Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus

Mokhtar Loukil

▶ **To cite this version:**

Mokhtar Loukil. Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus. Matière Condensée [cond-mat]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996. Français. NNT : 1996INPL015N . tel-01751159

HAL Id: tel-01751159
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751159

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

13600 10696

96 INPL 015 N

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

Laboratoire d'Energétique
et de Mécanique
Théorique et Appliquée

[M] 1996 LOUKIL, M.

THESE

présentée à
L'Institut National Polytechnique de Lorraine
pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE l' I.N.P.L.

Spécialité: Mécanique et Energétique
par

Mokhtar LOUKIL
Ingénieur E.N.I.S.

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

MODELISATION DES SURFACES DE PLASTICITE A PARTIR D'UNE APPROCHE DE LA THERMODYNAMIQUE DE LA RELAXATION DES MILIEUX CONTINUS

Soutenue publiquement le 25 Janvier 1996 devant le jury:

Président

H. LANCHON DUCAUQUIS	Professeur I.N.P.L. / E.N.S.E.M.

Rapporteurs

Y. MEIMON	Docteur Chargé de recherche Ingénieur en chef à l' I.F.P.
F. SIDOROFF	Professeur. Ecole Centrale de Lyon

Examinateurs

C. CUNAT	Professeur I.N.P.L. / E.N.S.E.M. - L.E.M.T.A. (Directeur de Thèse)
G. FERRON	Professeur Université de Metz
D. MARQUIS	Professeur E.N.S. Cachan

A mes parents et toute la famille

"So no logician would be satisfied with identifying a peanut as a camel because both have humps : he demands accessory agreement -that both can live a long time without water- for instance"

Charles FORT

Avant propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée associé au CNRS (URA 875) sous la direction scientifique de Monsieur le Professeur Christian CUNAT.

Je voudrais lui exprimer ici toute ma gratitude pour les nombreux conseils voire les enseignements dont il m'a fait bénéficier lorsque j'ai dû mettre en oeuvre la thermodynamique de la relaxation pour son application à la mécanique des matériaux. Ses compétences et son appui constant m'ont permis d'enrichir et d'approfondir mes connaissances.
Je le remercie également pour son engagement personnel soutenu lors de la phase finale de mon travail de thèse. En effet, il m'a accordé beaucoup de son temps au cours des ces derniers mois afin de me permettre de déposer à temps un dossier de candidature de Maître Assistant au Ministère de l'enseignement supérieur Tunisienne.

Je remercie vivement Monsieur Yves MEIMON, Ingénieur Responsable de Recherche à l'Institut Français de Pétrole, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail et à l'activité de l'équipe. Sa responsabilité de rapporteur en est un témoignage. Le contenu actuel du mémoire porte la trace de nombreuses discussions scientifiques qu'il a eu avec notre groupe de recherche.

Je remercie également avec force Monsieur François SIDOROFF, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon pour l'intérêt et la confiance qu'il nous a manifesté en acceptant d'être rapporteur de ce mémoire. Son regard de spécialiste en modélisation du comportement mécanique et ses remarques sont précieux pour la suite à donner à ce travail.

Je voudrais dire combien je suis sensible à l'honneur que me fait Madame Hélène DUCAUQUIS Professeur à l'INPL en acceptant de participer à ma soutenance et de présider ce jury.

Je prie Monsieur Didier MARQUIS, Professeur à l'école Normale Supérieure de Cachan d'accepter ce témoignage de reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en faisant partie du jury. Grâce à son accord les liens ont commencé à se tisser entre nos deux laboratoires notamment à propos de la confrontation entre expériences et simulations des chargements cycliques à séquences complexes sous l'impulsion d'Evelyne TOUSSAINT et Sylvain CALLOCH à Cachan.

Je suis également reconnaissant à Monsieur le Professeur Gérard FERRON de l'université de Metz d'avoir accepté de juger mon travail et d'apporter sa compétence pour enrichir la discussion.

Je remercie tous les membres de l'équipe, en particulier Jean François SCHMITT, Maître de Conférence à l'INPL, Evelyne TOUSSAINT et Pascale MARCERON pour leurs remarques concernant le manuscrit.

J'associe à ces remerciements tous les membres du laboratoire qu'il me soit permis de citer tout particulièrement Madame Marie Hélène ZOBERMAN pour sa gentillesse, sa disponibilité et son aide précieuse.

Enfin, ma dernière pensée va à tous mes amis, je citerai tout particulièrement Béatrice PAYSANT LE ROUX Ahmed AHAROUNE et Azzedine HADDAD.

Table des matières

INTRODUCTION ---------- 3

CHAPITRE I PRESENTATION DU PROBLEME

INTRODUCTION ---------- 10

1 DESCRIPTION DES ESSAIS UNIAXIAUX ---------- 11

1-1 Essai de traction/compression 11
1-1-1 Traction 11
1-1-2 Compression 13
1-1-3 Flexion 13

1-2 Essai de cisaillement 13
1-2-1 Cisaillement pur 13
1-2-2 Torsion 14

1-3 Séquence de chargements cycliques 14

2 ESSAIS MULTIAXIAUX ---------- 16

2-1 Choix de la représentation des contraintes limites 16

2-2 A propos des techniques expérimentales utilisées dans les essais multiaxiaux 19

3 PRINCIPES DE BASE DES MODELISATIONS DES SURFACES LIMITES DE PLASTICITE ---------- 19

3-1 Généralités 19

3-2 Quelques critères pour décrire les surfaces de charge initiales 20
3-2-1 Critère de TRESCA (1864) 21
3-2-2 Critère de BELTRAMI (1885) ou de l'énergie maximale 21
3-2-3 Critère de VON MISES (1913) 21
3-2-4 Critères de type DRUCKER 22

3-3 A propos de l'écrouissage 23
3-3-1 Ecrouissage cinématique [PRAGER 1949] 23
3-3-2 Ecrouissage isotrope 23

3-4 Modélisation de la distorsion des surfaces de charge 24
① Modèle de EDELMAN DRUCKER 24
② Modèle de BALTOV SAWCZUK 24
③ Modèle de YOSHIMURA 25
④ Modèle de MAZILU et MEYERS 25
⑤ Modèle de ROUSSET 26
⑥ Modèle de GUPTA et MEYERS 26

4 CONCLUSION ---------- 27

CHAPITRE II PRESENTATION DU MODELE DNLR

1- INTRODUCTION ---------- 33

2- BASES THEORIQUES DU MODELE DNLR ---------- 34

2-1 Rappels sur la formulation de GIBBS généralisée 34

2-2 Potentiels thermodynamiques et équations constitutives 36

2-3 Thermodynamique des processus irréversibles linéaire 38

↳ Hypothèse de linéarité thermodynamique 38

↳ Hypothèse de linéarité cinétique 39

2-4 Processus intrinsèquement non-linéaires 41

2-5 Modélisation des lois constitutives 42

2-6 Analyse des temps de relaxation 44

2-6-1 Temps de relaxation au voisinage de l'équilibre 44

2-6-2 Non-linéarité de nature coopérative 46

2-6-3 Effet de la température 47

2-7 Forme du spectre de relaxation 47

2-7-1 Existence de la multiplicité des processus 47

2-7-2 Distribution des temps de relaxation 49

3 ECRITURE DU MODELE DNLR POUR LES CHARGEMENTS A DEFORMATION IMPOSEE ---------- 51

3-1 Ecriture matricielle des lois constitutives pour des essais mécaniques 52

3-2 Ecriture du formalisme pour conduire un essai de traction ou un essai de torsion 53

3-3 Hypothèses sur les matrices de stabilité de TISZA pour les états relaxés et non relaxés 53

3-3-1 Généralités 53

3-3-2 Etat non relaxé 54

3-3-3 Etat relaxé 55

3-3-3-1 Etat relaxé obéissant à la loi de HOOKE 55

3-3-3-2 Etat relaxé n'obéissant pas à la loi de HOOKE 55

3-4 Modélisation des temps de relaxation 56

3-4-1 Temps de relaxation de référence au voisinage de l'équilibre thermodynamique vrai 56

3-4-2 Modélisation des non-linéarités temporelles (effets coopératifs) 56

3-4-2-1 Approximation d'ordre 1 par rapport à l'écart à l'équilibre des observables mises en jeu par la perturbation imposée 57

3-4-2-1-1 Couplage en contrainte 57

3-4-2-1-2 Couplage entropique 57

3-4-2-1-3 Couplage en énergie de déformation cumulée 58

3-4-2-2 Couplage non-linéaire : prise en compte de la saturation des durcissements et adoucissements cycliques 58

3-4-3 Discussion à propos de ces paramètres coopératifs 58

❑ Analyse de K_σ 59

❑ Analyse de K_W 59

❑ Analyse de K_S 61

4 COMPARAISON ENTRE LE MODELE DNLR ET QUELQUES APPROCHES USUELLES UTILISEES EN RHEOLOGIE DES SOLIDES A L'AIDE DES VARIABLES INTERNES ---------- 61

4-1 Choix du potentiel thermodynamique 61
4-1-1 Démarche DNLR 61
4-1-2 Liens avec la démarche usuelle 63

4-2 Conclusion 66
↳ Modélisation du potentiel thermodynamique F en l'absence de dissipation 66
↳ Modélisation de la dissipation 67

5- CONCLUSION ---------- 69

CHAPITRE III COMPORTEMENT QUALITATIF DU MODELE POUR QUELQUES CHARGEMENTS UNIAXIAUX

1- INTRODUCTION ---------- 74

2- COMPORTEMENT DU MODELE DNLR POUR DES CHARGEMENTS UNIAXIAUX CONTINUS ---------- 74

2-1 Ecriture du modèle DNLR pour un essai de traction uniaxiale (rappels) 74

2-2 Etude de l'influence des paramètres du modèle sur un essai de traction uniaxiale lorsque la contrainte à l'état relaxé obéit à la loi de HOOKE 75

2-3 Prise en compte d'un comportement non-hookéen de la contrainte pour décrire l'état relaxé (cas des polymères) 78

2-4 Simulation du crochet de traction 81

3 COMPORTEMENT QUALITATIF DU MODELE POUR QUELQUES HISTOIRES DE CHARGEMENT CYCLIQUE ---------- 83

3-1 Chargement cyclique entre deux valeurs de déformation ou de contrainte non symétrique 83

3-2 Effet BAUSCHINGER 84

3-3 Modélisation du phénomène de durcissement ou d'adoucissement lors d'un chargement cyclique 85

4- PLASTICITE ET VISCOPLASTICITE 87

5- CONCLUSION ---------- 89

CHAPITRE IV MODELISATION QUALITATIVE DES SURFACES DE PLASTICITE

1- INTRODUCTION ---------- 95

2- MODELISATION DE LA PLASTICITE TRIDIMENSIONNELLE ---------- 95

↳ Distribution des processus 96

↳ Matrice de stabilité de TIZSA 97

↳ Expression de la non-linéarité temporelle 98

❶ L'indépendance des processus 99

❷ La formulation énergétique 99

3- CALCUL DES SURFACES DE CHARGE INITIALES ---------- 100

3-1 Description des trajets de chargement 100

3-1-1 Chargement proportionnel 100

3-1-2 Chargement séquentiel (chargement non proportionnel) 100

3-2 Méthodes de détection de la limite élastique 101

3-2-1 Méthode de limite de proportionnalité (LP) 102

3-2-2 Méthode d'extrapolation arrière (EA) 102

3-2-3 Méthode OFFSET (OF) 102

3-3 Surface de charge initiale : comparaison entre les prévisions du modèle et le critère de VON MISES 103

3-3-1 Influence du couple $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$ pour des valeurs élevées de $(\Delta F^{+,r}_{max})$ 103

3-3-2 Influence de l'énergie d'activation maximale sur la surface de charge obtenue 107

3-3-2-1 Etude du couple $(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -250\ cm^3/Mol\ at)$ 107

3-3-2-1-1 Chargement séquentiel 107

3-3-2-1-2 Chargement proportionnel 109

3-3-2-2 Etude du couple $(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$ 110

3-3-2-2-1 Chargement séquentiel 110

3-3-2-2-2 Chargement proportionnel 111

3-3-2-2-3 Comparaison des deux trajets de chargement 112

3-3-3 "Compétition" entre la valeur de l'offset et l'énergie d'activation maximale pour trouver les surfaces de charge à caractère anguleux : Etude comparative des couples $(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$ et $(\Delta F^{+,r}_{max} = 80000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$ 114

3-4 Synthèse et discussion 115

3-5 Influence du coefficient de pression hydrostatique 121

3-5-1 Influence de x 121

3-5-2 Influence de l'offset 122

3-5-3 Comparaison en représentation normée entre surface de charge simulée et quelques résultats expérimentaux propres aux polymères 123

4 SURFACES DE PLASTICITE ET CHARGEMENTS COMPLEXES ---------- 124

4-1 Comment déterminer l'évolution des surfaces de charge 124

4-2 Etude de l'influence des paramètres sur l'écrouissage cinématique et isotrope 125

4-2-1 Décharge totale 126

4-2-1-1 Rôle du couple $(E^r ; K_\sigma)$ 126

4-2-1-2 Rôle spécifique de K_σ sur la distorsion des surfaces de charge 130

4-2-1-3 Rôle de l'offset sur l'observation des distorsions 132

4-2-2 Décharge partielle à l'intérieur du nouveau domaine élastique 132

4-2-3 Conclusion 134

4-3 Modélisation de l'évolution de la surface de charge pour quelques histoires de chargements complexes 135

4-3-1 Préchargement en torsion 135

4-3-2 Préchargement en traction-torsion 136

4-3-3 Effet de la déformation plastique cumulée 137

4-4 Etude de la surface de charge associée à chaque processus 141

4-4-1 Surface de charge initiale 141

4-4-2 Etude de l'évolution des contraintes relatives à quelques processus lors de la détermination de la limite élastique en traction et en compression après prédéformation 145

4-4-2-1 Analyse des contraintes associées à quelques processus pour le chargement "point n°11" 146

4-4-2-2 Représentation des contraintes associées à quelques processus pour le chargement point n°1 149

4-4-3 Analyse des surfaces de charge rencontrées pour les processus j précédents pour une prédéformation en traction 151

4-4-4 Représentation de l'état des contraintes internes lorsque la surface de charge macroscopique est atteinte 154

4-4-5 Représentation du spectre de relaxation : analyse de quelques états limites particuliers choisis sur la surface de charge 156

4-4-5-1 Cas de la traction-torsion 156

4-4-5-2 Cas de la bitraction 158

5- CONCLUSION ---------- 160

CHAPITRE V OPTIMISATION DES PARAMETRES DU MODELE DNLR

1- INTRODUCTION ---------- 166

2- METHODE D'IDENTIFICATION DES PROCESSUS ---------- 167

2-1 Généralités 167

2-2 Procédure d'identification 168

3- METHODE D'OPTIMISATION ---------- 168

3-1 Généralités 169

3-1-1 Sensibilité 169

3-1-2 Influence du bruit d'acquisition 171

3-2 Méthodes directes 171

3-2-1 Définition de l'unimodalité 172

3-2-1 Principe des méthodes de recherche par essais successifs 172

3-3 Méthodes interactives ou des gradients 173
3-3-1 Généralités sur les méthodes des gradients 173
3-3-2 Conclusion 174

3-4 Remarques 174

4 METHODE DE GAUSS NEWTON ---------- 175

4-1 Introduction 175

4-2 Mise en oeuvre de la méthode 176

5 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DNLR ---------- 178

5-1 Identification sur des pseudo-expériences 178
5-1-1 Identification des paramètres de départ sur les données non bruitées 179
5-1-2 Optimisation à partir de données bruitées pour le chargement seul 180
5-1-3 Optimisation à partir de données bruitées pour la charge/décharge 180

5-2 Essai de traction uniaxiale sur l'acier inoxydable A316 182

5-3 Essai de charge-décharge sur un alliage d'aluminium (AU4G) 182
5-3-1 Identification sur la charge-décharge 182
5-3-2 Identification sur la charge 183
5-3-3 Conséquence sur la détermination des surfaces de charge et leur évolution 184

5-4 Modélisation de quelques histoires thermomécaniques réalisées sur le PMMA 187

5-5 Essai de traction et de cisaillement sur le PEEK 189

5-6 Essai de traction sur l'IN100 à plusieurs vitesses de déformation 191

6 CONCLUSION ---------- 192

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 195

ANNEXE A

A-1 Formulation des contraintes en fonction des énergies libres et des invariants de la déformation 202

A-2 Quelques expressions des énergies libres de déformation f des matériaux incompressibles 205
A-2-1 Approche phénoménologique 205
A-2-2 Approche thermo-statistique 206
A-2-2-1 Entropie d'une chaîne macromoléculaire et sa variation avec la déformation 206
A-2-2-2 Calcul de l'entropie du réseau 207

A-3 Relation contrainte-déformation dans quelques cas particuliers 208
A-3-1 Traction uniaxiale 208
A-3-2 Cisaillement simple 209

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES ---------- 213

Introduction

INTRODUCTION

Depuis quelques années déjà, sous l'impulsion de travaux antérieurs de Ch. CUNAT, une équipe de recherche du LEMTA développe une modélisation générale des lois de comportement pour la mécanique des solides. L'outil de base utilisé repose sur la thermodynamique de la relaxation des milieux continus. On admet que le comportement local est déterminé par un potentiel thermodynamique $\psi(\underline{\gamma} ; \underline{z})$, où $\underline{\gamma}$ représente le vecteur des variables d'état qui contrôlent ψ et $\underline{z}$ le vecteur des variables de dissipation qui gouverne l'irréversibilité. Cette hypothèse constitue, en fait, une double généralisation de l'équation de GIBBS, comme le souligne MÜNSTER (1966) :

① D'une part, elle porte sur l'acceptation d'une définition locale du potentiel thermodynamique ; c'est une théorie des champs qui trouve probablement sa limite lorsque les gradients locaux sur $\underline{\gamma}$ deviennent trop importants pour pouvoir considérer un volume élémentaire représentatif d'une perturbation moyenne $\langle \underline{\gamma}(\underline{x}) \rangle$.

② D'autre part, elle est fondée sur l'idée qu'un milieu hors équilibre peut être décrit en terme de potentiel thermodynamique à l'aide de variables internes $(\underline{z})$ qui ne sont pas des variables d'état.

La difficulté essentielle réside dans la définition et dans la représentation de ces variables dissipatives. Pour contourner cette difficulté majeure, CUNAT propose de recourir à la théorie des fluctuations : selon cette théorie mise en oeuvre par PRIGOGINE (1968), toute fluctuation est un état hors équilibre. Il retourne spontanément vers l'équilibre en empruntant simultanément différents chemins. La production d'entropie est la même quel que soit le chemin de régression emprunté.

L'idée de base, retenue pour établir les lois de comportement, est que toute perturbation imposée, par les variables d'état $\underline{\gamma}$, crée un écart instantané à l'équilibre thermodynamique. Cet état peut être considéré comme une fluctuation par rapport à l'équilibre final qui va s'établir spontanément.

Au voisinage de l'équilibre, la thermodynamique des processus irréversibles linéaires est applicable. VON MEIXNER (1949) a montré que, dans ces conditions, il était toujours possible de choisir un changement de base des variables de dissipation qui découple les processus entre eux (de manière comparable à l'analyse modale). CUNAT a alors montré que la théorie des fluctuations permet d'obtenir la distribution initiale du spectre de relaxation qui

lie le poids d'un processus et le temps de relaxation qui lui est associé. Ainsi, la connaissance d'un seul temps de relaxation (un seul paramètre) permettra-t-elle de définir une distribution continue !

L'extension aux situations loin de l'équilibre est obtenue en introduisant une dépendance temporelle des temps de relaxation. Le lien avec la connaissance détaillée des mécanismes microphysiques est établi en exprimant les temps de relaxation grâce à la théorie de l'état transitoire activé.

Le formalisme ainsi construit a été baptisé par CUNAT modèle DNLR (Distribution of Non Linear Relaxations). Il a déjà été appliqué antérieurement avec succès à des phénomènes variés empruntés aux domaines du magnétisme, de la calorimétrie ou de l'électricité, par exemple.

Le travail actuel du groupe porte essentiellement sur les propriétés mécaniques. Récemment Z. AYADI a soutenu un mémoire de thèse sur le fluage de matériaux polymères thermoplastiques, thermodurcissables et semi-cristallins. Prochainement, A. HADDAD présentera un travail sur la modélisation du comportement viscoélastique de polymères sous sollicitations harmoniques. Des travaux visant à établir des ponts avec les méthodes d'homogénéisation de type auto-cohérente sont en cours [E. TOUSSAINT], des réflexions visant à expliquer les corrélations observées entre essais de traction et de fluage sur les polymères sont entreprises. En effet, l'utilisation des transformées de LEGENDRE permet de choisir aisément le potentiel thermodynamique adapté. Par exemple à température et contrainte imposées, on utilise l'entalphie libre de GIBBS $G\left(T, \underline{\underline{\sigma}} ; \underline{z}\right)$. Dans ces conditions, les temps de relaxation définis par la thermodynamique irréversible le sont à T et $\underline{\underline{\sigma}}$ constantes $\left(\tau_{T,\underline{\underline{\sigma}}}\right)$. Pour les essais à déformation imposée et à température constante, on utilise l'énergie libre de HELMHOLTZ $F\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}} ; \underline{z}\right)$. Les temps de relaxation seront alors définis à T et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ constants $\left(\tau_{T,\underline{\underline{\varepsilon}}}\right)$. Dans ces conditions, le passage de l'un à l'autre n'est pas forcément évident.

Pour notre part, nous avons consacré notre travail à la modélisation d'essais à déformations imposées. Le potentiel $F\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}} ; \underline{z}\right)$ sera donc le potentiel le plus commode pour présenter le formalisme.

❶ A l'évidence, un de nos objectifs est d'établir la validité du modèle DNLR, et de la stratégie sous-jacente, pour décrire les comportements plastiques ou viscoplastiques. Le formalisme ne faisant aucune distinction a priori entre ces deux comportements, nous utiliserons souvent le mot de plasticité de manière abusive tout au long de ce travail.

❷ Un autre objectif, tout aussi ambitieux, est de proposer une description de la plasticité ne faisant pas appel à la notion de seuil, dont on sait bien expérimentalement qu'elle est étroitement liée aux exigences de l'observation. En conséquence, nous ne pouvions définir a priori la forme des surfaces de charge de même que la règle de l'écoulement plastique qui repose sur une hypothèse de normalité par rapport à cette surface de charge. Cependant, nous devions retrouver de manière raisonnable, les critères tels que ceux de VON MISES ou de TRESCA par exemple, puisque les expérimentateurs les ont souvent approximativement vérifiés pour les surfaces de charge initiales.

❸ A côté de cet objectif, nous souhaitions développer une modélisation qui soit apte à prévoir les évolutions des surfaces de plasticité afin de pouvoir aborder ultérieurement les problèmes de mise en forme. Un autre challenge se posait alors, puisqu'à notre connaissance peu de modèles phénoménologiques prévoient a priori la distorsion des surfaces de charge. En général, les expériences conduisent les théoriciens à introduire de nouveaux paramètres pour reproduire les observations. Par ailleurs, les problèmes de mise en forme nécessitent de prendre en compte des grandes déformations et l'objectivité des lois de comportement devient primordiale. En fait, la nature même du formalisme thermodynamique proposé conduit directement à des lois objectives dès lors que l'on travaille en variables de Lagrange réactualisées.

Le mémoire s'articule donc en cinq chapitres :

- ***Dans le chapitre I,*** intitulé "présentation du problème", nous collectons quelques expériences types, tirées de la littérature, afin de rappeler les comportements observés, que toute modélisation efficace doit prévoir que ce soit pour des chargements uniaxiaux ou multiaxiaux.
  Dans ce chapitre, nous passons également en revue quelques uns des axes principaux de recherche sur lesquels s'articulent de nombreuses modélisations des surfaces de plasticité.

- ***Dans le chapitre II,*** nous rappelons les bases thermodynamiques du modèle DNLR. Nous décrivons son application à notre problème. En particulier, nous montrons comment nous modélisons le comportement de type hyperélastique rencontré pour les grandes déformations des polymères. Nous présentons également la formulation des non-linéarités temporelles proposées dans ce travail. Enfin pour clore ce chapitre, nous dressons une comparaison entre notre approche et l'approche usuelle en variables internes. Le formalisme exposé dans l'ouvrage de LEMAITRE et CHABOCHE sert de support à cette comparaison.

- ***Dans le chapitre III,*** nous vérifions l'aptitude de notre modèle à prévoir les principaux faits expérimentaux caractéristiques des essais unidirectionnels (écrouissage, crochet de traction, durcissement hyperélastique des polymères, effet BAUSCHINGER, rochet, durcissement ou adoucissement cyclique). De même nous vérifions que plasticité et viscoplasticité peuvent être décrites par le même formalisme.

- ***Dans le chapitre IV,*** nous construisons les surfaces de plasticité pour une grande variété de chemins et de séquences de chargement. Nous vérifions que le modèle conduit à des résultats cohérents avec les expériences présentées au chapitre I. Les distorsions des surfaces limites observées dans la littérature pour des préchargements préalables peuvent être prévues sans difficulté par le modèle ; l'effet de cumul des histoires est également bien reproduit.
  Enfin, nous analysons le comportement de quelques uns des processus indépendants les uns des autres. Le rôle de leur distribution sur l'échelle de temps explique les distorsions observées pour les faibles offset. On comprend également alors pourquoi, aux valeurs élevées des offset conventionnels, ces distorsions sont "gommées".

- ***Le chapitre V*** constitue une ouverture vers l'identification des paramètres du modèle. Après un bref rappel de la stratégie numérique utilisée, nous soulignons sur des exemples concrets la difficulté d'obtenir les paramètres du modèle à partir d'un simple essai de traction. Par exemple, sur des "pseudo-données" expérimentales "bruitées" aléatoirement, on ne retrouve qu'approximativement les valeurs choisies pour construire ces "données". Une étude est menée sur les données relatives à l'AU4G étudié par ROUSSET (1985). Les informations de base concernent le chargement uniaxial et la décharge opérée à partir de $\varepsilon \cong 1.6\ \%$.
  Deux optimisations sont menées, l'une avec le chargement seul et l'autre avec la charge et décharge. Dans les deux cas, les données primaires sont bien restituées par le modèle, mais la prévision des surfaces de charge reste insuffisante. Toutefois, un meilleur accord est observé lorsque la banque de données est plus riche. Soulignons que CAILLETAUD (1992) a montré la nécessité de connaître le durcissement cyclique pour pouvoir prédire convenablement les surfaces de plasticité. Nous ne disposons pas de ces données.

Enfin, pour clore ce travail nous présentons une conclusion ouvrant sur quelques perspectives de travail.

Chapitre I

PRESENTATION DU PROBLEME

Résumé

L'objectif de ce chapitre est double. D'une part, rappeler les différents types d'essais mécaniques expérimentaux et les comportements qu'ils mettent en évidence (toute modélisation devra être apte à les décrire) et d'autre part rappeler les bases théoriques couramment admises pour construire des modélisations. La conclusion de cette introduction permet de dégager l'axe principal de ce travail.

INTRODUCTION ----------10

1 DESCRIPTION DES ESSAIS UNIAXIAUX----------11

1-1 Essai de traction/compression 11
1-1-1 Traction 13
1-1-2 Compression 13
1-1-3 Flexion 13

1-2 Essai de cisaillement 13
1-2-1 Cisaillement pur 13
1-2-2 Torsion 14

1-3 Séquence de chargements cycliques 14

2 ESSAIS MULTIAXIAUX 16

2-1 Choix de la représentation des contraintes limites 16

2-2 A propos des techniques expérimentales utilisées dans les essais multiaxiaux 19

3 PRINCIPES DE BASE DES MODELISATIONS DES SURFACES LIMITES DE PLASTICITE ----------19

3-1 Généralités 20

3-2 Quelques critères pour décrire les surfaces de charge initiales 21
3-2-1 Critère de TRESCA (1864) 21
3-2-2 Critère de BELTRAMI (1885) ou de l'énergie maximale 21
3-2-3 Critère de VON MISES (1913) 22
3-2-4 Critères de type DRUCKER 23

3-3 A propos de l'écrouissage 23
3-3-1 Ecrouissage cinématique [PRAGER 1949] 23
3-3-2 Ecrouissage isotrope 24

3-4 Modélisation de la distorsion des surfaces de charge 24
① Modèle de EDELMAN DRUCKER 24
② Modèle de BALTOV SAWCZUK 24
③ Modèle de YOSHIMURA 25
④ Modèle de MAZILU et MEYERS 25
⑤ Modèle de ROUSSET 26
⑥ Modèle de GUPTA et MEYERS 26

4 CONCLUSION----------27

INTRODUCTION

Le comportement mécanique des métaux a été largement étudié. Dès le début du vingtième siècle, un grand nombre de travaux expérimentaux porte sur le comportement plastique des métaux. Des expériences systématiques sont conduites pour des chargements mécaniques [LODE 1927 ; ROS et EICHINGER 1928 ; TAYLOR et QUINNEY 1931 ; PHILLIPS 1974]. IKEGAMI (1975 et 1976) à mené une revue chronologique détaillée sur ces expériences de plasticité .

La réponse élasto-plastique de nombreux matériaux soumis à une déformation uniaxiale présente généralement un durcissement par écrouissage et un effet dit BAUSCHINGER. Les études de plasticité ont commencé par la détermination de la limite élastique. Puis des théories ont été développées pour les chargements non proportionnels [GUEST 1900 ; MOON 1976].

En 1928, VON MISES généralisait la théorie de l'écoulement plastique par l'emploi d'un potentiel de déformation plastique [MISES 1928]. Quelques années plus tard, DRUCKER proposait le concept du potentiel thermodynamique de plasticité et la règle d'écoulement associée [DRUCKER 1951]. Dans le même temps, HILL (1950) proposait une formulation comparable de l'écoulement plastique. Ces résultats ont ouvert de grandes possibilités pour développer des théories sur la plasticité.

Ces théories nécessitent toujours l'introduction de quelques hypothèses physiques. La vérification de ces hypothèses passe par une confrontation avec la réalité. En conséquence, la modélisation des lois de comportement doit suivre deux objectifs :

- Le premier est de déterminer la forme explicite des relations de plasticité entre déformation et contrainte.

- Le second consiste à vérifier les hypothèses physiques retenues lors de la modélisation.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse de quelques expériences uniaxiales ou multiaxiales. Cette étude permet de mettre en évidence la diversité et la richesse du comportement des matériaux. En particulier, nous détaillons les études expérimentales relatives aux surfaces de charge puisque l'objectif principal de ce travail est de proposer un outil performant pour les décrire et les prévoir lors des histoires mécaniques complexes.

La deuxième partie est consacrée à une étude bibliographique de quelques modèles proposés dans la littérature pour décrire les surfaces de charge.

1 DESCRIPTION DES ESSAIS UNIAXIAUX

1-1 Essai de traction/compression

1-1-1 Traction

L'essai de traction consiste à appliquer sur une éprouvette normalisée une déformation à vitesse imposée. Il existe plusieurs techniques expérimentales pour mener un tel essai, elles se différencient essentiellement par la définition des variables utilisées. Par exemple on enregistre $\frac{F}{S_0} = f\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)$ avec S_0 : section initiale et l_0 : longueur initiale, on parle de contraintes et déformations nominales. En fait on utilise ici une représentation lagrangienne pour les déformations et une représentation mixte EULER/LAGRANGE en contrainte (composante non symétrique du tenseur de BOUSSINESQ ou de PIOLA KIRCHOFF n°1). On préfère parfois utiliser des variables eulériennes pour les contraintes (tenseur de CAUCHY) et pour les déformations $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$. En grandes déformations, on utilise de préférence la définition logarithmique de la déformation $\ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$. On parle de contraintes vraies et déformations vraies.

La réponse peut être décomposée en deux domaines distincts. Un domaine élastique caractérisé par une déformation réversible suivi d'un domaine plastique caractérisé par une déformation irréversible. La limite entre ces domaines (seuil) est difficile à détecter. On définit souvent une limite conventionnelle d'élasticité $\sigma_{e_{02\%}}$, c'est la limite élastique correspondant à une déformation permanente de 0.2°/₀ (appelée OFFSET). Il est possible de déterminer cette limite en chargeant/déchargeant successivement le matériau jusqu'à l'apparition d'une déformation résiduelle.

Cette limite d'élasticité n'est pas une constante intrinsèque du matériau. En effet, une simple décharge, après un préchargement en domaine plastique, montre son évolution : le matériau devient élastique là où il était plastique, c'est le phénomène d'écrouissage, notion introduite par PRAGER (1949). La figure 1 illustre ce durcissement par écrouissage pour un alliage AS5U3 [BELHEDI (1992)].

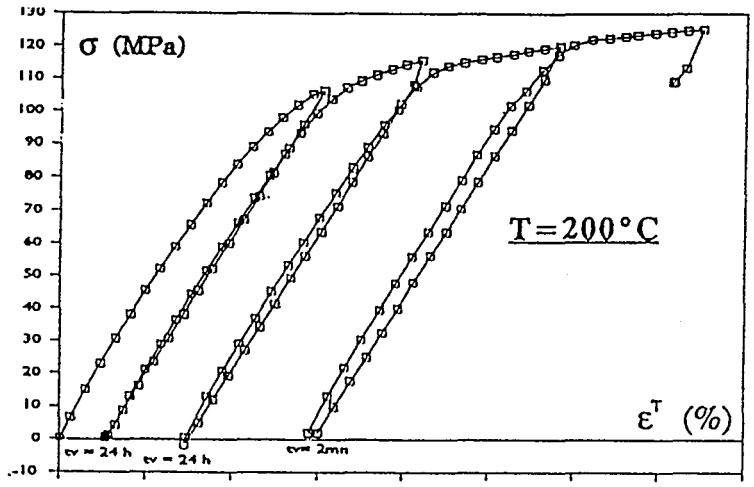


Figure 1: Mise en évidence du durcissement par écrouissage [BELHEDI 1992].

Généralement, la courbe de traction d'un polymère diffère de celle d'un métal. En effet, elle peut présenter un adoucissement plus ou moins important de la contrainte au-delà de la limite élastique après la manifestation éventuelle d'un crochet de traction. En grandes déformations, un durcissement de type hyperélastique peut se manifester. La figure 2 présente le comportement du PMMA.

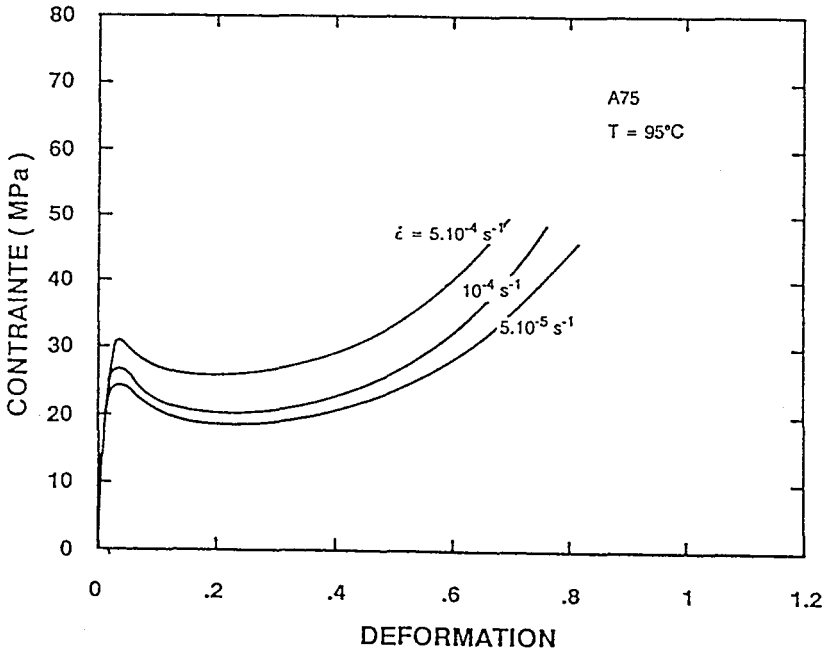


Figure 2 : Comportement en traction du PMMA à 95°C pour différentes vitesses de déformation [SOUAHI 1992].

La courbe réponse $\sigma(\varepsilon)$ n'est pas une caractéristique intrinsèque du matériau, elle est sensible à divers facteurs comme la vitesse de chargement ou la température par exemple.

1-1-2 Compression

Dans le cas des matériaux très sensibles aux concentrations de contraintes (béton, céramique,...), on a recourt à un essai de compression. La plus grande difficulté de ce genre d'essai est le risque de flambement. Une condition s'impose sur le rapport entre longueur et section de l'éprouvette. En conséquence, la lubrification des faces d'appui joue un rôle important. En effet, l'éprouvette peut prendre la forme d'un tonneau et les contraintes ne sont alors plus uniformes [KUHN et LEE 1971 et 1973].

1-1-3 Flexion

C'est un essai classique qui permet de remonter aux contraintes normales. Il est assez rarement utilisé pour l'étude des surfaces de plasticité, probablement parce que le dépouillement des données est complexe. En effet, les contraintes ne sont plus du tout uniformes dans une section droite donnée.

1-2 Essai de cisaillement

1-2-1 Cisaillement pur

Ce type d'essai permet d'obtenir un chemin de déformation différent de celui de la traction/compression. En ce sens, il favorise le glissement plastique sur un plan unique et ne produit que de faibles contraintes hydrostatiques [G'SELL et al 1983]. Néanmoins, il faut veiller à éviter le flambement élastique ou plastique en choisissant judicieusement l'éprouvette et le système de montage.

D'autre part, le rapport longueur/largeur de cisaillement doit être suffisamment grand afin de minimiser les effets de bord (SOUAHI 1992 ; DAHOUN 1992). Nous avons souligné que certains matériaux présentent un durcissement "accéléré" en traction. La figure 3 montre que ce phénomène est moins prononcé en cisaillement.

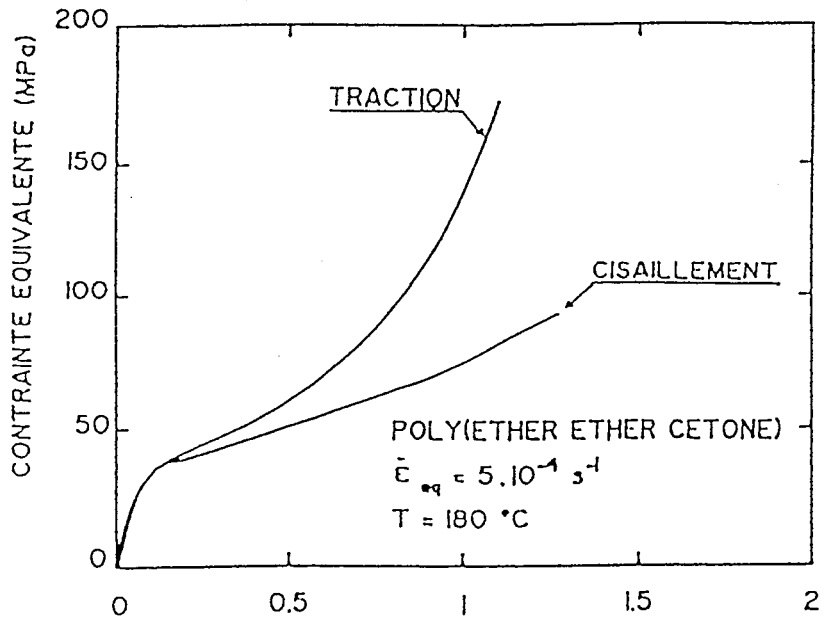


Figure 3 : Comparaison entre un essai de traction et de cisaillement du poly(éther éther cétone) [DAHOUN 1992].

1-2-2 Torsion

L'essai convient mieux pour caractériser un matériau aux grandes déformations. En effet, la torsion n'entraîne pas une modification notable de la forme de l'éprouvette. En pratique, on utilise des tubes à parois minces pour s'affranchir de la distribution des contraintes dans l'épaisseur. Cependant, le risque de flambement subsiste toujours.

1-3 Séquence de chargements cycliques

Les essais précédents correspondaient surtout à des chargements monotones ; l'application de séquences de chargements plus complexes révèle certains comportements spécifiques. Ces essais permettent de déterminer l'évolution des propriétés d'écrouissage d'un matériau selon son histoire thermomécanique. On peut les relier aux études de fatigue.
L'éprouvette est soumise à une sollicitation périodique en contrainte ou en déformation. Selon le matériau étudié, il peut y avoir adoucissement ou durcissement. L'adoucissement se manifeste par la diminution de l'amplitude de la contrainte lors d'un essai en déformation imposée. Au contraire, le durcissement se traduit par une augmentation de cette amplitude.
On parle de l'effet BAUSCHINGER lorsque sont observés un adoucissement du matériau en compression et un durcissement en traction lors d'une charge/décharge dans le domaine plastique. En contrainte imposée non symétrique, il peut y avoir accommodation ou le plus souvent "effet de rochet" qui se traduit par une augmentation progressive de la déformation à chaque cycle même en régime stabilisé. En déformation imposée non symétrique, une

relaxation de la contrainte moyenne peut parfois se produire. Les figures 4 et 5 résument ces différentes observations.

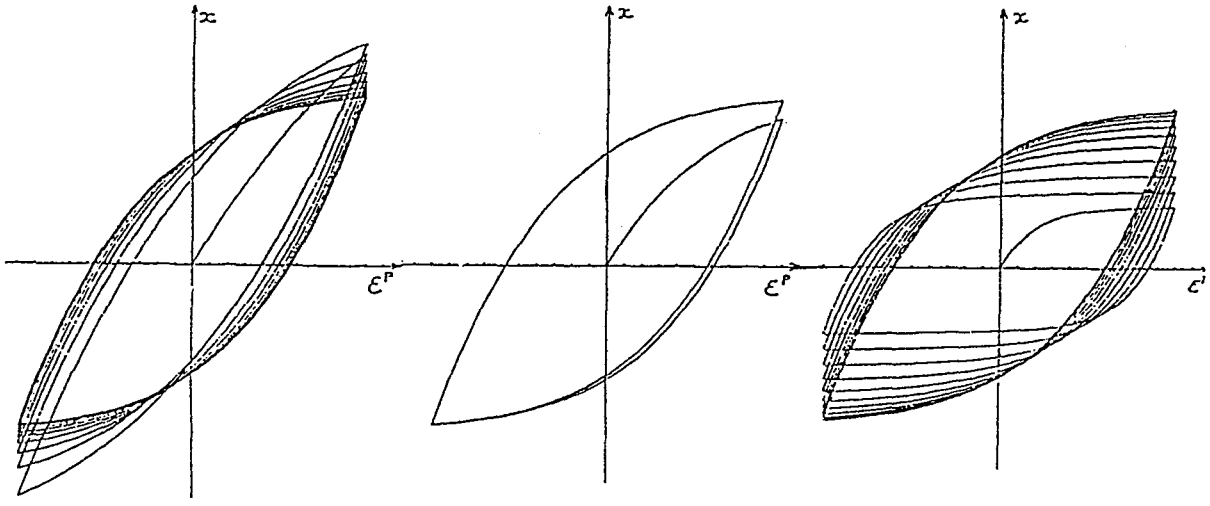


Figure 4 : Phénomène d'adoucissement et de durcissement cyclique [MARQUIS 1979].
a : adoucissement ; b: cycle stabilisé ; c: durcissement.

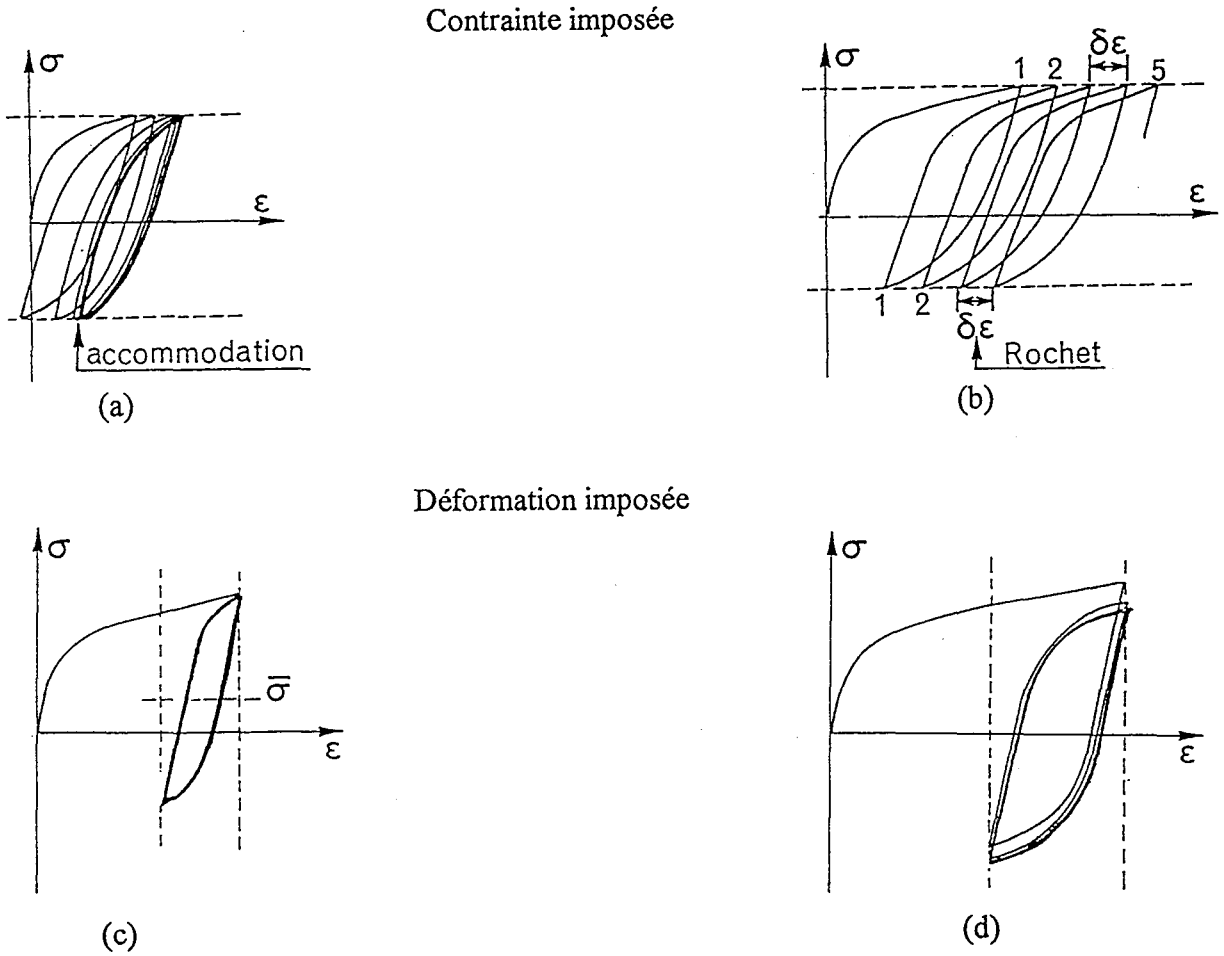


Figure 5 : Phénomènes d'accommodation (a), de rochet (b), de non-relaxation de la contrainte moyenne (c), de relaxation de la contrainte moyenne (d) [LEMAITRE et CHABOCHE 1985].

2 ESSAIS MULTIAXIAUX

Nous avons souligné l'évolution de la limite élastique dans le cas d'un chargement uniaxial. En contrainte multiaxiale, cette évolution est plus difficile à déterminer sur le plan expérimental et à modéliser sur le plan théorique. Expérimentalement, la complexité de l'état des contraintes rend la mesure très délicate. Un modèle qui décrit bien les essais uniaxiaux peut échouer dans la détermination de l'évolution de cette limite pour un chargement multiaxial.

Les essais multiaxiaux sont si onéreux que l'on ne peut pas établir la surface de charge complète pour un matériau donné dans l'espace des contraintes. De ce fait, la confrontation modèle-expérience dans des chargements complexes est une nécessité évidente pour connaître le domaine de validité d'un modèle. Généralement, l'étude expérimentale du critère de plasticité se limite à un plan de contraintes donné. La modélisation passera tout d'abord par la simulation dans le plan exploré. Elle sera suivie d'une étape importante de prédiction et de généralisation du critère dans tout l'espace des contraintes. On voit alors l'intérêt économique porté par un modèle prédictif.

Si pour un matériau initialement isotrope le critère de VON MISES convient bien pour décrire la surface de charge, ce critère se révèle insuffisant pour caractériser le comportement du même matériau après quelques histoires de préchargement. De nombreuses expériences ont été menées montrant que ces surfaces de plasticité subissent des déplacements et des distorsions dans l'espace des contraintes [TAYLOR et KINNEY (1931) ; OHASHI et TOKUDA (1973)]. Ces distorsions se manifestent par l'apparition d'un "coin" dans la direction de préchargement et par une tendance à l'aplatissement dans le sens opposé [IKEGAMI (1979)].

Plusieurs facteurs interviennent sur ces changements complexes de taille et de forme de la surface de plasticité [NAGHDI et al (1958) ; GUPTA et LAUERT (1983)]. Parmi ces facteurs, nous pouvons citer la prédéformation imposée, la définition du seuil d'écoulement "OFFSET", l'état de déchargement total ou partiel, la séquence de mise en charge,...

2-1 Choix de la représentation des contraintes limites

Trois espaces de représentation de la surface de charge en contrainte sont couramment employés :

❶ L'espace des contraintes variables qui sont déterminées pendant l'essai.
❷ L'espace du déviateur des contraintes [ILYUSHIN 1954, LENSKY 1960].

❸ Le plan du déviateur, appelé le plan π, dans l'espace principal de contrainte. Ce plan est perpendiculaire à la trisectrice du repère principal (passant par l'origine) [HSU 1966, SHIRATORI et IKEGAMI 1975, TOZAWA et SHIRAI 1975].

Dans l'espace des contraintes, les surfaces de plasticité montrent un changement complexe de forme en fonction de la direction et de l'amplitude du préchargement. La figure 6 en donne un exemple emprunté à ROUSSET (1985). IKEGAMI (1979) remarque qu'il serait très difficile d'établir une formule exacte liant le préchargement à la surface de charge en utilisant ces résultats. Cependant, il souligne l'intérêt de cette représentation pour tester la validité des modèles. En effet, choisir une représentation "astucieuse" qui masque ces distorsions ne peut servir de "filtre efficace" pour choisir la modélisation adaptée au problème.

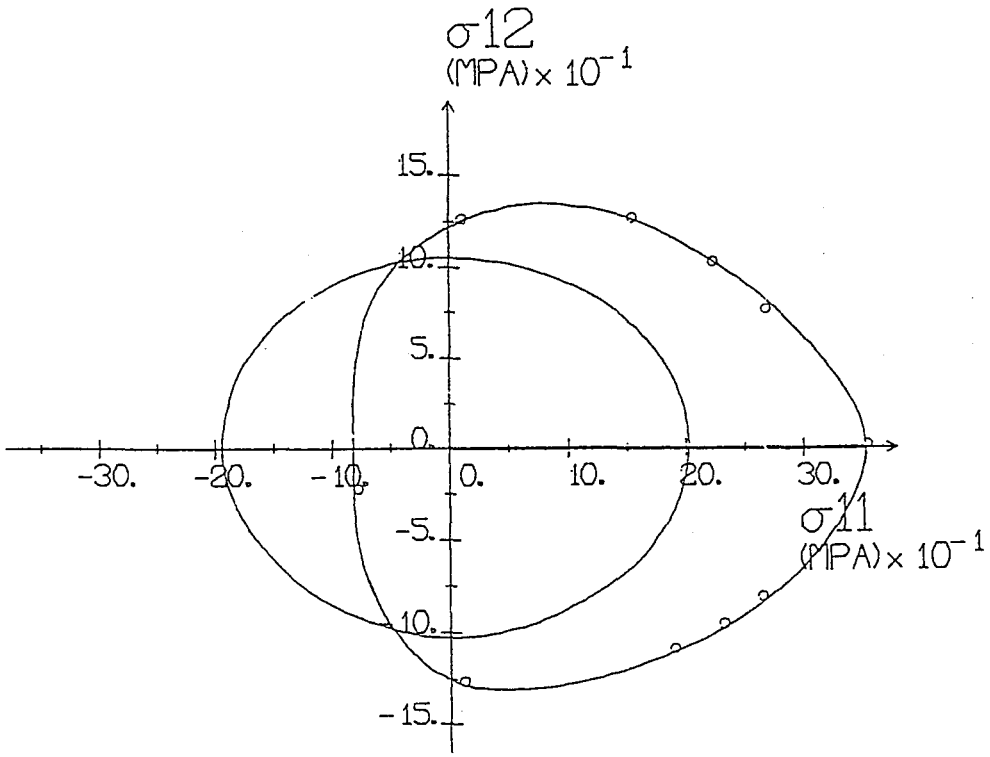
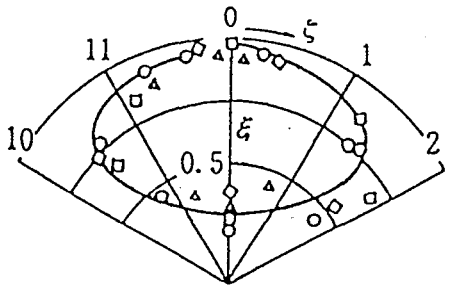


Figure 6 : Surface de charge dans l'espace des contraintes sur un alliage AU4G [ROUSSET 1985].

Dans le cas d'un matériau obéissant à la relation de VON MISES basée sur le déviateur des contraintes, l'espace de ce déviateur et le plan π sont tout à fait adaptés pour la représentation des surfaces limites. Dans un tel espace, les surfaces de plasticité présentent des propriétés de symétrie et de congruence par rapport aux directions de préchargement pour une même amplitude. La figure 7 [SHIRATORI et al 1973] illustre cette remarque pour plusieurs surfaces de charge obtenues après différents préchargements proportionnels. L'espace des contraintes dans lequel la symétrie et la congruence apparaissent est appelé "espace isotrope de contrainte". Dans cet espace du déviateur des contraintes, les formes des surfaces de charge après un préchargement proportionnel dépendent uniquement de

l'amplitude du préchargement. Par contre dans l'espace ordinaire des contraintes, elles dépendent du taux et de la direction du préchargement [IKEGAMI 1979].



Preloading directions

o $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (1, 0, 0)$

□ (〃) = (-1, 1, 0)

◇ (〃) = (2, 1, 0)

△ (〃) (-1, 1, -1)

Figure 7 : Représentation de la surface de charge dans le plan déviateur [SHIRATORI et al 1973].

Lorsque le critère de VON MISES n'est pas respecté, on observe des évolutions plus complexes. La figure 8 [SHIRATORI et al 1974] en est un exemple. Les surfaces de charge qui sont représentées dans le plan déviateur des contraintes présentent des changements compliqués incluant des rotations et translations : la symétrie est difficile à détecter [ILYUSHIN 1954, LENSKY 1960, SHIRATORI et al 1975 , OHASHI et KAWASHIMA 1975, OHASHI et al 1975]. La présence de ces phénomènes est liée à un régime transitoire. Avec l'accroissement de la déformation, le durcissement plastique deviendra stationnaire : la surface de plasticité récupérera alors les deux propriétés de symétrie et de congruence (l'exemple indiqué par des cercles).

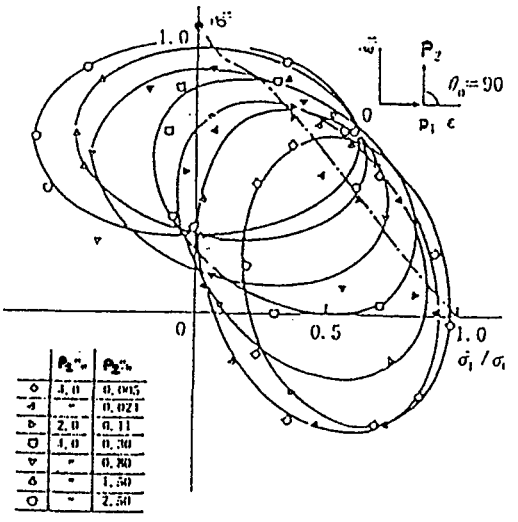


Figure 8 : Représentation de la surface de charge dans le plan déviateur après différents préchargements [SHIRATORI et al 1974].

Ces résultats permettent de conclure que la symétrie et la congruence des surfaces d'écoulement seront donc des phénomènes liés directement à l'histoire de la déformation et au matériau étudié [SZCEPINSKI et MIASTOWSKI 1968, MARJANOVIC ET SZCEPINSKI 1975].

En effet, si le comportement plastique des matériaux est affecté par le second et le troisième invariant des contraintes, l'espace déviateur des contraintes ou le plan déviateur ne seront pas les plus commodes pour observer un comportement plastique qui présente la symétrie et la congruence. Pour observer ces deux propriétés, certaines modifications concernant l'espace de représentation devront être apportées [SHIRATORI et IKEGAMI ET YOSHIDA (1976) ; OHASHI et KAWASHIMA et YOKOCHI 1975].

2-2 A propos des techniques expérimentales utilisées dans les essais multiaxiaux

Différentes méthodes expérimentales sont proposées pour obtenir un état de contrainte multiaxiale. Ces techniques se différencient essentiellement par la forme des éprouvettes. En effet, il existe plusieurs formes d'éprouvettes, les tubes minces, les éprouvettes plates minces ou épaisses...

La difficulté majeure avec toutes ces formes d'éprouvette est d'obtenir un champ de contrainte et de déformation homogène ; nous trouvons une littérature abondante consacrée à l'optimisation des éprouvettes destinées à des essais multiaxiaux [MONCH et GLASTER 1963, SHIRATORI et IKEGAMI 1968, HAYHURST 1973, KELLY 1976, MAKINDE et al 1992, DEMMERLE et BOEHLER 1993].

3 PRINCIPES DE BASE DES MODELISATIONS DES SURFACES LIMITES DE PLASTICITE

3-1 Généralités

La modélisation de ces surfaces de charge limites repose généralement sur deux idées de base :

① la notion de critère de plasticité ou encore la définition d'un seuil caractéristique pour chaque étape de l'histoire de chargement. Ceci suppose d'une part, le choix d'un critère qui permette de relier le seuil facilement observable sur un essai unidirectionnel à celui qui intervient pour un chargement multiaxial ; nous évoquerons par exemple, les critères de VON MISES, de TRESCA, de DRUCKER...D'autre part, il faut prendre en compte l'évolution de la limite élastique (du seuil) par écrouissage en fonction de l'état de chargement et transposer cet écrouissage aux chargements complexes. On exprime cet écrouissage par ses composantes cinématique et isotrope par exemple. Cette notion répond à la question : "quand observe-t-on la déformation plastique ? " [HALPHEN et SALENÇON (1987)].

② la notion de direction d'écoulement plastique en tout point de la surface seuil. Cette notion est indispensable pour prévoir les évolutions de la surface de charge, elle répond à la question : "comment se produit l'écoulement plastique ?" [HALPHEN B et SALENÇON (1987)]. La règle d'écoulement la plus utilisée repose sur le principe de HILL (1950) ou encore parfois baptisé postulat de DRUCKER (1951). La généralisation thermodynamique a été proposée par ZIEGLER (1963).

Si la thermodynamique des processus irréversibles permet de guider le choix des règles d'écoulement, en établissant les règles de normalité, il est également important de s'y reporter pour la formulation même des surfaces de charge.

En effet, comme nous le montrerons dans le chapitre suivant, l'approche usuelle postule plus ou moins implicitement l'existence de variables internes. Le choix de ces variables doit respecter les deux principes de la thermodynamique. Une écriture synthétique est souvent utilisée avec l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM qui implique la forme du potentiel thermodynamique ψ choisi.

Par ailleurs, l'irréversibilité nécessite l'utilisation d'un pseudo-potentiel des vitesses. Ce pseudo-potentiel est modélisé à partir des variables internes. C'est ce potentiel des vitesses qui joue le rôle des surfaces de charge en viscoplasticité. Pour la plasticité, la situation est plus délicate car on néglige la dépendance de la réponse en contrainte avec la vitesse de déformation imposée. On a alors généralement recours à l'utilisation d'un multiplicateur plastique λ qui permet d'écrire la règle de normalité d'après la connaissance du seuil de plasticité indépendant de la vitesse.

3-2 Quelques critères pour décrire les surfaces de charge initiales

Les premières ébauches de modélisation semblent remonter à MARIOTTE (1686) qui proposait un critère basé sur la déformation plastique maximale. Aujourd'hui, ce critère abandonné est plus connu sous le nom de critère de SAINT VENANT. Beaucoup plus tard, RANKINE (1858) utilise le critère de la contrainte maximale. Vers la même époque, TRESCA (1864) amorce des recherches expérimentales et propose un critère qui porte son nom. En 1870, SAINT VENANT écrit deux notes théoriques sur le sujet. En Allemagne, PRANDTL (1920) et HENCKY (1924), aux Etats Unis NADAÏ (1923) poursuivent et développent ce type de travaux. Nous ne présenterons ici que quatre critères parmi les plus cités dans la littérature.

3-2-1 Critère de TRESCA (1864)

A la suite d'expériences sur le plomb, TRESCA lie le seuil de plasticité à la contrainte de cisaillement :

$$\underset{i\neq j}{\text{Sup}}\left|\sigma_i-\sigma_j\right|=\sigma^e \Rightarrow f=\underset{i\neq j}{\text{Sup}}\left|\sigma_i-\sigma_j\right|-\sigma^e=0 \qquad \text{(I-1)}$$

f : fonction de charge

σ^e : seuil de plasticité à l'état unidimensionnel

σ_i : contrainte principale

En fait, ce critère est un cas particulier de celui de COULOMB (1773) qui admet une valeur limite de $\left(\sigma_i-\sigma_j\right)_{i\neq j}$ dépendant linéairement de la composante hydrostatique des contraintes $\left(\sigma_i-\sigma_j\right)_{i\neq j}=f\left(\sigma^H\right)$.

On peut souligner que MOHR (1900) puis CAQUOT (1924) ont généralisé ces critères de COULOMB et TRESCA en écrivant $\left(\sigma_i-\sigma_j\right)_{i\neq j}=g\left(\sigma_i+\sigma_j\right)$ où g est une fonction déterminée expérimentalement :

$$f=\underset{i\neq j}{\text{Sup}}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|-g\left(\sigma_i+\sigma_j\right)\right) \qquad \text{(I-2)}$$

3-2-2 Critère de BELTRAMI (1885) ou de l'énergie maximale

Ce critère est basé sur une équivalence de l'énergie de déformation totale pour différents chemins de chargement. Dans l'espace des contraintes, la forme de ce critère est :

$$\sigma^{eq}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left[\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2+\left(\sigma_{11}-\sigma_{33}\right)^2+\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right]}\right\}$$

Ce critère fut abandonné suite à des expériences de SPRING (1909) qui a montré que certains corps peuvent résister à toute compression hydrostatique. Toutefois, soulignons que certains matériaux comme les polymères sont sensibles à la compression hydrostatique.

3-2-3 Critère de VON MISES (1913)

En fait, il semblerait que les travaux de MAXWELL (1856) puis HUBER (1882) soient à l'origine de ce critère. VON MISES quant à lui a exploité les invariants du tenseur des contraintes et a écrit que seul le déviateur $\underline{\underline{S}}$, dont le premier invariant est nul par définition, peut engendrer la plasticité. Il a suggéré de négliger l'effet du troisième invariant. Dans ces conditions, la contrainte équivalente est identique à celle suggérée par HUBER :

$$\sigma^{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{11}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right]}\right\} \quad \text{(I-3)}$$

Ou encore $k^2 = S_{II}$ (I-4)

La fonction de charge s'écrit :

$$\begin{aligned} f &= \left(\sigma^{eq}-\sigma^{e}\right)=0 \\ f &= \left(\sqrt{S_{II}}-k\right)=0 \end{aligned} \quad \text{(I-5)}$$

Avec

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \quad \text{(I-6)}$$

$$S_{II} = \frac{1}{2}\,S_{ij}\,S_{ij} \quad \text{(I-7)}$$

$$S_{III} = \frac{1}{3}\,S_{ij}\,S_{jk}\,S_{ki} \quad \text{(I-8)}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^{e} \quad \text{(I-9)}$$

Selon ce critère basé sur le 2ème invariant de $\underline{\underline{S}}$, seule l'énergie de variation de forme peut engendrer la plasticité. Ceci a été confirmé sur certains matériaux : par exemple, les travaux de BRIDGMANN et COOK (1946) vérifient pour deux états de contraintes, qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique $\underline{\underline{\sigma}}^{H}$, la limite élastique est atteinte en même temps.

3-2-4 Critères de type DRUCKER

En réalité, la surface de charge initiale déterminée expérimentalement se situe entre le critère de VON MISES et le critère de TRESCA. Il se trouve que certains matériaux ductiles s'approchent du critère de TRESCA alors que d'autres essais menés sur l'aluminium par exemple montrent que l'on s'approche du critère de VON MISES [LODE 1926 ; ROS et EICHINGER 1928 ; TAYLOR et QUINNEY 1931].

Ainsi, PRAGER et DRUCKER proposent-ils un critère intermédiaire afin de mieux décrire les résultats expérimentaux. Pour cela, ils ne négligent plus l'effet du troisième invariant de $\underline{\underline{S}}$.
PRAGER propose une relation de la forme (HILL 1950) :

$$k^2 = S_{II}\left(1+\alpha\frac{S_{III}^2}{S_{II}^3}\right) \quad \text{(I-10)}$$

où α est une constante intrinsèque du matériau.

Pour la description de telles surfaces, DRUCKER (1949) propose une autre relation de la forme :

$$k^6 = S_{II}^3 + \alpha S_{III}^2 \qquad \text{(I-11)}$$

Ces deux relations donnent une bonne description des surfaces de charge initiales. Selon GUPTA et MEYERS (1992) elles sont assez semblables.

3-3 A propos de l'écrouissage

3-3-1 Ecrouissage cinématique [PRAGER 1949]

L'écrouissage cinématique se traduit par une translation de la surface seuil dans l'espace des contraintes sans changement de taille ni de forme. On introduit ainsi un opérateur tensoriel $\underline{\underline{X}}$ qui mesure le déplacement de cette surface dans l'espace des déviateurs. PRAGER (1956) suppose une relation linéaire entre le déplacement du centre de la surface et la déformation plastique. ZIEGLER (1959) remplace le déviateur des contraintes par un tenseur qui permet de rendre compte de l'influence de la pression hydrostatique sur la variable d'écrouissage cinématique. Il suggère une direction de translation parallèle au vecteur reliant le centre de la surface et l'état de contrainte actuel. MARQUIS (1979) introduit un terme de non-linéarité dans l'évolution de la variable interne associée à l'écrouissage cinématique avec un terme de rappel. Ce terme permet de mieux décrire le comportement unidimensionnel sous chargement cyclique.

3-3-2 Ecrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope correspond à une expansion homothétique dans l'espace des contraintes. Il est modélisé par l'introduction d'une variable scalaire (R') qui caractérise le grossissement global de la surface de charge. Le modèle le plus simple est le modèle de PRANDTL REUSS.

La figure 9 illustre l'effet de ces écrouissages sur la surface de charge représentée dans le plan du déviateur.

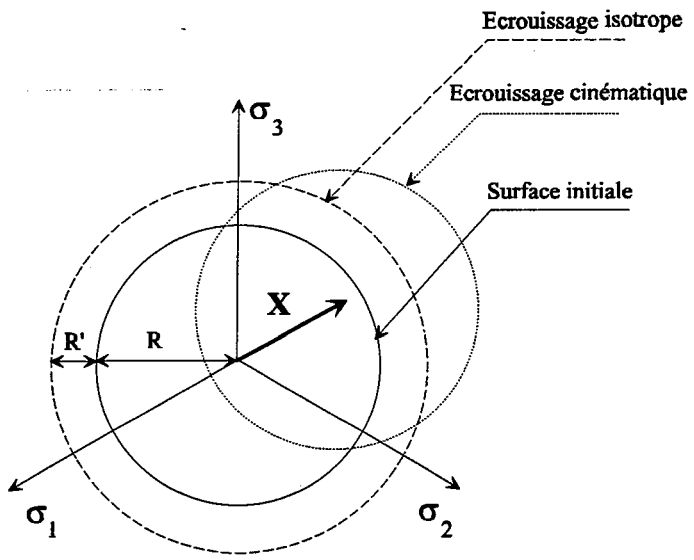


Figure 9 : Représentation du critère de plasticité dans le plan déviateur $R = \sqrt{2}\,k$.

3-4 Modélisation de la distorsion des surfaces de charge

Tous les modèles phénoménologiques passent par la description de la surface de charge et de son évolution en fonction de la déformation plastique. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce problème. Certains modèles phénoménologiques généralisent le critère de VON MISES en associant l'écrouissage cinématique et isotrope. Une formulation élégante de ce type d'approche est déterminée par l'introduction d'un tenseur du 4ème ordre N_{ijkl} qui caractérise l'anisotropie.

① EDELMAN et DRUCKER (1951) proposent la forme suivante :

$$f = \sqrt{N_{ijkl}\left(S_{ij} - X_{ij}\right)\left(S_{kl} - X_{kl}\right)} - R' - \sigma^e \qquad \text{(I-12)}$$

L'identification d'un tel modèle général nécessite la détermination des composantes du tenseur d'anisotropie N_{ijkl} . Cette identification qui n'est pas évidente est lourde d'emploi.

② BALTOV SAWCZUK (1965) reprennent cette expression en imposant à l'opérateur N_{ijkl} la forme suivante :

$$N_{ijkl} = I_{ijkl} + A_{ijkl} \qquad \text{(I-13)}$$

$$\text{avec } I_{ijkl} = \frac{3}{2}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\delta_{kl}\right) \qquad \text{(I-14)}$$

$$A_{ijkl} = A\,\varepsilon^p_{ij}\,\varepsilon^p_{kl} \qquad \text{(I-15)}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ est le tenseur de déformation plastique et A est un scalaire fonction des invariants de la déformation plastique.
Ce critère amène une distorsion symétrique de la surface ce qui semble qualitativement en contradiction avec l'expérience.

③ YOSHIMURA (1959) propose une fonction seuil de la forme :

$$f = \sqrt{C_{ijkl}\left(S_{ij}S_{kl}\right) - B\varepsilon_{ij}^{p}S_{ij}} - R' - \sigma^{e} \qquad \text{(I-16)}$$

L'opérateur C_{ijkl} dépend de la déformation plastique et le terme $B\varepsilon_{ij}^{p}S_{ij}$ caractérise l'écrouissage. Ici encore, on ne peut reproduire les observations expérimentales.

Ainsi, ces trois modèles, obtenus par généralisation du critère de VON MISES, ne permettent pas de décrire la distorsion observée expérimentalement. Ils amènent un certain déplacement de la surface, une éventuelle rotation et un éventuel grossissement du critère initial.

④ Pour tenir compte des distorsions observées expérimentalement, MEYERS et MAZILU (1985) proposent d'utiliser la relation :

$$k^2 = S_{II}^{*} + \alpha \frac{S_{III}^{**}}{\sigma_F} \qquad \text{(I-17)}$$

avec

$$S_{II}^{*} = S_{II}\left(\sigma - \sigma^{*}\right) \text{ et } S_{III}^{**} = S_{III}\left(\sigma - \sigma^{**}\right) \qquad \text{(I-18)}$$

Ces invariants marqués par * et ** sont fonction du matériau et de l'histoire qui affecte elle même les coefficients σ^{*} et σ^{**}. Ce modèle représente bien les surfaces d'écoulement dans le cas d'une prédéformation en traction mais semble échouer dans le cas général.
Afin d'étendre le formalisme précédent de MEYERS et MAZILU, au cas général, MAZILU et LUO (1990) ont modifié le critère qui devient :

$$k^2\left[1 - \alpha_1\left(1 - \sqrt{54}\frac{S_{III}^{**}}{\left(S_{II}^{*}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) - \alpha_2\left(1 - 54\frac{\left(S_{III}^{**}\right)^2}{\left(S_{II}^{*}\right)^3}\right)\right] = S_{II}^{*} + \alpha\, S_{III}^{**} \qquad \text{(I-19)}$$

Ils trouvent un bon accord entre cette équation et un certain nombre d'expériences.

⑤ ROUSSET (1985) propose un modèle formulé à partir de l'idée de PHILLIPS (1975) en introduisant une fonction représentative de la distorsion dans l'équation de la surface de charge.

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} tr\left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{R}}\right)^2} - R' - \sigma^e \qquad \text{(I-20)}$$

$\underline{\underline{R}}$: est un tenseur, fonction des contraintes, introduit pour décrire la distorsion,

avec

$$\dot{\underline{\underline{R}}} = \xi \dot{\underline{\underline{X}}} - \Delta \underline{\underline{R}} \left[tr\left(\dot{\underline{\underline{X}}}^2\right) \right]^{1/2}$$

$$\xi = \Gamma |\Phi|^N$$

$$\Phi = \frac{tr\left[\left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}\right)\dot{\underline{\underline{X}}}\right]}{\left\{ tr\left[\left(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}\right)^2\right] tr\left[\left(\underline{\underline{X}}\right)^2\right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(I-21)}$$

Δ, N et Γ sont des paramètres du modèle utilisés pour caractériser la distorsion.
L'auteur a identifié son modèle sur des essais de traction-torsion menés sur l'AU4G : il trouve une bonne cohérence entre simulations et expériences pour le matériau étudié.

