



HAL
open science

Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application aux graphes d'aspects d'objets courbes

Sylvain Petitjean

► To cite this version:

Sylvain Petitjean. Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application aux graphes d'aspects d'objets courbes. Mathématiques générales [math.GM]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1995. Français. NNT : 1995INPL026N . tel-01751230

HAL Id: tel-01751230

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751230>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

13600 + 9 365

95 IN PL 026 N

Institut National Polytechnique de Lorraine

Département de Formation Doctorale en Informatique

École Doctorale IAE + M

Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application aux graphes d'aspects d'objets courbes

[M] 1995 PETITJEAN, S.

THÈSE

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

présentée et soutenue publiquement le 10 mars 1995

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
(Spécialité Informatique)

par

Sylvain Petitjean

Composition du jury

Président : Roger Mohr, Professeur à l'ENSIMAG

Rapporteurs : Jan Koenderink, Professeur à l'université d'Utrecht
Jean Ponce, Professeur à l'université de l'Illinois à Urbana-Champaign
Marie-Claude Portmann, Professeur à l'INPL

Examineurs : Bernard Teissier, Directeur de recherche au CNRS
Gérald Masini, Chargé de recherche au CNRS

Centre de Recherche en Informatique de Nancy
INRIA-Lorraine

Résumé

Les entités algébriques sont abondamment utilisées en vision par ordinateur. La géométrie algébrique est la branche des mathématiques dont le but est l'étude en toute généralité des propriétés de fonctions reliées par des équations polynomiales, d'où sa pertinence en vision. Pourtant, les coopérations passées entre ces deux domaines sont restées faibles en comparaison des techniques puissantes mises au point dans l'étude des variétés algébriques, cela étant dû probablement au haut niveau d'abstraction de la géométrie algébrique moderne. Nous effectuons ici un premier pas dans le sens d'une plus grande interaction. En nous penchant plus spécifiquement sur la géométrie énumérative et la théorie de l'intersection, nous étudions le contact de droites et de plans avec des variétés projectives. En particulier, et cela constitue le noyau du document, nous travaillons sur la complexité des événements visuels intervenant dans la construction de graphes d'aspects d'objets courbes lisses et lisses par morceaux. Nous concluons ensuite sur le nombre de vues topologiquement distinctes d'un objet. Plus généralement, nous vérifions des résultats donnés par d'autres techniques et en calculons beaucoup de nouveaux, notre méthode ayant le double avantage de pouvoir en grande partie s'automatiser et de fournir des résultats exacts. Les perspectives de recherche sont nombreuses et variées, tant d'un point de vue mathématique que du point de vue de la vision par ordinateur.

Mots-clés: géométrie algébrique, géométrie énumérative, théorie de l'intersection, surfaces algébriques, graphes d'aspects.

Abstract

Algebraic objects are widely used in computer vision. Algebraic geometry is the branch of mathematics whose goal is to study in full generality the properties of functions related by polynomial equations, hence its relevance in vision. However, their past interactions have been sparse in comparison with the powerful techniques developed for studying algebraic varieties, probably due to the high level of abstraction of modern algebraic geometry. We take here a first step towards a greater cooperation between these two fields. Looking more specifically from the point of view of enumerative geometry and intersection theory, we deal with contacts of lines and planes with projective varieties. In particular, and this lies at the core of the document, we work on the complexity of the visual events coming up in the construction of aspect graphs of smooth and piecewise-smooth surfaces. We then conclude on the number of topologically distinct views of an object. More generally, we check results that have been obtained using different methods and give many new ones, our method having the two-fold advantage that it can in large part be automated and that it gives exact results. Future research directions are numerous, both from a mathematical standpoint and from a computer vision standpoint.

Keywords: algebraic geometry, enumerative geometry, intersection theory, algebraic surfaces, aspect graphs.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean Ponce, et son partenaire de recherche David Kriegman, pour m'avoir donné le goût de la recherche et l'envie de poursuivre mes travaux en doctorat. Grâce à leur intuition, j'ai pu travailler dans un domaine à la frontière des mathématiques et de l'informatique qui devrait connaître de nombreux développements à l'avenir. Jean Ponce m'a en outre fait le plaisir de rapporter ma thèse, et ceci alors que mes travaux théoriques sur les graphes d'aspects sont un peu éloignés de ses préoccupations.

Je suis aussi reconnaissant à Jan Koenderink pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse. Créateur, avec Andrea van Doorn, du concept de graphe d'aspects il y a presque deux décennies, son travail et ses publications ont été pour moi une constante source d'inspiration, par la profondeur des idées émises et la qualité des illustrations.

Merci à Roger Mohr pour sa confiance, son soutien et pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Merci à Marie-Claude Portmann pour avoir bien voulu être mon rapporteur interne, rôle éminemment ingrat compte tenu du sujet éloigné de ses thèmes de recherche actuels.

Merci enfin à Bernard Teissier, qui apporte son regard de mathématicien spécialiste de géométrie algébrique sur mon travail, et à Gérard Masini, tous deux examinateurs de ma thèse.

Mon travail n'aurait pas été le même sans les discussions fructueuses que j'ai pu avoir avec Olivier Faugeras, David Forsyth et surtout Joachim Rieger, qui m'a permis de consulter ses derniers résultats avant même leur publication.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes compagnons de route, Alain, Antoine, Brigitte, Bubulle, Didier, Edmond, Malika, Naïma, Vincent, qui, plus que des collègues, ont avant tout su être des amis. Merci à tous les membres de l'équipe MOVI pour leur accueil et leur aide et à Isabelle Herlich, notre secrétaire, pour sa disponibilité de chaque instant. Merci à Karl Tombre et Denis Røgel pour leur aide si précieuse dans la préparation de ce document. Enfin, que ceux dont le chemin a croisé le mien et que j'aurais par mégarde oublié me pardonnent et trouvent ici l'expression de mon amitié sincère.

*À ma famille
À mes parents
À mes frères et sœurs
À la vie*

Table des matières

Introduction	1
Partie I Théorie de l'intersection et géométrie énumérative	5
Chapitre 1 Géométrie algébrique: quelques définitions	7
1 Bases	7
2 Faisceaux et fibrés	8
3 Séquences exactes	9
4 Cohomologie à coefficients dans un faisceau	10
5 Diviseurs et équivalence linéaire	10
6 Singularités et ramifications	11
7 Bilan	11
Chapitre 2 Intersection et énumération	13
1 Concepts de base: cycles et actions	14
2 Classes et produit d'intersection	14
3 Faisceaux et classes de Chern	16
4 Fibrés projectifs	19
5 Quelques exemples	20
6 Bilan	22
Chapitre 3 Théorie des points multiples	23
1 Points multiples en géométrie algébrique	24
2 Implantation de la méthode itérative	29
3 Prédiction de la forme des formules de points multiples	34
4 Bilan	44
Chapitre 4 Points multiples et applications	45
1 Invariants numériques et caractères projectifs	46
2 Espaces de paramètres	53
3 Surfaces réglées	57

4	Bilan	62
Partie II Graphes d'aspects d'objets courbes lisses et lisses par morceaux		63
Chapitre 5 Définition générale		65
1	Événements visuels	67
2	Classification des points de vue singuliers de codimension 1	70
3	Quelques commentaires	75
4	Bilan	77
Chapitre 6 Contacts de variétés linéaires avec des variétés projectives		79
1	Contacts de droites avec courbes gauches et surfaces	80
2	Contacts de plans avec courbes gauches et surfaces	85
3	Bilan	92
Chapitre 7 Validité et application de l'approche		93
1	Validité de l'utilisation de la théorie des points multiples et schémas de Hilbert	94
2	Théorie des points multiples et facteur de surcompte	98
3	Implantation d'une procédure de calcul	99
4	Résultats préliminaires	101
5	Intersections et caractères projectifs	105
6	Congruences visuelles	107
7	Silhouettes et faux-plis	111
8	Surfaces duales : approche indirecte	113
9	Bilan	114
Chapitre 8 Graphes d'aspects et géométrie énumérative		115
1	Graphes d'aspects d'objets lisses	116
2	Graphes d'aspects d'objets lisses par morceaux	124
3	Deux cas particuliers	133
4	Conclusion sur le nombre de vues d'un objet	135
5	Bilan	135
Partie III Contacts de droites dans \mathbb{P}^m et coïncidence de complexes		137
Chapitre 9 Contacts de droites dans \mathbb{P}^4		139
1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 4)$	140
2	Espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^4	141
3	Contacts de droites avec un volume	142
4	Contacts de droites avec une surface	147
5	Contacts de droites avec une courbe	152

6	Bilan	153
Chapitre 10 Contacts de droites dans \mathbb{P}^5		155
1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 5)$	155
2	Contacts de droites avec une hypersurface	156
3	Contacts de droites avec une surface	159
Chapitre 11 Contacts de droites dans \mathbb{P}^6		163
1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 6)$	163
2	Contacts de droites avec une surface	164
Chapitre 12 Formules énumératives pour les pincesaux de droites		167
1	Cadre de travail	167
2	Validité de l'approche	168
3	Anneau de Chow de I	168
4	Théorie de l'intersection	169
5	Résultats	170
6	Bilan	174
Géométrie algébrique en général, conclusions et perspectives		175
Chapitre 13 Géométrie algébrique en général et vision par ordinateur		177
1	Invariants algébriques	177
2	Géométrie algébrique réelle	178
3	Géométrie projective et méthodes classiques	180
4	Bilan	181
Chapitre 14 Conclusions et perspectives		183
1	Contributions	183
2	Perspectives	184
3	Synthèse	187
Annexes		189
Annexe A Formules de points multiples stationnaires		189
1	Classes en codimension 0	189
2	Classes en codimension 1	190
3	Classes en codimension 2	191
4	Classes en codimension 3	191
Bibliographie		193

Table des matières

Liste des figures	201
Liste des tableaux	203

Introduction

À ce jour, la plupart des systèmes de reconnaissance d'objets tridimensionnels ont utilisé des polyèdres comme modèles d'objets, avec les avantages, entre autres, que la structure de leurs projections est facile à comprendre et que la plupart de leurs indices sont indépendants du point de vue. Malheureusement, le monde est plein d'objets courbes, lisses et lisses par morceaux, qui possèdent des indices éminemment dépendants de la position de l'observateur. Ces dernières années ont vu les domaines d'application des systèmes de reconnaissance s'élargir pour prendre en compte des représentations d'objets plus expressives, et le problème se pose de savoir quels types d'objets courbes manipuler.

Citant [Negahdaripour et Jain, 1991] dans le rapport final de l'atelier NSF *Challenges in Computer Vision*, « La recherche inter-disciplinaire avec des chercheurs en algorithmique mathématique est à encourager. Des méthodes récentes utilisant la théorie des invariants, l'algèbre informatique et la géométrie algorithmique promettent d'être très utiles pour approcher des problèmes comme la mise en correspondance (*matching*) ou l'indexation. » Si ces méthodes ont commencé à être utilisées, d'autres, qui semblent tout aussi prometteuses, n'ont pas encore vu leurs concepts introduits en vision par ordinateur, ou alors dans des proportions faibles compte tenu de leur puissance.

La géométrie algébrique a pour but de discuter en toute généralité les propriétés des variétés algébriques dans des espaces projectifs et semble un excellent candidat pour de possibles interactions. Le premier problème à se poser est probablement celui de sa pertinence en vision. Il n'est pas nécessaire de développer le fait que la géométrie est la base de la vision par ordinateur. Il suffit de considérer par exemple les discontinuités d'intensité dans les images (les contours), qui peuvent être presque entièrement décrites en termes de relations géométriques, ou encore la très large utilisation des géométries projective et différentielle récemment. La raison principale pour laquelle la géométrie algébrique n'a pas encore vu ses immenses possibilités exploitées en vision par ordinateur est probablement son haut niveau d'abstraction. Notons tout de même que la géométrie projective a principalement été pertinente en vision sous sa forme algébrique (l'idée est d'introduire les coordonnées dès le début et de procéder ensuite en définissant les entités géométriques comme des équations en les coordonnées).

Pour ce qui concerne l'algébricité, considérons certaines entités. Les systèmes de droites ont été étudiés en rapport avec le problème de la reconstruction par appariements de droites. Les courbes algébriques sont intéressantes d'abord comme courbes sur des surfaces (frontière entre ombre et lumière, intersection entre deux surfaces qui s'interpénètrent) et ensuite en tant que description de certains phénomènes physiques utilisés pour interagir avec les solides (rayons de lumière par exemple). Récemment, les surfaces algébriques ont été de plus en plus utilisées ; elles sont prometteuses car beaucoup de surfaces du monde réel sont bien approximées par des morceaux de ces surfaces et car les contraintes géométriques qui leur sont associées sont elles-mêmes algébriques. En outre, il existe une raison plus profonde qui justifie l'utilisation de fonctions polynomiales. Celles-ci sont des types particuliers de fonctions analytiques (séries entières convergentes), qui elles-mêmes sont des types particuliers de fonctions C^∞ . Ces trois types différents de fonctions ont chacun leur branche mathématique propre : géométrie algébrique, géométrie analytique, et géométrie et topologie différentielle respectivement. L'étude des graphes d'aspects d'objets courbes, dont nous voyons une facette dans ce document, requiert, dans son intégralité, des résultats et des techniques de ces trois branches. Par exemple, le travail sur la stabilité des projections de surfaces a été effectué dans le contexte de la géométrie analytique et de la topologie différentielle. Par contre, les seules méthodes effectives permettant actuellement d'obtenir des propriétés géométriques *globales* relèvent de la géométrie algébrique. À notre sens, ce fait justifie à lui seul l'approche algébrique.

En juin 1993, une école d'été intitulée *Géométrie algébrique et vision par ordinateur* eut lieu à Nice, France [Laksov, 1993]. Son but était double : d'abord permettre aux chercheurs en vision théorique de présenter leurs problèmes sous des formes compréhensibles par les mathématiciens et ensuite faire expliquer aux géomètres les techniques susceptibles d'être utilisées en vision. Cette école montra à quel point il y avait un besoin d'interaction plus forte entre les deux domaines. Les géomètres algébristes se rendirent compte à cette occasion que la littérature classique, quelque peu passée de mode en géométrie algébrique moderne, est toujours très utile à la communauté vision. Une conclusion fut également que remettre ces idées anciennes dans un cadre de travail moderne pourrait bénéficier à beaucoup de chercheurs.

Nous considérons donc comme acquis le fait que la géométrie algébrique peut jouer un rôle intéressant en vision par ordinateur. Pourquoi alors ses techniques n'ont-elles pas connu de développements plus importants, ne serait-ce qu'en vision théorique ? La raison principale tient à notre avis au haut niveau d'abstraction de la géométrie algébrique moderne. Contrairement à d'autres domaines, comme la géométrie différentielle plus « naturelle », la géométrie algébrique demande un investissement très important afin d'en saisir les tenants et les aboutissants. Le jeu en vaut pourtant la chandelle.

Dans ce document, nous avons cherché à franchir un premier pas dans le sens d'une coopération entre ces deux domaines, si éloignés et pourtant si proches. Nous nous sommes intéressés à une branche de la géométrie algébrique dont la caractéristique principale est de travailler avec des entités géométriques algébriques sans jamais manipuler leurs équations sous-jacentes : la théorie de l'intersection et sa jumelle la géométrie énumérative, dont le but est de généraliser le fameux théorème de Bezout à des dimensions supérieures, afin de compter le nombre de solutions de systèmes d'équations polynomiales. Il est difficile de parler d'état de l'art dans ce domaine pour les raisons que nous avons indiquées, et plutôt que d'y consacrer un chapitre, nous mentionnerons les travaux passés dans ce domaine au moment où nous aborderons les notions correspondantes.

Les fondements de la géométrie algébrique sont présentés dans le Chapitre 1 de la Partie I. Cette introduction permet simplement de fixer les bases de notre étude, mais ne saurait remplacer la lecture d'un des manuels de base du domaine. Vient ensuite, au Chapitre 2, la théorie de l'intersection à proprement parler, dont les fondements reposent sur la notion de cycle, de classe de cycles et de produit d'intersection. Nous explorons alors dans le Chapitre 3 une des voies dans laquelle la théorie de l'intersection s'est spécialisée, connue sous le nom de théorie des points multiples. Un point multiple d'une fonction est un point qui possède au moins un jumeau ayant la même image par cette fonction. Certains résultats énumératifs proviennent de l'application de cette théorie à des fonctions bien particulières. Nous présentons la première implantation d'une des deux techniques de points multiples populaires en géométrie énumérative. Nous essayons également de décrire la forme des formules obtenues. Pour conclure cette partie, nous introduisons dans le Chapitre 4 quelques variétés particulièrement intéressantes pour la suite du document et établissons certains résultats préliminaires.

La Partie II aborde le sujet qui a véritablement motivé notre investigation, les graphes d'aspects d'objets courbes. Cette représentation d'un objet consiste en une énumération de toutes ses vues topologiquement distinctes et est présentée dans le Chapitre 5. Après avoir montré que pour un type de projection donné, cela correspond à partitionner l'espace des points de vue en cellules maximales, nous définissons les variétés algébriques réalisant ce partitionnement, la traversée d'une de ces variétés donnant lieu à un événement visuel. En particulier, nous voyons que ces événements surviennent lorsque le point de vue est situé sur des droites d'un type particulier, le type étant régi par les contacts que cette droite possède avec la surface.

Souhaitant étudier la complexité globale du graphe d'aspects, et donc du partitionnement, nous nous penchons tout d'abord sur le cas des surfaces algébriques lisses dans un espace projectif à trois dimensions, les types de droites à regarder étant ici au nombre de cinq. Toutefois, d'un point de vue global, les surfaces polynomiales sont très rigides, contrairement aux fonctions C^∞ . En particulier, si des portions de deux de ces surfaces coïncident localement sur un ouvert de l'espace, alors elles coïncident globalement. À cause de cette propriété de « rigidité », un changement local a invariablement des conséquences globales, et il est impossible de modéliser certaines surfaces naturelles intéressantes. Ce problème peut

être évité en travaillant avec des surfaces lisses par morceaux, c.-à-d. des assemblages de surfaces lisses s'intersectant deux à deux transversalement le long de courbes doubles et possédant des points triples isolés. La classification des projections de ces surfaces a été complétée récemment, et il en ressort que les événements visuels surviennent le long de droites de dix-neuf types différents, rendant ce cas éminemment plus compliqué que le cas lisse.

Nous introduisons un cadre de travail permettant d'étudier la complexité de ces ensembles de droites dans le Chapitre 6. Cela revient essentiellement à identifier des espaces paramétrant les droites passant par des points de la surface, ce que nous appelons des variétés de drapeaux, et à trouver des sous-ensembles de points multiples de certaines fonctions entre ces variétés. Nous montrons que le procédé peut être en grande partie automatisé, ce que nous avons fait, dès lors que la théorie de l'intersection a été donnée sur ces variétés. L'approche a le mérite de donner des résultats exacts, contrairement aux approches précédentes. En outre, le cadre de travail introduit pourrait théoriquement être utilisé pour manipuler des surfaces plus complexes que les surfaces lisses par morceaux, mais la classification des projections pour ces surfaces n'est à l'heure actuelle pas encore achevée. Des applications préliminaires de ces techniques sont présentées dans le Chapitre 7, alors que la complexité des événements visuels et des graphes d'aspects est étudiée en profondeur dans le Chapitre 8.

D'autres applications de la théorie des points multiples stationnaires sont abordées dans la Partie III. Plus éloignées de la vision, elles concernent d'une part des calculs énumératifs sur des contacts de droites avec des variétés dans des espaces projectifs de dimension quatre (Chapitre 9), cinq (Chapitre 10) et six (Chapitre 11), et d'autre part des formules de coïncidence pour des pinceaux de droites (Chapitre 12). Là aussi, le premier avantage de la méthode est de très bien se prêter à une mise sous forme d'algorithme. Nous vérifions des résultats, certains récents, d'autres ayant plus d'un siècle, obtenus par des méthodes bien différentes de la nôtre.

Pour finir, et ceci avant de conclure et de donner nos perspectives de recherche future, nous revenons sur les interactions passées entre géométrie algébrique et vision par ordinateur, notamment du point de vue de la géométrie projective, et examinons certaines idées qui devraient, nous le pensons, rapidement trouver des applications. Certaines de ces idées concernent la théorie des invariants algébriques et la géométrie algébrique algorithmique. Nous espérons ainsi avoir survolé le domaine, en cherchant moins à être exhaustif qu'à inviter le lecteur au voyage.

Nous tenons à attirer l'attention sur le fait que nous avons eu dans ce document à franciser un nombre important de termes couramment utilisés en géométrie algébrique et en théorie de l'intersection. Les publications dans ce domaine s'effectuant majoritairement en langue anglaise, beaucoup de traductions nous étaient inconnues et nous avons dû en proposer. Afin de respecter le sens des termes originaux, nous avons donc choisi, lorsque la traduction n'était pas naturelle, d'indiquer entre parenthèses le mot anglais équivalent.

Pour finir, une précision sur les notations. Dans le corps du document, une référence à une proposition $a.b.c$ signifie que l'on utilise un résultat établi dans la c -ième proposition du chapitre a , paragraphe b . Les figures étant moins nombreuses, une mention à la figure $a.b$ est une référence à la b -ième figure du chapitre a . Enfin, le symbole \square désigne une fin de preuve.

Partie I

Théorie de l'intersection et géométrie énumérative

La théorie de l'intersection et la géométrie énumérative sont deux sœurs jumelles. Inséparables, la première donne à la deuxième des bases rigoureuses et un cadre de travail moderne, qui en retour lui ouvre un champ d'investigations riche et varié. La géométrie énumérative permet de compter, de manière exacte, le nombre de solutions de systèmes d'équations polynomiales. Elle le fait sans jamais manipuler les équations, mais plutôt en travaillant sur les entités géométriques sous-jacentes, et c'est ce qui constitue sa beauté et sa force.

Dans cette partie, nous entrons progressivement dans le vif du sujet. Nous commençons par donner quelques définitions fondamentales concernant les entités que nous manipulerons dans le reste de ce document. Lorsque cela fut possible, nous avons privilégié une introduction intuitive à une définition formelle, permettant ainsi au lecteur, nous l'espérons, de « sentir » les phénomènes qui interviennent. Malgré tout, cette brève entrée en matière ne saurait en aucun cas se substituer à un des ouvrages de base en géométrie algébrique. Nous ne manquerons d'ailleurs pas de mentionner les sources qui font autorité dans ce domaine. Nous passons ensuite à la théorie de l'intersection et à certains résultats clés de cette théorie. Nous nous intéressons dans le reste du document à une des voies dans laquelle la géométrie énumérative s'est spécialisée, la théorie des points multiples. Après avoir présenté cette théorie et son implantation, nous introduisons certains exemples de base, et obtenons bon nombre de résultats que nous appliquerons dans la Partie II à l'étude des graphes d'aspects.

Chapitre 1

Géométrie algébrique : quelques définitions

Contents

1	Bases	7
2	Faisceaux et fibrés	8
3	Séquences exactes	9
4	Cohomologie à coefficients dans un faisceau	10
5	Diviseurs et équivalence linéaire	10
6	Singularités et ramifications	11
7	Bilan	11

Commençons par introduire certaines des définitions dont nous nous servirons tout au long de ce document. Pour nous y aider, nous utilisons une classification des sujets établie par *Math Reviews* en 1991, où la géométrie algébrique apparaît sous la cote 14 – XX. Dans la suite, nous indiquerons lorsque cela est possible les cotes de *Math Reviews*. Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons qu’aux notions spécifiquement nécessaires à l’introduction de la théorie de l’intersection et de la géométrie énumérative. Les sujets plus algorithmiques, comme par exemple la géométrie algébrique réelle, qui nous le pensons devraient aussi connaître un essor en vision par ordinateur, sont relégués à la conclusion de ce document.

Le lecteur profitera pleinement de la lecture d’un des manuels de base du domaine. Pour une première approche, consulter [Semple et Roth, 1949; Hartshorne, 1977; Harris, 1992] et pour une compréhension plus poussée [Shafarevich, 1977; Griffiths et Harris, 1978].

Dans le reste du document, nous supposons que le corps de base est \mathbb{C} , le corps des nombres complexes. Cette restriction n’est pas à proprement parler fondamentale pour les paragraphes qui suivent. Néanmoins, tous les exemples que nous étudierons dans la Partie II se situent dans ce cadre. Un espace projectif de dimension m est dénoté par \mathbb{P}^m .

1 Bases

La géométrie algébrique moderne tire ses bases (14Axx) de l’algèbre commutative (14A05), des variétés (14A10) et des faisceaux et des schémas (14A15). Nous supposons que le lecteur est déjà familier avec les notions d’algèbre commutative.

Commençons donc par parler des entités de base manipulées en géométrie algébrique. Un *ensemble algébrique* est un sous-ensemble d'un espace euclidien défini par des équations polynomiales. Une *variété algébrique* est un sous-ensemble fermé irréductible d'un ensemble algébrique fermé. Hélas, il faut parfois travailler avec des ensembles algébriques possédant de multiples composantes et cela suggère de généraliser la notion de variété à celle de *schéma* (*scheme*), un travail entrepris par [Grothendieck et Dieudonné, 1971]. Ce concept permet d'inclure en outre une gamme d'objets bien plus large que simplement les variétés algébriques [Eisenbud et Harris, 1992]. Cette généralisation s'est montrée extrêmement utile, et par exemple elle permet d'appliquer certains concepts de géométrie différentielle (comme les changements infinitésimaux d'une sous-variété dans une variété algébrique) à la géométrie algébrique. Nous devons tout d'abord introduire la notion de faisceau, base de la théorie des schémas.

La *théorie des faisceaux* (*sheaf theory*) [Godement, 1958] est un outil systématique pour relier les aspects algébriques, topologiques et géométriques d'une variété algébrique ; les faisceaux donnent un moyen systématique de « suivre » des données algébriques locales. Formellement, un faisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X associe à chaque ouvert $U \subset X$ un groupe $\mathcal{F}(U)$ des *sections* de \mathcal{F} sur U , et à chaque paire $U \subset V$ d'ouverts une fonction $\rho_{VU} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ satisfaisant :

1. Pour chaque triplet $U \subset V \subset W$ d'espaces ouverts,

$$\rho_{WU} = \rho_{VU} \circ \rho_{WV}.$$

En vertu de cette relation, on peut écrire $\sigma|_U$ pour la section $\rho_{VU}(\sigma)$ sans perdre d'information.

2. Pour toute paire d'ouverts $U, V \subset X$ et de sections $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$ telles que

$$\sigma|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V},$$

il existe une section $\alpha \in \mathcal{F}(U \cup V)$ avec $\alpha|_U = \sigma$ et $\alpha|_V = \tau$.

3. Si $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ et $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$, alors $\sigma = 0$.

Grossièrement, les faisceaux paramétrisent des ensembles de fonctions prenant leurs valeurs dans une variété. Par exemple, les fonctions continues à valeurs réelles sur un espace topologique forment un faisceau, de même que les fonctions différentiables sur un manifold différentiable. Sans entrer plus dans les détails, un schéma X est alors équipé d'un *faisceau de structure* Θ_X , qui est le faisceau des fonctions régulières sur X .

2 Faisceaux et fibrés

Un faisceau \mathcal{E} sur un schéma X est dit *libre* s'il est isomorphe à une somme directe de copies du faisceau de structure Θ_X . Il est dit *localement libre* si X peut être couvert par des ouverts U pour lequel $\mathcal{E}|_U$ est libre. Dans ce cas, on appelle *rang* de \mathcal{E} sur un tel ouvert le nombre de copies de Θ_X utilisé (fini ou infini). Un faisceau localement libre de rang 1 est dit *inversible*.

Dans la suite, nous parlons alternativement de faisceau localement libre et de *fibré* (ou *fibré vectoriel*). En fait, ces deux notions sont équivalentes : les classes d'isomorphisme de faisceaux localement libres sont en correspondance point par point avec les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels. Si E est un fibré sur X , on écrit $\Theta_X(E)$ pour le faisceau localement libre associé, qui est le faisceau des sections de E . Si $\Theta_X(E)$ est de rang 1, E est appelé *fibré en droites*. On dit alors qu'un fibré E de rang r se partage en fibrés en droites s'il existe une filtration de E en sous-fibrés E_i

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_r = E,$$

et si les E_i/E_{i-1} sont des fibrés en droites.

Il est possible de définir des opérateurs sur des faisceaux. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Pour un faisceau \mathcal{F} sur X , on définit le faisceau *image directe* sur Y par $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ pour tout ouvert V de Y . Si \mathcal{G} est un faisceau sur Y , on introduit aussi le faisceau *image inverse*, dénoté $f^*\mathcal{G}$, comme étant le produit tensoriel $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X}$.

Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} deux faisceaux sur X . Pour tout ouvert $U \subset X$, l'ensemble $\text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)$ des morphismes entre les faisceaux restreints a une structure naturelle de groupe abélien. $U \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)$ est ainsi un faisceau, appelé *faisceau des morphismes* de \mathcal{E} dans \mathcal{F} et dénoté $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. On définit alors le *dual* d'un faisceau \mathcal{E} , dénoté $\check{\mathcal{E}}$, comme étant le faisceau $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.

Le faisceau des formes différentielles relatives d'un schéma X par rapport à un schéma Y s'écrit $\Omega_{X/Y}$. Si $Y = k$ est un corps algébriquement clos et si X est de dimension n , alors $\Omega_{X/k}$ est localement libre de rang n si et seulement si X est lisse. Le *faisceau tangent* à X est alors défini par $\mathcal{T}_X = \text{Hom}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$, et est localement libre de rang n . Le *faisceau canonique* de X est le n -ième produit extérieur de $\Omega_{X/k}$, c.-à-d. $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ et est inversible sur X . Soit maintenant Y un sous-schéma d'un schéma X et $i : Y \rightarrow X$ l'inclusion. On définit le *faisceau idéal* de Y , dénoté \mathcal{I}_Y , comme étant le noyau du morphisme $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$. Le faisceau $\mathcal{N}_{Y/X} = \text{Hom}(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2, \mathcal{O}_Y)$ est alors appelé *faisceau normal* de Y dans X . Ce faisceau donne une idée de la manière dont Y est plongé dans X .

Si $f : X \rightarrow Y$ est *lissable*, c.-à-d. peut être factorisée en

$$X \xrightarrow{g} P \xrightarrow{h} Y,$$

où g est un plongement et h est lisse, alors en posant $f^* = g^*h^*$ (f^* est indépendant de la factorisation), f possède un *faisceau normal virtuel*, défini par

$$\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g - g^*\mathcal{T}_{P/Y},$$

$\mathcal{T}_{P/Y}$ étant le *faisceau tangent relatif* $\mathcal{T}_P - h^*\mathcal{T}_Y$.

Soit S un anneau *gradué*, à savoir venant avec une décomposition $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ en une somme directe de groupes abéliens S_d qui sont tels que pour tout couple $d, e \geq 0$, $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$. Pour tout entier positif n , on définit le *module tordu* (*twisted module*) $S(n)$ comme étant la somme directe des $S(n)_d$, où $S(n)_d = S_{n+d}$. Soit S_+ la somme $\bigoplus_{d > 0} S_d$, et X l'ensemble de tous les idéaux premiers homogènes qui ne contiennent pas S_+ en entier. Alors on définit $\Theta_X(n)$ comme étant le faisceau de structure de $S(n)$ sur X , pour $n \in \mathbb{Z}$. Ce faisceau possède des propriétés intéressantes. Par exemple, $\Theta_X(n)$ est inversible sur X . En outre,

$$\Theta_X(n) \otimes \Theta_X(m) \cong \Theta_X(n+m),$$

pour $n, m \in \mathbb{Z}$. D'après cette propriété, le plus important d'entre les $\Theta_X(n)$ est $\Theta_X(1)$, appelé *faisceau tordu* ou *faisceau tautologique*, et nous verrons qu'il est possible de le relier à des informations géométriques importantes sur X .

3 Séquences exactes

Soit $(A_j)_{j \in J}$ un ensemble de groupes abéliens finis indexé par un intervalle J de \mathbb{Z} et pour chaque index $j \in J$ tel que $j+1 \in J$, soit f_j un homéomorphisme de A_j dans A_{j+1} . Nous avons ainsi la séquence suivante :

$$\cdots \xrightarrow{f_{j-1}} A_j \xrightarrow{f_j} A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} A_{j+2} \xrightarrow{f_{j+2}} \cdots$$

Nous disons que cette séquence est *exacte* si pour tout $j \in J$ tel que $j+2 \in J$, on a $\ker f_{j+1} = \text{Im } f_j$. Nous omettrons souvent d'écrire les homéomorphismes. Si $j = (1, \dots, n)$, alors on peut démontrer la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \text{rang } A_i = 0.$$

Cette définition s'étend de manière immédiate aux faisceaux. Si $Z \subset Y \subset X$ est une chaîne de plongements réguliers, il existe une séquence exacte de faisceaux normaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{Z/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/X} \rightarrow i^* \mathcal{N}_{Y/X} \rightarrow 0.$$

Soit Y un sous-schéma de X et notons i l'inclusion. Alors on a la séquence exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_Y \rightarrow i^* \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \rightarrow 0.$$

Plus généralement, si

$$0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$$

est une séquence exacte, alors toutes les séquences suivantes sont exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}') \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}'') \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{E}' \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}'' \otimes \mathcal{F} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4 Cohomologie à coefficients dans un faisceau

Parlons ici brièvement des *espaces de cohomologie* $H^q(X, \mathcal{E})$, $q \geq 0$, d'un espace X dans un faisceau \mathcal{E} . Le groupe $H^0(X, \mathcal{E})$ est naturellement isomorphe au groupe des sections de \mathcal{E} sur X . On définit alors la *caractéristique d'Euler* de \mathcal{E} par la quantité :

$$\chi(X, \mathcal{E}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{E}),$$

et on écrit $\chi(\mathcal{E})$ lorsque la référence à X est implicite. Le *genre arithmétique* de X , de dimension n , est alors défini par :

$$p_a(X) = (-1)^n (\chi(\Theta_X) - 1).$$

5 Diviseurs et équivalence linéaire

La notion de *diviseur* forme un outil important pour étudier la géométrie intrinsèque (en clair, ne dépendant pas d'un plongement particulier - par opposition à extrinsèque = projective) sur une variété. Un diviseur d'une variété est un élément du groupe abélien libre des collections de sous-variétés de codimension 1 à coefficients entiers. Sur ce groupe, une relation d'équivalence (cote 14C10) peut alors être définie et un ensemble de diviseurs linéairement équivalents est appelé une *classe*. Intersecter deux diviseurs sur une surface consiste alors à compter le nombre de points d'intersections entre les deux courbes correspondantes.

En fait, à chaque diviseur D correspond un faisceau de rang 1, en d'autres termes un faisceau inversible, que nous notons $\mathcal{L}(D)$, et inversement. Tout diviseur dans la classe d'équivalence linéaire correspondant au faisceau canonique est appelé *diviseur canonique*, et dénoté K . Nous verrons que ce diviseur possède une importance toute particulière.

6 Singularités et ramifications

L'une des nombreuses applications de la géométrie algébrique est l'étude des *singularités* (14B05). Une singularité est essentiellement un point d'une application de \mathbb{C}^m dans \mathbb{C}^p décrite par des fonctions différentiables ou polynomiales qui a un comportement différent de celui que l'application a en un *point général*; par exemple, s'il s'agit d'une fonction, un point où toutes les dérivées de la fonction sont nulles est une singularité. De plus en plus, la théorie des singularités est reconnue comme une des pierres angulaires des mathématiques. Les singularités jouent un rôle important en analyse (fronts d'ondes), en théorie des systèmes dynamiques (bifurcations, catastrophes), en géométrie différentielle et algébrique (fonctions de Morse, classes caractéristiques) et encore en algèbre commutative. Singularités et *catastrophes* sont différents termes utilisés pour décrire l'émergence de structures discrètes à l'intérieur de structures lisses et continues. L'importance des courbes singulières est illustrée par la facilité avec laquelle l'être humain interprète une image de contours.

Nous venons incidemment d'introduire une notion que nous utiliserons abondamment dans ce document, celle de situation générale. De manière très simple, on dit d'une propriété qu'elle est *générale* ou *générique* si elle est valable dans un ouvert dense de l'espace des paramètres. Par exemple, le degré d d'une surface algébrique de \mathbb{P}^3 est le nombre de ses points d'intersection avec une droite générale. Cela est une propriété générique car l'ensemble des droites de \mathbb{P}^3 pour lesquelles l'intersection ne contient pas d points (comptés avec leur multiplicité) est de mesure 0. Pour désigner une telle droite (où en fait toute autre entité algébrique), nous disons aussi qu'elle est en position générale, ou encore si le contexte n'est pas ambigu, qu'elle est donnée ou fixée. Une autre exemple de propriété générique est celui de la transversalité. L'intersection de deux surfaces de \mathbb{P}^3 prises au hasard est transversale, et la probabilité que cela ne soit pas le cas est nulle. Pour une élaboration sur ce thème, voir [Bruce, 1993].

Le mot *ramification* (cote 14E22) a un sens similaire à celui de singularité, mais il est utilisé pour désigner les discontinuités de l'image d'un ensemble par une application. Le lieu de ramification d'une fonction est le plus important des lieux singuliers d'une fonction. S'il est vide, alors la fonction est une immersion ou une submersion.

Ces quarante dernières années, la théorie des singularités a atteint un niveau de sophistication très élevé, et des outils développés dans le cadre de la géométrie algébrique, comme les schémas de Hilbert ou la théorie des points multiples, ont permis de mieux comprendre ces discontinuités. Nous verrons ces outils dans un moment.

Mentionnons une étude récente en vision qui s'appuie sur la théorie des singularités. Il s'agit du problème des formes *Sol y Sombra* [Henry et Merle, 1992], où les auteurs cherchent à unifier le traitement mathématique de trois entités géométriques différentes que l'on peut trouver dans des images : le contour apparent, la ligne d'ombre séparant l'ombre et la lumière, et l'ombre portée. Leur travail consiste ainsi à décrire les singularités de ce triplet de courbes.

7 Bilan

Nous avons ici brièvement introduit les entités de base manipulées en géométrie algébrique. De toute première importance sont les fibrés et les faisceaux, qui permettront de traiter des problèmes *a priori* algébriques et géométriques, comme les contacts de droites que nous rencontrerons, en termes topologiques.

Le terme de singularité sera bien souvent absent des calculs et des applications que nous aborderons dans ce document. Cela ne doit pourtant pas tromper le lecteur : la grande majorité des méthodes présentées plus loin ne sont en fait que des développements de la théorie des singularités. Il est tout à fait possible de voir la géométrie énumérative, que nous abordons maintenant, comme une spécialisation dans un cadre particulier de cette théorie, où une solution d'un système d'équations polynomiales est perçue comme un point singulier de l'ensemble des paramètres.

Chapitre 2

Intersection et énumération

Contents

1	Concepts de base : cycles et actions	14
2	Classes et produit d'intersection	14
3	Faisceaux et classes de Chern	16
3.1	Axiomes de définition	16
3.2	Quelques propriétés	17
3.3	Théorème de Riemann-Roch et adjonction	17
4	Fibrés projectifs	19
5	Quelques exemples	20
5.1	Formule de Riemann-Hurwitz	20
5.2	Caractéristique d'Euler d'une surface de \mathbb{P}^3	21
6	Bilan	22

La théorie de l'intersection (14C17) a une histoire riche et profonde. Elle a joué un rôle central en géométrie algébrique depuis son introduction par MacLaurin en 1720. MacLaurin affirma que deux courbes planes, définies par des équations de degré p et q , s'intersectent en pq points. Après les travaux de Cramer et Euler, cette assertion fut prouvée par Bezout en 1764, qui prouva également des résultats analogues dans d'autres dimensions. Il devint clair alors que le théorème de Bezout pouvait être utilisé pour relier les invariants numériques d'une variété (degré, genre, ...) à ses singularités, ce que Plücker fit en 1839 pour les courbes planes, ainsi que Salmon [Salmon, 1915] en 1847 pour les surfaces. Les origines de la théorie moderne sont dues à Schubert [Schubert, 1879] dans son fameux livre, qui aujourd'hui, plus de 110 ans plus tard, n'a pas encore livré tous ses secrets. Ses idées furent lentement développées, rendues plus précises et plus rigoureuses, par quelques-uns des plus grands mathématiciens de ce siècle comme Segre, Weil, Zariski, Severi, Chevalley, Hodge, Chow, Serre et Grothendieck. La théorie actuelle, sensiblement plus simple, est due à Fulton et MacPherson [Fulton, 1984], et il faut noter que leur point de vue est, de manière surprenante, très similaire à celui exprimé par Schubert. En outre, [Baker, 1933] et [Zariski, 1935] sont deux sources très riches d'informations sur la géométrie des surfaces.

La théorie de l'intersection a une sœur jumelle, la géométrie énumérative. Cette dernière est un sujet particulièrement fascinant, dont le but, selon Schubert, est de répondre aux questions du type suivant : combien d'entités (algèbro-) géométriques d'un type fixé satisfont certaines conditions géométriques données. La force de la géométrie énumérative est de trouver le nombre d'entités sans manipuler les entités elles-mêmes. La résolution de problèmes énumératifs a conduit à une compréhension plus profonde de la géométrie ordinaire, et au développement de nouveaux outils, comme la théorie des points multiples

des fonctions, que nous développerons dans le chapitre suivant. Notons que les techniques énumératives les plus récentes ont été récemment implantées en Maple, sous la forme d'un progiciel appelé *Schubert* [Katz et Stromme, 1992]. Pour une excellente introduction à l'utilisation de la théorie de l'intersection, le lecteur est invité à consulter [Xambó-Descamps, 1993]. Un résumé des évolutions de ces théories dans les années 80 se trouve dans [Kleiman, 1987]. Enfin [Kleiman, 1976] donne un tour d'horizon complet des notions de base du domaine.

1 Concepts de base : cycles et actions

Soit P et Q deux polynômes homogènes de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ de degré respectif p et q . Le théorème de Bezout dit que si l'ensemble des racines communes de P et Q est de dimension 0, alors il contient exactement pq points comptés avec leur multiplicité propre. La théorie de l'intersection généralise cette relation entre degré et multiplicité pour obtenir des analogues en dimension supérieure du théorème de Bezout.

Pour généraliser la notion d'intersection à des dimension supérieures, il faut introduire la notion de cycles ($14Cxx$) et d'équivalence rationnelle. Un *cycle de codimension k* d'une variété X est un élément formel du groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles de dimension k . Nous notons ce groupe $Z^k(X)$ et la somme directe des $Z^k(U)$ est dénotée par $Z^*(X)$, le symbole $*$ en haut signifiant que nous l'avons gradué par la codimension, ou plus simplement $Z(X)$ sans faire mention de la graduation. Un membre de $Z(X)$ est appelé un *cycle* de X . Dans les exemples que nous verrons, la variété X paramétrera certaines « figures géométriques ». Des cycles intéressants découlent alors naturellement de conditions imposées à ces figures. Une grande partie de la beauté de la géométrie énumérative consiste à donner un sens mathématique à ce processus.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés et W' un cycle sur Y . Alors on définit un cycle $W = f^*(W')$ comme étant le cycle associé à $f^{-1}(W')$. Nous disons alors que W est l'*image réciproque (pull-back)* de W' à X . Si maintenant W est un cycle sur X , définissons un cycle $f_*(W)$ sur Y . Si la fermeture W' de l'ensemble $f(W)$ est de dimension inférieure à W , alors on pose $f_*(W) = 0$. Sinon, soit p le degré du corps $K(W)$ des fonctions rationnelles de W sur le degré du corps $K(W')$ des fonctions rationnelles de W' , $K(W')$ étant plongé dans $K(W)$ par f^* . Alors on pose $f_*(W) = pW'$. Dans les exemples que nous considérerons dans ce document, p est en fait le nombre de points de W qui se projettent sur un point général de W' . Nous disons que le cycle $f_*(W)$ est l'*image (push forward)* de W dans $Z(Y)$ (ou encore dans certains cas appropriés la *projection* de W dans $Z(Y)$). Alternativement, nous employons l'expression « envoyer un cycle » pour désigner l'action de calculer son image. Si X ou Y ne sont pas lisses, il faut alors imposer une condition de *platitude* sur f afin de pouvoir définir f^* , notion difficile mais qui intuitivement désigne l'idée d'une certaine continuité entre deux fibres voisines de la fonction.

Étant donnés des cycles W_1, \dots, W_k sur une variété X , l'intersection $W = W_1 \cap \dots \cap W_k$ peut très bien posséder des composantes de dimensions différentes. Le but de la *théorie de la multiplicité* est d'attacher à chacune des composantes C de l'intersection une valeur $j_C(W)$ appelée *multiplicité* de W le long de C . Cette multiplicité ne doit dépendre que de X, W_1, \dots, W_k et C . La formule généralement admise aujourd'hui est due à Serre.

2 Classes et produit d'intersection

Sur $Z(X)$, il est possible de définir une relation d'équivalence, appelée *équivalence rationnelle*. Deux cycles sont en équivalence rationnelle s'ils appartiennent tous deux à une même famille de cycles paramétrée par la droite projective \mathbb{P}^1 . Modulo équivalence rationnelle, le groupe $Z^k(X)$ est appelé *k -ième groupe de Chow* de X et est généralement dénoté par $A^k(X)$. Une *classe de cycles* (que par abus de langage on

appelle parfois simplement un cycle) est un élément de la somme directe $A^*(X)$ des groupes de cycles de codimension k modulo équivalence rationnelle. Si X est lisse, alors $A^*(X)$ possède une structure d'anneau commutatif d'unité $[X]$ (*classe fondamentale* de X), et on le nomme *anneau d'intersection* ou *anneau de Chow* de X , lorsqu'il est équipé avec le produit d'intersection dont nous discutons plus loin. Notons que dans ce document nous avons utilisé une graduation des groupes de Chow selon la codimension, comme nous venons de le faire, mais il est possible d'utiliser une graduation selon la dimension et de définir similairement un anneau $A_*(X)$. Si α est un cycle de $Z^k(X)$, alors on note $[\alpha]$ la classe de $A^k(X)$ correspondante.

Si f est une fonction plate de codimension n ($= \dim Y - \dim X$), alors f_* induit un morphisme

$$f_* : A^k(X) \longrightarrow A^{k+n}(Y),$$

et f^* fait de même :

$$f^* : A^k(Y) \longrightarrow A^k(X).$$

Quelques propriétés du produit d'intersection sont suffisantes pour le rendre unique. Supposons que nous ayons un appariement :

$$A^r(X) \times A^s(X) \longrightarrow A^{r+s}(X), \quad (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha.\beta \tag{2.1}$$

pour toutes les variétés X appartenant à une certaine classe \mathcal{V} et pour tous les entiers r et s . Alors on dit que l'appariement (2.1) est une *théorie de l'intersection* pour \mathcal{V} si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $X \in \mathcal{V}$, le produit (2.1) fait de $A^*(X)$ un anneau gradué associatif et commutatif, possédant $[X]$ comme élément neutre pour la multiplication.
2. Étant données X et Y de \mathcal{V} et une fonction $f : X \longrightarrow Y$, alors la fonction $f^* : A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$ est un homéomorphisme d'anneaux. En outre, si $Z \in \mathcal{V}$ et si $g : Y \longrightarrow Z$ est une fonction, alors $f^*g^* = (fg)^*$.
3. *Formule de projection.* Si $X, Y \in \mathcal{V}$ et $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction propre, $\alpha \in A^*(X)$, $\alpha' \in A^*(Y)$, alors

$$f_*(\alpha.f^*\alpha') = f_*\alpha.\alpha'.$$

4. *Réduction à la diagonale.* Si $X \in \mathcal{V}$ et $\alpha, \beta \in A^*(X)$, alors

$$\alpha.\beta = \delta^*(\alpha \times \beta),$$

où $\delta : X \longrightarrow X \times X$ est la fonction diagonale.

5. *Nature locale.* Si $X \in \mathcal{V}$ et W, W' sont des sous-variétés de X qui s'intersectent proprement (chaque composante irréductible de $W \cap W'$ est de codimension égale à $\text{codim}(W) + \text{codim}(W')$), alors

$$[W].[W'] = \sum_C j_C(W, W')[C],$$

où la somme est sur toutes les composantes irréductibles C de $W \cap W'$ et où j_C est la multiplicité d'intersection.

6. *Normalisation.* Si W est une sous-variété de $X \in \mathcal{V}$ et D un diviseur de X qui intersecte W proprement, alors

$$[D].[W] = [D \cap W].$$

Une théorie de l'intersection sur une variété singulière ne peut pas avoir exactement les mêmes propriétés. Par exemple, il faut parfois supposer que les nombres d'intersection sont des rationnels.

Soit α un 0 -cycle (un cycle de codimension n) sur X . Le degré de α est le nombre entier δ tel que α soit rationnellement équivalent à δ fois un point. On note :

$$\delta = \int_X \alpha.$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas et $\alpha \in A^*(X)$, alors

$$\int_X \alpha = \int_Y f_* \alpha.$$

Nous omettrons souvent d'écrire l'espace sur lequel le degré est pris en indice. Maintenant, donner la théorie de l'intersection sur une variété particulière revient à être capable de prédire, étant données deux sous-variétés polynomiales P et Q sur X de dimension n , ou de manière équivalente leur cycle associé, le résultat de l'intersection de P et Q dans le groupe de Chow correspondant. Si l'ensemble des zéros de P et Q est de codimension r , alors $P.Q$ est un cycle de codimension r . Si $r = n$, alors $[P].[Q]$ est un 0 -cycle, c.-à-d. un nombre fini de points.

3 Faisceaux et classes de Chern

Nous voyons ici qu'il est possible d'attacher à un faisceau une série d'invariants, ses classes de Chern. En fait, cette relation généralise l'équivalence que nous avons rencontrée entre un diviseur et un faisceau inversible.

3.1 Axiomes de définition

Nous supposons qu'à tout faisceau \mathcal{E} sur une variété X de dimension n , il est possible d'associer des classes $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$. Il est clair tout d'abord que $c_i(\mathcal{E}) = 0$ si $i < 0$ et $i > n$, car $A^i(X) = 0$ pour ces indices. Soit encore $C_\omega(\mathcal{E})$ la quantité

$$C_\omega(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})\omega + \dots + c_n(\mathcal{E})\omega^n.$$

Alors il est possible de montrer que les classes $c_0(\mathcal{E}), \dots, c_n(\mathcal{E})$ existent et sont uniques si elles satisfont les axiomes suivants :

1. *Normalisation.* Si \mathcal{L} est un fibré en droites et D un diviseur tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$, alors

$$C_\omega(\mathcal{L}) = 1 + [D]\omega.$$

2. *Fonctorialité.* Si X et Y sont des variétés, $f : X \rightarrow Y$ une fonction et \mathcal{E}' un faisceau sur Y , alors

$$c_i(f^* \mathcal{E}') = f^* c_i(\mathcal{E}'),$$

pour tout i .

3. *Additivité.* Si $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ est une séquence exacte de faisceaux, alors

$$C_\omega(\mathcal{E}) = C_\omega(\mathcal{E}') \cdot C_\omega(\mathcal{E}'').$$

Cette relation est aussi connue sous le nom de *formule de Whitney* et est équivalente aux relations :

$$c_k(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^k c_i(\mathcal{E}') \cdot c_{k-i}(\mathcal{E}''), \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Les classes $c_i(\mathcal{E})$ ainsi obtenues sont appelées les *classes de Chern* de \mathcal{E} et la quantité $C_\omega(\mathcal{E})$ le *polynôme de Chern* de \mathcal{E} .

3.2 Quelques propriétés

De ces axiomes découlent beaucoup de propriétés. D'abord, si \mathcal{E} est de rang r , alors on peut montrer que $c_i(\mathcal{E}) = 0$ pour $i > r$. Le *principe de partage* affirme que pour calculer les classes de Chern de fibrés composés, il suffit de prétendre que ces fibrés se partagent en fibrés en droite. Supposons que E se partage en L_1, \dots, L_r et appelons $\alpha_i = c_1(L_i)$ les *racines de Chern* de E . Il découle de cela que

$$c_i(E) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad i \in \mathbb{Z},$$

où $\sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ est le i -ème polynôme symétrique en $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Il est clair par suite que les racines de Chern du fibré dual \tilde{E} sont $-\alpha_1, \dots, -\alpha_r$ et par suite :

$$c_i(\tilde{E}) = \sigma_i(-\alpha_1, \dots, -\alpha_r) = (-1)^i c_i(E).$$

Si E (rang r) et F (rang s) sont des fibrés de racines de Chern α_i et β_j respectivement, alors d'après la bilinéarité du produit tensoriel, les racines de Chern de $E \otimes F$ sont $\alpha_i + \beta_j$ ($1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$). Par suite [Fulton, 1984] :

$$C_\omega(E \otimes F) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} (1 + (\alpha_i + \beta_j)\omega).$$

Si $S^i E$ dénote la i -ème puissance symétrique de E , on a :

$$C_\omega(S^i E) = \prod_{\substack{m_1 + \dots + m_r = i \\ m_1, \dots, m_r \geq 0}} (1 + (m_1 \alpha_1 + \dots + m_r \alpha_r)\omega).$$

Enfin, si $\wedge^i E$ est la i -ème puissance extérieure de E , on obtient :

$$C_\omega(\wedge^i E) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq r} (1 + (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r})\omega).$$

Soit α une section du fibré E de rang r . Alors le schéma $V(\alpha)$ des zéros de α est donné localement par la mise à zéro de r fonctions et ainsi $V(\alpha)$ est de codimension au plus r . La *formule de la classe de Chern de degré maximum (top Chern class formula)* dit que pour toute section α de E telle que $V(\alpha)$ soit de codimension r , on a :

$$[V(\alpha)] = c_r(E).$$

3.3 Théorème de Riemann-Roch et adjonction

Soit E un fibré de rang r sur X , de dimension n , et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines de Chern de E . Tout polynôme symétrique à coefficients entiers en les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ peut être écrit sous la forme d'un polynôme en les classes de Chern de E . Si on dénote par $f(E)$ ce polynôme, $f(E) \in A^*(X)$, alors on peut écrire $f(E) = f_0(E) + \dots + f_n(E)$, avec $f_i(E) \in A^i(X)$. Introduisons alors les deux nouvelles classes suivantes. Soit $\text{ch}(E)$ le *caractère de Chern*, défini par

$$\text{ch}(E) = \sum_{i=1}^r e^{\alpha_i},$$

et $\text{td}(E)$ la classe de Todd

$$\text{td}(E) = \prod_{i=1}^r \frac{\alpha_i}{1 - e^{-\alpha_i}}.$$

Ces expressions sont polynomiales en les classes de Chern c_i de E , car pour N suffisamment large, la puissance α^N d'une racine de Chern est nulle. Calculons les premières valeurs du caractère de Chern. En nous limitant aux deux premières puissances, on voit que :

$$e^{\alpha_i} = 1 + \alpha_i + \frac{\alpha_i^2}{2},$$

et ainsi $\text{ch}_0(E) = r$. Puis

$$\text{ch}_1(E) = \sum_{i=1}^r \alpha_i = \sigma_1 = c_1,$$

et

$$\text{ch}_2(E) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 = \frac{1}{2} (\sigma_2 - 2\sigma_1) = \frac{1}{2} (c_1^2 - 2c_2),$$

où $\sigma_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ et $\sigma_2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2$ sont les deux premiers polynômes symétriques. Nous pouvons maintenant énoncer le *théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch* (cote 14C40) :

$$\chi(E) = \int (\text{ch}(E) \cdot \text{td}(\mathcal{T}_X))_n,$$

le symbole $(\)_n$ signifiant la partie de l'expression appartenant à $A^n(X)$. Cela signifie, entre autres choses, que

$$\chi(\Theta_X) = \frac{1}{2} \int c_1(\mathcal{T}_X)$$

si X est une courbe et

$$\chi(\Theta_X) = \frac{1}{12} \int (c_1(\mathcal{T}_X)^2 + c_2(\mathcal{T}_X))$$

si X est une surface.

Si X est une variété, alors on appellera *classes de Chern* de X les classes de Chern de son faisceau tangent, que l'on dénote $c_i(\mathcal{T}_X)$ ou simplement $c_i(X)$. Nous avons vu que le faisceau \mathcal{T}_X était le dual de Ω_X , faisceau des différentielles. En outre, si n est la dimension de X , le faisceau canonique est la n -ième puissance extérieure de Ω_X . Cela nous montre que :

$$c_1(X) = -c_1(\Omega_X) = -c_1(\wedge^n \Omega_X) = -c_1(\omega_X) = -[K],$$

où K est le diviseur canonique sur X . La *formule de Gauss-Bonnet* montre que la caractéristique d'Euler de X est donnée par :

$$\chi(X) = \int c_n(X).$$

Voyons ensuite la *formule d'adjonction*. Soit $i : X \rightarrow Y$ une immersion de codimension r , X, Y des variétés et $\mathcal{N}_{X/Y}$ le faisceau normal. Alors la séquence exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow i^* \mathcal{T}_Y \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow 0$$

ajoutée aux propriétés d'additivité et de functorialité des classes de Chern donne :

$$C_\omega(X) \cdot C_\omega(\mathcal{N}_{X/Y}) = i^* C_\omega(Y).$$

Prenons l'exemple où Y est une surface de \mathbb{P}^3 et X un diviseur sur Y . Alors on voit que $\mathcal{N}_{X/Y} = i^* \mathcal{L}(X)$, $c_1(\mathcal{N}_{X/Y}) = i^*[X]$ et

$$(1 + c_1(X)\omega) \cdot (1 + i^*[X]\omega) = i^*(1 - [K_Y]\omega + c_2(Y)\omega^2),$$

ce qui donne

$$c_1(X) = -i^*([X] + [K_Y]).$$

Utilisant la formule de projection, on voit que :

$$i_*c_1(X) = -([X] + [K_Y]).[X].$$

Il suffit maintenant de se rappeler que le genre arithmétique d'une courbe est :

$$p_a(X) = 1 - \chi(\Theta_X) = 1 - \int \frac{c_1(X)}{2}$$

d'après le théorème de Riemann-Roch. Pour conclure :

$$2p_a(X) - 2 = - \int c_1(X) = - \int i_*c_1(X) = \int [X].([K_Y] + [X]),$$

résultat que nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce document.

4 Fibrés projectifs

Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété X . On appelle *fibré projectif* associé à E , et on note $Y = \mathbb{P}(E)$, le fibré correspondant aux espaces projectifs associés aux fibres E_x de E sur x , pour $x \in X$. Cette construction vient avec une fonction lisse $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, dont la fibre sur x est l'espace projectif associé à E_x . La dimension de Y est alors la dimension de X plus le rang du fibré auquel il faut retirer un. Les classes de Chern de Y sont données par la *séquence exacte d'Euler* :

$$0 \rightarrow \Theta_Y \rightarrow f^*\mathcal{E} \otimes \Theta_Y(1) \rightarrow \mathcal{T}_{Y/X} \rightarrow 0,$$

où le faisceau tangent relatif $\mathcal{T}_{Y/X}$ du morphisme f est donné par la séquence

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{Y/X} \rightarrow \mathcal{T}_Y \rightarrow f^*\mathcal{T}_X \rightarrow 0.$$

Le polynôme de Chern de \mathcal{T}_Y est alors :

$$C_\omega(\mathcal{T}_Y) = C_\omega(f^*\mathcal{T}_X)C_\omega(f^*\mathcal{E} \otimes \Theta_Y(1)).$$

Voyons alors comment déterminer l'anneau d'intersection de $\mathbb{P}(E)$ à partir de celui de X et des classes de Chern de E :

Proposition 2.4.1 ([Grothendieck, 1958]) *Soit ξ la classe $c_1(\Theta_{\mathbb{P}(E)}(1))$. Alors :*

$$\sum_{\alpha=0}^r \xi^{r-\alpha} c_\alpha(f^*\mathcal{E}) = 0.$$

L'anneau $A^*(\mathbb{P}(E))$ se comporte comme suit vis-à-vis de l'homéomorphisme f_* :

$$\begin{cases} f_*\xi^\alpha = 0 & \text{pour } 0 \leq \alpha \leq r-2, \\ f_*\xi^{r-1} = 1_X. \end{cases}$$

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension $m + 1$ sur \mathbb{C} . L'espace projectif correspondant \mathbb{P}^m est en fait $\mathbb{P}(V)$. La séquence exacte d'Euler s'écrit alors

$$0 \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^m} \longrightarrow V_{\mathbb{P}^m} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^m}(1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^m} \longrightarrow 0,$$

où $V_{\mathbb{P}^m}$ est le fibré vectoriel trivial de rang $m + 1$ sur \mathbb{P}^m . On peut en outre montrer que si h est la classe d'un hyperplan de \mathbb{P}^m , alors h est égal à la première classe de Chern du faisceau tautologique $\Theta_{\mathbb{P}^m}(1)$. On obtient alors :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^m}) = (1 + ht)^{m+1}.$$

Une conséquence de la structure simple de l'anneau de Chow des espaces projectifs est la suivante. Soit W_1 et W_2 deux variétés de \mathbb{P}^m de degré et dimension respectifs v, a et $w, m - a$. Une variété d'un espace projectif étant équivalente à son degré fois une variété linéaire de même dimension, les classes $[W_1]$ et $[W_2]$ sont :

$$\begin{cases} [W_1] = vh^a, \\ [W_2] = wh^{m-a}, \end{cases}$$

où h est la classe d'un hyperplan de \mathbb{P}^3 . Si l'intersection de W_1 et W_2 est de dimension 0, alors elle contient

$$\int [W_1].[W_2] = vw \int h^m = vw$$

points, car m hyperplans en position générale s'intersectent en un seul point. Nous retrouvons le *théorème de Bezout*.

5 Quelques exemples

Voyons maintenant deux résultats qui font appel aux classes de Chern que nous venons d'introduire. Nous rencontrerons le premier d'entre eux à maintes reprises dans ce document.

5.1 Formule de Riemann-Hurwitz

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction entre deux variétés algébriques, où X est de dimension n et Y de dimension m . Alors Kleiman [Kleiman, 1976] montre que si R est le lieu de ramification de f sur X (lieu des points où le jacobien de f possède un rang inférieur d'au moins une unité par rapport à son rang maximal), alors la classe de R dans $A^*(X)$ est :

$$[R] = c_{m-n+1}(\mathcal{N}_{X/Y}),$$

où $\mathcal{N}_{X/Y}$ est le faisceau normal virtuel à f . Supposons par exemple que X et Y sont des courbes algébriques lisses. Alors on a :

$$[R] = c_1(f^*\mathcal{T}_Y) - c_1(\mathcal{T}_X).$$

Les courbes étant lisses, leur genre est égal à leur genre arithmétique, et ainsi

$$\int c_1(\mathcal{T}_X) = 2 - 2p_a(X) = 2 - 2g(X).$$

En outre :

$$\int f^* c_1(\mathcal{T}_Y) = \int f_* f^* c_1(\mathcal{T}_Y) = \int c_1(\mathcal{T}_Y).f_*[X] = \alpha(2 - 2g(Y)),$$

où α est le *degré* de f (ce qui signifie que α points de X se projettent génériquement sur un point de Y). En conclusion, si $\beta = \int [R]$ est le nombre de points de ramification de f , on a :

$$\alpha(2g(Y) - 2) + \beta = 2g(X) - 2,$$

formule connue sous le nom de *formule de Riemann-Hurwitz* [Hartshorne, 1977].

5.2 Caractéristique d'Euler d'une surface de \mathbb{P}^3

Tout d'abord, d'après ce que nous avons vu, le polynôme de Chern de \mathbb{P}^3 est :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}) = (1 + h\omega)^4 = 1 + 4h\omega + 6h^2\omega^2 + 4h^3\omega^3,$$

où h est la classe d'un plan de \mathbb{P}^3 . Soit maintenant X une surface lisse de degré d de \mathbb{P}^3 et soit H l'image réciproque de h dans $A^*(X)$. Enfin, soit i l'inclusion :

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^3.$$

La surface X peut être vue comme un diviseur lisse de \mathbb{P}^3 et dans l'anneau de Chow $A^*(\mathbb{P}^3)$, X est équivalente à d fois un plan :

$$[X] \sim dh.$$

Le faisceau inversible associé à ce diviseur est alors \mathcal{L} , avec

$$C_\omega(\mathcal{L}) = 1 + dh\omega,$$

et par suite le faisceau normal est $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3} = i^*\mathcal{L}$, de polynôme de Chern $1 + dH\omega$.

D'après la séquence exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow i^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0,$$

nous voyons que

$$C_\omega(\mathcal{T}_X) \cdot C_\omega(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}) = i^*C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}).$$

Cela se traduit par :

$$\begin{cases} [K] = (d-4)H, \\ \int [K] \cdot H = d(d-4), \\ \int [K]^2 = d(d-4)^2, \\ \int c_2(\mathcal{T}_X) = d(d^2 - 4d + 6), \end{cases}$$

où $[K]$ est la classe du diviseur canonique sur X et $\int H^2 = d$ (l'intersection de deux sections planes de X est le nombre de points d'intersection de X avec une droite en position générale, c.-à-d. le degré de X). Ainsi $\int [K] \cdot H$ est le nombre de points communs entre un plan en position général et le diviseur canonique.

La caractéristique d'Euler de X est alors :

$$\chi(X) = \chi(\Theta_X) = \frac{1}{12} \int ([K]^2 + c_2(\mathcal{T}_X)),$$

d'après le théorème de Riemann-Roch, ou encore

$$\chi(X) = \frac{d(d^2 - 6d + 11)}{6}.$$

Par suite, on peut montrer que si B_0, B_1, B_2 sont les nombres de Betti de la surface (dimensions de certains groupes d'homologie), alors :

$$\chi(X) = 2B_0 - 2B_1 + B_2.$$

$B_0 = 1$ et $B_1 = 0$ (la surface ne possède pas de trous), alors

$$B_2 = d^3 - 4d^2 + 6d - 2,$$

qui est le nombre de composantes connexes de X sur \mathbb{C} .

6 Bilan

Le but de la théorie de l'intersection est de fournir une généralisation en dimension quelconque du théorème de Bezout. Elle permet de relier les notions de degré (ou plus globalement d'invariant numérique) à celle de multiplicité, et de traiter des informations de type géométrique en termes topologiques. Appliquée au dénombrement des solutions de systèmes d'équations algébriques, elle s'appelle la géométrie énumérative.

Ce chapitre a permis d'établir les bases de la généralisation de la notion d'intersection de courbes ou de surfaces dans \mathbb{P}^3 à des dimensions supérieures. Partant de la notion de cycle, élément formel représentant une variété, une relation d'équivalence a été donnée qui permet, avec une définition appropriée d'intersection et de multiplicité, de construire un anneau d'intersection de classes de variétés. Donner la théorie de l'intersection sur une variété consiste alors à construire cet anneau, à savoir calculer une base pour le groupe d'intersection des sous-variétés de dimension fixée et donner les appariements permettant de prédire le résultat de l'intersection de deux classes arbitraires. Lorsque l'intersection est de dimension zéro, c'est-à-dire est constituée d'un ensemble fini de points, cela revient à compter ce nombre de points. En d'autres termes, cela consiste à compter le nombre de solutions d'un système algébrique sans avoir introduit les équations sous-jacentes, mais en ayant imposé certaines conditions géométriques sur les classes correspondantes.

À une variété projective nous avons attaché une série d'invariants topologiques, les classes de Chern. Ces classes permettent de faire le pont entre la théorie des faisceaux et la notion d'intersection. Certaines classes géométriques découleront naturellement de ce rapprochement. Enfin, nous avons introduit la notion de fibré projectif, qui fait la connexion entre le monde vectoriel et le monde projectif. Cela nous a permis de construire notre premier anneau d'intersection, celui de l'espace projectif \mathbb{P}^m , une conséquence étant la possibilité de redémontrer le théorème de Bezout.

Chapitre 3

Théorie des points multiples

Contents

1	Points multiples en géométrie algébrique	24
1.1	Points multiples stationnaires : une méthode itérative	25
1.1.1	Construction de base	25
1.1.2	Première idée	25
1.1.3	Spécialisation aux points multiples stationnaires	26
1.1.4	Règles de construction et exemple d'utilisation	27
1.1.5	Calcul du facteur de surcompte	27
1.1.6	Hypothèses et restrictions	28
1.2	Schémas de Hilbert : une méthode fonctionnelle	29
2	Implantation de la méthode itérative	29
2.1	Introduction : codage et décodage	30
2.2	Cœur de l'algorithme	30
2.3	Éléments annexes	31
2.4	Déroulement sur un exemple	31
2.5	Quelques sessions	32
2.6	Quelques commentaires	33
3	Prédiction de la forme des formules de points multiples	34
3.1	Globalités	35
3.1.1	Premiers indices	35
3.1.2	Partitions de r	35
3.1.3	Forme grossière de $t(\mathbf{a}; n)$	37
3.1.4	Polynôme caractéristique	38
3.2	Cas de la codimension 0	38
3.2.1	Nombres de Stirling	38
3.2.2	Classes locales de codimension 0	40
3.3	Cas de la codimension n , $n \geq 1$	41
3.3.1	Stirling revisité	42
3.3.2	Polynômes caractéristiques multivariés	42
3.4	Un commentaire	43
4	Bilan	44

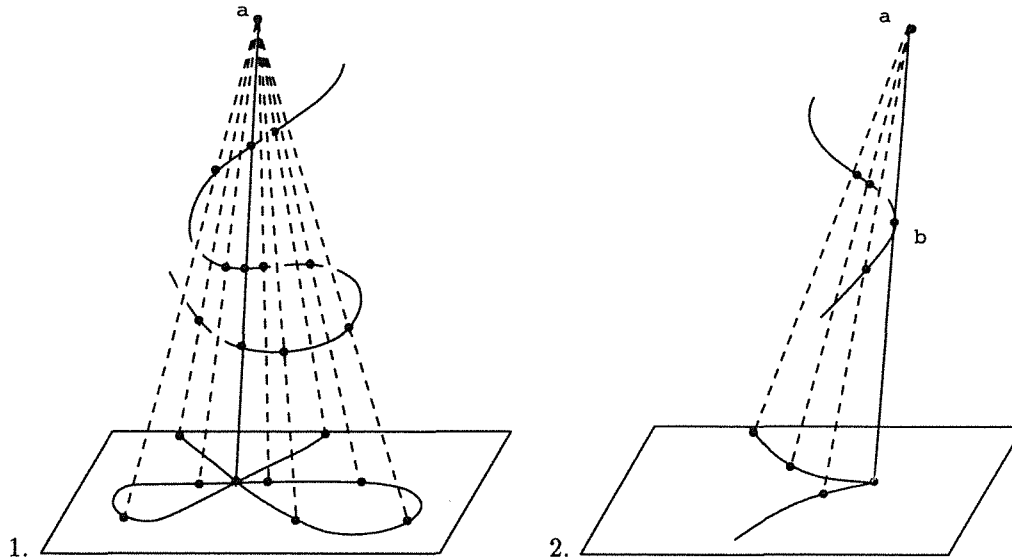


FIG. 3.1 - Projection d'une courbe gauche depuis un centre en position générale. 1. Un point triple. 2. Un point de rebroussement.

Étant donnée une fonction $f : X \rightarrow Y$, un *point multiple d'ordre r* de f est un point u_1 de X tel qu'il existe des points u_2, \dots, u_r de X ayant tous la même image par f . Si les points u_1, \dots, u_r sont tous distincts, alors le point est dit *ordinaire*. Au contraire, si certains des x_i sont infiniment près les uns des autres, le point est appelé *point multiple stationnaire*.

La théorie des points multiples a pour but de caractériser le lieu des points multiples de classes générales de fonctions, un sujet qui présente un intérêt considérable dans plusieurs domaines mathématiques allant de la géométrie différentielle à la topologie.

Prenons tout de suite un exemple de point multiple. Soit la fonction $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$, où C est une courbe lisse de l'espace \mathbb{P}^3 et π est la projection de C sur un plan depuis un centre en position générale. Soit C' l'image de C par π . Les fibres de la projection qui rencontrent la courbe C trois fois correspondent à trois branches de C' qui s'intersectent en un unique point (Figure 3.1.1). Nous appelons alors ce point d'intersection *point triple de C'* et les trois points de C donnant naissance à ce point triple de C' des *points triples de C vis-à-vis de π* . Si maintenant une fibre *touche* la courbe C (en clair, est tangente à C), alors on observe en projection un *point de rebroussement* (Figure 3.1.2).

1 Points multiples en géométrie algébrique

La première formule de points multiples en géométrie algébrique est sans doute due à Clebsch en 1864. En rapport avec le problème de la projection d'une courbe sur un plan, il exprima le nombre de points doubles d'une courbe plane comme fonction de son degré et de son genre. En géométrie énumérative moderne, la théorie des points multiples a pour l'instant été développée dans deux directions différentes : une approche fonctionnelle, la technique des *schémas de Hilbert* [le Barz, 1987a], et une approche itérative, la *théorie des points multiples stationnaires* [Colley, 1987]. Nous nous intéresserons ici principalement à la deuxième méthode, même si nous verrons que chacune des deux peut bénéficier de résultats acquis dans

l'autre cadre de travail.

1.1 Points multiples stationnaires : une méthode itérative

L'approche générale permettant de développer la théorie des points multiples stationnaires fut mise en place par Kleiman [Kleiman, 1981], utilisant la théorie de l'intersection de [Fulton, 1984]. Il introduisit des techniques permettant de calculer une formule énumérative pour un cycle dont le support géométrique est le lieu des points multiples ordinaires d'une fonction possédant certaines propriétés. Colley [Colley, 1987] généralisa le travail de Kleiman aux lieux de points multiples stationnaires arbitraires.

1.1.1 Construction de base

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction de schémas, de codimension n ($= \dim Y - \dim X$). Le travail de Kleiman est concerné par la série suivante de diagrammes (on suppose $s \geq 1$):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{s+1} = \mathbb{P}(\mathcal{I}) & & \\
 & & \downarrow p & & \\
 X_s & \xleftarrow{p_1} & X_s \times X_s & \xleftarrow{q} & \Delta \\
 \downarrow f_{s-1} & & \downarrow p_2 & & \\
 X_{s-1} & \xleftarrow{f_{s-1}} & X_s & & f_s = p_2 p
 \end{array}$$

Ici, $X_1 = X, X_0 = Y$ et $f_0 = f$. L'espace $X_{s+1} = \mathbb{P}(\mathcal{I})$ est le fibré projectif associé au faisceau \mathcal{I} définissant la diagonale Δ (le schéma résiduel de la diagonale dans $X_s \times X_s$). Alors X_{s+1} peut être vu comme énumérant essentiellement les points multiples ordinaires d'ordre s de f .

1.1.2 Première idée

Soit maintenant \mathbf{a} une *partition* d'un entier r , c.-à-d. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ est un k -uplet d'entiers positifs tels que $a_1 \leq \dots \leq a_k$ et $\sum_{g=1}^k a_g = r$. Nous considérons le lieu $S_f(\mathbf{a})$ de points multiples de f décrit comme suit. $S_f(\mathbf{a})$ est constitué des points u_1 de X tels qu'il existe $r - 1$ autres points u_2, \dots, u_r de X ayant tous la même image par f et aussi tels que les a_1 premiers points soient infiniment près les uns des autres, les a_2 points suivants soient infiniment près les uns des autres, ...

