



HAL
open science

Contribution à l'étude des équilibres dynamiques de gouttes et masses fluides

Mustapha Er-Riani

► **To cite this version:**

Mustapha Er-Riani. Contribution à l'étude des équilibres dynamiques de gouttes et masses fluides. Matière Condensée [cond-mat]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1994. Français. NNT : 1994INPL121N . tel-01751280

HAL Id: tel-01751280

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751280>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Institut National Polytechnique de Lorraine

THESE

PRESENTÉE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.
-MECANIQUE ET ENERGETIQUE-

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

PAR

Mustapha ER-RIANI

SOUTENUE LE 26 OCTOBRE 1994 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES EQUILIBRES
DYNAMIQUES DE GOUTTES ET MASSES
FLUIDES

MEMBRES DU JURY :

Président :

M. LUCIUS Professeur, E.N.S.E.M.

Rapporteurs :

H. GOUIN Professeur, Institut de Mécanique de Marseille.

P. BEREST Directeur de Recherche, CNRS - LMS - Ecole Polytechnique, Paris.

Examinateurs :

M. POTIER Professeur, Université de Metz.

O. SIBRE Directeur de Recherche, LEMTA- CNRS.

A. SFEIR Professeur, Ecole des Mines, Nancy.



D 136 001370 3

[M] 1994 ER-RIANI, M.

Institut National Polytechnique de Lorraine

THESE

PRESENTEE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.
-MECANIQUE ET ENERGETIQUE-

PAR

Mustapha ER-RIANI

SOUTENUE LE 26 OCTOBRE 1994 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES EQUILIBRES
DYNAMIQUES DE GOUTTES ET MASSES
FLUIDES**

MEMBRES DU JURY :

Président :

M. LUCIUS *Professeur, E.N.S.E.M.*

Rapporteurs :

H. GOUIN *Professeur, Institut de Mécanique de Marseille.*

P. BEREST *Directeur de Recherche, CNRS - LMS - Ecole Polytechnique, Paris.*

Examineurs :

M. POTIER FERRY *Professeur, Université de Metz.*

O. SERO-GUILLAUME *Directeur de Recherche, LEMTA- CNRS.*

A. SFEIR *Professeur, Ecole des Mines, Nancy.*

AVANT PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique théorique et appliquée (L.E.M.T.A) de l'Institut National Polytechnique de Lorraine.

Qu'il me soit permis ici d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur O. SERO-GUILLAUME, Directeur de Recherche CNRS, qui a dirigé mon travail. Ses conseils m'ont été d'une valeur inestimable. Je le remercie sincèrement de m'avoir initié à l'étude des figures d'équilibre de gouttes et de m'avoir fait bénéficier de son expérience et de ses compétences.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur M. LUCIUS, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie également Messieurs H. GOUIN, Professeur à l'Institut de Mécanique de Marseille, et P. BEREST, Directeur de Recherche au Laboratoire de Mécanique des Solides à l'Ecole Polytechnique de Paris, qui m'ont fait le privilège de rapporter sur mon travail.

Monsieur le Professeur M. POTIER FERRY m'a fait l'honneur d'examiner ce travail, je le prie de croire à ma respectueuse reconnaissance.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur A. SFEIR, Professeur à l'Ecole des Mines de Nancy, d'avoir examiné ce mémoire ainsi que pour les judicieuses séances de travail concernant le calcul formel qu'il m'a accordées.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur D. BERNARDIN, Chargé de Recherches CNRS, pour l'intérêt constant qu'il n'a cessé de porter à ce travail ainsi que pour l'aide efficace qu'il m'a apporté et pour ses remarques bienveillantes.

Monsieur J.C. BATSALE, Chargé de Recherches CNRS, m'a procuré les références concernant les méthodes d'analyse des séries de perturbation, qu'il trouve ici l'expression de ma vive gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur J.P. BRANCHER, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

A D. ZOUAOUI qui a su m'initier au calcul formel et numérique et pour son amitié, j'exprime ma sincère reconnaissance.

Je ne peux oublier de remercier tous mes camarades chercheurs du Laboratoire avec lesquels j'ai entretenu des meilleures relations, et tout particulièrement mon collègue A. CHEIKHI pour l'amitié qu'il m'a témoigné et l'aide qu'il m'a apportée.

Mes vifs remerciements vont également à Mesdames C. DENIS et M.H. ZOBBERMAN, pour leur disponibilité et leur sympathie.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : CALCUL DES VARIATIONS, MECANIQUE ANALYTIQUE POUR LES MILIEUX CONTINUS FLUIDES	4
INTRODUCTION	4
I. RAPPELS DE MECANIQUE ANALYTIQUE DES SYSTEMES	
A n DEGRES DE LIBERTE	5
1. Le Principe de Hamilton et le Lagrangien	5
2. Les équations d'Hamilton	6
3. Formalisme hamiltonien généralisé.....	8
II. STABILITE.....	9
1. Introduction	9
2. Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Lyapounov.....	10
III. CAS DES MILIEUX CONTINUS	15
1. La variation du lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange.....	16
1.1. Cas des variations verticales.....	17
1.2. Exemples.....	18
2. Calcul des variations horizontales	24
2.1. Groupe à un paramètre, générateur infinitésimal	24
2.2. Séries de Lie.....	26
2.3. 1 ^{er} Prolongement de l'action d'un groupe	27
2.4. Prolongements successifs.....	29
3. Variations complètes d'une fonctionnelle avec contraintes	30
3.1. Introduction.....	30
3.2. Résultats de transport et de dérivation	32
3.3. Dérivation de l'intégrale. Equations d'Euler-Lagrange.....	37
3.4. Exemples.....	38
BIBLIOGRAPHIE.....	43

CHAPITRE II : FORME ET STABILITE D'UNE MASSE	
LIQUIDE EN ROTATION	44
INTRODUCTION.....	44
I. EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION	46
II. GOUTTE TOURNANTE.....	51
1. Paramétrage de l'interface.....	51
2. Réduction des équations d'équilibre	52
3. Formulation analytique de la solution d'équilibre	53
3.1. Existence et unicité.....	53
3.2. Formule de récurrence.....	56
4. Calcul explicite de la forme de l'interface.....	58
4.1. Calcul de la forme.....	58
4.2. Accélération de la convergence et comparaison des résultats	62
4.3. Estimation du rayon de convergence des coefficients de la forme	64
4.4. Etude du rayon polaire	69
4.5. Inversion du paramètre λ en fonction du rayon polaire	72
5. Bifurcation	74
5.1. Introduction.....	74
5.2. Analyse spectrale de $L(\lambda)$	74
5.3. Estimation de la valeur critique.....	77
6. Evaluation informatique des algorithmes.....	81
III. MASSE FLUIDE AUTOGRAVITANTE.....	86
1. Introduction.....	86
2. Réduction des équations.....	86
3. Calcul de la figure axisymétrique.....	88
3.1. Formulation analytique.....	88
3.2. Estimation du rayon de convergence de la forme	90
4. Ellipsoïdes de Mac Laurin.....	91
5. Ellipsoïdes de Jacobi.....	93
6. Stabilité des figures ellipsoïdales	94
7. Evaluation informatique	97
BIBLIOGRAPHIE.....	98

CHAPITRE III : FORME ET STABILITE D'UNE GOUTTE LIBRE	100
1. INTRODUCTION	100
2. Réduction des équations.....	101
3. Approche analytique de l'interface	103
3.1. Existence et unicité de la solution	103
3.2. Formulation analytique de la solution	105
3.3. Calcul explicite de la forme de l'interface	108
3.4. Estimation du rayon de convergence de la forme	110
4. Cas dynamique	112
BIBLIOGRAPHIE.....	119
CONCLUSION GENERALE.....	120
ANNEXE I : ANALYSE ET ACCELERATION DE LA CONVERGENCE	
D'UNE SERIE DE PERTURBATION	121
INTRODUCTION.....	121
1. Définition des Approximants de Padé.....	122
1.1. Définitions	122
1.2. Propriétés des approximants de Padé.....	123
2. Détermination du rayon de convergence et extraction des singularités.....	125
2.1. Introduction.....	125
2.2. Graphe de Sykes - Domb	125
2.3. Détermination de la singularité à l'aide des approximants de Padé.....	127
2.4. Extraction de la singularité dominante.....	129
2.5. Transformation d'Euler	130
2.6. Inversion des séries.....	131
3. Accélération de la convergence des séries de perturbation.....	132
3.1. Transformation de Shanks	132
3.2. Table de Neville.....	133
3.3. Procédé de Richardson.....	133
3.4. Sommation de Padé.....	134
BIBLIOGRAPHIE.....	135
ANNEXE II : METHODE DE LYAPOUNOV - SCHMIDT.....	136
1. GENERALITES.....	136
2. METHODE DE LYAPOUNOV - SCHMIDT.....	137
BIBLIOGRAPHIE.....	138

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de trouver, autant que faire se peut, une expression analytique de la forme d'interface de fluides. La méthode que nous allons utiliser consiste à prendre comme inconnue principale le champ de déplacement d'une position connue vers la position inconnue.

Dans de nombreux problèmes, un paramètre sans dimension intervient : comme le nombre de Bond magnétique (rapport des forces de tension superficielle aux forces magnétiques) dans les problèmes de ferrofluides par exemple, et pour une valeur particulière de ce paramètre la position d'équilibre est connue : pour une goutte soumise à la tension superficielle, mais non soumise à la gravité, la position d'équilibre est la sphère quand la vitesse de la rotation est nulle, le nombre sans dimension correspondant étant le nombre de Bond rotationnel qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle.

Il est alors naturel, grâce au théorème des fonctions implicites, et en utilisant la méthode de perturbation de domaine citée plus haut, de chercher la solution sous la forme d'une série de perturbation en le paramètre. Cette méthode avait été utilisée en particulier par Sero-Guillaume (Thèse d'état INPL, Chapitre III) pour une goutte de ferrofluide et Joseph & Fosdick (Arch. Rational. Mech. Anal., vol 49, 1972) pour caractériser l'effet Weissenberg. Très peu de travaux ont été consacrés à l'étude du domaine de validité de la méthode. En particulier le théorème des fonctions implicites assure de l'analyticité de la solution mais ne donne aucune idée du rayon de convergence.

Les questions naturelles qu'on peut alors se poser sont les suivantes : Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ? Peut on prolonger cette série au delà de certaines valeurs comme les valeurs correspondant aux points de bifurcation ?

Ces questions conduisent à chercher à déterminer le maximum de termes dans la série. Pour cela le calcul doit être mis en oeuvre à l'aide des logiciels de calcul formel comme Macsyma et Maple. Une part non négligeable de notre travail consiste à généraliser la méthode décrite plus haut et à la rendre algorithmique de façon à la programmer dans les langages cités.

On peut noter que nous en sommes à l'aube de l'utilisation du calcul formel pour des problèmes aussi complexes. Dans les débuts de l'utilisation des ordinateurs pour résoudre numériquement des équations différentielles puis des équations aux dérivées partielles, chaque nouveau problème était un cas particulier, alors que maintenant il existe des solveurs quasi automatiques pour une grande classe de problèmes. Est ce l'avenir pour le calcul formel ? Une réflexion dans ce sens est à mener, cette thèse je l'espère y contribue modestement.

Pour tester la méthodologie, nous avons choisi d'étudier l'équilibre de gouttes ou masses fluides.

Dans un premier temps nous avons étudié une goutte en rotation soumise à sa tension superficielle, la non linéarité est ici d'ordre géométrique. Puis nous avons considéré une masse

en rotation en autogravitation, vieux problème abordé par de nombreux et prestigieux scientifiques comme Poincaré, Darwin, Chandrasekhar etc. Notons au passage que la méthode développée ici s'est montrée concurrente de celles proposées antérieurement. La non linéarité vient ici de la frontière libre, le problème est alors non local, en effet les forces auxquelles est soumise la masse fluide dépendent du domaine géométrique. Pour terminer nous avons effleuré le problème de l'équilibre d'une goutte d'un fluide parfait et incompressible, dans un écoulement potentiel avec interaction de tension superficielle, ce problème combine les difficultés des deux problèmes précédents.

