



**HAL**  
open science

# Transfert thermique dans les milieux semi-transparentes : application aux milieux diffusants et peu absorbants

Alain Jeanmaire

## ► To cite this version:

Alain Jeanmaire. Transfert thermique dans les milieux semi-transparentes : application aux milieux diffusants et peu absorbants. Architecture, aménagement de l'espace. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1993. Français. NNT : 1993INPL011N . tel-01751252

**HAL Id: tel-01751252**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751252v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

11300010257  
INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE

93 INPL 011 N  
Laboratoire d'Energétique  
et de Mécanique  
Théorique et Appliquée

[M] 1993 JEANMAIRE, A.  
**THESE**

présentée à  
l'Institut National Polytechnique de Lorraine

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

par

Alain JEANMAIRE , ingénieur E.N.S.E.M.



\_\_\_\_\_

sujet :

**TRANSFERT THERMIQUE DANS LES MILIEUX  
SEMI-TRANSPARENTS . APPLICATION AUX MILIEUX  
DIFFUSANTS PEU ABSORBANTS**

\_\_\_\_\_

Soutenu publiquement le 22 janvier 1993 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Rapporteurs : R. MAINARD, Président  
C. MARTIN  
Examineurs : D. BILLEREY  
A. DEGIOVANNI  
B. MARTIN  
D. QUENARD



Je tiens à remercier M. A. DEGIOVANNI qui m'a permis de délocaliser mon activité de recherche à Nevers, MM. B. MARTIN et D. BILLEREY qui m' ont encadré tout au long de ce travail.

J'adresse mes remerciements à MM. R. MAINARD, C. MARTIN, D. BILLEREY, A. DEGIOVANNI, B. MARTIN ET D. QUENARD pour leur participation au jury.

Pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, je remercie les membres du Service Matériaux du C.S.T.B. de Saint Martin d'Hères.

Mes remerciements vont également à MM. P. ROUAULT et Y. MARTIN, qui m'ont apporté une aide précieuse pour les réalisations pratiques et les mesures.



***SOMMAIRE***





Nomenclature	8
<b>A - SITUATION DU PROBLEME</b>	<b>11</b>
1 - Introduction	12
2 - Conductivité thermique	15
2.1 - Conductivité phonique	15
2.2 - Convection	17
2.3 - Rayonnement thermique	18
2.4 - Mesures de la conductivité thermique	19
2.4.1 - Mesures stationnaires	19
2.4.2 - Mesures instationnaires	20
2.4.3 - Mesures hybrides	21
3 - Milieux semi-transparents	23
3.1 - Décomposition de la conductivité en trois contributions	23
3.2 - Explicitation de ces contributions	27
3.3 - Confrontation de ce modèle avec la laine de verre	30
3.4 - L'effet d'épaisseur	32
3.4.1 - Le modèle à deux flux	33
3.4.2 - L'approximation de Rosseland	34
3.4.3 - Comparaison des approximations	36
4 - Couplage des modes de transfert	38
<b>B - METHODE FLASH</b>	<b>42</b>
1 - Principe de la méthode	44
2 - Modèles classiques	46

2.1 - Modèle analytique simple	46
2.2 - Modèle de Parker	47
2.3 - Modèle incluant les pertes calorifiques	49
2.4 - Modèle «sandwich»	51
2.5 - Modèle monodimensionnel ou modèle 1D	55
2.6 - Modèle de l'ailette	57
2.7 - Modèle 2D	58
2.8 - Allure générale des thermogrammes	60
2.9 - Approximations dans les modèles ailette et 2D	61
3 - Nouveaux modèles	63
3.1 - Quadripôle de rayonnement	64
3.2 - Quadripôle résultant	69
3.3 - Modèle 1DW	71
3.4 - Modèle ailette W	73
3.5 - Modèle 2DW	74
3.6 - Allure générale des thermogrammes	76
4 - Autres modèles	77
4.1 - Modèles en «U»	77
4.2 - Modèles en «r'»	80
5 - Récapitulatif	83
C - IDENTIFICATION	87
1 - Modèle de Parker	89
2 - Modèles 1D, ailette, 2D	91
3 - Modèles «en W»	93
4 - Etude de sensibilité	96

4.1 - Modèle de Parker	96
4.2 - Autres modèles	97
5 - Influence de la nature du flash	101
6 - Le logiciel	103
D - MONTAGE EXPERIMENTAL	106
1 - Schéma	107
2 - Exploitation des mesures	111
3 - Constitution de l'échantillon	112
E - MESURES	113
1 - Préliminaires	114
2 - Etude du P.V.C.	115
3 - Etude des mousses de P.U.R.	127
4 - Etude du polyéthylène expansé	138
5 - Termes correctifs	153
6 - Comparaison avec d'autres mesures	159
Conclusion	161
Bibliographie	164
ANNEXES	171
Annexe 1 : Modèle à deux flux	172
Annexe 2 : Réponse analytique au problème de Parker	178
Annexe 3 : Justification de l'écriture quadripolaire	181

Annexe 4 : Résolution directe du modèle 1D	189
Annexe 5 : Résolution directe du modèle de l'ailette	193
Annexe 6 : Deuxième démonstration des quadripôles	197
Annexe 7 : Résolution du problème bidimensionnel	201
Annexe 8 : Calcul du facteur de forme	210
Annexe 9 : Résolution directe des modèles 1D W / ailette W	218
Annexe 10 : Résolution du modèle 2D W	223
Annexe 11 : Thermogramme réel et exploitation par le logiciel	231

*NOMENCLATURE*



$\varphi$ ou $\varphi_0$	: densité de flux fournie par le flash
$\varphi$ ou $\varphi_0$	: sa transformée de Laplace
$T_e$	: température de la face arrière
$\theta_e$	: sa transformée de Laplace
$Q$	: énergie du flash ( $J.m^{-2}$ )
$R$	: rayon du cylindre
$\lambda$	: conductivité thermique du matériau
$e$ ou $e_0$	: épaisseur du cylindre de matériau
$\rho C$ ou $\rho_0 C_0$	: capacité calorifique volumique
$k_0 = \rho_0 C_0 e_0$	: capacité calorifique surfacique
$a = \frac{\lambda}{\rho_0 C_0}$	: diffusivité thermique du matériau
$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}$	: résistance du matériau
$e_1$	: épaisseur des rondelles métalliques
$\rho_1 C_1$	: capacité calorifique volumique
$k_1 = \rho_1 C_1 e_1$	: capacité calorifique surfacique
$S$	: aire des faces planes du cylindre
$h$	: coefficient d'échange global
$W$	: conductance radiative
$t$	: temps réel (secondes)
$p$	: paramètre de Laplace ( $s^{-1}$ )
$R^* = \frac{R}{e}$	: rayon adimensionnel
$h^* = h\Omega$	: nombre de Biot
$W^* = W\Omega$	: conductance radiative adimensionnelle
$t^* = \frac{at}{e^2} = \frac{t}{\Omega k_0}$	: nombre de Fourier

$p^*$	$= \frac{pe^2}{a} = p\Omega k_0$	: paramètre adimensionnel de Laplace
$J_i$		: fonction de Bessel d'ordre $i$
$\alpha^*_n$		: solution de $\alpha^*_n = \frac{h^*J_0(\alpha^*_nR^*)}{J_1(\alpha^*_nR^*)}$
$\beta^*_n$	$= \sqrt{\alpha^*_n{}^2 + p^*}$	
$\mathcal{L}^{-1}(f)$		: transformée inverse de Laplace de $f$
$T_e^*$	$= \frac{T_e}{\Omega Q}$ (1D et ailette)	: température réduite pour ces modèles
$T_e^*$	$= \frac{T_e R^{*2}}{4\Omega Q}$ (2D)	: température réduite pour ces modèles
$L_\lambda$		: luminance monochromatique
$L$	$= \int_0^\infty L_\lambda d\lambda$	: luminance énergétique
$\varepsilon$		: émissivité
$N$	(modèle à deux flux)	: coefficient de rétrodiffusion
$P$	(modèle à deux flux)	: coefficient d'absorption
$I$	(modèle à deux flux)	: densité de flux dans l'hémisphère avant
$J$	(modèle à deux flux)	: densité de flux dans l'hémisphère arrière
$\kappa_\lambda$		: coefficient monochromatique bidirectionnel d'absorption volumique
$\sigma_\lambda$		: coefficient monochromatique bidirectionnel de diffusion volumique
$n_\lambda$		: indice du milieu semi-transparent
$\tau$		: épaisseur optique



*SITUATION DU PROBLEME*



## I - INTRODUCTION

Depuis quelques dizaines d'années, on assiste à un essor considérable des matériaux isolants, dans les domaines tant domestique qu'industriel. En effet, les hommes commencent à prendre conscience du fait qu'ils ne peuvent dilapider toutes les ressources énergétiques de la planète sans hypothéquer gravement l'avenir de leur descendance. Ce constat les a mis, en ce qui concerne l'utilisation de l'énergie pour le chauffage des habitations, devant le choix de se vêtir davantage dans les maisons, ou de diminuer les déperditions de chaleur, de façon à maintenir une température ambiante satisfaisante sans pour autant consommer de l'énergie immodérément. C'est cette seconde solution qui a été adoptée dans les pays industrialisés.

Il est tout-à-fait possible d'isoler thermiquement une habitation en la dotant de murs extrêmement épais en torchis par exemple, ou en doublant tous les murs d'une grande quantité de laine de verre. Mais dans les grandes métropoles où vit une proportion toujours croissante d'individus, il importe également de minimiser la surface au sol non habitable des constructions : en effet, c'est la surface intérieure des logements qui est vendue par les constructeurs, et celle extérieure qu'ils paient. Ainsi les procédés d'isolation d'autrefois ne sont plus viables dans les conditions actuelles.

La laine de verre a cependant représenté un progrès substantiel en terme d'efficacité thermique, en atteignant des valeurs de conductivité (cette notion sera développée dans un autre chapitre de ce mémoire) de l'ordre de 35 mW/m/K. L'avènement des polystyrènes expansés a permis

d'obtenir des matériaux faciles d'utilisation, de conductivité voisine de 40 mW/m/K [1]. Quoiqu'intéressante, cette valeur reste toujours supérieure à celle d'un isolant extrêmement courant qu'est l'air (22 à 26 mW/m/K aux températures usuelles).

Certaines sociétés, comme Effisol à Saint Julien du Sault dans l'Yonne, se sont lancées dans la fabrication de super isolants, c'est-à-dire de matériaux plus isolants que l'air. Cette prouesse est possible en utilisant du polyuréthane rigide (PUR), expansé avec un fréon lourd -de densité 4-, le trichloro-fluoro-méthane CFC R11. Ainsi, à titre d'exemple, dans une maison de 100 m<sup>2</sup>, le fait d'utiliser du PUR au lieu de la laine de verre traditionnelle en isolation intérieure, permet de diminuer l'épaisseur des parois -pour un pouvoir isolant identique naturellement- et par là d'augmenter la surface habitable, de 3 m<sup>2</sup>, soit un gain de 3%. Un ordre de grandeur des prix pratiqués en matière d'immobilier suffit pour se convaincre de la rentabilité de tels produits.

Il est clair que la fabrication de ces matériaux nécessite de nombreux contrôles lors du dosage des composants chimiques, pour ne citer que cette phase du processus. En particulier, il est primordial de connaître très fréquemment l'efficacité du produit, c'est-à-dire de disposer d'une méthode de mesure de la conductivité thermique rapide et simple.

Les mousses expansées sont en général des matériaux semi-transparents, qui peuvent être traversés par le rayonnement thermique. Nous nous sommes intéressés au cas de tels matériaux qui diffusent ce rayonnement et qui l'absorbent peu, et notre travail a consisté à adapter une technique d'identification de la conductibilité de ces matériaux par méthode flash -alors que la méthode flash a d'abord été mise en œuvre

pour les bons conducteurs de la chaleur-, grâce à des modèles qui prennent en compte la part radiative du transfert de chaleur.

La méthode de caractérisation que nous avons développée, si elle est actuellement adaptée au laboratoire, pourrait fort bien être transposée sur un site industriel, moyennant un travail d'automatisation.



## II - CONDUCTIVITE THERMIQUE

Classiquement, on retient qu'il existe trois modes de transfert de chaleur : la conduction pure (phonique), la convection et le rayonnement. Nous allons rapidement rappeler ces trois concepts.

### 2.1 - Conductivité phonique

Au XIX<sup>e</sup> siècle, J. Fourier [2] a énoncé qu'à travers un matériau opaque homogène unidimensionnel (par exemple un mur dont l'épaisseur serait la seule dimension non infinie), existe un transfert de chaleur dès que les deux surfaces du milieu sont à des températures différentes. La densité surfacique du flux,  $\varphi$ , est proportionnelle au gradient de température et à un coefficient  $\lambda$ , appelé conductivité phonique. De ces considérations provient l'équation de la chaleur monodimensionnelle :

$$\varphi = - \lambda \text{ grad } T = - \lambda \frac{dT}{dx}$$

Le flux, qui reste constant dans tout le matériau, est dirigé de la température la plus chaude vers la plus froide, conformément au deuxième principe de la thermodynamique, ce qui explique le signe négatif dans la formule.

Dans le cas où le transfert de chaleur n'est pas unidirectionnel, la densité de flux est une grandeur vectorielle et la conductivité thermique peut dépendre de la direction du flux considérée: il faut alors prendre pour  $\lambda$  une quantité tensorielle, et écrire l'équation générale :

$$\vec{\varphi} = - \overline{\lambda} \overrightarrow{\text{grad } T}$$

Notons que dans toute notre étude, nous supposons  $\lambda$  indépendant de la direction de propagation du flux (c'est donc une grandeur scalaire), de la température et, ce qui peut sembler naturel, du temps.

Ces équations ne sont évidemment valables qu'en régime établi, c'est-à-dire lorsque densité de flux et température sont indépendants du temps. Plaçons-nous dans le cas du milieu monodimensionnel, et imaginons un flux -unidirectionnel- variant en fonction du temps traversant le matériau, toujours supposé homogène. Pour échauffer une tranche de mur de  $dT$ , il faut fournir une densité de flux proportionnelle à  $dT$  et à la capacité calorifique du milieu,  $\rho C$ . Pour chaque tranche, d'épaisseur  $dx$ , nous pouvons donc écrire un bilan d'énergie, en considérant que la différence de flux entre l'«entrée» de la tranche et sa «sortie» sert à échauffer le matériau pendant le temps  $dt$  :

$$[ \varphi(x) - \varphi(x+dx) ] dt = \rho C dT dx$$

Soit :

$$\text{div } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

En remplaçant  $\varphi$  par sa valeur, on obtient :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas général d'un flux multidirectionnel on a finalement :

$$\text{div} \left( \overline{\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$



Ces différentes équations sont utilisables dans les solides bien sûr, et dans les fluides s'ils ne sont pas en mouvement.

Le terme «phonique» provient du mot phonon, particule associée à une onde mécanique (le son à travers un matériau) tout comme la théorie quantique associe un photon à une onde électromagnétique. La traduction du phénomène de conduction de la chaleur dans un solide en terme de vibrations moléculaires a été mise en évidence au début du XX<sup>e</sup> siècle, grâce à Planck, Einstein, Debye et Nernst [3].

## 2.2 - Convection

Chacun connaît l'efficacité des convecteurs (électriques par exemple) dans un logement : mais comment se fait-il que nous ressentions un flux de chaleur même lorsque nous ne sommes pas en contact direct avec l'appareil ?

Le convecteur cède de l'énergie à l'air qui l'avoisine. Ce mélange de gaz, s'échauffant donc, voit sa densité diminuer, et entame un mouvement ascendant à cause des forces de pesanteur, créant ainsi une circulation d'air dans la pièce. La convection est donc un mode de transfert de la chaleur basé sur le mouvement de fluides de différentes températures.

Il est clair que ces mouvements ne peuvent apparaître que dans des locaux «suffisamment grands» pour que les circulations puissent s'établir. En fait, dans les gammes de températures rencontrées dans les problèmes d'isolation du bâtiment, la dimension critique [4,5] est de l'ordre de quelques millimètres : ainsi, si une cavité a un diamètre inférieur à cette valeur, la convection sera négligeable devant la conduction du gaz lui-

même. C'est le principe du double vitrage qui emprisonne une lame d'air suffisamment fine pour que les mouvements de convection ne puissent apparaître.

### 2.3 - Rayonnement thermique

Le soleil parvient à chauffer la surface de la Terre même si le vide sépare les deux astres : le transfert de chaleur n'est ni conducteur ni convectif, et ne nécessite aucun support matériel. En effet, tout corps, dès qu'il est porté à une température absolue non nulle -ce qui est évidemment le cas du Soleil- , émet un rayonnement thermique, de même nature que la lumière, les rayons X ou les ondes radio. Cette émission se produit, conformément au premier principe de la thermodynamique, au détriment de l'énergie interne du corps, provoquant un flux de chaleur entre le corps et le milieu extérieur. Intéressons-nous d'abord au cas d'école du «corps noir».

Notre but ici n'est ni d'écrire une saga sur les différentes étapes de découverte des lois régissant le rayonnement du corps noir, ni de redémontrer toutes ces lois. Nous nous bornerons à énoncer que le corps noir émet un flux de chaleur égal au produit de la puissance quatrième de sa température absolue par la constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma$ , et que l'intensité spectrale du rayonnement admet un maximum pour la longueur d'onde  $10 \mu\text{m}$  pour une température de 300 K (température moyenne pour le bâtiment). De plus, ce corps absorbe en totalité tout flux radiatif provenant de l'extérieur : c'est donc un milieu qui capte tout rayonnement et émet selon un spectre propre à sa température.

Les matériaux réels n'émettent qu'une fraction  $\varepsilon$  (comprise entre 0 et 1 et appelée émissivité du milieu) de la quantité  $\sigma T^4$ , et n'absorbent que la même fraction de rayonnement extérieur (loi de Kirchhoff), le reliquat étant simplement réfléchi. Les corps lisses et brillants tels le cuivre poli ont une émissivité plutôt faible en général alors que les milieux mats comme le noir de carbone ou la peinture noire par exemple ont une émissivité élevée. Le corps noir, moyennant ces considérations, peut être défini comme un matériau d'émissivité égale à l'unité.

## 2.4 - Mesures de la conductivité thermique

Les méthodes de mesure se divisent en deux grandes classes : celles qui sont stationnaires et celles qui sont instationnaires.

### 2.4.1 - Mesures stationnaires

C'est cette classe de mesures qui est apparue la première, car son principe est des plus simples : soit un milieu (mur thermique aux parois parallèles) de conductivité constante  $\lambda$  à mesurer, d'épaisseur connue  $e$ , et de longueur et de largeur très grandes devant  $e$ . On impose une différence de température  $\Delta T$  entre les deux faces du mur. La densité surfacique de flux  $\varphi$  qui traverse le milieu est unidirectionnelle (normale aux deux parois) et est mesurée par des flux-mètres très précis. En se rapportant au paragraphe 1 de ce chapitre, on écrit aisément :

$$\lambda = \frac{\varphi e}{\Delta T}$$

C'est le principe dit de la «plaque chaude gardée», car en pratique, il est impossible de disposer d'un échantillon de surface infinie, et pour que le flux de chaleur soit réellement unidirectionnel, il faut parfaitement calorifuger les côtés des plaques. L'avantage de ce type de méthode est la précision des résultats que l'on peut obtenir, et la grande dimension des échantillons testés permet d'éliminer les inhomogénéités locales du matériau. Par contre le temps nécessaire à l'établissement du régime permanent demande un temps de l'ordre de la journée pour les appareils d'utilisation courante.

#### 2.4.2 - Mesures instationnaires

Cette classe de mesures s'est récemment développée grâce aux progrès réalisés sur la sensibilité et la rapidité des capteurs, et la fiabilité de la réponse électronique. Le principe général de la méthode consiste à perturber thermiquement un échantillon de dimension connue et à analyser les valeurs de flux ou de températures en certains points du milieu, en fonction du temps. La détermination de la conductivité se fait par une identification de paramètres entre un modèle adapté et l'expérience réelle. Le C.S.T.B. (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment à Saint Martin d'Hères dans l'Isère) a réalisé un conductimètre compact appelé communément «fer à repasser» [6], qui sollicite le matériau à caractériser sur une seule de ses surfaces par un échelon de flux de chaleur réalisé par un fil parcouru par un courant électrique contrôlé, et qui interprète l'évolution de la température de ce fil

(directement en contact avec le matériau) en fonction du temps. La taille minimale des échantillons est bien moindre que celle utilisée par la plaque chaude gardée, et le temps de mesure et d'interprétation est de l'ordre de quelques minutes.

Signalons l'article d'A. Degiovanni [7] dans lequel il a recensé dans le détail toutes les méthodes de mesure de conductivité et de diffusivité thermiques.

La méthode flash, celle sur laquelle se base notre étude, se situe dans cette catégorie, comme il le sera exposé dans la deuxième partie de ce mémoire.

#### 2.4.3 - Mesures hybrides

Le C.S.T.B.(voir 4.2) a mis au point un appareil à plaques chaudes pour laquelle le régime permanent n'est pas nécessairement atteint pour calculer la conductivité : en effet, le régime est permanent si les flux qui traversent les parois extrêmes du matériau sont identiques et constants avec le temps (cas du mur en conduction morte). THERY *et al* [8] ont démontré que si seulement la demi-somme de ces deux flux est constante (et que les flux eux-mêmes varient), il est possible de calculer de façon fiable la conductivité en utilisant la moyenne arithmétique des flux.

Toutes ces méthodes actuellement développées ont le grand mérite d'être éprouvées, fiables et précises pour tous les matériaux opaques. Cependant, il existe une classe de nouveaux matériaux, poreux ou fibreux, qui laissent passer à travers eux de la chaleur aussi par rayonnement, et

non plus uniquement par la conduction phonique. Ces méthodes fournissent des valeurs de conductivités qui englobent les deux modes de transfert, sans aucune distinction des parts phonique et radiative.

### III - MILIEUX SEMI-TRANSPARENTS

Un milieu semi-transparent est un milieu à travers lequel une partie du rayonnement thermique est interceptée, pour être absorbée et/ou diffusée. De tels matériaux sont également le siège d'un transfert de chaleur par conduction «classique» -dans la matrice solide et dans le gaz emprisonné si le matériau est poreux ou fibreux- et par convection parfois. De plus, le milieu émet en son sein.

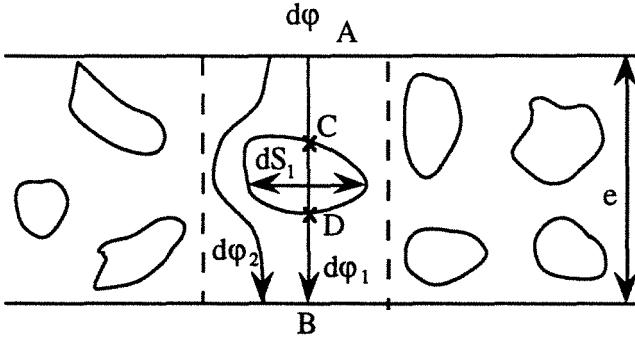
Le cas qui nous intéresse est celui des matériaux isolants poreux dont la taille des cellules, remplies par un gaz lourd comme le fréon, est telle que la convection peut être totalement négligée. Ces matériaux ont une porosité (fraction volumique de la phase gazeuse)  $\epsilon'$  proche de 1. Leur masse volumique  $\rho$  s'exprime simplement en fonction de celle de la phase solide  $\rho_s$ , car la masse du gaz reste dans tous les cas négligeable devant celle des solides :

$$\rho = \rho_s (1-\epsilon')$$

On suppose que la porosité, grandeur par essence macroscopique, ne varie pas d'un point à l'autre du milieu, c'est-à-dire que le matériau est homogène.

#### 3.1 - Décomposition de la conductivité en trois contributions

Nous allons considérer un tube de flux de chaleur allant de A vers B, orthogonal à une tranche de matériau d'épaisseur  $e$ , ordre de grandeur de la taille des pores, comme le montre la figure de la page suivante.



Dans le tube, circule le flux élémentaire  $d\phi$ , qui se décompose en :

- une part  $d\phi_1$  qui traverse directement le tube -par une ligne droite en passant par le pore- et où la conductivité est  $\lambda_m$  , dont nous calculerons la valeur ultérieurement,
- et une autre  $d\phi_2$  qui traverse le tube en n'empruntant que le solide (surface  $dS_2$ ) -où la conductivité vaut  $\lambda_{sol}$ - c'est-à-dire en contournant le pore : la distance parcourue par ce flux est donc plus grande que  $e$ , soit  $t \cdot e$  où  $t$  est la tortuosité, supérieure à 1.

Ceci se traduit par les équations :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 \quad \text{où} \quad \begin{aligned} d\phi_1 &= \lambda_m dS_1 \frac{(T_A - T_B)}{e} \\ d\phi_2 &= \lambda_{sol} dS_2 \frac{(T_A - T_B)}{t e} \end{aligned}$$

Pour connaître le flux total à travers une surface  $S_m$  de mur, il suffit d'intégrer les flux élémentaires  $d\phi$ . Donc :

$$\phi = \int_S d\phi = \left[ \lambda_m \int dS_1 + \frac{\lambda_{sol}}{t} \int dS_2 \right] \frac{(T_A - T_B)}{e}$$



On peut utiliser la relation approchée :

$$\rho_s e \int dS_2 \approx \rho e \int dS = \rho e S \Rightarrow \begin{aligned} \int dS_2 &\approx \frac{\rho}{\rho_s} S_m \\ \int dS_1 &\approx \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) S_m \end{aligned}$$

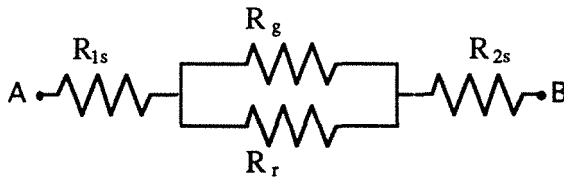
D'où finalement :

$$\varphi \approx S_m \frac{(T_A - T_B)}{e} \left[ \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) \lambda_m + \frac{\rho}{\rho_s} \frac{\lambda_{sol}}{t} \right]$$

Nous pouvons faire apparaître la conductivité de la mousse dans cette expression :

$$\lambda \approx \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) \lambda_m + \frac{\rho}{\rho_s} \frac{\lambda_{sol}}{t}$$

Explicitons le terme  $\lambda_m$ , en usant de l'analogie entre la thermique et l'électricité. Schématisons le trajet du flux  $d\varphi_1$  :



Alors :

$$d\varphi_1 = \frac{T_A - T_B}{\Sigma R} \Leftrightarrow I = \frac{V_A - V_B}{R}$$

$\Sigma R$  désigne la somme des résistances thermiques rencontrées par le flux élémentaire  $d\phi_1$ . Et :

- ♦  $R_{1s} + R_{2s} = R_s$  est la résistance de la phase solide.
- ♦  $R_g$  est la résistance thermique de conduction du gaz contenu dans le pore.
- ♦  $R_r$  est la résistance de rayonnement du pore.

Ainsi :

$$\Sigma R = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_r}} \quad \text{avec} \quad R_s = \frac{e_s}{\lambda_{sol}}$$

$$R_g = \frac{e_g}{\lambda_g}$$

$$R_r = \frac{e_g}{\lambda_r}$$

Donc :

$$d\phi_1 = \frac{T_A - T_B}{\frac{e}{\lambda_m}} = \frac{T_A - T_B}{\frac{e_s}{\lambda_{sol}} + \frac{e_g}{\lambda_g + \lambda_r}}$$

$\lambda_{sol}$  est de l'ordre du W/m/K, alors que  $\lambda_g$  et  $\lambda_r$  sont environ cent fois plus faibles, et  $e_s$  et  $e_g$  sont du même ordre, donc :

$$\frac{e_s}{\lambda_{sol}} \ll \frac{e_g}{\lambda_g + \lambda_r} \quad \text{soit} \quad \lambda_m \approx \frac{e}{e_g} (\lambda_g + \lambda_r)$$

On peut tirer l'expression de  $\lambda$  :

$$\lambda \approx \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) \frac{e}{e_g} (\lambda_g + \lambda_r) + \frac{\rho}{\rho_s} \frac{1}{t} \lambda_{sol}$$

On sait que :

$$\rho \approx \frac{(e - e_g) S}{e S} \rho_s, \text{ soit } 1 - \frac{\rho}{\rho_s} = \varepsilon' \approx \frac{e_g}{e}, \text{ e et } e_g \text{ étant de l'ordre de } 1$$

Donc finalement :

$$\lambda = \lambda_g + \lambda_r + \frac{\rho}{\rho_s} \frac{1}{t} \lambda_{\text{sol}} = \lambda_g + \lambda_r + \lambda_s$$

### 3.2 - Explicitation de ces contributions

$\lambda_g$ , conductivité du gaz, se calcule grâce à la théorie cinétique des gaz de Maxwell Boltzmann [9]. Cette théorie considère les molécules gazeuses comme des billes de rayon  $r$ , qui transportent l'énergie sous forme d'énergie cinétique (agitation thermique). Alors :

$$\lambda_g = \frac{\bar{v}}{3\sqrt{2}} \frac{C_v}{\mathcal{N}} \frac{1}{4\pi r^2} \quad \text{où}$$

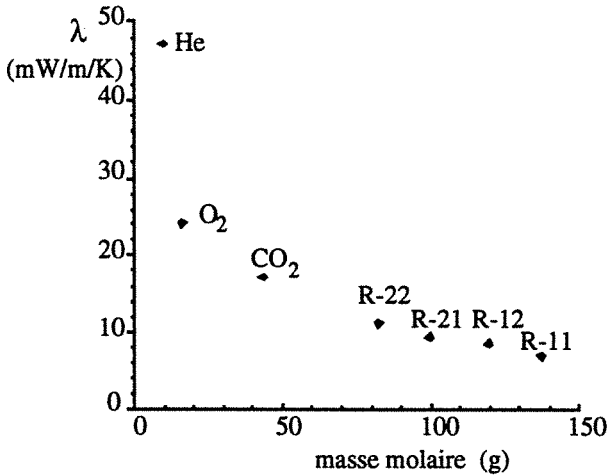
$\mathcal{N}$  est le nombre d'Avogadro,  $C_v = \frac{3}{2} R$  et  $r \approx 10^{-10}$  m pour  $N_2$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  est la vitesse moyenne des particules

Soit  $\lambda_g \approx 20 \cdot 10^{-3}$  W/m/K à température ordinaire

On voit ici que plus la masse molaire est importante, plus la conductivité est faible. A. Cunningham [10] a vérifié expérimentalement la validité de cette loi en mesurant la conductibilité de certains gaz à la

même température de 10°C. Ses résultats apparaissent dans le graphique :



Pour que la contribution de la conductivité de la phase gazeuse soit la plus faible possible, les fabricants de mousses isolantes ont intérêt à utiliser un gaz de forte masse molaire, tel le trichloro-fluoro-méthane R-11. Hélas, ce produit, bien qu'inoffensif pour l'homme, participe très activement à la destruction de la couche d'ozone de la haute atmosphère, qui protège la surface de la Terre des rayons solaires trop agressifs. Les règlements actuels vont dans le sens d'une interdiction de l'utilisation de tels produits.

C.Tien et K.Vafai [11] ont montré que pour l'air :

$$\lambda_{\text{air}} = \left( 4,98 \cdot 10^{-3} + 7,00 \cdot 10^{-5} T(\text{K}) \right) \text{ SI donc à } 20^\circ\text{C } \lambda_{\text{air}} \approx 26 \text{ mW/m/K}$$

Il résulte de cela que si un matériau est expansé avec de l'air, sa conductivité sera nécessairement supérieure à 26 mW/m/K, sauf si la taille des pores est inférieure au libre parcours moyen des molécules de gaz (bien inférieur au micromètre), auquel cas la notion de conductivité thermique du gaz n'a plus de sens. La société Microtherm [12] a d'ailleurs élaboré un isolant dont la taille des pores est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules d'air : chaque molécule a une probabilité bien supérieure de rencontrer une paroi du pore qui est fixe qu'une autre molécule de gaz, mobile : la propagation de la chaleur par échange d'énergie cinétique des particules gazeuses est donc considérablement freinée. Hélas, le prix de fabrication de ce produit interdit toute utilisation autre qu'industrielle, dans des domaines très pointus.

Pour calculer  $\lambda_r$ , on considère que les surfaces opposées du pore sont des corps noirs. D'après la loi de Stefan-Boltzmann, la densité de flux radiatif entre les deux surfaces est :

$$\varphi_r = \sigma (T_C^4 - T_D^4) \approx 4\sigma T_m^3 (T_C - T_D) \quad \text{où } T_m = \frac{T_C + T_D}{2}$$

Donc si l'on écrit une relation du type de la loi de Fourier, on a :

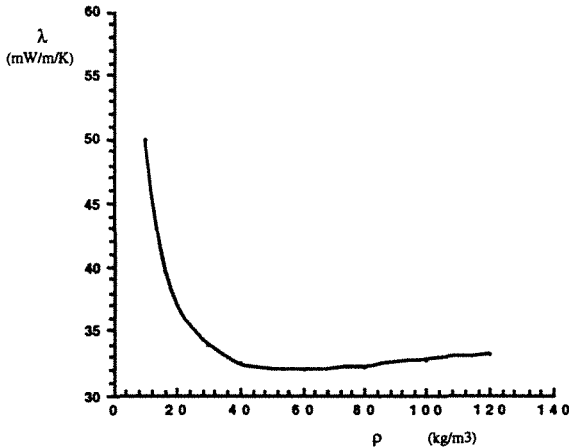
$$\lambda_r = e_g 4\sigma T_m^3 \quad \text{où } T_m = \frac{T_C + T_D}{2}$$

A température ambiante, et pour un diamètre de pore  $e_g$  de 1 mm,  $\lambda_r$  est de l'ordre de 6 mW/m/K.

Pour minimiser  $\lambda_s$ , il faut que la porosité soit la plus élevée possible, c'est-à-dire que le matériau possède le nombre maximum de pores. Hélas, la tenue mécanique est nulle quand la porosité avoisine l'unité : il faut donc trouver un compromis. Il est possible d'augmenter la tortuosité  $t$ , en influant sur la forme des pores. Pour des mousses de P.U.R. communes, des pores sphériques conduisent à une tortuosité de 1,6. Pour l'excellent isolant naturel qu'est le liège, la forme oblongue des cavités permet d'obtenir une tortuosité de 3 [13].

### 3.3 - Confrontation de ce modèle avec la laine de verre

S. Klarsfeld, de la Société Isover Saint Gobain, a mesuré avec un appareil à plaque chaude gardée la conductivité -nécessairement globale- de laines de verre dont les densités sont différentes. Les résultats sont reportés dans la figure qui suit :



Il est possible de modéliser cette courbe par la représentation graphique de la fonction :

$$\lambda(\rho) = A\rho + B + \frac{C}{\rho}$$

Pour des valeurs de  $\rho$  assez faibles devant celle du verre massif, la porosité est voisine de l'unité, c'est-à-dire que l'air -immobile dans l'enchevêtrement des fibres- est le constituant principal de la laine de verre. La conductivité de la phase gazeuse est donc sensiblement constante avec  $\rho$ . On peut donc identifier cette contribution  $\lambda_g$  avec le terme B de la formule.

La participation du verre à la conductivité totale est proportionnelle -du moins approximativement- à sa «concentration» dans la laine, c'est-à-dire à  $\rho$ . Là encore, on peut identifier  $\lambda_s$  avec  $A\rho$ .

Le dernier terme de la fonction correspond nécessairement la conductivité «de rayonnement» de la laine. On conçoit aisément que plus  $\rho$  est faible, moins le rayonnement peut être intercepté par les fibres. Donc  $\lambda_r$  s'exprime par  $C/\rho$ .

La courbe présente un minimum en  $\rho = \sqrt{C/A}$ , valeur de masse volumique en deçà de laquelle se situe la classe des isolants légers utilisés dans les applications domestiques (habitation,...), et au delà de laquelle apparaissent les isolants lourds industriels.

C.G. Bankwall [14] a mené une étude similaire sur la laine de verre, mais sous vide cette fois, de façon à éliminer la part de conduction de la

phase gazeuse, et il a obtenu des résultats comparables à ceux de S. Klarsfeld, au terme B près.

Notons que pour le polyuréthane rigide une mesure du même type a été réalisée, menant à une courbe :

$$\lambda(\rho) = A' \rho + B' + \frac{C'}{\rho}$$

### 3.4 - L'effet d'épaisseur

De très nombreuses mesures de conductivité sur la laine de verre et certains matériaux poreux ont mis en évidence un paradoxe : la conductivité augmente avec l'épaisseur des échantillons utilisés!

Ainsi S. Klarsfeld [15] a trouvé une relation empirique pour la conductibilité apparente -c'est-à-dire globale- d'un isolant fibreux léger, en fonction de différents paramètres, dont l'épaisseur  $e$  de l'échantillon :

$$\lambda = \lambda_g + \lambda_s + \lambda_r$$

$$\lambda(\rho, T, e) = 0,2572 T^{0,81} + 0,0527 \rho^{0,91} \left( 1 + 0,13 \frac{T}{100} \right) + \frac{4\sigma T^3 e}{\left( \frac{2}{\epsilon} - 1 \right) + Ne}$$

Il est clair que des parts  $\lambda_s$ ,  $\lambda_g$  et  $\lambda_r$ , seule la dernière peut varier en fonction de l'épaisseur, les deux autres étant plus facilement calculables, soit par la théorie cinétique des gaz, soit par une modélisation assez fine de la structure solide de l'isolant. L'effet d'épaisseur est donc directement lié au rayonnement.



### 3.4.1 - Le modèle à deux flux

En 1905, Schuster et Schwarzschild [16] ont étudié la diffusion de la lumière à travers le brouillard, et ont imaginé le modèle dit «à deux flux», que H.C. Hamaker [17] et B.K. Larkin [18] ont développé.

Dans un matériau semi-transparent diffusant et absorbant, chaque particule absorbe une partie du rayonnement qu'elle reçoit, en diffuse une autre partie dans toutes les directions de l'espace -avec une certaine répartition des directions appelée fonction de phase-, et émet son propre rayonnement. Le champ de luminance (puissance émise dans une direction donnée par l'unité de surface de la source projetée perpendiculairement à cette direction) dans un tel matériau - par analogie avec la lumière visible- est donc très complexe, et les équations qui le régissent ne sont pas intégrables analytiquement.

Il existe actuellement deux écoles , celle [19,20] qui préconise la mesure des luminances bidirectionnelles sur toutes les directions de l'espace, et celle qui ne considère que des grandeurs hémisphériques, c'est-à-dire les champs de luminance intégrés sur tout un ensemble de directions [18,21,22]. L.R. Glicksmann a démontré que la seconde approche est à la fois la plus naturelle, la plus simple et la plus performante, «*hemispherical (method) is more accurate at larger sample thickness ... radiative calculations more detailed than the diffusion approximation are not justified*» [19].

Les champs de luminance, même intégrés sur les deux demi-espaces, sont des champs monochromatiques. Le modèle à deux flux intègre ces champs sur toutes les longueurs d'onde, pour ne considérer finalement que deux flux énergétiques, celui qui se propage dans le sens du flux incident, I, et celui, J, qui suit le sens du flux réfléchi. Les calculs relatifs à ce modèle figurent dans l'annexe 11. C'est pourquoi nous ne donnons ici que la conductivité de rayonnement pour un matériau diffusant de coefficient N et peu absorbant -dont les surfaces en regard ont des émissivités de  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_e$ -, à une température moyenne  $T_m$  :

$$\lambda_r = \frac{4 \sigma T_m^3 e}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_e} - 1 + Ne}$$

Dans sa thèse, R. Dadou [23] a montré la validité de ce modèle simple, en étudiant la transmission d'un rayonnement laser à  $CO_2$  à différentes longueurs d'ondes proches de 10  $\mu m$  à travers des échantillons de matériaux diffusants d'épaisseurs variables. Ses expériences ont corroboré de façon très satisfaisante les résultats du modèle à deux flux.