Par a_1 points infiniment voisins, nous entendons qu'ils déterminent un sous-schéma curvilinéaire de longueur a_1 d'une fibre de f ayant un seul point comme support géométrique, au sens de [le Barz, 1987b]. Cette définition, quelque peu compliquée, peut être aisément décrite par un exemple [Colley, 1986], qui servira de philosophie générale aux applications décrites dans les Parties II et III. Soit C une courbe plane. Soit X l'ensemble suivant :

$$X = \{(x, l) \in C \times \check{\mathbb{P}}^2 / x \in l\},$$

où $\check{\mathbb{P}}^2$ est le *plan projectif dual*, espace qui paramètre les droites de \mathbb{P}^2 . X et $\check{\mathbb{P}}^2$ sont tous deux de dimension 2. Nous regardons maintenant les points multiples de la fonction $f : X \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ induite par projection sur le second facteur. Regardons par exemple le sous-ensemble de points multiples de X correspondant à la

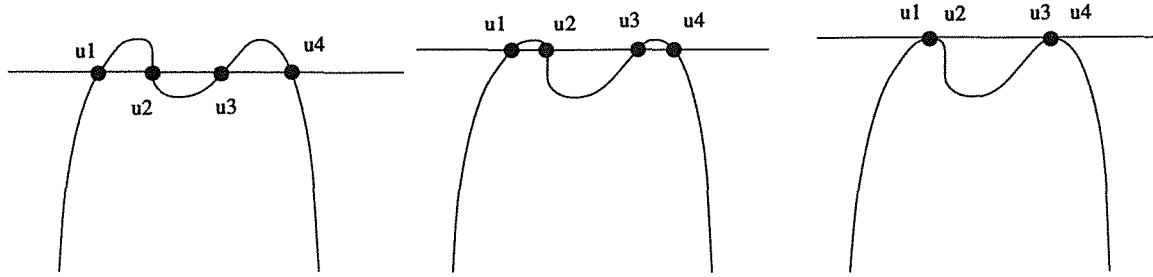


FIG. 3.2 - Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type (2, 2).

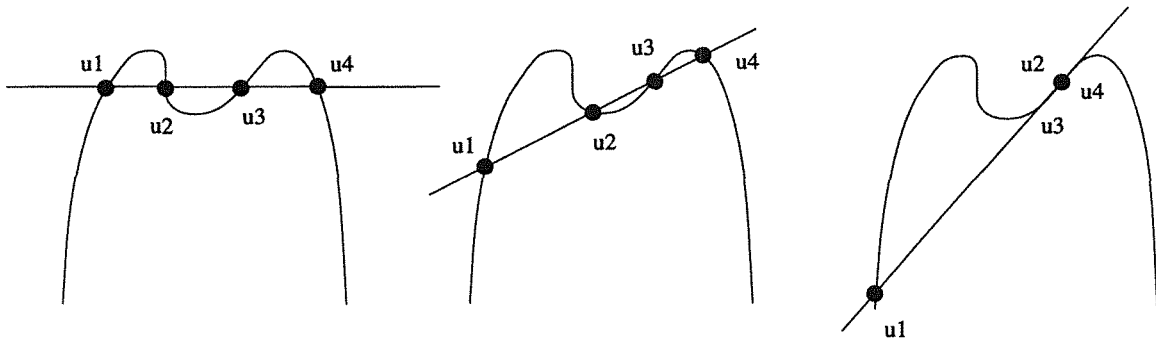


FIG. 3.3 - Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type (1, 3).

partition $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$. Graphiquement, une instance de cet ensemble est décrit dans la première image de la Figure 3.2. Si maintenant on autorise certains points à être voisins, alors on peut obtenir une image différente. Le reste de la Figure 3.2 montre ce qui arrive lorsque les deux premiers points deviennent très proches les uns des autres, ainsi que les deux derniers points (cela correspond au cas $\mathbf{a} = (2, 2)$). Cela montre que si l'on dispose d'une théorie pour compter les points multiples d'une fonction, alors on peut ici compter le nombre de bitangentes de la courbe C . La Figure 3.3 illustre le cas où on autorise les trois derniers points à se rapprocher et on voit que cela revient à imposer à la droite d'avoir un contact d'ordre 1 en un point et d'ordre 3 en un autre point. Nous voyons avec cet exemple que la notion de stationnarité permet de manière très naturelle d'appréhender la notion d'ordre de tangence.

1.1.3 Spécialisation aux points multiples stationnaires

Soit maintenant E_s le lieu exceptionnel de X_s , c.-à-d. le lieu $p^{-1}(\Delta)$ pour la diagonale appropriée et soit $j_s : E_s \rightarrow X_s$ l'inclusion. Pour étudier les points multiples stationnaires de type (a_1, \dots, a_k) , Colley [Colley, 1987] identifie les schémas qui énumèrent des dégénération spécifiques des points d'ordre r en considérant les différents lieux exceptionnels. Le schéma à considérer à la place de X_r est

$$T_f(\mathbf{a}) = (f_{r-1}j_r)^{-1} \cdots (f_{b_2+1}j_{b_2+2})^{-1} f_{b_2}^{-1} (f_{b_2-1}j_{b_2})^{-1} \cdots \cdots f_{a_k}^{-1} (f_{a_k-1}j_{a_k})^{-1} \cdots (f_1j_2)^{-1}(X),$$

où $b_s = \sum_{g=s}^k a_g$. Chaque $(f_s j_{s+1})^{-1}$ restreint l'image inverse de f_s à E_{s+1} et chaque lieu exceptionnel transporte les informations de type « infiniment proche » appropriées. À partir de cela, il s'avère que $T_f(\mathbf{a})$ paramètre les r -uplets (u_1, \dots, u_r) de points de X ayant la même image par f , sujets aux contraintes supplémentaires que les a_1 premiers points sont infiniment près les uns des autres, les a_2 points suivants sont infiniment près les uns des autres, ... Il en découle que

$$f_1 i_1 \cdots f_{r-1} i_{r-1} (T_f(\mathbf{a}))$$

est le sous-ensemble de points multiples $S_f(\mathbf{a})$.

Pour construire une formule énumérative pour un lieu de points multiples particulier, Colley définit (sous certaines hypothèses sur X, Y et f) une classe d'intersection $l(\mathbf{a}; n)$ (n est la codimension de f) dont le support géométrique se trouve dans $S_f(\mathbf{a})$. Si $i_s : X_{s+1} \rightarrow X_s$ est le recouvrement de la fonction $X_s \times X_s$ dans lui-même qui inverse les coordonnées (*switch involution*), alors on définit

$$l(\mathbf{a}; n) = F(J_r \cdots J_{b_2+2}) f_{b_2}^* (J_{b_2} \cdots J_{b_3+2}) f_{b_3}^* \cdots f_{a_k}^* (J_{a_k} \cdots J_2)[X], \quad (3.1)$$

où $F = (f_1 i_1)_* \cdots (f_{r-1} i_{r-1})_*$ et $J_s = j_{s*} (f_{s-1} j_s)^*$. $[X]$ est le cycle fondamental de X , f_{s*} dénote l'image et f_s^* l'image réciproque. Alors $l(\mathbf{a}; n)$ est à un facteur près, que nous appelons *facteur de surcompte*, le cycle paramétrant les points de $S_f(\mathbf{a})$. Ce facteur intervient parce que $T_f(\mathbf{a})$ énumère des uplets de points ordonnés, alors que le résultat ne doit pas tenir compte de cet ordre. Nous reviendrons sur cette déficience dans un moment.

1.1.4 Règles de construction et exemple d'utilisation

Partant de la Définition 3.1 donnée plus haut, on peut, à l'aide de quelques règles que nous allons donner, calculer de manière arbitraire une formule de points multiples, étant données une partition $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ et la codimension n de la fonction. Le résultat s'exprime en fonction des classes de Chern du faisceau normal virtuel $\mathcal{N}_{X/Y}$.

Soit maintenant \mathcal{N}_{f_s} le faisceau normal virtuel de f_s , $A^*(X_s)$ l'anneau de Chow de X_s , $\Theta_{X_s}(1)$ la classe tautologique de X_s et $c_e(\mathcal{N}_{f_s})$ la e -ème classe de Chern de \mathcal{N}_{f_s} . Sous certaines hypothèses sur f , les relations suivantes sont valides (nous utilisons la notation $t_s = c_1(\Theta_{X_s}(1))$):

$$\begin{aligned} (1) \quad & (f_s i_s)_* f_s^* = f_{s-1}^* f_{s-1*} - c_n(\mathcal{N}_{f_{s-1}}), \\ (2) \quad & j_{s*} j_s^* = -t_s \cdot \alpha \text{ où } \alpha \in A^*(X_s), \\ (3) \quad & (f_s i_s)_* t_{s+1}^* f_s^* = -c_{e+n}(\mathcal{N}_{f_{s-1}}), \\ (4) \quad & (f_s i_s)_* c_e(\mathcal{N}_{f_s}) = c_e(\mathcal{N}_{f_{s-1}})(f_s i_s)_* + \sum_{j=0}^{e-1} \left[\sum_{l=0}^{e-j} \binom{n-j}{l} \right] c_j(\mathcal{N}_{f_{s-1}})(f_s i_s)_* t_{s+1}^{e-j}, \\ (5) \quad & t_{s+1} = i_{s*} t_{s+1}, \end{aligned}$$

où les règles (1), (2), (3), (4) et (5) correspondent respectivement aux Propositions 1.14, 1.18, 1.15, 1.20 et 1.19 de [Colley, 1987].

Déroulons cet ensemble de règles sur un exemple. En plus des notations $f_0 = f, X_1 = X, X_0 = Y$, nous écrivons $c_e = c_e(\mathcal{N}_f)$. Regardons comment se calcule la formule $l(1, 2; 1)$:

$$\begin{aligned} l(1, 2; 1) &= (f_1 i_1)_* (f_2 i_2)_* f_2^* j_{2*} (f_1 j_2)^* [X] \text{ d'après la Définition 3.1} \\ &= (f_1 i_1)_* (f_1^* f_{1*} - c_1(f_1)) (-t_2) f_1^* [X] \text{ par (1) et (2)} \\ &= (f_1 i_1)_* f_1^* f_{1*} (-t_2) f_1^* [X] - (f_1 i_1)_* c_1(f_1) (-t_2) f_1^* [X]. \end{aligned}$$

On applique ensuite (1), (5) et (3) à la première partie, (4) et (3) à la seconde pour finalement obtenir

$$l(1, 2; 1) = (f^* f_* - c_1) c_2 - (c_1 c_2 + 2c_3) = f^* f_* c_2 - 2c_1 c_2 - 2c_3.$$

1.1.5 Calcul du facteur de surcompte

Comme nous l'avons dit, $l(\mathbf{a}; n)$ est, à un facteur près, le cycle paramétrant les points de $S_f(\mathbf{a})$. Ce facteur de surcompte intervient car la technique mise en place par Colley énumère des uplets de points ordonnés, alors que, en géométrie énumérative, on ne doit pas se préoccuper de cet ordre. Reprenons l'exemple de la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ introduite plus haut. Supposons que l'on veuille calculer le nombre de bitangentes à la courbe C (Figure 3.4). Alors on voit bien que la droite l est comptée deux fois : une première fois où A est le point source et une deuxième fois où B est le point source. En effet, pour la

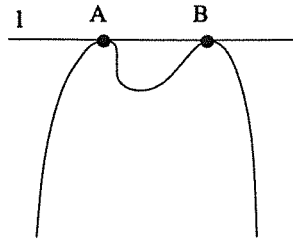


FIG. 3.4 - Une bitangente comptée deux fois.

technique des points multiples stationnaires, les points « A tel qu'il existe B et une droite l tangente en A et B » et « B tel qu'il existe A et une droite l tangente en B et A » sont distincts, et les droites bitangentes comptées deux fois. Nous parlons alors de *symétrie* des conditions imposées aux points A et B . Si au lieu de 2 points nous avons eu affaire à 3 points A, B et C avec des conditions de contact identiques, le facteur de surcompte aurait cette fois été de 6, pour prendre en compte l'équivalence des combinaisons $(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B)$ et (C, B, A) .

Dans la suite, nous utiliserons les formules de points multiples parfois seules, parfois en les intersectant avec d'autres cycles, quand par exemple nous voudrions calculer le nombre de bitangentes à une surface de \mathbb{P}^3 qui passent par un point général de l'espace. Et pour corser l'affaire, nous verrons que des conditions symétriques de par les valeurs de la partition $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ (par exemple $a_1 = a_2$ puis $a_3 = a_4$) peuvent être rendues asymétriques de par le cycle avec lequel on intersecte la formule de points multiples. Ces considérations devant être examinées dans le cadre précis d'utilisation de la technique de Colley, nous remettons le calcul du facteur de surcompte dans le cas particulier de contacts de droites avec une surface de \mathbb{P}^3 au Chapitre 7, Paragraphe 1.

1.1.6 Hypothèses et restrictions

Afin de pouvoir utiliser la théorie des points multiples stationnaires avec une partition $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ (en posant $r = \sum a_i$) sur une fonction f , celle-ci doit être localement une intersection complète, r -générique et ne doit pas posséder de singularités de type \tilde{S}_2 , conditions que nous explicitons ici.

Soit $f : X \rightarrow Y$ de codimension n . Suivant [Colley, 1983], nous disons que f est *localement une intersection complète* si pour tout point $x \in X$ on peut trouver un voisinage O de x tel qu'il existe un plongement $O \hookrightarrow P$, où P est un schéma lisse sur Y de dimension constante δ , et tel que O soit défini en P par $n + \delta$ fonctions. En fait, si X et Y sont lisses, ce qui sera principalement notre cas, nous voyons que f est localement intersection complète. On peut en outre montrer que si X est isomorphe à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, où \mathcal{E} est un faisceau sur Y , et si f est localement une intersection complète, alors f est lissable. Cela justifiera que nous puissions calculer les classes de Chern du faisceau normal virtuel à f dans les Parties II et III.

f est dite r -générique si les fonctions f_s introduites plus haut sont localement des intersections complètes de codimension n , pour $1 \leq s \leq r - 1$. Si f est elle-même localement intersection complète, il suffit de vérifier que les f_s ont la bonne codimension. Notons que la condition de r -généricité peut être quelque peu allégée [Colley, 1983]. Nous ne nous attardons pas sur ce sujet, car ces restrictions n'ont qu'une importance toute relative (voir le prochain paragraphe).

Les *singularités de Thom-Boardman* $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i(f)$ sont les sous-ensembles de X de points x satisfaisant

$$\dim \Omega_f^1(x) \geq i.$$

Il est clair que X est stratifié par ces ensembles \tilde{S}_i et que \tilde{S}_1 n'est rien d'autre que le lieu de ramification

de f . Un résultat montre que si f est localement une intersection complète de codimension n , alors

$$\text{codim}(\bar{S}_i, X) \leq i(n + i).$$

Afin d'affirmer que f ne possède pas de singularités de type \bar{S}_2 , nous aurons généralement à imposer des conditions de généralité sur les figures géométriques que paramètre X . Lorsqu'il s'agira de contacts de variétés linéaires avec une variété projective X , cela consistera à supposer que X ne contient pas elle-même de variétés linéaires, mais nous y reviendrons en temps utile.

1.2 Schémas de Hilbert : une méthode fonctionnelle

Les Anciens concevaient la géométrie énumérative de manière fonctionnelle. Replacé dans le contexte qui est essentiellement le notre dans ce document, à savoir le contact de droites avec une variété X , cela consiste à supposer que toute formule énumérative est *a priori* un polynôme en certains invariants numériques de X et à trouver les coefficients de ce polynôme par examen de cas particuliers simples pour X . Le but de la technique dite des *schémas de Hilbert* (cote 14C05) est de donner une validité à cette assertion.

Bien que cela ne soit pas exactement notre propos, nous donnerons dans les Parties II et III une idée de la manière dont il est possible de démontrer de tels résultats. Pour l'heure, intéressons-nous aux conséquences de cette technique vis-à-vis de notre problème, qui sont au nombre de deux. D'une part, elle montre que la formule énumérative obtenue est valable pour une variété X *quelconque* à l'intérieur de la classe étudiée (lisse, lisse à singularités ordinaires, ...). Puisque la théorie des points multiples stationnaires aboutit elle-aussi à une telle formule (mais sous certaines conditions de généralité pour X), elles doivent coïncider et il est inutile d'effectuer la phase d'identification des schémas de Hilbert. D'autre part, si la variété de départ X contient des sous-espaces linéaires, il est également possible de calculer leurs contributions dans les formules énumératives.

Le résultat que nous venons d'énoncer est capital. Il nous incite à ne pas nécessairement rechercher les conditions les plus faibles à imposer sur X pour travailler avec la théorie des points multiples stationnaires, puisque les formules énumératives résultantes sont valides sans restrictions. En outre, ces deux techniques de calcul de formules de points multiples semblent si proches l'une de l'autre que l'avenir verra sans doute l'apparition d'une théorie unifiée.

2 Implantation de la méthode itérative

Dans [Katz, 1986], l'auteur décrit une procédure itérative permettant de générer n'importe quelle formule de points multiples ordinaires, qui amène des simplifications substantielles dans les calculs. Il note toutefois la difficulté d'observer une « règle » de formation de ces formules, et précise qu'il ne découvrit sa procédure que par hasard, suite à de nombreuses manipulations. Le but ultime serait de généraliser cette procédure au cas des points multiples stationnaires, même s'il n'est pas certain à ce jour qu'une telle généralisation soit possible. Toutefois, le nombre de formules facilement calculables à la main étant réduit, ce qui signifie qu'observer une règle de formation est difficile, nous avons décidé dans un premier temps d'écrire et d'implanter un algorithme utilisant les résultats de [Colley, 1987] pour calculer de manière automatique n'importe quelle formule de points multiples stationnaires. Nous aurons alors le matériel nécessaire pour commencer à tirer des conclusions sur ces formules. Comme on le verra, beaucoup de travail reste à faire dans ce domaine.

Nous décrivons ici l'algorithme de calcul de formules de points multiples stationnaires et son implantation que nous avons rapportée dans [Petitjean, 1994b], première implantation complète de la méthode de Colley. Ce logiciel présente un certain nombre d'intérêts, outre celui mentionné plus haut. D'abord il permet « d'automatiser » en partie des problèmes importants de géométrie énumérative, et nous en verrons

plusieurs applications dans les Parties II et III. Ensuite, il sera un outil précieux lorsque l'on cherchera à mieux comprendre et à simplifier certains résultats de géométrie énumérative. Nous n'aborderons hélas pas ce thème dans ce document, mais nous y reviendrons dans nos perspectives de recherche.

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème comme étant purement mécanique et algorithmique, et nous ne nous préoccupons donc pas de savoir si la fonction f considérée possède les propriétés requises pour l'application de la théorie des points multiples stationnaires.

2.1 Introduction : codage et décodage

Avant de définir avec précision notre algorithme, notons qu'il est possible de simplifier légèrement la tâche à accomplir en réalisant le fait suivant. L'involution i_s , nécessaire pour rendre l'ensemble de règles énoncé mathématiquement correct, peut être supprimée des règles dans l'optique d'une algorithmisation et ceci sans modifier leur sens. Cela a pour effet de rendre la règle (5) inutile et de n'avoir qu'à traiter les règles (1) à (4).

Le premier problème à résoudre est de choisir intelligemment la représentation sur laquelle travailler. La difficulté provient du fait que les expressions manipulées sont pour certaines commutatives (par exemple le produit de classes de Chern) et pour d'autres, non-commutatives (les opérateurs f^* et f_*). Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser des listes et d'implanter l'algorithme en Maple [Maple, 1990], nous permettant ainsi d'utiliser certaines fonctions de la bibliothèque. Dans la suite, nous utiliserons alors les notations :

$$f_s^* : [f^*, s], f_{s*} : [f_*, s], j_s^* : [j^*, s], j_{s*} : [j_*, s], \\ c_e(\mathcal{N}_{f_s}) : [c, s, e], c_1(\Theta_{X_s}(1))^e : [t, s, e].$$

Une procédure de codage `codefromdef` fournit, étant donnée une partition \mathbf{a} , l'expression initiale sur laquelle l'algorithme va travailler, en accord avec la Définition 3.1 et les notations ci-dessus. Ainsi (nous avons supprimé l'involution) :

```
> codefromdef([1,2]);
[1, [f_*, 1], [f_*, 2], [f^*, 2], [j_*, 2], [j^*, 2], [f^*, 1]]
```

le facteur 1 devant la liste signifiant que l'expression qui suit est à prendre en compte une seule fois. Nous verrons par la suite que ce coefficient peut varier, sous l'effet de certaines règles.

Une procédure de décodage `decodefromresult` permet à la fin de l'algorithme de retransformer les expressions (terminales) dans le format de départ, visuellement plus compréhensible.

2.2 Cœur de l'algorithme

Le cœur de l'algorithme consiste en une boucle `deriveclass` qui récursivement teste la présence du membre de gauche des règles énoncées plus haut dans la liste en cours. Quelles règles devons nous prendre en compte? Il est facile de voir que la règle (2) ne s'applique qu'un nombre fini de fois à l'initialisation du programme, juste après l'application de `codefromdef`; en effet, aucune des autres règles ne contient l'expression $j_{s*}j_s^*$ dans son membre de droite. Nous n'avons donc pas à considérer (2) dans la procédure principale.

Il reste en fait les trois règles (1), (3) et (4) que l'on peut voir comme la formation d'une ou plusieurs listes à partir d'une liste de départ. Le remplacement s'effectue comme suit :

$$- [f_*, s], [f^*, s] \text{ remplacée par } \begin{cases} [f^*, s-1], [f_*, s-1], \\ [c, s-1, n] \text{ multipliée par } -1, \end{cases}$$

- $[f_*, s], [t, s+1, e], [f^*, s]$ remplacée par $[c, s-1, e+n]$ multipliée par -1 ,
- $[f_*, s], [c, s, e]$ remplacée par

$$\left\{ \begin{array}{l} [c, s-1, e], [f_*, s], \\ [f_*, s], [t, s+1, e] \text{ multipliée par } \alpha(0), \\ \vdots \\ [c, s-1, j], [f_*, s], [t, s+1, e-j] \text{ multipliée par } \alpha(j), \\ \vdots \\ [c, s-1, e-1], [f_*, s], [t, s+1, 1] \text{ multipliée par } \alpha(e-1), \end{array} \right.$$

où

$$\alpha(j) = \sum_{l=0}^{e-j} \binom{n-j}{l}.$$

À des fins d'efficacité, nous avons ensuite modifié l'ordre dans lequel les recherches sont effectuées. Des calculs nous ont ainsi permis de voir que les règles (3) et (4) étaient de loin les plus utilisées (68 % et 24 % respectivement), alors que la règle (1) n'est utilisée que dans 8 % des cas.

2.3 Éléments annexes

Il nous faut maintenant corriger certains défauts inhérents à la représentation utilisée. Deux effets de bord peuvent survenir suite à l'application d'une des règles données ci-dessus, et une procédure `simpclass` permet de se débarrasser de ces problèmes. Tout d'abord, il se peut que suite à l'application de la règle (4), une des sous-listes rencontrées soit

$$[1, [f_*, 1], [t, 2, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]].$$

`simpclass` permet alors de rassembler les puissances de t_2 pour donner

$$[1, [f_*, 1], [t, 2, 2], [f^*, 1]],$$

et permettre ainsi l'application de la règle (3). Autre déficience prise en compte par cette procédure, la commutativité des classes de Chern. En effet, il est possible qu'une des sous-listes soit

$$[1, [f_*, 1], [t, 2, 2], [c, 1, 1], [f^*, 1]],$$

et il faut alors permuter $[t, 2, 2]$ et $[c, 1, 1]$ afin que la règle (4) soit applicable.

2.4 Déroulement sur un exemple

Reprenons l'exemple $l(1, 2; 1)$ donné plus haut. Après application de la procédure de codage et de la règle (2), on aboutit à la liste suivante :

$$[-1, [f_*, 1], [f_*, 2], [f^*, 2], [t, 2, 1], [f^*, 1]].$$

On voit tout de suite que la règle (1) s'applique (on reconnaît $[[f_*, 2], [f^*, 2]]$), donnant les deux sous-listes suivantes :

$$[-1, [f_*, 1], [f^*, 1], [f_*, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]],$$

$[1, [f_*, 1], [c, 1, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]]$.

La première de ces sous-listes est examinée et la règle (1) s'applique de nouveau pour donner :

$[-1, [f^*, 0], [f_*, 0], [f_*, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]],$
 $[1, [c, 0, 1], [f_*, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]].$

La règle (3)' s'applique sur les deux sous-listes, pour donner :

$[1, [f^*, 0], [f_*, 0], [c, 0, 2]],$
 $[-1, [c, 0, 1], [c, 0, 2]],$

donnant après décodage $f^* f_* c_2$ et $-c_1 c_2$ respectivement.

Reprenons la deuxième sous-liste laissée plus haut. La règle (4) s'applique, pour donner :

$[1, [c, 0, 1], [f_*, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]],$
 $[2, [f_*, 1], [t, 2, 1], [t, 2, 1], [f^*, 1]].$

La règle (3) s'applique sur les deux sous-listes (sur la deuxième, il faut utiliser `simpclass` pour regrouper les puissances de t_2):

$[-1, [c, 0, 1], [c, 0, 2]],$
 $[-2, [c, 0, 3]],$

et on obtient après décodage $-c_1 c_2$ et $-2c_3$ respectivement. Mettant toutes ces expressions ensemble, on trouve :

$$l(1, 2; 1) = f^* f_* c_2 - 2c_1 c_2 - 2c_3.$$

2.5 Quelques sessions

Plus concrètement, voici maintenant quelques sessions réelles de l'implantation de l'algorithme en Maple [Maple, 1990]. Pour chaque exemple sont indiqués le temps CPU (en secondes) et le cumul des requêtes mémoire faites au gestionnaire de stockage de Maple (en mégaoctets), ces valeurs étant calculées sur une machine de type Hewlett-Packard 755 utilisant Maple V.3. Les formules présentées ici, ainsi que toutes celles que nous utiliserons dans ce document sont regroupées dans l'Annexe A.

Commençons par l'exemple déroulé plus haut :

```
> statclass([1,2],1);
```

$$f^* f_* c_2 - 2 c_1 c_2 - 2 c_3$$

CPU Time : 0.25 seconds

Total Memory Used : 0.09 megabytes

Prenons maintenant 4 exemples connus pour être corrects. Ces exemples sont $l(2, 2; 1)$ [Colley, 1983, page 156], $l(3; 2)$ [Colley, 1987, page 163], $l(1, 3; 1)$ [Colley, 1983, page 159] et $l(1, 1, 2; 1)$ [Colley, 1987, page 164]:

```
> statclass([2,2],1);
```

$$c_2 f^* f_* c_2 - 4 c_2^2 c_1 - 8 c_3 c_2 - 10 c_1 c_4 - 12 c_5 - 2 c_1^2 c_3$$

CPU Time: 1.03 seconds

Total Memory Used: 0.41 megabytes

> statclass([3],2);

$$c_3^2 + 4 c_6 + 2 c_1 c_5 + c_2 c_4$$

CPU Time: 0.18 seconds

Total Memory Used: 0.09 megabytes

> statclass([1,3],1);

$$f^* f_* c_2^2 + 2 f^* f_* c_4 + f^* f_* c_1 c_3 - 3 c_1 c_2^2 - 12 c_1 c_4 - 3 c_1^2 c_3 - 6 c_2 c_3 - 12 c_5$$

CPU Time: 1.10 seconds

Total Memory Used: 0.49 megabytes

> statclass([1,1,2],1);

$$f^* f_* c_2 f^* f_* - 2 f^* f_* c_1 c_2 - 2 f^* f_* c_3 - 2 c_1 c_2 f^* f_* - 2 c_3 f^* f_* - c_1 f^* f_* c_2 + 6 c_1^2 c_2 + 14 c_1 c_3 + 12 c_4 + 4 c_2^2$$

CPU Time: 1.28 seconds

Total Memory Used: 0.54 megabytes

Et enfin un exemple légèrement plus complexe :

> statclass([2,4],0);

$$c_1 f^* f_* c_1^3 + 3 c_1 f^* f_* c_1 c_2 + 2 c_1 f^* f_* c_3 - 8 c_1^4 - 36 c_1^2 c_2 - 46 c_1 c_3 - 24 c_4 - 6 c_2^2$$

CPU Time: 9.55 seconds

Total Memory Used: 4.07 megabytes

2.6 Quelques commentaires

Notre implantation et les choix que nous avons faits pour la réaliser soulèvent plusieurs points que nous souhaitons examiner brièvement ici. Tout d'abord, notons que l'ensemble des règles données par [Colley, 1983] est *complet* dans le sens où l'algorithme que nous avons présenté est sûr de se terminer en un temps fini, et ceci découle naturellement des techniques mathématiques ayant donné naissance à ces règles. Il n'est en outre pas *redondant*, ce qui signifie que toutes les règles sont indispensables.

Il est légitime de se demander si nous n'aurions pas pu utiliser pour résoudre notre problème des techniques de réécriture, qui ont vu de nombreux développements en informatique ces dernières années. Deux raisons nous ont poussé à développer notre propre système :

1. D'abord, la première version de notre algorithme était considérablement plus compliquée que celle présentée plus haut. Elle comprenait des règles supplémentaires (dues à la présence d'involutions) et utilisait des formules algébriques, comme la formule de projection. En un mot, nous abordions le problème sous l'angle naturel du calcul algébrique, et non pas comme ici en cherchant à identifier des sous-listes correspondant au membre de gauche des règles, et l'utilisation de systèmes de réécriture était alors beaucoup moins concevable.

2. Même dans l'état actuel de notre algorithme, un codage dans un système de réécriture ne nous semble pas facilement réalisable. La difficulté réside dans le fait que les expressions manipulées sont partiellement commutatives (les classes de Chern) et partiellement non-commutatives (les opérateurs f^*). Ces deux facettes du problème nécessitent des traitements bien spécifiques.

Quelques commentaires enfin sur la complexité de l'algorithme. Toutes nos tentatives pour évaluer finement cette complexité en fonction de n, k, r , où la partition en entrée est $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ avec $r = \sum a_j$ et n est la codimension de la fonction étudiée, se sont à ce jour soldées par un échec, même après des discussions avec des spécialistes du domaine. Considérons la liste qui est passée comme argument à la boucle récursive principale, c.a.d. celle obtenue après application de `codefromdef` et remplacement des groupements $j_{s*}j_s^*$. Pour $\mathbf{a} = (1, 2)$, cette liste est

$$[-1, [\mathbf{f}_*, 1], [\mathbf{f}_*, 2], [\mathbf{f}^*, 2], [\mathbf{t}, 2, 1], [\mathbf{f}^*, 1]].$$

En reprenant sa définition, il est facile de voir que de manière générale, la longueur de cette liste est $l_0 = 3r - 2 - k$ en excluant la constante multiplicative. On peut voir l'algorithme comme un processus d'élimination des groupements $[\mathbf{f}_*, s], \dots, [\mathbf{f}^*, s]$, en commençant par $s = r - 1$, puis $r - 2, \dots$, jusqu'à $s = 1$, où l'intérieur d'un groupement n'est constitué que de $[\mathbf{c}, s, \mathbf{e}]$ et de $[\mathbf{t}, s+1, \mathbf{f}]$.

Rentrons dans les détails de l'élimination des groupements $[\mathbf{f}_*, s], \dots, [\mathbf{f}^*, s]$. Tout d'abord, après le traitement du cas $s + 1$, une liste peut contenir plusieurs de ces groupements. Nous supposons ici qu'elle n'en contient qu'un, ce qui ne change rien. La règle (4) énoncée plus haut peut se généraliser pour éliminer en une seule étape plusieurs classes de Chern. Ainsi la règle (4)' suivante

$$f_{s*}c_{e_1}^{j_1}(f_s) \cdots c_{e_o}^{j_o}(f_s)$$

génère de l'ordre de $e_1^{j_1} \cdots e_o^{j_o}$ nouvelles listes. L'élimination du groupement $[\mathbf{f}_*, s], \dots, [\mathbf{f}^*, s]$ se termine par application de la règle (1) ou de la règle (3). Une conjecture que nous émettrons dans la prochaine section (page 35) nous indique que chaque e_j est tel que

$$e_j \leq (n + 1)r - k - n.$$

En outre, la somme $j_1 + \dots + j_o$ est bornée par l_0 et par suite le nombre de listes générées pour l'élimination au niveau s est en

$$O((nr)^r).$$

Il faut effectuer cette opération pour s allant de $r - 1$ à 0 et pour finir on obtient une complexité en

$$O((nr)^{r^2}),$$

soit doublement exponentielle en l'entier r .

La difficulté à faire une analyse correcte de la complexité de la méthode est reflétée par la difficulté qu'ont actuellement les mathématiciens à réécrire l'ensemble des règles de Colley de manière à rendre la technique puissante et fonctionnelle. Certains cas particuliers ont néanmoins été entièrement réécrits, comme le cas où $\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$ [Katz, 1986], et d'autres devraient bientôt livrer leurs secrets.

3 Prédiction de la forme des formules de points multiples

Citant Colley [Colley, 1987]: « Les formules de points multiples ne possèdent aucune forme prédictible ou identifiable. Les efforts futurs dans ce domaine devront se concentrer sur la reconnaissance et la réécriture de ces formules de manière plus unifiée et élégante. » Si nous ne sommes pas en mesure actuellement de prédire la forme de ces formules, nous montrons dans ce paragraphe que nos investigations nous ont conduit à faire un certain nombre d'observations et à émettre un certain nombre de conjectures, qui se vérifient sur toutes les formules données dans l'Annexe A.

3.1 Globalités

Commençons par introduire un peu de terminologie et par donner les premiers résultats sur les composantes d'une formule de points multiples. En particulier, nous observons comment ces formules sont reliées aux différentes partitions d'un entier.

3.1.1 Premiers indices

À partir de maintenant, soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ la partition d'un entier r et n la codimension d'une fonction f . On dénote par c_j les classes de Chern de f . Soit $l = l(\mathbf{a}; n)$ la classe dont le support géométrique est le sous-ensemble de points multiples $S_f(\mathbf{a})$, à un facteur près. Nous décomposons l en une somme de deux termes $l = h + t$, où h est la partie de l contenant l'homéomorphisme f_* (qui peut être vide) et où t est $l - h$. Nous appelons t la *partie locale* de l et h sa *partie multilocale*. Dans la suite, nous ne travaillons quasi-exclusivement que sur la partie locale.

On définit alors l'*index* de l comme étant le plus grand entier i tel que la classe de Chern c_i apparaisse dans t . On appelle *degré* de l le degré de t compris comme un polynôme en les variables c_1, \dots, c_i . Nous émettons alors la conjecture suivante :

Conjecture 3.3.1 - *L'index de l est donné par :*

$$i = (n + 1)r - k - n,$$

alors que son degré est

$$c = \begin{cases} r - k & \text{si } n = 0, \\ r - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit ainsi immédiatement que le cas $n = 0$ est différent des autres cas, ce que nous confirmerons un peu plus loin.

Proposition 3.3.1 - *L'index et le degré sont tels que si $r > 1$:*

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq i, \\ 0 \leq c \leq i. \end{cases}$$

Preuve. Nous avons $n - i = 2n + k - (n + 1)r$. Puisque $r \geq k$, on obtient $n - i \leq n(2 - k)$. Donc si $k \geq 2$, $n \leq i$. Si $k = 1$, alors $i = (n + 1)(r - 1)$. Si $r \geq 2$, alors $n - i \leq n - (n + 1) \leq 0$.

Pour la seconde partie de la proposition, si $n = 0$ alors $c = i$. Si $n \geq 1$, on écrit $i = (n + 1)(r - 1) + 1 - k$, et puisque $k \leq r$, on a $i \geq (n + 1)c - c = nc$.

□

3.1.2 Partitions de r

Nous appelons *v -partition* d'un entier u une partition de u de longueur v . À chaque v -partition $e = (e_1, \dots, e_v)$, on peut associer un monôme en les variables c_j :

$$m = \prod_{i=1}^v c_{e_i},$$

le degré de ce monôme étant v .

Si $e = (e_1, \dots, e_v)$ et $f = (f_1, \dots, f_v)$ sont deux v -partitions de u , $e \neq f$, alors on peut définir un ordre $>_1$ comme suit : $e >_1 f$ si $e_v < f_v$ ou $(e_1, \dots, e_{v-1}) >_1 (f_1, \dots, f_{v-1})$. Si e est une v -partition et f une w -partition, alors on peut définir un second ordre $>_2$. Si $v \neq w$, alors $e >_2 f$ si $v > w$ ou si $e >_1 f$. Soit $p(u, v)$ le nombre de v -partitions de u . Définissons aussi $X(u, v)$ comme étant l'ensemble de toutes les j -partitions de u ordonné par $>_2$ de telle sorte que $j \leq v$, et soit $\Xi(u, v)$ le cardinal de $X(u, v)$. Soit enfin $m(l, u, v)$ le monôme associé au l -ième élément de $X(u, v)$ et $\deg(l, u, v)$ le degré de ce monôme.

Il n'existe pas de formule polynomiale donnant $p(u, v)$ comme fonction de u et v , mais on peut observer la récurrence suivante.

Proposition 3.3.2 -

$$p(u, v) = p(u-1, v-1) + p(u-v, v) \quad \text{pour } u, v \geq 2 \quad \text{avec} \\ p(u, 1) = 1 \quad \text{et } p(u, v) = 0 \quad \text{si } u < v.$$

Preuve. En effet, on peut obtenir une partition de u en une séquence croissante de v entiers strictement positifs en prenant soit une partition de $u-1$ en $v-1$ entiers croissants et ajoutant 1, soit en prenant une partition de $u-v$ en v entiers croissants et ajoutant 1 à chacun des v éléments de la séquence. Le résultat en découle. □

Notons que pour $u \geq 2$, on a $p(u, u) = p(u, u-1) = 1$. Également

$$p(u, 2) = p(u-1, 1) + p(u-2, 2) = 1 + p(u-2, 2),$$

ce qui donne

$$p(u, 2) = \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor.$$

D'après sa définition, on voit que

$$\Xi(i, c) = \sum_{j=1}^c p(i, j),$$

mais il est possible de donner une formulation plus compacte de cette quantité.

Proposition 3.3.3 -

$$\Xi(i, c) = p(i+c, c) \quad \text{pour } ic \geq 1 \quad \text{et } \Xi(0, 1) = 1.$$

Preuve. Évaluons la différence :

$$\Xi(i+c, c) - \Xi(i, c) = \sum_{j=1}^{c-1} p(i+c, j) - A,$$

où

$$A = \sum_{j=1}^{c-1} p(i, j) + p(i, c) - p(i+c, c) = \sum_{j=1}^{c-1} p(i, j) - p(i+c-1, c-1)$$

utilisant la récurrence définissant p . Alors

$$A = \sum_{j=1}^{c-2} p(i, j) + p(i, c-1) - p(i+c-1, c-1) = \dots = p(i, 1) - p(i+1, 1) = 0,$$

de telle sorte que

$$\Xi(i+c, c) - \Xi(i, c) = \sum_{j=1}^{c-1} p(i+c, j) = \Xi(i+c, c-1).$$

Cela peut être réécrit :

$$\Xi(i, c) = \Xi(i+c, c) - \Xi(i+c, c-1) = p(i+c, c),$$

en revenant à la définition de Ξ .

□

3.1.3 Forme grossière de $t(\mathbf{a}; n)$

Relions maintenant la forme globale de t aux partitions de son index i .

Conjecture 3.3.2 - Soit i et c l'index et le degré de t . Alors t est un polynôme à coefficients entiers $\alpha(j, \mathbf{a}, c)$ en les variables (classes de Chern) c_j ,

$$t(\mathbf{a}; n) = \sum_{j=1}^{\Xi(i, c)} \alpha(j, \mathbf{a}, n) m(j, i, c).$$

$\Xi(i, c)$ est le nombre maximal de monômes différents dans le développement de t .

L'idée ici est similaire à celle des *diagrammes de Ferrers* [Andrews, 1976]. Supposons que l'on souhaite obtenir la forme de $l(5; 0) = t(5; 0)$. Dans ce cas, $k = 1, r = 5$ et $n = 0$, donc $i = c = 4$. Les partitions de 4 (nous avons ajouté des 0 à gauche) et leurs monômes associés sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_4 \\ c_1 c_3 \\ c_2^2 \\ c_1^2 c_2 \\ c_1^4 \end{pmatrix},$$

de telle sorte que

$$l(5; 0) = \alpha_1 c_1^4 + \alpha_2 c_1^2 c_2 + \alpha_3 c_2^2 + \alpha_4 c_1 c_3 + \alpha_5 c_4.$$

Il est facile de vérifier que la formule correcte est $l(5; 0) = c_1^4 + 6c_1^2 c_2 + c_2^2 + 10c_1 c_3 + 6c_4$ (voir Annexe A).

Voyons maintenant le nombre de monômes différents dans le développement de $t(5; 1)$. On obtient $i = 8$ et $c = 4$ et ce nombre est alors $\Xi(8, 4)$:

$$\Xi(8, 4) = p(8, 1) + p(8, 2) + p(8, 3) + p(8, 4).$$

Le premier terme est $p(8, 1) = 1$. Les suivants sont (voir la Table 3.1) :

$$p(8, 2) = p(7, 1) + p(6, 2) = 1 + p(5, 1) + p(4, 2) = 2 + p(3, 1) + p(2, 2) = 4,$$

$$p(8, 3) = p(7, 2) + p(5, 3) = p(6, 1) + p(5, 2) + p(4, 2) + p(2, 3) = 1 + p(4, 1) + p(3, 2) + p(3, 1) + p(2, 2) = 5,$$

$$p(8, 4) = p(7, 3) + p(4, 4) = p(6, 2) + p(4, 3) + 1 = p(5, 1) + p(4, 2) + 2 = p(3, 1) + p(2, 2) + 3 = 5,$$

ce qui donne $\Xi(8, 4) = 15$ (valeur correcte).

i	$p(i, 1)$	$p(i, 2)$	$p(i, 3)$	$p(i, 4)$	$p(i, 5)$	$p(i, 6)$	$p(i, 7)$	$p(i, 8)$	$p(i, 9)$
1	1								
2	1	1							
3	1	1	1						
4	1	2	1	1					
5	1	2	2	1	1				
6	1	3	3	2	1	1			
7	1	3	4	3	2	1	1		
8	1	4	5	5	3	2	1	1	
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1

TAB. 3.1 - Nombre $p(i, j)$ de j -partitions d'un entier i .

3.1.4 Polynôme caractéristique

Dans les paragraphes suivants, nous rencontrerons des polynômes qui « ressemblent » à $t(\mathbf{a}; n)$, et nous devons d'abord définir ce que nous entendons par là.

Définition 3.3.1 - Un polynôme P en l variables x_1, \dots, x_l est dit caractéristique de t si le fait de remplacer c_1 par x_1 , c_2 par x_2 , \dots , c_{l-1} par x_{l-1} , et c_j par x_l pour $j \geq l$ dans t donne P .

Par exemple, le polynôme bivarié $x_2(x_2 + x_1 + 2)$ est caractéristique de $l(3; 1) = c_2^2 + c_1c_3 + 2c_4$.

3.2 Cas de la codimension 0

Nous allons voir ici que certains polynômes très simples sont caractéristiques des classes de codimension 0, nous rapprochant ainsi de l'observation faite par [Lascoux, 1977].

3.2.1 Nombres de Stirling

Nous introduisons la série de polynômes suivants (parfois appelés *polynômes de Thom* dans la littérature):

$$\Delta_u(x) = x(x+1)\cdots(x+u-1) \text{ pour } u \geq 1 \text{ et } \Delta_0(x) = 1,$$

et soit $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ le coefficient de x^v dans le développement de $\Delta_u(x)$. Ces nombres, appelés *nombre de Stirling de première espèce* [Graham et al., 1989], comptent le nombre de manière d'arranger u objets en v arrangements cycliques. Puisque

$$\Delta_u(x) = \Delta_{u-1}(x)(x+u-1) \text{ pour } u \geq 1,$$

on a :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (u-1) \begin{bmatrix} u-1 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u-1 \\ v-1 \end{bmatrix} & \text{pour } u \geq v \geq 1, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = 0 & \text{pour } u \geq 1, \text{ et } \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0 & \text{pour } u < v. \end{cases}$$

La Table 3.2 donne les premiers nombres de Stirling.

u	$\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ 7 \end{bmatrix}$
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

TAB. 3.2 - Nombres de Stirling de première espèce.

Ces nombres possèdent des propriétés très intéressantes, qui découlent de la relation de récurrence, et nous verrons sous peu comment les relier aux coefficients des formules de points multiples stationnaires.

Proposition 3.3.4 - Les nombres de Stirling possèdent les propriétés suivantes (le symbole $\beta!$ signifie « factorielle de β ») :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = (u-1)! \text{ for } u \geq 1, \\ \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = 1, \\ \begin{bmatrix} u \\ u-1 \end{bmatrix} = \frac{u(u-1)}{2} \text{ for } u \geq 1. \end{cases}$$

Proposition 3.3.5 - Ils possèdent les propriétés additionnelles suivantes :

$$\sum_{j=0}^u \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} = u!,$$

$$\sum_{j=0}^u (-1)^j \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} = 0 \text{ pour } u \geq 2.$$

Preuve. Le premier résultat est vrai pour $u = 0$. Supposant qu'il est vrai pour u , on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{u+1} \begin{bmatrix} u+1 \\ j \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^u \begin{bmatrix} u+1 \\ j \end{bmatrix} + 1 = \sum_{j=1}^u (u \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ j-1 \end{bmatrix}) + 1 \\ &= u \sum_{j=1}^u \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{u-1} \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} + 1 \\ &= (u+1) \sum_{j=0}^u \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} = (u+1)!. \end{aligned}$$

Le second résultat est vrai pour $u = 2$. Supposons-le vrai au rang u , alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{u+1} (-1)^j \begin{bmatrix} u+1 \\ j \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^u (-1)^j \begin{bmatrix} u+1 \\ j \end{bmatrix} + (-1)^{u+1} = u \sum_{j=1}^u (-1)^j \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^u (-1)^j \begin{bmatrix} u \\ j-1 \end{bmatrix} + (-1)^{u+1} \\ &= (u+1) \sum_{j=0}^u (-1)^j \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Classes locales de codimension 0

Relions les classes locales de codimension 0 aux polynômes de Thom que nous venons de voir.

Conjecture 3.3.3 - $\Delta_a(x)$ est un polynôme caractéristique univarié de $l(a; 0)$.

Cela permet en outre de relier les coefficients de $l(a; 0)$ aux nombres de Stirling :

Corollaire 3.3.1 - Soit i et c l'index et le degré de $l(a; 0)$, $c = i$. Alors :

$$\sum_{j=\Xi(i,c)-\Xi(i,l)+1}^{\Xi(i,c)-\Xi(i,l-1)} \alpha(j, a, 0) = \begin{bmatrix} c \\ l \end{bmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq l \leq c.$$

Preuve. Le coefficient de x^l dans Δ_a est la somme des coefficients des monômes de $l(a; 0)$ correspondant aux l -partitions de i . Ces partitions étant ordonnées dans $X(i, c)$, le résultat suit. □

Considérons $a = 5$, ou encore $i = c = 4$. Le résultat précédent montre que :

$$\begin{cases} \alpha(1, 5, 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1, \\ \alpha(2, 5, 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 6, \\ \alpha(3, 5, 0) + \alpha(4, 5, 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11, \\ \alpha(5, 5, 0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 6, \end{cases}$$

et cela donne $l(5; 0) = c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4$, comme espéré.

Corollaire 3.3.2 - Si $i = c$ est l'index de $t(a; 0)$, alors :

$$\sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} \alpha(j, a, 0) = i!.$$

Preuve. Il suffit de sommer les relations du Corollaire 3.3.1 pour $l = 1, \dots, c$, ce qui donne :

$$\sum_{l=1}^c \sum_{j=\Xi(i,c)-\Xi(i,l)+1}^{\Xi(i,c)-\Xi(i,l-1)} \alpha(j, a, 0) = \sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} \alpha(j, a, 0) = \sum_{l=1}^c \begin{bmatrix} c \\ l \end{bmatrix} = i!.$$

Corollaire 3.3.3 - Si $i = c$ est l'index de $t(a; 0)$, alors :

$$\sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} (-1)^{\deg(j, i, c)} \alpha(j, a, 0) = 0 \quad \text{pour } c \geq 2.$$

Preuve. De manière similaire, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} (-1)^{\deg(j,i,c)} \alpha(j,a,0) = \sum_{j=1}^c (-1)^j \begin{bmatrix} c \\ j \end{bmatrix} = 0 \text{ pour } c \geq 2.$$

□

Considérons encore la formule $l(5;0) = c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4$. Le premier corollaire dit que

$$1 + 6 + 1 + 10 + 6 = 4!$$

et le deuxième que

$$1 - 6 + 1 + 10 - 6 = 0,$$

ce que l'on peut vérifier.

Corollaire 3.3.4 - Soit $i = c$ l'index de $t(a;0)$. Alors :

- le coefficient de c_1^i est 1,
- le coefficient de $c_1^{i-2}c_2$ est $\frac{i(i-1)}{2}$,
- le coefficient de c_i est $(i-1)!$.

Preuve. Puisque $p(i,i) = 1$, nous voyons que $\Xi(i,i) - \Xi(i,i-1) = p(i,i) = 1$, et le Corollaire 3.3.1 donne

$$\alpha(1,a,0) = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = 1,$$

et ceci est le coefficient de $m(1,i,i) = c_1^i$ dans $t(a;0)$. Les autres résultats sont similaires. Puisque $p(i,i-1) = 1$, nous avons

$$\alpha(2,a,0) = \begin{bmatrix} i \\ i-1 \end{bmatrix} = \frac{i(i-1)}{2},$$

qui est le coefficient de $m(2,i,i) = c_1^{i-2}c_2$. Enfin, puisque $p(i,1) = 1$, on voit que

$$\alpha(\Xi(i,i),a,0) = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (i-1)!,$$

qui est le coefficient de $m(\Xi(i,i),i,i) = c_i$.

□

3.3 Cas de la codimension n , $n \geq 1$

Nous donnons ici des analogues en codimension $n > 0$ des conjectures vues en codimension 0.

3.3.1 Stirling revisité

En effet, nous voyons ici que, à un facteur constant près, les polynômes de Thom sont à nouveau caractéristiques de certaines classes. Le point intéressant est que ce résultat semble tenir pour les parties polynomiales des formules locales et multilocales.

Conjecture 3.3.4 - $(-1)^{k+1} c!^n \Delta_c$ est un polynôme caractéristique univarié de $t(\mathbf{a}; n)$ pour $n \geq 1$, où c est le degré de $t(\mathbf{a}; n)$.

Cette conjecture admet comme précédemment des corollaires, les deux premiers étant des conséquences faciles.

Corollaire 3.3.5 - Soit i et c l'index et le degré de $t(\mathbf{a}; n)$. Alors

$$\sum_{j=\Xi(i,c)-\Xi(i,l)+1}^{\Xi(i,c)-\Xi(i,l-1)} \alpha(j, \mathbf{a}, n) = (-1)^{k+1} c!^n \begin{bmatrix} c \\ l \end{bmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq l \leq c.$$

Corollaire 3.3.6 - Soit i et c l'index et le degré de $t(\mathbf{a}; n)$. Alors

$$\sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} \alpha(j, \mathbf{a}, n) = (-1)^{k+1} c!^{n+1},$$

et

$$\sum_{j=1}^{\Xi(i,c)} (-1)^{\deg(j, i, c)} \alpha(j, \mathbf{a}, n) = 0 \quad \text{pour } s \geq 3.$$

Corollaire 3.3.7 - Soit i et c l'index et le degré de $t(\mathbf{a}; n)$. Le coefficient de c_i dans $t(\mathbf{a}; n)$ est

$$(-1)^{k+1} (c-1)! c!^n.$$

Preuve. Partant du Corollaire 3.3.5 et notant que $p(i, 1) = 1$, on obtient :

$$\alpha(\Xi(i, c), \mathbf{a}, 0) = (-1)^{k+1} c!^n \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^{k+1} (c-1)! c!^n,$$

qui est le coefficient de $m(\Xi(i, c), i, c) = c_i$ dans $t(\mathbf{a}; n)$.

□

3.3.2 Polynômes caractéristiques multivariés

Très brièvement, nous montrons ici que dans certains cas, nous avons pu observer des polynômes caractéristiques autres qu'univariés. Plus précisément, nous construisons un polynôme caractéristique $n+1$ -varié de $t(\mathbf{a}; n)$ comme suit.

Conjecture 3.3.5 - Le polynôme

$$Q(a, n) = \prod_{j=0}^{a-2} (x_{n+1} + j\lambda(j, n))$$

où

$$\lambda(j, n) = (j+1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (j+1)^i x_{n-i}$$

est caractéristique de $t(a; n)$.

Ces polynômes ressemblent de très près aux polynômes de Thom. En effet, $Q(a, 0) = \Delta_a$. Supposons que l'on veuille examiner $l(4; 2)$, alors :

$$\begin{cases} \lambda(1, 2) = x_2 + 2x_1 + 4, \\ \lambda(2, 2) = x_2 + 3x_1 + 9, \end{cases}$$

de telle sorte que le polynôme 3-varié :

$$\begin{aligned} P &= x_3(x_3 + x_2 + 2x_1 + 4)(x_3 + 2x_2 + 6x_1 + 18) \\ &= x_3^3 + 3x_2x_3^2 + 2x_2^2x_3 + 8x_1x_3^2 + 10x_1x_2x_3 + 12x_1^2x_3 + 22x_3^2 + 26x_2x_3 + 60x_1x_3 + 72x_3 \end{aligned}$$

est caractéristique de $l(4; 2)$. D'après la Conjecture 3.3.2, nous devrions avoir

$$l(4; 2) = ac_3^3 + bc_2c_3c_4 + cc_2^2c_5 + dc_1c_3c_5 + ec_1c_2c_6 + fc_1^2c_7 + gc_4c_5 + hc_3c_6 + ic_2c_7 + jc_1c_8 + kc_9,$$

ce qui signifie qu'un polynôme 3-varié caractéristique devrait être :

$$ax_3^3 + bx_2x_3^2 + cx_2^2x_3 + dx_1x_3^2 + ex_1x_2x_3 + fx_1^2x_3 + (g+h)x_3^2 + ix_2x_3 + jx_1x_3 + kx_3.$$

La formule exacte de $l(4; 2)$ (Annexe A) est en fait

$$l(4; 2) = c_3^3 + 3c_2c_3c_4 + 2c_2^2c_5 + 8c_1c_3c_5 + 10c_1c_2c_6 + 12c_1^2c_7 + 4c_4c_5 + 18c_3c_6 + 26c_2c_7 + 60c_1c_8 + 72c_9,$$

et notre polynôme donne 10 des 11 coefficients de $l(4; 2)$.

3.4 Un commentaire

Dans les exemples que nous verrons dans les Parties II et III, certains faits viennent abonder dans le sens des conjectures émises dans ce paragraphe. Notamment, dans tous les cas que nous aborderons de fonctions f de codimension 0, il s'avère que la propriété suivante est vraie :

$$c_j^2 = c_{j-1}c_{j+1},$$

où $c_i = c_i(\mathcal{N}_f)$. Revenant aux polynômes caractéristiques, cela signifie que $l(a; 0)$ est *exactement* le polynôme de Thom $\frac{y^a}{x} \Delta_{a-1}(\frac{x}{y})$ dans le développement duquel on remplace le monôme x par c_1 et y^j par c_j . Regardons par exemple le cas $a = 5$. Alors :

$$\Delta_4(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x,$$

et donc

$$\frac{y^5}{x} \Delta_4\left(\frac{x}{y}\right) = yx^3 + 6y^2x^2 + 11y^3x + 6y^4.$$

Remplaçant x et y par c_1 , y^2 par c_2 , y^3 par c_3 et y^4 par c_4 , on obtient :

$$c_1^4 + 6c_1^2c_2 + 11c_1c_3 + 6c_4,$$

expression dont on peut vérifier qu'elle est égale à $l(5; 0)$, si on suppose que $c_2^2 = c_1c_3$. Notons que cette apparition de manière exacte des polynômes de Thom est formellement démontrée dans [Lascoux, 1977; Kulikov, 1983], en connexion avec le calcul des singularités de Thom-Boardman des différentielles de f .

4 Bilan

La théorie des points multiples permet de caractériser les sous-ensembles de points multiples de fonctions, c.-à-d. les points ayant la même image par la fonction, avec une multiplicité fixée. En géométrie algébrique, cette théorie s'est développée dans deux directions complémentaires : la théorie des points multiples stationnaires et la technique des schémas de Hilbert. La première se prête mieux à une implantation et est itérative, la seconde est moins restrictive et est fonctionnelle.

Nous avons restreint notre étude à la méthode itérative, mais nous avons noté qu'une collaboration entre ces deux approches était souhaitable. Après avoir présenté la théorie des points multiples stationnaires de Colley, nous avons montré comment, étant donnée une fonction $f : X \rightarrow Y$, elle permettait de calculer la classe dans l'anneau d'intersection de X d'un sous-ensemble de points multiples de f , et ceci en fonction des classes de Chern des faisceaux tangents à X et à Y . Lorsque plus tard nous étudierons les contacts de droites et de plans avec une variété projective de \mathbb{P}^m , nous utiliserons cette théorie et il nous faudra donc identifier des espaces X et Y tels que les sous-ensembles de points multiples soient précisément des ensembles de droites ou de plans ayant des contacts bien spécifiques avec cette variété. Pour le cas des droites, il est intuitivement clair que Y doit être la variété paramétrant les droites de \mathbb{P}^m . Le chapitre qui vient montre, entre autres, comment construire l'anneau d'intersection de cet espace de paramètres.

Nous avons réalisé la première implantation de la méthode itérative, faisant ainsi un premier pas vers une automatisation des calculs en géométrie énumérative. Cet algorithme possède vraisemblablement une complexité exponentielle, comme certains exemples de la Partie III l'indiquent, et une des directions futures de recherche est de reconnaître et de simplifier les formules de points multiples. Nous avons entrepris ce travail et nos premières observations nous ont permis d'émettre de nombreuses conjectures.

Chapitre 4

Points multiples et applications

Contents

1	Invariants numériques et caractères projectifs	46
1.1	Courbes projectives (cote 14Hxx)	46
1.1.1	Approche générale	46
1.1.2	Principe de dualité	47
1.1.3	Principe de projection	48
1.1.4	Courbes planes	48
1.1.5	Courbes gauches	49
1.2	Surfaces dans \mathbb{P}^3	49
1.2.1	Surface à singularités ordinaires	49
1.2.2	Surface avec une courbe cuspidale	51
1.3	Classe d'immersion d'une courbe dans une surface	52
2	Espaces de paramètres	53
2.1	Droites de \mathbb{P}^3 : la Grassmannienne $G(1, 3)$	53
2.2	Variétés linéaires de dimension k dans \mathbb{P}^m	54
2.3	Formules de Pieri, Giambelli et dualité	54
2.4	Retour à $G(1, 3)$	55
3	Surfaces réglées	57
3.1	Construction générale	57
3.2	Quelques propriétés	58
3.2.1	Courbes sur une surface réglée	58
3.2.2	Intersection de deux surfaces réglées	59
3.3	Surfaces développables	59
3.3.1	Généralités	59
3.3.2	Courbe sur une surface	61
3.4	Rouleaux	61
4	Bilan	62

Nous voyons maintenant un certain nombre de résultats préliminaires dont nous nous servirons dans le reste de ce document, et qui sont autant d'applications de la théorie des points multiples. En particulier, nous voyons qu'une variété projective possède un certain nombre d'invariants numériques qui ne sont pas tous indépendants. Nous montrons comment passer d'un ensemble d'invariants à un autre, chose que nous

aurons à accomplir à diverses reprises. Nous introduisons les espaces qui nous serviront à paramétrer les entités sur lesquelles nous travaillerons, comme les droites, les plans et d'autres exemples plus élaborés. Enfin, nous obtenons la géométrie énumérative des surfaces réglées que nous rencontrerons abondamment, notamment dans la Partie II.

1 Invariants numériques et caractères projectifs

À une variété projective, il est possible d'attacher un ensemble de nombres appelés *invariants numériques*. Ce sont des quantités numériques invariantes suivant certains groupes de transformations. Parmi elles se trouvent certains invariants projectifs (comme le degré), topologiques (comme le genre) et nous en verrons d'autres.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à certains invariants fondamentaux des courbes et surfaces projectives.

1.1 Courbes projectives (cote 14Hxx)

L'ensemble des invariants numériques des courbes a une structure simple et bien appréhendée, contrairement à celui des surfaces. Le plus connu de ces invariants est le genre, qui possède plusieurs interprétations. Topologiquement, il mesure le nombre d'anses de la courbe. Algèbro-géométriquement, c'est le nombre de formes différentielles holomorphes linéairement indépendantes sur la courbe. Voyons ici les invariants projectifs. L'approche qui suit est inspirée de [Piene, 1976; Namba, 1984].

1.1.1 Approche générale

Soit C une courbe plongée dans \mathbb{P}^n , où n est 2 ou 3. Soit aussi $Z \rightarrow C$ la normalisation de C et $f : Z \rightarrow \mathbb{P}^n$ la fonction induite. Localement, il existe un paramétrage (appelé *forme normale*)

$$f : t \rightarrow (x_0, \dots, x_n) = (1, t^{\alpha_1+1} + \dots, \dots, t^{\alpha_n+n} + \dots),$$

avec $0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. Nous écrivons α_P pour le n -uplet attaché au point P de Z . Alors P est dit *ordinaire* si $\alpha_P = (0)$. Soit également b_m la quantité

$$b_m = \sum_{P \in Z} (\alpha_{m+1} - \alpha_m),$$

que nous appelons le m -ième *index stationnaire* de f . Il est à noter que b_0 est simplement le degré de la ramification de f .

Voyons quelques exemples. Soit C une courbe plane. Au voisinage d'un point régulier de C , f a la forme normale

$$f(t) = (1, t + \dots, t^2 + \dots),$$

alors qu'au voisinage d'un point de rebroussement, cela donne

$$f(t) = (1, t + \dots, t^3 + \dots),$$

et pour une inflexion

$$f(t) = (1, t^2 + \dots, t^3 + \dots).$$

Soit maintenant $B(P)$ la branche de C en $f(P)$. Nous définissons *l'espace osculateur* d'ordre m comme étant le sous-espace linéaire de dimension m de \mathbb{P}^n qui a l'ordre de contact le plus élevé avec $B(P)$ en

$f(P)$, et on peut montrer que cet ordre de contact est précisément $\alpha_{m+1} + m + 1$. Ces espaces osculateurs sont les sections d'un faisceau de rang $m + 1$ sur Z , appelé *faisceau osculateur* d'ordre m ou *faisceau de contact* d'ordre m , et dénoté $\mathcal{O}(m, \mathcal{L})$, où \mathcal{L} est le fibré tautologique sur Z . Si Ω_Z est le faisceau des différentielles, alors ces faisceaux osculateurs sont définis par la séquence exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes S^m(\Omega_Z) \longrightarrow \mathcal{O}(m, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{O}(m-1, \mathcal{L}) \longrightarrow 0,$$

où S^i dénote la i -ème puissance symétrique. On obtient alors :

$$\deg \mathcal{O}(m, \mathcal{L}) = \frac{m(m+1)}{2} \deg \Omega_Z + (m+1) \deg \mathcal{L}.$$

Nous définissons l'entier r_m comme étant le nombre d'espaces osculateurs d'ordre m de C rencontrant un sous-espace de \mathbb{P}^n de dimension $n - m - 1$ en position générale, et nous l'appelons le m -rang de C . Nous introduisons alors la fonction

$$a^m : f^* H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1)) \longrightarrow \mathcal{O}(m, \mathcal{L}),$$

où $H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1))$ représente le groupe de cohomologie, et on dénote par $\mathcal{O}(m)$ l'image de a^m , $\mathcal{O}(m) \subseteq \mathcal{O}(m, \mathcal{L})$. Piene [Piene, 1976] prouve que le m -rang de C est égal au degré de ce faisceau $\mathcal{O}(m)$. Alors, si \mathcal{I}_m est le conoyau de a^m , on a la séquence exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(m) \longrightarrow \mathcal{O}(m, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{I}_m \longrightarrow 0.$$

Il est possible de montrer que le degré de \mathcal{I}_m est

$$\deg \mathcal{I}_m = \sum_{\substack{i=0 \dots n \\ P \in Z}} \alpha_i = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)b_i,$$

et ainsi le m -rang est

$$r_m = \frac{m(m+1)}{2} \deg \Omega_Z + (m+1) \deg \mathcal{L} - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)b_i.$$

Enfin, d'après le théorème de Riemann-Hurwitz, $\deg \Omega_Z = 2g - 2$, où g est le genre de C et $\deg \mathcal{L} = r_0$, le degré de C , et nous obtenons pour finir :

$$r_m = (m+1)(r_0 + m(g-1)) - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)b_i.$$

Notons que r_n est nécessairement 0, car dans ce cas a^m est un isomorphisme.

1.1.2 Principe de dualité

Soit f définie comme précédemment et considérons la fonction $\check{f} : Z \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^n$ qui envoie un point P de Z sur le point de l'espace projectif dual représentant l'hyperplan osculateur de f en P . $\check{C} = \check{f}(Z)$ est une courbe, appelée *courbe duale* de $C = f(Z)$. Le *principe de dualité*, établi en premier lieu par Plücker, dit que l'on peut relier les rangs et les index stationnaires de \check{C} à ceux de C [Piene, 1976] :

$$\begin{cases} r_m(\check{C}) = r_{n-1-m}(C), \\ b_m(\check{C}) = b_{n-1-m}(C), \end{cases}$$

pour $m = 0, 1, \dots, n-1$.

1.1.3 Principe de projection

Le *principe de projection*, étudié par Veronese, affirme que l'on peut relier les rangs et index stationnaires de C à ceux de sa projection sur un espace projectif de plus petite dimension. Soit C_q la projection de C sur un espace à q dimensions. Alors [Piene, 1976]:

$$\begin{cases} r_i(C_q) = r_i(C), \\ b_i(C_q) = b_i(C) \text{ pour } 0 \leq i < q-1, \\ b_{q-1}(C_q) = r_q(C) + b_{q-1}(C). \end{cases}$$

1.1.4 Courbes planes

Soit C une courbe plane de degré n , genre g et possédant κ points de rebroussement, δ points doubles, t points triples et i inflexions. Alors le 1-rang de C (le nombre de droites tangentes à C et passant par un point général de \mathbb{P}^2), aussi appelé la *classe* de C , vaut

$$r_1(C) = 2n + 2g - 2 - \kappa.$$

Ce que nous avons écrit plus haut nous apprend que $r_2(C) = 0$ et donc :

$$b_1(C) = 3n + 6g - 6 - 2\kappa,$$

et puisque C est plane de degré n (donc si h est la classe d'une droite dans $A^*(\mathbb{P}^2)$, on a $[C] = nh$), la formule d'adjonction nous dit que :

$$2p_a(C) - 2 = \int [C] \cdot ([C] + [K]),$$

où $[K]$ est la classe du diviseur canonique de \mathbb{P}^2 . Mais nous avons vu que :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}) = (1 + h\omega)^3,$$

et ainsi

$$[K] = -c_1(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}) = -3h.$$

Pour conclure :

$$2p_a(C) - 2 = n(n - 3).$$

Revenant à notre calcul, et utilisant le fait que $2p_a(C) - 2 = 2g - 2 + 2\delta + 2\kappa + 6t$, on voit que :

$$b_1(C) = 3n(n - 2) - 6\delta - 8\kappa - 18t.$$

L'espace osculateur d'ordre 1 (en clair, une droite) a un contact d'ordre $\alpha_2 + 2$ avec C en P . Sauf aux points d'inflexions et aux points de rebroussement, le contact d'une droite est d'ordre 2, ce qui signifie qu'alors $\alpha_2 + 2 = 2$, ou encore $\alpha_2 = 0$. En ces autres points, le contact est d'ordre 3, c.-à-d. $\alpha_2 = 1$. Par conséquent, $\sum \alpha_2 = i + \kappa$. En outre, on sait que α_0 est égal à 0 partout et $\sum \alpha_1 = \kappa$, donc $b_1(C) = \sum \alpha_2 - \sum \alpha_1 = i$, et par suite $b_1(C)$ est le nombre de points d'inflexion de C . Notons au passage que ce résultat aurait pu être établi en cherchant les cycles de points multiples de la fonction

$$\{(x, l) \in C \times \check{\mathbb{P}}^2 / x \in l\} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$$

rencontrée dans le Chapitre 3, Paragraphe 1, les inflexions correspondant à un contact d'ordre 3 d'une droite avec C .

Pour continuer, soit Λ le nombre de tangentes doubles de C et t' le nombre de ses tangentes triples. Soit \check{C} la courbe duale à C . Par dualité, une tangente double à C correspond à un point double de \check{C} ,

une tangente triple de C à un point triple de \check{C} et une inflexion à un point de rebroussement de \check{C} . En outre, $r_1(C)$ est le degré de \check{C} . Par conséquent, on peut écrire l'équation duale

$$n = r_1(C)(r_1(C) - 1) - 2\Lambda - 3i - 6t'.$$

Écrivant la formule d'adjonction pour \check{C} , on trouve également :

$$n = 2r_1(C) + 2g - 2 - i.$$

1.1.5 Courbes gauches

Passons à une courbe gauche D de degré n , genre g et possédant κ points de rebroussement. Alors le 1-rang de D (le nombre de tangentes à D rencontrant une droite en position générale), appelé plus fréquemment le *rang* de D , est égal à :

$$r_1(D) = 2n + 2g - 2 - \kappa.$$

Le 2-rang de D (le nombre de plans osculateurs à D et passant par un point général de l'espace), appelé la *classe* de D , est :

$$r_2(D) = 3n + 6g - 6 - 2\kappa - b_1(D).$$

D'après le principe de projection, nous avons la relation $b_1(D) + r_2(D) = b_1(C)$, où C est une projection générique de D sur un \mathbb{P}^2 . Mais un plan osculateur à D et passant par un point général de l'espace se projette en une droite d'inflexion de C . Par conséquent, en reprenant les notations du paragraphe précédent, nous avons $r_2(D) = i = b_1(C)$ et $b_1(D) = 0$.

1.2 Surfaces dans \mathbb{P}^3

Les surfaces algébriques (cote 14Jxx) possèdent de nombreux invariants numériques, et leur théorie est loin de posséder la simplicité observée pour les courbes. Les invariants fondamentaux d'une surface X de \mathbb{P}^3 sont ceux caractérisant sa géométrie : degré, degré de la courbe double, degré de la courbe cuspidale, nombre de singularités de ces courbes . . . Ensuite, viennent, un peu comme précédemment, le *rang* μ_1 de X , qui est le degré de la courbe sur X des points possédant un plan tangent qui passe par un point général de l'espace, et la *classe* μ_2 , le nombre de plans tangents à X contenant une droite en position générale, qui sont des invariants projectifs. Un autre ensemble d'invariants est obtenu en considérant les classes de Chern du faisceau tangent à X . Il existe enfin des invariants topologiques, comme la caractéristique d'Euler (qui détermine le type topologique de la surface), les nombres de Betti (permettent par exemple de mesurer le nombre de composantes connexes, de trous ou de cavités de X , et sont des dimensions d'espaces de cohomologie) et le genre arithmétique.

Plus loin dans le document, nous rencontrerons en priorité les invariants fondamentaux et les degrés des classes de Chern du faisceau tangent. Nous montrons ici comment on peut passer du premier ensemble d'invariants au deuxième, dans le cas d'une surface à singularités ordinaires d'abord, puis dans le cas d'une surface ayant aussi une courbe cuspidale.

1.2.1 Surface à singularités ordinaires

Soit X une surface de \mathbb{P}^3 de degré d à *singularités ordinaires*, à savoir possédant une *courbe double* (courbe de self-intersection) de degré b , t *points triples* (self-intersection de la courbe double) et ν_2 *points-pinces* isolés (points de la courbe double où les deux plans tangents sont confondus - voir Figure 4.1).

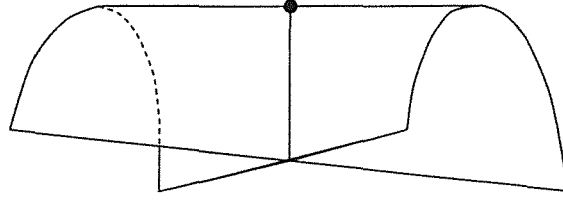


FIG. 4.1 - Un exemple de point-pince.

Soit $f : Z \rightarrow X$ la fonction de normalisation (ou désingularisation) de X et $\varphi : Z \rightarrow \mathbb{P}^3$ la fonction induite. Z est une surface lisse. Soit D_b la courbe double sur X et Γ_b l'image inverse de D_b par f , c.-à-d. $\Gamma_b = f^{-1}(D_b)$. Soit K la classe du diviseur canonique sur Z . Enfin, nous notons \mathcal{T}_Z le faisceau tangent à Z , h la classe d'un hyperplan dans \mathbb{P}^3 et e son image réciproque dans $A^*(Z)$. Le polynôme de Chern de \mathcal{T}_Z est ainsi

$$C_\omega(\mathcal{T}_Z) = 1 - K\omega + c_2(\mathcal{T}_Z)\omega^2,$$

et celui de \mathbb{P}^3 est $C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}) = (1 + h\omega)^4$ comme nous l'avons vu. Utilisant la séquence exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_Z \rightarrow \varphi^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3} \rightarrow 0,$$

nous obtenons le fait que

$$\begin{cases} c_1(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}) = 4e - c_1(\mathcal{T}_Z) = 4e + K, \\ c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}) = K^2 + 4Ke + 6e^2 - c_2(\mathcal{T}_Z). \end{cases}$$

Appliquons maintenant la théorie des points multiples à φ . Le cycle sur Z correspondant aux points doubles de φ est donné par (φ est de codimension 1)

$$[M_2] = l(1, 1, 1) = \varphi^*\varphi_*[Z] - c_1(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}),$$

où $[Z]$ désote le cycle fondamental dans $A^*(Z)$. La partie de dimension 1 du lieu double de φ est précisément Γ_b , et en utilisant le fait que $\varphi_*[Z] = dh$, nous obtenons :

$$[\Gamma_b] = (d - 4)e - K.$$

Puisque $\int [\Gamma_b].e = 2b$ (la fonction $\Gamma_b \rightarrow D_b$ est un double recouvrement et il n'y a pas de facteur de surcompte), nous avons :

$$\int K.e = d(d - 4) - 2b.$$

L'ensemble des points triples de φ est donné par le cycle :

$$[M_3] = l(1, 1, 1) = \varphi^*\varphi_*[M_2] - 2c_1(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}).[M_2] + 2c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}),$$

et son degré est égal à $6t$ (un point triple sur D_b provient de 3 points doubles sur Γ_b et le facteur de surcompte est 3). Par conséquent, puisque nous savons que $\varphi_*[M_2] = 2bh^2$,

$$[M_3] = 4K^2 - 2(d - 12)Ke + 2(b - 4d + 22)e^2 - 2c_2(\mathcal{T}_Z),$$

et prenant le degré de ce 0-cycle, nous avons la relation :

$$\int (2K^2 - c_2(\mathcal{T}_Z)) = d(d^2 - 12d + 26) - 3(d - 8)b + 3t. \quad (4.1)$$

Dans notre cas, la surface possède également ν_2 points-pinces, images des points de ramification de φ . Si R est le lieu de ramification de φ sur Z , alors [Kleiman, 1976]

$$[R] = c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}) = K^2 + 4Ke + 6e^2 - c_2(\mathcal{T}_Z),$$

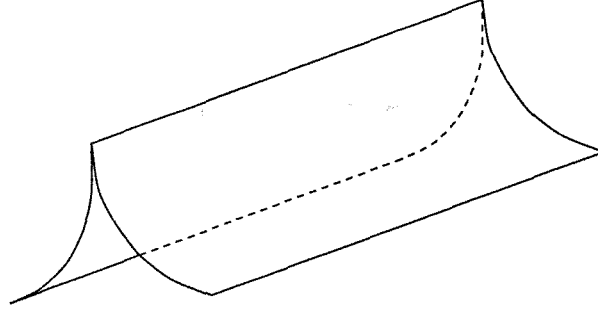


FIG. 4.2 - Un exemple de courbe cuspidale.

et par conséquent, prenant le degré de $[R]$, nous avons :

$$\int (K^2 - c_2(\mathcal{T}_Z)) = -2d(2d - 5) + 8b + \nu_2. \quad (4.2)$$

Combinant (4.1) et (4.2), nous obtenons :

$$\begin{cases} \int K^2 = d(d-4)^2 - (3d-16)b + 3t - \nu_2, \\ \int c_2(\mathcal{T}_Z) = d(d^2 - 4d + 6) - (3d-8)b + 3t - 2\nu_2. \end{cases}$$

Une autre relation provient de la formule d'adjonction appliquée à Γ_b . En effet,

$$2p_a(\Gamma_b) - 2 = \int [\Gamma_b].(K + [\Gamma_b]) = 2(d-4)b.$$

D_b a t points triples, provenant de $3t$ points doubles sur Γ_b . Par conséquent, le genre de Γ_b est donné par

$$p_a(\Gamma_b) = g(\Gamma_b) + 3t.$$

Appliquons la formule de Riemann-Hurwitz à la fonction restreinte $\varphi|_{\Gamma_b} : \Gamma_b \rightarrow D_b$. Nous obtenons alors :

$$2(2g(D_b) - 2) + \nu_2 = 2g(\Gamma_b) - 2,$$

ce qui signifie que

$$2g(D_b) - 2 = (d-4)b - 3t - \frac{\nu_2}{2}.$$

Par suite, le rang de D_b est

$$\Upsilon = 2b + 2g(D_b) - 2 = (d-2)b - 3t - \frac{\nu_2}{2}.$$

1.2.2 Surface avec une courbe cuspidale

Utilisant les mêmes notations que précédemment, nous supposons maintenant que le lieu de ramification R de φ n'est pas fini, ce qui signifie que X possède une *courbe cuspidale* D_c (lieu des points où deux portions de la surface viennent en contact tangentiel - voir Figure 4.2) de degré c ayant κ points de rebroussement, en plus d'une courbe double D_b de degré b ayant t points triples et κ' points de rebroussement à ses intersections avec D_b .