Nous avons espéré pouvoir mener des calculs d'équilibre et de stabilité, en particulier déterminer les branches bifurquées et de caractériser leur stabilité.

Ce programme n'a pas été réalisé dans sa totalité, en partie pour des raisons techniques. En effet les calculs de perturbations conduisent à une explosion combinatoire, et requiert pour obtenir des ordres élevés, une mémoire très importante. Ce fait nous a considérablement gêné pour mener à bien les calculs de branches bifurquées.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons donné une introduction des principes variationnels de la mécanique analytique, ce qui nous a conduit à présenter un formalisme de calcul des variations plus général et ceci afin de caractériser la stabilité des équilibres. En effet le calcul des variations classique dit vertical, consiste à ne faire varier que les quantités dites dépendantes. Ceci n'est pas adapté aux problèmes à frontière libre pour lesquels le domaine est aussi une inconnue.

Notre approche adaptée pour ce type de problème, est de considérer des variations plus générales qui consistent à faire varier toutes les grandeurs mises en question dans le problème à étudier.

La perturbation du domaine est régie par un groupe de transformation à un paramètre qui agit simultanément sur les variables dépendantes et indépendantes. Les prolongements aux dérivées supérieures du groupe permettent d'obtenir la variation première d'une intégrale avec des contraintes de type égalité

Nous avons appliqué cette démarche à des exemples particuliers ; dans certains cas l'emploi des variables de Clebsch nous a permis d'établir un formalisme hamiltonien pour des problèmes à frontière libre.

Dans la seconde partie, à la lumière de ce qui précède, nous présentons le calcul de la forme de trois problèmes à frontière libre.

Ensuite nous avons considéré comme exemple modèle, une goutte en rotation soumise à sa tension superficielle, avec la technique de perturbation déjà citée. Nous avons mis en oeuvre des techniques d'accélération de la convergence (transformation de Shanks, extrapolation de Richardson,...). Celles ci améliorent la convergence de ces séries. L'utilisation des approximants de Padé et l'application de la méthode de Sykes - Domb, permettent de déterminer le rayon de convergence de ces séries et d'étendre leur champ de validité. Dans l'annexe I, nous

avons présenté une brève description d'une part des procédés d'accélération et d'autre part les propriétés des approximants de Padé ; nous évoquons également les questions encore ouvertes concernant la convergence de ces approximants et le choix d'un tel procédé d'accélération.

Nous avons déterminé de façon très précise le rayon de convergence de la série solution. Nous avons même pu montrer que le cercle de convergence contient un point de retournement et par la même un point de ramification pour la solution ; cette singularité est essentielle. Mais le problème linéarisé introduit des singularités parasites très gênantes pour la détermination complète des branches bifurquées. Le problème du calcul des branches bifurquées par calcul formel reste ouvert. Nous ne désespérons pas d'y parvenir avec des ordinateurs plus puissants. Nous avons entrepris alors le calcul des figures d'équilibre d'une masse liquide soumise à sa propre gravitation. Ce problème est très ancien et remonte à Newton. Le petit paramètre est proportionnel au carré de la vitesse angulaire.

Nous avons appliqué la même méthode pour calculer la forme et le potentiel de gravitation. Les techniques décrites précédemment nous ont permis de retrouver la singularité de la forme. Celle-ci coïncide avec la valeur critique pour laquelle la série des ellipsoïdes de Mac Laurin cesse d'exister, et donne naissance à la famille des ellipsoïdes de Jacobi. Les résultats sont conformes avec ceux obtenus par d'autres méthodes relevés dans la littérature.

La encore la détermination du rayon de convergence de la série est faite et la singularité que nous avons déterminé est sur le cercle de convergence, et apparaît être un point de bifurcation pour le problème.

Le chapitre III concerne l'étude de la déformation d'une goutte ou une bulle de gaz dans un écoulement irrotationnel de vitesse uniforme à l'infini V_∞ . C'est un problème extérieur. La goutte est caractérisée par la tension superficielle et la vitesse à l'infini. La grandeur sans dimension qui intervient dans ce problème est le nombre de Weber.

Nous montrons que la goutte s'aplatit au fur et à mesure que le champ de vitesses croît, et que la goutte devient étendue dans la direction normale de la déformation. Le calcul basé sur les techniques décrites précédemment, montre qu'il existe une valeur maximum du nombre de Weber au delà de laquelle aucune figure axisymétrique ne peut exister. Ce qui redonne les résultats déjà obtenus par des méthodes purement numériques.

CALCUL DES VARIATIONS, MECANIQUE ANALYTIQUE POUR LES MILIEUX CONTINUS FLUIDES

INTRODUCTION

Au cours de ce travail nous allons utiliser les méthodes de la mécanique analytique en dimension finie et en particulier la caractérisation des solutions comme satisfaisant à un principe variationnel celui de Hamilton. Cette approche fournit des outils puissants, tant numériques qu'analytiques, d'étude des systèmes mécaniques, comme par exemple pour les conditions suffisantes de stabilité. En effet, si un système possède une intégrale première qui a un minimum strict en un point d'équilibre, celui-ci est stable. C'est pourquoi dans une première partie, nous avons rappelé les éléments de base de la mécanique lagrangienne, nous y avons inclus le formalisme hamiltonien (bien que nous n'utilisions pas explicitement ce formalisme dans la suite de ce travail) car il permet d'étudier des invariants spéciaux : les invariants de Casimir. Ces derniers, sont de plus en plus utilisés en théorie de la stabilité hydrodynamique. Afin d'être complet nous rappelons, dans une deuxième partie, les résultats essentiels de stabilité, nécessaires à notre propos.

Le formalisme variationnel utilisé en dimension finie, i.e quand l'espace des paramètres définissant le système est de dimension finie, s'étend bien en mécanique des milieux continus. Cependant le calcul des variations usuel, consiste à faire varier la valeur des grandeurs attachées à un point, sans faire varier ce point. C'est à dire si $(\underline{x}, \underline{u})$ est un couple de variables indépendantes et dépendantes (\underline{u} dépend de \underline{x}), après variations ce couple devient $(\underline{x}, \underline{u} + \delta \underline{u})$ et l'on peut calculer la variation ou la différentielle des fonctionnelles ; celles-ci sont considérées comme dépendant de \underline{u} seulement. Mais si le problème dépend du domaine, comme c'est le cas dans les problèmes à frontière libre, ce calcul des variations est inadéquat ; c'est pourquoi nous allons exposer un calcul des variations qui autorisent les variations tant des variables indépendantes que dépendantes. Ce type d'approche remonte sans doute à E.Noether, mais nous en donnerons une présentation originale qui utilise la notion de groupe de transformations à un paramètre et les extensions du groupe, et qui prend en compte les contraintes de type égalité. Pour terminer nous montrerons comment ce formalisme variationnel s'applique en hydrodynamique avec frontière libre, en utilisant les variables de Clebsch.

I. RAPPELS DE MECANIQUE ANALYTIQUE DES SYSTEMES A n DEGRES DE LIBERTE

1. Le Principe de Hamilton et le Lagrangien

Le principe de d'Alembert-Lagrange permet de formuler les lois du mouvement sous la forme d'équations différentielles. Il existe également une formulation variationnelle, dite principe de Hamilton, permettant de retrouver les équations du mouvement à travers la minimisation d'une fonctionnelle. Les rappels que nous allons donner maintenant sont dans les ouvrages classiques tels : Abraham-Marsden [1], Arnold [3], Sudarshan-Mukunda [19], la liste étant non exhaustive.

Soit Σ un système à n degrés de liberté $q = (q_1, \dots, q_n)$, à qui on associe un lagrangien, fonction de q, \dot{q} de classe C^2 , alors on a le :

Principe de Hamilton

Soit $I = [t_1, t_2]$ un intervalle de \mathbb{R} , et soit $q : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \rightarrow q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

telle que $q(t_1) = a$, $q(t_2) = b$, $q(t)$ est une solution des équations du mouvement, si elle rend extrémale l'action dite de Hamilton :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

En conséquence q est solution des équations d'Euler - Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2)$$

Nous rappelons ci dessous la transformation de Legendre et ses propriétés :

La transformation de Legendre transforme une fonction définie sur un espace vectoriel en une fonction définie sur l'espace dual.

Soit $f(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ une fonction de classe C^2 en $x = (x_1, \dots, x_n)$, et tel que :

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$$

Les équations :

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \quad k = 1, \dots, n$$

peuvent être résolues localement en termes des x_i :

$$x_i = \varphi(p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_n) \quad i = 1, \dots, n$$

La transformée de Legendre de f est définie par :

$$g(p, u) = (\mathcal{L}f)(p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n p_k \varphi_k - f(x_i(p), u_i)$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial p_k} = x_i \\ \frac{\partial g}{\partial u_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$\text{et } \det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}\right) \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right) = 1.$$

Dans le cas d'une seule variable, la transformation de Legendre est involutive c'est à dire que si g est la transformée de f , f est la transformée de g .

Soit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ un lagrangien de classe C^2 en $\dot{\mathbf{q}}$, on définit les moments généralisés :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3)$$

ces équations ne peuvent être résolues en termes de $\dot{\mathbf{q}}$ que si la condition ci dessous soit vérifiée :

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right) \neq 0$$

2. Les équations d'Hamilton

Nous n'utiliserons pas explicitement le formalisme hamiltonien, mais à cause de son importance, en particulier en théorie de la stabilité, nous le rappelons ici.

Définition

On définit la fonction hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, comme transformée de Legendre de $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ par rapport à $\dot{\mathbf{q}}$:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (\mathcal{E}L)(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), t) = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), t) \quad (4)$$

Le système de Lagrange est équivalent au système de $2n$ équations du 1^{er} ordre, appelé système d'équations de Hamilton, ou équations canoniques :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{cases} \quad (5)$$

On dira pour la suite que \mathbf{p} et \mathbf{q} sont des variables conjuguées par H .

On appelle espace des phases \mathcal{P} l'espace de dimension $2n$, muni des coordonnées $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$.

Soient F, G deux fonctions définies sur l'espace des phases \mathcal{P} :

$$F, G : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le crochet de Poisson de F et G est par définition la fonction notée $\{F, G\}$ définie sur \mathcal{P} par :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (6)$$

Il s'ensuit de (6) que le crochet de Poisson satisfait aux relations habituelles, à savoir l'antisymétrie et l'identité de Jacobi :

$$1- \{F, G\} = - \{G, F\}$$

$$2- \{\{E, F\}, G\} + \{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} = 0$$

Les équations de Hamilton (5) entraînent que pour toute fonction F , définie sur \mathcal{P} on a :

$$\frac{d}{dt} F(p, q) = \{F, H\} \quad (7)$$

Ce qui permet d'écrire les équations de Hamilton sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \{q_k, H\} \\ \dot{p}_k = \{p_k, H\} \end{cases} \quad (8)$$

Posons $z = (z^1, \dots, z^N)$, $N = 2n$, avec :

$$\begin{cases} z^i = q_i & \text{si } i = 1, \dots, n \\ z^i = p^{i-n} & \text{si } i = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

Alors le crochet de Poisson devient :

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial G}{\partial z^j} \quad (9)$$

où $J = (J^{ij})$ est une matrice $2n \times 2n$, appelée matrice cosymplectique.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } I_n \text{ est la matrice unité } n \times n .$$

Les équations de Hamilton se présentent sous la forme condensée :

$$\dot{z}^j = \{z^j, H\} = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^i} \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

et les relations habituelles des crochets deviennent :

$$\begin{cases} J^{ij} = -J^{ji} \\ J^{ii} \frac{\partial J^{jk}}{\partial z^i} + J^{jj} \frac{\partial J^{ik}}{\partial z^j} + J^{kk} \frac{\partial J^{ij}}{\partial z^k} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Par ailleurs toute fonction $g(q, p, t)$ définie sur l'espace des phases et dépendant éventuellement du temps t , est dite dynamique.

