de la preuve précédente ne permet pas d'estimer l'analogue de (7.14) avec \mathcal{A} , à savoir

$$\sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{A}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

Le rôle manifeste du phénomène de parité dans une telle somme rend caduque la possibilité de l'étudier directement à partir des seules estimations de Type I obtenues au paragraphe 3. En vue de lever cette obstruction et de contourner partiellement la dépendance en \mathbf{n} dans la somme précédente, introduisons, en nous inspirant des notations (5.10), (5.11) et (5.12) de [HBM02], les quantités

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) := \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))$$

où

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) := \sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) e_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$$

avec

$$(7.18) \quad e_n(\mathfrak{s}, \vec{v}) := \frac{w'(N(\mathfrak{s}))}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} \sum_{\substack{|\mathfrak{s}| \\ N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right).$$

Compte tenu de la définition de w et du lemme 7.3, on peut observer que $e_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ et $d_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ sont

$$(7.19) \quad \begin{cases} \ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \log x & \text{si } 0 \leq \frac{\log N(\mathfrak{s})}{\xi \log x} - (v_1^{(1)} + \cdots + v_{n_1}^{(1)} + v_1^{(2)} + \cdots + v_{n_2}^{(2)}) \leq n_1 + n_2, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une étape importante dans l'estimation de $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$ consiste à montrer que l'erreur introduite en remplaçant $d_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ par $e_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ est suffisamment petite, ce qui fera l'objet du lemme 7.6 et permettra ainsi de résoudre le problème de parité. On peut justifier de manière heuristique l'introduction de $\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$ lorsque $n_1 + n_2 = 1$. Dans ce cas, le poids $d_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ est égal, à un facteur $(v_1\xi \log x)^{-1}$ près, à la quantité

$$\begin{cases} w'(N(\mathfrak{s})) \log(N(\mathfrak{s})) & \text{si } \mathfrak{s} \text{ est premier,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fois remplacée la fonction log par la fonction de von Mangoldt Λ , le terme $e_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ apparaît en tronquant la convolution $\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$.

Dans le lemme suivant, nous nous attachons à estimer asymptotiquement la quantité $\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}))$. Les estimations de Type I combinées à la formule de Perron permettent en particulier de la relier à $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}))$ en suivant essentiellement l'argument développé au paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.5. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $v_0 \geq 1$, on a l'estimation*

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I} \\ x^{v_0} \leq N(\mathfrak{i}) < x^{(v_0+1)\xi}}} \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} \left| \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) - \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\vec{\mathfrak{v}} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathfrak{n}, v_0))} \Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathfrak{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0), \vec{\mathfrak{v}}) \right| \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c$$

où $\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}, \vec{\mathfrak{v}})$ est défini par (7.11).

DÉMONSTRATION. Dans l'esprit de la preuve du lemme 3.9 de [HB01] et compte tenu du lemme 2.4, commençons par remplacer $w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2))$ par $w'\left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2)}\right)$. Si $n_1 + n_2 \geq 2$, on utilise successivement le lemme 2.4, le lemme 7.3, l'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A}}} \frac{b(\dots)}{(\xi \log x)^{n_1+n_2}} \left| w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)) - w'\left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2)}\right) \right| \left| \sum_{\substack{\mathfrak{j} | \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \\ N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log\left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})}\right) \right| \\ & \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^5 \\ & \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \#\mathcal{A}^{39/40} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq 2qx} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)^{200}) \right)^{1/40} \\ & \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c. \end{aligned}$$

On considère à présent le cas $n_1 + n_2 = 1$. Le lemme 2.4 entraîne la validité de la formule $w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)) = w'\left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2)}\right)$ excepté pour les idéaux qui satisfont $N(\mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2) = c(N_1, N_2) q^3 x^{3-v\xi} (1 + O(\eta^{\frac{1}{4}}))$ pour $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Par suite, on peut reproduire l'argument développé au cours de la preuve du lemme 7.4 conduisant à l'estimation de $\sum^{(i)} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathfrak{m}))}{N(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}$. En utilisant le lemme 3.5, on peut majorer le terme d'erreur ainsi engendré par

$$\begin{aligned} & \ll \xi^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{\mathfrak{r} \\ \mathfrak{ir} \mathfrak{s} \in \mathcal{A}}}^{(i)} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{r}) \\ & \ll \xi^{-1} \left(\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{N(\mathfrak{r}) \ll x^{2-\tau/2} (\log x)^c}^{(i)} \#\mathcal{A}_{\mathfrak{ir}} \right)^{44/45} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq 2qx} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)^{135}) \right)^{1/45} \\ & \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c. \end{aligned}$$

Définissons

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right) &:= \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b \left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right)}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right) \\ &\quad \times \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \# \mathcal{A}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right). \end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}) \ll x^{2-\tau/2} (\log x)^c$, le lemme 3.5 combiné à l'estimation $\alpha_q(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$ entraînent, pour tout $B > 0$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} (7.20) \quad &\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}} \left| \Sigma_1 \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \Sigma \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v} \right) \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) \right| \\ &\ll \frac{x^2}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Montrons à présent, pour tout $B > 0$, l'estimation

$$\begin{aligned} (7.21) \quad &\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}} \frac{\Sigma \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v} \right)}{N(\mathbf{i})} \left| \zeta_q(2)^{-1} \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) - \sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}) \right| \\ &\ll \frac{1}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

ce qui conclura la preuve du lemme au vu de (7.13).

Dans cette direction, écrivons

$$(7.22) \quad \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) = \alpha_q(\mathbf{i}) \sum_{m < x^{\tau/2}} \frac{\widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, m)}{m} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{m} \right)$$

où $\widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, m) = 0$ si $\alpha_q(\mathbf{i}) = 0$ et $\widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, \cdot)$ est la fonction multiplicative définie par

$$(7.23) \quad \widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, p^k) := \sum_{N(\mathbf{j})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i})}$$

sinon. Compte tenu de la décomposition des idéaux premiers dans $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on observe que, pour tout premier p et $k \geq 4$,

$$(7.24) \quad \widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, p^k) = 0.$$

De plus, si $\alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0$, p est un premier q -régulier et $k \geq 1$, la formule (3.24) entraîne que

$$(7.25) \quad \widehat{\xi}_q(\mathbf{i}, p^k) = \begin{cases} -\frac{\nu_p}{1+p^{-1}} & \text{si } k = 1 \text{ et } p \nmid N(\mathbf{i}), \\ -1 & \text{si } k = 1 \text{ et } p \mid N(\mathbf{i}), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit \mathbf{i} un idéal tel que $\alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0$. La formule de Perron (voir le théorème II.2.5 de [Ten08]) permet d'établir (7.21). En effet, au vu de (7.24) et (7.25), la série de Dirichlet

$\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)}(s)$ définie par

$$\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\widehat{\xi}_q(i, n)}{n^s},$$

est telle que $\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}}(s)$ définit un produit eulérien absolument convergent si $\sigma > \frac{1}{2}$. Par suite, on a

$$(7.26) \quad \sum_{N(j) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}j)}{\alpha_q(\mathbf{i})N(j)} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{1}{\log x} - i\infty}^{\frac{1}{\log x} + i\infty} \zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2}.$$

Compte tenu des propriétés analytiques de la série $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ mentionnées au chapitre 1, l'application du théorème des résidus conduit à la formule

$$\begin{aligned} \sum_{N(j) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}j)}{\alpha_q(\mathbf{i})N(j)} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right) &= \text{Res} \left(\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} s^{-2} \right)_{s=0} + R(\mathbf{i}) \\ &= \lambda_{\mathbf{K}}^{-1}(\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(1) + R(\mathbf{i}) \end{aligned}$$

où

$$R(\mathbf{i}) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{V}} \zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2}$$

et \mathcal{V} est le chemin de sommets $\frac{1}{\log x} - i\infty$, $\frac{1}{\log x} - iT$, $-\frac{c}{\log T} - iT$, $-\frac{c}{\log T} + iT$, $\frac{1}{\log x} + iT$, $\frac{1}{\log x} + i\infty$ où $T = \exp(\sqrt{\log x^{\tau/2}})$. Un calcul direct de produit eulérien conduit à la formule

$$\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2)\lambda_{\mathbf{K}}} \left(\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}} \right) (1) = \sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}).$$

Pour traiter $R(\mathbf{i})$, on peut remarquer à l'aide de (3.25) et (7.25) que l'on a, dès que $\text{Re}(s) > 1/2$, l'estimation

$$\begin{aligned} \alpha_q(\mathbf{i}) (\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(s) &\ll_{\text{Re}(s)} \alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{p|qN(\mathbf{i})} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{\text{Re}(s)}} \right) \right) \prod_{q\text{-singulier}} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\xi_q(\mathbf{i}_p, p^k)}{p^{k\text{Re}(s)}} \right) \\ &\ll_{\text{Re}(s)} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^c N(\mathbf{i}_{q-s})^{1/3} (\log x)^c. \end{aligned}$$

Il suit alors de la majoration de $\zeta_{\mathbf{K}}^{-1}(s)$ due à Wu [Wu96] – rappelée dans le lemme 1.1 du chapitre 1 – que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha_q(\mathbf{i}) R(\mathbf{i}) &\ll \alpha_q(\mathbf{i}) \int_{\mathcal{V}} \left| \left(\zeta_{\widehat{\xi}_q(i, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}} \right) (s+1) \right| \left| \zeta_{\mathbf{K}}^{-1}(s+1) \right| x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2} \\ &\ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^c N(\mathbf{i}_{q-s})^{1/3} \exp \left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}} \right). \end{aligned}$$

En sommant sur \mathbf{i} , on obtient alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \ll x^2} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} R(\mathbf{i}) &\ll \exp \left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}} \right) \sum_{\substack{N(\mathbf{i}_1) \ll x^2 \\ \mathbf{i}_1 \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_1)^c}{N(\mathbf{i}_1)} \sum_{\mathbf{i}_2 \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_2)^c}{N(\mathbf{i}_2)^{2/3}} \\ &\ll \exp \left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}} \right) \end{aligned}$$

ce qui établit (7.21). □

L'estimation du terme d'erreur qui apparaît avec le remplacement de $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu})$ par $e_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu})$ a constitué le tour de force majeur des travaux de Heath-Brown et Moroz (voir à ce sujet les paragraphes 8 et 10 à 12 de [HB01], les paragraphes 6 et 7 de [HBM02] et les paragraphes 4 et 5 de [HBM04]). De telles estimations de sommes, dites de Type II, se révèlent être l'ingrédient nécessaire pour s'affranchir du phénomène de parité.

Lemme 7.6. *Soient $B \geq 0$, C une classe d'idéaux. Uniformément pour $h : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ et $b : \mathcal{J}(\mathbf{K})^2 \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions bornées par $1, x \geq 2, x^{1+\tau} \leq V \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}$ et $\xi \leq \tau$, on a*

$$S_V := \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in C \cap \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A} \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) (d_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu})) \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

où la constante implicite dépend du zéro de Siegel.

DÉMONSTRATION. D'après la discussion algébrique du paragraphe 2 et le théorème des facteurs invariants, il existe des entiers $z_1, z_2 \geq 1$ et une base entière (w_1, w_2, w_3) de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ tels que $z_1|z_2$ et $(z_1w_1\delta, z_2w_2\delta)$ soit une base entière de $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$. Au vu de la formule (2.1), on peut supposer sans perte de généralité que $z_1 = 1$. En considérant le changement de base ainsi induit, le problème général se réduit à considérer les valeurs

$$\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}((a'_1 + n'_1q)w_1\delta + (a'_2 + n'_2q)z_2w_2\delta)}{N(\mathfrak{d})}$$

avec $(a'_1, a'_2, q) = 1$ sous les conditions $(n'_1, n'_2) \in \mathcal{K}' \cdot X$ où \mathcal{K}' est un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $(a'_1 + n'_1q, a'_2 + n'_2q) = 1$. En scindant l'ensemble des n'_1 en classes de congruences modulo z_2 , on se ramène ainsi à étudier

$$\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}((a''_1 + n''_1qz_2)w_1\delta + (a'_2z_2 + n'_2qz_2)w_2\delta)}{N(\mathfrak{d})}.$$

Par un argument de convolution, on peut finalement supposer que les entiers $a''_1 + n''_1qz_2$ et $a'_2z_2 + n'_2qz_2$ sont premiers entre eux. En résumé, on peut supposer sans perte de généralité que F est défini par (2.1) et qu'il existe une base entière (w_1, w_2, w_3) de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ telle que $w_i\delta = \omega_i$ pour $i = 1, 2$.

Grâce à ces réductions et en utilisant la définition de (w_1, w_2, w_3) , observons que l'existence d'un premier p tel que $p\mathcal{O}_{\mathbf{K}}|(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$ entraînerait que $p|(n_1, n_2)$. Par suite, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ où \mathcal{P} désigne l'ensemble des idéaux primitifs, à savoir

$$\mathcal{P} := \{ \mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} \nmid \mathfrak{j} \text{ pour tout premier } p \}.$$

En vue de s'affranchir de la condition de coprimauté dans la définition de \mathcal{A} , écrivons, à l'aide du principe d'inclusion-exclusion, la relation

$$\begin{aligned} S_V &= \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mu(m) S_V(m) \end{aligned}$$

où

$$(7.27) \quad f_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}) := d_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}),$$

$$S_V(m) := \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu})$$

et

$$\mathcal{A}(m) = \left\{ ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2), m | (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) \right\}.$$

Soit $M \geq 1$ un paramètre qui sera explicité plus tard. Au vu de (7.19), du lemme 2.2 et de la borne sur b et h , on peut estimer la contribution des entiers $m > M$ en s'inspirant de la majoration (11.2) de [HB01] par

$$(7.28) \quad \sum_{m > M} \left| \sum_{i\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}} h(i)b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ i\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right| \leq \log x \sum_{m > M} \sum_{j \in \mathcal{A}(m)} \tau_{\mathbf{K}}(j)^4 \\ \ll \frac{x^2}{M} (\log x)^c.$$

Pour traiter les entiers $m \leq M$, on suit essentiellement la démarche développée dans la preuve du lemme 3.10 de [HB01], de la proposition 6.1 de [HBM02] ainsi que de la proposition 4.2 de [HBM04]. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on observe tout d'abord que

$$S_V(m) \leq \left(\sum_{N(j) \leq \frac{q^3 x^3}{V}} \tau_{\mathbf{K}}(j)^4 \right)^{\frac{1}{2}} S_V^{(0)}(m)^{\frac{1}{2}} \\ \ll \left(\frac{x^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} S_V^{(0)}(m)^{\frac{1}{2}} (\log x)^c$$

où

$$S_V^{(0)}(m) := \sum_{j \in \mathcal{P}} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ j\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right|^2.$$

En développant le carré et en isolant les termes diagonaux, on obtient la décomposition $S_V^{(0)}(m) = S_V^{(1)}(m) + S_V^{(2)}(m)$ avec

$$S_V^{(1)}(m) := \sum_{j \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ j\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})^2, \\ S_V^{(2)}(m) := \sum_{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{P} \cap C} f_n(\mathfrak{s}_1, \vec{\mathfrak{v}}) f_n(\mathfrak{s}_2, \vec{\mathfrak{v}}) \delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$$

et

$$(7.29) \quad \delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) := \begin{cases} \#\{j : j\mathfrak{s}_1, j\mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A}(m)\} & \text{si } V < N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2) \leq 2V \text{ et } \mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme $S_V^{(1)}(m)$ peut être majorée en utilisant (7.19) et le lemme 2.2. Il vient ainsi la majoration

$$(7.30) \quad S_V^{(1)}(m) \ll (\log x)^2 \tau(m)^c \sum_{n_1, n_2 \ll \frac{qx}{m}} \tau_{\mathbf{K}}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^3 \ll \frac{\tau(m)^c}{m^2} x^2 (\log x)^c.$$

La difficulté essentielle qui apparaît dans l'estimation de $S_V^{(2)}(m)$ réside dans le caractère éparsé de $\mathcal{A}(m)$. Une idée originale développée par Heath-Brown et Moroz consiste à réécrire $\delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ en exploitant le fait que $\mathcal{A}(m)$ est inclus dans un sous-module de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ de rang 2.

Pour chaque idéal \mathfrak{s} , considérons le représentant de \mathfrak{s} introduit dans [HBM02], à savoir l'unique entier $\beta(\mathfrak{s})$ de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ associé à \mathfrak{s} par l'isomorphisme $\mathcal{I}(\mathbf{K})/\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^* \simeq G(K)$ défini dans le paragraphe 2 et satisfaisant en outre, si $r(\mathbf{K}) = 1$,

$$(7.31) \quad |\beta(\mathfrak{s})| = N(\mathfrak{s})^{\frac{1}{3}} \varepsilon_1^z \text{ où } z \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

et, si $r(\mathbf{K}) = 3$,

$$(7.32) \quad |\sigma_j(\beta(\mathfrak{s}))| = N(\mathfrak{s})^{\frac{1}{3}} |\sigma_j(\varepsilon_1)|^{z_1} |\sigma_j(\varepsilon_2)|^{z_2} \text{ où } z_1, z_2 \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } j \in \{1, 2, 3\},$$

ε_1 et ε_2 désignant des unités fondamentales multiplicativement indépendantes.

L'application trace $\text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}$ facilite la détection de la condition $\mathfrak{j}\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)$. En effet, compte tenu de la définition (2.3) de la base duale (w_1^*, w_2^*, w_3^*) de (w_1, w_2, w_3) , l'idéal $\mathfrak{j}\mathfrak{s}$ est de la forme $(n_1 w_1 + n_2 w_2)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ tel que $(\alpha) = \mathfrak{j}$ et

$$(7.33) \quad \text{Tr}(\alpha \beta(\mathfrak{s}) w_3^*) = 0.$$

Fixons une base (v_1, v_2, v_3) de $(C \text{Cl}(\delta))^{-1}$. Si $\alpha = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ pour des entiers α_1, α_2 et α_3 , alors l'équation (7.33) est équivalente à la relation linéaire

$$(7.34) \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \text{Tr}(v_j \beta(\mathfrak{s}) w_3^*) = 0.$$

Étant donnés deux idéaux \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 , posons $\beta_i = \beta(\mathfrak{s}_i)$ pour $i = 1, 2$ et introduisons les systèmes de coordonnées

$$\widehat{\beta}_i := (\text{Tr}(v_1 \beta_i w_3^*), \text{Tr}(v_2 \beta_i w_3^*), \text{Tr}(v_3 \beta_i w_3^*)) \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Supposons que $\mathfrak{j}\mathfrak{s}_i = \left((a_1 + n_1^{(i)} q) \omega_1 + (a_2 + n_2^{(i)} q) \omega_2 \right) \mathfrak{d}^{-1}$ pour $i = 1, 2$. En écrivant les équations (7.34) associées à \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 , on obtient un système linéaire de rang 2 (puisque $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2$) dont la résolution permet d'exprimer $\widehat{\alpha}$ en fonction de $\widehat{\beta}_1$ et $\widehat{\beta}_2$, compte tenu de la primitivité de α . On a ainsi

$$(7.35) \quad \widehat{\alpha} = \pm \frac{\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}{D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)}$$

où $D(b_1, b_2, b_3) = \text{p.g.c.d.}(b_1, b_2, b_3)$. La condition $m \mid (a_1 + n_1^{(i)} q, a_2 + n_2^{(i)} q)$ peut être récupérée en remarquant que (7.35) implique que

$$a_j + n_j^{(i)} q = \left| D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)^{-1} h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \right|$$

où h_{ij} désigne la forme cubique à coefficients rationnels définie par la formule (6.4) de [HBM02], à savoir

$$(7.36) \quad h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) := \text{Tr} \left(\beta_i \sum_{k=1}^3 (\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)_k v_k w_j^* \right).$$

Au vu de ces préliminaires, on dispose des analogues des formules (11.5), (11,6) et (11.7) de [HB01], à savoir

$$(7.37) \quad |\widehat{\beta}_1|, |\widehat{\beta}_2| \asymp V^{\frac{1}{3}}, \quad |\widehat{\alpha}| \asymp qxV^{-\frac{1}{3}} \text{ et } D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \ll Vx^{-1}.$$