### 3.4.2 - L'approximation de Rosseland

Il est possible d'écrire l'équation de transfert radiatif dans un mur traversé par un flux de luminance, en calculant un bilan sur cette luminance  $L_\lambda$  monochromatique selon l'axe x :

$$\frac{dL_\lambda}{dx} = -(\kappa_\lambda + \sigma_\lambda) L_\lambda(x) + n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^0(T) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{\Omega} L'_\lambda(x, \Delta') p_\lambda(\Delta, \Delta') d\Omega$$

où  $\sigma_\lambda$  et  $\kappa_\lambda$  sont les coefficients de diffusion et d'absorption,  $L_\lambda^0$  la luminance du corps noir,  $p_\lambda(\Delta, \Delta')$  la «fonction de phase»,  $n_\lambda$  l'indice du milieu -toutes ces grandeurs étant monochromatiques-, et  $d\Omega$  l'élément d'angle solide. Rosseland [24] a intégré cette équation dans le cas où le milieu est «optiquement épais», c'est-à-dire qu'il suppose que le libre parcours moyen des photons dans le matériau est petit devant l'épaisseur de celui-ci. On se trouve dans le domaine de l'approximation de Rosseland. Si on note  $x$  l'abscisse du milieu, et  $\beta_r$  le coefficient efficace d'extinction de Rosseland, le flux radiatif  $q^r$  s'exprime par la formule :

$$q^r(x) = - \frac{4\sigma}{3\beta_r} \frac{d(n^2 T^4)}{dx}$$

Si l'indice du milieu  $n$  est constant alors on peut calculer une conductivité radiative équivalente  $\lambda_r$  :

$$\lambda_r = \frac{16n^2\sigma T^3}{3\beta_r}$$

S.N. Shorin [25] a utilisé l'approximation de la diffusion dans le cas où le milieu admet des bords d'émissivités monochromatiques connues  $\varepsilon_{1\lambda}$  et  $\varepsilon_{2\lambda}$ , définissant le modèle de Rosseland modifié. Le flux radiatif peut s'exprimer simplement si l'on moyenne les valeurs des émissivités sur tout le spectre du rayonnement et que l'on considère  $\tau$  l'épaisseur optique :

$$q^r = \frac{n^2(\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4)}{\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

### 3.4.3 - Comparaison des approximations

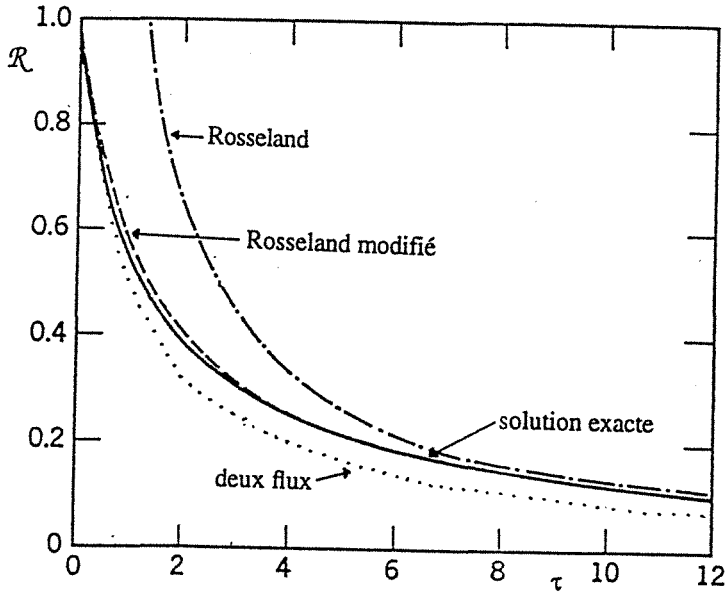
Pour chacun des modèles à deux flux, de Rosseland et de Rosseland modifié, et pour des émissivités de bords égales à l'unité, on peut écrire les rapports :  $\mathcal{R} = \frac{q^r}{n^2(\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4)}$  en fonction de l'épaisseur optique  $\tau$  :

$$\text{deux flux} \quad \frac{1}{1 + \tau}$$

$$\text{Rosseland} \quad \frac{4}{3\tau}$$

$$\text{Rosseland modifié} \quad \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\tau}$$

H.C. Hottel [26] a calculé la valeur exacte du rapport  $\mathcal{R}$  en fonction de l'épaisseur optique, et nous reportons sur la figure suivante les différents résultats :



Nous constatons que pour les fortes épaisseurs optiques, le modèle à deux flux ne diffère de la solution exacte que d'un facteur  $4/3$ .

N. Özisik a recensé de nombreux autres types d'approximations en développant chacun dans le détail, et les a tous comparés [27].

#### IV - COUPLAGE DES MODES DE TRANSFERT

Jusqu'à ce point de l'exposé, les phénomènes de conduction (solide ou gazeuse) et de rayonnement ont été supposés indépendants l'un de l'autre (découplés), conduisant à des approximations qui ne sont acceptables que pour certains matériaux. Il n'en est rien dans la réalité, bien entendu. On conçoit aisément que dans un mur thermique traversé par un flux de chaleur -radiatif et conductif-, un rayonnement atteignant une particule va en partie échauffer celle-ci, modifiant localement le champ de température. Cette modification affecte le flux conductif à travers le matériau, démontrant ainsi qu'il y a couplage entre les deux modes de transfert.

L'équipe de L.R. Glicksmann aux Etats-Unis s'est attachée à construire des modèles prédictifs de conduction à travers un isolant poreux semi-transparent [28,29], en se basant sur les travaux de Sarofim [30]. Constatant que les modèles opaques étaient inadaptés aux polyuréthanes de faible épaisseur de masse volumique  $\rho$ , ils ont décidé d'adopter une démarche «microscopique» : les pores sont modélisés par des dodécaèdres pentagonaux réguliers, la masse de polymère se partage entre les parois des cellules -d'épaisseur de l'ordre du micron- et les arêtes communes à plusieurs cellules -formant des cylindres de base triangulaire équilatérale de côté  $a$ , de masse volumique  $\rho_s$ -, en deux fractions, respectivement  $f_p$  et  $f_s = 1 - f_p$ . Ils ont calculé, par des considérations géométriques, la longueur d'arêtes, ou de traverses, par

unité de volume de la mousse,  $L$ , en fonction du diamètre des sphères circonscrites aux dodécaèdres pentagonaux réguliers. Alors :

$$a = \sqrt{\frac{f_s \frac{\rho}{\rho_s}}{0,29 L}} \quad \text{avec } L = \frac{8,62}{d^2}, \rho \text{ et } \rho_s \text{ en kg/m}^3$$

et le coefficient d'extinction des traverses vaut :

$$K_{\text{trav}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{f_s \frac{\rho}{\rho_s}} L = \frac{3,67}{d} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}} \quad \text{si } f_s = 80\%$$

Donc pour une masse volumique de polymère de  $1242 \text{ kg/m}^3$  et pour le diamètre  $d$  exprimé en mm, ils ont évalué :

$$K \text{ (cm}^{-1}\text{)}_{\text{trav}} = \frac{1,04 \sqrt{\rho}}{d}$$

En reportant cette valeur dans la formule de Rosseland, ils ont obtenu :

$$\lambda_r = \frac{16 \sigma T^3}{3 K} = \frac{16 \sigma T^3 d}{3 \times 3,67 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}}} = 14 d \text{ (mW/m/K)} \quad \text{si } \begin{array}{l} \rho = 31 \\ \rho_s = 1242 \\ T = 300 \text{ K} \end{array}$$

Il est bien évident que pour établir cette formulation de la conductivité radiative des mousses, les auteurs ont été contraints à supposer connus un certain nombre de paramètres, dont la fraction de polymère contenue dans les arêtes, pourcentage très difficile à appréhender et dont l'influence est grande sur la valeur finale. On peut rapprocher ce résultat de celui de H. Etienne, G. Roux et D. Billerey [31], qui ont mesuré  $\lambda_r$  sur une mousse de P.U.R. :

$$\lambda_r = 8 d \text{ (mW/m/K)} \quad \text{dans des conditions similaires}$$

Ceci montre la difficulté à établir de telles corrélations entre le diamètre des cellules et la conductivité radiative.

Dans un article plus récent [32], R. Glicksman a établi que :

$$\lambda_{\text{global}} = \varepsilon' \lambda_g + \left(\frac{2}{3} - \frac{f_s}{3}\right) (1 - \varepsilon') \lambda_{\text{sol}} + \frac{16 \sigma T^3}{3} \left[ \frac{4,1 \sqrt{f_s \frac{\rho}{\rho_s}}}{d} + \frac{(1 - f_s) \rho}{\rho_s} K_w \right]^{-1}$$

où  $\varepsilon'$  désigne la porosité de la mousse et  $K_w$  le coefficient d'extinction du polymère solide moyenné sur toutes les longueurs d'onde, qui est de l'ordre de  $1600 \text{ cm}^{-1}$  (le  $\text{cm}^{-1}$  est une unité utilisée pour le rayonnement en infra-rouge).

Si l'on injecte des valeurs classiques pour le polyuréthane rigide dans cette formule, les parts relatives des différents modes de transfert de la chaleur sont :

conduction du gaz	conduction solide	rayonnement
54 %	17 %	29 %

J. Kuhn *et al* ont quant à eux [33] usé de la théorie de Mie où cylindres infinis et plaques modélisent les cellules de la mousse, pour déterminer la part de transfert radiatif dans les mousses de polyuréthane rigide et de polystyrène expansé, et sont arrivés à des résultats analogues à ceux présentés par l'équipe précédente.

Signalons la communication de R. Viskanta et M.P. Mengüç [34], qui récapitule les méthodes utilisées par différents auteurs pour modéliser le



couplage entre conduction phonique et rayonnement, avec les équations correspondantes.

Nous pouvons donc voir que les modèles qui tiennent compte du couplage entre les deux modes de transfert sont très difficiles à mettre en œuvre, à cause du nombre important de paramètres à injecter. Si toutes ces formulations se veulent prédictives, elles ne peuvent en aucun cas se prêter à un calcul d'identification, c'est-à-dire à un calcul permettant de retrouver les valeurs des paramètres à partir d'expériences réelles de mesures de conductivité.



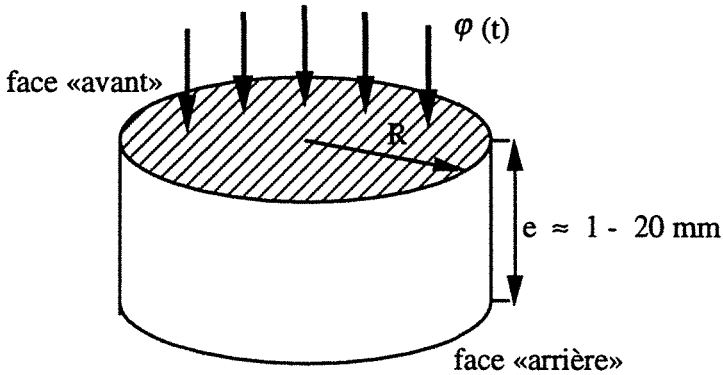
***METHODE FLASH***



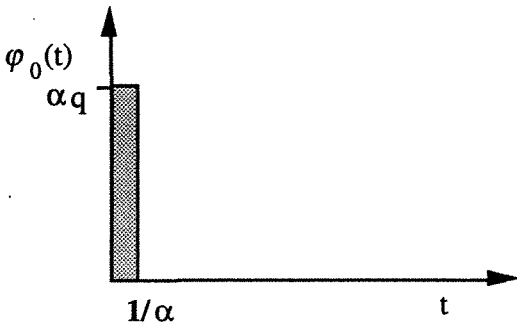
Dans cette partie, nous exposons brièvement le principe de la méthode flash, puis développons des modèles classiques correspondant à des milieux purement conductifs. Nous exposons ensuite des nouveaux modèles, développés pour des corps semi-transparents diffusants et peu absorbants, au sein desquels la chaleur se propage par conduction et par rayonnement. Nous introduisons ensuite des variantes des modèles précédents, qui font intervenir des termes correctifs.

### I - PRINCIPE DE LA METHODE

Le principe de la méthode flash repose sur l'analyse (en régime instationnaire) de la température de la face «arrière» d'un échantillon (généralement de forme cylindrique) initialement à l'équilibre avec la température extérieure, soumis à une sollicitation thermique sur sa face «avant», conformément à la figure :



La sollicitation est réalisée par un flash -d'où le nom de la méthode- dont la durée est de l'ordre de la milliseconde, et que l'on modélise par une distribution de Dirac :



où  $\alpha$  tend vers  $\infty$

Signalons qu'il est tout-à-fait possible d'analyser la température de la face supérieure de l'échantillon, ou de solliciter le matériau par un échelon de température par exemple -auquel cas on parle de «touchau» [35]-, ou d'utiliser des géométries non cylindriques.

## II - MODELES CLASSIQUES

### 2.1 - Modèle analytique simple

W. J. Parker *et al* [36] ont imaginé un mur de surface infinie et d'épaisseur  $e$  connue, initialement à l'équilibre thermique. Sur une de ses faces, est appliqué un pic de chaleur (flash). Aux temps proches de zéro, toute l'énergie  $Q$  du flash est emmagasinée dans une tranche très fine du mur, pour être diffusée à travers toute l'épaisseur ensuite. Si l'on suppose les caractéristiques physiques du matériau constantes dans le temps et dans l'espace, la diffusivité thermique, rapport de la conductibilité  $\lambda$  à la capacité calorifique volumique  $\rho C$ , ou aptitude d'un milieu à faire diffuser la chaleur, est constante,  $a$ . Dans l'annexe 2, nous avons calculé le champ de température dans le milieu en fonction du temps  $t$  et de la profondeur  $x$  de la tranche considérée a pour expression :

$$T(x, t) = \frac{Q}{\rho C e} \left[ 1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{e} \exp(-n^2 \pi^2 \frac{at}{e^2}) \right]$$

Si l'on s'intéresse à la température de la face opposée à celle qui a reçu l'énergie calorifique du flash, il suffit d'écrire cette formule pour une profondeur  $x$  égale à  $e$  :

$$T(e, t) = \frac{Q}{\rho C e} \left[ 1 - 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \frac{at}{e^2}) \right]$$



## 2.2 - Modèle de Parker

En 1962, W. J. Parker et R. J. Jenkins [37] ont eu l'idée d'utiliser un outil mathématique maintenant très prisé pour les problèmes instationnaires, la transformation de Laplace. Ils ont exploité l'analogie que l'on peut établir entre une différence de potentiel et une température, et entre une intensité électrique et une densité surfacique de flux de chaleur. De cette façon, un mur thermique homogène et isotrope de caractéristiques  $\lambda$ ,  $a$ , d'épaisseur  $e$ , peut être assimilé à une simple fonction de transfert entre les transformées de Laplace des températures et densités de flux entrant ( $\theta_0$  et  $\varphi_0$ ) et sortant ( $\theta_e$  et  $\varphi_e$ ) du mur, comme nous l'avons montré dans l'annexe 3. Ainsi un mur se modélise par le quadripôle :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

où

$$\mathcal{A} = \text{ch}(\alpha)$$

$$\mathcal{B} = \Omega \frac{\text{sh}(\alpha)}{\alpha}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\Omega} \alpha \text{sh}(\alpha)$$

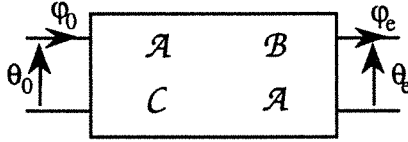
$$\mathcal{D} = \text{ch}(\alpha)$$

$$\Omega = \frac{e}{\lambda}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{pe^2}{a}}$$

$p$  désigne la variable de Laplace.

On peut représenter schématiquement le mur thermique par :



On suppose que le mur est parfaitement isolé, ce qui implique que les flux qui en sortent ou qui y entrent sont tous nuls, à l'exception de l'apport du flash bien entendu. Ainsi,  $\varphi_e$  est nul, et de la relation linéaire entre  $\theta_0$  et  $\varphi_0$  et  $\theta_e$  et  $\varphi_e$  on tire :

$$\theta_e = \frac{\varphi_0}{C}$$

En remplaçant le facteur  $C$  par sa valeur, en remarquant que la transformée de Laplace de la distribution associée au flash est simplement  $Q$  et en utilisant les variables adimensionnelles -répertoriées au début de ce mémoire-, on trouve finalement :

$$\theta_e = \frac{Q e}{\lambda \sqrt{p^*} \operatorname{sh}\sqrt{p^*}} = \frac{Q e}{\lambda} \theta_e^*$$

Soit donc :

$$T_e = \frac{Q e}{\lambda} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p^*} \operatorname{sh}\sqrt{p^*}}\right) = \frac{Q e}{\lambda} T_e^*$$

Nous avons vérifié numériquement que les expressions de ce modèle de Parker et du modèle analytique, même si elles semblent fort différentes, mènent à des résultats identiques.

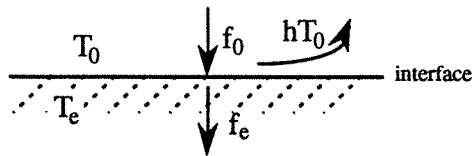
### 2.3 - Modèle incluant les pertes calorifiques

L'hypothèse selon laquelle le mur que nous considérons est isolé est irréalisable en pratique, c'est-à-dire qu'il existe toujours des déperditions de chaleur sur les deux surfaces. Ces pertes, si l'écart de température entre le mur et l'air extérieur  $\Delta T$  est faible, sont proportionnelles à un coefficient  $h$  (qui traduit les pertes et par convection et par rayonnement) et à  $\Delta T$ . W. J. Parker et R. J. Jenkins ont résolu analytiquement [37] le problème, et ont trouvé :

$$T(e, t) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{Q}{\rho C e} \frac{(h^{*2} + \alpha_n^2) \cos \alpha_n}{h^{*2} + h^* + \alpha_n^2} \exp\left(-\frac{\alpha_n^2}{e^2} t\right)$$

où  $\alpha_n$  est solution de l'équation  $\alpha \operatorname{tg} \alpha = h^*$  et où  $h^* = \frac{he}{\lambda}$

Tout comme le mur a été modélisé par un quadripôle, nous allons associer un quadripôle aux pertes; en effet, soit un flux  $f_0$  qui arrive sur une interface à la température  $T_0$ , comme sur la figure :

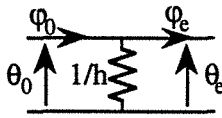


La présence des pertes n'affecte en rien la température  $T_e$  de la tranche de matériau située juste derrière l'interface -qui est donc égale à  $T_0$ -, mais sépare  $f_0$  en deux parties, une  $-f_e-$  qui traverse l'interface et qui pénètre dans le matériau, et une autre qui vaut  $hT_0$  qui est absorbée par

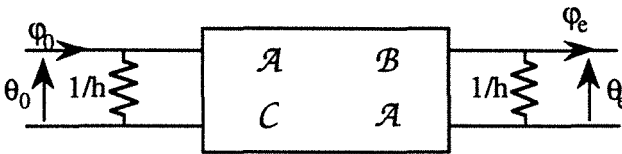
l'extérieur. Dans le cas où la température d'équilibre égale la température extérieure en  $t=0$ , le tenseur associé aux pertes a donc la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

Et le schéma qui traduit l'analogie électrique est :



Par conséquent, nous pouvons représenter l'ensemble constitué par le mur et les pertes sur ses deux faces par :



Le tenseur correspondant à une association de quadripôles en cascade est le produit des tenseurs de chaque élément. Ainsi, pour l'ensemble :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}h & \mathcal{B} \\ 2\mathcal{A}h + \mathcal{C} + \mathcal{B}h^2 & \mathcal{A} + \mathcal{B}h \end{bmatrix}$$

Les pertes étant déjà prises en compte dans ce nouveau quadripôle, on peut tout comme dans le paragraphe précédent écrire que le flux sortant est nul et alors :

$$\theta_e = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{2Ah + C + Bh^2}$$

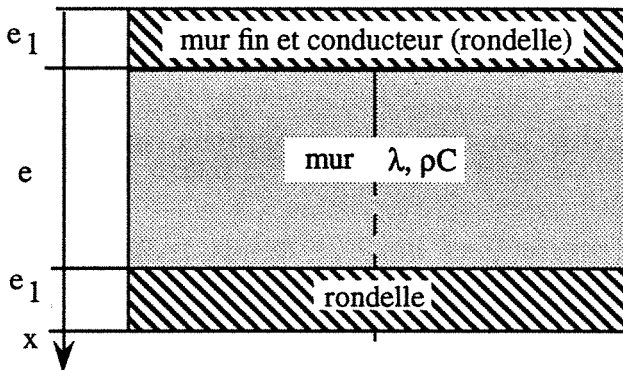
En usant des changements de variables habituels, on trouve :

$$T_e = \frac{Q e}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{h^{*2} \frac{\text{sh}\sqrt{p^*}}{\sqrt{p^*}} + 2h^* \text{ch}\sqrt{p^*} + \sqrt{p^*} \text{sh}\sqrt{p^*}} \right) = \frac{Q e}{\lambda} T_e^*$$

soit finalement 
$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha+h^*)^2 - [(\alpha-h^*) e^{-\alpha}]^2} \right) \quad \text{où } \alpha = \sqrt{p^*}$$

2.4 - Modèle «sandwich»

Imaginons à présent que le mur thermique de caractéristiques  $\rho C$  et  $\lambda$ , d'épaisseur  $e$ , soit disposé entre deux murs fins ( $\rho_1 C_1$  et  $\lambda_1, e_1$ ) d'un matériau très bon conducteur, comme sur la figure :



Introduisons maintenant les variables qui seront utilisées tout au long de ce mémoire :

$k_0 = \rho_0 C_0 e_0 = \rho C e$	capacité surfacique du mur
$k_1 = \rho_1 C_1 e_1$	capacité surfacique des rondelles
$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}$	résistance thermique du mur
$\Omega_1 = \frac{e_1}{\lambda_1}$	résistance des rondelles

Il est possible d'associer un quadripôle à chacune des rondelles :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ C_1 & \mathcal{A}_1 \end{bmatrix}$$

où

$\mathcal{A}_1 = \text{ch}(\alpha_1)$	
$\mathcal{B}_1 = \Omega_1 \frac{\text{sh}(\alpha_1)}{\alpha_1}$	$\Omega_1 = \frac{e_1}{\lambda_1}$
$C_1 = \frac{1}{\Omega_1} \alpha_1 \text{sh}(\alpha_1)$	$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\rho e_1^2}{a_1}}$

Or :

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\rho e_1^2}{a_1}} = \sqrt{\rho k_0 \Omega \frac{k_1 \Omega_1}{k_0 \Omega}} = \sqrt{\rho^* \gamma}$$

$\Omega_1$  est petit et  $\gamma$  est très petit devant 1 dès que le mur est peu conducteur et épais par rapport aux rondelles, ce qui est le cas lorsque par exemple on emprisonne un cylindre de mousse isolante entre deux feuilles de cuivre.

Dans cette hypothèse :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{ est petit donc } \quad \text{ch}\alpha_1 &\approx 1 \\ &\text{sh}\alpha_1 \approx \alpha_1 \\ \frac{1}{\Omega_1} \alpha_1 \text{sh}\alpha_1 &\approx \frac{\alpha_1^2}{\Omega_1} = \text{pk}_1 \end{aligned}$$

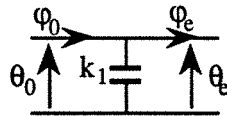
Et par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &\approx 1 \\ \mathcal{B}_1 &\approx 0 \\ \mathcal{C}_1 &\approx \text{pk}_1 \end{aligned}$$

Donc le tenseur associé à chaque rondelle est :

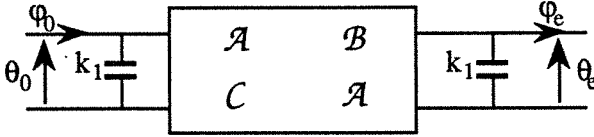
$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{pk}_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ceci est la représentation quadripolaire d'une capacité électrique disposée comme suit :



Physiquement, les rondelles se comportent effectivement comme des simples condensateurs thermiques, c'est-à-dire qu'elles peuvent emmagasiner de l'énergie et leur température est la même sur leurs deux faces.

L'association dite du «sandwich» se schématise donc par :



Et son tenseur associé est :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_{1p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ C & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_{1p} & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B} k_{1p} & \mathcal{B} \\ 2\mathcal{A} k_{1p} + C + \mathcal{B}(k_{1p})^2 & \mathcal{A} + \mathcal{B} k_{1p} \end{bmatrix}$$

A l'instar de ce qui a été écrit aux paragraphes précédents, on exprime la transformée de Laplace de la température de «sortie» du nouveau quadripôle :

$$\theta_e = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{2\mathcal{A} k_{1p} + C + \mathcal{B}(k_{1p})^2}$$

En utilisant les variables réduites, on obtient :

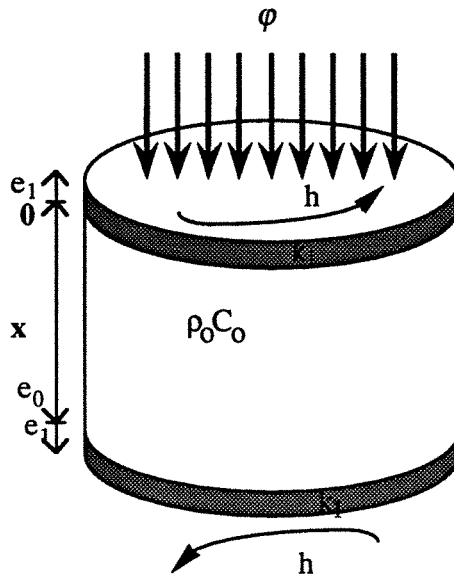
$$T_e = \frac{Q e}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{(k_{1p})^2 \frac{\text{sh}\sqrt{p^*}}{\sqrt{p^*}} + 2k_{1p} \text{ch}\sqrt{p^*} + \sqrt{p^*} \text{sh}\sqrt{p^*}} \right) = \frac{Q e T_e^*}{\lambda}$$

soit finalement  $T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{\left( \alpha + \frac{k_{1p}}{k_0} p^* \right)^2 - \left[ \left( \alpha - \frac{k_{1p}}{k_0} p^* \right) e^{-\alpha} \right]^2} \right)$  où  $\alpha = \sqrt{p^*}$

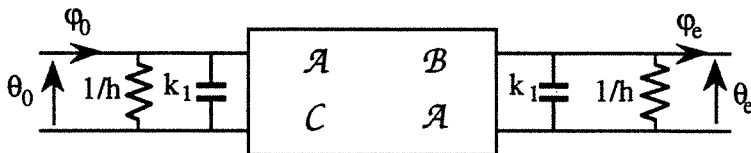


2.5 - Modèle monodimensionnel ou modèle 1D

Dans ce modèle, on considère un échantillon de matériau emprisonné entre deux rondelles d'une substance très conductrice et de faible épaisseur, à la surface desquelles ont lieu des déperditions de chaleur avec un coefficient  $h$ . Dans l'annexe 4, nous avons directement résolu le problème, schématisé par la figure suivante :



Le quadripôle représentant l'association des rondelles et des pertes thermiques est, compte tenu de ce que nous avons écrit plus haut :



Donc pour l'ensemble :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ C & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

$$\text{soit} \quad \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

Après calculs, on trouve :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} + (h+k_1 p)\mathcal{B} & \mathcal{B} \\ (h+k_1 p)^2 \mathcal{B} + 2(h+k_1 p)\mathcal{A} + C & \mathcal{A} + (h+k_1 p)\mathcal{B} \end{bmatrix}$$

On peut calculer la transformée de Laplace de la température de «sortie» de cet ensemble :

$$\theta_e = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{(h+k_1 p)^2 \mathcal{B} + 2(h+k_1 p)\mathcal{A} + C}$$

En utilisant les variables réduites, on obtient finalement :

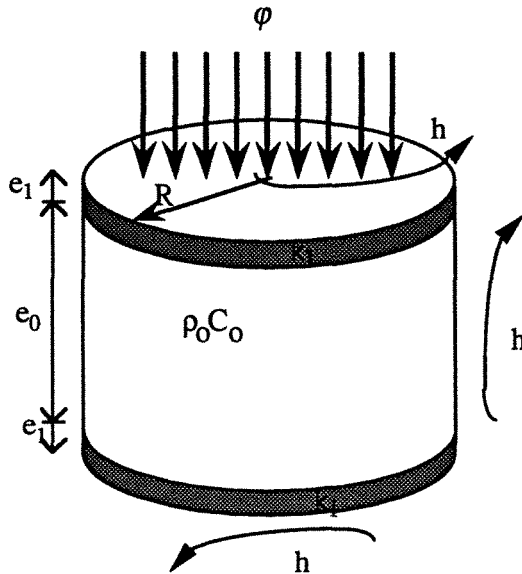
$$T_e^* = \frac{T_e}{\Omega Q} \quad \text{et} \quad \text{si} \quad \alpha = \sqrt{p^*}$$

$$X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

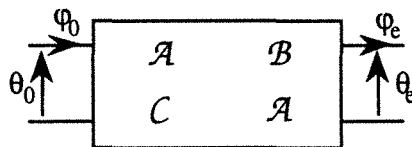
$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha+X)^2 - [(\alpha-X) e^{-\alpha}]^2} \right)$$

2.6 - Modèle de l'ailette

On suppose maintenant qu'il existe des déperditions de chaleur sur la surface latérale de l'échantillon, avec le même coefficient  $h$  que sur les rondelles supérieure et inférieure, comme le montre la figure suivante :



Dans l'annexe 5, nous résolvons directement ce problème et dans l'annexe 3, nous avons démontré que l'échantillon seul, avec les pertes de chaleur latérales, peut se modéliser par un quadripôle :



Les valeurs des trois coefficients sont :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \text{ch}(\alpha) & \Omega &= \frac{e}{\lambda} \quad \text{et} \quad R^* = \frac{R}{e} \\
 \mathcal{B} &= \Omega \frac{\text{sh}(\alpha)}{\alpha} & \alpha &= \sqrt{\frac{pe^2}{a} + 2 \frac{h^*}{R^*}} \\
 \mathcal{C} &= \frac{1}{\Omega} \alpha \text{sh}(\alpha)
 \end{aligned}$$

On voit donc que le modèle complet de l'ailette se ramène au modèle 1D, moyennant simplement des valeurs différentes du terme  $\alpha$ . Si nous utilisons le jeu de variables réduites, on trouve :

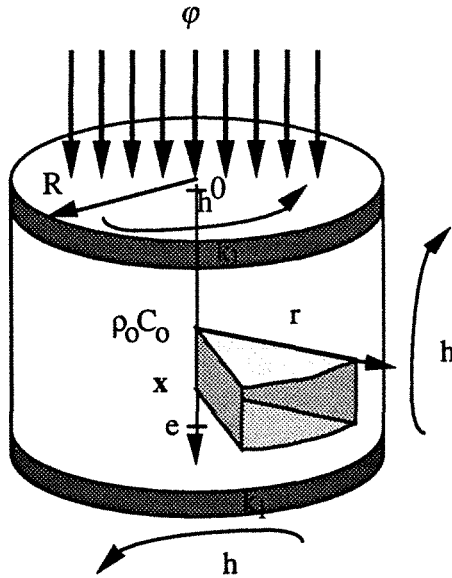
$$T^*_e = \frac{T_e}{\Omega Q} \quad \text{et} \quad \text{si} \quad \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{p^* + 2 \frac{h^*}{R^*}} \\ X &= \frac{k_1}{k_0} p^* + h^* \end{aligned}$$

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha+X)^2 - [(\alpha-X) e^{-\alpha}]^2} \right)$$

Dans l'annexe 6, nous avons retrouvé la formulation du quadripôle représentant un mur thermique simple, en considérant qu'un matériau est une succession de résistances et de capacités élémentaires.

### 2.7 - Modèle 2D

Dans ce modèle, nous supposons l'échantillon enserré entre deux rondelles à la surface desquelles existent des déperditions de chaleur (coefficient  $h$ ). Sur la surface latérale du cylindre, ont lieu les mêmes déperditions, comme le montre le schéma de la page suivante :



Nous considérons cette fois le transfert de chaleur bidirectionnel dans le matériau, conduisant à l'équation :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans l'annexe 7, nous avons résolu le problème pas à pas, et, si l'on utilise les variables adimensionnelles usuelles, on trouve que la température de la face arrière de l'ensemble formé par les rondelles et le matériau a pour expression :

$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \beta^*_n e^{-\beta^*_n}}{\alpha^{*2}_n \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] \left[ (\beta^*_n + X)^2 - (\beta^*_n - X)^2 e^{-2\beta^*_n} \right]} \right)$$

si l'on utilise les variables mentionnées à la page suivante.

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

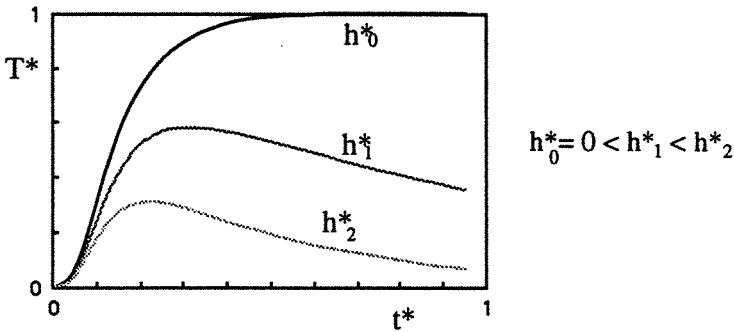
$$p^* = p \Omega k_0 \quad , \quad R^* = \frac{R}{e_0} \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha^*_n = \frac{h^* J_0(\alpha^*_n R)}{J_1(\alpha^*_n R)} \quad \text{et} \quad \beta^*_n = \sqrt{\alpha^{*2}_n + p^*}$$

$$\overline{\theta^*_e} = \frac{\overline{\theta_e} R^{*2}}{4 \Omega Q} \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

2.8 - Allure générale des thermogrammes

Les modèles que nous exploiterons par la suite sont les modèles unidirectionnel 1D, de l'ailette, et bidirectionnel 2D, car ce sont eux qui correspondent aux expériences effectivement menées. Les courbes résultant des simulations ont l'allure suivante :



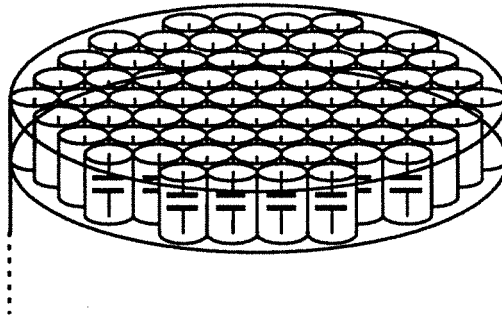
quels que soient les modèles (1D, ailette, 2D) utilisés. Lorsque \$h^\*\$ est non nul, les thermogrammes admettent un maximum.

Remarquons qu'au voisinage de l'instant initial, \$\frac{\partial T^\*}{\partial t^\*}\$ est toujours nul.

### 2.9 - Approximations dans les modèles ailette et 2D

Nous notons que les réponses des modèles ailette et 2D sont assez proches l'une de l'autre pour les mêmes valeurs du nombre de Biot  $h^*$ . Cependant, dans chacun de ces modèles, nous avons approximé le transfert de chaleur dans l'échantillon :

- ◆ dans le modèle de l'ailette, comme nous l'avons écrit dans l'annexe 3, nous supposons que chaque tranche de matériau est à une température uniforme et échange de la chaleur avec l'extérieur sur sa périphérie. Il est clair que dans la réalité, existe un gradient radial de température. Intuitivement, on conçoit aisément qu'à une épaisseur donnée dans le matériau, la température sera plus élevée sur l'axe de révolution que sur la surface latérale où ont lieu les déperditions calorifiques.
- ◆ dans le modèle bidirectionnel, nous supposons au contraire que les plaques de cuivre supérieure et inférieure se comportent comme des capacités élémentaires pures, n'ayant aucun lien entre elles (voir l'annexe 7 pour davantage de détails), comme représenté *infra* :



Dans cette disposition, il est clair que les capacités situées à la

périphérie de la rondelle peuvent être à un potentiel différent de celles sises au centre : il existe donc un gradient de température dans les rondelles supérieure et inférieure. Or dans la réalité, ces rondelles sont en cuivre, matériau qui uniformise la température sur les deux faces de l'échantillon.

Il est donc impossible *a priori* de déterminer quel est de ces deux modèles celui qui traduit le moins imparfaitement la réalité du transfert de chaleur.

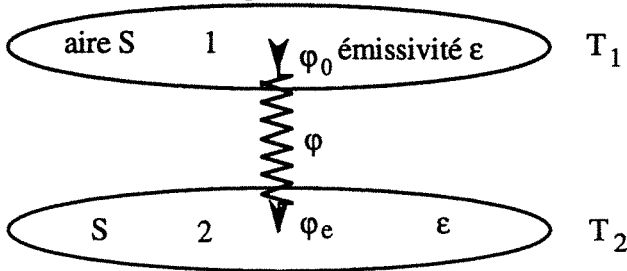


### III - NOUVEAUX MODELES

Nous avons imaginé de modéliser un matériau à travers lequel ont lieu des transferts de chaleur conductif (phonique) et radiatif découplés. Les deux phénomènes étant supposés indépendants l'un de l'autre, un tel matériau est représenté en notation quadripolaire par la mise en parallèle d'un quadripôle conductif semblable à celui que nous avons introduit dans le chapitre précédent, et d'un quadripôle radiatif que nous développons maintenant.

