



**HAL**  
open science

# Modélisation 3D d'assemblages flip chip pour la fiabilisation des composants électroniques à haute valeur ajoutée de la famille "More than Moore"

Wiyao Kpobie

► **To cite this version:**

Wiyao Kpobie. Modélisation 3D d'assemblages flip chip pour la fiabilisation des composants électroniques à haute valeur ajoutée de la famille "More than Moore". Autre. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0236 . tel-01751249

**HAL Id: tel-01751249**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751249v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

Pour l'obtention du titre de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité : Sciences des Matériaux

Présentée par

**Wiyao KPOBIE**

---

**Modélisation 3D d'assemblages flip chip pour la fiabilisation  
des composants électroniques à haute valeur ajoutée de la  
famille « More than Moore »**

---

Thèse soutenue publiquement le 10/12/2014 à Metz devant le jury composé de :

Mohan RANGANATHAN	Pr	Université de Tours	Rapporteur
Manuel FRANCOIS	Pr	Université de technologie de Troyes	Rapporteur
Fahmi ZAÏRI	Pr	Université de Lille 1	Examineur
Eric SCACCIATELLA	Dr	SOLSI-CAD	Examineur
Jean-François GANGHOFFER	Pr	Université de Lorraine	Examineur
Paul LIPINSKI	Pr	ENI de Metz	Directeur de thèse
Napo BONFOH	Mcf	ENI de Metz	Co-encadrant
Manuel FENDLER	HDR	CEA Tech Lorraine	Encadrant CEA
Cynthia DREISTADT	Mcf	ENI de Metz	Invitée
Serge MAGLI	Ing	SOFRADIR	Invité





# Remerciements

Cette thèse a été financée par le Commissariat à l’Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) dans le cadre d’un Contrat de Formation à la Recherche (CFR). Durant la durée de la thèse, j’ai été affilié au Laboratoire d’Electronique et de Technologie de l’Information (LETI) du CEA de Grenoble. Mais compte tenu du domaine de l’étude, j’ai été aussi rattaché au Laboratoire de mécanique Biomécanique – Polymère – Structures (LaBPS – EA 4632) de l’Ecole Nationale d’Ingénieurs de Metz (ENIM). Au sein du LETI, j’ai été rattaché au Département Optique et Photonique/Service Technologies et Moyens/Laboratoire Packaging et Assemblage (DOPT/STM/LPA). C’est une thèse en mécanique des matériaux de l’Université de Lorraine inscrite à l’école doctorale Energie Mécanique et Matériaux (EMMA – ED 409).

Je remercie tout d’abord mon directeur de thèse Paul LIPINSKI qui a été toujours présent pour m’orienter sur de bonnes pistes. Je remercie aussi mes co-encadrants Napo BONFOH, Cynthia DREISTADT qui m’ont beaucoup aidé dans la réalisation de ce projet. Je tiens également à remercier Manuel FENDLER du CEA qui m’a permis de bien définir les problématiques du sujet et d’entreprendre des collaborations avec l’industrie notamment l’entreprise Sofradir®.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux rapporteurs de ma thèse Mohan RANGANATHAN (Professeur à l’Université François Rabelais de Tours et directeur du Laboratoire de Mécanique et Rhéologie, LMR) et Manuel FRANCOIS (Professeur à l’Université de Technologie de Tours et à l’Institut Charles Delaunay, ICD) ainsi qu’aux examinateurs, Eric SCACCIATELLA (responsable calcul de structures à SOLSI-CAD), Fahmi ZAÏRI (Professeur à l’Université de Lille 1 et au Laboratoire de Mécanique de Lille, LML) et Jean-François GANGHOFFER (Professeur à l’Université de Lorraine et au Laboratoire d’Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, LEMTA).

Je n’oublie pas de remercier le directeur du LaBPS, Zitouni AZARI et les autres enseignants chercheurs du laboratoire ainsi que les doctorants qui m’ont bien accueilli. Je remercie aussi

## Remerciements

---

quelques membres du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3 – UMR CNRS 7239) comme Jean-Sébastien LECOMTE, Julien PELTIER qui m'ont aidé à faire mes essais de nano-indentation et Raphaël PESCI qui a réalisé les analyses EDS de certains de mes échantillons.

J'adresse tout particulièrement ma reconnaissance au technicien du LPA Alain GUEUGNOT qui a effectué la quasi-totalité des mesures expérimentales de voilure des assemblages flip chip et qui contribue activement à la qualification de la nouvelle machine AltiSurf® 530.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de la société Sofradir qui s'est intéressée à mon travail et avec qui j'ai eu l'honneur de collaborer, surtout étroitement avec certains membres comme Serge MAGLI et Pascal Le BOTERF.

Je souhaite également adresser mes remerciements aux chercheurs du LPA notamment l'ancien directeur Hervé RIBOT et le nouveau David HENRY, les ingénieurs, les doctorants (surtout Kévin TEKAYA avec qui j'ai eu des échanges en matière de sciences de matériaux), les techniciens et ingénieurs (Frédéric BERGER, Gilles LASFARGUES, François MARION, ...) qui m'ont offert un accueil chaleureux.

*A mes parents et mes deux sœurs*

# Table des matières

Remerciements .....	iii
Table des matières.....	v
Liste des figures .....	xi
Liste des tableaux.....	xvii
Listes des notations .....	xix
Introduction générale.....	1
Chapitre I Généralités sur l'assemblage en microélectronique .....	3
<b>I.1. Introduction</b> .....	<b>4</b>
<b>I.2. Packaging</b> .....	<b>5</b>
<b>I.3. Evolution des assemblages électroniques</b> .....	<b>7</b>
I.3.1. System on Chip (SoC) .....	7
I.3.2. Chip on Board (CoB) .....	8
I.3.3. Multi-Chip Module (MCM).....	8
I.3.4. System in Package (SiP) ou l'intégration 3D .....	9
I.3.5. System on Package (SoP).....	9
I.3.6. Package on Package (PoP).....	10
<b>I.4. Techniques d'interconnexion</b> .....	<b>11</b>
I.4.1. Câblage filaire ou assemblage par fils.....	11
I.4.1.1. Le Wedge bonding .....	12
I.4.1.2. Le Ball bonding .....	12
I.4.2. Technologie Tape Automated Bonding (TAB).....	13
I.4.3. Flip chip .....	14
I.4.3.1. Brasure ou technologie C4 .....	15
I.4.3.2. Thermocompression.....	17
I.4.3.3. Collage .....	17
I.4.4. Vias traversants (TSV) .....	19

<b>I.5. Conclusion.....</b>	<b>20</b>
<b>I.6. Références bibliographiques .....</b>	<b>21</b>
<b>Chapitre II Problématique et état de l'art.....</b>	<b>23</b>
<b>II.1. Introduction .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2. Description de la matrice de détection IR.....</b>	<b>24</b>
II.2.1. Généralités sur les matrices de détecteurs IR.....	24
II.2.2. Principe de fonctionnement de la matrice de photo-détecteurs .....	26
II.2.2.1. Détection quantique .....	27
II.2.2.2. Effet photovoltaïque.....	30
II.2.2.3. Fonctionnement d'un détecteur .....	30
II.2.3. Procédé d'assemblage .....	31
II.2.3.1. Empilement technologique sur le circuit de détection.....	32
II.2.3.2. Formation de billes d'interconnexion sur le circuit de lecture ..	32
Reprise de contact.....	33
Définition des « galettes d'indium » .....	33
Mise en forme .....	33
II.2.3.3. Report .....	34
Hybridation.....	34
Enrobage.....	35
Amincissement.....	35
<b>II.3. Modes de défaillances de la technologie flip chip.....</b>	<b>36</b>
II.3.1. Origines chimiques .....	36
II.3.2. Origines électriques .....	36
II.3.3. Origines thermodynamiques .....	38
II.3.4. Origines thermomécaniques.....	39
II.3.4.1. Dissipation thermique.....	39
II.3.4.2. Fissuration et la délamination.....	39
<b>II.4. Problématique.....</b>	<b>41</b>
<b>II.5. Etat de l'art sur la modélisation numérique d'un assemblage flip chip ....</b>	<b>42</b>
II.5.1. Méthode analytique.....	42
II.5.2. Modélisation 2D.....	44
II.5.3. Modélisation 3D.....	45
II.5.4. Autres modélisations.....	45
II.5.4.1. Substructuring.....	46
II.5.4.2. Submodeling.....	46
II.5.4.3. Homogénéisation par éléments finis .....	47
<b>II.6. Solution proposée .....</b>	<b>48</b>
<b>II.7. Conclusion.....</b>	<b>49</b>
<b>II.8. Références bibliographiques .....</b>	<b>49</b>
<b>Chapitre III Propriétés thermomécaniques des matériaux .....</b>	<b>53</b>
<b>III.1. Introduction .....</b>	<b>54</b>
<b>III.2. Généralités sur les types de comportement thermomécanique considérés.....</b>	<b>54</b>
III.2.1. Généralités sur la cristallographie.....	55
III.2.2. Elasticité linéaire.....	57

III.2.2.1. Tenseur d'élasticité .....	58
III.2.2.2. Modules élastiques techniques.....	59
III.2.3. Thermoélasticité linéaire.....	63
III.2.4. Plasticité .....	64
III.2.4.1. Contrainte équivalente .....	65
III.2.4.2. Surface de plasticité.....	66
<b>III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés .....</b>	<b>68</b>
III.3.1. Silicium .....	68
III.3.2. Germanium.....	72
III.3.3. Quartz (silice fondue).....	75
III.3.4. Indium.....	77
III.3.5. CdHgTe.....	80
III.3.6. CdZnTe .....	82
III.3.7. Epoxy .....	82
III.3.8. Intermétalliques Au-In.....	84
<b>III.4. Conclusion .....</b>	<b>86</b>
<b>III.5. Références bibliographiques.....</b>	<b>86</b>
<b>Chapitre IV Caractérisation des matériaux par nano-indentation .....</b>	<b>89</b>
IV.1. Introduction.....	90
IV.2. Analyse théorique.....	90
IV.3. Résultats des expérimentations .....	95
IV.4. Conclusion .....	101
IV.5. Références bibliographiques.....	101
<b>Chapitre V Homogénéisation thermo-élasto-plastique de la couche d'interconnexion .....</b>	<b>103</b>
V.1. Introduction.....	104
V.2. Bornes de Reuss et Voigt .....	104
V.3. Modèle asymptotique pour l'homogénéisation de milieux périodiques .	105
V.4. Modèles d'homogénéisation micromécanique.....	106
V.4.1. Concept général en thermoélasticité.....	106
V.4.2. Equation intégrale .....	110
V.4.3. Modèle auto-cohérent.....	116
V.4.4. Modèle de Mori-Tanaka.....	117
V.5. Homogénéisation de la couche d'interconnexion .....	119
V.5.1. Modèle de Mori-Tanaka pour un matériau biphasé.....	120
V.5.2. Programmation sous Fortran.....	121
V.5.3. Application à la couche d'interconnexion .....	121
V.5.4. Cas de l'absence de matrice .....	124
V.5.4.1. Modules d'Young et coefficients de Poisson.....	125
V.5.4.2. Modules de cisaillement.....	131
V.5.4.3. Coefficients de dilatation thermique .....	133
V.5.4.4. Comparaison.....	135
V.5.4.5. Localisation .....	136
V.6. Prise en compte de la plasticité .....	139

V.6.1. Plasticité des billes d'indium .....	139
V.6.2. Plasticité macroscopique .....	142
<b>V.7. Implémentation de la nouvelle loi de comportement dans Abaqus® .....</b>	<b>145</b>
V.7.1. Résolution des équations comportementales : approche incrémentale	145
V.7.1.1. Prédiction élastique.....	147
V.7.1.2. Correction plastique.....	150
V.7.2. Implémentation dans un code éléments finis .....	156
V.7.2.1. Construction des modules cohérents .....	156
V.7.2.2. Organisation de la base des données d'Abaqus® .....	159
Propriétés des matériaux (PROPS) .....	159
Les variables internes (STATEV ou SDV).....	160
<b>V.8. Conclusion.....</b>	<b>160</b>
<b>V.9. Références bibliographiques .....</b>	<b>160</b>
<b>Chapitre VI Résultats de simulations numériques .....</b>	<b>163</b>
<b>VI.1. Introduction .....</b>	<b>164</b>
<b>VI.2. Validation du modèle de Mori-Tanaka .....</b>	<b>164</b>
VI.2.1. Définition des modèles numériques .....	164
VI.2.2. Simulation thermoélastique.....	167
VI.2.3. Simulation thermo-élasto-plastique .....	169
VI.2.4. Zoom structurel .....	172
VI.2.4.1. Couplage de modèles .....	172
VI.2.4.2. Submodeling.....	173
VI.2.5. Comparaison des 4 modélisations.....	174
VI.2.5.1. Cas thermoélastique.....	174
VI.2.5.2. Cas thermo-élasto-plastique .....	176
<b>VI.3. Validation du modèle par un cycle thermique d'assemblage.....</b>	<b>178</b>
VI.3.1. Modification de maillage .....	179
VI.3.1.1. Désactivation des éléments .....	179
VI.3.1.2. Réactivation des éléments .....	179
Réactivation avec « strain-free » .....	179
Réactivation avec « with strain ».....	179
VI.3.2. Simulation du cycle thermique .....	180
<b>VI.4. Assemblage flip chip mégapixel .....</b>	<b>185</b>
VI.4.1. Modèle numérique.....	185
VI.4.2. Résultats de simulation .....	188
VI.4.3. Mesures expérimentales .....	189
VI.4.3.1. Imagerie confocale chromatique.....	189
VI.4.3.2. Interférométrie confocale spectrale .....	191
VI.4.3.3. Mesures de voilure des assemblages flip chip .....	193
VI.4.4. Comparaison et interprétations .....	194
VI.4.5. Zoom structurel .....	195
<b>VI.5. Conclusion.....</b>	<b>196</b>
<b>VI.6. Références bibliographiques .....</b>	<b>197</b>
<b>Conclusion générale et perspectives.....</b>	<b>199</b>

<b>Annexe A Tenseurs d'interaction et organigrammes du modèle d'homogénéisation .....</b>	<b>205</b>
A.1. Tenseurs d'interaction.....	205
A.2. Organigramme du modèle d'homogénéisation.....	206
<b>Annexe B Homogénéisation thermoélastique des assemblages de matériaux.....</b>	<b>209</b>
B.1. Assemblage en série.....	210
B.2. Assemblage en parallèle.....	215
B.3. Calcul des modules effectifs de cisaillement .....	219
B.4. Calcul des coefficients effectifs de dilatation thermique .....	222
B.5. Homogénéisation par éléments finis .....	225
B.5.1. Modules d'Young et coefficients de Poisson.....	226
B.5.2. Modules de cisaillement.....	229
B.5.3. Coefficient de dilatation thermique.....	229
B.6. Comparaison.....	230
B.7. Localisation des variables locales.....	231
<b>Annexe C Organigrammes de la routine UMAT.....</b>	<b>237</b>
<b>Annexe D Production scientifique.....</b>	<b>243</b>
D.1. Articles.....	243
D.2. Actes de conférence.....	244
D.3. Conférences internationales.....	244
D.4. Workshop international.....	245
D.5. Colloque national.....	245
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>247</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>249</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>251</b>

## Table des matières

---



# Liste des figures

Figure I.1 – Croissance du nombre de transistors dans les microprocesseurs Intel [I_1] .	4
Figure I.2 – Evolution des assemblages électroniques : More Moore et More than Moore [I_2] .....	5
Figure I.3 – Différents niveaux de packaging [I_3].....	6
Figure I.4 – Evolution des composants en boîtiers [I_4].....	7
Figure I.5 – Système sur puce [I_5] .....	7
Figure I.6 – Exemple d’assemblages CoB [I_6] .....	8
Figure I.7 – Exemple d’une structure MCM [I_5] .....	9
Figure I.8 – Exemples de System in Package [I_5] .....	9
Figure I.9 – Exemple de System on Package [I_5] .....	10
Figure I.10 – Comparaison des technologies de packaging [I_7].....	10
Figure I.11 – Exemple de PoP [I_8] .....	11
Figure I.12 – Séquences du Wedge bonding [I_9] .....	12
Figure I.13 – Séquences du Ball bonding [I_9].....	13
Figure I.14 – Coupe d’un plot côté composant pour le montage d’un TAB [I_10] .....	14
Figure I.15 – Principe simplifié du montage TAB : I, montage TAB classique et II, montage flip-TAB [I_10] .....	14
Figure I.16 – Coupe d’une microbille pour le montage flip chip [I_10].....	15
Figure I.17 – Technologie C4: Billes de brasage [I_11].....	16
Figure I.18 – Principe de la thermocompression [I_4] .....	17
Figure I.19 – Montages flip chip utilisant des substances adhésives [I_11].....	18
Figure I.20 – Empilement 3D par câblage filaire [I_12, 13] .....	19
Figure I.21 – Coupe de deux empilements verticaux de puces [I_14] .....	20
Figure I.22 – 3D IC avec une couche interposer de silicium, des TSVs et 6 puces [I_15] ..	20
Figure II.1 – Différents types de matrice de détecteurs IR .....	25
Figure II.2 – Infrared Focal Plane Arrays (IRFPA) [Sofradir®].....	26
Figure II.3 – Architecture d’une matrice de détection [II_1].....	26
Figure II.4 – Schéma de la transmittance atmosphérique dans la zone IR du spectre électromagnétique [II_2].....	28
Figure II.5 – Cartographie de l’énergie de bande interdite de différents alliages en fonction de leur paramètre de maille [II_3].....	29
Figure II.6 – Section verticale d’un pixel photo-détecteur [II_3].....	31

Figure II.7 – Image de la cathédrale Notre Dame obtenue par une caméra IR 8 $\mu\text{m}$ [Laboratoire Pierre Aigrain - UMR 8551].....	31
Figure II.8 – Composition du circuit de détection [II_3] .....	32
Figure II.9 – Etapes de micro billage sur circuit CMOS [II_5].....	32
Figure II.10 – Matrice de 1024 $\times$ 1024 billes d'indium au pas de 15 $\mu\text{m}$ [II_6] .....	33
Figure II.11 – Etape d'hybridation de l'assemblage flip chip [II_3] .....	34
Figure II.12 – Auto-alignement et rattrapage de planéité [II_7].....	35
Figure II.13 – Etape d'enrobage [II_8].....	35
Figure II.14 – Images au MEB des sections transversales des joints de brasure de type SnAgCu a) sans enrobage après 212 h et b) avec enrobage après 330 h sous 10 $\text{kA/cm}^2$ à 453 K [II_10].....	37
Figure II.15 – Images au MEB des micro-bossages soumis au chargement électrique pendant 7,5 h. (a) micro-bossage de gauche, (b) micro-bossage de droite [II_11] .....	37
Figure II.16 – Images au MEB de la section diagonale de l'assemblage flip chip: a) vue globale de l'assemblage, b) vue agrandie d'un micro-bossage, c) microstructure de l'interface côté puce, et d) la microstructure de l'interface côté substrat [II_12].....	38
Figure II.17 – Apparition de fissures aux interfaces bille/substrat et puce [II_12] .....	39
Figure II.18 – Défaut de planéité des composants à hybrider [II_13].....	40
Figure II.19 – Schéma simplifié de l'assemblage flip chip étudié .....	41
Figure II.20 – Maillage 3D de 16 billes (6144 éléments et 8208 nœuds) .....	42
Figure II.21 – Plaque bi-matière (bilame) [II_15].....	43
Figure II.22 – Section diagonale d'un assemblage flip chip [II_19].....	44
Figure II.23 – Géométrie et conditions aux limites du modèle 2D flip chip [II_16] .....	44
Figure II.24 – Maillage 2D d'un assemblage flip chip [II_19] .....	44
Figure II.25 – Maillage 3D d'un assemblage flip chip [II_22] .....	45
Figure II.26 – Principe du substructuring [II_25] .....	46
Figure II.27 – Technique de submodeling [II_25].....	47
Figure II.28 – Principe de l'homogénéisation par EF .....	47
Figure II.29 – Schéma de l'homogénéisation de la couche d'interconnexion .....	48
Figure III.1 – Les réseaux de Bravais.....	56
Figure III.2 – Orientation cristalline .....	57
Figure III.3 – Arbre des symétries des tenseurs d'élasticité .....	59
Figure III.4 – Courbe de traction nominale [III_3].....	65
Figure III.5 – Surfaces de plasticité de Tresca et von Mises dans le plan ( $\Pi$ ) [III_3].....	67
Figure III.6 – Surfaces de plasticité de Tresca et von Mises dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) .....	68
Figure III.7 – Modules d'Young du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III_5–7] .....	69
Figure III.8 – Modules de cisaillement du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III_5, 6].....	70
Figure III.9 – Coefficient de Poisson du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III_5, 6].....	70

Figure III.10 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du silicium en fonction de la température [III_8] .....	71
Figure III.11 – Coefficient instantané de dilatation thermique linéique du silicium en fonction de la température [III_9] .....	71
Figure III.12 – Evolution des coefficients instantanés de dilatation thermique linéaire du silicium et de l'indium en fonction de la température [III_10] .....	72
Figure III.13 – Modules d'Young du germanium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III_6, 11] .....	72
Figure III.14 – Module de cisaillement du germanium polycristallin en fonction de la température [III_6] .....	73
Figure III.15 – Coefficient de Poisson du germanium polycristallin en fonction de la température [III_6] .....	73
Figure III.16 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du germanium en fonction de la température [III_12, 13] .....	74
Figure III.17 – Evolution du coefficient instantané de dilatation thermique du germanium en fonction de la température [III_14] .....	74
Figure III.18 – Module d'Young du quartz en fonction de la température [III_15, 16] .....	75
Figure III.19 – Module de cisaillement du quartz en fonction de la température [III_15, 16] .....	75
Figure III.20 – Coefficient de Poisson du quartz en fonction de la température [III_15, 16] .....	76
Figure III.21 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du quartz en fonction de la température [III_17, 18] .....	76
Figure III.22 – Module d'Young de l'indium en fonction de la température [III_19, 20] .....	77
Figure III.23 – Module de cisaillement de l'indium en fonction de la température [III_19] .....	77
Figure III.24 – Coefficient de Poisson de l'indium en fonction de la température [III_19, 20] .....	78
Figure III.25 – Variation des modules élastiques en fonction de la température [III_21] .....	79
Figure III.26 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique de l'indium en fonction de la température [III_22, 23] .....	79
Figure III.27 – Courbes d'érouissage de l'indium à 4 différentes température [III_25] .....	80
Figure III.28 – Courbes d'érouissage isotrope de l'indium à différentes températures [III_24] .....	80
Figure III.29 – Dureté et module d'Young du $Hg_{0.78}Cd_{0.22}Te$ d'orientation $\langle 111 \rangle$ calculés à partir de la (a) nano-indentation et de la (b) micro-indentation en fonction de la profondeur de pénétration [III_26] .....	81
Figure III.30 – Coefficient de dilatation thermique du $Hg_{1-x}Cd_xTe$ en fonction de la température a) $x=0,2$ , b) $x=0,7$ (les carrés viennent de [III_27, 28] et la ligne continue vient du modèle de Bagot et al. [III_29]) .....	81
Figure III.31 – Variation du module d'Young de l'époxy en fonction de la température [III_33] .....	83

Figure III.32 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique de l'époxy en fonction de la température.....	84
Figure III.33 – Diagramme de phase de l'or-indium [III_34, 35] .....	84
Figure III.34 – Analyse EDS sur une couche d'interconnexion pleine d'indium [R. PESCI, LEM3].....	85
Figure IV.1 – Profondeur de pénétration d'un indenteur conique dans le cas d'un contact purement élastique [IV_2] .....	91
Figure IV.2 – Courbe et profondeurs d'indentation [IV_2].....	92
Figure IV.3 – Schéma d'un indenteur à pointe sphérique [IV_4] .....	93
Figure IV.4 – Types d'indenteur [IV_2] .....	95
Figure IV.5 – Instrument de nano-indentation.....	96
Figure IV.6 – Machine de nano-indentation CSM Instruments.....	96
Figure IV.7 – Zone de déformation en nano-indentation .....	96
Figure IV.8 – Empreintes obtenues par nano-indentation.....	97
Figure IV.9 – Courbes de nano-indentation .....	99
Figure IV.10 – Essai de nano-indentation sur des microbilles d'indium.....	100
Figure V.1 – Milieu périodique constitué de deux phases.....	105
Figure V.2 – Changement d'échelle pour la description du VER.....	106
Figure V.3 – Principe des approches d'homogénéisation en thermoélasticité .....	107
Figure V.4 – Décomposition du tenseur des modules élastiques $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ .....	111
Figure V.5 – Forme réelle et modélisée de la bille d'interconnexion.....	122
Figure V.6 – Prise en compte d'une inclusion et de ses 8 premières voisines.....	122
Figure V.7 – Cellule étudiée.....	124
Figure V.8 – Traction dans la direction 1 .....	126
Figure V.9 – Traction dans la direction 3 .....	129
Figure V.10 – Cisaillement dans le plan (1,3) : chargement (a) .....	131
Figure V.11 – Cisaillement dans le plan (1,3) : chargement (b).....	132
Figure V.12 – Cisaillement dans le plan (1,2).....	133
Figure V.13 – Surfaces de plasticité de von Mises du MHE et de la phase In dans le plan ( $\sigma_1$ et $\sigma_2$ ) .....	144
Figure V.14 – Surfaces de plasticité de von Mises du MHE et de la phase In dans le plan ( $\sigma$ et $\tau$ ) .....	144
Figure VI.1 – Géométrie et conditions aux limites des modèles $20 \times 20$ .....	165
Figure VI.2 – Maillage du modèle billé.....	166
Figure VI.3 – Maillage du modèle avec MHE.....	166
Figure VI.4 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles $20 \times 20$ en thermoélasticité.....	167
Figure VI.5 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes/phase d'indium des modèles $20 \times 20$ en thermoélasticité.....	168
Figure VI.6 – Champ des contraintes équivalentes de von Mises (MPa) dans la phase époxy des modèles $20 \times 20$ en thermoélasticité .....	168

Figure VI.7 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles $20 \times 20$ en thermo-élasto-plasticité.....	170
Figure VI.8 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes/phase d'indium des modèles $20 \times 20$ en thermo-élasto-plasticité.....	170
Figure VI.9 – Champ de déformation plastique équivalente dans les billes/phase indium des modèles $20 \times 20$ en thermo-élasto-plasticité .....	170
Figure VI.10 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans la phase époxy dans les modèles $20 \times 20$ en thermo-élasto-plasticité.....	171
Figure VI.11 – Couche d'interconnexion du modèle couplé.....	173
Figure VI.12 – Description de la technique submodeling .....	174
Figure VI.13 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d'indium des 3 modèles contenant les billes en thermoélasticité .....	175
Figure VI.14 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans l'époxy des 3 modèles contenant les billes en thermoélasticité .....	176
Figure VI.15 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d'indium des 3 modèles contenant les billes en thermo-élasto-plasticité .....	177
Figure VI.16 – Champ de déformation plastique équivalente dans les billes des 3 modèles contenant les billes en thermo-élasto-plasticité.....	178
Figure VI.17 – Dimensions et conditions aux limites des modèles $40 \times 40$ .....	180
Figure VI.18 – Cycle thermique simulé.....	181
Figure VI.19 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles $40 \times 40$ en thermoélasticité à la fin de l'étape d'hybridation .....	183
Figure VI.20 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles $40 \times 40$ en thermoélasticité à la fin de l'étape d'enrobage .....	183
Figure VI.21 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans l'indium des modèles $40 \times 40$ à la fin de l'étape d'hybridation en thermoélasticité .....	184
Figure VI.22 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans l'indium des modèles $40 \times 40$ à la fin de l'étape d'enrobage en thermoélasticité.....	184
Figure VI.23 – Dimensions et conditions aux limites du modèle mégapixel .....	185
Figure VI.24 – Epaisseur des matériaux constituant le modèle flip chip mégapixel .....	185
Figure VI.25 – Modules d'Young des matériaux en fonction de la température .....	186
Figure VI.26 – Modules de cisaillement des matériaux en fonction de la température .	187
Figure VI.27 – Coefficient de Poisson des matériaux en fonction de la température.....	187
Figure VI.28 – Coefficient de dilatation thermique moyen des matériaux en fonction de la température .....	188
Figure VI.29 – Champ de déplacement $u_3$ ( $\mu\text{m}$ ) dans le modèle mégapixel après enrobage.....	189
Figure VI.30 – Configuration de la technique d'imagerie confocale chromatique [STIL®] .....	190
Figure VI.31 – Machine de mesure de voilure à différentes température (AltiSurf© 530 par Altimet).....	191
Figure VI.32 – Configuration de la technique d'interférométrie confocale spectrale [STIL®] .....	192

Figure VI.33 – Machine de mesure de voilure Zygo.....	192
Figure VI.34 – Voilure d’un échantillon d’assemblage flip chip après enrobage avec Zygo® .....	193
Figure VI.35 – Synthèse des mesures de voilure sur les assemblages flip chip.....	193
Figure VI.36 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans la phase In à la fin de l’enrobage .....	195
Figure VI.37 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d’In du sous-modèle mégapixel à la fin de l’enrobage.....	195
Figure VI.38 – Image MEB de la couche d’interconnexion d’un assemblage flip chip mégapixel [VI_1] .....	196
Figure A.1 – Organigramme du sous-programme calcul du tenseur d’interaction totale $\mathbf{T}$ .....	206
Figure A.2 – Organigramme de l’homogénéisation thermoélastique d’un matériau biphasé .....	208
Figure B.1 – Assemblage en série suivant l’axe $\vec{z}$ .....	210
Figure B.2 – Assemblage en parallèle suivant l’axe $\vec{x}$ ou $\vec{y}$ .....	215
Figure B.3 – Cisaillement dans le plan (2,3) : Chargement (a) .....	219
Figure B.4 – Cisaillement dans le plan (2,3) : chargement (b) .....	220
Figure B.5 – Cisaillement dans le plan (1,2) .....	221
Figure B.6 – Cellule EF orthotrope .....	225
Figure B.7 – Essai de compression dans une direction $i$ .....	227
Figure B.8 – Essai de cisaillement dans le plan (i,j) .....	229
Figure C.1 – Organigramme de la sous-routine UHARD .....	238
Figure C.2 – Organigramme de la routine UMAT .....	242

# Liste des tableaux

Tableau III.1 – Récapitulatif des symétries matérielles rencontrées dans les matériaux	61
Tableau III.2 – Relations entre les 5 modules d'élasticité isotrope linéaire	63
Tableau III.3 – Propriétés mécaniques du silicium polycristallin [III_4]	69
Tableau III.4 – Modules élastiques à 295 K et les constantes de l'Eq.(III-25) [III_21]	78
Tableau III.5 – Constantes élastiques du CdTe et du $Cd_{0.52}Zn_{0.48}Te$ à 296 K et 1 atm [III_31]	82
Tableau III.6 – Tableau récapitulatif des propriétés élastiques de l'époxy [III_32]	83
Tableau III.7 – Coefficients de dilatation thermique de l'AuIn <sub>2</sub> , de l'or et de l'indium [III_36]	85
Tableau IV.1 – Détermination de la force et de l'aire de contact projetée pour différents types d'indenteur [IV_2]	94
Tableau IV.2 – Dureté (moyennée sur 6 courbes) des matériaux par nano-indentation	99
Tableau IV.3 – Propriétés élastiques des matériaux obtenues par nano-indentation	99
Tableau IV.4 – Dureté de la microbille	101
Tableau IV.5 – Module d'Young de la microbille	101
Tableau V.1 – Propriétés thermoélastiques de l'indium et de l'époxy à 293 K	123
Tableau V.2 – Constantes effectives d'ingénieur de la couche d'interconnexion obtenues par le modèle de Mori-Tanaka	123
Tableau V.3 – Propriétés des matériaux constituant la cellule étudiée	135
Tableau V.4 – Constantes thermoélastiques obtenues avec les deux méthodes	136
Tableau VI.1 – Maillage des modèles 20 × 20	165
Tableau VI.2 – Propriétés thermoélastiques des matériaux	166
Tableau VI.3 – Données des courbes d'érouissage de l'indium en fonction de la température	167
Tableau VI.4 – Valeurs minimales et maximales de la contrainte équivalente de von Mises dans les deux phases en thermoélasticité	169
Tableau VI.5 – Valeurs minimales et maximales de la contrainte équivalente de von Mises dans les deux phases en thermo-élasto-plasticité	171
Tableau VI.6 – Valeurs minimales et maximales de la déformation plastique équivalente de l'indium en thermo-élasto-plasticité	171
Tableau VI.7 – Comparaison de l'écart de la voilure des modèles 20 × 20 et 40 × 40	172
Tableau VI.8 – Comparaison des 4 modélisations en thermoélasticité	175

## Liste des tableaux

---

Tableau VI.9 – Comparaison des 4 modélisations en thermo-élasto-plasticité.....	176
Tableau VI.10 – Températures initiales des matériaux .....	182
Tableau VI.11 – Propriétés thermoélastique des couches de passivation.....	182
Tableau VI.12 – Nombre d'éléments et temps de calcul des deux modèles .....	182
Tableau VI.13 – Flèches calculées ( $\mu\text{m}$ ) sur le quartz dans les modèles $40 \times 40$ à différentes étapes.....	183
Tableau VI.14 – Voilures sur le quartz à différentes étapes .....	188
Tableau VI.15 – Comparaison des voilures numérique et expérimentale .....	194
Tableau B.1 – Comparaison des modules élastiques prédits par les modèles EF et périodique.....	230
Tableau B.2 – Comparaison des CDT prédits par les modèles EF et périodique.....	231



# Listes des notations

## Symboles de mécanique des matériaux

$\sigma$	tenseur de contraintes locales
$\varepsilon$	tenseur de déformations totales locales
$\varepsilon^e$	tenseur de déformations élastiques locales
$\varepsilon^{th}$	tenseur de déformations thermiques locales
$\varepsilon^p$	tenseur de déformations plastiques locales
$c$	tenseur des modules élastiques locaux
$\Sigma$	tenseur de contraintes macroscopiques
$E$	tenseur de déformations totales macroscopiques
$E^e$	tenseur de déformations élastiques macroscopiques
$E^{th}$	tenseur de déformations thermiques macroscopiques
$E^p$	tenseur de déformations plastiques macroscopiques
$C$	tenseur des modules élastiques macroscopiques
$S$	inverse du tenseur des modules élastiques macroscopiques
$s$	tenseur des contraintes déviatoriques locales
$E$	<b>module d'Young</b>
$\nu$	coefficient de Poisson
$\mu$	module de cisaillement
$\kappa$	module de compressibilité
$\lambda$	coefficient de Lamé
$\alpha$	tenseur des coefficients de dilatation thermique
$\beta$	tenseur des coefficients de contraintes thermiques
$\lambda$	multiplicateur plastique ou paramètre de consistance
$\varepsilon^{peq}$	déformation plastique locale équivalente
$\bar{\sigma}$	contrainte locale équivalente
$A$ et $a$	tenseurs de localisation de la déformation totale locale à partir de la déformation totale macroscopique
$B$ et $b$	tenseurs de localisation de la contrainte locale à partir de la contrainte macroscopique
$R$ et $r$	tenseurs de localisation de la déformation totale locale à partir de la déformation totale du milieu de référence
$T$	température
$\theta$	variation de température par rapport à une température de référence
$T^{IJ}$	<b>tenseur d'interactions entre les inclusions <math>I</math> et <math>J</math></b> par rapport à un milieu de référence

$f$  | fraction volumique totale des inclusions

## Sigles

2D	deux dimensions
3D	trois dimensions
ACA	anisotropically conductive adhesives
BGA	ball grid array
C4	control collapse chip connection
CCD	charge-coupled device
CDT	coefficient de dilatation thermique
CMOS	complementary metal oxide
CMT	CdHgTe
CoB	chip on board
CPU	Central Processing Unit
CZT	CdZnTe
DCA	direct chip attachment
EDS	energy dispersive spectroscopy
EF	éléments finis
EJM	épitaxie par jet moléculaire
EPL	épitaxie en phase liquide
EPV	épitaxie en phase vapeur
HDI	high density integration
HT	haute tension
IC	integrated circuit ou circuit intégré
ICA	isotropically conductive adhesives
ILB	inner lead bonding
IR	infrarouge
LIR	lointain infrarouge
LWIR	large wavelength infrared
MCM	multi-chip module
MEB	microscope électronique à balayage
MEMS	Microelectromechanical systems
MHE	matériau homogène équivalent
MIR	moyen infrarouge
MWIR	middle wavelength infrared
NCA	non conductive adhesives
NFC	near field communication
OLB	outer lead bonding
PCB	printed circuit board
PIR	proche infrarouge
PoP	package on package
PPV	principe des puissances virtuelles
RAM	random access memory
RDL	redistribution layer
RF	radio fréquence
RFID	radio frequency identification
SAC	SnAgCu
SiP	system in package
SoC	system on chip ou système sur puce

## Listes des notations

---

SOIC	small outline integrated circuit
SoP	system on package
SWIR	short wavelength infrared
TAB	tape automated bonding
TSV	through silicon via
TTF	time to failure
UBM	under bump metallization
VER	volume élémentaire représentatif



# Introduction générale

La science des matériaux repose sur la relation entre les propriétés, la morphologie et la **topologie structurale et la mise en œuvre des matériaux constitutifs des objets qui nous entourent** (métaux, polymères, semi-conducteurs, céramiques, composites, etc.). Elle est au **cœur de beaucoup de grandes révolutions techniques, particulièrement depuis un siècle** : électronique (ordinateurs, lecteurs de CD et DVD, etc.), automobile (moteurs, carrosserie, phares, etc.), aéronautique, énergies renouvelables (panneaux solaires...), nanosciences, nanotechnologies, etc. La science des matériaux est de plus en plus appliquée en micro-électronique **notamment pour l'étude de fiabilité des assemblages électroniques.**

**L'électronique, science technique** constituant l'une des branches les plus importantes de la physique appliquée, étudie et conçoit les structures pour le traitement de signaux électriques. La micro-électronique est une spécialité du domaine de l'électronique qui s'intéresse à l'étude et à la fabrication de composants électroniques à l'échelle micrométrique. Ces composants sont fabriqués à partir de matériaux semi-conducteurs (comme le silicium) au moyen de diverses technologies dont la photolithographie. Un composant électronique est un élément qui, assemblé avec d'autres selon un schéma électronique, permet de réaliser une ou **plusieurs fonctions électroniques. L'assemblage de ces composants se fait avec divers techniques d'interconnexion dont le flip chip.**

Les assemblages de type flip chip qui **font l'objet de la présente étude ont eu une croissance explosive ces dernières années.** Chaque année, plus d'un milliard de dispositifs électroniques sont assemblés en utilisant la technologie flip chip. Celle-ci permet de connecter mécaniquement et électriquement **deux puces électroniques à l'aide de billes. Une telle configuration offre un encombrement minimum, ainsi que la possibilité d'aboutir à de fortes densités d'interconnexions.** Elle est largement utilisée dans les assemblages électroniques de type 3D SiP (System in Package). Les pixels d'une matrice de détecteurs infrarouge aux plots d'entrée du circuit de lecture par exemple, sont connectés à l'aide de la technologie flip chip. Avec l'augmentation de la résolution des détecteurs, menant à des matrices mégapixel, grands formats et petits pas de connexions ( $1024 \times 1280$  au pas de  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ ), ces

composants optoélectroniques sont soumis à des contraintes thermomécaniques sévères liées **au procédé d'assemblage (brasage tendre) et aux conditions de fonctionnement** (cryogénie). En effet, ces assemblages constitués de matériaux avec différents comportements **thermomécaniques, révèlent à l'échelle macroscopique un comportement global étroitement** lié aux variations de température. Ainsi, ils peuvent présenter des voilures convexes ou concaves (selon les propriétés thermomécaniques des matériaux constitutifs) lors de leur assemblage et de leur fonctionnement.

**Pour aboutir à un assemblage le plus fiable possible à moindre coût en termes d'effort technologique associé, l'une des méthodes d'analyse les plus rapides reste la modélisation numérique. Compte tenu du nombre important de billes d'interconnexion, la modélisation numérique en 3 dimensions s'avère très difficile à mettre en œuvre. Le principal objectif de cette thèse a été de proposer une alternative rigoureuse afin de rendre réalisable cette simulation 3D. La solution proposée consiste à remplacer la couche d'interconnexion par un matériau homogène équivalent pour les assemblages à grand format.**

Le premier chapitre **présente une description des diverses technologies d'assemblage en** microélectronique et met un accent sur la technologie flip chip. Le second chapitre décrit **l'assemblage flip chip étudié, fait ressortir ses modes de défaillance et propose une solution** pour la modélisation en 3D des assemblages de grand format. Le chapitre 3 fait la synthèse des propriétés thermomécaniques, fournies par la littérature, des matériaux constituant **l'assemblage flip chip étudié et le chapitre 4, les propriétés obtenues** par une méthode expérimentale de caractérisation mécanique : la nano-indentation. Le chapitre 5 décrit **explicitement les modèles d'homogénéisation utilisés pour déterminer les propriétés effectives de la couche d'interconnexion qui sera substituée par un matériau homogène équivalent et l'implémentation de la loi de comportement thermo-élasto-plastique** ainsi déduite, dans le code de calcul par éléments finis Abaqus®. Le dernier chapitre (6) présente **quelques résultats numériques de simulation du cycle d'assemblage** ainsi que leur confrontation avec les mesures expérimentales de voilure réalisées sur les puces électroniques étudiées.

# Chapitre I

## Généralités sur l'assemblage en microélectronique

### Sommaire

---

<b>I.1. Introduction.....</b>	<b>4</b>
<b>I.2. Packaging.....</b>	<b>5</b>
<b>I.3. Evolution des assemblages électroniques .....</b>	<b>7</b>
I.3.1. System on Chip (SoC) .....	7
I.3.2. Chip on Board (CoB) .....	8
I.3.3. Multi-Chip Module (MCM).....	8
I.3.4. System in Package (SiP) ou l'intégration 3D .....	9
I.3.5. System on Package (SoP).....	9
I.3.6. Package on Package (PoP).....	10
<b>I.4. Techniques d'interconnexion.....</b>	<b>11</b>
I.4.1. Câblage filaire ou assemblage par fils.....	11
I.4.2. Technologie Tape Automated Bonding (TAB).....	13
I.4.3. Flip chip .....	14
I.4.4. Vias traversants (TSV) .....	19
<b>I.5. Conclusion .....</b>	<b>20</b>
<b>I.6. Références bibliographiques.....</b>	<b>21</b>

---

## I.1. Introduction

Un composant électronique est un élément destiné à être assemblé avec d'autres afin de réaliser une ou plusieurs fonctions électroniques. Un circuit électronique est un ensemble de composants électroniques interconnectés souvent grâce à un circuit imprimé et dont le but est de remplir une fonction. Le transistor, un des composants de base de l'électronique, est utilisé en grand nombre notamment dans les systèmes pour l'informatique. Voyant l'évolution du nombre de transistors dans les microprocesseurs des ordinateurs, Gordon Moore (Ingénieur de Fairchild Semiconductor, un des trois fondateurs d'Intel) énonça pour la première fois en 1965 dans « Electronics Magazine » une loi portant aujourd'hui son nom, en postulant que ce nombre doublerait chaque année depuis la création du transistor en 1959 (Figure I.1).

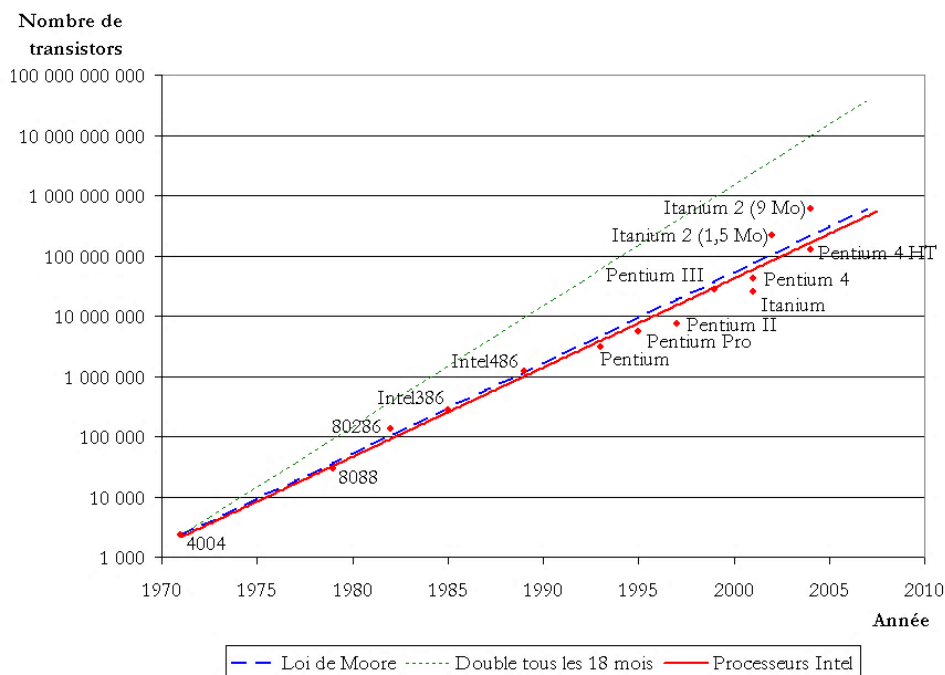


Figure I.1 – Croissance du nombre de transistors dans les microprocesseurs Intel [I\_1]

Dès lors, l'évolution des circuits électroniques a suivi deux principales orientations : le « More Moore » et le « More than Moore ». Le More Moore caractérise la miniaturisation des composants électroniques tandis que le More than Moore définit l'intégration de plusieurs fonctions sur une puce (Figure I.2). Les assemblages électroniques de cette étude font partie de l'évolution de type More than Moore.

Dans ce chapitre, le packaging et l'évolution des assemblages électroniques seront décrits dans un premier temps et les technologies d'interconnexion seront exposées dans un second temps.



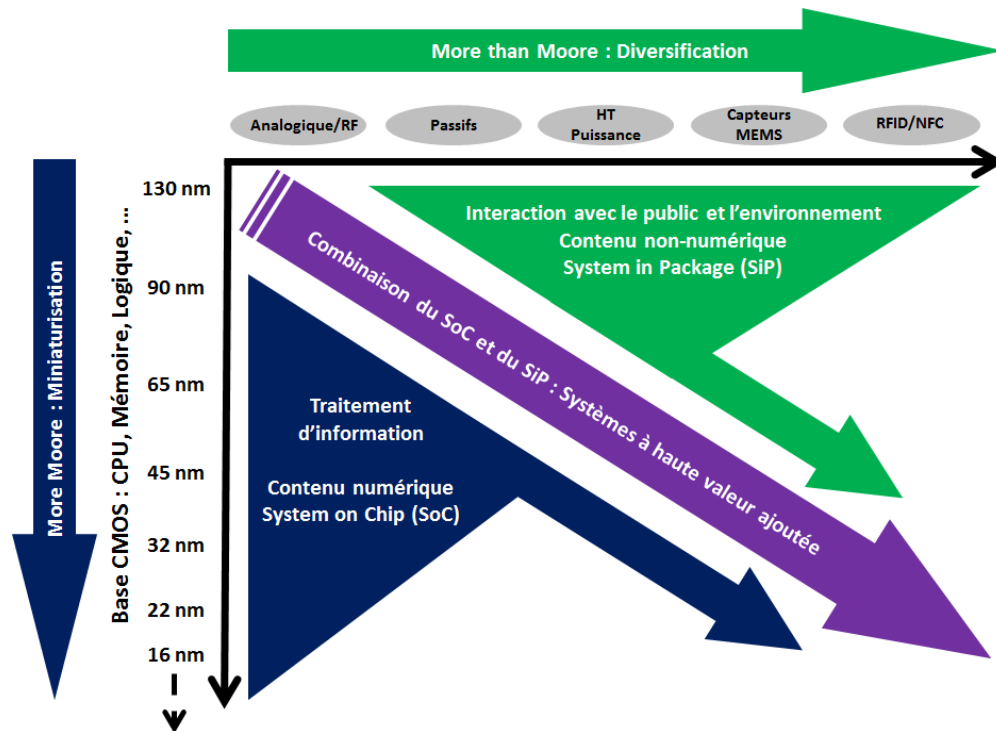


Figure I.2 – Evolution des assemblages électroniques : More Moore et More than Moore [I\_2]

## I.2. Packaging

Le packaging se définit en électronique comme « l'art et la science d'établir les interconnexions et l'environnement permettant à des circuits à prédominance électronique de traiter ou de stocker de l'information » [I\_3]. Le rôle du packaging est de gérer les échanges électriques, optiques et thermiques avec l'extérieur, ainsi que les besoins en termes de protection par rapport à l'environnement du dispositif électronique. Les différents niveaux de packaging (Figure I.3) sont les suivants:

- niveau 0 ou «wafer level packaging» : le packaging à l'échelle de la puce
- niveau 1 : la mise en boîtier
- niveau 2 : connexion sur un circuit imprimé
- niveau 3 : interconnexion des différentes cartes
- niveau 4 : emballage du système électronique global

Le niveau 4 comporte le boîtier principal et toutes les liaisons de l'équipement vers l'extérieur. Il est qualifié de macro-packaging et réalise une machine électronique complète. C'est ce niveau qui sera visible par l'utilisateur final. Le troisième niveau permet de constituer un ensemble fonctionnel autonome ; il est traditionnellement construit autour d'un « fond de

panier » recevant plusieurs cartes et pouvant posséder certaines fonctions collectives (alimentation, ventilation). Le packaging deuxième niveau consiste à relier le(s) boîtier(s) à une carte (circuit imprimé, le plus souvent). Cette carte peut comporter d'autres composants nécessaires à son fonctionnement tels que connecteurs, condensateurs, voyants. La liaison du circuit intégré à son boîtier constitue le packaging premier niveau; c'est là que sont réalisées les premières interconnexions électriques permettant d'accéder aux fonctions matérialisées dans le circuit intégré.

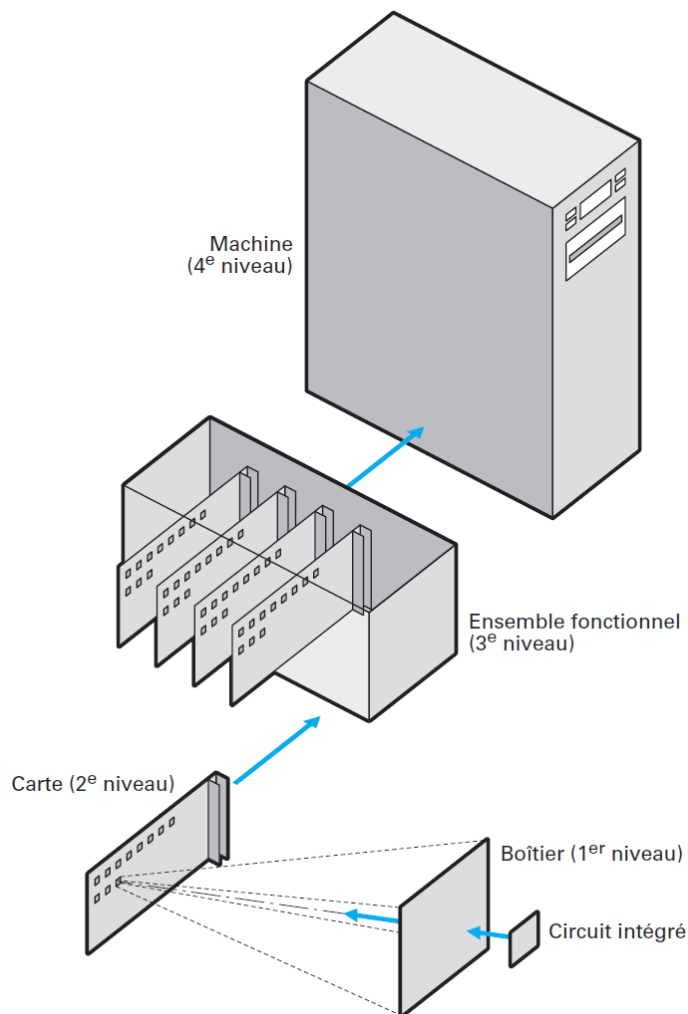


Figure I.3 – Différents niveaux de packaging [I\_3]

Les boîtiers permettent d'encapsuler et de protéger la puce, mais également de faire la liaison entre la puce et le circuit imprimé. Avec l'intégration croissante des fonctions, les boîtiers possèdent de plus en plus de broches. Au début, les circuits ne possédaient que deux rangées de broches de chaque côté, puis sont arrivés les composants montés en surface comme les boîtiers SOIC (Small Outline Integrated Circuit) et actuellement les boîtiers de type BGA (Ball Grid Array) où les contacts sont situés sous le composant. La Figure I.4 illustre l'évolution des composants en boîtiers.

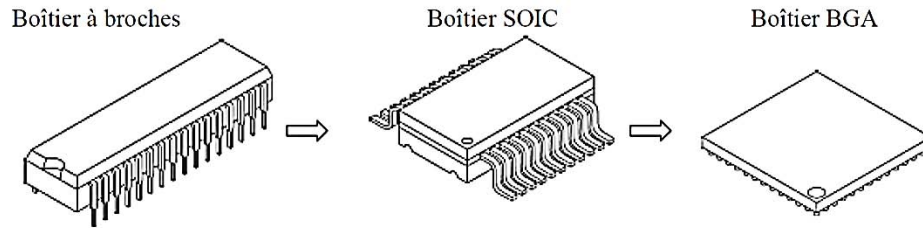


Figure I.4 – Evolution des composants en boîtiers [I\_4]

## I.3. Evolution des assemblages électroniques

Depuis quelques décennies, les assemblages électroniques ont pris différentes voies d'évolutions. On peut alors distinguer dans les termes anglophones le System on Chip, le Chip on Board, le Multi-Chip Module, le System in Package ou l'intégration 3D, le System on Package et le Package on Package.

### I.3.1. System on Chip (SoC)

Le système sur puce (SoC) est une technologie intervenant au niveau zéro du packaging et correspond au « More Moore ». La dénomination Système sur Puce représente un système intégré, réalisé en technologie CMOS (Complementary Metal Oxyde). Ce sont les technologies modernes qui ont rendu possible cette intégration d'un système électronique complet sur une seule puce de silicium. Ce circuit intégré, généralement complexe, contient un grand nombre de fonctions électroniques différentes. Les systèmes sur puce récents peuvent ainsi **comprendre plusieurs cœurs de microprocesseurs, des processeurs de traitement de signal (DSP), associés à des opérateurs matériels, des mémoires et des interfaces d'entrées/sorties** (Figure I.5). Des complexités de plus d'un milliard de transistors sont aujourd'hui possibles. Une caractéristique de ces systèmes sur puce est la part très importante occupée fréquemment par les logiciels embarqués.

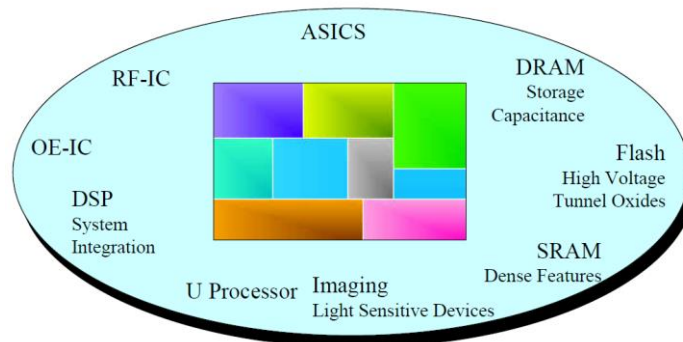


Figure I.5 – Système sur puce [I\_5]

### I.3.2. Chip on Board (CoB)

Il se réfère à la technologie d'assemblage de semi-conducteurs dans laquelle la puce ou la matrice est directement montée sur son circuit final et électriquement interconnectée à ce dernier, au lieu de subir un assemblage traditionnel en tant que circuit intégré (IC) individuel. **L'élimination de l'assemblage classique de dispositifs des assemblages CoB simplifie l'ensemble du processus de conception et de fabrication du produit final, et améliore ses performances en raison des courts trajets d'interconnexion.**

Le terme général employé pour la technologie CoB est actuellement « Direct Chip Attachment » ou DCA. Mis à part les circuits utilisés pour la CoB, divers substrats sont disponibles pour une utilisation du DCA. Il y a, par exemple, des substrats en céramique et en verre-céramique qui présentent d'excellentes propriétés diélectriques et thermiques. Les substrats organiques, qui pèsent moins et coûtent moins cher tout en offrant une faible constante diélectrique, existent également.

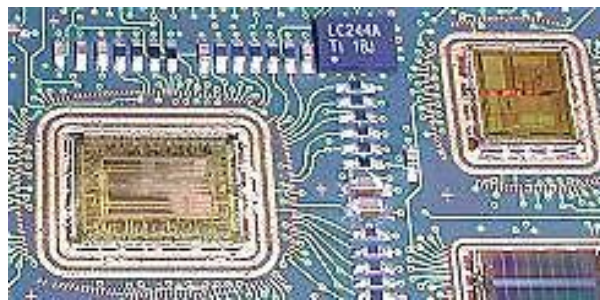


Figure I.6 – Exemple d'assemblages CoB [I\_6]

### I.3.3. Multi-Chip Module (MCM)

Un Multi-Chip Module (MCM) est un boîtier électronique spécialisé où plusieurs circuits intégrés, des matrices de semi-conducteurs et d'autres composants discrets sont assemblés sur un seul support (Figure I.7), ce qui facilite leur utilisation en tant que composant unique (comme un plus grand IC). Le MCM lui-même est souvent désigné comme une « puce » dans les conceptions, illustrant ainsi sa nature intégrée.

Les MCMs possèdent une variété de formes selon la complexité et le développement des philosophies de leurs concepteurs. Il peut s'agir de l'utilisation des ICs préassemblés sur un petit circuit imprimé (Printed Circuit Board - PCB) destiné à reproduire la superficie d'un assemblage existant ; ceci peut être un assemblage intégrant de nombreuses puces entièrement personnalisées sur un substrat à haute densité **d'interconnexion (High Density Integration - HDI)**.

L'assemblage de type MCM est une facette importante de la miniaturisation de l'électronique moderne et des systèmes microélectroniques. Les MCMs sont classés en fonction de la technologie utilisée pour créer le substrat HDI :

- MCM-L - laminé MCM : le substrat est un PCB multicouches laminé
- MCM-D - déposé MCM : les modules sont déposés sur le substrat de base en utilisant une technologie de film mince.
- MCM-C - MCM de substrat en céramique, tels que les Low Temperature Co-fired Ceramic (LTCC).

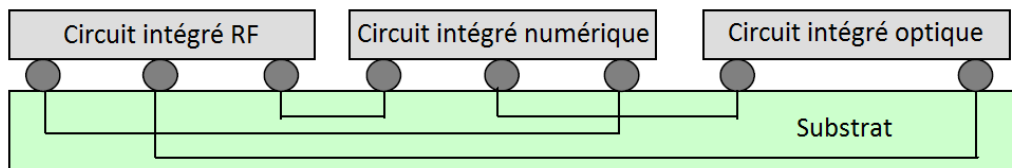


Figure I.7 – Exemple d'une structure MCM [I\_5]

#### I.3.4. System in Package (SiP) ou l'intégration 3D

On oppose généralement à l'intégration horizontale que représente le MCM, le SiP qui concerne l'intégration verticale (Figure I.8). Dans ce cas, les différentes fonctions du système sont réalisées par l'intermédiaire de puces de différentes natures (puces nues silicium standard, microsystèmes, composants passifs et RF...) interconnectées les unes aux autres par empilement. Il consiste en un empilement de tranches électroniques dont l'interconnexion s'effectue en trois dimensions en utilisant les faces de l'empilement pour réaliser les connexions entre les tranches.

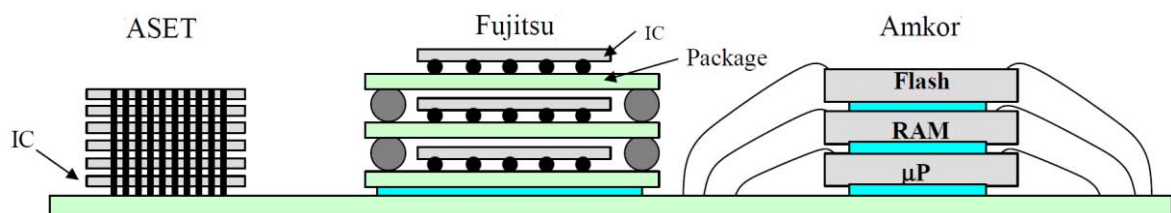


Figure I.8 – Exemples de System in Package [I\_5]

#### I.3.5. System on Package (SoP)

On peut également citer comme nouvelle solution d'intégration le System on Package. Le concept de SoP amène l'idée d'intégrer dans le volume du substrat, jusqu'alors utilisé essentiellement pour les connexions électriques, des fonctions passives telles que des

capacités, des inductances, des filtres qui participent aux fonctionnalités générales du système (Figure I.9). Cette technique est également une intégration en 3D. Cette dimension supplémentaire est formée par l'empilement de couches de substrats organiques qui ont été fonctionnalisées au préalable. Cette technologie regroupe alors les précédentes (SoC, MCM et SiP) et par conséquent elle est bien plus complète.

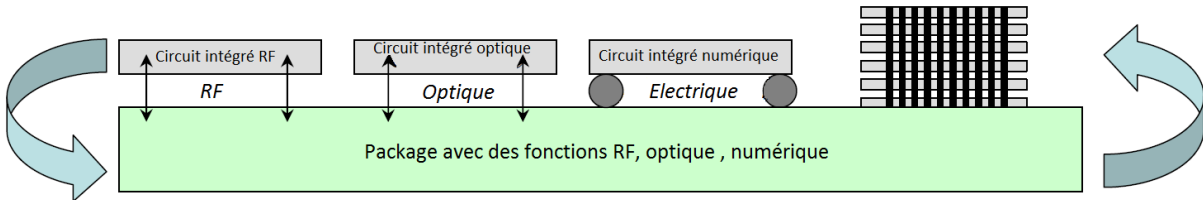


Figure I.9 – Exemple de System on Package [I\_5]

Chaque technologie dispose de points forts et de points faibles. La Figure I.10 compare les différentes technologies citées précédemment.

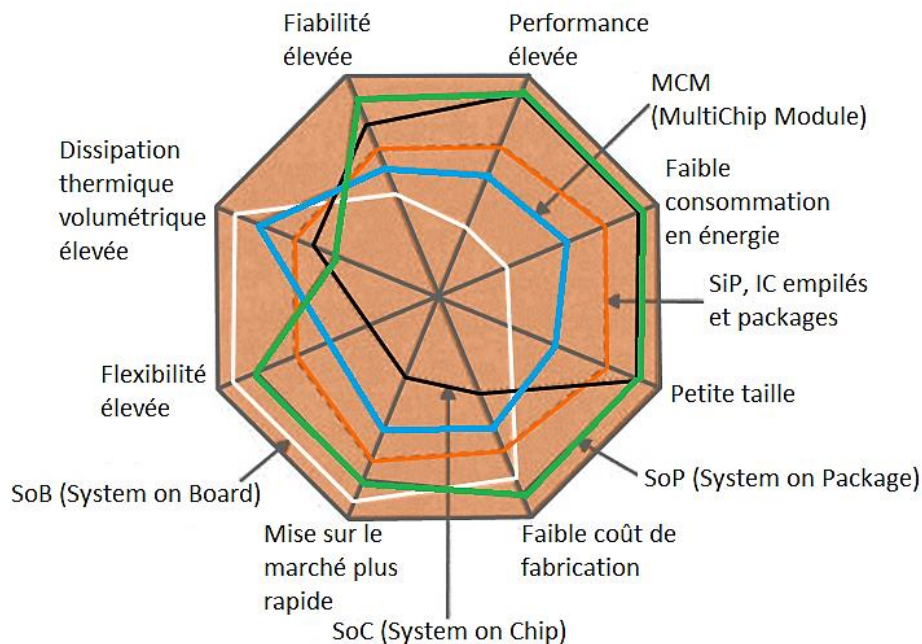


Figure I.10 – Comparaison des technologies de packaging [I\_7]

### I.3.6. Package on Package (PoP)

Une des dernières innovations est le Package on Package qui est un procédé d'assemblage consistant à combiner verticalement plusieurs modules packagés. Ainsi deux ou plusieurs modules sont empilés les uns au-dessus des autres, avec une interface standard pour

acheminer des **signaux entre eux**. Cela permet d'accéder à une densité plus élevée de composants. L'avantage le plus évident est un gain de place sur la carte mère. Le PoP utilise beaucoup moins d'espace sur carte, presque aussi peu que le SiP. Électriquement, le PoP offre des avantages en minimisant la longueur de piste entre les différentes parties inter-opérant, comme un contrôleur et une mémoire. Cela donne une meilleure performance électrique des appareils, dont le rendement des interconnexions entre les circuits, la rapidité du signal et la réduction du bruit et de la diaphonie. Les températures de jonctions sont plus faibles en comparaison à celles des SiP. Le principal avantage en termes de rendements du PoP est que le dispositif de mémoire est découplé du dispositif logique et par conséquent, ces deux dispositifs peuvent être optimisés et testés séparément. Du point de vue du rendement de fabrication, seuls les composants testés bons sont assemblés, ce qui est très favorable en termes de coût de fabrication. La Figure I.11 décrit un exemple de PoP conçu par Toshiba®.

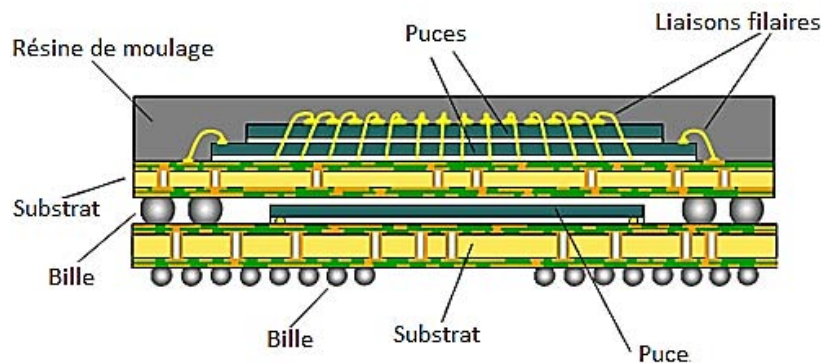


Figure I.11 – Exemple de PoP [I\_8]

Ces évolutions des assemblages électroniques ont été possibles grâce à l'utilisation des techniques d'interconnexion.

## I.4. Techniques d'interconnexion

Les premières interconnexions électriques, réalisées au niveau 1 du packaging, peuvent être regroupées en 4 grandes catégories : le câblage filaire, le TAB (Tape Automated Bonding), le flip chip et les vias traversants.

### I.4.1. Câblage filaire ou assemblage par fils

La technique de câblage filaire (wire bonding) est la plus ancienne et la plus répandue dans l'industrie de la microélectronique pour réaliser l'interconnexion d'un circuit en « puce » avec



son environnement (boîtier, circuit imprimé, circuit hybride...). Deux techniques de base sont utilisées : le Wedge bonding et le Ball bonding.

### I.4.1.1. Le Wedge bonding

Un fil, le plus souvent en aluminium, est amené par l'outil (appelé stylet ou aiguille), puis appliqué sur le plot à souder (Figure I.12). La liaison entre le fil et la zone à connecter s'effectue en combinant pression et vibration ultrasonore. Il s'agit d'une soudure « à froid ». C'est l'énergie ultrasonique qui entraîne un ramollissement du fil semblable à l'effet obtenu par une élévation de température. Le fil est ensuite guidé par l'outil sur le second plot et une soudure est effectuée.

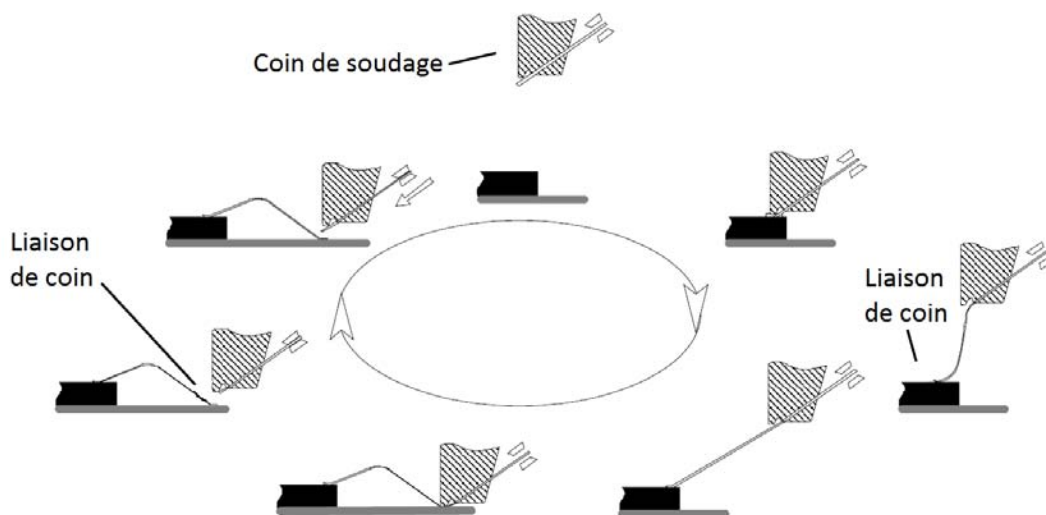


Figure I.12 – Séquences du Wedge bonding [I\_9]

La pression de l'outil sur la plage à souder est généralement comprise entre 20 et 30 g et la vibration émise de l'ordre de 50 à 70 kHz. Les fils peuvent avoir des diamètres compris entre 18 et 50  $\mu\text{m}$ . Cette technique permet aussi le câblage de rubans pouvant dépasser 100  $\mu\text{m}$  de **largeur pour des applications nécessitant d'avantage de courant. La soudure étant effectuée à froid, la formation de composés intermétalliques est évitée.**

### I.4.1.2. Le Ball bonding

Un fil d'or passe à travers un capillaire chauffé (100 à 200° C). La boule formée à la sortie du capillaire (par la décharge d'un condensateur ou par une flamme d'hydrogène) est soudée sur un plot de sortie du circuit. Le capillaire est ensuite déplacé pour effectuer la deuxième soudure. Le fil est arraché par le capillaire, une nouvelle boule est reformée et une nouvelle connexion peut être effectuée. Ce procédé est décrit par la Figure I.13.



La thermocompression fut une des premières applications du ball bonding. Ce procédé permet d'obtenir une jonction par diffusion, avec apport de pression et de chaleur. La pression du capillaire peut varier suivant les caractéristiques de la machine et du type de fil (de 20 à 80 g pour la première soudure et de 100 à 200 g pour la seconde), le temps de pression pouvant varier de 0,1 à 5 s. Le maintien du substrat à une température relativement élevée (de 200 à 400° C) est le principal inconvénient de cette technique (**dégradation des caractéristiques des composants réalisés sur le substrat et apparition d'intermétalliques à l'interface aluminium/or**). La deuxième technique appelée câblage thermo-sonique, a remplacé la thermocompression dans la plupart des applications. Comme précédemment, on réalise une diffusion métal/métal sous pression mais à température peu élevée (substrat maintenu entre 100 et 150° C). C'est l'énergie ultrasonore appliquée à l'interface aluminium/boule d'or qui permet d'obtenir une bonne jonction. Les risques de formation de peste pourpre ( $\text{AuAl}_2$ ) à l'interface entre le plot de sortie et le fil et de dégradation des composants se trouvent donc minimisés.

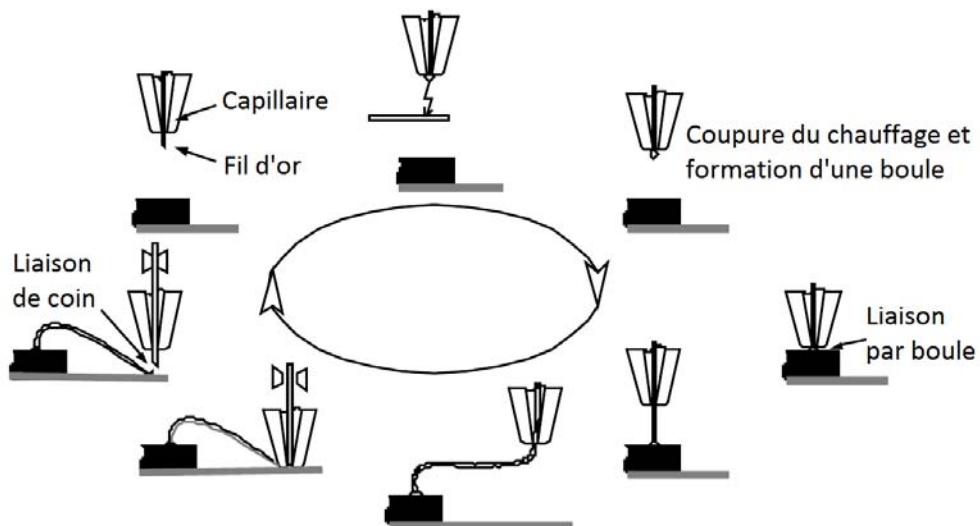


Figure I.13 – Séquences du Ball bonding [I\_9]

### I.4.2. Technologie Tape Automated Bonding (TAB)

Cette technologie utilise un film multicouche de connexion (généralement en kapton ou en polyamide) qui réalise l'adaptation d'impédance en circuits coplanaires. Ce procédé associé à un boîtier permet de réaliser des modules actifs à faible coût. Le circuit intégré à connecter doit recevoir un traitement adapté à cette technologie. Un dépôt de TiW (barrière de diffusion) puis d'or (environ 20  $\mu\text{m}$ ) est effectué sur le plot d'aluminium (Figure I.14).

Le circuit intégré est assemblé au centre du film de connexion (communément appelé l'araignée) par une opération de câblage dit interne ou d'ILB (Inner Lead Bonding). La puce

est ensuite testée dans un connecteur de test. L'ensemble (puce araignée) peut être monté par la suite sur une carte comme s'il s'agissait d'un boîtier conventionnel ou monté à l'intérieur d'un circuit hybride. Cette dernière étape est appelée OLB (Outer Lead bonding). La Figure I.15 illustre ces deux étapes.

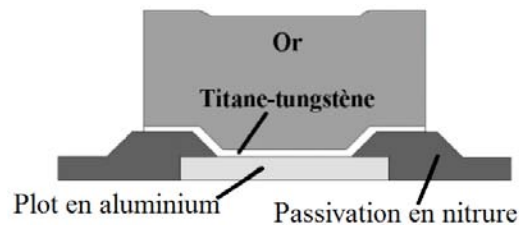


Figure I.14 – Coupe d'un plot côté composant pour le montage d'un TAB [I\_10]

La soudure des plots internes (ILB) est réalisée par une technique de micro-câblage (thermoc compression entre 300 et 600° C). Quand toutes les pattes de l'araignée sont soudées sur la puce en même temps, on parle de soudure collective. Ce procédé était très utilisé, mais l'évolution des IC en complexité et surtout en taille a fait reculer cette technique au profit de la soudure individuelle. La diminution de l'épaisseur d'or sur les plots (contrainte liée au procédé de photogravure) résultant du rapprochement des plots (lié au nombre de sorties) est un des paramètres qui limite également l'utilisation de la soudure collective. Les machines de micro-câblage compatibles avec la soudure TAB point par point sont maintenant plus rapides et plus fiables, ce système de soudure unitaire permettant par ailleurs de mieux contrôler les conditions nécessaires à l'obtention d'un joint correct (pression et température).

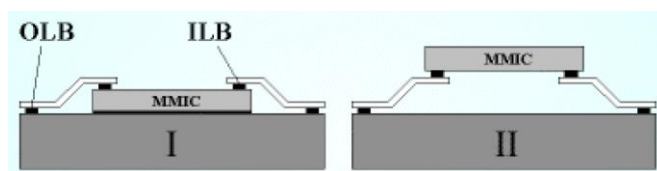


Figure I.15 – Principe simplifié du montage TAB : I, montage TAB classique et II, montage flip-TAB [I\_10]

La soudure des plots externes (OLB) s'apparente au montage des boîtiers conventionnels. Il s'agit en général de brasage collectif au SAC (SnAgCu). L'épaisseur importante de cet alliage (20 à 30  $\mu\text{m}$ ) présent à l'interface à relier, permet, lors du brasage, d'éviter les problèmes liés à une mauvaise planéité du support.

### I.4.3. Flip chip

Le flip chip est une technologie d'assemblage de composants électroniques dont le principe est de confiner les connexions sous l'élément à assembler. Une telle configuration offre ainsi

un encombrement minimum, ainsi que la possibilité d'aboutir à de fortes densités d'interconnexions. Cependant cette configuration condamne également les connexions à d'extrêmes sollicitations thermomécaniques dans le cas d'assemblages hétérogènes. Par définition, le flip chip englobe toutes les technologies de report pour lesquelles la puce, qui possède tous ses contacts sur une seule face, est retournée pour être assemblée au substrat d'accueil. Il est possible de les classer en trois grandes familles : la brasure de microbilles, la thermocompression et le collage.

#### I.4.3.1. Brasure ou technologie C4

Cette technologie introduite par IBM où elle est appelée Control Collapse Chip Connection (C4) résulte d'un choix de construction de packaging où les interconnexions sont sous forme matricielle tout au long de la chaîne d'interconnexion. Les circuits intégrés reçoivent une préparation spécifique des plots de sortie sous forme de bille d'alliage fusible qui réalisera la liaison électrique et mécanique avec le niveau de packaging suivant. Le moteur du brasage est la diffusion ou migration atomique de part et d'autre des bords à assembler (substrat) obtenue par action calorique et/ou mécanique. Contrairement au soudage, il n'y a pas fusion des bords assemblés. Le matériau d'apport (la brasure) est utilisé pour connecter électriquement et mécaniquement les éléments à assembler.

Les entrées du circuit CMOS sont des plots d'aluminium ou de cuivre, qui sont recouverts d'une couche de passivation généralement en oxyde de silicium pour les protéger et éviter les courts-circuits. La passivation est ouverte au-dessus des plots, afin de déposer une métallurgie appelée Under Bump Metallization (UBM) dont le rôle est double. L'UBM sert à la fois à assurer une bonne conduction électrique entre la bille et la terminaison du circuit, et à définir une zone dite de mouillage sur laquelle sera formée la bille comme schématisé par la Figure I.16. La bille fut traditionnellement en SnPb, puis en SnAgCu (sans flux) ou en indium pour les applications à forte valeur ajoutée. Elle peut être réalisée par voie chimique, par électrolyse, par sérigraphie ou par dépôt sous vide suivi d'une fusion en microbilles de petites tailles. Elles seront ensuite refondues en phase vapeur pour réaliser le brasage.

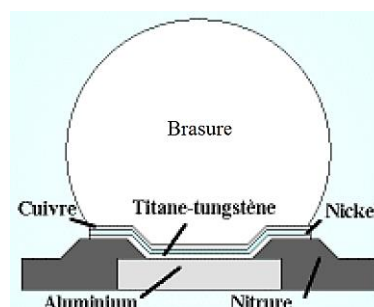


Figure I.16 – Coupe d'une microbille pour le montage flip chip [I\_10]

On distingue trois parties essentielles dans la constitution de l'UBM :

- la **couche d'accroche** mécanique de la bille de connexion sur le substrat : elle assure un bon contact électrique avec le plot d'aluminium ;
- la **barrière de diffusion** : pour éviter toute migration d'impureté ionique issue de la bille dans le CMOS lors de l'élévation de la température durant le brasage, on place cette barrière entre la bille et le plot de contact ;
- la **couche de mouillage** qui assure une bonne mouillabilité de la brasure sur la surface du substrat et qui forme des intermétalliques assurant la jonction mécanique.

Les puces préparées sont ensuite montées retournées (face active vers le bas) et fixées **directement sur les pistes de connexion du support**. L'assemblage se fait ensuite par refusion collective des billes (Figure I.17). Cette technique permet une meilleure répartition des plots **sur la surface de la puce**, ce qui a pour effet d'autoriser la réalisation de centaines voire de milliers de connexions sous une même puce. Pour **fiabiliser l'ensemble et pour réduire les problèmes liés à la dilatation thermique différentielle** des assemblages hétérogènes, de la résine (underfill) peut être injectée entre la puce et le substrat.

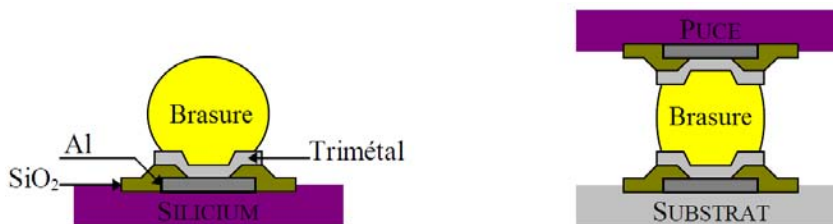


Figure I.17 – Technologie C4: Billes de brasage [I\_11]

Un facteur important à comprendre dans le processus de brasage est le mouillage : il est **assuré par la tension de surface exercée par la brasure sur la surface de la plage d'accueil** (tension superficielle). La tension superficielle est l'attraction que les molécules en surface d'une goutte de liquide ont les unes pour les autres. Si cette attraction est plus grande que celle du matériau que le liquide touche, celui-ci ne s'étendra pas, mais restera sous la forme de goutte. La gravité travaille contre la tension superficielle et essaye d'aplatir la goutte de liquide. **Si l'attraction mutuelle des molécules du liquide est plus grande que l'ensemble des forces de la pesanteur et l'attraction de la surface**, la goutte de liquide demeurera plus ou **moins ronde ; dans le cas inverse la goutte s'aplatit et s'étale** sur la surface. Pour garantir une **tension de surface plus grande que la somme de celle exercée par la plage d'accueil et par la gravité**, et donc avec laquelle l'étalement de la brasure est minimal, on utilise un flux, **constitué essentiellement d'une matière organique** qui compose la moitié de la brasure. Le flux comporte aussi des agents qui limitent l'oxydation de la surface et de l'alliage.

La principale caractéristique de ce mode d'assemblage est qu'il permet un plus grand nombre de connexions, pour une puce de taille donnée, que les sorties périphériques traditionnelles. Elle permet d'augmenter la densité d'interconnexion, tout en réduisant la distance de connexion et ainsi le temps de réponse du système. Elle présente également une très bonne conductivité thermique et électrique.

Cependant quelques inconvénients sont à noter : l'inspection et la réparation des connexions défectueuses sont rendues impossibles par la configuration flip chip.

### I.4.3.2. Thermocompression

Dans le procédé de flip chip par thermocompression, les billes de la puce sont reliées aux plots sur le substrat par la force et la chaleur appliquées simultanément (Figure I.18). Le procédé nécessite des billes en or sur la puce ou sur le substrat et une surface facilitant l'accrochage des billes (par exemple l'or, l'aluminium). La température de collage est généralement élevée, environ 300° C pour de l'or, pour ramollir la matière et accroître le processus de liaison par diffusion. La force de liaison peut aller jusqu'à 1 N pour une bille de 80 µm de diamètre. En raison de la force de compression et de la température élevées requises, le procédé est limité à des substrats rigides tels que l'alumine ou du silicium. En outre, les supports doivent avoir une bonne planéité. Un dispositif de grande précision pour l'alignement et le parallélisme est nécessaire. Afin d'éviter le pré-endommagement du matériau semi-conducteur, la force de liaison doit être appliquée progressivement.