On étend finalement les définitions (7.27) et (7.29) de $f_n(\cdot, \vec{\nu})$ et $\delta_{V,m}(\cdot, \cdot)$ aux entiers algébriques de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ en posant

$$f_n(\beta, \vec{\nu}) := \begin{cases} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\nu}) & \text{si } \mathfrak{s} \text{ est primitif et } \beta(\mathfrak{s}) = \beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) := \begin{cases} \delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) & \text{si } \beta_i = \beta(\mathfrak{s}_i) \text{ pour } i = 1, 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on définit la norme N sur \mathbf{R}^3 comme le polynôme dont les valeurs en $\mathbf{b} \in \mathbf{Q}^3$ satisfont $N(\mathbf{b}) = N(\beta(\mathbf{b}))$ où $\beta(\mathbf{b})$ désigne l'entier algébrique de C satisfaisant $\widehat{\beta}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Soit Y un paramètre qui sera explicité plus tard tel que $q^{\frac{1}{2}} \leq Y \ll x^{\frac{2}{3}}$. La contribution des vecteurs satisfaisant $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}Y^{-1}$ peut être traitée par un argument de découpage d'une région de \mathbf{R}^3 en cubes suffisamment petits et en classes de congruences (voir le lemme 11.1 de [HB01]). En reproduisant la preuve du lemme 11.2 de [HB01], l'inégalité $f_{\beta_1} f_{\beta_2} \leq f_{\beta_1}^2 + f_{\beta_2}^2$ implique l'estimation suivante, analogue de la majoration de S_3 de [[HB01], pp. 70–71],

$$\begin{aligned} S_V^{(3)}(m) &:= \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}Y^{-1}}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \\ &\ll (\log x)^2 \sum_{\substack{\beta_1, \beta_2 \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}Y^{-1}}} \tau_{\mathbf{K}}((\beta_1))^2 \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \ll VxY^{-1}(\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de la contribution des termes β_1 et β_2 tels que $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) > Vx^{-1}Y^{-1}$ consiste principalement à reprendre les arguments de la preuve du lemme 4.3 et du paragraphe 5 de [HBM04] en tenant compte de la dépendance en m et q , pour obtenir un résultat uniforme en $q \leq (\log x)^A$. On est donc conduit à considérer la quantité

$$S_V^{(4)}(m) := \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) > Vx^{-1}Y^{-1}}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2).$$

En découpant la région de sommation de $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)$ en intervalles $]\Delta, 2\Delta]$ où Δ parcourt un ensemble de puissances de 2, puis en sous-intervalles $](Z-1)Y^{-2}\Delta, ZY^{-2}\Delta]$, on observe l'existence de $Vx^{-1}Y^{-1} < \Delta \ll Vx^{-1}$ et $Y^2 < Z \leq 2Y^2$ tels que l'on ait

$$S_V^{(4)}(m) \ll S_V^{(5)}(m, Z, \Delta) Y^2 \log x$$

où

$$S_V^{(5)}(m, Z, \Delta) := \sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) = D}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \right|.$$

Au vu de ce qui précède, on peut écrire $\delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) = 1_{\mathcal{R}_{D,V}}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \epsilon_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D)$ où $\mathcal{R}_{D,V}$ est l'ensemble des $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ satisfaisant les contraintes (7.31) (resp. (7.32)) si $r(\mathbf{K}) = 1$ (resp. $r(\mathbf{K}) = 3$) ainsi que les conditions

$$V < N(\widehat{\beta}_1), N(\widehat{\beta}_2) \leq 2V \text{ et } 0 < \left| \frac{h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}{D} \right| - (a_j + qx\eta N_j) \leq qx\eta \text{ pour } i, j = 1, 2,$$

tandis que $\epsilon_{q,m}$ est l'indicatrice définie par

$$\epsilon_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) := \begin{cases} 1 & \text{si } mD|h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \text{ et } D^{-1}|h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)| \equiv a_j \pmod{q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au regard de (7.37), on recouvre $\mathcal{R}_{D,V}$ en domaines du type $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ où \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont des cubes de la forme

$$(7.38) \quad \prod_{j=1}^3 \left[V^{1/3} \frac{n_j - 1}{Y^2}, V^{1/3} \frac{n_j}{Y^2} \right] \quad \text{avec } n_1, n_2, n_3 \ll Y^2.$$

Considérons les \mathfrak{C} intersectant la frontière de la région $\mathcal{R}_{D,V}$ (dits de classe II dans les travaux de Heath-Brown et Moroz) ou dans lesquels h_{ij} change de signe.

Lorsque $r(\mathbf{K}) = 1$, on réitère l'argument de comptage de points sur une hypersurface développé dans le paragraphe 12 de [HB01] et le paragraphe 6 de [HBM02]. Pour éclaircir l'exposé, attardons-nous sur les cubes $\mathfrak{C}_1(n_1, n_2, n_3) \times \mathfrak{C}_2(n_4, n_5, n_6)$ sus-cités qui possèdent un point ne vérifiant pas l'inégalité

$$0 \leq \left| \frac{h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}{D} \right| - (a_j + qx\eta N_j).$$

pour un $D \in](Z-1)Y^{-2}\Delta, ZY^{-2}\Delta]$. Puisque $D = ZY^{-2}\Delta + O(Y^{-2}\Delta)$ et h_{ij} est cubique, il s'ensuit que, dans les cubes considérés, on a

$$h_{ij}(n_1, \dots, n_6) = \Delta ZY^4 V^{-1} (a_j + qx\eta N_j) + O(qY^4)$$

et $\nabla h_{ij}(n_1, \dots, n_6) \gg Y^4$. En appliquant alors le lemme 4.9 de [HB01] avec les choix $S_0 = q$ et $R = R_0 = Y^2$ et en utilisant l'hypothèse $q \leq Y^2$, on en déduit qu'il y a $O(Y^{10}q^{-5})$ hypercubes de côté q contenant de tels 6-uplets d'entiers (n_1, \dots, n_6) . Par suite, il y a $O(qY^{10})$ cubes $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ intersectant la frontière de $\mathcal{R}_{D,V}$ ou sur lesquels h_{ij} change de signe.

Le cas $r(\mathbf{K}) = 3$ est traité de la même manière, à l'exception de l'inégalité (7.32). Comme il est indiqué p. 282 de [HBM02], le problème peut alors se ramener à compter les cubes \mathfrak{C} contenant des couples $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ satisfaisant une équation du type

$$A \log |\sigma_1(\beta_i)| + B \log |\sigma_2(\beta_i)| + C \log |\sigma_3(\beta_i)| = 0 \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

pour des réels A, B et C .

En utilisant (7.19) et le lemme 11.1 de [HB01] pour majorer la contribution des cubes précédemment étudiés, on en déduit qu'il existe deux cubes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 de la forme (7.38) tels que $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ soit inclus dans $\mathcal{R}_{D,V}$ pour tout $D \in](Z-1)Y^{-2}\Delta, ZY^{-2}\Delta]$, h_{ij} soit de signe constant (disons positif) sur $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ et

$$S_V^{(5)}(m, Z, \Delta) \ll VxY^{-3}(\log x)^c + Y^{12}S_V^{(6)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$$

où

$$S_V^{(6)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) := \sum_{D \in \left] \frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta \right]} \left| \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C} \\ (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) = D}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \epsilon_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|.$$

Par convolution, on peut réécrire $S_V^{(6)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ sous la forme

$$S_V^{(6)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{d \geq 1} \mu(d) \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \epsilon_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|.$$

Dans le paragraphe 12 de [HB01] et p. 282 de [HBM02], Heath-Brown et Moroz développent un argument de réseau qui permet d'estimer la contribution des entiers satisfaisant $dD > d_0$ où $d_0 = Y^{15}Vx^{-1} + V^{\frac{1}{6}}$. Ils obtiennent en particulier l'estimation

$$\sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \sum_{dD \geq d_0} \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \\ (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} |f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu})| \ll VxY^{-15}(\log x)^c.$$

On en déduit donc que

$$S_V^{(6)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll VxY^{-15}(\log x)^c + S_V^{(7)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$$

où $S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ est la somme définie par

$$\sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \epsilon_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|.$$

Soit d^* le dénominateur commun des h_{ij} . On peut écrire $h_{ij} = (d^*)^{-1}H_{ij}$ où H_{ij} est une forme cubique à coefficients entiers qui satisfait $H_{ij}(\widehat{\beta}, \lambda\widehat{\beta}) = 0$ pour tout λ au vu de la définition (7.36). En introduisant des caractères additifs, on peut reformuler, en vue de l'utilisation d'une inégalité de grand crible, les congruences définissant $\epsilon_{q,m}(\cdot, \cdot)$ ainsi que la condition $dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2$. On obtient ainsi l'analogie de la formule (5.2) de [HBM04] suivante

$$S_V^{(7)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \right|,$$

où

$$S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) := \frac{1}{(d^*qmdD)^6} \sum_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in (\mathbf{Z}/(d^*qmdD)\mathbf{Z})^3}^* e\left(-\frac{\mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{b}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2}{d^*qmdD}\right) \times S(d^*qmdD, \mathbf{b}_1, \mathfrak{C}_1) S(d^*qmdD, \mathbf{b}_2, \mathfrak{C}_2)$$

où \sum^* indique que la sommation porte sur les vecteurs $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ primitifs satisfaisant

$$dD | \boldsymbol{\eta}_1 \wedge \boldsymbol{\eta}_2, \quad H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \equiv Dd^*a_i \pmod{qDd^*} \text{ et } H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \equiv 0 \pmod{mDd^*},$$

et

$$S(l, \mathbf{b}, \mathfrak{C}) = \sum_{\substack{\widehat{\beta} \in \mathfrak{C} \cap \mathbf{Z}^3 \\ (\beta) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}}} e\left(\frac{\mathbf{b} \cdot \widehat{\beta}}{l}\right) f_n(\beta, \vec{\nu}).$$

La condition $dD | \boldsymbol{\eta}_1 \wedge \boldsymbol{\eta}_2$ est équivalente à l'existence d'un entier $1 \leq \lambda \leq dD$ tel que $\boldsymbol{\eta}_2 \equiv \lambda \boldsymbol{\eta}_1 \pmod{dD}$ et $(\lambda, dD) = 1$ en raison de la primitivité de $\boldsymbol{\eta}_1$ et $\boldsymbol{\eta}_2$. En écrivant $\boldsymbol{\eta}_2 = \lambda \boldsymbol{\eta}_1 + dD \boldsymbol{\eta}_3$ et $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}_4 + d^* q m \boldsymbol{\eta}_5$, on remarque que $\boldsymbol{\eta}_3$ et $\boldsymbol{\eta}_4$ sont solutions des congruences

$$\begin{cases} H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv D d^* a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}. \end{cases}$$

En effet, d'après la formule de Taylor, il existe un polynôme \widetilde{H}_{ij} tel que

$$H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda \boldsymbol{\eta}_1 + dD \boldsymbol{\eta}_3) = H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda \boldsymbol{\eta}_1) + dD \widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3, \lambda, dD).$$

Dans la mesure où $H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda \boldsymbol{\eta}_1) = 0$, on observe que

$$\begin{cases} H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \equiv D d^* a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \equiv 0 \pmod{mDd^*} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} d\widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3, \lambda, dD) \equiv d^* a_i \pmod{q d^*}, \\ d\widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3, \lambda, dD) \equiv 0 \pmod{m d^*}. \end{cases}$$

Ce dernier système ne dépendant que des classes de $\boldsymbol{\eta}_1$ et $\boldsymbol{\eta}_3$ modulo $m q d^*$, on en déduit qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} d\widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_3, \lambda, dD) \equiv d^* a_i \pmod{q d^*}, \\ d\widetilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_3, \lambda, dD) \equiv 0 \pmod{m d^*}. \end{cases}$$

En effectuant le raisonnement en sens inverse, il s'ensuit finalement que les congruences initiales sont équivalentes au système

$$\begin{cases} H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv D d^* a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}. \end{cases}$$

Dans la mesure où la somme définissant $S(l, \mathbf{b}, \mathfrak{C})$ porte sur les vecteurs $\widehat{\beta}$ primitifs, la propriété d'orthogonalité des caractères additifs entraîne que, si $\boldsymbol{\eta}$ n'est pas primitif, alors

$$\sum_{\mathbf{b} \in (\mathbf{Z}/(d^* q m d D) \mathbf{Z})^3} e\left(-\frac{\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}}{d^* q m d D}\right) S(d^* q m d D, \mathbf{b}, \mathfrak{C}) = 0.$$

Au vu de ce qui précède, on peut donc écrire

$$S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \frac{1}{(d^* q m d D)^6} \sum_{\substack{\lambda \in (\mathbf{Z}/(dD) \mathbf{Z})^* \\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in (\mathbf{Z}/(d^* q m d D) \mathbf{Z})^3}} T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \\ \times S(d^* q m d D, \mathbf{b}_1, \mathfrak{C}_1) S(d^* q m d D, \mathbf{b}_2, \mathfrak{C}_2)$$

avec

$$T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) := \sum_{\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_5} e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\eta}_5}{dD}\right) e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\eta}_4 + dD \mathbf{b}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_3}{d^* q m d D}\right)$$

où $\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4 \in \mathbf{Z}/(d^* q m) \mathbf{Z}$ et $\boldsymbol{\eta}_5 \in \mathbf{Z}/(dD) \mathbf{Z}$ satisfont

$$H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv D d^* a_i \pmod{qDd^*} \text{ et } H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}.$$

La propriété d'orthogonalité des caractères additifs et la majoration triviale entraînent que

$$|T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \leq \begin{cases} (dD)^3 (d^*qm)^6 & \text{si } \mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2 \equiv 0 \pmod{dD}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$, alors \mathbf{b}_2 est déterminé de manière unique modulo dD par la donnée de λ et de \mathbf{b}_1 . L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors l'estimation

$$\left| S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \right| \ll \frac{(qm)^3}{(dD)^2} \max_{i=1,2} \sum_{\mathbf{b} \pmod{d^*qmdD}} |S(d^*qmdD, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2.$$

Afin d'appliquer une inégalité de grand crible, on réduit les phases $\mathbf{b}(d^*qmdD)^{-1}$ à des phases irréductibles $\mathbf{b}l^{-1}$, c'est-à-dire telles que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$. On remarque pour cela qu'une phase irréductible $\mathbf{b}l^{-1}$ apparaît avec un poids qui peut être majoré uniformément en q et m par

$$\sum_{D \geq Vx^{-1}Y^{-1}} \sum_{\substack{d \\ l|d^*qmdD}} \frac{(qm)^3}{(dD)^2} \ll (qm)^5 \sum_{\substack{v \geq Vx^{-1}Y^{-1} \\ l|v}} \frac{\tau(v)}{v^2} \ll (qm)^5 \frac{\tau(l)}{l} xY \frac{\log V}{V}.$$

Puisque $S_V^{(7)}$ correspond à la contribution des termes satisfaisant $dD \leq d_0$, on en déduit que

$$(7.39) \quad S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll \frac{m^5 xY (\log x)^c}{V} \max_{i=1,2} \sum_{l \leq mqd^*d_0} \frac{\tau(l)}{l} \sum_{\mathbf{b} \pmod{l}}^{(l)} |S(l, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2$$

où la sommation $\sum^{(l)}$ porte sur les vecteurs \mathbf{b} tels que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$.

On peut alors reproduire étape par étape les arguments du paragraphe 13 de [HB01] pour majorer la somme du membre de droite de (7.39). Il s'ensuit l'estimation

$$S_V^{(7)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll m^8 xV \left(YQ_1^{-1/4} + Y^{46} x^{-\tau/2} \right) (\log x)^c$$

où $Q_1 := (\log x)^{c(B)}$ avec $c(B) > 0$ une constante qui peut-être choisie arbitrairement grande. Par suite, en collectant les différents termes d'erreur, il vient, pour $m \leq M$, la borne supérieure

$$S_V(m) \ll x^2 \left(Y^{-1/2} + m^4 \left(Y^{15/2} Q_1^{-1/8} + Y^{30} x^{-\tau/4} \right) \right) (\log x)^c$$

et donc, d'après (7.28),

$$S_V \ll x^2 \left(M^{-1} + MY^{-\frac{1}{2}} + M^5 \left(Y^{15/2} Q_1^{-1/8} + Y^{30} x^{-\tau/4} \right) \right) (\log x)^c.$$

Quitte à supposer la constante c_1 introduite dans la définition de Q_1 suffisamment grande en fonction de A et de B , les choix $Y = M^4$ et $M = Q_1^{1/288}$ assurent que $q^{\frac{1}{2}} \leq Y$ et impliquent finalement que

$$S_V \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

L'uniformité du résultat en $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi \leq \tau$ ainsi que la non-effectivité de la constante implicite sont des conséquences directes de la preuve du lemme 3.8 de [HB01]. \square

En conclusion de cette partie, on peut énoncer une borne supérieure du terme d'erreur $S(|h|)$ défini par (5.28).

Proposition 7.7. *Soit $B > 0$. Il existe une constante $c(B) > 0$ telle que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau^2$ et $\eta = (\log x)^{-c_0}$ où $c_0 \geq c(B)$, on ait*

$$S(|h|) \ll \eta^2 x^2 (\log x)^{-B} + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

où les $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont définis par (7.5).

DÉMONSTRATION. Soit $c_1 > 0$. Puisqu'il y a au plus $O(\xi^{-1})$ choix possibles pour chaque v_i , les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6 entraînent l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de c_1 et η telle que, pour $i \in \{1, \dots, 5\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(i) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right| \\ \ll_{c_1} x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + \xi^{-c\tau^{-1}} (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^c. \end{aligned}$$

En remarquant que la condition $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau^2$ entraîne que $\xi^{-c\tau^{-1}} \leq (\log x)^c$, on en déduit l'existence de $c_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(i) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right| \\ \ll_{c_1} x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^{c_2}. \end{aligned}$$

En choisissant $c(B) = 5(c_2 + B)$ et $c_1 = 11(c_2 + B)$ et en utilisant la formule

$$\begin{aligned} S(|h|) \leq \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(i) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, i)) \right| \\ + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}), \end{aligned}$$

on en déduit le résultat. \square

8. Démonstration du théorème 1.5 et applications

8.1. Démonstration des théorèmes 1.5 et 1.4. Compte tenu des résultats des paragraphes précédents, il est possible d'estimer les différentes quantités intervenant dans le théorème 5.2. On obtient alors le résultat suivant qui consiste en une reformulation du théorème 1.5 en tenant compte de la notation $\eta = (\log x)^{-c_0}$.

Proposition 8.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $y_2 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(8.1) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ où $y_1 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, alors on a

$$(8.2) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2 \log x}{\log y_1 \log y_1 (\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

Si, de plus, $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y_1 \leq y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$, alors on peut remplacer dans (8.1) et (8.2) le terme $1/(\log \log x)^{1-\varepsilon}$ par $\exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

DÉMONSTRATION. Soient $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 := (\log \log x)^{\varepsilon-1}$. Les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7 fournissent une borne supérieure des quantités $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$, $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ et $T(|h|)$ qui est négligeable, compte tenu des choix de τ et τ_1 . En utilisant la proposition 7.7 avec le choix $\xi = \tau^7$, le lemme 7.1, ainsi que la majoration (6.16), on obtient d'autre part, pour tout $B > 0$, l'estimation

$$S(|h|) \ll \tau \eta^2 x^2.$$

En utilisant le lemme 6.6 pour estimer $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, on en déduit finalement (8.1).

L'estimation (8.2) s'obtient en utilisant (6.15) en lieu et place de (6.14) et en notant que $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) = 0$.

Supposons à présent que $y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$ et posons $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1/2}$ et $\tau_1 := \varepsilon/2$. Sous ces conditions, on observe que seuls interviennent les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. On a alors

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} M_{\sigma_q h} S(\mathcal{B}) \ll S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}).$$

On en déduit le résultat en utilisant là encore les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7, la proposition 7.7 avec le choix $\xi := (\log x)^{-\tau}$ ainsi que le lemme 7.1. \square

PREUVE DU THÉORÈME 1.4. Soit $h \in \mathcal{M}(w)$. La proposition 4.1 permet d'évaluer $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$. Dans la mesure où $\omega(q) \ll \frac{\log \log x}{\log \log \log x}$, il vient

$$M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3 (3 \log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1-\varepsilon}}\right) \right)$$

Le théorème 1.4 apparaît alors comme une conséquence directe de la proposition 8.1 et de (2.14), dans la mesure où l'hypothèse $|w-1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$ implique l'estimation $(\log x)^{w-1} \ll \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$. \square

8.2. Valeurs friables de formes binaires cubiques : preuves du théorème 1.2 et du corollaire 1.3. Considérons le cas $h = 1_{S(y)} \in \mathcal{M}(1; 1, y)$. D'après la proposition 8.1, le problème se réduit essentiellement à évaluer $M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$. Dans la proposition suivante, nous obtenons une telle estimation comme conséquence du théorème 2.2 du chapitre 1.

Proposition 8.2. *Il existe C et $c > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $x \geq 3$ et $\exp((\log \log x)^{2+\varepsilon}) \leq y \ll q^3 x^3$, on ait*

$$M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 \rho(3u) + O\left(\left(C^{\omega(q)} \log(q+1)^c + \log \log x\right) \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 \rho(3u) \frac{\log(u+1)}{\log y} + \eta^2 x^3\right)$$

où $u = \frac{\log x}{\log y}$.