#### 3.1 - Quadripôle de rayonnement

Intéressons-nous au transfert de chaleur uniquement radiatif  $\varphi$  à travers l'échantillon semi-transparent :



Nous savons que le rayonnement est transmis quasiment instantanément d'une face sur l'autre, c'est-à-dire que le matériau se comporte comme une résistance pure en analogie avec l'électrocinétique, si nous linéarisons les expressions du rayonnement. Appelons  $\frac{1}{W}$  cette

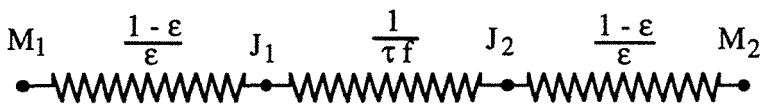
résistance. Avec les notations de la figure ci-dessus, on a :

$$\varphi_0 = \varphi_e = \varphi \quad \text{et} \quad T_e = T_0 - \frac{1}{W} \varphi$$

Il est possible d'écrire ces relations sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

Essayons de détailler la valeur de W : la densité de flux  $\varphi_0$  qui quitte la rondelle supérieure de l'échantillon rencontre une première résistance, dite résistance à l'émission  $\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$  [38] due au fait que l'émissivité de la surface 1 n'est pas égale à l'unité, puis une deuxième correspondant au matériau lui-même,  $\frac{1}{\tau f}$  ( $\tau$  est le taux de transmission à travers le milieu semi-transparent et  $f$  est le facteur d'angle entre les deux surfaces), et enfin une troisième, résistance à l'émission de la deuxième face,  $\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ . Si  $M_1$  et  $M_2$  représentent les émittances du corps noir aux températures  $T_1$  et  $T_2$  et  $J_1$  et  $J_2$  les radiosités des "nœuds" 1 et 2, nous pouvons, par analogie avec l'électricité, schématiser le transfert de chaleur par :



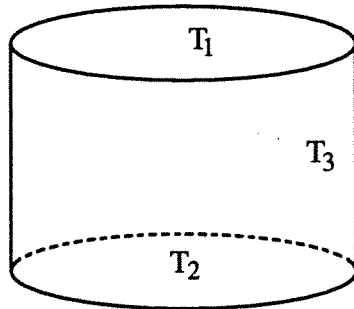
Or l'émittance du corps noir à la température  $T$  est  $\sigma T^4$ , donc si  $T_1$  et  $T_2$  sont assez proches, ( $T_1 - T_2$  est de l'ordre du degré)  $M_1 - M_2 \approx 4\sigma T_m^3 \Delta T$ , et la densité de flux  $\varphi$  qui transite de la face 1 à la face 2 vaut, comme en électrocinétique :

$$\varphi = \frac{M_1 - M_2}{\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \frac{1}{\tau f} + \frac{1-\epsilon}{\epsilon}} = \frac{4\sigma T_m^3 \epsilon \tau f \Delta T}{\epsilon + 2\tau f(1-\epsilon)}$$

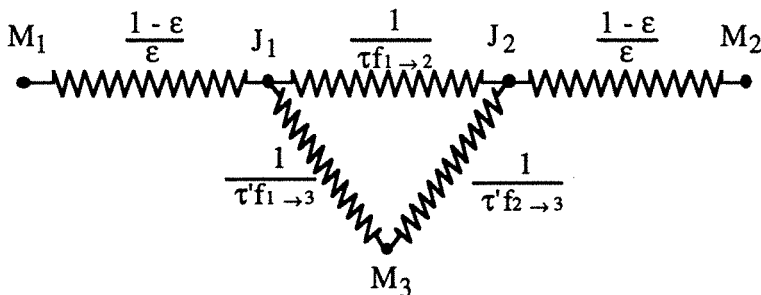
Dans l'annexe 8, nous avons calculé la valeur du facteur de forme  $f$  entre les deux surfaces 1 et 2 :

$$f = 1 - \frac{\sqrt{1 + 4 R^{*2}} - 1}{2 R^{*2}}$$

En fait, il existe trois surfaces, comme le montre la figure :



où  $T_3$  désigne la température extérieure. Un flux radiatif quittant la rondelle 1 se sépare en un flux qui parvient à l'autre rondelle, et un autre qui atteint la surface latérale. Si nous supposons que l'émissivité de la surface latérale, 3, est égale à l'unité, on peut tout comme précédemment tracer le schéma :



$\tau$  est le facteur de transmission à travers toute l'épaisseur  $e$  de

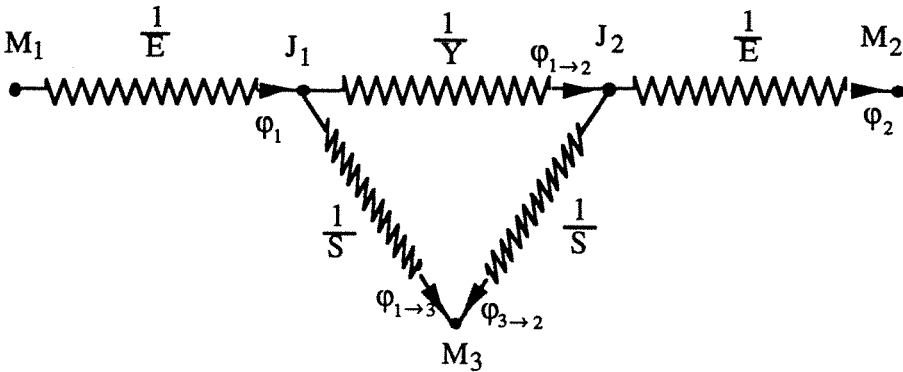
l'échantillon,  $\tau'$  correspond à une transmission moyenne entre une des faces planes et la surface latérale. Or :

$$f_{1 \rightarrow 1} + f_{1 \rightarrow 2} + f_{1 \rightarrow 3} = 1$$

et  $f_{1 \rightarrow 1}$  est nul car la surface 1 est plane donc convexe. Donc :

$$\text{si } f = f_{1 \rightarrow 2} \text{ alors } f_{1 \rightarrow 3} = 1 - f$$

A seule fin de simplifier les notations, on adopte le schéma :



où  $\frac{1}{E} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$  ,  $\frac{1}{Y} = \frac{1}{\tau f}$  et  $\frac{1}{S} = \frac{1}{\tau'(1-f)}$  et appelons  $Z = E + S + Y$

Ecrivons l'équivalent de la loi de Kirchhoff aux nœuds 1 et 2 :

$$\frac{M_1 - J_1}{\frac{1}{E}} + \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{Y}} + \frac{M_3 - J_1}{\frac{1}{S}} = 0$$

$$\frac{M_2 - J_2}{\frac{1}{E}} + \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{Y}} + \frac{M_3 - J_2}{\frac{1}{S}} = 0$$

Ceci se traduit par :

$$\begin{array}{rcl} Z J_1 & -Y J_2 & = E M_1 + S M_3 \\ -Y J_1 & +Z J_2 & = E M_2 + S M_3 \end{array}$$

Et équivaut à :

$$J_1 = \frac{ZE M_1 + YE M_2 + (Z+Y)S M_3}{Z^2 - Y^2}$$

$$J_2 = \frac{YE M_1 + ZE M_2 + (Z+Y)S M_3}{Z^2 - Y^2}$$

Or  $\varphi_1$ , densité de flux nette qui quitte effectivement la face 1 et  $\varphi_2$  qui atteint la face 2 sont donnés par les relations :

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = E (M_1 - J_1) \\ \varphi_2 = E (J_2 - M_2) \end{array}$$

Exprimons le couple  $(M_1, \varphi_1)$  en fonction de  $(M_2, \varphi_2)$ :

$$M_1 = \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} M_2 + \frac{Z^2 - Y^2}{E^2 Y} \varphi_2 - \frac{Z+Y}{YE} S M_3$$

$$\varphi_1 = \frac{(Z^2 - Y^2 - ZE)^2 - (YE)^2}{Y(Z^2 - Y^2)} M_2 + \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} \varphi_2 - \frac{Z^2 - Y^2 - ZE + YE}{Y(Z - Y)} S M_3$$

Soit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} & \frac{Z^2 - Y^2}{E^2 Y} \\ \frac{(Z^2 - Y^2 - ZE)^2 - (YE)^2}{Y(Z^2 - Y^2)} & \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{Z+Y}{YE} \\ \frac{Z^2 - Y^2 - ZE + YE}{Y(Z - Y)} \end{bmatrix} M_3$$

Ecrivons cette égalité en considérant qu'au premier ordre :

$$T_1^3 \approx T_2^3 \approx T_3^3 \approx T_m^3 \text{ et alors :}$$

$$M_1 - M_3 = 4\sigma T_m^3 (T_1 - T_3) \approx 4\sigma T_m^3 \Delta T_1$$

$$\text{et } M_2 - M_3 \approx 4\sigma T_m^3 \Delta T_2$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} & \frac{Z^2 - Y^2}{4\sigma T_m^3 E^2 Y} \\ 4\sigma T_m^3 \frac{(Z^2 - Y^2 - ZE)^2 - (YE)^2}{Y(Z^2 - Y^2)} & \frac{Z^2 - Y^2 - ZE}{YE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

ce qui est l'écriture quadripolaire du rayonnement.

Dans le cas où  $\frac{1}{E}$  tend vers zéro, c'est-à-dire si l'émissivité des faces

1 et 2 est égale à l'unité, le quadripôle devient :

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{S}{Y} & \frac{1}{4\sigma T_m^3 Y} \\ 4\sigma T_m^3 S \left(2 + \frac{S}{Y}\right) & 1 + \frac{S}{Y} \end{bmatrix}$$

Notons que le déterminant de cette matrice vaut 1, ce qui normal compte tenu du fait que le quadripôle est passif. Dans le cas où l'on ne considère pas d'échange possible entre les surfaces 1 et 2 en regard et la surface latérale, S tend vers zéro et le quadripôle s'écrit simplement :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4\sigma T_m^3 Y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et l'on retrouve la formulation :

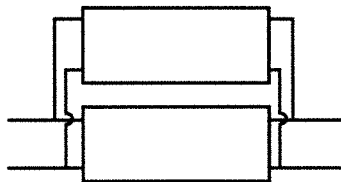
$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

du début de ce chapitre.

Dans la suite, nous considérerons que le quadripôle de rayonnement se réduit à cette dernière expression, «en W».

### 3.2 - Quadripôle résultant

Il est possible de transformer l'association de deux quadripôles en parallèle comme sur la figure :



en un quadripôle équivalent.

Un quadripôle (A,B,C,A) définit une relation du type :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

entre ses vecteurs d'«entrée» et de «sortie».

On peut exprimer le vecteur  $\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ -\varphi_e \end{bmatrix}$  en fonction du vecteur  $\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_e \end{bmatrix}$ , en définissant le tenseur admittance associé au quadripôle.

On passe de l'écriture du quadripôle à celle de l'admittance et *vice-versa* en remarquant que :

$$\text{si } \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} \text{ alors } \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ -\varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{B} & \frac{BC-A^2}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_e \end{bmatrix}$$

$$\text{si } \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ -\varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_e \end{bmatrix} \text{ alors } \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\gamma} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^2 - \beta\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

L'admittance du quadripôle conductif -qui est passif donc  $\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C} = 1$ - est :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}/\mathcal{B} & -1/\mathcal{B} \\ -1/\mathcal{B} & \mathcal{A}/\mathcal{B} \end{bmatrix}$$

L'admittance du quadripôle de rayonnement est :

$$\begin{bmatrix} W & -W \\ -W & W \end{bmatrix}$$

L'admittance de l'association qui nous intéresse dans ce paragraphe est la somme des admittances des deux quadripôles. Par conséquent, l'admittance qui caractérise un milieu conductif et purement diffusant est :

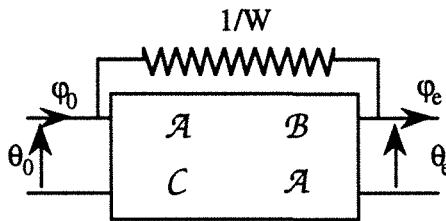


$$\begin{bmatrix} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} + W & -\frac{1}{\mathcal{B}} - W \\ -\frac{1}{\mathcal{B}} - W & \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} + W \end{bmatrix}$$

Dans le quadripôle associé est :

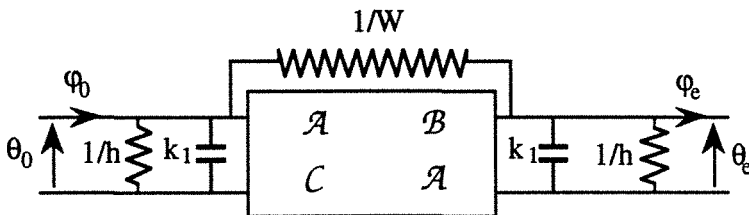
$$\frac{1}{1 + \mathcal{B}W} \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}W & \mathcal{B} \\ C + 2(\mathcal{A} - 1)W & \mathcal{A} + \mathcal{B}W \end{bmatrix}$$

et correspond au schéma :



### 3.3 - Modèle 1DW

Dans ce modèle, on considère un échantillon cylindrique à travers lequel ont lieu un transfert conductif unidirectionnel et un transfert radiatif, enserré entre deux rondelles à la surface desquelles existent des déperditions de chaleur; le schéma équivalent est :



Les tenseur correspondant à cette association est :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + BW} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BW & B \\ C + 2(A-1)W & A + BW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées dans le chapitre II, nous pouvons exprimer la température de «sortie», ou plus exactement la transformée de Laplace de cette température, en fonction du flux d'«entrée». Ainsi :

$$\theta_e = \frac{\varphi_0}{C}$$

En remplaçant C par sa valeur, et en usant des grandeurs adimensionnelles habituelles :

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$p^* = p \Omega k_0 \quad , \quad W^* = W \Omega \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha = \sqrt{p^*} \quad , \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^* \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T}{\Omega Q}$$

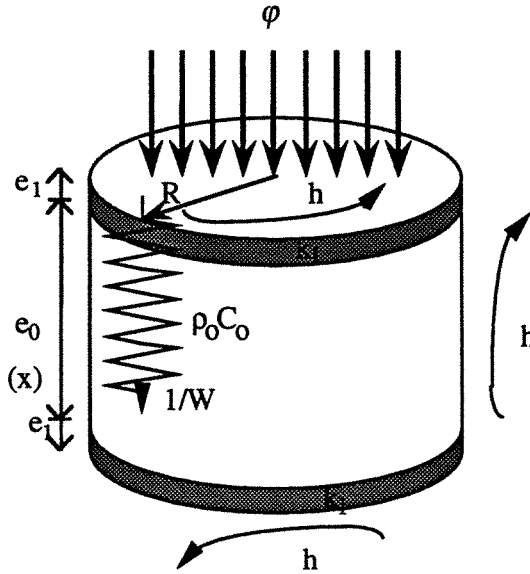
on trouve :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2\alpha + W^*(e^\alpha - e^{-\alpha})] e^{-\alpha}}{[(\alpha + X + W^*) - W^* e^{-\alpha}]^2 - [(\alpha - X - W^*) e^{-\alpha} + W^*]^2} \right)$$

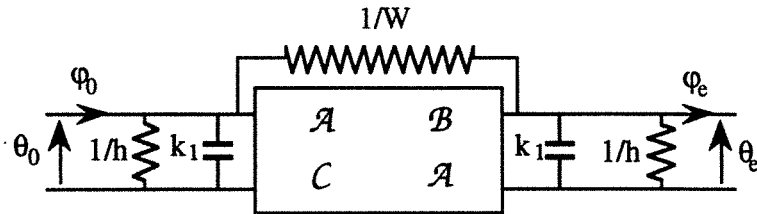
Dans l'annexe 9, nous avons directement résolu le problème, en détaillant toutes les étapes de calcul.

3.4 - Modèle ailette W

Ce modèle est identique au précédent, à ceci près que l'on considère des pertes latérales sur l'échantillon, avec le même coefficient d'échange que sur les rondelles supérieure et inférieure, comme sur le schéma :



Le schéma traduisant l'analogie électrique est :



Comme au paragraphe 3.3, on obtient :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2\alpha + W^*(e^\alpha - e^{-\alpha})] e^{-\alpha}}{[(\alpha + X + W^*) - W^* e^{-\alpha}]^2 - [(\alpha - X - W^*) e^{-\alpha} + W^*]^2} \right)$$

avec cette fois :

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$p^* = p \Omega k_0 \quad , \quad R^* = \frac{R}{e} \quad , \quad W^* = W \Omega \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha = \sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} \quad , \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^* \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T}{\Omega Q}$$

La seule valeur modifiée est  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} \quad \text{au lieu de} \quad \alpha = \sqrt{p^*}$$

### 3.5 - Modèle 2DW

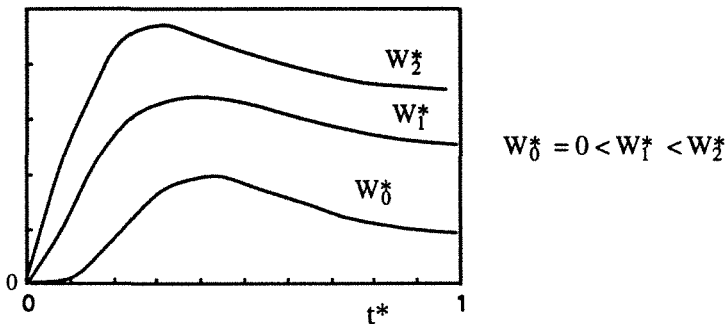
On suppose maintenant l'échantillon enserré entre deux rondelles à la surface desquelles existent des déperditions proportionnelles à  $h\Delta T$ . Sur la surface latérale du cylindre, ont lieu les mêmes pertes thermiques. Chaque élément de surface de la rondelle supérieure échange un flux radiatif avec sa projection orthogonale sur la rondelle inférieure, à travers une résistance  $\frac{1}{W}$ , comme le montre la figure de la page suivante :



Nous avons mené les calculs des modèles 1DW et ailette W en considérant les quadripôles de rayonnement plus complets que nous avons développés au paragraphe 3.1. Les expressions obtenues sont naturellement assez complexes, et font intervenir de nombreux paramètres.

### 3.6 - Allure générale des thermogrammes

Les courbes résultant de simulations utilisant les modèles 1DW, ailette W ou 2DW, ont toutes l'allure suivante :



Remarquons que lorsque le paramètre  $W^*$  est non nul, la tangente au temps initial n'est plus horizontale comme c'était le cas avec les modèles classiques.

Les thermogrammes réalisés avec de la mousse de polyéthylène enserrée entre deux rondelles de cuivre noircies présentent cette particularité, ce qui nous a conduit à développer cette classe de modèles.

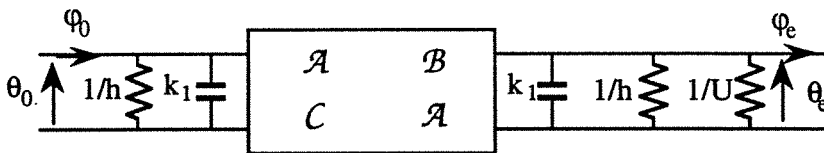
### IV - AUTRES MODELES

Dans cette partie, nous développons des variantes des modèles proposés dans les chapitres II et III, en faisant intervenir des termes correctifs.

#### 4.1 - Modèles en «U»

La mesure de la température de la rondelle inférieure est en pratique réalisée par un thermocouple, qui absorbe une partie de la chaleur accumulée dans la rondelle. Il existe donc un flux thermique entre la rondelle et le thermocouple, proportionnel à un coefficient  $U$  et à l'écart de température entre la rondelle et l'extérieur,  $\Delta T$ . Sur la face inférieure, existent donc les pertes  $(h + U) \Delta T$ , où  $h$  est le coefficient que nous avons introduit dans les chapitres précédents, et qui traduit les pertes par convection et par rayonnement.

♦ Pour les modèles 1D et ailette, cette correction se traduit sur le schéma de l'analogie électrique :



Et en termes de quadripôles :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ C & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ U & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

soit 
$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

Comme à l'accoutumée,  $\varphi_e = 0$ , et alors :

$$\theta_e = \frac{\varphi_0}{C}$$

Si l'on utilise les variables réduites habituelles :

$$k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}, \quad R^* = \frac{R}{e_0}, \quad p^* = p \Omega k_0, \quad h^* = h \Omega \quad \text{et} \quad U^* = U \Omega$$

$$X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^* \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\sqrt{p^*}}{\sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}}} \quad (1D)$$

(aillette)

Alors pour les modèles appelés «1D U» et «aillette U» :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha + X + U^*)(\alpha + X) - (\alpha - X - U^*)(\alpha - X) e^{-2\alpha}} \right)$$

♦ Pour le modèle bidirectionnel, il convient de changer simplement la condition aux limites sur la face inférieure, qui était initialement :

$$\begin{array}{l} \text{en} \\ x = e : \end{array} \quad \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} \\ x = e : \end{array} \quad \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = (h+U) T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} \end{array}$$



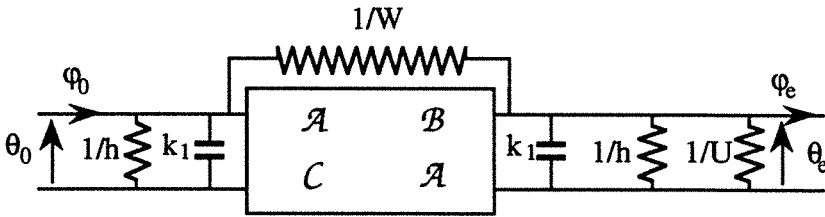
La résolution du nouveau système d'équations nous donne le modèle «2D U» :

$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2\beta^*_n e^{-\beta^*_n} + W^* (1 - e^{-2\beta^*_n})]}{\alpha^{*2}_n \left[ 1 + \frac{\alpha^{*2}_n}{h^2} \right] (\beta^*_n + X + W^*)^2 [(\beta^*_n - X - W^*) e^{-\beta^*_n}]^2 - 4\beta^*_n W^* e^{-\beta^*_n} W^{*2} (1 - e^{-2\beta^*_n})} \right)$$

avec :

$$\alpha^*_n = \frac{h^* J_0(\alpha^*_n R)}{J_1(\alpha^*_n R)}, \quad \beta^*_n = \sqrt{\alpha^{*2}_n + p^*} \quad \text{et} \quad \overline{T^*_e} = \frac{\overline{T_e} R^{*2}}{4 \Omega Q}$$

♦ Pour les modèles 1DW et ailette W, les schémas électriques deviennent :



Et alors on obtient les modèles «1DW U» et «ailette W U» :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + W^* \text{sh} \alpha}{\alpha \text{ch} \alpha [2X + U^* + 2W^*] + \text{sh} \alpha [\alpha^2 + (X + U^*)X + (2X + U^*)W^*] - 2\alpha W^*} \right)$$

♦ Le modèle 2DW est transformé quant à lui en modèle «2DW U» :

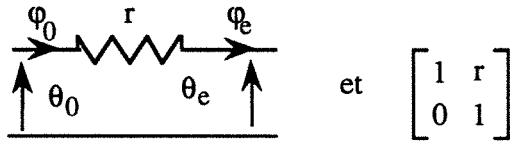
$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n}}{\alpha^{*2}_n \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] [(K_n + 1)(X + W^*) - \beta^*_n (K_n - 1) - W^* (K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n})]} \right)$$

$$\text{avec } K_n = \frac{\beta^*_n e^{-\beta^*_n} - (X + U^* + W^*) e^{-\beta^*_n} + W^*}{\beta^*_n + (X + U^* + W^*) - W^* e^{-\beta^*_n}}$$

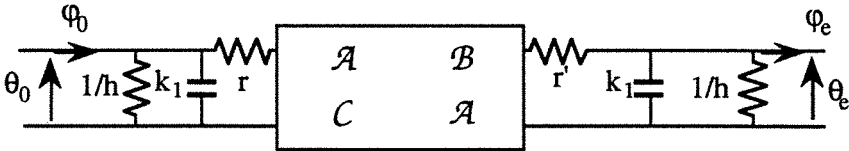
4.2 - Modèles en « r r' »

On peut imaginer que les contacts entre les rondelles de cuivre et le cylindre ne sont pas parfaits, mais caractérisés par deux résistances de contact non nulles r et r'.

Une résistance de contact r se schématise en électrocinétique par :



Les modèles «1D r r'» et «ailette r r'» correspondent par conséquent à l'association de quadripôles :



La température de «sortie» de cet ensemble est donné par :

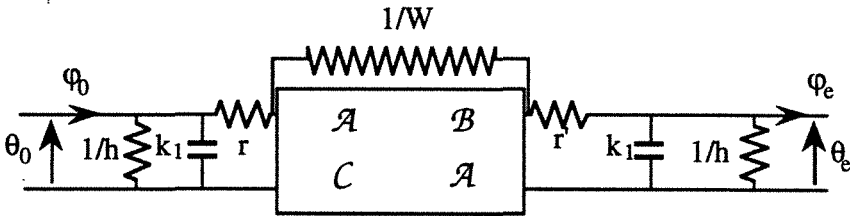
$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{\left( (\alpha+X)^2 + \alpha X [\alpha X P + (X+\alpha) S] \right) - \left( (\alpha-X)^2 + \alpha X [\alpha X P - (X-\alpha) S] \right) e^{-2\alpha}} \right)$$

avec les variables adimensionnelles habituelles et :

$$r^* = \frac{r}{\Omega} , \quad r'^* = \frac{r'}{\Omega} , \quad S = r^* + r'^* \quad \text{et} \quad P = r^* r'^*$$

Nous avons également calculé la réponse des associations :

♦ «1DW r r'» et «ailette W r» :

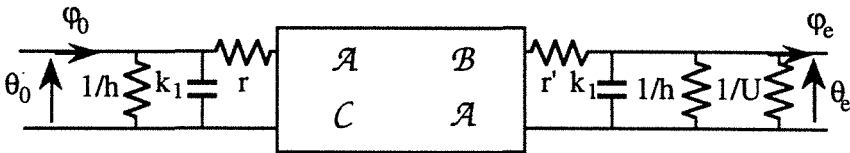


$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + Wsh\alpha}{\alpha sh\alpha (XL + 2KW) + sh\alpha (X^2 + LXW + K\alpha^2) - 2\alpha WK} \right)$$

avec :

$$S = r^* + r'^* , \quad P = r^* r'^* , \quad K = 1 + SX + PX^2 \quad \text{et} \quad L = 2 + SX$$

♦ «1D U r r'» et «ailette U r r'» :

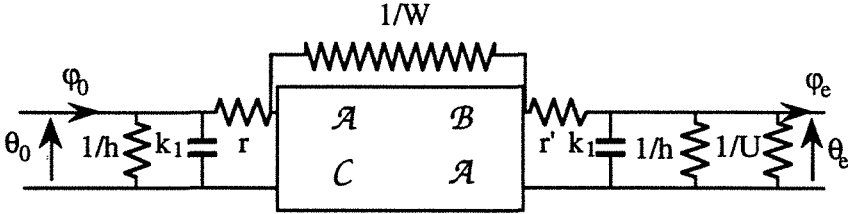


$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2\alpha e^{-\alpha}}{\left( (X+U^*)[\alpha r^* M + N + X] + \alpha(X+M) \right) - \left( (X+U^*)[\alpha r^* M - N + X] - \alpha(X-M) \right) e^{-2\alpha}} \right)$$

avec :

$$S = r^* + r'^* , \quad M = \alpha(1+r^*X) \quad \text{et} \quad N = \alpha(1+UX)$$

◆ «1DW U r r'» et «aillette W U r r'» :



$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + Wsh\alpha}{\alpha sh\alpha (X+Z+2YW^*) + sh\alpha (X(X+U^*)+(X+Z)W^*+\alpha^2Y) - 2\alpha YW^*} \right)$$

avec :

$$Y = [1+r^*(X+U^*)] (1+r'X) \quad \text{et} \quad Z = (X+U^*) (1+SX)$$

Remarquons que lorsque  $U^*$ ,  $r^*$  et  $r'^*$  tendent vers zéro, on retrouve naturellement les formulations des modèles les plus simples.

## V - RECAPITULATIF

Dans ce chapitre, nous récapitulons toutes les expressions de la température adimensionnée de la face arrière de l'échantillon enserré entre deux rondelles de cuivre, après application d'un flash -instantané-d'énergie Q sur la face avant, pour les différents modèles développés aux chapitres II, III et IV.

Dressons la liste des grandeurs adimensionnelles que nous utilisons :

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}, \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$p^* = p\Omega k_0, \quad R^* = \frac{R}{e_0} \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

$$h^* = h\Omega, \quad W^* = W\Omega, \quad U^* = U\Omega, \quad r^* = \frac{r}{\Omega} \quad \text{et} \quad r'^* = \frac{r'}{\Omega}$$

$$S = r^* + r'^*, \quad P = r^* r'^*, \quad K = 1 + SX + PX^2 \quad \text{et} \quad L = 2 + SX$$

$$M = \alpha(1 + r^*X) \quad \text{et} \quad N = \alpha(1 + SX)$$

$$Y = [1 + r'^*(X + U^*)] (1 + r^*X), \quad Z = (X + U^*) (1 + SX)$$

$$\alpha = \sqrt{p^*} \quad \text{dans les modèles du type 1D}$$

$$\sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} \quad \text{dans les modèles du type ailette}$$

$$\alpha_n^* \text{ sont les solutions de } \alpha_n^* = \frac{h^* J_0(\alpha_n^* R^*)}{J_1(\alpha_n^* R^*)} \quad \text{et} \quad \beta_n^* = \sqrt{\alpha_n^* + p^*}$$

dans les modèles du type 2D

$$T^* = \frac{T}{\Omega Q} \quad \text{pour les modèles 1D ou ailette}$$

$$\frac{TR^{*2}}{4\Omega Q} \quad \text{pour les modèles 2D}$$

Dans la suite, nous ne donnerons pas les expressions des températures correspondant au modèle de l'ailette, car elles sont identiques à celles du modèle 1D, moyennant un changement de la valeur de  $\alpha$ .

☞ 1D :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha+X)^2 - [(\alpha-X) e^{-\alpha}]^2} \right)$$

☞ 2D :

$$\overline{T_e^*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \beta_n^* e^{-\beta_n^*}}{\alpha_n^{*2} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_n^*}{h^*} \right)^2 \right] [(\beta_n^*+X)^2 - (\beta_n^*-X)^2 e^{-2\beta_n^*}]} \right)$$

☞ 1DW :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2 \alpha + W^* (e^\alpha - e^{-\alpha})] e^{-\alpha}}{[(\alpha+X+W^*) - W^* e^{-\alpha}]^2 - [(\alpha-X-W^*) e^{-\alpha} + W^*]^2} \right)$$

☞ 2DW :

$$\overline{T_e^*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2 \beta_n^* e^{-\beta_n^*} + W^* (1 - e^{-2\beta_n^*})]}{\alpha_n^{*2} \left[ 1 + \frac{\alpha_n^{*2}}{h^{*2}} \right] [(\beta_n^*+X+W^*)^2 - [(\beta_n^*-X-W^*) e^{-\beta_n^*}]^2 - 4 \beta_n^* W^* e^{-\beta_n^*} - W^{*2} (1 - e^{-2\beta_n^*})]} \right)$$

☞ 1DU :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{(\alpha+X+U^*)(\alpha+X) - (\alpha-X-U^*)(\alpha-X) e^{-2\alpha}} \right)$$

☞ 2DU :

$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \beta^*_n e^{-\beta^*_n}}{\alpha^{*n} 2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] [(\beta^*_n+X)(\beta^*_n+X+U^*) - (\beta^*_n-X)(\beta^*_n-X-U^*) e^{-2\beta^*_n}]} \right)$$

☞ 1DWU :

$$T^*_e = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + W^* \text{sh} \alpha}{\alpha \text{ch} \alpha [2X+U^*+2W^*] + \text{sh} \alpha [\alpha^2 + (X+U^*)X + (2X+U^*)W^*] - 2\alpha W^*} \right)$$

☞ 2DWU :

$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n}}{\alpha^{*n} 2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] [(K_n+1)(X+W^*) - \beta^*_n(K_n-1) - W^*(K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n})]} \right)$$

avec 
$$K_n = \frac{\beta^*_n e^{-\beta^*_n} - (X+U^*+W^*) e^{-\beta^*_n} + W^*}{\beta^*_n + (X+U^*+W^*) - W^* e^{-\beta^*_n}} e^{-\beta^*_n}$$

☞ 1D  $\pi'$  :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{\left\{ (\alpha+X)^2 + \alpha X [\alpha XP + (X+\alpha)S] \right\} - \left\{ (\alpha-X)^2 + \alpha X [\alpha XP - (X-\alpha)S] \right\} e^{-2\alpha}} \right)$$

☞ 1DW  $\pi'$  :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + Wsh\alpha}{\alpha sh\alpha (XL + 2KW) + sh\alpha (X^2 + LXW + K\alpha^2) - 2\alpha WK} \right)$$

☞ 1DU  $\pi'$  :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha e^{-\alpha}}{\left\{ (X+U^*)[\alpha r^* M + N + X] + \alpha(X+M) \right\} - \left\{ (X+U^*)[\alpha r^* M - N + X] - \alpha(X-M) \right\} e^{-2\alpha}} \right)$$

☞ 1DWU  $\pi'$  :

$$T_e^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\alpha + Wsh\alpha}{\alpha sh\alpha (X+Z+2YW^*) + sh\alpha (X(X+U^*) + (X+Z)W^* + \alpha^2 Y) - 2\alpha YW^*} \right)$$

Dans la pratique, nous n'utiliserons que les quatre premiers modèles, les autres ne donnant, dans les conditions actuelles, pas de précision supplémentaire significative.



*IDENTIFICATION*



Dans cette partie, nous exposons la manière d'exploiter conjointement les données d'une expérience flash et les modèles développés dans la partie précédente, pour déduire la conductivité du matériau étudié.



## I - MODELE DE PARKER

La température de la face arrière de l'échantillon s'écrit :

$$T_e(p^*) = \frac{Q e}{\lambda} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p^*} \operatorname{sh}\sqrt{p^*}}\right) = \frac{Q e}{\lambda} T^*_e$$

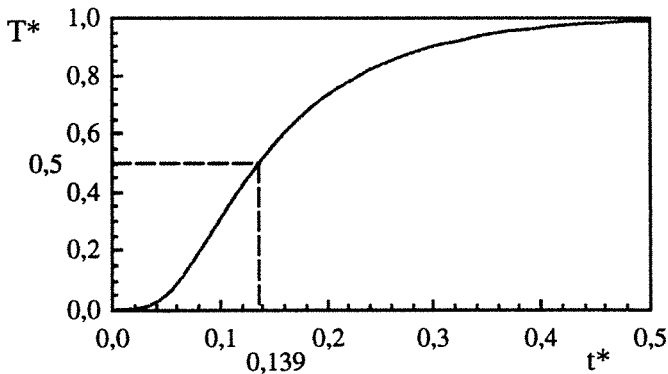
Lorsque toute la chaleur a diffusé dans le matériau, la température alors uniforme, vaut :

$$\frac{Q}{\rho C e} = \frac{Q e}{\lambda} \frac{a}{e^2}$$

$T^*$  varie donc nécessairement entre 0 et 1. La seule variable de la température adimensionnée  $T^*$  est :

$$p^*, \quad \text{avec } p^* = \frac{1}{t^*} \quad \text{et } t^* = \frac{a t}{e^2}$$

Ceci signifie que les thermogrammes adimensionnés sont indépendants de l'échantillon étudié et sont tous de la forme :

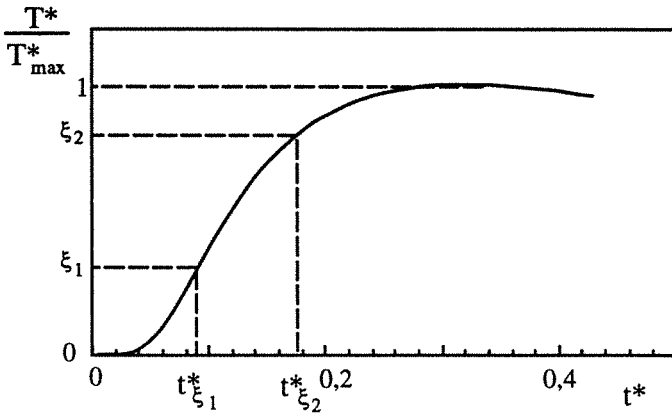


Numériquement, on trouve que la valeur de  $t^*$  pour laquelle  $T^*$  est égale à  $\frac{1}{2}$  est  $t^*_{1/2} = 0,139$ . Nous avons représenté le point correspondant sur la figure ci-dessus. Si on appelle  $t_{1/2}$  le temps au bout duquel la température de la face arrière de l'échantillon a atteint la moitié de sa valeur maximale, la diffusivité thermique est donnée par la formule :

$$a = 0,139 \frac{e^2}{t_{1/2}}$$

## II - MODELES 1D, AILETTE ET 2D

Pour un échantillon donné pacé dans l'air ambiant, existent deux paramètres indéterminés, la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'échange global  $h$ . Pour procéder à leur identification, il est nécessaire de prélever au moins deux points sur la courbe expérimentale : nous mesurons les temps  $t_{\xi_1}$  et  $t_{\xi_2}$  pour lesquels l'élévation de température atteint les fractions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de sa valeur maximale ( $\xi_1 < \xi_2$ ), comme le montre la courbe :

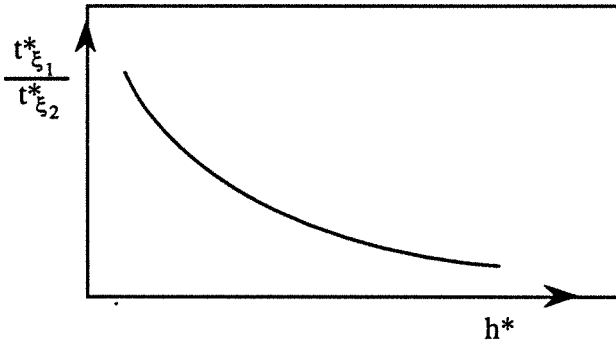


Le thermogramme réduit, quant à lui, ne dépend que d'un seul paramètre,  $h^*$ ,  $\lambda$  étant implicitement pris en compte dans la variable  $t^*$ . Nous utilisons donc le rapport des temps  $t_{\xi_1}$  et  $t_{\xi_2}$  (rapport adimensionnel) pour déterminer  $h^*$ , et l'un de ces deux temps pour connaître  $\lambda$ . Sur la figure de la page suivante, nous avons représenté en

fonction de  $h^*$  l'allure de la variation du rapport :

$$\frac{t^*_{\xi_1}}{t^*_{\xi_2}}$$

où  $t^*_{\xi_1}$  et  $t^*_{\xi_2}$  désignent les temps réduits pour lesquels  $T^*$  vaut respectivement les fractions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de sa valeur maximale :



Nous ajustons la valeur de  $h^*$  dans le thermogramme réduit jusqu'à égaliser les rapports des temps réels et réduits. La forme de la courbe nous montre qu'il n'existe qu'une seule valeur possible pour  $h^*$ . Etant donné que  $t^* = \frac{at}{e^2}$ , la valeur de  $\lambda$  est donnée par :

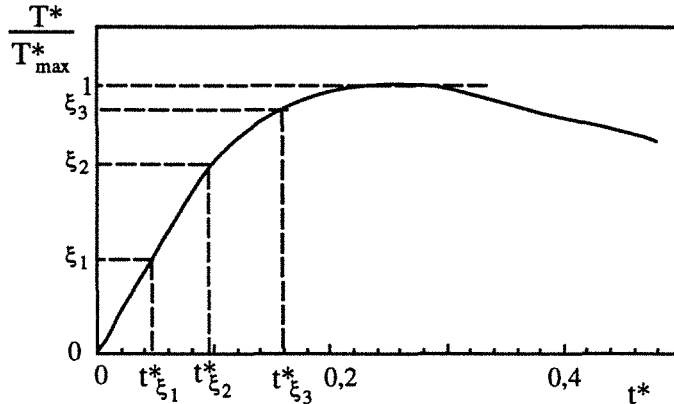
$$\lambda = \frac{t^*_{\xi_1}}{t_{\xi_1}} k_0 e_0$$

Il est clair que le choix de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  est sans importance d'un point de vue purement mathématique - nous discuterons de cela lors de l'étude de la sensibilité.



### III - MODELES «EN W»

Pour une expérience donnée sur un échantillon semi-transparent, trois paramètres sont inconnus :  $\lambda$ ,  $h$  et  $W$ . Avec les mêmes notations que celles employées au chapitre II, nous prélevons sur les thermogrammes expérimentaux les temps  $t_{\xi_1}$ ,  $t_{\xi_2}$  et  $t_{\xi_3}$  pour lesquels l'élévation de température atteint les fractions  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  de sa valeur maximale ( $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ ), comme le montre la figure :



Le thermogramme réduit dépend de deux paramètres uniquement, qui sont  $h^*$  et  $W^*$ . Nous les faisons varier jusqu'à ce que les deux rapports du modèle :

$$\frac{t^*_{\xi_1}}{t^*_{\xi_3}} \quad \text{et} \quad \frac{t^*_{\xi_2}}{t^*_{\xi_3}}$$

égales les rapports expérimentaux :

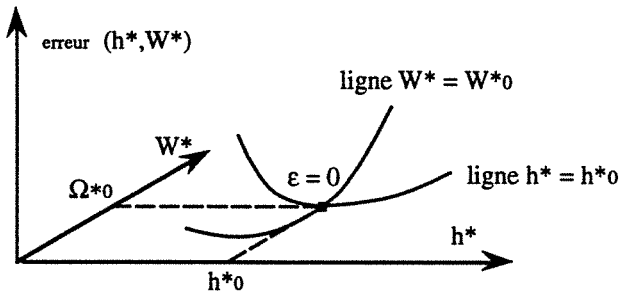
$$\frac{t_{\xi_1}}{t_{\xi_3}} \quad \text{et} \quad \frac{t_{\xi_2}}{t_{\xi_3}}$$

Nous pouvons associer à cette approche une fonction d'erreur :

$$\text{erreur } (h^*, W^*) = \sqrt{\left(\frac{t_{\xi_1}}{t_{\xi_3}} - \frac{t^*_{\xi_1}}{t^*_{\xi_3}}\right)^2 + \left(\frac{t_{\xi_2}}{t_{\xi_3}} - \frac{t^*_{\xi_2}}{t^*_{\xi_3}}\right)^2}$$

La représentation graphique de l'erreur est une surface, comme le montre

la figure :



Le point de coordonnées  $(h^*_0, W^*_0)$  pour lequel la fonction est nulle, est la solution du problème d'identification : pour ces valeurs des paramètres  $h^*$  et  $W^*$ , les rapports correspondant au modèle et à l'expérience sont égaux.