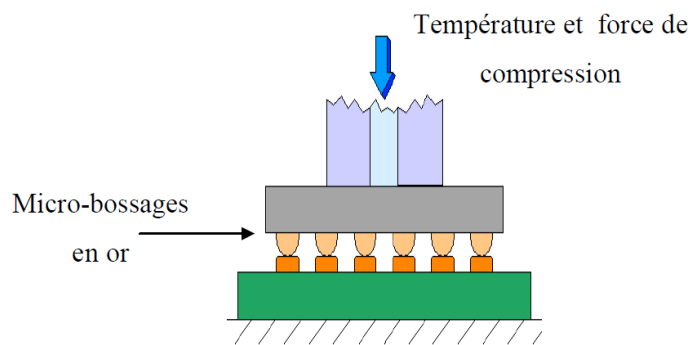


Figure I.18 – Principe de la thermocompression [I\_4]

### I.4.3.3. Collage

L'assemblage en électronique utilise trois principales familles d'adhésifs (Figure I.19), définies couramment par leurs acronymes anglo-saxons :

- ICA (Isotropically Conductive Adhesives) : ils comportent des particules métalliques (typiquement 50 µm). Après polymérisation, le joint adhésif est conducteur électrique

dans toutes les directions. On peut donc déposer un tel adhésif sur les plots d'un support d'interconnexion (par seringue ou sérigraphie), placer le composant en évitant que les différents dépôts se mettent en court-circuit, puis polymériser. Cependant, il n'est pas aisé de réaliser des connexions électriques à des pas inférieurs à 1 mm.

- **ACA (Anisotropically Conductive Adhesives)** : l'idée est de disposer d'une conduction électrique dans une seule direction au sein du joint adhésif. Dans ce but, des billes métalliques sont dispersées dans le polymère adhésif, à un taux tel qu'elles n'offrent pas de chemin conducteur continu. Après placement du composant, la connexion électrique est réalisée par l'intermédiaire des seules billes qui touchent les deux parties à connecter. L'avantage réside dans la possibilité de déposer l'adhésif globalement, sans se soucier du pas des conducteurs à interconnecter : le pas minimal réalisable ne dépend que du diamètre des billes, mais il est impératif que la planéité des objets à assembler soit suffisamment bonne.
- **NCA (Non Conductive Adhesives)** : le polymère adhésif ne contient pas de charge conductrice. Il sert seulement à maintenir les pièces à assembler pressées l'une contre l'autre. Si les plots de ces pièces ont été dotés de bossages ou de surfaces pointues, ce sont ces plots ou ces pointes qui assurent la connexion électrique.

Les matériaux adhésifs utilisés sont de diverses natures : il peut s'agir entre autres d'époxydes ou de silicones (pour lesquels le terme de polycondensation est plus approprié que celui de polymérisation).

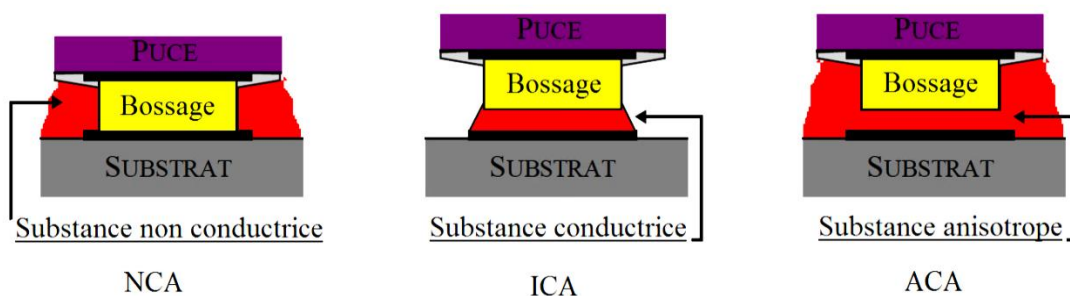


Figure I.19 – Montages flip chip utilisant des substances adhésives [I\_11]

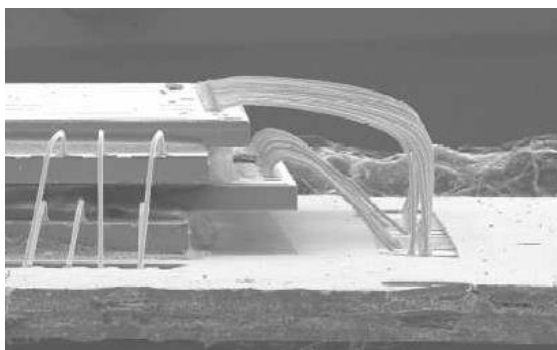
L'utilisation de substances adhésives offre un certain nombre d'avantages par rapport aux brasures conventionnelles :

- **Température d'hybridation plus faible** : il suffit généralement de chauffer au-delà de la température de polymérisation pour réaliser le maintien mécanique.
- **Procédé à bas coût** car il y a moins d'étapes de fabrication.
- **Procédé moins agressif pour l'environnement** (sans plomb, sans flux, sans solvant).

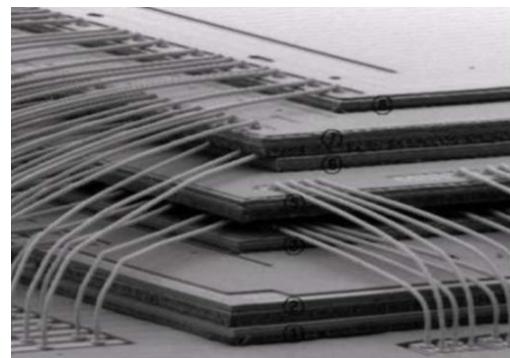
Cependant le principal inconvénient lié à l'utilisation des substances adhésives est le dégazage induit par la présence de polymères qui peut endommager certaines parties du composant. Les substances adhésives doivent donc généralement subir au préalable un dégazage dans une enceinte sous vide pendant plusieurs heures. De plus, une cause importante d'endommagement est leur détérioration à l'humidité. La diffusion d'eau à travers les polymères due à leur porosité intrinsèque diminue leur pouvoir d'adhésion et leur tenue mécanique. De plus, les assemblages électroniques réalisés par collage sont en général très difficiles à réparer ; ils sont surtout réservés aux assemblages qui seront jetés s'ils se révèlent défectueux. Enfin, la fiabilité d'une connexion par collage est rarement à la hauteur de la fiabilité de la même connexion réalisée par soudage ou brasage. Cela est particulièrement vrai dans les cas où les assemblages sont susceptibles de subir des chocs et des vibrations.

### I.4.4. Vias traversants (TSV)

Les vias traversants créés dans les substrats en silicium (Through Silicon Via, TSV) sont parmi les moyens d'interconnexion 3D (SiP, SoP et 3D IC) les plus en vogue et permettent de connecter électriquement dans la direction verticale des puces superposées. Deux exemples d'empilement 3D de plusieurs puces par câblage filaire sont donnés Figure I.20.



a) 4 puces (Intel)



b) 5 puces (Amkor)

Figure I.20 – Empilement 3D par câblage filaire [I\_12, 13]

Cette approche devient géométriquement complexe à partir de quelques puces. En effet, il est nécessaire de décaler ou de tourner de 90° les puces pour que la machine de câblage puisse prendre le contact situé en périphérie. La Figure I.21 montre par contre une vue en coupe de deux assemblages de plusieurs puces amincies interconnectées entre elles et sur un substrat de silicium par la technologie des vias traversants. Cette approche courante pour la création des interconnexions dans les trois dimensions de l'espace, est issue des technologies Wafer Level Packaging. Elle consiste à réaliser des connexions électriques traversant le silicium,



dans des tranches amincies à environ 50 µm d'épaisseur. Appelées vias 3D, ces connexions sont obtenues en gravant un trou puis en l'isolant électriquement grâce à une fine couche de passivation et en réalisant sa métallisation à l'aide d'un remplissage électrolytique de cuivre généralement.

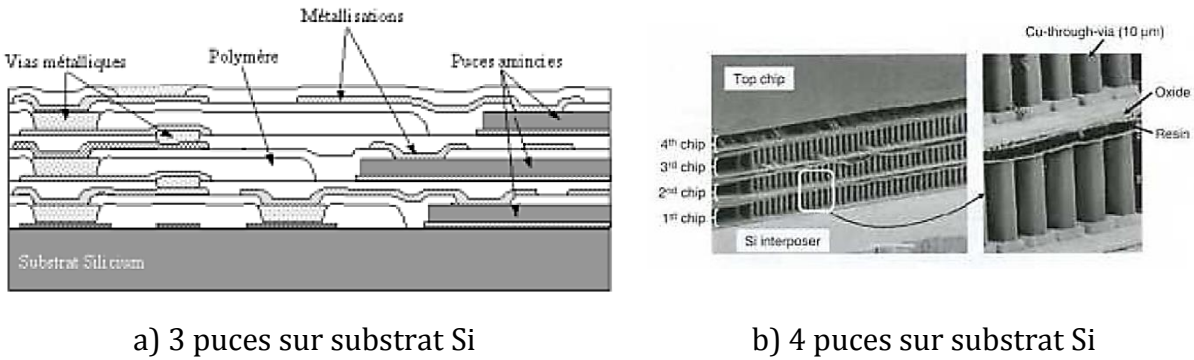


Figure I.21 – Coupe de deux empilements verticaux de puces [I\_14]

Deux approches de TSV se côtoient actuellement suivant que l'on traverse directement le composant, ou que l'on se serve d'un élément silicium intermédiaire appelé « interposer » (Figure I.22).

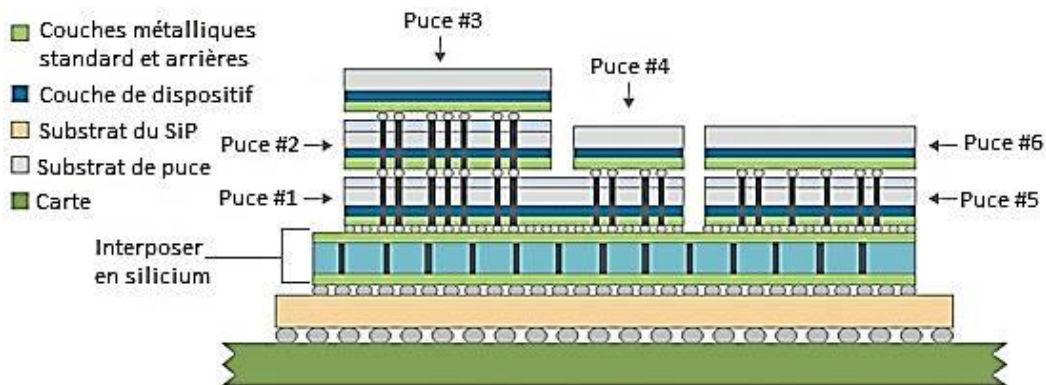


Figure I.22 – 3D IC avec une couche interposer de silicium, des TSVs et 6 puces [I\_15]

## I.5. Conclusion

La concurrence et la demande sans cesse croissante du public ont imposé une évolution des composants électroniques. De nos jours, les dispositifs électroniques sont de plus en plus petits, légers et performants. Pour cela, la miniaturisation, l'augmentation des performances et la fiabilité sont les leitmotifs de l'industrie microélectronique. Les progrès récemment réalisés dans la maîtrise des procédés de fabrication, dans la qualité des matériaux utilisés ou encore dans le contrôle de leurs caractéristiques physiques ont entraîné une évolution



constante de l'architecture interne des composants électroniques. Ces composants ont suivi deux tendances principales qui s'entremêlent: le « More Moore » et le « More than Moore ». La première tendance consiste à miniaturiser les composants et la seconde consiste à diversifier leurs fonctions. L'association des deux tendances permet l'apparition de nouvelles innovations telles que : le SoC, le CoB, le MCM, qui sont des intégrations horizontales et le SiP, le SoP et le PoP qui sont des intégrations verticales ou 3D. Ces technologies ont été soutenues grâce notamment à l'évolution des techniques d'interconnexion telles que le câblage filaire, la technologie TAB, le flip chip et les vias traversants.

La technologie flip chip est de plus en plus utilisée notamment dans les dispositifs de détection infrarouge (IR). L'assemblage flip chip pour détecteurs infrarouge matriciels peut être assimilé à un assemblage de type 3D-SiP. Il est donc représentatif des configurations électroniques 3D en termes d'architecture, de technologie et de comportement thermomécanique. Ce sera donc le véhicule test de notre étude.

## I.6. Références bibliographiques

- [I\_1] G. E. Moore, "Cramming More Components onto Integrated Circuits," *Electronics*, vol. 38, no. 8, pp. 114–117, 1965.
- [I\_2] "Assembly and Packaging," *International Technology Roadmap for Semiconductors*, 2007. [Online]. Available: [http://www.itrs.net/Links/2007ITRS/2007\\_Chapters/2007\\_Assembly.pdf](http://www.itrs.net/Links/2007ITRS/2007_Chapters/2007_Assembly.pdf). [Accessed: 25-Jul-2014].
- [I\_3] X. Saint Martin, "Packaging des circuits intégrés," *Tech. l'Ingénieur Cart. Electron. Technol. Concept.*, vol. base docum, no. ref. article : e3400, 2013.
- [I\_4] C. Davoine, "Densification des connexions 'Flip-Chip' grande surface: Analyse de l'assemblage d'un détecteur infrarouge et Mise au point d'une technologie innovante," Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2006.
- [I\_5] Q. Y. Tong and U. Gösele, *SemiConductor Wafer Bonding: Science and Technology*. Wiley, 1998.
- [I\_6] "Chip-on-Board (COB)," *Hibikii*. [Online]. Available: <http://www.hibikii.com/knowledge/chip-on-board/>. [Accessed: 18-Apr-2013].
- [I\_7] R. R. Tummala and M. Swaminathan, *Introduction to System-on-package (SOP): Miniaturization of the Entire System*. McGraw-Hill, 2008.
- [I\_8] "PoP Packages," *Toshiba*. [Online]. Available: <http://www.semicon.toshiba.com.tw/product/asic/package/package1/pop.html>. [Accessed: 04-Aug-2014].

- [I\_9] **Members of the Europractice MCM Service, “Multichip Module Design Handbook,”** *EUROPRACTICE MCM SERVICE*. [Online]. Available: <http://www.fnir.nu/upload/Core-competence/HDI/MCM-Design-Handbook-ed3.pdf>. [Accessed: 25-Jul-2014].
- [I\_10] **C. Vasseur, “Les méthodes d’assemblages,” 2005.** [Online]. Available: <http://www.esiee.fr/~vasseurc/assemblage.pdf>. [Accessed: 25-Jul-2014].
- [I\_11] **SYSTEM PLUS S. A., “Interconnexion puce-boitier flip chip,” 1997.** [Online]. Available: <http://www.systemplus.fr/documents/97intercoflipchip.pdf>. [Accessed: 10-Oct-2012].
- [I\_12] **“Stacked CSP (LFBGA, TFBGA, SCSP),” Amkor Technology.** [Online]. Available: [www.amkor.com](http://www.amkor.com). [Accessed: 04-Dec-2007].
- [I\_13] **S. Bhopte, D. Agonafer, R. Schmidt, and B. Sammakia, “Optimization of Data Center Room Layout to Minimize Rack Inlet Air Temperature,” in *InterPACK-05 Conference*, 2005.**
- [I\_14] **M. Umemoto, K. Tanida, Y. Nemoto, and M. Hoshino, “High performance vertical connection for high-density 3D chip stacking package,” in *Electronic Components and Technology Conference ECTC*, 2004, pp. 616–623.**
- [I\_15] **R. Goering, “New Silicon Realization Design Methodology Boosts 3D ICs With TSVs,” 2011.** [Online]. Available: <http://www.cadence.com/Community/blogs/ii/archive/2011/01/31/silicon-realization-design-methodology-boosts-3d-ics-with-tsvs.aspx>. [Accessed: 26-Sep-2014].

## Chapitre II

# Problématique et état de l'art

### Sommaire

---

<b>II.1. Introduction.....</b>	<b>24</b>
<b>II.2. Description de la matrice de détection IR.....</b>	<b>24</b>
II.2.1. Généralités sur les matrices de détecteurs IR .....	24
II.2.2. Principe de fonctionnement de la matrice de photo-détecteurs.....	26
II.2.3. Procédé d'assemblage.....	31
<b>II.3. Modes de défaillances de la technologie flip chip .....</b>	<b>36</b>
II.3.1. Origines chimiques.....	36
II.3.2. Origines électriques .....	36
II.3.3. Origines thermodynamiques.....	38
II.3.4. Origines thermomécaniques .....	39
<b>II.4. Problématique .....</b>	<b>41</b>
<b>II.5. Etat de l'art sur la modélisation numérique d'un assemblage flip chip .....</b>	<b>42</b>
II.5.1. Méthode analytique .....	42
II.5.2. Modélisation 2D .....	44
II.5.3. Modélisation 3D .....	45
II.5.4. Autres modélisations.....	45
<b>II.6. Solution proposée.....</b>	<b>48</b>
<b>II.7. Conclusion .....</b>	<b>49</b>
<b>II.8. Références bibliographiques.....</b>	<b>49</b>

---

## II.1. Introduction

L'évolution de l'électronique a permis l'invention de l'appareil photo et de la caméra numériques qui ont pour principe de former des images à partir de la lumière grâce à des rétines artificielles.

Une image matricielle est constituée d'une matrice de points colorés c'est-à-dire un tableau **dans lequel chaque case possède une couleur ou un niveau d'intensité de lumière qui lui est propre** et qui est considérée comme un point. Il s'agit donc d'une juxtaposition de points de couleurs formant, dans leur ensemble, une image. Cette méthode est principalement utilisée dans les domaines de l'imagerie numérique (télévision, infographie, informatique, photographie numérique, etc.) afin de marquer l'opposition de ce concept avec celui des images dites vectorielles. Dans ces domaines, les points de couleurs les constituant s'appellent des pixels (pour « picture element », soit littéralement : « élément d'image »).

**Un autre exemple est l'imageur matriciel infrarouge.** En effet, les pixels de détection sont répartis sur toute la face active du circuit de détection, et chacun peut être individuellement connecté à un circuit électronique de traitement de données. La technologie flip chip permettant **l'augmentation des interconnexions sur une puce donnée est bien adaptée à la fabrication d'imageurs matriciels.** Le report collectif par brasure de billes fusibles permet de connecter plusieurs centaines de milliers de pixels par centimètre carré en une seule étape.

**Dans ce chapitre, la matrice de détecteurs infrarouge (IR) ainsi que le procédé d'assemblage flip chip** seront décrits dans un premier temps. Dans un second temps, les modes de défaillances de la technologie flip chip, la problématique principale de l'étude associée et l'état de l'art dans ce domaine seront présentés. En dernier lieu, la solution proposée sera mise en avant.

## II.2. Description de la matrice de détection IR

### II.2.1. Généralités sur les matrices de détecteurs IR

Les détecteurs IR ont été développés dans la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle, **tout d'abord** dans un but militaire avec des applications dans la vision de nuit, la détection de véhicules, le guidage ou la détection des systèmes (missiles..), etc. Cependant d'autres applications ont été développées depuis dans le civil, pour le contrôle de la pollution, la sécurité routière, l'imagerie médicale, la spectroscopie IR ou encore la détection de foyers d'incendie.

Un détecteur est un dispositif technique (instrument, substance, matière) qui change d'état en présence de l'élément ou de la situation pour lequel il a été spécifiquement conçu.

**L'imageur IR est un système matriciel de détecteurs réagissant à un rayonnement IR. On distingue deux types d'imageurs IR (Figure II.1) :**

- les «thermo-détecteurs» : ces détecteurs réagissent à un changement de température par la variation d'une de leurs propriétés physiques : résistance électrique (bolomètre), thermoélectricité (thermocouple, thermopile), charge de surface-capacité (pyromètre), expansion thermique (cellule de Golay), etc ;
- les «photo-détecteurs» : ces détecteurs fonctionnent par absorption de photons IR et photo-génération de porteurs de charges (effet photovoltaïque ou photoconducteur) créant un excès de courant dans le matériau (photo-courant).

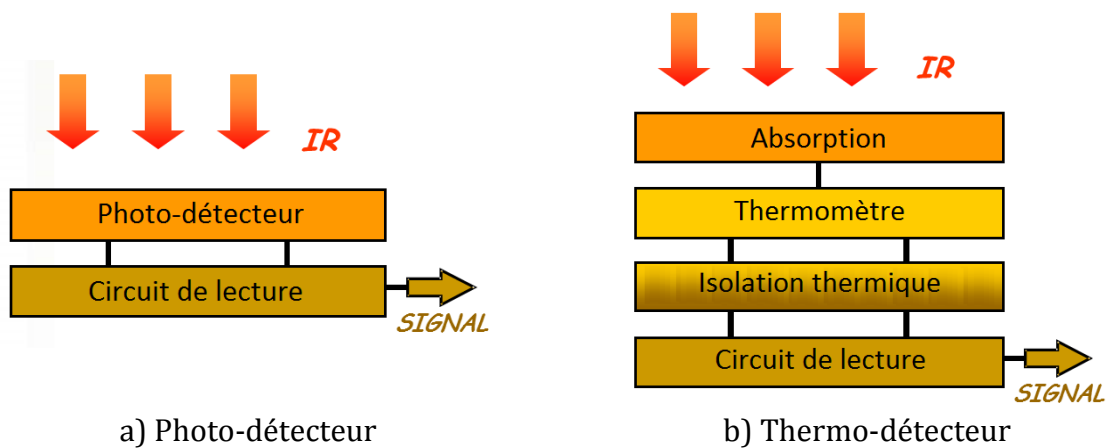


Figure II.1 – Différents types de matrice de détecteurs IR

Les photo-détecteurs ou détecteurs quantiques présentent un meilleur rendement et une plus grande précision que les détecteurs thermiques. Cependant ils ont l'inconvénient de nécessiter de fonctionner à très basse température. En effet, pour accroître la détectivité d'un détecteur quantique, il faut réduire le rayonnement propre du composant. Ceci est obtenu par le refroidissement du composant à des températures cryogéniques pour lesquelles le bruit d'émission propre devient négligeable. La matrice de détecteurs est donc insérée dans un cryostat (boîtier thermiquement isolé) et placé sur une table froide, elle-même refroidie par une machine à froid.

Notre présente étude se focalise donc sur ces assemblages de type flip chip de matrices de photo-détecteurs hybrides utilisées à basses températures (Figure II.2).

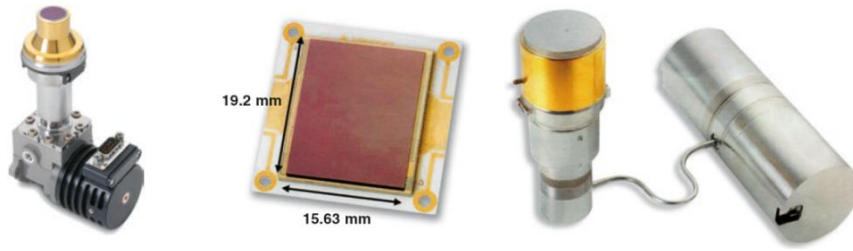


Figure II.2 – Infrared Focal Plane Arrays (IRFPA) [Sofradir®]

## II.2.2. Principe de fonctionnement de la matrice de photo-détecteurs

L'assemblage par technologie flip chip d'une matrice de photo-détecteurs hybrides est composé de trois éléments essentiels (Figure II.3) :

- le circuit de détection qui capte le rayonnement IR;
- le circuit de lecture qui assure le traitement de l'information;
- la zone d'interconnexion qui assure la liaison électrique et mécanique entre le circuit de détection et le circuit de lecture.

Cette architecture offre la possibilité de séparer les fonctions de détection, d'intégration et de lecture. Chacune d'elles peut être optimisée de manière indépendante.

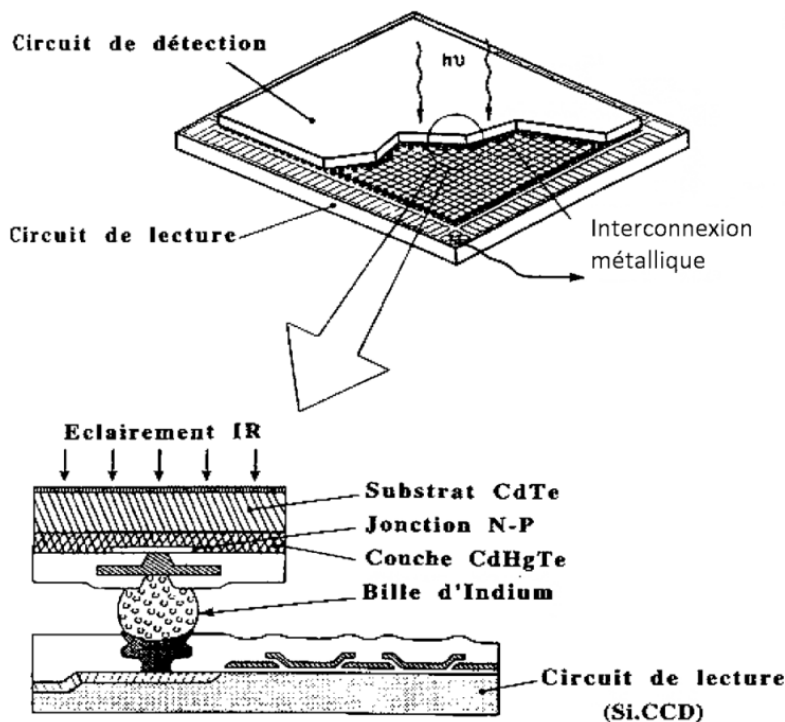


Figure II.3 – Architecture d'une matrice de détection [II\_1]

Le circuit de détection est un capteur photographique photosensible servant à convertir le rayonnement IR en un signal électrique analogique. L'effet photoélectrique permet aux photons incidents d'arracher des électrons à chaque élément actif (photosite) d'une matrice de détecteurs élémentaires constitués de photodiodes. Deux grandes familles de capteurs sont disponibles à savoir les CCD (Charge coupled devices) et les CMOS (Complementarity metal-oxide-semiconductor) en fonction de la nature du circuit de lecture.

Un CCD ou en français « dispositif à transfert de charge » (DTC) transforme les photons lumineux qu'il reçoit en paires électron-trou par effet photoélectrique dans le substrat semi-conducteur, puis collecte les électrons dans le puits de potentiel maintenu à chaque photosite. Le nombre d'électrons collectés est proportionnel à la quantité de lumière reçue.

Les capteurs CMOS sont composés de photodiodes, à l'instar des CCD, où chaque photosite possède son propre convertisseur analogique/numérique et amplificateur. Leur consommation électrique, beaucoup plus faible que celle des capteurs CCD, leur vitesse de lecture et leur plus faible coût de production sont les principales raisons de leur grande utilisation.

La matrice de détecteurs IR englobe deux fonctions principales qui permettent la détection **de longueur d'onde (détection quantique) et la conversion de la lumière en courant électrique** (effet photovoltaïque).

### II.2.2.1. Détection quantique

Tout corps porté à une température  $T$  émet un spectre de rayonnements IR. On peut ainsi **dire qu'un corps porté à 300 K rayonne à  $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$ , tandis qu'un corps à 600 K rayonne plutôt à  $\lambda \sim 5 \mu\text{m}$** . L'utilisation de détecteurs sensibles à ces émissions permet d'acquérir des "images thermiques" aussi bien la nuit que le jour ou dans une atmosphère enfumée. Le spectre IR est divisé en 4 grandes régions :

- le proche IR (PIR) pour la gamme 0,78-3  $\mu\text{m}$ ,
- le moyen IR (MIR) pour la gamme 3-5  $\mu\text{m}$ ,
- le lointain IR (LIR) pour la gamme 5-14  $\mu\text{m}$ ,
- **l'extrême IR pour  $\lambda > 14 \mu\text{m}$ .**

On subdivise également couramment l'infrarouge en SWIR (Short Wavelength Infrared), MWIR (Middle Wavelength Infrared) et LWIR (Large Wavelength Infrared), qui correspondent respectivement aux régions de transmission atmosphérique 0,8-3  $\mu\text{m}$ , 3-8  $\mu\text{m}$

et 8-14  $\mu\text{m}$  (Figure II.4). Les zones blanches sur cette figure représentent l'atténuation atmosphérique due aux gaz et à la vapeur d'eau.

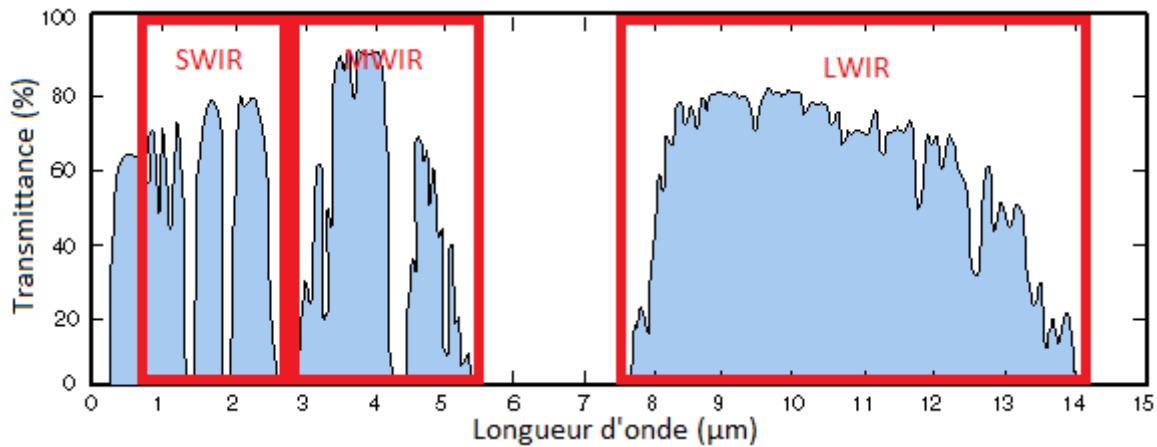


Figure II.4 – Schéma de la transmittance atmosphérique dans la zone IR du spectre électromagnétique [II\_2]

Les détecteurs quantiques sont ceux pour lesquels le signal mesuré correspond à la mesure de l'excitation directe des particules par les photons incidents : chaque photon transfère son énergie à un électron du matériau actif, à condition que cette énergie soit supérieure à l'énergie de transition requise pour exciter l'électron et lui faire franchir la bande interdite du semi-conducteur considéré. La longueur d'onde de coupure d'un matériau semi-conducteur est donnée par l'équation suivante [II\_1] :

$$\lambda_0 = \frac{hC}{E_g} = \frac{1,24}{E_g} = \frac{[10^{-6} \text{eV.m}]}{[\text{eV}]} = [\mu\text{m}] \quad (\text{II-1})$$

Avec :  $\lambda_0$  la longueur d'onde de coupure,  $E_g$  l'énergie de gap du semi-conducteur,  $h$  la constante de Planck,  $C$  la célérité de la lumière.

La Figure II.5 montre une cartographie de l'énergie de bande interdite de différents alliages en fonction de leur paramètre de maille. On peut remarquer que le  $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$  est un matériau intéressant pour la détection. Mais avant tout, cet alliage permet une ingénierie de bande par ajustement de sa composition. On voit qu'en fonction de sa composition  $x$ , l'alliage permet de couvrir une largeur de bande spectrale correspondant à des longueurs d'onde de coupure allant de 1 à 12  $\mu\text{m}$ .

Cet alliage, constitué du mélange de deux tellurures de type II-VI ( $\text{CdTe}$ ,  $\text{HgTe}$ ), permet d'obtenir un semi-conducteur dont le gap varie avec la fraction molaire  $x$  en cadmium :



- pour  $x \leq 0,14$ , les bandes de valence et de conduction se recouvrent, donnant naissance à un semi-métal à gap nul, c'est-à-dire n'ayant pas de propriétés semi-conductrices.
- pour  $x > 0,14$ , l'alliage est un semi-conducteur. Pour ces compositions, la largeur du gap et donc la longueur de coupure du matériau varient avec  $x$ .

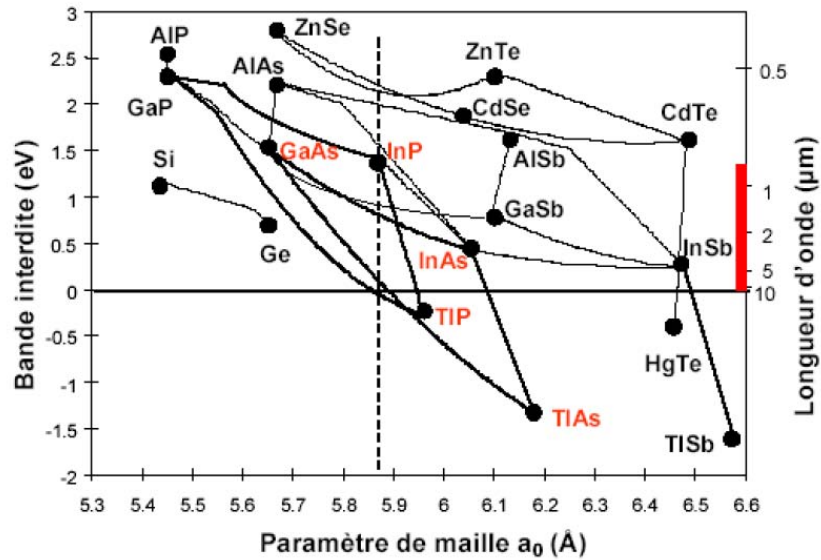


Figure II.5 – Cartographie de l'énergie de bande interdite de différents alliages en fonction de leur paramètre de maille [II\_3]

Un certain nombre d'équations a été développé pour modéliser empiriquement la dépendance de la largeur de gap en fonction de la composition  $x$  de l'alliage et de la température  $T$ . L'une d'entre elles, développée par Hansen et al. [II\_4] est donnée par l'expression :

$$E_g = -0,302 + 1,93x - 0,81x^2 + 0,832x^3 + 5,35(1-2x)10^{-4}T \quad (II-2)$$

Le CdHgTe étant un alliage synthétique, il est obtenu par épitaxie qui est une technique de croissance orientée, l'un par rapport à l'autre, de deux cristaux possédant un certain nombre d'éléments de symétrie communs dans leurs réseaux cristallins. Il existe 3 principales techniques : épitaxie par jet moléculaire (EJM), épitaxie en phase liquide (EPL) et épitaxie en phase vapeur (EPV) :

- La croissance par EJM s'effectue sous ultra vide. Les éléments à déposer, contenus dans des creusets à haute température, sont évaporés et vont se déposer par transport thermique sur la surface du substrat, plus froide mais de température quand même assez élevée pour permettre le déplacement et le réarrangement des atomes.

- Dans le cas de l'EPL, le substrat est mis en contact avec une phase liquide sursaturée dans l'élément voulu, qui se précipite et cristallise sur le substrat. Cette technique a l'avantage d'être rapide, mais elle est moins précise que les EPV.
- **Pour l'EPV, il faut réunir deux conditions : la première est que les atomes doivent trouver un lieu où ils peuvent perdre leur excédent d'énergie ; ces lieux s'appellent des sites de nucléation ; la seconde est que ces atomes trouvent un site dans le réseau pour les accueillir. A partir d'une phase mère gazeuse et par une réaction de condensation à l'équilibre ou hors équilibre, un cristal est formé. La réaction se produit dans un réacteur équipé d'un système d'arrivée et de recyclage des gaz.**

La croissance de cet alliage pourra donc se faire (en accord de maille sur un substrat CdTe ou) sur un substrat de  $Cd_{1-y}Zn_yTe$  parfaitement accordé en maille et orienté selon la direction cristallographique normale au plan (111).

### II.2.2.2. Effet photovoltaïque

L'effet photovoltaïque est obtenu par absorption des photons dans un matériau semi-conducteur qui génère alors des paires électrons-trous (excitation d'un électron de la bande de valence vers la bande de conduction) créant une tension ou un courant électrique. Plusieurs types de composants peuvent être créés à partir de ce principe, à savoir les photodiodes, phototransistors ou les photopiles.

Pour pouvoir collecter les paires électrons-trous formées, on forme une jonction PN au sein du CdHgTe. La diffusion des porteurs minoritaires générés par l'effet photovoltaïque provoque la circulation d'un courant inverse au sein de la diode, dit courant photovoltaïque. La photodiode se comporte donc comme un générateur de courant qui convertit l'énergie lumineuse incidente en courant électrique.

### II.2.2.3. Fonctionnement d'un détecteur

La Figure II.6 donne une vue en coupe d'un détecteur à base de CdHgTe. Le détecteur est placé au plan focal de la camera IR où sont concentrés les faisceaux lumineux. La lumière IR pénètre le détecteur en face arrière par le substrat CdZnTe qui est transparent au rayonnement IR, recouvert d'une couche antireflet pour minimiser les réflexions. Le rayonnement IR parvient ainsi jusqu'à la zone active du détecteur, dans la couche de CdHgTe. Les photons arrivent donc par le côté *P* de la jonction où ils sont absorbés. Les électrons créés sont entraînés vers le circuit de lecture en silicium via des interconnexions en billes d'indium. Le signal est ensuite amplifié, puis numérisé par un convertisseur analogique-numérique et enfin traité pour obtenir une image numérique sur un écran.

La Figure II.7 est une image IR de la cathédrale Notre Dame obtenue par une caméra IR 8  $\mu\text{m}$  (LIR). On observe les zones qui laissent passer la chaleur : les vitraux, et les zones qui laissent moins passer la chaleur : les murs.

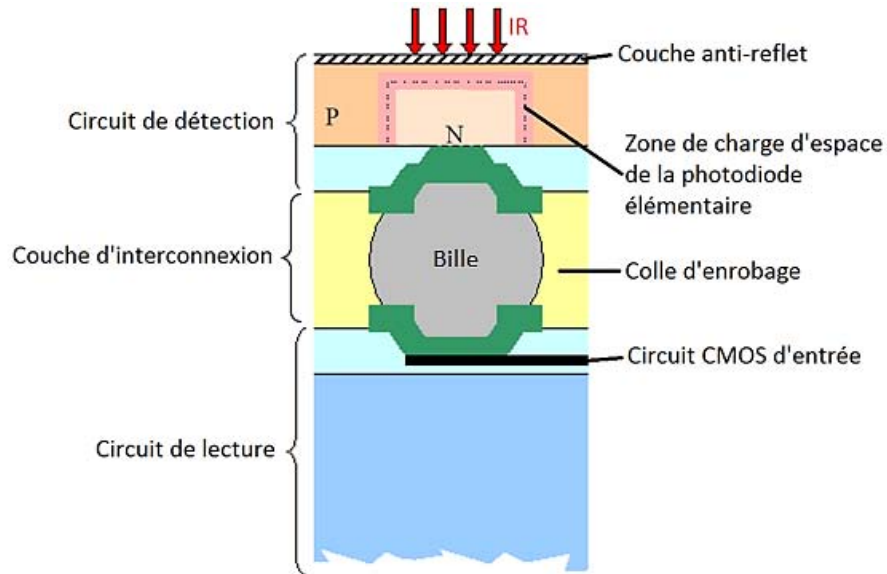


Figure II.6 – Section verticale d'un pixel photo-détecteur [II\_3]



Figure II.7 – Image de la cathédrale Notre Dame obtenue par une caméra IR 8  $\mu\text{m}$   
[Laboratoire Pierre Aigrain - UMR 8551]

### II.2.3. Procédé d'assemblage

La technologie d'assemblage développée au laboratoire LETI consiste tout d'abord à préparer les plots de contact sur le circuit de détection et à réaliser le billage indium sur le circuit de lecture de type CMOS. Puis vient l'étape d'assemblage en elle-même par brasure. Cette section décrit cet enchaînement d'étapes technologiques.

### II.2.3.1. Empilement technologique sur le circuit de détection

Après épitaxie du CdHgTe sur un substrat en CdZnTe ou CdTe, des carrés aux dimensions des futures matrices sont découpés à l'intérieur des macles de croissance du CdHgTe afin d'extraire le matériau monocristallin. Ces morceaux de matériaux bruts subissent une passivation afin d'éviter la sublimation du mercure lors de la montée en température. Le dopage P est créé par des lacunes de mercure dans le CdHgTe, tandis que le dopage N est réalisé localement par implantation ionique. Le matériau est soumis à une implantation localisée grâce à un procédé de photolithographie. Chaque zone implantée définit un pixel individuel de la matrice de détection. Des étapes de métallisation et passivation successives sont ensuite réalisées afin de reprendre le contact au-dessus de chaque jonction PN. L'empilement technologique côté circuit de détection avant report est décrit sur la Figure II.8.

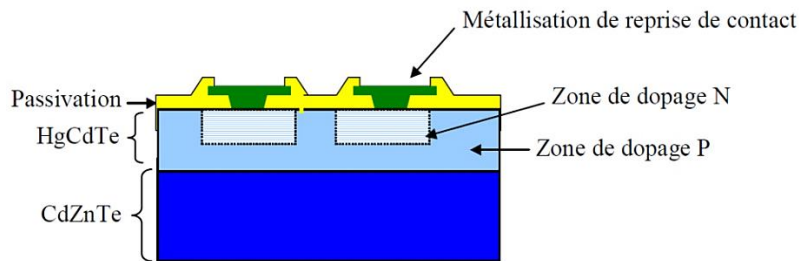


Figure II.8 – Composition du circuit de détection [II\_3]

### II.2.3.2. Formation de billes d'interconnexion sur le circuit de lecture

Le billage consiste à fabriquer sur le circuit de lecture le tapis de billes qui servira à la connexion des pixels. Il s'agit de réaliser plusieurs milliers de billes de brasure disposées de façon matricielle au-dessus de chaque plot de contact. Il peut se décomposer en trois étapes : la reprise de contact, la définition des « galettes d'indium », et la mise en forme [II\_5]. Elles sont illustrées par la Figure II.9.

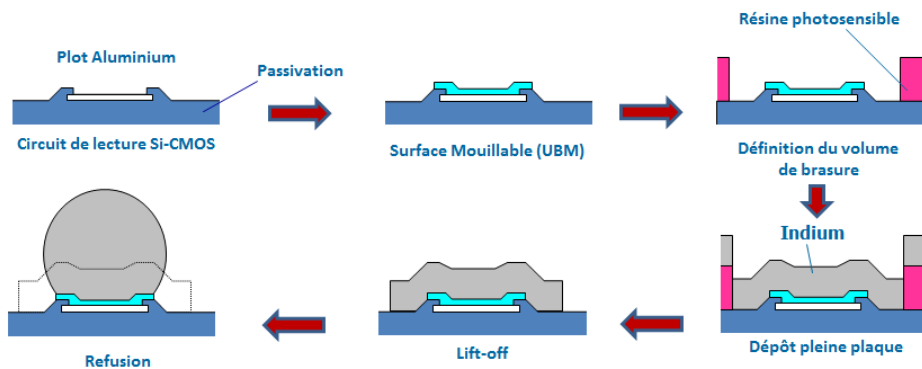


Figure II.9 – Etapes de micro billage sur circuit CMOS [II\_5]

### Reprise de contact

Il s'agit de nettoyer les terminaisons électriques (ou plots de contact) du circuit généralement en aluminium, d'éliminer les oxydes de surface, et de déposer l'UBM (under bump metallization).

### Définition des « galettes d'indium »

La technique utilisée de façon standard au laboratoire est le lift-off. On réalise tout d'abord un masque de résine épais par photolithographie standard afin de définir des ouvertures au-dessus des plots de contact du circuit de lecture. Une couche épaisse d'indium est ensuite déposée par évaporation sous vide sur toute la surface. L'indium vaporisé sous vide par chauffage se condense sur le substrat. Le lift-off consiste à éliminer la résine et le métal qui la superpose par dissolution dans un solvant de type acétone. A l'issue de cette étape, il ne reste alors plus que des « galettes d'indium » au-dessus de chaque plot de contact.

### Mise en forme

Le but est d'obtenir des éléments de connexion de hauteur uniforme pour assurer le contact de tous les éléments avec la partie supérieure lors de l'assemblage. En effet, les galettes d'indium obtenues par évaporation présentent généralement des surfaces non parfaitement planes. Grâce à une élévation de température au-delà du point de fusion de l'indium ( $156^{\circ}\text{C}$ ), le matériau en fusion se déforme de manière à réduire sa surface de contact avec le substrat sous l'action des tensions de surface. La bille a par conséquent la forme géométrique offrant le plus de contact avec l'air : la sphère.

Au sein du laboratoire IR du CEA-LETI, les différentes étapes de fabrication de matrices de détecteurs sont présentes depuis l'élaboration du matériau de détection jusqu'au test du composant hybridé. Une telle synergie a permis de réaliser une performance mondiale en 2002 dans le domaine des imageurs IR. Il s'agit de la mise au point d'une matrice de détection IR refroidie composée de  $1024 \times 1024$  billes d'indium au pas de  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$  (Figure II.10).

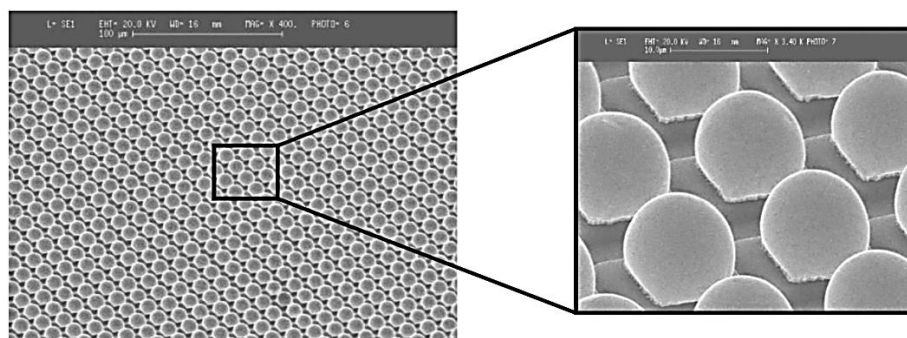


Figure II.10 – Matrice de  $1024 \times 1024$  billes d'indium au pas de  $15 \mu\text{m}$  [II\_6]

### II.2.3.3. Report

L'étape de report se décompose en quatre principales sous étapes : l'hybridation, l'enrobage et l'amincissement.

#### Hybridation

Elle se fait sur une machine de report dédiée à cette étape. Le circuit de lecture billé et le circuit de détection retourné (face avec plots de contact vers le bas) sont disposés respectivement sur une sole chauffante et sur une cassette de préhension. Un bras mécanique vient prendre le circuit de détection et le maintient au-dessus du circuit de lecture par aspiration. Un microscope optique à double tête est ensuite guidé entre les deux surfaces mises en regard (Figure II.11). Une caméra superpose les deux images et permet de positionner les plots de contact du circuit de détection au-dessus des billes d'indium du circuit de lecture grâce à des croix d'alignement disposées en périphérie de matrice. La tête du microscope se retire, et le bras descend verticalement en conservant l'alignement avec une précision inférieure au micromètre. Le circuit de détection est alors déposé sur la matrice de billes. Le bras coupe l'aspiration et se retire. L'ensemble est alors chauffé à la température de 195 °C pendant quelques minutes puis refroidi à l'air jusqu'à la température ambiante.

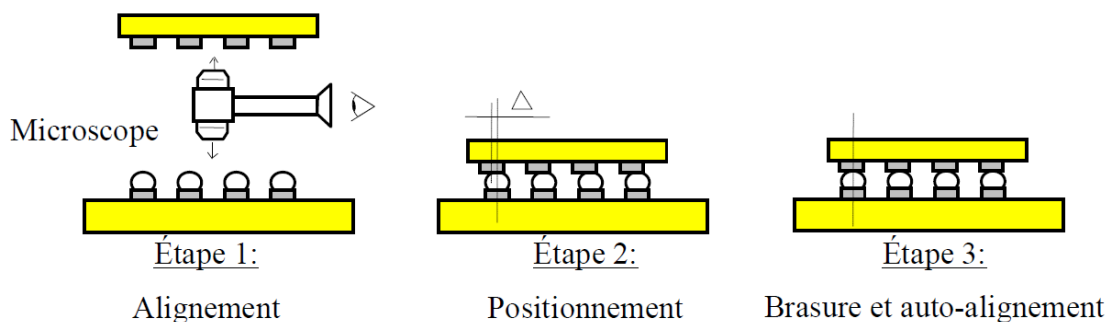


Figure II.11 – Etape d'hybridation de l'assemblage flip chip [II\_3]

L'assemblage par refusion de microbilles présente un certain nombre d'avantages par rapport aux technologies de report par thermocompression ou collage. L'auto-alignement en fait partie. Il s'agit d'un repositionnement des détecteurs pendant la brasure sous l'effet de l'action des tensions de surface. En effet, de la même manière que les galettes d'indium se déforment pour former des sphères, les microbilles en fusion tendent à retrouver leur forme sphérique et à aligner les plots du circuit de détection avec ceux du circuit de lecture. La Figure II.12 illustre ce phénomène [II\_7]. Au moment du pré-alignement réalisé par la machine de report, il existe un désalignement de la bille et du plot de contact (Figure II.11). Le désalignement est rectifié lors de la refonte par les forces de capillarité.



Figure II.12 – Auto-alignement et rattrapage de planéité [II\_7]

### Enrobage

L'étape technologique d'enrobage (ou underfilling) consiste à combler l'espace entre les billes par l'injection d'une résine époxy à faible viscosité. Une fois les deux substrats hybridés, la résine injectée à l'état liquide progresse par capillarité au sein de la matrice de billes (Figure II.13). L'ensemble est ensuite chauffé à la température de polymérisation de la résine (environ 70 °C) pendant quelques heures puis refroidi à la température ambiante. Cet enrobage a une double fonction : il permet d'une part d'éviter l'insertion d'impuretés (poussières, etc.) susceptibles de provoquer des défaillances (courts-circuits, etc.) dans le circuit d'interconnexion. D'autre part, il a pour fonction de renforcer la cohésion mécanique de la structure hybridée. En effet, le pouvoir adhésif de la résine permet de réduire les contraintes de cisaillement au sein des billes de connexion, et conduit à une augmentation significative de la tenue en fatigue de l'assemblage. Il se forme un bourrelet de résine à la fin de l'enrobage tout autour de la couche d'interconnexion et montant sur les flancs du circuit de détection.

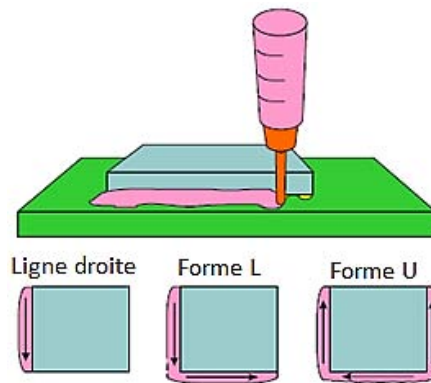


Figure II.13 – Etape d'enrobage [II\_8]

### Amincissement

Dans le but d'améliorer la performance électronique de l'assemblage et de réduire les contraintes de cisaillement dans les billes ainsi que la voilure, on a recouru à un amincissement du circuit de détection. Le circuit de détection est aminci par polissage mécanique et chimique jusqu'à ne laisser que la partie active en CdHgTe: tout le substrat de CdTe ou CdZnTe ayant servi à la croissance du CdHgTe est éliminé.

## **II.3. Modes de défaillances de la technologie flip chip**

Les assemblages flip chip sont la plupart du temps des structures hétérogènes constituées de plusieurs couches de matériaux différents. Ces matériaux, ayant différents comportements thermomécaniques, sont assemblés pour former une structure fiable et robuste. Cependant, l'hétérogénéité de l'assemblage flip chip fait intervenir des modes de défaillances de types chimiques, électriques, thermodynamiques et thermomécaniques. L'assemblage flip chip des matrices de détecteurs IR est soumis à ces mêmes types de défaillances.

### **II.3.1. Origines chimiques**

Il s'agit essentiellement de la corrosion qui concerne surtout les pistes d'aluminium. Elles sont normalement protégées par la passivation du circuit mais l'intégrité de celle-ci peut être affectée par des fissures ou des trous. La présence des plots de câblage qui sont dépassivés constitue également une voie d'accès pour l'humidité et le début des phénomènes de corrosion [II\_9].

Le mécanisme de corrosion de l'aluminium débute dès que les trois conditions suivantes sont réunies :

- **Présence d'un électrolyte** : humidité absorbée par le boîtier.
- **Présence d'ions** : en tant qu'impuretés dans les matériaux (chlorure et bromure), ou véhiculés par l'humidité depuis l'extérieur.
- **Présence d'une différence de potentiel** : alimentation du circuit ou potentiel galvanique fourni par la présence de métaux différents (Aluminium et Or par exemple) pendant les périodes de non fonctionnement.

Il s'agit d'un processus continu, qui progresse tant que l'électrolyte est présent jusqu'à corrosion complète de l'aluminium. Le phénomène n'a besoin que d'une très faible quantité d'ions pour s'amorcer.

### **II.3.2. Origines électriques**

Il s'agit essentiellement de l'électro-migration. Elle se définit comme le déplacement d'atomes dans un conducteur induit par un flux d'électrons. Ce mécanisme n'apparaît que dans les applications où l'on observe de très fortes densités de courant comme en



microélectronique. Récemment, la réduction de la taille d'une bille d'interconnexion et l'augmentation de la puissance de puces semi-conductrices ont entraîné une augmentation rapide de la densité de courant au niveau du joint, qui devrait dépasser les 10 kA/cm<sup>2</sup>.

Le test de durée de vie est la méthode la plus couramment utilisée chez les industriels de la microélectronique pour évaluer la fiabilité de leurs interconnexions. Le principe est **d'accélérer la dégradation**, par rapport aux conditions réelles de fonctionnement, en imposant une densité de courant et une température plus élevées. Ces dernières sont maintenues constantes au cours du test. Parallèlement, la résistance de la structure est mesurée afin de suivre la dégradation. Le temps à la défaillance, ou TTF (Time To Failure), est défini selon un critère d'augmentation de résistance, typiquement de 10%. Ce critère correspond à l'augmentation maximale du délai de propagation qui est jugé acceptable dans le circuit.

Une étude [II\_10] a montré que l'enrobage prolongeait la durée de vie bornée par l'électromigration (Figure II.14).

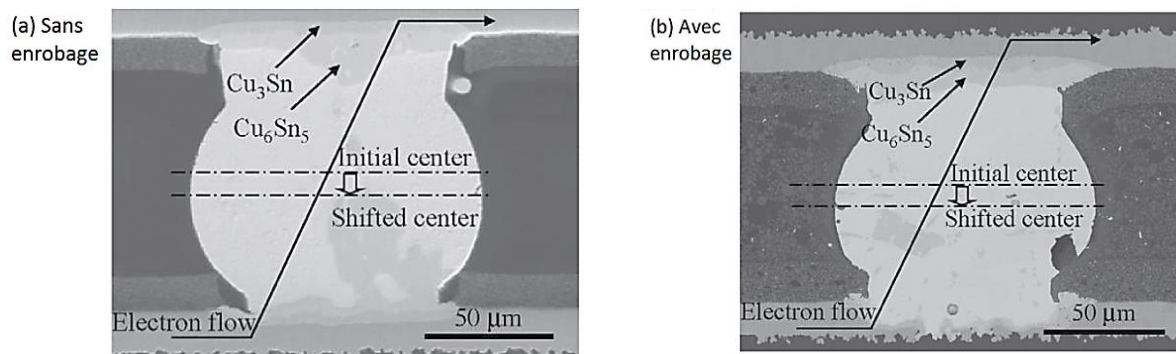


Figure II.14 – Images au MEB des sections transversales des joints de brasure de type SnAgCu a) sans enrobage après 212 h et b) avec enrobage après 330 h sous 10 kA/cm<sup>2</sup> à 453 K [II\_10]

Dans certains cas, l'accumulation du courant électrique provoque un amorçage de vide (Figure II.15). Ainsi, l'électromigration dans un joint de brasure flip chip est devenue un problème de fiabilité important.

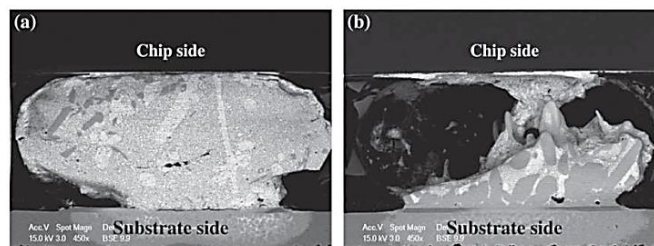


Figure II.15 – Images au MEB des micro-bossages soumis au chargement électrique pendant 7,5 h. (a) micro-bossage de gauche, (b) micro-bossage de droite [II\_11]

### II.3.3. Origines thermodynamiques

La présence de plusieurs matériaux dans l'assemblage flip chip entraîne la diffusion de certains matériaux dans d'autres sous l'effet de variations de température. Ainsi, il se forme des intermétalliques lorsque les matériaux de l'UBM diffusent dans les billes. Par exemple [II\_12] il se forme des intermétalliques de type  $\text{Cu}_6\text{Sn}_5$  et  $\text{Ni}_3\text{Sn}_4$  dans une bille en alliage Sn-37Pb respectivement à proximité de l'interface bille/puce où se trouve une couche en cuivre et l'interface bille/substrat où se trouve la couche auto-catalytique en Ni-P (Figure II.16).

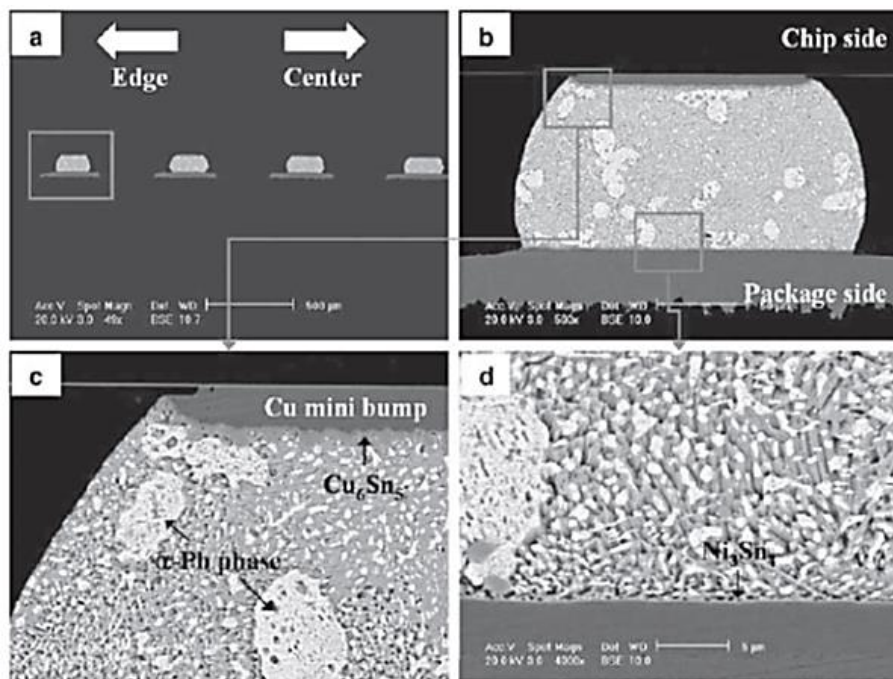


Figure II.16 – Images au MEB de la section diagonale de l'assemblage flip chip: a) vue globale de l'assemblage, b) vue agrandie d'un micro-bossage, c) microstructure de l'interface côté puce, et d) la microstructure de l'interface côté substrat [II\_12]

La formation de la couche d'intermétalliques aux interfaces entre la bille et le substrat ou la puce joue un rôle important dans la fiabilité de l'ensemble de l'assemblage. En effet, une couche trop épaisse d'intermétalliques est sensible aux contraintes et est souvent une zone d'amorçage et de propagation des fissures. Ces composés intermétalliques ont des comportements thermomécaniques différents de celui du matériau de la bille et sont souvent moins ductiles. Les chargements thermiques que subit l'assemblage provoquent des formations de fissures qui s'initient justement dans ces couches d'intermétalliques. Par conséquent, la croissance des couches d'intermétalliques pourrait dégrader la fiabilité des joints de brasure, et il est donc indispensable d'étudier la formation et la croissance de ces couches.

## II.3.4. Origines thermomécaniques

### II.3.4.1. Dissipation thermique

Quelle que soit la technologie d'empilement utilisée, la dissipation thermique ne doit pas être négligée. Si l'intégration 3D permet de diminuer la puissance globale dissipée, il est évident que localement, l'échauffement thermique va fortement s'accroître. La conception du dispositif devra prendre en compte cette problématique. La température des composants doit être contrôlée lors du fonctionnement, car son élévation a un impact sur la performance du dispositif (fréquence plus basse) et peut entraîner des fuites de puissance plus élevées, qui se traduiront par une dégradation du dispositif.

### II.3.4.2. Fissuration et la délamination

La technologie peut devenir critique lorsque l'adaptation des coefficients de dilatation thermique des différents matériaux n'est pas très bonne (ou dans le cas de dissipations thermiques importantes). En effet, des contraintes mécaniques importantes peuvent être générées à l'interface des brasures: l'accumulation de déformation plastique des billes de brasures situées vers l'extrémité de la puce (zones où les contraintes sont les plus élevées) entraîne des problèmes de fiabilité en fatigue thermique. Ces assemblages sont soumis lors de leur fonctionnement à des cycles thermiques avec une plage de températures allant de  $-196^{\circ}\text{C}$  à  $+125^{\circ}\text{C}$ . Durant le processus d'assemblage, la température d'hybridation peut monter jusqu'à  $200^{\circ}\text{C}$ . Ces variations de température entraînent des contraintes de cisaillement au niveau des interfaces entre les différentes couches. Il en résulte une fissuration (Figure II.17) et dans le pire des cas une délamination.

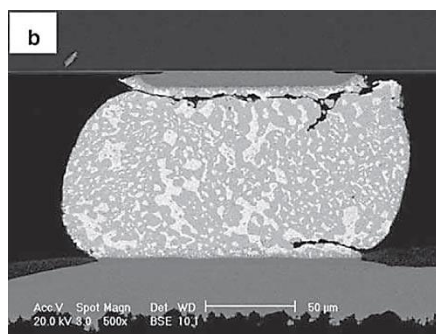


Figure II.17 – Apparition de fissures aux interfaces bille/substrat et puce [II\_12]

Le principal inconvénient de l'assemblage par brasure de microbilles par rapport aux autres techniques de report, est la nécessité d'une parfaite planéité des surfaces à hybrider. Les défauts de planéité se traduisent généralement par une voilure. Cette situation est illustrée sur la Figure II.18. La variation de température entraîne l'apparition d'une flèche sur les

composants qui s'ajoute à leur défaut de planéité ce qui peut avoir une conséquence désastreuse sur les connexions (on peut voir sur la Figure II.18, deux plots déconnectés à cause de la voilure du composant supérieur).

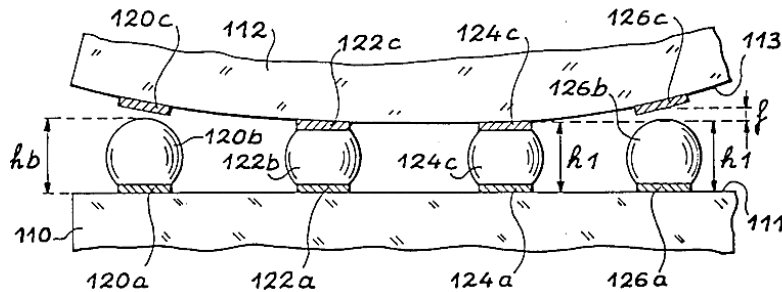


Figure II.18 – Défaut de planéité des composants à hybrider [II\_13]

La fissuration complète de la puce peut être la conséquence de contraintes internes très importantes dues aux effets thermomécaniques. Elle peut également **résulter d'une déformation du boîtier venant de l'extérieur comme le vrillage du circuit imprimé ou les chocs et les vibrations.**

La fissuration de la couche de passivation se produit quand le niveau des contraintes dépasse son seuil de résistance et que **ce dernier est inférieur à celui de l'interface passivation/résine d'enrobage.** Les contraintes de cisaillement sont quasi nulles au centre de la puce et sont maximales aux endroits les plus éloignés du centre, ce qui explique la présence plus courante de fissures en périphérie et plus particulièrement dans les coins. Ce phénomène est aggravé **par la présence de pistes d'aluminium de forte largeur sous la passivation [II\_14],** car l'aluminium possède un coefficient de dilatation thermique beaucoup plus élevé que celui des couches de passivations du SiO<sub>2</sub> ou du Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> créant ainsi des contraintes thermiques de l'autre côté de la couche. **Pour limiter le niveau des contraintes à la surface des puces de grandes tailles, certains fabricants recouvrent la passivation avec un polymère à faible module d'Young (silicone ou polyamide).**

Un autre **phénomène provoquant des fissurations dans la résine d'enrobage appelé l'effet « pop-corn »**, nommé ainsi en raison de sa similitude avec le procédé employé dans l'élaboration de la céréale soufflée, se produit lors de la présence simultanée de l'humidité et d'une température élevée et se décompose en trois phases :

- La résine absorbe l'humidité de l'air ambiant,
- L'élévation rapide de la température entraîne la diminution de la résistance à la rupture du matériau d'enrobage (surtout quand la température dépasse sa température de transition vitreuse T<sub>g</sub>).

- Si l'humidité ne peut pas s'extraire par diffusion, elle passe à l'état de vapeur et la pression augmente, dépassant la limite de résistance de l'enrobage ce qui entraîne l'apparition de fissures et même la délamination.

Ces différents modes de défaillances doivent être étudiés et prédits afin d'assurer une fiabilité des assemblages flip chip.

## II.4. Problématique

L'étude de la fiabilité des assemblages électroniques par prototypage et test de composants devient de plus en plus coûteuse car cela entraîne de nombreuses expérimentations. Face à ces défis, de nombreux industriels utilisent aujourd'hui des outils d'ingénierie assistés par ordinateur qui sont beaucoup plus rapides et moins onéreux. Des analyses de plus en plus détaillées peuvent être traitées par les logiciels de calcul par éléments finis. Les concepteurs électroniques et les ingénieurs numériques peuvent donc avoir une compréhension plus précise des caractéristiques des performances du produit dès la phase de conception.

Les défaillances de type thermomécanique décrites précédemment sont les plus importantes et peuvent être modélisées numériquement grâce à des logiciels de calcul par éléments finis.

L'assemblage flip chip modélisé dans cette étude est composé de microbilles en indium enrobées de colle époxy connectant une puce en silicium à un substrat en quartz (Figure II.19). Pour des raisons de confidentialité, le substrat en quartz a été choisi pour mettre en place un assemblage flip chip fictif. Il remplace les substrats en CdZnTe et CdHgTe et l'écart de dilatation entre le CdZnTe/Si et le Quartz /Si est le même avec le signe inverse (la maquette est bien représentative).

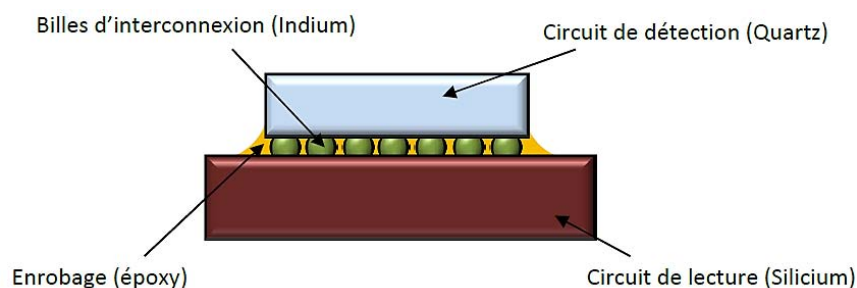


Figure II.19 – Schéma simplifié de l'assemblage flip chip étudié

Le processus d'assemblage est quasiment le même que celui décrit précédemment. La puce et le substrat ont des épaisseurs jusqu'à 100 fois plus importantes que celle de la couche

intermédiaire (couche d'interconnexion contenant les billes). La modélisation en éléments finis d'une telle structure nécessite un maillage progressif c'est-à-dire que la taille des éléments de la puce et du substrat diminue au fur et à mesure que l'on s'approche de la couche d'interconnexion. Un tel assemblage peut contenir jusqu'à  $1280 \times 1024$  billes d'indium au pas de  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ , ce qui fait que la modélisation de cet assemblage conduit à un nombre d'éléments de maillage très important (plus de 20 milliards d'éléments) et la simulation est quasiment impossible à réaliser (Figure II.20).

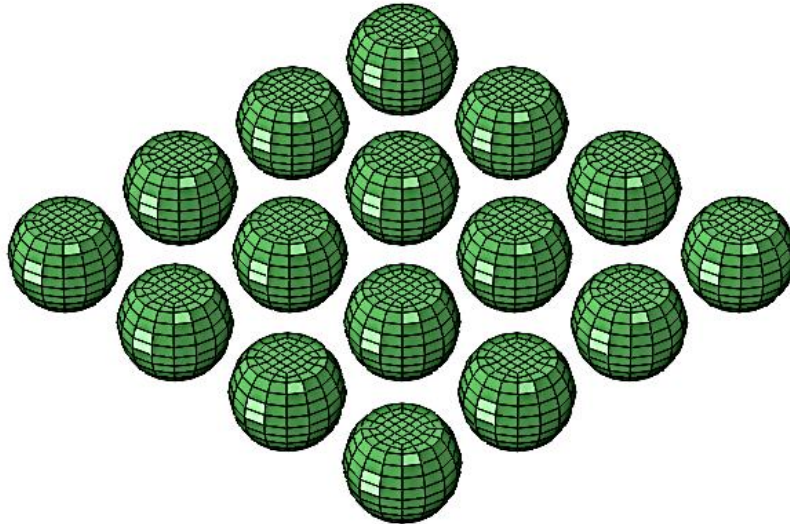


Figure II.20 – Maillage 3D de 16 billes (6144 éléments et 8208 nœuds)

Des travaux sur la modélisation des assemblages flip chip, allant de l'approche analytique à la modélisation 3D, peuvent être trouvés dans la bibliographie.

## **II.5. Etat de l'art sur la modélisation numérique d'un assemblage flip chip**

### **II.5.1. Méthode analytique**

Cette méthode permet d'estimer de manière simple la flèche due à la déformation thermique de deux plaques soudées l'une sur l'autre. L'assemblage flip chip peut être assimilé à une superposition de 2 couches (circuit de lecture et circuit de détection) en négligeant la couche d'interconnexion. Cette simplification est admissible car la couche d'interconnexion représente en général moins de 2 % en épaisseur de l'une des autres couches.

L'équation de Stoney utilisée pour les modèles de type bilame permet d'estimer la flèche et la contrainte sur la surface de la plaque supérieure. Les détails de ce modèle sont développés



dans le livre de Li et al. [II\_15]. Considérons deux plaques soudées soumises à une variation de température allant de  $T_0$  à  $T_1$  (Figure II.21). Les deux plaques ont les mêmes dimensions sauf les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  différentes. Leurs propriétés thermoélastiques sont les modules d'Young ( $E_1$  et  $E_2$ ), les coefficients de Poisson ( $\nu_1$  et  $\nu_2$ ) et les coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ).

La courbure  $K_x$  identique en tout point peut être exprimée par l'équation suivante :

$$K_x = \frac{6\varepsilon_m h m(1+h)}{h_1 [1 + h m(4 + 6h + 4h^2 + h^3 m)]} \quad (II-3)$$

avec  $h = \frac{h_2}{h_1}$ ;  $m = \frac{M_2}{M_1}$ ;  $M_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1}$ ;  $M_2 = \frac{E_2}{1-\nu_2}$ ;  $\varepsilon_m = (T_1 - T_0)(\alpha_1 - \alpha_2)$ .

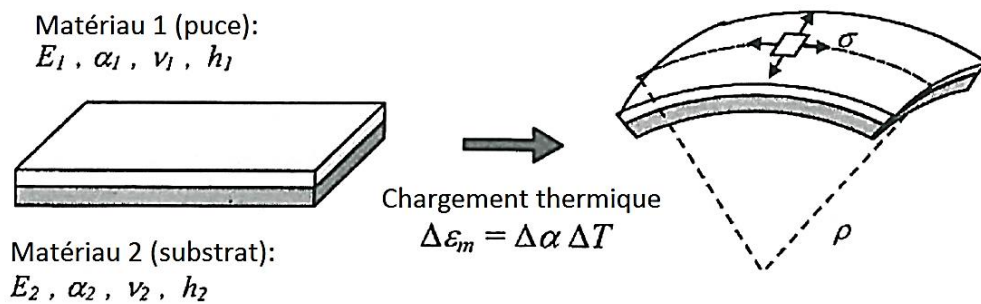


Figure II.21 – Plaque bi-matière (bilame) [II\_15]

Pour une plaque carrée, d'arête  $a$ , on peut déduire la valeur de la flèche  $f$ :

$$f = -\left| \frac{1}{K_x} \right| + \sqrt{\frac{1}{K_x^2} + \frac{a^2}{2}} \quad (II-4)$$

En supposant qu'il n'y a pas d'effet de bord (on suppose donc que la contrainte est uniforme en tout point de la surface supérieure de la plaque), on peut en déduire la valeur de la contrainte en flexion :

$$\sigma = K_x \frac{h_1 M_1 (2 + 3h - h^3 m)}{6(1+h)} \quad (II-5)$$

Cette méthode est très limitée car elle ne permet pas d'estimer la contrainte et la déformation en tout point de la plaque. Elle ne permet en aucun cas de faire une étude de fiabilité sur les assemblages flip chip. De plus elle est limitée à deux couches, or certains assemblages flip chip se composent de plus de 3 couches superposées.

## II.5.2. Modélisation 2D

La modélisation 2D des assemblages flip chip a fait l'objet de plusieurs études [II\_16–20]. La Figure II.22 illustre une structure flip chip en 2D. Cette modélisation est simple et permet l'estimation de la flèche et de trois composantes des contraintes ou déformations.

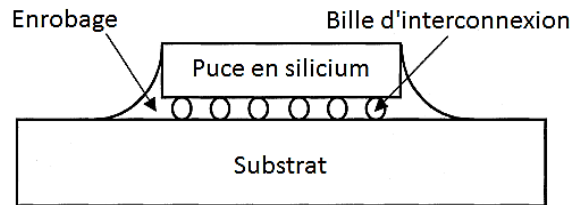


Figure II.22 – Section diagonale d'un assemblage flip chip [II\_19]

En raison de l'existence d'un plan de symétrie de l'assemblage, la moitié de la structure est modélisée en 2D (Figure II.23). Une section diagonale est le plus souvent modélisée en déformations ou contraintes planes. Le maillage appliqué est toujours fin dans la couche d'interconnexion et de plus en plus grossier lorsqu'on s'éloigne de cette couche (Figure II.24).

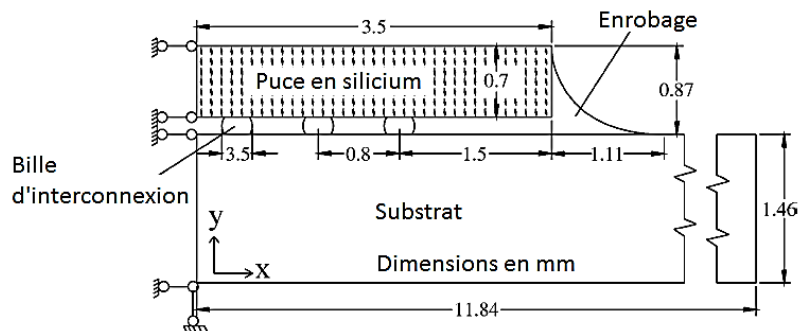


Figure II.23 – Géométrie et conditions aux limites du modèle 2D flip chip [II\_16]

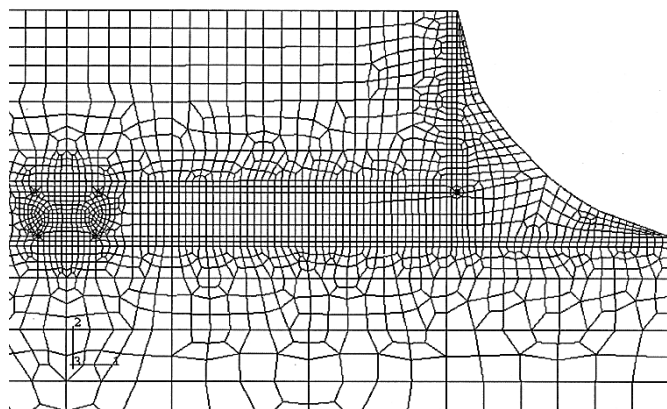


Figure II.24 – Maillage 2D d'un assemblage flip chip [II\_19]

Ces modèles contiennent en général peu d'éléments avec 2 degrés de liberté par nœud (dans le cas où la température n'est pas couplée au déplacement). Le temps de calcul est par



conséquent acceptable. Il est possible avec cette méthode de simuler des assemblages possédant jusqu'à 500 billes sur une diagonale et de faire une étude de fiabilité.

Cependant, cette méthode est limitée par le fait qu'il n'y a pas assez d'informations dans le plan des billes. Le manque de certaines composantes des tenseurs de contrainte et de déformation empêche l'interprétation complète des résultats. De plus, le nombre de microbilles existant dans les assemblages flip chip d'imageurs matriciels (des centaines de milliers) limiterait encore l'utilisation de cette méthode.

### II.5.3. Modélisation 3D

Quelques modélisations en 3D [II\_18, 21–24] d'assemblages flip chip peuvent être trouvées dans la bibliographie. Cette modélisation commence à prendre de l'ampleur ces dernières années car elle offre une description complète de l'assemblage flip chip. Les résultats obtenus peuvent être interprétés facilement. Un exemple de modélisation 3D est illustré dans la Figure II.25. Comme dans la modélisation 2D, les billes sont maillées plus finement que les substrats. En raison de l'existence de deux plans de symétrie, le quart de la structure flip chip est généralement modélisée.

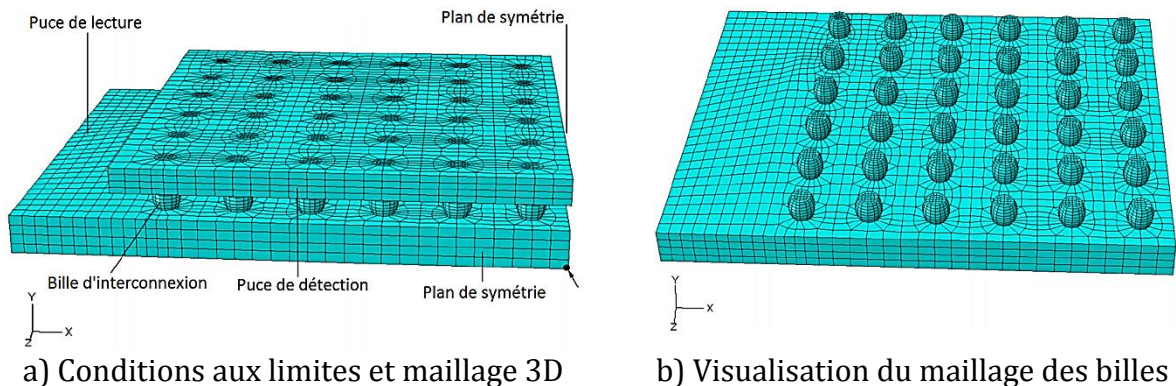


Figure II.25 – Maillage 3D d'un assemblage flip chip [II\_22]

Avec l'augmentation des interconnexions dans les assemblages flip chip jusqu'à plus d'un million de billes dans la couche d'interconnexion, cette modélisation est aussi limitée par la puissance des stations de calcul informatique.

### II.5.4. Autres modélisations

Quelle que soit la méthode utilisée dans la bibliographie, les assemblages flip chip modélisés contiennent au sein de leur couche d'interconnexion un nombre réduit de microbilles. Pour

modéliser un assemblage d'un imageur matriciel, il faudrait trouver un moyen de réduire le nombre d'éléments de maillage et par conséquent réduire le temps de calcul. Pour cela, certaines méthodes peuvent être utilisées à savoir en termes anglophones, le substructuring, le submodeling et l'homogénéisation par éléments finis.

### II.5.4.1. Substructuring

Cette méthode permet de regrouper une collection d'éléments et d'éliminer les degrés de liberté retenus sur la base de la réponse linéaire de ces éléments au sein de la structure globale. Elle est particulièrement utile dans les cas où les pièces identiques apparaissent plusieurs fois dans une structure comme les billes dans l'assemblage flip chip. Ainsi, cette méthode permet de condenser plusieurs éléments en un seul appelé super élément représenté par une matrice de raideur (Figure II.26).

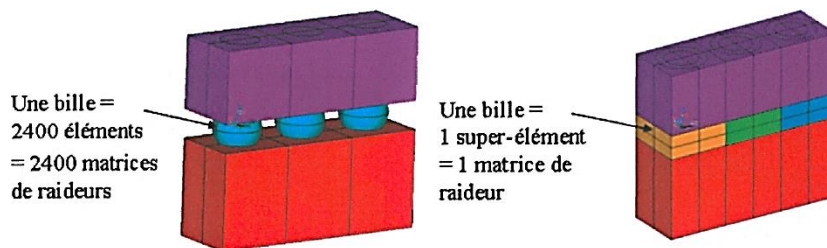


Figure II.26 – Principe du substructuring [II\_25]

Le principal inconvénient de cette technique est qu'elle ne peut être utilisée que dans le domaine linéaire. De plus, le nombre important de billes d'interconnexion limite l'utilisation de cette méthode.

### II.5.4.2. Submodeling

La technique du submodeling est utilisée pour étudier une partie locale maillée finement (appelé submodel) d'un modèle dit global dont le maillage est relativement grossier. L'assemblage flip chip peut être modélisé en 3D avec un maillage grossier et ensuite la zone d'intérêt (couche d'interconnexion) est modélisée avec un maillage fin pour avoir des résultats détaillés (Figure II.27).

Cette technique de zoom structurel permet de prendre en compte la non-linéarité. La modélisation 3D de l'assemblage flip chip reste toujours limitée par la puissance informatique actuelle car même en modélisant une bille avec un élément hexaédrique linéaire à 8 nœuds on atteint déjà plus de 1 300 000 d'éléments seulement dans la couche d'interconnexion d'un assemblage mégapixel sans enrobage (quart du modèle).

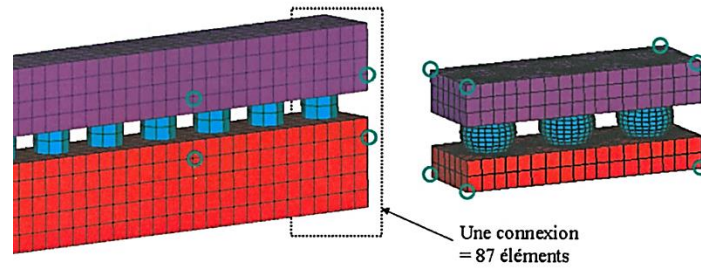


Figure II.27 – Technique de submodeling [II\_25]

### II.5.4.3. Homogénéisation par éléments finis

La méthode des éléments finis (EF) est souvent utilisée pour homogénéiser les propriétés des matériaux composites. Le volume élémentaire représentatif (VER) défini est modélisé dans un logiciel de calcul par EF puis on effectue des simulations de 6 essais au plus (3 tractions simples dans les 3 directions du repère orthogonal cartésien et 3 torsions ou 3 cisaillements) qui permettent de déduire les 9 constantes globales d'ingénieur (3 modules d'Young, 3 coefficients de Poisson et 3 modules de cisaillement) du VER (Figure II.28).

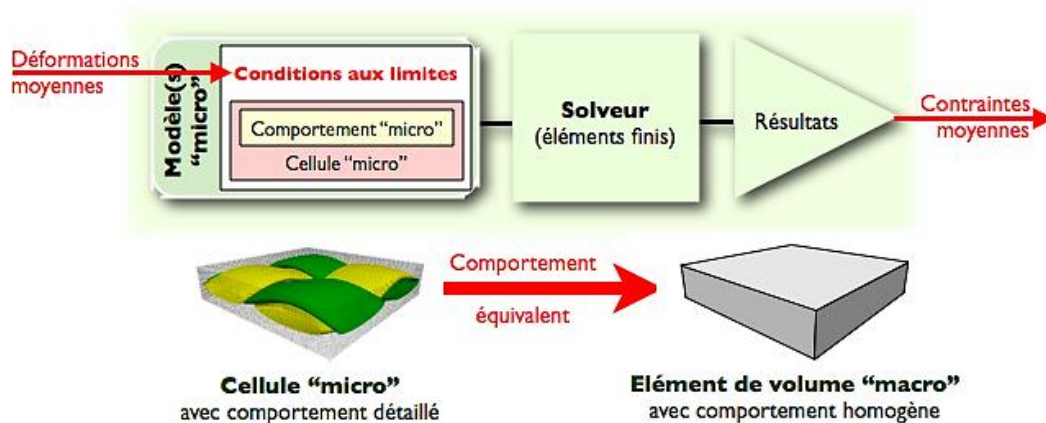


Figure II.28 – Principe de l'homogénéisation par EF

La réduction du nombre considérable d'éléments de la couche d'interconnexion serait une bonne résolution du problème. Il est possible de définir un VER dans cette couche d'interconnexion et de déterminer les propriétés thermoélastiques globales de ce VER par simulations EF. La couche d'interconnexion peut alors être remplacée par un matériau homogène ayant les propriétés globales du VER déterminées par EF.