La variation temporelle d'une fonction dynamique, le long d'une orbite dans l'espace des phases, vaut :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} \quad (12)$$

Le choix des coordonnées généralisées et par la suite des moments généralisés, n'est pas unique. Ceci nous conduit à la question : est il possible de transformer les coordonnées et les moments généralisés, de telle façon que les équations du mouvement restent préservées ?

Considérons le système de variables $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ auquel on associe l'hamiltonien H et la forme $dp_i \wedge dq_i$.

Définition

Une transformation canonique de l'espace des phases est une transformation :

$$g : (q, p) \longrightarrow (Q, P)$$

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \end{cases} \quad (13)$$

qui conserve la forme $dp_i \wedge dq_i$, d étant l'opération de différentiation extérieure.

Il s'ensuit qu'on a la proposition suivante :

Proposition

Une transformation canonique conserve la forme des équations de Hamilton.

En effet le principe de Hamilton reste vérifié pour les variables (Q, P) :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t) \right] dt = 0$$

Où $\tilde{H}(Q, P, t) = H(Q(q, p, t), P(q, p, t), t)$. En conséquence les équations de Hamilton (5) sont préservées, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \\ P_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \end{cases}$$

3. Formalisme hamiltonien généralisé

Une transformation arbitraire ne préserve pas la forme du crochet de Poisson, les variables conjuguées ne peuvent être discernées, et le crochet de Poisson doit dépendre des variables dynamiques, et en conséquence la transformation de Legendre ne peut exister. Ceci nous pousse à définir un formalisme hamiltonien généralisé, dans le sens, où un système est dit hamiltonien si, on peut trouver un crochet de Poisson vérifiant les propriétés usuelles des crochets, et un hamiltonien H , tels que tous deux engendrent l'évolution temporelle du système. Ce que l'on écrit :

$$\dot{z}^j = \bar{J}^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^i} \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

où $\bar{J} = (\bar{J}^{ij})$ est une matrice dépendant éventuellement des variables dynamiques, et où N n'est pas nécessairement pair.

Le crochet de Poisson généralisé a pour expression :

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial z^i} \bar{J}^{ij} \frac{\partial G}{\partial z^j} \quad (15)$$

Ce crochet permet de déterminer des fonctions spéciales C appelées invariants de Casimir, qui commutent avec toute fonction F définie sur l'espace des phases, en particulier l'hamiltonien.

En conséquence de la définition des invariants de Casimir, on a :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z^i} \bar{J}^{ij} \frac{\partial F}{\partial z^j} = 0$$

et puisque F est arbitraire, on a :

$$\bar{J}^{ij} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z^j} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

Ainsi, le vecteur gradient $\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z^i} \right)$ est un vecteur propre de \bar{J} pour la valeur propre nulle et de ce fait, les fonctions de Casimir existent uniquement si $\det(\bar{J}) = 0$, et sont de nombre égal au corang de \bar{J} , c'est à dire à $N - \text{rang}(\bar{J})$.

II. STABILITE

1. Introduction

La théorie de la stabilité présente un intérêt capital lors de l'étude de la plupart des systèmes différentiels. Une position d'équilibre n'est intéressante que si elle est réalisable pratiquement et si pour des perturbations faibles par rapport aux données initiales, le système ne s'en écarte pas trop. La méthode de Lyapounov permet d'établir un critère de la stabilité d'une solution d'équilibre d'un système conservatif dynamique, en cherchant une constante du mouvement avec un minimum ou maximum local en l'équilibre. Dans la plupart des cas, la constante du mouvement est l'énergie. Pour les systèmes non dissipatifs, cette méthode est donc reliée aux principes de minimisation d'énergie (Lejeune-Dirichlet). Un développement de cette méthode pour les systèmes hamiltoniens dû à Arnold [2] consiste à calculer la variation seconde de l'énergie augmentée des quantités conservées et ensuite à chercher les estimations de la convexité. Ce qui correspond à définir une norme sur l'espace fonctionnel du problème étudié. Pour les systèmes hamiltoniens, une classe habituelle de ces quantités conservées est formée des invariants de Casimir. En fait c'est cette méthode que nous allons utiliser au chapitre II, pour caractériser la stabilité du système hydrodynamique à frontière libre.

On rappelle ici les définitions concernant la stabilité pour un système d'équations différentielles ordinaires, cf [1], [3], Rouché-Mawhin [15] :

Soient $I =]\tau, \infty[$, τ peut être égal à $-\infty$, et ρ strictement positif, une boule $B_\rho \subset \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $f: I \times B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue localement lipschitzienne, et l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (17)$$

Ce système est dit autonome si f est indépendante de t . x_e est un point d'équilibre (on dira aussi stationnaire ou critique) du système (17) si $f(x_e, t) = 0$.

Un point d'équilibre x_e est stable (stable au sens de Lyapounov ou non linéairement stable), si pour tout M voisinage de x_e , il existe $N \subset M$ un voisinage de x_e , avec la propriété :

$x_e(0) \in N$, alors $x_e(t) \in M$, pour tout t .

autrement dit, si l'on munit \mathbb{R}^n d'une norme $\| \cdot \|$ on a :

$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau, \exists \eta(\varepsilon, \tau)$, si x_1 est une autre solution de (17), telle que $\| x_e(\tau) - x_1(\tau) \| < \eta$, alors

$\forall t > \tau, \| x_e(t) - x_1(t) \| < \varepsilon$.

On dira que x_e est uniformément stable si la quantité η mentionnée ci-dessus, est indépendante de τ , ou plus précisément si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon), \forall \tau \in I$, si $\forall x_1$ solution de (17) telle que $\| x_1(\tau) - x_e(\tau) \| < \eta$, alors

$$\forall t > \tau, \| x_1(t) - x_e(t) \| < \varepsilon.$$

et enfin x_e est asymptotiquement stable si en plus on a :

$$\| x_e(t) - x_1(t) \| \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Il est clair que la stabilité n'entraîne pas la stabilité asymptotique. En effet l'oscillateur harmonique : $\ddot{x} = -x$ donne des trajectoires stables dans le plan, non asymptotiquement stables.

2. Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Lyapounov

Dans pas mal de théorèmes donnant des conditions suffisantes de stabilité, interviendra une fonction auxiliaire, dont le rôle risque de paraître très artificiel. Nous aurons besoin de la notion de fonction de signe défini : soient M un voisinage de x_e et $I =]\tau, \infty[$; τ peut être égal à $-\infty$.

Une fonction $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $V(t, x_e) = 0$, sera dite :

- semi définie positive si $\forall (t, x) \in I \times M : V(t, x) \geq 0$
- semi définie négative si $\forall (t, x) \in I \times M : V(t, x) \leq 0$
- de signe semi défini si elle est soit semi définie positive, soit semi définie négative.

De la même façon si la fonction est strictement positive ou négative on dira qu'elle est de signe défini, c'est à dire :

Une fonction $W : M \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $W(x_e) = 0$, sera dite :

- définie positive si $\forall x \in M - \{x_e\} : W(x) \geq 0$
- définie négative si $\forall x \in M - \{x_e\} : W(x) \leq 0$
- de signe défini si elle est soit définie positive, soit définie négative.

Enfin une fonction de signe semi-défini sera dite :

- définie positive si il existe une fonction W définie positive au sens de la définition ci dessus, telle que :

$$\forall (t, x) \in I \times M : V(t, x) \geq W(x)$$

- définie négative si il existe une fonction W définie négative telle que :

$$\forall (t, x) \in I \times M : V(t, x) \leq W(x)$$

- de signe défini si elle est soit définie positive, soit définie négative.

L'un des premiers théorèmes de stabilité est celui de Lejeune-Dirichlet, le potentiel y joue un rôle privilégié. En effet considérons un système mécanique conservatif et autonome à n degré de liberté décrit par un lagrangien $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ où $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ est le vecteur des coordonnées généralisées et $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ est celui des vitesses généralisées. En mécanique classique le lagrangien $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est la différence entre l'énergie cinétique $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et l'énergie potentielle $U(\mathbf{q})$, définies et de classe C^2 dans l'espace des phases $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$. On suppose en outre que $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est une forme quadratique en $\dot{\mathbf{q}}$. On sait alors que $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq 0$.

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

et les équilibres $\mathbf{q} = \mathbf{c}^u$ sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

Ils sont donc des points stationnaires du potentiel.

Théorème de Lejeune-Dirichlet

Si l'énergie potentielle U possède un minimum relatif strict en \mathbf{q}_0 , l'équilibre en ce point est stable au sens de Lyapounov [15].

Remarques

- La condition de minimum strict est suffisante, mais non nécessaire.
- $U(\mathbf{q}_0)$ est un minimum strict si la forme quadratique associée à U , c'est à dire la matrice

$K_{ij} = \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}_0)}{\partial q_i \partial q_j}$ est définie positive, autrement dit si toutes ses valeurs propres sont strictement

positives. Donc au voisinage de l'équilibre, le potentiel est une fonction de signe défini.

Dans le cadre des systèmes mécaniques conservatifs, le théorème de Lejeune-Dirichlet permet souvent de trancher la question de stabilité d'un équilibre par le seul examen des propriétés de la fonction scalaire U au voisinage de cet équilibre. Cette fonction possède une interprétation énergétique immédiate. Dans ce qui suit, nous énonçons le théorème de Lyapounov qui traite de la stabilité des équilibres pour une équation différentielle du type (17). Nous énonçons les conditions suffisantes de stabilité faisant usage d'une fonction scalaire $V(t, \mathbf{x})$ qui joue un rôle analogue à celui du potentiel en mécanique, mais qui ne pourra plus s'interpréter en termes d'énergie.

Lyapounov [15] a établi que le point critique d'une équation différentielle est stable si et seulement si, il existe une fonction auxiliaire positive, dont la dérivée temporelle est négative le long des trajectoires. Pour énoncer précisément ce résultat nous avons besoin de la notion de fonction de Lyapounov :

Définition

Soient M un voisinage de \mathbf{x}_c et $I =]\tau, \infty[$; τ peut être égal à $-\infty$.

On dit qu'une fonction $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , est une fonction de Lyapounov si :

i) $V(t, x_e) = 0, \forall t \geq \tau$.

ii) Il existe $N \subset M$ voisinage de x_e tel que $V(t, x)$ soit définie positive.

iii) $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ est semi définie négative.

Remarque

Le calcul de la dérivée temporelle \dot{V} ne nécessite pas la connaissance de la solution $x(t)$, mais uniquement sa valeur au seul temps t . En effet :

$$\dot{V}(t, x(t)) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \left| \frac{dx}{dt}(t) \right. \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t))$$

En tenant compte de l'équation (17), on obtient :

$$\dot{V}(t, x(t)) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \left| f(t, x(t)) \right. \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t))$$

Théorème de Lyapounov [15]

S'il existe une fonction de Lyapounov pour l'équation (17), alors x_e est stable.

Si en plus des hypothèses sur la fonction de Lyapounov, on a: $\lim_{x \rightarrow x_e} V(t, x) = 0$, uniformément pour $t \in I$, alors x_e est uniformément stable.

Ce résultat est intéressant pour son caractère général, la méthode n'est toutefois pas applicable de façon systématique. En effet, des procédés généraux de construction des fonctions de Lyapounov n'existent pas, celles ci sont habituellement déterminées de manière empirique.

Les systèmes hamiltoniens sont un cas particulièrement important d'application de ce théorème cf [1]. Dans le cas canonique, l'hamiltonien H défini sur l'espace des phases, sera une fonction de Lyapounov si :

i) $H(z_e) = 0$.

ii) $H(z) > 0$, pour un voisinage N de z_e .

iii) $\dot{H} = 0$ sur N .

Si les points i) - iii) sont vérifiés, alors z_e est stable.

