



HAL
open science

Tomographie infrarouge stimulée : estimation d'une résistance d'interface non uniforme

Abdelhakim Bendada

► **To cite this version:**

Abdelhakim Bendada. Tomographie infrarouge stimulée : estimation d'une résistance d'interface non uniforme. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1995. Français. NNT : 1995INPL053N . tel-01751178

HAL Id: tel-01751178

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751178>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

13602 85537

95 INPL 000011

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE

THESE

[M] 1995 BENDADA, A.

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPL

Spécialité : MECANIQUE ET ENERGETIQUE

par

Abdelhakim BENDADA

TOMOGRAPHIE INFRAROUGE STIMULEE
ESTIMATION D'UNE RESISTANCE D'INTERFACE NON UNIFORME

soutenue publiquement le 31 Mai 1995 à 10H30, devant la Commission d'Examen

Rapporteurs :	A. GIOVANNINI	Professeur Université Paul Sabatier, Toulouse
	M. RAYNAUD	Professeur INSA, Lyon
Examineurs :	D. BALAGEAS	Ingénieur au L3C ONERA, Chatillon
	J.C. BATSALE	C.R. CNRS au LEPT, Talence
	A. DEGIOVANNI	Professeur INPL, Nancy
	G. DEMOMENT	Professeur ESE, Gif sur Yvette
	D. MAILLET	Professeur INPL, Nancy

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

à la mémoire de mon père
à la mémoire de mon frère
à ma famille
à mes amis

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au L.E.M.T.A (Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée). Je tiens à remercier monsieur A. Degiovanni, professeur à l'institut national polytechnique de Lorraine, pour l'accueil chaleureux qu'il m'a fait lors de mon arrivée au sein du laboratoire, en octobre 1991. Je tiens également à lui exprimer ma sincère reconnaissance pour sa grande disponibilité et l'enthousiasme qu'il a toujours su communiquer à l'ensemble de ses chercheurs.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également à monsieur D. Maillet, mon directeur de thèse, professeur à l'institut national polytechnique de Lorraine, pour l'aide inestimable qu'il m'a apportée au cours de ce travail. Sa constante disponibilité, sa rigueur scientifique et sa passion pour la thermique du solide et les problèmes inverses sont pour moi une continuelle référence.

Ce travail doit aussi beaucoup à monsieur J.C. Batsale, chargé de recherche au C.N.R.S. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour les discussions fructueuses que nous avons eu ensemble et qui ont été déterminantes pour mener à bien ce travail.

De même, je voudrais remercier messieurs A. Giovannini, professeur à l'université Paul Sabatier, et M. Raynaud, professeur à l'institut national de sciences appliquées de Lyon, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et pour toutes leurs remarques et critiques constructives.

Que monsieur G. Demoment, professeur à l'école supérieure d'électricité, qui a accepté la présidence du jury, veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude. Je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude.

Mes chaleureux remerciements à monsieur D. Balageas, ingénieur à l'office national d'études et de recherches aérospatiales, pour l'honneur qu'il m'a fait de participer à ce jury et pour ses conseils et suggestions tant au niveau expérimental que théorique.

Je tiens à exprimer ma gratitude à monsieur C. Moyne, directeur de recherche au C.N.R.S et responsable de l'équipe de recherche "Transferts Couplés dans les Milieux Solides Hétérogènes".

Enfin, je ne saurais oublier tous mes collègues : Anne-sophie, Catherine, Edith, Fabienne, Hélène, Isabelle, Sophie, Sylvianne, Valérie, Valérie, Xiaoting, Ali, Benjamin, Christophe, Didier, Djadmiko, Hélio, Michel, Mohammed, Patrick, Stéphane, Thierry et Xin-Xin, à qui j'exprime toute ma sympathie.

Table des matières

<i>Introduction</i>	<i>1</i>
1 <i>Contexte bibliographique</i>	5
1.0. Introduction	5
1.1. Les matériaux composites et leurs défauts	5
1.2. Techniques de contrôle non destructif	8
1.2.1. Méthodes non thermiques en CND	8
1.2.2. Méthodes thermiques en CND	11
1.2.2.1. Méthodes avec excitation mécanique	11
1.2.2.2. Méthodes avec excitation photonique	11
1.4. Homogénéisation et modélisation des composites en thermique	14
1.5. Problèmes inverses en thermique	16
1.5.1. Problème inverse	16
1.5.2. Caractère mal-posé d'un problème inverse	18
1.5.3. Régularisation d'un problème mal-posé	19
1.5.4. Caractérisation des matériaux	21
1.5.4.1. Matériaux isotropes	21
1.5.4.2. Matériaux anisotropes	22
1.5.5. Défectométrie	27
1.6. Conclusion	33
2 <i>La technique d'inversion 1D locale : Aspects stochastiques et difficultés de l'interprétation d'expériences non académiques</i>	35
2.0. Introduction	35
2.1. Variabilité de l'estimation d'un monodé laminage de profondeur et de résistance inconnues	36
2.1.1. Effet du bruit de mesure.....	36

2.1.1.1.	Erreur commise sur la transformée de Laplace	36
2.1.1.2.	Erreur commise sur la profondeur du défaut	38
2.1.1.3.	Erreur commise sur la résistance en face avant	41
2.1.1.4.	Erreur commise sur la résistance en face arrière	42
2.1.2.	Effet d'un mauvais choix de la zone de référence	45
2.1.2.1.	Influence sur la résistance identifiée en face arrière	45
2.1.2.2.	Influence sur la profondeur identifiée en face avant	47
2.2.	Etude stochastique de l'estimation de la résistance thermique d'un monodé laminage de profondeur connue	48
2.3.	Problème de la discrimination entre mono- et multidé laminage et milieu homogène équivalent	52
2.3.1.	Monodé laminage équivalent à un bidé laminage	52
2.3.2.	Comportement homogène d'un multidé laminage	59
2.4.	Expérience flash sur un composite impacté	61
2.4.1.	Caractéristiques de l'échantillon	61
2.4.2.	Dispositif expérimental et mesure du contraste	61
2.4.2.1.	La source excitatrice	62
2.4.2.2.	La caméra infrarouge	63
2.4.2.3.	Système de stockage et de traitement de données	66
2.4.3.	Conditions expérimentales	66
2.4.4.	Traitement des données expérimentales	66
2.4.4.1.	Mesure en face arrière (irradiation du côté impacté)	67
2.4.4.2.	Mesure en face arrière (irradiation du côté non impacté)	72
2.4.4.3.	Mesure en face avant (irradiation du côté impacté)	76
2.4.4.4.	Mesure en face avant (irradiation du côté non impacté)	80
2.5.	Conclusion	80

3 Effets bi- et tri-directionnels créés par un défaut d'extension limitée et de résistance constante dans un milieu d'étendue finie 81

3.0.	Introduction	81
3.1.	Formulation du problème	82
3.1.1.	Mise en équation en coordonnées cartésiennes	82
3.1.2.	Utilisation des transformations intégrales et des quadripôles tridimensionnels	84
3.1.3.	Passage du problème anisotrope au problème isotrope équivalent	85
3.2.	Solution analytique exacte	88

3.3.	Réduction du modèle par la méthode des perturbations	91
3.3.1.	Cas de faibles résistances	91
3.3.1.1.	Nouvelle formulation du problème	91
3.3.1.2.	Intérêt des perturbations au premier ordre	96
3.3.2.	Cas de grandes résistances	106
3.3.3.	Détermination de l'aire d'un défaut simulé dans un échantillon en carbone- époxy	114
3.3.3.1.	Problème inverse de l'aire du défaut	114
3.3.3.2.	Expérience	115
3.3.3.3.	Résultats expérimentaux	115
3.3.3.4.	Etude de l'influence de la variable de Laplace p sur la variance de la surface S du défaut	119
3.3.4.	Problème inverse de la profondeur du défaut : méthode des deux moyennes spatiales du contraste de Laplace perturbé au premier ordre	123
3.4.	Choix de la zone de référence	124
3.4.1.	Influence des effets bidimensionnels sur le choix de la zone de référence ...	125
3.4.2.	Effet de la proximité du défaut	127
3.4.3.	Effet de la proximité du bord avec pertes	133
3.4.4.	Effet de la proximité du bord de la plaque sans pertes	136
3.5.	Transformations numériques inverses de Fourier et de Laplace	136
3.6.	Conclusion	139

4 Estimation de la répartition spatiale d'une résistance thermique d'interface à partir de la mesure de la température de surface 145

4.0.	Introduction	145
4.1.	Résolution du problème direct	146
4.1.1.	Formulation du système dans l'espace de Laplace	147
4.1.2.	Ecriture du modèle dans l'espace de Laplace-Fourier	149
4.2.	Résolution du problème inverse avec mesure en face avant	154
4.2.1.	Estimation du profil de résistance	154
4.2.2.	Estimation de la profondeur	156
4.2.3.	Présentation des fonctions utilisées en simulation	157
4.2.3.1.	Fonction $R(x)$ à "deux bosses"	157
4.2.3.2.	Fonction $R(x)$ en "double porte"	158
4.2.3.3.	Fonction $R(x)$ en "erf"	158
4.2.3.4.	Fonction $R(x)$ en "arctg"	158

4.3.	Erreur d'estimation sur le profil de résistance	162
4.3.1.	Décomposition de l'erreur d'estimation	162
4.3.2.	Erreur due à la seule troncature du spectre	163
4.3.3.	Simulation d'inversion sans bruit	164
4.3.3.1.	Résistance d'interface à "deux bosses"	167
4.3.3.2.	Résistance d'interface en "double porte"	171
4.3.4.	Simulation d'inversion avec bruit	174
4.3.5.	Approche stochastique de l'erreur due au bruit	177
4.3.5.1.	Analyse stochastique de l'erreur due au bruit	177
4.3.5.2.	Choix optimum de la variable de Laplace pour l'inversion	180
4.4.	Effet des erreurs des paramètres connus sur l'estimation de la résistance	183
4.4.1.	Influence de la profondeur	183
4.4.2.	Influence des valeurs propres	183
4.5.	Méthodes par troncature et filtrage	186
4.5.1.	Caractère mal-posé du problème inverse	186
4.5.2.	Principe du filtre optimal de Wiener	190
4.5.3.	Comparaison des simulations par fenêtrage carré et filtrage de Wiener	192
4.5.3.1.	Procédure d'inversion	192
4.5.3.2.	Commentaires sur les deux méthodes	200
4.6.	Comparaison des techniques 1D locale et 2D	206
4.7.	Méthode de spécification de fonction	208
4.8.	Méthode des défauts constants équivalents	213
4.9.	Conclusion	217

5 Application expérimentale à un cas de résistance d'interface non uniforme : Identification de défauts de collage 221

5.0.	Introduction	221
5.1.	Caractéristiques de l'échantillon	221
5.2.	Expérience	224
5.3.	Identification de la profondeur d'interface	226
5.4.	Identification de la résistance d'interface	226
5.4.1.	Inversion par la méthode de fenêtrage	226
5.4.2.	Inversion par la méthode de Wiener	229
5.4.3.	Inversion par la méthode de spécification de fonction	229
5.4.4.	Défaut équivalent constant par morceaux	229
5.4.5.	Comparaison avec l'algorithme 1D local	232

5.5. Autres traitements pour estimer la résistance	232
5.5.1. Estimation sur une autre ligne	235
5.5.2. Estimation sur une moyenne de plusieurs lignes	235
5.6. Biais engendré par une irradiation non uniforme	240
5.7. Conclusion	243
<i>Conclusion générale</i>	245
<i>Annexes</i>	251
<i>Annexe 2.1</i> : Inversion numérique de la transformée de Laplace	251
<i>Annexe 2.2</i> : Calcul des réponses thermiques d'un composite stratifié multidélaminé à une excitation flash	252
<i>Annexe 3.1</i> : Inversion numérique de la série de Fourier en cosinus	255
<i>Annexe 4.1</i> : Condition de passage au niveau d'une interface à résistance thermique non uniforme	257
<i>Annexe 4.2</i> : Produit de convolution exprimant la condition de passage à une interface de résistance thermique non uniforme symétrique	262
<i>Annexe 4.3</i> : Expressions des contrastes thermiques créés par une résistance d'interface non uniforme, dans l'espace de Laplace-Fourier	268
<i>Annexe 4.4</i> : Calcul de la relation matricielle $N_{\rho} a = b$	270
<i>Annexe 4.5</i> : Etude de l'erreur due au bruit de mesure sur la résistance d'interface identifiée à partir du modèle linéaire	271
<i>Annexe 4.6</i> : Détermination du niveau de la densité spectrale du profil en contraste de Laplace à partir du bruit de mesure sur le champ de température	278
<i>Références bibliographiques</i>	283

Nomenclature

lettres romaines

a	: diffusivité thermique
a, b	: dimensions latérales du défaut
A_i, B_i, C_i, D_i	: coefficients du quadripôle de la couche "i"
$A(x)$ et $B(x)$: fonctions de la variable x
A, B, C, D	: coefficients du quadripôle de l'échantillon parfaitement homogène
a, b	: vecteurs spectre des fonctions $A(x)$ et $B(x)$
A_q, B_q, C_q, D_q	: matrices constituant le quadripôle partitionné de la couche indiquée "q"
b_{ap}	: effusivité apparente
b_o	: effusivité du matériau sain
Bi	: nombre de Biot ($= \frac{h e}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}}$)
B_n	: spectre du bruit de mesure
C	: capacité calorifique spécifique
C_{adm}	: ensemble des solutions admissibles
$d_k(x)$: fonction porte à l'abscisse x_k
e	: épaisseur de l'échantillon
e_i, e_q	: épaisseur de la couche "i" ou "q"
$e_{bruit}, e_{quadrature} \dots$: les différentes erreurs d'estimation de la résistance thermique
e_β	: erreur d'estimation sur β
E	: espérance mathématique
E	: matrice rectangulaire
h	: coefficient d'échange
$h_{x1}, h_{x2} \dots$: différents coefficients d'échange sur la frontière de l'échantillon
H_n	: fonction de transfert du filtre de Wiener
I	: matrice identité
ℓ, L	: dimensions latérales de la plaque
L_r	: étendue de la zone saine ($= \ell - b$)

m	: contraste de Laplace expérimental ou nombre des mesures dans le temps
M, N	: nombre de pixels dans les directions Ox et Oy
M_0, M_{-1}	: moments temporels d'ordre 0 et -1.
$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$: contrastes expérimentaux de Laplace calculés pour deux valeurs distinctes de la variable de Laplace p
n	: nombre d'harmoniques ou nombre de délaminages dans un multidélaminé
N_p, N_ϕ, N_a	: matrices carrées de convolution
p	: variable de Laplace
P	: point de mesure de coordonnées (x, y)
Q	: densité d'énergie surfacique absorbée par la face avant
r	: rayon (coordonnée polaire)
R, R_c	: résistance thermique de contact
R_i	: résistance du défaut "i"
R_0, R_{max1}, R_{max2}	: constantes intervenant dans les définitions des résistances d'interface
R_k	: amplitude du créneau à l'abscisse x_k de la résistance constante par morceaux (spécification de fonction)
$R(x), R(x, y)$: fonctions décrivant la répartition spatiale de la résistance
\mathbf{R}	: vecteur de composantes R_k
S	: aire du défaut rectangulaire (= ab)
t	: temps ou nombre de Fourier
t_{ap}	: temps d'apparition du contraste
t_s	: temps de la première trame après le flash
T	: température
T_∞, T_{env}	: température de l'environnement
\mathcal{T}_n	: fonction de transfert linéaire
U_e^0, U_a^0, U_{atm}^0	: différentes tensions intervenant dans la définition du signal vidéo de la caméra infrarouge
W	: matrice de pondération
x, y, z	: coordonnées cartésiennes d'un point
x_1, x_2, y_1, y_2	: limites du défaut dans les directions Ox et Oy
X_r	: position de la zone saine par rapport au bord du défaut (= $x - b$)
X_s	: sensibilité du contraste moyen de Laplace à l'aire S du défaut
X	: matrice de sensibilité du contraste de Laplace au vecteur paramètres β
Y	: données expérimentales
z_s	: coordonnée suivant Oz des extrémités de l'échantillon ($z_s = 0$, face avant et $z_s = 1$, face arrière)
z_d	: profondeur du défaut
z_i	: profondeur du délaminage "i"

lettres grecques

α, β	: valeurs propres dans les directions x et y
β	: vecteur paramètres
$\hat{\beta}_{mc}$: vecteur paramètre estimé par la méthode des moindres carrés
$\hat{\beta}_{\infty}$: vecteur solution à variations très douces
γ	: bruit de mesure
$\delta(t)$: distribution de Dirac
$\delta_k(\alpha)$: transformée de Fourier de $d_k(x)$
δ	: matrice rectangulaire
Δ	: symbole du contraste
Δ_K	: distance de Kullback
Δ_q	: différence $q_1 - q_2$ ($q = x$ ou y)
Δt	: pas de discrétisation temporelle
Δ_w	: distance euclidienne pondérée
$\Delta x, \Delta y$: pas de discrétisation spatiale dans les directions Ox et Oy
Δ_1	: distance entre $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}_{mc}$
Δ_2	: distance entre $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}_{\infty}$
ε	: résistance de contact ($= R_c$, si R_c est faible) ou émissivité de l'échantillon
η	: conductance du défaut ($= 1/R_c$)
θ	: transformée de Fourier de la transformée de Laplace τ
θ	: vecteur colonne spectre de τ
θ'	: vecteur colonne spectre de τ quand celui-ci est doublé par symétrie
Θ	: transformée de Fourier de la température T
λ	: conductivité du milieu homogène
μ	: paramètre de régularisation
ξ	: valeur propre dans la direction Ox
ρc	: capacité de chaleur spécifique
$\rho(\alpha, \beta)$: spectre double de la résistance $R(x, y)$ ou $\varepsilon(x, y)$
ρ	: vecteur colonne spectre de la résistance $R(x)$
ρ'	: vecteur colonne spectre de la résistance $R(x)$ quand celle-ci est doublée par symétrie
$\tilde{\rho}_n$: spectre filtré
$\hat{\rho}_n$: spectre estimé
σ_{γ}	: écart type du bruit
σ_s	: écart type de l'aire estimée
σ_R	: écart type de la résistance estimée

Σ	: somme des écarts quadratiques entre les spectres théoriques et estimé
Σ_q	: somme ($q_1 + q_2$) ($q = x$ ou y)
τ	: transformée de Laplace de T ou constante de temps
φ	: densité surfacique de flux
$\varphi_e^o, \varphi_a^o, \varphi_{atm}^o$: différentes composantes du flux arrivant à la caméra infrarouge
ϕ	: transformée de Fourier de la transformée de Laplace ψ
ϕ	: vecteur colonne spectre de ψ
$\phi(e_1), \phi_d$: vecteur spectre du flux de Laplace à l'interface
ϕ'	: vecteur colonne spectre de ψ quand celui-ci est doublé par symétrie
ψ	: transformée de Laplace de φ

Indices supérieurs de base

<i>inf</i>	: face inférieure de l'interface
<i>sup</i>	: face supérieure de l'interface
<i>t</i>	: transposée
*	: variable réduite
—	: moyenne spatiale
o	: corps noir
^	: grandeur expérimentale ou estimée

Indices inférieurs de base

<i>d</i>	: relatif au défaut ou à l'interface
<i>exp</i>	: expérimental
<i>éq</i>	: milieu homogène équivalent ou défaut équivalent
<i>fin</i>	: fin de l'acquisition en face avant
<i>i, j, k, n, q</i>	: indices relatifs à la position, à la fréquence ou à la couche
<i>max</i>	: maximum
<i>min</i>	: minimum
<i>o</i>	: grandeur relative à la zone saine
<i>s</i>	: temps courts en face avant
<i>x, y, z, r</i>	: indices des directions principales d'anisotropie

Introduction

Introduction

L'importance économique des matériaux composites est maintenant notoire. Utilisés depuis quelques années en haute technologie, ces matériaux gagnent du terrain dans des domaines plus grand public tels l'automobile ou le sport. Comme leur nom l'indique, ces matériaux sont en fait des arrangements de matériaux homogènes de nature et de structure différentes. Une telle combinaison de propriétés mécaniques et physico-chimiques va engendrer un matériau performant destiné à une application particulière. Dans l'industrie aéronautique et spatiale par exemple, le gain de masse que génère l'utilisation des matériaux composites, et les conséquences utiles qui s'en suivent comme l'économie de carburant ou l'accroissement de la charge utile ou du rayon d'action, fait accroître sans cesse l'intérêt des constructeurs pour ces matériaux. Ceux-ci présentent également une bonne tenue en fatigue qui augmente leur durée de vie et une bonne résistance à la corrosion.

Les procédés de fabrication complexes de tels matériaux augmentent le risque d'apparition de défauts dont les conséquences peuvent être cruciales. Le recours aux méthodes de contrôle non destructif (CND), aux différents stades de fabrication, sur le produit fini et dans le temps sur le terrain lors de l'utilisation où à l'usine pour la maintenance, s'avère d'une grande utilité. La présence d'anomalies dans le milieu contrôlé, ne condamne pas nécessairement celui-ci au rejet. La caractérisation des défauts par des méthodes quantitatives thermiques ou autres, va permettre de juger la gravité de ceux-ci par rapport à un seuil de tolérance admis pour une application donnée.

Dans cette recherche de la qualité, la thermique peut jouer un rôle très important. Nombreuses sont les méthodes de CND thermique. Les plus intéressantes sont les méthodes actives qui consistent à soumettre le matériau à contrôler à des excitations thermiques diverses,

puis à observer leur relaxation. On s'intéressera plus particulièrement à la méthode photothermique impulsienne connue sous le nom de la méthode "flash", qui utilise des flux photoniques relativement intenses en éclairage ainsi qu'une caméra infrarouge pour l'enregistrement de l'histoire thermique.

Le contrôle par thermographie infrarouge présente divers avantages qui expliquent l'attrait particulier des industriels pour cette méthode :

- Le procédé est rapide à cause de la possibilité d'inspecter des surfaces étendues.
- Les moyens informatiques actuels (systèmes d'acquisition, de stockage et de traitement d'images) permettent une facile automatisation du contrôle.
- La méthode permet de détecter des défauts dans une large gamme de profondeurs si la puissance de la source d'excitation est suffisante.
- La simplicité du système de contrôle et son caractère non intrusif permet des opérations in-situ.
- Le procédé offre la possibilité d'application quand l'accès est difficile ou limité à un seul côté : c'est le cas de pièces complexes et fermées dont la face opposée à l'éclairage est inaccessible.

Comme d'autres méthodes, la thermographie infrarouge stimulée présente quelques inconvénients. Parmi ceux-ci, on peut citer le phénomène de pyrolyse de la face avant, si l'éclairage est intense ou encore, la difficulté de détecter des défauts profonds due au "flou" généré par la diffusion de la chaleur.

Les matériaux composites se caractérisent par une complexité structurelle qui rend difficile l'étude de leurs propriétés. La connaissance de leur comportement thermique est pourtant essentielle. Ces dernières années, ces matériaux ont fait l'objet de plusieurs études concernant la modélisation, la caractérisation et le contrôle non destructif. Ce mémoire est une contribution à ces travaux : des méthodes analytiques peuvent permettre de résoudre des problèmes directs et inverses concernant la diffusion thermique instationnaire dans des structures stratifiées 2D ou 3D anisotropes, comportant des défauts plans de nature complexe.

Dans le *chapitre 1* de ce mémoire, nous donnons une classification des défauts les plus courants générés lors de la fabrication du composite ou lors de son utilisation. Nous donnerons par la suite une brève bibliographie sur les méthodes de métrologie thermique et de CND par voie thermique ou autres. Nous mettrons l'accent sur les méthodes photothermiques et plus spécialement sur la méthode où l'excitation photonique est impulsienne et connue sous le nom de la méthode "flash".

L'objectif du mémoire étant de contribuer à la modélisation directe de la diffusion de la chaleur dans des milieux multicouches et à la caractérisation des défauts de type délaminage ou de collage, l'exposé sera complété par un bref historique des travaux traitant ces deux catégories de problèmes.

Le *chapitre 2* sera consacré à "la méthode des transformées expérimentales de Laplace" qui est développée au LEMTA depuis quelques années et qui utilise un modèle 1D pour l'inversion. L'étude des biais inhérents à cette technique y est traitée en détail avec un accent particulier sur l'optimisation du choix des paramètres utilisés lors de l'inversion.

Comme la plupart des méthodes de CND, la méthode citée plus haut est basée sur la comparaison des thermogrammes (histoire thermique) à l'aplomb de zones suspectes à ceux d'une zone dite "saine" où on fait l'hypothèse d'absence de défaut. En pratique, le choix de cette zone est fait de manière assez empirique, d'où le risque d'une mauvaise référence. Par une approche linéaire, nous avons pu remonter à l'erreur introduite sur les résultats de l'inversion. D'autre part, il est naturel qu'avant d'envisager une inversion, il soit nécessaire tout d'abord de choisir le modèle adéquat qui correspond à l'anomalie visualisée sur les images thermographiques.

Nous finirons l'étude théorique du chapitre par une tentative de discrimination des défauts du type mono-délaminage et multidélaminage. La dernière partie sera consacrée à la description du dispositif expérimental de thermographie infrarouge stimulée et à l'étude expérimentale d'un stratifié en verre-époxy multidélaminé par un impact au centre.

Au *chapitre 3*, nous présentons des méthodes analytiques pour le calcul exact et approché du champ thermique dans le cas de défauts plans bidimensionnels dans le cadre d'une géométrie cartésienne. Ces méthodes sont basées sur l'emploi des transformations intégrales, des quadripôles thermiques multidimensionnels et de la méthode des perturbations. Les expressions analytiques simples et la rapidité du calcul obtenus par la méthode des perturbations, illustrent sa capacité à modéliser les problèmes de conduction thermique dans les multicouches. Viennent ensuite des applications sur la détermination de l'aire d'un défaut carré et sur le choix correct de la zone de référence.

L'objectif du *chapitre 4* est la reconstruction dans le cas bidimensionnel de la résistance thermique d'interface répartie non uniformément, à partir de la mesure de la température de surface. On est donc en présence d'un problème inverse analogue à celui de la tomographie à rayons X, où il faut déterminer une répartition spatiale tridimensionnelle à partir d'un nombre fini de projections, calculées par la transformation intégrale de Radon. L'évolution temporelle du champ de température de la scène observée, constitue l'équivalent des projections dans notre problème de déflectométrie. On montre grâce à une analyse spectrale que celui-ci est mal-posé.

Deux méthodes sont développées pour lever l'instabilité : la méthode de fenêtrage carré et la méthode de Wiener. Dans le cas où on cherche des répartitions à variations brusques et pour assurer la positivité de la solution, une méthode de moindres carrés non linéaires dans l'espace image est présentée : c'est la méthode des défauts constants équivalents.

Le *chapitre 5* concerne une opération expérimentale de CND sur un échantillon de PVC comportant un défaut de collage. L'expérience a été réalisée en face avant et a servi à éprouver les résultats théoriques du chapitre 4. L'inversion des données expérimentales a été réalisée par différentes techniques et les résultats ont été assez satisfaisants, malgré des conditions d'expérience difficiles (échantillon isolant et éclairage non uniforme).

Chapitre 1

Contexte Bibliographique

Chapitre 1

Contexte bibliographique

1.0 Introduction

Le but du chapitre est de donner un bref aperçu sur les matériaux composites et les travaux qui leurs ont été consacrés dans le domaine de la thermique. Nous commençons par une description rapide de la structure de tels matériaux et les éventuels défauts qu'ils peuvent contenir. Par la suite, nous exposons quelques techniques de contrôle non destructif, que nous avons groupées en deux grandes classes : les méthodes non thermiques et les méthodes thermiques. Dans une troisième partie, nous exposons les travaux qui ont été entrepris pour l'homogénéisation et la modélisation directe de la diffusion de la chaleur dans les matériaux composites. Nous finissons cette présentation par le concept du problème inverse en thermique, en envisageant les différentes méthodes de caractérisation du matériau et de déflectométrie.

1.1 Les matériaux composites et leurs défauts

Les composites

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont été utilisés à travers tous les âges par l'homme pour obtenir des performances spécifiques. On peut citer à titre d'exemple les arcs mongols (tendons de boeuf, bois et soie collés), les épées damassées (lame en fer et acier), et de nos jours le béton armé, les bois contreplaqués et les lamifiés décoratifs. Ces matériaux présentent un assemblage très hétérogène et fortement anisotrope, ce qui rend délicat la prévision de leur comportement dans les structures complexes.

On distingue divers types de composites, dont on peut citer quelques exemples :

- Les matériaux composites à renforcement orienté (CRO), sont constitués de fibres noyées dans une matrice. La liaison entre ces deux constituants a une influence fondamentale sur

les propriétés mécaniques et thermophysiques du composite. La matrice conserve la disposition géométrique aux fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce. Les fibres couramment utilisées sont en verre, en aramide (ou "Kevlar") qui sont plus légères, en carbone dont le module d'élasticité est élevé et les fibres en carbure de silicium qui ont une bonne tenue en température. Quant aux matrices, elles peuvent être répertoriées en trois catégories principales :

- les matrices résineuses thermodurcissables ou thermoplastiques (polyesters)
- les matrices minérales (carbone, carbure de silicium)
- les matrices métalliques (alliages d'aluminium)

- les composites stratifiés, constitués d'un empilement de monocouches ou plis orthotropes généralement croisés (figure (1.1)).

- les structures sandwich résultant de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles minces composites sur une âme (en nid d'abeilles ou ondulée ou gaufrée) plus légère qui maintient leur écartement. Ce type de matériau présente une grande légèreté, une grande rigidité à la flexion et d'excellentes caractéristiques d'isolation thermique (figure (1.1)).

- les revêtements sur substrat homogène pour le protéger de la corrosion ou de chocs thermiques.

Leurs défauts

Les défauts des composites peuvent être groupés de différentes manières [Adams et Cowley (1988)]. Ici, nous avons choisi de les séparer en deux sections : défauts de fabrication et défauts de service.

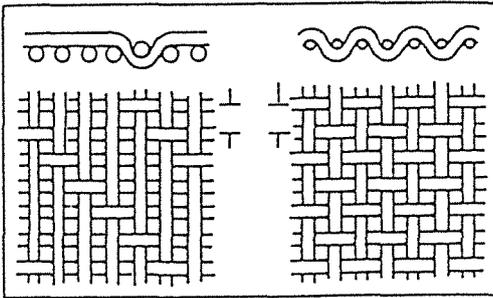
• défauts de fabrication

Ce type de matériaux peut comporter les défauts de confection suivants :

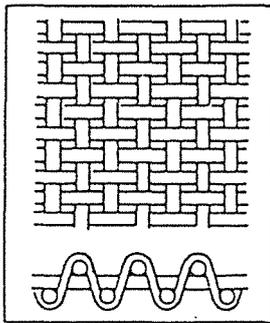
- inclusions et contaminations : insertion accidentelle de corps étrangers.
- micro-porosités et cavités dues à l'éjection incomplète des composants volatils lors de la cuisson.
- cuisson insuffisante ou excédentaire de la matrice entraînant de mauvaises propriétés mécaniques.
- concentration non homogène en résine.
- variation locale de l'épaisseur de la pièce.
- délaminage : décollement entre deux plis occupé par une poche d'air.
- mauvais ordre de drapage (orientations relatives des fibres dans les plis d'un stratifié).
- cassure de fibres et fissuration de matrice.

• défauts de service

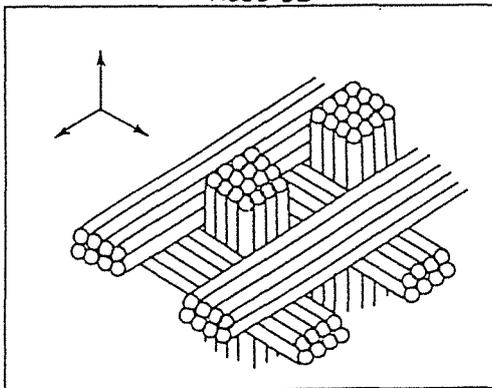
Les conditions de chargement en service sont très variées, aussi on ne citera que quelques exemples. Une contrainte répétitive ou un impact sur la face d'un laminé peuvent causer une fissuration de la matrice, une cassure des fibres ou encore l'apparition de décollements successifs entre les plis provoquant ainsi une perturbation de la structure du matériau. Des dommages



Tissu 2D

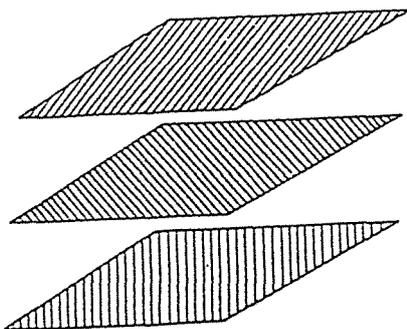


Tissu 3D

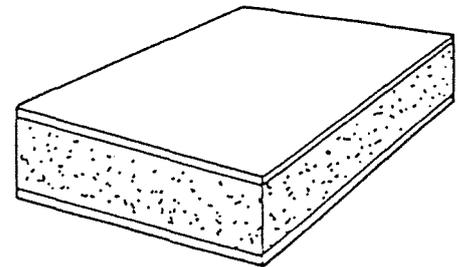


Tissage 3D

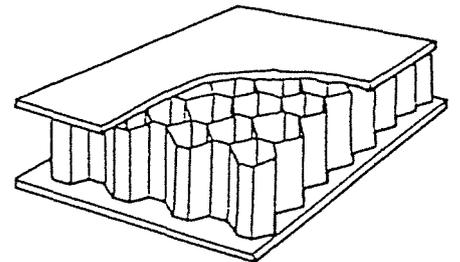
CRO multidirectionnels.



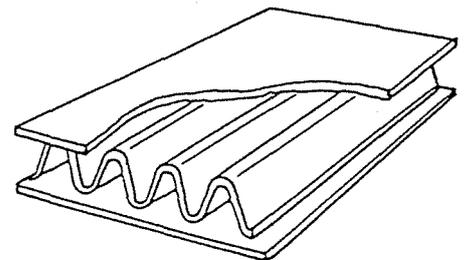
Couches 1D croisées.



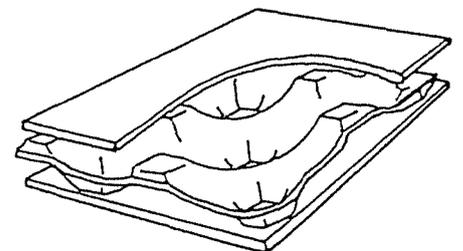
Ame pleine



Nid d'abeilles



Ame ondulée



Ame gaufrée

Structures alvéolaires.

Fig.1.1 Les matériaux composites, (Extrait de Bardon, 1990)

peuvent résulter de conditions d'environnement : c'est le cas de l'érosion qui peut causer une diminution de l'épaisseur de la pièce.

Afin de s'assurer de la qualité du matériau fabriqué, les constructeurs ont été obligés de faire appel à différentes méthodes de contrôle non destructif.

1.2 Techniques de contrôle non destructif

Les critères de classement des méthodes de CND peuvent être choisis de différentes façons vu leur diversité [Adams et Cowley (1988)] : méthodes avec ou sans contact avec la pièce, méthodes liées à la nature physique du signal détecté (mécanique, thermique, électromagnétique, ...). Ici, nous choisissons de les grouper en deux classes : les méthodes non thermiques et les méthodes thermiques [Krapez (1991)].

1.2.1 Méthodes non thermiques en CND

Ultrasons

Lorsqu'une onde ultrasonore se propageant dans un solide, rencontre une interface, il se produit des réflexions, des transmissions ou des conversions de modes. Ces différents effets sont liés à des variations locales ou globales des propriétés mécaniques des deux milieux. Si l'interface est constituée d'un gaz, cas d'un délaminage dans un stratifié, l'onde ultrasonore est réfléchi presque intégralement. C'est le principe de base de l'utilisation des ultrasons en CND des composites (voir figure (1.2)).

Bien qu'elle soit fine, cette méthode est très lente. En outre, son principal inconvénient vient de la nécessité du couplage du palpeur à la pièce à contrôler. L'opération se fait le plus souvent par immersion dans l'eau ou par transmission au travers d'un jet d'eau. Ceci est naturellement peu commode pour les pièces de grande taille ou qui sont sensibles à l'humidité. Pour s'affranchir du couplage par un liquide, des méthodes de contrôle à sec, encore peu connues, sont en voie de développement (contrôle par ultrasons générés par Laser).

Courants de Foucault

C'est une méthode réservée aux matériaux conducteurs. Le champ magnétique créé par une bobine parcourue par un courant alternatif induit des courants dans la pièce à contrôler. Ceux-ci créent alors à leur tour un champ magnétique s'opposant au champ qui leur a donné naissance, ce qui provoque une variation d'impédance de la bobine. Lorsque le matériau est homogène, l'impédance de la bobine est donnée par un point fixe dans le plan complexe d'impédance. Si une anomalie se trouve dans la pièce, les caractéristiques magnétiques et électriques sont modifiées et le point se déplace. Son déplacement est lié aux caractéristiques du défaut.

Outre sa limite d'application aux matériaux conducteurs, cette méthode ne peut être appliquée qu'à des défauts proches de la surface du fait de sa faible profondeur de pénétration.

Radiographie X

C'est une méthode globale et rapide mais ne permet que la détection de défauts de compacité. Un rayonnement produit par une source de radiations X, est émis en direction de la pièce à contrôler. Un film photosensible placé sur la face opposée à la source, donne une représentation en plan des contrastes de la composition élémentaire du matériau.

Tomodensimétrie Compton

Une source de photons X émet, en direction de la pièce, un faisceau finement collimaté. Par effet Compton, la matière traversée par le faisceau diffuse un nombre de photons proportionnel à sa densité. La mesure est faite par le comptage du nombre de photons diffusés par la zone d'intersection d'un détecteur collimaté et du faisceau incident au sein du matériau. Le déplacement de cette zone élémentaire à l'intérieur de la plaque permet la détection de variations locales de densité trahissant la présence d'un défaut. Bien qu'elle permette l'exploration de surfaces étendues, cette méthode est encore très lente pour des applications industrielles (voir figure (1.3)).

Holographie

La technique consiste à superposer deux hologrammes de l'objet sur un même support sensible. La pièce à contrôler ayant été soumise à une légère contrainte mécanique ou thermique entre les deux prises de vue, provoquant des déplacements de la surface observée. L'analyse de l'image virtuelle ainsi obtenue peut déceler des anomalies de déformation localisées, dénonçant la présence d'un défaut.

Malgré sa très grande sensibilité et son aptitude à visualiser des surfaces très étendues en un temps assez court, cette méthode est peu répandue en industrie à cause de la complexité du dispositif à mettre en place (voir figure (1.4)).

Shearographie

Cette technique basée sur l'analyse de Speckle (granularité laser), fournit des franges d'interférences représentant le gradient de déplacement et non pas le déplacement lui-même comme c'est le cas pour l'holographie. Cette technique est moins sensible que l'holographie et donc moins influencée par les vibrations parasites de l'environnement industriel. Cependant elle n'est applicable que pour des défauts proches de la surface.

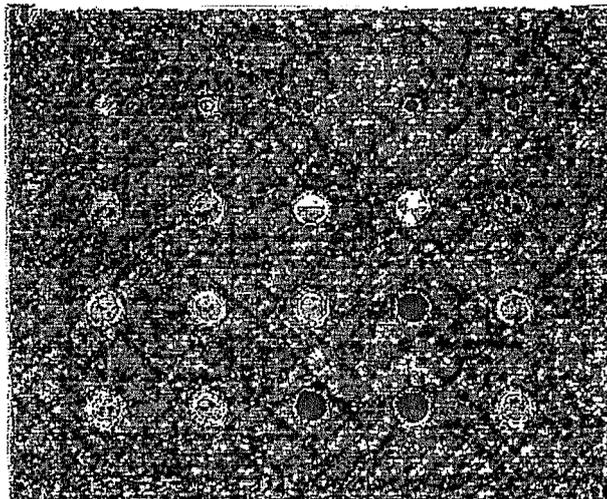


Fig.1.2. Image ultrasonore d'une plaque d'essai en carbone-époxy contenant des inserts de Téflon (Extrait de Maillet, 1991)

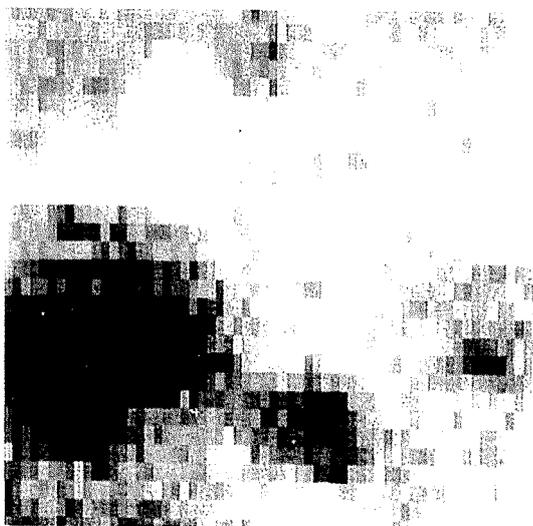


Fig.1.3. Image obtenue par tomodensimétrie Compton à 1 mm de la face avant d'un composite carbone-carbone (Extrait de Delpech, 1993)

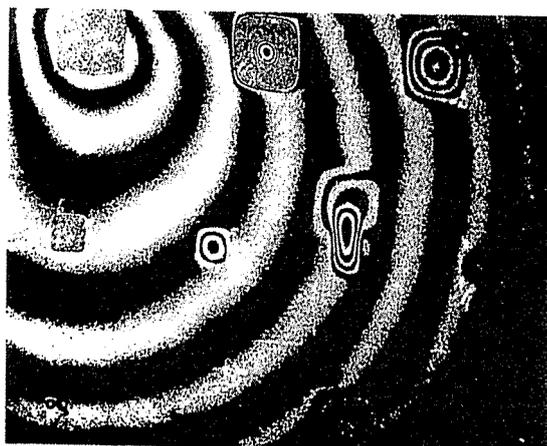


Fig.1.4. Interférogramme holographique d'une plaque de carbone-époxy contenant des inserts de Téflon (Extrait de Delpech, 1993)

1.2.2 Méthodes thermiques en CND

Si l'on exclut les méthodes passives où le champ thermique est mesuré lors du fonctionnement normal de la pièce, il est possible de distinguer deux grandes classes de ces méthodes :

1.2.2.1 Méthodes avec excitation mécanique

Thermoélasticité

Elle est basée sur la dépendance entre l'amplitude d'oscillations de la température dans un milieu isotrope et la trace de son tenseur de contraintes, au cours d'un chargement cyclique et adiabatique dans son domaine élastique [Krapez (1991)]. L'observation de ces changements réversibles de la température autour de la température ambiante, est à la base d'une méthode de quantification du niveau de contrainte local, qui ne permet cependant pas de séparer les contributions des différentes composantes du tenseur de contraintes. La nécessité d'une excitation mécanique fait que cette méthode est à caractère intrusif, et que par ailleurs seuls les défauts proches de la surface sont détectables.

Vibrothermographie

C'est une méthode fondée sur l'étude des points chauds produits par une concentration de contraintes au voisinage des défauts, suite à des sollicitations mécaniques périodiques (test de fatigue). Contrairement à la thermoélasticité, l'enregistrement du champ thermique par une caméra infrarouge n'est pas synchronisé avec la sollicitation. D'autre part, l'énergie d'excitation nécessaire est trop importante d'où le risque de détérioration du matériau.

1.2.2.2 Méthodes avec excitation photonique

L'élévation en température est générée par une absorption de photons émis par une source d'excitation. Le choc thermique dans le matériau entraîne une variation des phénomènes physiques : thermique ou acoustique.

La mesure du premier phénomène fait l'objet des méthodes photothermiques telles que :

- la radiométrie
- l'effet mirage
- la photoréflexion

La mesure du second phénomène fait l'objet des méthodes photoacoustiques telles que :

- la détection microphonique
- la photodéformation
- la détection piézoélectrique

La figure (1.5) illustre le principe de ces différentes techniques.

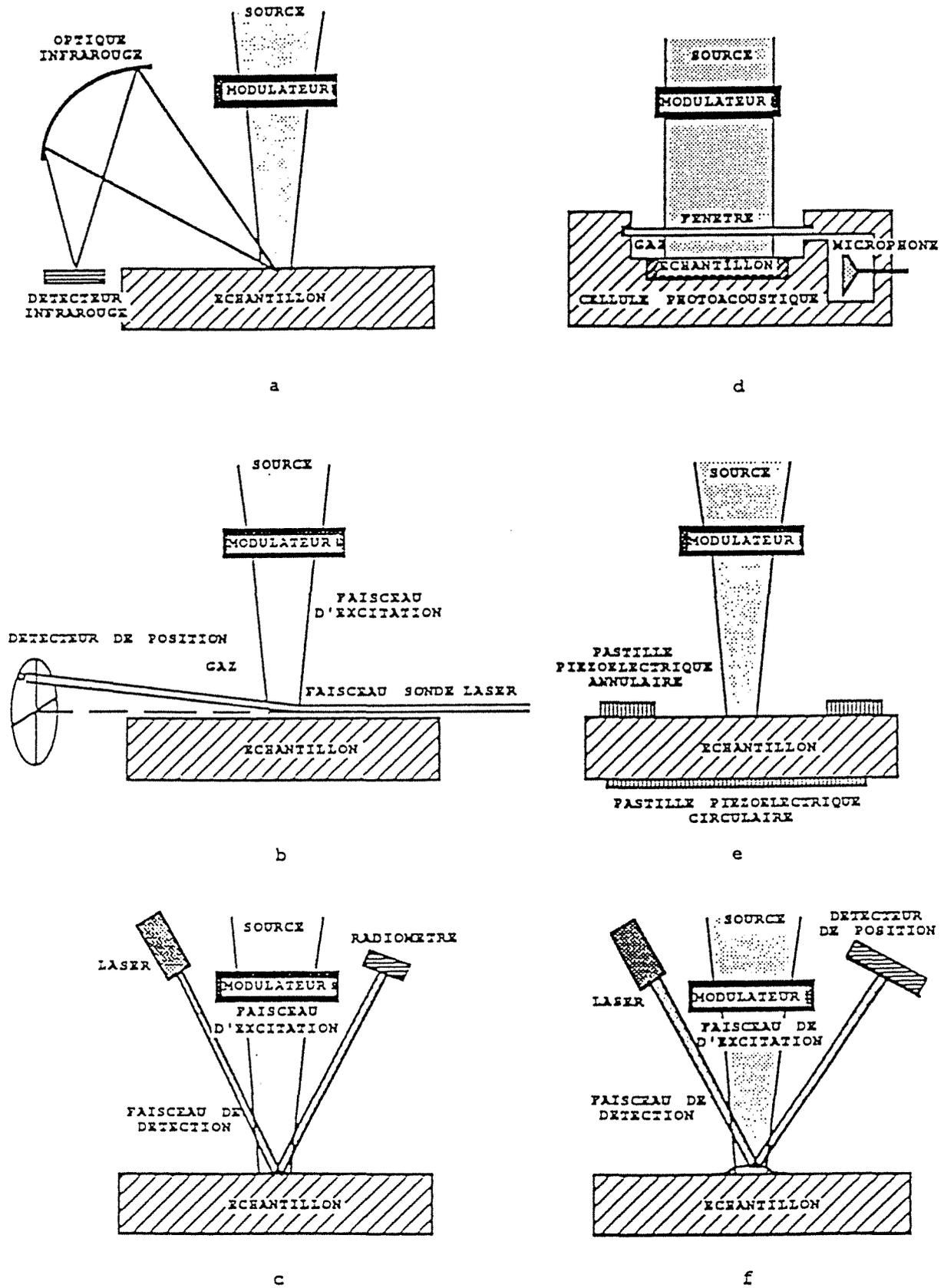


Fig.1.5 Schémas de principe des méthodes thermique de C.N.D. : méthodes photothermiques radiométriques (a), par effet mirage (b) et par photoréflexion (c) - Méthodes photoacoustiques microphonique (d), piézoélectrique (e) et par photodéformation (f). Extrait de Balageas, 1990.

Méthodes photothermiques

Le principe de ces méthodes est basé sur l'observation de l'élévation de température de surface de la pièce à contrôler.

• Radiométrie

Elle consiste à mesurer le rayonnement infrarouge émis par l'échantillon échauffé à l'aide d'un détecteur généralement photoélectrique. L'excitation peut être effectuée soit en régime modulé, soit en régime impulsionnel (méthode flash), avec comme variante le cas où l'excitation est en créneau.

Radiométrie modulée

Les informations acquises renseignent sur les phénomènes proches de la surface échauffée. Cette méthode offre deux signaux, l'un en amplitude, l'autre en phase avec un bon rapport signal sur bruit. Par contre, la durée du contrôle est beaucoup plus longue que pour les méthodes impulsionnelles.

Radiométrie impulsionnelle

L'évolution temporelle de la température de surface est enregistrée juste après le dépôt d'énergie. Les informations à traiter sont récupérées soit sur la face irradiée baptisée "face avant", soit sur la face opposée à l'irradiation baptisée "face arrière". Cette méthode présente l'avantage d'être très rapide. De plus elle met en oeuvre toutes les fréquences, la distribution de Dirac ayant pour spectre toutes les fréquences avec des amplitudes égales. Par contre le rapport signal sur bruit est plus faible que celui obtenu avec une méthode modulée.

• Effet mirage

La technique consiste à mesurer la variation d'indice optique de l'air au voisinage de la pièce étudiée à partir de la déflexion d'un rayon sonde laser. Cette mesure va permettre d'accéder à la température de surface de l'échantillon. Elle est très sensible, mais nécessite un bon état de surface, et possède une bande passante et une résolution moyennes.

• Photoréflexion

Les variations de température produites par un faisceau pompe, sont mesurées par l'intermédiaire de l'intensité d'un faisceau laser sonde, après réflexion dans la zone chauffée. Les variations observées sont dues à la dépendance du facteur de réflexion à la température.

Méthodes photoacoustiques

Dans ce mode de détection, c'est la déformation ou la dilatation du matériau suite à l'éclairement qui sera prise en compte.

• Détection microphonique

L'échantillon est enfermé dans une enceinte remplie d'un gaz et un microphone détecte les variations de pression du gaz, suite à une excitation photonique modulée. Elle est très sensible mais a une bande passante et une résolution faibles.

- *Photodéformation*

Le procédé consiste à mesurer l'amplitude et le déphasage de l'angle de réflexion d'un faisceau laser sonde dans la zone de déformation induite par l'échauffement provoqué par un faisceau laser modulé sur la surface de l'échantillon. Cette méthode nécessite une surface très réfléchive.

- *Détection piézoélectrique*

Cette technique consiste à détecter les ondes élastiques produites par les déformations thermomécaniques locales dues à un flux modulé par un hacheur mécanique permettant une fréquence maximale de 4 kHz. Ces ondes sont détectées par une céramique piézoélectrique collée sur l'échantillon.

1.4 Homogénéisation et modélisation des composites en thermique

La complexité structurelle et le caractère hétérogène des composites rendent difficile la description exacte des phénomènes thermiques qui s'y produisent. Pour réduire le modèle, on procède généralement au remplacement du milieu composite par un milieu *homogène* anisotrope équivalent qui aurait le même comportement macroscopique.

Balageas et Pujola (1985) ont analysé le cas des composites à renforcement orienté (CRO) et ont défini de nouveaux paramètres adimensionnels afin de simplifier le milieu. Le milieu homogène équivalent est constitué uniquement du renforcement parallèle au flux principal et d'une matrice équivalente qui résulte de la matrice réelle et des renforcements perpendiculaires au flux principal.

Amazouz et Degiovanni (1988) ont étudié dans quelles mesures les *multicouches* sont assimilables à des milieux homogènes équivalents anisotropes. L'analyse a été réalisée sur un empilement de disques en régime transitoire impulsionnel 1D et 2D. Dans les deux cas, on a constaté que l'homogénéisation est très rapide malgré un rapport d'anisotropie assez élevé. A l'inverse, en régime permanent bidirectionnel l'étude a montré qu'il est pratiquement impossible d'homogénéiser un milieu multicouche soumis à des conditions aux limites "dures" (densité de flux ou température imposée).

Nombreux, sont les travaux qui ont fait l'objet de l'étude de la conduction de la chaleur dans les structures multicouches. En effet, les chercheurs ont développé plusieurs méthodes *analytiques* et *numériques* pour la résolution du problème. Nous ne citerons ici, que quelques auteurs ayant participé à la modélisation directe ; dans la section suivante, nous citerons d'autres travaux concernant la résolution directe et inverse simultanément. Le second problème passe obligatoirement par la résolution du premier.

L'approche *analytique* du problème transitoire est généralement réalisée par la méthode de la transformation de Laplace [Carslaw et Jaeger (1959)]. Cette transformation a l'avantage de faire disparaître la dérivée partielle temporelle de l'équation de la chaleur.

Degiovanni (1988) a développé une méthode dans l'espace de Laplace connue sous le nom de "méthode des quadripôles thermiques", destinée à modéliser le transfert 1D dans les stratifiés. La méthode permet une écriture matricielle très pratique liant la température et le flux de Laplace sur la face d'un mur (τ_e, ψ_e) aux mêmes grandeurs sur la face opposée (τ_s, ψ_s) :

$$\begin{pmatrix} \tau_e \\ \psi_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_s \\ \psi_s \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

La matrice liant les vecteurs d'entrée et de sortie d'un système multicouche est alors obtenue en mettant en cascade toutes les matrices individuelles. L'auteur a pris en compte l'existence d'éventuelles sources internes, ou aux interfaces et de résistances de contact. La solution dans l'espace temps est obtenue par un retour numérique de Stehfest ou d'autres algorithmes basés sur l'utilisation de la transformation de Fourier rapide (TFR ou en anglais Fast Fourier Transform - FFT -).

Leturq et al (1993) ont appliqué la théorie des quadripôles aux transferts thermiques 3D dans les systèmes multicouches plans en régime permanent. La face supérieure du bloc multicouche est soumise à un flux stationnaire et la face inférieure est maintenue à une température uniforme qui sert de référence. Le transfert a été étudié pour des conditions aux limites isothermes ou isothermes et adiabatiques croisées sur les bords latéraux du bloc multicouche. Pour chaque cas de figure, l'auteur a donné la forme de la solution et le type de valeurs propres discrètes permises. Les auteurs ont montré également comment calculer à l'aide d'une TFR les différentes séries doubles en sinus et en cosinus que l'on peut rencontrer lors de la résolution de l'équation de la chaleur : il suffit de décrire l'équation à transformer $f(x, y)$ sur un domaine en x et y égale à 4, 8 ou 16 fois le domaine de définition, selon le cas, en introduisant les symétries adéquates. L'utilisation de la TFR rend les opérations de transformation directe et inverse très rapides : ainsi une cartographie de 64 par 64 points peut être obtenue en 5 secondes sur un PC 486-DX33.

Batsale (1993 et 1994) a repris les idées de Degiovanni et de Leturq, et a étendue la notion de quadripôle aux cas d'un transfert transitoire bi ou tri-directionnel dans le cadre d'une géométrie cartésienne. L'idée consiste à appliquer aux transformées de Laplace en temps de la température et du flux, de nouvelles transformations intégrales de Fourier (espace rectangulaire) suivant une ou deux directions de l'espace. Les quadripôles multidimensionnels ainsi obtenus ont la même structure que ceux de la modélisation 1D, et sont de ce fait utilisés de manière identique. L'auteur a appliqué cette nouvelle notion à la résolution du problème de la diffusion bidirectionnelle au travers d'un défaut plan.

Les méthodes de transformations intégrales utilisées ci-dessus ont l'avantage d'être purement analytiques. Dans le cas général, un traitement numérique sur ordinateur est nécessaire pour la recherche des valeurs propres du problème, le reste de la solution étant analytique.

Aziz et Na (1984), Hagen (1987) et Batsale et al (1993 et 1994) ont utilisé la méthode des perturbations pour résoudre l'équation de la chaleur dans des milieux homogènes et composites. Le principe de cette méthode consiste à rechercher une représentation de la solution du problème sous forme d'un développement dit "développement asymptotique", par rapport à une quantité petite (devant d'autres quantités intervenant dans le modèle) sans dimension, dite "paramètre de perturbation". Une telle méthode nécessite généralement des algorithmes d'accélération de convergence, tels que l' ϵ -algorithme [Macdonald (1964)] et les approximants de Padé. La répartition spatiale de la solution recherchée est obtenue par une TFR inverse.

D'autres auteurs ont utilisés des méthodes *numériques* (éléments finis, différences finis) ou semi-analytiques pour résoudre le problème de diffusion, quand celui-ci est non linéaire ou la géométrie du domaine est complexe.

Clever et Wassel (1985) a utilisé une méthode de différences finis à directions alternées (ADI) pour la résolution du problème direct tridirectionnel dans un bloc multicouche.

Lamine (1988) a modélisé le transfert au travers d'un défaut de taille finie dans le cadre d'une géométrie cylindrique en utilisant une méthode hybride dite "fluxmétrique". Après une première étape analytique, la méthode consiste à supposer le flux à l'interface constant par morceaux afin de terminer la résolution du problème numériquement. Ce nouveau modèle a permis de déterminer les limites de l'hypothèse d'un transfert 1D utilisé ultérieurement pour un problème inverse de déflectométrie.

Tamma et Yurko (1989) a utilisé une méthode des éléments finis pour la modélisation transitoire tridirectionnelle dans un stratifié. Les éléments traversent l'interface entre deux couches de propriétés thermophysiques différentes.

1.5 Problèmes inverses en thermique

1.5.1 Problème inverse

La résolution d'un problème de caractérisation thermophysique de matériaux ou de contrôle non destructif thermique peut être divisée en trois parties :

- un problème direct qui consiste, connaissant le milieu et le signal excitateur, à décrire l'évolution spatio-temporelle du champ de température (sur les faces extérieures par exemple) dans un formalisme mathématique le plus précis et le plus simple possible :

- simplicité d'écriture et de structure
- rapidité d'exécution
- taille mémoire sur ordinateur raisonnable
- précision du calcul pour approximer la solution exacte avec le moins d'erreur possible

- un problème de métrologie qui donne le signal de sortie le plus juste et le moins bruité possible. Des informations a priori peuvent compléter l'information donnée par ce signal.

- un problème inverse qui permet d'estimer des paramètres (propriétés thermophysiques constantes ou des conditions aux limites et aux interfaces uniformes dans l'espace et constantes dans le temps) ou des fonctionnelles (conditions aux limites ou d'interface non uniformes dans l'espace et variant avec le temps ou la température) tels que l'écart entre les données mesurées et le modèle direct soit minimum. Ceci est obtenu par la recherche d'opérateurs inversibles ou par des méthodes d'optimisation. Le but est donc de remonter de l'effet (la mesure) à la cause originelle. Deux ouvrages de référence écrits par Tikhonov et Arsenin (1976) et Beck et al (1985) ont été le sujet des problèmes inverses. Récemment, une vue d'ensemble sur les problèmes inverses et la déconvolution d'images, a été réalisée par Demoment et al (1989 et 1992) et un historique suivi de quelques exemples concrets sur ce type de problèmes a été exposé par Lam (1993).

Quelle que soit la méthode d'inversion utilisée, le résultat obtenu n'est qu'une estimation $\hat{\beta}$ de la valeur exacte β (où β est le vecteur où sont rangés tous les paramètres inconnus). L'inversion est qualifiée de précise si l'erreur d'estimation $e_{\beta} (= \hat{\beta} - \beta)$ est la plus petite possible. Celle-ci résulte de la contribution d'erreurs différentes qui peuvent être classées en six catégories :

- *erreur de résolution du problème direct*, due essentiellement à des erreurs numériques, liées à la fois aux pas d'espace et de temps, à la précision de l'ordinateur ou à des approximations analytiques.

- *erreur d'hypothèse*, due essentiellement aux hypothèses faites pour la résolution du problème direct et qui peuvent être irréalistes vis à vis de l'expérience.

- *erreur due au bruit*, qui provient de l'instrument de mesure lui même.

- *erreur de métrologie thermique*, due à la conversion du signal analogique (différence de potentiel) livré par l'instrument de mesure en grandeur de même dimension physique que le champ solution du problème direct (erreur liée à l'étalonnage du dispositif de mesure).

- *erreur due aux paramètres connus*, qui provient de l'incertitude sur un paramètre mesuré ou obtenu indépendamment de la procédure d'inversion.

- *erreur spécifique au problème d'estimation de fonctions*, due à la paramétrisation de la fonction en un vecteur paramètre β à nombre fini n de composantes. Plus cette paramétrisation est fine, plus le bruit de mesure va être amplifié et il en résulte un estimé complètement perturbé (instabilité). La paramétrisation d'une fonction inconnue peut être réalisée de différentes manières : fonction constante par morceaux, fonction polygonale, fonction en peigne de Dirac ou encore écriture à l'aide d'un spectre de fonctions propres (Fourier par exemple) tronqué à n composantes (méthode spectrale).

La quantification de ces différents types d'erreurs influençant l'estimation va permettre de qualifier l'estimation et la manière avec laquelle il faut alimenter l'algorithme inverse pour l'améliorer. Le calcul des résidus peut donner une idée sur la qualité de l'inversion et identifier la source d'erreur dans le cas où le résultat est irréaliste.

1.5.2 Caractère mal-posé d'un problème inverse

La mesure d'un champ spatial τ dans un milieu caractérisé par un vecteur paramètre inconnu β , peut être formulé dans le cas général par :

$$\tau = \eta(P, \beta) \quad (1.2)$$

où η est une fonction à valeurs réelles de la variable déterministe P indiquant les coordonnées dans l'espace géométrique. Bien que ce dernier soit souvent continu, il est habituellement échantillonné sur une grille : dans le cas d'une image thermographique par exemple, les coordonnées correspondent aux numéros de ligne et de colonne des pixels.

En pratique, les mesures sont dégradées par un bruit spatial aléatoire. Si celui-ci est additif, le nouveau champ de température est donné par :

$$Y = \tau + \varepsilon \quad (1.3)$$

où τ est le vecteur "signal" théorique :

$$\tau = (\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n)^t \text{ avec : } \tau_i = \eta(P_i, \beta)$$

Y est le vecteur "signal" expérimental non biaisé :

$$Y = (Y_1 Y_2 \dots Y_n)^t$$

ε est le vecteur bruit de mesure supposé d'écart type constant et non corrélé :

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^t$$

Les problèmes inverses conduisent généralement à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce [citée dans Press et al (1992)]. Celle-ci peut se ramener par une simple quadrature à la résolution d'un système linéaire. On peut alors écrire :

$$Y = X \beta + \varepsilon \quad (1.4)$$

où X est la matrice de sensibilité de la mesure thermique au vecteur β .

Bien que cette restriction du problème au cas linéaire semble être un peu simplifiée, elle est à la base de la plupart des solutions des problèmes non linéaires.

Le problème est d'obtenir un estimé $\hat{\beta}$ du vrai vecteur β à partir du vecteur des données Y . La solution est donnée directement par la méthode ordinaire des moindres carrés :

$$\hat{\beta}_{mc} = (X^t X)^{-1} X^t Y \quad (1.5)$$

Mais en présence de bruit, cette solution est généralement inadaptée (instable) car la matrice $X^t X$ est souvent mal conditionnée, et il en résulte une amplification du bruit qui dépasse alors tout niveau acceptable, d'où une solution irréaliste. C'est le cas des problèmes inverses dits mal-posés au sens d'Hadamard. Le seul recours pour les résoudre est la recherche de quasi-solutions. On cherche donc une solution acceptable dans la classe des solutions admissibles $\{\hat{\beta}\}$ définie par :

$$C_{adm} = \{ \hat{\beta} : \| Y - X \hat{\beta} \| \leq \| \varepsilon \| \} \quad (1.6)$$

(La norme $\| \cdot \|$ définit la distance entre les données et le signal exact).

Pour y parvenir une information a priori doit être rajoutée au problème.

1.5.3 Régularisation d'un problème mal-posé

De nombreuses méthodes ont été développées pour la résolution des problèmes inverses :

- Méthode de régularisation de Tikhonov, [citée dans Beck et al (1985)]
- Méthode du retour vers la frontière "space marching", [Raynaud et Bransier (1986)]
- Décomposition tronquée en valeurs singulières, [citée Golub et Van Loan (1989)]
- Algorithmes à filtre numérique de Kalman, [Hoang et al (1994)]
- Méthode des temps futurs de Beck, [Beck et al (1985)]
- Méthode de mollification de Murio, [Murio (1993)]
- Méthode des transformées intégrales de Laplace, Fourier, Hankel, etc. ..., [Hadisaroyo et al (1992), Cotta (1994)]

Quand le problème est mal-posé, la solution $\hat{\beta}_{mc}$ est généralement rejetée, le bruit aux hautes fréquences la rendant généralement trop oscillante (on s'attend à ce qu'elle soit à variations douces). Il faut donc trouver un compromis entre la régularité de la solution et l'instabilité due au caractère aléatoire des erreurs. Le moyen le plus simple pour arriver à ce compromis est de définir deux mesures de distance $\Delta_1(\beta, \hat{\beta}_{mc})$ et $\Delta_2(\beta, \hat{\beta}_\infty)$, entre β et deux solutions extrêmes $\hat{\beta}_{mc}$ et $\hat{\beta}_\infty$. $\hat{\beta}_{mc}$ est la solution très instable des moindres carrés, et $\hat{\beta}_\infty$ une solution a priori à variations très douces. La solution régularisée $\hat{\beta}(\mu, Y)$ est la solution du nouveau problème :

$$\hat{\beta}(\mu, Y) = \text{Arg min}_{\beta} \{ \Delta_1(\beta, \hat{\beta}_{mc}) + \mu \Delta_2(\beta, \hat{\beta}_\infty) \} \quad (1.7)$$

Le choix des mesures des distances Δ_1 et Δ_2 indique la façon selon laquelle la régularisation est réalisée. Le choix de la valeur de μ indique jusqu'à quel point la régularisation est faite. Une fidélité parfaite aux données correspond à $\mu = 0$, une fidélité parfaite à l'a priori correspond à $\mu = \infty$. Les mesures de distance Δ_1 et Δ_2 peuvent être choisies de différentes manières [Demoment et Idier (1992)], on ne cite ici que deux exemples :

- distance euclidienne pondérée

$$\Delta_W(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 - \beta_2)^t W (\beta_1 - \beta_2) = \left\| \beta_1 - \beta_2 \right\|_W^2 \quad (1.8)$$

où $W = \text{diag}(w_{ij})$.

Dans le cas particulier où cette matrice est choisie égale à la matrice $(X^t \sigma^{-1} X)$, où σ représente la matrice de variance covariance du bruit supposé centré, on retrouve la distance utilisée dans la méthode de Gauss-Markov :

$$\Delta_W(\beta_1, \beta_2) = (Y - X \beta)^t \sigma^{-1} (Y - X \beta) \quad (1.9)$$

On peut alors montrer que l'estimateur qui minimise cette distance est celui de la variance minimum.

• *distance de Kullback*

Les grandeurs physiques à identifier sont positives. Une inversion instable donne généralement des valeurs locales négatives. Différentes méthodes d'optimisation sous contraintes permettent d'introduire l'information a priori de la positivité de la solution. La distance de Kullback est souvent utilisée à cette fin :

$$\Delta_K(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n \beta_{1i} \log\left(\frac{\beta_{1i}}{\beta_{2i}}\right) \quad (1.10)$$

où n est le nombre de paramètres inconnus.

L'existence éventuelle de minima locaux, la complexité des calculs ou la positivité de la solution peuvent cependant poser des problèmes d'ordre pratique. La méthode la plus facile à mettre en oeuvre est celle développée dans les années quarante par A.N. Tikhonov. Son critère de minimisation est donné par :

$$\hat{\beta}(\mu, Y) = \text{Arg min}_{\beta} \left\{ \left\| \beta - \hat{\beta}_{mc} \right\|_W^2 + \mu \left\| D_k \beta \right\|^2 \right\} \quad (1.11)$$

où les normes sont des distances euclidiennes et D_k est un opérateur des différences d'ordre k (habituellement choisi égal à 0 à 1 ou 2), utilisé pour adoucir la solution. Celle-ci s'exprime linéairement en fonction du champ mesuré Y :

$$\hat{\beta}(\mu, Y) = (X^t \sigma^{-1} X + \mu D_k^t D_k)^{-1} X^t \sigma^{-1} Y \quad (1.12)$$

D_k est ainsi une version discrétisée de la fonction inconnue β ($k = 0$), de sa dérivée première ($k = 1$) ou seconde ($k = 2$).

Cette régularisation consiste à prendre en compte les données pour les fréquences spatiales où le rapport signal sur bruit est acceptable et à amortir les données pour les autres fréquences. Il en résulte généralement une perte de résolution spatiale de l'objet reconstitué. C'est le cas par exemple du filtre optimal de Wiener [Thomas et al (1992)] ou de la méthode de la décomposition tronquée en valeurs singulières (TSVD). En effet, dernièrement, Linz (1994) a montré que cette dernière méthode est équivalente à la méthode de Thikonov d'ordre zéro, en introduisant un coefficient de régularisation dans les valeurs singulières du système linéaire issu d'une équation de Fredholm de première espèce. La méthode de Thikonov peut avoir également l'inconvénient de donner des solutions locales négatives, ce qui est généralement inadmissible. Ce problème peut être résolu en remplaçant la distance quadratique pondérée Δ_2 par une distance de Kullback. C'est le cas des méthodes dites à maximum d'entropie [Ramos (1992)].

La plus grande difficulté de la régularisation est le choix du paramètre μ . Sont proposées dans la littérature diverses techniques pour trouver ce paramètre. Nous citons à titre indicatif les méthodes de validation croisée qui permettent d'estimer ce paramètre dans le cas de distances quadratiques [Golub et al (1979)].

1.5.4 Caractérisation des matériaux

La détermination de la diffusivité thermique d'un solide par la méthode photothermique impulsionnelle est l'exemple le plus simple d'un problème inverse d'estimation de paramètres. La méthode la plus couramment utilisée pour la mesure de la diffusivité d'un matériau isotrope et homogène est la technique flash. La forte anisotropie des matériaux composites à renforcement orienté ou des stratifiés nécessite des mesures de diffusivité selon différents axes.

1.5.4.1 Matériaux isotropes

Face arrière

Parker (1961) est le pionnier des techniques d'estimation de la diffusivité thermique. L'échantillon est modélisé par un cylindre d'épaisseur e recevant au temps $t = 0$, sur la face avant $z = 0$, une impulsion thermique en Dirac de flux, uniformément répartie, d'énergie surfacique Q . Le modèle de Parker est simple mais ne tient pas compte des pertes thermiques sur les différentes faces. L'échauffement en chaque point de l'échantillon s'écrit :

$$T(z, t) = \frac{Q}{\rho c e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n \pi z}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{e^2} a t\right) \right] \quad (1.13)$$

Parker calcule la diffusivité sur la face arrière ($z = e$) par la relation $a = 0.139 \frac{e^2}{t_{1/2}}$, où $t_{1/2}$ est le temps de demi-montée en température.

En pratique, il n'est pas toujours possible de négliger les pertes, notamment pour des matériaux isolants pour lesquels la température maximum est inférieure à la température asymptotique adiabatique $Q/\rho c e$.

Degiovanni (1975) a développé un modèle de dépouillement qui tient compte des pertes thermiques. La méthode utilise plusieurs points particuliers du thermogramme et est indépendante des valeurs des coefficients de pertes. En outre, cette prise en compte des pertes permet la mesure de la diffusivité de plaques épaisses. La diffusivité thermique se calcule simplement par :

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}^2} (1.15 t_{5/6} - 1.25 t_{2/3}) \quad (1.14)$$

où $t_{5/6}$ et $t_{2/3}$ sont les instants où la température atteint respectivement le 5/6 ou le 2/3 de son niveau maximum.

En 1982, Balageas présente une nouvelle interprétation des thermogrammes qui s'appuie sur la simple constatation que les pertes affectent d'autant moins l'évolution temporelle de la température que celle-ci est observée aux temps courts. La technique emploie tous les points aux temps courts et donne des résultats aussi performants que ceux de la technique précédente.

Degiovanni et Laurent présentent en 1986, une méthode qui utilise tous les temps courts où l'influence de la diffusivité est prépondérante par rapport à celle des pertes. La méthode est basée sur l'emploi des moments temporels partiels d'ordre 0 et -1 du thermogramme.

$$M_0 = \int_{t=0.1}^{t=0.8} T(t) dt \quad M_{-1} = \int_{t=0.1}^{t=0.8} \frac{T(t)}{t} dt \quad (1.15)$$

La diffusivité thermique est alors donnée par :

$$a = \frac{e^2 F(M_{-1})}{M_0} \quad (1.16)$$

où la fonction d'identification $F(M_{-1})$ est calculée grâce à :

$$F(M_{-1}) = 0.08548 - 0.31 (0.05486 - M_{-1}) + 0.5 (0.5486 - M_{-1})^{2.63} \quad (1.17)$$

Actuellement, c'est l'une des méthodes d'identification les plus utilisées pour sa grande précision. (Une étude comparée des différentes méthodes a été réalisée par Balageas en 1986).

Face avant

La grandeur déterminant l'évolution de température de la face avant d'une expérience flash est l'effusivité. En pratique l'énergie absorbée étant généralement inconnue, on déduit plutôt la diffusivité du matériau, mais la technique est très sensible au bruit de mesure.

C'est le cas des travaux de Fort et al (1988) dont le principe est de calculer la diffusivité à partir du temps de rupture de pente en coordonnées log-log indépendamment des pertes thermiques.

Une nouvelle technique destinée à améliorer le rapport signal sur bruit a été développée par Delpuch et al (1990). L'opération d'identification est réalisée directement au niveau des transformées de Laplace des thermogrammes. L'opération d'intégration de Laplace réduit le bruit de mesure et améliore par conséquent l'estimation de la diffusivité de 6 à 7 % par rapport aux valeurs trouvées à partir des dépouillements traditionnels. Toutefois, l'identification reste toujours moins précise que celle réalisée en face arrière.

1.5.4.2 Matériaux anisotropes

La méthode flash décrite plus haut n'est pas adaptée à la caractérisation des propriétés thermiques des matériaux anisotropes dans le plan de ceux-ci. Donaldson et Taylor, en 1975, ont été les premiers à étudier le transfert radial dans un cylindre. L'irradiation a été effectuée sur une surface de rayon plus petit que celui du cylindre afin de déterminer les diffusivités selon les axes principaux d'anisotropie.

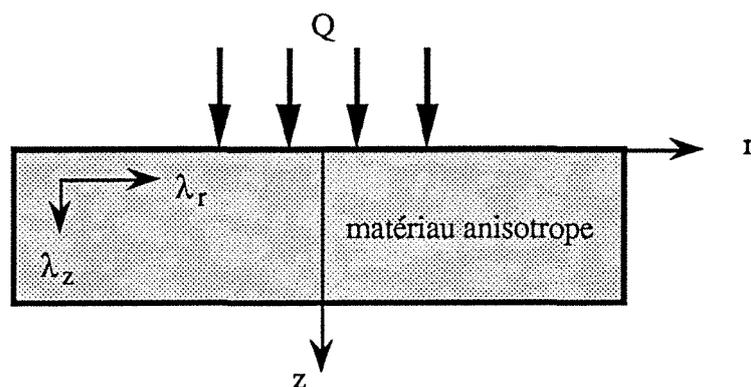


Fig.1.6 Irradiation partielle sur un matériau anisotrope

Amazouz (1987) et Lachi (1991) ont raffiné cette technique en séparant le terme axial et le terme radial de l'équation de la chaleur pour un échantillon cylindrique orthotrope irradié partiellement. Ceci permet d'identifier simultanément les deux diffusivités dans les sens axial et radial. Le champ de température s'écrit alors sous la forme :

$$T(r, z, t) = \frac{Q}{\rho c e} Z(z, t) R(r, t) \quad (1.18)$$

La technique d'identification de la diffusivité radiale est basée sur l'emploi de deux températures en face arrière au centre ($r = 0$) et en dehors de la zone irradiée ($r = r_m$). Le rapport de ces deux températures est indépendant des propriétés axiales du matériau :

$$X_{21} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{R(r_m, t)}{R(0, t)} \text{ ou encore sous forme réduite } X_{21}^* = \frac{R(r_m, t_r^*)}{R(0, t_r^*)}$$

La diffusivité radiale est alors calculée par :

$$a_r = r_m^2 \frac{M_o^*}{M_o} \quad (1.19)$$

où M_o^* et M_o sont respectivement les moments d'ordre zéro théorique et expérimental du rapport des températures :

$$M_o^* = \int_{t_{r\alpha}^*}^{t_{r\beta}^*} X_{21}^* dt_r^* \quad \text{avec } \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0.3 \quad (1.20)$$

et $t_r^* = \frac{a_r t}{r_m^2}$ est le nombre de Fourier dans le sens radial.

M_0^* étant fonction du moment théorique d'ordre -1, M_{-1}^* . Pratiquement, on mesure M_{-1} ($= M_{-1}^*$), r_m et on déduit d'abord M_0^* puis la diffusivité radiale recherchée.

La méthode est un peu moins précise dans le sens radial que dans le sens axial, car la distance entre les thermocouples T_1 et T_2 est déterminée avec une incertitude qui dépasse celle de l'épaisseur de l'échantillon.

Citons également les travaux effectués par Cielo et al (1986) et Balageas et al (1990) sur la mesure de la diffusivité thermique radiale de matériaux anisotropes par la technique de l'onde convergente. La forme géométrique de l'irradiation est un anneau centré sur l'échantillon, alors que la forme temporelle reste un Dirac de flux. La mesure de température en face avant au centre de l'anneau est réalisée sans contact par un détecteur infrarouge (voir figure (1.7)). L'identification de la diffusivité thermique radiale instantanée se fait soit par inversion directe du thermogramme expérimental, soit par la méthode de la dérivée logarithmique, ceci pour l'un ou l'autre des cas limites : milieu semi-infini sans pertes et milieu extrêmement fin. Cette méthode a été reprise par Enguehard (1991). Ce dernier l'a de plus appliqué à la détection de défauts verticaux. Elle présente une bonne sensibilité à la diffusivité radiale mais la mesure est locale et délicate.

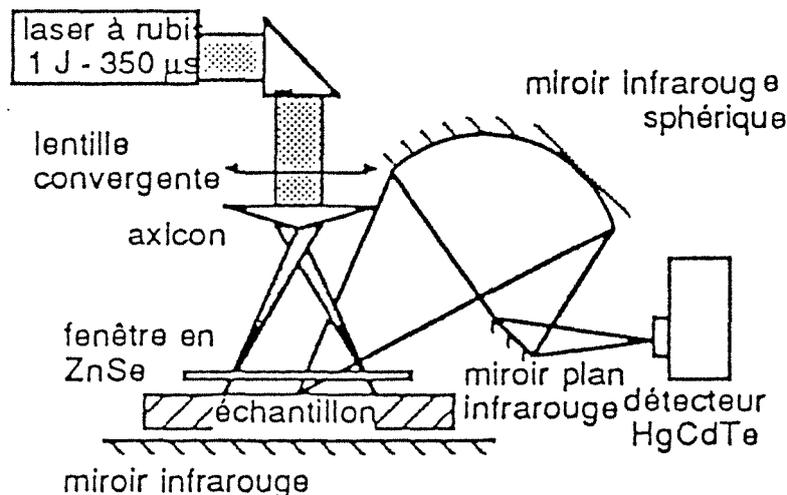


Fig.1.7 Méthode de l'onde convergente, (Extrait de Balageas, 1990)

En 1992, Hadisaroyo et al étudient le transfert longitudinal en régime transitoire dans des plaques minces d'épaisseurs e . La méthode consiste à identifier la diffusivité radiale a et le coefficient h de pertes thermiques dans l'espace de Laplace à partir de deux thermogrammes mesurés en deux sites différents x_1 et x_2 de la plaque (voir figure (1.8)).

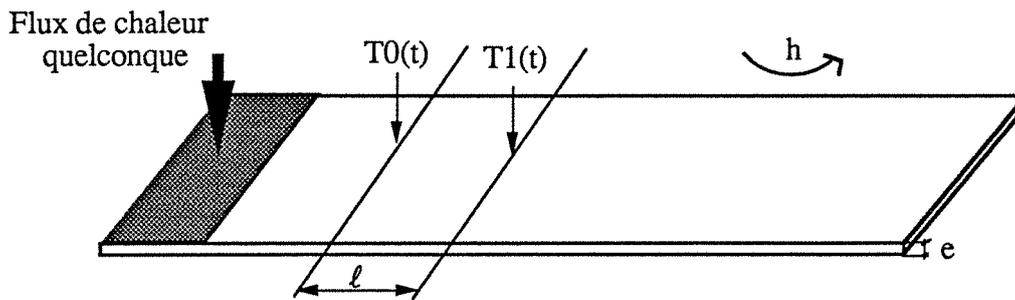


Fig.1.8 Dispositif expérimental

L'inversion est basée sur l'équation suivante :

$$\ln^2 \left[\frac{\tau(x_2, p)}{\tau(x_1, p)} \right] = \left[\frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda e} \right] (x_2 - x_1)^2 \quad (1.21)$$

avec $\tau(x, p) = \int_0^{\infty} (T(x, t) - T_{\infty}) \exp(-p t) dt$ la transformée de Laplace de l'élévation de température de l'échantillon à l'abscisse x .

Philippi et al en 1994 proposent d'utiliser les méthodes de transformation intégrale en espace et en temps qui utilisent des expressions analytiques simples d'identification. Dans le cadre d'une géométrie cartésienne, un échantillon anisotrope d'épaisseur e , de largeur ℓ et de longueur L , est soumis à une impulsion de chaleur $\varphi(x, y, t)$ de type flash de forme quelconque : $\varphi(x, y, t) = f(x, y) \delta(t)$, avec $\delta(t)$ la distribution de Dirac en temps. Les échanges thermiques sur les faces avant et arrière avec l'environnement sont caractérisés par un coefficient d'échange h ; par contre ils ont été négligés sur les bords. Le schéma de principe est illustré sur la figure (1.9).

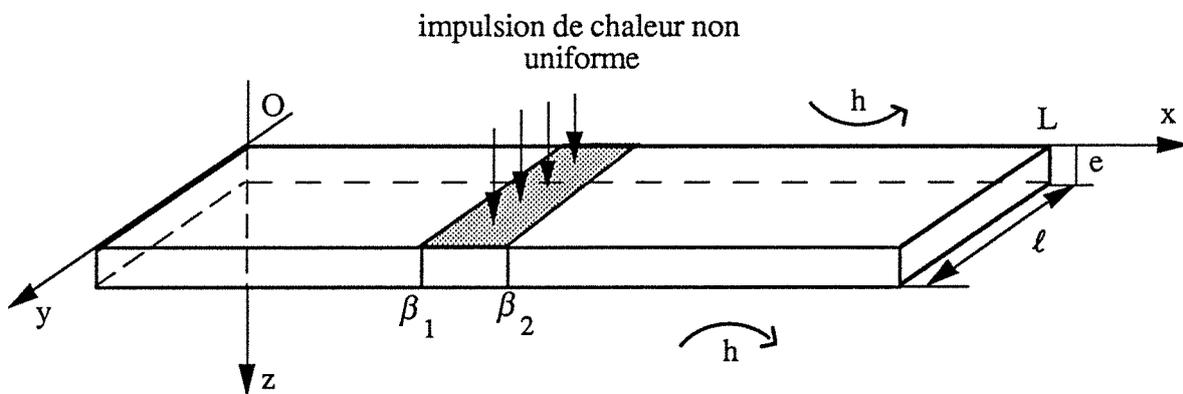


Fig.1.9 Schéma du montage

La méthode consiste à transformer les distributions de température $T(x, y, z, t)$ grâce à une transformation de Fourier spatiale en cosinus et une transformation de Laplace en temps :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \int_0^{\infty} \int_0^{\ell} \int_0^L T(x, y, z, t) \cos(\beta y) dy \cos(\alpha x) dx \exp(-p t) dt \quad (1.22)$$

où p désigne la variable de Laplace et α et β sont les valeurs propres discrètes du problème telles que : $\alpha_n = \frac{n \pi}{L}$ et $\beta_m = \frac{m \pi}{\ell}$. La transformée de Laplace-Fourier de la distribution de température sur la face arrière s'écrit alors sous une forme simple :

$$\theta(\alpha, \beta, e, p) = \frac{F(\alpha, \beta)}{\lambda_z u \sinh(u e) + 2 h \cosh(u e) + h^2 \sinh(u e) / (\lambda_z u)} \quad (1.23)$$

$$\text{où } u = \sqrt{\frac{p}{a_z} + \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \alpha^2 + \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \beta^2}$$

avec $F(\alpha, \beta)$ la transformée de Fourier de $f(x, y)$.

a_z est la diffusivité thermique axiale et $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ les conductivités thermiques dans les directions principales d'anisotropie.

Si on introduit la transformée de Fourier simple de la température (sans transformer le temps) définie par :

$$\Theta(\alpha, \beta, z, t) = \int_0^{\ell} \int_0^L T(x, y, z, t) \cos(\beta y) dy \cos(\alpha x) dx \quad (1.24)$$

il est possible de déduire de l'expression (1.23), une formule analytique simple d'identification dans l'espace temps-fréquence spatiale de coordonnées t, α, β en utilisant les propriétés de translation des transformations de Laplace :

$$\ln\left(\frac{\Theta(\alpha, \beta, e, t_2)}{\Theta(\alpha, \beta, e, t_1)}\right) = \ln\left(\frac{\Theta(0, 0, e, t_2)}{\Theta(0, 0, e, t_1)}\right) - a_x \alpha^2 (t_2 - t_1) - a_y \beta^2 (t_2 - t_1) \quad (1.25)$$

où a_x et a_y sont les diffusivités selon les axes x et y , et t_1 et t_2 deux instants pour lesquels sont calculées les transformées de Fourier de la température.

Cette fonction est utilisée pour l'identification des paramètres recherchés. Il suffit de la tracer en fonction de $\beta^2 (t_2 - t_1)$ ou $\alpha^2 (t_2 - t_1)$ pour obtenir une droite de pente a_y ou a_x . L'ordonnée à l'origine de la droite considérée avec $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ est seule dépendante de la diffusivité axiale et des pertes convectives. L'auteur montre que pour des temps grands devant le temps caractéristique de diffusion dans le sens de l'épaisseur, il est possible d'exprimer l'ordonnée à l'origine en fonction uniquement des pertes convectives pour des nombres de Biot faibles :

$$\ln\left(\frac{\Theta(0, 0, e, t_2)}{\Theta(0, 0, e, t_1)}\right) = -H (t_2 - t_1) \quad (1.26)$$

Le paramètre identifiable est : $H = \frac{2h}{\rho c e}$.

La diffusivité selon la direction x est alors déterminée par :

$$a_x = \frac{1}{(t_2 - t_1) \alpha^2} \left[\ln\left(\frac{\Theta(0, 0, e, t_2)}{\Theta(0, 0, e, t_1)}\right) - \ln\left(\frac{\Theta(\alpha, 0, e, t_2)}{\Theta(\alpha, 0, e, t_1)}\right) \right] \quad (1.27)$$

Des simulations numériques d'expérience destinées à tester l'efficacité des inversions, ont été menées en rajoutant un bruit aléatoire ($\sigma = 0.1 K$) sur les profils de température d'un calcul direct (voir figure (1.10)). La présence du bruit fait que la droite d'identification n'est exploitable qu'aux basses fréquences (voir figure (1.11)). Des études de sensibilité et de bruit ont permis d'améliorer sensiblement les résultats d'identification. Une acquisition du thermosignal par thermographie infrarouge suivi d'un traitement statistique des données issues de l'estimation sur différents couples d'images (temps t_1 et t_2) permet de remonter aux paramètres H et a_x avec des écarts types d'estimation de quelques pourcents.

1.5.5 Défectométrie

Balageas et al (1987) ont proposé une méthode de caractérisation de délaminage dans un matériau composite basée sur une approche analytique monodimensionnelle lors d'un éclairage impulsionnel. La technique consiste à calculer à partir du thermogramme relevé à l'aplomb du défaut en face avant la loi d'effusivité apparente $b_{ap}(t) = Q/(\Delta T(t) \sqrt{\pi t})$. L'évolution temporelle de l'effusivité ainsi calculée présente une baisse passagère due au ralentissement de la diffusion de la chaleur provoquée par le défaut. L'amplitude et le temps d'occurrence du minimum sont caractéristiques de la profondeur z et de la résistance thermique R du défaut. Une année plus tard, Boscher et al proposent deux corrélations permettant de remonter aux paramètres du défauts à partir des coordonnées du minimum :

$$z = \sqrt{a t_{min}} \left(\frac{b_{ap}(t)}{b_o} \right)_{min}^{0.95} \quad (1.28)$$

$$R = \frac{1.61 \sqrt{t_{min}}}{b_o} \left(\frac{b_{ap}(t)}{b_o} \right)_{min}^{0.95} \left[\left(\frac{b_{ap}(t)}{b_o} \right)_{min}^{-1.89} - 1 \right] \quad (1.29)$$

où b_o est l'effusivité nominale du matériau sain et a sa diffusivité thermique.

Les limites de cette méthode sont liées directement aux hypothèses simplificatrices donnant lieu au modèle analytique. En effet celui-ci est basé sur un transfert adiabatique, unidirectionnel dans un milieu semi-infini.

La même année, Balageas propose une nouvelle méthode basée sur le calcul du moment temporel d'ordre zéro du contraste absolu, relevé en face avant, suite à une stimulation impulsionnelle :

Fig.1.10 Profils de température bruités

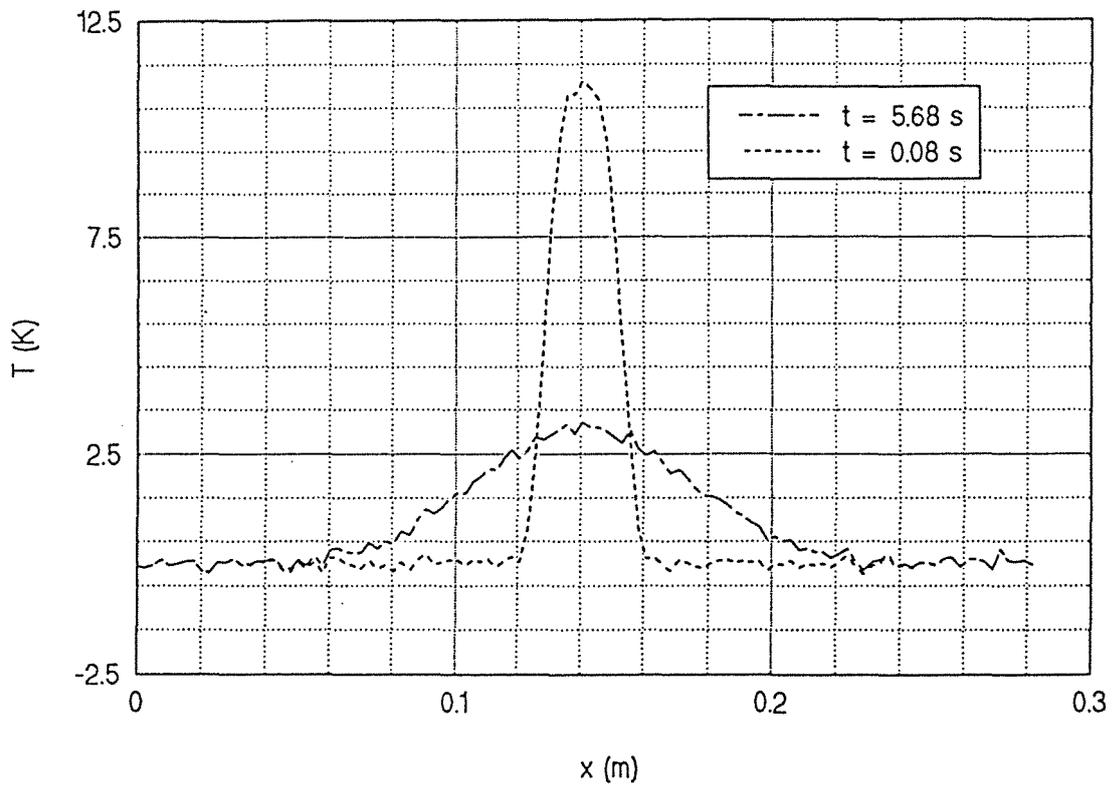
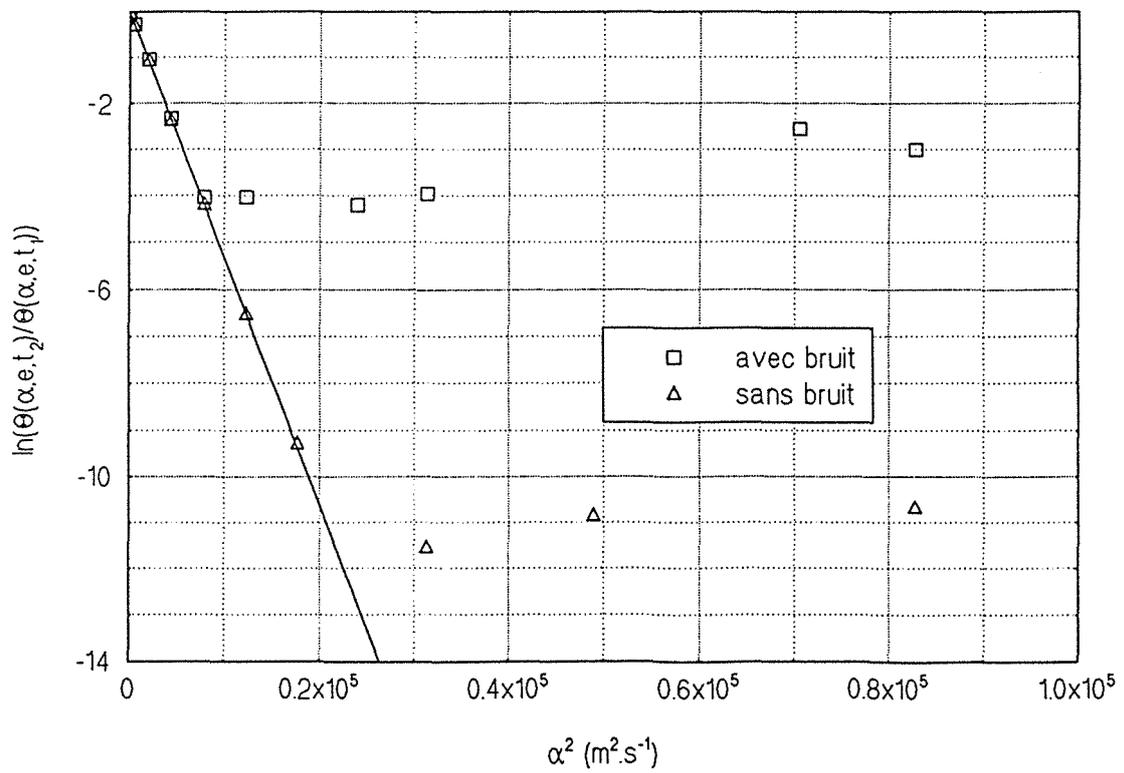


Fig.1.11 Droite d'identification $\ln[\theta(\alpha, e, t_2)/\theta(\alpha, e, t_1)]$



$$M_o = \int_0^{\infty} (T(t) - T_o(t)) dt \quad (1.30)$$

L'auteur a montré que dans le cas de faibles résistances d'interface, le moment M_o est égal à :

$$M_o = Q R \left(1 - \frac{z}{e}\right)^2 \quad (1.31)$$

où Q est la densité d'énergie absorbée par la face avant de l'échantillon d'épaisseur e . Dans le cas où cette dernière est grande, le moment devient indépendant de la profondeur du défaut et s'écrit :

$$M_o = Q R \quad (1.32)$$

Là encore, l'hypothèse d'adiabaticité jusqu'aux temps longs est nécessaire.

Dartois (1986) a développé une méthode de caractérisation thermique de revêtement semi-transparent et de la résistance thermique à l'interface en régime modulé. Son principe consiste à étudier l'influence des différents paramètres sur l'amplitude et la phase de la réponse thermique.

Lamine (1988) propose une méthode d'identification à partir du maximum du contraste thermique unidirectionnel normalisé par son niveau adiabatique lors d'une expérience impulsionnelle. Un calcul direct analytique du contraste dans l'espace de Laplace pour différentes valeurs des caractéristiques du défaut, a permis de construire des abaques de référence en face avant et en face arrière. Ces abaques sont formés par les courbes iso-résistance et iso-profondeur dans le plan de coordonnées réduites du point extremum. L'identification des paramètres du délaminage s'effectue en déterminant en premier lieu les coordonnées réduites de l'extremum du contraste, relevé en face avant ou arrière, et à reporter ce point sur l'abaque correspondant.

Bontaz (1990) a amélioré la méthode proposée par Balageas qui utilise le moment temporel du contraste absolu en augmentant sa sensibilité en réduisant l'intervalle temporel d'intégration. Ce nouveau intervalle est limité par les instants d'apparition t_a et de disparition t_b du contraste thermique. Le nouveau moment d'ordre zéro est alors donné par :

$$M_o = \int_{t_a}^{t_b} \log(T(t) - T_o(t)) d[\log(t)] \quad (1.33)$$

Un abaque illustrant la variation de M_o en fonction de la résistance thermique permet l'identification de celle-ci. Cette courbe a été construite grâce à un modèle analytique utilisant la méthode des quadripôles 1D et les bornes d'intégration t_a et t_b ont été déterminées pour le cas de la résistance maximale figurant sur l'abaque. La profondeur de l'interface du bicouche est estimée à partir du temps d'apparition du contraste t_{ap} et de la diffusivité thermique de la première couche par la relation :

$$z = \sqrt{2 \pi a t_{ap}} \quad (1.34)$$

Krapez (1991) propose deux procédures d'inversion dans les contextes d'un transfert mono- ou bi- dimensionnel dans un milieu semi-transparent à l'excitation. Dans le premier cadre, Krapez a en premier lieu caractérisé le contraste thermique par trois paramètres. Il s'agit de la

valeur de l'extremum du contraste, de l'instant auquel le contraste atteint la moitié de son maximum dans sa phase ascendante et de l'instant auquel le contraste atteint la moitié de son maximum lors de sa phase descendante. En second lieu, il procède à une optimisation par la méthode des moindres carrés entre ces trois paramètres issus de l'expérience et leurs homologues théoriques, le vecteur paramètre à estimer étant constitué de la profondeur du défaut, de sa résistance et du coefficient des pertes. Dans le cadre d'un transfert bidirectionnel, l'auteur a développé une méthode utilisant des abaques qui ont été déterminés par un calcul direct numérique utilisant la méthode des différences finies.

Maillet et al (1993) reprennent la méthode des quadripôles thermiques unidirectionnels pour modéliser le transfert thermique au travers d'un défaut de taille infinie, de résistance R_c et de profondeur e_d , dans un milieu homogène d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de diffusivité a . Les transformées de Laplace des contrastes réduits :

$$\Delta\tau^{**} = \int_0^{\infty} \exp(-p^* t^*) \frac{T-T_o}{T_{\infty}} dt^* \quad (1.35)$$

(t^* étant le nombre de Fourier ; T_{∞} la température adiabatique et T_o la température sur une plaque saine)

sont données par des expressions analytiques très simples :

$$\text{sur la face avant : } \Delta\tau_f^{**} = \frac{R_c^* \sinh^2 [\alpha (1-z_d^*)]}{\sinh(\alpha) \{ \sinh(\alpha) + R_c^* \alpha \sinh(\alpha z_d^*) \sinh[\alpha (1-z_d^*)] \}} \quad (1.36)$$

$$\text{sur la face arrière : } \Delta\tau_r^{**} = - \frac{R_c^* \sinh(\alpha z_d^*) \sinh [\alpha (1-z_d^*)]}{\sinh(\alpha) \{ \sinh(\alpha) + R_c^* \alpha \sinh(\alpha z_d^*) \sinh[\alpha (1-z_d^*)] \}} \quad (1.37)$$

$$\text{avec : } z_d^* = e_d/e \quad R_c^* = R_c/R \quad R = e/\lambda \quad \alpha = \sqrt{p^*} \quad p^* = e^2 p/a$$

Le retour dans l'espace réel est fait par l'algorithme numérique de Stehfest. Les formes des thermogrammes en température et en contraste sont illustrées sur la figure (1.12), pour des mesures en faces avant et arrière. Une analyse de sensibilité a montré qu'on peut identifier la profondeur en inversant le contraste de la face avant et la résistance à partir du contraste de la face arrière. Par contre l'estimation de la profondeur est impossible en face arrière, la sensibilité du contraste à ce paramètre pouvant s'annuler.

En détection *face arrière*, la procédure consiste à calculer deux transformées expérimentales de Laplace M_1 et M_2 du contraste pour deux valeurs p_1^* et p_2^* telles que $p_2^* = 4 p_1^*$, et d'en déduire la

résistance thermique de contact grâce à la formule suivante :

$$R_c^* = \frac{M_1^2 [1 + \alpha_2 \sinh(\alpha_2) M_2] \sinh(\alpha_1) \tanh(\alpha_1)}{[1 + M_1 \alpha_1 \sinh(\alpha_1)] [-M_1 + M_2 \cosh(\alpha_1) - 3 M_1 M_2 \alpha_1 \sinh(\alpha_2)/2]} \quad (1.38)$$

avec :

$$\alpha_i = \sqrt{p_i^*} \quad \text{et} \quad M_i = \Delta\tau_r^{**} (p_i^*, R_c^*, z_d^*) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

ainsi, il est possible d'éliminer l'influence de la profondeur sur l'identification de la résistance.

En détection *face avant*, l'auteur a montré que la profondeur du défaut est la solution d'une équation de la forme :

$$f(p_1^*, M_1, M_2, z_d^*) = 0 \quad (1.39)$$

Une solution approchée de cette équation, basée sur l'hypothèse de résistance thermique faible ou de défaut proche de l'une des faces de l'échantillon, est donnée par :

$$x^* = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{1/2} \cosh(\alpha_1) + \left(\frac{M_2}{M_1} \cosh^2(\alpha_1) - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (1.40)$$

Il est ainsi possible d'éliminer l'influence de la résistance sur la profondeur. La solution peut être raffinée par une procédure de Newton sur l'équation générale.

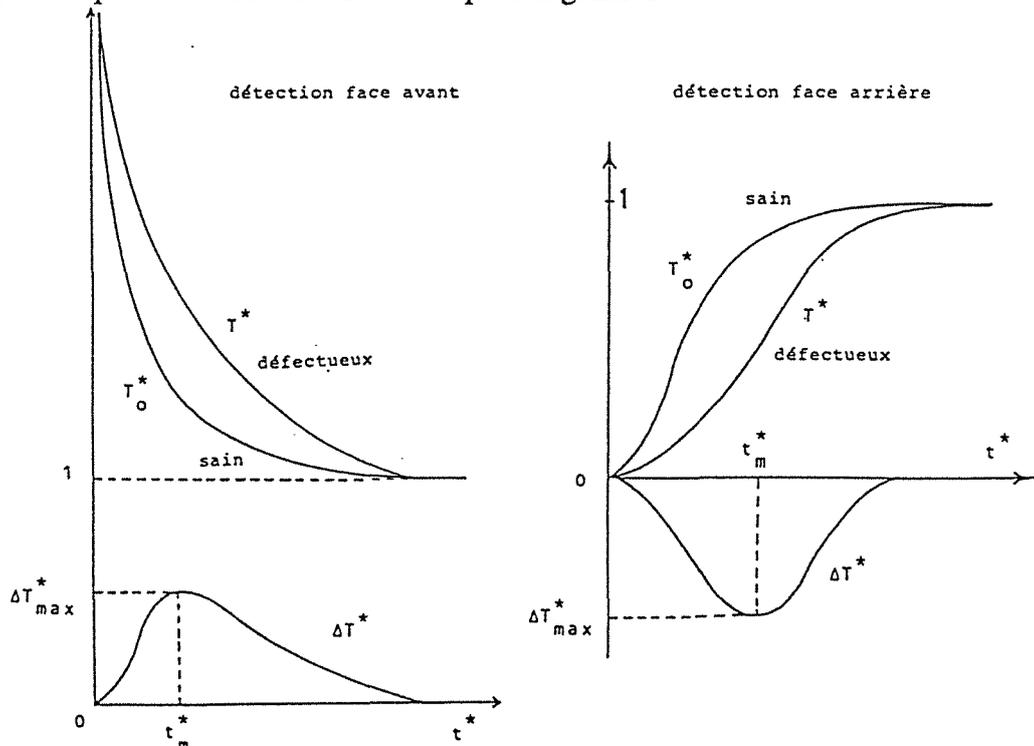


Fig.1.12 Allure des thermogrammes et des contrastes thermiques

En pratique, la température de référence est prise lors de la même expérience sur une zone saine et le contraste est normalisé localement par son niveau maximum en détection face arrière :

$$\Delta T^* = \frac{T}{T_{max}} - \frac{T_o}{T_{omax}} = T_{loc}^* - T_o^* \quad (1.41)$$

La réduction par le maximum local permet de corriger les effets des pertes thermiques, les effets 2D ou 3D dus essentiellement à une température initiale ou à une excitation non uniforme, et aux extensions limitées du défaut et de l'échantillon. Cette technique permet de remédier également aux effets radiométriques produits par une émissivité ou une absorptivité non uniformes des faces de l'échantillon. En détection face avant, la normalisation peut être faite soit aux temps courts dans le cas de matériau isolant, soit aux temps longs pour les matériaux bons conducteurs de la chaleur. Pour le premier cas de figure, le contraste réduit localement est déterminé par :

$$\Delta T^* = \frac{l}{\sqrt{\pi t_s}} \left(\frac{T}{T_s} - \frac{T_o}{T_{os}} \right) \quad (1.42)$$

avec T_s et T_{os} les températures acquises immédiatement après le flash à l'instant t_s .

Dans le cas des temps longs, la procédure de normalisation est faite comme suit :

$$\Delta T^* = \frac{T}{T_{fin}} - \frac{T_o}{T_{ofin}} \quad (1.43)$$

avec T_{fin} et T_{ofin} sont les dernières températures acquises.

Ramos (1992) consacre une thèse à la reconstitution d'une distribution tridimensionnelle de défauts dans un solide soumis à un éclairage bref sur sa face avant. L'auteur a proposé tout d'abord une méthode hybride permettant la résolution du problème direct. Son principe de base est d'introduire des solutions analytiques locales dans la solution numérique globale des équations différentielles. La décomposition du domaine de calcul en petits éléments, permet un calcul assez aisé de la solution analytique. La solution proposée pour le problème inverse consiste à minimiser la somme des écarts quadratiques entre les résultats expérimentaux issus d'une expérience de CND et leurs homologues théoriques. Le caractère mal posé du problème a nécessité une régularisation par la méthode dite "de maximisation d'entropie". Celle-ci a permis de limiter l'introduction de structures parasites dans la solution.

Delpech et al (1992 et 1993) développent une nouvelle technique pour la caractérisation des défauts dans des structures bonne conductrices de la chaleur (composite carbone-carbone). Compte tenu de la faible fréquence des caméras infrarouges, les techniques précédentes ne sont applicables que pour contrôler des matériaux de relativement faible conductivité thermique. Pour traiter la conduction dans un bicouche très bon conducteur de la chaleur, l'auteur a proposé un modèle adiabatique qui néglige les gradients thermiques internes au matériau et qui ne considère pas l'éclairage impulsionnel comme un Dirac. Dans le cas d'un milieu homogène d'épaisseur e et de chaleur volumique C présentant un défaut de résistance thermique R , situé à la profondeur z , pour une impulsion carrée τ et pour des temps plus grands que τ , l'élévation de température de la première couche normalisée par le niveau adiabatique, et donc de la face avant, est donnée par l'expression :

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} = \frac{R C (e - z)^2}{\tau e} \left(\exp\left(\frac{e}{RCz(e-z)} \tau\right) - 1 \right) \exp\left(-\frac{e}{RCz(e-z)} t\right) \quad (1.44)$$

La procédure d'inversion proposée consiste à calculer à partir du thermogramme $\log(T^*)$ la pente p et l'ordonnée à l'origine $T^*(0)$, et à identifier par la suite par une méthode itérative la profondeur du défaut grâce à l'équation suivante :

$$z = \frac{e}{1 + \frac{\tau T^*(0) p}{\exp\left(\frac{\tau}{RCz(1-z/e)}\right) - 1}} \quad (1.45)$$

Une fois la profondeur connue, la résistance est calculée par la relation :

$$R = \frac{l}{p C z (1-z/e)} \quad (1.46)$$

Bison et al (1994) et Grinzato et al (1994) appliquent la méthode des réseaux neuronaux au CND thermique. La plupart des réseaux neuronaux ont la même structure de base. C'est une collection de calculateurs ou neurones connectés les uns aux autres par des liens unidirectionnels, et disposés en plusieurs couches parallèles. Le réseau joue le rôle d'une fonction non-linéaire qui affecte à un vecteur de n variables d'entrée, un vecteur de m variables de sortie. La fonction d'approximation calculée par le réseau est déterminée par des paramètres ajustables, ses poids. Ceux-ci sont obtenus durant une période d'apprentissage, qui consiste à ajuster les poids en minimisant l'erreur entre le vecteur de sortie S et le vecteur désiré déjà connu T . La procédure est répétée pour plusieurs vecteurs d'entrée et est par conséquent très gourmande en temps de calcul. Une fois les poids du réseau fixés, l'habileté de cette technique à approximer la fonction désirée peut être testée en l'appliquant à des données non utilisées dans l'étape d'entraînement. Grinzato a utilisé un réseau à trois niveaux qui peuvent être activés séparément : la détection des défauts, l'estimation de leurs profondeurs et l'évaluation de leurs importances. La partie caractérisation consiste à déterminer en premier lieu les classes des profondeurs des défauts détectés et en second lieu à estimer leurs épaisseurs pour chacune des classes. L'application aux contrastes thermiques issus d'une expérience de thermographie infrarouge stimulée sur un échantillon en PVC défectueux a donné des résultats assez encourageants, particulièrement pour l'estimation des profondeurs.

1.6 Conclusion

Cet aperçu rapide sur les différents travaux entrepris pour l'étude de la thermique des composites, a montré la diversité des méthodes analytiques et numériques utilisées. La non linéarité des problèmes et la complexité de la géométrie des structures étudiées contraignent les chercheurs à utiliser des méthodes numériques, généralement très gourmandes en temps de calcul. Par ailleurs, les méthodes analytiques, offrent l'avantage d'une bonne compréhension du phénomène physique et ne sont pas lourdes à mettre en oeuvre.

L'un des objectifs de notre travail est l'étude du phénomène de diffusion transitoire 2D ou 3D de la chaleur au travers de défauts plans constants dans un matériau anisotrope, par des méthodes *analytiques* exactes ou approchées. Nous nous intéresserons par la suite, à la résolution *analytique* des problèmes direct et inverse, liés à une répartition *non uniforme* de la résistance thermique d'interface, dans le cadre d'une géométrie bidirectionnelle anisotrope.

Chapitre 2

**La technique d'inversion 1D locale :
Aspects stochastiques et difficultés de
l'interprétation d'expériences non
académiques**

Chapitre 2

La technique d'inversion 1D locale : Aspects stochastiques et difficultés de l'interprétation d'expériences non académiques

2.0 Introduction

La technique des transformées expérimentales de Laplace du contraste réduit localement pour la détection et l'identification des délaminages décrite dans le chapitre précédent, est basée sur un modèle unidirectionnel adiabatique transitoire. Malheureusement en pratique, des déviations du modèle - pertes, effets bi ou tridimensionnels, bruit de mesure, durée d'impulsion, ...- peuvent avoir une influence néfaste sur le contraste thermique [Connolly (1991)]. En effet, si certains critères ne sont pas vérifiés - défaut ou échantillon trop petits par exemple -, la diffusion de la chaleur dans le matériau défectueux ne peut être considérée comme unidirectionnelle (l'extension aux phénomènes bi ou tri dimensionnels sera considérée dans les chapitres ultérieurs).

En ce qui concerne les pertes thermiques sur les deux faces de la plaque, il a été déjà démontré par Lamine (1988), qu'elles ont un effet mineur sur le contraste, même pour des coefficients d'échange assez importants ($h = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$). Les pertes sur les bords de l'échantillon par contre, peuvent avoir un impact sur le thermogramme de la zone de référence, si celle ci n'est pas très loin des extrémités. L'analyse de l'influence des pertes latérales sur le choix de cette zone sera menée également dans le chapitre 3 en utilisant la modélisation 2D.

Par définition, la zone saine est une région où la probabilité d'existence d'un défaut est nulle. En pratique, on n'est jamais sûr de cela, particulièrement quand celle ci est faiblement délaminée, et par conséquent le contraste pourra être erroné. L'influence d'une telle erreur sur les

paramètres estimés (la résistance de contact réduite R_c et la profondeur réduite z) sera réalisée dans ce qui suit.

Un autre problème technique souvent rencontré lors des essais de CND par thermographie IR est celui du type de défaut causant la non homogénéité décelée sur les images thermiques. Ceci est important, car avant d'envisager l'utilisation d'un modèle thermique approprié pour identifier un défaut, il est nécessaire tout d'abord de connaître sa nature : délaminage simple, mutidélaminage, variation spatiale de la concentration en résine, inclusion, etc. ..., [Bendada et al (1992)]. Dans les sections suivantes, nous allons traiter les deux premiers types de défauts et la manière dont on peut les séparer.

Nous allons procéder également à des études stochastiques afin de minimiser l'erreur d'estimation sur la résistance et la profondeur due au bruit de mesure en fonction de la variable de Laplace p . Celle-ci étant choisie pour l'inversion utilisant les transformées expérimentales de Laplace [Maillet et al (1991 et 1993)].

2.1 Variabilité de l'estimation d'un monodélaminage de profondeur et de résistance inconnues

2.1.1 Effet du bruit de mesure

2.1.1.1 Erreur commise sur la transformée de Laplace

En pratique, les mesures effectuées y_i aux instants t_i ($i = 1$ à n) du contraste réduit comprennent toujours un bruit aléatoire ε_i dû à la caméra elle-même.