Comme  $t^* = \frac{at}{e^2}$ , la valeur de  $\lambda$  est donnée par :

$$\lambda = \frac{t^*_{\xi_1}}{t_{\xi_1}} k_0 e_0$$

Là encore, le choix des valeurs de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  n'influe pas sur le résultat, d'un point de vue exclusivement mathématique.

celle des moments [40] en modifiant l'expression de la fonction d'erreur en erreur' :

$$\text{erreur}' = \sqrt{\left( \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^{M_1} \frac{t^*_{\xi_i}}{t^*_{\xi_n}}}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^{M_1} \frac{t_{\xi_i}}{t_{\xi_n}}} - 1 \right)^2 - \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^{M_2} \frac{t^*_{\xi_i}}{t^*_{\xi_n}}}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^{M_2} \frac{t_{\xi_i}}{t_{\xi_n}}} - 1 \right)^2}$$

où  $M_1, M_2$  (correspondant à l'ordre des «moments») et la famille  $\alpha_i$ , sont des nombres fixés. Si  $\alpha_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ , alors nous avons effectivement un calcul de moments discrétisés.

Nous avons constaté expérimentalement que l'annulation de erreur et de erreur' survient pour des valeurs des paramètres  $h^*$  et  $W^*$  extrêmement voisines. C'est pourquoi, lorsque nous présenterons nos résultats expérimentaux, nous ne mentionnons que les identifications issues de la première forme d'appréhension de l'erreur.

Il est clair que cette méthode peut s'appliquer aux modèles 1D, ailette ou 2D, pour lesquels un seul paramètre est à déterminer, en posant simplement :

$$\text{erreur}' = \sqrt{\left( \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^M \frac{t^*_{\xi_i}}{t^*_{\xi_n}}}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^M \frac{t_{\xi_i}}{t_{\xi_n}}} - 1 \right)^2}$$

## IV - ETUDE DE SENSIBILITE

### 4.1 - Modèle de Parker

Pour ce modèle seulement, il est possible de mener une étude analytique de la sensibilité.

Soit une fonction  $f_y$  de la variable  $x$ , paramétrée par  $y$ . On définit la sensibilité de  $f$  à  $y$  par la fonction :

$$S_y(x) = y \frac{\partial f_y}{\partial y}(x)$$

Dans notre cas :

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{Qe}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\frac{pe^2}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{pe^2}{a}}} \right) = \frac{Q}{\rho Ce} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{e}{\sqrt{p} \sqrt{a} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{pe^2}{a}}} \right)$$

$$\text{Or } p^* = \frac{pe^2}{a} \text{ et } T^* = \frac{Q}{\rho Ce} T \quad \text{donc } T^*(t) = e \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{p} \operatorname{sh} \left( \frac{e\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \right)} \right)$$

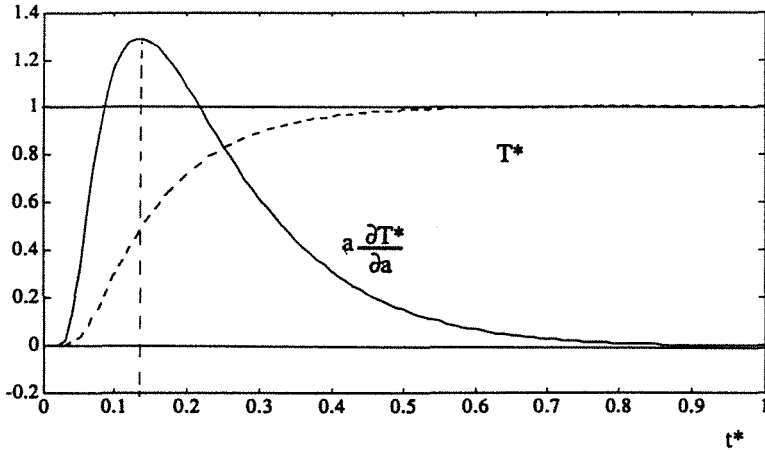
Après calculs, on trouve :

$$a \frac{\partial T^*}{\partial a} = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{e^2}{2a} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{pe^2}{a}} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{pe^2}{a}}}{\sqrt{\frac{pe^2}{a}}}}{\operatorname{sh}^2 \sqrt{\frac{pe^2}{a}}} \right)$$

Soit :

$$a \frac{\partial T^*}{\partial a} = \frac{e^2}{2a} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p^*} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p^*}}{\sqrt{p^*}}}{\operatorname{sh}^2 \sqrt{p^*}} \right)$$

Sur le graphe qui suit, nous avons représenté conjointement  $T^*$  et sa sensibilité à  $a$  :



A  $t^* = 0,139$  -correspondant à  $T^* = \frac{1}{2}$  - la sensibilité est maxim

La méthode consistant à mesurer le temps de demi-montée d'un thermogramme pour obtenir la diffusivité est donc justifiée.

#### 4.2 - Autres modèles

Dans tous les autres modèles, nous n'utilisons jamais directement  $T^*(t^*)$  [40], mais les rapports de temps réduits :

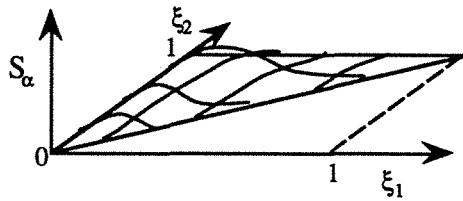
$$\frac{t^*_{\xi_1}}{t^*_{\xi_2}}$$

où  $t^*_{\xi_i}$  désigne le temps réduit pour lequel  $T^*$  atteint la fraction  $\xi_i$  de son maximum.

Par conséquent, la sensibilité à un paramètre  $\alpha$  est une fonction des deux variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$  :

$$S_\alpha(\xi_1, \xi_2) = \alpha \frac{\partial \left( \frac{t^* \xi_1}{t^* \xi_2} \right)}{\partial \alpha}$$

Cette fonction se représente graphiquement par une surface, comme sur la figure :



$\xi_1$  et  $\xi_2$  jouant des rôles symétriques, on se place dans la portion de plan  $(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < \xi_2$ .

Ce qui nous intéresse principalement est la sensibilité à  $\lambda$  (la détermination du paramètre d'échange  $h$  nous importe beaucoup moins, comme nous le précisons par la suite). La sensibilité correspondante est la fonction :

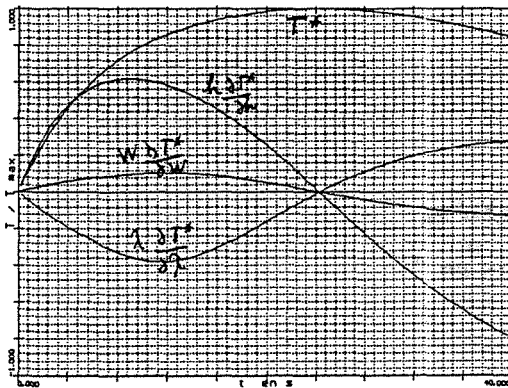
$$S_\lambda(\xi_1, \xi_2) = \frac{\left( \frac{t^* \xi_1}{t^* \xi_2} \right)_{\lambda+d\lambda} - \left( \frac{t^* \xi_1}{t^* \xi_2} \right)_\lambda}{d\lambda} \quad \text{où} \quad d\lambda \rightarrow 0$$

Les valeurs de  $S_\lambda(\xi_1, \xi_2)$  dépendent naturellement aussi des autres paramètres présents dans le modèle ( $k_0, k_1, R^*, e_0$ ).

Le "point" de sensibilité maximale, correspondant au point d'altitude la plus élevée de la nappe  $S_\lambda(\xi_1, \xi_2)$ , ne correspond qu'à des considérations théoriques; en effet, nous savons que la mesure des temps proches de zéro par exemple est entachée d'erreurs importantes. Il convient donc de pondérer la sensibilité théorique par une fonction  $p(\xi_1, \xi_2)$  qui reflète la réalité physique de la mesure réelle. Ce poids peut être pris nul au voisinage de  $\xi = 0$  (temps nuls) et de  $\xi = 1$  (dans ce cas,  $T^*$  est maximum donc la pente  $\frac{\partial T^*}{\partial t^*}$  est nulle et il est illusoire de chercher à mesurer une valeur précise de  $t^*$ ).

Pour des valeurs habituelles de  $k_0, k_1, R^*, e_0$  (échantillons de PVC ou de mousses expansées de 3 à 20 mm d'épaisseur enserrés entre des rondelles de quelques dixièmes de mm en cuivre), le choix de  $\xi_1$  de  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{9}{10}$  conduisent à une valeur de  $pS_\lambda$  assez proche du maximum.

Dans un cas particulier, nous avons tracé la sensibilité de  $T$  à  $\lambda, h$  et  $W$ , et les courbes montrent qu'il est impossible d'appréhender  $h$  et  $W$  de façon satisfaisante, les paramètres n'étant pas assez découplés :



Dans absolument tous les thermogrammes que nous avons dépouillés pour la présente étude, l'algorithme d'identification fournit la même solution  $h^*$  -ou  $(h^*, W^*)$  selon les modèles- quelque(s) soi(en)t le(s) point(s)  $h^*_0$  ou  $(h^*_0, W^*_0)$  de départ.

Nous avons de même, dans quelques cas particuliers, tracé la nappe représentatrice de la fonction d'erreur  $z = \text{erreur}(h^*, W^*)$  pour les modèles «en W», et nous n'avons rencontré qu'un seul puits erreur = 0, vers lequel converge l'algorithme, naturellement.

A la fin de chaque identification, nous vérifions que le thermogramme issu du modèle avec les paramètres identifiés se superpose au thermogramme expérimental (aux facteurs d'échelle près). Dans tous les cas, l'adéquation est satisfaisante sitôt que le modèle («avec» ou «sans» W) est correctement choisi.

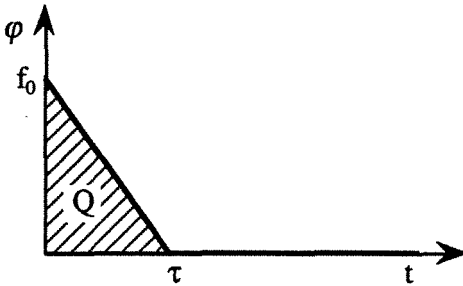
Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, les identifications ont été réalisées avec la fonction d'erreur «classique» et celle issue de l'approche s'inspirant des moments : les résultats sont quasiment identiques.





## V - INFLUENCE DE LA NATURE DU FLASH

Nous supposons dans toutes nos modélisations que le flash -qui fournit le flux  $\varphi_0$  - est un pic de Dirac. S. André a recueilli à l'oscilloscope à mémoire la réponse d'une cellule ultra-rapide au flash que nous utilisons [3]. Il apparaît que le flux a la forme suivante :



$$\text{avec } Q = \frac{f_0 \tau}{2}$$

Par des considérations élémentaires, la transformée de Laplace de ce flux est :

$$\varphi = \frac{f_0}{p} - \frac{f_0}{\tau} \frac{1}{p^2} + \frac{f_0}{\tau} \frac{e^{-p\tau}}{p^2}$$

soit 
$$\varphi = \frac{2Q}{p\tau} \left[ 1 - \frac{1 - e^{-p\tau}}{p\tau} \right]$$

Remarquons que lorsque  $p\tau$  tend vers zéro :

$$\varphi \approx Q \left( 1 - \frac{p\tau}{3} \right) \approx Q$$

ce qui est bien l'expression d'une distribution de Dirac d'énergie  $Q$ . Or :

$$p\tau = p^* \frac{a\tau}{e^2} = p^* \tau^* \quad \text{si} \quad \tau^* = \frac{\lambda \tau}{k_0 e_0}$$

$\tau$  est de l'ordre de 20 ms. Plaçons-nous dans trois cas des plus défavorables rencontrés dans nos mesures:

type de matériau	PVC	Polyuréthane	Polyéthylène
$\tau$ (s)	$20 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$
$\lambda$ (W/m/K)	$180 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$	$29 \cdot 10^{-3}$
$\rho_0$ ( $\text{m}^3/\text{kg}$ )	1380	33	31
$C_0$ (J/kg/K)	960	1350	1371
$e_0$ (mm)	3	6	4
$\tau^*$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$

Nous avons comparé les thermogrammes -réduits- simples (1D, ailette, 2D) et du type (1DW, ailette W, 2DW) lorsque  $\varphi_0 = Q$  et lorsque :

$$\varphi_0 = Q \left( 1 - \frac{P^* \tau^*}{3} \right) \quad \text{avec} \quad \tau^* = 10^{-3}$$

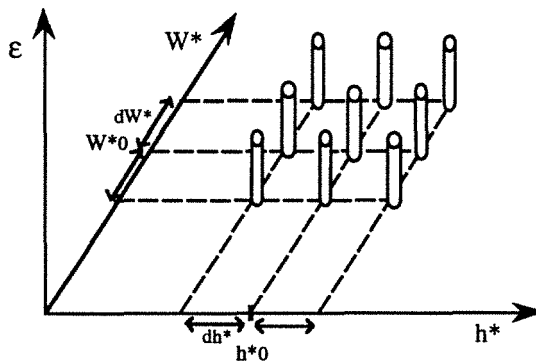
et les courbes se superposent parfaitement.

## VI - LE LOGICIEL

Nous avons développé un logiciel écrit en langage Turbo Pascal<sup>®</sup> 6.0, qui nous permet de stocker sur support magnétique les données relatives aux expériences que nous avons menées, et d'éditer des fiches récapitulatives comme celle qui figure dans l'annexe 11.

Le programme identifie, par la méthode "classique" ou celle "inspirée des moments", la conductivité thermique  $\lambda$ , le coefficient d'échange global  $h$ , et éventuellement le terme de rayonnement  $W$ , pour différents modèles, parmi lesquels 1D, ailette, 2D, 1D  $W$ , ailette  $W$ , 2D  $W$ , 1D  $U$ , ailette  $U$ , 2D  $U$ , etc...et enregistre les résultats en fournissant une fiche telle celle qui se trouve dans l'annexe 11.

L'identification de  $h^*$  (dans les modèles simples) est réalisée par dichotomie, alors que dans les modèles «en  $W$ », le logiciel calcule l'erreur au point  $(h^*_0, W^*_0)$  et aux huit points voisins, comme le montre le schéma :



et prend comme nouveau départ le point où l'erreur est minimale. Dans le

cas de trois déplacements consécutifs dans la même direction, le pas est augmenté. Si le minimum se trouve au point central, le pas est au contraire divisé par deux.

Le processus cesse lorsque l'erreur est inférieure à une valeur (epsilon) fixée.

L'inversion de Laplace est réalisée numériquement avec la méthode de Gaver-Stehfest. Comme nous l'avons déjà dit au paragraphe 2.2 de la partie précédente, la superposition entre la courbe issue de la résolution analytique du problème de Parker et celle de la résolution par la transformée de Laplace (en utilisant la méthode de Stehfest) est parfaite. B. Davies et B. Martin ont montré [41] que pour les fonctions rencontrées en thermique dans le cas général, l'algorithme de Stehfest conduit à des résultats très satisfaisants; la méthode stipule que :

si  $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$  alors

$$f(t) \approx \frac{\ln(2)}{t} \sum_{n=1}^{2N} K_n F\left(\frac{n \cdot \ln(2)}{t}\right)$$

$$\text{avec } K_n = (-1)^{n+N} \sum_{k=\lceil (n+1)/2 \rceil}^{\min(n,N)} \frac{k^N (2k)!}{(N-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}$$

L'utilisateur du logiciel peut choisir la valeur du nombre N (entre 5 et 6 généralement).

Dans les modèles du type 2D, apparaissent les fonction de Bessel  $J_0$  et  $J_1$ . Leurs valeurs sont calculées grâce à un développement en série pour les petits arguments ou par un développement asymptotique sinon :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + O(x^8)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} + O(x^9)$$

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

avec un test portant sur le reste des séries.

Pour calculer la valeur réalisant le maximum d'une fonction  $f$  définie par sa transformée de Laplace, le programme cherche le zéro de la transformée inverse de  $pf$ , gagnant ainsi beaucoup de temps.

Le logiciel permet également d'introduire des pertes supplémentaires (U) au niveau du thermocouple sur la rondelle inférieure de l'échantillon.

Il est possible de tracer la sensibilité du modèle à différents paramètres en trois dimensions pour la sensibilité réelle, ou simplement la sensibilité de  $T^*$  à ces paramètres.

Le programme compare le thermogramme expérimental et le thermogramme modélisé après identification.

Pour des raisons évidentes, le listing du programme, de six mille trois cents lignes environ, ne figure pas dans le présent mémoire.



*MONTAGE EXPERIMENTAL*





## I - SCHEMA

Le montage expérimental comprend un boîtier de PVC isolé thermiquement renfermant l'échantillon étudié, les thermocouples et les lampes du flash, une alimentation pour le flash, et un enregistreur analogique (traceur).

Les thermocouples sont en tellure de bismuth, une branche étant dopé N et l'autre P, et ont un pouvoir thermoélectrique de l'ordre de  $360 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ .

Aux pages suivantes figurent un schéma synoptique de l'installation, une coupe plus détaillée du boîtier, et un schéma électrique de l'alimentation du flash.

Nous avons amélioré le montage classique, en insérant une plaque de cuivre amovible de quelques millimètres d'épaisseur entre les lampes du flash et l'échantillon, reliée à une masse de cuivre extérieure servant de capacité, afin qu'après l'éclat, l'écran étant replacé, aucun flux parasite ne vienne perturber l'échantillon.

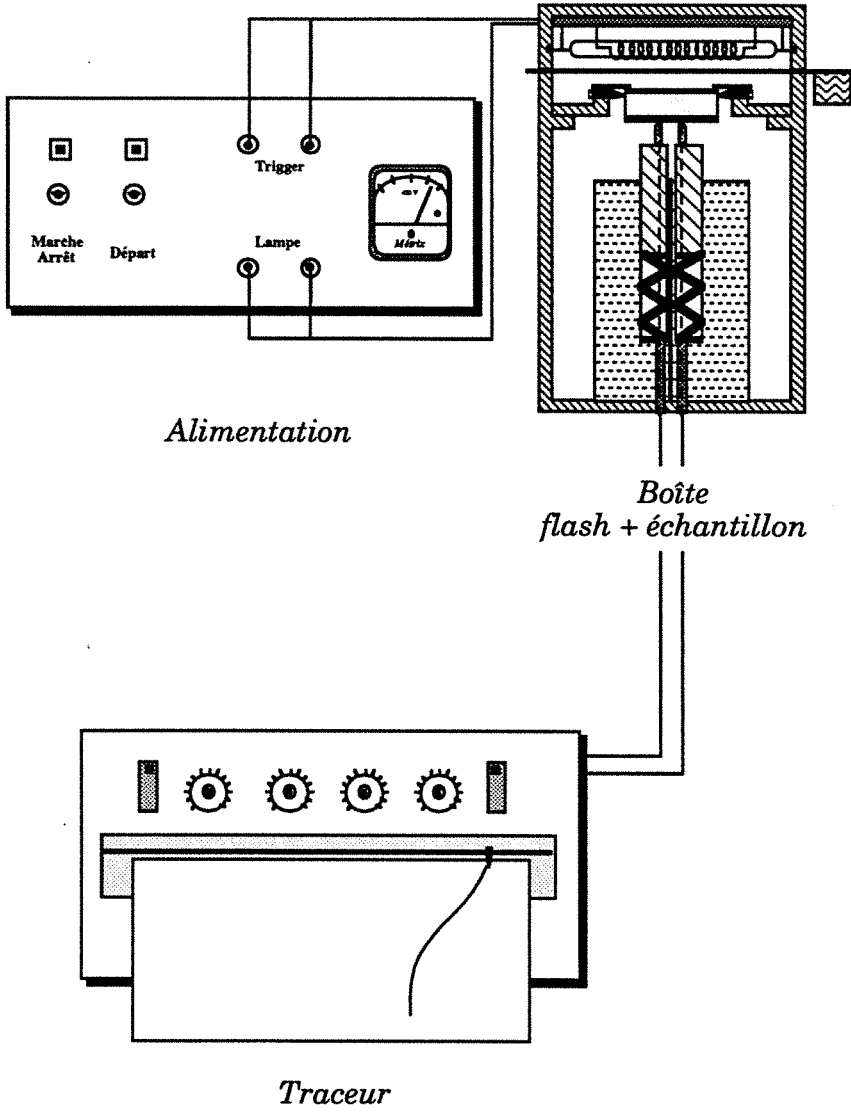


Schéma synoptique

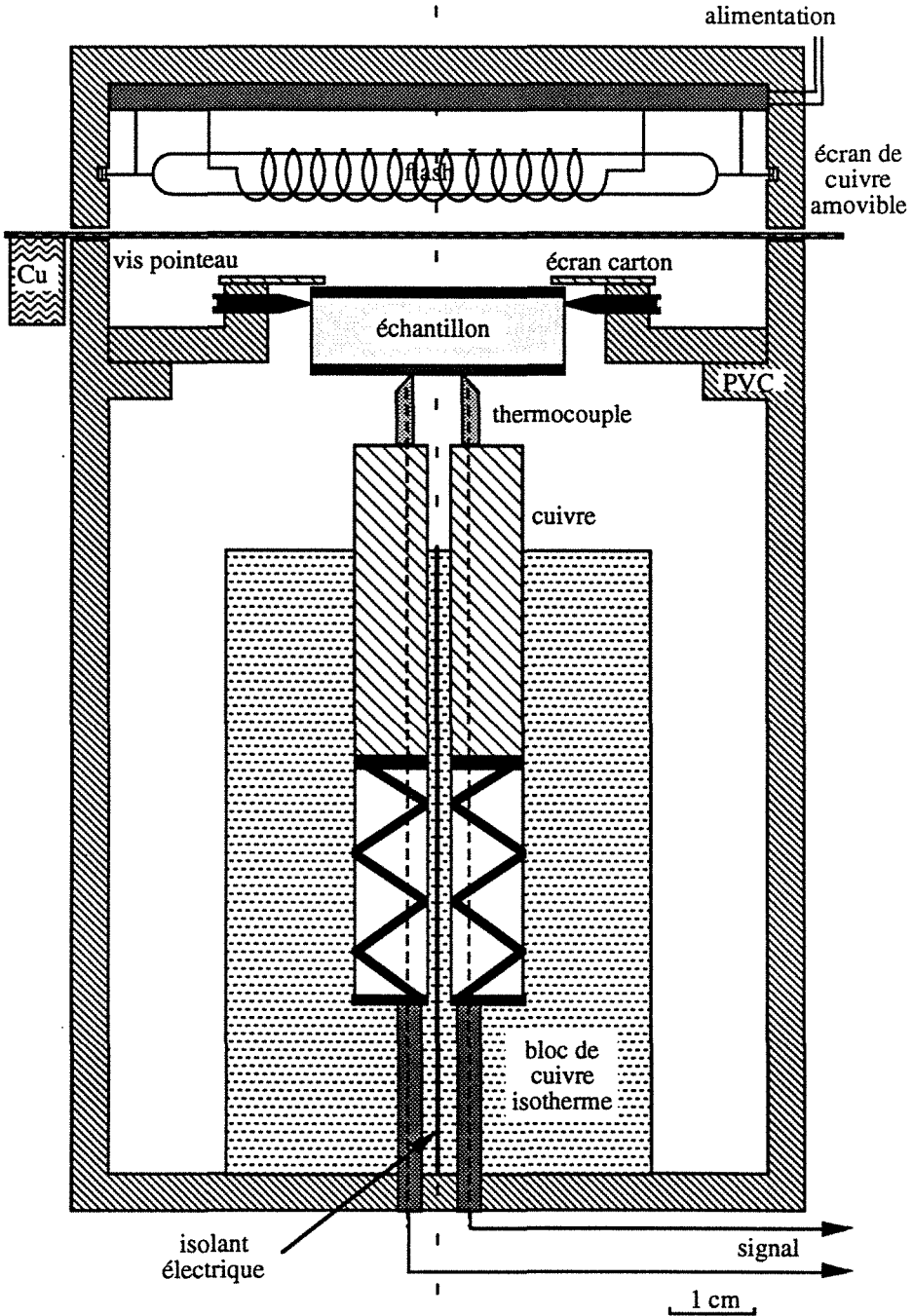


Schéma du boîtier

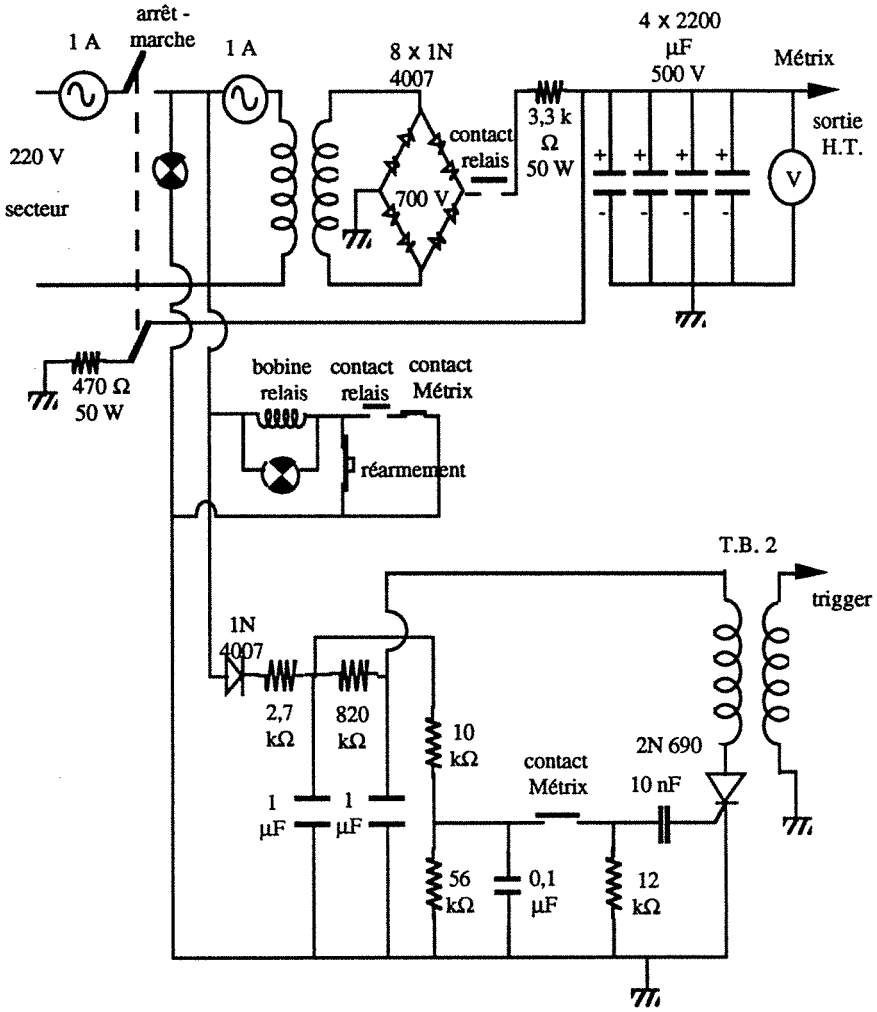


Schéma électrique de l'alimentation du flash

## **II - EXPLOITATION DES MESURES**

Dans l'annexe 11, figure un thermogramme tracé par l'enregistreur et les données que nous en tirons. Le logiciel identifie ensuite la conductivité du matériau, le paramètre d'échange global h, etc...

### III - CONSTITUTION DE L'ECHANTILLON

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'échantillon est un cylindre de 12,5 mm de rayon et d'épaisseur variant entre 3 et 21 mm.

L'application d'un éclat de flash sur les mousses de polyéthylène les fait fondre (le processus de diffusion de la chaleur est alors très complexe), ce qui nous a conduits à enserrer les cylindres de matériau entre deux rondelles de cuivre de même diamètre que ces cylindres et de quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur. Le cuivre a été choisi pour sa très grande conductibilité thermique -ce qui induit une uniformisation de la température sur les faces supérieure et inférieure de l'échantillon- et pour sa conductivité électrique; en effet, la rondelle inférieure permet de fermer le circuit du thermocouple.

La rondelle supérieure est peinte en noir pour capter un maximum d'énergie lors de la décharge du flash.

Les faces internes des rondelles - celles qui sont en contact avec le matériau à étudier- sont soit soigneusement polies, soit noircies à la peinture, pour que l'émissivité de ces surfaces soit proche ou de zéro, ou de l'unité, selon le type d'expérience que l'on souhaite réaliser.

Les contacts entre rondelles et cylindre sont réalisés indifféremment avec de la colle Cyanolit® ou de la graisse à vide, les deux méthodes conduisant à des résultats strictement identiques.

L'échantillon ainsi constitué est maintenu par trois vis coniques, pour éviter au maximum les pertes thermiques.

*MESURES*





## I - PRELIMINAIRES

Dans cette partie, nous présentons les mesures de conductibilité menées sur trois matériaux, le polychlorure de vinyle (P.V.C.), le polyuréthane rigide (P.U.R.) et le polyéthylène expansé (P.E.).

Pour chacune des trois séries - on appelle série de mesures un ensemble de mesures réalisées dans des conditions identiques sur plusieurs échantillons d'un même matériau, dont seule l'épaisseur  $e_0$  varie-, nous exhibons les données réelles d'une expérience que nous transmettons à l'ordinateur, et la fiche de résultats que celui-ci nous retourne. Nous ne donnons pour les autres mesures de la série que les résultats des identifications fournies par le logiciel, sous forme d'une courbe.

Lorsque nous procédons à une expérience flash, un certain nombre de paramètres ne sont que partiellement connus. Ainsi, les valeurs de l'épaisseur du matériau  $e_0$ , son rayon  $R$ , l'épaisseur des rondelles de cuivre  $e_1$ , les capacités calorifiques, les temps partiels de montée  $t_{\xi_i}$ , etc..., sont appréhendés avec des incertitudes que l'on peut évaluer. Par contre, la température ambiante, l'énergie  $Q$  délivrée par le flash, sont des paramètres qui, en toute rigueur, influent sur les résultats, mais que l'on ne maîtrise pas.

Pour procéder à un calcul d'incertitude, que nous appellerons incertitude théorique, nous observons l'influence de petits changements de la valeur de certains paramètres dans l'identification de la conductivité.



## II - ETUDE DU PVC

L'utilisation de la méthode flash sur des matériaux denses de conductivité supérieure à 0,15 W/m/K est très courante [42]. Nous avons néanmoins réalisé deux séries de mesures sur le PVC, afin de nous assurer du bon fonctionnement de la chaîne de mesures et du logiciel d'identification.

Nous avons réalisé des échantillons en PVC noir du commerce, de masse volumique :

$$\rho_0 = 1380 \text{ kg m}^{-3}$$

de capacité calorifique :

$$C_0 = 960 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

et de rayon :

$$R = 12,5 \text{ mm}$$

Les échantillons ont été enserrés entre des rondelles de cuivre de caractéristiques :

$$\rho_1 = 8900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$C_1 = 385 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

et d'épaisseur :

$$e_1 = 0,2 \text{ mm} \quad \text{pour la première série}$$

$$e_1 = 0,4 \text{ mm} \quad \text{pour la deuxième}$$

Le contact entre le PVC et le cuivre a été réalisé avec de la graisse à vide dans les deux cas. Notons que nous avons aussi mené des mesures pour lesquelles le contact est assuré par de la colle Cyanolit<sup>®</sup>, et les résultats sont identiques à ceux présentés ici.

Nous avons représenté la conductivité  $\lambda$  en fonction de l'épaisseur du PVC, pour chacun des trois modèles (1D, ailette et 2D) ayant servi à l'identification pour les deux séries.

Aux pages suivantes, se trouvent les données correspondant à une expérience réalisée sur un échantillon de 12,1 mm d'épaisseur, et la fiche de résultat pour l'utilisation du modèle de l'ailette, avec les temps partiels  $1/3$  et  $9/10$ .

Ainsi :

$$e_0 = 12,1 \text{ mm}$$

$$\rho_0 C_0 = 1380 \times 960 \text{ S.I.}$$

$$t_{1/3} = 86,3 \text{ mm} / (50 \text{ mm/min} / 60) = 103,56 \text{ s}$$

$$t_{9/10} = 182,6 \text{ mm} / (50 \text{ mm/min} / 60) = 219,12 \text{ s}$$

$$\lambda = \mathbf{180,8 \text{ mW/m/K}}$$

## Données mesurées

## EXPERIENCE

C:\PV1_BRUT\	004 . 01	C:\PV1_UTIL\
--------------	----------	--------------

	matériau	épaisseur	rho	C
échantillon	PVC	12.10 mm	1380.00 SI	960.00 SI
rondelles	CUIVRE	0.20 mm	8900.00 SI	385.00 SI

date	calibre traceur	faces en regard	T°C ambiante
17 / 12 / 1991	0.25 mV	classiques	19.3 °C

rayon R	défilement papier	H max sur papier	nb de pts saisis
12.5 mm	50.0 mm/min	105.0 mm	9

ordonnée y	abscisse x	rapport	temps
10.5 mm	57.6 mm	0.1000	69.12 s
21.0 mm	70.8 mm	0.2000	84.96 s
35.0 mm	86.3 mm	0.3333	103.56 s
42.0 mm	94.1 mm	0.4000	112.92 s
52.5 mm	106.3 mm	0.5000	127.56 s
63.0 mm	119.8 mm	0.6000	143.76 s
73.5 mm	135.4 mm	0.7000	162.48 s
84.0 mm	154.9 mm	0.8000	185.88 s
94.5 mm	182.6 mm	0.9000	219.12 s

commentaire éventuel	face sup noire
----------------------	----------------

Fiche de résultats de l'identification

RESULTAT

C:\PV1_RES\	004 . 01	01 . ail
-------------	----------	----------

nb Laplace	epsilon	epsilon Bessel	aide seuil	erreur seuil
5	1.0E-0004	1.0E-0006	6	1.0E-0005
dx* seuil	xmax (calcul)	xmin (calcul)	accélération	puits chaleur
1.0E-0012	0.10000	0.00001	4.00	0.000 mW/K

dim	commentaire éventuel	méthode
1	identification habituelle	classique

rapport	temps (s)	rapport	temps (s)
0.3333	103.56	0.9000	219.12

h*	h
0.416369	6.222 W/m <sup>2</sup> /K
conductivité thermique	
180.83 mW/m/K	

Nous considérons que l'erreur commise sur la mesure de l'épaisseur  $e_0$  de l'échantillon est de 2 centièmes de millimètre (mesure réalisée au pied à coulisse). Nous procédons à une nouvelle identification de la conductivité de l'échantillon en entrant dans le logiciel une valeur de  $e_0$  de 12,12 mm au lieu de 12,1 mm, tous les autres paramètres restant inchangés.

$$e_0 = 12,12 \text{ mm}$$

$$\lambda = 181,4 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,6 \text{ mW/m/K}$$

Nous avons procédé de même avec  $\rho_0 C_0$ ,  $t_{1/3}$  et  $t_{9/10}$ , en considérant que l'erreur sur les temps est celle correspondant à un demi-millimètre sur le thermogramme fourni par le traceur :

$\rho_0 C_0 = 1385 \times 965 \text{ S.I.}$  (au lieu de  $1380 \times 960$ , les autres paramètres introduits dans l'ordinateur étant inchangés)

$$\lambda = 182,2 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 1,4 \text{ mW/m/K}$$

$$t_{1/3} = 86,8 \text{ mm} / (50/60) = 104,16 \text{ s}$$

$$\lambda = 175,5 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 5,3 \text{ mW/m/K}$$

$$t_{9/10} = 183,1 \text{ mm} / (50/60) = 219,72 \text{ s}$$

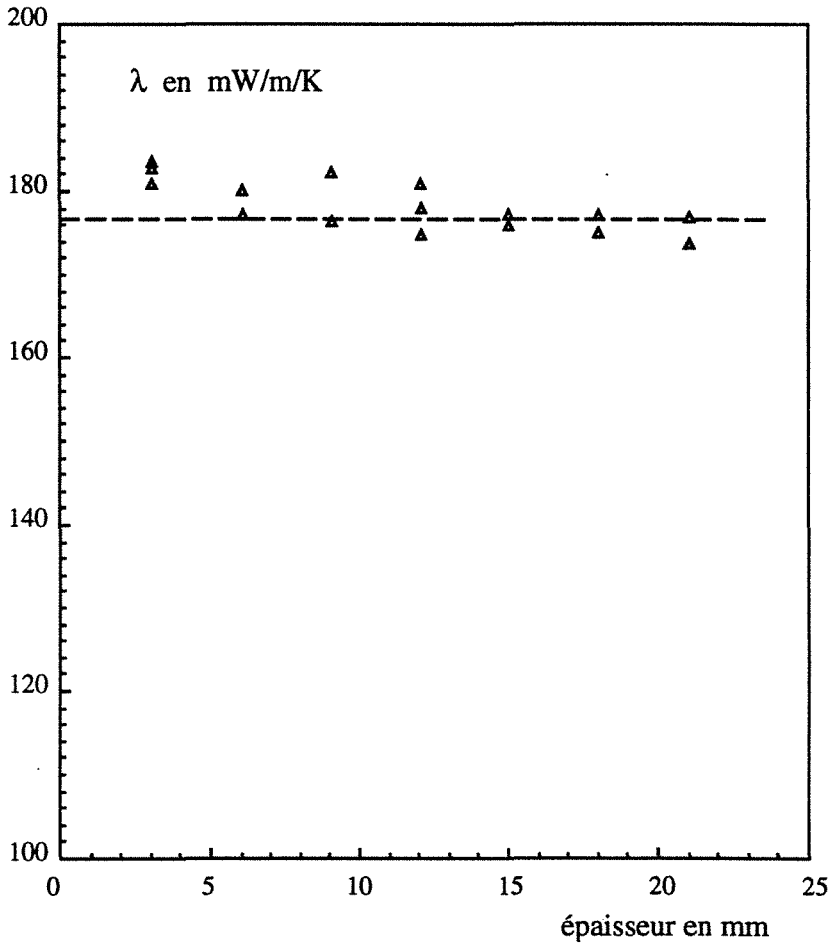
$$\lambda = 181,4 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,6 \text{ mW/m/K}$$

Les rondelles de cuivre sont découpées dans des feuilles dont l'épaisseur est connue avec une grande précision.