⑥ GUPTA et MEYERS (1992) reprennent une formulation qu'ils avaient proposée antérieurement en 1986 sous forme d'une somme d'un nombre fini de fonctions du second et du troisième invariant du déviateur du tenseur des contraintes. Ils réduisent le nombre des paramètres tout en conservant un bon accord avec les résultats expérimentaux. Nous allons voir les grandes lignes de leur démarche.
La première forme proposée est :

$$k^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ a_i S_{IIi} \left[1 + b_i \left(\frac{S_{IIIi}}{(S_{IIi})^{\frac{3}{2}}} \right)^{m_i} \right] \right\} \qquad \text{(I-22)}$$

où les m_i sont des entiers positifs, les a_i et b_i sont des constantes caractéristiques du matériau et de son histoire. Les deux invariants S_{IIi} et S_{IIIi} du déviateur du tenseur des contraintes sont fonction du matériau et de la contrainte σ_i selon :

$$S_{IIi} = S_{II}(\sigma - \sigma_i) \text{ et } S_{IIIi} = S_{III}(\sigma - \sigma_i) \qquad \text{(I-23)}$$

La détermination des paramètres passe par une interpolation des surfaces de charge expérimentales tirées de la littérature (GUPTA et MEYERS 1992) pour des décharges totales et partielles. La fonction proposée révèle bien l'existence d'un coin et d'un aplatissement de la surface de charge. Pour simuler les surfaces initiales il suffit d'un seul terme du

développement. En revanche, les surfaces déformées nécessitent le recours à deux ou trois termes. Cette formulation implique un nombre de paramètres relativement important. La relation peut être simplifiée en considérant l'identité :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, S_{IIi} = aS_{II}^{*} + K^2 \qquad \text{(I-24)}$$

Finalement la forme révisée est :

$$k^2 = S_{II}^{*}\left[1 + \sum_{i=1}^{n} c_i \left(S_{IIi}\right)^{m_i}\right] \qquad \text{(I-25)}$$

avec

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$S_{II}^{*} = S_{II}\left(\sigma - \sigma^{*}\right)$$

$$\sigma^{*} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i$$

K est une fonction de a_i et σ_i, c_i et k sont des paramètres dépendants du matériau et de l'histoire.

Le premier terme de l'équation représente la translation du critère de VON MISES et le deuxième terme, sous forme d'une somme, génère la distorsion. La simulation des surfaces expérimentales nécessite l'identification de tous les paramètres du modèle pour chaque prédéformation.

4 CONCLUSION

La simulation de la mise en forme des matériaux exige une modélisation tridimensionnelle de la plasticité en grande déformation. Cette modélisation nécessite la connaissance de l'évolution de la surface de charge lors d'une déformation plastique.

Comme nous l'avons souligné, la plupart des modèles phénoménologiques postulent l'existence d'une formulation explicite de cette surface. Cette approche augmente d'une manière considérable le nombre de paramètres et limite la variété des surfaces disponibles. D'autres part, l'introduction de la distorsion exige l'intégration d'une équation en vitesse pour chaque point de la surface durant toute l'histoire de chargement. Ainsi le temps de calcul et la taille de mémoire de stockage augmentent-ils considérablement. Pour remédier à ce problème, VOYIADJIS et FOROOZESH (1990), EISENBERG et YEN (1984) et MAZEN (1994) proposent une interpolation adéquate

de la surface de plasticité à partir de la connaissance d'un petit nombre de points appartenant à cette surface de charge.

En ce qui concerne les approches micro-mécaniques, elles déterminent l'évolution du critère suivant un processus d'intégration utilisant une loi en vitesse. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'ensemble des observations expérimentales. Malheureusement, ce genre de démarche peut se révéler insuffisant pour certaines classes de matériaux [LIPINSKI ; KRIER et BERVEILLER 1990].

A la lumière de cette brève revue, nous pouvons poser la question : peut on par une approche thermodynamique de la relaxation décrire l'évolution de la surface de charge, sans introduire a priori quelque information sur sa forme ? C'est à cette question que tente de répondre ce travail.

Chapitre II

PRESENTATION DU MODELE DNLR

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons une approche thermodynamique de la relaxation pour établir les équations constitutives. Ces équations déterminent l'évolution de toutes variables observables en fonction des variables de commande. Nous situons cette modélisation par rapport aux descriptions usuelles fondées sur la thermodynamique irréversible.

1- INTRODUCTION ----------33

2- BASES THEORIQUES DU MODELE DNLR ----------34

2-1 Rappels sur la formulation de GIBBS généralisée 34

2-2 Potentiels thermodynamiques et équations constitutives 36

2-3 Thermodynamique des processus irréversibles linéaire 38

↳ Hypothèse de linéarité thermodynamique 38

↳ Hypothèse de linéarité cinétique 39

2-4 Processus intrinsèquement non-linéaires 41

2-5 Modélisation des lois constitutives 42

2-6 Analyse des temps de relaxation 44

2-6-1 Temps de relaxation au voisinage de l'équilibre 44

2-6-2 Non-linéarité de nature coopérative 46

2-6-3 Effet de la température 47

2-7 Forme du spectre de relaxation 47

2-7-1 Existence de la multiplicité des processus 47

2-7-2 Distribution des temps de relaxation 49

3 ECRITURE DU MODELE DNLR POUR LES CHARGEMENTS A DEFORMATION IMPOSEE ----------51

3-1 Ecriture matricielle des lois constitutives pour des essais mécaniques 52

3-2 Ecriture du formalisme pour conduire un essai de traction ou un essai de torsion 53

3-3 Hypothèses sur les matrices de stabilité de TISZA pour les états relaxés et non relaxés 53

3-3-1 Généralités 53

3-3-2 Etat non relaxé 54

3-3-3 Etat relaxé 55

3-3-3-1 Etat relaxé obéissant à la loi de HOOKE 55

3-3-3-2 Etat relaxé n'obéissant pas à la loi de HOOKE 55

3-4 Modélisation des temps de relaxation 56

3-4-1 Temps de relaxation de référence au voisinage de l'équilibre thermodynamique vrai 56

3-4-2 Modélisation des non-linéarités temporelles (effets coopératifs) 56

3-4-2-1 Approximation d'ordre 1 par rapport à l'écart à l'équilibre des observables mises en jeu par la perturbation imposée 57

3-4-2-1-1 Couplage en contrainte 57
3-4-2-1-2 Couplage entropique 57
3-4-2-1-3 Couplage en énergie de déformation cumulée 58
3-4-2-2 Couplage non-linéaire : prise en compte de la saturation des durcissements et adoucissements cycliques 58
3-4-3 Discussion à propos de ces paramètres coopératifs 58
❑ Analyse de K_σ 59
❑ Analyse de K_W 59
❑ Analyse de K_S 61

4 COMPARAISON ENTRE LE MODELE DNLR ET QUELQUES APPROCHES USUELLES UTILISEES EN RHEOLOGIE DES SOLIDES A L'AIDE DES VARIABLES INTERNES ---------- 61
4-1 Choix du potentiel thermodynamique 61
4-1-1 Démarche DNLR 61
4-1-2 Liens avec la démarche usuelle 63
4-2 Conclusion 66
↳ Modélisation du potentiel thermodynamique F en l'absence de dissipation 66
↳ Modélisation de la dissipation 67

5- CONCLUSION ---------- 69

1- INTRODUCTION

Dans ce travail, chaque point matériel du milieu continu est traité comme un milieu uniforme exempt de tout gradient. En d'autres termes, il est homogénéisé : c'est l'hypothèse de l'état local uniforme.

L'approche thermodynamique utilisée dans notre groupe de recherche a été développée par CUNAT au cours des dernières années. Initialement, elle visait à utiliser la thermodynamique des processus irréversibles non-linéaire pour simuler la transition vitreuse et les relaxations et vieillissements physiques qui s'y rattachent. C'est ainsi que des études de vieillissement physique de verres de chalcogénures en conditions isothermes ont permis de modéliser le système et de valider la théorie. En effet, la confrontation entre les prévisions théoriques de la variation de la chaleur spécifique associée à la transition vitreuse pour diverses vitesses de chauffage, et les mesures directes effectuées en microcalorimétrie différentielle à balayage est très satisfaisante [AHAROUNE et CUNAT (1993)].

Le cadre de la thermodynamique se prête bien à des formulations à caractère général. Ainsi, les relaxations magnétiques observées dans les verres métalliques ont-elles pu être analysées quantitativement avec succès et ont elles permis de valider un procédé industriel de stabilisation de ces matériaux [CUNAT, HILZINGER et HERZER (1988)].

Très vite cependant, il est apparu que cette formulation couvrait également le domaine des lois de comportement mécanique des matériaux. Depuis quelques années donc, notre groupe de recherche travaille, au LEMTA, sur ce thème. Par exemple Z. AYADI (1995) a soutenu récemment une thèse portant sur un chemin de chargement dans lequel la contrainte est maîtrisée. Les trajets qu'il a étudiés sur ce chemin portent sur le fluage et la recouvrance. Les matériaux testés sont des polymères. Le potentiel thermodynamique adapté est donc l'enthalpie libre (G) de GIBBS.

A. HADDAD termine actuellement un travail de thèse qui porte sur un chemin de chargement différent puisque c'est la déformation qui est maîtrisée par l'expérimentateur. Le trajet de chargement qu'il examine est un trajet harmonique en faibles déformations. L'objectif est ici de tester l'aptitude du modèle à rendre compte de la viscoélasticité. Le potentiel thermodynamique adapté est donc l'énergie libre (F) de HELMHOLTZ. D'autres études sont en cours ; elles portent par exemple sur des chargements cycliques et sur l'endommagement. De même, une réflexion est entreprise pour établir des ponts entre cette modélisation et les théories de l'homogénéisation.

Pour notre part, nous étudions des chemins de déformation imposée pour des sollicitations multiaxiales. Le potentiel thermodynamique adapté est donc l'énergie libre F de

HELMHOLTZ. Nous ne présenterons pas ici tous les développements détaillés de la théorie qui ont été rappelés dans le mémoire de Z. AYADI (1995). Cependant, nous introduirons tout de même les ingrédients nécessaires à cette modélisation.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons l'application du formalisme général aux chargements à déformation imposée. Notre contribution personnelle à la modélisation théorique est essentiellement rassemblée dans cette partie. Nous avons d'une part étendu l'approche aux matrices de TISZA à coefficients non constants pour l'état relaxé. En d'autres termes, nous avons développé une description adaptée à décrire les grandes déformations des polymères qui présentent des comportements de type hyperélastique. D'autre part, nous avons porté nos efforts sur la modélisation des non-linéarités temporelles qui affectent les temps de relaxation de manière déterminante. Enfin, nous avons transcrit le formalisme sur le plan informatique, pour les sollicitations multiaxiales et des chargements complexes.

Nous tenterons dans la dernière partie de situer ce formalisme par rapport à l'approche habituellement utilisée par les mécaniciens lorsqu'ils modélisent le comportement en terme de variables internes. La formulation utilisée par LEMAITRE et CHABOCHE (1985) servira de fil conducteur à cette réflexion.

2- BASES THEORIQUES DU MODELE DNLR

2-1 Rappels sur la formulation de GIBBS généralisée

A chaque condition expérimentale, le thermodynamicien doit choisir le potentiel adapté pour décrire le système considéré. Nous nous placerons dans la cadre de la loi de GIBBS généralisée [MUNSTER (1966) par exemple] et définirons le potentiel thermodynamique ψ adapté à un jeu de variables d'état et de dissipation décrites par les vecteurs respectifs $\underline{\gamma}$ et $\underline{z}$: $\psi(\underline{\gamma}\ ;\ \underline{z})$. Soulignons avec MUNSTER que le vecteur $\underline{z}$ correspond à un ensemble de variables qui ne sont pas des variables d'état. En effet, l'équilibre thermodynamique est uniquement fixé par les variables de contrôle $\underline{\gamma}$ qui déterminent ainsi le vecteur $\underline{z}^{r}$ pour l'équilibre thermodynamique. Le jeu des variables $\underline{A}$ (les affinités) associées à $\underline{z}$ (degrés d'avancement des réorganisations internes) prend une valeur nulle à l'équilibre et le terme énergétique correspondant s'évanouit. Le produit scalaire $\underline{A}\ \dot{\underline{z}}$ définit le terme énergétique associé à la production d'entropie induite par la dissipation :

$$T\frac{d_iS}{dt} = \sum_j A_j \frac{dz_j}{dt} = \underline{A}\ \dot{\underline{z}} \qquad \text{(II-1)}$$

avec

d_iS : entropie crée (terme de source)

A_j : affinité (force) de réorganisation interne j (j=1, nk), notion introduite par DE DONDER (1936).

z_j : variable interne associée ou degré d'avancement relatif à j.

$\frac{dz_j}{dt}$: vitesse du processus irréversible j (flux).

T : température

Pour toute modification de l'équilibre le second principe de la thermodynamique impose que la production d'entropie s'exprime par :

$$T\frac{d_iS}{dt} = \sum_j A_j \frac{dz_j}{dt} \geq 0 \qquad \text{(II-2)}$$

En utilisant les deux principes de la thermodynamique, la variation de l'énergie interne est exprimée par (formalisme de GIBBS-DUHEM généralisé) :

$$de = \sum_{m=1}^{q} Y_m dy_m - \sum_{j=1}^{nk} A_j dz_j \qquad \text{(II-3)}$$

e : énergie interne par unité de volume.

A_j : affinité (force) de réorganisation interne j (j =1, nk).

z_j : variable interne associée ou degré d'avancement relatif à j.

q : nombre des variables extensives nécessaires pour caractériser l'évolution non-dissipative du volume local considéré.

nk : nombre de variables internes qui déterminent les évolutions irréversibles spontanées de ce volume localement hors équilibre.

y_m : $\left(s, \underline{\underline{\varepsilon}}, n_l\right)$: variables extensives par unité de volume.

s : entropie par unité de volume

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: tenseur des déformations eulériennes par exemple

n_l : nombre de mole de l'espèce l par unité de volume

Y_m : $\left(T, \underline{\underline{\sigma}}, \mu_l\right)$: variables intensives associées à y_m (respectivement à s, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et n_l).

T : température

$\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes de CAUCHY défini dans la configuration actuelle (par exemple).

μ_l : potentiel chimique de l'espèces l (l = 1, w)

2-2 Potentiels thermodynamiques et équations constitutives

La transformée de LEGENDRE permet de choisir le potentiel $\psi(\underline{\gamma}\ ;\ \underline{z})$ bien adapté aux conditions expérimentales. Cette nouvelle fonction potentielle est définie par transformation de LEGENDRE de l'énergie interne par rapport aux variables m "regroupées" entre 1 et k [MUNSTER(1970)] :

$$\psi_k = e - \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial e}{\partial y_m} y_m \qquad \text{(II-4)}$$

Or la dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à la variable extensive y_m donne la variable intensive conjuguée Y_m :

$$\psi_k = e - \sum_{m=1}^{k} Y_m\, y_m \qquad \text{(II-5)}$$

La différentielle du potentiel thermodynamique peut être réécrite sous la forme :

$$d\psi_k = de - \sum_{m=1}^{k} Y_m dy_m - \sum_{m=1}^{k} y_m dY_m \qquad \text{(II-6)}$$

On remplace la différentielle (de) par la relation de GIBBS-DUHEM généralisée (II-3) :

$$d\psi_k = \left\{ \sum_{m=1}^{q} Y_m dy_m - \sum_{j=1}^{nk} A_j dz_j \right\} - \sum_{m=1}^{k} Y_m dy_m - \sum_{m=1}^{k} y_m dY_m \qquad \text{(II-7)}$$

$$d\psi_k = \left\{ -\sum_{m=1}^{k} y_m dY_m + \sum_{m=k+1}^{q} Y_m dy_m \right\} - \sum_{j=1}^{nk} A_j dz_j \qquad \text{(II-8)}$$

A chacune des variables d'état γ_n (*variable de contrôle extensive ou intensive*) qui commande le système est associée une variable duale β_n (*variable observable*) qui décrit la réponse du système à la sollicitation $\underline{\gamma}$. La relation précédente peut être simplifiée par :

$$d\psi_k = \left\{ \sum_{m=1}^{q} \beta_m d\gamma_m \right\} - \sum_{j=1}^{nk} A_j dz_j \qquad \text{(II-9)}$$

$$\text{avec } \beta_m(\gamma_n ;\ z_i) = \frac{\partial \psi_k(\gamma_n ;\ z_i)}{\partial \gamma_m} \qquad \text{(II-10)}$$

$$\text{et } A_j(\gamma_n\ ;\ z_i) = -\frac{\partial \psi_k(\gamma_n\ ;\ z_i)}{\partial z_j} \geq 0 \qquad \text{(II-11)}$$

L'affinité A_j doit en effet être positive puisque ψ_k est un potentiel qui doit donc être minimum à l'équilibre donc $\psi(z_j(t)) \geq \psi(z_j(t+dt))$ soit $\frac{\partial \psi}{\partial z_j} \leq 0$.

Ainsi, nous pouvons déduire la forme générale des lois constitutives à partir de la thermodynamique des processus irréversibles :

$$d\beta_m = \sum_{n=1}^{q} \frac{\partial \beta_m}{\partial \gamma_n} d\gamma_n + \sum_{j=1}^{nk} \frac{\partial \beta_m}{\partial z_j} dz_j = \sum_{n=1}^{q} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \gamma_n \partial \gamma_m} d\gamma_n + \sum_{j=1}^{nk} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_j \partial \gamma_m} dz_j \qquad \text{(II-12)}$$

$$dA_j = \sum_{m=1}^{q} \frac{\partial A_j}{\partial \gamma_m} d\gamma_m + \sum_{i=1}^{nk} \frac{\partial A_j}{\partial z_i} dz_i = -\sum_{m=1}^{q} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \gamma_m \partial z_j} d\gamma_m - \sum_{i=1}^{nk} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_i \partial z_j} dz_i \qquad \text{(II-13)}$$

Remarque

Par convention, nous adoptons les notations suivantes :

$\underline{x}$: est utilisé pour un vecteur

$\underline{\underline{x}}$: est utilisé pour un tenseur d'ordre 2 comme pour une matrice carrée aussi bien que rectangulaire

$\underline{\underline{\underline{x}}}$: définit un tenseur d'ordre 4

x_{ij} : composantes de $\underline{\underline{x}}$

$\dot{x}$: dérivée par rapport au temps de x

x^T : transposée de x

Les relations (II-12) et (II-13) réécrites en terme de vitesses deviennent :

$$\underline{\dot{\beta}} = \underline{\underline{a}}^u \underline{\dot{\gamma}} + \underline{\underline{b}} \underline{\dot{z}} \qquad \text{(II-14)}$$

$$\underline{\dot{A}} = -\underline{\underline{b}}^T \underline{\dot{\gamma}} - \underline{\underline{g}} \underline{\dot{z}} \qquad \text{(II-15)}$$

Avec

$$a^u_{nm} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \gamma_n \partial \gamma_m} \text{ : coefficient de la matrice carrée de stabilité de TISZA (1966)} \qquad \text{(II-16)}$$

l'indice u indique que ce coefficient est relatif à un système non relaxé.

Remarque : Si le vecteur $\underline{\gamma}$ est déterminé par les 6 composantes ε_{ij} du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$, la matrice carrée $\underline{\underline{a}}^u$ est la représentation du tenseur des constantes élastiques $\underline{\underline{\underline{a}}}^u$ et le vecteur $\underline{\beta}$ est caractéristique des 6 composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_i \partial z_j} : \text{matrice carrée de dissipation} \qquad \text{(II-17)}$$

Le système est stable vis à vis des variables z_j au voisinage de l'équilibre $d\psi_k = 0$ et $d^2\psi_k > 0$, où $d\psi_k$ est une différentielle totale exacte. Par conséquent $\underline{\underline{g}}$ est une matrice symétrique définie positive.

$$b_{jm} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_j \partial \gamma_m} \text{ et } b_{mj} = \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \gamma_m \partial z_j} \qquad \text{(II-18)}$$

Ces deux matrices rectangulaires $\left(\underline{\underline{b}} \text{ et } \underline{\underline{b}}^T\right)$ traduisent les couplages entre les variables d'état et les variables dissipatives. Elles introduisent en fait la dissipation dans les lois de comportement.

Au voisinage de l'équilibre, nous pouvons adopter les deux hypothèses classiques de la thermodynamique des processus irréversibles dans le domaine linéaire pour caractériser les termes dissipatifs $\left(\underline{\underline{b}}\dot{\underline{z}}\right)$ et $\left(-\underline{\underline{g}}\dot{\underline{z}}\right)$.

2-3 Thermodynamique des processus irréversibles linéaire

La thermodynamique des processus irréversibles linéaire a servi de point de départ à la réflexion menée par CUNAT pour caractériser la dissipation dans le cas général. Classiquement la TPI postule deux hypothèses :

↳ Hypothèse de linéarité thermodynamique :

Cette hypothèse de nature thermodynamique postule que les coefficients des matrices $\underline{\underline{b}}$ et $\underline{\underline{g}}$ sont des constantes. La relation $\dot{\underline{A}} = -\underline{\underline{b}}^T \dot{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{g}}\,\dot{\underline{z}}$ peut alors s'intégrer par rapport à la variable temps :

$$A(t) - A(0) = \int_0^t \dot{\underline{A}}\, dt = -\underline{\underline{b}}^T \int_0^t \dot{\underline{\gamma}}\, dt - \underline{\underline{g}} \int_0^t \dot{\underline{z}}\, dt \qquad \text{(II-19)}$$

Si initialement le système est en véritable équilibre interne alors par définition A(0)=0. L'expression (II-19) s'écrit :

$$\underline{A}(t) = -\underline{\underline{b}}^T\, \underline{\Delta\gamma} - \underline{\underline{g}}\, \underline{\Delta z} \qquad \text{(II-20)}$$

avec

$\underline{\Delta\gamma} = \underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(0)$

et

$\underline{\Delta z} = \underline{z}(t) - \underline{z}(0)$

Si, pour la perturbation imposée $\left[\underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(0)\right]$, on écrit la réponse correspondant à l'équilibre (pour une application pendant un temps infini de cette perturbation, alors $A(\infty) = A^r$ et $z(\infty) = z^r$), on aura :

$$\underline{A}^r = -\underline{\underline{b}}^T \underline{\Delta\gamma} - \underline{\underline{g}}\left(\underline{z}^r - \underline{z}(0)\right)$$

L'exposant r signifie que l'état relaxé est atteint ; en conséquence on a $\underline{A}^r = 0$:

$$\text{Soit } \underline{\underline{b}}^T \underline{\Delta\gamma} = -\underline{\underline{g}}\left(\underline{z}^r - \underline{z}(0)\right) \qquad \text{(II-21)}$$

En substituant cette expression dans la relation (II-20), on obtient :

$$\underline{A}(t) = \underline{\underline{g}}\left(\underline{z}^r - \underline{z}(0)\right) - \underline{\underline{g}}\left(\underline{z}(t) - \underline{z}(0)\right) = -\underline{\underline{g}}\left(\underline{z}(t) - \underline{z}^r\right)$$

$$\text{Soit } \underline{A} = -\underline{\underline{g}}\left(\underline{z} - \underline{z}^r\right) \text{ avec } \underline{z} = \underline{z}(t) \text{ et } \underline{A} = \underline{A}(t) \qquad \text{(II-22)}$$

ou encore

$$A_j = -\sum_{k=1}^{nk} g_{jk}\left(z_k - z_k^r\right)$$

l'indice nk indique le nombre de processus considéré.

↳ Hypothèse de linéarité cinétique :

Cette hypothèse est de nature cinétique, elle postule l'existence d'une relation linéaire entre force et flux :

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{A} = -\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}}\left(\underline{z} - \underline{z}^r\right) \qquad \text{(II-23)}$$

On peut noter ici que $\left(\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}}\right)$ a les dimensions inverses d'un opérateur temps de relaxation :

$$\underline{\underline{\tau}}^{-1} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}} \Rightarrow \dot{\underline{z}} = -\left(\underline{\underline{\tau}}^{-1}\right)\left(\underline{z} - \underline{z}^r\right) \qquad \text{(II-24)}$$

on peut encore écrire (d'après la relation II-23) :

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{nk} L_{jk} A_k = -\sum_{k=1}^{nk} L_{jk} \sum_{l=1}^{nk} g_{kl}\left(z_l - z_l^r\right) = -\sum_{k=1}^{nk}\sum_{l=1}^{nk} L_{jk} g_{kl}\left(z_l - z_l^r\right) \qquad \text{(II-25)}$$

Notons que $\underline{z}$ est sans dimension, en conséquence $\underline{A}$ a la dimension d'une énergie (Joule), et il en sera donc de même pour $\underline{\underline{g}}$. Or $\underline{\underline{\tau}}$ étant homogène à un temps (s), il s'en suit que $\underline{\underline{L}}$ doit être homogène à $\frac{1}{h}\left(s^{-1}\,J^{-1}\right)$ où h est la constante de PLANCK. $\underline{\underline{L}}$ représente la matrice de couplage cinétique. Dans le cas d'une approximation linéaire, les coefficients de $\underline{\underline{L}}$ sont des constantes ; la matrice porte alors le nom de matrice de ONSAGER. Généralement, cette matrice est symétrique ; on vérifie alors les relations de réciprocité de ONSAGER (1931). Par ailleurs, elle doit être définie positive car $\underline{A}\,\underline{\dot{z}} = \underline{\underline{L}}^{-1}\,\underline{\dot{z}}\,\underline{\dot{z}} = \underline{A}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{A} \geq 0$ et $\underline{A} \geq 0$.

Dès 1949, VON MEIXNER montre qu'il est toujours possible d'effectuer un changement de base de représentation des processus pour décrire le système pourvu que l'on conserve la production d'entropie : $T\frac{d_i S}{dt} = \underline{A}\,\underline{\dot{z}} = \underline{A}'\,\underline{\dot{z}}'$.

Par souci de simplification des calculs, on a intérêt à rechercher une base qui découple ces processus les uns des autres, de la même manière que l'on opère en analyse modale en dynamique des structures.

Rappelons que $\underline{\dot{z}} = -\underline{\underline{\tau}}^{-1}\left(\underline{z} - \underline{z}^r\right)$. Ainsi, pour découpler les processus il suffit de diagonaliser l'opérateur temps de relaxation $\underline{\underline{\tau}}^{-1} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}}$. Puisque les matrices $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{g}}$ sont toutes deux définies symétriques et positives, cette diagonalisation est toujours possible. On a même l'opportunité de choisir une matrice unité pour l'une d'entre elles [MUNSTER 1966 ou AYADI 1995 par exemple]. Pour rester compatible avec le cadre de la théorie des fluctuations de PRIGOGINE, qui nous conduit à une distribution des affinités $\underline{A} = -\underline{\underline{g}}\left(\underline{z} - \underline{z}^r\right)$, nous retenons le changement de base qui correspond à une matrice unité pour les coefficients de ONSAGER, ou plus exactement :

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{h}\,\underline{\underline{1}} \qquad \text{(II-26)}$$

avec en particulier

$\nu = \frac{kT}{h}$ si l'on admet que la fréquence des sauts atomiques ν est uniquement gouvernée par la température et les vibrations associées.

En définitive, on a donc :

$$A_j = -g_{jj}\left(z_j - z_j^r\right) \qquad \text{(II-27)}$$

$$\text{et } \dot{z}_j = -L_{jj}g_{jj}\left(z_j - z_j^r\right) = -\frac{\left(z_j - z_j^r\right)}{\tau_j} \qquad \text{(II-28)}$$

$$\text{avec } \tau_j = \frac{1}{L_{jj}g_{jj}} \qquad \text{(II-29)}$$

On se placera dorénavant dans cette base qui diagonalise l'opérateur temps de relaxation au voisinage de l'équilibre. Remarquons avec PRIGOGINE qu'une combinaison (distribution) de processus linéaires peut conduire à des situations globalement non-linéaires. Loin de l'équilibre, les deux hypothèses de linéarité ne sont plus applicables.

2-4 Processus intrinsèquement non-linéaires

KOVACS a observé expérimentalement que la recouvrance du volume du glucose obtenu par trempe depuis l'état liquide présente une asymétrie de comportement par rapport au signe de l'écart. Cette spécificité ne peut être interprétée par la présence de multiples processus [KOVACS (1963)]. Il est en fait indispensable d'admettre que chacun des processus est intrinsèquement non-linéaire.

Pour rendre compte empiriquement d'une telle non-linéarité, KOVACS introduit une dépendance temporelle des temps de relaxation $\tau_j(t)$ pour des systèmes perturbés loin de l'équilibre. Dans son approche rhéologique de la relaxation des polymères, l'auteur utilise le concept de la température fictive introduit initialement par TOOL (1946) et propose une interprétation en terme de volume libre [KOVACS (1977)].

Dans le cadre du modèle DNLR, les matrices $\underline{\underline{g}}$ et $\underline{\underline{L}}$ peuvent contenir des développements d'ordre supérieur en $z_j - z_j^r$. Puisque l'opérateur temps de relaxation est défini par $\tau_j = \frac{1}{L_{jj}g_{jj}}$, on peut introduire une dépendance de celui ci avec l'écart de l'état actuel du système à l'équilibre. Nous admettons, comme KOVACS, une dépendance temporelle identique pour tous les processus :

$$\tau_j(T,t) = a_j(t)\tau_j^r(T) = a(t)\tau_j^r(T) \qquad \text{(II-30)}$$

a(t) est le facteur de réduction de l'échelle des temps qui intègre l'histoire du matériau.

$\tau_j^r(T)$ est le temps de relaxation de référence du processus j.

Cette hypothèse consiste à admettre la forte coopérativité du système (chaque processus est en fait influencé par l'ensemble des réorganisations internes). Il faut bien

souligner ici que l'on réintroduit ainsi un couplage identique entre tous les processus qui ne redeviennent indépendants les uns des autres qu'au voisinage de l'équilibre. L'analyse de MEIXNER reste valable même pour des situations non-linéaires à condition que les effets non-linéaires soient les mêmes pour tous les processus j à chaque instant.

2-5 Modélisation des lois constitutives

Rappelons les expressions que doivent respecter les lois constitutives :

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{a}}^{u}\,\dot{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{b}}\,\dot{\underline{z}}$$

$$\dot{\underline{A}} = -\underline{\underline{b}}^{T}\,\dot{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{g}}\,\dot{\underline{z}}$$

$$\dot{\underline{z}} = -\left(\underline{\underline{\tau}}(T,t)\right)^{-1}\left(\underline{z} - \underline{z}^{r}\right) = -\left(\underline{\underline{\tau}}^{r}(T)\right)^{-1}\left(\frac{\underline{z} - \underline{z}^{r}}{a(t)}\right) \qquad \text{(II-31)}$$

Dans le cas où les coefficients des matrices $\underline{\underline{a}}^{u}$ et $\underline{\underline{b}}$ sont des constantes, la loi de comportement s'écrit pour une observable β_n :

$$\Delta\beta_n = \sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\Delta\gamma_m\right) + \sum_{j=1}^{nk} b_{nj}\,\Delta z_j \qquad \text{(II-32)}$$

q : le nombre des variables de commande considérés dans la description.

nk : nombre de processus dissipatifs indépendants.

Comme les processus sont indépendants, on peut écrire :

$$\Delta\beta_n = \sum_{j=1}^{nk}\left(\Delta\beta_n\right)_j = \sum_{j=1}^{nk}\left(\sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\Delta\gamma_m\right)_j + b_{nj}\,\Delta z_j\right) \qquad \text{(II-33)}$$

$$\text{et } \dot{\beta}_n = \sum_{j=1}^{nk}\left(\dot{\beta}_n\right)_j = \sum_{j=1}^{nk}\left(\sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\dot{\gamma}_m\right)_j + b_{nj}\,\dot{z}_j\right) \qquad \text{(II-34)}$$

L'évolution de la propriété à l'équilibre est donnée par :

$$\left(\Delta\beta^{r}_n\right)_j = \left(\sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\Delta\gamma_m\right)_j + b_{nj}\Delta z^{r}_j\right) \qquad \text{(II-35)}$$

Les relations (II-33) et (II-35) permettent de déterminer :

$$\left(\Delta\beta_n\right)_j - \left(\Delta\beta^{r}_n\right)_j = \left(\sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\Delta\gamma_m\right)_j + b_{nj}\,\Delta z_j\right) - \left(\sum_{m=1}^{q}\left(a^{u}_{nm}\,\Delta\gamma_m\right)_j + b_{nj}\Delta z^{r}_j\right) \qquad \text{(II-36)}$$

On aboutit à :

$$(\Delta\beta_n)_j - (\Delta\beta_n^r)_j = b_{nj}(\Delta z_j - \Delta z_j^r) \qquad \text{(II-37)}$$

$$\text{soit } (\beta_n)_j - (\beta_n^r)_j = b_{nj}(z_j - z_j^r) \qquad \text{(II-38)}$$

Nous pouvons alors établir la forme générale d'une loi constitutive pour décrire la variation d'une propriété $\underline{\beta}$ sous l'effet d'une perturbation $\underline{\gamma}$. En effet, les relations (II-38) et (II-31) donnent :

$$(\dot{\beta}_n)_j = \sum_{m=1}^{q} (a_{nm}^u \dot{\gamma}_m)_j - \left(\frac{(\beta_n(t))_j - (\beta_n^r(t))_j}{\tau_j} \right) \qquad \text{(II-39)}$$

Ainsi, le découplage des processus nous permet de remonter à la vitesse d'évolution de la propriété macroscopique par la relation suivante :

$$\dot{\beta}_n = \sum_{j=1}^{nk} (\dot{\beta}_n)_j = \sum_{j=1}^{nk} \sum_{m=1}^{q} (a_{nm}^u \dot{\gamma}_m)_j - \sum_{j=1}^{nk} \left(\frac{(\beta_n(t))_j - (\beta_n^r(t))_j}{\tau_j} \right) \qquad \text{(II-40)}$$

$$\text{avec } (\beta_n^r(t))_j = \sum_{m=1}^{q} (a_{nm}^r \gamma_m)_j \qquad \text{(II-41)}$$

La matrice $\underline{\underline{a}}^r$ est la matrice de stabilité de TISZA correspondant à l'équilibre interne vrai. Ces coefficients a_{nm}^r correspondent à la dérivée par rapport à n et m du potentiel thermodynamique ψ.

Il reste à définir les deux quantités $(a_{nm}^u \dot{\gamma}_m)_j$ et $(a_{nm}^r \dot{\gamma}_m)_j$. Nous verrons ultérieurement comment déterminer ces coefficients à partir de la connaissance des deux termes macroscopiques $(a_{nm}^u \dot{\gamma}_m)$ et $(a_{nm}^r \dot{\gamma}_m)$ en utilisant les concepts de la théorie des fluctuations.

Remarquons que le premier terme de l'équation (II-40) représente les changements instantanés causés par la perturbation γ sur la propriété β. La production d'entropie correspondante est nulle : on rencontre cette situation de réversibilité soit pour des systèmes complètement gelés ($\underline{\dot{z}} = 0$ même si $\underline{A} \neq 0$), soit pour les équilibres thermodynamiques vrais ($\underline{A} = 0$ et $\underline{\dot{z}} = 0$) ; le second terme correspond à la dissipation spontanée due à la relaxation du milieu.

2- 6 Analyse des temps de relaxation

Tout réarrangement d'un groupe de particules peut être vu comme une transition entre deux états : le système passe d'un état initial (équilibre métastable) à un état final de plus faible énergie (équilibre stable) en traversant une suite continue de configurations intermédiaires. Comme ces deux états correspondent à deux minimums d'énergie, il est naturel de postuler l'existence d'un maximum ou col d'activation : c'est l'état transitoire activé. On suppose que cet état est un état d'équilibre instable qui peut être défini par les fonctions thermodynamiques usuelles [BURKE (1968) par exemple]. EYRING fut le premier à introduire le concept de processus thermiquement activé pour analyser les écoulements visqueux des fluides moléculaires [EYRING (1936)]. En 1941, KAUZMANN reformule la théorie d'EYRING en l'appliquant pour les métaux, il transpose le concept de molécules en concept de petites régions élémentaires associées aux dislocations subissant des écoulements (units flow) [KAUZMANN (1941)].

2-6-1 Temps de relaxation au voisinage de l'équilibre

Dans le cadre du modèle DNLR, la modélisation des temps de relaxation se réfère à l'état transitoire activé. Dans le domaine linéaire, deux conditions sont nécessaires pour qu'un saut puisse avoir lieu : le défaut doit être formé et l'agitation thermique doit fournir à l'atome l'énergie d'activation pour franchir le col d'activation. Le temps de relaxation de chaque processus peut alors être écrit sous la forme :

$$\tau_j = \frac{1}{\nu_j p_j^f p_j^m} = \frac{1}{\nu_j p_j^+} = \frac{h}{k\,T}\,\frac{1}{p_j^+} \qquad \text{(II-42)}$$

avec $p_j^+ = p_j^f\, p_j^m$

h : constante de PLANCK

k : constante de BOLTZMANN

p_j^f : probabilité d'avoir une configuration favorable (formation d'un défaut par exemple)

p_j^m : probabilité de migration

p_j^+ : probabilité d'atteindre la position énergétique du col pour le processus j.

ν_j : fréquence de saut pour le processus j

Rappelons que dans le modèle utilisé nous admettons :

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{h}\,\underline{\underline{1}} \qquad \text{(II-26)}$$

$$\text{Soit } \tau_j = \frac{1}{L_{jj}} \frac{1}{g_{jj}} = h \frac{1}{g_{jj}} = h \frac{1}{kT} \frac{1}{p_j^+} \tag{II-43}$$

Nous pouvons alors préciser le sens physique de la matrice de dissipation par identification :

$$\frac{g_{jj}}{T} = k\, p_j^+ \left(\text{ou pour N moles d'atomes } \frac{g_{jj}}{T} = R\, p_j^+ \right) \tag{II-44}$$

R : constante des gaz parfaits.

Les deux probabilités p_j^f et p_j^m qui conditionnent p_j^+ (probabilité d'atteindre le col d'activation) peuvent être liées à leur énergie libre par les relations suivantes (si l'on considère un essai à déformation imposée par l'expérimentateur $\psi\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}} ; \underline{z}\right) = F$) :

$$\frac{1}{p_j^f} = \exp\left(\frac{\Delta E_j^f - T\Delta S_j^f}{RT} \right) \tag{II-45}$$

$$\frac{1}{p_j^m} = \exp\left(\frac{\Delta E_j^m - T\Delta S_j^m}{RT} \right) \tag{II-46}$$

ΔE et ΔS désignent respectivement la variation de l'énergie et de l'entropie associée à la formation ou à la migration d'un défaut.

Si on pose

$$\Delta E_j^+ = \Delta E_j^f + \Delta E_j^m \text{ (énergie d'activation du processus j)} \tag{II-47}$$

$$\Delta S_j^+ = \Delta S_j^f + \Delta S_j^m \text{ (entropie d'activation du processus j)} \tag{II-48}$$

le temps de relaxation du processus j sera alors fonction de l'énergie libre d'activation :

$$\tau_j^r = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta E_j^+ - T\Delta S_j^+}{RT} \right) = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT} \right) \tag{II-49}$$

$\Delta F_j^{+,r}$: énergie libre d'activation du processus j.

La probabilité qui détermine la possibilité d'un saut sera alors :

$$p_j^+ = \exp\left(-\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT} \right) = \frac{g_{jj}}{kT} \tag{II-50}$$

2-6-2 Non-linéarité de nature coopérative

La formulation du facteur de réduction a(t) défini par la relation (II-30) est obtenue par extension de la théorie de l'état transitoire activé [CUNAT(1991$_2$)]. Le col d'activation devient dépendant du temps, cette dépendance étant sensible à l'écart à l'équilibre. Un développement simple au premier ordre en fonction $\left(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r\right)$ conduit à :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + \Delta\left(\Delta F_j^+\right) \qquad \text{(II-51)}$$

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + \underline{K}_\beta \left(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r\right) \qquad \text{(II-52)}$$

$$\text{d'où } a(t) = \exp\left(\frac{\underline{K}_\beta \left(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r\right)}{RT}\right) \qquad \text{(II-53)}$$

Dans un premier temps, nous admettons l'approximation selon laquelle K_β= constante.

La figure 1 illustre schématiquement cette évolution du col d'activation.

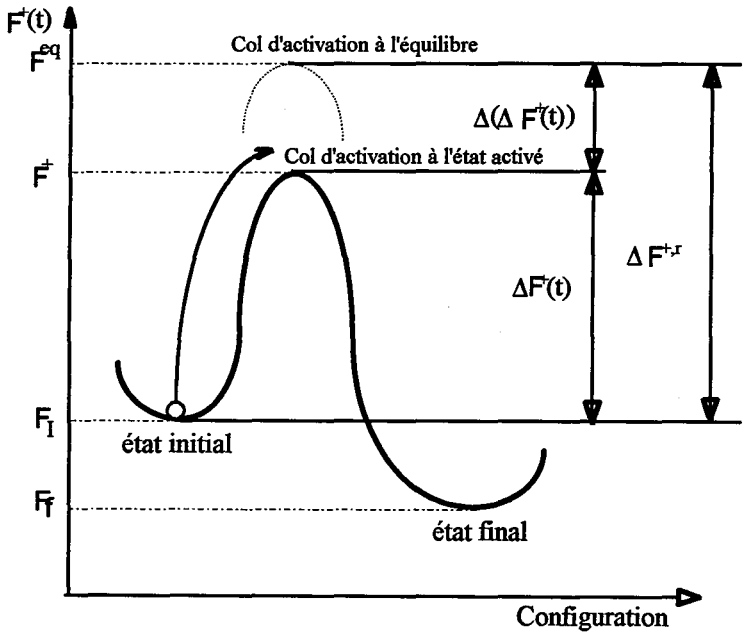


Figure 1 : Représentation schématique de la variation de l'énergie libre en fonction des configurations.

2-6-3 Effet de la température

Compte tenu de la forme établie pour décrire le temps de relaxation propre à chaque processus, un changement de température peut, a priori, modifier le découplage des processus. Pour retrouver le principe d'équivalence temps-température, il est nécessaire d'admettre l'égalité $\Delta E_j^+ = \Delta E^+$ quelque soit le processus j. En d'autres termes, un changement de température produit un glissement d'ensemble du spectre de relaxation le long de l'échelle des temps sans déformation du spectre de relaxation [CUNAT(1988_1, 1988_2)] :

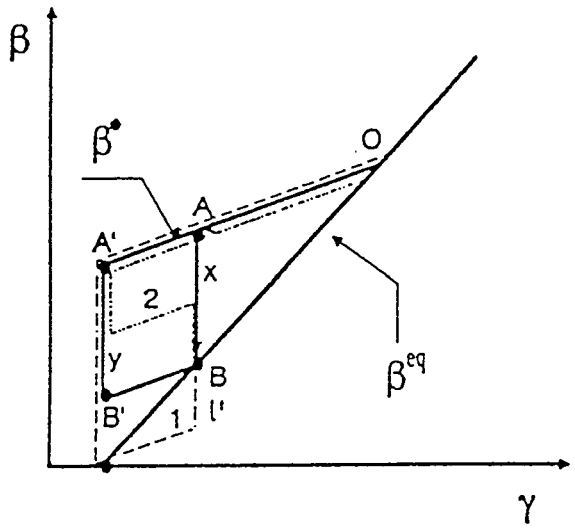
$$\tau_j^r = \frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta E^+ - T\Delta S_j^+}{RT}\right) = \left(\frac{h}{kT}\exp\left(-\frac{\Delta S_j^+}{R}\right)\right)\exp\left(\frac{\Delta E^+}{RT}\right) \qquad \text{(II-54)}$$

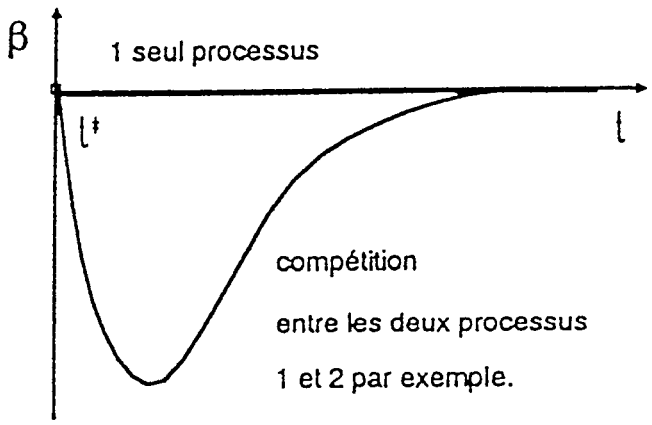
Cette hypothèse implique que l'origine de la distribution des temps de relaxation des processus est de nature entropique. En fait, la connaissance de l'entropie d'activation du processus le plus lent détermine à elle seule l'ensemble du spectre de relaxation.

2-7 Forme du spectre de relaxation

2-7-1 Existence de la multiplicité des processus

Des expériences dites de cross-over reflètent l'existence d'un effet de mémoire lié à la multiplicité des processus et non à la non-linéarité intrinsèque des temps de relaxation [BOUROUKBA (1989) par exemple]. La figure 2 illustre schématiquement une telle expérience. KOVACS a imaginé cette approche expérimentale pour étudier la relaxation volumique des polymères vitreux ($\Delta\gamma$ = T la température et β = V le volume). KOVACS impose une trempe à son échantillon de telle sorte qu'il atteigne le point A'. Ensuite, il mesure en continu la relaxation volumique isotherme (chemin A'B'). Il élève alors rapidement la température jusqu'à atteindre le point B. L'écart à l'équilibre $\delta(0)$ pour l'observable est nul en B. Puis il suit les évolutions du volume au cours du temps et observe une réponse $\delta(t)$ non nulle pendant un certain temps.





(2-a) (2-b)

Figure : 2-a Illustration schématique d'une expérience de cross-over.

Trajet x : - système porté hors équilibre par une trempe de O vers A.

- retour spontané du système vers l'état d'équilibre de A vers B.

Trajet y : - système porté hors équilibre par une trempe de O vers A'

- recuit de relaxation de A' vers B'

- chauffage rapide de B' vers B

Figure : 2-b Evolution du volume au cours du temps à partir du point B pour le trajet y.

Si on suppose l'existence d'un seul processus de relaxation, l'écart instantané à l'équilibre δ peut être déterminé par l'équation suivante (intégration de l'équation $\dot{\beta} = -\frac{\beta - \beta^r}{\tau}$) :

$$\delta(t) = \delta(0)\exp\left(-\int\frac{dt}{\tau}\right) \qquad \text{(II-55)}$$

Alors, puisque $\delta(0) = 0$ en B on devrait observer $\delta(t) = 0 \ \forall$ t. Ceci est contraire à l'expérience, par conséquent, un seul processus ne peut pas décrire un tel phénomène pourtant couramment observé expérimentalement [voir STRUICK (1978) pour les problèmes de relaxation de contraintes, SPINNER et NAPOLITANO (1966) pour la variation isotherme de l'indice de réfraction d'un borosilicate par exemple].

Si l'on admet simplement la participation de deux processus distincts tels que $\delta(B) = \delta_1(B) + \delta_2(B) = 0$ avec $\delta_1(B) \neq 0$ et $\delta_2(B) \neq 0$, alors on explique aisément l'évolution de ultérieure $\delta(t)$ comme la compétition entre le retour à l'équilibre vrai pour chacun de ces processus.

2-7-2 Distribution des temps de relaxation

La distribution initiale des processus permet de déterminer les conditions initiales indispensables pour intégrer les équations constitutives. CUNAT a étudié la relaxation $\left(\underline{\dot{\gamma}} = \underline{0}\right)$ des propriétés mécanique, optique, magnétique.... Il a montré l'existence d'une courbe réponse maîtresse dès lors que l'on se place en coordonnées réduites appropriées (taux de transformation Pr(t) et temps réduit t_r) [CUNAT 1988_1]. Il utilise la définition :

$$0 \le P_r(t) = \frac{\beta(t) - \beta(0)}{\beta(\infty) - \beta(0)} \le 1 \qquad \text{(II-56)}$$

et aboutit à l'équation suivante [CUNAT 1988_1] :

$$P_r(t) = 1 - \sum_{j=1}^{nk} p_j^0 \exp\left(-\frac{t_r}{\tau_j^r}\right) \qquad \text{(II-57)}$$

$$\text{Avec} \quad t_r = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} : \text{temps réduit} \qquad \text{(II-58)}$$

où p_j^0 est le poids relatif au processus j.

Conformément à cette relation, la distribution initiale des processus conditionne la réponse du matériau. Pour caractériser cette distribution, CUNAT utilise la théorie des fluctuations de PRIGOGINE (1968) : chaque chemin de régression possible pour une fluctuation devra produire la même quantité d'entropie. Ce théorème d'équipartition de l'entropie conduit à [CUNAT (1988_1) ou encore AYADI (1995)] :

$$p_j^0 = B\sqrt{\tau_j} \qquad \text{(II-59)}$$

où B est une constante déterminée par la condition de normation :

$$\sum_j p_j^0 = 1 \qquad \text{(II-60)}$$

Pour traduire un spectre continu, on discrétise la distribution initiale des processus en assurant l'équidistance sur l'échelle des énergies d'activation. La figure 3 présente un spectre de relaxation à 30 constantes de temps réparties sur 6 décades de l'échelle de temps. Ainsi la seule connaissance du processus le plus lent, par exemple, détermine-t-elle l'ensemble du spectre de relaxation.

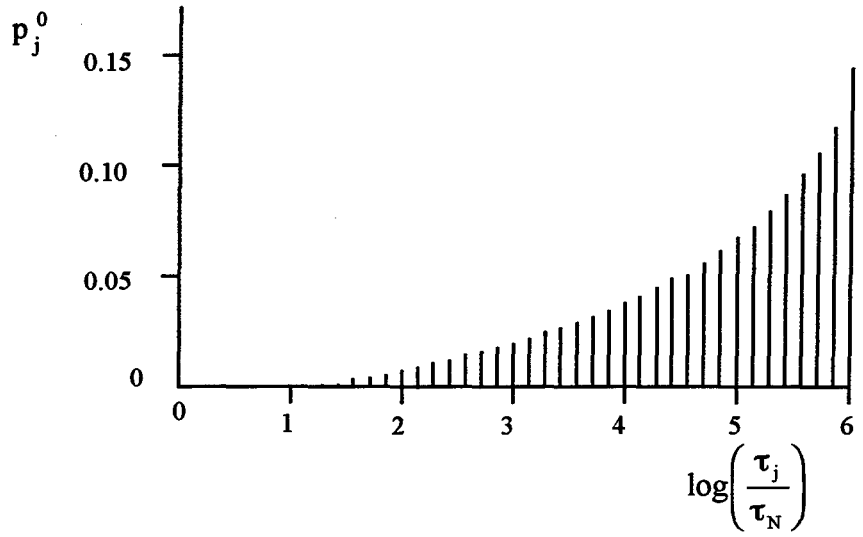


Figure 3 : Spectre de relaxation initiale obtenu avec 30 constantes de temps étalées sur 6 décades de l'échelle de temps.

Dans ces conditions, CUNAT a montré qu'au-delà de 50 constantes de temps, équi-réparties sur 6 décades de l'échelle log t, la réponse simulée est identique à celle obtenue avec un spectre continu.
Ainsi, les poids respectifs associés à chaque processus, permettent-ils de caractériser les réponses instantanées et relaxées du matériau :

$$\left(a^u_{nm}\dot{\gamma}_m\right)_j = p^0_j\left(a^u_{nm}\dot{\gamma}_m\right) \qquad \text{(II-61)}$$

$$\left(a^r_{nm}\dot{\gamma}_m\right)_j = p^0_j\left(a^r_{nm}\dot{\gamma}_m\right) \qquad \text{(II-62)}$$

Soulignons ici que l'on peut encore écrire $\left(\dot{\gamma}_m\right)_j = p^0_j\,\dot{\gamma}_m$ pour ces deux situations non dissipatives. On voit immédiatement que p^0_j joue le rôle de la variable de localisation de $\underline{\gamma}$ (variable de commande) dans l'espace des processus. Ainsi lorsque l'on écrit $\underline{\dot{\beta}} = \sum_j \left(\underline{\dot{\beta}}\right)_j$, on réalise l'opération d'homogénéisation dans cet espace.

3 ECRITURE DU MODELE DNLR POUR LES CHARGEMENTS A DEFORMATION IMPOSEE

Pour illustrer la formulation générale des lois de comportement portée par cette théorie, on peut à titre d'exemple développer la forme condensée $\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{a}}^{u}\,\dot{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{b}}\,\dot{\underline{z}}$ pour un potentiel $\psi = \psi\left(T,\ \underline{\underline{\sigma}},\ \underline{E},\ \underline{H},\ \underline{n},\ \ldots\ ;\ \underline{z}\right)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \dot{\underline{P}} \\ \dot{\underline{M}} \\ \dot{\underline{\mu}} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Observables}} = \underbrace{\begin{pmatrix} CT^{-1} & \underline{\alpha} & \underline{\phi} & \underline{\varphi} & \underline{\mu}_{,T} & \cdots \\ \underline{\alpha} & \underline{\underline{\underline{s}}} & \underline{\underline{\gamma}} & \underline{\underline{\pi}} & \underline{\underline{\mu}}_{,\sigma} & \cdots \\ \underline{\phi} & \underline{\underline{\gamma}} & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{\xi}} & \underline{\underline{\mu}}_{,E} & \cdots \\ \underline{\varphi} & \underline{\underline{\pi}} & \underline{\underline{\xi}} & \underline{\underline{\chi}} & \underline{\underline{\mu}}_{,H} & \cdots \\ \underline{\mu}_{,T} & \underline{\underline{\mu}}_{,\sigma} & \underline{\underline{\mu}}_{,E} & \underline{\underline{\mu}}_{,H} & \underline{\underline{\mu}}_{,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de stabilité généralisée de Tisza}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\underline{E}} \\ \dot{\underline{H}} \\ \dot{\underline{n}} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Commandes}} - \underbrace{\begin{pmatrix} (S)_1 - (S^r)_1 & \cdots & (S)_j - (S^r)_j & \cdots & (S)_{nk} - (S^r)_{nk} \\ (\underline{\underline{\varepsilon}})_1 - (\underline{\underline{\varepsilon}}^r)_1 & \cdots & (\underline{\underline{\varepsilon}})_j - (\underline{\underline{\varepsilon}}^r)_j & \cdots & (\underline{\underline{\varepsilon}})_{nk} - (\underline{\underline{\varepsilon}}^r)_{nk} \\ (\underline{P})_1 - (\underline{P}^r)_1 & \cdots & (\underline{P})_j - (\underline{P}^r)_j & \cdots & (\underline{P})_{nk} - (\underline{P}^r)_{nk} \\ (\underline{M})_1 - (\underline{M}^r)_1 & \cdots & (\underline{M})_j - (\underline{M}^r)_j & \cdots & (\underline{M})_{nk} - (\underline{M}^r)_{nk} \\ (\underline{\mu})_1 - (\underline{\mu}^r)_1 & \cdots & (\underline{\mu})_j - (\underline{\mu}^r)_j & \cdots & (\underline{\mu})_{nk} - (\underline{\mu}^r)_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Dissipation}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau_j} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau_{nk}} \end{pmatrix}$$

On reconnaît sans peine la plupart des lois de comportement rencontrées en physique. La signification des variables est explicitée ci-dessous :

❶ Variables d'état (commande et observable) :

S : entropie, T : température, $\underline{\underline{\varepsilon}}$: tenseur des déformations, $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes, $\underline{P}$ vecteur polarisation électrique ; $\underline{E}$ vecteur champ électrique ; $\underline{M}$ vecteur polarisation magnétique ; $\underline{H}$ vecteur champ magnétique ; $\underline{\mu}$ vecteur potentiel chimique (les dimensions de ce vecteur correspondent au nombre de constituants moins 1) ; $\underline{n}$ vecteur constituant chimique associé à $\underline{\mu}$.

❷ Sous matrices de couplage entre variables d'état :

C chaleur spécifique à $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{E}$, $\underline{H}$ et $\underline{n}$ constant (scalaire) liant S à T

$\underline{\underline{\underline{S}}}$ tenseur des souplesses d'origine mécanique (rang 4) liant $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à $\underline{\underline{\sigma}}$.

$\underline{\underline{K}}$ tenseur susceptibilité électrique (rang2) liant $\underline{P}$ à $\underline{E}$.

$\underline{\underline{\chi}}$ tenseur susceptibilité magnétique liant $\underline{M}$ à $\underline{H}$.

$\underline{\underline{\mu}}_{,\underline{n}}$ tenseur de stabilité chimique de HESSIAN liant $\underline{\mu}$ à $\underline{n}$ (l'écriture $\underline{\underline{\mu}}_{,\underline{n}}$ est utilisée pour indiquer la dérivée partielle par rapport à la variable $\underline{n}$).

$\underline{\underline{\underline{\gamma}}}$ tenseur piézo - électrique (rang 3) liant $\underline{P}$ à $\underline{\underline{\sigma}}$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à $\underline{E}$.

$\underline{\underline{\underline{\pi}}}$ tenseur magnétostrictif (rang 3) liant $\underline{M}$ à $\underline{\underline{\sigma}}$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à $\underline{H}$.

De la même manière, on pourrait commenter les autres tenseurs $\underline{\underline{\phi}}$, $\underline{\underline{\varphi}}$, ... contenu dans la matrice de stabilité de TISZA.

Dans tout ce travail, nous utilisons les variables eulériennes $\underline{\underline{\sigma}}$ (tenseur contraintes de CAUCHY) et $\underline{\underline{D}}$ (tenseur taux de déformation). Cependant, nous écrirons toujours $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}}$, même en grandes déformations, ce qui signifie que nous admettrons à chaque fois que la mesure de la déformation, notée $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par souci de simplicité, est la forme thermodynamiquement compatible avec la mesure de $\underline{\underline{\sigma}}$.

3-1 Ecriture matricielle des lois constitutives pour des essais mécaniques

Pour les essais thermomécaniques à température, déformation et nombre de moles des espèces en présence, contrôlables par l'expérimentateur, le potentiel thermodynamique adapté est l'énergie libre de HELMHOLTZ $F = F(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{n}; \underline{z})$. Il vient alors pour un milieu isotrope :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_5 \\ \dot{\beta}_6 \\ \dot{\beta}_7 \\ \dot{\beta}_8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{32} \\ \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\mu}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Variable observable}} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} C_v T^{-1} & \alpha(\lambda+2\mu) & \alpha(\lambda+2\mu) & \alpha(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,T} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{11}} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{22}} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{33}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{32}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{31}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & \mu_{1,\varepsilon_{12}} & \cdots \\ \mu_{1,T} & \mu_{1,\varepsilon_{11}} & \mu_{1,\varepsilon_{22}} & \mu_{1,\varepsilon_{33}} & \mu_{1,\varepsilon_{32}} & \mu_{1,\varepsilon_{31}} & \mu_{1,\varepsilon_{12}} & \mu_{1,S_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de stabilité de TISZA (couplage entre variables d'état)}} \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{32} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{n}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}}^{\text{partie instantanée de la réponse}} + \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & \cdots \\ b_{41} & b_{42} & \cdots \\ b_{51} & b_{52} & \cdots \\ b_{61} & b_{62} & \cdots \\ b_{71} & b_{72} & \cdots \\ b_{81} & b_{82} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{matrice de couplage (variables d'état variables dissipatives)}} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}}^{\text{partie dissipative de la réponse}}$$

Ou encore

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{32} \\ \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\mu}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Variable observable}} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} C_v T^{-1} & \alpha(\lambda+2\mu) & \alpha(\lambda+2\mu) & \alpha(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,T} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{11}} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{22}} & \cdots \\ \alpha(\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{33}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{32}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & \mu_{1,\varepsilon_{31}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & \mu_{1,\varepsilon_{12}} & \cdots \\ \mu_{1,T} & \mu_{1,\varepsilon_{11}} & \mu_{1,\varepsilon_{22}} & \mu_{1,\varepsilon_{33}} & \mu_{1,\varepsilon_{32}} & \mu_{1,\varepsilon_{31}} & \mu_{1,\varepsilon_{12}} & \mu_{1,S_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de stabilité de TISZA}} \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{32} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{n}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}}^{\text{partie instantanée de la réponse}} - \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} (S)_1 - (S^r)_1 & (S)_2 - (S^r)_2 & \cdots \\ (\sigma_{11})_1 - (\sigma^r_{11})_1 & (\sigma_{11})_2 - (\sigma^r_{11})_2 & \cdots \\ (\sigma_{22})_1 - (\sigma^r_{22})_1 & (\sigma_{22})_2 - (\sigma^r_{22})_2 & \cdots \\ (\sigma_{33})_1 - (\sigma^r_{33})_1 & (\sigma_{33})_2 - (\sigma^r_{33})_2 & \cdots \\ (\sigma_{32})_1 - (\sigma^r_{32})_1 & (\sigma_{32})_2 - (\sigma^r_{32})_2 & \cdots \\ (\sigma_{31})_1 - (\sigma^r_{31})_1 & (\sigma_{31})_2 - (\sigma^r_{31})_2 & \cdots \\ (\sigma_{12})_1 - (\sigma^r_{12})_1 & (\sigma_{12})_2 - (\sigma^r_{12})_2 & \cdots \\ (\mu_1)_1 - (\mu^r_1)_1 & (\mu_1)_2 - (\mu^r_1)_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{matrice de couplage de dissipation}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} \\ \frac{1}{\tau_3} \\ \vdots \end{pmatrix}}^{\text{partie dissipative de la réponse}}$$

τ : temps de relaxation

Cette écriture thermodynamique met en évidence l'ensemble des couplages existants même pour les systèmes non dissipatifs. Par exemple, la déformation imposée affecte l'entropie du système. Ce couplage permettra en fait de prévoir les crochets de traction.

3-2 Ecriture du formalisme pour conduire un essai de traction ou un essai de torsion

La loi de comportement mécanique s'écrit donc sous la forme incrémentale :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \sum_{j=1}^{nk} \left(\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\right)_j = \sum_{j=1}^{nk} p_j^0 \, \underline{\underline{\underline{a}}}^u \, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \sum_{j=1}^{nk} \frac{\left(\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_j - \left(\underline{\underline{\sigma}}^r\right)_j\right)}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(II-63)}$$

Pour la traction uniaxiale on écrit : $\dot{\sigma}_{11} = E^u \, \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(\sigma_{11})_j - (\sigma_{11}^r)_j}{\tau_j(T,t)}$ (II-64)

Pour le cisaillement on a : $\dot{\sigma}_{12} = G^u \, \dot{\varepsilon}_{12} - \sum_j \frac{(\sigma_{12})_j - (\sigma_{12}^r)_j}{\tau_j(T,t)}$ (II-65)

3-3 Hypothèses sur les matrices de stabilité de TISZA pour les états relaxés et non relaxés

3-3-1 Généralités

Ces états sont caractérisés par l'absence de dissipation. La relation $\dot{F}\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}}; \underline{z}\right) = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{A} \, \dot{\underline{z}} = \underline{\beta} \, \dot{\underline{\gamma}} - \underline{A} \, \dot{\underline{z}}$ devient :

$$\dot{F}\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}}; \underline{z}\right) = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\beta} \, \dot{\underline{\gamma}} \qquad \text{(II-66)}$$

et

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial F}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right)_T \qquad \text{(II-67)}$$

or $F = e - T\,s$

soit $\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial e}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right) - T\left(\frac{\partial s}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right)$ (II-68)

et $\underline{\underline{\underline{a}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right) - T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right)$ (II-69)

Cette écriture souligne que le tenseur des contraintes élastiques est à la fois déterminé par l'énergie interne (interaction entre unités atomiques considérées) et par une contribution entropique. Cette dernière contribution joue un rôle déterminant dans l'élasticité des élastomères par exemple. En général, l'élasticité linéaire prend son origine dans les énergies d'interaction. On a coutume d'admettre que la loi de HOOKE par exemple ne comprend pas de contribution entropique.

3-3-2 Etat non relaxé

Nous admettons ici que l'état non relaxé est caractérisé par une relation linéaire entre contrainte et déformation. L'approche thermodynamique de l'élasticité postule que l'élasticité se produit sans dissipation (évolution réversible : système gelé ou système en équilibre interne vrai). Dans le cas d'un chargement à déformation imposée, l'énergie libre de HELMHOLTZ s'écrit $F^u = e - T\,s$

$$\text{Soit } dF^u = -s^u\,dT + \underline{\underline{\sigma}}^u\,d\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \text{(II-70)}$$

La dérivée partielle de F par rapport aux variables d'état conduit à :

$$\left(\frac{\partial F^u}{\partial T}\right)_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = -s^u, \quad \left(\frac{\partial F^u}{\partial(\underline{\underline{\varepsilon}})}\right)_T = \underline{\underline{\sigma}}^u \qquad \text{(II-71)}$$

F^u étant une fonction d'état, l'ordre des différentiations partielles par rapport aux variables d'état n'intervient pas. Nous en déduisons :

$$a^u_{nm} = \frac{\partial^2 F^u}{\partial\gamma_n\partial\gamma_m} = \frac{\partial}{\partial\gamma_n}\left(\frac{\partial F^u}{\partial\gamma_m}\right) = \frac{\partial}{\partial\gamma_m}\left(\frac{\partial F^u}{\partial\gamma_n}\right) \qquad \text{(II-72)}$$

avec $\underline{\gamma} = (T,\ \underline{\underline{\varepsilon}})$

Lorsque la perturbation s'identifie au tenseur des déformations $\gamma_n = (\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \varepsilon_{23},\ \varepsilon_{13},\ \varepsilon_{12})$

alors :

$$a^u_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial F^u}{\partial\varepsilon_{kl}}\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial F^u}{\partial\varepsilon_{ij}}\right) = a^u_{klij} \qquad \text{(II-73)}$$

La symétrie du tenseur de rigidité $\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^u$ découle directement des relations de MAXWELL qui expriment que toute fonction d'état est une différentielle totale exacte. Les coefficients de cette matrice sont connus en thermodynamique sous le nom de modules thermodynamiques.

Compte tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, nous avons par exemple :

$$\sigma^u_{ij} = a^u_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \sigma^u_{ji} = a^u_{jikl}\varepsilon_{kl} \Rightarrow a^u_{ijkl} = a^u_{jikl} \qquad \text{(II-74)}$$

Par des considérations de stabilité thermodynamique, TISZA (1966) a montré que ces coefficients doivent être positifs. Cette condition traduit simplement que l'énergie interne atteint son minimum à l'état d'équilibre thermodynamique. Nous appliquerons ces propriétés pour décrire la réponse instantanée du milieu $\left(\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^{u}\right)$.

3-3-3 Etat relaxé

3-3-3-1 Etat relaxé obéissant à la loi de HOOKE

Lorsque l'équilibre interne vrai est atteint, le système est considéré comme totalement relaxé et les considérations précédentes s'appliquent intégralement si la réponse d'équilibre est linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{r} = \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^{r}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \text{(II-75)}$$

3-3-3-2 Etat relaxé n'obéissant pas à la loi de HOOKE

Lorsqu'au contraire le comportement du milieu relaxé ne conduit pas à l'élasticité linéaire, il faut choisir une représentation plus complexe permettant d'établir le lien entre contrainte et déformation. C'est le cas des polymères pour lesquels le terme $\left(\frac{\partial^2 s^r}{\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\partial\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}\right)$ apporte une contribution importante. En première approximation, nous avons admis dans ce travail que le comportement du milieu relaxé pouvait être décrit par une loi de type MOONEY-RIVLIN assez bien adaptée pour décrire l'élasticité des élastomères en grandes déformations. La valeur de la contrainte à l'état d'équilibre est alors déterminée par la relation suivante (voir Annexe A) :

En traction : $$\sigma^r_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda_1}\right) \qquad \text{(II-76)}$$

En cisaillement : $$\sigma^r_{12} = 4\left(C_1 + C_2\right)\varepsilon_{12} \qquad \text{(II-77)}$$

avec C_1 et C_2 : coefficients de MOONEY RIVLIN
λ_1 : extension principale

3-4 Modélisation des temps de relaxation

3-4-1 Temps de relaxation de référence au voisinage de l'équilibre thermodynamique vrai

La modélisation des temps de relaxation à l'équilibre thermodynamique s'appuie, comme nous en avons abondamment discuté auparavant, sur la théorie de l'état transitoire activé [BURKE (1968) par exemple] :

$$\tau_j^r = \frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta E^+ - T\Delta S_j^+}{RT}\right) = \frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right) \qquad \text{(II-78)}$$

3-4-2 Modélisation des non-linéarités temporelles (effets coopératifs)

Les non-linéarités temporelles traduisent que le col d'activation sera fonction du temps :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + \Delta\left(\Delta F^+\right) \qquad \text{(II-79)}$$

l'expression du temps de relaxation sera :

$$\tau_j(T,t) = \frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta F_j^+(t)}{RT}\right) \qquad \text{(II-80)}$$

Si on introduit le facteur de glissement coopératif a(t) :

$$\tau_j(T,t) = a(t)\tau_j^r(T) \qquad \text{(II-81)}$$

L'expression de ce facteur est alors :

$$a(t) = \exp\left(\frac{\Delta\left(\Delta F^+\right)}{RT}\right) \qquad \text{(II-82)}$$

La modélisation de cette non-linéarité temporelle s'appuie sur la détermination de l'évolution de $\Delta\left(\Delta F^+\right)$ en fonction du temps. Elle nécessite la connaissance des phénomènes physiques qui régissent le comportement du matériau considéré. A l'heure actuelle, nous n'avons pas encore totalement exploré cette voie dans notre groupe de recherche. Les modélisations retenues revêtent donc un caractère phénoménologique très prononcé. A titre d'exemple, nous exposons ci-dessus les trois types de non-linéarité utilisés pour rendre compte des observations expérimentales. Dans tous les cas, nous considérons implicitement que les variations de $\Delta\left(\Delta F^+\right)$ sont dues à des effets dissipatifs. En conséquence, nous exprimons ces grandeurs à partir des écarts enregistrés sur les observables par rapport à l'équilibre.

3-4-2-1 Approximation d'ordre 1 par rapport à l'écart à l'équilibre des observables mises en jeu par la perturbation imposée

3-4-2-1-1 Couplage en contrainte

Nous postulons ici que l'énergie libre d'activation est corrélée à l'écart à l'équilibre sur la grandeur observée, c'est à dire sur la contrainte. Nous admettons, à l'ordre un, la relation suivante :

En traction : $$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + K_\sigma\left(\sigma_{11} - \sigma_{11}^r\right) \qquad \text{(II-83)}$$

En cisaillement : $$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + K_\sigma \sqrt{3}\left(\sigma_{12} - \sigma_{12}^r\right) \qquad \text{(II-84)}$$

où K_σ représente le facteur de non-linéarité induit par l'écart à l'équilibre de la contrainte.

Remarque :

$K_\sigma\left(\sigma_{11} - \sigma_{11}^r\right)$ est homogène à une énergie de dissipation, donc on admettra ici que son signe est indépendant du signe de la contrainte (traction ou compression). Par commodité, nous écrivons pour les calculs $K_\sigma\left|\sigma_{11} - \sigma_{11}^r\right|$.

Ce couplage induit des effets combinés d'écrouissage isotrope et cinématique comme il le sera démontré ultérieurement (chapitre III).

3-4-2-1-2 Couplage entropique

D'après la relation constitutive portant sur l'observable entropie, nous écrivons dans les mêmes conditions :

$$\dot{S} = \alpha E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{S_j - S_j^r}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(II-85)}$$

et nous admettons également un couplage coopératif par rapport à l'écart à l'équilibre sur l'observable entropie. Au premier ordre nous écrivons alors :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + K_S\left(S - S^r\right) \qquad \text{(II-86)}$$

K_S : paramètre de non-linéarité lié à l'entropie

α : coefficient de dilatation

S^r: entropie du milieu à l'état d'équilibre

Ce couplage entropique permet d'obtenir le crochet de traction. Il est caractéristique d'une instabilité plastique.

3-4-2-1-3 Couplage en énergie de déformation cumulée

Ce couplage est de nature héréditaire puisqu'il intègre l'énergie associée aux écarts à l'équilibre rencontrés par le système, nous postulons :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + K_w \int \left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) d\varepsilon \qquad \text{(II-87)}$$

avec K_W : paramètre coopératif constant qui traduit l'effet de l'énergie cumulée.

Ce couplage permet d'obtenir le durcissement ou l'adoucissement du matériau lors d'un chargement cyclique sans saturation

3-4-2-2 Couplage non-linéaire : prise en compte de la saturation des durcissements et adoucissements cycliques

Pour obtenir les effets de saturation, de durcissement et d'adoucissement décrits précédemment, la construction même du formalisme impose d'atteindre une stabilisation de l'énergie libre d'activation à partir d'un temps t^*. Nous pouvons encore écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Delta F^+(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t^*}^{t} K_w(t)\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) d\varepsilon = 0 \Rightarrow K_w(t)\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) = 0 \quad \text{(II-88)}$$

Cette condition se traduit par la relation $K_w(t) = f(\varepsilon)$ en régime stabilisé.

3-4-3 Discussion à propos de ces paramètres coopératifs

A l'évidence **ce point particulier du formalisme n'est pas encore satisfaisant** puisque les fondements micro-physiques ne sont pas clairement établis. Ce travail de réflexion est en cours. Il s'appuie sur les descriptions usuellement proposées par les physiciens de la déformation.

Nous rappelons l'expression de l'énergie d'activation instantanée :

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + \Delta\left(\Delta F^+(t)\right) \qquad \text{(II-89)}$$

Comme nous venons de l'indiquer, le terme de non-linéarité coopératif se compose de trois effets différents :

$$\Delta\left(\Delta F^+(t)\right) = \underbrace{K_\sigma\left(\sigma - \sigma^r\right)}_{\text{Couplage lié à l'écart de l'équilibre}} + \underbrace{K_S\left(S - S^r\right)}_{\text{Couplage entropique}} + \underbrace{\int K_w\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) d\varepsilon}_{\text{Couplage dû à l'histoire de la déformation}} \qquad \text{(II-90)}$$

Cette relation permet de donner l'unité de chacun des paramètres K_σ, K_W et K_S.