Les mesures entachées d'erreur peuvent alors s'écrire :

$$y_i = \Delta T_i + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

Le calcul de la transformée de Laplace expérimentale du contraste thermique est réalisé grâce à :

$$m_{expj} = \sum_{i=1}^n y_i \exp(-p_j t_i) \Delta t = \sum_{i=1}^n \Delta T_i \exp(-p_j t_i) \Delta t + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \exp(-p_j t_i) \Delta t \quad (2.2)$$

L'indice j correspond à la variable de Laplace p_j

On suppose de plus que l'erreur de quadrature est quasiment nulle :

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_i \exp(-p_j t_i) \Delta t \approx \int_0^{\infty} \Delta T \exp(-p_j t) dt \quad (2.3)$$

et dans ce cas l'erreur sur la transformée a pour expression :

$$e_{m_j} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \exp(-p_j t_i) \Delta t \quad (2.4)$$

Afin de tenir compte des deux transformées, on écrit cette dernière relation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_{m_1} \\ e_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \exp(-p_1 t_i) \Delta t \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \exp(-p_2 t_i) \Delta t \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Si on note $g_{ji} = \exp(-p_j t_i) \Delta t$, cette relation devient :

$$\begin{pmatrix} e_{m_1} \\ e_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = (G) (\varepsilon) \quad (2.6)$$

Dans le cas général, on a :

$$\text{cov}(m_{exp}) = \text{cov}(e_m) = G (\text{cov}(\varepsilon)) G^t \quad (2.7)$$

Si on suppose que le bruit sur le contraste est non corrélé et a un écart type σ constant, on a alors :

$$\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I \quad (I : \text{matrice identité}) \quad (2.8)$$

et finalement :

$$\text{cov}(e_m) = \sigma^2 G G^t \quad (2.9)$$

Ce produit matriciel donne :

$$G G^t = (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \exp(-2 p_1 t_i) & \sum_{i=1}^n \exp(-(p_1+p_2) t_i) \\ \sum_{i=1}^n \exp(-(p_1+p_2) t_i) & \sum_{i=1}^n \exp(-2 p_2 t_i) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Comme on a supposé que l'erreur de quadrature est nulle, on peut calculer les différents termes de cette matrice. Le résultat est le suivant :

$$\text{cov}(e_m) = \sigma^2 \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2p_1} & \frac{1}{p_1+p_2} \\ \frac{1}{p_1+p_2} & \frac{1}{2p_2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

En écrivant le premier facteur du terme de droite en fonction des variables dimensionnelles, l'équation précédente devient :

$$\text{cov}(e_m) = 2 \frac{b^2}{Q^2} \sigma_T^2 \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2p_1} & \frac{1}{p_1+p_2} \\ \frac{1}{p_1+p_2} & \frac{1}{2p_2} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

où cette fois ci, Δt est le pas d'acquisition en dimensionnel, b l'effusivité du matériau à contrôler, Q la densité d'énergie déposée et σ_T l'écart type sur la température absolue (celui-ci est intrinsèque à la caméra IR est vaut 0.2 °C à peu près).

On s'aperçoit d'après ce résultat, que si l'on veut minimiser l'erreur due au bruit de mesure, il est préférable de prendre le plus petit pas d'acquisition possible et d'avoir le maximum d'énergie d'éclairage. D'autre part, la présence de l'effusivité b du matériau dans la formule montre que plus le matériau est bon conducteur, plus l'erreur est moindre.

Maintenant que l'on a les expressions des erreurs sur les transformées de Laplace, on va évaluer de la même manière les erreurs sur la profondeur et la résistance.

2.1.1.2 Erreur commise sur la profondeur du défaut

Nous allons reprendre l'expression théorique donnant la profondeur du défaut issue du modèle linéaire (voir formule (1.40)) :

$$z = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \cosh(\alpha_1) + \left[\left(\frac{m_2}{m_1} \right) \cosh^2(\alpha_1) - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (2.13)$$

avec les contrastes bruités de Laplace, elle devient :

$$\hat{z} = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \left(\frac{m_2 + e_{m_2}}{m_1 + e_{m_1}} \right)^{1/2} \cosh(\alpha_1) + \left[\left(\frac{m_2 + e_{m_2}}{m_1 + e_{m_1}} \right) \cosh^2(\alpha_1) - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (2.14)$$

Si on ne garde que les termes du premier ordre, l'expression de l'erreur sur la profondeur s'écrit sous la forme :

$$e_z = A \left(\frac{e_{m_1}}{m_1} - \frac{e_{m_2}}{m_2} \right) \quad (2.15)$$

avec :

$$A = \frac{\sqrt{r} \cosh(\alpha_1) (1 + \sqrt{r} \cosh(\alpha_1) u^{-1/2})}{2 \alpha_1 (\sqrt{r} \cosh(\alpha_1) + u^{1/2})} \quad (2.16)$$

et où :

$$r = \frac{m_2}{m_1} ; u = r \cosh^2(\alpha_1) - 1 \quad \text{et} \quad \alpha_j = \sqrt{p_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2.17)$$

On passe ensuite en écriture matricielle, comme dans le précédent paragraphe :

$$e_z = \begin{pmatrix} \frac{A}{m_1} & -\frac{A}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{m_1} \\ e_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{m_1} & -\frac{A}{m_2} \end{pmatrix} (e_m) \quad (2.18)$$

En utilisant la relation sur les covariances et l'équation (2.18), on obtient l'expression de la variance sur la profondeur :

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 \Delta t A^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2p_1} & \frac{1}{p_1+p_2} \\ \frac{1}{p_1+p_2} & \frac{1}{2p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Si on tient compte du fait que dans le cas linéaire le contraste de Laplace en face avant s'exprime par :

$$m_j = R_c \frac{\sinh^2[\alpha_j(1-z)]}{\sinh^2(\alpha_j)} \quad (2.20)$$

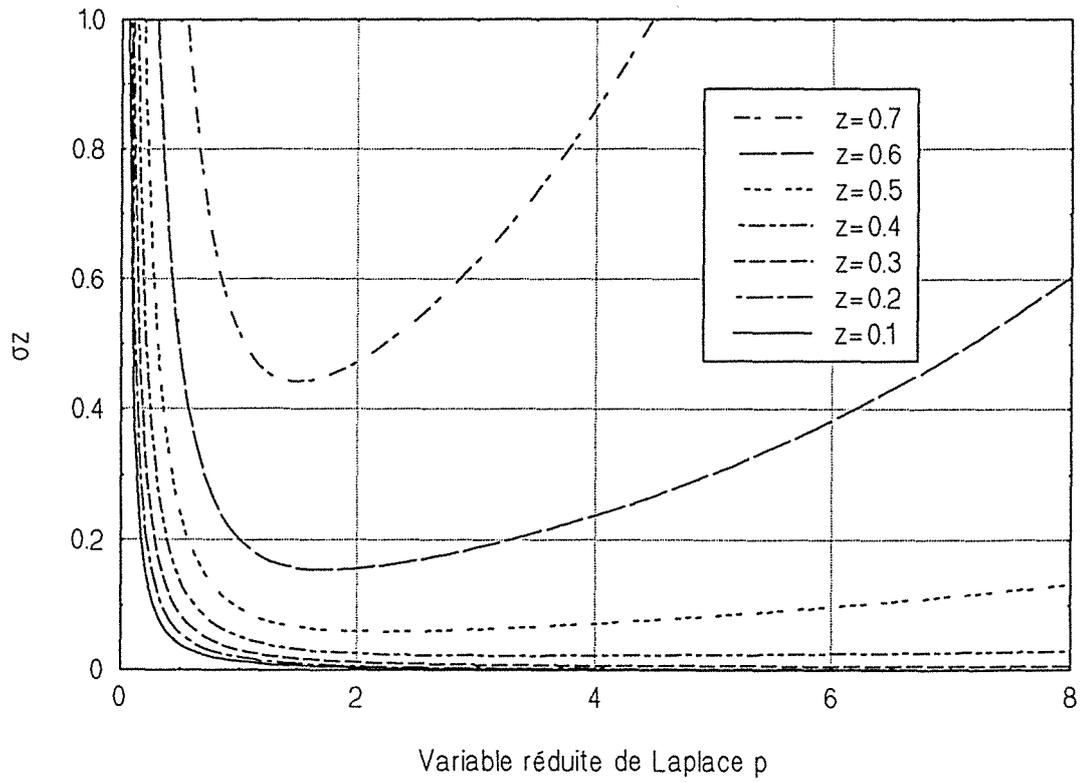
L'écriture finale de la variance sur la profondeur sera alors :

$$\sigma_z^2 = \left(\sigma^2 \frac{\Delta t}{4R_c^2} \right) \frac{1}{p_1} \left\{ \cosh(\alpha_1(1-z)) \left(1 + \frac{\cosh(\alpha_1(1-z))}{|\exp(\alpha_1(1-z)) - \cosh(\alpha_1(1-z))|} \right) \exp(-\alpha_1(1-z)) \right\}^2$$

$$\left(\frac{\sinh^4(\alpha_1)}{2p_1 \sinh^4(\alpha_1(1-z))} + \frac{\sinh^4(\alpha_2)}{2p_2 \sinh^4(\alpha_2(1-z))} - \frac{2}{p_1 + p_2} \frac{\sinh^2(\alpha_1) \sinh^2(\alpha_2)}{\sinh^2(\alpha_1(1-z)) \sinh^2(\alpha_2(1-z))} \right) \quad (2.21)$$

Sur la figure (2.1), nous avons présenté l'écart type de la profondeur réduite en fonction de la variable réduite de Laplace $p (= p_1)$ pour différentes valeurs de la profondeur du délaminage. En

Fig.2.1 Ecart type de la profondeur



ce qui concerne les autres paramètres réduits intervenant dans l'équation (2.21), nous avons pris $\sigma = 0.1$ (écart type réduit du contraste, calculé pour une élévation de température maximale de 4 °C après le flash et un bruit de mesure de la caméra IR de 0.2 °C), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ (pas temporel réduit correspondant à une période d'acquisition de 40 ms et à une plaque en carbone-époxy d'épaisseur 2 mm) et $R_c = 0.1$. On s'aperçoit que la précision pour un défaut profond et un défaut proche de la surface varie énormément. Pour un défaut situé à $z = 0.7$, l'erreur peut dépasser 50 % de l'épaisseur de l'échantillon : si celui-ci est fin, la profondeur identifiée sera assez correcte, mais s'il est épais, la profondeur estimée sera erronée. Le choix du meilleur p dépend de la valeur de z , mais semble toujours être dans l'intervalle $[1, 2]$ pour les défauts profonds. Pour les défauts superficiels ($z = 0.1 ; 0.2 ; 0.3$) l'erreur est négligeable à partir des valeurs de p supérieures à 1. Un mauvais choix de p n'entraîne que peu d'erreur sur la précision dans le cas d'une profondeur faible, alors qu'au contraire, pour une profondeur élevée, les écarts seront plus importants.

2.1.1.3 Erreur commise sur la résistance en face avant

Nous allons reprendre l'expression exacte de la résistance, puis y ajouter du bruit sur les différents paramètres, en tenant compte de l'erreur déjà introduite sur la profondeur :

$$R_c = \frac{\sinh^2(\alpha)}{\sinh(\alpha(1-z))} \left[\frac{1}{m} \sinh(\alpha(1-z)) - \alpha \sinh(\alpha) \sinh(\alpha z) \right]^{-1} \quad (2.22)$$

$$\hat{R}_c = \frac{\sinh^2(\alpha)}{\sinh(\alpha(1-z-e_z))} \left[\frac{1}{m+e_m} \sinh(\alpha(1-z-e_z)) - \alpha \sinh(\alpha) \sinh(\alpha(z+e_z)) \right]^{-1} \quad (2.23)$$

Si on prend les développements de Taylor suivants au premier ordre :

$$\sinh(\alpha(1-z-e_z)) = \sinh(\alpha(1-z)) + \alpha e_z \cosh(\alpha(1-z)) \quad (2.24)$$

$$\sinh(\alpha(z+e_z)) = \sinh(\alpha z) + \alpha e_z \cosh(\alpha z) \quad (2.25)$$

et on les remplace dans l'équation précédente, on a alors :

$$\hat{R}_c = \frac{\sinh^2(\alpha)}{\sinh(\alpha(1-z))} \left[1 - \alpha e_z \coth(\alpha(1-z)) \right] \left\{ \frac{1}{m} \left(1 - \frac{e_m}{m} \right) \sinh(\alpha(1-z)) \left[1 + \alpha e_z \coth(\alpha(1-z)) \right] - \alpha \sinh(\alpha) \sinh(\alpha z) \left[1 + \alpha e_z \coth(\alpha z) \right] \right\}^{-1} \quad (2.26)$$

En tenant compte de l'équation (2.22) et comme \hat{R}_c est généralement faible devant 1, les termes où elle apparaît au carré sont négligeables. On obtient finalement :

$$\hat{R}_c = R_c - R_c \alpha e_z \coth(\alpha(1-z)) \quad (2.27)$$

Soit l'expression de l'erreur :

$$e_{R_c} = -R_c \alpha e_z \coth(\alpha(1-z)) \quad (2.28)$$

où l'erreur sur la profondeur est définie selon la procédure du paragraphe précédent.

On obtient alors les deux résultats suivants :

- Si on estime la résistance avec $p_1 = p$:

$$\sigma_{R_c}^2 = \left(\sigma^2 \frac{\Delta t}{4} \right) \left\{ \frac{\cosh^2(\alpha_1(1-z))}{\sinh(\alpha_1(1-z))} \left(1 + \frac{\cosh(\alpha_1(1-z))}{|\exp(\alpha_1(1-z)) - \cosh(\alpha_1(1-z))|} \right) \exp(-\alpha_1(1-z)) \right\} \\ \left(\frac{\sinh^4(\alpha_1)}{2p_1 \sinh^4(\alpha_1(1-z))} + \frac{\sinh^4(\alpha_2)}{2p_2 \sinh^4(\alpha_2(1-z))} - \frac{2}{p_1 + p_2} \frac{\sinh^2(\alpha_1) \sinh^2(\alpha_2)}{\sinh^2(\alpha_1(1-z)) \sinh^2(\alpha_2(1-z))} \right) \quad (2.29)$$

- Si on estime la résistance avec $p_2 = 4p$:

$$\sigma_{R_c}^2 = \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{\cosh(\alpha_1(1-z)) \cosh(\alpha_2(1-z))}{\sinh(\alpha_2(1-z))} \left(1 + \frac{\cosh(\alpha_1(1-z))}{|\exp(\alpha_1(1-z)) - \cosh(\alpha_1(1-z))|} \right) \exp(-\alpha_1(1-z)) \right\} \\ \left(\frac{\sinh^4(\alpha_1)}{2p_1 \sinh^4(\alpha_1(1-z))} + \frac{\sinh^4(\alpha_2)}{2p_2 \sinh^4(\alpha_2(1-z))} - \frac{2}{p_1 + p_2} \frac{\sinh^2(\alpha_1) \sinh^2(\alpha_2)}{\sinh^2(\alpha_1(1-z)) \sinh^2(\alpha_2(1-z))} \right) \left(\sigma^2 \frac{\Delta t}{4} \right) \quad (2.30)$$

Sur les figures (2.2) et (2.3), nous avons présenté comme dans le cas précédent et pour les mêmes valeurs des paramètres, le rapport de l'écart type de la résistance à la résistance elle-même. Les résultats obtenus sont assez similaires à ceux concernant la profondeur, pour les deux cas étudiés (identification avec $p_1 = p$ ou $p_2 = 4p$). Cependant, on remarque que pour la profondeur $z = 0.6$, l'erreur sur la résistance atteint déjà 50 % de sa valeur exacte. A partir du plan médian de la plaque, il sera généralement difficile de détecter et d'estimer la résistance en face avant. On note également que les résultats obtenus pour $p_1 = p$ sont un peu meilleurs que ceux déterminés pour $p_2 = 4p$.

2.1.1.4 Erreur commise sur la résistance en face arrière

L'équation donnant la résistance réduite de contact en face arrière est définie par :

Fig.2.2 Ecart type de la résistance en face avant pour 1xp

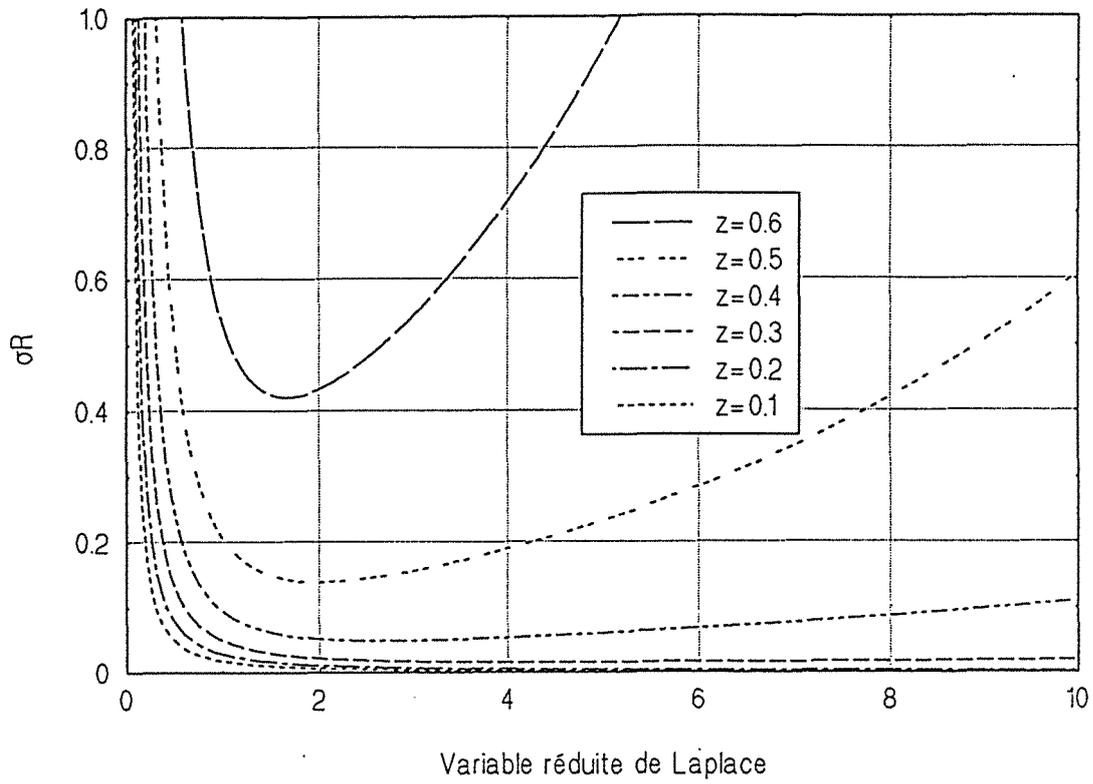
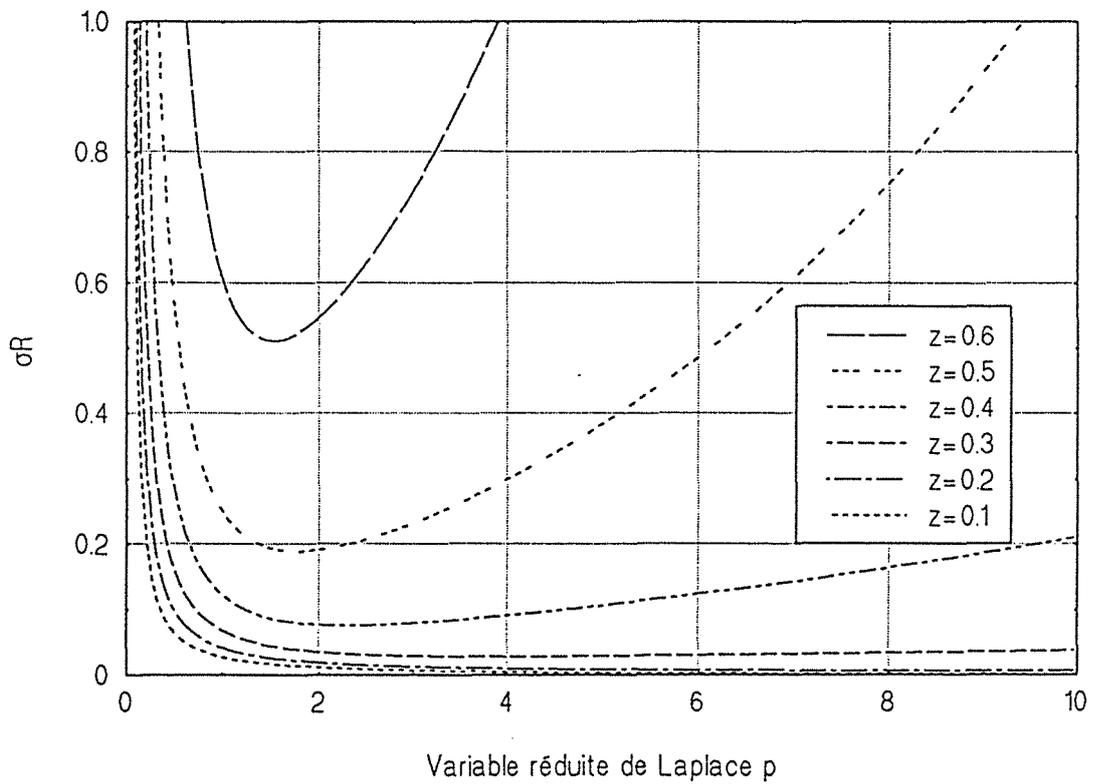


Fig.2.3 Ecart type de la résistance en face avant pour 4xp



$$R_c = \frac{m_1^2 [1 + \alpha_2 \sinh(\alpha_2) m_2] \sinh(\alpha_1) \tanh(\alpha_1)}{[1 + m_1 \alpha_1 \sinh(\alpha_1)] [-m_1 + m_2 \cosh(\alpha_1) - \frac{3}{2} m_1 m_2 \alpha_1 \sinh(\alpha_2)]} \quad (2.31)$$

Si les contrastes sont bruités, la résistance estimée est alors calculée grâce à :

$$\hat{R}_c = \frac{(m_1 + e_{m1})^2 [1 + \alpha_2 \sinh(\alpha_2) (m_2 + e_{m2})] \sinh(\alpha_1) \tanh(\alpha_1)}{D} \quad (2.32)$$

avec :

$$D = [1 + (m_1 + e_{m1}) \alpha_1 \sinh(\alpha_1)] [-(m_1 + e_{m1}) + (m_2 + e_{m2}) \cosh(\alpha_1) - \frac{3}{2} (m_1 + e_{m1}) (m_2 + e_{m2}) \alpha_1 \sinh(\alpha_2)] \quad (2.33)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre, l'expression précédente devient :

$$\hat{R}_c = \left[1 + 2 \frac{e_{m1}}{m_1} + \frac{e_{m2} \alpha_2 \sinh(\alpha_2)}{1 + m_2 \alpha_2 \sinh(\alpha_2)} - \frac{e_{m1} \alpha_1 \sinh(\alpha_1)}{1 + m_1 \alpha_1 \sinh(\alpha_1)} - \frac{-e_{m1} + e_{m2} \cosh(\alpha_1) - \frac{3}{2} \alpha_1 \sinh(\alpha_2) (m_2 e_{m1} + m_1 e_{m2})}{-m_1 + m_2 \cosh(\alpha_1) - \frac{3}{2} m_1 m_2 \alpha_1 \sinh(\alpha_2)} \right] R_c \quad (2.34)$$

Finalement, on obtient l'erreur commise sur la résistance estimée ;

$$e_{Rc} = -R_c (A e_{m1} - B e_{m2}) \quad (2.35)$$

avec A et B donnés par :

$$A = \frac{K}{m_1 (1 + m_1 \alpha_1 \sinh(\alpha_1)) I} \quad (2.36)$$

$$B = \frac{[1 + m_1 \alpha_1 \sinh(\alpha_1)] \cosh(\alpha_1)}{(1 + m_2 \alpha_2 \sinh(\alpha_2)) I} \quad (2.37)$$

où I et K sont définis par :

$$K = -m_1 + 2 m_2 \cosh(\alpha_1) - m_1 m_2 \alpha_1 \sinh(\alpha_2) + 3 m_1^2 m_2 \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1) \sinh(\alpha_2) \quad (2.38)$$

$$I = -m_1 + m_2 \cosh(\alpha_1) - \frac{3}{2} m_1 m_2 \alpha_1 \sinh(\alpha_2) \quad (2.39)$$

En face arrière, le contraste de Laplace dans le cas non linéaire est donné par :

$$m_j = \frac{R_c \sinh(\alpha_j z) \sinh(\alpha_j (1-z))}{\sinh(\alpha) [\sinh(\alpha) + \alpha R_c \sinh(\alpha_j z) \sinh(\alpha_j (1-z))]} \quad (2.40)$$

Après passage à l'écriture matricielle et l'utilisation des relations (2.11) et (2.40), la variance sur la résistance est calculée par :

$$\sigma_R^2 = R_c^2 \sigma^2 \Delta t (A B) \begin{pmatrix} \frac{1}{2p_1} & \frac{1}{p_1+p_2} \\ \frac{1}{p_1+p_2} & \frac{1}{2p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Le tracé de l'écart type relatif de la résistance estimée en face arrière sur la figure (2.4), a montré comme prévu que les défauts symétriques par rapport au plan médian de l'échantillon, sont déterminés avec la même précision. Par ailleurs, on constate que l'erreur est comprise entre 27 et 50 % pour les défauts localisés entre des profondeurs réduites de 0.2 et 0.8, et qu'elle dépasse 100 % pour les défauts très proches des faces de la plaque.

2.1.2 Effet d'un mauvais choix de la zone de référence

2.1.2.1 Influence sur la résistance identifiée en face arrière

Dans le cas de faible résistance ou de défaut très proche de l'une des faces de la plaque, le contraste thermique de Laplace en face arrière se calcule par :

$$m = - R_c \frac{\sinh(\alpha z) \sinh(\alpha(1-z))}{\sinh^2(\alpha)} = - R_c f(\alpha, z) \quad (2.42)$$

La résistance de contact dans ce cas, estimée par la méthode des deux transformées expérimentales de Laplace est donnée par la relation :

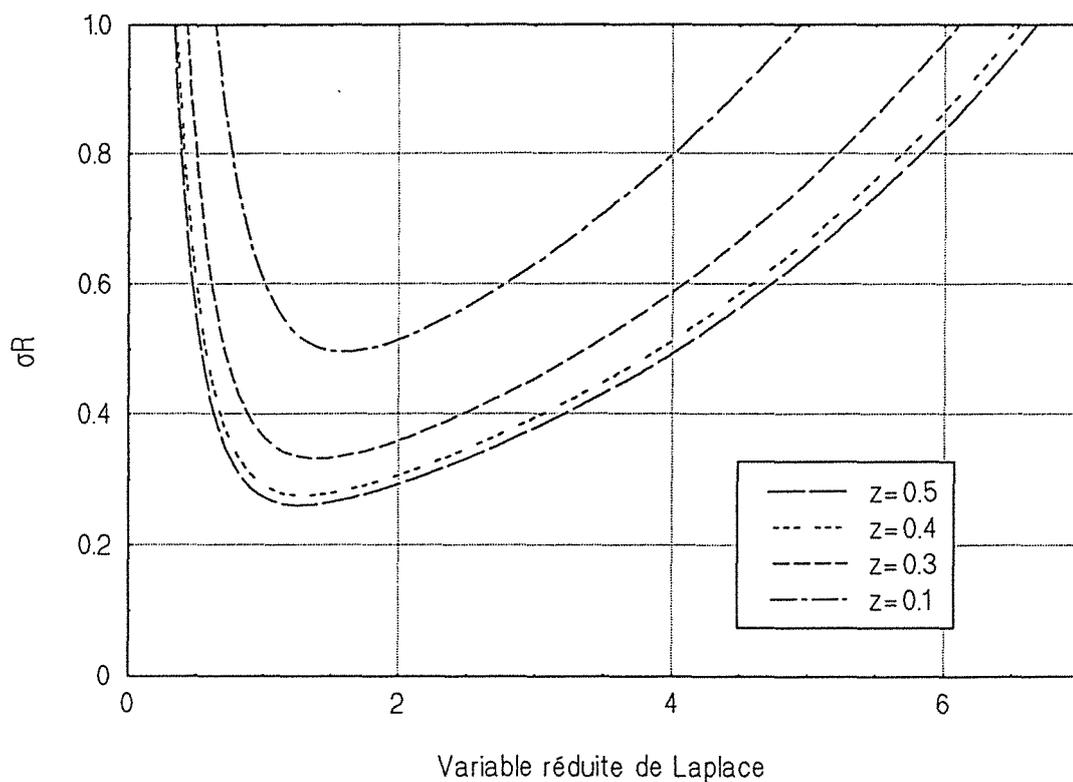
$$R_c = \frac{m_1^2 \sinh(\alpha) \tanh(\alpha)}{m_2 \cosh(\alpha) - m_1} \quad (2.43)$$

où les contrastes m_1 et m_2 sont définis par rapport à une zone saine :

$$m_1 = \tau(\alpha_1, R_c) - \tau(\alpha_1, 0) \quad (2.44)$$

$$m_2 = \tau(\alpha_2, R_c) - \tau(\alpha_2, 0) \quad (2.45)$$

Fig.2.4 Ecart type de la résistance en face arrière



Si par contre, cette zone est faiblement délaminée et admet R_o comme résistance thermique, les contrastes réduits seront erronés :

$$m_{exp1} = \tau(\alpha_2, R_c) - \tau(\alpha_1, R_o) = m_1 + R_o f(\alpha_1, z) \quad (2.46)$$

$$m_{exp2} = \tau(\alpha_2, R_c) - \tau(\alpha_2, R_o) = m_2 + R_o f(\alpha_2, z) \quad (2.47)$$

L'influence de ce biais sur la précision de l'inversion est déterminée en remplaçant ces deux dernières expressions dans la relation (2.43). On montre en utilisant les relations classiques des fonctions hyperboliques que la résistance estimée \hat{R}_c est en fait une sur-résistance par rapport à

celle de la zone supposée saine :

$$\hat{R}_c = R_c - R_o \quad (2.48)$$

2.1.2.2 Influence sur la profondeur identifiée en face avant

Dans le cas du modèle 1D linéaire, le contraste thermique réduit en face avant dans l'espace de Laplace est donné par :

$$m = R_c \frac{\sinh^2(\alpha(1-z))}{\sinh^2(\alpha)} = R_c g(\alpha, z) \quad (2.49)$$

La profondeur du défaut est alors estimée par la relation (2.13).

Comme précédemment, dans le cas où la zone dite saine est faiblement délaminée, les contrastes biaisés sont calculés par :

$$m_{exp1} = m_1 + R_o g(\alpha_1, z) = (R_c - R_o) g(\alpha_1, z) \quad (2.50)$$

$$m_{exp2} = m_2 + R_o g(\alpha_2, z) = (R_c - R_o) g(\alpha_2, z) \quad (2.51)$$

Le rapport de ces deux contrastes "expérimentaux" est en fait égal à celui des contrastes exacts :

$$\frac{m_{exp2}}{m_{exp1}} = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.52)$$

Par conséquent, si la zone dite saine est en fait défectueuse, il n'y a aucune erreur sur la profondeur estimée, vu que celle ci s'exprime en fonction de ce rapport (équation (2.13)) :

$$\hat{z} = z \quad (2.53)$$

2.2 Etude stochastique de l'estimation de la résistance thermique d'un monodé laminage de profondeur connue

Dans le cas d'un défaut illimité, situé à une profondeur z de la face irradiée et de résistance réduite R_c , le contraste thermique de Laplace sur la face avant se calcule grâce à :

$$\Delta\tau_f = \frac{R_c \sinh^2(\sqrt{p} (1-z))}{\sinh(\sqrt{p}) [\sinh(\sqrt{p}) + \sqrt{p} R_c \sinh(\sqrt{p} z) \sinh(\sqrt{p} (1-z))]} \quad (2.54)$$

Dans le cas de résistance thermique faible (modèle linéaire), et si la profondeur réduite z est connue (cas des défauts de collage), il est possible d'estimer la valeur de R_c grâce à :

$$R_c = \frac{(m + e_m) \sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} (1-z))} \quad (2.55)$$

où R_c est la résistance de contact estimée et e_m l'erreur due au bruit de mesure sur le contraste expérimental de Laplace. L'erreur sur la résistance de contact se calcule alors par l'expression :

$$e_R = e_m \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} (1-z))} \quad (2.56)$$

Par conséquent, l'écart type sur la résistance de contact s'exprime par :

$$\sigma_R = \sigma_m \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} (1-z))} \quad (2.57)$$

avec σ_m^2 la variance du contraste thermique de Laplace.

Par ailleurs, on a déjà montré (paragraphe 2.1.1.1) que si le bruit sur le contraste réduit $\Delta T(t)$ est non corrélé et d'écart type constant σ , que :

$$\sigma_m^2 = \frac{\Delta t}{2 p} \sigma^2 \quad (2.58)$$

où Δt est le pas réduit de discrétisation temporelle du champ de température.

En tenant compte de l'équation (2.58), l'écart type de la résistance de contact s'écrit finalement :

$$\sigma_R = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} (1-z))} \sqrt{\frac{\Delta t}{2 p}} \sigma \quad (2.59)$$

La variation de la quantité $(\frac{\sigma_R}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\Delta t}})$ en fonction de $\alpha (= \sqrt{p})$ est illustrée pour différentes valeurs de la profondeur z sur la figure(2.5). On constate que toutes les courbes admettent un minimum dont la position est liée au paramètre z connu. En effet plus le défaut est profond, plus le minimum de l'écart type est élevé et son abscisse optimum d'occurrence α_{opt} est faible. On note également, que pour les défauts situés dans la première moitié de l'échantillon ($z = 0.1 ; 0.3 ; 0.5$), l'erreur d'estimation minimale reste pratiquement constante sur un large plateau de la variable p .

L'évolution de la valeur optimale α_{opt} en fonction de la profondeur du défaut est illustrée sur la figure (2.6). On constate que pour la première moitié de l'échantillon, la valeur optimale est fortement dépendante de la profondeur z . Par contre pour la seconde moitié, la variable optimale reste pratiquement constante au voisinage de $\alpha = 1.5$.

En variables dimensionnelles, on obtient l'expression :

$$\sigma_R = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} (1-z))} \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \frac{\sigma_T}{Q} b \quad (2.60)$$

ce qui montre clairement que l'erreur sur la résistance sera d'autant plus faible que Q (densité d'énergie déposée sur la face avant) grand, σ_T (écart type du bruit dû à la caméra IR sur la température absolue) faible et Δt (pas d'acquisition en seconde) petit. Cette étude en face avant, montre bien que l'estimation d'une résistance R_c profonde constitue bien un problème mal-posé.

Une étude similaire menée en face arrière (modèle linéaire) donne l'écart type de l'erreur d'estimation sur la résistance par l'expression :

$$\sigma_R = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh(\sqrt{p} (1-z)) \sinh(\sqrt{p} z)} \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \frac{\sigma}{p} \quad (2.61)$$

Cette expression montre que l'erreur d'estimation sur R_c est symétrique par rapport au plan médian. La représentation de l'évolution de l'erreur en fonction de $\alpha (= \sqrt{p})$ pour différentes valeurs du paramètre z (figure (2.7)) a montré que plus le défaut est voisin de l'une des faces de la plaque plus l'erreur d'estimation augmente.

Le tracé de l'évolution de la variable optimale α_{opt} en fonction de la profondeur du défaut sur la figure (2.8), montre que celle-ci ne varie pas beaucoup (entre 1.55 et 1.90) en comparaison avec les résultats de la face avant. Ceci montre que le choix de la variable α optimale peut être effectué dans l'intervalle (1.55 ; 2) sans aucune contrainte (figure(2.7)), sauf pour les défauts très voisins des faces de la plaque ($z < 0.1$) où α_{opt} doit être choisie d'après la figure (2.8).

Fig.2.5 Représentation de l'erreur due au bruit de mesure sur la résistance identifiée en face avant, si la profondeur est connue

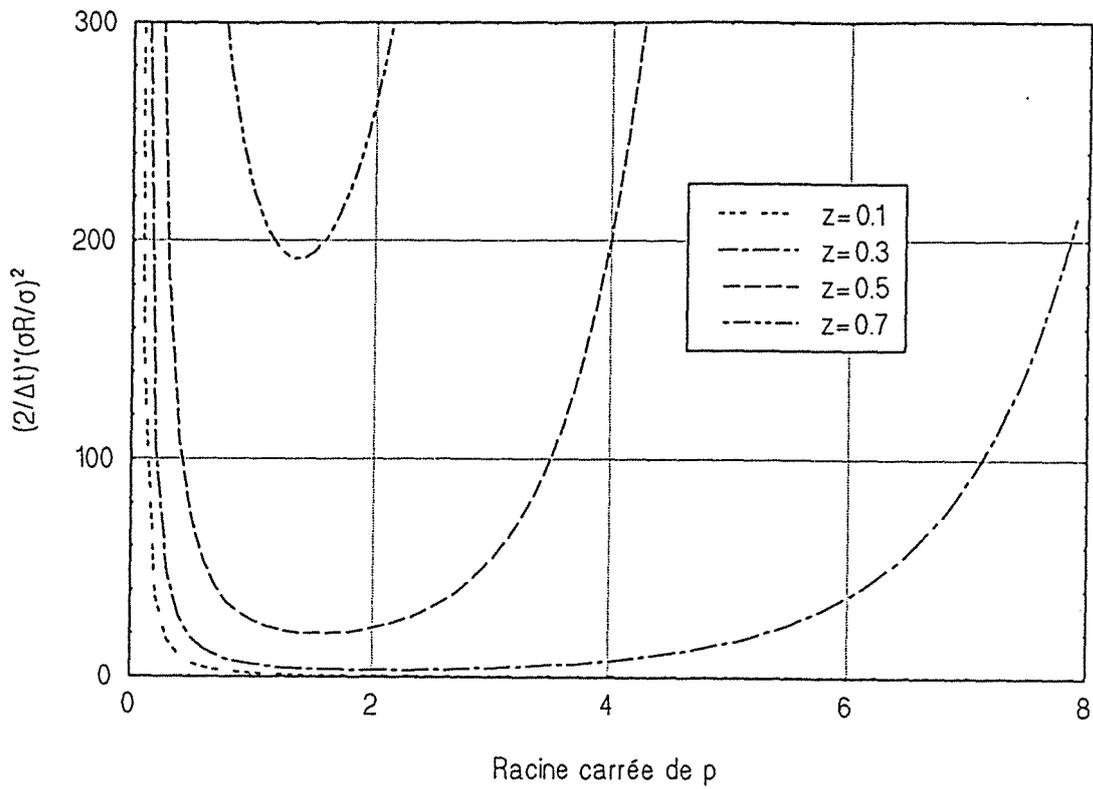


Fig.2.6 Optimisation du choix de la variable de Laplace calculée à partir du modèle 1D, en face avant

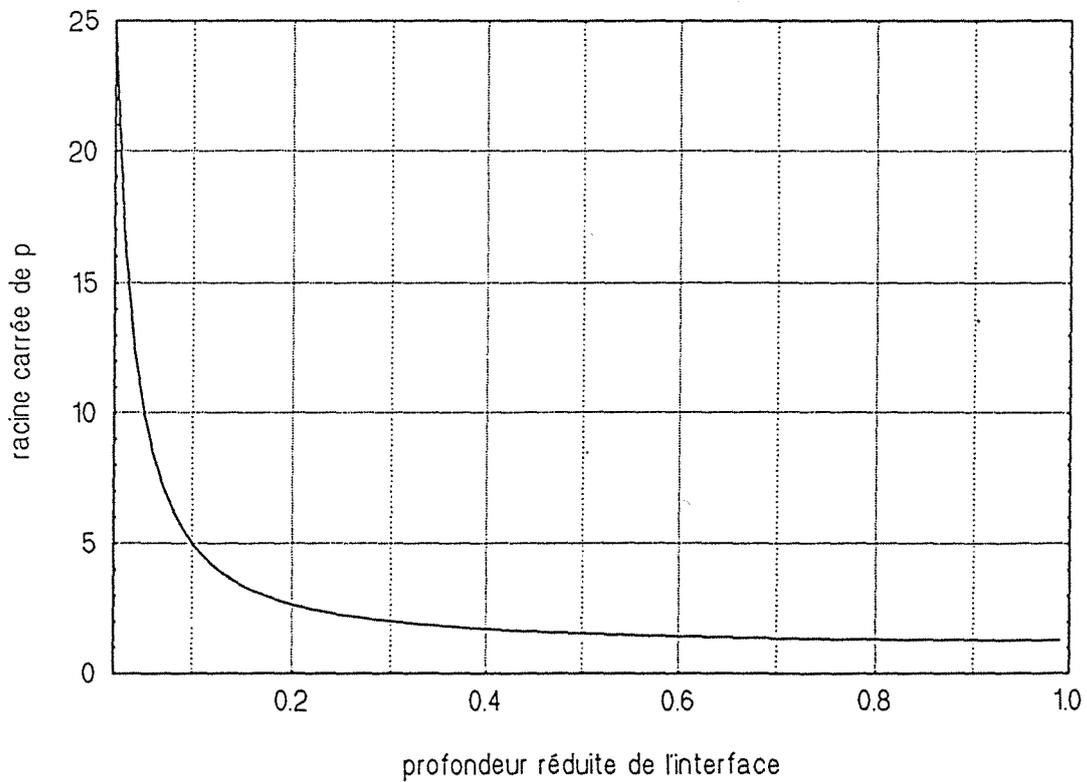


Fig.2.7 Représentation de l'erreur due au bruit de mesure sur la résistance identifiée en face arrière, si la profondeur est connue

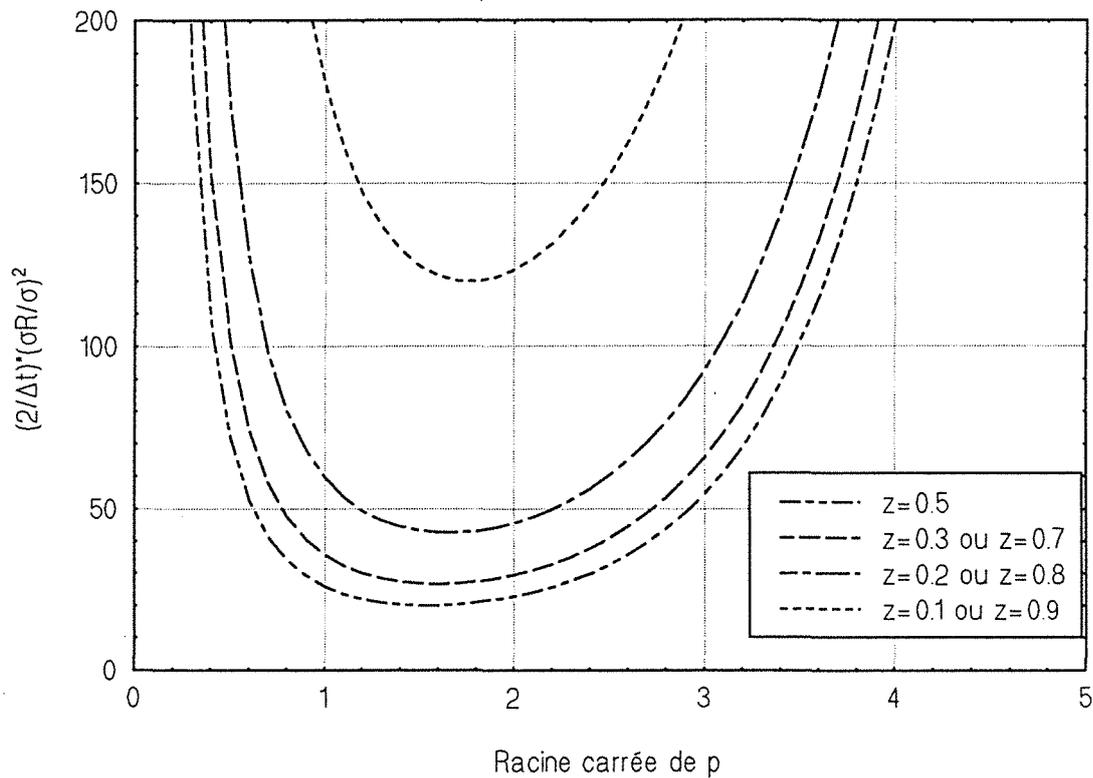
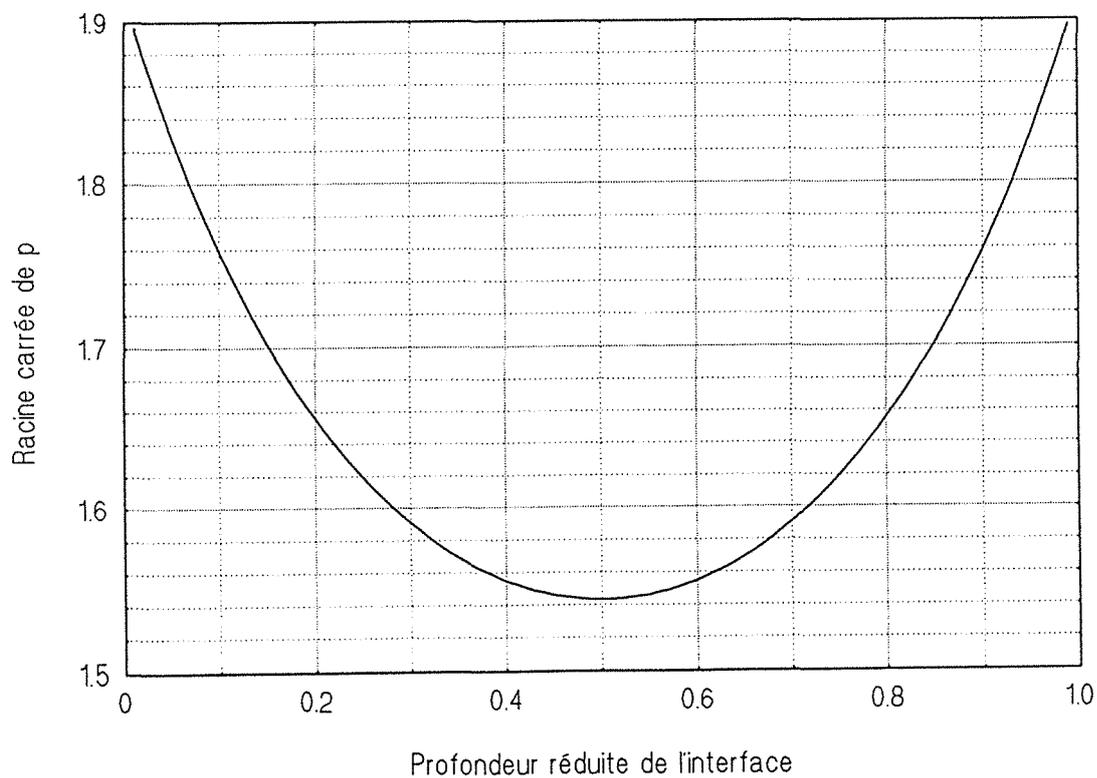


Fig.2.8 Optimisation du choix de la variable de Laplace en face arrière



2.3 Problème de la discrimination entre mono- et multidé laminage et milieu homogène équivalent

Sous l'action d'un impact ou d'une contrainte thermique, il peut se produire un décollement entre les plis du composite stratifié. Ce décollement intéresse en général plusieurs interplis et on a alors affaire à un multidé laminage.

2.3.1 Monodé laminage équivalent à un bidé laminage

Avant de chercher un critère permettant de discriminer les différents types de défauts (dé laminage ou multidé laminage), il est intéressant de voir tout d'abord s'il existe un dé laminage équivalent au multidé laminage dont il est question. L'équivalence est définie au sens des réponses à l'impulsion de chaleur sur les faces avant et arrière d'une plaque échantillon.

Pour analyser ce cas d'une manière simple, nous avons adopté le modèle monodimensionnel (voir chapitre 1) où chaque dé laminage est représenté par une résistance thermique de contact R_i située à une profondeur z_i de la surface irradiée.

Puisqu'on ne désire connaître que les températures sur les faces avant et arrière, il est commode d'utiliser la méthode des quadripôles thermiques. La diffusion de la chaleur dans un stratifié de conductivité λ et de diffusivité thermique a , multidé laminé, est alors décrite par la formulation matricielle suivante dans l'espace de Laplace :

$$\begin{bmatrix} \tau_f \\ \psi_f \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} \\ C_{n+1} & A_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ \psi_r \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

où τ_f , ψ_f , τ_r et ψ_r désignent respectivement les transformées de Laplace des températures et des densités de flux sur les faces avant et arrière. Dans le cas du modèle sans pertes, les conditions aux limites en flux se traduisent par :

- face avant : $\psi_f = Q$ où : Q est l'énergie déposée par unité de surface
- face arrière : $\psi_r = 0$ la face arrière étant isolée.

Le nombre n figurant dans le système (2.62), représente le nombre de dé laminages présents dans le stratifié. Les coefficients des quadripôles sont déterminés grâce à :

$$A_i = \cosh(\sqrt{\frac{p}{a}} e_i) = D_i \quad (2.63)$$

$$B_i = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \sinh(\sqrt{\frac{p}{a}} e_i) \quad (2.64)$$

$$C_i = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh(\sqrt{\frac{p}{a}} e_i) \quad (2.65)$$

Avec e_i l'épaisseur de la couche i et p la variable de Laplace.

Afin de diminuer le nombre de paramètres du problème, il est préférable de travailler avec des variables adimensionnelles. La réduction des différentes grandeurs est réalisée de la manière suivante :

$$\tau^* = \frac{\tau}{\lambda} \quad \psi^* = \frac{\psi}{Q} \quad (2.66)$$

$$p^* = e^2 \frac{p}{a} \quad e_i^* = \frac{e_i}{e} \quad (2.67)$$

$$R_i^* = \frac{R_i}{\frac{e}{\lambda}} \quad e = \sum_1^{n+1} e_i \quad (2.68)$$

Avec cet adimensionnement, τ^* est alors la transformée de Laplace de la température normalisée T^* considérée comme fonction du nombre de Fourier t^* , la variable de Laplace étant alors p^* :

$$\tau^* = \int_0^{\infty} \exp(-p^* t^*) T^* dt^* \quad \text{avec} \quad T^* = \frac{T}{Q} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{a t}{e^2} \quad (2.69)$$

$\rho c e$

Par la suite, pour des raisons de simplicité, l'exposant '*' sera omis pour toutes les grandeurs réduites précédentes. En utilisant les variables réduites définies par (2.66 à 2.68), les coefficients des quadripôles deviennent :

$$A_i = \cosh(\sqrt{p} e_i) = D_i \quad (2.70)$$

$$B_i = \frac{1}{\sqrt{p}} \sinh(\sqrt{p} e_i) \quad (2.71)$$

$$C_i = \sqrt{p} \sinh(\sqrt{p} e_i) \quad (2.72)$$

L'expression (2.62) reste toujours valable en variables adimensionnelles.

Les solutions analytiques dans le cas de plusieurs délaminages superposés sont très encombrantes.

On limitera alors notre analyse au cas particulier d'un bidélaminage.

Les contrastes thermiques réduits de Laplace en faces avant et arrière se calculent respectivement par :

$$\Delta\tau_f = \frac{C_{23} (C A_1 - A C_1) R_1 + C_3 (C A_{12} - A C_{12}) R_2 + C_3 (C C_2 A_1 - A C_1 C_2) R_1 R_2}{C (C_1 C_{23} R_1 + C_3 C_{12} R_2 + C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 + C)} \quad (2.73)$$

$$\Delta\tau_r = - \frac{C_1 C_{23} R_1 + C_3 C_{12} R_2 + C_1 C_2 C_3 R_1 R_2}{C (C_1 C_{23} R_1 + C_3 C_{12} R_2 + C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 + C)} \quad (2.74)$$

avec :

$$A_{12} = \cosh(\sqrt{p} (e_1 + e_2)) \quad (2.75)$$

$$C_{12} = \sqrt{p} \sinh(e_1 + e_2) \quad (2.76)$$

$$C_{23} = \sqrt{p} \sinh(e_2 + e_3) \quad (2.77)$$

$$C = \sqrt{p} \sinh(\sqrt{p}) \quad (2.78)$$

Si l'on considère le cas particulier de résistances thermiques faibles ($R_i \ll 1$), les expressions (2.73) et (2.74) deviennent :

$$\Delta\tau_f = \frac{R_1 \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_1)) + R_2 \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_2))}{\sinh^2(\sqrt{p})} \quad (2.79)$$

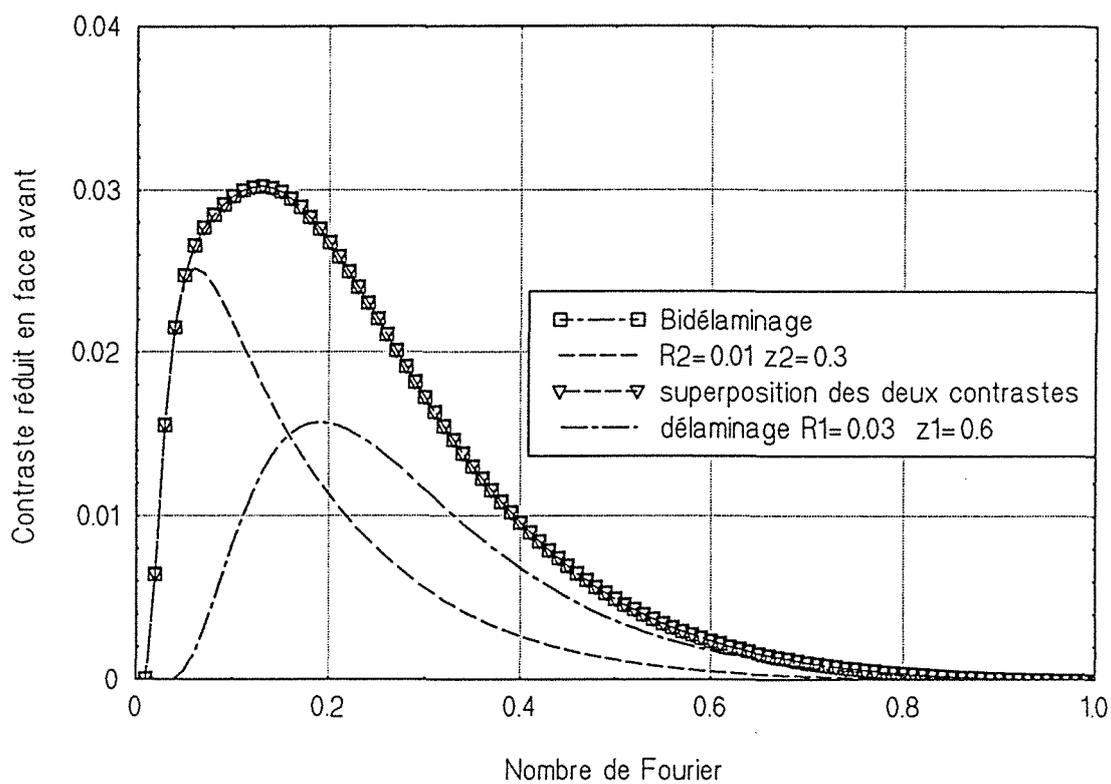
$$\Delta\tau_r = \frac{R_1 \sinh(\sqrt{p} z_1) \sinh(\sqrt{p} (1-z_1)) + R_2 \sinh(\sqrt{p} z_2) \sinh(\sqrt{p} (1-z_2))}{\sinh^2(\sqrt{p})} \quad (2.80)$$

avec :

$$z_1 = e_1 \quad \text{et} \quad z_2 = e_1 + e_2 \quad (2.81)$$

Ces expressions montrent que les contrastes thermiques dans le cas de multidé laminages à résistances de contact faibles se superposent. Sur la figure(2.9), nous avons présenté les résultats d'une simulation sur un échantillon comprenant deux défauts superposés. Le retour dans l'espace temps est fait à l'aide de l'inversion numérique de Stehfest (1970), (voir Annexe (2.1)). Le premier défaut est situé à une profondeur réduite $z_1 = 0.6$ et a une résistance de contact $R_1 = 0.03$. Le second est situé à une profondeur $z_2 = 0.3$ et a une résistance $R_2 = 0.01$. On voit bien, sur la figure, que le contraste en face avant produit par le bidé laminage est parfaitement confondu avec la superposition des contrastes provoqués séparément par chaque dé laminage seul. Il sera montré

Fig.2.9 Superposition des contrastes pour les faibles résistances



plus loin dans le chapitre 3 que cette propriété est vérifiée même dans le cas de géométrie bi ou tridimensionnelle, lors de l'application de la méthode des perturbations.

Un délaminage équivalent s'il existe devrait donner les mêmes contrastes thermiques sur les deux faces de la plaque. Dans le cas le plus simple de résistances faibles, sa résistance $R_{\acute{e}q}$ et sa profondeur $z_{\acute{e}q}$ doivent vérifier les relations suivantes, pour n'importe quelle valeur de la variable

p :

$$R_{\acute{e}q} \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_{\acute{e}q})) = R_1 \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_1)) + R_2 \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_2)) \quad (2.82)$$

$$R_{\acute{e}q} \sinh(\sqrt{p} (1-z_{\acute{e}q})) \sinh(\sqrt{p} (z_{\acute{e}q})) = R_1 \sinh(\sqrt{p} (1-z_1)) \sinh(\sqrt{p} (z_1)) + R_2 \sinh(\sqrt{p} (1-z_2)) \sinh(\sqrt{p} (z_2)) \quad (2.83)$$

La solution d'un tel système dépend de la variable de Laplace et donc du temps. On peut conclure que le délaminage équivalent n'existe pas. Les deux types de défauts donnent alors des réponses en contraste forcément différentes.

Pour éviter toute confusion due à l'aspect trompeur de l'allure du contraste (courbe en cloche) dans les deux cas de figure, il est nécessaire d'établir une méthode de discrimination. Pour illustrer la similitude qui peut être rencontrée dans ce genre de cas, nous avons présenté sur la figure (2.10), la réponse des deux types de défauts. Le contraste face avant causé par un bidélaminage ($R_1 = R_2 = 1$; $z_1 = 1/3$ et $z_2 = 2/3$) est comparé au contraste produit par un délaminage simple ($R = 1$ et $z = 1/3$) produisant le même niveau maximum au même nombre de Fourier relatif à la plaque saine. Les deux signaux sont pratiquement confondus. On constate que le rajout de la résistance la plus profonde n'a pas influé sur la réponse thermique à l'excitation. Ceci s'explique par le fait que le contraste n'est pas sensible à la résistance de contact, si elle dépasse un certain seuil. Le contraste thermique est plus sensible aux petites résistances qu'aux grandes, qui sont par contre mieux détectables. Dans le cas de résistances thermiques relativement grandes, les contrastes de Laplace respectivement en faces avant et arrière s'expriment par :

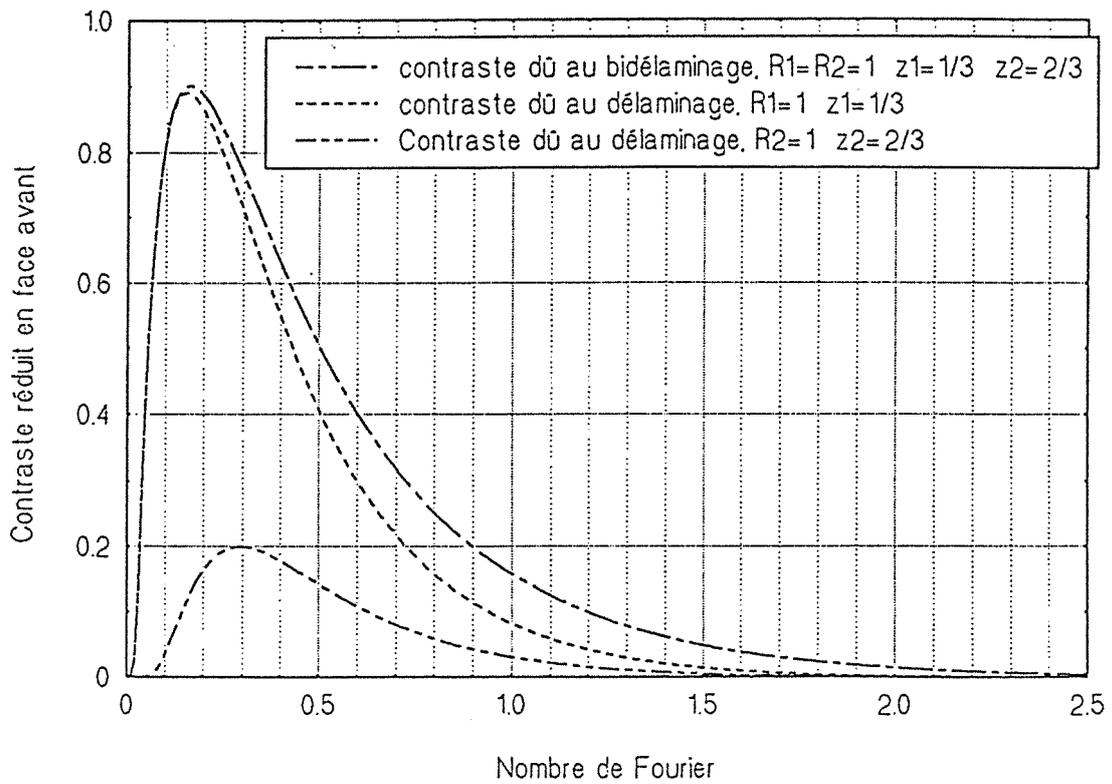
$$m(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha (1-z))}{\alpha \sinh(\alpha) \sinh(\alpha z)} \quad (2.84)$$

$$m(\alpha) = - \frac{1}{\alpha \sinh(\alpha)} \quad (2.85)$$

avec $\alpha = \sqrt{p}$.

En pratique, les signaux expérimentaux sont entachés de bruit, ce qui rend plus délicat de décider de quel type de défaut il s'agit. Par ailleurs, l'identification des paramètres basée sur l'emploi des transformées expérimentales de Laplace, peut augmenter le risque de confusion. En effet, la pondération du contraste par une exponentielle décroissante (équation (2.3),

Fig.2.10 Délaminage et bidélaminage donnant des contrastes semblables



particulièrement pour p grand), réduit le décalage initial entre les deux signaux livrés par deux défauts de natures différentes, aux temps longs, voir les superposer. Dans ce cas, les deux types de défauts peuvent être considérés comme équivalents au sens du contraste thermique pondéré par l'exponentielle.

Notion de fonction discriminante

Une méthode analytique permettant la distinction entre un délaminage simple et un multidélaminage pourra être déduite de l'expression exacte donnant la résistance de contact réduite par la méthode des deux transformées expérimentales de Laplace du contraste en face arrière :

$$R_c = \frac{m^2(\alpha) [1+2\alpha \sinh(2\alpha) m(2\alpha)] \sinh(\alpha) \tanh(\alpha)}{[1+m(\alpha) \alpha \sinh(\alpha)] [-m(\alpha)+m(2\alpha) \cosh(\alpha)-\frac{3}{2} m(\alpha) m(2\alpha) \alpha \sinh(2\alpha)]} \quad (2.86)$$

où $m(\alpha)$ le contraste thermique de Laplace en face arrière, est donné par :

$$m(\alpha) = - \frac{R_c \sinh(\alpha z) \sinh(\alpha (1-z))}{\sinh(\alpha) [\sinh(\alpha) + R_c \alpha \sinh(\alpha z) \sinh(\alpha (1-z))]} \quad (2.87)$$

L'expression (2.86) est valable quelle que soit la valeur de la variable réduite de Laplace. On peut en déduire alors une fonction de discrimination entre un monodélaminage et un multidélaminage. Soit \mathcal{D} cette fonction :

$$\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2) = R_c(\alpha_1) - R_c(\alpha_2) \quad (2.88)$$

où α_1 et α_2 sont calculées pour deux valeurs distinctes pas trop élevées de la variable réduite de Laplace.

La résistance de contact étant un paramètre physique indépendant du temps, la fonction \mathcal{D} est donc nulle dans le cas d'un délaminage et différente de zéro pour un multidélaminage. Malheureusement dans la pratique, même dans le cas d'un monodélaminage, cette fonction est généralement non nulle, à cause de l'erreur d'estimation due au bruit de mesure sur la résistance de contact. Il a été montré dans la section précédente que cette erreur est étroitement liée à la variable de Laplace p (voir figure (2.4)). Elle passe par un minimum dans l'intervalle $[1, 2]$ pratiquement indépendant de la profondeur.

Il est possible alors de calculer la fonction de discrimination \mathcal{D} pour deux valeurs distinctes α de cet intervalle, assez proches. Ainsi, on sera débarrassé de l'influence du bruit de mesure sur \mathcal{D} et celle-ci pourra être utilisée pour discerner les deux types de défauts, à condition que ces derniers soient assez larges pour que le modèle 1D soit applicable en leurs centres.

2.3.2 Comportement homogène d'un multidé laminage

Si le nombre de délaminages devient important, le milieu composite constitué du stratifié et des délaminages peut se comporter au bout d'un certain temps comme un milieu homogène au sens des réponses thermiques sur les faces avant et arrière suite à une excitation impulsionnelle [Degiovanni (1990)].

Si le milieu homogène équivalent existe, il doit avoir les propriétés thermophysiques suivantes :

- conductivité homogénéisée : $\lambda_{\acute{e}q}$
- diffusivité homogénéisée : $a_{\acute{e}q}$
- capacité thermique homogénéisée : $(\rho c)_{\acute{e}q}$

avec :
$$\lambda_{\acute{e}q} = \frac{\lambda_z}{n R_c + 1} \quad (\text{conductivité équivalente en régime permanent})$$

λ_z la conductivité thermique axiale du composite sain

n le nombre de délaminages

R_c la résistance thermique réduite commune de chaque délaminage

Les délaminages étant supposés résistifs, la capacité thermique du milieu homogène est égale à celle du stratifié sain.

$$a_{\acute{e}q} = \frac{\lambda_{\acute{e}q}}{\rho c} \quad (\text{définition de la diffusivité})$$

Pour étudier le comportement en régime transitoire unidirectionnel d'un tel multicouche, un modèle simple a été développé. Le multidé laminage est constitué de n résistances thermiques égales et dont la somme représente la résistance thermique du matériau sain, d'où une conductivité et une diffusivité thermiques équivalentes égales à la moitié de celle du matériau sain. On suppose également que les n résistances sont équidistantes et sont réparties sur toute l'épaisseur de l'échantillon.

La méthode des quadripôles est la plus appropriée pour cette étude [Degiovanni (1988)]. Pour simplifier les expressions, nous considérons le milieu composite défectueux comme un multicouche constitué d'un empilement régulier de tricouches élémentaires symétriques (chaque tricouche étant formé de deux épaisseurs de matériau séparées par une résistance), auquel on a rajouté à chaque extrémité une épaisseur de matériau sain (en pratique, les décollements se produisent dans les interplis du stratifié, voir annexe (2.2)).

Les courbes théoriques (figures (2.11) et (2.12)) comparées aux réponses du milieu homogène équivalent, laissent apparaître le caractère fortement non homogène des multidé laminages constitués de 1 à 5 résistances thermiques ($n R_c = 1$). En revanche, on constate

Fig.2.11 Homogénéisation d'un multicouche multidélaminé au sens de la réponse en face arrière

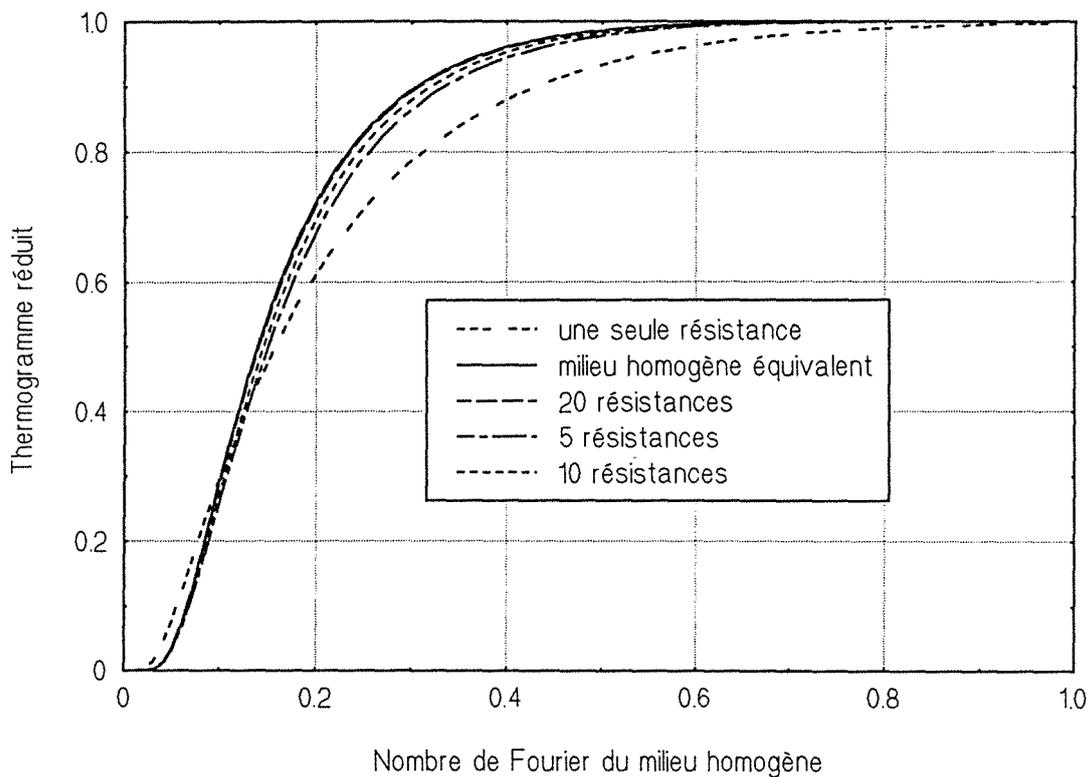
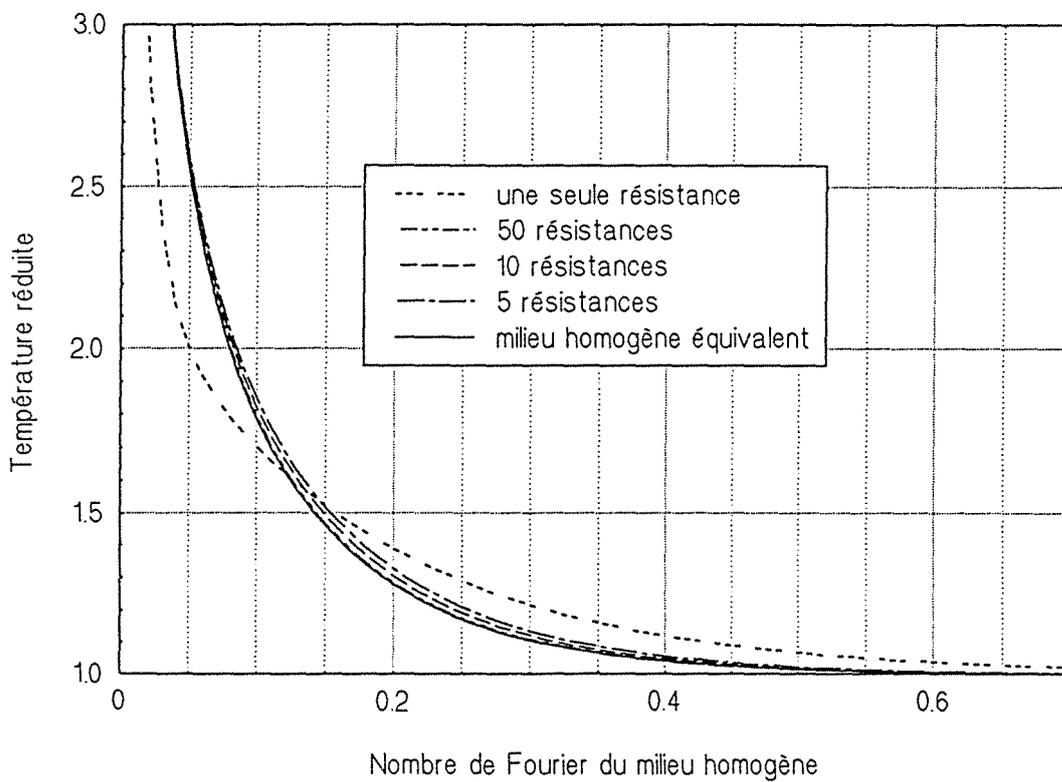


Fig.2.12 Homogénéisation d'un multicouche multidélaminé au sens de la réponse en face avant



que dans les cas de 10 à 20 résistances, les réponses du multidélaminé sont assez proches de celle du milieu homogène. Au delà de 40 résistances il n'y a pratiquement pas de différence.

Cet exemple montre qu'une vingtaine de résistances sont suffisantes à homogénéiser le système de manière quasi identique sur les faces avant et arrière.

2.4 Expérience flash sur un composite impacté

2.4.1 Caractéristiques de l'échantillon

L'échantillon fourni par le laboratoire L.A.M.E.F (Laboratoire Matériaux Endommagement Fiabilité), est une plaque carrée de côté 60 mm et d'épaisseur 2 mm , constituée de strates de fibres de verre noyées dans une matrice de résine époxy dont le taux est de 30% . L'agencement des plis peut être décrit par l'écriture symbolique $[0_4 / 90_2 / 0_4]$. Le milieu ainsi formé est peu conducteur, hétérogène et fortement anisotrope. Sa diffusivité thermique axiale a été mesurée grâce à la méthode des moments temporels partiels [Degiovanni (1988)], à partir d'une expérience flash face arrière sur une plaque saine : $a_z = 0.27 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Les capacités thermiques volumiques nominales du verre et de la résine ont été prises respectivement égales à $2.28 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $1.62 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$. La capacité thermique volumique du composite est alors de $2.08 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ et sa conductivité thermique axiale est de $0.56 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Les deux faces de la plaque ont été revêtues d'une peinture noire afin de les rendre opaques, uniformiser et améliorer leur émissivité. L'échantillon a été endommagé à la suite d'un impact localisé transverse d'une petite sphère métallique. Ce type de choc, crée dans les laminés des multidélaminaages et la thermographie infrarouge stimulée peut être utilisée comme moyen d'évaluation de leurs gravité.

2.4.2 Dispositif expérimental et mesure du contraste

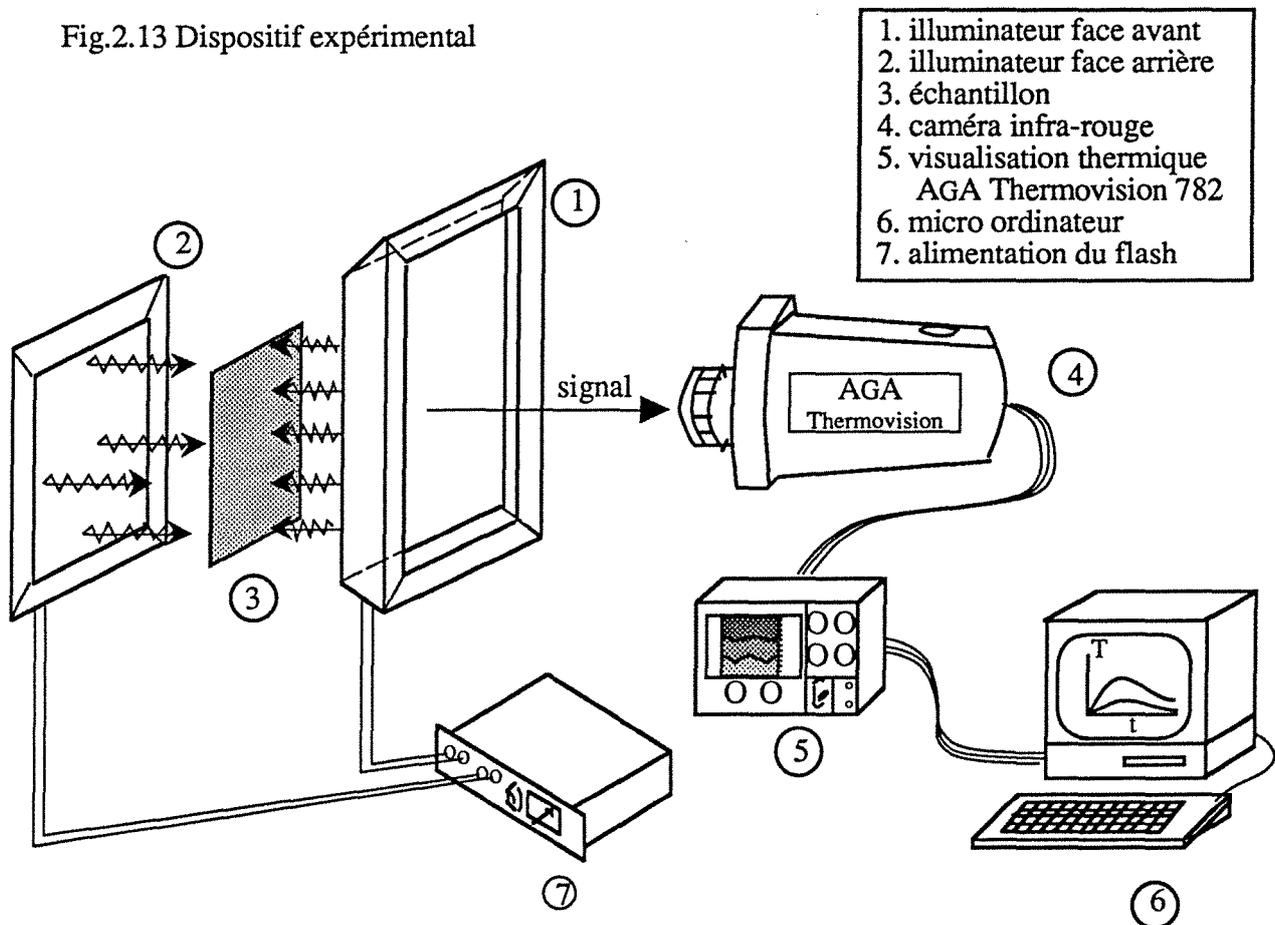
L'application de la méthode flash en CND thermique consiste à soumettre la pièce à contrôler à un chauffage impulsionnel, tandis que l'évolution temporelle de sa température de surface, soit du côté du chauffage (face avant), soit du côté opposé (face arrière) est enregistrée à l'aide d'une caméra infrarouge. La perturbation observée sur le thermogramme obtenu sur une zone défectueuse par rapport à un thermogramme obtenu en l'absence de défaut ou relevé sur une zone saine du même échantillon, constitue une "signature" du défaut interne.

L'installation est constituée de trois modules :

- La source excitatrice
- La caméra infrarouge
- Le système de stockage et de traitement de données.

Le schéma de principe est présenté ci-dessous :

Fig.2.13 Dispositif expérimental



2.4.2.1 La source excitatrice

L'excitation impulsionnelle est produite par un illuminateur composé de quatre tubes à éclats au xénon. Lors d'un enregistrement en face arrière, les tubes sont disposés l'un à côté de l'autre parallèlement à la surface de la pièce. Dans le cas d'une manipulation en face avant, les quatre tubes à éclat forment les côtés d'un carré vertical. Chaque tube flash de *10 cm* de long est situé sur la ligne focale d'un réflecteur dont la surface est très réfléchissante. Les tubes sont alimentés par une batterie de condensateurs, qui peut accumuler jusqu'à *1500 Joules* d'énergie électrique. Ce banc d'essais peut théoriquement produire un dépôt d'énergie quasi uniforme sur la surface de la plaque pour une durée d'impulsion d'environ *10 ms*.

2.4.2.2 La caméra infrarouge

Le champ de température transitoire sur la face de la plaque est enregistré par une caméra infrarouge AGEMA 782 SW. Celle-ci est équipée d'un monodétecteur photoconductif InSb de bande spectrale 3.5 - 5.6 microns, refroidi à l'azote liquide. Le balayage de la scène thermique est assuré par deux prismes rotatifs. L'objectif de 7° ou 20° est utilisé sans aucun filtre.

Principe de mesure par caméra infrarouge

Pour passer d'une image en luminance à une image en température, il est nécessaire de connaître les composantes du flux φ^* reçu par la caméra. En effet, φ^* n'est qu'un flux photonique apparent de l'objet observé. Le rayonnement reçu peut s'écrire :

$$\varphi^* = \tau \varepsilon \varphi_e^o + \tau (1-\varepsilon) \varphi_a^o + (1-\tau) \varphi_{atm}^o \quad (2.89)$$

- où :
- τ coefficient de transmission de l'atmosphère.
 - ε émissivité de l'échantillon observée considéré comme gris, opaque et ayant un comportement diffusant en émission et en réflexion.
 - φ_e^o flux qui serait émis par la surface de l'échantillon si elle avait les propriétés d'un corps noir.
 - φ_a^o flux issu du milieu ambiant assimilé à un corps noir.
 - φ_{atm}^o flux en provenance de l'atmosphère.

L'indice supérieur "o" indiquant une propriété du corps noir.

La tension préamplifiée du détecteur $U(t)$ est proportionnelle au flux photonique incident φ à un instant t . Ainsi :

$$U^*(t) = \tau \varepsilon U_e^o(T) + \tau (1-\varepsilon) U_a^o(T_{env}) + (1-\tau) U_{atm}^o \quad (2.90)$$

- où
- T température de l'objet observé.
 - T_{env} température uniforme de l'environnement considéré comme isotrope.

Si on considère que le coefficient de transmission de l'atmosphère τ est égal à 1 (ce qui est le cas pour des distances caméra-échantillon de l'ordre du mètre et pour un environnement "propre", exempt de fumée ou gaz absorbant), cette relation peut être simplifiée :

$$U^*(t) = \varepsilon U_e^o(T) + (1-\varepsilon) U_a^o(T_{env}) \quad (2.91)$$

A cause de considérations physiques, la loi de calibrage du détecteur et de sa chaîne de mesure est recherchée sous la même forme que celle de la luminance monochromatique du corps noir (loi de Planck) :

$$U^o(T) = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right) - 1} \quad (2.92)$$

La température T est exprimée en Kelvin. A et B sont des constantes d'étalonnage dépendant en particulier de la caméra et de l'objectif utilisé, de l'ouverture du diaphragme, de la présence ou non d'un filtre.

Lors d'une expérience flash, les élévations de température sont de l'ordre de quelques degrés et l'on peut linéariser l'équation précédente au voisinage de la température ambiante :

$$U^o(T) \approx U^o(T_{env}) + a (T - T_{env}) \quad (2.93)$$

avec :

$$a = \frac{dU^o(T)}{dT} (T_{env}) \quad (2.94)$$

Pendant une expérience transitoire, seule la température T varie dans l'équation (2.91), T_{env} restant constante. En raisonnant en variations par rapport à l'instant initial, on a :

$$\Delta U^*(t) = U^*(t) - U_{ref} = \varepsilon a (T - T_{ref}) \quad (2.95)$$

où U_{ref} et T_{ref} sont respectivement la tension mesurée et la température de l'objet observé avant la perturbation thermique.

Un pixel P situé à l'endroit (i,j) sur la trame n (correspondant à l'instant moyen t_n après l'excitation) correspond à une tension U_{ijn} telle que :

$$U_{ijn} - U_{ijref} = \varepsilon(P) a T(P, t_n) \quad (2.96)$$

U_{ijref} étant la surtension de référence mesurée au point P avant l'excitation.

Le contraste thermique est calculé des façons suivantes :

en face avant, on l'approche de la manière suivante :

- dans le cas d'une normalisation aux "temps courts" avec T_s et T_{os} les températures acquises immédiatement après le flash (première trame) au nombre de Fourier t_s pour les points P et P_o (endroit sans défaut) :

$$\Delta T^* = \frac{1}{\sqrt{\pi t_s}} \left(\frac{T}{T_s} - \frac{T_o}{T_{os}} \right) \quad (2.97)$$

• dans le cas d'une normalisation aux "temps longs" avec T_{fin} et T_{ofin} , les dernières trames acquises en P et P_o :

$$\Delta T^* = \left(\frac{T}{T_{fin}} - \frac{T_o}{T_{ofin}} \right) \quad (2.98)$$

• en face arrière, avec T_{max} et T_{omax} qui représentent les maxima des deux thermogrammes à des instants a priori différents t_{max} et t_{omax} en P et P_o :

$$\Delta T^* = \left(\frac{T}{T_{max}} - \frac{T_o}{T_{omax}} \right) \quad (2.99)$$

Si on note U_{ijlim} la surtension limite adiabatique du pixel (i, j) , la formule donnant la température normalisée est la même dans les trois cas :

$$T^* = (U_{ijn} - U_{ijref}) / U_{ijlim} \quad (2.100)$$

La même équation peut être appliquée au point de référence P_o , ce qui permet d'obtenir le thermogramme en contraste local en P :

$$\Delta T_{ij}^* = T_{ij}^* - T_o^* \quad (2.101)$$

La surtension limite adiabatique est déterminée par :

- en face avant aux temps courts, il est nécessaire de calculer pour chaque pixel le temps t_s qui correspond à toutes les acquisitions de la trame $n_{flash+1}$:

$$t_{sij} = t_{ij(nflash+1)} - t_{flash} \quad (2.102)$$

la surtension limite adiabatique est alors :

$$U_{ijlim} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_z t_{sij} / e^2}} (U_{ij(nflash+1)} - U_{ijref}) \quad (2.103)$$

- en face avant aux temps longs, c'est la surtension minimale donnée par la dernière trame acquise :

$$U_{ijlim} = U_{ijmin} - U_{ijref} \quad (2.104)$$

- en face arrière, c'est la surtension maximale atteinte U_{ijnmax} (n étant le numéro de la trame) du pixel P :

$$U_{ijlim} = U_{ijnmax} - U_{ijref} \quad (2.105)$$

2.4.2.3 Système de stockage et de traitement de données

Le signal potentiométrique entre 0 et 5 volts issu du préamplificateur de la caméra est amené à une carte DATAMIN située dans l'unité centrale d'un micro-ordinateur compatible PC 386. Cette carte amplifie la totalité du signal avec un gain de 10 et le numérise sur 12 bits. Les trames infrarouges constituées de 64 lignes de 128 colonnes sont stockées en temps réel (25 trames par seconde au maximum) dans la mémoire étendue avant leur transfert sur un disque dur pour un traitement ultérieur.

Le logiciel d'acquisition THERMIR de DATAMIN permet de :

- lancer une acquisition.
- stocker les images thermographiques sur disque dur et ultérieurement sur bandes magnétiques.
- traiter les images.

2.4.3 Conditions expérimentales

Quatre expériences flash ont été faites sur l'échantillon décrit plus haut : deux en face arrière et deux en face avant. Pour chaque type de procédure d'essais, on changeait le côté de l'irradiation par rapport à la surface impactée. La période d'acquisition a été choisie égale à 40 ms. La séquence complète étant constituée d'une rafale de 256 trames thermographiques. La caméra a été équipée de l'objectif de 7°, d'une bague allonge de 12 mm et aucun filtre n'a été utilisé.

2.4.4 Traitement des données expérimentales

L'identification des paramètres thermophysiques du mutidélaminage équivalent est réalisée grâce à la technique des transformées expérimentales de Laplace du contraste thermique réduit localement. La méthode est basée sur un modèle de diffusion de chaleur unidirectionnel et consiste à identifier la profondeur du défaut en face avant et sa résistance thermique en face arrière. La recherche à identifier qu'un seul paramètre par chacune des deux techniques (face avant ou arrière) est liée au fait que la sensibilité à la profondeur est nulle en face arrière pour un défaut médian et que les sensibilités à la résistance et à la profondeur sont corrélées sur cette face, pour un défaut situé dans la deuxième moitié de la plaque. Les principes d'identification de ces deux paramètres ont été rappelés dans le chapitre 1.

2.4.4.1 Mesure en face arrière (irradiation du côté impacté)

Une image typique obtenue par thermographie infrarouge à $t = 2.08$ s après l'excitation qui a eu lieu à la trame 28, est présentée sur la figure (2.13). La palette montrée sur la même figure donne la correspondance entre la température en degré Celsius et les couleurs. Le multidélaminage apparaît au centre de l'échantillon sous la forme d'une région froide sur cette trame. On note également, la présence d'une zone froide entourant le centre de l'échantillon. Elle peut être due, soit à une excitation non uniforme, soit aux pertes thermiques sur les bords. La frontière de la plaque de verre époxy est définie par le support en PVC, qui apparaît en couleur noire sur l'image. Il est clair que sur cette image en température absolue, la détection du défaut est difficile. Afin de mieux détecter le défaut, nous avons calculé le moment d'ordre zéro entre les trames 52 et 102. L'image correspondante est présentée sur la figure (2.14). On voit mieux apparaître le défaut au centre de l'échantillon. L'évolution temporelle du contraste thermique réduit localement, calculé entre le centre d'impact et une zone saine (choisie à mi-distance entre le défaut et le bord de l'échantillon), est illustrée sur la figure (2.15). Le contraste maximum est atteint à un temps de 2 secondes après la perturbation thermique. C'est d'ailleurs l'instant auquel nous avons présenté l'image thermique de la figure (2.13). Naturellement, la détection du défaut sera encore plus difficile sur les images avant ou après cet instant optimal.

Un profil de contraste thermique absolu $\Delta T (= T - T_0)$ correspondant à la trame 50 après le flash ($t = 2$ s), est montré sur la figure (2.16). L'axe des abscisses de cette figure correspond au numéro de pixel sur la ligne passant par le centre d'impact. Seul les 80 pixels correspondant à la taille de l'échantillon sont présentés. On note la présence des effets de non homogénéité du dépôt d'énergie ou des pertes thermiques sur les extrémités de ce profil.

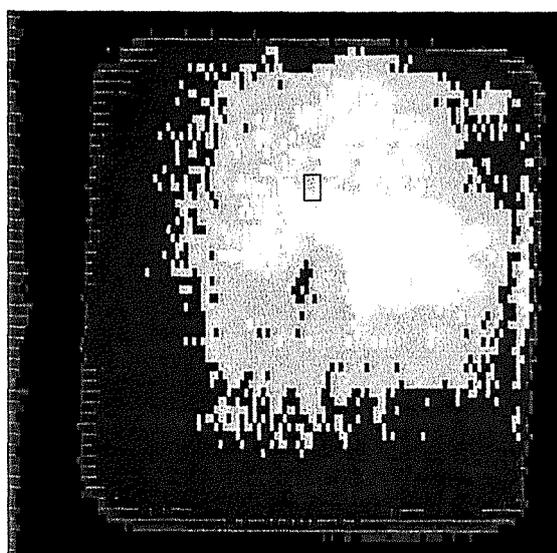
La normalisation locale (voir chapitre 1) du contraste, fait disparaître partiellement ces effets parasites et améliore la détection. Ceci est illustré par le profil de contraste réduit moyenné sur toutes les trames après le flash sur la figure (2.17).

Les deux profils de transformées expérimentales de Laplace du contraste réduit localement, $m_1(p)$ et $m_2(p)$ sont présentées sur la figure (2.18). A l'inverse de ce qui a été constaté sur le contraste moyen sur la figure (2.17), la ligne de base des profils de Laplace est maintenant horizontale. On peut facilement observer que ces deux profils sont hautement corrélés.

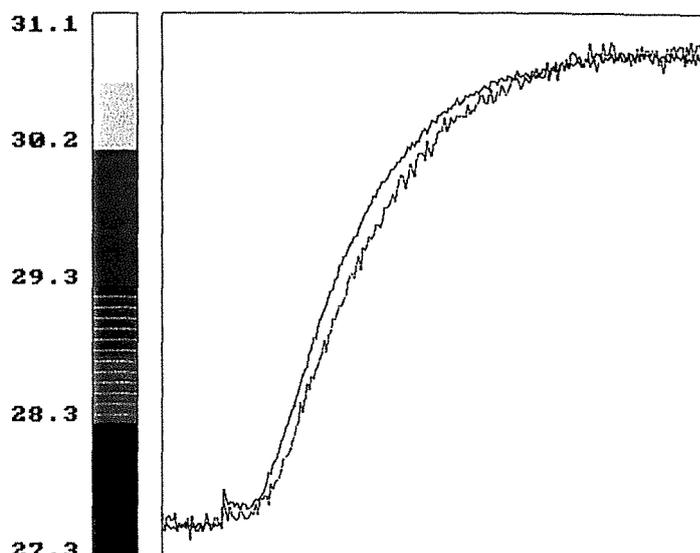
La figure (2.19) montre le profil de la résistance thermique de contact du monodélaminage équivalent, identifié selon la procédure décrite au chapitre 1 pour $p_1 = 1$ et $p_2 = 4$. La résistance au centre du défaut vaut $17.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$, soit en supposant que la conductivité thermique de l'air est $\lambda_{\text{air}} = 0.026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, une épaisseur d'air de 44 microns.

La même procédure réalisée pour deux valeurs différentes des précédentes de la variable réduite de Laplace ($\alpha_1 = 1.3$ et $\alpha_2 = 2.6$), donne une résistance thermique au centre d'impact de $23.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K / W}$, soit un écart d'environ 30 % par rapport à la première valeur. La fonction \mathcal{D}

Fig.2.13 Trame instantanée (t=2.08 s)



Trame n° 52



Thermogrammes

Fig.2.14 Moyenne des trames 52 à 102

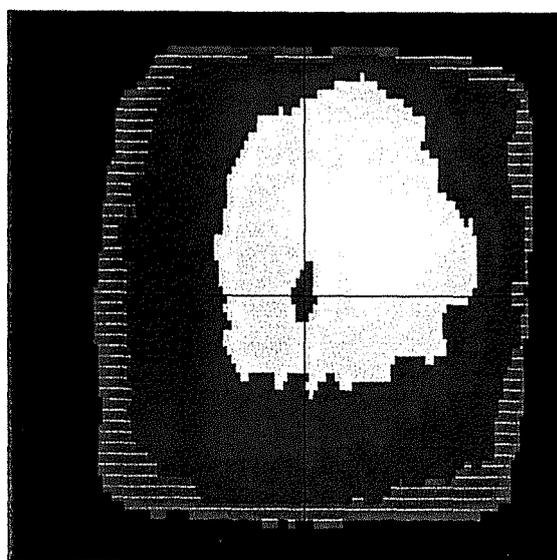
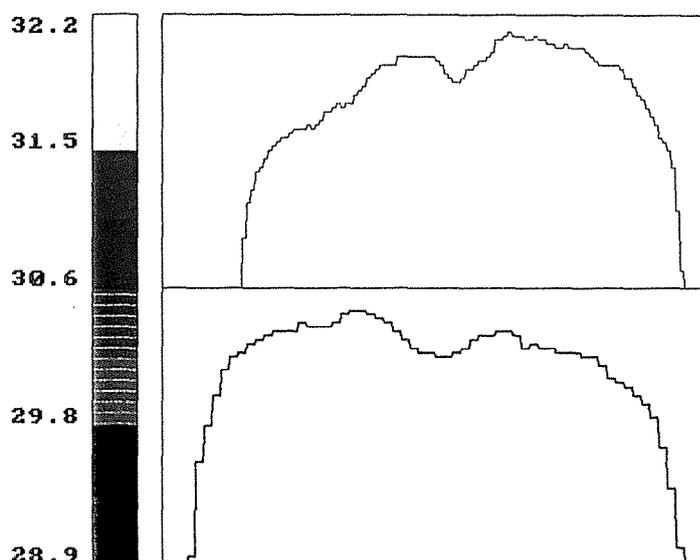


Image moyennée



Profils

Fig.2.15 Thermogramme en contraste réduit au centre d'impact
 Mesure en face arrière, irradiation du côté impacté

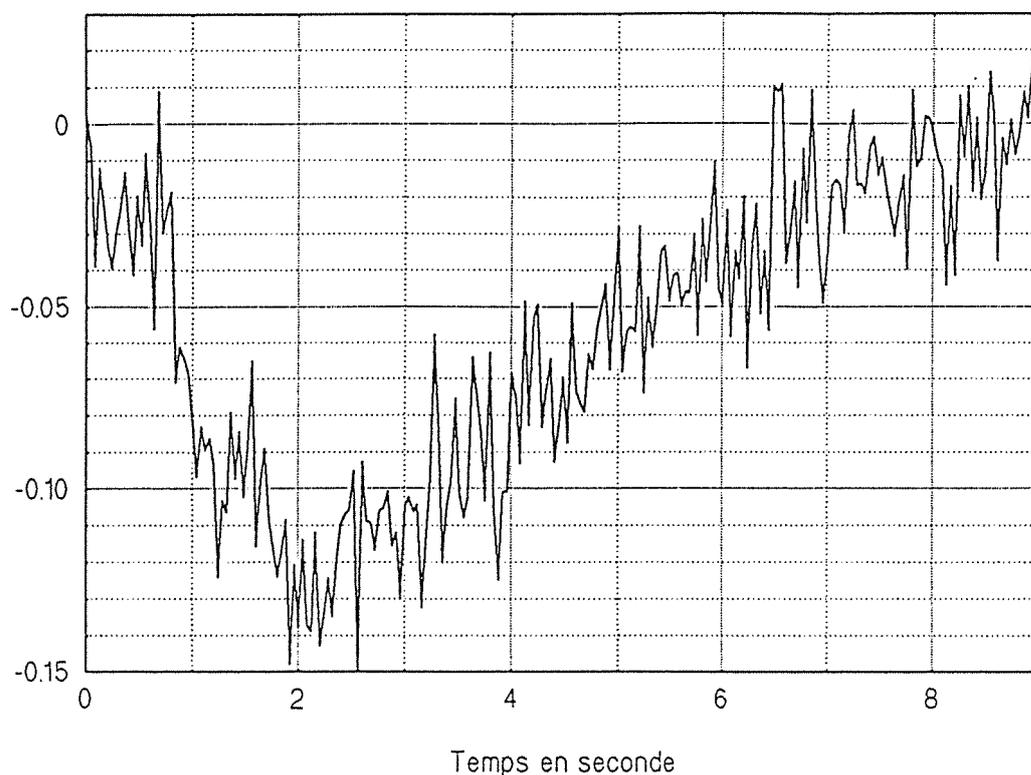


Fig.2.16 Profil instantané de contraste absolu passant par
 le centre d'impact. Trame 50 après le flash (t = 2 s)
 Mesure en face arrière, irradiation du côté impacté

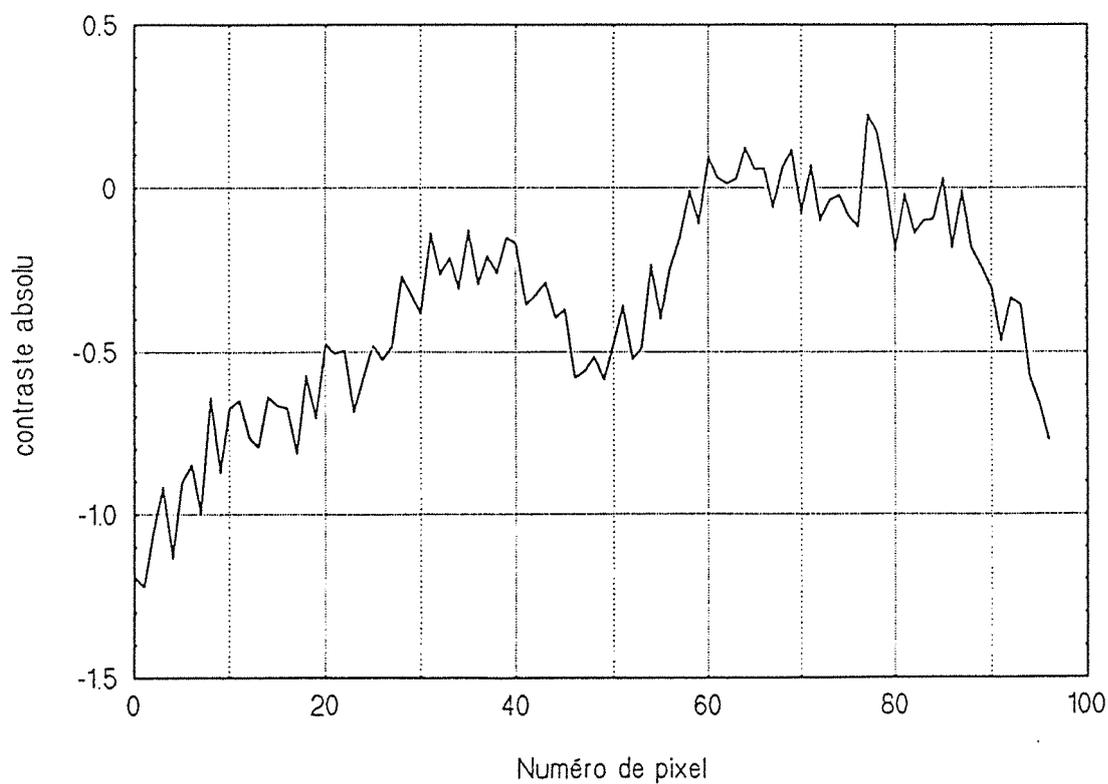


Fig.2.17 Profil de contraste réduit moyenné dans le temps.
 et passant par le centre d'impact
 Mesure en face arrière, irradiation du côté impacté

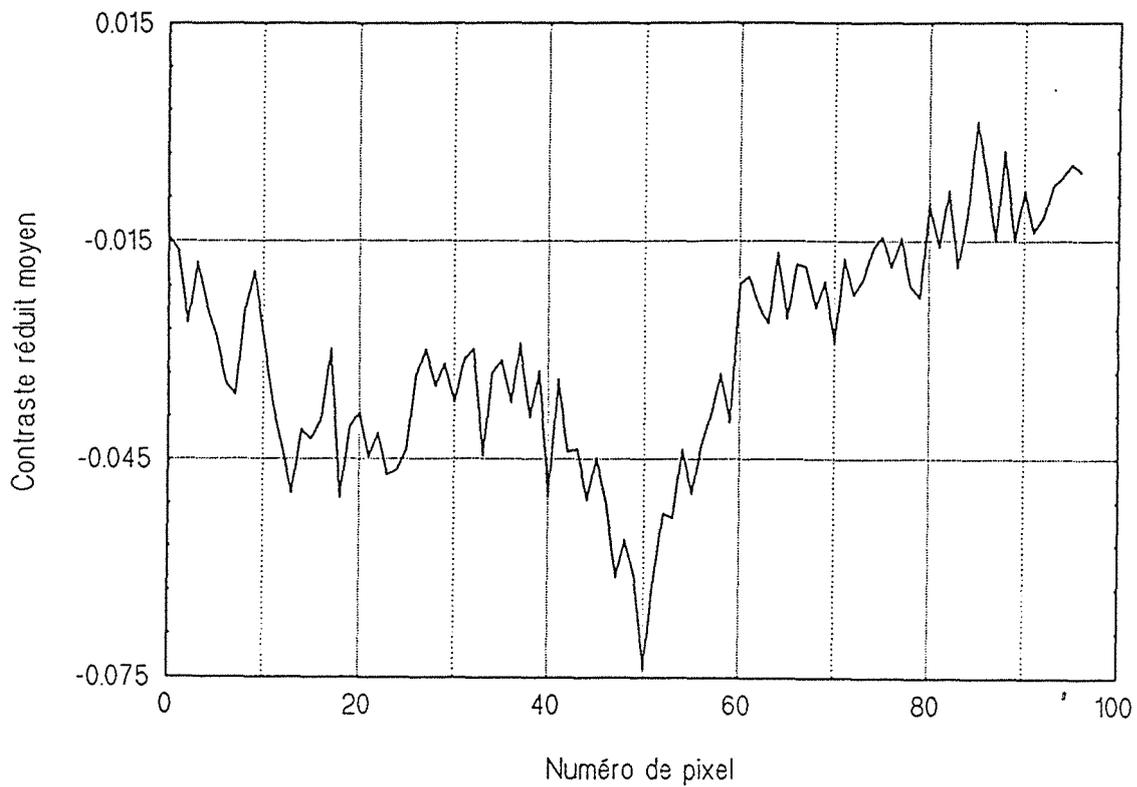


Fig.2.18 Profils en contraste de Laplace réduit
 Mesure en face arrière, irradiation du côté impacté

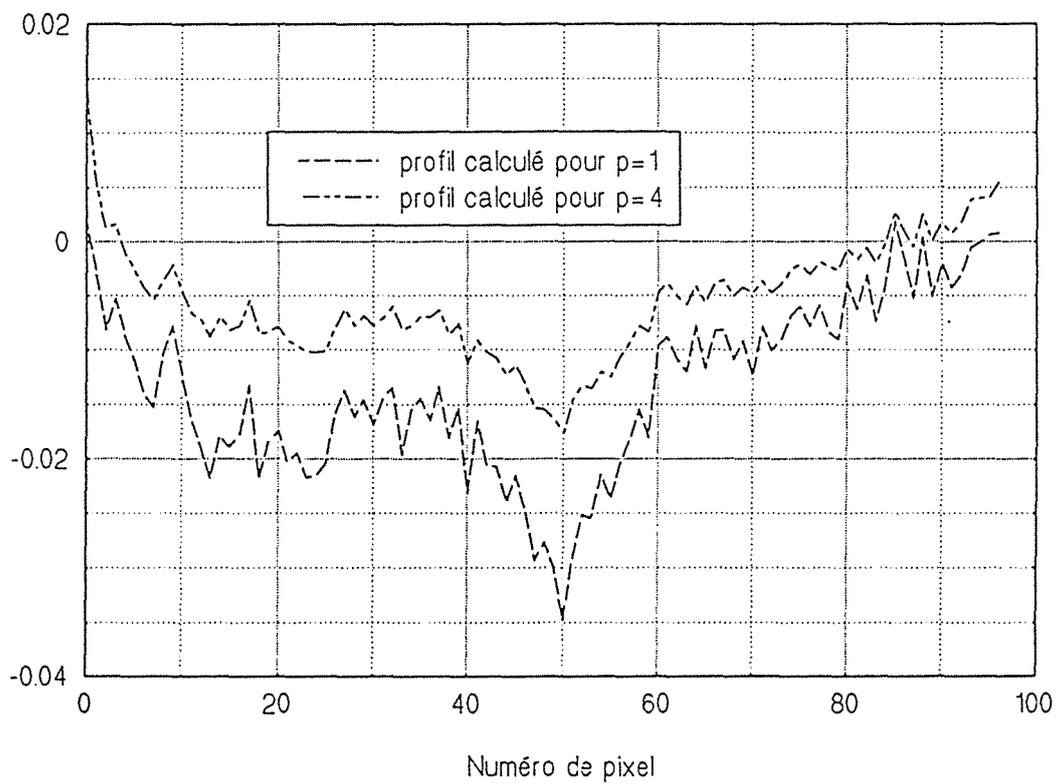
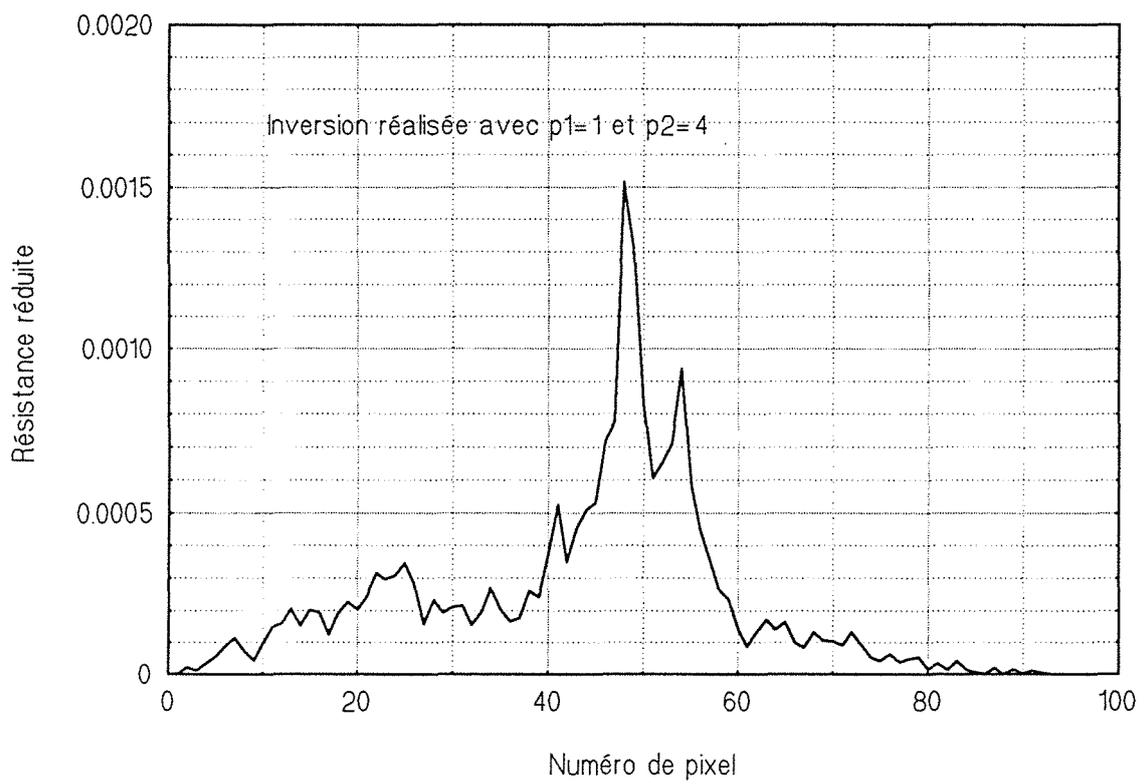


Fig.2.19 Profil de la résistance de contact du délaminage équivalent
Mesure en face arrière, irradiation du côté impacté



de discrimination entre monodé laminage et multidé laminage est donc non nulle et le défaut en présence est effectivement un multidé laminage.

Notons que la figure (2.4) montre bien que pour des défauts non superficiels, l'erreur d'estimation de la résistance de contact ne varie pas beaucoup entre $\alpha = 1$ et $\alpha = 1.3$ ($\frac{\sigma_R}{R_c} < 10\%$ dans le pire des cas si $z = 0.1$ pour les valeurs des paramètres correspondantes à notre manipulation). Ce qui confirme que l'écart mentionné n'est pas lié au bruit de mesure, mais plutôt au type de défaut ou aux écarts mesures / modèle (effets 2D dus à la taille limitée du défaut, à un éclairage non uniforme, etc. ...).

2.4.4.2 Mesure en face arrière (irradiation du côté non impacté)

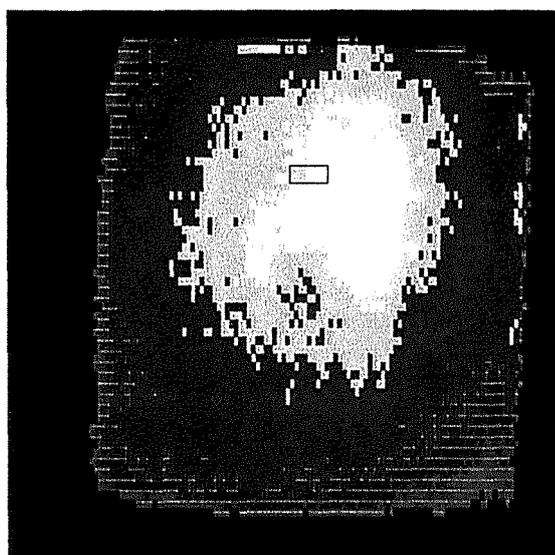
Cette fois-ci, le défaut n'apparaissait pas clairement sur les images instantanées (voir figure(2.20)). L'examen de l'équation (2.74) montre qu'un monodé laminage ou un multidé laminage donne le même contraste thermique sur la face arrière, quand on change le côté de l'irradiation. Ceci confirme le fait que le modèle 1D local, ne correspond pas à la réalité où d'autres phénomènes comme les effets bidimensionnels ou éventuellement la semi-transparence du matériau influencent le champ de température.

Un profil instantané de contraste absolu, calculé à la trame 66 après le flash ($t = 2.64\text{ s}$) est présenté sur la figure (2.21). De part et d'autre du milieu du profil, on remarque les effets dus à la non uniformité de l'excitation ou de l'absorptivité et l'émissivité des faces de la plaque. La normalisation locale par la température maximale atteinte, permet de corriger ces imperfections expérimentales. Ceci est observable sur le profil en contraste réduit moyenné sur toutes les trames après le flash, présenté sur la figure (2.22). Cela correspond, à une constante mutiplicative près, à un profil de transformée de Laplace du contraste pour $p = 0$.

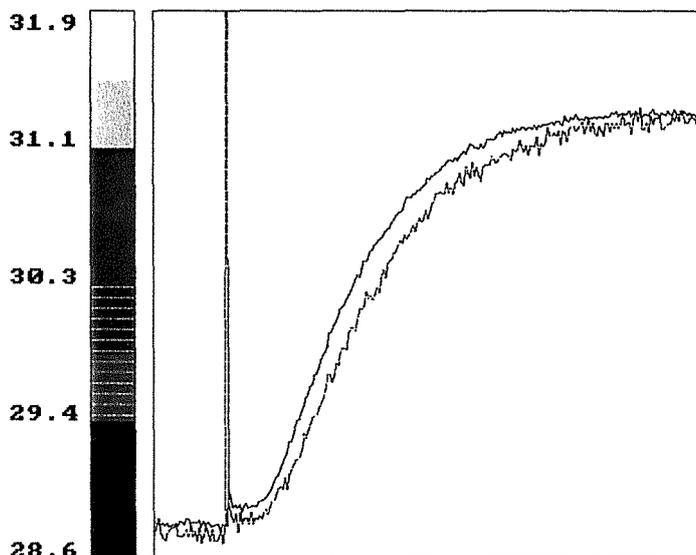
Les profils des deux transformées de Laplace m_1 et m_2 nécessaires pour le calcul du profil en résistance sont présentés sur la figure (2.23). L'identification de la résistance thermique du monodé laminage équivalent donne une résistance maximale de $8.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$, soit une épaisseur d'air de 23 microns (figure (2.24)). Cette valeur est pratiquement la moitié de celle obtenue dans l'expérience précédente. Ce qui confirme la mauvaise précision sur la résistance lors de telles expériences. Ceci demeure inexplicable, vu que la sensibilité du contraste thermique en face arrière à la résistance de contact est symétrique par rapport au plan médian.