DÉMONSTRATION. Rappelons qu'il a été observé, dans la preuve de la proposition 4.1, que la fonction $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ restreinte aux entiers q -réguliers est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, 1; 1/2 + \varepsilon, c(\varepsilon) 2^{\omega(q)})$ – en reprenant les notations du chapitre 1 – pour une constante $c(\varepsilon) > 0$ assez grande. Le théorème 2.2 du chapitre 1 implique que, uniformément en $x \geq 3$ et $\exp((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}) \leq y \leq x$, on a

$$(8.3) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \Lambda_{\sigma_q}^{(q-r)}(x, y) + O\left(\frac{x \rho(u)}{L_\varepsilon(y)}\right)$$

où

$$L_\varepsilon(y) := \exp\left((\log y)^{3/5-\varepsilon}\right), \quad \Lambda_{\sigma_q}^{(q-r)}(x, y) := \begin{cases} x \int_0^{+\infty} \rho(u-v) \, d\left(\frac{M_{\sigma_q}^{(q-r)}(y^v)}{y^v}\right) & \text{si } x \notin \mathbf{N}, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \Lambda_{\sigma_q}^{(q-r)}(t, y) & \text{si } x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

et

$$M_{\sigma_q}^{(q-r)}(y^v) := \sum_{\substack{n \leq y^v \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

Rappelons que le théorème 1.3 du chapitre 1 assure l'existence de $c > 0$ tel que, uniformément pour $q \geq 1$ et $t \geq 1$, on ait l'estimation

$$(8.4) \quad M_{\sigma_q}^{(q-r)}(t) = \lambda_0(\mathbf{1})t \left(1 + O\left(2^{\omega(q)}t^{-c}\right)\right),$$

où $\lambda_0(\mathbf{1})$ est défini par (4.28). En utilisant une intégration par parties, il vient alors la formule

$$(8.5) \quad \Lambda_{\sigma_q}^{(q-r)}(x, y) = x\lambda_0(\mathbf{1})\rho(u) + x \int_0^u \rho'(u-v) \frac{M_{\sigma_q}^{(q-r)}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} \, dv + O\left(2^{\omega(q)}x^{1-c}\right).$$

Compte tenu de l'estimation uniforme en $0 \leq v \leq u$ suivante

$$\rho^{(j)}(u-v) \ll \log(u+1)^j \rho(u) \exp(O(v \log(u+1)))$$

établie en suivant [[Ten08], p.507] pour tout $j \geq 0$, on obtient l'estimation

$$(8.6) \quad \int_0^u \rho'(u-v) \frac{M_{\sigma_q}^{(q-r)}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} \, dv \ll 2^{\omega(q)} \frac{\rho(u) \log(u+1)}{\log y}$$

qui permet de déduire une formule asymptotique pour $\Lambda_{\sigma_q}^{(q-r)}(u, y)$ valide dans le domaine $1 \leq u \leq y^{1-\varepsilon}$. Le corollaire III.5.14 de [Ten08] impliquant pour tout $j \geq 0$ la majoration

$$(8.7) \quad \rho^{(j)}(u+v) - \rho^{(j)}(u) \ll v\rho(u) (\log(u+1))^{j+1}$$

valide pour $u, v > 0$, il s'ensuit que l'on a, dans le domaine $\exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x$,

$$(8.8) \quad \begin{aligned} & \int_0^u \left(\rho' \left(u - v + \frac{\log(1+\eta)}{\log y} \right) - \rho'(u-v) \right) \frac{M_{\sigma_q}^{(q-r)}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} \, dv \\ & \ll 2^{\omega(q)} \frac{\eta}{\log y} (\log(u+1))^2 \int_0^u \frac{\rho(u-v)}{y^{cv}} \, dv \\ & \ll 2^{\omega(q)} \eta \rho(u) \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} \right)^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit finalement que la formule

$$(8.9) \quad \sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \lambda_0(\mathbf{1})\eta x \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{2^{\omega(q)} \log(u+1)}{\log y} \right) \right)$$

est valide dans le domaine $\exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x$, puis, au vu de (8.4), dans le domaine $x \leq y \leq x^2$.

Afin d'évaluer la quantité $M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$, on écrit la convolution suivante, qui est l'analogue de (4.33),

$$(8.10) \quad \sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \sum_{\substack{d \leq x(1+\eta) \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

On traite la contributions des entiers nq où $d \leq (\log x)^B$ est q -singulier en utilisant (8.9). Compte tenu de l'estimation

$$(8.11) \quad \rho(u-v) = \rho(u) (1 + O(v \log(u+2))),$$

valide pour $u \geq 0$ et $0 \leq v \leq \frac{1}{\log(u+2)}$ et conséquence de la formule (III.5.114) de [Ten08], on observe à l'aide de (4.29) que l'on a, dans le domaine $\exp((\log \log x)^{2+\varepsilon}) \leq y \ll q^3 x^3$, la formule

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq (\log x)^B \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) &= \sum_{\substack{d \leq (\log x)^B \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(\mathbf{1}) \eta x \rho(u) \\ &\quad + O\left(\eta x \rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^c \frac{\log(u+1)}{\log y}\right). \end{aligned}$$

On complète la somme sur d ci-dessus en estimant l'erreur ainsi produite à l'aide de la méthode de Rankin et de (4.30). Quitte à choisir B suffisamment grand, il vient ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq (\log x)^c \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) &= \frac{\eta x \rho(u)}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \\ &\quad + O\left(\eta x \rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^c \frac{\log(u+1)}{\log y}\right). \end{aligned}$$

Au vu de la majoration triviale

$$\sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) \leq M_{\sigma_q}^{(q-r)}((1+\eta)x/d),$$

on peut estimer la contribution des entiers q -singuliers $d > (\log x)^B$ en utilisant (8.4), (4.29) et la méthode de Rankin pour obtenir finalement l'estimation

$$\sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \frac{\eta x \rho(u)}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} + O\left(\eta x \left(\rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^c \frac{\log(u+1)}{\log y} + \eta\right)\right),$$

quitte à choisir B suffisamment grand. En observant que la formule (8.11) entraîne l'estimation

$$\rho\left(u + \frac{\log(c(N_1, N_2)q^3)}{\log y}\right) = \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log \log x \log(u+2)}{\log y}\right)\right)$$

uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on en déduit le résultat. \square

La proposition précédente entraîne que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et dans le domaine (1.8) défini par

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y,$$

on a

$$\frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} M_{\sigma_q 1_S(y)}(\mathcal{B}) = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \rho(3u) \left(1 + O\left(\eta^2 x^2 \exp\left(-(\log \log x)^{1-\varepsilon}\right)\right)\right).$$

En sommant sur les différents $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on en déduit le théorème 1.2.

Pour démontrer le corollaire 1.3, on peut se restreindre au domaine (1.8), le résultat étant une conséquence du corollaire 1 de [dlBB06] lorsque $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$ (voir la remarque qui suit le corollaire 1.3). Considérons la convolution

$$\begin{aligned} \Psi_F(\mathcal{K}.x, y) &= \sum_{m \leq (\log x)^B} \Psi_F^{(1)}\left(\mathcal{K}.\frac{x}{m}, y; 0, 0, 1\right) \\ &\quad + O\left(\#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : F(n_1, n_2) \in \Upsilon\left((\log x)^B\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Quitte à choisir B suffisamment grand, le terme de reste est $O(x^2(\log x)^{-1})$ d'après le lemme 6.1. Le corollaire s'obtient comme conséquence du théorème 1.2, puisque l'on a, d'après (8.11), la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{\rho\left(3u - \frac{\log m}{\log y}\right)}{m^2} &= \rho(3u) \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{1}{m^2} \left(1 + O\left(\frac{\log m \log(u+1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \rho(3u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right). \end{aligned}$$

Formes affines

Sommaire

1. La méthode du cercle de Hardy-Littlewood	129
2. La méthode nilpotente de Hardy-Littlewood (ou méthode de Green-Tao)	131
2.1. Description de la méthode de Green et Tao	134
2.2. Application aux entiers friables	141

Soient $d, t \geq 1$ des entiers, $F_1, \dots, F_t \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ des formes affines, primitives¹ et deux à deux distinctes et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et satisfaisant $F_i(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. On étudie dans ce chapitre le cardinal

$$\Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y) := \# \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d : P^+(F_1(\mathbf{n}) \cdots F_t(\mathbf{n})) \leq y \right\}.$$

De par la dualité entre entiers friables et entiers criblés mentionnée dans l'introduction de cette thèse, il est intéressant à plus d'un titre de considérer la quantité analogue

$$\pi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x) := \# \left\{ \mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d : F_1(\mathbf{n}), \dots, F_t(\mathbf{n}) \text{ sont premiers} \right\}.$$

L'approche que nous détaillons ici pour estimer $\Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y)$ consiste à étudier dans quelle mesure certaines méthodes récentes développées pour évaluer $\pi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x)$ peuvent s'adapter pour détecter la friabilité des valeurs des F_i .

Rappelons les minoration de la quantité

$$\alpha_F := \inf \left\{ \alpha : \Psi_F([1, x]^d, x^\alpha) \gg_{\alpha, F} x^d \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \right\}$$

citées dans l'introduction de cette thèse, dans le cas des polynômes de degré 1, à savoir :

- si $F(X) = X(qX + a)$, alors $\alpha_F = 0$ (Balog et Ruzsa [BR97]);
- si $F(X) = (X + 1) \cdots (X + t)$, alors $\alpha_F \leq \exp(-1/(t - 1))$ (Hildebrand [Hil89]);
- si $d = 2$ et $t \leq 3$, alors $\alpha_F = 0$ (Balog *et al* [BBDT12]);
- si $d = 2$ et $t \geq 4$, alors $\alpha_F \leq 1 - 2/t$ (Balog *et al* [BBDT12]).

Au cours de leurs travaux sur la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood, à savoir la formule

$$(0.1) \quad \pi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-t} \left(1 - \frac{\nu_p}{p^d}\right) \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^d}{(\log x)^t}$$

pour des formes affines F_1, \dots, F_t sans diviseur fixe, où ν_p désigne le nombre de solutions modulo p de $F_1 \cdots F_t(\mathbf{n}) \equiv 0 \pmod{p}$, Green et Tao introduisent dans [GT10b] la notion de complexité de Cauchy-Schwarz.

Définition. Soit $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_t) : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes affines deux à deux distinctes. On dit que \mathbf{F} est de **complexité de Cauchy-Schwarz au plus s** en i s'il existe une partition de l'ensemble $\{\vec{F}_j, j \neq i\}$ en $s + 1$ classes telles que \vec{F}_i ne soit pas

1. Rappelons qu'un élément de $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ est dit primitif si ses coefficients sont premiers entre eux.

dans le \mathbf{Q} -sous-espace vectoriel engendré par une de ces classes, \vec{F}_j désignant la partie linéaire de la forme affine F_j . On définit la **complexité de Cauchy-Schwarz** de \mathbf{F} , notée $C_{C-S}(\mathbf{F})$ par

$$C_{C-S}(\mathbf{F}) := \inf\{s : \mathbf{F} \text{ est de complexité de Cauchy-Schwarz au plus } s \text{ en } i \\ \text{pour tout } 1 \leq i \leq t\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Remarques. – Le système $(X_1, X_1+X_2, \dots, X_1+(k-1)X_2)$ associé aux progressions arithmétiques de longueur k est de complexité de Cauchy-Schwarz $k-2$ pour $k \geq 2$.
 – Le système $(X_1 + \sum_{i \in I} X_i)_{I \subset \{2, \dots, d\}}$ qui représente le cube de dimension $(d-1)$ est de complexité de Cauchy-Schwarz $d-2$.
 – Un raisonnement d’algèbre linéaire, détaillé dans le lemme 1.6 de [GT10b], permet d’obtenir l’inégalité $C_{C-S}(\mathbf{F}) \leq t - \text{rang}(\mathbf{F})$ pour tout système \mathbf{F} de complexité de Cauchy-Schwarz finie.

La difficulté de l’étude des systèmes $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_t)$ croît avec la complexité de Cauchy-Schwarz $C_{C-S}(\mathbf{F})$. Différentes approches – décrites ci-dessous – ont été développées en vue d’établir (0.1), permettant de prouver la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood pour les systèmes de complexité de Cauchy-Schwarz finie.

Si \mathbf{F} est un système de formes affines de complexité de Cauchy-Schwarz nulle, alors le \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par les parties linéaires des formes affines constituant \mathbf{F} est de dimension t . Un changement de variables réduit essentiellement le problème à l’étude des entiers friables (resp. premiers) dans les progressions arithmétiques (voir [dIVP97] et [FT91]). On peut ainsi montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et dans le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\right) \leq y \leq x,$$

on a les formules asymptotiques

$$\Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K}) x^d \rho(u)^t \left(1 + O_{\mathcal{K}, F} \left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

et

$$\pi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-t} \left(1 - \frac{\nu_p}{p^d}\right) \text{Vol}(\mathcal{K}) \frac{x^d}{(\log x)^t} \left(1 + O_{\mathcal{K}, F} \left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Considérons le cas extrême opposé, à savoir les systèmes de complexité de Cauchy-Schwarz infinie. Il existe alors deux formes affines, disons F_1 et F_2 , ainsi que des entiers a, b et c non nuls tels que $aF_1 = bF_2 + c$. Les travaux relatifs à la conjecture de Polignac et aux entiers friables translatés tombent notamment dans ce cadre.

Lorsque $C_{C-S}(\mathbf{F}) = 1$, le problème peut-être attaqué par la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Dans la première partie de ce chapitre, nous considérons à travers cette approche les systèmes $\mathbf{F} := (F_1, F_2, F_3)$ où $F_1, F_2, F_3 \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ sont des formes affines.

Il reste à considérer le cas $C_{C-S}(\mathbf{F}) \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Les travaux récents de Green, Tao et Ziegler [GT10b, GT12a, GTZ12] ont permis de prouver (0.1), tout en ouvrant une voie à l’étude des ordres moyens

$$(0.2) \quad M_h(\mathcal{K}.x; \mathbf{F}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} h(F_1(\mathbf{n})) \cdots h(F_t(\mathbf{n}))$$

pour des fonctions arithmétiques h générales (voir [Mat12a, Mat13, FH] ou *infra*). On étudiera $\Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y)$ en utilisant la méthode de Green-Tao dans la deuxième partie de ce chapitre.

1. La méthode du cercle de Hardy-Littlewood

La méthode du cercle de Hardy-Littlewood constitue un outil adéquat pour étudier les systèmes de complexité de Cauchy-Schwarz 1. On trouvera dans l'ouvrage [Vau97] une exposition détaillée de cette méthode contenant différents exemples d'utilisation. Le point de départ dans son application à l'étude du système $(X_1, X_2, X_1 + X_2)$ est la formule

$$(1.1) \quad M_h \left(\mathcal{K}_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)} \cdot x; X_1 X_2 (X_1 + X_2) \right) = \int_0^1 E(x, h; \vartheta)^2 E(x, h; -\vartheta) d\vartheta$$

où $\mathcal{K}_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)} := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2, x_1 + x_2 \leq 1\}$, $e(t) := \exp(2i\pi t)$ et

$$E(x, h; \vartheta) := \sum_{n \leq x} h(n) e(\vartheta n),$$

valide pour toute fonction arithmétique h .

Pour tout $q \geq 1$, $\varepsilon_q > 0$ et $1 \leq a \leq q$ un entier premier à q , définissons l'arc majeur $\mathfrak{M}(a, q, \varepsilon_q)$ comme l'ensemble des réels $\vartheta \in [0, 1]$ tels que $|\vartheta - \frac{a}{q}| \leq \varepsilon_q$. L'étape suivante consiste à découper l'intervalle $[0, 1]$ en une composante formée d'arcs majeurs $\mathfrak{M} = \bigcup_{a, q \leq Q} \mathfrak{M}(a, q, \varepsilon_q)$ et un arc mineur $\mathfrak{m} = [0, 1] \setminus \mathfrak{M}$, pour des choix de ε_q et $Q \geq 1$ convenables. En général, il convient de rechercher une formule asymptotique de $E(x, h; \vartheta)$ lorsque $\vartheta \in \mathfrak{M}$ en vue d'obtenir un terme principal, tandis que les arcs mineurs contribuent en tant que termes d'erreur. La précision du terme final obtenue dépend ainsi directement de la finesse des estimations de la somme d'exponentielles $E(x, h; \vartheta)$ utilisées.

Dans l'article [vdC39] (voir aussi [Cho44]), van der Corput emploie la méthode du cercle pour montrer l'existence d'une infinité de progressions arithmétiques de longueur 3 dans l'ensemble des nombres premiers. En 1982, Grosswald [Gro82] donne une version quantitative de ce résultat en montrant la formule

$$(1.2) \quad \pi_{F_{3\text{-PA}}(X_1, X_2)}(\mathcal{K}_{3\text{-PA}} \cdot x) = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \frac{x^2}{(\log x)^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right)$$

où

$$F_{3\text{-PA}}(X_1, X_2) = X_1(X_1 + X_2)(X_1 + 2X_2) \text{ et } \mathcal{K}_{3\text{-PA}} := \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 : \text{et } x_1 + 2x_2 \leq 1\}.$$

Considérons à présent le problème analogue sur les entiers friables à travers l'étude de $\Psi_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)} \cdot x, y)$. Ceci conduit à l'étude de la somme d'exponentielles

$$E(x, y; \vartheta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} e(\vartheta n).$$

Dans le domaine

$$(1.3) \quad x \geq 3, \quad \exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) \leq y \leq x,$$

La Bretèche [dlB98, dlB99] obtient l'estimation

$$E(x, y; \vartheta) = \rho(u) \left(E(x, x; \vartheta) + O\left(x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right).$$

Il peut en déduire alors la formule

$$(1.4) \quad \Psi_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)} \cdot x, y) = \frac{\Psi(x, y)^3}{2x} \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\rho(u) \log y}\right) \right).$$

En particulier, on observe que ce résultat fournit, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, un équivalent de $\Psi_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2 (X_1 + X_2)} \cdot x, y)$ dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x \log \log \log x}{\varepsilon \log \log x}\right) \leq y$.

Ces toutes dernières années, il y a eu plusieurs avancées spectaculaires sur ce sujet. Dans [dIBG14], La Bretèche et Granville précisent l'estimation de $E(x, y; \vartheta)$ en fonction de l'approximation rationnelle a/q de ϑ , selon que ϑ soit dans un arc majeur ou non. Ils en déduisent que la formule

$$(1.5) \quad \Psi_{X_1 X_2(X_1+X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2(X_1+X_2)}.x, y) = \frac{\Psi(x, y)^3}{2x} \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

a lieu uniformément dans le domaine (1.3).

En vue d'obtenir un analogue de (1.5) dans un domaine plus large, Lagarias et Soundararajan supposent l'hypothèse de Riemann généralisée et étudient dans [LS12] la quantité

$$(1.6) \quad \sum_{P^+(n_1 n_2 (n_1+n_2)) \leq y} \Phi\left(\frac{n_1}{x}\right) \Phi\left(\frac{n_2}{x}\right) \Phi\left(\frac{n_1+n_2}{x}\right).$$

où Φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact inclus dans $]0, +\infty[$. L'hypothèse de Riemann généralisée et le caractère régulier de Φ leur permettent d'établir, au moyen de la méthode du col, des formules précises de la somme d'exponentielles $E(x; \Phi_{x,y}; \vartheta)$ où

$$\Phi_{x,y}(n) = \begin{cases} \Phi(n/x) & \text{si } P^+(n) \leq y, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

valides dans le domaine $(\log x)^{8+\varepsilon} \leq y$. En approchant $1_{]0,1]}$ par des approximations lisses Φ vérifiant les hypothèses précédentes, ils obtiennent comme conséquence de leurs travaux et uniformément dans le domaine

$$2 \leq (\log x)^{8+\varepsilon} \leq y \leq \exp\left((\log x)^{1/2-\varepsilon}\right),$$

la borne inférieure suivante

$$(1.7) \quad \Psi_{X_1 X_2(X_1+X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2(X_1+X_2)}.x, y) \geq \mathfrak{S}_0(\alpha, y) \mathfrak{S}_1(\alpha) \frac{\Psi(x, y)^3}{x} (1 + o_\varepsilon(1))$$

où $\alpha = \alpha(x, y)$ désigne l'unique solution réelle de l'équation

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x,$$

$$\mathfrak{S}_0(\alpha, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{(p - p^\alpha)^3}{p(p-1)^2(p^{3\alpha-1} - 1)}\right) \prod_{p > y} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

et

$$\mathfrak{S}_1(\alpha) := \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \alpha^3 (t_1 t_2 (t_1 + t_2))^{\alpha-1} dt_2 dt_1.$$

Drappeau [Dra13b] améliore l'estimation de $E(x; \Phi_{x,y}; \vartheta)$ de Lagarias et Soundararajan en affinant entre autres le contour utilisé dans la méthode du col. Il parvient à couvrir également le domaine $(\log x)^{1/3-\varepsilon} \leq u \leq (\log x)^{1/2+\varepsilon}$ qui se situait hors du champ d'application de [dIBG14] et [LS12]. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée et uniformément dans le domaine

$$2 \leq (\log x)^{8+\varepsilon} \leq y \leq x,$$

il démontre en particulier la formule

$$(1.8) \quad \Psi_{X_1 X_2(X_1+X_2)}(\mathcal{K}_{X_1 X_2(X_1+X_2)}.x, y) = \mathfrak{S}_0(\alpha, y) \mathfrak{S}_1(\alpha) \frac{\Psi(x, y)^3}{x} (1 + o_\varepsilon(1)).$$

Une telle formule reste cohérente avec (1.5) compte tenu de la relation (voir [Dra13b])

$$\mathfrak{S}_0(\alpha, y) \mathfrak{S}_1(\alpha) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right).$$

Dans [Dra14], Drappeau montre également que (1.5) est vraie dans le domaine

$$\exp\left(c(\log x)^{1/2} \log_2 x\right) \leq y \leq x$$

pour une certaine constante $c > 0$, sans utiliser l'hypothèse de Riemann généralisée.