❑Analyse de K_σ

$$[K_\sigma] = \frac{[\Delta(\Delta F^+(t))]}{[(\sigma_{11} - \sigma^r_{11})]} = \frac{[N\,m/Mol\,at]}{[N/m^2]} = [m^3/Mol\,at] \qquad (II\text{-}91)$$

K_σ est homogène à un volume d'activation. Pour $\Delta(\Delta F^+) = 1$ J / Mol at et $(\sigma - \sigma^r) = 1$ MPa on a:

$$[K_\sigma] = \frac{[1\,N\,m/Mol\,at]}{[1\,N * 10^6\,m^{-2}]} = \frac{[1\,N\,m]}{[1\,N * 10^6\,m^{-2} * 6.023 * 10^{23}\,at]} = 1.66 * 10^{-30}\ m^3/at$$

$$\text{Soit } [K_\sigma] = 1.66 \left(\overset{0}{A}\right)^3 / at \qquad (II\text{-}92)$$

Dans nos diverses simulations, nous observons que $\Delta(\Delta F^+)$ peut atteindre 10000 J/Mol at environ et que $(\sigma - \sigma^r)$ est souvent compris, par exemple, entre 10 et 100 MPa. En conséquence $1.66 * 10^2 \left(\overset{0}{A}\right)^3 / at \le (K_\sigma = -V^+) \le 1.66 * 10^3 \left(\overset{0}{A}\right)^3 / at$ (II-93)

On retrouve ici l'ordre de grandeur habituellement rencontré dans les théories qui dérivent du modèle de EYRING.

❑ Analyse de K_W

Le terme K_W, traduisant l'effet de l'énergie cumulée, est également homogène à un volume d'activation :

$$\left[\int K_w\,(\sigma(t) - \sigma^r(t))\,d\varepsilon\right] = [\Delta(\Delta F^+(t))\,J/Mol\,at] \qquad (II\text{-}94)$$

Quelques simulations permettent d'illustrer les effets comparés des paramètres K_σ et K_W. La figure 4a montre la variation de la contrainte en fonction de la déformation pour différents couples (K_σ, K_W). Les courbes obtenues avec $(K_\sigma = 0, K_W = -10)$ et $(K_\sigma = -10, K_W = 0)$, les autres paramètres restant les mêmes, sont profondément différentes. Les courbes d'énergie libre d'activation $\Delta F^+(t)$ correspondantes sont données sur la figure 4b et $\Delta(\Delta F^+(t))$ sur la figure 4c. Nous pouvons mesurer ici directement le rôle des paramètres sur ces niveaux d'énergie.

E^u = 80000 MPa, E^r = 2500 MPa, $\Delta F^{+,r}_{max}$ = 80000 J / Mol at, T = 297 K, $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.0005\ s^{-1}$

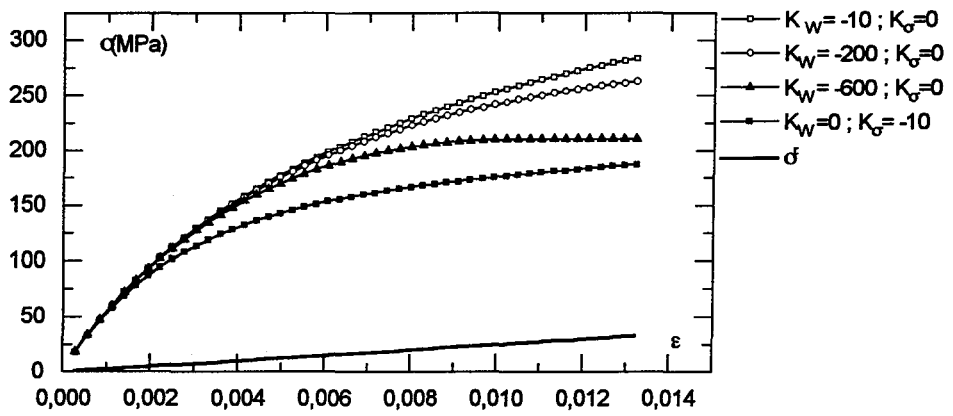


Figure 4a : Courbe contrainte-déformation.

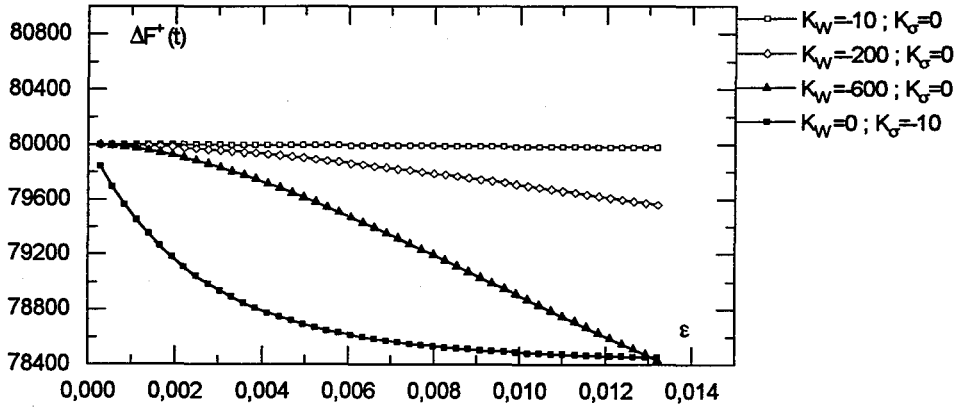


Figure 4b : Evolution de l'énergie d'activation instantanée en fonction de la déformation.

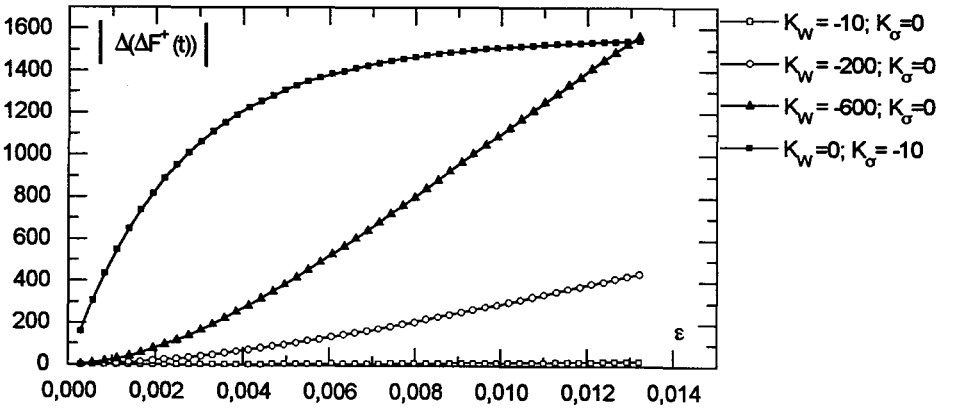


Figure 4c : Evolution de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation.

❑ **Analyse de K_S**

Le paramètre K_S est homogène au produit d'un volume par une température. La relation $\dot{S} = \alpha E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{S_j - S_j^r}{\tau_j(T,t)}$ montre que l'entropie considérée est l'entropie spécifique.

$$[\alpha] = [K^{-1}] \text{ et } [E^u] = [N\,m^{-2}] \Rightarrow [S] = [N\,m^{-2}\,K^{-1}] = [J\,m^{-3}\,K^{-1}] \qquad \text{(II-95)}$$

$$\text{soit } [K_S] = \frac{[J/\text{Mol at}]}{[(S - S^r)]} = \frac{[J/\text{Mol at}]}{[N\,m^{-2}\,K^{-1}]} = [m^3\,K/\text{Mol at}] \qquad \text{(II-96)}$$

4 COMPARAISON ENTRE LE MODELE DNLR ET QUELQUES APPROCHES USUELLES UTILISEES EN RHEOLOGIE DES SOLIDES A L'AIDE DES VARIABLES INTERNES

Dans ce paragraphe nous conduisons le traitement du modèle DNLR en suivant le cheminement de pensée habituellement utilisé pour les approches en variables internes. La première étape consiste à exprimer le potentiel thermodynamique adapté. La seconde étape consiste en fait à vérifier que les variables internes retenues sont compatibles avec la deuxième loi de la thermodynamique. Nous utilisons pour cela l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM et le concept de pseudo-potentiel de dissipation. Pour illustrer notre propos nous décrivons un système soumis à des déformations et températures imposées.

4-1 Choix du potentiel thermodynamique

4-1-1 Démarche DNLR

Nous nous placerons ici dans le cadre des variables thermodynamiques naturelles $F(T, \underline{\underline{\varepsilon}}; \underline{z})$. On écrira ainsi

$$\dot{F}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}; \underline{z}) = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{A}\,\dot{\underline{z}} = \underline{\beta}\,\dot{\underline{\gamma}} - \underline{A}\,\dot{\underline{z}} \qquad \text{(II-97)}$$

avec $\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{a}}^u \dot{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{b}}\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{a}}^u \dot{\underline{\gamma}} - \left(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r\right)(\underline{\tau})^{-1}$

$$\dot{\underline{A}} = -\underline{\underline{b}}^T \dot{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{g}}\,\dot{\underline{z}}$$

$$\dot{\underline{\beta}}^r = \underline{\underline{a}}^r \dot{\underline{\gamma}}$$

Les matrices de stabilité $\underline{\underline{a}}^u$ et $\underline{\underline{a}}^r$ sont bien connues. Les sous-matrices relatives au comportement mécanique correspondent à la représentation matricielle des tenseurs des

constantes élastiques dans les états non-relaxés et relaxés. Par exemple, pour un milieu isotrope à élasticité linéaire, les deux coefficients de Lamé λ et μ suffisent pour caractériser cette sous-matrice de TISZA. Ainsi la dépendance de F par rapport aux variables d'état T et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est-elle parfaitement établie !

La partie dissipative associée aux variables internes $\underline{z}$ est accessible dans le formalisme DNLR par le biais de la distribution initiale des processus sous l'impulsion de la perturbation imposée $p_j^0 = B\sqrt{\tau_j^r}$. Elle constitue en fait une localisation de la déformation dans le mode de sollicitation retenu ici. La conséquence de cette distribution est bien entendu l'existence d'effets de mémoire spécifiques. En complément, la non-linéarité temporelle induite dans la dépendance de chaque temps de relaxation avec l'état actuel du système (effet coopératif) implique une autre forme de mémoire décrite par la théorie de l'état transitoire activé. Cette écriture fondée sur une représentation appropriée du potentiel thermodynamique généralisé de GIBBS contient de fait la première et la deuxième loi de la thermodynamique. Il est donc inutile de chercher des compléments à cette modélisation.

On peut cependant noter ici que l'approche DNLR vérifie naturellement le postulat de ZIEGLER (1963) qui peut être analysé comme une généralisation des règles d'écoulement. Suivant nos notations, ce principe s'écrit :

$$\left(\underline{A} - \underline{A}^*\right) \underline{\dot{z}} \geq 0 \qquad \text{(II-98)}$$

où $\underline{A}^*$ correspond à une situation virtuelle.
Or l'approche DNLR considère que les mécanismes élémentaires de relaxation couplés les uns aux autres peuvent être remplacés par des processus indépendants obtenus à partir d'un changement de base approprié. Chaque processus j doit alors vérifier la deuxième loi de la thermodynamique $A_j \dot{z}_j \geq 0$. Dans cette expression, la vitesse $\dot{z}_j$ est déterminée par le temps de relaxation $\tau_j = \frac{1}{L}\frac{1}{g_{jj}}$. Toute valeur de $\tau_j^* \neq \tau_j$ conduit à une vitesse :

$$\dot{z}_j^* = -\frac{z_j - z_j^r}{\tau_j^*} \neq \dot{z}_j = -\frac{z_j - z_j^r}{\tau_j} \qquad \text{(II-99)}$$

L'identification des paramètres, sur les données expérimentales, fixe la position du spectre des temps de relaxation le long de l'échelle de temps en imposant de la sorte le maximum de dissipation possible. On retrouve ici le principe de la plus grande production d'entropie $\underline{A}\,\underline{\dot{z}}$ postulé par ZIEGLER (1963).

Toute valeur $\tau_j^* > \tau_j$ conduit pour le processus j caractérisé par l'écart à l'équilibre $\left(z_j - z_j^r\right)$ à une vitesse $\dot{z}_j^*$ inférieure à $\dot{z}_j$. Or $\dot{z}_j = L\, A_j \geq 0$ donc :

$$A_j^* < A_j \tag{II-100}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\left(A_j - A_j^*\right) \geq 0 \tag{II-101}$$

Or $\dot{z}_j = L\, A_j \geq 0$ donc :

$$\left(A_j - A_j^*\right) \dot{z}_j \geq 0 \tag{II-102}$$

$$\text{Soit } \left(\underline{A} - \underline{A}^*\right) \underline{\dot{z}} \geq 0 \tag{II-103}$$

Remarquons que l'on retrouve le principe de HILL si l'on admet que la dissipation est gouvernée par les 6 processus de dissipation liés aux 6 composantes du tenseur des contraintes, la variable $\underline{\dot{z}}$ étant elle identifiée aux 6 composantes du tenseur des vitesses de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$:

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*\right) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \geq 0 \tag{II-104}$$

Puisque $\dot{z}_j^* < \dot{z}_j$ on a également la deuxième forme de la relation de ZIEGLER :

$$\underline{A}\left(\dot{z}_j - \dot{z}_j^*\right) \geq 0 \tag{II-105}$$

4-1-2 Liens avec la démarche usuelle

Reprenons l'expression de F :

$$\dot{F}\left(T,\ \underline{\underline{\varepsilon}}\ ;\ \underline{z}\right) = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{A}\ \underline{\dot{z}}$$

L'idée est de faire la partition de $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ en une déformation élastique et anélastique $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}$.

Nous écrivons donc :

$$\dot{F}\left(T,\ \underline{\underline{\varepsilon}}\ ;\ \underline{z}\right) = \dot{F}\left(T,\ \underline{\underline{\varepsilon}}^e;\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{an},\ \underline{z}\right) = -s\,\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} - \underline{A}\ \underline{\dot{z}} \tag{II-106}$$

Si l'on décompose également $\dot{s}$ sous la forme $\dot{s} = \dot{s}^e + \dot{s}^{an}$, on peut alors écrire :

$$\dot{F} = -s^e\,\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e - s^{an}\,\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} - \underline{A}\,\underline{\dot{z}} \tag{II-107}$$

ou encore :

$$\dot{F} = \dot{F}^e + \dot{F}^{an} \tag{II-108}$$

$$\text{avec } \dot{F}^e = -s^e\,\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e \tag{II-109}$$

$$\text{soit } F^e = F\left(T, \underline{\underline{\varepsilon}}^e\right) \tag{II-110}$$

$$\text{et } \dot{F}^{an} = -s^{an}\,\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an} - \underline{A}\,\dot{\underline{z}} = -s^{an}\,\dot{T} - \underline{A}'\,\dot{\underline{z}}' \qquad \text{(II-111)}$$

$$\text{soit } F^{an} = F^{an}\left(T\,;\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}, \underline{z}\right) = F^{an}\left(T\,;\,\underline{z}'\right) \qquad \text{(II-112)}$$

La caractérisation de F^e ne pose aucune difficulté, puisque comme dans le modèle DNLR, elle se déduit immédiatement de la sous-matrice de stabilité de TISZA associée au tenseur des constantes élastiques. Par contre, la formulation a priori de F^{an} pose des difficultés importantes. En général seule l'approche empirique permet de régler ce problème. A titre d'exemple, on retient parfois la forme suivante pour décrire la viscoplasticité :

$$\rho F^{an} = \frac{1}{2}\,Q_1\,p^2 + Q_2\left(p + \frac{1}{b}\,e^{-bp} - \frac{1}{b}\right) \qquad \text{(II-113)}$$

où p est la déformation plastique cumulée, Q_1 , Q_2 et b sont des constantes empiriques [LEMAITRE et CHABOCHE (1985)]. Pour guider ce choix, il est indispensable de vérifier parallèlement le deuxième principe de la thermodynamique, que la formulation empirique ne peut garantir a priori. Pour assurer cette compatibilité, nous pouvons isoler le terme dissipatif et vérifier qu'il est positif. Reprenons l'expression de F :

$$\dot{F}\left(T,\ \underline{\underline{\varepsilon}}\ ;\ \underline{z}\right) = \dot{F}^e + \dot{F}^{an} = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{A}\,\dot{\underline{z}}$$

Isolons le terme de production d'entropie $\underline{A}\,\dot{\underline{z}}$ et utilisons la partition $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}$:

$$\phi = T\frac{d_i S}{dt} = \underline{A}\,\dot{\underline{z}} = -\left(\dot{F}^e + \dot{F}^{an} + s\dot{T}\right) + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an} \geq 0 \qquad \text{(II-114)}$$

Avec les expressions de $\dot{F}^e$ et $\dot{F}^{an}$ précédentes :

$$\dot{F}^e = -s^e\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}}^e : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e$$

$$\dot{F}^{an} = -s^{an}\dot{T} - \underline{A}'\,\dot{\underline{z}}'$$

Nous obtenons alors la forme usuelle de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM qui apparaît ainsi n'être qu'une réécriture de $\dot{F}$:

$$\phi = \underline{A}\,\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an} + \underline{A}'\,\dot{\underline{z}}' \geq 0 \qquad \text{(II-115)}$$

Il apparaît clairement ici que la différence de traitement entre notre approche et la démarche usuelle réside essentiellement dans le choix de la base de représentation. L'approche classique cherche à vérifier $\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an} + \underline{A}'\,\dot{\underline{z}}' \geq 0$, alors que dans notre étude nous nous efforçons de développer $\left(\underline{A}\,\dot{\underline{z}}\right)$. En particulier, notre effort porte à la fois sur la définition de l'opérateur $\underline{\underline{\tau}}$ et sur sa dépendance avec l'état actuel du milieu et sur la distribution des processus implicitement contenue dans les vecteurs $\underline{A}$ et $\dot{\underline{z}}$. L'approche usuelle, quant à elle, porte sur la

particularisation de ce potentiel. Il est en général construit à partir de lois empiriques établies pour des chargements simples et généralisées dans le cadre du formalisme tridimensionnel.

Rappelons que les hypothèses de la thermodynamique des processus irréversibles conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}^{-1} &= \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}} \\ \underline{A} &= -\underline{\underline{g}}\left(\underline{z}-\underline{z}^{r}\right) \\ \dot{\underline{z}} &= \underline{\underline{L}}\,\underline{A} = -\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{g}}\left(\underline{z}-\underline{z}^{r}\right) = -\underline{\underline{\tau}}^{-1}\left(\underline{z}-\underline{z}^{r}\right) \end{aligned} \qquad \text{(II-116)}$$

La dissipation $\phi = T\dfrac{d_i S}{dt} = \underline{A}\,\dot{\underline{z}} \geq 0$ s'écrit encore $\phi = \underline{\underline{L}}^{-1}\,\dot{\underline{z}}\,\dot{\underline{z}}$ en fonction des variables internes $\underline{z}$. On aurait pu l'écrire en fonction des affinités $\underline{A}$ sous la forme duale. Ainsi la dissipation prend la forme :

$$\phi = \dot{\underline{z}}\;\underline{\underline{L}}^{-1}\;\dot{\underline{z}} = \underline{A}\;\underline{\underline{L}}\;\underline{A} \qquad \text{(II-117)}$$

Remarquons que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\underline{z}}} = 2\underline{\underline{L}}^{-1}\,\dot{\underline{z}} + \dot{\underline{z}}\frac{\partial\left(\underline{\underline{L}}\left(\underline{z},\underline{z}^{r}\right)\right)^{-1}}{\partial \dot{\underline{z}}}\;\dot{\underline{z}} \qquad \text{(II-118)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{A}} = 2\underline{\underline{L}}\,\underline{A} + \underline{A}\,\frac{\partial\left(\underline{\underline{L}}\left(\underline{z},\underline{z}^{r}\right)\right)^{-1}}{\partial \underline{A}}\;\underline{A} \qquad \text{(II-119)}$$

or $2\underline{\underline{L}}\;\underline{A} = 2\;\dot{\underline{z}}$ et $2\;\underline{\underline{L}}^{-1}\;\dot{\underline{z}} = 2\;\underline{A}$

Rappelons aussi que pour le modèle DNLR, on a l'égalité $\underline{\underline{L}} = \left(\dfrac{1}{h}\right)\underline{\underline{1}}$. Par conséquent, il vient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{A}} = 2\;\dot{\underline{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\underline{z}}} = 2\;\underline{A} \qquad \text{(II-120)}$$

ou encore

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\phi}{\partial \underline{A}} = \dot{\underline{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \frac{1}{2}\phi}{\partial \dot{\underline{z}}} = \underline{A} \qquad \text{(II-121)}$$

La fonction $\dfrac{1}{2}\phi$ joue alors le rôle d'une fonction potentielle définie positive par rapport aux variables dissipatives. On l'appelle le pseudo-potentiel de dissipation et on a coutume d'écrire :

$$\underline{\dot{z}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{A}} \text{ et } \underline{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{z}}} \qquad \text{(II-122)}$$

avec $\varphi = \underline{\dot{z}}\, \underline{\underline{L}}^{-1}\, \underline{\dot{z}} = \varphi^* = \underline{A}\, \underline{\underline{L}}\, \underline{A}$

ou φ et φ^* sont les pseudo-potentiels, duaux l'un de l'autre.

Notons ici que la généralisation pour les systèmes intrinsèquement non-linéaires (dépendance temporelle des temps de relaxation) explicitement contenue dans le modèle DNLR reste rigoureuse puisque $\underline{\underline{L}}$ est insensible à l'état actuel du milieu.

Dans la formulation usuelle, le choix arbitraire (empirique) de F doit être complété par un autre choix arbitraire du pseudo-potentiel des vitesses φ (ou $\varphi*$) de manière à respecter simultanément les règles dites de normalité (ou d'écoulement) :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}} \qquad \text{(II-123)}$$

$$\underline{\dot{z}}' = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{A}'} \text{ et } \underline{A}' = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{z}}'}$$

et la deuxième loi de la thermodynamique à travers l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM qui s'écrit : $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} + \underline{A}' \, \underline{\dot{z}}' \geq 0$

4-2 Conclusion

L'ensemble des remarques précédentes est résumé sur le tableau (II-1) qui sépare les deux phases principales des modélisations :

Modélisation du potentiel thermodynamique F en l'absence de dissipation

❶ *Dans le cas du modèle DNLR*, le potentiel F est clairement caractérisé par la matrice de stabilité de TISZA en l'absence de dissipation :

- cas de la réponse instantanée pour laquelle la matrice de stabilité est notée $\underline{\underline{a}}^u$ où l'on a $T\frac{d_i S}{dt} = \underline{A}\, \underline{\dot{z}} = 0$ bien que $\underline{A} \neq 0$ car $\underline{\dot{z}} = 0$.
- cas de la réponse à l'équilibre pour laquelle la matrice de stabilité est notée $\underline{\underline{a}}^r$ où l'on a $T\frac{d_i S}{dt} = 0$ car $\underline{A} = 0$.

❷ *Dans la description usuelle,* le changement de base retenu, en introduisant la décomposition $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{e} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}$, par rapport aux variables thermodynamiques d'état naturelles $(T, \underline{\underline{\varepsilon}})$ conduit à définir a priori la forme du potentiel F à partir de F^{e} correspondant à un équilibre fictif et de F^{an} pour décrire l'écart à cet équilibre fictif. Le choix des variables adaptées n'est pas en général trivial . En effet, ce choix des variables internes $\underline{A}^{'}\ \underline{z}^{'}$ est fait de manière empirique. On introduit par exemple des variables de nature scalaire, que l'on relie plutôt au concept de densité de dislocation, attribuées à l'écrouissage de type isotrope. On est également amené pour rendre compte de l'effet BAUSCHINGER à introduire des variables tensorielles que l'on relie à la présence de contraintes internes qui assurent la continuité du milieu face à un champ de déformation plastique incompatible (écrouissage de type cinématique). D'autres variables comme les variables de restauration sont introduites pour rendre compte de phénomènes plus complexes liés aux évolutions de la microstructure (vieillissement). Par ailleurs, des variables spécifiques à l'endommagement sont employées ; selon LEMAITRE et CHABOCHE, ces variables qui affectent en priorité la composante élastique du potentiel, du fait de la présence de micro-fissures, modifient les constantes élastiques (selon notre formalisme cela se traduirait par une évolution des matrices $\underline{\underline{a}}^{u}$ et $\underline{\underline{a}}^{r}$).

↳*Modélisation de la dissipation*

❶ *Dans le cadre du modèle DNLR,* nous définissons un spectre de relaxation ab initio. Pour respecter la deuxième loi de la thermodynamique, les temps caractéristiques ne peuvent être que positifs ! La complexité du système est prise en compte dans la dépendance temporelle de ces temps de relaxation. Les connaissances acquises en physique de la déformation sont directement intégrables à ce niveau de la modélisation.

❷ *Dans la description usuelle,* il faut :

- définir la nature des variables internes,
- choisir la forme de F^{an}, en général de manière empirique,
- définir un pseudo-potentiel de dissipation $(\varphi$ ou $\varphi^{*})$,
- admettre la règle de normalité,
- vérifier que la relation de CLAUSIUS-DUHEM est satisfaite dans ces conditions ($2^{ème}$ loi de la thermodynamique).

$\boxed{F(T,\ \underline{\underline{\varepsilon}}\ ;\ \underline{z})}$

⇩⇩

DNLR ⇩	**Approche usuelle en variables internes** ⇩
$\dot{F}(T,\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\ ;\ \underline{\dot{z}}) = -s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{A}\ \underline{\dot{z}} = \underline{\beta}\ \dot{\gamma} - \underline{A}\ \underline{\dot{z}}$ $\dot{\underline{\beta}} = \underline{\underline{a}}^{u}\dot{\gamma} + \underline{\underline{b}}\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{a}}^{u}\dot{\gamma} - (\underline{\underline{\beta}} - \underline{\underline{\beta}}^{r})(\tau)^{-1}$ $\dot{\underline{A}} = -\underline{\underline{b}}^{T}\dot{\gamma} - \underline{\underline{g}}\ \underline{\dot{z}}$ $\dot{\underline{\beta}}^{r} = \underline{\underline{a}}^{r}\dot{\gamma}$	$\dot{F} = \dot{F}^{e} + \dot{F}^{an}$ $F^{e} = F^{e}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}^{e}) \Rightarrow \dot{F}^{e} = -s^{e}\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{e}$ $F^{an} = F^{an}(T\ ;\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}, \underline{z}) = F^{an}(T\ ;\ \underline{z}')$ $\dot{F}^{an} = -s^{an}\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} - \underline{A}\ \underline{\dot{z}} = -s^{an}\dot{T} - \underline{A}'\ \underline{\dot{z}}'$

CLAUSIUS-DUHEM

⇩⇩

$\underline{A}\ \underline{\dot{z}} \geq 0$	$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} + \underline{A}'\ \underline{\dot{z}}' \geq 0$

MODELISATION

⇩⇩

(1) ● **Choisir** $F \Leftrightarrow a^{u}, a^{r}$ matrices de TISZA	**(1)** ● **Choisir** $F^{e} \Leftrightarrow a^{u}$ matrice de TISZA ● **Choisir** $\dot{F}^{an}(T\ ;\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}, \underline{\dot{z}}')$ → empirique
(2) Vérifier le second principe $\Leftrightarrow \underline{\underline{\tau}} > 0$ ● ***Modéliser*** $\tau(T,t)$ Théorie de ***l'état transitoire activé*** : *lien avec les concepts développés par les physiciens de la déformation*	**(2) Vérifier le second principe** ● $\phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} + \underline{A}'\ \underline{\dot{z}}' \geq 0$ ● ***admettre*** φ tel que $\underline{A}' = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{z}}'}$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}}$ ***ou admettre*** φ^{*} tel que $\underline{\dot{z}}' = \dfrac{\partial \varphi^{*}}{\partial \underline{A}'}$ $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} = \dfrac{\partial \varphi^{*}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ ● ***Choisir*** la forme de φ et φ^{*} qui doit être compatible avec F^{an} pour vérifier $\Phi \geq 0$ φ et φ^{*} sont appelés les pseudo-potentiels de dissipation

Tableau II-1 Comparaison entre le modèle DNLR et l'approche usuelle en variables internes.

5- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté le formalisme mis en oeuvre au sein de notre groupe de recherche pour décrire les lois de comportement. Basé sur la thermodynamique irréversible de la relaxation, ce formalisme général conduit à des lois incrémentales hautement non-linéaires. Il repose sur un cadre théorique strict et s'appuie sur des hypothèses physiques directement liées aux mécanismes de dissipation. Son domaine d'applications potentielles est vaste, il couvre aussi bien le comportement des matériaux diélectriques que le comportement des matériaux magnétiques, ou bien encore les propriétés mécaniques.

C'est cet axe spécifique qui nous intéresse ici. Dans ce cadre, il suffit de connaître le tenseur des constantes élastiques, directement déterminé par les mesures classiques, le tenseur des constantes élastiques relaxées, plus difficile à appréhender directement à partir l'expérience, et la dépendance temporelle des temps de relaxation. Ce dernier point est de loin le plus délicat à modéliser.

Cependant, la connaissance des mécanismes physiques de la déformation fournit des indications précieuses à ce sujet. Pour l'heure, notre démarche reste essentiellement phénoménologique (voir semi-empirique) pour décrire ces non-linéarités temporelles de nature coopérative. Cependant, des travaux sont actuellement en cours au sein de l'équipe pour introduire au mieux la physique de la déformation dans la dépendance temporelle du col d'activation.

Nous avons également établi une filiation entre la thermodynamique utilisée dans le modèle DNLR, mis en oeuvre dans ce travail, et la thermodynamique usuellement utilisée pour décrire l'élastoplasticité en terme de variables internes associées à un potentiel F et à un pseudo-potentiel des vitesses φ.

Il est utile de rassembler ici l'ensemble des équations utiles pour mener les simulations que nous allons présenter dans les chapitres suivants.

Unidirectionnel pour un matériau à élasticité obéissant à la loi de HOOKE

$$\left(\dot{\sigma}_{11}\right)_j = p_j^0\left[\left(\lambda^u + 2\mu^u\right)\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda^u\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda^u\dot{\varepsilon}_{33}\right] - \frac{\left(\sigma_{11}\right)_j - p_j^0\left[\left(\lambda^r + 2\mu^r\right)\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda^r\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda^r\dot{\varepsilon}_{33}\right]}{\tau_j(T,t)}$$

$$\sigma_{11} = \sum_j \left(\sigma_{11}\right)_j$$

$$\text{avec : } \tau_j(T,t) = \frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right)\exp\left(\frac{\Delta(\Delta F^+)}{RT}\right)$$

$$p_j^0 = B\sqrt{\frac{h}{kT}\exp\left(\frac{\Delta F_j^{+,r}}{RT}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sum_j p_j^0 = 1 \text{ (permet de déterminer B).}$$

$$\Delta(\Delta F^+) = K_\sigma\left(\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right) + K_S\left(S - S^r\right) + \int K_W\left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r\right) : d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\sigma^{eq} = x\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right]}\right\}$$

Paramètres

-$\Delta F_{max}^{+,r}$ permet la détermination du spectre (obtenu par ajustement sur les données expérimentales).

-K_σ, K_S, K_W (par ajustement).

-λ^u, μ^u et λ^r, μ^r constantes élastiques

Version tensorielle

$$(\dot{\sigma}_{kl})_j = p_j^0\left(\lambda^u \varepsilon_{pp}\delta_{kl} + 2\mu^u \varepsilon_{kl}\right) - \frac{\sigma_{kl} - p_j^0\left(\lambda^r \varepsilon_{pp}\delta_{kl} + 2\mu^r \varepsilon_{kl}\right)}{\tau_j(T,t)}$$

$$\sigma_{kl} = \sum_j (\sigma_{kl})_j$$

$\tau_j(T,t)$ et p_j^0 restent définis de la même manière.

Version pour un matériau à hyperélasticité pour l'état relaxé : cas d'une loi de MOONEY RIVLIN

$$(\dot{\sigma}_{11})_j = p_j^0\left[\left(\lambda^u + 2\mu^u\right)\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda^u\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda^u\dot{\varepsilon}_{33}\right] - \frac{(\sigma_{11})_j - p_j^0\left(\sigma_{11}^r\right)}{\tau_j(T,t)}$$

$$\sigma_{11} = \sum_j (\sigma_{11})_j$$

$$\sigma_{11}^r = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda_1}\right)$$

$$(\dot{\sigma}_{12})_j = p_j^0\left(2\mu^u\dot{\varepsilon}_{12}\right) - \frac{(\sigma_{12})_j - p_j^0\left(\sigma_{12}^r\right)}{\tau_j(T,t)}$$

$$\sigma_{12}^r = 4(C_1 + C_2)\,\varepsilon_{12}$$

Chapitre III

COMPORTEMENT QUALITATIF DU MODELE POUR QUELQUES CHARGEMENTS UNIAXIAUX

Résumé

Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons que l'approche généralisée de la thermodynamique de la relaxation permet de décrire qualitativement les faits expérimentaux observés lors d'un chargement uniaxial monotone. La seconde partie montre l'aptitude de l'approche à décrire qualitativement différents chargements cycliques. Enfin, une discussion sur le rôle des paramètres coopératifs est présentée dans le troisième paragraphe.

1- INTRODUCTION ----------74

2- COMPORTEMENT DU MODELE DNLR POUR DES CHARGEMENTS UNIAXIAUX CONTINUS ----------74

2-1 Ecriture du modèle DNLR pour un essai de traction uniaxiale (rappels)..... 74

2-2 Etude de l'influence des paramètres du modèle sur un essai de traction uniaxiale lorsque la contrainte à l'état relaxé obéit à la loi de HOOKE..... 75

2-3 Prise en compte d'un comportement non-hookéen de la contrainte pour décrire l'état relaxé (cas des polymères) 78

2-4 Simulation du crochet de traction..... 81

3 COMPORTEMENT QUALITATIF DU MODELE POUR QUELQUES HISTOIRES DE CHARGEMENT CYCLIQUE ----------83

3-1 Chargement cyclique entre deux valeurs de déformation ou de contrainte non symétrique..... 83

3-2 Effet BAUSCHINGER..... 84

3-3 Modélisation du phénomène de durcissement ou d'adoucissement lors d'un chargement cyclique 85

4- PLASTICITE ET VISCOPLASTICITE ----------87

5- CONCLUSION----------89

1- INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'examiner l'aptitude du modèle adopté à prévoir l'ensemble des principaux phénomènes observés lors de chargements uniaxiaux pour diverses séquences imposées (vitesse constante, cycles). En effet, tout modèle qui a l'ambition d'explorer le champ des comportements multiaxiaux, doit d'abord être testé pour des trajets de chargements simples comme les essais uniaxiaux à vitesse de déformation imposée constante ou cyclique (séquence de chargement).

De nombreuses spécificités ont été mises en évidence expérimentalement, telles que l'écrouissage, le crochet de traction, le durcissement de type hyperélastique pour les polymères soumis à de grandes déformations, l'effet BAUSCHINGER, le phénomène de rochet, l'adoucissement ou le durcissement cycliques par exemple. Ce sont ces phénomènes qui vont nous servir de premier test pour le modèle DNLR.

2- COMPORTEMENT DU MODELE DNLR POUR DES CHARGEMENTS UNIAXIAUX CONTINUS

2-1 Ecriture du modèle DNLR pour un essai de traction uniaxiale (rappels)

D'après la relation constitutive établie dans le chapitre II, les observables β considérées s'identifient à la contrainte σ_{11} induite par la déformation imposée ε_{11}. La loi de comportement s'écrit donc sous la forme incrémentale :

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(\sigma_{11})_j - (\sigma_{11}^r)_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(III-1)}$$

$$\tau_j(T,t) = \frac{h}{kT} \exp\left(\frac{\Delta F_j^+(t)}{RT}\right) \qquad \text{(III-2)}$$

$$\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r}(T) + K_\sigma \left|\sigma_{11} - \sigma_{11}^r\right| \text{ si l'on admet } K_S \text{ et } K_W \cong 0 \qquad \text{(III-3)}$$

où K_σ représente le facteur de non-linéarité induit par l'écart à l'équilibre de la contrainte. Soulignons que l'état actuel de déformation imposée $\varepsilon_{11}(t)$ intervient implicitement dans la cinétique de la relaxation par le biais de la contrainte relaxée $\left[\sigma_{11}^r = f(\varepsilon_{11}(t))\right]$.

Dans le cas des métaux, un régime stationnaire s'établit à partir d'une certaine valeur de déformation. Pour ces matériaux, la valeur de la contrainte à l'équilibre thermodynamique est donnée par une relation linéaire en fonction de la déformation (loi de HOOKE) :

$$\left(\sigma_{11}^{r}\right)_{j} = p_{j}^{0} E^{r} \varepsilon_{11} \qquad \text{(III-4)}$$

La simulation des essais uniaxiaux pour les métaux nécessitera donc l'utilisation de quatre paramètres:

E^u: module non relaxé

E^r : module relaxé

$\Delta F_{max}^{+,r}$: énergie libre d'activation au voisinage de l'état relaxé pour le processus le plus lent

K_σ : paramètre de non-linéarité

2-2 Etude de l'influence des paramètres du modèle sur un essai de traction uniaxiale lorsque la contrainte à l'état relaxé obéit à la loi de HOOKE

Tout au long de ce paragraphe, nous comparons successivement les résultats de diverses simulations à une courbe de référence (marquée en cercle noir sur les figures correspondantes). Cette courbe de référence est construite à l'aide des données suivantes :

$E^u = 80000$ MPa

$E^r = 2500$ MPa

$\Delta F_{max}^{+,r} = 100000$ J / Mol at

$K_\sigma = -50$ cm^3 / Mol at

$\dot{\varepsilon} = 0.0005$ s^{-1}

$T = 297$ K

Nous analysons successivement les réponses simulées en modifiant un seul de ces paramètres de "référence" à la fois. Les nouvelles valeurs seront indiquées sur les figures correspondantes.

La figure 1 montre ***l'influence du module non relaxé*** $\left(E^u\right)$ sur la courbe contrainte-déformation. Ce paramètre affecte principalement la partie élastique de la courbe. Il conditionne également la force motrice de la relaxation initiale.

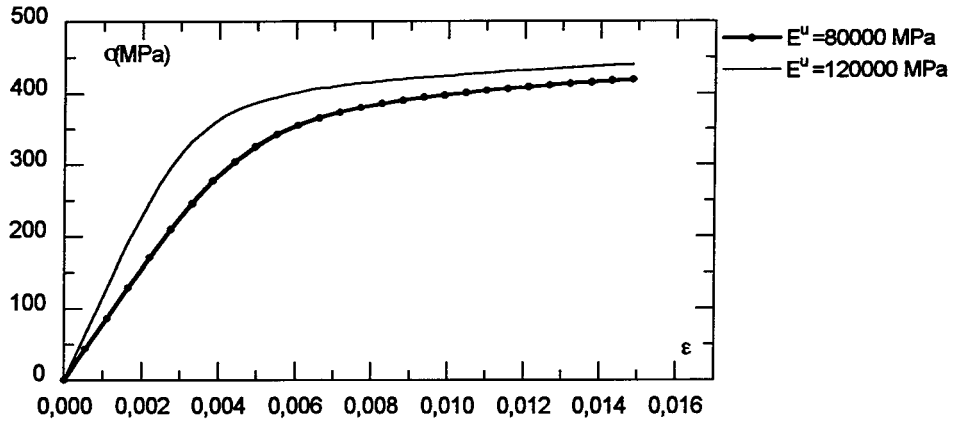


Figure 1 : Influence du module non relaxé E^u sur la courbe contrainte-déformation.

La figure 2 illustre ***l'influence du module relaxé*** (E^r) qui caractérise l'état d'équilibre thermodynamique aux temps longs. Ce paramètre affecte principalement l'évolution de la contrainte en régime stationnaire. On peut également remarquer qu'il joue un rôle semblable à (E^u) sur la force motrice de relaxation initiale. La limite élastique semble peu affectée. Il faut noter ici que $E^r \neq 0$ induit un écrouissage linéaire de type cinématique. Ainsi la matrice $\underline{\underline{\underline{a}}}^r$ ou plus exactement le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\underline{a}}}^r \underline{\underline{\varepsilon}}$ peut-il être associé aux contraintes internes $\underline{\underline{X}}$ généralement utilisées pour décrire cet écrouissage (voir le formalisme de LEMAITRE et CHABOCHE par exemple).

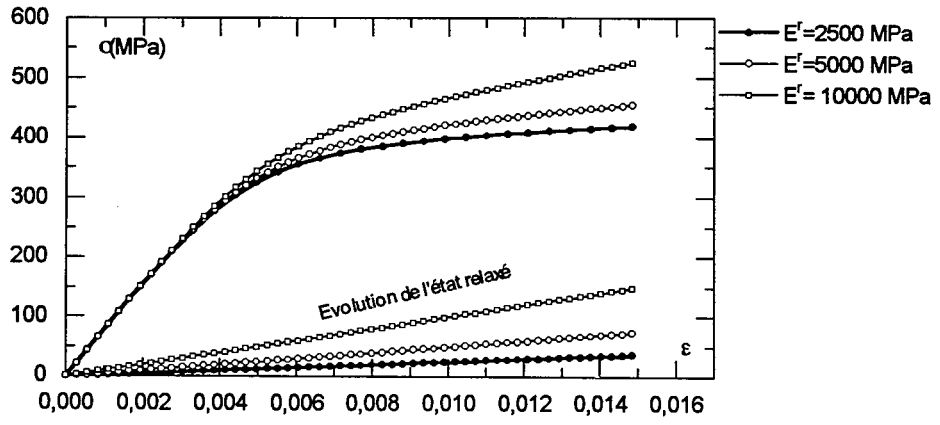


Figure 2 : Influence du module relaxé (E^r) sur l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation.

La figure 3 reproduit des courbes simulées pour différentes valeurs de ***l'énergie d'activation maximale*** $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ \text{J/Mol at}\right)$. L'augmentation de l'énergie d'activation maximale correspond à un glissement du spectre des temps de relaxation vers les temps les plus longs. En conséquence, le régime stationnaire s'établit plus tardivement : la limite élastique est très étroitement liée à ce paramètre.

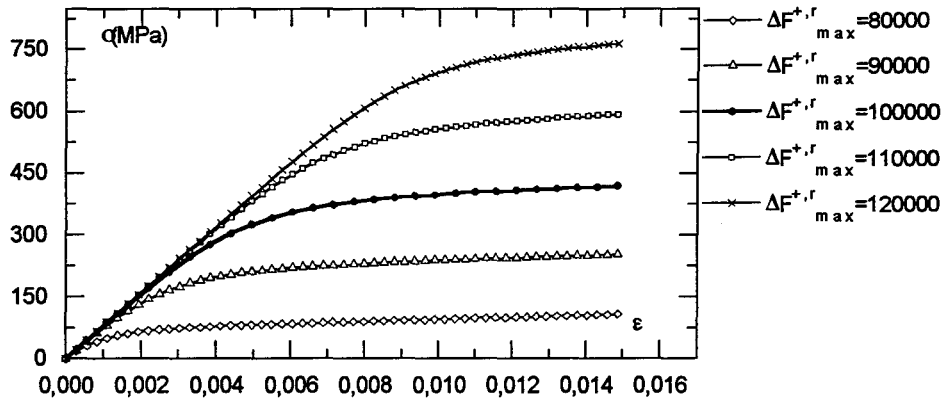


Figure 3 : Influence de l'énergie d'activation.

Le rôle ***du paramètre de non-linéarité temporelle*** $\left(K_\sigma\ \text{cm}^3/\text{Mol at}\right)$ est étudié sur la figure 4. Ce paramètre affecte globalement la position du spectre de relaxation le long de l'échelle de temps. On s'attend donc à un effet comparable à celui de $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\right)$: c'est ce que l'on observe sur cette figure.

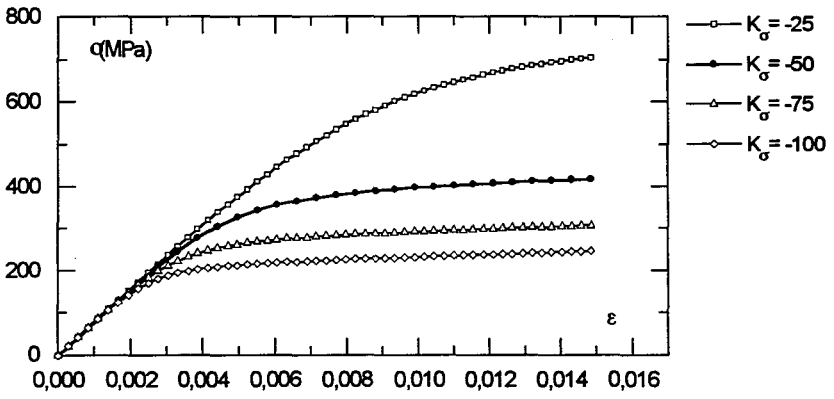


Figure 4 : Influence du paramètre de non-linéarité.

Soulignons dès à présent la difficulté qui sera rencontrée lors de l'identification des paramètres sur un tel trajet de chargement : en effet, il est difficile de séparer les contributions de $\left(\Delta F^{+,r}_{max}\right)$ et de $\left(\Delta\left(\Delta F^{+}\right)\right)$ à partir d'une courbe de traction.

2-3 Prise en compte d'un comportement non-hookéen de la contrainte pour décrire l'état relaxé (cas des polymères)

Dans ce paragraphe, nous faisons essentiellement référence aux matériaux polymères. La courbe de traction du PMMA [SOUAHI 1992] reproduite sur la figure 5 fait apparaître un fort durcissement pour les grandes déformations.

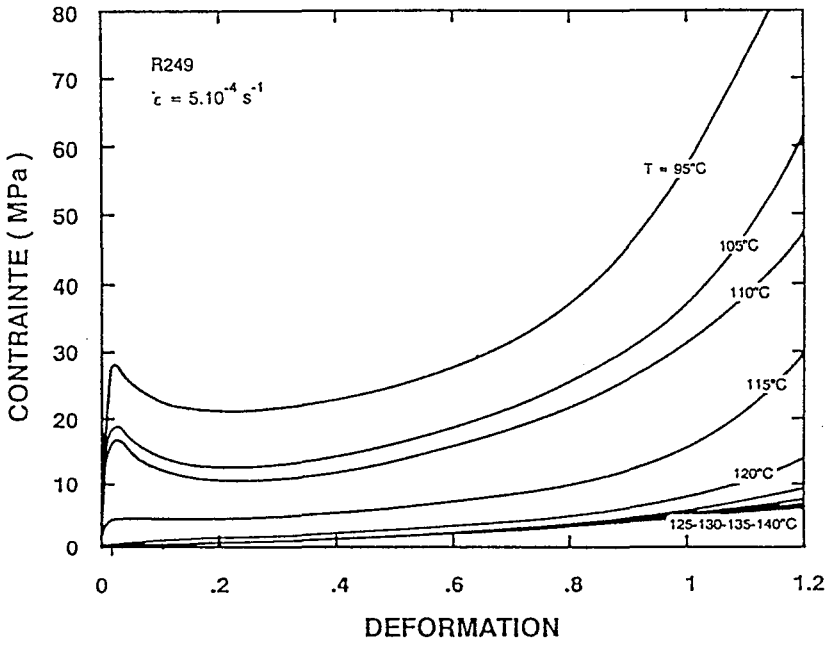


Figure 5 : Comportement du PMMA en traction [SOUAHI 1992].

ARRUDA ET BOYCE (1991) attribuent ce comportement à une réorientation des chaînes macromoléculaires. Les axes principaux de ces orientations coïncident approximativement avec les axes principaux du tenseur des déformations macroscopiques. ARRUDA et BOYCE admettent que ce durcissement obéit aux mêmes lois que le comportement hyperélastique d'un élastomère.

Dans le cadre de notre approche thermodynamique, il est naturel de considérer l'énergie libre de HELMHOLTZ par unité de volume (f = e -T s) pour approcher la loi de comportement. Cette fonction énergie doit être indépendante du repère pour une déformation de matériaux isotropes ; autrement dit, elle peut être exprimée en fonction des invariants du tenseur des dilatations :

$$f = f(I_1, I_2, I_3) \qquad \text{(III-5)}$$

où I_1, I_2 et I_3 sont respectivement le premier, le deuxième et le troisième invariant du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T$.

Avec $\underline{\underline{F}}$: tenseur gradient de la transformation qui détermine la transformation d'un vecteur matériel par l'équation $d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\, d\underline{x}^0$

Dans le cas d'une déformation pure (en l'absence de déformation de cisaillement), ces invariants s'écrivent en fonction des extensions principales (voir annexe A) :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \;,\; I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 \;,\; I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \qquad \text{(III-6)}$$

λ_i : extension principale $i = 1,2,3$

L'énergie libre de HELMHOLTZ s'écrit :

$$f = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \qquad \text{(III-7)}$$

Par conséquent, les composantes principales (σ_i) du tenseur des contraintes de CAUCHY sont données par (annexe A) :

$$J\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \qquad \text{(III-8)}$$

où J est le ***Jacobien*** (déterminant de la transformation) que l'on peut interpréter comme le rapport du volume à l'état déformé sur le volume initial, avec f= e -Ts l'équation (III-8) devient :

$$J\,\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial e}{\partial \lambda_i} - \lambda_i T \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda_i}\right) \qquad \text{(III-9)}$$

Ainsi, la contribution entropique apparaît naturellement dans la loi de comportement. Par conséquent, nous adopterons pour décrire l'état relaxé un formalisme qui prend en compte une contribution entropique similaire à celle rencontrée pour l'élasticité des élastomères.

Pour décrire le comportement rhéologique des caoutchoucs, il existe plusieurs approches physiques et phénoménologiques. Nous avons retenu la théorie phénoménologique de MOONEY-RIVLIN (1940) dans la mesure où elle rend assez bien compte du durcissement de type hyperélastique observé sur un grand nombre de matériaux polymères dans le cas de grandes déformations. Cette théorie a été élaborée pour les élastomères et les polymères à l'état fondu. Le matériau est supposé incompressible et isotrope dans l'état non déformé [MOONEY 1940 ; RIVLIN 1948]. Dans une première approche, nous admettons la validité de cette loi pour décrire l'état relaxé des polymères vitreux.

Pour un essai de traction (compression), l'équation constitutive du modèle s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(\sigma_{11})_j - (\sigma^r_{11})_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(III-10)}$$

La valeur de la contrainte à l'état d'équilibre est alors déterminée par la relation suivante :

$$\sigma^r_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda_1}\right) \text{ et } (\sigma^r_{11})_j = p^0_j \, \sigma^r_{11} \qquad \text{(III-11)}$$

C_1 et C_2 : coefficients de MOONEY RIVLIN

$$\text{où } \tau_j(T,t) = \exp\left(\frac{\Delta F^+_j(t)}{RT}\right) \qquad \text{(III-12)}$$

$$\text{avec } \Delta F^+_j(t) = \Delta F^{+,r}_j(T) + K_\sigma(\sigma_{11} - \sigma^r_{11}) \qquad \text{(III-13)}$$

Pour un essai de cisaillement, l'équation constitutive du modèle s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{12} = 2\mu^u \dot{\varepsilon}_{12} - \sum_j \frac{(\sigma_{12})_j - (\sigma^r_{12})_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(III-14)}$$

La valeur de la contrainte de cisaillement à l'équilibre est également déterminée par la loi de MOONEY RIVLIN qui conduit à une relation linéaire entre contrainte et déformation de cisaillement :

$$\sigma^r_{12} = 4(C_1 + C_2)\, \varepsilon_{12} \text{ et } (\sigma^r_{12})_j = p^0_j \, \sigma^r_{12} \qquad \text{(III-15)}$$

Comme pour un essai de traction, l'expression des temps de relaxation est obtenue par :

$$\tau_j(T,t) = \exp\left(\frac{\Delta F^+_j(t)}{RT}\right) \qquad \text{(III-16)}$$

$$\text{avec } \Delta F^+_j(t) = \Delta F^{+,r}_j(T) + \sqrt{3}\, K_\sigma(\sigma_{12} - \sigma^r_{12}) \qquad \text{(III-17)}$$

Pour simuler le comportement uniaxial en traction d'un polymère, il faudra donc introduire un paramètre supplémentaire lié à l'état relaxé (C_1 et C_2 remplaceront le module E^r). Par contre, si nous désirons simuler à la fois des essais de traction et de cisaillement, le nombre de paramètres reste le même que dans le cas des métaux (C_1 et C_2 se substituent aux modules de traction E^r et de cisaillement μ^r). Ecrivons maintenant le bilan des paramètres nécessaires pour effectuer des simulations de chargement traction/compression ou cisaillement pour un polymère :

E^u: module non relaxé

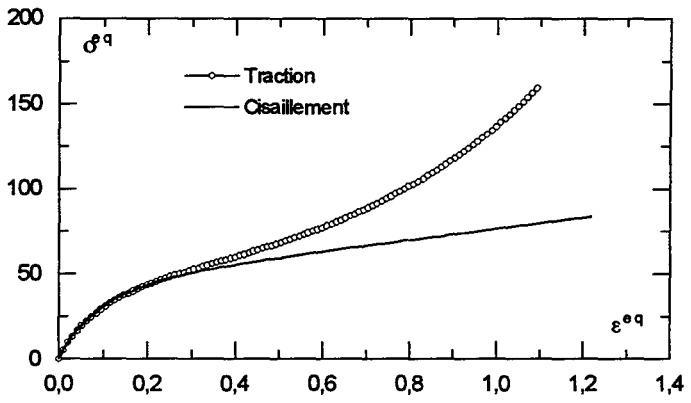
ν^u : coefficient de POISSON

C_1 et C_2 : contantes de MOONEY RIVLIN

$\Delta F^{+,r}_{max}$: enthalpie libre d'activation

K_σ : paramètre de non-linéarité lié à la contrainte

Les résultats, portés en contrainte équivalente - déformation équivalente sur la figure 6, comparent les courbes obtenues en traction et en cisaillement. Les simulations conduisent à des comportements conformes aux expériences : aux fortes déformations, le durcissement de type hyperélastique obtenu en traction distingue nettement les deux réponses. En fait ces courbes reproduisent les données expérimentales [DAHOUN 1992] de la figure 3 présentée dans le chapitre I.



E^u = 590 MPa
C_1 = 8.5 MPa ; C_2 = –3.5 MPa
T = 453 K ; ν = 0.45
$\Delta F^{+,r}_{max}$ = 136990 J / Mol at
K_σ = -50 cm³ / Mol at
$\dot{\varepsilon}^{eq}$ = 0.0005 s⁻¹

Figure 6 : Comparaison des deux comportements en traction et en cisaillement portés en contrainte-déformation équivalentes.

2-4 Simulation du crochet de traction

Il est courant d'observer un crochet de traction qui marque la limite d'élasticité pour un grand nombre de matériaux (métaux, polymères). On admet généralement que ce crochet est la manifestation d'une certaine compétition entre la création et la migration de défauts pour assurer la déformation plastique. En effet depuis SIMON (1930), on considère usuellement que les solides polymères amorphes ne sont pas en équilibre à une température inférieure à la température de transition vitreuse (STRUICK 1978). Ces matériaux sont dans un état hors équilibre caractérisé par des valeurs de l'entropie, de l'enthalpie et du volume supérieures à celles de l'état d'équilibre thermodynamique. Dès 1931, TOOL propose de définir le concept de température fictive pour caractériser ces configurations hors équilibre. Depuis lors, de nombreux auteurs utilisent des notions semblables. Ainsi BAUWENS (1991) utilise une température de structure à laquelle le matériau se trouverait en équilibre thermodynamique pour l'état structural considéré. Il propose alors une modification de la théorie d'EYRING en

introduisant un facteur entropique supplémentaire pour tenir compte de l'état structural du polymère. Ce facteur est supposé proportionnel à la température de structure. Ces concepts peuvent être étendus à tous les matériaux dès lors que l'équilibre thermodynamique vrai n'est pas atteint

Le cadre théorique utilisé ici est bien adapté pour traiter un tel problème. Il suffit de prendre en compte la variation d'entropie S du milieu induite par le couplage avec la perturbation γ (1ère ligne de l'équation constitutive) :

$$\dot{S} = \alpha E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{S_j - S_j^r}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(III-18)}$$

Le col d'activation pourrait alors être décrit par :

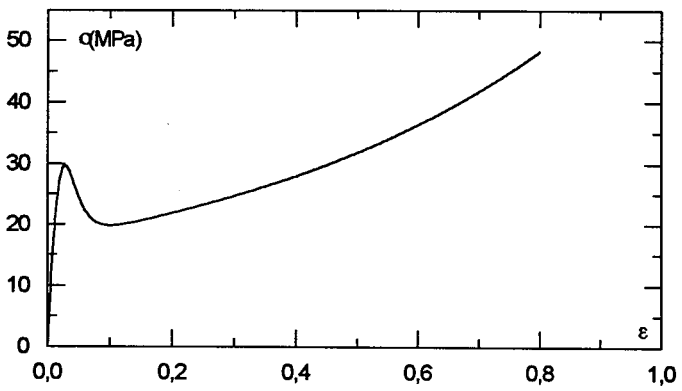
$$\Delta F^+(t) = \Delta F^{+,r}_{max}(T) + K_\sigma(\sigma_{11} - \sigma^r_{11}) + K_S(S - S^r) \qquad \text{(III-19)}$$

$$\text{d'où } a(t) = \exp\left(\frac{K_\sigma(\sigma_{11} - \sigma^r_{11})}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_S(S - S^r)}{RT}\right) \qquad \text{(III-20)}$$

K_S exprime la non-linéarité liée au couplage entropique (configuration du milieu).
Ce couplage entropique nous a permis de prévoir l'instabilité plastique associée au crochet de traction ou de cisaillement. La modélisation du crochet nécessite ainsi la prise en compte de l'évolution de l'entropie du milieu. Trois nouveaux paramètres interviennent :

K_S : paramètre de non-linéarité lié à l'entropie
α : coefficient de dilatation
S^r: entropie du milieu à l'état d'équilibre

La figure 7 montre le résultat de nos simulations.



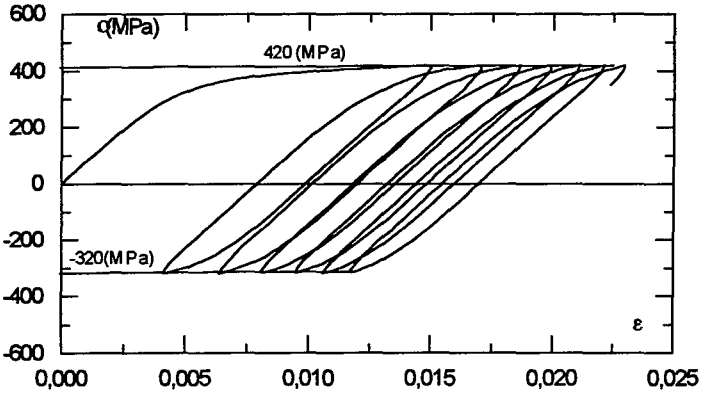
$E^u = 2640$ MPa
$C_1 = 3.473$ MPa ; $C_2 = 0.002$ MPa
$\Delta F^{+,r}_{max} = 103731$ J / Mol at
$K_\sigma = -26$ cm^3 / Mol at
$S^r = 21$ N mm^{-2} K^{-1}
$K_S = 401$ cm^3 K / Mol at
$\alpha = 0.0002$ K^{-1}
$\dot{\varepsilon} = 0.0005$ s^{-1}
$T = 373$ K

Figure 7 : Simulation du crochet de traction dans le cas d'un polymère.

3 COMPORTEMENT QUALITATIF DU MODELE POUR QUELQUES HISTOIRES DE CHARGEMENT CYCLIQUE

3-1 Chargement cyclique entre deux valeurs de déformation ou de contrainte non symétriques

Nous simulons une histoire de charge-décharge entre deux niveaux de contrainte non symétriques. Le résultat de la figure 8 montre une augmentation progressive de la déformation à chaque cycle. Ce phénomène est baptisé effet de rochet [voir par exemple LEMAITRE et CHABOCHE 1985].



E^u = 80000 MPa
E^r = 2500 MPa
$\Delta F^{+,r}_{max}$ = 100000 J / Mol at
K_σ = -50 cm^3 / Mol at
$\dot{\varepsilon} = 0.0005\ s^{-1}$
T = 297 K

Figure 8 : Simulation d'une histoire de charge-décharge entre deux niveaux de contrainte non symétriques.

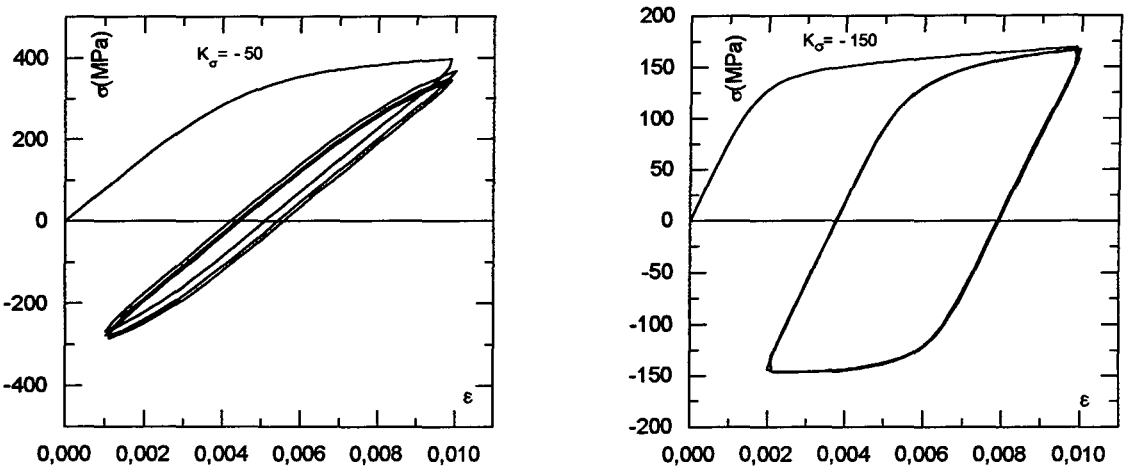
Expérimentalement, on peut observer trois types de réponses :

- la déformation plastique croît toujours, c'est le phénomène de rochet,
- la réponse finit par se stabiliser (boucle d'hysterésis), on dit qu'il y a accommodation,
- enfin la déformation progressive se bloque et le comportement devient élastique, on parle d'adaptation.

Plusieurs facteurs interviennent pour observer un phénomène plutôt qu'un autre. GOODMAN (1988) a effectué des expériences de rochet uniaxiale sur un acier inoxydable de type A316 à température ambiante : il observe un état de stabilisation pour les contraintes moyennes faibles (accommodation ou adaptation), alors que le phénomène de rochet apparaît pour les contraintes moyennes élevées .

CHABOCHE et al (1991) ont étudié le comportement de l'INCONEL 718 à 550°C. Ils montrent que ce matériau présente le phénomène de rochet quel que soit le niveau de contrainte (contrainte moyenne ou amplitude de contrainte). Toutefois, l'accumulation de la déformation progressive reste très lente.

La figure 9 compare deux courbes simulées entre deux valeurs de déformation imposées non symétriques. Nous remarquons le rôle joué par $(K_\sigma\ cm^3/Mol\ at)$ sur la présence ou non de la relaxation de la contrainte.



(a) (b)

Figure 9 : Simulation d'un chargement cyclique entre deux valeurs de déformation non symétriques.

a - relaxation de la contrainte moyenne.

b - non relaxation de la contrainte moyenne.

$(E^u = 80000\ MPa,\ E^r = 2500\ MPa,\ \Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at,\ \dot{\varepsilon} = 0.0005\ s^{-1}, T = 297\ K)$

En conclusion, le modèle prévoit bien qualitativement ces phénomènes.

3-2 Effet BAUSCHINGER

Lors d'un chargement en domaine plastique sur un chemin de traction suivi d'une compression, la limite élastique observée en traction est supérieure à celle détectée en compression. C'est l'effet BAUSCHINGER qui est souvent associé à l'écrouissage cinématique [CHABOCHE 1985]. Bien entendu pour observer cet effet E^r doit être non nul. La figure 10 montre l'aptitude du modèle à décrire qualitativement cet effet ; on peut le quantifier par le rapport $\frac{\sigma_t^e}{\sigma_c^e}$. Elle souligne également le rôle du paramètre de non-linéarité " K_σ" sur le rapport $\frac{\sigma_t^e}{\sigma_c^e}$. Les limites élastiques sont déterminées pour un offset de 5^{e-5}.

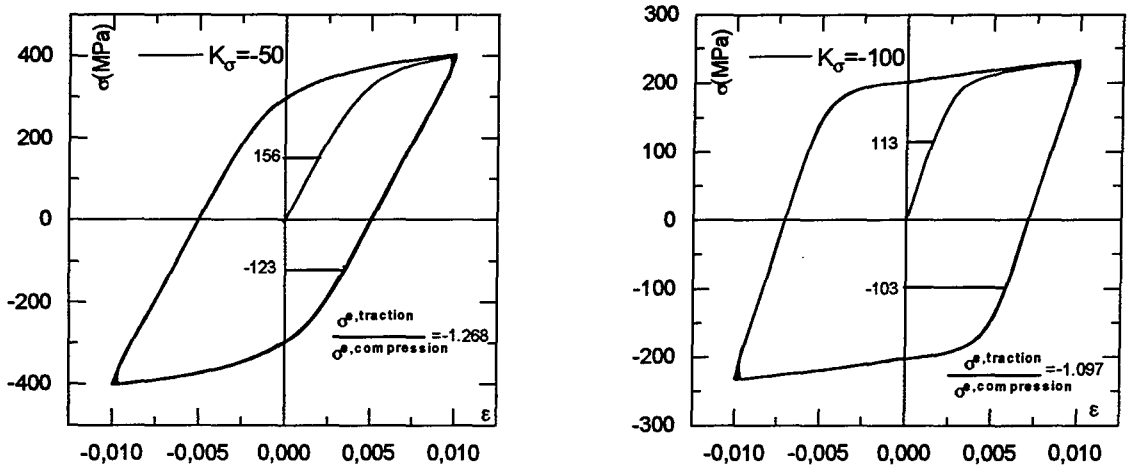


Figure 10 : Mise en évidence de l'effet BAUSCHINGER - Influence du paramètre de non-linéarité temporelle sur les deux limites élastiques en traction et en compression $\left(E^u = 80000\ \text{MPa},\ E^r = 2500\ \text{MPa},\ \Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ \text{J / Mol at},\ \dot{\varepsilon} = 0.0005\ s^{-1},\ T = 297\ \text{K}\right)$

Remarquons ici que la courbe contrainte-déformation se stabilise dès les premiers cycles. Dans le paragraphe suivant, nous indiquons comment obtenir les deux phénomènes de durcissement ou d'adoucissement observés expérimentalement sur un grand nombre de matériaux [LEMAITRE et CHABOCHE 1985 ; MARQUIS 1979].

3-3 Modélisation du phénomène de durcissement ou d'adoucissement lors d'un chargement cyclique

La modélisation de la variation des propriétés d'écrouissage lors d'un chargement à plusieurs cycles nécessite la prise en compte de l'énergie de déformation sur la cinétique de la relaxation. En d'autres termes, l'histoire de la déformation doit intervenir explicitement dans la cinétique de la relaxation.

La variation de l'énergie d'activation pourra donc être de la forme :

$$\Delta F^+(t) = \Delta F^{+,r}_{max}(T) + \Delta\left(\Delta F^+\right) = \Delta F^{+,r}_{max}(T) + \int K_w(t)\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) d\varepsilon \qquad \text{(III-21)}$$

K_W (t) : paramètre coopératif qui traduit l'effet de l'énergie cumulée.

Pour qu'un cycle stabilisé prenne place, nous devons vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Delta F^+(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int K_w(t)\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) d\varepsilon = 0 \Rightarrow K_w(t)\left(\sigma(t) - \sigma^r(t)\right) = 0 \quad \text{(III-22)}$$

Cette égalité implique que $K_W(t)$ doit être une fonction de la déformation. Sans modélisation physique complète, une forme acceptable pour cette fonction peut être déterminée à l'aide d'une confrontation modèle-expérience : en effet, celle-ci doit assurer une saturation du col d'activation après un certain nombre de cycles. Nous choisissons arbitrairement une formulation qui assure la condition précédente :

$$K_W(t) = a_W - b_W\,\Delta(\Delta F^+) \qquad \text{(III-23)}$$

avec a_W et b_W deux constantes caractéristiques du matériau.

Dans le cas d'un essai cyclique qui ne se stabilise pas $b_W = 0$. Nous essayons de dégager le rôle des paramètres a_W et b_W. A cet effet, la figure 11-a montre les résultats de simulation pour un chargement cyclique à déformation imposée. Nous constatons que l'inversion du signe de a_W entraîne une inversion du comportement : le phénomène de durcissement est remplacé par un phénomène d'adoucissement. La valeur positive de a_W implique que l'effet du cumul de la déformation se traduit par une augmentation progressive du col d'activation. Alors qu'une valeur négative entraîne un adoucissement lié à la diminution progressive du col d'activation.

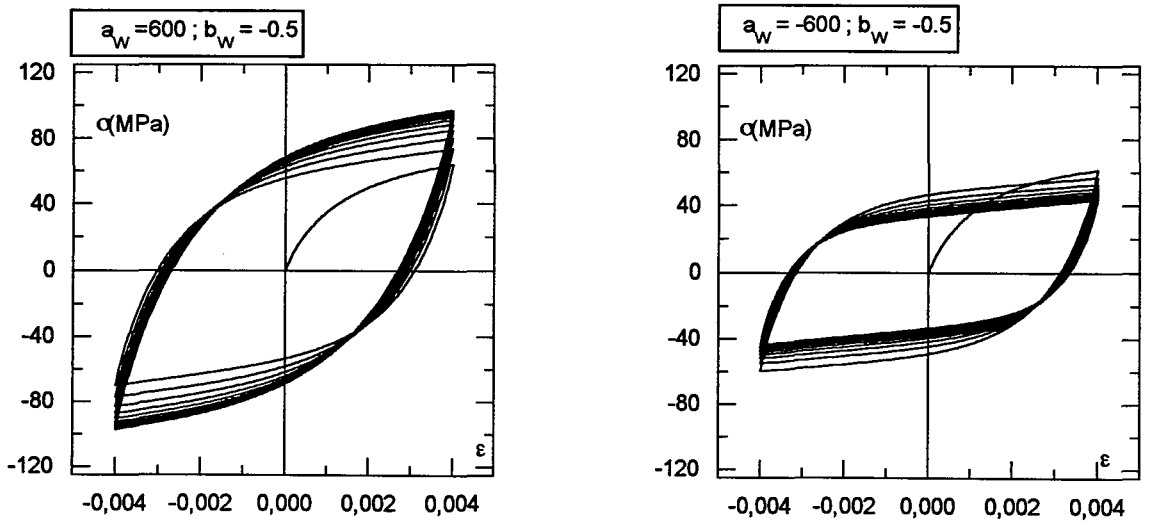


Figure 11-a : Influence du paramètre a_W sur l'écrouissage cyclique.
$\left(E^u = 80000\ \text{MPa},\ E^r = 2500\ \text{MPa},\ \Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ \text{J/Mol at},\ \dot{\varepsilon} = 0.0005\ s^{-1},\ T = 297\ \text{K}\right)$

La figure 11-b illustre l'influence du paramètre b_W sur le nombre de cycle nécessaire pour obtenir un cycle stabilisé. Lorsque ce paramètre est nul, nous aurons des cycles qui ne se stabilisent pas.

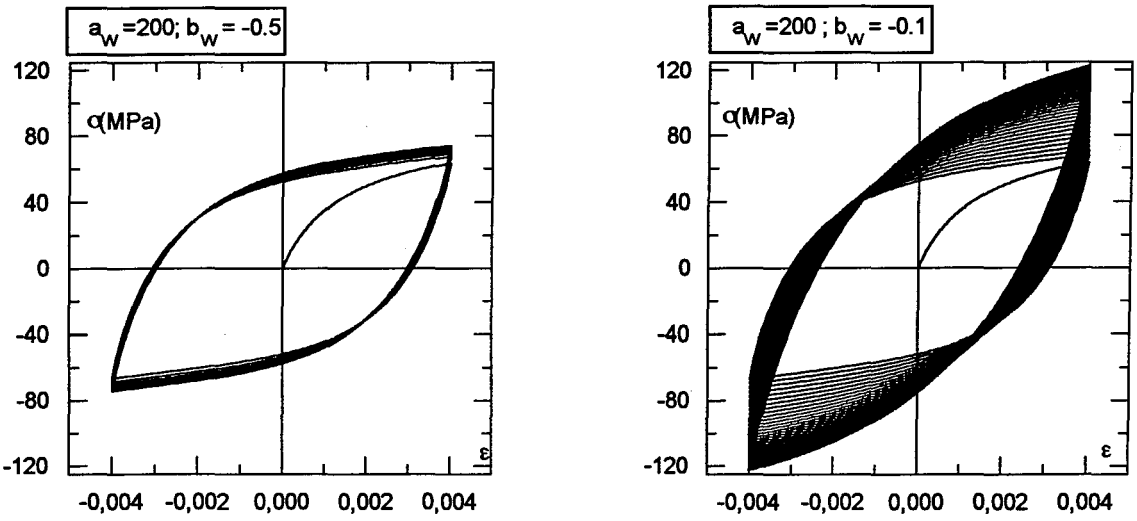


Figure 11-b : Influence du paramètre b_W sur la stabilisation du cycle.
$\left(E^u = 80000 \text{ MPa}, E^r = 2500 \text{ MPa}, \Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J/Mol at}, \dot{\varepsilon} = 0.0005 \text{ s}^{-1}, T = 297 \text{ K}\right)$

4- PLASTICITE ET VISCOPLASTICITE

Dans ce paragraphe, nous montrons que le passage de la plasticité à la viscoplasticité est obtenu de manière continue par une simple variation de la hauteur de la barrière d'activation. Pour faciliter la comparaison des courbes obtenues, nous avons changé la valeur du paramètre K_σ afin d'obtenir approximativement le même niveau de contrainte avant relaxation. La figure 12 illustre l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour deux couples $\left(\Delta F_{max}^{+,r} ; K_\sigma\right)$.