Si on compare les résultats illustrés sur les figures (2.18) et (2.23), représentant les profils en contraste de Laplace, ou ceux des figures (2.19) et (2.24), représentant les profils en résistance thermique, on constate qu'ils sont fortement corrélés. Ceci prouve que l'éclairage du flash, l'émissivité et l'absorptivité des faces de la plaque sont quasi uniformes. En effet, les deux expériences en face arrière ont été réalisées successivement en tournant l'échantillon par rapport à

Fig.2.20 Images instantané et moyennée



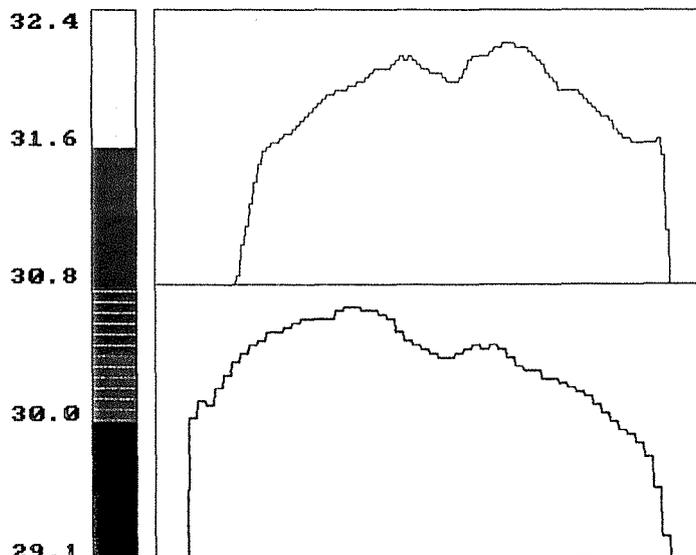
Trame n°60



Thermogrammes



**Moyenne des trames
45 à 105**



Profils

Fig.2.21 Profil en contraste absolu, à la trame 66 après le flash
Mesure en face arrière, irradiation du côté non impacté

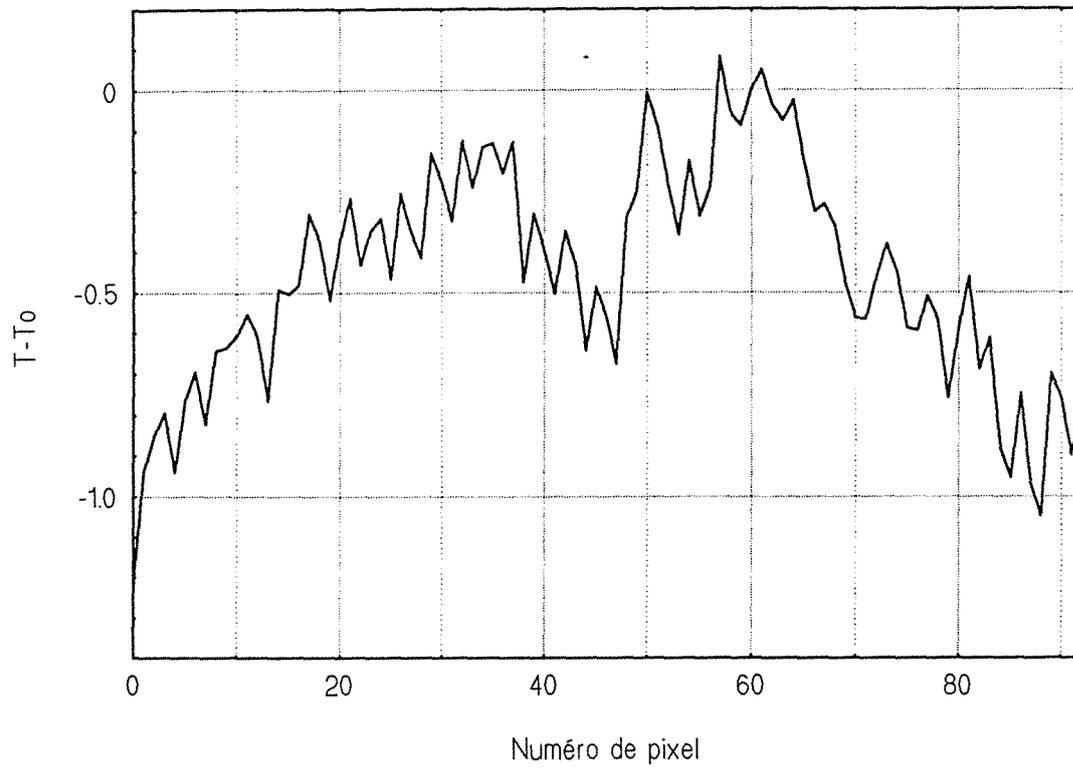


Fig.2.22 Profil moyen en contraste arrière réduit passant par le centre d'impact. Irradiation du côté non impacté

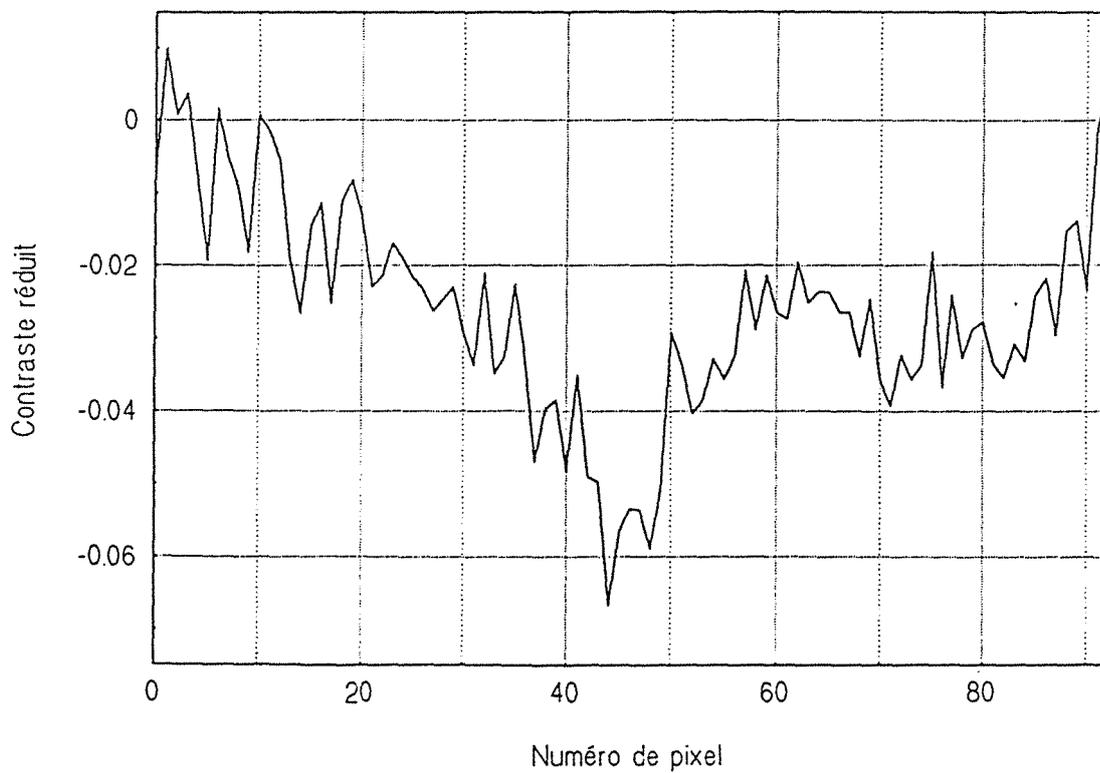


Fig.2.23 Profils en contraste de Laplace passant par le centre d'impact
 Mesure en face arrière, irradiation du côté non impacté

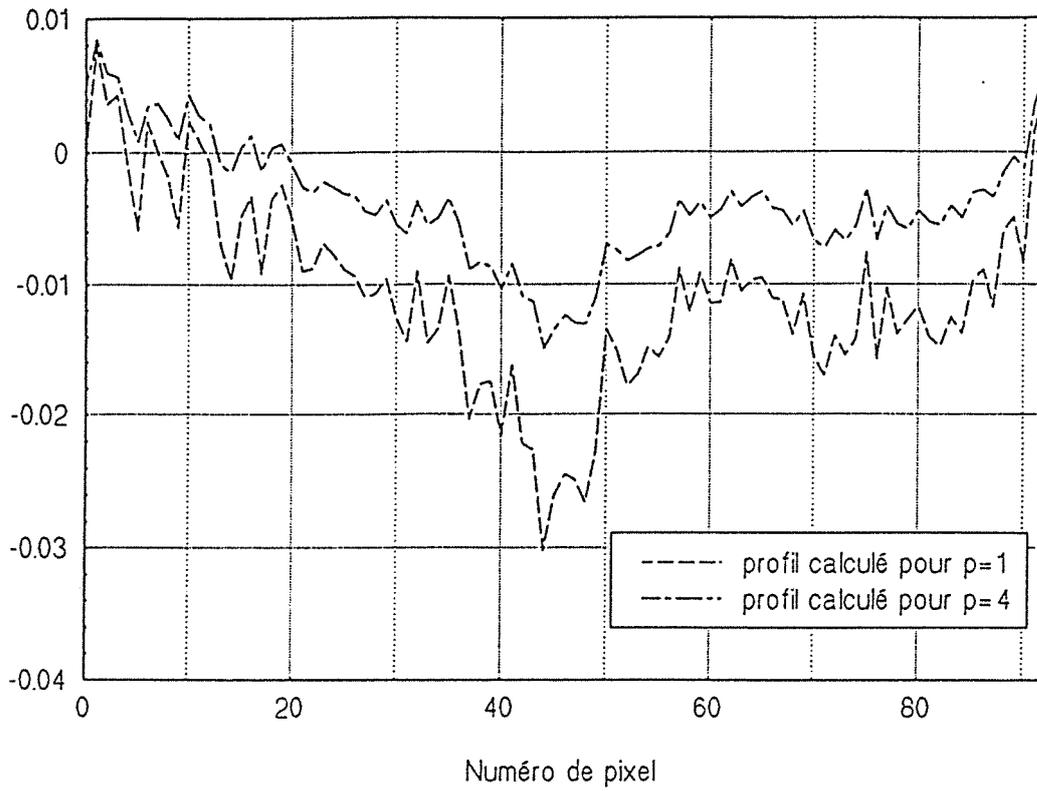
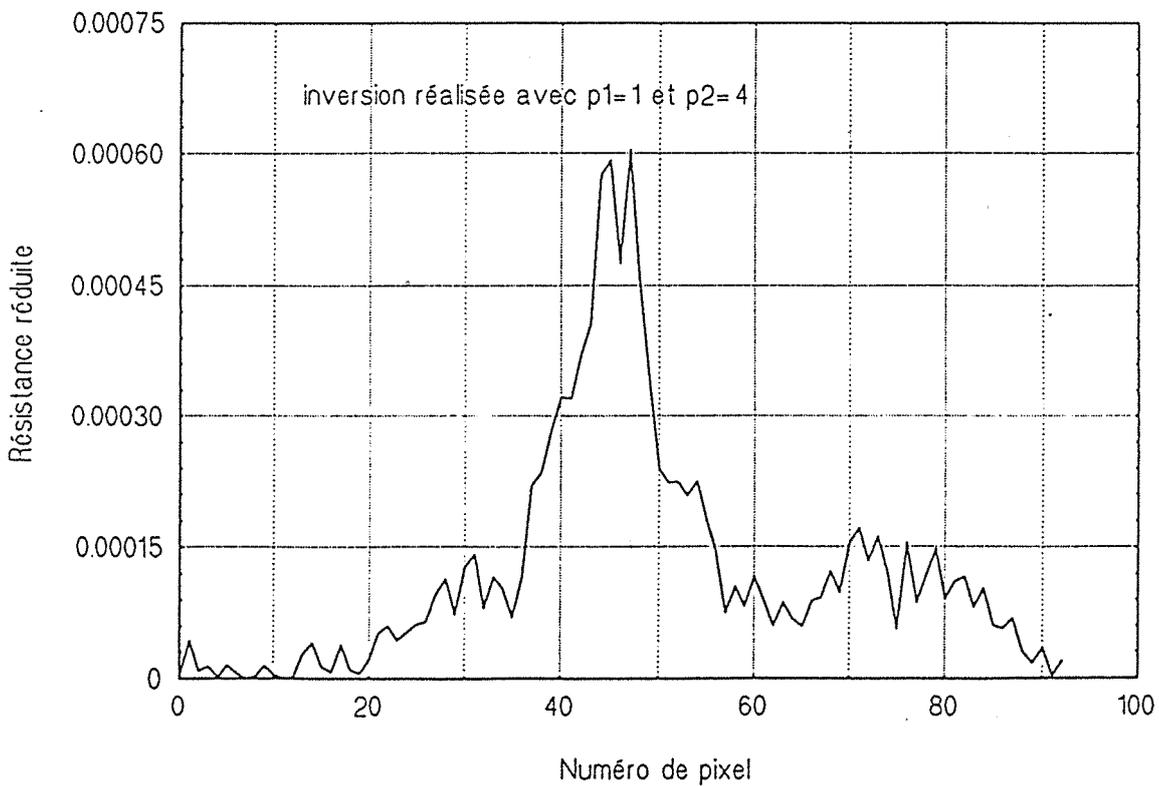


Fig.2.24 Profil en résistance du délaminage équivalent
 Mesure en face arrière, irradiation du côté non impacté



la verticale, ce qui explique l'asymétrie des profils présentés. La petite différence existant entre les niveaux des profils de Laplace des figures (2.18) et (2.23) s'explique par le fait que la zone de référence n'était pas la même dans les deux manipulations. Malheureusement, cet écart entre les contrastes de Laplace s'amplifie lorsqu'on passe à l'inversion permettant de remonter à R_c , d'où deux résistances dont l'une est pratiquement le double de l'autre.

2.4.4.3 Mesure en face avant (irradiation du côté impacté)

Dans la technique de mesure en face avant, la plaque d'essai et le montage expérimental sont les mêmes qu'auparavant, sauf que la caméra est placée du côté de l'excitation de façon à enregistrer le champ de température de la face irradiée à travers le carré défini par les tubes à éclat.

Sur une trame moyennée entre 0.88 et 2.40 secondes après le flash (figure (2.25)), le défaut apparaît au centre sous forme d'une région chaude. L'évolution temporelle du contraste réduit calculé au centre du défaut en référence à une zone saine est présentée sur la figure (2.26). La normalisation du champ de température est faite par rapport à la température minimale atteinte pendant la durée d'acquisition. Le maximum de contraste (= 0.129) est atteint à un temps $t = 1.5$ s après l'éclairage.

La profondeur réduite calculée sur le pixel central (ligne n° 33, colonne n° 60) de la région chaude, identifiée selon la procédure décrite au chapitre 1 est de 0.34 : le défaut est plus près de la face impactée. Une fois la profondeur connue, la résistance thermique de contact peut être déterminée à partir d'un moment de contraste de Laplace en face avant.

La résistance calculée à partir du moment de Laplace m_1 pour le même pixel pour $\alpha = 1$ vaut $2.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$, soit une épaisseur d'air de 7 microns. Celle calculée à partir du moment m_2 pour $\alpha = 2$ vaut $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$, soit une épaisseur d'air de 4 microns. Lorsqu'on compare ces résistances à celles trouvées en face arrière, on constate que les valeurs obtenues en face avant sont beaucoup plus faibles, ceci reste inexplicable.

Un profil instantané de contraste absolu correspondant à une ligne horizontale passant par le centre d'impact est tracé sur la figure (2.27). Le thermogramme T_o de référence ayant été choisi sur un pavé de 20 pixels sur la même ligne (n° 33) à mi-distance entre le centre et le bord de l'échantillon. On peut observer sur cette figure l'énorme effet des pertes thermiques sur les bords. Le profil en contraste normalisé localement est tracé au même instant sur la figure (2.28).

Le contraste absolu ΔT qui était principalement négatif sur la figure (2.27), est transformé en un contraste réduit ΔT^* positif pratiquement pour tous les pixels de la ligne. L'opération de la normalisation locale a malheureusement noyé la bosse due à la présence du défaut dans le bruit de mesure. Afin de remédier à cet inconvénient dû à la normalisation, il serait plus correct de n'exploiter que la zone "non affectée" par les pertes thermiques, comprise entre les 20 ème et 80 ème pixels.

Fig.2.25 Image thermographique en face avant moyennée entre 0.88 et 2.40 secondes après le flash

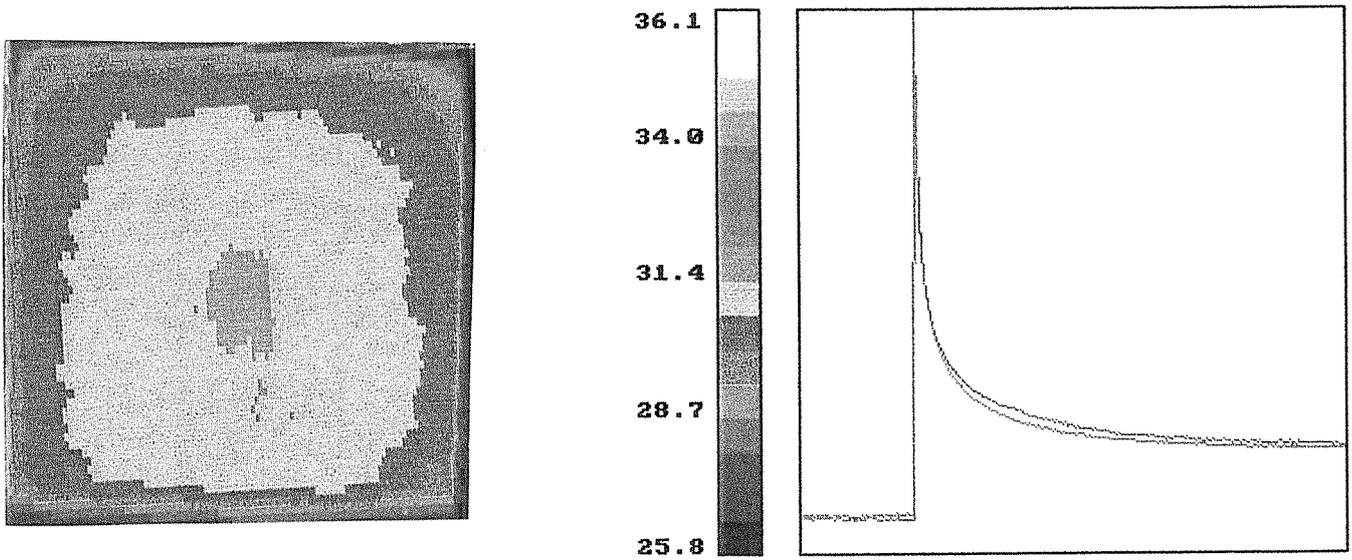


Fig.2.26 Thermogramme en contraste réduit au centre d'impact
Mesure en face avant, irradiation du côté impacté

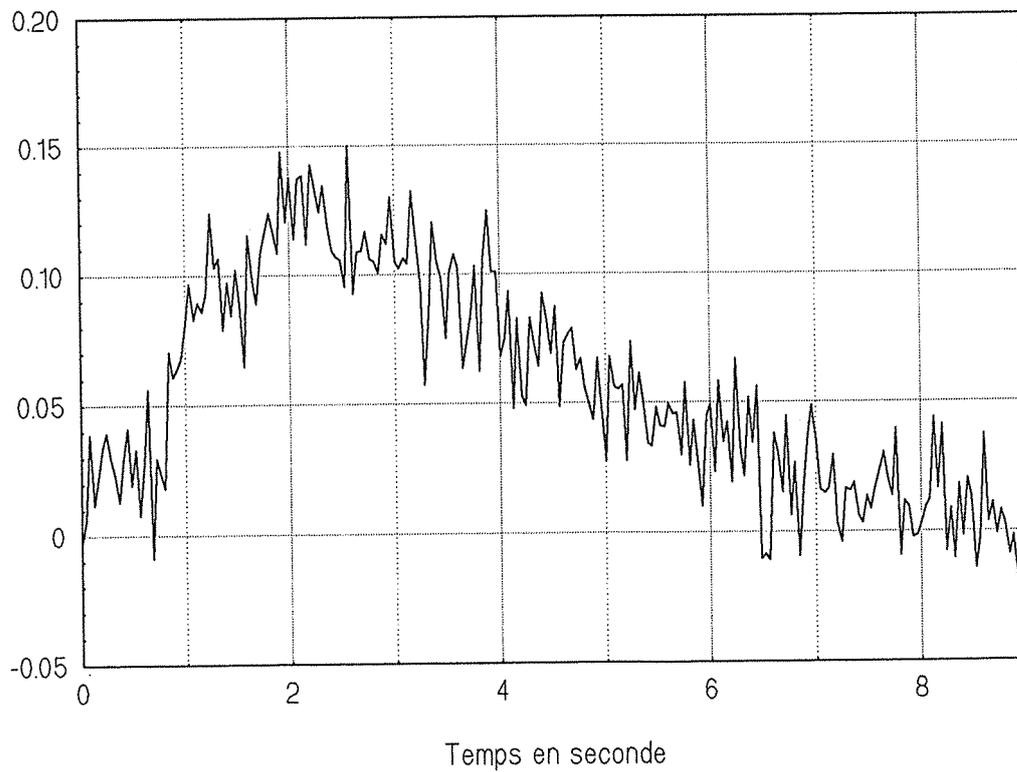


Fig.2.27 Profil en contraste absolu passant par le centre d'impact
 Mesure en face avant, irradiation du côté impacté

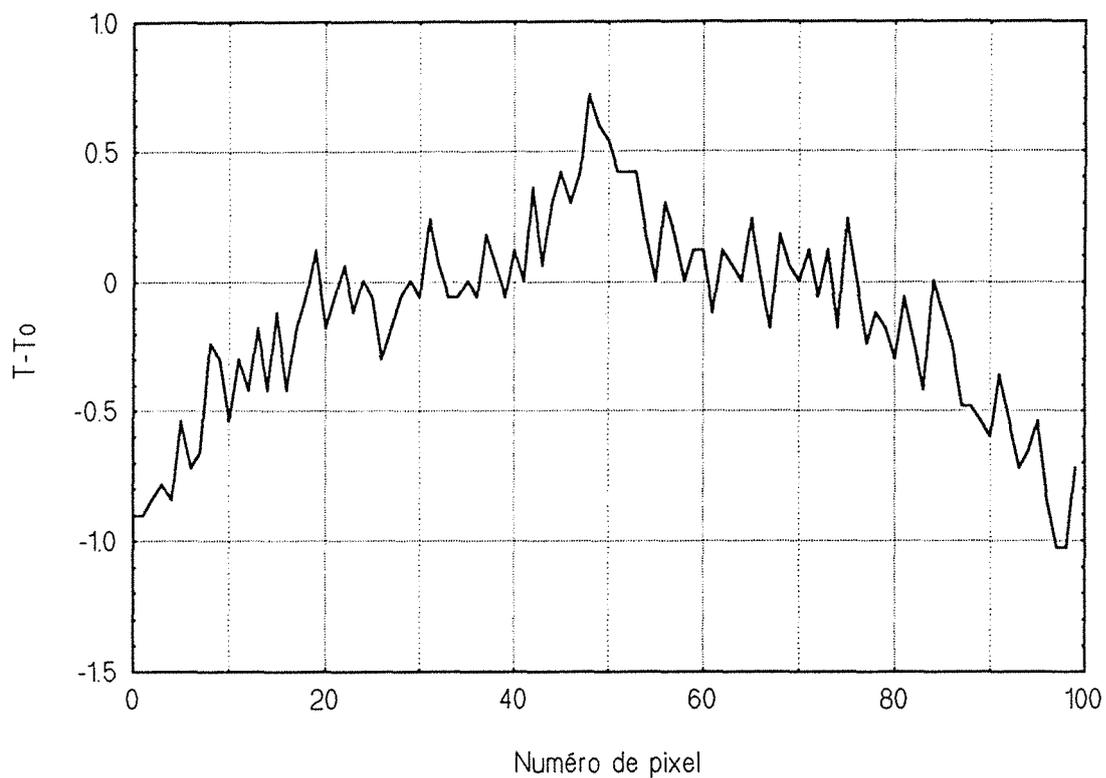


Fig.2.28 Profil en contraste réduit passant par le centre d'impact
 Mesure en face avant, irradiation du côté impacté

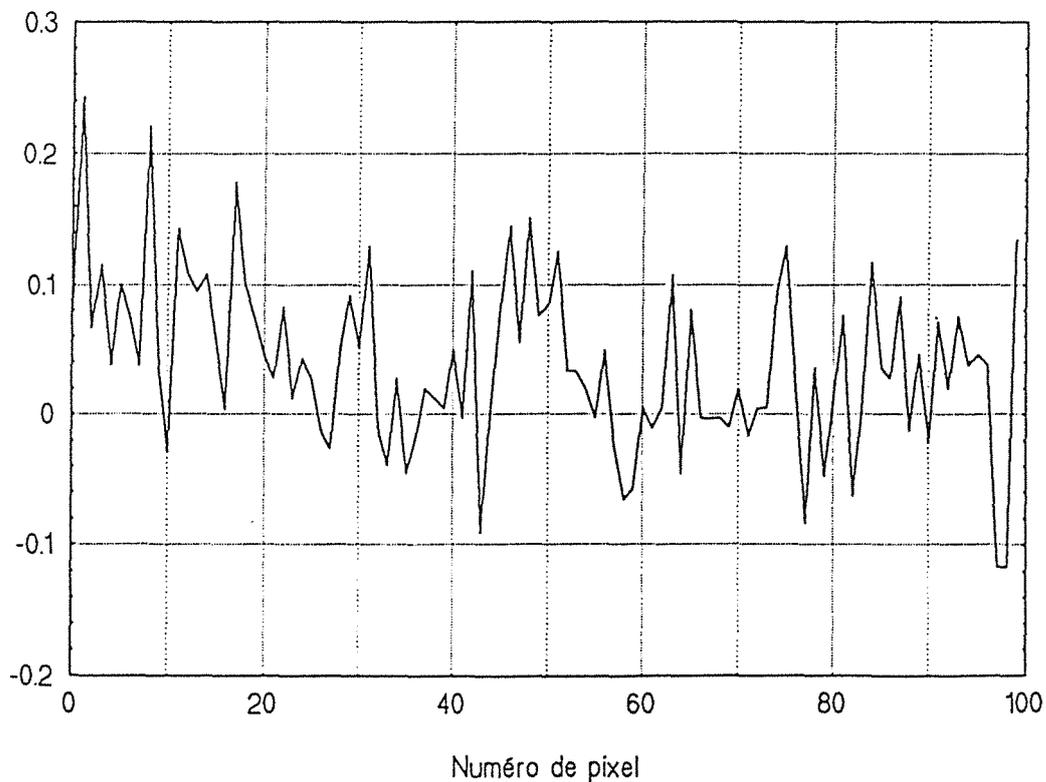


Fig.2.29 PROFIL EN PROFONDEUR REDUITE SUR LA LIGNE N°33

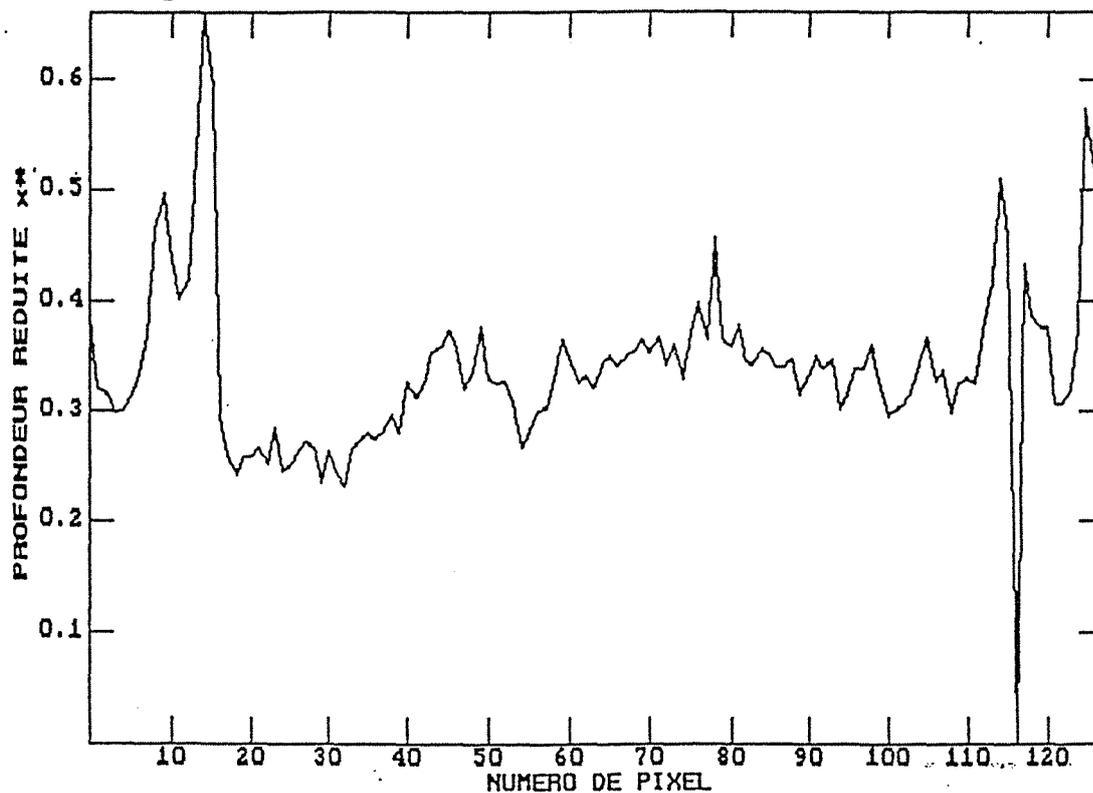
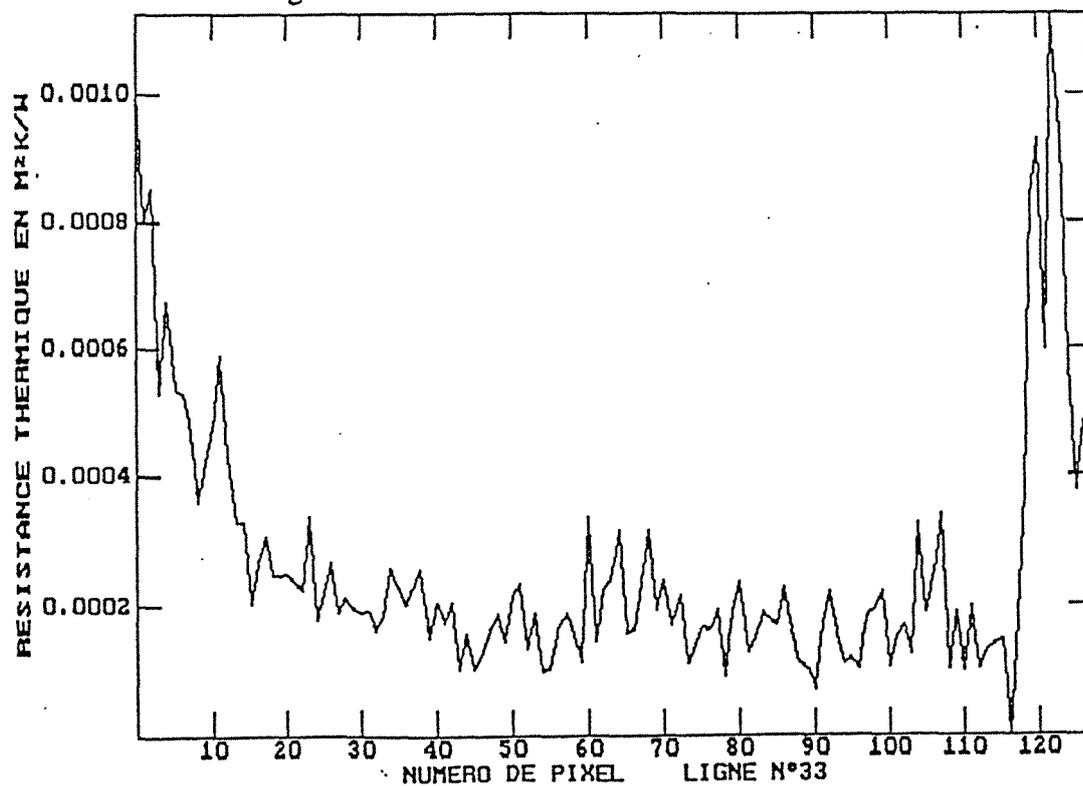


Fig.2.30 PROFIL EN RESISTANCE THERMIQUE



Le profil de la profondeur réduite estimée passant par le centre de l'impact (issu du profil de la figure (2.28)) est illustré sur la figure (2.29). Il montre que le délaminage s'étend sur toute la largeur de l'échantillon : le défaut est plus grave au niveau de l'impact et plus faible plus loin. Ceci signifie que la zone "saine" a en effet été choisie sur un site faiblement délaminé, d'où une mesure de sur-résistance et non pas de résistance. Ceci prouve également que l'algorithme d'identification de la profondeur n'est pas influencé par l'évolution spatiale de la résistance thermique du multidélaminage. On trouve une profondeur moyenne entre les extrémités de l'échantillon, zone délimitée par les pixels 20 et 110 sur la figure (2.29), de 0.32 soit 0.64 mm au dessous de la face impactée.

A partir du profil de profondeur, on a pu calculer le profil de la résistance thermique en utilisant le premier moment de Laplace c'est à dire m_1 ($\alpha = 1$). Cette fois-ci le pic qu'on avait obtenu en face arrière a disparu, et on a une évolution spatiale quasi constante de la résistance à l'interface (figure(2.30)). Ce résultat était prévisible : l'algorithme inverse de la résistance en face avant, étant dépendant de celui de la profondeur.

2.4.4.4 Mesure en face avant (irradiation du côté non impacté)

Cette fois ci le défaut n'était décelable, ni sur les trames instantanées, ni sur les trames moyennées. Ceci confirme la présence du défaut plus près de la face impactée.

2.5 Conclusion

Dans une première partie, nous avons montré l'influence du bruit de mesure sur les paramètres estimés d'un délaminage par la méthode des transformées expérimentales de Laplace. Une analyse stochastique a montré que les erreurs d'estimation sont étroitement liées à la variable réduite de Laplace choisie pour l'inversion. Nous avons montré également sous l'hypothèse de faibles résistances, qu'une zone de référence faiblement délaminée n'introduit aucun biais sur la profondeur estimée. Par contre, elle provoque une sous estimation de la résistance thermique.

Nous avons procédé par la suite à une comparaison des contrastes thermiques produits par un monodélaminage et un multidélaminage. Nous avons montré essentiellement, qu'il n'existe pas de monodélaminage équivalent à un multidélaminage. Des simulations théoriques sur la réponse transitoire d'un milieu multidélaminé à une impulsion d'énergie, ont montré que peu de délaminages suffisent pour homogénéiser le système.

Enfin, les données expérimentales issues d'une opération de CND sur un composite stratifié en verre époxy, impacté au centre, ont été inversées par la technique 1D locale. Les résultats de l'inversion, ont montré que le multidélaminage s'étend sur toute la largeur de l'échantillon, mais que la détérioration à son centre est plus grave que sur ses extrémités.

Chapitre 3

Effets bi- et tri-directionnels créés par un défaut d'extension limitée et de résistance constante dans un milieu d'étendue finie

Chapitre 3

Effets bi- et tri-directionnels créés par un défaut d'extension limitée et de résistance constante dans un milieu d'étendue finie.

3.0 Introduction

Les techniques basées sur des modèles monodimensionnels présentent l'inconvénient de n'être applicables qu'au centre du défaut dans le cas où celui-ci est assez large. Si par contre le défaut est étroit, il faut s'attendre à une baisse du contraste relevé au dessus de son centre. Une modélisation bi ou tridirectionnelle s'impose afin de tenir compte des effets simultanés des paramètres géométriques et thermophysiques du défaut. Ce problème est particulièrement difficile à résoudre à l'aide d'une méthode numérique classique (éléments finis ou différences finies), puisqu'il nécessite un maillage très fin dans les régions de forts gradients de température. D'autre part, la recherche de solutions analytiques est d'un grand intérêt si l'on cherche à identifier les paramètres du défaut. Le fait que la résistance thermique entre deux couches soit fonction de x et/ou de y , empêche de pouvoir utiliser les méthodes analytiques décrites jusqu'à présent. La difficulté vient de l'équation intégrale décrivant le saut de température à l'interface.

3.1 Formulation du problème

Nous construisons tout d'abord la solution analytique exacte issue de la résolution d'un système linéaire en flux. Nous exposons par la suite des techniques basées sur l'utilisation de la méthode des perturbations, qui permettent dans le cas de résistance thermique très faible ou très grande d'accélérer considérablement le calcul numérique de la solution.

Les défauts à détecter sont généralement des lames d'air, dont l'effet capacitif est négligeable. Il est légitime alors d'assimiler les délaminages à des résistances. En supposant que le défaut est résistif, la résolution théorique du problème devient plus simple, du moment qu'on réduit le nombre de paramètres du problème.

Un milieu homogène opaque, anisotrope, rectangulaire ($L \times \ell$) d'épaisseur e , contenant un défaut résistif de largeur finie $a (= x_2 - x_1)$ et de longueur finie $b (= y_2 - y_1)$, dont la résistance de contact R_c est uniforme sur toute sa surface, est le cas typique d'un délaminage dans un matériau composite stratifié.

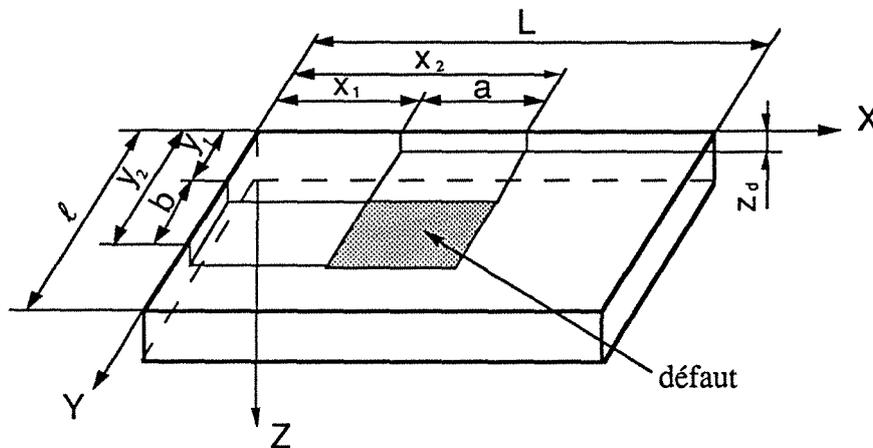


Fig. 3.1 Représentation géométrique du milieu fini contenant un défaut de taille limitée

3.1.1 Mise en équations en coordonnées cartésiennes

Le système d'équations différentielles associé permettant de décrire la diffusion de la chaleur dans le matériau soumis à une impulsion de Dirac de densité d'énergie Q par unité de surface uniforme sur la face $z = 0$ baptisée face avant.

Le système s'écrit :

- Equation de diffusion

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

- La température de l'échantillon étudié à l'instant initial ($t = 0$) est supposée égale à la température de l'environnement :

$$T(x, y, z, t) = 0 \quad (3.2)$$

- Conditions aux limites sur la surface latérale de la plaque

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = h_{x1} T \quad (3.3)$$

$$\text{en } x = L \quad -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = h_{x2} T \quad (3.4)$$

$$\text{en } y = 0 \quad \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} = h_{y1} T \quad (3.5)$$

$$\text{en } y = \ell \quad -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} = h_{y2} T \quad (3.6)$$

- Condition aux limites sur la surface irradiée

$$-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + h_{z1} T = Q \delta(t) \quad (3.7)$$

Remarque : On peut prendre une excitation à répartition spatio-temporelle quelconque.

- Condition aux limites sur la face opposée à l'excitation (face arrière)

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + h_{z2} T = 0 \quad (3.8)$$

- Conditions de continuité de flux et du saut de température suivant z à l'interface

$$-\lambda_z \frac{\partial T^{sup}}{\partial z} = -\lambda_z \frac{\partial T^{inf}}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$T^{sup} - T^{inf} = R_c s(x, y) \left(-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{où } s(x, y) &= 1 & \text{si } (x, y) &\in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \\ s(x, y) &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

Les indices supérieurs "sup" et "inf" sont relatifs respectivement aux faces supérieure et inférieure de l'interface où est situé le défaut.

3.1.2 Utilisation des transformations intégrales et des quadripôles tridimensionnels

L'idée est d'utiliser les méthodes de transformations intégrales (par exemple la transformation de Fourier en géométrie cartésienne ou la transformation de Hankel en géométrie cylindrique) sur certaines variables de l'espace, et une transformation de Laplace sur la variable temps.

La modélisation de la diffusion de la chaleur dans des milieux multicouches est alors réduite à un produit de matrices (quadripôles) dans l'espace image. La transformée de Laplace $\tau(x, y, z, p)$ (où p est la variable de Laplace) de la température $T(x, y, z, t)$ dans le milieu est alors solution du système suivant, si on suppose qu'il n'y a pas d'échange avec l'extérieur :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \frac{p}{a_z} \tau = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{en } x = 0, L \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{en } y = 0, \ell \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{en } z = 0 \quad -\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = Q \quad (3.14)$$

$$\text{en } z = e \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$\text{en } z = z_d \quad \frac{\partial \tau^{sup}}{\partial z} = \frac{\partial \tau^{inf}}{\partial z} \quad (3.16)$$

$$\tau^{sup} - \tau^{inf} = R_c s(x, y) \left(-\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

Dans ce qui suit, on notera ψ la transformée de Laplace de la densité surfacique du flux : $\varphi (= -\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z})$.

3.1.3 Passage du problème anisotrope au problème isotrope équivalent

Dans le but de réduire le nombre de paramètres du problème en tenant compte de l'orthotropie éventuelle du matériau (pourvu que les axes principaux d'anisotropie soient confondus avec les axes des coordonnées), il est commode d'utiliser les variables réduites.

Les différentes variables du problème ont été réduites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau^* &= \tau / (Qe/\lambda_z) & a^* &= \frac{a}{e} (\lambda_z/\lambda_x)^{1/2} \\ \psi^* &= \psi / Q & b^* &= \frac{b}{e} (\lambda_z/\lambda_y)^{1/2} \\ x^* &= \frac{x}{e} (\lambda_z/\lambda_x)^{1/2} & p^* &= e^2 p/a_z \\ y^* &= \frac{y}{e} (\lambda_z/\lambda_y)^{1/2} & R_c^* &= R_c / (e/\lambda_z) \\ z^* &= z/e & z_d^* &= z_d/e \end{aligned}$$

Dans la suite, pour des raisons de simplicité, on omettra l'indice supérieur astérisque figurant dans les variables réduites.

L'équation différentielle (3.11) de diffusion devient :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - p \tau = 0 \tag{3.18}$$

Les conditions aux limites latérales déterminent la transformation intégrale que l'on doit appliquer à l'équation de la chaleur (3.18) en vue de son traitement mathématique. La résolution de l'équation (3.18) par séparation de variables conduit à chercher des solutions du type :

$$\tau(x, y, z, p) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [\mathcal{A} \sin(\alpha_j x) \sin(\beta_k y) + \mathcal{B} \sin(\alpha_j x) \cos(\beta_k y) + \mathcal{C} \cos(\alpha_j x) \sin(\beta_k y) + \mathcal{D} \cos(\alpha_j x) \cos(\beta_k y)] [\mathcal{E} \cosh(u z) + \mathcal{F} \sinh(u z)]$$

avec : $u = \sqrt{p + \alpha_j^2 + \beta_k^2}$

Les coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont fonction des variables discrètes (valeurs propres) α_j et β_k et les conditions aux limites imposées sur les bords latéraux permettent de déterminer ces coefficients et de donner une classification des problèmes à résoudre. Les conditions aux limites imposées sur

les bords $x = 0$ et $y = 0$, déterminent la forme de la solution en imposant celui des quatre coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ou \mathcal{D} qui est non nul. Dans notre cas de figure, la condition d'adiabaticité en $x = 0$ et $y = 0$ fait que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = 0$ et $\mathcal{D} \neq 0$.

On effectue donc la double transformation de Fourier spatiale en cosinus de $\tau(x, y, z, p)$:

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \int_0^L \int_0^\ell \tau(x, y, z, p) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \quad (3.19)$$

Quant aux conditions aux limites imposées sur les bords opposés $x = L$ et $y = \ell$, elles déterminent les valeurs discrètes permises pour α_j et β_k . La condition de flux nul sur ces deux faces latérales impose les valeurs discrètes suivantes pour les valeurs propres :

$$\alpha_j = j \pi / L \text{ et } \beta_k = k \pi / \ell \quad (3.20)$$

En utilisant la transformation (3.19) et en tenant compte des conditions aux limites sur les bords, l'équation de la chaleur (3.18) devient :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - (p + \alpha^2 + \beta^2) \theta = 0 \quad (3.21)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = F \cosh(uz) + G \sinh(uz) \quad (3.22)$$

avec : $u = \sqrt{p + \alpha^2 + \beta^2}$ et F et G des constantes qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites en z et à l'interface.

Si θ est connue, le retour dans l'espace de Laplace est donné par :

$$\tau(x, y, z, p) = \frac{1}{L \ell} \left[\theta_{00} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{j0} v_j + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{0k} w_k + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{jk} v_j w_k \right] \quad (3.23)$$

avec : $\theta_{jk} = \theta(\alpha_j, \beta_k, z, p)$

$v_j = \cos(\alpha_j x)$ $w_k = \cos(\beta_k y)$

Si on appelle ϕ la double transformée de Fourier en cosinus de la transformée de Laplace ψ , qui est égale à l'unité en $z = 0$ (face avant) et à zéro en $z = 1$ (face arrière) - voir système d'équations -, on a :

$$\bullet \text{ en } z = 0 \quad \phi(\alpha, \beta, 0, p) = \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} \quad (3.24)$$

Les valeurs propres données par la relation (3.20) réduisent le spectre double du flux excitateur à la composante correspondant à $\alpha = \beta = 0$, soit :

$$\phi(\alpha_j, \beta_k, 0, p) = L \ell \delta_{0j} \delta_{0k}$$

$$\bullet \text{ en } z = 1 \quad \phi(\alpha, \beta, 1, p) = 0 \quad (3.25)$$

Si les arguments autres que z sont omis dans la notation des transformées de Laplace et double Fourier (LFF) θ et ϕ de la température et la densité de flux de chaleur, l'équation (3.22) mène à une relation linéaire entre les deux quantités sur les faces avant ($z = 0$) et arrière ($z = 1$) du milieu :

$$\theta(0) = A \theta(1) + B \phi(1) \quad (3.26)$$

$$\phi(0) = C \theta(1) + D \phi(1) \quad (3.27)$$

Notons ici, que nous sommes confrontés à une extension de la méthode des quadripôles - Carslaw et Jaeger (1959) et Degiovanni (1988) - aux problèmes tridimensionnels transitoires.

Les conditions aux limites et à l'interface peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi(z_d) \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^{inf} + R_c I \\ \phi(z_d) \end{bmatrix}; \quad (3.29)$$

$$\text{avec : } I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(x, y, z_d, p) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy; \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{inf} \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.31)$$

x_1, x_2, y_1, y_2 sont les limites du défaut (voir schéma 3.1)

$$A_i = D_i = \cosh(u e_i)$$

$$B_i = \frac{1}{u} \sinh(u e_i) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (\text{indice de la couche})$$

$$C_i = u \sinh(u e_i)$$

$$e_1 = z_d \quad e_2 = l - z_d \quad (z_d \text{ étant la profondeur du délaminage})$$

3.2 Solution analytique exacte

La solution du système (3.28 à 3.31) en termes de transformées de LFF de la température sur les deux faces de la plaque peut être trouvée si le flux à l'interface est connu. Les composantes du flux à l'interface $\phi(z_d)$ de LFF correspondant aux différentes combinaisons des pulsations spatiales α_j et β_k , sont solutions d'un système linéaire. Ce système est obtenu en remplaçant le flux de Laplace $\psi(x, y, z_d, p)$ par la double série de Fourier permettant de l'inverser à partir de $\phi(z_d)$:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z_d, p) = \frac{1}{L \ell} \left[\phi_{00}(z_d, p) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{j0}(z_d, p) \cos(\alpha_j x) + \right. \\ \left. 2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{0k}(z_d, p) \cos(\beta_k y) + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{jk}(z_d, p) \cos(\alpha_j x) \cos(\beta_k y) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le système linéaire est obtenu en exprimant θ^{sup} et θ^{inf} en fonction de $\phi(z_d)$ à partir des première et dernière relations matricielles (3.28 et 3.31) :

$$\theta^{sup} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} - A_1 \phi(z_d) \right] \quad (3.33)$$

$$\theta^{inf} = \frac{A_2}{C_2} \phi(z_d) \quad (3.34)$$

et en les substituant, par la suite dans l'équation intégrale en ψ (première ligne de (3.29)), on obtient, en utilisant l'expression (3.32) :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{jk}(z_d, p) \left[R_c E_{mj} F_{nk} \frac{1}{1+\delta_{oj}} \frac{1}{1+\delta_{ok}} + \frac{C(\alpha_j, \beta_k, p)}{C_1(\alpha_j, \beta_k, p) C_2(\alpha_j, \beta_k, p)} \delta_{mj} \delta_{nk} \right] = \frac{L \ell}{C_1(0, 0, p)} \delta_{om} \delta_{on} \quad (3.35)$$

avec :

$$E_{mj} = \frac{2}{(m-j) \pi} \sin(\alpha_{m-j} \frac{a}{2}) \cos(\alpha_{m-j} x_c) + \frac{2}{(m+j) \pi} \sin(\alpha_{m+j} \frac{a}{2}) \cos(\alpha_{m+j} x_c) \quad (3.36)$$

$$F_{nk} = \frac{2}{(n-k) \pi} \sin(\beta_{n-k} \frac{b}{2}) \cos(\beta_{n-k} y_c) + \frac{2}{(n+k) \pi} \sin(\beta_{n+k} \frac{b}{2}) \cos(\beta_{n+k} y_c) \quad (3.37)$$

et, m et n sont des entiers naturels variant de 0 à l'infini.

avec : x_c et y_c les coordonnées du centre du défaut.

$C = C_1 A_2 + A_1 C_2$: est le troisième élément du quadripôle du mur parfaitement homogène.

δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

On posera $\sin(\chi d) / \chi = d$ si $\chi = 0$.

A ce stade, la solution du problème est exacte. Le calcul sur ordinateur, nécessite la troncature de la série (3.32). On obtient alors un système linéaire classique qu'on résout numériquement par une inversion de matrice. La convergence très lente de la double série infinie (3.32) peut rendre dans certains cas cette méthode très gourmande en temps de calcul, et un grand nombre de termes est nécessaire.

Dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle et en posant $x_1 = 0 ; x_2 = b$, le système précédent peut être écrit sous une forme matricielle assez simple :

$$[V] = (R_c [M_2] + [M_1]) [\phi] \quad (3.38)$$

avec :

$[V]$ Vecteur colonne défini par :

$$V(m) = \frac{\ell}{C_1(0,p)} \delta_{0m} \quad (3.39)$$

$[M_2]$ Matrice carrée définie par :

$$M_2(m, k) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\frac{(k+m) \pi b}{\ell})}{(k+m) \pi} + \frac{\sin(\frac{(k-m) \pi b}{\ell})}{(k-m) \pi} \right] \quad (3.40)$$

$[M_1]$ Matrice carrée diagonale définie par :

$$M_1(m, k) = \frac{C\left(\frac{m\pi}{\ell}, p\right)}{C_1\left(\frac{m\pi}{\ell}, p\right) C_2\left(\frac{m\pi}{\ell}, p\right)} \frac{1}{(2-\delta_{0m})} \delta_{km} \quad (3.41)$$

$[\phi]$ Vecteur colonne défini par :

$$\phi(m) = \phi\left(\frac{m\pi}{\ell}, e_1, p\right) (2-\delta_{0m}) \quad (3.42)$$

Notons que pour le problème transitoire tridimensionnel, les vecteurs $[V]$ et $[\phi]$ deviennent des tenseurs d'ordre 2, et les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$ deviennent des tenseurs d'ordre 4.

Le vecteur flux à l'interface est alors déterminé par une résolution du système linéaire (3.38). La même relation peut être utilisée de manière assez simple pour décrire le transfert de chaleur dans un milieu contenant plusieurs défauts superposés.

Une fois tous les éléments $\phi_{mn}(z_d)$ déterminés, la température réduite en face avant ou arrière dans l'espace de LFF est calculée par :

$$\theta(\alpha, \beta, 0, p) = \frac{\coth(u z_d)}{u} \frac{\sin(\alpha L) \sin(\beta l)}{\alpha \beta} - \frac{\phi(\alpha, \beta, z_d, p)}{u \sin(u z_d)} \quad (3.43)$$

$$\theta(\alpha, \beta, 1, p) = \frac{\phi(\alpha, \beta, z_d, p)}{u \sin(u (1-z_d))} \quad (3.44)$$

Le retour dans l'espace réel (t, x, y) peut se faire par le biais de l'algorithme de la transformation rapide de Fourier (TFR), en quadruplant la taille de la matrice spectre et par le biais de l'algorithme de Stehfest (1970), pour la variable t .

Dans le cas d'un défaut de taille $b = 5$, de résistance $R_c = 0.1$, situé à une profondeur $z_d = 0.5$ dans un échantillon de taille $\ell = 10$, nous avons présenté le flux à l'interface dans l'espace de Laplace ($p = 2.5$) sur la figure (3.2) et un profil instantané en contraste (figure (3.3)). Les perturbations en température induites par la discontinuité de la résistance font apparaître les composantes transversales du flux. On peut observer sur le profil spatial en densité de flux de Laplace à l'interface, des oscillations illustrant le phénomène de Gibbs (Aliasing), dû à la forte singularité de la solution au voisinage de l'extrémité du défaut.

Le même type de technique permet également de traiter le cas de plusieurs défauts superposés. Nous avons présenté sur la figure (3.4) un calcul direct des contrastes instantanés (nombre de Fourier = 0.2 ; 0.4 ; 0.6) en face arrière pour deux défauts superposés en géométrie bidimensionnelle symétrique ($b_1 = 2$; $z_1 = 0.1$; $R_1 = 0.4$; $b_2 = 6$; $z_2 = 0.5$ et $R_2 = 0.1$). Les profils ont été calculés sur 128 points par l'intermédiaire de l'algorithme de la transformation

rapide de Fourier (voir annexe 3.1, adaptation de la FFT à la transformation de Fourier discrète en cosinus -TFDC-, Cooley et Tukey (1965) et Weiping (1991)).

Des images thermographiques obtenues par caméra infrarouge peuvent être traitées directement dans l'espace de LFF et comparées à ces expressions.

3.3 Réduction du modèle par la méthode des perturbations

3.3.1 Cas de faibles résistances

3.3.1.1 Nouvelle formulation du problème

Une méthode plus rapide peut être utilisée pour résoudre le système (3.28 à 3.31). Elle n'est valable que pour de faibles valeurs de la résistance de contact réduite R_c : c'est la méthode des perturbations [Nayfeh (1973) et Aziz et Na (1984)]. La méthode des perturbations consiste à écrire des développements asymptotiques en séries entières des variables intervenant dans le modèle par rapport au petit paramètre R_c qui sera noté dorénavant ε :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(\alpha, \beta, z, p) \varepsilon^i \quad (3.45)$$

$$\phi(\alpha, \beta, z, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\alpha, \beta, z, p) \varepsilon^i \quad (3.46)$$

Ces séries entières remplacent θ et ϕ dans le système (3.28 à 3.31), et l'identification terme à terme des coefficients de ε^i conduit aux différentes composantes inconnues θ_i et ϕ_i .

On injecte les séries (3.45) et (3.46) dans les relations matricielles du modèle, on obtient alors :

à l'ordre ε^0

$$\begin{bmatrix} \theta_o(0) \\ \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \quad \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_o(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Il s'agit de l'équation quadripolaire décrivant le transfert monodimensionnel dans un milieu parfaitement homogène. Pour les calculs à l'ordre supérieur, nous aurons besoin de la densité du flux de chaleur à l'interface dans l'espace de Laplace. Elle est calculée à partir de (3.47) par :

Fig.3.2 Densité du flux de Laplace à l'interface dans le cas d'un défaut unique

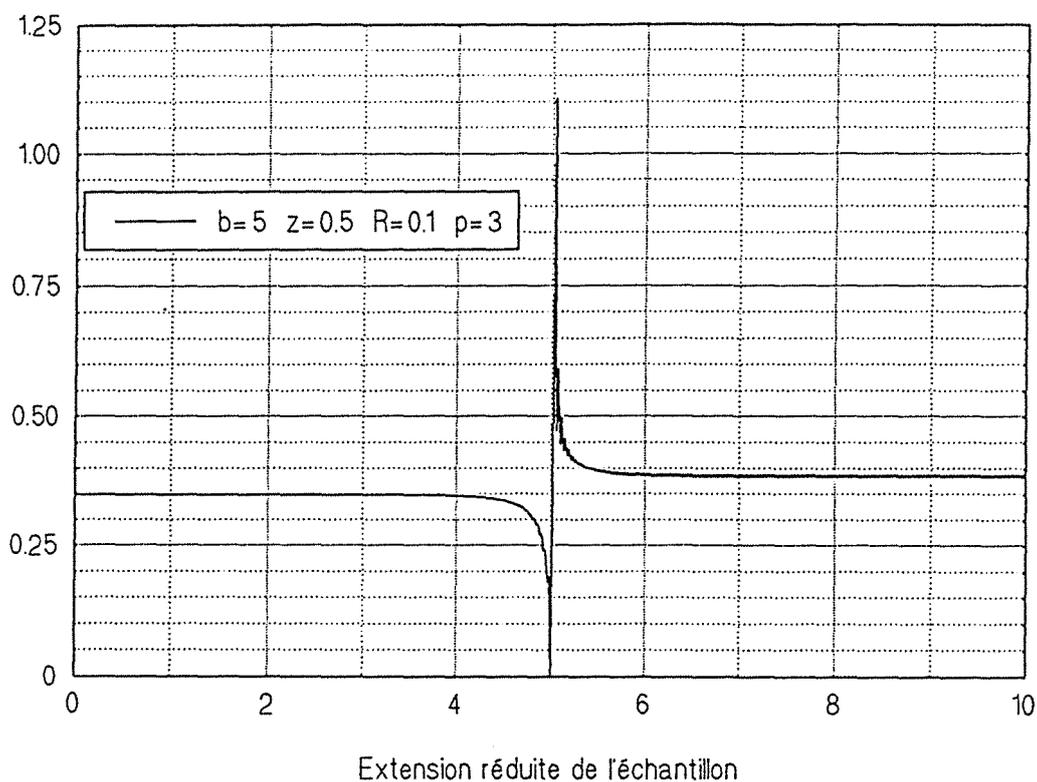


Fig.3.3 Contraste thermique exact d'un défaut de taille limitée

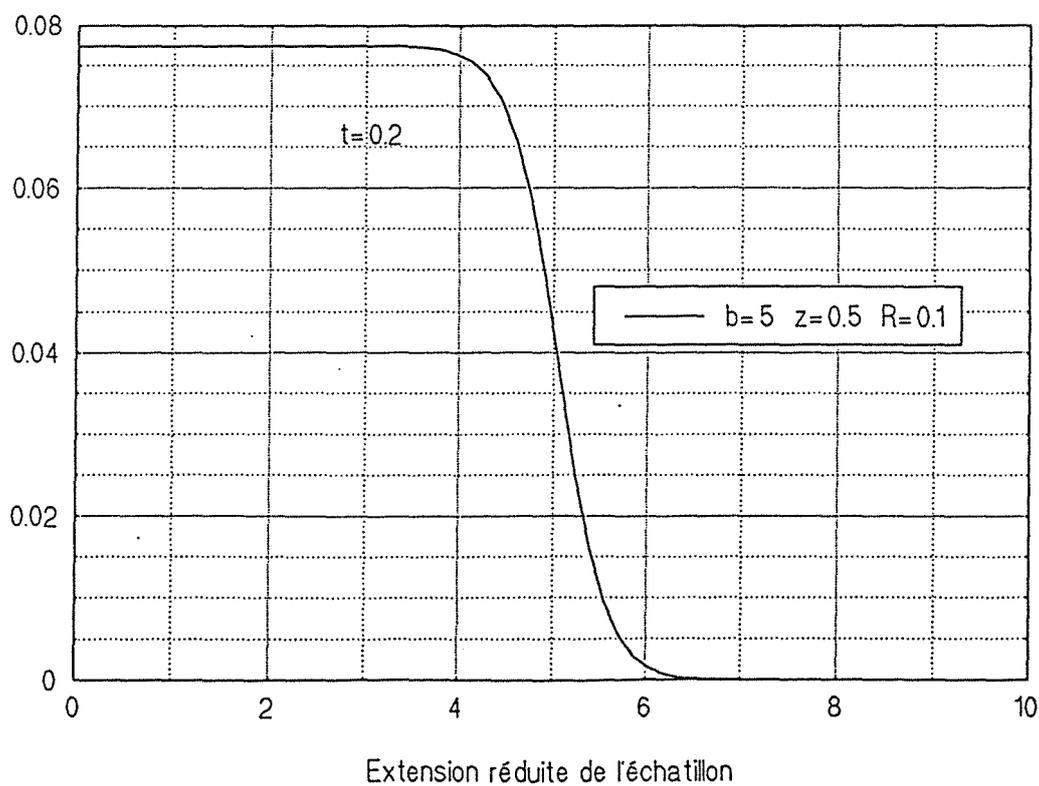
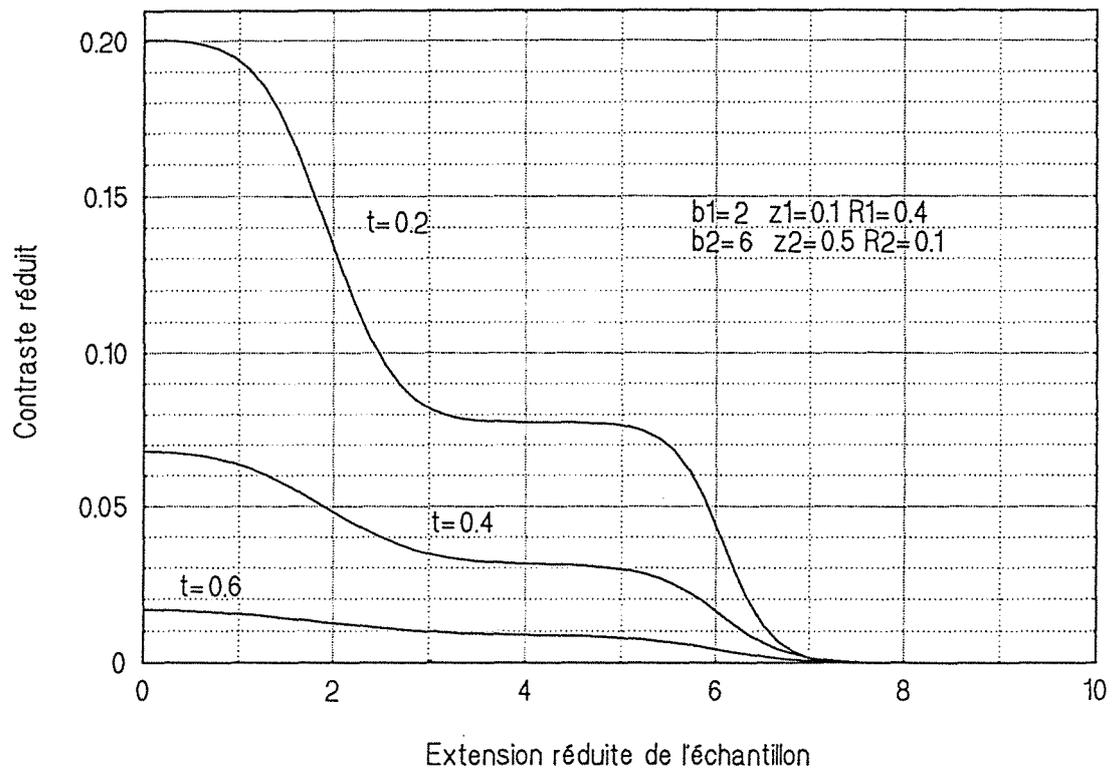


Fig.3.4 Contraste thermique exact dans le cas de deux défauts superposés



$$\psi_0(x, y, e_1, p) = \frac{\sinh(\sqrt{p} (1 - z_d))}{\sinh(\sqrt{p})} \quad (3.48)$$

ψ_0 constituera le terme source du problème perturbé à l'ordre 1.

On constate que le fait de faire tendre ε vers zéro n'induit pas de singularité, la perturbation est régulière.

à l'ordre ε^1

$$\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{sup} \\ \phi_1(z_d) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{sup} \\ \phi_1(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{inf} + I_0 \\ \phi_1(z_d) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\text{avec : } I_0 = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi_0(x, y, z_d, p) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \quad (3.51)$$

un terme source de température issu du problème à l'ordre zéro.

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{inf} \\ \phi_1(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Les expressions des températures de Laplace-Fourier sur les deux faces de la plaque s'écrivent, en posant $e_1 = z_d$ et $e_2 = 1 - z_d$:

$$\theta_1(0) = \frac{4}{\alpha\beta} K \frac{\sinh(u e_2) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)} \quad (3.53)$$

$$\theta_1(1) = -\frac{4}{\alpha\beta} K \frac{\sinh(u e_1) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)} \quad (3.54)$$

$$\text{avec : } K = \sin(\alpha \Delta_x/2) \cos(\alpha \Sigma_x/2) \sin(\beta \Delta_y/2) \cos(\beta \Sigma_y/2)$$

$$\Delta_q = q_2 - q_1 \quad \Sigma_q = q_1 + q_2 \quad \text{pour } q = x, y$$

$$\text{ou encore : } K = \frac{1}{4} [\sin(\alpha x_2) - \sin(\alpha x_1)] [\sin(\beta y_2) - \sin(\beta y_1)]$$

Les termes d'ordres supérieurs s'obtiennent en remplaçant à chaque fois, le flux de Laplace à l'interface par la série double de Fourier (équation (3.32)) de son spectre calculé à l'ordre précédent. Ce qui rend l'écriture matricielle de plus en plus encombrante. Pour simplifier l'écriture du problème pour les ordres supérieurs, nous avons perturbé directement le système linéaire (3.35). Une fois tous les $\phi_i(\alpha, \beta, z, p)$ connus, la substitution de la série (3.46) dans les équations (3.43 et 3.44) permet de remonter aux composantes $\theta_i(\alpha, \beta, z, p)$ de la série (3.45) en face avant ou en face arrière, en procédant toujours par identification en ε^i .

à l'ordre ε^0

$$\phi_0(m, n) = L \ell \frac{\sinh(\sqrt{p}(1-z_d))}{\sinh(\sqrt{p})} \delta_{mo} \delta_{no} \quad (3.55)$$

à l'ordre ε^1

$$\phi_1(m, n) = -\frac{1}{4} \frac{C_1(m, n, p) C_2(m, n, p)}{C(m, n, p)} E_{mo} F_{no} \phi_0(0, 0) \quad (3.56)$$

à l'ordre ε^i

$$\phi_i(m, n) = -\frac{C_1(m, n, p) C_2(m, n, p)}{C(m, n, p)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i-1}(j, k) E_{mj} F_{nk} \frac{1}{1+\delta_{oj}} \frac{1}{1+\delta_{ok}} \quad (3.57)$$

Comme dans le cas de la résolution exacte en géométrie bidimensionnelle, on peut obtenir également dans le cas de la méthode des perturbations, une relation matricielle de récurrence assez simple à mettre en oeuvre :

$$[\phi_n] = [-M_1]^{-1} [M_2] [\phi_{n-1}] \quad (3.58)$$

et où la composante initiale est donnée par :

$$\phi_0(m, n) = \ell \frac{\sinh(\sqrt{p}(1-z_d))}{\sinh(\sqrt{p})} \delta_{mo} \quad (3.59)$$

Cette méthode est assez rapide par rapport à la résolution exacte, particulièrement dans le cas de résistance de contact très faible, car il suffit de un ou de deux termes pour que le développement asymptotique (3.46) converge. Dans le cas de résistance plus grande les séries convergent plus lentement et un nombre important de termes est nécessaire. L'examen de la littérature donne de nombreuses méthodes qui permettent d'accélérer la convergence et de récupérer par conséquent une approximation assez précise de la solution à partir des premiers termes et dont le champ de validité est plus étendu que celui des séries d'origine. A titre indicatif, nous citerons la

transformation de Shanks [Shanks (1955)], les approximants de Padé [Baker (1965)], l'algorithme [Macdonald (1964)] et l'extrapolation de Richardson [Bender et Orszag (1978)].

Dans le cas d'un défaut de taille $b = 2$ et de résistance $R_c = 0.2$, situé dans un échantillon de taille $\ell = 10$ à une profondeur $z_d = 0.5$, par exemple, 10 termes suffisent pour atteindre la convergence (voir figure (3.5)). Les simulations ont montré également que pour des valeurs de la résistance réduite supérieures à 0.2 la méthode diverge. Un autre calcul concernant une configuration différente ($b = 0.5$, $\ell = 2$, $z_d = 0.5$), a montré que la série diverge à partir de $R_c = 0.04$. En dessous de cette valeur, 10 termes suffisent pour la convergence (voir figure (3.6)). En gardant la même largeur du défaut, soit $b = 0.5$ et en prenant cette fois-ci $\ell = 10$, la méthode converge avec 10 itérations pour les résistances inférieures à 0.15 (figures (3.7)). Ces exemples montrent que, ou bien le rayon de convergence des séries est relativement petit ce qui limite le champ de validité de cette méthode, ou encore que la divergence est provoquée par des erreurs numériques, et il faudra utiliser des algorithmes d'accélération (l'algorithme, Macdonald (1964)). Pour des valeurs de R_c plus grandes, la méthode des perturbations n'apporte aucun avantage, par rapport aux méthodes numériques d'inversion de matrice.

3.3.1.2 Intérêt des perturbations au premier ordre

Si les développements asymptotiques convergent rapidement, la somme des premiers termes ou le premier terme tout seul peut fournir une bonne approximation de la solution exacte.

Les produits des équations (3.53 et 3.54) par ε représentent les transformées de LFF du contraste thermique sur les faces arrière et avant à l'ordre ε . Les perturbations à l'ordre zéro étant les solutions exactes dans le cas d'une plaque saine.

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, 0, p) = \varepsilon \theta_1(0) + o(\varepsilon) \quad (3.60)$$

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, 1, p) = \varepsilon \theta_1(1) + o(\varepsilon) \quad (3.61)$$

Par le biais de simulations numériques, nous avons pu estimer jusqu'à quel ordre de grandeur de la résistance de contact, la perturbation à l'ordre 1 en ε reste correcte. L'étude a été menée pour des grandeurs différentes du défaut et de l'échantillon en géométrie bidimensionnelle.

Dans les deux configurations ($b = 5$, $\ell = 10$ et $b = 0.5$, $\ell = 1$), deux valeurs de ε ont été testées : $\varepsilon = 0.01$ et 0.1 . Sur les figures (3.8 à 3.11), nous avons comparé les profils instantanés (Fourier = 0.1 ; 0.5) du contraste thermique réduit obtenu par la perturbation au premier ordre, avec la solution exacte. Nous avons constaté dans les deux cas, que pour $\varepsilon = 0.01$ l'approximation est presque parfaite. Pour les valeurs supérieures, on remarque un léger écart entre les niveaux maximum des contrastes, mais l'approximation reste assez correcte jusqu'à une résistance de l'ordre du dixième.

Fig.3.5 Comparaison des modèles perturbé à 10 termes et exact dans le cas d'un défaut ($b=2, z=0.5, R=0.2$)

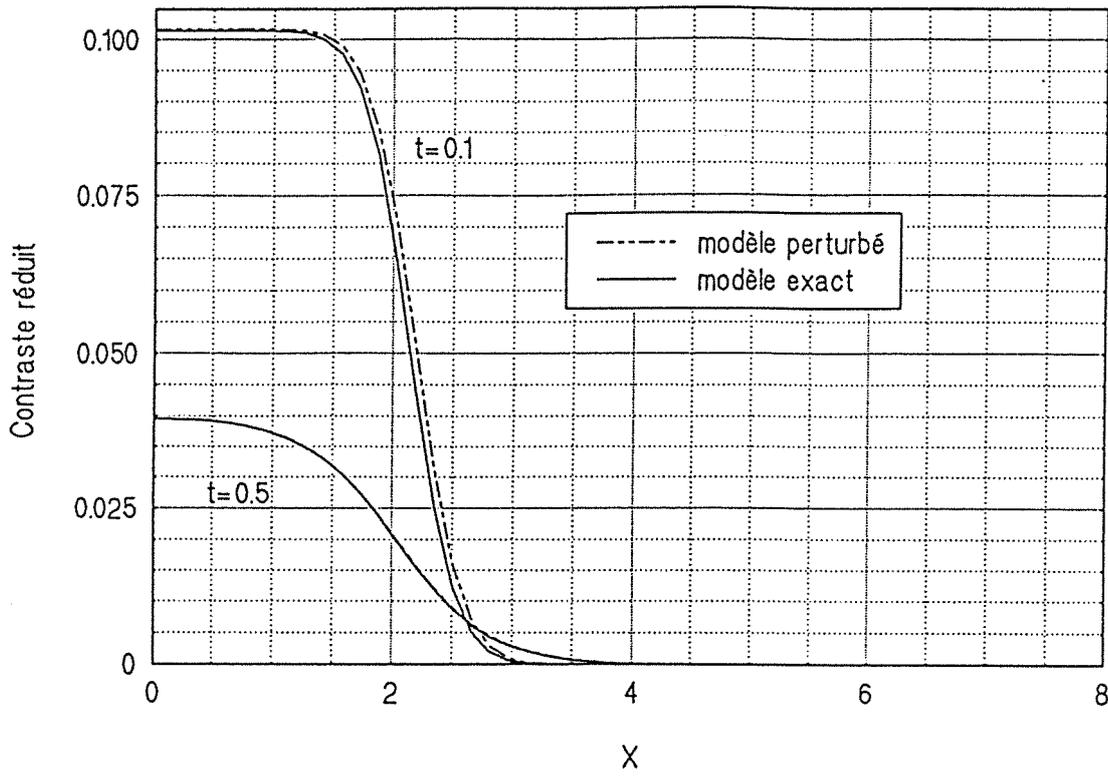


Fig.3.6 Comparaison du modèle perturbé à 10 termes et du modèle exact dans le cas d'un seul défaut ($b=0.5, z=0.5, R=0.04$)

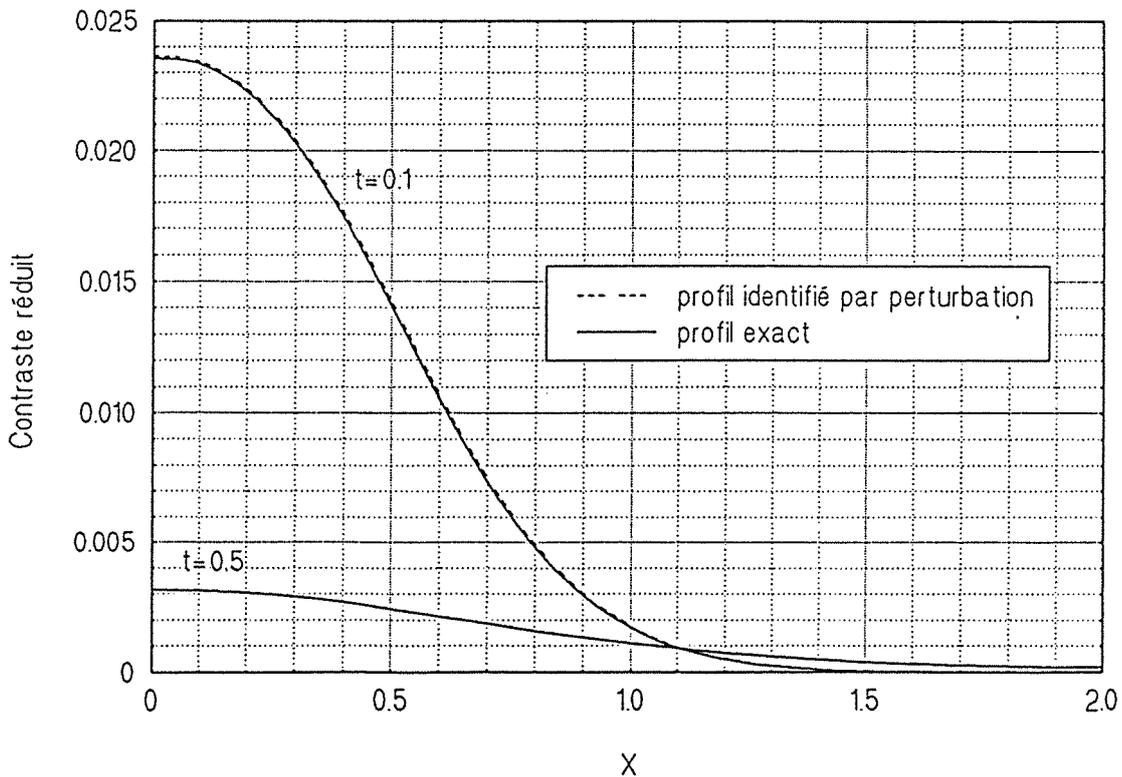


Fig.3.7 Comparaison du modèle perturbé à 10 termes et du modèle exact pour un défaut unique ($b=0.5, z=0.5, R=0.15$)

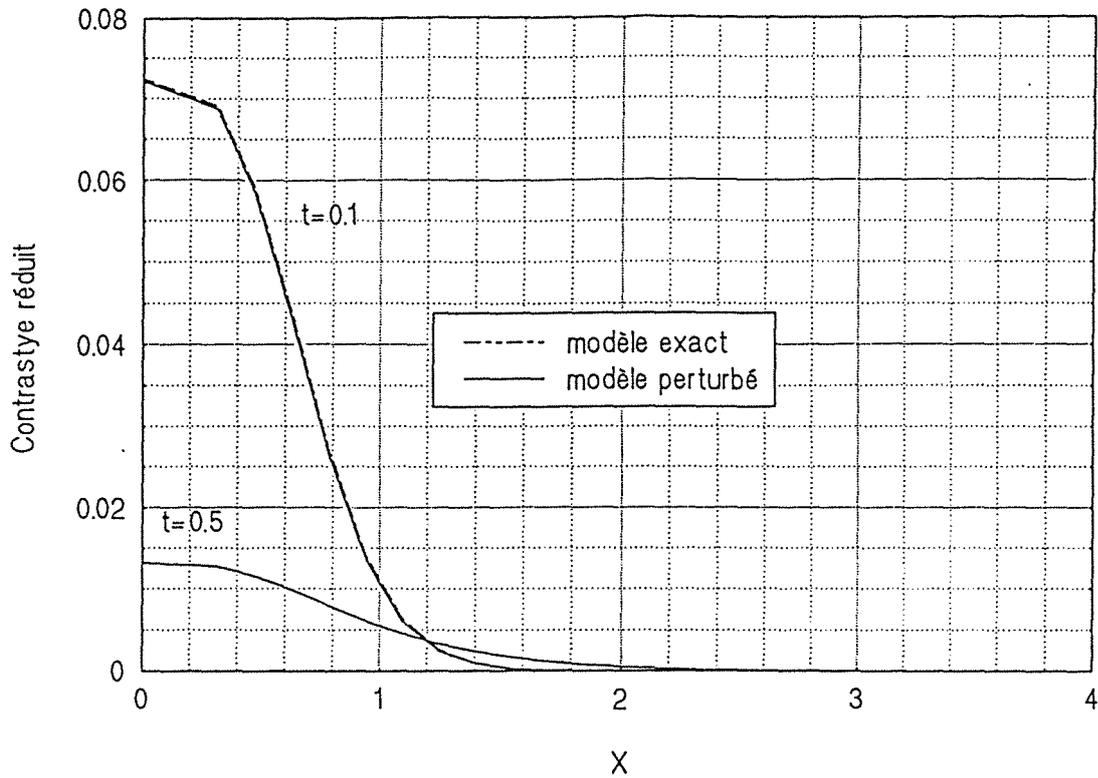


Fig.3.8 Comparaison du modèle perturbé à un terme et du modèle exact dans le cas d'un défaut unique $b=5, z=0.5, R=0.01$

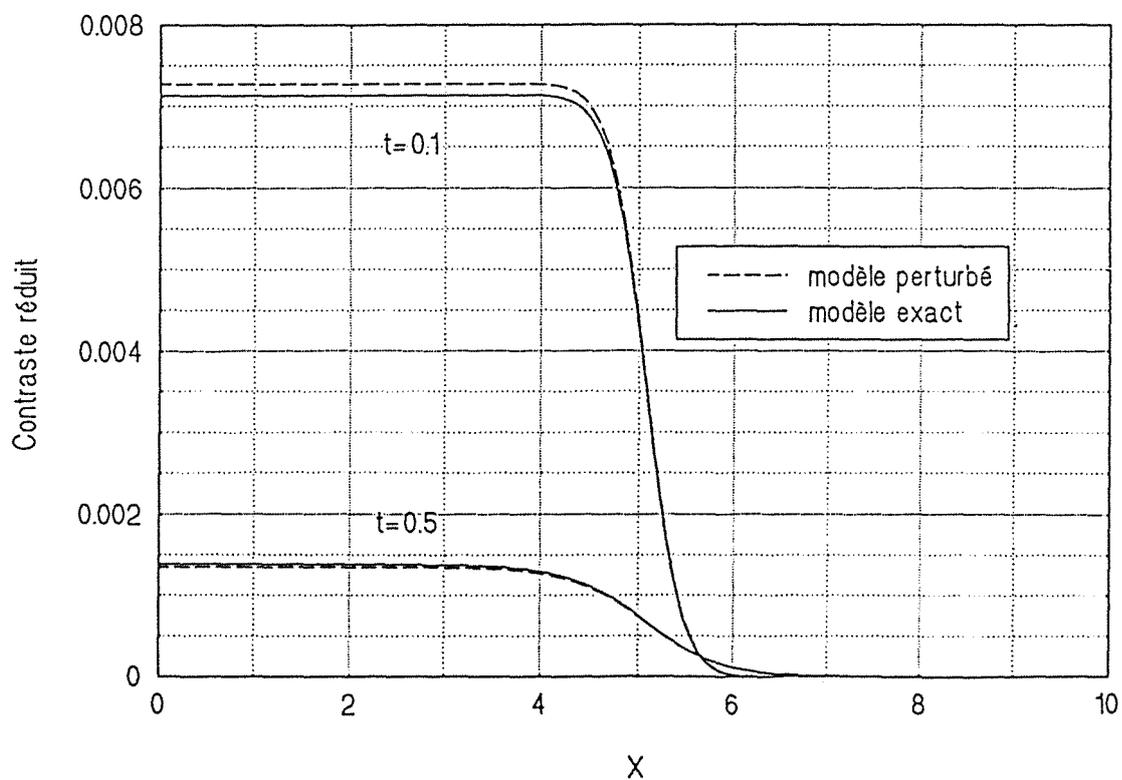


Fig.3.9 Comparaison du modèle perturbé à l'ordre 1 et du modèle exact dans le cas d'un défaut unique
 $b=5 \quad z=0.5 \quad R=0.1$

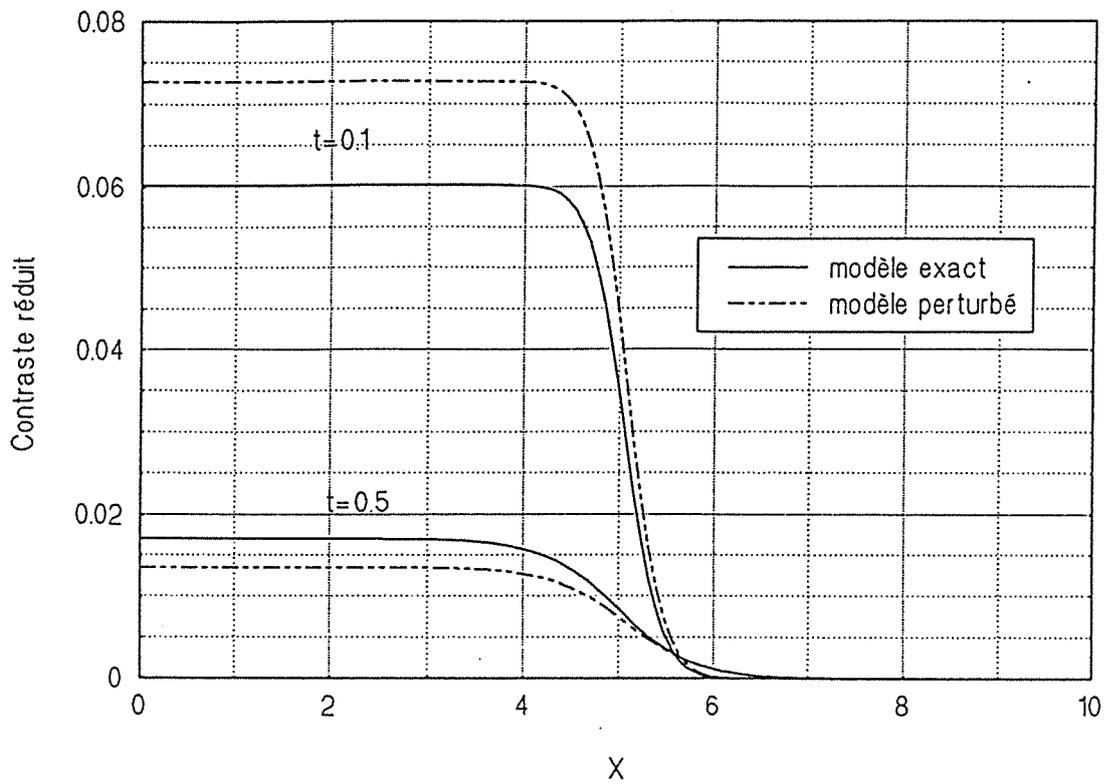


Fig.3.10 Comparaison du modèle perturbé à l'ordre 1 et du modèle exact dans le cas d'un défaut unique
 $b=0.5 \quad z=0.5 \quad R=0.01$

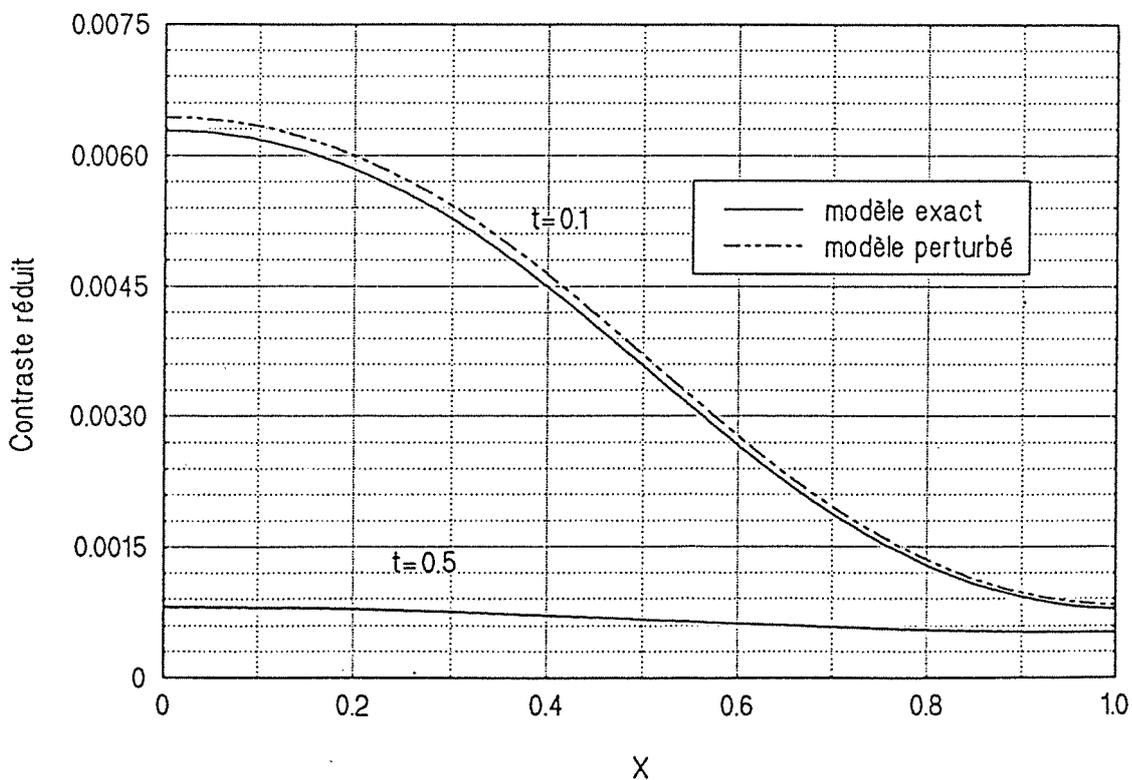
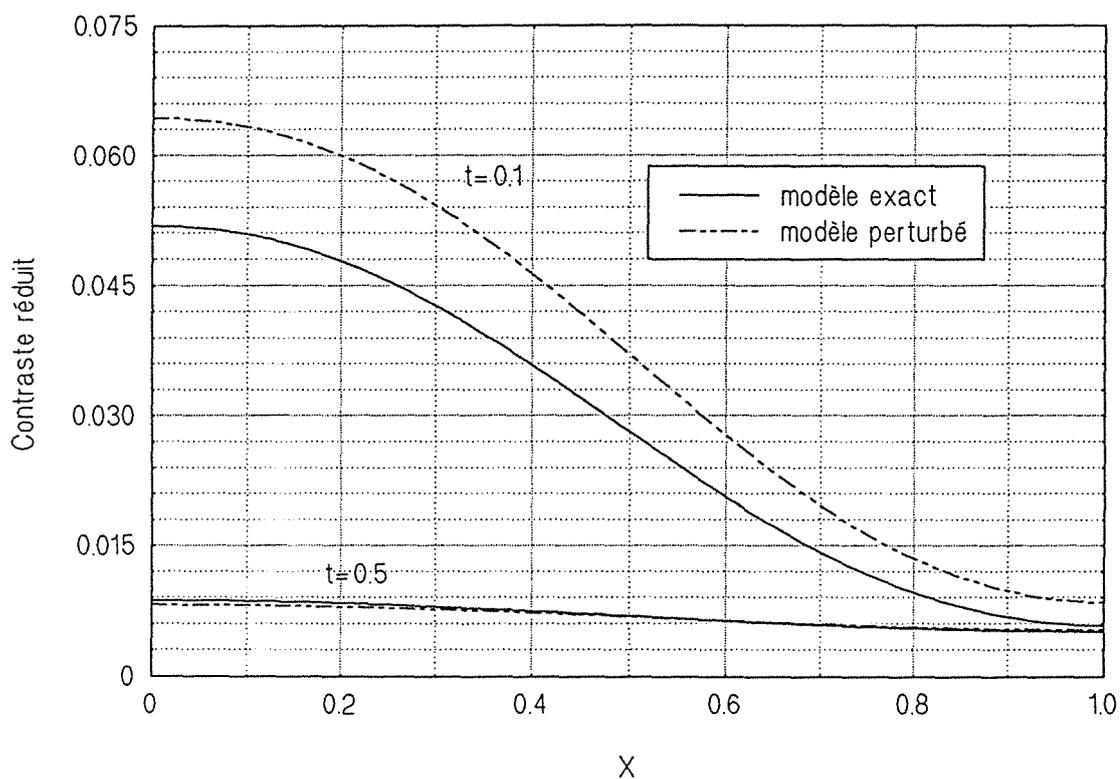


Fig.3.11 Comparaison du modèle perturbé d'ordre 1 et
 du modèle exact pour un défaut unique
 $b=0.5$ $z=0.5$ $R=0.1$



Superposition des contrastes : application à un multidélaminage

Si les développements (3.45 et 3.46) sont arrêtés au premier ordre ($i = 1$), on s'aperçoit immédiatement que :

- La transformée de LFF ($\varepsilon\theta_1$) du contraste thermique ΔT a une expression analytique (3.60 et 3.61) très simple pour la face avant ou arrière même dans cette situation complexe décrivant le transfert de chaleur tridimensionnel.

- Cette expression est linéaire en ε , la résistance thermique réduite du délaminage, ce qui veut dire que, pour les petites résistances, les contrastes produits par deux délaminages, de résistances ε_1 et ε_2 localisées à des profondeurs différentes avec des extensions latérales différentes, s'ajoutent (ce qui n'est pas le cas pour les champs de températures) :

$$\tau(x,y,z_s,p) = \frac{(1-z_s) \cosh(\sqrt{p}) + z_s}{\sqrt{p} \sinh(\sqrt{p})} \{1 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2\} + o(\varepsilon) \tag{3.62}$$

où $f_m(x, y, z_s, p)$ est obtenue par une inversion de Fourier de la fonction $\{\sqrt{p} \sinh(\sqrt{p}) \theta_1(z_s)\}$ si $z_s = 1$ (face arrière), et de la fonction $\{\sqrt{p} \tanh(\sqrt{p}) \theta_1(z_s)\}$ si $z_s = 0$ (face avant). L'indice m correspond à la profondeur $(z_d)_m$ du défaut et à ses extensions latérales $(x_1)_m, (x_2)_m, (y_1)_m$ et $(y_2)_m$.

Notons aussi que l'expression précédente peut être écrite en remplaçant le terme entre accolades par un approximant de Padé, c'est à dire $\{1 - \varepsilon_1 f_1 - \varepsilon_2 f_2\}^{-1}$. Ce dernier a l'avantage de mieux se superposer à la solution exacte pour de plus grandes résistances, tout en restant équivalent à l'équation (3.62) pour les petites valeurs de ce paramètre.

Cette nouvelle approche a été testée sur les deux configurations déjà utilisées au paragraphe précédent. Cette nouvelle approche a été testée sur les deux configurations déjà utilisées au paragraphe précédent ($b = 5, b = 0.5$). Dans le cas où le défaut est assez étendu ($b = 5$), la solution obtenue par l'approximant de Padé se superpose bien au contraste thermique exact, même pour des résistances grandes (voir figures (3.12 à 3.14)). Les niveaux maximums des profils instantanés en contraste approché et exact (qui correspondent à la solution du modèle 1D) sont toujours confondus, ce qui n'était pas le cas pour le modèle perturbé au premier ordre quand ε devient relativement grand. Dans le cas de défauts très étroits, le champ de validité de l'approximant de Padé en ε est moins large que pour les défauts étendus, la conduction de chaleur n'étant plus unidirectionnelle au centre du défaut. Néanmoins, l'approximation reste très correcte pour des résistances allant jusqu'à une valeur de 0.5 (voir figures (3.14.I à 3.14.III)).

Un multidélaminage dans un composite stratifié, produit par un choc par exemple, représente un cas typique pour l'application des résultats ci-dessus. En effet, on peut comparer

Fig.3.12 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ε et du modèle exact

$b=5 \quad z=0.5 \quad R=0.01$

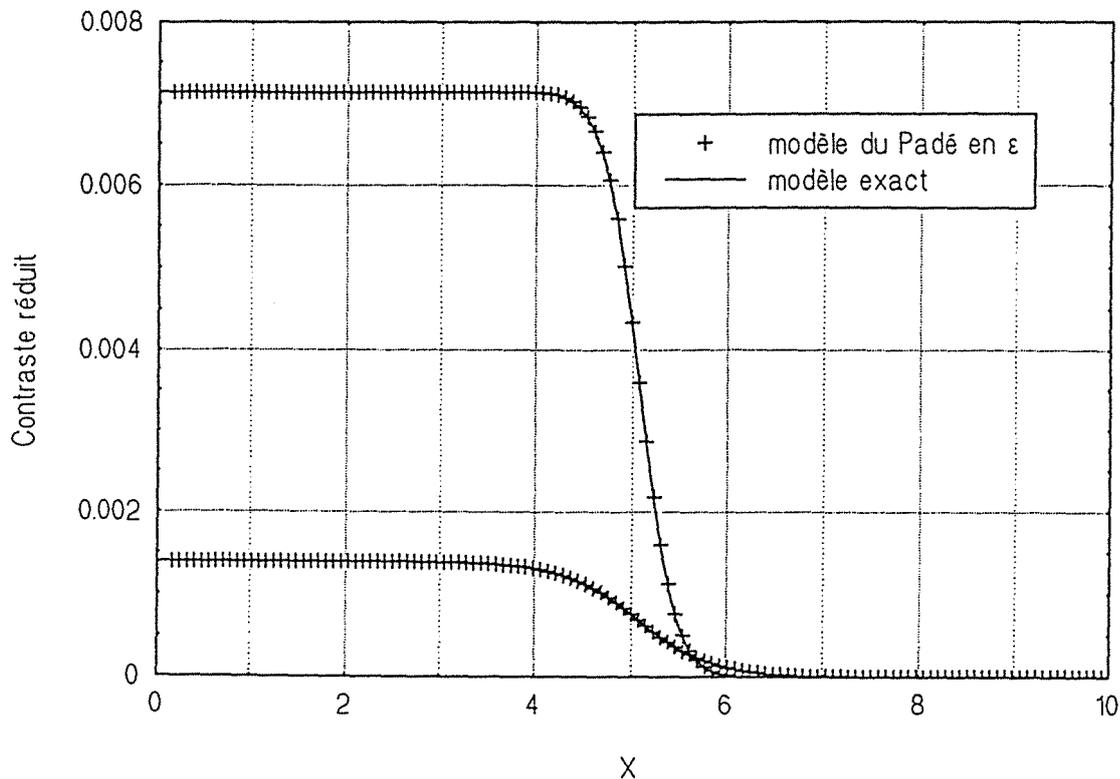


Fig.3.13 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ε et du modèle exact

$b=5 \quad z=0.5 \quad R=0.4$

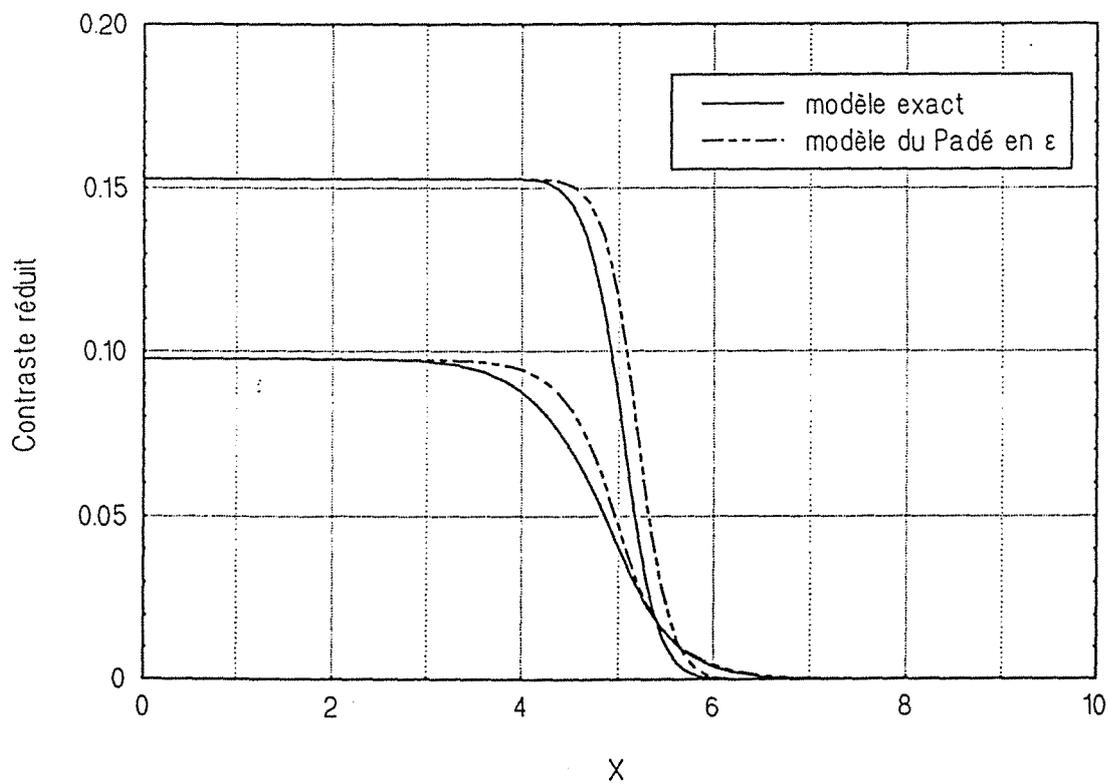


Fig.3.14 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ϵ et du modèle exact
 $b=5 \quad z=0.5 \quad R=1$

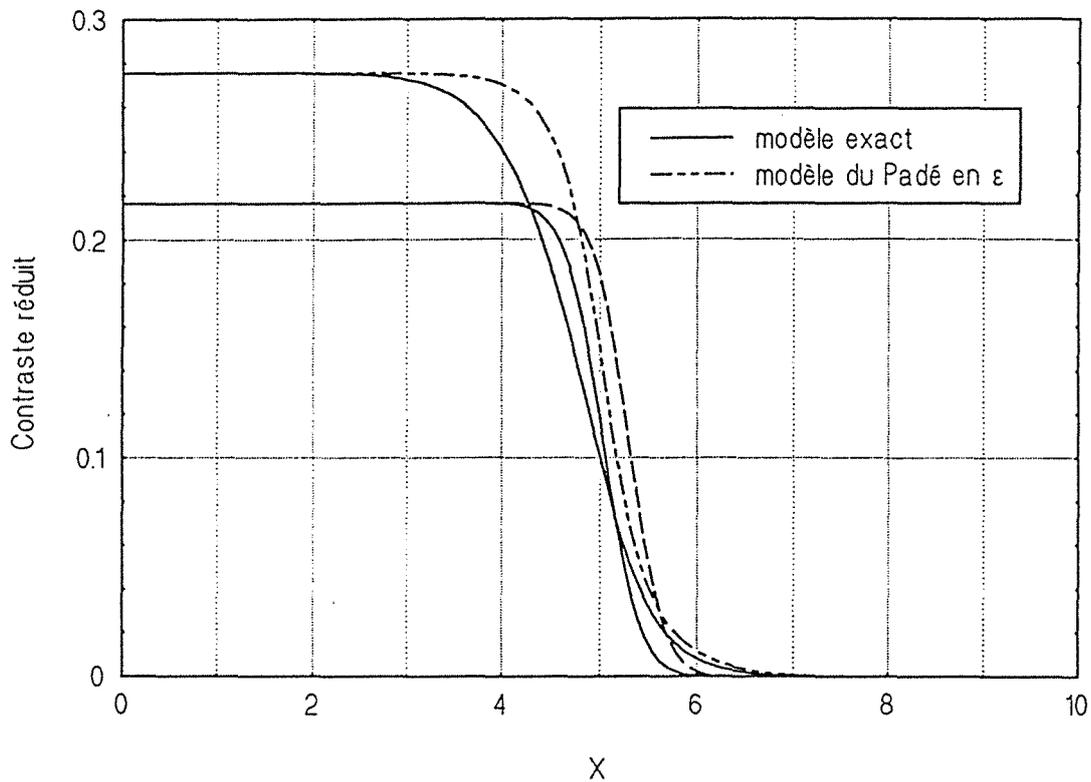


Fig.3.14.I Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ϵ et du modèle exact
 $b=0.5 \quad z=0.5 \quad R=0.01$

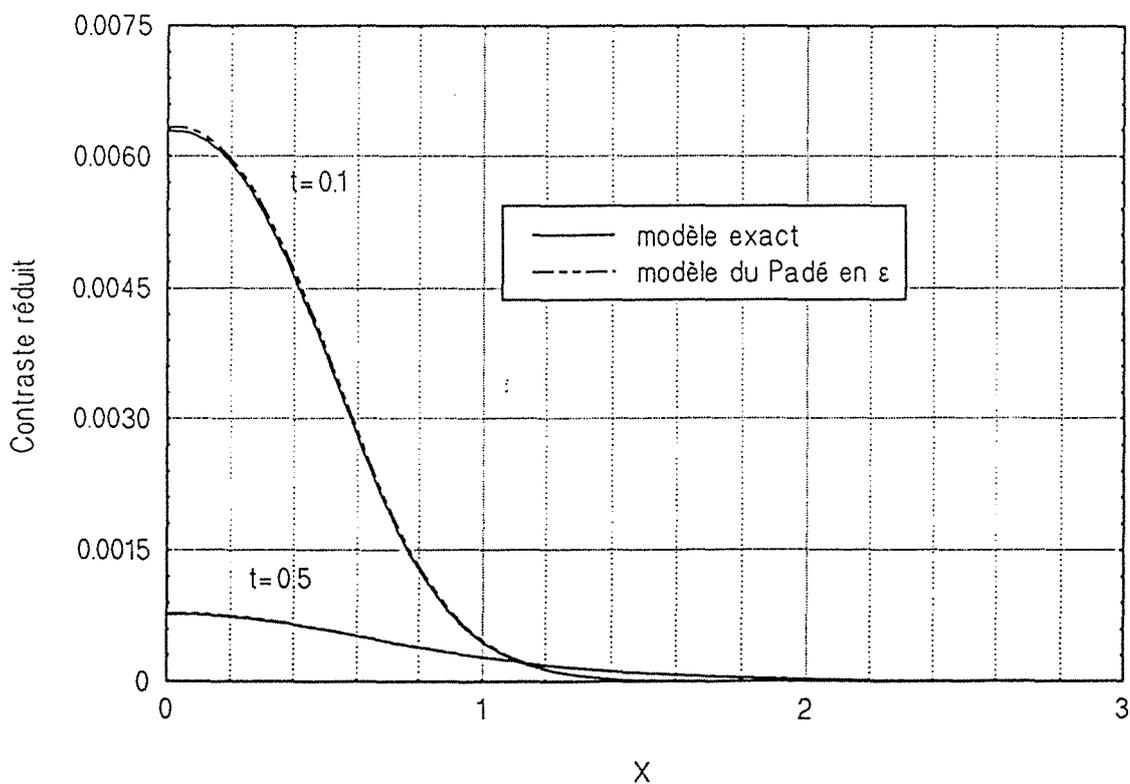


Fig.3.14.II Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ε et du modèle exact
 $b=0.5 \quad z=0.5 \quad R=0.1$

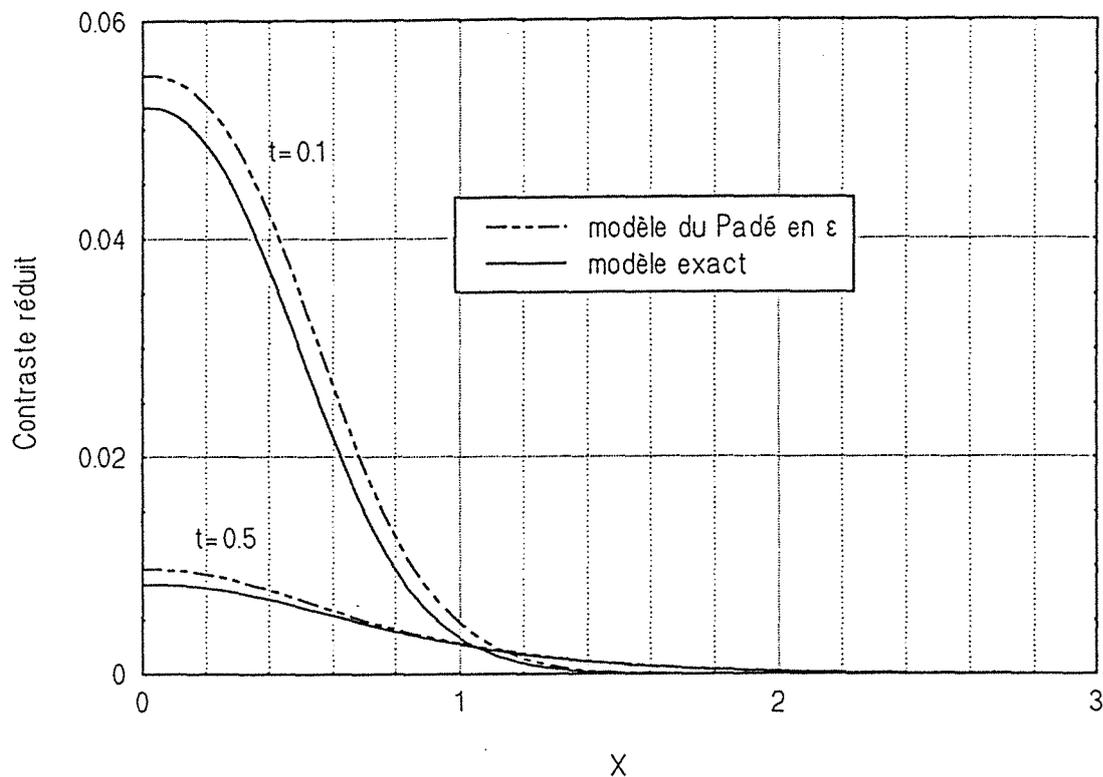
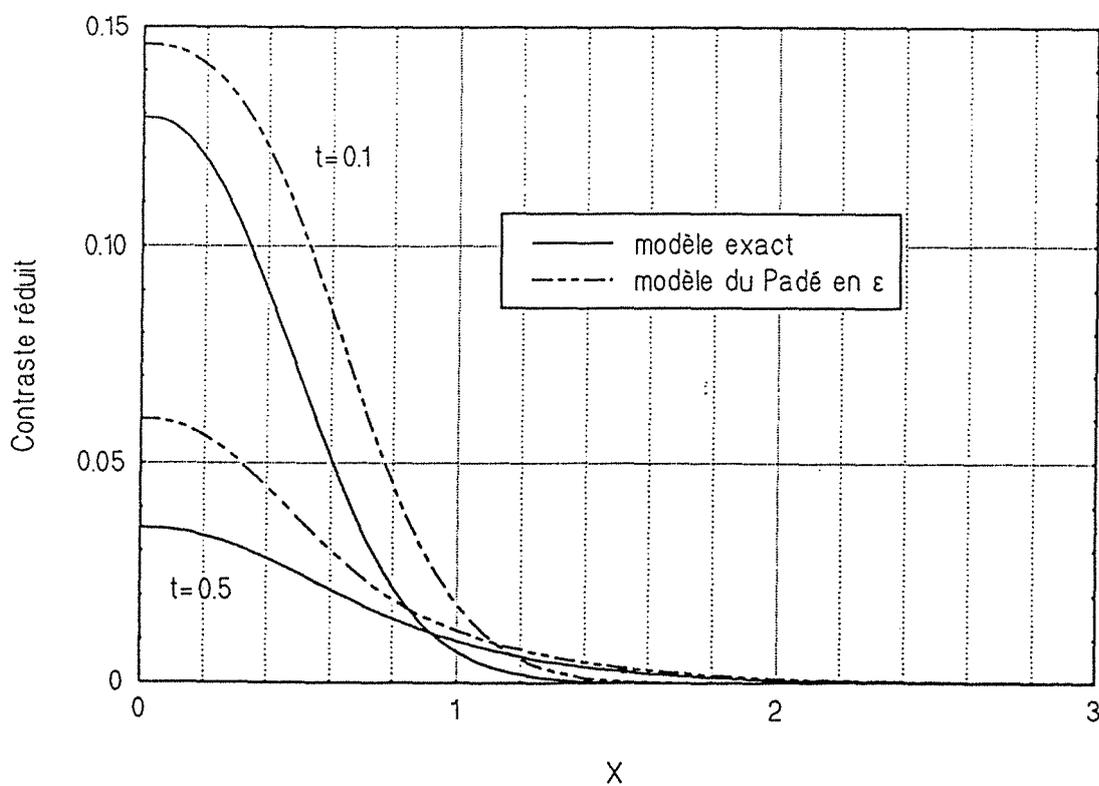


Fig.3.14.III Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en ε et du modèle exact
 $b=0.5 \quad z=0.5 \quad R=0.4$



directement les champs de température soit dans l'espace réel, soit dans l'espace de Laplace (voir paragraphe 3.3.3), à des données expérimentales issues d'une expérience de thermographie infrarouge stimulée, ou bien remonter aux paramètres thermophysiques et géométriques des différents délaminages.

Extension à une résistance d'interface non uniforme $R(x,y)$

La notion de superposition de contrastes, peut être appliquée plus particulièrement au cas de plusieurs défauts d'extensions infiniment petites ($dx dy$), situés à une même profondeur $e_1 (= z_d)$. En effet le coefficient K figurant dans les équations (3.53 et 3.54) devient dans ce cas :

$$K = \frac{1}{4} d(\sin(\alpha x)) d(\sin(\beta y)) \tag{3.63}$$

ou encore :

$$K = \frac{\alpha\beta}{4} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \tag{3.64}$$

En substituant K par son expression dans celle du contraste résultant, on obtient pour la face avant

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, 0, p) = \int_0^L \int_0^{\ell} \varepsilon(x, y) \frac{\sinh(u e_2) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \tag{3.65}$$

ou encore :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, 0, p) = \rho(\alpha, \beta) \frac{\sinh(u e_2) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)} \tag{3.66}$$

avec :

$$\rho(\alpha, \beta) = \int_0^L \int_0^{\ell} \varepsilon(x, y) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \tag{3.67}$$

la transformée double de Fourier de la fonction $\varepsilon(x, y)$ représentant la répartition spatiale de la résistance thermique à l'interface de profondeur $z_d = e_1$.

De la même manière, on obtient pour la face arrière :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, 1, p) = \rho(\alpha, \beta) \frac{\sinh(u e_1) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)} \tag{3.68}$$

L'identification du spectre $\rho(\alpha, \beta)$ dans l'espace de LFF est immédiate dans ce cas. La fonction $R(x, y)$ est obtenue par une transformation inverse de Fourier double (3.23).

Ces expressions décrivant le modèle linéaire dans l'espace de LFF dans le cas d'une résistance d'interface non uniforme seront validées dans un modèle plus général dans le chapitre suivant.

Ce résultat montre une fois de plus, l'intérêt d'utiliser la méthode des perturbations dans le cas de problèmes difficiles à résoudre analytiquement par les méthodes traditionnelles.

3.3.2 Cas de grandes résistances

Le petit paramètre dans ce cas, est l'inverse de la résistance thermique réduite :

$$\eta = \frac{1}{R_c} \quad (3.69)$$

Cette fois-ci, on cherche à identifier les coefficients des nouveaux développements en η^i :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(\alpha, \beta, z, p) \eta^i \quad (3.70)$$

$$\phi(\alpha, \beta, z, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\alpha, \beta, z, p) \eta^i \quad (3.71)$$

Avec l'introduction du nouveau paramètre η , la condition de passage à l'interface s'écrit dans l'espace de Laplace :

- saut de température sur le défaut $\eta(\tau^{sup} - \tau^{inf}) = \psi(e_1) \quad (3.72)$

- égalité des températures en dehors du défaut $\tau^{sup} = \tau^{inf} \quad (3.73)$

Les relations quadripolaires relatives aux deux couches (3.28) et (3.31) gardent par contre la même forme, et par conséquent l'écriture des termes successifs de la perturbation se fait de manière analogue à celle des faibles résistances.

à l'ordre η^0

La perturbation des conditions à l'interface, montre que :

- sur le défaut le flux à l'ordre 0 est nul : $\psi_0(e_1) = 0$
- on garde l'égalité des températures : $\tau_0^{sup} = \tau_0^{inf}$

C'est le cas typique d'un milieu homogène comportant un défaut de résistance infinie. Pour résoudre le problème, nous allons supposer que le flux de chaleur à l'interface est constant par morceaux. Sur le défaut, le flux est nul, en dehors, il sera approché par le flux du milieu homogène. Ce qui ne correspond pas exactement à la réalité, car au voisinage du bord du défaut, le flux à l'interface est infini, et ce n'est que plus loin qu'il tend vers le niveau homogène 1D. En tenant compte de cette approximation, la solution à l'ordre 0 en η , peut être obtenue par la superposition de deux nouveaux problèmes plus simples :

- le cas d'un milieu homogène soumis à une excitation flash

$$\begin{bmatrix} \theta_{oh}(0) \\ \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \quad \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{oh}(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

La température en face arrière, dans ce cas, correspond au modèle 1D et s'écrit :

$$\theta_{oh}(1) = \frac{1}{u \sinh(u)} \frac{\sin(\alpha L)}{\alpha} \frac{\sin(\beta \ell)}{\beta} \quad (3.75)$$

l'indice "h" correspond au problème homogène.

- le cas d'une source de flux imposée à l'interface qui annule le flux homogène à l'aplomb du défaut et le laisse invariant au delà

$$\psi_{oh}(e_1) = - \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} \quad \text{au niveau du défaut (domaine } \Omega_{sd}) \quad (3.76)$$

$$\psi_{oh}(e_1) = 0 \quad \text{au delà de la zone défectueuse (domaine } \Omega_{hd}) \quad (3.77)$$

On obtient alors deux systèmes relatifs aux deux couches, complètement indépendants :

$$\begin{bmatrix} \theta_{os}(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{os}^{sup} \\ \int_{\Omega_{sd}} \psi_{oh}(e_1) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{os}^{inf} \\ \int_{\Omega_{sd}} \psi_{oh}(e_1) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) dx dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{os}(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

l'indice "s" est relatif à la source imposée.

La réponse en température en face arrière est donnée par :

$$\theta_{os}(1) = - \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} \frac{1}{u \sinh(u e_2)} \frac{4 K}{\alpha \beta} \quad (3.80)$$

K étant donné par l'expression (3.55).

la température en face arrière à l'ordre 0 en η est alors donnée par la somme de $\theta_{oh}(1)$ et $\theta_{os}(1)$.

à l'ordre η^1

pour la première couche :

$$\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{sup} \\ \phi_1(e_1) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

pour la seconde couche :

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{inf} \\ \phi_1(e_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

A partir de la relation (3.72), on déduit que le flux de Fourier à l'ordre 1 en η à l'interface, s'exprime par :

$$\phi_1(e_1) = \theta_{os}^{sup}(e_1) - \theta_{os}^{inf}(e_1) \quad (3.83)$$

Cette expression est calculée grâce aux relations matricielles (3.78) et (3.79).