Si D est le lieu des points singuliers sur X , on a $[D] = [D_b] + [D_c]$. Soit Γ_c la partie de dimension 1 du lieu de ramification R et $\Gamma_b = f^{-1}(D_b)$. Alors le cycle des points doubles de φ est [Piene, 1977]

$$[M_2] = [\Gamma_b] + 2[\Gamma_c],$$

et puisque $[M_2] = (d-4)e - K$ par ailleurs, on trouve

$$K = (d-4)e - [\Gamma_b] - 2[\Gamma_c].$$

Utilisant enfin le fait que $\int[\Gamma_c].e = c$, on trouve

$$\int K.e = d(d-4) - 2b - 2c.$$

L'ensemble des points triples de φ a pour cycle $[M_3]$ et pour degré $6k$. Pour évaluer k , il ne faut pas oublier que la ramification de φ est infinie, et donc il faut compter dans ce nombre non seulement les points triples de D_b , mais aussi les points de rebroussement de D_b et D_c , soit

$$k = t + \kappa + \kappa'.$$

On a par conséquent l'expression

$$6(t + \kappa + \kappa') = \int[M_3],$$

ou encore puisque $\varphi_*[M_2] = 2(b+c)h^2$

$$\int(2K^2 - c_2(\mathcal{T}_Z)) = d(d^2 - 12d + 26) - 3(d-8)(b+c) + 3(t + \kappa + \kappa').$$

Nous avons en outre la relation supplémentaire :

$$\kappa' = \int[\Gamma_b].[\Gamma_c].$$

1.3 Classe d'immersion d'une courbe dans une surface

Regardons maintenant la définition de la *classe d'immersion* $\rho(C)$ d'une courbe C appartenant à une surface X , à savoir le nombre de plans tangents à X aux points de C qui passent par un point général de l'espace. Soit $\varphi : Z \rightarrow X$ la normalisation de X , $k : \tilde{Z} \rightarrow Z$ l'éclaté de l'idéal de ramification de φ (désingularisation de Z) et $B \subseteq \tilde{Z}$ le diviseur exceptionnel. Supposons que Z possède deux courbes Γ_b et Γ_c correspondant aux courbes nodale D_b et cuspidale D_c de X . Soit e la classe d'une section hyperplane de Z et \tilde{e} l'image réciproque dans $A^*(Z)$ de la classe duale \tilde{h} de \mathbb{P}^3 . Soit v et \tilde{v} les images réciproques de σ et $\tilde{\sigma}$ dans $A^*(\tilde{Z})$. Alors [Piene, 1977] montre que

$$\tilde{v} = (\mu_0 - 1)v - [k^{-1}\Gamma_b] - 3[k^{-1}\Gamma_c] - [B],$$

et que

$$\int \tilde{v}.[B] = \int c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}).$$

Soit C une courbe sur X et C' sa correspondante sur Z . Alors si C ne fait pas partie du lieu des points singuliers de X ,

$$\rho(C) = \int \tilde{\sigma}.[C'],$$

sinon $\rho(C)$ vaut

$$\rho(C) = \int \tilde{v}.[k^{-1}C'].$$

2 Espaces de paramètres

Les *espaces de paramètres* (cote 14M15) peuvent être vus comme des généralisations des espaces projectifs : ce sont des espaces paramétrant des entités algébriques autres que des points. On sait par exemple que dans un espace projectif classique, il existe une relation de dualité entre points et hyperplans, grâce à la fonction qui envoie un point sur l'ensemble des hyperplans passant par ce point. Ainsi les hyperplans d'un espace projectif \mathbb{P}^m sont paramétrés par un espace de même dimension, que l'on appelle *espace projectif dual* et que l'on note \mathbb{P}^m . Nous avons déjà rencontré dans le Chapitre 3, Paragraphe 1 un exemple de ces espaces duaux, à savoir \mathbb{P}^2 qui paramètre les droites de \mathbb{P}^2 . Les espaces duaux sont des exemples d'une classe plus large de variétés, connues sous le nom de *Grassmanniennes*, qui paramètrent des variétés linéaires. On note $G(k, m)$ l'espace paramétrant les variétés linéaires de dimension k dans \mathbb{P}^m . $G(1, 3)$ dénote ainsi la Grassmannienne de droites de \mathbb{P}^3 . Nous verrons que ces espaces sont d'une grande utilité pour étudier les systèmes de droites ou de plans.

Avant de continuer, introduisons une nouvelle notion. Soit V un espace vectoriel de dimension $m + 1$ et $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V)$ son espace projectif associé. On appelle *drapeau* de type (n_1, \dots, n_k) dans V un k -uplet (M_1, \dots, M_k) où

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k = \mathbb{P}^m,$$

où $\dim M_i = n_1 + \dots + n_i - 1$. \mathbb{P}^m peut par exemple être vu comme l'espace paramétrant les drapeaux de type $(1, m)$, et $G(1, m)$ ceux de type $(2, m-1)$. Un drapeau est dit *complet* s'il est de type $(1, \dots, m+1)$. Les Grassmanniennes sont des exemples particuliers des espaces plus généraux qui paramètrent les drapeaux. On appelle *variété de drapeaux* de type (n_1, \dots, n_k) , et on note $F_{n_1, \dots, n_k}(\mathbb{P}^m)$ ou simplement F_{n_1, \dots, n_k} lorsqu'aucune confusion n'est possible, l'espace paramétrant les drapeaux de type (n_1, \dots, n_k) de \mathbb{P}^m .

2.1 Droites de \mathbb{P}^3 : la Grassmannienne $G(1, 3)$

Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} deux points de \mathbb{P}^3 , de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Soit l la droite passant par les deux points \mathbf{x} et \mathbf{y} . Formons les seize quantités suivantes :

$$l_{ij} = x_i y_j - x_j y_i,$$

pour $i, j = 1, \dots, 4$. On voit immédiatement que $l_{ii} = 0$ et que $l_{ij} = -l_{ji}$. Il ne reste donc que 6 quantités apparemment indépendantes, disons $\mathbf{l} = (l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{23}, l_{31}, l_{12})$.

Ces l_{ij} ne sont pourtant pas totalement indépendantes. Soit les deux nouveaux points suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \\ \mathbf{t} = \alpha' \mathbf{x} + \beta' \mathbf{y}. \end{cases}$$

Formant les mêmes quantités m_{ij} que précédemment pour ces points, il est facile de voir que

$$m_{ij} = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)l_{ij},$$

ce qui signifie que les rapports des l_{ij} sont constants. Pour finir, il suffit de voir que le déterminant

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

est identiquement nul et s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{l}) = l_{41}l_{23} + l_{42}l_{31} + l_{43}l_{12} = 0.$$

La première constatation est la suivante : quatre des quantités l_{ij} déterminent toutes les autres, ce qui se traduit par le fait que l'espace G qui paramètre les droites de \mathbb{P}^3 est de dimension 4. Les six nombres

l_{ij} peuvent aussi être vus comme les coordonnées d'un point dans \mathbb{P}^5 et $\Psi(1)$ comme une équation que chacun de ces points doit satisfaire. Il est facile de voir ainsi que Ψ est une quadrique de \mathbb{P}^5 . On appelle les l_{ij} les *coordonnées de Plücker* de l et on parle de *plongement de Plücker* pour désigner la transformation qui envoie une droite de \mathbb{P}^3 sur un point de Ψ .

Ainsi un problème de droites dans \mathbb{P}^3 peut être vu comme un problème de points dans \mathbb{P}^5 . Soit U la classe d'un hyperplan dans $A^*(\mathbb{P}^5)$ et $\varpi : G \rightarrow \mathbb{P}^5$ le plongement de Plücker. La restriction u de U à Ψ est la classe tautologique sur la quadrique. Par suite, la classe tautologique sur G est ϖ^*u , que nous dénotons γ_1 . u est la classe des points de \mathbb{P}^5 qui appartiennent à une section plane générale de Ψ , ce qui correspond dans G à la classe des droites de \mathbb{P}^3 rencontrant une droite en position générale.

Un *système algébrique de droites* à r paramètres de \mathbb{P}^3 est une sous-variété de dimension r de G . Suivant que $r = 1, 2$ ou 3 , on parle d'une *surface réglée*, d'une *congruence* ou d'un *complexe*. Dans ce document, nous étudierons les surfaces réglées dans le Paragraphe 3 à venir et les congruences dans le Chapitre 7, Paragraphe 6.

2.2 Variétés linéaires de dimension k dans \mathbb{P}^m

La Grassmannienne $G(k, m)$ paramètre les variétés linéaires de dimension k dans \mathbb{P}^m . Calculons ici la dimension de cet espace, résultat que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la Partie II.

Proposition 4.2.1 - *La dimension de $G(k, m)$ est $(k + 1)(m - k)$, pour $0 \leq k \leq m - 1$ et $m \geq 1$.*

Preuve. Commençons par le cas du plan projectif. Alors $G(0, 2) = \mathbb{P}^2$ et $G(1, 2) = \mathbb{P}^2$ sont de dimension 2, et la formule est vraie pour $G(k, 2)$. Supposons-la vraie au rang $m - 1$. Une variété linéaire de dimension k dans \mathbb{P}^m est spécifiée par $k + 1$ points (par exemple, une droite unique de \mathbb{P}^3 passe par deux points en position générale, un plan unique par trois points en position générale). Par conséquent, le passage d'une variété de dimension k de \mathbb{P}^{m-1} à \mathbb{P}^m revient à ajouter une coordonnée à chacun des $k + 1$ points qui le définissent. Ainsi :

$$\dim G(k, m) = \dim G(k, m - 1) + k + 1.$$

Le résultat suit immédiatement par récurrence sur la dimension. □

2.3 Formules de Pieri, Giambelli et dualité

Voyons maintenant comment exprimer de manière quantitative les relations d'incidence non-génériques entre variétés linéaires, grâce au *calcul de Schubert*. Soit V un espace vectoriel de dimension $m + 1$ et $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé de degré m . Décrivons donc l'anneau de Chow de $G(k, m)$.

Soit \mathcal{L} le drapeau complet

$$\mathcal{L} : L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = \mathbb{P}^m$$

de variétés linéaires l_i de telle sorte que $\dim(L_i) = i$. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ une séquence d'entiers tels que

$$0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq m - k.$$

À chacune de ces séquences, il est possible d'associer un cycle, appelé *cycle de Schubert* et dénoté par $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, défini comme l'ensemble des $\Lambda \in G(k, m)$ tels que

$$\dim(\Lambda \cap L_{i+\alpha_i}) \geq i, \quad i = 0, \dots, k.$$

Pour insister sur la codimension, on écrit également ce cycle $(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = [a_0, \dots, a_k]$, où $a_i = m - k - \alpha_i$. La codimension de ce cycle (c.-à-d. la codimension du sous-espace dans $G(k, m)$) est alors $\sum a_i$. Introduisons aussi les cycles

$$s_j = [j, 0, \dots, 0],$$

pour $j = 0, \dots, m - k$. s_j représente l'ensemble des $\Lambda \in G(k, m)$ tels que Λ rencontre L_{m-k-j} et est appelé *cycle de Schubert spécial*. On note également plus simplement s_j par $[j]$. Le cycle $[0]$ est alors le cycle fondamental sur $G(k, m)$ (élément neutre pour le produit d'intersection).

Les classes rationnelles des cycles de Schubert, les *classes de Schubert*, forment une base libre du groupe de Chow $A^*(G(k, m))$. En particulier, les classes rationnelles des cycles $[a_0, \dots, a_k]$ tels que $\sum a_i = r$ forment une base libre de $A^r(G(k, m))$. Nous utiliserons dans la suite les mêmes notations pour désigner les classes de Schubert que celles que nous venons de prendre pour les cycles. Puisque nous ne nous intéresserons qu'aux classes, aucune confusion n'est possible. Voyons maintenant comment on peut décrire la structure multiplicative de $A^*(G(k, m))$, à l'aide de trois règles de calculs.

Tout d'abord, voyons la *formule de Pieri* [Hodge et Pedoe, 1953], un algorithme qui permet de calculer le produit d'une classe de Schubert quelconque avec une classe de Schubert spéciale. Cette formule est :

$$s_j \cdot [a_0, \dots, a_k] = \sum [b_0, \dots, b_k],$$

où la somme est calculée pour toutes les classes $[b_0, \dots, b_k]$ telles que

$$\sum b_i = j + \sum a_i, \quad a_0 \leq b_0, \quad a_i \leq b_i \leq a_{i-1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k.$$

La *formule de Giambelli* permet elle d'exprimer toute classe de Schubert comme un déterminant dont les entrées sont des classes de Schubert spéciales :

$$[a_0, \dots, a_k] = \det(s_{a_i+j-i}) = \begin{vmatrix} s_{a_0} & s_{a_0+1} & \cdots & s_{a_0+k} \\ s_{a_1-1} & s_{a_1} & \cdots & s_{a_1-1+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{a_k-k} & s_{a_k-k+1} & \cdots & s_{a_k} \end{vmatrix}.$$

Enfin, nous utiliserons une propriété d'*auto-dualité* des classes de Schubert vis-à-vis du produit d'intersection. En effet, si $[a_0, \dots, a_k]$ et $[b_0, \dots, b_k]$ sont deux classes de même codimension, alors

$$\int [a_0, \dots, a_k] \cdot [b_0, \dots, b_k] = \begin{cases} 0 & \text{si } [a_0, \dots, a_k] \neq [b_0, \dots, b_k], \\ 1 & \text{si } [a_0, \dots, a_k] = [b_0, \dots, b_k]. \end{cases}$$

Soit V_G le fibré vectoriel trivial de rang $m + 1$ sur $G(k, m)$. On définit par T le sous-fibré de V_G dont la fibre en chaque point $\Lambda \in G(k, m)$ est simplement le sous-espace $\Lambda \subset \mathbb{P}^m$, et on l'appelle *sous-fibré tautologique*. Par suite, le quotient $V_G/T = R$ est dénommé *fibré quotient*. Pour relier à ce qui précède, nous avons alors le résultat suivant [Kleiman, 1969] : les classes de Chern de R sont $c_j(R) = s_j$. Notons ici la chose suivante. De même que dans \mathbb{P}^3 , les points et les plans sont duaux, il existe une relation de dualité entre les sous-espaces linéaires de dimension k et $m - k$ de \mathbb{P}^m , que l'on peut noter $\tau : G(k, m) \rightarrow G(m - k, m)$. D'après cette identification, le fibré tautologique sur $G(m - k, m)$ est le dual du fibré quotient sur $G(k, m)$.

2.4 Retour à $G(1, 3)$

Lorsque le but est de décrire l'anneau de Chow de $G(1, m)$, il est de coutume d'utiliser les cycles $\gamma_1 = [1]$, cycle des droites rencontrant une droite en position générale, et $\gamma_2 = [1, 1]$, cycle des droites

contenues dans un plan en position générale (il est de coutume de parler de cycles, mais c'est bien de classes qu'il s'agit !). On voit immédiatement que $\gamma_1 = s_1$ et par la formule de Giambelli :

$$\gamma_2 = [1, 1] = \begin{vmatrix} [1] & [2] \\ [0] & [1] \end{vmatrix} = [1]^2 - [2].$$

Voyons maintenant comment décrire l'anneau de Chow de $G(1, 3)$. Nous avons vu que $G(1, 3)$ est de dimension 4. Par application de la formule de Pieri, on a :

$$[1]^2 = [2] + [1, 1].$$

Ainsi, grâce à la propriété de dualité, on voit tout de suite que :

$$\int [1]^4 = \int [1]^2 \cdot [1]^2 = 2$$

car $\int [2] \cdot [1, 1] = 0$ et $\int [2]^2 = \int [1, 1]^2 = 1$. Cette relation se traduit par $\int \gamma_1^4 = 2$, ou en clair : il existe deux droites de \mathbb{P}^3 qui rencontrent quatre droites en position générale. Ensuite, nous avons :

$$[1]^3 = ([2] + [1, 1]) \cdot [1] = 2[2, 1],$$

relation qui se traduit par

$$\gamma_1^3 = 2\gamma_1 \cdot (\gamma_1^2 - \gamma_2),$$

ou encore

$$\gamma_1^3 = 2\gamma_1 \gamma_2.$$

Toujours par dualité

$$\int [1]^2 \cdot [2] = 1,$$

ce qui donne $\gamma_1^2 \gamma_2 = 1$. Pour finir, la relation $\int [2]^2 = 1$ se traduit par $\int \gamma_2^2 = 1$, ou en clair : il existe une droite de \mathbb{P}^3 contenue dans deux plans en position générale. Évident, non ?

Nous avons abouti à la description suivante de l'anneau de Chow de $G(1, 3)$:

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 1 \\ \dim = 2 \\ \dim = 1 \\ \dim = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A^0(G) = \mathbb{Z}[G], \\ A^1(G) = \mathbb{Z}\gamma_1, \\ A^2(G) = \mathbb{Z}\gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2, \\ A^3(G) = \mathbb{Z}\gamma_1\gamma_2, \\ A^4(G) = \mathbb{Z} * . \end{array} \right.$$

Pour finir, obtenons les classes de Chern du faisceau tangent \mathcal{T}_G . Prenant la séquence exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow V_G \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

et appliquant le foncteur $\text{Hom}(T, \cdot)$ (faisceau de morphismes)

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(T, T) \longrightarrow \text{Hom}(T, V_G) \longrightarrow \text{Hom}(T, R) \longrightarrow 0,$$

ou de manière équivalente puisque \mathcal{T}_G s'identifie à $\text{Hom}(T, R)$ [Fulton, 1984],

$$0 \longrightarrow T \otimes \tilde{T} \longrightarrow 4\tilde{T} \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow 0,$$

\tilde{T} étant le dual de T . Les classes de Chern R étant $[1]$ et $[1, 1]$, celles de T sont $-\gamma_1$ et γ_2 . Pour finir, cela signifie que le polynôme de Chern de \mathcal{T}_G est

$$C_\omega(\mathcal{T}_G) = 1 + 4\gamma_1\omega + 7\gamma_1^2\omega^2 + 12\gamma_1\gamma_2\omega^3 + 6 * \omega^4.$$

3 Surfaces réglées

Le terme *surface réglée* désigne généralement deux entités distinctes. Tout d'abord, il se réfère au fibré projectif $Z = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ de droites sur une courbe projective C de genre g associé à un faisceau localement libre \mathcal{E} de rang 2. Ensuite, il désigne aussi l'image R de Z dans \mathbb{P}^3 par une fonction ϱ ayant les deux propriétés suivantes : la restriction $Z \rightarrow R = \varrho(Z)$ est birationnelle et ϱ envoie les fibres de Z sur des droites de \mathbb{P}^3 [Beauville, 1978]. Une telle fonction peut être obtenue de la manière suivante : d'abord plonger Z dans un espace projectif de grande dimension, puis projeter Z depuis un centre en position générale [Kleiman, 1976].

Nous développons ici les propriétés énumératives des surfaces réglées, de manière globale pour commencer, puis nous spécialiserons les calculs suivant la nature de la surface étudiée.

3.1 Construction générale

Soit μ_0 le degré de R et σ la classe d'une section hyperplan de Z . Soit $\psi : Z \rightarrow C$ le morphisme projectif, $F = \psi^{-1}(x)$ une fibre de ψ et f sa classe dans $A^1(Z)$. Nous appelons l'image de F par ϱ par extension une fibre ou encore un générateur de R . On peut alors montrer que $A^1(Z)$ est engendré par f et σ , et que $f^2 = 0$ [Beauville, 1978]. À partir de cela, on voit que :

$$\begin{cases} \psi^* c_1(\mathcal{E}) = -\mu_0 f, \\ \psi^* c_1(\mathcal{T}_C) = (2 - 2g)f, \end{cases}$$

la deuxième égalité provenant du théorème de Riemann-Roch. Utilisant la Proposition 2.4.1, on voit tout de suite que :

$$\sigma^2 - \mu_0 f \sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\int f \sigma = 1.$$

La deuxième partie du résultat de Grothendieck nous apprend que :

$$m_* \sigma = [C].$$

Utilisant les équations pour la projectivisation, nous obtenons :

$$C_\omega(\mathcal{T}_Z) = C_\omega(\psi^* \mathcal{T}_C) C_\omega(\psi^* \mathcal{E} \otimes \Theta_Z(1)),$$

de telle sorte que :

$$C_\omega(\mathcal{T}_Z) = 1 + (2\sigma + (2 - 2g - \mu_0)f)\omega + (4 - 4g) * \omega^2.$$

Il faut noter ici que la classe du diviseur canonique est :

$$[K_Z] = -c_1(\mathcal{T}_Z) = -2\sigma + (2g - 2 + \mu_0)f.$$

Pour étudier les points multiples de ϱ , nous devons d'abord calculer les classes de Chern du faisceau normal $\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}$. Utilisant la séquence exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_Z \rightarrow \varrho^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3} \rightarrow 0,$$

nous voyons que :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}) = 1 + (2\sigma + (2g - 2 + \mu_0)f)\omega + (4g - 4 + 2\mu_0) * \omega^2.$$

Le lieu des points singuliers de dimension un W de R est fait d'une courbe double D_R de degré \tilde{b} et d'une éventuelle courbe cuspidale C_R de degré \tilde{c} . L'image réciproque de $[W]$ dans $A^*(Z)$ est

$$[M_2] = \varrho^*[W] = [D_Z] + 2[C_Z],$$

où D_Z et C_Z sont les courbes sur Z correspondant à D_R et C_R . Le cycle supportant le lieu des points doubles de ϱ est :

$$[M_2] = \varrho^*\varrho_*[Z] - c_1(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}),$$

où encore

$$[M_2] = (\mu_0 - 2)\sigma + (2 - 2g - \mu_0)f.$$

Puisque $2\tilde{b} = \int [D_Z].\sigma$ (pas de facteur de surcompte, mais $D_Z \rightarrow D_R$ est un double recouvrement) et $\tilde{c} = \int [C_Z].\sigma$, on aboutit à la relation :

$$\tilde{b} + \tilde{c} = \frac{1}{2}(\mu_0 - 1)(\mu_0 - 2) - g.$$

De la même manière, le cycle des points triples de ϱ est

$$[M_3] = \varrho^*\varrho_*[M_2] - 2c_1(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}).[M_2] + 2c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}),$$

ce qui donne

$$[M_3] = (\mu_0 - 4)((\mu_0 - 3)(\mu_0 - 2) - 6g) *.$$

Si k est le nombre total de points triples sur R , on a alors (un point triple de R provient de 3 points doubles de Z et le facteur de surcompte est 2)

$$6k = \int [M_3].$$

3.2 Quelques propriétés

Voyons quelques propriétés des surfaces réglées.

3.2.1 Courbes sur une surface réglée

Nous montrons ici comment relier le genre d'une courbe tracée sur R à celui de la courbe de base C . Soit M une courbe de multiplicité s (la courbe D_R est par exemple de multiplicité 2), de degré v sur R qui rencontre chaque générateur en w points (en résumé une courbe (s, v, w)). Soit M' la courbe correspondante sur Z de degré v' . Alors $v' = \int [M'].\sigma = sv$ et $w = \int [M'].f$. Par conséquent, le cycle $[M']$ s'écrit de la manière suivante dans $A^1(Z)$:

$$[M'] = w\sigma + (sv - \mu_0 w)f.$$

On voit tout d'abord que l'intersection de deux courbes (s_1, v_1, w_1) et (s_2, v_2, w_2) donne :

$$\int [M'_1].[M'_2] = s_1 v_1 w_2 + s_2 v_2 w_1 - \mu_0 w_1 w_2.$$

Calculons maintenant le genre arithmétique de M' :

$$2p_a(M') - 2 = \int [M'].([M'] + [K_Z]) = w(2g - 2) + (2sv - \mu_0 w)(w - 1).$$

On peut voir cette relation comme la formulation du théorème de Riemann-Hurwitz appliqué à la fonction $M' \rightarrow C$ et la quantité

$$\delta = (2sv - \mu_0 w)(w - 1)$$

est le nombre de générateurs singuliers pour cette fonction, ou encore le nombre de générateurs tangents à M' .

3.2.2 Intersection de deux surfaces réglées

Soit R_1 (degré $\mu_0(R_1)$) et R_2 (degré $\mu_0(R_2)$) deux surfaces réglées s'intersectant transversalement en une courbe I et Z_1 et Z_2 les fibrés projectifs correspondant. Soit $[I_1]$ (resp. $[I_2]$) le cycle dans $A^*(Z_1)$ (resp. $A^*(Z_2)$) représentant I . Alors si on suppose que I est de type $(1, v_1, w_1)$ sur R_1 et de type $(1, v_2, w_2)$ sur R_2 , on obtient :

$$\begin{cases} [I_1] = w_1\sigma_1 + (v_1 - \mu_0(R_1)w_1)f_1, \\ [I_2] = w_2\sigma_2 + (v_2 - \mu_0(R_2)w_2)f_2, \end{cases}$$

et également $v_1 = v_2 = \mu_0(R_1)\mu_0(R_2)$. Maintenant, il est facile de voir d'après la définition de ce nombre que $w_1 = \mu_0(R_2)$ et $w_2 = \mu_0(R_1)$, et donc :

$$\begin{cases} [I_1] = \mu_0(R_2)\sigma_1, \\ [I_2] = \mu_0(R_1)\sigma_2. \end{cases}$$

Cela signifie que I possède

$$\int [I_1].[D_{Z_1}] + \int [I_2].[D_{Z_2}] = \tilde{b}_1\mu_0(R_2) + \tilde{b}_2\mu_0(R_1)$$

points doubles et

$$\int [I_1].[C_{Z_1}] + \int [I_2].[C_{Z_2}] = \tilde{c}_1\mu_0(R_2) + \tilde{c}_2\mu_0(R_1)$$

points de rebroussement.

3.3 Surfaces développables

Un système Δ simplement infini (ou à un paramètre) de plans de \mathbb{P}^3 est appelé une *développable de plans*. La ligne d'intersection de deux plans consécutifs du système est appelée *ligne focale* ou *générateur* et le point d'intersection de trois plans consécutifs du système est appelé *point focal*. L'ensemble des générateurs de Δ forme une surface réglée D , qui a la propriété additionnelle d'avoir une courbure de Gauss nulle en chacun de ses points réguliers, et que nous appelons *surface développable*. Une telle surface possède une courbe double et une courbe cuspidale, lieu des points focaux.

3.3.1 Généralités

Une surface développable possède la propriété que son plan tangent est constant le long de chacun de ses générateurs. Soit C_D une courbe gauche et D sa surface développable *d'osculation*, enveloppée par les plans osculateurs à C_D . Un résultat montre alors que C_D est la courbe cuspidale de D [Semple et Roth, 1949, page 86] et que dualement la surface développable d'osculation de la courbe cuspidale d'une surface développable D est D elle-même. Supposons maintenant que D , en tant que surface réglée, est construite sur une courbe C . Tous les générateurs de D sont tangents à la courbe double, ce qui signifie que le rang de C_D , le nombre de ses tangentes rencontrant une droite en position générale, est égal au degré de D . Et C et C_D sont en correspondance algébrique point par point, donc sont de même genre g .

Soit \tilde{c} le degré de C_D et κ le nombre de points de rebroussement sur cette courbe. Alors nous avons donc :

$$\mu_0 = 2\tilde{c} + 2g - 2 - \kappa,$$

où μ_0 est le degré de D . La classe de C_D est ensuite donnée par :

$$n' = 3\tilde{c} + 6g - 6 - 2\kappa,$$

et ce nombre est le nombre de plans osculateurs de C_D qui passent par un point général. C'est également le nombre de plans tangents à D passant par un point général, c.-à-d. le rang μ_1 de D . En réécrivant les deux équations obtenues, nous concluons que :

$$\begin{cases} \mu_1 = 2\mu_0 + 2g - 2 - \tilde{c}, \\ \kappa = 3\mu_0 - 2\mu_1 + 6g - 6. \end{cases}$$

Revenons maintenant aux notations du paragraphe précédent. Le fait que chaque générateur rencontre la courbe cuspidale en un point et un seul peut se traduire par la relation $\int [C_Z].f = 1$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{cases} [C_Z] = \sigma + (\mu_0 - \mu_1 + 2g - 2)f, \\ [D_Z] = (\mu_0 - 4)\sigma + (-3\mu_0 + 2\mu_1 - 6g + 6)f. \end{cases}$$

Le degré de la courbe double est alors donné par :

$$\tilde{b} = \frac{1}{2} \int [D_Z].\sigma = \frac{1}{2}\mu_0(\mu_0 - 7) + \mu_1 + 3 - 3g.$$

En outre, on voit que $\int [D_Z].f = \mu_0 - 4$ ce qui signifie que la courbe double rencontre chaque fibre en $\mu_0 - 4$ points. Supposons maintenant que D_D possède κ' points de rebroussement et j points triples. Les intersections entre C_D et D_D sont en nombre :

$$i = \int [D_Z].[C_Z] = 2\tilde{b} + (\tilde{c} - \mu_0)(\mu_0 - 4).$$

D_D possède κ' points de rebroussement à ses intersections transversales avec C_D , et ces deux courbes se rencontrent encore tangentiellement aux points de rebroussement de C_D (en clair la droite tangente à D_D est la limite au point de rebroussement des tangentes à C_D). Par conséquent :

$$\kappa' = i - 2\kappa = 6\tilde{b} + (\tilde{c} - 3\mu_0)(\mu_0 - 4).$$

Pour continuer, il faut se rappeler que dans le cas d'une surface développable, la ramification de g n'est pas finie, ce qui signifie que parmi les points triples de R , il faut non seulement compter les j points triples de D_D , mais aussi les points de rebroussement de D_D et C_D . Par conséquent :

$$j = k - \kappa - \kappa' = \frac{1}{3}(\mu_0 - 8)(3\tilde{b} - \mu_0(\mu_0 - 4)).$$

Le genre arithmétique de D_Z est obtenu grâce à la formule d'adjonction :

$$2p_a(D_Z) - 2 = \int [D_Z].([D_Z] + [K_Z]) = 2\tilde{b}(\mu_0 - 6) + 2(\mu_0 - \tilde{c})(\mu_0 - 4),$$

et cette courbe possède κ' points de rebroussement et $3j$ points doubles, donc :

$$2g(D_Z) - 2 = 2p_a(D_Z) - 2 - 2\kappa' - 6j = -4\tilde{b}(\mu_0 - 6) + 2(\mu_0 - 4)(\mu_0(\mu_0 - 4) - 2\tilde{c}).$$

Appliquant le théorème de Riemann-Hurwitz entre les normalisations de D_Z et D_D , on obtient :

$$2(2g(D_D) - 2) + \kappa = 2g(D_Z) - 2,$$

ou encore :

$$2g(D_D) - 2 = \tilde{b}(13 - 2\mu_0) + \frac{1}{2}(\mu_0 - 4)(\mu_0(2\mu_0 - 9) - 4\tilde{c}).$$

Pour finir, on peut conclure que le rang de D_D est :

$$\alpha = 2\tilde{b} + 2g(D_D) - 2 - \kappa' = \tilde{b}(9 - 2\mu_0) + \frac{1}{2}(\mu_0 - 4)(\mu_0(2\mu_0 - 3) - 6\tilde{c}).$$

Soit $\tilde{\sigma}$ l'image réciproque dans $A^*(Z)$ de la classe \tilde{h} d'un hyperplan dans \mathbb{P}^3 . Alors d'après ce que nous avons vu Paragraphe 1 (page 46) :

$$\tilde{\sigma} = (\mu_0 - 1)\sigma - [D_Z] - 3[C_Z].$$

Cela revient à dire que :

$$\tilde{\sigma} = \mu_1 f.$$

La classe de R est alors :

$$\mu_2 = \int \tilde{\sigma}^2 = 0.$$

La classe d'immersion de C_D dans R est

$$\rho(C_D) = \int \tilde{\sigma} \cdot [C_Z] = (\mu_0 - 1)\tilde{c} - i - 3C_Z^2 = \mu_1$$

comme espéré. La classe d'immersion de D_D dans R est

$$\rho(D_D) = \int \tilde{\nu} \cdot ([k^{-1}D_Z] - [B]) = \mu_1(\mu_0 - 1) - 3\rho(C_D) - 2\nu_2 - \mu_2 = \mu_1(\mu_0 - 4) - 4\mu_0 - 8g + 8.$$

3.3.2 Courbe sur une surface

Soit C une courbe sur une surface X et D la surface enveloppée par l'ensemble des plans tangents à X aux points de C . Alors un générateur de D est une direction conjuguée à une tangente à C et D est une surface développable. Puisque le plan tangent à une surface développable est constant le long d'un générateur, le rang de D , c.-à-d. le nombre de plans tangents à D passant par un point général de l'espace, est la classe d'immersion de C dans X ,

$$\mu_1 = \rho(C).$$

3.4 Rouleaux

Nous appelons *rouleau* toute surface réglée qui n'est pas développable, ce qui utilisant le vocabulaire introduit plus haut, signifie que l'ensemble de ses point focaux est fini. Les seules singularités des rouleaux sont une courbe double, un certain nombre de points-pinces (les points focaux, où les deux générateurs sont confondus) et des points triples.

Utilisant l'équation vue plus haut et fixant $\tilde{c} = 0$, nous obtenons :

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}(\mu_0 - 1)(\mu_0 - 2) - g,$$

et

$$[D_Z] = (\mu_0 - 2)\sigma + (2 - 2g - \mu_0)f.$$

On voit que $\int [D_Z] \cdot f = \mu_0 - 2$ (la courbe double rencontre chaque générateur en $\mu_0 - 2$ points). D'après le paragraphe précédent, on obtient :

$$\tilde{\sigma} = (\mu_0 - 1)\sigma - [D_Z] = \sigma + (\mu_0 + 2g - 2)f,$$

le rang de R étant

$$\mu_1 = \int \sigma \cdot \tilde{\sigma} = 2\mu_0 + 2g - 2.$$

Le nombre de points-pinces sur la courbe double est le nombre de points de ramification de ϱ :

$$\nu_2 = \int c_2(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3}) = 4g - 4 + 2\mu_0 = 2(\mu_1 - \mu_0).$$

Un plan tangent à R qui contient une droite en position générale doit contenir le générateur de R qui rencontre cette droite, et par conséquent le nombre de plans tangents à R et contenant une droite en position générale est le nombre de ses générateurs rencontrant une droite en position générale, ce qui signifie que la classe μ_2 de R est égale à son degré μ_0 . La classe d'immersion de D_R dans R est :

$$\rho(D_R) = \int \check{\nu} \cdot ([k^{-1}D_Z] - [B]) = \mu_1(\mu_0 - 1) - 2\nu_2 - \mu_2 = (\mu_0 - 2)(2\mu_0 - 5) + 2g(\mu_0 - 5).$$

Pour calculer le genre de D_R , on commence par calculer le genre arithmétique de D_Z , avec la formule d'adjonction :

$$2p_a(D_Z) - 2 = [D_Z] \cdot ([D_Z] + [K_Z]) = (\mu_0 - 4)((\mu_0 - 1)(\mu_0 - 2) - 2g).$$

Ensuite, D_R possède k points triples, et D_Z $3k$ points doubles ordinaires. Par conséquent :

$$2g(D_Z) - 2 = 2p_a(D_Z) - 2 - 6k = 2(\mu_0 + 2g - 2)(\mu_0 - 4).$$

Appliquant le théorème de Riemann-Hurwitz à la fonction induite entre les normalisations de D_Z et D_R :

$$2(2g(D_R) - 2) + \nu_2 = 2g(D_Z) - 2,$$

ou encore

$$2g(D_R) - 2 = (\mu_0 - 5)(\mu_0 + 2g - 2).$$

Le rang de cette courbe est alors :

$$r(D_R) = 2b + 2g(D_R) - 2 = 2(\mu_0 - 2)(\mu_0 - 3) + 2g(\mu_0 - 6).$$

4 Bilan

En géométrie énumérative, certaines quantités caractérisent une variété projective, ce sont ses invariants numériques. Certains sont des invariants par projection, d'autres sont des invariants topologiques. Nous avons présenté dans ce chapitre certains invariants des courbes et surfaces algébriques et surtout nous avons montré comment il était possible de passer d'un ensemble d'invariants à un autre. En particulier, nous avons montré comment exprimer les degrés des classes de Chern du faisceau tangent à une surface de \mathbb{P}^3 en fonction de certains invariants plus familiers et fondamentaux, comme le degré de la surface, le degré de sa courbe double et le nombre de points triples sur cette courbe. Cela nous est particulièrement utile, puisque notre but est d'appliquer la théorie des points multiples à certaines fonctions, et nous savons que celle-ci donne des résultats qui dépendent des classes de Chern de la fonction.

Nous avons présenté les espaces de paramètres, généralisations importantes des espaces projectifs, qui paramètrent des variétés linéaires et plus globalement des drapeaux. Lorsque nous utiliserons la théorie des points multiples dans les Parties II et III, cela se fera sur une fonction entre deux espaces de paramètres particuliers. Nous aurons alors besoin de la théorie de l'intersection sur ces espaces, et nous avons montré ici comment cette théorie pouvait être obtenue pour les Grassmanniennes. Nous avons conclu cette première partie par l'étude des sous-variétés de dimension un de la Grassmannienne de droites de \mathbb{P}^3 , les surfaces réglées. Ces systèmes algébriques de droites à une dimension sont particulièrement intéressantes, puisque nous verrons dans la Partie II qu'elles entrent de manière fondamentale dans la construction des graphes d'aspects d'objets courbes.

Partie II

Graphes d'aspects d'objets courbes lisses et lisses par morceaux

Récemment, de nombreux travaux en vision ont abordé des problèmes liés à la reconnaissance de surfaces algébriques, après une longue période où les polyèdres étaient les objets d'étude de base. Mentionnons notamment [Kriegman et Ponce, 1990b] qui montrent que les projections de ces surfaces sur le plan image contraignent fortement la surface observée. Plus récemment, [Forsyth, 1993] utilise un résultat de [d'Almeida, 1992] pour prouver qu'une silhouette est théoriquement suffisante pour déterminer de manière unique la surface, à une projectivité près. [Keren *et al.*, 1994] montrent comment décrire des objets à l'aide de surfaces algébriques définies implicitement. [Taubin, 1991] étudie le problème de l'ajustement de données (*fitting*) avec des surfaces algébriques. Enfin, citons [Ponce *et al.*, 1993] pour un état de l'art sur les algorithmes et représentations utilisés en reconnaissance d'objets courbes et [Koenderink, 1990], un formidable ouvrage permettant de comprendre de manière intuitive la géométrie des objets solides.

Dans ce contexte, une représentation particulière a connu des développements considérables depuis une dizaine d'années. Informellement, un *graphe d'aspects* [Koenderink et van Doorn, 1976] (ou graphes de vues) est une représentation qualitative qui énumère toutes les apparences topologiquement distinctes d'un objet. Plus formellement, choisir un modèle de caméra (généralement projection orthographique ou perspective) et un point de vue détermine l'aspect de l'objet (c.-à-d. la structure de la silhouette observée). L'ensemble des points de vue possibles peut être partitionné en régions connexes maximales qui observent des aspects identiques (définition plus précise à venir) et on peut alors définir un représentant de cette classe d'équivalence. Le changement observé à la frontière entre deux régions est appelé *événement visuel*. Les régions maximales et leurs représentants forment les sommets d'un graphe, dont les arêtes correspondent aux frontières entre régions adjacentes. Par abus de langage, on appelle graphe d'aspects à la fois ce graphe et le partitionnement de l'espace des points de vue en régions de vues équivalentes, les deux notions étant duales.

Dans cette partie, nous commençons dans le Chapitre 5 par définir avec précision la notion de graphe d'aspects et nous explorons ses liens avec la théorie des singularités. Nous décrivons les différents événements visuels pouvant survenir dans le cas des surfaces lisses et lisses par morceaux et montrons que ces événements surviennent pour des points de vue se situant sur des variétés linéaires ayant des contacts spécifiques avec l'objet considéré. Le Chapitre 6 introduit le cadre de travail dans lequel nous étudions de manière algébrique les contacts de droites et de plans avec une surface projective. Les premières applications de cet environnement sont présentées dans le Chapitre 7, où nous vérifions avec des techniques modernes certains résultats classiques et nous prouvons des résultats nouveaux. La complexité des événements visuels partitionnant l'espace des points de vue est ensuite étudiée dans le Chapitre 8 pour les surfaces lisses, puis pour les surfaces lisses par morceaux, avant de conclure sur la complexité des graphes d'aspects.

Chapitre 5

Définition générale

Contents

1	Événements visuels	67
1.1	Théorie des singularités	68
1.2	Direction d'observation non-générique	69
2	Classification des points de vue singuliers de codimension 1	70
2.1	Singularités locales	70
2.1.1	Classification des points d'une surface	71
2.1.2	Retour à la classification	72
2.2	Singularités bilocales	72
2.3	Singularités trilocales	75
3	Quelques commentaires	75
4	Bilan	77

Avant de continuer, donnons un exemple de graphe d'aspects d'un objet observé sous projection orthographique [Petitjean *et al.*, 1992]. La Figure 5.1.a montre un rendu réaliste d'un objet en forme de poire défini par une quartique dont l'équation implicite est

$$4y^4 + 3xy^2 - 5y^2 + 4z^2 + 6x^2 - 2xy + 2x + 3y - 1 = 0.$$

La Figure 5.1.b montre une silhouette de cet objet. Deux courbes, particulièrement importantes dans la construction des graphes d'aspects comme on le verra, ont été tracées sur la surface pour séparer ses parties convexes, hyperboliques et concaves. Les Figures 5.1.c-d montrent le graphe d'aspects de cette poire supposée transparente. En projection orthographique, la gamme des points de vue possibles a deux dimensions et peut être modélisée par une sphère de vue unité. Cette sphère a été partitionnée en un certain nombre de régions maximales de telle sorte que tous les points de vue à l'intérieur d'une région « observent » le même aspect de l'objet. Les aspects caractéristiques (représentants de classe) associés avec ces régions se trouvent Figure 5.1.d. Ici, nous avons utilisé un paramétrage longitude/latitude de la sphère afin de montrer toutes les régions du graphe d'aspects sur une seule image. Mis sous forme de graphe, cela donne la Figure 5.2.

Ces dernières années, des algorithmes ont été proposés et implantés pour construire le graphe d'aspects d'objets lisses et lisses par morceaux. Certains de ces algorithmes s'appuient sur des méthodes numériques pour résoudre les systèmes d'équations polynomiales rencontrés (comme par exemple la *continuation d'homotopie* [Morgan, 1987]), d'autres utilisent des méthodes symboliques (décomposition cylindrique algébrique [Collins, 1975] et bases de Gröbner [Buchberger, 1985]). Les techniques symboliques ont l'avantage

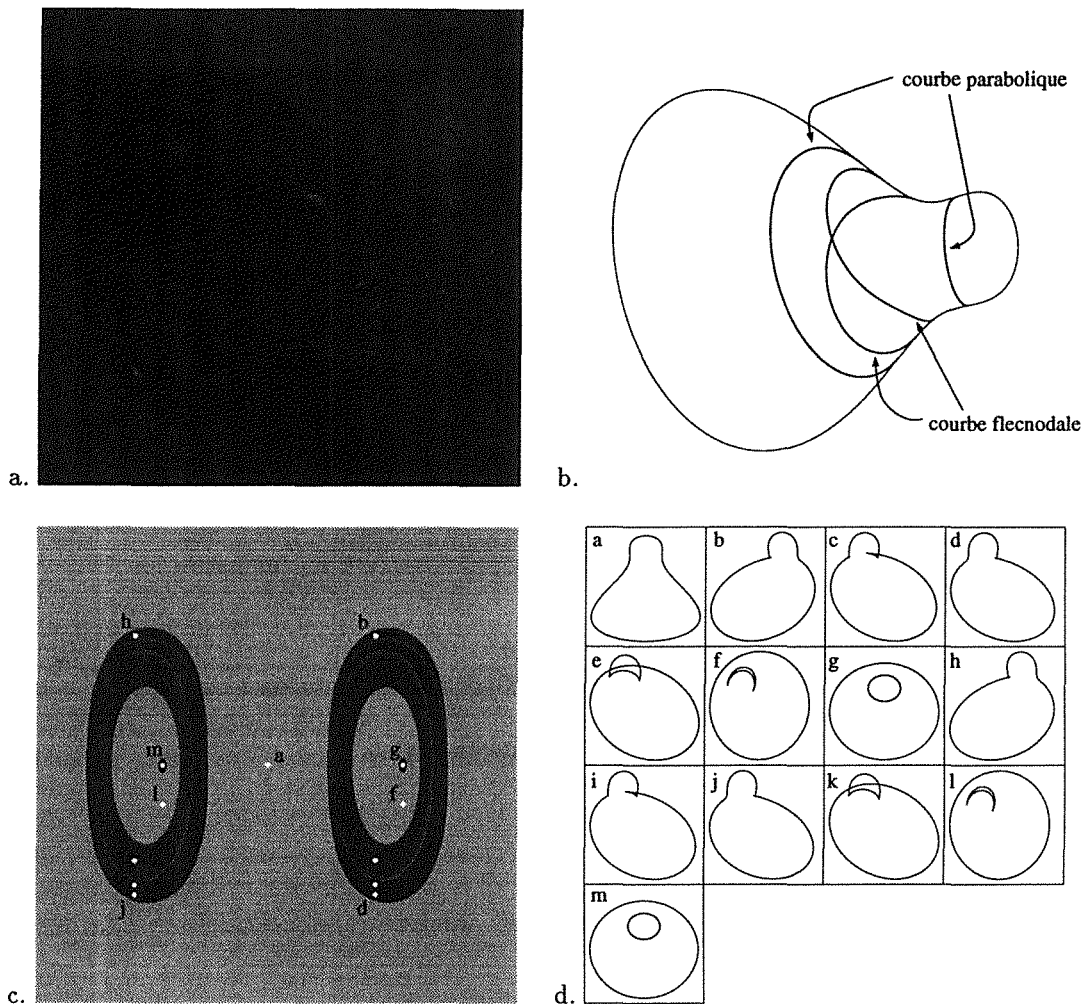


FIG. 5.1 - a. Un objet en forme de poire. b. Ses courbes paraboliques et flecnodales. c. Le graphe d'aspects de l'objet transparent dans un espace de paramètres. d. Les représentants correspondants.

de fournir une précision infinie à chaque étape (ce qui est important puisque les calculs sur des ensembles algébriques ou semi-algébriques sont intrinsèquement instables), mais au prix de temps de calculs élevés.

Pour le cas des graphes d'aspects de solides de révolution, certains algorithmes font appel à des résolutions numériques [Eggert et Bowyer, 1989; Kriegman et Ponce, 1990a], alors que des travaux plus récents [Roy et van Effelterre, 1992] se basent sur des algorithmes de géométrie algébrique réelle. Pour les surfaces algébriques, il fut reconnu très tôt que la théorie des singularités (aussi appelée théorie des catastrophes) offrait un catalogue complet d'événements visuels [Kergosien, 1981; Platonova, 1981; Arnold, 1983] qui pouvait être utilisé pour comprendre la structure et la formation des graphes d'aspects [Koenderink et van Doorn, 1979; Callahan et Weiss, 1985]. Sous projection orthographique, ces idées furent implantées pour des objets lisses bornés par des surfaces algébriques paramétrées, avec des méthodes numériques [Ponce et Kriegman, 1990] et des méthodes exactes [Rieger, 1992]. Pour des surfaces algébriques implicites, [Petitjean *et al.*, 1992; Ponce *et al.*, 1992] décrivent la première implantation complète d'un algorithme qui utilise des méthodes numériques et suppose une projection orthographique (les détails de l'algorithme sont exposés dans [Petitjean, 1992]), alors que [Rieger, 1993a] présente un algorithme symbolique pour les deux projections orthographiques et perspectives. La classification complète des événements visuels pour le cas des surfaces lisses par morceaux a été achevée très récemment

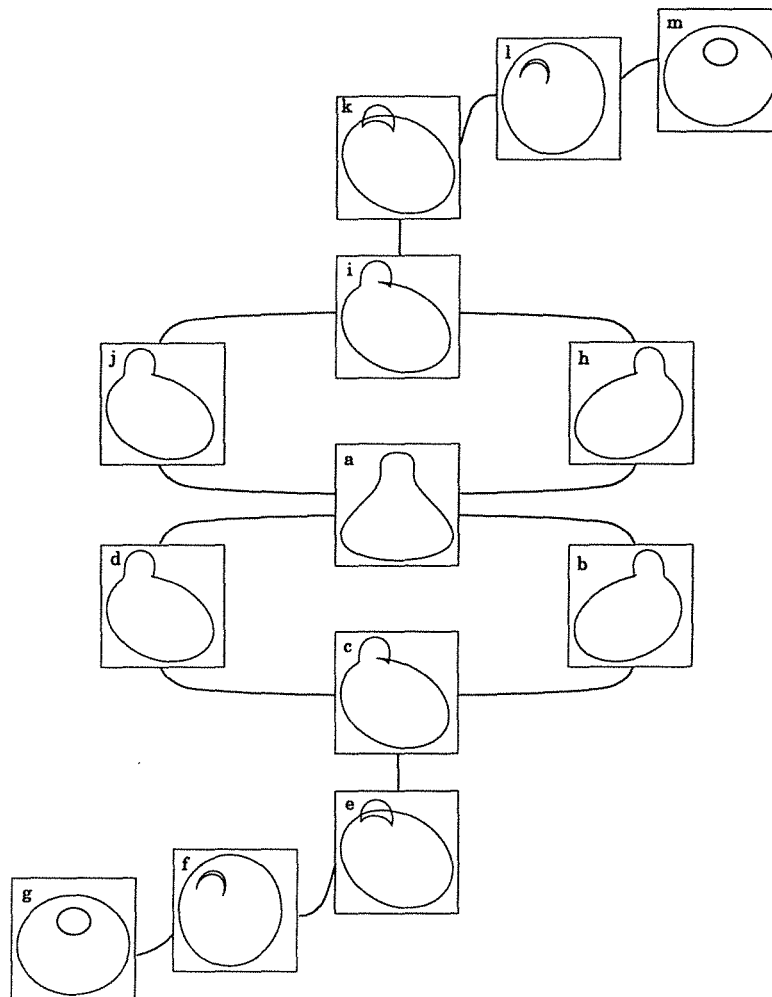


FIG. 5.2 - Graphe d'aspects de la poire.

par [Rieger, 1993b], après les travaux de [Rieger, 1987] et [Tari, 1991], et un algorithme est présenté.

1 Événements visuels

Nous nous intéressons ici à une surface lisse par morceaux, possédant une courbe double et des points triples isolés. Un exemple d'une telle surface est donné Figure 5.3. Commençons par un peu de terminologie. Dans la suite, nous désignons par *contour d'occultation* ou *générateur de contours* l'ensemble des points où la ligne de vue touche la surface et par *silhouette* ou *contour* la projection de cette courbe sur le plan focal. On parle de *faux pli* (ou courbe de faux pli) pour nommer la projection de la courbe double sur le plan focal. Pour un point d'observation donné, un aspect (appelé encore *vue* ou *contour apparent*) d'un objet courbe lisse par morceaux est l'union de la silhouette et du faux pli. Comme toutes les courbes planes, l'aspect peut avoir un certain nombre de singularités. La *théorie des singularités* prédit exactement quelles singularités vont apparaître et comment la structure des contours change en fonction du point de vue. Il s'agit précisément du type d'information dont nous avons besoin pour construire le graphe d'aspects.

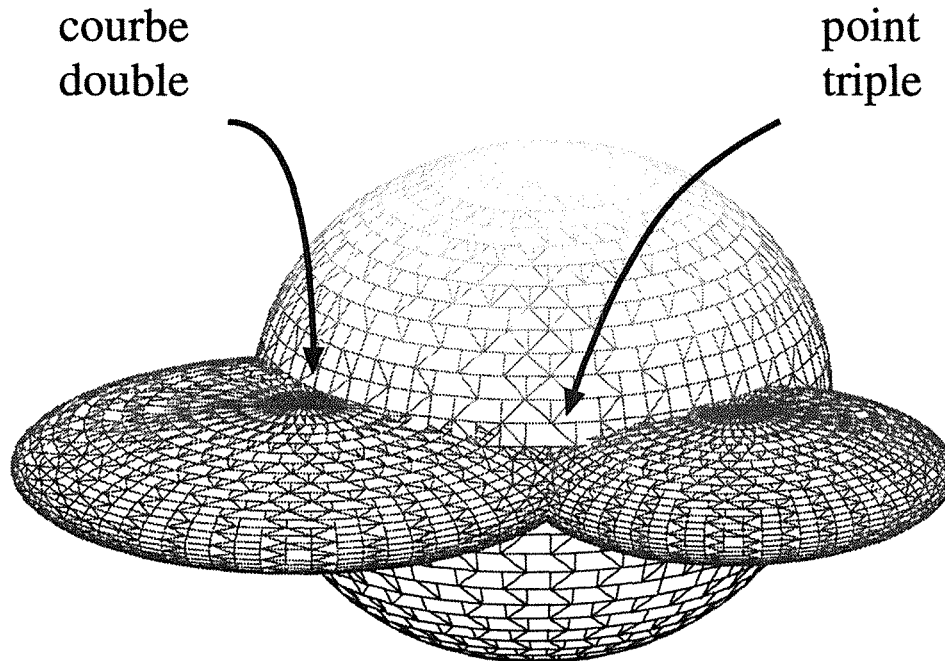


FIG. 5.3 - Une surface lisse par morceaux.

Dans ce paragraphe, nous commençons par introduire certains résultats de la théorie des singularités, avant de voir leur application à la classification des points de vue stables et accidentels (ces derniers donnant naissance aux événements visuels). Nous mettons essentiellement l'accent sur les surfaces d'événements visuels, principales composantes du partitionnement de l'espace des points de vue en cellules de vues équivalentes.

1.1 Théorie des singularités

En 1955, Whitney [Whitney, 1955] publia un article qui posa les premières pierres de la théorie des singularités des fonctions et ce domaine a depuis lors connu un essor considérable, grâce notamment à des chercheurs occidentaux [Thom, 1956; Boardman, 1967] et à une école russe [Arnold, 1983; Arnold, 1984]. Nous nous intéressons ici à une fonction bien particulière, la projection d'une surface sur un plan image. Pour des sous-ensembles ouverts de l'espace \mathcal{V} des points de vue considéré (points de vue *stables* ou *génériques*), les contours apparents d'une surface lisse par morceaux C^∞ peuvent posséder des points singuliers. Une combinaison de résultats de [Whitney, 1955; Rieger, 1987; Tari, 1991] permet d'affirmer que les projections au voisinage de ces points singuliers sont équivalentes à un des six types *stables* décrits dans la Figure 5.4. Un théorème de [Rieger, 1993b] montre alors que l'ensemble \mathcal{B} des points de vue (ensemble de *bifurcation*) pour lesquels la projection n'est pas équivalente à un de ces types stables est de mesure 0, donnant ainsi une validité à la notion de graphe d'aspects. Un théorème similaire pour le cas des surfaces lisses avait été au préalable démontré dans [Mather, 1973]. Le graphe d'aspects est alors un graphe dont les sommets représentent les composantes connexes de $\mathcal{V} - \mathcal{B}$ et dont les arêtes sont les transitions entre les cellules adjacentes du partitionnement de \mathcal{V} .

Les singularités exprimées Figure 5.4 surviennent pour des contacts spécifiques de la ligne de vue avec la surface. Un point de rebroussement est observé lorsque cette ligne de vue a un contact d'ordre 3 (une tangente ordinaire est définie comme ayant un contact d'ordre 2) et nous appelons une telle droite une droite *asymptotique*. Une traversée de tangente correspond à une droite bitangente, une traversée de

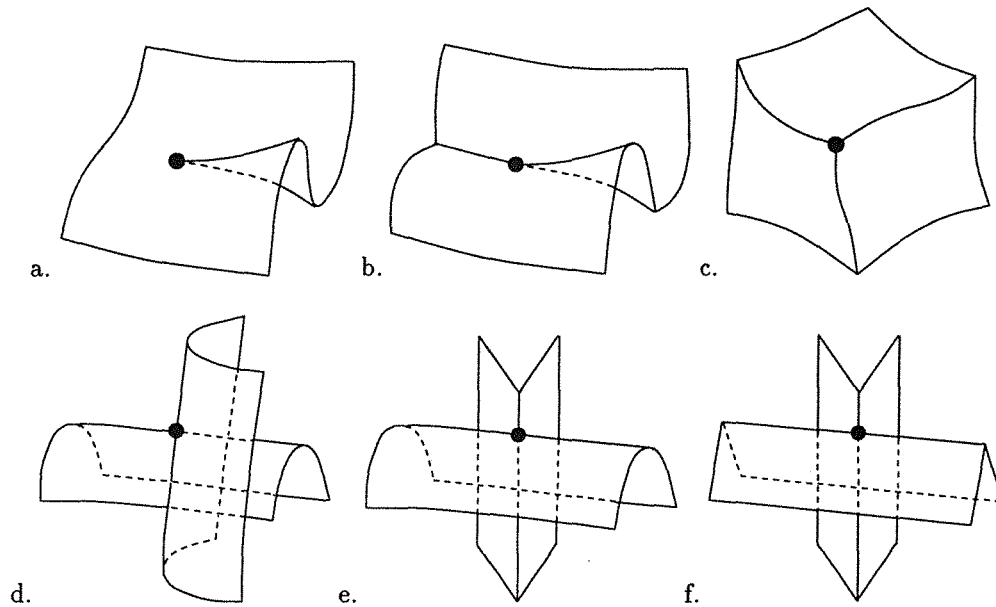


FIG. 5.4 - Singularités stables des projections de surfaces lisses par morceaux. a. Point de rebroussement C. b. Demi-pli SF. c. Point triple T. d. Traversée de contour. e. Interaction contour / faux-pli. f. Traversée de faux-pli.

faux-pli à une bisécante à la courbe double et une interaction contour / faux-pli à une droite tangente qui ailleurs coupe la courbe double ; ces trois singularités donnent un point double du contour apparent. Un point triple est un point de self-intersection de la courbe double. Un demi-pli (*semi-fold*) intervient lorsque le générateur de contours correspondant à une ligne de vue particulière est tangent à la courbe double sur la surface ; en projection, cette singularité donne un point de tangence (*tacnode*), où deux branches se rencontrent tangentiellement.

Il faut noter que la définition d'une projection et de ses singularités ne prend pas en compte la transparence ou l'opacité de l'objet. Ainsi pour un objet transparent, les deux branches d'un contour sont visibles en un point de rebroussement ou un point double. Pour un objet opaque, seule une branche d'un point de rebroussement est visible (fin de contour), alors que le point double devient une jonction en T.

Génériquement (dans presque tous les cas), seules les singularités de la Figure 5.4 sont rencontrées. Toutes les autres singularités disparaissent sous l'effet d'une petite perturbation de la position de l'objet ou de la direction de projection. La justification du qualificatif stable de ces 6 singularités provient du fait qu'une projection voisine possède une singularité similaire en un point proche approprié. Il est à noter en outre que toutes les singularités instables de la projection d'une surface sur un plan se désintègrent en une combinaison des 6 types stables après une petite perturbation du point de vue.

1.2 Direction d'observation non-générique

Si le point de vue est générique, alors les seules singularités des contours apparents sont les singularités stables du paragraphe précédent. Si maintenant on le choisit de manière particulière, il est possible d'obtenir des projections non-génériques d'une surface lisse par morceaux. Ces singularités sont fréquemment classifiées selon leur *codimension*. Soit π un k -germe de la projection et α une singularité de π . Alors la codimension de α est la différence entre les dimensions de l'espace des k -germes et celle de l'orbite de π (l'ensemble des germes donnant des vues équivalentes - difféomorphiques). De manière intuitive, on

peut comprendre la codimension d'une singularité comme étant le nombre de paramètres nécessaires pour « stabiliser » la projection correspondante. Les 6 types stables vus plus haut sont parfois dits de codimension 0, étant presque partout observables. Les singularités de codimension supérieure à 0 partitionnent l'espace des points de vues en un nombre fini de cellules, séparées par l'ensemble de bifurcation.

Pour « presque toutes » les surfaces C^∞ , les seules singularités observables sont de codimension inférieure à la dimension de l'espace des points de vue utilisé. De telles surfaces sont appelées *projection-génériques*, ce qui dans le langage de la théorie des singularités signifie que la famille de leurs projections est *versale*, pour le type de projection considéré. Pour des cas très particuliers, il est possible d'observer des singularités de types plus dégénérés. Le cas des surfaces algébriques est différent : il existe des sous-espaces ouverts et denses de l'espace des surfaces algébriques de faible degré pour lesquels la condition de projection-généricité est fautive [Rieger, 1993a]. Nous supposons donc dorénavant, et ceci jusqu'à la fin de cette partie, que nous avons affaire à des surfaces projection-génériques, puisqu'il est difficile de tirer des conclusions quant à la géométrie des ensembles de bifurcation dans le cas des surfaces algébriques générales.

Si la projection considérée est la projection en perspective, les points de vue stables occupent des volumes dans un espace à 3 dimensions. Les frontières de ces volumes sont formées par des points de vue accidentels de codimension 1, 2, et 3, à savoir des surfaces, des droites et des points. Pour la projection orthographique, l'espace des points de vue est représenté par une sphère unité paramétrant les directions d'observation. Les points de vue stables occupent ainsi des portions de la surface de la sphère. Les frontières entre ces zones sont formées par des événements de codimension 1 et 2, à savoir des droites et des points. Par conséquent, cette deuxième projection ne permet pas de percevoir les singularités de codimension 3, et subséquemment le partitionnement de l'espace des points de vue est moins complexe ici que dans le cas de la perspective. Tous ces événements visuels ont été étudiés dans [Kergosien, 1981; Arnold, 1983; Rieger, 1990].

Dans la suite de ce document, nous nous concentrerons quasi-exclusivement sur le cas de la projection en perspective, sauf mention explicite. Ceci ne constitue en rien une limitation : il suffit de réaliser que le partitionnement dans le cas orthographique peut être obtenu en intersectant le partitionnement de l'espace à 3 dimensions obtenu dans le cas de la perspective avec une sphère à l'infini. Nous étudierons principalement les points de vue donnant naissance aux événements visuels de codimension 1, à savoir les *surfaces d'événement visuel*, principales composantes du partitionnement de l'espace des points de vue.

2 Classification des points de vue singuliers de codimension 1

Tournons nous maintenant vers la classification des singularités de codimension 1 et voyons comment celles-ci se relient à la géométrie de la surface. Nous subdivisons cette classification en trois catégories : les singularités provenant d'un seul point de la surface sont dites *locales* (on parle aussi d'événements locaux), celles provenant de deux points portent le qualificatif de *bilocales*, et celles venant de trois points de *trilocales*. Comme nous allons le voir, nous avons à considérer un total de 5 surfaces d'événement visuel dans le cas lisse et 19 surfaces dans le cas lisse par morceaux. Nous indiquons entre parenthèses la lettre R pour désigner ces surfaces dans le cas lisse et S dans l'autre cas, suivi d'un nombre. Nous ferons plus tard référence à cette classification des surfaces d'événement visuel. Notons d'ores et déjà que toutes ces surfaces sont des systèmes algébriques de droites à un paramètre et sont donc des surfaces réglées.

2.1 Singularités locales

Commençons donc par les événements visuels locaux de codimension 1. Pour généraliser une notion vue auparavant, on dit qu'une droite a *contact d'ordre p* (ou est d'ordre p) en un point d'une variété

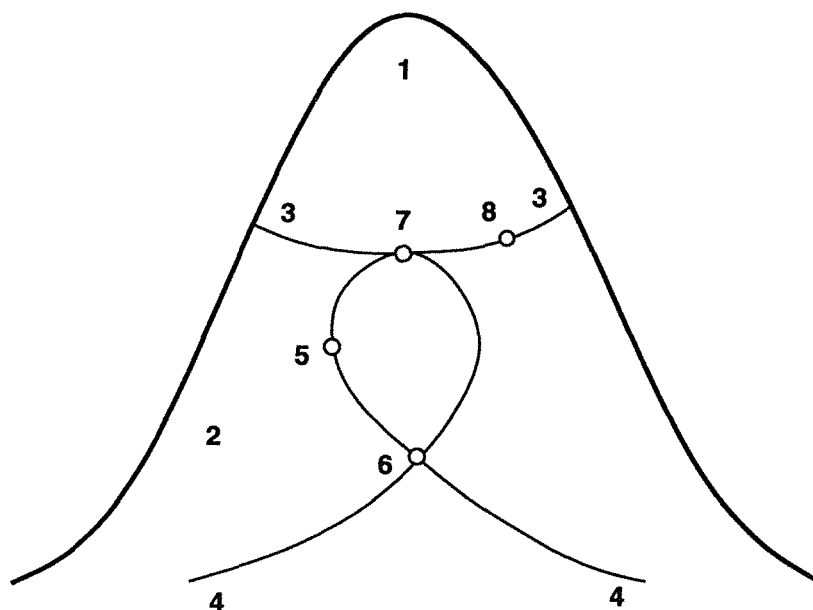


FIG. 5.5 - Classification des points d'une surface selon l'ordre de leurs tangentes (adapté du livre d'Arnold [Arnold, 1984]).

projective si les dérivées directionnelles d'ordre i de l'équation de la surface dans la direction de la droite sont nulles pour tout $i < p$ et non-nulle pour $i = p$.

Nous montrons dans ce paragraphe que certaines singularités locales correspondent à des droites ayant un contact d'ordre supérieur avec la surface, en utilisant une classification des points de la surface en fonction de l'ordre de contact de leurs tangentes.

2.1.1 Classification des points d'une surface

Dans le Chapitre 7, Paragraphe 4 (page 101), nous montrerons quel peut être l'ordre maximal de contact d'une droite avec une variété projective projection-générique. Un cas particulier de ce résultat est qu'une surface projection-générique de l'espace projectif \mathbb{P}^3 ne possède pas de tangentes ayant un contact d'ordre supérieur à 5. En fait, selon [Platonova, 1981], les points d'une surface appartiennent à une des huit classes suivantes selon l'ordre de leurs tangentes, comme illustré dans la Figure 5.5 :

(1) le domaine *elliptique*, où toutes les tangentes sont d'ordre 2 ;

(2) le domaine *hyperbolique*, où tous les points possèdent 2 tangentes asymptotiques (ordre 3). Les enveloppes de ces tangentes sont appelées les *courbes asymptotiques*.

Ces deux régions sont séparées par une frontière commune :

(3) la *courbe parabolique*, dont tous les points possèdent une tangente asymptotique unique.

À l'intérieur du domaine d'hyperbolicité, il existe une courbe particulière :

(4) la *courbe flecnodale*, où chaque point possède une tangente d'ordre 4. Cette courbe est formée par les inflexions des courbes asymptotiques.

Sur cette courbe existent certains points isolés :

(5) les *biflecnodes*, qui sont les points de double inflexion des courbes asymptotiques, avec une tangente d'ordre 5 ;

(6) les points d'inflexion des deux courbes asymptotiques, avec deux tangentes d'ordre 4. Ce sont les points de self-intersection de la courbe flecnodale ;

(7) les *godrons*, qui sont les points de contact tangentiel des courbes paraboliques et flecnodales, avec une tangente d'ordre 4.

Enfin, il existe un dernier type de points isolés sur la courbe parabolique :

(8) les *points-gouttières*, qui sont les points stationnaires des tangentes asymptotiques.

Pour des surfaces projection-génériques, la courbe parabolique est non-singulière et les seules singularités de la courbe flecnodale sont les points doubles (6). Il faut noter ici que la définition de ces entités ne dépend pas de la propriété de projection-généricité imposée sur la surface, mais il n'en est pas de même pour leur dimension et leur régularité.

2.1.2 Retour à la classification

Dans [Kergosien, 1981], l'auteur montre qu'il existe une relation fondamentale entre les points de la surface que nous venons de définir et certains événements locaux existant pour les surfaces lisses. Il prouve également que dans ce cas on peut trouver trois singularités locales de codimension 1 (Figure 5.6) : la *lèvre*, le *bec-à-bec* et la *queue d'aronde* (ces noms furent inventés par le mathématicien français René Thom). Dans une transition lèvre, un contour fermé apparaît de nulle part, avec la formation de deux points de rebroussement (Figure 5.6.a). Dans une transition bec-à-bec, deux portions distinctes du contour, chacune ayant un point de rebroussement, se rencontrent en un point de l'image ; le contour se décompose ensuite en deux segments ; la connectivité du contour change et les deux points de rebroussement disparaissent (Figure 5.6.b). Enfin, pour une transition queue d'aronde, une singularité se forme sur un contour lisse et ensuite se désintègre en deux points de rebroussement et un point double (Figure 5.6.c).

Les singularités bec-à-bec et lèvre surviennent toutes deux en regardant la surface le long d'une tangente asymptotique en un point parabolique, la séparation entre les deux événements intervenant aux points-gouttières ([Arnold, 1984; Koenderink, 1986; Koenderink, 1990]). L'ensemble de ces directions asymptotiques est ainsi appelé *surface parabolique* (R_1 et S_5). Une queue d'aronde est observée lorsque la direction d'observation est une tangente asymptotique en un point de la courbe flecnodale ; on appelle *surface flecnodale* (R_2 et S_6) l'ensemble de ces directions. Ces deux surfaces sont bien évidemment des surfaces réglées, la première étant un rouleau et la deuxième une développable (surface réglée à courbure de Gauss nulle en tous ses points réguliers).

Le passage aux surfaces lisses par morceaux, et donc l'apparition d'une courbe double sur la surface, apporte quatre nouvelles surfaces d'événements visuels locaux. La première est constituée des directions asymptotiques en les points de la courbe double (S_1). Puis vient une seconde surface faite des droites tangentes à la courbe double (S_2), et une troisième faite des droites tangentes à la surface et conjuguées aux tangentes de la courbe double (S_3). Pour finir, il faut prendre en compte les plans tangents aux points triples (S_4). Ces singularités furent étudiées par [Tari, 1991].

2.2 Singularités bilocales

Pour décrire les singularités multilocales, nous utilisons une notation cohérente avec [Kergosien, 1981] et [Rieger, 1990]. Si F et D symbolisent un générateur de contours et la courbe double, et si +, ++, +++ dénotent respectivement contact d'ordre 1, 2 et 3 en projection, alors la singularité stable « traversée de

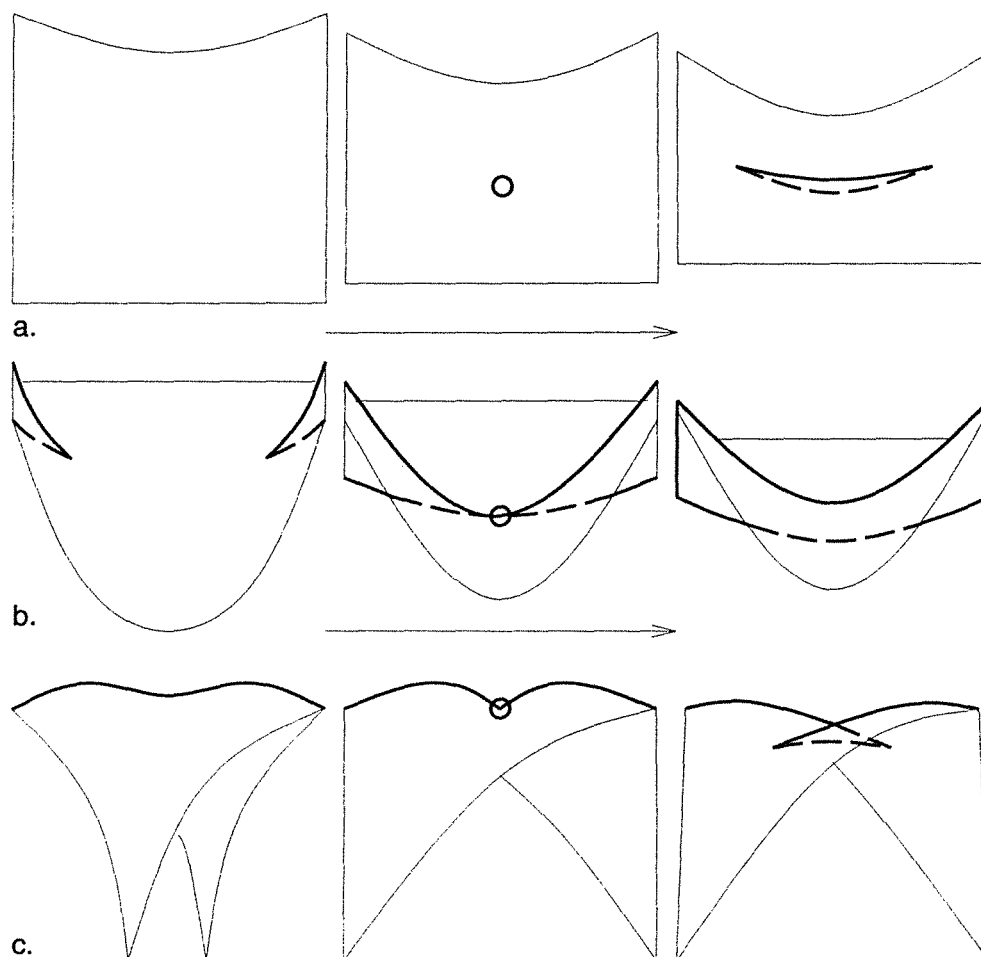


FIG. 5.6 - Événements locaux dans le cas lisse. a. Lèvre. b. Bec-à-bec. c. Queue d'aronde. Les transitions surviennent de gauche à droite, les points singuliers étant indiqués par des petits cercles. Les contours vus dans le cas d'une surface transparente sont en traits épais, les parties cachées étant en lignes brisées.

contour » peut s'écrire $F + F$, et la transition « interaction contour / faux pli » devient $F + D$. Dans le cas d'un contour singulier (le vecteur tangent n'étant alors pas bien défini), la notation est une extension de celle utilisée dans le cas non-singulier. En ce sens, la notation $F + +C$ signifie contact tangentiel entre un contour et la limite au point de rebroussement de la tangente au contour. En termes géométriques, cela correspond à une droite qui aurait contact d'ordre 2 en un point, d'ordre 3 en un autre point, de telle sorte que les normales à la surface aux deux points de contact soient colinéaires.

Pour les surfaces lisses, il existe deux singularités bilocales de codimension 1. La première correspond à la transition $F + C$ (surfaces R_3 et S_{12}), faite des droites ayant un contact ordinaire en un point (ordre 2) et asymptotique (ordre 3) en un autre point (Figure 5.7.b). Cette surface est désignée par le terme *traversée de point de rebroussement*. Ensuite survient le cas où le point de vue appartient à une droite supportant les points de contact de plans bitangents à la surface (R_3 et S_{15}), qui peut également être symbolisée par $F + +F$. Cette surface est une développable [Koenderink, 1986] que nous appelons *surface traversée de tangente* (Figure 5.7.a). Ces surfaces furent étudiées par [Kergosien, 1981; Arnold, 1983].