Cette technique est assez précise, mais elle est intrinsèquement liée à la microstructure du VER et des propriétés des matériaux constitutifs. Par conséquent, si les propriétés des matériaux ou leurs dimensions changent, il va falloir refaire les 6 simulations et estimer à nouveau les propriétés globales. Il en est de mêmes si les propriétés dépendent de la

température ; dans ce cas les 6 simulations sont faites pour plusieurs températures. Cette méthode peut devenir assez répétitive et fastidieuse. Elle est plus adaptée pour les matériaux composites par exemple pour une industrie qui fabrique des matériaux hétérogènes de même microstructure.

### II.6. Solution proposée

Pour modéliser en 3D un assemblage contenant plus d'un million de billes, il faut trouver une méthode permettant de réduire considérablement le nombre d'éléments tout en tenant compte du comportement global.

La solution proposée est d'estimer les propriétés effectives de la couche d'interconnexion constituée de billes d'interconnexion et d'enrobage époxy. Cette couche d'interconnexion est alors remplacée par un matériau homogène équivalent (MHE) ayant (quasiment) les mêmes propriétés thermoélastiques (Figure II.29). Cette solution suit une démarche semblable à la méthode d'homogénéisation par EF décrite précédemment mais l'homogénéisation se fait par la théorie des champs moyens. Il s'agit d'une méthode analytique utilisée en micromécanique qui consiste à déterminer les propriétés effectives d'un matériau macro-homogène et micro-hétérogène à partir des propriétés locales et des interactions entre les différentes phases. Cette méthode sera décrite dans le chapitre IV.

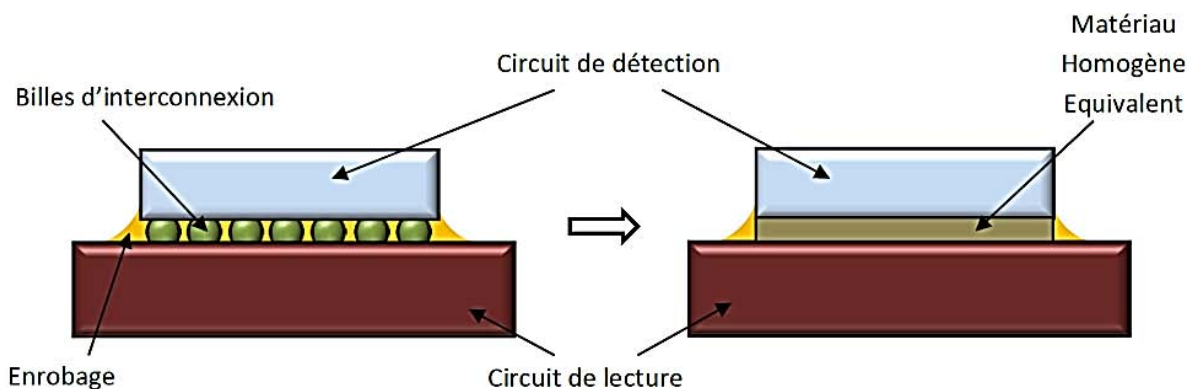


Figure II.29 – Schéma de l'homogénéisation de la couche d'interconnexion

Cette solution permet d'estimer les champs locaux moyens dans les différentes phases du MHE mais une technique de zoom structural sera ensuite appliquée pour avoir des résultats plus détaillés dans la couche d'interconnexion. Une étude détaillée des champs locaux réels permettra d'étudier la fiabilité de l'assemblage.

## II.7. Conclusion

Le flip chip est exploité comme technologie traditionnelle d'interconnexion électrique et mécanique des pixels de la matrice de photo-détecteurs IR. Le circuit de détection en matériau CdHgTe est connecté au circuit de lecture en silicium CMOS par des billes en indium. Le procédé d'assemblage se déroule en 5 principales étapes : formation des zones de dopage PN et des plots sur le circuit de détection, la formation de billes d'indium sur le circuit de lecture, l'hybridation, l'enrobage et l'amincissement.

La technologie flip chip tend à occuper une place grandissante grâce à ses atouts de compacité et de haute densité de connexions. Cependant elle est confrontée à des problèmes de type thermomécanique, chimique, thermodynamique et électrique. Le problème thermomécanique est le plus important puisque les assemblages de type flip chip sont soumis à des variations de température durant leur fabrication et leur fonctionnement.

De plus, les matrices des assemblages flip chip pour détecteurs IR ne cessent de s'élargir en nombre de pixels. Actuellement, ces matrices ont atteint la taille mégapixel (> 1 millions de pixels) et il s'avère nécessaire d'étudier leur fiabilité. La méthode la moins coûteuse est la simulation numérique. Plusieurs méthodes existent (de l'analytique jusqu'à la modélisation 3D), mais compte tenu du rapport d'épaisseurs entre la couche d'interconnexion et du circuit de lecture, il est impossible, du moins pour le moment de modéliser entièrement cet assemblage en 3D. La solution proposée est de remplacer la couche d'interconnexion constituée de billes d'indium et de colle époxy par un matériau homogène équivalent à l'aide de modèles d'homogénéisation micromécanique par champs moyens.

La modélisation de l'assemblage flip chip de la matrice de détecteurs IR nécessite tout d'abord la connaissance des propriétés thermomécaniques des différents matériaux constitutifs qui seront présentées dans le chapitre suivant.

## II.8. Références bibliographiques

- [II\_1] D. Blachier, "Mesures et Analyse des Performances de Détecteurs Photovoltaïques Infrarouges Réalisés sur HgCdTe," Conservatoire National des Arts et Métiers, 1994.
- [II\_2] US Navy, "Atmospheric transmittance IR." [Online]. Available: <http://en.wikipedia.org/wiki/Transmittance#mediaviewer/File:Atmospheric.transmittance.IR.jpg>. [Accessed: 26-May-2014].

- [II\_3] C. Davoine, "Densification des connexions 'Flip-Chip' grande surface: Analyse de l'assemblage d'un détecteur infrarouge et Mise au point d'une technologie innovante," Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2006.
- [II\_4] G. L. Hansen, J. L. Schmit, and T. N. Casselman, "Energy gap versus alloy composition and temperature in Hg(1-x)Cd(x)Te," *J. Appl. Phys.*, vol. 53, pp. 7099–7101, 1982.
- [II\_5] P. Castelein, J. M. Debono, M. Fendler, C. Louis, F. Marion, L. Mathieu, and M. Volpert, "Ultra fine pitch hybridization of large imaging detectors," in *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, 2003, vol. 5, pp. 3518–3521.
- [II\_6] M. Fendler, C. Davoine, F. Marion, D. Saint-Patrice, R. Fortunier, and H. Ribot, "A Fluxless and Low-Temperature Flip Chip Process Based on Insertion Technique," *IEEE Trans. Components Packag. Technol.*, vol. 32, no. 1, pp. 207–215, 2009.
- [II\_7] M. Caccia, "The challenge of hybridization," *Nucl. Instruments Methods Phys. Res.*, vol. A465, pp. 195–199, 2000.
- [II\_8] R. R. Tummala and M. Swaminathan, *Introduction to System-on-package (SOP): Miniaturization of the Entire System*. McGraw-Hill, 2008.
- [II\_9] J.-Y. Delétage, "Etude de la durée de vie d'assemblages microélectroniques par l'utilisation de simulations, de modèles de dégradation et de circuits intégrés spécifiques de test," Université Bordeaux 1, 2003.
- [II\_10] K. Yamanaka, T. Ooyoshi, and T. Nejime, "Effect of underfill on electromigration lifetime in flip chip joints," *J. Alloys Compd.*, vol. 481, pp. 659–663, 2009.
- [II\_11] D.-G. Kim, W.-C. Moon, and S.-B. Jung, "Effects of electromigration on microstructural evolution of eutectic SnPb flip chip solder bumps," *Microelectron. Eng.*, vol. 83, pp. 2391–2395, 2006.
- [II\_12] D.-G. Kim, J.-W. Kim, and S.-B. Jung, "Reliability evaluations of flip chip package under thermal shock test," *Microelectron. Eng.*, vol. 82, pp. 575–580, 2005.
- [II\_13] F. Marion, J.-L. Ouvrier-Buffet, and D. Marion, "Système de composant à hybrider autorisant un défaut de planéité," 1999.
- [II\_14] P. Alpern, V. Wicher, and R. Tilgner, "A simple test chip to assess chip and package design in the case of plastic assembling," *IEEE Trans. components, Packag. Manuf. Technol. Part A*, vol. 17, no. 4, pp. 583–589, 1994.
- [II\_15] L. Li, Y. Guo, and D. Zheng, "Stress Analysis for Processed Silicon Wafers and Packaged Micro-devices," in *Micro- and Opto-Electronic Materials and Structures: Physics, Mechanics, Design, Reliability, Packaging*, E. Suhir, Y. C. Lee, and C. P. Wong, Eds. Springer US, 2007, pp. B677–B709.
- [II\_16] S. C. Chen, Y. C. Lin, and C. H. Cheng, "The numerical analysis of strain behavior at the solder joint and interface in a flip chip package," *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 171, pp. 125–131, 2006.

- [II\_17] C. Davoine, M. Fendler, F. Marion, C. Louis, and R. Fortunier, “Low temperature fluxless flip chip technology for fine pitch bonding,” in *56th Electronic Components and Technology Conference*, 2006, no. 1645621, pp. 24–28.
- [II\_18] M.-L. Sham, J.-K. Kim, and J.-H. Park, “Thermal performance of flip chip packages: Numerical study of thermo-mechanical interactions,” *Comput. Mater. Sci.*, vol. 43, pp. 469–480, 2008.
- [II\_19] J. Wang, W. Ren, D. Zou, Z. Qian, and S. Liu, “Processing mechanics for flip-chip assemblies,” *Comput. Struct.*, vol. 71, pp. 457–468, 1999.
- [II\_20] X. Li and Z. Wang, “Thermo-fatigue life evaluation of SnAgCu solder joints in flip chip assemblies,” *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 183, pp. 6–12, 2007.
- [II\_21] E. H. Amalu and N. N. Ekere, “High temperature reliability of lead-free solder joints in a flip chip assembly,” *J. Mater. Process. Technol.*, vol. 212, no. 2, pp. 471–483, Feb. 2012.
- [II\_22] X. Cheng, C. Liu, and V. V Silberschmidt, “Numerical analysis of thermo-mechanical behavior of indium micro-joint at cryogenic temperatures,” *Comput. Mater. Sci.*, vol. 52, pp. 274–281, 2012.
- [II\_23] S. Belhenini, A. Tougui, A. Bouchou, and F. Dosseul, “3D finite element modeling of 3D C2W (chip to wafer) drop test reliability: Optimization of internal architecture and materials,” *Microelectron. Reliab.*, vol. 54, no. 1, pp. 13–21, Jan. 2014.
- [II\_24] S. Belhenini, A. Tougui, A. Bouchou, R. Mohan, and F. Dosseul, “3D FEM Simulations of Drop Test Reliability on 3D-WLP: Effects of Solder Reflow Residual Stress and Molding Resin Parameters,” *J. Electron. Mater.*, vol. 43, no. 3, pp. 708–716, Jan. 2014.
- [II\_25] A. Bedoin, “Simulation thermo-mécanique d’une matrice infrarouge par éléments finis (Ansys),” CEA-LETI, Sep. 2011.





# Chapitre III

## Propriétés thermomécaniques des matériaux

### Sommaire

---

<b>III.1. Introduction.....</b>	<b>54</b>
<b>III.2. Généralités sur les types de comportement thermomécanique considérés.....</b>	<b>54</b>
III.2.1. Généralités sur la cristallographie .....	55
III.2.2. Elasticité linéaire.....	57
III.2.3. Thermoélasticité linéaire.....	63
III.2.4. Plasticité .....	64
<b>III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés .....</b>	<b>68</b>
III.3.1. Silicium .....	68
III.3.2. Germanium.....	72
III.3.3. Quartz (silice fondue).....	75
III.3.4. Indium .....	77
III.3.5. CdHgTe.....	80
III.3.6. CdZnTe .....	82
III.3.7. Epoxy .....	82
III.3.8. Intermétalliques Au-In.....	84
<b>III.4. Conclusion .....</b>	<b>86</b>
<b>III.5. Références bibliographiques.....</b>	<b>86</b>

---

### III.1. Introduction

L'objectif de ma thèse est de pouvoir prédire le comportement des assemblages flip chip lors de différents chargements pouvant inclure le chargement thermique. De ce fait, il est primordial de connaître certaines propriétés thermomécaniques des matériaux utilisés, telles que le module d'Young, le coefficient de Poisson ou encore le coefficient de dilatation thermique, propriétés qui entrent en jeu lors de la définition des lois de comportement à implémenter. Ces matériaux ont des comportements mécaniques fonction de leurs structures cristallographiques et du chargement auquel ils sont soumis. De ce fait, la connaissance de l'orientation cristalline de chaque matériau a son importance dans la définition des propriétés.

Dans ce chapitre, les types de comportement thermomécanique des matériaux sous chargement quasi statique seront définis après une brève introduction sur la cristallographie et ensuite, les propriétés des matériaux utilisés dans les assemblages flip chip seront précisées.

### III.2. Généralités sur les types de comportement thermomécanique considérés

Il existe différents types de comportement thermomécanique tels que l'élasticité linéaire, non linéaire, la thermoélasticité, la viscoélasticité, la plasticité, la conduction thermique, la convection, le rayonnement, ... Dans notre étude, seules l'élasticité linéaire, la thermoélasticité et la plasticité seront développées.

Le comportement mécanique d'un matériau traduit la réponse de celui-ci à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu sont le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations notés respectivement  $\sigma$  et  $\epsilon$ . Le champ des contraintes caractérise les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du matériau. La contrainte et la déformation sont toujours liées par une loi quel que soit le comportement du matériau. En 3D, la contrainte et la déformation sont des tenseurs d'ordre 2 dont les composantes par rapport à un repère choisi sont habituellement rangées dans les matrices suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

En notations indicielles leurs composantes sont notées  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ .

La déformation est une variation relative du déplacement et est donnée, dans l'hypothèse des petites perturbations, par la formule suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{où } u_i \text{ est le déplacement dans la direction } i \text{ et } x_i \text{ la}$$

composante du vecteur position dans la direction  $i$ .

Les propriétés thermomécaniques sont influencées par la structure cristalline du matériau. Ainsi, il est important de connaître la cristallographie des matériaux étudiés.

### III.2.1. Généralités sur la cristallographie

A l'état solide, les atomes ou les molécules ne sont pas immobilisées dans des positions quelconques, mais tendent à se disposer d'une manière parfaitement ordonnée qui détermine une configuration géométrique répétitive dans les trois dimensions de l'espace. Cet état ordonné de la matière solide s'appelle l'état cristallin. Un cristal est dit ordonné lorsqu'un même motif est répété à l'identique selon un réseau régulier. La plus petite partie du réseau permettant de recomposer l'empilement est appelée une maille. Un cristal idéal ne comporte pas de défauts cristallins, mais les cristaux réels sont loin de cette perfection. Au-delà d'une certaine concentration des défauts, le concept de structure cristalline cesse d'être utile et l'on considère que c'est un matériau amorphe (tel que le verre). L'état amorphe s'apparente fortement à l'état liquide mais il existe aussi des cristaux liquides.

Un monocristal ou matériau monocristallin est un matériau solide constitué d'un seul et unique cristal. Un polycristal ou matériau polycristallin est un matériau solide constitué d'une multitude de petits cristaux appelés cristallites de taille et d'orientation variées. Compte tenu de leur symétrie, les matériaux solides cristallins peuvent être classés en 7 systèmes cristallins : triclinique, monoclinique, orthorhombique, quadratique (tétraгонаl en anglais), trigonal, hexagonal et cubique ou isométrique. On associe à chaque système, une maille possédant 3 vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (leurs normes sont  $a, b, c$ ) et les angles qu'ils font entre eux  $\alpha, \beta, \gamma$ . Les nœuds du réseau sont générés par les translations :

$$\vec{r}_{uvw} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \quad u, v, w \in \mathbb{Z} \quad (\text{III-1})$$

Une classification des réseaux obtenus en recherchant les mailles multiples compatibles avec la symétrie de la maille initiale constitue les réseaux de Bravais. La Figure III.1 montre l'ensemble des 14 réseaux de Bravais.

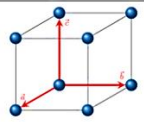
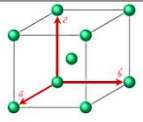
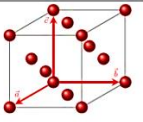
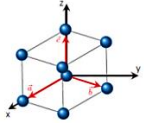
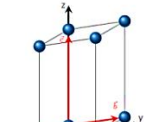
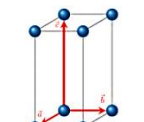
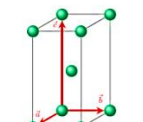
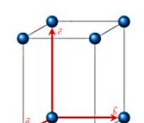
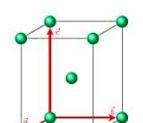
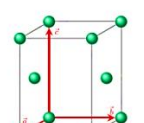
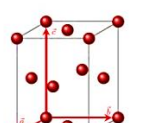
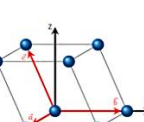
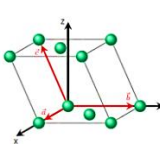
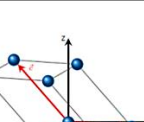
Multiplicité	m = 1	m = 2		m = 4
Type de réseau	Primitif (P)	Centré (I)	Bases centrées (C)	Faces centrées (F)
Cubique $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma$				
Rhomboédrique $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
Hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$				
Quadratique $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Orthorhombique $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Monoclinique $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$				
Triclinique $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$				

Figure III.1 – Les réseaux de Bravais

L'orientation cristalline est l'orientation d'une cristallite par rapport à l'objet dont il fait partie. La cristallite dispose également d'un repère lié aux directions principales de son réseau cristallin. Pour définir l'orientation d'une cristallite dans l'objet, il suffit donc de définir les rotations permettant de passer du repère de l'objet au repère de la cristallite. Ces angles (d'Euler) de rotation sont en général notés  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$ . La Figure III.2 montre l'orientation cristalline ( $e_1, e_2, e_3$ ) par rapport au repère d'orthotropie ( $x, y, z$ ).

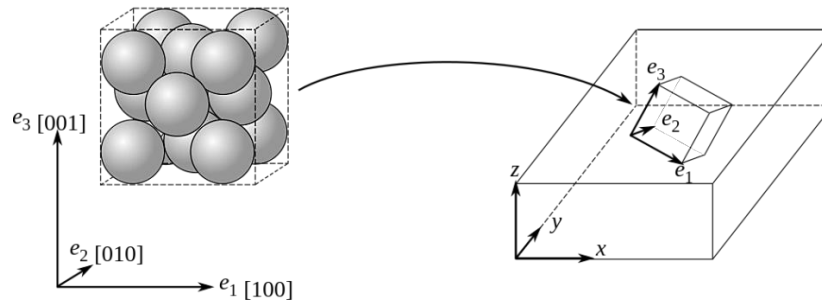


Figure III.2 – Orientation cristalline

### III.2.2. Elasticité linéaire

Un matériau est élastique linéaire lorsque sa réponse en déformation sous un chargement mécanique est proportionnelle à la contrainte imposée.

Le rapport de proportionnalité de la contrainte et de la déformation lors d'un essai de traction est appelé module d'Young et est noté  $E$ . La loi de Hooke caractérise le comportement élastique linéaire d'un matériau et s'exprime dans une analyse unidimensionnelle par la relation suivante:

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (III-2)$$

où  $\varepsilon^e$  est la déformation élastique.

La loi de Hooke a été généralisée, dans une approche tridimensionnelle, par Cauchy qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. Elle se met sous la forme générale suivante:

$$\sigma = C : \varepsilon^e \quad (III-3)$$

où  $C$  est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur des rigidités ou tenseur des modules élastiques ou encore tenseur d'élasticité. Ces composantes covariantes sont notées  $C_{ijkl}$ . Il fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon^e = S : \sigma \quad (III-4)$$

où  $S$  est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques ou tenseur des souplesses. Ces composantes covariantes sont notées  $S_{ijkl}$ .

Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  (inverse de  $\mathbf{C}$ ) sont liés par la relation :

$$C_{ijpq} S_{pqkl} = I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (III-5)$$

où  $\delta$  est le tenseur de Kronecker qui prend la valeur 0 pour  $i \neq j$  et 1 pour  $i = j$  et  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 4.

### III.2.2.1. Tenseur d'élasticité

Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  ont en tout 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). De plus les tenseurs de contrainte et de déformation sont symétriques c'est-à-dire qu'on a les égalités  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ji}^e$  ce qui fait qu'ils ont 6 composantes indépendantes. Cela entraîne les égalités suivantes :  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$  (idem pour  $S_{ijkl}$ ). De ce fait, la relation suivante est souvent utilisée dans un repère orthonormé :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1131} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2231} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3331} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1231} & C_{1223} \\ & \text{Symétrie} & & & C_{3131} & C_{3123} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ 2\varepsilon_{12}^e \\ 2\varepsilon_{31}^e \\ 2\varepsilon_{23}^e \end{pmatrix} \quad (III-6)$$

Ainsi pour simplifier les notations, le tenseur  $\mathbf{C}$  peut être écrit sous forme d'une matrice  $6 \times 6$  comme suit :

$$C_{mn} = C_{ijkl} \text{ avec } \begin{cases} m = i + j + 1 \text{ si } i \neq j \\ m = i \text{ si } i = j \\ n = k + l + 1 \text{ si } k \neq l \\ n = k \text{ si } k = l \end{cases} \quad (III-7)$$

Cette notation est appelée notation de Voigt. Par contre, le tenseur  $\mathbf{S}$  se note sous forme d'une matrice  $6 \times 6$  comme suit :

$$S_{mn} = aS_{ijkl} \text{ avec } \begin{cases} m = i + j + 1 \text{ si } i \neq j \\ m = i \text{ si } i = j \\ n = k + l + 1 \text{ si } k \neq l \\ n = k \text{ si } k = l \\ a = 1 \text{ si } i = j \text{ et } k = l \\ a = 2 \text{ si } (i \neq j \text{ et } k = l) \text{ ou } (i = j \text{ et } k \neq l) \\ a = 4 \text{ si } i \neq j \text{ et } k \neq l \end{cases} \quad (III-8)$$

Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  ont alors 21 composantes indépendantes dans le cas d'un matériau purement anisotrope. En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Le tenseur d'élasticité, par sa structure, ne peut posséder que 8 groupes de symétrie distincts [III\_1] qui sont résumés sur la Figure III.3.

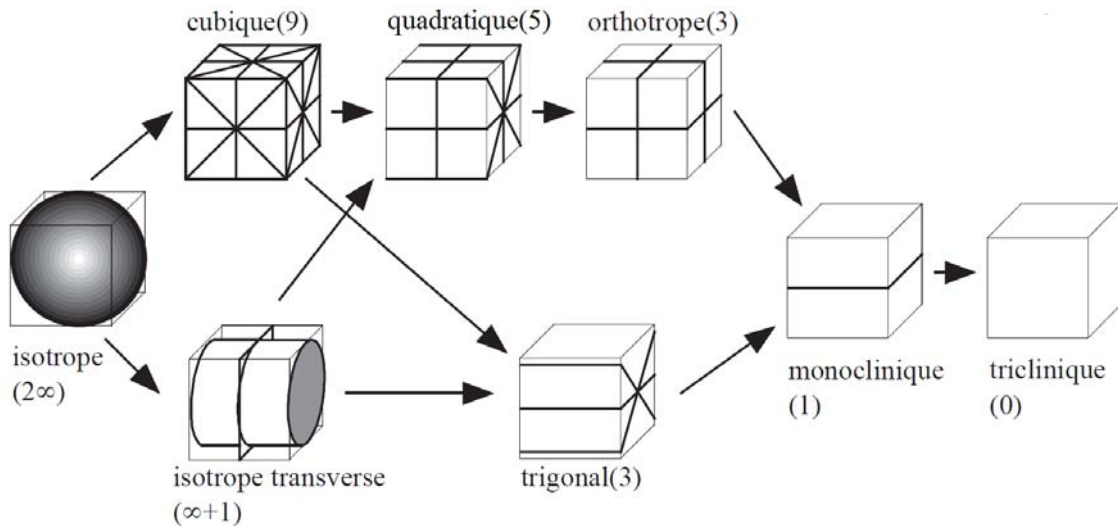


Figure III.3 – Arbre des symétries des tenseurs d'élasticité

Lorsque le matériau est anisotrope, la définition du repère dans lequel nous exprimons la loi de Hooke est importante. Une rotation quelconque a une incidence sur la matrice des rigidités.

### III.2.2.2. Modules élastiques techniques

Il s'agit ici de constantes d'élasticité utilisées en ingénierie. Elles sont liées aux essais de caractérisation les plus connus en mécanique: l'essai de traction et l'essai de cisaillement.

Considérons un essai simple de traction unidirectionnelle (direction 1 :  $\sigma_{11} = \sigma$ ). La loi de comportement élastique linéaire permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^e = S_{11}\sigma = \frac{\sigma}{E_1} \\ \varepsilon_{22}^e = S_{21}\sigma = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma \\ \varepsilon_{33}^e = S_{31}\sigma = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 2\varepsilon_{12}^e = S_{41}\sigma = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}\sigma \\ 2\varepsilon_{13}^e = S_{51}\sigma = \frac{\eta_{1,13}}{G_{13}}\sigma \\ 2\varepsilon_{23}^e = S_{61}\sigma = \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}}\sigma \end{array} \right. \quad (III-9)$$

Avec  $E_i$  le module d'Young dans la direction  $i$  ;  $\nu_{ij}$  le coefficient de Poisson ( $i \neq j$ ) ;  $G_{ij}$  le module de cisaillement ou module de Coulomb ou module de rigidité au cisaillement encore noté  $\mu_{ij}$  ( $i \neq j$ ) ;  $\eta_{i,j}$  le coefficient de Lekhnitskii ou d'influence mutuelle (peu utilisé) [III\_2].

Le coefficient de Poisson  $\nu_{ij}$  traduit le rapport du rétrécissement relatif dans la direction  $j$  à l'allongement relatif dans la direction  $i$  :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ij}^e}{\varepsilon_{ii}^e} \quad i \neq j \quad (III-10)$$

Considérons ensuite un essai de cisaillement dans le plan (1,2) :  $\sigma_{12} = \tau$ . La loi de comportement élastique linéaire permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^e = S_{14}\tau = \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ \varepsilon_{22}^e = S_{24}\tau = \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ \varepsilon_{33}^e = S_{34}\tau = \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 2\varepsilon_{12}^e = S_{44}\tau = \frac{\tau}{G_{12}} \\ 2\varepsilon_{13}^e = S_{54}\tau = \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} \\ 2\varepsilon_{23}^e = S_{64}\tau = \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} \end{array} \right. \quad (III-11)$$

Avec  $\mu_{12,ij}$ , le module de Chentsov ou d'influence mutuelle (peu utilisé) [III\_2].

Les types de matériaux les plus usuels sont listés dans le Tableau III.1.



Tableau III.1 – Récapitulatif des symétries matérielles rencontrées dans les matériaux

Matériaux	Matrice d'élasticité	Modules d'élasticité techniques
Orthotrope	$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$	9 indépendants  $E_1, E_2, E_3$ $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$
Quasi isotrope transverse (axes 1 et 2 équivalents)	$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}$	6 indépendants  $E_1 = E_2, E_3$ $\nu_{12} = \nu_{21}, \nu_{13} = \nu_{23}$ $\mu_{12}, \mu_{13} = \mu_{23}$
Isotrope transverse (axe d'isotropie 3)	$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}$	5 indépendants  $E_1 = E_2, E_3$ $\nu_{12} = \nu_{21}, \nu_{13} = \nu_{23}$ $\mu_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, \mu_{13} = \mu_{23}$
Cubique	$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix}$	3 indépendants  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$ $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = \mu$
Isotrope	$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$	2 indépendants  $E$ $\nu$ $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

Un matériau orthotrope possède 3 plans de symétrie orthogonaux. C'est le cas des cristaux orthorhombiques. La matrice des souplesses s'exprime en fonction de 9 modules techniques

indépendants (3 module d'Young  $E_i$ , 3 coefficients de Poisson  $\nu_{ij}$  et 3 modules de cisaillement  $\mu_{ij}$ ) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ii} = \frac{1}{E_i} \text{ avec } i = 1, 2, 3 \\ S_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_i} = S_{ji} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j} \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \\ S_{kk} = \frac{1}{\mu_{ij}} \text{ avec } k = i + j + 1, i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \end{array} \right. \quad (III-12)$$

Ces composantes peuvent être exprimées en fonction des composantes de la matrice d'élasticité grâce aux formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{C_{22}C_{33} - C_{33}^2}{\Delta C} \\ S_{22} = \frac{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}{\Delta C} \\ S_{33} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{\Delta C} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} S_{12} = \frac{C_{23}C_{13} - C_{33}C_{12}}{\Delta C} \\ S_{13} = \frac{C_{12}C_{23} - C_{22}C_{13}}{\Delta C} \\ S_{23} = \frac{C_{13}C_{12} - C_{11}C_{23}}{\Delta C} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} S_{44} = \frac{1}{C_{44}} \\ S_{55} = \frac{1}{C_{55}} \\ S_{66} = \frac{1}{C_{66}} \end{array} \right. \quad (III-13)$$

$$\Delta C = C_{11}C_{22}C_{33} + 2C_{12}C_{23}C_{31} - C_{12}^2C_{33} - C_{23}^2C_{11} - C_{22}C_{13}^2$$

Les formules ci-dessous permettant d'exprimer les composantes de la matrice des rigidités en fonction de celles de la matrice des souplesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta S} \\ C_{22} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_3E_1\Delta S} \\ C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta S} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta S} \\ C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta S} \\ C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{E_3E_1\Delta S} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \\ C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \\ C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{array} \right. ; \quad (III-14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3} \\ \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} = \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, les tenseurs de contraintes et de déformations s'écrivent simplement sous la forme:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^e + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{\delta} = \frac{E}{1+\nu}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{\delta}\right] \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta} \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

$\lambda$  est le coefficient de Lamé défini par la relation  $\lambda = C_{11} - 2C_{44}$ .

Le comportement élastique d'un matériau homogène isotrope et linéaire peut aussi être caractérisé par un des modules utilisés précédemment et le module de compressibilité  $\kappa = 3\lambda + 2\mu$ . Le Tableau III.2 indique les relations entre les 5 modules d'élasticité.

Tableau III.2 – Relations entre les 5 modules d'élasticité isotrope linéaire

Constantes	En fonction de								
	$\lambda, \mu$	$E, \mu$	$\kappa, \lambda$	$\kappa, \mu$	$\lambda, \nu$	$\mu, \nu$	$E, \nu$	$\kappa, \nu$	$\kappa, E$
$\kappa$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$	$\kappa$	$\kappa$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\kappa$	$\kappa$
$E$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$E$	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2\mu(1+\nu)$	$E$	$3\kappa(1-2\nu)$	$E$
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\lambda$	$\kappa - \frac{2}{3}\mu$	$\lambda$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$
$\mu$	$\mu$	$\mu$	$\frac{3}{2}(\kappa-\lambda)$	$\mu$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{2(3\kappa+\mu)}$	$\nu$	$\nu$	$\nu$	$\nu$	$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$

### III.2.3. Thermoélasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de les dilater. Le tenseur des déformations thermiques s'exprime alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \theta\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III-16})$$

Avec  $\theta$  la variation de température et  $\boldsymbol{\alpha}$  le tenseur des coefficients de dilatation thermique qui s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{III-17})$$

Cette matrice est symétrique comme celles des contraintes ou des déformations ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ). De plus pour les matériaux orthotropes, les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont nuls pour  $i \neq j$ . Pour un matériau isotrope ou cubique,  $\alpha = \alpha \delta$ ;  $\alpha$  étant le coefficient de dilatation thermique (CDT) communément utilisé.

On distingue deux types de CDT : le CDT moyen (ou tangent) et le CDT instantané (ou sécant). Le premier traduit la dilatation du matériau entre 2 températures données et le second la dilatation due à une petite variation de température par rapport à une température donnée. Le CDT moyen est le plus souvent utilisé dans les codes de calcul par éléments finis.

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors le champ de température homogène ne générera pas de contraintes. Dans le cas contraire (on parle alors de dilatation contrariée ou d'incompatibilités de déformation), des contraintes seront générées dans le solide.

D'une façon plus générale, lors d'une sollicitation dite « thermoélastique », les déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont la somme des déformations thermiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$  et déformations mécaniques (élastiques)  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (III-18)$$

La contrainte thermoélastique s'exprime comme suit :

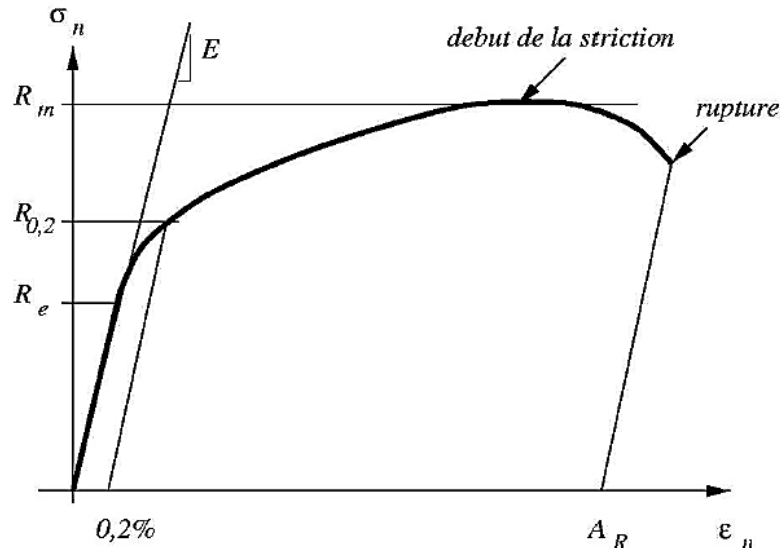
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \theta \boldsymbol{\beta} \quad (III-19)$$

avec  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}$ , nommé tenseur des coefficients de contraintes thermiques.

### III.2.4. Plasticité

On parle de plasticité lorsque la forme du matériau change de façon irréversible lors du chargement, contrairement au domaine d'élasticité où le solide reprend sa forme initiale lorsque l'on relâche les efforts. Tous les matériaux sont alors caractérisés par une limite d'élasticité, qui correspond à un chargement limite à partir duquel le comportement du matériau n'est plus réversible.

La Figure III.4 schématise la courbe générale de traction uniaxiale d'un matériau.



Les points caractéristiques de cette courbe sont :

- la limite d'élasticité  $R_e$ , marquant le début de la déformation plastique (irréversible) du matériau
- la limite d'élasticité conventionnelle  $R_{0,2}$  ou  $\sigma_0$ , donnant la contrainte nominale nécessaire pour une déformation plastique de 0,2 %
- la résistance à la traction  $R_m$ , contrainte nominale maximale observée (avant la striction)
- l'allongement à la rupture  $A_R$ , déformation nominale atteint par le matériau au point de rupture.

La limite élastique est la même dans toutes les directions seulement **dans le cas d'un** matériau isotrope. Il existe des critères pour caractériser la plasticité des matériaux.

### III.2.4.1. Contrainte équivalente

La contrainte équivalente s'exerçant dans un matériau est un scalaire, souvent noté  $\bar{\sigma}$ , qui représente l'ensemble du tenseur des contraintes. Ce scalaire est comparé à la limite d'élasticité, pour savoir si le matériau a plastifié ou non. Il incorpore donc les éventuels effets d'anisotropie dans sa définition. Les contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de von Mises et Tresca pour les matériaux isotropes, et de Hill et Tsai pour les matériaux anisotropes.

La contrainte équivalente de Tresca est définie dans l'espace des contraintes principales (valeurs propres du tenseur de contraintes) sous la forme :

$$\bar{\sigma}_T = \text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (III-20)$$

La contrainte équivalente de von Mises est définie comme suit:

$$\bar{\sigma}_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad \text{avec } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (III-21)$$

Cette expression prend la forme plus simple en fonction des contraintes principales :

$$\bar{\sigma}_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

Dans ces relations **s** est le tenseur déviateur des contraintes.

La contrainte équivalente de Hill est définie de la façon suivante :

$$\bar{\sigma}_H = \sqrt{F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2} \quad (III-22)$$

Les coefficients **F**, **G**, **H**, **L**, **M** et **N** caractérisent l'anisotropie plastique du matériau. Ils sont obtenus par exemple en effectuant des essais de traction et de cisaillement dans différentes directions, et en mesurant la contrainte seuil  $\sigma_s$  (de traction ou de cisaillement) pour laquelle apparaît la plasticité.

La contrainte équivalente de Tsai est de la forme :

$$\bar{\sigma}_{TS} = \bar{\sigma}_H + P(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \quad (III-23)$$

Les coefficients **P** et **Q** sont déterminés expérimentalement et caractérisent un comportement dissymétrique en traction et en compression.

### III.2.4.2. Surface de plasticité

C'est une fonction qui caractérise le comportement plastique du matériau. Elle est notée **f** et dépend du critère de plasticité choisi. Elle est encore appelée surface d'écoulement et délimite le domaine des contraintes dans lequel le comportement du matériau est élastique. En général elle est de la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}, R) = \overline{(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} - R = 0 \quad (III-24)$$

Où  $\overline{(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$  représente la valeur équivalente de la variable  $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$  dépendant du critère utilisé.

Les variables internes sont :

- $R$ , variable scalaire, dite variable isotrope, qui fournit la taille de la surface d'écoulement, et surtout dont l'évolution donne celle de la taille de la surface au cours de la déformation (il est évident que l'on a  $R = \sigma_0$  à l'état initial) ; elle dépend des variables internes représentées souvent par un vecteur  $\mathbf{q}$
- $\mathbf{X}$ , variable tensorielle, dite variable cinématique, dont les composantes sont homogènes à des contraintes, qui fournit la position de la surface (par exemple de son centre) dans l'espace des contraintes, et donc également son évolution au cours de la déformation plastique

Pour  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , les surfaces d'écoulement à l'état initial ( $R = \sigma_0$ ) de Tresca et de von Mises sont représentées dans le plan ( $\Pi$ ) (plan des composantes principales du tenseur déviateur des contraintes) sur la Figure III.5.

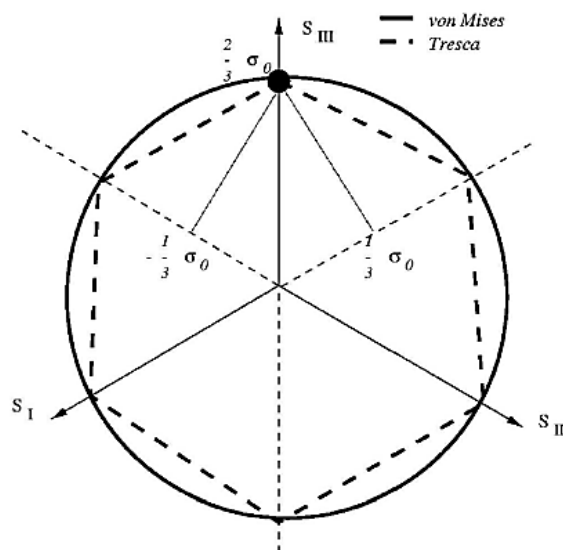


Figure III.5 – Surfaces de plasticité de Tresca et von Mises dans le plan ( $\Pi$ ) [III\_3]

En 3D, la surface de plasticité de von Mises est un cylindre d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (axe hydrostatique) (Figure III.6).

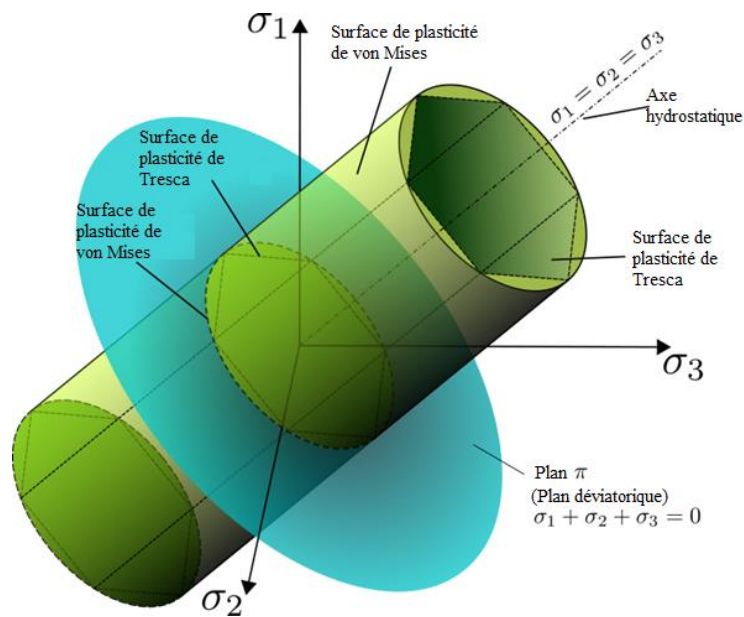


Figure III.6 – Surfaces de plasticité de Tresca et von Mises dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

L'érouissage d'un matériau est le durcissement ou l'adoucissement de celui-ci sous l'effet de sa déformation plastique. L'érouissage ne se produit que sur les matériaux ductiles.

Lorsque  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , on parle d'érouissage isotrope. La surface de plasticité change de taille en gardant la même forme et le même centre. Lorsque  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ , on parle d'érouissage cinématique. Dans ce cas, la surface d'écoulement change de centre en fonction de la déformation plastique. La combinaison des deux types d'érouissage est nommée érouissage mixte.

La section suivante présente les propriétés thermomécaniques des matériaux constitutifs des assemblages flip chip trouvées dans la bibliographie.

### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

Les matériaux étudiés sont le silicium, le germanium, le quartz, l'indium, le CdHgTe, le CdZnTe, l'époxy et les intermétalliques de type AuIn<sub>2</sub>.

#### III.3.1. Silicium

Le silicium est un élément chimique de la famille des cristallogènes, de symbole Si et de numéro atomique 14. Le silicium a une structure de type « diamant », forme dérivée de la



### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

structure cubique faces centrées (cfc), avec un paramètre de maille de 0,543071 nm. Il peut être polycristallin ou monocristallin.

Le module d'Young, le coefficient de Poisson et la limite élastique du silicium polycristallin à la température ambiante sont donnés dans le Tableau III.3. MUMPs veut dire « Multi-User MEMs Process ».

Tableau III.3 – Propriétés mécaniques du silicium polycristallin [III\_4]

MUMPs	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Résistance à la traction (GPa)
6	163 ± 4,78	-	1,23 ± ,200
8	173 ± 6,94	-	1,27 ± ,107
10	173 ± 2,00	-	1,14 ± ,155
11	168 ± 7,15	0,22 ± ,015	1,19 ± ,155
12	168 ± 1,59	0,22 ± ,003	1,17 ± ,100
Toutes les données	<b>169 ± 6,15</b>	<b>0,22 ± ,011</b>	<b>1,20 ± ,150</b>

Les évolutions des modules d'Young, de cisaillement et les coefficients de Poisson du silicium, selon son orientation cristalline, sont données en fonction de la température respectivement par les Figure III.7, Figure III.8 et Figure III.9.

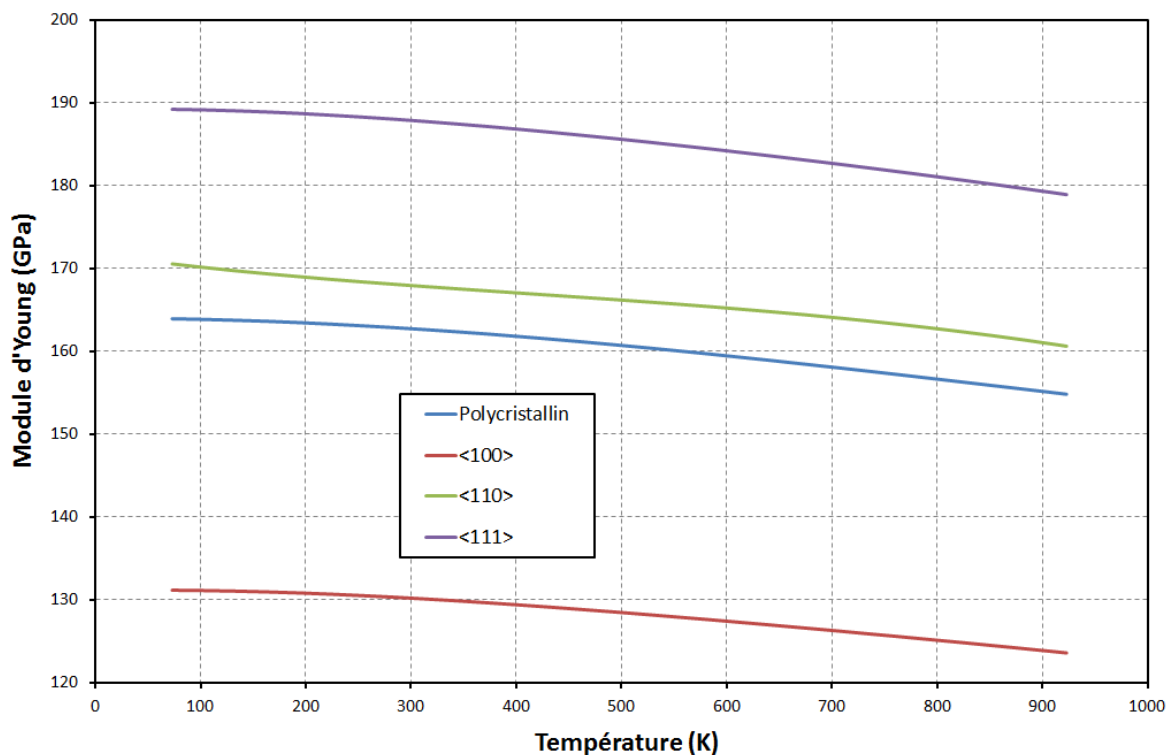


Figure III.7 – Modules d'Young du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III\_5-7]

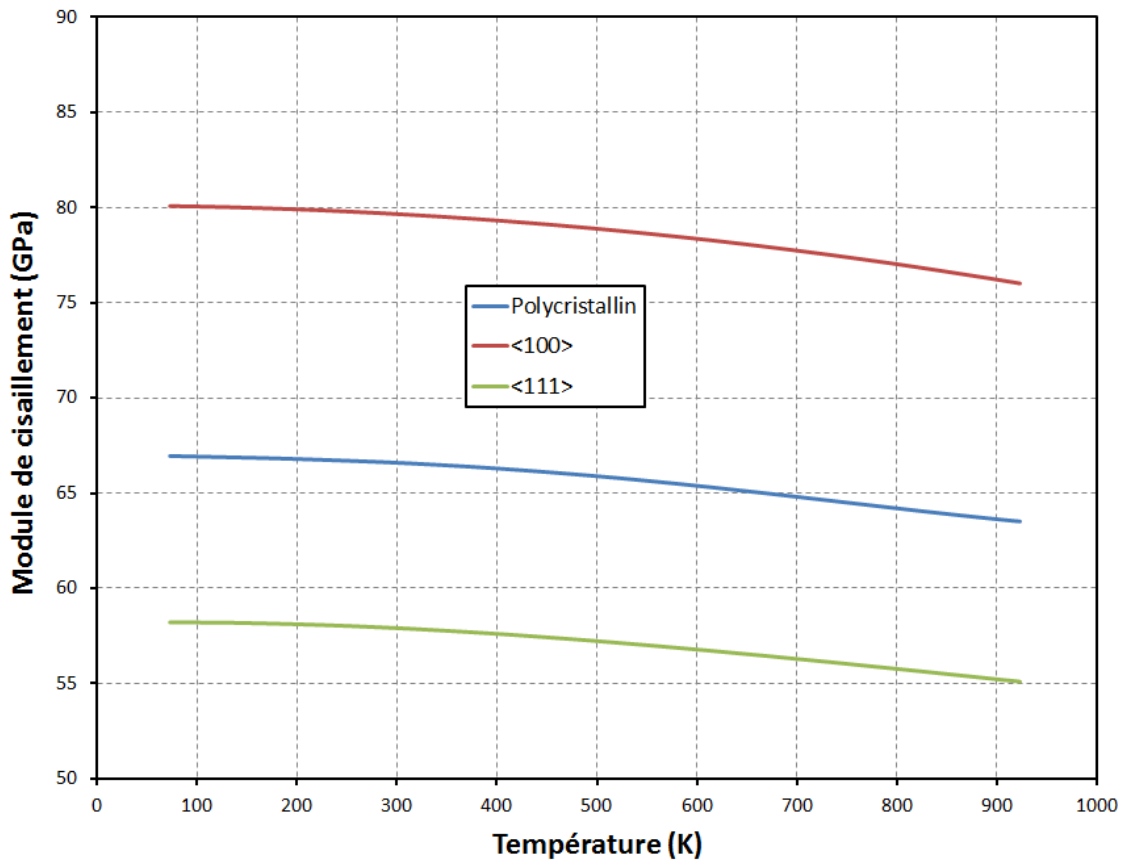


Figure III.8 – Modules de cisaillement du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III\_5, 6]

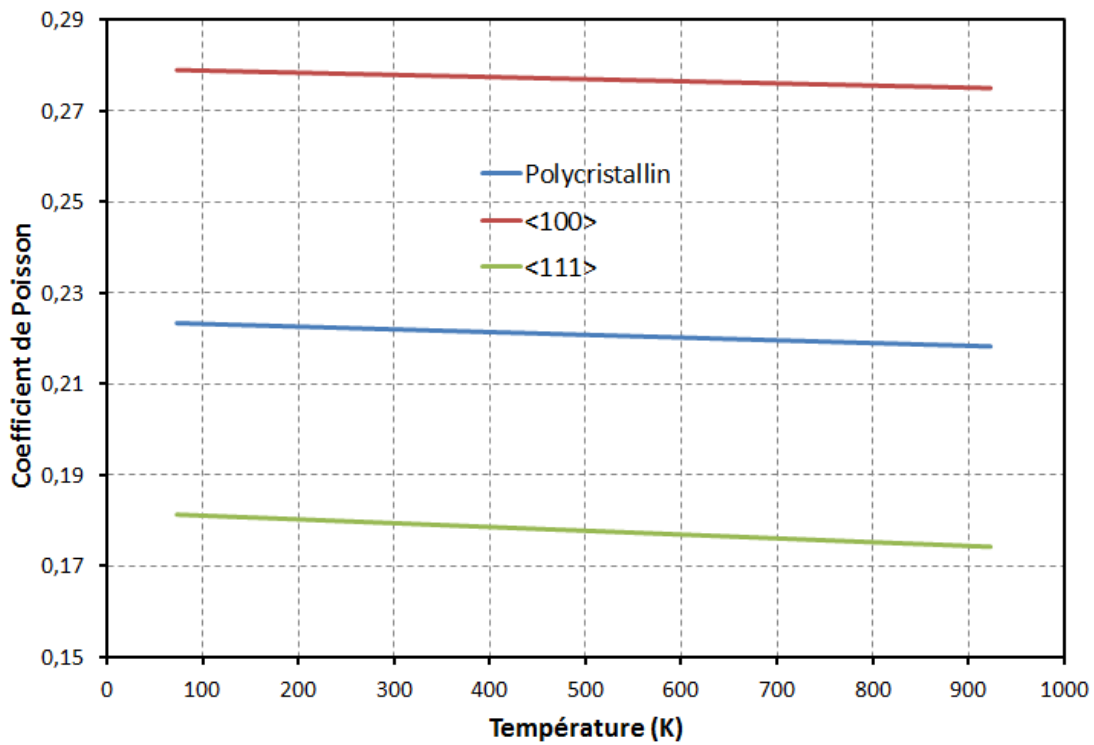


Figure III.9 – Coefficient de Poisson du silicium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III\_5, 6]

### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

Les coefficients instantanés et moyens de dilatation thermique du silicium en fonction de la température sont donnés sur la Figure III.10. Le coefficient de dilatation thermique (CDT) moyen est mesuré à partir de la température de référence de 292,9 K.

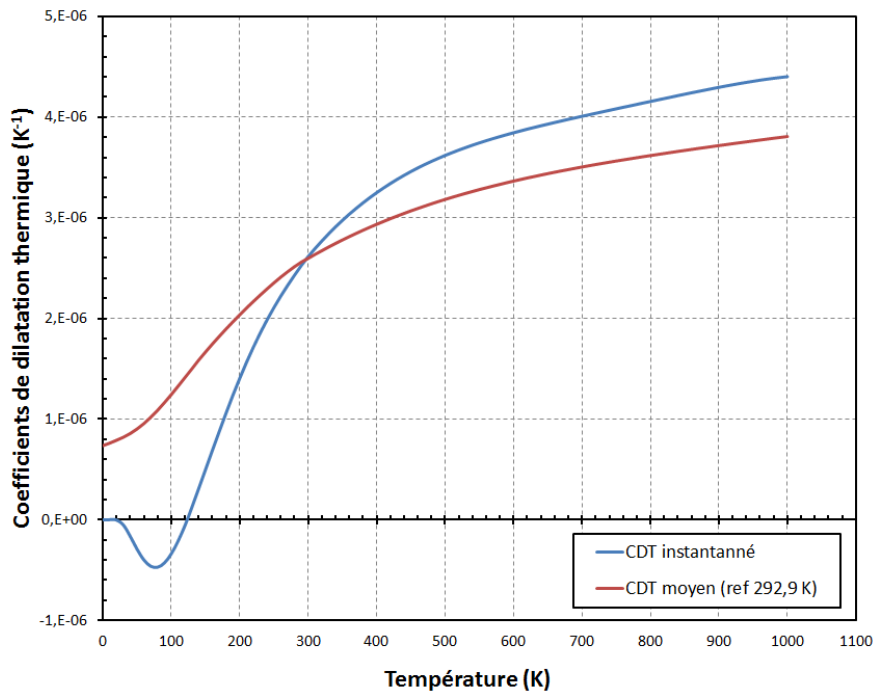


Figure III.10 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du silicium en fonction de la température [III\_8]

L'évolution du coefficient instantané de dilatation thermique linéaire du silicium en fonction de la température est aussi donnée sur la Figure III.11. Les coefficients instantanés de dilatation thermique linéique du silicium et de l'indium en fonction de la température sont comparés sur la Figure III.12.

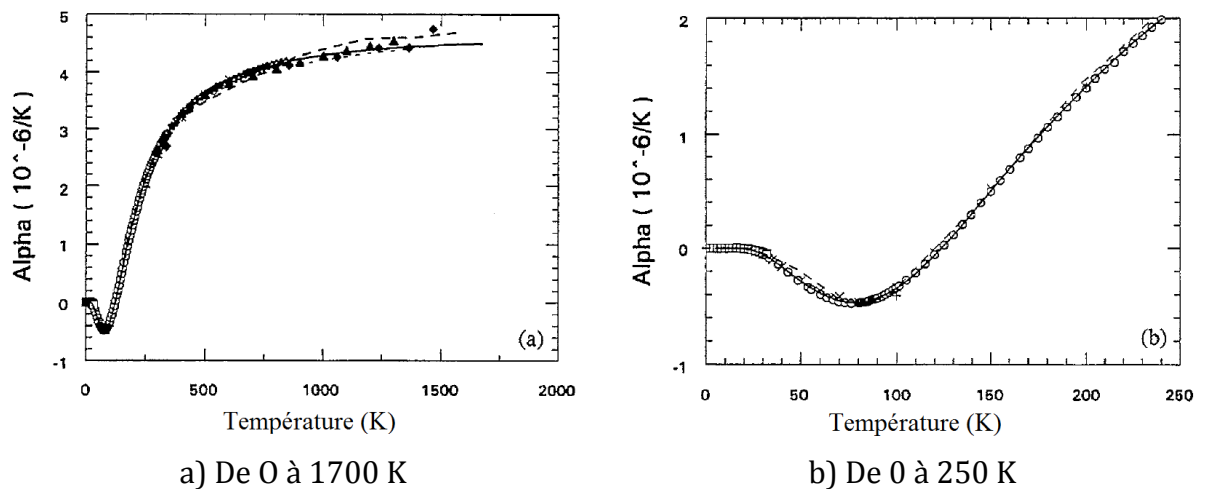


Figure III.11 – Coefficient instantané de dilatation thermique linéique du silicium en fonction de la température [III\_9]

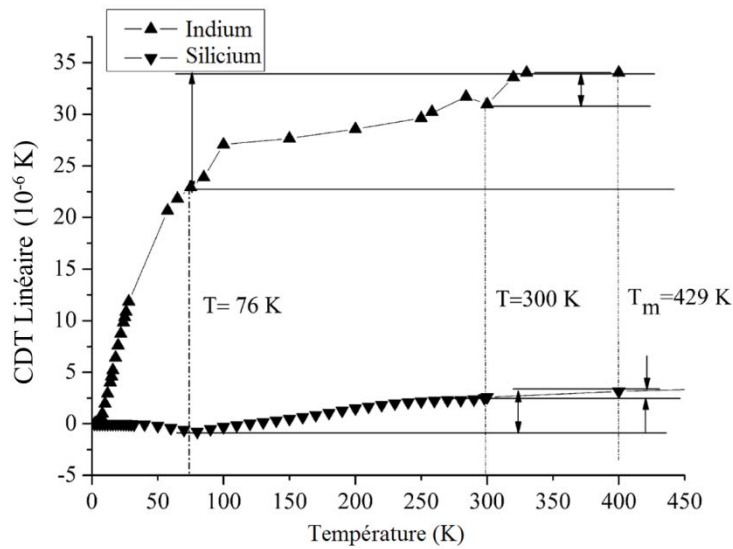


Figure III.12 – Evolution des coefficients instantanés de dilatation thermique linéaire du silicium et de l’indium en fonction de la température [III\_10]

### III.3.2. Germanium

Le germanium est un élément chimique de la famille des cristallogènes, de symbole Ge et de numéro atomique 32. Ce métalloïde est semi-conducteur et a la structure du diamant, comme le silicium.

Les modules d’Young du germanium, selon son orientation cristalline en fonction de la température, sont donnés sur la Figure III.13.

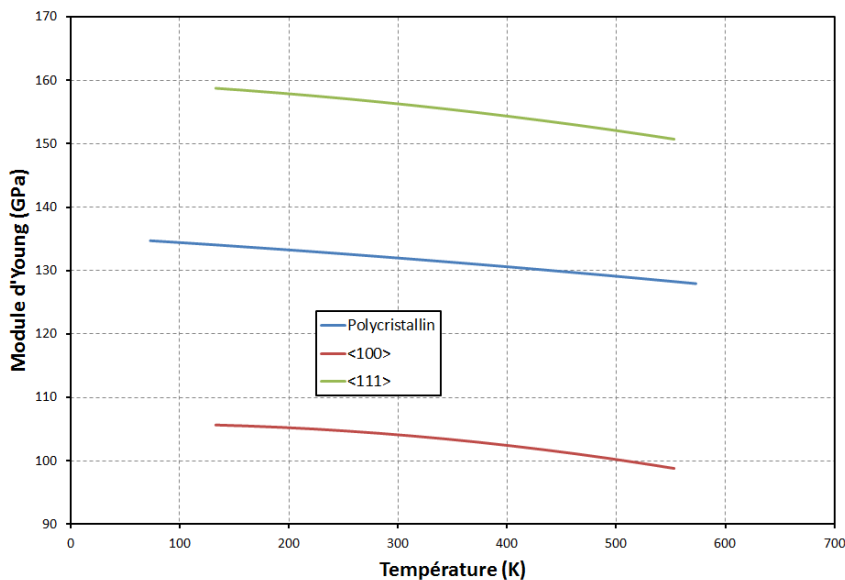


Figure III.13 – Modules d’Young du germanium selon son orientation cristalline en fonction de la température [III\_6, 11]

### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

Les évolutions du module de cisaillement et du coefficient de Poisson du germanium polycristallin en fonction de la température sont tracées respectivement sur la Figure III.14 et la Figure III.15.

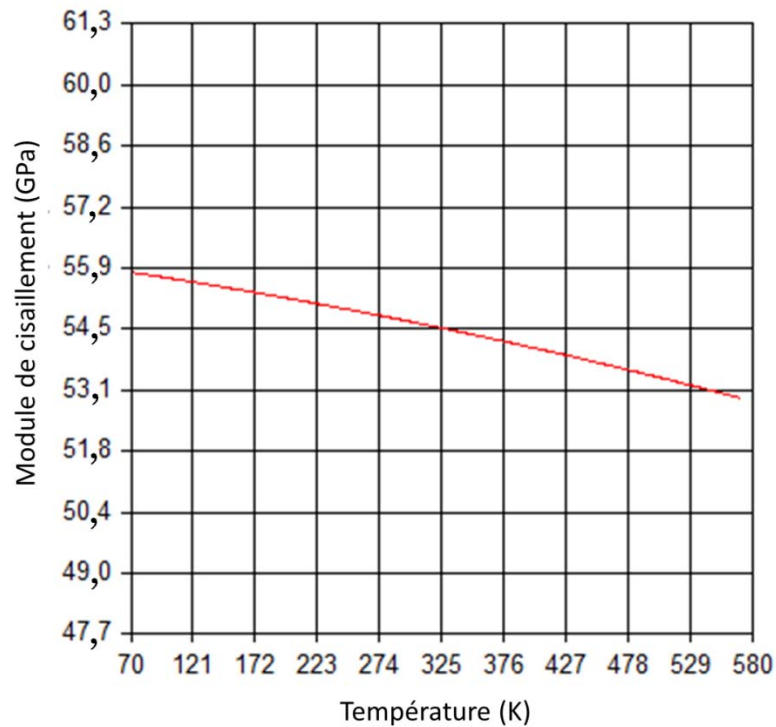


Figure III.14 – Module de cisaillement du germanium polycristallin en fonction de la température [III\_6]

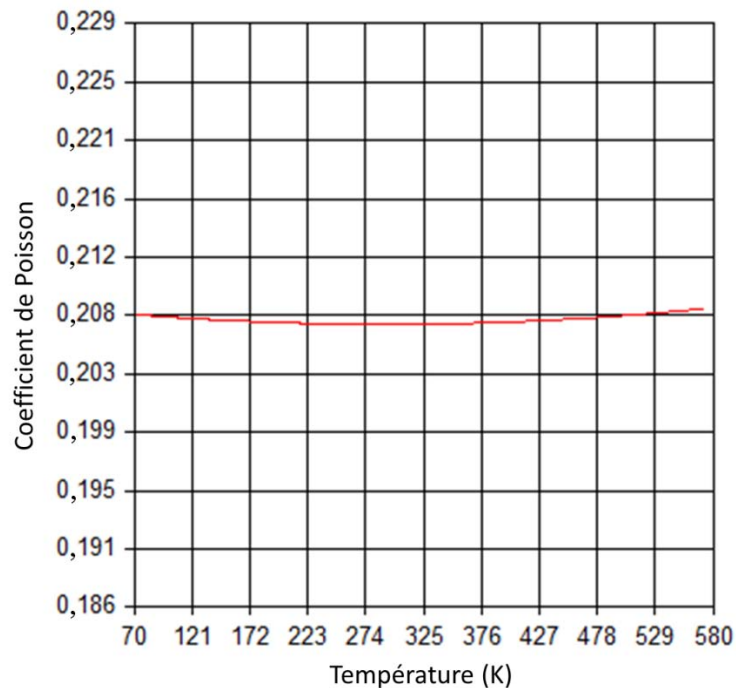


Figure III.15 – Coefficient de Poisson du germanium polycristallin en fonction de la température [III\_6]

L'évolution des coefficients instantanés et moyens de dilatation thermique du germanium en fonction de la température est illustrée sur la Figure III.16.

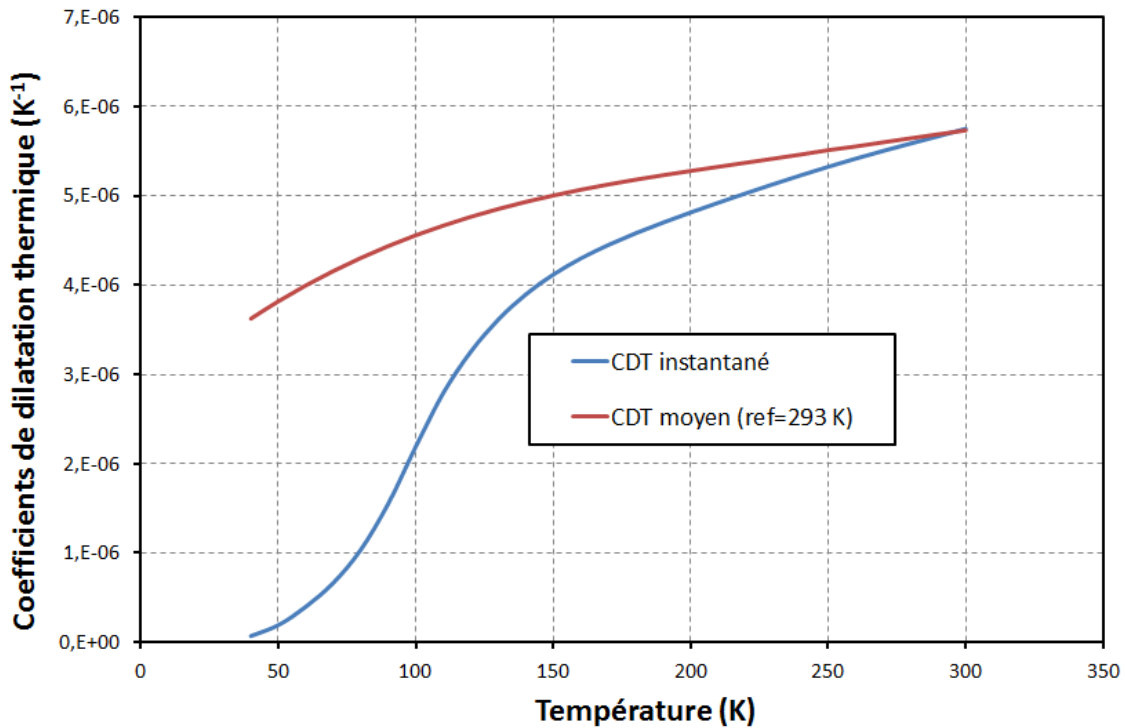


Figure III.16 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du germanium en fonction de la température [III\_12, 13]

Les coefficients instantanés de dilatation thermique du germanium en fonction de la température sont tracés sur la Figure III.17.

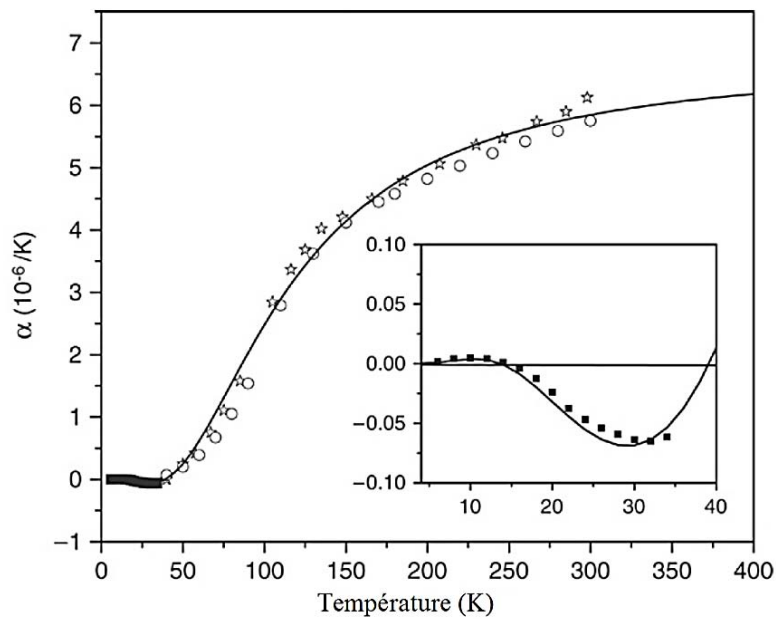


Figure III.17 – Evolution du coefficient instantané de dilatation thermique du germanium en fonction de la température [III\_14]

### III.3.3. Quartz (silice fondue)

Le quartz est une espèce minérale du groupe des silicates de formule  $\text{SiO}_2$ . Il a un système cristallin trigonal et appartient au réseau hexagonal de Bravais.

Les modules d'Young, de cisaillement et le coefficient de Poisson du quartz en fonction de la température sont donnés sur les Figure III.18, Figure III.19 et Figure III.20.

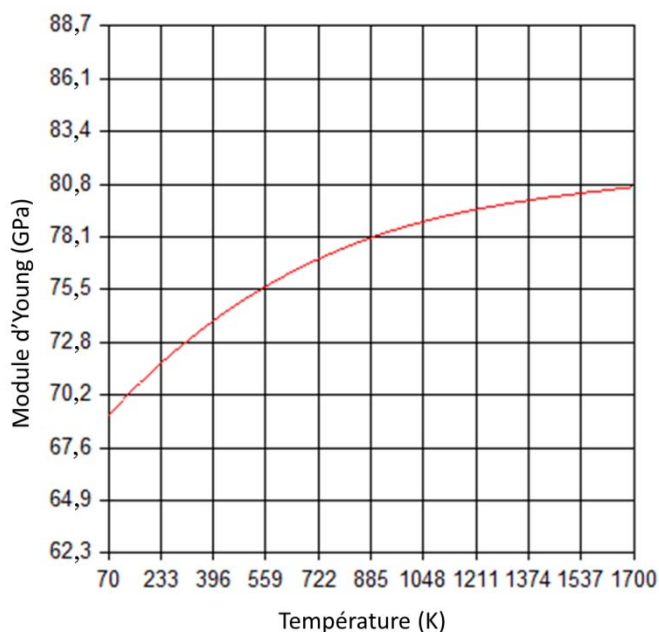


Figure III.18 – Module d'Young du quartz en fonction de la température [III\_15, 16]

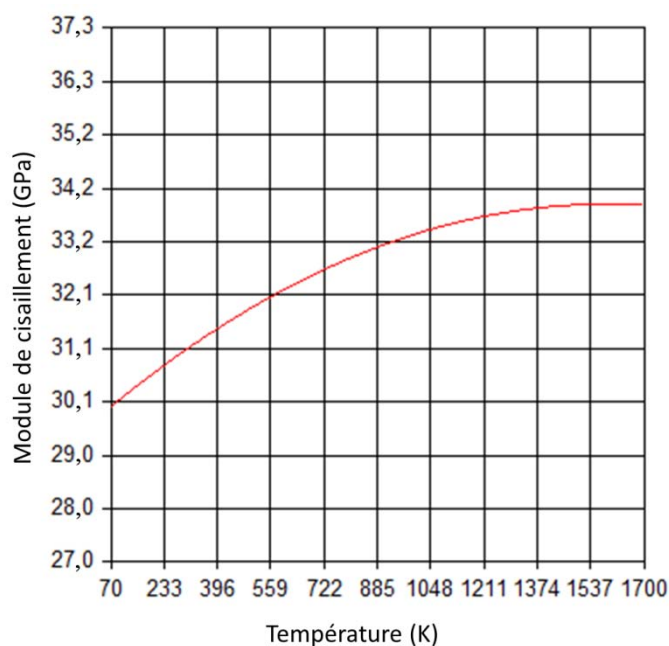


Figure III.19 – Module de cisaillement du quartz en fonction de la température [III\_15, 16]

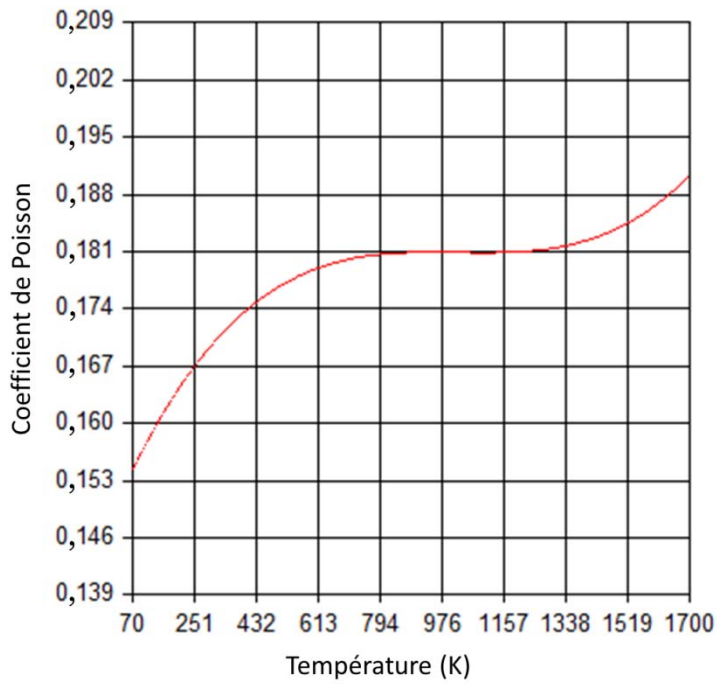


Figure III.20 – Coefficient de Poisson du quartz en fonction de la température [III\_15, 16]

L'évolution des coefficients instantanés et moyens de dilatation thermique du quartz en fonction de la température est illustrée sur la Figure III.21.

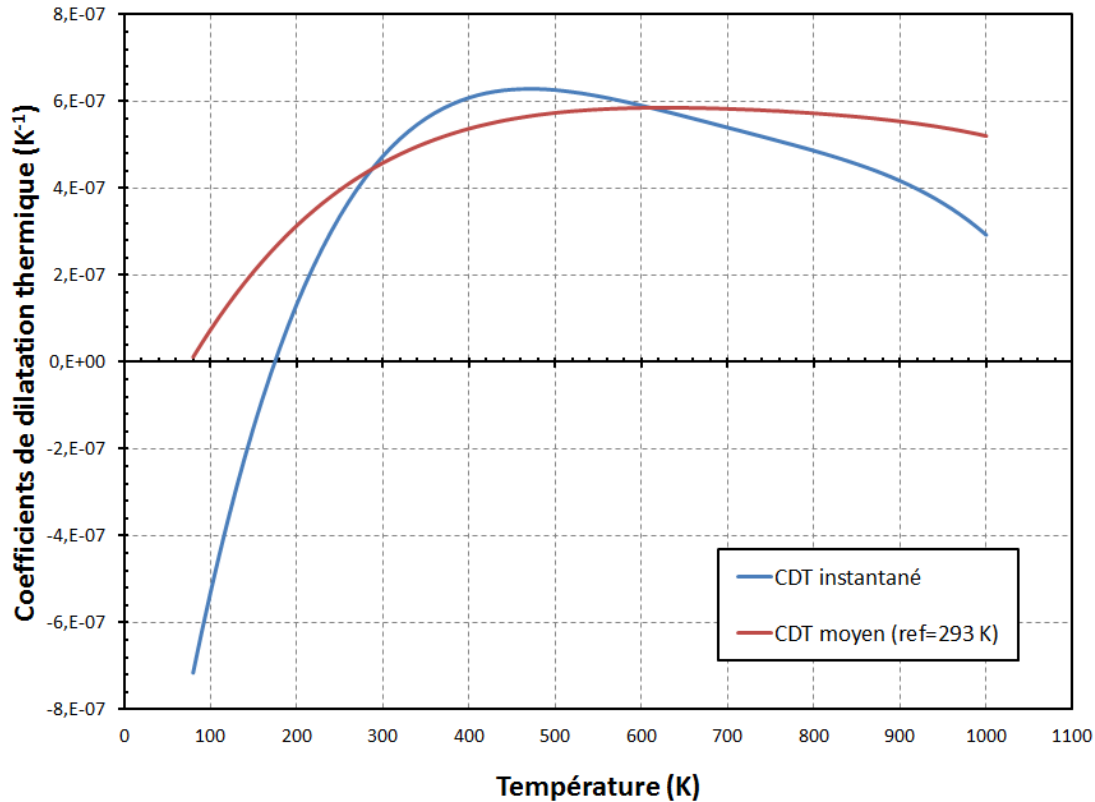


Figure III.21 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique du quartz en fonction de la température [III\_17, 18]



### III.3.4. Indium

L'indium est un élément chimique, de symbole In et de numéro atomique 49. Il a un système cristallin quadratique.

Dans cette étude, il est considéré comme isotrope. Les modules d'Young, de cisaillement et le coefficient de Poisson de l'indium en fonction de la température sont donnés sur les Figure III.22, Figure III.23 et Figure III.24.

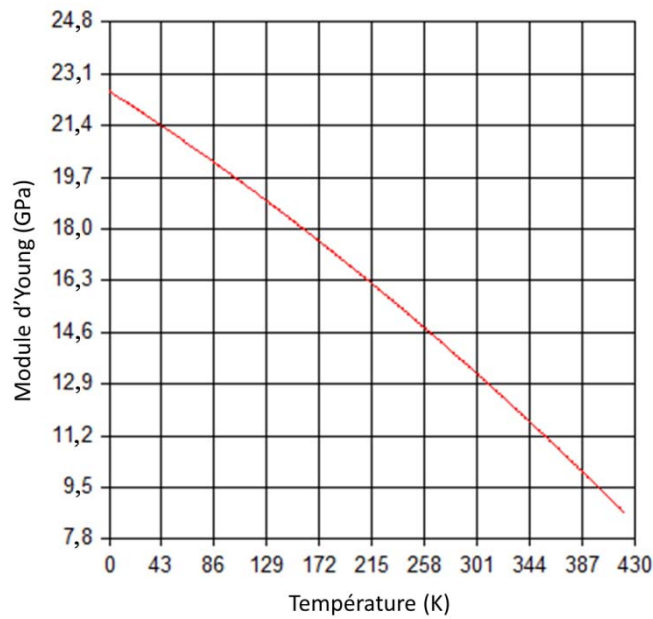


Figure III.22 – Module d'Young de l'indium en fonction de la température [III\_19, 20]

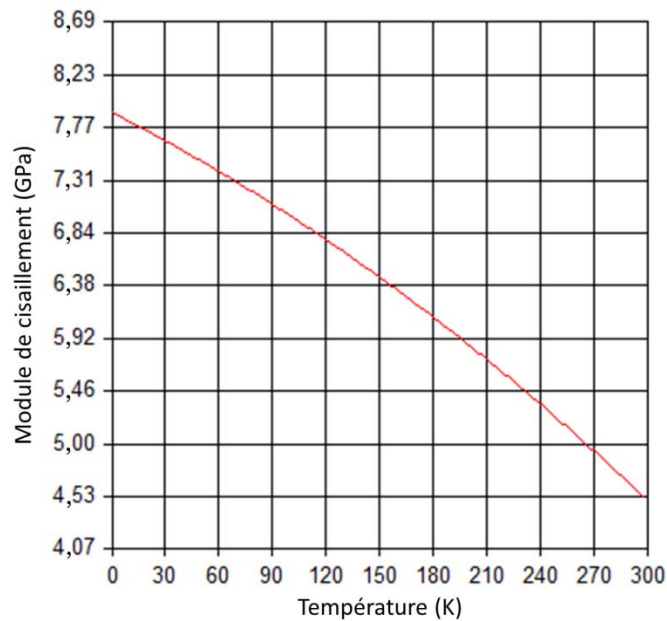


Figure III.23 – Module de cisaillement de l'indium en fonction de la température [III\_19]

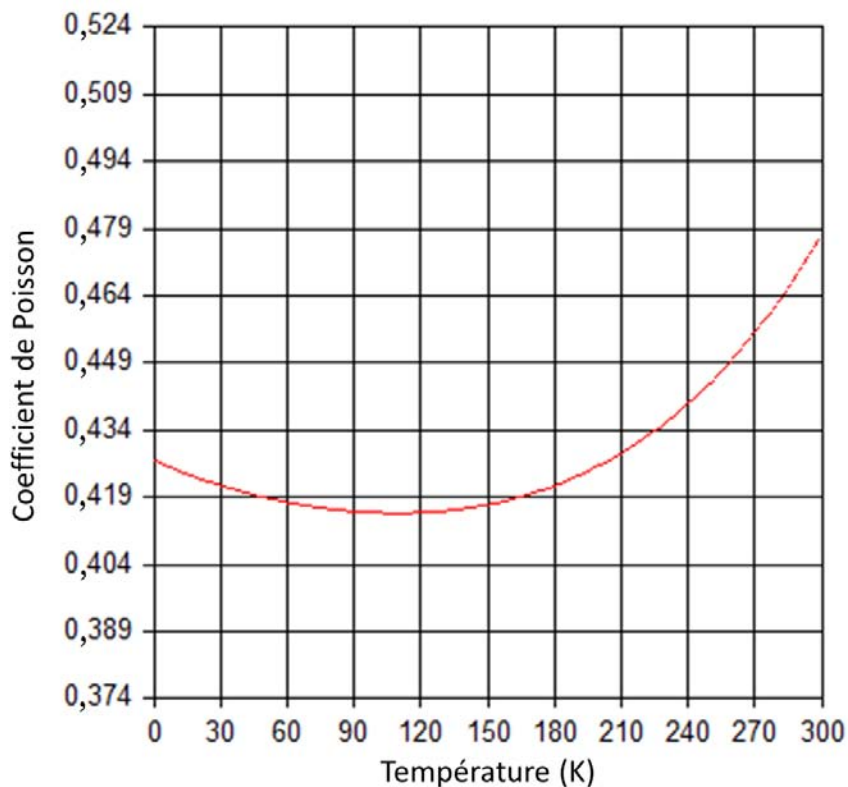


Figure III.24 – Coefficient de Poisson de l’indium en fonction de la température [III\_19, 20]

Pour l’indium polycristallin, la variation des modules élastiques en fonction de la température est spécifiée par la formule suivante :

$$\frac{C(T)}{C(295)} = C_0 - \frac{s}{\exp(\theta_E / T) - 1} \quad (III-25)$$

où  $C(T)$  représente un coefficient du tenseur des modules élastiques,  $C_0 = C(0) / C(295)$ ,  $\theta_E$  est la température d’Einstein et  $s = 3\kappa\theta_E\gamma(1 + \gamma)$  où  $\gamma$  est le paramètre de Grüneisen et  $\kappa = 1,3806488 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , la constante de Boltzmann.

Tableau III.4 – Modules élastiques à 295 K et les constantes de l’Eq.(III-25) [III\_21]

	$C_1$ (GPa)	$G$ (GPa)	$B$ (GPa)	$E$ (GPa)	$\nu$
$C(295)$	48,19	4,394	42,33	12,74	0,4498
$C_0$	1,167	1,556	1,110	1,536	0,9574
$s$	0,08297	0,1806	0,07059	0,1814	-0,01518
$\theta_E(K)$	120,6	82,87	146,4	86,02	90,83

Dans ce tableau,  $B$  est le module de compressibilité et  $C_1$  est le module élastique en mode longitudinal. L’évolution de ces modules est donnée sur la Figure III.25.