De la relation (3.82), on tire pour la face arrière l'expression de température à l'ordre 1 :

$$\theta_1(1) = \frac{\sinh(u) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{u^2 \sinh(u e_1) \sinh^2(u e_2) \sinh(\sqrt{p})} \frac{4 K}{\alpha \beta} \quad (3.84)$$

La température en face arrière peut alors être approchée par :

$$\theta(\alpha, \beta, l, p) = [\theta_{oh}(1) + \theta_{os}(1)] + \eta \theta_1(1) + o(\eta) \quad (3.85)$$

Et le contraste sur cette face s'écrit alors dans l'espace de Laplace-Fourier à l'ordre η :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) = - \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) u \sinh(u e_2)} \left(1 - \eta \frac{\sinh(u)}{u \sinh(u e_1) \sinh(u e_2)} \right) \frac{4 K}{\alpha \beta} + o(\eta) \quad (3.86)$$

Le paramètre η étant petit, l'expression précédente peut être écrite sous la forme d'un approximant de Padé en η , comme suit :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) = - \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) u \sinh(u e_2)} \frac{1}{1 + \eta \frac{\sinh(u)}{u \sinh(u e_1) \sinh(u e_2)}} \frac{4 K}{\alpha \beta} + o(\eta) \quad (3.87)$$

En remplaçant η par ε , on constate que l'équation (3.87) est équivalente à l'expression perturbée en ε à l'ordre 1, quand ε est très petit (équation (3.61)). Cette expression est donc très pratique puisqu'elle est utilisable pour toute valeur de ε . On ne peut cependant pas évaluer son degré de précision pour des valeurs moyennes de ε (de l'ordre de l'unité).

Des simulations numériques en 2D, réalisées pour la face arrière ; montrent les performances de l'équation (3.87) non seulement pour les très petites et très grandes valeurs de R_c , mais les valeurs moyennes aussi. Sur les figures (3.15 à 3.18), nous avons comparé les résultats du calcul avec le modèle exact pour les différentes valeurs de la résistance thermique : $R_c = 0.01 ; 0.1 ; 0.5$ et 1 , à différents instants (nombre de Fourier = $0.1 ; 0.3 ; 0.5$), d'un défaut de largeur $b = 2$ situé dans le plan médian d'une plaque de largeur $\ell = 10$. On peut voir clairement,

Fig.3.15 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en η et du modèle exact
 $b=2 \quad z=0.5 \quad R=0.01$

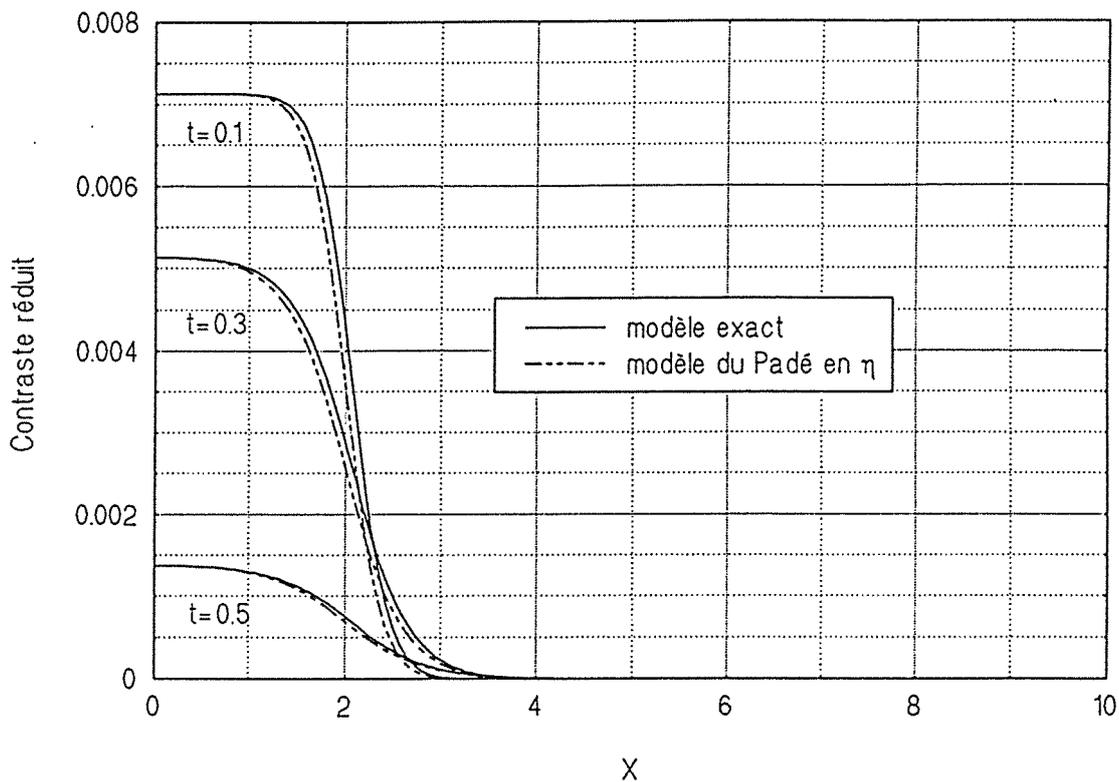


Fig.3.16 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en η et le modèle exact
 $b=2 \quad z=0.5 \quad R=0.1$

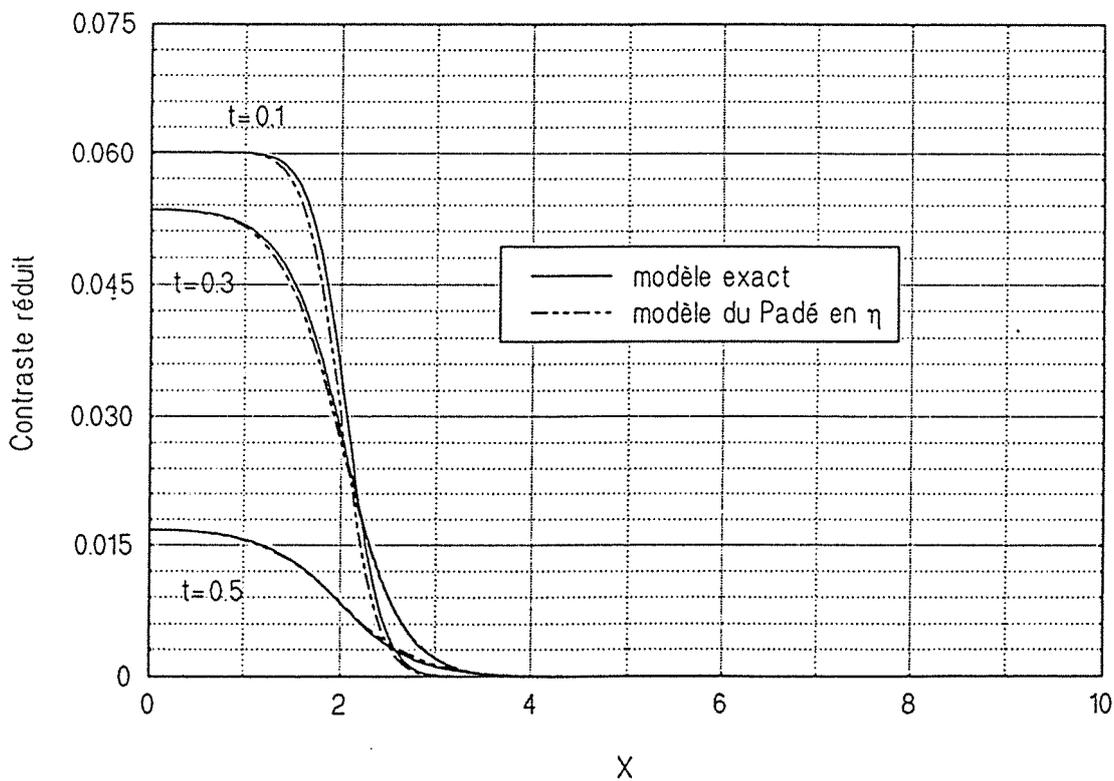


Fig.3.17 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé et du modèle exact dans le cas d'un défaut unique
 $b=2 \quad z=0.5 \quad R=0.5$

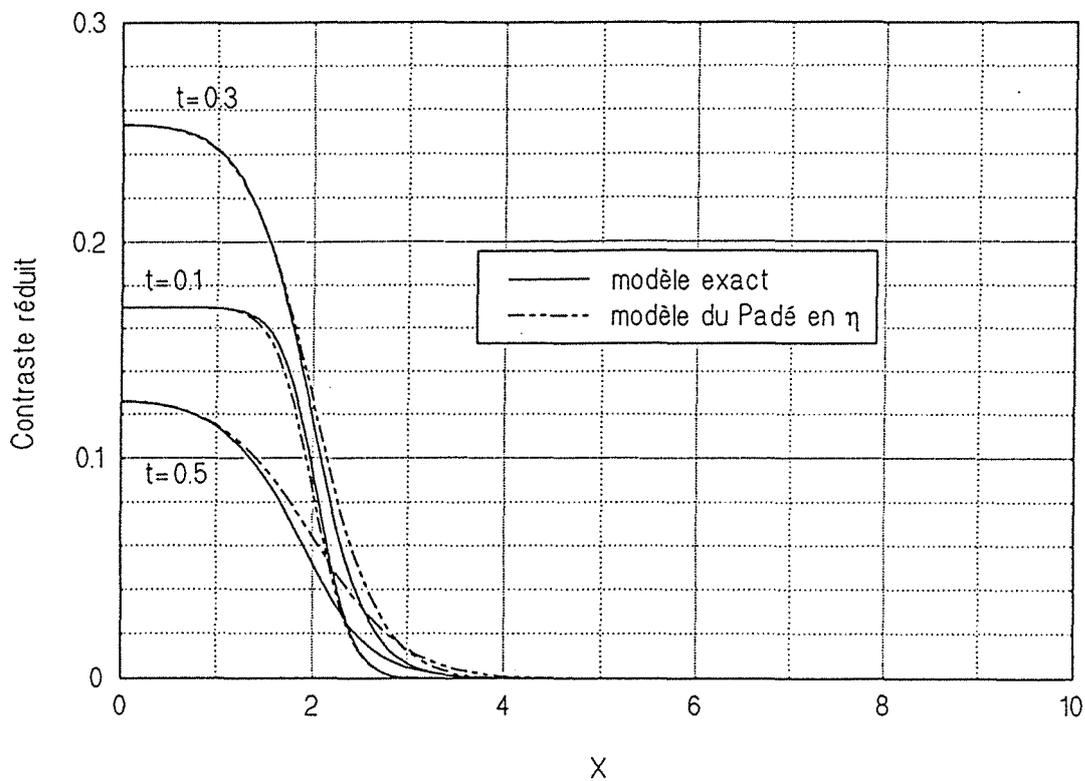
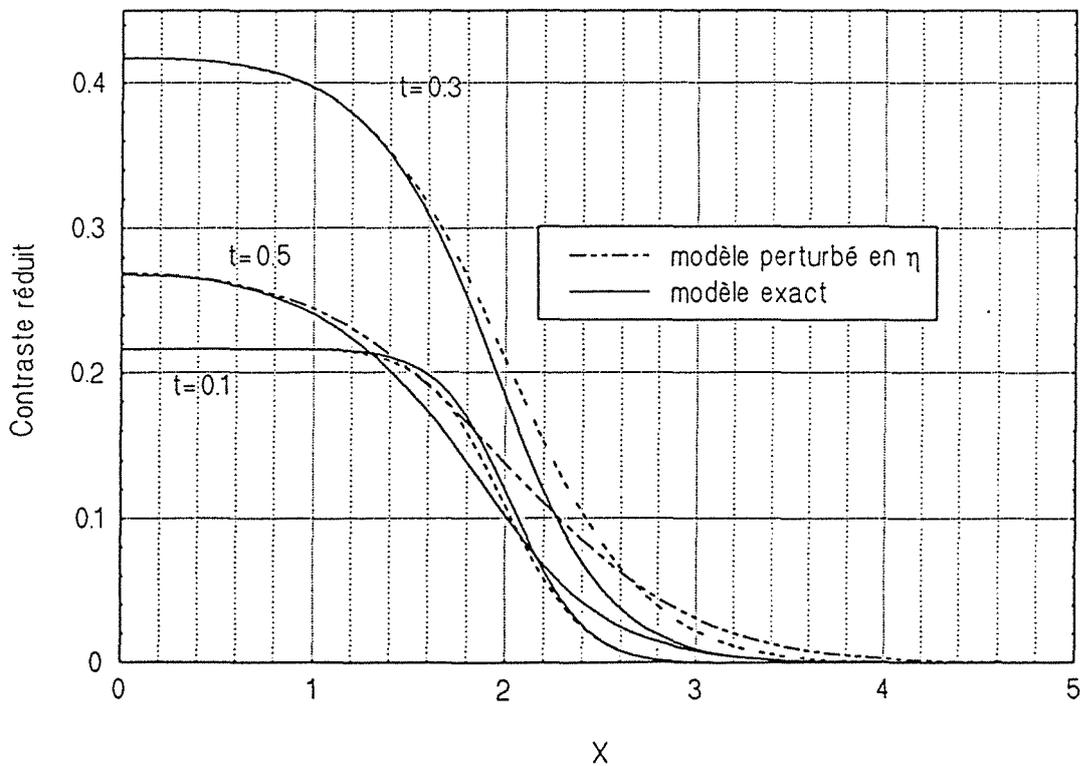


Fig.3.18 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en η et du modèle exact
 $b=2 \quad z=0.5 \quad R=1$



que le modèle approché simule de façon quasi parfaite la diffusion de chaleur au travers du défaut, et ce pour n'importe quelle valeur de la résistance.

L'expression (3.87) peut être écrite sous une autre forme en fonction de la résistance réduite ε :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) = -\varepsilon \frac{4K}{\alpha\beta} \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2) \sinh(u e_1)}{\sinh(\sqrt{p}) [\varepsilon u \sinh(\sqrt{p} e_2) \sinh(u e_1) + \sinh(u)]} \quad (3.88)$$

Une équation valable pour le cas de plusieurs défauts superposés peut alors être construite analogiquement à l'expression (3.88). Dans le cas de deux défauts superposés en pyramide par exemple, le contraste réduit de Laplace Fourier se calcule par :

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) =$$

$$\frac{\varepsilon_1 \sinh(\sqrt{p} (1-e_1)) \sinh(u e_1) + \varepsilon_2 \sinh(\sqrt{p} e_3) \sinh(u (1-e_3))}{\sinh(\sqrt{p}) [\varepsilon_1 u \sinh(\sqrt{p} (1-e_1)) \sinh(u e_1) + \varepsilon_2 u \sinh(\sqrt{p} e_3) \sinh(u (1-e_3)) + \sinh(u)]} \cdot \frac{4K}{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_2 \sinh(\sqrt{p} e_3) \sinh(u (1-e_3))}{\sinh(\sqrt{p}) [\varepsilon_2 u \sinh(\sqrt{p} e_3) \sinh(u (1-e_3)) + \sinh(u)]} \frac{4}{\alpha\beta} (K-K) \quad (3.89)$$

$$\text{avec } 4K = [\sin(\alpha X_2) - \sin(\alpha X_1)] [\sin(\beta Y_2) - \sin(\beta Y_1)].$$

où x_1, x_2, y_1, y_2 , et X_1, X_2, Y_1, Y_2 sont les coordonnées relatives à chaque défaut, et choisies telles que les dernières soient plus grandes que les premières dans notre exemple. sur la figure (3.19), on donne le contraste de Laplace (calculé pour $p = 1$) produit par deux défauts superposés en pyramide. Le calcul de la série double de Fourier inverse, a été réalisé par deux boucles sur une carte de taille 50 x 50 du spectre double du contraste de Laplace-Fourier. Mais, Il est possible d'utiliser la FFT double adaptée à la double série en cosinus pour réduire le temps de calcul en quadruplant le domaine spectral [Leturq et al (1993)]. Les deux défauts ont respectivement les caractéristiques suivantes : $x_1 = y_1 = X_1 = Y_1 = 0$; $x_2 = 3$; $X_2 = 6$; $y_2 = 3$; $Y_2 = 6$; $e_1 = 0.1$; $e_2 = 0.4$; $R_1 = 0.3$ et $R_2 = 0.1$. L'échantillon avait pour extensions latérales $\ell = 15$ et $L = 15$.

Pour éprouver l'efficacité de ce modèle réduit, nous avons dû le comparer aux résultats donnés par le modèle exact en géométrie bidimensionnelle. Les résultats portés sur la figure (3.20), montrent que l'approximation (3.89) décrit bien l'évolution spatio-temporelle du contraste thermique. Les caractéristiques du défaut et de l'échantillon ont été prises comme suit : $x_1 = 0, x_2 = 3, X_1 = 0, X_2 = 6, e_1 = 0.1, e_2 = 0.4, R_1 = 0.3, R_2 = 0.1$ et $\ell = 15$.

D'autres cas tests de calcul ont montré que l'approximation est valable quelque soit l'ordre de grandeur des différents paramètres intervenant dans le modèle. Cette nouvelle approche est

Fig.3.19 Contraste de Laplace calculé à partir du modèle obtenu par le Padé en η , ($p=1$)
cas de deux défauts superposés en pyramide

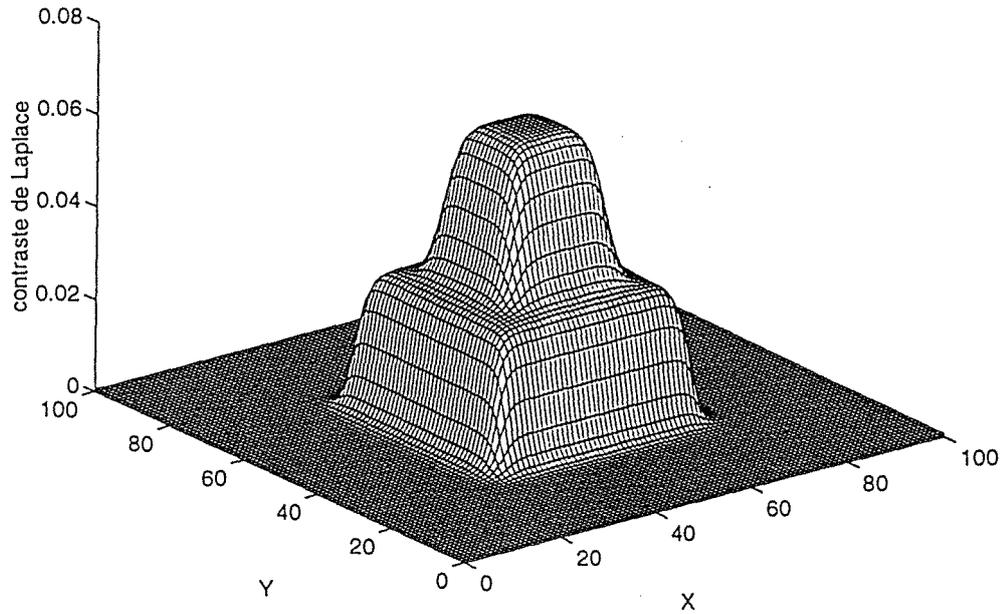
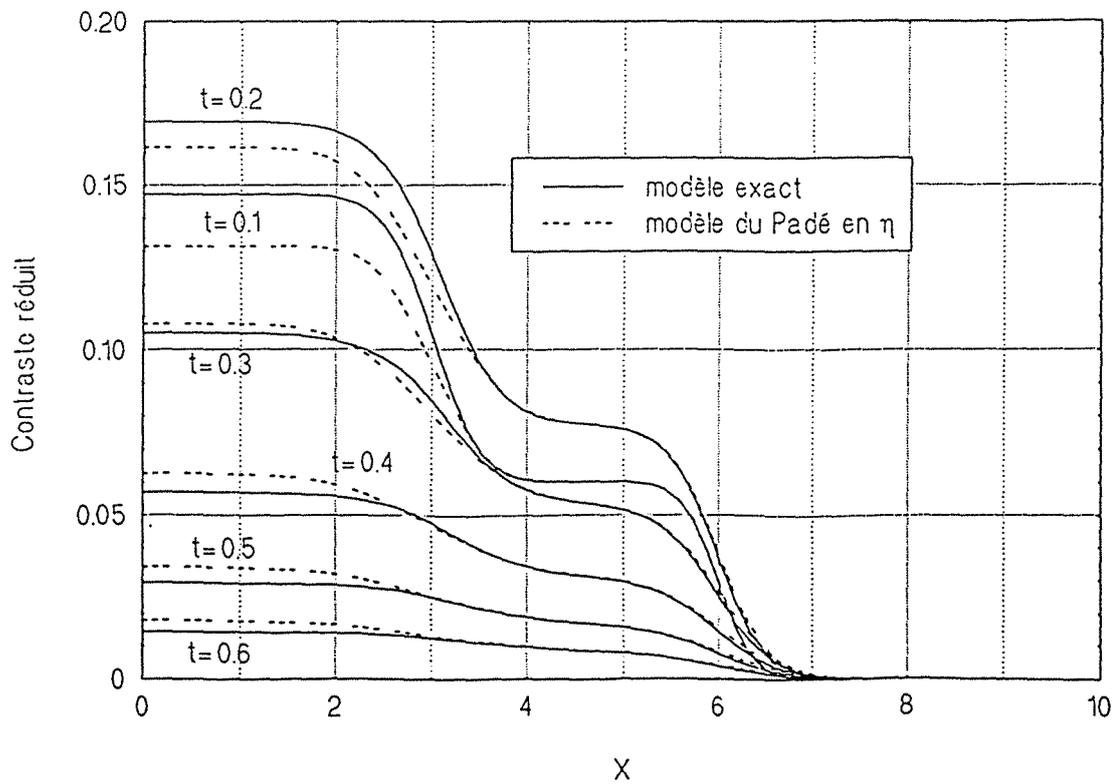


Fig.3.20 Comparaison du modèle obtenu par l'approximant de Padé en η
et du modèle exact dans le cas de deux défauts superposés
 $b_1=3$ $b_2=6$ $z_1=0.1$ $z_2=0.5$ $R_1=0.3$ $R_2=0.1$



donc très pratique si on veut réaliser des calculs assez rapide. En effet, elle permet d'approcher correctement les résultats exacts, qui eux par contre risquent d'être très durs à calculer en géométrie tridimensionnelle, même si on fait recours à la FFT double.

Récapitulatif des modèles réduits obtenus par la perturbation en ϵ et en η dans le cas d'un seul défaut

1. Le contraste perturbé simple en ϵ

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) = -\frac{4}{\alpha\beta} K \epsilon \frac{\sinh(u e_1) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) \sinh(u)}$$

On peut constater que cette expression se simplifie aux temps courts (p grand), et est équivalente à la solution du problème monodimensionnel avec un défaut de résistance thermique faible.

2. L'approximant de Padé en ϵ

$$\Delta\tau(x, y, l, p) = \epsilon \frac{l}{\sqrt{p} \sinh(\sqrt{p})} \frac{f}{1 - \epsilon f}$$

où f est la transformée inverse de Fourier du terme à l'ordre 1 de la température de Laplace-Fourier $\theta_1(l)$ (équation (3.54)) multiplié par $\sqrt{p} \sinh(\sqrt{p})$.

L'expression en gras, représente le terme correctif qui garde le même niveau maximum du contraste exact pour les défauts très étendus et augmente le champ de validité du modèle perturbé en ϵ .

3. L'approximant de Padé en η

$$\Delta\theta(\alpha, \beta, l, p) = -\frac{4}{\alpha\beta} K \epsilon \frac{\sinh(u e_1) \sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p}) [\epsilon u \sinh(\sqrt{p} e_2) \sinh(u e_1) + \sinh(u)]}$$

Quand p tend vers l'infini, c'est à dire pour les temps courts, cette expression tend vers la solution du contraste thermique exact dans le cadre d'un transfert unidirectionnel au travers d'un défaut. En gras, nous avons montré le terme qui améliore l'approximation donnée initialement par le modèle perturbé simple en ϵ .

Ces trois expressions présentent l'avantage d'être plus simples à mettre en oeuvre par rapport à la solution exacte qui nécessite une résolution d'un système linéaire à grand nombre d'inconnues. D'autre part, la simplicité de ces expressions permet une bonne compréhension de l'influence des différents paramètres intervenant dans le modèle sur le transfert thermique au sein du matériau.

3.3.3 Détermination de l'aire d'un défaut simulé dans un échantillon en carbone époxy

3.3.3.1 Problème inverse de l'aire du défaut

La moyenne spatiale du contraste de Laplace est définie par :

$$\overline{\Delta\tau}(z_s, p) = \frac{1}{L \ell} \int_0^L \int_0^\ell \Delta\tau(x, y, z_s, p) dx dy \quad (3.90)$$

Avec la méthode des perturbations du premier ordre, l'intégrale dans le second membre de l'équation (3.90) est égale à $\varepsilon \theta_I(0, 0, z_s, p)$. L'application des équations (3.53 et 3.54) permet le

calcul de $\overline{\Delta\tau}$ à l'ordre ε pour chaque face :

$$\overline{\Delta\tau}(0, p) = \frac{\varepsilon ab}{L \ell} \frac{\sinh^2[\sqrt{p}(1-z_d)]}{\sinh^2(\sqrt{p})} + o(\varepsilon) \quad (3.91)$$

$$\overline{\Delta\tau}(1, p) = -\frac{\varepsilon ab}{L \ell} \frac{\sinh(\sqrt{p}z_d) \sinh[\sqrt{p}(1-z_d)]}{\sinh^2(\sqrt{p})} + o(\varepsilon) \quad (3.92)$$

Ceci montre que le contraste de Laplace moyen (et par conséquent le contraste instantané moyen $\overline{\Delta T}$) est proportionnel à l'aire ab du défaut.

Dans le cas d'un défaut de petite résistance réduite ε , situé à une profondeur z_d , l'application de la formule (3.91) ou (3.92) permet la détermination de la surface du défaut ab , en utilisant une expérience en face avant ou en face arrière.

Notons que pour les mêmes raisons évoquées auparavant (pour une meilleur approximation dans le cas de défauts plus résistifs), l'équation (3.91) peut être mise sous la forme suivante :

$$\overline{\Delta\tau}(0, p) = \frac{\coth(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \left[\frac{1}{1-\varepsilon F(p)} - 1 \right] \quad (3.93)$$

$$\text{avec : } F(p) = \frac{ab}{L\ell} \frac{\sqrt{p}}{\coth(\sqrt{p})} \frac{\sinh^2(\sqrt{p}(1-z_d))}{\sinh(\sqrt{p})} \quad (3.94)$$

De même en face arrière pour l'équation (3.92), on obtient :

$$\overline{\Delta\tau}(1, p) = \frac{1}{\sqrt{p} \sinh(\sqrt{p})} \left[\frac{1}{1+\varepsilon G(p)} - 1 \right] \quad (3.95)$$

$$\text{avec : } G(p) = \frac{ab}{L\ell} \sqrt{p} \frac{\sinh(\sqrt{p}z_d) \sinh[\sqrt{p}(1-z_d)]}{\sinh(\sqrt{p})} \quad (3.96)$$

3.3.3.2 Expérience

Dans le but d'évaluer l'aptitude de la méthode des perturbations à décrire la réponse 3D instationnaire d'une structure multicouche contenant un défaut et présentant un intérêt technologique réel, nous avons comparé les résultats du modèle analytique perturbé à ceux obtenus lors d'une opération de contrôle non destructif.

Une plaque d'essai carrée de 60 mm de côté et de 2 mm d'épaisseur en composite stratifié carbone époxy T300 (14 couches) ayant les propriétés thermophysiques suivantes :

$$\lambda_z = 0.67 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \lambda_x = \lambda_y = 2.40 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \rho c = 1.62 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3}$$

a été utilisée pour valider la technique inverse précédente. Elle contient un insert carré de 10 mm de côté, formé par deux épaisseurs d'un film de Téflon de 25 microns, situé à mi-profondeur ($z_d = 0.5$). Cet échantillon nous a été fourni par la société Dassault Aviation.

L'excitation impulsionnelle est produite par l'illuminateur plan utilisé pour les manipulations en face arrière. Le champ de température transitoire sur la face opposée à la face irradiée de la plaque est enregistré par la caméra IR. L'acquisition et le traitement des données expérimentales sont réalisées par les modules décrits dans le chapitre précédent.

3.3.3.3 Résultats expérimentaux

Une image instantanée d'une expérience face arrière correspondant à la trame 36 après le flash ($t = 1.64$ seconde) est présentée sur la figure (3.21). On peut observer au centre de l'échantillon la zone froide due à la présence du Téflon. Une autre image représentant la moyenne de vingt trames (34 à 53) permet une meilleur détection du défaut (voir figure (3.22)).

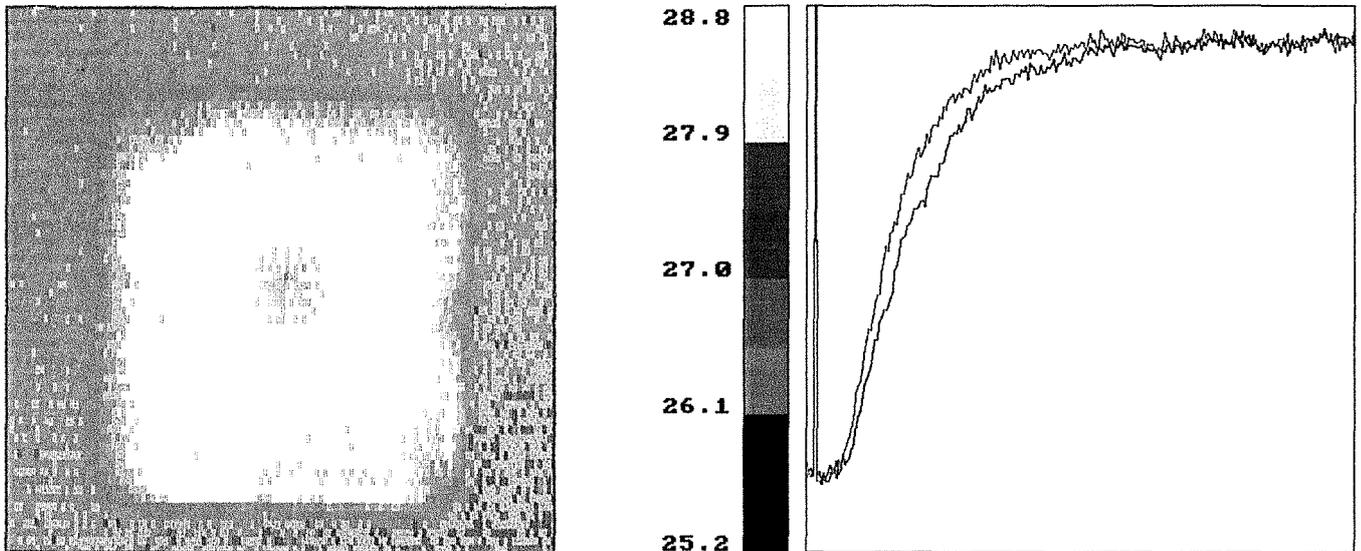
L'application de la méthode des deux transformées expérimentales de Laplace du contraste thermique ($p_1 = 1$ et $p_2 = 4$), à l'aplomb du centre du défaut en référence à une zone saine équidistante du bord du défaut et de l'extrémité de la plaque, conduit à la valeur suivante de la résistance réduite :

$$\varepsilon = 0.185$$

Cette valeur est relativement grande pour l'application de la méthode des perturbations au premier ordre précédente. Elle est à peu près trois fois plus grande que la valeur nominale correspondant au Téflon relativement à toute l'épaisseur du carbone époxy. Mais des expériences antérieures ont déjà montré que des couches d'air de quelques microns piégées entre les films de Téflon ou entre ceux-ci et la matrice sont suffisantes pour justifier cette différence.

L'application de l'équation (3.92) avec la valeur précédente de ε , et la profondeur $z_d = 0.5$ (dans le cas où z_d est inconnue, une autre méthode servant à identifier ce paramètre sera

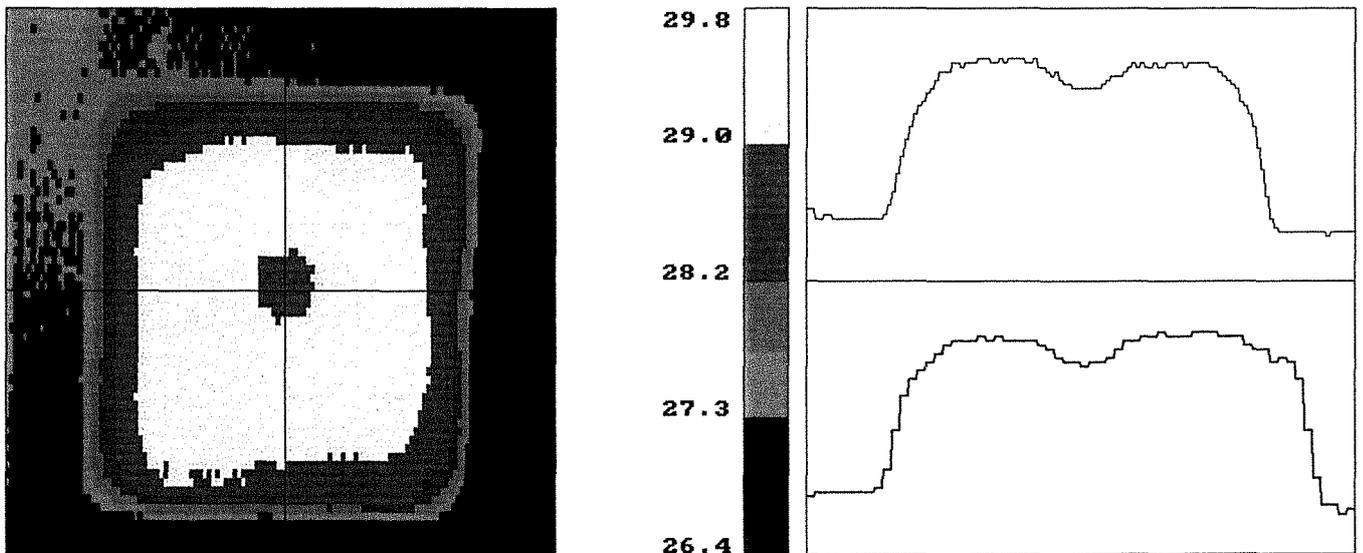
Fig.3.21 Image instantanée



Trame n° 35 (t=1.4 s)

Thermogrammes

Fig.3.22 Image moyennée



**Moyenne des trames
35 à 70**

Profils

développée ultérieurement), peut fournir une valeur pour l'aire ab , une fois la variable de Laplace choisie. L'algorithme d'identification de l'aire du défaut a été testé pour plusieurs valeurs de la variable de Laplace. La valeur de p permettant de donner l'estimation la plus proche de l'aire réelle ($10 \times 10 \text{ mm}$) a été trouvée égale à 6.25.

Etant donné que notre modèle ne tient pas compte des pertes de chaleur latérales, le domaine d'intégration a été réduit pour éviter les effets de bords ($L \times \ell = 48 \times 42 \text{ mm}$ au lieu de toute la superficie de la plaque soit $60 \times 60 \text{ mm}$).

Le champ bidimensionnel du contraste de Laplace expérimental a été calculé pour la valeur qui donne l'estimation la plus proche de la réalité, soit $p = 6.25$. Un profil spatial ligne, passant au niveau du centre du défaut est présenté sur la figure (3.23). Il est affecté par un bruit particulièrement important. La valeur correspondante de la moyenne du contraste de Laplace est :

$$\bar{\Delta\tau} = -18 \cdot 10^{-4}$$

La valeur estimée du côté a du défaut donnée par l'équation (3.92) est :

$$a = 8.9 \text{ mm}$$

qui diffère de la valeur réelle d'un écart de - 11 %.

L'application de l'équation (3.95) donne :

$$a = 10.9 \text{ mm}$$

soit un écart de + 9 % par rapport à la valeur réelle.

Un champ du contraste de Laplace recalculé (en négligeant les modes couplés, voir paragraphe 3.5) pour $p = 6.25$; $z_d = 0.5$; $a = b = 10 \text{ mm}$ et $\varepsilon = 0.185$ a été obtenu en utilisant l'équation (3.54) et la FFT inverse (équation (3.23)). Il est présenté sur la figure (3.24). Il a un extremum de $14 \cdot 10^{-3}$ au lieu du maximum expérimental qui vaut $18 \cdot 10^{-3}$ sur la figure (3.23).

La figure (3.24) montre que l'aire affectée par le contraste de Laplace simulé pour $p = 6.25$ doit être de $20 \times 20 \text{ mm}$, ce qui n'est pas le cas pour l'expérience où le bruit s'étale au delà de cette zone. Ceci signifie que de petites valeurs de p donneront une aire estimée plus large du moment que le bruit sur ΔT est moins réduit : l'identification avec une valeur de p égale à l'unité donne une aire de $27.6 \times 27.6 \text{ mm}$ avec la même technique. A l'inverse, une très grande valeur de p , qui devrait débarrasser le contraste de Laplace de son énorme bruit de mesure en dehors de la zone affectée par la présence du défaut, risque de l'amortir jusqu'au voisinage du centre du défaut. La difficulté ici dérive du choix délicat de la zone d'intégration et la valeur optimale de p dans le but d'estimer $\bar{\Delta\tau}$. Ceci pourrait être dû à une excitation non uniforme sur la face avant de l'échantillon.

Fig.3.23 Profil expérimental en contraste de Laplace réduit

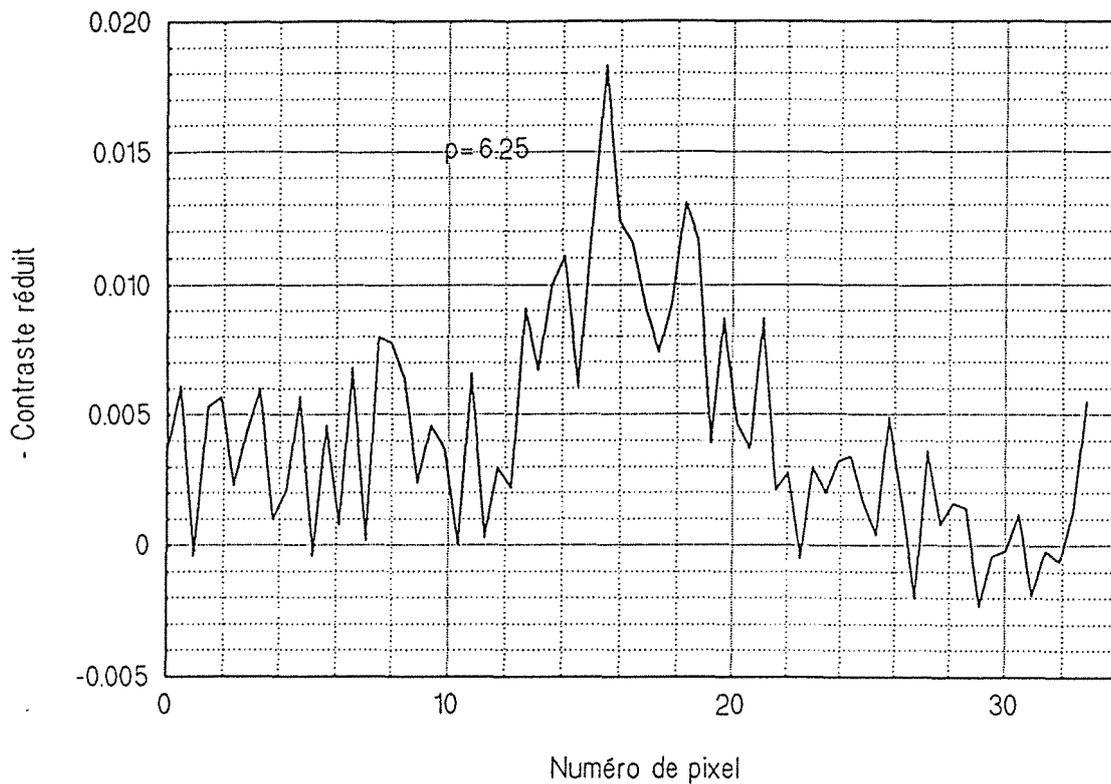
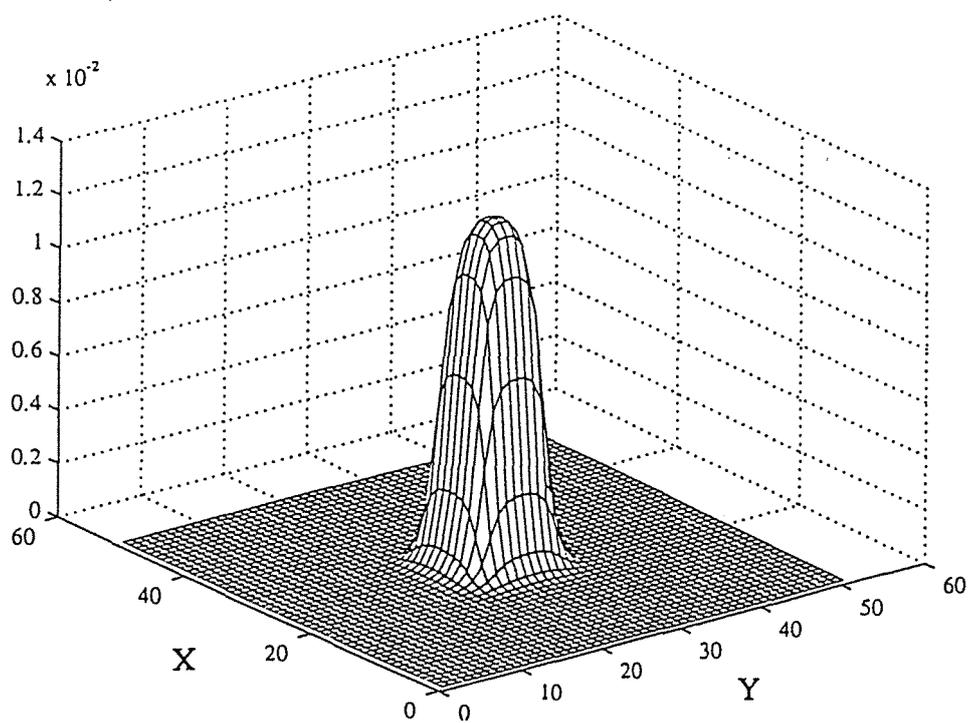


Fig.3.24 Contraste réduit de Laplace calculé pour p = 6.25



3.3.3.4 Etude de l'influence de la variable de Laplace p sur la variance de la surface S du défaut

La connaissance du contraste moyen de Laplace $\bar{\Delta\tau}(p)$ permet de calculer la surface $S = ab$ du défaut à partir de l'expression approchée suivante déduite de l'équation (3.92) :

$$S = \frac{L\ell}{\varepsilon} \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh(\sqrt{p} z_d) \sinh(\sqrt{p} (1 - z_d))} \bar{m}(p) \quad (3.97)$$

$$\text{où : } \bar{m}(p) = -\bar{\Delta\tau}(p) \quad (3.98)$$

En pratique, les mesures effectuées y_i aux instants t_i ($i = 1 \text{ à } n$) du contraste réduit comportent toujours un bruit aléatoire γ_i . Si l'on suppose ce bruit additif, il est légitime d'écrire :

$$y_i = \Delta T(t_i) + \gamma_i \quad (3.99)$$

- L'incertitude qu'il peut y avoir sur la valeur identifiée de S dépend donc de la loi de probabilité suivie par ce bruit aléatoire. Celui-ci a été étudié statistiquement à partir de l'enregistrement du contraste pour les temps négatifs, avant l'excitation flash. Il a été démontré qu'il suit une distribution gaussienne, d'écart type constant σ_γ et de moyenne nulle [Maillet (1991)].

L'identification de l'aire S se fait d'une manière directe dans l'espace de Laplace à partir de la mesure de la transformée expérimentale $\bar{m}(p)$. Il est donc nécessaire d'écrire la relation (3.99) dans l'espace de Laplace si l'on désire donner l'intervalle de confiance pour S . La variance du contraste expérimental de Laplace a été déjà calculée en fonction du bruit de mesure σ_γ , du pas d'intégration Δt et de la variable réduite de Laplace p au chapitre 2 :

$$\text{var}(m) = \sigma_\gamma^2 \frac{\Delta t}{2p} \quad (3.100)$$

La moyenne spatiale du contraste de Laplace théorique s'écrit :

$$\bar{\Delta\tau}(p) = \frac{1}{L\ell} \int_0^L \int_0^\ell \Delta\tau(x,y,p) dx dy \quad (3.101)$$

Le contraste moyen expérimental se calcule à partir de :

$$\bar{m}(p) = \frac{1}{L\ell} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M m_{ij}(p) \Delta x \Delta y \quad (3.102)$$

où N est le nombre de pixels par ligne, et M le nombre de pixels par colonne.

$\Delta x (= \frac{L}{N})$ et $\Delta y (= \frac{\ell}{M})$ étant les extensions latérales de chaque pixel.

Si les contrastes réduits ΔT_{ij} sont indépendants, alors leurs transformées de Laplace $m_{ij}(p)$ à p fixé sont également indépendantes. Dans ce cas, la variance de la moyenne spatiale $\bar{m}(p)$ est donnée par :

$$\text{var}(\bar{m}(p)) = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{L\ell}\right)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \text{var}(m_{ij}(p)) \quad (3.103)$$

Si en plus les contrastes réduits ΔT_{ij} ont la même variance, on obtient finalement :

$$\text{var}(\bar{m}(p)) = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{L\ell}\right)^2 NM \text{var}(m(p)) \quad (3.104)$$

ou encore :

$$\text{var}(\bar{m}(p)) = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{L\ell}\right)^2 NM \sigma_\gamma^2 \frac{\Delta t}{2p} \quad (3.105)$$

et par conséquent la variance de S se calcule par :

$$\text{var}(S) = \frac{\sinh^4(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} z_d) \sinh^2(\sqrt{p} (1-z_d))} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\varepsilon}\right)^2 NM \sigma_\gamma^2 \frac{\Delta t}{2p} \quad (3.106)$$

La minimisation de l'erreur sur S par rapport à p , revient à chercher le minimum de la fonction suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s} \frac{\sinh^2(s)}{\sinh(s z_d) \sinh(s(1-z_d))} \quad \text{où } s = \sqrt{p} \quad (3.107)$$

Dans notre cas, la profondeur du défaut est connue $z_d = 0.5$, d'où :

$$H(s) = \frac{4}{s} \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) \quad (3.108)$$

La variable optimale est solution de l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial(H(s))}{\partial s} = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \coth\left(\frac{s}{2}\right) = 2s \quad (3.109)$$

ce qui mène à une valeur optimale $p_{opt} = 2.37$, qui est très différente de la valeur utilisée pour inverser les données expérimentales, soit $p = 6.25$.

L'écart type de l'aire du défaut peut être écrit sous la forme :

$$\sigma_s = \frac{4}{s} \frac{L\ell}{\varepsilon} \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) \sqrt{2 \frac{\Delta t}{NM}} \sigma_\gamma \quad (3.110)$$

La figure (3.25) présente l'évolution de cet écart en fonction de p . On constate que la fonction reste quasiment constante pour les valeurs de p variant de 1 à 7. Ceci veut dire que la variable p optimale ne peut pas être déterminée à partir d'une minimisation du bruit de mesure.

Etant donné que l'écart type du contraste moyen de Laplace n'est pas constant et dépend de p (expression (3.105)), la sensibilité $X_s(p)$ du contraste à l'aire S du défaut ne varie pas donc comme l'inverse de l'écart type $\sigma_s(p)$. Celle-ci est calculée grâce à la relation suivante :

$$X_s(p) = \frac{\varepsilon}{L\ell} \frac{1}{4 \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right)} \quad (3.111)$$

L'analyse de la sensibilité montre qu'elle décroît lorsque p augmente (voir figure (3.26)). Ceci est en désaccord avec ce qu'on espérait avoir, vu les résultats des tests qu'on avait fait pour les différentes valeurs de p lors de l'identification de la surface du défaut simulé.

Les relations (3.110) et (3.111) montrent que l'erreur sur l'aire S est proportionnelle au domaine d'intégration. Il est préférable alors de prendre une surface qui ne contourne que la zone affectée par le défaut pour que le contraste moyen soit mieux sensible à la présence du défaut.

L'influence de la variable p sur le paramètre estimé ne peut être expliquée que par un mauvais choix de la zone de référence. Effectivement, une mauvaise référence va générer une erreur sur le calcul du contraste thermique. Sur la figure (3.23), on remarque que le contraste de Laplace n'est pas nul (la zone de référence a été prise à droite du profil) loin du défaut. Ceci ne peut être que la conséquence d'une zone froide, donc affectée par les pertes latérales ou insuffisamment chauffée par le flash. Le contraste instantané est donc non nul aux temps longs ; d'où un contraste moyen de Laplace surestimé et par conséquent une aire du défaut surestimée aussi, la résistance réduite étant gelée à la valeur de 0.185.

L'amortissement du contraste thermique par une exponentielle décroissante avec de grandes valeurs de p , permet de remédier à cette anomalie. Toutefois, il ne faudrait prendre des valeurs très grandes qui risquent d'écraser complètement le signal et restreindre l'information aux quelques premières images du film thermique et par conséquent une erreur de quadrature.

Fig.3.25 Allure de l'écart type sur l'aire S du défaut

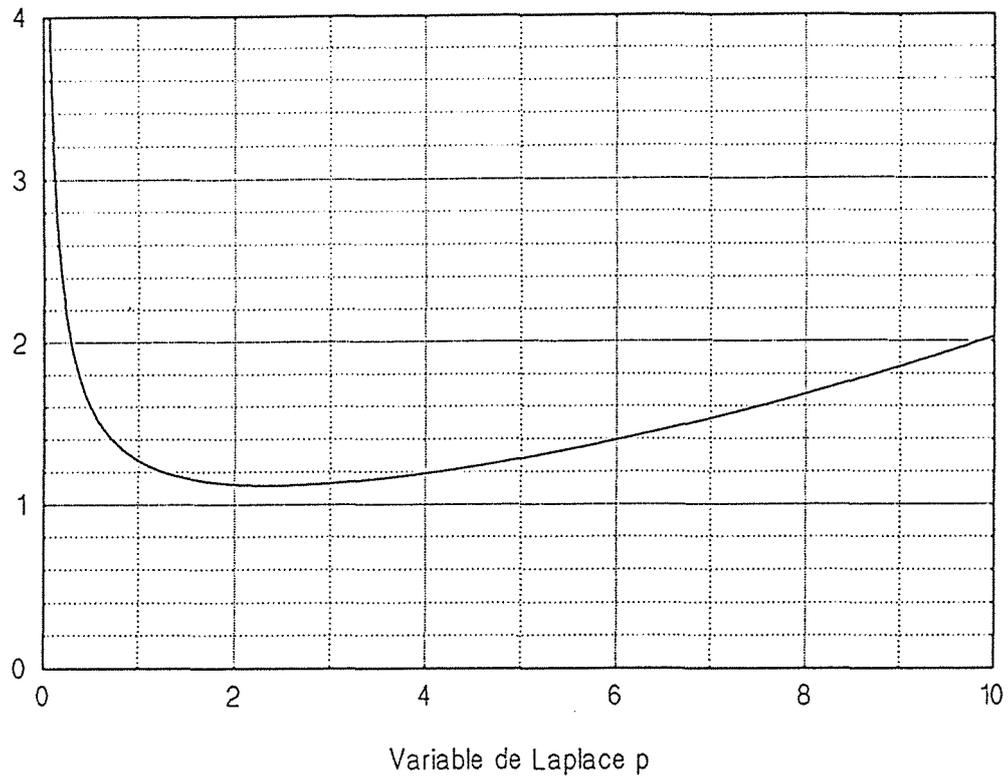
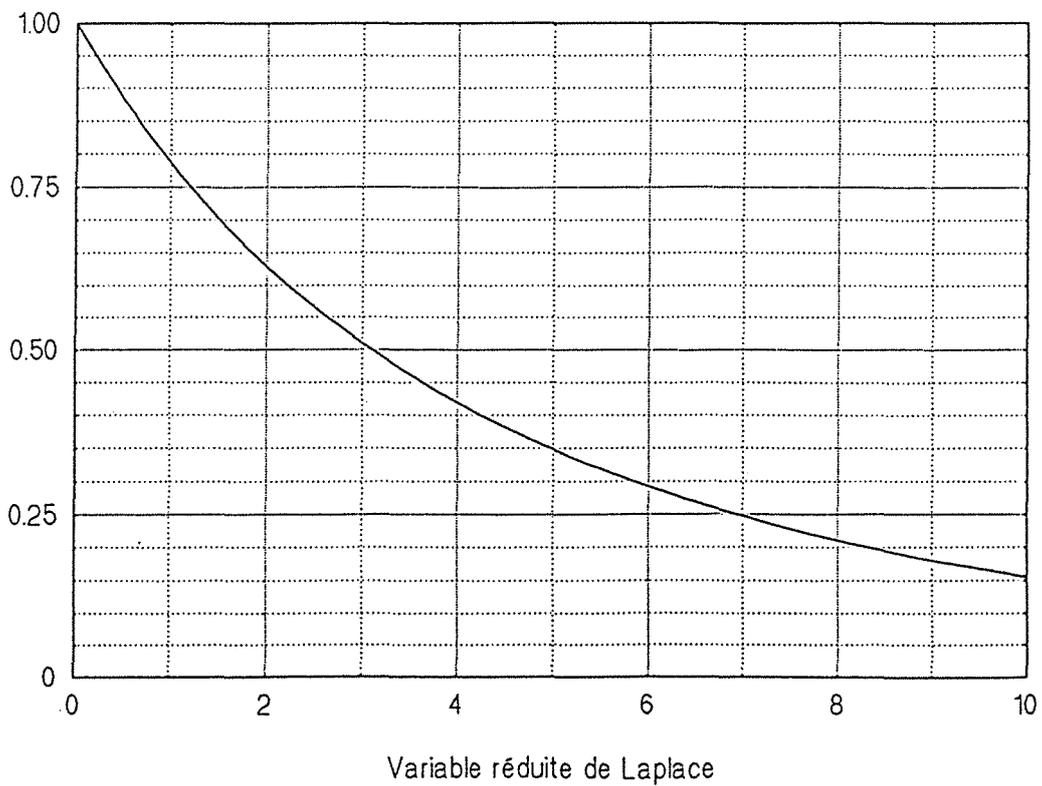


Fig.3.26 Allure de la sensibilité du contraste moyen de Laplace à l'aire S du défaut



Le choix de la zone de référence en fonction des différents paramètres géométriques et des effets des pertes latérales fera l'objet de la prochaine section.

L'utilisation limitée du modèle perturbé à son premier ordre dans le problème inverse peut être une source d'erreur, du moment que ce dernier n'est valable que dans le cas de "petites résistances". Or ça n'est pas le cas pour notre exemple : $\varepsilon = 0.185..$ Une autre cause d'erreur peut également provenir d'un flux excitateur non uniforme sur la face avant (voir chapitre 5).

3.3.4 Problème inverse de la profondeur du défaut : méthode des deux moyennes spatiales du contraste de Laplace perturbé au premier ordre

On a vu au chapitre précédent que, la profondeur du délaminage peut être identifiée par la méthode des transformées expérimentales de Laplace en géométrie unidirectionnelle en face avant (la sensibilité du contraste en face arrière est nulle pour des défauts situés à mi-profondeur). Mais si on veut tenir compte des effets bidimensionnels, il serait commode d'utiliser le modèle direct perturbé en ε .

L'équation (3.95) peut être mise sous la forme :

$$\frac{\varepsilon ab}{L\ell} = \bar{\Delta}\tau(s) \frac{\sinh^2(s)}{\sinh^2(s(1-z_d))} \quad (3.112)$$

Si l'équation est écrite pour deux valeurs s_1 et s_2 de s , on peut éliminer son membre de gauche, ce qui donne dans le cas particulier : $s_2 = 2 s_1$

$$\cosh(s_1(1-z_d)) = \left(\frac{\bar{\Delta}\tau_2}{\bar{\Delta}\tau_1} \right)^{1/2} \cosh(s_1) \quad (3.113)$$

avec : $\bar{\Delta}\tau_i = \bar{\Delta}\tau(s_i)$

ce qui donne la valeur de la profondeur :

$$z_d = 1 - \frac{1}{s_1} \ln \left[\left(\frac{\bar{\Delta}\tau_2}{\bar{\Delta}\tau_1} \right)^{1/2} \cosh(s_1) + \left(\frac{\bar{\Delta}\tau_2}{\bar{\Delta}\tau_1} \cosh^2(s_1) - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (3.114)$$

On obtient une expression similaire à celle obtenue par le modèle 1D présenté dans le chapitre 1. Une fois la profondeur estimée, l'aire S pourra être déterminée par la procédure décrite précédemment.

3.4 Choix de la zone de référence

Le contraste thermique local est défini comme étant la différence des thermogrammes normalisés localement, issus de deux expériences flash faites l'une sur la plaque saine ($T_o(t)$) et l'autre sur la plaque défectueuse ($T(t)$). En pratique, cette procédure est irréalisable du fait de l'indisponibilité d'une plaque saine de référence ou du fait de la difficulté du traitement des données issues de deux expériences différentes.

En fait, une seule expérience peut être pratiquée sur la plaque à contrôler. Celle-ci produit alors le champ de température transitoire $T(P, t)$ où $P(x, y)$ est un point de la surface de la plaque. Le thermogramme de référence $T_o(t)$ est saisi durant la même expérience en un point P_o considéré comme sain.

Le contraste thermique dépend donc du choix qui a été fait par l'expérimentateur pour la région ou le point P_o de référence. Ce dernier doit être choisi loin des points affectés par le défaut (points froids en face arrière et points chauds en face avant) et pas trop près des bords de l'échantillon à cause des pertes thermiques convectives sur la surface latérale.

Si ces deux contraintes sont respectées, le thermogramme de référence ne dépendrait que des pertes thermiques sur les deux faces de la plaque. L'influence de ces pertes sur le contraste a été étudiée par Lamine (1988). Il a été montré dans le cas d'une normalisation des thermogrammes par rapport à la température asymptotique de l'expérience adiabatique, pour une résistance réduite $R_c = 0.08$ (ce qui correspond à 6.4 microns d'air dans une plaque de carbone époxy de 2 mm d'épaisseur) et un coefficient de pertes h de $20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ (ce qui donne un nombre de Biot = 0.06) que :

- le niveau du contraste maximum reste pratiquement inchangé en face avant par rapport au cas adiabatique et ce, quelle que soit la profondeur du défaut.
- le niveau de cet extremum baisse légèrement en valeur absolue en face arrière.

Notons que les coefficients habituels de transfert à température ambiante (convection naturelle et rayonnement linéarisé) sont de l'ordre de $10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, ce qui signifie que les réductions de contraste données ci-dessus sont surestimées.

D'autre part, l'énergie Q absorbée par la plaque ne peut être mesurée et, en pratique, on procède à une normalisation locale par les maxima des courbes avec pertes en face arrière ($T_{max} < \frac{Q}{\rho c e}$). Ce qui signifie que l'effet des pertes est encore plus faible en face arrière. Il en est de même en face avant si l'on normalise non pas à l'aide de la température asymptotique T_o , qui est nulle, mais en utilisant la température au premier instant après le flash (voir chapitre 2, normalisation aux temps courts).

3.4.1 Influence des effets bidimensionnels sur le choix de la zone de référence

Si on exclue l'effet des pertes sur les deux faces de la plaque sur le thermogramme de référence, celui-ci va dépendre alors de la position x du point P_o , des pertes de chaleur sur les surfaces latérales de la plaque (coefficient d'échange h), de la taille limitée de celle-ci (2ℓ) et du défaut ($2 b$).

$$T_{oexp} = f(x, h, b, \ell) \tag{3.115}$$

ou encore : $T_{oexp} = g(h, X_r, L_r)$ (3.116)

avec : X_r et L_r sont des variables réduites calculées grâce à :

$$X_r = x-b \quad L_r = \ell-b \tag{3.117}$$

On réduit ainsi le nombre de paramètres affectant le choix de P_o et l'on a l'expression suivante qui représente le biais au premier ordre introduit par chacun d'eux sur le thermogramme exact :

$$T_{oexp} = T_o + \frac{\partial g}{\partial h} \bigg|_h dh + \frac{\partial g}{\partial L_r} \bigg|_{L_r} dL_r + \frac{\partial g}{\partial X_r} \bigg|_{X_r} dX_r + O(h^2 + L_r^2 + X_r^2) \tag{3.118}$$

L'influence de chaque paramètre sera étudiée séparément dans le cas d'une expérience en face arrière (voir figure (3.27)) :

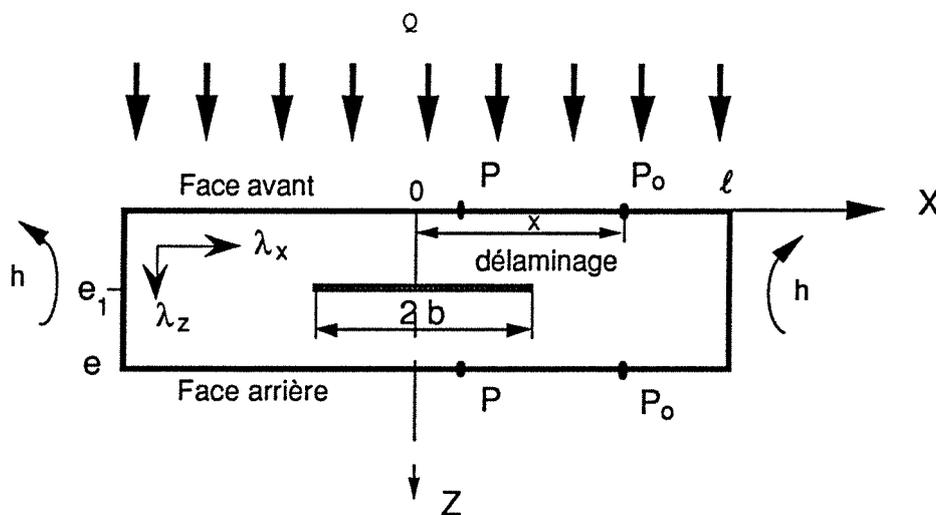


Fig. 3.27 Présentation des différents paramètres intervenant dans le choix de la zone de référence

- l'influence de la distance séparant P_o du bord du défaut (paramètre X_r) sera analysée grâce au modèle exact 2D correspondant à un milieu infini (la longueur l de l'échantillon sera prise très grande), (figure (3.28.a)).
- l'influence des pertes latérales (paramètre h) sera étudiée sur une plaque saine soumise à une impulsion de Dirac, (figure (3.28.b)).
- l'influence de la distance séparant le point P_o du bord de l'échantillon (paramètre L_r) sera analysée également à partir du modèle adiabatique exact 2D, (figure (3.28.c)).

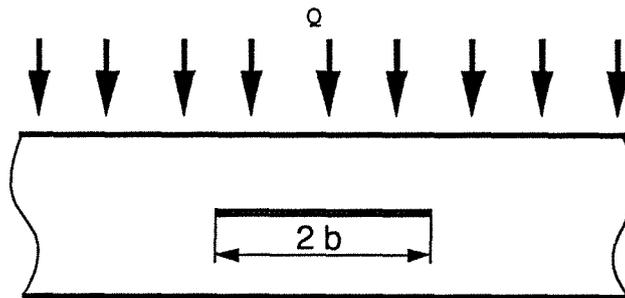


Fig. 3.28.a Influence de la taille du défaut

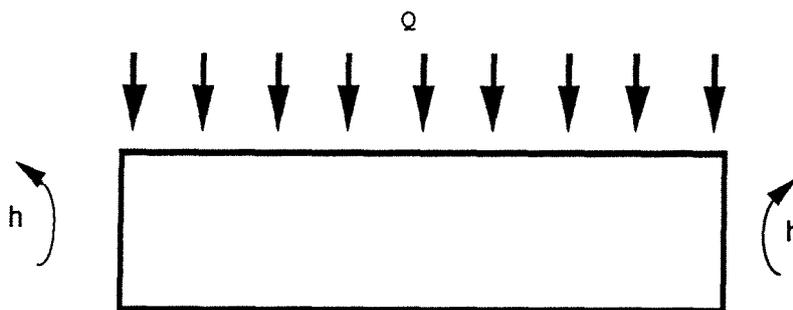


Fig. 3.28.b Influence des pertes latérales

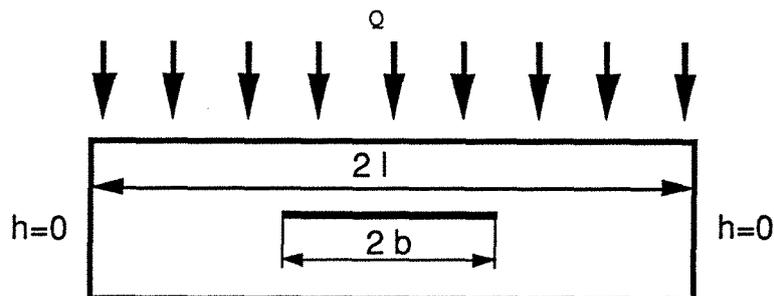


Fig. 3.28.c Influence de la taille de l'échantillon

3.4.2 Effet de la proximité du défaut

Pour une profondeur z_d , une résistance réduite R_c et une taille réduite du défaut b , il est évident qu'il existe un seuil pour la variable réduite X_r au delà duquel les effets bidimensionnels dus au défaut sont inexistantes (voir figure (3.28.a)).

Le système d'équations permettant de décrire les transferts thermiques en géométrie bidirectionnelle dans le matériau, s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - p \tau = 0 \quad (3.119)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (3.120)$$

$$\text{en } x \rightarrow \infty \quad \tau \text{ est finie} \quad (3.121)$$

$$\text{en } z = 0 \quad -\frac{\partial \tau}{\partial z} = 1 \quad (3.122)$$

$$\text{en } z = z_d \quad \frac{\partial \tau^{sup}}{\partial z} = \frac{\partial \tau^{inf}}{\partial z} \quad (3.123)$$

$$\tau^{sup} - \tau^{inf} = R_c s(x, y) \left(-\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \quad (3.124)$$

$$\text{où } \begin{aligned} s(x, y) &= 1 & \text{si } |x| < b \\ s(x, y) &= 0 & \text{si } |x| > b \end{aligned}$$

$$\text{en } z = l \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (3.125)$$

Dans ce cas la transformation de Fourier en cosinus de $\tau(x, z, p)$ s'écrit :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad (3.126)$$

Les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = \infty$, permettent d'obtenir l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - (p + \alpha^2) \theta = 0 \quad (3.127)$$

Le retour dans l'espace de Laplace est donné par l'expression suivante :

$$\tau(x, z, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta(\alpha, z, p) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (3.128)$$

L'écriture sous forme de quadripôles du système précédent dans l'espace de Laplace Fourier est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^{inf} + R_c J \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\text{où : } J = \int_0^b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \psi(x, z_d, p) \cos(\alpha x) dx \quad (3.131)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{inf}(z_d) \\ \phi(z_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

avec : $A_i ; B_i ; C_i$ et D_i ($i = 1, 2$) ayant la même définition qu'au paragraphe 3.1.3.

On constate que la condition en flux sur la face avant en x , se transforme en distribution de Dirac dans l'espace de Fourier.

Si on veut procéder de la même manière que dans le cas d'un milieu d'étendue finie pour résoudre l'équation intégrale en flux de Laplace ci-dessus, on tombe sur une difficulté. En effet, cette fois-ci, la transformée inverse de Fourier est une intégrale de 0 à l'infini et non une somme discrète comme dans le cas précédent. Ce qui empêche d'aboutir au système d'équations en flux de Fourier ϕ . On a :

$$\psi(x, z_d, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi(\alpha, z_d, p) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (3.133)$$

En utilisant cette relation, l'équation intégrale en ϕ peut être formulée de la manière suivante :

$$-\frac{C(\alpha, p)}{C_1(\alpha, p) C_2(\alpha, p)} \phi(\alpha, z_d, p) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\alpha)}{C_1(\alpha, p)} = \frac{R_c}{\pi} \int_0^\infty \phi(\xi, z_d, p) \left[\frac{\sin(\alpha - \xi)}{\alpha - \xi} + \frac{\sin(\alpha + \xi)}{\alpha + \xi} \right] d\xi \quad (3.134)$$

On posera $\sin(\chi d) / \chi = d$ si $\chi = 0$.

Afin de s'affranchir de la borne infinie de l'intégrale ci-dessus, il est nécessaire de supposer le matériau de longueur ℓ finie et isolé en $x = \ell$. La longueur ℓ doit être choisie grande devant les dimensions caractéristiques des conditions aux limites en x et de la taille b du défaut. Le flux de Laplace à l'interface peut être calculé alors grâce à :

$$\psi(x, z_d, p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\ell} \phi(0, z_d, p) + \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\ell} \phi\left(\frac{k\pi}{\ell}, z_d, p\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad (3.135)$$

Ainsi les problèmes relatifs au milieu d'extension finie ou infinie se traitent numériquement de la même manière.

Sur la figure (3.29), nous avons présenté l'évolution temporelle des écarts thermiques en face arrière sur quelques points en dehors de la zone défectueuse de l'échantillon, pour différentes combinaisons des paramètres, en prenant soin de prendre ℓ grand. On constate qu'à partir de $X_r = 1.68$, les écarts deviennent très faibles. La figure (3.30) montre des profils instantanés de l'écart réduit. On remarque que le profil de l'écart aux temps longs (Nombre de Fourier de 0.5 à 0.8) s'étale sur une zone plus large qu'aux instants antérieurs. D'où l'intérêt de réduire l'étude au profil de contraste à un nombre de Fourier de 0.5 pour d'autres valeurs des paramètres du défaut.

Les simulations présentées sur les figures (3.30 à 3.32), montrent que l'étalement du profil du contraste ne varie pas beaucoup avec la profondeur z_d et la résistance R_c du défaut ($z_d = 0.1 ; .. ; 0.5$ et $R_c = 0.01 ; .. ; 0.8$).

L'étalement du contraste n'est dépendant alors que de la taille réduite du défaut. L'influence de ce paramètre est présentée sur la figure (3.33), où des profils de l'écart ont été translatés jusqu'à l'extrémité du défaut pour deux valeurs différentes de b . On note que les effets bidimensionnels disparaissent pour les deux cas à partir de l'abscisse réduite $X_r = 2.30$. Cette valeur constitue la première frontière de la zone saine.

Fig.3.29 Influence du défaut sur les thermogrammes de la zone saine

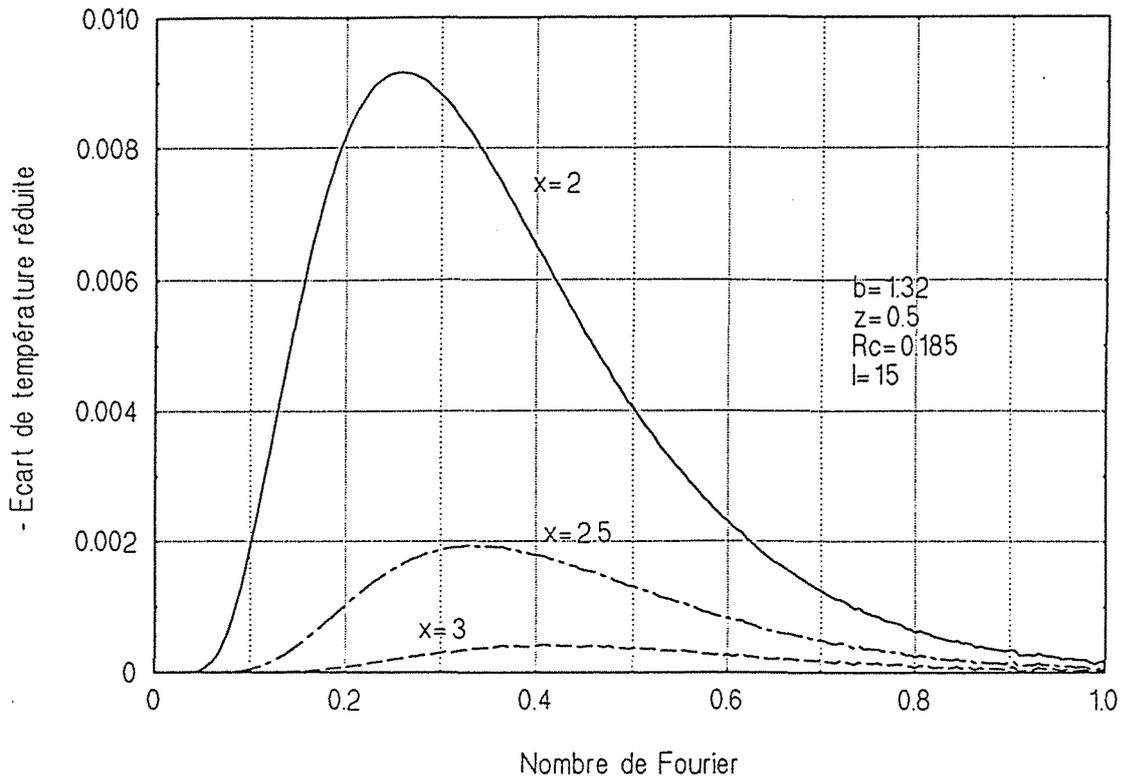


Fig.3.30 Profils des écarts instantanés de température réduite

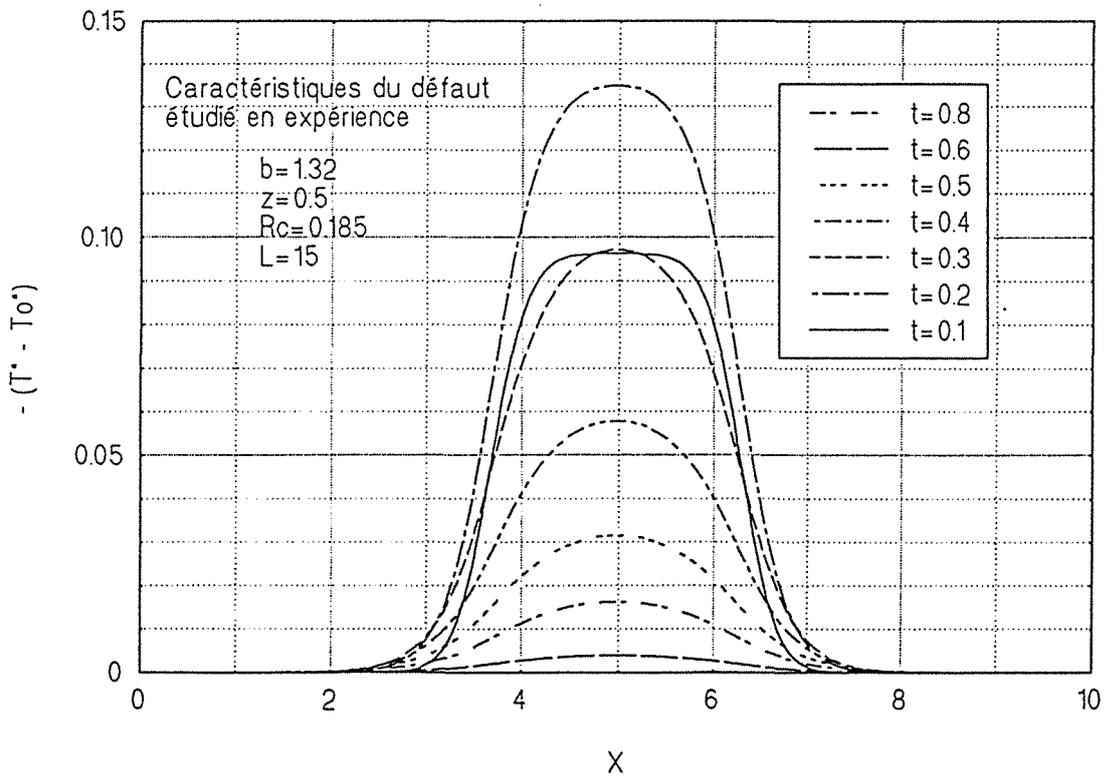


Fig.3.31 Ecart de température réduite dus à la taille limitée du défaut sur le thermogramme de la zone saine

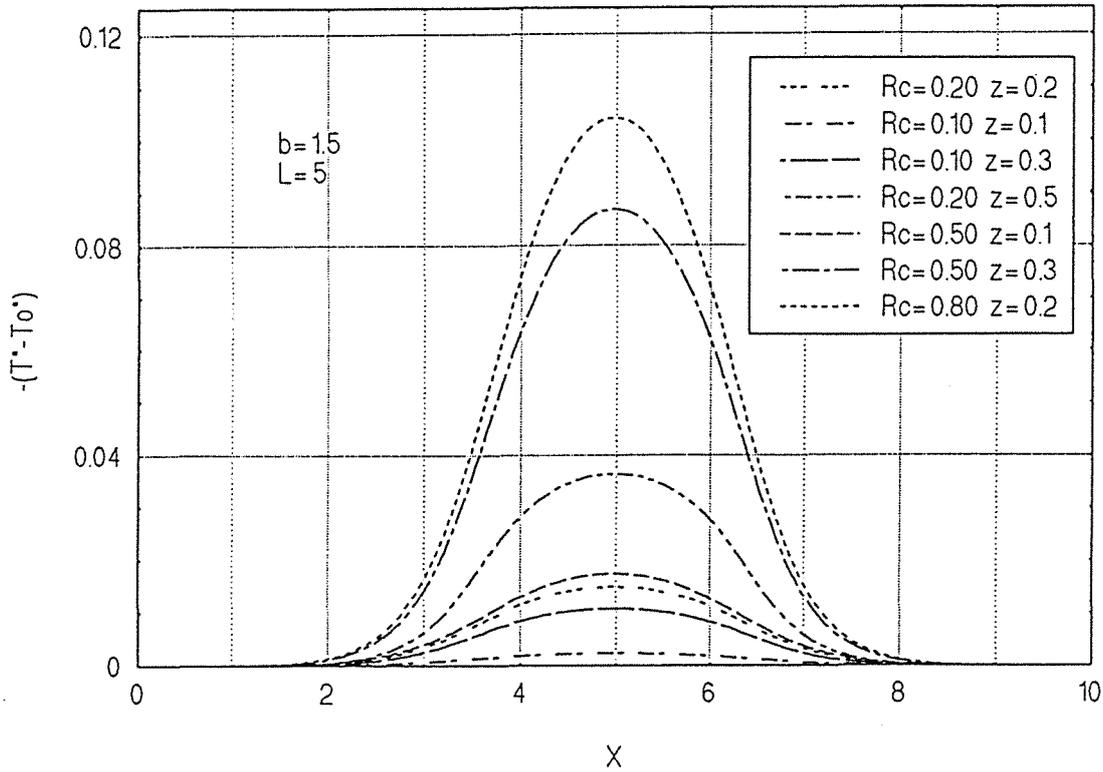


Fig.3.32 Profils de l'écart de température réduite dû à la taille limitée du défaut sur le thermogramme de la zone saine

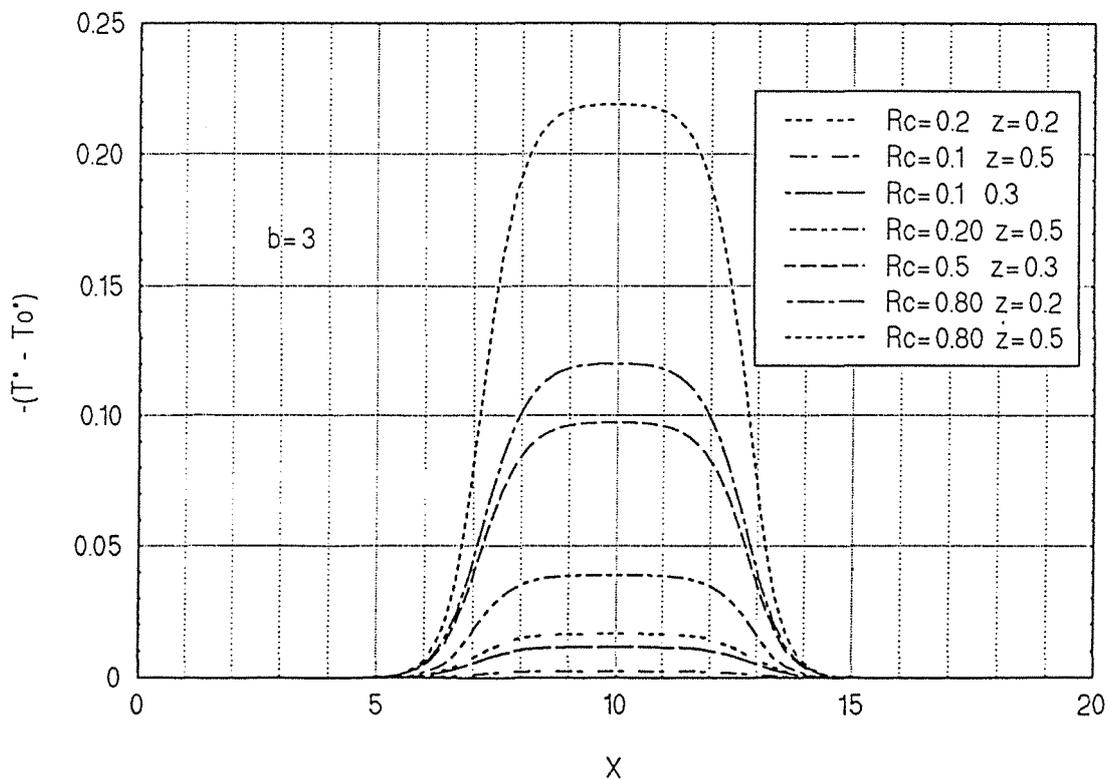
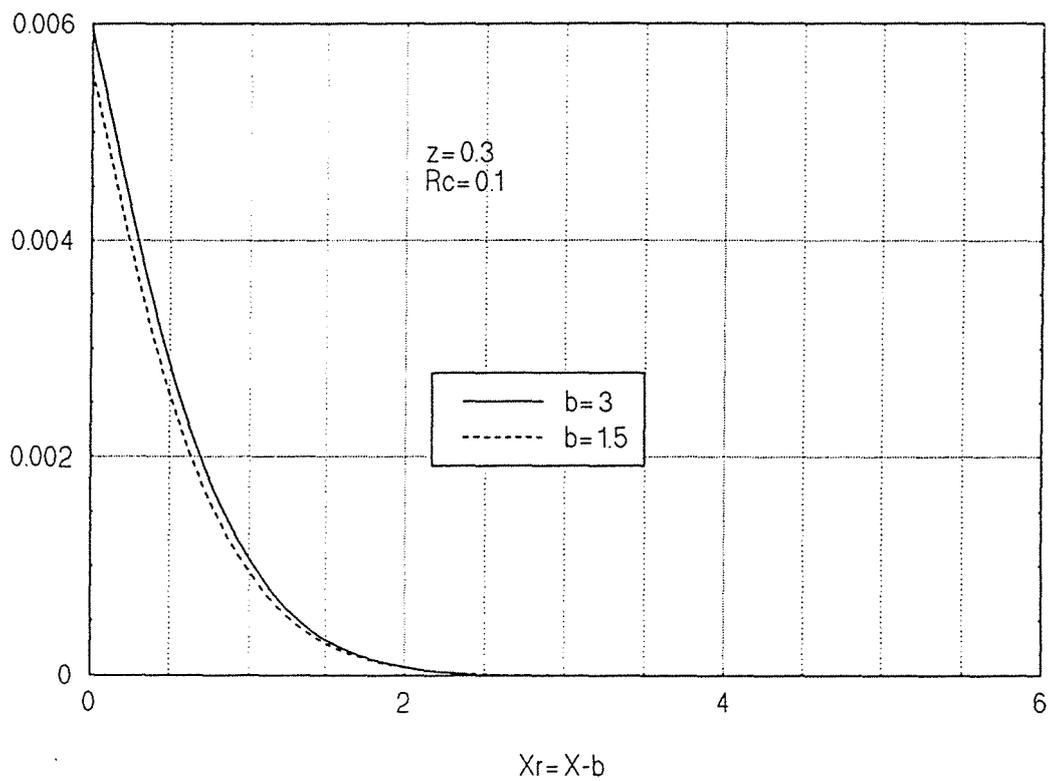


Fig.3.33 Ecart produit par la taille limitée du défaut sur le thermogramme de la zone saine



3.4.3 Effet de la proximité du bord avec pertes

L'analyse de l'influence des pertes latérales sur la réponse en face arrière à l'impulsion de Dirac sur une plaque saine de taille limitée va permettre de déterminer l'autre frontière de la zone saine. Le transfert de chaleur est décrit dans l'espace de Laplace en utilisant les variables réduites déjà définies au paragraphe (3.1.3) :

- Equation de diffusion :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - p \tau = 0 \quad (3.136)$$

- au centre de l'échantillon $x = 0$ $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ (par symétrie) (3.137)

- sur la surface latérale $x = \ell$ $-\frac{\partial \tau}{\partial x} = Bi \tau$ (3.138)

avec : $Bi = \frac{h e}{\sqrt{\lambda_x \lambda_z}}$ (le nombre de Biot)

- sur la face avant $z = 0$ $-\frac{\partial \tau}{\partial z} = 1$ (impulsion de Dirac) (3.139)

- sur la face arrière $z = l$ $\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$ (surface isolée) (3.140)

On applique la transformation de Fourier en cosinus au champ de température de Laplace :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^\ell \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad (3.141)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors dans l'espace de Laplace Fourier sous la forme ordinaire, comme suit :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - (p + \alpha^2) \theta = 0 \quad (3.142)$$

et les conditions aux limites deviennent :

- sur la face avant : $-\frac{d\theta}{dz}(\alpha, 0, p) = \frac{\sin(\alpha \ell)}{\alpha}$ (3.143)

- sur la face arrière : $\frac{d\theta}{dz}(\alpha, l, p) = 0$ (3.144)

Le champ de température en face arrière est calculé par :

$$\theta(\alpha, l, p) = \frac{\sin(\alpha l)}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{p+\alpha^2} \sinh(\sqrt{p+\alpha^2} l)} \quad (3.145)$$

où les pulsations spatiales sont solutions de l'équation transcendante suivante :

$$\alpha \operatorname{tang}(\alpha l) = Bi \quad (3.146)$$

La solution dans l'espace de Laplace-Fourier s'écrit alors sous la forme [Ozizik (1990)] :

$$\tau(x, l, p) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{\alpha_n^2 + Bi^2}{\ell(\alpha_n^2 + Bi^2) + Bi} \frac{\sin(\alpha_n l)}{\alpha_n \sqrt{p+\alpha_n^2} \sinh(\sqrt{p+\alpha_n^2} l)} \cos(\alpha_n x) \quad (3.147)$$

Le champ de température obtenu est normalisé par le niveau adiabatique qui ne correspond pas dans notre cas (avec pertes) au niveau maximum des thermogrammes. Le niveau maximum atteint dépend du rapport $\frac{Q}{\lambda_z}$. Une nouvelle normalisation des thermogrammes par leurs maxima locaux

est donc utile pour que le résultat final soit indépendant de la conductivité λ_z et par conséquent universel.

Le champ dans l'espace réel est obtenu par l'algorithme de Stehfest.

Des simulations calculant la différence de température réduite entre le cas avec pertes et le cas sans pertes ont été réalisées sur un échantillon carré de côté réduit $2 \ell = 15.85$ (60 mm de côté, 2 mm d'épaisseur et un rapport d'anisotropie de 3.58).

La figure (3.34) montre l'évolution temporelle de l'erreur commise sur le thermogramme réduit de référence sur le bord de l'échantillon et pour un point situé à $\frac{\ell}{4}$ du bord, pour un coefficient d'échange $h = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ($Bi = 0.0315$). L'erreur est plus importante pour le premier cas et reste positive jusqu'à un Fourier de 0.77 ; ceci engendre une surestimation du contraste thermique en valeur absolue. Cela peut être la cause de la mauvaise estimation du contraste thermique dans le cas de l'expérience décrite précédemment. Ce qui n'est pas le cas pour la proximité du défaut, qui agit dans le sens inverse. Par contre pour le second cas, l'erreur est faible et négative, d'où une sous-estimation du contraste arrière en valeur absolue. Des profils de l'erreur à différents instants présentés dans la figure (3.35), montrent la limite en deçà de laquelle l'effet des pertes est négligeable. A partir du bord, cette limite en grandeur réduite est égale à 3. Elle constitue ainsi la seconde frontière de la zone de référence.

Un calcul similaire pour $h = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ donne pratiquement la même valeur. En outre, même la zone défectueuse est affectée par les pertes latérales mais avec un degré moindre. Ceci fait que l'erreur sur le contraste est encore plus négligeable, si on respecte la limite donnée ci-dessus.

Fig.3.34 Thermogrammes des écarts produits par les pertes latérales sur le thermogramme de la zone saine

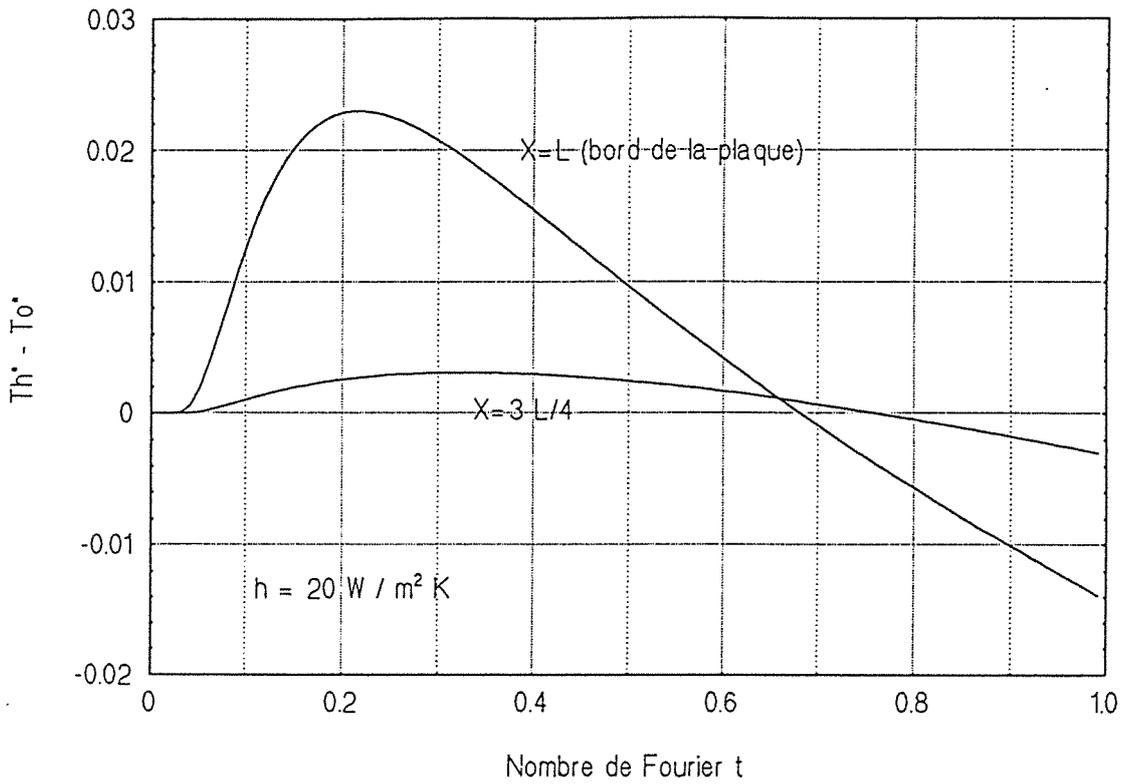
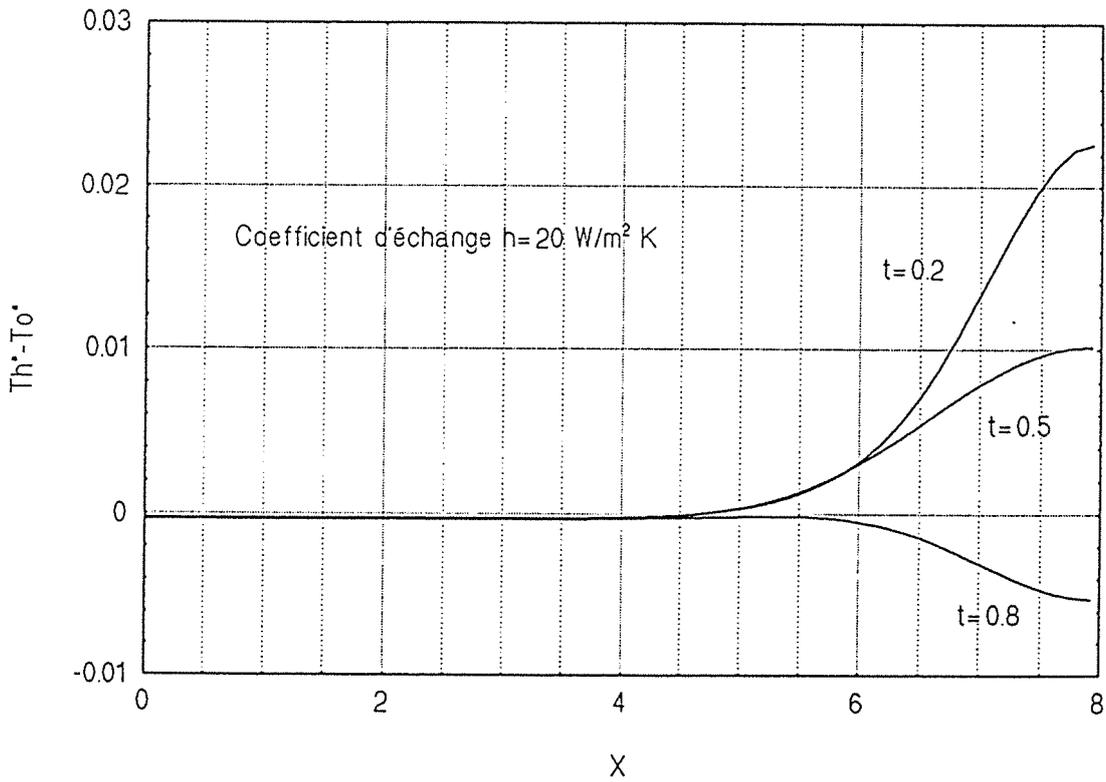


Fig.3.35 Profils instantanés des écarts induits par les pertes latérales sur le thermogramme de la zone de référence



3.4.4 Effet de la proximité du bord de la plaque sans pertes

Des simulations basées sur le modèle 2D exact ont été faites pour un défaut de côté réduit $2b = 2.64$ (cette valeur correspond à l'échantillon en carbone époxy contrôlé dans l'expérience précitée) dans un milieu de taille finie 2ℓ . Le contraste maximum a été tracé pour différentes extensions de l'échantillon. On a constaté qu'il est confondu avec la réponse calculée pour un milieu infini (cas où ℓ est très grand). On conclut donc, que l'extension ℓ n'a aucune influence sur l'étalement des effets 2D, et que c'est uniquement la taille du défaut et les pertes latérales qui déterminent la limite de la zone de référence.

Si on récapitule les résultats des trois études, on conclut que la zone ou un point de référence doit être choisi à une distance réduite du bord du défaut supérieure à 2.3, et de l'extrémité de la plaque à une distance supérieure à 3.

3.5 Transformations numériques inverses de Fourier et de Laplace

L'inversion de Fourier grâce à la série en cosinus (3.23) peut être très gourmande en temps de calcul, surtout dans le cas de géométrie tridimensionnelle. Il existe d'autres algorithmes numériques de transformation de Fourier qui font les calculs en un nombre réduit d'opérations, et par conséquent sont plus rapides. En effet, l'algorithme de la transformation de Fourier rapide par exemple (ou Fast Fourier Transform en Anglais) permet de déterminer à partir de N valeurs du vecteur originel θ en $\alpha_k (= \frac{k\pi}{\ell})$, N valeurs de τ en $x_q (= \frac{q\ell}{N})$, q variant de 0 à $N-1$, en $N \log_2(N)$ opérations au lieu de N^2 . L'algorithme de la FFT [Cooley et Tukey (1965)] est adaptable à des séries de Fourier en cosinus : la procédure de calcul est décrite dans l'annexe 3.1. Le retour numérique dans l'espace temps est réalisé par l'algorithme de Stehfest (1970), qui donne une bonne précision des profils au cours du temps. Dans le cas où on désire calculer de nombreux profils au cours du temps, d'autres algorithmes plus rapides, basés sur la FFT sont plus intéressants à utiliser [Hsu et Dranoff (1987)]. Une étude comparée de ces méthodes peut être trouvée dans Davies et Martin (1979).

Le calcul des séries de Fourier nécessite la troncature à N termes d'où l'introduction de la notion de fréquence maximale d'échantillonnage α_{max} telle que : $\alpha_{max} = N \frac{\pi}{\ell}$. Cette fréquence maximale définit dans l'espace réel un pas d'échantillonnage permettant de déterminer N valeurs du contraste en N valeurs de x : $\Delta x = \frac{\ell}{N}$. Si l'on désire décrire avec précision l'évolution de la température autour du défaut, il faut que le pas d'échantillonnage soit au moins inférieur sinon petit par rapport à b .

Le calcul de la série double en cosinus dans le cas tridimensionnel, peut être très lourd, surtout si on n'utilise pas des algorithmes de transformée de Fourier rapide. Une analyse de la puissance spectrale de la fonction $\frac{\sinh(u z_d)}{\sinh(u)}$ figurant dans la solution du contraste arrière perturbée en ε - équation (3.54) - (en face avant, la fonction concernée est $\frac{\sinh(u(1-z_d))}{\sinh(u)}$), a été menée pour différentes valeurs de la variable de Laplace p . L'étude a montré que le spectre double, soit aux temps courts (p est grand), soit aux temps longs (p est petit) n'est significatif que sur une petite zone au voisinage de l'origine des fréquences. L'étendue de cette zone est fortement liée à la profondeur de l'interface. Ceci est illustré par la figure (3.36) et les profils suivant la diagonale du domaine spectral sur la figure (3.37), pour deux profondeurs et valeurs de p distinctes. Il faudrait donc limiter la transformation de Fourier double qu'à la partie utile du domaine spectral. Ainsi, le temps de calcul sera amélioré considérablement.

Le calcul de la série double pourra être approché en utilisant la bande de 40×40 fréquences, au voisinage de l'origine du repère, au lieu de faire le calcul en utilisant toutes les pulsations. Si on suppose, en première approximation que le spectre est séparable, la double série de Fourier se transforme en un produit de deux séries simples. Dans ce cas, le contraste tridimensionnel en face avant s'écrit par exemple pour un défaut de profondeur e_1 et d'extension $a \times b$ dans un échantillon d'extension $L \times \ell$:

$$\Delta\tau(x, y, 0, p) = \frac{\varepsilon}{L\ell}$$

$$\left\{ a \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j \frac{\pi a}{L})}{j \frac{\pi}{L}} \cos(j \frac{\pi x}{L}) \frac{\sinh[(p + (\frac{j \pi}{L})^2)^{1/2} e_2]}{\sinh[(p + (\frac{j \pi}{L})^2)^{1/2}]} \right\}$$

$$\left\{ b \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi b}{\ell})}{k \frac{\pi}{\ell}} \cos(k \frac{\pi y}{\ell}) \frac{\sinh[(p + (\frac{k \pi}{\ell})^2)^{1/2} e_2]}{\sinh[(p + (\frac{k \pi}{\ell})^2)^{1/2}]} \right\}$$

(3.148)

Un exemple de calcul direct du contraste thermique de Laplace ($p = 1$), créé par deux défauts superposés en croix, basé sur le principe de superposition des contrastes perturbés au premier ordre, est illustré sur les figures (3.38) et (3.39) - $R_{c1} = 0.05$; $R_{c2} = 0.10$; $z_{d1} = 0.1$; $z_{d2} = 0.5$; côté échantillon $\ell = 10$ -.

L'inversion de Fourier a été réalisée selon les deux techniques précédemment évoquées. Le résultat porté sur la figure (3.38), a été obtenu par une inversion de Fourier basée sur l'hypothèse

Fig.3.36 Fonction $\sinh(u^*z)/\sinh(u)$, $p=10$, $z=0.5$ et $L=10$

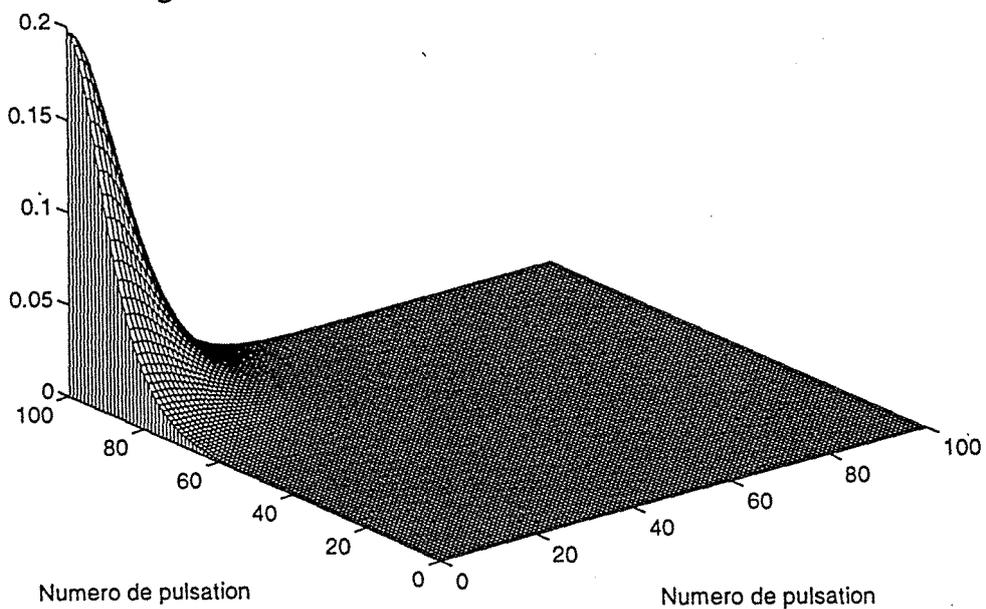
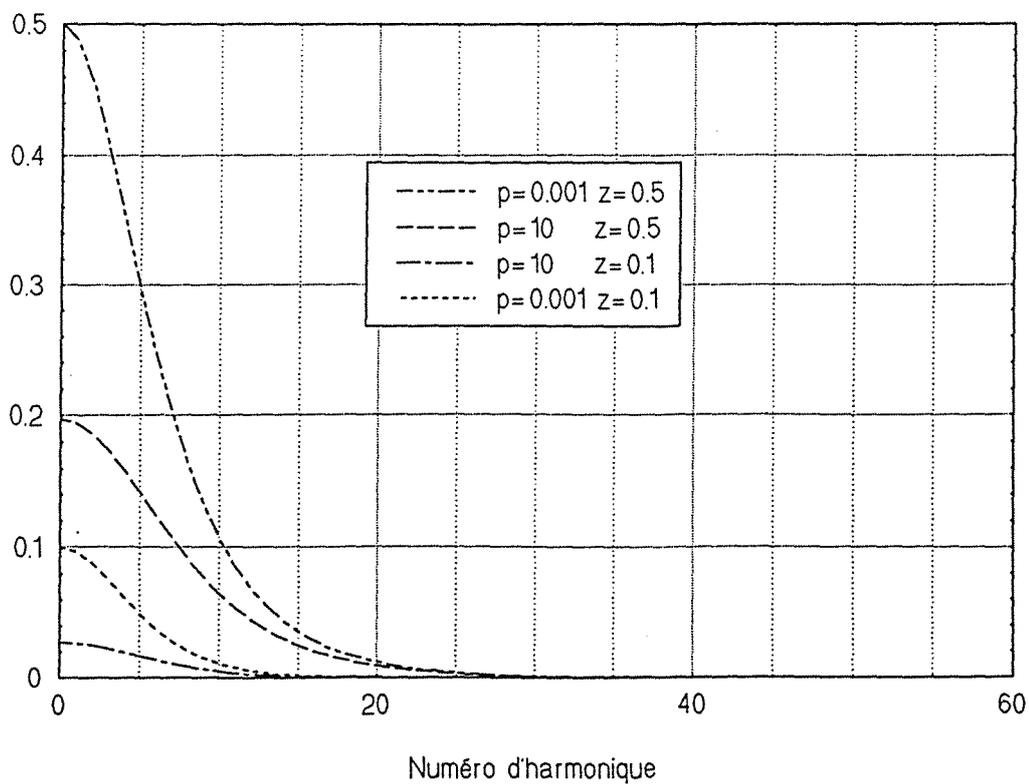


Fig.3.37 Profil en diagonale du spectre double $\{\sinh(u^*z)/\sinh(u)\}$



de séparabilité du spectre double du contraste (équation (3.148)). La seconde répartition spatiale du contraste de Laplace présentée sur la figure (3.39), a été calculée en supposant que le spectre double du contraste est négligeable en dehors de la bande spectrale carrée de 60×60 fréquences au voisinage de l'origine du repère spectral. La comparaison des profils passant par la ligne médiane des défauts en croix ($x = 5$) et la ligne correspondant à l'abscisse $x = 4$, est illustrée par les figures (3.40) et (3.41). Les résultats présentés montrent que l'hypothèse de la séparabilité du spectre donne une approximation très commode pour les calculs du transfert thermique transitoire tridirectionnel.

Sur les figures (3.42) à (3.45), nous avons porté la répartition spatiale tridimensionnelle à différents instants de l'histoire thermique du contraste en face avant produit par les deux résistances précitées. Le calcul basé sur la séparation du spectre (équation (3.148)) est effectué grâce au produit de deux FFT simples. Le temps de CPU nécessaire pour le calcul du contraste thermique sur une grille instantanée de 256×256 points est de 7 secondes, quand l'algorithme de Stehfest est utilisé avec dix itérations (une autre version de l'algorithme utilise vingt itérations).

3.6 Conclusion

L'utilisation des transformations intégrales sur les variables d'espace permet de simplifier la présentation de problèmes bi- ou tridimensionnels, dans le cas de multicouches. Le principal avantage des transformations utilisées dans notre étude, est de pouvoir employer les algorithmes de transformation de Fourier rapide (FFT) et de retour numérique de Laplace.

Dans une première étape, grâce au formalisme du quadripôle thermique 3D, nous avons pu obtenir la solution exacte décrivant le mécanisme de transfert transitoire au travers d'un défaut de taille limitée mais ayant une résistance constante. La solution finale s'exprime sous la forme d'une double série qui doit être tronquée avant de construire un système d'équations linéaires qui est résolu numériquement. Malheureusement, la convergence de cette double série est parfois très lente, ce qui peut rendre cette méthode très gourmande en temps de calcul.

Dans une seconde étape, la réduction du modèle par la méthode des perturbations, a permis d'aboutir à une expression simple et rapide, traduisant la superposition des contrastes, dans le cas où les résistances thermiques sont faibles. Cette nouvelle approche, nous a permis de traiter un problème de diffusion transitoire complexe en géométrie tridirectionnelle par des calculs plus souples que la modélisation exacte. Le raffinement des modèles perturbés en ε (petites résistances) et en η (grandes résistances) par des approximants de Padé, a permis d'obtenir des modèles réduits assez performants, valables pour des résistances de n'importe quel ordre de grandeur.