Très récemment, Harper [Har], en combinant ses estimations sur les arcs mineurs à celles de Drappeau sur les arcs majeurs, parvient à établir la formule asymptotique (1.8) dans le domaine

$$(\log x)^c \leq y \leq x$$

où $c > 0$ est une constante suffisamment grande.

2. La méthode nilpotente de Hardy-Littlewood (ou méthode de Green-Tao)

Dans ses travaux sur le théorème de Szemerédi², Gowers [Gow98, Gow01] observe que l'étude de la corrélation d'une fonction arithmétique h avec des phases linéaires, à travers la quantité

$$\sum_{n \leq x} h(n) e(\alpha n)$$

où $\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, n'est en général pas suffisante pour obtenir des estimations convenables de l'ordre moyen $M_h(\mathcal{K}.x; \mathbf{F})$ dans le cas des systèmes de formes affines $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_t)$ de complexité de Cauchy-Schwarz finie $s \geq 2$. Afin de pallier l'échec de la méthode du cercle pour aborder de tels problèmes, Gowers introduit la notion de normes de Gowers. Celles-ci lui permettent de contrôler les systèmes $(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + (k-1)X_2)$ associés aux k -progressions arithmétiques, lorsque $k \geq 4$.

Définition 2.1 (Norme U^s de Gowers). *Soient $s \geq 0$ un entier et G un groupe fini abélien. Pour toute fonction $h : G \rightarrow \mathbf{C}$, on définit la **norme $U^s(G)$ de Gowers** de h par*

$$\|h\|_{U^s(G)}^{2^s} := \frac{1}{|G|^{s+1}} \sum_{x \in G, \mathbf{y} \in G^s} \prod_{\omega \in \{0,1\}^s} \mathcal{C}^{|\omega|} h(x + \omega.\mathbf{y})$$

où $\omega.\mathbf{y} = \omega_1 y_1 + \dots + \omega_s y_s$ et $\mathcal{C}^{|\omega|}$ est l'opérateur de conjugaison

$$\mathcal{C}^{|\omega|} h = \begin{cases} h & \text{si } |\omega| := \omega_1 + \dots + \omega_s \text{ est pair,} \\ \bar{h} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz des informations non triviales sur les normes de Gowers (voir le chapitre 3 de [Gow01] et le paragraphe 1 de [GT08a]). En particulier, pour $s \geq 2$, $\|\cdot\|_{U^s(G)}$ est effectivement une norme tandis que $\|\cdot\|_{U^1(G)}$ est une semi-norme. De plus, on a les relations de récurrence

$$(2.1) \quad \|h\|_{U^s(G)} = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \left\| (T^y h) \bar{h} \right\|_{U^{s-1}(G)}^{2^{s-1}} \right)^{1/2^s} \quad \text{et} \quad \|h\|_{U^{s-1}(G)} \leq \|h\|_{U^s(G)}$$

où

$$T^y h : G \longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto h(x+y) .$$

Remarquons enfin l'invariance des normes de Gowers sous l'action de l'opérateur T^y : pour tout $y \in G$ et $s \geq 0$, on a

$$(2.2) \quad \|h\|_{U^s(G)} = \|T^y h\|_{U^s(G)} .$$

2. Le théorème de Szemerédi [Sze75] énonce l'existence d'une infinité de k -progressions arithmétiques dans tout ensemble d'entiers de densité asymptotique non nulle.

Définition 2.2. Soient G un groupe abélien fini et $s \geq 0$. On dit qu'une fonction $\phi : G \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est **polynomiale d'ordre au plus s** si on a, pour tout $x, y_1, \dots, y_{s+1} \in G$,

$$(\partial_{y_1}(\dots \partial_{y_{s+1}} \phi))(x) = 0$$

où l'opérateur $\partial_y := T^y - \text{Id}$ est défini par la formule $(\partial_y \phi)(x) = \phi(x + y) - \phi(x)$.

Une conséquence directe des remarques précédentes est l'invariance de la norme $U^s(G)$ sous l'action des phases polynomiales d'ordre au plus $s - 1$: pour toute phase polynomiale ϕ d'ordre au plus $s - 1$ et toute fonction $f : G \rightarrow \mathbf{C}$, on a

$$(2.3) \quad \|e(\phi)f\|_{U^s(G)} = \|f\|_{U^s(G)}.$$

Cette propriété laisse augurer que la norme $U^{s+1}(G)$ constitue le bon outil pour étudier les systèmes de complexité de Cauchy-Schwarz s . C'est l'objet du théorème de von Neumann généralisé, établi dans le cas des progressions arithmétiques par Gowers [[Gow01], Theorem 3.2] dont la généralisation à des systèmes quelconques est due à Green et Tao. Afin d'énoncer ce résultat, étendons la définition des normes de Gowers à $[1, x]$ par la formule

$$(2.4) \quad \|h\|_{U^s[x]} := \frac{\|\tilde{h}\|_{U^s(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})}}{\|1_{[1,x]}\|_{U^s(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})}}$$

où $N \geq 2^{s+1}x$ est un entier et $\tilde{h}(n) := h(n)$ si $n \in [1, x] \cap \mathbf{Z}$ et 0 sinon – une telle quantité étant indépendante de N .

Théorème 2.3 ([GT10b], Proposition 7.1). Soient $d, t, s \geq 1$ des entiers, $\mathbf{F} : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes affines de complexité de Cauchy-Schwarz finie s et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $\mathbf{F}(\mathcal{K}) \subset [0, 1]^t$. Si $x \geq 1$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ sont des réels et $h_1, \dots, h_t : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ sont des fonctions bornées par 1 telles que

$$\min_{1 \leq i \leq t} \|h_i\|_{U^{s+1}[x]} \leq \varepsilon,$$

alors

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) \right| = o_\varepsilon(x^d) + \kappa(\varepsilon)x^d$$

où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \kappa(\varepsilon) = 0$.

Au vu de la définition 2.1 des normes de Gowers, le théorème précédent (de Von Neumann généralisé) réduit le problème à étudier les systèmes de la forme $\mathbf{F} = (F_\omega)_{\omega \in \{0,1\}^{s+1}}$ où $F_\omega(X_0, X_1, \dots, X_{s+1}) = X_0 + \sum \omega_i X_i$ et il n'est pas évident *a priori* de voir la simplification qui en résulte. Green, Tao et Ziegler ont établi une caractérisation de la norme de Gowers à l'aide des nilvariétés, en exhibant un lien entre la taille de $\|h\|_{U^{s+1}[x]}$ et la corrélation de h avec des nilsuites polynomiales, objets qui seront introduits dans le paragraphe 2.1.2.

Théorème 2.4 ([GTZ12], Theorem 1.3). Soient $s \geq 0$ un entier et $\delta \in]0, 1[$. Il existe une nilvariété G/Γ équipée d'une métrique riemannienne lisse $d_{G/\Gamma}$ et des constantes $C(s, \delta), c(s, \delta) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $x \geq 1$ et $h : [0, x] \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction bornée par 1 telle que

$$\|h\|_{U^{s+1}[x]} \geq \delta,$$

alors il existe une fonction $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et de constante de Lipschitz au plus $C(s, \delta)$ ainsi que des éléments $g, a \in G/\Gamma$ tels que l'on ait

$$\left| \sum_{0 \leq n \leq x} h(n) F(g^n a \Gamma) \right| \geq c(s, \delta)x.$$

Aboutissement d'un travail qui a fait l'objet de plusieurs articles [GT08a, GT12b, GTZ11, GTZ12, GT14], ce résultat résout la conjecture inverse de la norme de Gowers (GI(s)) dans le cas $s \geq 2$, formulée dans [GT10b]. En construisant une mesure pseudo-aléatoire sur les nombres premiers et en appliquant le principe de transfert, Green et Tao développent dans [GT10b] une méthode – dite méthode nilpotente de Hardy-Littlewood – pour aborder la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood. En particulier, celle-ci leur permet de montrer la formule (0.1) en supposant vraie la conjecture (GI(s)) et la conjecture (MN(s)) qui assure que, pour tout $A > 0$, toute nilvariété G/Γ , toute fonction lipschitzienne $F : G/\Gamma \rightarrow [-1, 1]$ et uniformément en $g, a \in G/\Gamma$ et $x \geq 2$, on a

$$(2.5) \quad \sum_{n \leq x} \mu(n) F(g^n a) \ll_{G/\Gamma, A} (1 + \|F\|_{\text{Lip}}) \frac{x}{(\log x)^A}.$$

La démonstration de (2.5) dans [GT12a] et la résolution de (GI(s)) achèvent ainsi l'étude de la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood pour les systèmes de complexité de Cauchy-Schwarz finie.

Le développement de la méthode de Green-Tao laisse entrevoir la possibilité d'obtenir une estimation asymptotique de l'ordre moyen $M_h(\mathcal{K}.x; \mathbf{F})$ défini par (0.2) lorsque $C_{\mathcal{C}\text{-S}}(\mathbf{F}) < +\infty$. Plusieurs résultats ont été obtenus dans cette direction :

- dans le cas où h désigne la fonction de Möbius μ ou la fonction de Liouville λ , Green et Tao établissent dans [GT10b] l'estimation

$$M_h(\mathcal{K}.x; \mathbf{F}) = o(x^d);$$

- la corrélation de la fonction diviseur τ avec les formes linéaires est étudiée par Matthiesen dans [Mat12a] qui établit l'existence d'une constante $C_{\mathbf{F}} > 0$ telle que

$$M_\tau(\mathcal{K}.x; \mathbf{F}) = C_{\mathbf{F}} \text{Vol}(\mathcal{K}) x^d (\log x)^t + o\left(x^d (\log x)^t\right);$$

- en considérant $h = r_G$ le nombre de représentation d'un entier par une forme quadratique G primitive et irréductible, Matthiesen [Mat12b, Mat13] montre la formule

$$M_{r_G}(\mathcal{K}.x; \mathbf{F}) = C_{\mathbf{F}}(G) \text{Vol}(\mathcal{K}) x^d + o\left(x^d\right);$$

pour une constante $C_{\mathbf{F}}(G) > 0$;

- si $F_1, \dots, F_t \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ sont des formes linéaires, primitives et deux à deux distinctes et G est une forme quadratique équivalente à

$$G_d(n_1, n_2) := \begin{cases} n_1^2 + n_1 n_2 + \frac{d-1}{4} n_2^2 & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ n_1^2 - d n_2^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d \in \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}$, alors Frantzikinakis et Host [FH] obtiennent la formule

$$\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(G(n_1, n_2)^r F_1(n_1, n_2) \cdots F_t(n_1, n_2)) = o\left(x^2\right)$$

pour tout entier $r \geq 1$ et toute fonction h multiplicative de module au plus 1 satisfaisant $\sum_{n \leq x} h(a + qn) = o(x)$ pour tous entiers a et q .

Le résultat principal que nous obtenons dans ce chapitre est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Soient $d, t \geq 1$ et $s \geq 0$ des entiers et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour tout $u_0 \geq 1$, tout système $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_t) : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ de formes affines de complexité de Cauchy-Schwarz finie s satisfaisant $\mathbf{F}(\mathcal{K}) \subset [0, 1]^t$ et uniformément en $x \geq y \geq x^{1/u_0}$, on a*

$$(2.6) \quad \Psi_{F_1 \dots F_t}(\mathcal{K}.x, y) = \text{Vol}(\mathcal{K}) x^d \rho(u)^t + o\left(x^d\right)$$

où la fonction impliquée dans le terme d'erreur ne dépend que de u_0 , de \mathcal{K} et des coefficients non constants de \mathbf{F} .

Il convient de souligner le manque d'effectivité du théorème 2.5, essentiellement dû à la non effectivité du théorème inverse de la norme de Gowers.

Nous nous sommes restreints ici au cas où le paramètre $u := \frac{\log x}{\log y}$ est borné. On sait en effet que, pour u borné, l'ensemble des entiers friables est de densité positive, ce qui permet d'utiliser les normes de Gowers sans avoir recours au principe de transfert (voir les paragraphes 6 et 10 de [GT10b]), ce qui était nécessaire pour les nombres premiers.

La démonstration du théorème 2.5 constitue la suite de ce chapitre. Le paragraphe 2.1 rappelle les arguments détaillés par Green et Tao [GT10b] permettant de réduire le problème à l'estimation d'une norme de Gowers. Finalement, on adapte dans le paragraphe 2.2 des arguments de Green et Tao [GT12a] et de Matthiesen [Mat12a] pour établir la non-corrélation des nilsuites avec l'indicatrice des entiers friables.

2.1. Description de la méthode de Green et Tao. On décrit dans cette partie la méthode de Green et Tao. Dans l'optique de rendre l'exposé autonome à l'exception du théorème inverse de la norme de Gowers, on redonne en particulier la démonstration de certains résultats de [GT10b].

2.1.1. *Théorème de von Neumann généralisée.* La démonstration du théorème 2.3 repose principalement sur le résultat suivant qui illustre, par des applications multiples de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'importance des normes de Gowers dans l'étude des corrélations linéaires d'un groupe cyclique.

Théorème 2.6 (Théorème de von Neumann généralisé). *Soit $\mathbf{F} : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes affines de complexité de Cauchy-Schwarz finie $s \geq 0$. Pour tout premier p suffisamment grand en fonction des coefficients non-constants de \mathbf{F} et toutes fonctions $h_1, \dots, h_t : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ bornées par 1, on a*

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) \right| \leq p^d \min_{i=1, \dots, t} \|h_i\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}.$$

DÉMONSTRATION. Au vu de la définition 2.1, on peut supposer que F_1, \dots, F_t sont des formes linéaires. Quitte à changer l'indexation, on fait l'hypothèse supplémentaire que $\min_{i=1, \dots, t} \|h_i\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} = \|h_1\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}$. Puisque \mathbf{F} est de complexité de Cauchy-Schwarz au plus s en 1, on note l'existence de vecteurs $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{s+1}$ de \mathbf{Z}^d qui satisfont $F_1(\mathbf{f}_j) \neq 0$ et $G(\mathbf{f}_j) = 0$ pour tout $G \in A_j$ où $\bigcup_{j=1}^{s+1} A_j$ désigne la partition introduite dans la définition de la complexité de Cauchy-Schwarz. On écrit alors

$$\sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) = \frac{1}{p^{s+1}} \sum_{(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \prod_{i=1}^t h_i \left(\sum_{j=1}^{s+1} m_j F_i(\mathbf{f}_j) + F_i(\mathbf{n}) \right).$$

En observant que $F_i \in A_j$ implique $F_i(\mathbf{f}_j) = 0$, il s'ensuit que, pour tout $i \in \{2, \dots, t\}$, la forme $\left(\sum_{j=1}^{s+1} X_j F_i(\mathbf{f}_j) + F_i(\mathbf{n}) \right)$ ne dépend pas de toutes les variables X_j . Par suite, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^d$ et $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^{s+1}$, on peut écrire

$$\prod_{i=1}^t h_i \left(\sum_{j=1}^{s+1} m_j F_i(\mathbf{f}_j) + F_i(\mathbf{n}) \right) = h_1 \left(\sum_{j=1}^{s+1} m_j F_1(\mathbf{f}_j) + F_1(\mathbf{n}) \right) \prod_{j=1}^{s+1} g_{j, \mathbf{n}}(\mathbf{m})$$

où $g_{j,n} : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1} \rightarrow \mathbf{C}$ est bornée par 1 et indépendante de m_j . Il suffit alors d'établir que

$$(2.7) \quad \left| \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1}} h_1(m_1 + \dots + m_{s+1}) \prod_{j=1}^{s+1} g_j(\mathbf{m}) \right| \leq p^{s+1} \|h_1\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}$$

pour toutes fonctions $g_j : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1} \rightarrow \mathbf{C}$ bornées par 1 et indépendantes de m_j où $j \in \{1, \dots, s+1\}$. Sous l'hypothèse que p ne divise pas $F_1(\mathbf{f}_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, s+1\}$ et compte tenu de la relation (2.2), on pourra en effet en déduire que

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \left| \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1}} h_1 \left(\sum_{j=1}^{s+1} m_j F_1(\mathbf{f}_j) + F_1(\mathbf{n}) \right) \prod_{j=1}^{s+1} g_{j,n}(\mathbf{m}) \right| \\ & \leq p^{s+1} \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \left\| T^{F_1(\mathbf{n})} h_1 \right\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \\ & \leq p^{d+s+1} \|h_1\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat.

On montre (2.7) par récurrence sur s , l'initialisation $s = 0$ étant triviale. Supposons donc $s \geq 1$ et le résultat vrai jusqu'au rang $s - 1$. L'inégalité triangulaire, la borne sur g_1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1}} h_1(m_1 + \dots + m_{s+1}) \prod_{j=1}^{s+1} g_j(\mathbf{m}) \right| \\ & \leq \sum_{(m_2, \dots, m_{s+1}) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^s} \left| \sum_{m_1 \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} h_1(m_1 + \dots + m_{s+1}) \prod_{j=2}^{s+1} g_j(\mathbf{m}) \right| \\ & \leq p^{\frac{s}{2}} \left(\sum_{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1}} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \left((T^l h_1) \overline{h_1} \right) (m_1 + \dots + m_{s+1}) \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{j=2}^{s+1} g_j(m_1 + l, \dots, m_{s+1}) \overline{g_j}(m_1, \dots, m_{s+1}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il suit alors de l'hypothèse de récurrence, de (2.2), de l'inégalité de Hölder (ou d'une application multiple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et de (2.1) que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{s+1}} h_1(m_1 + \dots + m_{s+1}) \prod_{j=1}^{s+1} g_j(\mathbf{m}) \right| \\ & \leq p^{\frac{s}{2}} \left(p^s \sum_{m_1, l \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \left\| T^{m_1} \left((T^l h_1) \overline{h_1} \right) \right\|_{U^s(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \right)^{1/2} \\ & \leq p^{s+\frac{1}{2}} \left(\sum_{l \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \left\| (T^l h_1) \overline{h_1} \right\|_{U^s(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq p^{s+1-\frac{1}{2^{s+1}}} \left(\sum_{l \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \left\| (T^l h_1) \overline{h_1} \right\|_{U^s(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}^{2^s} \right)^{\frac{1}{2^{s+1}}} \\ & = p^{s+1} \|h_1\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}. \end{aligned}$$

□

De manière générale, la difficulté de l'étude de $\|h\|_{U^s(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}$ croit avec s . On verra dans la suite que le théorème inverse de la norme U^{s+1} de Gowers est effectif pour $s \in \{0, 1, 2\}$ mais ne l'est plus pour $s \geq 3$. Il apparaît donc intéressant d'étudier l'existence ou non de systèmes de formes affines de complexité de Cauchy-Schwarz s dont le comportement puisse être contrôlé par la norme $U^s(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, c'est-à-dire pour lesquels la norme U^s de Gowers intervient dans l'estimation de la somme

$$\sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} h(F_1(\mathbf{n})) \cdots h(F_t(\mathbf{n})).$$

Ceci justifie la définition suivante de la vraie complexité.

Définition 2.7 ([GW10], Definition 2.4). *Soit $\mathbf{F} : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes affines deux à deux linéairement indépendantes. On définit la **vraie complexité** de \mathbf{F} comme le plus petit entier $s \geq 0$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_s(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout groupe abélien G fini et pour toute fonction $h : G \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et satisfaisant $\|h\|_{U^{s+1}(G)} \leq \delta_s(\varepsilon)$, on ait*

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in G^d} h(F_1(\mathbf{n})) \cdots h(F_t(\mathbf{n})) \right| \leq \varepsilon |G|^d.$$

La caractérisation de la vraie complexité de \mathbf{F} a fait l'objet de différents travaux. Dans [GW11], Gowers et Wolf formulent la conjecture suivante.

Conjecture 2.8. *Soit $\mathbf{F} : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{Z}^t$ un système de formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes. La vraie complexité de \mathbf{F} est le plus petit entier $s \geq 0$ tel que le système $\mathbf{F}^{s+1} := (F_1^{s+1}, \dots, F_d^{s+1})$ soit de rang d .*

En restreignant la définition de la vraie complexité aux groupes cycliques de la forme $G = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, cette conjecture a été démontrée pour $s = 1$ dans [GW11] où une dépendance effective entre ε et $\delta_s(\varepsilon)$ est explicitée. Le cas $s \geq 2$ a été prouvé par Green et Tao dans [GT10a] par des méthodes différentes de celles employées par Gowers et Wolf et sans préciser de lien entre ε et $\delta_s(\varepsilon)$. Notons que les deux notions de complexité précédemment définies ne coïncident pas : la vraie complexité est strictement plus fine que la complexité de Cauchy-Schwarz. On peut ainsi montrer que les systèmes $(x, y, z, x + y + z, x + 2y - z, x + 2z - y)$, $(x, x + y, x + z, x + y + z, x + y - z, x + z - y)$ ou $(x, x + a, x + b, x + c, x + a + b, x + a + c, x + b + c)$ sont de complexité de Cauchy-Schwarz 2 et de vraie complexité 1 (voir [GW10]).