Le passage aux surfaces lisses par morceaux amène 9 surfaces supplémentaires concernant des singu-

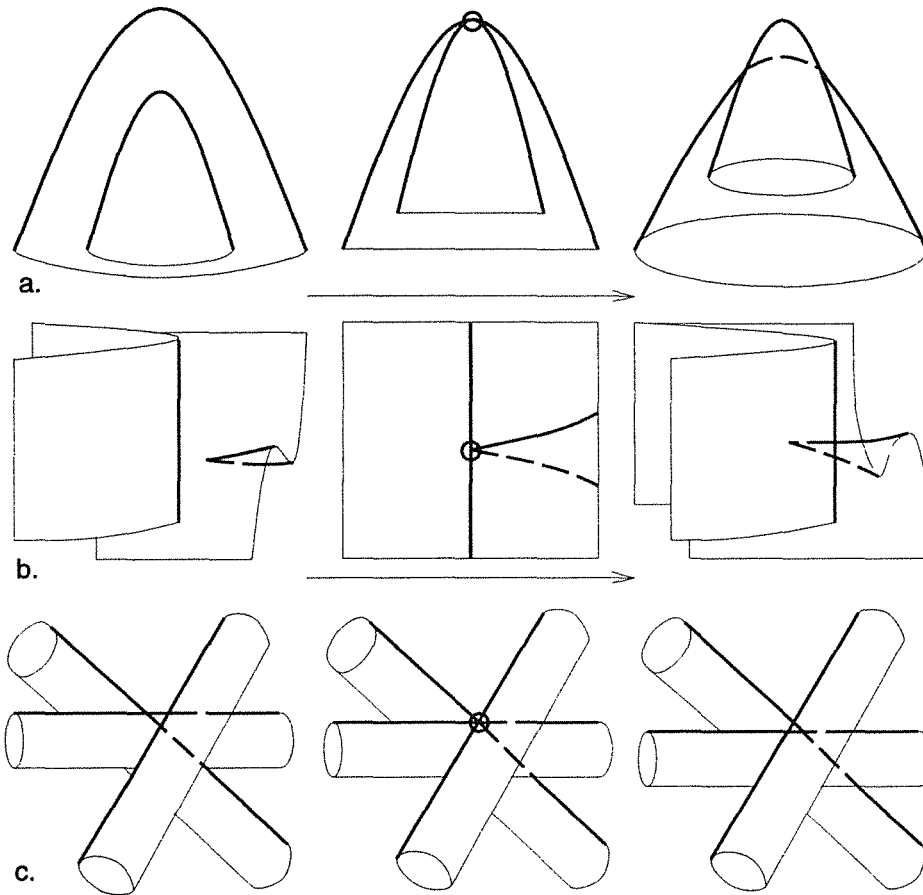


FIG. 5.7 - Événements multilocaux pour les surfaces lisses. a. Traversée de tangente. b. Traversée de point de rebroussement. c. Point triple.

larités bilocales. Les voici détaillées :

- S_7 : droites rencontrant la courbe double deux fois, de telle sorte que le deuxième point de contact soit aussi un point de tangence entre la courbe double et le générateur de contours ($D + SF$),
- S_8 : droites bitangentes à la surface, où le deuxième point de contact est aussi un point de tangence entre courbe double et générateur de contours ($F + SF$),
- S_9 : droites rencontrant la courbe double et un point triple ($D + T$),
- S_{10} : droites tangentes à la surface et passant par un point triple ($F + T$),
- S_{11} : droites rencontrant la courbe double et asymptotiques en un autre point ($D + C$),
- S_{13} : droites supportant les points de contact de plans bitangents à la courbe double ($D + +D$),
- S_{14} : droites supportant les points de contact de plans tangents à la surface et tangents à la courbe double ($F + +D$).

Appelant un point p de la courbe double *régulier* si la ligne de vue a une intersection transversale avec les deux portions de surfaces s'intersectant en p , les surfaces S_7, S_8, S_9 et S_{10} détectent des singularités bilocales impliquant des points non-réguliers de la courbe double, et ont été classifiées dans [Rieger, 1993b]. Les surfaces S_{11}, S_{13} et S_{14} permettent d'observer des singularités bilocales impliquant au moins un point régulier de la courbe double. Elles sont étroitement reliées aux projections singulières d'une courbe gauche, étudiées par [Wall, 1976; David, 1983], alors que les singularités des superpositions de contours et de faux-plis furent examinées par [Rieger, 1987]. Il faut noter que S_{13} et S_{14} sont des surfaces développables.

2.3 Singularités trilocales

Il existe une seule singularité trilocale de codimension 1 pour les surfaces lisses. Elle correspond à des droites tritangentes à la surface (R_5 et S_{19}), ce que nous pouvons noter par $F + F + F$ (voir Figure 5.7.c). Pour les surfaces lisses par morceaux, il en existe trois supplémentaires. La surface $D + D + D$ est faite de droites triséchantes à la courbe double (S_{16}), la surface $F + D + D$ de droites biséchantes à la courbe double et encore tangente à la surface (S_{17}), et enfin $F + F + D$ de droites bitangentes à la surface et rencontrant également la courbe double (S_{18}). Ici aussi, les résultats sont dûs à [Wall, 1976; David, 1983; Rieger, 1987].

3 Quelques commentaires

La classification que nous venons de détailler amène un certain nombre de commentaires. Tout d'abord, il nous faut mentionner que les méthodes que nous allons employer dans le reste de ce document pour étudier, entre autres choses, la géométrie énumérative des événements visuels sont assez générales et ne se limitent pas uniquement au cas des surfaces lisses par morceaux que nous abordons ici. Il nous est cependant impossible d'étudier complètement des objets plus complexes. En effet, l'étape supplémentaire consisterait à examiner des surfaces qui, outre une courbe double et des points triples, posséderaient des points-pincés (points de la courbe double où les deux plans tangents coïncident). Malheureusement, la classification des projections dans ce cas n'a, à ce jour, pas été terminée. Une deuxième étape serait de se pencher sur des surfaces possédant également une courbe cuspidale et on peut soupçonner que dans ce cas le nombre de singularités de codimension 1 serait considérable.

Le lecteur attentif aura remarqué que, si les événements visuels de codimension 1 prennent en compte l'apparition des points doubles et des points de rebroussement de la projection d'une surface sur le plan focal, ils ne prennent toutefois pas en compte les apparitions ou disparitions d'inflexions. Mais il n'est pas bien difficile de se débarrasser de cette imperfection. Les changements d'inflexion de la silhouette sont observés lorsque l'observateur traverse le plan tangent à un godron [Koenderink, 1990], point de tangence des courbes paraboliques et flecnodales, et on peut donc rajouter une surface d'événement visuel (S_{20} et R_6) faite de l'ensemble des plans tangents aux godrons. Les changements d'inflexion du faux-pli surviennent lorsque l'observateur traverse un des plans osculateurs à la courbe double tels que la torsion de cette courbe aux points de contact des plans est nulle (surface S_{21}).

Mentionnons pour finir que certains types de singularités de codimension supérieure à 1 sont connus. En codimension 2, il existe trois singularités locales pour une surface lisse [Arnold, 1984]. La première est observable en regardant la surface depuis un point de la courbe cuspidale de la surface parabolique (singularité *oie*), illustrée Figure 5.8. La seconde se voit en regardant le long de la direction asymptotique d'un godron (transition *papillon*) et la dernière le long d'une direction asymptotique d'un biflécnode (singularité *mouette*). Les singularités multilocales de codimension 2 pour une surface lisse sont au nombre de 9. Si on dénote un bec-à-bec par B , une lèvre par L et une queue d'aronde par S , alors elles sont : $F + + + F, F + B, F + L, F + S, F + + F + F, F + F + C$ (2 types), $F + + C$ et $F + F + F + F$. Un catalogue des singularités locales de codimension 3 existe également [Rieger, 1990], mais nous ne nous

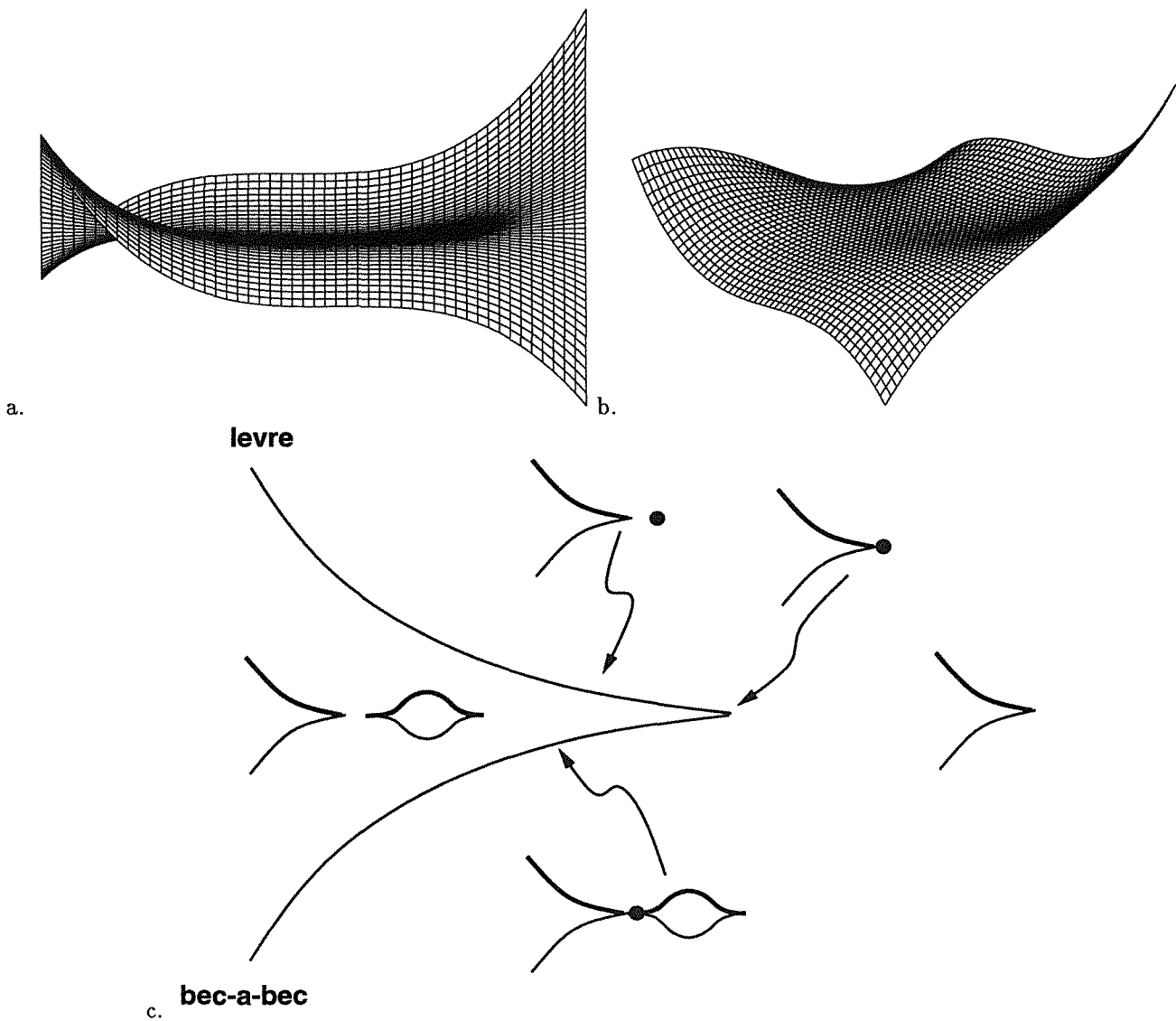


FIG. 5.8 - a. Vue d'une surface près d'une singularité de type oie. b. Surface utilisée. c. L'ensemble de bifurcation local pour la projection orthographique.

attardons pas dessus. Très peu de choses sont connues sur les singularités multilocales de codimension 3 (voir tout de même [Rieger, 1988]) ou même simplement sur les singularités de codimension 2 pour les surfaces lisses par morceaux projection-génériques.

4 Bilan

Nous avons introduit dans ce chapitre le graphe d'aspects, représentation d'objets utilisée en vision à base de modèles. Le schéma général consiste à identifier toutes les projections topologiquement différentes d'un objet sur un plan. Cela revient à partitionner l'espace des points de vue en régions maximales de vue équivalente. Étant donnée une surface à l'intérieur d'une certaine classe d'objets, la théorie des singularités permet de « classifier » les projections singulières de cette surface ou encore de décrire les entités algébriques réalisant le découpage de l'espace des points de vue. Dans le cas des surfaces lisses, il existe cinq surfaces d'événement visuel, principales composantes du partitionnement. Les projections des surfaces lisses par morceaux sont beaucoup compliquées : il faut ici non seulement considérer les projections des générateurs de contours, mais aussi de la courbe double et des interactions entre courbe double et générateur de contours. C'est pourquoi le nombre de surfaces événement visuel à considérer dans ce cas est de dix-neuf.

Une des conclusions majeures de ce chapitre est que toutes les surfaces événement visuel sont constituées de droites ayant des contacts bien spécifiques avec la surface étudiée ou de droites supportant les points de contact de plans ayant des contacts bien précis. Et il faut se rappeler que qui dit contacts spécifiés dit points multiples d'une certaine fonction.

Chapitre 6

Contacts de variétés linéaires avec des variétés projectives

Contents

1	Contacts de droites avec courbes gauches et surfaces	80
1.1	Espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^3	81
1.1.1	... en tant que fibré projectif sur \mathbb{P}^3	81
1.1.2	... en tant que fibré projectif sur G	82
1.2	Cas des surfaces : anneau de Chow de F_X	82
1.3	Cas des courbes : anneau de Chow de F_{D_b}	84
2	Contacts de plans avec courbes gauches et surfaces	85
2.1	Espace de drapeaux point-plan de \mathbb{P}^3	86
2.2	Cas des courbes	87
2.2.1	Anneau de Chow de \hat{F}_{D_b}	87
2.2.2	Surface duale à D_b	88
2.3	Cas des surfaces : surface duale	89
2.3.1	Degré de la surface duale	89
2.3.2	Et si on a une courbe cuspidale?	90
2.3.3	Classes de Chern de la fonction duale	90
2.3.4	Géométrie de la surface duale	91
3	Bilan	92

Les travaux réalisés jusqu'à maintenant sur les graphes d'aspects se sont principalement situés à un niveau algorithmique. Quelques études de nature théorique ont néanmoins commencé à apparaître, donnant principalement des informations locales ou tout au plus semi-globales sur les surfaces d'événements visuels, et amenant beaucoup de questions sur un plan plus global. Parmi ces questions : existe-t-il une borne supérieure sur le nombre de vues d'un objet défini par une surface algébrique lisse, en fonction du degré d de son équation implicite? La réponse est oui, et la meilleure borne connue est $O(d^{12})$ pour la projection orthographique et $O(d^{18})$ pour la projection perspective. En fait, ce résultat est un cas particulier d'un théorème plus général donnant le nombre de sommets du graphe de vues d'une surface lisse par morceaux X constituée de n surfaces algébriques lisses de degré au plus δ [Rieger, 1993b]. Cette borne est alors $O(n^K \dim \mathcal{V} \delta^6 \dim \mathcal{V})$, où \mathcal{V} est l'espace de points de vue considéré (donc $\dim \mathcal{V} = 2$ si on suppose une projection parallèle, et $\dim \mathcal{V} = 3$ pour la perspective), et $K = 3$ si X est topologiquement équivalente à une surface polyédrique ayant $O(n)$ sommets, arêtes et faces, et $K = 6$ autrement.

D'autres bornes de complexité ont été obtenues pour différents types de surfaces. Soit $M = \cup M_i$ une surface de révolution lisse par morceaux, donnée par

$$M_i(x, y) = (f_i(x) \cos y, f_i(x) \sin y, x),$$

pour $i = 1, \dots, n$, et où les f_i sont des polynômes de degré au plus δ . Alors [Eggert, 1991] montre que M possède au plus $O(n^4 \delta^4)$ vues en projection orthographique et $O(n^6 \delta^6)$ vues en perspective. La borne de Rieger peut s'appliquer dans ce cas, et puisque les n morceaux M_i s'intersectent en $O(n)$ cercles, on peut appliquer le cas $K = 3$. Cela donne une borne de $O(n^3 d^{12})$ dans le cas orthographique, légèrement meilleure sur le nombre de morceaux, mais bien plus mauvaise sur le degré. Le cas des surfaces rationnelles a également été abordé. Ces surfaces appartiennent au groupe des surfaces algébriques lisses par morceaux, mais admettent un paramétrage par une fonction polynomiale :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^3, \\ (x_0, x_1, x_2) &\longrightarrow (X_0(x_0, x_1, x_2), X_1(x_0, x_1, x_2), X_2(x_0, x_1, x_2), X_3(x_0, x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Dans [Rieger et Rohr, 1993], les auteurs montrent qu'une surface rationnelle lisse possède au plus $O(D^7 \dim \mathcal{V})$ vues, où D est le degré maximal des X_i . Cette borne est à rapprocher de l'estimation obtenue avec la borne générale de Rieger : dans ce cas $n = 1$ et $\delta = O(D^2)$, ce qui donne une borne en $O(D^{12} \dim \mathcal{V})$.

Baucoup de questions liées à la géométrie de l'espace de vue « découpé » par les surfaces événements visuels ont déjà été élucidées de manière qualitative pour des surfaces génériques C^∞ [Kergosien, 1981; Arnold, 1983; Rieger, 1990], comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Ce que nous nous proposons de faire à partir de maintenant est de travailler sur la géométrie « quantitative » ou énumérative des entités entrant dans la construction des graphes d'aspects d'objets lisses et lisses par morceaux. Nous avons vu précédemment que les événements visuels correspondaient en fait à des droites ou des plans ayant des contacts spécifiques avec la surface étudiée, et c'est pourquoi nous commençons ici par mettre en place le cadre de travail permettant d'étudier ces phénomènes.

1 Contacts de droites avec courbes gauches et surfaces

Soit X une surface de \mathbb{P}^3 lisse par morceaux, possédant une courbe double D_b de degré b et t points triples. Inspirons nous de l'exemple donné dans le Chapitre 3, Paragraphe 1 pour des courbes planes et considérons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}^3 & \xleftarrow{p} & F_3 \\ & \uparrow j & & & \uparrow k \\ X & \xleftarrow{q} & F_X & \xrightarrow{\bar{q}} & G \\ & \uparrow i & & & \uparrow \bar{r} \\ D_b & \xleftarrow{r} & F_{D_b} & & \end{array}$$

$G = G(1, 3)$ est la Grassmannienne de droites de \mathbb{P}^3 à 4 dimensions que nous avons étudié au Chapitre 4, Paragraphe 2 (page 53). F_3 est l'espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^3 à 5 dimensions ($F_{1,1,2}(\mathbb{P}^3)$), c.-à-d.

$$F_3 = \{(x, l) \in \mathbb{P}^3 \times G / x \in l\},$$

et F_X (dimension 4) et F_{D_b} (dimension 3) sont les restrictions de F_3 à la surface X et à sa courbe double D_b respectivement, à savoir

$$F_X = \{(x, l) \in X \times G / x \in l\},$$

et

$$F_{D_b} = \{(x, l) \in D_b \times G / x \in l\}.$$

\bar{p} et \bar{q} sont les fonctions induites par projection sur le second facteur. Il faut noter également que p et q étant des fonctions propres, on a la « commutativité » $q_* k^* = j^* p_*$.

1.1 Espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^3 ...

\mathbb{P}^3 et G sont des cas particuliers de variétés de drapeaux de type respectif (1, 3) et (2, 2) (voir Chapitre 4, Paragraphe 2). De plus, F_3 est de type (1, 1, 2) et est donc une subdivision des variétés de type (1, 3) et (2, 2). Par conséquent, F_3 peut être construit de deux manières différentes. Considérons les séquences canoniques exactes pour \mathbb{P}^3 et G :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow V_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow T \longrightarrow V_G \longrightarrow R \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où $V_{\mathbb{P}^3}$ est le fibré vectoriel trivial sur \mathbb{P}^3 . Alors F_3 est à la fois isomorphe à la projectivisation du fibré quotient sur \mathbb{P}^3 , c.-à-d. $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$, et à la projectivisation du fibré tautologique sur G , c.-à-d. T .

1.1.1 ... en tant que fibré projectif sur \mathbb{P}^3

F_3 est ainsi isomorphe au fibré projectif correspondant au fibré vectoriel $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$. Soit H l'image réciproque dans $A^*(F_3)$ de la classe h d'un plan de \mathbb{P}^3 et soit $\xi = c_1(\Theta_{F_3}(1))$. Le polynôme de Chern de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$ étant (torsion avec un faisceau de rang 1)

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)) = 1 + h\omega + h^2\omega^2 + h^3\omega^3,$$

la Proposition 2.4.1 appliquée à F_3 donne :

$$\xi^3 + \xi^2 H + \xi H^2 + H^3 = 0,$$

et

$$\begin{cases} p_* \xi^2 = [\mathbb{P}^3], \\ p_* \xi = 0, \\ p_* [F_3] = 0. \end{cases}$$

De cela, il découle que

$$\begin{cases} p_*(\xi^2 H) = p_*(\xi^2 \cdot p^* h) = p_* \xi^2 \cdot h = h, \\ p_*(\xi H^2) = p_*(H^3) = 0, \end{cases}$$

et finalement

$$p_*(\xi^3) = -h.$$

Le polynôme de Chern de \mathcal{T}_{F_3} est donné par

$$C_\omega(\mathcal{T}_{F_3}) = C_\omega(p^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}) C_\omega(p^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes \Theta_{F_3}(1)),$$

de telle sorte que la première classe de Chern de F_3 est (c'est la seule dont nous avons besoin par la suite)

$$c_1(\mathcal{T}_{F_3}) = 5H + 3\xi.$$

1.1.2 ... en tant que fibré projectif sur G

F_3 est également isomorphe à la projectivisation du fibré tautologique T de rang 2 sur G . Soit γ'_1 et γ'_2 les images réciproques dans $A^*(F_3)$ des classes de Schubert γ_1 et γ_2 respectivement. Si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 = V_{F_3}$ est la filtration tautologique sur F_3 , alors il est clair que $E_1 = p^* \Theta_{\mathbb{P}^3}(-1)$ et que $E_2 = q^* T$. Nous voyons également que le fibré tautologique sur F_3 est

$$\Theta_{F_3}(-1) = \frac{E_2}{E_1},$$

et par conséquent

$$1 - \gamma'_1 \omega + \gamma'_2 \omega^2 = (1 - H\omega)(1 - \xi\omega),$$

ce qui signifie que

$$\begin{cases} \xi = \gamma'_1 - H, \\ \gamma'_2 = H\xi = \gamma'_1 H - H^2. \end{cases}$$

Utilisant la séquence exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{F_3/G} \longrightarrow \mathcal{T}_{F_3} \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow 0,$$

nous obtenons ainsi

$$C_\omega(\mathcal{T}_{F_3/G}) = 1 + (2H - \gamma'_1)\omega.$$

Pour conclure, nous donnons la description de l'anneau de Chow $A^*(F_3)$. D'après des relations analogues existant dans les anneaux $A^*(\mathbb{P}^3)$ et $A^*(G)$, nous observons que $H^4 = 0$ et que $\gamma_1^3 = 2\gamma'_1 \gamma'_2 = 2\gamma'_1 H(\gamma'_1 - H)$. Par suite, les groupes de Chow de $A^*(F_3)$ ont les générateurs suivants :

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 2 \\ \dim = 3 \\ \dim = 3 \\ \dim = 2 \\ \dim = 1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^0(F_3) = \mathbb{Z}[F_3], \\ A^1(F_3) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}\gamma'_1, \\ A^2(F_3) = \mathbb{Z}H^2 \oplus \mathbb{Z}H\gamma'_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_1'^2, \\ A^3(F_3) = \mathbb{Z}H^3 \oplus \mathbb{Z}H^2\gamma'_1 \oplus \mathbb{Z}H\gamma_1'^2, \\ A^4(F_3) = \mathbb{Z}H^3\gamma'_1 \oplus \mathbb{Z}H^2\gamma_1'^2, \\ A^5(F_3) = \mathbb{Z} * . \end{array} \right.$$

Rappelons que la notation $*$ signifie « classe d'un point ».

1.2 Cas des surfaces : anneau de Chow de F_X

Passons maintenant à la restriction F_X de F_3 à la surface X . Soit e l'image réciproque dans $A^*(X)$ de la classe h d'un hyperplan de \mathbb{P}^3 et E l'image réciproque dans $A^*(F_X)$ de e . Soit également Γ_1 et Γ_2 les images réciproques respectives de γ'_1 et γ'_2 dans $A^*(F_X)$. Suivant une relation obtenue dans l'anneau $A^*(F_3)$, nous obtenons :

$$\Gamma_2 = k^* \gamma'_2 = k^*(H\gamma'_1 - H^2) = \Gamma_1 E - E^2,$$

et puisque dans $A^*(G)$ on a $\gamma_1^3 = 2\gamma_1 \gamma_2$, nous déduisons également que

$$\Gamma_1^3 = 2\Gamma_1 \Gamma_2 = 2\Gamma_1^2 E - 2\Gamma_1 E^2.$$

Introduisons aussi P la classe telle que $E^2 = dP$ (ce qui signifie que P est l'image réciproque dans $A^*(F_X)$ de la classe d'un point dans $A^*(X)$) et \mathcal{K} l'image réciproque de la classe du diviseur canonique K de X . Transposant des relations similaires obtenues dans $A^*(X)$, on a dans un premier temps les identités suivantes :

$$\begin{cases} E^3 = 0, \\ P^2 = P\mathcal{K} = PE = 0, \\ \mathcal{K}E = \lambda P, \\ \mathcal{K}^2 = \mu P, \end{cases}$$

	Γ_1^2	$\Gamma_1 E$	$\Gamma_1 \mathcal{K}$	P		$\Gamma_1^2 E$	$\Gamma_1^2 \mathcal{K}$	$\Gamma_1 P$
Γ_1^2	$2d$	$2d$	2λ	1	Γ_1	$2d$	2λ	1
$\Gamma_1 E$	$2d$	d	λ	0	E	d	λ	0
$\Gamma_1 \mathcal{K}$	2λ	λ	μ	0	\mathcal{K}	λ	μ	0
P	1	0	0	0				

TAB. 6.1 - Théorie de l'intersection sur $A^*(F_X)$. Gauche : appariements $A^2(F_X) \times A^2(F_X)$. Droite : appariements d'intersection $A^1(F_X) \times A^3(F_X)$.

où $\lambda = d(d-4) - 2b$ et $\mu = d(d-4)^2 - (3d-16)b + 3t$, comme nous l'avons montré au Chapitre 4, Paragraphe 1 (page 49).

Pour ce qui concerne l'homéomorphisme q_* (image d'une classe dans $A^*(X)$), nous avons le comportement suivant :

$$q_* \Gamma_1 = q_* k^* \gamma_1' = q_* k^* (\xi + H) = j^* p_* (\xi + H) = 0,$$

et similairement

$$q_* \Gamma_1^2 = q_* k^* (\xi^2 + 2\xi H + H^2) = j^* p_* (\xi^2 + 2\xi H + H^2) = j^* [\mathbb{P}^3] = [X].$$

Nous déduisons ainsi que :

$$\begin{cases} q_* E^k = q_* \mathcal{K} = 0, \\ q_* (\Gamma_1^2 E) = q_* \Gamma_1^2 \cdot e = e, \\ q_* (\Gamma_1 E^2) = q_* \Gamma_1 \cdot e^2 = 0, \\ q_* \Gamma_1^3 = q_* (2\Gamma_1^2 E - 2\Gamma_1 E^2) = 2e, \\ q_* \Gamma_1^2 \mathcal{K} = q_* \Gamma_1^2 \cdot K = K. \end{cases}$$

Passons maintenant à la projection sur G . X est coupée en d points par une droite de \mathbb{P}^3 en position générale, ce qui signifie que génériquement d points de F_X se projettent sur un unique point de G ou encore que \bar{q} est de degré d . G et F_X étant tous deux de dimension 4, \bar{q} est de codimension 0. Il suit que :

$$\bar{q}_* (\Gamma_1^{4-2k} \Gamma_2^k) = \gamma_1^{4-2k} \gamma_2^k \cdot \bar{q}_* [F_X] = d \gamma_1^{4-2k} \gamma_2^k,$$

ou encore remplaçant Γ_2 par $\Gamma_1 E - E^2$

$$\begin{cases} \Gamma_1^4 = \Gamma_1^3 E = 2d*, \\ \Gamma_1^2 E^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_1^2 \Gamma_2 = d*. \end{cases}$$

Les produits d'intersection sont ainsi résumés dans la Table 6.1. Pour comprendre le comportement de l'image \bar{q}_* dans $A^*(G)$, il suffit de voir que $\bar{q}_* \mathcal{K}$ doit être rationnellement équivalent à

$$(\deg \mathcal{K}) \gamma_1 = \lambda \gamma_1,$$

et donc

$$\bar{q}_* (\Gamma_1^3 \mathcal{K}) = \gamma_1^2 \cdot \bar{q}_* \mathcal{K} = 2\lambda*,$$

ce qui signifie que $\Gamma_1^3 \mathcal{K} = 2\lambda*$. Pour les autres projections, nous obtenons finalement :

$$\begin{cases} \bar{q}_* E = d\gamma_1, \\ \bar{q}_* E^2 = \bar{q}_* (\Gamma_1 E - \Gamma_2) = d(\gamma_1^2 - \gamma_2). \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu la description suivante des groupes de Chow de $A^*(F_X)$:

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 3 \\ \dim = 4 \\ \dim = 3 \\ \dim = 1 \end{array} \begin{cases} A^0(F_X) = \mathbb{Z}[F_X], \\ A^1(F_X) = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}, \\ A^2(F_X) = \mathbb{Z}P \oplus E\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 \mathcal{K}, \\ A^3(F_X) = \mathbb{Z}P\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}E\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \mathcal{K}, \\ A^4(F_X) = \mathbb{Z}*. \end{cases}$$

Nous allons par la suite utiliser la théorie des points multiples stationnaires sur \bar{q} . Comme nous l'avons montré, cela nécessite une connaissance des classes de Chern du faisceau normal virtuel $\mathcal{N}_{F_X/G}$. On peut voir F_X comme la projectivisation de la restriction à X de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$, et donc

$$C_\omega(\mathcal{T}_{F_X}) = C_\omega(q^*\mathcal{T}_X)C_\omega(q^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)|_X \otimes \Theta_{F_X}(1)).$$

En utilisant la séquence

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{F_X} \longrightarrow k^*\mathcal{T}_{F_3} \longrightarrow \mathcal{N}_{F_X/F_3} \longrightarrow 0,$$

on voit que :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_X/F_3}) = \frac{C_\omega(k^*\mathcal{T}_{F_3})}{C_\omega(\mathcal{T}_{F_X})} = q^* \frac{C_\omega(\mathcal{T}_X)}{C_\omega(j^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3})} = q^* C_\omega(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}) = 1 + (4E + \mathcal{K})\omega.$$

Maintenant, F_X est isomorphe à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1))$ et \bar{q} est localement une intersection complète (voir Chapitre 7, Paragraphe 1), donc \bar{q} est lissable. Par suite :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_X/G}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{F_X/F_3})}{C_\omega(k^*\mathcal{T}_{F_3/G})},$$

et nous obtenons pour finir les classes de Chern de $\mathcal{N}_{F_X/G}$:

$$c_k = c_k(\mathcal{N}_{F_X/G}) = (\Gamma_1 + \mathcal{K} + 2E)(\Gamma_1 - 2E)^{k-1}.$$

1.3 Cas des courbes : anneau de Chow de F_{D_b}

Nous présentons maintenant le cadre de travail nécessaire à l'étude de contacts de droites avec une courbe gauche, ici la courbe double D_b de X . Le mécanisme de construction est similaire au travail que nous avons effectué pour obtenir les appariements d'intersection dans $A^*(F_X)$. Pour une approche centrée sur la technique des schémas de Hilbert, le lecteur consultera [le Barz, 1982].

Localement, une droite peut avoir un contact de trois types différents avec une courbe [McCroory, 1981]:

- (1) contact transversal ;
- (2) contact tangentiel, avec torsion non-nulle au point de contact (point de rebroussement ordinaire en projection) ;
- (3) contact tangentiel, avec torsion nulle (point de rebroussement ramphoïde en projection).

Il est alors facile de voir que la codimension du type (i) dans G est i .

Soit ε l'image réciproque dans $A^*(F_{D_b})$ de la classe d'un point dans $A^*(D_b)$. On a immédiatement $\varepsilon^2 = 0$, une relation provenant de $A^*(D_b)$. L'image \bar{r} est de degré b et de codimension 1, et ainsi :

$$\begin{cases} \bar{r}_*[F_{D_b}] = b\gamma_1, \\ \bar{r}_*\varepsilon = \gamma_1^2 - \gamma_2. \end{cases}$$

La deuxième égalité s'explique aisément de manière intuitive. ε a été défini comme l'image réciproque de la classe d'un point. Si donc P est un point générique fixé de D_b , alors ε est la classe fondamentale dans $A^*(F_{D_b})$ représentant la sous-variété

$$\{(x, l) \in D_b \times G / P \in l\},$$

donc ε est la classe des droites passant par un point donné (*point-star*) de D_b . On voit donc que son image dans $A^*(G)$ est nécessairement la classe des droites passant par un point général de l'espace, à savoir $\gamma_1^2 - \gamma_2$. Si g_1 et g_2 dénotent respectivement les images réciproques des classes de Schubert γ_1 et γ_2 , alors la relation $\gamma_2' = \gamma_1 H - H^2$ dans $A^*(F_3)$ se transforme directement en $g_2 = b g_1 \varepsilon$. En utilisant le fait que

$$\bar{r}_*(g_1^{3-2k} g_2^k) = \gamma_1^{3-2k} \gamma_2^k \cdot \bar{r}_*[F_{D_b}] = b \gamma_1^{4-2k} \gamma_2^k,$$

nous obtenons alors :

$$\begin{cases} g_1^3 = 2b*, \\ g_1^2 \varepsilon = *. \end{cases}$$

$A^*(F_{D_b})$ est ainsi décrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 2 \\ \dim = 2 \\ \dim = 1 \end{array} \quad \begin{cases} A^0(F_{D_b}) = \mathbb{Z}[F_{D_b}], \\ A^1(F_{D_b}) = \mathbb{Z}g_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon, \\ A^2(F_{D_b}) = \mathbb{Z}g_1^2 \oplus \mathbb{Z}g_1\varepsilon, \\ A^3(F_{D_b}) = \mathbb{Z}*. \end{cases}$$

Soit g le genre de D_b et Υ son rang. D'après le théorème de Riemann-Roch, le degré de la première classe de Chern de \mathcal{T}_{D_b} est $2 - 2g$ ou encore $2b - \Upsilon$. Si v dénote l'inclusion de D_b dans \mathbb{P}^3 , alors la séquence exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{D_b} \longrightarrow v^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{N}_{D_b/\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0$$

donne

$$C_\omega(\mathcal{N}_{D_b/\mathbb{P}^3}) = 1 + (\Upsilon + 2b) * \omega,$$

et par suite

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_{D_b}/F_3}) = 1 + (\Upsilon + 2b) \varepsilon \omega.$$

Si maintenant w dénote l'inclusion de F_{D_b} dans F_3 , alors puisque \bar{r} est localement une intersection complète (Chapitre 7, Paragraphe 1) et F_{D_b} est isomorphe à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1))$, \bar{r} est lissable. Par suite :

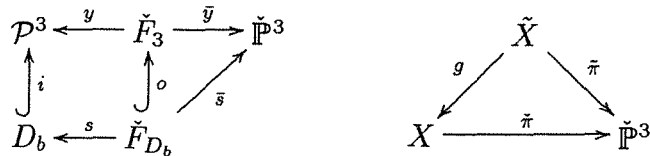
$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_{D_b}/G}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{F_{D_b}/F_3})}{C_\omega(w^* \mathcal{T}_{F_3/G})},$$

ce qui permet finalement d'obtenir (nous posons $c'_k = c_k(\mathcal{N}_{F_{D_b}/G})$) :

$$\begin{cases} c'_1 = g_1 + \Upsilon \varepsilon, \\ c'_2 = g_1^2 + (\Upsilon - 2b) g_1 \varepsilon, \\ c'_3 = (\Upsilon - 2b) *. \end{cases}$$

2 Contacts de plans avec courbes gauches et surfaces

Nous nous intéressons maintenant aux contacts de plans avec des courbes et des surfaces. Comme nous le voyons dans ce paragraphe, nous pouvons appliquer au cas des courbes la même stratégie que nous avons utilisée pour les contacts de droites, mais pas au cas des surfaces. C'est pourquoi nous devons considérer les deux diagrammes suivants :



$\check{\mathbb{P}}^3$ est l'espace projectif dual, paramétrant les plans de \mathbb{P}^3 . \check{F}_3 est la variété de drapeaux point-plan de \mathbb{P}^3 à 5 dimensions, c.-à-d.

$$\check{F}_3 = \{(x, \Pi) \in \mathbb{P}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 / x \in \Pi\},$$

et \check{F}_{D_b} est sa restriction à D_b , de dimension 3. Comme précédemment, y et s étant des fonctions propres, on a $i^* y_* = s_* o^*$. \bar{s} est la fonction induite par projection sur le second facteur.

Pour ce qui concerne le deuxième diagramme, \check{X} est la *variété conormale* de X (dimension 2), à savoir

$$\check{X} = \{(x, \Pi) \in X \times \check{\mathbb{P}}^3 / \Pi \text{ est tangent à } X \text{ au point } x\},$$

et $\bar{\pi}$ est la fonction induite par projection sur le second facteur. Par suite, on appelle *variété duale* de X , et on note \check{X} , l'image de \check{X} par $\bar{\pi}$. On appelle généralement $\bar{\pi}$ la *fonction duale*.

2.1 Espace de drapeaux point-plan de \mathbb{P}^3

\mathbb{P}^3 et $\check{\mathbb{P}}^3$ sont des cas particuliers de variétés de drapeaux, de type respectif $(1, 3)$ et $(3, 1)$. En outre, \check{F}_3 est de type $(1, 2, 1)$ et est donc une subdivision des types $(1, 3)$ et $(3, 1)$. Là encore \check{F}_3 peut être construit de deux manières différentes. Considérons les séquences canoniques exactes pour \mathbb{P}^3 et $\check{\mathbb{P}}^3$:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow V_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \longrightarrow V_{\check{\mathbb{P}}^3} \longrightarrow \check{\Theta}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où $\check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1)$ est le faisceau dual à $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$, ayant pour polynôme de Chern

$$C_\omega(\check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1)) = 1 - \check{h}\omega + \check{h}^2\omega^2 - \check{h}^3\omega^3,$$

où \check{h} est la classe d'un hyperplan de $\check{\mathbb{P}}^3$. On voit que \check{F}_3 est isomorphe à la projectivisation de $\Theta_{\mathbb{P}^3}(-1)$ d'un côté et à la projectivisation de $\check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1)$ de l'autre.

Soit ξ la classe $c_1(\Theta_{\check{F}_3}(1))$ et H, \check{H} les images réciproques dans $A^*(\check{F}_3)$ des classes d'hyperplans h et \check{h} de \mathbb{P}^3 et $\check{\mathbb{P}}^3$ respectivement. Alors en appliquant la Proposition 2.4.1 à la première projectivisation, on obtient :

$$\xi - H = 0,$$

et en l'appliquant à la seconde :

$$\xi^3 - \xi^2\check{H} + \xi\check{H}^2 - \check{H}^3 = 0,$$

de telle sorte qu'en combinant ces deux équations, nous obtenons finalement :

$$H^3 - H^2\check{H} + H\check{H}^2 - \check{H}^3 = 0.$$

Multipliant cette équation par H^2 , en notant que $H^4 = \check{H}^4 = 0$ d'après des relations similaires dans $A^*(\mathbb{P}^3)$ et $A^*(\check{\mathbb{P}}^3)$ (la signification est évidente : 4 plans de \mathbb{P}^3 en position générale ont une intersection vide), nous obtenons

$$H^3\check{H}^2 = H^2\check{H}^3.$$

En appliquant la deuxième partie de la Proposition 2.4.1 à la deuxième projectivisation, on a :

$$\bar{y}_* H^2 = [\check{\mathbb{P}}^3],$$

et il en résulte d'après la formule de projection que

$$H^3\check{H}^2 = H^2\check{H}^3 = *.$$

Exprimant les résultats en fonction de H et \check{H} , le polynôme de Chern de $\mathcal{T}_{\check{F}_3}$ est alors donné par :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\check{F}_3/\check{\mathbb{P}}^3}) = C_\omega(\bar{y}^*\check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \otimes \Theta_{\check{F}_3}(1)) = 1 + (3H - \check{H})\omega + (\check{H}^2 - 2\check{H}H + 3H^2)\omega^2.$$

En utilisant en outre le fait que $H^4 = \check{H}^4 = 0$, des relations similaires à d'autres existant dans $A^*(\mathbb{P}^3)$ et $A^*(\check{\mathbb{P}}^3)$, nous aboutissons à la description suivante des groupes de Chow de \check{F}_3 :

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 2 \\ \dim = 3 \\ \dim = 3 \\ \dim = 2 \\ \dim = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A^0(\check{F}_3) = \mathbb{Z}[\check{F}_3], \\ A^1(\check{F}_3) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}\check{H}, \\ A^2(\check{F}_3) = \mathbb{Z}H^2 \oplus \mathbb{Z}H\check{H} \oplus \mathbb{Z}\check{H}^2, \\ A^3(\check{F}_3) = \mathbb{Z}H^3 \oplus \mathbb{Z}H^2\check{H} \oplus \mathbb{Z}H\check{H}^2, \\ A^4(\check{F}_3) = \mathbb{Z}H^3\check{H} \oplus \mathbb{Z}H^2\check{H}^2, \\ A^5(\check{F}_3) = \mathbb{Z}*. \end{array} \right.$$

2.2 Cas des courbes

Dans la suite de cette présentation, nous appliquerons la théorie des points multiples à la projection \bar{s} . Nous étudions ici les appariements d'intersection sur \check{F}_{D_b} , la restriction de \check{F}_3 à la courbe double D_b de degré b et de rang Υ de X .

2.2.1 Anneau de Chow de \check{F}_{D_b}

Localement, les contacts de plans avec une courbe gauche sont de 4 types différents [McCroory, 1981] :

- (1) le plan ne contient pas la tangente à la courbe au point de contact ;
- (2) le plan contient la tangente, mais n'est pas osculateur ;
- (3) le plan est osculateur et la torsion au point de contact est non-nulle ;
- (4) le plan est osculateur et la torsion de la courbe au point de contact est nulle.

La codimension de la projection du type (i) dans $G = G(2, 3)$ est $i - 1$.

Soit donc ε l'image réciproque dans $A^*(\check{F}_{D_b})$ de la classe d'un point dans $A^*(D_b)$. Il est clair que là aussi $\varepsilon^2 = 0$ et que l'image réciproque de H dans $A^*(\check{F}_{D_b})$ est $o^*H = b\varepsilon$. Soit également \check{E} l'image réciproque de \check{H} . En prenant la restriction à \check{F}_{D_b} de la relation vue plus haut dans $A^*(\check{F}_3)$, on obtient ici :

$$\check{E}^3 = b\check{E}^2\varepsilon.$$

Mais \bar{s} est de degré b (D_b est coupé en b points par un plan en position générale) et de codimension 0, et par conséquent

$$\bar{s}_* \check{E}^3 = \check{h}^3 \cdot \bar{s}_*[\check{F}_{D_b}] = b\check{h}^3 = b*,$$

d'où nous en déduisons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{E}^3 = b*, \\ \check{E}^2\varepsilon = *. \end{array} \right.$$

Pour les autres projections, on a aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{s}_* \check{E} = b\check{h}, \\ \bar{s}_* \varepsilon = \check{h}. \end{array} \right.$$

Nous avons alors la description élémentaire suivante de $A^*(\check{F}_{D_b})$:

$$\begin{array}{l} \dim = 1 \\ \dim = 2 \\ \dim = 2 \\ \dim = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A^0(\check{F}_{D_b}) = \mathbb{Z}[\check{F}_{D_b}], \\ A^1(\check{F}_{D_b}) = \mathbb{Z}\varepsilon \oplus \mathbb{Z}\check{E}, \\ A^2(\check{F}_{D_b}) = \mathbb{Z}\varepsilon\check{E} \oplus \mathbb{Z}\check{E}^2, \\ A^3(\check{F}_{D_b}) = \mathbb{Z}*. \end{array} \right.$$

Pour ce qui concerne les classes de Chern de \bar{s} , on utilise le fait que

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{F}_{D_b}/\tilde{F}_3}) = s^* C_\omega(\mathcal{N}_{D_b/\mathbb{P}^3}) = 1 + (\Upsilon + 2b)\varepsilon\omega.$$

\bar{s} est localement une intersection complète et \tilde{F}_{D_b} est isomorphe à un sous-schéma d'un fibré projectif, et donc \bar{s} est lissable. Par conséquent :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{F}_{D_b}/\tilde{\mathbb{P}}^3}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{F}_{D_b}/\tilde{F}_3})}{o^* C_\omega(\mathcal{T}_{\tilde{F}_3/\tilde{\mathbb{P}}^3})}.$$

Il s'ensuit que $(\bar{c}_k = c_k(\mathcal{N}_{\tilde{F}_{D_b}/\tilde{\mathbb{P}}^3}))$:

$$\begin{cases} \bar{c}_1 = \check{E} + (\Upsilon - b)\varepsilon, \\ \bar{c}_2 = (\Upsilon - 2b)\check{E}\varepsilon, \\ \bar{c}_3 = 0. \end{cases}$$

2.2.2 Surface duale à D_b

Étudions maintenant un peu de la géométrie énumérative de la surface de $\tilde{\mathbb{P}}^3$ paramétrant les plans tangents à D_b .

Proposition 6.2.1 - *La surface de $\tilde{\mathbb{P}}^3$ paramétrant l'ensemble des plans tangents à D_b est une développable de plans de degré Υ , possédant une courbe double de degré $\tilde{\tau}$ et une courbe cuspidale de degré \tilde{i} , où $\tilde{\tau}$ et \tilde{i} sont*

$$\begin{cases} \tilde{\tau} = -(5d - 14)b + \frac{1}{2}(d - 2)^2 b^2 - 3(d - 2)bt + 15t + \frac{9}{2}t^2, \\ \tilde{i} = 3b(d - 3) - 9t. \end{cases}$$

Preuve. Soit \check{D}_b la surface de $\tilde{\mathbb{P}}^3$ duale à D_b , c.-à-d. la variété qui paramètre l'ensemble des plans de \mathbb{P}^3 qui touchent D_b . Dans \tilde{F}_{D_b} , la classe des plans tangents à D_b est donné par :

$$n(2) = \bar{c}_1 = \check{E} + (\Upsilon - b)\varepsilon,$$

et par conséquent $s_* n(2) = \Upsilon \check{h}$, ce qui signifie que le degré de \check{D}_b est $\bar{b} = \Upsilon = (d - 2)b - 3t$.

Il est facile de réaliser que \check{D}_b est une développable de plans, qui possède une courbe double \check{B} et une courbe cuspidale \check{C} . Le degré de \check{B} peut être trouvé facilement en regardant la classe dans \check{D}_b de plans bitangents à D_b . On trouve :

$$n(2, 2) = \bar{c}_1 s^* s_* \bar{c}_1 - 4\bar{c}_1^2 - 2\bar{c}_2 = (\Upsilon - 4)\check{E}^2 + (\Upsilon^2 - \Upsilon b - 10\Upsilon + 12b)\check{E}\varepsilon.$$

Le degré de \check{B} est alors :

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2} \int n(2, 2) \cdot \check{E} = \frac{1}{2}(\Upsilon^2 - 10\Upsilon + 8b) = 2(b - 2)(b - 3) + 2g(2b + g - 7),$$

où le genre g de D_b est, comme nous l'avons vu, tel que $2g - 2 = (d - 4)b - 3t$. Maintenant, puisque \check{D}_b est une développable de plans, le degré \tilde{i} de sa courbe cuspidale vérifie (Chapitre 4, Paragraphe 3)

$$\tilde{\tau} + \tilde{i} = \frac{1}{2}(\bar{b} - 1)(\bar{b} - 2) - g,$$

soit

$$\tilde{i} = 3b + 6g - 6 = 3(d - 3)b - 9t.$$

Par suite, on voit également que le rang de \check{D}_b est

$$\mu_1(\check{D}) = 2\bar{b} + 2g - 2 - \tilde{i} = b.$$

□

2.3 Cas des surfaces : surface duale

Pour étudier les contacts de plans avec une surface, la première idée qui vient à l'esprit serait d'imiter ce que nous avons fait pour des contacts de droites et également pour des contacts de plans avec des courbes gauches. Malheureusement, l'espace d'origine \tilde{F}_X , défini comme suit

$$\tilde{F}_X = \{(x, \Pi) \in X \times \mathbb{P}^3 / x \in \Pi\},$$

serait de dimension 4 alors que l'espace cible, \mathbb{P}^3 , ne serait que de dimension 3, et la théorie des points multiples ne peut malheureusement pas s'appliquer dans ce cas.

Comme l'indique le deuxième diagramme introduit plus haut, nous allons au contraire nous intéresser à la fonction $\tilde{\pi}$ qui envoie un point non-singulier de la surface X sur son plan tangent. L'image de X par $\tilde{\pi}$ est la variété duale \tilde{X} , définie comme l'ensemble des plans tangents à X si cette surface est lisse ou comme la fermeture de l'ensemble des plans tangents aux points non-singuliers si X est singulière. Si X n'est pas partout plane, ce que nous supposons dorénavant, alors \tilde{X} est une surface dans \mathbb{P}^3 . Généralement, la surface \tilde{X} aura à la fois une courbe double et une courbe cuspidale, et ceci même dans le cas où X est lisse.

2.3.1 Degré de la surface duale

Notre première tâche est de déterminer le degré de \tilde{X} . La fonction $g : \tilde{X} \rightarrow X$ induite par projection sur le premier facteur identifie \tilde{X} avec $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3})$. Le degré de \tilde{X} est alors le degré de $\tilde{\pi}_*[\tilde{X}]$. D'après l'inclusion de \tilde{X} dans $X \times \mathbb{P}^3$, on voit que :

$$\Theta_{\tilde{X}}(1) = g^*\Theta_X(1) \otimes \tilde{\pi}^*\Theta_{\mathbb{P}^3}(1).$$

Le degré de \tilde{X} est alors donné par :

$$\tilde{d} = \int \tilde{\pi}_*[\tilde{X}] = \int c_1(\tilde{\pi}^*\Theta_{\mathbb{P}^3}(1))^2.$$

Soit ζ la classe $c_1(\Theta_{\tilde{X}}(1))$ et \tilde{e} l'image réciproque dans $A^*(X)$ de la classe d'un hyperplan \tilde{h} dans $A^*(\mathbb{P}^3)$. Alors

$$g^*\tilde{e} = c_1(\tilde{\pi}^*\Theta_{\mathbb{P}^3}(1)) = c_1(\Theta_{\tilde{X}}(1)) + c_1(f^*\Theta_X(-1)) = \zeta - g^*e.$$

En appliquant maintenant la Proposition 2.4.1 à \tilde{X} , nous obtenons

$$\zeta + g^*c_1(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}) = \zeta - g^*(K + 4e) = 0,$$

et aussi

$$g_*[\tilde{X}] = [X]$$

puisque le faisceau $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}$ est de rang 1. Pour finir, on déduit que

$$\tilde{e} = K + 3e,$$

et que le degré de \tilde{X} est

$$\tilde{d} = \int g^*\tilde{e}^2 = \int \tilde{e}^2 = \int (K^2 + 6Ke + 9e^2) = \mu + 6\lambda + 9d = d(d-1)^2 - (3d-4)b + 3t.$$

Notons que le degré d'une surface étant le nombre de ses points d'intersection avec une droite en position générale, \tilde{d} est également le nombre de plans tangents à X contenant une droite en position générale, appelé la classe μ_2 de X . On trouve enfin que le degré de la courbe sur X des points ayant un plan tangent qui passe par un point général de l'espace, le rang de X , est égal à

$$\mu_1 = \int e.\tilde{e} = d(d-1) - 2b = \lambda + 3d.$$

2.3.2 Et si on a une courbe cuspidale?

Supposons maintenant que la surface X possède en plus une courbe cuspidale de degré c . Reprenons les mêmes notations que précédemment, à savoir que $f : Z \rightarrow X$ est la normalisation lisse de X et que Γ_c est la partie de dimension 1 de la ramification de la fonction induite φ . Alors en utilisant la séquence

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{Z/X} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/\mathbb{P}^3} \rightarrow f^* \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3} \rightarrow 0,$$

et le fait que $c_1(\mathcal{N}_{Z/X}) = [\Gamma_c]$, on voit que dans ce cas

$$c_1(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}) = K + 4e - [\Gamma_c],$$

ce qui par suite signifie que

$$\check{e} = K + 3e - [\Gamma_c].$$

On voit alors que

$$\mu_1 = \int e.\check{e} = d(d-1) - 2b - 3c.$$

2.3.3 Classes de Chern de la fonction duale

Revenons après cet aparté au cas d'une surface à singularités ordinaires. Plus loin, nous appliquerons la théorie des points multiples à la fonction $\tilde{\pi}$, et nous aurons besoin de ses classes de Chern.

Soit $u : \tilde{X} \hookrightarrow \tilde{F}_3$ l'inclusion. \tilde{X} est isomorphe à un sous-schéma de \tilde{F}_3 et $\tilde{\pi}$ est localement une intersection complète, donc est lissable. Par suite,

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{\mathbb{P}}^3}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{F}_3})}{u^* C_\omega(\mathcal{T}_{\tilde{F}_3/\tilde{\mathbb{P}}^3})}.$$

En outre, nous avons la séquence exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{\tilde{X}} \rightarrow u^* \mathcal{T}_{\tilde{F}_3} \rightarrow \mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{F}_3} \rightarrow 0,$$

et nous connaissons déjà $\mathcal{T}_{\tilde{F}_3}$. Il reste à trouver $\mathcal{T}_{\tilde{X}}$, mais la séquence exacte d'Euler donne :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\tilde{X}}) = C_\omega(g^* \mathcal{T}_X) C_\omega(g^* \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3} \otimes \Theta_{\tilde{X}}(1)),$$

et puisque $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^3}$ est de rang 1, cela revient à dire que :

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\tilde{X}}) = C_\omega(g^* \mathcal{T}_X) = 1 + (3o - \delta)\omega + (3o - 2o\delta + \delta^2)\omega^2,$$

où o et δ sont respectivement les images réciproques dans $A^*(\tilde{X})$ de e et \check{e} , avec $\int o^2 = d$ et $\int \delta^2 = \check{d}$. On aboutit à :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{\mathbb{P}}^3}) = 1 + 4\delta\omega + 6\delta^2\omega^2,$$

puis à

$$\begin{cases} c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{\mathbb{P}}^3}) = 5\delta - 3o, \\ c_2(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\tilde{\mathbb{P}}^3}) = 10\delta^2 - 16\delta o + 6o^2. \end{cases}$$

2.3.4 Géométrie de la surface duale

Puisque la projection g_* dans l'anneau de $A^*(X)$ est triviale ($g_*[\tilde{X}] = [X]$), nous ferons dans ce qui suit un abus de notation et identifierons les résultats dans $A^*(X)$ et $A^*(\tilde{X})$. Nous venons de voir que $c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}) = 5\tilde{o} - 3o$. En outre, le faisceau normal virtuel $\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}$ possède $o + \tilde{o}$ comme première classe de Chern. Par conséquent, la partie de dimension 1 de la ramification de $X \rightarrow \tilde{X}$ est donnée par la classe

$$[V_c] = g_*(c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}) - c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3})) = 4K + 8e.$$

La courbe V_c sur X se projette donc en la courbe cuspidale U_c de \tilde{X} . En fait, il est facile de réaliser qu'un point de la courbe cuspidale de \tilde{X} provient d'un plan tangent stationnaire à X , et que ces plans sont les plans tangents à X aux points paraboliques. Nous venons donc également de montrer que la classe des points paraboliques sur X est $4K + 8e$, fait que nous prouverons d'une autre manière dans le Chapitre 8, Paragraphe 2 (page 126).

Proposition 6.2.2 - *Le lieu des points de contact des plans bitangents à X a pour degré*

$$d(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12) - (5d^3 - 11d^2 + 6d - 26)b + 2(3d - 4)b^2 - 6bt + 3d(d-1)t.$$

Preuve. L'ensemble des points doubles de $\tilde{\pi}$ est donné par la classe :

$$[M_2] = \tilde{\pi}^* \tilde{\pi}_*[\tilde{X}] - c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}),$$

ou encore puisque $\tilde{\pi}_*[\tilde{X}] = d\tilde{h}$,

$$g_*[M_2] = (d - 5)K + 3(d - 4)e.$$

Si maintenant U_b est la courbe double sur \tilde{X} et V_b la courbe correspondant sur X , alors

$$g_*[M_2] = [V_b] + 2[V_c],$$

comme nous l'avons déjà vu pour une fonction ayant une ramification non finie. Cela donne :

$$[V_b] = (d - 13)K + (3d - 28)e.$$

Cette classe représente précisément le lieu des points de contact des plans bitangents à X , et a pour degré

$$\int [V_b].e = (d - 13)\lambda + (3d - 28)d.$$

□

Proposition 6.2.3 - *La surface duale \tilde{X} a une courbe double de degré \check{b} et une courbe cuspidale de degré \check{c} , où \check{b} et \check{c} sont donnés par*

$$\begin{cases} \check{b} = \frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12) - \frac{1}{2}(6d^4 - 20d^3 + 22d^2 - 47d + 74)b \\ \quad + \frac{1}{2}(3d-4)^2b^2 - 3(3d-4)bt + \frac{1}{2}(6d^3 - 12d^2 + 6d - 39)t + \frac{1}{2}t^2, \\ \check{c} = 4d(d-1)(d-2) - 12(d-2)b + 12t. \end{cases}$$

Preuve. Le degré de la courbe double de \tilde{X} est maintenant obtenu facilement comme suit (la fonction $V_b \rightarrow U_b$ est un double recouvrement, donc on divise par 2) :

$$\check{b} = \frac{1}{2} \int [V_b].\check{e},$$

alors que le degré de la courbe cuspidale est

$$\check{c} = \int [V_c].\check{e}.$$

□

3 Bilan

Les surfaces événement visuel des graphes d'aspects d'objets lisses et lisses par morceaux sont toutes des surfaces réglées, constituées de droites ou de plans ayant certains contacts avec l'objet. Nous avons montré dans ce chapitre comment appréhender ces problèmes du point de vue de la géométrie énumérative. La technique générale est d'identifier une fonction (c'est-à-dire également deux espaces de paramètres) dont les sous-ensembles de points multiples sont précisément les ensembles de droites ou de plans cherchés. Le seul cas sensiblement différent des autres est celui des contacts de plans avec un solide de \mathbb{P}^3 , où nous avons recouru à l'introduction de la surface duale, surface de \mathbb{P}^3 qui paramètre l'ensemble des plans tangents au solide.

Chapitre 7

Validité et application de l'approche

Contents

1	Validité de l'utilisation de la théorie des points multiples et schémas de Hilbert	94
1.1	Validité	94
1.2	Schémas de Hilbert	95
1.3	Contribution des droites d'une surface à ses multisécantes	96
1.4	Espaces linéaires contenus dans une hypersurface	97
2	Théorie des points multiples et facteur de surcompte	98
3	Implantation d'une procédure de calcul	99
4	Résultats préliminaires	101
4.1	Contact d'une droite avec une variété projective	101
4.2	Événements visuels de codimension supérieure à 1	102
4.3	Vérifications de formules	103
5	Intersections et caractères projectifs	105
6	Congruences visuelles	107
6.1	Généralités	107
6.2	Quelques propriétés	108
6.3	Congruence $F + F$: droites bitangentes	108
6.4	Congruence $F + D$	109
6.5	Congruence $D + D$	109
6.6	Congruence C : droites asymptotiques	110
6.7	Congruence $SF&T$	110
7	Silhouettes et faux-plis	111
8	Surfaces duales: approche indirecte	113
9	Bilan	114

Avant de passer à l'étude proprement dite de la géométrie énumérative des graphes d'aspects d'objets lisses et lisses par morceaux, nous présentons ici un grand nombre de résultats qui découlent du cadre de travail que nous venons de mettre en place. Puisque notre but est d'appliquer la théorie des points multiples à certaines fonctions, nous revenons tout d'abord sur la validité de l'application de cette théorie sur certaines fonctions qui nous concernent, puis nous voyons comment évaluer le facteur de surcompte dans le cas de ces fonctions. Nous montrons aussi que la théorie de l'intersection étant donnée, le reste des calculs peut être aisément automatisé.

Comme nous l'avons mentionné dans le Chapitre 5, l'environnement mis en place n'autorise pas seulement l'étude des événements visuels de codimension 1 à laquelle nous nous attellerons dans le chapitre suivant. Nous donnons ici des résultats sur les événements de codimension 2. Nous étudions aussi des systèmes de droites qui jouent un rôle tout particulier dans les propriétés de visibilité d'une surface. Enfin nous relierons ces systèmes à la géométrie énumérative de la projection de la surface sur un plan. En utilisant un résultat sur la dualité de cette projection, nous montrons un moyen indirect de caractériser la géométrie de la surface duale, qui se déduit cette fois non plus de contacts de plans avec la surface (approche naturelle), mais de contacts de droites. Certains résultats de ce chapitre sont présentés dans [Petitjean, 1995c]. Nous rappelons que l'ensemble des classes considérées ici est donné en Annexe A.

Dans ce chapitre et le suivant, nous appliquons la théorie des points multiples à trois fonctions différentes, introduites plus haut, à savoir \bar{q} , \bar{r} et \bar{s} . Dans un souci de clarté, nous utilisons des lettres distinctes pour désigner les formules de points multiples appliquées à ces fonctions, respectivement l , m et n .

1 Validité de l'utilisation de la théorie des points multiples et schémas de Hilbert

Avant de poursuivre, voyons ici plusieurs points. Tout d'abord, établissons sous quelles restrictions il est possible d'utiliser la théorie des points multiples dans le cas de contacts de droites avec une variété projective [Colley, 1986] et regardons ce que la théorie des schémas de Hilbert permet d'affirmer sur le même problème. Les résultats vus ici seront toujours valables dans la Partie III lorsque nous regarderons les contacts de droites avec une surface de \mathbb{P}^4 , \mathbb{P}^5 et \mathbb{P}^6 , et nous n'y reviendrons pas alors.

1.1 Validité

Prenons le cas global où X est une variété de dimension δ dans \mathbb{P}^m et regardons la fonction

$$f : F_{1,1,m-1}(X) \longrightarrow G(1, m),$$

où $F_X = F_{1,1,m-1}(X)$ est la restriction à X de la variété de drapeaux point-droite $F_{1,1,m-1}$ de \mathbb{P}^3 , et f est induite par projection sur le second facteur. La dimension de $G = G(1, m)$ est $2(m-1)$ et celle de $F_{1,1,m-1}$ est $2m-1$ puisque cette variété est isomorphe à la projectivisation d'un faisceau de rang 2 sur G . Par suite, puisque la codimension de X dans \mathbb{P}^m est $m-\delta$, il en est de même pour celle de F_X dans $F_{1,1,m-1}$ et ainsi F_X est de dimension $m+\delta-1$, ce qui pour finir donne $n = m-\delta-1$ pour la codimension de f .

G est lisse, et par conséquent si X est lisse, F_X est lisse et ainsi f est localement une intersection complète. Si X est une surface lisse par morceaux de \mathbb{P}^3 , alors les seuls points qui posent problème sont les points de la courbe double. Mais en ces points, l'intersection est toujours transversale et par suite, f est localement une intersection complète. Si X est une courbe gauche de \mathbb{P}^3 (ici, la courbe double D_δ) possédant des points triples ordinaires pour seules singularités, alors les self-intersections de F_X sont toutes transversales et f est localement une intersection complète (cela ne serait pas le cas si la courbe possédait des points de rebroussement par exemple).

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ une partition, $r = \sum a_i$, et on s'intéresse au sous-ensemble $S_f(\mathbf{a})$ de points multiples de f . Nous disons que X est *générique* si l'ensemble des droites ayant un contact de type \mathbf{a} avec X est soit vide, soit de codimension espérée dans G , à savoir $(r-1)(m-\delta-1) + \sum (a_i-1)$ (voir Paragraphe 4). Supposons dorénavant que X est générique. Cela implique entre autres choses que X n'est pas contenue dans un hyperplan et qu'elle ne contient pas de droites.

Soit (x, l) un point de F_X . En reprenant les notations introduites dans la Partie I, Chapitre 3, la définition de la fonction $f_1 : (F_X)_2 \longrightarrow F_X$ implique que $f_1^{-1}(x, l)$ paramètre des paires de points

$((x, l), (y, l))$, où x et y sont deux points de X situés sur l . Puisque X ne contient pas de droites, $f_1^{-1}(x, l)$ ne peut pas être de dimension positive, ce qui implique par suite que

$$\dim \Omega_f^1(x, l) \leq 2,$$

et donc que f ne possède pas de singularités de type \bar{S}_2 .

f étant localement une intersection complète, il suffit maintenant de vérifier que les fonctions f_s sont bien de codimension n , pour $1 \leq s \leq r - 1$. Nous avons vu que $(F_X)_s$ paramètre les s -uplets ordonnés $((x_1, l), \dots, (x_s, l))$ de points de F_X tels que l passe par tous les $x_i, i = 1, \dots, s$. Mais puisque X est générique, la dimension de $(F_X)_s$ est la même que celle des droites s -sécantes à X . Puisque

$$\text{codim}(\text{droites } s\text{-sécantes}, G) = (s - 1)(m - \delta - 1),$$

on voit que :

$$\dim (F_X)_s = 2(m - 1) - (s - 1)(m - \delta - 1).$$

Ainsi

$$\text{codim}(f_s) = \dim (F_X)_s - \dim (F_X)_{s+1} = m - \delta - 1 = n,$$

comme espéré, et donc f est r -générique.

1.2 Schémas de Hilbert

Voyons ici, avec quelques détails, la philosophie de la technique des schémas de Hilbert, appliquée au cas de contacts de droites avec une surface X de \mathbb{P}^m . Ce qui suit est en grande partie repris de [le Barz, 1987a].

Soit $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^m$ le schéma de Hilbert des k -uplets de \mathbb{P}^m (sous-schémas de dimension 0 et de longueur k). Soit $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m$ l'ensemble ouvert formé des k -uplets *curvilinéaires*, c.-à-d. situés sur une courbe lisse. $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m$ est lisse de dimension mk . Les k -uplets de \mathbb{P}^m qui sont sous-schémas d'une droite, appelée l'axe du k -uplet, sont dits *alignés*. Ils forment une sous-variété non-singulière de $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m$, notée $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$, de dimension $2m + k - 2$. Il existe une fibration naturelle de $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$ sur la Grassmannienne de droites :

$$\varepsilon_k : \text{Al}^k \mathbb{P}^m \longrightarrow G(1, m)$$

qui associe à un k -uplet aligné son axe. La fibre typique de $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$ est alors $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$ (le symbole \simeq signifie « isomorphe à »).

Soit donc X une surface de degré d de \mathbb{P}^m , possédant une courbe double de degré b et avec t points triples. Soit i l'injection canonique

$$\text{Al}^k \mathbb{P}^m \longrightarrow \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m.$$

Puisque $\text{Hilb}^k X$ s'identifie avec un sous-schéma de $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^m$, soit $\text{Hilb}_c^k X$ la trace de $\text{Hilb}^k X$ sur $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m$. Le cycle associé $[\text{Hilb}_c^k X]$ de $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^m$ est de dimension $2k$ et par conséquent le cycle

$$i^*[\text{Hilb}_c^k X]$$

appartient à $A^{k(m-2)}(\text{Al}^k \mathbb{P}^m)$. Soit Z un cycle fixé de $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$, de dimension complémentaire. Alors le nombre de k -sécantes à X satisfaisant la condition Z est le degré du 0-cycle

$$Z.i^*[\text{Hilb}_c^k X].$$

Pour calculer ce degré, il faut trouver une base de l'anneau de Chow de $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$. $\text{Al}^k \mathbb{P}^m$ étant fibré en \mathbb{P}^k au-dessus de $G = G(1, m)$, le théorème de Leray-Hirsch dit que :

$$A^i(\text{Al}^k \mathbb{P}^m) = \bigoplus_{s=0}^i \varepsilon_k^* A^{i-s}(G).[H_i],$$

où $[H_i]$ est la condition pour un k -uplet aligné d'avoir au moins un point sur i hyperplans en position générale de \mathbb{P}^m .

Revenons au cas de la surface X . Au bout du compte, le résultat de le Barz revient à dire la chose suivante. Si Z est un cycle de dimension $\mu = k(m-2)$ de $A^*(\text{Al}^k \mathbb{P}^3)$, alors le degré du 0-cycle $Z \cdot i^*[\text{Hilb}_c^k X]$ est

- $\mu = 3$ (6 constantes) :

$$d(\alpha_1 + \alpha_2 d + \alpha_3 d^2) + (\beta_1 + \beta_2 d)b + \delta_1 t,$$

- $\mu = 4$ (11 constantes) :

$$d(\alpha_1 + \alpha_2 d + \alpha_3 d^2 + \alpha_4 d^3) + (\beta_1 + \beta_2 d + \beta_3 d^2)b + \delta_1 b^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 d)t,$$

- $\mu = 5$ (15 constantes) :

$$d(\alpha_1 + \alpha_2 d + \alpha_3 d^2 + \alpha_4 d^3 + \alpha_5 d^4) + (\beta_1 + \beta_2 d + \beta_3 d^2 + \beta_4 d^3)b + (\delta_1 + \delta_2 d)b^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 d + \varepsilon_3 d^2)t + \eta_1 bt,$$

où les constantes ne dépendent que du cycle Z .

Prenons un exemple et effectuons la transition entre points multiples stationnaires et schémas de Hilbert. Nous voudrions connaître la forme de la formule donnant le nombre de tangentes asymptotiques à X contenues dans un plan en position générale. Qui dit tangente asymptotique dit 3 points infiniment proches, et donc $k = 3, m = 3$. Ainsi, $i^*[\text{Hilb}_c^3 X]$ appartient à $A^3(\text{Al}^3 \mathbb{P}^3)$. Cela revient à dire que l'on est dans le cas $\mu = 3$ plus haut (formule en d^3), ce que nous vérifierons Chapitre 7, Paragraphe 6.

1.3 Contribution des droites d'une surface à ses multisécantes

Comme nous l'avons dit, la technique des schémas de Hilbert montre que les formules énumératives concernant les contacts de droites avec une variété projective X sont valables sans restriction sur X . En outre, si X est une surface, il est possible de déterminer la contribution dans chacune de ses formules d'éventuelles droites contenues dans X . Soit encore $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ une partition et $r = \sum a_i$. Dans [le Barz, 1984], l'auteur montre que pour une surface X de \mathbb{P}^m , une droite de self-intersection l contribue pour

$$(-1)^{rm} \alpha \binom{(m-1)(r-2) - r + l + 1}{r(m-2) - 2(m-1)}$$

dans le nombre de droites sécantes de *type maximal* \mathbf{a} de X , où α est une constante dépendant de la situation. Par type maximal, nous entendons que la codimension de la classe $l(\mathbf{a}; n)$ dans F_X est égale à la dimension de F_X . Nous calculerons la codimension de $l(\mathbf{a}; n)$ dans la Paragraphe 4 ; pour une surface, elle vaut :

$$\alpha(\mathbf{a}) = (r-1)(m-3) + \sum (a_i - 1),$$

alors que la dimension de F_X est $m+1$. Par exemple dans \mathbb{P}^4 , une droite bitangente contribue pour $4 \binom{3+l}{2}$, une droite ayant un contact de type $(1, 1, 1, 2)$ pour $8 \binom{5+l}{4}$, et une sextisécante pour $\binom{7+l}{6}$. Dans \mathbb{P}^5 , une tangente asymptotique compte pour $-3(2+l)$ et une quadrisécante pour $\binom{5+l}{4}$. Dans \mathbb{P}^6 , une tangente qui recoupe X contribue pour $4 \binom{3+l}{2}$.

Voyons comment cette self-intersection peut être calculée simplement. Soit d le degré de X , surface lisse, L une droite contenue dans X . Soit Π une section plane de X contenant L . Alors L est une des composantes de Π et on peut écrire

$$\Pi = L + J,$$

sachant que $\int \Pi^2 = d$ (on utilise la même lettre pour désigner l'entité géométrique et sa classe dans l'anneau de Chow de X) et que $\int \Pi.L = 1$ car L est de degré 1. Cela donne :

$$\int \Pi.J = \int \Pi.(\Pi - L) = d - 1.$$

Nous observons ensuite qu'aux points d'intersection de L et J , la courbe Π possède un point singulier. X étant lisse, Π ne peut être que le plan tangent à la surface en ce point. Considérons un autre plan passant par L , mais distinct des plans tangents à X aux points de $L \cap J$. Ce plan détermine lui-aussi un diviseur

$$\Pi' = L + J',$$

les points de $L \cap J$ et $L \cap J'$ étant distincts. Cela signifie que $J \cup J' = \emptyset$ et donc en résonnant en terme de classe $J^2 = J.J' = 0$. Par conséquent,

$$\int L.J = \int (\Pi - J).J = \int \Pi.J = d - 1,$$

et

$$\int L^2 = \int L.(\Pi - J) = 1 - (d - 1) = 2 - d.$$

La self-intersection l de L^2 est donc $2 - d$.

Pour être tout à fait complet, voyons maintenant comment il est possible de calculer le nombre de variétés linéaires contenues dans une variété projective.

1.4 Espaces linéaires contenus dans une hypersurface

Soit V un espace vectoriel et $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé. Une hypersurface de degré d $X \in \mathbb{P}^m$ est donnée par une section de l'espace $S^d \tilde{V}$ sur \mathbb{P}^m . Soit T le sous-fibré universel sur $G = G(k, m)$ de rang $k + 1$. Alors \tilde{T} est un quotient de \tilde{V}_G , le fibré trivial sur G , ce qui détermine une section de $S^d \tilde{T}$ sur G , dont le schéma des zéros est le schéma de Fano F des k -plans contenus dans X . La codimension de F dans G est [Xambó-Descamps, 1993]

$$N = \binom{k+d}{d}.$$

Soit $X \in S^d \tilde{V}$, qui induit une section α_X de $S^d \tilde{T}$. Pour que le schéma des zéros de α_X soit non-vide pour une surface X générique, alors puisque la dimension de G est $(k+1)(m-k)$, il faut que

$$\beta = (k+1)(m-k) - N \geq 0.$$

Si cette condition est satisfaite, alors d'après la formule de la classe de Chern de degré maximum (page 17),

$$[F] = [V(\alpha_X)] = c_N(S^d \tilde{T}),$$

et le nombre d'espaces linéaires de dimension k contenus dans X est :

$$\nu(m, d, k) = \int c_N(S^d \tilde{T}) \cdot \gamma_1^\beta,$$

car γ_1 , la classe de Schubert des droites rencontrant un \mathbb{P}^{m-2} en position générale, est, vis-à-vis du plongement de Plücker, la classe d'une section hyperplane de G .

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ sont les racines de Chern de \tilde{T} , alors ce que nous avons vu Chapitre 2, Paragraphe 3 nous permet d'affirmer que

$$[F] = c_N(S^d \tilde{T}) = \prod_{\substack{m_1 + \dots + m_{k+1} = d \\ m_1, \dots, m_{k+1} \geq 0}} (m_1 \alpha_1 + \dots + m_{k+1} \alpha_{k+1}).$$

En outre, nous avons également vu Chapitre 4, Paragraphe 2 (page 54) que les classes de Chern de \tilde{T} sont les classes de Schubert suivantes :

$$c_i(\tilde{T}) = [1, \dots, \overset{i}{\cdot}, \dots, 1] = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}),$$

où σ_i est le i -ème polynôme symétrique.