Fig.3.38 Contraste de Laplace ($p=1$) calcule par la separation du spectre double

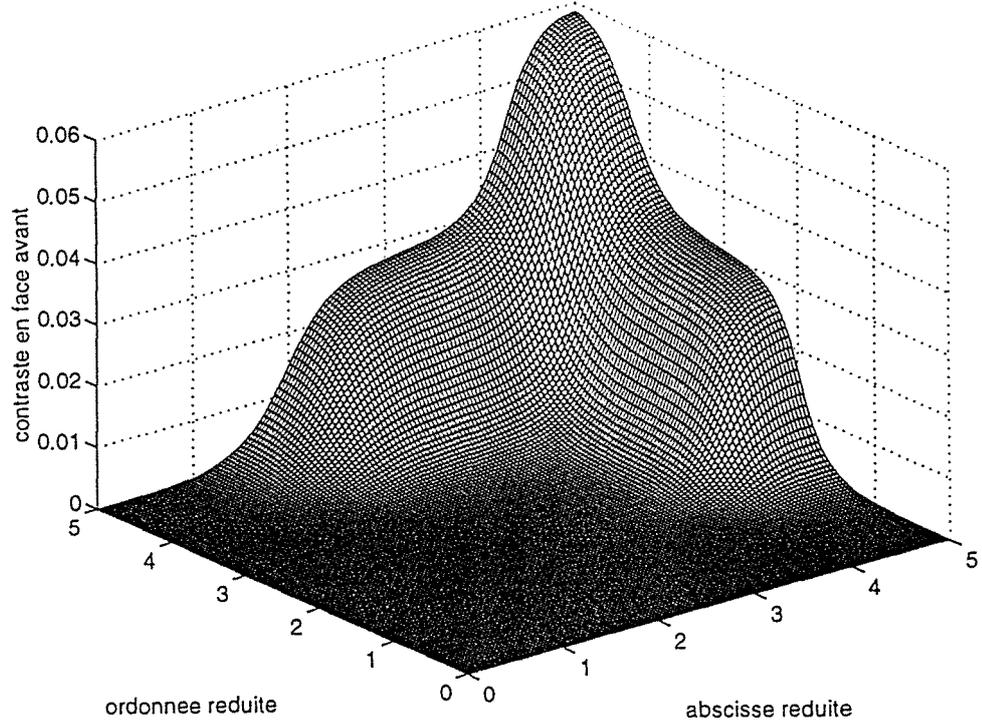


Fig.3.39 Contraste de Laplace ($p=1$) calcule en utilisant la bande 60x60 frequences du spectre

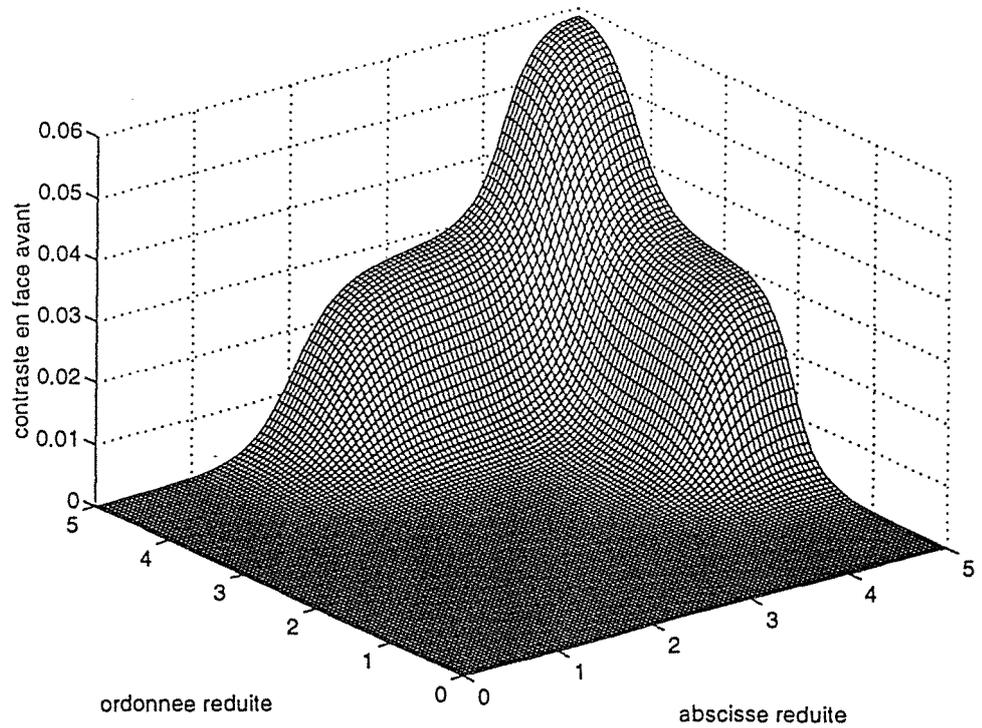


Fig.3.40 Comparaison des profils en contraste de Laplace sur la ligne d'abscisse réduite 4 des défauts en croix. Les profils ont été obtenus respectivement par la séparation du spectre et en utilisant la bande 60x60 fréquences

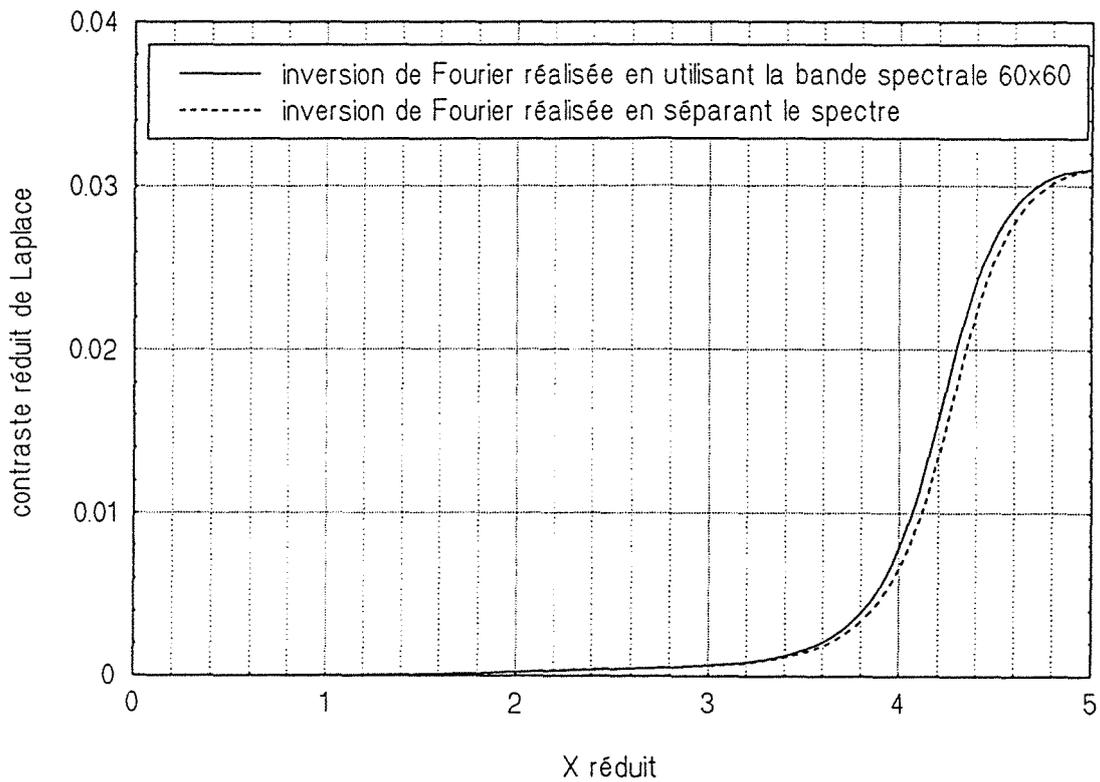


Fig.3.41 Comparaison des profils en contraste de Laplace sur la ligne médiane (abscisse réduite 5) obtenus respectivement par séparation du spectre et en utilisant la bande 60x60 fréquences

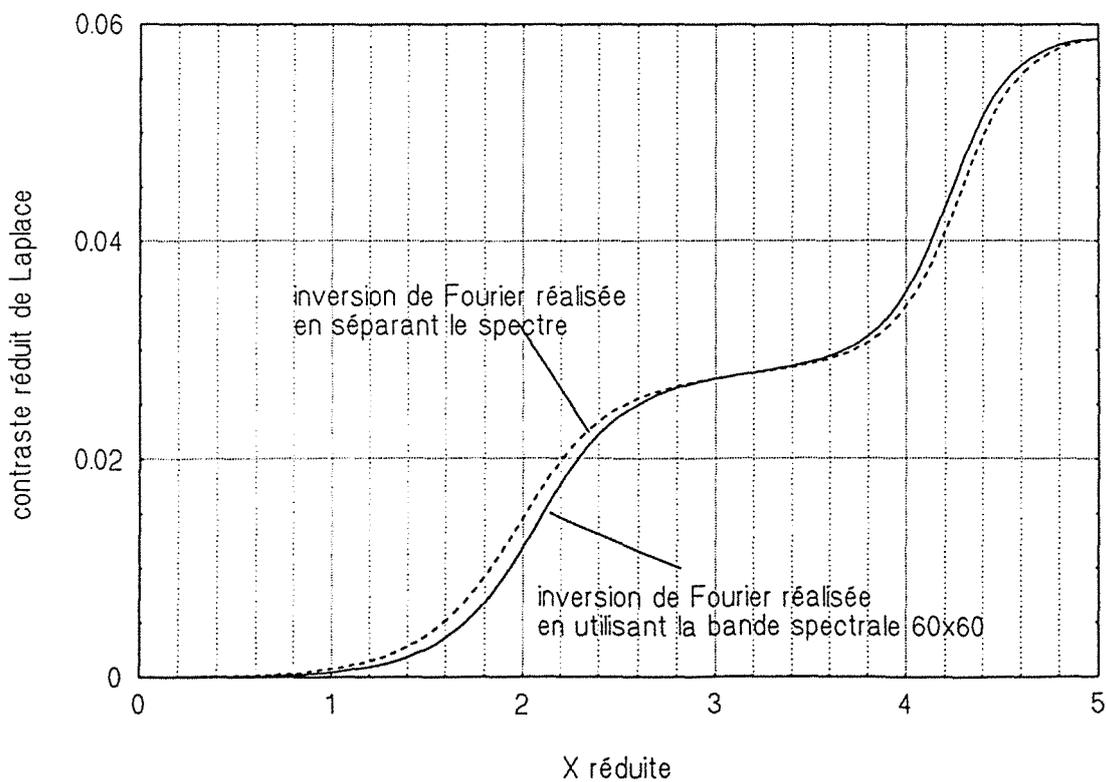


Fig.3.42 Nombre de Fourier = 0.05 , Face avant

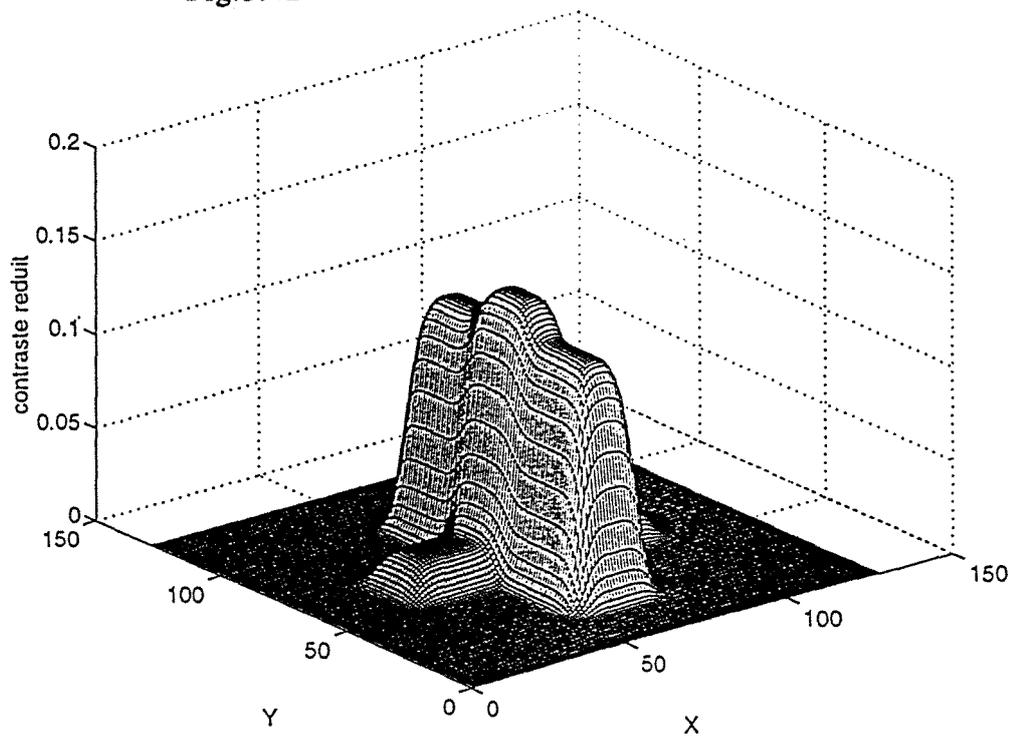


Fig.3.43 Nombre de Fourier = 0.125 , Face avant

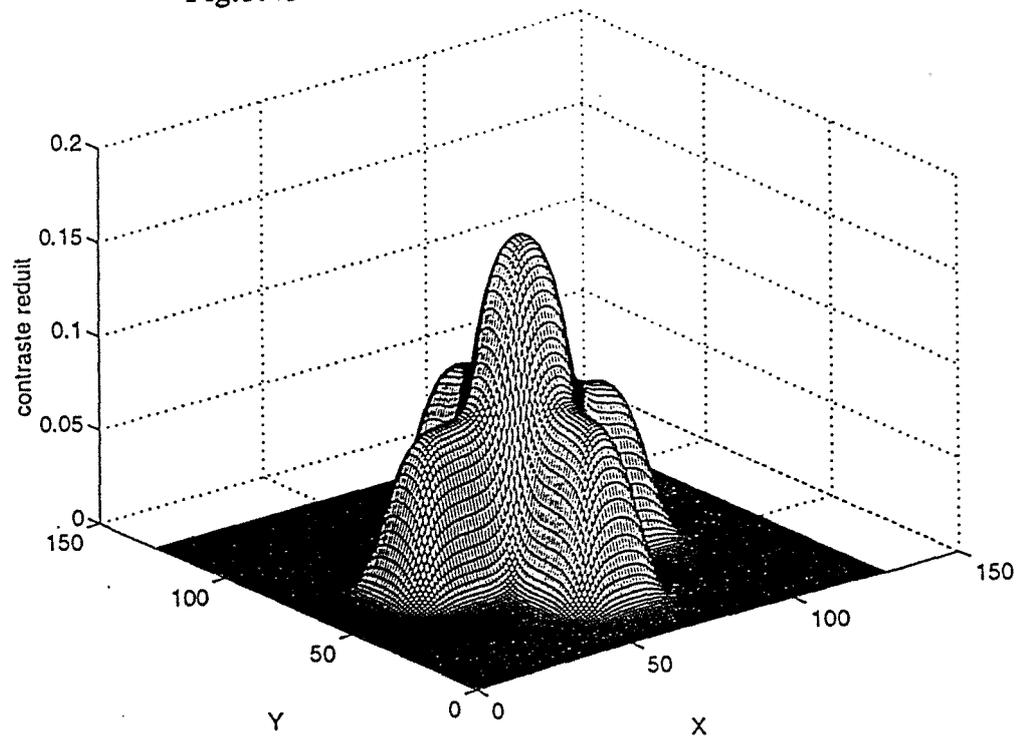


Fig.3.44 Nombre de Fourier = 0.225 , Face avant

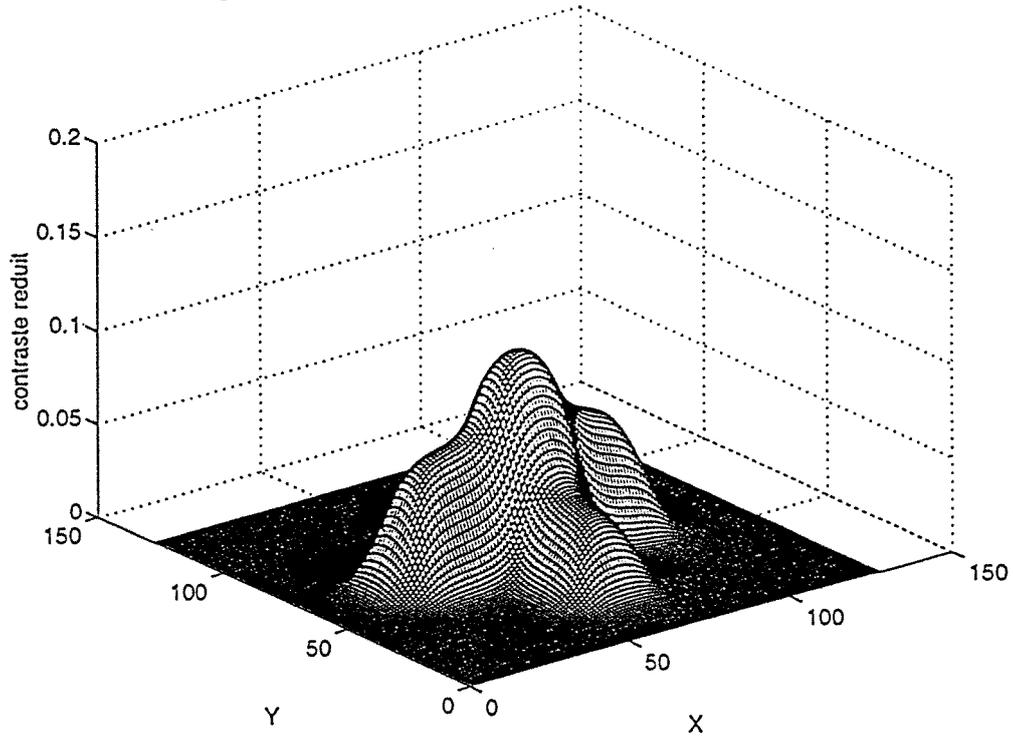
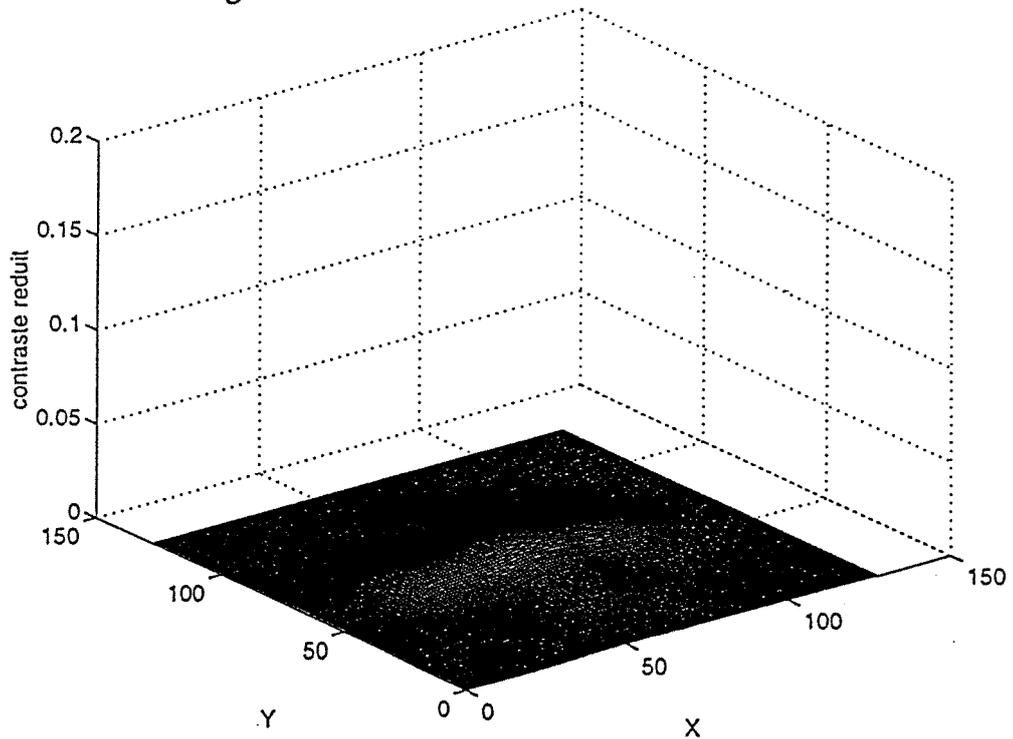


Fig.3.45 Nombre de Fourier = 0.5 , Face avant



La simplicité des solutions obtenues et leur sens physique vis à vis des paramètres du problème thermique militent en faveur de cette approche, souvent austère dans d'autres domaines de la physique. L'intérêt de cette formulation est montré par la solution immédiate du problème inverse de la détermination de l'aire d'un insert de Téflon dans un échantillon de carbone-époxy.

L'influence de la variable de Laplace et le choix de la zone de référence vis à vis du bruit de mesure, des effets 2D et de la proximité des défauts et des bords ont été mis en évidence pour la détermination des paramètres du défaut.

Il serait également intéressant de pouvoir utiliser l'approximation au premier ordre en ε pour l'estimation des résistances thermiques à partir d'un champ thermique transitoire. En effet, on aurait pensé à écrire un système d'équations linéaires d'inconnues les résistances ε_i (i : indice du défaut) dans l'espace de Laplace-Fourier. Le système est obtenu en exprimant le contraste dans l'espace de Laplace-Fourier pour autant de combinaisons des paramètres α , β et p que de résistances inconnues.

Cependant il y a une difficulté dans la paramétrisation du problème en pulsations spatiales : la sélection des localisations des résistances (qui peuvent éventuellement être égales à zéro) dans le même plan doit être faite en concordance avec des valeurs adéquates des pulsations spatiales.

Dans le but de ne pas donner autant d'importance à la position des bords de chaque résistance, le problème précédent a été revu. A chaque profondeur on cherche à identifier une résistance qui est une fonction de l'espace. Il y a donc un changement d'approche et on considère un problème d'estimation de fonctions au lieu d'un problème d'estimation de paramètres. Ceci sera l'objectif du chapitre 4.

Chapitre 4

**Estimation de la répartition spatiale d'une
résistance thermique d'interface à partir de
la mesure de la température de surface**

Chapitre 4

Estimation de la répartition spatiale d'une résistance thermique d'interface à partir de la mesure de température de surface

4.0 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude de défauts de tailles limitées, modélisés par des résistances thermiques constantes dans leurs plans. Or en pratique, cette morphologie ne correspond pas tout à fait aux défauts rencontrés dans les applications industrielles. En effet, un délaminage entre deux couches d'un matériau composite stratifié par exemple, est caractérisé par une poche d'air qui est généralement plus épaisse au centre que sur les bords. C'est également le cas dans les applications de soudage ou de collage entre deux matériaux qu'on veut lier parfaitement.

Afin d'étendre le CND par thermographie infrarouge à ce genre de défauts d'interface, ce chapitre a pour objectif l'étude du problème de la diffusion de chaleur au travers de défauts plans dont la répartition de résistance thermique est non uniforme dans son plan.

La géométrie du problème bidimensionnel est présentée sur la figure (4.1). La plaque de dimension $(\ell \times e)$ est fabriquée à partir d'un matériau homogène anisotrope. Les résultats qui seront présentés seront validés pour tout milieu dont les axes principaux d'anisotropie correspondent aux axes du repère cartésien défini par l'orientation de l'échantillon.

4.1 Résolution du problème direct

Le défaut est modélisé par une résistance d'interface $R(x)$, localisée à une profondeur constante e_1 au dessous de la face avant. C'est une fonction de la coordonnée x . La densité d'énergie Q provenant d'un éclaircissement impulsionnel et absorbée par la face avant est supposée uniforme. La température de la plaque à l'instant initial est considérée uniforme dans l'espace et égale à zéro. Les surfaces latérales ($x = 0$ et $x = \ell$) et les faces avant et arrière ($z = 0$ et $z = e$) sont isolées.

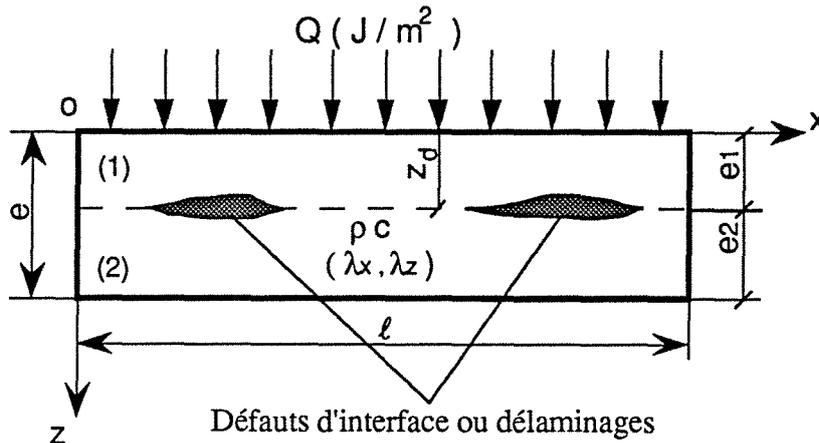


Fig. 4.1 Géométrie du problème bidimensionnel

La température $T(x, z, t)$ dans la plaque doit satisfaire aux équations suivantes :

- équation de diffusion

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

- conditions sur les surfaces latérales $x = 0, \ell$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

- condition sur la face irradiée $z = 0$

$$-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = Q \delta(t) \quad (4.3)$$

(L'éclaircissement peut avoir une évolution spatio-temporelle quelconque).

- condition sur la face opposée $z = e$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

- condition à l'interface $z = e_1$

$$\text{Egalité des flux : } \frac{\partial T^{sup}}{\partial z} = \frac{\partial T^{inf}}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$\text{Saut de température : } T^{sup} - T^{inf} = R(x) \left(-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

- condition initiale

$$T = 0 \text{ à } t = 0 \quad (4.7)$$

avec : λ_x et λ_z les conductivités thermiques du matériau suivant les directions Ox et Oz
 ρc la chaleur volumique du matériau

4.1.1 Formulation du système dans l'espace de Laplace

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, il est possible d'appliquer une transformation de Laplace en temps à l'équation (4.1) et à ses conditions initiale, à l'interface ($z = e_1$) et aux limites, associées. La température de Laplace τ est définie alors par :

$$\tau(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p t) T(t) dt \quad (4.8)$$

Elle obéit au système d'équations suivant :

- équation de diffusion

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_z} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{p}{a_z} \tau = 0 \quad (4.9)$$

- condition sur les surfaces latérales $x = 0, \ell$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

- condition sur la surface irradiée $z = 0$

$$-\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = Q \quad (4.11)$$

- condition sur la surface opposée $z = e$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

- condition à l'interface $z = e_1$

$$\frac{\partial \tau^{sup}}{\partial z} = \frac{\partial \tau^{inf}}{\partial z} \quad (4.13)$$

$$\tau^{sup} - \tau^{inf} = R(x) \left(-\lambda_z \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \quad (4.14)$$

$a_z (= \frac{\lambda_z}{\rho c})$ étant la diffusivité thermique de la plaque dans la direction Oz et les exposants "sup" et

"inf" sont relatifs à la face supérieure et à la face inférieure du défaut.

Il est possible de faire apparaître la densité de flux de chaleur de Laplace ψ suivant la direction Oz dans les équations (11 à 14). C'est la transformée de Laplace de la densité de flux de chaleur axiale

$\varphi (= -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z})$:

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p t) \varphi(t) dt \quad (4.15)$$

Dans le but de diminuer le nombre de paramètres du problème, il est plus commode d'utiliser des variables réduites :

$$\tau^* = \tau / (Qe/\lambda_z) \quad T^* = \rho c e T / Q$$

$$\psi^* = \psi / Q \quad \varphi^* = e^2 \varphi / (a_z Q)$$

$$t^* = a_z t / e^2 \quad p^* = e^2 p / a_z$$

$$x^* = \frac{x}{e} (\lambda_z / \lambda_x)^{1/2} \quad z^* = z / e$$

$$e_1^* = e_1 / e \quad \ell^* = \frac{\ell}{e} (\lambda_z / \lambda_x)^{1/2}$$

$$R^*(x^*) = R(x) / (e/\lambda_z)$$

Dans la suite du chapitre l'exposant "*" sera omis pour des raisons de simplicité.

L'équation de diffusion (4.9) devient alors :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - p \tau = 0 \quad (4.16)$$

Les conditions (4.10 à 4.14) deviennent :

$$\text{en } x = 0, \ell \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

$$\text{en } z = 0 \quad -\frac{\partial \tau}{\partial z} = 1 \quad (4.18)$$

$$\text{en } z = l \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (4.19)$$

$$\text{en } z = z_d \quad \frac{\partial \tau^{sup}}{\partial z} = \frac{\partial \tau^{inf}}{\partial z} \quad (4.20)$$

$$\tau^{sup} - \tau^{inf} = R(x) \psi \quad (4.21)$$

4.1.2 Ecriture du modèle dans l'espace de Laplace-Fourier

Pour les mêmes raisons évoquées au chapitre 3, la transformation de Fourier spatiale qu'on doit appliquer à la température de Laplace $\tau(x, z, p)$ est définie par :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^{\ell} \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad (4.22)$$

L'extrémité $x = \ell$ étant isolée thermiquement, les valeurs propres du problème prennent des valeurs discrètes telles que [Ozizik (1990)] :

$$\alpha = \alpha_i = \frac{i \pi}{\ell} \quad \text{avec } i \text{ un entier naturel} \quad (4.23)$$

Si θ est connue, le retour dans l'espace de Laplace est donné par l'expression suivante :

$$\tau(x, z, p) = \frac{1}{\ell} \left[\theta_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \cos(\alpha_i x) \right] \quad (4.24)$$

avec : $\theta_i = \theta(\alpha_i, z, p)$

L'équation (4.16) devient alors, en tenant compte des conditions aux limites en x :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - (p + \alpha^2) \theta = 0 \quad (4.25)$$

Si ϕ est la transformée de Fourier en cosinus de la densité de flux de chaleur de Laplace ψ , qui est égale à l'unité en $z = 0$ et à zéro en $z = 1$ (les deux faces de la plaque), et qui est la même sur chaque face de l'interface, les conditions aux limites en z et à l'interface deviennent :

- surface irradiée $z = 0$

$$\phi(\alpha, 0, p) = \frac{\sin(\alpha \ell)}{\alpha} \text{ ou encore } \phi(\alpha_i, 0, p) = \ell \delta_{i0} \quad (4.26)$$

- surface opposée $z = 1$

$$\phi(\alpha, 1, p) = 0 \quad (4.27)$$

- interface $z = e_1$

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = \int_0^{\ell} R(x) \psi(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad (4.28)$$

La solution générale de l'équation (4.25) est de la forme :

$$\theta = F \cosh(uz) + G \sinh(uz) \quad (4.29)$$

$$u = \sqrt{p + \alpha^2}$$

F et G étant des constantes déterminées par les conditions aux limites en z [Batsale et al (1994)].

Si $\theta(0)$, $\theta(1)$, $\phi(0)$ et $\phi(1)$ sont les vecteurs colonnes ayant chacun $(n+1)$ composantes, qui constituent les spectres $\theta_i(0$ ou $1)$ et $\phi_i(0$ ou $1)$ de la température et la densité de flux de Laplace sur la face avant ou arrière, le système (4.25 à 4.28) peut alors être écrit sous forme de quadripôles 2D représentant les trois parties constituant l'échantillon.

Les deux premiers sont associés aux couches (1) et (2), respectivement au dessus et au dessous du plan de l'interface :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi(e_1) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \theta^{inf} \\ \phi(e_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Les quadripôles dans ce cas sont des matrices partitionnées par blocs, constituées par des matrices carrées diagonales d'ordre $(n+1)$ définies par :

$$A_q = \begin{pmatrix} A_q(\alpha_0) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & A_q(\alpha_1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & A_q(\alpha_n) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

pour $q = 1$ ou 2 relatif à la couche (1) ou (2).

Les matrices B_q , C_q et D_q sont construites de la même manière.

$$A_q(\alpha_i) = D_q(\alpha_i) = \cosh(u_i e_q) \quad (4.33)$$

$$B_q(\alpha_i) = \frac{1}{u_i} \sinh(u_i e_q) \quad (4.34)$$

$$C_q(\alpha_i) = u_i \sinh(u_i e_q) \quad (4.35)$$

$$u_i = \sqrt{p + \alpha_i^2} \text{ pour } i = 0 \text{ à } n.$$

Si l'on veut considérer les spectres complets des températures et des densités de flux de Laplace, on doit prendre n égale à l'infini. En pratique, le calcul de la série (4.24) nécessite sa troncature à un nombre fini n d'harmoniques suffisant pour atteindre la convergence.

Si l'on note ρ et $\phi(e_1)$ les spectres respectifs de la résistance de contact $R(x)$ et du flux de Laplace $\psi_d(x)$ au niveau de l'interface, grâce à la série (4.24) on peut écrire :

$$R(x) = \frac{1}{\ell} \rho_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\alpha_k x) \quad (4.36)$$

$$\text{avec : } \rho_k = \int_0^{\ell} R(x) \cos(\alpha_k x) dx \quad (4.37)$$

$$\text{et } \psi_d(x) = \frac{1}{\ell} \phi_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \cos(\alpha_m x) \quad (4.38)$$

$$\phi_m = \int_0^{\ell} \psi_d(x) \cos(\alpha_m x) dx \quad (4.39)$$

La substitution de $R(x)$ et $\psi_d(x)$ dans le terme de droite de l'équation (4.28) par les expressions (4.36) et (4.38) permet d'écrire la condition à l'interface sous forme matricielle et d'en déduire le quadripôle correspondant ; les calculs faits dans l'annexe 4.1 donnent :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_\rho \phi(e_1) \quad (4.40)$$

ou encore :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_\phi \rho \quad (4.41)$$

où la matrice N_ρ (ou N_ϕ) est construite à partir du vecteur colonne ρ (ou ϕ) contenant toutes les composantes du spectre de $R(x)$ (ou $\psi_d(x)$) :

$$\rho = [\rho_0 \rho_1 \dots \rho_n]^t$$

$$N_\rho = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} \rho_0 & 2\rho_1 & 2\rho_2 & \dots & 2\rho_n \\ \rho_1 & \rho_0 + \rho_2 & \rho_1 + \rho_3 & \dots & \rho_{n-1} + \rho_{n+1} \\ \rho_2 & \rho_1 + \rho_3 & \rho_0 + \rho_4 & \dots & \rho_{n-2} + \rho_{n+2} \\ \rho_3 & \rho_2 + \rho_4 & \rho_1 + \rho_5 & \dots & \rho_{n-3} + \rho_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n & \rho_{n-1} + \rho_{n+1} & \rho_{n-2} + \rho_{n+2} & \dots & \rho_0 + \rho_{2n} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

La forme matricielle (4.40) ou (4.41) représente en fait le produit de convolution (noté * dans l'espace de Fourier) entre les vecteurs ρ et ϕ , contenant respectivement les composantes des spectres de $R(x)$ et $\psi_d(x)$. Ceci n'est strictement vrai que si l'on considère le problème symétrique $x \in [-\ell, +\ell]$ et les fréquences positives et négatives ; (voir Annexe 4.2) :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = \rho * \phi(e_1) \quad (4.43)$$

La somme des composantes de ρ , qui apparaissent dans la majorité des éléments de la matrice N_ρ , vient du fait que seules les valeurs propres positives sont considérées ici (voir Annexe 4.2).

Finalement le transfert thermique dans la plaque peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_\rho \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ \phi(1) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

I et 0 étant respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre $(n+1)$.

On détermine facilement à partir de cette expression, le contraste thermique en face avant ou arrière dans l'espace de Laplace Fourier (voir Annexe 4.3). $\Delta\theta(0$ ou $1)$ est la double transformée de la différence de température réduite ΔT entre un point localisé sur la face de la plaque défectueuse

(température réduite T) et le point correspondant appartenant à une plaque saine (température réduite T_0 pour $R(x) = 0$) :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} N_\rho C_2 (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (4.45)$$

$$\Delta\theta(1) = - (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} C_1 N_\rho C_2 C^{-1} \phi(0) \quad (4.46)$$

où :

$$C = C_1 A_2 + C_2 A_1$$

Dans le cas particulier de la méthode flash adiabatique, on a :

- excitation de Dirac uniforme sur la face avant

$$\phi(0) = [\ell \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (4.47)$$

- face arrière isolée

$$\phi(1) = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (4.48)$$

Dans le cas où la résistance thermique d'interface est faible devant celle du matériau de la plaque contrôlée, des expressions plus simples pour les contrastes thermiques sont obtenues en négligeant le produit $C_1 N_\rho C_2$ devant C dans les expressions (4.45) et (4.46) :

- en face avant :

$$\Delta\theta(0, \alpha_k) = \frac{\sinh(\sqrt{p} (1-e_1))}{\sinh(\sqrt{p})} \frac{\sinh(u_k (1-e_1))}{\sinh(u_k)} \rho_k \quad (4.49)$$

Pour les temps courts ; c'est-à-dire pour les grandes valeurs de la variable réduite de Laplace p , le spectre de la résistance d'interface s'écrit :

$$\rho_k = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} \Delta\theta_k \quad (4.50)$$

où k correspond à la pulsation spatiale $\alpha_k = \frac{k \pi}{\ell}$.

La même relation écrite dans l'espace réel devient :

$$R(x) = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} \Delta\tau(x, p) \quad (4.51)$$

où $\Delta\tau(x, p)$ est la transformée de Laplace du contraste réduit ΔT pour la variable réduite p .

L'expression (4.51) correspond en fait au modèle 1D linéaire, rappelé dans le chapitre 2 [Maillet et al (1993)]. Ceci nous ramène à dire que dans le cas de résistances d'interface faibles de répartition quelconque, le transfert de chaleur au travers du défaut pour les temps courts peut être considéré comme monodimensionnel.

• en face arrière :

$$\Delta\theta(1, \alpha_k) = - \frac{\sinh(\sqrt{p} (1-e_1))}{\sinh(\sqrt{p})} \frac{\sinh(u_k e_1)}{\sinh(u_k)} \rho_k \quad (4.52)$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu par la méthode des perturbations au premier ordre dans le paragraphe 3.3.1.2 du chapitre précédent, où on a utilisé la propriété de la superposition des contrastes thermiques créés par des défauts d'extension infiniment petite et localisés à une même profondeur.

Dans le cas d'un empilement de n milieux en contact imparfait, le transfert de chaleur dans le multicouche est décrit par la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \left(\prod_{q=1}^{n-1} \begin{bmatrix} A_q & B_q \\ C_q & D_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & (N_\rho)_q \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ \phi(1) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

où q étant l'indice de la couche.

4.2 Résolution du problème inverse avec mesure en face avant

Le problème considéré ici consiste à estimer la répartition spatiale $R(x)$ de la résistance thermique d'interface et sa profondeur z_d , à partir de la mesure de la température sur la face irradiée $T(x, z = 0, t)$. Deux quadratures du signal mesuré, correspondant à la transformation (4.8), pour la calcul de la transformée de Laplace et à la transformation (4.22) permettant le calcul de la transformée de Fourier, sont nécessaires pour la détermination du vecteur contraste thermique réduit $\Delta\theta(z = 0, p)$. Le nombre $(n+1)$ des composantes de $\Delta\theta$ doit être inférieur ou égal au nombre de points issus de l'échantillonnage spatial en x (théorème de Shannon, cité dans Press et al (1992)). $\Delta\theta$ est alors considéré comme le nouveau signal qui va être utilisé pour l'inversion, à la place du signal originel $T(x, z = 0, t)$.

4.2.1 Estimation du profil de résistance

L'équation (4.45) correspondant à la mesure en face avant, peut être mise sous la forme suivante (voir Annexe 4.4) :

$$C C_2^{-1} \Delta\theta(0) = N_\rho [C_2 C^{-1} \phi(0) - C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0)] \quad (4.54)$$

ou encore :

$$N_\rho a = b \quad (4.55)$$

avec \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs colonnes définis par :

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}_2 \mathbf{C}^{-1} \phi(0) - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^{-1} \Delta\theta(0) \quad (4.56)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \mathbf{C}_2^{-1} \Delta\theta(0) \quad (4.57)$$

Par ailleurs, on sait que le terme de gauche de l'égalité (4.55) représente le produit de convolution des vecteurs ρ et \mathbf{a} , produit qui est commutatif. On en déduit donc :

$$N_{\mathbf{a}} \rho = \mathbf{b} \quad (4.58)$$

D'où le spectre de la résistance $R(x)$ est calculé par :

$$\rho = N_{\mathbf{a}}^{-1} \mathbf{b} \quad (4.59)$$

La matrice $N_{\mathbf{a}}$ est construite à partir des composantes du vecteur \mathbf{a} de la même manière que N_{ρ} à partir de ρ .

La distribution originelle de la résistance d'interface $R(x)$ peut être estimée, une fois ρ déterminé par la résolution du système (4.59), grâce à la relation :

$$R(x) = \frac{1}{\ell} \rho_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \cos(\alpha_i x) \quad (4.60)$$

Un autre algorithme explicite d'inversion peut être trouvé, si on remarque que le produit de convolution (4.55) dans l'espace de Laplace-Fourier correspond au produit ordinaire dans l'espace originel :

$$R(x) A(x) = B(x) \quad (4.61)$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont issus des inversions des vecteurs spectres \mathbf{a} et \mathbf{b} :

$$A(x) = \frac{1}{\ell} a_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^n a_k \cos(\alpha_k x) \quad (4.62)$$

$$B(x) = \frac{1}{\ell} b_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^n b_k \cos(\alpha_k x) \quad (4.63)$$

Le nombre n présent dans les expressions analytiques des algorithmes inverses cités ci-dessus correspond à la fréquence de Shannon issue de l'échantillonnage spatial du champ de température si celui-ci est exempt de bruit de mesure. Malheureusement, en réalité ce n'est pas le cas et la présence du bruit dans les données expérimentales rend difficile le choix de la fréquence de troncature. Cette complexité vient du fait qu'on est en présence d'un problème inverse mal-posé .

Le choix du nombre d'harmoniques n sera donc crucial pour la stabilité de l'inversion : le paramètre n jouera le rôle d'un paramètre "régularisateur" de l'algorithme inverse.

Dans la section suivante, nous proposons des méthodes basées sur la réduction (ou le filtrage) du bruit de mesure à partir de l'analyse spectrale du signal dégradé. Ces méthodes permettent de résoudre le problème du choix du nombre d'harmoniques n nécessaires pour une inversion correcte du problème [Bendada et al (1994) et Degiovanni et al (1994)].

La troncature obligatoire du spectre engendre une perte d'information aux grandes fréquences et par conséquent introduit un biais sur la résistance d'interface identifiée. Cette erreur est donc fortement liée à la forme de la fonction $R(x)$: elle est plus grave dans le cas de résistance d'interface à variations brusques (fonctions "dures") que pour celles dont les variations sont lentes (fonctions "molles"), et où quelques harmoniques significatifs suffisent. Afin d'illustrer ces deux cas de figure, nous avons choisi quatre fonctions pouvant décrire des défauts rencontrés dans la réalité.

4.2.2 Estimation de la profondeur

La détermination d'une expression analytique simple permettant l'identification de la profondeur d'interface à partir de l'équation non linéaire (4.45) est difficile. Néanmoins, on peut obtenir un système d'équations relatives aux différents modes, dont la seule inconnue est la profondeur z_d . Ceci est possible en écrivant l'équation (4.45) pour deux valeurs différentes de la variable réduite de Laplace et en éliminant par la suite le spectre ρ de la résistance d'interface (voir équation (4.59)). Le système d'équations utilisé peut être obtenu également en éliminant la présence implicite de la fonction $R(x)$ de l'équation (4.45) écrite pour deux valeurs différentes de la variable réduite de Laplace p (voir équation (4.61)). On obtient :

$$\frac{B(x, p_1, e_1)}{A(x, p_1, e_1)} = \frac{B(x, p_2, e_1)}{A(x, p_2, e_1)} \quad (4.64)$$

où $A(x, p, e_1)$ et $B(x, p, e_1)$ sont des fonctions du contraste thermique.

La profondeur d'interface peut alors être déterminée soit en utilisant l'une des équations correspondant à un mode particulier, soit en résolvant le système d'équations par la méthode des moindres carrés non linéaires. Une première estimation de la profondeur d'interface peut être trouvée à partir du modèle linéaire (équation (4.49)), écrit pour la première valeur propre ($\alpha = 0$). En effet on a :

$$\Delta\theta(0, 0) = \frac{\sinh^2(\sqrt{p} (1-e_1))}{\sinh^2(\sqrt{p})} \rho_0 \quad (4.65)$$

Si on note \overline{R} et $\overline{\Delta\tau(0, p)}$ les moyennes spatiales respectives de la fonction $R(x)$ et du contraste réduit de Laplace $\Delta\tau(0, x, p)$, l'expression précédente devient :

$$\overline{\Delta\tau(0, p)} = \frac{\sinh^2(\sqrt{p} (1-e_1))}{\sinh^2(\sqrt{p})} \overline{R} \quad (4.66)$$

Cette expression décrit un problème semblable à celui du transfert de chaleur 1D linéaire décrit au chapitre 2.

Si l'on écrit la relation (4.66) pour deux valeurs différentes p_1 et p_2 de la variable réduite de Laplace p , on peut éliminer le paramètre \overline{R} , ce qui donne dans le cas $p_2 = 4 p_1$:

$$e_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{p_1}} \ln \left\{ \left(\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{p_1}) + \left[\left(\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} \right) \cosh^2(\sqrt{p_1}) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.67)$$

$$\overline{m}_j = \overline{\Delta\tau(0, p_j)} \quad (j = 1, 2)$$

Cette approximation est légitime pour des défauts de faibles résistances ou pour ceux qui sont superficiels. Cette valeur peut être utilisée comme valeur initiale d'une méthode de Newton ou d'une méthode des moindres carrés non linéaires permettant d'affiner l'estimation pour s'approcher plus de la profondeur exacte.

4.2.3 Présentation des fonctions utilisées en simulation

4.2.3.1 Fonction $R(x)$ à "deux bosses"

La résistance d'interface est située à une profondeur réduite $e_1 = 0.25$ dans une plaque de taille réduite $\ell = 10$. La fonction $R(x)$ est la somme de deux agnésiennes : fonctions proportionnelles à $(1 + (x-x_1 \text{ ou } x_2)^2)^{-1}$, x_1 et x_2 étant les positions des maxima locaux. La fonction et son spectre sont tracés sur les figures (4.2) et (4.3) : c'est une fonction en forme de "dos de chameau" et est utilisée pour tester le pouvoir séparateur de la procédure d'inversion. Son spectre montre que seuls les quinze premiers harmoniques sont significatifs, ceci est normal vu qu'il s'agit d'une fonction à variations lentes.

$$R(x) = R_o \left(\frac{2}{1+(x-x_1)^2} + \frac{1}{1+(x-x_2)^2} \right) \quad (4.68)$$

$$R_o = 0.049 ; x_1 = \frac{\ell}{4} ; x_2 = \frac{3\ell}{4}$$

4.2.3.2 Fonction $R(x)$ en "double porte"

Cette fois-ci, il s'agit d'une résistance d'interface "dure". Elle est située à une profondeur réduite $e_1 = 0.16$, dans une plaque de taille réduite $\ell = 9.235$. Ces valeurs correspondent à un échantillon carré isotrope dont les dimensions caractéristiques sont : $\ell = 58 \text{ mm}$; $e = 6 \text{ mm}$ et $e_1 = 1 \text{ mm}$ (voir chapitre 5). $R(x)$ est une fonction constante par morceaux qui sert à simuler l'expérience sur un échantillon contenant deux défauts de collage sous forme de bandes (voir figure(4.2)). Son spectre présenté sur la figure (4.4), montre que même les hautes fréquences sont importantes, contrairement au cas précédent.

- Niveaux des deux résistances $R_{max1} = 0.1223$ $R_{max2} = 0.1461$
- Abscisses des centres des défauts $x_1 = 3.6077$ $x_2 = 5.4837$
- Tailles des deux défauts $b_1 = 0.4329$ $b_2 = 0.7215$

4.2.3.3 Fonction $R(x)$ en "erf"

C'est une fonction qui peut simuler un monodé laminage dans un matériau composite stratifié. En effet, ce type de défaut est généralement constitué d'une épaisseur d'air importante au centre, et qui diminue progressivement jusqu'à s'annuler sur les bords du décollement. $R(x)$ est construite à partir de la différence de deux fonctions en "erf" :

$R(x) = R_o [\text{erf}(x-x_1) - \text{erf}(x-x_2)]$; où $x_1 (= \frac{\ell}{4})$ et $x_2 (= \frac{3}{4} \ell)$ sont deux abscisses symétriques par rapport au centre de l'échantillon et $R_o = 0.05$ (voir figure (4.5)). L'interface est située à une profondeur réduite $e_1 = 0.25$ dans une plaque d'extension réduite $\ell = 10$. Le spectre présenté sur la figure (4.6), montre ici aussi que seules les huit premières fréquences sont significatives.

4.2.3.4 Fonction $R(x)$ en "arctg"

C'est une fonction qui a pratiquement la même allure que la fonction décrite ci-dessus, avec la différence que cette fois-ci la résistance d'interface présente des variations brusques au niveau des bords du défaut et de son centre. $R(x)$ est la superposition d'une fonction proportionnelle à un arctg ($\text{arctg}(k x)$ où k est un entier naturel) et de sa symétrique par rapport au centre de l'échantillon. La figure (4.5) illustre les variations de cette fonction dans le cas où $k = 2$. Son spectre présenté sur la figure (4.7), montre que les trente premiers harmoniques sont significatifs. L'interface est localisée à une profondeur réduite $e_1 = 0.25$ et la taille réduite de l'échantillon égale à 10.

Fig.4.2 Fonctions utilisées en simulation

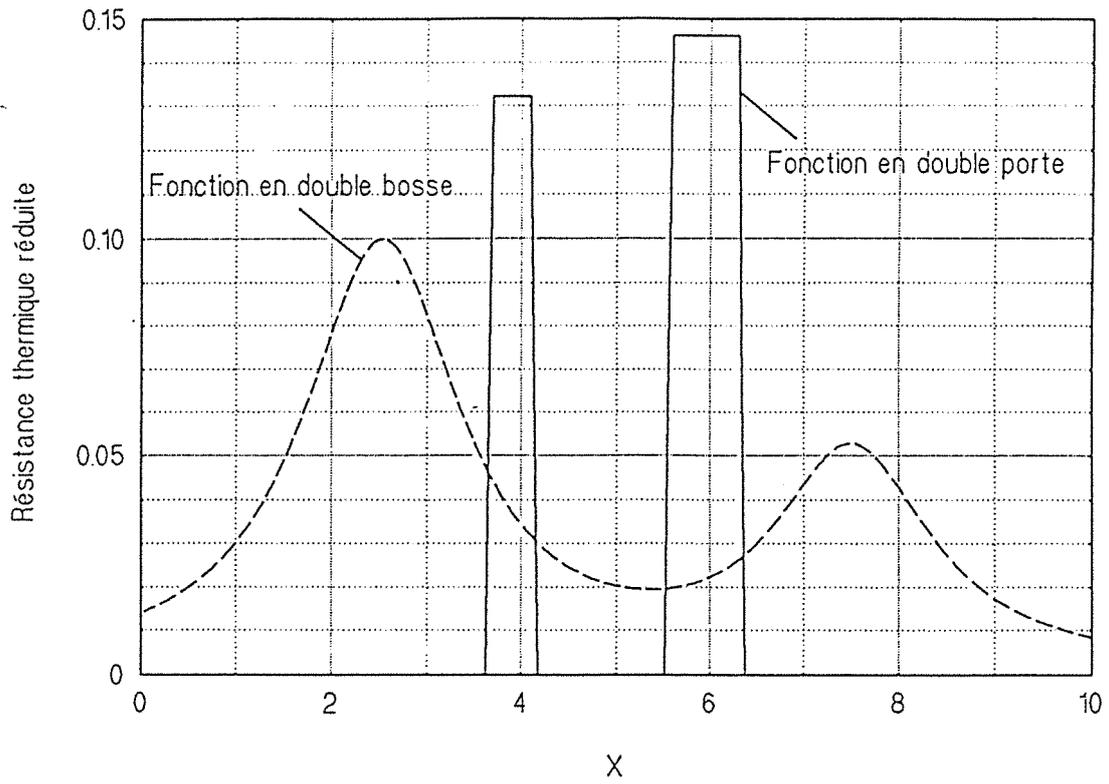


Fig.4.3 Spectre de la résistance en double bosse

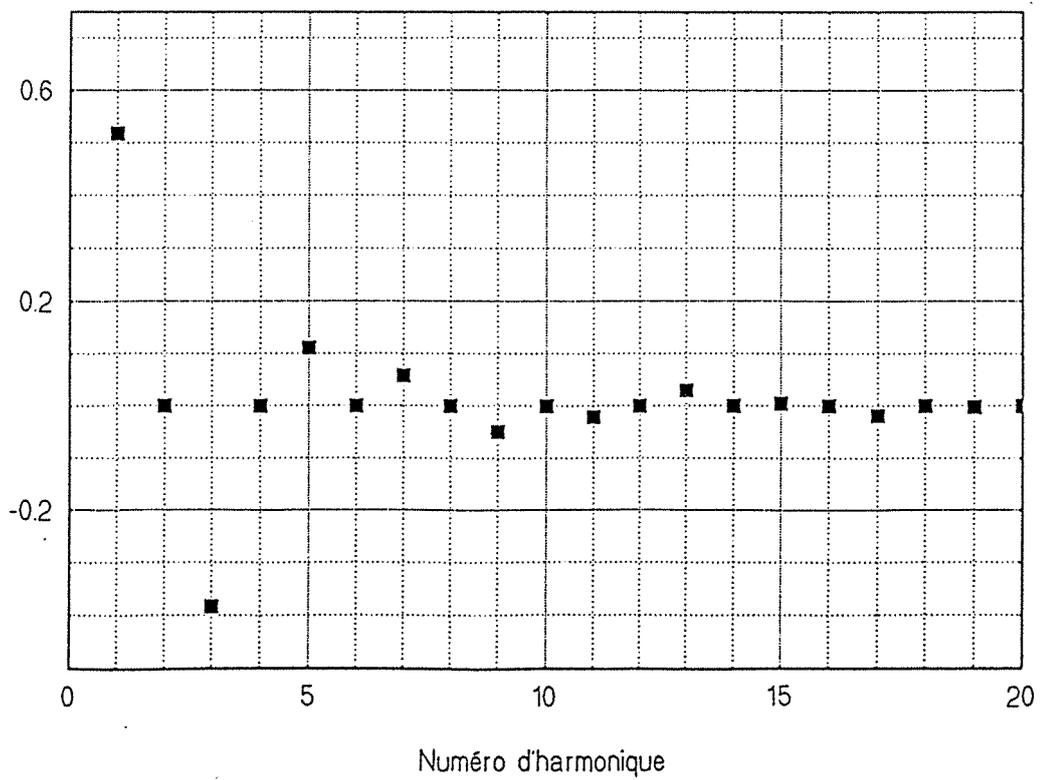


Fig.4.4 Spectre de la résistance en double porte

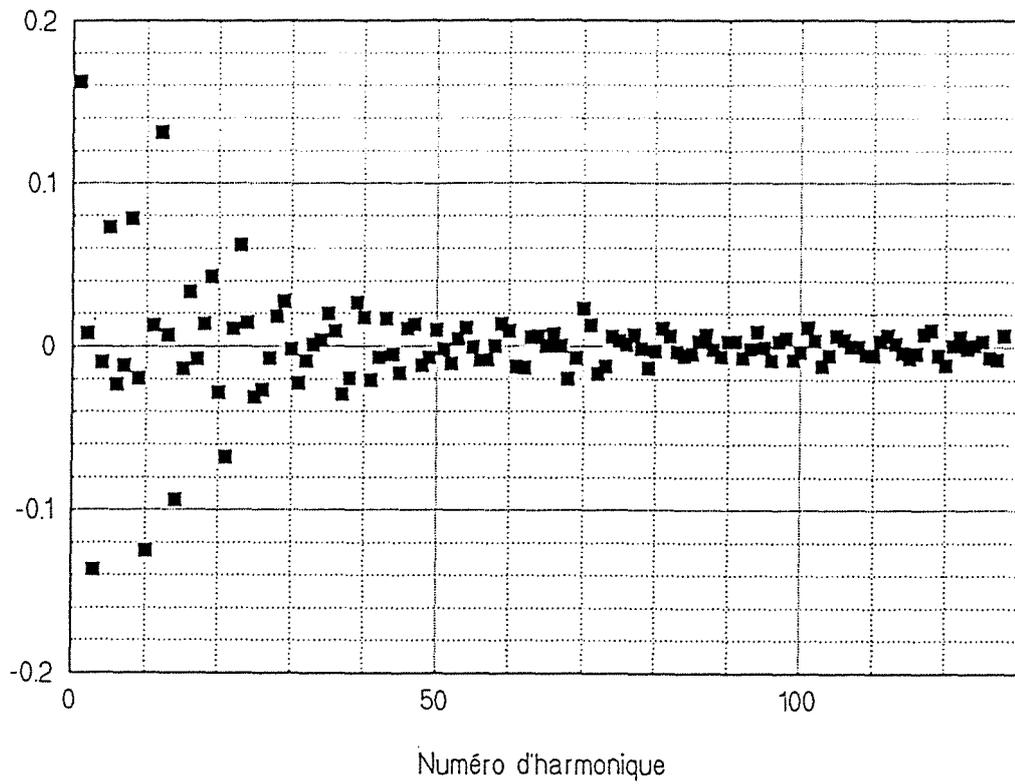


Fig.4.5 Fonctions utilisées en simulation

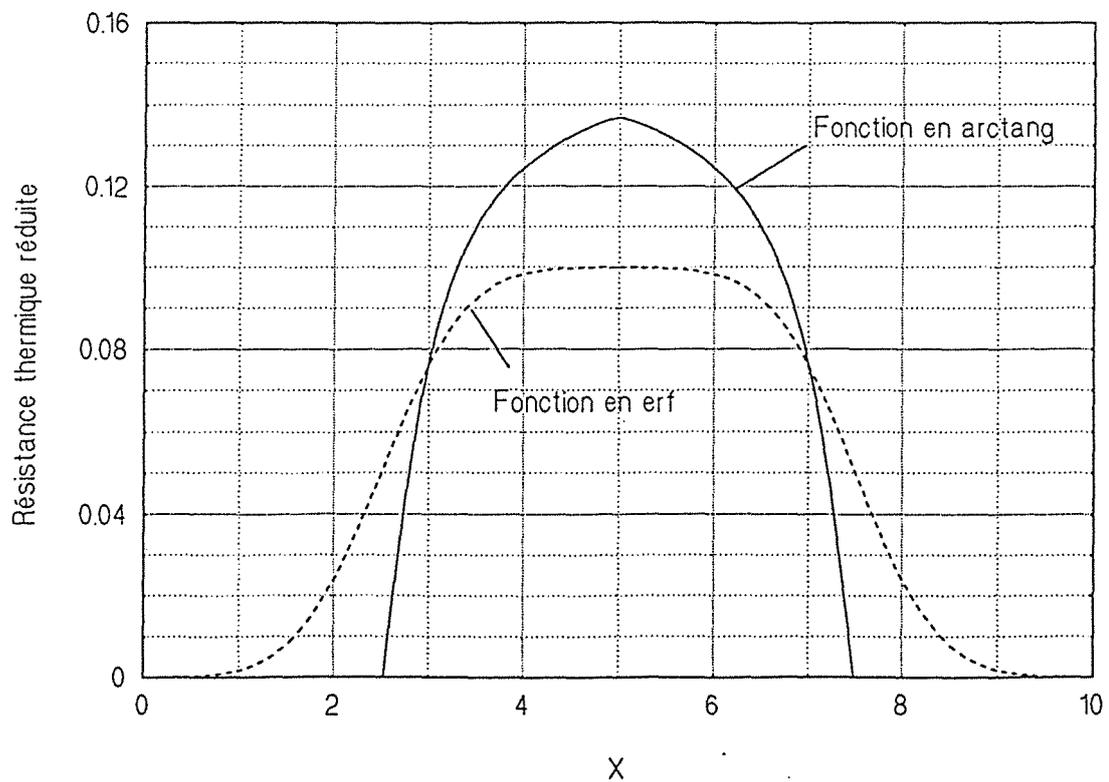


Fig.4.6 Spectre de la résistance en erf

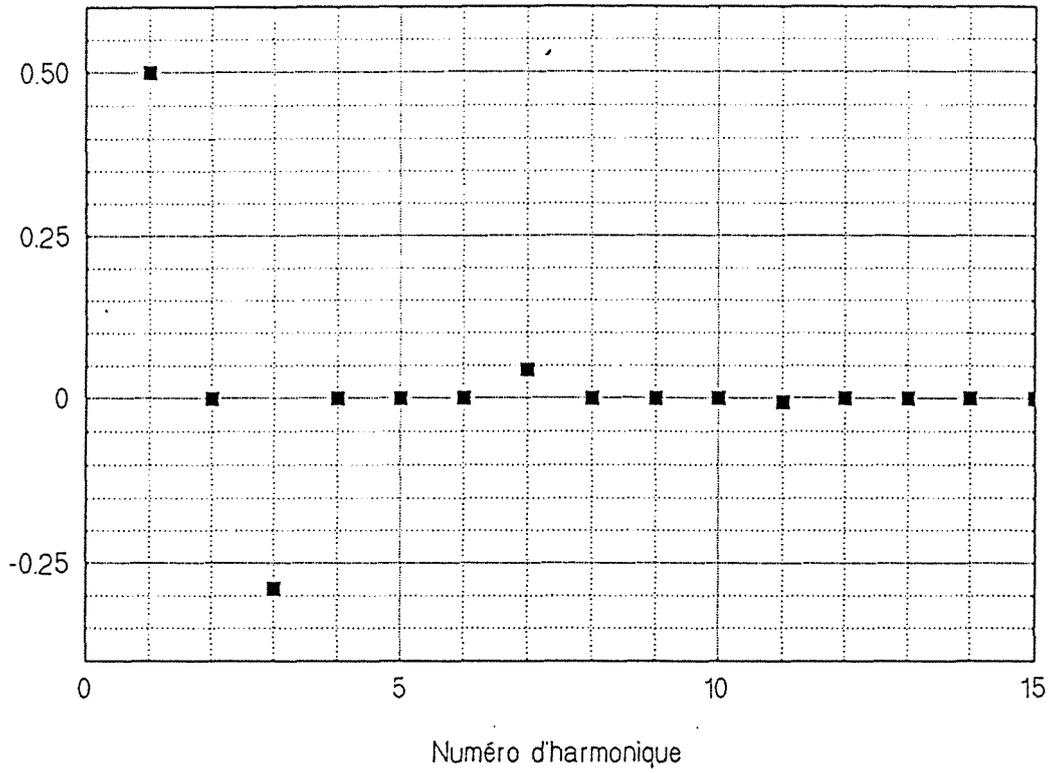
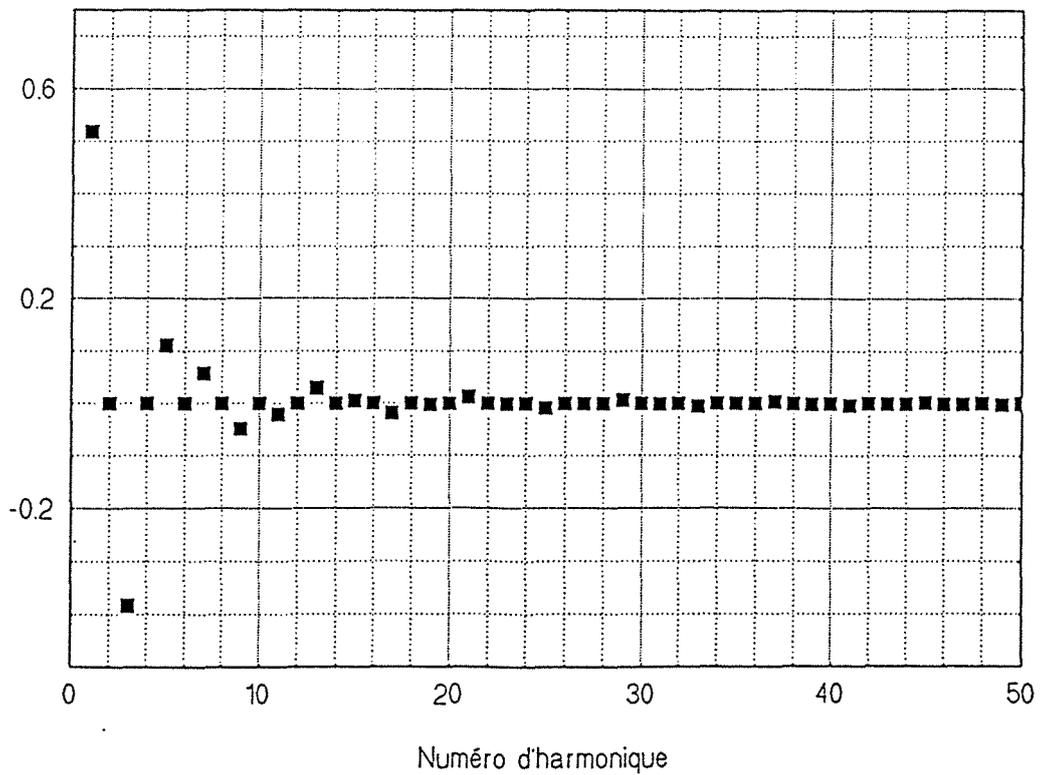


Fig.4.7 Spectre de la résistance en arctang



$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\ell}{4}\right] \\ R_o \operatorname{arctg}(kx) & \text{si } x \in \left[\frac{\ell}{4}, \frac{\ell}{2}\right] \text{ avec } R_o = 0.1 \text{ et } k = 2 \end{cases} \quad (4.69)$$

4.3 Erreur d'estimation sur le profil de résistance

4.3.1 Décomposition de l'erreur d'estimation

Tout algorithme d'inversion peut produire des estimations de la fonction recherchée. La mesure de la qualité de l'inversion peut être quantifiée par le calcul de l'erreur d'estimation qui a été faite. Celle-ci peut être divisée en trois parties : l'erreur due au bruit de mesure, celle due à la troncature du spectre et enfin celle due aux quadratures spatiales ou temporelles nécessaires pour calculer les transformées de Laplace et de Fourier du contraste (Σ au lieu de \int).

Si l'on note $R_{n\sigma}^{Nm}(x)$ la répartition de la résistance d'interface identifiée à partir d'un champ de température dégradé par un bruit additif, d'écart type constant σ , échantillonné spatialement en N points et temporellement en m points, par une inversion utilisant n harmoniques, l'inégalité de Schwartz permet d'écrire :

$$\left\| R_{n\sigma}^{Nm}(x) - R(x) \right\| \leq e_{\text{bruit}} + e_{\text{quadrature}} + e_{\text{troncature}} \quad (4.70)$$

avec :

$$e_{\text{bruit}} = \left\| R_{n\sigma}^{Nm}(x) - R_{n0}^{Nm}(x) \right\| \quad (4.71)$$

$$e_{\text{quadrature}} = \left\| R_{n0}^{Nm}(x) - R_n(x) \right\| \quad (4.72)$$

$$e_{\text{troncature}} = \left\| R_n(x) - R(x) \right\| \quad (4.73)$$

où la norme est définie par :

$$\left\| \cdot \right\|^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (\cdot)_k^2 \quad (4.74)$$

$$\text{et :} \quad R_n(x) = R_{n0}^{\infty\infty}(x) \quad R(x) = R_{\infty 0}^{\infty\infty}(x) \quad (4.75)$$

La résistance d'interface estimée $R_{n\sigma}^{Nm}(x)$ est obtenue par une inversion de Fourier en cosinus du vecteur spectre identifié $\rho_{n\sigma}^{Nm}$. On notera :

$$\rho_n = \rho_{n0}^{Nm} \quad \text{et} \quad \rho = \rho_{\infty 0}^{\infty\infty} \quad (4.76)$$

L'erreur produite par le bruit de mesure seul, est la norme (calculée sur $(N+1)$ points de l'espace) de la différence entre les résistances estimées (indice σ) avec et sans bruit à partir de $(n+1)$ harmoniques.

La seconde erreur est générée par la quadrature spatiale et temporelle qui est faite à partir d'un nombre limité de points. Cette seconde erreur peut devenir négligeable si N et m sont suffisamment grands.

La troisième erreur est engendrée par la troncature obligatoire du spectre.

4.3.2 Erreur due à la seule troncature du spectre

L'analyse de l'erreur due à la seule troncature du spectre sur la résistance d'interface identifiée, nécessite la connaissance de l'expression analytique du spectre de la résistance nominale, afin de se débarrasser de l'effet de l'échantillonnage spatial. Parmi les fonctions présentées ci-dessus, seul le spectre de la fonction en "double porte" peut être calculé analytiquement.

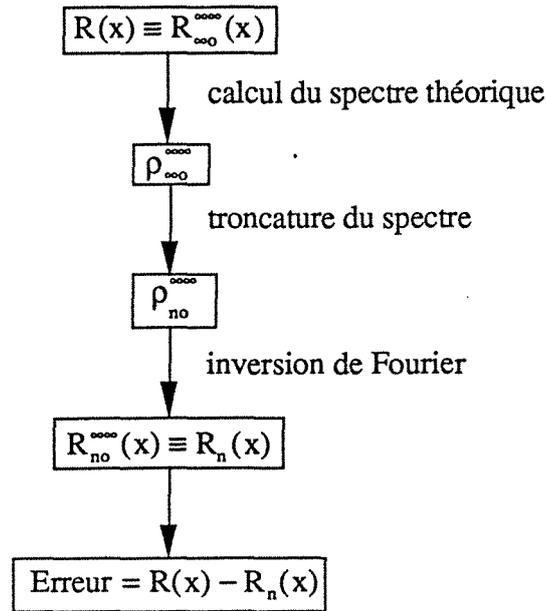
Le spectre théorique se calcule grâce à :

$$\rho(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k} \{ R_{max1} [\sin(\alpha_k x_{02}) - \sin(\alpha_k x_{01})] + R_{max2} [\sin(\alpha_k x_{04}) - \sin(\alpha_k x_{03})] \} \quad (4.77)$$

$$\alpha_k = k \frac{\pi}{\ell} \quad (k = 0 ; 1 ; \dots ; n)$$

R_{max1} et R_{max2} sont les niveaux maximum de $R(x)$ et x_{01} ; x_{02} ; x_{03} et x_{04} les positions des bords de ces maxima.

La résistance d'interface estimée $R_n(x)$ est calculée par un simple retour de Fourier du spectre théorique selon le schéma présenté ci-dessous. Ainsi, on évite l'erreur due aux quadratures spatiale et temporelle introduite lors du calcul des transformations intégrales utilisées dans les problèmes direct et inverse.



Nous avons calculé la norme de l'erreur due à la troncature sur un nombre d'échantillonnage $N = 128$ de la résistance exacte $R(x)$ en "double porte". Sur la figure (4.8), nous avons présenté l'évolution de l'erreur due à la troncature en fonction du nombre d'harmoniques utilisés pour l'inversion (courbe en cercles). Le calcul a été effectué jusqu'à la fréquence de Nyquist, soit $\alpha_N = N \frac{\pi}{\ell}$. On voit clairement, que plus on augmente le nombre d'harmoniques plus l'erreur diminue. Toutefois, on constate qu'à partir de la 110^{ème} fréquence, la courbe arrive à un palier, ce qui veut dire qu'au delà de cette fréquence les harmoniques sont négligeables.

La même procédure a été réalisée sur la résistance à "deux bosses", en calculant l'intégrale de Fourier sur un grand nombre de points ($N = 256$). Ceci permet d'exclure l'erreur provoquée par la quadrature spatiale. Sur les figures (4.9) et (4.10), nous avons comparé les résistances identifiées $R_{15}(x)$ et $R_{30}(x)$ (obtenues respectivement par la troncature du spectre "théorique" à la 15^{ème} et la 30^{ème} fréquence) avec la résistance exacte $R(x)$. On peut observer que la troncature à la 15^{ème} fréquence, introduit un biais particulièrement au niveau des sommets, mais reste assez correcte. Par contre, la fonction $R_{30}(x)$ est confondue avec la résistance nominale, excepté sur les bords, chose qui est normale vu que les fonctions régulières utilisées sont des cosinus. Ceci montre l'utilité de prendre le maximum de fréquences possible.

4.3.3 Simulation d'inversion sans bruit

Dans cette section, nous étudions l'influence de la troncature du spectre et des quadratures spatiale et temporelle sur le résultat de l'inversion dans le cas où le champ de température n'est pas dégradé par le bruit de mesure. L'analyse sera menée sur la résistance d'interface à "deux bosses" et sur celle en "double porte".

Fig.4.8 Norme de l'erreur d'estimation sur $R(x)$ en double porte

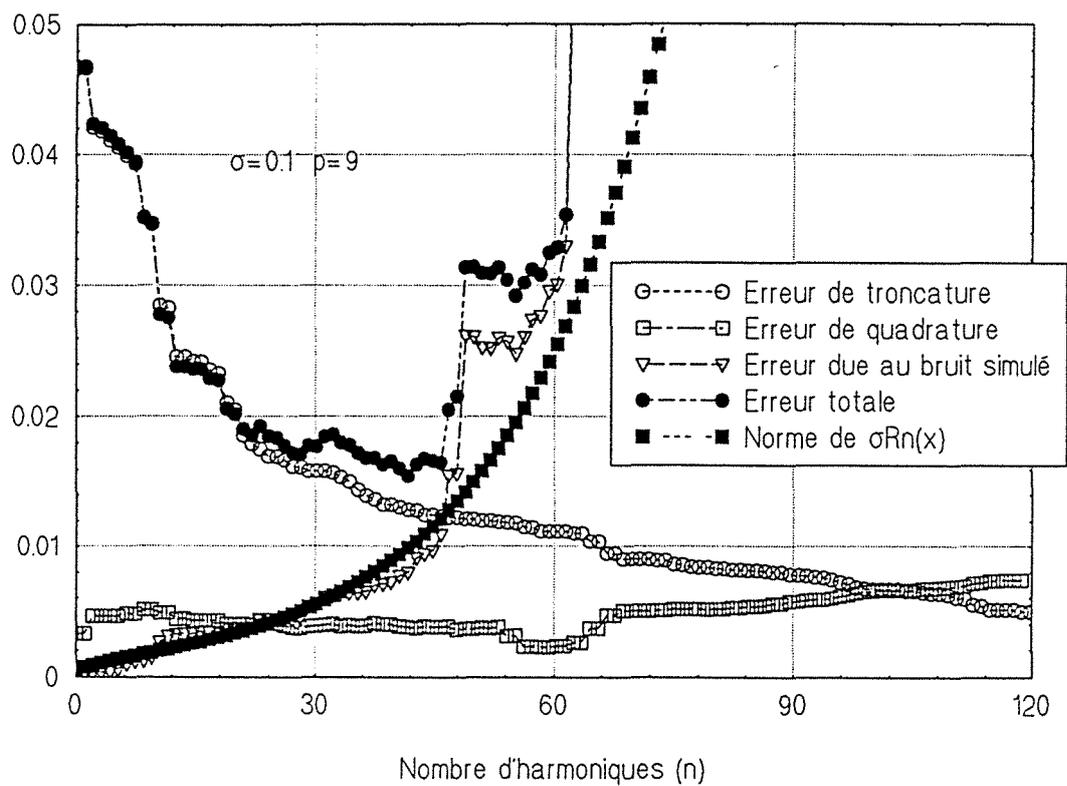


Fig.4.9 Influence de la troncature sur la résistance en double bosse

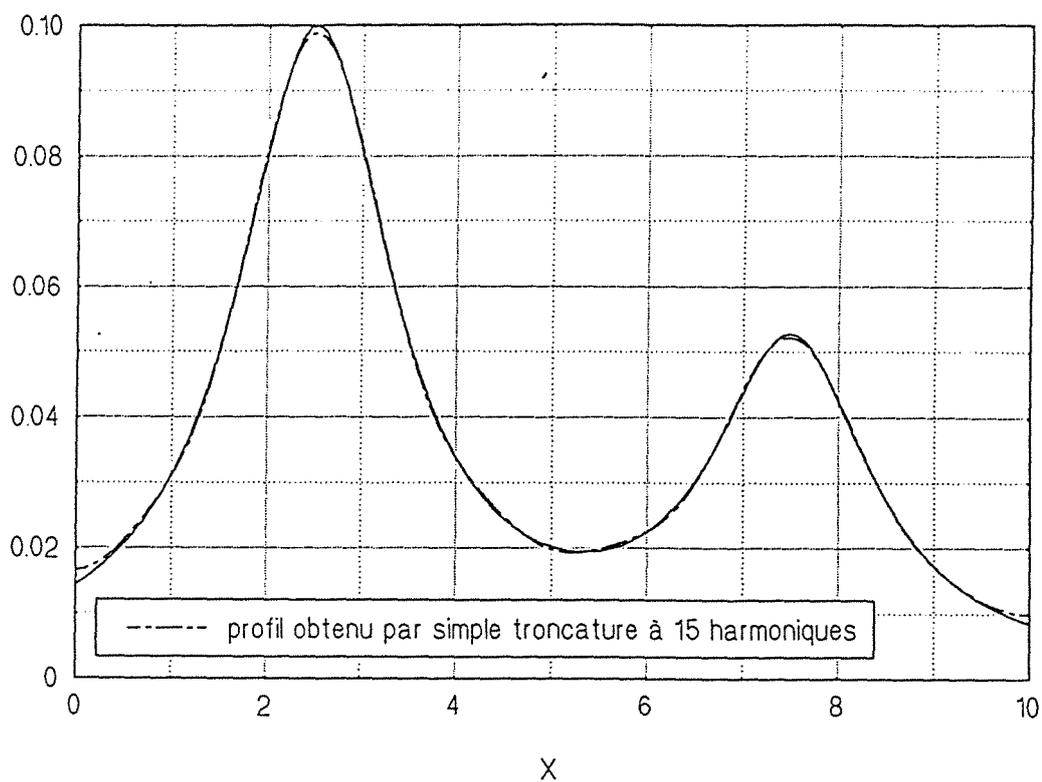
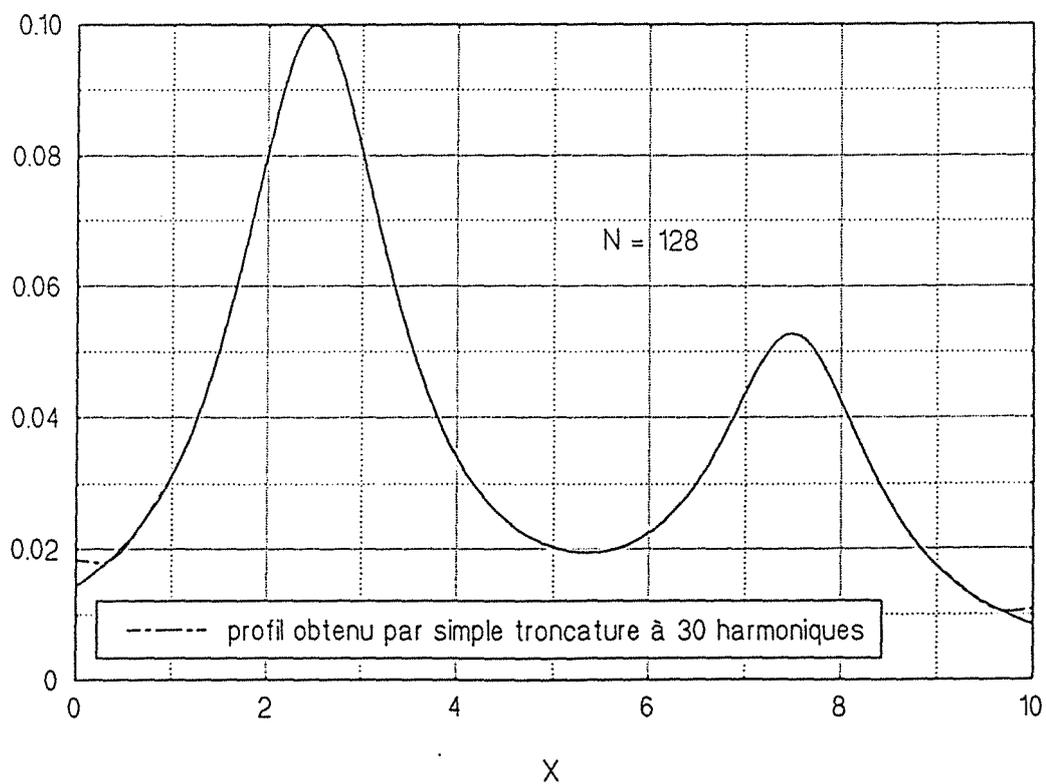


Fig.4.10 Influence de la troncature sur la résistance en double bosse



L'évolution spatio-temporelle du contraste thermique a été déterminée à partir d'un nombre limité de points : les quadratures ont été faites en temps à partir de $m = 100$ mesures, avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$ et en espace à partir de $N = 128$ points (il s'agit du nombre maximum de pixels sur une ligne d'une image thermographique). La procédure de simulation est illustrée par l'algorithme donné sur la page suivante.

4.3.3.1 Résistance d'interface à "deux bosses"

Le profil estimé de la résistance d'interface avec $n = 15$ harmoniques, en utilisant l'une ou l'autre des équations d'inversion (4.59) et (4.61), est présenté sur la figure (4.11) - courbe en trait discontinu -. L'accord semble être assez correct entre les fonctions nominale (courbe en trait continu) et estimée. A l'exception des extrémités où la dérivée n'est pas nulle. Cette simulation a été réalisée pour une valeur de la variable p égale à 5.

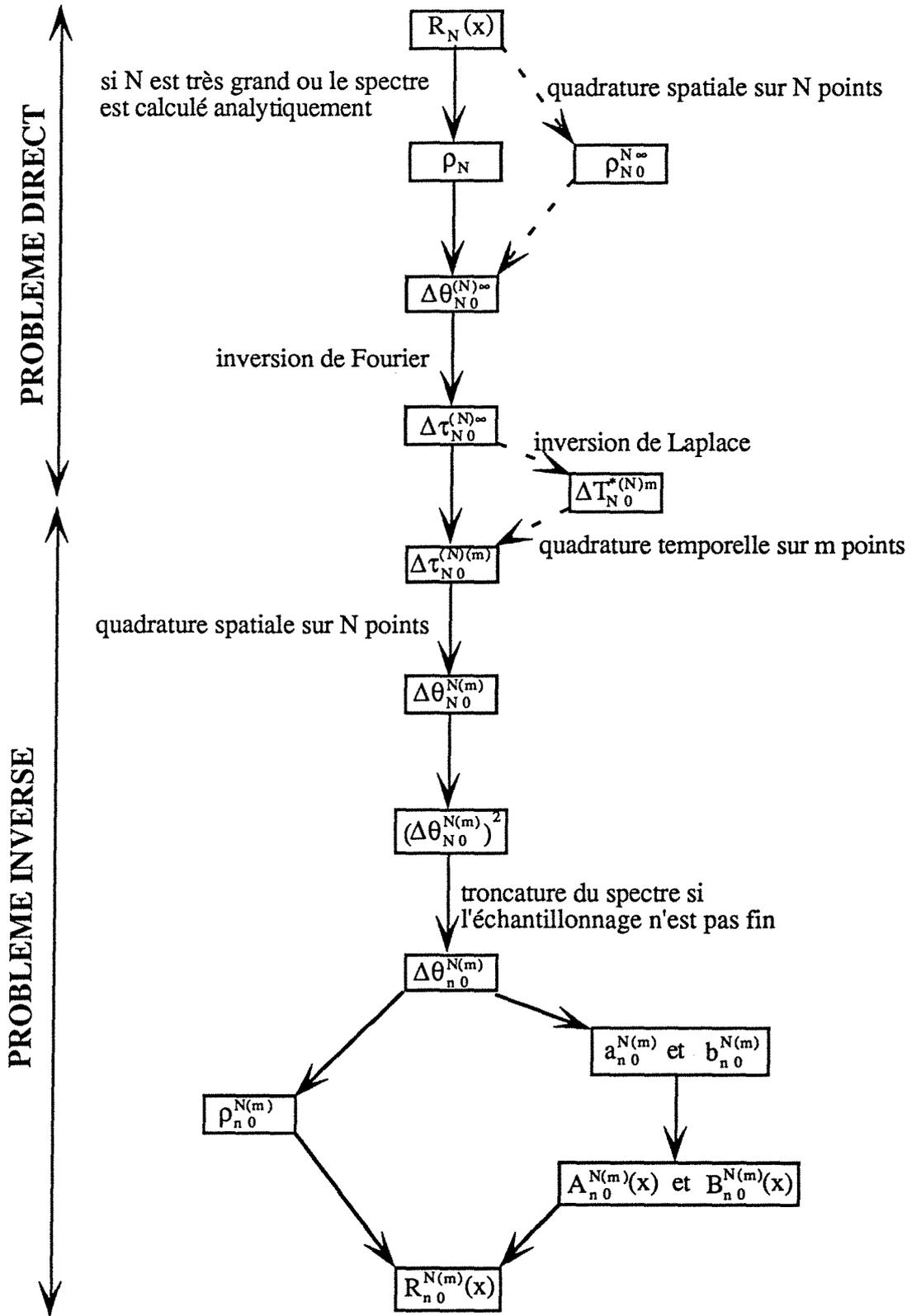
L'inversion avec un nombre de fréquences plus élevé devient instable. Ceci est illustré par le résultat de la simulation avec 30 harmoniques, sur la figure (4.12). En effet, la fonction $R_{30}(x)$ (courbe en trait discontinu) est beaucoup plus instable sur les extrémités de l'échantillon.

Si on tronque le spectre plus loin, la solution devient complètement perturbée. Ceci est dû au fait que le nombre de points $N = 128$ utilisés pour le calcul de la transformée de Fourier direct est insuffisant pour calculer avec précision les spectres aux hautes fréquences de la fonction $R(x)$ ou du contraste de Laplace $\Delta\tau(x, p)$. Pour tenir compte de toutes les fréquences (jusqu'à la fréquence de coupure), il faudra échantillonner plus finement dans l'espace. En pratique, l'échantillonnage est imposé par le nombre de pixels sur une ligne de l'image thermographique.

Des simulations numériques ont montré que la quadrature temporelle réalisée pour le calcul de la transformée de Laplace sur 100 points, est suffisante pour obtenir des résultats d'inversion précis. Cette analyse a été réalisée en prenant comme signal d'entrée pour le problème inverse, non pas le champ spatio-temporel de température mais le profil du contraste de Laplace calculé par l'algorithme direct. Les résultats d'estimation obtenus sont identiques à ceux qu'on trouve lorsque le signal d'entrée est le contraste thermique réduit $\Delta T(x, t)$. On montre ainsi que c'est la quadrature spatiale qui introduit des erreurs d'estimation.

Sur la figure (4.13), nous avons montré l'évolution de l'erreur quadratique sur la résistance d'interface estimée, due à la quadrature spatiale (courbe en carrés pleins). On constate que l'erreur est quasi constante jusqu'au 35^{ème} harmonique, où elle commence à croître d'une manière assez lente. La fréquence optimale pour l'inversion est donc directement liée à l'erreur de troncature.

Méthodologie de simulation d'inversion dans le cas où le bruit de "mesure" est nul



Remarque

Les paramètres entre parenthèses sont infinis si on n'exécute pas les étapes en trait discontinu

Fig.4.11 Inversion par troncature à 15 harmoniques
Résistance en double bosse

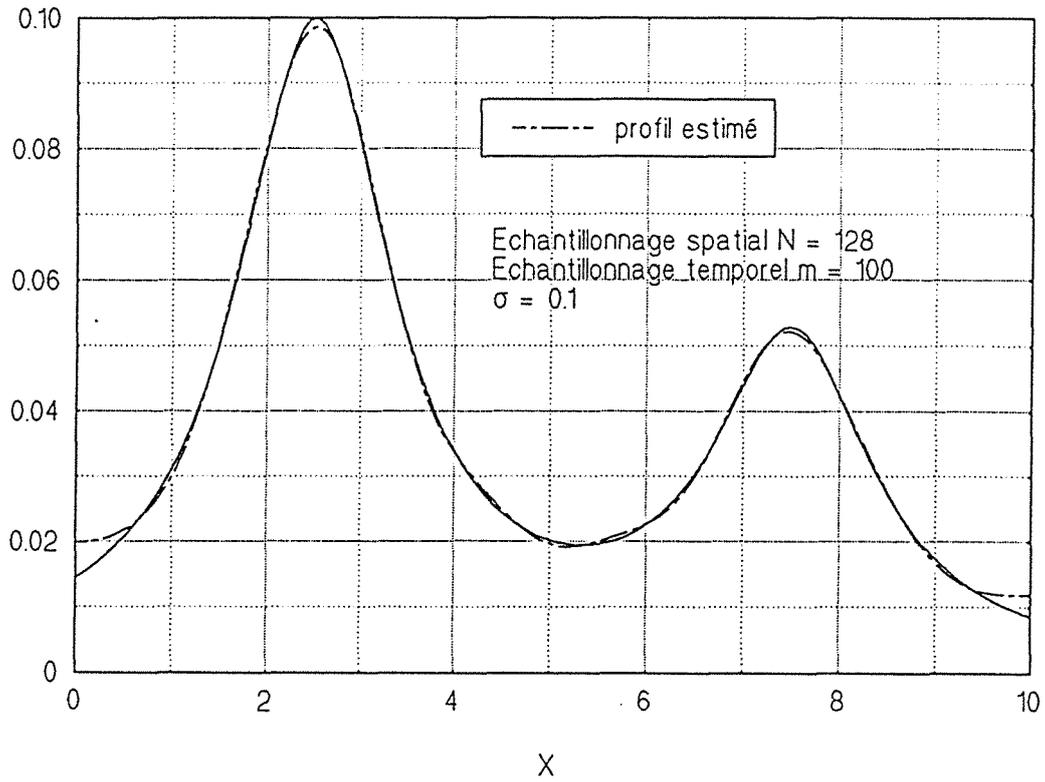


Fig.4.12 Inversion par troncature à 30 harmoniques
Résistance en double bosse

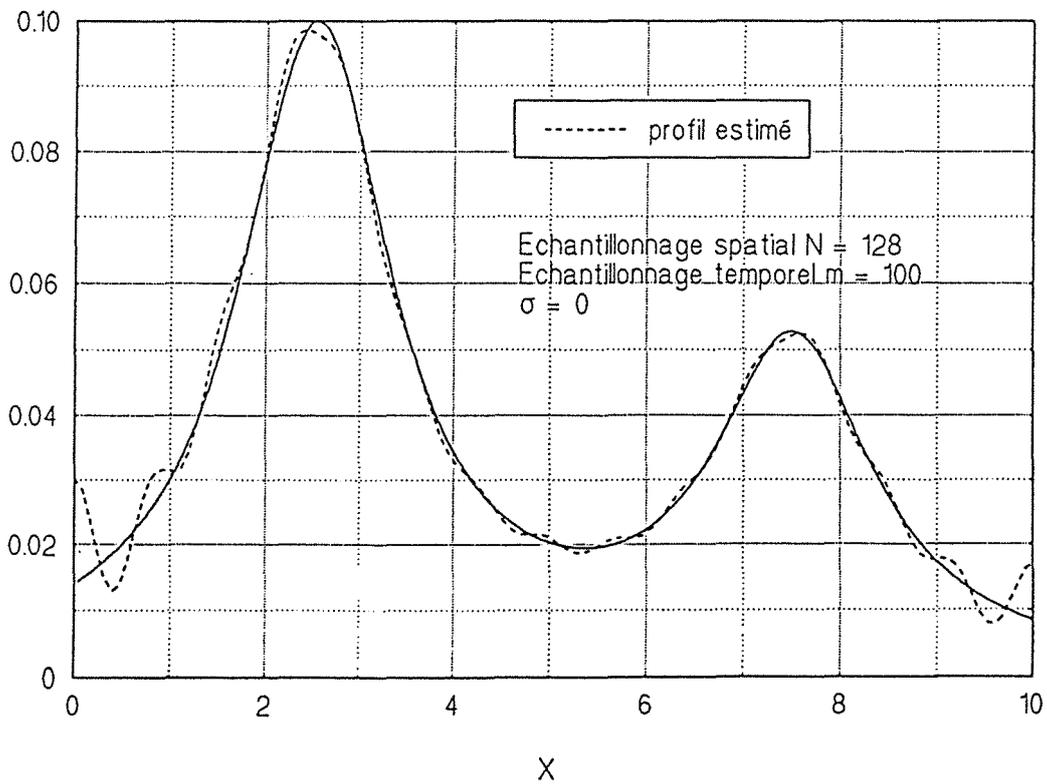
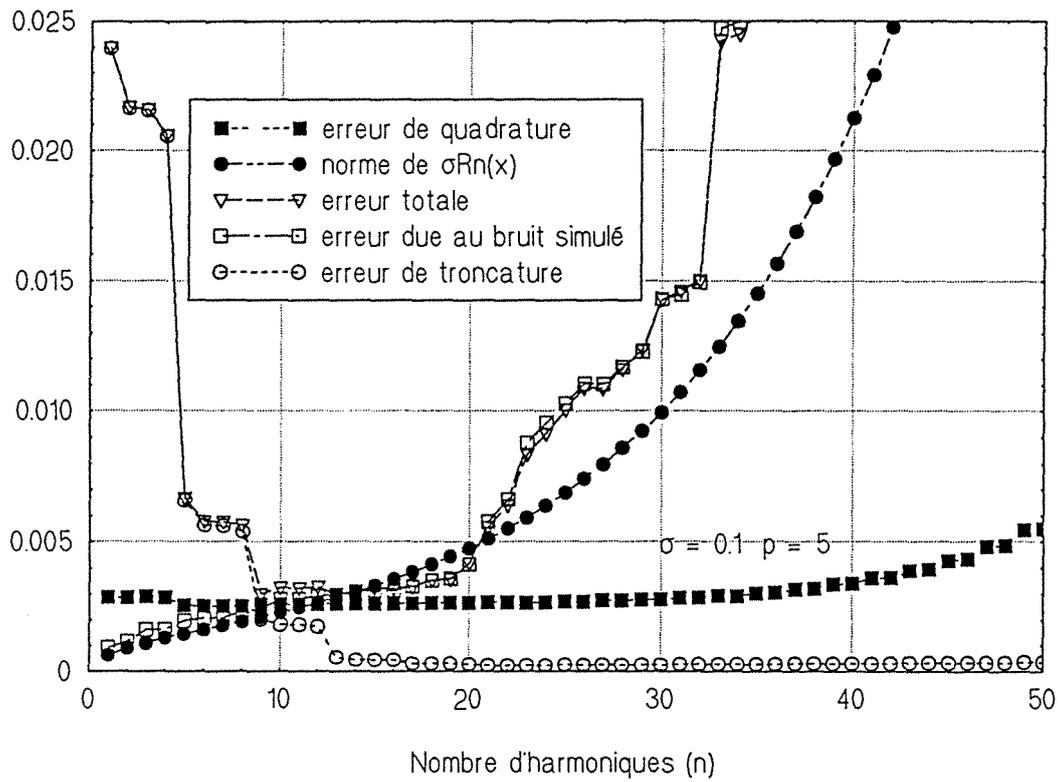


Fig.4.13 Norme des erreurs d'estimation sur R(x) en double bosse



Une question se pose alors, comment deviner cette fréquence optimale de troncature ? Généralement, le profil du contraste de Laplace $\Delta\tau(x, p)$ a pratiquement la même forme que la résistance d'interface et spécialement dans le cas de fonctions à variations douces. Ceci va permettre donc de connaître approximativement, la fréquence de troncature recherchée, à partir de la puissance spectrale du profil du contraste de Laplace (voir figure (4.14)). C'est la fréquence au delà de laquelle, la puissance spectrale devient négligeable et oscillante (les oscillations correspondent en fait au bruit numérique). Dans le cas de la fonction à "deux bosses", on a approximativement $n = 12$, ce qui n'est pas loin du nombre de fréquences significatives ($n = 15$).

4.3.3.2 Résistance d'interface en "double porte"

Le profil estimé est comparé au profil nominal sur la figure (4.15). L'inversion réalisée avec la fréquence de Nyquist et une valeur de p égale à 9, donne un résultat acceptable, car l'erreur due à la quadrature ne varie pas beaucoup avec la fréquence de troncature. Ceci est illustré sur la figure (4.8) (courbe en carrés), où on a présenté les différents types d'erreurs quadratiques sur $R(x)$.

Pour améliorer le résultat de la figure (4.15) par la même technique qu'on a utilisée dans le cas de la résistance à "deux bosses", on a tracé la puissance spectrale du profil du contraste de Laplace pour $N = 128$ (courbe en triangles) (figure (4.16)). La fréquence au delà de laquelle, le spectre devient négligeable, est approximativement la soixantième. L'algorithme inverse pour cette fréquence de troncature, donne la résistance d'interface présentée en triangles sur la figure (4.15) : elle est parfaitement superposée à celle obtenue avec la fréquence de Nyquist. Ceci est dû au fait qu'à partir de la soixantième fréquence, les erreurs dues à la troncature et à la quadrature se compensent (voir figure (4.8)).

Pour voir l'influence de l'échantillonnage spatial de la fonction $R(x)$ sur la puissance spectrale du contraste de Laplace et par la suite sur le choix de la fréquence de troncature, nous avons traité trois cas : $N = 64$; $N = 128$ et $N = 256$. Sur la figure (4.16), on constate que la puissance spectrale aux hautes fréquences quand $N = 256$ (courbe en cercles) est à peu près 100 fois plus faible que celle pour $N = 128$, beaucoup moins oscillante et son niveau moyen correspond à la précision de l'ordinateur, soit $2.22 \cdot 10^{-16}$. Par contre, la puissance spectrale devient très importante dans le cas où $N = 64$ et affecte même le spectre pour les petites fréquences (courbe en carrés, figure (4.16)), d'où l'intérêt d'une discrétisation fine en espace.

En ce qui concerne les résultats obtenus et présentés sur la figure (4.15), on remarque qu'ils ne sont pas aussi corrects que dans le cas de la résistance à "deux bosses". En effet, beaucoup plus d'harmoniques sont nécessaires pour tenir compte de la variation brusque de la résistance aux bords des défauts (phénomène de Gibbs). L'erreur de troncature pour ce genre de fonction est plus grave.

Fig.4.14 Puissance spectrale du contraste de Laplace
Résistance en double bosse

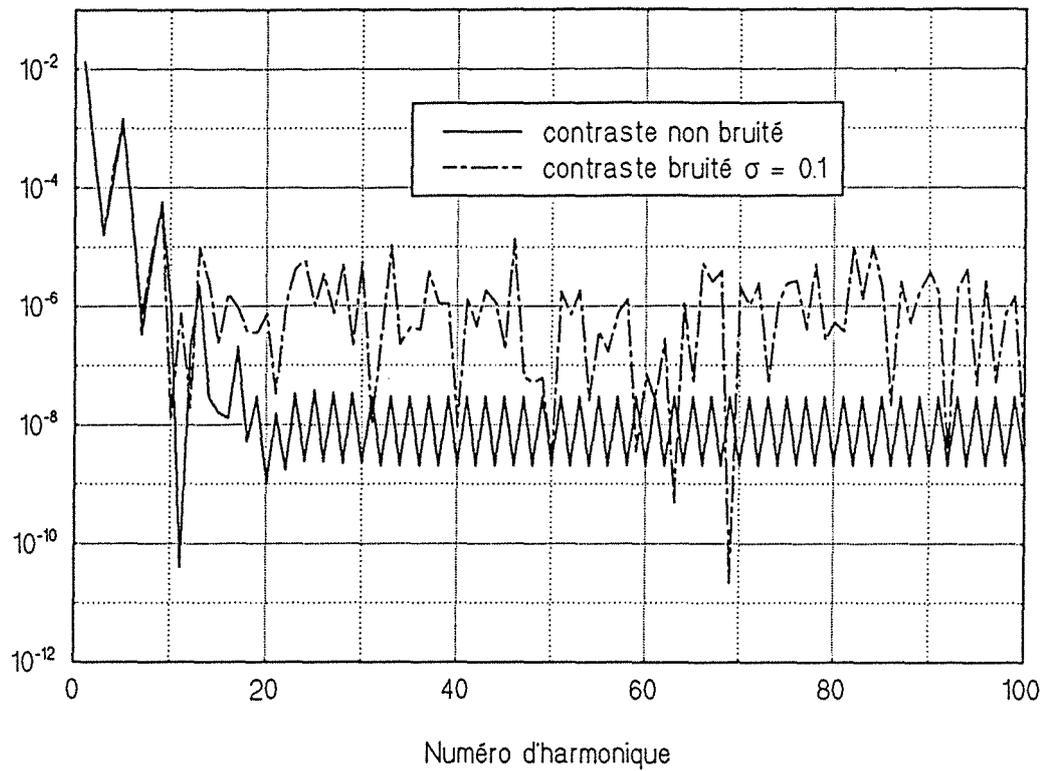


Fig.4.15 Estimation de la résistance en double porte
avec et sans troncature du spectre dans le cas sans bruit

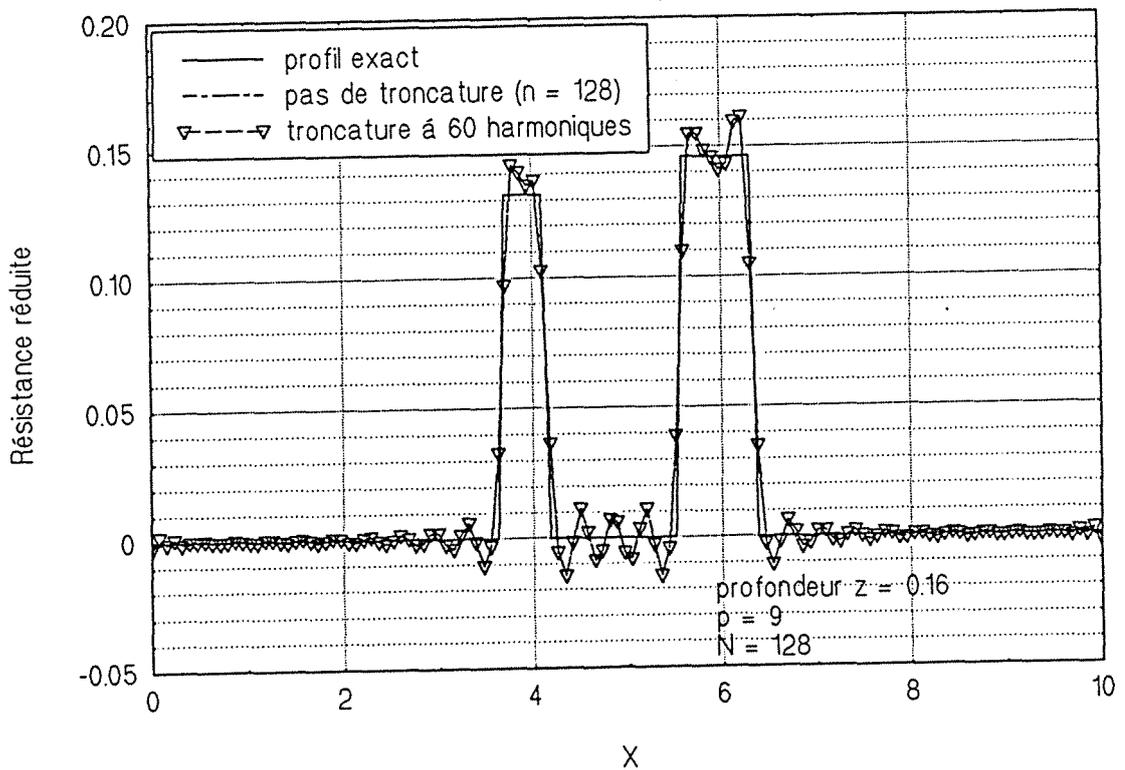
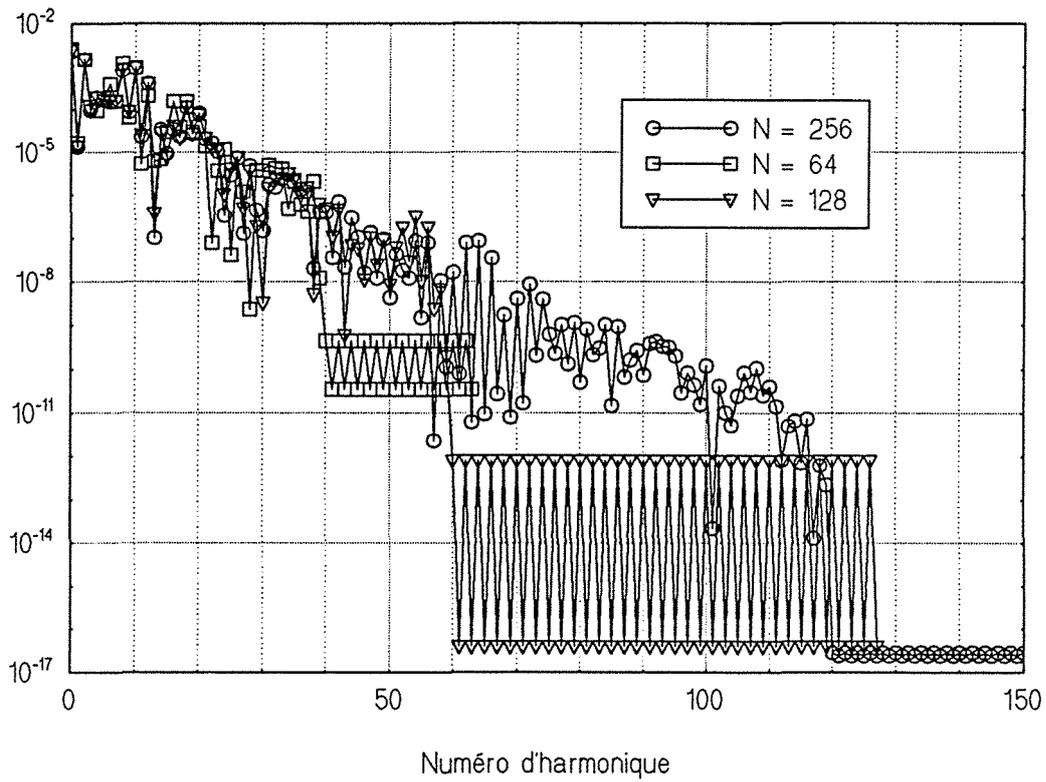


Fig.4.16 Puissance specrale du profil en contraste de Laplace pour différents échantillonnages de la résistance d'interface en double porte



4.3.4 Simulation d'inversion avec bruit

Dans le paragraphe précédent, on a vu que la troncature de la série de Fourier et la quadrature permettant de calculer la transformée de Fourier directe, sont sources d'erreurs pour l'identification de la résistance d'interface dans le cas d'un signal non dégradé par le bruit de mesure.

En réalité l'image expérimentale dans l'espace de Fourier, contient une partie considérable de bruit aux hautes fréquences spatiales. Ce qui produit une perte d'information irrémédiable pour ces fréquences. Ce bruit est généré par le détecteur de la caméra ou par la numérisation du signal. Le résultat de ce bruit est que quand la déconvolution est effectuée, la morphologie des défauts n'est plus observable.

- Différents profils de la résistance d'interface identifiés dans le cas de la fonction à "deux bosses", pour différentes valeurs de la fréquence de troncature, sont montrés sur la figure (4.17). Ils ont été estimés à partir d'un contraste thermique réduit dégradé par un bruit aléatoire, supposé additif, gaussien, de moyenne nulle et d'écart type constant $\sigma = 0.1$. Ce niveau de bruit correspond à une caméra de précision $0.2 \text{ }^\circ\text{C}$ et à une élévation de température de $4 \text{ }^\circ\text{C}$.

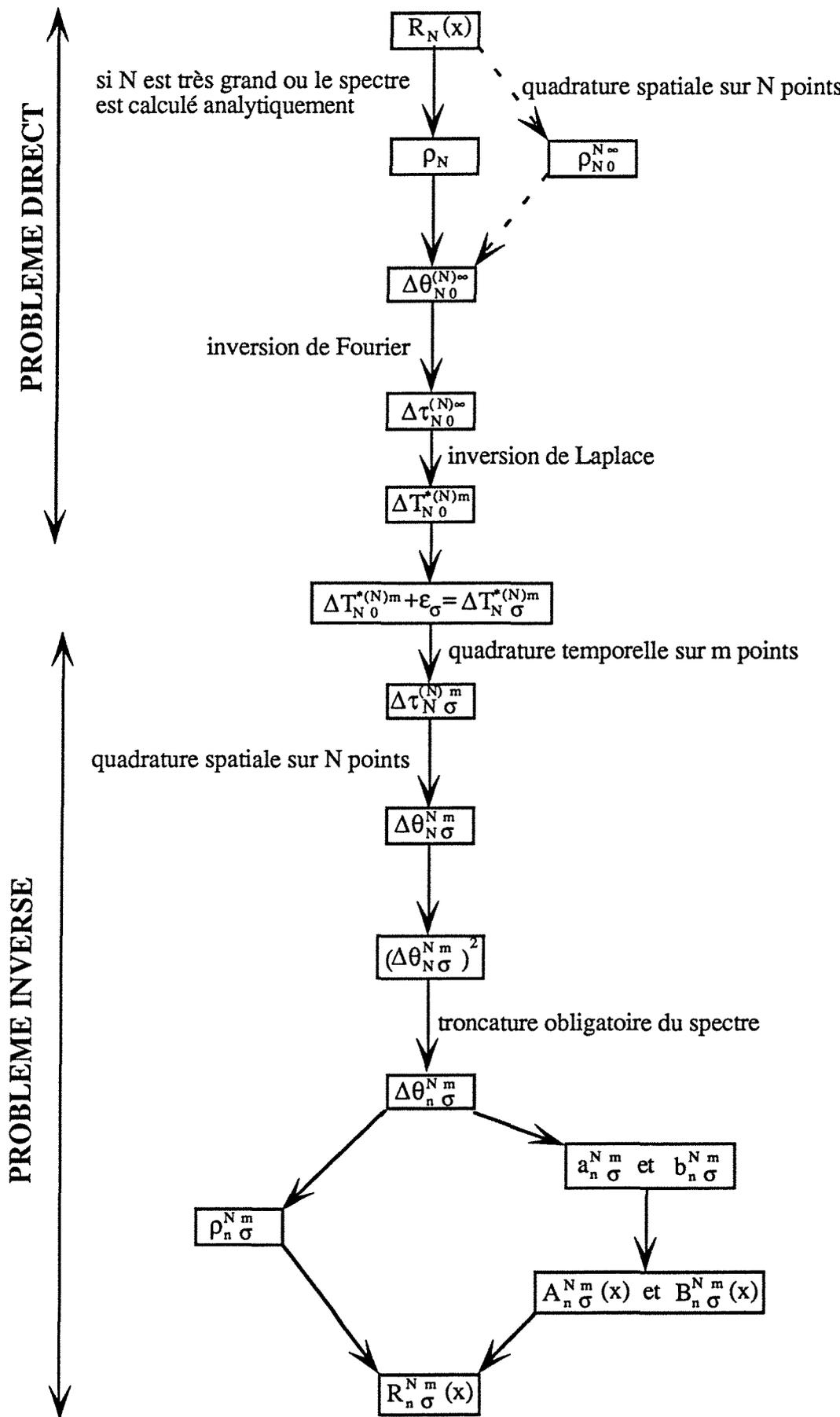
On constate que le profil identifié avec 15 harmoniques (courbe en trait discontinu) correspond le mieux au profil nominal (courbe en trait continu). Ceci était prévisible, vu que le spectre de $R(x)$ est négligeable pour les harmoniques correspondant à $n > 15$ (voir figure (4.3)) et ce n'est que le bruit qui domine pour ces fréquences.

L'effet du bruit est observable sur le profil identifié avec 25 harmoniques (courbe en trait mixte) par la présence d'oscillations autour du profil exact. Si par contre, on n'utilise que très peu d'harmoniques, il y a le risque que ça soit insuffisant pour remonter à la fonction $R(x)$. En effet, le profil obtenu avec dix harmoniques (courbe en pointillés), est plus "mou" que le profil réel. L'inversion a été réalisée en utilisant le rapport des deux séries (équation (4.65)). L'algorithme basé sur l'inversion de la matrice donne les mêmes résultats.

- Dans le cas de la résistance en "double porte", la déconvolution en présence de bruit est plus délicate car ce dernier perturbe les harmoniques significatifs aux hautes fréquences du spectre exact. Il devient alors impossible de réduire l'effet du bruit de manière aussi efficace que pour les résistances "molles".

L'impact dû à la perte d'information aux hautes fréquences sur la fonction $R(x)$ estimée est illustré sur la figure (4.18). Le résultat obtenu avec trente harmoniques (courbe en trait mixte) décrit d'une manière assez correcte le niveau des deux résistances réduites mais ne suit pas la morphologie réelle des deux défauts. L'identification avec la fréquence de troncature optimale obtenue dans le cas où le bruit est nul (paragraphe 4.3.3.2) soit $n \geq 60$, n'est plus adéquate dans ce cas : ceci est montré par les oscillations du profil estimé pour $n = 60$ (courbe en trait discontinu, sur la même figure).

Méthodologie de simulation d'inversion dans le cas d'un bruit de "mesure" d'écart type σ



Remarque : Le paramètre entre parenthèse est infini si on n'exécute pas l'étape en trait discontinu

Fig.4.17 Influence de la fréquence de troncature sur l'inversion
Résistance en double bosse

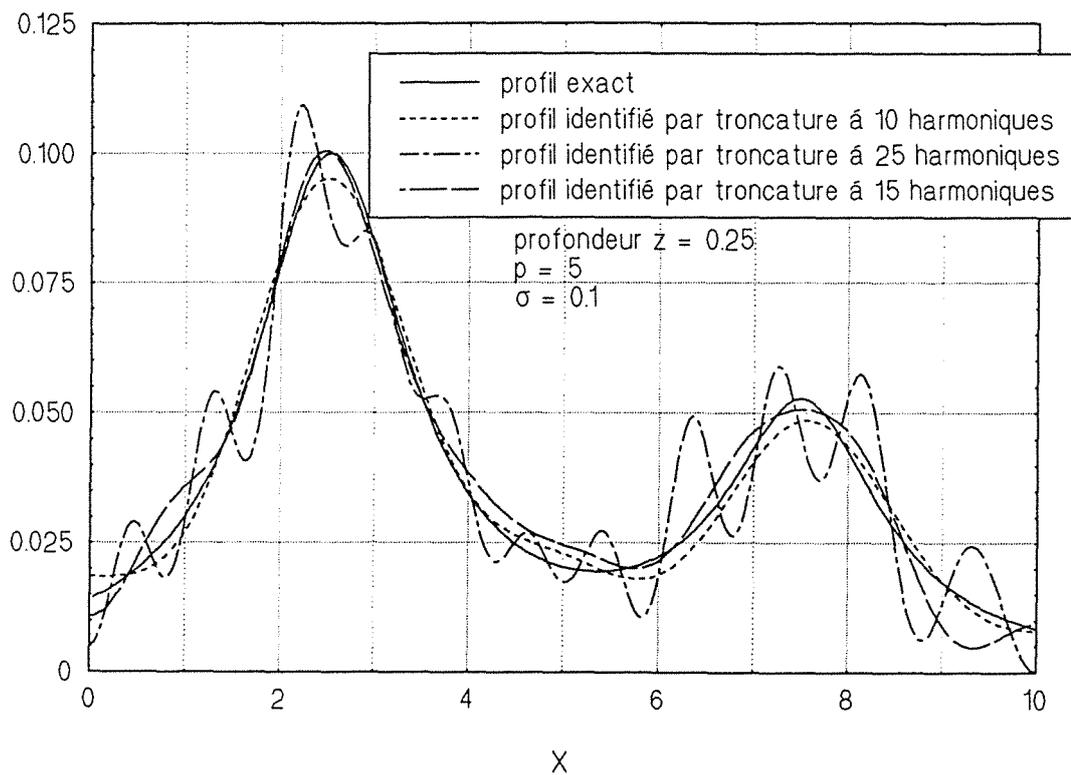
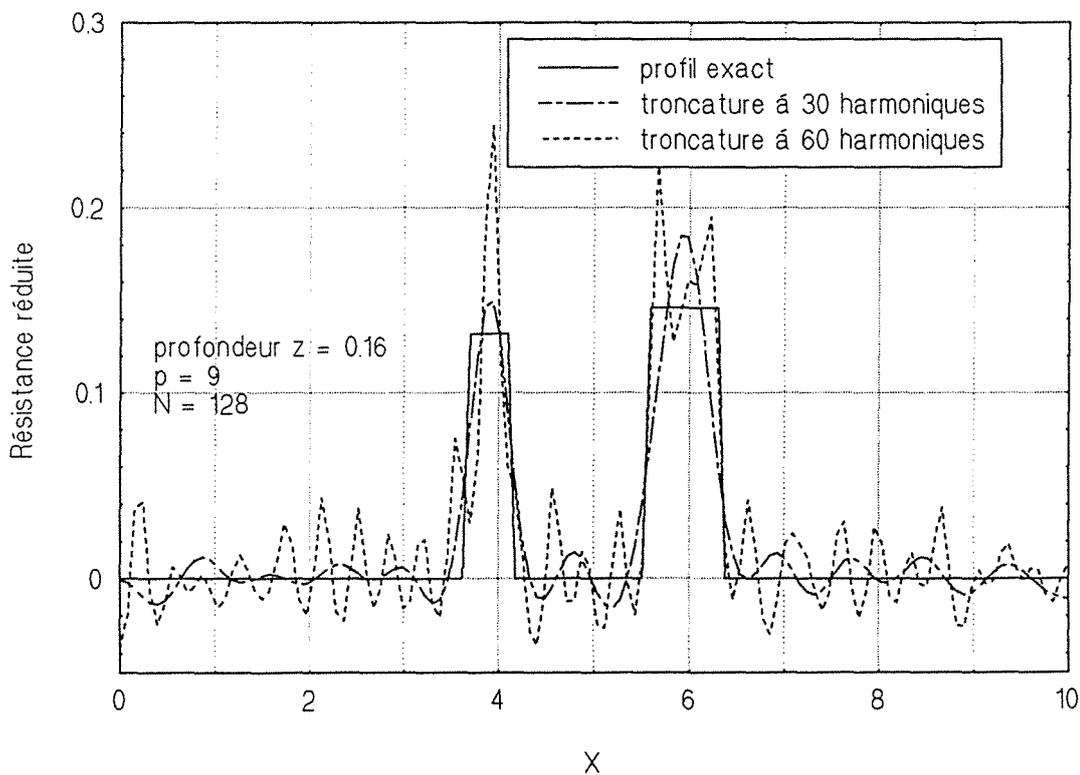


Fig.4.18 Influence de la fréquence de troncature sur la
résistance en double porte estimée



4.3.5 Approche stochastique de l'erreur due au bruit

4.3.5.1 Analyse stochastique de l'erreur due au bruit

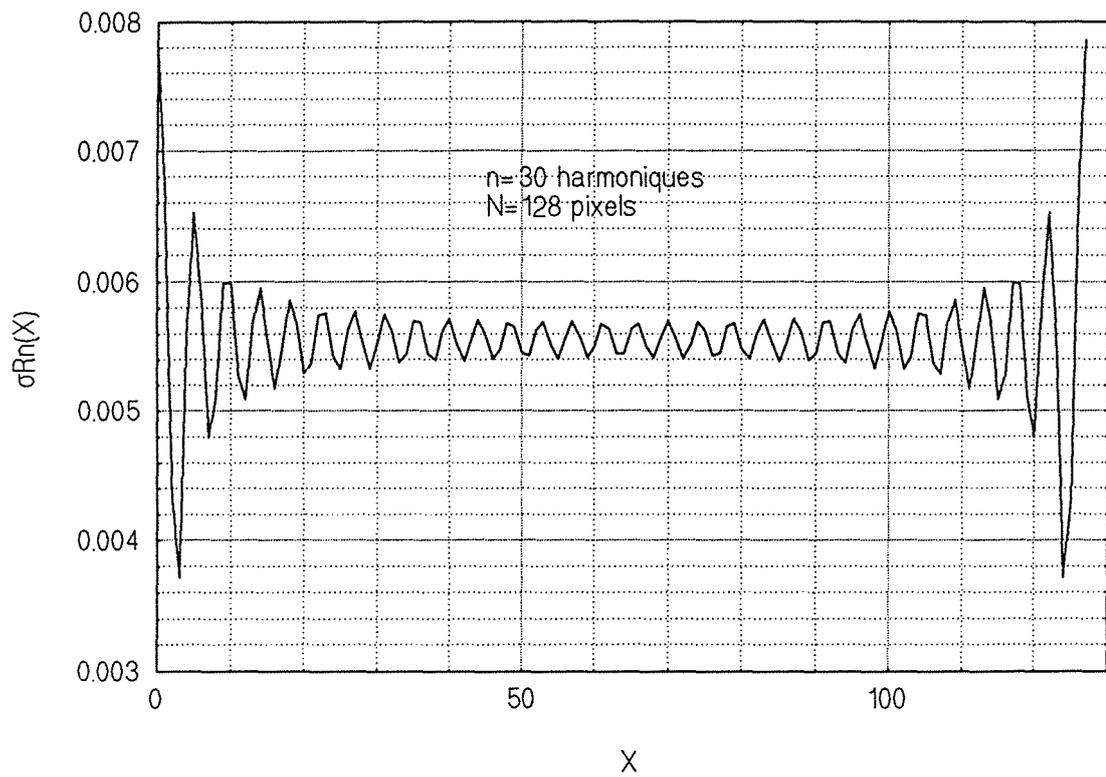
En supposant que le bruit de mesure sur le contraste réduit $\Delta T(x, t)$ est additif, non corrélé, d'écart type constant σ et de moyenne nulle et si en plus on admet que le deuxième terme figurant dans la définition du vecteur a (formule (4.60)) est négligeable (ce qui est légitime dans le cas de faibles valeurs de $R(x)$), il est alors possible de déterminer l'expression de l'écart type $\sigma_R(x)$ de l'erreur d'estimation provoquée par le bruit sur $R(x)$ (voir Annexe 4.5) :

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 \frac{\Delta t}{2 p N} \frac{\sinh^4(\sqrt{p})}{\sinh^4(\sqrt{p} e_2)} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2})}{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2} e_2)} \frac{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)}{\sinh^2(\sqrt{p})} \cos^2\left(\frac{i k \pi}{N}\right) \right\} \quad (4.78)$$

$e_2 (= 1 - e_1)$ étant l'épaisseur réduite de la deuxième couche, Δt le pas réduit de discrétisation temporelle, et la quadrature spatiale est faite sur N points. L'intérêt de cette expression réside en son indépendance de la fonction $R(x)$. Si on supprime le terme relatif à la somme \sum , on obtient l'erreur produite par l'algorithme inverse 1 D ($i = 0$). Celle-ci peut être utilisée pour choisir une valeur adéquate de la variable réduite de Laplace p liée à la profondeur d'interface e_1 (c'est la valeur de p qui minimise le premier terme de l'erreur mentionnée ci-dessus).