Dans la fin de ce paragraphe, nous reprenons en détail les arguments de Green et Tao [GT10b] qui conduisent à la démonstration du théorème 2.3.

PREUVE DU THÉORÈME 2.3. La démonstration du théorème 2.6 repose en partie sur des propriétés spécifiques à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Il convient à présent de transférer le problème initial dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, en reproduisant l'argument développé dans l'appendice C de [GT10b].

Soient $\varepsilon \in]x^{-1}, 1[$ un paramètre suffisamment petit et $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}$ une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- le support de $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}$ est inclus dans $\mathcal{K}.x$,
- $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}(\mathbf{x}) = 1$ dès que $\inf \{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}.x\} > \varepsilon x$ où d_2 désigne la distance euclidienne de \mathbf{R}^d .
- $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}$ est $O(1/(\varepsilon x))$ -lipschitzienne.

En remplaçant $1_{\mathcal{K}.x}$ par son approximation régulière $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}$ (voir la construction de l'annexe B) et dans la mesure où les h_i sont bornés par 1, on obtient la formule

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^d} \chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) + O(\varepsilon x^d).$$

Soit $p \in [2^{s+1}x, 2^{s+2}x]$ un nombre premier satisfaisant les hypothèses du théorème 2.6, son existence étant assurée par le théorème de Tchebychev. Compte tenu des hypothèses $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ et $\mathbf{F}(\mathcal{K}) \subset [0, 1]^t$, le plongement $\begin{array}{ccc} [0, x] \cap \mathbf{Z} & \rightarrow & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \\ n & \mapsto & n \pmod{p} \end{array}$ permet d'écrire

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^d} \chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) = \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon, p)}(\mathbf{n}) \prod_{i=1}^t h_i^{(p)}(F_i(\mathbf{n}))$$

où l'on a posé $\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon, p)}(n \pmod{p}) = \chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}(n)$ pour tout entier $n \in \{0, \dots, p\}$, mais aussi $h_i^{(p)}(n \pmod{p}) = h_i(n)$ si $1 \leq n \leq x$ et 0 sinon. L'injection $\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} & \rightarrow & \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \frac{1}{4} + \frac{n}{p} \end{array}$ nous amène à considérer la fonction

$$\chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon, \mathbf{R}/\mathbf{Z})} : \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d & \rightarrow & [0, 1] \\ \mathbf{x} \in [0, 1]^d & \mapsto & \chi_{\mathcal{K}.x}^{(\varepsilon)}\left(p\mathbf{x} - \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)\right) \end{array}$$

qui est $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ -lipschitzienne pour la métrique $\|\mathbf{x}\|_{(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d} := \sup_i \|x_i\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$. En utilisant son approximation de Fourier (voir par exemple le lemme A.9 de [GT08b]), il s'ensuit que, pour tout $X \geq 1$, il existe $J = O(X^d)$, des coefficients $c_1, \dots, c_J = O(1)$ et des phases $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_J \in \mathbf{Z}^d$ tels que, uniformément en $\mathbf{x} \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, on ait

$$\chi_{\varepsilon, \mathcal{K}.x}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J c_j e(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{x}) + O\left(\frac{\log X}{\varepsilon X}\right).$$

Par suite, il vient la formule (2.8)

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) = \sum_{j=1}^J c_j \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} e\left(\frac{\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n}}{p}\right) \prod_{i=1}^t h_i^{(p)}(F_i(\mathbf{n})) + O\left(\frac{x^d \log X}{\varepsilon X} + \varepsilon x^d\right).$$

Lorsque la forme linéaire $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n}$ n'appartient pas au sous-espace engendré par les parties linéaires des F_i , on peut observer après un changement de variables adéquat que la somme intérieure du membre de droite de (2.8) est nulle, grâce à la propriété d'orthogonalité des caractères additifs. Autrement, on peut écrire $\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n}$ sous la forme $\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^t m_{i,j}(F_i(\mathbf{n}) - F_i(0))$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où $m_{i,j} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On obtient ainsi, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la formule

$$\sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} e\left(\frac{\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n}}{p}\right) \prod_{i=1}^t h_i^{(p)}(F_i(\mathbf{n})) = \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \prod_{i=1}^t h_{i,j}^{(p)}(F_i(\mathbf{n}))$$

où $h_{i,j}^{(p)}(n) = e\left(\frac{m_{i,j}(n - F_i(0))}{p}\right) h_i^{(p)}(n)$.

Une utilisation successive du théorème 2.6 et de la formule d'invariance (2.3) pour les phases linéaires – sous l'hypothèse $s \geq 1$ – entraînent

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d} \prod_{i=1}^t h_{i,j}^{(p)}(F_i(\mathbf{n})) \right| \leq p^d \min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})},$$

d'où découle l'estimation

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x} \prod_{i=1}^t h_i^{(p)}(F_i(\mathbf{n})) \right| \ll x^d X^d \min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} + \frac{x^d \log X}{\varepsilon X} + \varepsilon x^d.$$

En choisissant

$$X = \min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}^{-2/(2d+1)} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \max\left(\frac{1}{x}, \min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}^{1/(2d+1)}\right),$$

on obtient finalement

$$\left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x} \prod_{i=1}^t h_i(F_i(\mathbf{n})) \right| \ll x^d + x^{d-1} \left(\min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \right)^{1/(2d+1)} \times \left| \log \min_{i=1, \dots, t} \|h_i^{(p)}\|_{U^{s+1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} \right|$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.3 compte tenu de la définition (2.4). \square

2.1.2. *Problème inverse de la norme de Gowers.* On introduit dans ce paragraphe les notions de nilvariété et de nilsuite polynomiale en suivant essentiellement l'exposition de [GT12b] tout en gardant en ligne de mire l'énoncé du théorème inverse pour la norme de Gowers.

Définition 2.9 (Nilvariétés). *Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe et $s \geq 1$. On dit que G est un groupe de Lie **nilpotent d'ordre s** s'il existe une filtration de degré s , c'est-à-dire une suite décroissante $G_{\mathbf{N}} := (G_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes connexes fermés*

$$G = G_0 = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_s \supseteq G_{s+1} = \{\text{Id}_G\}$$

satisfaisant l'inclusion $[G_i, G_j] \subseteq G_{i+j}$ pour tous entiers $i, j \geq 0$, où $[G_i, G_j]$ désigne le sous-groupe engendré par les commutateurs issus de G_i et G_j , c.-à-d. engendré par l'ensemble $\{g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} : g_i \in G_i, g_j \in G_j\}$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G tel que le sous-groupe $\Gamma_i := \Gamma \cap G_i$ soit un sous-groupe cocompact de G_i pour tout $i \in \mathbf{N}$. On dit que $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une **nilvariété filtrée d'ordre s** . On note $\lambda_{G/\Gamma}$ l'unique mesure de Haar normalisée sur le groupe compact G/Γ .

Exemples. – Un groupe de Lie G est nilpotent d'ordre s si et seulement si la suite centrale descendante définie par $G_0 = G_1 = G$ et $G_{i+1} = [G, G_i]$ pour $i \geq 1$ définit une filtration de degré s .

– *Le tore.* Un groupe de Lie G nilpotent est commutatif si et seulement s'il est d'ordre 1. Les nilvariétés G/Γ de dimension m construites à partir de G sont isomorphes au tore $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$.

– *La nilvariété d'Heisenberg.* Il s'agit de la nilvariété d'ordre 2 et de dimension 3 définie en prenant $G = H_3(\mathbf{R}) := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ 0 & 1 & \mathbf{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Gamma = H_3(\mathbf{Z}) := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'hypothèse de connexité simple faite sur G assure que, si \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie associée à G , alors l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme. L'utilisation de ce dernier, combiné à la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, permet notamment l'introduction d'un système de coordonnées pour caractériser les éléments de G , via l'utilisation des bases de Mal'cev.

Définition 2.10 (Bases de Mal'cev). *Soient $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s et $\mathcal{X} := \{X_1, \dots, X_m\}$ une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . On dit que \mathcal{X} est une **base de Mal'cev** de G/Γ adaptée à la filtration $G_{\mathbf{N}}$ si elle satisfait les conditions suivantes :*

- Pour tout $j \in \{0, \dots, m\}$, $\mathfrak{h}_j := \text{Vect}(X_{j+1}, \dots, X_m)$ est un idéal de Lie de \mathfrak{g} .
- Pour tout $i \in \{0, \dots, s+1\}$, on a $G_i = \exp(\mathfrak{h}_{m-m_i})$ où $m_i := \dim G_i$.
- Pour tout $g \in G$, il existe un unique m -uplet $\psi_{\mathcal{X}}(g) := (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{R}^m$ tel que $g = \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m)$.
- $\Gamma = \{g \in G : \psi_{\mathcal{X}}(g) \in \mathbf{Z}^m\}$.

Le m -uplet $\psi_{\mathcal{X}}(g)$ est appelé le **système de coordonnées de Mal'cev** de g .

Comme souligné dans la remarque consécutive à la définition 2.1 de [GT12b], pour toute nilvariété filtrée $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$, il existe une base de Mal'cev de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$.

Exemple. La nilvariété d'Heisenberg. L'application exponentielle est définie par

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ définit une base de Mal'cev qui induit le système de coordonnées

$$\psi_{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y, z - xy).$$

La notion de suite polynomiale adaptée à une filtration est un objet central dans l'étude des nilvariétés.

Définition 2.11 (Suite polynomiale). Soit $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s . On dit qu'une suite $g : \mathbf{Z} \rightarrow G$ est une **suite polynomiale** adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ (de degré s) si, pour tout $i \leq s+1$ et pour tout $y_1, \dots, y_i \in \mathbf{Z}$, on a $(\partial_{y_1} \cdots \partial_{y_i} g)(n) \in G_i$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, où $(\partial_y g)(n) = g(n+y)g(n)^{-1}$. On note $\text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ l'ensemble des suites polynomiales adaptées à $G_{\mathbf{N}}$.

La proposition suivante montre que les coordonnées d'une suite polynomiale dans une base de Mal'cev sont effectivement des éléments de $\mathbf{R}[X]$ de degré au plus s . Il s'en déduit une définition des suites polynomiales relevant d'un degré d'abstraction moindre.

Proposition 2.12 ([GT12b], Lemma 6.7). Soient $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s et \mathcal{X} une base de Mal'cev adaptée à $G_{\mathbf{N}}$. Alors $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ si et seulement si les coordonnées de Mal'cev de $g(n)$ sont de la forme

$$\psi_{\mathcal{X}}(g(n)) = \sum_j \mathbf{t}_j \binom{n}{j},$$

où $\mathbf{t}_j \in \mathbf{R}^m$ satisfait $(\mathbf{t}_j)_i = 0$ si $i \leq m - m_j$ avec $m_j := \dim G_j$.

Comme corollaire du résultat précédent, Green et Tao obtiennent une autre caractérisation des suites polynomiales, à savoir la formule (6.4) de [GT12b] rappelée dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire 2.13. Soit $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s . Alors $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ si et seulement s'il existe un entier $k \geq 1$, des polynômes $P_1[X], \dots, P_k[X] \in \mathbf{Z}[X]$ et $a_1, \dots, a_k \in G$ tels que

$$(2.9) \quad g(n) = a_1^{P_1(n)} \cdots a_k^{P_k(n)}$$

pour tout entier n .

Exemples.

Les suites affines Soient $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s . Les suites affines, c.-à-d. les suites de la forme $g(n) = g^n a$ avec $a, g \in G$, sont des suites polynomiales de degré au plus s .

Le tore. Les suites polynomiales adaptées à $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ muni de la suite centrale descendante sont exactement les suites affines. On a en particulier $g(n) \equiv an + b \pmod{\mathbf{Z}^m}$.

La nilvariété d'Heisenberg. Soit g un élément de G tel que $\psi_{\mathcal{X}}(g) = (x, y, z)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\psi_{\mathcal{X}}(g^n) = (nx, ny, nz + \frac{1}{2}n(n+1)xy)$.

Les bases de Mal'cev permettent également de munir G/Γ d'une métrique riemannienne lisse et de donner ainsi un cadre rigoureux à la notion de fonctions lipschitziennes sur les nilvariétés.

Définition 2.14 ([GT12b], Lemma A.15). *Soient $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s et \mathcal{X} une base de Mal'cev de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$.*

On définit sur G la distance $d_{\mathcal{X}}$ comme la plus grande distance satisfaisant, pour tous $x, y \in G$, $d_{\mathcal{X}}(x, y) \leq \|\psi_{\mathcal{X}}(xy^{-1})\|_{\infty}$. Cette distance induit naturellement une distance sur G/Γ en posant

$$d_{\mathcal{X}}(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_{\mathcal{X}}(x, y\gamma).$$

*On définit la **norme de Lipchitz** associée à \mathcal{X} d'une fonction $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ par*

$$\|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} = \|F\|_{\infty} + \sup_{x, y \in G/\Gamma, x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{d_{\mathcal{X}}(x, y)}.$$

À l'image de [GT12b], il convient d'introduire la notion de Q -rationalité en vue de rendre les résultats quantitatifs pour ainsi énoncer le théorème inverse de la norme de Gowers.

Définition 2.15. *Soient $Q > 0$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s et \mathcal{X} une base de Mal'cev de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$.*

On dit qu'un élément de \mathbf{Q} est de taille au plus Q s'il s'écrit a/b avec $\max(|a|, |b|) \leq Q$.

*On dit que \mathcal{X} est **Q -rationnelle** si les constantes de structure q_{ijk} définies par la relation $[X_i, X_j] = \sum_k q_{ijk} X_k$, où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie de l'algèbre \mathfrak{g} , sont des rationnels de taille au plus Q .*

*On dit que la filtration $G_{\mathbf{N}}$ est **Q -rationnelle** relativement à $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ si, pour tout $i \leq s$, il existe une base de Mal'cev de $G_i/(\Gamma \cap G_i)$ formée de combinaisons linéaires $\sum_j q_{ij} X_j$ où les q_{ij} sont des rationnels de taille au plus Q .*

*Un élément $g\Gamma$ de G/Γ est dit **Q -rationnel** s'il existe $0 < r \leq Q$ tel que $g^r \Gamma = \Gamma$.*

En conclusion de ce paragraphe, énonçons à nouveau le théorème inverse pour la norme de Gowers $U^{s+1}[x]$ sous sa forme faible, où les suites affines sont remplacées par des suites polynomiales quelconques.

Théorème 2.16 ([GTZ12], Theorem 1.3). *Soient $s \geq 0$ un entier et $\delta \in]0, 1[$. Il existe une nilvariété G/Γ équipée d'une métrique riemannienne lisse $d_{G/\Gamma}$ et des constantes $C(s, \delta), c(s, \delta) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $x \geq 1$ et $h : [0, x] \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction bornée par 1 telle que*

$$\|h\|_{U^{s+1}[x]} \geq \delta,$$

alors il existe une fonction $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et de constante de Lipschitz au plus $C(s, \delta)$ et une suite polynomiale $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ telles que

$$\left| \sum_{0 \leq n \leq x} h(n) F(g(n)\Gamma) \right| \geq c(s, \delta)x.$$

Sous une formulation différente, la démonstration du cas $s = 2$ a donné lieu à un résultat effectif dans [GT08a]. Dans [GTZ11] et [GTZ12], Green, Tao et Ziegler ont recours à l'analyse non standard pour montrer ce théorème lorsque $s \geq 3$. Comme ils soulignent dans l'introduction de [GTZ11], il en résulte qu'il est possible en théorie d'en déduire des bornes effectives, *albeit extremely weak ones*. La détermination de constantes $c(s, \delta)$ et $C(s, \delta)$ suffisamment précises pour être utiles en pratique semble constituer une question ouverte. Elle est d'importance car cela pourrait permettre d'obtenir la validité de (2.6) dans un domaine non borné en u , tout en précisant le terme d'erreur résiduel.

À titre d'exhaustivité, signalons que la réciproque de ce résultat est également vraie.

Proposition 2.17 ([GTZ11], Proposition 1.4). *Soient $m \geq 1$ et $s \geq 0$ des entiers, $Q, \delta > 0$ des réels, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s , \mathcal{X} une base de Mal'cev adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et Q -rationnelle, $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ une suite polynomiale Q -rationnelle et $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne bornée par 1. Si $x \geq 1$ et $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction bornée par 1 satisfaisant*

$$\sum_{n \leq x} F(g(n)\Gamma)h(n) \geq \delta x,$$

alors $\|h\|_{U^{s+1}[x]} \gg 1$ où la constante implicite dépend de m, δ, Q, s et $\|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}}$.

2.2. Application aux entiers friables. Dans l'optique de démontrer le théorème 2.5, on applique dans ce qui suit la méthode de Green-Tao sous la forme détaillée dans le paragraphe 2.1. En posant $u := \frac{\log x}{\log y}$ et en désignant par $S(y)$ l'ensemble des entiers y -friables, l'estimation

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} \prod_{i=1}^t 1_{S(y)}(F_i(\mathbf{n})) - \text{Vol}(\mathcal{K})x^d \prod_{i=1}^t \rho(u) \right| \\ &= \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} \left(\prod_{i=1}^t 1_{S(y)}(F_i(\mathbf{n})) - \prod_{i=1}^t \rho(u) \right) \right| + O(x^{d-1}) \\ &\leq \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, t\} \\ I \neq \emptyset}} \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{K}.x \cap \mathbf{Z}^d} \prod_{i \in I} \left(1_{S(y)}(F_i(\mathbf{n})) - \rho(u) \right) \right| + O(x^{d-1}) \end{aligned}$$

réduit le problème à l'étude des corrélations linéaires de la fonction centrée $1_{S(y)}(\cdot) - \rho(u)$. Au vu du théorème 2.3 et dans la mesure où $1_{S(y)}(\cdot) - \rho(u)$ est bornée par 1, il suffit désormais de montrer que, pour tout $u_0 > 1$ et uniformément en $x \geq y \geq x^{1/u_0}$, on a l'estimation asymptotique

$$(2.10) \quad \|1_{S(y)}(\cdot) - \rho(u)\|_{U^{s+1}[x]} = o(1).$$

2.2.1. Corrélation de l'indicatrice des friables avec les nilsuites. Soient $s, m \geq 1$ des entiers, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée d'ordre s , $d_{G/\Gamma}$ une métrique riemannienne lisse de G/Γ et \mathcal{X} une base de Mal'cev de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$. Dans la fin de ce chapitre, on cherche à établir la formule

$$(2.11) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} \left(1_{S(y)}(n) - \rho(u) \right) F(g(n)\Gamma) = o(x(1 + \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}}))$$

uniformément pour toute fonction $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ lipschitzienne et bornée par 1 et toute suite polynomiale $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$. Puisque les distances $d_{G/\Gamma}$ et $d_{\mathcal{X}}$ sont équivalentes (voir la quatrième note de bas de page de [GT12b]), ceci impliquera la formule (2.10) d'après le théorème 2.16.

La formule d'inversion de Möbius entraîne la validité de la formule

$$(2.12) \quad 1_{S(y)}(n) = \sum_{P^-(k) > y} \mu(k) 1_{k|n}.$$

Approchons la fonction $n \mapsto 1_{k|n}$ par son espérance $\frac{1}{k}$ lorsque $k \leq x^{1-\tau}$ où le paramètre $\tau = \tau(x) \in]1/\log x, 1/2[$ sera choisi ultérieurement, pour écrire

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \left(1_{S(y)}(n) - \rho(u) \right) F(g(n)\Gamma) = \Sigma_1(F, g) + \Sigma_2(F, g)$$

où

$$(2.13) \quad \Sigma_1(F, g) := \sum_{1 \leq n \leq x} h_\tau(n) F(g(n)\Gamma) \quad \text{avec} \quad h_\tau(n) = \sum_{\substack{k \leq x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \mu(k) \left(1_{k|n} - \frac{1}{k} \right) \ll 2^u$$

et

$$\Sigma_2(F, g) := \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{\substack{k > x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \mu(k) 1_{k|n} + \sum_{\substack{k \leq x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \frac{\mu(k)}{k} - \rho(u) \right) F(g(n)\Gamma).$$

Concentrons-nous d'abord sur le terme $\Sigma_2(F, g)$. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (2.12) et la formule de Hildebrand [Hil86]

$$(2.14) \quad \sum_{n \leq x} 1_{S(y)}(n) = x\rho(u) \left(1 + O_\varepsilon \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right)$$

uniforme dans le domaine (H_ε) , on observe que

$$(2.15) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{P^-(k) > y} \mu(k) 1_{k|n} - \rho(u) \right) = \Psi(x, y) - x\rho(u) + O(1) \ll x\rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y}.$$

De plus, l'estimation classique du cardinal des entiers y -criblés et inférieurs à x (voir [[Ten08], Théorème III.6.4])

$$\# \{n \leq x : P^-(n) > y\} \ll \frac{x}{\log y},$$

valide dès que $x \geq y \geq 2$, implique la borne supérieure

$$(2.16) \quad \sum_{\substack{k \leq x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \left| \frac{x}{k} - \sum_{n \leq x} 1_{k|n} \right| \ll \frac{x^{1-\tau}}{\log y}.$$

Compte tenu de la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x^{1-\tau} < k \leq x \\ P^-(k) > y}} \frac{\mu^2(k)}{k} &\ll \sum_j \sum_{y < p_2 < \dots < p_j \leq x} \frac{1}{p_2 \cdots p_j} \sum_{\max\left(y, \frac{x^{1-\tau}}{p_2 \cdots p_j}\right) < p_1 \leq \frac{x}{p_2 \cdots p_j}} \frac{1}{p_1} \\ &\ll \tau u \sum_j \frac{1}{j!} \left(\sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} \right)^j \\ &\ll \tau u \sum_j \frac{1}{j!} (\log(u) + O(1))^{j-1} \ll \tau u^2, \end{aligned}$$

valide pour $y \geq x^\tau$, on dispose également de la majoration

$$(2.17) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{\substack{k > x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \mu^2(k) 1_{k|n} \ll \tau u^2 x.$$

On déduit finalement de (2.15), (2.16), (2.17) et du fait que F est borné par 1 que, uniformément en $x^\tau \leq y \leq x$, on a

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \Sigma_2(F, g) &\ll \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{\substack{k > x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \mu^2(k) 1_{k|n} + \sum_{\substack{k \leq x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \left(\frac{x}{k} - \sum_{n \leq x} 1_{k|n} \right) + \left| \sum_{\substack{k \leq x \\ P^-(k) > y}} \sum_{n \leq x} 1_{k|n} - x \rho(u) \right| \\ &\ll x \left(\tau u^2 + \frac{1}{x^\tau \log y} + \rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y} \right). \end{aligned}$$

La proposition suivante fournit une borne supérieure de $\Sigma_1(F, g)$.