En effet, la condition i) est triviale puisque

$$\frac{dz^i}{dt} = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} = 0 \quad \text{en } z = z_e \quad (18)$$

et puisque J est non singulière, on a alors :

$$\frac{\partial H}{\partial z^i} = 0 \quad \text{en } z = z_e$$

la condition iii) est vraie pour un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps.

La condition ii) est équivalente à dire que la matrice $(H^{ij}) = \left(\frac{\partial^2 H(z_e)}{\partial z^i \partial z^j} \right)$ soit définie positive [12].

Remarque

La condition de la "définie positivité" de (H'') , est une condition suffisante mais non nécessaire.

Considérons le cas non canonique, où la matrice cosymplectique \bar{J} est dégénérée sur l'espace des phases, on distingue deux cas :

1^{er} cas : $\text{rg}(\bar{J}) = \text{constant}$ au voisinage de z_e .

2^e cas : $\text{rg}(\bar{J})$ est non constant au voisinage de z_e .

En effet si \bar{J} est singulière de corang K , il existe alors K invariants de Casimir indépendants C_k , tel que pour tout z :

$$\bar{J}^{ij} \frac{\partial C_k}{\partial z^i} = 0 \quad k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n \quad (19)$$

alors les relations (18) et (19) entraînent que :

$$\frac{\partial H}{\partial z^i} + \lambda_k \frac{\partial C_k}{\partial z^i} = 0 \quad \text{en } z = z_e$$

pour certaines K constantes λ_k . D'où :

$$\dot{z}^j = \{z^j, H\} = \bar{J}^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^i} = \bar{J}^{ij} \left(\frac{\partial H}{\partial z^i} + \lambda_k \frac{\partial C_k}{\partial z^i} \right) = \{z^j, I\} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Autrement dit z_e est un point stationnaire de $I(z) = H(z) + \lambda_k C_k$.

Proposition

Si z_e est un extremum de $I(z)$, alors z_e est un point d'équilibre stable.

En effet pour tout point d'équilibre z_e , on choisit un état voisin de z_e , $z_e + \delta z$ et on définit :

$$\delta I_{z_e}(z_e) = I(z_e + \delta z) - I(z_e) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I(z_e)}{\partial z^i \partial z^j} \delta z^i \delta z^j + O(\delta z^3)$$

Donc z_e est stable pour les perturbations infinitésimales si la forme quadratique $\frac{\partial^2 I(z_e)}{\partial z^i \partial z^j}$ est de signe défini.

On conclut qu'en général, pour les systèmes hamiltoniens, $I = H + \lambda_k C_k$ est une fonction pouvant être de Lyapounov, pour une classe large d'équilibre. Ce qui revient à dire que la condition

suffisante de la stabilité d'un point d'équilibre z_e , est que $(I_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 I(z_e)}{\partial z^i \partial z^j} \right)$ soit définie positive.

Remarque

Pour le théorème de Lejeune-Dirichlet, l'hamiltonien du système :

$$H(p, q) = T(p, q) + U(q)$$

où $p = (p_1, \dots, p_n)$ est le vecteur des moments généralisés, est une fonction de Lyapounov.

En effet, supposons que, par une translation éventuelle du système des axes, on ait amené le minimum relatif isolé de $U(q)$ à l'origine des q .

Il existe un voisinage de cette origine dans lequel $U(q)$ est définie positive. Puisque par ailleurs l'énergie cinétique est une fonction définie positive des vitesses généralisées, il en résulte que $H(p, q) = T(p, q) + U(q)$ est définie positive dans un certain voisinage de l'origine de l'espace des phases. Comme la dérivée temporelle totale du hamiltonien le long des trajectoires dans cet espace est nulle, il en résulte que H est une fonction de Lyapounov.

A titre de complément dans ce qui suit, nous rappelons les différents concepts de stabilité et leurs propriétés :

Si l'on pose $x(t) = x_e + u(t)$, alors la linéarisation du système (17) aboutit à la relation :

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (20)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(x_e) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x^1}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x^n}(x_e) \end{bmatrix}$$

La solution générale de ce système est $u(t) = \sum_{i=1}^n P_i e^{\lambda_i t}$, où les λ_i sont les valeurs propres de A d'ordre de multiplicité k_i et où P_i est un polynôme de degré inférieur à $k_i - 1$.

Définition

x_e est spectralement stable si l'opérateur linéaire A n'admet pas de valeurs propres dont la partie réelle est positive. Dans le cas particulier où le spectre de A est formé d'imaginaires purs, on dira que x_e est neutralement stable, ce qui correspond à une évolution temporelle des modes normaux purement oscillatoires. On montre que pour les systèmes hamiltoniens les stabilités neutrale et spectrale coïncident.

Définition

x_e est linéairement stable si toutes les solutions de (20) restent finies pour tout t . Ce que l'on peut écrire relativement à une norme $\| \cdot \|$:

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que : $\|u(0)\| < \delta$, alors $\|u(t)\| < \varepsilon$, pour tout t .

La stabilité linéaire entraîne la stabilité spectrale. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, si A possède une valeur propre λ de multiplicité $k > 1$, la solution de (20) est une combinaison linéaire de $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, ..., $t^{k-1} e^{\lambda t}$, qui tend vers l'infini même si $Re(\lambda) = 0$.

Exemple : Le système possédant l'hamiltonien : $H = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2} + pq$

est spectralement stable (les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Il admet pour solutions :

$$\begin{cases} q = At + q_0 \\ p = -At + p_0 \end{cases}$$

qui sont instables linéairement.

En dimension finie, une condition nécessaire et suffisante de la stabilité linéaire est que A possède des valeurs propres distinctes sur l'axe des imaginaires. En dimension infinie, une condition suffisante est qu'il existe un ensemble complet de fonctions propres dont les valeurs propres sont purement imaginaires et de multiplicité 1.

Définition

x_e est stable formellement s'il existe une quantité conservée dont la variation première s'annule à l'équilibre, et dont la variation seconde en x_e est de signe défini.

La stabilité formelle entraîne la stabilité linéaire. La réciproque est en général fausse.

Exemple :

Considérons l'hamiltonien : $H = p(q^2 + p^2)$. Le point d'équilibre est $(p, q) = (0, 0)$, la linéarisation du système $\dot{p} = \dot{q} = 0$, aboutit à la stabilité linéaire, alors que la variation seconde du hamiltonien en l'équilibre donne $D^2H(0,0) = 0$.

En dimension finie, les systèmes formellement stables, sont stables.

Définition

Si il existe une valeur propre λ_i telle que $Re(\lambda_i) > 0$, alors x_e est instable.

III. CAS DES MILIEUX CONTINUS

Il s'agit maintenant de donner les outils qui permettront de passer en quelque sorte de la dimension finie à la dimension infinie. C'est à dire d'appliquer un formalisme qui permet de transcrire les résultats des paragraphes I et II. Tout d'abord nous supposons que, comme dans le cas de la dimension finie, le principe d'Hamilton est valable, et s'énonce :

Principe de Hamilton

Les équations du mouvement d'un milieu continu sont décrites par le principe :

$$\delta \left(\int_{t_2}^{t_1} \int_{\Omega} L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \text{grad} \underline{u}) dx dt \right) = 0 \quad (21)$$

où L est la densité lagrangienne, obtenue souvent à l'aide d'une densité de l'énergie cinétique, et d'une densité de l'énergie potentielle U :

$$L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \text{grad} \underline{u}) = \frac{1}{2} \langle \underline{\dot{u}}, \underline{\dot{u}} \rangle - U(\underline{x}, \underline{u}, \text{grad} \underline{u}) \quad (22)$$

Remarque

On pourrait considérer un lagrangien L , dépendant des dérivées supérieures de \underline{u} jusqu'à un ordre k .

Nous verrons des exemples de telle formulation. Classiquement on introduit le calcul des variations vertical, c'est à dire que la position du point étant fixé, on fait varier les grandeurs attachées à ce point, cf les relations (25). Nous allons introduire dans cette partie des variations plus générales qui autorisent les variations du point et des grandeurs qui lui sont attachées. Ceci permet, comme nous le verrons d'aborder d'une part des problèmes dépendant du domaine, et puis de relier ce calcul des variations à la méthode des travaux virtuels. L'utilisation de ce type de variation est ancienne cf Gelfand-Fomin [7]. La notion de groupe à un paramètre pour les variations a été introduite en particulier par Gouin [8] et Cubisol-Gouin [5] cf aussi Bluman-Kumeï [4]. Mais l'utilisation de l'extension du groupe et la prise en compte des conditions limites est moins classique, nous avons suivi Sero-Guillaume [18] pour cette présentation.

1. La variation du lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange

Le problème des variations

Il faut préciser la nature des variations dans (21). Nous serons amené à considérer la différentielle de (21) au sens de Gâteaux et à envisager des arcs de courbes paramétrés dans l'espace fonctionnel auquel appartiennent les différentes variables dépendantes (u_1, \dots, u_m) , on pourra donc considérer les variations les plus générales sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{x}_j(\varepsilon) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; \text{grad}u_1, \dots, \text{grad}u_m; \dots; \varepsilon) \\ \bar{u}_k(\varepsilon) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; \text{grad}u_1, \dots, \text{grad}u_m; \dots; \varepsilon) \end{cases} \quad (23.a.b)$$

Les fonctions Φ_j et Ψ_k sont considérées comme régulières en particulier de classe C^2 par rapport à ε . On suppose bien sûr que les transformations :

$$(x, u) \rightarrow (\bar{x}(\varepsilon), \bar{u}(\varepsilon))$$

forment un groupe de transformations à un paramètre ε . On peut donc considérer les transformations infinitésimales :

$$\begin{cases} \bar{x}_j = x_j + \varepsilon \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varepsilon} + o(\varepsilon) = x_j + \varepsilon X_j + o(\varepsilon) \\ \bar{u}_k = u_k + \varepsilon \frac{\partial \Psi_k}{\partial \varepsilon} + o(\varepsilon) = u_k + \varepsilon U_k + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (24.a)$$

Les relations (24.a) sont souvent notées en calcul des variations :

$$\begin{cases} \bar{x}_j = x_j + \varepsilon \delta x_j + o(\varepsilon) \\ \bar{u}_k = u_k + \varepsilon \delta u_k + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (24.b)$$

Ces relations de transformations peuvent être construites de telle sorte qu'elles conservent les contraintes. Dans le cas le plus simple, les transformations prennent la forme :

$$\begin{cases} \bar{x}_j = x_j \\ \bar{u}_k = u_k + \varepsilon \delta u_k \end{cases} \quad (25)$$

Elles sont dites verticales.

Considérons un domaine Ω de \mathbb{R}^n , $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ et une fonction $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$ définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^m ; notons $\nabla \underline{u}$ son gradient. On cherche à rendre stationnaire la fonctionnelle :

$$J = \int_{\Omega} L(\underline{x}, \underline{u}, \text{grad} \underline{u}) dx$$

compte tenu des conditions limites, par exemple :

$$\underline{u} \Big|_{\partial\Omega} = \underline{u}_0$$

1.1. Cas des variations verticales

Nous allons, pour retrouver le cas habituel choisir des variations verticales de type (25).

Proposition

La première variation de l'intégrale (21) est donnée par :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \right) \right) \delta u_j dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} n_i \delta u_j dS \quad (26.a)$$

où D_i représente la dérivation totale par rapport à la i ème variable et n_j la j ème composante de la normale unitaire sortante.