L'écart type $\sigma_R(x)$ est tracé sur la figure (4.19) pour les valeurs suivantes des paramètres : $\sigma = 0.1$; $N = 128$; $\Delta t = 0.01$; $m = 100$; $n = 30$; $e_1 = 0.16$; $\ell = 9.235$ et $p = 9$. On constate que l'erreur produite par le bruit devient à peu près 40 % plus grande sur les bords de l'échantillon. Ceci est dû au fait que plus on s'éloigne du milieu de l'interface, plus la distance thermique moyenne de la résistance au point x aux différents points de mesure de température (128 pixels équidistants) augmente. Ceci fait que la sensibilité de la température à la résistance en x devient faible si on s'approche des bords de l'échantillon et par conséquent l'écart type $\sigma_R(x)$ devient plus grand.

Pour les mêmes valeurs des paramètres, nous avons tracé sur la figure (4.8) la norme de l'écart type de l'erreur théorique due au bruit $\left\| \sigma_R(x) \right\|$ en fonction de la fréquence de troncature (n) (courbe en carrés pleins). L'erreur due au bruit, calculée cette fois-ci à partir de l'inversion du contraste exact $\Delta T(x, t)$ correspondant à la fonction en "double porte", auquel on a rajouté un bruit généré par ordinateur ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 0$), est portée sur la même figure (courbe en triangles). Cette dernière croît avec la fréquence de troncature et elle est assez proche de la fonction présentant la norme de l'écart type théorique pour les petites valeurs de n (jusqu'à $n = 50$, équation (4.78)).

Fig.4.19 Ecart type théorique $\sigma_{Rn}(X)$ 

L'erreur due à la quadrature ($e_{quadrature}$) est calculée à partir de la résistance obtenue par l'inversion simple de Fourier du spectre théorique de la résistance exacte (équation (4.72)) et de la résistance estimée par l'inversion d'un champ de température réduit non bruité, défini spatialement sur N points et temporellement sur m points. L'erreur de quadrature varie lentement en fonction de la fréquence de troncature : elle est quasi constante en dessous du soixantième harmonique et est lentement croissante au dessus (voir figure (4.8), courbe en carrés).

Le résultat de ces trois types d'erreur concurrentes (troncature, bruit et quadrature), est l'erreur totale d'estimation qu'on a présenté en cercles pleins sur la même figure. La courbe passe par un minimum dans l'intervalle $n = 25 ; n = 40$. On note ici le compromis qu'il faut faire entre le niveau de l'erreur d'estimation e_{bruit} et celui de l'erreur déterministe $e_{troncature}$ (l'erreur de quadrature étant presque constante). Le nombre n optimum qui minimise l'erreur totale joue alors le rôle d'un paramètre régularisateur du problème inverse.

Nous avons fait la même analyse de l'erreur d'estimation pour la résistance d'interface à "deux bosses". Le calcul analytique du spectre théorique de $R(x)$ est impossible, par conséquent $R_n(x)$ est inconnue. Nous avons choisi alors d'affiner l'échantillonnage spatial de $R(x)$ avec $N = 256$, pour calculer après le spectre avec le moins d'erreur possible et l'assimiler ultérieurement au spectre "théorique" de la fonction en "double bosse".

On a donc, comme dans le cas de la résistance en "double porte" la relation suivante :

$$\left\| R_{n\sigma}^{Nm}(x) - R(x) \right\| \leq e_{bruit} + e_{quadrature} + e_{troncature} \quad (4.79)$$

L'erreur due au bruit est obtenue de la même manière que dans le cas précédent : c'est une fonction qui croît avec le nombre d'harmoniques n et dont l'évolution est très proche de celle de la norme de l'écart type théorique sur $R(x)$ dans le cas où celle-ci est faible (voir figure(4.13)) - courbes en carrés et en cercles pleins -.

L'évolution de l'erreur due à la troncature est montrée sur la figure (4.13) (courbe en cercles) : c'est une fonction qui décroît avant le quinzième harmonique et qui devient négligeable après.

L'erreur de quadrature est quasiment constante (courbe en carrés pleins) jusqu'au 40 ème harmonique et est inférieure à l'erreur liée au bruit de mesure.

La résultante de ces erreurs est minimale entre les harmoniques 10 et 18 (courbe en triangles). Ce qui correspond justement au nombre de fréquences significatives du spectre de $R(x)$ présenté sur la figure (4.3).

4.3.5.2 Choix optimum de la variable de Laplace pour l'inversion

L'évolution de la norme de l'écart type théorique $\left\| \sigma_R(x) \right\|$ sur la résistance d'interface $R(x)$ localisée à une profondeur e_I , en fonction de la variable réduite \sqrt{p} , admet toujours un minimum pour une fréquence de troncature (n) donnée. Sur les figures (4.20) et (4.21), nous avons présenté les variations de cette norme divisée par son minimum pour différentes valeurs de e_I et n .

On note également que la valeur optimale minimisant l'erreur diminue quand la profondeur d'interface augmente, et ce quand le nombre d'harmoniques n dans la série de l'expression (4.78) est constant. Ce phénomène a déjà été observé dans le cas du modèle 1D local en face avant (voir figure (4.22)).

Si maintenant, on fait varier la fréquence de troncature n , tout en gardant la profondeur e_I constante, on constate que la variable p optimale croît avec n (voir figures (4.20) et (4.21)).

Dans le cas où l'interface est proche de la face avant (par exemple $e_I = 0.16$, figure (4.20)), les variations de l'erreur sont très lentes autour du minimum, et la variable optimale peut être choisie dans un large intervalle autour de ce minimum, et par conséquent l'utilisation de la valeur optimale issue du problème 1D local reste légitime ($p = 9$).

Par contre, dans le cas d'une interface plus profonde ($e_I = 0.25$; c'est la profondeur de la résistance à "deux bosses" ; figure (4.21)), on remarque que le passage d'un seul harmonique à quinze, n'influe pas trop sur la valeur p optimale ($p \approx 5$), et par conséquent sur l'erreur sur $R(x)$.

Si par exemple, on monte jusqu'à trente harmoniques, on constate que le minimum se déplace à $p = 9$. L'utilisation du p optimum correspondant à l'harmonique nul risque alors de donner une mauvaise estimation de $R(x)$, vu que cette fois-ci (cas d'une interface profonde), la variation de l'erreur autour du minimum est assez rapide. Il est alors préférable de déterminer la variable optimale de Laplace à partir de l'erreur calculée avec tous les harmoniques nécessaires à l'inversion. Dans le cas contraire, le p optimum déduit du modèle 1D linéaire est suffisant pour l'inversion du champ de température (figure (4.22)).

Un exemple de l'influence de la variable p sur l'estimation est illustré par la simulation sur la fonction à "deux bosses". L'inversion est faite à partir d'un contraste dégradé par un bruit d'écart type constant $\sigma = 0.1$. La variable de Laplace optimale dans ce cas est à peu près égale à 5 (figure (4.22)). Le profil estimé pour cette valeur (figure (4.23)) est moins oscillant que celui calculé pour $p = 1$. Cette simulation montre l'utilité du choix optimisé de cette variable.

Fig.4.20 Influence de la variable p sur R(x) estimée

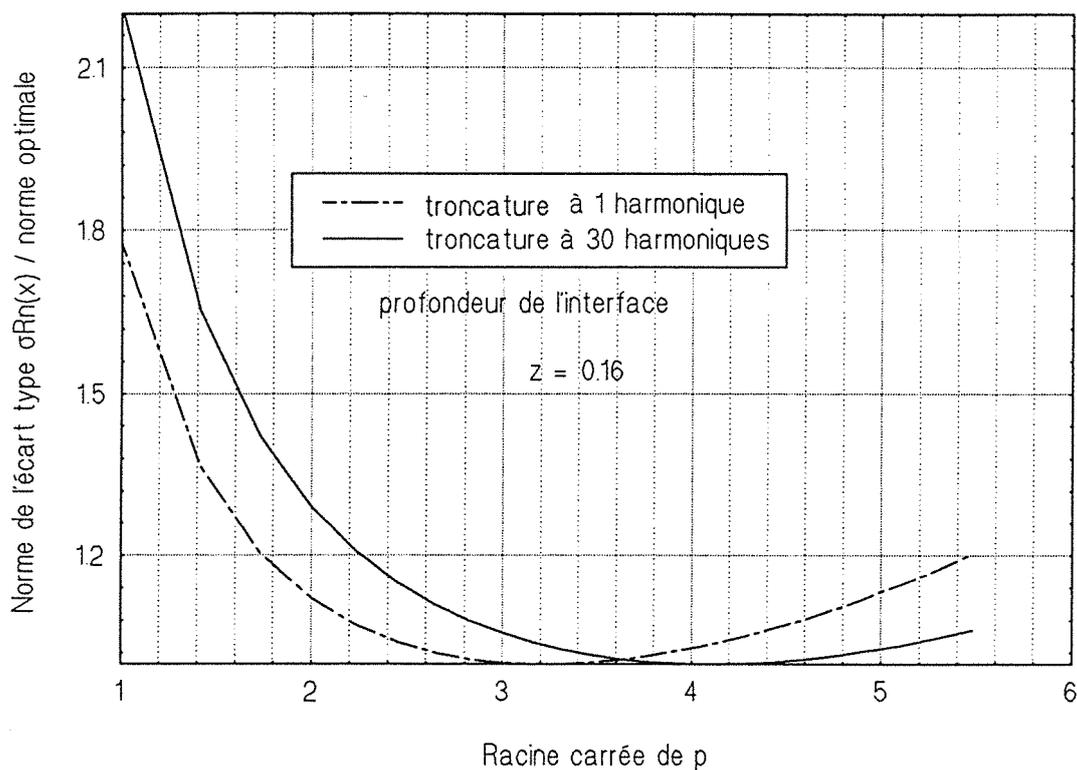


Fig.4.21 Influence de la variable p sur R(x)

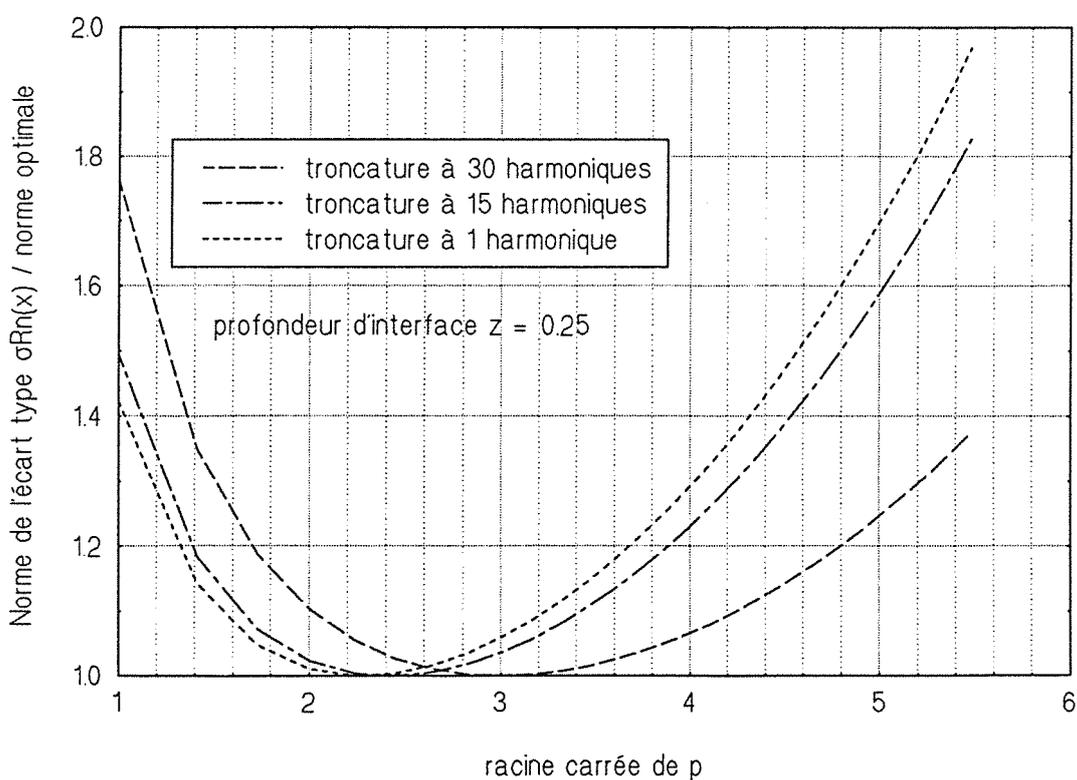


Fig.4.22 Optimisation du choix de la variable de Laplace calculée à partir du modèle 1D en face avant

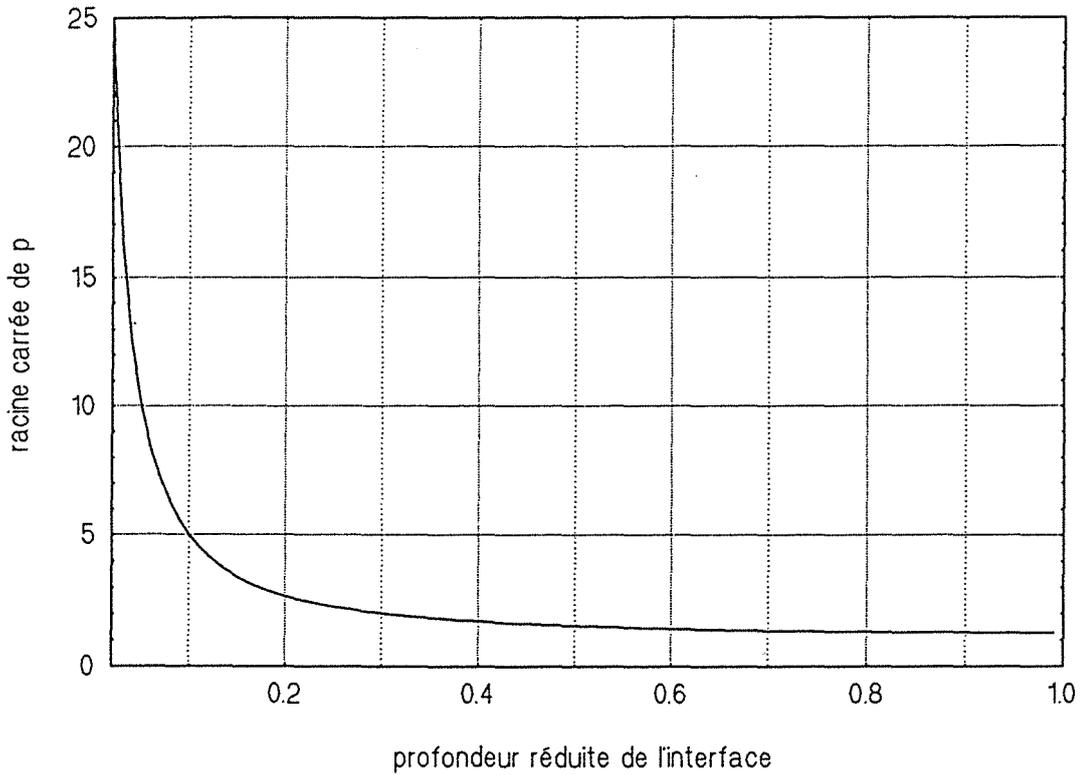
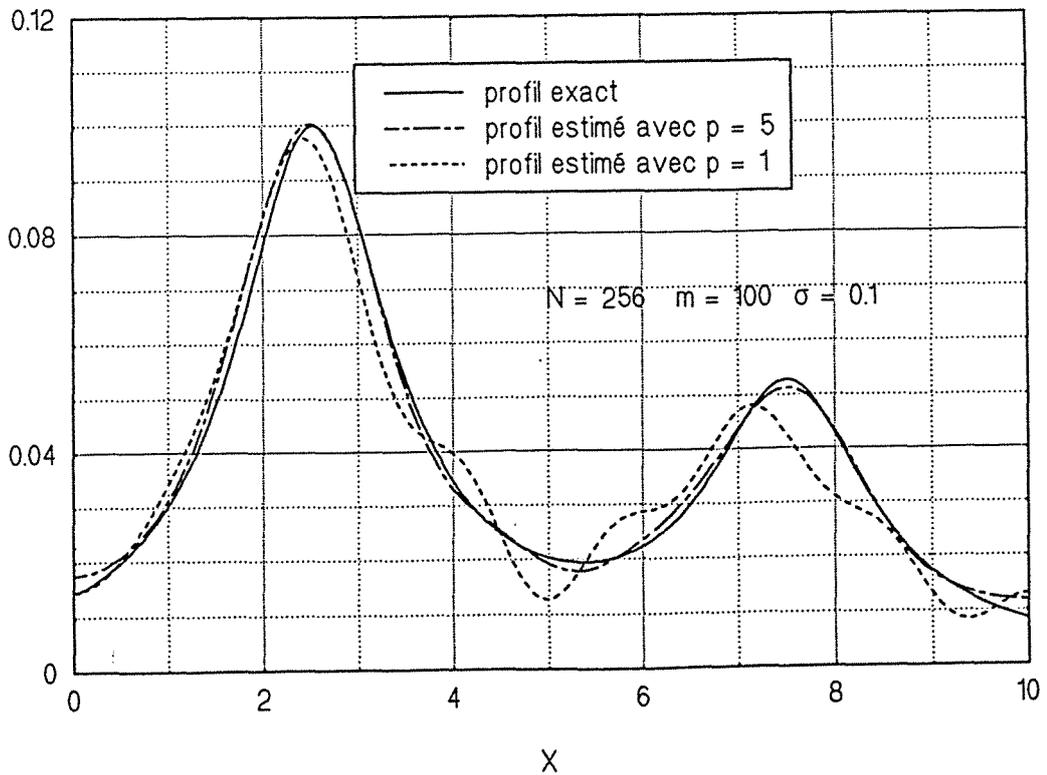


Fig.4.23 Influence de la variable de Laplace sur l'inversion Résistance en double bosse



4.4 Effet des erreurs des paramètres connus sur l'estimation de la résistance

4.4.1 Influence de la profondeur

Nous avons testé dans le cas de la résistance à "deux bosses", l'impact d'une mauvaise estimation de la profondeur de la résistance d'interface. La profondeur nominale de l'interface étant égale à 0.25. La fonction $R(x)$ dans le cas sans bruit de mesure, calculée pour cette profondeur (figure (4.24)) est très proche de la résistance exacte.

Par contre, si on commet une erreur de $\pm 20\%$ lors de l'identification de la profondeur, on constate que les profils identifiés (calculés avec les valeurs correspondantes de la variable de Laplace p) sont sur ou sous estimés ($(e_I = 0.3)$ et $(e_I = 0.2)$ sur la figure (4.24)). Toutefois, l'ordre de grandeur de $R(x)$ et la forme restent toujours acceptables.

La même procédure a été appliquée à la résistance d'interface en "double porte", située à une profondeur nominale égale à 0.16. Dans le cas où la profondeur est sous estimée (une erreur de -20% donc $e_I = 0.13$ et $p = 15$), on obtient une fonction $R(x)$ assez représentative et en forme et en amplitude (figure (4.25)). Mais si la profondeur est surestimée (une erreur de $+20\%$ donc $e_I = 0.2$ et $p = 5$), le profil obtenu est assez perturbé sur les extrémités des défauts et de l'échantillon, mais reste assez représentatif de la répartition recherchée.

4.4.2 Influence des valeurs propres

Une mauvaise estimation des conductivités thermiques axiale ou radiale du matériau constituant l'échantillon, ou une mauvaise mesure de la largeur ou de l'épaisseur introduisent un biais sur les valeurs propres du problème.

Nous avons analysé l'influence de cette erreur sur la résistance identifiée pour les profils à "deux bosses" et en "double porte", en supposant que le contraste thermique n'est pas dégradé par le bruit de mesure.

Dans les deux cas, une erreur de $\pm 10\%$ sur la largeur réduite ℓ ; n'influe pas beaucoup sur les résultats de l'inversion (voir figures (4.26) et (4.27)). Néanmoins, dans le cas de la fonction en "double porte", on note plus de fluctuations lorsqu'on sous estime ℓ . Ceci, est normal vu qu'en faisant cette erreur, on tient compte des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist.

Fig.4.24 Influence de la profondeur sur l'estimation de la résistance en double bosse

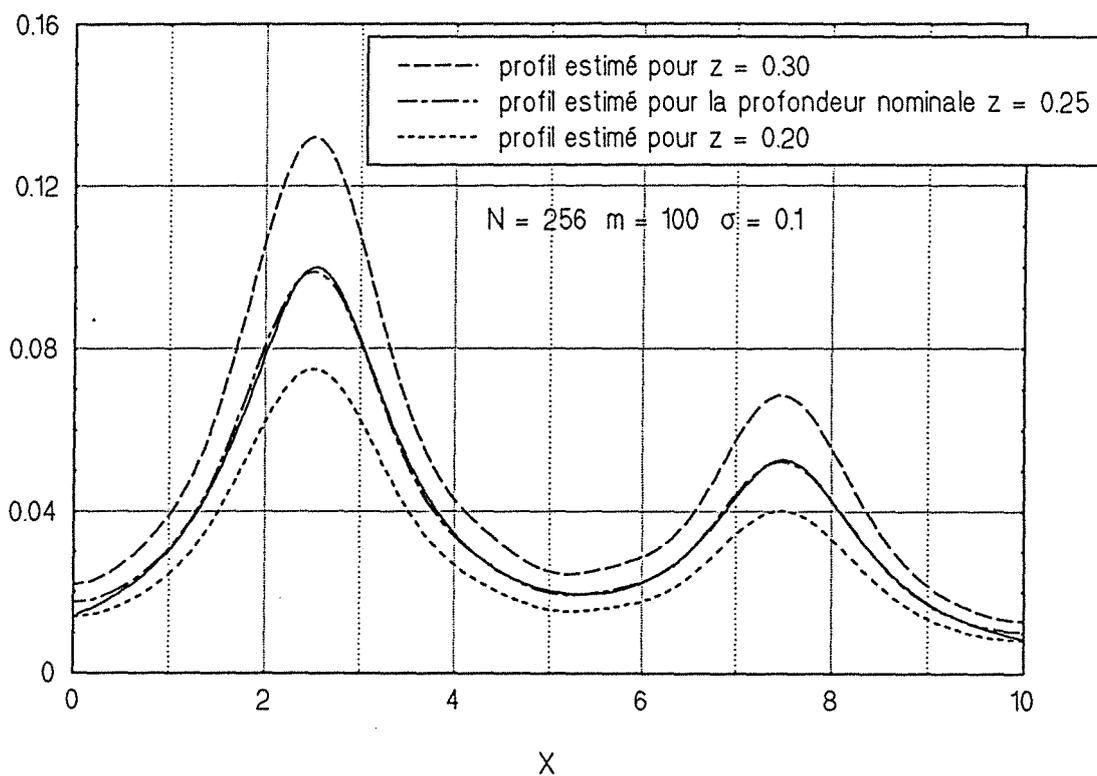


Fig.4.25 Influence de la profondeur sur R(x) estimée en double porte

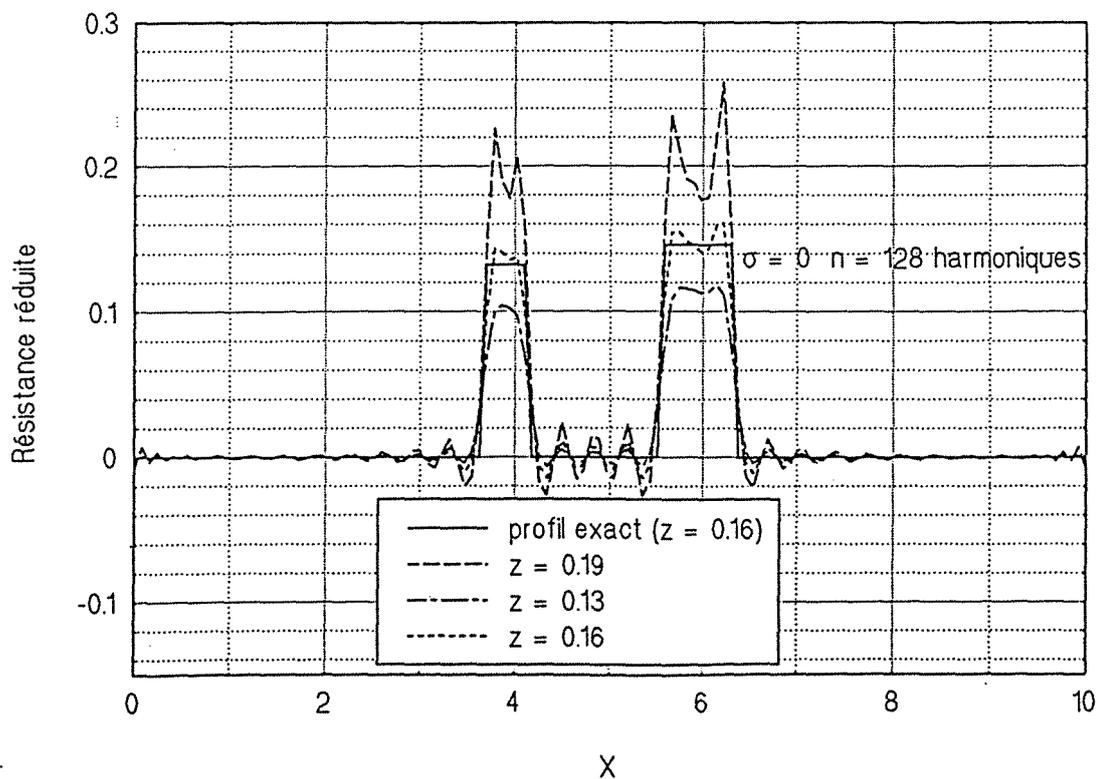


Fig.4.26 Influence des valeurs propres sur l'inversion
Résistance en double bosse

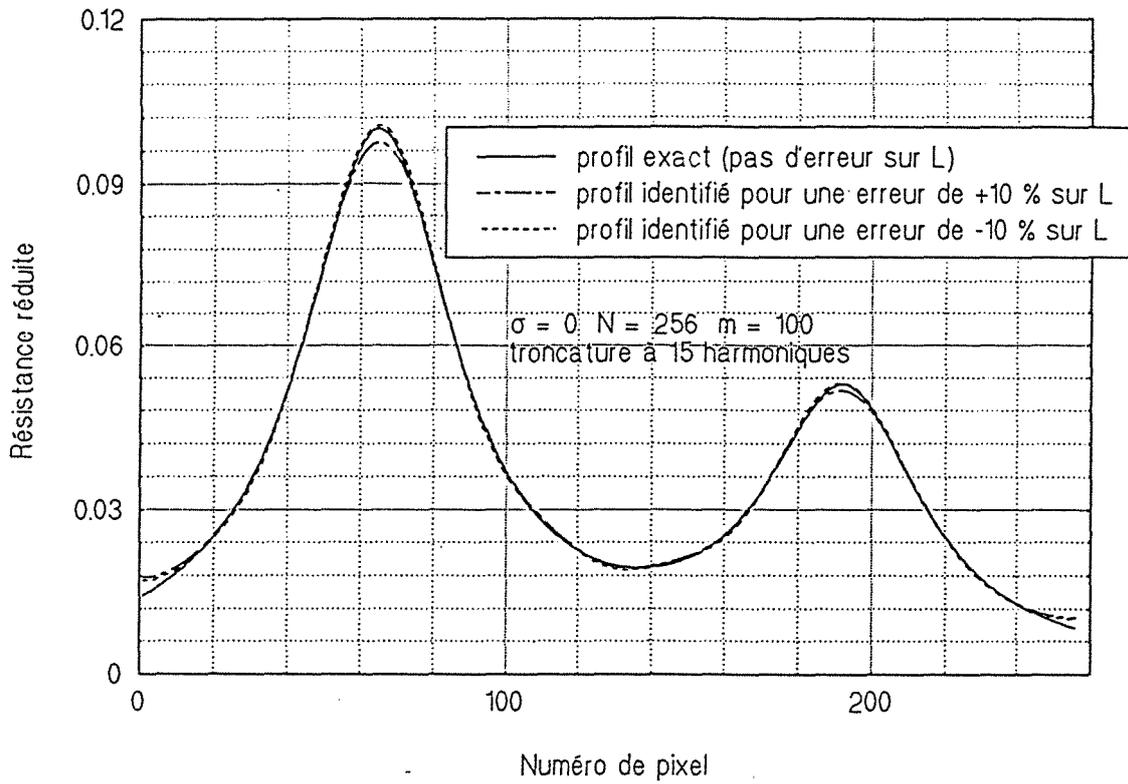
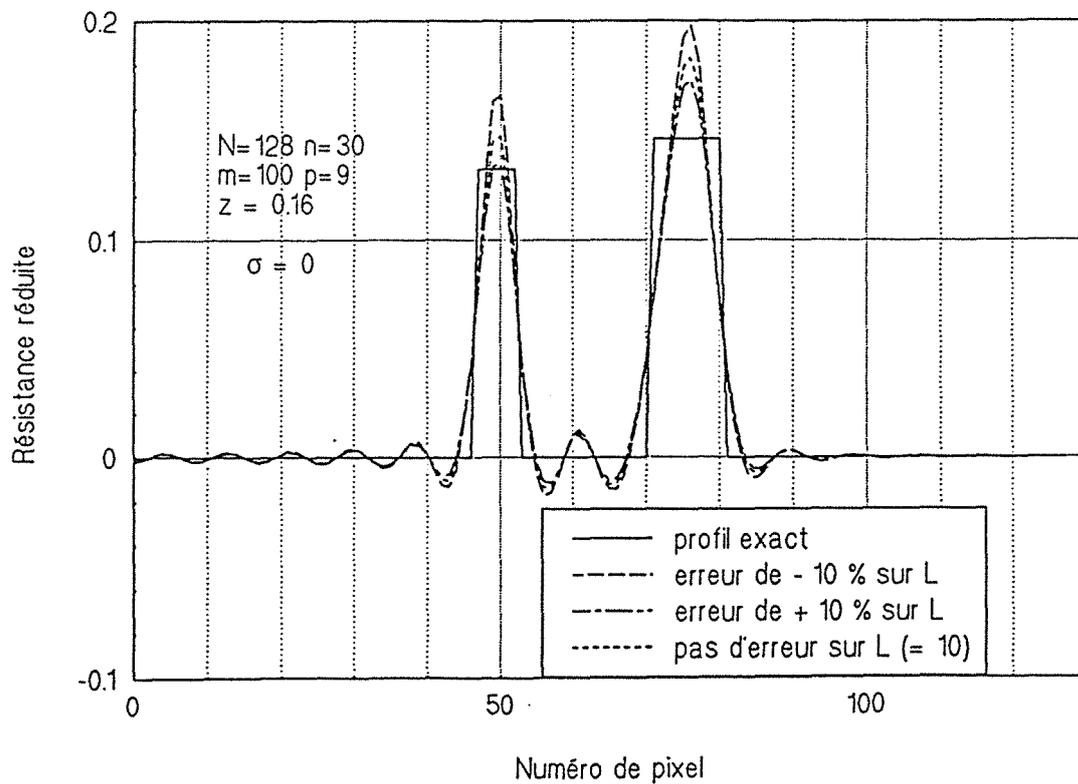


Fig.4.27 Influence des valeurs propres sur R(x) estimée en double porte



4.5 Méthodes par troncature et filtrage

4.5.1 Caractère mal-posé du problème inverse

Les simulations d'inversion dans le cas d'un champ de température bruité (paragraphe 4.3.4), ont montré que le profil de résistance estimé devient très instable, si la fréquence de troncature dépasse une certaine limite. Ceci témoigne du caractère mal-posé du problème inverse de la résistance thermique d'interface $R(x)$.

Une solution envisageable, serait d'effectuer un préfiltrage passe-bas de la résistance d'interface identifiée, ce qui permet d'éliminer les hautes fréquences du bruit, mais dégrade en même temps la résolution spatiale du signal. Pour choisir donc la fréquence de coupure du filtre, il faut trouver un compromis entre la perte de résolution et les perturbations dues au bruit. Le problème se pose particulièrement pour les résistances à variations brusques (fonction en "double porte"), dont le spectre est non négligeable aux hautes fréquences. Le choix de la fréquence de troncature dépend donc de la répartition spatiale de $R(x)$ et du niveau du bruit de mesure.

Le tracé du spectre discret des résistances $R(x)$, a montré que la plus grande partie de leur énergie est concentrée dans une petite région dans le domaine des fréquences, au voisinage de l'origine. Toutefois, des fonctions à discontinuités brusques (dérivée infinie), contribuent aux hautes fréquences également, mais avec une intensité moindre. La résistance d'interface peut alors être reconstruite sans une perte importante de résolution, par une déconvolution réalisée avec les fréquences significatives correspondant à la zone de concentration d'énergie.

La puissance spectrale (le carré du spectre) du signal expérimental est constituée d'un pic correspondant au signal nominal (la puissance du bruit étant généralement négligeable pour les petites fréquences) et qui se prolonge par une queue correspondant au bruit pour les hautes fréquences (voir figure (4.28)). Pour éliminer ce bruit, il suffit alors de ne considérer que le pic relatif au signal exact [Press et al (1992)].

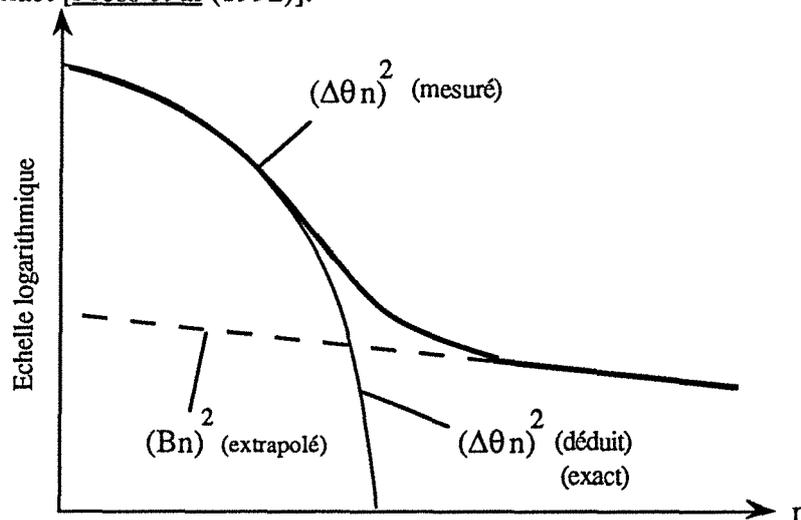


Fig.4.28 Méthodologie d'obtention du filtre de Wiener

Nous avons comparé les résultats de l'analyse spectrale effectuée sur le profil du contraste de Laplace $\Delta\tau(x, p)$ (signal d'entrée du problème inverse) et la résistance d'interface estimée (résultat de la déconvolution). L'analyse a été appliquée pour les répartitions à "deux bosses" (figure (4.29)) et en "double porte" (figure (4.30)) dans le cas d'un champ de contraste réduit $\Delta T(x, t)$ dégradé par un bruit d'écart type $\sigma = 0.1$.

Une confrontation des puissances spectrales des résistances nominale $R(x)$ et estimée $\hat{R}(x)$, a montré que le bruit de mesure est très amplifié lors du passage par le programme inverse. Même l'intégrité de la partie utile du signal est complètement dégradée.

Par ailleurs l'analyse spectrale du profil du contraste de Laplace, montre que la puissance du bruit est plate ou légèrement inclinée. Ce qui correspond à l'allure générale donnée sur la figure (4.28). Pour se débarrasser du bruit, il suffit alors de filtrer le signal d'entrée $\Delta\tau(x, p)$ et exécuter la déconvolution après. Un filtrage passe-bas ou un fenêtrage carré sur le signal de sortie $\hat{R}(x)$ n'aura donc aucun sens.

Cette idée est particulièrement valable dans les cas de résistances "molles", car le profil en contraste de Laplace a pratiquement la même allure que la résistance et par conséquent la même fréquence de coupure nette. Ce qui n'est pas le cas pour les fonctions $R(x)$ "dures", qui donnent des profils en contraste de Laplace "mous" à cause de la diffusion radiale de la chaleur et par conséquent un spectre négligeable aux hautes fréquences, ce qui ne correspond pas au spectre réel de $R(x)$. Néanmoins, la perte d'information pour ces fréquences n'est pas fatale, car de toute manière c'est le bruit de mesure qui prédomine.

Pour voir si la puissance spectrale du signal expérimental aux hautes fréquences correspond effectivement au bruit de mesure et non pas à la résistance d'interface nominale, nous avons procédé à une étude stochastique sur la puissance spectrale du signal expérimental dans l'annexe 4.6.

Le niveau moyen de la puissance spectrale du bruit de mesure se calcule grâce à :

$$E [(e_{\Delta\theta})^2] = \epsilon \frac{\sigma^2 \Delta t \Delta x}{4p} \quad (4.82)$$

où E est l'opérateur espérance mathématique.

Cette expression montre que le niveau moyen de la puissance du bruit de mesure est proportionnel aux pas d'échantillonnage temporel et spatial (résultat déjà observé sur la figure (4.16)).

Sur les figures (4.31) et (4.32), nous avons porté la puissance spectrale du contraste de Laplace "expérimental" (courbe en triangles), généré par un bruit sur $\Delta T(x, t)$ d'écart type constant $\sigma = 0.1$. Sur la même figure, nous avons comparé le niveau moyen de la puissance spectrale de

Fig.4.29 Comparaison des puissances spectrales de la résistance estimée avec 256 fréquences et du profil en contraste de Laplace
Résistance d'interface en double bosse

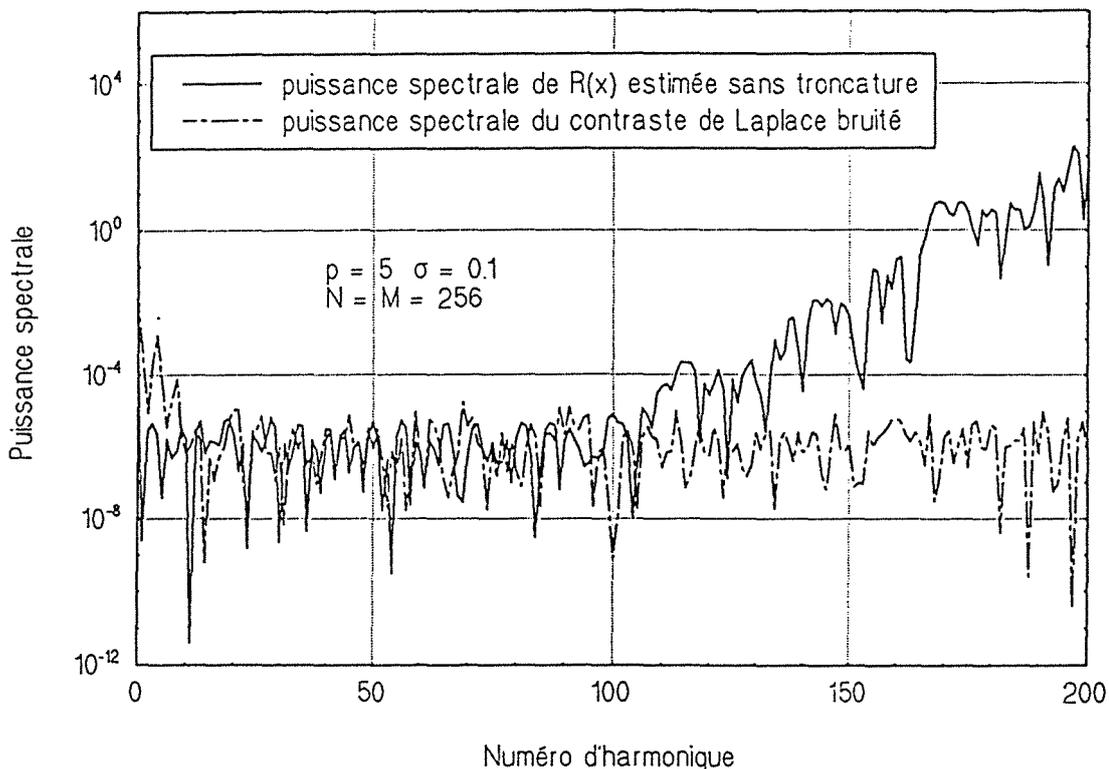


Fig.4.30 Puissances spectrales de $R_{128}(x)$ et $\Delta\tau(x)$ dans le cas de la résistance en double porte

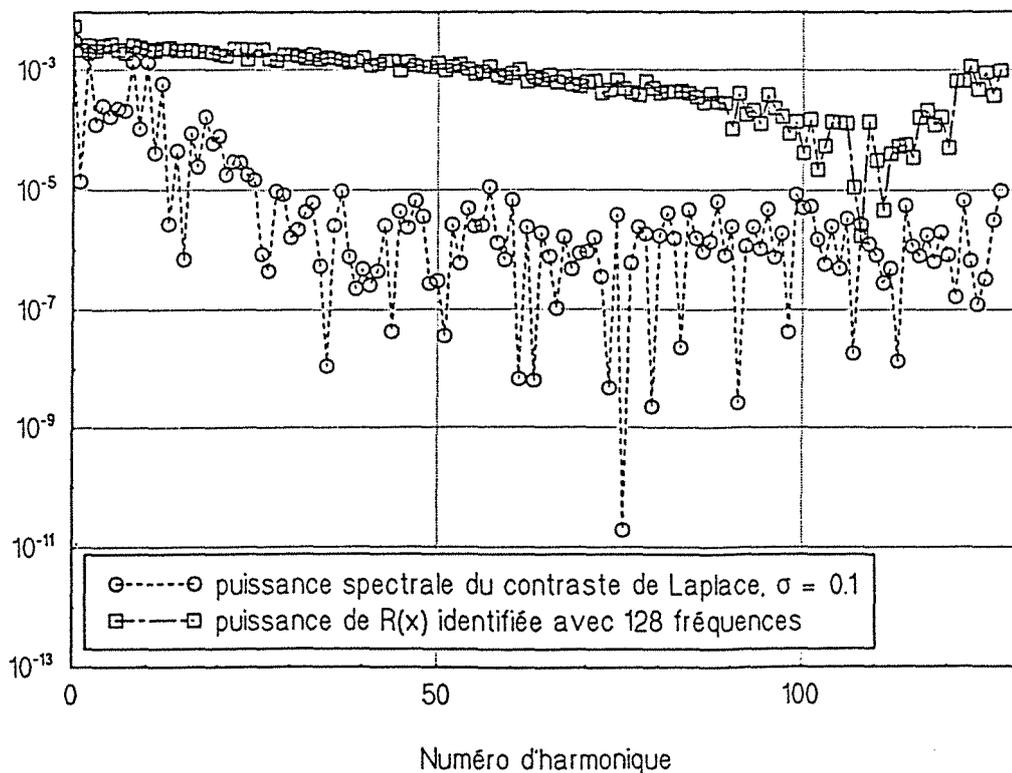


Fig.4.31 Comparaison des niveaux moyens du bruit théorique et simulé sur le contraste de Laplace causé par la résistance en double bosse

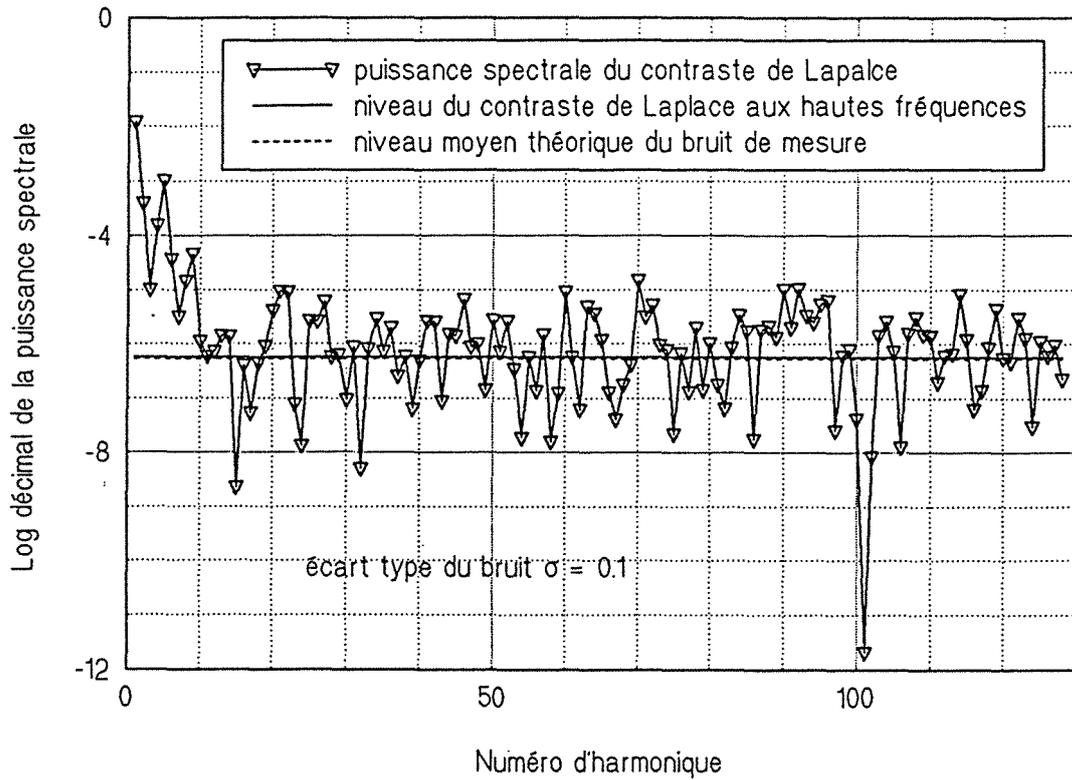
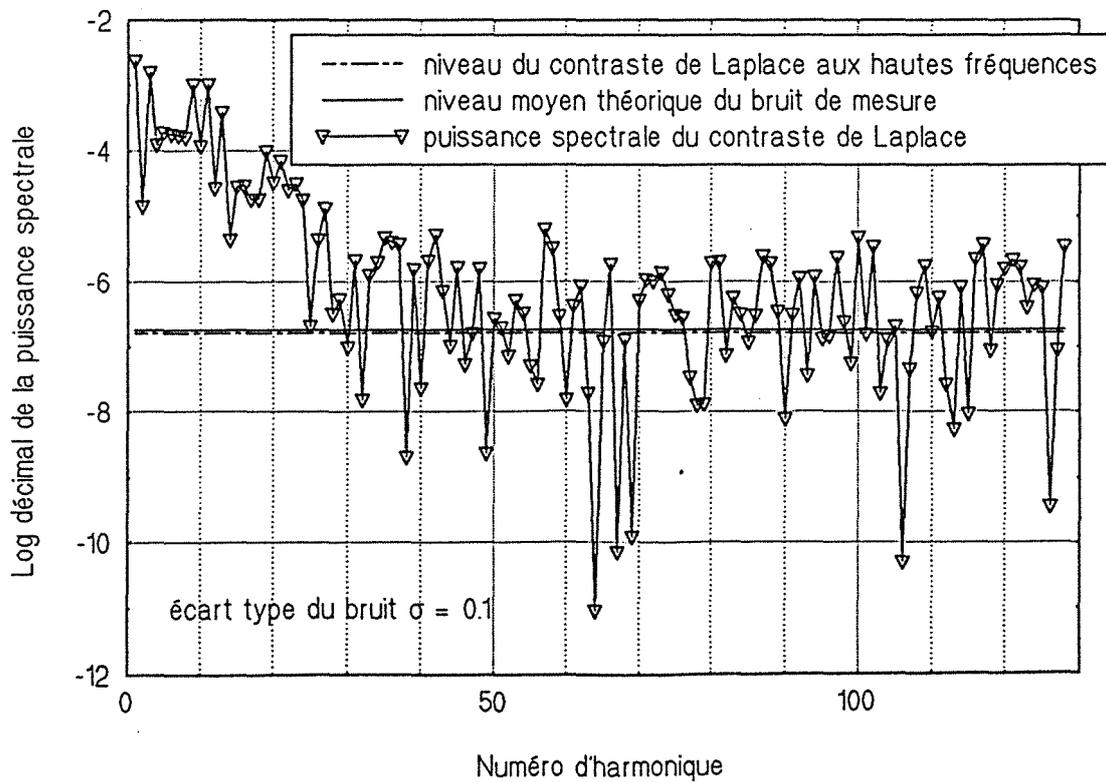


Fig.4.32 Comparaison des niveaux moyens du bruit théorique et simulé sur le contraste de Laplace causé par la résistance en double porte



ce bruit (courbe en trait discontinu) calculé à partir de l'équation ci-dessus, au niveau moyen de la puissance spectrale du signal "expérimental" aux hautes fréquences (courbe en trait continu). Pour les deux cas de figure étudiés, la résistance à "deux bosses" (figure (4.31)) et la résistance en "double porte" (figure (4.32)), on constate bien que le signal aux hautes fréquences correspond au bruit de mesure : les niveaux moyens sont pratiquement confondus dans les deux cas.

4.5.2 Principe du filtre optimal de Wiener

L'analyse spectrale du contraste expérimental de Laplace $\Delta\tau(x, p)$ permet de séparer les parties correspondant au signal exact et au bruit. Avant de procéder à la déconvolution, la partie relative au bruit de mesure peut être éliminée par un simple fenêtrage carré (troncature du spectre). Une éventuelle amélioration de l'inversion peut être apportée en remplaçant la troncature brutale du spectre par un filtrage passe-bas optimum : il s'agit de la méthode de Wiener [Press et al (1992) et Thomas et al (1992)].

Si on suppose qu'il n'y a pas de dégradation autre que le bruit (la fonction de transfert de la caméra est supposée être parfaite) et si ce dernier est considéré comme additif, gaussien et non corrélé avec le signal étudié, la méthode de Wiener consiste à trouver le filtre optimal $h(x)$ ou H_n , qui lorsqu'on l'applique au signal bruité $\hat{R}(x)$ ou $\hat{\rho}_n$, produit un signal aussi proche que possible du signal exact au sens des moindres carrés $\tilde{R}(x)$ ou $\tilde{\rho}_n$. En d'autres termes, on estime le spectre exact par :

$$\tilde{\rho}_n = H_n \hat{\rho}_n \quad (4.83)$$

Grâce au théorème de Parseval, la méthode revient à minimiser la somme des écarts quadratiques entre le signal estimé par (4.83) et le signal exact dans l'espace de Fourier. La somme à minimiser est écrite sous la forme :

$$\Sigma = \int_0^{\ell} [\tilde{R}(x) - R(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^M (\tilde{\rho}_n - \rho_n)^2 \quad (4.84)$$

Par ailleurs, on sait que dans le cas de faibles résistances thermiques, les spectres du contraste réduit et de la résistance d'interface sont liés linéairement (équation (4.49)) :

$$\Delta\theta_n = \mathcal{T}_n \rho_n \quad (4.85)$$

où \mathcal{T}_n est la fonction de transfert linéaire définie par :

$$\mathcal{T}_n = \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} \frac{\sinh(u_n e_2)}{\sinh(u_n)} \quad (4.86)$$

$$u_n = \sqrt{p + \alpha_n^2} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{n \pi}{\ell}$$

Si l'on note B_n le spectre du bruit de mesure $b(x)$ sur le contraste réduit de Laplace :

$$\hat{\Delta\tau}(x) = \Delta\tau(x) + b(x) \quad (4.87)$$

La substitution des équations (4.85) et (4.87) dans (4.83) donne :

$$\tilde{\rho}_n = H_n \frac{\Delta\theta_n + B_n}{\mathcal{T}_n} \quad (4.88)$$

Finalement, en tenant compte des équations (4.85) et (4.88), la somme Σ à minimiser peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma = \sum_{n=0}^M \left(\frac{H_n (\Delta\theta_n + B_n)}{\mathcal{T}_n} - \frac{\Delta\theta_n}{\mathcal{T}_n} \right)^2 \quad (4.89)$$

Par ailleurs, on montre dans le cas où le signal $\Delta\theta$ et le bruit B sont non corrélés, que la somme discrète en fréquence spatiale du produit $(\Delta\theta_n B_n)$ est nulle [Press (1992)]. L'expression (4.89) s'écrit dans ce cas :

$$\Sigma = \sum_{n=0}^M (\mathcal{T}_n)^{-2} [(\Delta\theta_n)^2 (1 - H_n)^2 + (B_n)^2 (H_n)^2] \quad (4.90)$$

Cette somme est minimale si et seulement si l'intégrand est minimisé par rapport à H_n pour chaque valeur de la pulsation spatiale α_n . D'où on détermine la fonction de transfert du filtre optimal de Wiener :

$$H_n = \frac{(\Delta\theta_n)^2}{(B_n)^2 + (\Delta\theta_n)^2} \quad (4.91)$$

Cette expression montre que dans le cas linéaire, les signaux d'entrée $\hat{\Delta\tau}(x)$ et de sortie $\hat{R}(x)$ ont la même fonction du filtre de Wiener. Pour éviter donc les difficultés évoquées dans le paragraphe 4.5.1 et illustrées sur les figures (4.29) et (4.30), nous avons choisi de réduire l'effet du bruit non pas sur le signal de sortie $\hat{R}(x)$ mais plutôt sur le signal d'entrée $\hat{\Delta\tau}(x)$.

Notons que H_n est très proche de l'unité si le bruit est négligeable, et très proche de zéro dans le cas contraire : ce qui explique le rôle de ce filtre.

La déconvolution par filtrage de Wiener nécessite donc la connaissance du signal exact $\Delta\theta_n$ et du bruit B_n . Pour déterminer le filtre optimal, il est nécessaire alors d'estimer séparément les puissances spectrales du signal exact et du bruit.

La puissance spectrale du signal expérimental est souvent constituée de la signature du signal nominal qui est collée à la puissance spectrale du bruit. Cette dernière est généralement plate ou légèrement inclinée, et il est facile de l'extrapoler linéairement dans la région dominée par le signal. De plus le niveau moyen de la puissance du bruit, peut être vérifié grâce à l'équation (4.82).

Après ajustement de la puissance du signal mesuré à l'aide d'une fonction théorique (généralement une gaussienne ou une exponentielle décroissante), on soustrait la puissance correspondant au bruit pour obtenir finalement la puissance du signal exact. Le filtre de Wiener est calculé en divisant cette dernière par celle obtenue par l'ajustement du signal mesuré (voir figure (4.28)).

Dans la littérature [Jae (1990) et Press et al (1992)], différentes variantes du filtre de Wiener ont été proposées pour la restauration des signaux bruités. La fonction de transfert généralisée de ces filtres s'écrit sous la forme :

$$H_n = \left[\frac{(\Delta\theta_n)^2}{(\Delta\theta_n)^2 + \gamma(B_n)^2} \right]^\beta \quad (4.92)$$

où β et γ sont deux constantes.

Quand γ est un paramètre et $\beta = 1$, le résultat est appelé le filtre de Wiener *paramétrique*.

4.5.3 Comparaison des simulation par fenêtrage carré et filtrage de Wiener

Des simulations numériques ayant pour but de tester les performances du problème inverse, ont été réalisées par deux types de filtrage passe-bas, en l'occurrence le filtre à troncature brutale et le filtre optimal de Wiener. Le premier est basé sur le choix de la fréquence de troncature à partir de la visualisation de la puissance spectrale du contraste de Laplace. Le second est basé sur la recherche automatique de la fonction du filtre, à partir de l'analyse spectrale du contraste de Laplace : le choix de la fonction d'ajustement de la puissance spectrale du signal mesuré n'influe pas beaucoup sur la qualité du filtrage, la partie relative au bruit étant souvent ajustée à l'aide d'une droite.

4.5.3.1 Procédure d'inversion

Dans le but de tester à travers des simulations, l'algorithme inverse, il est nécessaire de :

- choisir le type de la résistance d'interface $R(x)$ présente dans la plaque
- générer son spectre ρ avec un nombre maximum n d'harmoniques
- choisir un nombre $N+1$ de points équidistants sur l'axe x où le contraste ΔT sera calculé pour $(m+1)$ temps équidistants t_j

- calculer, pour chacun des points x , le contraste de Laplace $\Delta\tau$ pour les valeurs de p qui sont nécessaires pour calculer ΔT pour les $(m+1)$ instants désirés selon l'algorithme d'inversion numérique de Stehfest de la transformée de Laplace. Le vecteur $\Delta\theta$ est tout d'abord calculé pour ces valeurs de p , selon l'équation (4.45). Une fois le nombre d'harmoniques n choisi, l'inversion de Fourier en cosinus permet le calcul du contraste de Laplace $\Delta\tau$ recherché grâce à l'équation (4.24).

Une fois que le contraste réduit ΔT (en réalité ΔT^*) est connu sur les points discrets en espace et en temps, on peut :

- choisir un rapport signal sur bruit caractérisé par un écart type σ . σ est l'écart type d'un bruit aléatoire qui est rajouté au contraste ΔT dans le but de générer un signal "expérimental"
- choisir la variable de Laplace p qui sera utilisée pour l'inversion, une fois la profondeur d'interface déterminée par l'équation (4.57)
- faire une quadrature temporelle (méthode de Simpson par exemple) sur ce contraste "expérimental" dans le but d'avoir un champ bruité de Laplace sur la face avant

Une fois le contraste "expérimental" connu, on procède à son analyse spectrale afin de déterminer le nombre n d'harmoniques utiles ou la fonction du filtre de Wiener pour l'inversion. Après le filtrage du contraste thermique de Laplace, on peut :

- faire une quadrature spatiale sur le champ de Laplace correspondant à la transformation de Fourier directe afin de créer le vecteur "expérimental" $\Delta\theta(z=0, p)$
- calculer les vecteurs "expérimentaux" filtrés \mathbf{a} et \mathbf{b} , donnés par les équations (4.60) et (4.61)
- soit estimer le spectre ρ en résolvant le système (4.59) et après en déduire $R(x)$ en utilisant l'équation (4.64) pour $(N+1)$ valeurs de x
- ou bien calculer les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ sur les mêmes points par une simple inversion de Fourier des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} et calculer par la suite la fonction $R(x)$ par l'intermédiaire de l'expression (4.61)

Cette procédure a été appliquée pour les résistances d'interface présentées dans le paragraphe 4.2.3.

Résistance d'interface à "deux bosses"

Un thermogramme en contraste réduit $\Delta T(t)$ relatif au sommet de la bosse la moins élevée est présenté sur la figure (4.33). Un bruit aléatoire généré par ordinateur, d'écart type $\sigma = 0.1$ (ce qui

est énorme devant le niveau maximum du contraste en ce point : un rapport signal sur bruit de 2) a été rajouté à ce contraste et le résultat est présenté sur la même figure.

Le profil du contraste de Laplace réduit $\Delta T(t)$ a été calculé avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$ et la variable de Laplace $p = 5$ correspondant à la profondeur $e_1 = 0.25$ de l'interface (voir figure (4.34)). La quadrature en espace a été faite à partir de $N = 128$ points et la quadrature en temps à partir de $m = 100$ mesures.

Sur la figure (4.35), nous avons porté la puissance spectrale du signal "mesuré" (courbe en carrés). On constate que la partie correspondant au bruit est plate et qu'elle s'étend sur une large plage de fréquences. La partie utile du signal s'étend sur une petite région au voisinage de l'origine, constituée approximativement de 14 harmoniques. Nombre qui correspond aux fréquences significatives du spectre ρ de la résistance nominale présenté dans la figure (4.3).

Après avoir ajusté la puissance spectrale du signal "mesuré" par une exponentielle (courbe (1)) et extrapolé la puissance du bruit par une droite (courbe (2)), nous avons pu déterminer grâce à la méthode décrite dans le paragraphe précédent, la fonction de transfert du filtre optimal que nous avons présentée sur la figure (4.36). C'est une fonction fortement décroissante, qui s'annule au quarantième harmonique. Les profils estimés par fenêtrage et filtrage sont comparés au profil nominal (trait continu) sur la figure (4.37).

On constate que le profil identifié après un fenêtrage carré à 15 fréquences est moins oscillant que celui identifié après un préfiltrage de Wiener, particulièrement sur les bords de l'échantillon. Toutefois, les résultats obtenus par les deux méthodes restent convenables, malgré qu'il s'agit d'un cas où la résistance réduite ne dépasse pas 0.1.

Résistance d'interface en erf

Sur la figure (4.38.0), nous avons porté les thermogrammes en contraste au sommet du défaut, avec et sans bruit de "mesure" ($\sigma = 0.1$). On peut observer l'énorme dégradation induite par le rajout du bruit au signal exact présenté sur la même figure. Le profil du contraste "expérimental" de Laplace a été calculé pour les mêmes valeurs des différents paramètres qu'au cas précédent (voir figure (4.38)). L'analyse spectrale de ce signal (figure (4.39)) montre que la partie utile se limite aux 12 ou 15 premiers harmoniques. Ce nombre correspond à peu près aux fréquences significatives qu'on peut observer sur la figure (4.6) illustrant le spectre de la résistance d'interface nominale. Sur la figure (4.40), nous avons porté la fonction de transfert du filtre de Wiener, obtenue comme précédemment.

Les profils estimés après un fenêtrage carré sur les dix premières fréquences (courbe en trait discontinu) et après un filtrage de Wiener (courbe en trait mixte) sont présentés sur la figure (4.41). L'accord entre les profils identifiés et le profil exact semble très bon et en forme et en amplitude.

Fig.4.33 Thermogramme en contraste à l'aplomb de la petite bosse

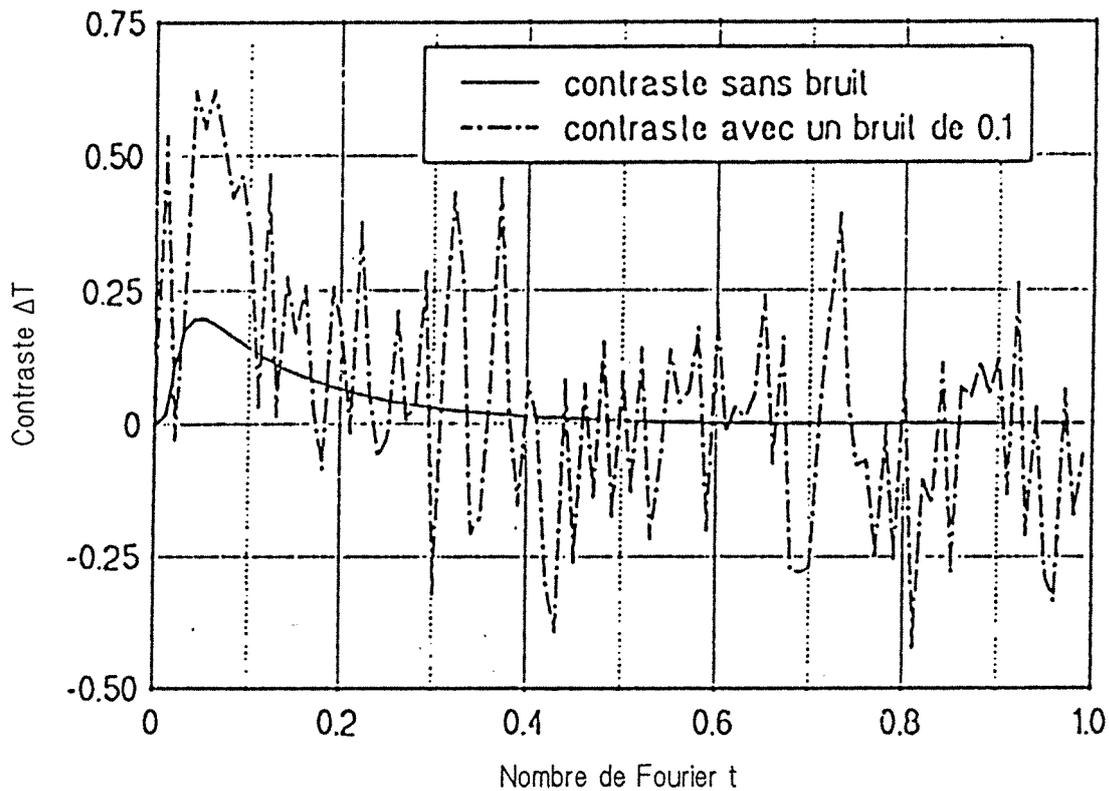


Fig.4.34 Profils en contraste de Laplace, $R(x)$ en double bosse

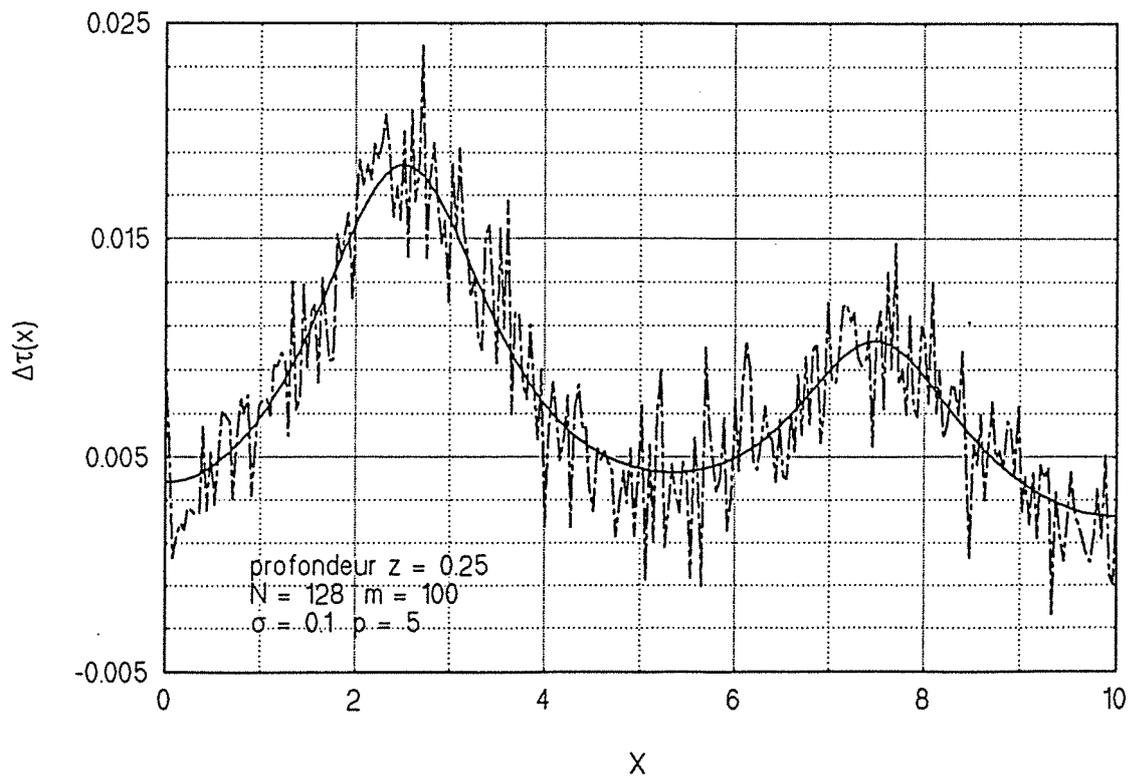


Fig.4.35 Analyse spectrale dans le cas du profil à "deux bosses"

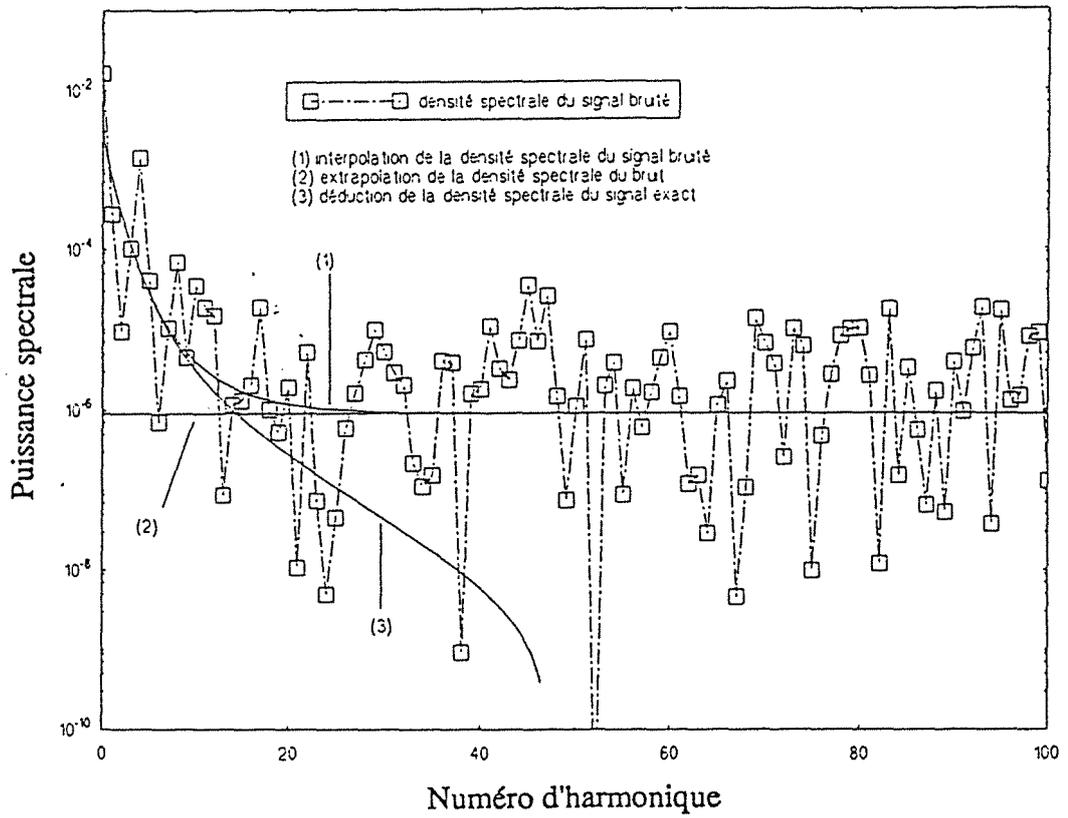


Fig.4.36 Filtre de Wiener dans le cas d'un profil en double bosse

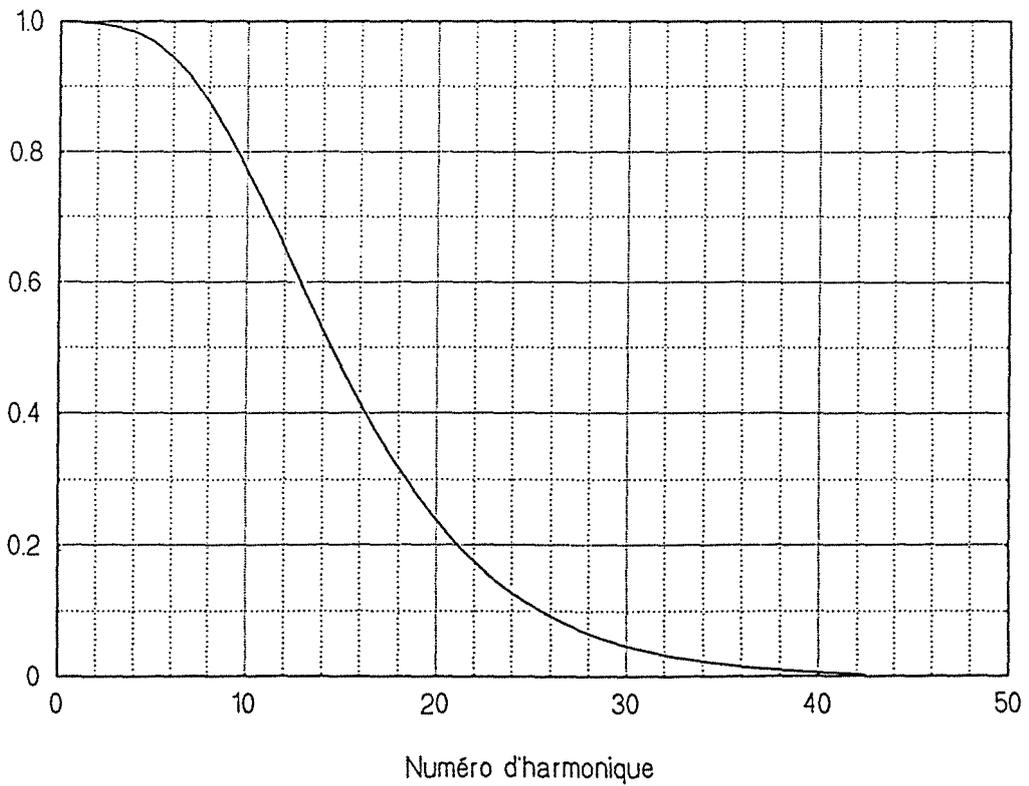


Fig.4.37 Comparaison des méthodes de Wiener et de troncature
Résistance en double bosse

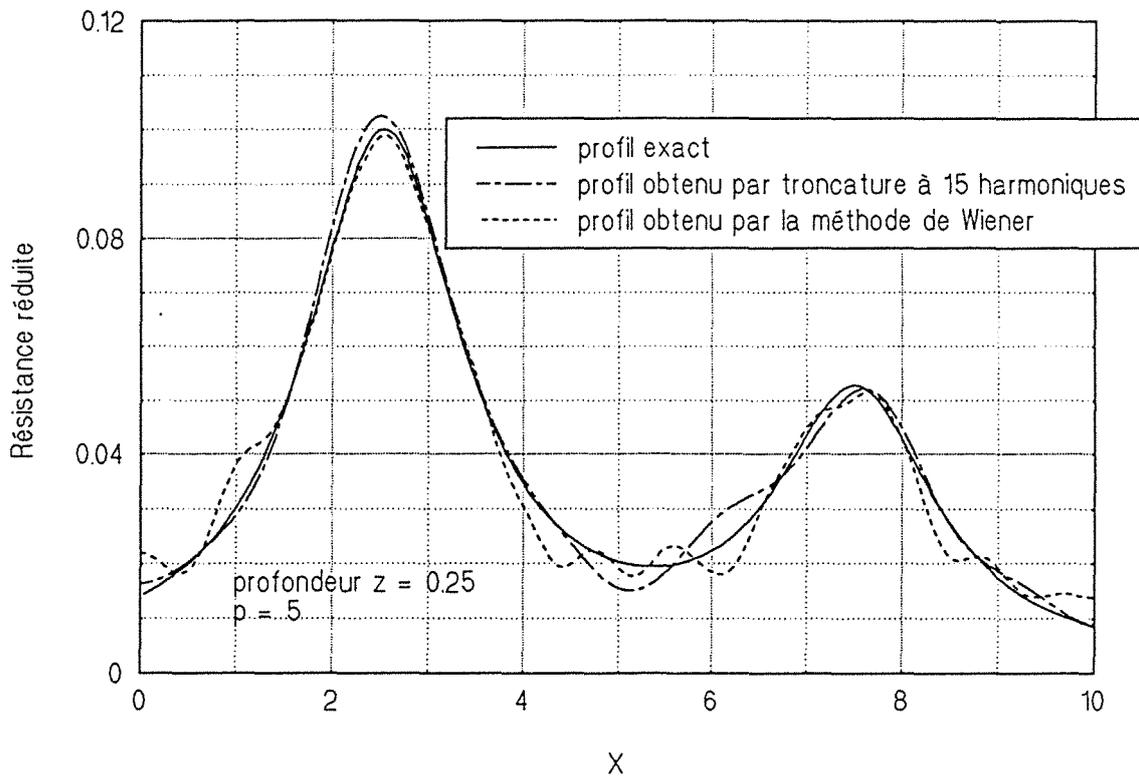


Fig.4.38.0 Thermogramme en contraste au sommet du défaut en erf

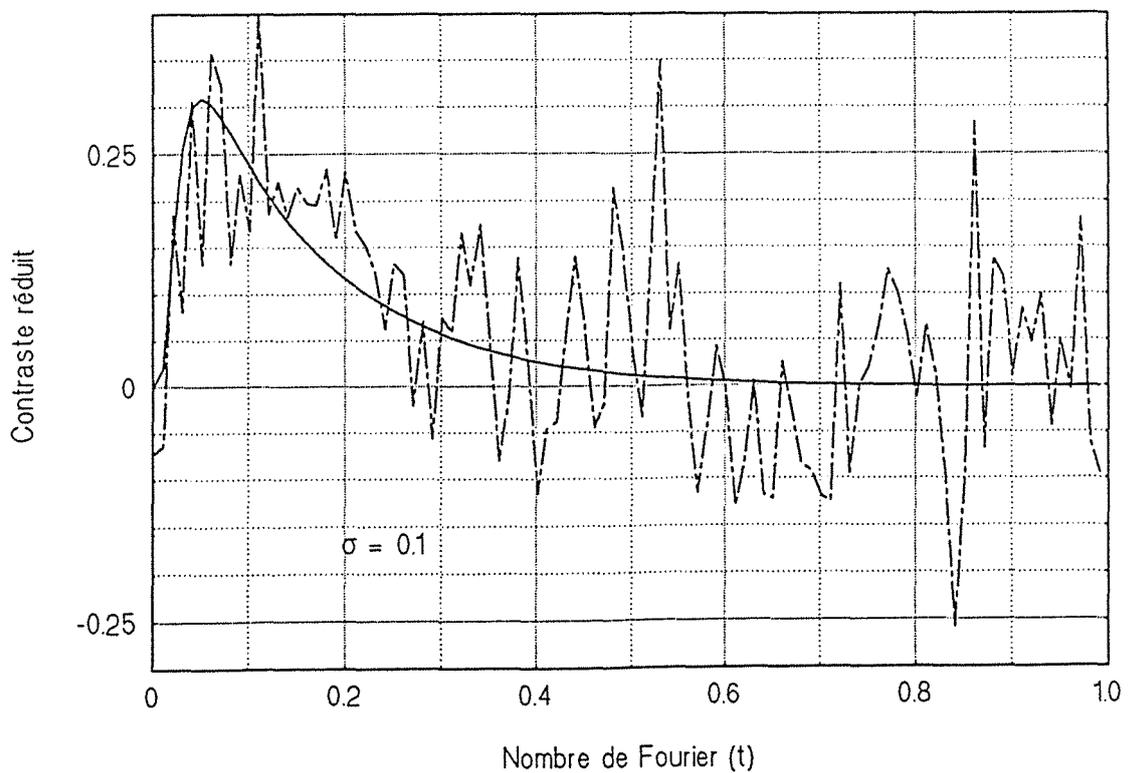


Fig.4.38 Profils en contraste de Laplace, Résistance en erf

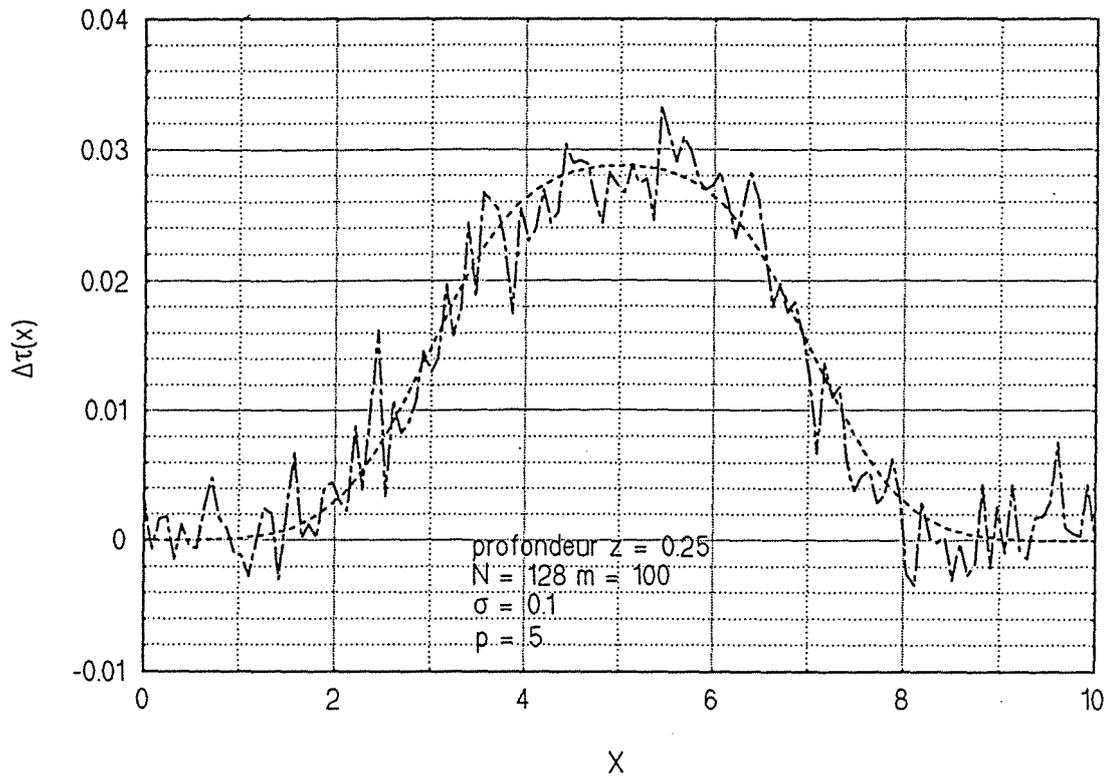


Fig.4.39 ANALYSE SPECTRALE DANS LE CAS D'UN PROFIL EN ERF

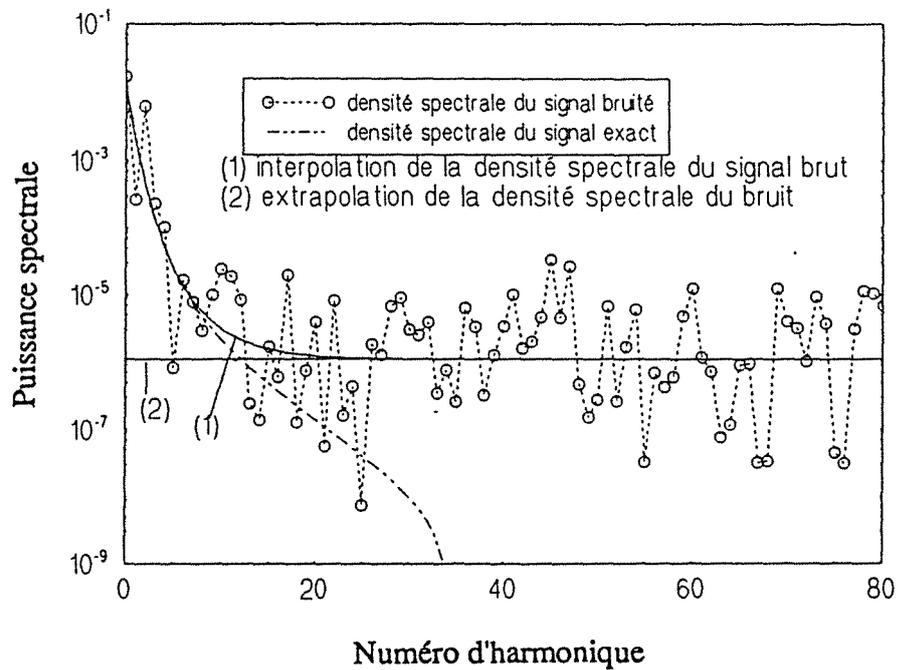


Fig.4.40 Filtre de Wiener dans le cas d'un profil en erf

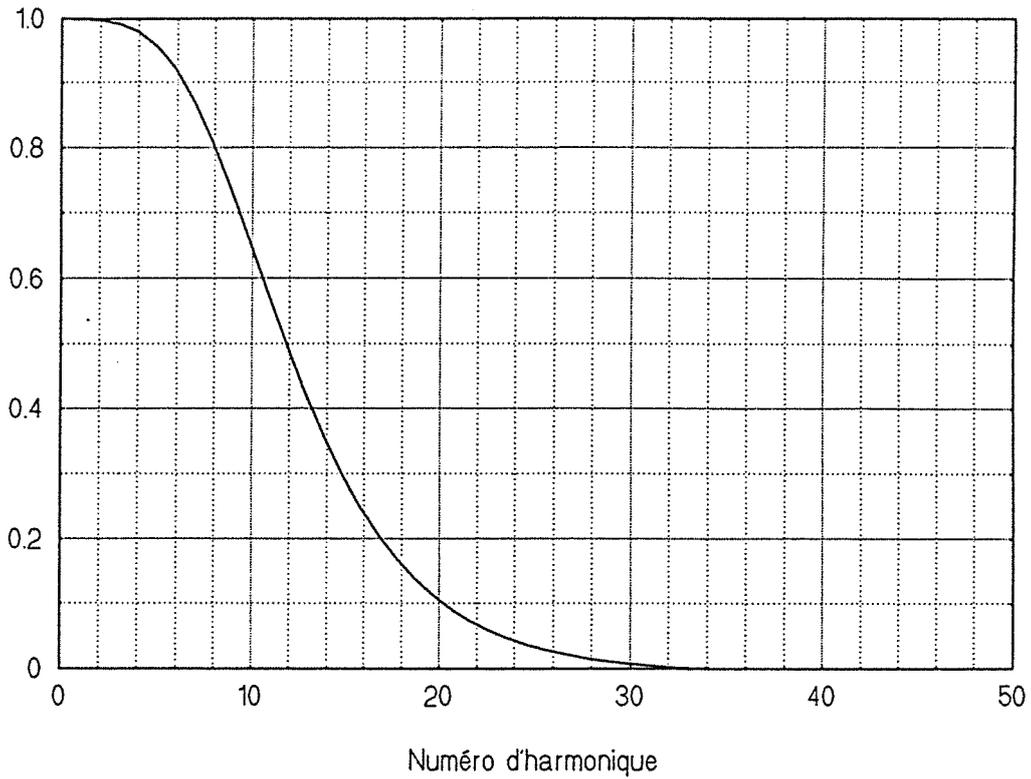
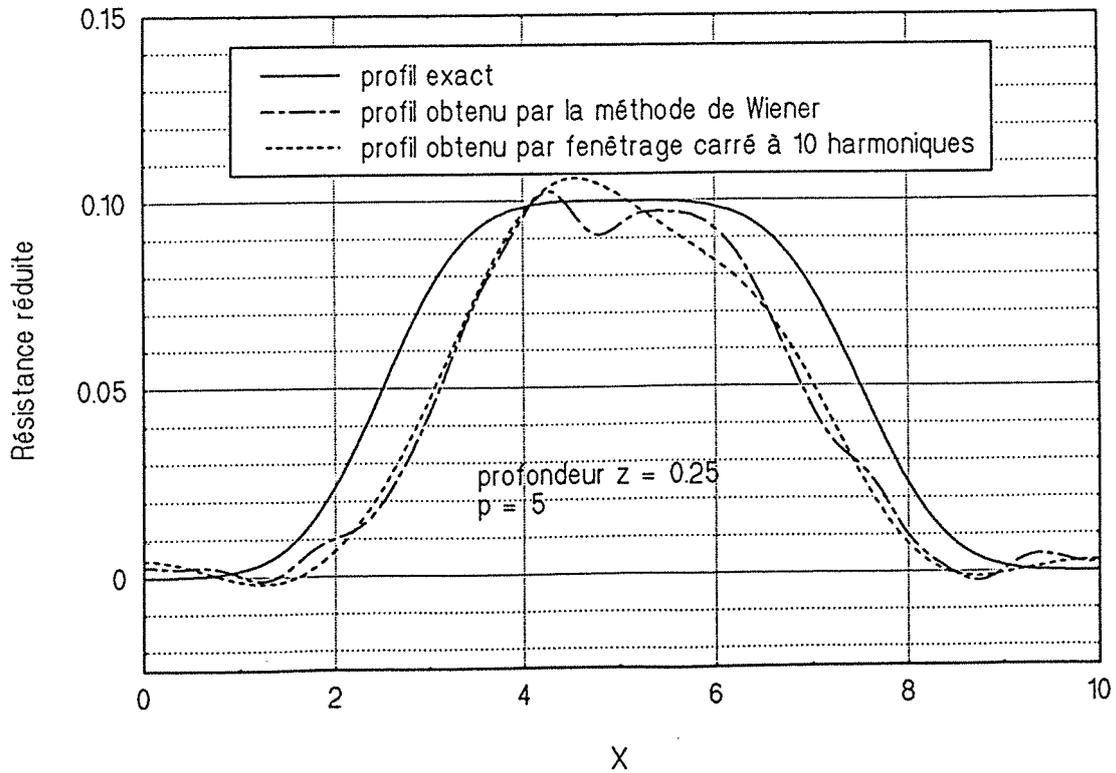


Fig.4.41 Comparaison des méthodes de Wiener et troncature
Résistance en erf



Résistance d'interface en "double porte"

La figure (4.42.0) illustre l'importance du bruit sur le thermogramme en contraste réduit à l'aplomb de la résistance la moins élevée. Sur la figure (4.42), nous avons montré le profil théorique du contraste de Laplace (courbe en trait continu) et le profil "expérimental" (courbe en trait mixte) généré par un bruit d'écart type $\sigma = 0.1$. Le calcul de la transformée de Laplace a été fait avec la valeur optimum de p relative à la profondeur $e_I = 0.16$ soit $p = 9$. L'analyse spectrale du signal bruité, illustrée sur la figure (4.43), montre que le signal utile s'arrête aux environs du 50^{ème} harmonique. Par ailleurs, on constate que le rapport signal sur bruit est très petit entre le 30^{ème} et le 50^{ème} harmonique.

Le choix de la fréquence de troncature est délicat dans ce cas, car il faudra trouver un compromis entre la perte de résolution du signal restauré et la perturbation due au bruit. Sur la figure (4.44), sont présentés les profils estimés en utilisant un fenêtrage à 30 harmoniques et un filtre de Wiener. Le premier profil est assez "mou", et ne se superpose pas aux bords des défauts. Par contre, le second a tendance à suivre mieux les variations brusques de $R(x)$, mais est malheureusement très oscillant. Ceci est dû au fait que la fonction de transfert du filtre (figure (4.45)) ne s'annule qu'après la 80^{ème} fréquence. Cet exemple montre que la méthode de Wiener n'est pas toujours performante, bien qu'elle ait l'avantage d'être systématique par rapport à la méthode de fenêtrage (troncature).

Résistance d'interface en "arctg"

Comme précédemment, un bruit normal d'écart type $\sigma = 0.1$ généré par ordinateur, a été rajouté au contraste exact pour simuler un signal expérimental. L'illustration du rapport signal sur bruit est présentée sur la figure (4.46.0) où on a superposé les thermogrammes en contraste exact et bruité au sommet du défaut. Pour les mêmes valeurs des paramètres utilisés pour la résistance en "erf", on obtient un contraste thermique de Laplace qui est très bruité (figure (4.46)). Sa puissance spectrale est présentée sur la figure (4.47). La fréquence de troncature peut être choisie au quinzième harmonique. Le filtre optimal de Wiener issu de l'analyse spectrale faite sur $\Delta\tau(x, p)$ est présenté sur la figure (4.48).

La procédure d'inversion réalisée en utilisant l'une ou l'autre des deux méthodes d'élimination du bruit, donnent des profils de $R(x)$ qui sont très proches du profil nominal. Toutefois, on peut observer que le profil estimé par troncature est moins stable que celui obtenu par la méthode de Wiener, particulièrement sur les extrémités et le centre du défaut (figure (4.49)).

4.5.3.2 Commentaires sur les deux méthodes

Les résultats obtenus par la méthode de Wiener sont très satisfaisants pour les fonctions $R(x)$ "molles". Dans le cas de la fonction en "double porte", la résistance d'interface identifiée par la même méthode est très instable : ceci est dû au fait que la fonction de transfert du filtre ne s'annule

Fig.4.42.0 Thermogramme en contraste au sommet du défaut de gauche de la résistance en double porte

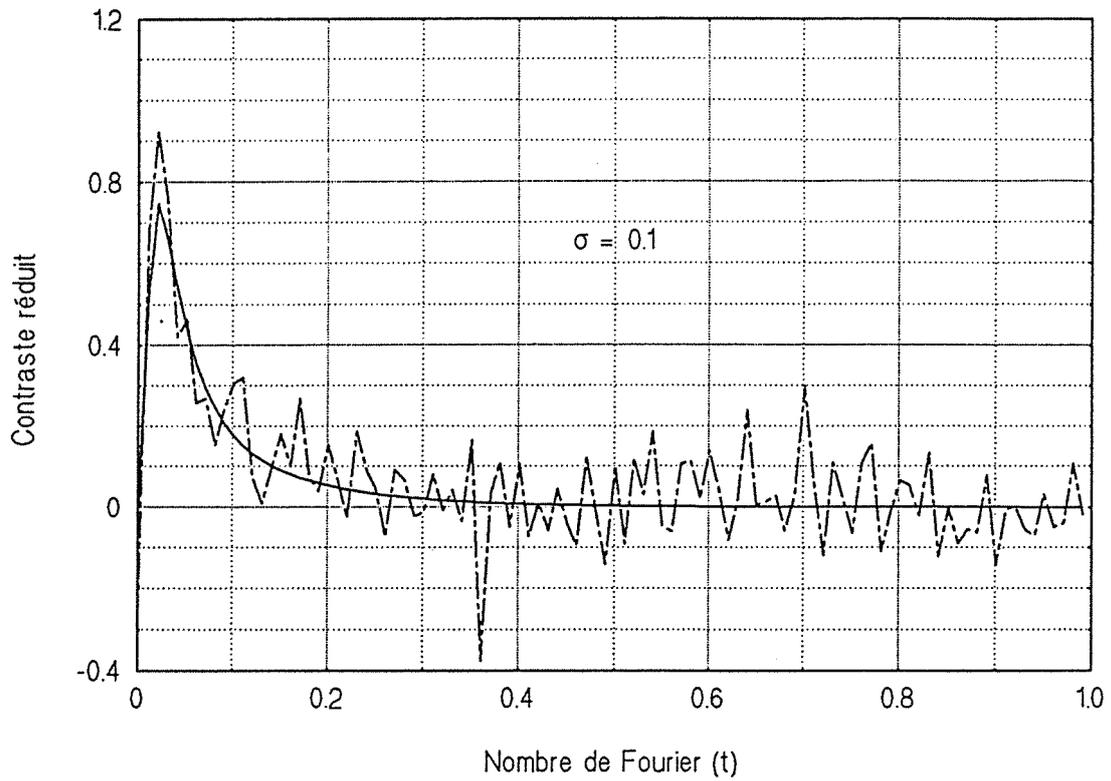


Fig.4.42 Profils en contraste de Lapalce, Résistance en double porte

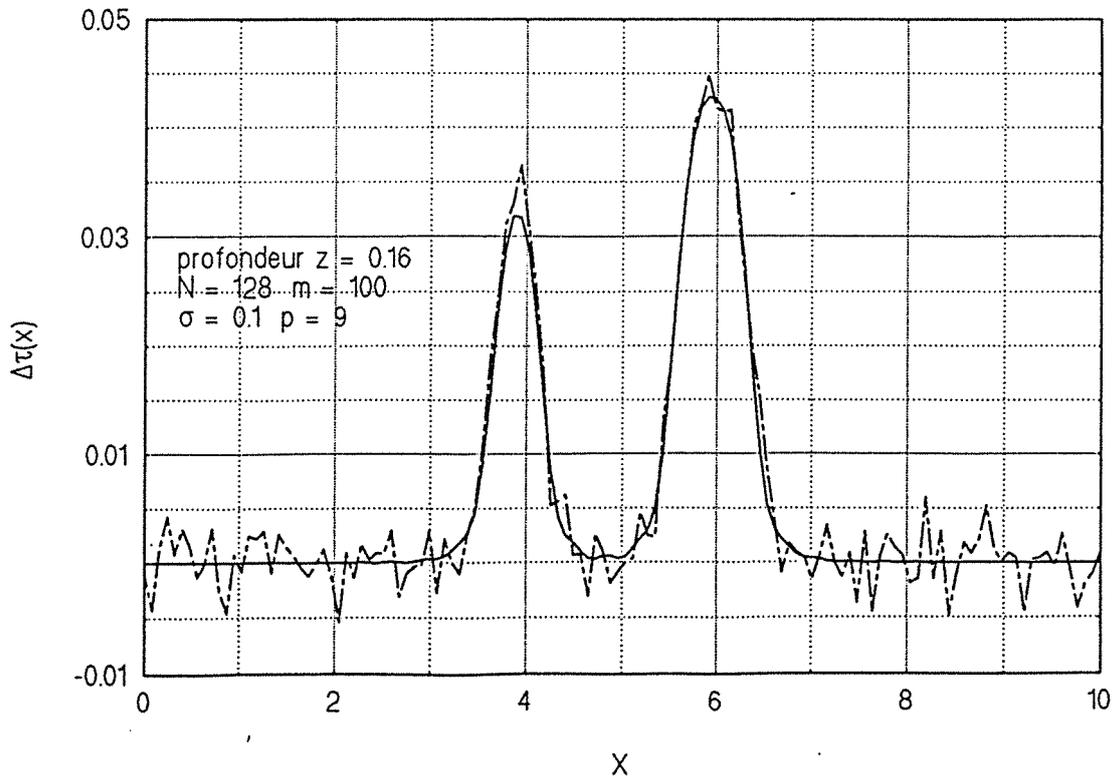


Fig.4.43 ANALYSE SPECTRALE DANS LE CAS D'UN PROFIL EN DOUBLE PORTE

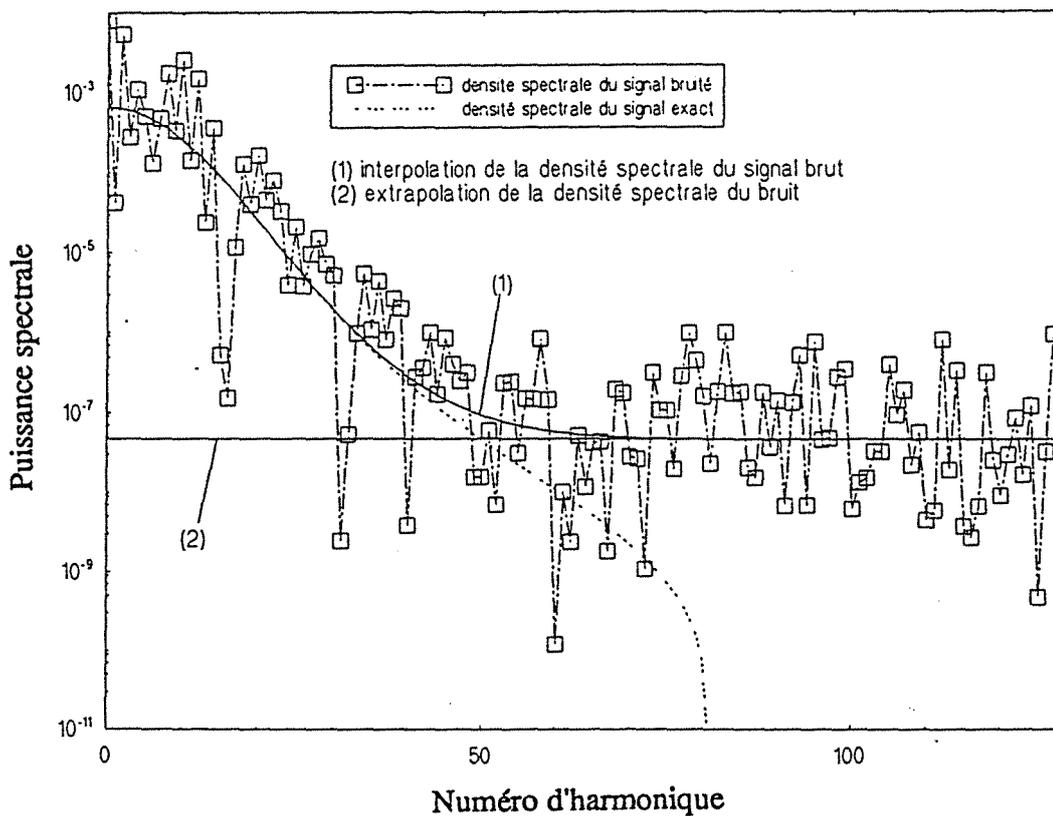


Fig.4.44 Identification de $R(x)$ en double porte

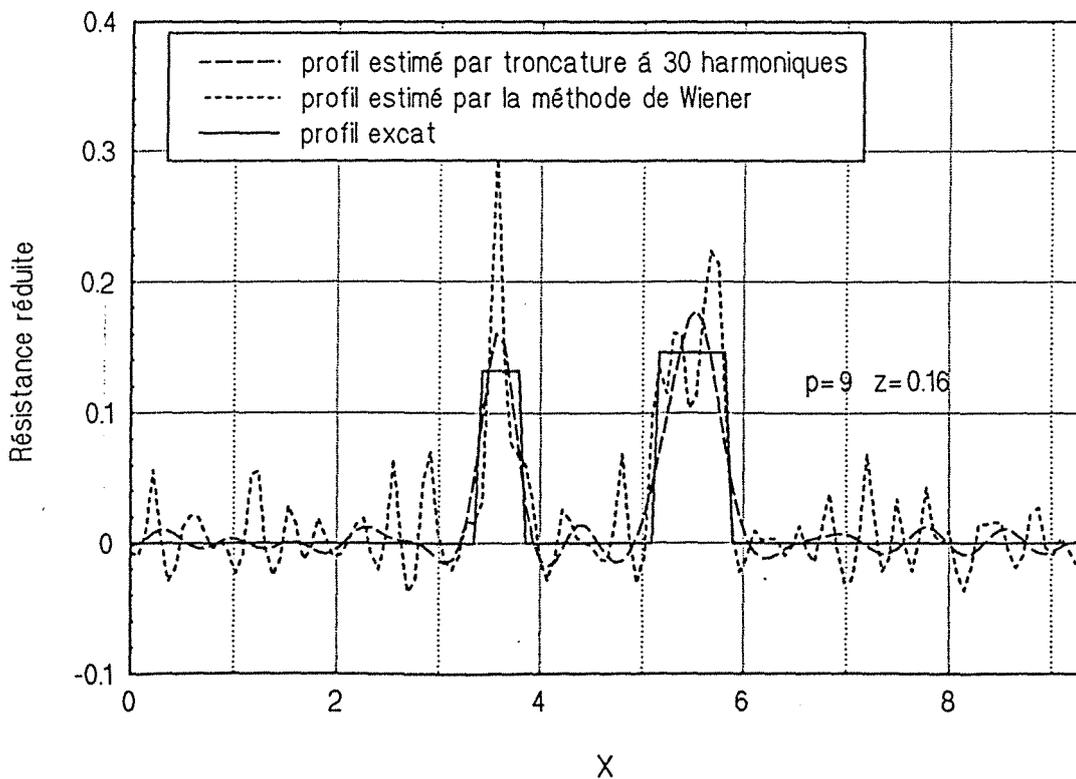


Fig.4.45 Filtre de Wiener dans le cas d'un profil en double porte

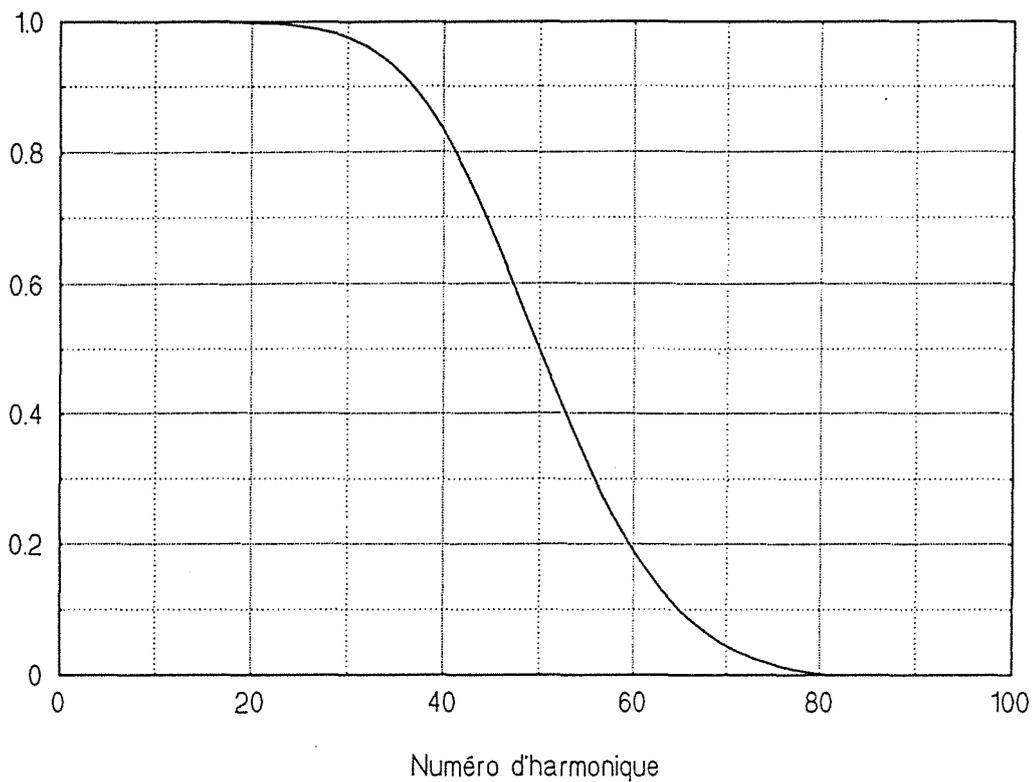


Fig.4.46.0 Thermogramme en contraste au sommet du défaut en arctang

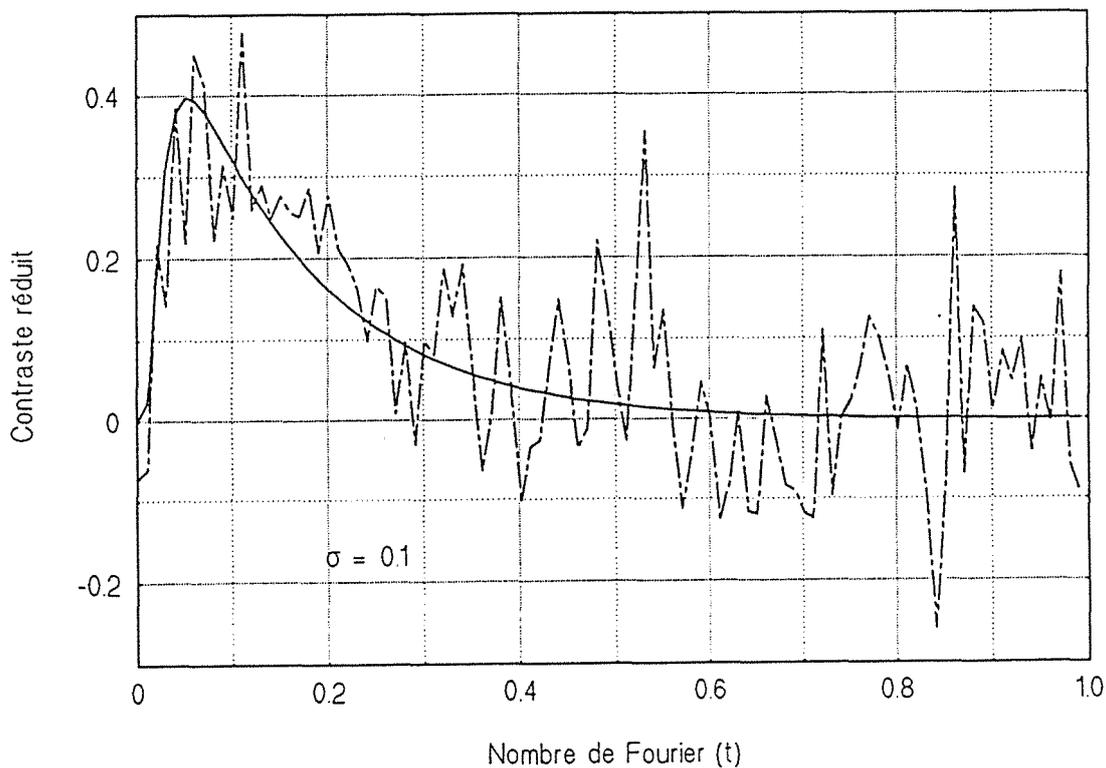


Fig.4.46 Profil en contraste de Laplace, Résistance en arctang

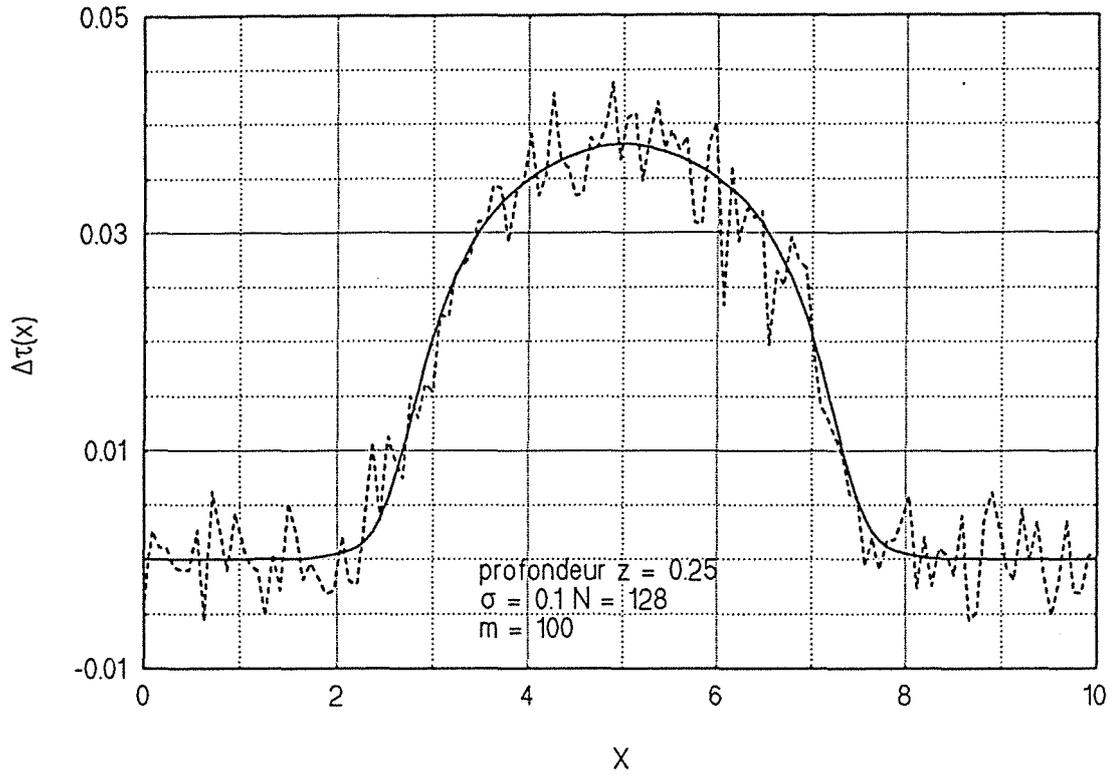


Fig.4.47 Analyse spectrale dans le cas du profil en "arctang"

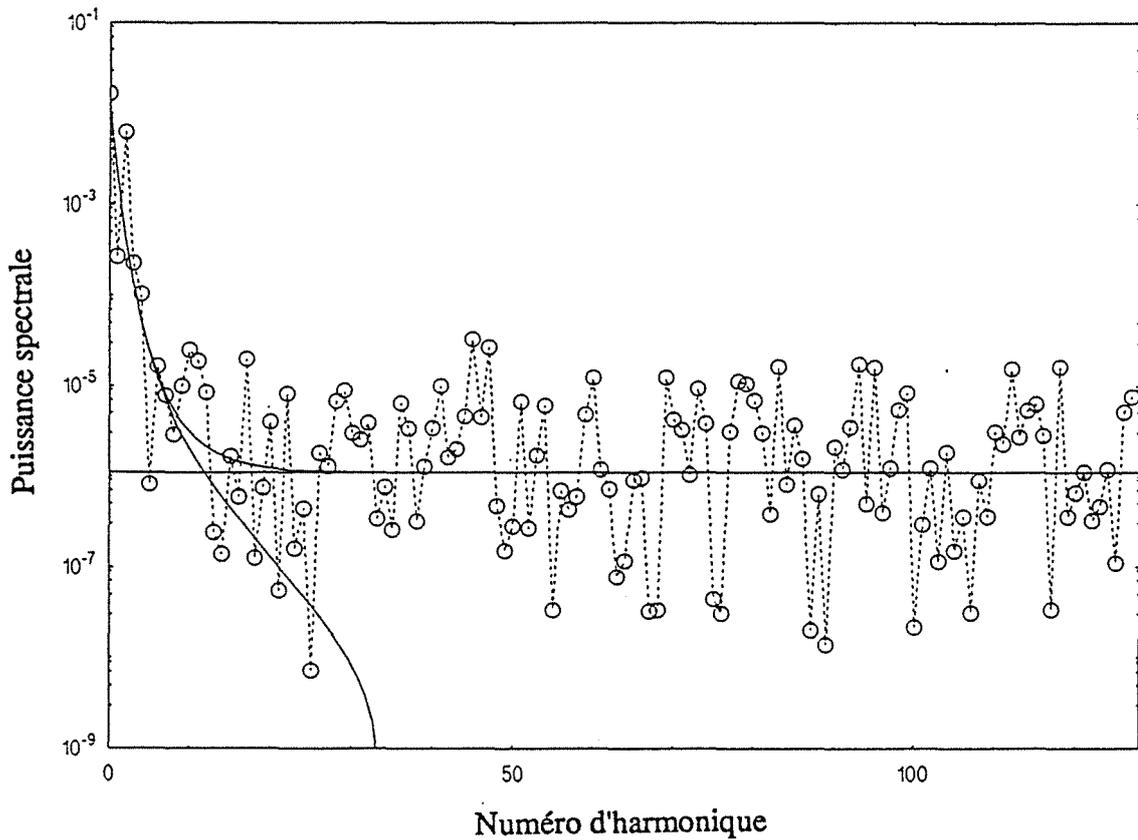


Fig.4.48 Filtre de Wiener dans le cas d'un profil en arctang

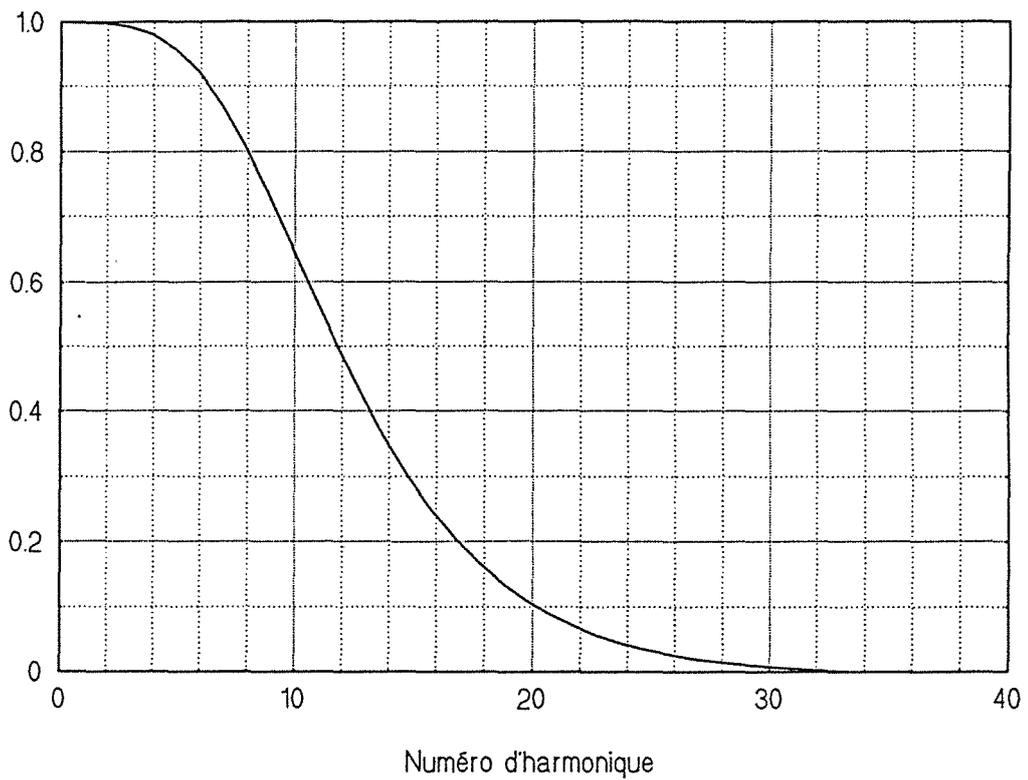
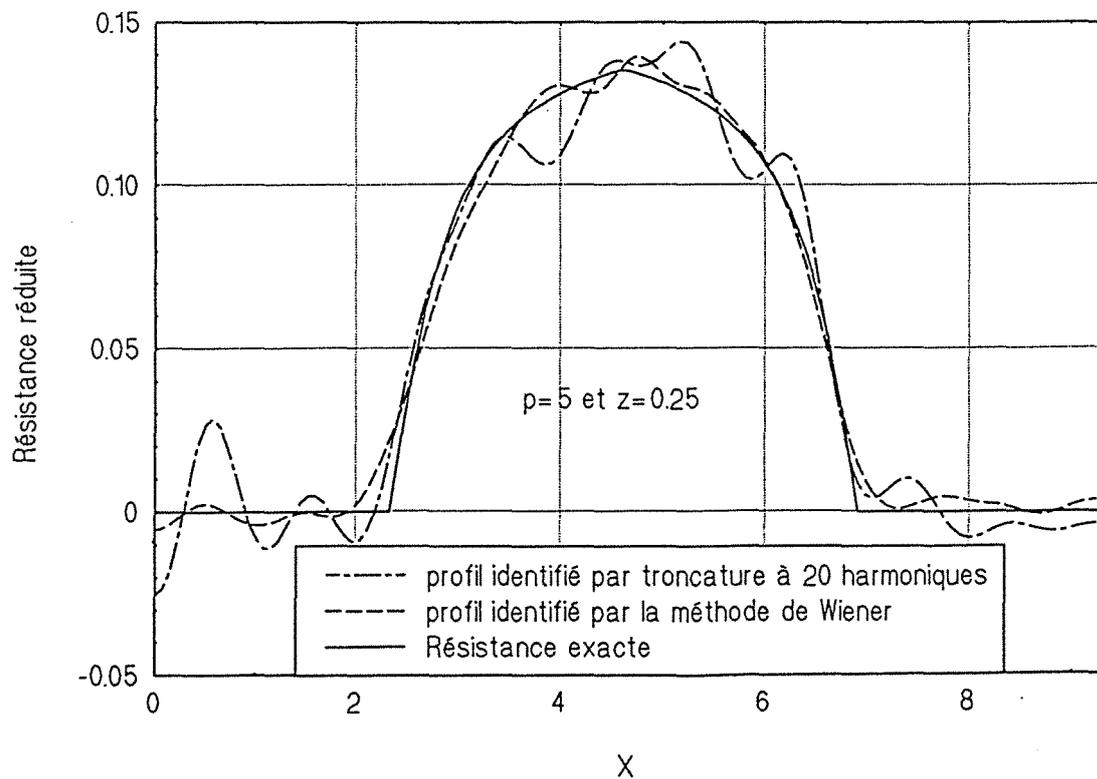


Fig.4.49 Identification de $R(x)$ en arctang



qu'après la 80^{ème} fréquence, or on sait déjà que le rapport signal sur bruit est faible à partir du 30^{ème} harmonique à peu près. Notons ici que la fonction de transfert dépend de la fonction choisie pour ajuster la puissance spectrale du contraste expérimental. Dans tous les cas de simulation ci-dessus, nous avons choisi soit une exponentielle décroissante soit une gaussienne.