Proposition 2.18. *Soient $m, s \geq 1$ des entiers et $A > 0$. Il existe une constante $c(m, s, A) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $x, y, Q \geq 2$ et $\tau \in]0, 1/2[$ sont des réels satisfaisant $y \geq x^\tau \geq (\log x)^{c(m, s, A)}$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s , \mathcal{X} est une base de Mal'cev Q -rationnelle de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$, $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ et $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction bornée par 1 et lipschitzienne pour la distance $d_{\mathcal{X}}$, alors on a*

$$(2.19) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} h_\tau(n) F(g(n)\Gamma) \leq x Q^{c(m, s, A)} (1 + \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}}) 2^u (\log x)^{-A}.$$

La démonstration de cette proposition constituera l'essentiel de la suite de notre discussion et suivra essentiellement les travaux détaillés dans [GT12a]. En effectuant le choix de paramètre $\tau = o(1)$ avec $x^\tau \geq (\log x)^{c(m, s, 1)}$, la formule (2.11) se déduira directement des estimations (2.18) et (2.19) pour tout u borné.

2.2.2. *Réduction du problème aux suites équidistribuées.* Il existe principalement trois catégories de suites polynomiales – lisses, totalement équidistribuées et périodiques – qui engendrent le groupe $\text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$. La notion de suite périodique étant standard, on introduit les deux autres types dans la définition suivante.

Définition 2.19. *Soient $\delta \in]0, 1/2[$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée, \mathcal{X} une base de Mal'cev de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et $(g(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite de G/Γ .*

On dit que $(g(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ est (M, x) -lisse si on a les majorations $d_{\mathcal{X}}(g(n), \text{id}_{G/\Gamma}) \leq M$ et $d_{\mathcal{X}}(g(n), g(n-1)) \leq M/x$ pour tout $n \in [1, x]$.

On dit que la suite g est δ -équidistribuée sur $[1, x]$ si, pour toute fonction lipschitzienne $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1, on a

$$\left| \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F(g(n)\Gamma) - \int_{G/\Gamma} F d\lambda_{G/\Gamma} \right| \leq \delta \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}}.$$

On dit que g est totalement δ -équidistribuée sur $[1, x]$ si, pour toute fonction lipschitzienne $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et toute progression arithmétique $P \subset [1, x] \cap \mathbf{N}$ de taille au moins δx , on a

$$\left| \frac{1}{|P|} \sum_{n \in P} F(g(n)\Gamma) - \int_{G/\Gamma} F d\lambda_{G/\Gamma} \right| \leq \delta \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}}.$$

Remarque. *Le tore.* Si $G/\Gamma = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$, alors la définition d'équidistribution précédemment introduite est analogue à la notion classique d'après le critère de Weyl (voir la proposition 2.22 *infra*).

Les notions précédentes ont été étudiées en détail par Green et Tao dans [GT12b]. Leur résultat central est le théorème suivant qui permet de décomposer toute suite polynomiale comme produit d'une suite lisse, d'une suite totalement équilibrée et d'une suite périodique.

Théorème 2.20 ([GT12b], Theorem 1.19). *Soient $m, s \geq 1$ des entiers et $B > 0$. Il existe une constante $c(m, s, B) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $M_0, x \geq 2$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s , \mathcal{X} est une base de Mal'cev M_0 -rationnelle de G/Γ adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$, alors il existe un entier M tel que $M_0 \leq M \leq M_0^{c(m, s, B)}$, un sous-groupe rationnel G' de G et une base de Mal'cev \mathcal{X}' de $G'/(\Gamma \cap G')$ dont les éléments sont des combinaisons M -rationnels des éléments de \mathcal{X} , tels que l'on ait une décomposition de g sous la forme*

$$g = \varepsilon g' \gamma$$

où

- (1) $\varepsilon \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est (M, x) -lisse ;
- (2) $g' \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est à valeurs dans G' et la suite $(g'(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ est totalement M^{-B} -équidistribuée sur $[1, x]$ dans $G'/(G' \cap \Gamma)$ pour la distance $d_{\mathcal{X}'}$;
- (3) $\gamma \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est périodique de période au plus M et, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\gamma(n)$ est M -rationnel.

S'inscrivant dans la lignée de [GT12a, Mat12a], la stratégie de preuve de la proposition 2.18 qui sera détaillée par la suite consiste à utiliser le théorème 2.20 pour se ramener au cas où $g(n)$ est une suite totalement équilibrée. Ce dernier point fait l'objet du résultat suivant, analogue de [[GT12a], Proposition 2.1] et [[Mat12a], Proposition 9.3] dont la démonstration sera donnée au paragraphe 2.2.3.

Proposition 2.21. *Soient $m, s \geq 1$ des entiers. Il existe des constantes $c_0(m, s)$ et $c_1(m, s) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $x, y, Q \geq 2$ et $\delta, \tau \in]0, \frac{1}{2}[$ sont des réels satisfaisant $\delta^{-c_0(m, s)} \leq x^\tau \leq y$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s , \mathcal{X} est une base de Mal'cev adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et Q -rationnelle, $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est totalement δ -équidistribuée sur $[1, x]$ et $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction lipschitzienne bornée par 1 telle que $\int_{G/\Gamma} F d\lambda_{G/\Gamma} = 0$, alors, pour toute progression arithmétique $P \subset [1, x] \cap \mathbf{N}$ de taille au moins x/Q , on a*

$$(2.20) \quad \left| \sum_{n \leq x} h_\tau(n) 1_P(n) F(g(n)\Gamma) \right| \leq \delta^{c_1(m, s)} \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} Q x (2^u + \log x).$$

PREUVE QUE LA PROPOSITION 2.21 IMPLIQUE LA PROPOSITION 2.18. La démonstration reproduit essentiellement les arguments de [GT12a]. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} = 1$ et $Q \leq \log x$. Soit $B \geq 2$ un paramètre dépendant de A qui sera explicité en fin de preuve. En appliquant le théorème 2.20 avec le choix $M_0 = \log x$ rendu possible car \mathcal{X} est $(\log x)$ -rationnelle sous l'hypothèse $Q \leq \log x$, on obtient l'existence d'un entier $M \in [\log x, (\log x)^{c(m, s, B)}]$ tel que l'on ait la décomposition de g sous la forme $g = \varepsilon g' \gamma$ où

- (1) $\varepsilon \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est (M, x) -lisse ;
- (2) $g' \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est à valeurs dans G' et la suite $(g'(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est totalement M^{-B} -équidistribuée sur $[1, x]$ dans $G'/(G' \cap \Gamma)$ pour la distance $d_{\mathcal{X}'}$;
- (3) $\gamma \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est périodique de période $q \leq M$ et, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\gamma(n)$ est M -rationnel.

Après avoir effectué une partition de l'ensemble $[1, x] \cap \mathbf{Z}$ en classes de congruence modulo q , la périodicité de γ entraîne l'existence de $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in G$ tels que $\psi_\chi(\gamma_i) \in [0, 1]$ et

$$\sum_{1 \leq n \leq x} h_\tau(n) F(g(n)\Gamma) = \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv i \pmod{q}}} h_\tau(n) F(\varepsilon(n)g'(n)\gamma_i\Gamma).$$

D'autre part, le caractère 1-lipschitzien de F , l'invariance à droite de d_χ et le caractère (M, x) -lisse de ε impliquent que l'on a, pour tous entiers $1 \leq n_0, n \leq x$,

$$\begin{aligned} |F(\varepsilon(n)g'(n)\gamma_i\Gamma) - F(\varepsilon(n_0)g'(n_0)\gamma_i\Gamma)| &\leq d_\chi(\varepsilon(n)g'(n)\gamma_i\Gamma, \varepsilon(n_0)g'(n_0)\gamma_i\Gamma) \\ &\leq d_\chi(\varepsilon(n)\Gamma, \varepsilon(n_0)\Gamma) \\ (2.21) \qquad \qquad \qquad &\leq \frac{M}{x}|n - n_0|. \end{aligned}$$

Cela suggère de découper chaque classe de congruence $\{n \equiv i \pmod{q}\}$ en progressions arithmétiques $P_{i,j}$ de raison q et de diamètre au plus $\frac{x}{M \log^A x}$. Pour toute paire (i, j) , fixons un élément $n_{0,i,j}$ de la progression $P_{i,j}$. L'inégalité (2.21) permet alors d'écrire pour tout $n \in P_{i,j}$ la relation

$$F(g(n)) = F_{i,j}(g_i(n)\Lambda_i) + O((\log x)^{-A})$$

où $g_i(n) := \gamma_i^{-1}g'(n)\gamma_i$ et

$$F_{i,j} : \begin{array}{ccc} H_i/\Lambda_i & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x\Lambda_i & \mapsto & F(\varepsilon(n_{0,i,j})\gamma_i x\Gamma) \end{array}$$

avec $\Lambda_i := \Gamma \cap H_i$ et $H_i := \gamma_i^{-1}G'\gamma_i$. Par construction, le groupe $(H_i/\Lambda_i, \gamma_i^{-1}G_{\mathbf{N}}\gamma_i)$ est une nilvariété d'ordre s pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et, d'autre part, $g_i \in \text{poly}(\mathbf{Z}, \gamma_i^{-1}G_{\mathbf{N}}\gamma_i)$. En choisissant x assez grand en fonction de A et B et en construisant chaque progression $P_{i,j}$ de sorte à avoir $|P_{i,j}| \geq x/(2qM(\log x)^A)$, on peut observer qu'il y a au plus $2qM(\log x)^A$ progressions $P_{i,j}$. Par suite, il suffit de montrer que, pour toute paire (i, j) , on a

$$(2.22) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} h_\tau(n) 1_{P_{i,j}}(n) F_{i,j}(g_i(n)\Lambda_i) \leq 2^{u-1}x/(M^2(\log x)^{2A}).$$

Green et Tao soulignent dans [[GT12a], p. 547] que les hypothèses faites sur H_i/Λ_i permettent de construire pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ une base de Mal'cev \mathcal{Y}_i formée de combinaisons $M^{c_1(m,s)}$ -rationnelles des éléments de \mathcal{X} où $c_1(m, s) > 0$. En considérant la métrique $d_{\mathcal{Y}_i}$ associée à cette base, ils remarquent que la suite $g_i \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est totalement $M^{-c_2(m,s)B+c_1(m,s)}$ -équidistribuée sur $[1, x]$ pour une constante $c_2(m, s) > 0$ et que les fonctions $F_{i,j}$ sont $M^{c_1(m,s)}$ -lipschitzienne.

Supposons dans un premier temps que $\int_{H_i/\Gamma_i} F_{i,j} d\lambda_{H_i/\Gamma_i} = 0$. Les différents $P_{i,j}$ étant de taille au moins $x/(2qM(\log x)^A) \geq x/(2M^2(\log x)^A)$, la proposition 2.21 appliquée avec les choix $'\delta' = M^{-c_2(m,s)B+c_1(m,s)}$ et $'Q' = M^{c_1(m,s)}(\log x)^A$, justifie l'existence de constantes $c_3(m, s)$ et $c_4(m, s) > 0$ pour lesquelles on ait

$$(2.23) \quad \sum_{1 \leq n \leq N} h_\tau(n) 1_{P_{i,j}}(n) F_{i,j}(g_i(n)\Lambda_i) \ll M^{-c_3(m,s)B+c_4(m,s)}x(2^u + \log x)$$

dès que $M^{c_4(m,s)} \leq x^\tau$. Compte tenu de la condition $\log x \leq M \leq (\log x)^{c(m,s,B)}$, on peut choisir B assez grand en fonction de A, m et s pour que (2.23) implique (2.22) puis $c(m, s, A)$ suffisamment grand pour que (2.23) soit vraie.

Lorsque l'on considère une fonction $F_{i,j}$ quelconque, on peut se ramener au cas précédent en écrivant $F_{i,j} = \left(F_{i,j} - \int_{H_i/\Lambda_i} F_{i,j} d\lambda_{H_i/\Lambda_i}\right) + \int_{H_i/\Lambda_i} F_{i,j} d\lambda_{H_i/\Lambda_i}$. En observant

que $\left| \int_{H_i/\Lambda_i} F_{i,j} d\lambda_{H_i/\Lambda_i} \right| \leq 1$, on remarque que la définition (2.13) de h_τ et l'hypothèse $q \leq x^\tau \leq y$ entraînent l'estimation

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} h_\tau(n) 1_{P_{i,j}}(n) &\leq \sum_{\substack{k \leq x^{1-\tau} \\ P^-(k) > y}} \left| \sum_{1 \leq n \leq x} \left(1_{k|n} - \frac{1}{k} \right) 1_{P_{i,j}}(n) \right| \\ &\leq \# \left\{ k \leq x^{1-\tau} : P^-(k) > y \right\} \\ &\ll \frac{x^{1-\tau}}{\log y} \end{aligned}$$

ce qui implique (2.22) au vu de l'hypothèse $x^\tau \geq (\log x)^{c(m,s,A)}$. \square

2.2.3. Suites polynomiales équidistribuées. Le paragraphe précédent a réduit le problème à considérer les suites $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ totalement équidistribuées. Une étude approfondie de tels objets est contenue dans [GT12b] et l'on rappelle ci-après certains de leurs résultats relatifs à l'équidistribution dans les nilvariétés.

Considérons d'abord les nilvariétés commutatives (c'est-à-dire d'ordre 1), en étudiant le cas du tore unidimensionnel $G/\Gamma = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. La proposition suivante consiste essentiellement en une reformulation du critère d'équidistribution de Weyl sous une forme quantitative.

Proposition 2.22 ([GT12b], Proposition 4.3). *Soit $d \geq 0$ un entier. Il existe une constante $c(d) > 0$ qui satisfait la propriété suivante : si $x \geq 1$, $\delta \in]0, 1/2[$ et $g \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme de degré d qui n'est pas δ -équidistribué sur $[1, x]$, alors il existe un entier $1 \leq k \leq \delta^{-c(d)}$ tel que, pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on ait*

$$\|k\partial^j g(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \delta^{-c(d)} x^{-j}.$$

Comme le soulignent Green et Tao dans [GT12b], ce résultat permet de montrer par récurrence sur m le théorème 2.20 dans le cas du tore $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$. Une conséquence de cette proposition est le résultat d'équidistribution suivant que nous utiliserons dans la démonstration de la proposition 2.21.

Lemme 2.23 ([GT12b], Lemma 4.5). *Soit $d \geq 0$ un entier. Il existe une constante $c(d) > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Si $g \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme de degré d , $x \geq 1$, $\delta \in]0, 1/2[$ et $\varepsilon \leq \delta/2$ sont des réels et $I \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un intervalle de taille ε tel que $g(n) \pmod{\mathbf{Z}} \in I$ pour au moins δx valeurs de $[1, x] \cap \mathbf{N}$, alors il existe un entier $1 \leq k \leq \delta^{-c(d)}$ tel que, pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on ait*

$$\|k\partial^j g(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \varepsilon \delta^{-c(d)} x^{-j}.$$

En vue de généraliser de tels résultats aux nilvariétés d'ordre $s \geq 2$, rappelons la définition des caractères horizontaux.

Définition 2.24. *Soient $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ une nilvariété filtrée et \mathcal{X} une base de Mal'cev adaptée à $G_{\mathbf{N}}$. On appelle **caractère horizontal** sur G tout morphisme de groupes $\eta : G \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tel que $\eta(\Gamma) = 0$. Au vu de la définition des coordonnées de Mal'cev, il existe alors un unique $\eta_{\mathcal{X}} \in \mathbf{Z}^m$ tel que $\eta(g) = \eta_{\mathcal{X}} \cdot \psi_{\mathcal{X}}(g)$ pour tout $g \in G$. On appelle $|\eta_{\mathcal{X}}|_{\infty}$ la **magnitude** de η relativement à \mathcal{X} .*

Disposant d'un cadre adéquat pour énoncer une généralisation de la proposition 2.22 aux nilvariétés d'ordre quelconque, Green et Tao obtiennent le résultat suivant.

Théorème 2.25 ([GT12b], Theorem 2.9). *Soient $m, s \geq 1$ des entiers. Il existe une constante $c(m, s) > 0$ qui satisfait la propriété suivante : si $x \geq 1$, $\delta \in]0, 1/2[$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une nilvariété filtrée d'ordre s et de dimension m , \mathcal{X} est une base de Mal'cev δ^{-1} -rationnelle adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ n'est pas δ -équidistribuée sur $[1, x]$, alors il*

existe un caractère horizontal η de magnitude $|\eta_{\mathcal{X}}|_{\infty} \leq \delta^{-c(m,s)}$ tel que, pour tout entier $j \geq 0$, on ait

$$\|\partial^j(\eta \circ g)(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \delta^{-c(m,s)} x^{-j}.$$

Pour conclure cette partie, revenons à la démonstration de la proposition 2.21 que l'on rappelle ci-dessous.

Proposition 2.21. *Soient $m, s \geq 1$ des entiers. Il existe des constantes $c_0(m, s)$ et $c_1(m, s) > 0$ satisfaisant la propriété suivante : si $x, y, Q \geq 2$ et $\delta, \tau \in]0, \frac{1}{2}[$ sont des réels satisfaisant $\delta^{-c_0(m,s)} \leq x^{\tau} \leq y$, $(G/\Gamma, G_{\mathbf{N}})$ est une nilvariété filtrée de dimension m et d'ordre s , \mathcal{X} est une base de Mal'cev adaptée à $G_{\mathbf{N}}$ et Q -rationnelle, $g \in \text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ est totalement δ -équidistribuée sur $[1, x]$ et $F : G/\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction lipschitzienne bornée par 1 telle que $\int_{G/\Gamma} F d\lambda_{G/\Gamma} = 0$, alors, pour toute progression arithmétique $P \subset [1, x] \cap \mathbf{N}$ de taille au moins x/Q , on a*

$$(2.20) \quad \left| \sum_{n \leq x} h_{\tau}(n) 1_P(n) F(g(n)\Gamma) \right| \leq \delta^{c_1(m,s)} \|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} Q x (2^u + \log x).$$

DÉMONSTRATION. Dans cette preuve, on adapte essentiellement les arguments de la démonstration de [[Mat12a], Proposition 9.2] elle-même en partie inspirée de [GT12a]. On peut supposer sans perte de généralité que $\|F\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} = 1$ et que $Q \leq \delta^{-c_1(m,s)}$. En utilisant la majoration (2.13), il vient

$$\left| \sum_{n \leq x^{1-\tau/2}} h_{\tau}(n) 1_P(n) F(g(n)\Gamma) \right| \leq x^{1-\tau/2} 2^u$$

et il suffit donc, compte tenu de l'hypothèse $\delta^{-c_0(m,s)} \leq x^{\tau}$, de se concentrer uniquement sur les entiers $n > x^{1-\tau/2}$.