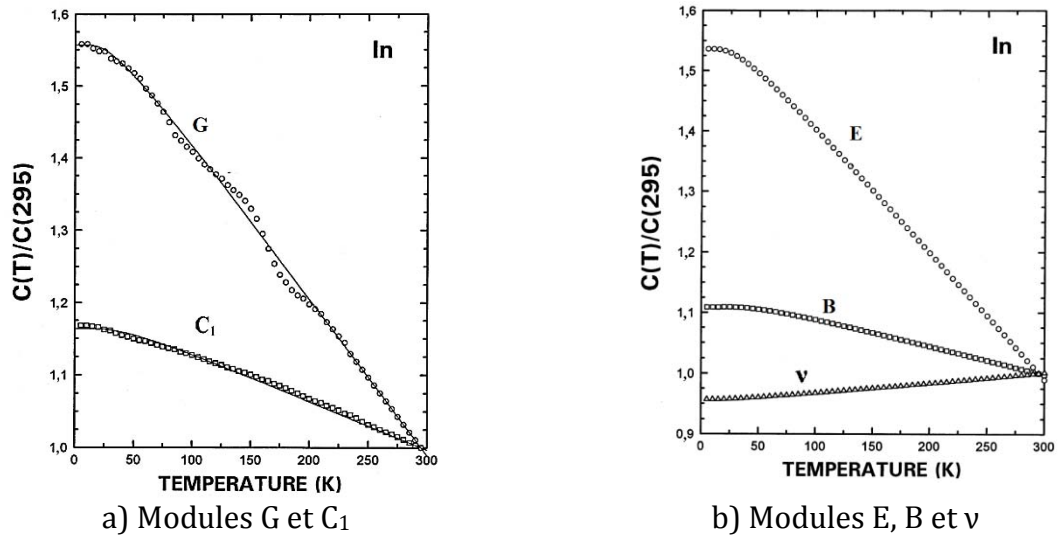


Figure III.25 – Variation des modules élastiques en fonction de la température [III\_21]

L'évolution des coefficients instantanés et moyens de dilatation thermique de l'indium en fonction de la température est illustrée sur la Figure III.26.

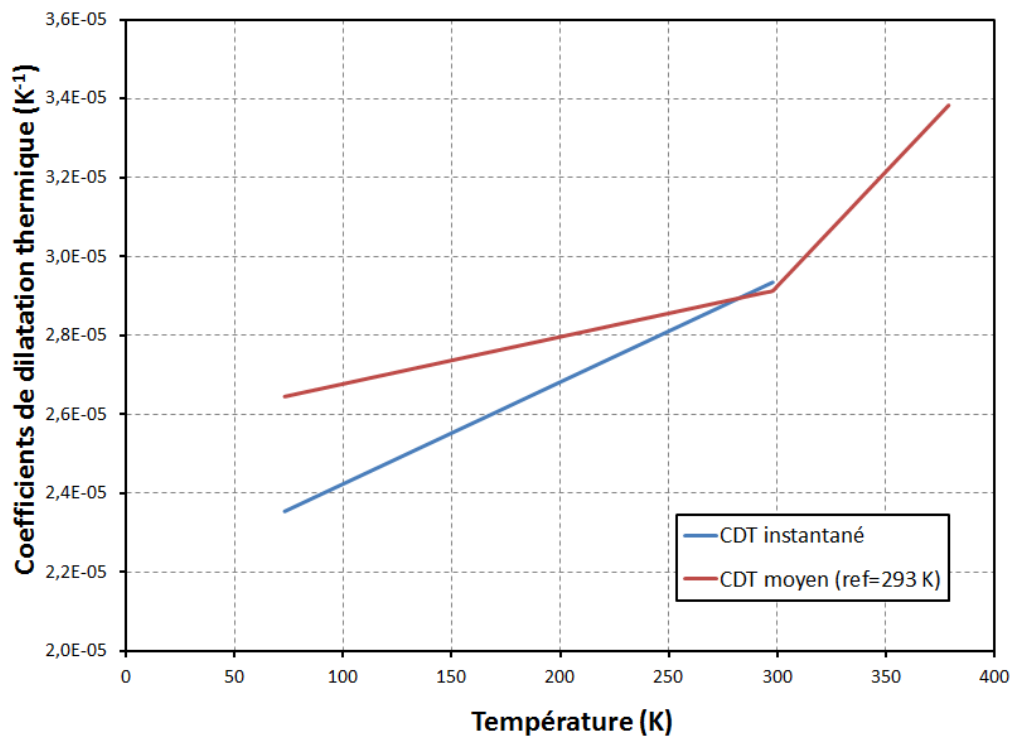


Figure III.26 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique de l'indium en fonction de la température [III\_22, 23]

Les courbes d'érouissage de l'indium à différentes températures sont tracées sur la Figure III.27. Durant sa thèse, Ben Khelifa [III\_24] a corrigé ces courbes en faisant des comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux, et les courbes corrélées à 11 températures sont données par la Figure III.28.

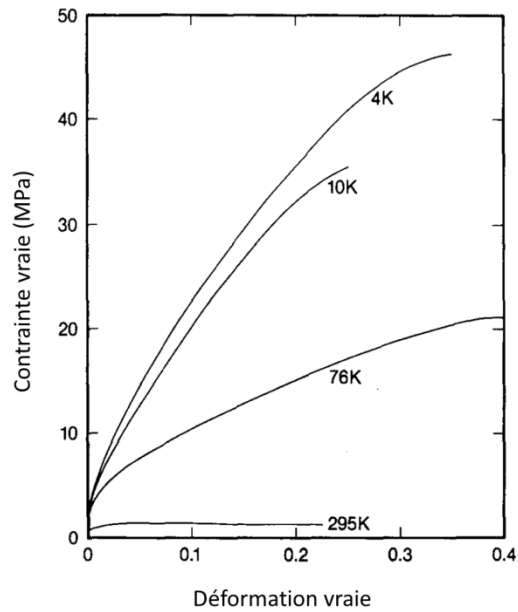


Figure III.27 – Courbes d’érouissage de l’indium à 4 différentes température [III\_25]

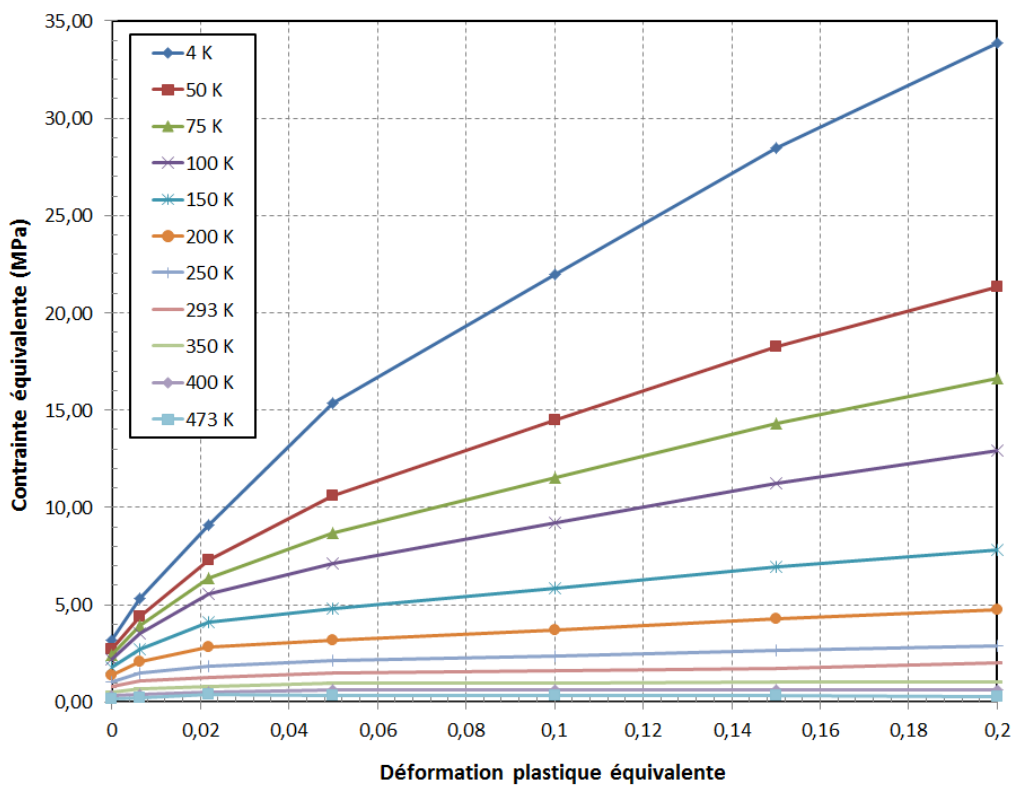


Figure III.28 – Courbes d’érouissage isotrope de l’indium à différentes températures [III\_24]

### III.3.5. CdHgTe

Le tellure de mercure-cadmium (CdHgTe ou CMT, souvent appelé « mercatel », abréviation du nom anglophone mercury cadmium telluride) est un alliage de tellure de

### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

mercure (HgTe) et de tellurure de cadmium (CdTe). Sa formule générale est  $Cd_xHg_{1-x}Te$  et ses propriétés varient en fonction de sa composition en cadmium et mercure.

C'est un matériau fragile à cause des liaisons faibles que forme le mercure avec le tellure. Ses propriétés thermomécaniques sont peu connues. Il est supposé que ses propriétés mécaniques varient faiblement avec la température. La Figure III.29 illustre le module d'Young et la dureté du  $Cd_{0.22}Hg_{0.78}Te$  obtenue par nano et micro-indentation avec des indenteurs de Berkovich.

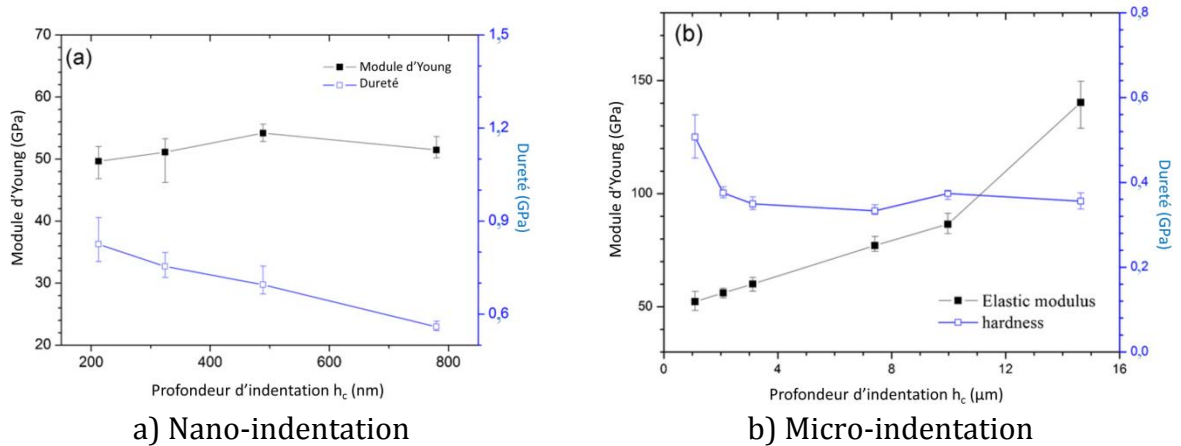


Figure III.29 – Dureté et module d'Young du  $Hg_{0.78}Cd_{0.22}Te$  d'orientation  $\langle 111 \rangle$  calculés à partir de la (a) nano-indentation et de la (b) micro-indentation en fonction de la profondeur de pénétration [III\_26]

L'évolution du coefficient instantané de dilatation thermique du CMT pour  $x=0,2$  et  $0,7$  en fonction de la température est représentée sur la Figure III.30.

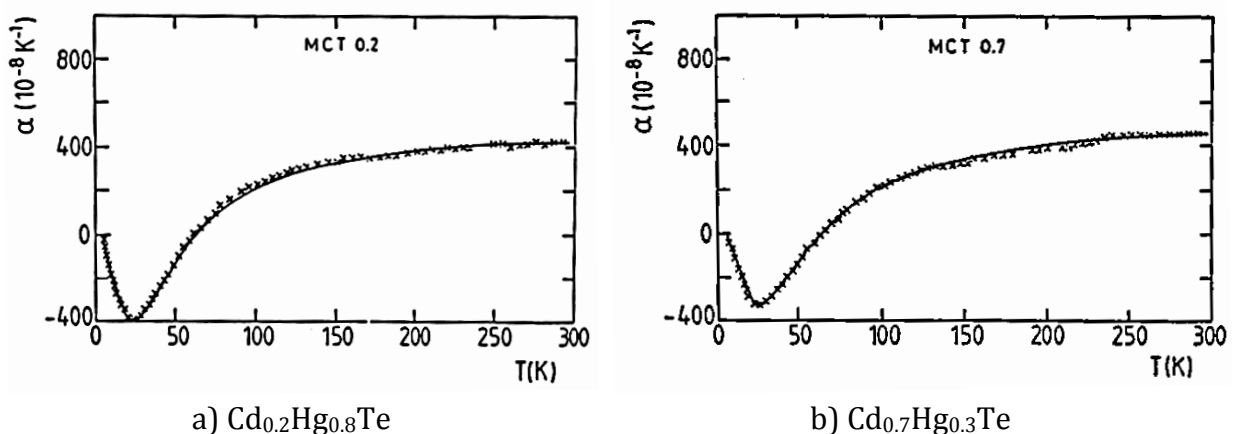


Figure III.30 – Coefficient de dilatation thermique du  $Hg_{1-x}Cd_xTe$  en fonction de la température a)  $x=0,2$ , b)  $x=0,7$  (les carrés viennent de [III\_27, 28] et la ligne continue vient du modèle de Bagot et al. [III\_29])

### III.3.6. CdZnTe

Le tellure de zinc-cadmium (CdZnTe ou CZT) est un alliage de tellure de cadmium (CdTe) et le tellure de zinc (ZnTe). Sa formule générale est  $Cd_{1-y}Zn_yTe$  et ses propriétés varient en fonction de sa composition en cadmium et zinc.

Ses propriétés thermomécaniques très peu connues, sont supposées varier faiblement avec la température. Maheswaranathan et al. [III\_30] ont utilisé des mesures ultrasoniques pour déterminer les constantes élastiques du CdTe et du  $Cd_{0.52}Zn_{0.48}Te$  à 296 K avec des pressions hydrostatiques allant jusqu'à 4 kbar. Le Tableau III.5 résume les constantes élastiques de ces matériaux.

Tableau III.5 – Constantes élastiques du CdTe et du  $Cd_{0.52}Zn_{0.48}Te$  à 296 K et 1 atm [III\_31]

Constantes ( $\times 10^{10}$ Pa)	$c_L$	$c_S$	$c_{44}$	$c_{11}$	$c_{12}$	B
CdTe	6,52	0,832	1,99	5,36	3,7	4,25
$Cd_{0.52}Zn_{0.48}Te$	7,3	1,01	2,38	6,0	3,8	4,5

$B$  est le module de compressibilité,  $c_s = (c_{11} + c_{12}) / 2$  est le module de cisaillement,  $c_L = (c_{11} + c_{12} + 2c_{44}) / 2$  est le module du mode longitudinal.

### III.3.7. Epoxy

Les polyépoxydes, encore appelés polymères époxyde ou improprement « époxy », sont fabriqués par polymérisation de monomères époxyde avec un agent de réticulation (souvent appelé durcisseur) qui peut être un anhydride d'acide, un phénol ou le plus souvent une amine : ce sont des polymères bicomposants.

La phase amorphe d'un polymère ou d'un verre est caractérisée par sa température de transition vitreuse ( $T_g$ ). En termes de propriétés physiques, la température de transition vitreuse d'une matière est souvent décrite comme représentant l'intervalle de température à travers lequel la matière passe d'un état caoutchouteux à un état vitreux, solide (rigide).

Il existe plusieurs types d'époxy dont les noms commerciaux sont Tra-Con, Epotek, Hysol, etc. Les propriétés thermomécaniques de l'époxy utilisé varient significativement en fonction de la température. Le Tableau III.6 indique le module d'Young et le coefficient de Poisson de l'époxy en fonction de la température.

Tableau III.6 – Tableau récapitulatif des propriétés élastiques de l'époxy [III\_32]

Température (K)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
293	3664,06	0,358
250	4108,86	0,365
200	4473,73	0,349
150	5744,85	0,334
100	6993,42	0,35

La Figure III.31 illustre la variation du module d'Young de l'époxy en fonction de la température.

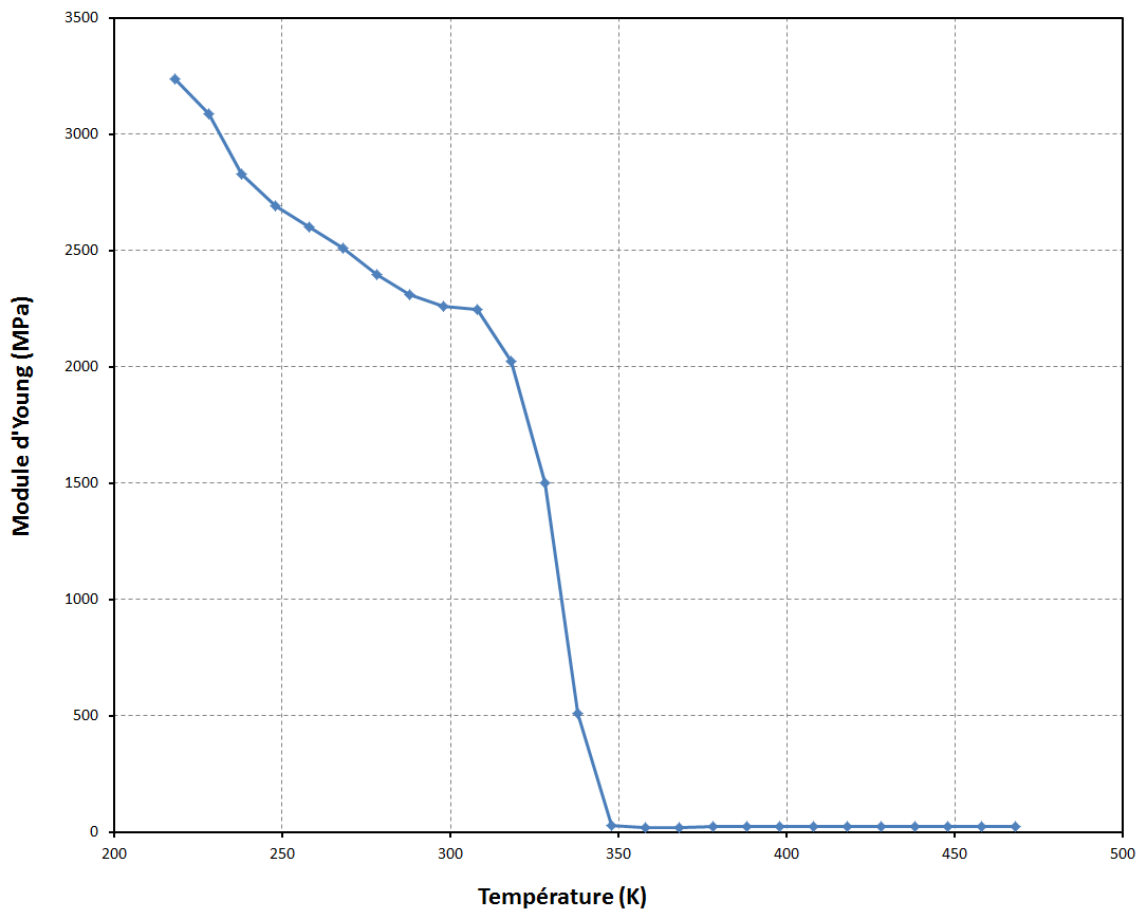


Figure III.31 – Variation du module d'Young de l'époxy en fonction de la température [III\_33]

On peut constater sur cette figure la température  $T_g$  aux alentours de 340 K.

L'évolution des coefficients instantanés et moyens de dilatation thermique de l'époxy en fonction de la température est donnée sur la Figure III.32.

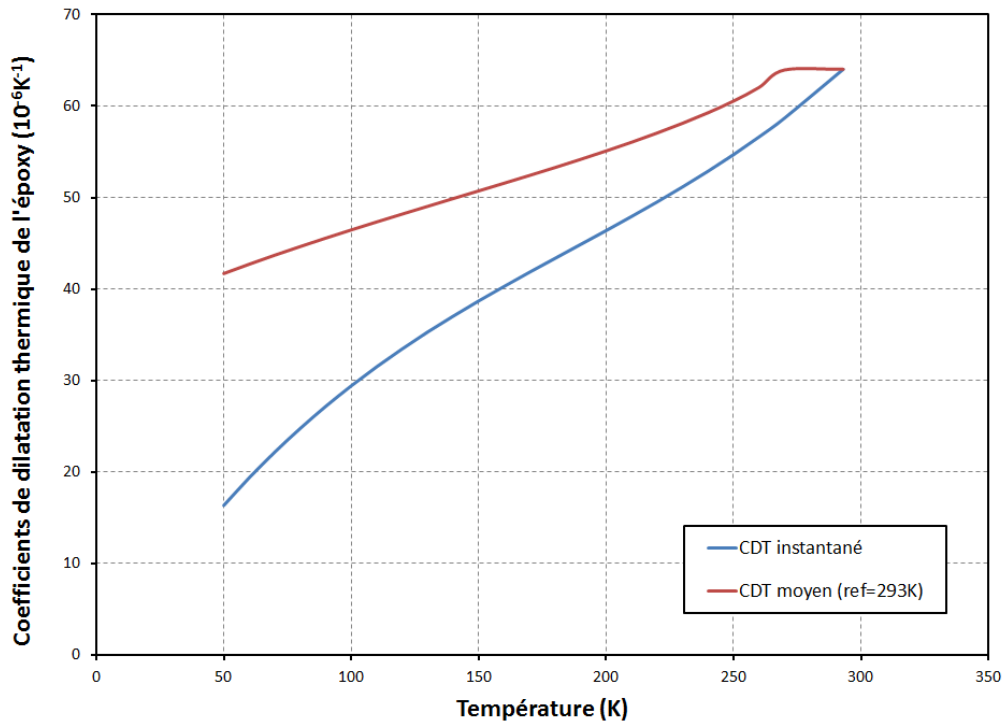


Figure III.32 – Coefficients instantané et moyen de dilatation thermique de l'époxy en fonction de la température

### III.3.8. Intermétalliques Au-In

Les intermétalliques se forment lors de l'hybridation de l'assemblage flip chip. Dans le cas de cette étude, l'or contenu dans les UBM diffuse dans les billes d'indium pour donner des intermétalliques de type  $Au_xIn_y$ . Le diagramme de phase Au-In est rappelé sur la Figure III.33.

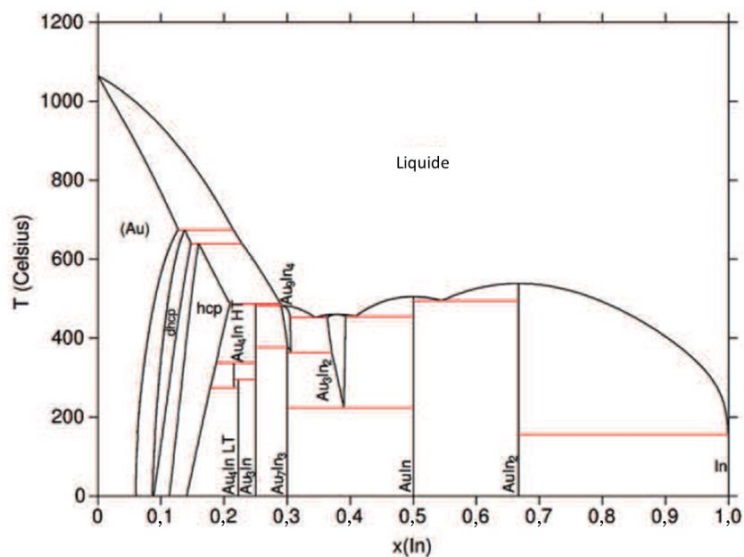


Figure III.33 – Diagramme de phase de l'or-indium [III\_34, 35]



### III.3. Définition des propriétés thermomécaniques des matériaux étudiés

Ce diagramme permet de déduire que le composant intermétallique formé majoritairement est l' $\text{AuIn}_2$  car l'indium est dominant et la température est inférieure à  $200^\circ\text{C}$ . Pour confirmer cette déduction, une microanalyse aux rayons X a été faite.

La microanalyse X permet une analyse élémentaire, par détection des raies caractéristiques X des éléments chimiques en présence sur un échantillon. Elle permet des analyses ponctuelles avec une résolution spatiale de l'ordre de  $1\ \mu\text{m}^3$ . Elle est qualitative et quantitative. L'EDS (Energy Dispersive Spectroscopy) est une des méthodes pratiquée sur le microscope électronique à balayage (MEB). Ainsi, une analyse EDS a été effectuée sur un échantillon d'assemblage flip chip avec une couche pleine d'indium dans la zone d'interconnexion (afin d'obtenir des intermétalliques de taille acceptable pour l'analyse). Les résultats obtenus montrent qu'il s'agit essentiellement d'intermétallique de type  $\text{AuIn}_2$  (Figure III.34).

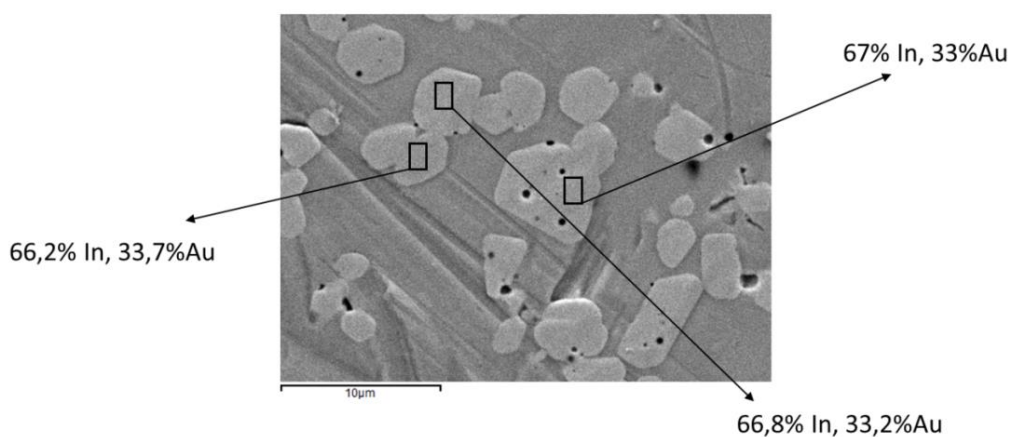


Figure III.34 – Analyse EDS sur une couche d'interconnexion pleine d'indium [R. PESCI, LEM3]

Les propriétés thermomécaniques de ces intermétalliques sont mal connues c'est pour cela qu'une méthode de caractérisation mécanique a été réalisée dans cette étude. Les quelques rares propriétés de ces IMCs trouvées dans la bibliographie concernant le CDT à la température ambiante listé dans le Tableau III.7.

Tableau III.7 – Coefficients de dilatation thermique de l' $\text{AuIn}_2$ , de l'or et de l'indium [III\_36]

	$\text{AuIn}_2^a$	$\text{Au}^b$	$\text{In}^b$
$\alpha_a \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$	1,141(45)	1,41	2,48
$\alpha_{\text{volume}}/\text{Å}^3 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$	3,442(122)		
$\alpha_{\text{densité}} \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$	-3,385(122)		
Structure	cfc	cfc	tfc
$a, c/\text{Å}$	6,517	4,079	3,252; 4,946
Volume/ $\text{Å}^3$	275,99		
Densité g/cc	10,266	19,3	7,3
Température de fusion/ $^\circ\text{C}$	540,7	1064,4	156,6

<sup>a</sup> Les parenthèses indiquent les barres d'erreur

<sup>b</sup> Les données sur les métaux Au et In ont été prises dans les tables de la Corporation Goodfellow

### III.4. Conclusion

La simulation numérique exige une connaissance précise des propriétés thermomécaniques des matériaux constituant la structure modélisée. Des généralités sur les types de comportement thermomécanique ont été présentées puis une étude bibliographique a été faite pour identifier les propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés dans les assemblages flip chip pour détecteur d'IR.

Afin de valider les propriétés des matériaux fournies par la bibliographie, une méthode expérimentale de caractérisation de matériaux a été adoptée : la nano-indentation.

### III.5. Références bibliographiques

- [III\_1] S. Forte and M. Vianello, "Symmetry classes for elasticity tensors," *J. Elast.*, vol. 43, pp. 81–108, 1996.
- [III\_2] Y. Chevalier, "Comportements élastique et viscoélastique des composites," *Tech. l'Ingénieur*, vol. A 7750, 1988.
- [III\_3] R. Fortunier, "Comportement Mécanique des Matériaux." Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, [http://www.emse.fr/~fortunier/cours/Constitutive\\_Equations/poly.pdf](http://www.emse.fr/~fortunier/cours/Constitutive_Equations/poly.pdf).
- [III\_4] N. W. Sharpe, Jr., B. Yuan, and R. Vaidyanathan, "Measurements of Young's modulus, poisson's ratio, and tensile strength of polysilicon," in *The Tenth IEEE International Workshop on Microelectromechanical Systems*, 1997, pp. 424–429.
- [III\_5] H. Over, O. Knotek, and E. Lugscheider, "Elastische Eigenschaften von einkristallinem Silicium in Abhängigkeit von der Temperatur und der Versetzungsdichte," *Z. Met.*, vol. 73, no. 9, p. 552, 1982.
- [III\_6] H. J. McSkimin, "Measurement of Ultrasonic Wave Velocities and Elastic Moduli for Small Solid Specimens at High Temperatures," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, p. 287, 1959.
- [III\_7] N. Ono, K. Kitamura, K. Nakajima, and Y. Shimanuki, "Measurement of Young's Modulus of Silicon Single Crystal at High Temperature and Its Dependency on Boron Concentration Using the Flexural Vibration Method," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 39, pp. 368–371, 2000.
- [III\_8] C. A. Swenson, "Recommended values for the thermal expansivity of Silicon from 0 to 1000 K," *J. Phys. Chem. Ref. Data*, vol. 12, no. 2, p. 179, 1983.
- [III\_9] R. R. Reeber and K. Wang, "Thermal expansion and lattice parameters of group IV semiconductors," *Mater. Chem. Phys.*, vol. 46, pp. 259–264, 1996.

- 
- [III\_10] X. Cheng, C. Liu, and V. V Silberschmidt, "Numerical analysis of thermo-mechanical behavior of indium micro-joint at cryogenic temperatures," *Comput. Mater. Sci.*, vol. 52, pp. 274–281, 2012.
- [III\_11] J. F. Lynch, C. G. Ruderer, and W. H. Duckworth, *Engineering Properties of Selected Ceramic Materials*, J.F. Lynch. American Ceramic Society, 1966.
- [III\_12] H. P. Singh, "Determination of Thermal Expansion of Germanium, Rhodium, and Iridium by X-rays," *Acta Crystallogr. Sect. A*, vol. 24, p. 469, 1968.
- [III\_13] D. F. Gibbons, "Thermal Expansion of Some Crystals with the Diamond Structure," *Phys. Rev.*, vol. 112, p. 136, 1958.
- [III\_14] Y. Ma and J. S. Tse, "Ab initio determination of crystal lattice constants and thermal expansion for germanium isotopes," *Solid State Commun.*, vol. 143, pp. 161–165, 2007.
- [III\_15] M. Fukuhara and A. Sanpei, "Effects on High-Temperature-Elastic Properties on  $\alpha$ -/ $\beta$ -Quartz Phase Transition of Fused Quartz," *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 18, p. 751, 1999.
- [III\_16] M. Fukuhara, A. Sanpei, and K. Shibuki, "Low temperature-elastic moduli, Debye temperature and internal dilational and shear frictions of fused quartz," *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 32, p. 1207, 1997.
- [III\_17] T. A. Hahn and R. K. Kirby, *Thermal Expansion - 1971*. American Institute of Physics, 1972, p. 13.
- [III\_18] N. Oikawa, A. Maesono, and R. P. Tye, "Thermal Expansion Measurements of Quartz Glass by Laser Interferometry," in *24th International Thermal Conductivity conference*, 1997, p. 405.
- [III\_19] B. S. Chandrasekhar and J. A. Rayne, "Elastic Constants of Indium from 1.4° to 300° K," *Phys. Rev.*, vol. 124, no. 4, p. 1011, 1961.
- [III\_20] W. Koester, "No Title," *Z. Met.*, vol. 39, no. 1, p. 1, 1948.
- [III\_21] S. Kim and H. Ledbetter, "Low-temperature elastic coefficients of polycrystalline indium," *Mater. Sci. Eng.*, vol. A252, pp. 139–143, 1998.
- [III\_22] P. Hidnert and M. G. Blair, "Thermal Expansivity and Density of Indium," *J. Res. Natl. Bur. Stand. (1934)*, vol. 30, p. 427, 1943.
- [III\_23] V. T. Deshpande and R. R. Pawar, "Anisotropic Thermal Expansion of Indium," *Acta Crystallogr. Sect. A*, vol. 25, p. 415, 1969.
- [III\_24] S. Ben Khelifa, "Fiabilisation Thermomécanique des Assemblages Flip-Chip," Université De Lorraine, 2012.
- [III\_25] R. P. Reed, C. N. McCowan, R. P. Walsh, L. A. Delgado, and J. D. McColskey, "Tensile strength and ductility of indium," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 102, no. 2, pp. 227–236, 1988.
-

- [III\_26] H. Zhou, S. Qiu, X. Zhang, and C. Xu, “Mechanical characteristics of soft-brittle HgCdTe single crystals investigated using nanoindentation and nanoscratching,” *Appl. Surf. Sci.*, vol. 258, pp. 9756–9761, 2012.
- [III\_27] J. G. Collins, G. K. White, J. A. Birch, and T. F. Smith, “Thermal expansion of ZnTe and HgTe and heat capacity of HgTe at low temperatures,” *J. Phys. C Solid State Phys.*, vol. 13, no. 9, pp. 1649–1656, 1980.
- [III\_28] T. F. Smith and G. K. White, “The low-temperature thermal expansion and Gruneisen parameters of some tetrahedrally bonded solids,” *J. Phys. C Solid State Phys.*, vol. 8, no. 13, pp. 2031–2042, 1975.
- [III\_29] D. Bagot, R. Granger, and S. Rolland, “Elastische Eigenschaften von einkristallinem Silicium in Abhängigkeit von der Temperatur und der Versetzungsdichte,” *Phys. Status Solidi*, vol. 177, p. 295, 1993.
- [III\_30] P. Maheswaranathan, R. J. Sladek, and U. Debska, “Elastic constants and their pressure dependences in  $\text{Cd}(1-x)\text{Mn}(x)\text{Te}$  with  $0 \leq x \leq 0.52$  and in  $\text{Cd}(0.52)\text{Zn}(0.48)\text{Te}$ ,” *Phys. Rev. B*, vol. 31, no. 8, pp. 5212–5216, 1985.
- [III\_31] P. Capper, *Properties of Narrow Gap Cadmium-Based Compounds*, no. 10. Inspec/IEE, 1994.
- [III\_32] H. Cease, P. F. Derwent, H. T. Diehl, and D. F. J. Fast, “Measurement of mechanical properties of three epoxy adhesives at cryogenic temperatures for CCD construction,” 2006.
- [III\_33] A. Bedoin, “Simulation thermo-mécanique d’une matrice infrarouge par éléments finis (Ansys),” CEA-LETI, Sep. 2011.
- [III\_34] G. Cacciamani, G. Borzone, and A. Watson, “Thermodynamic modelling and assessment of the Au-In-Sn system,” *Comput. Coupling Phase Diagrams Thermochem.*, vol. 33, no. 1, pp. 100–108, Mar. 2009.
- [III\_35] H. S. Liu, Y. Cui, K. Ishida, and Z. P. Jin, “Thermodynamic reassessment of the Au-In binary system,” *Comput. Coupling Phase Diagrams Thermochem.*, vol. 27, pp. 27–37, 2003.
- [III\_36] C. K. Saw and W. J. Siekhaus, “Thermal expansion of  $\text{AuIn}_2$ ,” *Scr. Mater.*, vol. 53, no. 10, pp. 1153–1157, Nov. 2005.

# Chapitre IV

## Caractérisation des matériaux par nano-indentation

### Sommaire

---

<b>IV.1. Introduction.....</b>	<b>90</b>
<b>IV.2. Analyse théorique.....</b>	<b>90</b>
<b>IV.3. Résultats des expérimentations .....</b>	<b>95</b>
<b>IV.4. Conclusion .....</b>	<b>101</b>
<b>IV.5. Références bibliographiques.....</b>	<b>101</b>

---

## IV.1. Introduction

L'indentation consiste à appliquer une charge, dans des conditions déterminées, à la surface du matériau, à l'aide d'un indenteur ou pénétrateur. Après l'essai, le matériau s'étant déformé, on observe une empreinte ; **durant l'essai, on peut tracer la courbe force-déplacement** que l'on peut étudier. Les conditions d'essai sont la géométrie de l'indenteur, la force et la durée. La nano-indentation est une méthode expérimentale de caractérisation de **matériaux qui se différencie de l'indentation par la faible taille de l'empreinte (quelques centaines de nanomètres)**. Elle permet de déterminer la dureté et le module d'Young d'un matériau.

Ce chapitre présente les résultats de nano-indentation des matériaux constitutifs de l'assemblage flip chip après une analyse théorique de la technique expérimentale.

## IV.2. Analyse théorique

L'étude de la nano-indentation commence par celle du contact mécanique entre deux solides. Le système le plus connu est l'indenteur sphérique pressé sur un échantillon plat. Hertz [IV\_1] qui a été le premier à étudier ce système à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, a montré que le rayon  $a$  du disque de contact peut être calculé en fonction de la force appliquée  $F$ , des propriétés élastiques et des rayons de l'indenteur et de l'échantillon.

$$a^3 = \frac{3 FR_r}{4 E_r} \quad (IV-1)$$

où  $E_r$  est le module réduit qui est une combinaison des modules d'Young  $E_i$  de l'indenteur et  $E$  de l'échantillon et des coefficients de Poisson respectifs  $\nu_i$ ,  $\nu$  de l'indenteur et de l'échantillon, donné par la formule suivante :

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_i^2}{E_i} \quad (IV-2)$$

Et  $R_r$  le rayon combiné de ceux de l'indenteur et de l'échantillon (qui est équivalent au rayon de l'indenteur  $R_i$  lorsque l'échantillon est plat c'est-à-dire  $R \rightarrow \infty$ ).

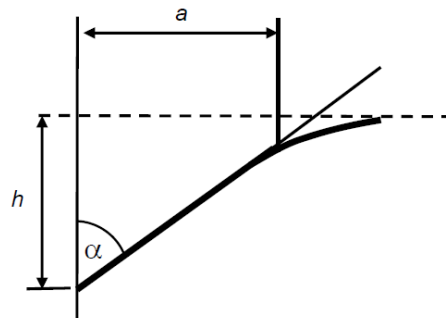
Dans le milieu du XX<sup>ème</sup> siècle, Sneddon a établi un développement similaire dans le cas du contact élastique entre un indenteur conique rigide et un échantillon élastique considéré

comme semi-infini (Figure IV.1). La relation entre la force et le rayon de contact est exprimée en fonction du demi-angle  $\alpha$  **au sommet du cône de l'indenteur**.

$$F = \frac{\pi a}{2} E_r a \cot \alpha \quad (IV-3)$$

Le déplacement de l'échantillon à surface libre sous l'indenteur est donné par la formule :

$$h = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{r}{a} \right) a \cot \alpha \quad \text{avec } r \leq a \quad (IV-4)$$



**Figure IV.1 – Profondeur de pénétration d'un indenteur conique dans le cas d'un contact purement élastique [IV\_2]**

La profondeur maximale est donnée pour  $r = 0$ . Et donc, la force maximale est déduite en exprimant  $a$  en fonction de  $h_{\max} = \frac{\pi}{2} a \cot \alpha$  :

$$F_{\max} = \frac{2}{\pi} E_r h_{\max}^2 \tan \alpha \quad (IV-5)$$

Les équations de contact ci-dessus s'appliquent à un contact purement élastique entre l'indenteur et le spécimen. Le bout pointu du cône ferait en sorte que la déformation plastique se produirait dès que le contact a été fait et donc la singularité de contraintes à la pointe du cône prédite par ces équations est évitée. Dans la pratique, un indenteur n'a pas un bout pointu et donc les premières étapes de contact seraient similaires à ceux impliquant un indenteur sphérique.

En général, les échantillons testés ont un comportement plus complexe et donc on peut observer différentes profondeurs de pénétration illustrées sur la Figure IV.2.

La courbe force-déplacement est utilisée pour déterminer la profondeur de contact en prenant en compte les données élastiques de décharge (même si le contact implique une

déformation plastique). Quelle que soit la forme de l'indenteur réel (sauf l'indenteur sphérique), on peut le modéliser comme un indenteur conique équivalent.

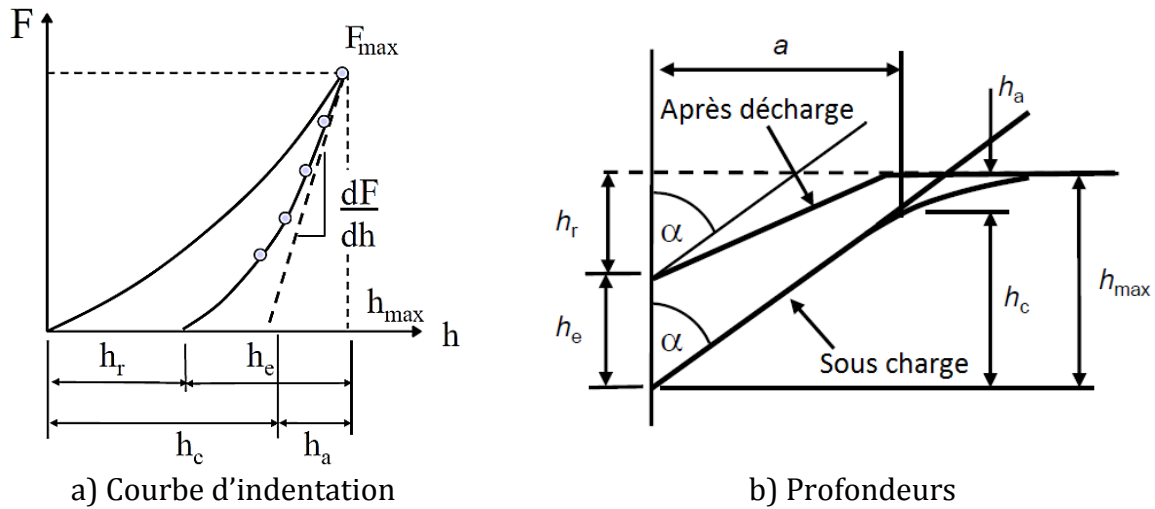


Figure IV.2 – Courbe et profondeurs d'indentation [IV\_2]

Les différentes hauteurs représentées sur la Figure IV.2 ont pour expressions :

$$h_e = \frac{\pi}{2} a \cot \alpha \quad (IV-6)$$

$$h_a = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) a \cot \alpha \quad (IV-7)$$

$$h_{\max} = h_c + h_a = h_c + \left( \frac{\pi - 2}{\pi} \right) h_e \quad (IV-8)$$

Le retour élastique de la surface de l'échantillon correspondant à la profondeur  $h_e$ , d'où la formule (IV-5) peut être appliquée :

$$F_{\max} = \frac{2}{\pi} E_r h_e^2 \tan \alpha \quad (IV-9)$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$\frac{dF}{dh} = \frac{4}{\pi} E_r h_e \tan \alpha \quad (IV-10)$$

Ainsi, on peut déterminer  $h_c$  à partir de l'équation (IV-8) grâce à la relation ci-dessous :



$$h_c = h_{\max} - \frac{2(\pi - 2)}{\pi} \frac{F_{\max}}{\left(\frac{dF}{dh}\right)} \quad (\text{IV-11})$$

Les variables  $h_{\max}$ ,  $F_{\max}$  et  $\frac{dF}{dh}$  sont déterminées expérimentalement.

La méthode d'Oliver et Pharr [IV\_3] donne une approximation semi-empirique de la profondeur  $h_c$  :

$$h_c = h_{\max} - \varepsilon_i \frac{F_{\max}}{\left(\frac{dF}{dh}\right)} \quad (\text{IV-12})$$

Où  $\varepsilon_i$  est une constante dépendant de la forme de l'indenteur ; elle vaut souvent 0,75 et peut être vérifiée expérimentalement.

En pratique, l'extrémité de l'indenteur est sphérique (Figure IV.3) ce qui fait que l'aire projetée théorique ne correspond pas à la réalité expérimentale. Oliver et Pharr ont proposé une méthode de calibration de l'aire projetée réelle avec la formule suivante :

$$A = \sum_{n=0}^8 C_n h_c^{2^{1-n}} \quad (\text{IV-13})$$

Où  $C_0$  correspond à une pointe parfaite de l'indenteur ( $C_0 = 3\sqrt{3} \tan^2 \theta \approx 24,5$  dans le cas d'un indenteur Berkovich), les autres décrivent les déviations de la géométrie dues à l'usure de la pointe.

Pour déterminer ces coefficients, des essais de nano-indentation avec différentes profondeurs sont réalisés sur un matériau homogène dont on connaît exactement le module d'élasticité.

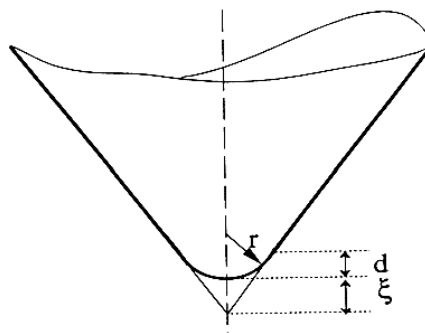


Figure IV.3 – Schéma d'un indenteur à pointe sphérique [IV\_4]

En introduisant la relation (IV-6) dans l'équation (IV-10), on peut déterminer le module réduit :

$$E_r = \frac{1}{2\beta} \frac{dF}{dh} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \quad (IV-14)$$

Avec  $A = \pi a^2$  (aire de contact projetée équivalente à un indenteur conique) et  $\beta$  un facteur qui corrige l'erreur commise en prenant l'équivalent en indenteur conique ; il vaut évidemment 1 pour un indenteur conique et 1,05 pour un indenteur de Berkovich.

La dureté de l'échantillon est donnée par la formule suivante:

$$H = \frac{F}{A} \quad (IV-15)$$

Pour différents types d'indenteur, on peut calculer l'aire projetée de contact  $A$  et la force  $F$ . Les indenteurs de forme pyramidale sont étudiés comme des indenteurs coniques équivalents de demi-angle  $\alpha$  qui donnent un même rapport de l'aire projetée et de la profondeur de pénétration. Les aires de contact projetées et les forces pour les différents types d'indenteurs sont résumées dans le Tableau IV.1. Les 4 principaux types d'indenteur sont illustrés par la Figure IV.4.

Tableau IV.1 – Détermination de la force et de l'aire de contact projetée pour différents types d'indenteur [IV\_2]

Types d'indenteur	Force $F$	Aire projetée $A$	Demi-angle $\theta$ (°)	Demi-angle équivalent $\alpha$ (°)
Sphérique	$\frac{4}{3} E_r R_r^{1/2} h_e^{3/2}$	$\pi(2Rh_c - h_c^2)$	-	-
Conique	$\frac{2}{\pi} E_r h_e^{3/2} \tan \alpha$	$\pi h_c^2 \tan^2 \alpha$	$\alpha$	$\alpha$
Berkovich	$\frac{2}{\pi} E_r h_e^{3/2} \tan \alpha$	$3\sqrt{3} h_c^2 \tan^2 \theta$	65,27	70,296
Vickers	$\frac{2}{\pi} E_r h_e^{3/2} \tan \alpha$	$4h_c^2 \tan^2 \theta$	68	70,3
Knoop	$\frac{2}{\pi} E_r h_e^{3/2} \tan \alpha$	$2h_c^2 \tan \theta_1 \tan \theta_2$	86,25 & 65	77,64
Coin de cube	$\frac{2}{\pi} E_r h_e^{3/2} \tan \alpha$	$3\sqrt{3} h_c^2 \tan^2 \theta$	35,26	42,278

Connaissant à l'avance le coefficient de Poisson de l'échantillon  $\nu$ , on peut déterminer son module d'Young en partant de la formule (IV-2) :

$$E = \frac{-E_r E_i (\nu^2 - 1)}{E_r (\nu_i^2 - 1) + E_i} \quad (\text{IV-16})$$

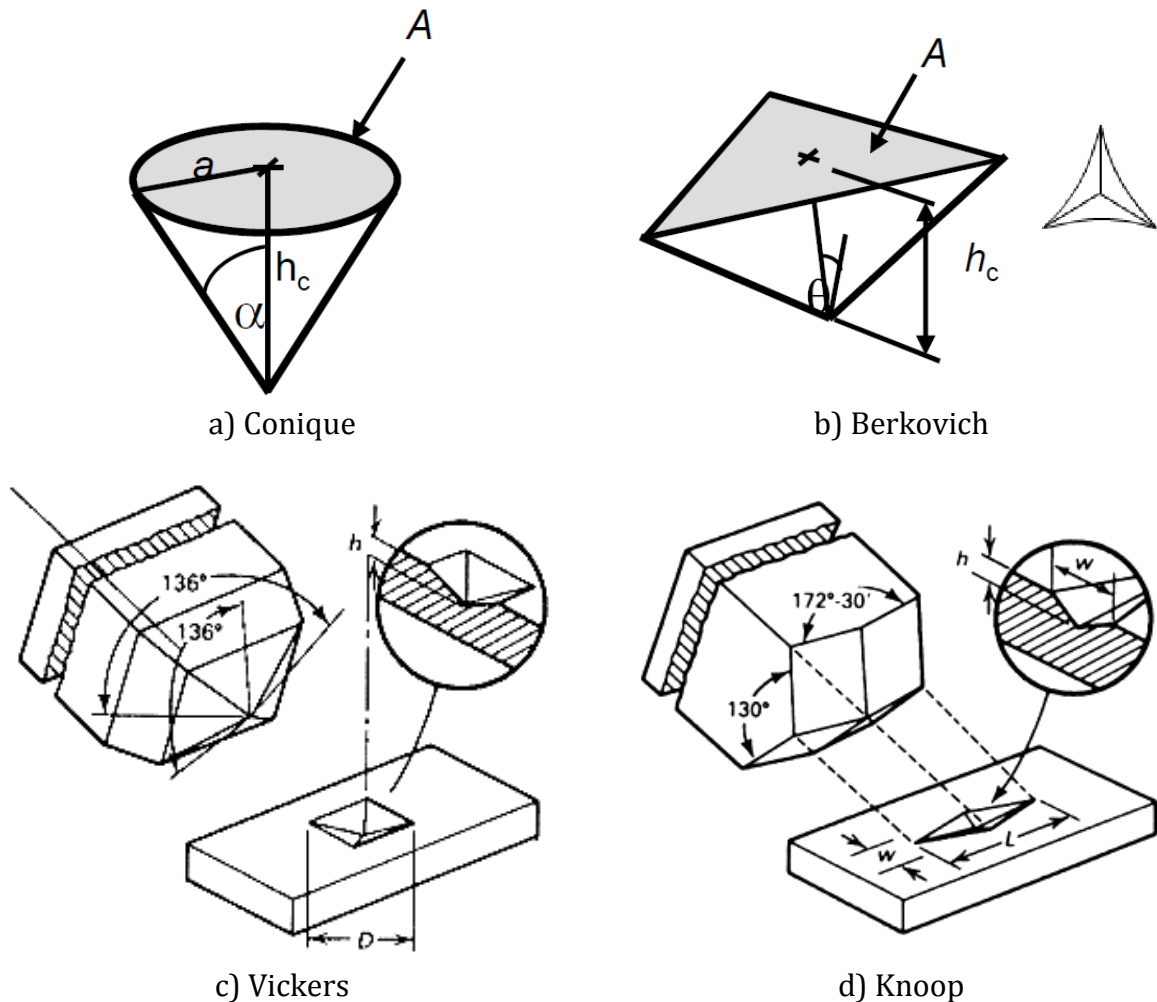


Figure IV.4 - Types d'indenteur [IV\_2]

### IV.3. Résultats des expérimentations

La Figure IV.5 décrit le dispositif expérimental utilisé pour la nano-indentation. La machine utilisée est commercialisée par CSM Instruments et est constituée, en plus d'un microscope optique et d'un dispositif d'indentation, d'un AFM (Atomic Force Microscope) qui permet de visualiser la topographie de la surface de l'échantillon (Figure IV.6). Les essais de nano-indentation ont été réalisés dans le laboratoire LEM3 UMR CNRS 7239 à Metz.

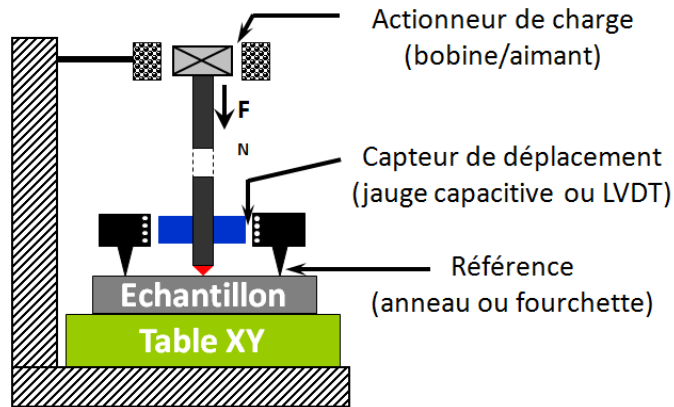


Figure IV.5 – Instrument de nano-indentation

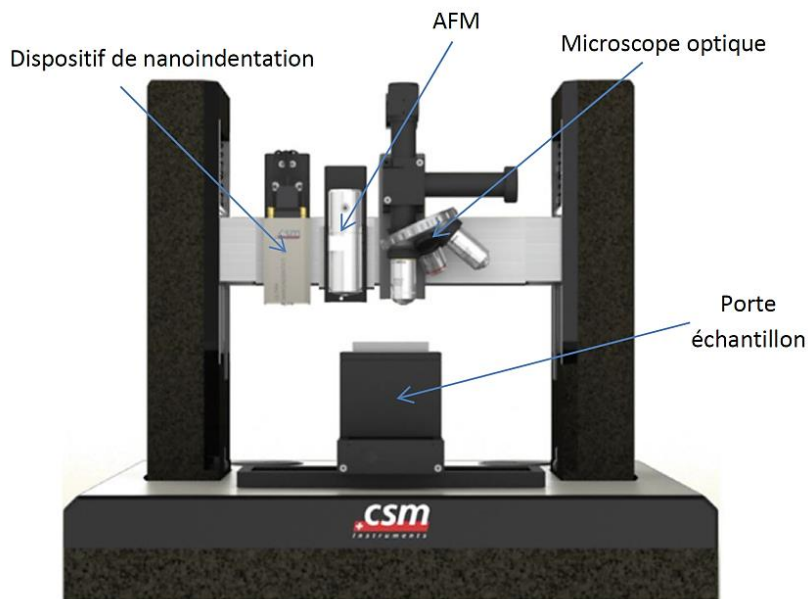


Figure IV.6 – Machine de nano-indentation CSM Instruments

L'échantillon est préalablement poli afin d'avoir une surface de contact parfaitement plane. Les essais ont été faits à température ambiante. La profondeur de pénétration doit être inférieure à 1/10 de l'épaisseur du matériau à caractériser (Figure IV.7); au cas contraire, les propriétés obtenues seront convoluées avec celles de la couche inférieure.

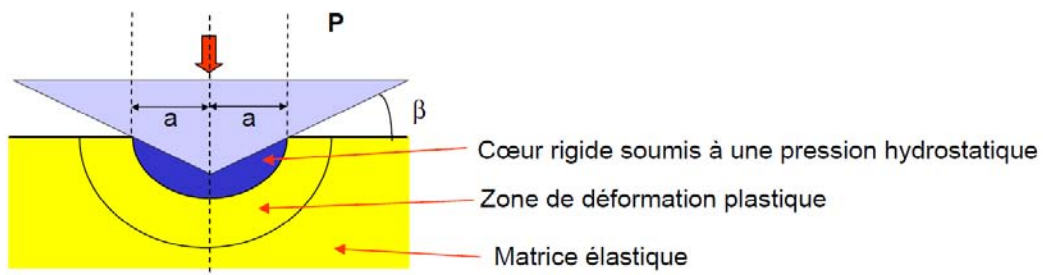


Figure IV.7 – Zone de déformation en nano-indentation

Les profondeurs obtenues lors des tests ne dépassent pas  $2\ \mu\text{m}$ . L'indenteur utilisé est de type Berkovich. Les empreintes sur les matériaux testés sont illustrées sur la Figure IV.8.

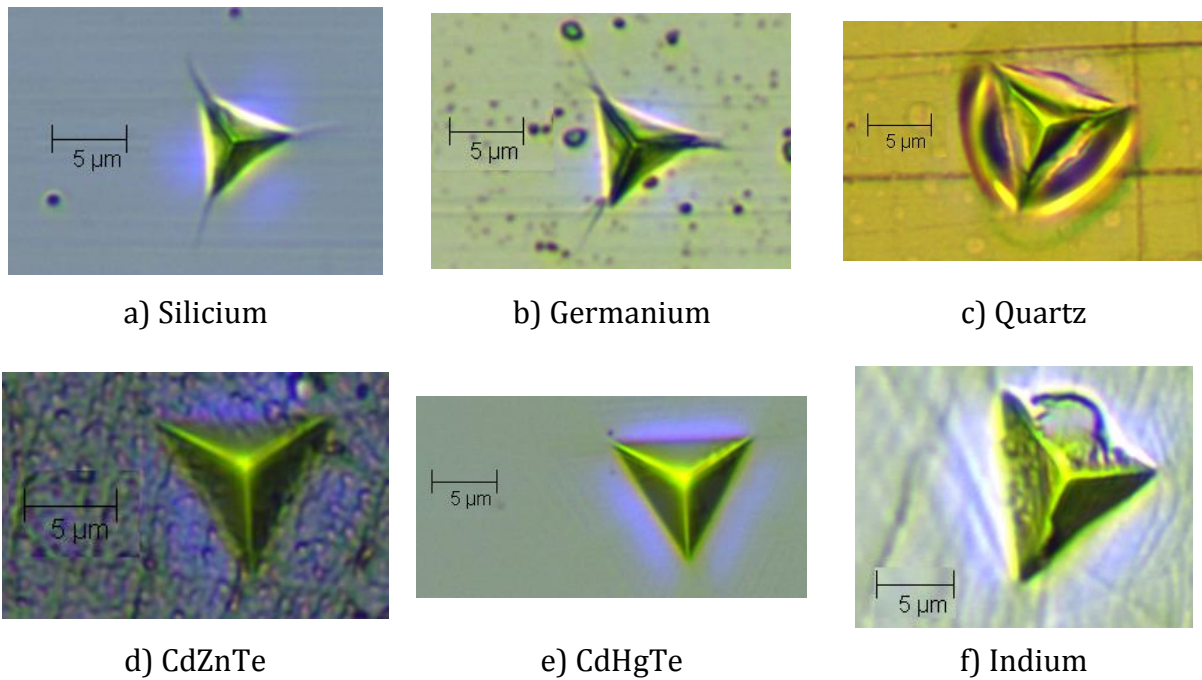
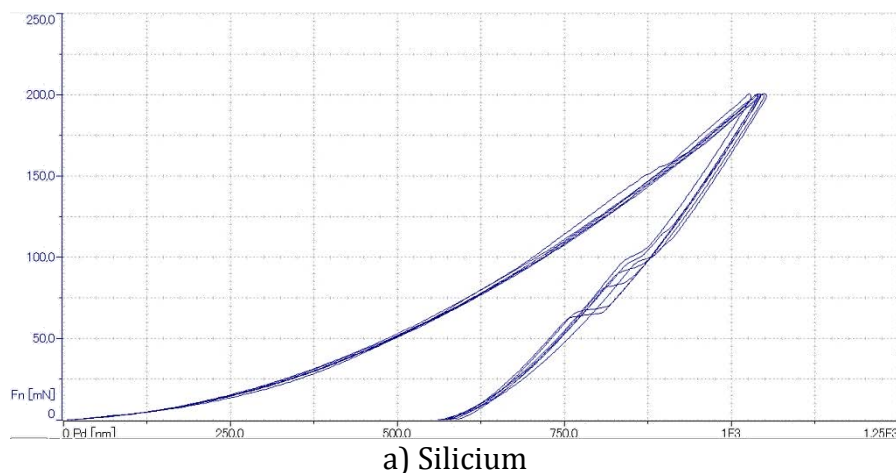
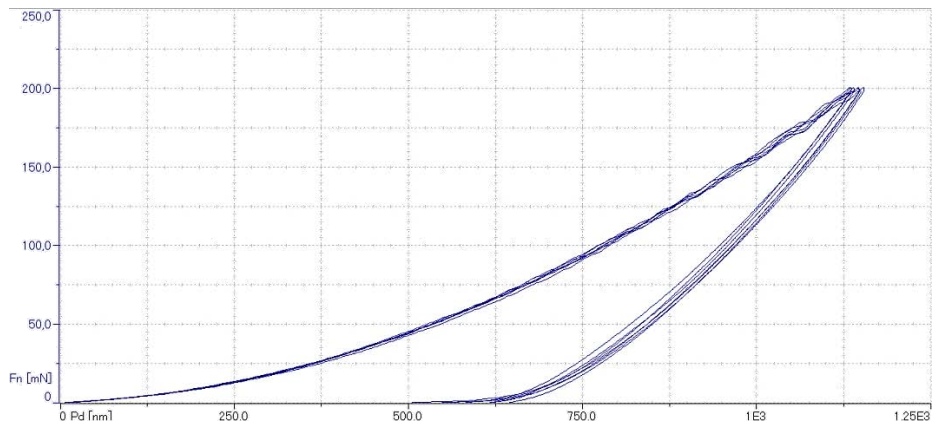


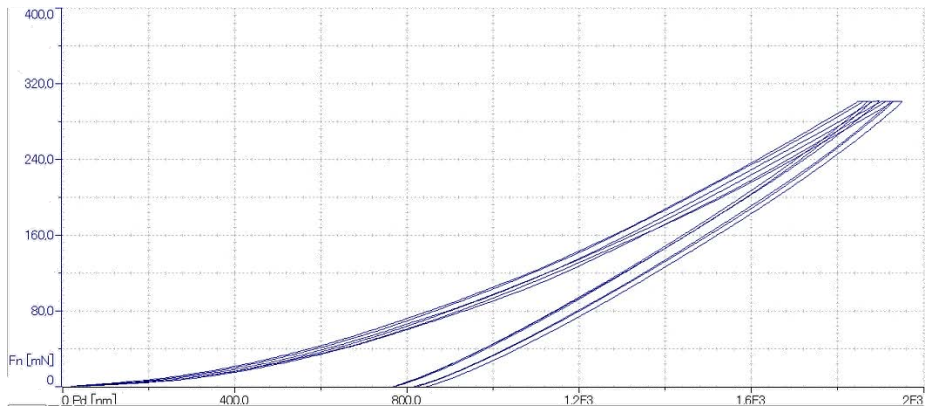
Figure IV.8 – Empreintes obtenues par nano-indentation

A chaque essai, plusieurs indentations sont faites afin d'avoir une répétabilité et calculer une moyenne des propriétés. La machine utilisée permet d'appliquer des forces jusqu'à  $500\ \text{mN}$ . La vitesse de chargement utilisée est  $100\ \text{mN/min}$  et la durée de maintien à charge maximale avant décharge est de  $5\ \text{s}$ . Les courbes force-profondeur obtenues pour différents matériaux testés sont données sur la Figure IV.9. Les courbes de l'indium sont moins régulières car c'est un matériau plutôt mou et se déforme plastiquement très vite; mais il faut noter que la décharge élastique est quasi identique pour chaque essai. L'indium utilisé est sous forme de couche pleine hybridée entre deux substrats de silicium. Les essais ont été faits dans ce cas dans l'épaisseur qui vaut  $300\ \mu\text{m}$ .

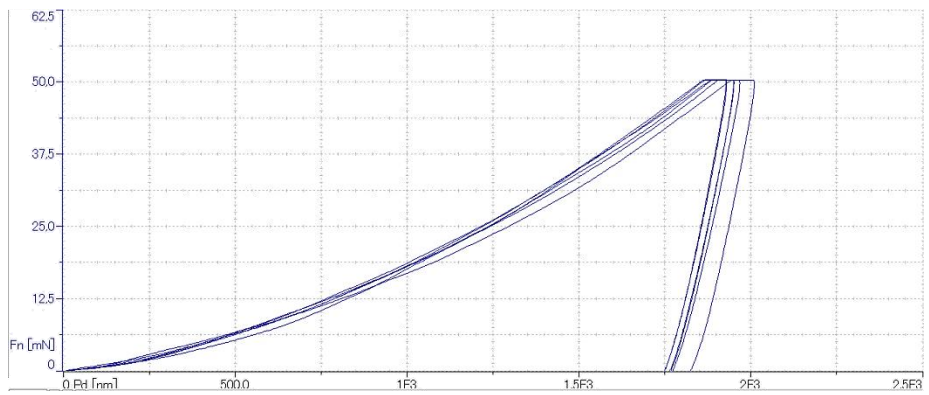




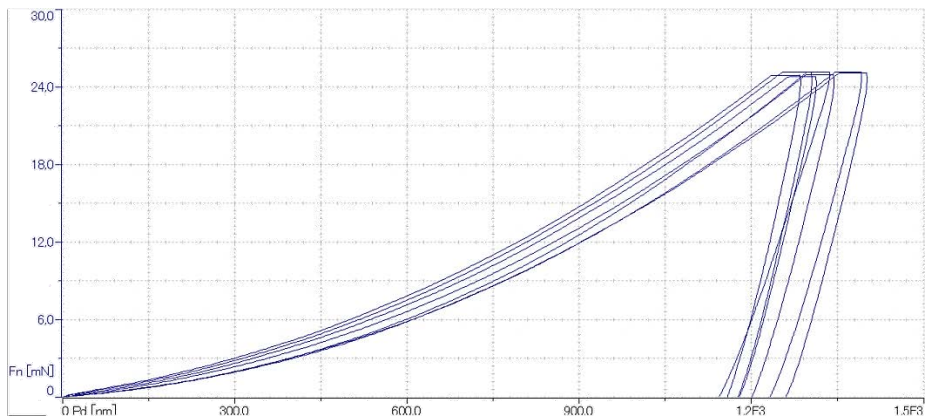
b) Germanium



c) Quartz



d) CdZnTe



e) CdHgTe



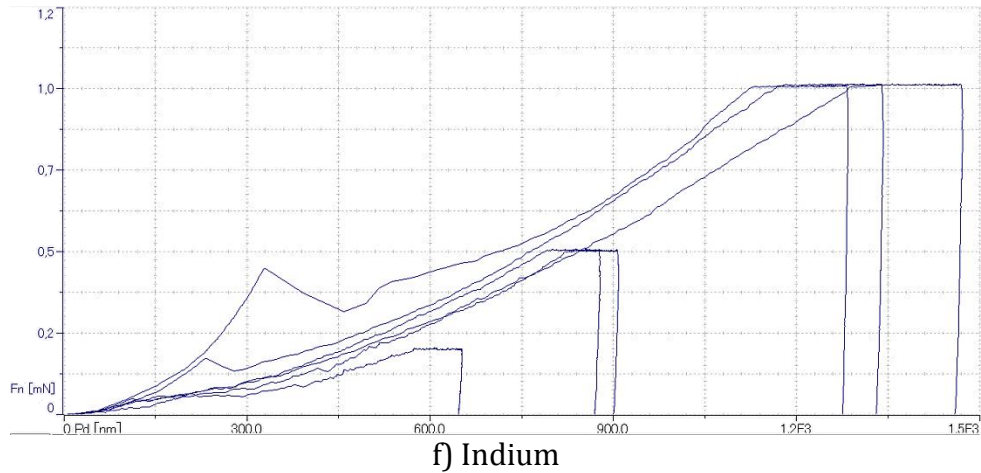


Figure IV.9 – Courbes de nano-indentation

Les conditions de chargement et les duretés obtenues pour les matériaux testés par nano-indentation sont données par le Tableau IV.2. Ces essais de nano-indentation ont permis de **déterminer les modules d'Young des différents matériaux** (Tableau IV.3). Les coefficients de Poisson utilisés sont ceux trouvés dans la littérature.

Tableau IV.2 – Dureté (moyennée sur 6 courbes) des matériaux par nano-indentation

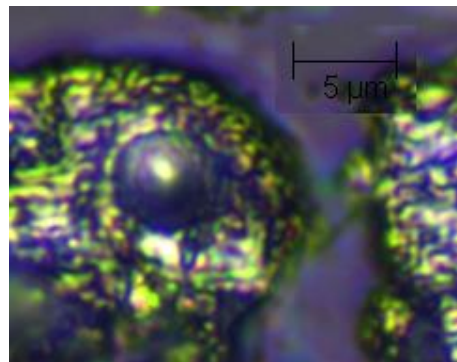
Matériaux	Epaisseur minimale du matériau ( $\mu\text{m}$ )	Force maximale (mN)	Profondeur maximale ( $\mu\text{m}$ )	Dureté moyenne (MPa)
Silicium	500	200	1,1	15579,6
Germanium	500	200	1,3	12245,2
Quartz	500	300	1,9	10942,3
CdZnTe	400	50	2	828,3
CdHgTe	6	25	1,35	861,9
Indium	1000	0,7	1,1	28,5

Tableau IV.3 – Propriétés élastiques des matériaux obtenues par nano-indentation

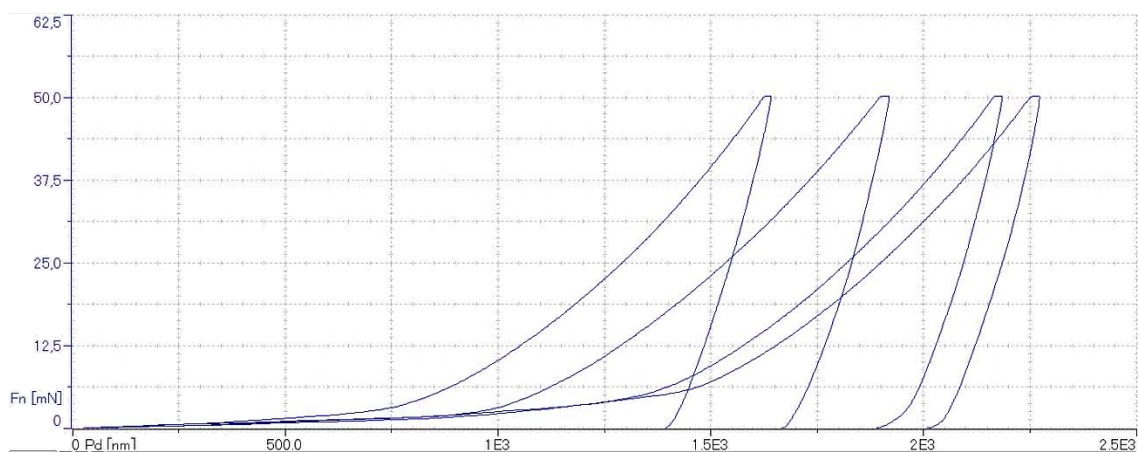
Matériaux	Coefficient de Poisson	Module d'Young (GPa)			
		Minimum	Maximum	Moyenne	Littérature
Silicium	0,276	135,6	167,5	148,4	130,4 [IV_5-7]
Germanium	0,207	130,8	137,6	134,5	132,1 [IV_6, 8]
Quartz	0,17	53,5	57,1	55,1	72,6 [IV_9, 10]
CdZnTe	0,245	33,0	37,8	35,7	50 [IV_11]
CdHgTe	0,245	30,8	36,7	33,9	50 [IV_11]
Indium	0,469	11,0	15,8	12,9	13,7 [IV_12, 13]

On peut remarquer que les valeurs de module d'Young obtenues pour les différents matériaux sont plus ou moins proches des données de la littérature. Les écarts les plus importants sont constatés pour le quartz et le silicium. Les valeurs des essais sur le CdHgTe ne sont pas très fiables car l'épaisseur du matériau est de 10  $\mu\text{m}$  environ alors que la profondeur de pénétration vaut 1,35  $\mu\text{m}$ . Le CdZnTe n'étant pas un matériau isotrope, le module d'Young obtenu est relatif à la direction de sollicitation (ici  $\langle 111 \rangle$ ).

Le principal but de ces tests était de déterminer le module d'Young des intermétalliques  $\text{AuIn}_2$  mais compte tenu de leur faible volume, nous avons rencontré d'énormes difficultés à faire des empreintes d'indentation dans ces IMCs. Des indentations ont pu être faites sur les microbilles avec un indenteur sphérique et ainsi des caractéristiques mécaniques moyennes de l'indium et de l' $\text{AuIn}_2$  ont été trouvées (Figure IV.10). Les profondeurs varient d'un essai à l'autre car les billes ont des compositions  $\text{In}/\text{AuIn}_2$  différentes et les empreintes obtenues sont plus ou moins proches du bord. Ces essais ont été faits sur un assemblage de format mégapixel contenant des billes d'une dizaine de  $\mu\text{m}$  de diamètre à pas de  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ .



a) Empreinte de nano-indentation



b) Courbe de nano-indentation

Figure IV.10 – Essai de nano-indentation sur des microbilles d'indium

Les conditions de chargement et les propriétés mécaniques obtenues sur les microbilles sont listées dans le Tableau IV.4 et le



Tableau IV.5. Le coefficient de Poisson utilisé est celui de l'indium. La profondeur de pénétration obtenue ne nous permet pas de s'assurer de la véracité du module d'Young de la bille.

Tableau IV.4 – Dureté de la microbille

Matériaux	Epaisseur du matériau ( $\mu\text{m}$ )	Force maximale moyenne (mN)	Profondeur maximale moyenne ( $\mu\text{m}$ )	Dureté moyenne (MPa)
Microbille	5	50	2	2938,6

Tableau IV.5 – Module d'Young de la microbille

Matériaux	Coefficient de Poisson	Module d'Young (GPa)		
		Moyenne	Minimum	Maximum
Microbille	0,47	51,5	45,2	57,7

## IV.4. Conclusion

Les essais expérimentaux de nano-indentation ont été réalisés sur les matériaux constituant des assemblages flip chip. Les modules d'Young obtenus ont été comparés avec ceux trouvés en littérature. Ces tests expérimentaux nous ont permis de valider les propriétés élastiques des matériaux. Les écarts les plus élevés sont ceux des modules d'Young du quartz et du silicium. La bonne connaissance des propriétés mécaniques de ces matériaux permettra d'obtenir de meilleurs résultats de simulation.

Connaissant à présent les propriétés thermoélastiques des matériaux constitutifs de l'assemblage flip chip étudié, les modèles de prédiction du comportement du MHE pourront être utilisés pour permettre une simulation d'un assemblage flip chip à grand format.

## IV.5. Références bibliographiques

- [IV\_1] H. Hertz, "Über die Berührung fester elastischer Körper (Sur le contact entre corps élastiques)," *J. für reine und Angew. Math.*, vol. 92, pp. 156–171, 1881.
- [IV\_2] A. C. Fischer-Cripps, *The IBIS Handbook of Nanoindentation*. P.O. Box 9, Forestville NSW 2087 Australia: Fischer-Cripps Laboratories Pty. Ltd, 2009.

- [IV\_3] W. C. Oliver and G. M. Pharr, “An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments,” *J. Mater. Res.*, vol. 7, pp. 1564–1583, 1992.
- [IV\_4] N. Panich and S. Yong, “Improved method to determine the hardness and elastic modulus using nanoindentation,” *KMITL Sci. Technol. J.*, vol. 5, no. 2, pp. 483–492, 2005.
- [IV\_5] H. Over, O. Knotek, and E. Lugscheider, “Elastische Eigenschaften von einkristallinem Silicium in Abhängigkeit von der Temperatur und der Versetzungsdichte,” *Z. Met.*, vol. 73, no. 9, p. 552, 1982.
- [IV\_6] H. J. McSkimin, “Measurement of Ultrasonic Wave Velocities and Elastic Moduli for Small Solid Specimens at High Temperatures,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, p. 287, 1959.
- [IV\_7] N. Ono, K. Kitamura, K. Nakajima, and Y. Shimanuki, “Measurement of Young’s Modulus of Silicon Single Crystal at High Temperature and Its Dependency on Boron Concentration Using the Flexural Vibration Method,” *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 39, pp. 368–371, 2000.
- [IV\_8] J. F. Lynch, C. G. Ruderer, and W. H. Duckworth, *Engineering Properties of Selected Ceramic Materials*, J.F. Lynch. American Ceramic Society, 1966.
- [IV\_9] M. Fukuhara and A. Sanpei, “Effects on High-Temperature-Elastic Properties on  $\alpha$ - $\beta$ -Quartz Phase Transition of Fused Quartz,” *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 18, p. 751, 1999.
- [IV\_10] M. Fukuhara, A. Sanpei, and K. Shibuki, “Low temperature-elastic moduli, Debye temperature and internal dilational and shear frictions of fused quartz,” *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 32, p. 1207, 1997.
- [IV\_11] H. Zhou, S. Qiu, X. Zhang, and C. Xu, “Mechanical characteristics of soft-brittle HgCdTe single crystals investigated using nanoindentation and nanoscratching,” *Appl. Surf. Sci.*, vol. 258, pp. 9756–9761, 2012.
- [IV\_12] B. S. Chandrasekhar and J. A. Rayne, “Elastic Constants of Indium from 1.4° to 300° K,” *Phys. Rev.*, vol. 124, no. 4, p. 1011, 1961.
- [IV\_13] W. Koester, “No Title,” *Z. Met.*, vol. 39, no. 1, p. 1, 1948.

## Chapitre V

# Homogénéisation thermo-élasto-plastique de la couche d'interconnexion

### Sommaire

---

<b>V.1. Introduction.....</b>	<b>104</b>
<b>V.2. Bornes de Reuss et Voigt.....</b>	<b>104</b>
<b>V.3. Modèle asymptotique pour l'homogénéisation de milieux périodiques .</b>	<b>105</b>
<b>V.4. Modèles d'homogénéisation micromécanique.....</b>	<b>106</b>
V.4.1. Concept général en thermoélasticité.....	106
V.4.2. Equation intégrale.....	110
V.4.3. Modèle auto-cohérent.....	116
V.4.4. Modèle de Mori-Tanaka.....	117
<b>V.5. Homogénéisation de la couche d'interconnexion .....</b>	<b>119</b>
V.5.1. Modèle de Mori-Tanaka pour un matériau biphasé.....	120
V.5.2. Programmation sous Fortran.....	121
V.5.3. Application à la couche d'interconnexion .....	121
V.5.4. Cas de l'absence de matrice .....	124
<b>V.6. Prise en compte de la plasticité .....</b>	<b>139</b>
V.6.1. Plasticité des billes d'indium.....	139
V.6.2. Plasticité macroscopique.....	142
<b>V.7. Implémentation de la nouvelle loi de comportement dans Abaqus®.....</b>	<b>145</b>
V.7.1. Résolution des équations comportementales : approche incrémentale.....	145
V.7.2. Implémentation dans un code éléments finis.....	156
<b>V.8. Conclusion .....</b>	<b>160</b>
<b>V.9. Références bibliographiques.....</b>	<b>160</b>

---

## V.1. Introduction

Les théories des milieux effectifs sont des modèles physiques permettant d'estimer les propriétés macroscopiques d'un milieu hétérogène en fonction des propriétés locales (de chaque constituant) et des informations relatives à la microstructure : la concentration, la morphologie et la distribution spatiale de chaque constituant. La prise en compte des informations sur la microstructure du matériau hétérogène rend le modèle **d'homogénéisation plus performant. C'est une approche largement utilisée pour l'étude des matériaux composites.**

Plusieurs modèles d'homogénéisation seront présentés dans ce chapitre puis le modèle choisi sera développé. Son implémentation dans un code EF sera explicitée en thermo-élasto-plasticité.

## V.2. Bornes de Reuss et Voigt

Les modèles de Reuss et Voigt sont les premiers modèles simples d'homogénéisation qui ne prennent pas en compte la topologie et la morphologie des constituants du matériau à homogénéiser. Ces modèles constituent des bornes supérieure et inférieure des propriétés effectives du matériau hétérogène.

L'approximation faite dans le modèle de Voigt est de considérer la déformation dans chaque constituant homogène et égale à la déformation macroscopique du matériau. Ce modèle permet d'estimer les propriétés élastiques moyennes d'un matériau hétérogène de volume  $V$  constitué de  $N$  constituants de volume  $V^{(i)}$  par la formule suivante :

$$\mathbf{C}^V = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N V^{(i)} \mathbf{c}^{(i)} \quad (\text{V-1})$$

où  $\mathbf{C}^V$  est le tenseur des modules élastiques effectifs du matériau homogénéisé selon l'approche de Voigt et  $\mathbf{c}^{(i)}$ , le tenseur des modules élastiques du constituant  $(i)$ .

Par contre dans le formalisme de Reuss, il est supposé que la contrainte dans chaque constituant est homogène et égale à la contrainte macroscopique. Ce modèle permet d'estimer les propriétés élastiques moyennes en termes de souplesse  $\mathbf{S}$  d'un matériau hétérogène de volume  $V$  constitué de  $N$  constituants de volume  $V^{(i)}$  par la formule suivante :

$$\mathbf{S}^R = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N V^{(i)} \mathbf{c}^{-1(i)} \quad (\text{V-2})$$

où  $\mathbf{S}^R$  est le tenseur des souplesses élastiques effectives du matériau homogénéisé selon l'approximation de Reuss.

En résumé, il est possible d'établir l'encadrement suivant :

$$\mathbf{S}_{ijkl}^{R^{-1}} \leq \mathbf{C}_{ijkl}^{eff} \leq \mathbf{C}_{ijkl}^V \quad (\text{V-3})$$

Il existe aussi d'autres bornes plus précises comme celles de Hashin et Shtrikman développées dans [V\_1].

### V.3. Modèle asymptotique pour l'homogénéisation de milieux périodiques

L'homogénéisation des milieux périodiques repose sur des développements asymptotiques à deux échelles. Les détails de cette méthode sont présentés dans [V\_2–4]. On considère un milieu périodique  $\Omega$  illustré sur la Figure V.1.

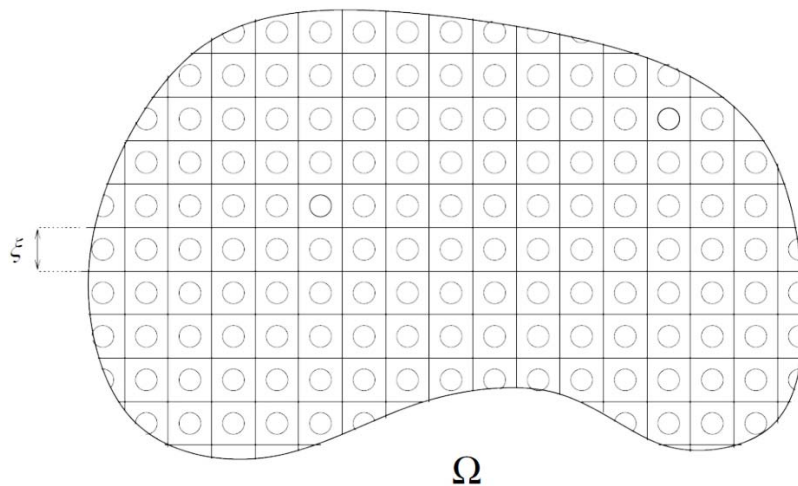


Figure V.1 – Milieu périodique constitué de deux phases

On définit  $\xi$  le rapport de la taille d'un motif sur la taille de la structure. Bien que, pour le problème considéré, il n'y ait qu'une seule valeur physique  $\xi_0$  du paramètre  $\xi$ , on considère une suite de problèmes avec  $\xi$  de plus en plus petit. Une analyse asymptotique est obtenue

en approchant le vrai problème  $\xi = \xi_0$  par le problème limite obtenu lorsque  $\xi \rightarrow 0$ . Cette approche est bien adaptée aux milieux infinis périodiques.

Cette méthode est générale, heuristique et non rigoureuse. Elle ne dépend pas de la morphologie des inclusions et permet difficilement de localiser les champs locaux. Elle peut être appliquée à la couche d'interconnexion des assemblages flip chip mais son imprécision risque d'être importante au niveau des prédictions du comportement global.

Il existe d'autres méthodes d'homogénéisation plus rigoureuses basées sur la théorie des champs moyens sur un volume élémentaire représentatif.