Si on note $\left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \right)_{i=1, \dots, n} = \frac{\partial L}{\partial \nabla u_j}$, on peut écrire :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - \text{div} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u_j} \right) \right) \delta u_j dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial L}{\partial \nabla u_j} \cdot \underline{n} \delta u_j dS \quad (26.b)$$

Démonstration

Par un développement de Taylor, il vient :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\delta u_j \frac{\partial L}{\partial u_j} + \frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) \right) dx$$

par intégration par parties (ou en appliquant le théorème d'Ostrogradski), il vient :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \right) \right) \delta u_j dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} n_i \delta u_j dS$$

où

$$u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \text{ et } n_i \text{ est la } i\text{ème composante de la normale unitaire sortante.}$$

Notons bien que :

$$\frac{\partial L}{\partial \nabla u_j} = \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,1}}, \frac{\partial L}{\partial u_{j,2}}, \dots, \frac{\partial L}{\partial u_{j,n}} \right)$$

Corollaire

Les équations d'Euler-Lagrange pour (21) sont :

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \right) = 0$$

Démonstration

La solution qui rend stationnaire l'intégrale (21) satisfait à l'équation :

$$\delta J = 0 \quad \forall \delta \underline{u}$$

Considérons des variations $\delta \underline{u}$ à support compact, l'intégrale de surface dans (26.a) disparaît et il ne reste que :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u_j} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,i}} \right) \right) \delta u_j dx = 0 \quad \forall \delta u_j$$

ce qui entraîne bien les équations d'Euler-Lagrange.

1.2. Exemples*a)- Corde et membrane vibrante*

Considérons une corde de longueur l tendue le long de l'axe des x , cette corde vibre dans un plan (xOy), un point de la corde est repéré par les coordonnées $(x, u(x,t))$, $u(x,t)\underline{e}_2$ représente le vecteur déplacement de la corde, par rapport à la position d'équilibre $u = 0$. Nous supposons que les extrémités de la corde sont libres.

Avec cette notation, l'énergie cinétique s'écrit :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t^2 dx$$

où ρ est la masse linéique de la corde. Supposons que le travail des forces de déformation soit le produit de la tension λ par l'allongement, soit :

$$U_1 = \lambda \left(\int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} dx - l \right)$$

Si la corde est soumise à une force extérieure $T(x,t)$, le travail est le produit de la force par le déplacement :

$$U_2 = \int_0^l T(x,t) u(x,t) dx$$

Il faudra rajouter les conditions au bord :

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

Nous supposons en plus que les fonctions admissibles $\delta u = \psi(x,t)$ sont telles que :

$$\psi(x,t_0) = \psi(x,t_1) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

Ce qui signifie que $u(x,t)$ ne varie pas aux temps final et initial.

On doit alors rendre stationnaire le lagrangien, c'est à dire l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 - \lambda (\sqrt{1+u_x^2} - 1) - T(x,t)u \right) dx dt$$

En général, on linéarise l'énergie de déformation en écrivant :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{\lambda}{2} u_x^2 - Tu \right) dx dt$$

Les équations d'Euler - Lagrange donnent la relation :

$$\rho u_{tt} - \lambda u_{xx} + T(x,t) = 0$$

Dans le cas d'une membrane de densité surfacique ρ , soumise à une tension λ . On note $u(x, y, t)$ le déplacement du point (x, y) de la membrane par rapport à la position d'équilibre. Le travail des forces de déformation est proportionnel à la variation de surface de la membrane soit :

$$U_1 = \lambda \iint_{\Lambda} \left(\sqrt{1+u_x^2 + u_y^2} - 1 \right) dx dy$$

En linéarisant, il vient :

$$U_1 = \frac{\lambda}{2} \iint_{\Lambda} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

Soit $T(x, y, t)$ une force extérieure agissant sur la surface $\Gamma = \partial\Lambda$, et si Γ est supposée libre, la condition au bord est :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(s,t) = 0 \quad s \in \Gamma$$

$u(s, t)$ étant le déplacement par rapport à la position d'équilibre au point $s \in \Gamma$ au temps t .

Comme dans le cas de la corde, nous supposons que le déplacement $u(x, y, t)$ ne varie pas aux temps final et initial, c'est à dire : $\psi(x, y, t_0) = \psi(x, y, t_1) = 0$.

On doit rendre stationnaire l'intégrale :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \iint_{\Lambda} (\rho u_t^2 - \lambda(u_x^2 + u_y^2) - 2Tu) dx dy dt$$

ce qui donne pour équation d'Euler-Lagrange :

$$\rho u_{tt} = \lambda \Delta u + T$$

avec $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

b)- *Les équations de l'hydrodynamique du fluide parfait.*

1°) Cas irrotationnel

Les équations d'Euler pour un fluide parfait isotherme sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

pour la conservation de la masse et :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \underline{v} \cdot \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

où $p = p(\rho)$ est une fonction de la masse volumique ρ .

Dans le cas d'un mouvement irrotationnel i.e. : $\underline{v} = \text{grad}\varphi$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit à l'aide de la relation de Bernoulli :

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} + f(\rho)\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} + f(\rho) = h(t)$$

car :

$$\text{grad}\underline{v} \cdot \underline{v} = \text{grad}\frac{v^2}{2} + \text{rot}\underline{v} \wedge \underline{v}$$

où on a posé $f = \int_0^{\rho(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho}$ donc $\text{grad}f = \frac{d\rho}{d\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \text{grad}\rho$.

Nous devons considérer des conditions limites sur le bord du domaine de la forme :

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

Posons pour la commodité :

$$\frac{d}{d\rho}(\rho w(\rho)) = f(\rho)$$

$w(\rho)$ a ici la signification d'une énergie potentielle par unité de masse. Considérons donc le lagrangien :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \left(\dot{\varphi} + \frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} + w(\rho) \right) dx dt$$

Les variables dépendantes sont φ et ρ , et nous considérons que les variations $\delta\varphi$ du potentiel de vitesses, appartiennent à un espace fonctionnel approprié tel que $\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0$.

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \text{div} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla \varphi} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \dot{\varphi} + \frac{(\text{grad}\varphi)^2}{2} + f(\rho) = 0$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \varphi_z} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

Donc les équations de l'hydrodynamique du fluide parfait en écoulement irrotationnel sont les équations d'Euler-Lagrange d'une fonctionnelle si la fonction $h(t)$ intervenant dans l'intégrale première de Bernoulli est nulle, ce qui est le cas pour les écoulements stationnaires.

2°) Cas rotationnel

Voyons comment généraliser cette propriété dans le cas des écoulements rotationnels (cf Lamb [11], Sudarshan-Mukunda [19], Sero-Guillaume [18]). Posons donc :

$$\underline{\omega} = \text{rot}\underline{v}$$

Introduisons les variables de Clebsch ; nous allons montrer que si le domaine est simplement connexe, il existe trois fonctions φ, α, β telles que :

$$\underline{v} = \text{grad}\varphi + \alpha\text{grad}\beta \quad (27)$$

Soit donc $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; considérons les lignes de champ ou lignes de courant de $\underline{\omega}$, le système qui leurs est associé est :

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3}$$

Il correspond à ce système l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad}f = 0$$

qui admet, si $\underline{\omega}$ ne s'annule pas, localement deux solutions indépendantes ψ et θ . Donc $\underline{\omega}$ est parallèle au vecteur $\text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta$, il existe donc une fonction λ telle que :

$$\underline{\omega} = \lambda \text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta$$

Mais :

$$\text{div}\underline{\omega} = \text{grad}\lambda \cdot (\text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta) + \lambda \text{div}(\text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta) = 0$$

car $\text{div}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{A} \cdot \text{rot}\underline{B} - \underline{B} \cdot \text{rot}\underline{A}$ or $\text{div}(\text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta) = 0$ donc :

$$\text{grad}\lambda \cdot (\text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta) = \det(\text{grad}\lambda, \text{grad}\psi, \text{grad}\theta) = 0$$

Le déterminant dans l'égalité précédente n'est autre que le jacobien des trois fonctions, sa nullité implique que ces fonctions sont liées par une relation ; on peut donc choisir une fonction $h(\psi, \theta)$ telle que :

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \lambda$$

Les fonctions α, β définies par :

$$\begin{cases} \alpha = \psi \\ \beta = h \end{cases}$$

sont telles que :

$$\text{grad}\alpha \wedge \text{grad}\beta = \text{grad}\psi \wedge \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \text{grad}\theta + \frac{\partial h}{\partial \psi} \text{grad}\psi \right) = \lambda \text{grad}\psi \wedge \text{grad}\theta$$

d'où :

$$\text{rot}\underline{v} = \underline{\omega} = \text{grad}\alpha \wedge \text{grad}\beta$$

Considérons maintenant l'équation en \underline{v} :

$$\text{rot}\underline{v} = \underline{\omega}$$

Cette équation est linéaire. Si \underline{v}_1 et \underline{v}_2 sont deux solutions, alors :

$$\text{rot}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = 0$$

Elles diffèrent donc par un champ irrotationnel, c'est à dire :

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \text{grad}\varphi$$

et donc si \underline{v}_0 est une solution particulière, la solution générale sera :

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \text{grad}\varphi$$

Remarquons simplement que $\underline{v}_0 = \alpha \text{grad} \beta$ est une solution particulière puisque $\text{rot} \underline{v}_0 = \text{grad} \alpha \wedge \text{grad} \beta$. D'où on peut écrire :

$$\underline{v} = \text{grad} \varphi + \alpha \text{grad} \beta$$

Les fonctions φ , α , β ainsi introduites sont appelées potentiels ou variables de Clebsch.

Nous avons construit les potentiels α et β à un instant donné, voyons maintenant leurs évolutions dans le temps. Notons tout d'abord la proposition suivante :

Proposition

Si $\underline{\omega} \cdot \text{grad} \psi = 0$ alors $\underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = 0$ où $\frac{d\psi}{dt}$ est la dérivée particulière de ψ .

Démonstration

L'équation d'évolution de $\underline{\omega}$ est $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\underline{v} \wedge \underline{\omega})$. Or $\underline{\omega} \cdot \text{grad} \psi = 0$ donc :

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \cdot \text{grad} \psi + \underline{\omega} \cdot \text{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Soit compte tenu de l'équation d'évolution de $\underline{\omega}$:

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\text{rot}(\underline{v} \wedge \underline{\omega}) \cdot \text{grad} \psi$$

Mais :

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{grad} \psi \cdot \underline{v} \right)$$

Soit encore :

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = -\text{rot}(\underline{v} \wedge \underline{\omega}) \cdot \text{grad} \psi + \underline{\omega} \cdot \text{grad}(\text{grad} \psi \cdot \underline{v})$$

Compte tenu de la relation :

$$\text{rot}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{A} \text{div} \underline{B} - \underline{B} \text{div} \underline{A} + \text{grad} \underline{A} \cdot \underline{B} - \text{grad} \underline{B} \cdot \underline{A}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) &= -(\underline{v} \cdot \text{grad} \psi) \text{div} \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \text{grad} \psi) \text{div} \underline{v} + (\text{grad} \underline{\omega} \cdot \underline{v}) \text{grad} \psi \\ &\quad - (\text{grad} \underline{v} \cdot \underline{\omega}) \text{grad} \psi + \underline{\omega} \cdot (\text{grad}(\text{grad} \psi) \cdot \underline{v}) + (\text{grad} \underline{v} \cdot \underline{\omega}) \text{grad} \psi \end{aligned}$$

Compte tenu de $\text{div} \underline{\omega} = 0$, $\underline{\omega} \cdot \text{grad} \psi = 0$, il reste :

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) &= (\text{grad} \underline{\omega} \cdot \underline{v}) \text{grad} \psi + \underline{\omega} \cdot (\text{grad}(\text{grad} \psi) \cdot \underline{v}) \\ &= \text{grad}(\underline{\omega} \cdot (\text{grad} \psi)) \cdot \underline{v} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition.

Corollaire

Les potentiels de Clebsch vérifient un système d'équations de la forme :

$$\frac{d\alpha}{dt} = F(\alpha, \beta, t) \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dt} = G(\alpha, \beta, t)$$

Démonstration

Nous savons qu'il n'existe que deux solutions fonctionnellement indépendantes à l'équation :

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad} \psi = 0$$

qu'on peut choisir comme étant α et β ; toute autre solution sera dépendante de α et β ; or d'après la proposition précédente et puisque $\underline{\omega} \cdot \text{grad} \alpha = 0$, on a :

$$\underline{\omega} \cdot \text{grad} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = 0$$

donc $\frac{d\alpha}{dt}$ est une fonction de α , β et du temps ; il en va de même pour β .