Dans le cas de $R(x)$ en "double porte", la fonction qui suivait bien les points "expérimentaux" était la gaussienne, ce qui explique le grand étalement de la fonction de transfert du filtre dans le domaine des fréquences.

La méthode basée sur le fenêtrage carré donne généralement des résultats assez satisfaisants, à condition de faire un bon choix de la fréquence de troncature. Malheureusement, ce choix est fait empiriquement, d'où un risque d'erreur, surtout si le bruit est important.

4.6 Comparaison des Techniques 1D locale et 2D

La méthode proposée par Maillet et al (1993), repose sur l'hypothèse que la diffusion de la chaleur au sein du milieu est unidirectionnelle. Cette simplification n'est valable qu'au centre des défauts de taille importante.

Afin d'illustrer les améliorations apportées par le modèle 2D par rapport au modèle 1D, nous avons résolu les problèmes inverses 1D et 2D dans le cas de la résistance d'interface en "double porte", localisée à une profondeur connue. Les simulations ont pu être réalisées grâce aux données obtenues par le problème direct 2D, pour les mêmes valeurs des paramètres utilisées au paragraphe précédent.

Dans le cas où le signal est non dégradé par le bruit, les résultats présentés sur la figure (4.50), montrent que la technique 1D tend à sous estimer la résistance d'interface et traduit la diffusion thermique au voisinage des défauts et l'interaction entre ces derniers en résistance thermique. En conséquence, on a une perte de résolution plus grave que celle observée lors de l'utilisation de la technique 2D après troncature du spectre.

Dans le cas où le champ de contraste réduit est détérioré par un bruit d'écart type $\sigma = 0.1$, il est nécessaire de couper le spectre à sa trentième fréquence pour que l'inversion soit stable. La perte d'information aux hautes fréquences fait qu'on ait une résolution spatiale similaire à celle obtenue par l'algorithme inverse 1D local (voir figure (4.51)). On peut observer aussi cette fois, que la technique 2D surestime les niveaux maxima des résistances.

Fig.4.50 Comparaison entre les modèles 1D et 2D
 Résistance d'interface en double porte

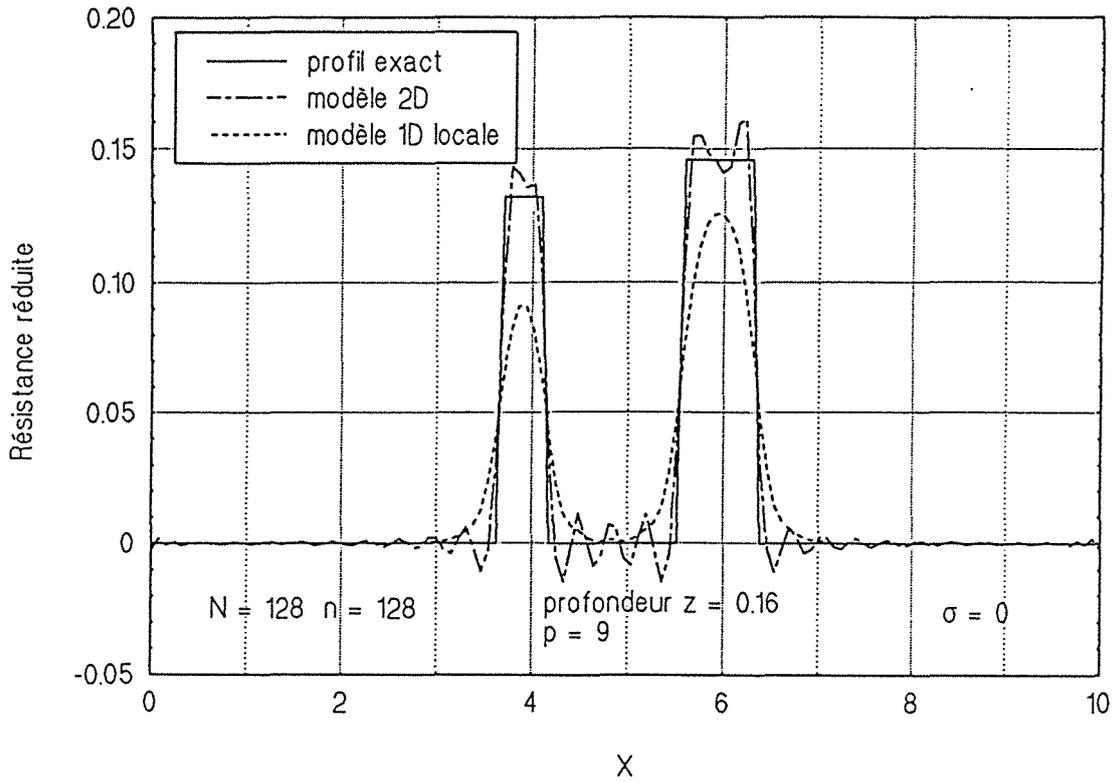
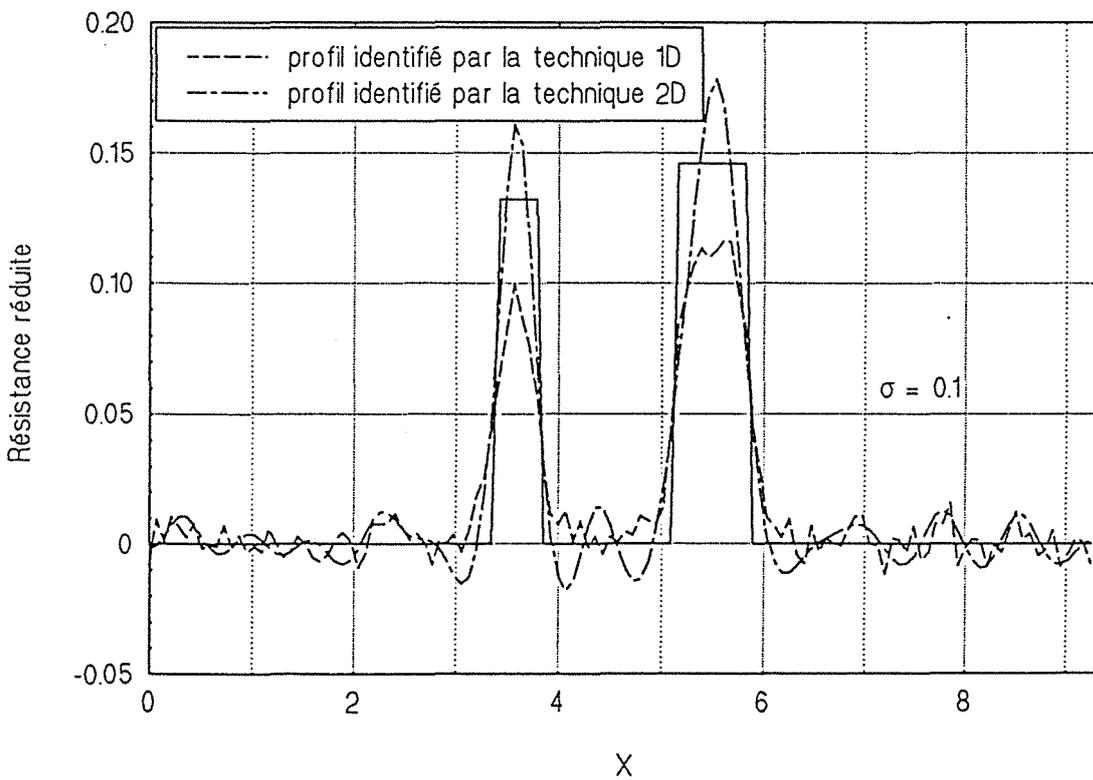


Fig.4.51 Comparaison des inversions 1D locale et 2D
 dans le cas d'un signal bruité issu de la résistance
 d'interface en double porte



4.7 Méthode de spécification de fonction

On cherche la répartition spatiale de la résistance d'interface $R(x)$ qui soit constante par morceaux. Le nombre de créneaux M sera inférieur ou égal au nombre de points N du profil spatial de température ($M \leq N$).

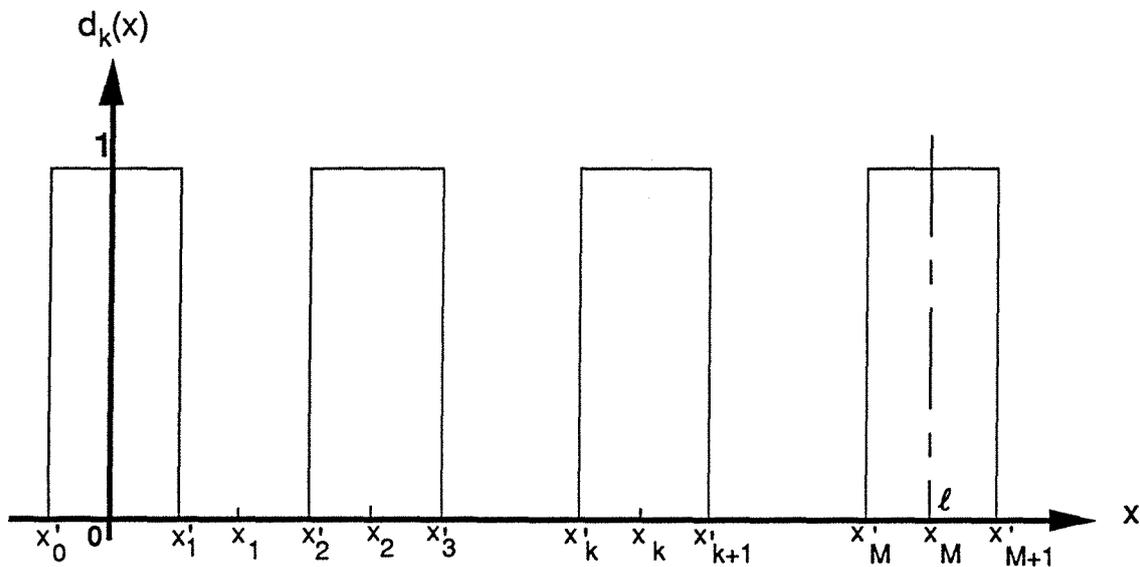


Fig. 4.52 Spécification de la fonction $R(x)$

La fonction $R(x)$ est écrite alors sous la forme :

$$R(x) = \sum_{k=0}^M R_k d_k(x) \tag{4.93}$$

où les fonctions $d_k(x)$ sont définies par :

$$d_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left[x_k - \frac{\ell}{2M}, x_k + \frac{\ell}{2M} \right] = [x'_k, x_{k+1}] \\ 1 & \text{si } x \in \left[x_k - \frac{\ell}{2M}, x_k + \frac{\ell}{2M} \right] = [x'_k, x_{k+1}] \end{cases} \tag{4.94}$$

où les x'_k désignent les extrémités des portes.

Les fonctions $d_k(x)$ forment une base orthogonale :

$$\int_0^{\infty} d_k(x) d_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \\ \frac{\ell}{M} & \text{si } k = m \neq 0 \\ \frac{\ell}{2M} & \text{si } k = m = 0 \end{cases} \tag{4.95}$$

Si on appelle $\delta_k(\alpha_i)$ les transformées de Fourier en cosinus de la fonction $d_k(x)$, on a :

$$\delta_k(\alpha_i) = \delta_{ik} = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_i x) d_k(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} (\sin(\alpha_i x'_{k+1}) - \sin(\alpha_i x'_k)) & \text{si } k \neq 0, M \text{ et } i \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i x'_1) & \text{si } k = 0 \text{ et } i \neq 0 \\ -\frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i x'_M) & \text{si } k = M \text{ et } i \neq 0 \\ \frac{\ell}{M} & \text{si } i = 0 \text{ et } k \neq 0, k \neq M \\ \frac{\ell}{2M} & \text{si } i = 0 \text{ et } k = 0 \text{ ou } M \end{cases} \quad (4.96)$$

D'où l'on peut déduire le spectre de la résistance d'interface à chaque fréquence α_i , soit :

$$\rho(\alpha_i) = \rho_i = R(x) = \sum_{k=0}^M R_k \delta_{ik} \quad (4.97)$$

$i = 0, n$

ou encore sous forme matricielle :

$$\rho = \delta R \quad (4.98)$$

- avec : ρ le vecteur constitué des composantes du spectre de $R(x)$
- R le vecteur constitué des amplitudes des portes de la fonction $R(x)$ en morceaux
- δ une matrice rectangulaire (ou carrée si $M = N$) définie par :

$$\delta = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2M} & \frac{\ell}{M} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\ell}{M} & \frac{\ell}{2M} \\ \frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i x'_1) & \cdot & \frac{1}{\alpha_i} (\sin(\alpha_i x'_{k+1}) - \sin(\alpha_i x'_k)) & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\alpha_i} \sin(\alpha_i x'_M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

La relation matricielle (4.98) traduit le passage de la base des fonctions cosinus à la base des fonctions portes.

En utilisant la relation (4.63), la résistance d'interface constante par morceaux peut être déterminée par la méthode des moindres carrés appliquée au système (4.98). soit :

$$R = (E^t E)^{-1} E^t b \quad (4.100)$$

où la matrice rectangulaire E est donnée par :

$$E = N_a \delta \quad (4.101)$$

Pour tester les performances de cette méthode, nous avons fait des simulations à partir de données (non bruitées) obtenues par la résolution du problème direct sur la résistance en "double porte", échantillonnée sur 120 points. Les résultats présentés sur la figure (4.53), montrent que l'identification avec la méthode des moindres carrés ($M = 70 < N = 120$) est plus stable et donne un niveau d'amplitude plus proche de l'exact que celui obtenu par l'inversion de la matrice ($N = M = 120$ - figure (4.54) - ou $N = M = 70$ - figure (4.55) -).

Le résultat obtenu par la méthode des moindres carrés figure (4.53), est meilleur que celui présenté sur la figure (4.50), où on a présenté le profil identifié par la première méthode inverse (courbe en trait mixte). En effet, le niveau des résistances est plus proche du niveau nominal, et le profil identifié est moins oscillant entre les deux défauts.

Dans le cas d'un bruit de mesure généré par ordinateur sur le contraste réduit ΔT , d'écart type constant $\sigma = 0.1$. Nous avons utilisé la méthode de spécification de fonction pour différentes valeurs du nombre d'harmoniques n et de créneaux M pour estimer le vecteur R à partir d'un profil de température échantillonné sur 120 points.

Les résultats de l'inversion sont assez similaires à ceux obtenus par la première méthode. Les simulations réalisées pour un nombre d'harmoniques supérieur à 60 ont montré que le problème inverse est instable. Dans le cas où le nombre d'harmoniques et de créneaux sont égaux, la meilleure estimation est celle pour laquelle $n = M = 30$ (voir figure (4.56)). Toutefois, la résolution spatiale est insuffisante pour identifier avec précision la taille du défaut le moins large.

Pour tous les cas de figure étudiés, les résultats obtenus ont montré que plus le nombre de portes est petit devant le nombre d'harmoniques, plus l'inversion tend à être stable, mais bien sûr pour une perte de résolution spatiale.

Pour chaque nombre d'harmoniques n , on arrive toujours à obtenir un profil estimé qui représente le mieux possible le profil réel : les résultats sont portés sur les figures (4.56; $n = 30$), (4.57 ; $n = 40$), (4.58; $n = 50$), (4.59 ; $n = 60$). Toutefois, les trois premiers cas de figure ($M = 30$ portes) ne sont pas aussi précis que le dernier ($M = 40$ portes) du point de vue résolution spatiale. Le cas où l'inversion utilise 60 fréquences et 40 portes (voir figure (4.59)), semble être le plus représentatif du profil exact.

En deçà de 30 portes, la résolution spatiale est mauvaise et les extensions latérales des défauts sont surestimées (voir figure (4.60) où $n = 30$ et $M = 20$). Comparée aux résultats présentés sur la figure (4.18), cette méthode semble être mieux adaptée au problème d'inversion de résistances thermiques constantes par morceaux.

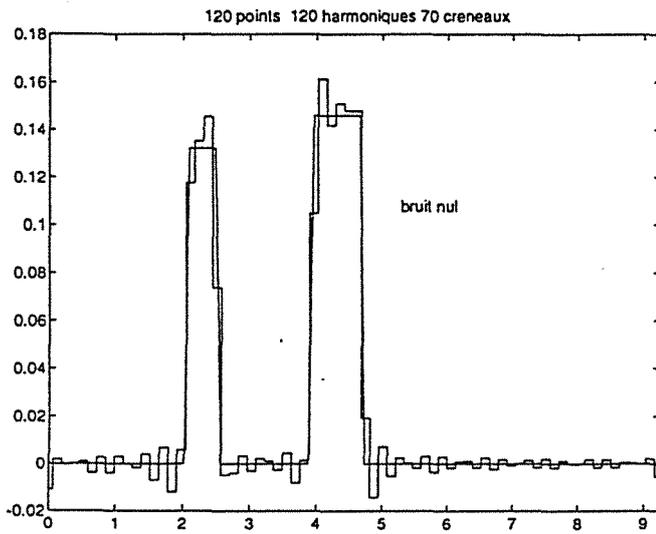


Fig.4.53 Méthode de spécification de fonction, cas d'un signal non bruité

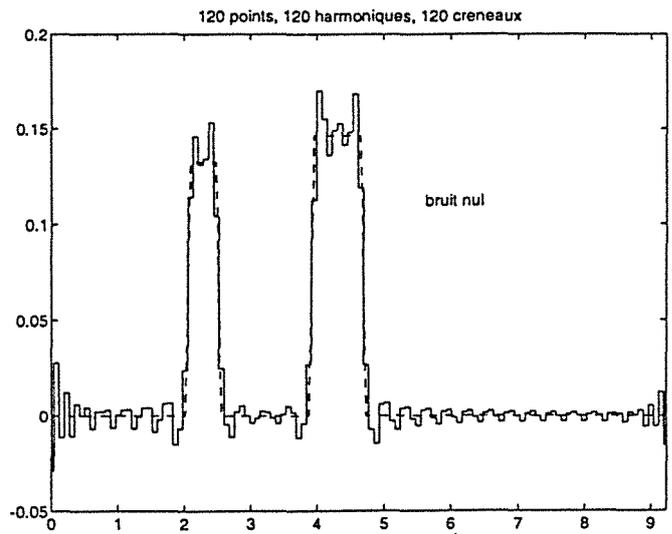


Fig.4.54 Méthode de spécification de fonction, cas d'un signal non bruité

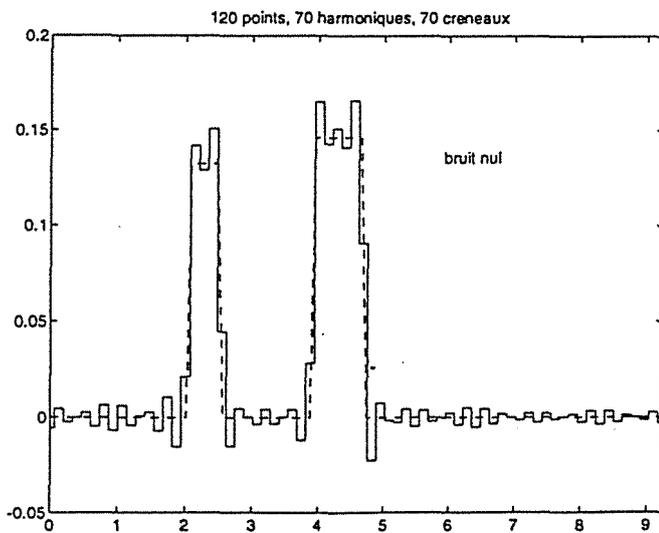


Fig.4.55 Méthode de spécification de fonction, cas d'un signal non bruité

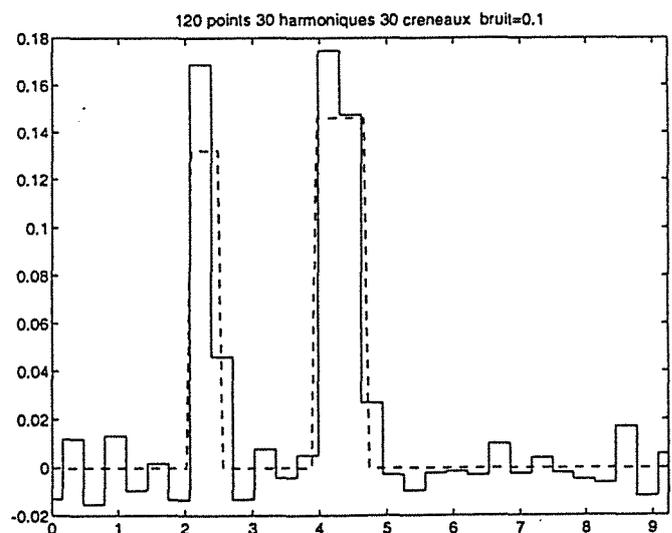


Fig.4.56 Méthode de spécification de fonction, cas d'un signal bruité ($\sigma = 0.1$)

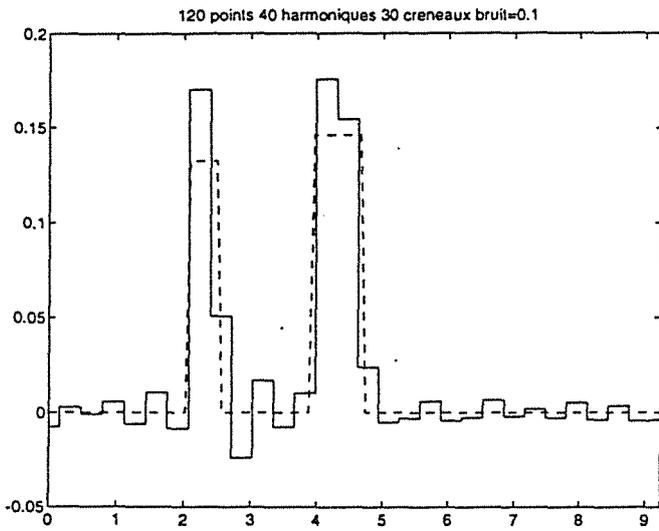


Fig.4.57 Méthode de specification de fonction, cas d'un signal bruité ($\sigma = 0.1$)

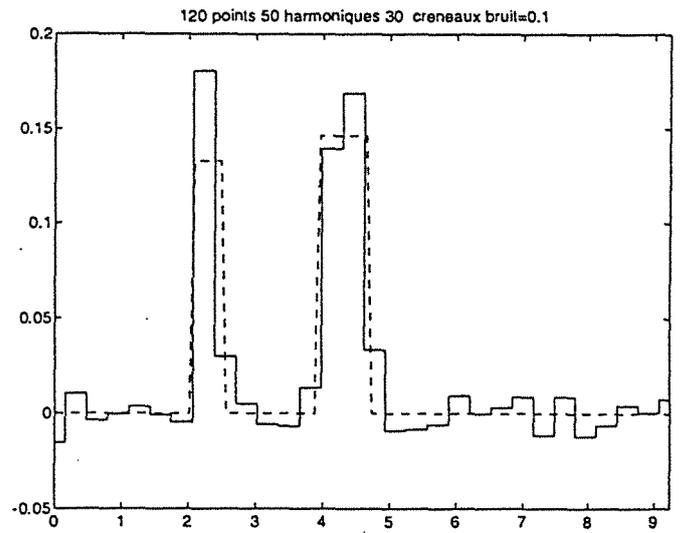


Fig.4.58 Méthode de specification de fonction, cas d'un signal bruité ($\sigma = 0.1$)

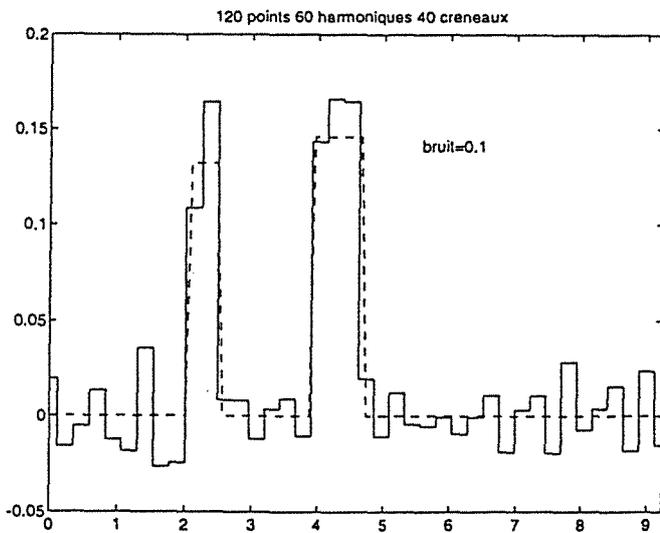


Fig.4.59 Méthode de specification de fonction, cas d'un signal bruité ($\sigma = 0.1$)

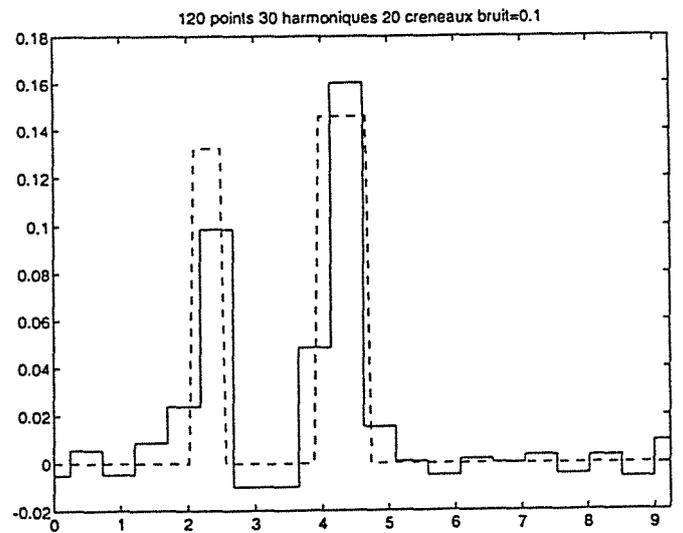


Fig.4.60 Méthode de specification de fonction, cas d'un signal bruité ($\sigma = 0.1$)

4.8 Méthode des défauts constants équivalents

On a vu précédemment que les résistances d'interface identifiées sont souvent oscillantes, plus particulièrement dans le cas de fonctions "dures". Ceci génère des résistances locales négatives et fluctuantes (figure (4.18)). Pour remédier à ces anomalies de la déconvolution directe, il est possible d'améliorer le résultat de l'inversion en imposant des contraintes. L'idée consiste à chercher des défauts constants par morceaux équivalents à la résistance estimée initialement au sens des moindres carrés. On améliore ainsi, le problème d'estimation de fonction par un problème d'estimation de paramètres.

La procédure d'identification consiste à estimer en premier lieu, la résistance d'interface par l'algorithme inverse décrit au paragraphe 4.2.2. Suivant le nombre de maxima locaux présents dans le profil estimé, on restreint en second lieu la recherche à une résistance d'interface constituée du même nombre de défauts carrés.

On cherche alors à estimer les nouveaux paramètres du problème, de telle manière que la fonction constante par morceaux soit la plus proche possible de la fonction identifiée initialement $\hat{R}(x)$ au sens des moindres carrés. Grâce au théorème de Parseval, la somme des écarts quadratiques à minimiser peut être écrite dans l'espace image. Le spectre de la fonction constante pouvant être écrit explicitement en fonction des paramètres inconnus, ce qui n'est pas possible avec la fonction $R(x)$ dans l'espace originel.

La somme des écarts quadratiques à minimiser est écrite dans l'espace de Fourier : le spectre de la fonction identifiée au début jouera le rôle de données "expérimentales" et le spectre de la fonction constante par morceaux jouera le rôle de données "théoriques". Il est clair, que plus le nombre de "carrés" est important, plus l'optimisation risque de diverger.

L'initialisation des paramètres inconnus est réalisée par les valeurs des maxima locaux de $R(x)$ estimée pour les résistances thermiques, les positions sont définies par les abscisses de ces maxima et les tailles des défauts sont déterminées par le critère des 40 % du maximum de la résistance identifiée [Maillet et al (1993)]. Cette méthodologie du choix des paramètres initiaux permet la convergence de l'algorithme d'optimisation (méthode du Simplex) : des valeurs trop écartées des paramètres exacts font généralement diverger le programme.

Des simulations numériques ont été réalisées pour tester les performances de cette technique sur des fonctions en "porte", en "double porte" et à "deux bosses".

- Dans le cas d'un défaut "carré", situé à une profondeur réduite $e_I = 0.25$ et dont les caractéristiques nominales sont données dans le tableau (4.1), la résistance $R(x)$ a été estimée après un fenêtrage carré sur les 28 premières fréquences (courbe en trait discontinu court, figure (4.61)). Ce profil révèle l'existence d'un seul défaut au centre de l'échantillon. Le défaut équivalent recherché sera alors défini par une fonction "porte". Les valeurs initiales des trois

paramètres inconnus ont été déterminées selon les critères précités et sont notées dans le tableau (1). L'optimisation de la somme des écarts quadratiques dans l'espace de Fourier a été réalisée sur les 28 premiers harmoniques. Les spectres de la résistance estimée initialement (courbe en cercles) et la résistance équivalente (courbe en carrés) sont présentés sur la figure (4.62). Le résultat obtenu est comparé au profil exact sur la figure (4.61), et les valeurs identifiées sont portées dans le tableau (4.1). La précision est assez bonne, surtout si on sait qu'on est en présence d'un cas de résistance faible ($R_{max} = 0.1$) et un bruit de "mesure" important ($\sigma = 0.1$).

Tableau 4.1

	paramètres nominaux	paramètres initiaux	paramètres identifiés
Résistance réduite (R)	0.10	0.12	0.09
Position réduite (x)	5.000	4.600	5.008
Extension réduite (b)	0.833	0.900	0.811

- Pour tester la méthode sur un cas plus difficile, nous avons réalisé des simulations sur le défaut en "double porte". La technique donne un résultat assez satisfaisant. Celui-ci est comparé au profil nominal sur la figure (4.63). Malgré que cette fois-ci, il fallait identifier six paramètres simultanément, l'écart entre les valeurs nominales et estimées n'est pas grand (voir tableau (4.2)). Les valeurs initiales ont été déterminées à partir de la résistance estimée par une inversion utilisant 30 harmoniques (figure (4.63)). La figure (4.64) compare les spectres du défaut équivalent (courbe en cercles) et du défaut identifié par la déconvolution (courbe en carrés).

Durant l'étude de ces deux cas, nous avons constaté que la taille et la gravité du défaut sont corrélées et varient en sens inverses. Ceci était prévisible, car la somme des écarts quadratiques sur le spectre est, grâce au théorème de Parseval, équivalente à la somme des écarts quadratiques sur la résistance d'interface elle-même, qui n'est rien d'autre que l'aire entre la résistance $\hat{R}(x)$ et la résistance du défaut carré équivalent.

Tableau 4.2

	paramètres nominaux	paramètres initiaux	paramètres identifiés
Résistance R1	0.1323	0.1550	0.1250
Résistance R2	0.1461	0.175	0.168
Position du milieu x1	3.31	3.32	3.31
Position du milieu x2	5.16	5.18	5.167
Extension b1	0.54	0.64	0.485
Extension b2	0.867	0.968	0.656

Fig.4.61 Simulation de l'inversion par la méthode des défauts équivalents dans le cas d'une fonction porte

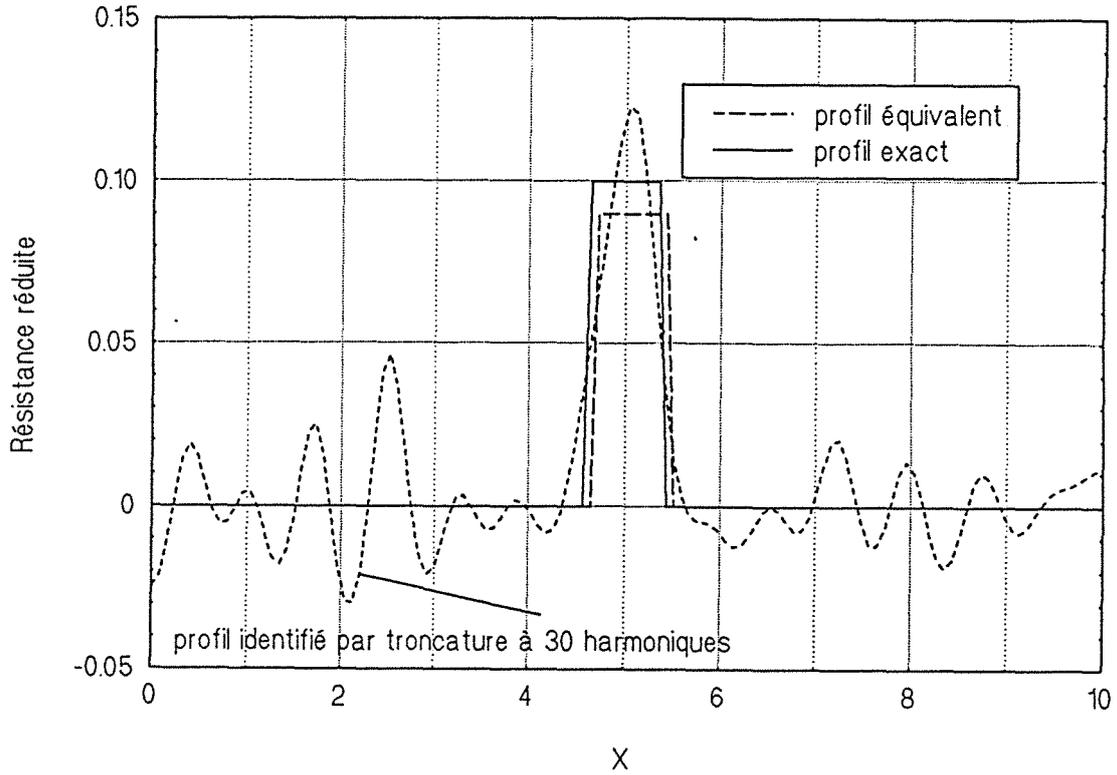


Fig.4.62 Spectres de $R_n(x)$ et de $R(x)$ équivalent dans le cas d'une résistance en une porte

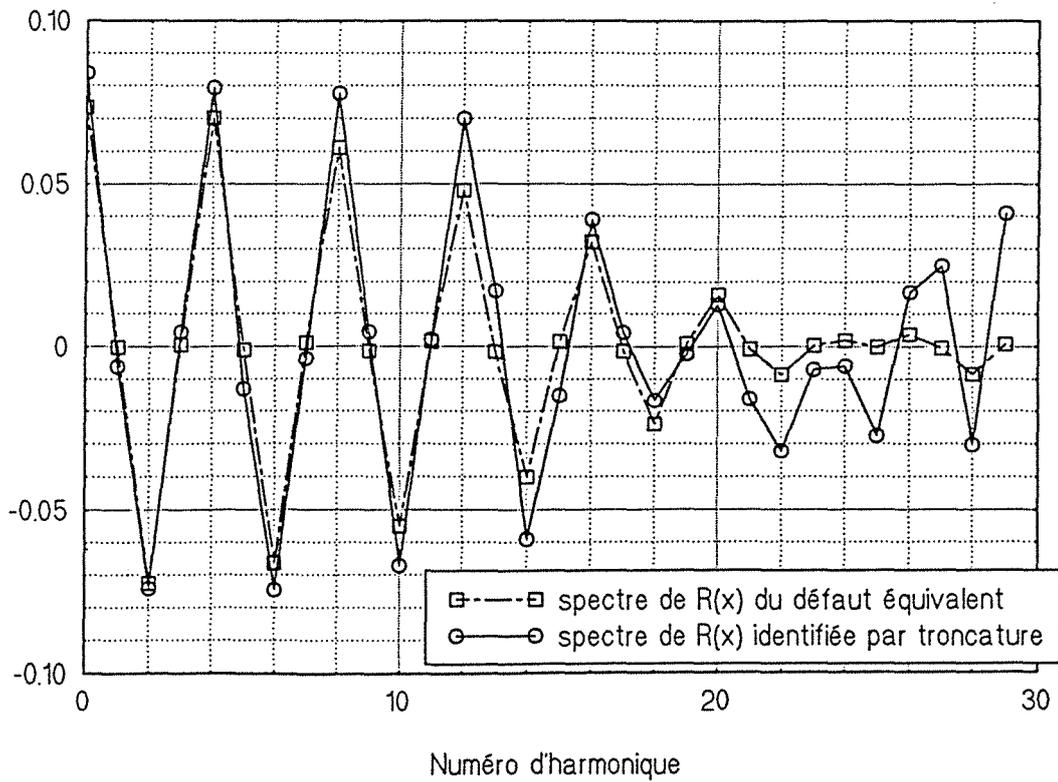


Fig.4.63 Simulation de l'inversion par la méthode des défauts équivalents dans le cas d'une fonction en double porte

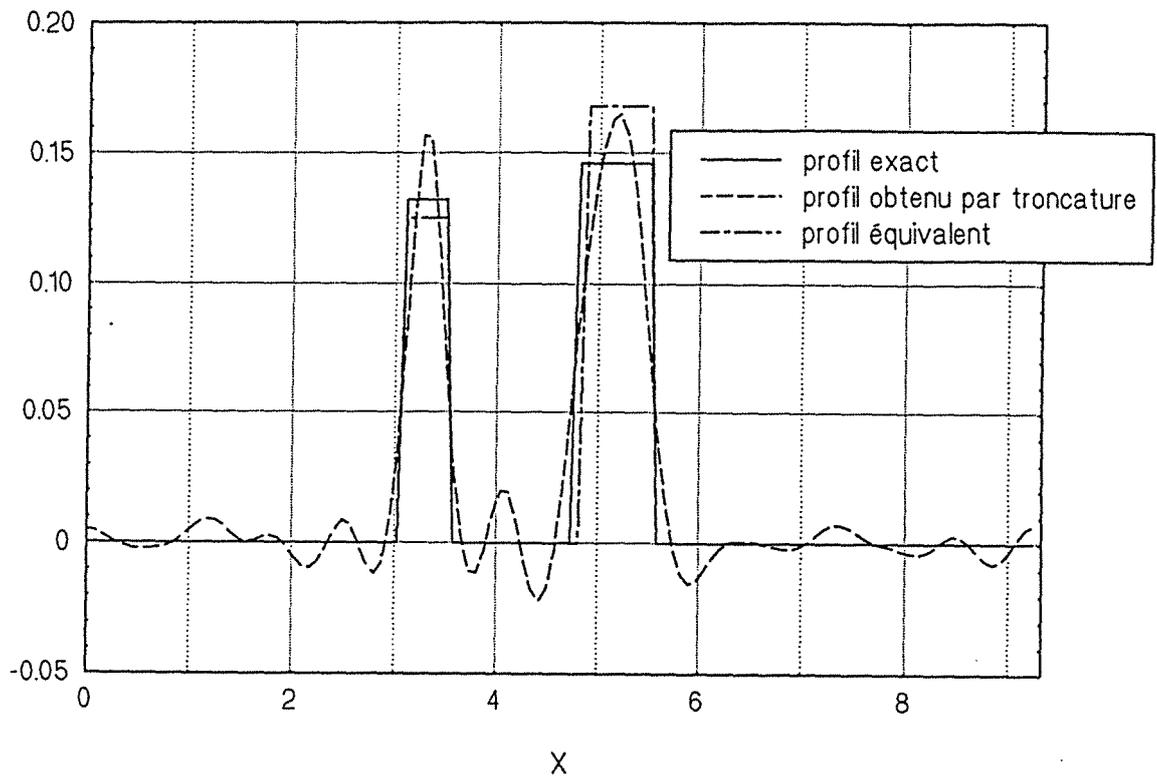
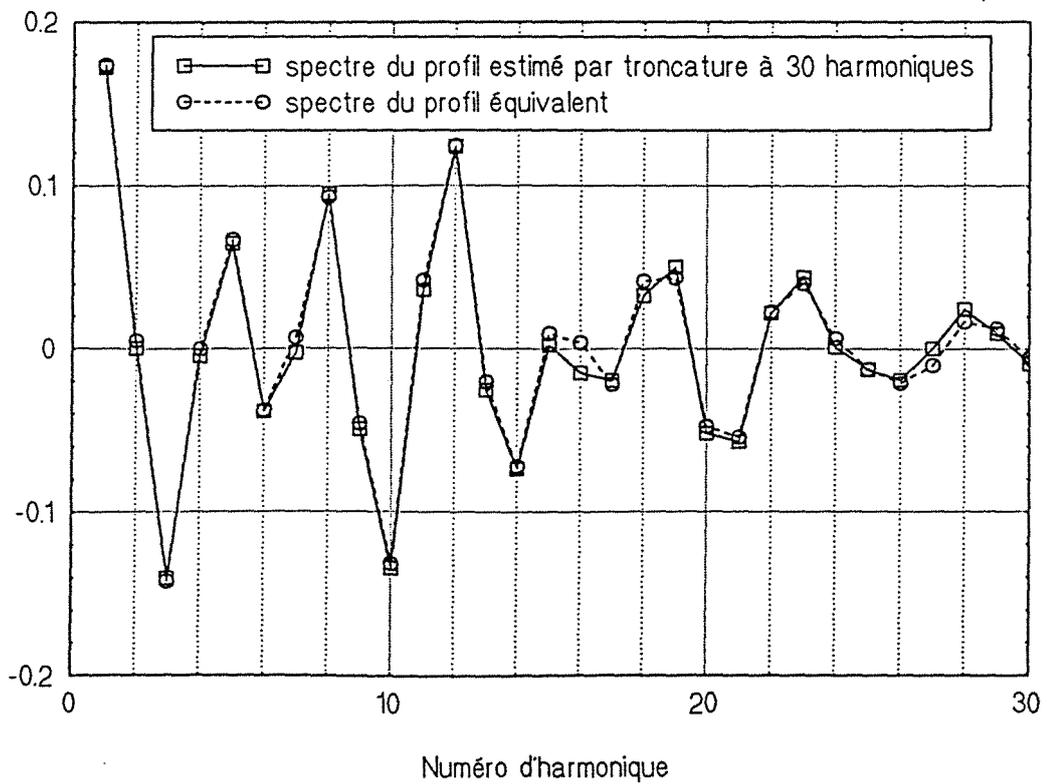


Fig.4.64 Méthode des défauts équivalents
Résistance en double porte



• Dans le but de ne pas augmenter le nombre de paramètres à identifier, le niveau minimum de la résistance à "deux bosses" a été ramené à zéro tout en gardant un maximum de 0.1. L'application de la même méthode donne des paramètres équivalents assez représentatifs de la répartition réelle, bien que cette dernière ne soit pas nulle sur toute l'extension de l'échantillon. Les résultats de cette étude sont présentés sur les figures (4.65) et (4.66) et le tableau (4.3).

Tableau 4.3

	paramètres initiaux	paramètres identifiés
Résistance réduite (R1)	0.105	0.900
Résistance réduite (R2)	0.500	0.394
Position réduite du milieu (x1)	2.30	2.31
Position réduite du milieu (x2)	7.00	6.83
Extension réduite (b1)	2.14	2.11
Extension réduite (b2)	1.62	2.21

4.9 Conclusion

L'utilisation de la transformation intégrale de Fourier, nous a permis de modéliser la diffusion transitoire de la chaleur au travers d'un défaut plan, non uniforme, avec un formalisme mathématique assez simple faisant localement intervenir la résistance d'interface (quadripôle thermique 2D).

Pour le problème inverse, l'analyse du spectre identifié de la résistance $R(x)$ à partir d'un contraste thermique bruité artificiellement, a montré qu'on est en présence d'un problème mal posé. Pour éviter une solution instable, la méthode de fenêtrage carré ou le filtrage de Wiener qui agissent sur la partie haute fréquence du spectre s'avèrent très efficaces. La première consiste à tronquer brutalement le spectre du signal d'entrée à une fréquence au delà de laquelle c'est le bruit de mesure qui prédomine. La seconde est une variante de la première, mais en outre filtre le signal en tenant compte du rapport signal sur bruit.

Les performances de ces deux méthodes ont été testées sur diverses répartitions de résistance thermique en simulation avec ou sans bruit gaussien. Ces répartitions se distinguent par leur raideur générant un nombre d'harmoniques plus ou moins élevé dans la réponse thermique.

La comparaison des résultats obtenus en simulations, montre que les deux méthodes sont très proches en terme de performances. Toutefois, il est important de noter que la méthode de Wiener est optimale dans le cas de résistance thermique faible (modèle linéaire) : le filtre dans ce cas agit de la même manière et sur les données et sur les inconnues.

Fig.4.65 Inversion par la méthode des défauts équivalents

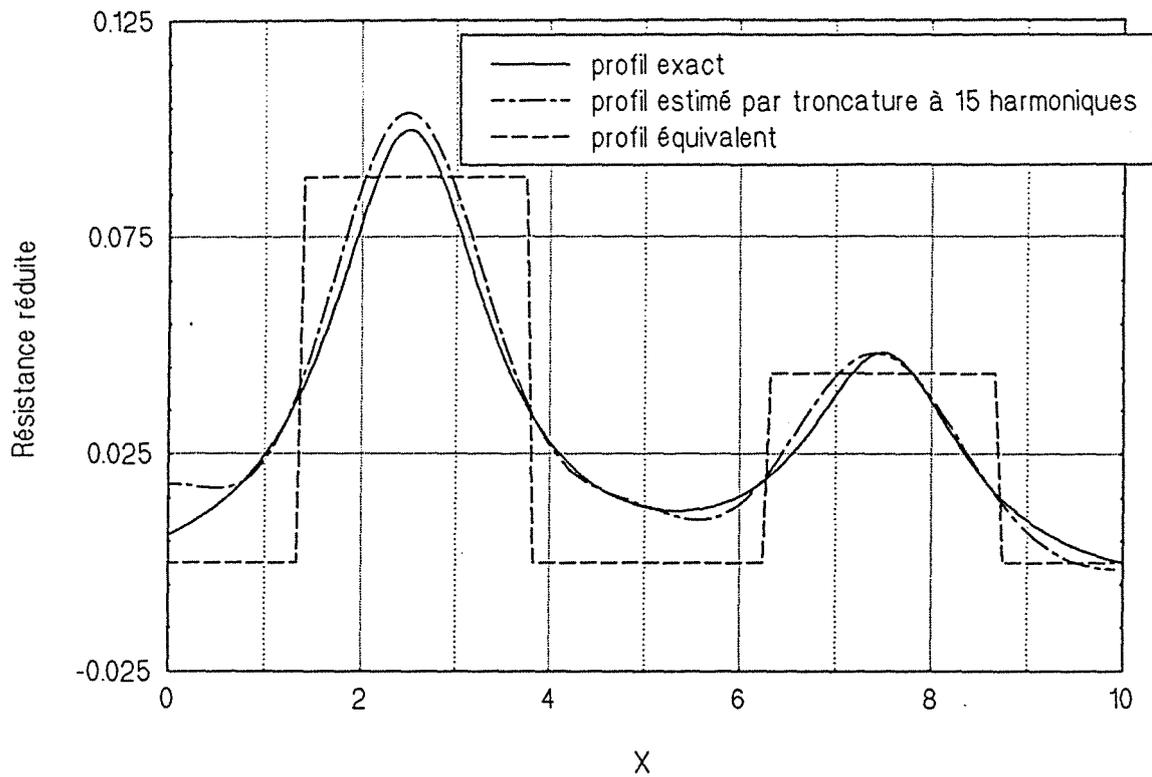
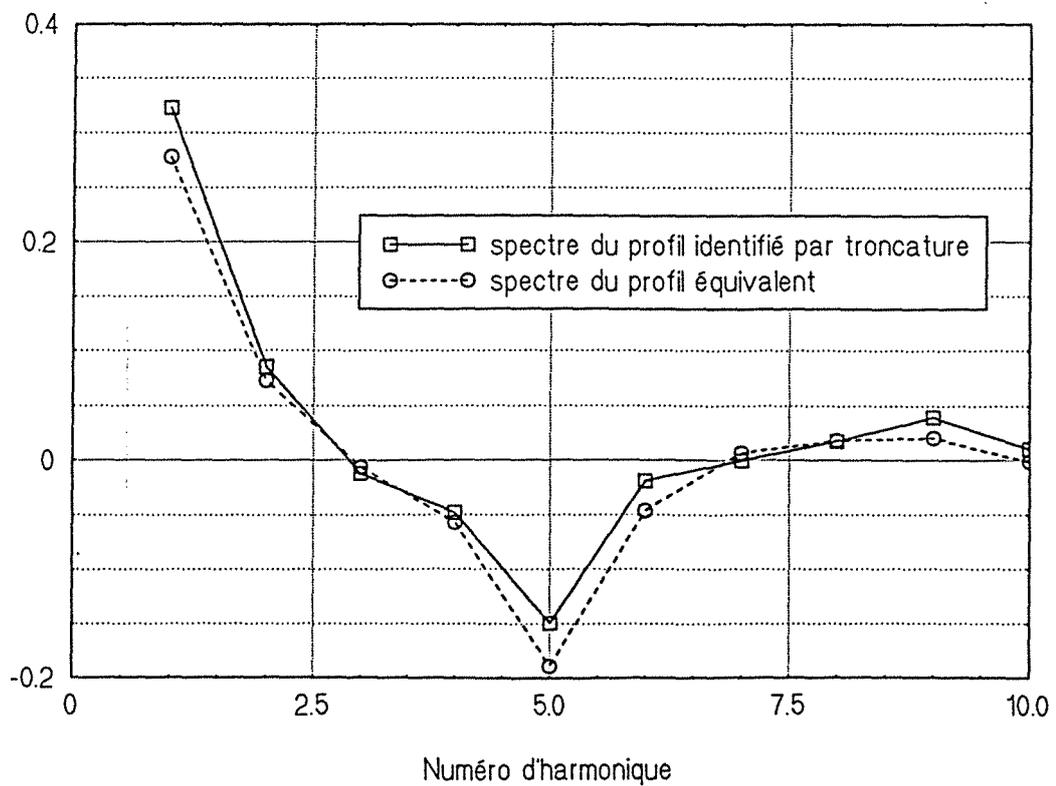


Fig.4.66 Méthode des défauts équivalents



Remarquons que la troncature brutale ou le filtre de Wiener ne sont pas forcément appliqués sur les données. L'efficacité des algorithmes présentés pourrait éventuellement être améliorée en appliquant ces techniques sur le vecteur des valeurs singulières du problème inverse. Ceci devient alors très proche des méthodes de régularisation de type TSVD et Thikonov.

Une autre technique a été également présentée. C'est la méthode de spécification de fonction, basée sur la recherche d'une résistance ayant la forme d'une fonction escalier. Il s'agit d'une technique équivalente aux précédentes puisqu'elle est issue d'un calcul intermédiaire permettant le passage de la base des fonctions cosinus à la base des fonctions portes. Toutefois, elle offre l'avantage supplémentaire du libre choix du nombre de "portes" nécessaire pour l'inversion.

Enfin, une méthode complémentaire visant à chercher des défauts constants équivalents à la répartition spatiale de la résistance identifiée par les autres techniques, a été proposée et testée avec succès. La méthode des défauts équivalents est basée sur l'information a priori obtenue à partir des autres méthodes, ce qui permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues recherchées.

Il est intéressant de constater que la combinaison de la méthode 1D locale du chapitre 2 à celle des défauts équivalents peut être tout à fait performante et doit représenter un très bon compromis précision / temps de calcul. En effet, le programme inverse 1D est dix fois plus rapide que celui tenant compte des phénomènes 2D : le traitement d'une ligne de 128 pixels par la première technique dure 0.05 seconde de temps CPU, par contre la deuxième procédure dure 0.5 seconde de temps CPU (hors filtrage).

Chapitre 5

**Application expérimentale à un cas de
résistance d'interface non uniforme :
Identification de défauts de collage**

Chapitre 5

Application expérimentale à un cas de résistance d'interface non uniforme : Identification de défauts de collage

5.0 Introduction

La caractérisation des assemblages par collage de deux plaques planes métalliques ou composites est une préoccupation fréquemment rencontrée dans l'industrie, où ce mode d'assemblage tend à remplacer des techniques plus traditionnelles. Un manque de colle situé à l'interface des deux plaques assemblées, constitue effectivement une lame d'air beaucoup moins conductrice de la chaleur que la couche de colle qu'elle remplace. Ce type d'application est un cas typique d'une résistance thermique d'interface non uniforme.

Dans le but d'éprouver la technique de caractérisation de défauts développée au chapitre précédent, un échantillon d'essai en matériau homogène isotrope a été fabriqué en laissant des vides d'air à l'intérieur pour simuler les résistances d'interface.

5.1 Caractéristiques de l'échantillon

En pratique, il est très difficile de calibrer un défaut artificiel de caractéristiques géométriques connues. La fonction décrivant la résistance d'interface en "double porte" est la plus facile à mettre en oeuvre. Elle a été réalisée par la superposition de deux plaques carrées de PVC de côté $\ell = 58 \text{ mm}$ et d'épaisseurs respectives 1 mm et 5 mm . Ces deux plaques ont été collées par un film adhésif qui a été déposé sur la surface totale de l'interface excepté deux bandes correspondant aux deux "portes" de la fonction $R(x)$.

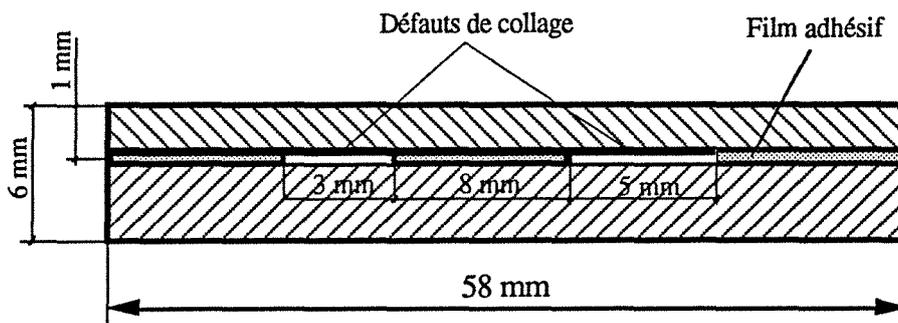


Fig.5.1 Schéma de l'échantillon en PVC

Grâce à une caméra CCD monochrome à haute résolution MACC-77, nous avons pu déterminer avec précision les grandeurs géométriques de l'interface. La figure (5.2) montre les images numérisées des deux défauts prises par la caméra dans les mêmes conditions. On remarque l'existence de bavures du film adhésif à l'intérieur des cavités. La présence de ces bavures risque de fausser nos mesures, particulièrement pour les extensions latérales des défauts et leurs épaisseurs le long de l'échantillon. Pour remédier à cette erreur éventuelle, nous avons procédé à la même manipulation sur l'extrémité opposée de la plaque et calculé par la suite la moyenne des paramètres géométriques des deux bandes. Sur les images, on voit clairement que la lumière projetée dans le sens opposé à la caméra traverse les défauts sans aucun obstacle majeure. On peut ainsi supposer que les mesures moyennées sur les deux extrémités ne varient pas beaucoup le long de l'échantillon. Pour plus de précaution, nous allons traiter le film thermique sur deux lignes différentes assez éloignées et sur une moyenne de vingt lignes. La première "porte" (celle de gauche sur la figure(5.1)) a une épaisseur de 0.144 mm pour une largeur de 3 mm , la seconde "porte" a une épaisseur de 0.159 mm pour une largeur de 5 mm . Une distance de 8 mm sépare les deux bandes. Ces valeurs ont été choisies de manière à avoir des effets bidimensionnels assez importants. Ceux-ci sont spécialement dus aux petites tailles des deux bandes et à la distance qui les sépare. Les critères utilisés pour le choix de ces dimensions sont ceux déterminés par Lamine (1988).

Les propriétés thermographiques du PVC utilisé sont les suivantes :

- La capacité calorifique volumique est : $\rho c = 1.327 \cdot 10^6 \text{ J} / \text{m}^3 \text{ K}$.
- La diffusivité thermique a été mesurée par la méthode flash (moments temporels partiels) : $a = 1.248 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Les faces avant et arrière de l'échantillon ont été revêtues de peinture noire (assimilable à un corps gris à émission diffuse) afin d'uniformiser et d'améliorer l'émissivité et l'absorptivité.

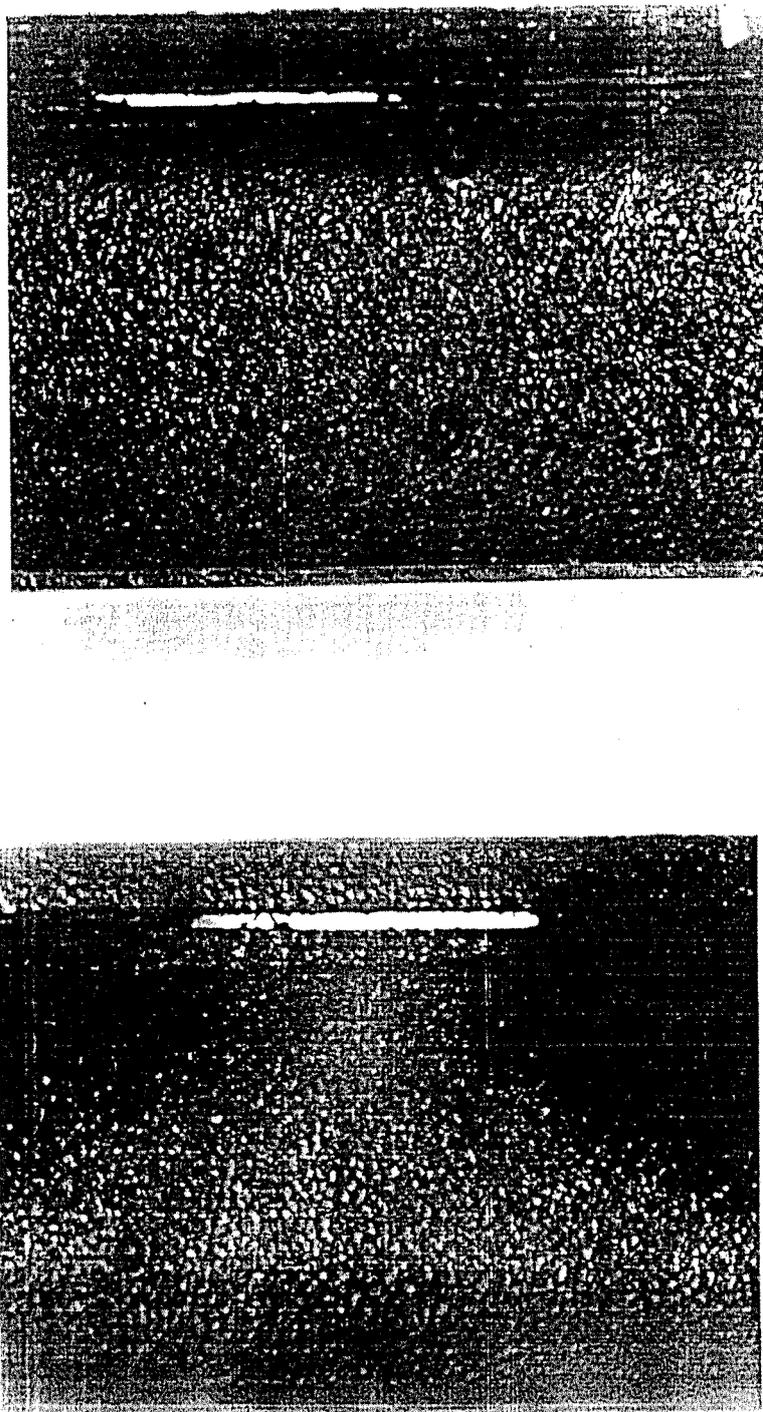


Fig.5.2 Images numérisées d'une caméra CCD monochrome à haute résolution de deux défauts de collage entre deux plaques de PVC

5.2 Expérience

Le bicouche a été illuminé par la source impulsionnelle constituée de quatre tubes à éclats disposés en carré (voir paragraphe 2.4.2.1) sur la face de la couche la plus mince. Les images infrarouges de la face avant délivrées par la caméra sont enregistrées pendant 163.84 secondes, avec une période d'acquisition de 0.64 seconde. La fréquence est choisie de manière à ce que le temps d'acquisition maximum soit suffisant pour que le contraste thermique soit complètement amorti (le nombre de trames IR étant fixé à 256). Une première estimation du temps nécessaire pour l'acquisition peut être obtenue à partir du nombre de Fourier quand il est égal 1 (cette valeur correspond approximativement à la fin du régime transitoire). La caméra IR a été équipée de l'objectif de 7°, d'une bague allonge et aucun filtre n'a été utilisé.

La figure (5.3) présente une image de l'échantillon en température absolue à l'instant 5.12 secondes après le flash, instant où le contraste thermique à l'aplomb du défaut le plus large est maximum (voir figure (5.3)). Une inspection rapide de cette image thermographique permet facilement de choisir une zone saine, où la présence de défaut interne est exclue. C'est le pavé de pixels délimité par un rectangle sur l'image IR. Cette zone sera utilisée ultérieurement pour le calcul du contraste thermique, qui permet de remonter aux paramètres du défaut. On aurait pu la choisir beaucoup plus étendue, particulièrement dans la direction parallèle aux deux bandes, afin de réduire plus le bruit de mesure sur le contraste. Mais cette opportunité n'est pas toujours possible sur le terrain dans les applications industrielles, et souvent la zone de référence est assez limitée. C'est pour cela, que nous avons travaillé avec le pavé de référence montré sur la trame IR, afin d'éprouver nos programmes inverses sur des données expérimentales assez bruitées.

Sur la figure (5.4), nous montrons le thermogramme en contraste réduit à l'aplomb du centre de la bande la plus large. Comme on peut le constater, ce signal est assez bruité (un rapport Signal / Bruit à peu près égale à 10). Ceci est dû soit à la faible énergie déposée par la source excitatrice ($Q = 1000 J / m^2$), soit à la faiblesse de la résistance thermique. La normalisation du champ de température a été faite aux temps courts à cause du caractère très isolant de l'échantillon. En effet, sur ce genre de matériau, le refroidissement est assez lent et les pertes thermiques par convection risquent de fausser considérablement la température adiabatique aux temps longs.

Notons que la profondeur est évidemment connue dans ce cas, puisqu'elle est égale à l'épaisseur de la première couche, soit 1 mm. Elle sera tout de même estimée en première approximation par la procédure décrite dans le paragraphe (4.2.1), afin de qualifier la performance de cette technique à identifier ce paramètre. Par ailleurs, la répartition spatiale de la résistance thermique d'interface sera identifiée par différents algorithmes inverses (voir chapitre 4). Elle sera comparée aux mesures réalisées par la caméra CCD monochrome. La traduction de la résistance thermique en épaisseur d'air équivalente sera faite pour une conductivité de l'air égale à 0.026 W / m K.

Fig.5.3 Trame thermographique à l'instant d'occurrence du maximum de contraste à l'aplomb du défaut le plus large

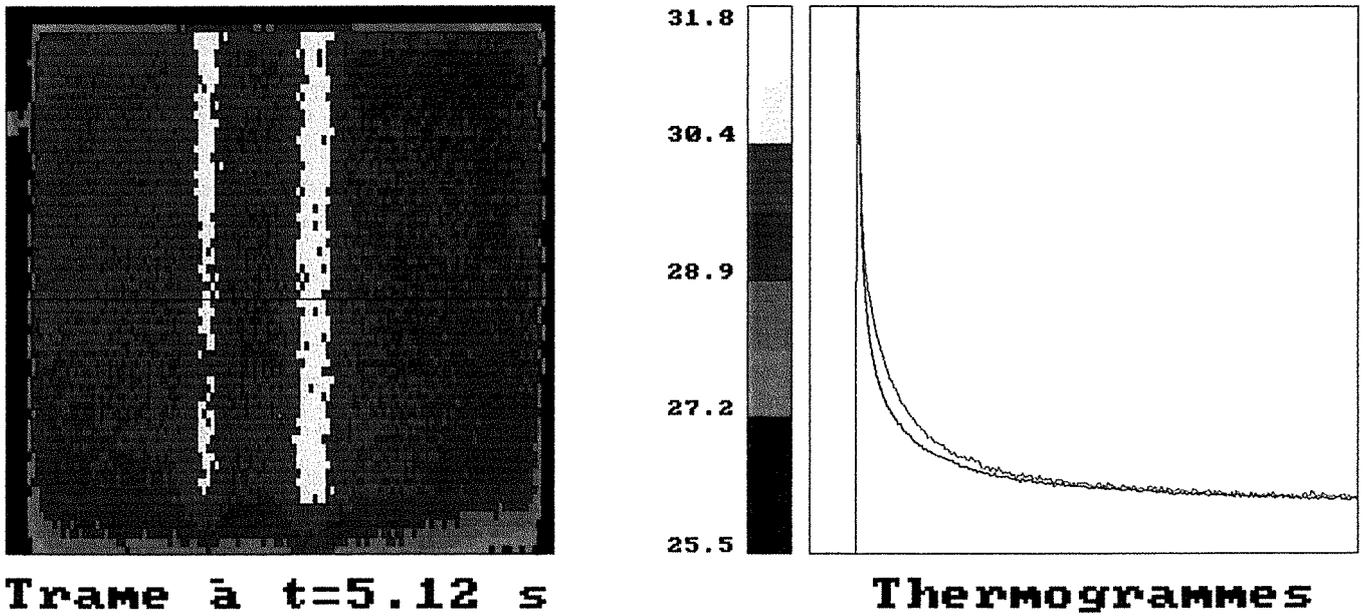
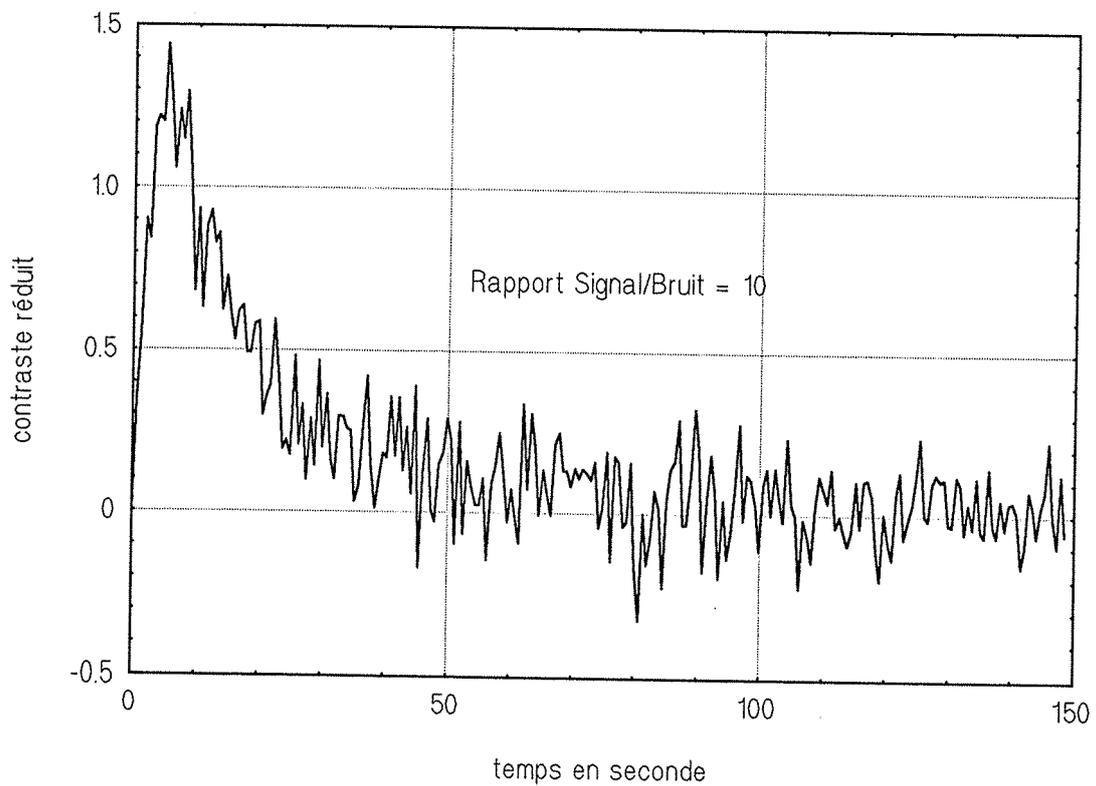


Fig.5.4 Thermogramme en contraste à l'aplomb du grand défaut



5.3 Identification de la profondeur d'interface

La détermination de la profondeur d'interface a nécessité le calcul de deux profils spatiaux du contraste réduit de Laplace pour deux valeurs différentes de la variable réduite p ($p_1 = 1$ et $p_2 = 4$). Sur la figure (5.5), nous avons présenté ces deux profils. La mise en oeuvre de l'algorithme d'inversion décrit au chapitre 4 donne en première estimation une valeur réduite $e_1 = 0.13$ soit une profondeur de 0.81 mm . Valeur qui est en bon accord avec la valeur suspectée de 1 mm . Cette première identification peut être utilisée pour l'initialisation d'une méthode de Newton ou une méthode des moindres carrés afin d'affiner l'inversion de la profondeur.

5.4 Identification de la résistance d'interface

Dans cette section, nous allons comparer les mérites des différentes méthodes d'inversion étudiées dans le chapitre précédent sur les données expérimentales correspondant à la ligne 30 indiquée sur l'image thermographique de la figure (5.3). Pour toutes les procédures d'inversion ci-dessous, la profondeur d'interface sera gelée à sa valeur nominale de 1 mm (soit une profondeur réduite $e_1 = 0.16$).

Le critère établi dans le paragraphe (2.1.2) permettant le choix optimal de la variable de Laplace en fonction de la profondeur quand celle-ci est connue, donne une valeur correspondante $p = 9$. Le profil du contraste de Laplace pour cette valeur de p est présenté sur la figure(5.6).

5.4.1 Inversion par la méthode de fenêtrage

Le tracé de la puissance spectrale du profil du contraste de Laplace expérimental calculé pour $p = 9$ (figure (5.7)) montre que le bruit de mesure prédomine à partir de la trentième fréquence. L'utilisation des trente premiers harmoniques pour l'identification de $R(x)$ par la technique inverse décrite dans le paragraphe (4.2.2), donne le profil présenté en épaisseur d'air équivalente sur la figure (5.8). On observe un bon accord entre le profil estimé et la répartition spatiale exacte présentée sur la même figure. En effet, on peut considérer que les valeurs des deux résistances thermiques sont correctement évaluées. Toutefois, deux anomalies sont à signaler. On constate que sur les bords, l'identification est très mauvaise, on obtient même des résistances négatives. Ceci peut être expliqué soit par des phénomènes de pertes sur les extrémités, soit par un dépôt d'énergie non uniforme sur la face avant. On note également que le profil est assez "mou", ceci était attendu vu que les hautes fréquences ont été éliminées lors de la réduction du bruit de mesure (le spectre de la " double porte " étant infini). L'effet d'une excitation non uniforme sur l'estimation sera étudié ultérieurement.

Fig.5.5 Profils expérimentaux du contraste de Laplace

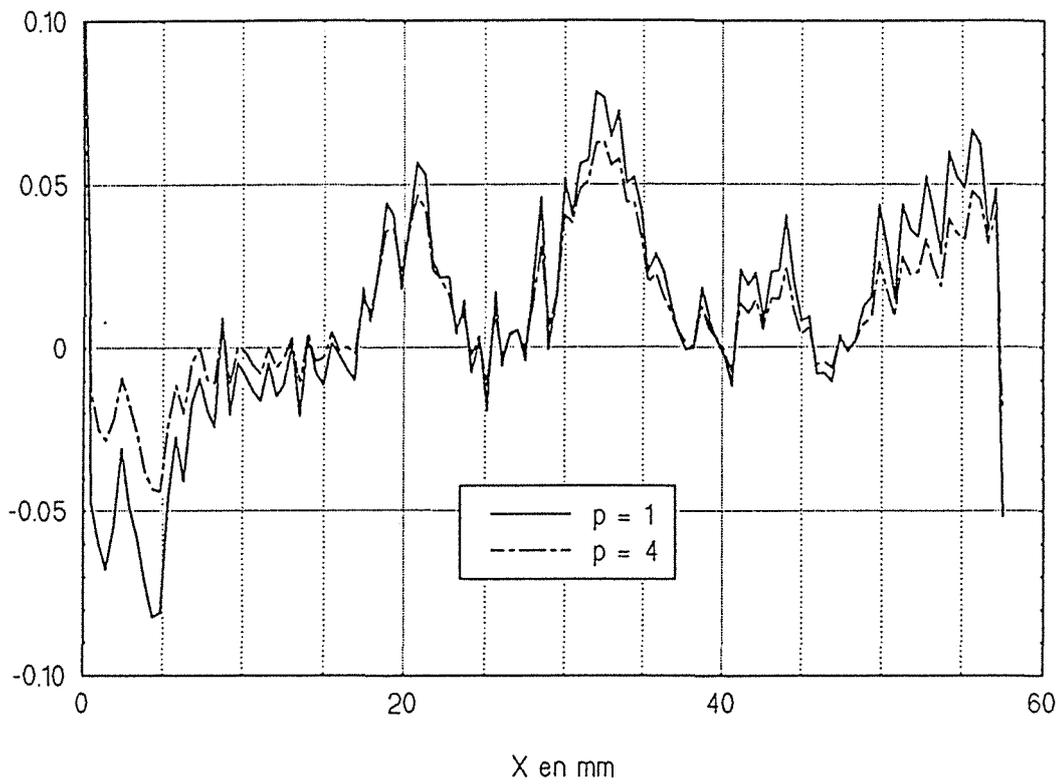


Fig.5.6 Profil expérimental de Laplace calculé pour $p = 9$

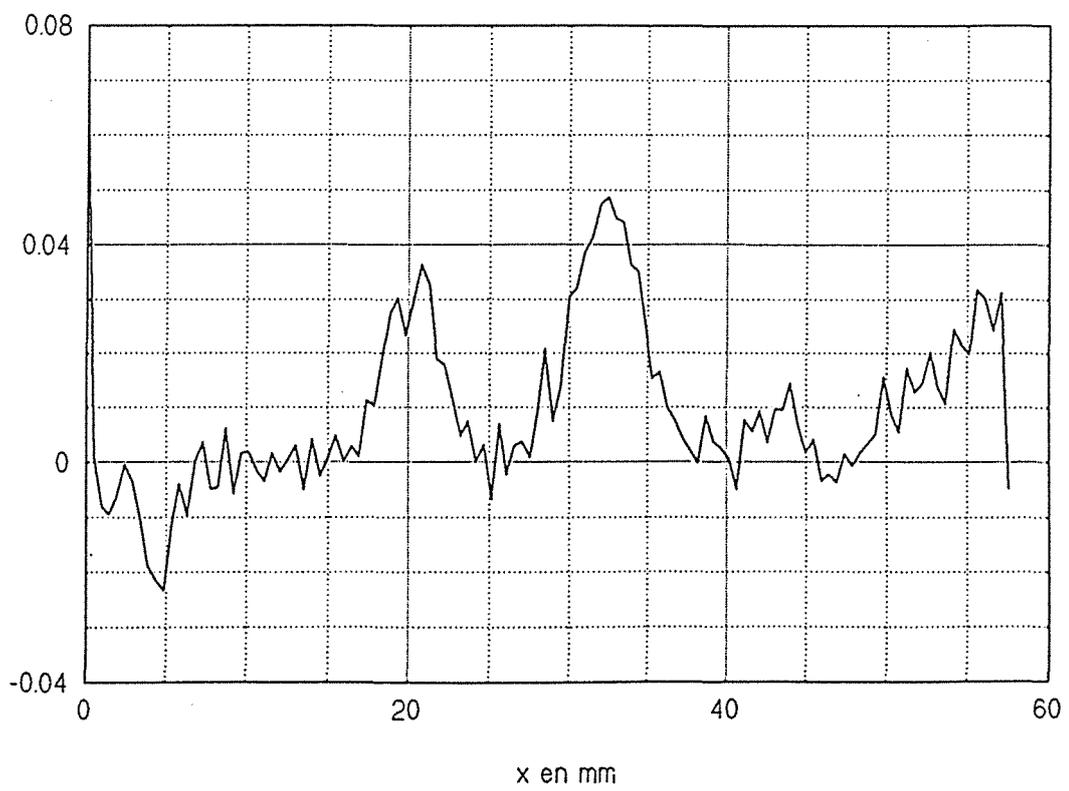


Fig.5.7 Analyse spectrale des données expérimentales

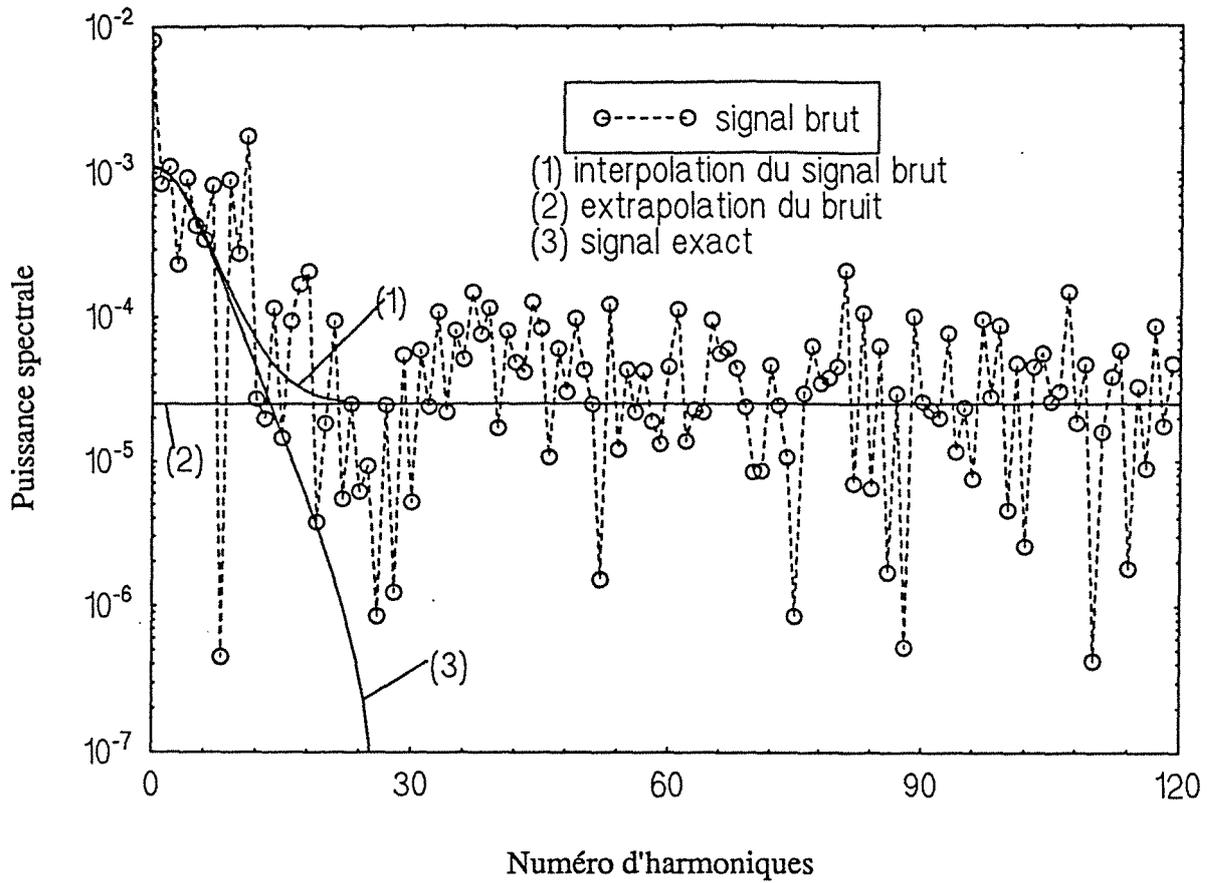
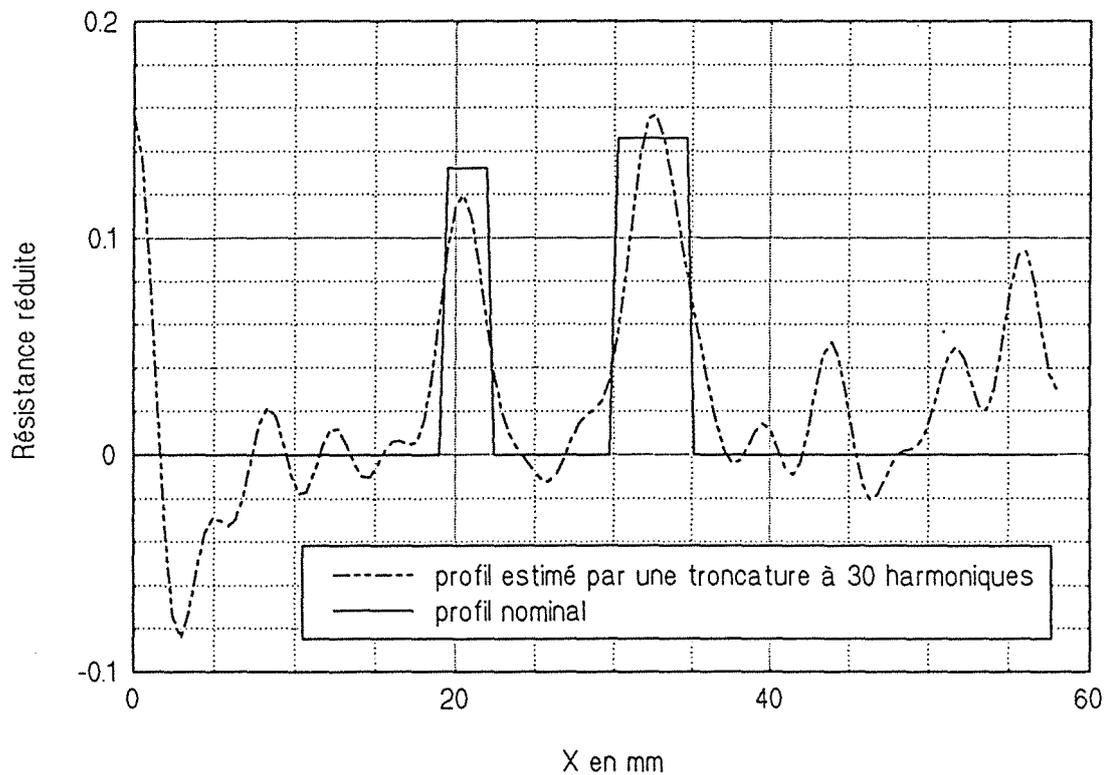


Fig.5.8 Inversion par fenêtrage du profil expérimental de Laplace ($p=9$)



5.4.2 Inversion par la méthode de Wiener

L'analyse spectrale du contraste de Laplace $\Delta\tau(x,p)$ calculé pour la valeur optimale $p = 9$, est illustrée sur la figure (5.7) : Le signal brut est ajusté par une gaussienne (courbe (1)) et le bruit de mesure a été extrapolé par une droite (courbe (2)). La différence entre ces deux fonctions présente une approximation de la puissance spectrale du signal nominal exempt de bruit (courbe (3)). La fonction de transfert du filtre optimal de Wiener issue de cette analyse, est calculée d'après l'équation (4.7) et est présentée sur la figure (5.9).

L'utilisation du filtre de Wiener dans la procédure inverse permettant d'identifier la résistance d'interface donne le profil comparé sur la figure (5.10) aux profils nominal et obtenu par fenêtrage carré.

On peut voir facilement que les niveaux des résistances identifiées sont assez représentatifs de la répartition exacte. Les imperfections au voisinage des bords sont mieux corrigées par rapport à l'estimation faite par fenêtrage. Quoique l'évolution spatiale de la résistance thermique est assez molle, ceci est sans doute dû au fait que la fonction de transfert du filtre s'annule à partir du 26^{ème} harmonique (voir figure (5.9)).

5.4.3 Inversion par la méthode de spécification de fonction

Cette méthode consiste à rechercher la résistance d'interface sous forme d'une fonction constante par morceaux. Le meilleur résultat de la simulation de l'expérience dans le paragraphe (4.7) a été obtenu en utilisant pour l'inversion les trente premiers harmoniques du spectre du contraste de Laplace $\Delta\tau(x,p)$ et en cherchant $R(x)$ discrétisé en trente créneaux.

En expérience, les valeurs des paramètres adéquates sont les mêmes qu'en simulation. Le résultat obtenu par cette méthode est comparé au profil exact sur la figure (5.11). L'évolution spatiale de la résistance thermique identifiée est assez semblable à celle obtenue par la méthode de fenêtrage. On note néanmoins que les bords des deux "portes" sont mieux représentés par la répartition évaluée.

Il est évident que cette méthode ne présente un avantage que dans le cas de fonctions $R(x)$ à variations brusques. Dans le cas où la répartition spatiale de la résistance est "molle", il vaut mieux utiliser l'une des deux méthodes antérieures.

5.4.4 Défaut équivalent constant par morceaux

Le principe de cette méthode a déjà été détaillé dans le paragraphe (4.8). Le but est d'éliminer les anomalies des méthodes décrites ci-dessus : oscillations et résistances locales négatives. Ceci est réalisé en imposant des conditions a priori sur le profil recherché, à partir de constatations sur le résultat d'une première estimation de ce profil par l'une des techniques précédentes.

Fig.5.9 Filtre de Wiener relatif à l'expérience

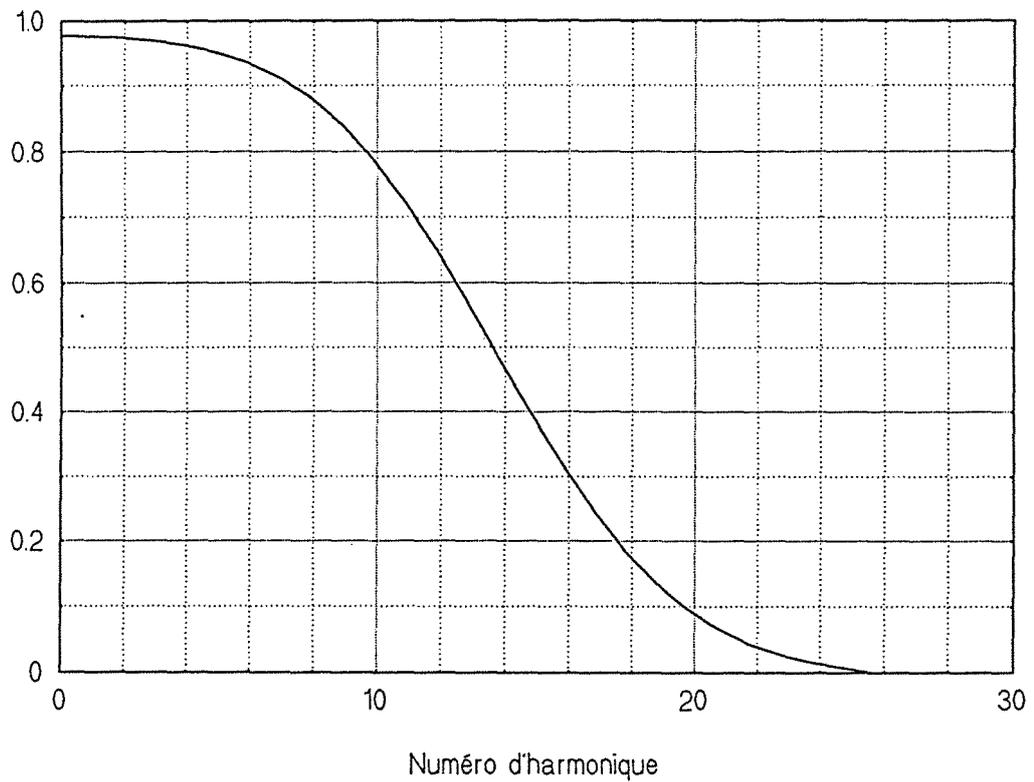


Fig.5.10 Profils expérimentaux de $R(x)$ obtenus par la méthode de Wiener et par troncature

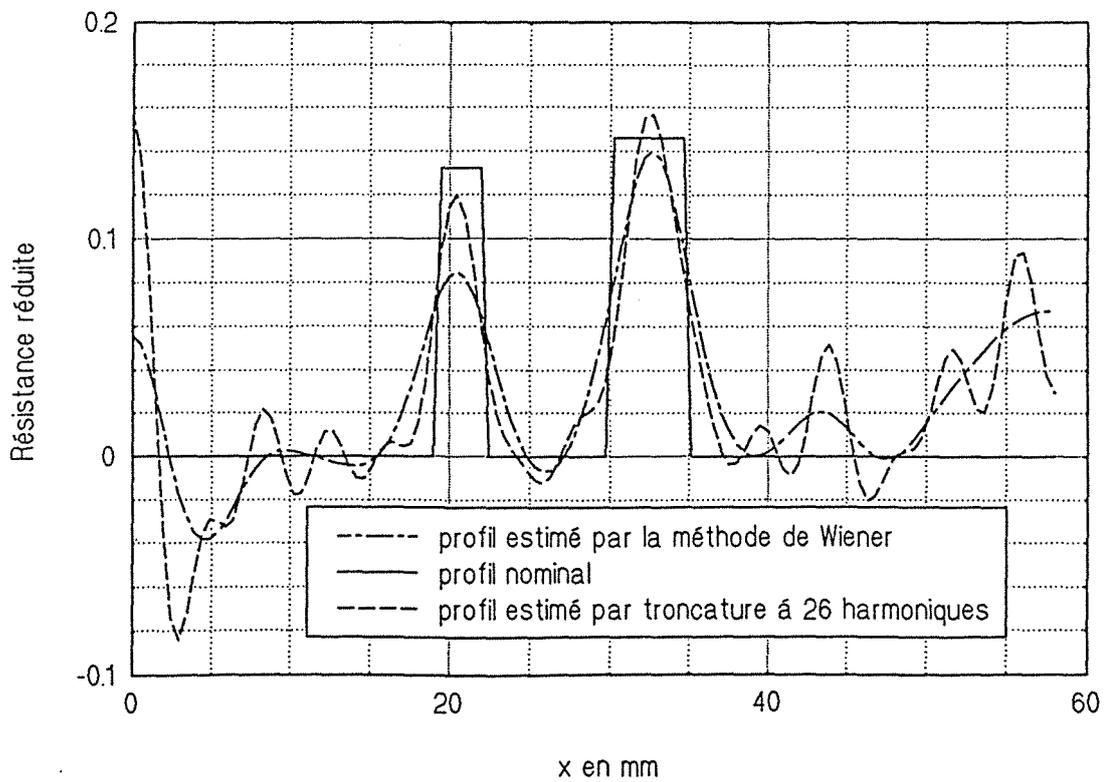
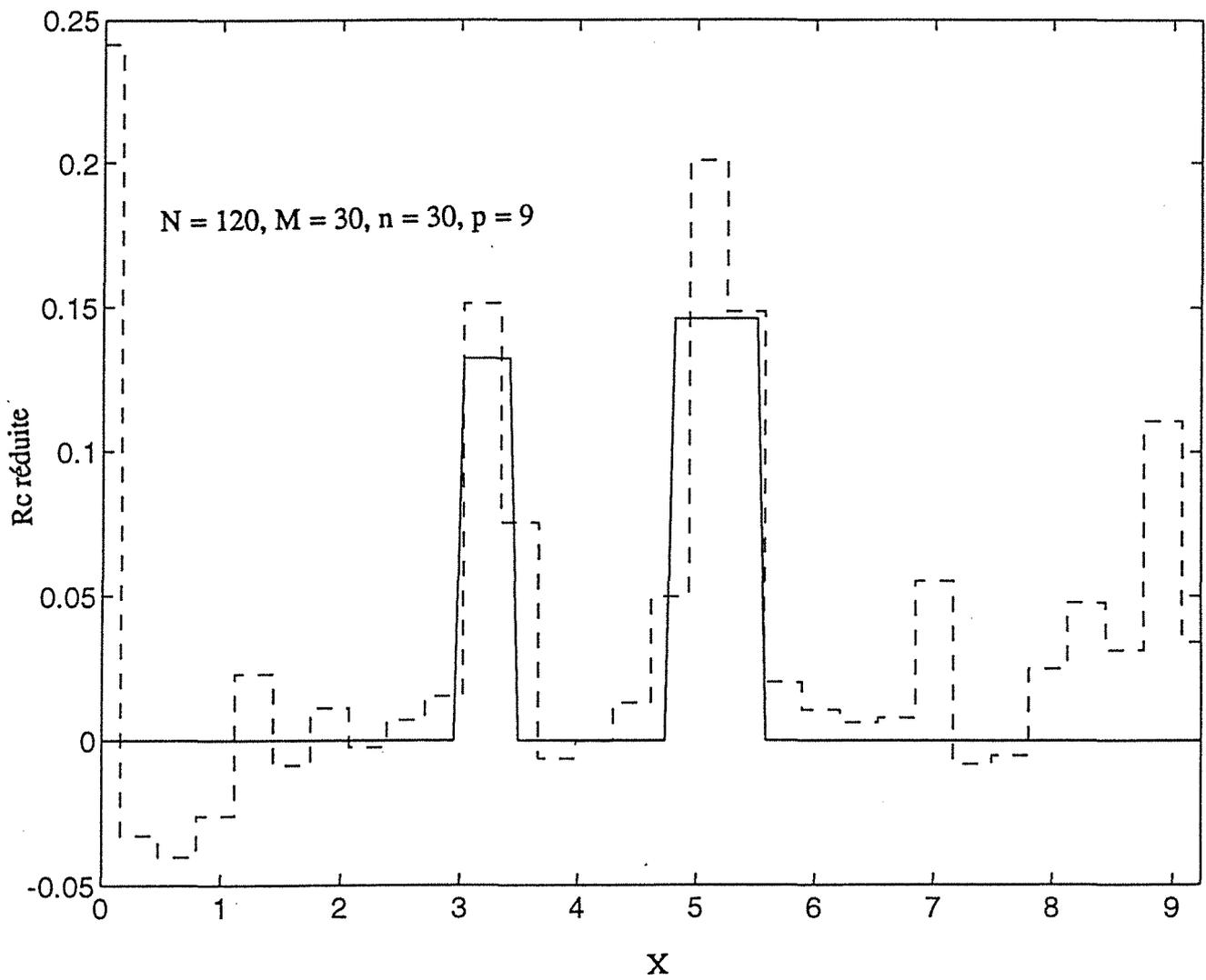


Fig.5.11 Méthode de spécification de fonction.
Comparaison des profils expérimental et théorique.



La première estimation obtenue par troncature du spectre révèle la présence de deux défauts proches. On réduit alors la recherche aux six paramètres caractérisant les deux créneaux du défaut équivalent au sens des moindres carrés. Les valeurs nominales, initiales (déterminées lors de la première estimation) et identifiées sont données en mm dans le tableau (5.1). On constate que les différents paramètres ont été évalués correctement, bien que les résistances recherchées soient très petites. Le résultat peut être vu clairement sur la figure (5.12.a) où on le compare avec la répartition exacte. La figure (5.12.b) compare les spectres des profils identifiés par la déconvolution directe par troncature et par le méthode des défauts équivalents.

Tableau 5.1

	Valeurs nominales	Première Identification	Identification finale
Epaisseur bande 1	0.131	0.118	0.109
Epaisseur bande 2	0.144	0.155	0.136
Position bande 1	20.768	20.762	20.437
Position bande 2	32.888	32.844	32.800
Largeur bande 1	2.800	3.014	3.488
Largeur bande 2	4.496	4.018	4.920

5.4.5 Comparaison avec l'algorithme 1D local

La comparaison des résultats obtenus par le problème inverse monodimensionnel en face avant et par la méthode de troncature de spectre est illustrée sur la figure (5.13). On peut voir clairement qu'il n'y a pas une très grande différence entre les évolutions spatiales des fonctions identifiées.

Ceci ne signifie pas que les phénomènes 2D sont inexistant, mais s'explique par le fait que l'élimination des hautes fréquences a diminué la résolution spatiale de la méthode à un tel point qu'on ne distingue plus la différence donnée par la modélisation 2D.

En effet, lors des simulations sans bruit de mesure, réalisées dans le paragraphe (4.6), cette anomalie n'existe pas, car tous les harmoniques jusqu'à la fréquence de Nyquist ont été utilisés pour l'inversion. L'avantage qu'apportait la modélisation 2D était alors observable. Cet avantage peut être significatif lors de traitement de données expérimentales, si le niveau du bruit de mesure est faible ou l'évolution de la résistance d'interface est douce.

5.5 Autres traitements pour estimer la résistance

Dans cette section, nous désirons vérifier que l'épaisseur d'air des deux bandes reste pratiquement inchangée le long de la plaque d'essai et que les bavures provenant du ruban adhésif sont insignifiantes. Pour ce faire, nous allons estimer la résistance d'interface sur une autre ligne loin de la précédente et par la suite sur une moyenne de vingt lignes.

Fig.5.12a Illustration de la méthode des défauts équivalents

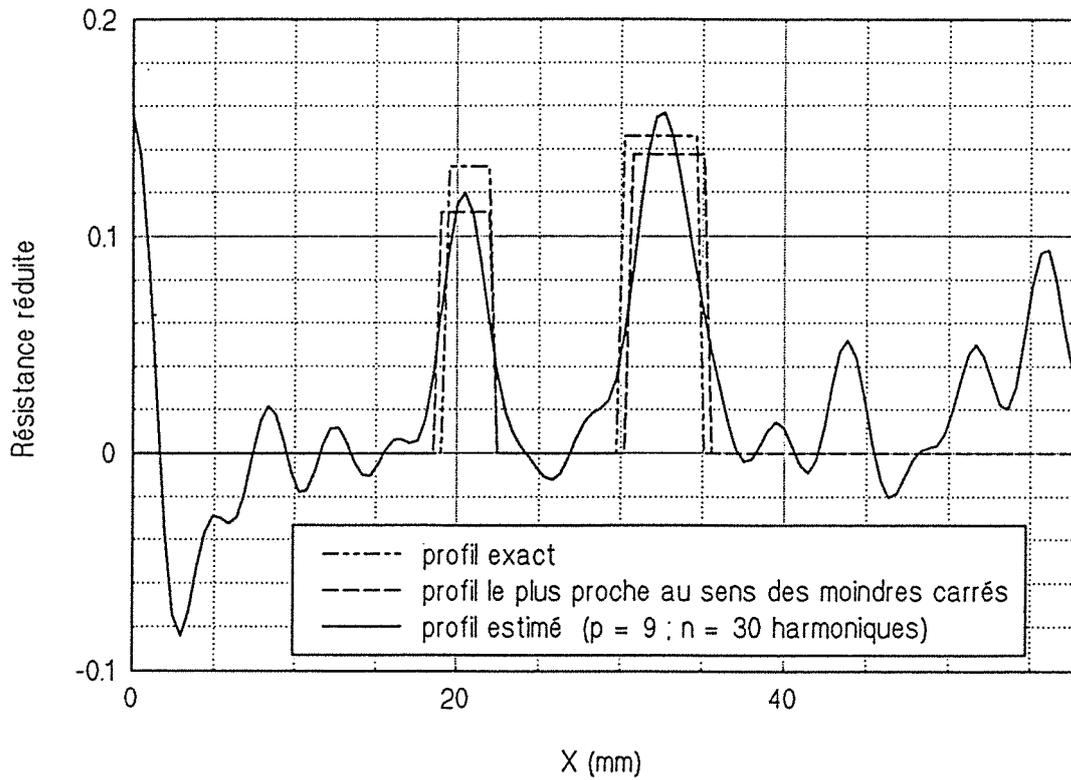


Fig.5.12b Spectres de R(x) identifiée par troncature et du défaut équivalent au sens des moindres carrés

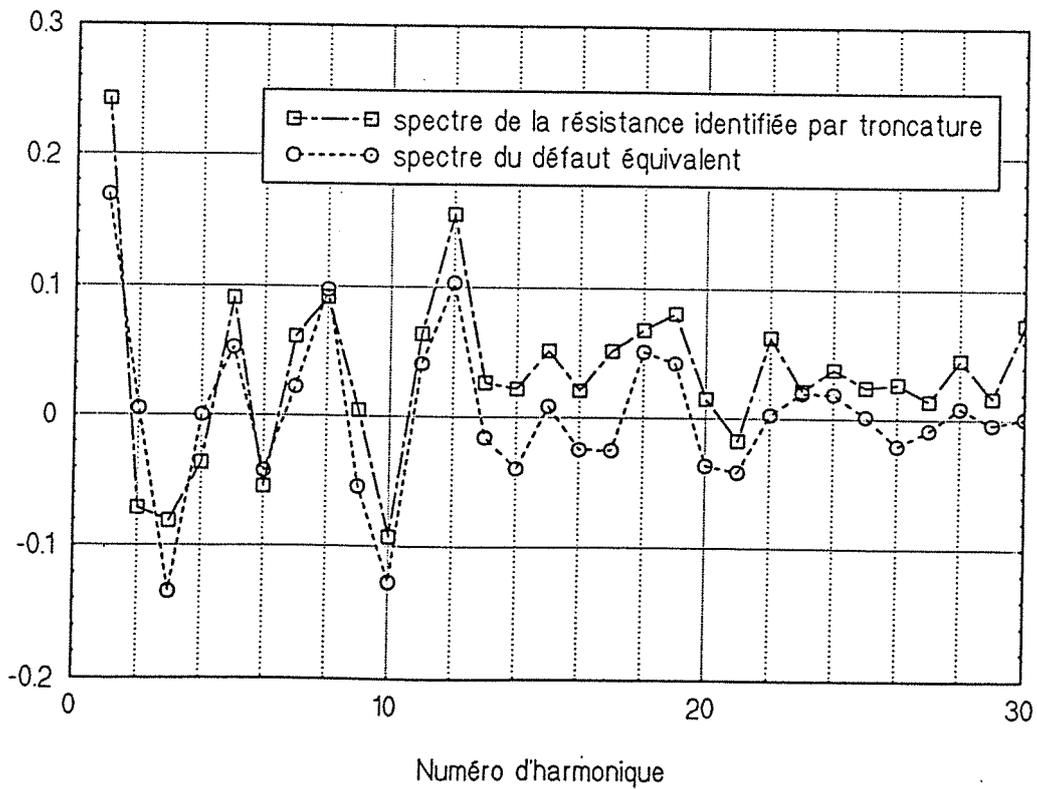
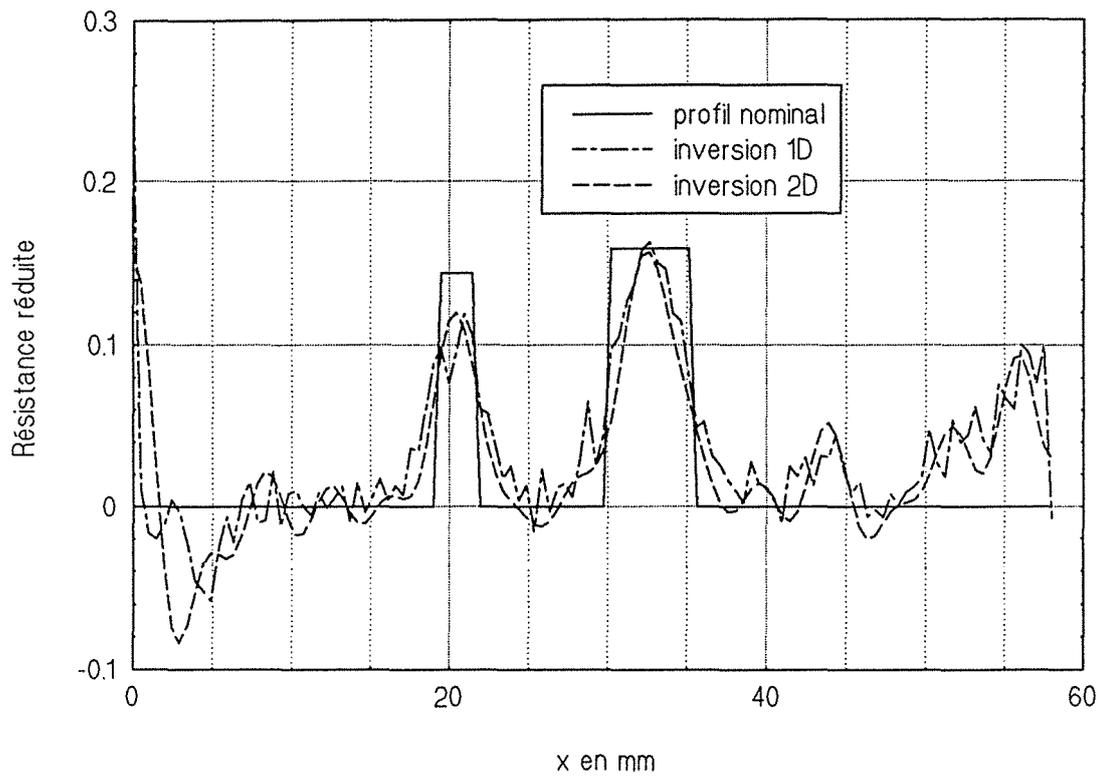


Fig.5.13 Comparaison des inversions 1D et 2D



5.5.1 Estimation sur une autre ligne

Le profil du contraste de Laplace correspondant à la ligne 22 issue de la même expérience, calculé pour la variable réduite $p = 9$, est présenté sur la figure (5.14). Si on le compare avec le profil correspondant à la ligne 30, on voit bien cette fois-ci, contrairement au cas précédent, que les niveaux des maxima locaux à l'aplomb des deux bandes, sont pratiquement identiques. Par ailleurs, on ne voit plus l'anomalie introduite dans le profil par une élévation brusque de la température sur le premier pixel.

Le tracé de la puissance spectrale du profil expérimental (figure (5.15)) montre que le signal utile prédomine jusqu'au 40^{ème} harmonique et non jusqu'au 30^{ème} comme dans le cas précédent. Ce gain de fréquence va améliorer la résolution spatiale du problème inverse et par conséquent une meilleure identification sur les bords. Ceci peut être observé sur le profil de la résistance d'interface de la figure (5.16) obtenu par un fenêtrage carré au 40^{ème} harmonique. La résistance du défaut le moins étendu est plus grande, contrairement à ce qu'on prévoyait. Ceci peut être expliqué par un élargissement local de l'épaisseur de la bande. La troncature du spectre à la 35^{ème} fréquence, ne change pas beaucoup l'allure du profil identifié (figure (5.16)), sauf que le pic du défaut le moins large est encore plus élevé.

5.5.2 Estimation sur une moyenne de plusieurs lignes

Les nouvelles caméras infrarouges CCD équipées d'une mosaïque de détecteurs, permettent d'avoir un rapport signal sur bruit plus élevé que celui obtenu par les caméras à monodétecteur. Afin de simuler un profil livré par ce genre de caméras, nous avons traité cette fois-ci le champ du contraste réduit de Laplace moyenné sur vingt lignes (les lignes 20 à 39) du film thermique.

L'utilisation de cette moyenne va réduire le bruit de mesure d'un facteur 4.5 à peu près. Ceci est observable sur le profil de Laplace présenté sur la figure (5.17). Le tracé de sa puissance spectrale (figure (5.18)) montre que le bruit prédomine à partir de la 60^{ème} fréquence.

Le résultat de l'inversion par la méthode de fenêtrage à cette fréquence est illustré sur la figure (5.19). Cette fois-ci, la prise en compte des hautes fréquences, a permis de s'approcher plus de la vraie morphologie des défauts, avec toutefois des oscillations sur les extrémités de la plaque. La troncature du spectre au 50^{ème} ou au 40^{ème} harmonique permet de réduire ces oscillations, tout en gardant une identification correcte de la résistance d'interface (figures (5.20) et (5.21)).

Le bon résultat d'identification de la morphologie des défauts en prenant les hautes fréquences après réduction du bruit de mesure, prouve que la fonction de transfert de modulation (FTM) de la caméra est parfaite, du moins jusqu'à la 60^{ème} fréquence.