Voyons deux exemples d'utilisation de ce résultat. Calculons tout d'abord le nombre de droites contenues dans une cubique de \mathbb{P}^3 , ou en d'autres termes prenons $d = 3, m = 3, k = 1$. Alors $\beta = 0$ et

$$[F] = \prod_{\substack{m_1 + m_2 = 3 \\ m_1, m_2 \geq 0}} (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2),$$

avec

$$\begin{cases} c_1(\tilde{T}) = \alpha_1 + \alpha_2 = [1] = \gamma_1, \\ c_2(\tilde{T}) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = [1, 1] = \gamma_2. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} [F] &= 9\alpha_1(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)\alpha_2, \\ &= 9\gamma_2(2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2), \\ &= 9\gamma_2(2\gamma_1^2 + \gamma_2), \\ &= 27*, \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'une cubique de \mathbb{P}^3 contient 27 droites, un résultat bien connu. Cherchons maintenant le nombre de droites contenues dans une hypersurface de degré 4 dans \mathbb{P}^4 , Dans ce cas, $m = 4, d = 4, k = 1$ et $\beta = 1$. Ainsi

$$[F] = \prod_{\substack{m_1 + m_2 = 4 \\ m_1, m_2 \geq 0}} (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2),$$

en ayant toujours $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\gamma_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$ (bien sur, ces classes n'ont plus la même signification que précédemment). Alors :

$$\begin{aligned} [F] &= 16\alpha_1(3\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + 2\alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_2)\alpha_2, \\ &= 32\gamma_1\gamma_2(3\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_2), \\ &= 32\gamma_1\gamma_2(3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2), \\ &= 32\gamma_1\gamma_2(3\gamma_1^2 + 4\gamma_2). \end{aligned}$$

Mais $\gamma_1^4\gamma_2 = 2*$ et $\gamma_1^2\gamma_2^2 = *$, comme nous le verrons Chapitre 9, Paragraphe 1 (page 140) et ainsi une hypersurface de degré 4 de \mathbb{P}^4 contient

$$\int [F] \cdot \gamma_1 = 320$$

droites.

2 Théorie des points multiples et facteur de surcompte

Comme nous l'avons dit, la théorie des points multiples stationnaires de Colley permet de calculer, à un facteur de surcompte près, la classe $l(\mathbf{a}; n)$ dont le support géométrique est le lieu de points multiples $S_f(\mathbf{a})$

d'une fonction f de codimension n , étant donnée une partition $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$. Le facteur de surcompte intervient parce que cette technique énumère des uplets de points ordonnés alors que l'on s'intéresse plus généralement à des points non-ordonnés. Prenons par exemple le cas de la fonction $f : F_X \rightarrow G(1, m)$, où X est une variété projective dans \mathbb{P}^m , F_X la restriction à X de la variété de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^m et $G(1, m)$ la Grassmannienne de droites correspondante. Écrivons maintenant la partition \mathbf{a} de la manière suivante :

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{q_1}, a_{q_1+1}, \dots, a_{q_1+q_2}, \dots, a_{q_1+\dots+q_p}),$$

où

$$a_1 = \dots = a_{q_1} < a_{q_1+1} = \dots = a_{q_1+q_2} < \dots < \dots a_{q_1+\dots+q_p} = a_k.$$

Soit α une classe de $A^*(F_X)$ telle que $\alpha.l(\mathbf{a}; n)$ soit un 0-cycle. Alors en généralisant [Colley, 1987], le facteur de surcompte si α ne contient que des conditions de Schubert (conditions de droites) est

$$p(\mathbf{a}) = q_1!q_2! \dots q_p!,$$

sinon ce facteur vaut

$$q(\mathbf{a}) = (q_1 - 1)!q_2! \dots q_p!.$$

En effet, dans le premier cas, la condition α n'est imposée que sur les droites elles-mêmes, et ainsi le facteur de surcompte n'est à évaluer que sur les symétries de la partition \mathbf{a} . Les q_1 premiers points ayant des conditions identiques, il faut diviser par $q_1!$, de même que pour les q_2 points suivants, il faut diviser $q_2!$, et ainsi de suite. Dans le deuxième cas, plus subtil, ce que nous venons de voir est toujours valable pour tous les points sauf les q_1 premiers. Pour ces points, la condition α imposée rend asymétrique le premier point par rapport aux $q_1 - 1$ restants, et ainsi il ne faut plus diviser que par $(q_1 - 1)!$.

Illustrons cela dans un cas particulier. Soit X une surface de \mathbb{P}^3 , de telle sorte que F_X et $G = G(1, 3)$ soient tous deux de dimension 4. Soit $l(\mathbf{a}; 0)$ une classe dans $A^3(F_X)$. Alors l'image de $l(\mathbf{a}; 0)$ dans $A^*(X)$ est une classe représentant une courbe sur X de degré

$$\frac{1}{q(\mathbf{a})} \int l(\mathbf{a}; 0).E.$$

De l'autre côté, la projection de $l(\mathbf{a}; 0)$ sur G est une classe dans $A^3(G)$ et par conséquent a pour support géométrique une système algébrique de droites à une dimension, c.-à-d. une surface réglée. Le degré d'une surface de \mathbb{P}^3 étant le nombre de ses intersections avec une droite en position générale, le degré de cette surface réglée est le nombre de ses générateurs rencontrant une droite générale de l'espace, à savoir

$$\frac{1}{p(\mathbf{a})} \int l(\mathbf{a}; 0).\Gamma_1.$$

Dans la suite de ce document, nous indiquerons lorsque cela sera nécessaire la valeur des facteurs de surcompte rencontrés.

3 Implantation d'une procédure de calcul

Comme nous l'avons déjà mentionné, lorsque l'on a identifié une fonction particulière $f : U \rightarrow V$ sur laquelle on veut appliquer la théorie des points multiples et que l'on a donné les appariements d'intersection sur U et le comportement de l'homéomorphisme direct f_* , tous les calculs qui s'ensuivent sont alors purement mécaniques, si les formules de points multiples ont été au préalable stockées dans une base de données. Pourquoi alors ne pas implanter cette partie purement calculatoire, évitant ainsi un travail très fastidieux? Nous décrivons ici le résultat de cette réflexion, appliquée au cas de la fonction $\bar{q} : F_X \rightarrow G$. Le programme décrit a été implanté en Maple [Maple, 1990].

Le cœur de l'implantation est composé de trois procédures principales, elles-mêmes sous-divisées pour traiter les différents cas. Une procédure `loadclass([a],n,c)` charge la classe de points multiples correspondant à la partition \mathbf{a} , pour une fonction de codimension n ayant c_k pour classes de Chern. Une procédure `simp` (pour simplification) permet d'exprimer une classe donnée dans la base du groupe de Chow correspondant. Une procédure `pfb` (pour *push forward-backward*) calcule $f^* f_*$ pour une classe donnée.

Voyons d'abord `simp`. Dans le reste de ce paragraphe, on utilise les notations G_a , E et K pour les classes Γ_1 , E et K utilisés dans $A^*(F_X)$. On désignera aussi les classes c_k de $\mathcal{N}_{\bar{q}}$ par $c(\mathbf{k})$ dans le cas lisse et par $cs(\mathbf{k})$ dans le cas lisse par morceaux. Regardons alors le début d'une session, où l'on considère la classe $l(3;0)$ (temps CPU : 0,08 s ; mémoire : 0,11 MB) des droites asymptotiques (contact d'ordre 3) à X , surface de degré d , dans le cas lisse (le symbole " de Maple permet de se référer à la dernière expression employée) :

```
> l3:=loadclass([3],0,c);
                2
      l3 := (Ga + (d - 2) E) + (Ga + (d - 2) E) (Ga - 2 E)

> simp(l3*E);
                2          2          2
      2 Ga E + 3 Ga E d - 8 Ga E
```

On peut ensuite examiner le fonctionnement de `pfb`. Étant donnée une classe l , cette fonction calcule $f^* f_* l$ et exprime le résultat dans la base du groupe de Chow correspondant :

```
> l2:=loadclass([2],0,c);
                2
      l2 := Ga + (d - 2) E

> pfb(l2);
                d (d - 1) Ga
```

Soit maintenant G_{a2} la classe Γ_2 dans $A^*(F_X)$, dont on a vu que $\Gamma_2 = \Gamma_1 E - E^2$. Voici comment on peut calculer le nombre de bitangentes à une surface X lisse contenues dans un plan en position générale (le facteur $1/2$ est le facteur de surcompte dans ce cas) :

```
> l22:=loadclass([2,2],0,c):
> Ga2:=Ga*E-E^2:
> simp(l22*Ga2/2);
                1/2 d (d - 2) (d - 3) (d + 3)
```

Ici, l'appel à `loadclass` est en fait similaire à l'opération :

```
> l22:=c(1)*pfb(c(1))-4*c(1)^2-2*c(2):
```

Pour le cas où X possède une courbe double de degré b et t points triples, nous avons en plus implanté une procédure `looknice` qui permet de rendre les résultats plus plaisants visuellement. Calculons par exemple le nombre de tangentes asymptotiques passant par un point fixé de l'espace :

```
> l3s:=loadclass([3],0,cs):
```

```
> simp("*(Ga^2-Ga2));
```

$$2 d^2 + 6 b d - 3 d^2 + d^3 - 3 b d + 3 t$$

```
> looknice("");
```

$$d (d - 1) (d - 2) - 3 (d - 2) b + 3 t$$

Pour chacun des exemples étudiés dans ce document, nous avons implanté des procédures d'évaluation et de calcul de classes de points multiples similaires à celle que nous venons de voir. Tous les résultats présentés dans la suite ont été obtenus par ce biais.

4 Résultats préliminaires

Avant de caractériser certains événements visuels de codimension 2 et d'élaborer sur certaines formules de [Schubert, 1879], donnons un résultat sur l'ordre maximal de contact d'une droite avec une variété projective.

4.1 Contact d'une droite avec une variété projective

Proposition 7.4.1 - *Soit X une variété projective de dimension δ dans \mathbb{P}^m . Si X est générique, alors l'ensemble des droites ayant un contact de type $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ (avec $r = \sum a_i$) avec X est de codimension*

$$\alpha(\mathbf{a}) = (r - 1)(m - \delta - 1) + \sum (a_i - 1).$$

Preuve. La fonction à considérer est $f : F_{1,1,m-1}(X) \rightarrow G(1, m)$ induite par projection sur le second facteur, de codimension $n = m - \delta - 1$ comme nous l'avons vu. Effectuons un raisonnement par récurrence. Tout d'abord, $l(1; n) = [F_X]$ et $l(2; n) = c_{n+1}$ et par conséquent une augmentation d'un ordre de contact amène une augmentation de $n + 1$ en codimension. Puisque $\alpha(1) = 0$, on a tout de suite :

$$\alpha(a_1) = (n + 1)(a_1 - 1) = (a_1 - 1)(m - \delta - 1) + a_1 - 1.$$

Supposons donc que pour un contact de type $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l'ensemble des droites soit de codimension $\alpha(\mathbf{a})$. Les classes $l(1, \mathbf{a}; n)$ et $l(2, \mathbf{a}; n)$ ont respectivement pour terme dominant $f^* f_* l(\mathbf{a}; n)$ et $l(2; n) f^* f_* l(\mathbf{a}; n)$. Le passage entre les deux amène donc une augmentation de $\alpha(2)$ en codimension. Maintenant, $l(1, \mathbf{a}; n)$ est de même codimension que $f^* f_* l(\mathbf{a}; n)$, c.-à-d. $\alpha(\mathbf{a}) + n$. Ainsi on a :

$$\alpha(\mathbf{a}, a_{k+1}) = \alpha(\mathbf{a}) - 1 + a_{k+1} \alpha(2),$$

qui peut se réécrire

$$\alpha(a_1, \dots, a_{k+1}) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i - 1 \right) n + \sum_{i=1}^{k+1} (a_i - 1).$$

□

Il est maintenant possible de calculer l'ordre de contact maximal d'une droite avec une variété de dimension δ dans \mathbb{P}^m , en fonction de δ et m .

Corollaire 7.4.1 - L'ordre de contact maximal d'une droite avec une variété générique de dimension δ dans \mathbb{P}^m ($1 \leq \delta < m$) est

$$\left[\frac{2m-1}{m-\delta} \right].$$

Preuve. Soit a un entier. D'après le résultat précédent, on a :

$$\alpha(a) = (a-1)(m-\delta).$$

On va donc chercher à trouver la valeur maximale de a de telle sorte que la formule de points multiples donnant les contacts de type a ne soit pas de codimension supérieure à la codimension de F_X . Ainsi :

$$(a-1)(m-\delta) \leq m + \delta - 1,$$

ou

$$a \leq \frac{2m-1}{m-\delta}.$$

□

Exemple. Pour illustrer le résultat précédent, prenons par exemple le cas où X est une hypersurface dans \mathbb{P}^m , à savoir $\delta = m-1$. Alors on voit que l'ordre de contact maximal est dans ce cas égal à $2m-1$. Dans \mathbb{P}^3 , cela donne 5 comme nous l'avons déjà vu, alors que le résultat est 7 et 9 pour respectivement \mathbb{P}^4 et \mathbb{P}^5 , comme nous l'illustrerons dans la Partie III.

Un autre exemple significatif est celui des surfaces. Dans ce cas l'ordre de contact maximal est

$$\left[\frac{2m-1}{m-2} \right] = 2 + \left[\frac{3}{m-2} \right],$$

soit 5 dans \mathbb{P}^3 , 3 dans \mathbb{P}^4 et \mathbb{P}^5 , et 2 dans \mathbb{P}^m , $m \geq 6$.

4.2 Événements visuels de codimension supérieure à 1

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous concentrons dans ce document sur les événements visuels de codimension 1 car ce sont les principales composantes du partitionnement de l'espace en cellules de vue équivalente. Nous pouvons néanmoins « compter » les droites ayant des contacts d'ordres supérieurs avec la surface X , le long desquelles il est possible d'observer des événements de codimension 2 par exemple. Nous indiquons ici comment cela est possible, en supposant que X possède une courbe double de degré b et t points triples. Les deux formules considérées apparaissent (uniquement pour le cas restreint d'une surface lisse, c.-à-d. en remplaçant $b = 0$ et $t = 0$) dans [Schubert, 1879].

Proposition 7.4.2 - Le nombre de droites bitangentes qui ont par ailleurs un contact asymptotique est :

$$\frac{1}{2}d(d-4)(d-5)(d-6)(d^3+9d^2+20d-60) - \frac{1}{2}(7d^5-34d^4-203d^3+682d^2+4048d-13632)b + 2(4d^3-12d^2-61d+132)b^2 - 6db^3 - 6(d^2-7d-19)bt + \frac{3}{2}(d^4-10d^3-37d^2+46d+1440)t - 18t^2.$$

Preuve. Il suffit pour cela de regarder la classe des droites ayant un contact de type $(2, 2, 3)$ avec la surface (voir Annexe A). Le résultat suit alors après évaluation, en notant que le facteur de surcompte est $p(2, 2, 3) = 2$.

□

Proposition 7.4.3 - *Le nombre de droites quadritangentes à X est*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}d(d-4)(d-5)(d-6)(d-7)(d^3+6d^2+7d-30) + \frac{2}{3}(3d^4-30d^3+48d^2+192d-362)b^2 \\ & - \frac{1}{3}(2d^6-27d^5+72d^4+315d^3-970d^2-3820d+12480)b + \frac{2}{3}(3d^4-30d^3+48d^2+192d-362)b^2 \\ & - \frac{2}{3}d(2d-11)b^3 + 4(3d^2-12d-29)bt - (3d^4-18d^3-55d^2+70d+1404)t + 18t^2. \end{aligned}$$

Preuve. De manière très similaire, nous calculons le sous-ensemble de points multiples de \bar{q} correspondant à la partition $\mathbf{a} = (2, 2, 2, 2)$. C'est un 0-cycle et le facteur de surcompte est dans ce cas $p(2, 2, 2, 2) = 24$.

□

4.3 Vérifications de formules

Nous donnons ici des résultats qui, à notre connaissance, n'apparaissent nulle part ailleurs. Il est néanmoins possible en écrivant $b = t = 0$ de vérifier que ces formules sont toutes correctes dans le cas lisse ([Schubert, 1879, pages 236-239], [Salmon, 1915] et [Baker, 1933]). Une autre approche, toujours dans le cas lisse, mais avec un formalisme différent, peut être trouvée dans [Vainsencher, 1981].

Proposition 7.4.4 - *Le nombre de tangentes ayant un contact d'ordre 5 avec X est $5d(d-4)(7d-12) - 5(21d-80) + 105t$.*

Preuve. Il suffit pour cela de considérer la classe $l(5; 0)$ (temps CPU : 1,3 s ; mémoire : 0,9 MB) :

```
> l5:=cs(1)^4+6*cs(1)^2*cs(2)+cs(2)^2+10*cs(1)*cs(3)+6*cs(4):
```

```
> simp(");
```

$$400 b^2 - 200 d^2 + 240 d^3 + 35 d^3 - 105 b d + 105 t$$

```
> looknice(");
```

$$5 d (d - 4) (7 d - 12) - 5 (21 d - 80) b + 105 t$$

□

Proposition 7.4.5 - *Le nombre de tangentes simples à X qui sont également flecnodales par ailleurs est*

$$2d(d-4)(d-5)(3d-5)(d+6) - 2(15d^3 - 53d^2 - 278d + 1054)b + 4(9d - 22)b^2 - 36bt + 6(3d^2 - 3d - 624)t.$$

Preuve. Nous considérons les droites ayant un contact de type $(2, 4)$ avec la surface, et la classe correspondante est $l(2, 4; 0)$ (temps CPU : 8,6 s ; mémoire : 4,9 MB) :

```
> l24:=loadclass([2,4],0,cs):
```

```
> looknice(simp(l24));
```

$$\begin{aligned} & 2 d (d - 4) (d - 5) (3 d - 5) (d + 6) - 2 (15 d^3 - 53 d^2 - 278 d + 1054) b \\ & + 4 (9 d - 22) b^2 - 36 b t + 6 (3 d^2 - 3 d - 624) t \end{aligned}$$

□

Proposition 7.4.6 - *Le nombre de droites ayant un contact doublement asymptotique est*

$$\frac{1}{2}d(d-4)(d-5)(d^3+3d^2+29d-60) - \frac{3}{2}(2d^4-10d^3+28d^2-245d+720)b + \frac{9}{2}(d^2-4d+8)b^2 - 9(d-2)bt + \frac{3}{2}(2d^3-6d^2+4d-213)t + \frac{9}{2}t^2.$$

Preuve. De manière très similaire, nous considérons cette fois la classe $l(3, 3; 0)$ (temps CPU : 8,1 s ; mémoire : 4,8 MB) des droites ayant contact d'ordre 3 en deux endroits et on calcule

$$\frac{1}{2} \int l(3, 3; 0).$$

□

Proposition 7.4.7 - *Les tangentes à X en deux points distincts telles que le second point de contact appartienne à une section hyperplan fixée de X tracent sur X une courbe de degré $d(d^3-2d^2+2d-6) - 4d(d-1)b + 4b^2$ et génèrent une surface réglée de degré $d(d-3)(d^2+2d-4) - 2(2d-5)(d+2) + 4b^2$.*

Preuve. Il faut ici considérer une version modifiée de la classe $l(2, 2; 0)$ (temps CPU : 0,5 s ; mémoire : 0.2 MB) des bitangentes à la surface. En reprenant les notations définies dans le Chapitre 3, la classe $l(2, 2; 0)$ est définie par :

$$l(2, 2; 0) = (f_1 i_1)_* (f_2 i_2)_* (f_3 i_3)_* j_{4*} (f_3 j_4)^* f_2^* j_{2*} (f_1 j_2)^* [F_X].$$

Introduisons maintenant la classe $l(2, 2; 0)_E$ suivant :

$$l(2, 2; 0)_E = (f_1 i_1)_* (f_2 i_2)_* (f_3 i_3)_* j_{4*} (f_3 j_4)^* f_2^* j_{2*} (f_1 j_2)^* E[F_X],$$

qui devient

$$l(2, 2; 0)_E = c_1 \bar{q}^* \bar{q}_* (c_1 E) - 4c_1^2 E - 2c_2 E.$$

Le symbole $E.l(2, 2; 0)$ représente la classe des points (x, l) de F_3 tels que :

- (i) x représente une paire de points coïncidant de $X \cap l$,
- (ii) il existe au moins une autre paire de points coïncidant dans $X \cap l$,
- (iii) la première paire de points appartient à une section plane fixée de X .

Il faut en effet se rappeler que E est l'image réciproque dans $A^*(F_X)$ de la classe d'une section plane de X et donc E représente l'ensemble

$$\{(x, l) \in X \times G / x \in l \text{ et } x \text{ appartient à une section plane fixée de } X\}.$$

Maintenant, la classe $l(2, 2; 0)_E$ représente les points (x, l) vérifiant (i) et (ii), mais (iii) doit être modifié en (iii') : la deuxième paire de points coïncidant appartient à une section plane fixée de X .

On voit ainsi tout de suite comment conclure sur le résultat espéré. Le degré de la courbe cherchée est $\int E.l(2, 2; 0)_E$:

```
> l22E:=cs(1)*pfb(cs(1)*E)-4*cs(1)^2*E-2*cs(2)*E;
> looknice(simp(E*l22E));
```

$$d^3 - 2d^2 + 2d - 6 - 4d(d-1)b + 4b^2$$

Il faut ensuite réaliser que $\bar{q}_*l(2, 2; 0)_E$ appartient à $A^3(G)$, et représente par conséquent un système algébrique de droites de dimension 1, ou en clair, une surface réglée R . Le degré d'une surface de \mathbb{P}^3 étant le nombre de ses points d'intersection avec une droite en position générale, le degré de R est le nombre de ses générateurs rencontrant une droite en position générale, à savoir $\int l(2, 2)_E \Gamma_1$:

```
> looknice(simp(Ga*122E));
```

$$d(d-3)(d^2+2d-4) - 2(d+2)(2d-5)b + 4b^2$$

Le lecteur attentif pourra ici se demander pourquoi nous n'avons pas divisé ce dernier résultat par 2, en vertu du fait que le facteur de surcompte « normal » dans ce cas est $p(2, 2) = 2$. Il faut se rappeler que ce facteur intervient parce que chaque paire (x, l) satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) est comptée 2 fois (symétrie des conditions). Mais ici, nous avons utilisé une version modifiée de la classe $l(2, 2; 0)$, où les conditions de contact ont été rendues asymétriques, et les paires (x, l) ne sont pas comptées deux fois.

□

Proposition 7.4.8 - 1. Le nombre de droites passant par un point fixe de la surface et asymptotique en un autre point est $(d-3)(d^2+2) - 3(d-2)b + 3t$.

2. Le nombre de droites passant par un point contenu dans une section plane fixée de la surface et flecnodales par ailleurs est $2d(d-4)(3d^2+d-12) - 2(9d^2-22d-44) + 18dt$.

Preuve. 1. La classe des paires (x, l) dans F_X telles que x soit un point fixé de X est E^2 , puisque ce sont les points appartenant à deux sections planes fixées de X , c.-à-d. à l'intersection de X avec une droite fixée. Mais l'intersection de X avec une droite est faite de d points et il nous faudra donc diviser le résultat par d . On considère maintenant la classe $l(1, 3; 0)$ des droites coupant X transversalement et qui sont par ailleurs asymptotiques :

```
> l13:=loadclass([1,3],0,cs);
```

```
> looknice(simp(E^2*l13/d));
```

$$(d-3)(d^2+2) - 3(d-2)b + 3t$$

2. On prends cette fois la classe des droites ayant un contact d'ordre 4 avec X (contact flecnodal) et on impose que ces droites recourent la surface en un point d'une section plane fixée :

```
> l14:=loadclass([1,4],0,cs);
```

```
> looknice(simp(E*l14));
```

$$2d(d-4)(3d^2+d-12) - 2(9d^2-22d-44) + 18dt$$

□

5 Intersections et caractères projectifs

Nous donnons ici des démonstrations modernes de deux résultats classiques (dont un nous sera particulièrement utile par la suite) et qui découlent presque naturellement du cadre de travail mis en place,

illustrant sa richesse.

Proposition 7.5.1 - La courbe d'intersection de deux surfaces X_1 et X_2 de degrés et rangs respectifs $d(X_1), \mu_1(X_1)$ et $d(X_2), \mu_1(X_2)$ a pour degré $d(X_1)d(X_2)$ et pour rang

$$r = d(X_1)\mu_1(X_2) + d(X_2)\mu_1(X_1).$$

Preuve. Nous voulons caractériser le rang de la courbe d'intersection W de deux surfaces X_1 et X_2 . La classe des droites tangentes à une surface X est donnée dans F_X par $l(2;0) = \Gamma_1 + \mathcal{K} + 2E$. Mais maintenant, nous voulons calculer l'image de cette classe dans $A^*(F_3)$ pour les deux surfaces X_1 et X_2 et les intersecter (les droites restantes, en d'autres termes les droites appartenant aux deux classes, sont les droites tangentes à W). La première chose à faire est de trouver l'image de \mathcal{K} dans $A^*(F_3)$. En fait, puisque nous avons $\mathcal{K}E = \lambda P$, il est aisé de voir que

$$k_*\mathcal{K} = \lambda H^2 = (\mu_1 - 3d)H^2.$$

Par conséquent, l'image de $l(2;0)$ dans $A^*(F_3)$ est

$$\alpha_1 = k_*l(2;0) = d(X_1)\gamma'_1 H + (\mu_1(X_1) - d(X_1))H^2.$$

Intersectant α_1 et α_2 (l'image de $l(2;0)$ pour X_2), nous obtenons

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = d(X_1)d(X_2)\gamma_1'^2 H^2 + (\mu_1(X_1)d(X_2) + \mu_2(X_2)d(X_1) - 2d(X_1)d(X_2))\gamma_1' H^3.$$

Effectuons la même opération pour la classe des droites tangentes à une courbe. Nous avons vu dans F_{D_b} , que la classe des droites tangentes à une courbe de degré w et de rang r est donné par

$$m(2;1) = c'_2 = g_1^2 + (r - 2w)g_1 \varepsilon.$$

Envoyant cette classe dans $A^*(F_3)$, nous voyons alors que :

$$\alpha = k_*l_*m(2;1) = w\gamma_1'^2 H^2 + (r - 2w)\gamma_1' H^3.$$

En posant maintenant que $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, nous obtenons tout d'abord que $w = d(X_1)d(X_2)$ ce qui est trivial. Plus intéressant, on obtient aussi que

$$r = \mu_1(X_1)d(X_2) + \mu_1(X_2)d(X_1).$$

□

Proposition 7.5.2 - La surface réglée faite de droites rencontrant une courbe de degré n et de rang r deux fois et encore une autre fois une courbe de degré n' est de degré

$$n'(n(n-1) - \frac{1}{2}r).$$

Preuve. En reproduisant les résultats obtenus dans $A^*(F_{D_b})$, la classe des bisécantes à la première courbe est

$$m(1,1;1) = (n-1)g_1 - r\varepsilon.$$

Dans $A^*(G)$, cette classe est

$$n(n-1)\gamma_1^2 - r(\gamma_1^2 - \gamma_2).$$

La classe des droites sécantes à la deuxième courbe est la classe fondamentale de $A^*(F_{D_b})$, qui projetée dans $A^*(G)$ donne $n'\gamma_1$. Intersectant ces deux classes, et divisant par le facteur de surcompte $p(1,1) = 2$ pour la première classe, on trouve le résultat cherché.

□

6 Congruences visuelles

Une *congruence* de droites de \mathbb{P}^3 est un système algébrique de droites à deux dimensions, c.-à-d. une sous-variété de dimension 2 de la Grassmannienne de droites $G(1, 3)$. Étant donnée une surface X , nous appelons *congruence visuelle* une congruence de droites à laquelle appartient au moins une surface d'événement visuel. Dans le cas où X est lisse, il est facile de voir qu'il existe 2 congruences visuelles [Koenderink, 1986]: la congruence de droites asymptotiques (que l'on peut représenter par le symbole C), à laquelle appartiennent les surfaces d'événements locaux, et la congruence de droites bitangentes (dénotée $F + F$), à laquelle appartiennent les surfaces d'événements multilocaux. Si l'on passe maintenant aux surfaces lisses par morceaux, alors il découle de la classification de Rieger [Rieger, 1993b] et de la Figure 5.4 que, par rapport au cas lisse, on doit considérer 3 congruences visuelles supplémentaires: la congruence des bisécantes à la courbe double D_b ($D + D$), la congruence des droites tangentes à X et rencontrant la courbe double D_b ($F + D$) et la congruence des droites tangentes à X et dont le point de contact est un point de la courbe double ($SF \& T$). Dans le reste de ce paragraphe, nous examinons les propriétés énumératives de ces congruences.

6.1 Généralités

Soit Ω une classe de $A^2(F_X)$. Nous avons donné précédemment une base de ce groupe de Chow, et on peut donc écrire Ω de la manière suivante :

$$\Omega = \alpha_1 P + \alpha_2 E\Gamma_1 + \alpha_3 \Gamma_1^2 + \alpha_4 \Gamma_1 \mathcal{K}.$$

En envoyant cette classe dans G avec les règles de projection établies plus haut, nous obtenons alors :

$$\Omega_G = \bar{q}_* \Omega = v(\gamma_1^2 - \gamma_2) + w\gamma_2,$$

où

$$\begin{cases} v = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)d + \alpha_4\lambda, \\ w = (\alpha_2 + \alpha_3)d + \alpha_4\lambda. \end{cases}$$

On voit immédiatement que Ω_G appartient à $A^2(G)$, et est donc la classe fondamentale d'une sous-variété de G de dimension 2, à savoir une congruence de droites \mathcal{H} . Il est ensuite facile de voir que

$$v = \int \Omega_G \cdot (\gamma_1^2 - \gamma_2)$$

est le nombre de droites de \mathcal{H} passant par un point général de l'espace, appelé *ordre* de la congruence, et que

$$w = \int \Omega_G \cdot \gamma_2$$

est le nombre de droites de \mathcal{H} contenues dans un plan en position générale, nombre appelé *classe* de la congruence. La paire (v, w) est parfois appelée le *bidegré* de la congruence.

Notons ici une propriété intéressante. Nous avons vu que G correspond en fait à une quadrique Ψ de \mathbb{P}^5 . Soit ϖ le plongement de Plücker. Soit encore U la classe d'un hyperplan de \mathbb{P}^5 . Alors :

$$\varpi_* \gamma_1^i = \varpi_* \varpi^* U^i = U^i \cdot \varpi_* [G] = 2U^{i+1},$$

puisque Ψ est une quadrique, donc de degré 2. De même, il est facile de voir que

$$\varpi_* \gamma_2^i = U^{i+1}.$$

Par suite,

$$\varpi_* \Omega_G = (v + w)U^3,$$

et ainsi \mathcal{H} est représentée par une surface de \mathbb{P}^5 , située sur Ψ , et de degré $\int \varpi_* \Omega_G \cdot U^2 = v + w$.

6.2 Quelques propriétés

Nous donnons ici quelques propriétés des congruences de droites.

Proposition 7.6.1 - (*Théorème de Halphen*) *Le nombre de droites communes à deux congruences indépendantes de bidegrés respectifs (v, w) et (v', w') est $vw' + v'w$.*

Preuve. En reprenant les notations du paragraphe précédent, il suffit d'intersecter les classes Ω correspondant à deux congruences :

$$\int \Omega.\Omega' = \int (v(\gamma_1^2 - \gamma_2) + w\gamma_2).(v'(\gamma_1^2 - \gamma_2) + w'\gamma_2) = vw' + v'w,$$

en supposant bien sur que l'ensemble des droites appartenant aux deux congruences est de dimension 0. □

Corollaire 7.6.1 - *Le nombre de cordes communes à deux courbes gauches de degrés et rangs respectifs n, n' et r, r' est*

$$\left(\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r\right)\left(\binom{n'}{2} - \frac{1}{2}r'\right) + \binom{n}{2}\binom{n'}{2}.$$

Preuve. Il suffit de voir que la congruence des bisécantes à une courbe gauche est donné par (similaire aux calculs effectués dans $A^*(F_{D_b})$):

$$m(1, 1; 1) = \bar{r}^*\bar{r}_*[F_{D_b}] - c'_1 = (n-1)g_1 - r\varepsilon,$$

et sa projection dans $A^*(G)$ est

$$m(1, 1; 1) = (n(n-1) - r)(\gamma_1^2 - \gamma_2) + n(n-1)\gamma_2.$$

Le résultat est donc

$$\frac{1}{4}(n(n-1) - r)n'(n'-1) + \frac{1}{4}(n'(n'-1) - r')n(n-1).$$

□

6.3 Congruence $F + F'$: droites bitangentes

Proposition 7.6.2 - *La congruence $F + F'$ a pour ordre $\frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d-3) - 2(d^2 - 4d + 5)b + 2b^2 - 6t$ et pour classe $\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3) - 2(d^2 - d - 5)b + 2b^2$.*

Preuve. Les droites bitangentes à X se trouvent de manière simple en formant dans F_X la classe $l(2, 2; 0)$. Regardons en effet le lieu de points multiples $S_{\bar{q}}(2, 2)$. C'est l'ensemble des points (x_1, l_1) de F_X tels qu'il existe $(x_2, l_2), (x_3, l_3), (x_4, l_4)$ de F_X , tous ces points ayant la même image par \bar{q} , et aussi tels que (x_1, l_1) et (x_2, l_2) d'une part, et (x_3, l_3) et (x_4, l_4) d'autre part soient infiniment près les uns des autres. Reformulé différemment, c'est l'ensemble des points (x, l) de F_X tels qu'il existe un point (y, l) et tels que l soit tangent à X en x_1 et x_2 . Il s'agit donc précisément de la classe que nous cherchons.

La théorie des points multiples montre que

$$l(2, 2; 0) = c_1\bar{q}^*\bar{q}_*c_1 - 4c_1^2 - 2c_2,$$

qui s'évalue en

$$l(2, 2; 0) = -4(\mu + 3\lambda + 2)P + 2(3d + \lambda - 8)\Gamma_1 E + (3d + \lambda - 6)\Gamma_1^2 + (3d + \lambda - 10)\Gamma_1 \mathcal{K}.$$

Cette classe appartient à $A^2(F_X)$, et sa projection dans $A(G)$ représente bien une congruence de droites, dont on calcule alors aisément l'ordre et la classe :

```
> l22:=loadclass([2,2],0,cs):
> looknice(simp(122*(Ga^2-Ga2)/2));
```

$$1/2 d (d - 1) (d - 2) (d - 3) - 2 (d^2 - 4 d + 5) b + 2 b^2 - 6 t$$

```
> looknice(simp(122*Ga2/2));
```

$$1/2 d (d - 2) (d - 3) (d + 3) - 2 (d^2 - d - 5) b + 2 b^2$$

□

6.4 Congruence $F + D$

Proposition 7.6.3 - *La congruence des droites tangentes à la surface qui rencontrent en outre la courbe double est d'ordre $(d^2 - 2d + 2)b - 2b^2 + 3t$ et de classe $(d - 2)(d + 1)b - 2b^2$.*

Preuve. Soit ϕ l'image réciproque dans $A^*(F_X)$ de la classe $[\Gamma_b]$ de $A^*(Z)$ correspondant à la courbe double sur X (Chapitre 4, Paragraphe 1, page 49), notation que nous emploierons abondamment dorénavant. Nous avons vu que $[\Gamma_b] = (d - 4)e - K$, et donc

$$\phi = (d - 4)E - \mathcal{K}.$$

Il nous faudra faire attention chaque fois que nous utiliserons ϕ . En effet, la fonction $\Gamma_b \rightarrow D_b$ est un double recouvrement, ce qui signifie qu'il nous faudra diviser par 2 à chaque utilisation de la classe ϕ . Nous aurions pu « incorporer » ce facteur dans la définition même de ϕ , mais cela aurait eu pour effet de permettre l'apparition de nombres d'intersection rationnels. Cette déficience n'est pas très importante et apparaît dès que l'on s'intéresse à un produit d'intersection sur une variété singulière (voir page 16).

Considérons maintenant le cycle de F_X des droites rencontrant la surface deux fois, respectivement transversalement et tangentiellement. Il s'agit de

$$l(1, 2; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* c_1 - 2c_1,$$

et nous modifions légèrement ce cycle afin que le premier point soit un point de la courbe double et non plus n'importe quel point de la surface, c.-à-d. nous considérons $\phi.l(1, 2; 0)$. En envoyant ce cycle dans $A^*(G)$, on obtient alors facilement le résultat énoncé, après division par 2 suite à l'utilisation de ϕ .

□

6.5 Congruence $D + D$

Proposition 7.6.4 - *La congruence des bisécantes à la courbe double est d'ordre $\frac{1}{2}(b(b + 1) - db + 3t)$ et de classe $\frac{1}{2}b(b - 1)$.*

Preuve. Nous regardons pour cela le cycle des bisécantes dans $A^*(F_{D_b})$. La formule de points multiples cherchée est alors :

$$m(1, 1; 1) = \bar{r}^* \bar{r}_* [F_{D_b}] - c'_1 = (b-1)g_1 - \Upsilon \varepsilon.$$

Calculant l'image de ce cycle dans l'anneau de Chow de G , on voit alors que :

$$\bar{r}_* m(1, 1; 1) = (b(b-1) - \Upsilon)(\gamma_1^2 - \gamma_2) + b(b-1)\gamma_2,$$

et le résultat s'ensuit après division par le facteur de surcompte $q(1, 1) = 2$.

□

6.6 Congruence C : droites asymptotiques

Proposition 7.6.5 - La congruence C de droites asymptotiques a pour ordre $d(d-1)(d-2) - 3(d-2)b + 3t$ et pour classe $3d(d-2) - 6b$.

Preuve. Il est facile de voir que le support géométrique du cycle $l(3; 0)$ dans F_X est exactement l'ensemble cherché de droites asymptotiques à X . En outre, $l(3; 0)$ se trouve dans $A^2(F_X)$, et donc son image dans G représente bien une congruence de droites de \mathbb{P}^3 . En évaluant ce cycle, nous voyons que :

$$l(3; 0) = c_1^2 + c_2 = 2\Gamma_1^2 + 4\Gamma_1 E + 3\Gamma_1 \mathcal{K} + (\mu + 2\lambda)P,$$

et en prenant

$$m_1 = \int l(3; 0).(\Gamma_1^2 - \Gamma_2) = \int \bar{q}_* l(3; 0).(\gamma_1^2 - \gamma_2),$$

et

$$m_2 = \int l(3; 0).\Gamma_2,$$

nous trouvons le résultat espéré.

□

6.7 Congruence $SF\&T$

Proposition 7.6.6 - La congruence des droites tangentes à X en les points de la courbe double est d'ordre $1/2((d-2)b - 3t)$ et de classe b .

Preuve. Pour cela, il suffit d'intersecter dans $A^*(F_X)$ le cycle des droites tangentes $l(2; 0)$ avec le cycle ϕ des points appartenant à la courbe double. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \int l(2; 0).\phi.(\Gamma_1^2 - \Gamma_2) = \frac{1}{2}((d-2)b - 3t),$$

et

$$\frac{1}{2} \int l(2; 0).\phi.\Gamma_2 = b.$$

Comment nous l'avons vu, il n'y a pas ici de facteur de surcompte.

□

7 Silhouettes et faux-plis

Nous montrons ici comment relier les singularités d'une projection stable de X sur un plan aux propriétés des congruences visuelles que nous venons d'étudier.

Proposition 7.7.1 - *Le générateur de contours de X est une courbe lisse. La silhouette d'une surface lisse par morceaux observée depuis un point de vue générique de \mathbb{P}^3 est une courbe de degré $d(d-1) - 2b$, ayant κ_1 points de rebroussement, m_1 points doubles, i_1 inflexions et τ_1 bitangentes, où κ_1, m_1, i_1 et τ_1 sont donnés par :*

$$\begin{cases} \kappa_1 = d(d-1)(d-2) - 3(d-2)b + 3t, \\ m_1 = \frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d-3) - 2(d^2 - 4d + 5)b + 2b^2 - 6t, \\ i_1 = 4d(d-1)(d-2) - 12(d-2)b + 12t, \\ \tau_1 = \frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12) - \frac{1}{2}(6d^4 - 20d^3 + 22d^2 - 47d + 74)b \\ \quad + \frac{1}{2}(3d-4)^2b^2 - 3(3d-4)bt + \frac{1}{2}(6d^3 - 12d^2 + 6d - 39)t + \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

Preuve. Étant donné un point de vue, le générateur de contours de X est défini comme l'ensemble des points où la ligne de vue touche la surface. Soit V un point de vue générique de \mathbb{P}^3 (en clair n'appartenant à aucune des surfaces d'événement visuel) depuis lequel X est observée. Soit également Π le plan focal. Le cycle dans F_X donnant le générateur de contours est celui des droites tangentes à X et passant par un point général de l'espace (ici : V) :

$$\mathcal{G} = l(2; 0).(\Gamma_1^2 - \Gamma_2) = -(3d + \lambda)P\Gamma_1 + 3E\Gamma_1^2 + \Gamma_1^2\mathcal{K},$$

et envoyant \mathcal{G} dans $A^*(X)$ donne

$$[CG] = q_*\mathcal{G} = 3e + K,$$

de telle sorte que le générateur de contours est une courbe de degré

$$\theta = \int [CG].e = d(d-1) - 2b.$$

La silhouette O est la projection de CG sur Π , et le degré étant invariant par projection, on voit que le degré de O est $d(d-1) - 2b$.

Puisque le point de vue est générique, la silhouette est une courbe plane ayant seulement des points doubles et des points de rebroussement comme singularités (voir Figure 5.4). Un point de rebroussement est observé lorsque la ligne de vue est une tangente asymptotique en un point hyperbolique ou parabolique de la surface. Par conséquent, le nombre de points de rebroussement de O est le nombre de tangentes asymptotiques passant par V , c.-à-d. l'ordre de la congruence de droites asymptotiques. De manière similaire, le nombre de points doubles de O est l'ordre de la congruence de droites bitangentes.

Montrons que CG est une courbe lisse. Le genre arithmétique de O est celui d'une courbe plane de degré $d(d-1) - 2b$, à savoir

$$p_a(O) = \frac{1}{2}(\theta - 1)(\theta - 2).$$

Les singularités de O sont, comme nous venons de le voir, m points doubles et c points de rebroussement, et par conséquent le genre de O est donné par :

$$g(O) = p_a(O) - m_1 - \kappa_1 = 1 + \frac{1}{2}d(d-1)(2d-5) - (3d-7)b + 3t.$$

Le genre étant invariant par projection, on a $g(CG) = g(O)$. Calculons maintenant le genre arithmétique de CG . D'après la formule d'adjonction, on voit que :

$$p_a(CG) = 1 + \frac{1}{2} \int [CG].([CG] + K) = 1 + \frac{1}{2} \int (3e + K).(3e + 2K) = 1 + \frac{1}{2}d(d-1)(2d-5) - (3d-7)b + 3t.$$

Par conséquent $p_a(CG) = g(CG)$, et le générateur de contours est une courbe non-singulière.

Il est clair que les inflexions sont les projections des points de X qui sont à la fois sur le générateur de contours et sur la courbe parabolique (rappelons que $[P] = 4K + 8e$), et donc il y a

$$i_1 = \int [CG].[P] = 4d(d-1)(d-2) - 12(d-2)b + 12t$$

inflexions sur O . On peut vérifier ce résultat d'une autre manière. En utilisant en effet les formules de Plücker, nous voyons que

$$i_1 = 3\theta(\theta - 2) - 6m_1 - 8\kappa_1$$

comme prévu.

Le rang de O , le nombre de ses tangentes passant par un point général de \mathbb{P}^2 ou encore le degré de sa courbe duale \tilde{O} , est égal à

$$r_1 = \tilde{\theta} = 2\theta + 2g(O) - 2 - \kappa_1 = d(d-1)^2 - (3d-4)b + 3t = \mu_2(X) = \tilde{d}.$$

Une bitangente à O correspond à un point double de sa courbe duale \tilde{O} , et nous avons vu que l'on pouvait ainsi dualiser les relations de Plücker. Le nombre de bitangentes est alors :

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}(\tilde{\theta} - 1) - 3i_1 - \theta).$$

□

Proposition 7.7.2 - *La courbe faux-pli d'une surface lisse par morceaux observée depuis un point de vue générique a m_2 points doubles, t points triples, i_2 inflexions et τ_2 bitangentes, où m_2, i_2 et τ_2 sont donnés par :*

$$\begin{cases} m_2 = \frac{1}{2}b(b+1) - \frac{1}{2}db - \frac{3}{2}t, \\ i_2 = 3b(d-3) - 9t, \\ \tau_2 = -(5d-14)b + \frac{1}{2}(d-2)^2b^2 - 3(d-2)bt + 15t + \frac{9}{2}t^2. \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de voir que les seules singularités d'un faux-pli stable F sont t points triples, projections des points triples de D_b , et m points doubles (ce que l'on vérifie aisément sur la Figure 5.4). Un point double survient lorsque la ligne de vue rencontre la courbe double D_b deux fois. Et donc de la même manière que précédemment, le nombre de points doubles de F est l'ordre de la congruence des bisécantes à D_b .

Nous pouvons retrouver ce résultat d'une autre façon. Le genre de D_b est donné par $2g(D_b) - 2 = (d-4)b - 3t$, et par projection on a aussi $g(D_b) = g(F)$. Le genre arithmétique de F est celui d'une courbe plane de degré b , à savoir

$$p_a(F) = \frac{1}{2}(b-1)(b-2),$$

et on peut vérifier que

$$p_a(F) - g(F) = m_2 + 3t.$$

Pour trouver les inflexions de F , utilisons les relations de Plücker :

$$i_2 = 3b(b-2) - 6m_2 - 18t = 3b(d-3) - 9t.$$

Le rang de F est égal à celui de D_b :

$$r_2 = 2b + 2g(F) - 2 = (d-2)b - 3t.$$

Enfin le nombre de bitangentes à F est donné par :

$$\tau_2 = \frac{1}{2}r_2(r_2 - 1) - \frac{3}{2}i_2 - \frac{1}{2}b.$$

□

Regardons maintenant quelles sont les interactions entre la silhouette O et le faux-pli F , étant donné un point de vue générique d'observation de la surface.

Proposition 7.7.3 - Les courbes silhouette O et faux-pli F s'intersectent transversalement en α_1 points et tangentiellement en α_2 points, où α_1 et α_2 sont :

$$\begin{cases} \alpha_1 = (d^2 - 2d + 2)b - 2b^2 + 3t, \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}((d - 2)b - 3t). \end{cases}$$

Preuve. Le générateur de contours sur X étant lisse, il ne peut donc couper transversalement la courbe double D_b . Les points de tangence de O et F proviennent ainsi des points de tangence de CG et D_b , et sont en nombre (on doit diviser par 2 pour l'effet de tangence)

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \int [CG].[D_b] = \int (K + 3e).(d - 4)e - K.$$

Ce nombre est aussi l'ordre de la congruence $SF&T$. Pour trouver α_1 , on peut procéder de deux manières différentes. D'une part, le nombre cherché est le nombre de droites tangentes à X , coupant la courbe double et passant par un point général de l'espace, à savoir l'ordre de la congruence $F + D$ que nous avons calculé. Par ailleurs, nous pouvons voir O et F comme des diviseurs de \mathbb{P}^2 . À ce titre, on a :

$$\begin{cases} [O] = (d(d - 1) - 2b)h, \\ [F] = bh, \end{cases}$$

où h est la classe d'une droite dans $A^*(\mathbb{P}^2)$. Ces deux diviseurs s'intersectent en $\int [O].[F]$ points. Ainsi,

$$\alpha_1 = \int [O].[F] - 2\alpha_2 = b(d(d - 1) - 2b) - 2\alpha_2 = (d^2 - 2d + 2)b - 2b^2 + 3t.$$

□

8 Surfaces duales : approche indirecte

Étant donné un point d'observation V de la surface X et un plan focal Π , la silhouette O est la projection sur Π du générateur de contours CG sur X , défini comme l'ensemble des points de contact des plans tangents à X et passant par V . Par dualité, un point V de \mathbb{P}^3 se transforme en un plan \tilde{V} de \mathbb{P}^3 et, par conséquent, CG se transforme en une section plane de \tilde{X} . En projetant CG sur Π , on voit en fait que la courbe plane O est duale à une section plane \tilde{O} de \tilde{X} . Ce résultat intuitif est en fait formellement démontré dans [McCrory, 1980; Bruce, 1981]. Un raisonnement similaire amène au fait que la courbe F , projection sur Π de la courbe double D_b de X , est duale à une section plane \tilde{F} de la surface \tilde{D}_b duale à la courbe double. Mieux, l'union des deux courbes $O \cup F$ est duale à une section plane de la surface union $\tilde{X} \cup \tilde{D}_b$.

Nous pouvons par conséquent retrouver les résultats concernant la géométrie énumérative de \tilde{X} et de \tilde{D}_b grâce à la propriété de dualité que nous venons de voir. Ainsi, une inflexion d'une courbe plane se transforme en un point de rebroussement et vice-versa, et un point double se transforme en une bitangente. Puisque O possède i_1 inflexions, cela signifie que \tilde{O} possède i_1 points de rebroussement, c.-à-d. que la courbe cuspidale de \tilde{X} est de degré i_1 (il faut ici se rappeler que le degré d'une courbe est le nombre de ses points d'intersection par un plan en position générale), ce que l'on peut vérifier directement d'après les résultats obtenus. En outre, nous avons vu que le rang de O était

$$r_1 = d(d - 1)^2 - (3d - 4)b + 3t,$$

mais par dualité, ce nombre est égal au degré de \tilde{O} , qui est le degré \tilde{d} de \tilde{X} . Pour finir, le nombre de bitangentes à O , à savoir τ_1 , est égal au nombre de points doubles de \tilde{O} , c.-à-d. le degré de la courbe double de \tilde{X} .

Passons maintenant à \tilde{D}_b . F possède i_2 inflexions, qui sont autant de points de rebroussement de \tilde{F} . Par conséquent, i_2 est aussi le degré de la courbe cuspidale de \tilde{D}_b , ce que le calcul direct que nous avons effectué montre. De plus, F a pour rang r_2 , et donc par dualité \tilde{F} est de degré r_2 , ce qui signifie que \tilde{D}_b est de degré r_2 . Pour finir, F possède τ_2 bitangentes, donc \tilde{F} possède τ_2 points doubles, et ce nombre est aussi le degré de la courbe double de \tilde{D}_b . \tilde{F} ne possède pas d'inflexion, puisque D n'a pas de points de rebroussement.

La conclusion de ce paragraphe est que, alors que la surface duale à X est définie naturellement à travers des contacts de plans, sa géométrie énumérative peut s'obtenir comme une conséquence de la géométrie énumérative de la projection de X sur un plan, elle-même appréhendée par des contacts de droites avec X .

9 Bilan

L'approche adoptée pour étudier les contacts de droites et de plans avec une surface de \mathbb{P}^3 est valide à certaines conditions de généricité près. Toutefois, la technique des schémas de Hilbert montre qu'il n'est pas utile d'être aussi restrictif. Les formules énumératives trouvées par la théorie des points multiples stationnaires sont ainsi valables en toute généralité. En outre, cette méthode itérative à l'énorme avantage de bien se prêter à une implantation.

Avant d'étudier les principales composantes du partitionnement de l'espace en cellules de vue équivalente, nous avons prouvé de nombreux résultats particulièrement intéressants sur les surfaces lisses par morceaux. Nous nous sommes penchés sur les congruences visuelles, systèmes algébriques de droites à deux paramètres (ou sous-variétés de dimension 2 de la Grassmannienne de droites) auxquels appartiennent les surfaces d'événement visuel. Les propriétés de ces congruences sont notamment reliées aux singularités des projections stables des surfaces sur un plan. Par ce biais, et grâce à une propriété qui fait de la projection d'une surface lisse le dual d'une section plane de sa surface duale, nous avons ramené, de manière indirecte, l'étude de contacts de plans à celui de contacts de droites.

Chapitre 8

Graphes d'aspects et géométrie énumérative

Contents

1	Graphes d'aspects d'objets lisses	116
1.1	Surface parabolique R_1	116
1.2	Surface flecnodale R_2	118
1.3	Surface traversée de point de rebroussement R_3	120
1.4	Surface traversée de tangente R_4	121
1.5	Surface point triple R_5	122
1.6	Surface godron R_6	123
1.7	Étude d'un cas : la surface parabolique	123
2	Graphes d'aspects d'objets lisses par morceaux	124
2.1	Surface S_1 : directions asymptotiques à la courbe double	124
2.2	Surface S_2 : tangentes à la courbe double	125
2.3	Surface S_3 : directions conjuguées	125
2.4	Surface S_4 : plans tangents aux points triples	125
2.5	Surface S_5 : surface parabolique	126
2.6	Surface S_6 : surface flecnodale	126
2.7	Surface S_7 : $D + SF$	127
2.8	Surface S_8 : $F + SF$	127
2.9	Surface S_9 : $D + T$	128
2.10	Surface S_{10} : $F + T$	128
2.11	Surface S_{11} : $D + C$	128
2.12	Surface S_{12} : $F + C$ traversée de point de rebroussement	129
2.13	Surface S_{13} : $D + +D$	129
2.14	Surface S_{14} : $F + +D$	130
2.15	Surface S_{15} : $F + +F$ traversée de tangente	130
2.16	Surface S_{16} : $D + D + D$	130
2.17	Surface S_{17} : $F + D + D$	131
2.18	Surface S_{17} bis : $D + F + D$	131
2.19	Surface S_{18} : $F + F + D$	131
2.20	Surface S_{18} bis : $F + D + F$	132
2.21	Surface S_{19} : $F + F + F$ point triple	132

	2.22 Surface S_{20} : inflexions des contours	133
	2.23 Surface S_{21} : inflexions des faux-plis	133
3	Deux cas particuliers	133
	3.1 Assemblages de plans	133
	3.2 Assemblages de quadriques	134
4	Conclusion sur le nombre de vues d'un objet	135
5	Bilan	135

Il est temps maintenant de passer à la géométrie énumérative des surfaces d'événement visuel, principales composantes du partitionnement de l'espace des points de vue en cellules de vue équivalente. Cela est maintenant possible : nous avons introduit le cadre de travail permettant d'étudier les contacts de droites et de plans avec courbes et surfaces, et donné quelques exemples d'utilisation de la théorie des points multiples.

Dans ce chapitre, nous commençons par regarder le cas des surfaces lisses, avec leur 5 surfaces d'événement visuel. Puis nous étudions les surfaces lisses par morceaux, où il faut là faire travailler sur 19 surfaces différentes.

1 Graphes d'aspects d'objets lisses

Étudions donc les surfaces d'événement visuel R_i , $i = 1, \dots, 5$ pour le cas des surfaces lisses, ainsi que leurs courbes de contact sur la surface X . Nous voyons également, en reprenant les calculs effectués dans la Partie I sur les surfaces réglées, comment il est possible d'obtenir des résultats complets sur la géométrie énumérative d'une surface événement visuel. La plupart des résultats obtenus dans ce paragraphe sont présentés dans [Petitjean, 1994c; Petitjean, 1994d].

1.1 Surface parabolique R_1

Proposition 8.1.1 - *La courbe parabolique sur X est de degré $4d(d-2)$ et la surface réglée générée par les droites asymptotiques aux points paraboliques est de degré $2d(d-2)(3d-4)$.*

Preuve. Comme nous l'avons vu, la surface X peut se subdiviser en deux régions : une région elliptique (courbure de Gauss positive) où les points ne possèdent pas de tangente d'ordre supérieur à 2 et une région hyperbolique (courbure de Gauss négative) où chaque point a deux tangentes d'ordre au moins 3 (tangentes asymptotiques). Ces deux régions sont séparées par la courbe parabolique (courbure nulle), où chaque point possède une seule tangente d'ordre supérieur. Soit A_3 le sous-ensemble suivant de F_X :

$$A_3 = \{(x, l) \in X \times G / l \text{ a un contact d'ordre 3 avec } X \text{ en } x\},$$

et considérons la fonction $\zeta : A_3 \rightarrow X$ induite par projection sur le premier facteur. Le rappel donné ci-dessus permet alors d'affirmer que ζ est un double recouvrement de la région hyperbolique de X et que la courbe parabolique P sur X est l'image de la courbe de ramification de ζ .

Si, plus généralement, on note A_k l'ensemble

$$A_k = \{(x, l) \in X \times G / l \text{ a contact d'ordre } k \text{ avec } X \text{ en } x\},$$

alors A_k est la variété de singularités de Thom-Boardman de type $1^k = (1, \dots, 1)$ de la première différentielle de \bar{q} . La construction de ces ensembles est décrite dans [Porteous, 1971; Kulikov, 1983] et les deux lemmes qui suivent sont les fruits de ces travaux. Soit α_k le plongement de A_k dans F_X . Alors :

Lemme 8.1.1 ([Kulikov, 1983])

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{A_2/F_X} = \alpha_2^* \mathcal{N}_{F_X/G}, \\ \mathcal{N}_{A_3/A_2} = L_1|_{A_3} + \alpha_3^* \mathcal{N}_{F_X/G}. \end{cases}$$

où $L_1 = \Theta_{\mathbb{P}(\mathcal{T}_{F_X})}(1)$.

Lemme 8.1.2 ([Kulikov, 1983]) Si $\bar{c} \in A^*(A_k)$ est la restriction de $c \in A^*(\mathbb{P}(\mathcal{T}_{F_X}))$, alors

$$\alpha_{k*}(\bar{c}) = (c.(c_1 + z) \cdots (c_1 + (k-2)z).(c_1.z^3 + c_2.z^2 + \cdots + c_4))_3,$$

(\cdot)₃ signifiant le coefficient de z^3 dans le polynôme.

La courbe de ramification de ς est donnée sur A_3 par $c_1(\mathcal{N}_{A_3/X})$ [Kleiman, 1976]. Par conséquent, si on dénote par $[R_1]$ l'image de cette courbe dans F_X , on a :

$$\begin{cases} [R_1] = \alpha_{3*}c_1(\mathcal{N}_{A_3/X}), \\ [P] = q_*[R_1]. \end{cases}$$

Soit i_3 l'inclusion de A_3 dans A_2 , nous avons alors les séquences :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{A_3/F_X} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{A_3/X} & \longrightarrow & \alpha_3^* \mathcal{N}_{F_X/X} \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{A_3/A_2} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{A_3/F_X} & \longrightarrow & i_3^* \mathcal{N}_{A_2/F_X} \longrightarrow 0, \end{array}$$

et d'après le Lemme 8.1.1, nous trouvons

$$[R_1] = \alpha_{3*}(c_1(L_1|_{A_3}) + \alpha_3^*(c_1(\mathcal{N}_{F_X/X}) + 2c_1(\mathcal{N}_{F_X/G}))).$$

Le Lemme 8.1.2 permet de calculer la première partie :

$$\alpha_{3*}c_1(L_1|_{A_3}) = (z.(c_1 + z).(c_1z^3 + c_2z^2 + c_3z + c_4))_3 = c_1c_2 + c_3.$$

Le cycle fondamental de A_3 dans F_X est le cycle des droites asymptotiques $l(3;0)$, et grâce à la formule de projection, cela signifie que

$$[R_1] = c_1c_2 + c_3 + (c_1(\mathcal{N}_{F_X/X}) + 2c_1).l(3;0).$$

Puisque

$$c_1(\mathcal{N}_{F_X/X}) = q^*c_1(\mathcal{T}_X) - c_1(\mathcal{T}_{F_X}) = 2E - 3\Gamma_1,$$

on trouve finalement

$$[R_1] = 2(d-2)E(\Gamma_1 + (d-2)E)(2\Gamma_1 + (d-4)E).$$

En projetant sur X , on a :

$$[P] = q_*[R_1] = 4(d-2)e,$$

et donc $\int [P].e = 4d(d-2)$. Pour conclure, nous utilisons notre implantation :

```
> R1:=c(1)*c(2)+c(3)+loadclass([3],0,c)*(2*c(1)+2*E-3*Ga);
> simp(R1*Ga);
```

$$2 \ d \ (d - 2) \ (3 \ d - 4)$$

□

1.2 Surface flecnodale R_2

Proposition 8.1.2 - La courbe flecnodale sur X est de degré $d(11d - 24)$ et la surface réglée engendrée par les directions asymptotiques aux points flecnodaux est de degré $2d(d - 3)(3d - 2)$.

Preuve. La courbe flecnodale est une courbe du domaine hyperbolique dont les points possèdent une tangente d'ordre 4. Le cycle correspondant dans F_X est alors donné par (temps CPU : 0,23 s ; mémoire de session : 0,21 MB)

$$l(4; 0) = c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3.$$

La courbe flecnodale est donnée sur X par le cycle :

$$[S] = q_*l(4; 0) = (11d - 24)e,$$

et cette courbe est de degré $\int [S].e = d(11d - 24)$. Passons à l'évaluation :

```
> l4:=loadclass([4],0,c):
> simp(l4*Ga);
```

$$2 d (d - 3) (3 d - 2)$$

□

Proposition 8.1.3 - Le nombre de godrons sur la surface est $2d(d - 2)(11d - 24)$, alors que le nombre de biflecnodes est $5d(d - 4)(7d - 12)$.

Preuve. Les godrons sont les points de tangence des courbes paraboliques et flecnodales et par conséquent

$$P_4 = \frac{1}{2} \int [P].[S] = 2d(d - 2)(11d - 24).$$

Les biflecnodes sont les points de la courbe flecnodale possédant une tangente d'ordre 5, et ainsi si on considère le cycle :

$$l(5; 0) = c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4,$$

le nombre de biflecnodes sur la surface est :

$$\int l(5; 0) = 5d(d - 4)(7d - 12).$$

□

Proposition 8.1.4 - Le nombre de points doubles de la courbe flecnodale est $5d(7d^2 - 28d + 30)$.

Preuve. En reprenant les notations définies dans le paragraphe précédent, soit A_4 le sous-ensemble suivant de F_X :

$$A_4 = \{(x, l) \in X \times l \mid l \text{ est une tangente flecnodale en } x\}.$$

A_4 est une courbe, que l'on peut voir comme une désingularisation de la courbe flecnodale S . Par conséquent $g(A_4) = g(S)$. Voyons comment calculer ce genre. D'après le théorème de Riemann-Roch, on sait que :

$$2g(A_4) - 2 = - \int c_1(\mathcal{T}_{A_4}).$$

Soit w l'image dans $A^*(F_X)$ de $c_1(\mathcal{T}_{A_4})$. Alors, en utilisant les Lemmes 8.1.1 et 8.1.2, on voit que :

$$w = \alpha_{4*}(\alpha_4^*c_1(\mathcal{T}_{F_X}) - c_1(\mathcal{N}_{A_4/A_3}) - i_4^*c_1(\mathcal{N}_{A_3/A_2}) - \alpha_4^*c_1(\mathcal{N}_{F_X/G})),$$

et puisque le cycle fondamental de A_4 dans F_X est $l(4;0)$, nous avons alors :

$$w = (c_1(\mathcal{T}_{F_X}) - 3c_1).l(4;0) - 3(\tau.(c_1 + \tau).(c_1 + 2\tau).(c_1\tau^3 + c_2\tau^2 + c_3\tau + c_4))_3,$$

qui donne finalement

$$w = (-62d^2 + 316d - 372)\Gamma_1^2 E^2.$$

Ce faisant, on voit que :

$$\int c_1(\mathcal{T}_{A_4}) = \int \alpha_{4*}c_1(\mathcal{T}_{A_4}) = \int w = -2d(31d^2 - 158d + 186).$$

Ainsi,

$$g(A_4) = 1 - \frac{1}{2} \int w = 31d^3 - 158d^2 + 186d + 1.$$

Pour conclure, nous calculons le genre arithmétique de S à l'aide de la formule d'adjonction :

$$2p_a(S) - 2 = \int [S].([S] + [K]),$$

où $[K]$ est la classe du diviseur canonique sur X . Puisque $[K] = (d-4)e$ dans le cas d'une surface lisse, on a :

$$p_a(S) = 1 + 2d(3d-7)(11d-24).$$

Le nombre de points doubles de la courbe flecnodale est alors :

$$p_a(S) - g(A_4) = 5d(7d^2 - 28d + 30).$$

□

Proposition 8.1.5 - *La surface flecnodale recoupe la surface X en une courbe de simple intersection de degré $2d(d-4)(3d^2+d-12)$.*

Preuve. Il y a deux manières d'arriver à ce résultat. Commençons par un raisonnement intuitif. Le cycle $l(4;0)$ de $A^*(F_X)$ représente l'ensemble algébrique suivant :

$$\{(x, l) \in X \times G / x \in l \text{ et } l \text{ a contact d'ordre 4 avec } X \text{ en } x \},$$

alors que le cycle $\bar{q}^*\bar{q}_*l(4;0)$ correspond à l'ensemble

$$\{(x, l) \in X \times G / x \in l \text{ et } l \text{ a contact d'ordre 4 avec } X \}.$$

Les droites flecnodales forment un ensemble algébrique à une dimension, et par conséquent recouper la surface en une courbe de simple intersection α . Par conséquent, en utilisant l'ordre de contact correct :

$$[\alpha] + 4l(4;0) = \bar{q}^*\bar{q}_*l(4;0),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int [\alpha].E &= \int (\bar{q}^*\bar{q}_*l(4;0) - 4l(4;0)).E &= \int l(4;0).\bar{q}_*E - 4 \int l(4;0).E \\ &= d \int l(4;0).\Gamma_1 - 4 \int l(4;0).E \\ &= 2d(d-4)(3d^2+d-12). \end{aligned}$$

L'autre manière de voir les choses est simplement de considérer le cycle des droites rencontrant X transversalement en un point, puis flecnodalement en un autre point, à savoir $l(1,4;0)$, et de voir que ce cycle s'écrit très simplement

$$l(1,4;0) = \bar{q}^*\bar{q}_*l(4;0) - 4l(4;0),$$

d'où le résultat, puisqu'en prenant $\int l(1,4;0).E$, on obtient le degré de la courbe où le contact de ces droites est 1.

□

1.3 Surface traversée de point de rebroussement R_3

Proposition 8.1.6 - *Le lieu des points ayant une tangente ordinaire qui est ailleurs asymptotique a pour degré $d(d-2)(d-4)(d^2+2d+12)$, alors que le lieu des points ayant une tangente asymptotique qui est ailleurs tangente ordinaire a pour degré $d(d-4)(3d^2+5d-24)$. Le degré de la surface réglée générée par ces droites est $d(d-3)(d-4)(d^2+6d-4)$.*

Preuve. Le cycle dans $A^*(F_X)$ des points (x, l) tels qu'il existe d'autres points (y, l) , l étant tangente d'ordre 2 en x et d'ordre 3 en y , est $l(2, 3; 0)$ (temps CPU : 1,6 s ; mémoire : 0,9 MB) :

$$l(2, 3; 0) = l(2; 0)\bar{q}^*\bar{q}_*l(3; 0) - 6c_1^3 - 12c_1c_2 - 6c_3.$$

Par conséquent :

```
> l23:=loadclass([2,3],0,c):
> simp(l23*E);
```

$$d^2 (d - 2) (d - 4) (d^2 + 2d + 12)$$

```
> simp(l23*Ga);
```

$$d^2 (d - 3) (d - 4) (d^2 + 6d - 4)$$

Pour la deuxième courbe sur la surface, il faudrait trouver une formule donnant les contacts de type $(3, 2)$ de droites, dans cet ordre bien précis puisque la projection sur X se fait vis-à-vis du premier contact spécifié. La technique de Colley ne permet pourtant pas de calculer une telle formule, puisqu'elle requiert une partition croissante en entrée. En fait, comme nous l'avons vu, une formule de points multiples se décompose en deux morceaux : une partie donnant la contribution de l'ensemble des contacts et qui ne dépend pas de l'ordre spécifique des contacts (celle qui ne contient pas de $\bar{q}^*\bar{q}_*$) et une partie donnant la contribution de chaque contact séparément. Ainsi, il est facile de voir qu'ici la partie commune est la même pour $l(3, 2; 0)$ que pour $l(2, 3; 0)$. La formule que nous cherchons est donc simplement, par symétrie :

$$l(3, 2; 0) = l(3; 0)\bar{q}^*\bar{q}_*l(2; 0) - 6c_1^3 - 12c_1c_2 - 6c_3,$$

et le calcul de $\int l(3, 2; 0).E$ donne le résultat annoncé.

□

Proposition 8.1.7 - *La courbe de simple intersection de la surface traversée de point de rebroussement avec X est de degré $d(d-4)(d-5)(d^3+6d^2-d-24)$.*

Preuve. Nous devons ici être prudent. Une première idée consisterait à imiter ce que nous avons fait pour la surface flecnodale, c.-à-d. à prendre le cycle $l(1, 2, 3; 0)$. Mais il faut se souvenir que la technique de Colley considère des sous-ensembles de points ordonnés. Ainsi le cycle $l(1, 2, 3; 0)$ ne prend pas en compte les droites donc l'ordre des contacts serait $(1, 3, 2)$. Utiliser $l(1, 2, 3; 0)$ reviendrait à « oublier » une partie des droites appartenant à la surface R_4 .

Utilisons plutôt un raisonnement intuitif. Le cycle de F_X représentant l'ensemble des droites ayant un contact de type $(2, 3)$, sans ordre, est $\bar{q}^*\bar{q}_*l(2, 3; 0)$, et il suffit de soustraire à ce cycle (avec les multiplicités correctes) les deux cycles $l(2, 3; 0)$ et $l(3, 2; 0)$ que nous avons vu :

$$\bar{q}^*\bar{q}_*l(2, 3; 0) - 2l(2, 3; 0) - 3l(3, 2; 0),$$

dont le degré est

$$d \int l(2, 3; 0). \Gamma_1 - 2 \int l(2, 3; 0). E - 3 \int l(3, 2; 0). E.$$

□

1.4 Surface traversée de tangente R_4

Avant de démontrer le résultat important de ce paragraphe, commençons par établir le lemme suivant. Nous reprenons ici les notations utilisées au Chapitre 6, Paragraphe 2 (page 91), où nous avons étudié la géométrie de la surface duale.

Lemme 8.1.3 - *La courbe V_b , lieu des points de contact sur X des plans bitangents, possède u points de rebroussement et v points doubles, où u et v sont :*

$$\begin{cases} u = 4d(d-2)(d-3)(d^3 + 3d - 16), \\ v = \frac{1}{2}d(d-2)(d^7 - 4d^6 + 7d^5 - 45d^4 + 114d^3 - 111d^2 + 548d - 960). \end{cases}$$

Preuve. Selon les descriptions géométriques données dans [Salmon, 1915, pages 300–306], les intersections des courbes V_b et V_c sont de deux types : la première est une intersection transversale et donne un point de rebroussement de U_b , la deuxième est un contact tangentiel qui intervient aux godrons et donne un point de rebroussement sur U_c . Supposons donc que la courbe V_b possède u points de rebroussement et v points doubles, et que U_b a \tilde{u} points de rebroussement et \tilde{v} points triples. Les points triples de U_b proviennent de points doubles sur V_b , et donc $\tilde{v} = v/3$. Les intersections transversales entre V_b et V_c sont en nombre (P_4 est le nombre de godrons) :

$$\begin{aligned} i &= \int [V_b]. [V_c] - 2P_4, \\ &= 4d(d-2)(d-3)(d^3 + 3d - 16). \end{aligned}$$

Maintenant, les points de rebroussement de U_b proviennent soit d'intersections transversales entre V_b et V_c , soit de points de rebroussement de V_b , ce qui signifie que (nous divisons par 2 parce que la fonction restreinte $V_b \rightarrow U_b$ est un double recouvrement) :

$$\tilde{u} = \frac{1}{2}(u + i).$$

Les observations de Salmon impliquent également que $\tilde{u} = i$, donc pour finir on a aussi $u = i$.

L'ensemble des points triples de $\tilde{\pi}$ est donné par le cycle :

$$[M_3] = \tilde{\pi}^* \tilde{\pi}_* [M_2] - 2c_1(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}). [M_2] + 2c_2(\mathcal{N}_{\tilde{X}/\mathbb{P}^3}),$$

et par conséquent si \tilde{t} dénote le nombre de points triples de la fonction duale (nombre total de points triples de \tilde{X}), nous avons :

$$6\tilde{t} = \int [M_3],$$

La ramification de $\tilde{\pi}$ n'étant pas finie, comme nous l'avons vu, il faut compter dans ce nombre à la fois les points triples de U_b ($v/3$), les points de rebroussement de U_b (u) et les points de rebroussement de U_c (P_4). Pour finir, nous avons donc

$$\tilde{t} = \frac{v}{3} + u + P_4,$$

ou encore

$$v = 3(\tilde{t} - u - P_4),$$

qui s'évalue au nombre voulu.

□

Proposition 8.1.8 - *Le degré de la courbe de contact des plans bitangents à la surface est $d(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12)$ et la surface développable formée par les droites supportant les points de contact de ces plans a pour degré $d(d-2)(d-3)(d^2 + 2d - 4)$.*

Preuve. Nous avons déjà établi le premier résultat en étudiant la surface duale. Pour le deuxième, nous notons d'abord qu'une droite supportant les points de contact d'un plan bitangent se projette par $\tilde{\pi}$ en une droite tangente à la courbe double U_b de \tilde{X} , et par conséquent le degré de R_4 est le rang de U_b . Ce nombre est alors :

$$q = 2 \deg(U_b) + 2g(U_b) - 2 - u.$$

Nous connaissons déjà le degré de U_b , cherchons maintenant son genre. En appliquant le théorème de Riemann-Hurwitz à la fonction restreinte $V'_b \rightarrow U'_b$ entre les normalisations de V_b et U_b , on trouve :

$$2(2g(U_b) - 2) + P_4 = 2g(V_b) - 2.$$

Mais d'après la formule d'adjonction, nous avons :

$$2p_a(V_b) - 2 = \int [V_b].([K] + [V_b]),$$

et V_b possède u points de rebroussement et v points doubles, donc :

$$g(V_b) = p_a(V_b) - u - v.$$

En rassemblant ces différentes informations, on obtient le genre de U_b et par suite son rang. Le résultat final est simple :

$$q = \int [V_b].e - \frac{1}{2}P_4.$$

□

1.5 Surface point triple R_5

Proposition 8.1.9 - *Le lieu des points de contact des droites tritangentes à la surface a pour degré $\frac{1}{2}d(d-2)(d-4)(d-5)(d^2 + 5d + 12)$ et ces droites génèrent une surface réglée qui a pour degré $\frac{1}{3}d(d-3)(d-4)(d-5)(d^2 + 3d - 2)$.*

Preuve. Pour étudier les droites tangentes en trois points différents de la surface, nous regardons le cycle $l(2, 2, 2; 0)$ (temps CPU : 7,97 s ; mémoire : 4,9 MB) :

$$l(2, 2, 2; 0) = c_1 \bar{q}^* \bar{q}_* (c_1 \bar{q}^* \bar{q}_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2) - 4(2c_1^2 + c_2) \bar{q}^* \bar{q}_* c_1 + 40c_1^3 + 56c_1 c_2 + 24c_3.$$

Le degré de la surface réglée correspondante est alors

$$\frac{1}{6} \int l(2, 2, 2; 0). \Gamma_1,$$

le facteur de surcompte étant $p(2, 2, 2) = 6$, alors que le degré de la courbe sur la surface est

$$\frac{1}{2} \int l(2, 2, 2; 0). E,$$

le facteur de surcompte étant $q(2, 2, 2) = 2$.

□

Proposition 8.1.10 - La surface événement visuel point triple recoupe X en une courbe de simple intersection de degré $\frac{1}{3}d(d-4)(d-5)(d-6)(d^3+3d^2-2d-12)$.