Ce qui termine la démonstration.

Pour évaluer F plus complètement, il faut tenir compte du fait que $\underline{\omega} = \text{grad} \alpha \wedge \text{grad} \beta$; différencions cette relation par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \wedge \text{grad} \beta + \text{grad} \alpha \wedge \text{grad} \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

Soit compte tenu de l'équation d'évolution de $\underline{\omega}$ et des relations démontrées précédemment :

$$\text{rot}(\underline{v} \wedge \underline{\omega}) = \text{grad}(F - \text{grad} \alpha \cdot \underline{v}) \wedge \text{grad} \beta + \text{grad} \alpha \wedge \text{grad}(G - \text{grad} \beta \cdot \underline{v})$$

En développant, il reste :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial \beta} \right) \text{grad} \alpha \wedge \text{grad} \beta = \text{rot}(\underline{v} \wedge \underline{\omega} + \text{grad} \alpha (\text{grad} \beta \cdot \underline{v}) - \text{grad} \beta (\text{grad} \alpha \cdot \underline{v}))$$

En développant $\underline{v} \wedge \underline{\omega} = \underline{v} \wedge (\text{grad} \alpha \wedge \text{grad} \beta)$ par la formule du double produit vectoriel, on voit que le deuxième membre est nul. D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial \beta} = 0$$

On voit grâce à cette relation que l'on peut choisir $F = G = 0$ (notez que F et G sont en partie arbitraires).

Substituons maintenant le champ des vitesses donné par les variables de Clebsch dans l'équation du mouvement ; il vient alors en notant par un point les dérivées partielles par rapport au temps :

$$\text{grad} \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \text{grad} \beta + \alpha \text{grad} \dot{\beta} + \frac{1}{2} \text{grad}((\text{grad} \varphi + \alpha \text{grad} \beta)^2) + \text{rot} \underline{v} \wedge \underline{v} = -\text{grad} f$$

Compte tenu de :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\text{grad} \alpha \cdot \underline{v} \text{ et } \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\text{grad} \beta \cdot \underline{v} \quad (28)$$

Il vient après un calcul algébrique :

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\text{grad} \varphi)^2 - \alpha^2 (\text{grad} \beta)^2] + f(\rho) \right) = 0$$

La relation ci-dessus est l'équation de l'hydrodynamique d'un fluide parfait écrite en variables de Clebsch. Il vient alors la proposition :

Proposition

Pour des raisons de commodité, on pose $\sigma = \rho\alpha$. Avec les variables ρ, σ, β les équations de l'hydrodynamique du fluide parfait sont les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Omega} \left\{ \rho \dot{\varphi} + \sigma \dot{\beta} + \frac{1}{2} \rho \left[\text{grad} \varphi + \frac{\sigma}{\rho} \text{grad} \beta \right]^2 + \rho w(\rho) \right\} dx \right) dt$$

Démonstration

Il suffit d'écrire les équations d'Euler-Lagrange pour chaque variable.

l'équation en ρ fournit la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\text{grad} \varphi)^2 - \alpha^2 (\text{grad} \beta)^2] + f(\rho) = 0$$

celle en φ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

celle en σ :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \text{grad} \beta \cdot \underline{v} = 0$$

celle en β :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(\sigma \underline{v}) = 0$$

la dernière relation, après développement est bien celle que doit vérifier la variable α .

2. Calcul des variations horizontales

Le terme "horizontal", dû à Moreau [13], est inapproprié, il vaudrait mieux parler de variations générales.

2.1. Groupe à un paramètre, générateur infinitésimal

Dans l'introduction du chapitre, nous avons évoqué des variations associées à des transformations portant aussi bien sur les variables indépendantes que dépendantes. Ces transformations s'écrivent donc :

$$(\underline{\bar{x}}, \underline{\bar{u}}) = \phi(\underline{x}, \underline{u}; t)$$

L'ensemble de ces transformations, formant un groupe à un paramètre t , cf Eisenhart [6], Bluman-Kumeï [4], ou Olver [14] pour une présentation complète des groupes à n paramètres.

Voyons comment il est possible de définir, simplement un groupe à un paramètre comme solution d'une équation différentielle ; et réciproquement comment à un groupe à un paramètre il est possible d'associer un champ de vecteurs ou une équation différentielle.

Plaçons nous dans \mathbb{R}^n pour simplifier.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\underline{V}(x_1, \dots, x_n) = (v_i(x_1, \dots, x_n))_{i=1 \dots n}$ un champ de vecteurs défini dans U , de classe C^1 et à dérivées bornées.

Considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_i}{dt} = v_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) & i = 1 \text{ à } n \\ \bar{x}_i(0) = x_i & x = (x_i)_{i=1 \dots n} \in U \end{cases} \quad (29)$$

Étant données les hypothèses faites sur \underline{V} , (29) a une solution unique, maximale notée :

$$\bar{x} = \varphi(x_1, \dots, x_n; t) = \varphi(\underline{x}; t) \quad (30)$$

Cette solution (30) vérifie :

a) $\varphi(\underline{x}; t+s) = \varphi(\varphi(\underline{x}; t); s)$, c'est à dire que la loi de composition est interne.

Notons $\underline{y}(s) = \varphi(\underline{x}; t+s)$, t est supposé fixé.

$$\text{Or} \quad \begin{cases} \frac{d\underline{y}}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}; t+s) = \underline{V}(y_1, \dots, y_n) \\ \underline{y}(0) = \bar{x} \end{cases}$$

donc $\underline{y}(s) = \varphi(\bar{x}; s) = \varphi(\varphi(\underline{x}; t); s)$

b) Élément neutre.

$$\varphi(\underline{x}; 0) = \underline{x}$$

c) Existence d'un inverse

Notons comme précédemment

$$\bar{x} = \varphi(\underline{x}; t) \quad (31)$$

d'après a), on a :

$$\varphi(\underline{x}; t+s) = \varphi(\varphi(\underline{x}; t); s) = \varphi(\bar{x}; t)$$

posons $s = -t$ dans la relation précédente, il vient :

$$\varphi(\underline{x}; 0) = \varphi(\bar{x}; -t) = \underline{x} \quad (32)$$

Ce qui montre que :

$$\varphi(\underline{x}; t)^{-1} = \varphi(\underline{x}; -t)$$

Les propriétés (a,b,c) montrent que l'application φ est un groupe de transformation à 1 paramètre.

Nous venons donc de montrer la proposition suivante :

Proposition

Sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , à tout champ de vecteurs de classe C^1 , dont les dérivées sont bornées, est associé un groupe de transformation à 1 paramètre : $G = \{\varphi(\underline{x}; t)\}$ ou $\{\varphi_t(\underline{x})\}$. Notons que chacune de ces transformations $\{\varphi_t(\underline{x})\}$ est un difféomorphisme.

La réciproque est immédiate, considérons un groupe à 1 paramètre défini dans un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi(\underline{x}; t) \\ \text{alors} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\bar{x} = \varphi^{-1}(\bar{x}; t), t=0} = \underline{V}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (33)$$

définit un champ de vecteurs de classe C^1 . Le champ $\underline{V}(\underline{x})$ est appelé le générateur infinitésimal du groupe.

On notera la similitude avec la description lagrangienne et eulerienne du mouvement d'un milieu continu. Il est possible de caractériser comment le groupe défini ci-dessus opère sur les objets de \mathbb{R}^n , comme les hypersurfaces. Mais comme les variétés sont définies par des relations, il est nécessaire de caractériser comment il opère sur les fonctions.

Considérons donc maintenant une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ à valeurs réelles, $\{\varphi_t(\underline{x})\}$ opère sur f de la façon suivante, on note f_t la transformée de f :

$$f_t = f \circ \varphi_t = f(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t))$$

où les \bar{x}_i sont solution de (29), et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} f_t = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} \frac{d\bar{x}_i}{dt} = v_i \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} \quad (34)$$

Définition

A tout champ de vecteur \underline{V} on peut associer un opérateur \mathcal{V} qui opère sur les fonctions C^∞ par :

$$\mathcal{V}(f) = v_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Notation

Par souci de concision, on note en général le champ de vecteurs par :

$$\underline{V} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (35)$$

2.2. Séries de Lie

Soient une fonction scalaire C^∞ , $\varphi_t(\underline{x})$ un groupe à un paramètre, tous deux définis sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On pose $\bar{x} = \varphi_t(\underline{x})$, considérons la fonction $\psi(t) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Cherchons un développement de Taylor de ψ au voisinage de $t = 0$.

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} \frac{d^n \psi}{dt^n}(0) + O(t^{N+1})$$

Or $\psi(0) = f(x_1, \dots, x_n)$.

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = \mathcal{V}(f)(x_1, \dots, x_n) = v_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Mais

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_i} \right)$$

d'où la relation de récurrence

$$\frac{d^n \psi}{dt^n} = \mathcal{V}^n(f)$$

En supposant ψ analytique, on pourra écrire :

$$\psi(t) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{V}^n(f) \quad (36)$$

Définition

A cause de la similitude dans (36) on utilise la notation exponentielle, c'est à dire :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underline{V}^n(f) = e^{t\underline{V}}(f)$$

Cette série est appelée série de Lie ; à (29), on associe donc l'opérateur :

$$e^{t\underline{V}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \underline{V}^n}{n!}$$

Formellement on a, pour toute fonction f analytique :

$$a) \quad \frac{d}{dt}[e^{t\underline{V}}(f)] = \mathcal{V}[e^{t\underline{V}}(f)]$$

b) en particulier si on choisit $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, il vient :

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{V}^n(x_i)$$

Soit encore :

$$\bar{x}_i(t) = x_i + t v_i(x_1, \dots, x_n) + \frac{t^2}{2!} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + o(t^2)$$

ce qui donne en notation vectorielle :

$$\underline{\bar{x}}(t) = \underline{x} + t \underline{V} + \frac{t^2}{2} \text{grad} \underline{V} \cdot \underline{V} + o(t^2)$$

On peut donc écrire en utilisant la notation $\underline{\bar{x}} = e^{t\underline{V}}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}; t)$:

$$e^{(t+s)\underline{V}}(\underline{x}) = e^{t\underline{V}}(e^{s\underline{V}}(\underline{x})) \text{ ainsi que } e^{0\underline{V}}(\underline{x}) = \underline{x} \text{ et que } e^{t\underline{V}}(e^{-t\underline{V}}(\underline{x})) = \underline{x}$$

\underline{V} s'appelle le générateur infinitésimal du groupe $\varphi(\underline{x}; t) = e^{t\underline{V}}(\underline{x})$ et on a :

$$\underline{V}(\underline{x}) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \right|_{t=0}$$

2.3. 1^{er} Prolongement de l'action d'un groupe

Nous allons considérer le cas général d'un système d'EDP portant sur l'ensemble des fonctions

$$\{u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Donnons nous un groupe \mathcal{G} à un paramètre ε , de transformations portant sur les variables dépendantes et indépendantes :

$$\begin{cases} \bar{x}_i = \bar{x}_i(\underline{x}; \underline{u}; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(\underline{x}; \underline{u}) + o(\varepsilon) \\ \bar{u}_j = \bar{u}_j(\underline{x}; \underline{u}; \varepsilon) = u_j + \varepsilon \eta_j(\underline{x}; \underline{u}) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (37)$$

Le paramètre ε joue le rôle dévolu à t précédemment et l'ensemble des (ξ_i, η_j) définit le champ de vecteurs associé au groupe.

Afin de l'appliquer à un système d'EDP, il est nécessaire qu'il puisse opérer sur les dérivées $u_{i,j}$, mais nous imposerons que la transformée de la dérivée soit la dérivée par rapport aux variables transformées de la transformée ; c'est-à-dire, on adjoint à (37) :

$$\bar{u}_{i,j} = \bar{u}_{i,j}(\underline{x}; u_k; u_{q,l} \dots; \varepsilon) = u_{i,j} + \varepsilon \eta_{i,j}(\underline{x}; u_k; u_{q,l} \dots; \varepsilon) + o(\varepsilon) \quad (38)$$

d'après (37), il vient :

$$\begin{cases} d\bar{x}_i = dx_i + \varepsilon \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i + o(\varepsilon) \\ d\bar{u}_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i + \varepsilon \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta_j}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (39)$$

Etant donné la forme de (39) il est intéressant d'introduire la dérivée totale par rapport aux variables indépendantes.