L'incertitude totale est celle qui correspond à la plus grosse fluctuation  $\Delta\lambda$ , soit :

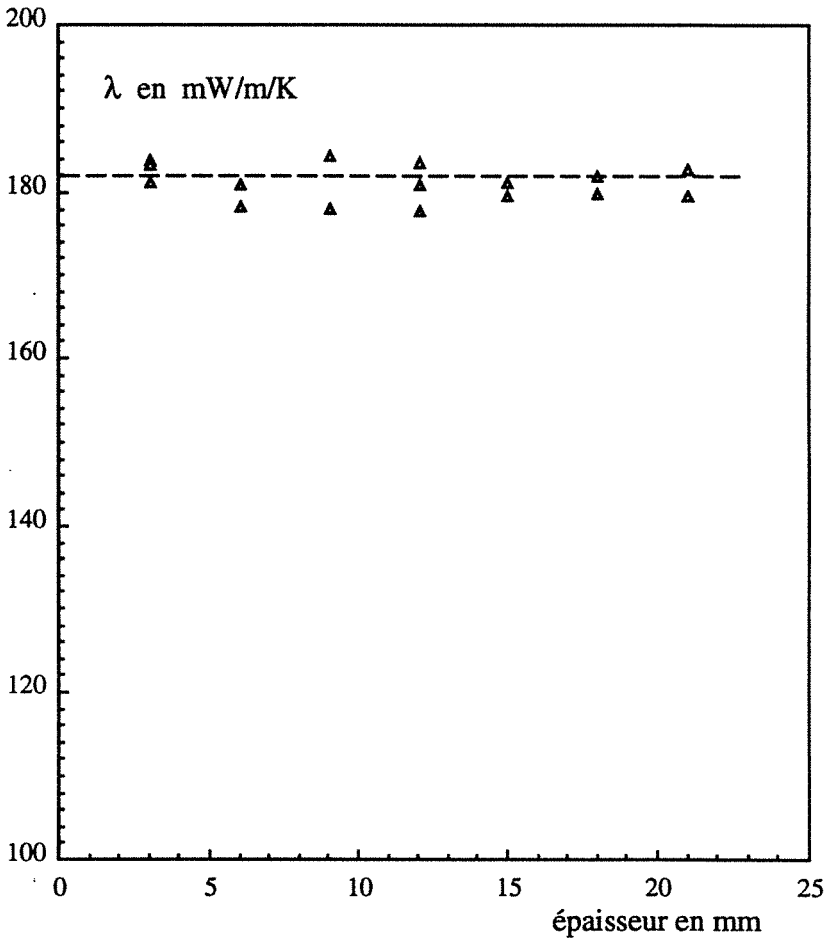
$$\Delta\lambda = 5,3 \text{ mW/m/K} \quad , \quad \text{ou} \quad \Delta\lambda / \lambda = 2,9 \%$$

Première série, modèle 1D :

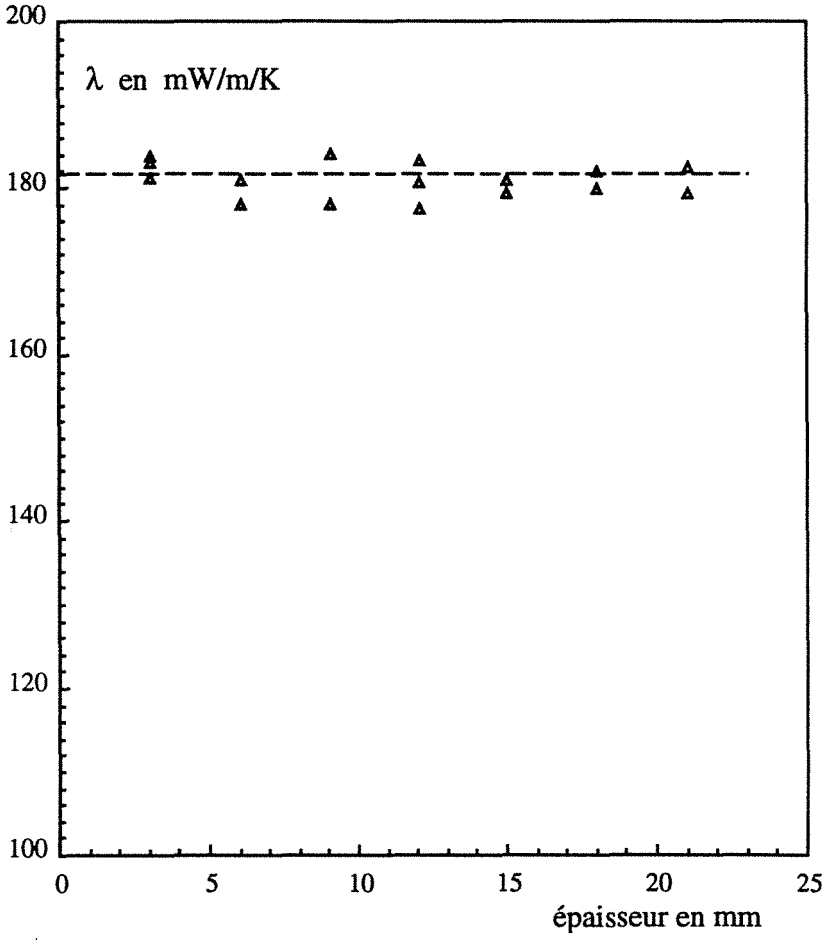




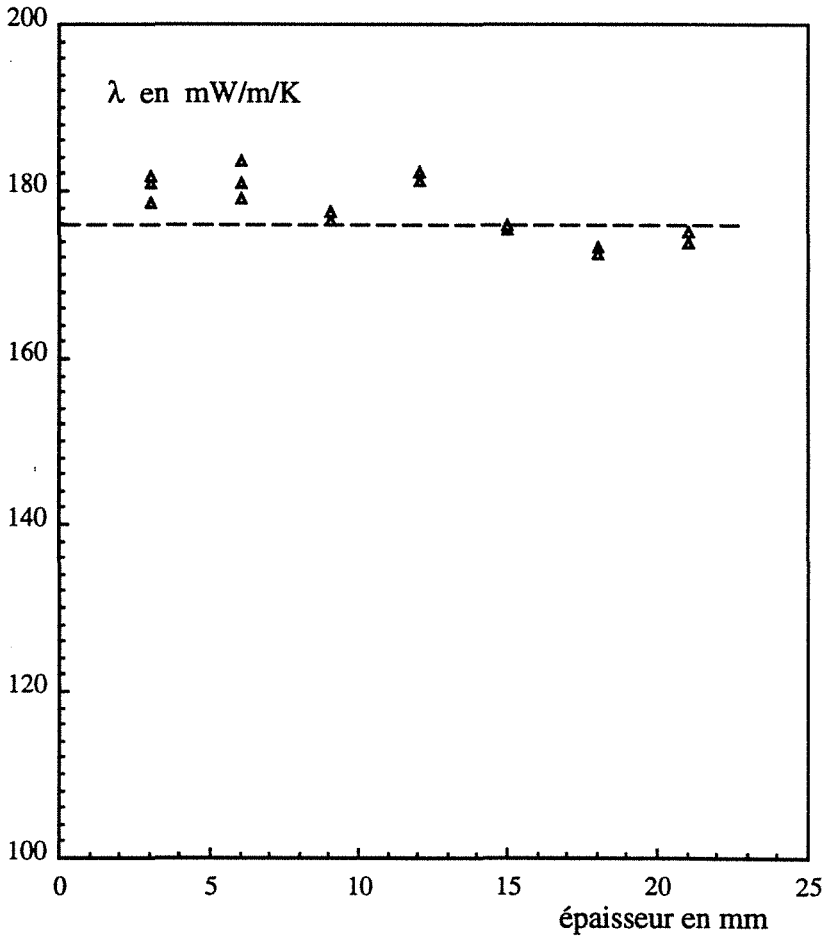
Première série, modèle de l'ailette :



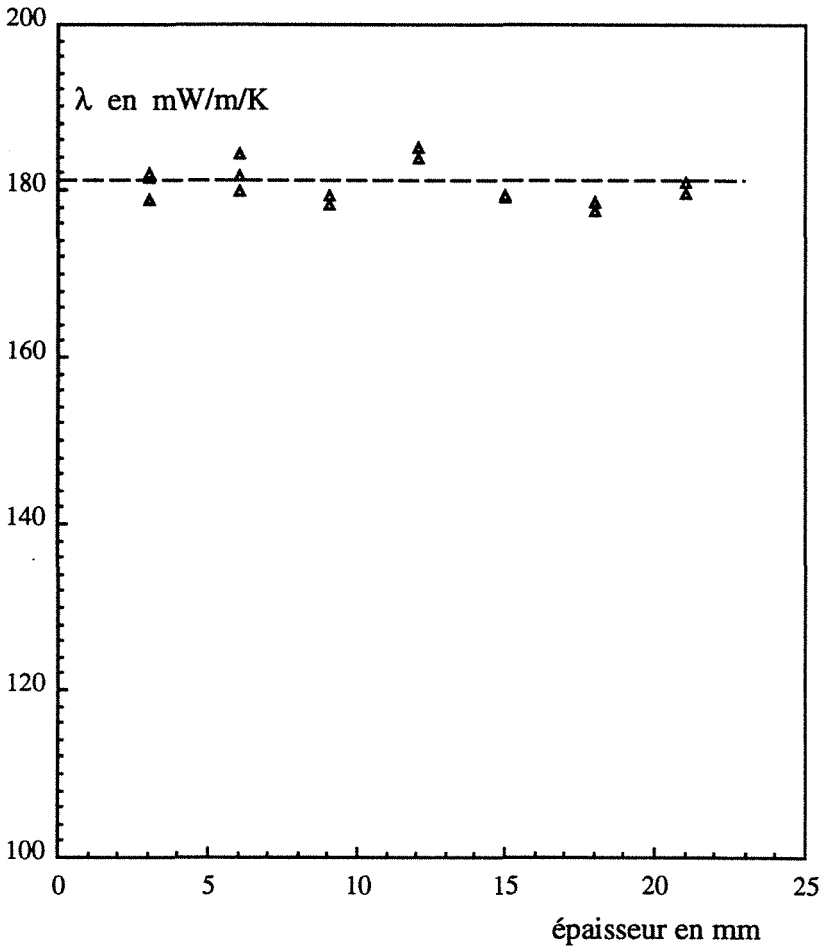
*Première série, modèle 2D :*



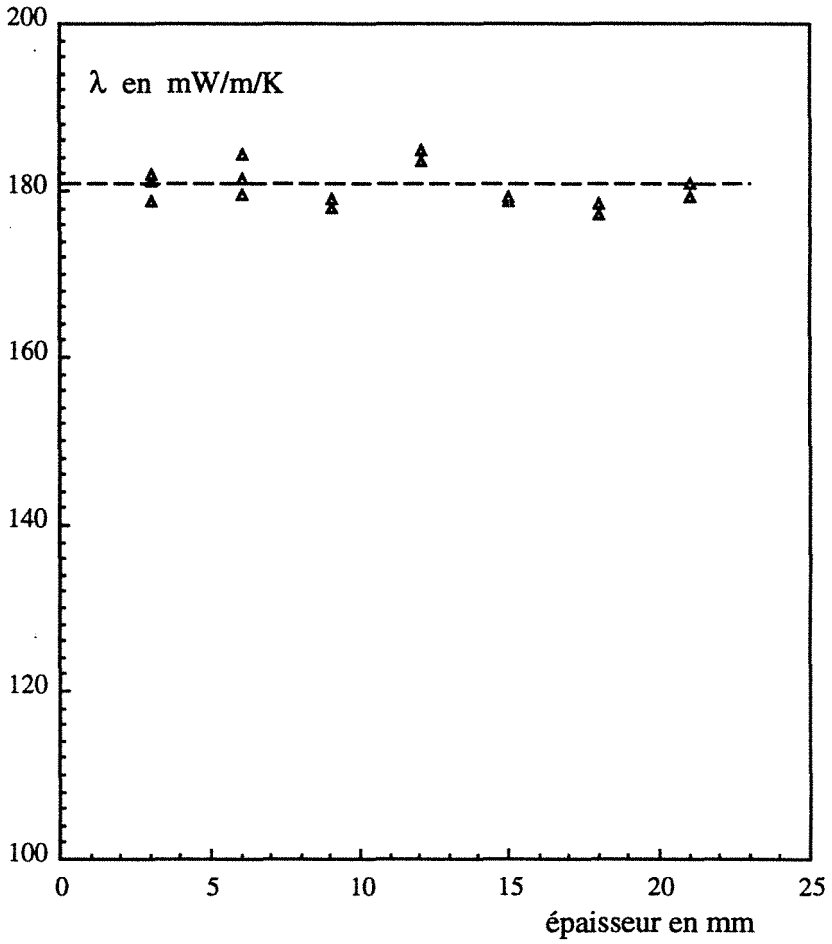
Deuxième série, modèle 1D :



Deuxième série, modèle de l'ailette :



Deuxième série, modèle 2D :



Dans le tableau suivant, figurent les moyennes et écarts types des conductivités identifiées :

modèle série	1D	aillette	2D
première	$\lambda = 178,2$ $\sigma = 2,9$	$\lambda = 180,9$ $\sigma = 2,0$	$\lambda = 180,8$ $\sigma = 2,1$
deuxième	$\lambda = 177,9$ $\sigma = 3,4$	$\lambda = 180,5$ $\sigma = 2,2$	$\lambda = 180,3$ $\sigma = 2,2$

(en mW/m/K)

Nous constatons d'une part que pour un modèle et une série donnés,  $\lambda$  ne varie que très peu, et d'autre part que pour un même modèle, l'épaisseur de cuivre  $e_1$  n'a pas de répercussion.

Remarquons que les "incertitudes expérimentales", correspondant à  $1,96 \sigma$ , sont de l'ordre de grandeur de l'incertitude théorique que nous avons calculée début de ce chapitre.

On note la grande similitude des résultats obtenus avec le modèle bidirectionnel et celui de l'aillette. Compte-tenu du nombre important de calculs (fonctions de Bessel ...) du modèle 2D, nous n'utilisons pour ce genre de matériau que la modélisation de l'aillette.

### III - ETUDE DES MOUSSES DE P.U.R.

Dans ce chapitre, figurent deux séries de mesures réalisées sur des mousses de polyuréthane rigide, de masse volumique :

$$\rho_0 = 32,4 \text{ kg m}^{-3}$$

de capacité calorifique (valeur provenant de la littérature) :

$$C_0 = 1350 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

et de rayon :

$$R = 12,5 \text{ mm}$$

Les rondelles de cuivre :

$$\rho_1 = 8900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$C_1 = 385 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$e_1 = 0,2 \text{ mm}$$

sont dans la première série soigneusement polies, et noircies à la peinture sur leurs surfaces en contact avec le P.U.R. dans la deuxième série.

Nous ne présentons que les identifications réalisées avec les points du tiers et des neuf dixièmes de la montée maximale, c'est-à-dire avec les notations de la partie «Identification»,  $\xi_1 = 1/3$  et  $\xi_2 = 9/10$ , les autres choix conduisant à des résultats très voisins, ainsi que la méthode inspirée des moments.

Sur les pages suivantes, nous avons représenté les différents graphes obtenus, et les données d'une expérience réelle, d'un échantillon de 15,1 mm d'épaisseur.

$$e_0 = 15,1 \text{ mm}$$

$$\rho_0 C_0 = 32,4 \times 1350 \text{ S.I.}$$

$$t_{1/3} = 79,4 \text{ mm} / (100 \text{ mm/min} / 60) = 47,64 \text{ s}$$

$$t_{9/10} = 150,5 \text{ mm} / (100 \text{ mm/min} / 60) = 90,30 \text{ s}$$

$$\lambda = 23,53 \text{ mW/m/K}$$

Nous considérons le même type d'erreur sur ces paramètres que dans le chapitre traitant du P.V.C., et nous faisons figurer les résultats d'identification de la conductivité lorsque ces paramètres varient d'une quantité égale à l'erreur estimée (selon le même principe que dans le chapitre précédent) :

$$e_0 = 15,12 \text{ mm}$$

$$\lambda = 23,60 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,1 \text{ mW/m/K}$$

$$\rho_0 C_0 = 32,6 \times 1360 \text{ S.I.}$$

$$\lambda = 24,02 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,5 \text{ mW/m/K}$$

$$t_{1/3} = 79,9 \text{ mm} / (100/60) = 47,94 \text{ s}$$

$$\lambda = 22,94 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,6 \text{ mW/m/K}$$

$$t_{9/10} = 151,0 \text{ mm} / (100/60) = 90,60 \text{ s}$$

$$\lambda = 23,77 \text{ mW/m/K} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = 0,2 \text{ mW/m/K}$$

L'incertitude totale est celle qui correspond à la plus grosse fluctuation  $\Delta\lambda$ , soit :

$$\Delta\lambda = 0,6 \text{ mW/m/K} \quad , \quad \text{ou} \quad \Delta\lambda / \lambda = 2,5 \%$$



## Données mesurées

## EXPERIENCE

B:\PUR\	013 . 01	B:\PUR\
---------	----------	---------

	matériau	épaisseur	rho	C
échantillon	POLYURET	15.10 mm	32.40 SI	1350.00 SI
rondelles	CUIVRE	0.20 mm	8900.00 SI	385.00 SI

date	calibre traceur	faces en regard	T°C ambiante
17 / 9 / 1992	0.25 mV	noires	20.1 °C

rayon R	défilement papier	H max sur papier	nb de pts saisis
12.5 mm	100.0 mm/min	62.0 mm	9

ordonnée y	abscisse x	rapport	temps
6.2 mm	53.9 mm	0.1000	32.34 s
12.4 mm	65.9 mm	0.2000	39.54 s
20.7 mm	79.4 mm	0.3339	47.64 s
24.8 mm	85.9 mm	0.4000	51.54 s
31.0 mm	95.7 mm	0.5000	57.42 s
37.2 mm	106.2 mm	0.6000	63.72 s
43.4 mm	117.9 mm	0.7000	70.74 s
49.6 mm	131.8 mm	0.8000	79.08 s
55.8 mm	150.5 mm	0.9000	90.30 s

commentaire éventuel	face sup noire
----------------------	----------------

## Fiche de résultats pour l'identification

## RESULTAT

B:\PUR\	013 . 01	01 . ail
---------	----------	----------

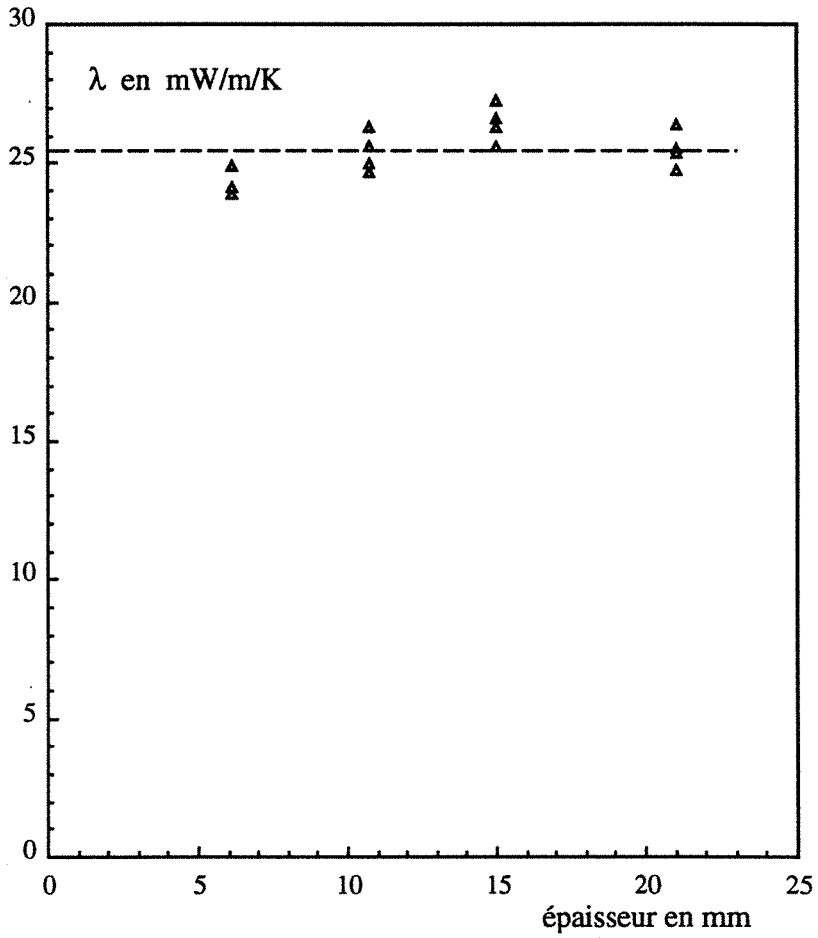
nb Laplace	epsilon	epsilon Bessel	aide seuil	erreur seuil
5	1.0E-0004	1.0E-0006	6	1.0E-0005
dx* seuil	xmax (calcul)	xmin (calcul)	accélération	puits chaleur
1.0E-0012	0.10000	0.00001	4.00	0.000 mW/K

dim	commentaire éventuel	méthode
1	identification habituelle	classique

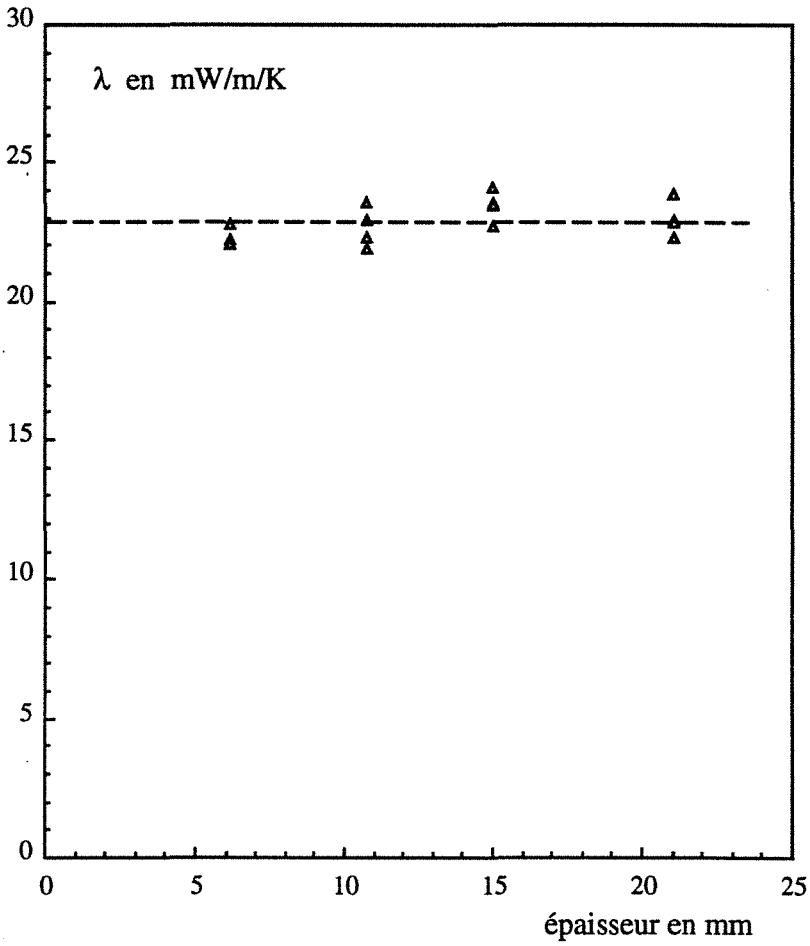
rapport	temps (s)	rapport	temps (s)
0.3339	47.64	0.9000	90.30

h*	h
3.946649	6.150 W/m <sup>2</sup> /K
conductivité thermique	
23.53 mW/m/K	

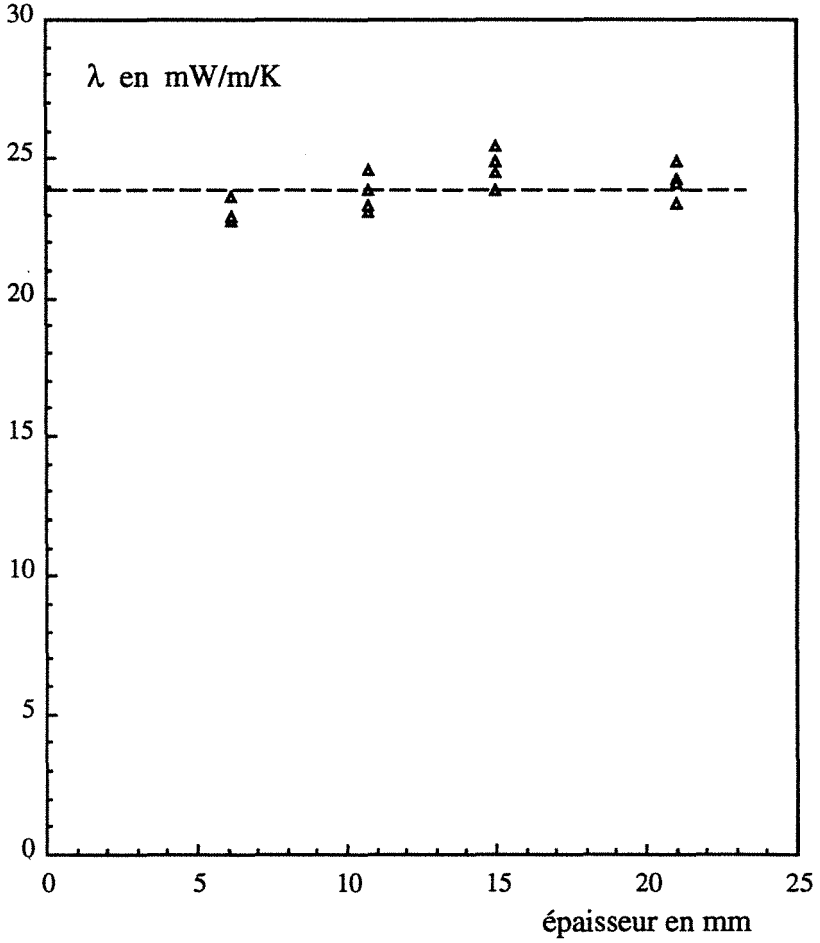
Série "faces brillantes", modèle 1D :



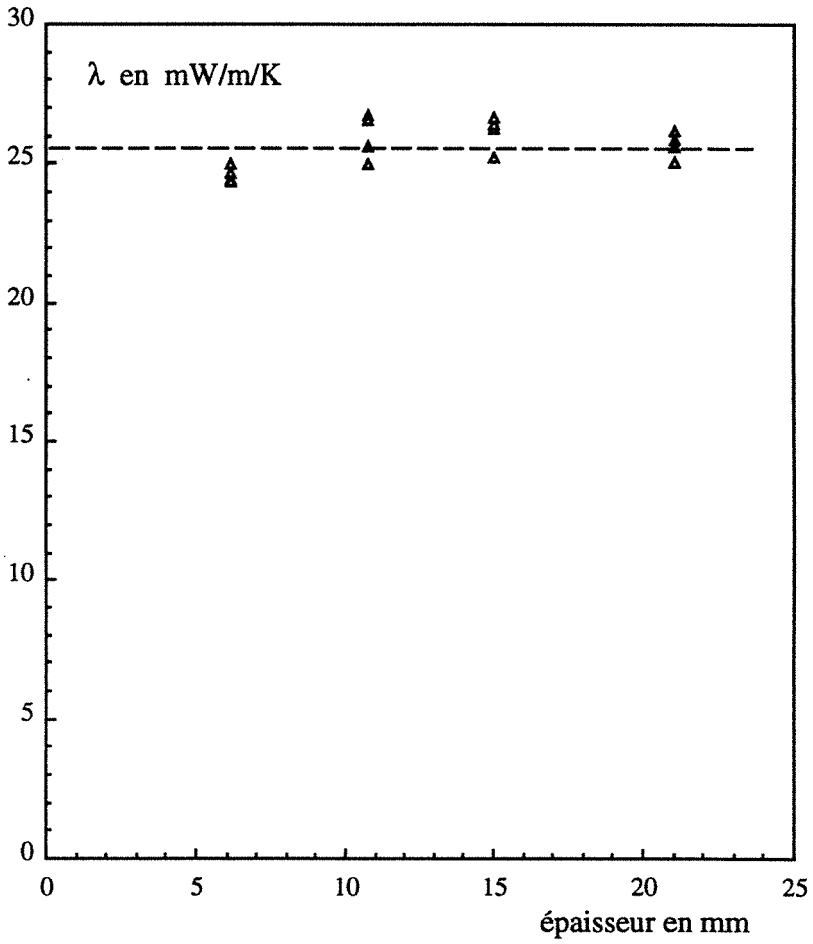
Série "faces brillantes", modèle de l'ailette :



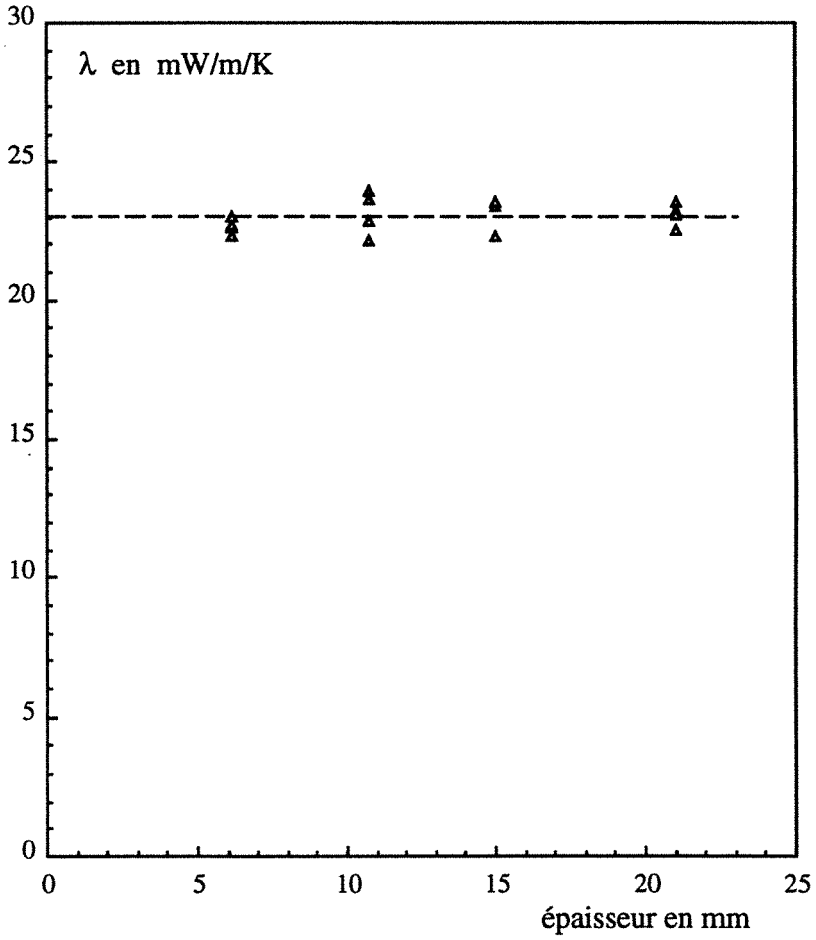
Série "faces brillantes", modèle 2D :



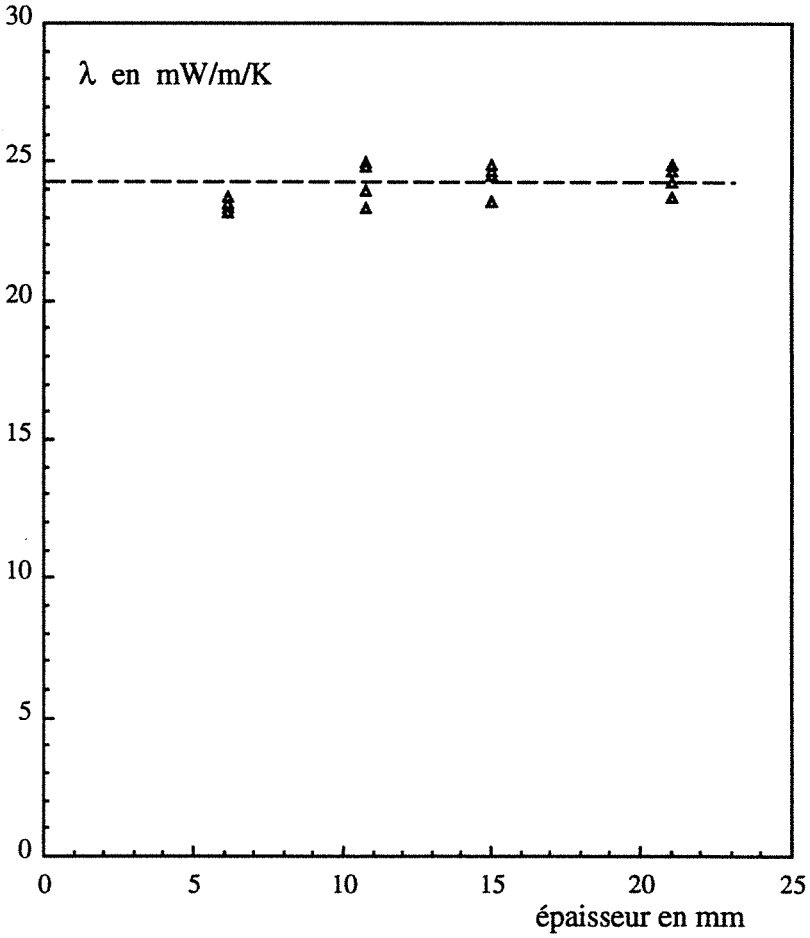
Série "faces noires", modèle 1D :



Série "faces noires", modèle de l'ailette :



Série "faces noires", modèle 2D :





Dressons un bilan :

modèle série	1D	aillette	2D
faces brillantes	$\lambda = 25,30$ $\sigma = 0,94$	$\lambda = 22,81$ $\sigma = 0,67$	$\lambda = 23,88$ $\sigma = 0,78$
faces noires	$\lambda = 25,56$ $\sigma = 0,78$	$\lambda = 22,99$ $\sigma = 0,54$	$\lambda = 24,08$ $\sigma = 0,63$

( en mW/m/K )

Là encore, nous constatons que la conductivité identifiée est relativement constante avec l'épaisseur lorsque les rondelles de cuivre sont polies, mais par contre,  $\lambda$  accuse une très légère tendance à s'accroître avec l'épaisseur de l'échantillon lorsque les rondelles sont noires, donc de forte émissivité.

Cette tendance à l'augmentation est cependant assez faible (par rapport à ce qui se produit pour la mousse polyéthylène expansé dont nous parlerons au chapitre IV) pour que la méthode classique reste adaptée. R. Dadou [23] et B. Martin [43] ont d'ailleurs étudié l'opacité du P.U.R. aux infra-rouges de la gamme 10  $\mu\text{m}$  avec un laser à  $\text{CO}_2$ , et ont conclu que pour une épaisseur de quelques millimètres, la plus grande part du rayonnement est arrêtée, la mousse se comportant alors comme un corps quasiment opaque.

#### IV - ETUDE DU POLYETHYLENE EXPANSE

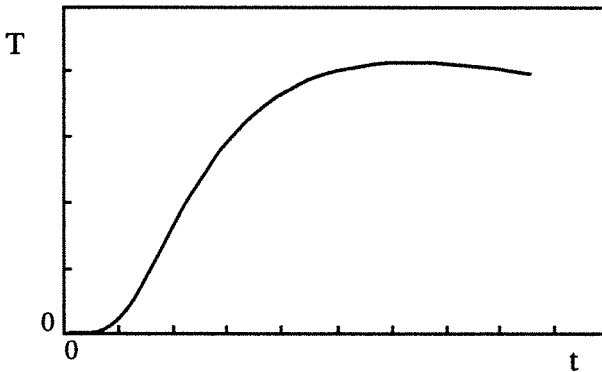
Dans ce chapitre, nous montrons deux séries de mesures réalisées sur des cylindres de mousse de polyéthylène de type E220, fabriquée par la Société Saprunit [44], de caractéristiques :

$$\rho_0 = 32 \text{ kg m}^{-3}$$

$$C_0 = 1371 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$R = 12,5 \text{ mm}$$

Les rondelles sont en cuivre d'épaisseur 0,2 mm, polies dans une série -série «faces brillantes», et noircies dans la deuxième -série «faces noires». L'allure générale des thermogrammes de la série «faces brillantes» est :



Cette allure nous a amenés à identifier la conductivité avec les modèles classiques (1D, ailette, 2D). Sur les pages suivantes, nous faisons figurer le cas d'une expérience sur un échantillon de 12,2 mm d'épaisseur.