Preuve. Comme nous l'avons déjà vu, il suffit de considérer le cycle des droites rencontrant X une fois transversalement, puis trois fois tangentiellement, à savoir

$$l(1, 2, 2, 2; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* l(2, 2, 2, 2; 0) - 6l(2, 2, 2, 2; 0).$$

Le résultat cherché est alors, en tenant compte du facteur $q(1, 2, 2, 2) = 6$:

$$\frac{1}{6} \int l(1, 2, 2, 2; 0).E = \frac{d}{6} \int l(2, 2, 2, 2; 0).E - \int l(2, 2, 2, 2; 0).E.$$

□

1.6 Surface godron R_6

Proposition 8.1.11 - La surface événement visuel R_6 a pour degré $2d(d-2)(11d-24)$.

Preuve. Comme nous l'avons dit, les changements d'inflexions des contours s'observent en traversant le plan tangent d'un godron, qui est un point de tangence des courbes paraboliques et flecnodales sur la surface. R_6 est donc constituée de l'ensemble des plans tangents aux godrons. Le nombre de ces points étant $2d(d-2)(11d-24)$, le résultat s'ensuit.

□

1.7 Étude d'un cas : la surface parabolique

Nous donnons ici brièvement la géométrie énumérative de la surface événement visuel R_1 engendrée par les directions asymptotiques aux points paraboliques, dans le cas d'une surface lisse. La surface parabolique étant une surface développable, nous utilisons ici essentiellement les résultats établis dans le Chapitre 4, Paragraphe 3 (page 59).

Comme nous venons de le voir, le cycle des points paraboliques sur X est donné par $[P] = 4(d-2)e$. Nous avons également mentionné que l'image réciproque \tilde{e} dans $A^*(X)$ de la classe d'un hyperplan dans \mathbb{P}^3 était $\tilde{e} = (d-1)e$. Par conséquent, la classe d'immersion de P dans X (c.-à-d. le rang de R_1) est :

$$\mu_1(R_1) = \rho(P) = \int [P].\tilde{e} = 4d(d-1)(d-2).$$

Le genre de P est obtenu grâce à la formule d'adjonction, en n'omettant pas que P est lisse :

$$2g(P) - 2 = \int [P].([P] + [K]) = 4d(d-2)(5d-12).$$

Puisque R_1 est de degré $\mu_0(R_1) = 2d(d-2)(3d-4)$, on trouve le degré de sa courbe cuspidale :

$$\tilde{c} = 2\mu_0(R_1) + 2g(P) - 2 - \mu_1(R_1) = 4d(d-2)(7d-15),$$

et cette courbe possède

$$\kappa = 3\mu_0(R_1) + 6g(P) - 6 - 2\mu_1(R_1) = 10d(d-2)(7d-16)$$

points de rebroussement. Mentionnons au passage qu'un type particulier d'événement visuel de codimension 3 est justement observable en regardant la surface depuis un point de rebroussement de la courbe cuspidale de la surface parabolique, en conséquence de quoi le nombre κ calculé donne aussi le nombre de point de l'espace d'observation depuis lesquels il est possible d'observer cette singularité.

Pour continuer, la courbe double de R_1 est de degré

$$\bar{b} = \frac{1}{2}\mu_0(R_1)(\mu_0(R_1) - 7) + \mu_1(R_1) + 3 - 3g(P) = d(d-2)(18d^4 - 84d^3 + 128d^2 - 111d + 96).$$

Cette courbe possède

$$\kappa' = 6\bar{b} + (\bar{c} - 3\mu_0(R_1))(\mu_0(R_1) - 4) = 2d(d-2)(84d^4 - 460d^3 + 824d^2 - 641d + 360)$$

points de rebroussement. Le nombre de points triples total sur R_1 est

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{8}(\mu_0(R_1) - 4)((\mu_0(R_1) - 3)(\mu_0(R_1) - 2) - 6g(P)) \\ &= \frac{1}{8}d(d-2)(3d^3 - 10d^2 + 8d - 2)(18d^4 - 84d^3 + 128d^2 - 109d + 92), \end{aligned}$$

et le nombre de points triples sur la courbe double de R_1 est alors :

$$j = k - \kappa - \kappa' = \frac{2}{3}d(d-2)(3d^3 - 10d^2 + 8d - 4)(18d^4 - 84d^3 + 128d^2 - 181d + 256).$$

2 Graphes d'aspects d'objets lisses par morceaux

Dans ce paragraphe, nous abordons le problème des surfaces événement visuel dans le cas des surfaces lisses par morceaux. Nous donnons ici les degrés des 19 surfaces partitionnant l'espace des points de vue en cellules de vues équivalentes. Les résultats sont tout d'abord donnés pour une surface de degré d possédant une courbe double de degré b et t points triples. On considère ensuite une surface qui est l'intersection de n surfaces lisses de degré d_i , $i = 1, \dots, n$. Dans ce cas, $d = \sum d_i$, $b = \sum d_i d_j$ et $t = \sum d_i d_j d_k$, et donc si δ est le maximum des d_i , on a $d = O(n\delta)$, $b = O(n^2\delta^2)$ et $t = O(n^3\delta^3)$. Pour finir, nous considérons, comme [Rieger, 1993b], le sous-cas du cas précédent où la surface est homéomorphe à un polyèdre borné par n surfaces algébriques lisses, ce qui signifie que $t = O(n)$ et que la surface possède $O(n)$ courbes doubles (on parle de borne *réduite*).

Nous ne développons pas dans ce paragraphe les surfaces $S_5, S_6, S_{12}, S_{15}, S_{19}, S_{20}$ qui correspondent respectivement aux surfaces $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ vues dans le cas des surfaces lisses. Le raisonnement étant strictement identique, nous nous contentons de mettre à jour les résultats, les exprimant cette fois en fonction de d, b et t . Notons que les calculs de ce paragraphe sont présentés dans [Petitjean, 1995b; Petitjean, 1995d].

2.1 Surface S_1 : directions asymptotiques à la courbe double

Proposition 8.2.1 - *La surface événement visuel formée par les tangentes asymptotiques à la surface en les points de la courbe double est de degré $1/2((3d-8)b-9t)$, de borne $O(n^3\delta^3)$ et de borne réduite $O(n\delta^3)$.*

Preuve. Pour cela, il suffit de considérer le cycle dans $A^*(F_X)$ des droites ayant un contact d'ordre 3, à savoir $l(3;0)$, et d'intersecter ce cycle avec celui des points de la courbe double, c.-à-d. ϕ . Cela donne :

$$[S_1] = \phi.l(3;0) = 2(d-4)\Gamma_1^2 E - 2\Gamma_1^2 K + (4d(d-4) + (3d-16)\lambda - 3\mu)\Gamma_1 P,$$

et ainsi la surface correspondante de \mathbb{P}^3 est de degré

$$\frac{1}{2} \int [S_1].\Gamma_1 = \frac{1}{2}((3d - 8)b - 9t).$$

□

2.2 Surface S_2 : tangentes à la courbe double

Proposition 8.2.2 - La surface réglée engendrée par les droites tangentes à la courbe double D_b de X a pour degré $(d - 2)b - 3t$, borne $O(n^3\delta^3)$ et borne réduite $O(n\delta^3)$.

Preuve. Le degré cherché est le nombre de tangentes à D_b rencontrant une droite en position générale, en d'autres termes le rang Υ de D_b , d'où le résultat.

□

2.3 Surface S_3 : directions conjuguées

Proposition 8.2.3 - La surface événement visuel générée par les droites tangentes à X qui sont conjuguées aux tangentes de la courbe double a pour degré $(d - 2)b - 3t$, borne $O(n^3\delta^3)$ et borne réduite $O(n\delta^3)$.

Preuve. Soit \bar{D}_b l'image sur \bar{X} de la courbe double D_b de X . Alors on peut voir qu'une direction conjuguée à une tangente à D_b se transforme en une tangente de \bar{D}_b . Ainsi, le degré de S_3 est le rang de \bar{D}_b . Le degré de \bar{D}_b est :

$$\frac{1}{2} \int [\Gamma_b].\bar{e} = \frac{1}{2}((d - 2)b - 3t).$$

Son genre est obtenu par l'utilisation du théorème de Riemann-Hurwitz, appliqué à la fonction $\Gamma_b \rightarrow \bar{D}_b$:

$$2g(\bar{D}_b) - 2 = 2g(\Gamma_b) - 2 = 2(d - 4)b - 6t.$$

Cette courbe possède des points de rebroussement à ses points d'intersection avec la courbe cuspidale de \bar{X} , à savoir

$$\frac{1}{2} \int [P].[\Gamma_b] = 2(d - 4)b - 6t.$$

Pour conclure, le rang de \bar{D}_b est

$$2\text{deg}(\bar{D}_b) + 2g(\bar{D}_b) - 2 - 2(d - 4)b + 6t = (d - 2)b - 3t.$$

□

2.4 Surface S_4 : plans tangents aux points triples

Proposition 8.2.4 - La surface événement visuel constituée des plans tangents à la surface aux points triples est de degré $3t$, borne $O(n^3\delta^3)$ et borne réduite $O(n\delta^3)$.

Preuve. Il suffit de considérer les trois plans tangents en chaque point triple, et le résultat s'ensuit.

□

2.5 Surface S_5 : surface parabolique

Proposition 8.2.5 - *Le lieu des points paraboliques sur X est coupé par le cycle $4K + 8e$ et est de degré $4d(d-2) - 8b$. La surface réglée générée par les directions asymptotiques aux points paraboliques est de degré $2d(d-2)(3d-4) - 2(9d-20)b + 18t$, de borne $O(n^3\delta^3)$ et de borne réduite $O(n\delta^3)$.*

Preuve. Comme dans le Paragraphe 1, la courbe parabolique est l'image de la courbe de ramification de la fonction $A_3 \rightarrow X$, double recouvrement de la région hyperbolique. Si

$$[S_5] = \alpha_{3*}c_1(\mathcal{N}_{A_3/X}),$$

alors on trouve

$$[S_5] = 2(2\Gamma_1 + \mathcal{K})(\mathcal{K} + 2E)(\Gamma_1 + \mathcal{K} + 2E) = 8\Gamma_1^2E + 4\Gamma_1^2\mathcal{K} + 2(10\lambda + 3\mu + 8d)\Gamma_1P.$$

La projection sur X est alors

$$[P] = q_*[S_5] = 4K + 8e.$$

Pour conclure les calculs :

```
> s5:=2*(2*Ga+K)*(K+2*E)*(Ga+K+2*E):
> looknice(simp(s5*E));
```

$$4 d (d - 2) - 8 b$$

```
> looknice(simp(s5*Ga));
```

$$2 d (d - 2) (3 d - 4) - 2 (9 d - 20) b + 18 t$$

□

2.6 Surface S_6 : surface flecnodale

Proposition 8.2.6 - *Le lieu des points flecnodaux sur X est coupé par le cycle $11K + 20e$ et est de degré $d(11d-24) - 22b$. La surface réglée engendrée par les tangentes asymptotiques aux points flecnodaux est de degré $2d(d-3)(3d-2) - 2(9d-22)b + 18t$, de borne $O(n^3\delta^3)$ et de borne réduite $O(n\delta^3)$.*

Preuve. On a simplement :

```
> l4:=loadclass([4],0,cs):
> looknice(simp(l4*E));
```

$$d (11 d - 24) - 22 b$$

```
> looknice(simp(l4*Ga));
```

$$2 d (d - 3) (3 d - 2) - 2 (9 d - 22) b + 18 t$$

□

Proposition 8.2.7 - *La surface flecnodale S_6 recoupe la surface X en une courbe de simple intersection de degré $2d(d-4)(3d^2+d-12) - 2(9d^2-22d-44)b + 18dt$.*

2.7 Surface $S_7 : D + SF$

Proposition 8.2.8 - La surface réglée formée par les droites coupant la courbe double deux fois de telle sorte qu'un des points de contact soit aussi un point de tangence de la courbe double et du générateur de contours est de degré $\frac{1}{2}(-3d - 4)b + db^2 - 3(b - 3)t$, borne $O(n^5\delta^5)$ et borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Preuve. On commence pour cela par transférer le cycle des bisécantes à D_b de $A^*(F_{D_b})$ dans $A^*(F_X)$. Pour cela, il suffit de voir que si l est le plongement de F_{D_b} dans F_X , alors :

$$\begin{cases} l_*[F_{D_b}] = \phi, \\ b\varepsilon = l^*E, \\ g_1 = l^*\Gamma_1. \end{cases}$$

Par suite, puisque

$$m(1, 1; 1) = (b - 1)g_1 - \Upsilon\varepsilon,$$

on trouve

$$m(1, 1; 1)_{F_X} = l_*m(1, 1; 1) = (b - 1)(d - 4)\Gamma_1E - (b - 1)\Gamma_1\mathcal{K} - 2\Upsilon P.$$

Il faut se rappeler qu'un générateur de contours ne peut pas traverser la courbe double (génériquement) et par conséquent intersecter $m(1, 1; 1)_{F_X}$ avec le cycle $l(2; 0)$ des droites tangentes à la surface revient bien à imposer que le premier point soit un point de tangence de la courbe double avec un générateur de contours. En considérant alors :

$$[S_7] = l(2; 0).m(1, 1; 1)_{F_X},$$

le degré de S_7 est alors

$$\frac{1}{2} \int [S_7].\Gamma_1,$$

le facteur 1/2 provenant de l'utilisation de ϕ .

□

2.8 Surface $S_8 : F + SF$

Proposition 8.2.9 - La surface événement visuel constituée des droites bitangentes à X où un des points de contact est aussi un point de tangence entre la courbe double et le générateur de contours a pour degré

$$\frac{1}{2}(d^3 - d^2 - 10d + 24)b - db^2 + 3bt - \frac{3}{2}(d^2 - d - 10)t,$$

pour borne $O(n^5\delta^5)$ et pour borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Preuve. De manière parallèle à ce que nous avons fait pour la surface S_7 , nous considérons le cycle des droites bitangentes à X et le modifions de telle sorte que le premier point soit un point de tangence de la courbe double et d'un générateur de contours :

$$[S_8] = \phi.l(2, 2; 0),$$

et le degré de cette surface réglée est alors

$$\frac{1}{2} \int [S_8].\Gamma_1,$$

le facteur 1/2 provenant de l'utilisation de ϕ (l'intersection avec ϕ a rendu $l(2, 2; 0)$ asymétrique et donc il n'y a pas de facteur de surcompte dans ce cas).

□

2.9 Surface $S_9 : D + T$

Proposition 8.2.10 - La surface événement visuel formée par les droites rencontrant la courbe double et passant par un point triple a pour degré $(b-1)t$, borne $O(n^5\delta^5)$ et borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Preuve. Comme nous l'avons déjà vu, le cycle dans $A^*(F_{D_b})$ des bisécantes est

$$m(1, 1; 1) = (b-1)g_1 - \Upsilon\varepsilon.$$

On modifie ensuite ce cycle afin que le premier point de contact soit un point triple de la surface. L'image réciproque de t^* , le cycle des points triples dans $A^*(D_b)$, dans $A^*(F_{D_b})$ est $t\varepsilon$, et ainsi on utilise :

$$[S_9] = t\varepsilon.m(1, 1; 1),$$

donc le degré de S_9 est :

$$\int [S_9].g_1 = (b-1)t.$$

□

2.10 Surface $S_{10} : F + T$

Proposition 8.2.11 - La surface réglée formée par les droites tangentes à la surface et qui passent par un de ses points triples a pour degré $-2bt + (d-2)(d+1)t$, pour borne $O(n^5\delta^5)$ et pour borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Preuve. Le cycle des points triples dans $A^*(X)$ est t^* , et son image réciproque dans $A^*(F_X)$ est alors tP . Pour traiter le cas présent, on commence par utiliser le cycle des droites rencontrant la surface en deux points, transversalement puis tangentiuellement, à savoir

$$l(1, 2; 0) = \bar{q}^*\bar{q}_*.l(2; 0) - 2l(2; 0).$$

Ensuite, on impose que le premier ne soit pas n'importe quel point de la surface, mais soit un point triple, c.-à-d.

$$[S_{10}] = tP.l(1, 2; 0).$$

Le degré de cette surface est alors

$$\int [S_{10}].\Gamma_1 = -2bt + (d-2)(d+1)t.$$

□

2.11 Surface $S_{11} : D + C$

Proposition 8.2.12 - La surface événement visuel engendrée par les droites qui rencontrent la courbe double puis sont asymptotiques a pour degré

$$\frac{1}{2}(2d^3 - 17d + 24)b - 3db^2 + 3bt + \frac{27}{2}t,$$

pour borne $O(n^5\delta^5)$, et pour borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Preuve. Nous commençons avec le cycle $l(1, 3; 0)$ des droites rencontrant la surface X en deux points, transversalement puis asymptotiquement :

$$l(1, 3; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* l(3; 0) - 3l(3; 0),$$

et nous modifions ce cycle pour que le premier point de contact soit un point de la courbe double :

$$[S_{11}] = \phi.l(1, 3; 0).$$

Voyons comment le calcul se finit :

```
> l13:=loadclass([1,3],0,cs):
> phi:=(d-4)*E-K:
> looknice(simp(phi*l13*Ga/2));
          3                2
1/2 (2 d  - 17 d + 24) b - 3 d b  + 3 b t + 27/2 t
```

□

2.12 Surface S_{12} : $F + C$ traversée de point de rebroussement

Proposition 8.2.13 - *Le lieu des points sur X ayant une tangente ordinaire qui est également asymptotique en un autre point est de degré*

$$d(d-2)(d-4)(d^2+2d+12) - (5d^3 - 15d^2 + 16d - 96)b + 6(d-2)b^2 - 6bt + 3d(d-1)t,$$

alors que le lieu des points ayant une tangente asymptotique qui est ailleurs ordinaire est de degré

$$d(d-4)(3d^2+5d-24) - 2(6d^2-7d-48)b + 12b^2.$$

La surface réglée engendrée par ces droites a pour degré

$$d(d-3)(d-4)(d^2+6d-4) - (5d^3 - 3d^2 - 98d + 192)b + 6db^2 - 6bt + 3(d+5)(d-6)t,$$

pour borne $O(n^5\delta^5)$, et pour borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

Proposition 8.2.14 - *La courbe de simple intersection de la surface traversée de point de rebroussement S_{12} avec X est de degré*

$$d(d-4)(d-5)(d^3+6d^2-d-24) - (5d^4 - 13d^3 - 104d^2 + 202d + 480)b + 6(d^2-2d-2)b^2 - 6(d-2)bt + 3d(d-7)(d+4)t.$$

2.13 Surface S_{13} : $D + +D$

Proposition 8.2.15 - *Les droites supportant les points de contact des plans bitangents à la courbe double forment une surface réglée de degré $(b-3)((d-2)b-3t)$, de borne $O(n^5\delta^5)$ et de borne réduite $O(n^2\delta^5)$.*

Preuve. Soit \check{D}_b la surface de $\check{\mathbb{P}}^3$ paramétrant l'ensemble des plans tangents à D_b , comme nous l'avons vu dans le Chapitre 6, Paragraphe 2 (page 88). Une droite générant S_{13} se transforme en une tangente à la courbe double de \check{D}_b , et ainsi le degré cherché est le rang de cette courbe double. \check{D}_b étant une surface développable, nous avons montré dans le Chapitre 4, Paragraphe 3 (page 59) comment calculer le rang de sa courbe double. $\check{\tau}$ étant le degré de cette courbe, \check{i} celui de la courbe cuspidale de \check{D}_b , \check{b} celui de \check{D}_b , le degré de S_{13} est :

$$\begin{aligned} \alpha &= \check{\tau}(9-2\check{b}) + \frac{1}{2}(\check{b}-4)(\check{b}(2\check{b}-3)-6\check{i}), \\ &= 2(b-3)(b+g-1), \\ &= (b-3)((d-2)b-3t). \end{aligned}$$

□

2.14 Surface $S_{14} : F + +D$

Proposition 8.2.16 - *Les droites supportant les points de contact des plans tangents à la fois à la courbe double et à la surface forment une surface réglée de degré $d(d-1)(2d-3)b - (5d-8)b^2 + 9bt - 3d(d-1)t$, de borne $O(n^5\delta^5)$ et de borne réduite $O(n^2\delta^5)$.*

Preuve. Un plan touchant à la fois D_b et X correspond à un point de \mathbb{P}^3 qui appartient à la fois à \check{D}_b et à \check{X} , et ainsi une droite de S_{14} correspond à une tangente à la courbe d'intersection \check{W} des deux surfaces \check{D}_b et \check{X} , le degré de S_{14} étant le rang de \check{W} . Nous avons vu dans le Chapitre 7, Paragraphe 5 (page 105) comment calculer le rang de la courbe d'intersection de deux surfaces. Utilisant \check{d}, \check{b} et $\mu_1(\check{X}), \mu_1(\check{D}_b)$ pour désigner les degrés et rangs respectifs de \check{X} et \check{D}_b , le degré de S_{14} est alors :

$$\begin{aligned} r &= \mu_1(\check{D}_b)\check{d} + \mu_1(\check{X})\check{b}, \\ &= d(d-1)(2d-3)b - (5d-8)b^2 + 9bt - 3d(d-1)t. \end{aligned}$$

□

2.15 Surface $S_{15} : F + +F$ traversée de tangente

Proposition 8.2.17 - *Le lieu des points de contact des plans bitangents à X est de degré*

$$d(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12) - (5d^3 - 11d^2 + 6d - 26)b + 2(3d-4)b^2 - 6bt + 3d(d-1)t,$$

et la surface formée des droites supportant ces points de contact a pour degré

$$d(d-2)(d-3)(d^2 + 2d - 4) - (5d^3 - 11d^2 - 27d + 66)b + 2(3d-4)b^2 - 6bt + 3(d^2 - d - 11)t,$$

borne $O(n^5\delta^5)$ et borne réduite $O(n^2\delta^5)$.

2.16 Surface $S_{16} : D + D + D$

Proposition 8.2.18 - *La surface réglée engendrée par les trisécantes à la courbe double D_b a pour degré*

$$\frac{1}{6}(b-2)((4-3d)b + 2b^2 + 9t),$$

borne $O(n^6\delta^6)$ et borne réduite $O(n^3\delta^6)$.

Preuve. Pour cela, il suffit de se placer dans $A^*(F_{D_b})$ et de regarder le cycle $m(1, 1, 1; 1)$:

$$[S_4] = m(1, 1, 1; 1) = \bar{r}^* \bar{r}_* m(1, 1, 1; 1) - 2c'_1 \cdot m(1, 1, 1; 1) + 2c'_2,$$

où $m(1, 1, 1; 1)$ est le cycle des bisécantes. Nous obtenons :

$$[S_4] = (b^2 - 3b + 4 - \Upsilon)g_1^2 + (-4b + (6-b)\Upsilon)g_1\varepsilon,$$

et puisque le facteur de surcompte est $p(1, 1, 1) = 6$, le résultat est :

$$\frac{1}{6} \int [S_4] \cdot g_1.$$

□

2.17 Surface S_{17} : $F + D + D$

Proposition 8.2.19 - *La surface trilocale formée par les droites tangentes à la surface et qui rencontrent ensuite deux fois la courbe double est de degré*

$$-\frac{1}{2}(d-2)(d^2+d-4)b + d(d-1)b^2 - 2b^3 + \frac{3}{2}(d+2)(d-3)t,$$

borne $O(n^6\delta^6)$ et borne réduite $O(n^3\delta^6)$.

Preuve. Nous commençons par le cycle des droites qui rencontrent la surface une première fois transversalement, puis deux autres fois en des points de la courbe double :

$$l(1, D_b, D_b; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* l(D_b, D_b; 0) - 2l(D_b, D_b; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* m(1, 1; 1)_{F_X} - 2m(1, 1; 1)_{F_X}.$$

Alors on a :

$$l(2, D_b, D_b; 0) = l(2; 0).l(1, D_b, D_b; 0) - 2l(D_b + F, D_b; 0),$$

et ce dernier terme $l(D_b + F, D_b; 0)$ est précisément celui que nous avons rencontré pour la surface S_7 , à savoir $l(2; 0).m(1, 1; 1)_{F_X}$. Nous aboutissons à :

$$[S_{17}] = l(2, D_b, D_b; 0) = l(2; 0).(\bar{q}^* \bar{q}_* m(1, 1; 1)_{F_X} - 4m(1, 1; 1)_{F_X}).$$

Le facteur de surcompte est de 2 pour l'utilisation de $m(1, 1; 1)$ et encore de 2 à cause de ϕ , et le résultat final est alors :

$$\frac{1}{4} \int l(2, D_b, D_b; 0). \Gamma_1.$$

□

2.18 Surface S_{17} bis : $D + F + D$

Proposition 8.2.20 - *La surface générée par les droites coupant la courbe double puis tangentes à X puis recoupant la courbe double est de degré*

$$(3d-4)b + 2d(d-2)b^2 - 4b^3 + 6bt - 9t.$$

Preuve. Nous inversons maintenant l'ordre des contacts par rapport à la surface S_{17} . Cela donne :

$$[S_{17b}] = l(D_b, F, D_b; 0) = \phi \bar{q}^* \bar{q}_* l(F, D_b; 0) - 4l(2; 0).m(1, 1; 1)_{F_X}.$$

Le résultat est alors :

$$\frac{1}{4} \int [S_{17b}]. \Gamma_1.$$

□

2.19 Surface S_{18} : $F + F + D$

Proposition 8.2.21 - *La surface réglée générée par les droites bitangentes à la surface et qui de plus rencontrent la courbe double est de degré*

$$(d^4 - 5d^3 + 2d^2 + 16d - 24)b - 4d(d-3)b^2 + 4b^3 - 12bt + 3(d^2 - d - 10)t,$$

de borne $O(n^6\delta^6)$ et de borne réduite $O(n^3\delta^6)$.

Preuve. Pour obtenir le cycle $[S_{18}]$ dans F_X , on regarde d'abord le cycle des droites ayant des contacts de type $(1, 2, 2)$, à savoir :

$$l(1, 2, 2; 0) = \bar{q}^* \bar{q}_* l(2, 2; 0) - 4l(2, 2; 0),$$

où

$$l(2, 2; 0) = c_1 \bar{q}^* \bar{q}_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2$$

comme nous l'avons déjà vu. Nous imposons en outre que le premier point soit un point de la courbe double, ce qui revient à considérer le cycle :

$$[S_{18}] = \phi.l(1, 2, 2; 0).$$

Le facteur de surcompte à considérer est celui qui correspond aux deux derniers points, $p(2, 2) = 2$, et puisqu'il faut en outre diviser par 2 à cause de l'utilisation de ϕ , le nombre cherché est :

$$\frac{1}{4} \int [S_{18}].\Gamma_1.$$

□

2.20 Surface S_{18} bis : $F + D + F$

Proposition 8.2.22 - *Le degré de la surface engendrée par les droites tangentes puis rencontrant la courbe double puis de nouveau tangentes est*

$$\frac{1}{4}(4d^4 - 13d^3 + 9d^2 + 40d - 96)b - \frac{1}{2}d(8d - 13)b^2 + 4b^3 - \frac{15}{2}bt + \frac{15}{4}(d^2 - d - 8)t.$$

Preuve. Par rapport au cas S_{18} , nous imposons ici des contacts dans un ordre un peu différent. On a :

$$[S_{18b}] = l(2, D_b, 2; 0) = l(2; 0).l(1, D_b, 2; 0) - l(D_b + F, 2; 0).$$

Il faut alors calculer :

$$\frac{1}{4} \int [S_{18b}].\Gamma_1.$$

□

2.21 Surface S_{19} : $F + F + F$ point triple

Proposition 8.2.23 - *Le lieu de contacts des droites tritangentes à X est de degré*

$$\frac{1}{2}d(d-2)(d-4)(d-5)(d^2+5d+12) - (3d^4 - 14d^3 - 13d^2 + 18d + 256)b + 2(3d^2 - 8d - 10)b^2 - 4b^3 + 12bt - 6d(d-1)t,$$

et la surface réglée générée par ces droites a pour degré

$$\frac{1}{3}d(d-3)(d-4)(d-5)(d^2+3d-2) - \frac{2}{3}(3d^4 - 21d^3 + 12d^2 + 150d - 256)b + 4d(d-4)b^2 - \frac{8}{3}b^3 + 12bt - 2(3d^2 - 3d - 44)t,$$

borne $O(n^6\delta^6)$ et borne réduite $O(n^3\delta^6)$.

□

Proposition 8.2.24 - *La surface événement visuel point triple S_{19} recoupe X en une courbe de simple intersection de degré*

$$\frac{1}{3}d(d-4)(d-5)(d-6)(d^3+3d^2-2d-12) - \frac{2}{3}(3d^5 - 30d^4 + 54d^3 + 189d^2 - 310d - 768)b + 4d(d-5)(d^2-2d-2)b^2 - \frac{8}{3}(d-1)b^3 + 12(d-2)bt - 2d(3d^2-9d-38)t.$$

2.22 Surface S_{20} : inflexions des contours

Proposition 8.2.25 - La surface événement visuel formée des points de vue depuis lesquels un changement d'inflexion des contours peut être observé est de degré $2d(d-2)(11d-24) - 2(33d-92)b + 66t$.

Preuve. Un changement d'inflexion est observé lorsque l'observateur traverse le plan tangent à un godron. Ces points sont en nombre :

$$\frac{1}{2} \int [S].[P] = 2d(d-2)(11d-24) - 2(33d-92)b + 66t,$$

d'où le résultat. □

2.23 Surface S_{21} : inflexions des faux-plis

Proposition 8.2.26 - La surface événement visuel S_{21} permettant d'observer les changements d'inflexion des courbes faux-plis est de degré $2(3d-10)b - 18t$.

Preuve. Ces changements d'inflexion surviennent lorsque l'observateur traverse un plan osculateur de la courbe double qui est tel que la torsion de cette courbe au point de contact est nulle. Plaçons nous dans \bar{F}_{D_b} . La condition que nous venons d'énoncer revient à dire que quatre points de la courbe double deviennent infiniment près les uns des autres. Le cycle correspondant à cette condition est :

$$n(4) = \bar{c}_1^3 + 3\bar{c}_1\bar{c}_2 + 2\bar{c}_3 = (2(3d-10)b - 18t) * .$$

La surface S_{21} est constituée de tous les plans qui vérifient la condition énoncée, et le résultat s'ensuit. □

3 Deux cas particuliers

Considérons brièvement dans ce paragraphe deux exemples particuliers de surfaces lisses par morceaux. Nous regardons tout d'abord le cas d'un assemblage de plans, puis d'un assemblage de quadriques.

3.1 Assemblages de plans

Supposons que la surface X est constituée de n plans s'intersectant deux à deux transversalement. Dans ce cas, les quantités d, b et t s'expriment aisément en fonction de n :

$$\begin{cases} d = n, \\ b = n(n-1)/2, \\ t = n(n-1)(n-2)/6. \end{cases}$$

On observe alors que le rang de la courbe double $\Upsilon = (d-2)b - 3t$ est nul, comme espéré. En effet, les tangentes à la courbe double sont ici en nombre fini et génériquement elles ne rencontrent pas une droite en position générale de l'espace. Les surfaces d'événement visuel à considérer sont celles qui concernent uniquement les singularités des projections des courbes doubles, à savoir S_4, S_9 et S_{16} . Les degrés de ces surfaces sont :

$$- S_4 : \frac{1}{2}n(n-1)(n-2),$$

- $S_9 : \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)^2(n+1)$,
- $S_{16} : \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n+1)(n^2-n-4)$.

3.2 Assemblages de quadriques

Si l'on passe maintenant au cas plus élaboré d'une surface X constituée de n surfaces quadriques lisses s'intersectant deux à deux transversalement, une situation qui devrait connaître des développements en vision, alors on a :

$$\begin{cases} d = 2n, \\ b = 2n(n-1), \\ t = 4n(n-1)(n-2)/3. \end{cases}$$

Il faut ensuite remarquer que les surfaces quadriques ne possèdent pas de tangentes asymptotiques. On peut s'en rendre compte de deux manières différentes. D'abord, de telles tangentes correspondent aux dérivées troisièmes de l'équation définissant la surface. La surface étant de degré 2, ces dérivées sont nulles. Ensuite, nous avons vu que le bidegré (v, w) de la congruence asymptotique était :

$$\begin{cases} v = d(d-1)(d-2) - 3(d-2)b + 3t, \\ w = 3d(d-2) - 6b, \end{cases}$$

et en remplaçant par les valeurs de d, b et t , on trouve que $v = w = 0$. Par suite, les surfaces S_1, S_5, S_6, S_{11} et S_{12} , toutes constituées de droites asymptotiques, n'entrent pas en considération ici. En outre, le nombre de godrons est identiquement nul, et donc il n'y a pas de changements d'inflexions des contours. Voyons le reste des surfaces :

- $S_2 : 4n(n-1)$,
- $S_3 : 4n(n-1)$,
- $S_4 : 4n(n-1)(n-2)$,
- $S_7 : 8n(n-1)(n^2-n-1)$,
- $S_8 : 8n(n-1)(n-2)$,
- $S_9 : \frac{4}{3}n(n-1)(n-2)(2n^2-2n-1)$,
- $S_{10} : \frac{8}{3}n(n-1)^2(n-2)$,
- $S_{13} : 4n(n-1)(2n^2-2n-3)$,
- $S_{14} : 12n^2(n-1)$,
- $S_{15} : 4n(n-1)$,
- $S_{16} : \frac{8}{3}n(n-1)(n-2)(n+1)(n^2-n-1)$,
- $S_{17} : 8n(n-1)(n-2)(n^2-n-1)$,
- $S_{17bis} : 16n(n-1)(n^3-3n^2+2n+1)$,
- $S_{18} : 8n(n-1)(n^2-3n+4)$,
- $S_{18bis} : 4n(n-1)(2n^2-5n+8)$,
- $S_{19} : \frac{8}{3}n(n-5)(n+2)$,
- $S_{21} : 8n(n-1)$.

On peut en outre voir qu'un profil stable possède $2n(n-1)$ points doubles comme seules singularités, alors qu'un faux-pli a $n(n-1)(2n^2-6n+5)$ points doubles et $6n(n-1)$ inflexions.

4 Conclusion sur le nombre de vues d'un objet

Concluons cette partie en comparant nos résultats avec ceux obtenus par Joachim Rieger, les seuls autres connus dans ce domaine. Pour ce qui concerne la complexité des surfaces événement visuel, notons tout d'abord d'après les résultats obtenus que toutes les surfaces locales sont de degré $O(n^3\delta^3)$, les surfaces bilocales de degré $O(n^5\delta^5)$ et les trilocales de degré $O(n^6\delta^6)$. Pour les surfaces multilocales, [Rieger, 1993b] trouvent les mêmes bornes supérieures sur les degrés. Pour les surfaces locales, certaines de nos bornes sont meilleures. Par exemple, nous obtenons $O(n^3\delta^3)$ pour les surfaces paraboliques et flecnodales, alors que Rieger obtient $O(n^4\delta^4)$. En outre, notre méthode a l'énorme avantage de donner des résultats exacts pour ces degrés en fonction des invariants numériques de la surface, alors que les techniques employées par Rieger, qui utilisent la théorie des singularités, ne permettent que d'obtenir des bornes.

Passons pour finir à la complexité globale du graphe d'aspects, où la conclusion s'effectue comme dans [Rieger, 1993a]. Les surfaces d'événement visuel les plus complexes sont les surfaces trilocales, avec une borne de $O(n^6\delta^6)$ sur le degré. Cela signifie que l'ensemble de bifurcation global \mathcal{B} est inclus dans une variété de degré $O(n^6\delta^6)$ également. Considérons d'abord le cas de la projection en perspective, où l'espace des points de vue est $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Soit les compactifications suivantes : $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{\infty\}$ et $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{\infty\}$. On a alors les isomorphismes suivants de groupes d'homologie :

$$H_0(\mathcal{V} - \mathcal{B}) \simeq H_0(\bar{\mathcal{V}} - \bar{\mathcal{B}}) \simeq H_3(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{B}}) \simeq H_3(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}),$$

l'isomorphisme central provenant de la propriété de dualité de Lefschetz et les autres étant induits par inclusion de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$ dans $(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{B}})$. D'après la séquence exacte de la paire $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$:

$$0 \longrightarrow H_3(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H_3(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \longrightarrow H_2(\mathcal{B}) \longrightarrow H_2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0,$$

et le fait que \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 peuvent être contractés en un point, ce qui signifie que $H_3(\mathbb{R}^3) = H_2(\mathbb{R}^2) = 0$, on voit que le rang de $H_3(\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$ est égal à celui de $H_2(\mathcal{B})$, c.-à-d. le nombre de Betti $b_2(\mathcal{B})$. D'après les isomorphismes donnés plus haut, cela signifie que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^3 - \mathcal{B}$, à savoir le rang de $H_0(\mathcal{V} - \mathcal{B})$, est égal à $b_2(\mathcal{B})$.

Si maintenant on considère la projection orthographique, alors on identifie \mathcal{V} avec une sphère unité S^2 . Toujours par dualité de Lefschetz, on a :

$$H_0(S^2 - \mathcal{B}) \simeq H_2(S^2, \mathcal{B}).$$

Comme précédemment, nous avons une séquence exacte de la paire (S^2, \mathcal{B})

$$0 \longrightarrow H_2(\mathcal{B}) \longrightarrow H_2(S^2) \longrightarrow H_2(S^2, \mathcal{B}) \longrightarrow H_1(\mathcal{B}) \longrightarrow H_1(S^2) \longrightarrow 0,$$

et $H_1(S^2) = 0$ (une sphère ne possède pas de trous), $H_2(\mathcal{B}) = 0$ et $\text{rang } H_2(S^2) = 1$. On trouve alors que le rang de $H_2(S^2, \mathcal{B})$ est égal à $b_1(\mathcal{B}) + 1$. Par isomorphisme, cela signifie que le nombre de composantes connexes de $S^2 - \mathcal{B}$ est égal à $b_1(\mathcal{B}) + 1$.

Pour conclure, nous utilisons un résultat connu sous le nom de *borne de Thom-Milnor* [Milnor, 1964; Thom, 1965] : la somme des nombres de Betti d'un ensemble défini par des polynômes en o variables de degré au plus p est bornée par $O(p^o)$. En utilisant ce que nous venons de voir, cela revient à dire qu'une surface lisse par morceaux possède $O(n^{12}\delta^{12})$ vues dans le cas d'une projection orthographique (espace des points de vue à deux dimensions, donc $o = 2$) et $O(n^{18}\delta^{18})$ vues pour une projection en perspective ($o = 3$). Dans le cas d'une surface homéomorphe à un polyèdre, ces bornes sont respectivement $O(n^6\delta^{12})$ et $O(n^9\delta^{18})$. Notons que ces résultats sont identiques à ceux trouvés par [Rieger, 1993b].

5 Bilan

La théorie des points multiples permet, nous venons de le voir, de mener à leur terme tous les calculs de complexité des surfaces d'événement visuel, et ceci de manière exacte. Notons que nous n'avons jamais

manipulé les équations définissant les entités algébriques rencontrées, et que la majeure partie du travail a consisté à raisonner en termes géométriques et topologiques de contact et d'ordre de contact. Des cas particuliers de surfaces lisses par morceaux semblent particulièrement intéressants pour la vision par ordinateur. Les assemblages de quadriques possèdent un grand pouvoir de modélisation et ont un nombre réduit de surfaces événement visuel et d'aspects différents.

Partie III

Contacts de droites dans \mathbb{P}^m et coïncidence de complexes

Dans cette partie, nous nous éloignons quelque peu du cadre de la vision par ordinateur abordé dans la partie précédente. Nous explorons d'autres applications de la théorie des points multiples, donnant des résultats énumératifs concernant des droites ayant des contacts spécifiques avec une variété dans un espace projectif à m dimensions, où $m = 4, 5$ et 6 . Nous travaillons aussi sur des formules de coïncidence pour des complexes de droites.

De tels résultats ont déjà été donnés pour des surfaces de \mathbb{P}^m ($m = 4, 5$ ou 6) dans [le Barz, 1987a; le Barz, 1987b; le Barz, 1990], en utilisant la formulation des schémas de Hilbert. Ici, nous vérifions tous ces résultats dans le cadre de la théorie des points multiples stationnaires et en donnons beaucoup d'autres nouveaux. Nous donnons également des résultats pour une hypersurface dans \mathbb{P}^4 et dans \mathbb{P}^5 et pour une courbe de \mathbb{P}^4 . Notre approche a l'avantage énorme sur les schémas de Hilbert que la plupart de ses étapes peuvent être (et ont été) automatisées. Mentionnons également que le cas des surfaces de \mathbb{P}^4 a été aussi abordé dans [Colley, 1986]. Pour les pinceaux de droites, un début d'étude apparaît dans [Colley, 1988], et également dans [Colley, 1990], cette fois du point de vue des schémas de Hilbert.

Un autre exemple d'application de la théorie des points multiples stationnaires peut être trouvé dans [Colley, 1983] et concerne les *formes planes*. Ces entités sont des variétés à r dimensions dans \mathbb{P}^m , réglées par une famille à un paramètre de $(r - 1)$ -plans de telle sorte qu'un point général de la forme appartienne à exactement un $(r - 1)$ -plan. Les surfaces réglées sont les exemples les plus simples de formes planes.

Comme le cas de \mathbb{P}^3 l'a démontré, appliquer la théorie des points multiples à une fonction spécifique $f : U \rightarrow V$ de codimension n est une méthode en deux étapes. Premièrement, calculer une classe de points multiples $l(\mathbf{a}; n)$ comme fonction symbolique de n et des classes de Chern de f . Nous avons vu que cette étape s'effectue à l'aide de la procédure *statclass* et est indépendante de la véritable expression des classes de f et de la théorie de l'intersection sur U et V . Deuxièmement, évaluer l'intersection de $l(\mathbf{a}; n)$ avec une condition géométrique, étant données les théories de l'intersection sur U et V , et le comportement de l'homéomorphisme direct f_* . Comme dans \mathbb{P}^3 , nous avons implanté cette étape, sans l'interfacer réellement avec le calcul des formules de points multiples. Il est ici aussi bien plus efficace de retrouver les classes de points multiples calculées au préalable dans une base, celles-ci étant longues à calculer.

Dans les trois premiers chapitres, nous étudions les contacts de droites dans \mathbb{P}^4 , \mathbb{P}^5 et \mathbb{P}^6 respectivement. Des résultats préliminaires sur ces questions sont présentés dans [Petitjean, 1995a]. La procédure de construction étant similaire dans les trois cas, à quelques éléments près, nous détaillerons essentiellement le premier chapitre, pour nous concentrer ensuite sur les points importants. En outre, nous avons prouvé Chapitre 7, Paragraphe 1 (page 94) la validité des approches décrites plus loin. Nous supposons que les variétés manipulées sont génériques, mais garderons en tête que la technique des schémas de Hilbert permet de se débarrasser de cette restriction. Dans le dernier chapitre, nous établissons des formules de coïncidence pour des complexes de droites, en étudiant leur validité.

Chapitre 9

Contacts de droites dans \mathbb{P}^4

Contents

1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 4)$	140
2	Espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^4	141
2.1	F_4 et la projectivisation de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)$	141
2.2	F_4 et la projectivisation de T	142
3	Contacts de droites avec un volume	142
3.1	Anneau de Chow	142
3.2	Résultats	143
4	Contacts de droites avec une surface	147
4.1	Anneau de Chow	148
4.2	Résultats	149
5	Contacts de droites avec une courbe	152
5.1	Anneau de Chow de F_C	152
5.2	Résultats	153
6	Bilan	153

Dans cet chapitre, nous étudions les contacts de droites avec des surfaces et des hypersurfaces (aussi appelées *volumes*) de \mathbb{P}^4 . Supposant que C, X et Y sont respectivement une courbe lisse, une surface à singularités ordinaires et une hypersurface lisse de \mathbb{P}^4 , nous considérons les trois diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}^4 & \xleftarrow{a} F_{1,1,3} & \xrightarrow{\bar{a}} G(1, 4) \\
 \uparrow u & & \uparrow v \\
 Y & \xleftarrow{b} F_{1,1,3}(3) & \nearrow \bar{b}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}^4 & \xleftarrow{a} F_{1,1,3} & \xrightarrow{\bar{a}} G(1, 4) \\
 \uparrow w & & \uparrow x \\
 X & \xleftarrow{c} F_{1,1,3}(2) & \nearrow \bar{c}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}^4 & \xleftarrow{a} F_{1,1,3} & \xrightarrow{\bar{a}} G(1, 4) \\
 \uparrow \beta & & \uparrow \gamma \\
 C & \xleftarrow{\alpha} F_{1,1,3}(1) & \nearrow \bar{\alpha}
 \end{array}$$

$G = G(1, 4)$ est la Grassmannienne de droites dans \mathbb{P}^4 à 6 dimensions. $F_{1,1,3}$ est la variété de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^4 à 7 dimensions, c.-à-d.

$$F_{1,1,3} = \{(x, l) \in \mathbb{P}^4 \times G / x \in l\},$$

et $F_{1,1,3}(3)$ (dimension 6), $F_{1,1,3}(2)$ (dimension 5) et $F_{1,1,3}(1)$ (dimension 4) sont les restrictions de $F_{1,1,3}$ à Y, X et C respectivement. Notons dès à présent que a, b et c étant des fonctions propres, on a $u^*a_* = b_*v^*, w^*a_* = b_*x^*$.

1 Construction de la Grassmannienne $G(1, 4)$

Soit γ_1 le cycle des droites de \mathbb{P}^4 rencontrant un plan général et γ_2 le cycle des droites contenues dans un hyperplan général (à savoir un \mathbb{P}^3 en position générale). Soit T le fibré tautologique de rang 2 sur G et R le fibré quotient de rang 3. Soit $[1], [2]$ et $[3]$ les cycles spéciaux de Schubert, les classes de Chern de R . D'après la séquence exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow V_G \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

où V_G est le fibré vectoriel trivial de rang 5 sur G , et le fait que le polynôme de Chern de T est

$$C_\omega(T) = 1 - \gamma_1\omega + \gamma_2\omega^2,$$

nous obtenons immédiatement que

$$\begin{cases} [1] = \gamma_1, \\ [2] = \gamma_1^2 - \gamma_2, \\ [3] = \gamma_1^3 - 2\gamma_1\gamma_2. \end{cases}$$

$[2]$ est ainsi le cycle des droites rencontrant une droite en position générale et $[3]$ celui des droites passant par un point en position générale.

En utilisant les règles de Pieri et de Giambelli vues dans le Chapitre 4, Paragraphe 2 (page 54), nous trouvons que :

$$\begin{cases} [1]^2 = [2] + [1, 1], \\ [1]^3 = 2[2, 1] + [3], \\ [1][2] = [2, 1] + [3], \\ [2]^2 = [2, 2] + [3, 1], \\ [2]^3 = [3, 3], \end{cases}$$

de telle sorte qu'en utilisant la règle de dualité, nous obtenons :

$$\begin{cases} \int [1]^6 = \int ([1]^3)^2 = \int (2[2, 1] + [3])^2 = 4 + 1 = 5, \\ \int [1]^4[2] = \int [1]^3 \cdot [1][2] = 2 + 1 = 3, \\ \int [1]^2[2]^2 = \int ([1][2])^2 = 2, \\ \int [2]^3 = 1, \end{cases}$$

ce qui donne finalement pour γ_1 et γ_2 :

$$\begin{cases} \gamma_1^6 = [1]^6 = 5*, \\ \gamma_1^4\gamma_2 = [1]^4 \cdot ([1]^2 - [2]) = 2*, \\ \gamma_1^2\gamma_2^2 = [1]^2 \cdot ([1]^2 - [2])^2 = *, \\ \gamma_2^2 = *. \end{cases}$$

Il en découle également les relations :

$$\begin{cases} [1]^4 = 2[2]^2 + [1][3], \\ [1]^5 = 5[3][2], \end{cases}$$

qui se traduisent en :

$$\begin{cases} \gamma_1^4 = 3\gamma_1^2\gamma_2 - \gamma_2^2, \\ 2\gamma_1\gamma_2^2 = \gamma_1^3\gamma_2. \end{cases}$$

Considérons de nouveau la séquence exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow V_G \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

et prenons la séquence associée (passage à $\text{Hom}(T, \cdot)$)

$$0 \longrightarrow T \otimes \tilde{T} \longrightarrow 5\tilde{T} \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow 0,$$

puisque \mathcal{T}_G s'identifie avec $\text{Hom}(T, R)$. Nous avons alors :

$$C_\omega(\mathcal{T}_G) = 1 + 5\gamma_1\omega + (11\gamma_1^2 + \gamma_2)\omega^2 + 15\gamma_1^3\omega^3 + (10\gamma_1^4 + 5\gamma_1^2\gamma_2)\omega^4 + 6\gamma_1^5\omega^5 + 10 * \omega^6.$$

Pour finir, nous avons obtenu la description suivante de l'anneau de Chow $A^*(G)$:

$$\begin{array}{l} \dim 1 \\ \dim 1 \\ \dim 2 \\ \dim 2 \\ \dim 2 \\ \dim 1 \\ \dim 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A^0(G) = \mathbb{Z}G, \\ A^1(G) = \mathbb{Z}\gamma_1, \\ A^2(G) = \mathbb{Z}\gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2, \\ A^3(G) = \mathbb{Z}\gamma_1^3 \oplus \mathbb{Z}\gamma_1\gamma_2, \\ A^4(G) = \mathbb{Z}\gamma_1^4 \oplus \mathbb{Z}\gamma_1^2\gamma_2, \\ A^5(G) = \mathbb{Z}\gamma_1^5, \\ A^6(G) = \mathbb{Z} * . \end{array} \right.$$

2 Espace de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^4

\mathbb{P}^4 et G sont des cas particuliers de variétés de drapeaux de type respectif $(1, 4)$ et $(2, 3)$. En outre $F_4 = F_{1,1,3}$ est de type $(1, 1, 3)$ et est ainsi une subdivision des types $(1, 4)$ et $(2, 3)$. Par conséquent, F_4 peut être construit de deux manières différentes. Considérons les séquences canoniques pour \mathbb{P}^4 et G :

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^4}(-1) \longrightarrow V_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow T \longrightarrow V_G \longrightarrow R \longrightarrow 0, \end{array}$$

où $V_{\mathbb{P}^4}$ est le fibré vectoriel trivial sur \mathbb{P}^4 . F_4 est isomorphe à la projectivisation de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ d'une part et isomorphe à la projectivisation de T de l'autre.

2.1 F_4 et la projectivisation de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)$

F_4 est le fibré projectif de droites dans le fibré $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)$. Soit H l'image réciproque dans $A^*(F_4)$ de la classe h d'un hyperplan dans \mathbb{P}^4 et ξ la classe $c_1(\Theta_{F_4}(1))$. Le polynôme de Chern de $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ étant

$$C_\omega(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1)) = 1 + h\omega + h^2\omega^2 + h^3\omega^3 + h^4\omega^4,$$

l'application de la Proposition 2.4.1 donne :

$$\xi^4 + \xi^3 H + \xi^2 H^2 + \xi H^3 + H^4 = 0,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_* \xi^3 = [\mathbb{P}^4], \\ a_* \xi^2 = 0, \\ a_* \xi = 0, \\ a_* [F_4] = 0. \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_*(\xi^3 H) = a_*(\xi^3 \cdot a^* h) = a_* \xi^3 \cdot h = h, \\ a_*(\xi^2 H^2) = a_*(\xi H^3) = a_*(H^4) = 0, \end{array} \right.$$

et finalement $a_*(\xi^4) = -h$.

Le polynôme de Chern de \mathcal{T}_{F_4} est donné par

$$C_\omega(\mathcal{T}_{F_4}) = C_\omega(a^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4})C_\omega(a^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1) \otimes \Theta_{F_4}(1)),$$

de telle sorte que la première classe est $c_1(\mathcal{T}_{F_4}) = 6H + 4\xi$.

2.2 F_4 et la projectivisation de T

F_4 est aussi isomorphe à la projectivisation du fibré tautologique de rang 2 sur G . Soit γ'_1 et γ'_2 les images réciproques dans $A^*(F_4)$ des cycles de Schubert γ_1 et γ_2 . Si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 = V_{F_4}$ est la filtration tautologique sur F_4 , alors $E_1 = a^*\Theta_{\mathbb{P}^3}(-1)$ et $E_2 = \bar{a}^*T$, et le fibré tautologique sur F_4 est

$$\Theta_{F_4}(-1) = \frac{E_2}{E_1},$$

ce qui revient à dire que

$$1 - \gamma'_1\omega + \gamma'_2\omega^2 = (1 - H\omega)(1 - \xi\omega),$$

ou encore que

$$\begin{cases} \xi = \gamma'_1 - H, \\ \gamma'_2 = H\xi = \gamma'_1 H - H^2. \end{cases}$$

En utilisant maintenant la séquence

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{F_4/G} \longrightarrow \mathcal{T}_{F_4} \longrightarrow \mathcal{T}_G \longrightarrow 0,$$

nous obtenons

$$C_\omega(\mathcal{T}_{F_4/G}) = 1 + (2H - \gamma'_1)\omega.$$

3 Contacts de droites avec un volume

Le cadre de travail étant établi, passons maintenant aux contacts de droites avec un volume de \mathbb{P}^4 .

3.1 Anneau de Chow

Soit E l'image réciproque dans $A^*(F_Y) = A^*(F_{1,1,3}(3))$ de la classe e d'une section hyperplan d'un volume lisse Y de degré d de \mathbb{P}^4 . Soit encore Γ_1 et Γ_2 les images réciproques dans $A^*(F_Y)$ des cycles γ'_1 et γ'_2 respectivement. Nous avons tout d'abord la relation

$$\Gamma_2 = k^*\gamma'_2 = k^*(H\gamma'_1 - H^2) = \Gamma_1 E - E^2.$$

Maintenant, il est facile de voir que la fonction \bar{b} est de degré d (une droite générale de \mathbb{P}^4 coupe Y en d points). D'après une relation analogue dans $A^*(Y)$, on obtient $E^4 = 0$. Aussi, pour l'homéomorphisme \bar{b}_* , nous voyons que

$$\bar{b}_*(\Gamma_1^{6-2k}\Gamma_2^k) = d\gamma_1^{6-2k}\gamma_2^k,$$

ce qui signifie

$$\begin{cases} \Gamma_1^6 = 5d*, \\ \Gamma_1^5 E = 5d*, \\ \Gamma_1^4 E^2 = 3d*, \\ \Gamma_1^3 E^3 = d*. \end{cases}$$

Nous avons aussi vu que dans $A^*(G)$, $\gamma_1^4 = 3\gamma_1^2\gamma_2 - \gamma_2^2$ et par conséquent

$$\Gamma_1^4 = 3\Gamma_1^2\Gamma_2 - \Gamma_2^2 = 3\Gamma_1^3E - 4\Gamma_1^2E^2 + 2\Gamma_1E^3.$$

Nous aboutissons à la description suivante de l'anneau de Chow de F_Y :

$$\begin{array}{l} \dim 1 \\ \dim 2 \\ \dim 3 \\ \dim 4 \\ \dim 3 \\ \dim 2 \\ \dim 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A^0(F_Y) = \mathbb{Z}[F_Y], \\ A^1(F_Y) = \mathbb{Z}\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}E, \\ A^2(F_Y) = \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1E \oplus \mathbb{Z}E^2, \\ A^3(F_Y) = \mathbb{Z}\Gamma_1^3 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1E^2 \oplus \mathbb{Z}E^3, \\ A^4(F_Y) = \mathbb{Z}\Gamma_1^4 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^3E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2E^2, \\ A^5(F_Y) = \mathbb{Z}\Gamma_1^5 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^4E, \\ A^6(F_Y) = \mathbb{Z}*. \end{array} \right.$$

Pour la projection dans $A^*(G)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_*[F_Y] = d[G], \\ \bar{b}_*E = d[1], \\ \bar{b}_*E^2 = \bar{b}_*(\Gamma_1E - \Gamma_2) = d[2], \\ \bar{b}_*E^3 = d[3]. \end{array} \right.$$

De la même manière, on peut obtenir des résultats concernant la projection dans $A^*(Y)$. Nous n'aurons pas vraiment besoin de ces résultats ici, mais nous donnons tout de même une indication sur la façon de poursuivre dans cette voie. Par exemple :

$$b_*\Gamma_1^3 = b_*v^*\gamma_1^3 = u^*a_*\gamma_1^3 = u^*a_*(\xi^3 + 3\xi^2H + 3\xi H^2 + H^3) = u^*[\mathbb{P}^4] = [Y].$$

Souhaitant appliquer la théorie des points multiples à \bar{b} , nous devons d'abord obtenir les classes de Chern de $\mathcal{N}_{F_Y/G}$. Tout d'abord, Y peut être vu comme un diviseur lisse dans \mathbb{P}^4 et F_Y comme un diviseur lisse dans F_4 . Ainsi,

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_Y/F_4}) = 1 + dE\omega.$$

\bar{b} est localement une intersection complète, et F_Y est isomorphe à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1))$, donc \bar{b} est lissable et

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_Y/G}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{F_Y/F_4})}{C_\omega(v^*\mathcal{T}_{F_4/G})},$$

et nous obtenons :

$$c_k = c_k(\mathcal{N}_{F_Y/G}) = (\Gamma_1 + (d-2)E)(\Gamma_1 - 2E)^{k-1}.$$

3.2 Résultats

Proposition 9.3.1 - Parmi les tangentes à Y ayant un contact d'ordre 5, $5d(d-4)(7d-12)$ sont contenues dans un hyperplan générique, $10d(d-4)(d^2-3d+3)$ rencontrent une droite en position générale et $5d(d-4)(2d-3)(d+2)$ rencontrent deux plans en position générale. En outre, la courbe sur Y constituée des points ayant une tangente d'ordre 5 qui coupe un plan en position générale est de degré $5d(7d^2-30d+24)$.

Preuve. Le cycle approprié, cycle dans F_Y des droites ayant un contact d'ordre 5 avec Y , est donné par

$$l(5;0) = c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4,$$

ou

$$l(5;0) = 10(5d-12)\Gamma_1^3E + 5(7d^2-60d+96)\Gamma_1^2E^2 + 10(d-2)(d-6)^2\Gamma_1E^3.$$

Parmi ces droites, $\int l(5; 0) \cdot \Gamma_2$ sont contenues dans un hyperplan, $\int l(5; 0) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$ rencontrent une droite et $\int l(5; 0) \cdot \Gamma_1^2$ rencontrent deux plans en position générale. Le degré de la courbe cherchée est alors

$$\int l(5; 0) \cdot \Gamma_1 \cdot E.$$

□

Proposition 9.3.2 - Les droites ayant un contact d'ordre 6 avec Y forment une hypersurface réglée de degré $5d(d-5)(17d^2-50d+24)$ et la courbe qu'elles tracent sur Y est de degré $5d(45d^2-274d+360)$. De plus, ces droites recourent Y en une courbe de simple intersection de degré $5d(d-4)(17d^2-337d+570)$.

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact d'ordre 6 avec Y est donné par (temps CPU : 9,5 s ; mémoire : 5,5 MB)

$$l(6; 0) = c_1^5 + 10c_1^3c_2 + 3c_1c_2^2 + 32c_1^2c_3 + 8c_2c_3 + 42c_1c_4 + 24c_5,$$

ou

$$l(6; 0) = 5(45d^2 - 274d + 360)\Gamma_1^3E^2 + 5(17d^3 - 270d^2 + 1096d - 1200)\Gamma_1^2E^3.$$

La courbe sur Y de points ayant une tangente d'ordre 6 est de degré $\int l(6; 0) \cdot E$, alors que le degré de l'hypersurface réglée cherchée est $\int l(6; 0) \cdot \Gamma_1$. Cette hypersurface recoupe Y en une courbe de simple intersection. Le cycle approprié est $l(1, 6; 0)$, avec

$$l(1, 6; 0) = \bar{b}^* \bar{b}_* l(6; 0) - 6l(6; 0),$$

et son degré est $\int l(1, 6; 0) \cdot E$.

□

Proposition 9.3.3 - Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 7 avec Y est $35d(d-6)(3d-10)(7d-12)$.

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact d'ordre 7 est donné par (temps CPU : 1 mn 26 s ; mémoire : 47,5 MB) :

$$l(7; 0) = c_1^6 + 15c_1^4c_2 + c_1^2c_2^2 + 84c_1^3c_3 - 5c_2^3 + 52c_1c_2c_3 + 178c_1^2c_4 + 52c_3^2 - 10c_2c_4 + 232c_1c_5 + 120c_6,$$

et l'évaluation de ce 0-cycle donne le résultat ci-dessus.

□

Proposition 9.3.4 - Parmi les droites bitangentes à Y , $d(d-2)(d-3)(d+1)$ rencontrent 2 droites générales, et $\frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d-3)$ rencontrent un plan et passent par un point en position générale. Le nombre de bitangentes rencontrant un hyperplan générique de telle sorte que le premier point de contact soit un point fixé de Y est $(d-3)(d+2)$.

Preuve. Le cycle des droites bitangentes est

$$l(2, 2; 0) = c_1 \bar{b}^* \bar{b}_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2,$$

et en remplaçant par les classes de Chern, nous obtenons :

$$l(2, 2; 0) = (d-3)((d+2)\Gamma_1^2 + (d^2-8)\Gamma_1E - 4(d-2)E^2).$$

Puisque le facteur de surcompte est $p(2, 2) = 2$, le nombre de bitangentes rencontrant deux droites est $\frac{1}{2} \int l(2, 2; 0) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)^2$ et le nombre de bitangentes rencontrant un plan et passant par un point est $\frac{1}{2} \int l(2, 2; 0) \cdot \Gamma_1 \cdot (\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1\Gamma_2)$.

Pour le dernier résultat, il suffit de voir que la condition « est un point de l'intersection de Y avec une droite » correspond au cycle E^3 , puisque le cycle E correspond à la condition « appartient à une section hyperplane de Y ». L'intersection d'une droite avec Y étant constituée de d points, il faut diviser le résultat par d . Le nombre cherché est alors :

$$\frac{1}{d} \int l(2, 2; 0) \cdot E^3 \cdot \Gamma_1.$$

Il faut noter que nous n'avons plus ici à diviser par 2, les conditions aux deux points de contact étant maintenant différentes.

□

Proposition 9.3.5 - Parmi les droites tangentes à Y en un point et asymptotiques en un autre point, $3d(d-3)(d-4)(d^2+3d-2)$ rencontrent 3 hyperplans en position générale et $d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d-5)$ passent par un point général et recourent Y transversalement.

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact de type $(2, 3)$ avec Y est

$$l(2, 3; 0) = c_1 \bar{b}^* \bar{b}_* c_1 - 6c_1^3 - 12c_1 c_2 - 6c_3,$$

de telle sorte que le premier nombre cherché est $\int l(2, 3; 0) \cdot \Gamma_1^3$. Pour le second, nous devons imposer en plus que ces droites rencontrent Y transversalement, ce qui signifie que nous considérons le cycle

$$l(1, 2, 3; 0) = \bar{b}^* \bar{b}_* l(2, 3; 0) - 5l(2, 3; 0),$$

pour finalement obtenir

$$\int l(1, 2, 3; 0) \cdot (\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1\Gamma_2).$$

□

Proposition 9.3.6 - Parmi les droites tangentes à Y en un point et flecnodales en un autre point, $2d(d-4)(d-5)(d+6)(3d-5)$ sont contenues dans un hyperplan générique et $d(d-4)(d-5)(d^3+8d^2-27d+30)$ rencontrent une droite générale.

Preuve. Flecnodal signifiant contact d'ordre 4, il faut ici s'intéresser au cycle suivant

$$l(2, 4; 0) = c_1 \bar{b}^* \bar{b}_* (c_1^3 + 3c_1 c_2 + 2c_3) - 8c_1^4 - 36c_1^2 c_2 - 6c_2^2 - 46c_1 c_3 - 24c_4,$$

qui s'évalue en

$$l(2, 4; 0) = (d-5)((d^4 - 2d^3 + 13d^2 + 26d - 120)\Gamma_1^3 E - 2(d-2)(d^3 - 3d^2 + 6d + 120)\Gamma_1^2 E^2 + 2(d^4 - 5d^3 - 25d^2 + 246d - 360)\Gamma_1 E^3).$$

Le nombre de ces droites contenues dans un hyperplan en position générale est $\int l(2, 4; 0) \cdot \Gamma_2$, alors que $\int l(2, 4; 0) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$ rencontrent une droite en position générale.

□

Proposition 9.3.7 - Parmi les droites doublement asymptotiques à Y , $\frac{1}{2}d(d-4)(d-5)(d^3+3d^2+29d-60)$ sont contenues dans un hyperplan en position générale et $\frac{1}{2}d(d-4)(d-5)(d^3+9d^2-28d+30)$ rencontrent une droite générale.

Preuve. Le cycle des droites asymptotiques en deux endroits est

$$l(3, 3; 0) = (c_1^2 + c_2)\bar{b}^*\bar{b}_*(c_1^2 + c_2) - 9c_1^4 - 36c_1^2c_2 - 9c_2^2 - 42c_1c_3 - 24c_4,$$

qui donne

$$l(3, 3; 0) = (d-5)((3d^3 + 2d^2 + 34d - 120)\Gamma_1^3 E - (d^4 - 7d^3 + 13d^2 - 244d + 480)\Gamma_1^2 E^2 - (d^4 - 10d^3 + 96d^2 - 528d + 720)\Gamma_1 E^3).$$

Le facteur de surcompte étant $p(3, 3) = 2$, le nombre de ces droites contenues dans un hyperplan générique est alors $\frac{1}{2} \int l(3, 3; 0) \cdot \Gamma_2$, et celui des droites rencontrant une droite en position générale est $\frac{1}{2} \int l(3, 3; 0) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$.

□

Proposition 9.3.8 - Le degré de la courbe de points ayant une tangente asymptotique qui est aussi par ailleurs flecnodale est $d(d-6)(d^5-3d^4+31d^3+45d^2-1150d+1800)$. Le degré de la courbe de points ayant une tangente flecnodale qui est aussi asymptotique en un autre point est $d(d-4)(d-6)(6d^3+20d^2+185d-450)$. La surface réglée engendrée par ces droites a pour degré $d(d-5)(d-6)(d^4+8d^3+67d^2-250d+120)$.

Preuve. Le cycle dans $A^*(F_Y)$ des droites ayant un contact d'ordre 3 en un point et un contact d'ordre 4 en un autre point est (temps CPU : 59 s ; mémoire : 32,6 MB)

$$l(3, 4; 0) = l(3; 0)\bar{b}^*\bar{b}_*l(4; 0) - 12c_1^5 - 84c_1^3c_2 - 48c_1c_2^2 - 180c_1^2c_3 - 60c_2c_3 - 216c_1c_4 - 120c_5.$$

Le degré de la première courbe considérée est alors $\int l(3, 4; 0) \cdot E$. Pour obtenir la seconde courbe, on doit trouver le cycle $l(4, 3; 0)$. La technique de Colley ne permet malheureusement pas une telle construction. Mais il suffit d'observer la symétrie dans les formules de points multiples pour voir que

$$l(4, 3; 0) = l(4; 0)\bar{b}^*\bar{b}_*l(3; 0) - 12c_1^5 - 84c_1^3c_2 - 48c_1c_2^2 - 180c_1^2c_3 - 60c_2c_3 - 216c_1c_4 - 120c_5,$$

et le degré est alors $\int l(4, 3; 0) \cdot E$. Pour finir, le degré de la surface réglée générée par ces droites est $\int l(3, 4; 0) \cdot \Gamma_1$.

□

Proposition 9.3.9 - Les droites ayant un contact doublement flecnodal sont en nombre $\frac{1}{2}d(d-6)(d-7)(d^5+d^4+65d^3+395d^2-3350d+4200)$.

Preuve. Le cycle des droites biflecnodales est (temps CPU : 10 mn 45 s ; mémoire : 349 MB)

$$l(4, 4; 0) = (c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3)\bar{b}^*\bar{b}_*(c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3) - 16c_1^6 - 168c_1^4c_2 - 140c_1^2c_2^2 - 596c_1^3c_3 + 12c_2^3 - 484c_1c_2c_3 - 1160c_1^2c_4 - 288c_3^2 - 48c_2c_4 - 1432c_1c_5 - 720c_6,$$

et l'évaluation de cette expression donne le résultat escompté, étant donné le facteur de surcompte $p(4, 4) = 2$.

□

Proposition 9.3.10 - *Le nombre des droites asymptotiques à un endroit et ayant un contact d'ordre 5 en un autre point est $5d(d-6)(d-7)(2d^4 + 6d^3 + 91d^2 - 678d + 840)$.*

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact d'ordre 3 en un point et un contact d'ordre 5 par ailleurs est (temps CPU : 9 mn 3 s ; mémoire : 291 MB)

$$l(3, 5; 0) = (c_1^2 + c_2)\bar{b}^*\bar{b}_*(c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4) - 15c_1^6 - 165c_1^4c_2 - 141c_1^2c_2^2 - 594c_1^3c_3 + 9c_2^3 - 498c_1c_2c_3 - 1146c_1^2c_4 - 288c_3^2 - 66c_2c_4 - 1416c_1c_5 - 720c_6,$$

dont l'évaluation donne le résultat cherché. □

Proposition 9.3.11 - *Le nombre de droites tangentes en un point et ayant un contact d'ordre 6 en un autre point est $5d(17d^4 - 1406d^3 + 13147d^2 - 39238d + 35400)$.*

Preuve. Nous considérons le cycle suivant (temps CPU : 9 mn 23 s ; mémoire : 302 MB)

$$l(2, 6; 0) = l(2; 0)\bar{b}^*\bar{b}_*l(6; 0) - 12c_1^6 - 150c_1^4c_2 - 84c_1^2c_2^2 - 636c_1^3c_3 + 14c_2^3 - 420c_1c_2c_3 - 1244c_1^2c_4 - 260c_3^2 - 48c_2c_4 - 1480c_1c_5 - 720c_6;$$

son degré est le nombre ci-dessus. □

Proposition 9.3.12 - *Parmi les droites tritangentes à Y , $\frac{1}{6}d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d-5)$ passent par un point général de l'espace et $\frac{1}{6}(d-4)(d-5)(d-6)(d+1)(d^2-d+6)$ passent par un point fixé de Y . Le nombre des droites tangentes à un point fixé de Y et encore bitangentes est $\frac{1}{2}(d-4)(d-5)(d^2+3d+6)$.*

Preuve. Le cycle des droites tritangentes est

$$l(2, 2, 2; 0) = c_1\bar{b}^*\bar{b}_*(c_1\bar{b}^*\bar{b}_*c_1 - 4c_1^2 - 2c_2) - 4(2c_1^2 + c_2)\bar{b}^*\bar{b}_*c_1 + 40c_1^3 + 56c_1c_2 + 24c_4.$$

Le nombre de ces droites passant par un point est alors $\frac{1}{6} \int l(2, 2, 2; 0) \cdot (\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1\Gamma_2)$ (facteur de surcompte $p(2, 2, 2) = 6$). Si maintenant on impose que le premier point soit un point fixé de Y , alors on doit évaluer $\frac{1}{2d} \int l(2, 2, 2; 0) \cdot E^3$ (facteur de surcompte $q(2, 2, 2) = 2$ et E^3 contient d points de Y). Pour finir, le nombre de droites tritangentes et recoupant Y en un point fixé est :

$$\frac{1}{6d} \int l(1, 2, 2, 2; 0) \cdot E^3 = \frac{1}{6d} \int (\bar{b}^*\bar{b}_*l(2, 2, 2; 0) - 6l(2, 2, 2; 0)) \cdot E^3,$$

où le facteur de surcompte est $q(1, 2, 2, 2) = 6$. □

4 Contacts de droites avec une surface

Passons au cas d'une surface de \mathbb{P}^4 , où il faut faire appel à la projection de cette surface sur un \mathbb{P}^3 générique, et donc à certains résultats établis précédemment.

4.1 Anneau de Chow

Soit X une surface à singularités ordinaires de \mathbb{P}^4 de degré d , à savoir possédant δ points doubles impropres. Soit X' une projection générique de X sur un hyperplan \mathbb{P}^3 . Soit b, t et ν_2 respectivement le degré de la courbe double, le nombre de points triples et le nombre de points-pincés de X' . Si e est la classe d'une section hyperplan de X' , K la classe du diviseur canonique et $c_2(\mathcal{T}_{X'})$ la deuxième classe de Chern, nous avons vu que (Chapitre 4, Paragraphe 1)

$$\begin{cases} \int K.e = d(d-4) - 2b = \lambda, \\ \int K^2 = d(d-4)^2 + (16-3d)b + 3t - \nu_2 = \mu, \\ \int c_2(\mathcal{T}_{X'}) = d(d^2 - 4d + 6) + (8-3d)b + 3t - 2\nu_2. \end{cases}$$

Pour ce qui concerne les appariements d'intersection sur F_X , nous avons de nouveau $\Gamma_2 = \Gamma_1 E - E^2$. Soit E et \mathcal{K} les images réciproques dans $A^*(F_X)$ de e et K respectivement, et soit aussi P tel que $E^2 = dP$. Prenant dans $A^*(F_X)$ des relations analogues trouvées dans $A^*(G)$ et $A^*(X')$, nous voyons que $E^3 = 0, \mathcal{K}^3 = 0, \mathcal{K}E = \lambda P, \mathcal{K}^2 = \mu P$ et que $\Gamma_1^4 = 3\Gamma_1^3 E - 4d\Gamma_1^2 P$. La fonction \bar{c} est de degré d et de codimension 1. Pour la projection dans $A^*(G)$, nous avons :

$$\begin{cases} \bar{c}_*[F_X] = d\gamma_1, \\ \bar{c}_*E = d[2] = d(\gamma_1^2 - \gamma_2), \\ \bar{c}_*\mathcal{K} = \lambda[2], \\ \bar{c}_*P = [3]. \end{cases}$$

Donc,

$$\bar{c}_*(\Gamma_1^{5-2k}\Gamma_2^k) = d\gamma_1^{6-2k}\gamma_2,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \Gamma_1^5 = 5d*, \\ \Gamma_1^4 E = 3d*, \\ \Gamma_1^3 E^2 = d*, \\ \Gamma_1^4 \mathcal{K} = 3\lambda*. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu la description suivante de $A^*(F_X)$:

$$\begin{array}{l} \dim 1 \\ \dim 3 \\ \dim 4 \\ \dim 4 \\ \dim 3 \\ \dim 1 \end{array} \begin{cases} A^0(F_X) = \mathbb{Z}[F_X], \\ A^1(F_X) = \mathbb{Z}\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}, \\ A^2(F_X) = \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 E \oplus \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 \mathcal{K}, \\ A^3(F_X) = \mathbb{Z}\Gamma_1^3 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2 E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 P \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \mathcal{K}, \\ A^4(F_X) = \mathbb{Z}\Gamma_1^4 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^3 E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^3 \mathcal{K}, \\ A^5(F_X) = \mathbb{Z}*. \end{cases}$$

D'après la séquence suivante (j est le plongement de X dans \mathbb{P}^4)

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow j^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4} \longrightarrow 0,$$

nous obtenons

$$C_\omega(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4}) = 1 + (K + 5e)\omega + (d^2 - 2b + \nu_2) * \omega^2.$$

\bar{c} est localement une intersection complète, et F_X est isomorphe à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^4}(-1))$, donc \bar{c} est lissable et

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_X/G}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{F_X/F_4})}{x^*C_\omega(\mathcal{T}_{F_4/G})}.$$

Nous obtenons finalement ($c_k = c_k(\mathcal{N}_{F_X/G})$)

$$\begin{cases} c_1 = \Gamma_1 + 3E + \mathcal{K}, \\ c_2 = \Gamma_1^2 + \Gamma_1 E + (2d - d^2 + 2b + \nu_2)P + \Gamma_1 \mathcal{K}, \\ c_3 = \Gamma_1^3 - \Gamma_1^2 E + (8d - 3d^2 + 6b + \nu_2)\Gamma_1 P + \Gamma_1^2 \mathcal{K}, \\ c_4 = (18d - 5d^2 + 10b + \nu_2)\Gamma_1^2 P + \Gamma_1^3 \mathcal{K}, \\ c_5 = (10d - 4d^2 + 8b + \nu_2) * . \end{cases}$$

4.2 Résultats

Afin de se conformer aux notations utilisées par le Barz, nous utilisons dans ce paragraphe un autre invariant numérique, à savoir δ le nombre de points doubles impropres de X , à la place de ν_2 . En fait, il existe une relation simple entre les deux, puisque $\delta = b - \frac{1}{2}\nu_2$.