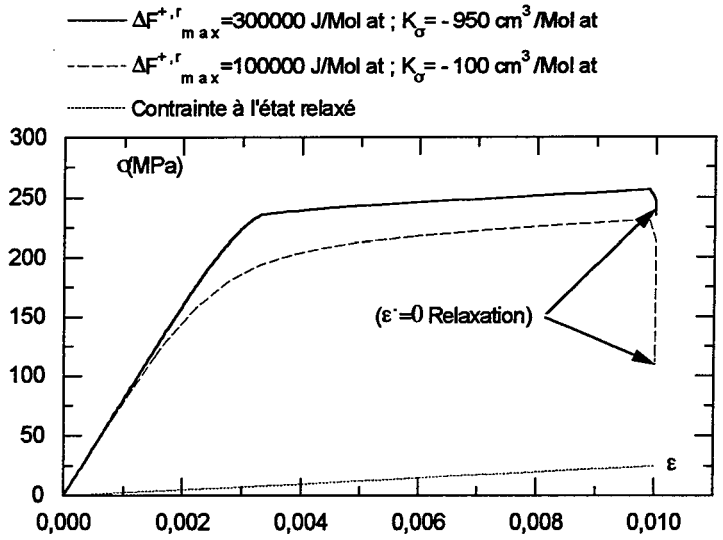


Figure 12 : Evolution de la contrainte en fonction de la déformation pour deux couples de $\left(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma\right)$.

La figure 13 compare l'évolution de la contrainte en fonction du temps pour les deux couples ainsi utilisés. Nous observons que la valeur importante de l'énergie d'activation (300000 J/Mol at) entraîne un comportement quasi-plastique avec une faible relaxation de la contrainte, alors que la valeur de 100000 J/Mol at amène un comportement nettement viscoplastique avec une relaxation très importante de la contrainte.

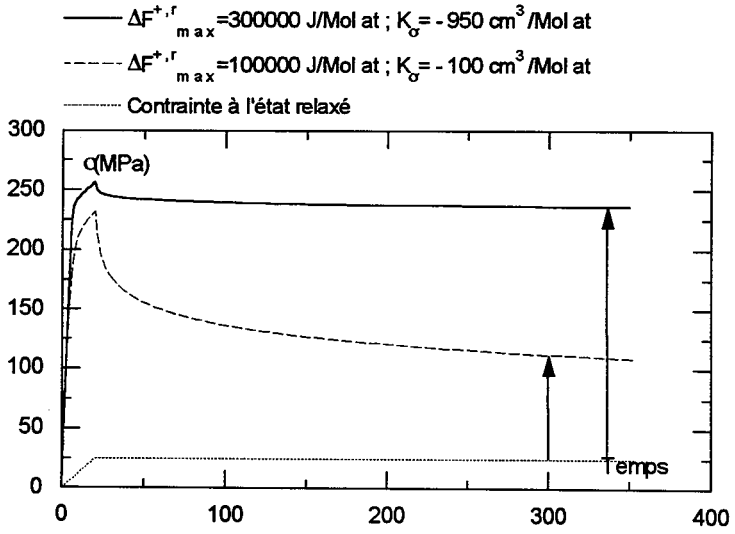


Figure 13 Effet du couple $\left(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma\right)$ sur la relaxation de la contrainte.

5- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exploré qualitativement les capacités du formalisme, développé dans le groupe, à reproduire les observations expérimentales les plus connues pour des chargements unidirectionnels à déformations imposées.

Ainsi, l'essai de traction est-il bien reproduit, avec ou sans crochet de traction. La présence de ce dernier découle naturellement d'un couplage entropique avec la déformation prévu par la théorie thermodynamique. Nous avons succinctement examiné le rôle de chacun des trois paramètres de base E^u, E^r et K_σ, nécessaires pour reproduire un essai de traction (sans crochet), sur la réponse obtenue par simulation.

Pour prendre en compte le durcissement de type hyperélastique rencontré en grandes déformations dans les polymères, nous avons utilisé les deux coefficients C_1 et C_2 de MOONEY-RIVLIN à la place de E^r et ν^r.

Pour les chargements cycliques, nous avons vérifié que le modèle prévoit le phénomène de rochet, l'effet BAUSCHINGER, le durcissement ou l'adoucissement cyclique. Rappelons que des travaux actuellement en cours au sein de l'équipe [TOUSSAINT] conduisent à des réponses qualitatives satisfaisantes pour des cycles complexes (séquences de chargements variés en traction/torsion : chargement circulaire, trèfle, papillon,... conformément aux observations de MARQUIS et CALLOCH 1995).

Nous avons également montré le "passage" continu de la plasticité (sans relaxation notable de la contrainte) à la viscoplasticité par une simple variation de la hauteur de la barrière d'activation. Schématiquement, à 200000 ou 300000 J/Mol at, nous pouvons observer de la plasticité "indépendante" du temps (ordre de grandeur caractéristique de l'auto-diffusion de métaux comme le fer), alors qu'à 100000 J/Mol at, la relaxation devient importante. L'augmentation de la température peut induire cette évolution et bien entendu, la nature même des liaisons "atomiques" conditionne la valeur du col d'activation. Ainsi à la température ambiante de nombreux polymères possèdent-ils un comportement de nature viscoplastique marquée.

Chapitre N

MODELISATION QUALITATIVE DES SURFACES DE PLASTICITE POUR DES HISTOIRES DE CHARGEMENT COMPLEXES

Résumé

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'application du modèle DNLR à des essais biaxiaux à déformations imposées. Les résultats des simulations exposées dans la deuxième partie montrent l'aptitude de l'approche à décrire qualitativement les surfaces de charge initiales. La dernière partie aborde les histoires de chargements complexes et montre que le modèle est tout à fait adapté pour décrire les distorsions observées sur ces surfaces de charge. L'effet de mémoire dû à la multiplicité des processus y est mis en évidence.

1- INTRODUCTION ---------- 95

2- MODELISATION DE LA PLASTICITE TRIDIMENSIONNELLE ---------- 95

↳ Distribution des processus 96

↳ Matrice de stabilité de TIZSA 97

↳ Expression de la non-linéarité temporelle 98

❶ L'indépendance des processus 99

❷ La formulation énergétique 99

3- CALCUL DES SURFACES DE CHARGE INITIALES ---------- 100

3-1 Description des trajets de chargement 100

3-1-1 Chargement proportionnel 100

3-1-2 Chargement séquentiel (chargement non proportionnel) 100

3-2 Méthodes de détection de la limite élastique 101

3-2-1 Méthode de limite de proportionnalité (LP) 102

3-2-2 Méthode d'extrapolation arrière (EA) 102

3-2-3 Méthode OFFSET (OF) 102

3-3 Surface de charge initiale : comparaison entre les prévisions du modèle et le critère de VON MISES 103

3-3-1 Influence du couple $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$ pour des valeurs élevées de $(\Delta F^{+,r}_{max})$ 103

3-3-2 Influence de l'énergie d'activation maximale sur la surface de charge obtenue 107

3-3-2-1 Etude du couple

$(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -250\ cm^3/Mol\ at)$ 107

3-3-2-1-1 Chargement séquentiel 107

3-3-2-1-2 Chargement proportionnel 109

3-3-2-2 Etude du couple $(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$ 110

3-3-2-2-1 Chargement séquentiel 110

3-3-2-2-2 Chargement proportionnel 111

3-3-2-2-3 Comparaison des deux trajets de chargement 112

3-3-3 "Compétition" entre la valeur de l'offset et l'énergie d'activation maximale pour trouver les surfaces de charge à caractère anguleux : Etude comparative des couples $(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$

et $(\Delta F^{+,r}_{max} = 80000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at)$ 114

3-4 Synthèse et discussion 115

3-5 Influence du coefficient de pression hydrostatique 121

3-5-1 Influence de x 121

3-5-2 Influence de l'offset 122
3-5-3 Comparaison en représentation normée entre surface de charge simulée et quelques résultats expérimentaux propres aux polymères 123
4 SURFACES DE PLASTICITE ET CHARGEMENTS COMPLEXES ---------- 124
4-1 Comment déterminer l'évolution des surfaces de charge 124
4-2 Etude de l'influence des paramètres sur l'écrouissage cinématique et isotrope . 125
4-2-1 Décharge totale 126
4-2-1-1 Rôle du couple $(E^r ; K_\sigma)$ 126
4-2-1-2 Rôle spécifique de K_σ sur la distorsion des surfaces de charge 130
4-2-1-3 Rôle de l'offset sur l'observation des distorsions 132
4-2-2 Décharge partielle à l'intérieur du nouveau domaine élastique 132
4-2-3 Conclusion 134
4-3 Modélisation de l'évolution de la surface de charge pour quelques histoires de chargements complexes 135
4-3-1 Préchargement en torsion 135
4-3-2 Préchargement en traction-torsion 136
4-3-3 Effet de la déformation plastique cumulée 137
4-4 Etude de la surface de charge associée à chaque processus 141
4-4-1 Surface de charge initiale 141
4-4-2 Etude de l'évolution des contraintes relatives à quelques processus lors de la détermination de la limite élastique en traction et en compression après prédéformation 145
4-4-2-1 Analyse des contraintes associées à quelques processus pour le chargement "point n°11" 146
4-4-2-2 Représentation des contraintes associées à quelques processus pour le chargement point n°1 149
4-4-3 Analyse des surfaces de charge rencontrées pour les processus j précédents pour une prédéformation en traction 151
4-4-4 Représentation de l'état des contraintes internes lorsque la surface de charge macroscopique est atteinte 154
4-4-5 Représentation du spectre de relaxation : analyse de quelques états limites particuliers choisis sur la surface de charge 156
4-4-5-1 Cas de la traction-torsion 156
4-4-5-2 Cas de la bitraction 158
5- CONCLUSION ---------- 160

1- INTRODUCTION

De nombreuses descriptions phénoménologiques utilisent la formulation des potentiels thermodynamiques et des pseudo-potentiels de dissipations, convexes associés à des critères de plasticité pour modéliser les surfaces de charge et leurs évolutions. Ce type de modélisation intéresse encore de nombreux chercheurs ; les travaux suivent essentiellement deux voies différentes, l'approche micro-mécanique et l'approche phénoménologique.

Cependant, à notre connaissance, seules les approches micro-mécaniques permettent de prédire la distorsion des surfaces de plasticité. Les approches phénoménologiques quant à elles s'appuient sur leur existence et adaptent en conséquence la formulation des potentiels et pseudo-potentiels de dissipation afin de les reproduire.

L'objet de la première partie de ce chapitre est d'expliciter les équations propres au modèle DNLR dans le cas d'un essai multidirectionnel à déformation imposée. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre II, les notions de fonction seuil de plasticité et de règle de normalité, habituellement nécessaires pour la modélisation, n'apparaissent pas dans le formalisme, bien que la règle d'écoulement de ZIEGLER s'y trouve implicitement respectée.

Dans la deuxième partie, nous montrons que l'approche généralisée de la thermodynamique de la relaxation permet de prédire le comportement des matériaux sous chargements complexes. En outre, les évolutions des surfaces de charge sont systématiquement obtenues après intégration de l'histoire subie par le matériau. Les simulations font apparaître des distorsions de la surface de charge conformes à celles observées expérimentalement.

Une dernière partie est consacrée à l'étude du critère d'écoulement relatif à chaque processus.

2- MODELISATION DE LA PLASTICITE TRIDIMENSIONNELLE

Dans la présentation du modèle DNLR (chapitre II), nous avons souligné qu'il est possible d'établir formellement les lois constitutives comme des réponses du milieu à des perturbations qui lui sont imposées. Pour décrire le comportement des matériaux, il est nécessaire de considérer que le milieu (continu) est localement hors équilibre. Comme nous l'avons déjà montré, la thermodynamique de la relaxation des milieux continus conduit à la formulation locale des vitesses d'évolution de toute grandeur observable β_n associée à des perturbations γ_m :

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \dot{\beta}_n = \sum_{j=1}^{nk} \left(\dot{\beta}_n\right)_j = \sum_{j=1}^{nk} \sum_{m=1}^{q} \left(a^u_{nm} \dot{\gamma}_m\right)_j - \sum_{j=1}^{nk} \left(\frac{(\beta_n)_j - (\beta^r_n)_j}{\tau_j(T,t)} \right) \qquad \text{(IV-1)}$$

a^u_{nm} : coefficient de la matrice de stabilité de TISZA.
$\tau_j(T,t)$: temps de relaxation.

La valeur de la réponse à l'équilibre (évolution réversible sans dissipation) est obtenue par intégration de l'équation suivante :

$$\frac{d\beta^r_n}{dt} = \dot{\beta}^r_n = \sum_{j=1}^{nk} \left(\dot{\beta}^r_n\right)_j = \sum_{j=1}^{nk}\sum_{m=1}^{q} \left(a^r_{nm}\dot{\gamma}_m\right)_j = \sum_{j=1}^{nk}\sum_{m=1}^{q} p^0_j \left(a^r_{nm}\dot{\gamma}_m\right) \qquad \text{(IV-2)}$$

Par exemple, pour un chargement mécanique à vitesses de déformation imposées $\left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\right)$, les observables sont les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ induit par le tenseur des déformations imposées $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La relation (IV-1) s'écrit alors, avec $\left(\underline{\underline{\sigma}}^r\right)_j = p^0_j \int_0^t \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^r \, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \, dt$:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \sum_{j=1}^{nk}\left(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}\right)_j = \sum_{j=1}^{nk} p^0_j \, \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^u \, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \sum_{j=1}^{nk}\left(\frac{\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_j - \left(\underline{\underline{\sigma}}^r\right)_j}{\tau_j(T,t)}\right) \qquad \text{(IV-3)}$$

Remarquons que la nature incrémentale de l'équation est bien adaptée pour une utilisation dans un code de calcul en description lagrangienne réactualisée. Comme le souligne SIDOROFF, cette description permet d'exprimer, par exemple, les grandeurs $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ et $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ comme des dérivées temporelles de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ [SIDOROFF 1984].

Cette équation de base contient des termes inconnus p^0_j, τ_j, $\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^u$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^r$ qu'il reste à expliciter dans le cas d'un chargement mécanique multidirectionnel. **Nous rappelons ici les grandes lignes qui ont permis d'expliciter ces inconnues :**

↳***La distribution des processus*** à l'instant initial est donnée par ***la théorie des fluctuations*** :

$$p^0_j = B\sqrt{\tau^r_j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{nk} p^0_j = 1 \qquad \text{(IV-4)}$$

p^0_j : poids initial du j ème processus de relaxation,
B : constante de normation
τ^r_j : temps de relaxation à l'équilibre du processus j

Pour une large distribution, la connaissance du temps de relaxation associé au processus le plus lent détermine l'ensemble du spectre.

↳Dans toute l'étude que nous menons, les ***conditions initiales*** correspondent à un ***matériau isotrope*** à élasticité hookéenne dépourvu de tout état de contrainte interne.

L'isotropie initiale impose que ***les matrices de stabilité de TISZA*** s'identifient aux tenseurs des ***constantes élastiques relaxées et non relaxées*** $\underline{\underline{\underline{a}}}^u$ et $\underline{\underline{\underline{a}}}^r$:

$$\underline{\underline{\underline{a}}}^u = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)^u & \lambda^u & \lambda^u & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^u & (\lambda+2\mu)^u & \lambda^u & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^u & \lambda^u & (\lambda+2\mu)^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^u \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-5)}$$

$$\underline{\underline{\underline{a}}}^r = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)^r & \lambda^r & \lambda^r & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^r & (\lambda+2\mu)^r & \lambda^r & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^r & \lambda^r & (\lambda+2\mu)^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^r \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-6)}$$

λ et μ : coefficients de Lamé

Pour un essai de traction uniaxiale, la formule (IV-3) s'écrit simplement :

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(\sigma_{11})_j - (\sigma^r_{11})_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(IV-7)}$$

Le module d'YOUNG est la pente de la courbe de traction dans le domaine élastique. Le coefficient de POISSON est obtenu par la mesure de la contraction transversale. Les coefficients de Lamé sont déterminés par les relations suivantes :

$$\mu^u = \frac{E^u}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \mu^r = \frac{E^r}{2(1+\nu)} \qquad \text{(IV-8)}$$

$$\lambda^u = \frac{\nu E^u}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{et} \; \lambda^r = \frac{\nu E^r}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad \text{(IV-9)}$$

L'hypothèse de stabilité, qui postule que le tenseur d'élasticité est défini positif, impose les deux conditions suivantes :

$$E > 0 \quad \text{et} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \qquad \text{(IV-10)}$$

Le cas limite $\nu = \frac{1}{2}$ correspond aux matériaux incompressibles :

$$\frac{\Delta V}{V} = tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0 \text{ si } \nu = 0.5 \qquad \text{(IV-11)}$$

ΔV : variation de volume

Les tenseurs des taux de contrainte et de déformation s'écrivent en représentation vectorielle :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{32} \\ \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{32} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-12)}$$

↳Dans le cadre du modèle DNLR (Distribution of Non Linear Relaxation), ***les temps de relaxation*** sont définis par la ***théorie cinétique de l'état transitoire activé***. ***Le col d'activation*** **est** ***sensible à l'écart à l'équilibre*** introduit par la perturbation imposée $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})$.On écrit :

$$\tau_j(T,t) = a_j(t)\,\tau_j^r(T) = a_j(t)\,\frac{h}{kT}\exp\left(\frac{(\Delta F_j^{+,r})}{RT}\right) \qquad \text{(IV-13)}$$

h, k : constantes de PLANCK et de BOLTZMANN

$\Delta F_j^{+,r}$: énergie libre d'activation du processus j

T : température.

Dans le cas d'un chargement uniaxial, le facteur de non-linéarité dû à l'écart à l'équilibre $(\sigma_{11} - \sigma_{11}^r)$ est exprimé par :

$$a(t) = a_j(t) = \exp\left(\frac{K_\sigma|\sigma_{11} - \sigma_{11}^r|}{RT}\right) \qquad \text{(IV-14)}$$

K_σ est un paramètre ajustable lié au volume d'activation.

↳Qu'en est-il de ***l'expression de a(t)*** dans le cas d'un ***chargement multiaxial*** ?

Cette ***modélisation*** doit assurer ***deux conditions*** :

❶ ***L'interdépendance des processus :***

Comme pour le chargement uniaxial, cette condition est assurée par la relation suivante :

$$a(t) = a_j(t) \qquad \text{(IV-15)}$$

❷ ***La formulation énergétique***

Il s'agit maintenant d'étendre l'expression de $\Delta(\Delta F^+(t))$ lorsque le chargement est multidirectionnel. Cette contribution énergétique coopérative (uniforme pour tous les cols d'activation) est de la forme :

$$K_\sigma \left|\sigma_{11} - \sigma_{11}^r\right| \qquad \text{(IV-16)}$$

Son extension aux chargements multiaxiaux est immédiate :

$$\Delta(\Delta F^+(t)) = \underline{\underline{K}}_\sigma : \left|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r\right| \qquad \text{(IV-17)}$$

Cette écriture nécessite l'introduction de nouveaux coefficients associés à $\underline{\underline{K}}_\sigma$.

Par souci de simplification, nous choisissons de travailler avec le concept de contrainte équivalente :

$$\underline{\underline{K}}_\sigma : \left|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r\right| = K_\sigma \left|\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right| \qquad \text{(IV-18)}$$

L'indice r désigne la contrainte équivalente associée à l'état relaxé.

La définition de σ^{eq} est obtenue sur la base d'équivalence énergétique pour un comportement élastique linéaire d'un milieu isotrope. En effet, nous pouvons toujours associer une décharge élastique à partir d'un état de contrainte en domaine plastique. Afin de pouvoir dissocier le rôle des premier et second invariants de la partie sphérique $\underline{\underline{\sigma}}^H$ et de la partie déviatorique $\underline{\underline{S}}$ respectivement, nous avons retenu l'expression suivante :

$$\sigma^{eq} = x\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right)\right]}\right\} \qquad \text{(IV-19)}$$

$$\text{Soit } \Delta(\Delta F^+(t)) = K_\sigma \left|\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right| \qquad \text{(IV-20)}$$

Le coefficient "x" exprime l'influence de la pression hydrostatique sur la cinétique de relaxation, ce paramètre est fonction de l'état structural du matériau. Soulignons que l'utilisation de la contrainte équivalente ne s'apparente pas à un critère de plasticité. Elle traduit uniquement un effet coopératif sur l'énergie d'activation, invariant par rapport à tout changement de repère.

3- CALCUL DES SURFACES DE CHARGE INITIALES

L'intégration numérique de l'équation (IV-3) permet de calculer les surfaces limites conventionnelles pour un seuil de plasticité donné (OFFSET). Comme pour une expérience réelle, la détermination de la fonction seuil se fait en observant l'écart à la loi de HOOKE.

3-1 Description des trajets de chargement

Pour déterminer la surface de charge, nous avons envisagé deux types de trajets : le chargement proportionnel et le chargement séquentiel. Le premier chargement reste le plus largement utilisé par les expérimentateurs à cause de sa facilité de mise en oeuvre.

3-1-1 Chargement proportionnel

Cette méthode consiste à solliciter le matériau suivant deux ou plusieurs directions simultanément. La variation du rapport des vitesses de déformation permet d'explorer tout le plan, ou l'espace, considéré. La figure 1 représente ce trajet de chargement.

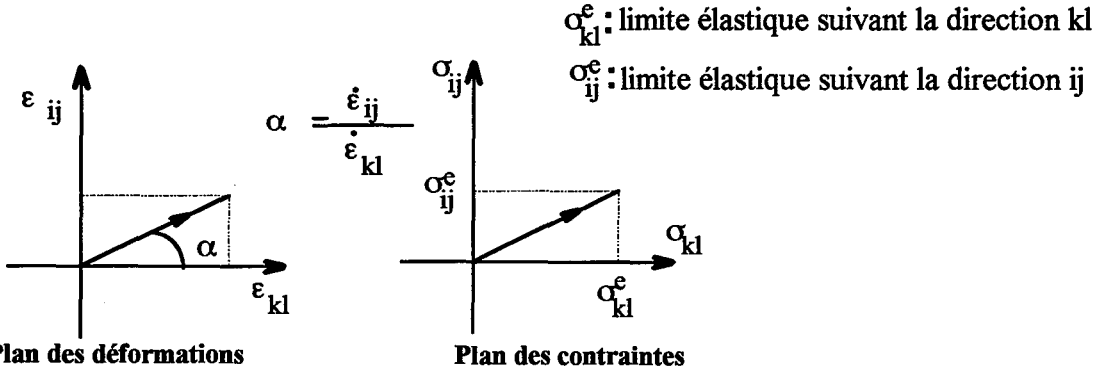


Figure 1 : Schématisation du trajet de chargement proportionnel.

En général, on choisit de travailler à vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}^{eq}$ constante.

$$\dot{\varepsilon}^{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{\sqrt{\left[(\dot{\varepsilon}_{11}-\dot{\varepsilon}_{22})^2+(\dot{\varepsilon}_{11}-\dot{\varepsilon}_{33})^2+(\dot{\varepsilon}_{22}-\dot{\varepsilon}_{33})^2+6\left(\dot{\varepsilon}_{12}^2+\dot{\varepsilon}_{13}^2+\dot{\varepsilon}_{23}^2\right)\right]}\right\} \qquad \text{(IV-21)}$$

Pour des chargements plans de type $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12})$ ou $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$, le choix de $\dot{\varepsilon}^{eq}$ et de $\dot{\varepsilon}_{11}$ par exemple suffit à caractériser complètement le trajet suivi.

3-1-2 Chargement séquentiel (chargement non proportionnel)

L'éprouvette est soumise à une déformation (ε^*_{kl}) sous la vitesse $\dot{\varepsilon}_{kl}$ = constante suivant la direction (kl). Cette déformation imposée étant maintenue, l'éprouvette est alors chargée suivant l'autre direction. Dans le cas d'un matériau isotrope élastique, cette méthode est

équivalente à un chargement proportionnel, seul le trajet de chargement diffère (les états initiaux et finaux sont les mêmes en l'absence de dissipation). La figure 2 illustre ce trajet séquentiel.

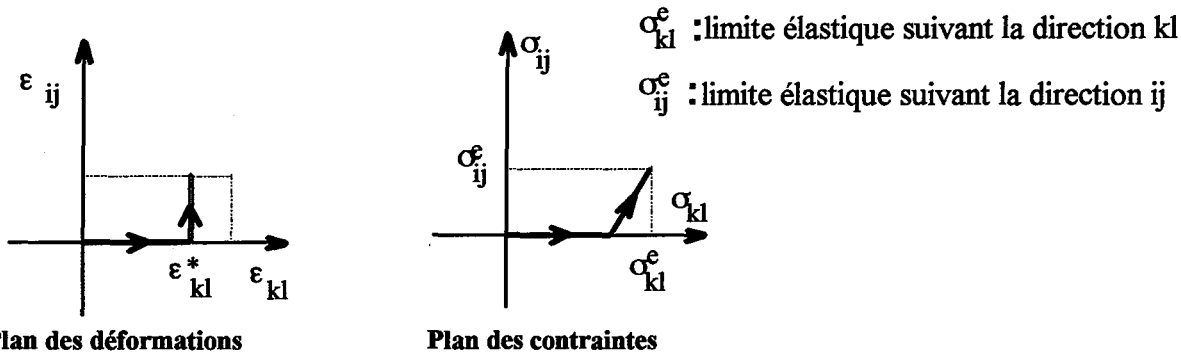


Figure 2 Schématisation du trajet de chargement séquentiel.

3-2 Méthodes de détection de la limite élastique

La définition du seuil de plasticité est un problème fondamental. En effet, la notion même de seuil reste totalement sujette à caution. Comment être sûr que la dissipation n'apparaît pas progressivement ? Ce problème s'apparente au problème délicat de la définition de la transition vitreuse. HUTCHINSON (1976) par exemple considère que les mouvements irréversibles se produisent dès le début de la sollicitation. Nous verrons que le modèle DNLR accrédite ce point de vue. Cependant, le concept de seuil se révèle très utile sur la plan pratique. En conséquence, il est préférable de nous en tenir à la définition conventionnelle de l'expérimentateur. Plusieurs méthodes et techniques de détection de la limite élastique peuvent être envisagées [voir IKEGAMI (1979) par exemple]. La figure 3 résume quelques définitions présentées ci-dessous.

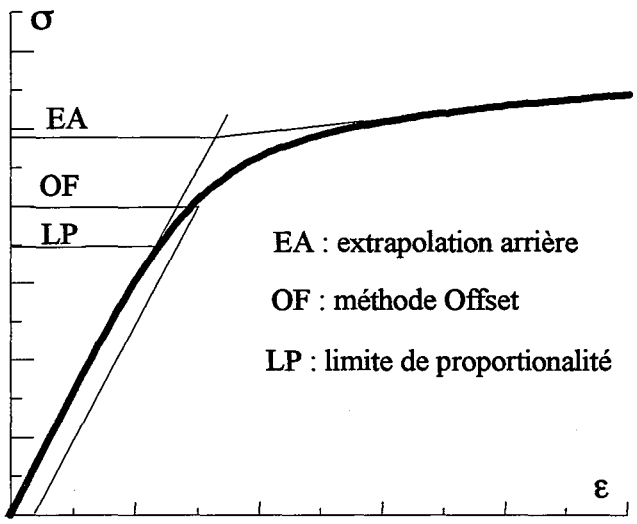


Figure 3 : Différentes définitions du seuil de plasticité.

3-2-1 Méthode de limite de proportionnalité (LP)

La limite élastique est déterminée dès que la courbe contrainte-déformation s'écarte d'une droite. Cette méthode présente l'avantage de définir une limite élastique inférieure ce qui ne nécessite que de très petites incursions dans le domaine plastique. Les distorsions induites sur la surface de charge se trouvent ainsi minimisées.
Néanmoins, son principal inconvénient est sa difficulté de mise en oeuvre. En effet, le passage du comportement élastique au comportement plastique se fait progressivement. La subjectivité de l'expérimentateur intervient dans l'appréciation de la linéarité ou de la non-linéarité de la courbe contrainte-déformation [voir IKEGAMI (1979) ; NAGHDI et al (1958) ; IVEY (1961) par exemple].

3-2-2 Méthode d'extrapolation arrière (EA)

Cette méthode définit une limite supérieure de plasticité correspondant au début de saturation du comportement plastique. Elle consiste à effectuer une déformation plastique notable pour dépasser la zone de transition. Cette déformation plastique perturbe par écrouissage les caractéristiques du matériau. Ainsi une éprouvette d'essai ne peut servir qu'à la détermination d'un seul point de la surface de charge [voir MAIR et PUGH (1964) par exemple]

3-2-3 Méthode OFFSET (OF)

La détection de la limite élastique passe par le choix, a priori, d'une valeur de l'OFFSET "déformation plastique résiduelle". Le choix pose des problèmes expérimentaux délicats : une valeur élevée de l'OFFSET perturbe les caractéristiques plastiques du matériau. Par ailleurs, l'offset doit être supérieur à la valeur du bruit mesuré sur la déformation.

Cette méthode facile à mettre en oeuvre est la plus utilisée. Elle présente un compromis entre les deux méthodes précédentes. Suivant la valeur de l'offset, on s'approche de l'une ou de l'autre [voir ROUSSET (1985) ; HELLING et al (1986) par exemple].

C'est cette méthode que nous utilisons : à chaque incrément de calcul, le test sur la limite élastique est mis en oeuvre suivant toutes les directions.

Dans la plupart des simulations de traction-torsion, nous reporterons les surfaces limites dans un repère $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ tel que le critère de VON MISES soit représenté par un cercle (échelle en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sur l'axe de cisaillement σ_{12} par rapport à l'axe de traction σ_{11}).

3-3 Surface de charge initiale : comparaison entre les prévisions du modèle et le critère de VON MISES

Dans toute cette étude, les paramètres suivants sont maintenus fixes :
$E^u = 80000$ MPa ; $E^r = 2500$ MPa ; $\nu = 0.30$; x=0. Les deux paramètres variables $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$ sont exprimés respectivement en $(J / Mol\ at)$ et en $(cm^3 / Mol\ at)$.
Les conditions expérimentales sont $T = 297$ K et $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055\ s^{-1}$.
Nous essayons d'établir une corrélation entre la cinétique de la relaxation et la forme de la surface de charge obtenue par le modèle.

3-3-1 Influence du couple $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$ pour des valeurs élevées de $(\Delta F^{+,r}_{max})$

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence du couple de paramètres $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$ sur la surface de charge. Une visualisation de ces résultats est donnée sur les figures 4, 5 et 6. Les surfaces d'écoulement déduites du critère de VON MISES et celles obtenues par le modèle sont représentées dans les deux plans $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ et $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$. La surface de plasticité obtenue coïncide avec le critère de VON MISES pour différents couples $(\Delta F^{+,r}_{max}\ ;\ K_\sigma)$. La figure 4a montre qu'une diminution de K_σ (négatif) entraîne un rétrécissement de la surface de charge. En effet, une diminution de ce paramètre fait glisser les temps de relaxation vers les temps courts ; la dissipation qui caractérise l'écart à la loi de HOOKE se manifeste donc plus précocement.

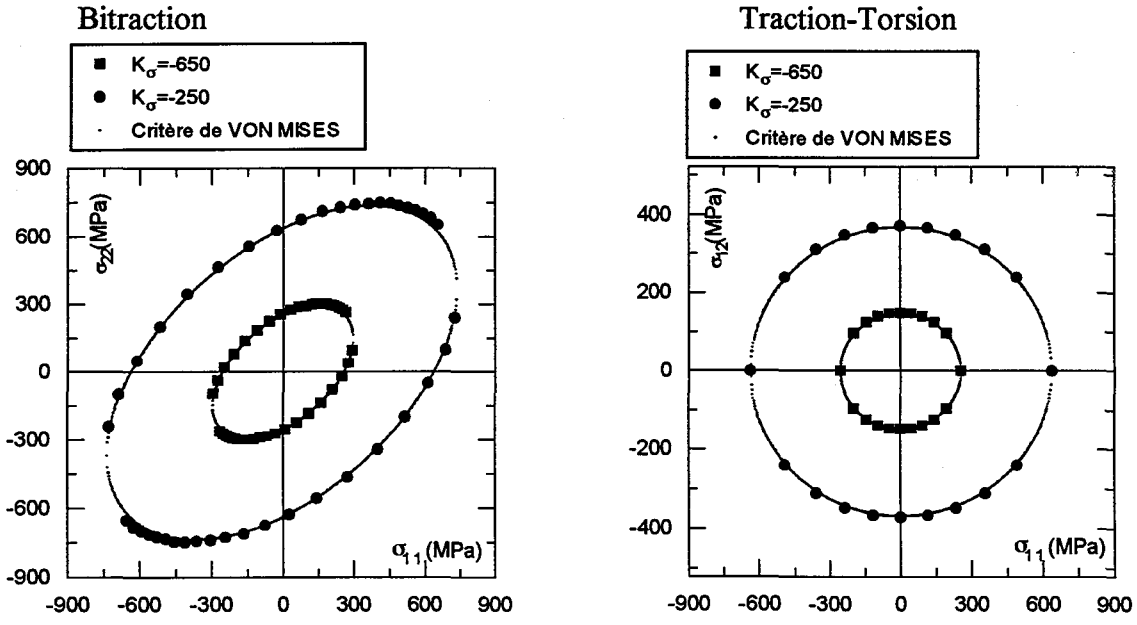


Figure 4-a : Influence du paramètre de non-linéarité (*Chargement proportionnel*)
$\Delta F^{+,r}_{max} = 250000$ J / Mol at ; OFFSET $= 0.00005$.

La figure 4b compare, en représentation normée, la surface de charge obtenue avec le critère de VON MISES pour différentes valeurs du paramètre de non-linéarité (K_σ). Nous remarquons que la forme de la surface de charge reste inchangée et qu'elle vérifie bien le critère de VON MISES.

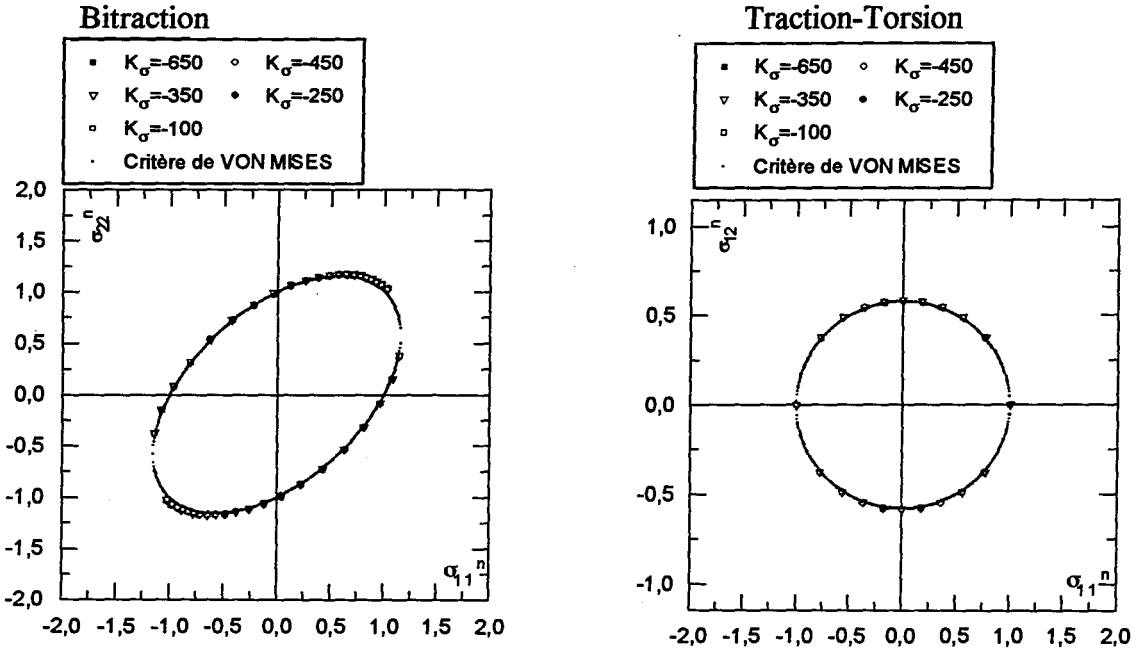


Figure 4-b : Influence du paramètre de non-linéarité (*Chargement proportionnel, représentation normée*) $\Delta F_{max}^{+,r} = 250000$ J / Mol at ; OFFSET $= 0.00005$.

La figure 5a montre l'effet d'une diminution de l'énergie libre d'activation $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\right)$ sur la taille de la surface de charge. Une augmentation de l'énergie d'activation déplace les temps de relaxation vers des temps longs, alors le domaine d'élasticité subit un grossissement.

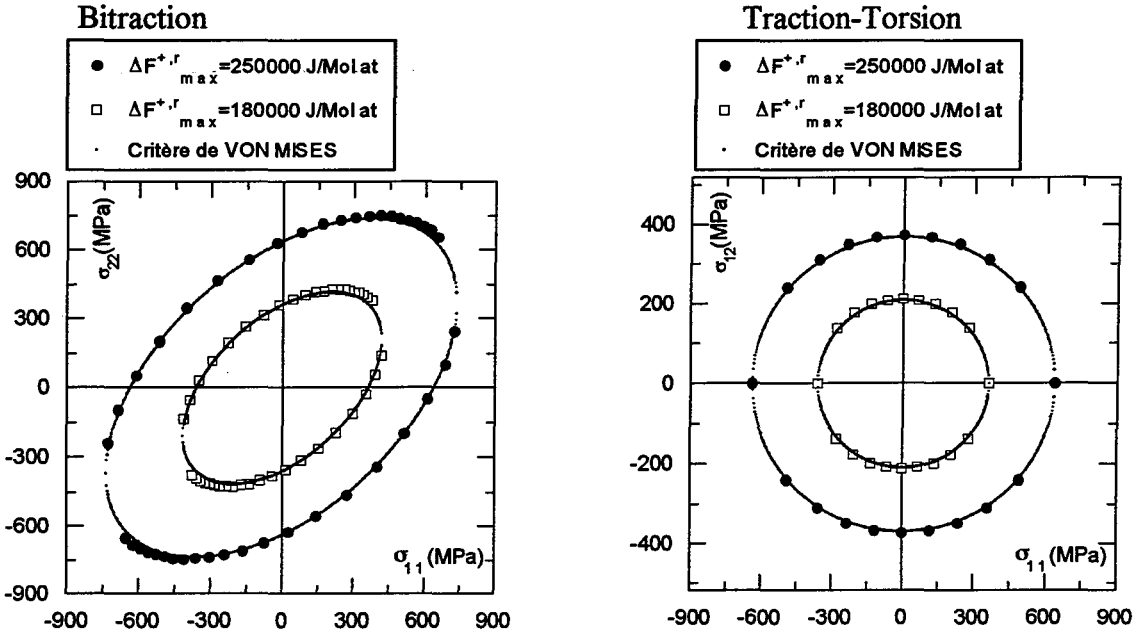


Figure 5-a : Influence de l'énergie d'activation sur la surface de charge initiale(*Chargement proportionnel*) $K_\sigma = -250\ cm^3 / Mol\ at$; OFFSET $= 0.00005$.

La figure 5b, en représentation normée, montre que la forme de la surface de plasticité n'est pas affectée par la valeur de l'énergie libre d'activation dans le domaine exploré (*superposition des points*).

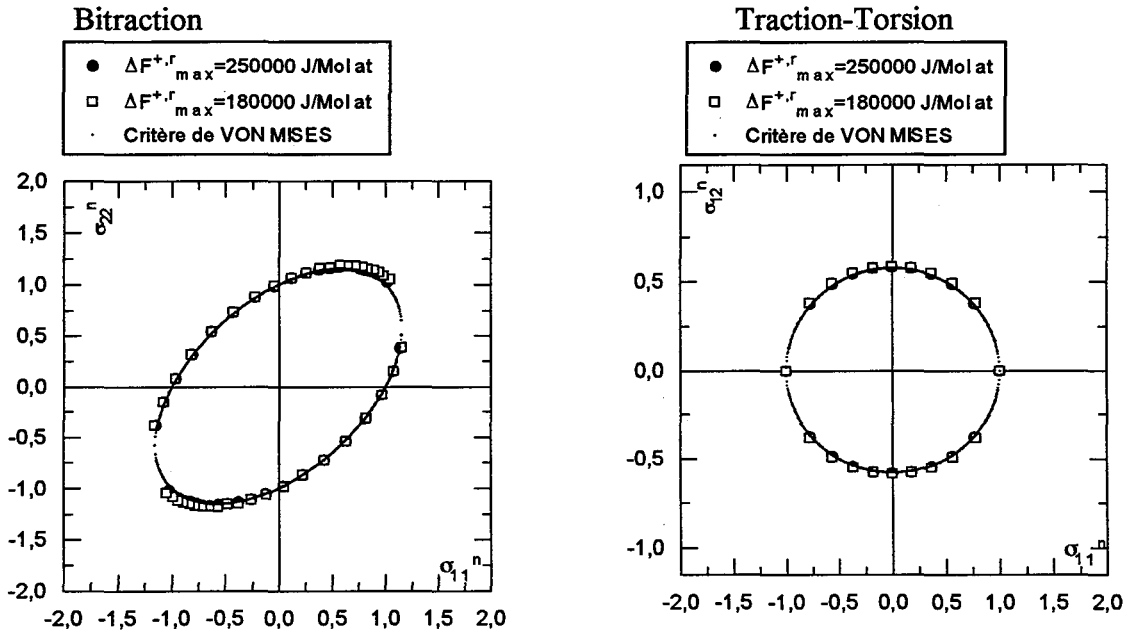


Figure 5-b : Influence de l'énergie d'activation sur la surface de charge initiale (*représentation normée*) $K_\sigma = -250\ cm^3 / Mol\ at$; OFFSET $= 0.00005$.

La comparaison entre chargements proportionnels et chargements séquentiels montre leur équivalence (figure 6a-6b). Puisque le trajet de chargement n'influe pas sur la forme de la surface de plasticité, nous pouvons donc penser qu'il n'y a pas eu de dissipation notable avant d'atteindre l'offset mesuré (indépendance vis à vis du chemin suivi).

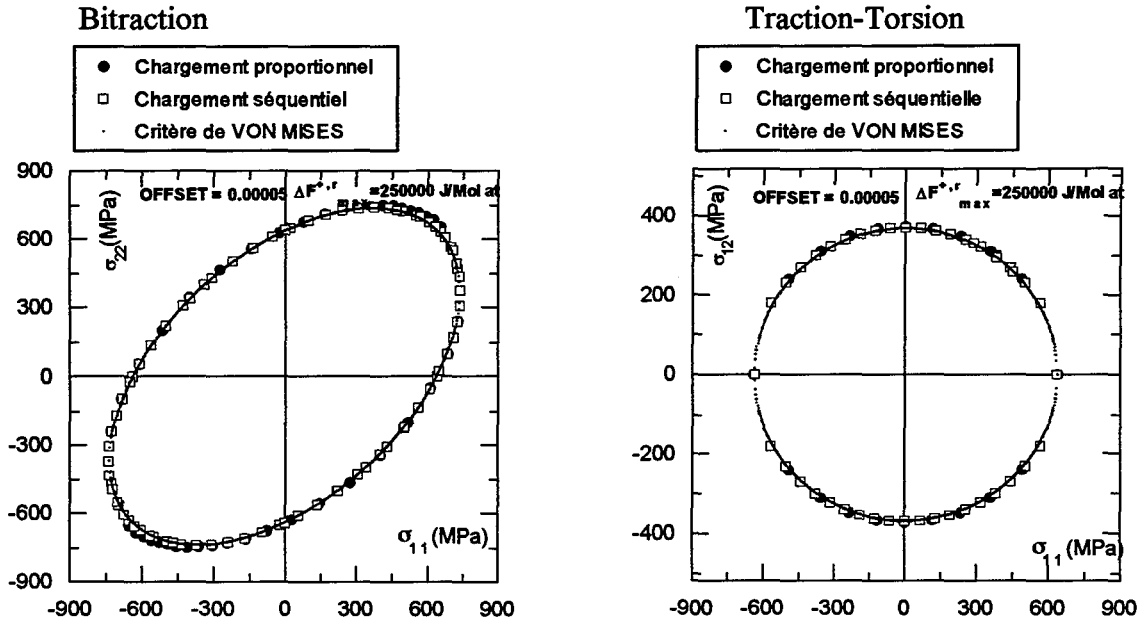


Figure 6-a : Comparaison des deux trajets de chargement

$\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 250000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

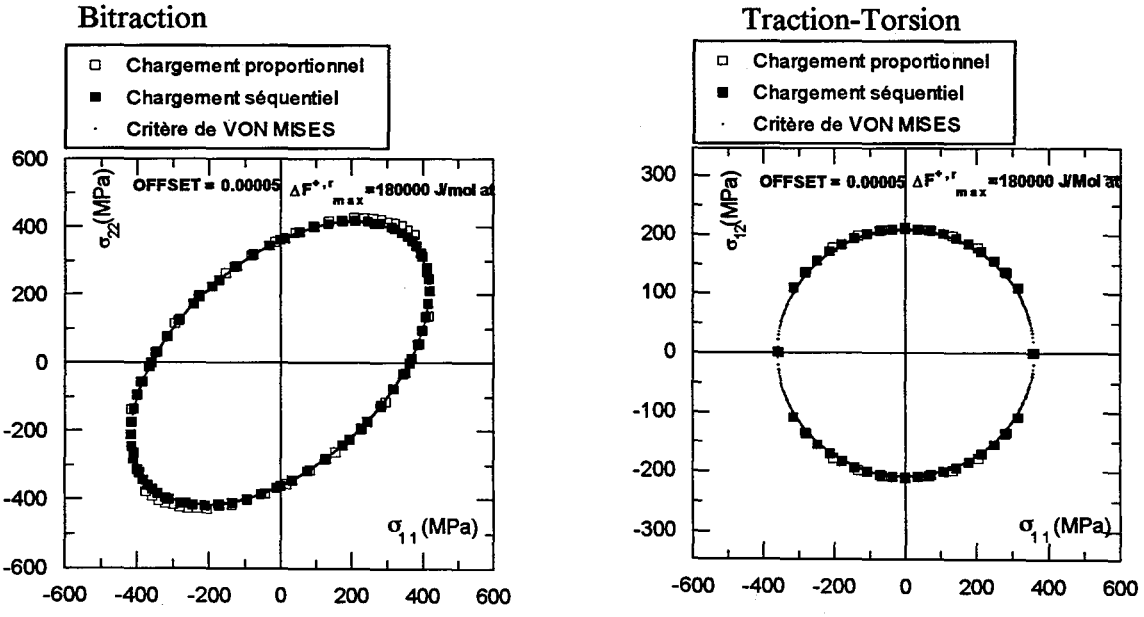


Figure 6-b : Comparaison des deux trajets de chargement

$\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 180000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

La figure 6-c illustre que la surface de plasticité ne change pratiquement pas de forme même pour une valeur très faible de l'OFFSET (valeur choisie $1e^{-7}$).

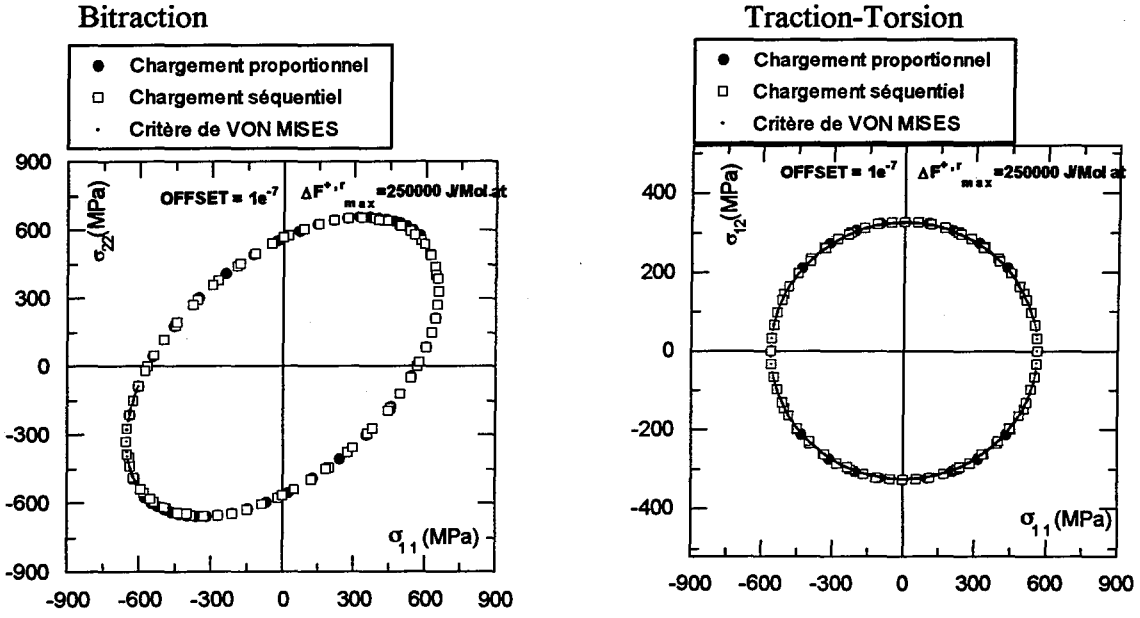


Figure 6-c : Comparaison des deux méthodes de chargement pour un faible OFFSET $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 250000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

3-3-2 Influence de l'énergie d'activation maximale sur la surface de charge obtenue

3-3-2-1 Etude du couple $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$

Dans ce paragraphe, nous fixons la valeur de $K_\sigma = -250$ (comme pour l'étude précédente). L'énergie libre d'activation est de 100000 J/Mol at (contre 180000 J/Mol at et 250000 J/Mol at dans les exemples précédents).

3-3-2-1-1 Chargement séquentiel

Les figures 7-a et 7b montrent que maintenant les surfaces de charge initiales changent de forme avec la valeur choisie par l'offset. La figure 7-a, obtenue pour un offset très faible (valeur de 1 e^{-7}), révèle une surface limite de plasticité décrite par des segments de droite. Ceci n'est pas sans rappeler le critère de la déformation maximale de SAINT-VENANT, critère en réalité proposé par MARIOTTE en 1686, puis abandonné car non conforme aux observations expérimentales. Toutefois, par rapport à ce critère, nous notons une troncature vers les fortes contraintes en bitraction et en bicompression. Lorsque la valeur de l'offset augmente et se rapproche des valeurs mesurables expérimentalement, la surface perd son caractère anguleux et prend une forme quasi-elliptique proche du critère de VON MISES.

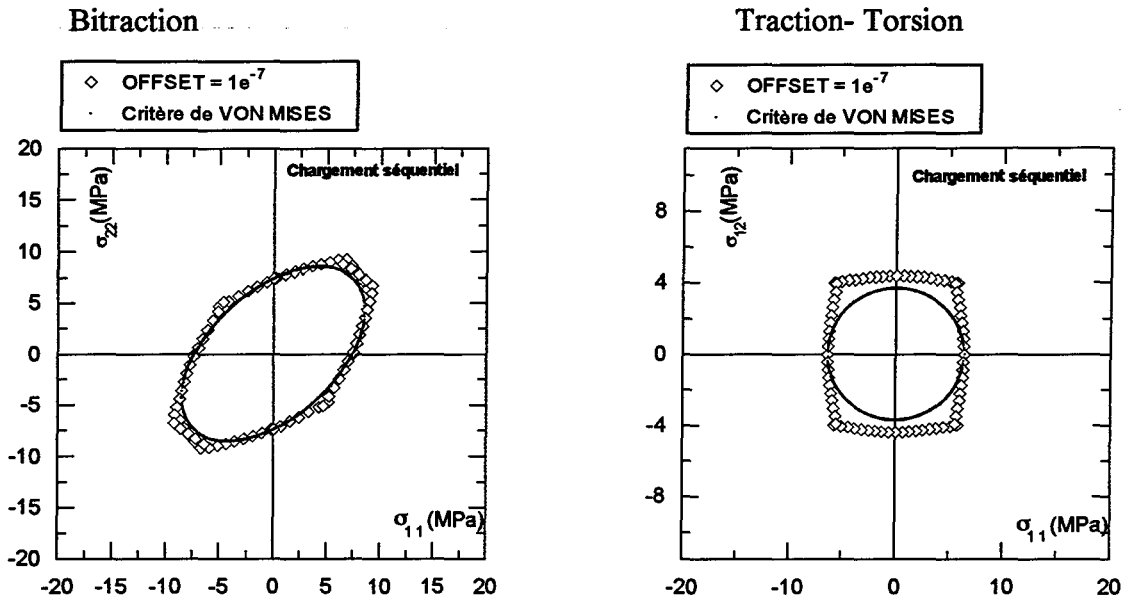


Figure 7-a : Surface de charge initiale obtenue par *le chargement séquentiel* pour une très faible valeur de l'OFFSET $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

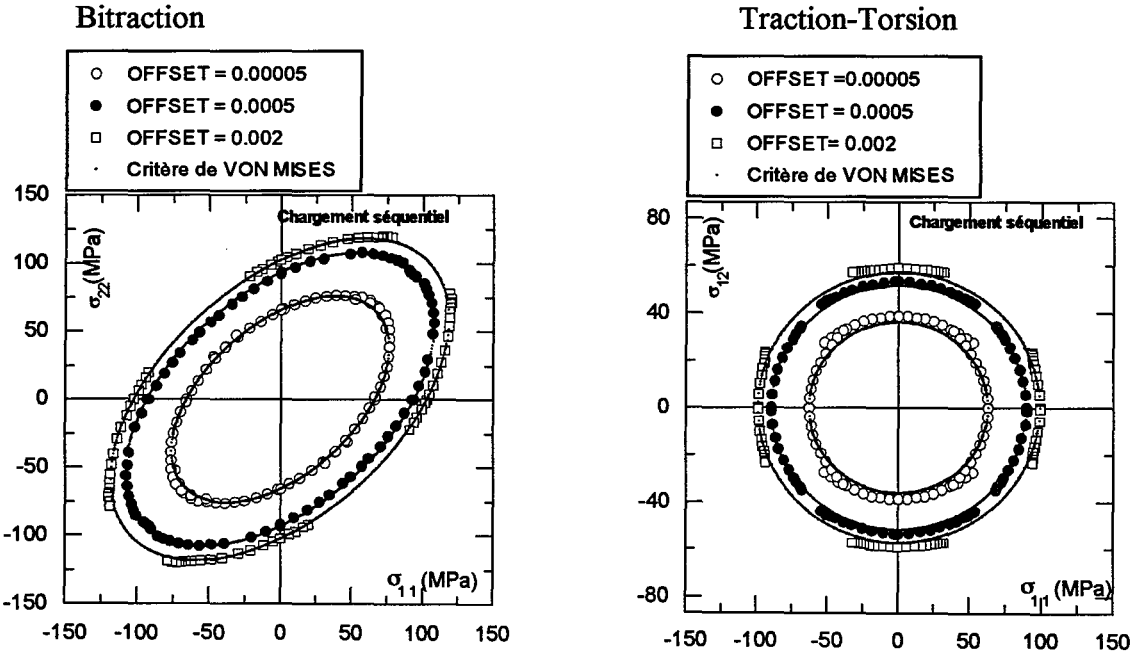


Figure 7-b : Surface de charge initiale obtenue par le *chargement séquentiel* pour trois valeurs d'OFFSET $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

3-3-2-1-2 Chargement proportionnel

Les figures 8a et 8b révèlent que la forme de la surface de charge simulée dépend aussi du trajet de chargement (comparer les figures 7a et 8a par exemple). Pour une faible valeur de l'offset, nous retrouvons pratiquement le critère de SAINT-VENANT.

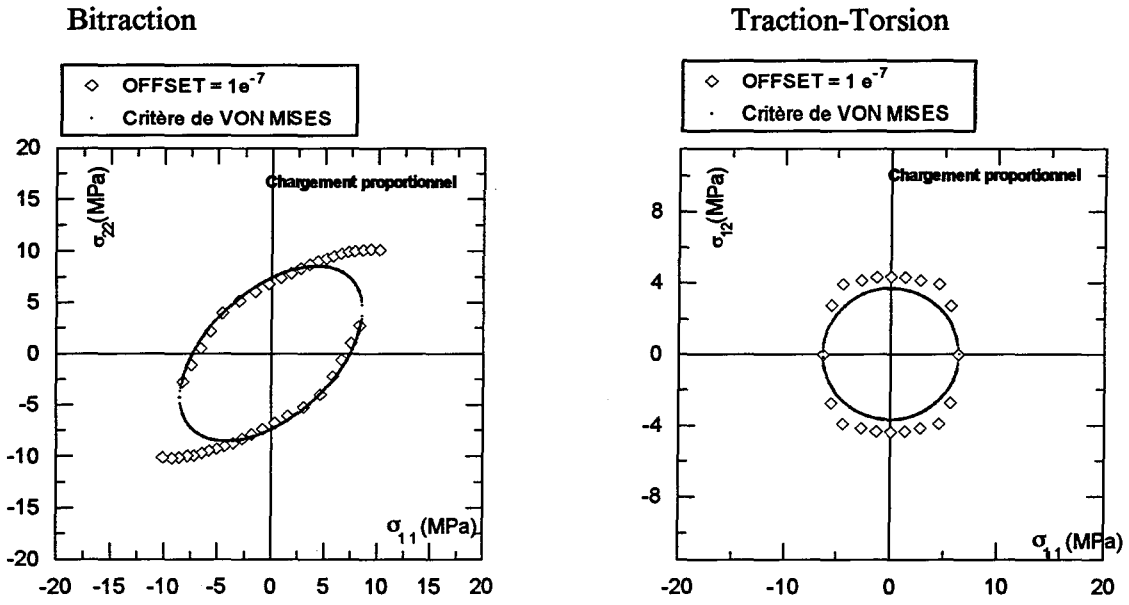


Figure 8a : Surface de charge initiale obtenue par *le chargement proportionnel* $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

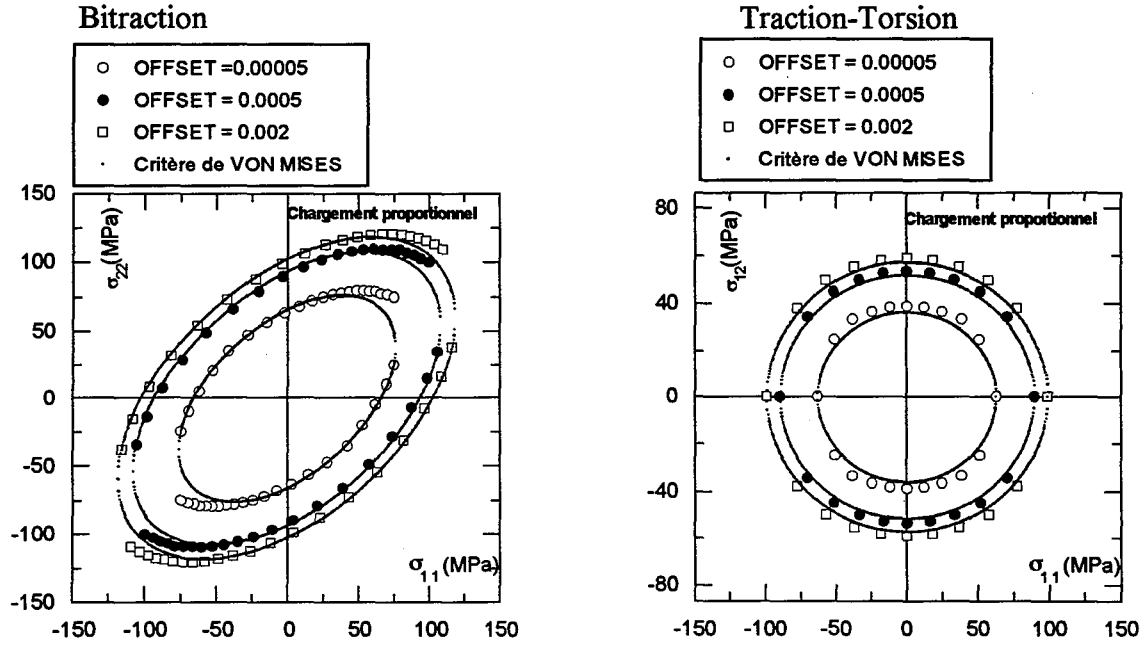


Figure 8b : Surface de charge initiale obtenue par *le chargement proportionnel* pour trois valeurs de l'Offset $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

Comme précédemment, une augmentation de l'offset induit un grossissement du domaine élastique et permet de retrouver le critère de VON MISES. En résumé, pour les faibles énergies libres d'activation, nous détectons une interdépendance entre :

- *l'offset.*
- *le trajet de chargement.*
- *l'énergie libre d'activation* $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\right)$ *et le paramètre de non-linéarité* $\left(K_\sigma\right)$.

Il est donc intéressant de poursuivre l'analyse.

3-3-2-2 Etude du couple $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats de simulation en fonction de la valeur de l'offset et du mode de chargement.

3-3-2-2-1 Chargement séquentiel

Les résultats de simulation représentés sur les figures 9a et 9b confirment les observations faites pour $\left(K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$. Toutefois, une comparaison des figures 9b et 7b révèle que pour $K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}$, l'offset 5 e^{-5} amène une surface de charge proche du critère de SAINT VENANT, ce qui n'est plus le cas pour $K_\sigma = -250$, ceci souligne le rôle spécifique de K_σ sur la forme de la surface de plasticité.

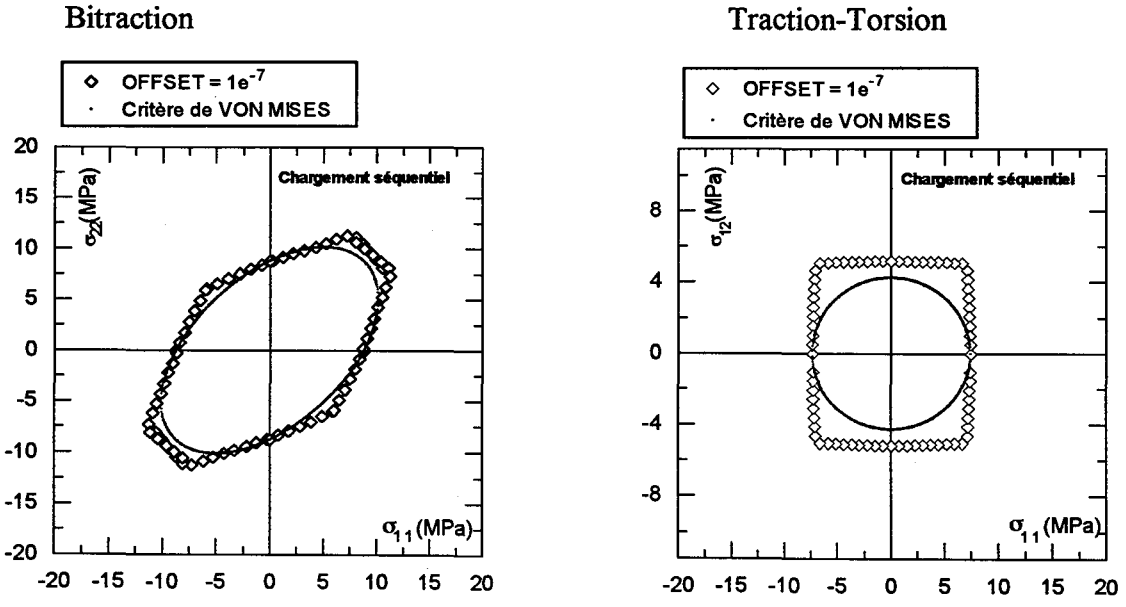


Figure 9-a : Influence de l'OFFSET sur la surface de charge obtenue par le *chargement séquentiel* $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

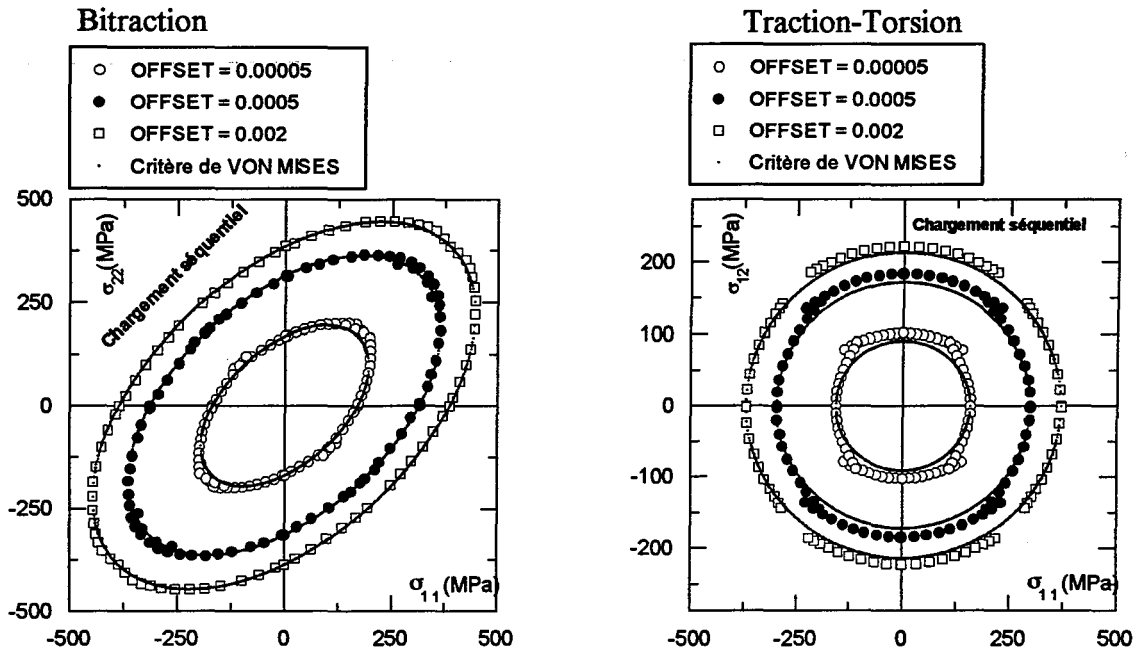


Figure 9-b : Influence de l'OFFSET sur la surface de charge obtenue par le *chargement séquentiel* $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

3-3-3-2-2 Chargement proportionnel

Les simulations sont représentées dans les figures 10-a et 10-b. Nous observons les mêmes effets liés à la variation de l'offset : pour les faibles valeurs, la forme de la surface de charge est différente de celle obtenue par le chargement séquentiel. Ce point sera discuté plus en détail dans le paragraphe 3-4 ou nous ferons une synthèse de nos observations.

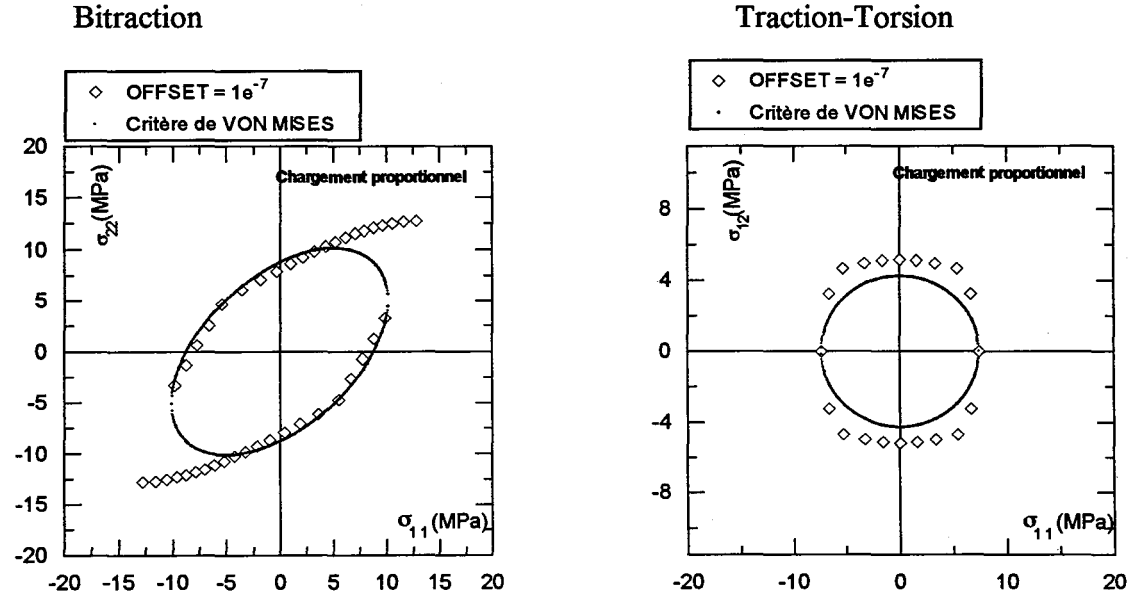


Figure 10-a : Influence de l'OFFSET sur la surface de plasticité obtenue par *le chargement proportionnel* $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

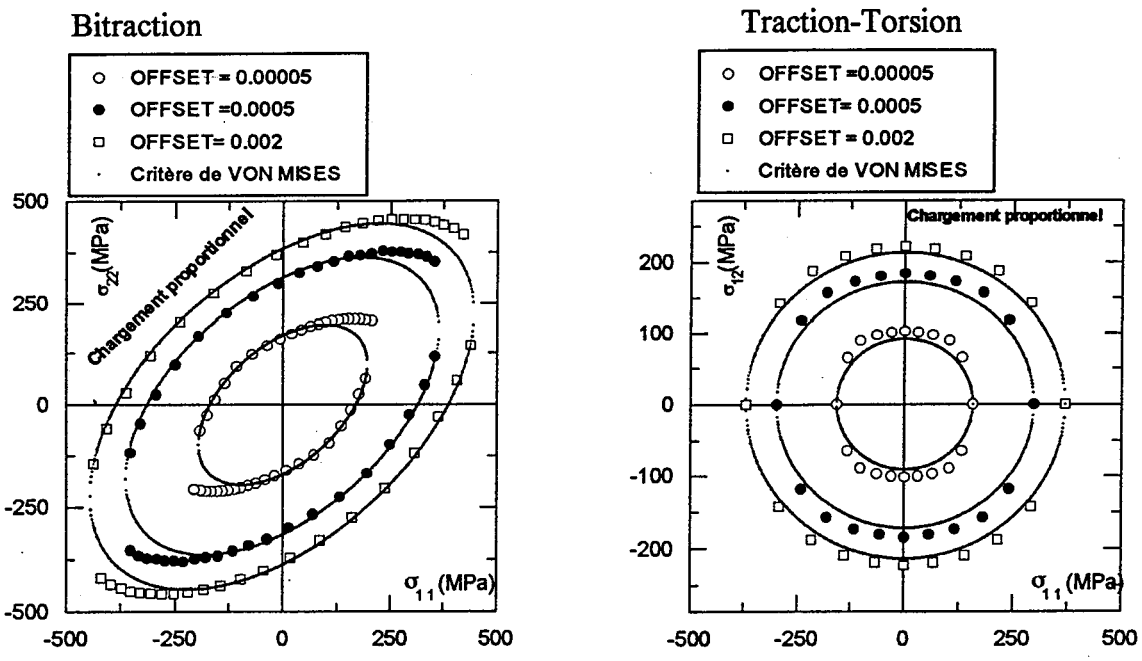
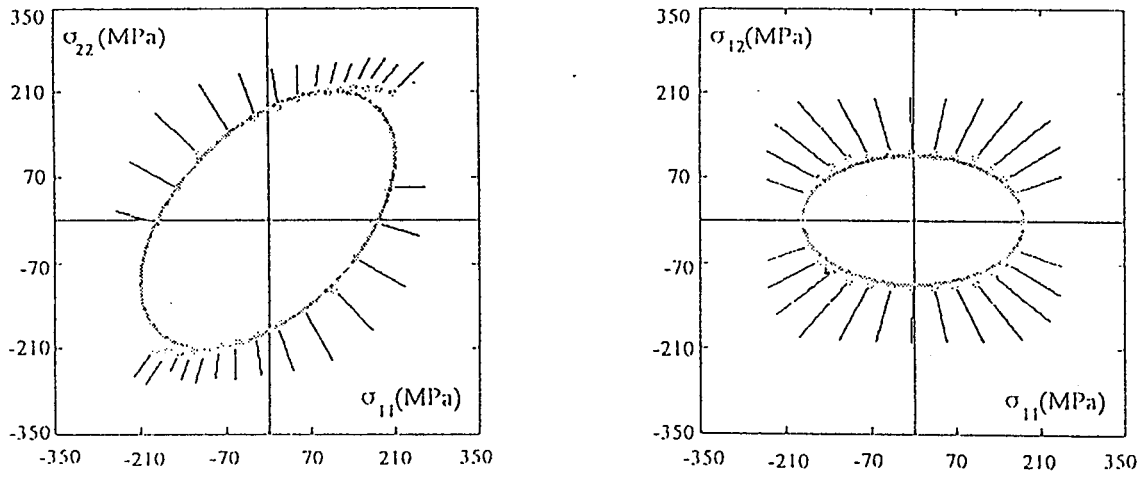


Figure 10-b : Influence de l'OFFSET sur la surface de plasticité obtenue par le *chargement proportionnel* $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at};\ K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

Remarque à propos des directions d'écoulement :

Nous avons souligné le respect de la règle de normalité généralisée de ZIEGLER à la page 62. Les figures ci-dessous montrent les directions d'écoulement liées à nos simulations $\left(E^u = 80000 \text{ MPa},\ E^r = 2500 \text{ MPa},\ \Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at},\ K_\sigma = -55 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at},\ \nu = 0.3\right)$



Détermination de la direction d'écoulement de l'incrément plastique par simulation numérique (Règle de normalité) dans les deux plans $(\sigma_{11},\ \sigma_{22})$ et $(\sigma_{11},\ \sigma_{12})$.