### V.4. Modèles d'homogénéisation micromécanique

#### V.4.1. Concept général en thermoélasticité

Considérons un matériau micro-hétérogène composé de  $N$  constituants (matrice +  $N-1$  inclusions). La matrice étant considérée comme un milieu infini, on définit un volume élémentaire représentatif (VER) dans lequel les propriétés mécaniques du matériau seront moyennées. Ce VER doit satisfaire les conditions suivantes (Figure V.2) :

- il doit être suffisamment grand pour prendre en compte la microstructure du matériau et suffisamment petit pour pouvoir être assimilé à une « particule » au niveau macroscopique du matériau ;
- ses propriétés doivent être indépendantes de l'endroit du matériau où il a été prélevé ;
- l'hypothèse de séparation d'échelle est la suivante :  $d \ll l \ll L$  avec  $d$ , la taille caractéristique des hétérogénéités,  $l$ , la taille du VER et  $L$ , la taille caractéristique du matériau.

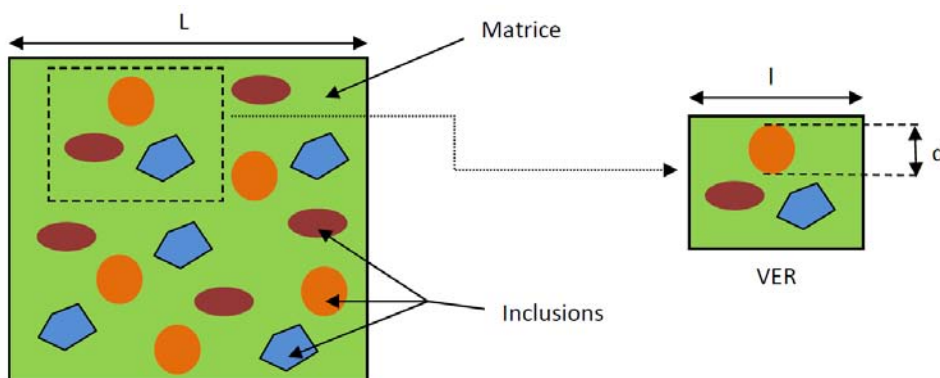


Figure V.2 – Changement d'échelle pour la description du VER

L'objectif de l'homogénéisation est d'une part de définir le milieu homogène équivalent (MHE) ayant les propriétés effectives du VER (comportement global), et d'autre part de déterminer les champs moyens de contraintes et de déformations dans chaque constituant du VER (localisation) (Figure V.3).

Considérons le VER de volume  $V$ , composé de  $N$  constituants. Pour estimer les propriétés effectives du VER, il est nécessaire de définir les lois de comportement à l'échelle locale et à l'échelle globale du matériau. La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$  et la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$  en un point quelconque du matériau hétérogène représenté par le vecteur position  $\mathbf{r}$ , évoluent dans le volume du VER.

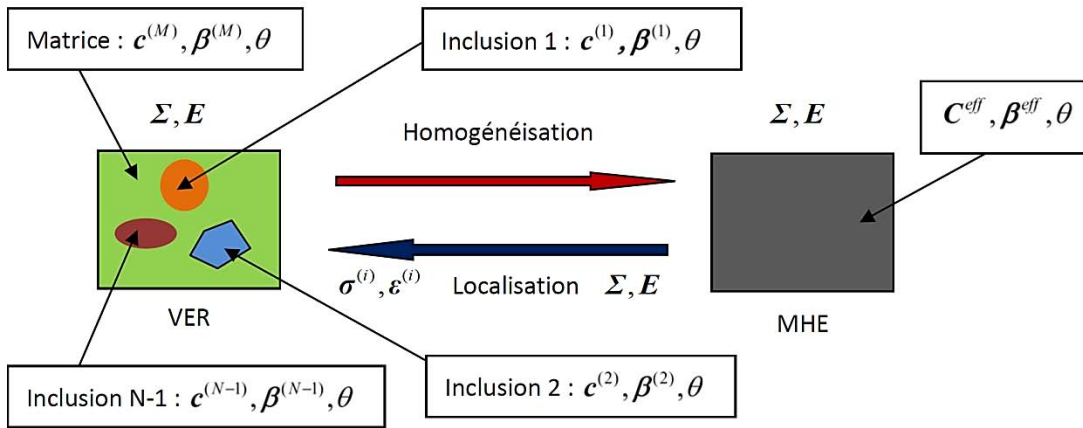


Figure V.3 – Principe des approches d'homogénéisation en thermoélasticité

$\theta = T - T_{ref}$  est la variation de température par rapport à une température de référence  $T_{ref}$  qui doit être identique pour tous les constituants (293 K par exemple).

Il est supposé que dans chaque constituant  $(i)$  de volume  $V^{(i)}$ , les propriétés  $\mathbf{x}(\mathbf{r})$  thermoélastiques sont homogènes :

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \mathbf{x}^{(i)} \quad \text{si } \mathbf{r} \in V^{(i)} \quad (\text{V-4})$$

La déformation totale peut être décomposée d'une manière additive en déformations élastique et thermique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{e(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th(i)} \quad (\text{V-5})$$

En général, lorsque le coefficient de dilation thermique (CDT) dépend de la température, la déformation thermique est alors définie comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{T})(\mathbf{T} - T_{ref}) - \boldsymbol{\alpha}(T_{ini})(T_{ini} - T_{ref}) \quad (\text{V-6})$$

avec  $T_{ini}$ , la température initiale du matériau définie comme étant la température à laquelle la déformation thermique est nulle.

- A l'échelle locale, le comportement thermoélastique de chaque constituant ( $i$ ) peut être exprimé par la loi de Hooke généralisée:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \theta \boldsymbol{\beta}^{(i)} + \mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{c}^{-1(i)} : \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \theta \boldsymbol{\alpha}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \end{cases} \quad (\text{V-7})$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} = (T_{ini}^{(i)} - T_{ref}) \boldsymbol{\alpha}^{(i)}(T_{ini}^{(i)})$ .

- A l'échelle macroscopique, le comportement du MHE a la même structure thermoélastique selon Hill [V\_5] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^{eff} : \mathbf{E} - \theta \boldsymbol{\beta}^{eff} + \mathbf{C}^{eff} : \mathbf{E}_0^{th} \\ \mathbf{E} = \mathbf{S}^{eff} : \boldsymbol{\Sigma} + \theta \boldsymbol{\alpha}^{eff} - \mathbf{E}_0^{th} \end{cases} \quad (\text{V-8})$$

avec  $\mathbf{C}^{eff}$  le tenseur des modules élastiques effectifs ;  $\mathbf{S}^{eff}$  le tenseur des souplesses effectives ;  $\boldsymbol{\alpha}^{eff}$  le tenseur des coefficients effectifs de dilatation thermique ;  $\boldsymbol{\beta}^{eff}$  le tenseur des coefficients effectifs de contrainte thermique ;  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur des contraintes macroscopiques ;  $\mathbf{E}$  le tenseur des déformations thermoélastiques macroscopiques.

$\mathbf{E}_0^{th} = (T_{ini}^{eff} - T_{ref}) \boldsymbol{\alpha}^{eff}(T_{ini}^{eff})$  est la déformation thermique due à la différence entre les températures initiale et de référence. La température initiale macroscopique  $T_{ini}^{eff}$  est difficile à déterminer si les températures initiales des constituants sont différentes.

Les grandeurs locales peuvent être reliées aux grandeurs macroscopiques par le biais des tenseurs (d'ordre 4 et 2) de localisation de déformations  $\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}$  et de contraintes  $\mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)}$  comme suit:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E} + \theta \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E}_0^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} : \boldsymbol{\Sigma} + \theta \mathbf{b}^{(i)} \end{cases} \quad (\text{V-9})$$



D'après le théorème des moyennes, la moyenne de toutes les déformations totales locales correspond à la déformation totale macroscopique et la moyenne de toutes les contraintes locales à la contrainte macroscopique :

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) dV = \mathbf{E} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) dV = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (\text{V-10})$$

Par conséquent, les tenseurs de localisation ont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}^{(i)} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{a}}^{(i)} = \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{B}}^{(i)} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{b}}^{(i)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{V-11})$$

Ainsi, on a :

$$\mathbf{E}_0^{th} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} \quad (\text{V-12})$$

Le théorème des moyennes permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \overline{\mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \theta \boldsymbol{\beta}^{(i)} + \mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} = \overline{\mathbf{c}^{(i)} : \left( \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E} + \theta \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E}_0^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \right) - \theta \boldsymbol{\beta}^{(i)} + \mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} \\ &= \overline{\mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} : (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0^{th}) - \theta (\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{a}^{(i)})} \\ \mathbf{E} &= \overline{\mathbf{c}^{-1(i)} : \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \theta \boldsymbol{\alpha}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} = \overline{\mathbf{c}^{-1(i)} : (\mathbf{B}^{(i)} : \boldsymbol{\Sigma} + \theta \mathbf{b}^{(i)}) + \theta \boldsymbol{\alpha}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} \\ &= \overline{\mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{B}^{(i)} : \boldsymbol{\Sigma} + \theta (\boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{b}^{(i)}) - \mathbf{E}_0^{th}} \end{aligned}$$

Par identification par rapport à (V-8), les propriétés effectives s'obtiennent grâce aux formules suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{eff} = \overline{\mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)}} \\ \boldsymbol{\beta}^{eff} = \overline{\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{a}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{V-13})$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{eff} = \overline{\mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{B}^{(i)}} \\ \boldsymbol{\alpha}^{eff} = \overline{\boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{b}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{V-14})$$

Les tenseurs de localisation peuvent être reliés aux propriétés locales et effectives après quelques développements :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{B}^{(i)} : \mathbf{C}^{eff} \\ \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{c}^{-1(i)} : (\mathbf{b}^{(i)} - \mathbf{B}^{(i)} : \boldsymbol{\beta}^{eff}) + \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \end{cases} \quad (V-15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{S}^{eff} \\ \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)} : (\mathbf{A}^{(i)} : \boldsymbol{\alpha}^{eff} + \mathbf{a}^{(i)}) - \boldsymbol{\beta}^{(i)} \end{cases} \quad (V-16)$$

La notion de fraction volumique peut être introduite pour simplifier le calcul des propriétés effectives. Ainsi, soit  $f_i$ , la fraction volumique du constituant (i) c'est-à-dire  $f_i = \frac{V^{(i)}}{V}$  et

$$\sum_{i=1}^N f_i = 1.$$

Les relations (V-13) et (V-14) peuvent par conséquent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{eff} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} \\ \boldsymbol{\beta}^{eff} = \sum_{i=1}^N f_i (\boldsymbol{\beta}^{(i)} - \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{a}^{(i)}) \end{cases} \quad (V-17)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{eff} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{B}^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{eff} = \sum_{i=1}^N f_i (\boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \mathbf{c}^{-1(i)} : \mathbf{b}^{(i)}) \end{cases} \quad (V-18)$$

Les propriétés effectives sont déterminées grâce aux tenseurs de localisation. Plusieurs modèles micromécaniques permettent de calculer ces tenseurs. Dans la plupart des cas, ces modèles partent de l'équation intégrale du problème d'élasticité.

## V.4.2. Equation intégrale

En thermoélasticité, l'approche développée par Ahaouari et al. [V\_6] et Ahaouari [V\_7] permet d'établir une équation intégrale cinématique:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \int_V \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') : \left[ \boldsymbol{\delta} \mathbf{c}(\mathbf{r}') : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}')) - \theta \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (V-19)$$

Dans cette expression figurent le tenseur de Green modifié  $\Gamma(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , dérivé de la solution fondamentale du problème d'élasticité de Green  $\mathcal{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ :

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{2}[\mathcal{G}_{ik,jl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \mathcal{G}_{jk,il}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \quad (\text{V-20})$$

et les variations des propriétés élastiques et thermiques du matériau par rapport à un milieu de référence de propriétés  $\mathbf{c}^R$  et  $\beta^R$  se déformant de  $\boldsymbol{\varepsilon}^R$  sous le même chargement que celui appliqué au milieu hétérogène. Ces variations s'écrivent respectivement  $\delta\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}(\mathbf{r}) - \mathbf{c}^R$  (Figure V.4) et  $\delta\beta(\mathbf{r}) = \beta(\mathbf{r}) - \beta^R$ .

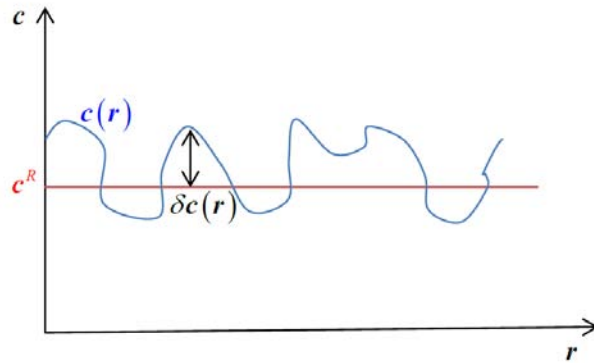


Figure V.4 – Décomposition du tenseur des modules élastiques  $\mathbf{c}(\mathbf{r})$

Cette équation intégrale permet de dégager différents types d'approximation des tenseurs de localisation, fonction d'hypothèses simplificatrices retenues.

Considérons à présent les variables liées aux inclusions. Une première approximation **concerne l'homogénéité** de chaque inclusion du point de vue de ses propriétés thermoélastiques. Par conséquent, les champs de ces propriétés s'écrivent:

$$\begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{c}^i Y^i(\mathbf{r}) \\ \beta(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \beta^i Y^i(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{V-21})$$

où  $Y^I(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V^I \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V^I \end{cases}$  est une fonction caractéristique liée au volume de l'inclusion  $I$ .

Il en résulte que les champs de déviations des propriétés élastiques et thermiques s'écrivent:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \sum_{I=1}^N (\mathbf{c}^I Y^I(\mathbf{r}) - \mathbf{c}^R) = \sum_{I=1}^N \Delta \mathbf{c}^I Y^I(\mathbf{r}) \\ \delta \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \sum_{I=1}^N (\boldsymbol{\beta}^I Y^I(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\beta}^R) = \sum_{I=1}^N \Delta \boldsymbol{\beta}^I Y^I(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{V-22})$$

En introduisant ces relations dans l'équation intégrale (V-19), on obtient:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \sum_{J=1}^{N-1} \int_{V^J} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') : \left[ \Delta \mathbf{c}^J : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}')) - \theta \Delta \boldsymbol{\beta}^J \right] dV' \quad (\text{V-23})$$

Bien que cette équation intégrale soit plus simple, pour obtenir les tenseurs de localisation, il est supposé que le champ de déformation totale est homogène dans chaque inclusion, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) &= \sum_{I=1}^{N-1} \boldsymbol{\varepsilon}^I Y^I(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}) &= \sum_{I=1}^{N-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} Y^I(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{V-24})$$

Cette approximation permet une deuxième simplification substantielle de l'équation (V-19):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \sum_{J=1}^{N-1} \left[ \int_{V^J} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' : \left( \Delta \mathbf{c}^J : (\boldsymbol{\varepsilon}^J + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thJ}) - \theta \Delta \boldsymbol{\beta}^J \right) \right]$$

En tenant compte de l'approximation (V-24), la déformation moyenne dans l'inclusion  $I$  devient:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} &= \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th}(\mathbf{r}) \right] dV \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \frac{1}{V^I} \sum_{J=1}^{N-1} \left[ \int_{V^I} \int_{V^J} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' dV : \left( \Delta \mathbf{c}^J : (\boldsymbol{\varepsilon}^J + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thJ}) - \theta \Delta \boldsymbol{\beta}^J \right) \right] \end{aligned}$$

Pour quelques cas particuliers, le calcul de l'intégrale double peut être analytique. Dans le cas général il est effectué numériquement. Le résultat de ce calcul est noté  $\mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R)$  et nommé tenseur d'interactions:

$$\mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' dV \quad (\text{V-25})$$

Ce tenseur caractérise les interactions mécaniques entre une inclusion  $I$  avec elle-même par rapport au milieu de référence ( $\mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R)$ ) ou les interactions mécaniques entre une inclusion  $I$  et une autre inclusion voisine  $J$  par rapport au milieu de référence ( $\mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R)$  avec  $I \neq J$ ). Son expression dépend de la géométrie de l'inclusion, de la position relative des 2 inclusions  $I$  et  $J$  et des propriétés élastiques du milieu de référence. En particulier, les composantes de  $\mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R)$  avec  $I \neq J$  deviennent négligeables lorsque la distance entre les inclusions  $I$  et  $J$  devient importante, on parle alors de version mono-site du modèle. La version multi-site correspond au cas général développé dans cette étude.

L'équation intégrale peut s'écrire alors:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} = \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : \left( \Delta \mathbf{c}^J : (\boldsymbol{\varepsilon}^J + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thJ}) - \theta \Delta \boldsymbol{\beta}^J \right) \quad (V-26)$$

Supposons à présent l'existence de deux tenseurs de localisation de la déformation thermoélastique  $\mathbf{R}^I$  et  $\mathbf{r}^I$  par rapport au milieu de référence, tels que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{R}^I : (\boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR}) + \theta \mathbf{r}^I - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} \quad (V-27)$$

En substituant l'équation (V-27) dans (V-26), nous pouvons établir la localisation de la déformation de l'inclusion  $I$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \left[ \mathbf{I} - \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{R}^J \right] : (\boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR}) + \theta \left[ \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : (\Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{r}^J) \right] - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI}$$

En comparant cette équation avec (V-27), des expressions implicites des tenseurs  $\mathbf{R}^I$  et  $\mathbf{r}^I$  peuvent être obtenues:

$$\mathbf{R}^I = \mathbf{I} - \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{R}^J \quad \text{et} \quad \mathbf{r}^I = \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : (\Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{r}^J)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \mathbf{R}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left( \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{R}^J \right) \\ \mathbf{r}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : (\Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{r}^J) \right] \end{cases} \quad (\text{V-28})$$

Le caractère implicite de ces relations exige leur résolution par un processus itératif selon la réécriture suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{(n+1)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left( \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{R}_{(n)}^J \right) \\ \mathbf{r}_{(n+1)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^R) : (\Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{r}_{(n)}^J) \right] \end{cases} \quad (\text{V-29})$$

où les indices  $(n)$  et  $(n+1)$  correspondent aux numéros d'itération. Pour démarrer ce processus itératif, les valeurs initiales suivantes correspondant à l'approximation mono-site de l'équation intégrale (V-26) peuvent être considérées :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{(0)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} \\ \mathbf{r}_{(0)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{R}_{(0)}^I : \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I \end{cases} \quad (\text{V-30})$$

Ce processus s'arrête lorsque le rapport relatif des normes est inférieur à une tolérance  $tol$

$$\text{donnée : } \frac{\|\mathbf{R}_{(n+1)}^I - \mathbf{R}_{(n)}^I\|}{\|\mathbf{R}_{(n+1)}^I\|} \leq tol \text{ et } \frac{\|\mathbf{r}_{(n+1)}^I - \mathbf{r}_{(n)}^I\|}{\|\mathbf{r}_{(n+1)}^I\|} \leq tol .$$

Dans le cas de la version mono-site de la modélisation, les interactions entre les inclusions peuvent être négligées ( $\mathbf{T}^{IJ} = \mathbf{0}$ ), et on obtient la relation suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} = \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} - \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I : (\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI}) + \theta \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I \text{ qui peut être directement transformée en une relation de localisation:}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thI} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR}) + \theta \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I$$

Dans une telle configuration, le traitement de l'équation intégrale est explicite. On déduit alors pour cette version mono-site, les relations définissant  $\mathbf{R}^I$  et  $\mathbf{r}^I$  :

$$\begin{cases} \mathbf{R}^I = [\mathbf{I} + \mathbf{T}^H(\mathbf{c}^R) : \Delta \mathbf{c}^I]^{-1} \\ \mathbf{r}^I = \mathbf{R}^I : \mathbf{T}^H(\mathbf{c}^R) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I \end{cases}$$

Quelle que soit l'approximation retenue, l'évaluation des tenseurs  $\mathbf{R}^{(i)}$  et  $\mathbf{r}^{(i)}$  pour chaque constituant permet de déduire les tenseurs de localisation  $\mathbf{A}^{(i)}$  et  $\mathbf{a}^{(i)}$  par rapport à la déformation totale globale  $\mathbf{E}$  correspondant à la moyenne volumique des déformations locales  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ . En effet, l'équation (V-27) permet la détermination de  $\boldsymbol{\varepsilon}^R$  :

$$\mathbf{E} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}} = \overline{\mathbf{R}^{(i)}} : (\boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR}) + \theta \overline{\mathbf{r}^{(i)}} - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{thR} = \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} : (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0^{th}) - \theta \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}}$$

En substituant ce résultat dans (V-27) on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} : (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0^{th}) + \theta \left( \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{R}^{(i)} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} \right) - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)}$$

Cette expression, comparée avec l'équation (V-9), fournit les deux tenseurs de localisation:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} \\ \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{R}^{(i)} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{V-31})$$

On vérifie aisément les propriétés (V-11) annoncées au début de cette sous-section:

$$\overline{\mathbf{A}^{(i)}} = \overline{\mathbf{R}^{(i)}} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{a}^{(i)}} = \overline{\mathbf{r}^{(i)}} - \overline{\mathbf{A}^{(i)}} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} = \overline{\mathbf{r}^{(i)}} - \overline{\mathbf{A}^{(i)}} : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} = \mathbf{0}$$

L'approximation des tenseurs de localisation dépend du schéma d'homogénéisation-localisation considérée : le modèle auto-cohérent, auto-cohérent généralisé, le modèle incrémental, de Mori-Tanaka, etc. Ces modèles appartiennent à la classe de modèles basée sur le concept d'inclusion d'Eshelby [V\_8].

Dans la suite, à titre d'exemples nous explicitons le modèle autocohérent et celui de Mori Tanaka.

### V.4.3. Modèle auto-cohérent

Dans ce modèle, le milieu de référence considéré dans l'équation intégrale correspond au milieu effectif (homogène équivalent) dont les propriétés sont à déterminer [V\_9] ( $\mathbf{C}^R = \mathbf{C}^{eff}$ ). Dans ce cas, les tenseurs  $\mathbf{R}^{(i)}$  et  $\mathbf{r}^{(i)}$  sont équivalents aux tenseurs de localisation :

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \\ \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} \end{cases} \quad (\text{V-32})$$

et à chaque itération ( $m$ ), on peut établir :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{(n+1)(m)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left( \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{A}_{(n)(m)}^J \right) \\ \mathbf{a}_{(n+1)(m)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : (\Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{a}_{(n)(m)}^J) \right] \end{cases} \quad (\text{V-33})$$

avec  $\Delta \mathbf{c}^I = \mathbf{c}^I - \mathbf{C}_{(m)}^{eff}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\beta}^I = \boldsymbol{\beta}^I - \boldsymbol{\beta}_{(m)}^{eff}$ . On peut remarquer le caractère doublement implicite (sur les propriétés effectives et les tenseurs d'interaction) de ce modèle. Pour démarrer le processus itératif sur les propriétés effectives, les valeurs suivantes peuvent être considérées :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{(0)}^{eff} = \mathbf{C}^{Voigt} \\ \boldsymbol{\beta}_{(0)}^{eff} = \boldsymbol{\beta}^{Voigt} \end{cases} \quad (\text{V-34})$$

Pour une itération ( $m$ ) des propriétés effectives, le démarrage du processus itératif des tenseurs de localisation se fait par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{(0)(m)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} \\ \mathbf{a}_{(0)(m)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{A}_{(0)(m)}^I : \mathbf{T}^{II}(\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I \end{cases} \quad (\text{V-35})$$

Les processus itératifs s'arrêtent lorsque le rapport relatif des normes est inférieur à une tolérance donnée.

Les tenseurs de localisation de la déformation de la matrice se déduisent à la fin du calcul de ceux des inclusions comme suit :



$$\begin{cases} \mathbf{A}^M = \frac{1}{f_M} \left( \mathbf{I} - \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{A}^I \right) \\ \mathbf{a}^M = -\frac{1}{f_M} \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{a}^I \end{cases} \quad (\text{V-36})$$

Dans le cas mono-site, le problème implicite se situe uniquement sur les propriétés effectives. Les tenseurs de localisation des déformations des inclusions se calculent explicitement :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{(m)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II} (\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} \\ \mathbf{a}_{(m)}^I = \mathbf{R}^I : \mathbf{T}^{II} (\mathbf{C}_{(m)}^{eff}) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I \end{cases} \quad (\text{V-37})$$

Ce modèle étant implicite, son implémentation dans un code de calcul par éléments finis se révèle lourde et augmenterait par conséquent le temps de calcul.

Le modèle auto-cohérent généralisé utilise le concept de l'inclusion enrobée où la matrice constitue l'enrobage et le tout est noyé dans le milieu équivalent. La prise en compte d'une phase supplémentaire entourant chaque inclusion ne sera pas détaillée dans cette étude car l'application du modèle d'homogénéisation sera effectuée sur les billes d'indium (non recouvertes d'une autre couche) noyées dans une matrice époxy. Les travaux consacrés aux problèmes de l'inclusion enrobée ou multi-enrobée ont été réalisés par Christensen and Lo [V\_10], Hervé et Zaoui [V\_11, 12] et plus récemment par Lipinski et al. [V\_13] et Bardhadi [V\_14].

#### V.4.4. Modèle de Mori-Tanaka

La construction du modèle multi-site de Mori-Tanaka suit les développements présentés par Viéville et al. [V\_15]. Cette approche est généralisée ici au cas du comportement thermoélastique des matériaux micro-hétérogènes et macro-homogènes.

L'approche de Mori-Tanaka consiste à choisir la matrice comme milieu de référence ou de comparaison. La matrice est considérée comme le  $N$ -ième constituant du VER, sa fraction volumique est  $f_M$  et ses propriétés  $\mathbf{c}^M$  et  $\boldsymbol{\alpha}^M$  ou  $\boldsymbol{\beta}^M$ . Sa forme géométrique est complexe et est telle qu'elle complète le VER contenant d'autres constituants ou phases ( $i$ ), représentées par  $(N-1)$  renforts de forme ellipsoïdale. L'équation intégrale (V-26) s'écrit dans ce cas:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^I} = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^M} - \sum_{J=1}^{N-1} \left[ \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) : \left( \Delta \mathbf{c}^J : \left( \boldsymbol{\varepsilon}^J + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^J} \right) - \theta \Delta \boldsymbol{\beta}^J \right) \right] \quad (\text{V-38})$$

avec  $I=1,2,\dots,N-1$ ,  $\Delta \mathbf{c}^J = \mathbf{c}^J - \mathbf{c}^M$  et  $\Delta \boldsymbol{\beta}^J = \boldsymbol{\beta}^J - \boldsymbol{\beta}^M$ . Cette nouvelle forme d'équation intégrale permet l'identification directe des tenseurs de localisation de la matrice par rapport au choix particulier du milieu de référence:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^M = \mathbf{I} \\ \mathbf{r}^M = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{V-39})$$

Les tenseurs  $\mathbf{R}^I$  et  $\mathbf{r}^I$  des inclusions sont déterminés grâce à l'approche itérative exposée dans la sous-section V.4.2.

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{(n+1)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^M) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left( \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) : \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{R}_{(n)}^J \right) \text{ pour } I=1,2,\dots,N-1 \\ \mathbf{r}_{(n+1)}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^M) : \Delta \mathbf{c}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{T}^{II}(\mathbf{c}^M) : \Delta \boldsymbol{\beta}^I + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) : \left( \Delta \boldsymbol{\beta}^J - \Delta \mathbf{c}^J : \mathbf{r}_{(n)}^J \right) \right] \end{cases} \quad (\text{V-40})$$

Une fois évalués, les tenseurs de localisation  $\mathbf{A}^I$  et  $\mathbf{a}^I$  peuvent être déterminés. Tout d'abord, les moyennes volumiques de  $\mathbf{R}^{(i)}$  et  $\mathbf{r}^{(i)}$  sont calculées :

$$\overline{\mathbf{R}^{(i)}} = f_M \mathbf{I} + \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{R}^I = \left( 1 - \sum_{I=1}^{N-1} f_I \right) \mathbf{I} + \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{R}^I = \mathbf{I} - \sum_{I=1}^{N-1} f_I (\mathbf{I} - \mathbf{R}^I)$$

$$\overline{\mathbf{r}^{(i)}} = f_M \mathbf{0} + \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{r}^I = \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{r}^I$$

Par conséquent, à partir de (V-31), on déduit:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^M = \mathbf{R}^M : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} = \mathbf{I} : \overline{\mathbf{R}^{(i)}}^{-1} = \left[ \mathbf{I} - \sum_{I=1}^{N-1} f_I (\mathbf{I} - \mathbf{R}^I) \right]^{-1} \\ \mathbf{a}^M = \mathbf{r}^M - \mathbf{A}^M : \overline{\mathbf{r}^{(i)}} = -\mathbf{A}^M : \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{r}^I \end{cases} \quad (\text{V-41})$$

Les tenseurs de localisation des autres constituants deviennent:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^I = \mathbf{R}^I : \overline{\mathbf{R}}^{(i)-1} = \mathbf{R}^I : \mathbf{A}^M \\ \mathbf{a}^I = \mathbf{r}^I - \mathbf{A}^I : \overline{\mathbf{r}}^{(i)} = \mathbf{r}^I - \mathbf{R}^I : \mathbf{A}^M : \overline{\mathbf{r}}^{(i)} = \mathbf{r}^I + \mathbf{R}^I : \mathbf{a}^M \end{cases} \quad (\text{V-42})$$

On peut observer également que, puisque  $\overline{\mathbf{A}}^{(i)} = \mathbf{I}$  et  $\overline{\mathbf{a}}^{(i)} = \mathbf{0}$  alors :

$$\begin{cases} f_M \mathbf{A}^M = \mathbf{I} - \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{A}^I \\ f_M \mathbf{a}^M = - \sum_{I=1}^{N-1} f_I \mathbf{a}^I \end{cases} \quad (\text{V-43})$$

En utilisant les relations (V-17) et (V-43), l'estimation des propriétés effectives au sens de Mori-Tanaka peut être exprimée sous la forme finale suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{MT} = \mathbf{c}^M + \sum_{I=1}^{N-1} f_I (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^M) : \mathbf{A}^I = \mathbf{c}^M + \sum_{I=1}^{N-1} f_I \Delta \mathbf{c}^I : \mathbf{R}^I : \mathbf{A}^M \\ \boldsymbol{\beta}^{MT} = \boldsymbol{\beta}^M + \sum_{I=1}^{N-1} f_I [(\boldsymbol{\beta}^I - \boldsymbol{\beta}^M) - (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^M) : \mathbf{a}^I] = \boldsymbol{\beta}^M + \sum_{I=1}^{N-1} f_I (\Delta \boldsymbol{\beta}^I - \Delta \mathbf{c}^I : \mathbf{a}^I) \end{cases} \quad (\text{V-44})$$

Les modèles ainsi présentés sont ensuite appliqués pour l'analyse micromécanique de la couche d'interconnexion de l'assemblage flip chip, objet de notre étude.

## V.5. Homogénéisation de la couche d'interconnexion

Parmi les nombreuses méthodes d'homogénéisation couramment utilisées, le schéma de Mori-Tanaka est considéré comme le meilleur compromis entre la précision de résultats obtenus et la complexité de son implémentation pour des simulations numériques par éléments finis. Elle est particulièrement performante quand l'une des phases constituant le milieu hétérogène est dominante et forme la matrice du composite.

Comme spécifié auparavant, le modèle auto-cohérent est plus précis mais requiert un processus itératif qui rend lourde son implémentation dans un code de calcul par éléments finis. Par conséquent, le modèle de Mori-Tanaka appliqué aux matériaux biphasés sera utilisé pour caractériser la couche d'interconnexion de l'assemblage flip chip étudié. Les inclusions sont les « billes » d'indium noyées dans une matrice qui est la colle époxy.

### V.5.1. Modèle de Mori-Tanaka pour un matériau biphasé

Pour l'étude de la couche d'interconnexion, on considère la matrice (phase 2 et notée  $M$ ) contenant des renforts ellipsoïdaux possédant tous la même forme et les mêmes propriétés thermoélastiques (phase 1). Pour prendre en compte la texture topologique du composite,  $N-1$  renforts seront considérés. La fraction volumique totale de ces renforts est notée  $f$ , les propriétés de la matrice sont  $\mathbf{c}^M$  et  $\boldsymbol{\beta}^M$  (ou  $\boldsymbol{\alpha}^M$ ) et celles des renforts  $\mathbf{c}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  (ou  $\boldsymbol{\alpha}$ ),  $\Delta\mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{c}^M$  et  $\Delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^M$ . Les tenseurs de localisations de ces renforts sont alors tous identiques. Les résultats généraux présentés précédemment se simplifient dans ce cas. Les tenseurs de localisation de renforts sont notés simplement  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{r}$  et l'expression (V-38) s'écrit:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^I} = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^M} - \sum_{J=1}^{N-1} \left[ \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) : \Delta\mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon}^J + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th^J}) \right] + \theta \sum_{J=1}^{N-1} \left[ \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) : \Delta\boldsymbol{\beta} \right]$$

Pour simplifier, notons  $\mathbf{T}^I$  le tenseur des interactions global de toutes les inclusions tel que:

$$\mathbf{T}^I = \sum_{J=1}^{N-1} \mathbf{T}^{IJ}(\mathbf{c}^M) \quad (\text{V-45})$$

Les tenseurs de localisation de la déformation dans la matrice s'expriment:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^M = [\mathbf{I} - f(\mathbf{I} - \mathbf{R})]^{-1} \\ \mathbf{a}^M = -f \mathbf{A}^M : \mathbf{r} \end{cases} \quad (\text{V-46})$$

et dans les inclusions:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{R} : [\mathbf{I} - f(\mathbf{I} - \mathbf{R})]^{-1} = [\mathbf{I} + (1-f)\mathbf{T}^I : \Delta\mathbf{c}]^{-1} \\ \mathbf{a} = (\mathbf{I} - f \mathbf{A}) : \mathbf{r} = (1-f) \mathbf{A}^M : \mathbf{r} = \frac{f-1}{f} \mathbf{a}^M \end{cases} \quad (\text{V-47})$$

Les propriétés thermoélastiques effectives s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{MT} = \mathbf{c}^M + f \Delta\mathbf{c} : \mathbf{A} = \mathbf{c}^M + f \Delta\mathbf{c} : \mathbf{R} : \mathbf{A}^M \\ \boldsymbol{\beta}^{MT} = \boldsymbol{\beta}^M + f(\Delta\boldsymbol{\beta} - \Delta\mathbf{c} : \mathbf{a}) = \boldsymbol{\beta}^M + f \left[ \Delta\boldsymbol{\beta} + \Delta\mathbf{c} : (\mathbf{A}^M : \mathbf{r} + \mathbf{a}^M) \right] \end{cases} \quad (\text{V-48})$$

Le modèle d'homogénéisation thermoélastique de Mori-Tanaka pour un matériau biphasé a été codé dans le langage de programmation Fortran.

### V.5.2. Programmation sous Fortran

Le programme comporte plusieurs sous-programmes dont les principaux permettent de construire les tenseurs des modules élastiques et des coefficients de dilatation thermique des deux phases à partir d'un fichier contenant toutes les données d'entrées : « data.dat », de calculer les tenseurs d'interaction, de calculer les propriétés effectives ainsi que les tenseurs de localisation, d'afficher les résultats obtenus dans un fichier « results .out ».

Les tenseurs d'interaction ont été programmés dans le cas général (inclusions ellipsoïdales) et sont détaillés dans l'Annexe A, de même que les organigrammes résumant le modèle d'homogénéisation thermoélastique multi-site de Mori-Tanaka appliqué à un matériau biphasé.

Le modèle a été validé par comparaison avec les résultats de modélisation de la littérature. Ce modèle a fait l'objet d'une publication dans le journal « Composite Structures » [V\_16]. Dans cet article, on peut retrouver les détails de l'homogénéisation multi-site de Mori-Tanaka, l'effet de la morphologie et de la topologie des inclusions sur les propriétés effectives et l'application sur les composites biphasés à fibres longues.

### V.5.3. Application à la couche d'interconnexion

La forme réelle des microbilles d'interconnexion est une sphère tronquée (tonneau) mais elle a été modélisée comme un cylindre de volume équivalent (plus précisément un ellipsoïde avec un demi-axe suffisamment grand pour rester dans le concept de l'inclusion d'Eshelby). Il a été montré dans Kpobie et al. [V\_16] que lorsque le rapport  $c/a$  du 3<sup>ème</sup> demi-axe sur le rayon de l'ellipsoïde (section circulaire,  $a = b$ ) est supérieur à 300, les propriétés effectives évoluent peu et correspondent à ceux d'un matériau biphasé avec des inclusions cylindriques. Le rapport  $c/a = 500$  a été utilisé ici.

Une des hypothèses de ce modèle est la nature infinie de la matrice. La matrice de la couche d'interconnexion n'est pas infinie dans la 3<sup>ème</sup> direction ( $\vec{x}_3$ ) mais le fait que les inclusions considérées ont une dimension infinie (théoriquement) dans cette direction et que cette couche est reliée à d'autres de part et d'autre dans cette direction à d'autres couches nous permet d'accepter la vérification de cette hypothèse.

La forme réelle et la forme modélisée de la bille d'interconnexion sont illustrées sur la Figure V.5. L'assemblage flip chip mégapixel contient dans sa couche d'interconnexion des billes de à pas de  $p = q = 15 \mu\text{m}$ . Le cylindre équivalent de rayon  $r$  modélisé a la même hauteur que la sphère tronquée.

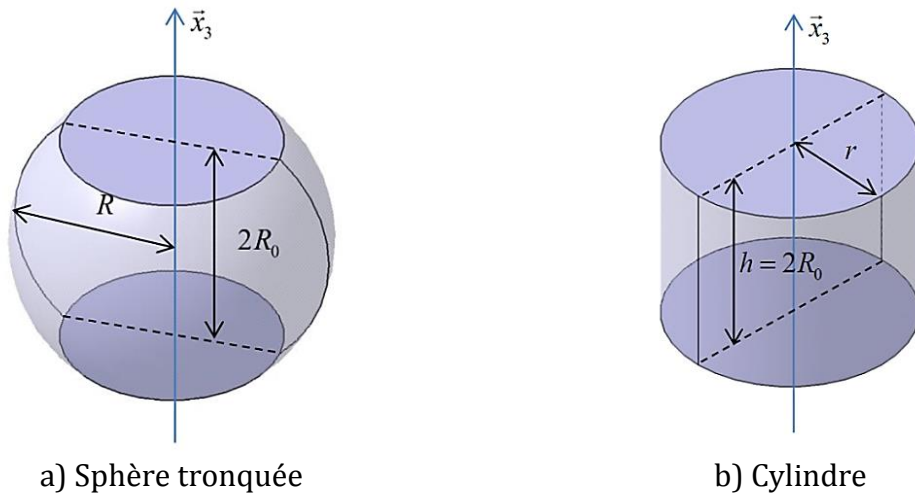


Figure V.5 – Forme réelle et modélisée de la bille d'interconnexion

Le caractère multi-site du modèle d'homogénéisation permet de prendre en compte une bille d'interconnexion et ses 8 premières voisines selon la Figure V.6). La fraction volumique totale des billes dans un tel VER peut être déduite par la formule suivante :

$$f = \frac{\pi r^2}{pq} \quad (\text{V-49})$$

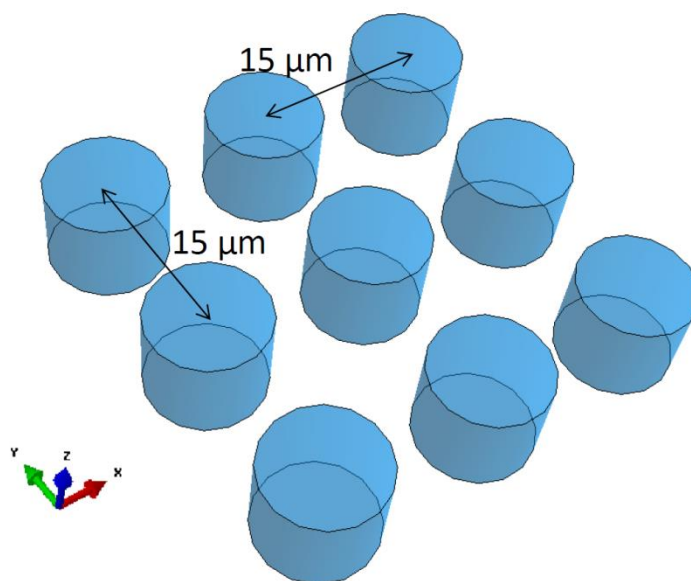


Figure V.6 – Prise en compte d'une inclusion et de ses 8 premières voisines

Pour des raisons de confidentialité, les dimensions de la bille d'indium ne seront pas données dans ce mémoire. Les propriétés thermoélastiques de l'indium et de l'époxy à une température de 293 K sont rappelées par le Tableau V.1.

Tableau V.1 – Propriétés thermoélastiques de l'indium et de l'époxy à 293 K

Matériaux	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson	CDT ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )
Indium	13684	0,469	29,2
Epoxy	3664	0,358	65

Les propriétés élastiques et des coefficients de dilatation thermique du matériau homogène équivalent à 293 K ainsi obtenus sont présentés sous les formes matricielles suivantes :

$$\mathbf{C}^{MT}(293\text{K}) = \begin{pmatrix} 9541 & 5601 & 6089 & 0 & 0 & 0 \\ 5601 & 9541 & 6089 & 0 & 0 & 0 \\ 6089 & 6089 & 12070 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1888 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1984 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1984 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad (\text{V-50})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{MT}(293\text{K}) = \begin{pmatrix} 53,99 & 0 & 0 \\ 0 & 53,99 & 0 \\ 0 & 0 & 40,368 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \quad (\text{V-51})$$

Les constantes effectives d'ingénieur peuvent être déduites du tenseur d'élasticité et sont listées dans le Tableau V.2.

Tableau V.2 – Constantes effectives d'ingénieur de la couche d'interconnexion obtenues par le modèle de Mori-Tanaka

Modules d'Young	Coefficients de Poisson	Modules de cisaillement
$E_1^{MT} = E_2^{MT} = 5480,06 \text{ MPa}$	$\nu_{12}^{MT} = 0,3909$	$\mu_{12}^{MT} = 1888,43 \text{ MPa}$
$E_3^{MT} = 7170,85 \text{ MPa}$	$\nu_{13}^{MT} = \nu_{23}^{MT} = 0,3073$	$\mu_{13}^{MT} = \mu_{23}^{MT} = 1983,87 \text{ MPa}$

On peut remarquer que ce MHE a un comportement quasi isotrope transverse (6 composantes indépendantes de  $\mathbf{C}$ ). Le module d'Young dans la direction 3 (axe de l'inclusion cylindrique) a une valeur plus élevée ce qui est logique et comparable au comportement des composites à fibres longues.

Lors de l'assemblage des puces, l'enrobage se fait après hybridation. A la fin de l'hybridation, il n'y a pas encore de matrice et les billes d'interconnexion ne sont liées entre elles que par le biais des deux puces.

La section suivante est donc consacrée à la modélisation de la couche d'interconnexion dans cette configuration particulière caractérisée par l'absence de matrice.

### V.5.4. Cas de l'absence de matrice

Les modèles d'homogénéisation par les champs moyens sont applicables aux matériaux micro-hétérogènes comportant une matrice et des inclusions. Lorsqu'il n'y a pas de matrice, ces matériaux peuvent être assimilés à des structures sandwich. Dans ce cas le modèle de Mori-Tanaka développé se révèle inadapté pour la prédiction du comportement d'une telle structure. Nous avons donc développé un modèle alternatif d'homogénéisation basé sur une approche analytique de type périodique.

La couche d'interconnexion d'un assemblage flip chip est assimilée à un matériau sandwich constitué de deux peaux (les couches en contact avec les billes d'In) et d'une âme (billes d'In). Les peaux représentent les couches de passivation (ou RDL, redistribution layer) et permettent la liaison entre les billes lorsqu'il n'y a pas d'enrobage.

On considère une cellule sur laquelle l'analyse est mise en œuvre. Les dimensions de cette cellule sont illustrées sur la Figure V.7. Cette cellule sera remplacée par un matériau homogène équivalent de volume  $V = pqH$ .

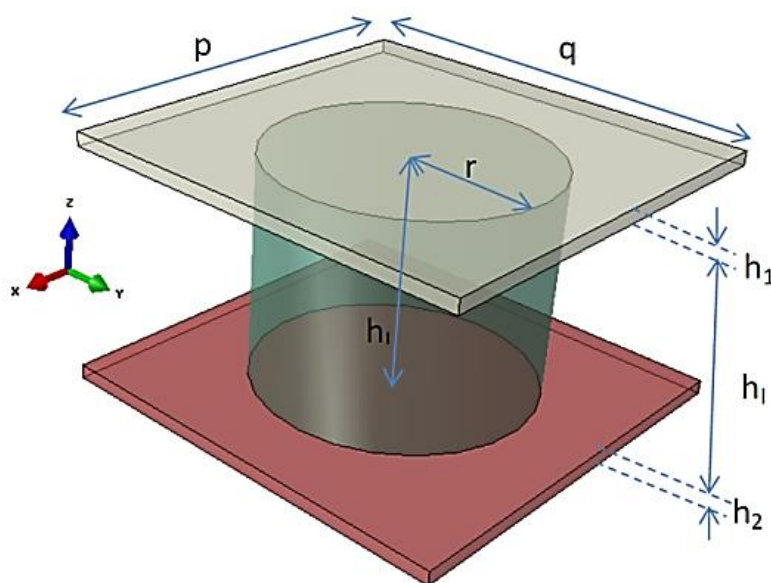


Figure V.7 – Cellule étudiée



La fraction volumique des billes d'In  $f_i$  par rapport à la cellule complète est fonction du rayon  $r$  et de la hauteur  $h_i$  de la bille, de la hauteur de la cellule  $H$  et des pas  $p$  et  $q$ , respectivement dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$f_i = \frac{\pi r^2}{pq} \frac{h_i}{H} = \varphi_s \xi_h \quad (\text{V-52})$$

où  $H = h_i + h_1 + h_2$  représente la hauteur totale de la cellule,  $\varphi_s = \frac{\pi r^2}{pq}$  et  $\xi_h = \frac{h_i}{H}$  définissent respectivement les fractions surfacique et linéique (selon la hauteur) de la bille.

Les fractions volumiques des deux peaux s'écrivent :  $f_i = \frac{h_i}{H}$   $i = 1, 2$ . Le complément, c'est-à-dire  $f_v = 1 - \frac{1}{H}(\varphi_s h_i + h_1 + h_2)$  correspond à la fraction volumique du vide.

Nous admettons que le comportement élastique de chaque constituant est isotrope et défini par un module de Young et un coefficient de Poisson:

- $E^I$  et  $\nu^I$  pour l'indium,
- $E^{(1)}$  et  $\nu^{(1)}$  pour la peau (1),
- $E^{(2)}$  et  $\nu^{(2)}$  pour la peau (2).

Selon la structure de la cellule, on peut en déduire que le comportement global de celle-ci est quasi-isotrope **transverse**. Nous devons dans ce cas déterminer 6 constantes d'ingénieur pour caractériser son comportement élastique :

$$E_1^{(C)} = E_2^{(C)}, E_3^{(C)}, \nu_{12}^{(C)} = \nu_{21}^{(C)}, \nu_{23}^{(C)} = \nu_{13}^{(C)}, \mu_{12}^{(C)}, \mu_{23}^{(C)} = \mu_{13}^{(C)}.$$

#### V.5.4.1. Modules d'Young et coefficients de Poisson

Pour déterminer les propriétés effectives de la cellule, les assemblages simples couplés en série (modèle de Reuss) et en parallèle (modèle de Voigt) sont considérés. Les équations d'homogénéisation de ces assemblages sont présentées dans l'Annexe B.

- Comportement dans le plan (O:  $\vec{x}, \vec{y}$ )

On analyse le comportement en traction dans la direction  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$ . Globalement, il s'agit d'un assemblage en parallèle des deux peaux et de la bille.

Supposons que la cellule est soumise à une déformation macroscopique axiale  $E_{11}$ . Les tenseurs macroscopiques sont définis comme suit:

- Déformation macroscopique 
$$\begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}$$
 avec  $E_{22} = -\nu_{12}^{(C)} E_{11}$  et  $E_{33} = -\nu_{13}^{(C)} E_{11}$  ;

- Contrainte macroscopique 
$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
.

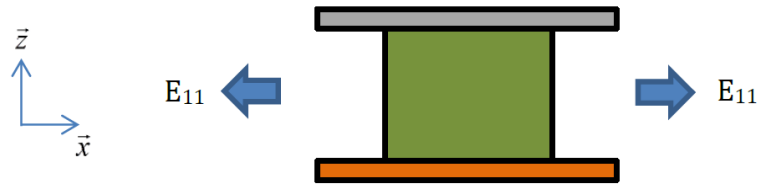


Figure V.8 – Traction dans la direction 1

A cause de la présence du vide autour de la bille, la déformation de la cellule est imposée par les deux peaux. Alors, le **tenseur de déformation de la bille d'indium est nul et par conséquent son tenseur de contrainte aussi** :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{0} \quad (V-53)$$

Les déformations dans les deux peaux sont telles que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (V-54)$$

Les contraintes dans les deux peaux sont telles que :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} \\ \langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle = \Sigma_{22} = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (V-55)$$

Par la loi de Hooke en isotropie, nous déduisons les expressions des contraintes dans les peaux telles que (voir annexe B) :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(i)} = \frac{E^{(i)} E_{11} + \nu^{(i)} E^{(i)} E_{22}}{1 - \nu^{(i)2}} \\ \sigma_{yy}^{(i)} = \frac{E^{(i)} E_{22} + \nu^{(i)} E^{(i)} E_{11}}{1 - \nu^{(i)2}} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-56})$$

Puisque la contrainte  $\sigma_{yy}^{(i)}$  est auto-équilibrée, nous avons :

$$\langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} E_{22} + \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} E_{11} = 0.$$

Cette équation conduit à  $E_{22} = -\frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}}} E_{11}$ . Par définition, nous obtenons le coefficient

de Poisson  $\nu_{12}^{(C)} = \nu_{21}^{(C)}$  :

$$\nu_{12}^{(C)} = \nu_{21}^{(C)} = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}}} \quad (\text{V-57})$$

Les contraintes dans les deux couches extérieures deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(i)} = \left( \frac{E^{(i)}}{(1 - \nu^{(i)2})} - \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right) \nu^{(i)} E^{(i)}}{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right) (1 - \nu^{(i)2})} \right) E_{11} \\ \sigma_{yy}^{(i)} = \left( \frac{\nu^{(i)} E^{(i)}}{(1 - \nu^{(i)2})} - \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right) E^{(i)}}{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right) (1 - \nu^{(i)2})} \right) E_{11} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-58})$$

En appliquant le théorème de la moyenne sur  $\sigma_{xx}^{(i)}$ , nous obtenons :

$$\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} - \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} \right)^2}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}} \right) E_{11} . \text{ D'où :}$$

$$E_1^{(C)} = E_2^{(C)} = \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1+\nu^{(i)}} \right) \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right)}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}} \quad (\text{V-59})$$

Grâce à l'expression de la déformation  $\varepsilon_{zz}^{(i)}$ , il est possible de calculer le coefficient de Poisson  $\nu_{23}^{(C)}$  :

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = -\frac{1}{E^{(i)}} \left( \frac{(1+\nu^{(i)})\nu^{(i)} E^{(i)}}{(1-\nu^{(i)2})} - \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}} \left[ \frac{(\nu^{(i)} + \nu^{(i)2}) E^{(i)}}{(1-\nu^{(i)2})} \right] \right) E_{11} \quad i = 1, 2 ;$$

$$E_{33} = \langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle = - \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{(1-\nu^{(i)})} - \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)} E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{(1-\nu^{(i)})} \right] \right\} E_{11} . \text{ D'où :}$$

$$\nu_{13}^{(C)} = \nu_{23}^{(C)} = \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right) \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1+\nu^{(i)}} \right)}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}}} \quad (\text{V-60})$$

➤ Comportement dans le plan (O;  $\vec{x}$ ,  $\vec{z}$ )

Il s'agit dans ce cas d'un assemblage en série. Supposons que la cellule est soumise à une contrainte macroscopique longitudinale  $\Sigma_{33}$  (Figure V.9). Les tenseurs macroscopiques sont définis comme suit :

- Contrainte macroscopique  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix}$ ,

- Déformation macroscopique  $\begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}$  avec  $E_{11} = -\nu_{31}^{(c)} E_{33}$ .

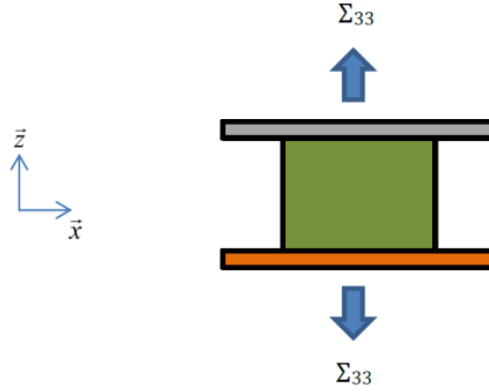


Figure V.9 – Traction dans la direction 3

Les contraintes dans les deux peaux sont telles que :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-61})$$

Les déformations dans les deux peaux sont telles que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-62})$$

Le tenseur de contraintes dans la bille d'indium vaut :

$$\boldsymbol{\sigma}^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Sigma_{33}}{\varphi_S} \end{pmatrix} \quad (\text{V-63})$$

Le tenseur des déformations dans la bille vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \begin{pmatrix} -\nu^I \varepsilon_{zz}^I & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^I \varepsilon_{zz}^I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^I \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_{zz}^I = \frac{\sigma_{zz}^I}{E^I} = \frac{\Sigma_{33}}{\varphi_S E^I} \quad (\text{V-64})$$

A partir de la loi de Hooke (voir annexe B), on peut déterminer les contraintes dans les

$$\text{peaux : } \sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \frac{E^{(i)}E_{11} + \nu^{(i)}\Sigma_{33}}{1 - \nu^{(i)}} \quad i = 1, 2.$$

Le théorème de la moyenne appliqué à la relation ci-dessus permet d'écrire :

$$\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} E_{11} + \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \Sigma_{33} = 0. \text{ D'où :}$$

$$E_{11} = - \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}} \Sigma_{33} \quad (\text{V-65})$$

La déformation des peaux dans la direction de sollicitation  $\vec{z}$  a pour expression :

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = \left( \frac{1 - \nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2}}{(1 - \nu^{(i)})E^{(i)}} + \frac{2\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}} \right) \Sigma_{33} \quad i = 1, 2.$$

Le théorème de la moyenne permet d'exprimer la déformation macroscopique suivant  $\vec{z}$  (la déformation de l'ensemble bille d'indium + vide est équivalente à la déformation de la bille, d'où la fraction volumique  $\xi_h$  utilisée):

$$E_{33} = \langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i (1 - \nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2})}{(1 - \nu^{(i)})E^{(i)}} + 2 \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right)^2}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}} + \frac{\xi_h}{\varphi_s E^I} \right) \Sigma_{33} \quad (\text{V-66})$$

On en déduit alors l'expression du module d'Young dans la direction  $\vec{z}$  :

$$E_3^{(C)} = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right) \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{f_i (1 - \nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2})}{(1 - \nu^{(i)})E^{(i)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_s E^I} \right] + 2 \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right)^2} \quad (\text{V-67})$$

En faisant le rapport des équations (V-65) et (V-66), nous obtenons le coefficient de Poisson

$\nu_{31}^{(C)}$  :

$$\nu_{31}^{(C)} = \nu_{32}^{(C)} = \frac{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right)}{\left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right) \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{f_i (1-\nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2})}{(1-\nu^{(i)}) E^{(i)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_S E^I} \right] + 2 \left( \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right)^2} \quad (V-68)$$

On peut aisément vérifier la symétrie de la matrice des composantes élastiques de notre cellule.

### V.5.4.2. Modules de cisaillement

- Considérons le cisaillement dans le plan  $(\mathbf{O}; \vec{x}, \vec{z})$  ou  $(\mathbf{O}; \vec{y}, \vec{z})$  : nous avons deux cas de figure (**a** et **b**).

Prenons tout d'abord en compte un chargement par un effort tranchant surfacique  $\mathbf{T}_{31}^{(a)}$  : chargement (**a**) (Figure V.10).

Les contraintes de cisaillement dans les deux peaux sont identiques à la contrainte macroscopique de cisaillement  $\mathbf{T}_{31}^{(a)}$ . On peut écrire :  $\tau_{31}^{(i)} = \mathbf{T}_{31}^{(a)} \quad i = 1, 2$ .

Dans la bille d'indium, la contrainte vaut :  $\tau_{31}^I = \frac{\mathbf{T}_{31}^{(a)}}{\varphi_S}$

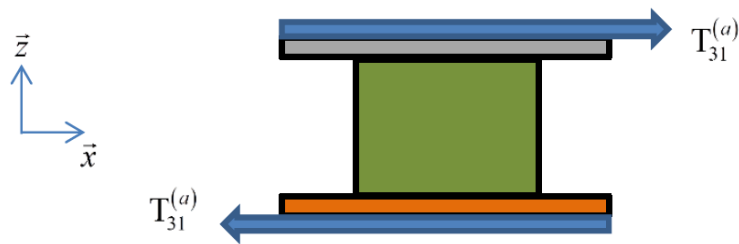


Figure V.10 – Cisaillement dans le plan (1,3) : chargement (a)

Les équations de compatibilité donnent :  $2\varepsilon_{13}^{(i)} = 2\varepsilon_{31}^{(i)} = u_{1,3}^{(i)} + u_{3,1}^{(i)} = u_{1,3}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_3}$ .

La loi de comportement dans chaque peau donne :  $2\varepsilon_{31}^{(i)} = \frac{\mathbf{T}_{31}^{(a)}}{\mu^{(i)}} \quad i = 1, 2$ .

Pour la bille d'indium on a :  $2\varepsilon_{31}^{(l)} = \frac{\mathbf{T}_{31}^{(a)}}{\varphi_s \mu^{(l)}}$ .

La déformation macroscopique  $\mathbf{E}_{31}^{(a)} = \langle \varepsilon_{31}^{(i)} \rangle$  vaut :

$$2\mathbf{E}_{31}^{(a)} = \left( \frac{f_1}{\mu^{(1)}} + \frac{f_2}{\mu^{(2)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_s \mu^{(l)}} \right) \mathbf{T}_{31}^{(a)} \quad (\text{V-69})$$

Considérons à présent un chargement transversal par un déplacement imposé se traduisant par un gradient déformation  $\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 2\mathbf{E}_{13}^{(b)}$  chargement (b) (Figure V.11).

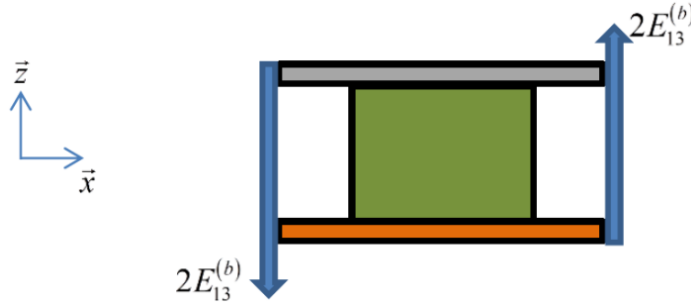


Figure V.11 – Cisaillement dans le plan (1,3) : chargement (b)

Dans ce cas, le gradient macroscopique imposé est le même dans les 3 couches :

$$2\varepsilon_{13}^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_1} = 2\mathbf{E}_{13}^{(b)}.$$

Les contraintes dans les trois couches valent alors :  $\tau_{13}^{(i)} = 2\mu^{(i)}\varepsilon_{13}^{(i)}$ , et la contrainte macroscopique :  $\mathbf{T}_{13}^{(b)} = \langle \tau_{13}^{(i)} \rangle = 2\left(f_1\mu^{(1)} + f_2\mu^{(2)} + \xi_h\mu^{(l)}\right)\mathbf{E}_{13}^{(b)}$ .

Pour déterminer un module de cisaillement moyen, nous calculons la déformation moyenne  $\mathbf{E}_{13} = \mathbf{E}_{31}$  comme suit:

$$2\mathbf{E}_{13} = \frac{1}{2}\left(2\mathbf{E}_{31}^{(a)} + 2\mathbf{E}_{13}^{(b)}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{f_1}{\mu^{(1)}} + \frac{f_2}{\mu^{(2)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_s \mu^{(l)}}\right)\mathbf{T}_{31}^{(a)} + \frac{\mathbf{T}_{13}^{(b)}}{f_1\mu^{(1)} + f_2\mu^{(2)} + \xi_h\mu^{(l)}}\right].$$

Par équilibre de la cellule, les composantes symétriques du tenseur des contraintes macroscopiques sont égales  $\mathbf{T}_{31}^{(a)} = \mathbf{T}_{13}^{(b)} = \mathbf{T}_{13}$  conduisant à :



$$2E_{13} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{f_1}{\mu^{(1)}} + \frac{f_2}{\mu^{(2)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_S \mu^{(l)}} \right) + \frac{1}{f_1 \mu^{(1)} + f_2 \mu^{(2)} + \xi_h \mu^{(l)}} \right] T_{13}.$$

Cette égalité spécifie la valeur du module de cisaillement effectif de la cellule :

$$\mu_{13}^{(c)} = \mu_{23}^{(c)} = \frac{2}{\frac{f_1}{\mu^{(1)}} + \frac{f_2}{\mu^{(2)}} + \frac{\xi_h}{\varphi_S \mu^{(l)}} + \frac{1}{f_1 \mu^{(1)} + f_2 \mu^{(2)} + \xi_h \mu^{(l)}}} \quad (V-70)$$

➤ Considérons maintenant le cisaillement dans le plan  $(\mathbf{O}; \vec{x}, \vec{y})$  (Figure V.12)

Dans ce cas, la déformation de cisaillement de chaque peau est égale à celle macroscopique  $E_{12}$ . On peut écrire :  $\varepsilon_{12}^{(i)} = E_{12} \quad i = 1, 2$ .

Le gradient dans la bille d'indium est nulle :  $2\varepsilon_{12}' = \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} = 0$ .

Les contraintes locales valent alors :  $\tau_{12}^{(i)} = 2\mu^{(i)}\varepsilon_{12}^{(i)} \quad i = 1, 2$ . Leur moyenne volumique devient alors :  $T_{12} = \langle \tau_{12}^{(i)} \rangle = 2(f_1\mu^{(1)} + f_2\mu^{(2)})E_{12}$ .

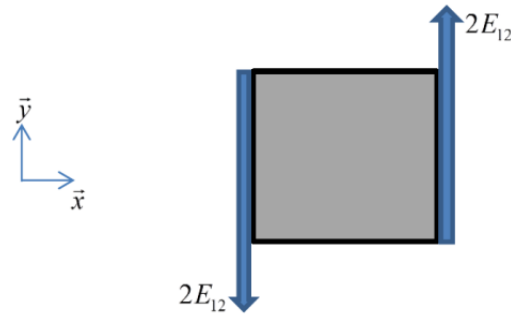


Figure V.12 – Cisaillement dans le plan (1,2)

Le module de cisaillement effectif vaut alors :

$$\mu_{12}^{(c)} = f_1\mu^{(1)} + f_2\mu^{(2)} \quad (V-71)$$

### V.5.4.3. Coefficients de dilatation thermique

Imposons à la cellule étudiée une variation de température de  $\theta$ . La cellule est libre de toute contrainte et par conséquent sa déformation totale est purement thermique. Le tenseur de déformations dans les peaux est de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^{(i)} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} E_{11} = \theta \alpha_{11}^{(C)} \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} = \theta \alpha^{(i)} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-72})$$

Le tenseur des contraintes dans les peaux s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{V-73})$$

Le tenseur contrainte de la bille d'indium est nul et par conséquent également sa déformation élastique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^I &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^I &= \theta \boldsymbol{\alpha}^I \end{aligned} \quad (\text{V-74})$$

La loi de Hooke en thermoélasticité permet d'obtenir les contraintes dans les peaux (voir

annexe B):  $\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \frac{(E_{11} - \theta \alpha^{(i)}) E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \quad i = 1, 2.$

Le théorème des moyennes permet d'écrire :  $\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} E_{11} - \theta \sum_{i=1}^2 \frac{f_i \alpha^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} = 0,$

d'où :  $E_{11} = \theta \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \alpha^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}.$

On en déduit le CDT dans la direction  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$  :

$$\alpha_{11}^{(C)} = \alpha_{22}^{(C)} = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \alpha^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}} \quad (\text{V-75})$$

On revient sur la déformation de chaque peau suivant la direction  $\vec{z}$  :

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = \frac{2\nu^{(i)}(\theta\alpha^{(i)} - E_{11})}{1-\nu^{(i)}} + \theta\alpha^{(i)} \quad i = 1, 2.$$

La déformation macroscopique dans cette direction vaut :

$$E_{33} = \left( \xi_h \alpha^I + \sum_{i=1}^2 f_i \frac{(1+\nu^{(i)})\alpha^{(i)} - 2\nu^{(i)}\alpha_{11}^{(C)}}{1-\nu^{(i)}} \right) \theta = \theta\alpha_{33}^{(C)}.$$

Le CDT dans cette direction vaut alors :

$$\alpha_{33}^{(C)} = \xi_h \alpha^I + \sum_{i=1}^2 f_i \frac{(1+\nu^{(i)})\alpha^{(i)} - 2\nu^{(i)}\alpha_{11}^{(C)}}{1-\nu^{(i)}} \quad (V-76)$$

#### V.5.4.4. Comparaison

Les résultats de la démarche analytique ci-dessus ont été confrontés aux données issues de simulations numériques par éléments finis (annexe B). La cellule étudiée a été modélisée en EF et ses propriétés thermoélastiques ont été déterminées grâce aux équations développées dans l'annexe B. **Les autres dimensions de la cellule ne sont pas données ici pour des raisons de confidentialité.** Les propriétés des constituants de la cellule sont listées dans le Tableau V.3.

Tableau V.3 – Propriétés des matériaux constituant la cellule étudiée

Matériaux	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson	CDT ( $10^{-6} K^{-1}$ )
Indium	13684	0,45	29,2
Peau 1	50000	0,331	4,96
Peau 2	100000	0,3	3

Les constantes élastiques prédites par les deux méthodes sont listées dans le Tableau V.4. Les écarts sont dans certains cas, élevés. Le fait de négliger la contribution de la bille d'indium dans le plan (O;  $\vec{x}, \vec{y}$ ) semble être la principale source de ces écarts. En effet, les zones de la bille proches des interfaces avec les peaux participent au comportement macroscopique de la cellule. La prise en compte de ces contraintes et déformations dans notre modèle périodique alourdirait les équations. Les écarts constatés n'altèrent pas de manière significative la précision des résultats de simulation d'un modèle flip chip surtout dans le cas présent où les rapports d'épaisseurs sont importants.

Tableau V.4 – Constantes thermoélastiques obtenues avec les deux méthodes

Propriétés	Modèle périodique	Méthode EF	Ecart (%)
$E_1$ (MPa)	8335,32	9412,79	-11,4
$E_3$ (MPa)	5328,02	5798,56	-8,11
$\nu_{12}$	0,310484	0,301392	+3,02
$\nu_{13}$	0,0353699	0,122467	-71,1
$\mu_{12}$ (MPa)	3180,24	3180,28	-0,0
$\mu_{31}^{(a)}$ (MPa)	1838	1371,59	+34
$\mu_{13}^{(b)}$ (MPa)	7374,57	2257,99	+227
$\mu_{13}$ (MPa)	2942,61	1706,55	+72,4
$\alpha_{11}$ ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )	3,67321	6,29721	-41,7
$\alpha_{33}$ ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )	26,4365	31,8474	-17

### V.5.4.5. Localisation

La déformation totale et la contrainte dans la phase In peuvent s'exprimer en fonction des déformations et contraintes macroscopiques comme dans les équations (V-9).

Lorsque le chargement est purement mécanique, la déformation totale est élastique ( $\theta = 0$ ) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{A}^I : \mathbf{E}.$$

On définit la forme du tenseur de localisation de la déformation dans la phase Indium  $\mathbf{A}^I$  :

$$[A_{ij}^I] = \begin{pmatrix} A_{11}^I & A_{12}^I & A_{13}^I & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^I & A_{22}^I & A_{23}^I & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^I & A_{32}^I & A_{33}^I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66}^I \end{pmatrix}$$

Le comportement quasi isotrope transverse de la cellule étudiée permet d'introduire les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_{11} = A'_{22} \\ A'_{12} = A'_{21} \\ A'_{13} = A'_{23} \\ A'_{31} = A'_{32} \\ A'_{55} = A'_{66} \end{array} \right. \quad (V-77)$$

Considérons comme précédemment les essais de traction et de cisaillement en élasticité:

❖ Traction suivant  $\vec{x}$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= A'_{11} E^e_{11} + A'_{12} E^e_{22} + A'_{13} E^e_{33} = A'_{11} E^e_{11} - \nu_{12}^{eff} A'_{12} E^e_{11} - \nu_{13}^{eff} A'_{13} E^e_{11} = 0 \\ \Rightarrow A'_{11} - \nu_{12}^{eff} A'_{12} - \nu_{13}^{eff} A'_{13} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{yy} &= A'_{21} E^e_{11} + A'_{22} E^e_{22} + A'_{23} E^e_{33} = A'_{21} E^e_{11} - \nu_{12}^{eff} A'_{22} E^e_{11} - \nu_{13}^{eff} A'_{23} E^e_{11} = -\nu^I \varepsilon'_{xx} = 0 \\ \Rightarrow A'_{21} - \nu_{12}^{eff} A'_{22} - \nu_{13}^{eff} A'_{23} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{zz} &= A'_{31} E^e_{11} + A'_{32} E^e_{22} + A'_{33} E^e_{33} = A'_{31} E^e_{11} - \nu_{12}^{eff} A'_{32} E^e_{11} - \nu_{13}^{eff} A'_{33} E^e_{11} = -\nu^I \varepsilon'_{xx} = 0 \\ \Rightarrow A'_{31} - \nu_{12}^{eff} A'_{32} - \nu_{13}^{eff} A'_{33} &= 0 \end{aligned}$$

❖ Traction suivant  $\vec{z}$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= A'_{11} E^e_{11} + A'_{12} E^e_{22} + A'_{13} E^e_{33} = -\nu_{31}^{eff} A'_{11} E^e_{33} - \nu_{32}^{eff} A'_{12} E^e_{33} + A'_{13} E^e_{33} = -\nu^I \varepsilon'_{zz} = -\nu^I \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} E^e_{33} \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A'_{11} - \nu_{32}^{eff} A'_{12} + A'_{13} &= -\nu^I \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{yy} &= A'_{21} E^e_{11} + A'_{22} E^e_{22} + A'_{23} E^e_{33} = -\nu_{31}^{eff} A'_{21} E^e_{33} - \nu_{32}^{eff} A'_{22} E^e_{33} + A'_{23} E^e_{33} = -\nu^I \varepsilon'_{zz} = -\nu^I \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} E^e_{33} \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A'_{21} - \nu_{32}^{eff} A'_{22} + A'_{23} &= -\nu^I \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{zz} &= A'_{31} E^e_{11} + A'_{32} E^e_{22} + A'_{33} E^e_{33} = -\nu_{31}^{eff} A'_{31} E^e_{33} - \nu_{32}^{eff} A'_{32} E^e_{33} + A'_{33} E^e_{33} = \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} E^e_{33} \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A'_{31} - \nu_{32}^{eff} A'_{32} + A'_{33} &= \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} \end{aligned}$$

En prenant en compte les égalités (V-77), on obtient un système de 5 équations à 5 inconnues :

$$\begin{cases} A'_{11} - \nu_{12}^{eff} A'_{12} - \nu_{13}^{eff} A'_{13} = 0 \\ A'_{12} - \nu_{12}^{eff} A'_{11} - \nu_{13}^{eff} A'_{13} = 0 \\ (1 - \nu_{12}^{eff}) A'_{31} - \nu_{13}^{eff} A'_{33} = 0 \\ -\nu_{31}^{eff} A'_{11} - \nu_{31}^{eff} A'_{12} + A'_{13} = -\nu^I \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} \\ -2\nu_{31}^{eff} A'_{31} + A'_{33} = \frac{E_3^{eff}}{\varphi_S E^I} \end{cases} \quad (V-78)$$

dont la résolution fournit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A'_{11} &= \frac{E_3^{eff} \nu_{13}^{eff} \nu^I}{\varphi_S E^I (\nu_{12}^{eff} + 2\nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff} - 1)} \\ A'_{33} &= \frac{E_3^{eff} (\nu_{12}^{eff} - 1)}{\varphi_S E^I (\nu_{12}^{eff} + 2\nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff} - 1)} \\ A'_{12} &= \frac{E_3^{eff} \nu_{13}^{eff} \nu^I}{\varphi_S E^I (\nu_{12}^{eff} + 2\nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff} - 1)} \\ A'_{13} &= \frac{E_3^{eff} \nu^I (1 - \nu_{12}^{eff})}{\varphi_S E^I (\nu_{12}^{eff} + 2\nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff} - 1)} \\ A'_{31} &= \frac{-E_3^{eff} \nu_{13}^{eff}}{\varphi_S E^I (\nu_{12}^{eff} + 2\nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff} - 1)} \end{aligned} \quad (V-79)$$

Les essais de cisaillement étudiés précédemment permettent de déduire également les autres composantes du tenseur  $\mathbf{A}^I$  :

$$\begin{cases} A'_{44} = 0 \\ A'_{55} = A'_{66} = \frac{\mu_{13}^{eff}}{2\varphi_S \mu^I} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (V-80)$$

Considérons à présent un chargement purement thermique (variation de température  $\theta$ ).

Comme précédemment, les contraintes dans l'indium sont nulles :  $\boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{0}$ . Comme le chargement est purement thermique, la contrainte macroscopique est nulle, ce qui implique :

$\boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{B}^I : \boldsymbol{\Sigma} + \theta \mathbf{b}^I = \theta \mathbf{b}^I$ . On peut alors déduire que le tenseur  $\mathbf{b}^I$  est nul :

$$\mathbf{b}^I = \mathbf{0} \quad (V-81)$$

Connaissant les tenseurs  $\mathbf{A}^I$  et  $\mathbf{b}^I$ , les tenseurs de localisation des contraintes dans la phase In se déterminent grâce aux formules (V-15) et (V-16) rappelées ici :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^I = \mathbf{c}^I : \mathbf{A}^I : \mathbf{S}^{eff} \\ \mathbf{a}^I = \boldsymbol{\alpha}^I - \mathbf{A}^I : \boldsymbol{\alpha}^{eff} + \mathbf{s}^I : \mathbf{b}^I \end{cases}$$

Pour les tenseurs de localisation des deux peaux, leurs expressions sont semblables à celles développés dans l'annexe B. Pour chaque peau ( $i$ ) on a :

$$\begin{aligned} A_{11}^{(i)} &= A_{22}^{(i)} = 1 \\ A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = A_{13}^{(i)} = A_{23}^{(i)} = 0 \\ A_{33}^{(i)} &= \frac{K_{zz}^{(i)} (\nu_{12}^{(C)} - 1) + 2\nu_{31}^{(C)} \nu^{(i)}}{2\nu_{13}^{(C)} \nu_{31}^{(C)} + \nu_{12}^{(C)} - 1} \\ A_{31}^{(i)} &= A_{32}^{(i)} = \frac{\nu^{(i)} - K_{zz}^{(i)} \nu_{13}^{(C)}}{2\nu_{13}^{(C)} \nu_{31}^{(C)} + \nu_{12}^{(C)} - 1} \\ A_{44}^{(i)} &= 1 \\ A_{55}^{(i)} &= A_{66}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu^{(i)}} + \frac{1}{f_1 \mu^{(1)} + f_2 \mu^{(2)} + f_1 \mu^{(i)}} \right) \mu_{13}^{(C)} \end{aligned} \quad (V-82)$$

$$\text{Avec } K_{zz}^{(i)} = \frac{1 - \nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2}}{(1 - \nu^{(i)}) E^{(i)}} E_3^{(C)} + \frac{2\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \nu_{31}^{(C)}$$

$$\begin{aligned} b_{11}^{(i)} &= b_{22}^{(i)} = \frac{(\alpha_{11}^{(C)} - \alpha^{(i)}) E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \\ b_{33}^{(i)} &= 0 \end{aligned} \quad (V-83)$$

## V.6. Prise en compte de la plasticité

### V.6.1. Plasticité des billes d'indium

Il est supposé dans cette étude que les déformations plastiques peuvent se développer uniquement dans les billes servant à connecter les circuits de lecture et de détection. Ces déformations sont dues aux cycles thermiques appliqués à l'assemblage lors de sa fabrication et pendant son exploitation. Restant homogène avec les hypothèses précédentes, on suppose qu'une loi d'écoulement plastique isotrope en petites déformations serait bien adaptée pour décrire le comportement des billes. Notre choix se porte sur l'approche classique d'écoulement plastique  $J_2$  associée au critère de plasticité de Huber-von Mises. Une loi d'écrouissage non-linéaire et isotrope est supposée suffisante pour les chargements

envisagés. En d'autres termes, on admet uniquement une dilatation homothétique de la surface de plasticité (écrouissage isotrope). Les équations suivantes décrivent alors le comportement plastique des sphères :

- Critère de plasticité

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T) = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - R(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, T) = 0 \quad (V-84)$$

- Règle d'écoulement plastique associée de Levy-Saint Venant

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, T)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (V-85)$$

Dans ces expressions  $R(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, T) = \sigma_Y(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, T)$  est la contrainte d'écoulement plastique, déterminée par des essais, fonction de la température et de la déformation plastique équivalente cumulée  $\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}$ .  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique ou paramètre de consistance.

Soit  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq}$  la vitesse (taux) de la déformation plastique équivalente, telle que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p} \quad (V-86)$$

La déformation plastique équivalente cumulée, servant de variable d'écrouissage, est définie par l'expression suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{peq} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p(\tau) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p(\tau)} d\tau \quad (V-87)$$

Dans le cadre de la théorie de Huber-von Mises le taux de déformation plastique devient:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{\sigma_Y(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, T)} = \dot{\lambda} n_{ij} \quad (V-88)$$

où  $n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_Y(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, T)}$  correspond, dans l'espace des contraintes, au vecteur normal à la

surface de plasticité définissant la direction de l'écoulement plastique. De plus, nous remarquons que pour ce cas, la vitesse de la déformation plastique équivalente est simplement égale au paramètre de consistance:



$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\lambda}^2 \frac{9}{4} \frac{s_{ij} s_{ij}}{3} \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} = \dot{\lambda} \quad (\text{V-89})$$

La déformation plastique cumulée intervenant dans la loi d'érouissage est définie par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq}(\tau) d\tau = \int_0^t \dot{\lambda}(\tau) d\tau \quad (\text{V-90})$$

Le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est déterminé en utilisant l'équation de consistance **contraignant l'incrément du tenseur de contrainte à demeurer sur la surface de plasticité** lors d'un écoulement plastique :

$$\dot{f} = 0 \quad (\text{V-91})$$

En utilisant l'expression (V-84), on a :  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{peq}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq} = 0$ .

Puisque  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{peq} = \dot{\lambda} \mathbf{n}$ , sachant que  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n}$  et en utilisant la loi de Hooke nous obtenons :

$$\mathbf{n} : \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \dot{\lambda} h = 0 \text{ où}$$

$$h(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}) = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{peq}} \quad (\text{V-92})$$

est le module d'érouissage tangent, fonction de la déformation plastique équivalente cumulée. Le tenseur des modules élastiques en isotropie linéaire s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\mathbf{c}(T) = 3\kappa(T)\mathbf{J} + 2\mu(T)\mathbf{K} \quad (\text{V-93})$$

Où  $\mu(T)$  est le module de cisaillement et  $\kappa(T)$ , le module de compressibilité dépendant de la température. Les tenseurs idempotents  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont définis par les expressions :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J} . \text{ Ces tenseurs idempotents possèdent des propriétés rappelées ci-dessous :}$$

dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{I} : \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \mathbf{J} : \mathbf{J} \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} : \mathbf{K} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{K} = \mathbf{I} : \mathbf{K} = \mathbf{K} : \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \mathbf{I} : \mathbf{J} = \mathbf{J} : \mathbf{I} \\ \mathbf{K} : \mathbf{J} = \mathbf{J} : \mathbf{K} = \mathbf{0} \end{cases}$$

L'expression (V-93) et la décomposition additive  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$  conduisent à :

$$\mathbf{n} : (3\kappa\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{K}) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}) = \mathbf{n} : (3\kappa\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{K}) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}) = \dot{\lambda}h.$$

En prenant en compte les résultats suivants ( $\mathbf{n}$  est un déviateur :  $\mathbf{n} : \mathbf{J} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{n} : \mathbf{K} = \mathbf{n} : (\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \mathbf{n} : \mathbf{I} = \mathbf{n}$ ) et le fait que le tenseur de la déformation thermique étant purement sphérique (sa double contraction avec  $\mathbf{n}$ , tenseur déviateur, vaut zéro), on obtient après simplification ( $\mathbf{n} : \mathbf{n} = \frac{3}{2}$ ), le paramètre de consistance :

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu}{h + 3\mu} \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{V-94})$$

conduisant à la vitesse de déformation plastique, fonction de la vitesse de déformation totale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{n} = \frac{2\mu}{h + 3\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{V-95})$$

Ce résultat est classique en théorie de plasticité. Connaissant ce taux de déformation plastique local, nous estimons le taux global en utilisant la relation :

$$\dot{\mathbf{E}}^p(t) \approx f \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) \quad (\text{V-96})$$

Avec  $f$  la fraction volumique totale des billes d'indium.

La plasticité de la phase In étant définie, il serait intéressant de se pencher sur les surfaces de plasticité macroscopique du MHE.

## V.6.2. Plasticité macroscopique

La localisation permet de déterminer le tenseur de contrainte de la phase indium en fonction de la contrainte macroscopique. En effet en supposant que la température ne varie pas durant ce processus, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} : \boldsymbol{\Sigma} \text{ avec } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_1 = B_{11}\Sigma_1 + B_{12}\Sigma_2 \\ \sigma_2 = B_{21}\Sigma_1 + B_{22}\Sigma_2 \\ \sigma_3 = B_{31}\Sigma_1 + B_{32}\Sigma_2 \end{cases}$$

La contrainte équivalente locale vaut :  $\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$

$$\text{Soient : } \begin{cases} c_1 = B_{11} - B_{21} \\ c_2 = B_{12} - B_{22} \\ c_3 = B_{11} - B_{31} \\ c_4 = B_{12} - B_{32} \\ c_5 = B_{21} - B_{31} \\ c_6 = B_{22} - B_{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = c_1\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 \\ \sigma_1 - \sigma_3 = c_3\Sigma_1 + c_4\Sigma_2 \\ \sigma_2 - \sigma_3 = c_5\Sigma_1 + c_6\Sigma_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Sigma_1 = Y \cos \varphi \\ \Sigma_2 = Y \sin \varphi \end{cases}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} Y \sqrt{(c_1^2 + c_3^2 + c_5^2) \cos^2 \varphi + (c_2^2 + c_4^2 + c_6^2) \sin^2 \varphi + 2(c_1c_2 + c_3c_4 + c_5c_6) \cos \varphi \sin \varphi}$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}\sigma_{eq}}{\sqrt{(c_1^2 + c_3^2 + c_5^2) \cos^2 \varphi + (c_2^2 + c_4^2 + c_6^2) \sin^2 \varphi + 2(c_1c_2 + c_3c_4 + c_5c_6) \cos \varphi \sin \varphi}}$$

avec  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

En considérant les propriétés des matériaux listées dans le Tableau I.1 on calcule le tenseur  $\mathbf{B}$  avec le modèle de Mori-Tanka décrit précédemment. En supposant une contrainte équivalente de von Mises de la phase indium  $\sigma_{eq} = 1 \text{ MPa}$ , on obtient une représentation des surfaces de plasticité macroscopique telle qu'illustrée sur la Figure V.13. La courbe verte est confondue à la courbe violette.