Proposition 9.4.1 - Parmi les droites tangentes à X , $2b - 2\delta$ passent par un point général de \mathbb{P}^4 . Le degré de l'hypersurface réglée des droites tangentes à X et rencontrant une droite en position générale est $d(d-1) - 2\delta$.

Preuve. Le cycle dans F_X des droites tangentes est $l(2; 1) = c_2$ et par conséquent, le premier résultat est

$$\int l(2; 1) \cdot (\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1 \Gamma_2),$$

alors que le nombre de ces droites rencontrant à la fois une droite et un plan en position générale (c.-à-d. le degré de l'hypersurface cherché) est

$$\int l(2; 1) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2) \cdot \Gamma_1.$$

□

Proposition 9.4.2 - Le nombre des tangentes asymptotiques à X rencontrant un plan en position générale est $d(d-4)(2d-1) - 6(d-4)b + 6t - 6\delta$ [le Barz, 1987a, page 31]. La courbe des points sur X ayant une tangente asymptotique a pour degré $2d(3d-7) - 12b$.

Preuve. Le cycle approprié est (temps CPU : 0,1 s ; mémoire : 0,07 MB)

$$l(3; 1) = c_2^2 + c_1 c_3 + 2c_4.$$

Le nombre de droites asymptotiques rencontrant un plan générique est $\int l(3; 1) \cdot \Gamma_1$, alors que la courbe cherchée sur X est de degré $\int l(3; 1) \cdot E$.

□

Proposition 9.4.3 - Le nombre de tangentes à X qui recourent cette surface et rencontrent une droite en position générale est $-d(d-1)(d-2) + 6(d-2)b - 6t - 2(d-2)\delta$ [le Barz, 1987a, page 29]. Le nombre de droites passant par un point fixé de X et plus loin tangentes est $2(d-2) - 2\delta$.

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact (1, 2) est (temps CPU : 0,2 s ; mémoire : 0,09 MB)

$$l(1, 2; 1) = \bar{c}^* \bar{c}_* c_2 - 2c_1 c_2 - 2c_3,$$

et le nombre de ces droites qui coupent une droite est alors $\int l(1, 2; 1) \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$. Si maintenant on impose que le premier point soit un point fixé de X , alors on doit considérer $\frac{1}{d} \int E^2 \cdot l(1, 2; 1)$ à la place.

□

Proposition 9.4.4 - *Le nombre de droites rencontrant X transversalement en un point et asymptotiquement en un autre point est $d(2d^3 - 45d^2 + 217d - 246) - 6(d^2 - 22d + 74)b + 6(d - 18)t - 6(d - 3)\delta$.*

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact $(1, 3)$ avec X est (temps CPU : 1 s ; mémoire : 0,55 MB)

$$l(1, 3; 1) = \bar{c}^* \bar{c}_* l(3; 1) - 3l(3; 1),$$

qui s'évalue à la valeur cherchée. □

Proposition 9.4.5 - *Le nombre de droites bitangentes à X est [le Barz, 1990, page 169]*

$$\frac{1}{2}d(d^3 - 38d^2 + 211d - 246) - 2(d^2 - 28d + 111)b + 4b^2 - 54t - 4(b - 3)\delta + 2\delta^2.$$

Preuve. Nous considérons le cycle des droites bitangentes pour une fonction de codimension 1 (temps CPU : 0,7 s ; mémoire : 0,45 MB) :

$$l(2, 2; 1) = c_2 \bar{c}^* \bar{c}_* c_2 - 4c_1 c_2^2 - 2c_1^2 c_3 - 8c_2 c_3 - 10c_1 c_4 - 12c_5,$$

et l'évaluation de $\frac{1}{2} \int l(2, 2; 1)$ donne le résultat escompté. □

Proposition 9.4.6 - *Parmi les triséchantes à X , $-\frac{1}{3}d(d-1)(d-2) + 2(d-2)b + t$ coupent 3 plans en position générale et $-\frac{1}{6}d(d-1)(d-2) + (d-2)b + t$ coupent un plan et une droite.*

Preuve. Le cycle des triséchantes est donné par

$$\begin{cases} m_2 = l(1, 1; 1) = \bar{c}^* \bar{c}_* [F_X] - c_1, \\ m_3 = l(1, 1, 1; 1) = \bar{c}^* \bar{c}_* m_2 - 2c_1 m_2 + 2c_2. \end{cases}$$

Le premier résultat est alors (facteur de surcompte $p(1, 1, 1) = 6$)

$$\frac{1}{6} \int m_3 \cdot \Gamma_1^3,$$

et le second

$$\frac{1}{6} \int m_3 \cdot \Gamma_1 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2).$$
□

Proposition 9.4.7 - *Le nombre de tangentes à X qui recourent cette surface deux fois transversalement et rencontrent un plan en position générale est [le Barz, 1990, page 171]*

$$-\frac{3}{2}d(d-3)(d^2 - 7d + 2) + 6(d^2 - 9d + 15)b - 6(d-9)t + 4(d-1)\delta - 2b\delta.$$

Preuve. La classe des droites coupant X 2 fois simplement et une fois tangentiellement est (temps CPU : 1,1 s ; mémoire : 0,6 MB)

$$l(1, 1, 2; 1) = \bar{c}^* \bar{c}_* (c_2 m_2 - c_1 c_2 - 2c_3) - c_1 \bar{c}^* \bar{c}_* c_2 - 2(c_1 c_2 + c_3) m_2 + 4c_1^2 c_2 + 4c_2^2 + 12c_1 c_3 + 12c_4,$$

et le nombre de ces droites rencontrant un plan est (facteur de surcompte $q(1, 1, 2) = 2$)

$$\frac{1}{2} \int l(1, 1, 2; 1) \cdot \Gamma_1.$$
□

Proposition 9.4.8 - Parmi les quadrisécantes à X ,

$$\frac{1}{12}d(d-1)(d-2)(d-3) - \frac{1}{2}(d-2)^2b + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(2d-9)t - \frac{1}{2}\delta$$

rencontrent une droite en position générale [le Barz, 1990, page 167], et

$$-\frac{1}{24}d(d-2)(d-3)(d-13) - \frac{1}{2}(4d-11)b + \frac{1}{2}b^2$$

sont contenues dans un hyperplan général. Le nombre de droites rencontrant un \mathbb{P}^3 fixé de X et trois fois la surface transversalement est $2(d-3) - b + t$.

Preuve. En utilisant les notations précédentes, on a la définition « récursive » suivante de m_4 (un calcul direct prends 1 s CPU et 0,57 MB de mémoire) :

$$m_4 = \bar{c}^* \bar{c}_* m_3 - 3c_1 m_3 + 6c_2 m_2 - 6(c_1 c_2 + 2c_3).$$

Le facteur de surcompte étant $p(1, 1, 1, 1) = 24$, le premier résultat est $\frac{1}{24} \int m_4 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$ et le second est $\frac{1}{24} \int m_4 \cdot \Gamma_2$. Pour le dernier, le facteur de surcompte est $q(1, 1, 1, 1) = 6$, et il suffit d'évaluer $\frac{1}{6d} \int m_4 \cdot E^2$.

□

Proposition 9.4.9 - Le nombre de droites tangentes à X et recoupant cette surface trois fois transversalement est

$$\frac{1}{6}d(d^4 + 52d^3 - 925d^2 + 3566d - 3480) + \frac{1}{3}(d^3 - 86d^2 + 1366d - 3480)b - 4(d-2)b^2 + 4bt + 3(d^2 + 6d - 140)t - 2(d^3 + d^2 + d + 26)\delta - 12\delta t + \frac{2}{3}(11d + 8)\delta b.$$

Preuve. Le cycle approprié est (temps CPU : 11,1 s ; mémoire : 6,6 MB)

$$l(1, 1, 1, 2; 1) = (\bar{c}^* \bar{c}_* (\bar{c}^* \bar{c}_* - 3c_1) - 4c_1 \bar{c}^* \bar{c}_*) l(1, 2; 1) + 6\bar{c}^* \bar{c}_* (c_1 c_3 + c_2^2 + 2c_4) + 12(c_1^2 + c_2) \bar{c}^* \bar{c}_* c_2 - 24(c_1^3 c_2 + 3c_1 c_2^2 + 3c_1^2 c_3 + 4c_2 c_3 + 7c_1 c_4 + 6c_5),$$

et tenant compte du facteur de surcompte $p(1, 1, 1, 2) = 6$, le résultat est alors $\frac{1}{6} \int l(1, 1, 1, 2; 1)$.

□

Proposition 9.4.10 - Le nombre de quintisécantes rencontrant un plan fixé est [le Barz, 1990, page 178]

$$\frac{1}{24}d(d-3)(d-4)(d^2 - 15d + 2) - \frac{1}{6}(d^3 - 24d^2 + 101d - 108)b - 2b^2 - \frac{3}{2}(3d-14)t + bt - \frac{1}{2}(d-8)\delta.$$

Preuve. Le cycle des quintisécantes m_5 est donné par (temps CPU : 11 s ; mémoire : 6,3 MB)

$$m_5 = \bar{c}^* \bar{c}_* m_4 - 4c_1 m_4 + 12c_2 m_3 - 24(c_1 c_2 + 2c_3) m_2 + 24(c_1^2 c_2 + 5c_1 c_3 + 6c_4 + c_2^2),$$

et, le facteur de surcompte étant $p(1, 1, 1, 1, 1) = 5! = 120$, le nombre de quintisécantes rencontrant un plan en position générale est alors $\frac{1}{120} \int m_5 \cdot \Gamma_1$.

□

Proposition 9.4.11 - La surface X possède

$$-\frac{1}{144}d(d-4)(d-5)(d^3 + 30d^2 - 577d + 786) + \frac{1}{12}(d^4 - 2d^3 - 220d^2 + 1535d - 2780)b - \frac{1}{4}d(d-9)b^2 + \frac{1}{6}b^3 - \frac{9}{2}bt + \frac{3}{2}(14d-75)t + \frac{1}{2}t^2 + 4(d-7)\delta - \frac{1}{2}b\delta.$$

sextisécantes [le Barz, 1990, page 182].

Preuve. Le cycle supportant les points de contacts des sextisécantes est (temps CPU : 2 mn 56 s ; mémoire : 97,4 MB)

$$m_6 = \bar{c}^* \bar{c}_* m_5 - 5c_1 m_5 + 20c_2 m_4 - 60(c_1 c_2 + 2c_3) m_3 \\ + 120(c_1^2 c_2 + 5c_1 c_3 + 6c_4 + c_2^2) m_2 - 120(c_1^3 c_2 + 9c_1^2 c_3 + 26c_1 c_4 + 3c_1 c_2^2 + 8c_2 c_3 + 24c_5),$$

et puisque $q(1, 1, 1, 1, 1, 1) = 720$, le résultat est $\frac{1}{720} \int m_6$.

□

5 Contacts de droites avec une courbe

Voyons, pour conclure ce chapitre, les contacts de droites avec une courbe de l'espace projectif \mathbb{P}^4 .

5.1 Anneau de Chow de F_C

Soit C une courbe lisse de degré b et genre g de \mathbb{P}^4 . Puisque

$$c_1(\mathcal{T}_C) = 2 - 2g,$$

et en utilisant la séquence (β est le plongement dans \mathbb{P}^4)

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_C \longrightarrow \beta^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4} \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$C_\omega(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}) = 1 + (5b + 2g - 2) * \omega,$$

et par suite

$$C_\omega(\mathcal{N}_{F_C/F_4}) = 1 + (5b + 2g - 2)\varepsilon\omega,$$

si ε est l'image réciproque dans $A^*(F_C)$ de la classe d'un point dans $A^*(C)$. Si maintenant g_1 est l'image réciproque du cycle γ_1 de $A^*(G)$, alors on aboutit aux classes suivantes pour $\mathcal{N}_{F_C/G}$:

$$\begin{cases} c_1 = g_1 + (3b + 2g - 2)\varepsilon, \\ c_2 = g_1^2 + (b + 2g - 2)g_1\varepsilon, \\ c_3 = g_1^3 + (2g - 2 - b)g_1^2\varepsilon, \\ c_4 = (2g - 2) * . \end{cases}$$

Pour l'intersection dans $A^*(F_C)$, on a alors :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 = 0, \\ g_2 = bg_1\varepsilon, \\ g_1^4 = 3b*, \\ g_1^3\varepsilon = *. \end{cases}$$

Enfin, pour la projection dans $A^*(G)$, on voit que :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_*[F_C] = b(\gamma_1^2 - \gamma_2), \\ \bar{\alpha}_*\varepsilon = [3]. \end{cases}$$

5.2 Résultats

Proposition 9.5.1 - *Les tangentes à C génèrent une hypersurface réglée de degré $2b + 2g - 2$.*

Preuve. Le cycle des droites tangentes en codimension 2 est

$$l(2; 2) = c_3,$$

et on calcule ensuite

$$\int l(2; 2) \cdot g_1.$$

□

Proposition 9.5.2 - *Parmi les bisécantes à C , $b(b-2)+1-g$ rencontrent 2 plans fixés et $\frac{1}{2}b(b-3)+1-g$ rencontrent une droite en position générale.*

Preuve. Le cycle des bisécantes est $m_2 = l(1, 1; 2)$, où

$$m_2 = \bar{\alpha}^* \bar{\alpha}_* [FC] - c_2 = (b-1)g_1^2 - (b^2 + b + 2g - 2)g_1 \varepsilon.$$

Le facteur de surcompte étant $p(1, 1) = 2$, le premier nombre cherché est

$$\frac{1}{2} \int m_2 \cdot g_1^2,$$

et le deuxième

$$\frac{1}{2} \int m_2 \cdot (g_1^2 - g_2).$$

□

Proposition 9.5.3 - *Le nombre de trisécantes à C est $\frac{1}{6}(b-4)(b-5) - g + 1$.*

Preuve. La fonction $\bar{\alpha}$ étant de codimension 2, le cycle $m_3 = l(1, 1, 1; 2)$ des trisécantes est :

$$m_3 = \bar{\alpha}^* \bar{\alpha}_* m_2 - 2c_2 \cdot m_2 + 2c_1 c_3 + 4c_4,$$

et tenant compte du fait que $p(1, 1, 1) = 6$, le résultat est alors :

$$\frac{1}{6} \int m_3.$$

□

6 Bilan

Nous avons donné dans ce chapitre des formules énumératives concernant le contact de droites avec des variétés de dimension 1, 2 et 3 de \mathbb{P}^4 . Certains de nos résultats vérifient des calculs effectués par le Barz à l'aide de la technique des schémas de Hilbert et les autres sont nouveaux, à notre connaissance. Le grand avantage de notre approche est d'être facilement mécanisable. Dès lors que la théorie de l'intersection a été donnée, tous les calculs peuvent s'effectuer de manière automatique, par simple évaluation de formules de points multiples dans le contexte étudié et intersection avec des cycles géométriques. Tous les résultats énumératifs obtenus dans ce chapitre l'ont été par ce biais. Le chemin à suivre étant strictement similaire pour les contacts de droites avec des variétés de \mathbb{P}^5 et \mathbb{P}^6 , nous omettons un certain nombre de détails dans les deux chapitres à venir.

Chapitre 10

Contacts de droites dans \mathbb{P}^5

Contents

1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 5)$	155
2	Contacts de droites avec une hypersurface	156
2.1	Anneau de Chow	156
2.2	Résultats	157
3	Contacts de droites avec une surface	159
3.1	Anneau de Chow	159
3.2	Résultats	160

Nous passons maintenant aux contacts de droites dans \mathbb{P}^5 . La procédure de construction des espaces de paramètres étant globalement similaire à ce que nous venons de voir pour \mathbb{P}^4 , le niveau de détail est ici moindre.

Soit donc les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}^5 & \xleftarrow{e} & F_{1,1,4} & \xrightarrow{\bar{e}} & G(1, 5) \\
 \uparrow \bar{u} & & \uparrow \bar{v} & \nearrow \bar{f} & \\
 Y & \xleftarrow{f} & F_{1,1,4}(4) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}^5 & \xleftarrow{e} & F_{1,1,4} & \xrightarrow{\bar{e}} & G(1, 5) \\
 \uparrow \bar{w} & & \uparrow \bar{x} & \nearrow \bar{g} & \\
 X & \xleftarrow{g} & F_{1,1,4}(2) & &
 \end{array}$$

$G = G(1, 5)$ est la Grassmannienne de droites de \mathbb{P}^5 , $F_{1,1,4}$ est la variété de drapeaux point-droite à 9 dimensions de \mathbb{P}^5 . $F_{1,1,4}(4)$ (dimension 8) et $F_{1,1,4}(2)$ (dimension 6) sont respectivement les restrictions de $F_{1,1,4}$ à une hypersurface lisse Y et à une surface X à singularités ordinaires.

1 Construction de la Grassmannienne $G(1, 5)$

En reprenant les mêmes notations que précédemment, le cycle [4] est donné par :

$$[4] = \gamma_1^4 - 3\gamma_1^2\gamma_2 + \gamma_2^2.$$

Ainsi, [1] est le cycle des droites coupant un \mathbb{P}^3 en position générale, [2] le cycle des droites rencontrant un plan, [3] le cycle des droites rencontrant une droite donnée et [4] celui des droites passant par un point

général. En utilisant les formules de Pieri, Giambelli et la propriété de dualité, nous voyons que :

$$\begin{cases} [1]^2 = [2] + [1, 1], \\ [1]^3 = 2[2, 1] + [3], \\ [1]^4 = 3[3, 1] + 2[2, 2] + [4], \\ [1]^2[2] = 2[3, 1] + [2, 2] + [4], \\ [2]^2 = [3, 1] + [2, 2] + [4], \end{cases}$$

de telle sorte que

$$\begin{cases} f[1]^8 = f([1]^4)^2 = 9 + 4 + 1 = 14, \\ f[1]^6[2] = f[1]^4 \cdot [1]^2[2] = 6 + 2 + 1 = 9, \\ f[1]^4[2]^2 = f([1]^2[2])^2 = 1 + 4 + 1 = 6, \\ f[1]^2[2]^3 = f[1]^2[2] \cdot [2]^2 = f[1 + 2 + 1] = 4, \\ f[2]^4 = f([2]^2)^2 = 1 + 1 + 1 = 3. \end{cases}$$

Revenant aux cycles γ_1 et γ_2 :

$$\begin{cases} \gamma_1^8 = 14*, \\ \gamma_1^6\gamma_2 = 5*, \\ \gamma_1^4\gamma_2^2 = \gamma_1^2\gamma_2^3 = 2*, \\ \gamma_2^4 = *, \end{cases}$$

et nous obtenons la relation $\gamma_1^5 = 4\gamma_1^3\gamma_2 - 3\gamma_1\gamma_2^2$.

2 Contacts de droites avec une hypersurface

Tournons nous maintenant vers l'étude des contacts de droites avec une hypersurface lisse de \mathbb{P}^5 .

2.1 Anneau de Chow

Ici aussi, $F_5 = F_{1,1,4}$ est isomorphe aux projectivisations d'un fibré de \mathbb{P}^5 et d'un fibré de G , ce qui permet d'obtenir le polynôme de Chern de $\mathcal{T}_{F_5/G}$. Par suite, et en utilisant les cycles E, Γ_1, Γ_2 comme précédemment, on obtient (\bar{f} est localement une intersection complète et est lissable) :

$$c_k = c_k(\mathcal{N}_{F_Y/G}) = (\Gamma_1 + (d-2)E)(\Gamma_1 - 2E)^{k-1},$$

où $F_Y = F_{1,1,4}(4)$. On voit que $E^5 = 0$ et que $\Gamma_2 = \Gamma_1 E - E^2$. Ensuite, la projection dans $A^*(G)$ donne :

$$\begin{cases} \bar{f}_*[F_Y] = d[G], \\ \bar{f}_*E = d[1], \\ \bar{f}_*E^2 = d[2], \\ \bar{f}_*E^3 = d[3], \\ \bar{f}_*E^4 = d[4]. \end{cases}$$

Et nous avons aussi les résultats suivants, issus de calculs similaires dans $A^*(G)$:

$$\begin{cases} \Gamma_1^8 = 14d*, \\ \Gamma_1^7 E = 14d*, \\ \Gamma_1^6 E^2 = 9d*, \\ \Gamma_1^5 E^3 = 4d*, \\ \Gamma_1^4 E^4 = d*. \end{cases}$$

Pour finir, nous avons la relation :

$$\Gamma_1^5 = 4\Gamma_1^4 E - 7\Gamma_1^3 E^2 + 6\Gamma_1^2 E^3 - 3\Gamma_1 E^4.$$

2.2 Résultats

Proposition 10.2.1 - *Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 5 avec Y et passant par un point général de \mathbb{P}^5 est $d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)$. Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 6 et rencontrant une droite en position générale est $d(d-5)(15d^3 - 95d^2 + 200d - 96)$. Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 7 et rencontrant un plan en position générale est $7d(d-6)(5d-12)(5d^2 - 21d + 30)$.*

Preuve. Nous avons déjà rencontré le cycle $l(5; 0)$ pour une fonction de codimension 0, et le résultat est simplement :

$$\int \bar{f}_* l(5; 0).[4].$$

Le second nombre cherché est $\int \bar{f}_* l(6; 0).[3]$, et le dernier est $\int \bar{f}_* l(7; 0).[2]$.

□

Proposition 10.2.2 - *Le degré de la courbe sur Y constituée des points ayant une tangente d'ordre 8 est $7d(967d^3 - 11256d^2 + 39204d - 40320)$, alors que l'hypersurface réglée engendrée par ces tangentes est de degré $28d(d-7)(70d^3 - 477d^2 + 882d - 360)$.*

Preuve. Le cycle dans $A^*(F_Y)$ des tangentes d'ordre 8 est donné par (temps CPU : 18 mn 5 s ; mémoire de session : 585 MB)

$$l(8; 0) = c_1^7 + 21c_1^5c_2 - 23c_1^3c_2^2 + 198c_1^4c_3 - 55c_1c_2^3 + 196c_1^2c_2c_3 + 594c_1^3c_4 \\ - 66c_2^2c_3 + 676c_1c_2^3 - 342c_1c_2c_4 + 1356c_1^2c_5 + 424c_3c_4 - 212c_2c_5 + 1552c_1c_6 + 720c_7,$$

de telle sorte que la courbe sur Y est de degré $\int l(8; 0).E$, alors que l'hypersurface réglée est de degré $\int l(8; 0).\Gamma_1$.

□

Proposition 10.2.3 - *Les droites ayant un contact d'ordre 9 avec l'hypersurface Y sont en nombre $21d(d-8)(1069d^3 - 10672d^2 + 32748d - 30240)$.*

Preuve. Le cycle approprié dans $A^*(F_Y)$ est (temps CPU : 5 h 23 mn ; mémoire : 10224 MB) :

$$l(9; 0) = c_1^8 + 28c_1^6c_2 - 116c_1^4c_2^2 + 438c_1^5c_3 - 320c_1^2c_2^3 + 556c_1^3c_2c_3 + 1724c_1^4c_4 + 11c_2^4 \\ - 1042c_1c_2^2c_3 + 5272c_1^2c_3^2 - 3852c_1^2c_2c_4 + 6380c_1^3c_5 + 72c_2c_3^2 - 880c_2^2c_4 + 6712c_1c_3c_4 \\ - 4932c_1c_2c_5 + 12160c_1^2c_6 - 1252c_4^2 + 5352c_3c_5 - 3272c_2c_6 + 12240c_1c_7 + 5040c_8,$$

qui s'évalue au résultat ci-dessus.

□

Proposition 10.2.4 - *Le nombre de bitangentes rencontrant 3 plans fixes est $2d^2(d-2)(d-3)$. Le nombre de droites doublement asymptotiques passant par un point général de \mathbb{P}^5 est $\frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d-5)$. Le nombre de droites passant par un point fixé de Y et de plus doublement asymptotiques est $\frac{1}{2}(d-5)(d-6)(d^4 - 4d^3 + 11d^2 + 4d + 24)$.*

Preuve. Nous avons déjà utilisé auparavant le cycle $l(2, 2; 0)$ des droites bitangentes, et ainsi le premier résultat est simplement $\frac{1}{2} \int \bar{f}_* l(2, 2; 0).[2]^3$ (facteur de surcompte $p(2, 2) = 2$). Pour les droites doublement asymptotiques, on reprend le cycle $l(3, 3; 0)$, et le second nombre cherché est ainsi $\frac{1}{2} \int \bar{f}_* l(3, 3; 0).[4]$. Pour

le dernier, nous imposons en plus que ces droites recoupent la surface en un point fixé de Y , i.e. on considère

$$l(1, 3, 3; 0) = \bar{f}^* \bar{f}_* l(3, 3; 0) - 6l(3, 3; 0).$$

et on calcule le degré :

$$\frac{1}{2d} \int E^4. l(1, 3, 3; 0).$$

□

Proposition 10.2.5 - Parmi les droites ayant un contact de type flecnodal en deux points différents, $d(d-6)(d-7)(d^5 + 7d^4 + 85d^3 - 295d^2 - 358d + 840)$ rencontrent deux \mathbb{P}^3 en position générale et $\frac{1}{2}d(d-6)(d-7)(d^5 + 13d^4 + 105d^3 - 985d^2 + 2634d - 2520)$ coupent un plan fixé.

Preuve. Nous utilisons à nouveau le cycle $l(4, 4; 0)$ et, le facteur de surcompte étant $p(4, 4) = 2$, nous calculons d'abord $\frac{1}{2} \int l(4, 4; 0). \Gamma_1^2$, puis ensuite $\frac{1}{2} \int l(4, 4; 0). (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$.

□

Proposition 10.2.6 - Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 5 en deux endroits différents est

$$\frac{1}{2}d(d-8)(d-9)(d^7 - 3d^6 + 147d^5 + 515d^4 + 9569d^3 - 181132d^2 + 649068d - 635040).$$

Preuve. Le cycle approprié est (temps CPU : 58 h 50 mn ; mémoire de session : 94146 MB) :

$$\begin{aligned} l(5, 5; 0) = & l(5; 0) \bar{f}^* \bar{f}_* l(5; 0) - 25c_1^8 - 500c_1^6 c_2 - 316c_1^4 c_2^2 - 4134c_1^5 c_3 + 1608c_1^2 c_2^3 - 8852c_1^3 c_2 c_3 \\ & + 3982c_1 c_2^2 c_3 - 15156c_1^4 c_4 + 41c_2^4 - 36704c_1^2 c_3^2 + 16544c_1^2 c_2 c_4 - 51208c_1^3 c_5 \\ & - 3136c_2 c_3^2 + 6328c_2^2 c_4 - 45804c_1 c_3 c_4 + 18720c_1 c_2 c_5 - 94328c_1^2 c_6 + 11452c_2^2 \\ & - 41656c_3 c_5 + 16232c_2 c_6 - 95648c_1 c_7 - 40320c_8, \end{aligned}$$

et le calcul de $\frac{1}{2} \int l(5, 5; 0)$ donne le résultat escompté.

□

Proposition 10.2.7 - Le nombre de droites ayant un contact d'ordre 4 en un point et un contact d'ordre 6 en un autre point est

$$d(d-8)(d-9)(15d^6 - 5d^5 + 1205d^4 + 7819d^3 - 178822d^2 + 647808d - 635040).$$

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact (4, 6) avec Y est (temps CPU : 39 h 48 mn ; mémoire : 73673 MB)

$$\begin{aligned} l(4, 6; 0) = & l(4; 0) \bar{f}^* \bar{f}_* l(6; 0) - 24c_1^8 - 492c_1^6 c_2 - 276c_1^4 c_2^2 - 4152c_1^5 c_3 + 1716c_1^2 c_2^3 - 8928c_1^3 c_2 c_3 \\ & + 4272c_1 c_2^2 c_3 - 15168c_1^4 c_4 + 28c_2^4 - 37160c_1^2 c_3^2 + 16880c_1^2 c_2 c_4 - 51376c_1^3 c_5 \\ & - 2792c_2 c_3^2 + 6152c_2^2 c_4 - 46440c_1 c_3 c_4 + 19632c_1 c_2 c_5 - 94800c_1^2 c_6 + 10816c_2^2 \\ & - 40944c_3 c_5 + 16448c_2 c_6 - 95952c_1 c_7 - 40320c_8, \end{aligned}$$

et le nombre est $\int l(4, 6; 0)$.

□

Proposition 10.2.8 - Parmi les droites tritangentes à Y , $\frac{1}{3}d(d-3)(d-4)(d-5)(7d^2+9d-6)$ rencontrent cinq \mathbb{P}^3 en position générale et $\frac{1}{6}d(d-3)(d-4)(d-5)(3d^2+3d-2)$ rencontrent à la fois un plan et une droite.

Preuve. Nous utilisons à nouveau le cycle $l(2, 2, 2; 0)$ des droites tritangentes et calculons

$$\frac{1}{6} \int \bar{f}_* l(2, 2, 2; 0) \cdot [1]^5$$

et

$$\frac{1}{6} \int \bar{f}_* l(2, 2, 2; 0) \cdot [2][3],$$

le facteur de surcompte étant $p(2, 2, 2) = 3! = 6$.

□

3 Contacts de droites avec une surface

Comme précédemment, nous étudions maintenant les contacts de droites avec une surface, en reliant ses classes de Chern à celles de sa projection générique sur un \mathbb{P}^4 en position générale.

3.1 Anneau de Chow

Nous utilisons ici les mêmes notations que pour le cas des surfaces dans \mathbb{P}^4 . Pour les appariements d'intersection, nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \Gamma_1^6 = 9d*, \\ \Gamma_1^5 E = 4d*, \\ \Gamma_1^4 P = *, \\ \Gamma_1^3 \mathcal{K} = 4\lambda*, \\ \Gamma_1^5 = 4\Gamma_1^4 E - 7\Gamma_1^3 E^2. \end{cases}$$

Pour la projection dans $A^*(G)$, on a alors :

$$\begin{cases} \bar{g}_*[F_X] = d[2], \\ \bar{g}_*E = d[3], \\ \bar{g}_*\mathcal{K} = \lambda[3], \\ \bar{g}_*P = [4]. \end{cases}$$

Les classes de Chern de $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^5}$ sont :

$$\begin{cases} c_1(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^5}) = 6e + K, \\ c_2(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^5}) = (d(2d-1) - 4b + \nu_2)*, \end{cases}$$

et par conséquent les classes de $\mathcal{N}_{F_X/G}$ ($F_X = F_{1,1,4}(2)$) sont :

$$\begin{cases} c_1 = \Gamma_1 + 4E + \mathcal{K}, \\ c_2 = \Gamma_1^2 + 2\Gamma_1 E + (d + 2b - 2\delta)P + \Gamma_1 \mathcal{K}, \\ c_3 = \Gamma_1^3 + (5d - 2d^2 + 6b - 2\delta)\Gamma_1 P + \Gamma_1^2 \mathcal{K}, \\ c_4 = \Gamma_1^4 - 2\Gamma_1^3 E + (13d - 4d^2 + 10b - 2\delta)\Gamma_1^2 P + \Gamma_1^3 \mathcal{K}, \\ c_5 = (18d - 6d^2 + 14b - 2\delta)\Gamma_1 P + \Gamma_1^4 \mathcal{K}, \\ c_6 = (10d - 4d^2 + 10b - 2\delta)*. \end{cases}$$

3.2 Résultats

Proposition 10.3.1 - Parmi les droites tangentes à X , $2b - 2\delta$ rencontrent une droite en position générale et $d(d-1) - 2b$ coupent à la fois un plan et un \mathbb{P}^3 fixés.

Preuve. Le cycle des droites tangentes est $l(2; 2) = c_3$, et on calcule

$$\int l(2; 2) \cdot (\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1\Gamma_2),$$

et

$$\int l(2; 2) \cdot \Gamma_1 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2).$$

□

Proposition 10.3.2 - Le nombre de tangentes asymptotiques à X est [le Barz, 1987a, page 42]

$$2d(2d^2 - 18d + 25) - 12(d-7)b + 12t - 12\delta.$$

Preuve. Le cycles des droites inflexionnelles est (temps CPU : 0,1 s ; mémoire : 0,09 MB)

$$l(3; 2) = c_3^2 + c_2c_4 + 2c_1c_5 + 4c_6,$$

et on calcule $\int l(3; 2)$.

□

Proposition 10.3.3 - Parmi les cordes de X , δ passent par un point général de \mathbb{P}^5 et $\frac{1}{2}d(d-1)$ sont contenues dans deux \mathbb{P}^4 fixés.

Preuve. Le cycle des bisécantes (cordes) de X est donné par :

$$m_2 = l(1, 1; 2) = \bar{g}^* \bar{g}_* [F_X] - c_2,$$

de telle sorte que le premier nombre est (facteur de surcompte $q(1, 1) = 2$)

$$\frac{1}{2} \int m_2 \cdot (\Gamma_1^4 - 3\Gamma_1^2\Gamma_2 + \Gamma_2^2),$$

et le second est

$$\frac{1}{2} \int m_2 \cdot \Gamma_2^2.$$

□

Proposition 10.3.4 - Le nombre de tangentes à X qui recoupernt X transversalement et un \mathbb{P}^3 en position générale est [le Barz, 1987a, page 41]

$$-d(3d^2 - 11d + 2) + 12(d-3)b - 12t - 2(d-6)\delta.$$

Preuve. Le cycle approprié est alors (temps CPU : 0,12 s ; mémoire : 0,1 MB)

$$l(1, 2; 2) = \bar{q}^* \bar{q}_* c_3 - 2c_2c_3 - 4c_5 - 2c_1c_4,$$

et le nombre de ces droites qui rencontrent un \mathbb{P}^3 générique est $\int l(1, 2; 2) \cdot \Gamma_1$.

□

Proposition 10.3.5 - Parmi les trisécantes de X , $\frac{1}{6}d(d-1)(d-2) - (d-2)b + 2t + (d-2)\delta$ rencontrent un plan en position générale [le Barz, 1987a, page 39] et $(d-4)(b - \frac{1}{3}d(d-2))$ sont contenues dans un \mathbb{P}^4 générique.

Preuve. Le cycle des trisécantes en codimension 1 est (temps CPU : 0,13 s ; mémoire de session : 0,09 MB)

$$m_3 = l(1, 1, 1; 2) = \bar{g}^* \bar{g}_* m_2 - 2c_2 \cdot m_2 + 2c_1 c_3 + 4c_4.$$

Le facteur de surcompte étant $p(1, 1, 1) = 3! = 6$, on calcule alors $\frac{1}{6} \int m_3 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2)$ et $\frac{1}{6} \int m_3 \cdot \Gamma_2$.

□

Proposition 10.3.6 - Le nombre de droites quadrisécantes à X est [le Barz, 1990, page 182]

$$\frac{1}{24}d(13d^3 - 222d^2 + 935d - 942) - \frac{1}{2}(4d^2 - 58d + 167)b + \frac{1}{2}b^2 + (2d - 27)t - \frac{1}{2}(4d - 13)\delta + \frac{1}{2}\delta^2.$$

Preuve. Le cycle des droites coupant X en quatre endroits est (temps CPU : 1,65 s ; mémoire : 0,98 MB)

$$m_4 = l(1, 1, 1, 1; 2) = \bar{g}^* \bar{g}_* m_3 - 3c_2 m_3 + 6(c_1 c_3 + 2c_4)m_2 - 6(c_1 c_2 c_3 + 2c_1^2 c_4 + 10c_1 c_5 + 3c_2 c_4 + 12c_6 + c_3^2),$$

et le nombre de droites cherché est alors $\frac{1}{24} \int m_4$.

□

Chapitre 11

Contacts de droites dans \mathbb{P}^6

Contents

1	Construction de la Grassmannienne $G(1, 6)$	163
2	Contacts de droites avec une surface	164
2.1	Anneau de Chow	164
2.2	Résultats	164

Pour finir, voyons maintenant les contacts de droites avec une surface de \mathbb{P}^6 . Nous examinons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}^6 & \xleftarrow{i} & F_{1,1,5} & \xrightarrow{\bar{i}} & G(1, 6) \\
 \uparrow y & & \uparrow z & \nearrow \bar{j} & \\
 X & \xleftarrow{j} & F_{1,1,5}(2) & &
 \end{array}$$

$G = G(1, 6)$ est la Grassmannienne de droites de \mathbb{P}^6 à 10 dimensions. $F_{1,1,5}$ (dimension 11) est la variété de drapeaux point-droite de \mathbb{P}^6 , et $F_{1,1,5}(2)$ (dimension 7) sa restriction à X , surface à singularités ordinaires de \mathbb{P}^6 .

1 Construction de la Grassmannienne $G(1, 6)$

Avec les notations utilisées précédemment, l'utilisation des formules de Pieri, Giambelli et la propriété de dualité donne :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [1]^4 = 3[3, 1] + 2[2, 2] + [4], \\
 [1]^5 = 4[4, 1] + 5[3, 2] + [5], \\
 [1]^3[2] = 3[4, 1] + 3[3, 2] + [5], \\
 [1][2]^2 = 2[3, 2] + 2[4, 1] + [5], \\
 [2]^3 = 2[5, 1] + 3[4, 2] + [3, 3], \\
 [2]^4 = 6[5, 3] + 3[4, 4], \\
 [2]^5 = 6[5, 5],
 \end{array} \right.$$

dont il découle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f[1]^{10} = f([1]^5)^2 = 16 + 25 + 1 = 42, \\ f[1]^8[2] = f[1]^5 \cdot [1]^3[2] = 12 + 15 + 1 = 28, \\ f[1]^6[2]^2 = f([1]^3[2])^2 = 9 + 9 + 1 = 19, \\ f[1]^4[2]^3 = f[1]^3[2] \cdot [1][2]^2 = 6 + 6 + 1 = 13, \\ f[1]^2[2]^4 = f([1][2]^2)^2 = 4 + 4 + 1 = 9, \\ f[2]^5 = 6. \end{array} \right.$$

Pour finir, en revenant aux cycles γ_1 et γ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^{10} = 42*, \\ \gamma_1^8 \gamma_2 = 14*, \\ \gamma_1^6 \gamma_2^2 = 5*, \\ \gamma_1^4 \gamma_2^3 = 2*, \\ \gamma_1^2 \gamma_2^4 = \gamma_2^5 = *. \end{array} \right.$$

Et nous obtenons la relation $\gamma_1^6 = 5\gamma_1^4 \gamma_2 - 6\gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^3$.

2 Contacts de droites avec une surface

Passons, après avoir donné les appariements d'intersection, aux calculs des contacts de droites avec une surface de \mathbb{P}^6 .

2.1 Anneau de Chow

Les cycles $\Gamma_1, E, P, \mathcal{K}$ ayant la même signification que pour le cas des surfaces de \mathbb{P}^4 et \mathbb{P}^5 , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1^7 = 14d*, \\ \Gamma_1^6 E = 5d*, \\ \Gamma_1^5 P = *, \\ \Gamma_1^6 \mathcal{K} = 5\lambda *. \end{array} \right.$$

Pour la projection dans $A^*(G)$, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_* [F_X] = d(\gamma_1^3 - 2\gamma_2 \gamma_2), \\ \bar{q}_* E = d(\gamma_1^4 - 3\gamma_1^2 \gamma_2 + \gamma_2^2), \\ \bar{q}_* P = \gamma_1^5 - 4\gamma_1^3 \gamma_2 + 3\gamma_1 \gamma_2^2, \\ \bar{q}_* \mathcal{K} = \lambda(\gamma_1^4 - 3\gamma_1^2 \gamma_2 + \gamma_2^2). \end{array} \right.$$

Enfin, les classes de $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^6}$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^6}) = 7e + K, \\ c_2(\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^6}) = (3d(d-1) - 4b - 2\delta)*, \end{array} \right.$$

d'après quoi on trouve les classes de $\mathcal{N}_{F_X/G}$, où $F_X = F_{1,1,5}(2)$. Enfin, on a la relation $\Gamma_1^6 = 5\Gamma_1^5 E - 11\Gamma_1^4 E^2$, similaire à celle obtenue dans $A^*(G)$.

2.2 Résultats

Proposition 11.2.1 - Parmi les tangentes à X , $2b - 2\delta$ rencontrent un plan en position générale et $2d(d-1) - 2b - 2\delta$ rencontrent trois \mathbb{P}^4 donnés.

Preuve. Le cycle approprié est $l(2; 3) = c_4$, et le premier résultat est $\int l(2; 3).(\Gamma_1^3 - 2\Gamma_1\Gamma_2)$, alors que le second est $\int l(2; 3).\Gamma_1^3$.

□

Proposition 11.2.2 - Parmi les bisécantes à X , δ rencontrent une droite en position générale et $\frac{1}{2}d(d-1) + b + \delta$ rencontrent deux \mathbb{P}^3 fixés.

Preuve. Le cycle des bisécantes $m_2 = l(1, 1; 3)$ est (temps CPU : 0,02 s ; mémoire : 0,03 MB)

$$m_2 = \bar{j}^* \bar{j}_* [F_X] - c_3,$$

et le nombre de bisécantes coupant une droite est

$$\frac{1}{2} \int m_2.(\Gamma_1^4 - 3\Gamma_1^2\Gamma_2 + \Gamma_2^2),$$

alors que celui des bisécantes rencontrant deux \mathbb{P}^3 est

$$\frac{1}{2} \int m_2.\Gamma_2^2.$$

□

Proposition 11.2.3 - Le nombre de tangentes à X qui recourent cette surface de manière transversale est [le Barz, 1987a, page 46]

$$-4d(2d^2 - 15d + 19) + 2(13d - 72)b - 24t - 2(d - 12)\delta.$$

Preuve. Le cycle des droites ayant un contact $(1, 2)$ avec une surface de \mathbb{P}^6 est (temps CPU : 0,17 s ; mémoire de session : 0,11 MB)

$$l(1, 2; 3) = \bar{j}^* \bar{j}_* c_4 - 2c_3c_4 - 2c_2c_5 - 4c_1c_6 - 8c_7,$$

et le degré de ce 0-cycle est le nombre cherché.

□

Proposition 11.2.4 - Le nombre de trisécantes à X coupant un \mathbb{P}^4 général est [le Barz, 1987a, page 45]

$$\frac{2}{3}d(d^2 - 3d - 1) - (3d - 8)b + 4t + (d - 4)\delta.$$

Preuve. Le cycle dans F_X des trisécantes $m_3 = l(1, 1, 1; 3)$ est (un calcul direct prends 0,13 s CPU et 0,11 MB de mémoire)

$$m_3 = \bar{j}^* \bar{j}_* m_2 - 2c_3m_2 + 2c_2c_4 + 4c_1c_5 + 8c_6.$$

Le facteur de surcompte étant $p(1, 1, 1) = 3! = 6$, le résultat est $\frac{1}{6} \int m_3.\Gamma_1$.

□

Chapitre 12

Formules énumératives pour les pincesaux de droites

Contents

1	Cadre de travail	167
2	Validité de l'approche	168
3	Anneau de Chow de I	168
4	Théorie de l'intersection	169
5	Résultats	170
6	Bilan	174

Soit C un complexe de droites de \mathbb{P}^3 de degré d , à savoir une hypersurface de $G = G(1, 3)$, que l'on suppose lisse. Soit x un point et Π un plan fixés de \mathbb{P}^3 . On dénote par $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(x, \Pi)}$ le pinceau de droites passant par x et contenues dans Π . D'après le plongement de Plücker, \mathcal{L} est une droite de G . Par conséquent, pour un pinceau général, l'intersection $\mathcal{L} \cap C$ dans G consiste en d points distincts. Dans [Schubert, 1879], Schubert donne une table de 43 formules de coïncidence pour le nombre de pincesaux tels que les d points de $\mathcal{L} \cap C$ se confondent de manières prescrite.

L'étude entreprise ici est la suite du travail développé dans [Colley, 1988]. Dans cet article, l'auteur vérifie une partie seulement des 43 formules de Schubert, n'ayant pas à sa disposition l'ensemble des classes de points multiples stationnaires trouvées dans ce document. En outre, nous donnons ici la théorie de l'intersection sur l'espace de départ considéré, nous permettant d'implanter et d'automatiser les calculs effectués.

1 Cadre de travail

Nous considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xleftarrow{\tilde{g}} & I & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{F}_3 \\
 \uparrow \iota & & \uparrow \tilde{i} & \nearrow \tilde{f} & \\
 C & \xleftarrow{\tilde{g}} & \tilde{C} & &
 \end{array}$$

I est la variété de drapeaux complets, à savoir

$$I = \{(x, l, \Pi) \in \mathbb{P}^3 \times G \times \check{\mathbb{P}}^3 / x \in l \text{ et } l \in \mathcal{L}_{(x, \Pi)}\}.$$

I est de dimension 6. \tilde{C} est la restriction de I au complexe de droites C , c.-à-d.

$$\tilde{C} = \{(x, l, \Pi) \in \mathbb{P}^3 \times G \times \check{\mathbb{P}}^3 / x \in l \text{ et } l \in \mathcal{L}_{(x, \Pi)} \cap C\}$$

\tilde{f} est la projection triviale, de degré d et de codimension 0. Nous voyons facilement que la vérification des formules de Schubert se fait par application de la théorie des points multiples à \tilde{f} .

2 Validité de l'approche

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ et $r = \sum a_i$. Dans [Colley, 1988], il est prouvé que \tilde{f} est r -générique essentiellement quand le sous-ensemble de \check{F}_3 des pinceaux ayant un contact de type \mathbf{a} a la dimension espérée (ici, $5 - r + k$) ou alors est vide. Nous disons qu'un complexe C qui vérifie cette condition est *générique*. Il est à noter qu'un tel complexe ne peut pas contenir de pinceaux planaires. L'espace projectif qui paramètre les complexes de droites de degré d étant \mathbb{P}^N , où $N = \binom{d+5}{5} - 1$, on peut alors montrer qu'il existe un ouvert non-vide de \mathbb{P}^N paramétrant les complexes génériques.

Supposons donc que C est générique et vérifions que \tilde{f} ne possède pas de singularités de type \tilde{S}_2 . Pour cela, il suffit de voir que $\tilde{f}^{-1}(x, \Pi) = \mathcal{L}_{(x, \Pi)} \cap C$ et puisque $\mathcal{L}_{(x, \Pi)}$ est une droite de \mathbb{P}^5 , la fonction \tilde{f} est telle que $\dim \Omega_{\tilde{f}}^1(\alpha) \geq 2$, pour tout $\alpha \in \tilde{C}$. En conclusion, $\tilde{S}_2(\tilde{f}) = \emptyset$.

C est lisse, donc \tilde{C} l'est également. Puisque \check{F}_3 est lisse, cela signifie que \tilde{f} est localement une intersection complète. En outre, \tilde{C} est isomorphe à un sous-schéma de I , lui-même fibré projectif, donc \tilde{f} est lissable.

Un désavantage de l'utilisation de la théorie des points multiples stationnaires est une nouvelle fois que les résultats qui sont établis ne sont valables que sous certaines conditions de généricité. En fait, il est possible de démontrer que les formules ainsi établies sont valables pour des complexes de droites lisses arbitraires et il est même possible de calculer la contribution dans ces formules d'éventuels pinceaux planaires inclus [Colley, 1990] en utilisant la technique des schémas de Hilbert [le Barz, 1987b].

3 Anneau de Chow de I

G et \check{F}_3 sont des cas particuliers de variétés de drapeaux, de type respectif $(2, 2)$ et $(1, 2, 1)$. I est une variété de drapeaux de type $(1, 1, 1, 1)$ et peut ainsi être construite comme subdivision des types $(2, 2)$ et $(1, 2, 1)$. Si Q est le fibré quotient de rang 2 sur \check{F}_3 , alors on a la séquence exacte - voir Chapitre 6, Paragraphe 2 (page 85)

$$0 \longrightarrow y^* \Theta_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \tilde{y}^* \check{\mathcal{T}}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

ce qui signifie que si H et \check{H} sont les images réciproques dans $A^*(I)$ des classes d'hyperplans h et \check{h} de \mathbb{P}^3 et $\check{\mathbb{P}}^3$ respectivement, on a alors :

$$\begin{cases} c_1(Q) = H - \check{H}, \\ c_2(Q) = H^2 - H\check{H} + \check{H}^2. \end{cases}$$

Soit $\mu_0, \mu_2, \mu_1, \mu_3$ les images réciproques dans $A^*(I)$ de H, \check{H} , et des cycles de Schubert γ_1, γ_2 respectivement. I est isomorphe à la projectivisation du fibré \check{Q} et une application de la Proposition 2.4.1 à ce fibré projectif donne :

$$\xi^2 - \xi(\mu_0 - \mu_2) + \mu_0^2 - \mu_0\mu_2 + \mu_2^2 = 0,$$

où ξ est $c_1(\Theta_I(1))$.

I est aussi isomorphe à la projectivisation d'un fibré vectoriel sur G . Si $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 = V_I$ est la filtration tautologique sur I , on voit alors que $S_1 = \tilde{f}^* y^* \Theta_{\mathbb{P}^3}(-1)$, $S_2 = \tilde{g}^* T$, $S_3 = \tilde{f}^* \tilde{y}^* \tilde{T}_{\mathbb{P}^3}(-1)$, où T est le fibré universel sur G . En outre, le quotient S_2/S_1 est le fibré tautologique sur I , et ainsi

$$(1 - \xi\omega)(1 - \mu_0\omega) = 1 - \mu_1\omega + \mu_2\omega^2,$$

ce qui signifie que :

$$\begin{cases} \xi = \mu_1 - \mu_0, \\ \mu_3 = \mu_1\mu_0 - \mu_0^2. \end{cases}$$

L'équation ci-dessus devient alors :

$$3\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 - 3\mu_0\mu_1 + \mu_1\mu_2 - 2\mu_0\mu_2.$$

Pour la projection sur \tilde{F}_3 , la deuxième partie du résultat de Grothendieck donne :

$$\begin{cases} \tilde{f}_* [I] = 0, \\ \tilde{f}_* \xi = [\tilde{F}_3], \\ \tilde{f}_* \xi^2 = H - \tilde{H}, \\ \tilde{f}_* \xi^3 = -H\tilde{H}, \\ \tilde{f}_* \xi^4 = -(H - \tilde{H})(H^2 + \tilde{H}^2). \end{cases}$$

On peut alors calculer tous les nombres de la forme $\int \mu_0^i \mu_1^j \mu_2^{6-i-j}$ par la formule de projection. Regardons un exemple :

$$\int \xi \mu_0^3 \mu_2^2 = \int \alpha_* (\xi \cdot \alpha^* (H^3 \tilde{H}^2)) = \int H^3 \tilde{H}^2 \cdot \alpha_* \xi = \int H^3 \tilde{H}^2 = 1,$$

et puisque $\mu_0^4 = 0$ d'après une relation analogue existant dans $A^*(\tilde{F}_3)$, on conclut que :

$$\int \mu_0^3 \mu_1 \mu_2^2 = 1.$$

Effectuant la même opération pour tous les autres cas, nous aboutissons aux résultats suivants :

$$\begin{cases} \int \mu_0^2 \mu_1 \mu_2^3 = \int \mu_0^3 \mu_1 \mu_2^2 = \int \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^3 = \int \mu_0^3 \mu_1^2 \mu_2 = 1, \\ \int \mu_0^2 \mu_1^2 \mu_2^2 = \int \mu_0^2 \mu_1^3 \mu_2 = \int \mu_0 \mu_1^3 \mu_2^2 = \int \mu_0 \mu_1^4 \mu_2 = 2, \end{cases}$$

les autres nombres étant nuls.

Le polynôme de Chern est alors donné par :

$$C_\omega(\mathcal{T}_I) = C_\omega(\tilde{f}^* \mathcal{T}_{\tilde{F}_3}) C_\omega(\tilde{f}^* Q \otimes \Theta_I),$$

où encore

$$C_\omega(\mathcal{T}_{I/\tilde{F}_3}) = 1 + (2\mu_1 - \mu_0 - \mu_2)\omega.$$

4 Théorie de l'intersection

Soit $E, \Gamma_1, \tilde{E}, \Gamma_2$ les images réciproques dans $A^*(\tilde{C})$ de $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ respectivement. D'après le fait que \tilde{f} est lissable, on a :

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{C}/\tilde{F}_3}) = \frac{C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{C}/I})}{C_\omega(\tilde{f}^* \mathcal{T}_{I/\tilde{F}_3})}.$$

Mais puisque

$$C_\omega(\mathcal{N}_{\tilde{C}/I}) = C_\omega(g^*\mathcal{N}_{C/G}) = 1 + d\Gamma_1\omega$$

par le plongement de Plücker, on trouve alors que ($c_k = c_k(\mathcal{N}_{\tilde{C}/\tilde{F}_3}$)

$$c_k = ((d-2)\Gamma_1 + E + \tilde{E})(E + \tilde{E} - 2\Gamma_1)^{k-1}.$$

L'équation vue dans I devient ici :

$$3E^2 + \Gamma_1^2 + \tilde{E}^2 - 3E\Gamma_1 + \Gamma_1\tilde{E} - 2E\tilde{E} = 0.$$

On a en outre les relations (provenant de $A^*(G)$ et $A^*(\tilde{F}_3)$)

$$\begin{cases} E^4 = \tilde{E}^4 = 0, \\ E^3 - E^2\tilde{E} + E\tilde{E}^2 - \tilde{E}^3 = 0, \\ \Gamma_2 = \Gamma_1E - E^2, \\ \Gamma_1^3 = 2\Gamma_1\Gamma_2 = 2\Gamma_1E(\Gamma_1 - E), \\ \Gamma_1^4 = 0. \end{cases}$$

Pour finir, nous déduisons les degrés des 0-cycles de ceux trouvés dans $A^*(I)$, puisque $\tilde{L}_*[\tilde{C}] = d\mu_1$ (\tilde{C} est lisse) :

$$\begin{cases} \int E^2\tilde{E}^3 = \int E^3\tilde{E}^2 = \int E\Gamma_1\tilde{E}^3 = \int E^3\Gamma_1\tilde{E} = d, \\ \int E^2\Gamma_1\tilde{E}^2 = \int E^2\Gamma_1^2\tilde{E} = \int E\Gamma_1^2\tilde{E}^2 = \int E\Gamma_1^3\tilde{E} = 2d, \end{cases}$$

les autres nombres étant nuls.

Nous avons alors la description suivante de l'anneau de Chow $A^*(\tilde{C})$:

$$\begin{array}{l} \dim 1 \\ \dim 3 \\ \dim 5 \\ \dim 5 \\ \dim 3 \\ \dim 1 \end{array} \begin{cases} A^0(\tilde{C}) = \mathbb{Z}[\tilde{C}], \\ A^1(\tilde{C}) = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{E}, \\ A^2(\tilde{C}) = \mathbb{Z}E^2 \oplus \mathbb{Z}E\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}\tilde{E}^2 \oplus \mathbb{Z}E\tilde{E}, \\ A^3(\tilde{C}) = \mathbb{Z}E^2\Gamma_1 \oplus \mathbb{Z}E\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}E^2\tilde{E} \oplus \mathbb{Z}E\tilde{E}^2 \oplus \mathbb{Z}\tilde{E}^3, \\ A^4(\tilde{C}) = \mathbb{Z}E^2\Gamma_1^2 \oplus \mathbb{Z}E^2\tilde{E}^2 \oplus E\tilde{E}^3, \\ A^5(\tilde{C}) = \mathbb{Z}*. \end{cases}$$

Pour finir, les projections dans $A^*(\tilde{F}_3)$ se comportent comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{f}_*\Gamma_1 = d(H + \tilde{H}), \\ \tilde{f}_*\Gamma_1^2 = 2dH\tilde{H}, \\ \tilde{f}_*\Gamma_1^3 = 2dH^2(\tilde{H} - H). \end{cases}$$

5 Résultats

Nous sommes maintenant prêts pour vérifier un certain nombre de formules de coïncidence pour les pinceaux de droites. Dans [Schubert, 1879], l'auteur utilise les notations suivantes pour certains cycles de \tilde{C} : p (*Punkt*) pour E , e (*Ebene*) pour \tilde{E} et \widehat{pe} pour $E^2\tilde{E} - E^3$. Schubert introduit également le symbole $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_m}$ pour la condition (i) : « les pinceaux \mathcal{L} satisfont le fait que les d points de l'intersection $\mathcal{L} \cap C$ sont infiniment près les uns des autres en accord avec la séquence (a_1, \dots, a_m) ». Pour finir, Schubert introduit le symbole h_{a_k} en conjonction avec la condition ε . En effet, $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_m} h_{a_k}$ dénote la classe des pinceaux sur \tilde{C} satisfaisant (i) et aussi (ii) : les a_k points « unifiés », considérés comme des droites de \mathbb{P}^3 , rencontrent une droite en position générale de \mathbb{P}^3 . On peut de manière similaire définir un symbole

$\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_m} h_{a_k} h_{a_j}$, mais dans le cas où $a_k = a_j$, Schubert utilise la notation $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_m} h_{a_k} l_{a_j}$ pour distinguer les deux conditions.

Il est inutile de s'étendre longuement sur les facteurs de surcompte, ils sont identiques à ceux vus dans la Partie II. Soit α un cycle tel que $\alpha.l(\mathbf{a}; 0)$ soit un 0-cycle. Alors le facteur de surcompte est $p(\mathbf{a}) = a_1! \dots a_m!$ si α ne contient que des conditions provenant de \tilde{F}_3 (à savoir E et \tilde{E}), et $q(\mathbf{a}) = (a_1 - 1)! a_2! \dots a_m!$ si α contient des conditions provenant de G (Γ_1 ou Γ_2).

Proposition 12.5.1 - *En utilisant les notations précédentes, les 43 formules énumératives données par Schubert [Schubert, 1879, page 269] concernant les pincesaux de droites sont :*

1. $\varepsilon_2 p^3 e = \int l(2; 0).E^3.\tilde{E} = d(d-1),$
2. $\varepsilon_2 p^3 h_2 = \int l(2; 0).E^3.\Gamma_1 = d,$
3. $\varepsilon_2 \widehat{pe} h_2 = \int l(2; 0).(E^2 \tilde{E} - E^3).\Gamma_1 = 2d(d-1),$
4. $\varepsilon_3 p^3 = \int l(3; 0).E^3 = 3d(d-2),$
5. $\varepsilon_3 \widehat{pe} = \int l(3).(E^2 \tilde{E} - E^3) = 2d(d-1)(d-2),$
6. $\varepsilon_3 p^2 h_3 = \int l(3; 0).E^2.\Gamma_1 = 2d(3d-4),$
7. $\varepsilon_3 p e h_3 = \int l(3; 0).E.\tilde{E}.\Gamma_1 = 2d(d^2-2),$
8. $\varepsilon_{22} p^3 = \frac{1}{2} \int l(2, 2; 0).E^3 = \frac{1}{2} d(d-2)(d-3)(d+3),$
9. $\varepsilon_{22} \widehat{pe} = \frac{1}{2} \int l(2, 2; 0).(E^2 \tilde{E} - E^3) = d(d-1)(d-2)(d-3),$
10. $\varepsilon_{22} p^2 h_2 = \int l(2, 2; 0).E^2.\Gamma_1 = d(d-3)(d^2+2d-4),$
11. $\varepsilon_{22} p e h_2 = \int l(2, 2; 0).E.\tilde{E}.\Gamma_1 = 2d(d-3)(2d^2-d-2),$
12. $\varepsilon_{22} p h_2 l_2 = \int l(2, 2_\Gamma; 0).E.\Gamma_1 = 2d(d+2)(2d^2-6d+3),$
13. $\varepsilon_4 p^2 = \int l(4; 0).E^2 = 4d(d-3)(3d-2),$
14. $\varepsilon_4 p e = \int l(4; 0).E.\tilde{E} = 2d(d-3)(d^2+3d-2),$
15. $\varepsilon_4 p h_4 = \int l(4; 0).E.\Gamma_1 = 2d(6d^2-11d-6),$
16. $\varepsilon_{32} p^2 = \int l(3, 2; 0).E^2 = 2d(d-3)(d-4)(d^2+6d-4),$
17. $\varepsilon_{32} p e = \int l(3, 2; 0).E.\tilde{E} = 2d(d-3)(d-4)(2d-1)(d+2),$
18. $\varepsilon_{32} p h_3 = \int l(3, 2; 0).E.\Gamma_1 = 2d(d-4)(d^3+6d^2-15d-6),$
19. $\varepsilon_{32} p h_2 = \int l(2, 3; 0).\Gamma.E = 2d(d-2)(d-4)(2d^2+8d+3),$
20. $\varepsilon_{32} h_3 h_2 = \int l(3, 2_\Gamma; 0).\Gamma = 4d(d^4-d^3+d^2-50d+72),$
21. $\varepsilon_{222} p^2 = \frac{1}{6} \int l(2, 2, 2; 0).E^2 = \frac{2}{3} d(d-3)(d-4)(d-5)(d^2+3d-2),$
22. $\varepsilon_{222} p e = \frac{1}{6} \int l(2, 2, 2; 0).E.\tilde{E} = \frac{1}{3} d(d-3)(d-4)(d-5)(3d^2+2d-2),$
23. $\varepsilon_{222} p h_2 = \frac{1}{2} \int l(2, 2, 2; 0).E.\Gamma_1 = d(d-2)(d-4)(d-5)(3d+1)(d+3),$
24. $\varepsilon_{222} h_2 l_2 = \int l(2_\Gamma, 2_\Gamma, 2) = 4d(d-5)(2d^4-2d^3-9d^2-38d+72),$
25. $\varepsilon_5 p = \int l(5; 0).E = 10d(d-4)(2d-3)(d+2),$

26. $\varepsilon_5 h_5 = \int l(5; 0) \cdot \Gamma_1 = 20d(7d^2 - 30d + 24)$,
27. $\varepsilon_{42} p = \int l(4, 2; 0) \cdot E = 2d(d-4)(d-5)(d^3 + 14d^2 - d - 30)$,
28. $\varepsilon_{42} h_4 = \int l(4, 2; 0) \cdot \Gamma_1 = 4d(d-5)(6d^3 + 13d^2 - 138d + 120)$,
29. $\varepsilon_{42} h_2 = \int l(2, 4; 0) \cdot \Gamma_1 = 4d(d-5)(d^4 + 4d^3 + 15d^2 - 138d + 120)$,
30. $\varepsilon_{33} p = \frac{1}{2} \int l(3, 3; 0) \cdot E = d(d-4)(d-5)(d+2)(2d^2 + 8d - 15)$,
31. $\varepsilon_{33} h_3 = \int l(3, 3; 0) \cdot \Gamma_1 = 4d(d-1)(d-3)(d-5)(d^2 + 6d + 40)$,
32. $\varepsilon_{322} p = \int l(3, 2, 2; 0) \cdot E = d(d-4)(d-5)(d-6)(3d^3 + 16d^2 - 5d - 30)$,
33. $\varepsilon_{322} h_3 = \int l(3, 2, 2; 0) \cdot \Gamma_1 = 2d(d-5)(d-6)(d^4 + 8d^3 - 3d^2 - 130d + 120)$,
34. $\varepsilon_{322} h_2 = \frac{1}{2} (\int l(3, 2_\Gamma, 2) + \int l(3, 2, 2_\Gamma)) = 4d(d-5)(d-6)(2d^4 + 6d^3 - d^2 - 130d + 120)$,
35. $\varepsilon_{2222} p = \frac{1}{24} \int l(2, 2, 2, 2; 0) \cdot E = \frac{1}{12} d(d-4)(d-5)(d-6)(d-7)(5d^3 + 18d^2 - 9d - 30)$,
36. $\varepsilon_{2222} h_2 = \frac{1}{6} \int l(2, 2, 2, 2; 0) \cdot \Gamma_1 = \frac{2}{3} d(d-5)(d-6)(d-7)(3d^4 + 8d^3 - 17d^2 - 122d + 120)$,
37. $\varepsilon_6 = \int l(6; 0) = 20d(d-5)(17d^2 - 50d + 24)$,
38. $\varepsilon_{52} = \int l(5, 2; 0) = 20d(d-5)(d-6)(2d^3 + 13d^2 - 50d + 24)$,
39. $\varepsilon_{43} = \int l(4, 3; 0) = 4d(d-5)(d-6)(d^4 + 8d^3 + 67d^2 - 250d + 120)$,
40. $\varepsilon_{422} = \frac{1}{2} \int l(4, 2, 2; 0) = 2d(d-5)(d-6)(d-7)(d^4 + 18d^3 + 47d^2 - 250d + 120)$,
41. $\varepsilon_{332} = \frac{1}{2} \int l(3, 3, 2; 0) = 2d(d-5)(d-6)(d-7)(2d^4 + 16d^3 + 49d^2 - 250d + 120)$,
42. $\varepsilon_{3222} = \frac{1}{6} \int l(3, 2, 2, 2; 0) = \frac{2}{3} d(d-5)(d-6)(d-7)(d-8)(3d^4 + 24d^3 + 31d^2 - 250d + 120)$,
43. $\varepsilon_{22222} = \frac{1}{120} \int l(2, 2, 2, 2, 2; 0) = \frac{1}{6} d(d-2)(d-5)(d-6)(d-7)(d-8)(d-9)(d^3 + 8d^2 + 19d - 12)$.

Preuve. 1. à 3. Nous utilisons le cycle $l(2; 0) = c_1 = (d-2)\Gamma_1 + E + \tilde{E}$.

4. à 7. On prends cette fois la classe $l(3; 0) = c_1^2 + c_2$.

8. à 12. On s'intéresse au cycle $l(2, 2; 0) = c_1 \check{f}^* \check{f}_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2$, en n'oubliant pas que le facteur de surcompte est $p(2, 2) = 2$ lorsque la condition supplémentaire imposée ne contient pas de Γ_1 et $q(2, 2) = 1$ autrement. Le seul cas un peu épineux est le 12. Ici, il faut en fait considérer la formule modifiée $l(2, 2_\Gamma; 0)$, donnée par :

$$l(2, 2_\Gamma; 0) = c_1 \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1) - 4c_1^2 \Gamma_1 - 2c_2 \Gamma_1.$$

13. à 15. On passe aux cas où 4 points de \tilde{C} sont infiniment près les uns des autres. Alors on doit utiliser le cycle :

$$l(4; 0) = c_1^3 + 3c_1 c_2 + 2c_3.$$

16. à 20. La théorie de Colley ne permet pas de construire directement la classe $l(3, 2; 0)$, mais nous avons déjà vu que par symétrie, on avait en fait :

$$l(3, 2; 0) = (c_1^2 + c_2) \check{f}^* \check{f}_* c_1 - 6c_1^3 - 12c_1 c_2 - 6c_3.$$

Pour le 20., seul cas difficile, il faut alors utiliser le cycle modifié

$$l(3, 2_\Gamma; 0) = (c_1^2 + c_2) \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1) - 6c_1^3 \Gamma_1 - 12c_1 c_2 \Gamma_1 - 6c_3 \Gamma_1.$$

21. à 24. Les trois premières formules ne présentent pas de difficultés. Nous utilisons pour les calculer la formule

$$l(2, 2, 2; 0) = c_1 \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \check{f}^* \check{f}_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2) - 4(2c_1^2 + c_2) \check{f}^* \check{f}_* c_1 + 40c_1^3 + 56c_1 c_2 + 24c_3.$$

Le cas 24. est sensiblement plus compliqué. Il faut pour cela utiliser une version modifiée $l(2_\Gamma, 2_\Gamma, 2; 0)$ du cycle précédent où l'on impose que les deux premiers points, considérés comme des droites de \mathbb{P}^3 , rencontrent une droite en position générale. Cela donne :

$$c_1 \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1 \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1) - 4c_1^2 \Gamma_1^2 - 2c_2 \Gamma_1^2) - 4\Gamma_1(2c_1^2 + c_2) \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1) + \Gamma_1^2(40c_1^3 + 56c_1 c_2 + 24c_3).$$

Le degré de ce cycle est alors le résultat espéré. Pour le facteur de surcompte, on voit ici que $q(2_\Gamma, 2_\Gamma, 2) = 1$.

25. à 26. On utilise à présent la formule

$$l(5; 0) = c_1^4 + 6c_1^2 c_2 + c_2^2 + 10c_1 c_3 + 6c_4.$$

27. à 29. Nous devons ici nous intéresser au cycle $l(2, 4; 0)$ pour le cas 29. et au cycle

$$l(4, 2; 0) = (c_1^3 + 3c_1 c_2 + 2c_3) \check{f}^* \check{f}_* c_1 - 8c_1^4 - 36c_1^2 c_2 - 6c_2^2 - 46c_1 c_3 - 24c_4$$

pour les deux autres cas.

30. à 31. On considère ici la classe $l(3, 3; 0)$, le facteur de surcompte étant $p(3, 3) = 2$ dans le premier cas et $q(3, 3) = 1$ dans le second.

32. à 34. Pour les deux premiers, on utilise le cycle $l(3, 2, 2; 0)$ suivant (temps CPU : 44,25 s ; mémoire de session : 25,5 MB) :

$$l(3, 2, 2; 0) = l(3; 0) \check{f}^* \check{f}_* l(2, 2; 0) - 12(c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3) \check{f}^* \check{f}_* c_1 + 24(3c_1^4 + 10c_1^2 c_2 + 12c_1 c_3 + 5c_4).$$

Le 34. est un cas compliqué. En effet, la condition h_2 peut s'appliquer sur chacun des deux derniers points. Il faut donc utiliser deux cycles modifiés :

$$l(3, 2_\Gamma, 2; 0) = l(3; 0) \check{f}^* \check{f}_*(\Gamma_1 l(2, 2; 0)) - 12\Gamma_1(c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3) \check{f}^* \check{f}_* c_1 + 24\Gamma_1(3c_1^4 + 10c_1^2 c_2 + 12c_1 c_3 + 5c_4),$$

et

$$l(3, 2, 2_\Gamma; 0) = l(3; 0) \check{f}^* \check{f}_* l(2, 2_\Gamma; 0) - 12(c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3) \check{f}^* \check{f}_*(c_1 \Gamma_1) + 24\Gamma_1(3c_1^4 + 10c_1^2 c_2 + 12c_1 c_3 + 5c_4),$$

et calculer le degré de la somme.

35. à 36. Calculer ces deux résultats ne présente pas de difficultés. Il suffit d'appliquer la formule $l(2, 2, 2, 2; 0)$ (temps CPU : 5 mn 20 s ; mémoire : 177 MB) donnée dans l'Annexe A.

37. à 39. On utilise les cycles $l(6; 0)$, $l(5, 2; 0)$ et $l(4, 3; 0)$, les deux derniers étant obtenus par rapport à ceux de l'Annexe A en inversant les parties non-commutatives, comme nous venons de le faire pour $l(2, 4; 0)$.

40. à 43. Les formules $l(4, 2, 2; 0)$ (temps CPU : 5 mn 44 s ; mémoire : 188 MB), $l(3, 3, 2; 0)$ (temps CPU : 6 mn 13 s ; mémoire : 205 MB), $l(3, 2, 2, 2; 0)$ (temps CPU : 49 mn 1 s ; mémoire : 1580 MB) et $l(2, 2, 2, 2, 2; 0)$ (temps CPU : 10 h 40 mn ; mémoire 15046 MB) sont exhibées dans l'annexe. Il suffit de les évaluer dans le cas présent et d'en calculer le degré.

□

6 Bilan

Personne à ce jour n'avait vérifié l'intégralité des formules de coïncidence de Schubert pour les pinceaux de droites. C'est dorénavant chose faite avec les calculs de ce chapitre et cela a été permis grâce à deux apports fondamentaux de notre travail. D'abord, notre implantation de la théorie des points multiples stationnaires nous donne des formules qu'il était auparavant impossible d'obtenir. Ensuite, dès lors que la théorie de l'intersection a été obtenue, le reste des calculs peut s'effectuer quasi-entièrement de manière mécanique (il faut bien sûr parfois réfléchir sur les conditions à imposer en chaque point de contact et sur les facteurs de surcompte), évitant ainsi un travail d'évaluation considérable et fastidieux.

Géométrie algébrique en général, conclusions et perspectives

Dans ce document, nous avons regardé certaines applications de géométrie algébrique dans le contexte de la géométrie énumérative, dont la caractéristique majeure est de compter le nombre de solutions de systèmes polynomiaux sans jamais manipuler les équations sous-jacentes. Nous nous sommes, entre autres choses, penchés dans la Partie II sur une représentation d'objets populaire en vision par ordinateur, le graphe d'aspects.

Mais la géométrie algébrique ne se limite bien sûr pas à la théorie de l'intersection et à la géométrie énumérative, même si celles-ci en occupent une position centrale. Nous explorons ici d'autres branches qui ont déjà ou devraient interagir avec la vision. Nous le faisons brièvement, en mentionnant au passage certaines sources de première importance et en invitant le lecteur à explorer plus profondément ces domaines, en nous axant notamment sur les parties algorithmiques de la résolution de systèmes d'équations polynomiales. Le contenu de cette analyse est apparu dans [Petitjean, 1994a] pour ce qui concerne plus particulièrement les techniques utiles en représentation d'objets, alors que [Faugeras et Petitjean, 1995] aborde un spectre plus large.

Pour conclure ce document, nous tirons les enseignements de nos investigations, regardons les contributions de notre travail et examinons quelques perspectives de recherche qui nous semblent prometteuses.

Chapitre 13

Géométrie algébrique en général et vision par ordinateur

Contents

1	Invariants algébriques	177
2	Géométrie algébrique réelle	178
2.1	Nombre de solutions réelles	178
2.2	Résolution de systèmes polynomiaux	179
2.3	Aspects algorithmiques (cote 14Qxx)	179
2.4	Exemple : graphes d'aspects et géométrie algébrique réelle	180
3	Géométrie projective et méthodes classiques	180
4	Bilan	181

Voyons maintenant les différentes directions dans lesquelles nous pensons que l'interaction entre géométrie algébrique, en dehors de la géométrie énumérative, et vision par ordinateur devrait se produire ou s'est déjà produite. Il ne fait aucun doute que ce qui suit reflète en partie notre expérience et nos préjugés. En outre, la géométrie algébrique emprunte beaucoup à d'autres domaines mathématiques, comme l'algèbre commutative et la théorie des singularités. Mais nous avons cherché à ne pas trop nous écarter du sujet qui nous préoccupe, et pour nous y aider, nous avons utilisé une nouvelle fois la classification des sujets établie par *Math Reviews*.

1 Invariants algébriques

Les théories, constructions et applications des invariants algébriques (cote 14Lxx) en vision ont été décrites de manière extensive dans [Mundy et Zisserman, 1992]. Nous ne donnons ici qu'une brève introduction au sujet et le relierons à la géométrie algébrique moderne. Une vue importante de la géométrie est de considérer des groupes de transformations et d'étudier ensuite les propriétés géométriques qui sont invariantes par des actions sur ces groupes. Cette idée fut lancée par Félix Klein dans son fameux programme *Erlangen* en 1872.

Les *invariants algébriques* sont des invariants de combinaisons d'objets algébriques, comme des points, des droites ou encore des coniques. Ils furent une des grandes préoccupations des mathématiciens du XIX^e siècle [Grace et Young, 1903]. En vision, ils ont été utilisés avec succès comme des fonctions d'indexation

dans des approches à base de modèles et pour faire du positionnement relatif. Dans une certaine mesure, le problème fondamental en vision est que les quantités mesurées dans les images dépendent non seulement de la forme des objets, mais aussi de la position, de l'orientation et des paramètres intrinsèques de la caméra. S'il est possible de définir des descripteurs de formes qui ne sont pas affectés par le groupe de transformations considéré (généralement projection en perspective), alors les mesures dans les images de ces descripteurs peuvent être comparées aux propriétés de l'objet, quel que soit le point de vue de la caméra.

Notons aussi que lorsque l'on travaille avec le groupe projectif de transformations, le cadre de travail naturel est celui de l'*algèbre double* [Carlsson, 1993; Svensson, 1993], un formalisme algébrique invariant qui permet de prouver des résultats en géométrie projective.