3-3-2-2-3 Comparaison des deux trajets de chargement

Pour faciliter la lecture des informations précédentes, nous regroupons ici les résultats des simulations sur une représentation normée (figures 11a et 11b). Les surfaces normées sont globalement les mêmes si l'on excepte l'écart important observé dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ pour les fortes bitraction et bicompression à faible offset.

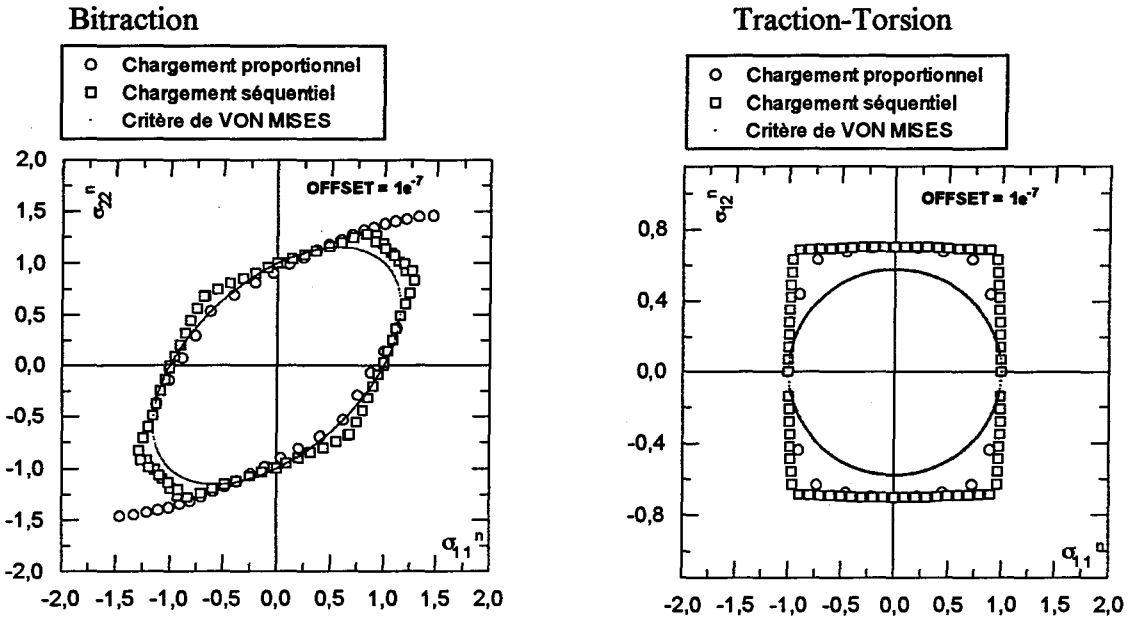


Figure 11-a : Comparaison des deux trajets de chargement pour une faible valeur de l'OFFSET $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

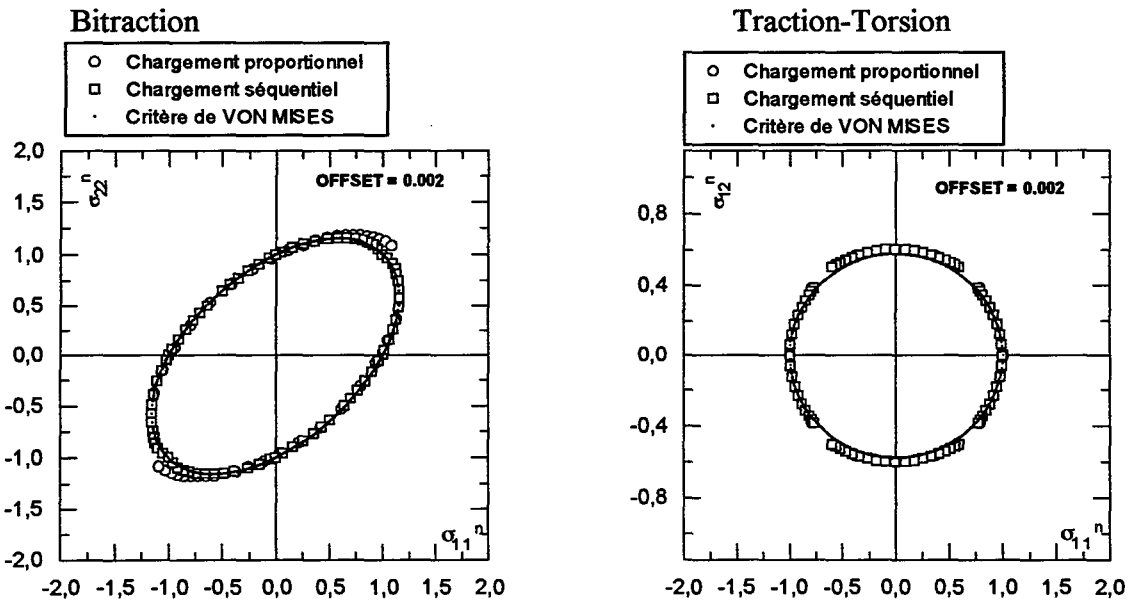


Figure 11-b : Comparaison des deux trajets de chargement pour une grande valeur de l'OFFSET $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

3-3-3 "Compétition" entre la valeur de l'offset et l'énergie d'activation maximale pour trouver les surfaces de charge à caractère anguleux : Etude comparative des couples ($\Delta F^{+,r}_{max}$ = 100000 J / Mol at ; K_σ = −50 cm³ / Mol at) et ($\Delta F^{+,r}_{max}$ = 80000 J / Mol at ; K_σ = −50 cm³ / Mol at)

L'objet de ce paragraphe est de confirmer que la valeur de l'offset, nécessaire pour obtenir une surface de charge à caractère anguleux, est fonction de l'énergie d'activation maximale. En effet, la comparaison des formes obtenues pour un offset 5 e^{-5} et pour les deux valeurs de l'énergie d'activation maximale 100000 J/Mol at et 80000 J/Mol at, montre que les surfaces de charge normées ne se superposent pas (figure 12 et 13).

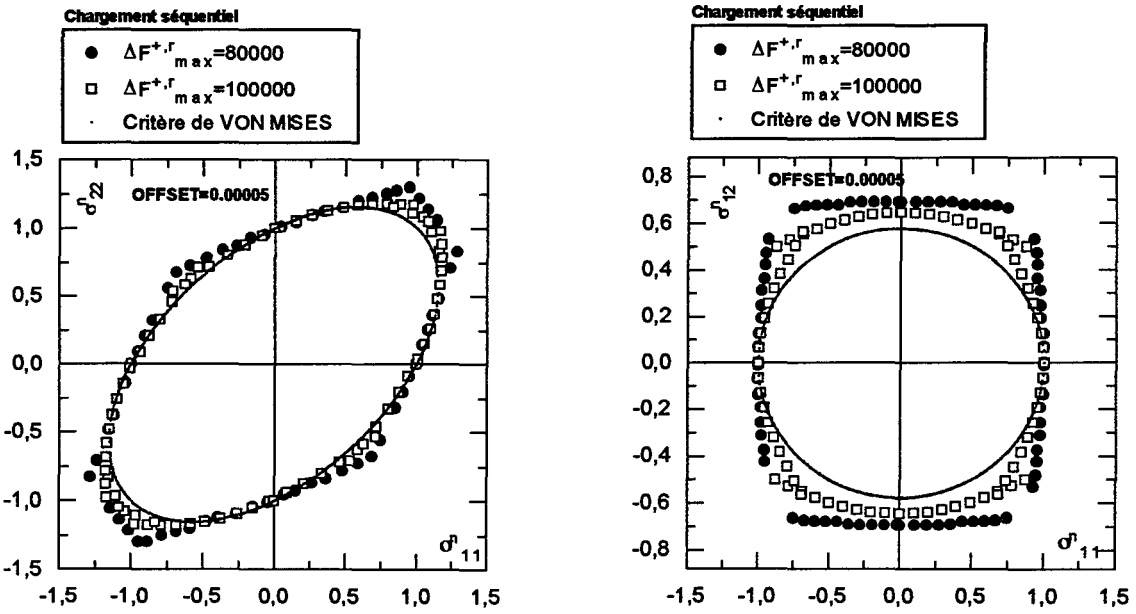


Figure 12 : Influence de l'énergie d'activation sur la surface de charge initiale pour une valeur de l'offset de $5e^{-5}$ et K_σ = −50 cm³ / Mol at (*chargement séquentiel*).

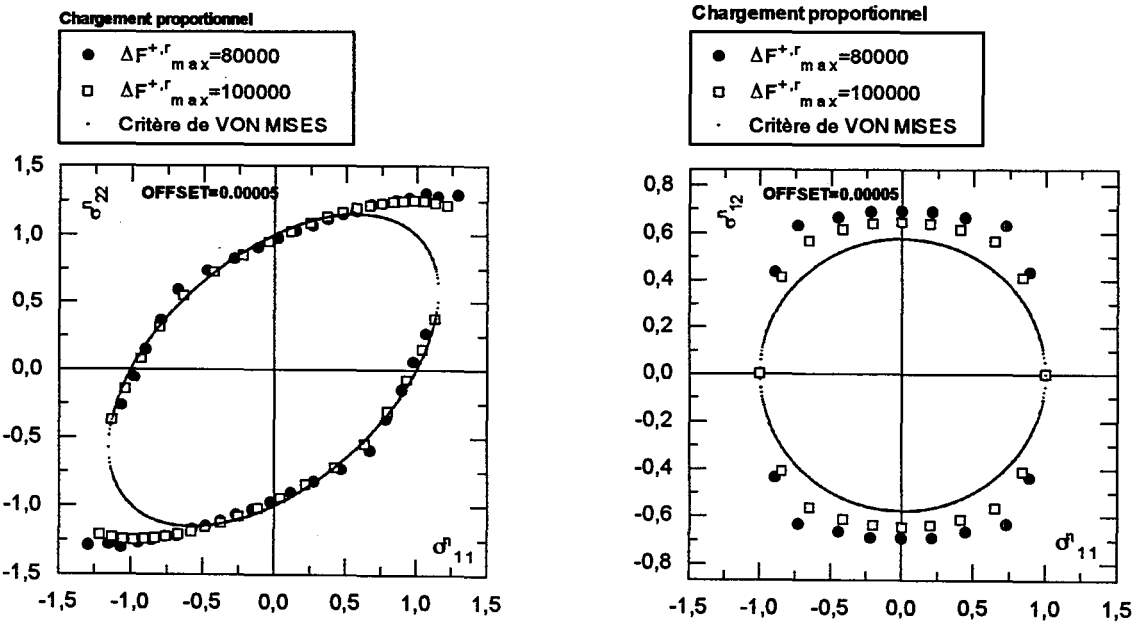


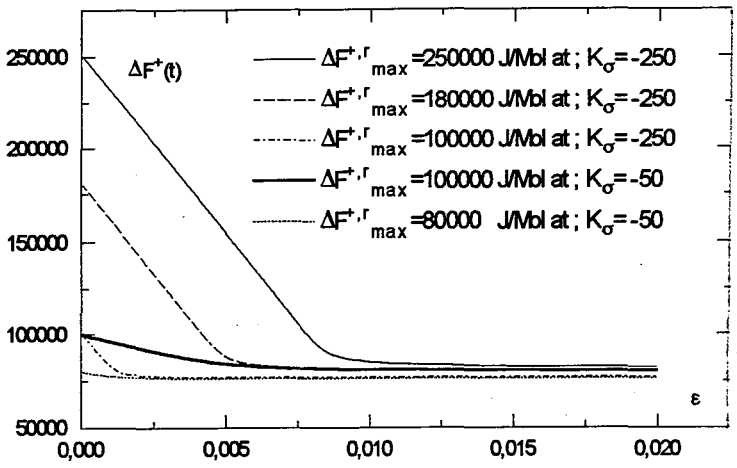
Figure 13 : Influence de l'énergie d'activation sur la surface de charge initiale pour une valeur de l'offset de $5e^{-5}$ et K_σ = −50 cm³ / Mol at (*Chargement proportionnel*).

3-4 Synthèse et discussion

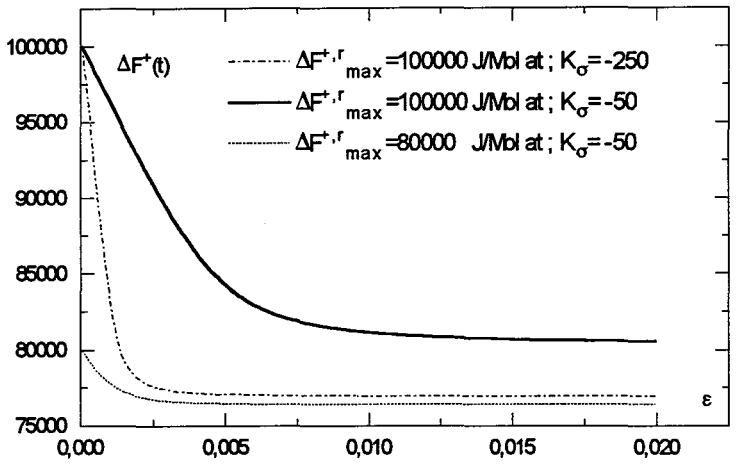
En résumé, l'ensemble des résultats précédents montre que la forme des surfaces de plasticité est liée à la nature du matériau par l'intermédiaire de paramètres intrinsèques définis dans le modèle $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma\ ;\ E^u\ ;\ E^r\ \text{et}\ \nu\right)$ et aux exigences de l'expérimentateur par la définition conventionnelle de l'offset. L'analyse des simulations a montré que les couples $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma\right)$, qui conditionnent les temps de relaxation à chaque instant, jouent un rôle déterminant sur les surfaces de plasticité. Nous allons essayer d'établir des corrélations entre surfaces de plasticité et niveau instantané de l'énergie libre d'activation $\Delta F_j^+(t) = \Delta F_j^{+,r} + K_\sigma\left(\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right)$ et ceci plus précisément pour le processus le plus lent $\Delta F_{max}^+(t)$.

Bien entendu, nous n'oublions pas ici le rôle joué par E^u, E^r et ν sur ces surfaces. Nous n'étudierons pas ici l'influence de ces paramètres et ferons référence aux chargements unidirectionnels qui ont montré leur rôle en comparaison avec celui de $\Delta F_{max}^{+,r}$.

La figure 14-a montre les évolutions de $\Delta F_{max}^+(t)$ pour des chargements unidirectionnels à vitesse de déformation imposée pour divers couples $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma\right)$. La figure 14-b est un "zoom" sur l'échelle de $\Delta F_{max}^+(t)$. Nous observons sur cette courbe que la saturation de $\Delta F_{max}^+(t)$ peut être obtenue pour des déformations voisines avec des couples très différents $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000\ \text{J/Mol at}\ ;\ K_\sigma = -250\right)$ et $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 80000\ \text{J/Mol at}\ ;\ K_\sigma = -50\right)$. Cette remarque montre déjà qu'il sera probablement délicat de déterminer séparément ces deux paramètres à partir d'une histoire de traction simple. Nous observons d'une manière générale une décroissance de $\Delta F_{max}^+(t)$ lorsque la déformation ε augmente. Après un régime transitoire, un comportement stationnaire est atteint.



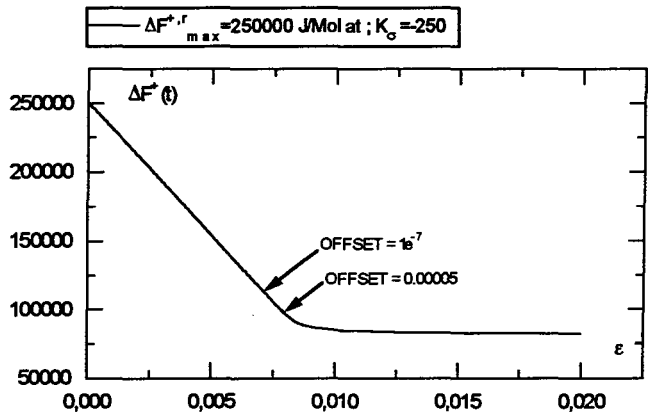
(a)



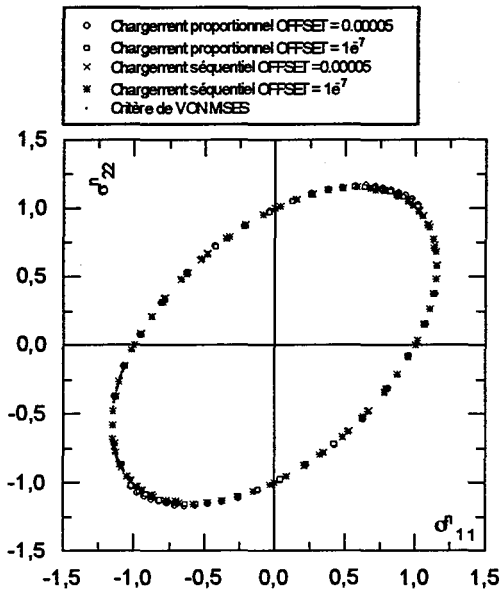
(b)

Figure 14 : Représentation de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation pour différents couples $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma\right)$.

La figure 15-a représente la variation de l'énergie libre d'activation en fonction de la déformation pour le couple $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 250000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -250\ cm^3/Mol\ at\right)$ choisi tel que la surface limite calculée coïncide avec le critère de VON MISES quelque soit l'offset considéré dans nos simulations. La figure 15-b illustre le bon accord entre la surface simulée normée et le critère de VON MISES.



(a)



(b)

Figure 15 : -a : Représentation de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation.

-b : Surfaces limites obtenues.

Nous observons sur la figure 15-a que la valeur de l'offset affecte peu la déformation élastique nécessaire pour voir apparaître la plasticité $\left(5\ e^{-3} \leq \varepsilon \leq\ 1\ e^{-2}\right)$.

Les figures 16-a, 17-a et 18-a reproduisent la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation pour des couples $\left(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma\right)$ qui peuvent conduire à des surfaces de plasticité proches de celles de SAINT VENANT. Sur ces figures, nous avons porté la valeur de la déformation qui correspond à la détection de la limite élastique. Les figures 16-b, 17-b et 18-b montrent l'importance du choix de l'offset sur la forme de la surface de charge obtenue en représentation normée.

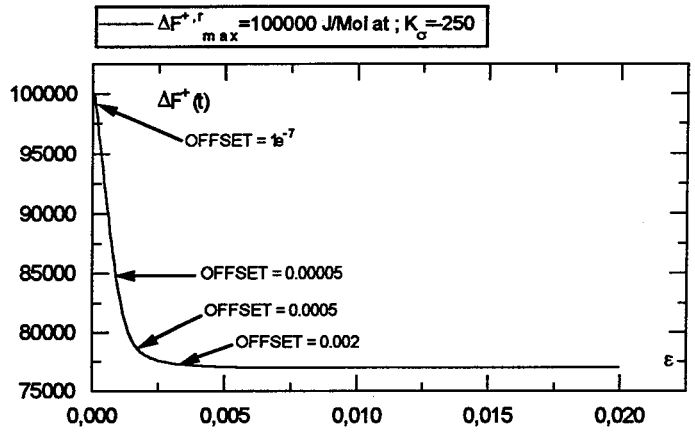


Figure 16-a : Représentation de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

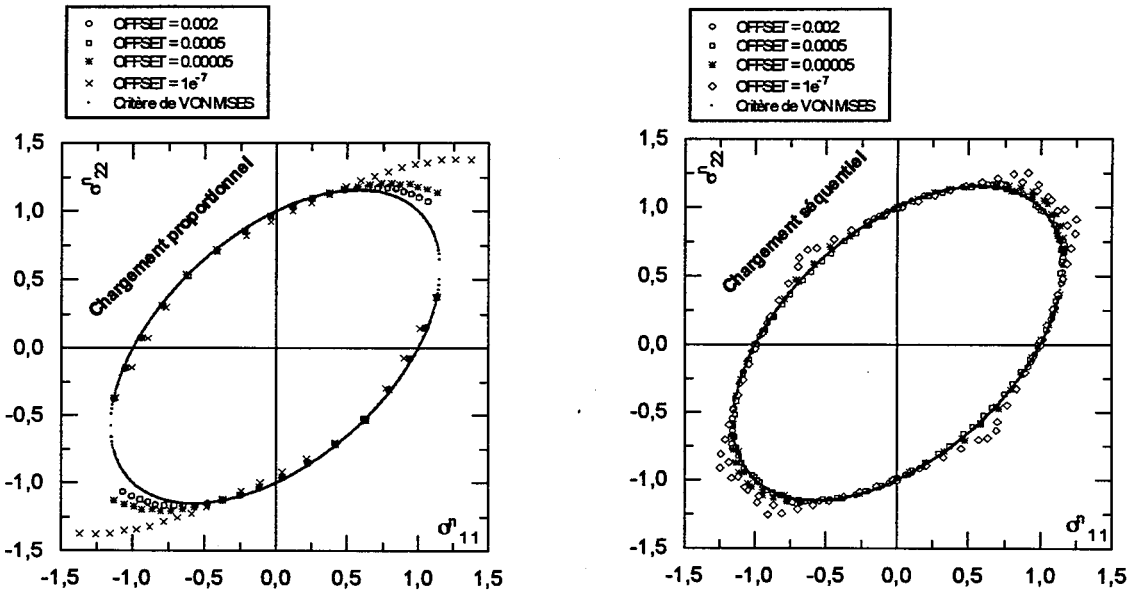


Figure 16-b : Conséquence du choix de l'offset sur la forme de la surface de charge $\left(\Delta F_{max}^{+,r} = 100000 \text{ J / Mol at} ; K_\sigma = -250 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

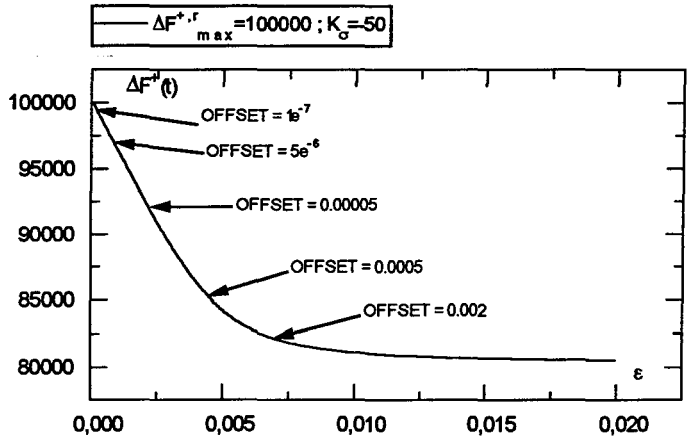


Figure 17-a : Représentation de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at\right)$.

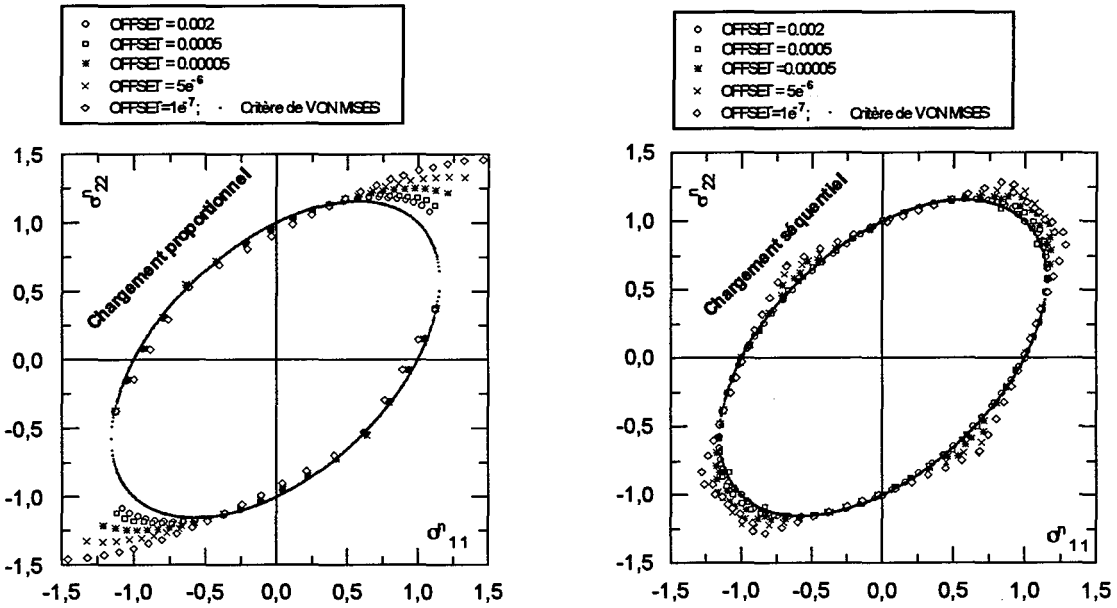


Figure 17-b : Conséquence du choix de l'offset sur la forme de la surface de plasticité$\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 100000\ J/Mol\ at\ ;\ K_\sigma = -50\ cm^3/Mol\ at\right)$.

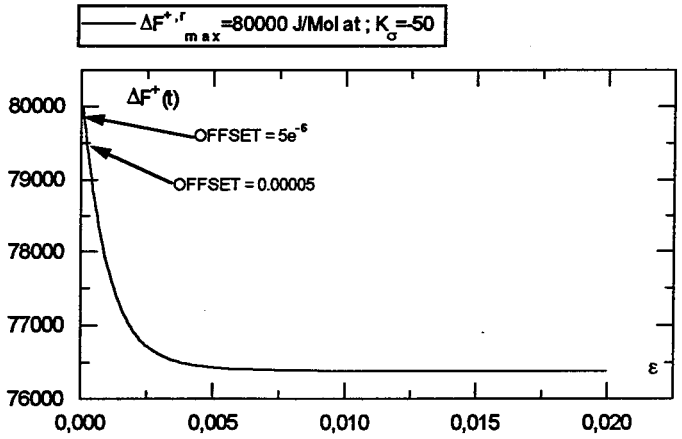


Figure 18-a : Représentation de la variation de l'énergie d'activation en fonction de la déformation $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 80000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

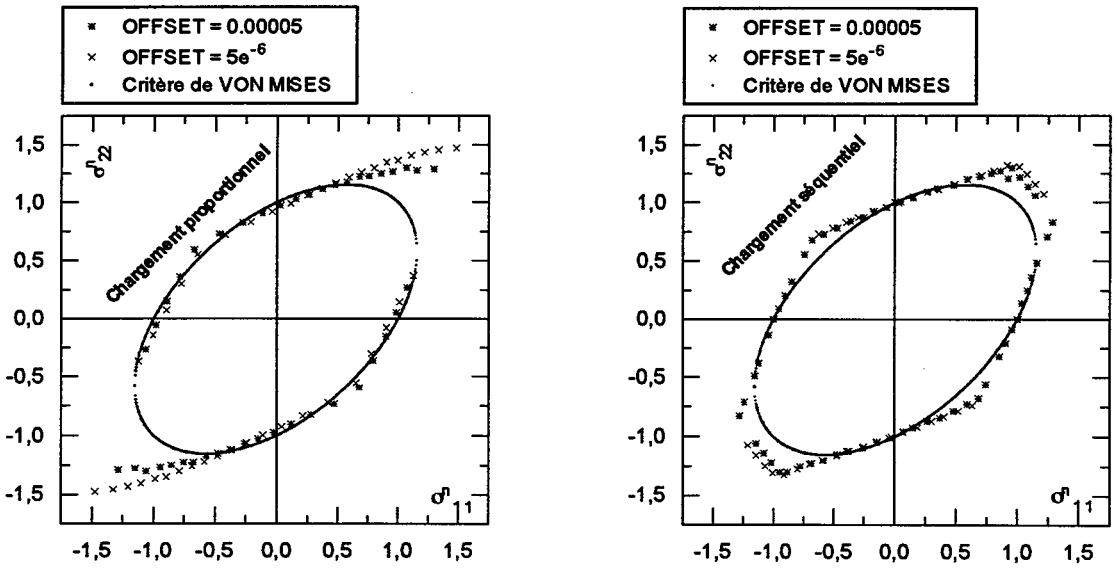


Figure 18-b : Conséquence du choix de l'offset sur la forme de la surface de charge $\left(\Delta F^{+,r}_{max} = 80000 \text{ J / Mol at} \; ; \; K_\sigma = -50 \text{ cm}^3 \text{ / Mol at}\right)$.

Résumons les conclusions que l'on peut tirer de cette étude. Pour de grandes valeurs de l'énergie libre d'activation maximale (200000 J/Mol at), la surface de charge obtenue par le modèle est analogue à celle de VON MISES. Cette valeur élevée impose, au début de la sollicitation, une évolution quasi-linéaire de la contrainte en fonction de la déformation. Ainsi même une diminution importante de l'offset n'entraîne qu'une légère diminution de la limite élastique sans changement de forme notable (figure 15-b).

En effet, dès le début de la déformation du matériau se produisent des changements de configurations liés à chaque processus mais les temps de relaxation correspondants sont encore trop élevés pour qu'un écart par rapport à la réponse instantanée puisse être détecté.

Par contre, une faible valeur de l'énergie libre d'activation implique que les mécanismes de la relaxation se manifestent de manière notable dès le début de la déformation. La réponse du matériau ne présente alors plus de domaine quasi-linéaire ; au contraire, une zone de transition, caractérisée par un établissement progressif de la dissipation, prend place. Dans ces conditions, la valeur prise par l'OFFSET et le trajet de chargement influent considérablement sur la surface limite.

Lorsque le rapport de vitesse de déformation entre les deux directions se rapproche de l'unité (forte bitraction et bicompression), nous observons un écart entre les deux trajets de chargement. Selon notre modélisation, cet écart est la conséquence directe de l'influence du trajet de chargement sur la forme des surfaces de plasticité.

3-5 Influence du coefficient de pression hydrostatique

Dans ce paragraphe, nous montrons l'influence du coefficient de la pression hydrostatique sur la forme de la surface de charge calculée. Les paramètres du modèle utilisés ici sont :

$E^u = 2500$ MPa ; $E^r = 10$ MPa ; $\Delta F_{max}^{+,r} = 100000$ J / Mol at ; $K_\sigma = -120$ cm^3 / Mol at ; $\nu = 0.45$

Les conditions expérimentales sont $T = 297$ K et $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055$ s^{-1} pour un chargement proportionnel.

3-5-1 Influence de x

La figure 19 montre le rôle du paramètre x sur la forme de la surface de charge. Nous remarquons qu'une augmentation de ce coefficient diminue la limite élastique en bitraction et augmente celle observée en bicompression.

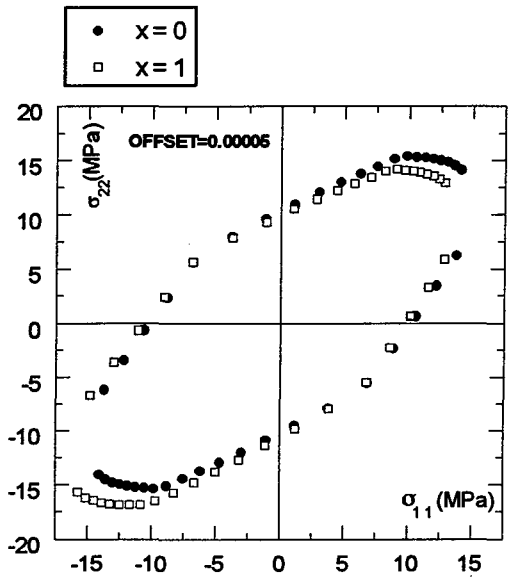


Figure 19 : Influence du coefficient de pression hydrostatique *(chargement proportionnel).*

3-5-2 Influence de l'offset

Le rôle de l'offset est présenté sur la figure 20. Nous constatons que la surface de charge subit un grossissement asymétrique par rapport aux deux bissectrices.

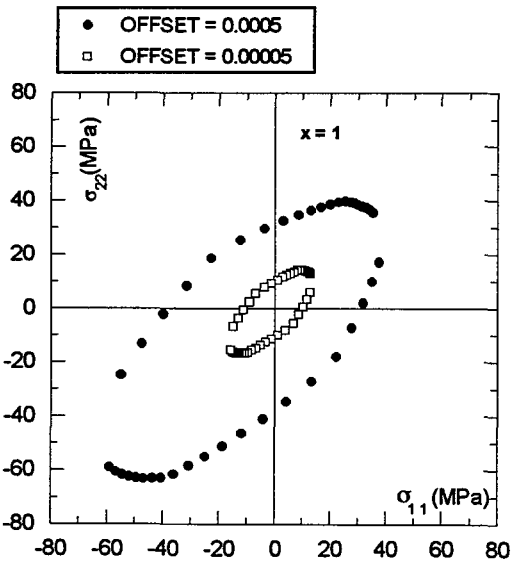


Figure 20 : Influence de l'offset sur la forme de la surface de charge *(chargement proportionnel).*

3-5-3 Comparaison en représentation normée entre surface de charge simulée et quelques résultats expérimentaux propres aux polymères

La figure 21 compare la réponse du modèle à quelques résultats expérimentaux. Les simulations sont conduites avec des valeurs raisonnables des paramètres pour les polymères. Les valeurs adoptés sont les suivantes :

$E^u = 2500$ MPa ; $C_1 = 2$ MPa ; $C_2 = 0.02$ MPa ; $\Delta F^{+,r}_{max} = 106790$ J / Mol at; $K_\sigma = -250$ cm^3 / Mol at ; $\nu = 0.45$

Le coefficient $x = 0.7$ a été ajusté pour obtenir un accord quantitatif.

Les conditions de simulation sont $T = 297$ K , $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055$ s^{-1} et l'OFFSET $= 0.0004$.

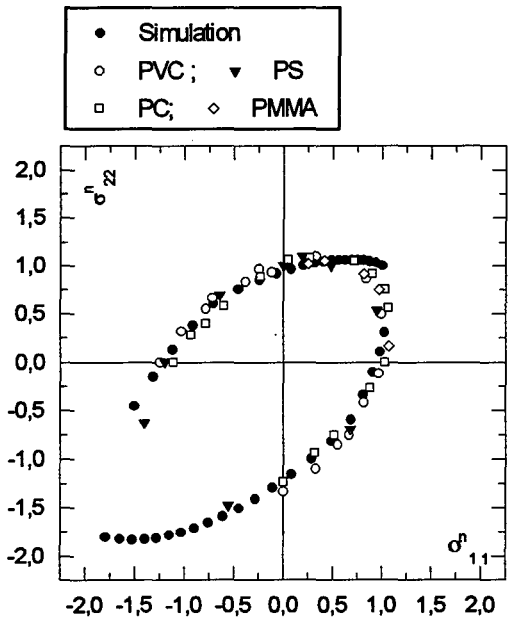


Figure 21 : Comparaison entre résultats expérimentaux [COURTNEY (1990)] et simulation pour les surfaces de plasticité en représentation normée.

On observe que le modèle DNLR permet de reproduire l'expérience. Bien entendu, il ne faut pas considérer les valeurs des paramètres choisis comme le résultat d'une identification réelle.

4 SURFACES DE PLASTICITE ET CHARGEMENTS COMPLEXES

4-1 Comment déterminer l'évolution des surfaces de charge

Dans le paragraphe précédent, nous avons analysé la forme des surfaces limites de plasticité pour un échantillon vierge de toute histoire thermomécanique. A présent, nous allons prendre en compte la mémoire des dissipations imposées lors de préchargements dans le domaine plastique. Pour réaliser ces simulations, il suffit de décrire avec précision l'histoire des déformations imposées par la fonction $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$. La réponse $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ à chaque instant est donnée par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{t=0}^{t} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}\, dt' = \int_{t=0}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^{u} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t')\, dt' - \int_{t=0}^{t} \sum_{j=1}^{nk} \left(\frac{\left(\underline{\underline{\sigma}}(t')\right)_j - p_j^0 \int_0^t \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}^{r} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, dt'}{\tau_j(T,t')} dt' \right) \qquad \text{(IV-22)}$$

En pratique, il suffit de mémoriser à chaque instant t' la distribution des contraintes $\left(\underline{\underline{\sigma}}(t')\right)_j$

dont les poids relatifs $p_j(t') = \dfrac{\left(\sigma_{kl}(t')\right)_j}{\sum_{j=1}^{nk}\left(\sigma_{kl}(t')\right)_j}$ constituent la mémoire du système. A titre d'exemple, nous avons porté sur la figure 22-a le résultat d'une simulation de charge/décharge en traction unidirectionnelle. La figure 22-b indique la distribution des contraintes $(\sigma_{11})_j$ en fonction de $\ln(\tau_j)$ pour les états indiqués sur la figure 22-a correspondant à une décharge partielle et à une décharge totale.

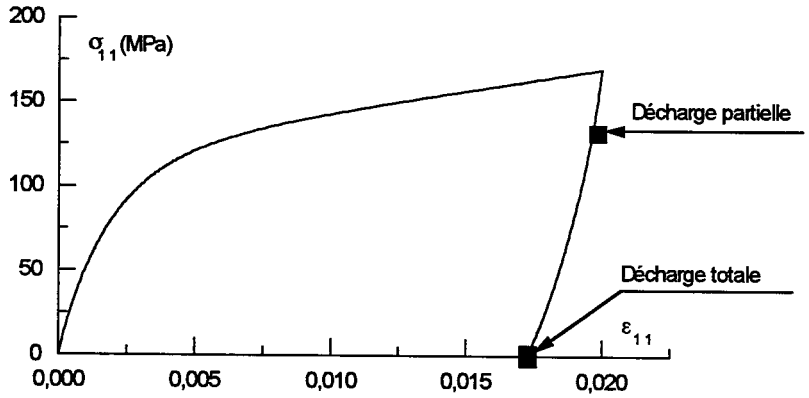


Figure 22-a : Simulation de l'histoire de préchargement en traction.

Nous remarquons que pour la décharge partielle décrite ici, tous les états de contrainte sont de type traction. En revanche, pour la décharge totale qui conduit à une contrainte globale nulle, nous observons à la fois des contraintes internes de traction et de compression.

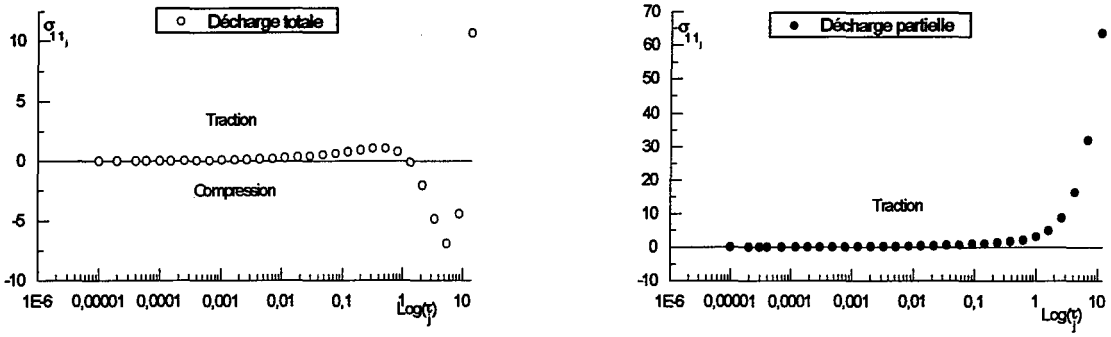


Figure 22-b : Comparaison de l'état du spectre de relaxation lors d'une décharge totale et partielle.

4-2 Etude de l'influence des paramètres sur l'écrouissage cinématique et isotrope

Traditionnellement, l'écrouissage est analysé en terme de deux composantes complémentaires : l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. La figure 23 schématise ces deux composantes.

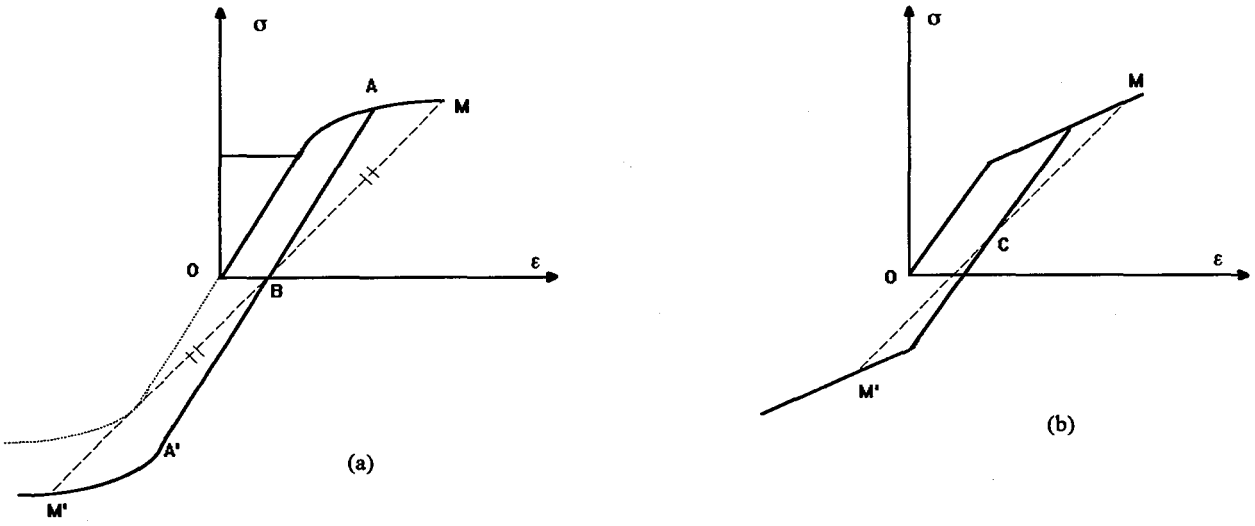


Figure 23 : Schématisation de l'écrouissage cinématique et isotrope.
a : écrouissage isotrope ; b : écrouissage cinématique.

Comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre III pour les essais unidirectionnels, le module relaxé E^r joue un rôle déterminant sur l'écrouissage cinématique. Par ailleurs, la non-

linéarité temporelle induite par le coefficient K_σ joue également un rôle de premier ordre sur cet effet. L'écrouissage isotrope est, quant à lui, essentiellement dû à l'établissement d'un régime transitoire qui précède un éventuel régime stationnaire. Le régime transitoire est principalement piloté par l'énergie libre d'activation du système : il est donc également affecté par K_σ.

Le découplage des réponses élastiques en traction et en torsion permet de mieux analyser les différentes contributions lorsque l'on combine ces sollicitations en domaine plastique. Ainsi, l'étude comparative sera-t-elle menée en traction-torsion et l'on choisira une représentation des surfaces de charge normées pour mieux faire apparaître les distorsions.

4-2-1 Décharge totale

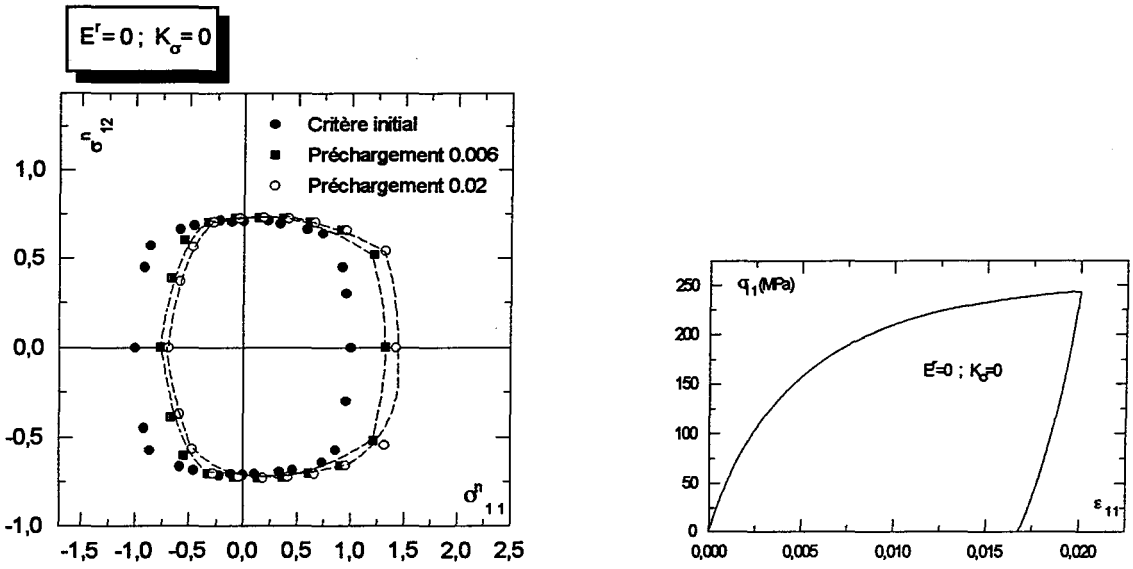
4-2-1-1 Rôle du couple $(E^r ; K_\sigma)$

Dans ce paragraphe, nous essaierons de visualiser le rôle des deux paramètres E^r et K_σ sur ces deux composantes (cinématique et isotrope) habituellement évoquées pour caractériser l'écrouissage. En conséquence, pour les simulations qui suivent nous fixons toujours le même jeu de paramètres.

$E^u = 80000$ MPa
$\nu = 0.30$
$\Delta F^{+,r}_{max} = 80000$ J / Mol at
$T = 297$ K ; OFFSET = 0.0005
$\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055\ s^{-1}$

Le module relaxé E^r est exprimé en MPa, le paramètre de non-linéarité temporelle K_σ est exprimé en cm^3 / Mol at.

La figure 24 montre l'évolution de la surface de charge pour $E^r = 0$ et $K_\sigma = 0$. Dans ce cas particulier, nous observons tout de même un écrouissage cinématique (glissement de la surface de charge) combiné avec un léger écrouissage isotrope (asymétrie du glissement entre traction et compression sur l'axe σ_{11}). Ces écrouissages se saturent lorsque le régime stationnaire est atteint.
Puisque $E^r = 0$ et $K_\sigma = 0$, ces deux types d'écrouissage ne peuvent être engendrés que par la mémoire des processus de relaxation. En effet, comme le montre la figure 25 , un processus unique ne peut engendrer d'écrouissage si $E^r = 0$ et $K_\sigma = 0$. Nous retiendrons donc que l'évolution de la surface de plasticité ne dépend pas uniquement des valeurs prises par K_σ et E^r mais qu'elle intègre l'évolution de la distribution des processus.



(a) (b)

Figure 24 : a : Evolution de la surface de charge pour une histoire de préchargement en traction.

b : Histoire de préchargement $(\varepsilon_{max} = 0.02)$.

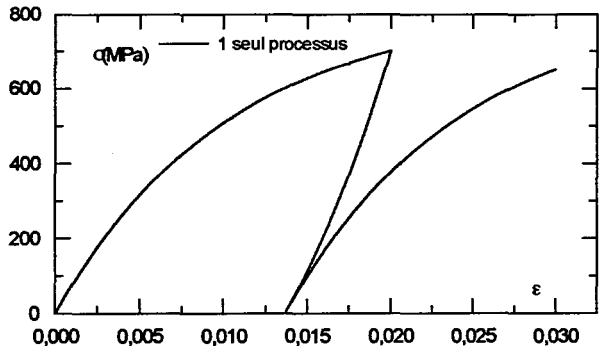
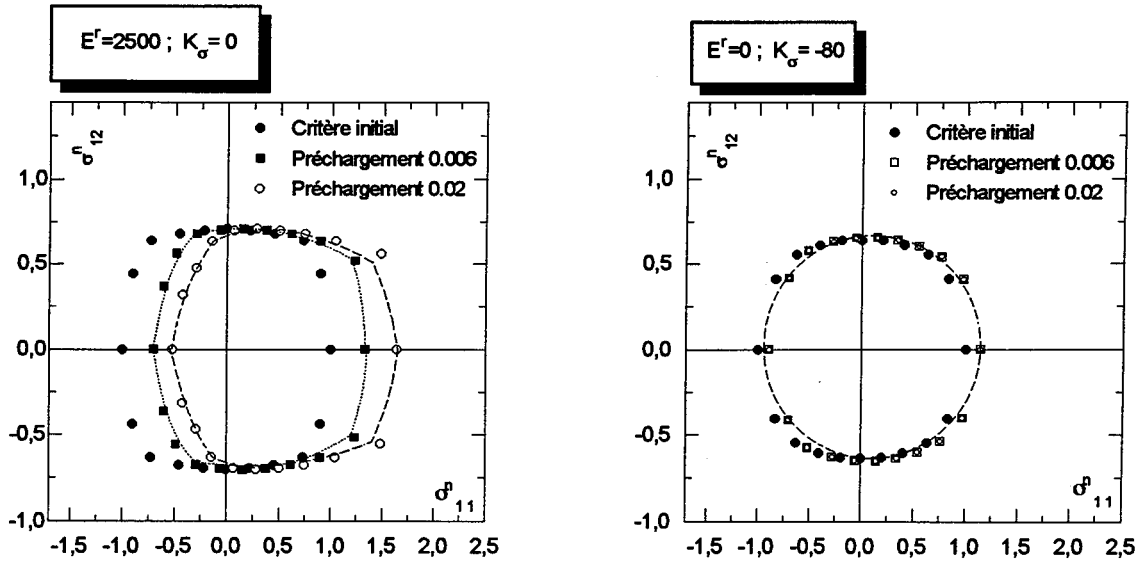


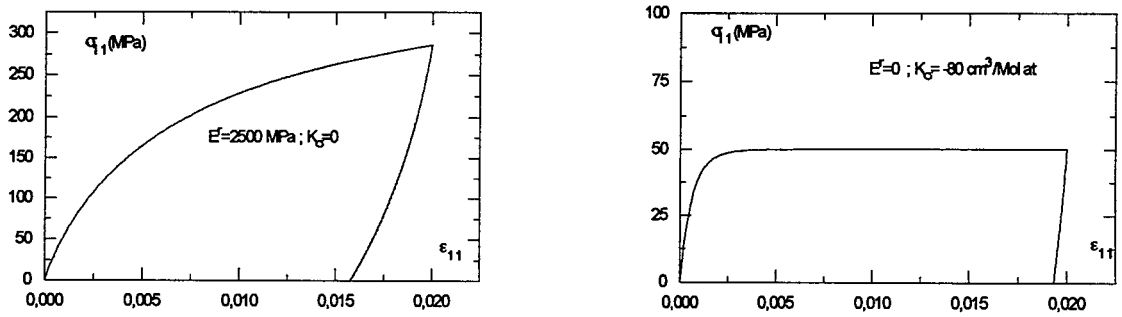
Figure 25 : Evolution de la contrainte en fonction de la déformation pour un seul processus de relaxation.

La figure 26 reproduit l'évolution de la surface de plasticité pour deux cas particuliers de $(E^r ; K_\sigma)$. Dans le premier cas $E^r = 2500$ MPa et $K_\sigma = 0$ (figure 26-a) la surface de charge obtenue présente un écrouissage isotrope et cinématique suivant la direction de préchargement. Dans le deuxième cas $E^r = 0$ et $K_\sigma = -80$ cm^3 / Mol at (figure 26-b), l'écrouissage cinématique reste faible et se sature "rapidement". Les figures 27-a et 27-b montrent les réponses en traction associées aux préchargements pour les couples $(E^r ; K_\sigma)$ précédents.



(a) (b)

Figure 26 : Evolution de la surface de charge pour une histoire de préchargement en traction.



(a) (b)

Figure 27 : Histoire de préchargement en traction $(\varepsilon_{max} = 0.02)$ pour les deux couples de paramètres $(E^r ; K_\sigma)$.

La figure 28 compare les simulations pour quatre couples $(K_\sigma ; E^r)$. Les observations précédentes se trouvent globalement confirmées. Cependant, nous observons que $K_\sigma \neq 0$ permet d'induire un écrouissage en torsion pour un préchargement en traction ; on parle alors d'écrouissage croisé [MARQUIS 1989]. Cette observation est simplement due au fait que le seul couplage possible entre traction et torsion est induit par le glissement coopératif des temps de relaxation sur l'échelle de temps.

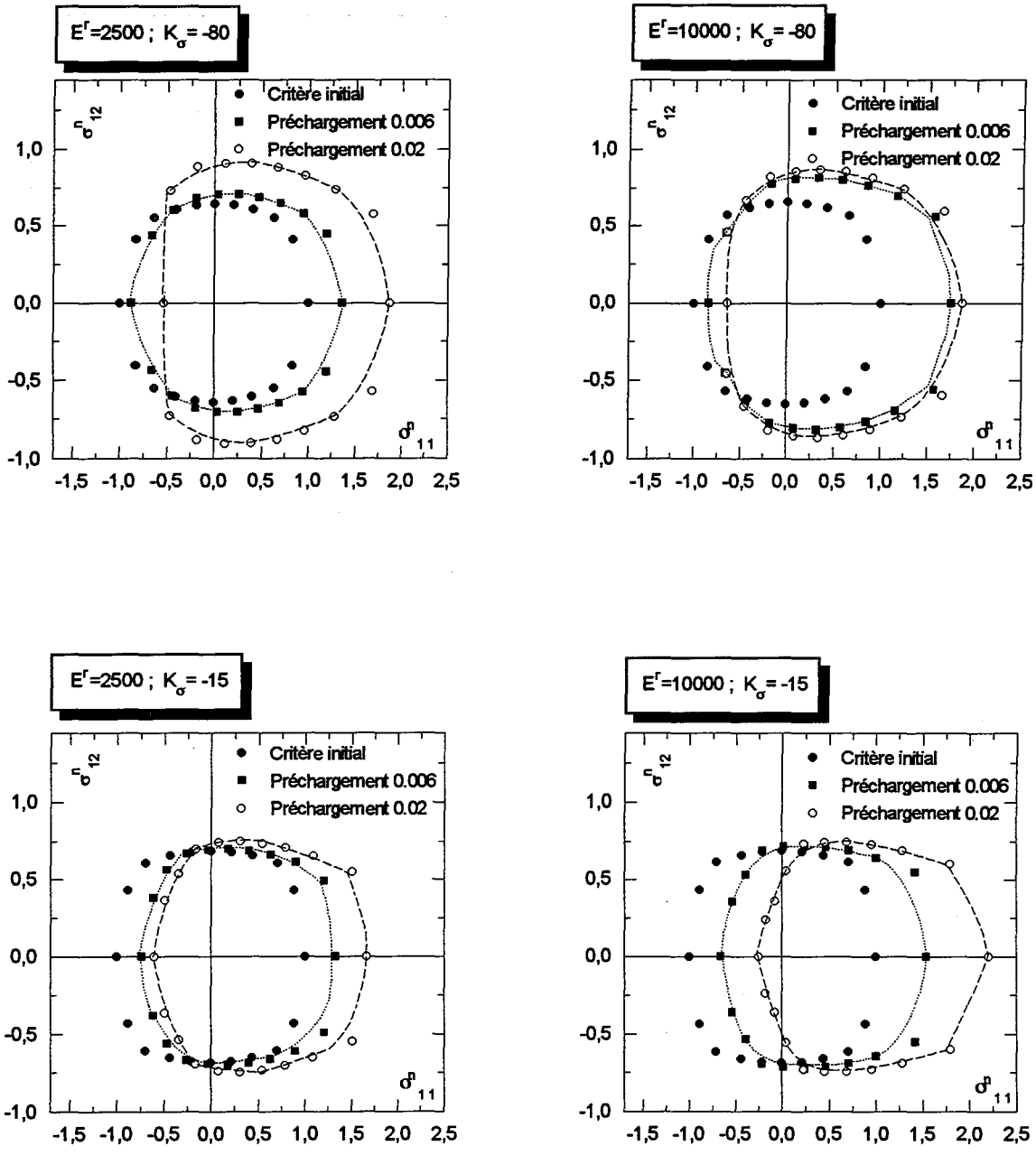


Figure 28 : Influence des paramètres du modèle sur l'évolution de la surface de charge.

La figure 29 montre les courbes de traction qui ont conduit au préchargement pour les différents couples utilisés.

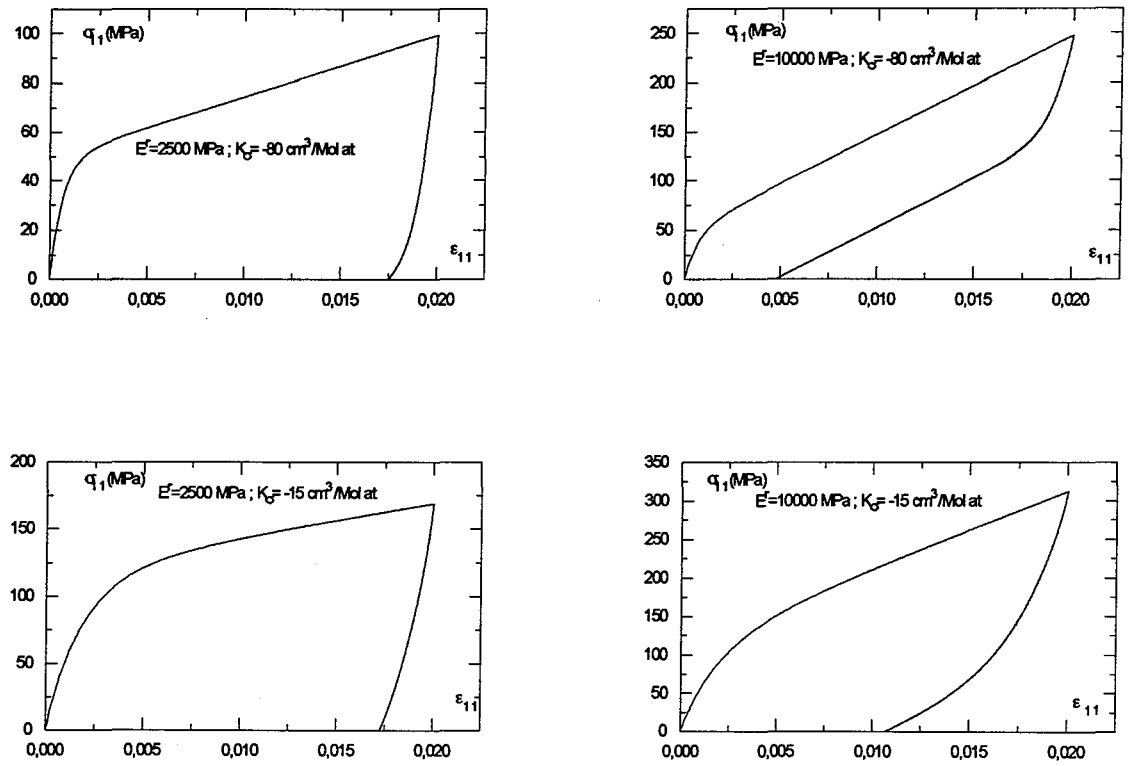


Figure 29 : Histoire de préchargement en traction $(\varepsilon_{max} = 0.02)$ pour les quatre couples de paramètres $(E^r ; K_\sigma)$.

4-2-1-2 Rôle spécifique de K_σ sur la distorsion des surfaces de charge

La figure 30 montre comment la valeur du paramètre K_σ influence la distorsion des surfaces de charge. Les paramètres utilisés dans nos simulations sont :

$E^u = 80000$ MPa

$E^r = 3500$ MPa

$\nu = 0.30$

$\Delta F_{max}^{+,r} = 103000$ J / Mol at

$T = 297$ K ; OFFSET = 0.00005

$\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055\ s^{-1}$

Le paramètre K_σ est exprimé en cm^3 / Mol at.

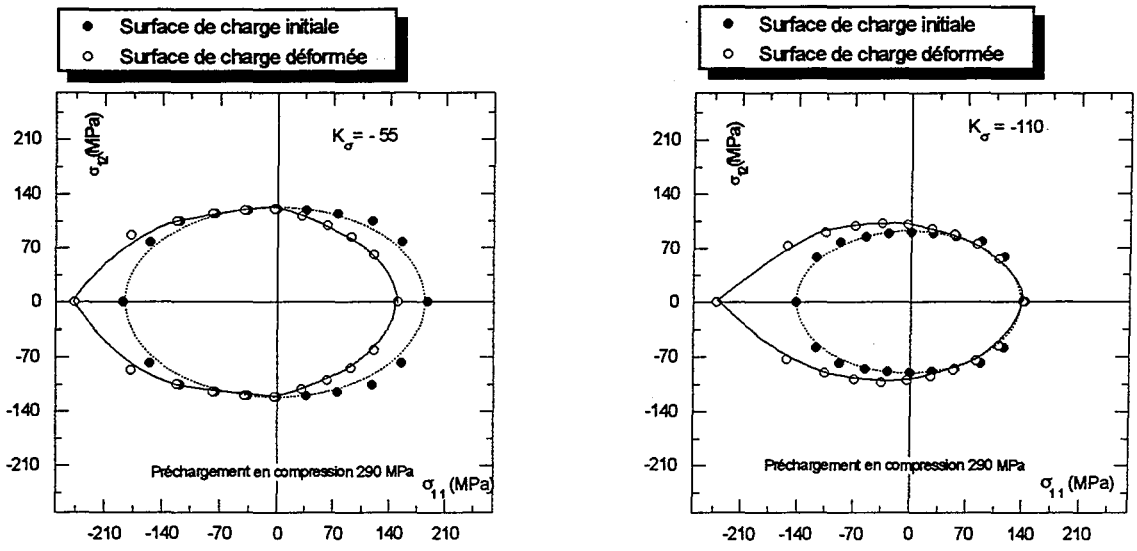
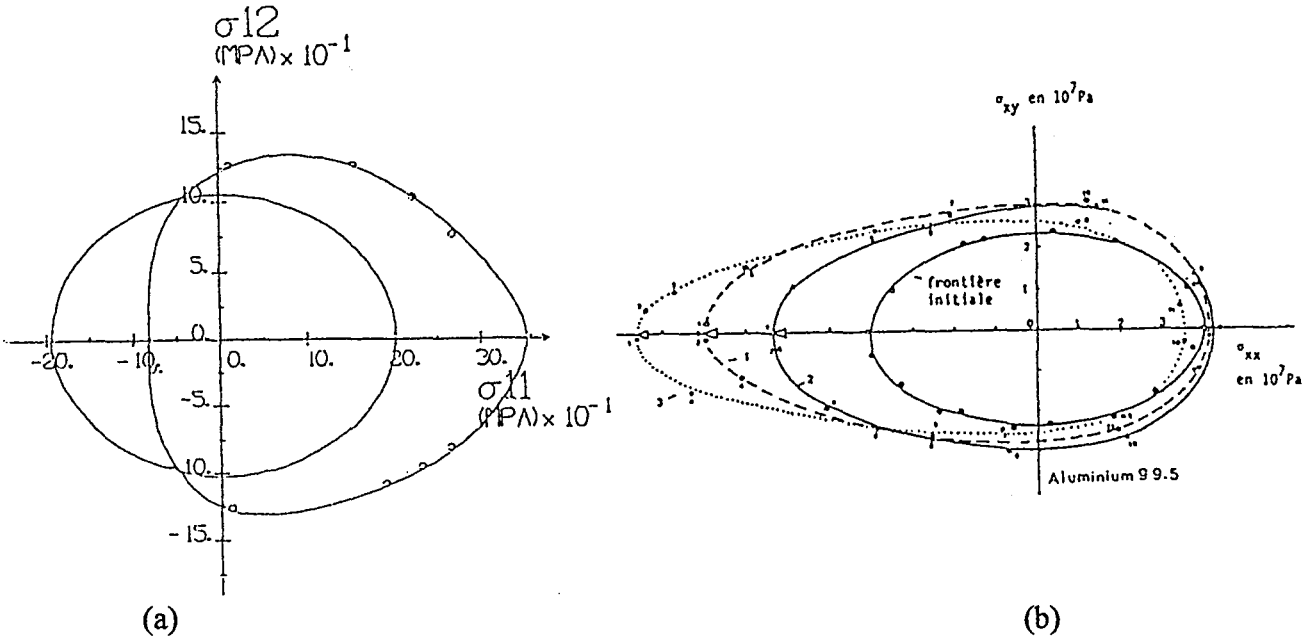


Figure 30 Rôle du paramètre de non-linéarité K_σ sur l'écrouissage cinématique et isotrope.

Les figures 31-a et 31-b montrent respectivement des expériences de ROUSSET (1985) sur l'AU4G et de BUI (1970) sur l'aluminium conformes aux effets prévus par nos simulations : selon les cas, la distorsion peut se produire dans la direction du préchargement sans engendrer de glissement d'ensemble de la surface ou au contraire être accompagnée de ce glissement .



(a) (b)

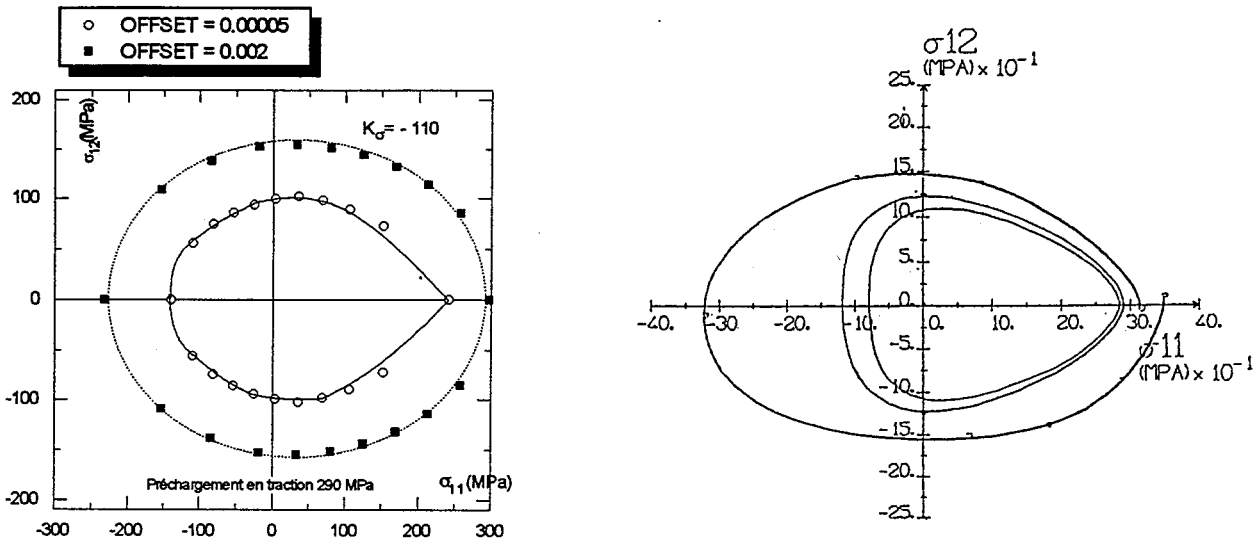
Figure 31-a : Surface de charge obtenue par ROUSSET (1985) après un préchargement en contrainte (320).

31-b : Distorsion des surfaces de charge de l'aluminium 99,5 pour divers préchargements en compression.

4-2-1-3 Rôle de l'offset sur l'observation des distorsions

La figure 32 montre qu'une augmentation de l'offset cache la distorsion. Ici encore la modélisation est cohérente avec l'expérience [voir ROUSSET 1985 par exemple]. Les paramètres utilisés sont ceux du paragraphe 4-2-1-2 :

$E^u = 80000$ MPa, $E^r = 3500$ MPa, $\nu = 0.30$, $\Delta F^{+,r}_{max} = 103000$ J / Mol at , $T = 297$ K, $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055\ s^{-1}$



(a) (b)

Figure 32 : Rôle de l'offset sur la mise en évidence des distorsions des surfaces de charge.
-a : Simulation ; -b : Résultat de ROUSSET (1985) relatif à l'AU4G.

4-2-2 Décharge partielle à l'intérieur du nouveau domaine élastique

Dans ce paragraphe, nous prenons le même jeu de paramètres que dans le paragraphe 4-2-1-1 :

$E^u = 80000$ MPa
$\nu = 0.30$
$\Delta F^{+,r}_{max} = 80000$ J / Mol at
$T = 297$ K ; OFFSET = 0.0005
$\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055\ s^{-1}$

Comme dans le cas de la décharge totale, nous essaierons de visualiser le rôle des deux paramètres E^r et K_σ sur les deux composantes d'écrouissage . Le module relaxé E^r est exprimé en MPa, le paramètre de non-linéarité temporelle K_σ est exprimé en cm^3 / Mol at.

La figure 33 présente le résultat des simulations pour $E^r = 0$ et $K_\sigma = 0$. Nous observons une saturation de l'écrouissage lorsque l'on quitte le régime transitoire.

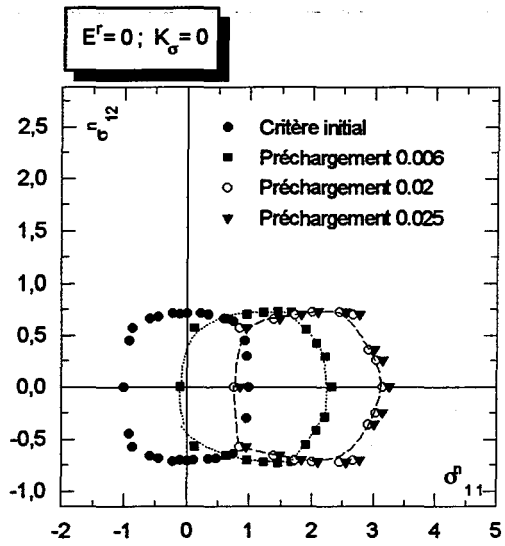


Figure 33 : Evolution de la surface de charge pour une histoire de préchargement en traction.

La figure 34 montre l'évolution de la surface de charge pour deux couples $(E^r ; K_\sigma)$. Ici encore nous notons un léger gonflement des surfaces (écrouissage isotrope) qui accompagne leur glissement d'ensemble.

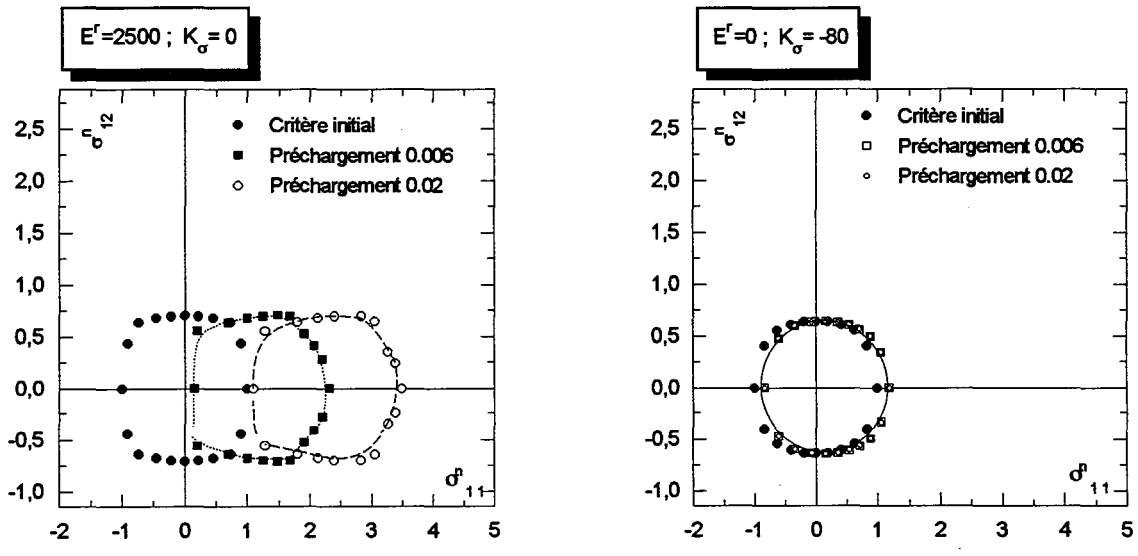


Figure 34 : Evolution de la surface de charge pour une histoire de préchargement en traction.

La figure 35 présente l'évolution de la surface de plasticité pour quatre couples $(E^r ; K_\sigma)$.

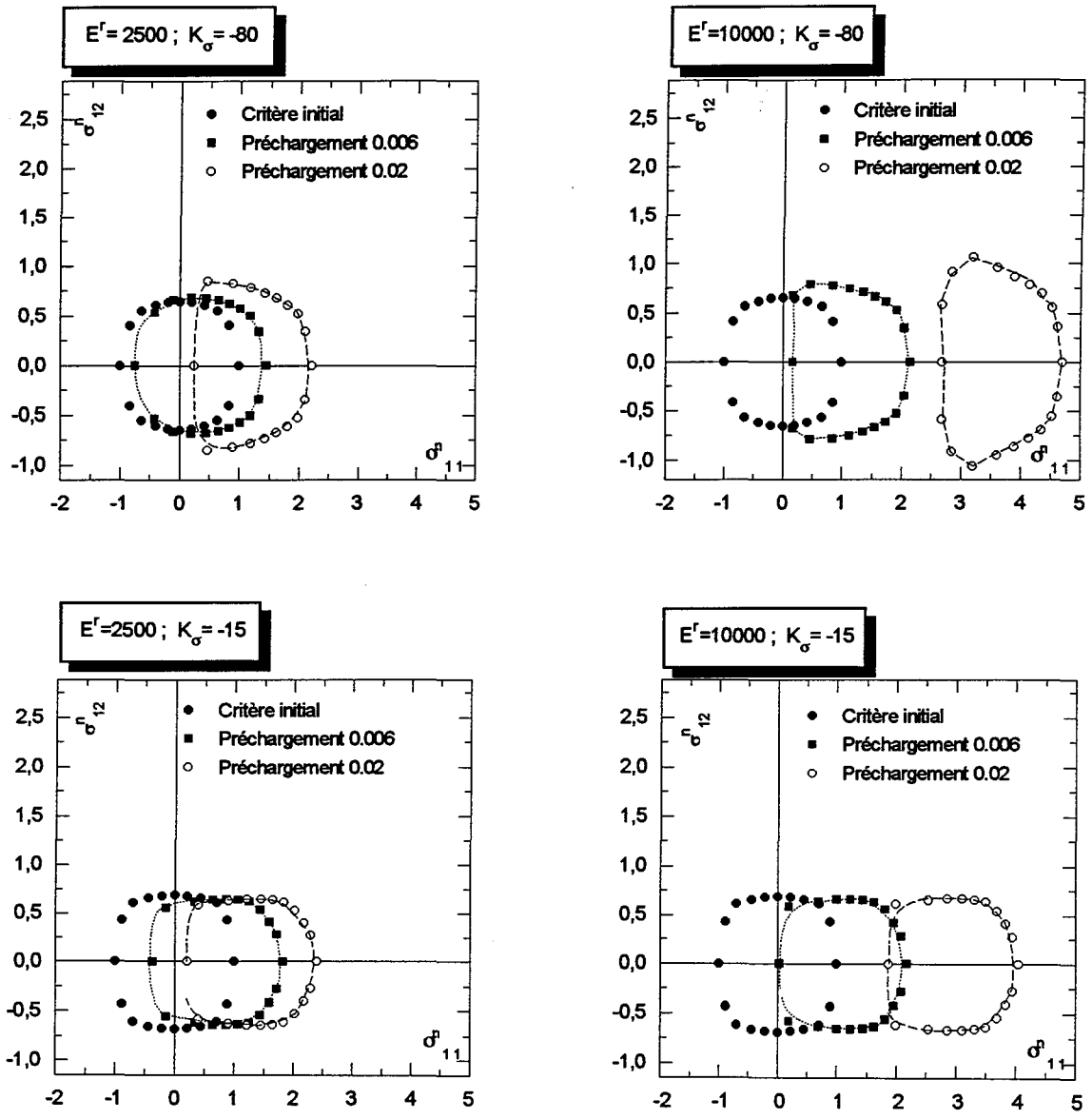


Figure 35 : Influence des paramètres du modèle sur l'évolution de la surface de charge.