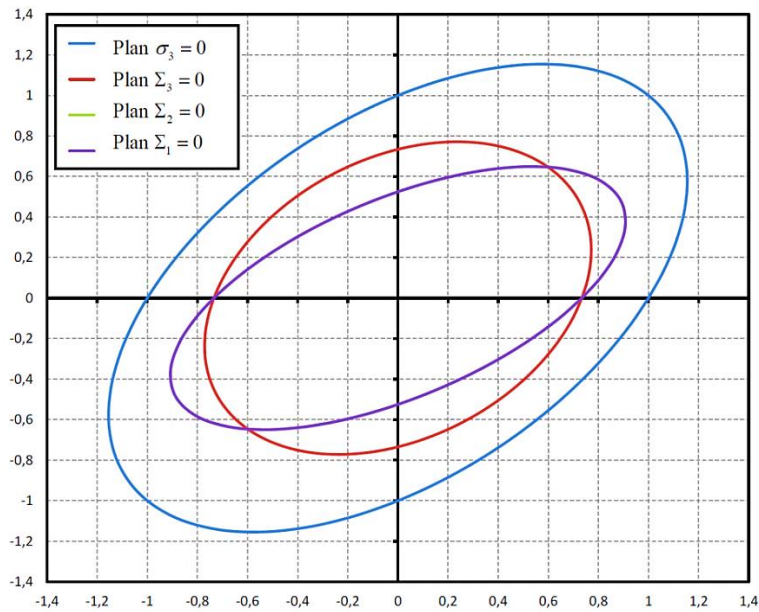


Figure V.13 – Surfaces de plasticité de von Mises du MHE et de la phase In dans le plan  $(\sigma_1$  et  $\sigma_2)$

Une démarche similaire est adoptée pour obtenir les surfaces de plasticité de von Mises du MHE dans le plan  $(\sigma$  et  $\tau)$  (Figure V.14).

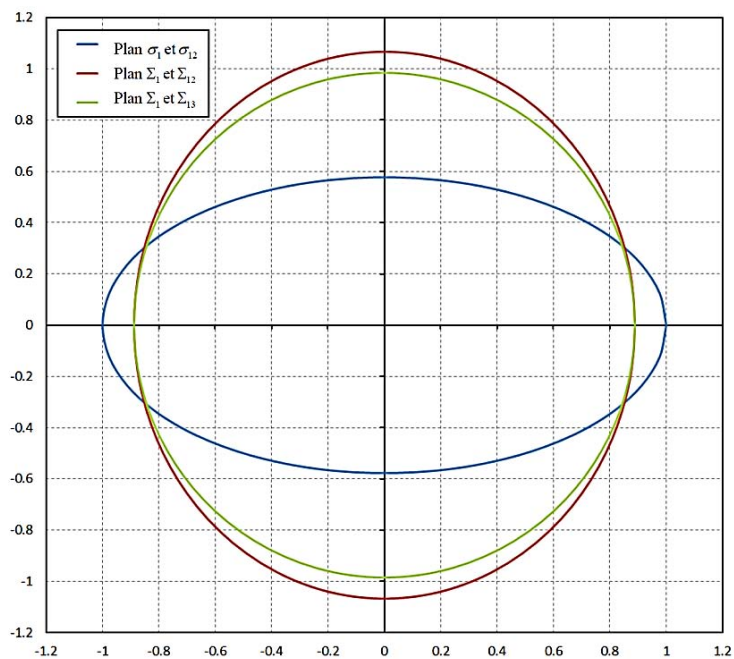


Figure V.14 – Surfaces de plasticité de von Mises du MHE et de la phase In dans le plan  $(\sigma$  et  $\tau)$

On peut remarquer le comportement macroscopique anisotrope du MHE à travers les surfaces de plasticités représentées.

Après l'estimation du comportement thermoélastique et plastique du MHE, on peut à présent passer à l'étape de l'implémentation de la nouvelle loi thermo-élasto-plastique dans le code de calcul Abaqus®.

### V.7. Implémentation de la nouvelle loi de comportement dans Abaqus®

Cette section présente les bases relatives à l'implémentation d'une nouvelle loi de comportement thermo-élasto-plastique, présentée dans les sections V.5 et V.6, dans un code de calcul par éléments finis.

Les équations non linéaires décrivant ce comportement sont résolues par la technique numérique de Newton-Raphson. L'implémentation est effectuée dans le code éléments finis Abaqus® standard via la routine utilisateur UMAT. Le développement du module algorithmique cohérent avec la technique d'intégration est également explicité.

#### V.7.1. Résolution des équations comportementales : approche incrémentale

L'objectif est, pour un intervalle de temps donné  $[0, t]$ , de déterminer l'évolution de tous les champs mécaniques discutés dans les sections précédentes. La procédure utilisée par Abaqus®, comme pour la majorité de codes éléments finis, consiste en un traitement numérique par itérations d'une version discrétisée du principe des puissances virtuelles (PPV). Ce traitement se résume essentiellement en cinq étapes, classées en deux catégories : globale (niveau structure) et locale (niveau point d'intégration):

1. La version discrétisée du PPV permet, pour un incrément de sollicitations externes, l'obtention d'un déplacement incrémental nodal (traitement global).
2. Les relations cinématiques permettent le calcul des incréments de déformation totale à partir des déplacements nodaux (traitement local).
3. Pour cet incrément, les nouvelles valeurs de variables telles que  $\Sigma$ ,  $\mathbf{E}^p$ ,  $\mathbf{E}^e$ , ... sont déterminées par l'intégration d'une loi de comportement (traitement local).
4. Le PPV est réutilisé pour vérifier l'équilibre de la structure avec les nouvelles valeurs des contraintes (traitement global).

5. Les valeurs résiduelles des forces sont déterminées. Si leur niveau est inférieur à la tolérance prédéfinie, la solution courante est acceptée. Sinon le retour au point 1 est effectué (traitement global).

Ce schéma correspond à une stratégie appelée "déformation supposée" (assumed strain). Elle est également utilisée par Abaqus®. **Il résulte de cette procédure que l'implémentation d'une nouvelle loi de comportement touche uniquement le point 3 et se déroule localement au niveau des points d'intégrations des éléments.**

Admettons ainsi qu'après  $n$  incréments de temps, c'est à dire au temps  $t_n \in [0, t]$ , les données suivantes sont disponibles:

- $\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n^p$  et  $\mathbf{q}$ , respectivement, les valeurs convergées de la déformation totale, de la déformation permanente et de l'ensemble des variables internes obtenues à la fin du  $n^{\text{ième}}$  incrément de temps. Elles seront considérées dans la suite comme variables indépendantes du processus itératif.
- $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$  - un incrément de la déformation totale résultant du calcul lié aux points 1 et 2.

Le but est de réactualiser les valeurs de  $\mathbf{E}, \mathbf{E}^p$  et  $\mathbf{q}$  à la fin du pas de temps  $n+1$ , c'est-à-dire de trouver les valeurs  $\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p$  et  $\mathbf{q}_{n+1}$ .

Plusieurs approches sont possibles pour intégrer les équations du comportement. Les plus répandues sont la méthode explicite, la méthode semi-implicite et la méthode implicite d'Euler. Elles découlent toutes d'un algorithme commun qui est résumé comme suit. Soit une équation d'évolution :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}(t) = \varphi(q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{array} \right\} \quad t \in [0, t_1] \quad (\text{V-97})$$

La méthode d'Euler consiste à remplacer l'équation précédente par un système incrémental (discret) de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = \varphi(q(t_n + \vartheta \Delta t)) \\ q_n = q(t_n) \end{array} \right\} \quad \vartheta \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad q(t_n + \vartheta \Delta t) = (1 - \vartheta)q_n + \vartheta q_{n+1}$$

Les trois méthodes attribuées à Euler correspondent aux trois choix particuliers du paramètre  $\vartheta$ , à savoir :

- $\mathcal{G} = 0$   $\Rightarrow$  méthode explicite  $q_{n+1} = q_n + \Delta t \varphi(q_n)$
- $\mathcal{G} = \frac{1}{2}$   $\Rightarrow$  méthode semi-implicite  $q_{n+1} = q_n + \Delta t \varphi\left(\frac{q_n + q_{n+1}}{2}\right)$
- $\mathcal{G} = 1$   $\Rightarrow$  méthode implicite  $q_{n+1} = q_n + \Delta t \varphi(q_{n+1})$

La méthode explicite a été généralement utilisée dans les premiers travaux concernant l'intégration de la loi de comportement dans le calcul de structures. Le non-respect du critère de plasticité à la fin du pas, introduisant les indésirables décharges du matériau et les problèmes d'instabilités numériques, a conduit au développement des algorithmes basés sur la méthode implicite et semi-implicite. La méthode de résolution implicite est préconisée pour le logiciel Abaqus®, c'est donc cette méthode qui sera développée ici.

L'implémentation d'une nouvelle loi de comportement non-linéaire se décompose en deux phases principales appelées "prédiction élastique" et "correction plastique". C'est dans la phase de la "correction plastique" que la méthode de Newton est appliquée. Au préalable, dans le cas qui concerne cette étude, les propriétés thermoélastiques équivalentes du matériau doivent être déterminées en fonction de la température du milieu.

### V.7.1.1. Prédiction élastique

Au début de chaque incrément, la température du matériau est réactualisée à la valeur correspondant à la fin du pas  $n+1$ :

$$T_{n+1} = T_n + \Delta \theta_{n+1} \quad (\text{V-98})$$

On définit  $\theta_n = T_n - T_{ref}$  la variation de la température par rapport à la température de référence (par rapport à laquelle est défini le CDT, ici égale à 293 K).

S'agissant d'un problème thermomécanique faiblement couplé, cette température n'évolue point pendant la recherche de la solution convergée du pas. Suite à quoi les grandeurs mécaniques suivantes sont déterminées:  $\mathbf{C}_{n+1}^{MHE}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{MHE}$  ou  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{MHE}$ ,  $\mathbf{A}_{n+1}^{(i)}$ ,  $\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ . De plus, on peut déterminer leurs variations par rapport à la température ( $\Delta \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n$ ).

La phase de **prédiction élastique** correspond à l'établissement de la solution initiale du problème. Il est admis dans cette phase que l'incrément en cours est purement thermoélastique. Ceci revient à proposer la solution test suivante:

- pour les déformations globales

$$\mathbf{E}_{n+1}^{test} = \mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}_{n+1} \quad (V-99)$$

$$\Delta\mathbf{E}^p = \mathbf{0} \quad (V-100)$$

- pour les contraintes macroscopiques

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{test} = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} + \Delta\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{test} \quad (V-101)$$

L'incrément de déformation totale est fourni par le code éléments finis (assumed strain), par contre les incréments de déformations macroscopiques thermique et élastique se calculent comme suit :

$$\Delta\mathbf{E}_{n+1}^{th} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{MHE} \Delta\theta_{n+1} + \theta_n \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{MHE} \quad (V-102)$$

$$\Delta\mathbf{E}_{n+1}^{e-test} = \Delta\mathbf{E}_{n+1} - \Delta\mathbf{E}_{n+1}^{th} \quad (V-103)$$

Ainsi on peut déterminer l'incrément de contrainte macroscopique :

$$\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \Delta\mathbf{E}_{n+1}^{e-test} + \Delta\mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \mathbf{E}_n^e \quad (V-104)$$

Avec  $\mathbf{E}_n^e = \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n^{th} - \mathbf{E}_n^p$  où  $\mathbf{E}_n^{th} = \boldsymbol{\alpha}_n^{MHE} \theta_n - \mathbf{E}_0^{th}$

L'actualisation des déformations thermique et élastique se fait comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1}^{th} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{MHE} \theta_{n+1} - \mathbf{E}_0^{th} \\ \mathbf{E}_{n+1}^{e-test} &= \mathbf{E}_n^e + \Delta\mathbf{E}_{n+1}^{e-test} \end{aligned} \quad (V-105)$$

L'incrément de déformation thermoélastique dans chaque phase vaut alors :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{A}_{n+1}^{(i)} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} + \Delta\mathbf{A}_{n+1}^{(i)} : (\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_0^{th}) + \Delta\theta_{n+1}^{(i)} + \theta_n \Delta\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \quad (V-106)$$

La déformation totale dans chaque phase vaut :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{*(i)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^{*(i)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{*(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \end{aligned} \quad (V-107)$$

L'actualisation des déformations locales thermique et élastique (phase élastique) se fait comme suit:



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{th(i)} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{th(i)}\end{aligned}\quad (V-108)$$

En particulier pour la phase d'indium qui a une déformation plastique, sa déformation élastique « test » vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^{test}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (V-109)$$

Par conséquent, la contrainte dans les phases élastiques peut être déterminée par la relation suivante:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{c}_{n+1}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)} \quad (V-110)$$

Dans la phase indium, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{c}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^{test}} \quad (V-111)$$

Ainsi la contrainte dans l'indium vaut :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (V-112)$$

A présent, le critère de plasticité pour la contrainte test peut être vérifié. Ainsi si:

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}) \leq \sigma_Y(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{peq}, T_{n+1}) \quad (V-113)$$

alors la réponse du matériau est purement thermoélastique pour ce pas de chargement et la solution test est la solution convergée du problème à cet incrément de temps:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1} &= \mathbf{E}_{n+1}^{test} \\ \mathbf{E}_{n+1}^e &= \mathbf{E}_{n+1}^{e-test} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{test} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^{test}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \end{aligned} \right. \quad (V-114)$$

Dans le cas contraire, la phase de correction plastique de la solution est mise en œuvre.

### V.7.1.2. Correction plastique

Durant la phase de "prédiction élastique" les mécanismes de la déformation plastique sont inactifs. Cette considération conduit à la violation du critère de plasticité du matériau. Le but de la "correction plastique" est de satisfaire toutes les équations du problème d'élasto-plasticité. Il est supposé que suite à  $(k)$  itérations, la solution approchée est obtenue pour toutes les grandeurs physiques intervenant dans notre problème. Pendant la phase de correction plastique, il est considéré que l'incrément de la déformation globale totale  $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$  ne change pas. Ceci correspond à l'approche "assumed strain" et permet de dégager un résultat de première importance. En effet, en admettant que  $\Delta \mathbf{E}_{n+1}$  reste constant et que  $\boldsymbol{\Sigma}_n$  soit la contrainte globale convergée du pas précédent, on peut alors écrire:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \left( \Delta \mathbf{E}_{n+1} - \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{th} - \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p \right) + \Delta \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \mathbf{E}_n^e \quad (V-115)$$

On remarque que la déformation  $\Delta \mathbf{E}^{th}$  due à la dilatation de la matière est également une grandeur qui reste inchangée durant le processus itératif car la température (et son incrément) est donnée à la fin du pas et les propriétés thermoélastiques sont fonction uniquement de cette température. On en déduit de cette expression le lien entre la correction de la déformation plastique et celle de la contrainte:

$$\delta \boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = -\mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \delta \left( \Delta \mathbf{E}^p \right)^{(k)} - \delta \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \Delta \mathbf{E}^p \equiv -\mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \delta \mathbf{E}^p - \delta \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \Delta \mathbf{E}^p \quad (V-116)$$

où le symbole  $\delta$  est utilisé pour désigner la correction d'une variable ;

$\delta \mathbf{C}_{n+1}^{MHE} = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{MHE}}{\partial T} \delta T = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{MHE}}{\partial T} \delta \theta = 0$  car une déformation plastique isothermique a été admise dans la section V.6.1; donc pas de variation de température.

En utilisant la relation (V-96) cette dernière expression devient:

$$\delta \boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = -\mathbf{f}_{n+1}^{MHE} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (V-117)$$

Dans la suite, pour alléger les notations, l'indice  $(n+1)$  indiquant le numéro d'incrément courant est omis sur toutes les variables susceptibles d'évoluer. Il sera remplacé par l'exposant  $(k)$  qui est l'itération du cycle de correction plastique. La difficulté du problème

traité ici est liée au caractère non-linéaire de l'écoulement plastique. Posons les équations concernant cet écoulement correspondant à l'itération  $(k)$ . Le cas général est traité ici. Le système d'équations à satisfaire s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathcal{R} = -\mathbf{E}^p + \mathbf{E}_n^p + f \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \mathbf{r} = -\mathbf{q} + \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q} \\ \mathbf{f} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \left( \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} \right) - R \left( \mathbf{q}, T_{n+1} \right) \end{cases} \quad (\text{V-118})$$

où les résidus  $\mathcal{R}$  et  $\mathbf{r}$  sont relatifs au critère de plasticité. Généralement ces résidus ne sont pas nuls. La même remarque concerne le critère de plasticité qui est violé par la « prédiction élastique ».

Analysons le cas général de la loi de comportement élasto-plastique non associée avec les variables internes définies par un ensemble  $\mathbf{q}$ . Les équations, correspondantes à la loi d'écoulement et d'évolution des variables internes, s'écrivent :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (\text{V-119})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (\text{V-120})$$

Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  spécifie la direction de l'écoulement et l'écrouissage du matériau. Faisant référence à la méthode de Newton, ces équations doivent être linéarisées. En utilisant les équations (V-119) et (V-120), le système (V-118) conduit à:

$$\begin{cases} \mathcal{R} = \mathcal{R} - \delta \mathbf{E}^p + \delta \mathbf{E}_n^p + f \delta \left( \Delta \lambda \mathbf{u} \right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r} - \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}_n + \delta \left( \Delta \lambda \mathbf{h} \right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} = \mathbf{f} + \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f} : \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad \text{où } \partial_Y \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial Y} .$$

En supposant, que toutes les variables à l'incrément  $(n)$  sont convergées, on obtient:

$$\begin{cases} \mathcal{R} - \delta \mathbf{E}^p + f \delta \lambda \mathbf{u} + f \Delta \lambda \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{r} - \delta \mathbf{q} + \delta \lambda \mathbf{h} + \Delta \lambda \delta \mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} = \mathbf{f} + \partial_{\sigma} \mathbf{f} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \partial_q \mathbf{f} : \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (\text{V-121})$$

Pour abrégier les écritures, la notation suivante a été introduite:  $\delta \lambda \equiv \delta \left( \Delta \lambda \right)$ .

En accord avec les notations adoptées et la relation (V-96), le système (V-121) se transforme en :

$$\begin{cases} -f \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + f \delta \lambda \mathbf{u} + f \Delta \lambda \left( \partial_{\sigma} \mathbf{u} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \partial_q \mathbf{u} : \delta \mathbf{q} \right) + \mathcal{R} = \mathbf{0} \\ -\delta \mathbf{q} + \delta \lambda \mathbf{h} + \Delta \lambda \left( \partial_{\sigma} \mathbf{h} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \partial_q \mathbf{h} : \delta \mathbf{q} \right) + \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} = \mathbf{f} + \partial_{\sigma} \mathbf{f} : \delta \boldsymbol{\sigma} + \partial_q \mathbf{f} : \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (\text{V-122})$$

Remarquons à présent qu'à l'échelle locale, la correction de la contrainte vaut:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{c}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{V-123})$$

et le système (V-122) devient:

$$\begin{cases} -f \left[ \mathbf{I} + \Delta \lambda \partial_{\sigma} \mathbf{u} : \mathbf{c}_{n+1} \right] : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + f \Delta \lambda \partial_q \mathbf{u} : \delta \mathbf{q} + f \delta \lambda \mathbf{u} + \mathcal{R} = \mathbf{0} \\ -\Delta \lambda \partial_{\sigma} \mathbf{h} : \mathbf{c}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \left[ \Delta \lambda \partial_q \mathbf{h} - \mathbf{I} \right] : \delta \mathbf{q} + \delta \lambda \mathbf{h} + \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} - \partial_{\sigma} \mathbf{f} : \mathbf{c}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \partial_q \mathbf{f} : \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (\text{V-124})$$

Il s'agit d'un système de trois équations avec trois inconnues que sont les déformations plastiques locales  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ , les variables internes  $\delta \mathbf{q}$  et le paramètre de consistance  $\delta \lambda$ . Pour présenter la solution de ce système d'une manière compacte, nous introduisons les notations matricielles suivantes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} - \Delta \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{u} : \mathbf{c}_{n+1}^{(k)} & \Delta \lambda \partial_q \mathbf{u}^{(k)} \\ -\Delta \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{h} : \mathbf{c}_{n+1}^{(k)} & \Delta \lambda \partial_q \mathbf{h} - \mathbf{I}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(k)} \\ \mathbf{h}^{(k)} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} : \mathbf{c}_{n+1}^{(k)} & \partial_q \mathbf{f}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le système (V-124) devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P \\ \delta \mathbf{q} \end{Bmatrix} + \delta \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(k)} + \begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P \\ \delta \mathbf{q} \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{cases}$$

La première de ces équations matricielles est résolue par rapport aux corrections  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  et  $\delta \mathbf{q}$  :

$$\begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P \\ \delta \mathbf{q} \end{Bmatrix}^{(k)} = -\delta \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{V-125})$$

En substituant ce résultat dans la deuxième relation matricielle on déduit la correction du paramètre de consistance:

$$\delta \lambda^{(k)} = \frac{\begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(k)} - \begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}^{(k)} \end{Bmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{(k)} \end{Bmatrix}} \quad (\text{V-126})$$

Grâce à ce résultat, les corrections de la contrainte et des variables internes peuvent être effectuées en utilisant la relation (V-125). La réactualisation des toutes les grandeurs peut être alors réalisée selon les formules suivantes:

$$\begin{cases} \Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \\ \Delta \mathbf{q}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{q}^{(k)} + \delta \mathbf{q}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P{}^{(k+1)} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P{}^{(k)} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P{}^{(k)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}^{test} + \delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \mathbf{c}_{n+1}^{(k)} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P{}^{(k)} \end{cases} \quad (\text{V-127})$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous spécifions ces expressions dans le cas de la loi de comportement exposée à la section V.6.1. Il s'agit de la loi de l'écoulement plastique de Levy-Saint Venant associée au critère de plasticité de Huber-von Mises et l'écroutissage isotrope défini par un seul paramètre interne scalaire  $q = \varepsilon^{peq}$ . Le potentiel plastique est donné par

l'expression (V-84) que nous rappelons ici :  $f(\boldsymbol{\sigma}, T) = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \sigma_Y(\varepsilon_{eq}^p, T) = 0$ .

La direction de l'écoulement plastique impose dans un tel cas:  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}) = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})$ .

L'algorithme appelé « retour radial » utilisé ici consiste à effectuer la correction plastique selon une direction radiale figée pendant le processus itératif considérée. Dans une telle démarche, le vecteur  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})$  est constant et défini dans la phase de « prédiction élastique »:

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test}} \quad (V-128)$$

On a alors :  $\partial_q \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}) = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ .

La loi d'évolution de la variable interne scalaire est spécifiée par la relation (V-89) qui s'écrit :  $\dot{\varepsilon}^{peq} = \dot{\lambda}$ . Il en résulte, par comparaison avec (V-120), que la fonction  $h(\boldsymbol{\sigma}, q)$  est un scalaire constant  $h(\boldsymbol{\sigma}, q) = 1$ . Ces dérivées par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $q$  sont donc nulles:  $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} h = \partial_q h = 0$ . La fonction de charge étant donnée par l'équation (V-91) on a:

$$\partial_q f \equiv \partial_{\varepsilon^{peq}} f = -\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^{peq}} = -h(\varepsilon^{peq}, T) \quad (V-129)$$

Dans ces conditions, le système d'équations (V-124) prend la forme:

$$\begin{cases} -\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta \lambda \mathbf{n} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ -\delta \varepsilon^{peq} + \delta \lambda + r = 0 \\ \mathbf{f} - \mathbf{n} : \mathbf{c}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - h \delta \varepsilon^{peq} = 0 \end{cases} \quad (V-130)$$

Il en résulte, après avoir annulé les résidus,  $(\mathbf{R} = \mathbf{0}, r = 0)$ ,

$$\begin{cases} -\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta \lambda \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ -\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{peq} + \delta \lambda = 0 \\ \mathbf{f} - \mathbf{n} : \mathbf{c}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - h \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{peq} = 0 \end{cases}$$

Ce système peut être facilement résolu par rapport aux corrections plastiques. En effet on a :

$$\begin{cases} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \delta \lambda \mathbf{n} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{peq} = \delta \lambda \end{cases} \quad (\text{V-131})$$

conduisant à une équation scalaire pour la correction du paramètre de consistance :

$$\delta \lambda = \frac{\mathbf{f}}{\frac{9}{4} \frac{\mathbf{s}^{test} : \mathbf{c}_{n+1} : \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test}} + h} \quad (\text{V-132})$$

Puisque l'inclusion en Indium est un matériau homogène et isotrope ( $\mathbf{c} = 3\kappa \mathbf{J} + 2\mu \mathbf{K}$ ), nous

avons :  $\mathbf{n} : (3\kappa \mathbf{J} + 2\mu \mathbf{K}) : \mathbf{n} = 2\mu \mathbf{n} : \mathbf{n} = 2\mu \frac{\mathbf{s}^{test} : \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test}}$  et puisque  $\mathbf{s}^{test} : \mathbf{s}^{test} = \frac{2}{3} (\bar{\sigma}^{test})^2$ , on obtient finalement :

$$\delta \lambda = \frac{\mathbf{f}}{h + 3\mu} \quad (\text{V-133})$$

Ce résultat est conforme avec les résultats classiques de la littérature [V\_17] et permet de réactualiser toutes les grandeurs mécaniques intervenant dans le modèle considéré et en particulier :

$$\begin{cases} \Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{peq} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{peq} + \delta \lambda \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta \lambda \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \mathbf{c}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{cases} \quad (\text{V-134})$$

Ce processus itératif est arrêté lorsque le critère de plasticité est vérifié avec une précision spécifiée par une tolérance donnée. A la fin de ce processus, on peut actualiser les variables macroscopiques suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + f \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \Delta \boldsymbol{\Sigma} = -\mathbf{C}_{n+1}^{MHE} : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p \\ \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{test} + \Delta \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (V-135)$$

## V.7.2. Implémentation dans un code éléments finis

Ce paragraphe est consacré aux questions pratiques liées à l'implémentation de la loi de comportement développée dans le code éléments finis Abaqus® via la routine UMAT. En premier lieu les modules algorithmiques cohérents sont construits avec la méthode d'intégration adoptée, puis un recensement des variables intervenant dans la loi de comportement développée précédemment est effectué.

### V.7.2.1. Construction des modules cohérents

Le schéma implicite requiert la détermination de la matrice jacobienne qui comprend à la fois la matrice des modules cohérents et la matrice de rigidité des forces. Le tenseur des modules cohérents dépend du comportement du matériau. La matrice jacobienne est définie par la relation suivante :

$$d\Delta \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \Delta \mathbf{E}} d\Delta \mathbf{E} \quad (V-136)$$

Il faut noter que généralement  $\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \Delta \mathbf{E}} \neq \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}}$  ; malheureusement, ce tenseur n'est pas facile à obtenir en plasticité c'est pourquoi on cherche plutôt le second terme à partir des équations de la mécanique des milieux continus.

La loi de Hooke pour le milieu équivalent nous permet d'écrire :  $\Delta \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^{MHE} : \Delta \mathbf{E}^e$  et pour la phase 1 isotrope au temps d'incrément  $n+1$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \mathbf{c} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \text{ avec } \boldsymbol{\sigma}^{test} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{th})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \Delta \lambda \mathbf{c} : \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \frac{3}{2} \Delta \lambda \mathbf{c} : \frac{\mathbf{s}}{\bar{\sigma}}$$



$$\left( \mathbf{I} + \frac{3}{2} \Delta\lambda \frac{\mathbf{c}}{\bar{\sigma}} \right) : \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \mathbf{s}^{test} \quad (V-137)$$

Dans le cas particulier de comportement élastique isotrope, la relation ci-dessous se simplifie sous la forme :

$$\left( 1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right)^2 \mathbf{s} : \mathbf{s} = \mathbf{s}^{test} : \mathbf{s}^{test} \Leftrightarrow \left( 1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{test} \text{ ou encore :}$$

$$\bar{\sigma} + 3\mu\Delta\lambda = \bar{\sigma}^{test} \quad (V-138)$$

On cherche à déterminer les tenseurs des modules cohérents tels que :  $\delta\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^{mc} : \delta\mathbf{E}$ .

Dérivons la relation (V-138) :  $\delta\bar{\sigma} + 3\mu\delta\lambda = \delta\bar{\sigma}^{test}$  or  $\frac{\delta\bar{\sigma}}{\delta\lambda} = h(\boldsymbol{\varepsilon}^{peq}, \theta)$

$$\delta\lambda = \frac{\delta\bar{\sigma}^{test}}{h + 3\mu} \quad (V-139)$$

$$\delta\bar{\sigma} = \frac{h\delta\bar{\sigma}^{test}}{h + 3\mu} \quad (V-140)$$

Revenons sur la relation (V-137):

$$\left( 1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \delta\mathbf{s} + 3\mu \left( \delta\lambda - \Delta\lambda \frac{\delta\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\mathbf{s}}{\bar{\sigma}} = \delta\mathbf{s}^{test} \quad (V-141)$$

En injectant les relations (V-139) et (V-140) dans (V-141) on obtient :

$$\left( 1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \delta\mathbf{s} + \frac{3\mu}{h + 3\mu} \left( 1 - \Delta\lambda \frac{h}{\bar{\sigma}} \right) \delta\bar{\sigma}^{test} \frac{\mathbf{s}}{\bar{\sigma}} = \delta\mathbf{s}^{test} \text{ or on a :}$$

$$\delta\bar{\sigma}^{test} = \delta \left( \frac{3}{2} \mathbf{s}^{test} : \mathbf{s}^{test} \right)^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{test} : \delta\mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test}} \quad (V-142)$$

En considérant (V-137) et (V-138), on a l'égalité suivante :  $\frac{\mathbf{s}}{\bar{\sigma}} = \frac{\mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test}}$ . On obtient alors :

$$\left( 1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \delta\mathbf{s} + \frac{3}{2} \frac{3\mu}{h + 3\mu} \left( 1 - \Delta\lambda \frac{h}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\mathbf{s}^{test} \otimes \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} : \delta\mathbf{s}^{test} = \delta\mathbf{s}^{test}$$

$$\delta s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^{test}} \left[ \mathbf{I} - K_1 \frac{s^{test} \otimes s^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right] : \delta s^{test} \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{9\mu}{2(h+3\mu)} \left( 1 - \frac{h\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \quad (V-143)$$

Revenons à la loi de Hooke à l'échelle macroscopique :

$$\Sigma = \mathbf{C}^{MHE} : (\mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^{th} - \Delta \mathbf{E}^p)$$

$$\Sigma = \Sigma^{test} - \frac{3}{2} f \Delta \lambda \mathbf{C}^{MHE} : \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \Sigma^{test} = \mathbf{C}^{MHE} : (\mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^{th})$$

$$\delta \Sigma = \delta \Sigma^{test} - \frac{3}{2} f \mathbf{C}^{MHE} : \left[ \Delta \lambda \frac{\delta s}{\bar{\sigma}} + \left( \delta \lambda - \Delta \lambda \frac{\delta \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{s}{\bar{\sigma}} \right]$$

Utilisons les relations (V-139) et (V-140) dans la relation précédente :

$$\delta \Sigma = \delta \Sigma^{test} - \frac{3}{2} f \mathbf{C}^{MHE} : \left[ \Delta \lambda \frac{\delta s}{\bar{\sigma}} + \left( \frac{\delta \bar{\sigma}^{test}}{h+3\mu} - \frac{h\Delta\lambda}{h+3\mu} \frac{\delta \bar{\sigma}^{test}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{s}{\bar{\sigma}} \right]$$

En introduisant l'égalité (V-143) dans la relation précédente nous aboutissons à la relation suivante :

$$\delta \Sigma = \delta \Sigma^{test} - \frac{3}{2} f \mathbf{C}^{MHE} : \left[ \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}^{test}} \left( \mathbf{I} - K_1 \frac{s^{test} \otimes s^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right) : \delta s^{test} + K_2 \delta \bar{\sigma}^{test} \frac{s^{test}}{\bar{\sigma}^{test}} \right] \quad (V-144)$$

$$\text{Avec} \quad K_2 = \frac{1}{h+3\mu} \left( 1 - \frac{h\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right)$$

On a ensuite durant la correction plastique, les relations suivantes:

$$\delta \Sigma^{test} = \mathbf{C}^{MHE} : \delta \mathbf{E}^{test}$$

$$s^{test} = 2\mu \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e-test} \Rightarrow \delta s^{test} = 2\mu \mathbf{K} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{e-test} = 2\mu \mathbf{K} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{test} \quad \text{où} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{test} = \mathbf{A} : \delta \mathbf{E}^{test}$$

$$\delta s^{test} = 2\mu \mathbf{K} : \mathbf{A} : \delta \mathbf{E}^{test} \quad (V-145)$$

Nous remplaçons alors les relations (V-142) et (V-145) dans (V-144)

$$\delta \Sigma = \left\{ \mathbf{C}^{MHE} - 3\mu f \mathbf{C}^{MHE} : \left[ \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}^{test}} \left( \mathbf{I} - K_1 \frac{s^{test} \otimes s^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right) + \frac{3}{2} K_2 \frac{s^{test} \otimes s^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right] : \mathbf{K} : \mathbf{A} \right\} : \delta \mathbf{E}$$

Par identification on obtient :

$$\mathbf{C}^{mc} = \mathbf{C}^{MHE} : \left\{ \mathbf{I} - 3\mu f \left[ \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}^{test}} \left( \mathbf{I} - K_1 \frac{\mathbf{s}^{test} \otimes \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right) + \frac{3}{2} K_2 \frac{\mathbf{s}^{test} \otimes \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right] : \mathbf{K} : \mathbf{A} \right\}$$

$$\mathbf{C}^{mc} = \mathbf{C}^{MHE} : \left[ \mathbf{I} - \left( F_1 \mathbf{I} + F_2 \frac{\mathbf{s}^{test} \otimes \mathbf{s}^{test}}{\bar{\sigma}^{test} \bar{\sigma}^{test}} \right) : \mathbf{K} : \mathbf{A} \right] \quad (V-146)$$

$$\text{Avec } F_1 = 3\mu f \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}^{test}} \text{ et } F_2 = \frac{9\mu f}{2(h+3\mu)} \left( 1 - \frac{h\Delta\lambda}{\bar{\sigma}} \right) \left( 1 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{\bar{\sigma}^{test}} \right)$$

L'organigramme de la routine UMAT en thermo-élasto-plastique de la couche d'interconnexion est présenté dans l'annexe C.

### V.7.2.2. Organisation de la base des données d'Abaqus®

Dans la routine utilisateur UMAT, les données et variables liées à la loi de comportement sont classées en propriétés du matériau et en variables internes. Les propriétés des matériaux sont stockées dans la table « PROPS » tandis que les variables internes sont sauvegardées dans la table « STATEV ». La principale différence entre les propriétés et les variables d'état est que les premières n'évoluent pas pendant la simulation d'un processus irréversible. Nous pouvons les appeler « constantes du matériau ». Par opposition, les variables d'état sont susceptibles d'évoluer durant la transformation du matériau. Du point de vue de la méthode des éléments finis, les constantes du matériau sont **associées à des sets d'éléments**. Les variables internes doivent être gérées au niveau des points d'intégration numériques. La taille de la table STATEV doit être spécifiée au départ dans Abaqus® avant le calcul.

#### Propriétés des matériaux (PROPS)

Les matériaux considérés pour les deux phases étant isotropes, les paramètres de chaque **matériau à rentrer sont le module d'Young, le coefficient de poisson et le coefficient de dilatation thermique** pour différentes températures données. Les coordonnées des points des **courbes d'écroutissage à différentes températures de la phase indium sont également entrées** ainsi que la fraction surfacique des inclusions (correspondant à la fraction volumique après enrobage) et les hauteurs des peaux et des billes. Toutes ces données sont rentrées durant la création du matériau UMAT dans Abaqus®.

### Les variables internes (STATEV ou SDV)

A la fin de chaque incrément, les déformations thermique, élastique et plastique macroscopiques sont stockées dans la table STATEV ainsi que les contraintes et différentes **déformations locales**. A l'incrément suivant, les valeurs de la table STATEV sont récupérées pour être ensuite actualisées à la fin du pas. Ainsi à la fin de la simulation, on peut accéder aux valeurs de ces variables à chaque incrément.

## V.8. Conclusion

La méthode d'homogénéisation des matériaux hétérogènes est une solution simplificatrice en mécanique des matériaux et permet de prédire le comportement global d'une structure grâce à la connaissance du comportement de chaque constituant. Différents modèles ont été présentés et deux modèles analytiques (de type micromécanique et périodique) ont été développés et appliqués à la couche d'interconnexion de l'assemblage flip chip. Ainsi, le modèle de Mori-Tanaka multi-site est bien approprié à ce problème après la phase d'enrobage de l'assemblage et le modèle de type périodique après la phase d'hybridation avant enrobage. La loi de comportement obtenue a été implémentée dans le code de calcul par EF Abaqus® en tenant compte de la plasticité des billes d'interconnexion. La plasticité des billes a été définie par le critère de von Mises et un écrouissage de type isotrope a été considéré. Le calcul des modules cohérents qui permet la convergence de la routine a été également explicité.

La nouvelle loi de comportement de la couche d'interconnexion implémentée sera par la suite validée sur des petits modèles puis sur un modèle flip chip de format mégapixel.

## V.9. Références bibliographiques

- [V\_1] Z. Hashin and S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials," *J. Appl. Phys.*, vol. 11, pp. 127–140, 1963.
- [V\_2] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Amer Mathematical Society, 2011.
- [V\_3] N. S. Bakhvalov and G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*. Springer, 1989.
- [V\_4] E. Sánchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer-Verlag, 1980.

- 
- [V\_5] R. Hill, “Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357–372, 1963.
- [V\_6] K. Ahaouari, F. Corvasce, P. Lipinski, and M. Berveiller, “Détermination des propriétés thermomécaniques des composites à matrice métallique,” in *Mémoires et Etudes Scientifiques*, vol. 87, Revue de Métallurgie, 1990, pp. 73–84.
- [V\_7] K. Ahaouari, “Contribution à la modélisation de la thermoélasticité et de l’acoustoélasticité des matériaux microhétérogènes,” Université de Metz, 1990.
- [V\_8] J. D. Eshelby, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems,” *Proc. R. Soc. London - Ser. A Math. Phys. Sci.*, vol. 241, no. 1226, pp. 376–396, 1957.
- [V\_9] O. Fassi-Fehri, A. Hihl, and M. Berveiller, “Multiple site self consistent scheme,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 27, no. 5, pp. 495–502, 1989.
- [V\_10] R. M. Christensen and K. H. Lo, “Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 27, no. 4, pp. 315–330, 1979.
- [V\_11] E. Hervé and A. Zaoui, “N-layered inclusion-based micromechanical modelling,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 31, no. 1, pp. 1–10, 1993.
- [V\_12] E. Hervé and A. Zaoui, “Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 33, no. 10, pp. 1419–1433, 1995.
- [V\_13] P. Lipinski, E. H. Barhdadi, and M. Cherkaoui, “Micromechanical modeling of an arbitrary ellipsoidal multi-coated inclusion,” *Philos. Mag.*, vol. 86, no. 10, pp. 1305–1326, 2006.
- [V\_14] E. H. Barhdadi, “Modélisation micromécanique des matériaux composites à renforts ellipsoïdaux multienrobés et applications,” Université de Metz, 2005.
- [V\_15] P. Viéville, A.-S. Bonnet, and P. Lipinski, “Modelling effective properties of composite materials using inclusion concept. General considerations,” *Arch. Mech.*, vol. 58, no. 3, pp. 207–239, 2006.
- [V\_16] W. Kpobie, S. Ben Khelifa, N. Bonfoh, M. Fendler, and P. Lipinski, “Multi-site micromechanical modelling of thermo-elastic properties of heterogeneous materials,” *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 6, pp. 2068–2077, 2012.
- [V\_17] F. Dunne and N. Petrinic, *Introduction to Computational Plasticity*. OUP Oxford, 2005.



# Chapitre VI

## Résultats de simulations numériques

### Sommaire

---

<b>VI.1. Introduction.....</b>	<b>164</b>
<b>VI.2. Validation du modèle de Mori-Tanaka.....</b>	<b>164</b>
VI.2.1. Définition des modèles numériques.....	164
VI.2.2. Simulation thermoélastique .....	167
VI.2.3. Simulation thermo-élasto-plastique.....	169
VI.2.4. Zoom structurel.....	172
VI.2.5. Comparaison des 4 modélisations .....	174
<b>VI.3. Validation du modèle par un cycle thermique d'assemblage .....</b>	<b>178</b>
VI.3.1. Modification de maillage.....	179
VI.3.2. Simulation du cycle thermique.....	180
<b>VI.4. Assemblage flip chip mégapixel.....</b>	<b>185</b>
VI.4.1. Modèle numérique .....	185
VI.4.2. Résultats de simulation .....	188
VI.4.3. Mesures expérimentales.....	189
VI.4.4. Comparaison et interprétations.....	194
VI.4.5. Zoom structurel .....	195
<b>VI.5. Conclusion .....</b>	<b>196</b>
<b>VI.6. Références bibliographiques.....</b>	<b>197</b>

---

## VI.1. Introduction

La simulation informatique ou numérique désigne l'exécution d'un programme informatique sur un ordinateur, ou réseau, en vue de modéliser un phénomène physique réel et complexe.

**Les simulations numériques scientifiques reposent sur la mise en œuvre de modèles théoriques utilisant souvent la technique des éléments finis.** Elles sont donc une adaptation aux moyens numériques de la modélisation mathématique, et servent à étudier le **fonctionnement et les propriétés d'un système modélisé ainsi qu'à en prédire son évolution.**

L'implémentation du modèle présenté précédemment va permettre de prédire le comportement thermomécanique d'assemblages flip chip lors de leurs procédés de fabrication ou de leur utilisation. Ce chapitre présente donc les résultats de ces simulations numériques. Dans un premier temps, la validation du modèle d'homogénéisation développé est présentée pour deux petits modèles numériques. Dans un second temps, la simulation de l'assemblage flip chip de format mégapixel a été réalisée et les flèches obtenues ont été comparées aux mesures expérimentales de voilures.

## VI.2. Validation du modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka présenté dans le chapitre précédent est validé afin d'évaluer son efficacité. Pour simplifier la simulation, les températures initiales et de référence de tous les matériaux sont supposées identiques (c'est-à-dire  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{th(i)} = \mathbf{0}$ ).

### VI.2.1. Définition des modèles numériques

Afin de valider notre modèle avec MHE, une comparaison a été faite entre deux modèles numériques de taille réduite:

- Le premier appelé « modèle billé » correspond à un modèle dont la topographie **détaille chaque bille c'est-à-dire un modèle d'assemblage flip chip constitué de deux substrats (en quartz et silicium) interconnectés par une couche de  $20 \times 20$  billes d'indium (cylindres de  $5 \mu\text{m}$  de diamètre au pas de  $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ ) noyées dans une matrice époxy,**
- Le second modèle appelé « modèle avec MHE » est géométriquement identique au **premier mais la couche d'interconnexion est remplacée par un matériau homogène**



équivalent (MHE) dont les propriétés sont estimées grâce au modèle multi-site de Mori-Tanaka développé dans ce travail.

Les dimensions et les conditions aux limites des deux modèles sont illustrées sur la Figure VI.1. La structure présente deux **plans de symétrie**, seul le **quart à 100 billes d'indium** a donc été modélisé.

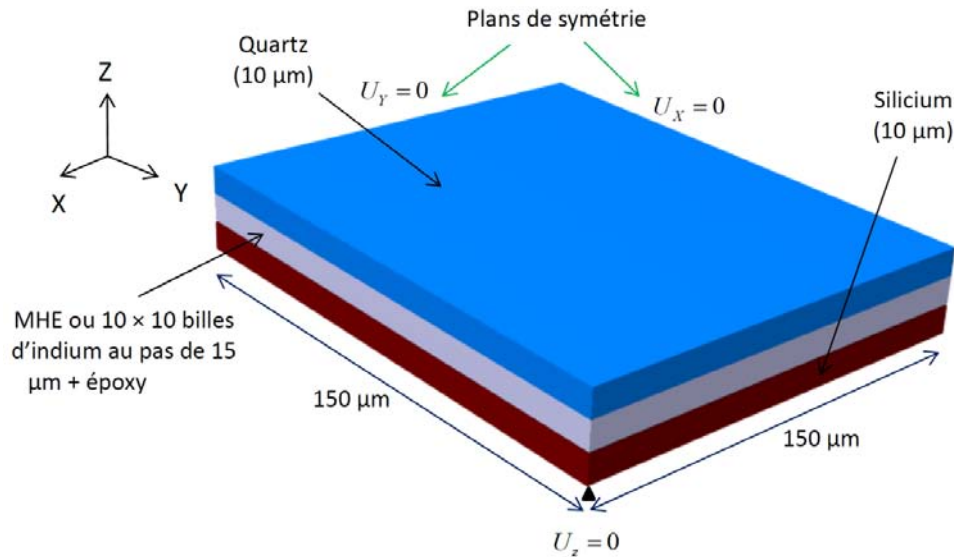


Figure VI.1 – Géométrie et conditions aux limites des modèles 20 × 20

Les maillages utilisés pour ces deux modèles sont résumés dans le Tableau VI.1. Les éléments utilisés dans les deux modèles sont de type hexaédrique linéaire avec 8 points d'intégration. La Figure VI.2 montre le maillage du modèle billé et la Figure VI.3, celui du modèle avec MHE. Les maillages des billes et de la matrice époxy sont continus.

Tableau VI.1 – Maillage des modèles 20 × 20

Modèles	Type d'élément	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds
Modèle avec 20 × 20 billes d'indium	C3D8	222000	240016
Modèle avec MHE	C3D8	80864	88935

Les propriétés thermoélastiques des matériaux sont données dans le Tableau VI.2. Les propriétés du silicium et du quartz sont supposées indépendantes de la température dans cette section pour simplifier la simulation.

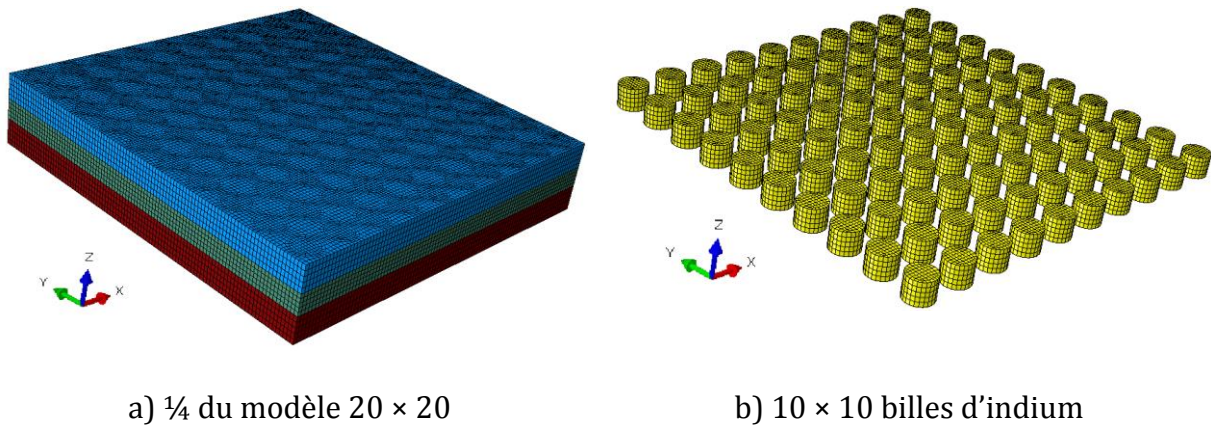


Figure VI.2 – Maillage du modèle billé

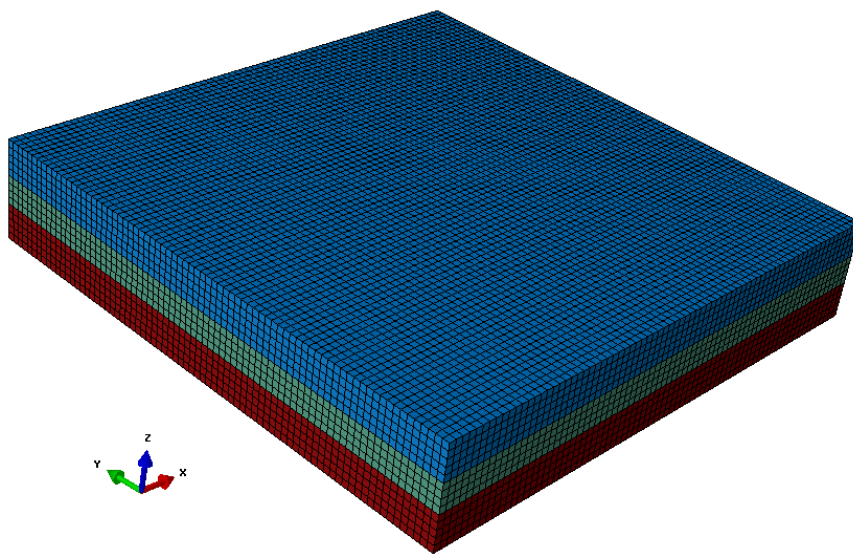


Figure VI.3 – Maillage du modèle avec MHE

Tableau VI.2 – Propriétés thermoélastiques des matériaux

Matériaux	E (MPa)	Coefficient de Poisson	CDT ( $10^{-6} K^{-1}$ )	T° (K)
Silicium	130430	0.276	2.6156	-
Quartz	72595	0.17	0.447	-
Epoxy	3664	0.358	64,02	293
	29,06	0.32	71,28	350
	21,06	0.3	81,41	400
Indium	13684	0.469	29.2	293
	11496	0.474	32	350
	9584	0.45	34	400

Pour la simulation thermo-élasto-plastique, l'écroutissement isotrope de type von Mises a été utilisé comme décrit dans le chapitre précédent. Les données des courbes d'écroutissement présentées dans le chapitre 3 ont été utilisées pour les deux modèles. Elles sont rappelées dans le Tableau VI.3.

Le chargement appliqué aux deux modèles est un refroidissement de 429 K à 293 K afin de prédire l'étape d'hybridation. Afin de faciliter le brasage, l'hybridation requiert une température supérieure à 429 K. Cependant, au-delà de cette température qui correspond au point de fusion de l'indium, ce matériau devient liquide, ce qui ne peut pas être mis en œuvre en se situant dans le cas de la mécanique des solides.

Tableau VI.3 – Données des courbes d'érouissage de l'indium en fonction de la température

Déformation plastique équivalente	Contrainte équivalente (MPa)		
	293 K	350 K	400 K
0	0,78	0,5	0,32
0,00625	1,08	0,66	0,41
0,0219	1,25	0,8	0,5
0,05	1,4	0,88	0,55
0,1	1,59	0,95	0,6
0,15	1,75	1,01	0,62
0,2	1,9	1,05	0,64

## VI.2.2. Simulation thermoélastique

Dans un premier temps, nous supposons que l'indium se déforme d'une manière purement élastique. En analysant les champs de déplacement dans la direction  $z$ , on peut estimer la flèche sur le quartz (différence entre le déplacement du nœud situé à l'intersection des plans de symétrie et celui du nœud situé à l'autre extrémité de la diagonale) qui vaut  $0,1723 \mu\text{m}$  pour le modèle billé et  $0,1661 \mu\text{m}$  pour le modèle avec MHE. On peut remarquer une distribution similaire pour les deux modèles numériques (Figure VI.4). L'écart relatif entre les deux flèches vaut -3,6%.

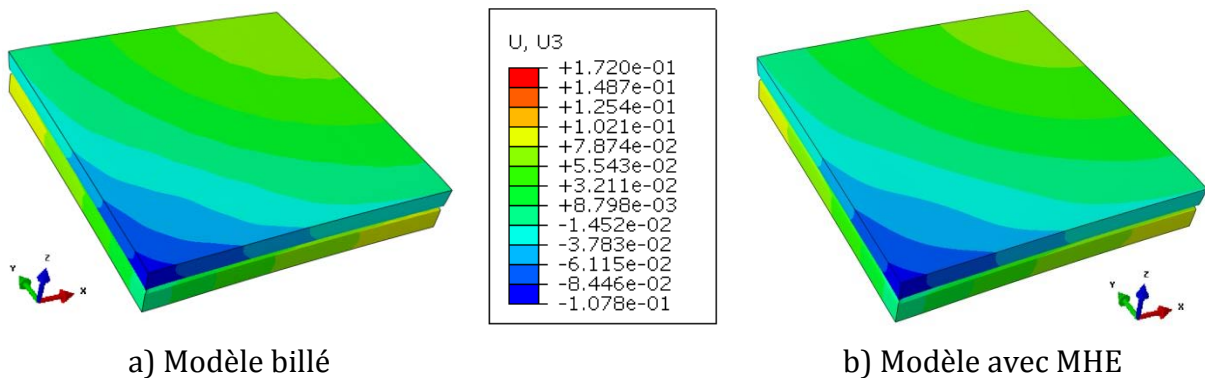


Figure VI.4 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction  $z$  dans les modèles  $20 \times 20$  en thermoélasticité

Le champ des contraintes de von Mises dans les billes d'indium du modèle billé présente une zone de diminution de contraintes située entre la rangée des billes périphériques et la rangée précédente (Figure VI.5a). Les relations de localisation introduites dans notre modèle **permettent d'estimer les champs moyens dans chaque phase** du MHE. Les distributions de ces contraintes sont quasi identiques dans les deux modèles (Figure VI.5).

Il en est de même pour les contraintes de von Mises dans l'époxy (Figure VI.6). Ceci montre une bonne précision du modèle développé.

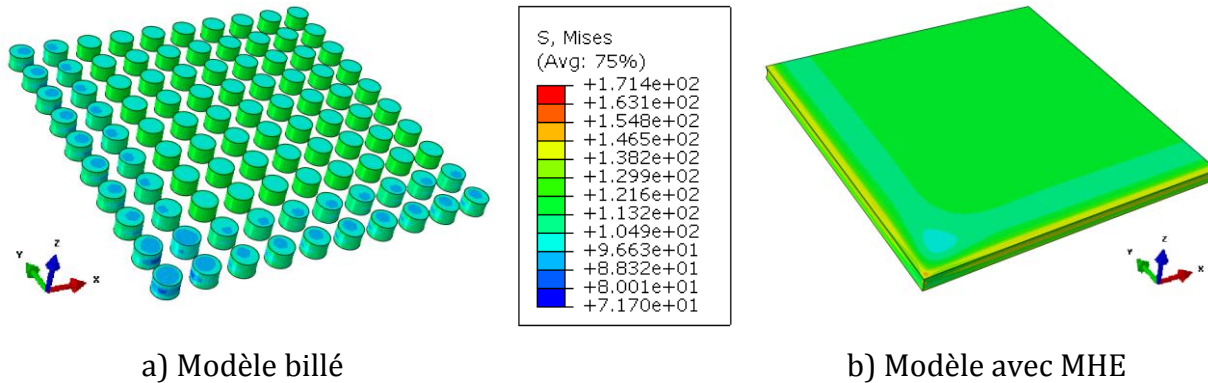


Figure VI.5 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes/phase d'indium des modèles 20 × 20 en thermoélasticité

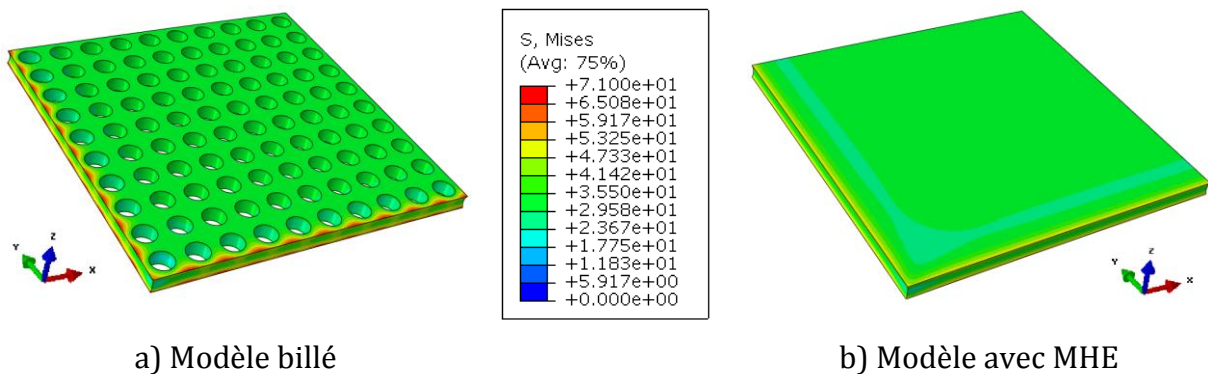


Figure VI.6 – Champ des contraintes équivalentes de von Mises (MPa) dans la phase époxy des modèles 20 × 20 en thermoélasticité

Les valeurs minimale et maximale des contraintes de von Mises dans l'indium et l'époxy sont listées dans le Tableau VI.4. Les écarts semblent être plus ou moins élevés mais en ce qui concerne la voilure ou la flèche globale, les prédictions des deux modèles paraissent satisfaisantes.

Les écarts sont plus ou moins faibles mais en général, les champs moyens tels que prédits par le modèle micromécanique (MHE) permettent d'identifier les zones de fortes concentration de contraintes.

Tableau VI.4 – Valeurs minimales et maximales de la contrainte équivalente de von Mises dans les deux phases en thermoélasticité

Matériaux	Contrainte équivalente de von Mises	Modèle billé	Modèle avec MHE	Ecart relatif (%)
Indium	Valeur minimale (MPa)	71,1	68,7	-3,4
	Valeur maximale (MPa)	121,6	150,7	+23,9
Epoxy	Valeur minimale (MPa)	3,32	7,12	+114
	Valeur maximale (MPa)	62,05	52,3	-15,7

Une comparaison plus poussée peut être effectuée en isolant une bille dans le modèle billé et en la comparant à un groupe d'éléments du modèle avec MHE situés au même emplacement que celle-ci. Cette comparaison peut être retrouvée dans notre article [VI\_1].

Ces simulations ne tiennent pas compte de la plasticité pouvant apparaître dans les billes d'indium. En effet, selon les observations expérimentales [VI\_1], la phase indium peut subir localement une déformation plastique.

### VI.2.3. Simulation thermo-élasto-plastique

Une deuxième série de simulations a donc été mise en œuvre, prenant en compte le comportement élasto-plastique de l'indium. Dans cette configuration, une estimation de la flèche fournit 0,2355  $\mu\text{m}$  sur le quartz du modèle billé contre 0,2015  $\mu\text{m}$  sur celui du modèle avec MHE (Figure VI.7) soit un écart relatif de - 14,4%. Cet écart est dû à l'approximation faite dans le calcul de la déformation plastique macroscopique. On constate que la flèche a augmentée par rapport au cas thermoélastique.

Les valeurs prédites des contraintes équivalentes de von Mises dans les billes d'indium sont à travers cette seconde simulation en accord avec leur comportement thermo-élasto-plastique. Nous observons une distribution similaire dans les deux modèles (Figure VI.8) avec des valeurs légèrement inférieures pour le modèle avec MHE.

Il en est de même pour le champ de déformation plastique équivalente des billes d'indium dans les deux modèles (Figure VI.9).



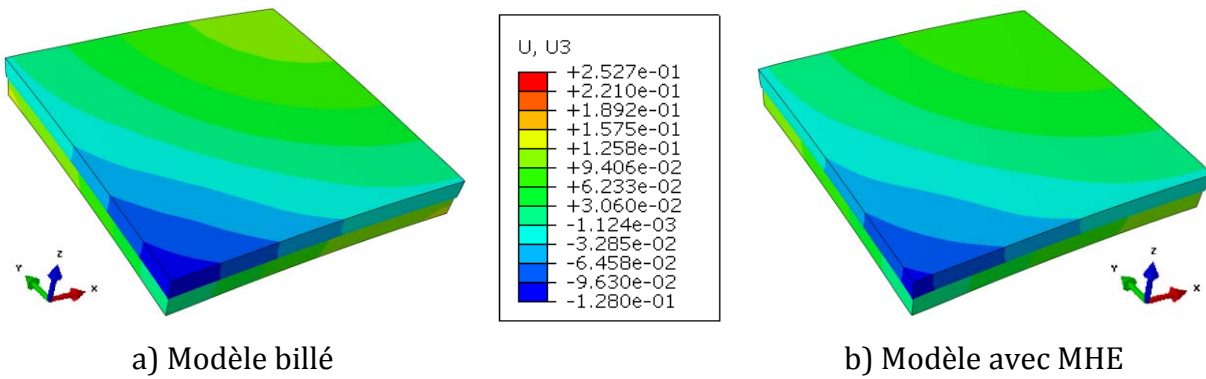


Figure VI.7 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles  $20 \times 20$  en thermo-élasto-plasticité

La prise en compte de la plasticité dans les billes d'interconnexion ne modifie pas de manière significative les contraintes équivalentes de von Mises dans la matrice en époxy. Les valeurs maximales sont localisées aux extrémités de la couche d'interconnexion dans les deux modèles (Figure VI.10) avec une prédiction légèrement inférieure dans le modèle avec MHE.

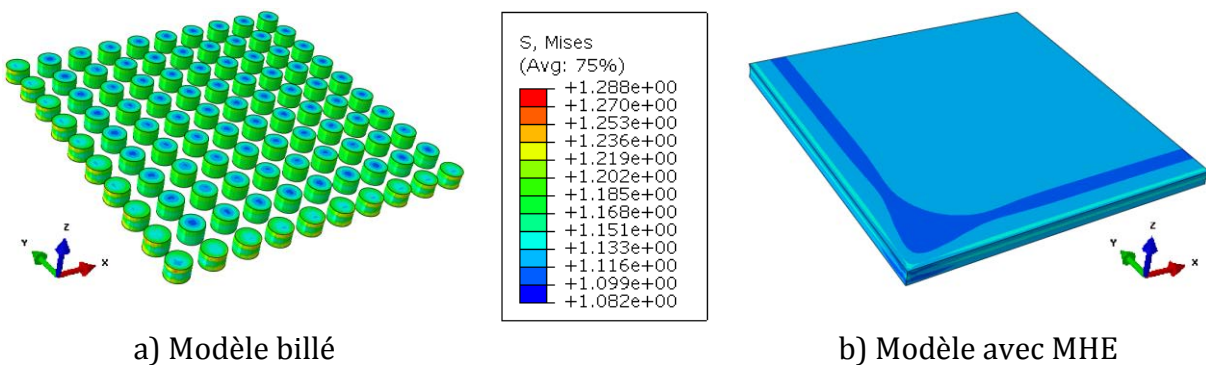


Figure VI.8 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes/phase d'indium des modèles  $20 \times 20$  en thermo-élasto-plasticité

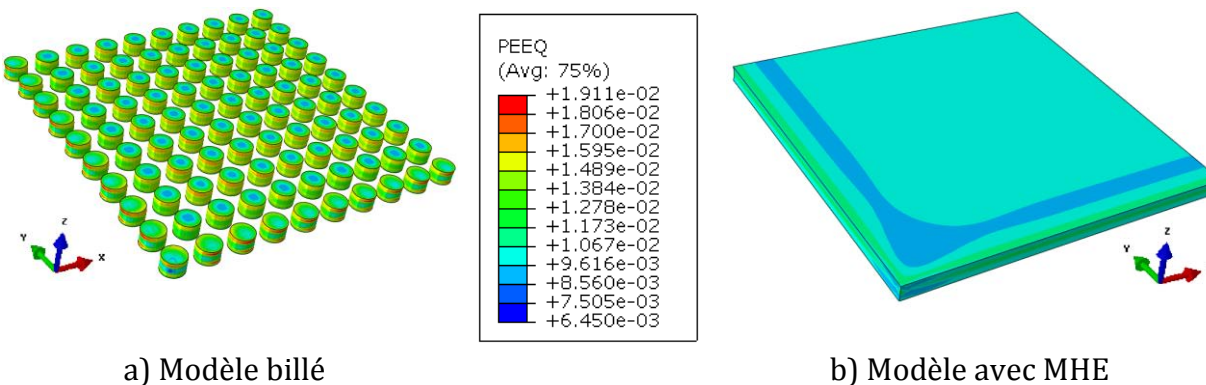


Figure VI.9 – Champ de déformation plastique équivalente dans les billes/phase indium des modèles  $20 \times 20$  en thermo-élasto-plasticité

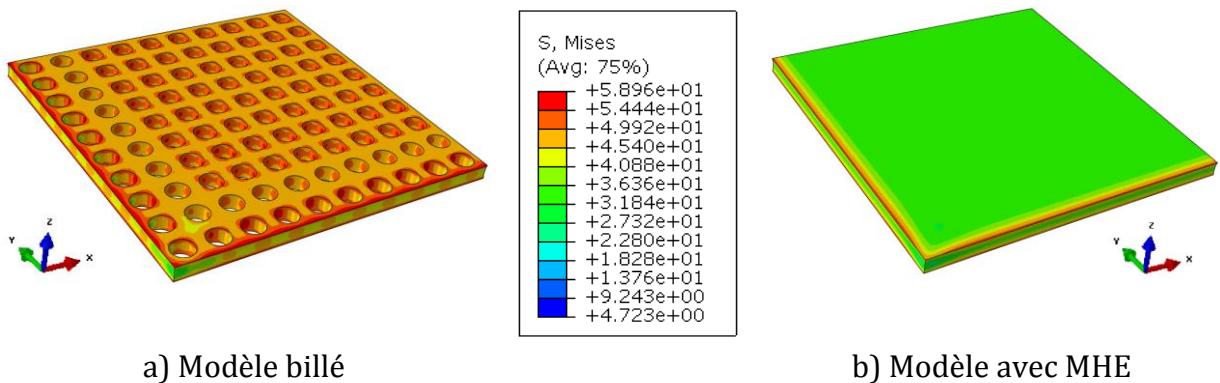


Figure VI.10 – Champ des contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans la phase époxy dans les modèles 20 × 20 en thermo-élasto-plasticité

Les Tableau VI.5 et

Tableau VI.6 résumant respectivement les valeurs minimales et maximales des contraintes équivalentes de von Mises dans l'époxy et l'indium et celles de la déformation plastique équivalente de l'indium. Les écarts observés pour la déformation plastique équivalente de l'indium sont plus élevés comparés à ceux par rapport à la contrainte équivalente de von Mises. Cette différence semble être le fait de la courbe d'écroutissage de l'indium qui présente une tendance à la saturation (une faible variation de la contrainte équivalente entraîne une variation significative de la déformation équivalente).

Tableau VI.5 – Valeurs minimales et maximales de la contrainte équivalente de von Mises dans les deux phases en thermo-élasto-plasticité

Matériaux	Contrainte équivalente de von Mises	Modèle billé	Modèle avec MHE	Ecart relatif (%)
Indium	Valeur minimale (MPa)	1,09	1,08	-0,9
	Valeur maximale (MPa)	1,23	1,14	-7,3
Epoxy	Valeur minimale (MPa)	14,2	12,8	-9,9
	Valeur maximale (MPa)	58,2	50,5	-13,2

Tableau VI.6 – Valeurs minimales et maximales de la déformation plastique équivalente de l'indium en thermo-élasto-plasticité

Contrainte équivalente de von Mises	Modèle billé	Modèle avec MHE	Ecart relatif (%)
Valeur minimale (%)	0,691	0,622	-9,9
Valeur maximale (%)	2,01	1,18	-41,3

L'une des principales hypothèses de l'homogénéisation micromécanique est de considérer la matrice comme un milieu infini. Il serait donc judicieux d'envisager cette modélisation à de plus grandes tailles d'assemblage flip chip afin d'obtenir des résultats plus en accord avec cette hypothèse concernant la matrice. Grâce à des simulations considérant un modèle 4 fois plus grand que le précédent, une réduction significative des écarts des différents champs thermomécaniques analysés est observée permettant de montrer la pertinence de notre modèle. Comme exemple, le Tableau VI.7 montre la diminution de l'écart de la flèche lorsque le modèle est 4 fois plus grand.

Tableau VI.7 – Comparaison de l'écart de la voilure des modèles 20 × 20 et 40 × 40

Type de simulation	Ecart (%) par rapport aux modèles billés	
	Modèle MHE 20 × 20	Modèle MHE 40 × 40
Thermoélastique	-3,6	-0,37
Thermo-élasto-plastique	-14,4	-4,11

Les écarts étant plus importants au niveau des champs locaux, des techniques de zoom structurel sont ensuite mises en œuvre afin d'accéder avec une précision accrue aux champs locaux.

### VI.2.4. Zoom structurel

Le zoom structurel consiste à faire une « localisation numérique » sur une partie d'une structure donnée afin d'accéder de manière plus précise aux valeurs des champs mécaniques. Il existe deux principales techniques de zoom structurel en simulation numérique : le couplage de deux modèles et le submodeling.

#### VI.2.4.1. Couplage de modèles

Cette technique consiste dans notre cas à coupler le modèle avec MHE avec celui contenant les billes. Ainsi, dans la couche d'interconnexion du modèle avec MHE, on peut représenter dans une zone spécifique quelques billes d'indium entourée de colle époxy. Puisque les contraintes se concentrent dans le coin de la couche d'interconnexion, nous choisissons d'introduire dans cette zone, 9 billes d'indium comme schématisé par la Figure VI.11.



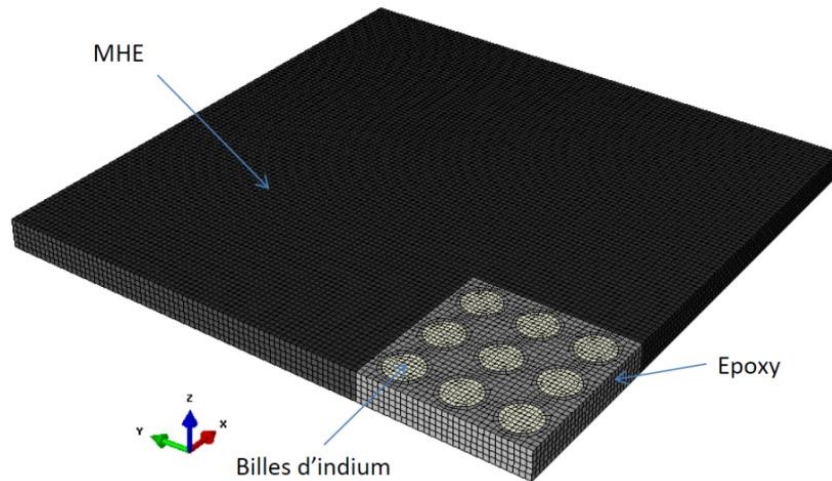


Figure VI.11 – Couche d'interconnexion du modèle couplé

Cette méthode requiert un nombre relativement **important d'éléments dans le maillage** (par rapport au modèle avec MHE) et par conséquent le temps de calcul peut augmenter drastiquement. Pour un modèle de taille équivalente au modèle billé de  $20 \times 20$  billes, le couplage conduit à un maillage continu. Si **le modèle devient de plus en plus grand, il n'est plus possible de réaliser cette continuité des maillages entre la zone zoomée et le reste du modèle. Dans ce cas, un recours au collage des deux maillages s'impose, ce qui peut diminuer la précision de la simulation.** De plus, pour réaliser un zoom dans une autre zone du modèle, il faudrait créer un nouveau modèle avec un nouveau maillage.

### VI.2.4.2. Submodeling

La technique submodeling est utilisée, en deuxième analyse, pour étudier une partie locale d'un modèle nommé « sous-modèle » avec un maillage raffiné, basée sur une interpolation de **la solution depuis l'état initial (non déformée) d'un modèle dit global ayant un maillage relativement grossier.** Elle est plus utile quand il est nécessaire d'obtenir une solution précise, détaillée dans une région locale. Le pilotage du sous-modèle peut être effectué par des résultats nodaux, tels que les déplacements, ou par les résultats en contraintes du modèle global.

Ainsi, dans notre cas, le submodeling est réalisé en deux étapes :

- Simulation du modèle global : modèle avec MHE simulé en stockant les champs de **déplacements sur une surface fermée entourant un volume identique à celui d'un petit modèle appelé sous-modèle** (Figure VI.12a)

- Simulation du sous-modèle : **petit volume plus détaillé (constitué de 9 billes d'indium + époxy)** auquel nous imposons les conditions aux limites issues des données déduites du modèle global (champ de déplacement de la surface fermée) (Figure VI.12b).

Le submodeling permet un gain significatif de temps de calcul par rapport au modèle couplé. En effet, dans le cas du submodeling, le modèle MHE est simulé une seule fois et peut servir à concevoir plusieurs sous-modèles à différents emplacements du modèle avec MHE.

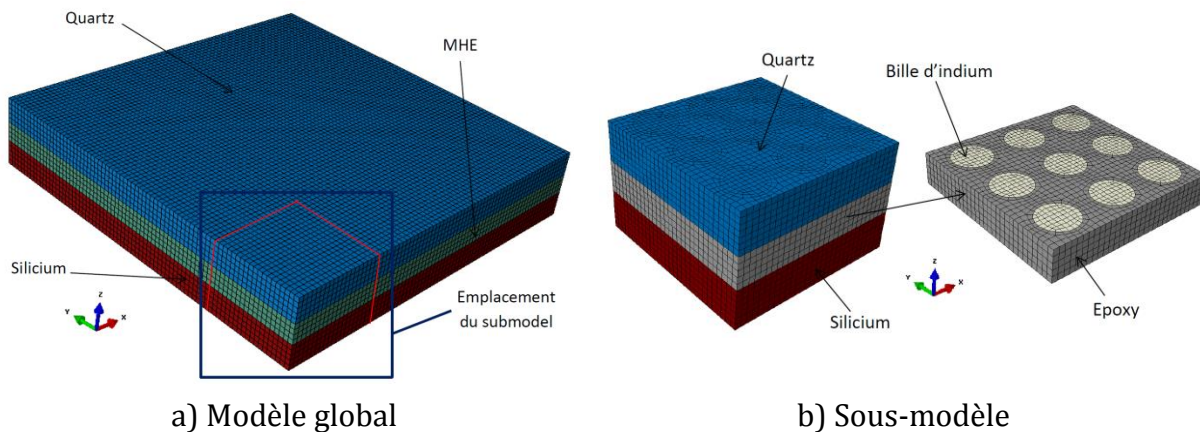


Figure VI.12 – Description de la technique submodeling

N.B. : Pour améliorer la précision de la reprise locale, nous incluons les volumes de substrat et de puce correspondants (voir Figure VI.12b).

### VI.2.5. Comparaison des 4 modélisations

Dans cette section, nous comparons les prédictions des quatre (4) modélisations décrites : le modèle billé, le modèle avec MHE, le modèle couplé et le submodeling. Le modèle couplé a les mêmes dimensions que celui du modèle billé  $20 \times 20$  et sa partie zoomée (9 billes d'indium + époxy) a les mêmes dimensions que la couche d'interconnexion du sous-modèle.

#### VI.2.5.1. Cas thermoélastique

Le Tableau VI.8 résume les résultats en termes du nombre d'éléments, de flèche et du temps de calcul des 4 modèles. Les simulations ont été réalisées sur une machine Fujitsu, Intel Core i7, 8 processeurs, 16 Go RAM et 2,3 GHz. Les écarts des flèches sont calculés par rapport à la flèche mesurée sur le modèle billé. Le calcul de la flèche au niveau du submodeling se fait en prenant le déplacement du nœud du modèle global situé à l'intersection des 2 plans de symétrie et celui du sous-modèle situé à l'autre extrémité de la diagonale.

Tableau VI.8 – Comparaison des 4 modélisations en thermoélasticité

Modèle	Nombre d'éléments	Temps de calcul	Flèche ( $\mu\text{m}$ )	Ecart (%)
Modèle billé 20 x 20	222000	6 min 49 s	0,1723	0
Global MHE	80864	14 min 37 s	0,1661	-3,6
Modèle couplé	156480	23 min 56 s	0,1676	-2,7
Submodeling	25308	28 s	0,1679	-2,6

On peut remarquer que le zoom structural (submodelling et modèle couplé) permet d'améliorer la précision de la flèche. Le submodeling semble être plus précis et plus rapide que le modèle couplé.

En termes des contraintes de von Mises dans les billes d'indium, les 2 modèles de zoom structural donnent des résultats très proches du modèle billé 20 x 20 (Figure VI.13).

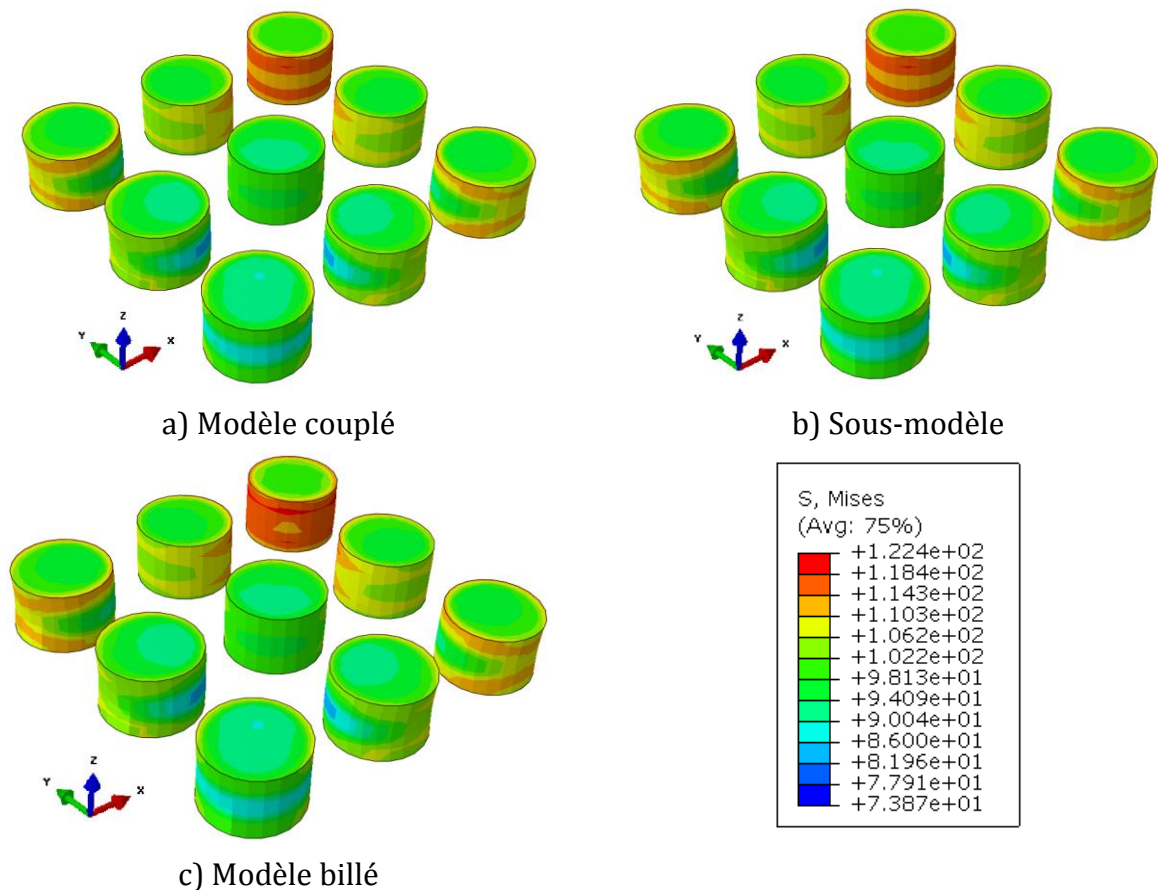


Figure VI.13 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d'indium des 3 modèles contenant les billes en thermoélasticité

Il en est de même pour les contraintes dans l'époxy (Figure VI.14).

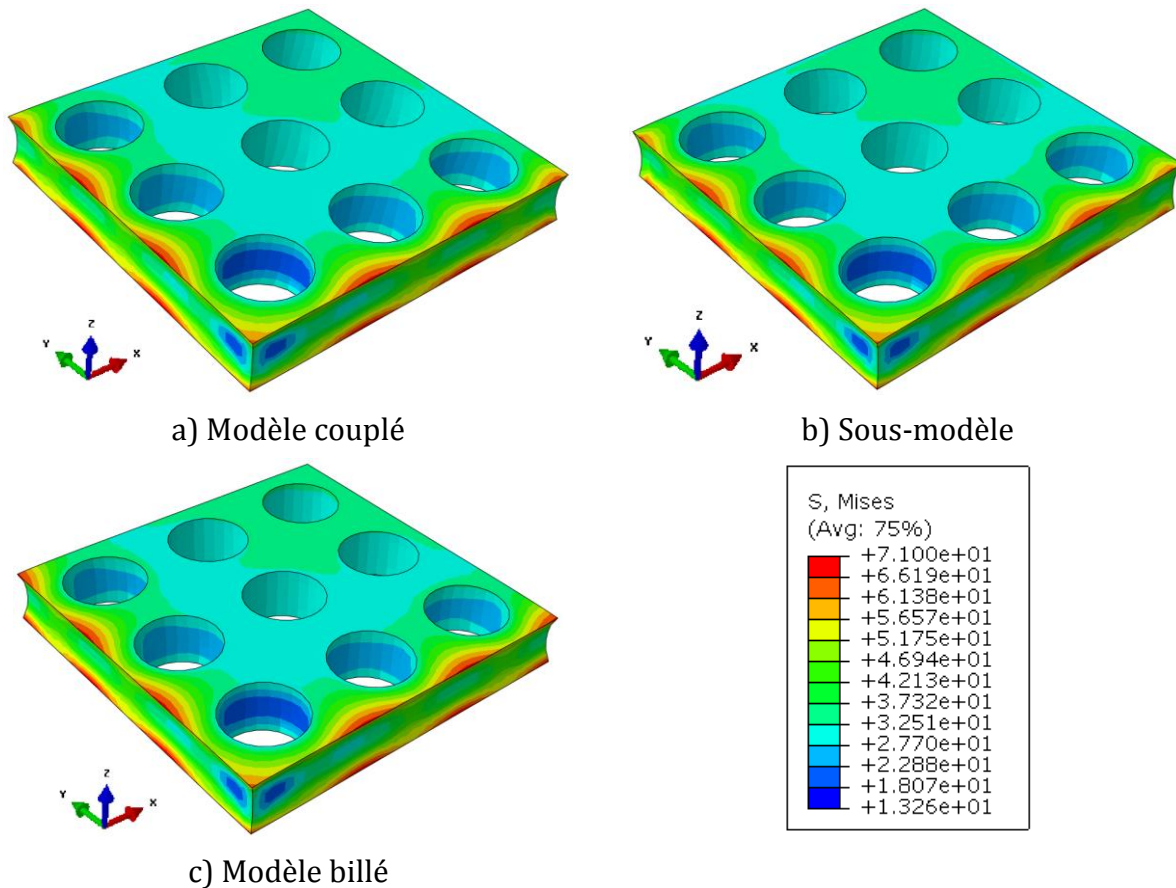


Figure VI.14 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans l'époxy des 3 modèles contenant les billes en thermoélasticité

Bien que l'on ait des écarts au niveau de la localisation des champs locaux du modèle avec MHE, les techniques de zoom structurel permettent d'obtenir avec une meilleure précision (<1%) les champs dans chaque constituant de la partie zoomée de la couche d'interconnexion.

### VI.2.5.2. Cas thermo-élasto-plastique

Le Tableau VI.9 présente les résultats en termes du nombre d'éléments, de flèche et du temps de calcul des 4 modèles. Comme dans le cas thermoélastique, les deux méthodes de zoom structurel améliorent les résultats obtenus par le modèle avec MHE. Le submodeling est, une fois encore, la technique la plus précise et la plus rapide.

Tableau VI.9 – Comparaison des 4 modélisations en thermo-élasto-plasticité

Modèle	Nombre d'éléments	Temps de calcul	Flèche (µm)	Ecart (%)
Modèle billé 20 x 20	222000	1 h 7 min 45 s	0,2355	0
Global MHE	80864	22 min 58 s	0,2015	-14,4
Modèle couplé	156480	54 min 58 s	0,2151	-8,66
Submodeling	25308	8 min 19 s	0,2325	-1,27



La distribution des contraintes de von Mises des billes (Figure VI.15) du sous-modèle se rapproche plus de celle du modèle billé ainsi que la distribution des déformations plastiques équivalentes (Figure VI.16). Seules les valeurs maximales du modèle couplé semblent être plus proches de celles du modèle billé.