Définition de la dérivée totale

On note $\frac{D}{Dx_i}$, ou D_i la dérivée totale par rapport à x_i qui s'exprime par :

$$\frac{D}{Dx_i} = D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_k u_{k,i} \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,j} u_{k,j,i} \frac{\partial}{\partial u_{k,j}} + \dots \quad (40)$$

Donc (39) s'écrit :

$$\begin{cases} d\bar{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_i + \varepsilon \frac{D\xi_i}{Dx_i} dx_i + o(\varepsilon) = \left(\delta_{ii} + \varepsilon \frac{D\xi_i}{Dx_i} \right) dx_i + o(\varepsilon) \\ d\bar{u}_j = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{D\eta_j}{Dx_i} \right) dx_i + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (41.a.b)$$

Or $d\bar{u}_j = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i$, donc il nous faut exprimer le coefficient de dx_i dans (41.b). Pour cela, il nous faut inverser (41.a). Mais :

$$dx_i = \left(\delta_{ii} - \varepsilon \frac{D\xi_i}{Dx_i} \right) d\bar{x}_i + o(\varepsilon)$$

D'où :

$$d\bar{u}_j = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{D\eta_j}{Dx_i} \right) \left(\delta_{ii} - \varepsilon \frac{D\xi_i}{Dx_i} \right) d\bar{x}_i + o(\varepsilon)$$

Donc :

$$d\bar{u}_j = \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \left(\frac{D\eta_j}{Dx_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{D\xi_i}{Dx_i} \right) \right] d\bar{x}_i + o(\varepsilon)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \left(\frac{D\eta_j}{Dx_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{D\xi_i}{Dx_i} \right) + o(\varepsilon) \quad (42)$$

La relation (42) donne l'expression des transformations infinitésimales qui opèrent sur les dérivées des variables dépendantes. Ces transformations adjointes aux transformations (37) permettent d'étendre l'action du groupe aux dérivées premières, et nous obtenons la proposition :

Proposition

Soit le champ de vecteur, \underline{V} qui engendre le groupe \mathfrak{G} , \underline{V} est défini par :

$$\underline{V} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_k \frac{\partial}{\partial u_k} \quad (43)$$

Il admet un prolongement d'ordre (1) noté $\underline{V}^{(1)}$.

$$\underline{V}^{(1)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_k \frac{\partial}{\partial u_k} + \eta_{ki} \frac{\partial}{\partial u_{k,i}}$$

avec :

$$\eta_{ki} = \frac{D\eta_k}{Dx_i} - u_{k,i} \frac{D\xi_i}{Dx_i} \quad (44)$$

Etant donné le 1er théorème de Lie $\underline{V}^{(1)}$ engendre un groupe $\mathfrak{G}^{(1)}$ de transformation à un paramètre qui est l'extension du groupe \mathfrak{G} (ou prolongement) aux dérivées des fonctions dépendantes.

2.4. Prolongements successifs

On peut opérer de la même façon pour les prolongements successifs.

Proposition

Soit encore le champ \underline{V} défini en (43) correspondant à un groupe \mathfrak{G} . Il admet un prolongement d'ordre (n) donné par :

$$\underline{V}^{(n)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_k \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,q} \eta_{k,i_1 \dots i_q} \frac{\partial}{\partial u_{k,i_1 \dots i_q}} \quad (45.a)$$

avec :

$$\eta_{k,i_1 \dots i_q} = \frac{D^q}{Dx_{i_1} \dots Dx_{i_q}} (\eta_k - u_{k,i} \xi_i) + \xi_i u_{k,i_1 \dots i_q} \quad (45.b)$$

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence, montrons la à l'ordre 2.

Soit :

$$\bar{u}_{k,i} = u_{k,i} + \varepsilon \eta_{k,i} + o(\varepsilon)$$

Comme précédemment, différencions la relation précédente :

$$d\bar{u}_{k,i} = \frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} dx_j + \varepsilon \frac{D\eta_{k,i}}{Dx_j} dx_j + o(\varepsilon)$$

Là encore, il faut inverser (41.a), d'où :

$$d\bar{u}_{k,i} = \left(u_{k,ij} + \varepsilon \frac{D\eta_{k,i}}{Dx_j} \right) \left(\delta_{ij} - \varepsilon \frac{D\xi_j}{Dx_i} \right) d\bar{x}_j + o(\varepsilon)$$

et donc en ne retenant que les termes en ε :

$$d\bar{u}_{k,i} = \left[u_{k,iq} + \varepsilon \left(\frac{D\eta_{k,i}}{Dx_q} - u_{k,ij} \frac{D\xi_j}{Dx_q} \right) \right] d\bar{x}_q + o(\varepsilon)$$

d'où :

$$\bar{u}_{k,iq} = u_{k,iq} + \varepsilon \left(\frac{D\eta_{k,i}}{Dx_q} - u_{k,ij} \frac{D\xi_j}{Dx_q} \right) + o(\varepsilon)$$

donc :

$$\eta_{k,iq} = \frac{D\eta_{k,i}}{Dx_q} - u_{k,ij} \frac{D\xi_j}{Dx_q}$$

Or :

$$\eta_{k,i} = \frac{D\eta_k}{Dx_i} - u_{k,l} \frac{D\xi_l}{Dx_q}$$

Donc :

$$\eta_{k,iq} = \frac{D}{Dx_q} \left[\frac{D}{Dx_i} \eta_k - u_{k,j} \frac{D\xi_j}{Dx_i} \right] - u_{k,ij} \frac{D\xi_j}{Dx_q}$$

Et on vérifie en développant que :

$$\eta_{k,iq} = \frac{D^2}{Dx_q Dx_i} [\eta_k - u_{k,j} \xi_j] + u_{k,lqi} \xi_l$$

3. Variations complètes d'une fonctionnelle avec contraintes

3.1. Introduction.

Dans cette partie il s'agit d'introduire à la fois des variations pour les variables dépendantes et indépendantes. Cette méthode permettra d'étudier des problèmes où la position des particules joue un rôle. Dans certains problèmes, le domaine Ω est inconnu, ça peut être l'inconnue principale, comme dans les problèmes dits à "frontière libre" ou dans ceux "d'optimum design". Ils s'écrivent de la façon suivante :

Trouver le domaine Ω qui minimise la fonctionnelle :

$$J = \int_{\Omega} L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\text{grad}} \underline{u}, \dots) dx \quad (46)$$

Sachant que les variables dépendantes \underline{u} vérifient un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles posées sur Ω , c'est à dire :

$$\left. \begin{aligned} F(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\text{grad}} \underline{u}, \dots) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ g(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\text{grad}} \underline{u}, \dots) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (47.a.b)$$

A Ω fixé on peut supposer que le système (47) a une solution unique et donc la fonctionnelle J ne dépend que de Ω , les relations (47) apparaissant comme des contraintes. Pour ce type de problème la stratégie des multiplicateurs de Lagrange est mal commode, nous allons en développer une autre.

Considérons un groupe de transformations de \mathbb{R}^n portant sur les variables dépendantes et indépendantes, les variations s'écrivent alors, cf (37) :

$$\begin{cases} \bar{x}_j(\varepsilon) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; \text{grad}u_1, \dots, \text{grad}u_m; \dots; \varepsilon) \\ \bar{u}_k(\varepsilon) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; \text{grad}u_1, \dots, \text{grad}u_m; \dots; \varepsilon) \end{cases} \quad (48.a.b)$$

Il est possible de ne faire dépendre Φ_j que des variables dépendantes. Les Ψ_k ne sont plus quelconques, ils doivent être calculées de telle sorte que les liaisons (47) soient satisfaites.

En effet le domaine Ω est transformé en un domaine Ω_ε , et la solution du problème (47) (ou l'ensemble des fonctions satisfaisant aux équations (47)) posé sur Ω_ε est une fonction. C'est à dire que les transformations (48.b) sont construites à partir de la solution du système différentiel (47), on pose :

$$\underline{u}(\Omega_\varepsilon)(\bar{x}) = \bar{u}(\bar{x}, \varepsilon) \quad (49)$$

Les fonctions $\underline{u}(\Omega_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon$ dépendent "doublement" de ε puisqu'elles dépendent du point transformé $\bar{x}(\varepsilon)$ et sont solutions d'un problème différentiel (éventuellement aux limites) posé sur Ω_ε . La variation de $\bar{u}(\bar{x}, \varepsilon)$ est calculée en $\varepsilon = 0$ par :

$$\underline{U} = \bar{\delta}\underline{u} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \underline{u} \right|_{\varepsilon=0} \quad (50)$$

Comme :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi \right|_{\varepsilon=0} = \underline{X} = \delta \underline{x} \quad (51.a)$$

On peut poser :

$$\underline{U} = \bar{\delta}\underline{u} = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{u} + \text{grad} \bar{u} \cdot \delta \underline{x} \right|_{\varepsilon=0} \quad (51.b)$$

Pour des raisons que nous verrons plus loin, nous noterons :

$$\delta \underline{u} = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \underline{u} \right|_{\varepsilon=0} \quad (51.c)$$

La difficulté dans ce type de problème est le calcul du générateur infinitésimal \underline{U} ou de la variation $\delta \underline{u}$ compte tenu des relations (47). La technique pour calculer ces variations est la suivante : on écrit les relations (47) sur Ω_ε , par transport inverse ces relations sont obtenues sur Ω ; par ce changement de variables les opérateurs dépendent alors de ε , \bar{x} , de \bar{u} et de ses dérivées ; c'est le prolongement, à l'ordre n du système, du groupe à un paramètre donné par les relations (48), qui est utilisé pour réaliser le changement de variables. Les relations (47) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}(\varepsilon, \bar{x}, \bar{u}, \text{grad} \bar{u}, \dots) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \bar{g}(\varepsilon, \bar{x}, \bar{u}, \text{grad} \bar{u}, \dots) &= 0 && \text{sur } \partial \Omega \end{aligned} \right\} \quad (52.a.b)$$

Ces nouvelles relations sont posées sur un domaine fixe. Il est alors possible de les dériver par rapport à ε .

Le théorème des fonctions implicites nous permet d'obtenir les variations souhaitées, par exemple (52.a) pour une fonction dépendant de u , donne :

$$\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}_i} \frac{d\bar{u}_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}_{i,j}} \frac{d\bar{u}_{i,j}}{d\varepsilon} + \dots \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Ce qu'on peut écrire, symboliquement en introduisant la différentielle de l'opérateur $D_{\underline{u}}F$:

$$\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon} + D_{\underline{u}}\bar{F} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \underline{u} \right) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Un certain nombre de résultats de transport et de dérivation peuvent être utiles, les notations seront les suivantes : soit Φ_ε ou Φ le groupe à un paramètre, on note Φ' la matrice jacobienne de (ou sa différentielle), Φ'^{-1} son inverse et ${}^t\Phi'$ sa transposée, $\det \Phi'$ le déterminant de Φ' , \underline{X}' le gradient de \underline{X} .