Nous observons ici encore le rôle spécifique de K_σ sur le couplage entre traction et torsion.

4-2-3 Conclusion

Le rôle essentiel joué par le couple $(E^r ; K_\sigma)$ sur les diverses manifestations de l'écrouissage est bien mis en évidence. En particulier, E^r est le paramètre indispensable qui permet d'engendrer de fortes composantes cinématique, K_σ complète cet effet et engendre par

ailleurs des couplages entre traction et torsion (effets croisés attribués aux interactions entre systèmes de glissement au niveau des grains [MARQUIS 1989]). En élasticité linéaire, E^r engendre un écrouissage cinématique linéaire. Cependant, l'effet porté par K_σ détruit cette linéarité en affectant le domaine transitoire.

4-3 Modélisation de l'évolution de la surface de charge pour quelques histoires de chargement complexes

Dans ce paragraphe, nous analysons l'aptitude du modèle à décrire qualitativement l'évolution des surfaces de charge pour quelques histoires de chargements complexes. Les paramètres utilisés pour les simulations sont :

$E^u = 80000$ MPa ; $E^r = 2500$ MPa ; $\nu = 0.30$; $\Delta F_{max}^{+,r} = 80000$ J / Mol at ; $K_\sigma = -50$ cm^3 / Mol at l'offset choisi est de 0.0005 pour une température de 297 K et pour une vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055$ s^{-1}.

4-3-1 Préchargement en torsion

La figure 36-a montre l'évolution du domaine d'élasticité après une histoire de préchargement en torsion pour des décharges totales et partielles. Les surfaces de plasticité sont conformes à de nombreux résultats expérimentaux. Nous remarquons l'apparition d'un aplatissement dans la direction opposée au préchargement (torsion).

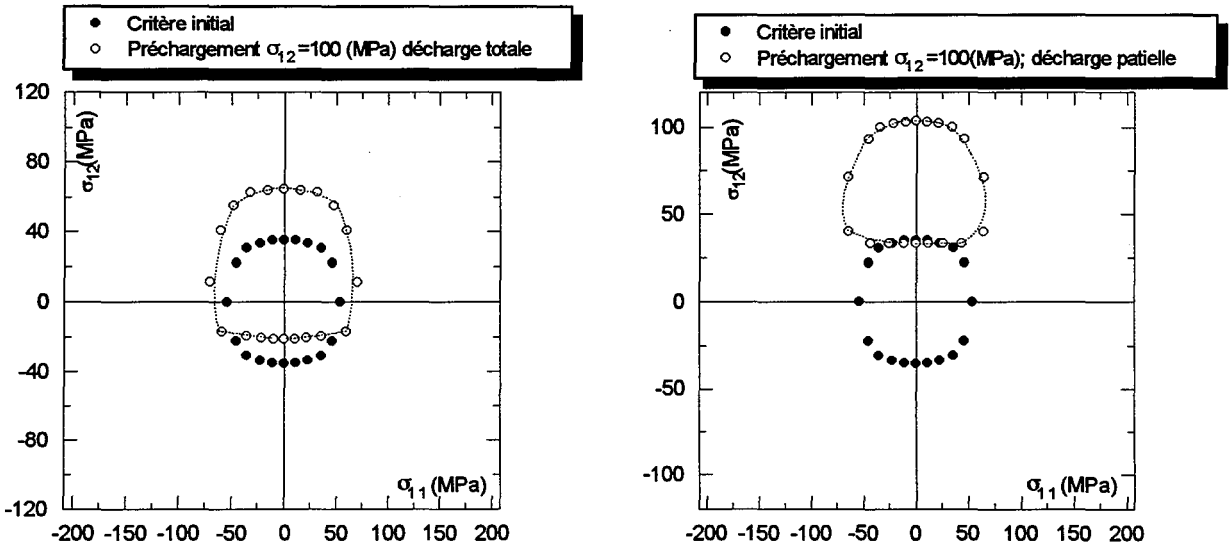


Figure 36-a : Evolution de la surface de plasticité pour une histoire de préchargement en torsion.

La figure 36-b représente quelques données expérimentales déterminés par HELLING et al (1986) :

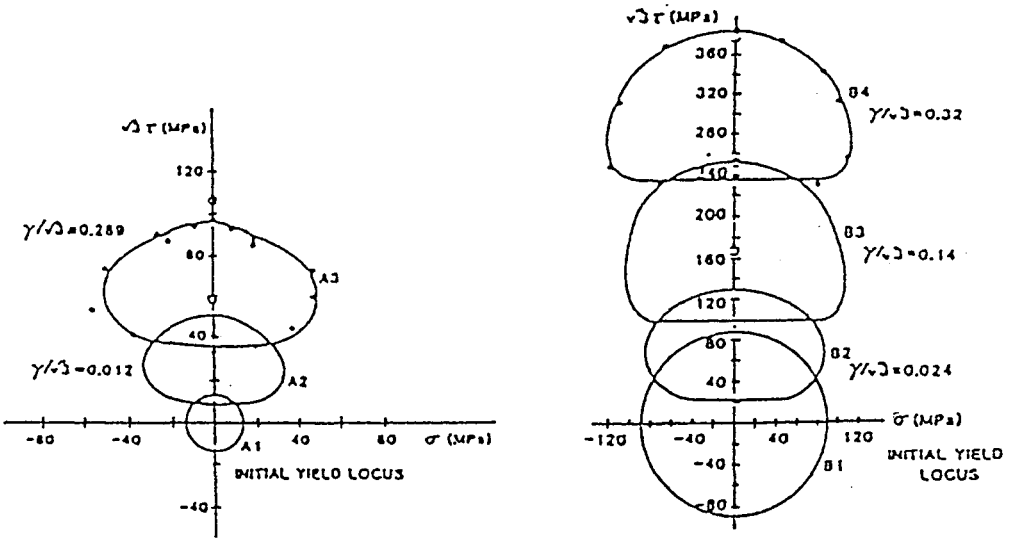


Figure 36-b : Surface de charge du laiton déterminées par HELLING et al (1986), avec un offset de 2 e^{-6}.

4-3-2 Préchargement en traction-torsion

La figure 37-a montre l'évolution de la surface de plasticité après un préchargement proportionnel en traction-torsion $\left(\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{11}\right)$. Nous remarquons un changement de forme et une rotation de la surface de charge en fonction du taux de préchargement. Ceci est en accord avec de nombreuses observations expérimentales.

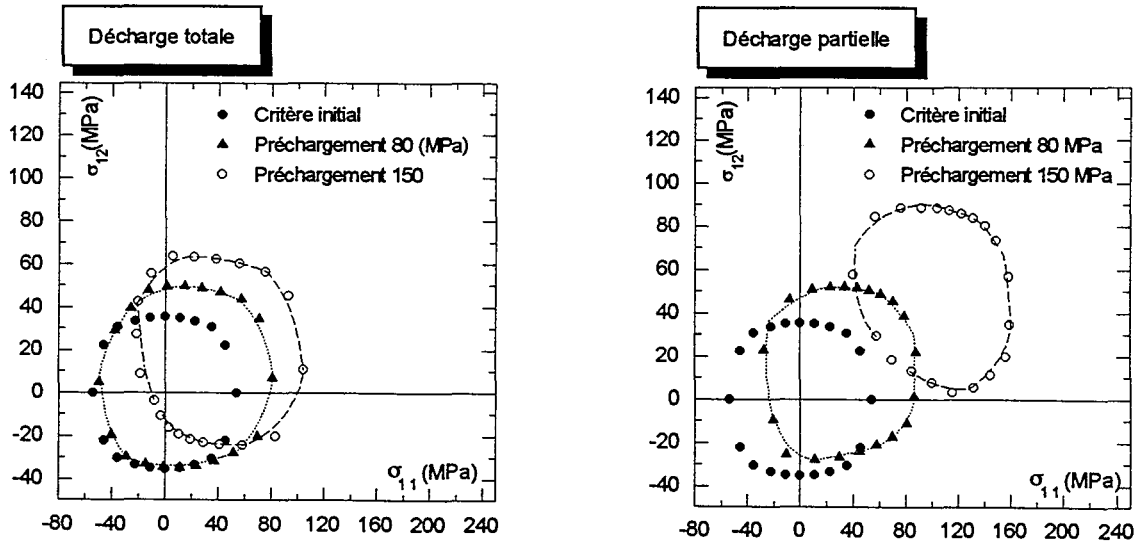
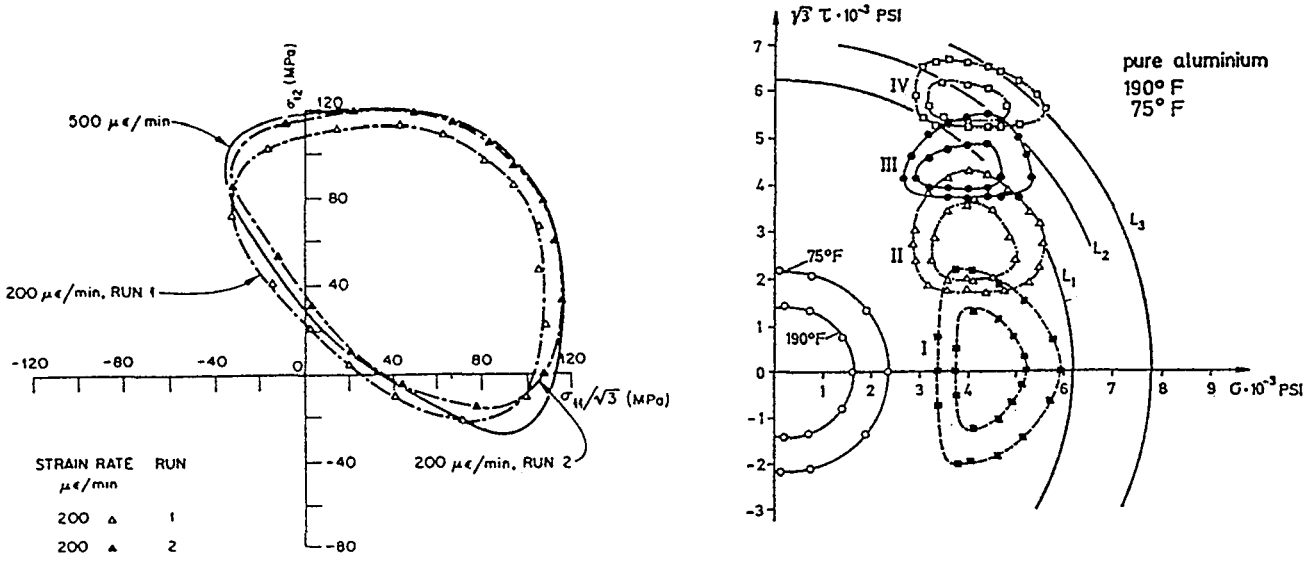


Figure 37-a : Evolution de la surface de charge pour une histoire de traction-torsion.

Les figures 37-b et 37-c correspondent respectivement aux données expérimentales de ELLIS et al (1983) sur un acier du type 316 présentant un caractère visqueux et aux données de PHILIPS (1972) sur l'aluminium pur.



(b) (c)

Figure 37 -b : Surfaces de charge déterminées par ELLIS et al (1983) après un chargement radial.
-c : Surfaces de charge déterminées par PHILIPS (1972) pour des chemins de préchargements complexes.

4-3-3 Effet de la déformation plastique cumulée

Nous examinons à présent le rôle du cumul des chargements sur une seule éprouvette pour déterminer la surface de plasticité. La figure 38 schématise l'histoire de ce chargement cumulé (proportionnel) [LAUERT et GUPTA].

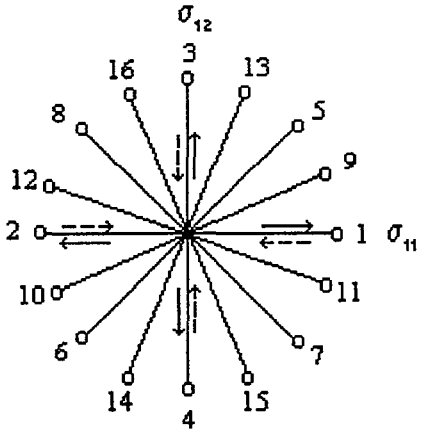


Figure 38 : Schématisation du trajet de chargement utilisé par LAUERT et GUPTA.

Les simulations présentées ici utilisent les paramètres suivants :
$E^u = 80000$ MPa ; $E^r = 2500$ MPa ; $\nu = 0.30$; $\Delta F^{+,r}_{max} = 80000$ J / Mol at, le paramètre K_σ est exprimé en cm^3 / Mol at.
L'offset choisi est de 0.0005 pour une température de 297 K.

La figure 39 montre la déformation de la surface de charge en l'absence de cumul (sur le plan expérimental, cela signifie qu'une éprouvette donne un seul point de la surface de charge).

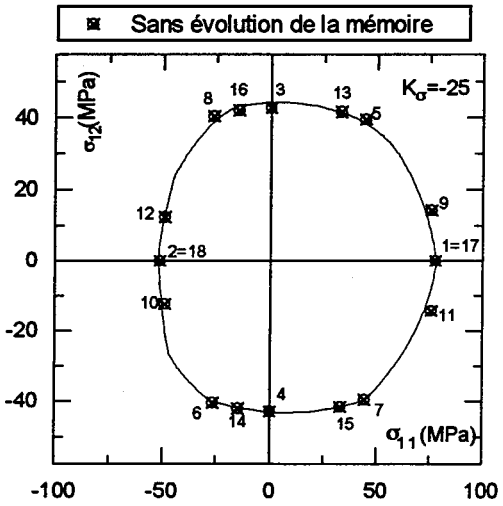


Figure 39 : Surface de charge obtenue sans tenir compte de l'évolution de la mémoire.

Sur la figure 40-a sont portées des séquences de charge-décharge en traction pour les paramètres retenus avec $K_\sigma = -25$ cm^3 / Mol at et $K_\sigma = -50$ cm^3 / Mol at. De telles courbes de traction ne correspondent probablement pas à des observations expérimentales habituelles, toutefois nous vérifions la sensibilité au cumul de l'histoire de chargement avec ces paramètres.

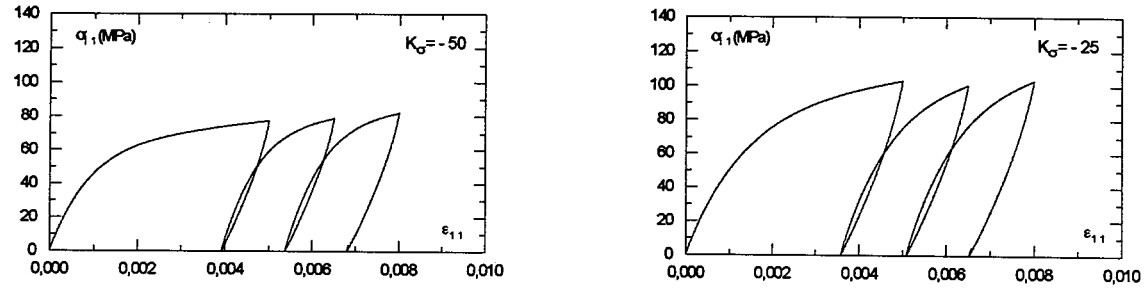


Figure 40-a : Courbe contrainte déformation pour les deux cas étudiés.

Le cumul de chargement est inévitable si l'on veut explorer les surfaces de plasticité avec une seule éprouvette. Sur la figure 40-b sont représentées les surfaces obtenues pour $K_\sigma = -25$ et $K_\sigma = -50$ avec cumul de chargement selon l'histoire décrite sur la figure 38.

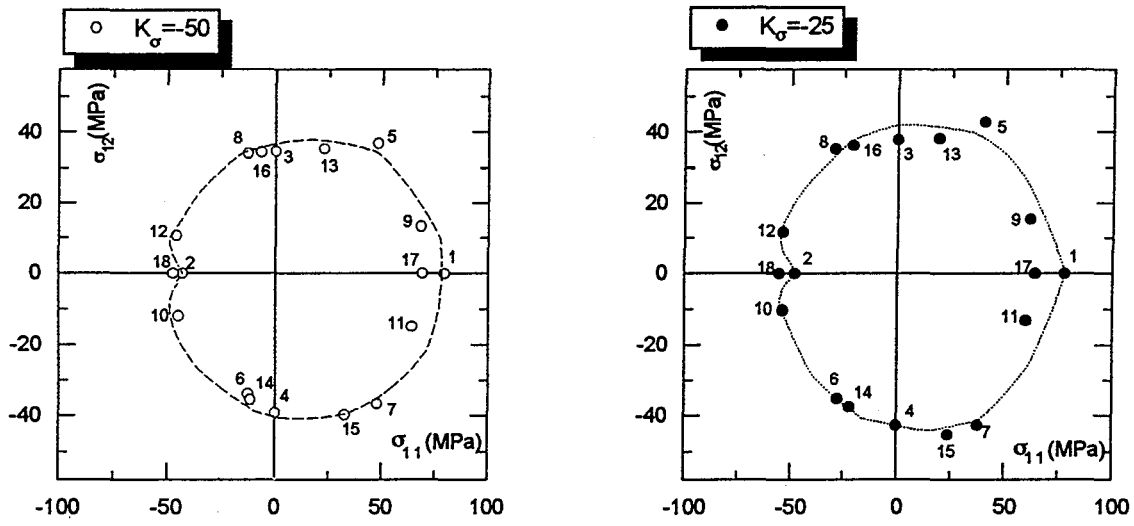
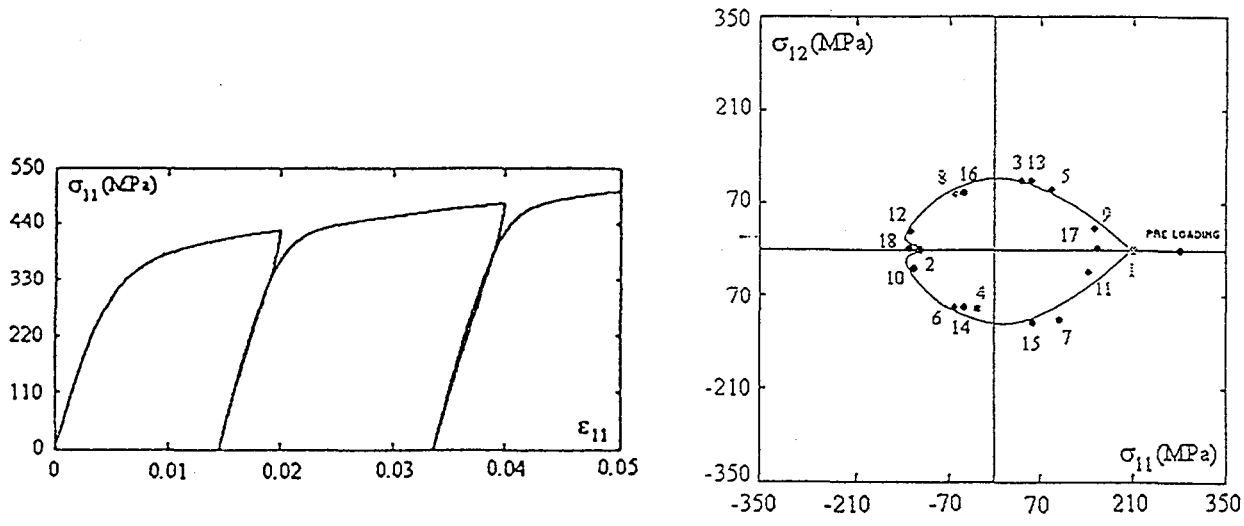


Figure 40-b : Influence de la déformation plastique cumulée sur la surface de charge après une prédéformation en traction.

Des simulations menées avec un autre jeu de paramètres conduisent à des comportements en traction plus raisonnables sont présentées sur les figures 41-a et 41-b. Les conclusions demeurent inchangées $E^u = 80000$ MPa ; $E^r = 2500$ MPa ; $\nu = 0.30$; $\Delta F^{+,r}_{max} = 90000$ J / Mol at ; $K_\sigma = -27$ cm^3 / Mol at

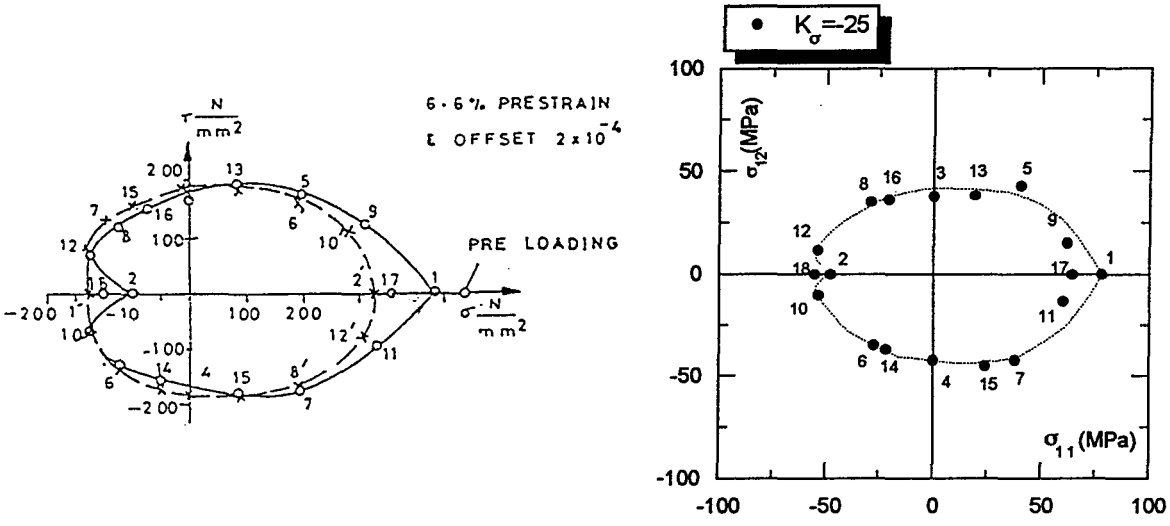


(a) (b)

Figure 41 -a : Courbe contrainte déformation.

-b : Influence de la déformation plastique cumulée sur la surface de charge après une prédéformation en traction.

La figure 42-a correspond aux données expérimentales relevées par LAUERT et GUPTA. Il faut souligner ici que la représentation des auteurs est faite dans un repère orthonormé. Nous comparons donc leur données avec nos simulations reportées dans le même repère sur la figure 42-b.



(a) (b)

Figure 42 -a : Surface de charge déterminées par LAUERT et GUPTA.
-b : Surface de charge calculée.

Rappelons le travail de LEHMANN (1985) qui tentait de modéliser ces distorsions des surfaces de charge avec un modèle de type multicouches. La figure 43 compare les résultats du modèle avec les données expérimentales. On peut ainsi remarquer l'insuffisance de cette description pour expliquer et prévoir l'apparente concavité des surfaces de charge.

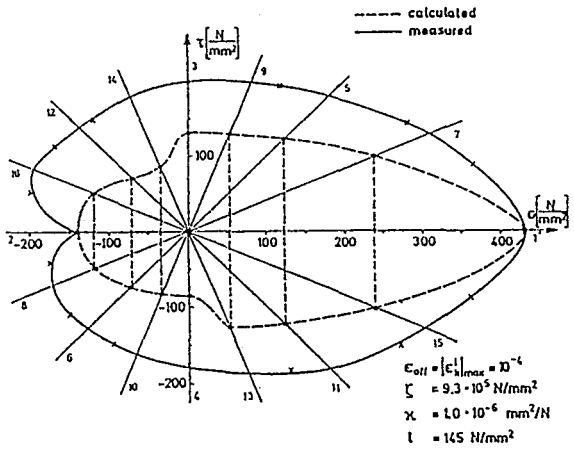


Figure 43 : Comparaison entre les prévisions du modèle de LEHMANN (1985) et les observations expérimentales de LAUERT et GUPTA.

4-4 Etude de la surface de charge associée à chaque processus

La possibilité de décrire qualitativement les diverses évolutions des surfaces de charge, comme l'aplatissement dans le sens contraire au préchargement et la présence d'un nez dans la direction même du préchargement, rend très intéressante l'étude de la surface de charge associée à chaque processus. L'objet de ce paragraphe est d'observer ces surfaces de charge en fonction de l'histoire de préchargement. Nous utilisons les paramètres suivants :

$E^u = 80000$ MPa ; $E^r = 2500$ MPa

$\nu = 0.30$

$\Delta F^{+,r}_{max} = 100000$ J / Mol at ; $K_\sigma = -80$ cm^3 / Mol at

Le spectre initial est construit avec 30 constantes de temps équi-réparties sur 6 décades de l'échelle Log(t). Le temps le plus long correspond à j=30. Les conditions expérimentales sont caractérisées par T = 297 K, σ^{seuil} = 4 MPa et $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055$ s^{-1}.

4-4-1 Surface de charge initiale

Nous rappelons que le paramètre de contrôle est la vitesse de déformation et que l'observable est la contrainte. Cette contrainte macroscopique est la somme de toutes les contributions associées à chacun des processus de relaxation $\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{j=1}^{nk} \left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_j$. Le modèle permet de passer directement de la déformation globale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à la contrainte locale $\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)_j$ sans connaître a priori la déformation locale $\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_j$. Il ne nous est donc pas possible d'utiliser un critère d'offset en déformation. Pour ces raisons, nous travaillons avec un offset défini en contrainte. Soulignons que E. TOUSSAINT dans le groupe aborde ce problème de détermination de $\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_j$. Elle adopte le point de vue de l'homogénéisation dans l'espace des processus pour essayer de répondre à cette question.

La surface de charge associée à chaque processus est donc déterminée par la méthode d'OFFSET en contrainte. Le critère s'écrit par exemple suivant la direction 11 :

$$\left|\left(\sigma_{11}\right)_j - p_j^0\left[\left(\lambda+2\mu\right)^u \varepsilon_{11} + \lambda^u\left(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\right]\right| \geq p_j^0\ \sigma^{seuil}$$

σ^{seuil} exprime l'écart macroscopique à la loi de HOOKE.

La figure 44 reproduit la surface de charge macroscopique obtenue pour un chargement proportionnel.

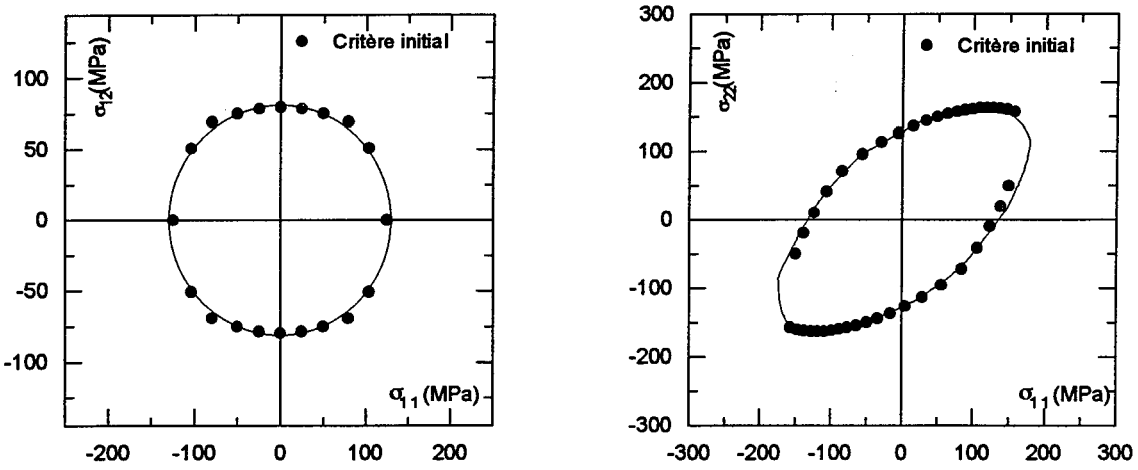


Figure 44 : Représentation de la surface de charge initiale dans les deux plans $(\sigma_{11},\sigma_{12})$ et $(\sigma_{11},\sigma_{22})$.

Sur les figures 45 où sont reportées les valeurs de $(\sigma_{11})_j = f(\varepsilon_{11})$ pour j = 30, 20, 16, 10, 5. On peut voir les limites élastiques associées à ces quelques processus et observer qu'elles couvrent un vaste domaine de contrainte [environ 70 MPa pour les processus relativement lents (j=30) à 0.1 MPa pour j=5 (processus rapide)].

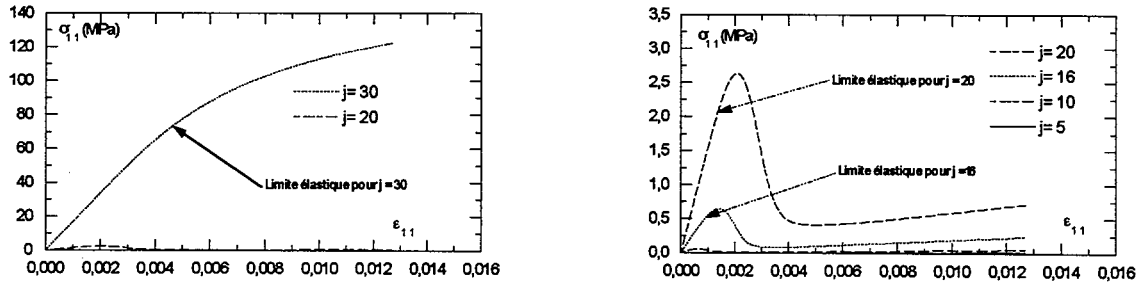


Figure 45 : Evolution de la contrainte associée aux processus (30, 20, 16, 10 et 5) en fonction de la déformation.

Sur les figures 46, nous présentons les surfaces de charge relatives à quelques processus de relaxation en traction-torsion et en traction-traction (j=3, 5, 8, 10, 14, 16, 18, 20). Notons que la limite élastique pour les processus les plus lents (j>20) n'est pas atteinte ce qui rend impossible la représentation de surfaces limites correspondantes pour le seuil "macroscopique" σ^{seuil} = 4 MPa.

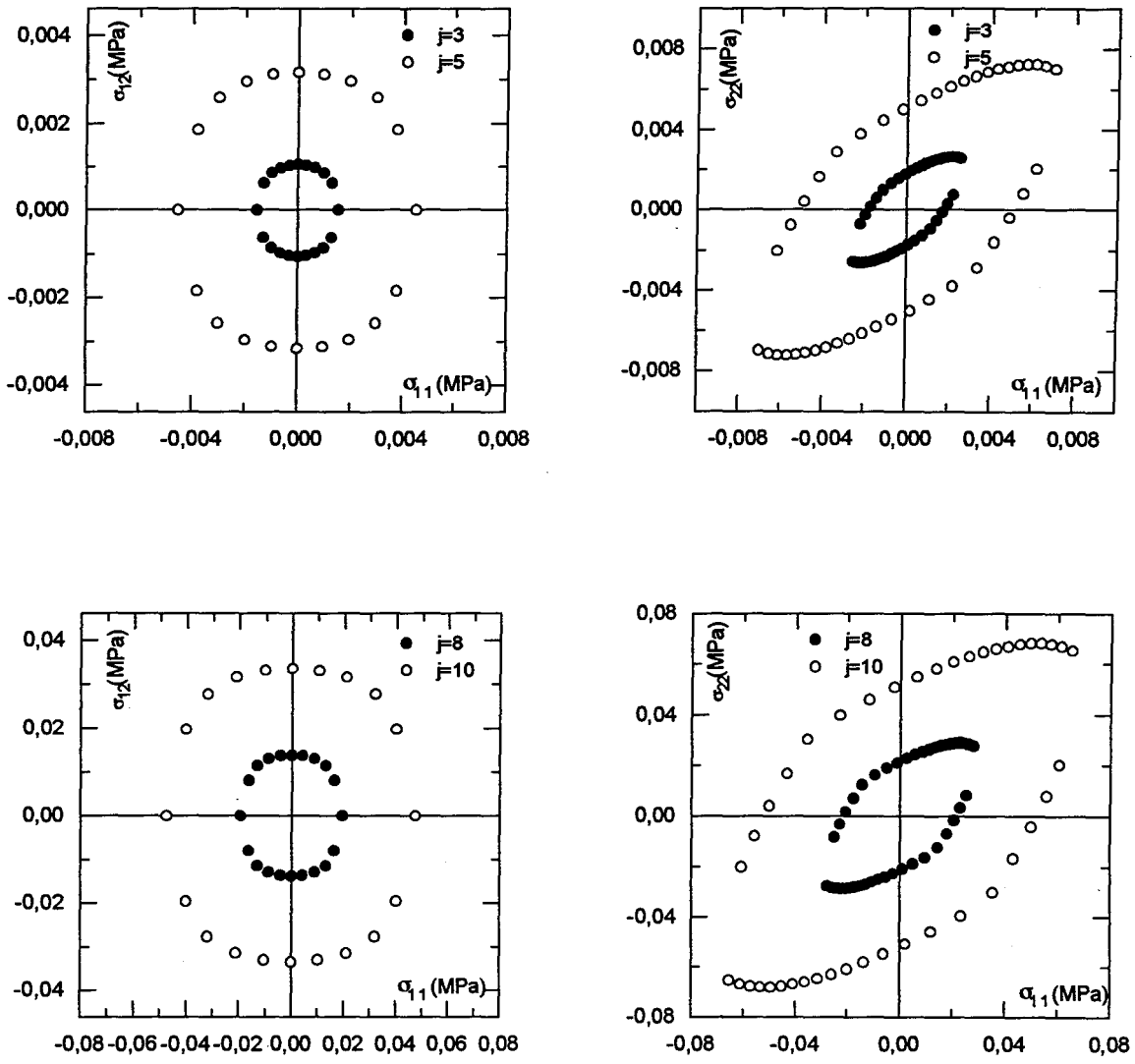


Figure 46-a : Représentation de la surface de charge initiale associée à quelques processus (j=3, 5, 8, 10) pour un chargement proportionnel dans les deux plans $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ et $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$.

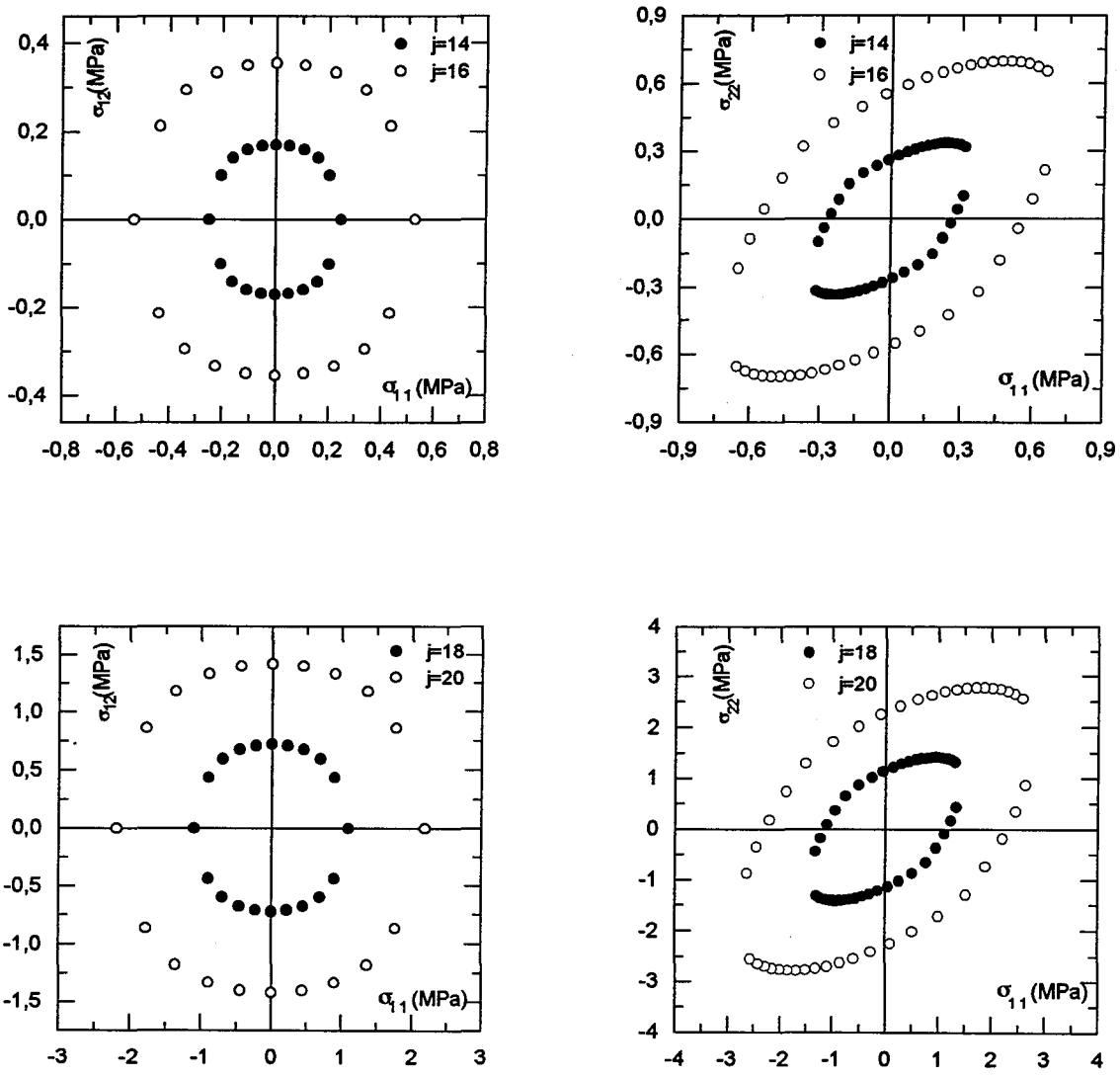


Figure 46-b: Représentation de la surface de charge initiale associée à quelques processus (j=14, 16, 18, 20) pour un chargement proportionnel dans les deux plans $(\sigma_{11},\sigma_{12})$ et $(\sigma_{11},\sigma_{22})$.

Comme on devait s'y attendre, la phénoménologie reste la même pour tous les processus et seule l'échelle des contraintes est affectée. Sur la figure 47, nous comparons en représentation normée la courbe limite macroscopique et celle associée aux processus j=3 et j=20.

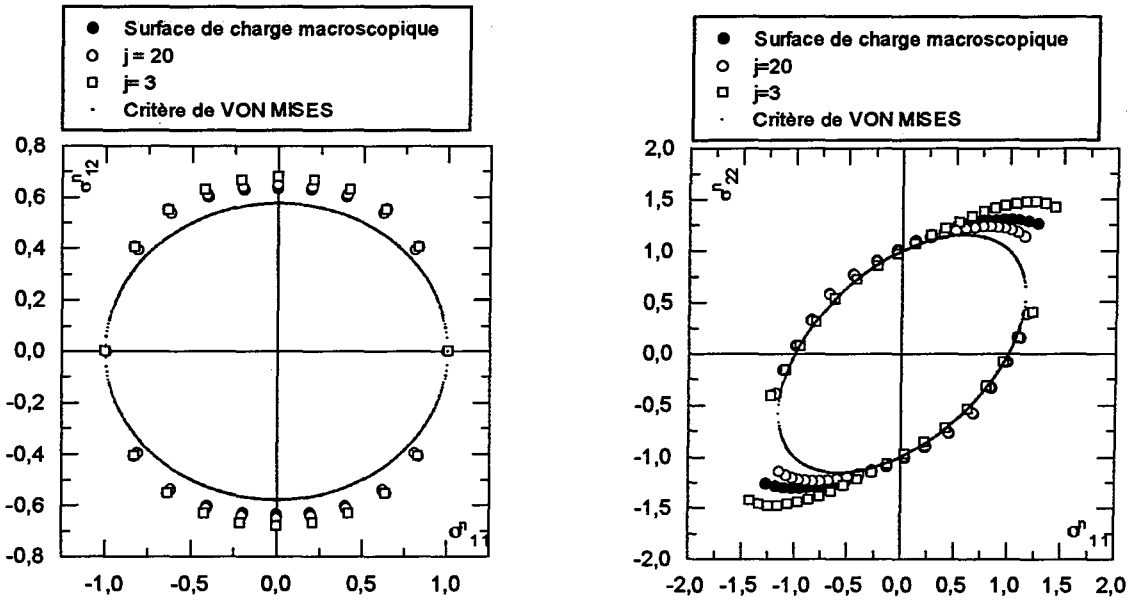
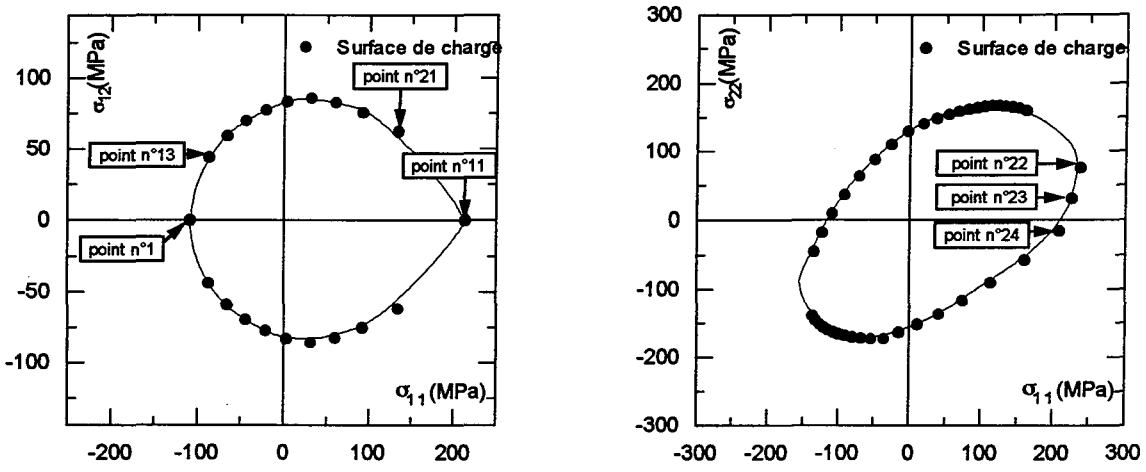


Figure 47 : Représentation normée des surfaces de charge initiales macroscopiques et des surfaces de charge associées aux processus j=20 et j=3 dans les deux plans $(\sigma_{11},\sigma_{12})$ et $(\sigma_{11},\sigma_{22})$.

4-4-2 Etude de l'évolution des contraintes relatives à quelques processus lors de la détermination de la limite élastique en traction et en compression après prédéformation

Dans ce paragraphe, nous examinons l'évolution de la contrainte associée à chaque processus en fonction de la déformation macroscopique. Les figures 48-a et 48-b montrent les surfaces de charge déterminées par simulation. Nous montrerons dans le paragraphe (4-4-5) le spectre de relaxation correspondant à quelques points particuliers (numérotés par 13, 11, 21, 22, 23 et 24). Nous allons ici étudier en détail les histoires de chargement correspondant aux points notés respectivement 11 et 1 sur la figure 48-a.



(a) (b)

Figure 48 : Représentation de la surface de charge après une prédéformation en traction suivant les deux plans $(\sigma_{11},\sigma_{12})$ et $(\sigma_{11},\sigma_{22})$.

4-4-2-1 Analyse des contraintes associées à quelques processus pour le chargement "point n°11"

Le trajet de chargement utilisé est représenté sur la figure 49.

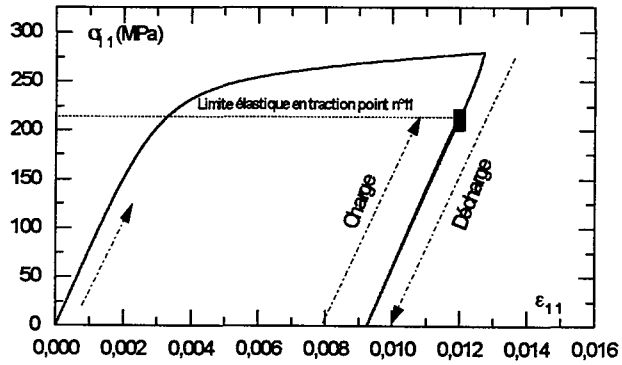


Figure 49 : Courbe contrainte-déformation lors de la détermination de la limite élastique en traction.

La figure 50 représente le spectre de relaxation obtenu juste après décharge totale à $\sigma_{11} = \sum_{j=1}^{nk} (\sigma_{11})_j = 0$. On note la présence simultanée de contraintes de compression et de tension.

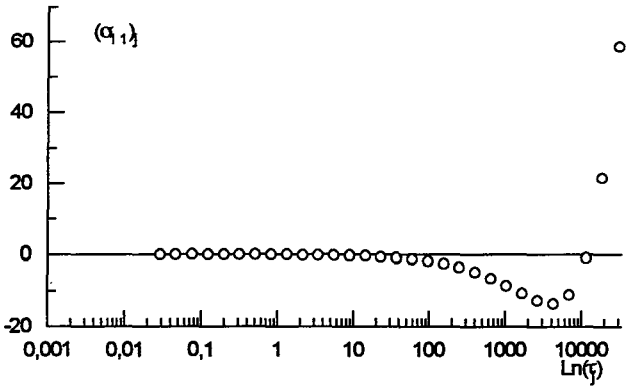


Figure 50 : Spectre de relaxation lors de la décharge totale $\left(\sigma_{11} = \sum_{j=1}^{nk} (\sigma_{11})_j = 0\right)$.

Pour ce trajet, les figures 51 représentent les évolutions de $(\sigma_{11})_j = f(\varepsilon_{11})$ pour les processus j=5, 10, 20, 22, 23 et 30. Nous observons que les processus les plus rapides présentent un comportement très complexe. Nous avons porté :

① la limite élastique détectée par l'offset conventionnel $\left(p_j^0\ \sigma^{seuil}\right)$ sur chacune de ces simulations.

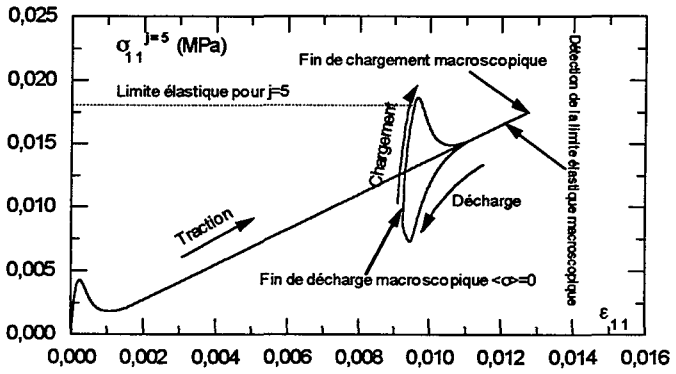
② l'état de contrainte pour la déformation globale en fin de chargement.

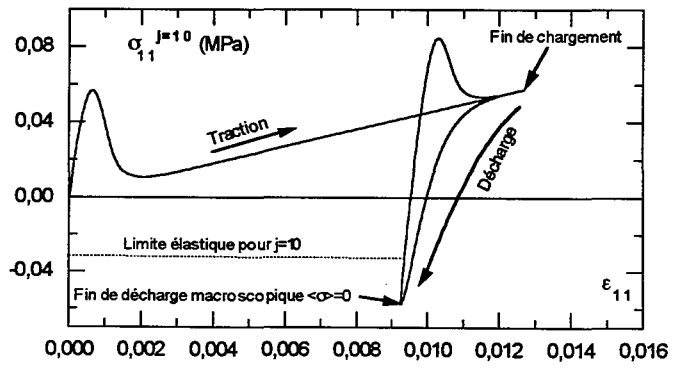
Pour j=5, nous observons un "crochet" de traction qui correspond au passage d'une réponse quasi-instantanée sans dissipation caractérisée par l'affinité $A_5 \neq 0$ et $\dot{z}_5 = 0$ $\left(\text{en effet } (\dot{\sigma}_{11})_5 = p_5^0\ E^u\ \dot{\varepsilon}_{11}\right)$ à une réponse également sans dissipation mais correspondant au dégel total de ce processus $\left(A_5 = 0 \text{ et } \dot{z}_5 \propto \dot{\varepsilon}_{11}\right.$, en effet $\left.(\dot{\sigma}_{11})_5 = p_5^0\ E^u\ \dot{\varepsilon}_{11} - (b_{11})_5\ \dot{z}_5 = p_5^0\ E^r\ \dot{\varepsilon}_{11}\right)$. Nous observons un comportement parfaitement élastique caractéristique d'un équilibre thermodynamique vrai pour ce même processus jusqu'à décharge totale du système. La décharge appliquée génère alors rapidement une dissipation. La mise en charge qui s'en suit fait à nouveau apparaître un crochet de traction semblable au premier crochet observé. C'est sur cette portion du chemin que l'on détecte la nouvelle limite élastique pour l'offset retenu. Pour le point de fin de chargement, nous retrouvons à nouveau $A_5 = 0$ et $\dot{z}_5 \propto \dot{\varepsilon}_{11}$ (caractéristique de l'équilibre vrai pour ce processus). Nous remarquons que cette contrainte finale est inférieure à la limite élastique détectée avec l'offset choisi.

Pour les autres valeurs de j, des comportements comparables sont observés mais l'échelle des contraintes associées est fortement dilatée.

Pour les processus les plus lents (c'est-à-dire au delà de j=20), le deuxième "crochet" de contrainte n'apparaît plus et la position relative de l'état de contrainte final et de la limite élastique peut être inversée.

Pour j=30, le processus n'a pas encore atteint le régime d'équilibre vrai tel que $A_{30} = 0$ et le système est toujours en cours de dissipation. Pour ce processus le plus lent, on n'observe pas de crochet. En fait, il se produit un régime stationnaire qui interdit au système d'atteindre $A_{30} = 0$: la vitesse $\dot{\varepsilon}_{11}$ est trop élevée par rapport au temps de relaxation τ_{30}. Cette observation est bien une conséquence directe de la distribution issue de la théorie des fluctuations : ce sont les processus les plus lents qui déterminent essentiellement la cinétique globale du système. KOVACS avait été amené à admettre le rôle majeur des processus les plus lents pour la recouvrance volumique des polymères vitreux en cours de vieillissement physique [KOVACS 1977].





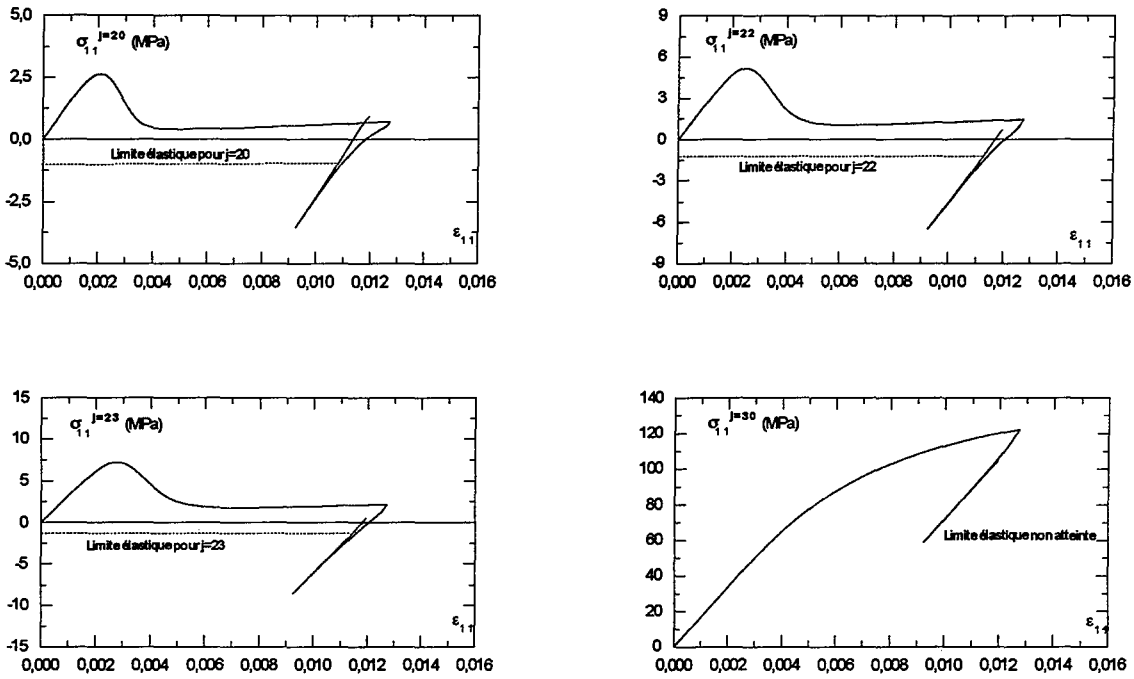


Figure 51 : Courbe contrainte-déformation relative à quelques processus lors de la détermination de la limite élastique en traction.

4-4-2-2 Représentation des contraintes associées à quelques processus pour le chargement "point 1"

Ce chargement est représenté sur la figure 52.

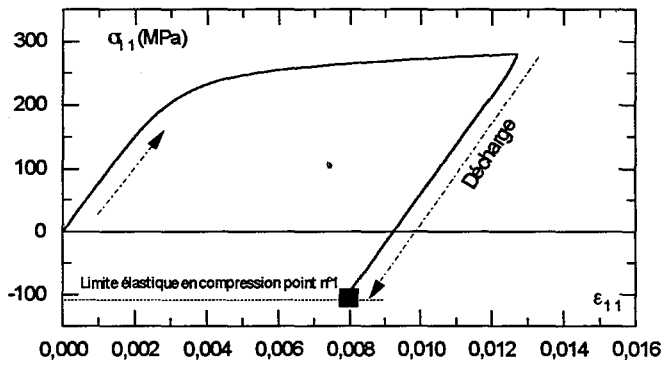
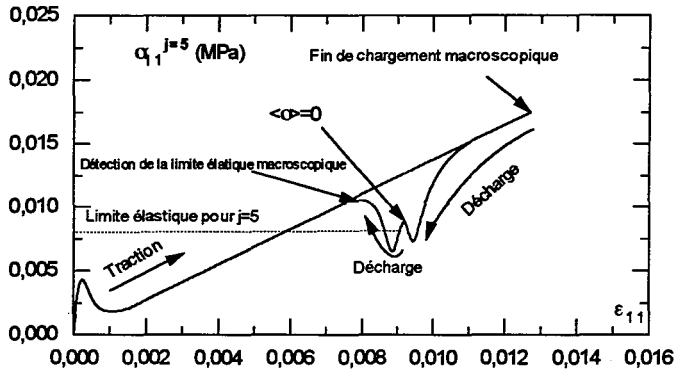
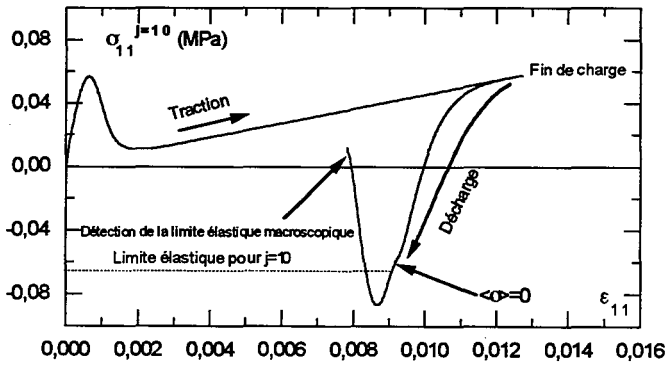
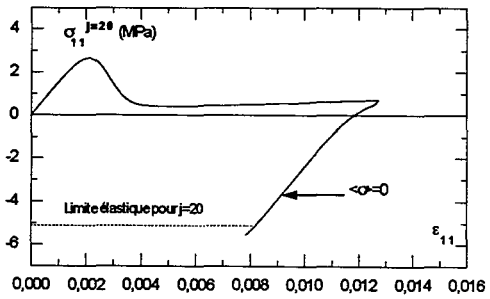


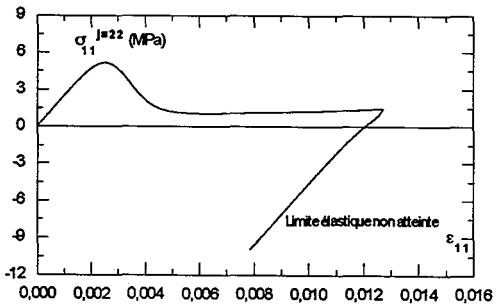
Figure 52 : Courbe contrainte-déformation lors de la détermination de la limite élastique en compression.

Les figures 53 montrent les évolutions de $(\sigma_{11})_j = f(\varepsilon_{11})$ pour j=5, 10, 20, 22, 23, 30 lors de la détermination de la limite élastique en compression. Comme en traction, nous observons que les processus les plus rapides présentent un comportement très complexe lié au fait qu'ils atteignent rapidement un régime d'équilibre vrai $(A_j = 0 \text{ et } \dot{z}_j \propto \dot{\varepsilon}_{11})$, régime qu'ils quittent momentanément sous l'impulsion d'un changement de vitesse $\dot{\varepsilon}_{11}$.









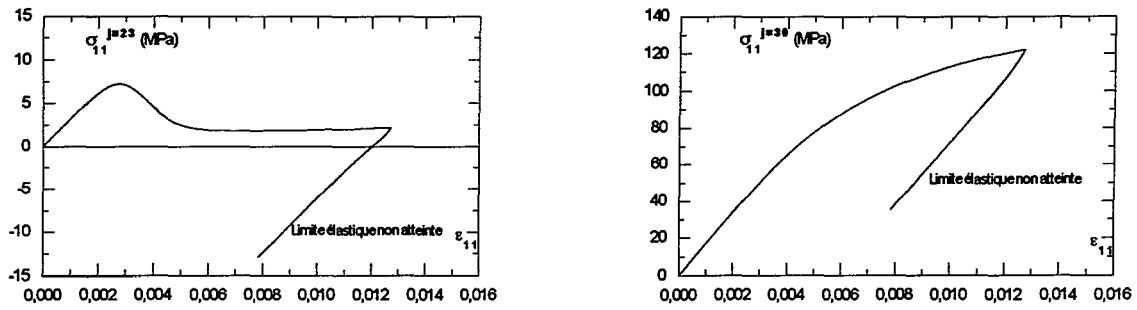


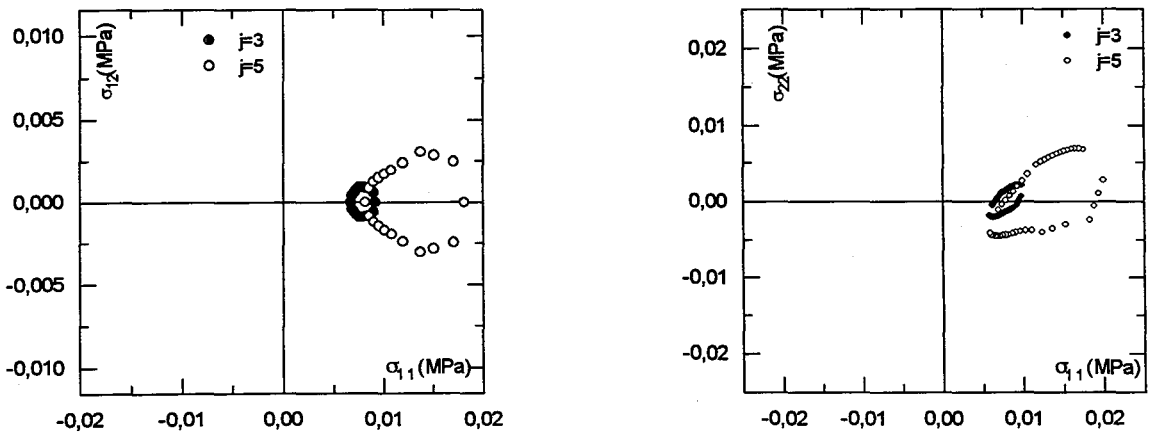
Figure 53 : Courbe contrainte-déformation relative à quelques processus lors de la détermination de la limite élastique en compression.

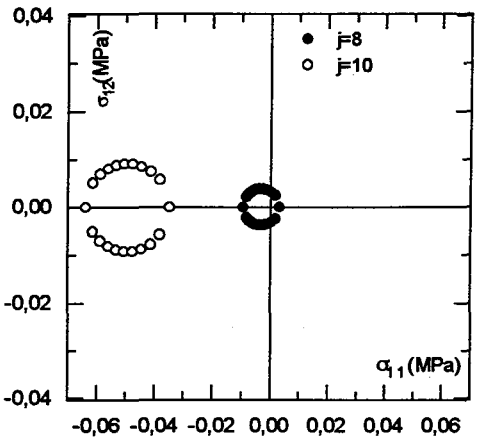
Ici encore, nous avons porté la limite élastique détectée pour chaque processus au cours de ce chargement.

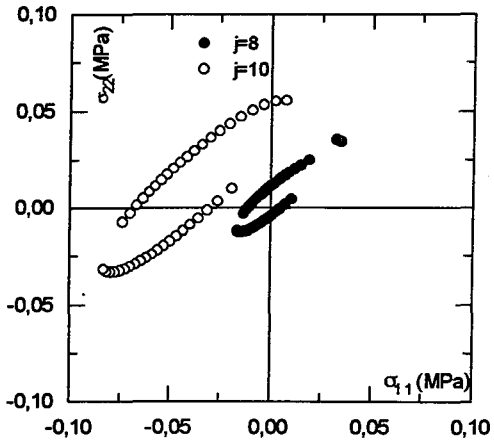
4-4-3 Analyse des surfaces de charge rencontrées pour les processus j précédents pour une prédéformation en traction

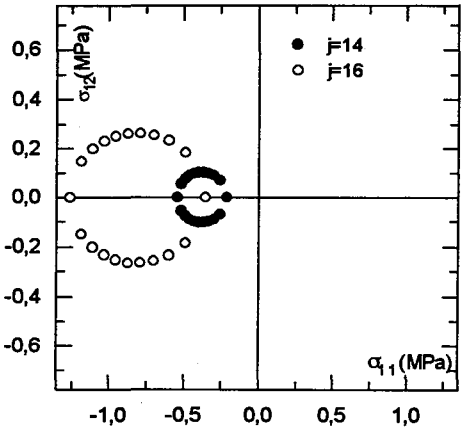
Dans le paragraphe précédent, nous avons examiné les trajets effectués par quelques processus lors de la construction des points de charge n°11 et 1 de la figure 48. Ici nous représentons et comparons les surfaces de charge (ensemble des points de charge) relevées pour ces processus.

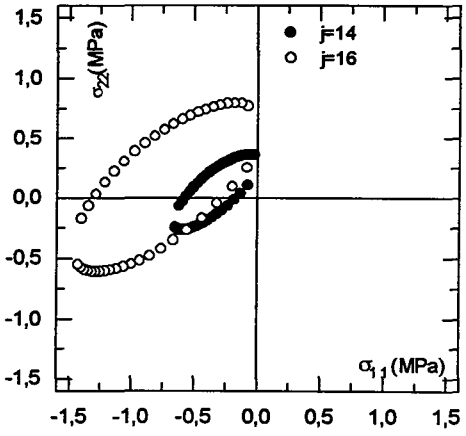
Sur les figures 54, nous observons la grande variété de ces surfaces de plasticité. Soulignons ici que les limites élastiques des processus j=21, 22, 23 sont maintenant atteintes alors qu'elles ne l'étaient pas en l'absence de prédéformation (voir paragraphe 4-4-1).

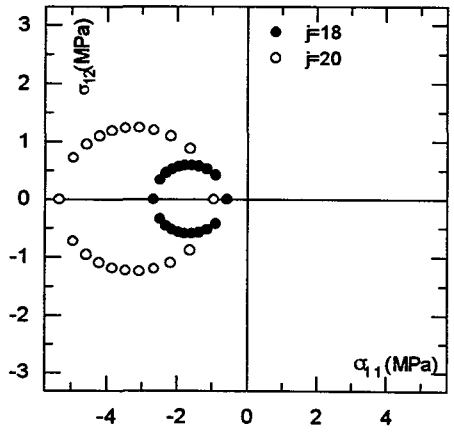


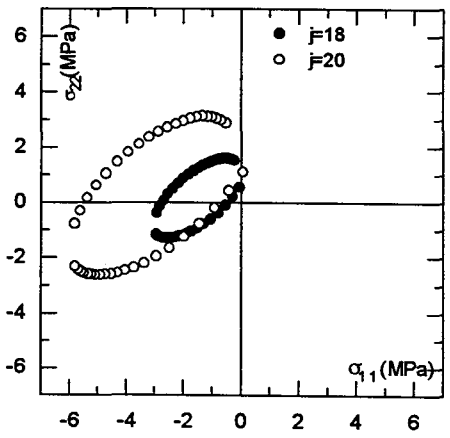

0,04
0,02
0,00
-0,02
-0,04
σ12(MPa)
j=8
j=10
σ11(MPa)
-0,06 -0,04 -0,02 0,00 0,02 0,04 0,06


0,10
0,05
0,00
-0,05
-0,10
σ22(MPa)
j=8
j=10
σ11(MPa)
-0,10 -0,05 0,00 0,05 0,10


0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
σ12(MPa)
j=14
j=16
σ11(MPa)
-1,0 -0,5 0,0 0,5 1,0


1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
σ22(MPa)
j=14
j=16
σ11(MPa)
-1,5 -1,0 -0,5 0,0 0,5 1,0 1,5


3
2
1
0
-1
-2
-3
σ12(MPa)
j=18
j=20
σ11(MPa)
-4 -2 0 2 4


6
4
2
0
-2
-4
-6
σ22(MPa)
j=18
j=20
σ11(MPa)
-6 -4 -2 0 2 4 6

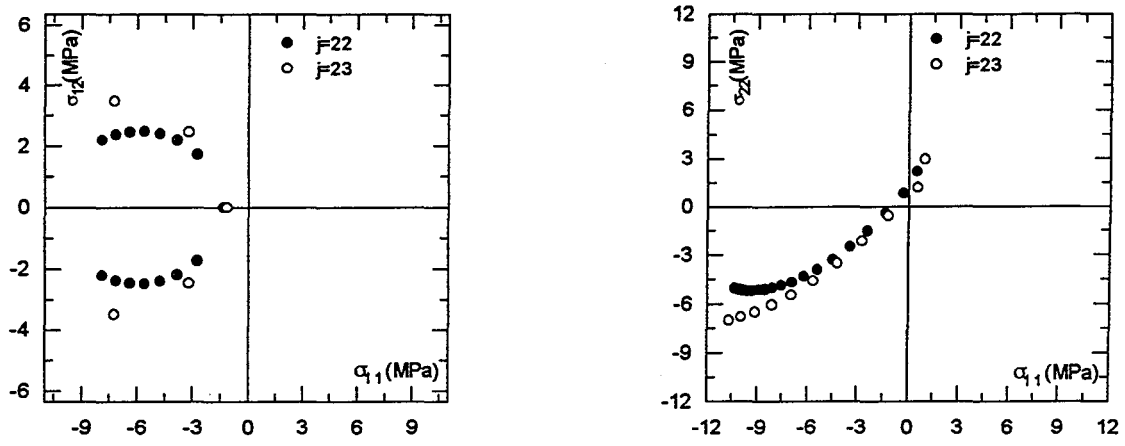
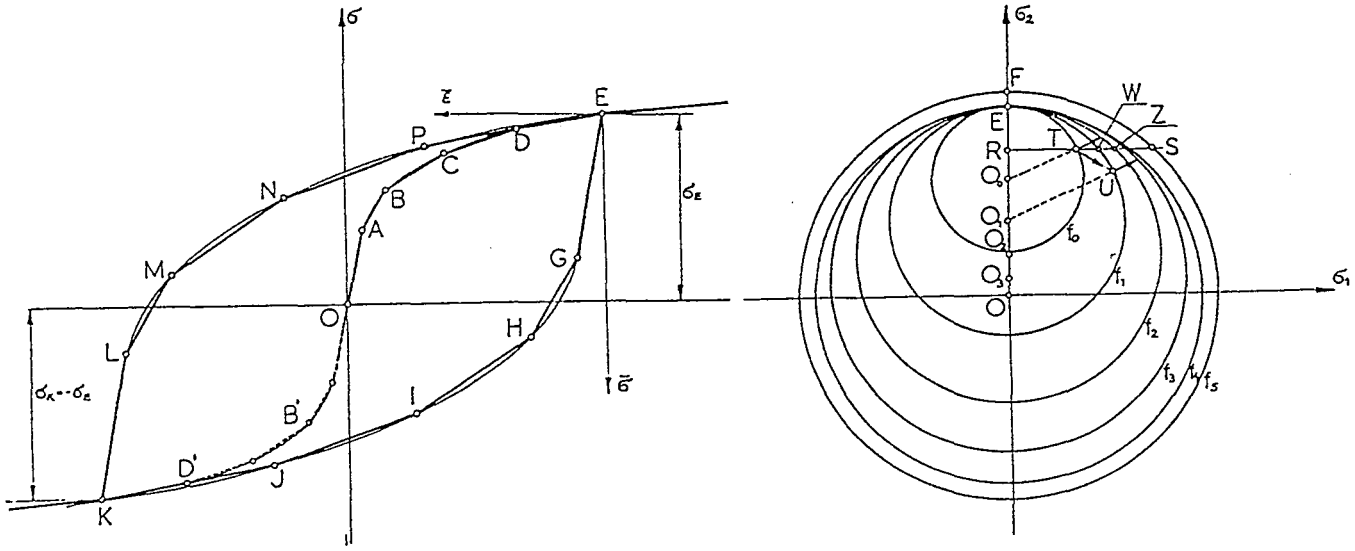


Figure 54 : Représentation de la surface de charge pour quelques processus après une prédéformation en traction suivant les deux plans $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ et $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$.

A la lumière de ces résultats, il apparaît que le modèle DNLR est profondément différent du modèle multicouches de MROZ (1967). En effet, la figure 55 représente "l'assemblage" de ces multicouches emboîtées les unes dans les autres, chacune pouvant être affectée d'un écrouissage isotrope et d'un écrouissage cinématique.



(a) (b)

Figure 55 : Modèle de MROZ (1967).

-a : approximation de la courbe contrainte-déformation par différentes portions à module tangent constant.

-b : représentation en biaxial.

4-4-4 Représentation de l'état des contraintes internes lorsque la surface de charge macroscopique est atteinte

Les courbes $(\sigma_{11})_j = f(\varepsilon_{11})$ présentées sur les figures 51 et 53 ont été tracées jusqu'à ε_{max} correspondant à la limite élastique dans la direction 11 après préchargement. Ce sont ces contraintes "finales" qui sont portées sur les axes $(\sigma_{11})_j$, $(\sigma_{12})_j$ et $(\sigma_{22})_j$ associées à ε_{max} sur les figures 56 et 57. Les autres points n'appartenant pas à ces axes sont construits de la même manière pour les chargements correspondants. La figure 56 superpose la surface limite macroscopique et ces contraintes "finales" $(\underline{\underline{\sigma}})_j$ pour j=25 et j=30.