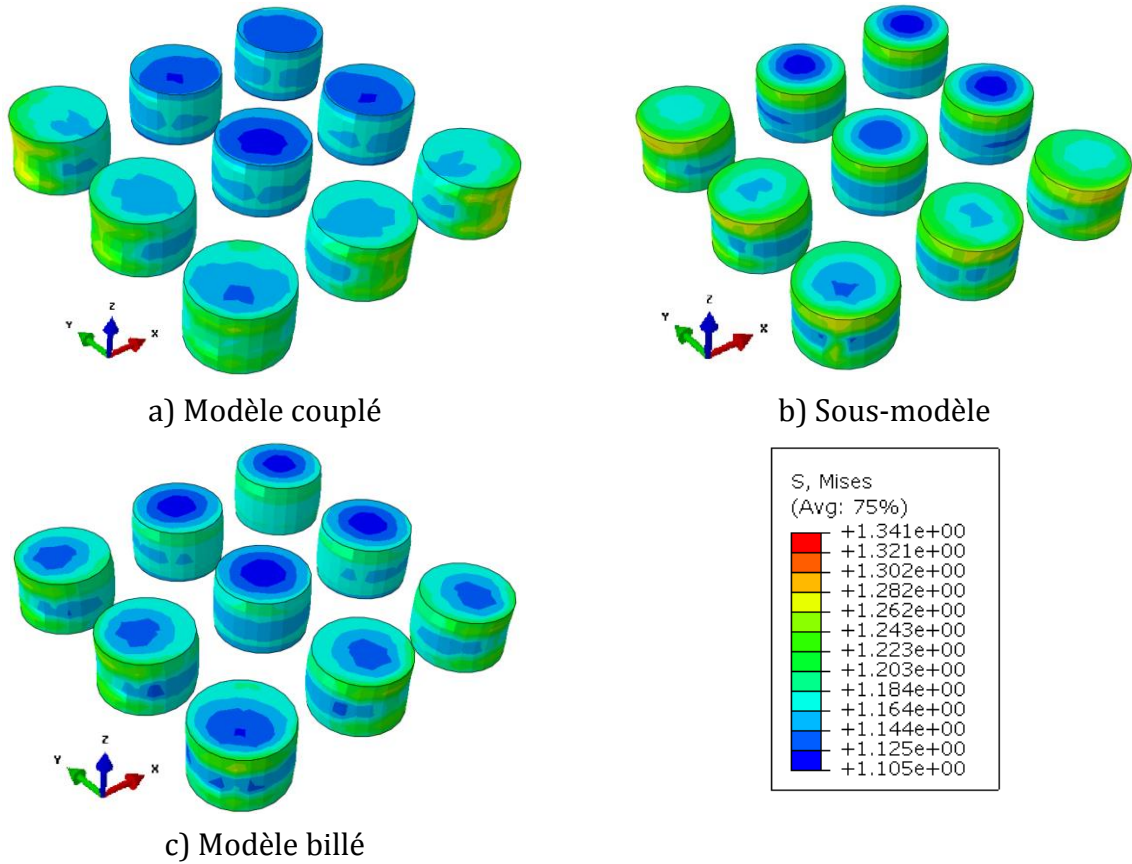
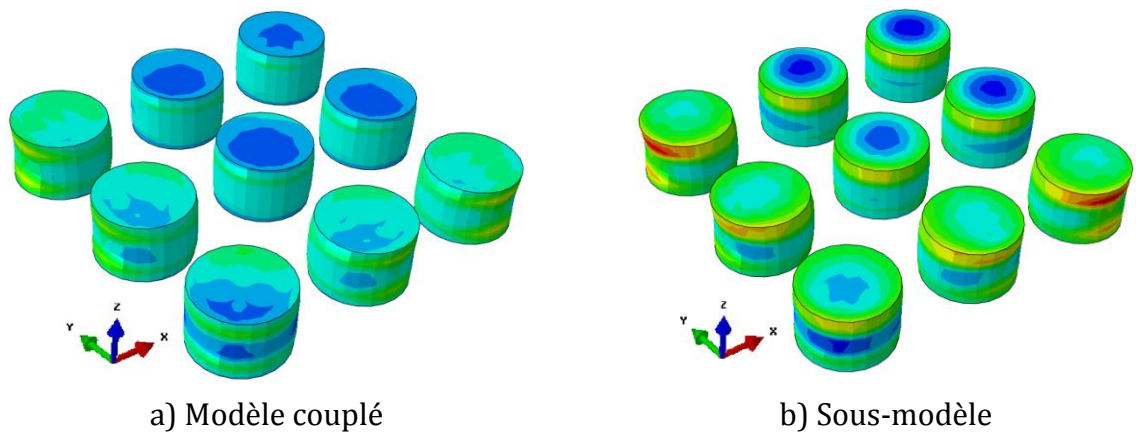


Figure VI.15 – Champ de contraintes équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d'indium des 3 modèles contenant les billes en thermo-élasto-plasticité



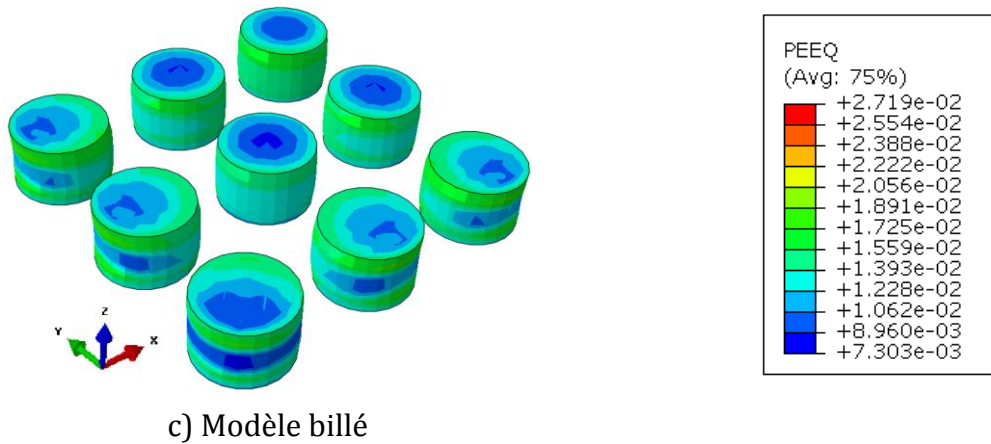


Figure VI.16 – Champ de déformation plastique équivalente dans les billes des 3 modèles contenant les billes en thermo-élasto-plasticité

Bien que le couplage de modèles soit aussi précis, il fait augmenter le temps de calcul. Dans le cas d'un modèle mégapixel, le submodeling sera utilisé car cette technique est mieux adaptée et la plus précise. De plus, le couplage de modèles dans ce cas entrainera une augmentation trop importante du nombre d'éléments.

Le modèle multi-site de Mori-Tanaka utilisé pour estimer les propriétés effectives du MHE se révèle assez rigoureux et précis. Les résultats de simulation sur un petit modèle montrent des écarts faibles en thermoélasticité et en thermo-élasto-plasticité par rapport au modèle numériquement complet. De plus, l'augmentation des dimensions du modèle réduit les écarts. Pour reproduire fidèlement le processus de fabrication d'un assemblage flip chip, il est nécessaire de simuler le cycle thermique et de tenir compte de la température initiale de chaque matériau.

### VI.3. Validation du modèle par un cycle thermique d'assemblage

La technologie flip chip fait intervenir différentes étapes dans lesquelles divers composants sont assemblés à différentes températures. Pour étudier le comportement thermomécanique de l'assemblage flip chip, il convient de simuler ce procédé. La simulation du cycle thermique correspondant implique une modification du maillage au cours du calcul car tous les matériaux ne sont pas présents à chaque étape du procédé d'assemblage. Les techniques de désactivation et de réactivation des éléments permettent de changer la forme et la composition de la structure à simuler.

## VI.3.1. Modification de maillage

Comme il n'est pas possible de créer ou ajouter des éléments à une étape de simulation, un effet similaire peut être obtenu en créant des éléments au moment de la définition du modèle entier, les retirer dans une étape, puis les réactiver ultérieurement.

### VI.3.1.1. Désactivation des éléments

Des éléments du modèle peuvent être désactivés (éliminés temporairement ou définitivement) dans une étape de l'analyse d'Abaqus. Juste avant l'étape d'élimination de ces éléments, Abaqus Standard stocke les forces ou flux qu'ils exercent sur le reste du modèle. Ces forces sont réduites progressivement à zéro durant l'étape de désactivation. Ainsi, l'effet de la région désactivée sur le reste du modèle est complètement inexistant à la fin de cette étape. Ces éléments restent inactifs dans les étapes suivantes jusqu'à ce qu'ils soient de nouveau activés.

### VI.3.1.2. Réactivation des éléments

Il existe 2 techniques de réactivation des éléments (de type contrainte/déplacement): la réactivation sans déformation (strain-free) et la réactivation avec déformation (with strain). La réactivation avec « strain-free » réinitialise la configuration de l'élément tandis que celle avec « with strain » ne le fait pas.

#### Réactivation avec « strain-free »

Lorsque les éléments sont réactivés par la méthode « strain free », ils sont actifs de manière immédiate. Ils sont remis dans un état sans contrainte ni déformation et leur forme correspond à celle obtenue avant l'étape de réactivation. Par conséquent, ces éléments exercent des forces nodales nulles sur le reste du modèle. Après réactivation, les gradients de déformation sont basés sur les déplacements ultérieurs au moment de la réactivation. Ainsi, la configuration au début de l'étape de réactivation est la nouvelle configuration initiale de l'élément. Ce genre de réactivation est généralement utilisé pour modéliser la création d'une région non déformée et non contrainte du modèle qui partage une frontière avec une autre, qui peut être contrainte et déformée.

#### Réactivation avec « with strain »

La méthode « with strain » permet une réactivation progressive des éléments ; les déplacements des nœuds de ces éléments évoluent jusqu'à correspondre aux nœuds voisins. Par conséquent, le reste du modèle subit l'effet des éléments réactivés. Après la fin de l'étape

de réactivation, les déformations des éléments réactivés correspondent aux déplacements de leurs nœuds depuis leur configuration initiale. C'est le cas, par exemple, du ravitaillement en carburant d'un réacteur nucléaire, où le nouveau carburant ajouté doit être conforme à la distorsion de ses anciens voisins.

La différence entre les techniques « strain-free » et « with strain » est l'état de contrainte des éléments au moment de leur réactivation. Dans notre cas, lorsque le matériau époxy est injecté à l'état liquide, il est considéré comme inactif. Ensuite lorsqu'il devient solide, il est sans contrainte résiduelle donc il convient d'utiliser la technique strain-free pour le réactiver.

### VI.3.2. Simulation du cycle thermique

On considère deux modèles numériques d'assemblage flip chip au moins 4 fois plus grands que les petits modèles étudiés précédemment :

- Le premier modèle est constitué de  $40 \times 40$  billes d'indium dans la couche d'interconnexion et sera notre modèle de référence,
- Le second modèle est géométriquement identique au précédent mais la couche d'interconnexion est remplacée par un MHE dont les propriétés sont déterminées par le modèle développé dans le chapitre précédent

Les dimensions et les conditions aux limites des deux modèles sont illustrées sur la Figure VI.17.

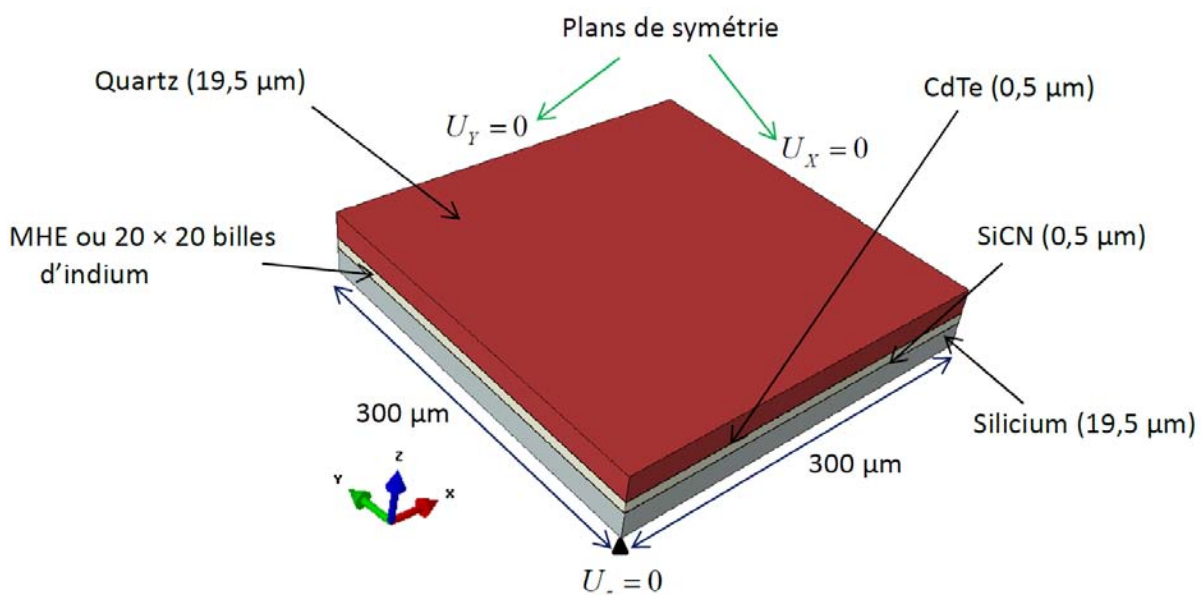


Figure VI.17 – Dimensions et conditions aux limites des modèles  $40 \times 40$



Le cycle thermique simulé est schématisé par la Figure VI.18. La température maximale de l'hybridation est de 429 K car au-delà de cette température, l'indium devient liquide (ce phénomène n'est pas pris en compte en mécanique des solides).

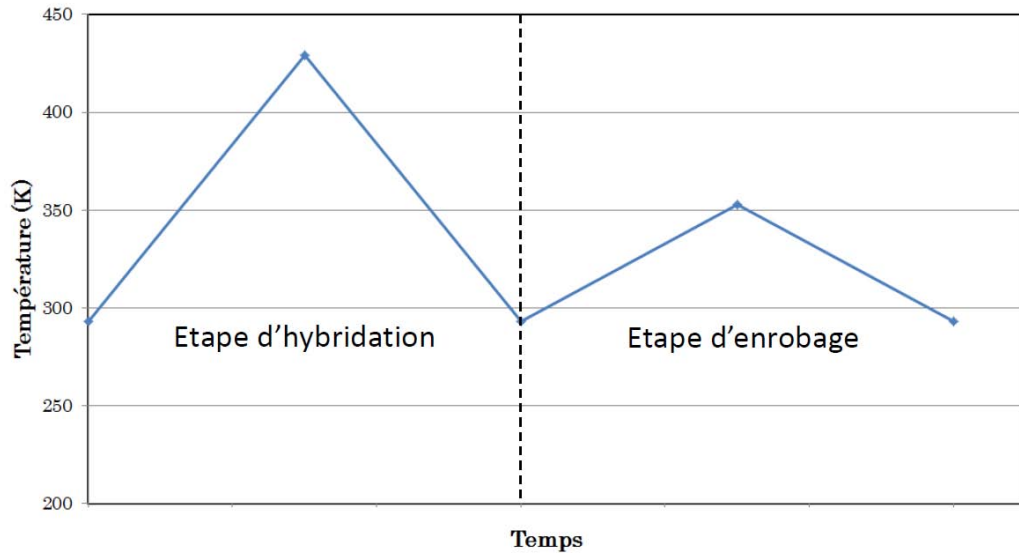


Figure VI.18 – Cycle thermique simulé

La simulation s'effectue en 4 étapes :

- 1) Chauffage de 293 K à 429 K : désactivation des éléments indium et époxy dans le modèle billé et des éléments MHE dans le modèle avec MHE
- 2) **Refroidissement de 429 K à 293 K correspondant à l'hybridation** : réactivation des éléments indium dans le modèle billé et des éléments MHE dans le modèle avec MHE et utilisation du modèle analytique périodique (modèle **d'homogénéisation sans** enrobage développé dans le chapitre précédent)
- 3) Chauffage de 293 K à 353 K : utilisation du modèle analytique périodique dans le modèle avec MHE
- 4) Enrobage : réactivation des éléments époxy dans le modèle billé et utilisation du modèle de Mori-Tanaka dans le modèle avec MHE

On peut remarquer dans le Tableau VI.10 que les températures initiales des différents matériaux ne sont pas identiques. La température de référence de 293 K reste la même pour tous les matériaux.

Tableau VI.10 – Températures initiales des matériaux

Matériau	Température initiale (K)
Silicium	293
Quartz	293
RDL1 (SiCN)	293
RDL2 (CdTe)	293
Indium	429
Epoxy	353

Les propriétés thermoélastiques des matériaux sont ceux utilisées précédemment et rappelées dans le Tableau VI.2. Les propriétés des RDL1 et RDL2 sont données dans le Tableau VI.11.

Tableau VI.11 – Propriétés thermoélastique des couches de passivation

Matériaux	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	CDT ( $10^{-6} K^{-1}$ )
RDL1 (SiCN)	100 [VI_2]	0,3 [VI_2]	3 [VI_2]
RDL2 (CdTe)	50	0,331	4,96

Durant l'étape de chauffage (de 293 K à 429 K) avant hybridation, les matériaux RDL 1 et RDL 2 ont un comportement thermoélastique linéaire. A l'étape d'hybridation ainsi qu'à l'étape de chauffage de 293 K à 353 K, ils ont le même comportement que le MHE dû à l'utilisation du modèle analytique périodique. A l'étape d'enrobage, ils ont de nouveau un comportement thermoélastique linéaire.

Les éléments de type hexaédrique linéaire avec 8 points d'intégration ont été utilisés pour le maillage des deux modèles. Le nombre d'éléments, de nœuds et les temps de calcul sont indiqués dans le Tableau VI.12. On peut constater un gain en temps considérable (30 fois) en utilisant notre modèle avec MHE.

Tableau VI.12 – Nombre d'éléments et temps de calcul des deux modèles

Modèles	Type d'éléments	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Temps de calcul
Modèle billé	C3D8	846 430	887 112	1 jr 7 h 38 min
Modèle MHE	C3D8	78 750	86 640	1 h 12 min

Les champs de déplacements dans les deux modèles à la fin des étapes d'hybridation et de l'enrobage sont respectivement illustrés sur les Figure VI.19 et Figure VI.20. Le Tableau VI.13 résume les flèches mesurées sur le quartz à chaque étape dans les deux modèles. Les écarts

sont faibles et diminuent avec l'augmentation des dimensions des modèles. Dans les deux cas, nous constatons une diminution de la flèche à la fin de l'enrobage par rapport à l'hybridation.

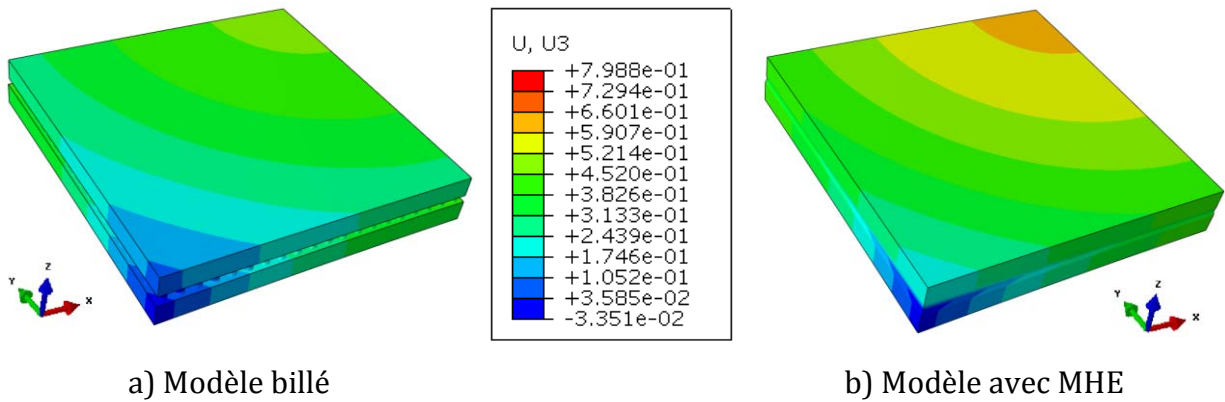


Figure VI.19 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles  $40 \times 40$  en thermoélasticité à la fin de l'étape d'hybridation

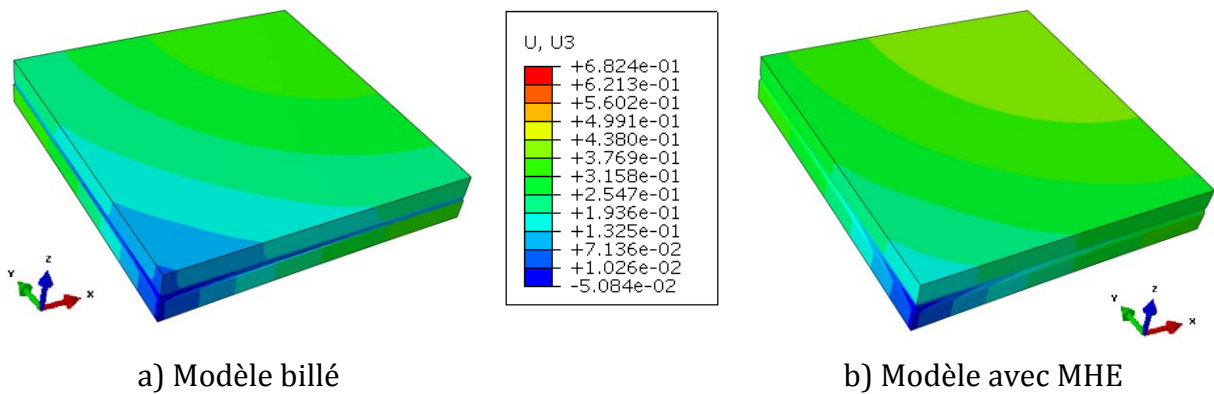


Figure VI.20 – Champ de déplacements ( $\mu\text{m}$ ) dans la direction z dans les modèles  $40 \times 40$  en thermoélasticité à la fin de l'étape d'enrobage

Tableau VI.13 – Flèches calculées ( $\mu\text{m}$ ) sur le quartz dans les modèles  $40 \times 40$  à différentes étapes

Etape	Modèle billé	Modèle avec MHE	Ecart (%)
Hybridation	0,387	0,418	+8
Enrobage	0,304	0,285	-6,3

Les champs de contrainte équivalente de von Mises dans l'indium des deux modèles à la fin des étapes d'hybridation et d'enrobage sont illustrés respectivement par les Figure VI.21 et Figure VI.22.

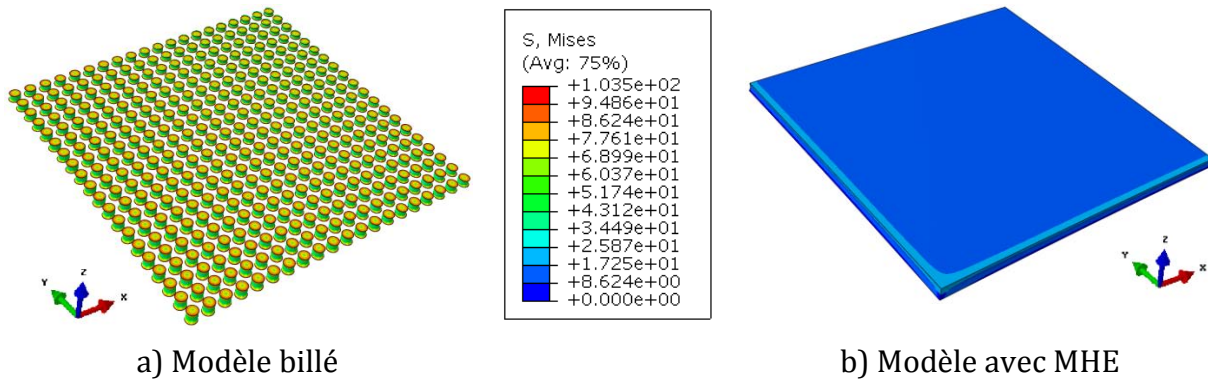


Figure VI.21 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans l'indium des modèles  $40 \times 40$  à la fin de l'étape d'hybridation en thermoélasticité

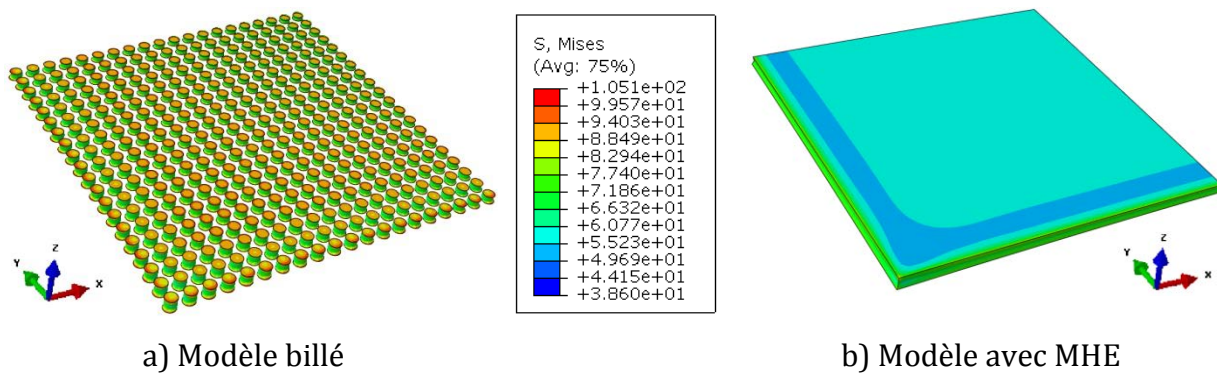


Figure VI.22 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans l'indium des modèles  $40 \times 40$  à la fin de l'étape d'enrobage en thermoélasticité

Seule la simulation thermoélastique a été réalisée. Quant à la simulation thermo-élastoplastique, elle a été validée avec le modèle de Mori-Tanaka (voir section VI.2) mais pas encore avec le modèle analytique périodique. Les écarts obtenus avec le modèle périodique dans ce cas sont beaucoup trop importants pour valider les résultats.

Compte tenu de la faible proportion de la couche d'interconnexion dans l'assemblage mégapixel et du fait que la plasticité des billes d'indium influence peu la flèche globale, la simulation thermoélastique permet d'obtenir une voilure assez précise. A présent, la simulation thermoélastique peut être effectuée sur un modèle réel, beaucoup plus grand, de format mégapixel contenant plus d'un million de microbilles.

## VI.4. Assemblage flip chip mégapixel

### VI.4.1. Modèle numérique

Nous considérons le modèle numérique d'un assemblage flip chip de format mégapixel dont les dimensions et les conditions aux limites sont illustrées sur la Figure VI.23.

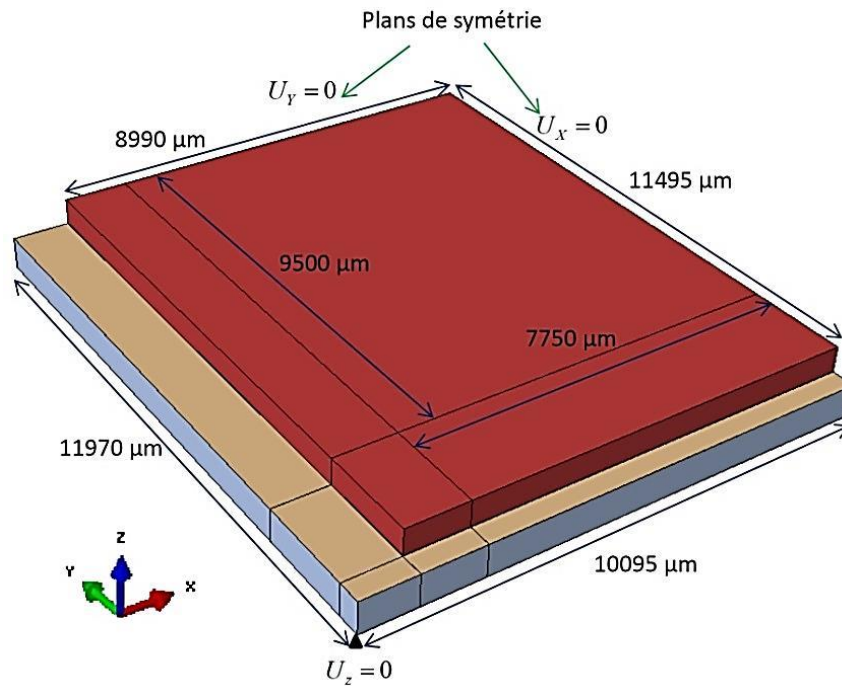


Figure VI.23 – Dimensions et conditions aux limites du modèle mégapixel

La partition  $9500 \mu\text{m} \times 7750 \mu\text{m}$  représente la zone des échantillons flip chip mesurée expérimentalement. Les différents matériaux constitutifs du modèle ainsi que leurs épaisseurs sont présentés sur la Figure VI.24.

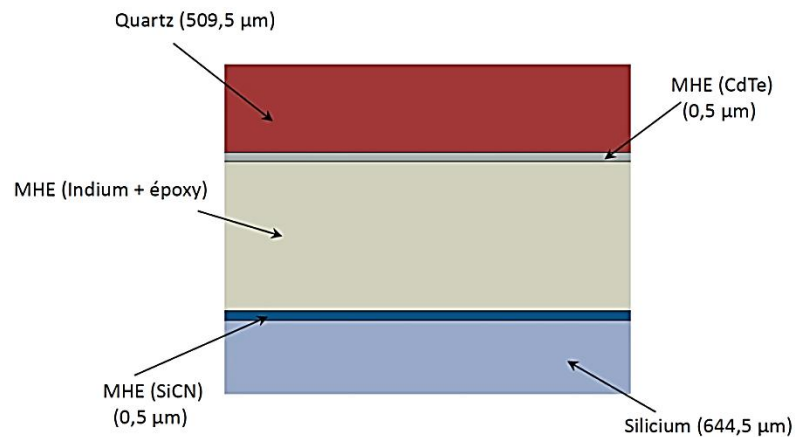


Figure VI.24 – Epaisseur des matériaux constituant le modèle flip chip mégapixel

Les conditions de chargement sont quasiment les mêmes que celles décrites dans la section précédente mais avec une étape supplémentaire de descente à 77 K (cryogénie) terminant le cycle. La température est supposée homogène dans toute la structure. En effet, des simulations thermiques réalisées dans la thèse de S. Ben Khelifa [VI\_3] ont montré que **l'écart de température entre les points le plus chaud et le plus froid n'excède pas 0,6 K.**

Les éléments de maillage utilisés sont de type hexaédrique linéaire avec 8 points d'intégration. **Le nombre total d'éléments est de 1 217 772 et celui des nœuds est de 1 265 456. Chaque nœud ayant 3 degré de liberté, il y a 3 796 368 équations à résoudre.**

Deux simulations numériques sont réalisées en définissant les propriétés des matériaux à partir des résultats de la littérature dans un cas et les résultats obtenus expérimentalement par nano-indentation dans le second cas (voir chapitre 4). Les propriétés des matériaux fournies par la littérature sont indiquées sur les Figure VI.25 (**modules d'Young**), Figure VI.26 (modules de cisaillement), Figure VI.27 (coefficient de Poisson) et Figure VI.28 (CDT moyen). Les valeurs des modules d'Young de l'époxy ont été extrapolées à basse température.

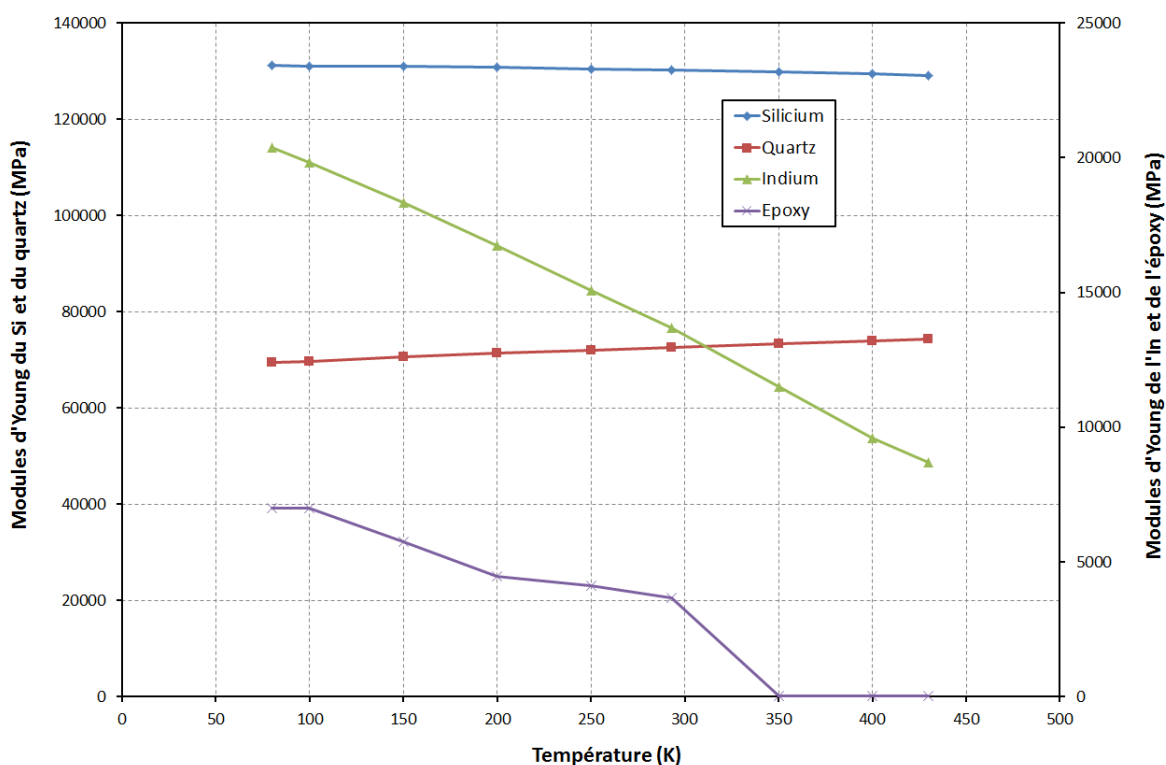


Figure VI.25 – Modules d'Young des matériaux en fonction de la température

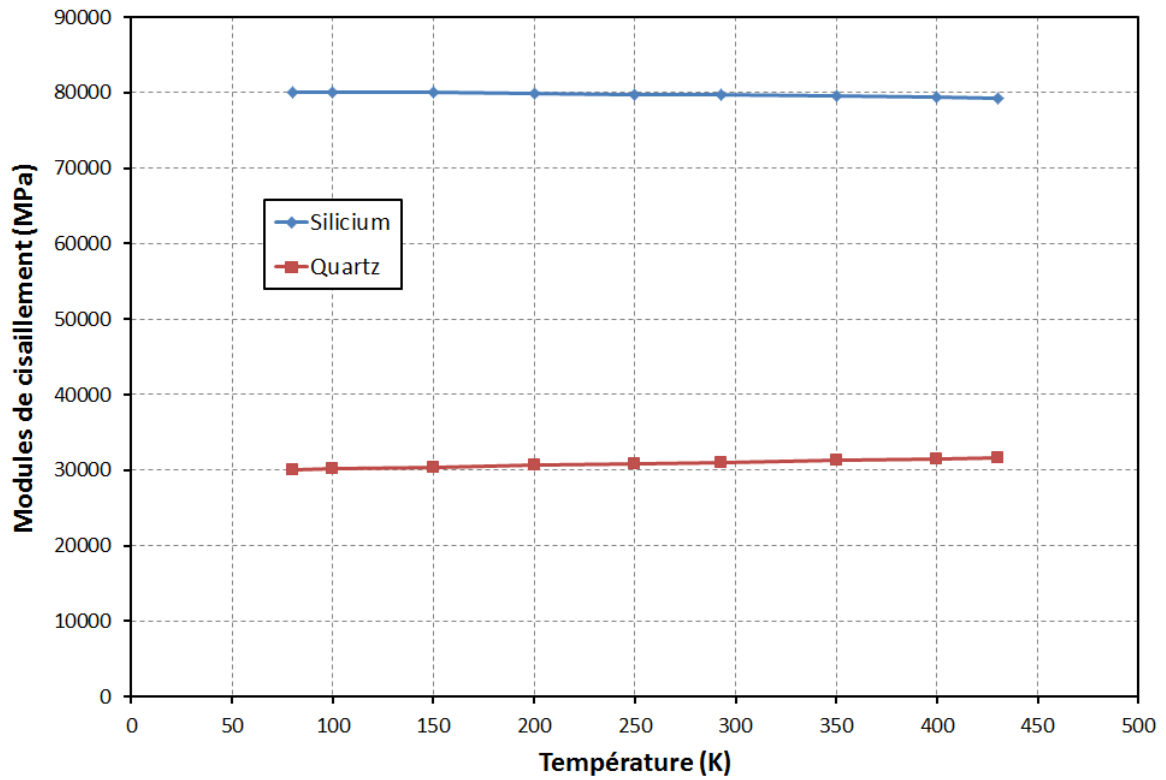


Figure VI.26 – Modules de cisaillement des matériaux en fonction de la température

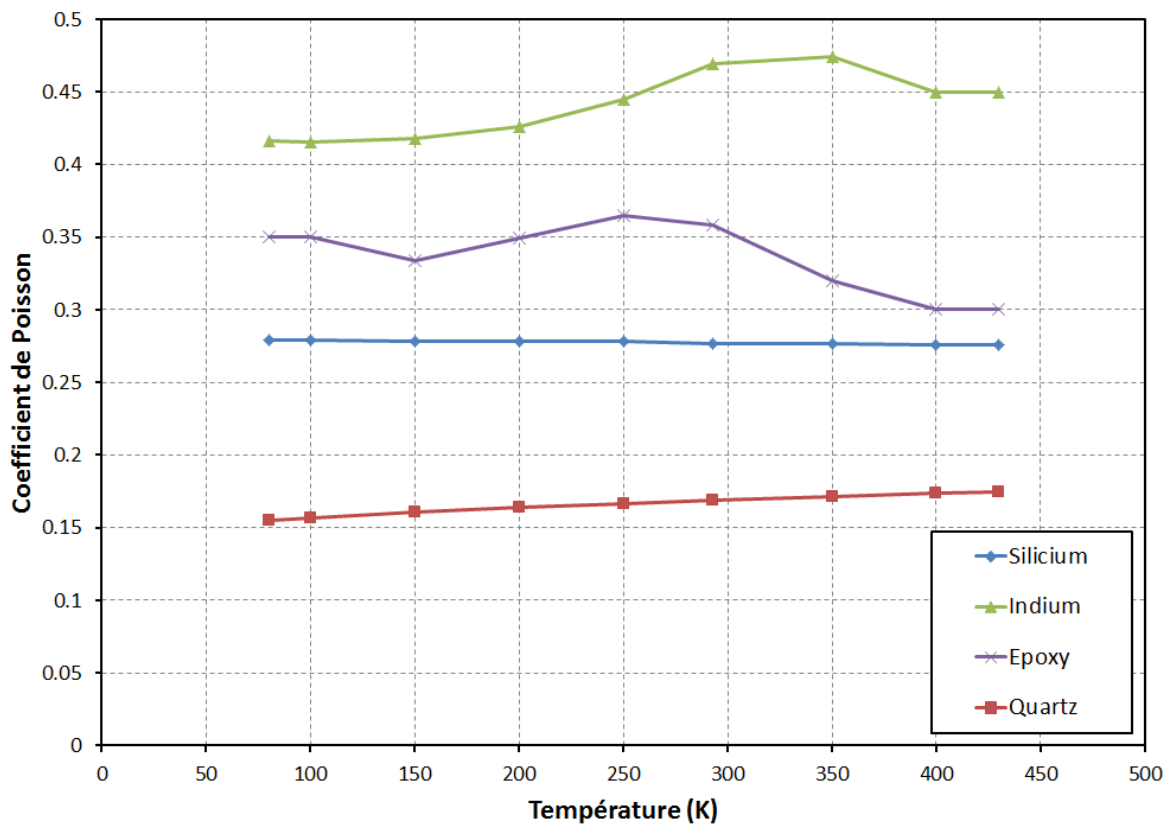


Figure VI.27 – Coefficient de Poisson des matériaux en fonction de la température

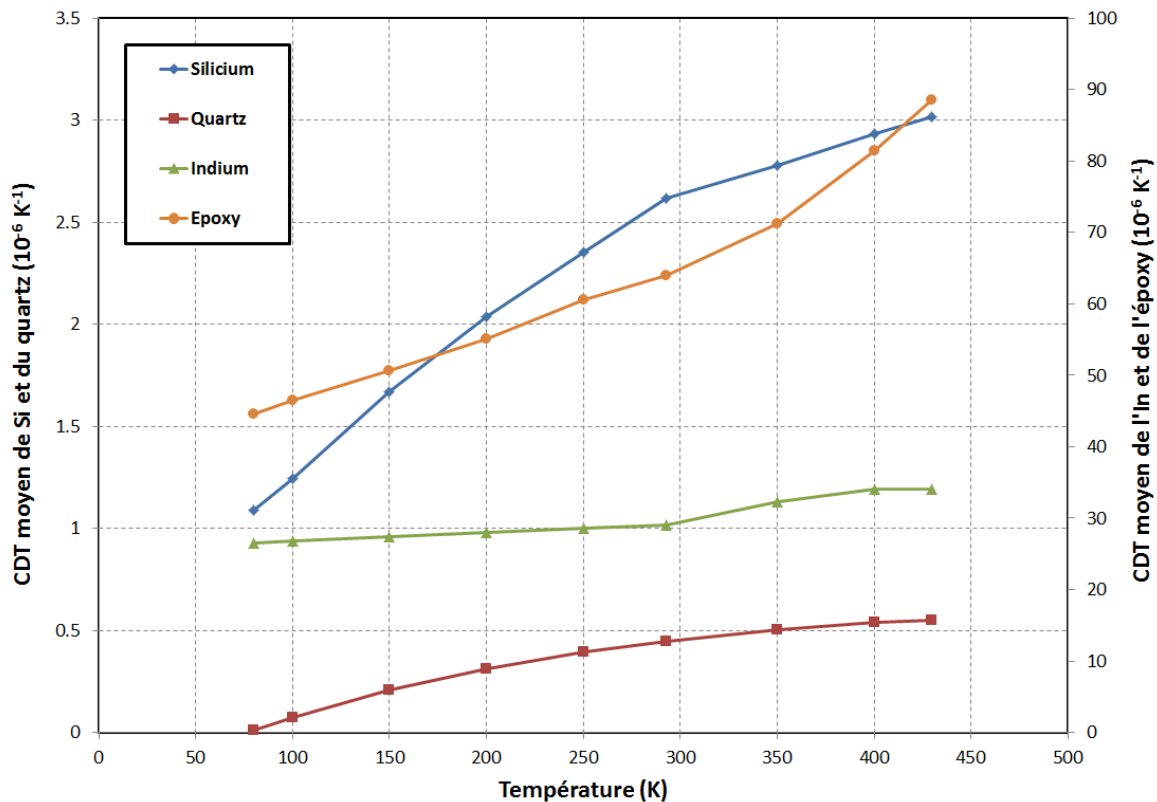


Figure VI.28 – Coefficient de dilatation thermique moyen des matériaux en fonction de la température

### VI.4.2. Résultats de simulation

Le temps de calcul est d'environ une semaine sur une machine Dell Précision T7500 Intel Xeon E5620, 8 processeurs de 2,4 GHz de fréquence et 24 Go de RAM. Les résultats numériques obtenus sont sensibles aux propriétés des matériaux utilisées. La forme de la déformée de l'assemblage est la même aux étapes d'hybridation, d'enrobage et de cryogénie (77 K). Le champ de déplacements dans la direction verticale z, obtenu après l'étape d'enrobage par exemple est illustré sur la Figure VI.29.

Les calculs de voilure (flèche) ont été faits sur le quartz (sur la zone correspondante aux mesures expérimentales). Les valeurs de la voilure à différentes étapes sont données dans le Tableau VI.14.

Tableau VI.14 – Voilures sur le quartz à différentes étapes

Propriétés matériaux	Voilure sur le quartz (µm)		
	Hybridation	Enrobage	Cryogénie (77 K)
Données de littérature	28,86	28,58	46,97
Données de nano-indentation	26,2	25,9	39,99



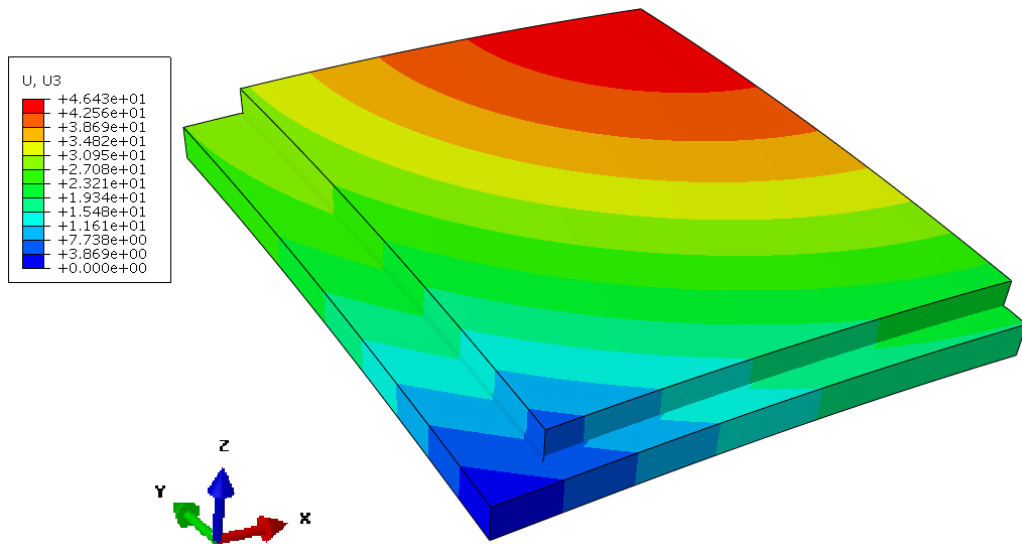


Figure VI.29 – Champ de déplacement  $u_3$  ( $\mu\text{m}$ ) dans le modèle mégapixel après enrobage

Dans les deux cas de simulation, la voilure diminue légèrement à l'étape d'enrobage (par rapport à l'étape d'hybridation) et augmente significativement à l'étape de cryogénie. Il faut noter que les données de nano-indentation ne sont pas fonction de la température (valables à la température ambiante) et ont été déterminées en supposant que les matériaux sont isotropes.

### VI.4.3. Mesures expérimentales

Des mesures expérimentales ont été réalisées dans une salle blanche du LETI. Une salle blanche est une pièce où la concentration particulaire est maîtrisée afin de minimiser l'introduction, la génération, la rétention de particules à l'intérieur, généralement dans un but spécifique industriel ou de recherche scientifique. Les paramètres tels que la température, l'humidité et la pression relative sont également maintenus à un niveau précis (définition selon la norme ISO 14644-1).

Les mesures de voilure ont été faites sur des machines utilisant les technologies d'imagerie confocale chromatique et l'interférométrie confocale spectrale.

#### VI.4.3.1. Imagerie confocale chromatique

La configuration de cette technologie est illustrée sur la Figure VI.30. Un objectif chromatique  $L$  projette l'image d'un point source  $W$  selon un continuum d'images monochromatiques localisées sur l'axe optique (codage chromatique). Un échantillon placé dans cette zone de codage chromatique voit sa surface diffuser le pinceau de lumière

incidente. La lumière retrodiffusée traverse l'objectif chromatique L dans le sens inverse et arrive sur un trou P qui filtre toutes les longueurs d'onde sauf une seule,  $\lambda_M$ . La lumière collectée est analysée par un spectrographe S. La position de l'échantillon est en relation directe avec la longueur d'onde détectée  $\lambda_M$ .

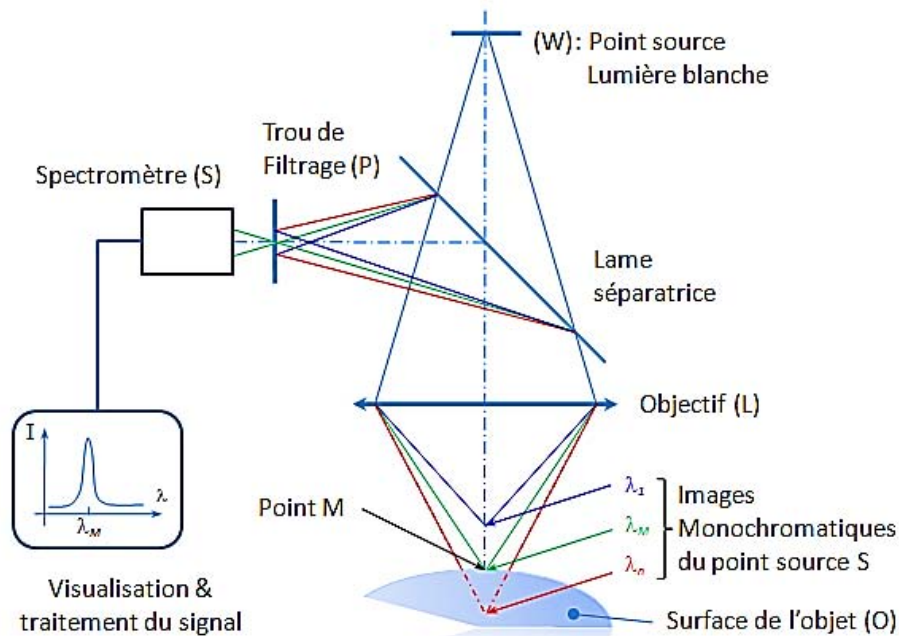


Figure VI.30 – Configuration de la technique d'imagerie confocale chromatique [STIL®]

Les principaux avantages de cette technique sont :

- Haute résolution,
- Rapport signal à bruit élevé,
- Fonctionne avec tous types de matériaux,
- Large choix de gamme de mesure,
- Compatible avec des pentes locales importantes,
- Géométrie coaxiale (pas d'ombrage),

La machine de mesure utilisant cette technologie que nous avons utilisée est l'AltiSurf© 530 (illustrée sur la Figure VI.31). Elle permet de faire des mesure de voilure à différentes température (de 90 K à 500 K). L'échantillon est posé sur une semelle en cuivre qui transmet l'énergie calorifique à celui-ci. L'ensemble est fermé hermétiquement pour faire ou non le vide. La semelle est chauffée par des résistances électriques ou refroidie par de l'azote liquide selon la température à laquelle on veut faire la mesure. Des sondes de température sont placées sur l'échantillon, la semelle et l'entrée d'azote liquide pour mesurer les températures à ces endroits.

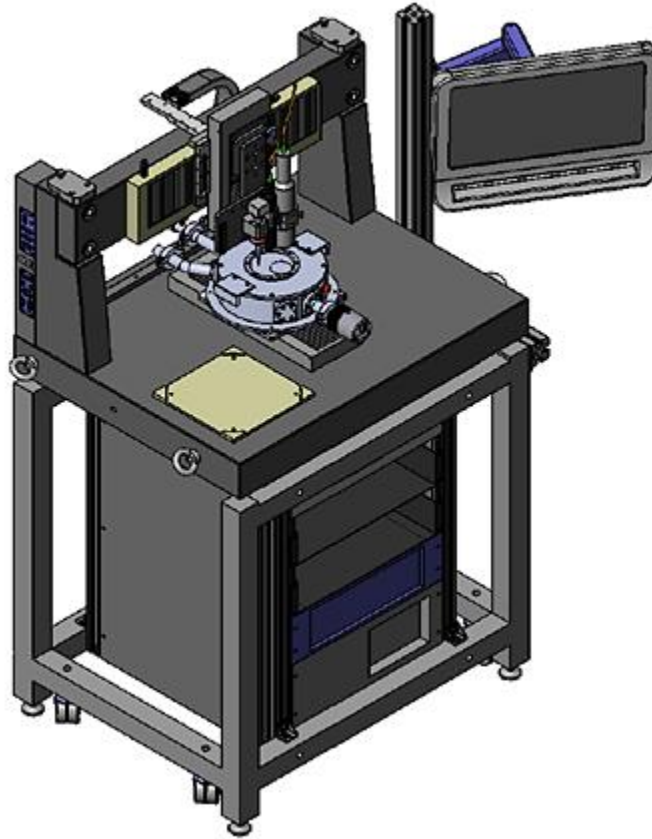


Figure VI.31 – Machine de mesure de voilure à différentes température (AltiSurf© 530 par Altimet)

### VI.4.3.2. Interférométrie confocale spectrale

La configuration de cette technologie est illustrée sur la Figure VI.32. La lumière provenant d'un point source  $W$  traverse un objectif interférométrique  $L$  et une surface de référence  $R$  avant d'atteindre la surface de l'échantillon. La superposition des pinceaux lumineux réfléchis par la surface de l'échantillon et par la surface de référence génère un phénomène d'interférence. Le pinceau réfléchi traverse l'objectif interférométrique en sens inverse et arrive sur un trou  $P$  qui filtre tous les rayons sauf ceux provenant du point d'origine  $M$  sur l'objet  $O$ . Le spectrographe  $S$  mesure le spectre cannelé du signal d'interférence. L'épaisseur de l'intervalle d'air entre l'échantillon et la surface de référence peut être extraite avec une résolution sub-nanométrique à partir de la détermination de la phase spectrale du signal d'interférence.

Les principaux avantages de cette technique sont :

- Insensible aux vibrations,
- Résolution sub-nanométrique exceptionnelle,

- Rapport signal à bruit élevé,
- Mesure d'épaisseur de couches minces (épaisseur minimale mesurable :  $\sim 0.4 \mu\text{m}$ ),
- Mesure de vias à fort facteur de forme (Profondeur / Diamètre).

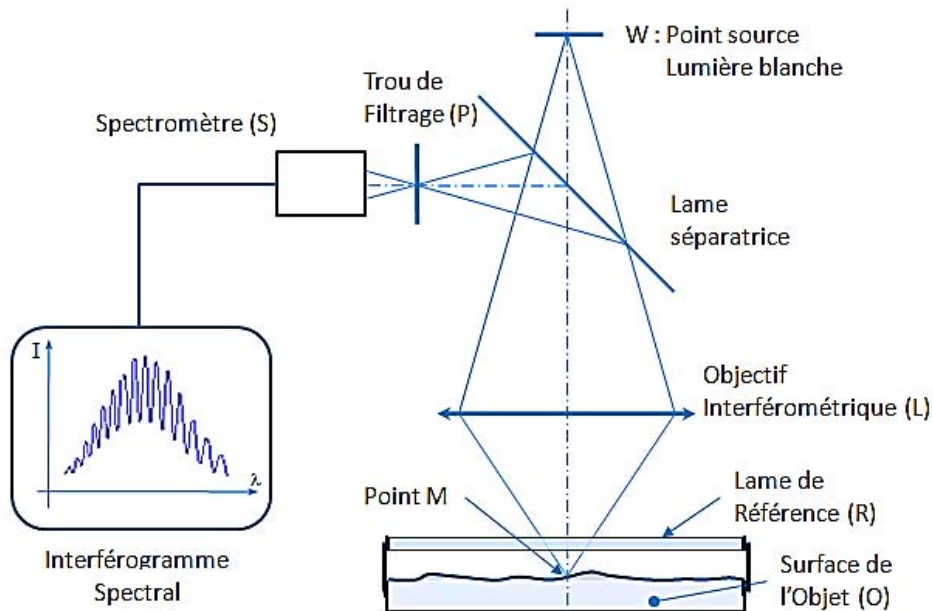


Figure VI.32 – Configuration de la technique d'interférométrie confocale spectrale [STIL®]

Nous avons utilisé une machine de mesure basée sur cette technologie conçue par la société Zygo® (Figure VI.33). Les mesures **ne sont effectuées qu'à température ambiante**.

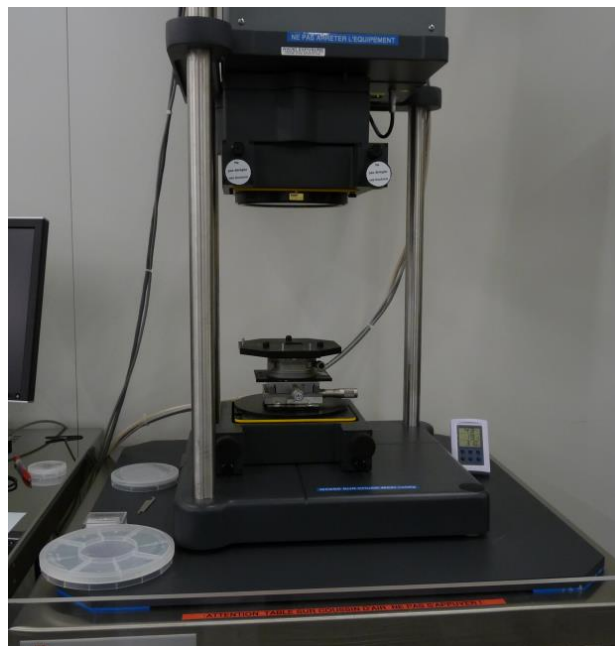


Figure VI.33 – Machine de mesure de voile Zygo

### VI.4.3.3. Mesures de voilure des assemblages flip chip

Les mesures ont été faites sur des échantillons d'assemblage flip chip à format mégapixel ayant les mêmes dimensions que le modèle simulé. La forme d'un des échantillons est illustrée sur la Figure VI.34. On peut remarquer sa forme convexe. Les mesures ont été réalisées à la température ambiante car pour le moment la calibration de la machine AltiSurf® 530 n'est pas encore effective à basse température.

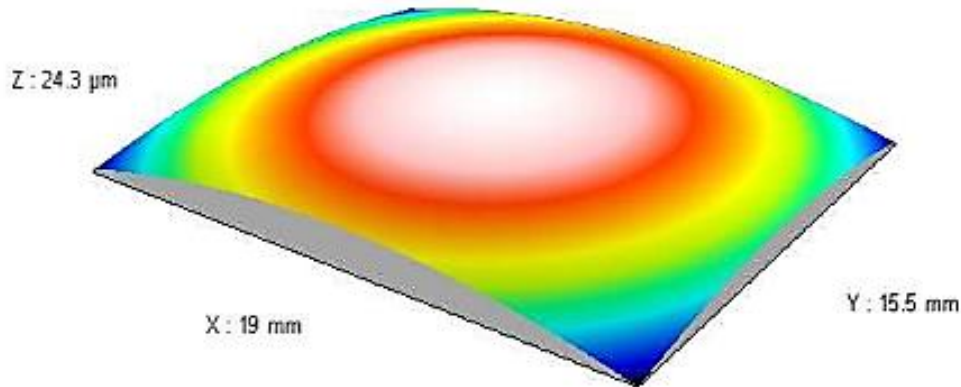


Figure VI.34 – Voilure d'un échantillon d'assemblage flip chip après enrobage avec Zygo®

La synthèse des mesures de 6 échantillons d'assemblage flip chip est fournie par la Figure VI.35. Les mesures ont été faites sur une zone du quartz ( $15,5 \mu\text{m} \times 19 \mu\text{m}$ ).

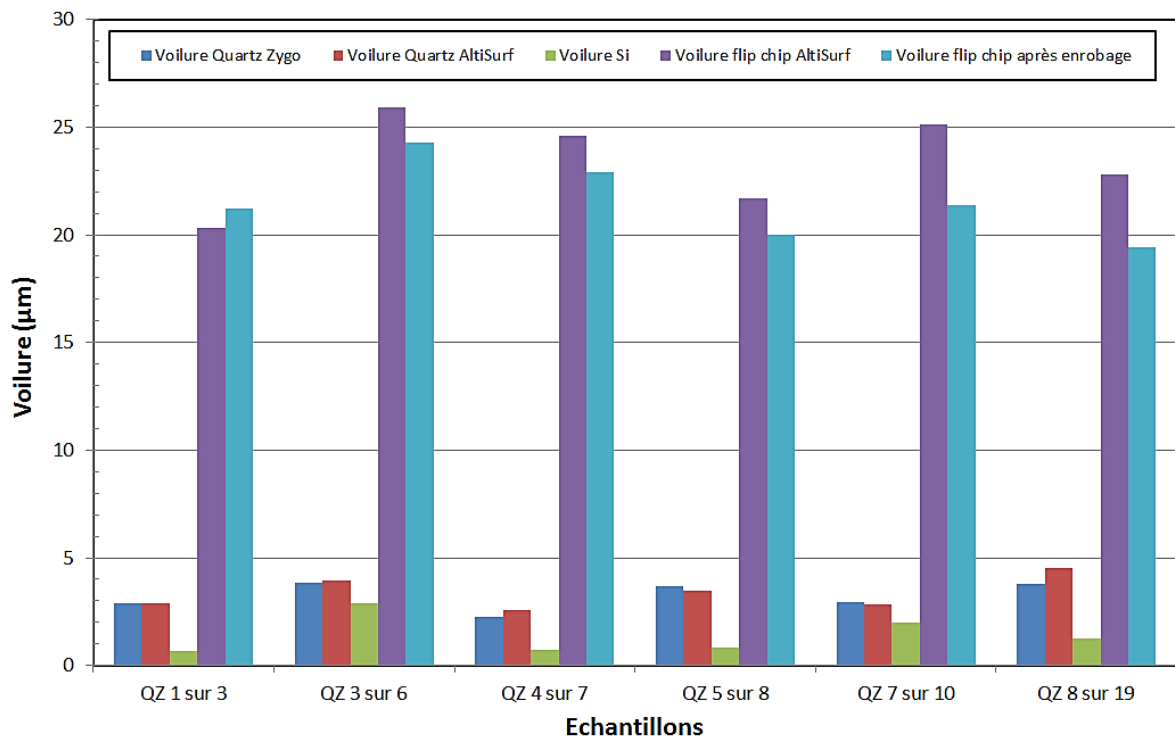


Figure VI.35 – Synthèse des mesures de voilure sur les assemblages flip chip

La moyenne des mesures de la voilure sur le quartz vaut 23,4  $\mu\text{m}$  après hybridation et 21,53  $\mu\text{m}$  après enrobage. L'erreur de mesure est estimée à 1  $\mu\text{m}$ . La voilure initiale des substrats avant l'hybridation non prise en compte dans les simulations, est de l'ordre de 5  $\mu\text{m}$  et pourrait influencer la voilure finale de l'assemblage.

### VI.4.4. Comparaison et interprétations

Nous rappelons que deux simulations du modèle mégapixel ont été effectuées en considérant les propriétés des matériaux fournies par la littérature et la nano-indentation. Une comparaison des résultats numériques et expérimentaux en termes de voilure finale est synthétisée dans le Tableau VI.15.

Tableau VI.15 – Comparaison des voilures numérique et expérimentale

Etape	EF (littérature)	EF (nanoindentation)	Expérimental
Hybridation	28,86 $\mu\text{m}$	26,2 $\mu\text{m}$	23,4 $\mu\text{m} \pm 1$
Enrobage	28,58 $\mu\text{m}$	25,9 $\mu\text{m}$	21,5 $\mu\text{m} \pm 1$

Nous remarquons que les simulations numériques réalisées avec les données issues de la nano-indentation sont plus proches des résultats expérimentaux. Un écart de l'ordre de 12 % à l'hybridation et de 20 % à l'enrobage est noté entre les résultats numériques (données de nano-indentation) et expérimentaux.

Ces écarts peuvent être dus :

- aux voilures initiales des composants avant hybridation (qui ne sont pas prises en compte dans la simulation),
- aux propriétés thermoélastiques, encore dispersées (peu connues) de l'époxy,
- au phénomène de polymérisation de l'époxy non simulé,
- à la non prise en compte des intermétalliques dont la présence dans les billes d'interconnexion est révélée par des observations microscopiques,
- à la non prise en compte, dans ces premières simulations, du comportement plastique des billes d'interconnexion.
- à la modélisation des billes d'indium en forme cylindrique alors qu'elles ont une forme plus complexe

Afin d'obtenir des détails au niveau de la couche d'interconnexion, nous avons effectué un zoom structurel dans la zone de fortes concentration de contraintes.

### VI.4.5. Zoom structurel

Le champ de contraintes équivalentes de von Mises dans la phase indium du MHE de la couche d'interconnexion est illustré sur la Figure VI.36. On peut remarquer que les valeurs maximales de ces contraintes sont localisées au niveau des extrémités de la couche d'interconnexion. Ces valeurs atteignent 200 MPa dans le cas thermoélastique. Ainsi, un zoom structurel a été fait dans le coin de cette couche en utilisant la technique de submodelling. Le sous-modèle ainsi construit est constitué de 9 billes d'indium.

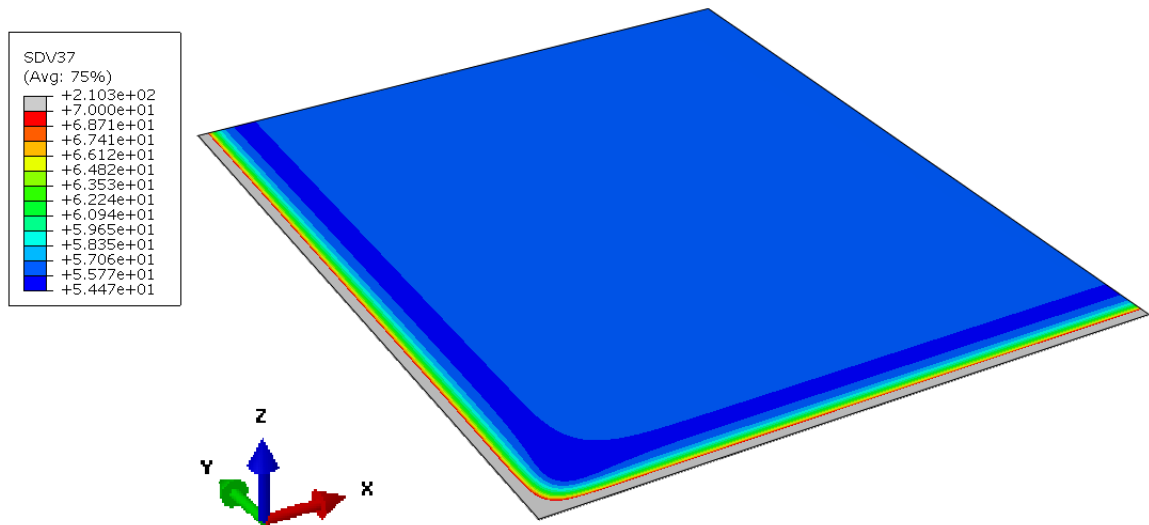


Figure VI.36 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans la phase In à la fin de l'enrobage

Le champ de contraintes équivalentes de von Mises dans les billes du sous-modèle à la fin de l'enrobage est affiché sur la Figure VI.37.

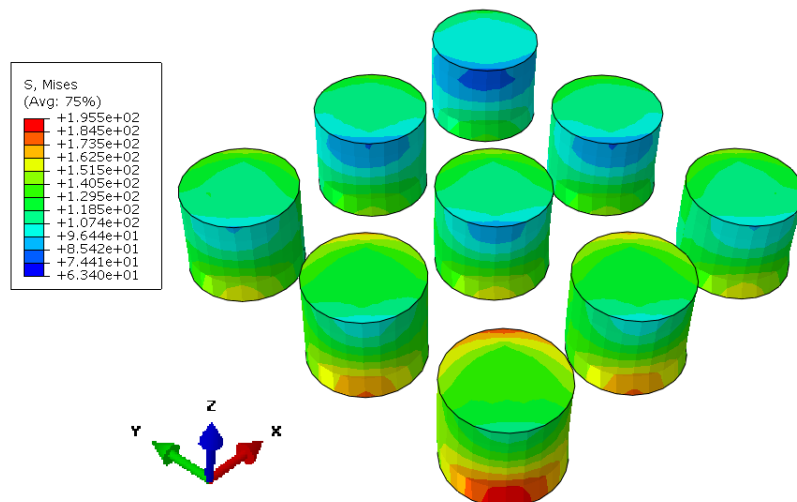


Figure VI.37 – Champ de contrainte équivalente de von Mises (MPa) dans les billes d'In du sous-modèle mégapixel à la fin de l'enrobage

Ce zoom structurel permet de mettre en évidence la présence de fortes contraintes localisées **aux interfaces entre les billes et les substrats qu'elles connectent.**

Dans le comportement local de la puce, cette concentration de contraintes aux interfaces peut **provoquer des fissures et initier ainsi le processus d'endommagement de la puce, comme le montrent des observations réalisées au MEB (Figure VI.38).**



Figure VI.38 – Image MEB de la couche d'interconnexion d'un assemblage flip chip mégapixel [VI\_1]

De plus, cette figure révèle la présence d'intermétalliques formés près des interfaces entre les billes de brasure et le quartz/silicium. La caractérisation du comportement mécanique de ces **intermétalliques constituant une phase supplémentaire (essentiellement de l' $\text{AuIn}_2$ )** reste à être réalisée. Néanmoins, il est bien établi [VI\_4] **que l' $\text{AuIn}_2$  est moins ductile que l'indium pur.** L'initiation des fissures a été attribuée par Saw et Siekhaus [VI\_5] aux différences entre les CDT des phases indium, or et  $\text{AuIn}_2$ . **La description du processus d'endommagement et de la fissuration** pourra être étudiée une fois que le comportement thermomécanique des intermétalliques sera identifié.

La simulation thermoélastique a permis d'obtenir une voilure sur le modèle mégapixel en accord avec les mesures expérimentales et les zones de concentration de contraintes dans les billes d'interconnexion correspondent aux régions de fissuration observées expérimentalement. Bien que cette simulation fournisse des résultats satisfaisants, la prise en compte de la plasticité des billes d'indium permettra d'estimer les déformations permanentes et d'introduire un critère d'endommagement afin de mieux décrire les phénomènes de fissuration.

## VI.5. Conclusion

Le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka a été validé dans un premier temps sur de petits modèles numériques en thermoélasticité puis en thermo-élasto-plasticité. Les résultats déjà satisfaisants, le sont encore mieux lorsque la taille des modèles est augmentée. Dans un



second temps, la simulation thermoélastique d'un cycle thermique sur de petits modèles numériques a été réalisée en tenant compte de l'homogénéisation périodique développée dans le chapitre précédent. Dans un dernier temps, la simulation complète d'un modèle flip chip de format mégapixel a été réalisée en thermoélasticité.

En parallèle, des mesures expérimentales de voilure ont été effectuées à l'aide deux machines utilisant les technologies d'imagerie confocale chromatique et l'interférométrie confocale spectrale. La comparaison des voilures numériques et expérimentales a permis de valider notre modèle en thermoélasticité, malgré des écarts notés. La prise en compte du comportement plastique des billes d'indium ainsi que l'influence des intermétalliques permettra de limiter les hypothèses faites au départ et d'affiner les prédictions du modèle de simulation proposé. Ces problématiques feront l'objet d'études ultérieures.

Afin d'identifier le comportement des billes dans le coin de la couche d'interconnexion où sont concentrées les contraintes, la technique du submodeling a été utilisée pour faire un zoom structurel dans cette région. Les résultats de simulation du sous-modèle ont révélé une concentration de contraintes au niveau des interfaces entre les billes et les substrats qu'elles connectent. Ces interfaces apparaissent ainsi comme des zones propices à la formation des intermétalliques et sujets d'initiation de fissures ainsi observé expérimentalement.

## VI.6. Références bibliographiques

- [VI\_1] W. Kpobie, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, and P. Lipinski, "Three-Dimensional Thermomechanical Simulation of Fine-Pitch High-Count Ball Grid Array Flip-Chip Assemblies," *J. Electron. Mater.*, vol. 43, no. 3, pp. 671–684, 2014.
- [VI\_2] X. H. Liu, M. W. Lane, T. M. Shaw, and E. Simonyi, "Delamination in patterned films," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, no. 6, pp. 1706–1718, Mar. 2007.
- [VI\_3] S. Ben Khelifa, "Fiabilisation Thermomécanique des Assemblages Flip-Chip," Université De Lorraine, 2012.
- [VI\_4] J. E. Jellison, "Gold-Indium Intermetallic Compounds: Properties and Growth Rates," 1979.
- [VI\_5] C. K. Saw and W. J. Siekhaus, "Thermal expansion of AuIn<sub>2</sub>," *Scr. Mater.*, vol. 53, no. 10, pp. 1153–1157, Nov. 2005.



## Conclusion générale et perspectives

De nos jours, les applications liées au domaine de l'électronique sont en croissance exponentielle. Nous le constatons par l'augmentation de « gadgets » électroniques pour le grand public. Ainsi, pour répondre à cette demande croissante et variée, les composants électroniques suivent deux principales tendances qui s'entremêlent : le « More Moore » et le « More than Moore » qui consistent respectivement à miniaturiser leur taille et à diversifier leurs fonctions. Ces évolutions des composants électroniques ont abouti à des intégrations en 3D comme le SiP (System in Package). Le flip chip est une technique d'interconnexion permettant l'intégration 3D. Cette technique connecte deux puces électroniques à l'aide de billes d'une taille de l'ordre de quelques micromètres. La complexité des assemblages électroniques exige une étude de fiabilité approfondie. En termes de coût et de rapidité de mis en œuvre, la méthode numérique semble être la meilleure option.

Les matrices de détecteurs IR utilisées essentiellement en armement sont assemblées à l'aide de la technologie flip chip. Avec l'augmentation de la résolution des images créées par ces matrices, le nombre de microbilles d'interconnexion a franchi la barre du million depuis le début de ce siècle. Des études de modélisation des assemblages flip chip ont été menées depuis des années, allant de la modélisation analytique simple à la modélisation numérique par éléments finis en 3D. Rares sont les investigations capables de proposer une modélisation en 3D prenant en compte la présence de toutes (plusieurs millions) les billes d'interconnexion. Il s'avère nécessaire de trouver une solution adéquate. L'alternative proposée dans cette étude consiste en la modélisation 3D d'assemblage flip chip en remplaçant sa couche d'interconnexion par un matériau homogène équivalent et ensuite d'opérer un zoom structurel dans des régions spécifiques afin d'obtenir plus de détails.

L'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite la connaissance des propriétés des matériaux constituant la structure à modéliser. Certaines de ces propriétés sont disponibles dans la littérature, mais leur dispersion apparaît très importante limitant leur exploitation brute. Pour valider ces propriétés de la littérature, des essais de nano-indentation ont été réalisés sur chaque matériau constitutif de l'assemblage flip chip étudié. Des comparaisons

ont révélés des écarts entre les données de la littérature et celles issues de la nano-indentation, en termes de modules d'Young, par exemple, de certains matériaux.

**Il existe différentes méthodes d'estimation des propriétés mécaniques d'un matériau micro-hétérogène et supposé macro-homogène. La méthode basée sur la théorie des champs moyens a été considérée dans notre étude. En particulier, l'approximation de Mori-Tanaka a été utilisée pour prédire les propriétés effectives de la couche d'interconnexion constituée de billes (inclusions) noyées dans une matrice époxy. L'injection de l'époxy dans la couche d'interconnexion se faisant après l'étape d'hybridation, un modèle analytique de type périodique a été aussi développé pour estimer les propriétés effectives de la couche d'interconnexion sans matrice. Ensuite, la nouvelle loi thermo-élasto-plastique (en considérant la plasticité des microbilles) ainsi développée a été implémentée dans le code de calcul par éléments finis Abaqus®.**

**Le modèle développé pour décrire la couche d'interconnexion durant le procédé d'assemblage a été validé sur de petits modèles flip chip contenant un nombre réduit de billes. Ensuite, un modèle de format mégapixel a été simulé en thermoélasticité et les résultats obtenus ont été comparés avec des mesures expérimentales. Les écarts faibles obtenus permettent de d'apprécier la pertinence du modèle développé.**

**La plasticité des billes d'interconnexion a été également prise en compte avec le modèle de Mori-Tanaka et les résultats de validation sont satisfaisants. Par contre, dans le cas de l'utilisation du modèle analytique périodique, les résultats n'ont pas pu être validés durant cette étude. Ainsi, une des premières perspectives serait de valider ces résultats et par conséquent le modèle entier en thermo-élasto-plasticité. Une possibilité serait la modification de la définition de la plasticité macroscopique.**

**La mise en place d'un modèle complet prédictif du comportement thermo-élasto-plastique de l'assemblage flip chip permettrait d'enrichir l'étude de sa fiabilité. En effet, l'endommagement des microbilles, observé expérimentalement, pourra être étudié en définissant des critères adaptés, basés sur la déformation plastique équivalente, la contrainte équivalente ou l'énergie de déformation.**

Par ailleurs, la prise en compte des intermétalliques révélées par des observations microscopiques dans les billes d'interconnexion est une autre piste de perspective. Les propriétés mécaniques de ces intermétalliques étant très peu connues, il serait intéressant de les caractériser par nano-indentation. Une investigation dans ce sens a été effectuée dans

notre étude mais le faible volume des intermétalliques a constitué le véritable frein pour **l'exploitation fiable des résultats.**

La technologie flip chip étant prépondérante dans les SiP et PoP, notre modèle est bien **adapté à ces types d'assemblage. Ainsi les couches contenant des billes pourront être** remplacées par des MHE.

**De nouvelles techniques d'interconnexion semblable au flip chip mais faisant usage de** « microtubes » ou de « copper pillars » **à la place de billes apparaissent dans l'industrie de la** microélectronique. Une adaptation de notre modèle pourra être envisagée afin de permettre **la simulation de ces types d'assemblage.**

**Une autre piste pour l'amélioration des prédictions de notre modèle serait de considérer un** champ de température non uniforme dans la structure non homogène et d'estimer les conductivités thermiques, chaleurs spécifiques, masse volumique, coefficients de convection,... effectifs du MHE. **Ainsi un couplage thermique et mécanique pourra être** réalisé afin de déterminer le champ de température dans la structure. Une autre approche serait de considérer les interfaces imparfaites entre différentes couches lors de notre **procédure d'homogénéisation.**



---

# **Annexes**

---





## Annexe A

# Tenseurs d'interaction et organigrammes du modèle d'homogénéisation

### Sommaire

---

A.1. Tenseurs d'interaction.....	205
A.2. Organigramme du modèle d'homogénéisation.....	206

---

## A.1. Tenseurs d'interaction

Les expressions des tenseurs d'interaction  $T^H$  et  $T^W$  sont établies en calculant la transformée de Fourier du tenseur de Green. Cette méthode a été proposée par Kneer [1], reprise par Mura [2] pour déterminer  $T^H$ , ainsi que par Fassi-Fehri [3] pour  $T^W$ . Les formules finales pour calculer ces tenseurs sont présentées par Zattarin [4].

Le calcul du tenseur d'interaction total  $T$  est décrit par l'organigramme de la Figure A..

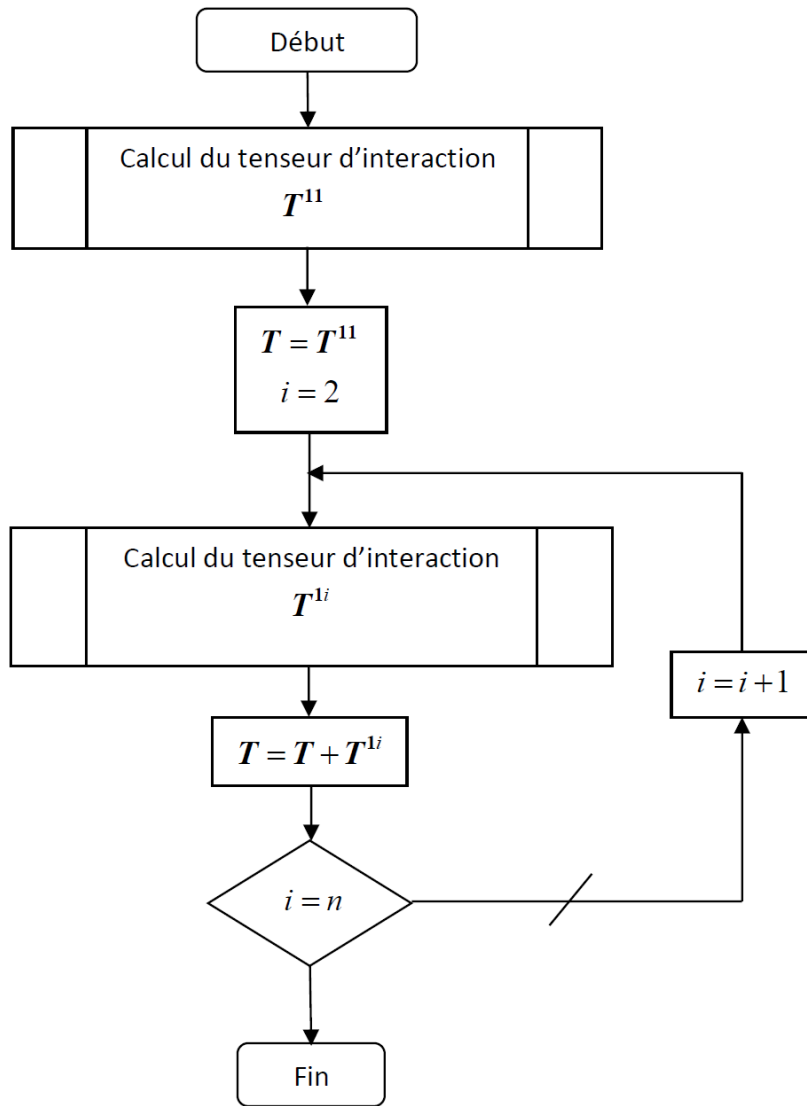
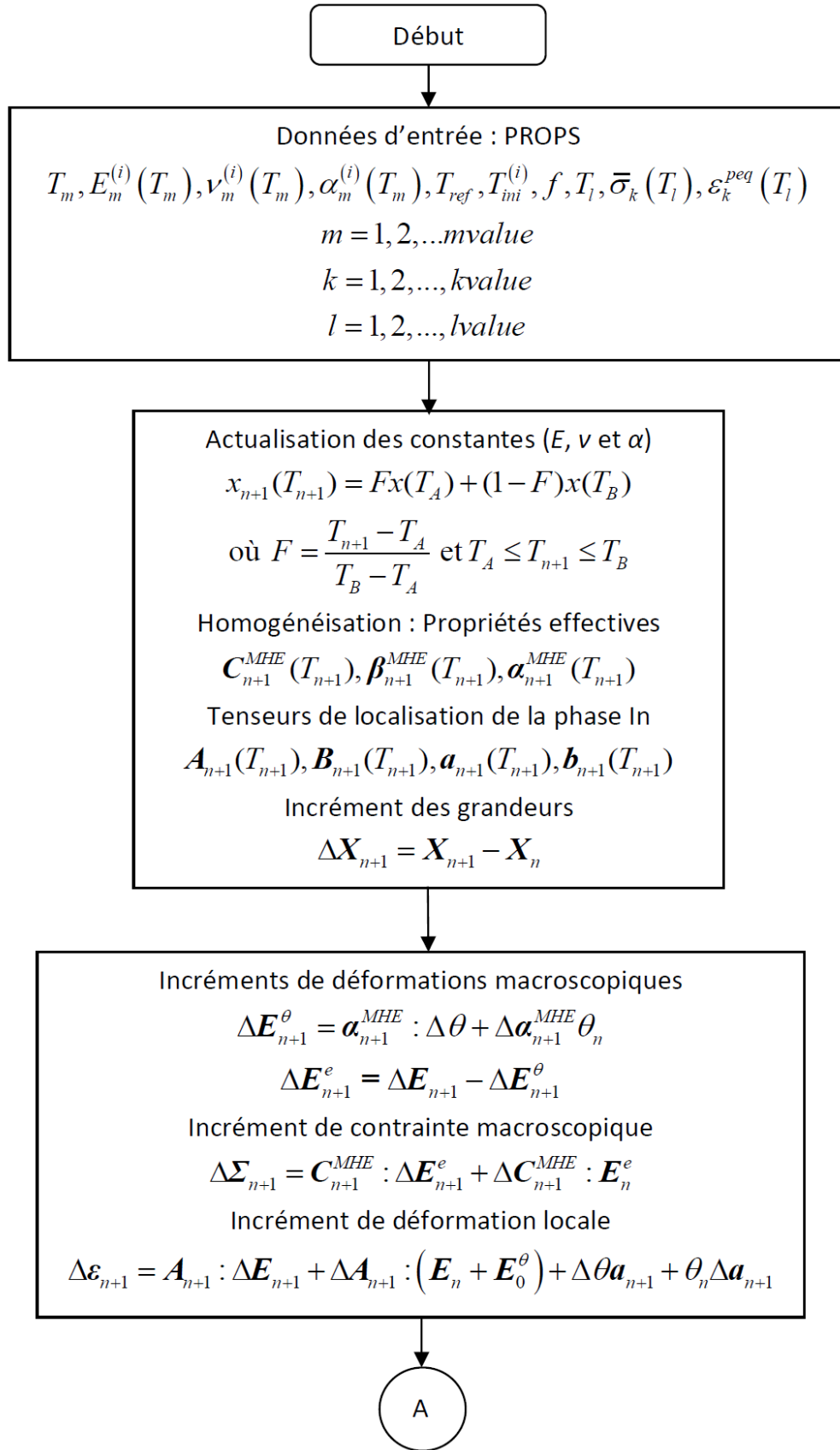


Figure A.1 – Organigramme du sous-programme calcul du tenseur d'interaction totale  $T$

## A.2. Organigramme du modèle d'homogénéisation

La Figure A.2 présente l'organigramme du modèle d'homogénéisation thermoélastique multi-site de Mori-Tanaka utilisé pour estimer les propriétés effectives d'un matériau biphasé.