## Données mesurées

## EXPERIENCE

C:\AJ2_BRUT\	014 . 01	C:\AJ2_UTIL\
--------------	----------	--------------

	matériau	épaisseur	rho	C
échantillon	POLYETHY	12.20 mm	32.00 SI	1371.00 SI
rondelles	CUIVRE	0.20 mm	8900.00 SI	385.00 SI

date	calibre traceur	faces en regard	T°C ambiante
29 / 6 / 1992	0.25 mV	classiques	21.3 °C

rayon R	défilement papier	H max sur papier	nb de pts saisis
12.5 mm	250.0 mm/min	121.0 mm	9

ordonnée y	abscisse x	rapport	temps
12.1 mm	52.6 mm	0.1000	12.62 s
24.2 mm	64.3 mm	0.2000	15.43 s
40.3 mm	77.4 mm	0.3331	18.58 s
48.4 mm	83.7 mm	0.4000	20.09 s
60.5 mm	93.2 mm	0.5000	22.37 s
72.6 mm	103.4 mm	0.6000	24.82 s
84.7 mm	114.7 mm	0.7000	27.53 s
96.8 mm	128.2 mm	0.8000	30.77 s
108.9 mm	146.3 mm	0.9000	35.11 s

commentaire éventuel	face sup noire
----------------------	----------------

Fiche de résultats pour l'identification

RESULTAT

C:\AJ2_RES\	014 . 01	01 . ail
-------------	----------	----------

nb Laplace	epsilon	epsilon Bessel	aide seuil	erreur seuil
5	1.0E-0004	1.0E-0006	6	1.0E-0005
dx* seuil	xmax (calcul)	xmin (calcul)	accélération	puits chaleur
1.0E-0012	0.10000	0.00001	4.00	0.000 mW/K

dim	commentaire éventuel	méthode
1	identification habituelle	classique

rapport	temps (s)	rapport	temps (s)
0.3331	18.58	0.9000	35.11

h*	h
5.297728	17.143 W/m <sup>2</sup> /K
conductivité thermique	
39.48 mW/m/K	

Nous avons dans cet exemple :

$$e_0 = 12,20 \text{ mm}$$

$$\rho_0 C_0 = 32 \times 1371 \text{ S.I.}$$

$$t_{1/3} = 77,4 \text{ mm} / (250 \text{ mm/min} / 60) = 18,58 \text{ s}$$

$$t_{9/10} = 146,3 \text{ mm} / (250 \text{ mm/min} / 60) = 35,11 \text{ s}$$

$$\lambda = \mathbf{39,48 \text{ mW/m/K}}$$

Nous considérons le même type d'erreur sur ces paramètres que pour les autres matériaux et alors :

$$e_0 = 12,22 \text{ mm}$$

$$\lambda = \mathbf{39,61 \text{ mW/m/K}} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \mathbf{0,1 \text{ mW/m/K}}$$

$$\rho_0 C_0 = 32,2 \times 1380 \text{ S.I.}$$

$$\lambda = \mathbf{40,05 \text{ mW/m/K}} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \mathbf{0,6 \text{ mW/m/K}}$$

$$t_{1/3} = 77,9 \text{ mm} / (250/60) = 18,70 \text{ s}$$

$$\lambda = \mathbf{38,44 \text{ mW/m/K}} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \mathbf{1,0 \text{ mW/m/K}}$$

$$t_{9/10} = 146,8 \text{ mm} / (250/60) = 35,23 \text{ s}$$

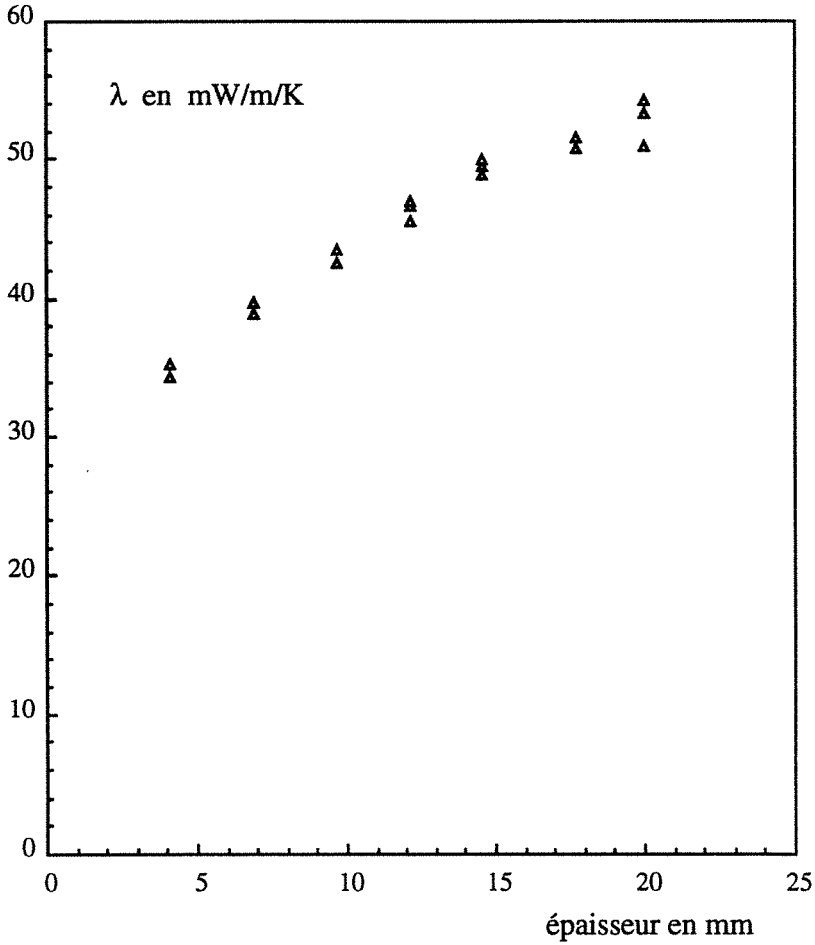
$$\lambda = \mathbf{39,90 \text{ mW/m/K}} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \mathbf{0,4 \text{ mW/m/K}}$$

Comme dans les autres chapitres, l'incertitude totale est donc :

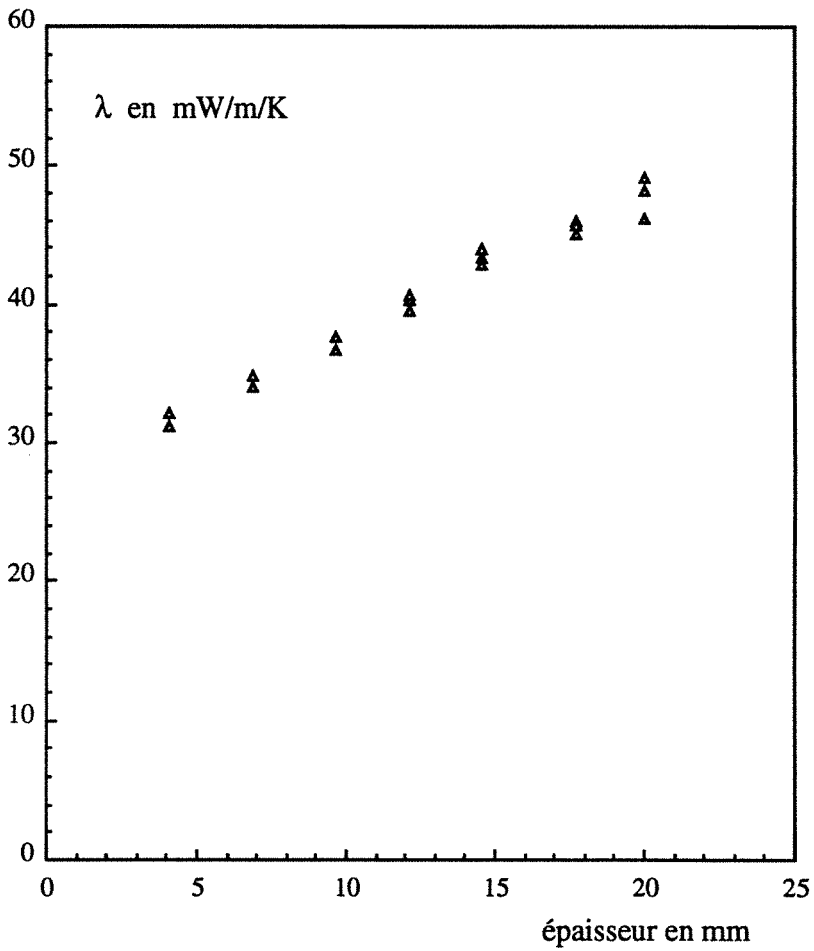
$$\Delta\lambda = \mathbf{1,0 \text{ mW/m/K}} \quad , \quad \text{soit} \quad \Delta\lambda / \lambda = \mathbf{2,6 \%}$$

Sur les pages suivantes, on montre les courbes obtenues pour la série.

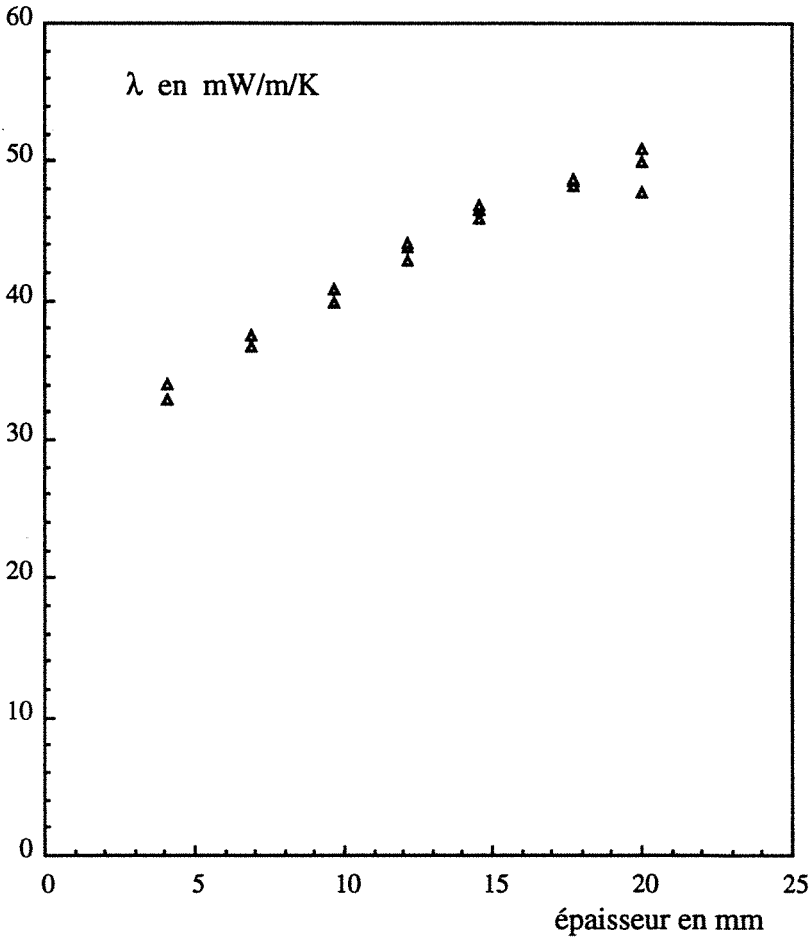
Série "faces brillantes", modèle 1D :



*Série "faces brillantes", modèle de l'ailette :*

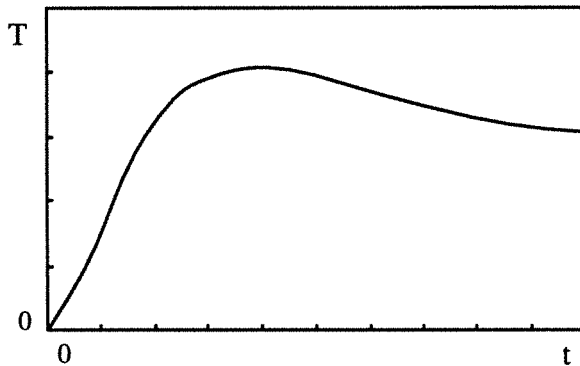


Série "faces brillantes" modèle 2D :





L'allure des thermogrammes de la série «noire», par contre, est :



La tangente non nulle à l'origine est imputable au rayonnement, qui traverse directement le matériau, sans retard. La conduction seule, quant à elle, (voir le thermogramme du début de ce chapitre), induit une pente nulle au temps initial, car c'est un phénomène de diffusion.

Ceci nous a conduits à utiliser les modèles «en W», seuls à fournir des thermogrammes superposables avec les thermogrammes expérimentaux.

Sur les pages suivantes, figure une expérience sur un échantillon de 14,6 mm d'épaisseur. Les résultats des identifications de la série sont ensuite représentés.

## Données mesurées

## EXPERIENCE

B:\PE\	005 . 01	B:\PE\
--------	----------	--------

	matériau	épaisseur	rho	C
échantillon	POLYETHY	14.60 mm	32.00 SI	1371.00 SI
rondelles	CUIVRE	0.20 mm	8900.00 SI	385.00 SI

date	calibre traceur	faces en regard	T°C ambiante
13 / 8 / 1992	0.25 mV	noires	22.2 °C

rayon R	défilement papier	H max sur papier	nb de pts saisis
12.5 mm	250.0 mm/min	174.8 mm	9

ordonnée y	abscisse x	rapport	temps
17.5 mm	58.8 mm	0.1001	14.11 s
35.0 mm	70.8 mm	0.2002	16.99 s
58.3 mm	81.8 mm	0.3335	19.63 s
69.9 mm	87.3 mm	0.3999	20.95 s
87.4 mm	96.0 mm	0.5000	23.04 s
104.9 mm	104.1 mm	0.6001	24.98 s
122.4 mm	113.5 mm	0.7002	27.24 s
139.8 mm	123.8 mm	0.7998	29.71 s
157.3 mm	138.3 mm	0.8999	33.19 s

commentaire éventuel	faces noires sup noire
----------------------	------------------------

## Fiche de résultats pour l'identification

## RESULTAT

B:\PE\	005 . 01	01 . aiW
--------	----------	----------

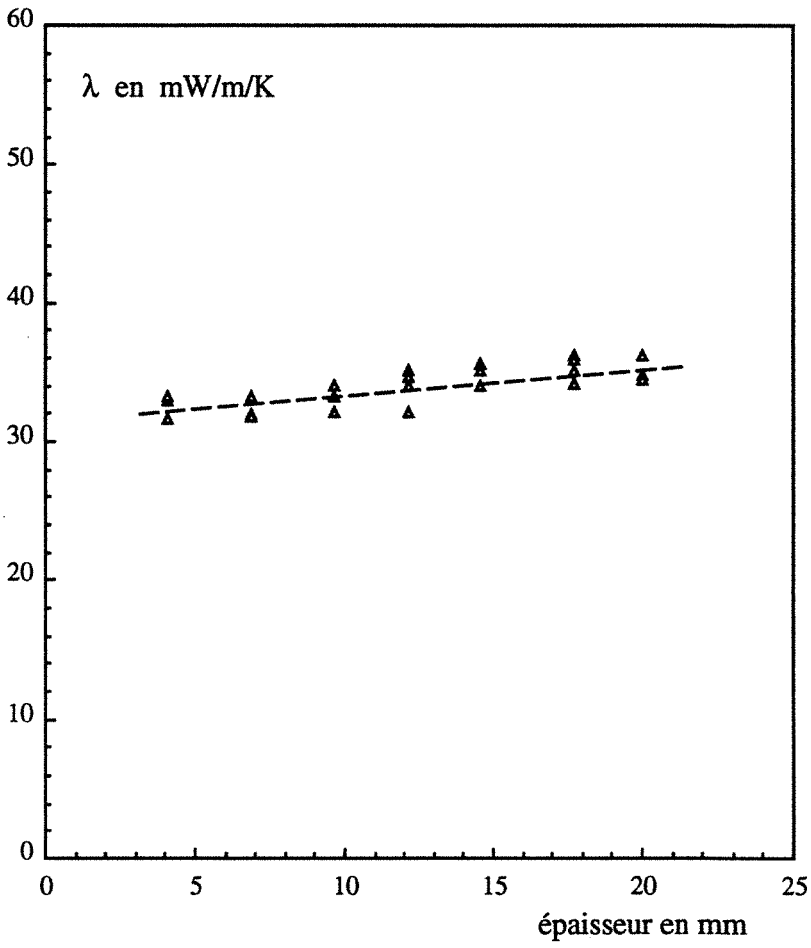
nb Laplace	epsilon	epsilon Bessel	aide seuil	erreur seuil
5	1.0E-0005	1.0E-0006	6	1.0E-0005
dx* seuil	xmax (calcul)	xmin (calcul)	accélération	puits chaleur
1.0E-0012	0.10000	0.00001	4.00	0.000 mW/K

dim	commentaire éventuel	méthode
2	identification habituelle	classique

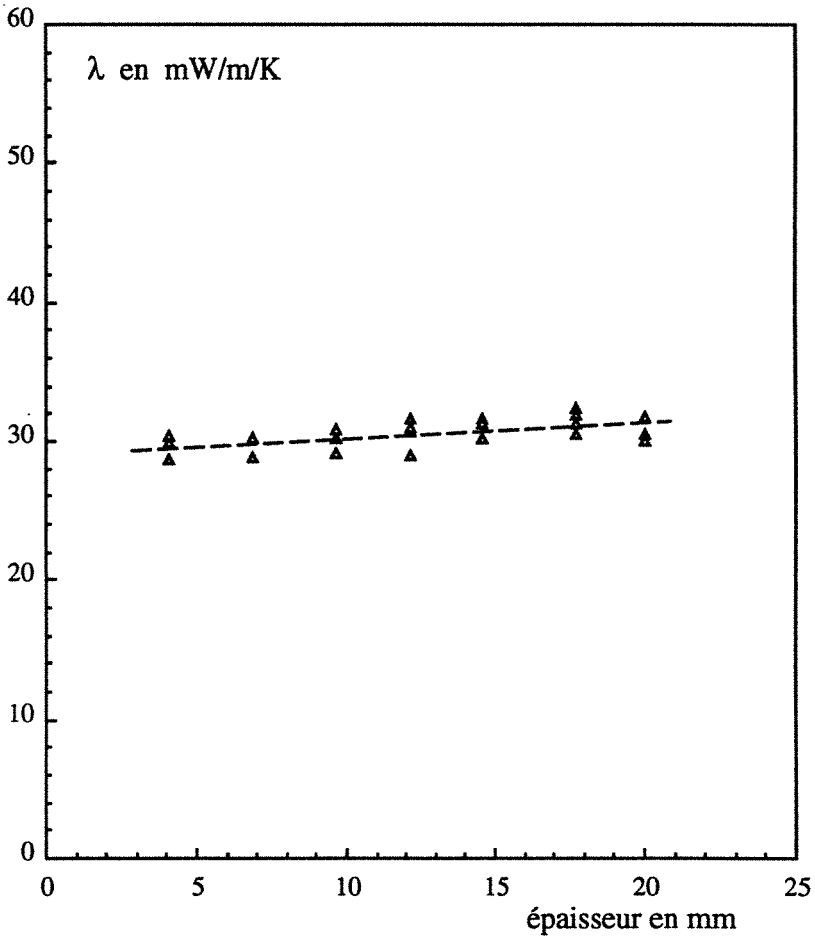
rapport	temps (s)	rapport	temps (s)
0.3335	14.11	0.6001	24.98
0.8999	33.19		

h*	h
13.742031	28.350 W/m <sup>2</sup> /K
W*	W
0.002425	0.005 W/m <sup>2</sup> /K
conductivité thermique	
31.12 mW/m/K	

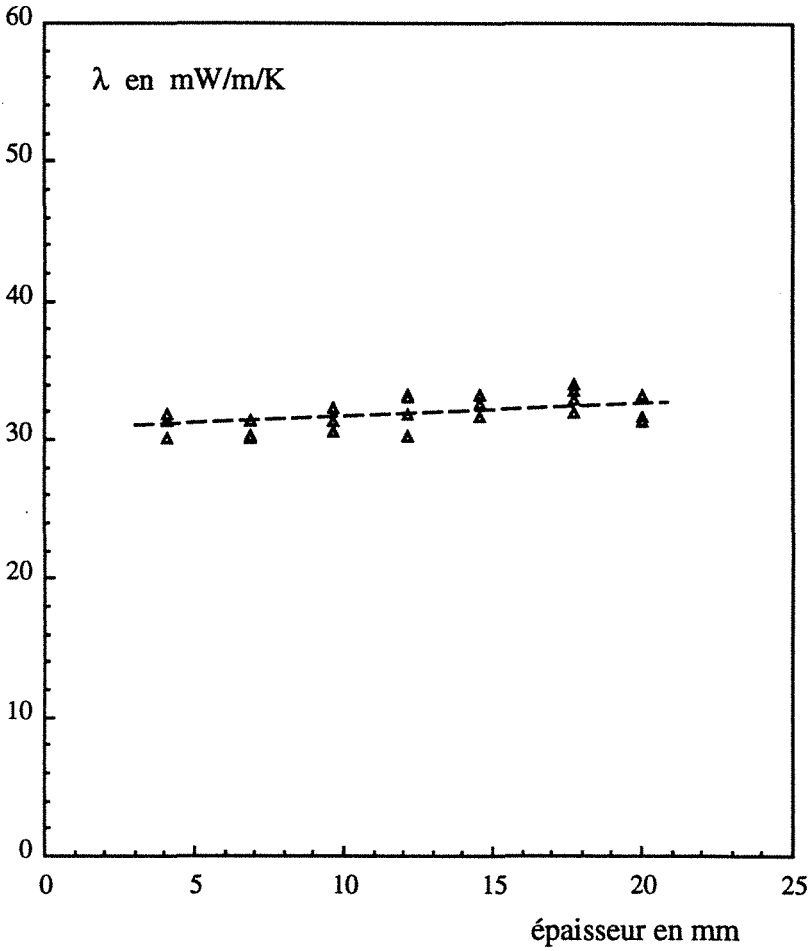
Série "faces noires", modèle 1D W :



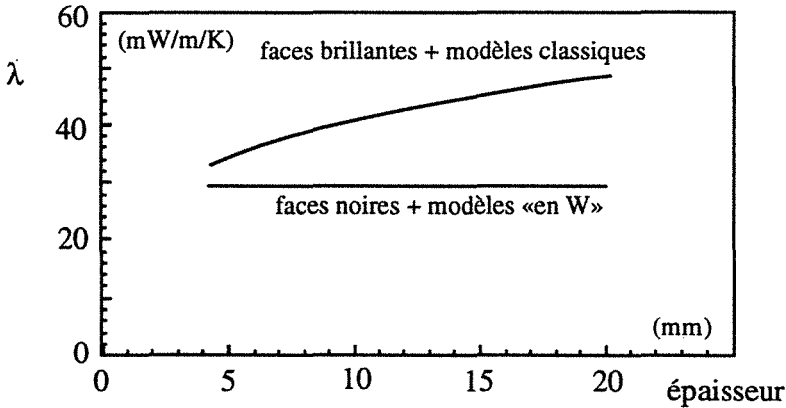
Série "faces noires", modèle ailette W :



Série "faces noires", modèle 2D W :



Si l'on trace les courbes des deux séries, pour les modèles de l'ailette et de l'ailette W, sur un même graphe, on obtient schématiquement :



Nous remarquons que la conductivité de la série "faces noires" apparaît à peu près constante en fonction de l'épaisseur : en effet, le modèle utilisé nous permet de séparer les parts purement conductive (phonique,  $\lambda$ ) et radiative (W) du transfert de chaleur. La courbe ne représente donc que la conductibilité phonique de la mousse. Cette conductibilité, intrinsèque au matériau, est évidemment indépendante de l'épaisseur de l'échantillon choisie.

Par contre, la conductivité thermique de la série "faces brillantes" augmente avec  $e_0$ , trahissant un effet d'épaisseur. Dans les modèles classiques que nous avons utilisés, rien n'est prévu pour la part radiative, et il est normal que celle-ci soit incluse dans le résultat final.

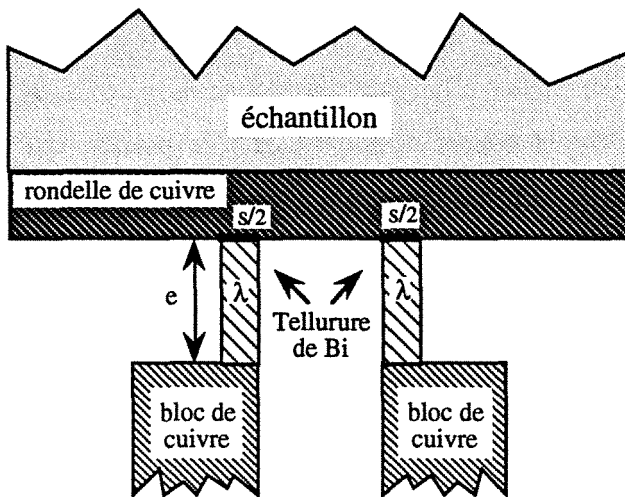
La superposition des courbes des deux séries nous permet, par différence, d'estimer la part radiative du transfert de chaleur à travers le

matériau, et de retrouver la part mesurée sur le même matériau par B. Martin [43] et R. Dadou [23] qui utilisaient une méthode de mesure directe de la composante radiative .



## V - TERMES CORRECTIFS

La mesure de la température de la face arrière de l'échantillon est réalisée à l'aide d'un thermocouple de tellure de bismuth (une branche dopée N, l'autre dopée P), comme le montre le schéma :



Il existe un contact d'aire  $s$  (deux fois  $s/2$ ) entre la rondelle de cuivre et le thermocouple, entraînant un flux de chaleur entre ces deux éléments :

$$\phi = \frac{s \lambda \Delta T}{e}$$

où :

$\Delta T$  est l'élévation de température de la rondelle  $(\approx 0,2^\circ\text{C})$

$\lambda$  est la conductivité du tellure de Bismuth  $\approx 10 \text{ W/m/K}$

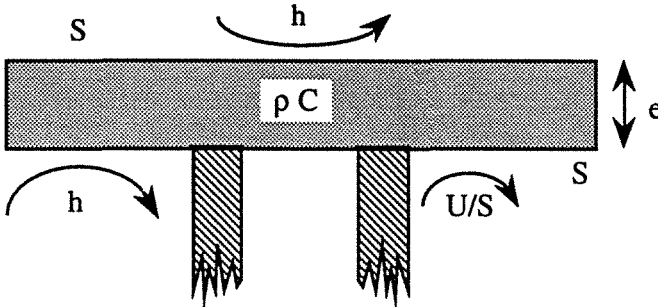
$s$  est l'aire de contact  $\approx 4 \text{ mm}^2$

$e$  est l'épaisseur du thermocouple  $\approx 5 \text{ mm}$

Ce flux peut être considéré comme une perte sur la rondelle inférieure, au même titre que l'action du coefficient d'échange global  $h$ . La conductance liée au contact,  $U$ , s'exprime par :

$$U = \frac{\Phi}{\Delta T} = \frac{s \lambda}{e} \approx 8.10^{-3} \text{ W/K}$$

Nous avons validé expérimentalement ce résultat en réalisant la manipulation suivante : à la place d'un échantillon ordinaire, nous avons installé une simple plaque de cuivre dans le boîtier, que nous avons soumise à un flash :



La réponse du système est :

$$T = 0 \quad \text{en } t \leq 0$$

$$T = T_0 \cdot e^{-\frac{2h + U/S}{\rho C e} t} \quad \text{en } t \geq 0$$

Si on appelle  $t_{1/e}$  le temps pour lequel  $T$  vaut la fraction  $1/e$  de  $T_0$ , alors :

$$t_{1/e} = \frac{\rho C e}{2h + U/S}$$

Nous avons utilisé deux plaques de cuivre de caractéristiques :

$$\begin{array}{lll}
 1 : & \varnothing = 38,5 \text{ mm} & e_1 = 0,15 \text{ mm} & S_1 = 11,6 \text{ cm}^2 \\
 2 : & \varnothing = 25 \text{ mm} & e_2 = 0,11 \text{ mm} & S_2 = 4,9 \text{ cm}^2 \\
 & \rho = 8300 \text{ kg.m}^{-3} & C = 420 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}
 \end{array}$$

et mesuré les temps  $t_{1/e}$  pour chacune des deux plaques :

$$t_1 = 26,2 \text{ s} \qquad t_2 = 12,6 \text{ s}$$

Alors :

$$\begin{array}{l}
 2h + \frac{U}{S_1} = \frac{\rho C e_1}{t_1} \\
 2h + \frac{U}{S_2} = \frac{\rho C e_2}{t_2}
 \end{array}
 \Rightarrow U = \rho C \frac{e_1 - e_2}{\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}}$$

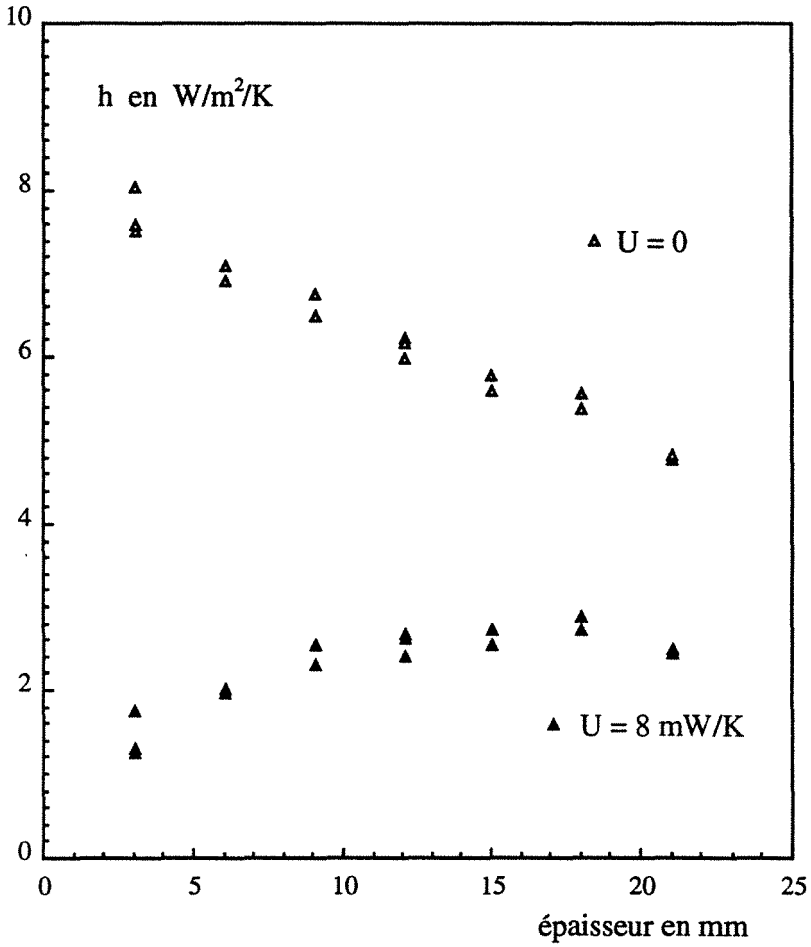
Soit numériquement :

$$U = 8,9.10^{-3} \text{ W/K}$$

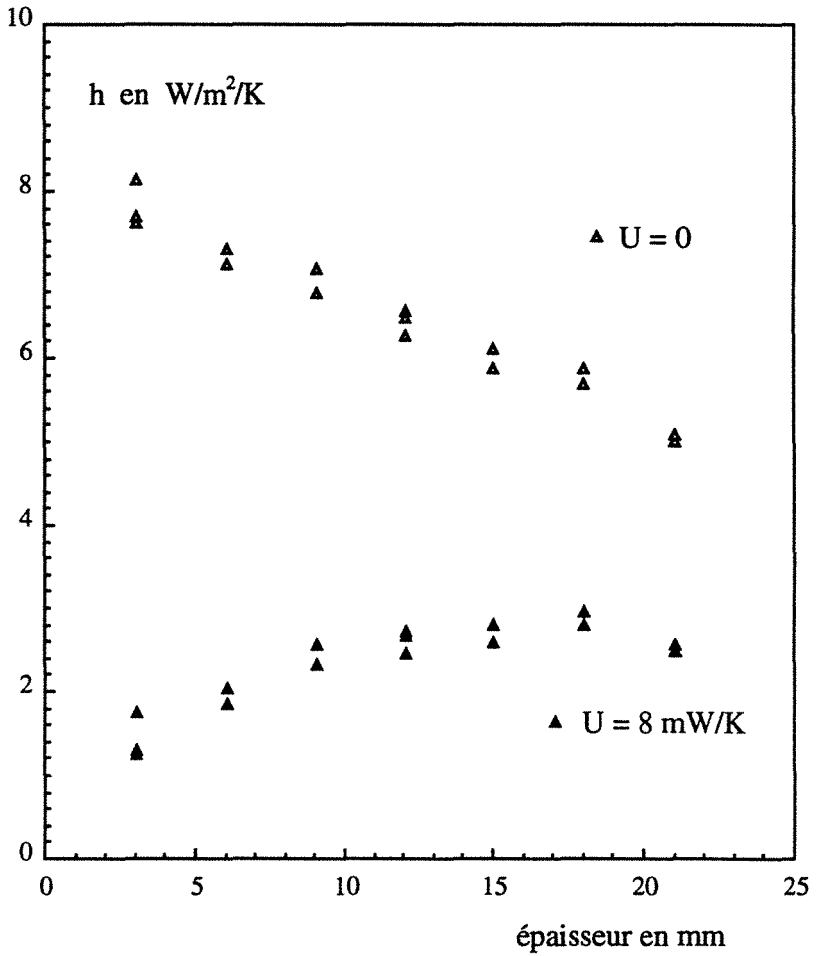
Cette valeur mesurée est du même ordre de grandeur que celle issue des estimations.

Nous avons identifié la conductivité du P.V.C. en usant des modèles «ailette U» et «2D U», avec  $U = 8\text{mW/K}$  : les valeurs de  $\lambda$  sont extrêmement voisines (moins de 2% de différence). Par contre,  $h$ , le coefficient global d'échange, varie beaucoup d'un modèle à l'autre, comme nous l'avons montré sur les deux graphes suivants :

PVC avec cuivre 0,2 mm , modèle de l'ailette :



PVC avec cuivre 0,2 mm , modèle 2D :



Nous constatons que  $h$  est un peu plus stable en fonction de l'épaisseur lorsque que nous considérons des pertes thermiques supplémentaires par le thermocouple,  $U$ . Cependant, les améliorations ne sont pas spectaculaires, compte tenu de la simplicité des modèles de la correction.

La prise en compte de  $U$  revient dans les faits à supposer les coefficients d'échange inégaux sur les deux rondelles. A. Degiovanni a montré [42] que seule la somme des coefficients sur les deux faces a une influence sur l'identification de la conductivité du matériau : il est donc normal que  $\lambda$  ne varie que très peu lorsque  $U$  est nul ou non.

L'étude systématique de  $h$  ne nous apporte pas grand-chose à notre niveau de finesse sur l'appréhension du phénomène de transfert de chaleur. Il pourrait néanmoins être intéressant, si l'on disposait du matériel adéquat, d'observer le champ de température de toute la surface de l'échantillon cylindrique -avec un dispositif comprenant une caméra à infra-rouges par exemple- pour vérifier si les hypothèses que nous avons formulées sont proches de la réalité ( $h$  identique sur la face supérieure de l'échantillon et sur la circonférence, etc...).

## VI - COMPARAISON AVEC D'AUTRES MESURES

Les tables donnent pour le P.V.C. une valeur de conductivité de l'ordre de 180 mW/m/K : les valeurs que nous avons identifiées corroborent tout-à-fait cette donnée.

Nous avons mesuré la conductivité du polyuréthane rigide (P.U.R.) et de la mousse de polyéthylène (P.E.) avec un appareil à plaques chaudes, au Centre Scientifique et Technique du Bâtiment de Saint Martin d'Hères.

Les échantillons, des parallélépipèdes de 300 x 300 mm<sup>2</sup> de surface et de l'ordre de 30 mm d'épaisseur, ont été placés pour une première mesure entre deux feuilles d'aluminium (d'émissivité faible), et pour une deuxième, entre deux feuilles de carbone (de forte émissivité). Les résultats obtenus ont été :

mesures matériau	feuilles d'aluminium	feuilles de carbone
P. U. R.	$\lambda = 22,8 \text{ mW/m/K}$	$\lambda = 23,3 \text{ mW/m/K}$
P. E.	$\lambda = 47,0 \text{ mW/m/K}$	$\lambda = 52,6 \text{ mW/m/K}$

Pour le P.U.R., la différence entre les deux mesures est très faible, à

cause de la relativement grande opacité du matériau à l'épaisseur considérée.

Par contre, pour le P.E., la différence est notable. Il est clair que dans la deuxième mesure, du rayonnement entre les deux feuilles de carbone traverse le matériau, et l'appareil ne distingue pas les flux issus de la conduction phonique et du rayonnement. B. Martin [43] et R. Dadou [23] ont montré dans leurs thèses que la mousse de polyéthylène expansé est très peu absorbante vis-à-vis du rayonnement infra-rouge; il est donc parfaitement normal de constater un écart de comportement du matériau en fonction de l'émissivité des frontières de l'échantillon.



*CONCLUSION*



La méthode flash permet d'accéder aux caractéristiques thermiques de nombreux matériaux ayant une conductivité supérieure à  $0,15 \text{ W/m/K}$ . Nous avons adapté cette méthode instationnaire à des matériaux de conductibilité plus faible, et qui présentent des propriétés radiatives dont nous tenons compte.

L'élaboration des nouveaux modèles «en W» nous a permis d'identifier la part purement conductive, ou phonique, du transfert de chaleur à travers des matériaux semi-transparentes diffusants et peu absorbants.

L'exploitation de séries de mesures sur la mousse de polyéthylène expansé nous a effectivement fourni une valeur de conductivité phonique à peu près constante en fonction de l'épaisseur de l'échantillon, alors que la conductibilité globale augmente -phénomène bien connu sous le nom d'effet d'épaisseur-.

Il est clair que les nouveaux modèles développés ne peuvent traduire qu'en partie la réalité des transferts thermiques; dans ces matériaux, dont la configuration est extrêmement complexe et aléatoire, la modélisation des transferts conductif et à plus forte raison radiatif (avec les phénomènes d'absorption et de diffusion) est très lourde à mettre en œuvre, à cause du nombre très important de paramètres physiques et géométriques qu'il conviendrait de connaître précisément.

Il serait illusoire par contre de penser faire l'économie des mesures optiques -en vue d'appréhender les caractéristiques radiatives- pour des composés devenant plus absorbants à moins qu'alors, comme l'a montré S. André, le phénomène de diffusion n'existe plus.

Contrairement aux codes de calculs d'éléments finis d'usage courant, les nouveaux modèles ne nécessitent que des temps de l'ordre de la dizaine de secondes sur des petits calculateurs (de type P.C.).

Moyennant quelques travaux d'automatisation, cette nouvelle méthode pourrait fort bien opérer en milieu industriel, sur un site de production d'isolants thermiques.

*BIBLIOGRAPHIE*



- [1] C.S.T.B., R.E.E.F., Thermique et Hydraulique : règlements, règles de calcul, exemples de solutions, guides, avis techniques, bibliographie, 1984, p194.
- [2] J.-B. J. FOURIER, La théorie analytique de la chaleur, 1822
- [3] S. ANDRE, Identification de la diffusivité phonique du verre par méthode flash de 20°C à 500°C, 1992, thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [4] A. DRAOUI, C. BEGHEIN, F. ALLARD, Radiative couplings between the walls and a semi-transparent fluid enclosed in a two dimensional thermally driven cavity, 1992, acte Eurotherm, Heat Transfer in Semi-Transparent Media, pp.129-138
- [5] N. EL WAKIL, J.F. SACADURA, Couplage rayonnement-convection naturelle dans un milieu poreux semi-transparent confiné dans une cavité carrée, 1991, Journée d'étude S.F.T.
- [6] Brevet C.S.T.B. n° 87 402 4151 du 27.10.87
- [7] A. DEGIOVANNI, Conductivité et diffusivité thermique des solides, Techniques de l'Ingénieur, à paraître
- [8] P. THERY, J. DEBUS, F. WATTIAU, Détermination de la diffusivité et de la chaleur massique par traitement d'évolution thermocinétique en régime transitoire, 1980, Int. Heat and Mass Transfer, vol 23, pp 562-566

- [9] J.C. MAXWELL, On the dynamical theory of gases, 1967, Phil. Trans., 157,49
- [10] A. CUNNINGHAM, Structural model of heat transfer through rigid polyurethane foam, 1985, Proc. Conference on Heat and Mass Transfer in Cryoengineering and Refrigeration
- [11] C. TIEN, K. VAFAI, AIAA Paper, 1978, pp.78-87
- [12] MICROTERM EUROPA N.V., Hoge Heerweg 73, B 9100 SINT NIKLAAS - BELGIQUE
- [13] B. MARTIN, Etude de l'anisotropie de la conductivité thermique des superisolants, 1988, thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
- [14] C.G. BANKWALL, Heat transfer in fibrous materials, 1973, J. Test Eval., vol 1, pp 235-243
- [15] S. KLARSFELD, La conductivité thermique des isolants fibreux en fonction de leur structure, CR du 2<sup>ème</sup> colloque CSTB/CFI, ahiers du CSTB n° 213
- [16] A. SHUSTER, Radiative transfer through a foggy atmosphere, 1905, Astrophysical Journal, vol.21 pp1-22
- [17] H.C. HAMAKER, Radiation and heat conduction in light-scattering materials, 1957, Part I,II,III,IV, Philips Res.Dep



- [18] B.K. LARKIN, A study of the rate of thermal radiation through porous insulating materials, 1957, These Ph.D., University of Michigan
- [19] L.R. GLICKSMAN, M. SCHUETZ, M. SINOFSKY, Radiation heat transfer in foam insulation, 1987, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 30, n°1, pp 187-197
- [20] T.W. TONG, C.L. TIEN, Analytical models for thermal radiation in fibrous insulation, 1980, J. Th. Insulation. 4, pp 27-44
- [21] R.M.F. LINFORD, R.J. SCHMITT, T.A. HUGHES, Radiative contribution of the thermal conductivity of fibrous insulation, 1974, American Society of Testing and Materials, pp 60-84
- [22] R.DADOU, D. BILLEREY, C.TERRIER, J. MANGIN, G. MORLOT, Détermination des propriétés radiatives de milieux semi-transparents absorbants et diffusants, 1986, Revue Générale de Thermique, n° 294-295, pp 349-353
- [23] R.DADOU, Etude du transfert radiatif dans les matériaux poreux à l'aide d'un laser CO<sub>2</sub>, 1984, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
- [24] S. ROSSELAND, Theoretical Astrophysics, 1936, Oxford University Press, London

- [25] S.N. SHORIN Heat exchange by radiation in presence of an absorbing medium, 1951, *Isv. Akad. Nauk. SSSR*, n° 3 pp 389-406, abridged translation in *Engineer's Digest* vol 12 pp 324-328
- [26] H.C. HOTTEL, Radiation as a diffusion process, 1962, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 5, pp 82-83
- [27] N. ÖZISIK, Radiative transfer and interactions with conduction and convection, 1973, Wiley, New-York
- [28] L.R. GLICKSMAN, M.R. TORPEY, The influence of cell size and foam density on the thermal conductivity of foam insulation, *Polyurethanes world congress* Sept 29-Oct 2 1987, pp80-83
- [29] L.R. GLICKSMAN, M. MOZGOWIEC, M.R. TORPEY, Radiation heat transfer in foam insulation, 1990, Ninth international Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israël
- [30] H.C. HOTTEL, A.F. SAROFIM, Radiation transfer, 1967, McGraw-Hill Book Company, New-York, pp
- [31] G. ROUX, D. BILLEREY, H. ETIENNE, Super insulating foams : development and future trends, 1990, Technomic Pennsylvania USA
- [32] L.R. GLICKSMAN, Heat transfer and ageing of cellular foam insulation, 1991, Cellular Polymers Conference

- [33] J. KUHN, H. P. EBERT, M.C. ARDUINI-SCHUSTER, D. BÜTTNER, J. FRICKE, Thermal transport in polystyrene and polyurethane foam insulations, 1992, International Journal Heat Mass Transfer, vol 35, n° 7, pp 1795-1801
- [34] R. VISKANTA, M.P. MENGÜÇ, Radiative transfer in dispersed media, 1989, Appl Mech Rev vol 42, n° 9, sept 89
- [35] J. BRANSIER, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, 1972, Paris
- [36] W. J. PARKER, R. J. JENKINS, C. P. BUTLER, G.L. ABBOTT, 1961, Jour Appl Phys, vol 32 n° 9
- [37] W. J. PARKER, R. J. JENKINS, 1962, Advanced Energy Conversion, vol 2
- [38] A. B. DE VRIENDT, 1984, La transmission de la chaleur, Vol 2, Introduction au rayonnement thermique, Gaëtan Morin éditeur
- [39] A. DEGIOVANNI, 1986, Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash, Revue Phys Appl, 21 (1986) 229-237
- [40] A. JEANMAIRE, B. MARTIN, D. BILLEREY, A. DEGIOVANNI, 1992, A new method for the mesure of thermal conductivity of semi-transparent insulating foams, proc Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Milan, 7-10 July 1992, vol 2, pp 489-507

- [41] B. DAVIES, B. MARTIN, 1979, Numerical inversion of Laplace transform : a survey and comparison of methods, Journal of Computational physics 33, 1-32, 1979
  
- [42] A. DEGIOVANNI, 1975, Contribution à l'étude de la diffusivité thermique, thèse d'état, Université Claude Bernard, Lyon, n° d'ordre 75-19.
  