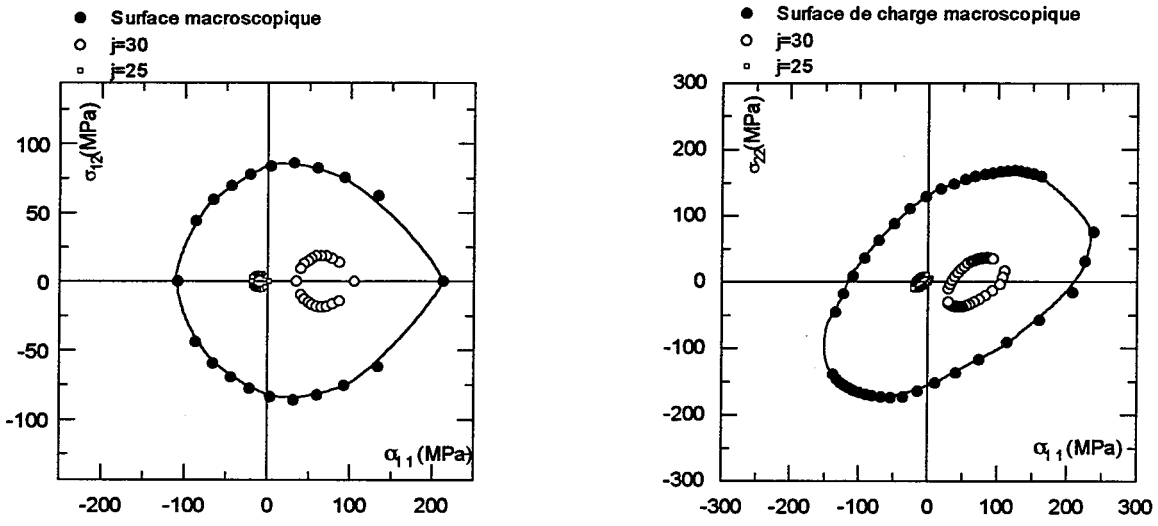
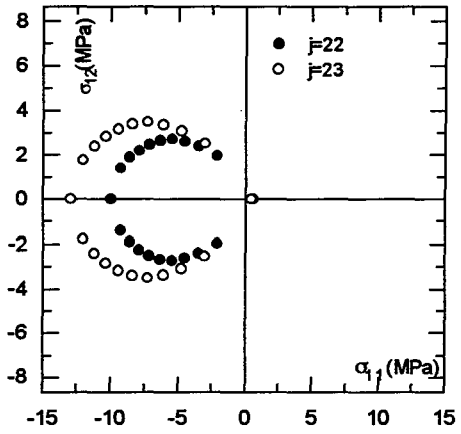
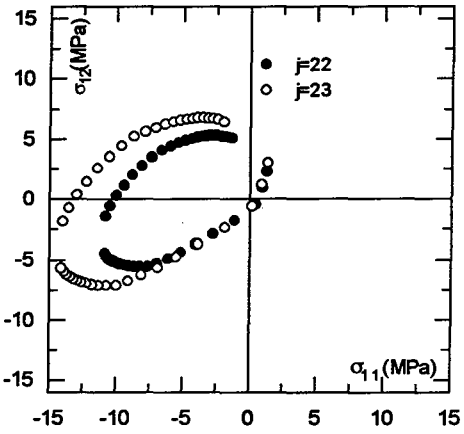
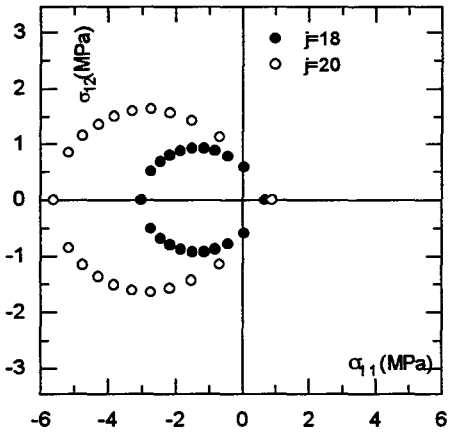


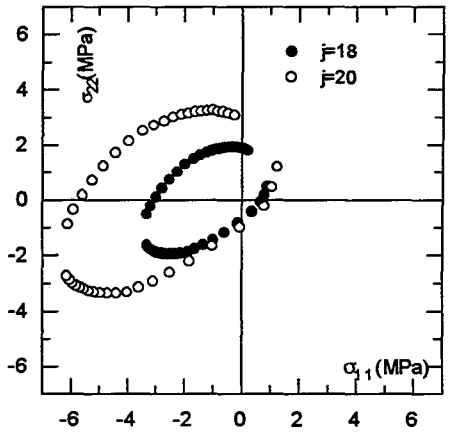
Figure 56 : Représentation de la surface de charge macroscopique et des contraintes internes pour j=25 et j=30.

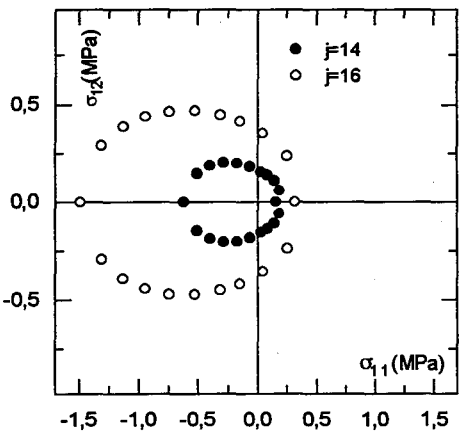
Les figures 57 présentent les états de contraintes relevés pour j=3, 5, 8, 10, 14, 16, 18, 20, 22 et 23

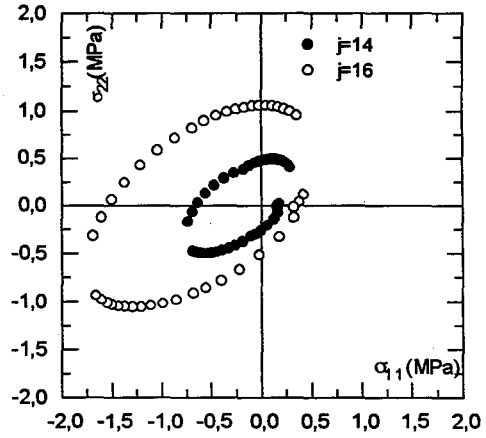

σ12(MPa)
j=22
j=23
σ11(MPa)


σ12(MPa)
j=22
j=23
σ11(MPa)


σ12(MPa)
j=18
j=20
σ11(MPa)


σ22(MPa)
j=18
j=20
σ11(MPa)


σ12(MPa)
j=14
j=16
σ11(MPa)


σ22(MPa)
j=14
j=16
σ11(MPa)

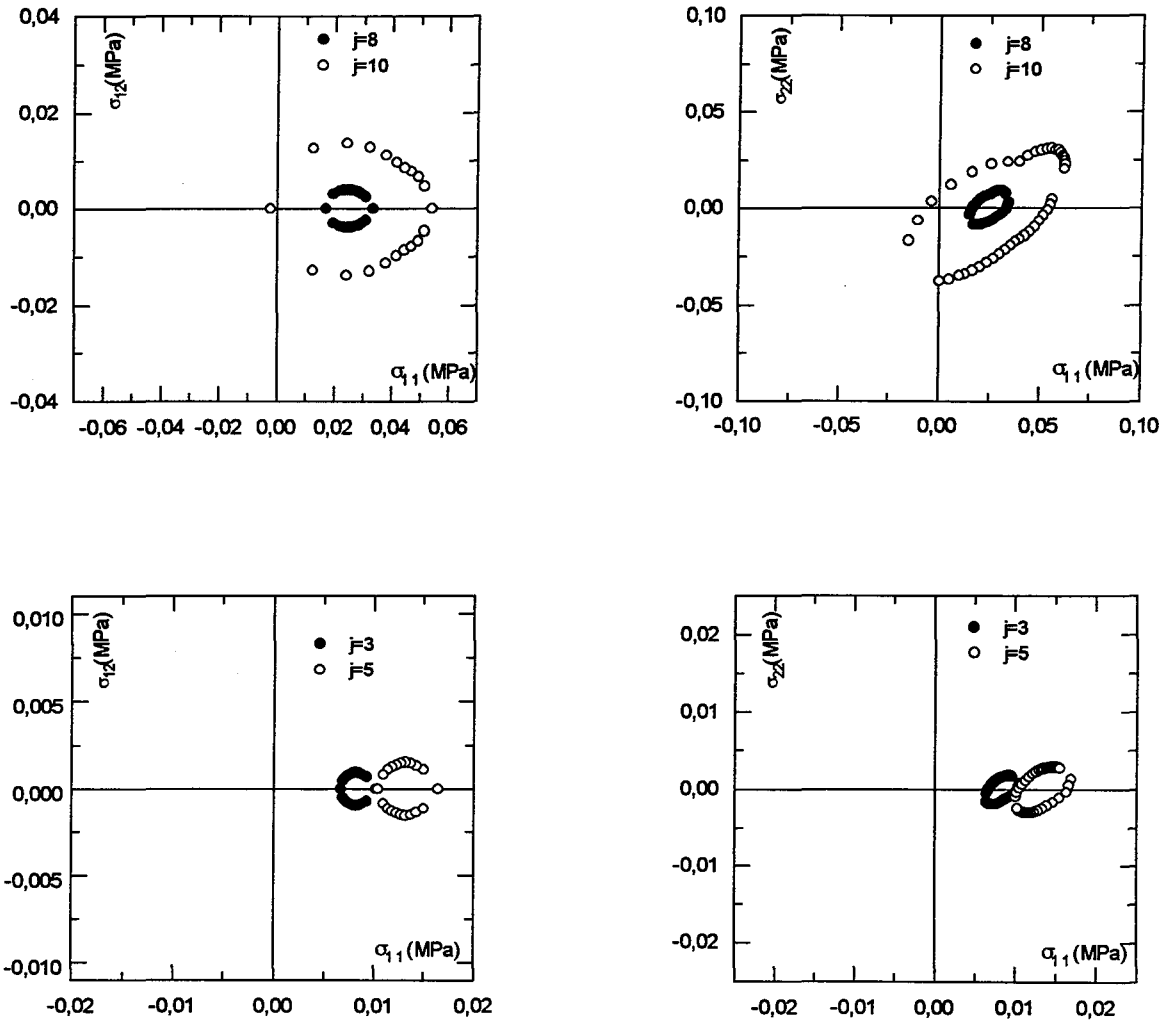


Figure 57 : Représentation des états de contraintes internes pour quelques processus j.

4-4-5 Représentation du spectre de relaxation : analyse de quelques états limites particuliers choisis sur la surface de charge

4-4-5-1 Cas de la traction-torsion

La figure 58 compare l'état du spectre de relaxation en quelques points de la surface de charge, dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$, déjà présentée sur la figure 48 que nous rappelons ici.

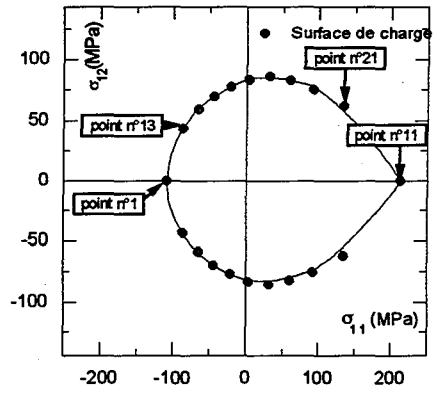


Figure 48.

Le point n°1 correspond à un état de compression. En l'absence de préchargement, le spectre montre une distribution de contraintes négatives. Par contre, on détecte la présence de contraintes de tension associées aux temps de relaxation les plus élevés après un préchargement en traction. Ces composantes sont responsables du glissement de ce point de charge dans la direction du préchargement.

Le point n°13 est un état de compression associé à un cisaillement positif. Nous observons que le préchargement retarde le cisaillement par un glissement du spectre $(\sigma_{12})_j = f(\tau_j)$ vers les temps longs ce qui génère un écrouissage dans le sens du cisaillement (écrouissage croisé). De plus, comme précédemment, il induit des états de tension parmi les sollicitations σ_{11} majoritairement en compression.

Le point n°21 correspond à un état mixte de cisaillement positif comme précédemment et de traction (signe opposé au cas précédent). Les mêmes effets sont observés mais la contribution des états de compression (induits par la décharge) est nettement moindre.

Le point n°11 est associé à une traction pure. Le préchargement déforme le spectre en affectant surtout sa largeur effective tout en produisant un glissement vers les temps les plus courts. Globalement, les processus les plus rapides ne jouent pratiquement plus de rôle comparés au rôle des processus les plus lents du spectre. Ainsi, malgré cette diminution du temps de relaxation le plus lent, la limite élastique macroscopique apparaît pour des valeurs de contrainte limite plus élevées.

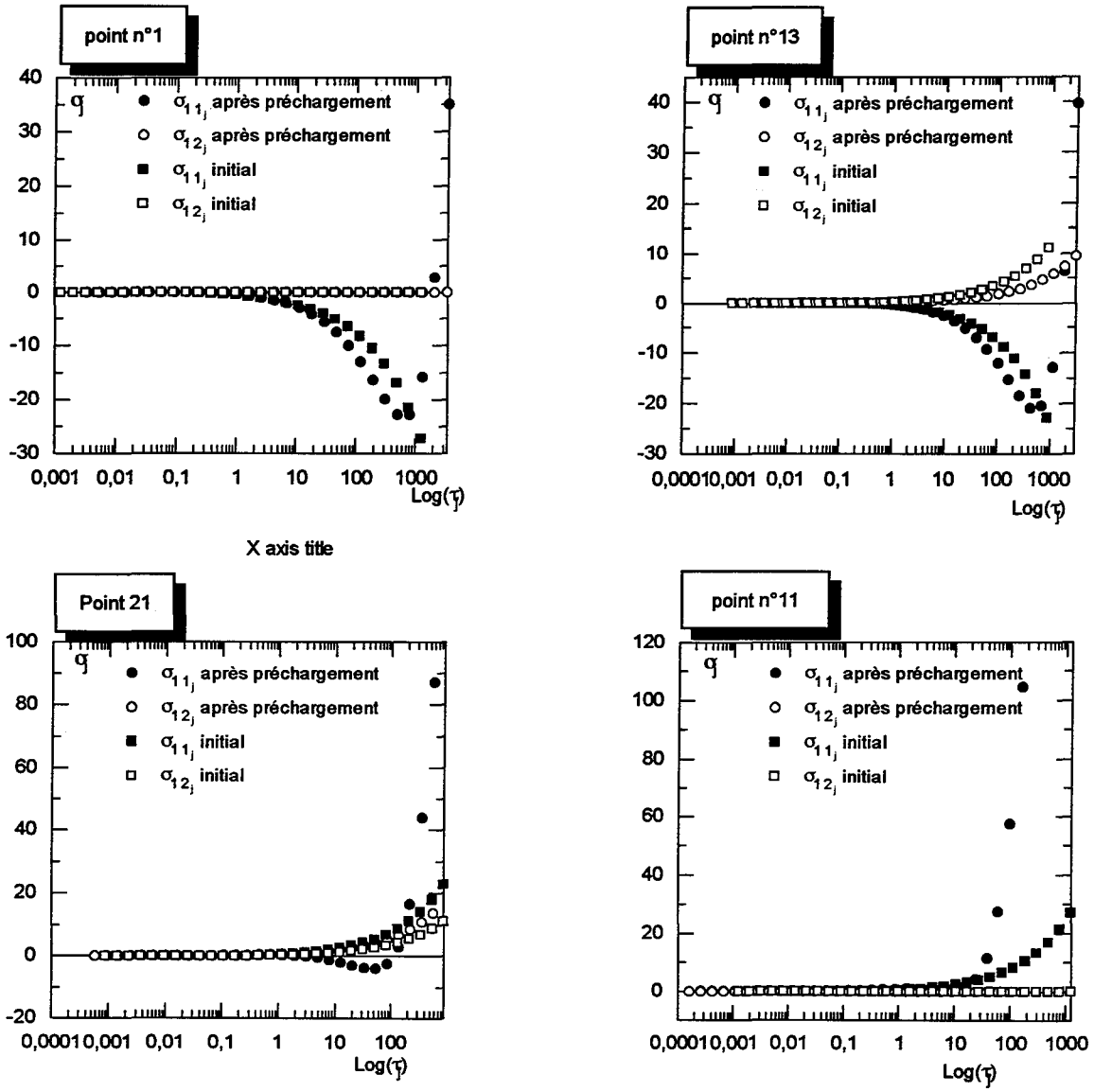


Figure 58 : Comparaison entre le spectre de relaxation de la surface de charge initiale et celui obtenu après une prédéformation en traction pour quelques points de la surface de charge eprésentée dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$.

4-4-5-2 Cas de la bitraction

Sur les figures 59 , nous comparons l'état du spectre de relaxation en quelques points de la surface de charge représentés dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$. Ces figures montrent les évolutions des spectres liées à l'histoire de préchargement.

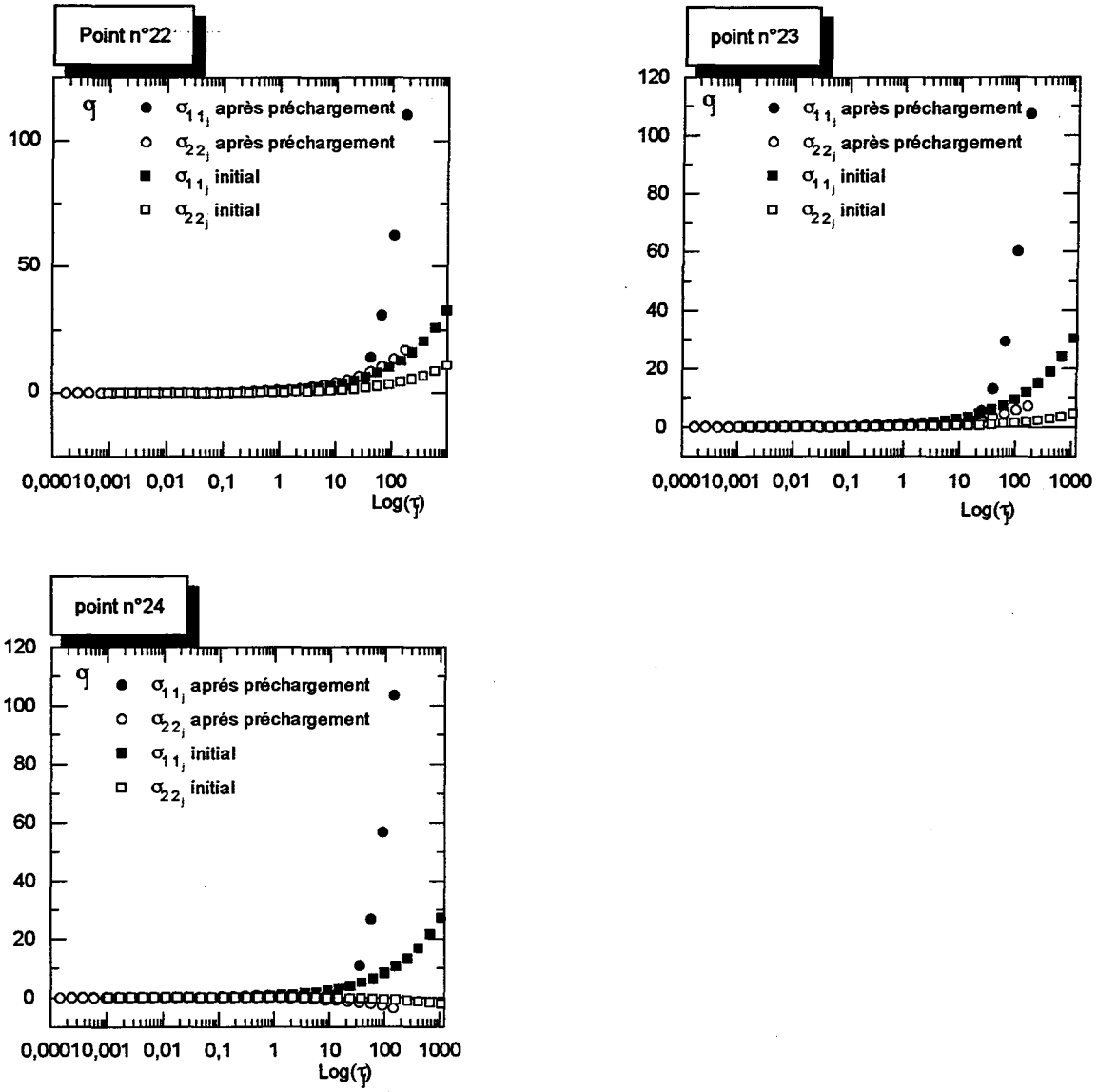


Figure 59 : Comparaison entre le spectre de relaxation de la surface de charge initiale et celui obtenu après une prédéformation en traction pour quelques points de la surface de charge représentée dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$.

L'observation de ces spectres associés à des points choisis dans le demi plan $\sigma_{11} > 0$ confirment les observations précédentes faites sur σ_{11} dans les simulations de traction-torsion : il apparaît une forte distorsion du spectre avec moindre importance des processus rapides ainsi qu'une diminution des temps de relaxation des processus les plus lents.

5- CONCLUSION

❶ Dans ce chapitre, nous avons cherché à tester les capacités prédictives du modèle dans l'espace des chargements multiaxiaux. En particulier, nous nous sommes attachés à examiner la distorsion des surfaces de chargement observable uniquement dans le régime transitoire de l'élastoplasticité, c'est à dire à faible valeur de l'offset.

❷ Nous montrons en particulier que le modèle DNLR conduit toujours à des surfaces limites initiales voisines du critère de VON MISES pour de grandes valeurs de l'offset, c'est-à-dire pour la déformation plastique résiduelle conventionnelle. Ceci est tout à fait conforme aux nombreuses observations expérimentales citées dans la littérature.

Par contre, la séquence de chargement (proportionnel ou séquentiel) joue un rôle important sur la forme des surfaces limites pour les chargements imposés dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ et dans le domaine $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}} \cong 1$ pour de faibles valeurs de l'offset. Dans le cas du chargement proportionnel, la surface seuil aux offset très faibles $1e^{-7}$ (non détectables expérimentalement) semble se rapprocher du critère de SAINT VENANT [MARIOTTE 1686] lorsque le col d'activation n'est pas très élevé $(\cong 100000\ J/Mol\ at)$. Nous avons également montré que les surfaces de plasticité s'apparentent toujours à celles de VON MISES dans le domaine des offset $\geq 1e^{-7}$ pour les fortes énergies libres d'activation $(\cong 200000\ J/Mol\ at)$ et ce quels que soient les chargements.

La prise en compte de la pression hydrostatique sur la cinétique des effets coopératifs conduit à une déformation des surfaces de charge qui correspond à une dissymétrie entre la traction et la compression.

❸ Nous avons également étudié le comportement du modèle lorsque l'on impose une prédéformation plastique avant la détermination des surfaces de charge :

↳ Pour une décharge totale, la simulation prévoit la déformation en "coin" dans le sens de la prédéformation et l'aplatissement dans le sens opposé.

↳ Pour une décharge partielle, on retrouve un fort glissement d'ensemble des surfaces limites conformément aux observations expérimentales.

❹ Nous avons par ailleurs testé l'aptitude du modèle à décrire les effets de cumul liés à l'utilisation d'un seul échantillon pour tester toute une surface de plasticité. Le rôle de la séquence de chargement sur la forme de la surface limite ayant déjà été observé, nous avons donc montré que le modèle est sensible à ce cumul. En effet, nos simulations sont très encourageantes lorsque l'on compare nos prévisions avec les expériences de LAUERT et GUPTA. Nous n'avons pas rencontré dans notre revue bibliographique de modélisations ayant pu reproduire et encore moins prévoir, ne serait-ce que qualitativement, de telles données expérimentales.

❺ Après avoir vérifié l'aptitude de la théorie à traduire les comportements réellement observés, nous avons tenu à analyser la distribution des processus qui mène à ce résultat. En effet, la théorie des fluctuations a permis de connaître "ab initio" la forme de la distribution initiale des processus lorsque l'on incrémente la perturbation. Cependant, en cours de relaxation, cette distribution évolue et constitue ainsi la mémoire de tout le passé du matériau. Cette analyse permet de mieux comprendre, processus par processus, le rôle de cette distribution et le rôle des non-linéarités temporelles, c'est-à-dire l'essence même du modèle DNLR (Distribution of Non Linear Relaxations).

Chapitre V

OPTIMISATION DES PARAMETRES DU MODELE DNLR

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes d'identification. La méthode, que nous utiliserons pour le modèle DNLR, est celle de GAUSS-NEWTON. Enfin, nous aborderons les résultats d'optimisation sur quelques expériences puisées de la littérature.

1- INTRODUCTION ---------- 166
2- METHODE D'IDENTIFICATION DES PROCESSUS ---------- 167
2-1 Généralités 167
2-2 Procédure d'identification 168
3- METHODE D'OPTIMISATION ---------- 168
3-1 Généralités 169
3-1-1 Sensibilité 169
3-1-2 Influence du bruit d'acquisition 171
3-2 Méthodes directes 171
3-2-1 Définition de l'unimodalité 172
3-2-1 Principe des méthodes de recherche par essais successifs 172
3-3 Méthodes interactives ou des gradients 173
3-3-1 Généralités sur les méthodes des gradients 173
3-3-2 Conclusion 174
3-4 Remarques 174
4 METHODE DE GAUSS NEWTON ---------- 175
4-1 Introduction 175
4-2 Mise en oeuvre de la méthode 176
5 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DNLR ---------- 178
5-1 Identification sur des pseudo-expériences 178
5-1-1 Identification des paramètres de départ sur les données non bruitées 179
5-1-2 Optimisation à partir de données bruitées pour le chargement seul 180
5-1-3 Optimisation à partir de données bruitées pour la charge-décharge 180
5-2 Essai de traction uniaxiale sur l'acier inoxydable A316 182
5-3 Essai de charge-décharge sur un alliage d'aluminium (AU4G) 182
5-3-1 Identification sur la charge-décharge 182
5-3-2 Identification sur la charge 183
5-3-3 Conséquence sur la détermination des surfaces de charge et leur évolution 184
5-4 Modélisation de quelques histoires thermomécaniques réalisées sur le PMMA 187
5-5 Essai de traction et de cisaillement sur le PEEK 189
5-6 Essai de traction sur l'IN100 à plusieurs vitesses de déformation 191
6 CONCLUSION ---------- 192

1- INTRODUCTION

La modélisation d'observations expérimentales peut schématiquement emprunter deux voies séparées :

① la première voie consiste à formuler une expression mathématique qui corrèle les observations expérimentales. Dans ce cas, le sens physique de l'équation obtenue n'est pas une nécessité. C'est la démarche empirique. Pour utiliser la "loi" ainsi obtenue, il est indispensable de recourir à une identification des paramètres sur la base des données expérimentales. Ce type de loi ne peut être utilisé que dans le cadre d'interpolations par rapport au domaine expérimental exploré.

② à l'opposé, la deuxième voie consiste à bâtir une "théorie physique" qui ne peut faire appel qu'à des constantes (ou paramètres) bien établies ou tout au moins accessibles par d'autres méthodes plus directes. Bien évidemment, cette approche est de loin préférable pour le physicien. Le modèle est "réputé" satisfaisant quand il permet de prévoir des phénomènes observés, sans ajustement de paramètres.

Il arrive fréquemment que l'on se contente de prévision semi-quantitative, voir qualitative pour accepter le modèle sur le plan de la physique. Toutefois pour l'ingénierie, il faut absolument des prévisions conformes à la réalité expérimentale : les prévisions doivent donc s'inscrire dans un cahier des charges précis et contraignant. On voit ainsi se dessiner une troisième voie qui est en fait une situation intermédiaire entre les deux précédentes : on cherche à donner un maximum de sens physique (microphysique) au modèle construit afin d'obtenir à la fois des interpolations et des extrapolations les plus fiables possibles.

Cependant, il est rare que l'on puisse se passer intégralement d'une certaine "dose" d'empirisme souvent cachée derrière l'étiquette de la phénoménologie. Dans cette situation, la détermination d'un certain nombre de coefficients peut être menée indépendamment du modèle proposé. En revanche, l'optimisation intervient pour les coefficients dont le sens physique est moins direct.

L'identification des paramètres est donc une des étapes importantes pour valider un modèle et prévoir de manière quantitative des faits expérimentaux. Celle-ci est réalisée à partir de données expérimentales obtenues pour des histoires de chargements données (dépendances temporelles "séquence" des sollicitations spatiales "chemins ou trajets").

La situation est souvent complexe avec les modèles non-linéaires ; en effet, pour une histoire donnée, il est souvent possible d'obtenir des jeux de paramètres différents qui conduisent à une bonne reproduction de l'essai utilisé : la solution n'est pas unique ! Une étude

de sensibilité permet de le mettre en évidence. Dans ce cas, il est indispensable de compléter les informations par une étude expérimentale sur de nombreuses séquences et trajets de chargement. On peut espérer trouver une solution proche de la réalité lorsque ces informations complémentaires sont disponibles.

Le jeu de paramètres ainsi obtenu doit conduire à des prévisions de comportement, pour d'autres histoires de chargement, conformes à l'expérience. Alors seulement le modèle et les valeurs des paramètres peuvent être considérés comme validés. Lorsque la prévision de phénomènes observés n'est pas à la portée du modèle, il est nécessaire de faire un retour sur les hypothèses physiques utilisées et de recommencer cette procédure [RICHALET et al].

Notre objectif ici n'est pas de conduire cette démarche dans son intégralité. En effet notre travail porte pour l'essentiel sur l'analyse qualitative de la capacité prédictive du modèle DNLR. Cependant, nous avons tenu à amorcer la problématique liée à l'identification des paramètres du modèle. Cette première phase de l'étude a déjà permis d'initier d'autres travaux plus systématiques dans cette voie [CASTAGNET 1995 ; TOUSSAINT 1995].

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons la démarche générale pour identifier les paramètres physiques d'un modèle à partir de données expérimentales. Une étude bibliographique a été menée afin de choisir une méthode adaptée au modèle DNLR pour optimiser ses paramètres : la méthode choisie est celle de GAUSS-NEWTON qui assure généralement une convergence rapide.

La deuxième partie porte sur l'identification des paramètres du modèle DNLR pour quelques chargements de traction et de cisaillement. Elle nous permet d'illustrer l'importance du choix des chemins et séquences d'identification sur les capacités prédictives du modèle.

2- METHODE D'IDENTIFICATION DES PROCESSUS

2-1 Généralités

L'opération d'identification consiste à donner une représentation mathématique à un phénomène physique. Dans la plupart des cas, identifier c'est comparer deux réponses, celle du système physique (expérience) et celle du modèle décrit par une équation mathématique. Cette comparaison nécessite l'optimisation d'un certain nombre de paramètres du modèle utilisé.

2-2 Procédure d'identification

Le schéma fonctionnel d'une démarche d'identification est celui de la figure suivante :

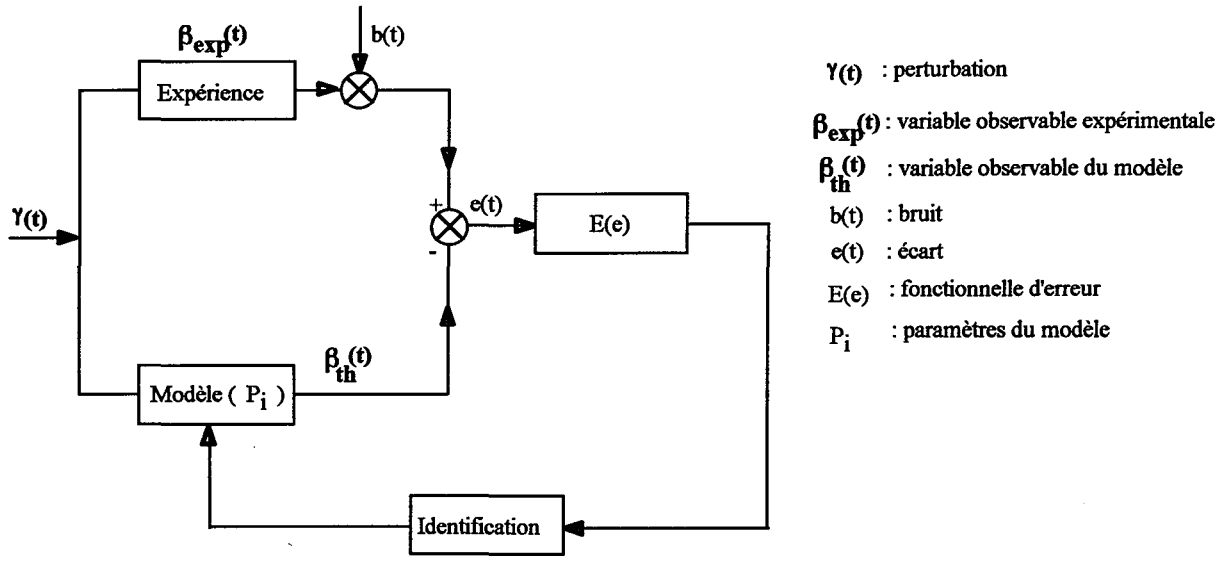


Figure 1 : Procédure d'identification [RICHALET et al].

L'écart e(t) peut être un écart d'état (paramètres non optimisés) ou un écart de structure (modèle mal formulé ou une simplification qui ne peut être retenue dans le cadre de la perturbation choisie).
La façon de procéder est composée de trois étapes importantes :

- le choix du modèle représenté par une formulation mathématique en prenant certaines hypothèses physiques,
- la réalisation de l'expérience,
- la mise en évidence de l'écart e(t) suivie d'une correction de la réponse du modèle. Cette correction se traduit soit par ajustement des paramètres soit par modification de certaines des hypothèses retenues. C'est l'étape d'exploitation de l'expérience.

3- METHODE D'OPTIMISATION

Une fois le modèle choisi, nous disposons d'un type de structure et d'un certain nombre de paramètres P_i $(E^u, E^r, \Delta F_{max}^{+,r}, K_\sigma, ...)$ à optimiser numériquement. Les valeurs numériques des paramètres P_i, attachés à une signification physique, ne doivent pas être en contradiction avec les lois fondamentales de la physique (par exemple, un module d'YOUNG doit être positif). L'analyse numérique jouera un rôle important dans ce chapitre, en particulier les méthodes de minimisation qui nous permettrons de travailler sur la fonctionnelle d'erreur.

Cette étape consiste donc à minimiser l'écart e(t) entre la réponse du modèle et celle de l'expérience. En fonction de cet écart et d'un critère de convergence, nous estimons que les valeurs numériques des paramètres sont déterminées de manière optimale. Dans le cas contraire, il faut choisir un nouveau jeu de paramètres et recommencer le processus d'optimisation. Le point le plus délicat est sans doute la détermination de ce nouveau jeu de coefficients.

L'écart e(t) entre expérience et modèle est une fonction des paramètres de ce dernier. La non-linéarité du modèle ainsi que le nombre des paramètres jouent un rôle déterminant sur le choix de la méthode la mieux adaptée à un problème donné ; on cherche alors à construire des algorithmes efficaces et spécifiques à chaque problème.

Le principe des algorithmes itératifs est de progresser pas à pas en faisant varier les paramètres P_i dans le sens décroissant de $e(t) = \underline{e}\left(\underline{\beta}^{e}\left(\underline{\gamma}\right) ; \underline{P}\right)$. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : les méthodes directes et les méthodes interactives ou des gradients [GALHARAGUE 1979]. Les méthodes directes, basées sur la dichotomie, n'utilisent pas les dérivées de l'écart par rapport aux paramètres P_i. Les méthodes analytiques (ou locales) permettent quant à elle d'imposer un sens d'évolution décroissant de la fonction écart par un calcul préalable de son gradient.

3-1 Généralités

3-1-1 Sensibilité

Par définition le coefficient de sensibilité est le rapport caractérisant la dépendance de la réponse du système consécutive à une variation ΔP_i :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial \underline{\beta}\left(\underline{\gamma} ; \underline{P}\right)}{\partial \underline{P}} \qquad \text{(V-1)}$$

où le symbole $\underline{\underline{\ }}$ indique ici le caractère matriciel de la sensibilité S (matrice rectangulaire).

$$\underline{\beta}\left(\underline{\gamma} ; \underline{P} + \underline{\Delta P}\right) = \underline{\beta}\left(\underline{\gamma} ; \underline{P}\right) + \underline{\underline{S}}\ \underline{\Delta P} \qquad \text{(V-2)}$$

$$\text{En composantes : } S_{ki} = \frac{\partial \beta_k\left(\underline{\gamma} ; P_i\right)}{\partial P_i} \qquad \text{(V-3)}$$

$$S_{ki} = \frac{\beta_k\left(\underline{\gamma} ; P_i + \Delta P_i\right) - \beta\left(\underline{\gamma} ; P_i\right)}{\Delta P_i} \qquad \text{(V-4)}$$

Lorsque la réponse peut être reproduite avec plusieurs jeux de paramètres voisins les uns des autres (P) et $(P+\Delta P)$, on peut écrire :

$$\underline{\beta}(\underline{\gamma}\,;\ \underline{P}) = \underline{\beta}(\underline{\gamma}\,;\ \underline{P}+\underline{\Delta P}) \qquad \text{(V-5)}$$

or par définition de la matrice de sensibilité, on a :

$$\underline{\beta}(\underline{\gamma}\,;\ \underline{P}+\underline{\Delta P}) = \underline{\beta}(\underline{\gamma}\,;\ \underline{P}) + \underline{\underline{S}}\ \underline{\Delta P}$$

Dans ces conditions on doit vérifier la relation dite de compensation :

$$\underline{\underline{S}}\ \underline{\Delta P} = 0 \qquad \text{(V-6)}$$

Par exemple, si l'on suit l'évolution d'une seule propriété $\beta_1(\underline{\gamma})$ dépendante de deux paramètres :

$$\beta_1(\underline{\gamma}\ ;\ P_1, P_2) = \beta_1(\underline{\gamma}\ ;\ P_1 + \Delta P_1, P_2 + \Delta P_1) \qquad \text{(V-7)}$$

Soit

$$\beta_1(\underline{\gamma}\,;\ P_1, P_2) = \beta_1(\underline{\gamma}\,;\ P_1, P_2) + S_{11}\Delta P_1 + S_{12}\,\Delta P_2 \qquad \text{(V-8)}$$

ou encore :

$$\frac{S_{11}}{S_{12}} = -\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \qquad \text{(V-9)}$$

Cet exemple montre que lorsque les sensibilités par rapport à deux paramètres sont proportionnelles entre elles et de signe opposé, alors seul le rapport de ces deux paramètres peut être déterminé [RICHALET et al]. Comme le coefficient de sensibilité dépend directement du vecteur perturbation $\underline{\gamma}$ imposé au système ; la condition de proportionnalité dépend du vecteur $\underline{\gamma}$ considéré.

La figure 2 empruntée à S. CASTAGNET (1995) illustre l'évolution des coefficients de sensibilité sur un chemin de traction unidimensionnelle.

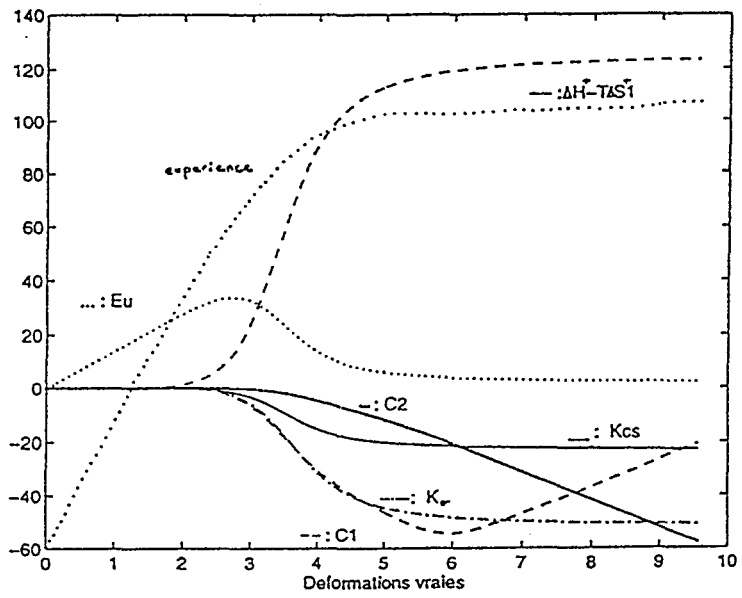


Figure 2 : Coefficients de sensibilité sur la charge.

3-1-2 Influence du bruit d'acquisition

Le bruit d'acquisition a pour effet d'entacher d'erreur la sortie du système. Dans le cadre de notre étude, la réponse est échantillonnée par intervalles, la fonctionnelle d'erreur ne peut être définie que par une suite discrète e(n) où n désigne le numéro du point expérimental.
La présence de ce bruit entraîne l'impossibilité d'obtenir le minimum exact de la fonctionnelle d'erreur mais autorise seulement un encadrement de ce domaine.

3-2 Méthodes directes

Ces méthodes sont basées sur la propriété unimodale d'une fonctionnelle d'erreur. Elles sont simples d'utilisation mais s'appliquent plus ou moins bien selon que l'unimodalité est ou non assurée. Le choix du pas de progression est crucial dans ces méthodes.
Parmi les variantes de ces méthodes citons celle de SPHERA, de FIBONACCI, de FISEC, de POWELL [voir RICHALET et al].

3-2-1 Définition de l'unimodalité

Soit une fonction f(x) d'une seule variable présentant dans un intervalle [a, b] un minimum. La fonction f(x) est dite unimodale si elle ne présente qu'un seul minimum dans tout l'intervalle exploré. Cette propriété se traduit par la courbe présentée sur la figure suivante :

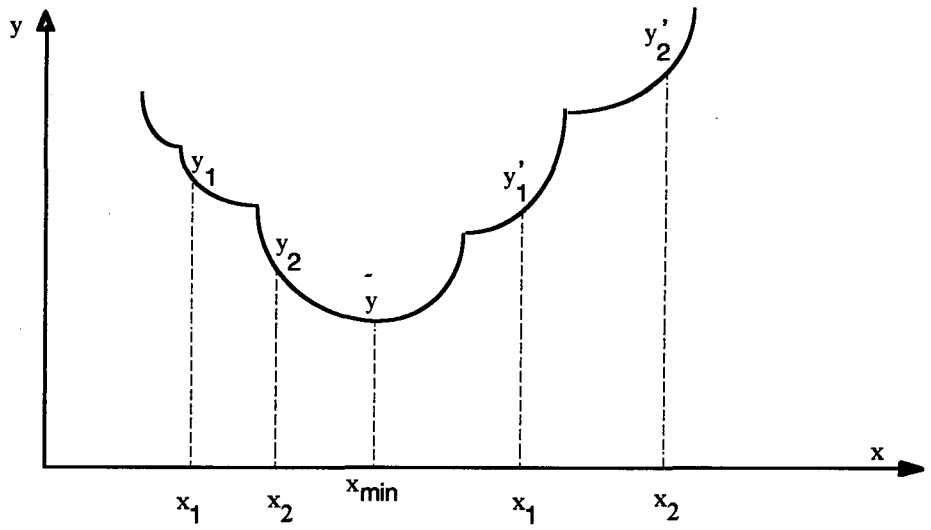


Figure 3 : Fonction unimodale.

Il est clair que pour une valeur de $x_1 < x_2$, deux cas peuvent se présenter :

$$\rightarrow x_2 < x_{min} \Leftrightarrow y_1 > y_2$$
$$\rightarrow x_1 > x_{min} \Leftrightarrow y'_1 < y'_2 \qquad \text{(V-10)}$$

Cette définition n'exige ni la continuité de la fonction f, ni sa dérivabilité. Lorsqu'une fonction est unimodale, nous pouvons déterminer son minimum par essais successifs, c'est le principe des méthodes directes (dichotomie).

3-2-1 Principe des méthodes de recherche par essais successifs

Le principe de la recherche consiste à prendre $x_1 < x_2$, trois cas peuvent alors se présenter :

* $y_1 > y_2$ alors $x_2 < x_{min}$ et il faut éliminer l'intervalle $[a, x_1]$ (figure 4a)
* $y_1 = y_2$ il faut éliminer les intervalles $[a, x_1]$ et $[x_2, b]$ (figure 4b)
* $y_1 < y_2$ alors $x_1 > x_{min}$ et il faut éliminer $[x_2, b]$ (figure 4c)

On applique ce principe de sélection de manière consécutive pour atteindre l'encadrement recherché pour caractériser le minimum.

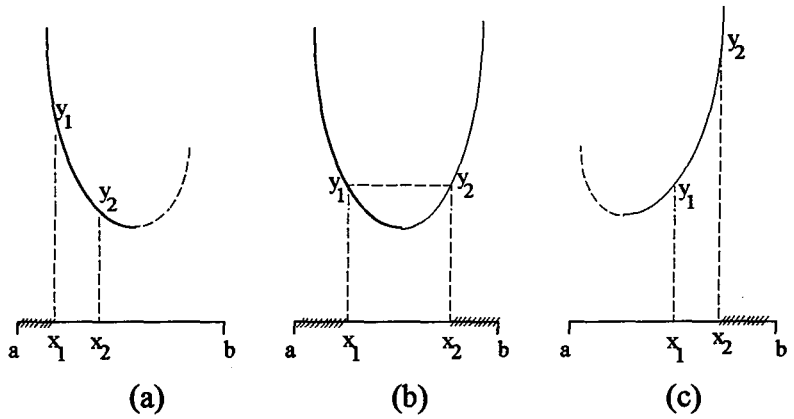


Figure 4 : Principe de localisation du minimum.

3-3 Méthodes interactives ou des gradients

Ces méthodes utilisent les dérivées premières ou secondes de la fonctionnelle d'erreur pour déterminer la nouvelle direction de recherche [RICHALET et al par exemple]. Ces dérivées peuvent être déterminées analytiquement ou numériquement. Le calcul numérique de la dérivée approchée $\frac{\partial \underline{e}\left(\underline{\beta}^e(\underline{\gamma})\ ;\ \underline{P}\right)}{\partial \underline{P}}$ est dépendant du choix de la petite variation ΔP_j sur l'un des paramètres. La solution classique consiste à choisir une variation ΔP_j qui est proportionnelle à P_j :

$$0.01\ P_j < \Delta P_j < 0.1\ P_j \qquad \text{(V-11)}$$

Parmi les variantes de ces méthodes, on trouve celle de NEWTON et celle de GAUSS-NEWTON [LEIGH(1983)] par exemple.

3-3-1 Généralités sur les méthodes des gradients

Définissons une fonctionnelle d'erreur $E_k(e)$, pour une propriété β_k considérée par la somme des carrés de $e_k\left(\underline{\gamma}\ ;\ \underline{P},\ n\right)$:

$$E_k(e) = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N}\left[e_k\left(\underline{\gamma}\ ;\ \underline{P},\ n\right)\right]^2 \qquad \text{(V-12)}$$

Par un développement au second ordre par rapport aux paramètres P_i, l'équation précédente s'écrit :

$$E_k(P_i + dP_i) = E_k(P_i) + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial E_k}{\partial P_i}\,dP_i + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 E_k}{\partial P_i^2}\,dP_i^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{p}\frac{\partial^2 E_k}{\partial P_i \partial P_i}\,dP_i\,dP_j\right] \qquad \text{(V-13)}$$

Or l'écart total entre modèle et expérience est égal à :

$$E_k = \int \left(\beta_k(\text{modèle}) - \beta_k(\text{expérience})\right)^2 dt \qquad \text{(V-14)}$$

$$\text{ou } E_k = \sum_{n=0}^{N} \left[\beta_k(\text{modèle au point n}) - \beta_k(\text{expérience au point n})\right]^2 \qquad \text{(V-15)}$$

Soit $\underline{\sigma}_D$ le vecteur gradient, ses composantes sont déterminées par l'équation suivante :

$$\frac{\partial E_k}{\partial P_i} = 2 \int \left(\beta_k(\text{modèle}) - \beta_k(\text{expérience})\right) \frac{\partial \beta_k(\text{modèle})}{\partial P_i} dt \qquad \text{(V-16)}$$

Les différentes méthodes qui utilisent ce principe sont celles de NEWTON, POWELL. Elles se différencient par l'ordre du développement de la fonction écart et par la façon de progresser vers le minimum. La direction de progression est déterminée en fonction du vecteur gradient $\underline{\sigma}_D$.

3-3-2 Conclusion

Ces méthodes ont un domaine de convergence très limité ; les calculs sont lourds et peu précis. Elles nécessitent le calcul de la matrice des dérivées secondes et son inversion (inversion qui n'est possible qu'à condition d'être proche du minimum [RICHALET et al]).

BOUDAREL, DELMAS et GUICHET (1968) présentent une méthode de GAUSS NEWTON dont le principe est d'utiliser une approximation qui ne fait pas intervenir les dérivées secondes mais uniquement les produits des dérivées premières. Cette méthode présente l'avantage considérable d'avoir une matrice définie loin du point nominal. Par conséquent, les paramètres de départ peuvent être relativement loin des paramètres nominaux.

3-4 Remarques

L'optimisation numérique des paramètres ainsi que l'unicité de la solution n'est pas toujours assurée. En fait, il n'existe pas un algorithme universel pour tous les problèmes rencontrés, la spécificité de chaque modèle joue un rôle déterminant dans le choix de la méthode et son adaptation.

Cette spécificité est liée:

- à la forte non-linéarité du modèle.
- à l'incompatibilité entre les données expérimentales et un modèle mal choisi.
- au nombre de paramètres à optimiser.
- à une sensibilité négligeable de l'un des paramètres vis à vis de l'action choisie

(perturbation $\underline{\gamma}$).

- à la non-unimodalité de la fonction erreur.
- à la non-unicité du minimum de cette fonction.
- à l'importance du bruit expérimental ou numérique.

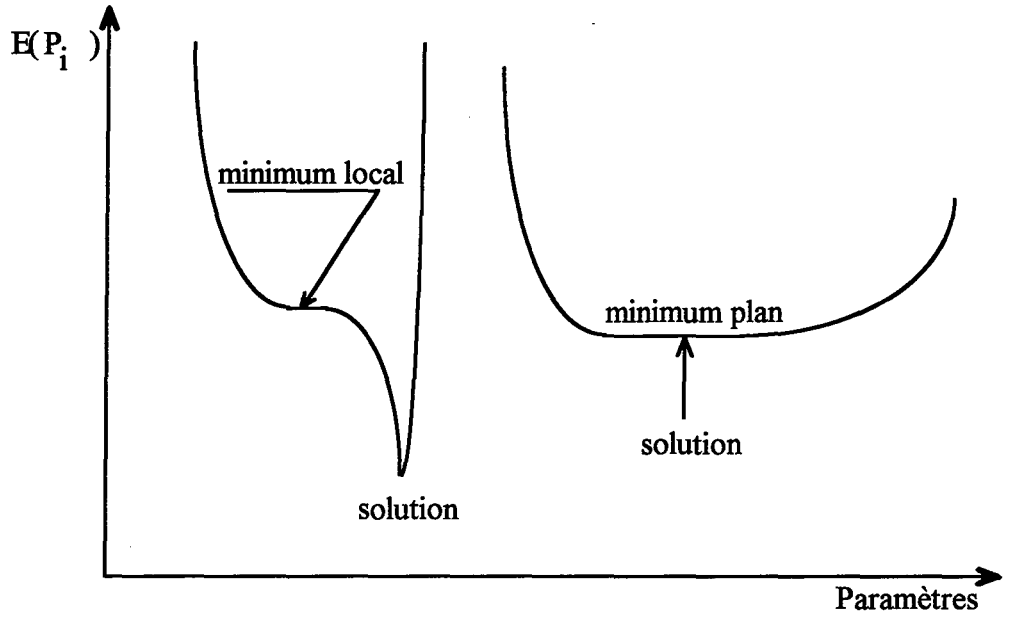


Figure 5 : Différents types des principaux minimums [NEUDER 1986].

L'application des méthodes d'identification aux problèmes non-linéaires des lois de comportement montre que les méthodes directes convergent en principe lentement. Nous avons choisi dans ce cadre la méthode de GAUSS-NEWTON qui par le produit des dérivées premières nous permet de tenir compte de l'effet de la dérivée seconde sans trop alourdir l'algorithme. Cette méthode assure en général une convergence rapide [NEUDER (1986) CHABOCHE (1980)].

4 METHODE DE GAUSS NEWTON

4-1 Introduction

Comme nous l'avons déjà mentionné, la détermination des coefficients d'une loi de comportement passe par la définition d'un écart entre courbes expérimentales et théoriques. L'optimisation n'est autre qu'une minimisation de cette fonction écart par rapport aux paramètres P_i. Nous nous limitons à la méthode des moindres carrés pour calculer l'écart total :

$$E = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[e(n)\right]^2 \qquad \text{(V-17)}$$

avec N : nombre de points expérimentaux.

L'écart instantané est déterminé par la différence des deux réponses :

$$e(n) = \beta_{th}(n, P_i) - \beta_{exp}(n) \qquad \text{(V-18)}$$

4-2 Mise en oeuvre de la méthode

Le meilleur jeu des coefficients devra minimiser la fonctionnelle d'erreur. Les bruits expérimentaux et théoriques font que ce minimum ne peut pas être nul. La méthode de GAUSS-NEWTON permet d'optimiser les paramètres par le calcul de la dérivée première de la fonction e(n) par rapport à ces paramètres.

Nous notons le i ème paramètre d'une k ème itération par P_i^k, l'erreur locale s'écrit au premier ordre :

$$e_n\left(P_i^k\right) = e_n\left(P_i^{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i} dP_i^k \qquad \text{(V-19)}$$

$$\text{avec} \quad dP_i^k = P_i^k - P_i^{k-1}$$

où p présente le nombre de paramètres P_i à identifier.

L'écart total s'écrit alors :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left[e_n\left(P_i^k\right)\right]^2 \qquad \text{(V-20)}$$

Ce nouveau jeu de paramètres doit abaisser l'écart total ; nous obtenons ainsi les p équations suivantes :

$$\frac{\partial E}{\partial P_L} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} 2\left[e_n\left(P_i^k\right)\right] \frac{\partial e_n\left(P_i^k\right)}{\partial P_L} = 0 \quad \text{avec} \quad L=1 \quad \text{à} \quad p \qquad \text{(V-21)}$$

En remplaçant $e_n\left(P_i^k\right)$ par la formule (V-19), nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial P_L} = \sum_{n=1}^{N} \left[e_n\left(P_i^{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i} dP_i^k \right] \left[\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \right] = 0 \qquad \text{(V-22)}$$

Soit :

$$\frac{\partial E}{\partial P_L} = \sum_{n=1}^{N} \left[e_n\left(P_i^{k-1}\right) \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} + \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i} dP_i^k \right] = 0 \qquad \text{(V-23)}$$

Le système d'équations linéaires à satisfaire est alors donné par :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i} dP_i^k \right] = -\sum_{n=1}^{N} e_n\left(P_i^{k-1}\right) \frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \qquad \text{(V-24)}$$

Finalement nous obtenons p équations à p inconnues $\left(dP_i^k\right)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L}\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i}\,dP_i^k\right]=-\sum_{n=1}^{N}e_n\left(P_i^{k-1}\right)\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \qquad \text{(V-25)}$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_{L,i}\,dP_i^k=\mathbf{B}_L \qquad \text{(V-26)}$$

avec

$$\mathbf{A}_{L,i}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i}\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \qquad \text{(V-27)}$$

$$\mathbf{B}_L=-\sum_{n=1}^{N}e_n\left(P_i^{k-1}\right)\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_L} \qquad \text{(V-28)}$$

Notons que la matrice **A** est symétrique, ces coefficients sont déterminés numériquement par un calcul approché de la dérivée partielle de la fonction écart :

$$\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i}=\frac{e_n\left(P_i+\Delta P_i\right)-e_n\left(P_i\right)}{\Delta P_i}=\frac{\left[\beta_{th}\left(n,P_i+\Delta P_i\right)-\beta_{exp}(n)\right]-\left[\beta_{th}\left(n,P_i\right)-\beta_{exp}(n)\right]}{\Delta P_i}$$

$$\frac{\partial e_n\left(P_i^{k-1}\right)}{\partial P_i}=\frac{\left[\beta_{th}\left(n,P_i+\Delta P_i\right)-\beta_{exp}\left(n,P_i\right)\right]}{\Delta P_i} \qquad \text{(V-29)}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, les valeurs raisonnables de ΔP_i peuvent être comprises entre :

$$\frac{P_i}{10}\le\Delta P_i\le\frac{P_i}{100} \qquad \text{(V-30)}$$

En principe, le nouveau jeu de paramètres $P_i^{k+1}=P_i^k+dP_i^k$ permet de mieux reproduire l'expérience. Nous arrêtons le calcul à la $k^{ème}$ itération lorsque nous estimons que le minimum est atteint. Le critère de convergence peut être choisi en fonction de l'écart relatif total $\frac{\Delta E}{E}\le m$ ou en fonction des variations relatives des paramètres $\frac{\Delta P_i}{P_i}\le m$.

La valeur numérique (m) choisie a priori doit prendre en compte le bruit expérimental et le bruit numérique. Nous avons choisi un test de convergence lié à la stabilité des paramètres, soit $\frac{\Delta P_i}{P_i} \leq m$. L'objectif recherché est d'optimiser les paramètres intrinsèques et non pas reproduire parfaitement l'expérience. Indiquons ici que nous n'avons pas exploré d'autres définitions possibles de E.

5 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE DNLR

D'après la relation constitutive établie dans le chapitre II, l'intégration de l'équation suivante permet de remonter à la réponse du modèle :

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(\sigma_{11})_j - (\sigma^r_{11})_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(V-31)}$$

D'une manière générale, la courbe de traction des métaux en fonction de la déformation se décompose de la manière suivante :

❶ Une partie linéaire due à la déformation purement élastique, cette partie est principalement pilotée par la valeur du module non relaxé $\mathbf{E^u}$.

❷ Un régime transitoire piloté principalement par les deux paramètres $(K_\sigma ; \Delta F^{+,r}_{max})$ au-delà de la limite élastique, si l'on néglige a priori K_S et K_W.

❸ Un régime stationnaire observé juste après le régime transitoire, régime pendant lequel la contrainte évolue linéairement en fonction de la déformation : la valeur du module relaxé "$\mathbf{E^r}$ " est alors responsable de la pente observée.

La caractérisation des essais uniaxiaux sur des métaux nécessite donc l'optimisation de quatre paramètres :

E^u: module non relaxé

E^r : module relaxé

$\Delta F^{+,r}_{max}$: énergie libre d'activation

K_σ : paramètre de non-linéarité temporelle

5-1 Identification sur des pseudo-expériences

Dans cette première partie, nous avons conduit deux séries de pseudo-expériences de traction en charge-décharge avec le jeu de paramètres suivant :

E^u = 80000 MPa, E^r = 2500 MPa, $\Delta F^{+,r}_{max}$ = 100000 J / Mol at, K_σ = -100 cm^3 / Mol at

L'une de ces séries correspond au calcul exact du modèle, l'autre a été construite en introduisant un bruit aléatoire de ± 5% sur les données précédentes. La figure 6 montre les données retenues pour conduire l'optimisation.

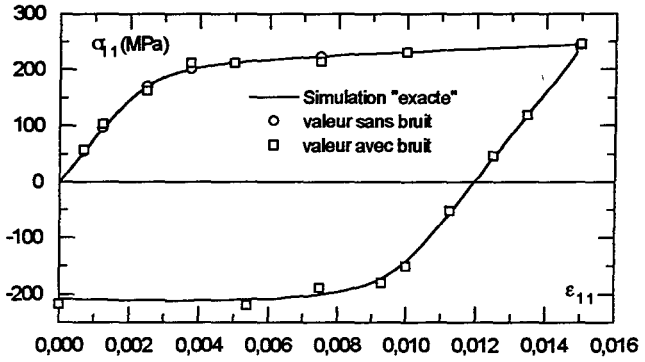


Figure 6 : Courbe de traction pseudo-expérimentale.

5-1-1 Identification des paramètres de départ sur les données non bruitées

Nous vérifions ici la capacité de la méthode retenue à retrouver les coefficients de départ. Les figures 7 montrent la convergence obtenue pour des valeurs initiales très différentes des coefficients. La convergence est atteinte en sept itérations pour un test $\frac{\Delta P_i}{P_i} \leq 1\%$.

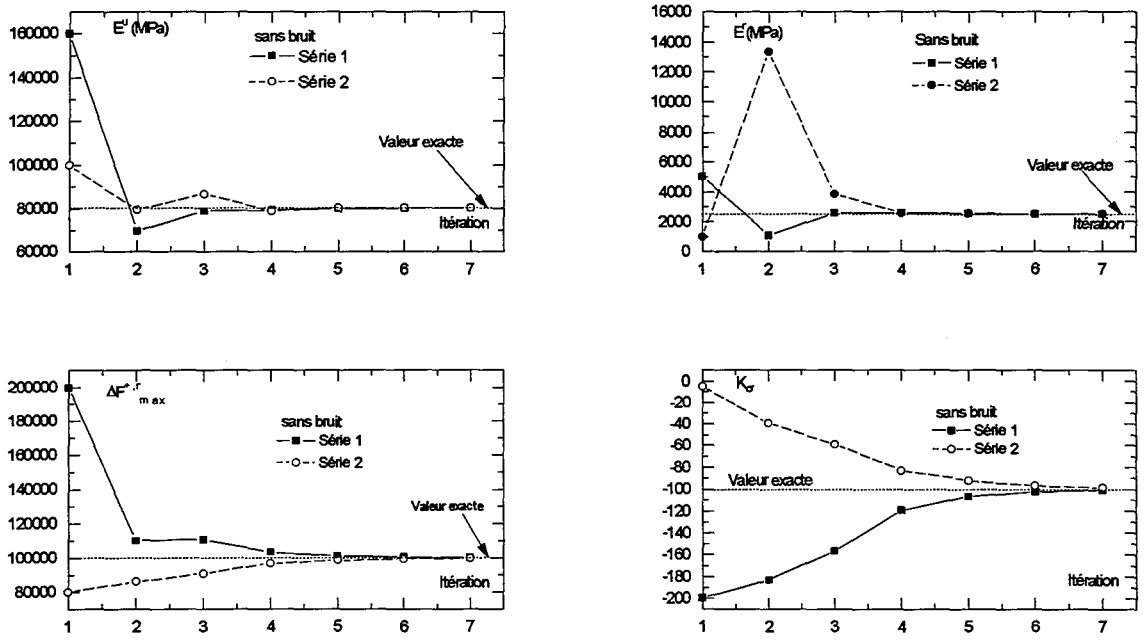


Figure 7 : Evolution des paramètres du modèle en fonction du nombre d'itérations.

Il faut cependant souligner que certains jeux testés impliquent une divergence dès la première itération. Par exemple, si tous les paramètres de départ sont maintenus comme précédemment sauf la valeur de $K_\sigma = -50\ cm^3 / Mol\ at$, la convergence n'est plus assurée. En effet, ce choix implique une réponse initiale très loin des données. Par contre la convergence vers la solution exacte a été assurée, pour chacune de nos tentatives, dès que le processus itératif était amorcé.

5-1-2 Optimisation à partir de données bruitées pour le chargement seul

Les figures 8 montrent que la convergence est assurée, mais que les valeurs finales sont entachées d'erreur par rapport aux coefficients initialement utilisés :

$$\frac{\Delta E^u}{E^u} \cong 4\% \ ; \ \frac{\Delta E^r}{E^r} \cong 10\% \ ; \ \frac{\Delta\left(\Delta F_{max}^{+,r}\right)}{\Delta F_{max}^{+,r}} \cong 3\% \ ; \ \frac{\Delta K_\sigma}{K_\sigma} \cong 15\%.$$

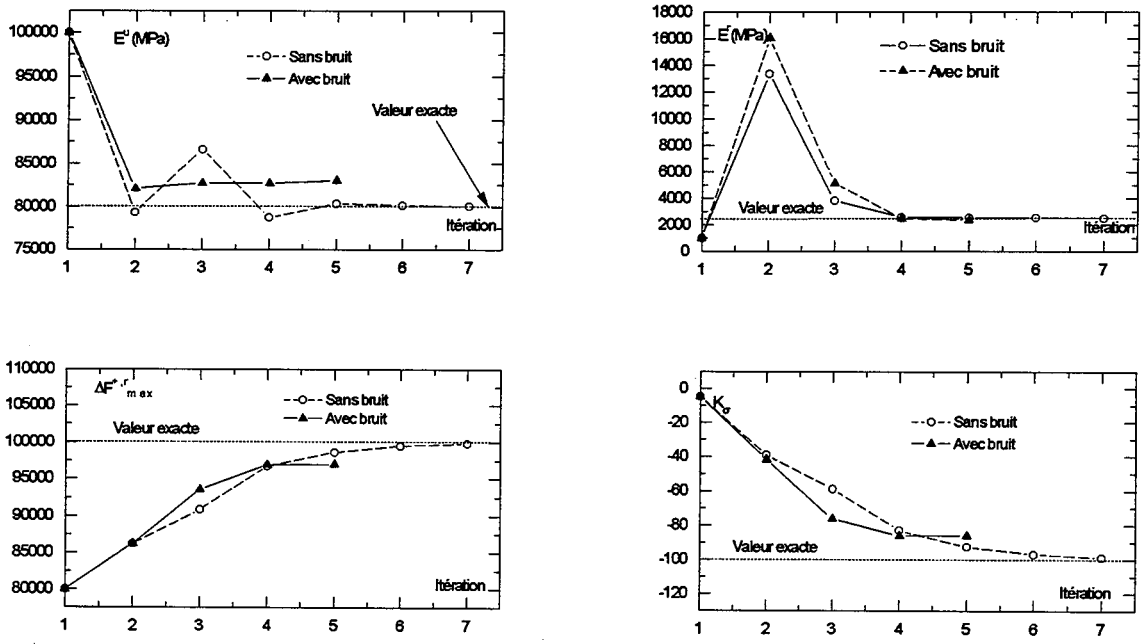


Figure 8 : Influence du bruit sur l'optimisation des paramètres.

5-1-3 Optimisation à partir de données bruitées pour la charge/décharge

Les figures 9 montrent que l'on améliore relativement l'estimation de E^u $\left(\frac{\Delta E^u}{E^u} = 1\%\right)$, sans affecter l'indétermination sur E^r $\left(\frac{\Delta E^r}{E^r} \cong 12\%\right)$. L'estimation de $\Delta F_{max}^{+,r}$ conduit à : $\frac{\Delta\left(\Delta F_{max}^{+,r}\right)}{\Delta F_{max}^{+,r}} \cong 4\%$,

pour K_σ on trouve $\frac{\Delta K_\sigma}{K_\sigma} \cong 21\%$.

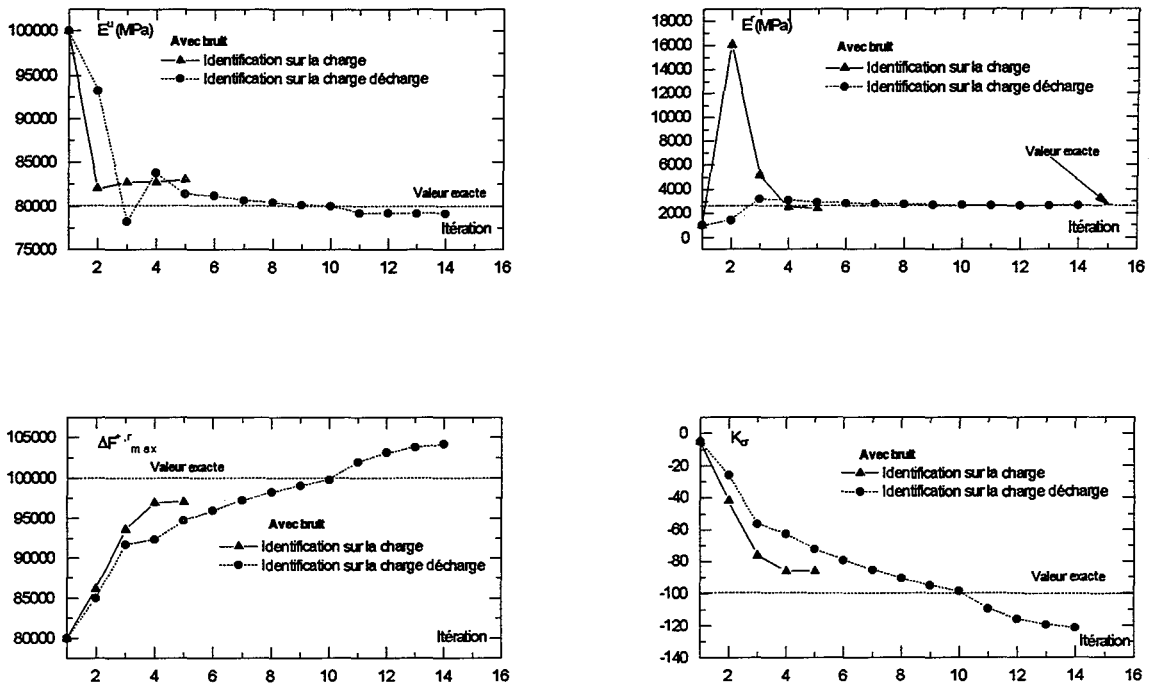


Figure 9 : Influence de la séquence de chargement sur l'optimisation des paramètres.

Remarquons que l'estimation pour la charge donne une valeur de $\Delta F_{max}^{+,r}$ par défaut et une valeur de K_σ par excès. Ici, on observe le contraire. La figure 10 compare les valeurs de $\Delta F_{max}^{+}(t)$ obtenues par simulation avec les trois couples $(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma)$. Cette erreur sur $\Delta F_{max}^{+}(t)$ ne dépasse pas 5%.

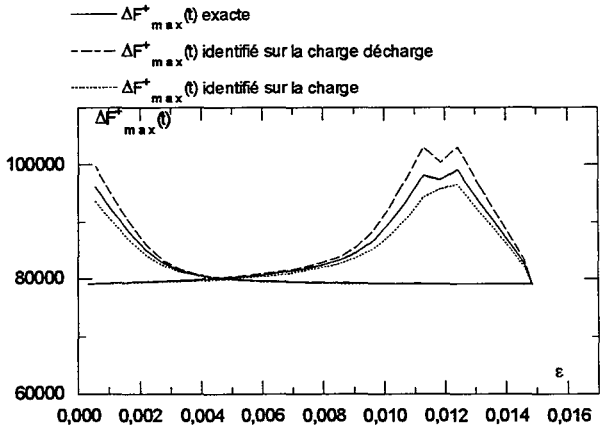
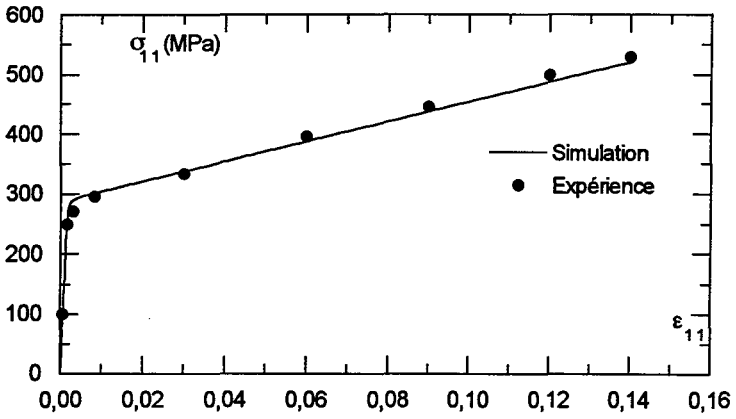


Figure 10 : Evolution de l'énergie libre d'activation pour les trois couples $(\Delta F_{max}^{+,r}\ ;\ K_\sigma)$.

En conclusion, il ne semble pas ici que la séquence de déchargement permette une meilleure optimisation des coefficients liés aux temps de relaxation. Cependant, elle améliore la qualité de l'estimation sur E^u.

5-2 Essai de traction uniaxiale sur l'acier inoxydable A316

La figure 11 montre une confrontation du modèle avec un essai de traction uniaxiale réalisé sur un acier inoxydable.



$E^u = 166960$ MPa

$E^r = 1660$ MPa

$\frac{\Delta F^{+,r}_{max}}{RT} = 64.7$

$\frac{K_\sigma}{RT} = -0.125\ (\text{MPa})^{-1}$

$\dot{\varepsilon}_{11} = 0.01\ s^{-1}$

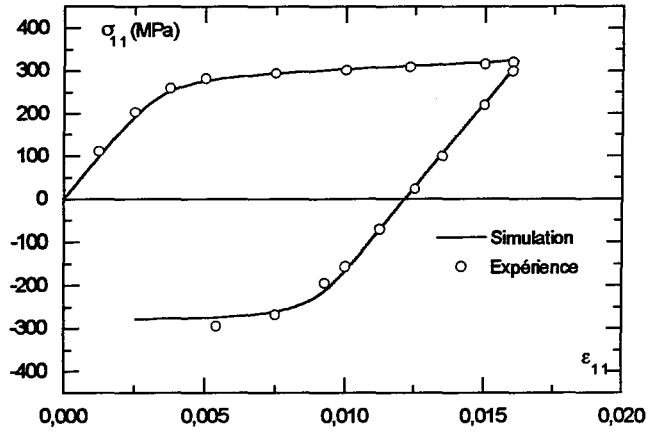
Figure 11 : Comparaison entre simulation et expérience pour un essai de traction sur l'acier inoxydable A316 [LEMAITRE et CHABOCHE 1985].

5-3 Essai de charge-décharge sur un alliage d'aluminium (AU4G)

Dans ce paragraphe, nous comparons l'optimisation des paramètres sur plusieurs séquences de chargement pour l'alliage AU4G étudié par ROUSSET (1985).

5-3-1 Identification sur la charge-décharge

La figure 12 compare la réponse du modèle aux résultats expérimentaux. L'optimisation des paramètres est obtenue sur la séquence de charge-décharge.



$E^u = 79330$ MPa

$E^r = 2850$ MPa

$T = 297$ K ; $\nu = 0.33$

$\Delta F^{+,r}_{max} = 109780$ J / Mol at

$K_\sigma = -108$ cm^3 / Mol at

$\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.00055$ s^{-1}

Figure 12 : Comparaison entre simulation et expérience pour un essai de traction sur l'AU4G [ROUSSET 1985].

L'accord est satisfaisant pour la reproduction de ces données (interpolation).

5-3-2 Identification sur la charge

Dans cette partie, nous avons conservé les valeurs précédentes de E^u et E^r et optimisé le couple $\left(K_\sigma \text{ (cm}^3\text{ / Mol at)} ; \Delta F^{+,r}_{max} \text{ (J / Mol at)}\right)$. La figure 13 compare les réponses calculées en charge/décharge pour les deux jeux de paramètres aux données expérimentales.