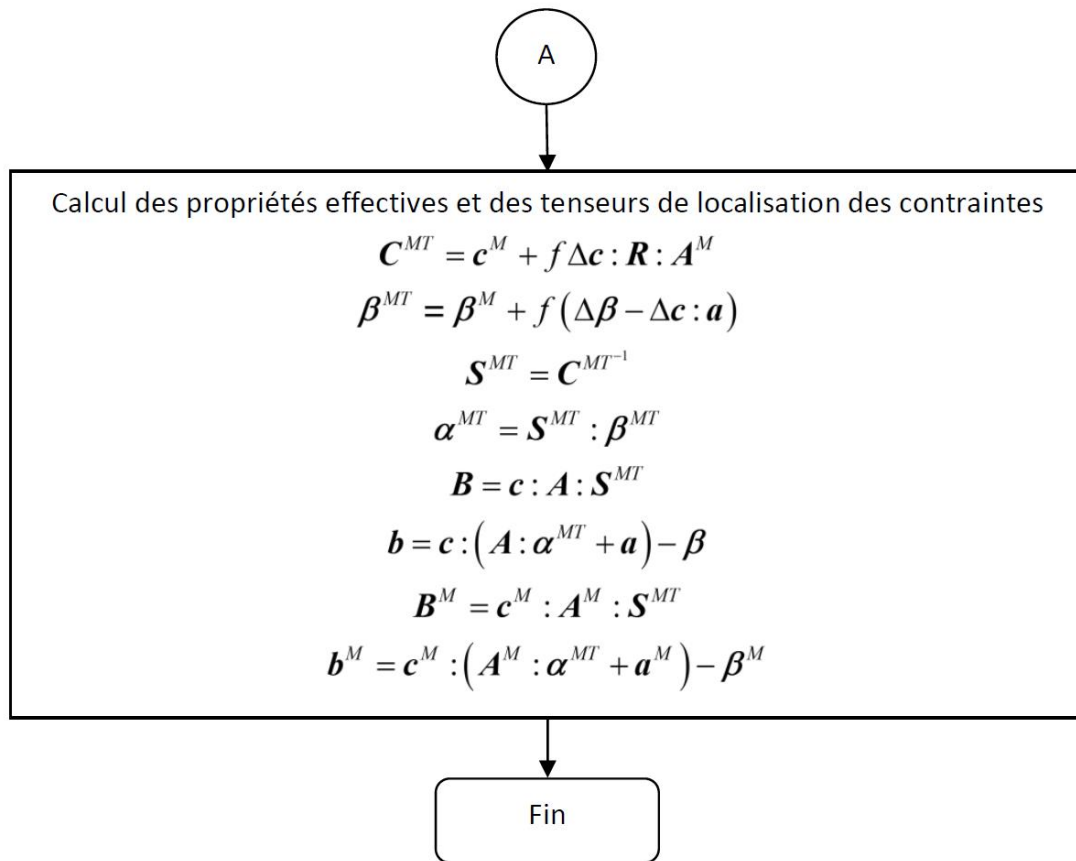


Figure A.2 – Organigramme de l'homogénéisation thermoélastique d'un matériau biphasé

## Annexe B

# Homogénéisation thermoélastique des assemblages de matériaux

### Sommaire

<b>B.1. Assemblage en série.....</b>	<b>210</b>
<b>B.2. Assemblage en parallèle.....</b>	<b>215</b>
<b>B.3. Calcul des modules effectifs de cisaillement.....</b>	<b>219</b>
<b>B.4. Calcul des coefficients effectifs de dilatation thermique.....</b>	<b>222</b>
<b>B.5. Homogénéisation par éléments finis.....</b>	<b>225</b>
B.5.1. Modules d'Young et coefficients de Poisson.....	226
B.5.2. Modules de cisaillement.....	229
B.5.3. Coefficient de dilatation thermique.....	229
<b>B.6. Comparaison.....</b>	<b>230</b>
<b>B.7. Localisation des variables locales.....</b>	<b>231</b>

Considérons des assemblages simples, en série ou en parallèle, de  $N$  ( $N \geq 1$ ) matériaux orthotropes ayant pour constantes élastiques  $E_x^{(i)}, E_y^{(i)}, E_z^{(i)}$ ,  $\nu_{xy}^{(i)}, \nu_{yz}^{(i)}, \nu_{zx}^{(i)}$  et  $\mu_{xy}^{(i)}, \mu_{yz}^{(i)}, \mu_{zx}^{(i)}$  exprimés dans le même repère d'orthotropie  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Les coefficients de dilatation thermique (CDT) de chaque matériau sont  $\alpha_{xx}^{(i)}, \alpha_{yy}^{(i)}$  et  $\alpha_{zz}^{(i)}$ . Soit  $f_i$  la fraction volumique du matériau  $(i)$  tel que  $\sum_{i=1}^N f_i = 1$ . Pour trouver les propriétés équivalentes de tels assemblages, nous disposons d'un ensemble d'équations :

- Loi de comportement élastique locale  $\varepsilon_{ij}^{(i)} = s_{ijkl}^{(i)} \sigma_{kl}^{(i)}$ ,
- Des théorèmes de moyenne des déformations et des contraintes.

Nous admettrons que le comportement effectif de ces assemblages reste orthotrope.

## B.1. Assemblage en série

Supposons que le matériau hétérogène est soumis à une contrainte macroscopique longitudinale  $\Sigma_{33}$  et que les autres composantes du tenseur de contrainte sont nulles. Appelons,  $E_{33}$  la déformation longitudinale,  $E_{11}$  la déformation transversale et  $E_{22}$  la déformation latérale. Nous cherchons à déterminer les propriétés effectives telles que :

$$E_3^{eff} = \frac{\Sigma_{33}}{E_{33}} \text{ - module de Young longitudinal,}$$

$$\nu_{31}^{eff} = -\frac{E_{11}}{E_{33}} \text{ - le coefficient de Poisson transversal,}$$

$$\nu_{32}^{eff} = -\frac{E_{22}}{E_{33}} \text{ - le coefficient de Poisson latéral.}$$

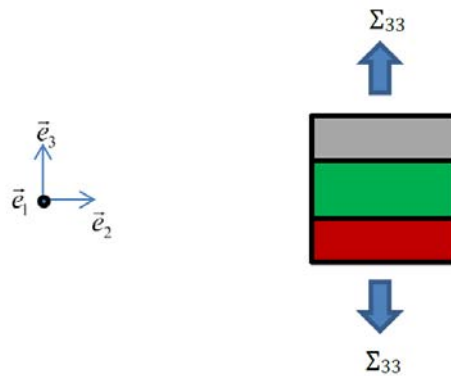


Figure B.1 – Assemblage en série suivant l'axe  $\vec{z}$

Le problème consiste alors en la détermination des trois déformations macroscopiques  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  et  $E_{33}$ .

A cause de l'assemblage en série nous avons pour chaque phase de l'assemblage :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(i)} &= E_{11} \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} &= E_{22} \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= \Sigma_{33} \end{aligned} \tag{B-1}$$

Généralement, par l'effet de Poisson, les déformations transversales sont différentes dans chaque phase. Pour préserver la forme macroscopique homogène, les contraintes internes  $\sigma_{xx}^{(i)}$  et  $\sigma_{yy}^{(i)}$  apparaissent. Elles doivent être auto équilibrées, c'est-à-dire telles que :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle &= \Sigma_{11} = 0 \\ \langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle &= \Sigma_{22} = 0 \\ \langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle &= E_{33}\end{aligned}\tag{B-2}$$

où  $\langle x^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i x^{(i)}$  symbolise la moyenne volumique d'une variable  $x^{(i)}$ . Les équations ci-dessus sont complétées par trois équations de comportement valables pour chaque phase supposée orthotrope :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= \frac{1}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yx}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zx}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_x^{(i)}} \left( \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{xy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{xz}^{(i)} \sigma_{zz}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xy}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} + \frac{1}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zy}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_y^{(i)}} \left( \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{yz}^{(i)} \sigma_{zz}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xz}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yx}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} + \frac{1}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \sigma_{zz}^{(i)} - \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right)\end{aligned}\tag{B-3}$$

En respectant les équations du système (B-1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}E_{11} &= \frac{1}{E_x^{(i)}} \left( \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{xy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{xz}^{(i)} \Sigma_{33} \right) \\ E_{22} &= \frac{1}{E_y^{(i)}} \left( \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{yz}^{(i)} \Sigma_{33} \right) \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= \frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \Sigma_{33} - \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right)\end{aligned}\tag{B-4}$$

Les deux premières équations du système (B-4) peuvent être résolues par rapport aux variables  $\sigma_{xx}^{(i)}$  et  $\sigma_{yy}^{(i)}$ . Elles se transforment en :

$$\begin{aligned}E_x^{(i)} E_{11} + \nu_{xz}^{(i)} \Sigma_{33} &= \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{xy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \\ E_y^{(i)} E_{22} + \nu_{yz}^{(i)} \Sigma_{33} &= \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)}\end{aligned}$$

et conduisent à :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &= \frac{E_x^{(i)} E_{11} + \nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)} E_{22} + \left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right) \Sigma_{33}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \\ \sigma_{yy}^{(i)} &= \frac{E_y^{(i)} E_{22} + \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)} E_{11} + \left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right) \Sigma_{33}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}}\end{aligned}\quad (\text{B-5})$$

En insérant ces expressions dans l'équation (B-4)<sub>3</sub>, nous obtenons.

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = \frac{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} - \nu_{zx}^{(i)} \left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right) - \nu_{zy}^{(i)} \left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \Sigma_{33} - \frac{\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \frac{E_x^{(i)}}{E_z^{(i)}} E_{11} - \frac{\nu_{zy}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{zx}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \frac{E_y^{(i)}}{E_z^{(i)}} E_{22}$$

La déformation globale dans la direction de traction peut être calculée en utilisant la relation (B-4)<sub>3</sub>:

$$E_{33} = \left\langle \frac{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} - \nu_{zx}^{(i)} \left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right) - \nu_{zy}^{(i)} \left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle \Sigma_{33} - \left\langle \frac{\left( \nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_x^{(i)}}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle E_{11} - \left\langle \frac{\left( \nu_{zy}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zx}^{(i)} \right) E_y^{(i)}}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle E_{22}$$

Pour déterminer les trois inconnues du problème, nous disposons des équations (B-2)<sub>1</sub> et (B-2)<sub>2</sub> exprimant les moyennes de contraintes. En utilisant les résultats (B-5), nous obtenons les formules suivantes :

$$\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{11} + \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{22} + \left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \Sigma_{33} = 0$$

$$\left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{11} + \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{22} + \left\langle \frac{\left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \Sigma_{33} = 0$$

Elles permettent d'exprimer les déformations  $E_{11}$  et  $E_{22}$  en fonction de  $\Sigma_{33}$ . De la première, nous obtenons :

$$\begin{aligned}E_{22} &= - \frac{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} E_{11} - \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33} \text{ ou} \\ E_{11} &= - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} E_{22} - \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33}\end{aligned}$$



En substituant dans la deuxième, les expressions de  $E_{11}$  et  $E_{22}$  sont dégagées :

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33} \\
 E_{22} &= \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33}
 \end{aligned} \tag{B-6}$$

Il est à présent possible d'exprimer la déformation  $E_{33}$  uniquement en fonction de la contrainte  $\Sigma_{33}$ .

$$\begin{aligned}
 E_{33} &= \left\langle \frac{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} - \nu_{zx}^{(i)} \left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right) - \nu_{zy}^{(i)} \left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle \Sigma_{33} \\
 &- \left\langle \frac{\left( \nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_x^{(i)}}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33} \\
 &- \left\langle \frac{\left( \nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \right) E_y^{(i)}}{\left( 1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} \right) E_z^{(i)}} \right\rangle \frac{\left\langle \frac{\left( \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\left( \nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)} \right)}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \Sigma_{33}
 \end{aligned}$$

Cette expression spécifie la valeur du module de Young équivalent :



$$E_3^{eff} = \frac{\left\langle \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{1-\nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2}}{(1-\nu^{(i)})E^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle^2}$$

$$\nu_{31}^{eff} = \nu_{32}^{eff} = \frac{\left\langle \frac{\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{1-\nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2}}{(1-\nu^{(i)})E^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \right\rangle^2}$$

## B.2. Assemblage en parallèle

Supposons que le matériau hétérogène est soumis à une déformation macroscopique axiale  $E_{22}$ . A cause de l'effet de Poisson, les composantes  $E_{11}$  et  $E_{33}$  sont différentes de zéro.

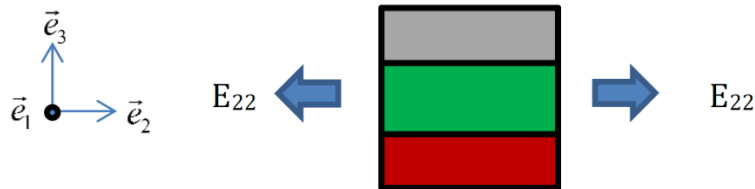


Figure B.2 – Assemblage en parallèle suivant l'axe  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$

Le tenseur de contraintes macroscopiques est tel que  $\Sigma_{22} \neq 0$  et  $\Sigma_{11} = \Sigma_{33} = 0$ . Nous cherchons à déterminer les propriétés effectives telles que :

- $E_2^{eff} = \frac{\Sigma_{22}}{E_{22}}$  - module de Young longitudinal,
- $\nu_{21}^{eff} = -\frac{E_{11}}{E_{22}}$  - le coefficient de Poisson transversal,
- $\nu_{23}^{eff} = -\frac{E_{33}}{E_{22}}$  - le coefficient de Poisson latéral.

Le problème consiste alors en la détermination des deux déformations macroscopiques  $E_{11}$  et  $E_{33}$  et de la contrainte  $\Sigma_{22}$ . Localement, l'assemblage en parallèle impose:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}^{(i)} &= E_{22} \\ \varepsilon_{xx}^{(i)} &= E_{11}\end{aligned}$$

Pour chaque phase, les contraintes locales sont telles que :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &\neq 0 \\ \sigma_{yy}^{(i)} &\neq 0 \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= 0\end{aligned}$$

Pour le cas traité, la contrainte  $\sigma_{zz}^{(i)} = 0$  à cause de la contraction libre des phases dans la direction 3. La composante  $\sigma_{xx}^{(i)}$  est auto-équilibrée, c'est-à-dire :

$$\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \Sigma_{11} = 0$$

Les équations ci-dessus sont complétées par trois équations de comportement valables pour chaque phase supposée orthotrope:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= \frac{1}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yx}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zx}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_x^{(i)}} \left( \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xy}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} + \frac{1}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zy}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_y^{(i)}} \left( \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xz}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yz}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} + \frac{1}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = -\frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right)\end{aligned}$$

Les deux premières équations de ce système se transforment comme suit :

$$\begin{aligned}E_x^{(i)} E_{11} &= \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \\ E_y^{(i)} E_{22} &= \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)}\end{aligned}$$

Elles peuvent être résolues par rapport aux contraintes locales :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &= \frac{E_x^{(i)} E_{11} + \nu_{yx}^{(i)} E_y^{(i)} E_{22}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \\ \sigma_{yy}^{(i)} &= \frac{E_y^{(i)} E_{22} + \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)} E_{11}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}}\end{aligned}$$

Puisque la contrainte  $\sigma_{xx}^{(i)}$  est auto-équilibrée, nous avons :

$$\langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle = \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle E_{11} + \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle E_{22} = 0$$

Cette équation conduit à :

$$E_{11} = - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle} E_{22}$$

Par sa définition, nous identifions alors le coefficient de Poisson  $\nu_{21}^{eff}$  :

$$\nu_{21}^{eff} = - \frac{E_{11}}{E_{22}} = \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}$$

Les contraintes locales deviennent :

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)} - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle E_x^{(i)}}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle (1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} E_{22} = \left( \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle E_x^{(i)}}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle (1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} \right) E_{22}$$

$$\sigma_{yy}^{(i)} = \frac{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle E_y^{(i)} - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle (1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} E_{22} = \left( \frac{E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle (1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} \right) E_{22}$$

En appliquant le théorème de la moyenne à la deuxième de ces équations, nous déduisons le module de Young  $E_2^{eff}$ . En effet, nous avons :

$$\Sigma_{22} = \langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle = \left( \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle} \right) E_{22}$$

conduisant à :

$$E_2^{eff} = \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}$$

Grâce à l'expression de la déformation  $\varepsilon_{zz}^{(i)}$  il est possible de calculer le coefficient de Poisson  $\nu_{23}^{eff}$ . Nous avons :

$$E_{33} = \langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle = - \left\langle \frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right) \right\rangle$$

Cette dernière se transforme en :

$$E_{33} = \langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle = - \left[ \left\langle \frac{\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu_{zy}^{(i)} E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \left( \left\langle \frac{\nu_{zx}^{(i)} E_x^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle \right) \right] E_{22}$$

Par comparaison avec sa définition, nous obtenons le coefficient de Poisson  $\nu_{23}^{eff}$  :

$$\nu_{23}^{eff} = \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)}}{E_z^{(i)} (1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)})} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}$$

De manière analogue nous avons :

$$E_1^{eff} = \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)}} \right\rangle}$$

Quand toutes les phases sont isotropes, nous obtenons :

$$E_1^{eff} = E_2^{eff} = \left\langle \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle - \frac{\left\langle \frac{\nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle}$$

$$\nu_{12}^{eff} = \nu_{21}^{eff} = \frac{\left\langle \frac{\nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle}$$

$$\nu_{13}^{eff} = \nu_{23}^{eff} = \left\langle \frac{\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right\rangle \left[ 1 - \frac{\left\langle \frac{\nu^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \right\rangle} \right]$$

On peut aisément vérifier la symétrie de la matrice des souplesses c'est à dire les égalités:

$$\frac{\nu_{ij}^{eff}}{E_i^{eff}} = \frac{\nu_{ji}^{eff}}{E_j^{eff}}$$

### B.3. Calcul des modules effectifs de cisaillement

- Considérons tout d'abord un chargement (chargement (a)) d'une pile par un effort tranchant surfacique  $T_{32}^{(a)}$ .

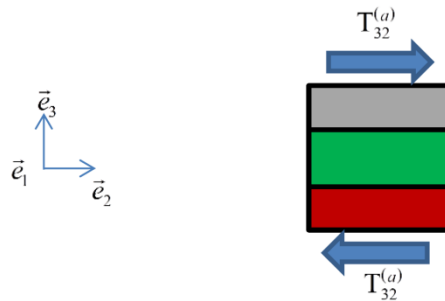


Figure B.3 – Cisaillement dans le plan (2,3) : Chargement (a)

Le calcul des modules de cisaillement reste très simple car uniquement une seule composante du tenseur de contraintes, et de déformations, est active. Dans le cas de la figure ci-dessus, il s'agit de la composante  $T_{32}^{(a)}$ . Les contraintes locales, dans les phases, sont égales à la contrainte macroscopique :

$$\tau_{32}^{(i)} = T_{32}^{(a)}$$

Les déformations locales  $\epsilon_{32}^{(i)}$  sont données par la loi de comportement :

$$2\varepsilon_{32}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_3} = \frac{T_{32}^{(a)}}{\mu_{zy}^{(i)}}$$

Leur moyenne volumique définit la déformation macroscopique  $E_{32}^{(a)} = \langle \varepsilon_{32}^{(i)} \rangle$ .

D'une manière classique, nous obtenons alors le résultat suivant :  $2E_{32}^{(a)} = \langle 2\varepsilon_{32}^{(i)} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle T_{32}^{(a)}$

La moyenne de  $\left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle^{-1}$  peut également être réécrite comme suit :

$$\left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^N \mu_{zy}^{(i)}}{\left\langle \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_{zy}^{(j)} \right)^{(i)} \right\rangle}$$

- Considérons à présent un chargement transversal (chargement (b)) par un déplacement imposé se traduisant par un gradient  $\frac{\partial U_3}{\partial x_2} = 2E_{23}^{(b)}$ .

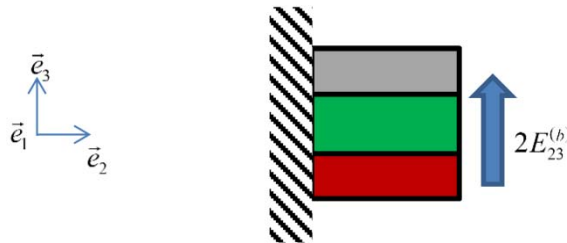


Figure B.4 – Cisaillement dans le plan (2,3) : chargement (b)

Ce chargement met en déformation l'ensemble des phases telle que :  $2\varepsilon_{23}^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_2} = 2E_{23}^{(b)}$

Les contraintes locales valent alors :  $\tau_{23}^{(i)} = 2\mu_{zy}^{(i)} E_{23}^{(b)}$  et leur moyenne volumique devient :

$$T_{23}^{(b)} = \langle \tau_{23}^{(i)} \rangle = 2 \langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle E_{23}^{(b)}$$



Pour déterminer un module de cisaillement moyen, nous calculons la déformation moyenne

$$E_{23} = E_{32} \text{ comme suit: } 2E_{23} = \frac{1}{2} (2E_{32}^{(a)} + 2E_{32}^{(b)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{32}^{(a)}}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} + \left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle T_{23}^{(b)} \right).$$

Par équilibre de la cellule, les composantes symétriques de la contrainte macroscopique sont

$$\text{égales } T_{32}^{(a)} = T_{23}^{(b)} = T_{23} \text{ conduisant à : } 2E_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} + \left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle \right) T_{23}.$$

Cette égalité spécifie la valeur du module de cisaillement effectif de la cellule :

$$\mu_{23}^{eff} = 2 \left( \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} + \left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle \right)^{-1} = 2 \frac{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle}{1 + \langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle \left\langle \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} \right\rangle}$$

D'une manière analogue, on a :

$$\mu_{13}^{eff} = 2 \left( \frac{1}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} + \left\langle \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} \right\rangle \right)^{-1} = 2 \frac{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle}{1 + \langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle \left\langle \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} \right\rangle}$$

- Considérons à présent un chargement sur le plan  $(O; \vec{x}, \vec{y})$

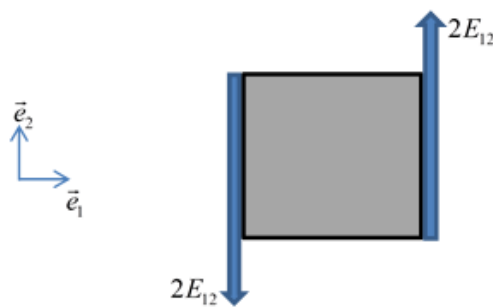


Figure B.5 – Cisaillement dans le plan (1,2)

Ce chargement met en déformation l'ensemble des phases telle que :  $2\varepsilon_{12}^{(i)} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_1} = 2E_{12}$

Les contraintes locales valent alors :  $\tau_{12}^{(i)} = 2\mu_{xy}^{(i)}E_{12}$  et leur moyenne volumique devient :

$$T_{12} = \langle \tau_{12}^{(i)} \rangle = 2\langle \mu_{xy}^{(i)} \rangle E_{12}$$

On peut remarquer qu'en considérant un chargement similaire  $E_{21} = E_{12}$ , on aboutit à la même contrainte macroscopique  $T_{21} = T_{12}$ . On en déduit la déformation macroscopique :

$$2E_{12} = \frac{1}{2}(2E_{12} + 2E_{21}) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\langle \mu_{xy}^{(i)} \rangle} \right) T_{12}$$

Le module de cisaillement effectif vaut alors :

$$\mu_{12}^{eff} = \langle \mu_{xy}^{(i)} \rangle$$

Lorsque toutes les phases sont isotropes, les modules de cisaillement effectifs s'expriment sous les formes simplifiées suivantes:

$$\mu_{12}^{eff} = \langle \mu^{(i)} \rangle$$

$$\mu_{13}^{eff} = \mu_{23}^{eff} = 2 \left( \frac{1}{\langle \mu^{(i)} \rangle} + \left\langle \frac{1}{\mu^{(i)}} \right\rangle \right)^{-1} = 2 \left( \frac{\langle \mu^{(i)} \rangle}{1 + \langle \mu^{(i)} \rangle \left\langle \frac{1}{\mu^{(i)}} \right\rangle} \right)$$

## B.4. Calcul des coefficients effectifs de dilatation thermique

Imposons à une structure hétérogène composée de plusieurs matériaux orthotropes superposés suivant la direction  $\vec{z}$  une variation de température  $\theta$ . La structure étant libre de contrainte, les déformations macroscopiques sont purement thermiques.

Nous avons les relations suivantes selon le théorème de la moyenne :

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{zz}^{(i)} \rangle &= E_{33} = \theta \alpha_{33}^{eff} \\ \langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle &= \Sigma_{11} = 0 \\ \langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle &= \Sigma_{22} = 0 \\ \langle \sigma_{zz}^{(i)} \rangle &= \Sigma_{33} = 0\end{aligned}$$

Pour préserver la forme macroscopique homogène, nous avons les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= E_{11} = \theta \alpha_{11}^{eff} \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} &= E_{22} = \theta \alpha_{22}^{eff}\end{aligned}$$

Pour chaque phase, les contraintes locales sont telles que :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &\neq 0 \\ \sigma_{yy}^{(i)} &\neq 0 \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= 0\end{aligned}$$

La loi de Hooke pour un matériau orthotrope en thermoélasticité permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} - \theta \alpha_{xx}^{(i)} &= \frac{1}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yx}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zx}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_x^{(i)}} \left( \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{xy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{yy}^{(i)} - \theta \alpha_{yy}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xy}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} + \frac{1}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} - \frac{\nu_{zy}^{(i)}}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = \frac{1}{E_y^{(i)}} \left( \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} \right) \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} - \theta \alpha_{zz}^{(i)} &= -\frac{\nu_{xz}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} - \frac{\nu_{yz}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_{yy}^{(i)} + \frac{1}{E_z^{(i)}} \sigma_{zz}^{(i)} = -\frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right)\end{aligned}$$

Les deux premières équations deviennent :

$$\begin{aligned}\left( E_{11} - \theta \alpha_{xx}^{(i)} \right) E_x^{(i)} &= \sigma_{xx}^{(i)} - \nu_{xy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \\ \left( E_{22} - \theta \alpha_{yy}^{(i)} \right) E_y^{(i)} &= \sigma_{yy}^{(i)} - \nu_{yx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)}\end{aligned}$$

La résolution donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &= \frac{\left( E_{11} - \theta \alpha_{xx}^{(i)} \right) E_x^{(i)} + \left( E_{22} - \theta \alpha_{yy}^{(i)} \right) \nu_{xy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \\ \sigma_{yy}^{(i)} &= \frac{\left( E_{11} - \theta \alpha_{xx}^{(i)} \right) \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)} + \left( E_{22} - \theta \alpha_{yy}^{(i)} \right) E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}}\end{aligned}$$

Le théorème des moyennes permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{xx}^{(i)} \rangle &= \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{11} + \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{22} - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \theta = 0 \\ \langle \sigma_{yy}^{(i)} \rangle &= \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{11} + \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle E_{22} - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \theta = 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équation aboutit à :

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \theta \\ E_{22} &= \frac{\left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle} \theta \end{aligned}$$

On en déduit les CDT dans les deux directions :

$$\alpha_{11}^{eff} = \frac{\left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}$$

$$\alpha_{22}^{eff} = \frac{\left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)}E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)}\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle \left\langle \frac{\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)}}{1-\nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \right\rangle}$$

En reprenant l'expression de la déformation locale dans la direction  $\vec{z}$  :

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = -\frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \nu_{zx}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} \right) + \theta \alpha_{zz}^{(i)}$$

On obtient :

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = -\frac{1}{E_z^{(i)}} \left( \frac{(E_{11} - \theta \alpha_{xx}^{(i)}) \nu_{zx}^{(i)} E_x^{(i)} + (E_{22} - \theta \alpha_{yy}^{(i)}) \nu_{zx}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} + \frac{(E_{11} - \theta \alpha_{xx}^{(i)}) \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} E_x^{(i)} + (E_{22} - \theta \alpha_{yy}^{(i)}) \nu_{zy}^{(i)} E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \right) + \theta \alpha_{zz}^{(i)}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)} = - \left[ \frac{(\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} E_{11} + \frac{(\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} E_{22} - \frac{\alpha_{xx}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} \theta \right] + \theta \alpha_{zz}^{(i)}$$

La déformation macroscopique dans cette direction vaut :

$$E_{33} = \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} + \alpha_{zz}^{(i)} \right\rangle \theta - \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle E_{11} - \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle E_{22}$$

Le CDT dans cette direction vaut alors :

$$\alpha_{33}^{eff} = \left\langle \frac{\alpha_{xx}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)} + \alpha_{yy}^{(i)} (\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} + \alpha_{zz}^{(i)} \right\rangle - \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_x^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle \alpha_{11}^{eff} - \left\langle \frac{(\nu_{zx}^{(i)} \nu_{xy}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)}) E_y^{(i)}}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} \right\rangle \alpha_{22}^{eff}$$

Lorsque chaque matériau est isotrope, les formules se simplifient comme suit :

$$\alpha_{11}^{eff} = \alpha_{22}^{eff} = \frac{\left\langle \frac{\alpha^{(i)} E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \right\rangle}$$

$$\alpha_{33}^{eff} = \left\langle \frac{\alpha^{(i)} (1 + \nu^{(i)}) - 2\nu^{(i)} \alpha_{11}^{eff}}{1 - \nu^{(i)}} \right\rangle$$

## B.5. Homogénéisation par éléments finis

Cette méthode a été développée dans la thèse de Krzysztof Janc [5]. On considère un VER parallélépipédique de dimension  $L_1 \times L_2 \times L_3$  (Figure B.6) constitué de plusieurs phases orthotropes.

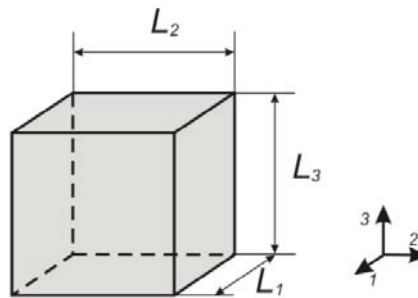


Figure B.6 – Cellule EF orthotrope

On suppose que cette cellule a un comportement macroscopique orthotrope. Ainsi, il faut déterminer 9 constantes indépendantes : **3 modules d'Young, 3 coefficients de Poisson et 3 modules de cisaillement.**

La matrice des souplesses s'écrit comme suit :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} \end{bmatrix}$$

On fait 3 essais de compression ou de traction dans les 3 principales directions et 3 essais de cisaillement dans les 3 principaux plans pour déterminer les 9 constantes.

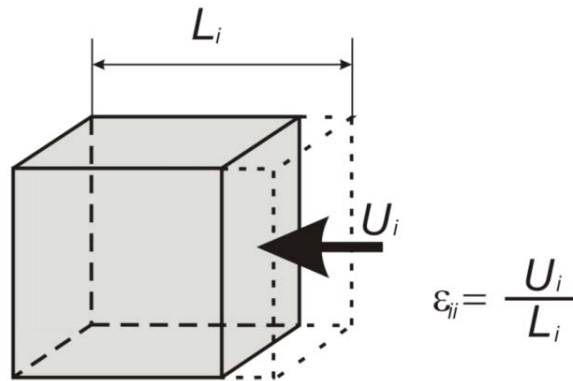
### B.5.1. Modules d'Young et coefficients de Poisson

A chaque essai de traction ou compression dans une direction  $I$  donnée, on bloque le déplacement dans la direction normale sur toutes les faces de sorte à avoir une déformation macroscopique moyenne nulle dans les autres directions.

Considérons l'essai de compression dans la direction  $I$  (Figure B.7). Les tenseurs de déformation et de contraintes valent alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^I = \begin{pmatrix} \frac{\sum R_1^I}{L_2 L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sum R_2^I}{L_1 L_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sum R_3^I}{L_1 L_2} \end{pmatrix} \text{ où } R_i^I \text{ sont les forces de réaction sur les nœuds des faces de normal } i.$$


 Figure B.7 – Essai de compression dans une direction  $i$ 

La loi de comportement permet d'écrire pour un essai de traction ou de compression  $I$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^I = \frac{\sigma_{11}^I}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}^I}{E_1} - \frac{\nu_{13}\sigma_{33}^I}{E_1} \\ \varepsilon_{22}^I = -\frac{\nu_{21}\sigma_{11}^I}{E_2} + \frac{\sigma_{22}^I}{E_2} - \frac{\nu_{23}\sigma_{33}^I}{E_2} \\ \varepsilon_{33}^I = -\frac{\nu_{31}\sigma_{11}^I}{E_3} - \frac{\nu_{32}\sigma_{22}^I}{E_3} + \frac{\sigma_{33}^I}{E_3} \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

Ceci est analogue pour les tractions ou compressions dans les directions 2 et 3. On obtient en tout 9 équations à 9 inconnues : **3 modules d'Young** et **6 coefficients de Poisson**. Le système d'équation s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{22}^I}{\varepsilon_{11}^I} & 0 & \frac{\sigma_{33}^I}{\varepsilon_{11}^I} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^I & 0 & 0 & \sigma_{33}^I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^I & 0 & \sigma_{22}^I \\
 0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^{II} & 0 & \sigma_{33}^{II} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{11}^{II}}{\varepsilon_{22}^{II}} & 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}^{II}}{\varepsilon_{22}^{II}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^{II} & 0 & \sigma_{22}^{II} \\
 0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^{III} & 0 & \sigma_{33}^{III} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^{III} & 0 & 0 & \sigma_{33}^{III} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{11}^{III}}{\varepsilon_{33}^{III}} & 0 & \frac{\sigma_{22}^{III}}{\varepsilon_{33}^{III}}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 E_1 \\
 E_2 \\
 E_3 \\
 \nu_{12} \\
 \nu_{21} \\
 \nu_{13} \\
 \nu_{31} \\
 \nu_{23} \\
 \nu_{32}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{\sigma_{33}^I}{\varepsilon_{11}^I} \\
 \sigma_{22}^I \\
 \sigma_{33}^I \\
 \sigma_{11}^{II} \\
 \frac{\sigma_{22}^{II}}{\varepsilon_{22}^{II}} \\
 \sigma_{33}^{II} \\
 \sigma_{11}^{III} \\
 \sigma_{22}^{III} \\
 \frac{\sigma_{33}^{III}}{\varepsilon_{33}^{III}}
 \end{pmatrix}
 \quad (B-8)$$

La résolution de ce système d'équations aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \nu_{12} = \frac{\sigma_{33}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{11}^{II}\sigma_{33}^{III}}{\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} - \sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III}} \\
 \nu_{13} = \frac{\sigma_{11}^{II}\sigma_{22}^{III} - \sigma_{22}^{II}\sigma_{11}^{III}}{\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} - \sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III}} \\
 \nu_{23} = \frac{\sigma_{22}^I\sigma_{11}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{III}}{\sigma_{33}^I\sigma_{11}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{III}}
 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l}
 \nu_{21} = \frac{\sigma_{33}^I\sigma_{22}^{III} - \sigma_{22}^I\sigma_{33}^{III}}{\sigma_{33}^I\sigma_{11}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{III}} \\
 \nu_{31} = \frac{\sigma_{22}^I\sigma_{33}^{II} - \sigma_{33}^I\sigma_{22}^{II}}{\sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II}} \\
 \nu_{32} = \frac{\sigma_{33}^I\sigma_{11}^{II} - \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{II}}{\sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II}}
 \end{array} \right. \quad (B-9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 E_1 = \frac{\sigma_{33}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{22}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{33}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{33}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III}}{\varepsilon_{11}^I(\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} - \sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III})} \\
 E_2 = \frac{\sigma_{33}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{22}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{33}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{33}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III}}{\varepsilon_{22}^{II}(\sigma_{33}^I\sigma_{11}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{III})} \\
 E_3 = \frac{\sigma_{33}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{22}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{11}^{III} - \sigma_{33}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{11}^I\sigma_{33}^{II}\sigma_{22}^{III} + \sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II}\sigma_{33}^{III} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II}\sigma_{33}^{III}}{\varepsilon_{33}^{III}(\sigma_{22}^I\sigma_{11}^{II} - \sigma_{11}^I\sigma_{22}^{II})}
 \end{array} \right. \quad (B-10)$$



### B.5.2. Modules de cisaillement

Pour déterminer les 3 modules de cisaillement, on effectue 3 essais de cisaillement. Par exemple pour le plan  $(i, j)$  (Figure B.8), on bloque les déplacements dans toutes les directions sur une des faces de normale  $\vec{e}_i$  et sur l'autre face, on bloque les déplacements dans les directions  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_k$  et on impose un déplacement  $U_j$ . Les autres faces sont bloquées dans les directions  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_k$ . Ainsi, dans chaque matériau, seule la composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes est non nulle.

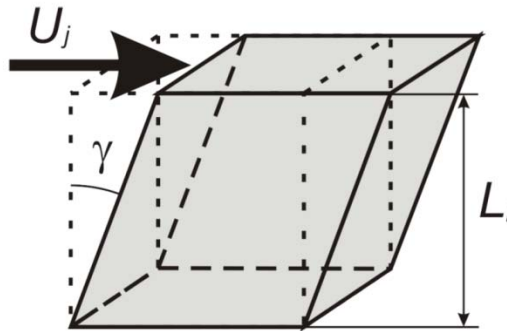


Figure B.8 – Essai de cisaillement dans le plan  $(i, j)$

L'essai de cisaillement dans le plan  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) permet d'écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{U_j}{2L_i}; \quad \sigma_{ij} = \frac{\sum R_j}{L_j L_k}$$

Les modules de cisaillement sont ainsi déterminés par la formule suivante :

$$\mu_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} \quad (\text{B-11})$$

### B.5.3. Coefficient de dilatation thermique

On soumet au VER une variation de température  $\theta$  en bloquant toutes les faces dans leurs directions normales respectives. La loi de Hooke nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} - \theta\alpha_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}}{E_1} - \frac{\nu_{13}\sigma_{33}}{E_1} \\ \varepsilon_{22} - \theta\alpha_{22} = -\frac{\nu_{21}\sigma_{11}}{E_2} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{23}\sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{33} - \theta\alpha_{33} = -\frac{\nu_{31}\sigma_{11}}{E_3} - \frac{\nu_{32}\sigma_{22}}{E_3} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} \end{cases}$$

Le fait de bloquer toutes les faces du VER implique que :  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ . Les CDT sont alors calculés comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \frac{1}{\theta E_1} (-\sigma_{11} + \nu_{12}\sigma_{22} + \nu_{13}\sigma_{33}) \\ \alpha_{22} = \frac{1}{\theta E_2} (\nu_{21}\sigma_{11} - \sigma_{22} + \nu_{23}\sigma_{33}) \\ \alpha_{33} = \frac{1}{\theta E_3} (\nu_{31}\sigma_{11} + \nu_{32}\sigma_{22} - \sigma_{33}) \end{cases} \quad (B-12)$$

Avec comme précédemment :  $\sigma_{11} = \frac{\sum R_1}{L_2 L_3}$ ;  $\sigma_{22} = \frac{\sum R_2}{L_1 L_3}$ ;  $\sigma_{33} = \frac{\sum R_3}{L_1 L_2}$

## B.6. Comparaison

On considère la cellule constituée de 3 matériaux (quartz, indium et silicium). Les dimensions et les propriétés des constituants sont :

$$\begin{cases} l = 10 \\ h_1 = h_3 = 3 \\ h_2 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} E_{p1} = 72495 \\ \nu_{p1} = 0.17 \\ \alpha_{p1} = 0.46 \times 10^{-6} \end{cases} ; \begin{cases} E_{p2} = 13684 \\ \nu_{p2} = 0.45 \\ \alpha_{p2} = 29.2 \times 10^{-6} \end{cases} ; \begin{cases} E_{p3} = 130430 \\ \nu_{p3} = 0.276 \\ \alpha_{p3} = 2.53 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats obtenus avec les deux méthodes décrites précédemment.

Tableau B.1 – Comparaison des modules élastiques prédits par les modèles EF et périodique

Constantes	$E_1$ (MPa)	$E_3$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\mu_{12}$ (MPa)	$\mu_{31}^{(a)}$ (MPa)	$\mu_{13}^{(b)}$ (MPa)	$\mu_{13}$ (MPa)
Analytique	66791.1	52675.1	0.259527	0.372519	26514.4	9967.73	26514.4	14488.6
EF	66791.1	52674.9	0.259526	0.372521	26514.4	9967.75	24047.	14093.6
Ecart (%)	0.	+0.	+0.	-0.	0.	-0.	+10.26	+2.8

Tableau B.2 – Comparaison des CDT prédits par les modèles EF et périodique

Constantes	$\alpha_{11} (10^{-6} \text{ K}^{-1})$	$\alpha_{33} (10^{-6} \text{ K}^{-1})$
Analytique	4.87122	27.4237
EF	4.87117	27.4238
Ecart (%)	+0.	-0.

Nous pouvons constater que la solution analytique est très précise.

## B.7. Localisation des variables locales

La localisation des déformations et des contraintes locales se fait par le biais des tenseurs de localisation définis comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E} + \theta \mathbf{a}^{(i)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} : \boldsymbol{\Sigma} + \theta \mathbf{b}^{(i)} \end{cases} \quad (\text{B-13})$$

Avec  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$  et  $\mathbf{E}$  respectivement la déformation totale (thermoélastique) locale et macroscopique.

- Considérons un chargement purement mécanique ( $\theta = 0$ ) :

La déformation dans chaque phase vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{E}$$

On définit la forme de la matrice  $\mathbf{A}^{(i)}$  ci-dessous :

$$\left[ A_{ij}^{(i)} \right] = \begin{pmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} & A_{13}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} & A_{23}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^{(i)} & A_{32}^{(i)} & A_{33}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66}^{(i)} \end{pmatrix}$$

Considérons comme précédemment les essais de traction et de cisaillement en élasticité:

- ❖ Traction suivant  $\vec{x}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(i)} &= A_{11}^{(i)} \mathbf{E}_{11}^e + A_{12}^{(i)} \mathbf{E}_{22}^e + A_{13}^{(i)} \mathbf{E}_{33}^e = A_{11}^{(i)} \mathbf{E}_{11}^e - \nu_{12}^{eff} A_{12}^{(i)} \mathbf{E}_{11}^e - \nu_{13}^{eff} A_{13}^{(i)} \mathbf{E}_{11}^e = \mathbf{E}_{11}^e \\ \Rightarrow A_{11}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{12}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{13}^{(i)} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} E_{11}^e + A_{22}^{(i)} E_{22}^e + A_{23}^{(i)} E_{33}^e = A_{21}^{(i)} E_{11}^e - \nu_{12}^{eff} A_{22}^{(i)} E_{11}^e - \nu_{13}^{eff} A_{23}^{(i)} E_{11}^e = E_{22}^e = -\nu_{12}^{eff} E_{11}^e \\ \Rightarrow A_{21}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{22}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{23}^{(i)} &= -\nu_{12}^{eff}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}^{(i)} &= A_{31}^{(i)} E_{11}^e + A_{32}^{(i)} E_{22}^e + A_{33}^{(i)} E_{33}^e = A_{31}^{(i)} E_{11}^e - \nu_{12}^{eff} A_{32}^{(i)} E_{11}^e - \nu_{13}^{eff} A_{33}^{(i)} E_{11}^e = -\nu_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} = -\nu_{xz}^{(i)} E_{11}^e \\ \Rightarrow A_{31}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{32}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{33}^{(i)} &= -\nu_{xz}^{(i)}\end{aligned}$$

❖ Traction suivant  $\vec{y}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= A_{11}^{(i)} E_{11}^e + A_{12}^{(i)} E_{22}^e + A_{13}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{21}^{eff} A_{11}^{(i)} E_{22}^e + A_{12}^{(i)} E_{22}^e - \nu_{23}^{eff} A_{13}^{(i)} E_{22}^e = E_{11}^e = -\nu_{21}^{eff} E_{22}^e \\ \Rightarrow -\nu_{21}^{eff} A_{11}^{(i)} + A_{12}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{13}^{(i)} &= -\nu_{21}^{eff}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} E_{11}^e + A_{22}^{(i)} E_{22}^e + A_{23}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{21}^{eff} A_{21}^{(i)} E_{22}^e + A_{22}^{(i)} E_{22}^e - \nu_{23}^{eff} A_{23}^{(i)} E_{22}^e = E_{22}^e \\ \Rightarrow -\nu_{21}^{eff} A_{21}^{(i)} + A_{22}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{23}^{(i)} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}^{(i)} &= A_{31}^{(i)} E_{11}^e + A_{32}^{(i)} E_{22}^e + A_{33}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{21}^{eff} A_{31}^{(i)} E_{22}^e + A_{32}^{(i)} E_{22}^e - \nu_{23}^{eff} A_{33}^{(i)} E_{22}^e = -\nu_{yz}^{(i)} \varepsilon_{yy}^{(i)} = -\nu_{yz}^{(i)} E_{22}^e \\ \Rightarrow -\nu_{21}^{eff} A_{31}^{(i)} + A_{32}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{33}^{(i)} &= -\nu_{yz}^{(i)}\end{aligned}$$

❖ Traction suivant  $\vec{z}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= A_{11}^{(i)} E_{11}^e + A_{12}^{(i)} E_{22}^e + A_{13}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{31}^{eff} A_{11}^{(i)} E_{33}^e - \nu_{32}^{eff} A_{12}^{(i)} E_{33}^e + A_{13}^{(i)} E_{33}^e = E_{11}^e = -\nu_{31}^{eff} E_{33}^e \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A_{11}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{12}^{(i)} + A_{13}^{(i)} &= -\nu_{31}^{eff}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} E_{11}^e + A_{22}^{(i)} E_{22}^e + A_{23}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{31}^{eff} A_{21}^{(i)} E_{33}^e - \nu_{32}^{eff} A_{22}^{(i)} E_{33}^e + A_{23}^{(i)} E_{33}^e = E_{22}^e = -\nu_{32}^{eff} E_{33}^e \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A_{21}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} &= -\nu_{32}^{eff}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}^{(i)} &= A_{31}^{(i)} E_{11}^e + A_{32}^{(i)} E_{22}^e + A_{33}^{(i)} E_{33}^e = -\nu_{31}^{eff} A_{31}^{(i)} E_{33}^e - \nu_{32}^{eff} A_{32}^{(i)} E_{33}^e + A_{33}^{(i)} E_{33}^e = K_{zz}^{(i)} E_{33}^e \\ \Rightarrow -\nu_{31}^{eff} A_{31}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{32}^{(i)} + A_{33}^{(i)} &= K_{zz}^{(i)}\end{aligned}$$

Avec

$$K_{zz}^{(i)} = \frac{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)} - \nu_{zx}^{(i)} (\nu_{xz}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yz}^{(i)}) - \nu_{zy}^{(i)} (\nu_{yz}^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \nu_{xz}^{(i)})}{(1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}) E_z^{(i)}} E_3^{eff} + \frac{\nu_{zx}^{(i)} + \nu_{zy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \frac{E_x^{(i)}}{E_z^{(i)}} \nu_{31}^{eff} + \frac{\nu_{zy}^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \nu_{zx}^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)} \nu_{yx}^{(i)}} \frac{E_y^{(i)}}{E_z^{(i)}} \nu_{32}^{eff}$$

On obtient un système de 9 équations à 9 inconnues :

$$\begin{cases}
 A_{11}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{12}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{13}^{(i)} = 1 \\
 A_{21}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{22}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{23}^{(i)} = -\nu_{12}^{eff} \\
 A_{31}^{(i)} - \nu_{12}^{eff} A_{32}^{(i)} - \nu_{13}^{eff} A_{33}^{(i)} = -\nu_{xz}^{(i)} \\
 -\nu_{21}^{eff} A_{11}^{(i)} + A_{12}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{13}^{(i)} = -\nu_{21}^{eff} \\
 -\nu_{21}^{eff} A_{21}^{(i)} + A_{22}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{23}^{(i)} = 1 \\
 -\nu_{21}^{eff} A_{31}^{(i)} + A_{32}^{(i)} - \nu_{23}^{eff} A_{33}^{(i)} = -\nu_{yz}^{(i)} \\
 -\nu_{31}^{eff} A_{11}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{12}^{(i)} + A_{13}^{(i)} = -\nu_{31}^{eff} \\
 -\nu_{31}^{eff} A_{21}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} = -\nu_{32}^{eff} \\
 -\nu_{31}^{eff} A_{31}^{(i)} - \nu_{32}^{eff} A_{32}^{(i)} + A_{33}^{(i)} = K_{zz}^{(i)}
 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & -\nu_{12}^{eff} & -\nu_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -\nu_{12}^{eff} & -\nu_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\nu_{12}^{eff} & -\nu_{13}^{eff} \\
 -\nu_{21}^{eff} & 1 & -\nu_{23}^{eff} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\nu_{21}^{eff} & 1 & -\nu_{23}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu_{21}^{eff} & 1 & -\nu_{23}^{eff} \\
 -\nu_{31}^{eff} & -\nu_{32}^{eff} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\nu_{31}^{eff} & -\nu_{32}^{eff} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu_{31}^{eff} & -\nu_{32}^{eff} & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 A_{11}^{(i)} \\
 A_{12}^{(i)} \\
 A_{13}^{(i)} \\
 A_{21}^{(i)} \\
 A_{22}^{(i)} \\
 A_{23}^{(i)} \\
 A_{31}^{(i)} \\
 A_{32}^{(i)} \\
 A_{33}^{(i)}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 -\nu_{12}^{eff} \\
 -\nu_{xz}^{(i)} \\
 -\nu_{21}^{eff} \\
 1 \\
 -\nu_{yz}^{(i)} \\
 -\nu_{31}^{eff} \\
 -\nu_{32}^{eff} \\
 K_{zz}^{(i)}
 \end{pmatrix}$$

La solution de ce système aboutit à :

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(i)} &= A_{22}^{(i)} = 1 \\
 A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = A_{13}^{(i)} = A_{23}^{(i)} = 0 \\
 A_{33}^{(i)} &= \frac{\nu_{32}^{eff} (\nu_{21}^{eff} \nu_{xz}^{(i)} + \nu_{yz}^{(i)}) + \nu_{31}^{eff} (\nu_{xz}^{(i)} + \nu_{12}^{eff} \nu_{yz}^{(i)}) + K_{zz}^{(i)} (\nu_{12}^{eff} \nu_{21}^{eff} - 1)}{\nu_{23}^{eff} \nu_{32}^{eff} + \nu_{12}^{eff} (\nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff} \nu_{31}^{eff}) + \nu_{13}^{eff} (\nu_{31}^{eff} + \nu_{21}^{eff} \nu_{32}^{eff}) - 1} \\
 A_{31}^{(i)} &= \frac{\nu_{xz}^{(i)} (1 - \nu_{23}^{eff} \nu_{32}^{eff}) + \nu_{yz}^{(i)} (\nu_{12}^{eff} + \nu_{13}^{eff} \nu_{32}^{eff}) - K_{zz}^{(i)} (\nu_{13}^{eff} + \nu_{12}^{eff} \nu_{23}^{eff})}{\nu_{23}^{eff} \nu_{32}^{eff} + \nu_{12}^{eff} (\nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff} \nu_{31}^{eff}) + \nu_{13}^{eff} (\nu_{31}^{eff} + \nu_{21}^{eff} \nu_{32}^{eff}) - 1} \\
 A_{32}^{(i)} &= \frac{\nu_{yz}^{(i)} (1 - \nu_{13}^{eff} \nu_{31}^{eff}) + \nu_{xz}^{(i)} (\nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff} \nu_{31}^{eff}) - K_{zz}^{(i)} (\nu_{13}^{eff} \nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff})}{\nu_{23}^{eff} \nu_{32}^{eff} + \nu_{12}^{eff} (\nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff} \nu_{31}^{eff}) + \nu_{13}^{eff} (\nu_{31}^{eff} + \nu_{21}^{eff} \nu_{32}^{eff}) - 1}
 \end{aligned}$$

Considérons à présent les essais de cisaillement étudié précédemment :

❖ Dans le plan  $(O; \vec{x}, \vec{y})$

$$\varepsilon_{12}^{(i)} = E_{12} \Rightarrow A_{44}^{(i)} = 1$$

❖ Dans le plan  $(\mathbf{O}; \vec{x}, \vec{z})$

$$2\varepsilon_{31}^{a(i)} = \frac{T_{31}^{(a)}}{\mu_{zx}^{(i)}}$$

$$2\varepsilon_{13}^{b(i)} = 2E_{13}^{(b)} = \frac{T_{13}^{(b)}}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} = \frac{T_{31}^{(a)}}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} = \frac{T_{31}^{(a)}}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle}$$

$$\frac{1}{2}(2\varepsilon_{31}^{a(i)} + 2\varepsilon_{13}^{b(i)}) = 2\varepsilon_{13}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} \right) T_{31} = \left( \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{13}^{eff} E_{13}$$

$$\varepsilon_{13}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{13}^{eff} E_{13}$$

$$A_{55}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zx}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zx}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{13}^{eff}$$

❖ Dans le plan  $(\mathbf{O}; \vec{y}, \vec{z})$

$$2\varepsilon_{32}^{a(i)} = \frac{T_{32}^{(a)}}{\mu_{zy}^{(i)}}$$

$$2\varepsilon_{23}^{b(i)} = 2E_{23}^{(b)} = \frac{T_{23}^{(b)}}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} = \frac{T_{32}^{(a)}}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} = \frac{T_{32}^{(a)}}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle}$$

$$\frac{1}{2}(2\varepsilon_{32}^{a(i)} + 2\varepsilon_{23}^{b(i)}) = 2\varepsilon_{23}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} \right) T_{32} = \left( \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{23}^{eff} E_{23}$$

$$\varepsilon_{23}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{23}^{eff} E_{23}$$

$$A_{66}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{zy}^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu_{zy}^{(i)} \rangle} \right) \mu_{23}^{eff}$$

➤ On considère ensuite un chargement purement thermique. La contrainte macroscopique étant nulle, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \theta \mathbf{b}^{(i)}$$

Comme développé dans la section 3, les composantes de contraintes locales sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)} &= \frac{(E_{11} - \theta\alpha_{xx}^{(i)})E_x^{(i)} + (E_{22} - \theta\alpha_{yy}^{(i)})\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \\ \sigma_{yy}^{(i)} &= \frac{(E_{11} - \theta\alpha_{xx}^{(i)})\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + (E_{22} - \theta\alpha_{yy}^{(i)})E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \\ \sigma_{zz}^{(i)} &= 0\end{aligned}$$

On en déduit les composantes du tenseur  $\mathbf{b}^{(i)}$  :

$$\begin{aligned}b_{11}^{(i)} &= \frac{(\alpha_{11}^{(C)} - \alpha_{xx}^{(i)})E_x^{(i)} + (\alpha_{22}^{(C)} - \alpha_{yy}^{(i)})\nu_{xy}^{(i)}E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \\ b_{22}^{(i)} &= \frac{(\alpha_{11}^{(C)} - \alpha_{xx}^{(i)})\nu_{yx}^{(i)}E_x^{(i)} + (\alpha_{22}^{(C)} - \alpha_{yy}^{(i)})E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}} \\ b_{33}^{(i)} &= 0\end{aligned}$$

Connaissant les tenseurs  $\mathbf{A}^{(i)}$  et  $\mathbf{b}^{(i)}$ , les tenseurs de localisation des contraintes dans la phase In se déterminent grâce aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} : \mathbf{S}^{(C)} \\ \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)} : \boldsymbol{\alpha}^{(C)} + \mathbf{s}^{(i)} : \mathbf{b}^{(i)} \end{cases}$$

Lorsque les matériaux sont tous isotropes, les expressions de ces composantes deviennent plus simples :

$$\begin{aligned}A_{11}^{(i)} &= A_{22}^{(i)} = 1 \\ A_{12}^{(i)} &= A_{21}^{(i)} = A_{13}^{(i)} = A_{23}^{(i)} = 0 \\ A_{33}^{(i)} &= \frac{K_{zz}^{(i)}(\nu_{12}^{eff} - 1) + 2\nu_{31}^{eff}\nu^{(i)}}{2\nu_{13}^{eff}\nu_{31}^{eff} + \nu_{12}^{eff} - 1} \\ A_{31}^{(i)} &= A_{32}^{(i)} = \frac{\nu^{(i)} - K_{zz}^{(i)}\nu_{13}^{eff}}{2\nu_{13}^{eff}\nu_{31}^{eff} + \nu_{12}^{eff} - 1} \\ A_{44}^{(i)} &= 1 \\ A_{55}^{(i)} &= A_{66}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu^{(i)}} + \frac{1}{\langle \mu^{(i)} \rangle} \right) \mu_{13}^{eff}\end{aligned}$$

$$\text{Avec } K_{zz}^{(i)} = \frac{1 - \nu^{(i)} - 2\nu^{(i)2}}{(1 - \nu^{(i)})E^{(i)}} E_3^{eff} + \frac{2\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \nu_{31}^{eff}$$

$$b_{11}^{(i)} = b_{22}^{(i)} = \frac{(\alpha_{11}^{(c)} - \alpha^{(i)}) E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}$$
$$b_{33}^{(i)} = 0$$



## Annexe C

# Organigrammes de la routine UMAT

La routine UMAT développée contient un sous-programme appelé UHARD permettant de calculer la contrainte équivalente limite d'écrouissage à chaque état de déformation plastique grâce aux points de la courbe d'écrouissage du matériau ayant un comportement plastique (c'est le cas de l'indium) enregistrés sous forme de tableaux. L'organigramme décrivant cette sous-routine est illustré sur la Figure C.1. D'autres sous-programmes sont aussi inclus dans la routine UMAT permettant déterminer les propriétés élastiques des 2 phases ainsi que la courbe d'écrouissage du matériau plastique à une température donnée.

La routine UMAT est décrite par l'organigramme illustré sur la Figure C.2.

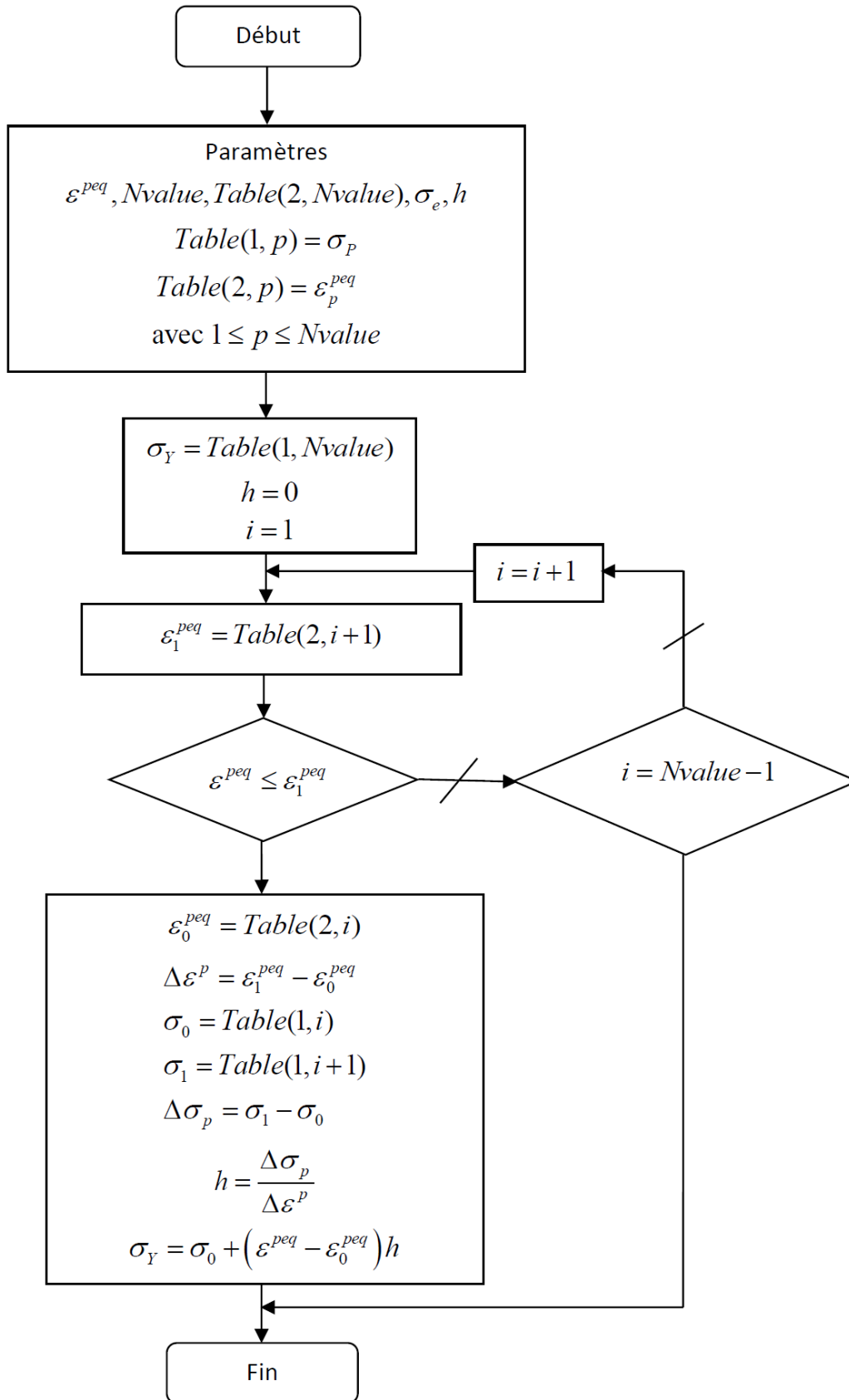
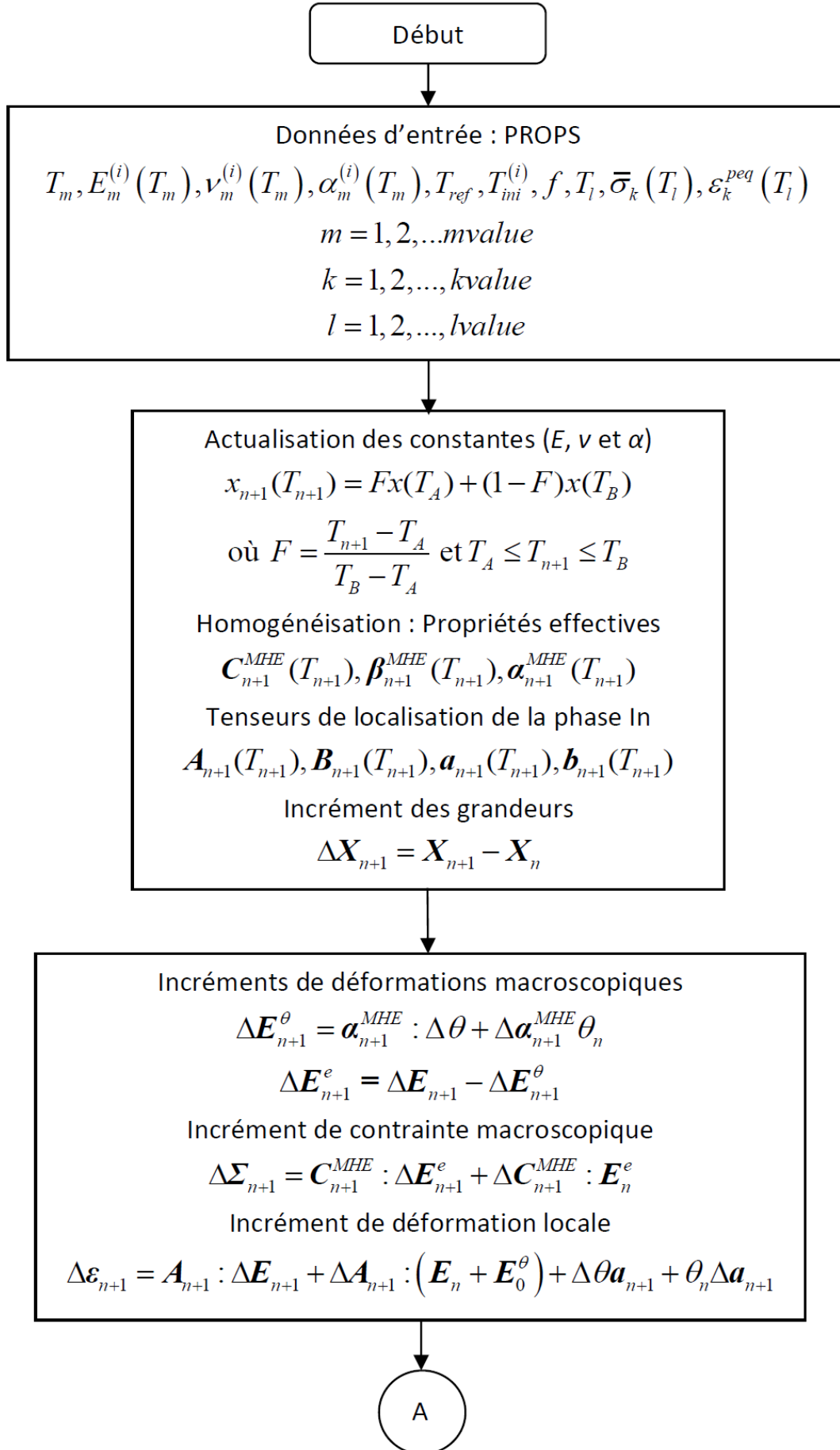
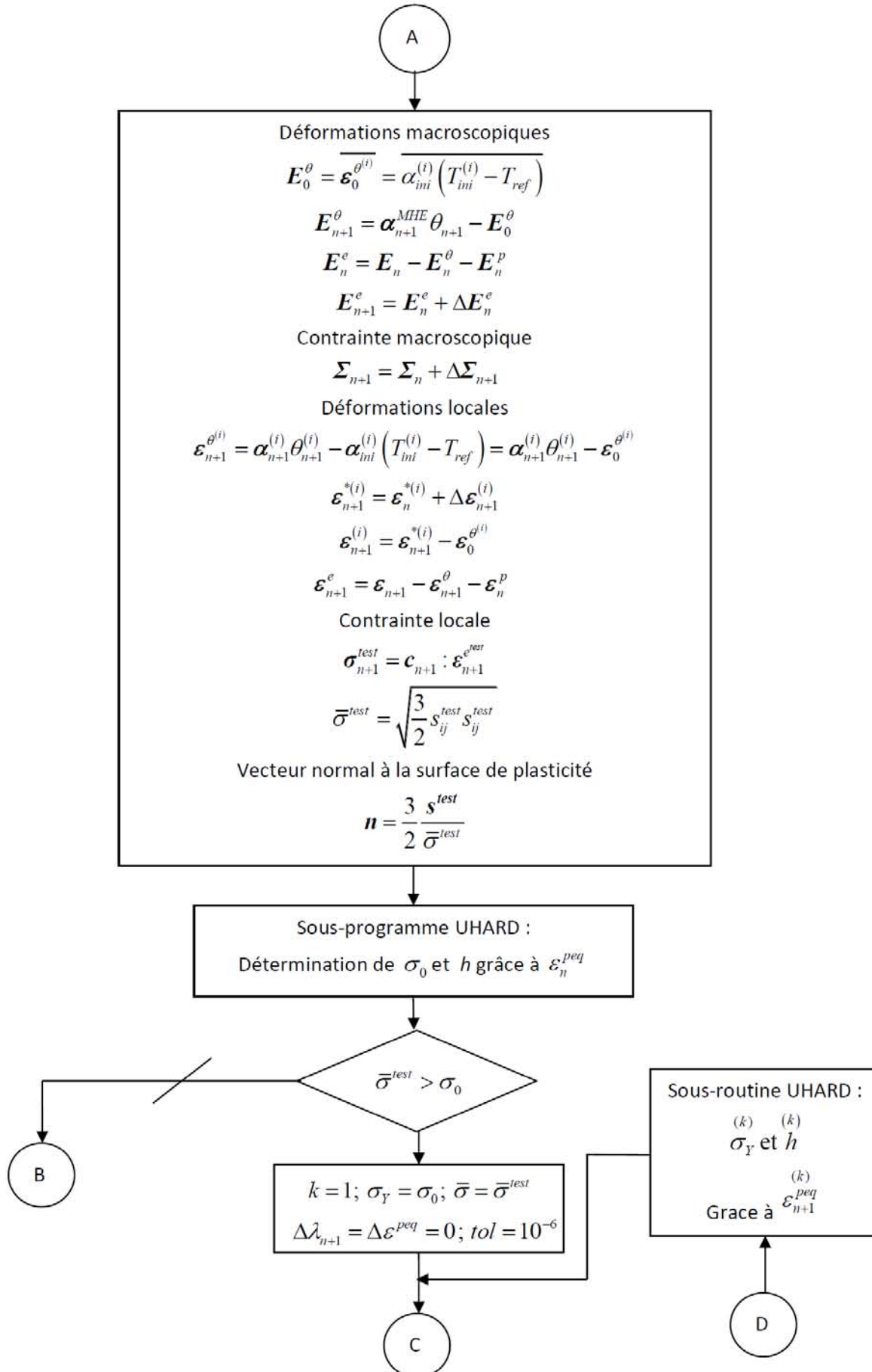
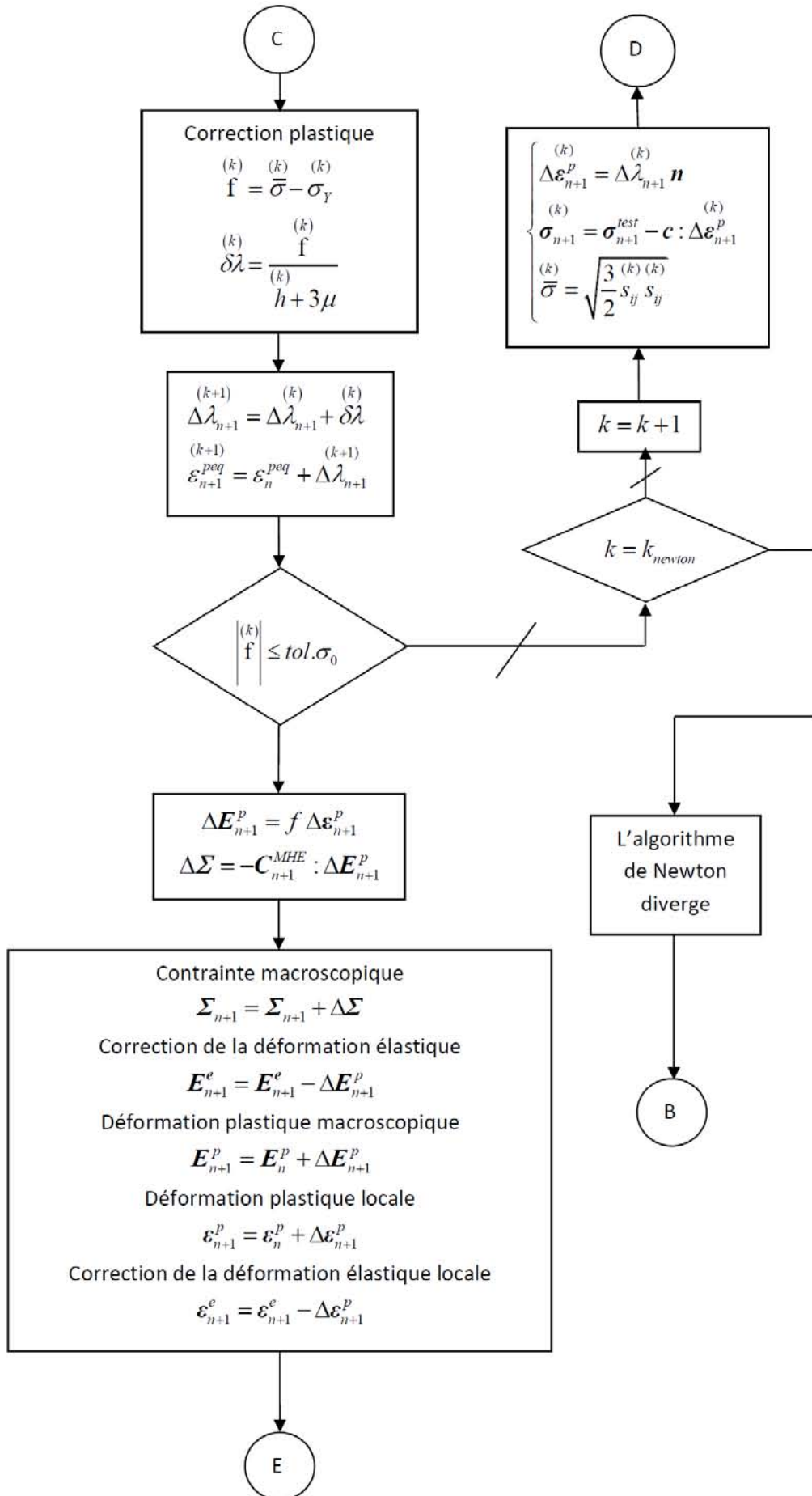


Figure C.1 - Organigramme de la sous-routine UHARD







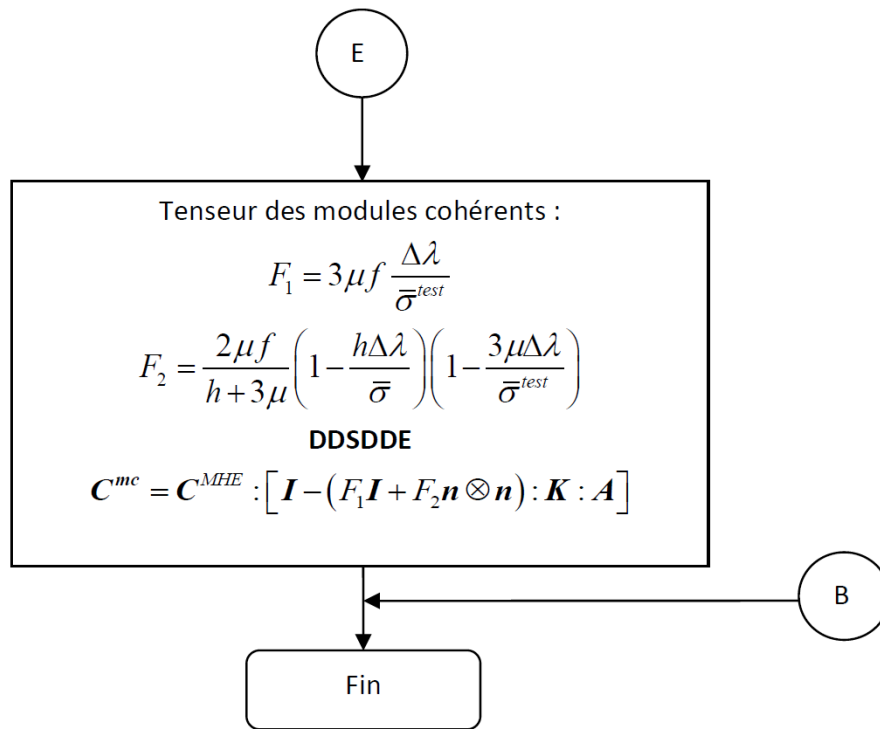


Figure C.2 – Organigramme de la routine UMAT

## Annexe D

# Production scientifique

### Sommaire

---

<b>D.1. Articles.....</b>	<b>243</b>
<b>D.2. Actes de conférence.....</b>	<b>244</b>
<b>D.3. Conférences internationales.....</b>	<b>244</b>
<b>D.4. Workshop international.....</b>	<b>245</b>
<b>D.5. Colloque national.....</b>	<b>245</b>

---

### D.1. Articles

- **W. Kpobie**, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, P. Lipinski, Three-Dimensional Thermomechanical Simulation of Fine-Pitch High-Count Ball Grid Array Flip-Chip Assemblies, Journal of Electronic Materials, 43(2014) 671-684
  - Lien internet : <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11664-013-2669-x#page-1>
  
- **W. Kpobie**, S. Ben Khelifa, N. Bonfoh, M. Fendler, P. Lipinski, Multi-site micromechanical modelling of thermo-elastic properties of heterogeneous materials. Composite Structures, 94 (2012) 2068-2077
  - Lien internet : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822312000293>

## D.2. Actes de conférence

- **W. Kpobie**, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, and P. Lipinski, “3D Modeling of high count fine pitch flip chip assemblies,” in *Proceedings - Electronic Components and Technology Conference*, 2013, pp. 2319–2325
  - Lien internet :  
[http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6575907&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D6575907](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6575907&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D6575907)
- **W. Kpobie**, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, and P. Lipinski, “3D modeling of flip chip assemblies with large array and small pitch: Validation of the proposed model,” in *14th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, EuroSimE 2013*, 2013.
  - Lien internet :  
[http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6529936&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs\\_all.jsp%3Farnumber%3D6529936](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6529936&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D6529936)

## D.3. Conférences internationales

- 63rd Electronic Components and Technology Conference (ECTC), 28-31 Mai 2013, Las Vegas, NV, Etats-Unis
- 14th IEEE International Conference on Thermal, Mechanical & Multiphysics Simulation and Experiments in Micro/Nano-Electronics and Microsystems (EuroSimE), 15-17 Avril 2013, Wroclaw, Pologne
- 15th European Conference on Composite Materials (ECCM), 24 au 28 Juin 2012, Venise, Italie.
  - **Titre de l'article** : The influence of morphology and topology of reinforcements on thermo-elastic properties of composites: application to electronic components
  - Auteurs : S. Ben Khelifa, **W. Kpobie**, N. Bonfoh, M. Fendler, C. Dreistadt, P. Lipinski.



## D.4. Workshop international

- The 8th workshop Dynamic behaviour of materials and its applications in industrial processes, 25-27 Juin 2014, Varsovie, Pologne
  - Titre de la présentation : Multi-site micromechanical modelling of thermoelastoplastic composites: application to flip-chip microelectronic assemblies
  - Auteurs : **W. Kpobie**, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, P. Lipinski.

## D.5. Colloque national

- Journée SF2M (Société Française de Métallurgie et de Matériaux): Fiabilité Mécanique des Composants électroniques: Expérimentation, caractérisation et modélisation, 29-30 Novembre 2012, Tours, France
  - Titre de la présentation : **modélisation 3D d'assemblage flip chip**
  - Auteurs : **W. Kpobie**, N. Bonfoh, C. Dreistadt, M. Fendler, P. Lipinski.



# Références bibliographiques des annexes

- [1] G. Kneer, “Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur,” *Solid State Phys.*, vol. 9, no. 3, pp. 825–838, 1965.
- [2] T. Mura, *Micro-mechanics of Defects in Solids*. M. Nijhoff, 1987.
- [3] O. Fassi-Fehri, “Le problème de paire d’inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope - Application à l’étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité,” Université de Metz, 1985.
- [4] P. Zattarin, “Etude de l’intégration d’un modèle polycristallin dans un code d’éléments finis en élastoplasticité,” Université de Metz, 2000.
- [5] K. Janc, “Micromechanical modeling of bone elastic properties based on computed tomography,” AGH – University of Science and Technology, 2013.



# Résumé

La technologie flip chip est de plus en plus répandue dans l'industrie électronique [trois dimensions (3D) System in Package] et est principalement utilisée pour la fabrication de réseaux détecteurs de grand format (mégapixels) et faible pas. Pour étudier la fiabilité de ces assemblages, des simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments finis semblent être l'approche la moins chère. Cependant, de très grands assemblages contiennent plus d'un million de billes de brasure, et le processus d'optimisation de ces structures par des simulations numériques se révèle être une tâche très fastidieuse. Dans de nombreuses applications, la couche d'interconnexion de tels assemblages flip chip se compose de microbilles de brasure noyées dans de l'époxy. Pour ces configurations, nous proposons une approche alternative, qui consiste à remplacer cette couche d'interconnexion hétérogène par un matériau homogène équivalent (MHE). Un modèle micromécanique pour l'estimation de ses propriétés thermoélastiques équivalentes a été mis au point. La loi de comportement obtenue pour le MHE a ensuite été implémentée dans le logiciel par éléments finis (Abaqus®). Les propriétés élastiques des matériaux de l'assemblage sont définies par la littérature et également déterminées expérimentalement par une méthode de caractérisation mécanique : la nano-indentation. Les réponses thermomécaniques des assemblages testés soumis à des chargements correspondant aux conditions de fabrication ont été analysées. La technique d'homogénéisation-localisation a permis d'estimer les valeurs moyennes des contraintes et des déformations dans chaque phase de la couche d'interconnexion. Pour accéder plus précisément aux champs de contraintes et déformations dans ces phases, deux modèles de zoom structurel (couplage de modèles et submodeling), en tenant compte de la géométrie réelle de la bille de brasure, ont été testés. Les champs de contrainte et de déformation locaux obtenus corroborent avec les initiations de dommage observées expérimentalement sur les billes de brasure.

**Mots-clés:** assemblage flip chip, matrice de billes d'interconnexion, 3D SiP, modélisation micromécanique, homogénéisation de Mori-Tanaka, nanoindentation, UMAT, Abaqus



# Abstract

Flip chip technology is increasingly prevalent in electronics assembly [three-dimensional (3D) system in package] and is mainly used at fine pitch for manufacture of megapixel large focal-plane detector arrays. To estimate the reliability of these assemblies, numerical simulations based on finite-element methods appear to be the cheapest approach. However, very large assemblies contain more than one million solder bumps, and the optimization process of such structures through numerical simulations turns out to be a very time-consuming task. In many applications, the interconnection layer of such flip-chip assemblies consists of solder bumps embedded in epoxy filler. For such configurations, we propose an alternative approach, which consists in replacing this heterogeneous interconnection layer by a homogeneous equivalent material (HEM). A micromechanical model for the estimation of its equivalent thermoelastic properties has been developed. The constitutive law of the HEM obtained was then implemented in finite-element software (Abaqus®). Elastic properties of materials that compose the assembly were found in literature and by using mechanical characterization method especially nano-indentation. Thermomechanical responses of tested assemblies submitted to loads corresponding to manufacturing conditions have been analyzed. The homogenization-localization process allowed estimation of the mean values of stresses and strains in each phase of the interconnection layer. To access more precisely to the stress and strain fields in these phases, two models of structural zoom (model coupling and submodeling), taking into account the real solder bump geometry, have been tested. The local stress and strain fields obtained corroborate the experimentally damage initiation of the solder bumps observed.

**Keywords:** Flip chip assembly, ball grid array, 3D system-in-package, micromechanical modeling, Mori–Tanaka homogenization, nanoindentation, UMAT, Abaqus