- [43] B. MARTIN, 1987, Transfert radiatif dans les matériaux poreux, mesures automatisées, thèse de docteur ingénieur I.N.P.L.
  
- [44] Société Anonyme SAPRONIT, Z.I. Route de la Mazière B.P. 15, 67130 WISHES

*ANNEXES*



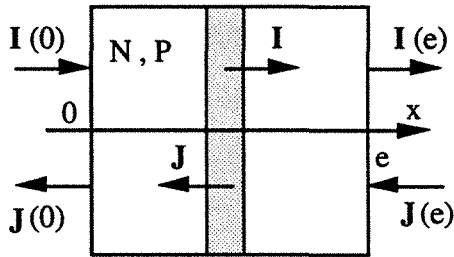
***ANNEXE 1***





1 - Le modèle d'Hamaker

On considère un matériau semi-transparent de coefficients volumiques d'absorption  $P$  et de diffusion  $N$ , soumis à un rayonnement de densité de flux  $I(0)$  : ce rayonnement est absorbé, diffusé à travers toutes les tranches de l'échantillon :



Larkin [18] a écrit les équations différentielles couplées régissant les flux  $I$  et  $J$ , intégrales des luminances dans les sens respectivement de  $x$  croissant et de  $x$  décroissant. Ainsi  $I$  est le flux incident et  $J$  le flux rétrodiffusé. Cette approche n'est bien sûr qu'une approximation du phénomène réel :

$$\frac{dI}{dx} = -MI + NJ + P\sigma T^4$$

$$\frac{dJ}{dx} = -MJ + NI + P\sigma T^4$$

où  $M = N + P$  est le coefficient d'interception du matériau. Explicitons ces équations : en passant à travers la tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , le flux  $I$  est atténué de  $(N+P) I dx$  et reçoit une contribution du flux rétrodiffusé,  $N J dx$ . Le terme  $P\sigma T^4$  provient du rayonnement propre de

la tranche de matériau. Dans le cas de mesures de rayonnement utilisant un flux haché et un détection synchrone du flux transmis [23], on néglige cette contribution, et le système, alors d'Hamaker [17], devient :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= -MI + NJ \\ \frac{dJ}{dx} &= -MJ + NI \end{aligned}$$

La résolution donne :

$$\begin{aligned} I &= a e^{vx} + b e^{-vx} \Rightarrow I' = v[a e^{vx} - b e^{-vx}] \\ J &= c e^{vx} + d e^{-vx} \Rightarrow J' = v[c e^{vx} - d e^{-vx}] \end{aligned}$$

avec

$$v = \sqrt{M^2 - N^2} = \sqrt{P(P + 2N)}$$

et  $v$  est le coefficient efficace d'absorption. En reportant ces équations dans le système initial, on obtient :

$$\begin{aligned} vae^{2vx} - vb &= (a e^{2vx} + b) (-M) + N(c e^{2vx} + d) \\ vce^{2vx} - vd &= -M c e^{2vx} - M d + N a e^{2vx} + Nb \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} Nd &= (M - v) b \\ Nc &= (M + v) a \end{aligned}$$

Donc  $I$  et  $J$  s'expriment par :

$$\begin{aligned} I &= a e^{vx} + b e^{-vx} = A(1-\beta) e^{vx} + B(1+\beta) e^{-vx} \\ J &= \frac{M+v}{N} a e^{vx} + \frac{M-v}{N} b e^{-vx} = A(1+\beta) e^{vx} + B(1-\beta) e^{-vx} \end{aligned}$$

où

$$A = \frac{M + N + v}{2N} a \quad \text{et} \quad B = \frac{M + N - v}{2N} b$$

$$\beta = \frac{M - N + v}{M + N + v} = \sqrt{\frac{M - N}{M + N}} = \frac{v}{M + N}$$

Or  $I(0) = I_0$  et  $J(e) = 0$ . Ceci se traduit par :

$$I_0 = A(1 - \beta) + B(1 + \beta)$$

$$0 = A(1 + \beta)e^{ve} + B(1 - \beta)e^{-ve}$$

D'où les valeurs de A et B :

$$A = \frac{-I_0(1 - \beta)e^{-2ve}}{(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2 e^{-2ve}}$$

$$B = \frac{I_0(1 + \beta)}{(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2 e^{-2ve}}$$

On définit la transmittance  $\tau_e$  comme le rapport de  $I(e)$  à  $I_0$  :

$$\tau_e = \frac{4\beta e^{-ve}}{(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2 e^{-2ve}}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\tau_e} = \frac{(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2 e^{-2ve}}{4\beta e^{-ve}}$$

Dans le cas où  $\beta$  et  $v$  sont petits - pour des matériaux diffusants et peu absorbants ( $N \gg P$ ) -,  $\exp(-vx) = 1 - vx$ , et il est possible de calculer un développement de  $\tau_e$  :

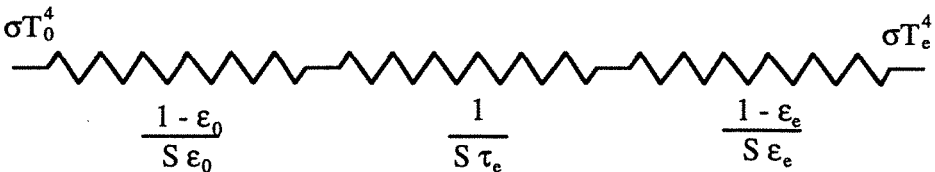
$$\frac{1}{\tau_e} \approx \frac{(1 + 2\beta) - (1 - 2\beta)(1 - 2ve)}{4\beta} \approx 1 + \frac{ve}{2\beta} \approx 1 + Ne$$

donc :

$$\frac{1}{\tau_e} \approx 1 + Ne$$

2 - Analogie électrique

Il est possible d'établir une analogie entre la tension électrique et la grandeur thermique  $\sigma T^4$ , et entre le courant et les flux de chaleur. Ainsi, lorsque deux surfaces S parallèles définies par  $\sigma T_0^4$  et  $\sigma T_e^4$  sont en regard, elles échangent de la chaleur par rayonnement. Ce rayonnement subit une atténuation par le milieu qui sépare les deux surfaces (facteur de transmission non égal à l'unité) et par les surfaces elles-mêmes si leur émissivité est différente de l'unité (phénomène de résistance à l'émission). Nous pouvons schématiser ces atténuations par l'effet de «résistances» thermiques, à l'instar de ce qui se produit en électrocinétique :



En écrivant que le flux total qui transite de la surface 0 à la surface e est le rapport de la différence de «potentiel» entre les surfaces à la somme des résistances, on obtient :

$$\varphi_{0 \rightarrow e} = \frac{\sigma [ T_0^4 - T_e^4 ]}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_e} + \frac{1}{\tau_e} - 2}$$

En remplaçant le flux par sa valeur calculée au paragraphe précédent, il vient :

$$\varphi_{0 \rightarrow e} = \frac{\sigma [T_0^4 - T_e^4]}{\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_e} - 1 + Ne}$$

Si l'on écrit une équation du type de la loi de Fourier pour ce flux :

$$\varphi_{0 \rightarrow e} = \lambda_r \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Si la différence  $T_0 - T_e$  est petite, on linéarise :

$$T_0^4 - T_e^4 \approx 4 \left[ \frac{T_0 + T_e}{2} \right]^3 [T_0 - T_e]$$

Par conséquent :

$$\lambda_r = \frac{4 \sigma T_m^3 e}{\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_e} - 1 + Ne}$$

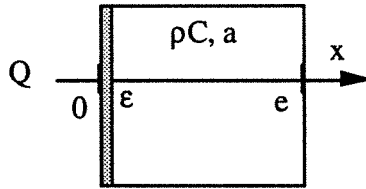


*ANNEXE 2*





Considérons un mur homogène, de caractéristiques thermiques  $\rho$ ,  $C$ ,  $a$ , isotrope, d'épaisseur  $e$ , isolé, soumis à un pic de chaleur  $Q$  sur sa face définie par  $x = 0$ , comme le montre la figure :



On peut montrer que pour les temps proches de zéro, la chaleur  $Q$  est emmagasinée par le mur sur une épaisseur  $\epsilon$ . Ainsi, les équations relatives au problème sont :

$$\text{en } x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\text{en } x = e, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\text{à } t > 0, \quad 0 \leq x \leq e, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{à } t = 0, \quad \text{en } 0 \leq x \leq \epsilon, \quad T = \frac{Q}{\rho C \epsilon}$$

$$\text{à } t = 0, \quad \text{en } \epsilon \leq x \leq e, \quad T = 0$$

Séparons les variables :

$$T(x, t) = X(x) \cdot \tau(t)$$

Ainsi :

$$\tau X'' = \frac{1}{a} \tau' X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{\tau'}{\tau} = -\alpha^2$$

où  $\alpha^2$  est la constante de séparation.

Donc  $T$  s'écrit :

$$T(x, t) = [A \cos \alpha x + B \sin \alpha x] e^{-\alpha^2 t}$$

Or :

$$X'(x) = \alpha [-A \sin \alpha x + B \cos \alpha x], \text{ et } X'(0) = X'(e) = 0$$

Donc:

$$B = 0 \text{ et } A \cos \alpha x = 0 \Rightarrow \alpha e = n\pi \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{e}$$

Et T de s'exprimer par :

$$T = \sum_0^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{e} \exp \left[ -n^2 \pi^2 \frac{at}{e^2} \right]$$

Or :

$$T(x, 0) = \sum_0^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{e} = T(x)$$

Pour  $n > 0$  :

$$\int_0^e T(x) \cos \frac{n\pi x}{e} dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_0^e \cos \frac{n\pi x}{e} \cos \frac{i\pi x}{e} dx = a_n \int_0^e \cos^2 \frac{n\pi x}{e} dx$$

$$\int_0^e T(x) \cos \frac{n\pi x}{e} dx = a_n \int_0^e \frac{dx}{2} = \frac{a_n e}{2}$$

Or :

$$\int_0^e T(x) \cos \frac{n\pi x}{e} dx = \frac{Q}{\rho C e} \varepsilon = \frac{Q}{\rho C}$$

Donc :

$$a_n = \frac{2Q}{\rho C e}$$

Pour  $n = 0$  :

$$\int_0^e T(x) dx = a_0 \int_0^e dx = a_0 e \Rightarrow a_0 = \frac{Q}{\rho C e}$$

Donc finalement :

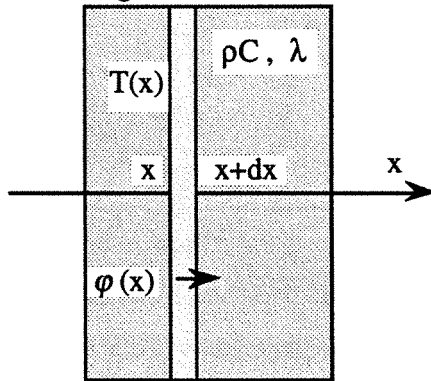
$$T(x, t) = \frac{Q}{\rho C e} \left[ 1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{e} \exp(-n^2 \pi^2 \frac{at}{e^2}) \right]$$

*ANNEXE 3*



### 1 - Equations

Parker [35] s'est intéressé au problème d'un mur homogène d'épaisseur  $e$ , de caractéristiques  $\rho C$ ,  $\lambda$  et  $a = \frac{\lambda}{\rho C}$  constantes en fonction du temps et de la température  $T$ , traversé par un flux de chaleur monodirectionnel, selon la figure :



Ce flux surfacique  $\varphi$ , constant donc dans chaque tranche du mur, est proportionnel à  $\lambda$  et au gradient de température, conformément à la loi de Fourier [2] :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

A l'intérieur du mur,  $T(x)$  est régi par l'équation de la chaleur, écrite en mode unidirectionnel :

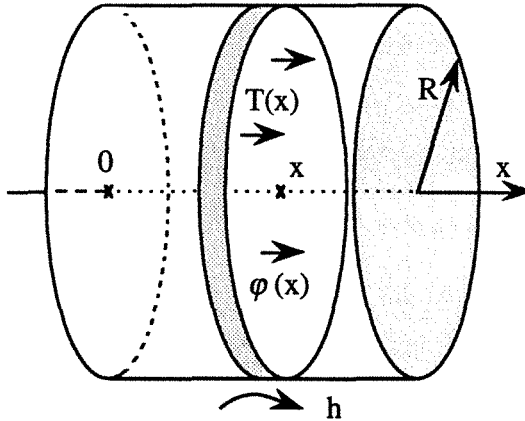
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Les équations relatives à ce modèle «1D» sont donc :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

On peut imaginer à présent un cylindre de longueur  $e$ , comme sur la figure :



On suppose que chaque tranche (c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels  $x$  est constant), de volume  $dV = \pi R^2 dx$ , a une température uniforme et échange de la chaleur sur sa surface  $dS = 2\pi R dx$ , avec l'extérieur, comme le ferait une ailette de refroidissement sur un radiateur. Cet échange correspond en fait à un puits de chaleur pour chaque tranche du cylindre. L'équation régissant  $T$  est par conséquent :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h dS}{\lambda dV} T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Les équations relatives à ce modèle de l'«ailette» sont donc :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

2 - Utilisation de la transformation de Laplace

Soit  $f$  une fonction réelle définie pour tout  $t$  strictement positif. On appelle transformée de Laplace de  $f$  la fonction :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \varphi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Énonçons quelques propriétés aisément démontrables :

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \varphi\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

$$\text{si } \mathcal{L}\{f(t)\} = \varphi(p) \quad \text{alors} \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = p \varphi(p) - f(0)$$

Appliquons cette transformation aux fonctions  $\varphi(t)$  et  $T(t)$  en vue d'obtenir de nouvelles fonctions,  $\varphi(p)$  et  $\theta(p)$ . À l'instant initial, le mur ou le cylindre sont à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire que  $T(0)=0$ , si  $T$  désigne l'écart de température entre le matériau et l'extérieur. Les systèmes d'équations deviennent :

modèle «1D»

$$\begin{aligned} \varphi &= -\lambda \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} &= \frac{p}{a} \theta \end{aligned}$$

modèle «ailette»

$$\begin{aligned} \varphi &= -\lambda \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} &= \left( \frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda R} \right) \theta \end{aligned}$$

Les deux modèles admettent des équations analogues si l'on pose :

$$u = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad uv = \begin{cases} \frac{p}{a} & \text{pour le modèle «1D»} \\ \frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda R} & \text{pour le modèle «ailette»} \end{cases}$$

$$\varphi = -\frac{1}{u} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = uv \theta$$

### 3 - Notation vectorielle

Il est possible de relier  $\theta$  et  $\varphi$  en définissant le vecteur :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Le système différentiel à deux équations et deux inconnues se ramène à :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{d\vec{X}}{dx} = - M \vec{X} \quad \text{si } M = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $\vec{X}(x)$  s'exprime alors comme le produit d'une matrice (2,2) par le vecteur  $\vec{X}(0)$ . Il en résulte que le mur se comporte exactement comme une fonction de transfert, solution de l'équation différentielle.

Il sera donc possible de modéliser le mur par un simple quadripôle, c'est-à-dire un tenseur d'ordre deux, représenté par une matrice carrée du même ordre.

### 4 - Résolution de l'équation différentielle

La solution de toute équation du type :

$$\frac{d\vec{X}}{dx} = - M \vec{X}$$

est :

$$\vec{X}(x) = e^{-Mx} \vec{X}(0)$$

Calculons l'exponentielle de la matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} M^{2n} &= \begin{bmatrix} (uv)^n & 0 \\ 0 & (uv)^n \end{bmatrix} \\ M^{2n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & u(uv)^n \\ v(uv)^n & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Or :

$$e^{-Mx} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} M^n \quad \text{et} \quad M^{2n} = \begin{bmatrix} \sqrt{uv}^{2n} & 0 \\ 0 & \sqrt{uv}^{2n} \end{bmatrix}$$

$$M^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{u}{v}} \sqrt{uv}^{2n+1} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \sqrt{uv}^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Si :

$$e^{-Mx} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\mathcal{A} = 1 + \frac{(\sqrt{uv}x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\sqrt{uv}x)^{2n}}{(2n)!} + \dots = \text{ch}(\sqrt{uv}x)$$

$$\mathcal{B} = \sqrt{\frac{u}{v}} \left( \frac{(\sqrt{uv}x)^1}{1!} + \dots + \frac{(\sqrt{uv}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \sqrt{\frac{u}{v}} \text{sh}(\sqrt{uv}x)$$

$$\mathcal{C} = \sqrt{\frac{v}{u}} \left( \frac{(\sqrt{uv}x)^1}{1!} + \dots + \frac{(\sqrt{uv}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \sqrt{\frac{v}{u}} \text{sh}(\sqrt{uv}x)$$

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{(\sqrt{uv}x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\sqrt{uv}x)^{2n}}{(2n)!} + \dots = \text{ch}(\sqrt{uv}x) = \mathcal{A}$$

Soit donc :

$$e^{-Mx} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\sqrt{uv}x) & -\sqrt{\frac{u}{v}} \text{sh}(\sqrt{uv}x) \\ -\sqrt{\frac{v}{u}} \text{sh}(\sqrt{uv}x) & \text{ch}(\sqrt{uv}x) \end{bmatrix}$$

Si on s'intéresse au mur ou au cylindre, il faut calculer cette matrice avec

$x = e$  :

$$e^{-Me} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\sqrt{uve^2}) & -\sqrt{\frac{u}{v}} \text{sh}(\sqrt{uve^2}) \\ -\sqrt{\frac{v}{u}} \text{sh}(\sqrt{uve^2}) & \text{ch}(\sqrt{uve^2}) \end{bmatrix}$$

Il est intéressant d'exprimer le vecteur d'«entrée»  $\vec{X}(0)$  en fonction du vecteur de «sortie»  $\vec{X}(e)$ . La relation qui les lie est alors :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\sqrt{uve^2}) & \sqrt{\frac{u}{v}} \text{sh}(\sqrt{uve^2}) \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \text{sh}(\sqrt{uve^2}) & \text{ch}(\sqrt{uve^2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

### 5 - Adimensionnalisation de la solution

Remplaçons u et v par leurs valeurs :

modèle «1D»

$$uve^2 = \frac{pe^2}{a}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{p\lambda^2}{a}$$

modèle «ailette»

$$uve^2 = \frac{pe^2}{a} + \frac{2he^2}{\lambda R}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{p\lambda^2}{a} + \frac{2h\lambda}{R}$$

Si nous effectuons les changements de variables suivants :

$$\Omega = \frac{e}{\lambda}, \quad k = \rho Ce \quad \text{et} \quad R^* = \frac{R}{e}$$

$$h^* = h\Omega \quad \text{et} \quad p^* = \frac{pe^2}{a} = p \frac{e}{\lambda} \rho Ce = pk\Omega$$

Et appelons :

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{p^*} & \text{pour le modèle «1D»} \\ \sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} & \text{pour le modèle «ailette»} \end{cases}$$

Alors :

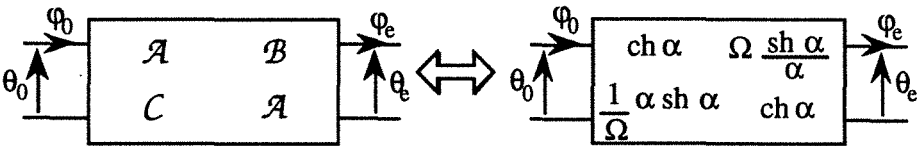
$$\mathcal{A} = \text{ch}(\alpha)$$

$$\mathcal{B} = \Omega \frac{\text{sh}(\alpha)}{\alpha}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\Omega} \alpha \text{sh}(\alpha)$$

$$\mathcal{D} = \text{ch}(\alpha)$$

Donc le mur ou le cylindre se modélise par :



C'est-à-dire que :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$



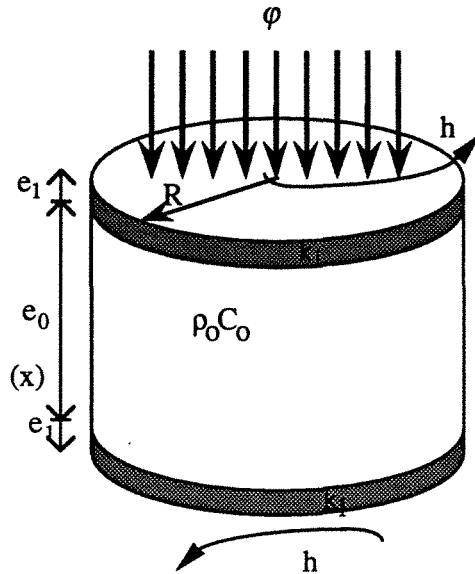
*ANNEXE 4*



### 1 - Mise en place des équations

Considérons un échantillon cylindrique d'épaisseur  $e_0$ , de caractéristiques  $\rho_0$ ,  $C_0$  et  $a$ , enserré entre deux rondelles de cuivre assimilées à des capacités surfaciques pures de valeur  $k_1 = \rho_1 C_1 e_1$ . Sur ces deux faces, on suppose qu'il existe des déperditions de chaleur proportionnelles à un coefficient  $h$  et à l'écart de température entre la rondelle de cuivre et l'extérieur.

Ceci peut se schématiser par :



On soumet l'échantillon à un flux de chaleur  $\phi$ , modélisé par un pic de Dirac. Si l'on suppose le transfert de chaleur unidirectionnel dans l'échantillon, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure s'expriment par les équations :

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_1 \frac{\partial T}{\partial t} + h T - \varphi$$

$$\text{en } x = e_0 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_1 \frac{\partial T}{\partial t} + h T$$

## 2 - Résolution du problème

Si l'on applique la transformation de Laplace sur ces trois équations - en appelant  $\theta$  et  $\varphi$  les transformées de  $T$  et  $\varphi$  -, on obtient le système :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{p}{a} \theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta - Q \quad (2)$$

$$\text{en } x = e_0 \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta \quad (3)$$

De (1) on tire :

$$\theta = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} \quad \text{où} \quad \alpha = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

On traduit alors les relations (2) et (3) par :

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \alpha (A - B) = (k_1 p + h) (A - B) - Q$$

$$\text{en } x = e_0 \quad \lambda \alpha (A e^{\alpha e} - B e^{-\alpha e}) = (k_1 p + h) (A e^{\alpha e} + B e^{-\alpha e})$$

Ceci n'est autre qu'un système linéaire dont A et B sont les inconnues :

$$A (\lambda \alpha - k_1 p - h) + B (-\lambda \alpha - k_1 p - h) = -Q$$

$$A (\lambda \alpha + k_1 p + h) e^{\alpha e} + B (-\lambda \alpha + k_1 p + h) e^{-\alpha e} = 0$$



Le déterminant vaut :

$$\text{Dét} = (\lambda\alpha + k_1 p + h)^2 e^{\alpha e} - (\lambda\alpha - k_1 p - h)^2 e^{-\alpha e}$$

D'où :

$$A = \frac{Q (\lambda\alpha - k_1 p - h) e^{\alpha e}}{\text{Dét}}$$

$$B = \frac{Q (\lambda\alpha + k_1 p + h) e^{\alpha e}}{\text{Dét}}$$

Donc  $\theta$  vaut :

$$\theta = \frac{2 Q \lambda \alpha e^{-\alpha e}}{(\lambda\alpha + k_1 p + h)^2 - (\lambda\alpha - k_1 p - h)^2 e^{-2\alpha e}}$$

Pour trouver  $T$ , il suffit de procéder à une inversion de Laplace de  $\theta$ .

### 3 - Adimensionnalisation de la solution

Procédons aux changements de variables suivants :

$$k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}, \quad p^* = p \Omega k_0 \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha^* = \alpha e_0 = \sqrt{p^*} \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

Après calculs, on trouve :

$$\theta = Q \Omega \frac{2 \alpha^* e^{-\alpha^*}}{(\alpha^* + X)^2 - (\alpha^* - X)^2 e^{-2\alpha^*}}$$

Si l'on pose :

$$T^* = \frac{T}{Q \Omega}$$

On obtient finalement :

$$T^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha^* e^{-\alpha^*}}{(\alpha^* + X)^2 - (\alpha^* - X)^2 e^{-2\alpha^*}} \right)$$



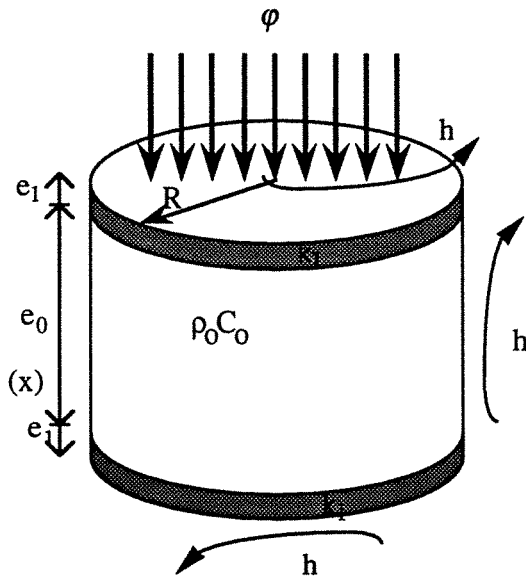
*ANNEXE 5*



### 1 - Mise en place des équations

Considérons un échantillon cylindrique de rayon  $R$  d'épaisseur  $e_0$ , de caractéristiques  $\rho_0$ ,  $C_0$  et  $a$ , enserré entre deux rondelles de cuivre assimilées à des capacités surfaciques pures de valeur  $k_1 = \rho_1 C_1 e_1$ . Sur ces deux faces, on suppose qu'il existe des déperditions de chaleur proportionnelles à un coefficient  $h$  et à l'écart de température entre la rondelle de cuivre et l'extérieur. Chaque tranche du cylindre échange avec l'extérieur (même coefficient  $h$ ), créant ainsi un puits de chaleur dans chaque tranche : c'est le principe du modèle de l'ailette.

Ceci peut se schématiser par :



On soumet l'échantillon à un flux de chaleur  $\varphi$ , modélisé par un pic de Dirac. Si l'on suppose le transfert de chaleur unidirectionnel dans

l'échantillon avec des pertes assimilées à des puits de chaleur, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\pi R h}{\pi R^2 \lambda} T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure s'expriment par les équations :

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_1 \frac{\partial T}{\partial t} + h T - \varphi$$

$$\text{en } x = e_0 \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_1 \frac{\partial T}{\partial t} + h T$$

## 2 - Résolution du problème

Si l'on applique la transformation de Laplace sur ces trois équations - en appelant  $\theta$  et  $\varphi$  les transformées de  $T$  et  $\varphi$  -, on obtient le système :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \left( \frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda R} \right) \theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta - Q \quad (2)$$

$$\text{en } x = e_0 \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta \quad (3)$$

De (1) on tire :

$$\theta = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} \quad \text{où} \quad \alpha = \sqrt{\frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda R}}$$

La suite de la résolution est identique à celle menée dans le cas du modèle monodimensionnel, à la valeur de  $\alpha$  près.

On trouve donc :

$$\theta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 Q \lambda \alpha e^{-\alpha e}}{(\lambda \alpha + k_1 p + h)^2 - (\lambda \alpha - k_1 p - h)^2 e^{-2\alpha e}} \right)$$

### 3 - Adimensionnalisation de la solution

Procédons aux changements de variables suivants :

$$k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda}, \quad R^* = \frac{R}{e_0}, \quad p^* = p \Omega k_0 \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha^* = \alpha e_0 = \sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

Après calculs, on trouve :

$$\theta = Q \Omega \frac{2 \alpha^* e^{-\alpha^*}}{(\alpha^* + X)^2 - (\alpha^* - X)^2 e^{-2\alpha^*}}$$

Si l'on pose :

$$T^* = \frac{T}{Q \Omega}$$

On obtient finalement :

$$T^* = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \alpha^* e^{-\alpha^*}}{(\alpha^* + X)^2 - (\alpha^* - X)^2 e^{-2\alpha^*}} \right)$$



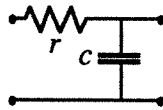


*ANNEXE 6*



1 - Hypothèses du calcul

On se propose de retrouver l'expression du quadripôle représentant un mur thermique traversé par un flux de chaleur unidirectionnel, en décomposant chaque tranche du mur en l'association d'une résistance et d'une capacité thermiques élémentaires, comme le montre la figure :



où  $c = \rho C dx p$  et  $r = dx/\lambda$ .

Or une résistance et une capacité sont représentées en notation quadripolaire par :

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

Donc leur association est le produit de ces deux tenseurs :

$$M = \begin{bmatrix} 1+rc & r \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

2 - Calcul du quadripôle

Il est clair que le tenseur Q représentant le mur entier est la puissance  $n^{\text{ième}}$  de cette matrice si n est le nombre de découpages du mur. Pour calculer cette puissance, nous diagonalisons la matrice M :

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1+rc-\lambda & r \\ c & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(2+rc) + 1$$

$$\Delta = r^2 c^2 \left(1 + \frac{4}{rc}\right) = r^2 c^2 \alpha^2 \quad \text{si } \alpha = \sqrt{1 + \frac{4}{rc}}$$

D'où les deux valeurs propres de M :

$$\lambda_+ = \frac{2 + rc + rc \alpha}{2} = 1 + \frac{rc}{2} (1 + \alpha)$$

$$\lambda_- = \frac{2 + rc - rc \alpha}{2} = 1 + \frac{rc}{2} (1 - \alpha)$$

Calculons les vecteurs propres associés; nous devons résoudre les deux systèmes :

$$\lambda_+ : \begin{cases} \frac{rc}{2} (1 - \alpha) X + r Y = 0 \\ c X - \frac{rc}{2} (1 + \alpha) Y = 0 \end{cases} \quad \lambda_- : \begin{cases} \frac{rc}{2} (1 + \alpha) X + r Y = 0 \\ c X - \frac{rc}{2} (1 - \alpha) Y = 0 \end{cases}$$

Soit après calcul :

$$\vec{V}_+ \begin{pmatrix} r (1 + \alpha) \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_- \begin{pmatrix} r (1 - \alpha) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si :

$$P = \begin{bmatrix} r (1 + \alpha) & r (1 - \alpha) \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{4r\alpha} \begin{bmatrix} 2 & -r (1 - \alpha) \\ -2 & r (1 + \alpha) \end{bmatrix}$$

Alors :

$$M = P \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad M^n = P \begin{bmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Faisons tendre n vers l'infini dans les expressions :

$$c = \frac{\rho C e p}{n}, \quad r = \frac{e}{\lambda n} \quad \text{et} \quad \alpha = n \sqrt{\frac{4\lambda}{\rho C e^2 p} + \frac{1}{n^2}} = n \beta$$

Il vient :

$$\beta \approx 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho Ce^2 p}}, \quad \lambda_{\pm} = 1 + \frac{\rho Ce^2 p}{\lambda n^2} (1 \pm n\beta) \approx 1 \pm \frac{\rho Ce^2 p \beta}{\lambda n}$$

$$\lambda_{\pm}^n \text{ tend vers } e^{\pm \frac{\rho Ce^2 \beta}{\lambda}} \quad \text{car} \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$$

$$P \text{ tend vers } \begin{bmatrix} \frac{e\beta}{\lambda} & -\frac{e\beta}{\lambda} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} \text{ vers } \frac{\lambda}{4e\beta} \begin{bmatrix} 2 & \frac{e\beta}{\lambda} \\ -2 & \frac{e\beta}{\lambda} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$Q = \frac{\lambda}{4e\beta} \begin{bmatrix} \frac{e\beta}{\lambda} & -\frac{e\beta}{\lambda} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{\rho Ce^2 \beta}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\rho Ce^2 \beta}{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{e\beta}{\lambda} \\ -2 & \frac{e\beta}{\lambda} \end{bmatrix}$$

En remplaçant  $\beta$  par sa valeur, on trouve :

$$Q = \begin{bmatrix} \text{ch} \sqrt{\frac{\rho Ce^2 p}{\lambda}} & \frac{1}{\sqrt{\rho Cp \lambda}} \text{sh} \sqrt{\frac{\rho Ce^2 p}{\lambda}} \\ \sqrt{\rho Cp \lambda} \text{sh} \sqrt{\frac{\rho Ce^2 p}{\lambda}} & \text{ch} \sqrt{\frac{\rho Ce^2 p}{\lambda}} \end{bmatrix}$$

### 3 - Adimensionnalisation de la solution

Posons comme à l'accoutumée :

$$\Omega = \frac{e}{\lambda}, \quad k = \rho Ce \quad \text{et} \quad p^* = p \frac{e}{\lambda} \rho Ce = pk\Omega$$

Alors :

$$Q = \begin{bmatrix} \text{ch} \sqrt{p^*} & \frac{\Omega}{\sqrt{p^*}} \text{sh} \sqrt{p^*} \\ \frac{\sqrt{p^*}}{\Omega} \text{sh} \sqrt{p^*} & \text{ch} \sqrt{p^*} \end{bmatrix}$$



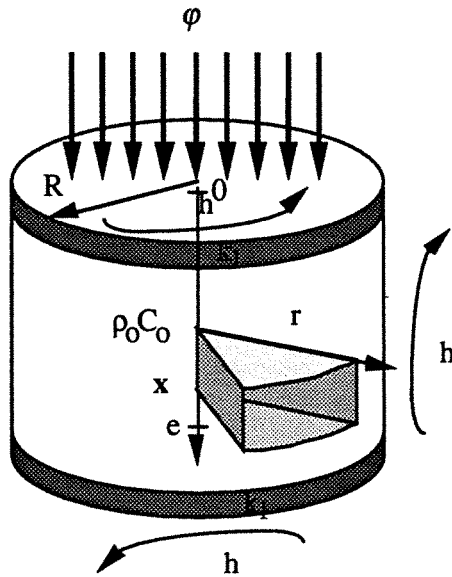
*ANNEXE 7*





### 1 - Mise en place des équations

Considérons un échantillon cylindrique d'épaisseur  $e_0$  et de rayon  $R$ , de caractéristiques thermiques  $\lambda$  et  $\rho_0 C_0$ , comme le montre la figure suivante :



Le transfert de chaleur à travers le matériau s'effectue de façon bidirectionnelle selon la loi :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où  $T$  désigne l'écart de température entre l'échantillon et l'extérieur.

On suppose que sur les bords latéraux du cylindre, existent des pertes thermiques (par convection et par rayonnement) proportionnelles à  $h \Delta T$ . On a une équation aux limites :

$$\text{en } r = R \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h T$$

L'échantillon est inséré entre deux rondelles d'épaisseur  $e_1$  d'un matériau très bon conducteur de la chaleur : chacune de ces rondelles se comporte comme une capacité pure, de capacité surfacique  $k_1 = \rho_1 C_1 e_1$ . Sur les rondelles, existent les mêmes pertes que sur les bords, et sur la face supérieure, on applique un flux  $\varphi(t)$ . Nous avons deux nouvelles équations aux limites :

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 & \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \varphi \\ \text{en } x = e & \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Considérons  $\theta$ , transformée de Laplace de  $T$ . Le système d'équations devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{p}{a} \theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = [k_1 p + h] \theta - Q \quad (2)$$

$$\text{en } x = e \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = [k_1 p + h] \theta \quad (3)$$

$$\text{en } r = R \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = h \theta \quad (4)$$

## 2 - Résolution du problème

Procédons à la séparation des variables  $r$  et  $x$  :

$$\theta(x, t) = X(x) Y(r)$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} X'' + \frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{r} Y' + Y'' \right] - \frac{p}{a} &= 0 \\ \text{en } x = 0 & \quad \lambda X' Y = [k_1 p + h] X Y - \varphi \\ \text{en } x = e & \quad -\lambda X' = [k_1 p + h] X \\ \text{en } r = R & \quad -\lambda Y' = h Y \end{aligned}$$

De là, on écrit :

$$\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{r} Y' + Y'' \right] = \text{Constante}_y$$

$$\frac{1}{X} X'' = \text{Constante}_x$$

avec :

$$\text{Constante}_x + \text{Constante}_y = \frac{p}{a} \geq 0$$

Soit :

$$\text{Constante}_x = \beta^2, \quad \text{Constante}_y = -\alpha^2 \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}$$

Donc :

$$X = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}$$

$$Y'' + \frac{1}{r} Y' + \alpha^2 Y = 0$$

On en déduit que Y s'exprime par :

$$Y = C J_0(\alpha r) + D Y_0(\alpha r)$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  désignent les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèces.