Tout système dont le but est de reconnaître des objets à partir de leur représentation algébrique doit utiliser des invariants algébriques. Une possibilité est d'utiliser des invariants qui sont des polynômes explicites en les coefficients des équations définissant l'objet [Keren, 1994]. Ce sujet possède une histoire riche et ancienne [Mumford, 1965], mais est actuellement de nouveau en pleine expansion. Beaucoup de questions théoriques restent à ce jour sans réponse : Combien d'invariants linéairement indépendants peut-on trouver ? Comment calcule-t-on une base (minimale) de l'ensemble des invariants ? Existe-t-il des *syzygies* (relations algébriques entre invariants de la base) ? ...

Une vue globale des travaux anciens et des recherches actuelles sur les invariants des formes n -aires peut être trouvée dans [Sturmfels, 1993]. Une *forme n -aire* de degré d est un polynôme homogène de degré d en n variables à coefficients complexes. L'algèbre des invariants des formes binaires a été étudiée extensivement au XIX^e siècle et a culminé avec le théorème de finitude de Gordan, qui prouva que ces algèbres étaient générées par un nombre fini d'invariants pour toutes les valeurs de d . Ces travaux, intéressants pour eux-mêmes, trouvèrent en outre de nombreuses applications en géométrie projective et dans l'étude des équations algébriques. L'algèbre des invariants des formes binaires est connue explicitement pour $d \geq 8$. Pour les formes ternaires et quaternaires, seuls les cas $d = 2, 3$ sont bien compris.

2 Géométrie algébrique réelle

Ces dernières années, la recherche d'algorithmes efficaces pour résoudre des systèmes d'équations polynomiales a reçu une attention renouvelée de la part de la communauté mathématique, de par son importance démontrée dans une variété très large de problèmes d'intérêts à la fois théoriques et pratiques. Le besoin de compter le nombre de solutions réelles ou de trouver des solutions exactes ou approchées de tels systèmes est apparu dans bon nombre d'applications pratiques, comme en robotique, en modélisation d'objets et bien sûr en vision par ordinateur. La *géométrie algébrique réelle* (cote 14Pxx) travaille sur des *ensembles semi-algébriques* (cote 14P10) - sous-ensembles d'un espace euclidien réel qui sont définis par des égalités et des inégalités polynomiales - et sur des algorithmes sur ces ensembles [Bochnak *et al.*, 1987; Arnon, 1989].

2.1 Nombre de solutions réelles

En 1835, Sturm donna un algorithme pour calculer le nombre de solutions réelles d'une équation polynomiale unique, qui fut plus tard étendu au cas d'un système formé d'une équation et d'une inéquation par Sylvester. Les *séquences de Sturm généralisées* [Gonzalez *et al.*, 1989] donnent le moyen de compter le nombre exact de racines réelles de polynômes à une variable satisfaisant un nombre fini d'inégalités polynomiales. La *méthode d'Hermite* [Pedersen *et al.*, 1992] généralise ces résultats aux polynômes multivariés. Ces techniques, couplées aux algorithmes calculant des bases de Gröbner (voir paragraphe suivant), donne le moyen de repérer les sous-ensembles semi-algébriques de l'espace de travail sur lesquels le système possède un nombre fixé prédéfini de solutions réelles. Ensuite, un codage basé sur le *lemme de*

Thom [Coste et Roy, 1988] permet de caractériser les solutions comptées de cette manière en examinant les signes des dérivées des polynômes aux solutions.

Pour information, mentionnons qu'il existe également des critères permettant de mesurer l'amplitude des racines et la distance entre racines d'équations polynomiales multivariées. [Mignotte, 1982] est une bonne introduction à ces notions.

2.2 Résolution de systèmes polynomiaux

Le problème de la résolution proprement dite de systèmes d'équations polynomiales (cote 14P05) a connu ces vingt dernières années des développements et bouleversements considérables. Il ne saurait ici être question de séparer la géométrie algébrique réelle du domaine voisin qu'est le *calcul symbolique* (cote 13Pxx).

Le *résultant* [van der Waerden, 1970] est un critère qui permet de déterminer lorsque deux polynômes ont des racines communes. Les méthodes à base de résultants sont utiles dans des algorithmes qui résolvent des problèmes par récurrence sur la dimension. Une application très importante des résultants est pour la construction de la description de la projection d'un ensemble algébrique. Par exemple, pour résoudre un problème géométrique en dimension $n+1$, où un objet géométrique est défini par des égalités polynomiales, on peut dans un premier temps construire la projection de cet ensemble sur un espace à n dimensions, résoudre le problème récursivement dans cet espace, puis « relever » la solution à l'espace de dimension supérieure.

Dans le cas limité de polynômes homogènes, [Lazard, 1981] donne un algorithme utilisant les *résultants multivariés*, un analogue à plusieurs variables des résultants classiques qui peut être utilisé pour éliminer un nombre de variables simultanément. Notons également les méthodes basées sur les *polynômes caractéristiques généralisés*, introduits dans [Canny, 1990], qui ont l'avantage d'être applicables pour des systèmes d'équations non-homogènes mais qui demandent d'avoir exactement p polynômes en p variables. La *décomposition algébrique cylindrique* [Collins, 1975] est un algorithme bien connu qui utilise aussi le schéma général des résultants, mais de manière indirecte. L'idée est d'obtenir une partition d'un espace réel à n dimensions en sous-espaces de caractère donné, de telle sorte que les polynômes utilisés aient le même signe en tous les points de chaque sous-espace.

Le problème de trouver les solutions d'un système d'équations est lié à celui de décider si de telles solutions existent. Un moyen d'aborder cette question est d'utiliser les *bases de Gröbner* [Buchberger, 1985; Weispfenning, 1992], qui ont été très largement utilisées dans une gamme d'algorithmes algébriques et géométriques. Enfin, mentionnons qu'il existe une forte corrélation entre trouver les solutions d'un système et trouver les facteurs d'un polynôme multivarié, au sens où les deux nécessitent globalement de trouver les composantes irréductibles d'un ensemble algébrique. Le problème d'identifier et de décrire chacune de ces composantes a été étudié par [Grigor'ev et Chistov, 1984].

2.3 Aspects algorithmiques (cote 14Qxx)

La plupart des techniques décrites dans les paragraphes précédents sont (ou sont en train de devenir) disponibles pour la communauté scientifique. *Macaulay* [Bayer et Stillman, 1992] est une plateforme d'algèbre informatique dont la tâche principale est le calcul efficace des bases de Gröbner. Cette plateforme a résolu de nombreux problèmes et apporté de nouveaux exemples aux géomètres algébristes. Le progiciel *IF* [Cucker et Roy, 1989] de Maple [Maple, 1990] permet de manipuler des systèmes d'équations polynomiales et des méthodes comme celle des séquences de Sturm généralisées ont été implantées. Enfin, mentionnons [Bayer et Mumford, 1992], article effectuant la synthèse de ce que les ordinateurs permettent actuellement de calculer en géométrie algébrique, et donnant les bornes sur la complexité de ces différents calculs.

2.4 Exemple: graphes d'aspects et géométrie algébrique réelle

Dans la Partie II, nous sommes entrés très en détail dans la géométrie énumérative des graphes d'aspects, ce qui a permis d'étudier leur complexité. Voyons ici une autre facette de la géométrie algébrique. Quand la surface définissant un objet est bornée par des frontières semi-algébriques (comme cela est le cas pour la plupart des objets utilisés en DAO), alors les générateurs de contours, les profils, les courbes et les surfaces d'événement visuel sont tous des ensembles semi-algébriques. Par suite, cela signifie que les graphes d'aspects peuvent être entièrement construits grâce à des algorithmes de géométrie algébrique réelle ([Roy et van Effelterre, 1992] pour les corps de révolution et [Rieger, 1993a] pour les surfaces algébriques). Effectuer des calculs exacts avec des méthodes symboliques revêt une importance clé pour éviter les instabilités numériques inhérentes à la manipulation de polynômes, mais au prix d'une consommation mémoire plus importante.

Soit \mathcal{V} l'espace des points de vue considéré. Soit $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{V}$ les surfaces événement visuel et $\tilde{\mathcal{B}}_i \subset \mathcal{V} \times \mathbb{R}^\alpha$ les conditions de reconnaissance, $i = 1, \dots, 5$. Par exemple, si ω est un point de vue, p un point de la surface et $l(t) = p + \omega t$ une ligne de vue, alors l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}_2$ correspondant à la surface flecnodale est :

$$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{(\omega, p) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}^3 / l(0) = 0, l'(0) = 0, l''(0) = 0, l'''(0) = 0\}.$$

La construction du graphe d'aspects dans le cas de la projection orthographique se déroule alors comme suit :

- Éliminer les paramètres de la surface (c.-à-d. les coordonnées de p) des équations définissant les $\tilde{\mathcal{B}}_i$, en utilisant les résultants ou encore les bases de Gröbner. Les équations obtenues sont des courbes singulières $\tilde{\mathcal{B}}_i \subset \mathcal{V}$.
- Calculer les composantes connexes de $\mathcal{V} - \bigcup_{i=1}^5 \tilde{\mathcal{B}}_i$ en utilisant la décomposition algébrique cylindrique de Collins.
- Obtenir les composantes \mathcal{B}_i de l'ensemble de bifurcation en éliminant certaines branches des $\tilde{\mathcal{B}}_i$ qui ne sont pas des projections de points réels des $\tilde{\mathcal{B}}_i$ (la projection de $\tilde{\mathcal{B}}_i$ sur le premier facteur est \mathcal{B}_i) et fusionner les composantes séparées par ces branches.
- Calculer un point de vue représentatif pour chacune des composantes connexes restantes.

3 Géométrie projective et méthodes classiques

Certains développements récents en vision-robotique sont en grande partie des redécouvertes de résultats obtenus par des mathématiciens il y a presque un siècle (cote 14Nxx). Ces analyses étaient hautement techniques et décrites en termes très abstraits, et étaient ainsi inaccessibles à la plupart des informaticiens d'aujourd'hui. Il a donc fallu les réécrire en langage moderne. Une simple traduction n'est malheureusement pas suffisante. En effet, les données en vision sont loin d'être précises, au contraire de ce que suppose la géométrie projective en tant que discipline mathématique. Ces méthodes classiques ont ainsi dû être modifiées et adaptées aux besoins des chercheurs en vision, en insistant tout particulièrement sur la fiabilité des données et sur la robustesse des calculs. Cette reformulation est parfois appelée *géométrie projective algorithmique* (*computational projective geometry*) [Kanatani, 1993].

Le lecteur consultera avec intérêt l'ouvrage [Faugeras, 1993], qui met un accent tout particulier sur l'utilisation de méthodes géométriques (en particulier de géométrie projective) en vision, alors que les

techniques classiques sont décrites dans [Semple et Kneebone, 1952]. Mentionnons brièvement les trois exemples suivants :

- *Calibrage de caméra :*

Le but de la calibration de caméra est de calculer les paramètres de la caméra à partir de la géométrie 3D connue d'une scène, et cela requiert l'analyse de la projection d'entité géométriques, généralement des objets algébriques.

- *Reconstruction 3D :*

La reconstruction est la tâche qui consiste à obtenir des informations géométriques sur la scène observée, à partir de deux images en projection ou plus, prises de points de vue distincts. Cela revient à mettre en correspondance des indices de la scène, typiquement des points ou des droites. [Maybank, 1993] a étudié le problème de la reconstruction à partir de correspondances de droites. Il prouve que, pour certaines configurations critiques de droites, la reconstruction est ambiguë. Buchanan [Buchanan, 1992] montre que ces configurations critiques sont en fait des ensembles doublement infinis de droites, c.-à-d. des congruences. Maybank obtient alors des résultats énumératifs sur le nombre de droites qu'il faut mettre en correspondance pour avoir ensuite une reconstruction non ambiguë.

D'autres chercheurs se sont intéressés à la reconstruction par mise en correspondance de points. Dans le cadre de la géométrie projective, [Maybank, 1992] prouve que de multiples interprétations surviennent lorsque les points appartiennent à une surface quadrique critique.

- *Mouvement :*

Le problème de déterminer le mouvement à partir de correspondances de n points (*motion from point matches*) fut étudié et résolu par [Faugeras et Maybank, 1990; Maybank, 1990], qui donnèrent aussi le nombre de solutions pour des valeurs particulières de n . Ces résultats furent « redécouverts » après que des études classiques du XIX^e siècle furent traduites en langage moderne, en particulier par [Buchanan, 1988]. Cette question a en effet une histoire riche et longue, et date des travaux de Chasles (1855), Hesse (1863) et Kruppa (1913). Au cœur de l'étude de ce problème se trouvent notamment les propriétés des matrices essentielles [Demazure, 1988].

4 Bilan

Ce survol rapide de différentes branches de la géométrie algébrique a permis de constater que les interactions avec la vision par ordinateur sont potentiellement nombreuses et variées. À ce jour, les rapprochements se sont effectués essentiellement sur le terrain de la théorie des invariants et de la géométrie projective, et de nombreux résultats fondamentaux de vision théorique sont des redécouvertes de théorèmes parfois très anciens. D'autres branches devraient connaître un essor important et tout particulièrement la géométrie algébrique réelle, qui permet de travailler de manière exacte et ainsi d'éviter certains problèmes d'instabilité numérique liés à la manipulation d'ensembles semi-algébriques.

Chapitre 14

Conclusions et perspectives

Contents

1	Contributions	183
2	Perspectives	184
2.1	Systèmes linéaires de courbes sur une surface	185
2.2	Classes de surfaces	186
3	Synthèse	187

Il est temps maintenant de conclure ce document. Nous débutons par un résumé des apports et contributions de notre travail. Puis nous présentons les perspectives ou futures directions de recherche qui nous semblent importantes, avant d'effectuer une synthèse.

1 Contributions

Commençons tout d'abord par faire un tour d'horizon des réalisations et contributions présentées dans ce document. Notre travail s'est situé dans le cadre global de la géométrie algébrique, branche des mathématiques dont l'objectif est d'étudier en toute généralité le comportement et les propriétés de fonctions définies par des équations polynomiales, et dans le cadre restreint de la géométrie énumérative, dont le but est de déterminer le nombre de figures géométriques satisfaisant certaines conditions géométriques.

Une des voies dans laquelle cette géométrie, et sa sœur jumelle la théorie de l'intersection, se sont développées est la théorie des points multiples, avec une méthode itérative (points multiples stationnaires) et une méthode fonctionnelle (schémas de Hilbert). Cette dernière est moins restrictive et aussi complexe que la méthode itérative, mais ne se prête pas naturellement à une automatisation. La théorie des points multiples stationnaires possède un avantage énorme sur ce plan; et nous en avons développé le premier algorithme et réalisé la première implantation. Ce programme, et l'utilisation que nous en avons faite dans ce document, représente un premier pas vers une théorie algorithmique de la géométrie énumérative.

Cette implantation est la pierre angulaire de tout le reste de notre travail. Elle nous a permis, dans la Partie I, de donner les premières observations sur la forme des formules de points multiples stationnaires et arbitraires. Elle nous a autorisé également à étudier la géométrie de systèmes algébriques de droites, comme les surfaces réglées et les congruences. Nous avons vu que, la théorie de l'intersection étant donnée, l'évaluation des formules énumératives pouvait être entièrement mécanisée. Les classes de points multiples étant des fonctions symboliques d'invariants des variétés considérées, elles n'ont besoin d'être calculées

qu'une seule fois et c'est pourquoi nous en avons réalisé une base, accessible par chacun de nos modules d'évaluation.

Nous avons montré dans la Partie II comment la théorie des points multiples pouvait être utilisée pour comprendre les contacts de droites et de plans avec des courbes et des surfaces de l'espace projectif \mathbb{P}^3 . Nous nous sommes intéressés à une représentation d'objets populaire en vision à base de modèles, le graphe d'aspects, qui énumère toutes les apparences distinctes d'un solide. En reliant sa construction à la théorie des singularités, nous avons établi que tous les points de vue de l'espace d'observation depuis lesquels il est possible d'observer un changement de topologie des contours appartiennent à une série de surfaces d'événement visuel. Ces surfaces, dont le nombre augmente avec la complexité de l'objet étudié, sont constituées de droites ayant des contacts bien spécifiques avec le solide considéré, et sont ainsi des surfaces réglées. Nous avons calculé la complexité de toutes ces surfaces, montré comment leur géométrie énumérative pouvait être entièrement appréhendée, et conclu sur la complexité globale du graphe d'aspects d'objets lisses et lisses par morceaux. En comparant notre approche avec la seule autre connue à ce jour permettant de répondre à des questions de nature théorique sur les graphes d'aspects, nous avons vu que notre travail avait l'énorme avantage d'effectuer tous les calculs de manière exacte, ne donnant pas simplement des bornes sur la complexité des entités abordées. En outre, nous avons étendu au cas des surfaces lisses par morceaux bon nombre de formules énumératives sur les surfaces de \mathbb{P}^4 connues jusqu'alors uniquement pour les surfaces lisses.

Dans la Partie III, nous avons sensiblement divergé du cadre de la vision théorique pour aborder des applications mathématiques de la théorie des points multiples stationnaires. Nous avons plus spécifiquement étudié les contacts de droites avec des variétés dans des espaces projectifs de dimension 4, 5 et 6. Nos différentes implantations, à la fois de la théorie des points multiples et de l'évaluation de ces formules dans un cadre donné, nous ont permis de vérifier tous les résultats obtenus par ailleurs grâce à la technique des schémas de Hilbert et d'en donner de nombreux autres nouveaux. Pour conclure cette partie, nous avons vérifié l'intégralité des formules de coïncidence données par Schubert il y a plus d'un siècle sur des pinceaux de droites, ce que les nouvelles classes calculées avec notre implantation de la technique itérative de points multiples nous autorise.

2 Perspectives

Les perspectives de recherches qui font suite à ce travail sont multiples et variées. En outre, elles s'étendent dans deux directions différentes : une direction mathématique et une direction informatique. Nous en examinons d'abord certaines de manière informelle, sans ordre particulier (l'examen de deux d'entre elles qui demandent plus d'explications est repoussé aux paragraphes à venir) :

- En premier lieu et nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, les chercheurs en vision bénéficieraient énormément d'une traduction en langage moderne de certains travaux classiques. Cela a été fait partiellement en géométrie projective et pour la théorie des invariants, et nul doute que cela se fera également pour d'autres branches de la géométrie algébrique.
- Le cadre de travail que nous avons mis en place pour l'étude de la complexité des graphes d'aspects est très général. Il permet théoriquement de manipuler des surfaces plus compliquées que les surfaces lisses par morceaux, notamment des surfaces possédant en sus une courbe cuspidale. Il faudrait également regarder le cas de surfaces constituées de surfaces lisses s'intersectant autrement que transversalement. Le problème est double : d'abord la classification des projections de ces surfaces est éminemment plus difficile que dans les cas simples que nous avons abordés, et elle n'est pas à ce jour terminée. En outre, il n'est pas sûr que la notion de graphe d'aspects possède encore toute sa validité pour ces types de surfaces.
- Nous avons maintenant à notre disposition une implantation de la théorie des points multiples et par suite un grand nombre de classes énumératives. Cela devrait permettre aux géomètres algébristes

de poursuivre plus avant la vérification et la justification de résultats anciens, ce que nous avons fait dans ce document pour les formules de coïncidence des pinceaux de droites. En outre, et nous en avons débuté l'exploration, il devrait aider à comprendre la forme des classes de points multiples et par voie de conséquence la forme des formules énumératives.

- La propriété qui fait de la silhouette d'une surface lisse par morceaux le dual d'une section plane de la surface duale est à étudier de très près : elle peut permettre de découvrir un nouvel algorithme de construction de graphes d'aspects. Pour cela, il faut comprendre ce que deviennent les événements visuels dualement.
- La relation d'équivalence utilisée pour effectuer le partitionnement de l'espace d'observation est ici le difféomorphisme. Est-il possible de définir une relation d'équivalence moins contraignante ? Les indices repérés dans l'image ont-ils tous la même importance ?
- Sur un plan plus général, une critique généralement formulée sur les graphes d'aspects en tant que représentation d'objets en vision par modèles est qu'ils ne prennent pas en compte les aspects de précision et d'échelle. [Eggert *et al.*, 1993] aborde ce problème pour les cas des polygones (visibilité dans le plan), aboutissant à une étude déjà très compliquée pour cette classe d'objets pourtant relativement simples. Il conviendrait sans doute de se pencher sur une approche similaire pour les surfaces algébriques.

Voyons deux perspectives de recherche future qui nous semblent mériter plus de développements et auxquelles nous consacrons un paragraphe entier. Elles concernent des systèmes ou classes de courbes et de surfaces, et sont motivées par des problèmes de reconstruction et de modélisation d'objets.

2.1 Systèmes linéaires de courbes sur une surface

Un *système linéaire* de courbes de dimension n de \mathbb{R}^3 est un ensemble de courbes à n paramètres, défini linéairement. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n réels linéairement indépendants et (C_1, \dots, C_n) des courbes algébriques de $\mathbb{R}[x, y, z]$, alors $(\mathbf{x} = (x, y, z))$

$$\Sigma = \alpha_1 C_1(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_n C_n(\mathbf{x})$$

est un système linéaire de dimension n . Soit maintenant X une surface de \mathbb{R}^3 donnée par le polynôme $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$. Soit $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ la direction d'observation. L'équation donnant le générateur de contour pour un \mathbf{v} fixé est :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (14.1)$$

en plus de la condition $f(\mathbf{x}) = 0$. Il est donc clair que l'ensemble Σ des générateurs de contours est un système linéaire. Si la projection étudiée est la perspective, alors Σ est de dimension 3 (on parle d'une *toile*), alors que si l'on considère une projection orthographique, on peut imposer la condition supplémentaire que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$, et Σ est de dimension 2 (c'est un *réseau*).

L'étude des systèmes linéaires est à la fois un vieux problème, étudié avec des méthodes de géométrie algébrique classiques [Zariski, 1935], et un problème moderne [Vainsencher, 1981]. Prenons le cas de courbes planes ou de courbes sur une surface, et voyons les comme des diviseurs. Alors nous savons qu'il existe une correspondance entre diviseurs et faisceaux inversibles, et ainsi un système linéaire peut être vu comme un faisceau accompagné de son groupe de sections. Ces systèmes possèdent des propriétés fort intéressantes. Par exemple, un système linéaire de dimension r sur une surface a la propriété que par r points génériques de la surface, il passe une courbe et une seule du système. Un *point de base* du système est un point qui appartient à toutes les courbes du système. Le *théorème de Bertini* dit que les singularités d'un membre générique d'un système linéaire ne peuvent se trouver que parmi les points de base du système.

Dans le contexte de la vision, plusieurs systèmes linéaires sont intéressants à étudier, comme celui des générateurs de contours déjà mentionné, celui des contours apparents ou encore celui des sections planes d'une surface. Celui des générateurs de contours est particulièrement significatif et sa meilleure compréhension devrait répondre à bien des questions. Reprenons l'Équation 14.1 ci-dessus et cherchons les points de base de Σ . Cela revient à chercher les points de X appartenant à tous les générateurs de contours, ou encore à chercher les points qui vérifient (14.1) pour tous les \mathbf{v} . Prenons par exemple les valeurs $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Cela nous donne le système d'équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = f = 0,$$

et nous reconnaissons le système donnant les points singuliers de X . Si X est lisse, alors Σ ne possède pas de points de base, ce que l'intuition, ou encore la propriété qui fait d'un contour apparent le dual d'une section plane de la surface duale, nous dicte. Si X est lisse par morceaux, le résultat est identique. D'après le théorème de Bertini, cela signifie qu'un membre générique de Σ est lisse, ce que nous savions déjà par ailleurs.

Beaucoup de propriétés globales de ce système restent à étudier. Tout d'abord, on peut se demander pourquoi ce système est relativement simple par rapport à la complexité du système des contours apparents de X , en d'autres termes du graphe d'aspects. On peut ensuite s'interroger sur le fait que le système des projections d'une surface lisse est, en principe, redondant, puisque le résultat de [d'Almeida, 1992] montre qu'une projection est suffisante pour déterminer la surface entière, à une projectivité près. Ensuite, quelles sont les propriétés qui font qu'une courbe sur la surface est un générateur de contours? Existe-t-il un critère permettant de dire qu'un générateur de contours est « stable », c.-à-d. tel qu'un changement important du point focal en amène un changement faible?

Répondre à cela aurait en outre pour effet de simplifier le procédé d'ajustement, la classe des courbes à regarder s'en trouvant réduite. Toutes ces questions devraient pouvoir trouver une réponse en géométrie algébrique.

2.2 Classes de surfaces

La définition d'un système linéaire, introduite pour les courbes, s'étend immédiatement aux surfaces. L'étude de systèmes (ou classes) de surfaces semble elle aussi revêtir une grande importance en vision théorique. Pour revenir à notre travail, un cas particulièrement intéressant de surfaces lisses par morceaux est celui des surfaces constituées de quadriques et de plans. Tant du point de vue de la reconstruction que de celui de la modélisation, ces surfaces présentent des avantages considérables. Il conviendrait en outre d'étudier de manière plus approfondie leur graphe d'aspects : les surfaces événementielles sont de faible degré et ainsi le nombre de leurs vues est réduit.

Il serait en outre particulièrement avantageux de pouvoir déterminer une classe de surfaces qui seraient suffisamment plastiques afin d'avoir un grand pouvoir de modélisation et suffisamment rigides pour permettre de donner des conclusions, mêmes partielles, sur sa forme à partir d'une seule de ses silhouettes. Les surfaces algébriques sont à ce titre trop rigides : une silhouette est *a priori* suffisante pour reconstruire la surface, à une projectivité près. Quant à leur pouvoir de modélisation, il est mal connu. On ne sait pas à l'heure actuelle prédire comment une surface algébrique se déforme lorsque l'on modifie légèrement les coefficients de son équation. Il serait de plus intéressant de savoir combien de formes différentes une surface algébrique de degré donné peut prendre (une quartique bornée ne semble pas avoir plus d'une dizaine de formes différentes).

Ensuite étant donnée une classe de surfaces, il faudrait pouvoir étudier sa stabilité (vis-à-vis de la projection, vis-à-vis de la modélisation, ...). Pour cela, des critères autres que la distance de Mahalanobis doivent être développés.

3 Synthèse

Avant tout, notre travail représente un premier pas vers de futures interactions, une tentative de rapprocher géométrie algébrique et vision par ordinateur. Les variétés polynomiales (droites, courbes et surfaces algébriques, congruences, ...) sont d'emploi très naturel en vision, mais la géométrie algébrique moderne s'est enfermée dans un formalisme souvent très abstrait et non constructif. Ceci explique sans doute pourquoi la seule branche dont le potentiel a été pleinement utilisé est la géométrie projective, plus concrète, après une traduction en langage moderne de nombreux théorèmes anciens. Nous espérons avoir montré au lecteur que bien d'autres aspects de la géométrie algébrique méritent notre attention, même s'ils demandent un investissement important et une étude approfondie afin d'en révéler la puissance. Gageons que d'autres sauront franchir le pas et exploiter toutes ces richesses.

Annexe A

Formules de points multiples stationnaires

Dans cette annexe sont regroupées toutes les formules de points multiples utilisées dans le corps du document, plus quelques autres qu'il nous a semblé intéressant de mentionner et qui pourront être utiles au lecteur. Nous nous intéressons donc à la classe $l(a; n)$ de points multiples d'une fonction $f : U \rightarrow V$ de codimension n , de telle sorte que les classes de Chern du faisceau normal $\mathcal{N}_{U/V}$ sont dénotées c_k .

1 Classes en codimension 0

- $l(2; 0) = c_1$,
- $l(3; 0) = c_1^2 + c_2$,
- $l(4; 0) = c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3$,
- $l(5; 0) = c_1^4 + 6c_1^2c_2 + c_2^2 + 10c_1c_3 + 6c_4$,
- $l(6; 0) = c_1^5 + 10c_1^3c_2 + 3c_1c_2^2 + 32c_1^2c_3 + 8c_2c_3 + 42c_1c_4 + 24c_5$,
- $l(7; 0) = c_1^6 + 15c_1^4c_2 + c_1^2c_2^2 + 84c_1^3c_3 - 5c_2^3 + 52c_1c_2c_3 + 178c_1^2c_4 + 52c_2^2c_3 - 10c_2c_4 + 232c_1c_5 + 120c_6$,
- $l(8; 0) = c_1^7 + 21c_1^5c_2 - 23c_1^3c_2^2 + 198c_1^4c_3 - 55c_1c_3^2 + 196c_1^2c_2c_3 + 594c_1^3c_4 + 676c_1c_3^2 - 66c_2^2c_3 - 342c_1c_2c_4 + 1356c_1^2c_5 + 424c_3c_4 - 212c_2c_5 + 1552c_1c_6 + 720c_7$,
- $l(9; 0) = c_1^8 + 28c_1^6c_2 - 116c_1^4c_2^2 + 438c_1^5c_3 - 320c_1^2c_2^3 + 556c_1^3c_2c_3 + 1724c_1^4c_4 + 11c_2^4 - 1042c_1c_2^2c_3 + 5272c_1^2c_3^2 - 3852c_1^2c_2c_4 + 6380c_1^3c_5 + 72c_2c_3^2 - 880c_2^2c_4 + 6712c_1c_3c_4 - 4932c_1c_2c_5 + 12160c_1^2c_6 - 1252c_4^2 + 5352c_3c_5 - 3272c_2c_6 + 12240c_1c_7 + 5040c_8$,
- $l(1, 1; 0) = f^* f_* [U] - [U]$,
- $l(1, 2; 0) = f^* f_* c_1 - 2c_1$,
- $l(1, 3; 0) = f^* f_* (c_1^2 + c_2) - 3c_1^2 - 3c_2$,
- $l(2, 2; 0) = c_1 f^* f_* c_1 - 4c_1^2 - 2c_2$,
- $l(2, 3; 0) = c_1 f^* f_* (c_1^2 + c_2) - 6c_1^3 - 12c_1c_2 - 6c_3$,
- $l(2, 4; 0) = c_1 f^* f_* (c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3) - 8c_1^4 - 36c_1^2c_2 - 6c_2^2 - 46c_1c_3 - 24c_4$,

- $l(2, 5; 0) = l(2; 0)f^*f_*l(5; 0) - 10c_1^5 - 80c_1^3c_2 - 34c_1c_2^2 - 196c_1^2c_3 - 48c_2c_3 - 232c_1c_4 - 120c_5,$
- $l(2, 6; 0) = l(2; 0)f^*f_*l(6; 0) - 12c_1^6 - 150c_1^4c_2 - 84c_1^2c_2^2 - 636c_1^3c_3 + 14c_2^3 - 420c_1c_2c_3 - 1244c_1^2c_4 - 260c_2^3 - 48c_2c_4 - 1480c_1c_5 - 720c_6,$
- $l(3, 3; 0) = (c_1^2 + c_2)f^*f_*(c_1^2 + c_2) - 9c_1^4 - 36c_1^2c_2 - 9c_2^2 - 42c_1c_3 - 24c_4,$
- $l(3, 4; 0) = l(3; 0)f^*f_*l(4; 0) - 12c_1^5 - 84c_1^3c_2 - 48c_1c_2^2 - 180c_1^2c_3 - 60c_2c_3 - 216c_1c_4 - 120c_5,$
- $l(3, 5; 0) = l(3; 0)f^*f_*l(5; 0) - 15c_1^6 - 165c_1^4c_2 - 141c_1^2c_2^2 - 594c_1^3c_3 + 9c_2^3 - 498c_1c_2c_3 - 1146c_1^2c_4 - 288c_2^3 - 66c_2c_4 - 1416c_1c_5 - 720c_6,$
- $l(1, 1, 1; 0) = f^*f_*l(1, 1; 0) - 2c_1l(1, 1; 0) + 2c_2,$
- $l(2, 2, 2; 0) = c_1f^*f_*(c_1f^*f_*c_1 - 4c_1^2 - 2c_2) - 4(2c_1^2 + c_2)f^*f_*c_1 + 8(5c_1^3 + 7c_1c_2 + 3c_3),$
- $l(3, 2, 2; 0) = l(3; 0)f^*f_*l(2, 2; 0) - 12(c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3)f^*f_*c_1 + 24(3c_1^4 + 10c_1^2c_2 + 12c_1c_3 + 5c_4),$
- $l(4, 2, 2; 0) = l(4; 0)f^*f_*l(2, 2; 0) - 2(8c_1^4 + 36c_1^2c_2 + 6c_2^2 + 46c_1c_3 + 24c_4)f^*f_*l(2; 0) + 8(14c_1^5 + 88c_1^3c_2 + 211c_1^2c_3 + 227c_1c_4 + 90c_5),$
- $l(2, 3, 3; 0) = l(2; 0)f^*f_*l(3, 3; 0) - 12(c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3)f^*f_*l(3; 0) + 18(7c_1^5 + 40c_1^3c_2 + 93c_1^2c_3 + 100c_1c_4 + 40c_5),$
- $l(2, 2, 2, 2; 0) = c_1f^*f_*l(2, 2, 2; 0) - 6(2c_1^2 + c_2)f^*f_*l(2, 2; 0) + 24(5c_1^3 + 7c_1c_2 + 3c_3)f^*f_*c_1 - 48(14c_1^4 + 37c_1^2c_2 + 39c_1c_3 + 15c_4),$
- $l(3, 2, 2, 2; 0) = l(3; 0)f^*f_*l(2, 2, 2; 0) - 18(c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3)f^*f_*l(2, 2; 0) + 72(3c_1^4 + 10c_1^2c_2 + 12c_1c_3 + 5c_4)f^*f_*l(2; 0) - 48(28c_1^5 + 139c_1^3c_2 + 287c_1^2c_3 + 281c_1c_4 + 105c_5),$
- $l(2, 2, 2, 2, 2; 0) = c_1f^*f_*l(2, 2, 2, 2; 0) - 8(2c_1^2 + c_2)f^*f_*l(2, 2, 2; 0) + 48(5c_1^3 + 7c_1c_2 + 3c_3)f^*f_*l(2, 2; 0) - 192(14c_1^4 + 37c_1^2c_2 + 39c_1c_3 + 15c_4)f^*f_*l(2; 0) + 384(42c_1^5 + 176c_1^3c_2 + 326c_1^2c_3 + 296c_1c_4 + 105c_5).$

2 Classes en codimension 1

- $l(2; 1) = c_2,$
- $l(3; 1) = c_2^2 + c_1c_3 + 2c_4,$
- $l(4; 1) = c_2^3 + 3c_1c_2c_3 + 2c_1^2c_4 + 8c_2c_4 + 10c_1c_5 + 12c_6,$
- $l(5; 1) = c_2^4 + 6c_1c_2^2c_3 + c_1^2c_3^2 + 10c_1^2c_2c_4 + 6c_1^3c_5 - 2c_2c_3^2 + 22c_2^2c_4 + 12c_1c_3c_4 + 58c_1c_2c_5 + 54c_1^2c_6 + 32c_4^2 - 12c_3c_5 + 88c_2c_6 + 156c_1c_7 + 144c_8,$
- $l(1, 2; 1) = f^*f_*l(2; 1) - 2c_1c_2 - 2c_3,$
- $l(1, 3; 1) = f^*f_*l(3; 1) - 3c_1c_2^2 - 3c_1^2c_3 - 6c_2c_3 - 12c_1c_4 - 12c_5,$
- $l(2, 2; 1) = c_2f^*f_*c_2 - 4c_1c_2^2 - 2c_1^2c_3 - 8c_2c_3 - 10c_1c_4 - 12c_5,$
- $l(2, 3; 1) = c_2f^*f_*l(3; 1) - 6c_1c_2^3 - 12c_1^2c_2c_3 - 6c_1^3c_4 - 18c_2^2c_3 - 8c_1c_2^3 - 64c_1c_2c_4 - 54c_1^2c_5 - 28c_3c_4 - 80c_2c_5 - 156c_1c_6 - 144c_7,$
- $l(2, 2, 2; 1) = c_2f^*f_*l(2, 2; 1) - 2(4c_1c_2^2 + c_1^2c_3 + 6c_2c_3 + 5c_1c_4 + 6c_5)f^*f_*c_2 + 42c_1^2c_2^3 + 54c_1^3c_2c_3 + 24c_1^4c_4 + 20c_2^4 + 270c_1c_2^2c_3 + 60c_1^2c_3^2 + 514c_1^2c_2c_4 + 336c_1^3c_5 + 160c_2c_3^2 + 324c_2^2c_4 + 468c_1c_3c_4 + 1544c_1c_2c_5 + 1704c_1^2c_6 + 288c_4^2 + 408c_3c_5 + 1608c_2c_6 + 3696c_1c_7 + 2880c_8.$

3 Classes en codimension 2

- $l(2; 2) = c_3,$
- $l(3; 2) = c_3^2 + c_2c_4 + 2c_1c_5 + 4c_6,$
- $l(4; 2) = c_3^3 + 3c_2c_3c_4 + 2c_2^2c_5 + 8c_1c_3c_5 + 10c_1c_2c_6 + 12c_1^2c_7$
 $+ 4c_4c_5 + 18c_3c_6 + 26c_2c_7 + 60c_1c_8 + 72c_9,$
- $l(1, 2; 2) = f^* f_* c_3 - 2c_2c_3 - 2c_1c_4 - 4c_5,$
- $l(1, 3; 2) = f^* f_* l(3; 2) - 3c_2c_3^2 - 3c_2^2c_4 - 6c_1c_3c_4 - 12c_1c_2c_5$
 $- 12c_1^2c_6 - 2c_4^2 - 16c_3c_5 - 30c_2c_6 - 60c_1c_7 - 72c_8,$
- $l(2, 2; 2) = c_3f^* f_* c_3 - 4c_2c_3^2 - 2c_2^2c_4 - 8c_1c_3c_4 - 10c_1c_2c_5$
 $- 12c_1^2c_6 - 2c_4^2 - 20c_3c_5 - 26c_2c_6 - 60c_1c_7 - 72c_8,$
- $l(2, 3; 2) = c_3f^* f_* l(3; 2) - 6c_2c_3^3 - 12c_2^2c_3c_4 - 18c_1c_3^2c_4 - 8c_1c_2c_4^2 - 6c_2^3c_5 - 64c_1c_2c_3c_5 - 28c_1^2c_4c_5$
 $- 54c_1c_2^2c_6 - 80c_1^2c_3c_6 - 156c_1^2c_2c_7 - 144c_1^3c_8 - 6c_3c_4^2 - 140c_1c_5^2 - 60c_3^2c_5 - 48c_2c_4c_5 - 192c_2c_3c_6$
 $- 60c_1c_4c_6 - 174c_2^2c_7 - 508c_1c_3c_7 - 972c_1c_2c_8 - 1296c_1^2c_9 - 256c_5c_6 - 116c_4c_7 - 756c_3c_8 - 1464c_2c_9$
 $- 3744c_1c_{10} - 3456c_{11}.$

4 Classes en codimension 3

- $l(2; 3) = c_4,$
- $l(3; 3) = c_4^2 + c_3c_5 + 2c_2c_6 + 4c_1c_7 + 8c_8,$
- $l(1, 2; 3) = f^* f_* c_4 - 2c_3c_4 - 2c_2c_5 - 4c_1c_6 - 8c_7.$

Bibliographie

À la fin de chaque entrée apparaît la liste des numéros de pages où cette source est citée dans le document.

- [Andrews, 1976] G.E. Andrews. *Theory of Partitions*. Addison-Wesley, 1976. (page 37)
- [Arnold, 1983] V.I. Arnold. Singularities of Smooth Mappings. *Russian Mathematical Surveys*, 38(2):87–176, 1983. (pages 66, 68, 70, 73, 80)
- [Arnold, 1984] V.I. Arnold. *Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1984. (pages 68, 71, 72, 75, 201)
- [Arnon, 1989] D. Arnon. *Computational Methods in Real Algebraic Geometry*. Academic Press, 1989. (page 178)
- [Baker, 1933] H.F. Baker. Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces and Higher Loci. Dans *Principles of Geometry*, volume VI. Frederick Ungar Publishing Co., 1933. (pages 13, 103)
- [Bayer et Mumford, 1992] D. Bayer et D. Mumford. What Can Be Computed in Algebraic Geometry?, May 1992. Preprint. (page 179)
- [Bayer et Stillman, 1992] D. Bayer et M. Stillman. Macaulay: A System for Computation in Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 1992. Computer software available via anonymous ftp from zariski.harvard.edu. (page 179)
- [Beauville, 1978] A. Beauville. Surfaces algébriques complexes. Dans *Astérisque*, volume 54. Société Mathématique de France, 1978. (page 57)
- [Boardman, 1967] J.M. Boardman. Singularities of Differentiable Maps. *Institut des Hautes Études Scientifiques – Publications Mathématiques*, 33:383–419, 1967. (page 68)
- [Bochnak et al., 1987] J. Bochnak, M. Coste, et M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 de *Ergebnisse der Mathematik*. Springer-Verlag, 1987. (page 178)
- [Bruce, 1981] J.W. Bruce. The Duals of Generic Hypersurfaces. *Math. Scand.*, (49):36–60, 1981. (page 113)
- [Bruce, 1993] J.W. Bruce. Generic Geometry and Projections. *Journal of the London Mathematical Society*, 1993. To appear. (page 11)
- [Buchanan, 1988] T. Buchanan. The Twisted Cubic and Camera Calibration. *CVGIP (Computer Vision, Graphics and Image Processing)*, 42:130–132, 1988. (page 181)
- [Buchanan, 1992] T. Buchanan. Critical Sets for Reconstruction Using Lines. Dans *Proceedings of ECCV'92 (European Conference on Computer Vision)*, 1992. (page 181)

Bibliographie

- [Buchberger, 1985] B. Buchberger. Gröbner Bases : An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory. Dans *Multidimensional Systems Theory*, rédacteur N.K. Bose, pages 184–232. Reidel, Dordrecht-Boston-Lancaster, 1985. (pages 65, 179)
- [Callahan et Weiss, 1985] J. Callahan et R. Weiss. A Model for Describing Surface Shape. Dans *Proceedings of CVPR'85 (IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition)*, pages 240–245, San-Francisco, California, June 1985. (page 66)
- [Canny, 1990] J.F. Canny. Generalized Characteristic Polynomials. *Journal of Symbolic Computation*, 9 :241–250, 1990. (page 179)
- [Carlsson, 1993] S. Carlsson. Multiple Image Invariants Using the Double Algebra. Dans *Proceedings of the 2nd European Workshop on Invariants*, pages 335–350, Ponta Delgada, Azores, October 1993. (page 178)
- [Colley, 1983] S.J. Colley. *On the Enumerative Geometry of Stationary Multiple-Points*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1983. (pages 28, 32, 33, 137)
- [Colley, 1986] S.J. Colley. Lines Having Specified Contact with Projective Varieties. Dans *Proceedings of the 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry*, volume 6, pages 47–70. American Mathematical Society, July 1986. (pages 25, 94, 137)
- [Colley, 1987] S.J. Colley. Enumerating Stationary Multiple-Points. *Advances in Math.*, 66(2) :149–170, 1987. (pages 24, 25, 26, 27, 29, 32, 34, 99)
- [Colley, 1988] S.J. Colley. Coincidence Formulas for Line Complexes. *Communications in Algebra*, 16(11) :2363–2385, 1988. (pages 137, 167, 168)
- [Colley, 1990] S.J. Colley. Schubert's Coincidence Formulas for Line Complexes and the Contribution of Embedded Planar Pencils. Dans *Enumerative Geometry*, rédacteur S. Xambó-Descamps, volume 1436 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 60–76. Springer-Verlag, 1990. Proceedings, Sitges 1987. (pages 137, 168)
- [Collins, 1975] G.E. Collins. Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition. Dans *Lecture Notes in Computer Science*, volume 33, pages 134–183. Springer-Verlag, 1975. Proceedings of the 2nd GI Conference on Automata Theory and Formal Languages. (pages 65, 179)
- [Coste et Roy, 1988] M. Coste et M.-F. Roy. Thom's Lemma, the Coding of Real Algebraic Numbers and the Computation of the Topology of Semi-Algebraic Sets. *Journal of Symbolic Computation*, 5 :121–129, 1988. (page 179)
- [Cucker et Roy, 1989] F. Cucker et M.-F. Roy. IF, A Package of Maple Programs for Computing with Real Algebraic Numbers and Working with Real Solutions of Equations and Inequalities, 1989. Version 0.1. (page 179)
- [d'Almeida, 1992] J. d'Almeida. Courbe de ramification de la projection sur \mathbb{P}^2 d'une surface de \mathbb{P}^3 . *Duke Mathematical Journal*, 2(65) :229–233, 1992. (pages 63, 186)
- [David, 1983] J. David. Projection-Generic Curves. *Journal of the London Mathematical Society*, 27 :552–562, 1983. (page 75)
- [Demazure, 1988] M. Demazure. Sur deux problèmes de reconstruction. Rapport Technique 882, INRIA, July 1988. (page 181)
- [Eggert et al., 1993] D. Eggert, K. Bowyer, C. Dyer, H. Christensen, et D. Goldgof. The Scale Space Aspect Graph. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1114–1130, 1993. (page 185)

- [Eggert et Bowyer, 1989] D. Eggert et K. Bowyer. Computing the Orthographic Projection Aspect Graph of Solids of Revolution. Dans *Proceedings of the IEEE Workshop on Interpretation of 3D Scenes*, pages 102–108. Austin, Texas, November 1989. (page 66)
- [Eggert, 1991] D. Eggert. *Aspect Graphs of Solids of Revolution*. PhD thesis, University of South Florida, 1991. (page 80)
- [Eisenbud et Harris, 1992] D. Eisenbud et J. Harris. *Schemes: The Language of Modern Algebraic Geometry*. Wadsworth and Brooks, 1992. (page 8)
- [Faugeras et Maybank, 1990] O. Faugeras et S. Maybank. Motion from Point Matches: Multiplicity of Solutions. *International Journal of Computer Vision*, 4:225–246, 1990. (page 181)
- [Faugeras et Petitjean, 1995] O. Faugeras et S. Petitjean. Algebraic Geometry and Theoretical Computer Vision: Past Interactions and Future Trends. 1995. In preparation. (page 175)
- [Faugeras, 1993] O. Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*. Artificial Intelligence. MIT Press, 1993. (page 180)
- [Forsyth, 1993] D.A. Forsyth. Recognizing Algebraic Surfaces From Their Outlines. Dans *Proceedings of ICCV'93 (International Conference on Computer Vision)*, pages 471–475, Berlin, 1993. (page 63)
- [Fulton, 1984] W. Fulton. *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1984. (pages 13, 17, 25, 56)
- [Godement, 1958] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, volume 1252 de *Actes Science et Industrie*. Hermann, Paris, 1958. (page 8)
- [Gonzalez et al., 1989] L. Gonzalez, H. Lombardi, T. Recio, et M.-F. Roy. Sturm-Habicht Sequences. Dans *Proceedings of ISSAC'89 (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, pages 136–146, 1989. (page 178)
- [Grace et Young, 1903] J.H. Grace et A. Young. *The Algebra of Invariants*. Cambridge University Press, 1903. (page 177)
- [Graham et al., 1989] R.L. Graham, D.E. Knuth, et O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1989. (page 38)
- [Griffiths et Harris, 1978] P. Griffiths et J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. J. Wiley and Sons, New York, 1978. (page 7)
- [Grigor'ev et Chistov, 1984] D.Y. Grigor'ev et A.L. Chistov. Fast Decomposition of Polynomials into Irreducible Ones and the Solution of Systems of Algebraic Equations. *Soviet Math. Dokl.*, 29(2), 1984. (page 179)
- [Grothendieck et Dieudonné, 1971] A. Grothendieck et J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique*, volume I. Springer-Verlag, Heidelberg, 1971. Grundlehren 166. (page 8)
- [Grothendieck, 1958] A. Grothendieck. Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections. Dans *Proceedings of Séminaire C. Chevalley*, E.N.S., Paris, 1958. (page 19)
- [Harris, 1992] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992. (page 7)
- [Hartshorne, 1977] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977. (pages 7, 20)
- [Henry et Merle, 1992] J.-P. Henry et M. Merle. Shade, Shadow and Shape. Dans *Proceedings of ME-GA'92 (International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry)*, rédacteurs F. Eyssette et A. Galligo, pages 105–128, Nice, France, 1992. Progress in Mathematics, Birkhäuser. (page 11)

Bibliographie

- [Hodge et Pedoe, 1953] W. Hodge et D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 1953. Volumes I and II. (page 55)
- [Kanatani, 1993] K. Kanatani. *Geometric Computation for Machine Vision*, volume 37 de *Oxford Engineering Science Series*. Clarendon Press, 1993. (page 180)
- [Katz et Stromme, 1992] S. Katz et S.A. Stromme. Schubert : A Maple Package for Intersection Theory, 1992. Available by anonymous ftp from ftp.math.okstate.edu in the directory pub/schubert. (page 14)
- [Katz, 1986] S. Katz. Iteration of Multiple-Point Formulas and Applications to Conics. Dans *Proceedings Sundance*, volume 1311 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 147–155. Springer-Verlag, 1986. (pages 29, 34)
- [Keren et al., 1994] D. Keren, D.B. Cooper, et J. Subrahmonia. Describing Complicated Objects by Implicit Polynomials. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16 :38–53, 1994. (page 63)
- [Keren, 1994] D. Keren. Using Symbolic Computation to Find Algebraic Invariants. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16 :1143–1149, 1994. (page 178)
- [Kergosien, 1981] Y.L. Kergosien. La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 292 :929–932, 1981. (pages 66, 70, 72, 73, 80)
- [Kleiman, 1969] S.L. Kleiman. Geometry of Grassmannians and Applications. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 36, 1969. (page 55)
- [Kleiman, 1976] S.L. Kleiman. The Enumerative Theory of Singularities. Dans *Real and Complex Singularities*, rédacteur P. Holm, pages 297–397. Sijthoff and Noordhoff International Publishers, August 1976. Nordic Summer School, Oslo. (pages 14, 20, 50, 57, 117)
- [Kleiman, 1981] S.L. Kleiman. Multiple-Point Formulas I : Iteration. *Acta Mathematica*, 147 :13–49, 1981. (page 25)
- [Kleiman, 1987] S.L. Kleiman. Intersection Theory and Enumerative Geometry : A Decade in Review. Dans *Proceedings of the Bowdoin 1985 Summer Research Institute on Algebraic Geometry*, rédacteur S. Bloch, volume 46, pages 321–365. American Mathematical Society, 1987. (page 14)
- [Koenderink et van Doorn, 1976] J.J. Koenderink et A.J. van Doorn. The Singularities of the Visual Mapping. *Biological Cybernetics*, 24 :51–59, 1976. (page 63)
- [Koenderink et van Doorn, 1979] J.J. Koenderink et A.J. van Doorn. The Internal Representation of Solid Shape with Respect to Vision. *Biological Cybernetics*, 32 :211–216, 1979. (page 66)
- [Koenderink, 1986] J.J. Koenderink. An Internal Representation for Solid Shape Based on the Topological Properties of the Apparent Contour. Dans *Image Understanding : 1985-86*, rédacteurs W. Richards et S. Ullman, chapitre 9, pages 257–285. Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, 1986. (pages 72, 73, 107)
- [Koenderink, 1990] J.J. Koenderink. *Solid Shape*. MIT Press, Cambridge, MA, 1990. (pages 63, 72, 75)
- [Kriegman et Ponce, 1990a] D.J. Kriegman et J. Ponce. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects : Solids of Revolution. *International Journal of Computer Vision*, 5(2) :119–135, 1990. (page 66)
- [Kriegman et Ponce, 1990b] D.J. Kriegman et J. Ponce. On Recognizing and Positioning Curved 3D Objects from Image Contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(12) :1127–1137, December 1990. (page 63)

- [Kulikov, 1983] V.S. Kulikov. The Calculation of the Singularities of the Embedding of a Generic Algebraic Surface in the Projective Space \mathbb{P}^3 . *Functional Analysis and Applications*, 17:176–186, 1983. (pages 43, 117)
- [Laksov, 1993] D. Laksov. Report on « Algebraic Geometry and Vision School ». *Europroj News*, 10, July 1993. (page 2)
- [Lascoux, 1977] A. Lascoux. Sistemi lineari di divisori sulle curve e sulle superficie. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 114:141–154, 1977. (pages 38, 43)
- [Lazard, 1981] D. Lazard. Résolution des systèmes d'équations algébriques. *Theoretical Computer Science*, 15:77–110, 1981. (page 179)
- [le Barz, 1982] P. le Barz. Formules multisécantes pour les courbes gauches quelconques. *Progress in Mathematics*, 24:165–197, 1982. (page 84)
- [le Barz, 1984] P. le Barz. Contribution des droites d'une surface à ses multisécantes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 112:303–324, 1984. (page 96)
- [le Barz, 1987a] P. le Barz. Formules pour les trisécantes des surfaces algébriques. *L'Ens. Mathématique*, 33:1–66, 1987. (pages 24, 95, 137, 149, 160, 161, 165)
- [le Barz, 1987b] P. le Barz. Quelques calculs dans les variétés d'alignements. *Advances in Mathematics*, 64:87–117, 1987. (pages 25, 137, 168)
- [le Barz, 1990] P. le Barz. Quelques formules multisécantes pour les surfaces. Dans *Enumerative Geometry*, volume 1436 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 151–188. Springer-Verlag, 1990. Proceedings, Sitges 1987. (pages 137, 150, 151, 161)
- [Maple, 1990] *MAPLE V*, 1990. Copyright (c) 1981-1990 by the University of Waterloo. All rights reserved. MAPLE is a registered trademark of Waterloo Maple Software. (pages 30, 32, 99, 179)
- [Mather, 1973] J.N. Mather. Generic Projections. *Annals of Mathematics*, 98:226–245, 1973. (page 68)
- [Maybank, 1990] S.J. Maybank. The Projective Geometry of Ambiguous Surfaces. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 332:1–47, 1990. Series A. (page 181)
- [Maybank, 1992] S.J. Maybank. *Theory of Reconstruction from Image Motion*. Springer-Verlag, 1992. (page 181)
- [Maybank, 1993] S.J. Maybank. The Critical Line Congruence for Reconstruction from Three Images, 1993. Lecture Notes from « Algebraic Geometry and Vision » Summer School, June 1-4, 1993, Nice, France. (page 181)
- [McCrory, 1980] C. McCrory. Profiles of Surfaces. Rapport technique, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, 1980. (page 113)
- [McCrory, 1981] C. McCrory. Generic Curves and Surfaces in 3-Space: Contact with Lines and Planes. Rapport technique, Mathematics Department, University of Georgia, 1981. (pages 84, 87)
- [Mignotte, 1982] M. Mignotte. Some Useful Bounds. *Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation*, pages 259–263, 1982. (page 179)
- [Milnor, 1964] J. Milnor. On the Betti Numbers of Real Varieties. Dans *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 15, pages 275–280, 1964. (page 135)
- [Morgan, 1987] A.P. Morgan. *Solving Polynomial Systems using Continuation for Engineering and Scientific Problems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987. (page 65)
- [Mumford, 1965] D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 1965. (page 178)

- [Mundy et Zisserman, 1992] rédacteurs J.L. Mundy et A. Zisserman. *Geometric Invariance in Computer Vision*. MIT Press, 1992. (page 177)
- [Namba, 1984] M. Namba. *Geometry of Projective Algebraic Curves*. Marcel Dekker, Inc., 1984. (page 46)
- [Negahdaripour et Jain, 1991] S. Negahdaripour et A.K. Jain. Challenges in Computer Vision: Future Research Directions. Dans *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Maui, Hawaii*, pages 189–199, 1991. Summary of the final report of the NSF workshop held in Maui, June 7-8, 1991. (page 1)
- [Pedersen *et al.*, 1992] P. Pedersen, M.-F. Roy, et A. Szpirglas. Counting Real Zeros in the Multivariate Case. Dans *Proceedings of MEGA'92 (International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry)*, rédacteurs F. Eyssette et A. Galligo, pages 203–224, Nice, France, 1992. Progress in Mathematics, Birkhäuser. (page 178)
- [Petitjean *et al.*, 1992] S. Petitjean, J. Ponce, et D.J. Kriegman. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects: Algebraic Surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 9(3):231–255, December 1992. (pages 65, 66)
- [Petitjean, 1992] S. Petitjean. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects Bounded by Smooth Algebraic Surfaces. Rapport technique, University of Illinois, June 1992. Master's Thesis. (page 66)
- [Petitjean, 1994a] S. Petitjean. Algebraic Geometry and Object Representation in Computer Vision. Dans *Proceedings of the NSF/ARPA Workshop on 3D Object Representations in Computer Vision*, rédacteurs J. Ponce, T. Boult, A. Gross, et M. Hebert, New-York, December 5-7 1994. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, To appear. (page 175)
- [Petitjean, 1994b] S. Petitjean. Automating the Construction of Stationary Multiple-Point Classes. Dans *Proceedings of ISSAC'94 (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, pages 9–14, Oxford, United Kingdom, July 1994. ACM Press. (page 29)
- [Petitjean, 1994c] S. Petitjean. On the Enumerative Geometry of Aspect Graphs. Dans *Proceedings of ECCV'94 (European Conference on Computer Vision)*, rédacteur J.-O. Eklundh, volume 1, pages 421–426, Stockholm, Sweden, May 1994. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, volume 800. (page 116)
- [Petitjean, 1994d] S. Petitjean. The Complexity and Enumerative Geometry of Aspect Graphs of Smooth Surfaces. Dans *Proceedings of MEGA'94 (International Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry)*, Santander, Spain, April 1994. Progress in Mathematics, Birkhäuser. To appear. (page 116)
- [Petitjean, 1995a] S. Petitjean. Multisecants in Projective 4-, 5- and 6-Space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1995. Submitted. (page 137)
- [Petitjean, 1995b] S. Petitjean. The Complexity and Enumerative Geometry of Aspect Graphs of Piecewise-Smooth Surfaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1995. Submitted. (page 124)
- [Petitjean, 1995c] S. Petitjean. The Enumerative Geometry of Projective Algebraic Surfaces and The Complexity of Aspect Graphs. *International Journal of Computer Vision*, 1995. Submitted. (page 94)
- [Petitjean, 1995d] S. Petitjean. The Number of Views of Piecewise-Smooth Algebraic Objects. Dans *Proceedings of STACS'95 (Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science)*, rédacteurs E. Mayr et C. Puech, pages 571–582, München, Germany, March 2-4 1995. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, volume 900. (page 124)

- [Piene, 1976] R. Piene. Numerical Characters of a Curve in Projective n -Space. Dans *Real and Complex Singularities*, rédacteur P. Holm, pages 475–495. Sijthoff and Noordhoff International Publishers, August 1976. Nordic Summer School, Oslo. (pages 46, 47, 48)
- [Piene, 1977] R. Piene. Some Formulas for a Surface in \mathbb{P}^3 . Dans *Algebraic Geometry*, rédacteurs A. Dold et B. Eckmann, volume 687 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 196–235. Springer-Verlag, 1977. (pages 51, 52)
- [Platonova, 1981] O.A. Platonova. Singularities of the Mutual Disposition of a Surface and a Line. *Russian Mathematical Surveys*, 36 :248–249, 1981. (pages 66, 71)
- [Ponce et al., 1992] J. Ponce, S. Petitjean, et D.J. Kriegman. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects: Algebraic Surfaces. Dans *Proceedings of ECCV'92 (European Conference on Computer Vision)*, rédacteur G. Sandini, pages 599–614, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992. Springer-Verlag. *Lecture Notes in Computer Science*, volume 588. (page 66)
- [Ponce et al., 1993] J. Ponce, D.J. Kriegman, S. Petitjean, S. Sullivan, G. Taubin, et B. Vijayakumar. Representations and Algorithms for 3D Curved Object Recognition. Dans *Three-Dimensional Object Recognition Systems*, rédacteurs P. Flynn et A. Jain, pages 327–352. Elsevier Press, 1993. (page 63)
- [Ponce et Kriegman, 1990] J. Ponce et D.J. Kriegman. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects: Parametric Patches. Dans *Proceedings of the AAAI National Conference on Artificial Intelligence*, pages 1074–1079, Boston, Massachusetts, July 1990. (page 66)
- [Porteous, 1971] I.R. Porteous. Simple Singularities of Maps. Dans *Lecture Notes in Mathematics*, volume 192, pages 286–307. Springer-Verlag, 1971. (page 117)
- [Rieger et Rohr, 1993] J.H. Rieger et K. Rohr. Semi-Algebraic Solids in 3-Space: A Survey of Modeling Schemes and Implications for View Graphs. Rapport Technique FBI-HH-M-229/93, Universität Hamburg, August 1993. (page 80)
- [Rieger, 1987] J.H. Rieger. On the Classification of Views of Piecewise-Smooth Objects. *Image and Vision Computing*, 5 :91–97, 1987. (pages 67, 68, 75)
- [Rieger, 1988] J.H. Rieger. *Apparent Contours and their Singularities*. PhD thesis, Queen Mary College, April 1988. (page 77)
- [Rieger, 1990] J.H. Rieger. The Geometry of View Space of Opaque Objects Bounded by Smooth Surfaces. *Artificial Intelligence*, 44(1-2) :1–40, July 1990. (pages 70, 72, 75, 80)
- [Rieger, 1992] J.H. Rieger. Global Bifurcation Sets and Stable Projections of Nonsingular Algebraic Surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 7(3) :171–194, 1992. (page 66)
- [Rieger, 1993a] J.H. Rieger. Computing View Graphs of Algebraic Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 11 :1–14, 1993. (pages 66, 70, 135, 180)
- [Rieger, 1993b] J.H. Rieger. On the Complexity and Computation of View Graphs of Piecewise-Smooth Algebraic Surfaces. Rapport Technique FBI-HH-M-228/93, Universität Hamburg, 1993. (pages 67, 68, 75, 79, 107, 124, 135)
- [Roy et van Effelterre, 1992] M.-F. Roy et T. van Effelterre. Aspect Graphs of Bodies of Revolution with Algorithms of Real Algebraic Geometry. Dans *Proceedings of AAGR'92*, Linz, Austria, August 17-19 1992. (pages 66, 180)
- [Salmon, 1915] G. Salmon. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, volume II. Dublin, 5th édition, 1915. (pages 13, 103, 121)
- [Schubert, 1879] H.C.H. Schubert. *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1879. (pages 13, 101, 102, 103, 167, 170, 171)

Bibliographie

- [Semple et Kneebone, 1952] J.G. Semple et G.T. Kneebone. *Algebraic Projective Geometry*. Oxford University Press, 1952. (page 181)
- [Semple et Roth, 1949] J.G. Semple et L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*. Clarendon Press, 1949. (pages 7, 59)
- [Shafarevich, 1977] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1977. (page 7)
- [Sturmfels, 1993] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariant Theory*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, 1993. (page 178)
- [Svensson, 1993] L. Svensson. On the Use of the Double Algebra in Computer Vision. Rapport Technique TRITA-NA-P9310, CVAP, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1993. (page 178)
- [Tari, 1991] F. Tari. Projections of Piecewise-Smooth Surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 44:155–172, 1991. (pages 67, 68, 72)
- [Taubin, 1991] G. Taubin. Estimation of Planar Curves, Surfaces, and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations with Applications to Edge and Range Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(11):1115–1138, November 1991. (page 63)
- [Thom, 1956] R. Thom. Les singularités des applications différentiables. *Annales Institut Fourier*, 6:43–87, 1956. (page 68)
- [Thom, 1965] R. Thom. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. Dans *Differential and Combinatorial Topology*, pages 255–265. Princeton University Press, 1965. (page 135)
- [Vainsencher, 1981] I. Vainsencher. Counting Divisors with Prescribed Singularities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 267(2):399–422, October 1981. (pages 103, 185)
- [van der Waerden, 1970] B.L. van der Waerden. *Modern Algebra*. Frederick Ungar Publishing Co., 1970. Fifth Edition. (page 179)
- [Wall, 1976] C.T.C. Wall. Geometric Properties of Generic Differentiable Manifolds. Dans *Geometry and Topology*, rédacteurs A. Dold et B. Eckmann, volume 192 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 707–774. Springer-Verlag, 1976. Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium. (page 75)
- [Weispfenning, 1992] V. Weispfenning. Comprehensive Gröbner Bases. *Journal of Symbolic Computation*, 14:1–29, 1992. (page 179)
- [Whitney, 1955] H. Whitney. On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane. *Annals of Mathematics*, 62(3):374–410, 1955. (page 68)
- [Xambó-Descamps, 1993] S. Xambó-Descamps. Using Intersection Theory. Rapport Technique MA2-IR-93-009, Universitat Politècnica de Catalunya, 1993. (pages 14, 97)
- [Zariski, 1935] O. Zariski. *Algebraic Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1935. (pages 13, 185)

Liste des figures

3.1	Projection d'une courbe gauche depuis un centre en position générale. 1. Un point triple. 2. Un point de rebroussement.	24
3.2	Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type $(2, 2)$	26
3.3	Déformation d'un point ordinaire d'ordre 4 en un point de type $(1, 3)$	26
3.4	Une bitangente comptée deux fois.	28
4.1	Un exemple de point-pince.	50
4.2	Un exemple de courbe cuspidale.	51
5.1	a. Un objet en forme de poire. b. Ses courbes paraboliques et flecnodales. c. Le graphe d'aspects de l'objet transparent dans un espace de paramètres. d. Les représentants cor- respondants.	66
5.2	Graphe d'aspects de la poire.	67
5.3	Une surface lisse par morceaux.	68
5.4	Singularités stables des projections de surfaces lisses par morceaux. a. Point de rebrous- sement C . b. Demi-pli SF . c. Point triple T . d. Traversée de contour. e. Interaction contour / faux-pli. f. Traversée de faux-pli.	69
5.5	Classification des points d'une surface selon l'ordre de leurs tangentes (adapté du livre d'Arnold [Arnold, 1984]).	71
5.6	Événements locaux dans le cas lisse. a. Lèvre. b. Bec-à-bec. c. Queue d'aronde. Les tran- sitions surviennent de gauche à droite, les points singuliers étant indiqués par des petits cercles. Les contours vus dans le cas d'une surface transparente sont en traits épais, les parties cachées étant en lignes brisées.	73
5.7	Événements multilocaux pour les surfaces lisses. a. Traversée de tangente. b. Traversée de point de rebroussement. c. Point triple.	74
5.8	a. Vue d'une surface près d'une singularité de type oie . b. Surface utilisée. c. L'ensemble de bifurcation local pour la projection orthographique.	76

Liste des figures

Liste des tableaux

3.1	Nombre $p(i, j)$ de j -partitions d'un entier i	38
3.2	Nombres de Stirling de première espèce.	39
6.1	Théorie de l'intersection sur $A^*(F_X)$. Gauche: appariements $A^2(F_X) \times A^2(F_X)$. Droite: appariements d'intersection $A^1(F_X) \times A^3(F_X)$	83

Index

Nous indiquons ici les pages où les notions les plus importantes du document sont discutées, ainsi que la page où chaque notation mathématique est introduite pour la première fois.

- $+, ++, +++$: contacts en projection, 72
- $A^*(X)$: anneau de Chow, 15
- $A^k(X)$: k -ième groupe de Chow, 14
- C, T : point de rebroussement, point triple, 74
- $C_\omega(\mathcal{E})$: polynôme de Chern, 17
- D_b : courbe double, 50
- F, D, SF : pli, faux-pli, demi-pli, 74
- F_{n_1, \dots, n_k} : espace de drapeaux, 53
- $G(k, m)$: Grassmannienne, 53
- $H_k(X), H_k(X, Y)$: espaces d'homologie, 47
- K : diviseur canonique, 10
- S^n : n -ième puissance symétrique, 17
- $[X]$: classe fondamentale, 15
- $[a_0, \dots, a_k]$: cycle de Schubert, 55
- Ω_X : faisceau des différentielles, 9
- Θ_X : faisceau de structure, 8
- $\Theta_X(1)$: faisceau tautologique, 9
- \mathcal{S}_2 : espace de singularités de Thom-Boardman, 28
- \mathcal{B} : ensemble de bifurcation, 68
- $\mathcal{N}_{X/Y}$: faisceau normal ou normal virtuel, 9
- \mathcal{T}_X : faisceau tangent, 9
- $\mathcal{T}_{X/Y}$: faisceau tangent relatif, 9
- \mathcal{V} : espace des points de vue, 68
- $\chi(\mathcal{E})$: caractéristique d'Euler, 10
- Υ : rang de la courbe double, 51
- \tilde{X} : surface duale, 86
- $\tilde{\mathcal{E}}$: faisceau dual à \mathcal{E} , 9
- \mathbb{P}^m : espace projectif dual, 25
- \mathbb{C} : corps des nombres complexes, 7
- \int : degré d'un cycle, 16
- \mathbb{Z} : espace des entiers, 9
- $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: faisceau des morphismes, 9
- μ_1, μ_2 : rang et classe d'une surface, 49
- ν_2 : nombre de points-pinces, 49
- ω_X : faisceau canonique, 9
- \oplus : somme directe, 9
- \otimes : produit tensoriel, 9
- $\mathbb{P}(\mathcal{E})$: fibré projectif, 19
- \mathbb{P}^m : espace projectif à m dimensions, 7
- \mathbb{R} : corps des réels, 135
- \wedge^n : n -ième produit extérieur, 9
- $c_k(\mathcal{E})$: classe de Chern, 16
- f^* : image réciproque, 9
- f_* : image, 9
- $g(X)$: genre, 20
- $l(a_1, \dots, a_k; n)$: formule de points multiples, 27
- $p(\mathbf{a}), q(\mathbf{a})$: facteurs de surcompte, 99
- $p_a(X)$: genre arithmétique, 10
- anneau de Chow, 15
- assemblage
 - de plans, 133
 - de quadriques, 134
- calcul de Schubert, 54
- caractéristique d'Euler, 10
 - d'une surface, 21
- classe
 - d'immersion, 52
 - de Chern, 17, 18
 - de cycles, 14
 - de Schubert, 55
- codimension
 - d'un cycle, 14
 - d'une fonction, 25
 - d'une singularité, 69
- complexité du graphe d'aspects, 79, 135
- congruence, 54
 - visuelle, 107
- contact
 - de droites, 80, 137
 - de plans, 85
- courbe
 - cuspidale, 51
 - flecnodale, 71
 - parabolique, 71
- cycle, 14
- degré d'un cycle, 16
- demi-pli, 68
- diviseur, 10
 - canonique, 10
- ensemble de bifurcation, 68

- espace
 - de drapeaux, 53, 81
 - de paramètres, 53
- événement visuel, 67, 102, 116
- facteur de surcompte, 27, 99
- faisceau, 8
 - canonique, 9
 - inversible, 8
 - libre, 8
 - normal, 9
 - tangent, 9
 - tautologique, 9
- faux-pli, 67, 111
- fibré
 - projectif, 19
 - vectorel, 8
- fonction
 - lissable, 9
- formule
 - d'adjonction, 18
 - de Gauss-Bonnet, 18
 - de Giambelli, 55
 - de la classe de degré maximum, 17
 - de Pieri, 55
 - de Riemann-Hurwitz, 20
- généricité, 11, 28, 68, 94
- géométrie
 - énumérative, 13
 - algébrique, 7, 177
 - réelle, 178
 - projective, 180
- genre, 46
 - arithmétique, 10
- godron, 72
- graphe d'aspects, 63, 116
- Grassmannienne, 53
- groupe de Chow, 14
- image d'un cycle, 14
- image réciproque d'un cycle, 14
- intersection complète, 28
- invariant
 - algébrique, 177
 - numérique, 46, 105
 - d'une courbe, 46
 - d'une surface, 49
- nombres de Stirling, 38
- ordre de contact, 70, 101
- pinneau de droites, 167
- point multiple, 24
 - stationnaire, 25
- point-pince, 49
- polynôme
 - caractéristique, 38
 - de Chern, 17
 - de Thom, 38
- principe
 - de dualité, 47
 - de projection, 48
- produit d'intersection, 15
- ramification, 11, 20
- rouleau, 61
- séquence exacte, 9
 - d'Euler, 19
- schéma, 8
 - de Fano, 97
 - de Hilbert, 29, 95
- silhouette, 67, 111
- singularité, 11
 - de Thom-Boardman, 28
- surface
 - à singularités ordinaires, 49
 - algébrique, 49
 - d'événement visuel, 70
 - développable, 59, 123
 - de \mathbb{P}^4 , 147
 - de \mathbb{P}^5 , 159
 - de \mathbb{P}^6 , 164
 - duale, 86, 91, 113
 - lisse, 116
 - par morceaux, 67, 124
 - projection-générique, 70
 - réglée, 54, 57, 70
- système linéaire, 185
- tangente
 - asymptotique, 68
 - flecnodale, 71
- théorème
 - de Bezout, 14, 20
 - de Hirzebruch-Riemann-Roch, 18
- théorie
 - de l'intersection, 13
 - des points multiples, 24
 - des singularités, 68
- variété, 8

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Madame PORTMANN Marie-Claude, Professeur, CRIN/Université
Nancy I,**

**Monsieur PONCE Jean, Professeur, Institut Beckman, Urbana
(USA),**

**Monseieur KOENDERINK Jan, Professeur, Université d'Utrech(
(Pays Bas).**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur PETITJEAN Sylvain

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : application
aux graphes d'aspects d'objets courbes"**

en vue de l'obtention du titre de :

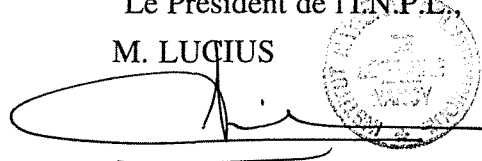
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
LORRAINE**

Spécialité : **"INFORMATIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **24 Février 1995**

Le Président de l'INPL,

M. LUCIUS



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDOEUVRE CEDEX

Résumé

Les entités algébriques sont abondamment utilisées en vision par ordinateur. La géométrie algébrique est la branche des mathématiques dont le but est l'étude en toute généralité des propriétés de fonctions reliées par des équations polynomiales, d'où sa pertinence en vision. Pourtant, les coopérations passées entre ces deux domaines sont restées faibles en comparaison des techniques puissantes mises au point dans l'étude des variétés algébriques, cela étant dû probablement au haut niveau d'abstraction de la géométrie algébrique moderne. Nous effectuons ici un premier pas dans le sens d'une plus grande interaction. En nous penchant plus spécifiquement sur la géométrie énumérative et la théorie de l'intersection, nous étudions le contact de droites et de plans avec des variétés projectives. En particulier, et cela constitue le noyau du document, nous travaillons sur la complexité des événements visuels intervenant dans la construction de graphes d'aspects d'objets courbes lisses et lisses par morceaux. Nous concluons ensuite sur le nombre de vues topologiquement distinctes d'un objet. Plus généralement, nous vérifions des résultats donnés par d'autres techniques et en calculons beaucoup de nouveaux, notre méthode ayant le double avantage de pouvoir en grande partie s'automatiser et de fournir des résultats exacts. Les perspectives de recherche sont nombreuses et variées, tant d'un point de vue mathématique que du point de vue de la vision par ordinateur.

Mots-clés: géométrie algébrique, géométrie énumérative, théorie de l'intersection, surfaces algébriques, graphes d'aspects.

Abstract

Algebraic objects are widely used in computer vision. Algebraic geometry is the branch of mathematics whose goal is to study in full generality the properties of functions related by polynomial equations, hence its relevance in vision. However, their past interactions have been sparse in comparison with the powerful techniques developed for studying algebraic varieties, probably due to the high level of abstraction of modern algebraic geometry. We take here a first step towards a greater cooperation between these two fields. Looking more specifically from the point of view of enumerative geometry and intersection theory, we deal with contacts of lines and planes with projective varieties. In particular, and this lies at the core of the document, we work on the complexity of the visual events coming up in the construction of aspect graphs of smooth and piecewise-smooth surfaces. We then conclude on the number of topologically distinct views of an object. More generally, we check results that have been obtained using different methods and give many new ones, our method having the two-fold advantage that it can in large part be automated and that it gives exact results. Future research directions are numerous, both from a mathematical standpoint and from a computer vision standpoint.

Keywords: algebraic geometry, enumerative geometry, intersection theory, algebraic surfaces, aspect graphs.