Fig.5.14 Profil expérimental de Laplace sur la ligne 22

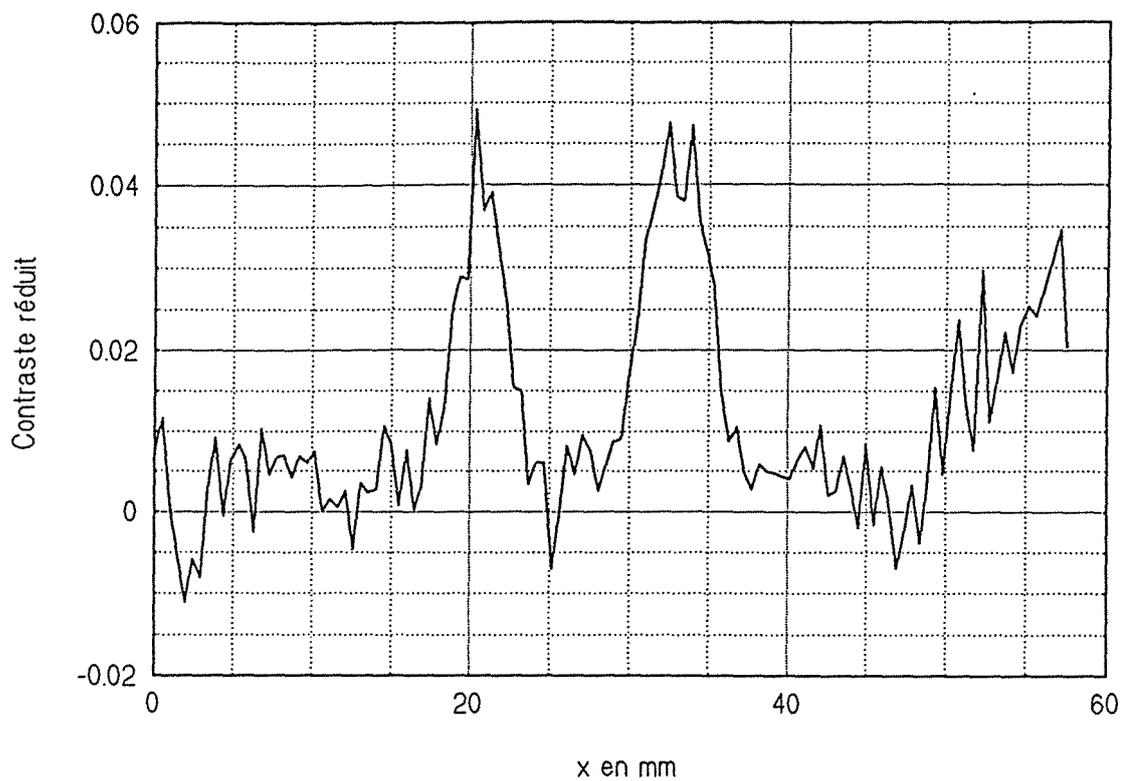


Fig.5.15 Puissance spectrale du contraste de Laplace sur la ligne 22

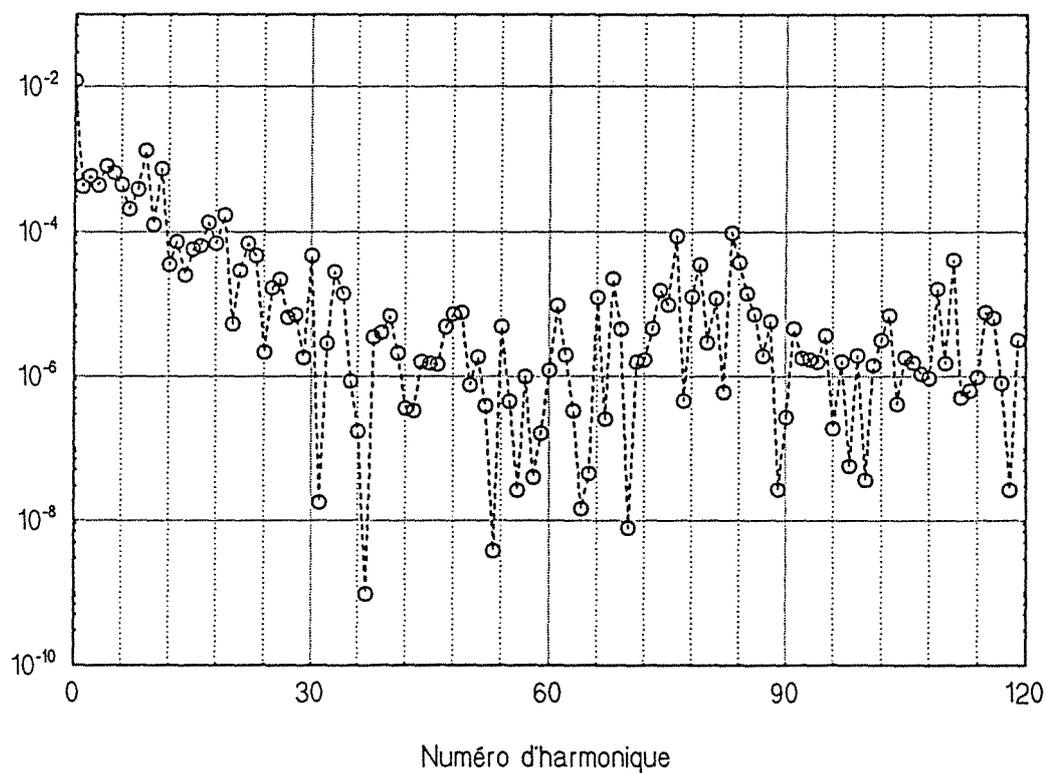


Fig.5.16 Profils estimés de $R(x)$ sur la ligne 22

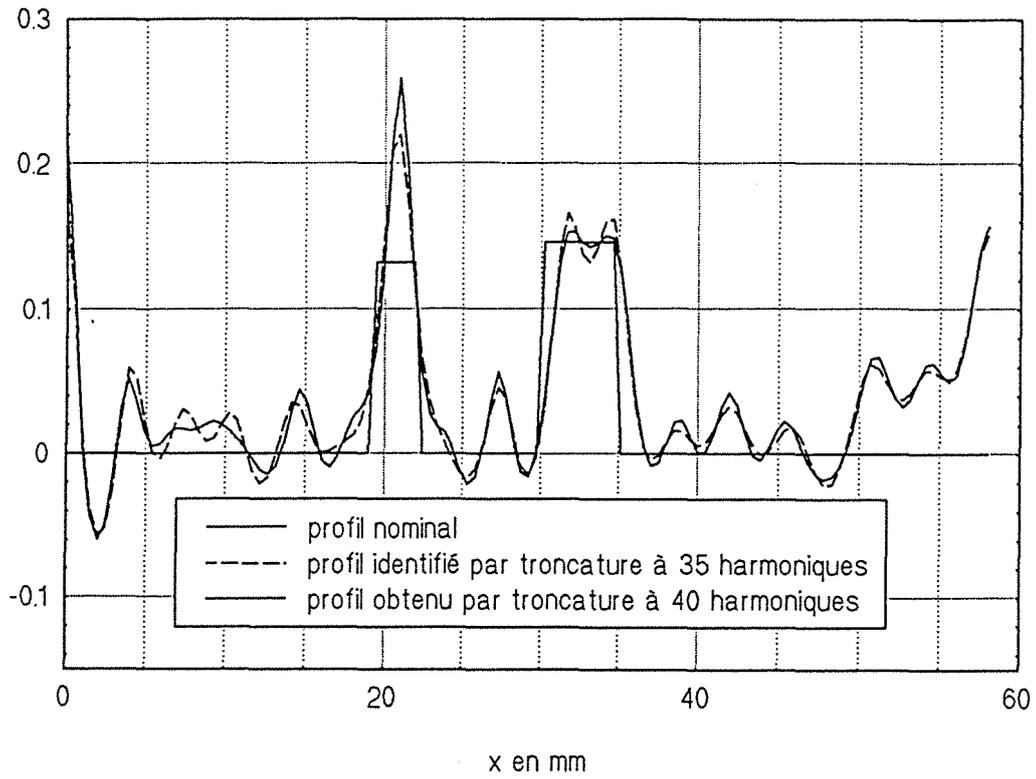


Fig.5.17 Profil en contraste de Laplace moyenné sur 20 lignes

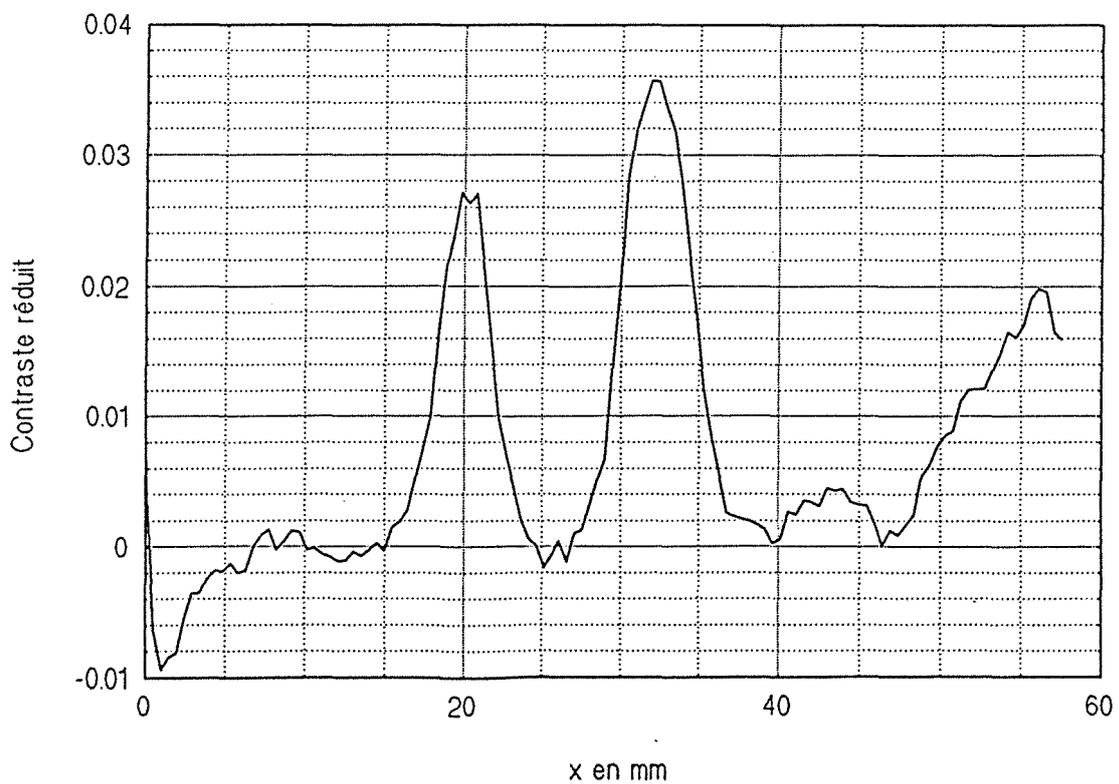


Fig.5.18 Puissance spectrale du contraste de Laplace moyen

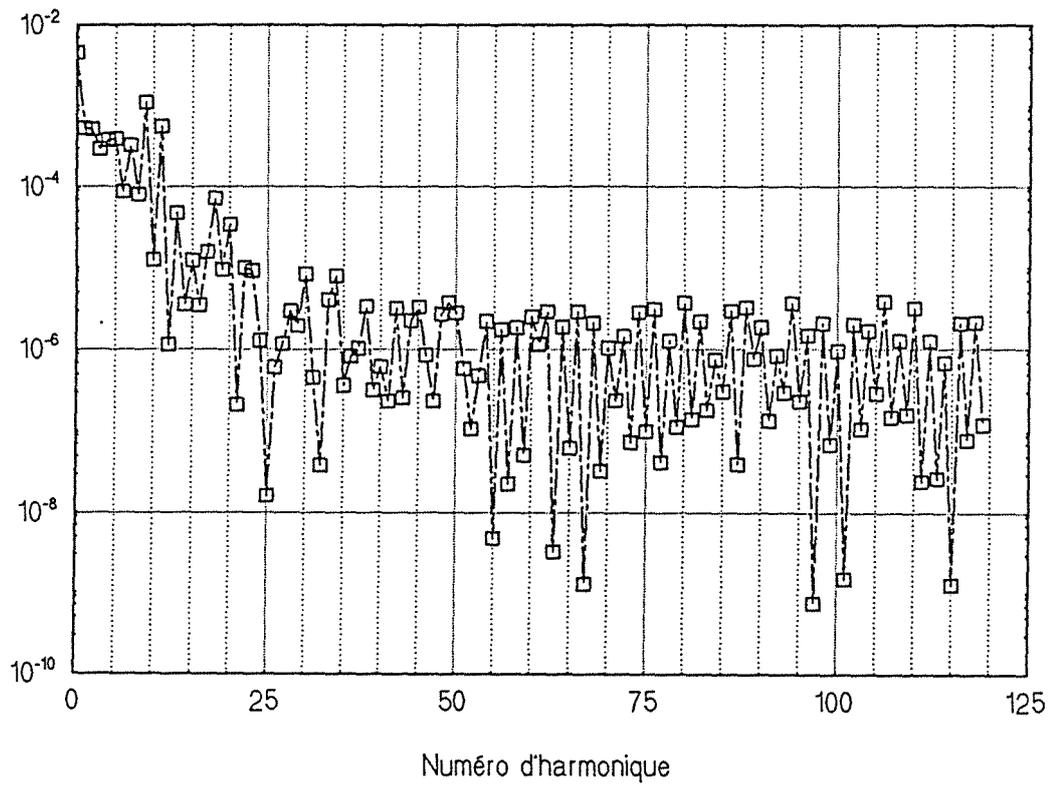


Fig.5.19 Profil expérimental de R(x) obtenu par troncature

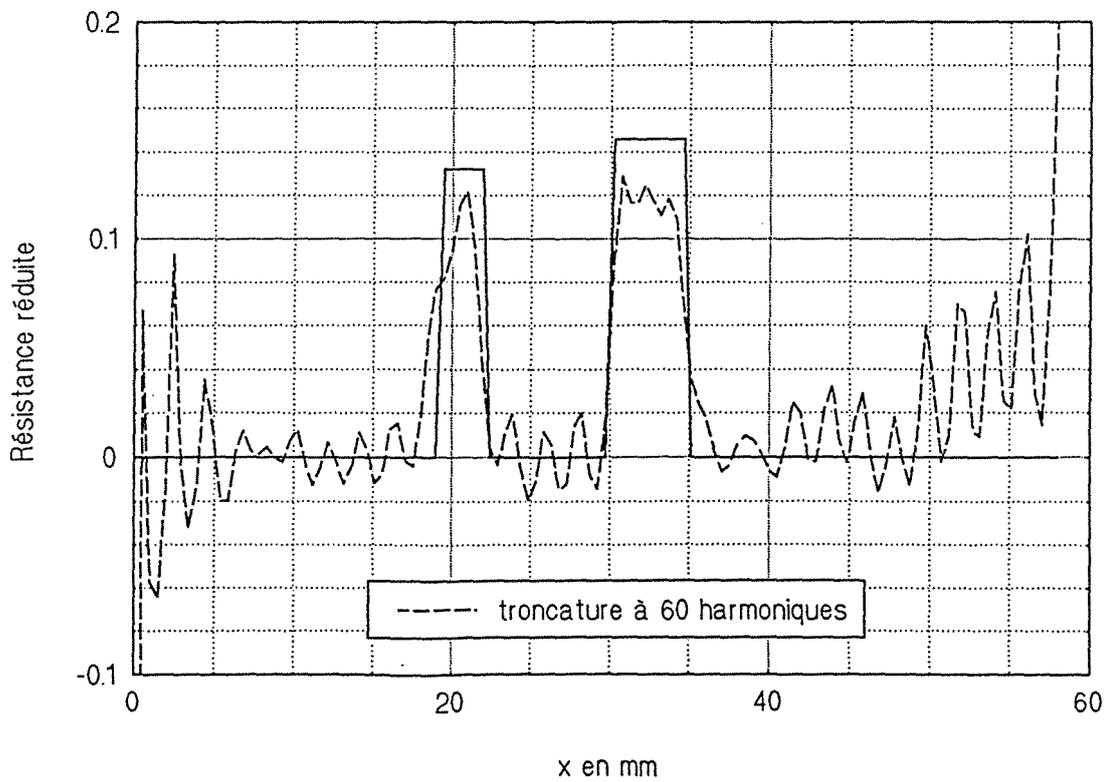


Fig.5.20 Profil expérimental de $R(x)$ obtenu par troncature

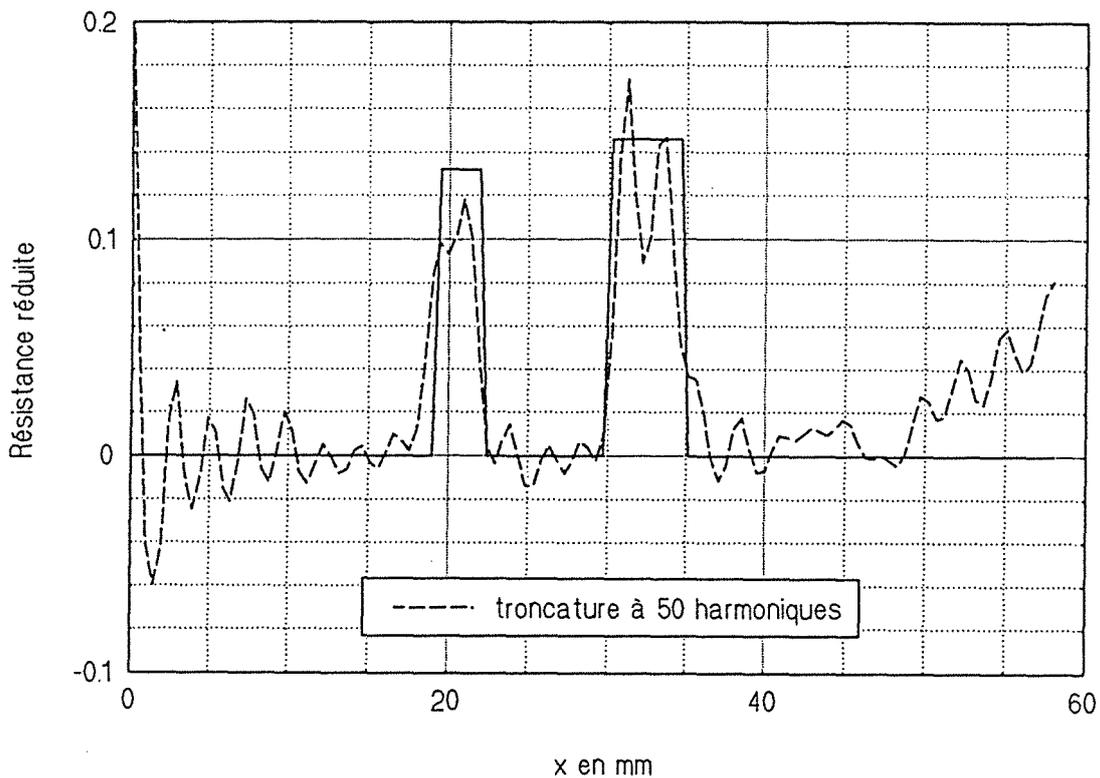
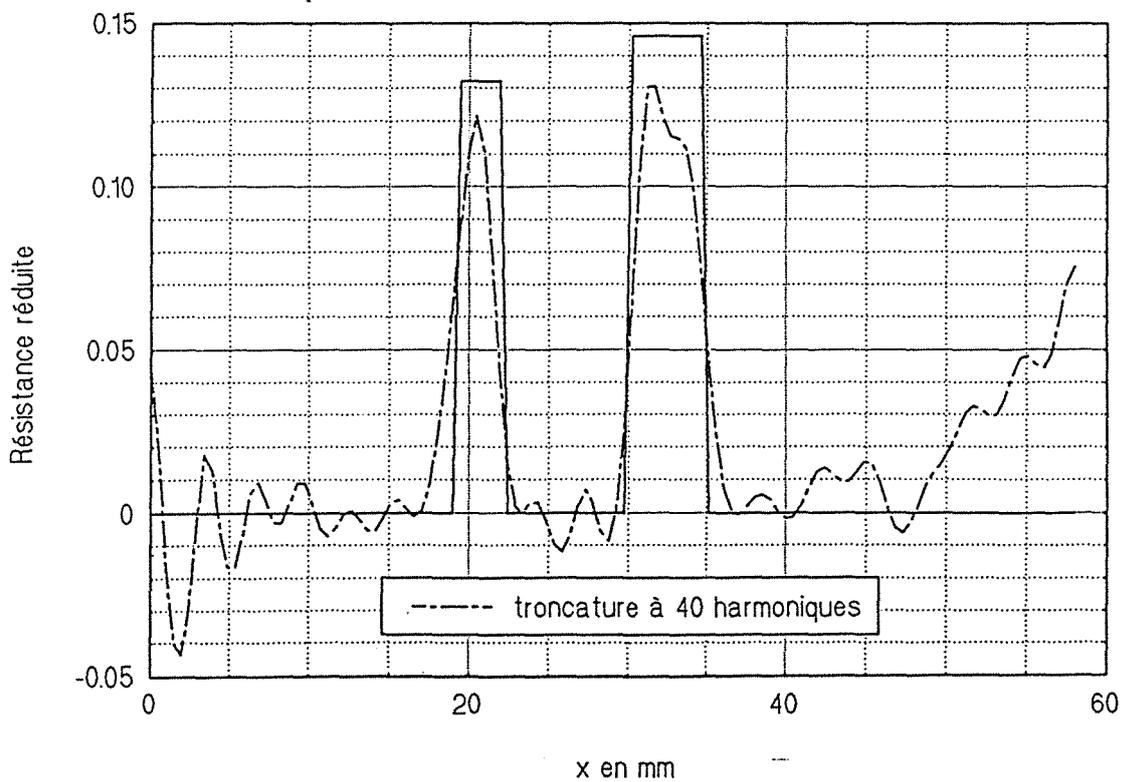


Fig.5.21 Profil expérimental de $R(x)$ obtenu par troncature



5.6 Biais engendré par une irradiation non uniforme

Si on exclue les problèmes des pertes thermiques, on pourrait suspecter une excitation d'énergie non homogène de la face avant d'être la cause de la mauvaise estimation de la résistance d'interface aux extrémités de l'échantillon.

En effet, en pratique, l'uniformité du dépôt d'énergie sur la surface de l'échantillon n'est jamais parfaite. Afin d'analyser cette anomalie de l'appareillage sur les problèmes direct et inverse de la résistance d'interface, nous avons réalisé des simulations pour deux répartitions spatiales différentes de l'énergie déposée par le flash sur la plaque.

Sur la figure (5.22), nous avons schématisé ces deux irradiations et indiqué en croix les pixels de référence sur la face avant de l'échantillon. Pour le premier cas, deux simulations sont développées selon qu'on choisisse l'un ou l'autre des pixels de référence (les pixels 100 et 128). L'échantillonnage de la résistance d'interface $R(x)$ et de l'énergie déposée $Q(x)$ est fait sur 128 pixels.

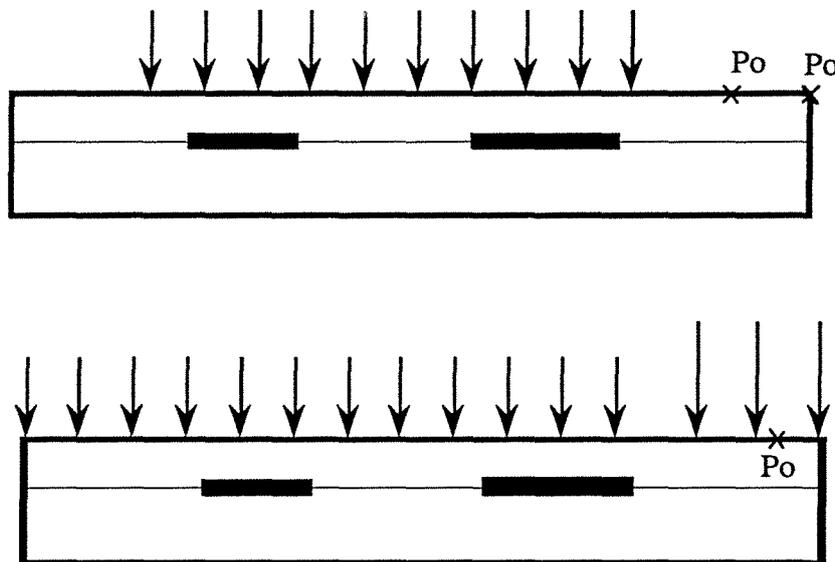


Fig.5.22 Représentation des irradiations non uniformes

L'ancienne formulation du problème grâce aux variables adimensionnelles n'est plus adéquate pour notre cas, car elle suppose implicitement que l'irradiation est homogène. Pour remédier à cela, nous allons résoudre le problème direct en utilisant les variables dimensionnelles et réduire le champ de température après. Celui-ci constituera le signal d'entrée (après un éventuel rajout de bruit) du problème inverse écrit en variables réduites et où le flux exciteur est supposé uniforme.

Dans ce genre de conditions aux limites, les effets bidimensionnels sont énormes, et un mauvais choix de la zone de référence peut être fatal. Dans le cas de l'irradiation non homogène

Fig.5.23 Profils simulés du contraste de Laplace dans le cas d'une excitation partielle symétrique

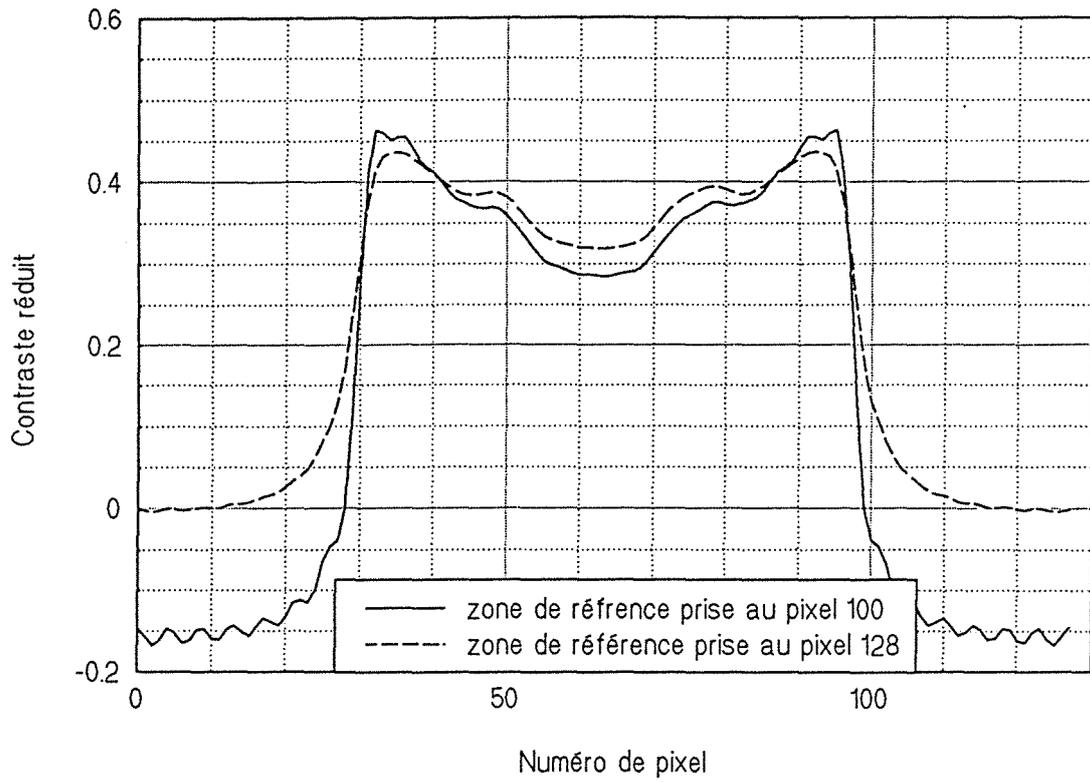


Fig.5.24 Contraste de Laplace dans le cas d'une excitation non uniforme

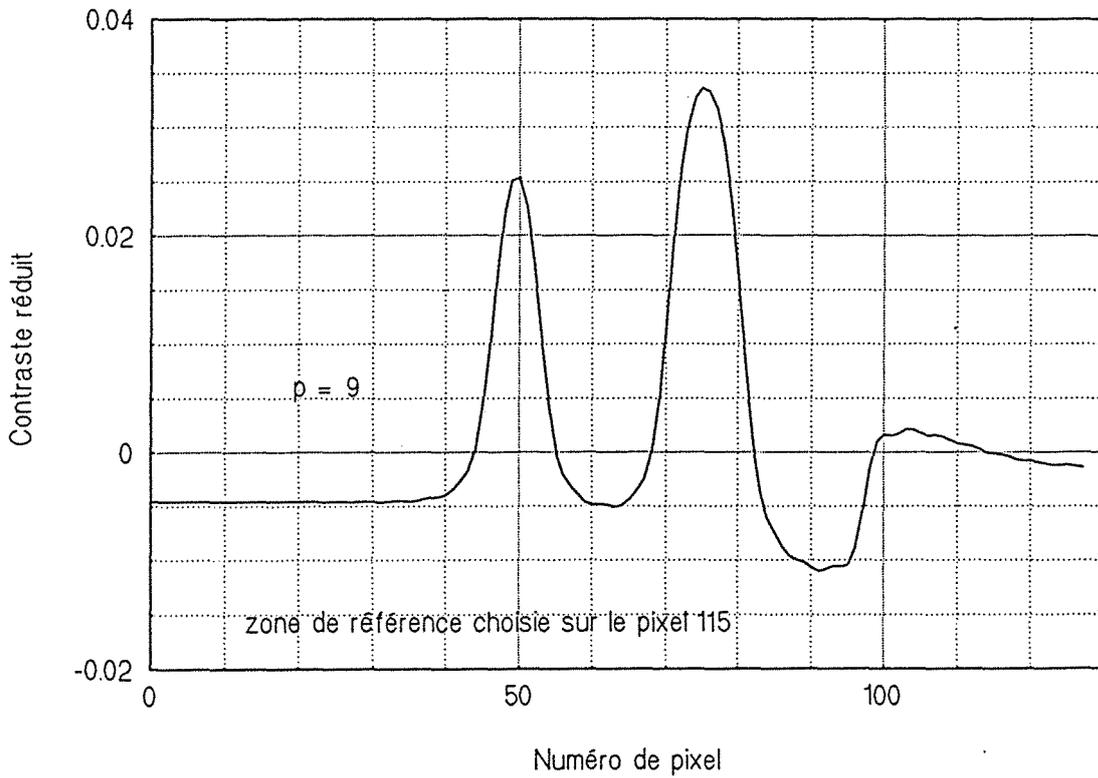


Fig.5.25 Puissance spectrale du contraste de Laplace dans le cas d'une excitation non uniforme

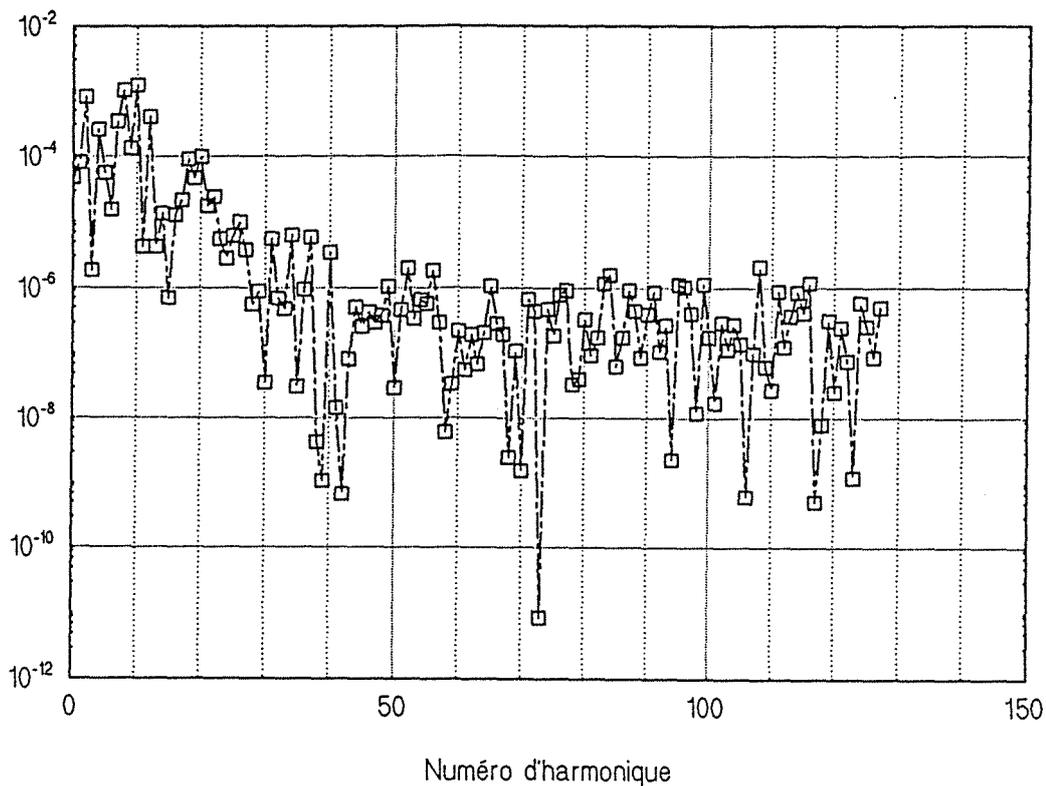
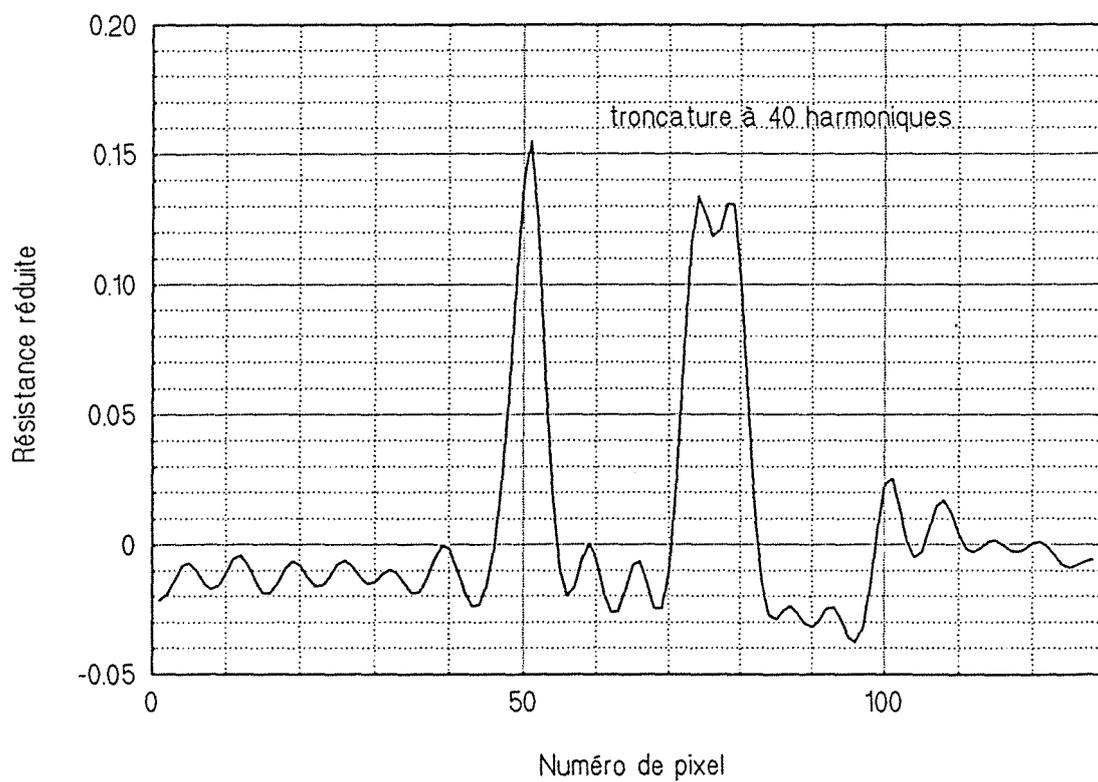


Fig.5.26 Profil de résistance estimé dans le cas d'une excitation non uniforme



symétrique, nous avons testé deux pixels de référence : les pixels 100 et 128. Sur la figure (5.23), nous avons présenté les deux profils non bruités du contraste de Laplace correspondants. On peut constater que le niveau du contraste est 10 fois plus grand que celui qu'on aurait obtenu par une excitation uniforme. On note également que l'effet de la résistance d'interface est complètement noyé dans la conséquence du flux non uniforme. En ce qui concerne le second profil correspondant au pixel 100, on note un décalage de la ligne de base vers les contrastes négatifs.

La même procédure a été appliquée au cas de la répartition non uniforme asymétrique du dépôt d'énergie en prenant comme référence le pixel 115. Le profil du contraste réduit de Laplace non bruité correspondant à cette configuration est illustré sur la figure (5.24). Cette fois-ci, les défauts sont détectés et on constate qu'il y a une grande similitude entre ce profil et les profils expérimentaux traités plus haut. En effet, il présente une partie négative du côté gauche et une autre positive du côté droit, qui décroît ensuite vers l'extrémité de la plaque.

En se basant sur ce résultat, l'inhomogénéité du flux exciteur peut être une explication de la mauvaise inversion sur les bords de l'échantillon.

Au champ de température réduit résultat de la procédure directe, nous avons rajouté un bruit gaussien, d'écart type constant $\sigma = 0.1$, afin de simuler un contraste expérimental. Sur la figure (5.25), la puissance spectrale du profil de Laplace correspondant, montre que le bruit est prédominant au delà du 40^{ème} harmonique.

L'inversion du profil de Laplace en tronquant le spectre à la 40^{ème} fréquence, donne le résultat présenté sur la figure (5.26). Résultat, qui paraît assez correcte malgré les imperfections de " l'expérience ".

5.7 Conclusion

L'application des différentes méthodes d'inversion, aux données expérimentales issues de l'opération de contrôle d'un défaut de collage, a permis de confirmer les résultats obtenus par les simulations théoriques réalisées au chapitre 4. Il faut remarquer que les conditions d'expérience sont très contraignantes vis à vis des méthodes d'inversion car le contraste thermique est faible à cause de l'éclairement et donc très bruité ; de plus la résistance thermique d'interface est petite ; et le milieu isolant ce qui ne facilite pas la normalisation qui doit être faite aux temps courts.

La méthode des défauts équivalents a bien éliminé les oscillations entraînant des valeurs de résistance thermique locales non physiques. La diminution du bruit de mesure par une moyenne spatiale permet de mieux prendre en compte les hautes fréquences (jusqu'à la FTM de la caméra IR) et améliore donc la résolution spatiale.

Conclusion générale

Conclusion générale

C'est sur ces données récapitulatives que nous choisissons de conclure cette étude qui a essentiellement porté sur la modélisation et l'inversion analytiques des problèmes liés à la diffusion de la chaleur au travers de défauts plans dans des structures multicouches.

Etant donné que la résolution d'un problème de caractérisation déflectométrique passe obligatoirement par le problème direct correspondant, nous avons dû tout d'abord modéliser, pour diverses configurations de défauts, l'évolution temporelle du champ de température de surface, lorsque la face avant reçoit une impulsion d'énergie. Le problème inverse est basé sur l'altération occasionnée par l'hétérogénéité subsurfacique au champ de température superficiel. L'étude s'inscrit donc dans l'optique d'une exploitation quantitative des trames thermiques livrées par une caméra IR lors d'une expérience flash. La comparaison de la température relevée sur la plaque défectueuse à celle relevée sur une plaque saine, permet de construire le contraste thermique, qui constitue une signature du défaut interne.

Tout d'abord, nous avons analysé la technique inverse 1D locale, destinée au cas de défauts *constants très étendus*. Cette méthode, développée au laboratoire il y a quelques années, identifie analytiquement et indépendamment la profondeur (en mesure face avant) et la résistance thermique de l'hétérogénéité (en mesure face arrière), non pas dans l'espace réel mais dans un espace transformé. La procédure inverse utilise deux transformées de Laplace du contraste thermique expérimental, calculées pour deux valeurs distinctes du paramètre de Laplace p . Cette opération réduit tout le film thermique à deux images seulement, nettement moins bruitées que les trames initiales d'où une détection meilleure des défauts.

Par une étude statistique de l'erreur d'estimation provenant du bruit de mesure sur les paramètres identifiés, nous avons pu minimiser l'influence de celui-ci sur la caractérisation déflectométrique en agissant sur la valeur choisie pour l'inversion du paramètre de Laplace p . Par ailleurs, nous avons également constaté qu'un mauvais choix de la zone de référence ou du modèle approprié à la nature du défaut, peut introduire un biais sur l'estimation. Dans le cas d'un

multidélaminage par exemple, elle ne peut donner qu'une estimation globale des paramètres caractéristiques d'un défaut unique "équivalent".

La technique d'inversion 1D a été éprouvée expérimentalement sur un laminé de verre-époxy ayant subi un impact. L'application d'une succession de traitements aux images thermographiques, a permis d'extraire les paramètres équivalents du multidélaminage produit par le choc.

Bien que l'approximation 1D permette un chiffrage rapide et global, elle présente l'inconvénient de n'être applicable qu'à des défauts de taille illimitée. Notre préoccupation majeure était alors d'appréhender les phénomènes multi-directionnels dans les multicouches défectueux.

Dans une première étape, nous avons étudié le problème direct qui consiste à décrire le transfert thermique au travers de défauts de *taille limitée et à résistance thermique constante*. L'identification d'un défaut présentant une résistance thermique variable a été traitée dans le chapitre 4. Bien que cette géométrie soit relativement simple, le comportement instationnaire d'une telle structure n'a été décrit jusqu'à présent que par des méthodes numériques. Celles-ci nécessitent un maillage très fin dans certaines régions et par conséquent sont très coûteuses en temps de calcul. On s'est orienté alors vers une solution analytique. L'utilisation des transformations intégrales et du formalisme du quadripôle thermique multidimensionnel, a permis de construire un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les composantes du vecteur spectre de la densité du flux de Laplace à l'interface. La résolution numérique du système permet de remonter explicitement aux champs de température superficiels. Malheureusement, cette méthode risque d'être très lourde, notamment en géométrie 3D, où un nombre important des composantes spectrales du flux est nécessaire pour atteindre la convergence.

Nous avons alors cherché à diminuer le temps de calcul par une solution approchée basée sur la méthode des perturbations. Le principe de cette méthode est d'écrire la solution du problème sous la forme d'une série entière par rapport à un petit paramètre du modèle. Deux cas ont été successivement étudiés : celui des faibles résistances (le petit paramètre est alors la résistance) et celui des grandes résistances (le petit paramètre est alors la conductance). Lorsque le paramètre de perturbation est très petit, les premiers termes de la série entière suffisent à la convergence. Dans le cas inverse, beaucoup de termes sont nécessaires, et la méthode des perturbations devient aussi lente que les méthodes numériques classiques. L'utilisation des approximants de Padé a permis de limiter le calcul de la série aux premiers termes et d'augmenter le champ de validité de cette approche.

Les résultats comparatifs entre la réponse exacte et la réponse perturbée montrent l'efficacité et la rapidité de cette nouvelle technique. En effet, un profil perturbé à l'ordre 1 de 128 pixels est calculé en moins de 0.13 s en temps CPU ; au lieu de 20 s par le modèle exact. Le traitement par approximant de Padé n'excède pas 0.15 s. Outre le gain considérable en temps de

calcul, la simplicité des solutions analytiques obtenues constituera dans l'avenir un bon point de départ pour le développement de procédures inverses explicites ou des programmes d'optimisation pour ce genre de géométrie. En effet, l'étude consacrée aux défauts de taille limitée a été essentiellement menée pour la résolution du problème direct de différentes manières. L'étude du problème inverse dans sa forme la plus générale est loin d'être exhaustive, notamment quand les défauts sont superposés.

Nous avons donné un exemple du problème inverse de la détermination de la profondeur d'un défaut puis de son aire (l'inversion de l'aire du défaut dépend de la profondeur estimée). On observe clairement l'intérêt de la méthode des perturbations car la solution du problème est immédiate. Pour valider cette approche, un échantillon de carbone-époxy contenant un insert carré de Téflon à mi-profondeur est expérimenté. La dimension du côté de l'insert a été déterminée à 10 % près en utilisant le paramètre p de Laplace qui donne la meilleure estimation. L'influence de ce paramètre et le choix de la zone de référence vis à vis du bruit de mesure, de la proximité des défauts et des bords sont mis en évidence afin de minimiser l'erreur d'estimation.

Finalement, toujours grâce aux transformations intégrales et le formalisme du quadripôle thermique, nous avons pu décrire la conduction de la chaleur dans un milieu limité présentant un défaut de *résistance variable*. La seule hypothèse du modèle est la planéité du défaut. La modélisation directe, dans le cadre d'une géométrie 2D, a été suivie d'une élaboration d'une procédure inverse qui identifie analytiquement la fonction $R(x)$ décrivant la variation de la résistance thermique. Le problème inverse est nettement plus ardu que les précédents à cause de son caractère mal-posé qui se traduit par l'instabilité de la solution vis à vis des faibles variations des données initiales. Pour éviter une solution instable, le filtrage de Wiener ou la méthode du fenêtrage carré qui agissent sur la partie haute fréquence du spectre du contraste de Laplace se sont avérés très efficaces.

Ces deux techniques ont été complétées par la méthode des défauts constants équivalents : Il s'agit d'une identification qui passe par la minimisation des écarts aux moindres carrés entre les paramètres caractéristiques du spectre de la résistance identifiée initialement par le filtrage de Wiener ou la méthode de troncature et leurs homologues théoriques. Ces derniers sont calculés à partir du spectre analytique exact de la résistance d'interface constante par morceaux. Les oscillations parasites observées dans les autres méthodes, et qui entraînent des valeurs négatives de la résistance thermique sont bien éliminées par cette méthode. Au plan industriel, la technique peut être très intéressante, vu qu'elle fournit une information simplifiée et globale de l'état de la pièce à contrôler, comparable aux seuils de tolérance souvent utilisés en milieu industriel.

Il faut noter que le programme inverse déterminant la résistance d'interface dépend de la profondeur de celle-ci. Dans le cas d'un défaut de collage, la profondeur du défaut est égale à l'épaisseur de la première plaque. Mais dans le cas général (délaminage dans un composite par exemple), il faudra tout d'abord identifier la profondeur et injecter par la suite sa valeur dans

l'algorithme inverse de la résistance. L'impact qu'aurait une erreur d'estimation de la profondeur sur la résistance $R(x)$ a été étudié par une simulation numérique sans bruit de défauts dur et doux. Nous avons constaté qu'une erreur de 20 % sur la profondeur induit dans les deux cas de figure une erreur d'estimation de 20 à 30 % sur la résistance d'interface, erreur qui reste acceptable en CND.

La validation expérimentale des différentes méthodes (déjà validées par une simulation numérique bruitée) pour la détermination d'une résistance non uniforme, est réalisée sur un défaut de collage dans un substrat PVC. La résistance d'interface créée est du type dur et génère donc un nombre d'harmoniques élevé dans la réponse thermique. Il faut remarquer que les conditions d'expérience sont difficiles à cause essentiellement d'un rapport signal sur bruit non favorable, de la faiblesse de la résistance thermique et du milieu isolant ce qui oblige une normalisation aux temps courts où l'effet des pertes thermiques est encore infime.

Comme prévu, la perte d'information aux hautes fréquences a induit une mauvaise résolution spatiale de la solution obtenue par filtrage de Wiener ou par troncature du spectre. Toutefois, le résultat dans les deux cas reste globalement concluant, malgré l'apparition de résistances locales non physiques.

L'application de la méthode des défauts équivalents a bien éliminé les structures parasites observées sur les résultats initiaux et a donné un profil très proche de la morphologie exacte du défaut. Le point de départ de la procédure d'optimisation est crucial pour la convergence. La méthodologie décrite dans le mémoire pour le choix des paramètres initiaux a été très efficace dans tous les cas testés (simulation et expérience) et la convergence rapide (100 à 150 secondes de temps CPU). Il est intéressant ici de constater que la combinaison de la méthode des défauts équivalents à celle de l'inversion 1D locale peut tout à fait être performante en première approximation et doit représenter un très bon compromis précision / temps de calcul.

Les profils obtenus par la méthode 1D et par troncature sont très proches et les avantages de la modélisation 2D ne sont pas perceptibles, comme c'était le cas en simulation. Ceci est sans doute dû à l'énorme quantité de bruit de mesure qui dégrade la résolution spatiale de la solution. La diminution du bruit par une moyenne spatiale permet de mieux prendre en compte les hautes fréquences et améliore l'inversion sur les bords des défauts.

Relativement à des impératifs de rendement, le temps de calcul est très important dans le milieu industriel. Si l'on ne tient pas compte de l'étape intermédiaire qui consiste en un prétraitement des données expérimentales (détermination de la fréquence de troncature ou du filtre de Wiener), la durée du programme inverse 2D n'excède 0.5 seconde en temps CPU pour un profil de 128 pixels. Il n'est nul doute qu'une automatisation de la procédure de filtrage des données initiales rendra cette technique encore plus rapide et plus facile à mettre en oeuvre dans l'industrie. Outre sa

rapidité et sa précision, cette méthode offre la possibilité d'être appliquée in-situ et notamment quand l'accès est difficile ou limité à un seul côté de la pièce à contrôler (procédé en face avant).

La procédure constitue donc un outil assez performant pour le CND des composites, des interfaces de collage ou encore le suivi de la qualité d'une soudure de pièces métalliques. Cette dernière application nécessite, à cause de la rapidité du transfert, des caméras IR à haute fréquence. Ceci est envisageable dans les quelques années à venir grâce à la nouvelle technologie des caméras matricielles.

Notons que la modélisation directe de la conduction thermique dans les milieux présentant des hétérogénéités, a été analysée pour des interfaces superposées ou non dans toutes les configurations géométriques décrites aussi compliquées soient elles. A l'inverse, les procédures de reconstruction déflectométrique précitées, ne traitent que le cas d'un défaut unique. Il serait souhaitable de les étendre à plusieurs interfaces superposées. Dans le cas de défauts de collage, le problème semble être relativement simple à traiter, dans la mesure où l'information relative aux profondeurs des interfaces est préalablement connue.

L'approche tomographique, pour la caractérisation de défauts non uniformes décrite au cours de ce travail, pourrait être étendue au cas tridimensionnel (résistance thermique $R(x,y)$) en procédant de la même manière. Les vecteurs température et flux de Laplace-Fourier θ et ϕ deviennent des matrices et les quadripôles thermiques d'ordre 2 deviennent des tenseurs d'ordre 4. La difficulté réside bien sûr dans l'écriture du produit de convolution à cause du couplage des modes des deux matrices.

Pour ce faire, la méthode des perturbations jointe à l'hypothèse de séparabilité du spectre double, pourrait donner une première approximation de la solution inverse. Celle-ci pourra être affinée par la suite par des méthodes numériques ou analytiques. La validité de cette nouvelle approche a été déjà montrée par une simulation numérique directe du comportement thermique instationnaire de deux défauts 3D superposés en croix dans le chapitre 3.

Annexes

Annexe 2.1

Inversion numérique de la transformée de Laplace

La méthode utilisée est due à Favert Stehfest (1970). Si on connaît l'expression analytique $F(p)$ de la transformée de Laplace d'une fonction inconnue $f(t)$, il est possible de remonter à la valeur de cette dernière à tout instant t par la relation :

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{i=1}^{10} v_i F\left(\frac{i \ln(2)}{t}\right)$$

où les v_i sont des coefficients connus ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} v_1 = \frac{1}{12} & v_6 = -\frac{473915}{2} \\ v_2 = -\frac{385}{12} & v_7 = \frac{1127735}{3} \\ v_3 = 1279 & v_8 = -\frac{1020215}{3} \\ v_4 = -\frac{46871}{3} & v_9 = \frac{328125}{2} \\ v_5 = \frac{505465}{6} & v_{10} = -\frac{65625}{2} \end{array}$$

L'algorithme de Stehfest n'est pas universel, notamment dans le cas de fonctions périodiques. Il est très utile uniquement dans le cas de fonctions monotones.

La méthode d'inversion a été testée sur des fonctions dont la transformée de Laplace est connue et comparée à d'autres méthodes d'inversion numérique par Davies et Martin (1979). Dans tous les cas, l'écart relatif maximum est resté inférieur à 10^{-5} .

Annexe 2.2

Calcul des réponses thermiques d'un composite stratifié multidé laminé à une excitation flash

Le milieu composite défectueux considéré est modélisé par le schéma suivant :

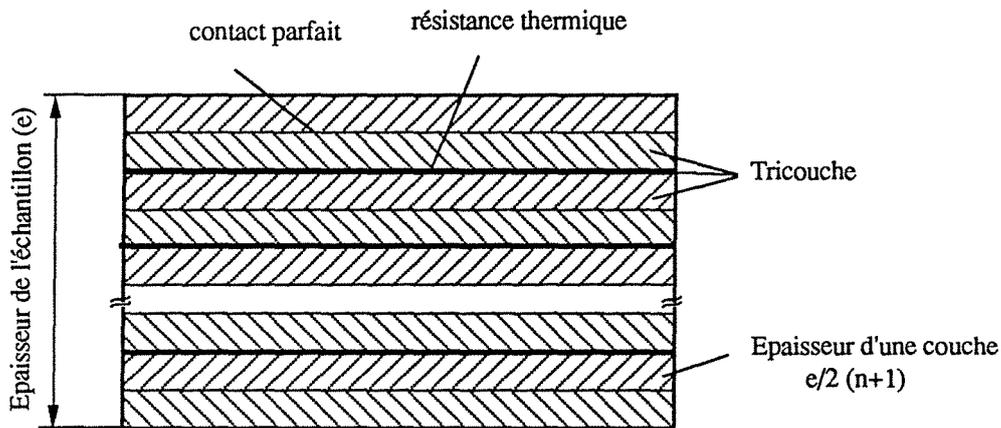


Schéma d'un multicouche contenant n résistances de contact

Soient t_f et t_r les transformées de Laplace de la température respectivement sur les faces avant et arrière, et soit Q la densité d'énergie absorbée sur la face avant.

Pour le système présenté ci-dessus, le transfert thermique est décrit par la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} t_f \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & A_o \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec : $\begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & A_o \end{bmatrix}$ le quadripôle du tricouche élémentaire calculé par :

$$\begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & A_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad (2)$$

et où :

$$A = \cosh \left[\sqrt{p} \frac{e^2}{a} \frac{1}{2(n+1)} \right] \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \sinh \left[\sqrt{p} \frac{e^2}{a} \frac{1}{2(n+1)} \right] \quad (4)$$

$$C = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \sinh \left[\sqrt{p} \frac{e^2}{a} \frac{1}{2(n+1)} \right] \quad (5)$$

$$R_c = \frac{e}{\lambda n} \quad (6)$$

Les matrices associées au tricouche élémentaire et à l'empilement complet de n tricouches étant symétriques, on utilise la propriété suivante :

$$\begin{bmatrix} \cosh(X) & Y \sinh(X) \\ \frac{\sinh(X)}{Y} & \cosh(X) \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cosh(n X) & Y \sinh(n X) \\ \frac{\sinh(n X)}{Y} & \cosh(n X) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Si on note :

$$\begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & A_o \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

on a :

$$A_n = \cosh \left[n \ln(A_o + \sqrt{A_o^2 - 1}) \right] \quad (9)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{B_o}{C_o}} \sinh \left[n \ln(A_o + \sqrt{A_o^2 - 1}) \right] \quad (10)$$

$$C_n = \sqrt{\frac{C_o}{B_o}} \sinh \left[n \ln(A_o + \sqrt{A_o^2 - 1}) \right] \quad (11)$$

Si l'on note $\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$ le quadripôle équivalent pour tout le système, on a :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad (12)$$

Les champs de température recherchés dans l'espace de Laplace sont alors donnés par :

$$\tau_r = \frac{Q}{c} \quad (13)$$

$$\tau_f = Q \frac{\mathcal{A}}{c} \quad (14)$$

Annexe 3.1

Inversion numérique de la série de Fourier en cosinus

L'expression (3.23) de la température dans l'espace de Laplace en chaque point du milieu, est une somme de séries de Fourier simples et double en cosinus.

Une série en cosinus s'écrit sous la forme :

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{N-1} \theta_j \cos\left(\frac{j k \pi}{N}\right) \quad (1)$$

où $\theta_j, j = 0 ; \dots ; N-1$ est le vecteur de données.

Le calcul normal de cette somme est très lourd surtout si N est grand.

Une relation entre la série (1) et la transformation de Fourier discrète serait très souhaitable, afin d'utiliser l'algorithme de la FFT pour le calcul de la série en cosinus.

A première vue, la série (1) apparaît comme étant la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (TFD). Mais, l'argument du cosinus diffère d'un facteur de deux par rapport à celui de la TFD.

Afin d'atteindre notre but, on se propose de doubler le nombre de valeurs d'entrée θ_j de telle manière à obtenir un vecteur symétrique par rapport à $j = N$, avec $\theta_N = 0$, [Press et al (1992), Cooley et Tukey (1965)] :

$$\theta_{2N-j} = \theta_j \text{ pour } j = 0 ; \dots ; N-1 \quad (2)$$

L'application de la FFT à cette nouvelle fonction, va se réduire à la transformation en cosinus par symétrie :

$$\tau_k = \sum_{j=0}^{2N-1} \theta_j \exp\left(\frac{2ij k \pi}{2N}\right) \quad (3)$$

tel que $i^2 = -1$.

La seconde moitié de cette somme allant de $j = N$ à $j = 2N-1$, peut être écrite en faisant le changement de variable suivant $j' = 2N-j$, sous la forme :

$$\sum_{j=N}^{2N-1} \theta_j \exp\left(\frac{2ij k \pi}{2N}\right) = \sum_{j'=1}^N \theta_{2N-j'} \exp\left(\frac{2i(2N-j') k \pi}{2N}\right) = \sum_{j'=1}^N \theta_{j'} \exp\left(\frac{-2ij' k \pi}{2N}\right) \quad (4)$$

ou encore :

$$\sum_{j=N}^{2N-1} \theta_j \exp\left(\frac{2ij k \pi}{2N}\right) = \sum_{j'=0}^{N-1} \theta_{j'} \exp\left(\frac{-2ij' k \pi}{2N}\right) - \theta_0 \quad (5)$$

La substitution de l'expression (5) dans (3), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \tau_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \theta_j \left(\exp\left(\frac{2ij k \pi}{2N}\right) + \exp\left(\frac{-2ij k \pi}{2N}\right) \right) - \theta_0 \\ &= 2 \sum_{j=0}^{N-1} \theta_j \cos\left(\frac{j k \pi}{N}\right) - \theta_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ainsi apparaît la série de Fourier en cosinus du vecteur de données en fonction de la TFD du vecteur double construit :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \theta_j \cos\left(\frac{j k \pi}{N}\right) = \frac{1}{2} (\theta_0 + \tau_k) \quad (7)$$

Annexe 4.1

Condition de passage au niveau d'une interface de résistance thermique non uniforme

La condition à l'interface en géométrie bidimensionnelle s'écrit dans l'espace réel (x, t) sous la forme :

$$T^{sup}(x, t) - T^{inf}(x, t) = R(x) \varphi_d(x, t) \quad (1)$$

où les exposants "sup" et "inf", correspondent respectivement aux faces supérieure et inférieure de l'interface ;

φ_d étant la densité de flux de chaleur à la profondeur de l'interface $e_1 = z_d$.

Si l'on applique la transformation double de Laplace et de Fourier en cosinus à l'équation (1), on obtient :

$$\theta^{sup}(\alpha_i, p) - \theta^{inf}(\alpha_i, p) = \int_0^{\ell} R(x) \psi_d(x, p) \cos(\alpha_i x) dx \quad (2)$$

avec $\psi_d(x, p)$ la densité de flux de Laplace à l'interface :

$$\psi_d(x, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p t) \varphi_d(x, t) dt \quad (3)$$

et $\alpha_i = \frac{i \pi}{\ell}$ où i est un entier naturel

D'autre part, grâce à la transformation inverse en cosinus, les fonctions $R(x)$ et $\psi_d(x)$ peuvent être exprimées à partir de leurs spectres respectifs ρ et ϕ grâce à la transformation inverse de Fourier en cosinus :

$$R(x) = \frac{1}{\ell} \rho_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\alpha_k x) \quad (4)$$

$$\text{avec : } \rho_k = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} R(x) \cos(\alpha_k x) dx \quad (5)$$

$$\text{et } \psi_d(x) = \frac{1}{\ell} \phi_0 + \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \cos(\alpha_m x) \quad (6)$$

$$\phi_m = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \psi_d(x) \cos(\alpha_m x) dx \quad (7)$$

La substitution des fonctions $R(x)$ et $\psi_d(x)$ dans le terme de droite de l'équation (2) donne :

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} \left[\rho_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\alpha_k x) \right] \left[\phi_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \cos(\alpha_m x) \right] \cos(\alpha_i x) dx \quad (8)$$

$$\text{avec } \theta_i^{sup} = \theta^{sup}(\alpha_i) \quad \theta_i^{inf} = \theta^{inf}(\alpha_i)$$

ou encore :

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = \frac{1}{\ell^2} \left(\rho_0 \phi_0 I_1 + 2 \rho_0 \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m I_2 + 2 \phi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k I_3 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_k \phi_m I_4 \right) \quad (9)$$

avec :

$$I_1 = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_i x) dx$$

$$I_2 = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_i x) dx$$

$$I_3 = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_k x) \cos(\alpha_i x) dx$$

$$I_4 = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_k x) \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_i x) dx$$

• Calcul de l'intégrale I_1

$$* \text{ Si } i = 0 \quad I_1(i) = \ell$$

$$* \text{ Si } i \neq 0 \quad I_1(i) = 0$$

(10)

• Calcul des intégrales I_2 et I_3

* Si $i = 0$

$$I_2(i, m) = I_3(i, k) = 0 \quad (11)$$

* Si $i \neq 0$

$$\begin{aligned} I_2(i, m) &= \frac{\ell}{2} \text{ si } i = m & I_3(k, i) &= \frac{\ell}{2} \text{ si } i = k \\ I_2(i, m) &= 0 \text{ si } i \neq m & I_3(k, i) &= 0 \text{ si } i \neq k \end{aligned} \quad (12)$$

• Calcul de l'intégrale I_4

* Si $i = 0$

$$\begin{aligned} I_4(i, k, m) &= \frac{\ell}{2} \text{ si } k = m \\ I_4(i, k, m) &= 0 \text{ si } k \neq m \end{aligned} \quad (13)$$

Dans ce cas la série double de l'équation (9) se transforme en une série simple, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_k \phi_m I_4(i, m, k) = \frac{\ell}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \phi_k \quad (14)$$

* Si $i \neq 0$

L'intégrale I_4 peut s'écrire sous la forme d'une somme de sinus :

$$I_4 = \frac{1}{4} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \quad (15)$$

Avec :

$$S_1 = \frac{\sin(\alpha_k + \alpha_m + \alpha_i) \ell}{\alpha_k + \alpha_m + \alpha_i} ; \quad S_2 = \frac{\sin(\alpha_k + \alpha_m - \alpha_i) \ell}{\alpha_k + \alpha_m - \alpha_i} ;$$

$$S_3 = \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_m + \alpha_i) \ell}{\alpha_k - \alpha_m + \alpha_i} ; \quad S_4 = \frac{\sin(\alpha_k - \alpha_m - \alpha_i) \ell}{\alpha_k - \alpha_m - \alpha_i} .$$

- Le terme S_1 est forcément nul car la somme $k+m+i$ est différente de zéro.
- $S_2 \neq 0$ sauf si $k+m-i = 0$ ou encore $m = i-k$ d'où $S_2 = \ell$ avec $k < i$.
- $S_3 \neq 0$ sauf si $k-m+i = 0$ ou encore $m = i+k$ d'où $S_3 = \ell$.
- $S_4 \neq 0$ sauf si $k-m-i = 0$ ou encore $m = k-i$ d'où $S_4 = \ell$ avec $k > i$.

Le résultat final s'écrit alors sous la forme :

* Si $i = 0$

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = \frac{1}{\ell} (\rho_0 \phi_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \phi_k) \quad (16)$$

* Si $i \neq 0$

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = \frac{1}{\ell} \left\{ \rho_0 \phi_i + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{|i-k|} (1 - \delta_{ik}) + \delta_{ki} \phi_0 + \phi_{i+k}] \rho_k \right\} \quad (17)$$

avec δ_{ki} : le symbole de Kronecker.

ou encore, en gardant m au lieu de k :

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = \frac{1}{\ell} \left\{ \rho_i \phi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [\rho_{|i-m|} (1 - \delta_{mi}) + \delta_{mi} \rho_0 + \rho_{i+m}] \phi_m \right\} \quad (18)$$

On montrera par la suite que le résultat ci-dessus est en fait un produit de convolution entre les spectres ρ et ϕ_d si ceux-ci correspondent à une intégration sur $[0, \ell]$:

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = (\rho * \phi_d)_i \quad (19)$$

où le symbole "*", représente le produit de convolution dans l'espace de Fourier.

Sous forme matricielle, la condition à l'interface s'écrit :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_{\phi} \rho = \phi_d * \rho \quad (20)$$

avec :

$$\theta^{sup} = [\theta_0^{sup} \quad \theta_1^{sup} \quad \theta_n^{sup}]^t$$

$$\theta^{inf} = [\theta_0^{inf} \quad \theta_1^{inf} \quad \theta_n^{inf}]^t$$

et la matrice N_{ϕ} définie par :

$$N_{\phi} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} \phi_0 & 2\phi_1 & 2\phi_2 & \dots & 2\phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 + \phi_2 & \phi_1 + \phi_3 & \dots & \phi_{n-1} + \phi_{n+1} \\ \phi_2 & \phi_1 + \phi_3 & \phi_0 + \phi_4 & \dots & \phi_{n-2} + \phi_{n+2} \\ \phi_3 & \phi_2 + \phi_4 & \phi_1 + \phi_5 & \dots & \phi_{n-3} + \phi_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_n & \phi_{n-1} + \phi_{n+1} & \phi_{n-2} + \phi_{n+2} & \dots & \phi_0 + \phi_{2n} \end{pmatrix} \quad (21)$$

ou encore :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_{\rho} \phi_d = \rho * \phi_d \quad (22)$$

avec N_ρ une matrice carrée ayant la même structure que N_ϕ donnée ci-dessus, mais construite à partir des composantes du spectre ρ de la résistance d'interface $R(x)$.

Sous forme de quadripôles partitionnés, la condition à l'interface s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \theta^{sup} \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & N_\rho \\ 0 & I^\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{inf} \\ \phi_d \end{bmatrix} \quad (23)$$

avec I une matrice identité d'ordre $n+1$ et 0 une matrice nulle d'ordre $n+1$.

Annexe 4.2

Produit de convolution exprimant la condition de passage à une interface de résistance thermique non uniforme symétrique

On veut montrer que l'écriture $\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_{\rho} \phi_d$; est bien un produit de convolution si θ , ρ et ϕ_d correspondent à une intégrale sur $[0 \ell]$, en tenant compte de la symétrie des spectres θ , ρ et ϕ_d des fonctions symétriques $\tau(x)$, $R(x)$ et $\psi_d(x)$.

$\tau(x)$ et $\psi_d(x)$ étant les transformées de Laplace respectives de la température $T(x)$ et de la densité de flux de chaleur $\phi_d(x)$ à la profondeur $e_1 = z_d$ de l'interface.

Dans l'espace de Laplace-Fourier, la condition à l'interface s'écrit :

$$\theta^{sup}(\alpha_i) - \theta^{inf}(\alpha_i) = \int_{-\ell}^{\ell} R(x) \psi_d(x, p) \cos(\alpha_i x) dx \quad (1)$$

avec : $\alpha_i = \frac{i\pi}{\ell}$ où i est un entier naturel.

$$\theta^{sup(ou) inf}(\alpha_i) = \int_{-\ell}^{\ell} \tau^{sup(ou) inf}(x) \cos(\alpha_i x) dx \quad (2)$$

La symétrie des fonctions $R(x)$, $\tau(x)$ et $\psi_d(x)$ engendre évidemment des spectres symétriques. Si l'on note θ' , ρ' et ϕ'_d les nouveaux spectres, on a :

$$\theta' = [\theta_{-n} \dots \theta_{-1} \theta_0 \theta_1 \dots \theta_n]^t \quad (3)$$

$$\rho' = [\rho_{-n} \dots \rho_{-1} \rho_0 \rho_1 \dots \rho_n]^t \quad (4)$$

$$\phi_d' = [\phi_{-n} \dots \phi_{-1} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_n]' \quad (5)$$

On va calculer le produit de convolution $(\rho' * \phi_d')$ sur l'intervalle complet $[-\ell \ell]$. On a :

$$\theta_i^{sup} - \theta_i^{inf} = (\rho' * \phi_d')_i = \frac{1}{\ell} \sum_{k=-n}^{+n} \rho_{i-k} \phi_k \quad (6)$$

et i variant de $-n$ à $+n$.

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = \rho' * \phi' = N \phi' \quad (7)$$

où N est la matrice de convolution d'ordre $[(2n+1), (2n+1)]$, construite à partir du spectre ρ' , et dont la structure est illustrée par le tableau ci-dessous. Le tableau ne représente que les indices des termes ρ_{i-k} pour des raisons de simplicité :

		Indices des ρ_{i-k}														
→ indice de ϕ_k	↓ indice de θ_i	-n	-n+1	...	-j	...	-2	-1	0	1	2	...	j	...	n-1	n
-n	-n	0	-1	...	-(n-j)	...	-(n-2)	-(n-1)	-n	-(n+1)	-(n+2)	...	-(n+j)	...	-(2n-1)	-2n
-n+1	-n+1	1	0	...	-(n-j-1)	...	-(n-3)	-(n-2)	-(n-1)	-n	-(n+1)	...	-(n+j-1)	...	-(2n-2)	-(2n-1)
...
-i	-i	n-i	n-(i+1)	...	j-i	...	2-i	1-i	-i	-(i+1)	-(i+2)	...	-(i+j)	...	-(n+1-i)	-(n+i)
...
-2	-2	n-2	n-3	...	j-2	...	0	-1	-2	-3	-4	...	-(2+j)	...	-(n+1)	-(n+2)
-1	-1	n-1	n-2	...	j-1	...	1	0	-1	-2	-3	...	-(1+j)	...	-n	-(n+1)
0	0	n	n-1	...	j	...	2	1	0	-1	-2	...	-j	...	-(n-1)	-n
1	1	n+1	n	...	j+1	...	3	2	1	0	-1	...	1-j	...	-(n-2)	-(n-1)
2	2	n+2	n+1	...	j+2	...	4	3	2	1	0	...	2-j	...	-(n-3)	-(n-2)
...
i	i	i+n	i+n-1	...	j+i	...	i+2	i+1	i	i-1	i-2	...	i-j	...	-(n-i-1)	-(n-i)
...
n-1	n-1	2n-1	2n-2	...	n-1+j	...	n+1	n	n-1	n-2	n-3	...	n-1-j	...	0	-1
n	n	2n	2n-1	...	n+j	...	n+2	n+1	n	n-1	n-2	...	n-j	...	1	0

Sous forme matricielle, la relation précédente devient :

si on pose : $\Delta\theta' = \theta'^{sup} - \theta'^{inf}$, et en tenant compte du tableau des indices ci-dessus, la relation (7) se ramène à :

$$\Delta\theta' = \begin{pmatrix} \Delta\theta'^{-} \\ \Delta\theta'^{0} \\ \Delta\theta'^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{- -} & N^{- 0} & N^{- +} \\ N^{0 -} & N^{0 0} & N^{0 +} \\ N^{+ -} & N^{+ 0} & N^{+ +} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'^{-} \\ \phi'^{0} \\ \phi'^{+} \end{pmatrix} \quad (8)$$

où :

$$\Delta\theta'^{-} = [\Delta\theta_{-n} \dots \Delta\theta_{-2} \Delta\theta_{-1}]^t$$

$$\Delta\theta'^{0} = \Delta\theta_0$$

$$\Delta\theta'^{+} = [\Delta\theta_1 \dots \Delta\theta_2 \Delta\theta_n]^t$$

$$\ell N^{0-} = [\rho_{-n} \dots \rho_{-2} \rho_{-1}]^t$$

$$\ell N^{+0} = [\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n]^t$$

$$\ell N^{0+} = [\rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_1]$$

$$\ell N^{+-} = [\rho_{-1} \rho_{-2} \dots \rho_{-n}]$$

$$\ell N^{00} = \rho_0$$

$$\phi'^{-} = [\phi_{-n} \dots \phi_{-2} \phi_{-1}]^t$$

$$\phi'^{0} = \phi_0$$

$$\phi'^{+} = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]^t$$

et où $\ell N^{- -}$, $\ell N^{- +}$, $\ell N^{+ -}$ et $\ell N^{+ +}$ sont des matrices carrées d'ordre n , construites à partir des composantes du spectre ρ' , selon la structure du tableau des indices.

La formulation (8) peut être écrite sous une autre forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta'^{-} \\ \Delta\theta'^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{- -} & N^{- +} \\ N^{+ -} & N^{+ +} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'^{-} \\ \phi'^{+} \end{pmatrix} + \phi_0 \begin{pmatrix} N^{- 0} \\ N^{+ 0} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta\theta'^{0} = N^{0-} \phi'^{-} + N^{00} \phi_0 + N^{0+} \phi'^{+} \quad (10)$$

Pour les besoins ultérieurs du calcul, on définit un opérateur d'inversion des ordres des indices de vecteurs et de matrices qu'on notera "s".

• Dans le cas d'un vecteur $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$, les éléments du vecteur A^s , le transformé de A par l'opérateur "s", se calculent par :

$$(A^s)_i = A_{n+1-i}; \quad i = 1 \text{ à } n \quad (11)$$

d'où :

$$A^s = [a_n a_{n-1} \dots a_1] \quad (12)$$

• Une procédure similaire peut être réalisée pour une matrice carrée A , en appliquant cette fois-ci l'opérateur "s" à chaque indice :

$$(A^{ss})_{ij} = A_{(n+1-i)(n+1-j)} \quad (13)$$

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & a_{ij} & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ alors } A^{ss} = \begin{pmatrix} a_{nn} & \dots & a_{n1} \\ & a_{(n+1-i)(n+1-j)} & \\ a_{1n} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \quad (14)$$

• Si par contre on veut garder inchangées les lignes mais les ranger dans l'ordre inverse, on applique l'opérateur ".s" défini par :

$$(A^{.s})_{ij} = A_{(n+1-i)j} \quad (15)$$

• De même si on veut garder inchangées les colonnes mais les ranger dans l'ordre inverse, on applique l'opérateur "s." défini par :

$$(A^{s.})_{ij} = A_{i(n+1-j)} \quad (16)$$

• Quelques propriétés de l'opérateur "s"

Si A est une matrice carrée, b et c deux vecteurs colonnes et d un vecteur ligne, tous d'ordre n , on a :

I. $(A b)^s = A^{.s} b$

II. $A b = A^{.s} b^s$

III. En utilisant les propriétés I et II, on obtient :

$$(A b)^s = (A^{.s} b^s)^s = (A^{s.})^{.s} = b^s = A^{ss} b^s$$

IV. $(b+c)^s = b^s + c^s$

V. D'après les propriétés I et III, on a :

$$A^{ss} b^s = A \cdot s b$$

VI. Si on pose $A^{ss} = B$ donc $A = B^{ss}$, en remplaçant A et A^{ss} en fonction de B dans la relation V, on obtient :

$$B b^s = (B^{ss}) \cdot s b \text{ ou encore } B b^s = B^s \cdot b$$

VII. $d^s c^s = c^t d^t$

Le problème étant symétrique par rapport à l'axe $x = 0$, on a :

$$\rho'^{-i} = \rho'_i \quad \Delta\theta'_{-i} = \Delta\theta'_i \quad \text{et} \quad \phi'_{-i} = \phi'_i \quad \text{pour } i \geq 0 \text{ et par conséquent :}$$

$$\begin{aligned} \phi'^{-} &= \phi'^{+s} & N^{-o} &= N^{+os} \\ \Delta\theta'^{-} &= \Delta\theta'^{+s} & N^{o-} &= N^{o+s} \\ N^{-\cdot} &= N^{+\cdot ss} & N^{-+} &= N^{+\cdot ss} \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de la relation (9), on peut déduire :

$$\Delta\theta'^{+} = N^{+-} \phi'^{-} + N^{++} \phi'^{+} + N^{+o} \phi_o \quad (18)$$

ou encore grâce à la relation (17), on a :

$$\Delta\theta'^{+} = N^{+-} \phi'^{+s} + N^{++} \phi'^{+} + N^{+o} \phi_o \quad (19)$$

La propriété VI nous permet d'écrire l'équation (19) sous la forme :

$$\Delta\theta'^{+} = (N^{+-})^s \cdot \phi'^{+} + N^{++} \phi'^{+} + N^{+o} \phi_o \quad (20)$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta\theta'^{+} = [N^{++} + (N^{+-})^s] \phi'^{+} + N^{+o} \phi_o \quad (21)$$

ou encore :

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{\ell} \left[\sum_{k=1}^n (\rho_{|i-k|} + \rho_{i+k}) \phi_k + \rho_i \phi_o \right] \text{ pour } i \text{ positif} \quad (22)$$

D'autre part, en utilisant les relations (17), l'équation (10) devient :

$$\Delta\theta'_o = \Delta\theta_o = N^{o+s} \phi'^{+s} + N^{oo} \phi_o + N^{o+} \phi'^{+} \quad (23)$$

Soit en utilisant la propriété VII :

$$\Delta\theta_o = (\phi'^{+})^t (N^{o+})^t + N^{oo} \phi_o + N^{o+} \phi'^{+} \quad (24)$$

D'où l'on déduit que :

$$\Delta\theta_o = \frac{1}{\ell} \left(2 \sum_{k=1}^n \rho_k \phi_k + \rho_o \phi_o \right) \quad (25)$$

Les équations (22) et (25) permettent d'écrire la formulation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta_o \\ \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \dots \\ \Delta\theta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} \rho_o & 2\rho_1 & 2\rho_2 & \dots & 2\rho_n \\ \rho_1 & \rho_o + \rho_2 & \rho_1 + \rho_3 & \dots & \rho_{n-1} + \rho_{n+1} \\ \rho_2 & \rho_1 + \rho_3 & \rho_o + \rho_4 & \dots & \rho_{n-2} + \rho_{n+2} \\ \rho_3 & \rho_2 + \rho_4 & \rho_1 + \rho_5 & \dots & \rho_{n-3} + \rho_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n & \rho_{n-1} + \rho_{n+1} & \rho_{n-2} + \rho_{n+2} & \dots & \rho_o + \rho_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_o \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (26)$$

ou si l'on note :

$$\Delta\theta = \Delta\theta' \quad ; \quad \phi_d = \phi' \quad \text{et} \quad \rho = \rho' \quad \text{pour } i \geq 0$$

on obtient finalement :

$$\Delta\theta = N_\rho \phi_d \quad (27)$$

Ce qui justifie le résultat de l'annexe 4.1, soit :

$$\theta^{sup} - \theta^{inf} = N_\rho \phi_d = \rho * \phi_d \quad (28)$$

Quand on écrit cette relation, cela signifie en fait qu'on ne considère que les harmoniques de fréquences supérieures ou égales à zéro d'un véritable produit de convolution $\rho' * \phi'$ sur l'intervalle complet $[-\ell, +\ell]$.

Annexe 4.3

Expressions des contrastes thermiques créés par une résistance d'interface non uniforme, dans l'espace de Lapalce-Fourier

La diffusion de la chaleur au travers d'une interface à résistance thermique non uniforme en x est décrite par la forme matricielle suivante dans l'espace de Laplace-Fourier :

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_\rho \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(1) \\ \phi(1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dans le cas des conditions aux limites d'une expérience flash : excitation de chaleur en Dirac, uniforme sur la face avant ($z = 0$) et face arrière isolée ($z = 1$), on a :

$$\phi(0) = [\ell \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad \text{et} \quad \phi(1) = [\ell \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (2)$$

Pour les besoins ultérieurs de calcul, on peut écrire la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le système (1) permet de calculer l'expression de la température en face avant de la plaque défectueuse. On trouve :

$$\theta(0) = (A + A_1 N_\rho C_2) (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (4)$$

Si $\theta_s(0)$ est la température sur la face avant d'une plaque saine, en posant $N_\rho = 0$ dans (4), on obtient :

$$\theta_s(0) = A C^{-1} \phi(0) \quad (5)$$

Le contraste de Laplace Fourier en face avant s'écrit alors :

$$\Delta\theta(0) = \theta(0) - \theta_s(0) = (A_1 - A C^{-1} C_1) N_\rho C_2 (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (6)$$

Les matrices C et C_1 étant carrées et diagonales, on peut utiliser la propriété de la commutativité : $C^{-1} C_1 = C_1 C^{-1}$; la relation précédente se ramène à :

$$\Delta\theta(0) = (A_1 C - A C_1) C^{-1} N_\rho C_2 (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (7)$$

Or d'après la relation (3), on a :

$$A_1 C - A C_1 = C_2 \quad (8)$$

On obtient finalement :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} N_\rho C_2 (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (9)$$

Le contraste thermique réduit en face arrière est calculé de la même façon :

$$\Delta\theta(1) = - (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} C_1 N_\rho C_2 C^{-1} \phi(0) \quad (10)$$

Annexe 4.4

Calcul de la relation matricielle $N_\rho a = b$

Le contraste de Laplace Fourier en face avant est donné par :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} N_\rho C_2 (C + C_1 N_\rho C_2)^{-1} \phi(0) \quad (1)$$

Si on pose $P = C_1 N_\rho C_2$, on obtient :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} C_1^{-1} P (C + P)^{-1} \phi(0) \quad (2)$$

ou encore :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} C_1^{-1} ((C + P) P^{-1})^{-1} \phi(0) \quad (3)$$

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} C_1^{-1} (C P^{-1} + I)^{-1} \phi(0) \quad (4)$$

$$C P^{-1} C C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0) = \phi(0) - C C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0) \quad (5)$$

En remplaçant P par son expression dans (5), on obtient :

$$C C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0) = C_1 N_\rho C_2 [C^{-1} \phi(0) - C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0)] \quad (6)$$

et finalement :

$$C C_2^{-1} \Delta\theta(0) = N_\rho [C_2 C^{-1} \phi(0) - C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0)] \quad (7)$$

ou encore :

$$b = N_\rho a \quad (8)$$

en posant :

$$b = C C_2^{-1} \Delta\theta(0) \quad (9)$$

et :

$$a = C_2 C^{-1} \phi(0) - C_1 C_2^{-1} \Delta\theta(0) \quad (10)$$

Annexe 4.5

Etude de l'erreur due au bruit de mesure sur la résistance d'interface identifiée à partir du modèle linéaire

Le contraste réduit en face avant dans l'espace de Laplace Fourier dans le cas d'une résistance d'interface non uniforme est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta\theta(0) = C_2 C^{-1} N_p C_2 (C + C_1 N_p C_2)^{-1} \phi(0) \quad (1)$$

avec :

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddot{C}_1 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddot{C}_n \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{10} & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddot{C}_{12} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddot{C}_{1n} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{20} & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddot{C}_{21} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddot{C}_{2n} \end{pmatrix}$$

où :

$$C_i = \sqrt{p + \alpha_i^2} \sinh(\sqrt{p + \alpha_i^2})$$

$$C_{ik} = \sqrt{p + \alpha_i^2} \sinh(\sqrt{p + \alpha_i^2} e_k)$$

$$\alpha_i = \frac{i \pi}{\ell} \quad (i = 1, \dots, n) \text{ et } k = 1, 2 \text{ indice de la couche.}$$

Dans le cas où la surface irradiée, reçoit une excitation uniforme de Dirac, le flux dans l'espace de Laplace-Fourier s'écrit :

$$\phi(0) = [\ell \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t \quad (3)$$

et $\Delta\theta = [\Delta\theta_0 \Delta\theta_1 \dots \Delta\theta_n]$ avec $\Delta\theta_i = \Delta\theta(\alpha_i, p)$

N_ρ étant la matrice de convolution dans l'espace de Laplace-Fourier, construite à partir du spectre ρ de la résistance d'interface $R(x)$ (voir annexe 4.1).

Le problème inverse non linéaire s'écrit dans l'espace de Laplace-Fourier sous forme d'un produit de convolution :

$$a * \rho = b \quad (4)$$

où a et b sont donnés par les expressions :

$$a = C_2 C^{-1} \phi(0) - C_1 \Delta\theta \quad (5)$$

$$b = C C_2^{-1} \Delta\theta \quad (6)$$

Dans l'espace réel, le produit de convolution (4) se transforme en un produit simple :

$$A(x) R(x) = B(x) \quad (7)$$

$$\text{avec : } A(x) = g_n(x) a ; \quad B(x) = g_n(x) b ; \quad (8)$$

où : $g_n(x) = \frac{2}{\rho} [\frac{1}{2} \cos(\alpha_1 x) \dots \cos(\alpha_n x)]^t$ est l'opérateur de l'inversion de Fourier en cosinus.

Dans le cas de résistance d'interface faible devant celle de l'échantillon, le champ de température peut être calculé à partir du modèle direct linéarisé. Soit :

$$\Delta\theta = \frac{C_{20}}{C_0} C_2 C^{-1} \rho \quad (9)$$

$$\text{ou encore : } \Delta\theta_i = \frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} \frac{\sinh(\sqrt{p + \alpha_i^2} e_2)}{\sinh(\sqrt{p + \alpha_i^2})} \rho_i \quad (10)$$

et le problème inverse résultant s'écrit alors dans l'espace transformé :

$$\rho = \frac{C_0}{C_{20}} C C_2^{-1} \Delta\theta \quad (11)$$

ou encore :

$$\rho_i = \frac{\sinh(\sqrt{p})}{\sinh(\sqrt{p} e_2)} \frac{\sinh(\sqrt{p+\alpha_i^2})}{\sinh(\sqrt{p+\alpha_i^2} e_2)} \Delta\theta_i \quad (12)$$

Si on note $R_{n\sigma}^{Nm}(x)$ la répartition spatiale de la résistance thermique d'interface, identifiée par une inversion faite avec n harmoniques d'un champ de température dégradé par un bruit d'écart type constant σ , échantillonné spatialement en N points et obtenu à partir de m mesures en temps, on aura d'après les équations (5) et (7) :

$$R_{n\sigma}^{Nm}(x) = \frac{g_n(x) C_2^{-1} \Delta\theta_{exp}}{\frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} - g_n(x) C_1 \Delta\theta_{exp}} \quad (13)$$

où $\Delta\theta_{exp}$ est le contraste de Laplace Fourier calculé à partir d'un champ de température expérimental.

L'erreur d'estimation sur la résistance d'interface peut être divisée en trois parties (voir chapitre 4) :

- l'erreur due au bruit de mesure du contraste expérimental
- l'erreur due à la quadrature (spatiale et temporelle)
- l'erreur de troncature du spectre lors de l'inversion

L'erreur sur la résistance peut alors être majorée par la somme de ces trois erreurs :

$$\left\| R_{n\sigma}^{Nm}(x) - R(x) \right\| \leq e_{bruit} + e_{quadrature} + e_{troncature} \quad (14)$$

avec :

$$e_{bruit} = \left\| R_{n\sigma}^{Nm}(x) - R_{no}^{Nm}(x) \right\| \quad (15)$$

$$e_{quadrature} = \left\| R_{no}^{Nm}(x) - R_{no}^{\infty\infty}(x) \right\| \quad (16)$$

$$e_{troncature} = \left\| R_{no}^{\infty\infty}(x) - R(x) \right\| \quad (17)$$

Pour faire une étude stochastique sur l'erreur due au bruit de mesure e_{bruit} , il va falloir exprimer le contraste de Laplace-Fourier ΔT en fonction du contraste réel ΔT . Celui-ci est dégradé par un bruit supposé additif, d'écart type constant σ et non corrélé en temps et en espace.

Exprimons le vecteur $\Delta\theta$ en fonction du contraste réduit ΔT . Le contraste de Laplace pour le pixel "k", se calcule par :

$$\Delta\tau(x_k) = \int_0^{\infty} \exp(-p t) \Delta T(t, x_k) dt = \sum_{j=0}^m \exp(-p t_j) \Delta T(t_j, x_k) \Delta t \quad (18)$$

ou encore sous forme vectorielle :

$$\Delta\tau(x_k) = K \Delta T(x_k) \quad (19)$$

où K est un vecteur ligne d'ordre m' ($= m+1$) défini par :

$$K = \Delta t [\exp(-p t_0) \exp(-p t_1) \dots \exp(-p t_m)] \quad (20)$$

et $\Delta T(x_k)$ un vecteur colonne d'ordre m' défini par :

$$\Delta T(x_k) = [\Delta T(t_0, x_k) \Delta T(t_1, x_k) \dots \Delta T(t_m, x_k)]^t \quad (21)$$

Notons $\Delta\tau$ le vecteur contraste de Laplace contenant les contrastes de Laplace pour tous les pixels d'une ligne, de l'image thermographique :

$$\Delta\tau = \begin{pmatrix} \Delta\tau(x_0) \\ \Delta\tau(x_1) \\ \dots \\ \Delta\tau(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T(x_0) \\ \Delta T(x_1) \\ \dots \\ \Delta T(x_N) \end{pmatrix} = K_I \Delta T_T \quad (22)$$

où K_I est une matrice par blocs, diagonale de dimension $[N', m'N']$ (où $N' = N+1$) et ΔT_T est un vecteur par blocs, où on a rangé tous les thermogrammes (indice T) en colonne de dimension $[m'N', 1]$.

Le contraste de Laplace-Fourier pour une fréquence α_i se calcule par :

$$\Delta\theta_i = \int_0^{\ell} \cos(\alpha_i x) \Delta\tau(x) dx \quad (23)$$

ou encore :

$$\Delta\theta_i = \Delta x [\cos(\alpha_i x_0) \cos(\alpha_i x_1) \dots \cos(\alpha_i x_N)] \begin{pmatrix} \Delta\tau(x_0) \\ \Delta\tau(x_1) \\ \dots \\ \Delta\tau(x_N) \end{pmatrix} \quad (24)$$

sous forme vectorielle on aura :

$$\Delta\theta_i = g'_i \Delta\tau \quad (25)$$

où g_i' est le vecteur ligne représentant la transformation directe de Fourier pour la fréquence α_i , soit :

$$g_i' = \Delta x [\cos(\alpha_i x_0) \cos(\alpha_i x_1) \dots \cos(\alpha_i x_N)] \quad (26)$$

Pour toutes les fréquences, on aura alors d'après (25) :

$$\Delta \theta = \begin{pmatrix} \Delta \theta_0 \\ \Delta \theta_1 \\ \dots \\ \Delta \theta_n \end{pmatrix} = G' \Delta \tau \quad (27)$$

avec : $G' = [g'_0 \ g'_1 \dots g'_n]^t$ un vecteur colonne partitionné par blocs d'ordre $n' N'$ ($n' = n+1$).

Finalement, à partir de (23) et (27), on obtient :

$$\Delta \theta = G' K_1 \Delta T_T \quad (28)$$

D'où la nouvelle expression de la résistance d'interface estimée :

$$\hat{R}_{n\sigma}^{Nm}(x) = \frac{g(x) C C_2^{-1} G' K_1 (\Delta T_T)_{exp}}{\frac{\sinh(\sqrt{p} e_2)}{\sinh(\sqrt{p})} - g(x) C_1 G' K_1 (\Delta T_T)_{exp}} \quad (29)$$

Si $\varepsilon(t_j, x_k)$ représentent les erreurs dues au bruit de mesure sur le contraste réduit ΔT , on peut écrire :

$$\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_{N'm'} \quad (30)$$

$I_{N'm'}$ étant la matrice identité d'ordre $N'm'$.

Dans le cas du problème linéaire, la variance de la résistance thermique à la position x se calcule par :

$$\sigma_R^2(x) = \text{cov}\left(\frac{\sinh(\sqrt{p})}{\sinh(\sqrt{p} e_2)} g(x) C C_2^{-1} G' K_1 \varepsilon\right) \quad (31)$$

ou encore :

$$\sigma_R^2(x) = \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} g(x) C C_2^{-1} G' K_1 \text{cov}(\varepsilon) K_1^t G^t C^{-1} C g^t(x) \quad (32)$$

ou en utilisant la relation (30), on obtient :

$$\sigma_R^2(x) = \sigma^2 \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} g(x) C C_2^{-1} G' K_1 I_{N'm'} K_1^t G^t C^{-1} C g^t(x) \quad (33)$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$K_I K_I^t = \begin{pmatrix} K & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & K & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^t & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & K^t & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & K^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K K^t & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & K K^t & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & K K^t \end{pmatrix} \\ = K K^t I_{N'N'} \quad (34)$$

et où :

$$K K^t = (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^m \exp(-2 p t_j) = \Delta t \int_0^{\infty} \exp(-2 p t) dt \quad (35)$$

La relation (32) se transforme en :

$$\sigma_R^2(x) = \sigma^2 \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} \frac{\Delta t}{2 p} g(x) C C_2^{-1} G' I_{N'N'} G^t C_2^{-1} C g^t(x) \quad (36)$$

En remplaçant G' par son expression (27), on a :

$$G' G^t = \begin{pmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ \vdots \\ g'_n \end{pmatrix} (g'_0 \ g'_1 \ \dots \ g'_n) = F \quad (37)$$

où F est une matrice carrée d'ordre n' et dont les éléments sont donnés par :

$$F_{ij} = g'_i g'_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \\ F_{ij} = g'_i g'_j = \ell \Delta x \quad \text{si } i = j = 0 \\ F_{ij} = g'_i g'_j = \frac{\ell \Delta x}{2} \quad \text{si } i = j \neq 0 \quad (38)$$

D'où :

$$G' G^t = \frac{1}{2} \ell \Delta x \begin{pmatrix} 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & 1 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

ou encore :

$$G' G^t = \frac{1}{2} \ell \Delta x (I_{n'n'} + U_{n'n'}) \quad (40)$$

où $I_{n'n'}$ est la matrice identité d'ordre n' ; et :

$$U_{n'n'} = U = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Grâce à (39), l'expression (36) devient :

$$\sigma_R^2(x) = \sigma^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\ell}{p} \frac{\Delta x}{2} \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} [g(x) C^2 C_2^{-2} g'(x) + g(x) C C_2^{-1} U C_2^{-1} C g'(x)] \quad (42)$$

ou encore :

$$\sigma_R^2(x) = \sigma^2 \frac{\Delta t}{4} \frac{\ell}{p} \Delta x \frac{\sinh^2(\sqrt{p})}{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)} \left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{C}{C_2} \right)_{ii}^2 g_i^2(x) + \left(\frac{C}{C_2} \right)_{oo}^2 g_o^2(x) \right] \quad (43)$$

On obtient finalement l'expression suivante pour la variance, en remplaçant les g_i , C et C_2 par leurs expressions :

$$\sigma_R^2(x) = \sigma^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\Delta x}{p} \frac{\ell}{\sinh^4(\sqrt{p} e_2)} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2})}{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2} e_2)} \frac{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)}{\sinh^2(\sqrt{p})} \cos^2(\alpha_i x) \right\} \quad (44)$$

Si on veut faire une évaluation de l'écart type aux pixels du maillage donné par l'image thermographique :

$$\sigma_{R_k}^2 = \sigma^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\ell}{p} \frac{\Delta x}{N} \frac{\sinh^4(\sqrt{p})}{\sinh^4(\sqrt{p} e_2)} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2})}{\sinh^2(\sqrt{p + \alpha_i^2} e_2)} \frac{\sinh^2(\sqrt{p} e_2)}{\sinh^2(\sqrt{p})} \cos^2\left(\frac{i k \pi}{N}\right) \right\} \quad (45)$$

Annexe 4.6

Détermination du niveau de la densité spectrale du profil en contraste de Laplace à partir du bruit de mesure sur le champ de température

La technique d'inversion dans le cas d'une résistance d'interface non uniforme, est basé sur le filtrage du bruit de mesure aux hautes fréquences. Ceci suppose que la puissance spectrale pour ces fréquences soit celle du seul bruit. Hypothèse qui n'est vraie que dans le cas de fonctions $R(x)$ à variations douces et échantillonnées très finement sur l'intervalle $[0, \ell]$ correspondant à l'extension de l'échantillon.

En pratique, on peut être amené à traiter des défauts d'interface décrits par des fonctions à variations dures (voir chapitre 5), donc dont les grandes fréquences sont significatives. Par ailleurs, l'échantillonnage est imposé par la résolution spatiale de la caméra infrarouge (dans notre dispositif $N = 128$).

Il s'avère alors nécessaire de déterminer le niveau moyen de la puissance spectrale du bruit aux hautes fréquences, afin de pouvoir le comparer à celui de la puissance spectrale du signal expérimental pour les mêmes fréquences. Ceci va permettre de voir si effectivement les deux facteurs cités ci-dessus influent ou non sur le niveau du bruit.

Le contraste thermique exact dans l'espace de Laplace-Fourier est donné par l'expression (4.45).

Le signal expérimental est donné par l'expression :

$$\Delta\theta_{exp} = \Delta\theta + \varepsilon_{\Delta\theta} \quad (1)$$

où $\varepsilon_{\Delta\theta}$ représente l'erreur due au bruit de mesure sur le contraste thermique de Laplace Fourier.

On suppose que le bruit présent dans les données expérimentales est additif, de moyenne nulle, d'écart type constant σ et qu'il n'y a pas de corrélation en temps et en espace entre les différents points expérimentaux.

La puissance spectrale du signal expérimentale est donnée par

$$(\Delta\theta_{exp})^2 = \Delta\theta^2 + (\varepsilon_{\Delta\theta})^2 + 2 \Delta\theta \varepsilon_{\Delta\theta} \quad (2)$$

et son espérance mathématique est alors :

$$E [(\Delta\theta_{exp})^2] = E [\Delta\theta^2] + E [(\varepsilon_{\Delta\theta})^2] + 2 \Delta\theta E [\varepsilon_{\Delta\theta}] \quad (3)$$

Le bruit de mesure étant de moyenne nulle, cette relation se simplifie :

$$E [(\Delta\theta_{exp})^2] = \Delta\theta^2 + E [(\varepsilon_{\Delta\theta})^2] \quad (4)$$

Par ailleurs, on sait que la matrice du bruit est définie par :

$$var(\varepsilon_{\Delta\theta}) = E [(\varepsilon_{\Delta\theta})^2] - (E [\varepsilon_{\Delta\theta}])^2 \quad (5)$$

Finalement, on obtient :

$$E [(\Delta\theta_{exp})^2] = \Delta\theta^2 + (\sigma_{\Delta\theta})^2 \quad (6)$$

Dans le cas où l'échantillonnage est très fin et la fonction $R(x)$ est "molle", le niveau moyen de la puissance spectrale du bruit (qui peut être mesuré aux temps négatifs, c'est à dire avant le flash) est égale à sa variance dans l'espace de Laplace Fourier pour les hautes fréquences spatiales :

$$E [(\Delta\theta_{exp})^2] = (\sigma_{\Delta\theta})^2 \quad (7)$$

Exprimons cette dernière en fonction de celle du contraste réduit $\Delta T^*(x, t)$.

La transformée de Fourier du contraste thermique se calcule par :

$$\Delta\theta(\alpha, p) = \int_0^{\ell} \Delta\tau(x, p) \cos(\alpha x) dx \quad (8)$$

avec $\Delta\tau(x, p)$ le profil du contraste de Laplace, calculé pour une valeur de la variable de Laplace réduite p .

L'erreur due au bruit sur le contraste de Laplace Fourier se calcule alors par :

$$\varepsilon_{\Delta\theta}(\alpha, p) = \int_0^{\ell} \varepsilon_{\Delta\tau}(x, p) \cos(\alpha x) dx \quad (9)$$

Si on suppose que l'erreur due à la quadrature est nulle, la relation précédente peut être écrite sous la forme :

$$\varepsilon_{\Delta\theta}(\alpha, p) = \Delta x [\cos(\alpha x_1) \cos(\alpha x_2) \dots \cos(\alpha x_n)] \begin{pmatrix} \varepsilon_{\Delta\tau}(x_1, p) \\ \varepsilon_{\Delta\tau}(x_2, p) \\ \dots \\ \varepsilon_{\Delta\tau}(x_n, p) \end{pmatrix} \quad (10)$$

La variance du contraste de Laplace Fourier est calculée grâce à :

$$(\sigma_{\Delta\theta})^2 = (\sigma_{\Delta\tau})^2 (\Delta x)^2 [\cos(\alpha x_1) \dots \cos(\alpha x_n)] [\cos(\alpha x_1) \dots \cos(\alpha x_n)]^t \quad (11)$$

ou encore :

$$(\sigma_{\Delta\theta})^2 = (\sigma_{\Delta\tau})^2 \Delta x \sum_{j=1}^n \cos^2(\alpha x_j) \Delta x = (\sigma_{\Delta\tau})^2 \Delta x \int_0^{\ell} \cos^2(\alpha x) dx \quad (12)$$

ce qui donne finalement :

$$(\sigma_{\Delta\theta})^2 = (\sigma_{\Delta\tau})^2 \Delta x \frac{1}{2} \left[\ell + \frac{\sin(2 \alpha \ell)}{2 \alpha} \right] \quad (13)$$

Par ailleurs, on sait que les pulsations spatiales prennent des valeurs discrètes telles que $\alpha_k = k \frac{\pi}{\ell}$ (k est un entier naturel) ; et que la variance du contraste expérimental de Laplace est donnée par :

$$(\sigma_{\Delta\tau})^2 = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2p} \quad (14)$$

Δt étant le pas de discrétisation temporelle.

Finalement, on obtient :

$$(\sigma_{\Delta\theta})^2(\alpha_k, p) = (1 + \delta_{ok}) \ell \frac{\sigma^2 \Delta t \Delta x}{4p} \quad (15)$$

où δ_{ok} est le symbole de Kronecker.

Pour les grandes fréquences, la variance du bruit de mesure est constante et est donnée par :

$$(e_{\Delta\theta})^2 = (\sigma_{e_{\Delta\theta}})^2 = \ell \frac{\sigma^2 \Delta t \Delta x}{4p} \quad (16)$$

Cette formule montre clairement que le niveau de la puissance spectrale du bruit de mesure est directement lié aux pas d'échantillonnage temporel Δt et spatial Δx .

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- ADAMS R.D., COWLEY P., 1988, "A review of defect types and nondestructive testing techniques for composites and bonded joints", *NDT International*, vol. 21, n° 4, p.208-222.
- AMAZOUZ M., 1987, "Mesure de la diffusivité thermique de solides anisotropes : application aux composites", Thèse de l'institut national polytechnique de Lorraine.
- AMAZOUZ M., DEGIOVANNI A., 1988, "Caractérisation thermique des matériaux multicouches", Actes du séminaire Eurotherm n°4, "Transfert Thermiques dans les matériaux composites et aux interfaces solides", Nancy, p.76-79.
- AZIZ A., NA. T., 1984, "Perturbations methods in Heat transfer", Springer, Berlin.
- BAKER G.A., 1965, "The theorie and application of Padé approximant method", *Adv. Theo. Phys.*, p.1-58.
- BALAGEAS D., 1982, "Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité par la méthode impulsionnelle", *Revue Générale de Thermique*, p. 227-237.
- BALAGEAS D., PUJOLA R.M., 1985, "Méthode flash adaptée aux matériaux composites à renforcement orienté", Groupement Universitaire de Thermique, p.73-97.
- BALAGEAS D., 1986, "Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash", *Techniques de l'Ingénieur*, vol. (R2), p. R2 955 : 1-11.
- BALAGEAS D., DEOM. A., BOSCHER D., 1987, "Contrôle non destructif des composites carbone époxy par méthode photothermique impulsionnelle", *Revue Générale de Thermique*, n° 301, p.37-41.
- BALAGEAS D., BOSCHER D.M., DEOM A., 1988, "Temporal moment method in pulsed photothermal radiometry : Application to Carbon-Epoxy NDT", *Springer Series in Optical Sciences*, vol.58, p.500-502.
- BALAGEAS D., BOSCHER D., DEOM A., ENGUEHARD F., 1990, "Panorama des méthodes thermiques de contrôle non destructif à l'O.N.E.R.A", Journée d'étude du 24 janvier 1990, S.F.T.
- BARDON J.P., BALAGEAS D., DEGIOVANNI A., VULLIERMES J., 1989, "Thermique des matériaux composites et des interfaces : situation et perspectives", *La Recherche Aérospatiale*, vol. 6, p.37-45.

- BATSALE J.C., BENDADA A., MAILLET D., DEGIOVANNI A., 1993, "Distribution of a thermal contact resistance : inversion using experimental Laplace and Fourier transforms and an asymptotic expansion", Inverse problems in engineering : Theory and Practice, Palm Coast, Florida, U.S.A, Eds : Zabarar N., Woodbury K. and Raynaud M., ASME, NY, p.139-146.
- BATSALE J.C., MAILLET D., DEGIOVANNI A., 1994, "Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales - calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 37, n° 1, p.111-127.
- BECK J.V., BLACKWELL B., C.R.ST.CLAIR J.R., 1985, "Inverse heat conduction, Ill posed problems", Wiley interscience publication.
- BENDADA A., MAILLET D., DEGIOVANNI A., 1992, "Non destructive transient evaluation of laminated composites : discrimination between delaminations, thickness variations and multidelaminations", Congrès Eurotherm n° 27, QIRT'92, p.218-223.
- BENDADA A., BATSALE J.C., DEGIOVANNI A., MAILLET D., 1994, "Interface resistances : The inverse problem for transient thermal technique", Inverse problems in engineering mechanics, Bui, Tanaka et al- (eds), Balkema, Rotterdam, Proceedings of the second international symposium on inverse problems, p.347-354.
- BENDER C, ORSZAG S, 1978, "Advanced mathematical methods for scientists and engineers", Mc Graw Hill.
- BISON P.G., BRESSAN C., DI SARNO R., GRINZATO E., MARINETTI S., MANDUCHI G., 1994, "Thermal NDE of delaminations in plastic materials by neural network processing", Congrès Eurotherm n° 42, QIRT'94, p.214-219.
- BONTAZ J., 1990, "Une méthode photothermique impulsionnelle appliquée au contrôle de matériaux composites", Thèse de l'université de Bordeaux I.
- BOSCHER D., DEOM A., GARDETTE G., BALAGES D., 1988, "Thermal NDT of carbon epoxy laminates", Eurotherm 4, Nancy, p.112-116.
- CARSLAW H.S, JAEGER J.C, 1959, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford.
- CIELO P., UTRACKI L.A., LAMONTAGNE M., 1986, "Thermal diffusivity measurements by the converging thermal wave technique", Can. J. Phys. vol. 64, p.1172-1177.
- CLEVER R.M., WASSEL A.T., 1985, "Three dimensionnal transient heat conduction in a multilayer medium", Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 22, n° 2, p.211-214.
- CONNOLLY M.P., 1991, "A review of factors influencing defect detection in infrared thermography : Applications to coated materials", Journal of NDT , vol. 10, n° 3, p.89-96.
- COOLEY J.W., TUKEY J.W., 1965, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier transform series, Math. comp., n° 19, p.297-339.

- COTTA R.M., 1994, "The integral transform method in computational heat and fluid flow", Proceedings of the tenth International Heat Transfer Conference, Brithon, UK, vol. 1, Keynote papers, Special Keynote (SK-3), p.43-60.
- DARTOIS R., 1986, "Caractérisation des matériaux bicouches semi-transparents par radiométrie photothermique : application aux revêtements de surface et en hématologie", Thèse de doctorat d'état, Lyon.
- DAVIES J., MARTIN B., 1979, "Numerical inversion of Laplace transform : A survey and comparison of methods", J. Comp. Phys., n° 33, p.1-32.
- DEGIOVANNI A., 1975, "Contribution à l'étude de la diffusivité thermique", Thèse de doctorat d'état, Lyon.
- DEGIOVANNI A., LAURENT M., 1986, "Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash", Revue Phys. Appl. vol. 21, p.229-237.
- DEGIOVANNI A., 1988, "Conduction dans un mur multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 31, n° 3, p.553-557.
- DEGIOVANNI A., 1990, "Problèmes liés à l'homogénéisation des caractéristiques thermiques", Revue Générale de Thermique, n° 339, p.117-128.
- DEGIOVANNI A., BENDADA A., BATSALE J.C., MAILLET D., 1994, "Analytical simulation of a three-dimensionnal temperature field produced by planar defects of any shape ; application to non destructive testing", Congrès Eurotherm n°42, QIRT'94, p.253-259.
- DELPECH PH., BOSCHER D., DEOM A., BALAGEAS D., 1990, "Utilisation de la transformation de Laplace pour la détermination de grandeurs thermiques", Colloque S.F.T, Nantes (16 au 17 Mai 1990).
- DELPECH PH., BOSCHER D.M., LEPOUTRE F., DEOM A., 1992, "Time-resolved pulsed stimulated infrared thermography applied to carbon/carbon non destructive evaluation", Congrès Eurotherm n° 27, QIRT'92, p.201-206.
- DELPECH PH., 1993, "Contrôle non destructif par thermographie infrarouge des structures composites chaudes d'Hermès", Thèse de L'Ecole doctorale sciences pour l'ingénieur de Nantes.
- DEMOMENT G., 1989, "Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structures and problems", IEEE Transactions on acoustics. Speech. and signal processing, vol. 37, n° 12, p.2024-2036.
- DEMOMENT G., IDIER J., 1992, "Problèmes inverses et déconvolution", Journal de Physique IV, Colloque C1, supplément au Journal de Physique III, vol. 2, p.929-935.
- DONALDSON A.B., TAYLOR R.E., 1975, "Thermal diffusivity measurement by a radial heat flow method", J. Appl. Phys., vol. 46, n°10, p.4584-4589.

- ENGUEHARD F., 1991, "Mesure de la diffusivité thermique radiale de matériaux anisotropes et détection de fractures transverses par la technique photothermique impulsionnelle de diffusion convergente", Thèse de doctorat de l'école centrale de Paris.
- FORT C.H., ROUX J.M., GUIDON M., 1988, "Mesure et caractérisation des solides par des méthodes instationnaires", S.F.T, Journée d'étude du 24 février 1988.
- GOLUB G.H., HEALTH M., WAHBA G., 1979, "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter", *Technometrics*, vol. 21, p. 215-223.
- GOLUB G.H., VAN LOAN C.F., 1989, "Matrix computations second edition, Ed Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.
- GRINZATO E., MARINETTI S., BISON P.G., MANDUCHI G., 1994, "Application of neural network to thermophysical data reduction", S.F.T, Journée d'étude du 7 décembre 1994, sur "La thermographie infrarouge stimulée".
- HADISAROYO D., BATSALE J.C., DEGIOVANNI A., 1992, "Un appareillage simple pour la mesure de la diffusivité thermique de plaques minces", *J. Phys. III*, vol. 2, p.111-128.
- HAGEN K.D., 1987, "A solution to unsteady conduction in periodically layered, composite media using a perturbation method", *Journal of Heat Transfer*, vol. 109, p.1021-1023.
- HOANG S., DE MEY P., TALAGRAND O., 1994, "An approximate approach to data assimilation under uncertainties based on adjoint and filtering techniques", *Inverse problems in engineering mechanics*, Bui, Tanaka et al- (eds), Balkema, Rotterdam, *Proceedings of the second international symposium on inverse problems*, p.417-424.
- HSU J., DRANOFF J.S., 1987, "Numerical inversion of certain Laplace transforms by the direct application of the fast Fourier transform (FFT) algorithm", *Comp. Chem. Engng*, vol. 11, n° 2, p.101-110.
- JAE S.L., 1990, "Two dimensionnal signal and image processing", Prentice hall signal processing series, Alan V. Oppenheim, series editor.
- KRAPEZ J.C, 1991, "Contribution à la caractérisation des défauts de type délaminage ou cavité par thermographie stimulée", Thèse de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures.
- LACHI M., 1991, "Détermination de diffusivités thermiques des matériaux composites par méthode flash bidirectionnelle", Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.
- LAM K., 1993, "Inverse problems and ill-posedness", First international conference on inverse problems in engineering : Theory and Practice, Palm Coast, Florida, U.S.A, Editeurs : Zabarar N., Woodbury K. and Raynaud M., ASME, NY, p.1-10.
- LAMINE A.S., 1988, "Caractérisation de défauts dans les matériaux composites par thermographie infrarouge", Thèse de l'institut national polytechnique de Lorraine.

- LETURQ PH., DORKEL J.M., RATOLOJANAHARY F.E., TOUNSI S., 1993, "A two-port network formalism for 3D heat conduction analysis in multilayered media", *Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 36, n° 9, p.2317-2326.
- LINZ P., 1994, "A new numerical method for ill-posed problems, Inverse problems, IOP publishing Ltd, vol. 10, p.L1-L6.
- MACDONALD J.R., 1964, "Accelerated convergence, divergence, iteration, extrapolation, and curve fitting", *Journal of applied physics*, vol. 35, n° 10, p.3034-3041.
- MAILLET D., 1991, "Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres et à la conduction inverse en thermique", Thèse de doctorat d'état de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.
- MAILLET D., HOULBERT A.S., DIDIERJEAN S., LAMINE A.S., DEGIOVANNI A., 1993, "Non destructive thermal evaluation of delaminations in a laminate : Part I - Identification by measurement of thermal contrast", *Composites Science and Technology*, n° 47, p.137-153.
- MAILLET D., HOULBERT A.S., DIDIERJEAN S., LAMINE A.S., DEGIOVANNI A., 1993, "Non destructive thermal evaluation of delaminations in a laminate : Part II - The experimental Laplace transforms method", *Composites Science and Technology*, n° 47, p.155-172.
- MURIO A.D., 1993, "The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems", Wiley interscience publication.
- NAYFEH A.H., 1973, "Perturbation methods", Wiley, New York.
- OZIZIK N., 1990, "Heat Conduction", Wiley, New York.
- PARKER W.J., JENKINS R.J., BUTTLER G.P., ABBOT G.L., 1961, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity", *J. Appl. Phys.*, vol. 32, n° 9, p.1679-1684.
- PHILIPPI I., BATSALE J.C., MAILLET D., DEGIOVANNI A., 1994, "Traitement d'images infrarouges par transformation intégrale, application à la mesure de diffusivité thermique par méthode flash", *Revue Générale de Thermique*, n° 392-393, p.486-496.
- PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., 1992, "Numerical recipes", Cambridge university press.
- RAMOS F.M., 1992, "Résolution d'un problème inverse multidimensionnel de diffusion par la méthode des éléments analytiques et par le principe de l'entropie maximale : contribution à la caractérisation de défauts internes", Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et l'Espace.
- RAYNAUD M., BRANSIER J., 1986, "A new finite difference method for the non linear inverse heat conduction problem", *Numerical Heat Transfer*, vol. 10, p.27-42.

- RAYNAUD M., BRANSIER J., 1986, "Experimental validation of a new space marching finite difference algorithm for the inverse heat conduction problem, 8th Int. Heat Transfer conference, San Francisco.
- SHANKS D., 1955, "Nonlinear transforms of divergent and slowly convergent sequences", J. Math. Physics, n° 34, p.1-42.
- STEHFEST H., 1970, "Algorithm 368. Numerical inversion of Laplace transforms, comm. A.C.M., n° 13, p.47-49.
- TAMMA K.K., YURKO A.A., 1989, "Finite element thermal modeling, analysis formulations for layered composite materials", Numerical Heat Transfer, Part B, vol.15, p.73-97.
- THIKONOV A., ARSENINE V., 1976, "Méthodes de résolution de problèmes mal posés", Ed Mir, Moscou.
- THOMAS R.L., FAVRO L.D., CROWTHER D.J., KUO P.K., 1992, "Inversion of thermal wave infrared images", Congrès Eurotherm n° 27, QIRT'92, p.278-282.
- WEIPING L., 1991, "A new algorithm to compute the DCT and its inverse", IEEE transactions on signal processing, vol. 39, n° 6, p.1305-1313.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur RAYNAUD Martin, Professeur, Centre Thermique de
l'INSA de Lyon, VILLEURBANNE,**

**Monsieur GIOVANNINI Martin, Professeur, Université Paul
Sabatier, TOULOUSE.**



Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur BENDADA Abdelhakim

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Tomographie infrarouge stielée.

Estimation d'une résistance d'interface non uniforme"

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
LORRAINE**

Spécialité : **"MÉCANIQUE ET ENERGÉTIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **17 Mai 1995**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIUS

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'M. Lucius', is written over a horizontal line.

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

RESUME : Les résistances thermiques d'interface sont la conséquence d'une discontinuité structurale entre deux matériaux. Des exemples peuvent être trouvés dans les délaminages au sein de composites laminés ou dans les applications de soudage où on cherche à avoir des assemblages parfaits entre deux matériaux. Ces discontinuités structurales peuvent être caractérisées en utilisant la thermographie infrarouge stimulée.

La profondeur et la résistance de contact d'un défaut dans un matériau peuvent être identifiées en utilisant des méthodes basées sur la transformation de Laplace en temps pour les cas où le transfert de chaleur peut être considéré comme uni-directionnel (défauts très étendus). Il est proposé ici d'étendre les méthodes précédentes aux cas où le transfert de chaleur ne peut être considéré comme uni-directionnel. Dans ce but, une transformation de Fourier spatiale est appliquée à la transformée de Laplace en temps du signal produit par une caméra infrarouge. Grâce à l'emploi des quadripôles thermiques 2D et 3D, une solution explicite du problème peut être trouvée. Un développement asymptotique (méthode des perturbations) permet la construction d'une solution approchée, très commode pour l'inversion. Dans le cas où la résistance d'interface est continûment non uniforme, une relation explicite entre la transformée de Laplace-Fourier du contraste et la transformée de Fourier de la distribution de la résistance peut être trouvée dans le cadre d'un transfert 2D. L'inversion de cette relation fournit un algorithme explicite très commode qui permet d'estimer le profil de résistance. Des exemples numériques et expérimentaux ont été présentés : ils montrent la robustesse des techniques d'inversion développées.

MOTS CLES : Contrôle non destructif, Thermographie infrarouge, Résistance d'interface, Impulsionnel, Photothermique, Radiométrie, Composites, Méthodes inverses.

ABSTRACT : Interface thermal resistances are the consequence of a structural discontinuity between two materials. Examples can be found in delaminations inside composite laminates or in welding applications where one looks for perfect bonding between two materials. These structural discontinuities can be possibly characterized using stimulated infrared thermography.

The depth and the contact resistance of a defect within a material can be identified using methods based on time Laplace transformation for cases where heat transfer can be considered as one-dimensional (very extended defects). It is proposed here to extend the preceding methods to cases where heat transfer cannot be considered as one-dimensional anymore. In that purpose, a space Fourier transform is applied to the time Laplace transform of signal produced by an infrared scanning analyzer. Thanks to the use of 2D and 3D thermal two-port networks, an explicit solution can be found. An asymptotic expansion (method of perturbations) allows the construction of an approximate solution that is very convenient for inversion. In the case where the interface resistance is continuously non uniform, an explicit relationship can be found between the Laplace-Fourier transform of the contrast and the Fourier transform of the resistance distribution. Inversion of this relationship provides a very convenient explicit algorithm that allows the estimation of the resistance profile. Numerical and experimental examples have been presented : they show the robustness of the inversion techniques developed.

KEY WORDS : Non destructive testing, Infrared thermography, Interface resistance, Impulsionnal, Photothermal, Radiometry, Composites, Inverse methods.