Définissons pour tout $\xi \in]0, 1/2[$ l'ensemble $S_j(\xi)$ des entiers k pour lesquels

$$\left| \sum_{2^j/k < n \leq 2^{j+1}/k} 1_P(kn) F(g(kn)\Gamma) \right| > \xi \frac{2^j}{k}.$$

À la suite de [Mat12a], on effectue un découpage dyadique sur les variables k et n pour écrire

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{x^{1-\tau/2} < n \leq x} h_{\tau}(n) 1_P(n) F(g(n)\Gamma) \right| \\ & \leq \sum_{2^i \leq x^{1-\tau}} \sum_{\substack{2^i \leq k < 2^{i+1} \\ P^-(k) > y}} \sum_{\substack{x^{1-\tau/2} \leq 2^j \leq x \\ \frac{2^j}{k} < n \leq \frac{2^{j+1}}{k}}} \left| \sum_{2^j/k < n \leq 2^{j+1}/k} 1_P(kn) F(g(kn)\Gamma) \right| \\ & \leq \sum_{2^i \leq x^{1-\tau}} \sum_{\substack{x^{1-\tau/2} \leq 2^j \leq x \\ P^-(k) > y}} 2^j \left(\sum_{\substack{2^i \leq k < 2^{i+1} \\ P^-(k) > y}} \frac{\xi}{k} + \sum_{\substack{2^i \leq k < 2^{i+1} \\ P^-(k) > y \\ k \in S_j(\xi)}} \frac{1}{k} \right) \\ & \ll \sum_{\substack{x^{1-\tau/2} \leq 2^j \leq x}} 2^j \left(\xi \log x + \sum_{2^i \leq x^{1-\tau}} \frac{1}{2^i} \text{card} \left(S_j(\xi) \cap [2^i, 2^{i+1}] \right) \right). \end{aligned}$$

La fin de la preuve consiste à montrer que, si $2K \leq x^{1-\tau}$ et $\xi := \delta^{c_1(m,s)} \leq Q^{-1}$ pour un choix de $c_1(m,s)$ suffisamment petit, alors on a

$$(2.24) \quad \text{card}(S_j(\xi) \cap [K, 2K]) \leq \xi K$$

dès que $\frac{x^{1-\tau/2}}{2} \leq 2^j \leq x$. On reproduit pour ce faire l'argument, dit de Type I, développé dans [GT12a] et dans le lemme 9.3 de [Mat12a].

Soit l la raison de la progression arithmétique P , de sorte que $l \leq Q$, au vu des hypothèses sur la taille de P . Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'entiers naturels $K \leq x^{1-\tau}$ et j tel que $\frac{x^{1-\tau/2}}{2} \leq 2^j \leq x$ pour lesquels l'estimation (2.24) ne soit pas valide. En appliquant le principe des tiroirs, on note l'existence d'un entier $b \in \{1, \dots, l\}$ pour lequel au moins $\xi K Q^{-1}$ valeurs de $k \in]K, 2K]$ satisfont

$$\left| \sum_{\substack{2^j \\ kl} < n + \frac{b}{l} \leq \frac{2^{j+1}}{kl}} F(\tilde{g}_k(n)\Gamma) \right| > \xi \frac{2^j}{kl}$$

où $\tilde{g}_k(n) = g(k(b + ln))$ définit un élément de $\text{poly}(\mathbf{Z}, G_{\mathbf{N}})$ d'après le corollaire 6.8 de [GT12b].

Soit k un entier satisfaisant cette inégalité. Il apparaît que la suite \tilde{g}_k n'est pas $\frac{\xi}{4}$ -équidistribuée sur $[1, x_k]$ pour l'un des choix $x_k = \frac{2^j}{kl} - \frac{b}{l}$ ou $\frac{2^{j+1}}{kl} - \frac{b}{l}$. D'après le théorème 2.25 dû à Green et Tao [GT12b], il existe une constante $c_2(m,s) > 0$ et un caractère horizontal $\eta_k : G \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de magnitude $|(\eta_k)_\mathcal{X}|_\infty \leq \xi^{-c_2(m,s)}$ satisfaisant, pour tout entier $r \geq 1$,

$$\|\partial^r(\eta_k \circ \tilde{g}_k)(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \xi^{-c_2(m,s)} \left(K/2^j\right)^r.$$

D'après le lemme 8.4 de [GT12b], il existe un entier $q_k \leq \xi^{-c_3(m,s)}$ tel que, pour tout $r \geq 1$,

$$\|q_k \partial^r(\eta_k \circ g_k)(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \xi^{-c_3(m,s)} \left(K/2^j\right)^r$$

où $g_k(n) = g(kn)$ et $c_3(m,s) > 0$ est une constante suffisamment grande.

Une application du lemme des tiroirs aux différents $q_k \eta_k$ entraîne l'existence d'une constante $c_4(m,s) > 0$ et d'un caractère horizontal η de magnitude $|\eta_\mathcal{X}|_\infty \leq \xi^{-c_4(m,s)}$ satisfaisant

$$(2.25) \quad \|\partial^r(\eta \circ g_k)(0)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \xi^{-c_4(m,s)} \left(K/2^j\right)^r$$

pour tout entier $r \geq 1$ et pour au moins $\xi^{c_4(m,s)} K$ valeurs de k . En écrivant

$$(2.26) \quad \eta \circ g(n) = \beta_d n^d + \dots + \beta_0,$$

il suit de (2.25) qu'il existe un entier $1 \leq q \ll_d 1$ tel que

$$(2.27) \quad \|q k^r \beta_r\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \ll \xi^{-c_5(m,s)} (K/2^j)^r$$

pour un ensemble \mathcal{T} de valeurs de k de cardinal au moins $\xi^{c_5(m,s)} K$ et pour tout entier $r \geq 1$.

On cherche à présent à obtenir (2.27) pour des entiers quelconques et non plus uniquement pour les puissances r -ième en vue d'utiliser le lemme 2.23. Reproduisons pour cela la démonstration du lemme 3.3 de [GT12a]. On observe que l'on peut minorer le cardinal de

$$t\mathcal{T}^r := \{1 \leq n \leq t(2K)^r : n = k_1^r + \dots + k_t^r : k_1, \dots, k_t \in \mathcal{T}\}$$

à l'aide des estimations

$$\begin{aligned}
 (\#\mathcal{T})^{2t} &= \left(\sum_n \#\{(k_1, \dots, k_t) \in \mathcal{T} \times \dots \times \mathcal{T} : n = k_1^r + \dots + k_t^r\} \right)^2 \\
 &\leq \#(t\mathcal{T}^r) \sum_n \#\{(k_1, \dots, k_t) \in \mathcal{T} \times \dots \times \mathcal{T} : n = k_1^r + \dots + k_t^r\}^2 \\
 (2.28) \quad &\ll_{t,r} \#(t\mathcal{T}^r) K^{2t-r}
 \end{aligned}$$

valides dès que $t \geq 2^r + 1$ et obtenues en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations uniformes en n du nombre de solutions de $k_1^r + \dots + k_t^r = n$ issues de la méthode du cercle (voir [Vau97]). En prenant $t = 5^d$, il suit l'existence une constante $c_6(m, s) > 0$ pour laquelle la formule

$$\|qn\beta_r\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \xi^{-c_6(m,s)}(K/2^j)^r.$$

est valide pour au moins $\xi^{c_6(m,s)}K^r$ entiers $n \leq 10^d K^r$ et tout entier $r \geq 1$.

Pour déduire des informations diophantiennes relatives aux β_r , on utilise le lemme 2.23 en suivant [GT12a]. Pour vérifier que les hypothèses sont satisfaites, on observe que $r \geq 1$ et donc $\frac{\xi^{2c_6(m,s)}}{10^d} \gg x^{-\tau/2} \gg \left(\frac{K}{2^j}\right)^r$ à condition que la constante $c_1(m, s)$ soit suffisamment petite. Il en résulte que l'on peut trouver un entier $q' \leq \xi^{-c_7(m,s)}$ tel que

$$\|q'\beta_r\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq \xi^{-c_7(m,s)}2^{-jr}$$

pour tout entier $r \geq 1$ et pour une constante $c_7(m, s) > 0$. En utilisant finalement la définition (2.26), on obtient l'existence d'une constante $c_8(m, s) \geq c_7(m, s)$ pour laquelle la relation

$$(2.29) \quad \|q'(\eta \circ g)(n)\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \leq 1/10$$

est valide dès que $n \leq \xi^{c_8(m,s)}x$.

Soit $\phi : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow [-1, 1]$ une fonction $O(1)$ -lipschitzienne, de moyenne nulle et qui vaut 1 sur $[-1/10, 1/10]$ de sorte que

$$\int_{G/\Gamma} \phi \circ (q'\eta) d\lambda_{G/\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \|\phi \circ (q'\eta)\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} \ll \xi^{-c_8(m,s)}.$$

Au vu de (2.29), on a

$$\left| \sum_{n \leq \xi^{c_8(m,s)}x} \phi(q'\eta(g(n)\Gamma)) \right| \geq \xi^{c_8(m,s)}x - 1 > \delta \|\phi \circ (q'\eta)\|_{\text{Lip}, \mathcal{X}} \xi^{-c_8(m,s)}x$$

sous réserve de choisir $c_1(m, s)$ assez petite. En considérant comme progression arithmétique l'ensemble des entiers inférieurs à $\xi^{c_8(m,s)}x$, ceci contredit le fait que la suite $(g(n))_n$ soit totalement δ -équidistribuée sur $[1, x]$ et achève ainsi la preuve de la proposition. \square

Note sur les valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques

A. LACHAND ET G. TENENBAUM

1. Introduction et énoncés

Soient \mathbf{K} un corps de nombres et $\zeta_{\mathbf{K}}$ sa fonction zêta de Dedekind. Nous nous proposons ici d'apporter des précisions sur le comportement asymptotique des valeurs moyennes criblées de fonctions arithmétiques dont la série de Dirichlet est analytiquement proche d'une puissance réelle $\zeta_{\mathbf{K}}^{\kappa}$ de $\zeta_{\mathbf{K}}$. Par souci de simplicité, et compte tenu de l'application visée dans le travail [Lac14], nous nous limitons au cas $\kappa = -1$, mais la méthode est facilement adaptable au cas général.

Plus précisément, pour $c_0 \in]0, 1]$ et $\kappa \in \mathbf{Z}^*$, désignons par $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(\kappa; c_0)$ la classe des fonctions multiplicatives h dont la série de Dirichlet associée $\mathcal{H}(s) := \sum_{n \geq 1} h(n)/n^s$ s'écrit sous la forme

$$(1.1) \quad \mathcal{H}(s) = \mathcal{G}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{\kappa}$$

où la série $\mathcal{G}(s) := \sum_{n \geq 1} g(n)/n^s$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - c_0$. Introduisons encore, pour $\kappa_0 \in \mathbf{N}^*$ le sous-ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(\kappa_0, \kappa; c_0)$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(\kappa; c_0)$ constitué des fonctions arithmétiques h dont la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ possède une série majorante associée à une fonction \tilde{h} de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}^*(\kappa_0; c_0)$. Des hypothèses moins restrictives sont considérées dans [HTW08] : ici encore, il serait facile, si nécessaire, d'étendre nos résultats au cadre considéré dans ce travail.

Notant $P^-(n)$ le plus petit facteur premier d'un entier naturel n avec la convention $P^-(1) = \infty$, notre résultat principal consiste à fournir, dans un large domaine, une formule asymptotique pour la quantité

$$\Phi_h(x, y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} h(n)$$

lorsque $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, -1; c_0)$. La présente étude s'inscrit notamment dans le prolongement des travaux correspondants apparaissant dans [HTW08] et au paragraphe 2 de [BBDT12], où les valeurs moyennes friables et criblées des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbf{K}}(\kappa_0, \kappa; c_0)$ sont considérées sous les hypothèses respectives $\kappa > 0$ et $\kappa = 1$.

Nous obtenons le résultat suivant. Ici et dans la suite, nous désignons par ρ la fonction de Dickman (voir par exemple le chapitre III.5 de [Ten08]) et employons systématiquement la notation traditionnelle $u := (\log x)/\log y$ ($x \geq 2$, $y \geq 2$).

Théorème 1.1. *Soient $c_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. Sous la condition*

$$(G_{\varepsilon}^*) \quad x \geq 2, \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x/2,$$

et uniformément pour $h \in \mathcal{E}_{\mathbf{K}}(1, -1; c_0)$, nous avons

$$(1.2) \quad \Phi_h(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_{\varepsilon}(y)}\right) \right\} x \int_0^{u-1} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv$$

où $L_\varepsilon(y) := e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}}$. En particulier, nous avons, uniformément dans le domaine G_ε^* ,

$$(1.3) \quad \Phi_h(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{x\rho'(u) + y}{\log y}.$$

Il est à noter que, dans le domaine $x/2 < y \leq x$ non couvert par G_ε^* , nous avons

$$\Phi_h(x, y) = \pi(y) - \pi(x) + O(x/L_\varepsilon(x)).$$

Le cas particulier donné par $h := \mu$, la fonction de Möbius, est emblématique. Nous obtenons alors, dans le domaine G_ε^* ,

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \mu(n) &= x \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\} \int_0^\infty \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{x\rho'(u) + y}{\log y}. \end{aligned}$$

La seconde formule découle de la première par intégration par parties. Une sommation d'Abel supplémentaire tenant compte de la convention $P^-(1) = \infty$ fournit alors, à partir de la première évaluation,

$$(1.5) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \frac{\mu(n)}{n} = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \rho(u) + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \quad ((x, y) \in G_\varepsilon)$$

où G_ε désigne le domaine obtenu en adjoignant à G_ε^* l'ensemble des couples (x, y) tels que $x/2 < y \leq x$.¹ Cette formule peut être comparée à l'évaluation suivante, découlant immédiatement de la formule asymptotique de Hildebrand [Hil86] pour le nombre $\Psi(x, y)$ des entiers y -friables n'excédant pas x ,

$$(1.6) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \frac{\mu(n)}{x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \rho(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon),$$

où l'on a posé

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 2, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Mentionnons incidemment qu'à partir des résultats de [Ten90a], une sommation d'Abel fournit la formule duale de (1.5)

$$(1.7) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{1}{\log y} \left\{ \omega(u) - \frac{y}{x} - \int_1^{x/y} \frac{M(t)}{t} dt \right\} + O\left(\frac{1}{(\log y)^2}\right) \quad (x \geq y \geq 2),$$

où $S(x, y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x , ω désigne la fonction de Buchstab, et $M(t)$ est la fonction sommatoire de la fonction de Möbius,

2. Preuve

La démonstration du Théorème 1.1 est essentiellement fondée sur des arguments détaillés aux chapitres III.5 et III.6 de l'ouvrage [Ten08].

Posons $\kappa := 1 + 1/\log x$, $\alpha_0 := 1 - \xi(u)/\log y$ où $\xi(u)$ est défini, pour $u > 1$, comme l'unique solution réelle de l'équation $e^\xi = 1 + u\xi$, et où l'on convient que $\xi(1) = 0$. Notons encore

$$T = T(x, y) := \begin{cases} L_{\varepsilon/2}(y) & \text{si } u \leq (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}, \\ \mathcal{Y}_\varepsilon := e^{(\log y)^{3/2-\varepsilon/3}} & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

1. L'extension est triviale car la somme est dominée par la contribution du terme correspondant à $n = 1$ lorsque $x/2 < y \leq x$.

de sorte que l'intérieur du contour rectangulaire \mathcal{R} de sommets $\kappa \pm iT$, $\alpha_0 \pm iT$, est inclus dans le domaine de Vinogradov

$$(2.1) \quad \sigma > 1 - \frac{c(\mathbf{K})}{\{\log(|\tau| + 3)\}^{2/3} \{\log \log(|\tau| + 3)\}^{1/3}} \quad (s = \sigma + i\tau),$$

sans zéro de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ dès lors que la constante $c(\mathbf{K})$ est convenablement choisie [Mit68, Sok68].

La formule de Perron effective (voir par exemple le théorème II.2.3 de [Ten08]), permet d'écrire

$$(2.2) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s \mathcal{H}(s)}{s \mathcal{H}(s, y)} ds + R_1$$

avec

$$\mathcal{H}(s, y) := \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{h(p^\nu)}{p^{\nu s}}, \quad R_1 \ll x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^-(n) > y}} \frac{|h(n)|}{n^\kappa (1 + T |\log(x/n)|)}.$$

Désignons par g le degré de \mathbf{K} . Par la méthode standard d'intégration complexe, nos hypothèses fournissent, pour tout σ , $0 < \sigma < c_0/\max(g, 2)$, et uniformément en $x \geq 2$,

$$(2.3) \quad \tilde{H}(x) := \sum_{n \leq x} \tilde{h}(n) = \lambda_{\mathbf{K}} \tilde{\mathcal{G}}(1)x + O(x^{1-\sigma})$$

où $\lambda_{\mathbf{K}}$ dénote le résidu de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$ et $\tilde{\mathcal{G}}(1) := \lim_{s \rightarrow 1} \tilde{\mathcal{H}}(s)/\zeta_{\mathbf{K}}(s)$. Une manipulation classique (voir par exemple la démonstration du lemme 4.4 de [HTW08]) fournit alors $R_1 \ll x(\log x)/T$.

Le quotient $\mathcal{H}(s)/\mathcal{H}(s, y)$ étant holomorphe à l'intérieur du contour \mathcal{R} , nous pouvons déplacer l'abscisse d'intégration du terme principal de (2.2) jusque $\sigma = \alpha_0$ au prix d'un terme d'erreur

$$R_2 := \int_{\kappa-iT}^{\alpha_0-iT} \frac{\mathcal{H}(s)x^s}{s \mathcal{H}(s, y)} ds + \int_{\alpha_0+iT}^{\kappa+iT} \frac{\mathcal{H}(s)x^s}{s \mathcal{H}(s, y)} ds.$$

Posons systématiquement $s = \sigma + i\tau$. L'inégalité triviale

$$(2.4) \quad |\zeta_{\mathbf{K}}(s, y)| \leq \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y) \quad (\sigma \geq \alpha_0),$$

et l'estimation classique (voir par exemple le lemme 4 de [Wu96])

$$(2.5) \quad 1/\zeta_{\mathbf{K}}(s) \ll_{\mathbf{K}} (\log |\tau|)^g \quad (|\tau| \geq 3),$$

valide dans le domaine (2.1), fournissent aisément la majoration

$$R_2 \ll \frac{x \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y) (\log y)^c}{T}.$$

Lorsque $T = \mathcal{Y}_\varepsilon$, nous tronquons l'intégrale sur le segment déplacé de manière à ne conserver que le segment $|\tau| \leq L_{\varepsilon/2}(y)$. Cela induit un nouveau terme résiduel

$$R_3 \ll \int_{L_{\varepsilon/2}(y) \leq |\tau| \leq T} \frac{x^{\alpha_0+i\tau} \mathcal{H}(\alpha_0+i\tau)}{\tau \mathcal{H}(\alpha_0+i\tau, y)} d\tau \ll \int_{L_{\varepsilon/2}(y) \leq |\tau| \leq T} \frac{x^{\alpha_0} |\tau \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0+i\tau, y)|}{|\zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0+i\tau)|} d\tau.$$

Les arguments du lemme III.6.12 de [Ten08] sont valides *mutatis mutandis* en remplaçant $\zeta(s)$ par $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$. Nous obtenons ainsi, pour une constante positive convenable $c = c_{\mathbf{K}}$,

$$(2.6) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0 + it, y) \ll \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y) \exp\left(-\frac{c\tau^2 u}{(1-\alpha_0)^2 + \tau^2}\right) \quad \left(\frac{1}{\log y} \leq |\tau| \leq \mathcal{Y}_\varepsilon\right).$$

En faisant appel à la majoration (2.5) et compte tenu de l'hypothèse $u > (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}$, nous obtenons

$$R_3 \ll \frac{x^{\alpha_0} \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y)}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

Il reste à évaluer le nouveau terme principal

$$(2.7) \quad P := \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - iL}^{\alpha_0 + iL} \frac{x^s \mathcal{H}(s)}{s \mathcal{H}(s, y)} ds$$

où l'on a posé $L := L_{\varepsilon/2}(y)$. La formule (4.1) de [HTW08] permet alors d'écrire, pour tout s du segment d'intégration,

$$(2.8) \quad \mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(s, y)(s-1)(\log y) \widehat{\rho}((s-1) \log y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_{\varepsilon}(y)}\right) \right\}$$

où $\widehat{\rho}$ désigne la transformée de Laplace de la fonction de Dickman ρ .

La contribution à P du terme d'erreur est

$$\ll R_4 := \frac{x^{\alpha_0}}{L} \int_{-L}^L \left| \frac{\mathcal{H}(\alpha_0 + i\tau)}{\mathcal{H}(\alpha_0 + i\tau, y)} \right| \frac{d\tau}{|\tau| + 1} \ll \frac{x^{\alpha_0} \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y)}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

Pour évaluer celle du terme principal, nous étendons le domaine d'intégration à la droite $\sigma = \alpha_0$ tout entière au prix d'une erreur

$$\ll R_5 := \int_{|\tau| > L} x^s (s-1)(\log y) \widehat{\rho}((s-1) \log y) \frac{ds}{s}.$$

La formule (III.5.50) de [Ten08], soit

$$(2.9) \quad s \widehat{\rho}(s) = 1 + O\left(\frac{1 + u\xi(u)}{s}\right) \quad (|\tau| > 1 + u\xi(u),$$

et la seconde formule de la moyenne fournissent alors, comme dans la dernière partie de la preuve du théorème III.6.10 de [Ten08],

$$R_5 \ll \frac{x^{\alpha_0}}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

En rassemblant les termes d'erreur successifs et en utilisant la formule (III.6.62) de [Ten08] sous la forme

$$(2.10) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(\alpha_0, y) \asymp \rho(u) e^{u\xi(u)} \sqrt{u} \log y,$$

nous obtenons

$$(2.11) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{x}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{s \widehat{\rho}(s) e^{us}}{s + \log y} ds + O\left(\frac{x\rho(u)}{L_{\varepsilon}(y)}\right).$$

Comme $s \widehat{\rho}(s)/(s + \log y)$ est la transformée de Laplace de

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\rho'(u-v)}{y^v} dv &= \frac{\rho'(u) - y/x}{\log y} - \frac{1}{\log y} \int_0^{\infty} \frac{\rho''(u-v)}{y^v \log y} dv \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{\rho'(u) - y/x}{\log y} \quad ((x, y) \in G_{\varepsilon}^*), \end{aligned}$$

nous obtenons bien (1.2) et (1.3).