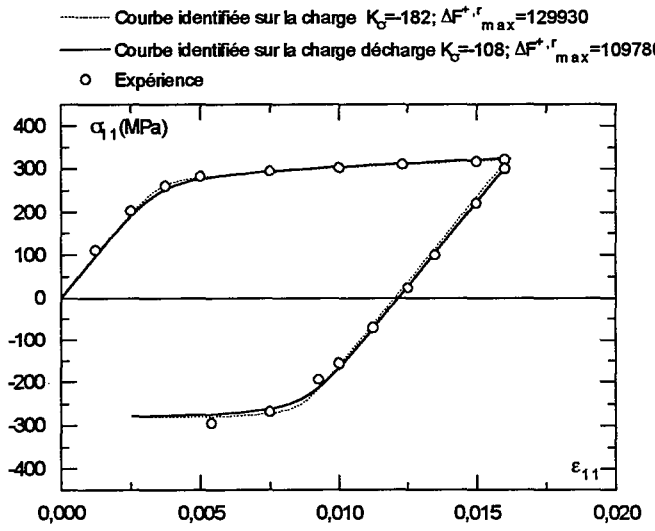


Figure 13 : Comparaison entre les deux résultats d'identification [ROUSSET 1985].

Dans les deux cas, l'accord avec l'expérience semble tout à fait satisfaisant. Nous observons que l'optimisation du couple $\left(K_\sigma ; \Delta F^{+,r}_{max}\right)$ dépend du chemin de chargement. La

figure 14-a montre les évolutions de $\Delta F^{+}_{max}(t)$ en fonction de la déformation. Nous avons porté sur la figure 14-b les évolutions du rapport $\frac{\Delta(\Delta F^{+}(t))}{\Delta F^{+}_{max}(t)} = \frac{K_{\sigma}(\sigma - \sigma^{r})}{\Delta F^{+}_{max}(t)}$ correspondant à ces simulations. Cette étude montre que la modélisation de la cinétique de relaxation est affectée par le choix de l'essai.

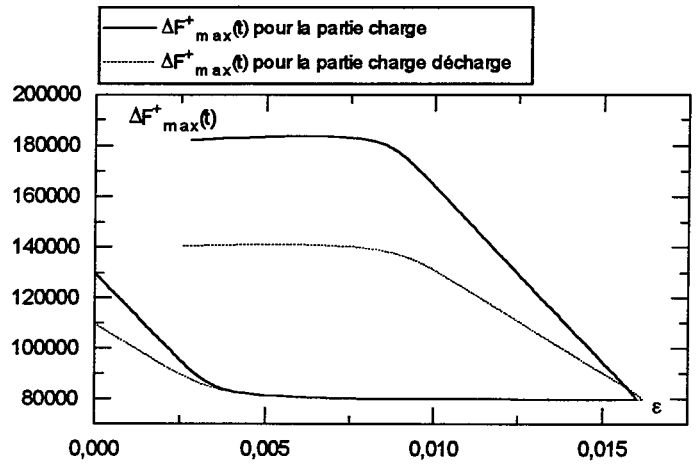


Figure 14-a : Variation de l'énergie libre d'activation.

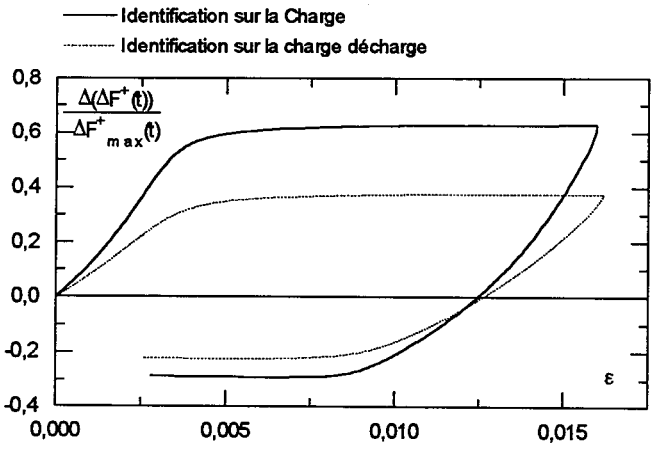


Figure 14-b : Variation relative de l'énergie d'activation en fonction de la déformation.

5-3-3 Conséquence sur la détermination des surfaces de charge et leur évolution

Les conséquences des optimisations précédentes sur les surfaces de charge sont examinées dans ce paragraphe. Pour cet alliage, nous disposons des données de ROUSSET (1985) concernant les surfaces de charge (OFFSET = 5 e^{-5}). Nous avons calculé les surfaces avec les deux jeux de paramètres précédents. La figure 15 compare nos simulations aux

expériences. La prise en compte des informations contenues dans la décharge améliore la qualité de cette prévision.

Notons que les résultats expérimentaux présentent une dissymétrie par rapport à l'axe de torsion. L'auteur suggère l'existence d'une légère anisotropie initiale du matériau vierge pour expliquer cette dissymétrie. Notre modélisation ne peut pas rendre compte d'une telle dissymétrie car nous avons fait l'hypothèse d'un matériau initialement isotrope.

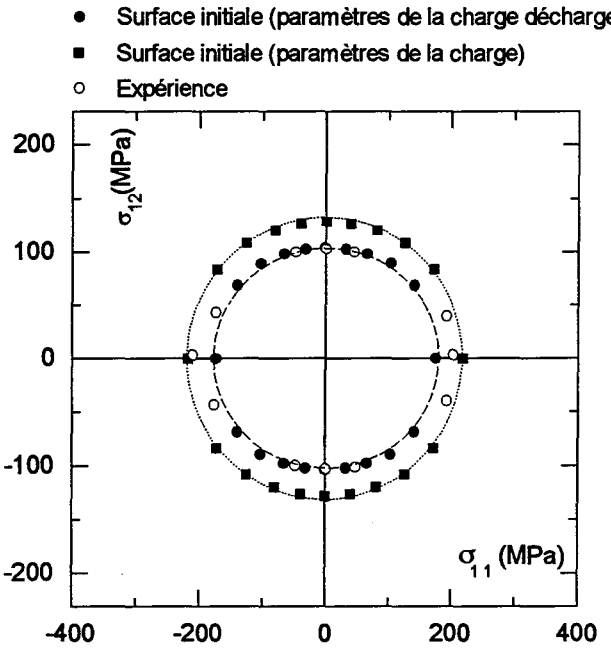


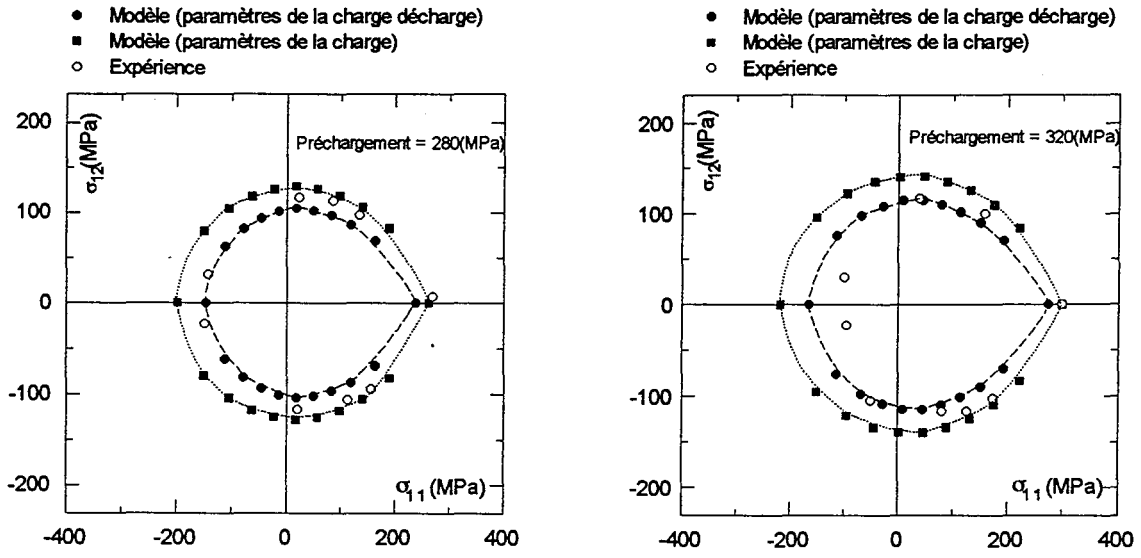
Figure 15 : Comparaison des surfaces de charge initiales.

Sur la figure 16 sont comparées nos simulations avec les données de ROUSSET lorsque des préchargements en traction ont été imposés (figure 16-a, 16-b). Ici encore, nous constatons une nette amélioration de la précision lorsque les informations concernant la décharge ont été intégrées dans la banque de données pour optimiser les paramètres. Les écarts observés peuvent être attribués à une optimisation insuffisante des paramètres, mais aussi :

- à l'anisotropie initiale qui n'est pas prise en compte dans nos calculs.
- à l'effet de mémoire de l'histoire de chargement (séquence imposée à l'échantillon). Nous ne disposons pas de cette histoire et en conséquence, chaque point a été construit avec un "nouvel échantillon".
- à la présence d'un durcissement ou adoucissement cyclique $(K_W \neq 0)$.

Or nous avons vu le rôle important du cumul de l'histoire sur les prévisions du modèle. Par ailleurs, ROUSSET a expérimentalement mis en évidence la sensibilité des surfaces de

charge à ce cumul sur l'AU4G. L'auteur a en effet étudié l'influence de la méthode de détection sur la surface de charge. Les résultats expérimentaux montre une "dispersion" de la limite élastique en compression d'environ 35 MPa (figure 17). Il faut également signaler le travail de CAILLETAUD (1992) qui identifie les coefficients de son approche micro-mécanique à partir des informations contenues dans les expériences de durcissement cyclique.



(a) (b)

Figure 16 : Comparaison entre modèle et expériences de ROUSSET (1985) pour deux histoires de préchargement.

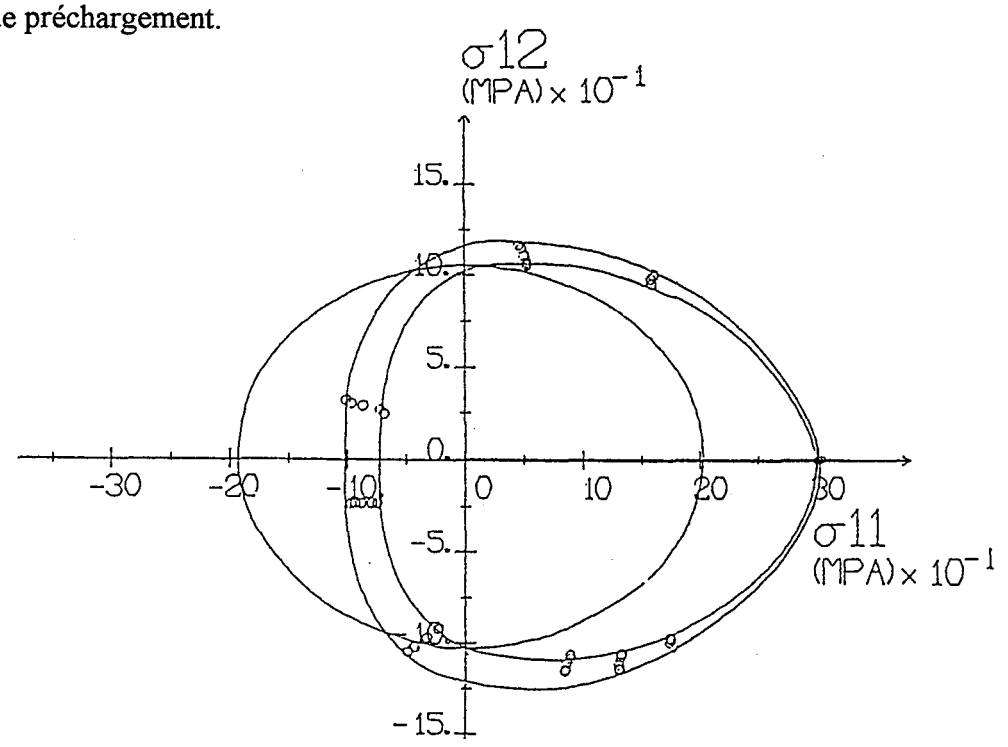


Figure 17 : Surface de charge obtenue par ROUSSET (1985) après un préchargement en contrainte (320 MPa).

5-4 Modélisation de quelques histoires thermomécaniques réalisées sur le PMMA

Comme nous l'avons décrit au chapitre III, la courbe de traction d'un polymère en fonction de la déformation se décompose généralement de la manière suivante :

① Une partie linéaire due à la déformation purement élastique : nous la modélisons comme dans le cas des métaux à partir un module non relaxé indépendant de la déformation.

② Lorsque la limite élastique est atteinte, le matériau présente un adoucissement plus ou moins important avec une chute de la contrainte "crochet de traction". Cette partie est modélisée par l'introduction du couplage entropique. En effet, l'entropie du milieu se trouve affectée par la déformation imposée :

$$\dot{S} = \alpha E^u \dot{\varepsilon}_{11} - \sum_j \frac{(S)_j - (S)_j}{\tau_j(T,t)} \qquad \text{(V-32)}$$

Nous admettons que le col d'activation est sensible à cette modification entropique :

$$\Delta F^+(t) = \Delta F^{+,r}_{max}(T) + K_\sigma(\sigma_{11} - \sigma^r_{11}) + K_S(S - S^r) \qquad \text{(V-33)}$$

$$\text{d'où } a(t) = \exp\left(\frac{K_\sigma(\sigma_{11} - \sigma^r_{11})}{RT}\right) \exp\left(\frac{K_S(S - S^r)}{RT}\right) \qquad \text{(V-34)}$$

K_S exprime la non-linéarité liée au couplage entropique (configuration du milieu).

Ce couplage conduit à l'instabilité plastique observée lors d'un essai de traction ou de cisaillement.

③ La déformation se poursuit ensuite de manière homogène sous charge croissante. Pour des grandes déformations, nous observons un durcissement accéléré de type hyperélastique. Ce durcissement est simulé en imposant que l'état relaxé obéit à la loi de MOONEY RIVLIN. La valeur de la contrainte à l'état d'équilibre est alors déterminée pour un essai de traction uniaxiale par l'expression suivante :

$$\sigma^r_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda_1}\right) \qquad \text{(V-35)}$$

λ_1 : extension principale

C_1 et C_2 : coefficients de MOONEY RIVLIN

La caractérisation des essais uniaxiaux des polymères nécessitera donc l'optimisation des paramètres suivant :

E^u : module non relaxé

C_1 et C_2 : contantes de MOONEY RIVLIN (à la place de E^r et ν)

$\Delta F^{+,r}_{max}$: énergie libre d'activation

K_σ : paramètre de non-linéarité lié à la contrainte

K_S : paramètre de non-linéarité lié à l'entropie

α : coefficient de dilatation

Nous avons tenté de modéliser les courbes expérimentales obtenues dans le groupe de G'SELL [G'SELL et al 1994]. G'SELL et al ont déterminé la courbe de traction en contrainte vraie- déformation vraie à la température 373 K pour laquelle le PMMA est à l'état vitreux. Ils ont également mesuré la réponse à 413 K, c'est à dire au-delà de la transition vitreuse. Le PMMA atteint alors le plateau caoutchoutique et il est raisonnable d'admettre que les temps de relaxation sont suffisamment faibles pour que l'on obtienne directement la réponse relaxée (en dehors de tout retard). Nous modélisons cette réponse à l'aide d'une loi de type MOONEY-RIVLIN. La figure 18 compare nos simulations à ces expériences avec les jeux de paramètres : $K_\sigma = -26$ cm^3 / Mol at, $K_S = 401$ cm^3 K / Mol at

***Trajet(1) à 373 K**: $E^u = 2640$ MPa ; $C_1 = 3.473$ MPa ; $C_2 = 0.002$ MPa ; $\Delta F^{+,r}_{max} = 103731$ J / Mol at $S^r = 21$ MPa K^{-1}; $\alpha = 0.0002$ K^{-1}

***Trajet(2) à 413 K**: $E^u = 2640$ MPa ; $C_1 = 3.473$ MPa ; $C_2 = 0.002$ MPa ; $\Delta F^{+,r}_{max} = 102900$ J / Mol at $S^r = 18$ MPa K^{-1}; $\alpha = 0.0002$ K^{-1}

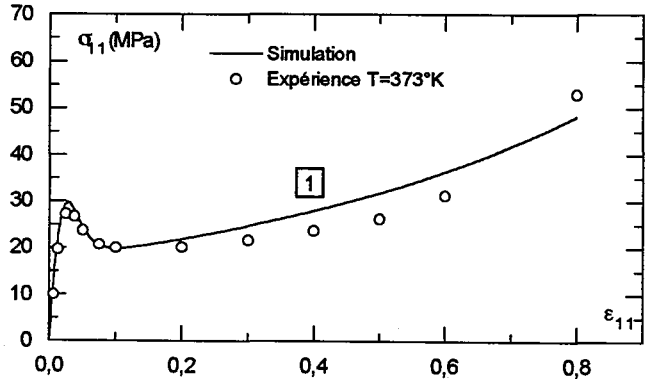


Figure 18 : Comportement du PMMA en traction uniaxiale (G'SELL et al1994).

Il est intéressant de commenter ici la valeur de l'entropie spécifique optimisée par notre procédure pour les expériences à l'état vitreux. $S^r = 21$ MPa K^{-1} (soit 21 10^6 J m^{-3} K^{-1}).

Les ordres de grandeur de l'entropie sont plus aisés à saisir lorsque l'on se réfère à une mole d'atome. Nous admettons que le volume atomique est voisin de 1 $\overset{0}{A}^3$. Donc une mole d'atome occuperait un volume voisin de 6.02 10^{-7} m^3. Ainsi l'entropie "relaxée" par rapport à l'essai vaudrait :

$S^r = 21\ 10^6 \times 6.02\ 10^{-7} \cong 12.6\ J/(\text{Mol at K})$. Cette valeur est tout à fait classique pour les solides à la température considérée [CUNAT (1985)].

La figure 19 correspond à une expérience de traction réalisée à 413 K (plateau caoutchoutique) jusqu'à une déformation de 40%. L'échantillon est ensuite refroidi jusqu'à T=373 K, puis la traction est poursuivie. L'optimisation des paramètres sur cette séquence de chargement conduit à la même valeur de $\Delta F^{+,r}_{max}$ (à moins de 1% près) alors que S^r correspond à 10.8 J/(Mol at), soit environ 15% d'écart. Cet écart entraîne une diminution de l'amplitude du crochet de traction qui n'est donc pas imputable à une indétermination sur les coefficients S^r. Si l'on admet que le refroidissement en cours d'essai, suivi du recuit de relaxation imposé dans la chambre climatique, conduit à une structure vitreuse plus relaxée que celle de l'état initial, les valeurs de S^r déterminées par notre optimisation sont cohérentes.

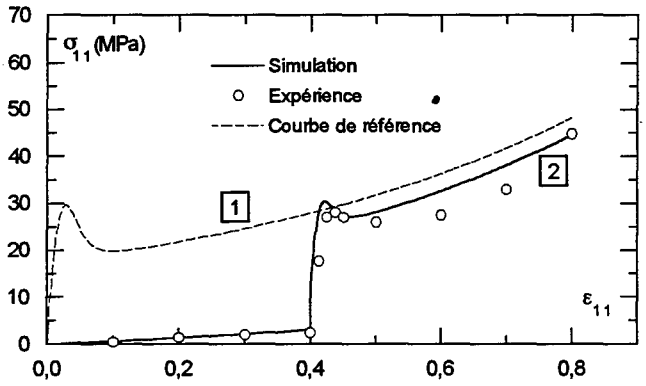


Figure 19 : Courbe contrainte-déformation observée pour un saut de température de 140°C à 100°C (G'SELL 1994).

5-5 Essai de traction et de cisaillement sur le PEEK

Dans ce paragraphe, nous montrons comment l'approche suivie permet d'établir une corrélation entre le comportement plastique des polymères en traction uniaxiale et en cisaillement simple. Les figures (20, 21) comparent les courbes obtenues par le modèle aux résultats expérimentaux obtenus pour le polyéther éther cétone (PEEK qui ne présente pas de crochet de traction à cette température de 453 K). Les six paramètres déterminés par la méthode de GAUSS NEWTON à partir des courbes expérimentales ont les valeurs suivantes :

$E^u = 590$ MPa

$C_1 = 8.5$ MPa ; $C_2 = -3.5$ MPa

$\nu = 0.45$

$\Delta F_{max}^{+,r} = 136990$ J / Mol at

$K_\sigma = -50$ cm^3 / Mol at

$T = 453$ K ; $\dot{\varepsilon}^{eq} = 0.0005$ s^{-1}

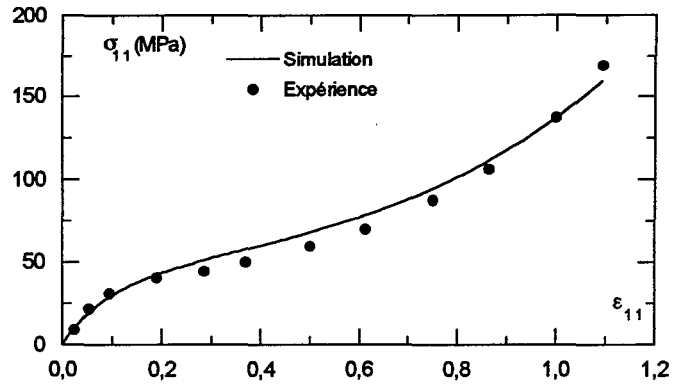


Figure 20 : Comparaison de la courbe de traction expérimentale [DAHOUN 1993] avec celle calculée par le modèle DNLR.

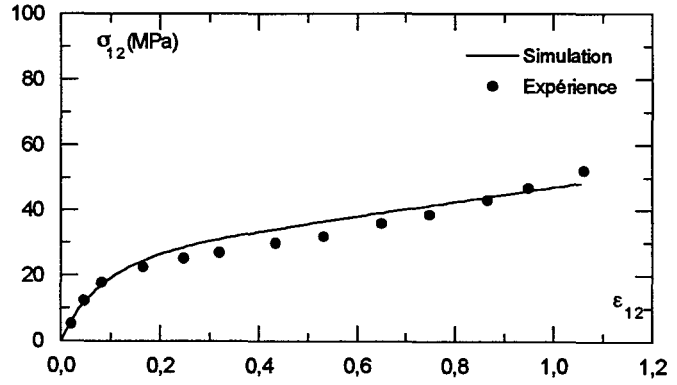


Figure 21 : Comparaison de la courbe de cisaillement expérimentale [DAHOUN 1993] avec celle calculée par le modèle DNLR.

La valeur négative de C_2 qui permet de mieux décrire l'essai de traction n'affecte pas la réponse du modèle en cisaillement à condition d'imposer :

$2(C_1 + C_2) = G^r$ avec G^r : module de cisaillement à l 'état relaxé.

5-6 Essai de traction sur l'IN100 à plusieurs vitesses de déformation

La figure 22 montre une confrontation du modèle avec un essai de traction uniaxiale réalisé pour plusieurs vitesses de déformation. L'optimisation est conduite afin d'assurer la cohérence entre les réponses du modèle et les résultats expérimentaux pour cinq vitesses de déformation. Les valeurs obtenues sont :

$E^u = 129406$ MPa

$E^r = 1639$ MPa

$T = 1273$ K

$\Delta F^{+,r}_{max} = 439189$ J / Mol at

$K_\sigma = -230$ cm^3 / Mol at

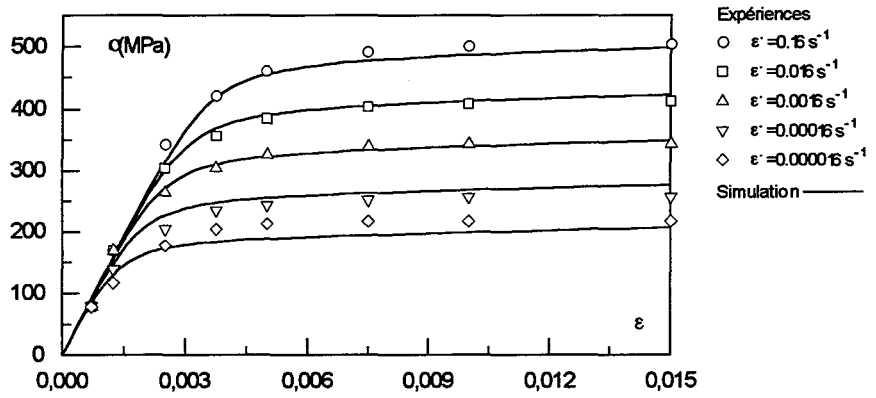


Figure 22 : Comparaison entre simulation et expérience pour l'IN100 à 1273 K [d'après CHABOCHE 1978].

Soulignons que l'optimisation d'une seule expérience (par exemple pour la vitesse de déformation 0.16) conduit aux valeurs 103221 J / Mol at pour $\Delta F^{+,r}_{max}$ et -80 cm^3 / Mol at pour K_σ, valeurs complètement différentes par rapport à ces résultats. Cet exemple confirme encore la nécessité de mener l'optimisation avec une banque de données suffisamment riche. Il n'est cependant pas exclu qu'il soit nécessaire d'introduire un effet spécifique de la vitesse sur $\left(\Delta F^{+,r}_{max}\right)$.

6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes de l'optimisation et nous avons détaillé la méthode de GAUSS NEWTON retenue pour traiter notre problème.

Nous avons montré la difficulté d'obtenir les paramètres caractéristiques de notre modèle hautement non linéaire. En particulier, il est indispensable de combiner plusieurs essais afin de constituer une base de données la plus riche possible en informations vis à vis de l'action des différents paramètres sur la réponse observée.

La typologie des réponses expérimentales peut guider efficacement vers le choix de certains paramètres. Par exemple, un durcissement de type hyperélastique aux grandes déformations ne saurait être interprété avec un module E^r constant, la présence ou l'absence d'un crochet de traction renseigne sur le "poids" du terme $K_s(S-S^r)$ sur la réponse, ...

Dans certains cas où la perturbation fait apparaître soit une sensibilité négligeable d'un ou plusieurs paramètres, soit des effets de compensation, l'identification n'est plus univoque. Le choix des expériences types pour l'optimisation parait donc déterminant vis à vis des paramètres à optimiser.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il n'existe pas d'algorithme universel pour l'identification, l'art de l'opérateur intervient considérablement. Identifier un ou deux paramètres peut faire l'objet d'une mathématique rigoureuse. En identifier plus relève du domaine de la procédure numérique et de l'optimisation assistée par ordinateur [LEMAITRE et CHABOCHE 1985].

La solution déterminée est-elle unique ? L'exemple de l'AU4G, traité précédemment, infirme cette hypothèse. Il est par conséquent nécessaire de développer une méthodologie efficace d'optimisation en choisissant a priori les séquences et chemins de chargements les mieux adaptés. Des études sont en cours au sein de l'équipe. L'analyse de CAILLETAUD (1992) semble indiquer la pertinence de la prise en compte du durcissement par écrouissage cyclique.

Cependant, les résultats d'identification que nous avons pu conduire sur quelques expériences montrent l'aptitude de la théorie thermodynamique de la relaxation à décrire et à prévoir des comportements rhéologiques variés et complexes.

Conclusions et perspectives

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Pour conclure ce travail, nous allons réexaminer nos objectifs de départ et commenter brièvement l'état des résultats obtenus.

❶ **Le premier objectif** était de proposer une application du modèle DNLR à une sollicitation mécanique isotherme à déformation imposée. Le travail qu'il nous restait à mettre en oeuvre dans le cadre du formalisme général portait sur :

❶-① une définition de la matrice de rigidité relaxée, adaptée aux grandes déformations rencontrées dans les polymères.

Nous avons proposé d'intégrer une matrice $\underline{\underline{\underline{a}}}^r$ *à coefficients évolutifs avec la déformation imposée, en adoptant les concepts développés par MOONEY RIVLIN pour décrire l'hyperélasticité des élastomères. Le travail a été réalisé pour décrire les chargements unidirectionnels. L'accord obtenu confirme l'intérêt de cette voie d'étude : en effet, la modélisation reproduit bien les différences drastiques observées entre les essais de traction et de cisaillement par exemple.*

❶-② une modélisation commune de l'évolution du col d'activation pour chaque processus de façon à intégrer les effets coopératifs.
Ici, nous avons développé deux grandes familles de couplage suggérées par le formalisme général :

❶-②-1 couplage entre col d'activation et variation d'entropie engendrée par la déformation : $K_S\left(S - S^r\right)$.

Le couplage conduit au crochet de traction qui apparaît ainsi lié à l'évolution de la configuration (de défauts) en cours de déformation.

❶-②-2 couplage entre col d'activation et énergie due à la déformation. Nous avons suggéré l'existence de deux types de couplages : $K_\sigma\left(\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right) + \int K_W \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r\right) : d\underline{\underline{\varepsilon}}$.

❶-②-2-a un couplage avec l'écart instantané à l'équilibre : $K_\sigma\left(\sigma^{eq} - \sigma^{eq,r}\right)$.

Pour ce faire, nous introduisons un formalisme en énergie de déformation qui se résume à une mesure de l'écart entre

contrainte équivalente actuelle et contrainte équivalente relaxée. La pondération du terme lié au tenseur hydrostatique des contraintes permet de "régler" la distorsion des surfaces de charge par rapport à l'ellipse de VON MISES. Cet effet est indispensable pour rendre compte du comportement des polymères qui ne sont pas des matériaux à compacité maximale. Un coefficient de pondération nul permet de retrouver le critère de VON MISES caractéristique des matériaux à forte compacité comme les métaux.

Ce couplage joue un rôle fondamental sur l'écrouissage, sur l'effet de BAUSCHINGER et sur le phénomène de rochet par exemple. Il est également pour une grande part dans les distorsions des surfaces de plasticité observées pour des histoires de chargement complexes.

❶-②-2-b. un couplage avec l'énergie cumulée en cours de déformation : $\int K_w \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r\right) : d\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Ce couplage engendre le durcissement ou l'adoucissement cyclique. Il peut conduire à la saturation de ces phénomènes.

❷ **Le second objectif** était de proposer une modélisation de la plasticité fondée sur la thermodynamique de la relaxation qui soit indépendante de toute notion de seuil, donc de tout critère et de toute formulation explicite de règle d'écoulement. Cet objectif a été atteint puisque toutes nos simulations sont cohérentes avec une grande variété d'observations expérimentales. Nous avons pu dégager quelques observations intéressantes ; par exemple :

- Le respect du critère de VON MISES apparaît comme fortement lié aux fortes barrières d'activation pour les processus les plus lents pour les matériaux compacts (x=0). Dans ce cas, le trajet de chargement (proportionnel ou séquentiel par exemple) affecte peu les surfaces limites. Au contraire, pour les faibles barrières d'activation, le trajet de chargement joue un rôle non négligeable sur la forme des surfaces de plasticité initiales qui s'éloignent des prévisions du critère de VON MISES.
- Pour les matériaux non compacts $(x \neq 0)$, nous observons un glissement de la surface de charge vers les fortes compressions. Ceci est conforme aux mesures effectuées sur les polymères.
- La distorsion des surfaces de charge induite par le cumul de préchargement est bien prévue par les simulations. Elle semble liée pour une part aux effets de mémoire dus à la distribution des processus et d'autre part aux effets de mémoire inclus dans le couplage

coopératif qui lie, à chaque instant, l'ensemble des temps de relaxation. Ces effets de mémoire sont également responsables des divers comportements caractéristiques des essais unidirectionnels : crochet de traction, rochet, durcissement isotrope, cinématique, cyclique, ...

Cependant, pour entrer dans le domaine des outils de l'ingénierie, le travail d'identification des paramètres, amorcé ici, doit être poursuivi et amplifié. Il est fort probable qu'il devra être mené en liaison étroite avec l'introduction plus précise et plus fine des concepts de la physique de la déformation. A cet effet, deux axes majeurs doivent être approfondis :

⌦ *la modélisation de la matrice relaxée* $\underline{\underline{a}}^r$, qui joue un rôle déterminant, doit être reprise à la lumière de modèles microphysiques existants ou à développer, surtout pour les grandes déformations des polymères.

⌦ *la modélisation de l'évolution temporelle de l'état transitoire activé* doit pouvoir être nettement améliorée. En particulier les concepts physiques utilisés devraient être précisés et affinés par les connaissances des physiciens de la déformation. Il est probable qu'une réflexion sur la signification profonde des processus découplés et sur la nature même des quelques mécanismes de base qui les génèrent permettra de progresser de manière déterminante dans la compréhension de l'écrouissage. En ce sens, notre analyse de la distribution des contraintes associées à chaque processus pour toutes déformations devrait être à même de guider la réflexion.

Pour conclure, ce travail apporte une contribution déterminante pour la validation du modèle DNLR dans le domaine des comportements plastique et viscoplastique sous déformation imposée. Il paraît intéressant de rappeler ici l'extrême généralité de cette approche DNLR qui couvre en fait tous les domaines de la physique du comportement, que les sollicitations soient de nature mécanique, thermique, électrique, magnétique, chimique, ...
Elle contient ainsi une ouverture essentielle vers le couplage entre comportement mécanique et transition de phases, vers le vieillissement physique (système fermé hors équilibre structural) ou chimique (système ouvert adapté pour traiter le rôle de l'humidité par exemple sur les milieux non compacts). Enfin le lien qui semble se dessiner avec les approches micro-macro en fait un outil nouveau, prometteur par ses capacités prédictives et la physique de base qu'il contient.

Annexe

ANNEXE A

A-1 Formulation des contraintes en fonction des énergies libres et des invariants de la déformation 202
A-2 Quelques expressions des énergies libres de déformation f des matériaux incompressibles 205
A-2-1 Approche phénoménologique 205
A-2-2 Approche thermo-statistique 206
A-2-2-1 Entropie d'une chaîne macromoléculaire et sa variation avec la déformation 206
A-2-2-2 Calcul de l'entropie du réseau 207
A-3 Relation contrainte-déformation dans quelques cas particuliers 208
A-3-1 Traction uniaxiale 208
A-3-2 Cisaillement simple 209

Cette annexe décrit différentes approches utilisées pour modéliser l'élasticité caoutchoutique en grande déformation. Ce type d'élasticité joue un rôle important dans un grand nombre de matériaux. Nous nous intéressons ici à un état de déformation triaxiale. Pour le traitement hors axes principaux, on peut se référer aux travaux de GREEN et ADKINS (1960) par exemple.

A-1 FORMULATION DES CONTRAINTES EN FONCTION DES ENERGIES LIBRES ET DES INVARIANTS DE LA DEFORMATION

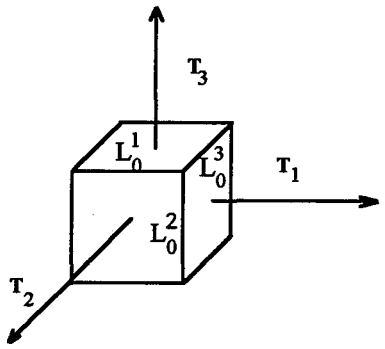


Figure 1 : Représentation du volume initial considéré.

Considérons un volume de côté L_0^1, L_0^2, L_0^3 suivant les axes x,y,z respectivement, transformé sous l'action des charges en un volume de côté L_1, L_2, L_3. Soient T_1, T_2, T_3 les forces exercées sur les faces de ce volume à l'état déformé. L'énergie libre de déformation (énergie de HELMHOLTZ) s'écrit donc :

$$dF = T_1\, dL_1 + T_2\, dL_2 + T_3\, dL_3 \qquad \text{(A-1)}$$

Or

$$L_i = \lambda_i\, L_i^0 \;\Rightarrow\; dL_i = (d\lambda_i)\, L_i^0 \text{ ou encore } \underline{L} = \underline{\underline{\lambda}}\, \underline{L}^0 \qquad \text{(A-2)}$$

$$dF = T_1\, L_1^0\, d\lambda_1 + T_2\, L_2^0\, d\lambda_2 + T_3\, L_3^0\, d\lambda_3 \qquad \text{(A-3)}$$

Les contraintes de CAUCHY correspondant à l'état déformé (contrainte vraie) sont :

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{L_2\, L_3}$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{L_1\, L_3} \qquad \text{(A-4)}$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{L_1\, L_2}$$

L'expression de l'énergie libre de HELMHOLTZ devient :

$$dF = \sigma_1 L_2 L_3 L_1^0 \, d\lambda_1 + \sigma_2 L_1 L_3 L_2^0 \, d\lambda_2 + \sigma_3 L_1 L_2 L_3^0 \, d\lambda_3 \qquad \text{(A-5)}$$

Soit le volume initial avant déformation $V^0 = L_1^0 L_2^0 L_3^0$

$$dF = \sigma_1 \lambda_2 \lambda_3 V^0 d\lambda_1 + \sigma_2 \lambda_1 \lambda_3 V^0 \, d\lambda_2 + \sigma_3 \lambda_1 \lambda_2 V^0 \, d\lambda_3 \qquad \text{(A-6)}$$

Or $V = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 V^0 = J V^0$ (J est le Jacobien de la transformation $J = \det \underline{\underline{\lambda}}$)

$$dF = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} V \, d\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} V \, d\lambda_2 + \frac{\sigma_3}{\lambda_3} V \, d\lambda_3 \qquad \text{(A-7)}$$

$$\begin{cases} V\sigma_1 = \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} \\ V\sigma_2 = \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} \\ V\sigma_3 = \lambda_3 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_3} \end{cases} \qquad \text{(A-8)}$$

Soit f l'énergie libre de HELMHOLTZ par unité de volume non déformé avec $J = \dfrac{V}{V^0}$ nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} J\sigma_1 = \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \ln \lambda_1} \\ J\sigma_2 = \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_2} = \dfrac{\partial f}{\partial \ln \lambda_2} \\ J\sigma_3 = \lambda_3 \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_3} = \dfrac{\partial f}{\partial \ln \lambda_3} \end{cases} \qquad \text{(A-9)}$$

où $J\underline{\underline{\sigma}}$ n'est autre que le tenseur de KIRCHHOFF $\underline{\underline{\tau}} = J\underline{\underline{\sigma}}$.

Dans le cas d'une déformation à volume constant (V= V°), nous obtenons d'après la relation (A-7) :

$$df = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} \, d\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} \, d\lambda_2 + \frac{\sigma_3}{\lambda_3} \, d\lambda_3 \qquad \text{(A-10)}$$

Ainsi la mesure naturelle de la déformation associée à $\underline{\underline{\sigma}}$ est-elle donnée par la déformation logarithmique $\left(\dfrac{d\lambda_i}{\lambda_i} = d \ln \lambda_i \right)$. L'énergie libre de HELMHOLTZ s'écrit alors $f(T, \ln\lambda_i)$.

L'énergie libre f étant par ailleurs fonction des invariants de la déformation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} df = &\frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1}d\lambda_1 + \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2}d\lambda_2 + \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_3}d\lambda_3 \\ &+\frac{\partial f}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1}d\lambda_1 + \frac{\partial f}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2}d\lambda_2 + \frac{\partial f}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_3}d\lambda_3 \\ &+\frac{\partial f}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \lambda_1}d\lambda_1 + \frac{\partial f}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \lambda_2}d\lambda_2 + \frac{\partial f}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \lambda_3}d\lambda_3 \end{aligned} \qquad \text{(A-11)}$$

où I_1, I_2 et I_3 sont respectivement le premier, le deuxième et le troisième invariant du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{\lambda}}^T$. Les invariants de ce tenseur sont :

$$I_1 = tr\underline{\underline{B}} = tr\left(\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{\lambda}}^T\right) \qquad \text{(A-12)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(tr\underline{\underline{B}}\right)^2 - tr\underline{\underline{B}}^2\right] \qquad \text{(A-13)}$$

$$I_3 = \det\left(\underline{\underline{B}}\right) \qquad \text{(A-14)}$$

D'où $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2$, $I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$

Soit :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 \;\; ; \;\; \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_2 \;\; ; \;\; \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_3} = 2\lambda_3 \qquad \text{(A-15)}$$

Pour un matériau incompressible $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1)$, on obtient :

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \qquad \text{(A-16)}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1} = -\frac{2}{\lambda_1^3} \;\; ; \;\; \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2} = -\frac{2}{\lambda_2^3} \;\; ; \;\; \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_3} = -\frac{2}{\lambda_3^3} \qquad \text{(A-17)}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 \;\; ; \;\; \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_2\lambda_1^2\lambda_3^2 \;\; ; \;\; \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_3} = 2\lambda_3\lambda_1^2\lambda_2^2 \qquad \text{(A-18)}$$

Avec l'hypothèse de l'incompressibilité $\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \Rightarrow \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3} = 0\right)$, ces dernières relations vérifient:

$$dI_3 = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_i}d\lambda_i = 0 \qquad \text{(A-19)}$$

Ainsi la relation (A-11) devient :

$$\begin{aligned} df = 2 &\left(\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial I_1} d\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial I_1} d\lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial I_1} d\lambda_3 \right) \\ -2 &\left(\frac{1}{\lambda_1^3} \frac{\partial f}{\partial I_2} d\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2^3} \frac{\partial f}{\partial I_2} d\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3^3} \frac{\partial f}{\partial I_2} d\lambda_3 \right) \\ +2\, I_3 &\left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial I_3} d\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial I_3} d\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial I_3} d\lambda_3 \right) \end{aligned} \qquad \text{(A-20)}$$

Par identification terme à terme avec la relation $df = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\sigma_3}{\lambda_3} d\lambda_3$, nous obtenons l'expression des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\left(\lambda_1^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial f}{\partial I_3} \right) \\ \sigma_2 &= 2\left(\lambda_2^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial f}{\partial I_3} \right) \\ \sigma_3 &= 2\left(\lambda_3^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_3^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial f}{\partial I_3} \right) \end{aligned} \qquad \text{(A-21)}$$

Pour un matériau incompressible, l'énergie libre de HELMHOLTZ n'est fonction que de I_1 et I_2. Dans ce cas, les contraintes sont déterminées relativement à une pression hydrostatique p :

$$p = 2\, I_3 \frac{\partial f}{\partial I_3} \text{ avec } I_3 = 1 \quad \left(p = \frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\partial F}{\partial\, I_3 V^0} = \frac{\partial f}{\partial I_3} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\left(\lambda_1^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} \right) + p \\ \sigma_2 &= 2\left(\lambda_2^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} \right) + p \\ \sigma_3 &= 2\left(\lambda_3^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_3^2} \frac{\partial f}{\partial I_2} \right) + p \end{aligned} \qquad \text{(A-22)}$$

La pression hydrostatique p compense la perte d'information $(I_3 = 1)$ sur la partie sphérique du tenseur des contraintes [SIDOROFF 1984].

A-2 QUELQUES EXPRESSIONS DES ENERGIES LIBRES DE DEFORMATION f DES MATERIAUX INCOMPRESSIBLES

A-2-1 Approche phénoménologique

Les considérations sur la régularité de f [GREEN et ADKINS 1960] impliquent que f doit être une fonction indéfiniment dérivable par rapport aux invariants des tenseurs de dilatation. La forme générale peut être exprimée sous forme de série :

$$f = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} C_{ijk} (I_1 - 3)^i \, (I_2 - 3)^j \, (I_3 - 3)^k \qquad \text{(A-23)}$$

où les C_{ijk} sont les coefficients caractéristiques du matériau, indépendants de la déformation.

Pour les matériaux incompressibles $(I_3 = 1)$, l'énergie sera fonction uniquement des deux premiers invariants :

$$f = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i \, (I_2 - 3)^i \qquad \text{(A-24)}$$

L'énergie étant nulle sans déformation, C_{00} est par conséquent nul.

Pour des considérations de linéarité entre contrainte et déformation en cisaillement pur d'un matériau isotrope et incompressible, MOONEY (1940) n'a pris en considération que les deux premiers termes :

$$f = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01} \, (I_2 - 3) \qquad \text{(A-25)}$$

Cette énergie est appelée énergie de MONNEY-RIVLIN ; nous notons $C_1 = C_{10}$ et $C_2 = C_{01}$

Avec

$$C_1 = \frac{\partial f}{\partial I_1}$$
$$C_2 = \frac{\partial f}{\partial I_2} \qquad \text{(A-26)}$$

A-2-2 Approche thermo-statistique

A-2-2-1 Entropie d'une chaîne macromoléculaire et sa variation avec la déformation

Cette approche est basée sur la théorie cinétique de MEYER (1932) qui postule que la chaîne macromoléculaire ne doit pas être considérée comme une structure rigide mais plutôt comme une chaîne flexible, libre de tourner autour de ses pontages. Dans le cadre de ces hypothèses GUTH et MARK (1934) ont considéré une chaîne modélisée par n motifs élémentaires identiques de longueur l. Ils ont montré que si une extrémité de la chaîne se trouve à l'origine du repère cartésien, la probabilité de trouver l'autre extrémité, de coordonnées (x,y,z) dans un volume élémentaire (dx dy dz) est donnée par la loi Gaussienne :

$$p(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp\left(-b^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) dx\, dy\, dz \qquad \text{(A-27)}$$

$$\text{où } b^2 = \frac{3}{2nl^2} \qquad \text{(A-28)}$$

La relation de BOLTZMANN permet de définir l'entropie du milieu en fonction de la probabilité p :

$$s = k\ln(p) \tag{A-29}$$

où k est la constante de BOLTZMANN. On obtient l'entropie s d'une chaîne selon :

$$s_0 = c - k\,b^2\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right) = c - kb^2\,r_0^2 \tag{A-30}$$

$$c = k\ln\left(\frac{b^3}{\pi^{3/2}}\right) \text{ et } r_0 = l\sqrt{n} \text{ soit } b = \frac{3}{2\,r_0^2} \tag{A-31}$$

où r représente la distance entre les extrémités de la chaîne.

A l'aide de la relation (A-30), on peut déterminer la variation d'entropie de la chaîne lors de la déformation correspondant à $\underline{x} = \underline{\underline{\lambda}}\,\underline{x}_0$:

$$\Delta s = s - s_0 = -k\,b^2\left\{\left(\lambda_1^2 - 1\right)x_0^2 + \left(\lambda_2^2 - 1\right)y_0^2 + \left(\lambda_3^2 - 1\right)z_0^2\right\} \tag{A-32}$$

A l'état de repos les molécules sont équidistribuées, on a alors :

$$x_0^2 = y_0^2 = z_0^2 = \frac{r_0^2}{3} \tag{A-33}$$

$$\text{soit } \Delta s = -\frac{1}{2}k\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right\} \tag{A-34}$$

Les expressions précédentes ont été établies pour une chaîne moléculaire, on peut alors les appliquer à tout le réseau qui constitue le polymère.

A-2-2-2 Calcul de l'entropie du réseau

On considère un réseau moléculaire constitué de N chaînes par unité de volume. La connaissance de la valeur quadratique moyenne r_0^2 de la distance au repos entre les extrémités des chaînes suffit pour déterminer les propriétés du réseau.
Ainsi la variation d'entropie du réseau par unité de volume est :

$$\Delta S = -\frac{1}{2}Nk\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right\} \tag{A-35}$$

Pour une déformation isotherme sans variation de l'énergie interne :

$$\Delta f = -T\Delta S \tag{A-36}$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}NkT\left\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right\} \tag{A-37}$$

L'hypothèse de l'incompressibilité impose que les $d\lambda_i$ vérifient la relation suivante :

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3} = 0$$

Or selon la relation (A-7) :

$$df = \sigma_1 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + \sigma_2 \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} + \sigma_3 \frac{d\lambda_3}{\lambda_3}$$

on déduit :

$$df = (\sigma_1 - \sigma_3)\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + (\sigma_2 - \sigma_3)\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \qquad \text{(A-38)}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\right)_{\lambda_2} \text{ et } \sigma_2 - \sigma_3 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\right)_{\lambda_1} \qquad \text{(A-39)}$$

Compte tenu de l'expression de f (A-37), on a :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = NkT\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right) \text{ et } \sigma_2 - \sigma_3 = NkT\left(\lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) \qquad \text{(A-40)}$$

A-3 Relation contrainte-déformation dans quelques cas particuliers

A-3-1Traction uniaxiale

$$\text{Soit } \underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(A-41)}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{\lambda}}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(A-42)}$$

Pour un matériau incompressible on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ donc $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$

Dans le cas général, pour éliminer la pression hydrostatique inconnue a priori, nous prenons la différence :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\left(\lambda_1^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_1^2}\frac{\partial f}{\partial I_2}\right) - 2\left(\lambda_2^2 \frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_2^2}\frac{\partial f}{\partial I_2}\right) \qquad \text{(A-43)}$$

Lorsque $\sigma_2 = 0$ on obtient directement :

$$\sigma_1 = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial f}{\partial I_2}\right) \qquad \text{(A-44)}$$

En utilisant la forme de l'énergie libre de MOONEY RIVLIN on écrit :

$$\sigma_1 = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(C_1 + \frac{1}{\lambda_1}C_2\right) \qquad \text{(A-45)}$$

où C_1 est associé à I_1 et C_2 à I_2

Notons que l'approche statistique conduit à :

$$\sigma_1 = NkT\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \qquad \text{(A-46)}$$

On observe ainsi que cette description néglige le rôle du second invariant des dilatations. Ceci montre que l'interprétation physique de la première constante de MOONEY-RIVLIN est directement liée à l'élasticité caoutchoutique des chaînes macromoléculaires. L'interprétation du coefficient C_2 suscite encore de nombreux débats.

A-3-2 Cisaillement simple

Aux grandes déformations dans le plan (x,y), les axes principaux de déformation sont définis par les extensions principales [RIVLIN 1948] :

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(A-47)}$$

L'incompressibilité impose que $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ (A-48)

Pour la base réelle : $\underline{\underline{F}}^* = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{\underline{B}}^* = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A-49)

La déformation de cisaillement correspondante est déterminée par le calcul des invariants des tenseurs $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}^*$:

D'après les relations qui déterminent ces invariants :

$$I_1 = tr\underline{\underline{B}} = tr\underline{\underline{B}}^* \qquad \text{(A-12)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(tr\underline{\underline{B}}\right)^2 - tr\underline{\underline{B}}^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(tr\underline{\underline{B}}^*\right)^2 - tr\left(\left(\underline{\underline{B}}^*\right)^2\right)\right] \qquad \text{(A-13)}$$

$$I_3 = \det\left(\underline{\underline{B}}\right) = \det\left(\underline{\underline{B}}^*\right) \qquad \text{(A-14)}$$

on déduit $\gamma^2 + 3 = \lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} + 1$ (A-50)

Finalement, on obtient la déformation de cisaillement en fonction de l'extension principale :

$$\gamma = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \tag{A-51}$$

$$df = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{A-52}$$

$$df = C_1\gamma^2 + C_2\gamma^2 \tag{A-53}$$

Si nous prenons comme fonction d'énergie celle de MOONEY RIVLIN, l'expression de la contrainte de cisaillement est :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 2(C_1 + C_2)\gamma \tag{A-54}$$

L'approche statistique conduit à :

$$\Delta f = \frac{1}{2}NkT\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\} = \frac{1}{2}NkT\left\{\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} - 2\right\} = \frac{1}{2}NkT\gamma^2 \tag{A-55}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} = NkT\,\gamma \tag{A-56}$$

Comme dans le cas de la traction, nous remarquons que le cas particulier ($C_1 = \frac{1}{2}NkT$ et $C_2 = 0$) pour l'expression de MOONEY RIVLIN conduit au formalisme statistique.

Références bibliographiques

A

AHAROUNE A.
Thermodynamique de la relaxation structurale de phases amorphes en régime anisotrope.
Thèse de 3ème cycle 1991.

AHAROUNE. A. , KUHNAST F.A, CUNAT.Ch.
Correlation between DNLR model and AES model to describe relaxation phenomena study starting from anisothermal DSC measurements for amorphous alloy (Se, Te, Ge) near glass transition.
2 nd International Discussion Meeting on Relaxation in complex System. Alicante, Espagne, Juillet 1993.

ARRUDA E.M. and BOYCE M.C.
" On modelling the mechanic of rubber elasticity state of deformation dependance".
J. of the Mech. Physic. of Solids, 1991.

AYADI Z.
Contribution à la modélisation du comportement mécanique de polymères à partir d'une approche thermodynamique de la relaxation des milieux continus. Application aux expériences de fluage/recouvrance
Thèse de 3 éme cycle INPL- NANCY, 1995.

B

BAUWENS C. and BAUWENS J.C.
Journal of Non-Crystalline Solids, 131-133, p 505-508, 1991

BALTOV A. and SAWCZUK A.
A rule of anisotropic hardening
Acta Mech., Vol 1, p. 1, 1965

BELTRAMI E.
Rend. Ist. Lomb. 18, 704, 1885 ; B.P. Haigh, Brit. Ass. Reports, Section G, 1919.

BELHEDI B.
Etude du comportement viscoplastique d'un alliage d'aluminium "AS5U3" sous conditions anisothermes
Thèse de 3ème Cycle- Université de FRANCHE-COMTE, 1992

BOUDAREL R., DELMAS J. and GUICHET P.
Commande optimale des processus.
Ed DUNOD. Tome. 2. 1968.

BOUROUKBA M.
Stabilité thermodynamique et temporelle des alliages Ni1-x Px amorphes.
Thèse à l'université de NANCY I, 1989.

BRIDGMANN P.W. and COOK
J. Appl. Physics, 17-4, 225, 1946

BROYDEN, FLETCHER, POWEL, SWANN, MURRAY.
Numerical methods for unconstrained optimization.
Ed MURRAY.

BUI
Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques.
Mémorial de l'artillerie Française. Sciences et techniques de l'armement.
1 er Fasc, p 141-165, 1970.

BURKE J.
La cinétique des changements de phase dans les métaux.
Masson et C^ie editeurs, 1968.

C

CALLOCH S et MARQUIS.D.
Comportement cyclique d'un acier inoxydable du type 316L sous chargement complexes de traction-torsion.
Acte du 12 ème Congrès Français de Mécanique; Strasbourg, vol 1, p 121-124, 1995.

CASTAGNET S.
Etude du comportement thermomécanique du polyamide 11.
DEA INPL, Nancy, 1995.

CAILLETAUD G.
A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals.
International Journal of Plasticity, vol 8, 55-73, 1992.

CAQUOT.
Cours de résistance des matériaux .
Ec. Sup. des Mines, Paris, 1924-1925.

CHABOCHE J.L., LEMAITRE J., MARQUIS D.
Discussions of models identification.
Symposium IUTAM. SENLIS. 1980.

CHABOCHE J.L., NOUAILHAS D., PACOU D., PAULMIER P.
Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy
Eur. J. Mech. A/Solids, vol 10 n°1 pp 101-121, 1991.

CHABOCHE J.L.
Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement.
Thèse Paris 6, 1978.

CUNAT Ch.
Approche statistique des propriétés thermodynamiques des états liquides et vitreux. Relaxation des liquides et transition vitreuse. Influence des associations chimiques.
Thèse de doctorat d'état. Université de Nancy I, 1985.

CUNAT Ch.
J. of Non-Crystalline Solids 131-133, 196-199, 1991_1

CUNAT Ch.
J. of Non-Crystalline Solids 131-133, 812-815, 1991_2

CUNAT Ch.
Thermodynamics treatement of relaxation in frozen in systems. "Universality" of the distrubition law for relaxation times.
Zeit. fur phys. Chem. Neue Folge, 157, 419-423, 1988_1.

CUNAT Ch.
Theoretical analysis of the glass transition range. A kinetic modelisation of the reduced time. Comparaison between experiments and simulations.
Zeit. fur phys. Chem. Neue Folge, 157, 425-429, 1988_2.

CUNAT Ch., HILZINGER H.R. and HERZER G.
Relaxation parameter to simulate the change of magnetostriction in amorphous magnetic alloys
Mat. Sci. and Eng. 97, 497, 1988.

COURTNEY T.H.
Mechanical Behavior of materials
Mc Gaw Hill international, 1990.

COULOMB C.A.
Mém. Math. et Phys. 7, 343, 1773

D

DAHOUN A.
Comportement plastique et textures de déformation des polymères semi-cristallins en traction uniaxiale et en cisaillement.
Thèse de 3ème Cycle- Institut National Polytechnique de Lorraine,1992.

DAHOUN A., G'SELL C., MOLINARI A. and CANOVA G.
Plastic behavior and deformation textures of poly(ether ether ketone) under uniaxial and simple shear, in " Use of plastics and plastic composites : materials and mechanical issues, ASME, New-York, NY, 57-76, 1993.

DE DONDER Th.
1936, L'affinité, edition révisé par P. Van ysselberge, Paris, Gauthier-Villars.

DE SAINT-VENANT B.
Acad, Sc, 473, 1870.

DEMMERLE S. and BOEHLER J.P.
Optimal design of biaxiale tensile cruciform specimens.
J. Mech. Phys. Solids., vol 41 n°1, 143-181, 1993.

DRUCKER D.C.
Stress strain relation for strain hardening materials : discussions and proposed experiments
Proc. 1st Annual Sympos for Appl. Math., Amer. Math.Soc, 181, 1949.

DRUCKER D.C.
A more fundamental approach to plastic stress relations.
Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., 487-491, 1951.

E

EDELMANN F. and DRUCKER D.
Some extensions to elementry plasticity theory.
J. of Franklin Institute, Vol 251, p. 581, 1951.

EISENBERG M.A. and YEN C.F.
A theory of multiaxial anisotropic viscoplasticity.
ASME Journal of Applied Mechanics, 48, 276-284, 1984

EYRING H.
Viscosity, plasticity and diffusion as axamples of absolute reaction rates.
J. Chem. Phys., 4, 283, 1936.

ELLIS J.R., ROBINSON D.N. and PUGH C.E.
Time dependence in biaxial yield of type 316 Stainless Steel at room temperature
Journal of Engineering Materials and Technology. vol 105, 251, 1983.

F

G

GOODMAN A.M.
Development of constitutive equations for computer analysis of stainless steel components.
Nucl. Eng. Des Vol 83 pp 349-354, 1988.

G'SELL C., DUSAUSOY B., ABOULFARAJ M. and HIVER J.M.
" Validity of the accumulated true strain in the constitutive equations of glassy polymers". Deformation Yield and Fracture of Polymers Ed. by the Institute of Materials, London, UK, April 1994, 73/1 - 73/4.

G'SELL C., HELAL A and JONAS J.J.
" Effect of stress triaxiality on neck propogation during the tensile of stretching of solids polymers". J. Mater. Sci. , 18, 903, 1983

GREEN.A.E and ADKINS.J.E;
Large elastic deformation and non linear continum mechanics
Clarenton Press . Oxford, 1960

GUEST J.J.
On the strength of ductile materials subjected to combined stresses.
Philo. Mag., 50,69-132, 1900

GUPTA N.K. and MEYERS A.
Considerations of translated stress deviators in describing yield surfaces.
Int. J. Plast. 8, 761, 1992.

GUPTA N.K. and MEYERS A.
Description of initial and subsequent yield surfaces.
ZAMM 63, 435, 1986.

GUTH.E and MARK.H;
Mh. Chem 65, 93-121, 1934

H

HADDAD A.
Thèse INPL. en cours de rédaction (1995).

HALPHEN B. et SALENÇON J.
Elasto-plasticité, Presses de l'école Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.

HAYHURST D.R.
J. Strain. Anal, 8, 119, 1973.

HENCKY H.
Zeits. ang. Math. Mech. 4, 323, 1924.

HELLING D.E., MILLER A.K and STOUT M.G.
An experimental investigation of the yield loci of 1100-0 aluminum, 70 : 30 Brass and overaged 2024 aluminum alloy after various prestrains.
ASME Journal of Engineering Materials and Technology, 108, 313-320, 1986.

HILL R.
The mathematical theory of plasticity
Oxford Press, New York, 1950.

HSU T.C.
The effect of the rotation of the stress axes on the yield criterion of prestrained materials.
Trans. ASME Ser. D, 88, 61-70, 1966.

HUBER M.T.
Czasopismo Tech., 14, lwôv 1904 et Zivilingenieur, 192, 1882.

HUTCHINSON J.W.
Proc . R. Soc, Lond, A348, 101-127, 1976.

I

IVEY H.J.
Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys.
Journal of Mechanical Engineering, vol 15, 1862-1867, 1980.

IKEGAMI K.
Experimental plasticity on the anisotropy of metals.
In : J.P. BOEHLER (Ed).
Proc. Euromech. Coll. 115, VILLARD DE LANS. CNRS. PARIS, 201, 1979.

IKEGAMI K.
An historical perspective of experimental study on subsequent yield surfaces for metals. Part 1 and 2.
J, Soc, Mat, Sci, Japan, 24 ,491-504,709-719, 1975.

IKEGAMI K.
An historical perspective of experimental study on subsequent yield surfaces for metals. Part 1 and 2.
BISI, 14420, British, Ind, Sci, Int. Translation Service (The metal society), 1976.

ILYUSHIN A.A.
On the relation between stress and strain increment in the continum mechanics.
PMM, 18, 641-666, 1954.

K

KAUZMANN.
Flow of solids metals from the stand point of the chemical rate theory.
Trans. AIME, 143, 57. 1941.

KELLY D.A.
J. Strain. Anal, 11, 1, 1976.

KOITER W.
Stress strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic plastic materials with singular yield surface.
Quart. Appl. Math., 11,350-354, 1953.

KOVACS A.J., HUTCHINSON J. M. AND AKLONIS J. J.
Isobaric volume and enthalpy recovery of glasses. (I) A critical survey of recent phenomenological approaches.
The Structure of Non-Crystalline Materials, P.H. GASKELL. Ed. Taylor and Francis pub, 153, 1977.

KOVACS A. J.
Transition vitreuse dans les polymères amorphes. Etude phénoménologique.
Fortschr. Hochpolym. Forsch., Bd 3, S. 394-507, 1963.

KUHN H.A. and LEE P.W.
Fracture in cold upset forging- A criterion and model.
Metall. Trans., 4 (4), 969, 1973.

KUHN H.A. and LEE P.W.
Strain instability and fracture at the surface of upset cylinders
Metall. Trans., 2 (11), 3197, 1971.

L

LAUERT H.A and GUPTA N.K.
An experimental Study in anistropic plasticity.

LEMAITRE J. et CHABOCHE J.L.
Mécanique des matériaux solides, DUNOD, 1985.

LEIGH J. R.
Modelling and simulation.
IEE TOPICS IN CONTROL SERIES 1. 1983.

LEHMANN Th.
On a generalized constitutive law in thermo-plasticity taking into account different yield mechanisms
Acta Mechanica, 57, 1-23, 1985.

LENSKY V.S.
Analysis of plastic behavior of metals under complex loading.
Plasticity. Proc, 2nd Symp. Naval Structure Mech., Pergamon Press, 259-278, 1960.

LIPINSKI J., KRIER J., et BERVEILLER M.
Elastoplasticité des métaux en grandes déformations : comportement global et évolution de la structure interne,
Revue Phys. Appl, 25, 361-388, 1990.

LODE W.
Zeit, Physik, 36, 913, 1926.

M

MAKINDE A., THIBODEAU L., NEALE K W. and LEFEBVRE D.
Design of a biaxial extensometer for measuring starins in cruciform specimens.
Experimental Mechanics, 132-136,1992.

MARQUIS D.
Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des métaux.
Thèse de 3 ème Cycle- Université PARIS 6, 1979.

MARQUIS D.
Phénoménologie et thermodynamique : couplages entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement.
Thèse de doctorat d'état, Paris 6, 1989.

MARJANOVIC R. and SZCZEPINSKI.
On the effect of biaxial cyclic Loading on the yield surface of M-63 brass.
Acta Mech., 23, 65-74, 1975.

MAIR W.M and PUGH H.Li.D.
Effect of pre-strain on yield surfaces in copper.
Journal of Mechanical Engineering Science, 6; 150-163, 1964.

MAZEN J.
Un modèle de distorsion des surfaces seuil pour la simulation en mise en forme des tôles minces.
Thèse 3ème cycle, Université PARIS 6, 1994.

MAZILU P. and MEYERS.
Yield surface description of isotropic materials after cold prestrain.
Ing, Archiv 55, 213, 1985.

MAZILU P. and LUO S.
Induced plastic anisotropy in sheet metal forming.
Mat, Tech. Helsinki, 1990.

MAXWELL J.C.
Familiar letter to J.J. THOWSON, Ed.J. LARMOR, Cambridge 1937.

MEYER .K.H, SUSICH.VON and VALKO.E;
Kolloidzschr 59, 208-16, 1932

MOHR O.
Zeit.Ver. Deut. Ing, 1524, 1900

MONCH E. and GALSTER D.
Br. J. Appl. Phys., 14, 810, 1963.

MOON H.
An experimental study of the outer yield surface for annealed polycrystalline aluminium.
Acta, Mech, 24, 191-208, 1976.

MOONEY M.
A theory of large elastic deformation.
J. Appl. Phys. 11, 582, 1940.

MROZ Z.
On the description of anisotropic workhardening.
J. Mech. Phys. Solids, 15, 163-175, 1967.

MUNSTER A.
Classical thermodynamics.
WILEY-INTERSCIENCE, A division of John Wiley and Sons Ltd.
London- New York- Sydney- Toronto. 1970.

MUNSTER A.
Thermodynamique des processus irréversibles.
Ed I.N.S.T.N & P.U.F, Paris, 1966.

N

NADAI A.
Plasticity, a mechanics of the plastic state of matter.
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1931

NAGHDI P.M., ESSENBERG F. and KOFF W.
An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity.
J, Appl, Mech, 25, 201-209, 1958.

NAGHDI P.M., ESSENBURG F. and KORFF W.
An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity.
J. Appl. Mech. 25, 201 (1958).

NAGHDI D.M. and TRAPP J.A.
On finite elastic-plastic deformation of metals
J. Appl. Mech, 41, 245-260, 1974

NEUDER M.
Identification des lois de comportement de plasticité à partir de l'essai d'indentation.
Thèse de 3ème Cycle PARIS VI. 1980.

O

OGDEN.R.W;
Non-linear Elastic Deformations
Ellis Horwood, England, 1984

OHASHI Y. and TOKUDA M.
Precise measurement of plastic behavior of mild steel tubular specimens subjected to combined torsion and axial force.
J. Mech. Phys. Solids, 21, 241, 1973.

OHASHI Y., KAWASHIMA K. and YOKOCHI T.
Anisotropy due to plastic deformation of initially isotropic mild steel and its analytical formulation.
J. Mech. Phys. Solids, 23, 277-294, 1975.

OHASHI Y., KAWASHIMA K. and YAMASHITA H.
Effect of third invariant of stress deviator on plastic deformation of mild steel
ibid.,23,295-323, 1975.

ONSAGER L.
Phys. Rev. 37, 405; 38, 2265, 1931.

P

PHILIPS A.
Experimental plasticity. Some thoughts on its present status and possible future trends.
Proceedings of the International Symposium on Foundations of plasticity.
Warsaw, 2 (A. SAWCZUK, ed), Noordhoof, Leyden, 1972.

PRAGER W.
Recent developments in the mathematical theory of plasticity.
J. Appl. Phys., vol 20, p 235, 1949.

PRAGER W.
A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids.
Journal of Applied Mechanics, 78, 493, 1956.

PRIGOGINE I.
Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles, Dunod Paris, 1968.

R

RANKINE W.J.M.
Manual of Applied Mechanics, 1858

RICHALET J., RAULT A. et POULIQUEN R.
Identification des processus par la méthode du modèle.
Ed. GORDON & BREACH. Théorie des systèmes. Vol. 4.

RIVLIN.R.S;
Phil. Trans. R.Soc, A241, 379-97, 1948

ROS M. and EICHINGER A.
Berichte N°14 und 18, Eidgenössische Material Prüfungsanstalt, Zurich, 1928.

ROUSSET M.
Surface seuil de plasticité : détermination automatique et modélisation.
Thèse de docteur - ingénieur, Université PARIS 6 , 1985.

S

SHIRATORI E. and IKEGAMI K.
Experimental study of the subsequent yield surface by using cross-shaped specimen.
J. Mech. Phys. Solids, 16, 373-394, 1968.

SHIRATORI E. and IKEGAMI K.
Studies of the anisotropic yield condition.
J. Mech. Phys. Solids, 17, 473-491, 1975.

SHIRATORI E., IKEGAMI K. and YOSHIDA A.F.
The subsequent yield surface and stress-strain relation of the material of Tresca-type.
Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 16, 406-411, 1976.

SHIRATORI E., IKEGAMI K. and KANEKO K.
The influence of the Bauschinger effect on the subsequent yield condition.
Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 39, 458-471, 1973.

SHIRATORI E., IKEGAMI K. and KANEKO K.
The stress vector and the subsequent yield surface in loading along the starin path with a corner.
Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 40, 671-679, 1974.

SHIRATORI E., IKEGAMI, K. and KANEKO K.
Stress and plastic strain increment after corners on strain paths.
J. Mech. Phys. Solids, 23, 325-334, 1975.

SIDOROFF F.
Mécanique et thermodynamique des milieux continus
Cours 3 ème année de l'Ecole Centrale de Lyon et de DEA, 1984.

SIEBEL E. and POMP A.
Mitt. aus dem Kais. W. Inst. fur Eisenf, 11, 139, 1929.

SIMON F.
Ergeb. Exact. Naturw. 9, 222, 1930.

SPINNER S. and NAPOLITANO A.
J. Res; Nat. Bur. Stand., Sect. A, 70 [2], 147-152, 1966.

STRUICK L.C.E.
Physical ageing in amorphous polymers and other materials. Elseiver. Sci Pub. Company, 1978

SOUAHI A.
Etude de la plasticité des polymères amorphes au voisinage de la température de transition vitreuse.
Thèse de 3ème Cycle- Institut National Polytechnique de Lorraine, 1992.

SZCEPINSKI W. and MIASTOWSKI J.
An experimental study of the effect of the prestraining history in the yield surfaces of an aluminium alloy.
J. Mech. Phys. Solids, 16, 153-162, 1968.

T

TOUSSAINT E.
Communication privée.

TOOL A.Q.
J. Amer. Ceram. Soc, 14, 276, 1931.

TOOL A.Q.
Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range.
J. Am. Ceram. Soc. 29, 9, 240, 1946.

TAYLOR G.I. and KINNEY H.
The plastic distorsion of metals
Phil. Trans. of the royal Society 230 A, 233 (1931).

TOZAWA Y. and SHIRAI H.
A method of systematical representation of plastic deformation behavior- Plastic deformation behavior of prestrained materials 1
J. Japan Soc. Tech. Plasticity, 16, 550-558,1975

TISZA L.
Generalized thermodynamics, MIT. Press, Cambridge(Mass), 1966.

TRESCA H.
Mémoire sur l'écoulement des corps solides, CR 59, 754, 1864.

V

VON MEIXNER J.
Thermodynamische Theorie der elastischen relaxation.
Z. Naturforschg. 4a, 494-600, 1949.

VON MEIXNER J.
Z. Naturforsch. 9a, 654-663, 1954.

VON MISES R.
Göttingen Nachricht Math, Phys., 41, 582,1913.

VON MISES R.
Mechanik der plastischen formanderung von kristallen.
ZAMM, 8, 161-185, 1928.

VOYIADJIS G.Z. et FOROOZESH M.
Anisotropic doistortional yield model.
ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 361-364, 1990.

Y

YOSHIMURA Y.
Hypothectical theory of anisotropy and the Bauschinger effect due to a plastic strain history.
Aero. Res. Inst., Tokyo Univ., Vol 349, p 224, 1959.

Z

ZIEGLER H.
Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mecanics.
Progress in Solid Mechanics IV, 93-193, 1963.

ZIEGLER H.
A modification of Prager's hardening rule.
Quarterly of Applied Mathematics, 17, 55-65, 1959.

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur SIDOROFF François, Professeur, Ecole Centrale de Lyon,
Monsieur MEIMON Yves, Ingénieur, Institut Français du Pétrole Rueil Malmaison.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur LOUKIL Mokhtar

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :
"Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus".

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **"MECANIQUE & ENERGETIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **11 Janvier 1996**
Le Président de l'I.N.P.L.
M. LUCIUS

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE NANCY

TEL. 33/83.59.59.59
FAX. 33/83.59.59.55

TITLE

Modelling of yield surfaces from a thermodynamic approach of the relaxation of continuous media.

ABSTRACT

The main objective of this work is to validate a very general approach of the relaxation thermodynamic of continuous media for studying plastic and viscoplastic behaviours. The theoretical model is described in term of distribution of the time of relaxation in the framework of an irreversible thermodynamic of non linear process (DNLR model : Distribution of Non Linear Relaxations).
The effort deals essentially with the following points :

- the temporal dependence of the times of relaxations.
- the writing of the model in the space of stresses.

The simulation is first driven to predict qualitatively uniaxial tests in the case of small and large strains, for metals and polymers. Then, the construction of yield surfaces for various complex loading histories allows to control the aptitude of the model to qualitatively analyse experimental observations. Finally, a method of optimization of parameters reveals the necessity to have a sufficient bank of data for obtaining results which are in good agreement with the experimental responses.

KEYWORD

mechanics, continuous media, model, thermodynamic, relaxation, (visco) plasticity, tensile-compression, yield surfaces.

TITRE

Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus.

RESUME

L'objectif essentiel de ce travail est de valider une approche très générale de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus pour modéliser les comportements plastiques et viscoplastiques. L'outil de base est décrit en terme de distribution de temps de relaxation dans le cadre d'une thermodynamique des processus irréversibles fortement non-linéaire (modèle DNLR : Distribution of Non Linear Relaxations).
L'effort de modélisation porte pour l'essentiel sur :

- la dépendance temporelle des temps de relaxation.
- l'écriture du modèle dans l'espace des contraintes tridimensionnelles.

La simulation est conduite dans un premier temps pour analyser la prévision qualitative des essais unidirectionnels en petites comme en grandes déformations, pour les métaux comme pour les polymères. Puis la construction des surfaces de plasticité, pour des histoires de chargement plus ou moins complexes, permet de contrôler l'aptitude du modèle à prévoir qualitativement les observations expérimentales. Enfin, une méthode d'identification des paramètres est mise en oeuvre révélant ainsi la nécessité de disposer d'une banque de données suffisante pour obtenir des prévisions en bon accord avec l'expérience.

MOTS CLES

mécanique, milieux continus, modélisation, thermodynamique, relaxation, (visco) plasticité, traction-compression, surfaces de plasticité.