Or lorsque  $\zeta$  tend vers 0,  $Y_0(\zeta)$  tend vers  $-\infty$ . La température restant évidemment finie dans l'échantillon, D est nécessairement nul. Donc :

$$\theta = C J_0(\alpha r) \left[ A e^{\beta x} + B e^{-\beta x} \right]$$

De la condition aux limites (4), en  $r = R$ , on tire :

$$-\lambda \frac{dJ_0(\alpha r)}{dr} = h J_0(\alpha r)$$

Or :

$$\frac{dJ_0(\alpha \zeta)}{d\zeta} = -\alpha J_1(\alpha \zeta)$$

Donc il existe une infinité de valeurs de  $\alpha$  qui vérifient cette condition aux limites, la famille  $(\alpha_n)$  définie par :

$$\alpha_n = \frac{h J_0(\alpha_n R)}{\lambda J_1(\alpha_n R)} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{p}{a}} \quad (5)$$

Donc  $\theta$  s'exprime par une somme infinie :

$$\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n e^{\beta_n x} + B_n e^{-\beta_n x}] J_0(\alpha_n r)$$

Exploitions la condition aux limites (3), en  $x = e$  :

$$-\lambda [\beta_n A_n e^{\beta_n e} - \beta_n B_n e^{-\beta_n e}] = [k_1 p + h] [A_n e^{\beta_n e} + B_n e^{-\beta_n e}]$$

On introduit une nouvelle grandeur  $K_n$  :

$$K_n = \frac{A_n}{B_n} = \frac{\lambda \beta_n - (k_1 p + h)}{\lambda \beta_n + (k_1 p + h)} e^{-2\beta_n e} \quad (6)$$

Ainsi :

$$\theta(x, r) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n [K_n e^{\beta_n x} + e^{-\beta_n x}] J_0(\alpha_n r)$$

Ce que nous mesurons est la température moyenne sur la face inférieure, en  $x = e$  :

$$\bar{\theta}_e = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \theta(e, r, p) 2\pi r \, dr$$

Donc :

$$\bar{\theta}_e = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ B_n [K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}] \frac{2}{R^2} \int_0^R r J_0(\alpha_n r) \, dr \right]$$

Or :

$$\int_a^b x J_0(\alpha x) dx = \left[ \frac{1}{\alpha} x J_1(\alpha x) \right]_a^b$$

Donc :

$$\bar{\theta}_e = \sum_{n=1}^{\infty} B_n [K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}] \frac{2}{R\alpha_n} J_0(\alpha_n R)$$

où les coefficients  $B_n$  restent à déterminer, grâce à la dernière condition aux limites, (2), en  $x = 0$  :

$$\sum_1^{\infty} \lambda [\beta_n A_n e^{\beta_n x} - \beta_n B_n e^{-\beta_n x}] J_0(\alpha_n r) = \sum_1^{\infty} [k_1 p + h] [A_n e^{\beta_n x} + B_n e^{-\beta_n x}] J_0(\alpha_n r) - Q$$

Après transformation de cette expression, on obtient :

$$\sum_1^{\infty} B_n [ \beta_n \lambda [1 - K_n] + [k_1 p + h] [1 + K_n] ] J_0(\alpha_n r) = Q$$

Si l'on pose :

$$B'_n = B_n [ \beta_n \lambda [1 - K_n] + [k_1 p + h] [1 + K_n] ]$$

Alors :

$$\sum_1^{\infty} B'_n J_0(\alpha_n r) = Q$$

La famille  $(J_0(\alpha_n r))$  est orthogonale sur  $[0; R]$ , de poids  $(\alpha_n r)$ . Il est donc possible de calculer tous les coefficients  $B'_n$ , en procédant au changement

de variable  $\alpha_n r = u$  :

$$B'_n = \frac{\int_0^{\alpha_n R} \varphi u J_0(u) du}{\int_0^{\alpha_n R} u J_0^2(u) du}$$

Ainsi :

$$B'_n = \frac{Q [u J_1(u)]_0^{\alpha_n R}}{\left[ \frac{u^2}{2} [J_0^2(u) + J_1^2(u)] \right]_0^{\alpha_n R}} = \frac{2Q J_1(\alpha_n R)}{\alpha_n R [J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)]}$$

Et donc :

$$B_n = \frac{2Q J_1(\alpha_n R)}{\alpha_n R [\beta_n \lambda [1 - K_n] + [k_1 p + h] [1 + K_n]] [J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)]}$$

D'où l'expression de la température moyenne de la face arrière :

$$\bar{\theta}_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Q [K_n e^{\beta_n c} + e^{-\beta_n c}]}{[\alpha_n R]^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{hR} \right)^2 (\alpha_n R)^2 \right] [\beta_n \lambda [1 - K_n] + [k_1 p + h] [1 + K_n]]} \quad (7)$$

### 3 - Adimensionnalisation de la solution

Comme dans les modèles monodimensionnel et de l'ailette, nous posons :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1 \\ p^* &= p \Omega k_0 \quad , \quad R^* = \frac{R}{e_0} \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega \\ \alpha_n^* &= \alpha_n e_0 \quad , \quad \beta_n^* = \beta_n e_0 \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^* \end{aligned}$$

La relation (5) se transforme en :

$$\alpha^*_n = \frac{h^* J_0(\alpha^*_n R)}{J_1(\alpha^*_n R)} \quad \text{et} \quad \beta^*_n = \sqrt{\alpha^{*2}_n + p^*}$$

De même que dans l'équation (6), on définit la famille  $K_n$  par :

$$K_n = \frac{\beta^*_n - \left(\frac{k_1}{k_0} p^* + h^*\right)}{\beta^*_n + \left(\frac{k_1}{k_0} p^* + h^*\right)} e^{-2\beta^*_n} = \frac{\beta^*_n - X}{\beta^*_n + X} e^{-2\beta^*_n}$$

Remarquons que :

$$K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n} = \frac{\beta^*_n - X}{\beta^*_n + X} e^{-\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n} = \frac{2\beta^*_n}{\beta^*_n + X} e^{-\beta^*_n}$$

$$\beta^*_n(1 - K_n) + X(1 + K_n) = \frac{(\beta^*_n + X)^2 - (\beta^*_n - X)e^{-\beta^*_n}}{\beta^*_n + X}$$

Donc :

$$\overline{\theta}_e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \Omega Q 2 \beta^*_n e^{-\beta^*_n}}{[\alpha^*_n R^*]^2 \left[ 1 + \left(\frac{\alpha^*_n}{h^*}\right)^2 \right] [(\beta^*_n + X)^2 - (\beta^*_n - X)^2 e^{-2\beta^*_n}]}$$

Si l'on pose :

$$\overline{\theta^*_e} = \frac{\overline{\theta}_e R^{*2}}{4 \Omega Q}$$

On trouve :

$$\overline{\theta^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \beta^*_n e^{-\beta^*_n}}{\alpha^*_n{}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] \left[ (\beta^*_n + X)^2 - (\beta^*_n - X)^2 e^{-2\beta^*_n} \right]}$$

Pour obtenir  $T^*_e$ , il ne reste plus qu'à calculer la transformée inverse de Laplace de cette expression, soit :

$$\overline{T^*_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2 \beta^*_n e^{-\beta^*_n}}{\alpha^*_n{}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha^*_n}{h^*} \right)^2 \right] \left[ (\beta^*_n + X)^2 - (\beta^*_n - X)^2 e^{-2\beta^*_n} \right]} \right)$$

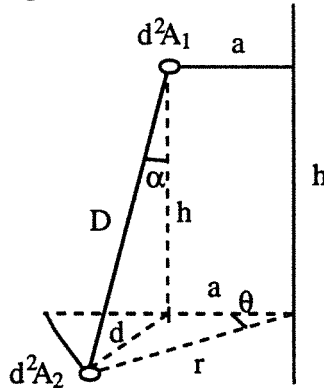


*ANNEXE 8*



1 - Facteur d'angle d'un point à un autre

On considère deux surfaces ponctuelles parallèles  $d^2A_1$  et  $d^2A_2$ , disposées comme sur la figure :



Par définition, le facteur de forme entre les deux surfaces élémentaires vaut :

$$d^2f_{d^2A_1 \Rightarrow d^2A_2} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d^2A_2}{\pi D^2}$$

Procédons aux changements de variables :

$$X = \frac{h}{a}, \quad Y = \frac{r}{a} \quad \text{et} \quad Z = 1 + X^2 + Y^2$$

De considérations géométriques simples, on peut écrire :

$$D^2 = d^2 + h^2, \quad d^2 = a^2 + r^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos\theta \quad \text{et} \quad \cos^2\alpha = \frac{h^2}{D^2}$$

On en déduit les valeurs de  $D$  et de  $\cos^2\alpha$  :

$$D^2 = a^2 \cdot (Z - 2 \cdot Y \cdot \cos\theta)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{h^2}{a^2 \cdot (Z - 2 \cdot Y \cdot \cos\theta)} = \frac{X^2}{Z - 2 \cdot Y \cdot \cos\theta}$$

D'où la valeur du facteur d'angle :

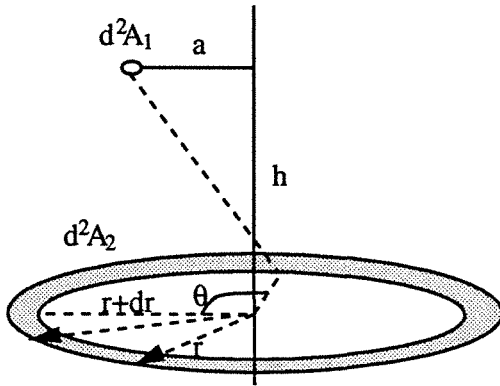
$$d^2f_{d^2A_1 \Rightarrow d^2A_2} = \frac{X^2 \cdot d^2A_2}{\pi \cdot a^2 \cdot [Z - 2 \cdot Y \cdot \cos\theta]^2}$$

Si l'on choisit pour  $d^2A_2$  un élément différentiel  $r.dr.d\theta$ , on tire finalement :

$$d^2f = \frac{X^2.Y.dY.d\theta}{\pi.[Z - 2.Y.\cos\theta]^2}$$

2 - Facteur d'angle d'un point à une couronne circulaire

On considère maintenant une surface ponctuelle  $d^2A_1$  parallèle à une couronne  $dA_2$ , comme représenté infra :



Clairement, le facteur de forme que l'on cherche est l'intégrale sur  $\theta$  du terme calculé au paragraphe précédent :

$$df = \int_0^{2\pi} d^2f(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{X^2YdYd\theta}{\pi[Z-2Y\cos\theta]^2} = \frac{X^2YdY}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[Z-2Y\cos\theta]^2}$$

Posons :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[Z-2Y\cos\theta]^2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{[Z-2Y\cos\theta]^2}$$

avec  $Z - 2 Y \cos\theta \geq Z - 2Y = X^2 + (Y - 1)^2 > 0$

Procédons à un changement de variable :

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad d\theta = \frac{2du}{1+u^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

I s'écrit :

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2(1+u^2) du}{[Z(1+u^2) - 2Y(1-u^2)]^2} = \frac{4}{[Z - 2Y]^2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{\left[1 + \frac{Z+2Y}{Z-2Y} u^2\right]^2} du$$

Posons à présent :

$$t = \sqrt{\frac{Z+2Y}{Z-2Y}} u$$

I devient :

$$I = \frac{4}{[Z^2 - 2Y^2]^{3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{[Z - 2Y][1+t^2] + 4Y}{[1+t^2]^2} dt$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{[1+t^2]} = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{[1+t^2]}{[1+t^2]^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{[1+t^2]^2} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t \frac{2t dt}{[1+t^2]}$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{[1+t^2]^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{-t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Donc :

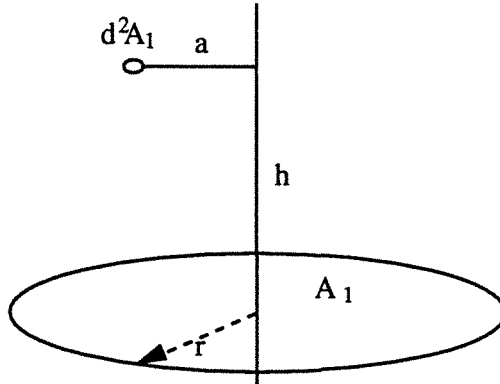
$$I = \frac{4[Z - 2Y]}{[Z^2 - 2Y^2]^{3/2}} \frac{\pi}{2} + \frac{16Y}{[Z^2 - 2Y^2]^{3/2}} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi Z}{[Z^2 - 2Y^2]^{3/2}}$$

D'où finalement :

$$df = \frac{2X^2 Y Z dY}{[Z^2 - 2Y^2]^{3/2}}$$

### 3 - Facteur d'angle d'un point à un disque

On considère maintenant une surface ponctuelle  $d^2A_1$  parallèle à un disque, selon le schéma :



Le facteur d'angle que l'on désire connaître est l'intégrale sur  $r$  du terme  $df$  calculé au paragraphe précédent :

$$f = \int_0^{r/a} df = \int_0^{r/a} f(Y) dY$$

Ecrivons :

$$f = \frac{2 X^2 Y Z}{[Z^2 - 4Y^2]^{3/2}}$$

Posons :

$$D(Y) = \sqrt{Z^2 - 4Y^2} \quad , \quad D'(Y) = \frac{2 Y [Z - 2]}{D}$$

Il vient :

$$f = \frac{2 [Z - 1 - Y^2] Y Z}{D^3} = \frac{Y}{D^3} [2 Z^2 - 2 Z - 2 Y^2 Z]$$

$$f = \frac{Y}{D^3} [(Z^2 - 4 Y^2) + 4 Y^2 + Z^2 - 2 Z - 2 Y^2 Z]$$

$$f = \frac{Y}{D^3} [D^2 + (Z - 2)(Z - 2 Y^2)] = \frac{Y D + \frac{Y (Z - 2)(Z - 2 Y^2)}{D}}{D^2}$$

$$f = \frac{Y D + \frac{1}{2} (Z - 2 Y^2) D'}{D^2}$$

Or :

$$\left[ -\frac{1}{2} (Z - 2 Y^2) \right]' = -\frac{1}{2} (2 Y - 4 Y) = Y$$

Donc f s'écrit :

$$f = \frac{N' D - N D'}{D^2} = \left[ \frac{N}{D} \right]'$$

Avec :

$$N(Y) = -\frac{1}{2} [Z - 2 Y^2]$$

Par conséquent :

$$f = \frac{N}{D} + \text{constante} = \text{constante} - \frac{1}{2} \frac{Z - 2 Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4 Y^2}}$$

Si le disque est de rayon nul, le facteur f est nul :

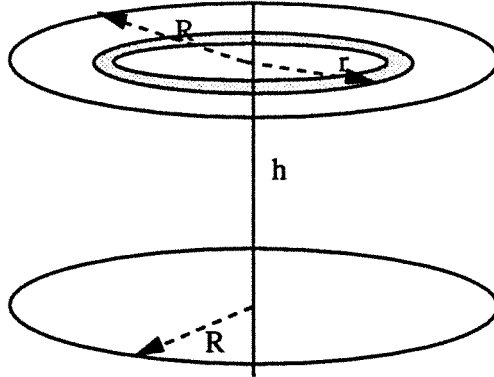
$$f(0) = 0$$

D'où l'expression de f :

$$f = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{Z - 2 Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4 Y^2}} \right]$$

#### 4 - Facteur d'angle entre deux disques coaxiaux de même rayon

On considère maintenant les deux disques dessinés sur la figure qui suit :



On utilise la relation de réciprocité des facteurs de forme entre une couronne circulaire située entre  $r$  et  $r+dr$  et le disque de rayon  $R$  pour écrire l'expression de  $dF$ , élément différentiel du facteur d'angle que l'on cherche à calculer :

$$2 \pi r dr df = \pi R^2 dF$$

où  $df$  est le terme explicité au paragraphe 3.

Procédons aux changement de variables :

$$X = \frac{h}{r} \quad , \quad Y = \frac{R}{h} \quad , \quad Z = 1 + X^2 + Y^2 \quad , \quad \alpha = \frac{h}{R} \quad , \quad x = \frac{r}{R}$$

Ainsi :

$$F = \int_0^R \left[ 1 - \frac{Z - 2Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4Y^2}} \right] \frac{r dr}{R^2} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}}{\sqrt{\left[ 1 + \frac{h^2}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \right]^2 - 4 \frac{R^2}{r^2}}} \frac{r dr}{R^2}$$



$$F = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2 + \alpha^2 - 1}{\sqrt{[x^2 + \alpha^2 + 1]^2 - 4x^2}} x \, dx$$

Changeons de variable en posant  $u = x^2$ ,  $du = 2x \, dx$  :

$$F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u + \alpha^2 - 1}{\sqrt{[u + \alpha^2 + 1]^2 - 4u}} \, du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u + \alpha^2 - 1}{\sqrt{[u + \alpha^2 - 1]^2 + 4\alpha^2}} \, du$$

$$F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{\alpha^2-1}^{\alpha^2} \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2 + 4\alpha^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{(\alpha^2+1)^2}^{\alpha^2(\alpha^2+4)} \frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{[\sqrt{v}]^{\alpha^2(\alpha^2+4)}}{(\alpha^2+1)^2}$$

Soit après calcul :

$$F = 1 - \frac{\alpha [\sqrt{\alpha^2 + 4} - \alpha]}{2}$$

En utilisant les notations de ce mémoire, on peut écrire :

$F = 1 - \frac{\sqrt{1 + 4R^{*2}} - 1}{2R^{*2}}$
--

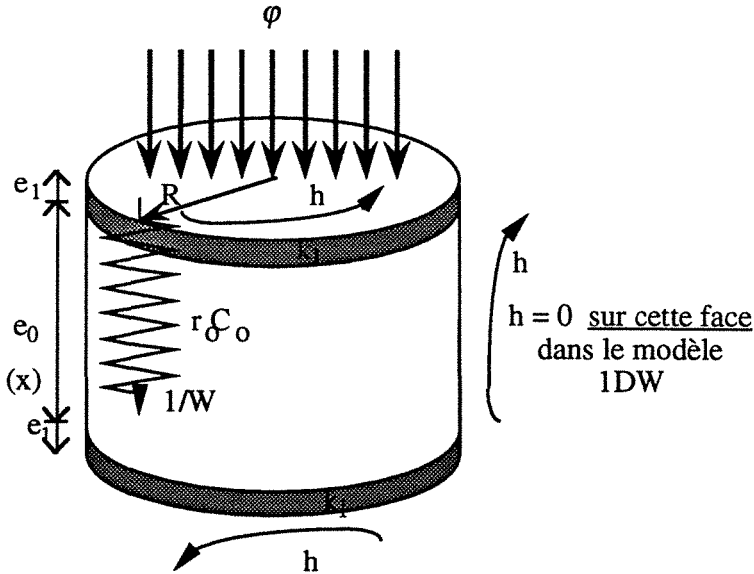


*ANNEXE 9*



### 1 - Mise en place des équations

Considérons le même échantillon cylindrique, dont la semi-transparence est modélisée par une résistance  $1/W$  reliant les deux faces de cuivre. On suppose que le transfert de chaleur est unidirectionnel dans l'échantillon, et qu'il existe des pertes proportionnelles à  $h\Delta T$  sur les rondelles de cuivre. Dans le cas du modèle «ailette w», les pertes latérales (même coefficient  $h$ ) sont assimilées à des puits de chaleur dans chaque tranche de l'échantillon, ces pertes étant nulles dans le modèle «1DW». L'ensemble est sollicité par un pic de chaleur,  $\varphi$ , sur sa surface supérieure. Nous pouvons schématiser ceci par la figure suivante :



Le transfert de chaleur à l'intérieur du matériau s'effectue selon la loi :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1DW)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda R} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{aillette W})$$

Entre les deux capacités, se trouve la résistance  $1/W$ . Nous avons démontré que les flux radiatifs -et radiatifs seulement- qui partent de la rondelle supérieure  $x=0$  ( $\varphi_0^{\text{rad}}$ ) et qui arrivent sur la face  $x=e_0$  ( $\varphi_e^{\text{rad}}$ ), sont liés par la relation :

$$\varphi_0^{\text{rad}} = \varphi_e^{\text{rad}} = W (T_0 - T_e)$$

Nous avons deux nouvelles équations aux limites :

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 & \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \varphi + \varphi_0^{\text{rad}} \\ \text{en } x = e & \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \varphi_e^{\text{rad}} \end{aligned}$$

## 2 - Résolution du problème

Nous appliquons la transformation de Laplace à ces équations pour obtenir le système :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \alpha^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad (1DW)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{p}{a} + \frac{2h}{\lambda R}} \quad (\text{aillette W})$$

$$\varphi_0^{\text{rad}} = \varphi_e^{\text{rad}} = W (\theta_0 - \theta_e)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta - Q + \varphi_0^{\text{rad}}$$

$$\text{en } x = e \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} = (k_1 p + h) \theta - \varphi_e^{\text{rad}}$$

Clairement :

$$\theta = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Ecrivons les conditions aux limites :

♦ en  $x=0$  :

$$\lambda\alpha(A-B) = (k_1p+h)(A+B) - Q + W(A+B) - W(Ae^{\alpha e} + Be^{-\alpha e})$$

♦ en  $x=e_0$  :

$$-\lambda\alpha(Ae^{\alpha e} - Be^{-\alpha e}) = (k_1p+h)(Ae^{\alpha e} + Be^{-\alpha e}) - W(A+B) + W(Ae^{\alpha e} + Be^{-\alpha e})$$

Ceci est un système linéaire de deux équations où A et B sont les inconnues :

$$A (\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{\alpha e}) + B (-\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{-\alpha e}) = -Q$$

$$A (\lambda\alpha + k_1p + h - We^{-\alpha e} + W)e^{\alpha e} + B (-\lambda\alpha + k_1p + h - We^{\alpha e} + W)e^{-\alpha e} = 0$$

Le déterminant vaut :

$$\text{Dét} = [(\lambda\alpha + k_1p + h + W - We^{-\alpha e})^2 - (\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{\alpha e})^2 e^{-2\alpha e}] e^{\alpha e}$$

Donc :

$$A = \frac{Q (\lambda\alpha - k_1p - h + W e^{\alpha e} - W) e^{-2\alpha e}}{[(\lambda\alpha + k_1p + h + W - We^{-\alpha e})^2 - (\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{\alpha e})^2 e^{-2\alpha e}]}$$

$$B = \frac{Q (\lambda\alpha + k_1p + h - We^{-\alpha e} + W)}{[(\lambda\alpha + k_1p + h + W - We^{-\alpha e})^2 - (\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{\alpha e})^2 e^{-2\alpha e}]}$$

Ainsi :

$$\theta = \frac{Q (2\lambda\alpha + W (e^{\alpha e} - e^{-\alpha e})) e^{-\alpha e}}{[(\lambda\alpha + k_1p + h + W - We^{-\alpha e})^2 - (\lambda\alpha - k_1p - h - W + We^{\alpha e})^2 e^{-2\alpha e}]}$$

3 - Adimensionnalisation de la solution

Comme dans les autres modèles, on pose :

$$\Omega = \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1$$

$$p^* = p \Omega k_0 \quad , \quad R^* = \frac{R}{e_0} \quad , \quad W^* = W \Omega \quad \text{et} \quad h^* = h \Omega$$

$$\alpha = \begin{matrix} \sqrt{p^*} & \text{(1DW)} \\ \sqrt{p^* + \frac{2h^*}{R^*}} & \text{(aillette W)} \end{matrix} \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*$$

Et alors :

$$\theta = \frac{2 Q \Omega (\alpha + W^* \text{sh}(\alpha)) e^{-\alpha}}{[(\alpha + X + W^*) - W^* e^{-\alpha}]^2 - [(\alpha - X - W^*) e^{-\alpha} + W^*]^2}$$

Si l'on pose :

$$T^* = \frac{T}{Q \Omega}$$

Finalement on obtient :

$$T^* = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2 (\alpha + W^* \text{sh}(\alpha)) e^{-\alpha}}{[(\alpha + X + W^*) - W^* e^{-\alpha}]^2 - [(\alpha - X - W^*) e^{-\alpha} + W^*]^2} \right]$$

Remarquons que lorsque  $W^*$  tend vers zero, on retrouve les expressions de  $T^*$  correspondant aux modèles monodirectionnel et de l'aillette sans rayonnement.

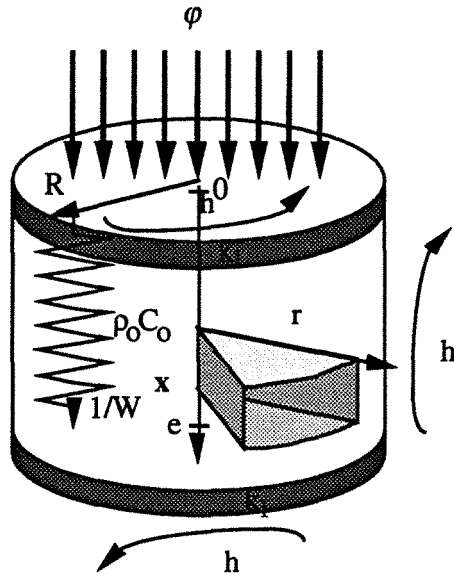


*ANNEXE 10*



1 - Mise en place des équations

Considérons un échantillon cylindrique d'épaisseur  $e_0$  et de rayon  $R$ , de caractéristiques thermiques  $\lambda$  et  $\rho_0 C_0$ , dont la semi-transparence est modélisée par une résistance  $1/W$  reliant les deux faces du cylindre, comme le montre la figure suivante :



Le transfert de chaleur à travers le matériau s'effectue de façon bidirectionnelle selon la loi :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où  $T$  désigne l'écart de température entre l'échantillon et l'extérieur.

On suppose que sur les bords latéraux du cylindre, existent des pertes thermiques (par convection et par rayonnement) proportionnelles à  $h \Delta T$ . On a une équation aux limites :

$$\text{en } r = R \quad - \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h T$$

L'échantillon est inséré entre deux rondelles d'épaisseur  $e_1$  d'un matériau très bon conducteur de la chaleur : chacune de ces rondelles se comporte comme une capacité pure, de capacité surfacique  $k_1 = \rho_1 C_1 e_1$ . Sur les rondelles, existent les mêmes pertes que sur les bords, et sur la face supérieure, on applique un flux  $\varphi(t)$ . Entre les deux capacités, se trouve la résistance  $1/W$ . Nous avons démontré que les flux radiatifs -et radiatifs seulement- qui partent de la face supérieure  $x=0$  ( $\varphi_0^{\text{rad}}$ ) et qui arrivent sur la face  $x=e_0$  ( $\varphi_e^{\text{rad}}$ ), sont liés par la relation :

$$\varphi_0^{\text{rad}} = \varphi_e^{\text{rad}} = W (T_0 - T_e)$$

Nous avons deux nouvelles équations aux limites :

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \varphi + \varphi_0^{\text{rad}}$$

$$\text{en } x = e \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h T + k_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \varphi_e^{\text{rad}}$$

Considérons  $\theta$ , transformée de Laplace de  $T$ . Le système d'équations devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{p}{a} \theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = [k_1 p + h] \theta - Q + \varphi_0^{\text{rad}} \quad (2)$$

$$\text{en } x = e \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = [k_1 p + h] \theta - \varphi_e^{\text{rad}} \quad (3)$$

$$\text{en } r = R \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = h \theta \quad (4)$$

## 2 - Résolution du problème

Comme dans le cas du modèle 2D, nous procédons à la séparation des variables  $r$  et  $x$  :

$$\theta(x, t) = X(x) Y(r)$$

Le système devient :

$$\frac{1}{X} X'' + \frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{r} Y' + Y'' \right] - \frac{p}{a} = 0$$

$$\lambda X'(0)Y(r) = (k_1 p + h) X(0)Y(r) - Q + WX(0)Y(r) - WX(e)Y(r)$$

$$- \lambda X'(e) = -(k_1 p + h) X(e) + WX(0) - WX(e)$$

$$- \lambda Y'(R) = h Y(R)$$

De là, on écrit :

$$X = K e^{\beta x} + e^{-\beta x}$$

$$Y = A J_0(\alpha r)$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}$$

De la condition aux limites (4), en  $r = R$ , on tire :

$$- \lambda \frac{dJ_0(\alpha r)}{dr} = h J_0(\alpha r)$$

Les calculs se rapportant au modèle bidirectionnel démontrent l'existence d'une infinité de valeurs de  $\alpha$  qui vérifient cette condition aux limites, la famille  $(\alpha_n)$  définie par :

$$\alpha_n = \frac{h J_0(\alpha_n R)}{\lambda J_1(\alpha_n R)} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{p}{a}} \quad (5)$$

Exploitions la condition aux limites (3), en  $x = e$  :

$$\lambda \beta_n [ K_n e^{\beta_n e} - e^{-\beta_n e} ] = - [ k_1 p + h + W ] [ K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e} ] + W [ K_n + 1 ]$$

On en déduit la valeur de  $K_n$  :

$$K_n = \frac{[\lambda \beta_n - (k_1 p + h + W)] e^{-\beta_n e} + W}{[\lambda \beta_n + (k_1 p + h + W)] e^{\beta_n e} - W} \quad (6)$$

Ainsi :

$$\theta(x, r) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n [ K_n e^{\beta_n x} + e^{-\beta_n x} ] J_0(\alpha_n r)$$

Ce que nous mesurons est la température moyenne sur la face inférieure, en  $x = e$ . Après intégration, on obtient :

$$\bar{\theta}_e = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n [K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}] \frac{2}{R\alpha_n} J_0(\alpha_n R)$$

où les coefficients  $A_n$  restent à déterminer, grâce à la dernière condition aux limites, (2), en  $x = 0$  :

$$\sum_1^{\infty} [(k_1 p + h + W)(K_n + 1) - W(K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}) + \lambda \beta_n (1 - K_n)] A_n J_0(\alpha_n r) = Q$$

Si l'on pose :

$$B_n = [(k_1 p + h + W)(K_n + 1) - W(K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}) + \lambda \beta_n (1 - K_n)] A_n$$

Alors :

$$\sum_1^{\infty} B_n J_0(\alpha_n r) = Q$$

Les valeurs de  $B_n$  sont données par les formules résultant d'intégrales et de la relation (5) :

$$B_n = \frac{2 Q J_1(\alpha_n R)}{\alpha_n R [J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)]} = \frac{2 Q \lambda}{h R J_0(\alpha_n R) \left[ 1 + \frac{\alpha_n^2 \lambda^2}{h^2} \right]}$$

D'où l'expression de la température moyenne de la face arrière :

$$\bar{\theta}_e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\varphi \lambda [K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}]}{h\alpha_n R^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_n^2 \lambda^2}{h^2} \right] [(k_1 p + h + W)(K_n + 1) - W(K_n e^{\beta_n e} + e^{-\beta_n e}) + \lambda \beta_n (1 - K_n)]} \quad (7)$$

3-Adimensionnalisation de la solution

Comme dans les modèles monodimensionnel et de l'ailette, nous posons :

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{e_0}{\lambda} \quad , \quad k_0 = \rho_0 C_0 e_0 \quad \text{et} \quad k_1 = \rho_1 C_1 e_1 \\ p^* &= p \Omega k_0 \quad , \quad R^* = \frac{R}{e_0} \quad , \quad W^* = W\Omega \quad \text{et} \quad h^* = h\Omega \\ \alpha^*_n &= \alpha_n e_0 \quad , \quad \beta^*_n = \beta_n e_0 \quad \text{et} \quad X = \frac{k_1}{k_0} p^* + h^*\end{aligned}$$

La relation (5) se transforme en :

$$\alpha^*_n = \frac{h^* J_0(\alpha^*_n R^*)}{J_1(\alpha^*_n R^*)} \quad \text{et} \quad \beta^*_n = \sqrt{\alpha^{*2}_n + p^*}$$

De même que dans l'équation (6), on définit la famille  $K_n$  par :

$$K_n = \frac{(\beta^*_n - X - W^*)e^{-\beta^*_n} + W^*}{(\beta^*_n + X + W^*)e^{\beta^*_n} - W^*}$$

Remarquons que :

$$K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n} = \frac{2\beta^*_n + W^* (e^{\beta^*_n} - e^{-\beta^*_n})}{(\beta^*_n + X + W^*) e^{\beta^*_n} - W^*}$$

Et transformons :

$$(X+W^*) (K_n+1) - W^* (K_n e^{\beta^*_n} + e^{-\beta^*_n}) + \beta^*_n (1-K_n)$$

en :

$$\frac{(\beta^*_n + X + W^*)^2 - [(\beta^*_n - X - W^*)e^{-\beta^*_n}]^2 - 4\beta^*_n W^* e^{-\beta^*_n} - W^{*2} (1 - e^{-2\beta^*_n})}{(\beta^*_n + X + W^*) e^{\beta^*_n} - W^*}$$

Il vient alors :

$$\overline{\theta_e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{4 Q \lambda}{R^{*2}} [2\beta_n^* e^{-\beta_n^*} + W^* (1 - e^{-2\beta_n^*})]}{\alpha_n^{*2} \left[ 1 + \frac{\alpha_n^{*2}}{h^{*2}} \right] \left[ (\beta_n^* + X + W^*)^2 - [(\beta_n^* - X - W^*) e^{-\beta_n^*}]^2 - 4\beta_n^* W^* e^{-\beta_n^*} - W^{*2} (1 - e^{-2\beta_n^*}) \right]}$$

Si l'on pose :

$$\overline{\theta_e^*} = \frac{\overline{\theta_e} R^{*2}}{4 \Omega Q}$$

Alors finalement :

$$\overline{\theta_e^*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2\beta_n^* e^{-\beta_n^*} + W^* (1 - e^{-2\beta_n^*})]}{\alpha_n^{*2} \left[ 1 + \frac{\alpha_n^{*2}}{h^{*2}} \right] \left[ (\beta_n^* + X + W^*)^2 - [(\beta_n^* - X - W^*) e^{-\beta_n^*}]^2 - 4\beta_n^* W^* e^{-\beta_n^*} - W^{*2} (1 - e^{-2\beta_n^*}) \right]}$$

Pour obtenir  $T_e^*$ , il ne reste plus qu'à calculer la transformée inverse de Laplace de cette expression, soit :

$$\overline{T_e^*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{[2\beta_n^* e^{-\beta_n^*} + W^* (1 - e^{-2\beta_n^*})]}{\alpha_n^{*2} \left[ 1 + \frac{\alpha_n^{*2}}{h^{*2}} \right] \left[ (\beta_n^* + X + W^*)^2 - [(\beta_n^* - X - W^*) e^{-\beta_n^*}]^2 - 4\beta_n^* W^* e^{-\beta_n^*} - W^{*2} (1 - e^{-2\beta_n^*}) \right]} \right)$$

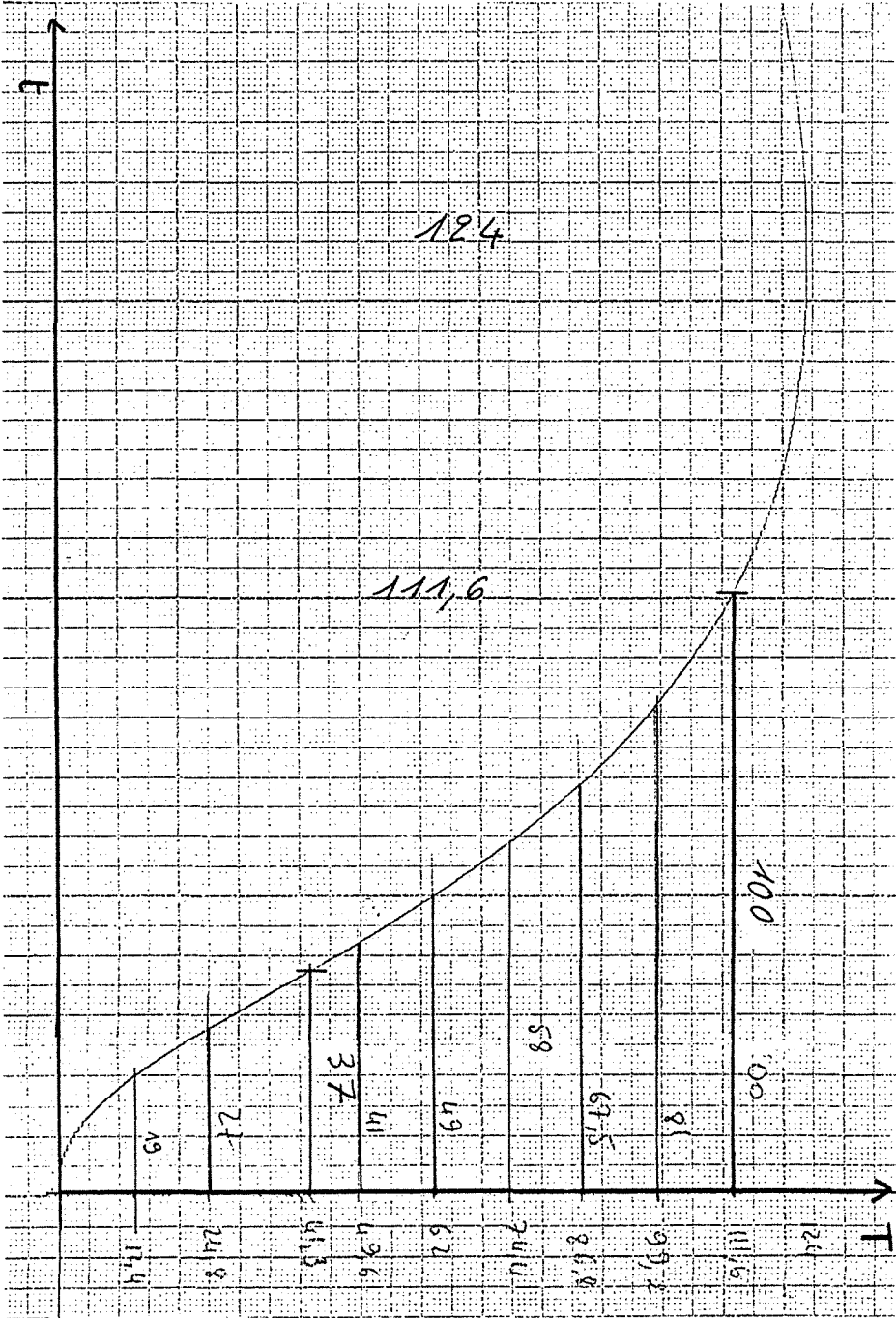
Remarquons que si  $W^*$  est nul, on retrouve bien l'expression de la température du modèle simplement bidirectionnel.



***ANNEXE 11***



Thermogramme réel



## Fiche récapitulative des données

## EXPERIENCE

D:\PRI_BRUT\	001 . 01	D:\PRI_UTIL\
--------------	----------	--------------

	matériau	épaisseur	rho	C
échantillon	POLYETHY	3.30 mm	31.00 SI	1371.00 SI
rondelles	CUIVRE	0.20 mm	8900.00 SI	385.00 SI

date	calibre traceur	faces en regard	T°C ambiante
29 / 1 / 1991	1.00 mV	classiques	20.0 °C

rayon R	défilement papier	H max sur papier	nb de pts saisis
12.5 mm	500.0 mm/min	146.0 mm	9

ordonnée y	abscisse x	rapport	temps
14.6 mm	19.0 mm	0.1000	2.28 s
29.2 mm	27.0 mm	0.2000	3.24 s
48.7 mm	37.0 mm	0.3336	4.44 s
58.4 mm	42.0 mm	0.4000	5.04 s
73.0 mm	49.0 mm	0.5000	5.88 s
87.6 mm	58.0 mm	0.6000	6.96 s
102.2 mm	68.5 mm	0.7000	8.22 s
116.8 mm	82.0 mm	0.8000	9.84 s
131.4 mm	100.0 mm	0.9000	12.00 s

commentaire éventuel faces collées sup noire (5.1)
---

Fiche des résultats de l'identification

RESULTAT

D:\PRI_RES\	001 . 01	01 . 2D
-------------	----------	---------

nb Laplace	epsilon	epsilon Bessel	aide seuil	erreur seuil
5	1.0E-0004	1.0E-0006	6	1.0E-0005
dx* seuil	xmax (calcul)	xmin (calcul)	accélération	puits chaleur
1.0E-0012	0.10000	0.00001	4.00	0.000 mW/K

dim	commentaire éventuel	méthode
1	identification habituelle	classique

rapport	temps (s)	rapport	temps (s)
0.3336	4.44	0.9000	12.00

h*	h
3.620625	34.801 W/m <sup>2</sup> /K
conductivité thermique	
31.72 mW/m/K	





**INPI**  
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur MAINARD Robert, Professeur, ESSTIN Vandoeuvre,  
Monsieur MARTIN Christian, Professeur, Faculté des Sciences Limoges.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur JEANMAIRE Alain**

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse  
intitulée :

**"Transfert thermique dans les milieux semi-transparents. Application aux milieux  
diffusants et peu absorbants"**

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

**Spécialité : "MECANIQUE & ENERGETIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **6 Janvier 1993**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIUS



2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 3 - 54501 VANDŒUVRE CEDEX

Téléphone : 83. 59. 59. 59 - Téléc : 961 715 F - Télécopie : 83. 59. 59. 55