ANNEXE B

Sur l'approximation lisse des indicatrices

Dans cette annexe, nous construisons une approximation lisse de l'indicatrice $1_{\mathcal{K}}$ d'un compact $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Utilisée dans la preuve du lemme 5.2 du chapitre 2 et dans le paragraphe 2.1.1 du chapitre 4, une telle construction est standard dans la littérature.

Théorème. *Soient $d \geq 1$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^d$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Il existe une famille $(\chi_{\mathcal{K}}^{(\varepsilon)})_{\varepsilon > 0}$ d'applications lisses de \mathbf{R}^d dans $[0, 1]$ satisfaisant, pour tout $\varepsilon > 0$, les propriétés suivantes :*

- la fonction $\chi_{\mathcal{K}}^{(\varepsilon)}$ est à support sur \mathcal{K} ;
- si $d(\mathbf{x}, \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}) := \inf \{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}\} > \varepsilon$ où d_2 désigne la distance euclidienne, alors $\chi_{\mathcal{K}}^{(\varepsilon)} = 1$;
- pour tout opérateur différentiel D d'ordre $i \geq 1$ et uniformément en $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, on a $D(\chi_{\mathcal{K}}^{(\varepsilon)})(\mathbf{x}) \ll_D \varepsilon^{-i}$.

DÉMONSTRATION. Définissons la suite de fonctions $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ par les formules

$$\gamma_1(\mathbf{x}) := \left(\int_{B_2(0,1)} \exp\left(-\frac{1}{1-\|\mathbf{t}\|_2^2}\right) d\mathbf{t} \right)^{-1} \times \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|\mathbf{x}\|_2^2}\right) & \text{si } \mathbf{x} \in B_2(0,1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $B_2(0,1)$ désigne la boule unité de \mathbf{R}^d pour la distance d_2 et $\gamma_k(\mathbf{x}) = \frac{\gamma_1(k\mathbf{x})}{\|\gamma_1(k \cdot)\|_{L^1}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$.

La suite $(\gamma_k)_k$ est régularisante :

- $\gamma_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$;
- le support de γ_k est inclus dans $B_2(0, 1/k)$ pour tout $k \geq 1$;
- $\|\gamma_k\|_{L^1} = 1$ pour tout $k \geq 1$.

Considérons la convolution $\chi_{\mathcal{K}}^{(1/k)} = 1_{\mathcal{K}} * \gamma_k$ avec

$$1_{\mathcal{K}} * \gamma_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{K}_k} \gamma_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

avec $\mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}_k := B_2(1, 1/k) + \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}$, de sorte que $\chi_{\mathcal{K}}^{(1/k)}$ soit à valeur dans $[0, 1]$ pour tout $k \geq 1$.

Soit $k \geq 1$ tel que \mathcal{K}_{2k} ne soit pas vide. La fonction $\chi_{\mathcal{K}}^{(1/2k)}$ est à support sur \mathcal{K} et vérifie $\chi_{\mathcal{K}}^{(1/2k)}(\mathbf{x}) = 1$ dès que $d(\mathbf{x}, \mathbf{R}^d \setminus \mathcal{K}) > 1/k$. Dans la mesure où γ_k est de classe \mathcal{C}^∞ , il s'ensuit que $\chi_{\mathcal{K}}^{(1/2k)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et, par dérivation de la convolution, que, pour tout opérateur différentiel D d'ordre $i \geq 1$, on a

$$D(\chi_{\mathcal{K}}^{(1/2k)})(\mathbf{x}) \ll_D k^i.$$

En prenant k suffisamment grand, on en déduit le résultat. □

Bibliographie

- [BBDT12] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, and G. Tenenbaum, *Friable values of binary forms*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 3, 639–667.
- [BH62] P. Bateman and R. Horn, *A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers*, Math. Comp. **16** (1962), 363–367.
- [BH65] ———, *Primes represented by irreducible polynomials in one variable*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 119–132.
- [BL] R. Barbulescu and A. Lachand, *Some mathematical remarks on the polynomial selection in NFS*, <http://arxiv.org/abs/1403.0184>.
- [Bom76] E. Bombieri, *The asymptotic sieve*, Rend. Accad. Naz. XL (5) **1/2** (1975/76), 243–269 (1977).
- [BR97] A. Balog and I. Ruzsa, *On an additive property of stable sets*, Sieve methods, exponential sums, and their applications in number theory (Cardiff, 1995), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 237, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 55–63.
- [Bro11] T. Browning, *Power-free values of polynomials*, Arch. Math. (Basel) **96** (2011), no. 2, 139–150.
- [BT98] M. Balazard and G. Tenenbaum, *Sur la répartition des valeurs de la fonction d’Euler*, Compositio Math. **110** (1998), no. 2, 239–250.
- [Buc37] A. A. Buchstab, *Asymptotic estimates of a general number-theoretic function*, Math. Sb. **2** (1937), 1239–1246.
- [Bue89] D. A. Buell, *Binary quadratic forms*, Springer-Verlag, New York, 1989, Classical theory and modern computations.
- [Cho44] S. Chowla, *There exists an infinity of 3-combinations of primes in $A. P.$* , Proc. Lahore Philos. Soc. **6** (1944), no. 2, 15–16.
- [Cho65] ———, *The Riemann hypothesis and Hilbert’s tenth problem*, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **38** (1965), 62–64.
- [CP05] R. Crandall and C. Pomerance, *Prime numbers, a computational perspective*, second ed., Springer, New York, 2005.
- [Dan99] S. Daniel, *On the divisor-sum problem for binary forms*, J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 107–129.
- [Dar96] C. Dartyge, *Entiers de la forme $n^2 + 1$ sans grand facteur premier*, Acta Math. Hungar. **72** (1996), no. 1-2, 1–34.
- [dB50] N. G. de Bruijn, *On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes*, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. **53** (1950), 803–812 = Indagationes Math. 12, 247–256 (1950).
- [dB66] ———, *On the number of positive integers $\leq x$ and free prime factors $> y$. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. **28** (1966), 239–247.
- [Ded78] R. Dedekind, *Über den zusammenhang zwischen der theorie der ideale und der höheren kongruenzen*, Abh. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen **23** (1878), 1–23.
- [Del59] H. Delange, *Sur des formules dues à Atle Selberg*, Bull. Sci. Math. (2) **83** (1959), 101–111.
- [Del71a] ———, *Sur des formules de Atle Selberg*, Acta Arith. **19** (1971), 105–146. (errata insert).
- [Del71b] F. Delmer, *Sur la somme de diviseurs $\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A849–A852.
- [Dic30] K. Dickman, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Ark. Math. Astr. Fys. **22** (1930), 1–14.
- [dlB98] R. de la Bretèche, *Sommes d’exponentielles et entiers sans grand facteur premier*, Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), no. 1, 39–78.
- [dlB99] ———, *Sommes sans grand facteur premier*, Acta Arith. **88** (1999), no. 1, 1–14.

- [dlBB06] R. de la Bretèche and T. D. Browning, *Sums of arithmetic functions over values of binary forms*, Acta Arith. **125** (2006), no. 3, 291–304.
- [dlBB10] ———, *Le problème des diviseurs pour des formes binaires de degré 4*, J. Reine Angew. Math. **646** (2010), 1–44.
- [dlBG14] R. de la Bretèche and A. Granville, *Densité des friables*, Bull. Soc. Math. France **142** (2014), no. 2, 303–348.
- [dlBT12] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum, *Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires*, Mathematika **58** (2012), no. 2, 290–304.
- [dlBT13] ———, *Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet*, J. Inst. Math. Jussieu **12** (2013), no. 4, 759–819.
- [dlVP97] C. de la Vallée-Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Brux. S. sc. **21 B** (1897), 251–368.
- [DMT01] C. Dartyge, G. Martin, and G. Tenenbaum, *Polynomial values free of large prime factors*, Period. Math. Hungar. **43** (2001), no. 1-2, 111–119.
- [Dra13a] S. Drappeau, *Répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques, et applications*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2013.
- [Dra13b] ———, *Sur les solutions friables de l'équation $a + b = c$* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **154** (2013), no. 3, 439–463.
- [Dra14] ———, *Sommes friables d'exponentielles et applications*, <http://arxiv.org/abs/1302.4318>, 2014, À paraître au Canad. J. Math.
- [FH] N. Frantzikinakis and B. Host, *Higher order fourier analysis of multiplicative functions and applications*, <http://arxiv.org/abs/1403.0945>.
- [FI97] É. Fouvry and H. Iwaniec, *Gaussian primes*, Acta Arith. **79** (1997), no. 3, 249–287.
- [FI98a] J. Friedlander and H. Iwaniec, *Asymptotic sieve for primes*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 3, 1041–1065.
- [FI98b] ———, *The polynomial $X^2 + Y^4$ captures its primes*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 3, 945–1040.
- [FI10] ———, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Fou10] É. Fouvry, *Friabilité des valeurs d'un polynôme*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), no. 5, 411–421.
- [FS11] É. Fouvry and I. Shparlinski, *Smooth shifted monomial products*, Publ. Math. Debrecen **79** (2011), no. 3-4, 423–432.
- [FT91] É. Fouvry and G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc. (3) **63** (1991), no. 3, 449–494.
- [Gow98] W. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 3, 529–551.
- [Gow01] ———, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 3, 465–588.
- [Gra08] A. Granville, *Smooth numbers : computational number theory and beyond*, Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, pp. 267–323.
- [Gre70] G. Greaves, *On the divisor-sum problem for binary cubic forms*, Acta Arith. **17** (1970), 1–28.
- [Gre71] ———, *Large prime factors of binary forms*, J. Number Theory **3** (1971), 35–59.
- [Gre92] ———, *Power-free values of binary forms*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **43** (1992), no. 169, 45–65.
- [Gro82] E. Grosswald, *Arithmetic progressions that consist only of primes*, J. Number Theory **14** (1982), no. 1, 9–31.
- [GT08a] B. Green and T. Tao, *An inverse theorem for the Gowers $U^3(G)$ norm*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **51** (2008), no. 1, 73–153.
- [GT08b] ———, *Quadratic uniformity of the Möbius function*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 6, 1863–1935.
- [GT10a] ———, *An arithmetic regularity lemma, an associated counting lemma, and applications*, An irregular mind, Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 21, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010, pp. 261–334.

-
- [GT10b] ———, *Linear equations in primes*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1753–1850.
- [GT12a] ———, *The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 541–566.
- [GT12b] ———, *The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 465–540.
- [GT14] ———, *On the quantitative distribution of polynomial nilsequences—erratum*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 3, 1175–1183.
- [GTZ11] B. Green, T. Tao, and T. Ziegler, *An inverse theorem for the Gowers U^4 -norm*, Glasg. Math. J. **53** (2011), no. 1, 1–50.
- [GTZ12] ———, *An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$ -norm*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1231–1372.
- [GW10] W. T. Gowers and J. Wolf, *The true complexity of a system of linear equations*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **100** (2010), no. 1, 155–176.
- [GW11] ———, *Linear forms and quadratic uniformity for functions on \mathbb{Z}_N* , J. Anal. Math. **115** (2011), 121–186.
- [Har] A. Harper, *Minor arcs, mean values, and restriction theory for exponential sums over smooth numbers*, <http://arxiv.org/abs/1408.1662>.
- [Har08] G. Harman, *On values of $n^2 + 1$ free of large prime factors*, Arch. Math. (Basel) **90** (2008), no. 3, 239–245.
- [HB88] D. R. Heath-Brown, *The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line*, Acta Arith. **49** (1988), no. 4, 323–339.
- [HB96] ———, *Acknowledgment of priority: “The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line”* [Acta Arith. **49** (1988), no. 4, 323–339; MR0937931 (89e :11071)], Acta Arith. **77** (1996), no. 4, 405.
- [HB01] ———, *Primes represented by $x^3 + 2y^3$* , Acta Math. **186** (2001), no. 1, 1–84.
- [HBM02] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz, *Primes represented by binary cubic forms*, Proc. London Math. Soc. (3) **84** (2002), no. 2, 257–288.
- [HBM04] ———, *On the representation of primes by cubic polynomials in two variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **88** (2004), no. 2, 289–312.
- [Hel] H. A. Helfgott, *The parity problem for irreducible cubic forms*, <http://arxiv.org/abs/math/0501177>.
- [Hel06] ———, *The parity problem for reducible cubic forms*, J. London Math. Soc. (2) **73** (2006), no. 2, 415–435.
- [Hil84] A. Hildebrand, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika **31** (1984), no. 2, 258–271 (1985).
- [Hil86] ———, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$* , J. Number Theory **22** (1986), no. 3, 289–307.
- [Hil89] ———, *On integer sets containing strings of consecutive integers*, Mathematika **36** (1989), no. 1, 60–70.
- [HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974, London Mathematical Society Monographs, No. 4.
- [HT93] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *Integers without large prime factors*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), no. 2, 411–484.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 107–135.
- [Hux81] M. N. Huxley, *A note on polynomial congruences*, Recent progress in analytic number theory, Vol. 1 (Durham, 1979), Academic Press, London, 1981, pp. 193–196.
- [Hux05] ———, *Exponential sums and the Riemann zeta function. V*, Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), no. 1, 1–41.
- [JR65] W. B. Jurkat and H.-E. Richert, *An improvement of Selberg’s sieve method. I*, Acta Arith. **11** (1965), 217–240.
- [Kau79] R. M. Kaufman, *Estimate of the Hecke L -functions on the half line*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **91** (1979), 40–51, 180–181, Analytic number theory and the theory of functions, 2.

- [Kra90] U. Krause, *Abschätzungen für die funktion $\Psi_K(x, y)$ in algebraischen Zahlkörpern.*, Manuscripta mathematica **69** (1990), no. 3, 319–332.
- [Lac14] A. Lachand, *Valeurs friables d’une forme quadratique et d’une forme linéaire*, Q. J. Math. (2014), 10.1093/qmath/hau029.
- [Lan89] B. Landreau, *A new proof of a theorem of van der Corput*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), no. 4, 366–368.
- [Leb07] P. Lebacque, *Generalised Mertens and Brauer-Siegel theorems*, Acta Arith. **130** (2007), no. 4, 333–350.
- [LS12] J. C. Lagarias and K. Soundararajan, *Counting smooth solutions to the equation $A + B = C$* , Proc. Lond. Math. Soc. (3) **104** (2012), no. 4, 770–798.
- [LT14] A. Lachand and G. Tenenbaum, *Notes sur les valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques*, Q. J. Math. (2014), 10.1093/qmath/hau026.
- [Mar02] G. Martin, *An asymptotic formula for the number of smooth values of a polynomial*, J. Number Theory **93** (2002), no. 2, 108–182.
- [Mar06] G. Marasingha, *On the representation of almost primes by pairs of quadratic forms*, Acta Arith. **124** (2006), no. 4, 327–355.
- [Mar10] ———, *Almost primes represented by binary forms*, J. Lond. Math. Soc. (2) **82** (2010), no. 2, 295–316.
- [Mat12a] L. Matthiesen, *Correlations of the divisor function*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **104** (2012), no. 4, 827–858.
- [Mat12b] ———, *Linear correlations amongst numbers represented by positive definite binary quadratic forms*, Acta Arith. **154** (2012), no. 3, 235–306.
- [Mat13] ———, *Correlations of representation functions of binary quadratic forms*, Acta Arith. **158** (2013), no. 3, 245–252.
- [Mit68] T. Mitsui, *On the prime ideal theorem*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 233–247.
- [Nag21] T. Nagell, *Généralisation d’un théorème de Tchebycheff*, J. Math. Appl. (8) **4** (1921), no. 4, 343–356.
- [Nar04] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, third ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Ore21] O. Ore, *Anzahl der Wurzeln höherer Kongruenzen*, Norsk Matematisk Tidsskrift **3** (1921), 63–66.
- [Pom82] C. Pomerance, *Analysis and comparison of some integer factoring algorithms*, Computational methods in number theory, Part I, Math. Centre Tracts, vol. 154, Math. Centrum, Amsterdam, 1982, pp. 89–139.
- [Pom08] ———, *Smooth numbers and the quadratic sieve*, Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, pp. 69–81.
- [Sai89] É. Saias, *Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier*, J. Number Theory **32** (1989), no. 1, 78–99.
- [Sam67] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Méthodes, Hermann, Paris, 1967.
- [Sel52] A. Selberg, *On elementary methods in primenumber-theory and their limitations*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, pp. 13–22.
- [Sel54] ———, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **18** (1954), 83–87.
- [Shi80] P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 161–170.
- [Sok68] A. V. Sokolovskii, *A theorem on the zeros of Dedekind’s zeta-function and the distance between “neighboring” prime ideals*, Acta Arith. **13** (1967/1968), 321–334.
- [Ste91] C. L. Stewart, *On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 4, 793–835.
- [Sze75] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.
- [Ten90a] G. Tenenbaum, *Sur un problème d’Erdős et Alladi*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 221–239.

- [Ten90b] ———, *Sur une question d'Erdős et Schinzel*, A tribute to Paul Erdős, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 405–443.
- [Ten99] ———, *Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius*, Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 1099–1129.
- [Ten08] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition ed., Échelles, Belin, 2008.
- [Vau97] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 125, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [vdC39] J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. **116** (1939), no. 1, 1–50.
- [Wal36] A. Walfisz, *Zur additiven Zahlentheorie. II*, Math. Z. **40** (1936), no. 1, 592–607.
- [Web99] H. Weber, *Lehrbuch der algebra*, vol. 2, F. Vieweg & Sohn, 1899.
- [Wu96] J. Wu, *A sharpening of effective formulas of Selberg-Delange type for some arithmetic functions on the semigroup G_K* , J. Number Theory **59** (1996), no. 1, 1–19.

Résumé – Un entier est dit y -friable si tous ses facteurs premiers n'excèdent pas y . Les valeurs friables de formes binaires interviennent de manière essentielle dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (NFS). Dans cette thèse, nous obtenons des formules asymptotiques pour le nombre de représentations des entiers friables par différentes familles de polynômes.

Nous considérons dans la première partie les formes binaires qui se décomposent comme produit d'une forme linéaire et d'une forme quadratique. Nous combinons pour cela le principe d'inclusion-exclusion à des idées issues de travaux sur la distribution multiplicative de certaines suites d'entiers représentés par des formes quadratiques développés par Fouvry et Iwaniec, puis Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum.

Dans un second temps, nous nous concentrons sur les valeurs friables de formes cubiques irréductibles. En adaptant les travaux de Heath-Brown et Moroz sur les nombres premiers représentés par de tels polynômes, nous obtenons des formules asymptotiques valides dans un vaste domaine de friabilité. Notre méthode permet également d'évaluer des moyennes sur les valeurs d'une forme cubique pour d'autres fonctions arithmétiques comprenant en particulier les fonctions de Möbius et de Liouville.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les corrélations de l'indicatrice des friables avec les nilsuites. En employant la méthode nilpotente de Green et Tao, nous en déduisons une formule pour le nombre de valeurs friables d'un produit de formes affines deux à deux affinement indépendantes.

Abstract – An integer is called y -friable if its largest prime factor does not exceed y . Friable values of binary forms play a central role in the integer factoring algorithm NFS (Number Field Sieve). In this thesis, we obtain some asymptotic formulas for the number of representations of friable integers by various classes of polynomials.

In the first part, we focus on binary forms which split as a product of a linear form and a quadratic form. To achieve this, we combine the inclusion-exclusion principle with ideas based on works of Fouvry and Iwaniec and Balog, Blomer, Dartyge and Tenenbaum related to the distribution of some sequences of integers represented by quadratic forms.

We then take a closer look at friable values of irreducible cubic forms. Extending some previous works of Heath-Brown and Moroz concerning primes represented by such polynomials, we provide some asymptotic formulas which hold in a large range of friability. With this method, we also evaluate some means over the values of an irreducible cubic form for other multiplicative functions including the Möbius function and the Liouville function.

In the last chapter, we investigate the correlations between nilsequences and the characteristic function of friable integers. By using the nilpotent method of Green and Tao, our work provides a formula for the number of friable integers represented by a product of affine forms such that any two forms are affinely independent.

Mots clés – Entiers friables, formes binaires, fonctions multiplicatives, méthodes de cribles, méthode nilpotente de Green et Tao, sommes de Type I et de Type II.

Keywords – Friable integers, binary forms, multiplicative functions, sieve methods, nilpotent method of Green and Tao, Type I and Type II sums.