3.2. Résultats de transport et de dérivation

Résultats de transport : cf Zolésio [21], Sero-Guillaume [18], Gouin [8], Cubisol - Gouin [5].

i) Soit une fonction u alors son gradient est transporté de la façon suivante :

$$(\underline{\text{grad}} u) \circ \Phi = {}^t\Phi'^{-1} \underline{\text{grad}} (u \circ \Phi) \text{ c'est à dire } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}. \quad (53.a)$$

ii) Soit \underline{V} un champ de vecteur, on a :

$$(\text{div} \underline{V}) \circ \Phi = \frac{1}{|\det \Phi'|} \text{div} [|\det \Phi'| \Phi'^{-1} \underline{V} \circ \Phi]. \quad (53.b)$$

$$(\text{rot} \underline{V}) \circ \Phi = \frac{\Phi'}{|\det \Phi'|} \text{rot} [{}^t\Phi' \underline{V} \circ \Phi].$$

iii) Si $\underline{n}_\varepsilon$ est un vecteur normal unitaire à $\partial\Omega_\varepsilon$, Ω_ε étant le domaine transporté de Ω , c'est à dire $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega)$ alors :

$$\underline{n}_\varepsilon = \frac{{}^t\Phi'^{-1} \underline{n}}{|{}^t\Phi'^{-1} \underline{n}|} \quad (53.c)$$

où \underline{n} est le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$, dont $\underline{n}_\varepsilon$ est l'image par Φ_ε .

iv) On a les changements de variables suivants pour les intégrales :

- intégrale de volume :

$$\int_{\Phi_\varepsilon(\Omega)} L dx = \int_{\Omega} L \circ \Phi |\det \Phi'| dx. \quad (53.d)$$

- intégrale de surface :

$$\int_{\partial(\Phi_\varepsilon(\Omega))} L dS = \int_{\partial\Omega} L \circ \Phi |\det \Phi'| |{}^t\Phi'^{-1} \underline{n}| dS. \quad (53.e)$$

Nous pouvons, à partir des relations (53.a-e) déduire les expressions d'un certain nombre de dérivées.

Résultats de dérivation. cf Zolésio [21] Sero-Guillaume [18].

i) Compte tenu de l'expression générale de la dérivation par rapport à ε , donnée ci-dessus, nous noterons de la façon suivante la dérivation totale :

$$\tilde{\delta}(\cdot) = \frac{d}{d\varepsilon}(\cdot) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \text{grad}(\cdot) \cdot \underline{X} \quad (54.a)$$

Une fonction \underline{u} définie sur tout \mathbb{R}^n , qui n'est donc pas solution d'un système différentiel posé sur Ω vérifie :

$$\tilde{\delta}\underline{u} = \text{grad}\underline{u} \cdot \underline{X} \quad (54.b)$$

Pour une fonction dépendant de Ω nous poserons :

$$\underline{U} = \tilde{\delta}\underline{u} = \delta\underline{u} + \text{grad}\underline{u} \cdot \underline{X} \quad (54.c)$$

c'est à dire que :

$$\delta\underline{u} = \frac{\partial\underline{u}}{\partial\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \underline{U} - \text{grad}\underline{u} \cdot \underline{X} \quad (54.d)$$

Avec \underline{X} défini en (51.a). Compte tenu de ces notations, il vient les relations suivantes :

i) Si Φ' est la matrice jacobienne de Φ :

$$\tilde{\delta}|\det \Phi'| = \text{div}\underline{X} = \text{div}\delta\underline{x}. \quad (54.e)$$

ii) Si \underline{u} est une fonction ne dépendant pas de Ω :

$$\tilde{\delta}(\text{grad}\underline{u}) = -{}' \underline{X}' \text{grad}\underline{u}. \quad (54.f)$$

iii) Pour une intégrale de volume, le théorème de Reynolds est valide :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\text{grad}}\underline{u}, \dots) d\underline{x} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{d}{d\varepsilon} L + L \text{div}\underline{X} \right) d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \delta L d\underline{x} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} L \underline{X} \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (54.g)$$

iv) Une formule analogue peut être obtenue pour une intégrale de surface :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} L dS = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} L + L(\text{div}\underline{X} - (\underline{X}' \underline{n}) \cdot \underline{n}) \right\} dS \quad (54.h)$$

Si L est une fonction indépendante de Ω , on peut intégrer par parties et on a :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} L dS = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (L \text{div}_s \underline{X} + \text{grad}L \cdot \underline{X}) dS = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial n} + CL \right) \underline{X} \cdot \underline{n} dS \quad (54.i)$$

C est ici la courbure moyenne de $\partial\Omega_\varepsilon$.

On peut d'ailleurs introduire les opérateurs divergence et gradient surfaciques, div_s , grad_s définis par :

$$\begin{aligned} \text{div}_s \underline{X} &= \text{div}\underline{X} - (\underline{X}' \underline{n}) \cdot \underline{n} \\ \text{grad}_s \underline{X} &= \text{grad}\underline{X} - (\underline{X}' \underline{n}) \otimes \underline{n} = \underline{X}' - (\underline{X}' \underline{n}) \otimes \underline{n} \end{aligned} \quad (54.j)$$

et si u est une fonction scalaire :

$$\text{grad}_s u = \text{grad}u - \frac{\partial u}{\partial n} \underline{n}$$

Notons que si \underline{X} est normal à la surface $\partial\Omega_\varepsilon$, i.e $\underline{X} = X_n \underline{n}$ sur $\partial\Omega_\varepsilon$ alors :

$$\operatorname{div}_S \underline{X} = X_n \operatorname{div} \underline{n} = X_n C.$$

Examinons maintenant les variations des variables dépendantes au cours du transport. Pour cela il nous faut dériver la contrainte que représente la relation différentielle posée sur le domaine ainsi que les éventuelles conditions aux limites. Voyons tout d'abord le cas de l'opérateur différentiel.

Proposition. Notation

Soit $F(\underline{u})$ un opérateur différentiel portant sur \underline{u} fonction définie sur Ω . Alors :

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\underline{u}) = D_u F(\underline{u}) \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \varepsilon} \right) + \operatorname{grad} F(\underline{u}) \cdot \underline{X} \quad (55)$$

où $D_u F$ est la différentielle de l'opérateur F calculée en \underline{u} , donc :

$$D_u F(\underline{u}) \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \varepsilon} \right) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial F}{\partial u_{k,j}} \delta u_{k,j} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_{k,i_1 \dots i_n}} \delta u_{k,i_1 \dots i_n} + \dots \right)$$

$\operatorname{grad} F(\underline{u})$ est mis pour la dérivation totale, c'est à dire si D_i est la dérivation complète par rapport à la variable $n^\circ i$:

$$(\operatorname{grad} F(\underline{u}))_i = D_i(F(\underline{u})) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_k} u_{k,i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_{k,i_1 \dots i_n}} u_{k,i_1 \dots i_n} + \dots \right)$$

Avant de démontrer cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme

Considérons le groupe engendré par les relations (48), le générateur infinitésimal de son p ème prolongement est donné par :

$$U_{k,i_1 \dots i_p}^{(p)} = D_{i_1} \dots D_{i_p} (U_k - u_{k,j} X_j) + u_{k,i_1 \dots i_p j} X_j \quad (56)$$

Démonstration

Rappelons que les composantes du générateur du prolongement sont définies par les relations :

$$\bar{u}_{k,i_1 \dots i_p} \equiv u_{k,i_1 \dots i_p} + \varepsilon U_{k,i_1 \dots i_p}^{(p)}$$

d'après les relations (48a,b), nous pouvons remarquer que la relation (56) est vraie à l'ordre $p-1$; montrons la par récurrence. Nous avons obtenu, le prolongement à l'ordre p en fonction de celui à l'ordre $p-1$ par :

$$U_{k,i_1 \dots i_p}^{(p)} = D_{i_p} U_{k,i_1 \dots i_{p-1}}^{(p-1)} - u_{k,i_1 \dots i_p j} D_{i_p} X_j$$

Supposons la relation de récurrence vraie à l'ordre $p-1$ il vient :

$$U_{k,i_1 \dots i_p}^{(p)} = D_{i_1} \dots D_{i_p} (U_k - u_{k,j} X_j) + D_{i_p} (u_{k,i_1 \dots i_{p-1} j} X_j) - u_{k,i_1 \dots i_p j} D_{i_p} X_j$$

En développant le terme $D_{i_p} (u_{k,i_1 \dots i_{p-1} j} X_j)$ et en simplifiant, il vient la relation (56), la récurrence est donc vérifiée.

Passons à la démonstration de la proposition.

Posons $F(\underline{u}) = f(x_i; u_k; u_{k,i}; u_{k,ij}; \dots)$, mais $F(\underline{\bar{u}}) = f(\bar{x}_i; \bar{u}_k; \bar{u}_{k,i}; \bar{u}_{k,ij}; \dots)$ donc :

$$f(\bar{x}_i; \bar{u}_k; \bar{u}_{k,i}; \bar{u}_{k,ij}; \dots) = f(x_i; u_k; u_{k,i}; u_{k,ij}; \dots) + \varepsilon \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + \frac{\partial f}{\partial u_{k,i}} U_{k,i}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial u_{k,ij}} U_{k,ij}^{(2)} + \dots \right] + o(\varepsilon)$$

d'où :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\underline{\bar{u}}) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + \frac{\partial f}{\partial u_{k,i}} U_{k,i}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial u_{k,ij}} U_{k,ij}^{(2)} + \dots$$

En utilisant le lemme précédent, remplaçons les $U_{k,i}^{(p)}$, par leur valeur donnée par (56), il vient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\underline{\bar{u}}) \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} u_{k,i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_{k,qj}} u_{k,qi} X_i + \dots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u_k} (U_k - u_{k,j} X_j) + \frac{\partial f}{\partial u_{k,l}} D_l (U_k - u_{k,j} X_j) + \frac{\partial f}{\partial u_{k,lm}} D_l D_m (U_k - u_{k,j} X_j) + \dots \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} u_{k,i} X_i + \frac{\partial f}{\partial u_{k,qj}} u_{k,qi} X_i + \dots = \text{grad} F(\underline{u}) \cdot \underline{X}$$

et que :

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} (U_k - u_{k,j} X_j) + \frac{\partial f}{\partial u_{k,l}} D_l (U_k - u_{k,j} X_j) + \frac{\partial f}{\partial u_{k,lm}} D_l D_m (U_k - u_{k,j} X_j) + \dots = D_{\bullet} F(\delta \underline{u})$$

et la proposition est démontrée.

Nous sommes en mesure d'étudier la variation d'une équation de type (47.a).

Proposition. Variation d'une équation

Supposons que $\underline{\bar{u}}$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles :

$$F(\underline{\bar{u}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon}$$

Alors sa variation $\delta \underline{u} = \left. \frac{\partial \underline{\bar{u}}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ satisfait à l'équation :

$$\left. \frac{\partial F(\underline{\bar{u}})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = D_{\bullet} F \left(\left. \frac{\partial \underline{\bar{u}}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = D_{\bullet} F(\delta \underline{u}) = 0 \quad (57)$$

Ce résultat s'interprète souvent, comme la possibilité de commuter la dérivation par rapport à ε le paramètre du groupe et la dérivation par rapport aux variables indépendantes. Ce résultat n'est pas évident, car pour les conditions limites cette "commutation" ne s'applique pas, et dans les calculs

de perturbation (de domaine en particulier) c'est la variation totale $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \underline{\bar{u}} \right|_{\varepsilon=0}$ qu'il faut prendre en compte.

Démonstration

Par changement de variables, l'équation satisfaite par \bar{u} se ramène à une équation posée sur Ω , mais qui dépend de ε , cette équation doit être satisfaite pour toute valeur de ce paramètre. Dans le développement de cette dernière en série entière de ε , tous les coefficients de ε doivent être nuls, en

particulier le premier, qui vaut $\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\bar{u}) \right|_{\varepsilon=0}$. D'après la proposition précédente il vient donc :

$$D_{\mathbf{u}} F \left(\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) + \text{grad} F(\underline{u}) \cdot \underline{X} = 0$$

Notons que $\text{div}(F(\underline{u}) \cdot \underline{X}) = \text{grad} F(\underline{u}) \cdot \underline{X} + F(\underline{u}) \text{div} \underline{X}$, or $F(\bar{u})$ est identiquement nul en ε , donc $\text{div}(F(\underline{u}) \cdot \underline{X}) = 0$ et $F(\underline{u}) \text{div} \underline{X} = 0$. D'où $\text{grad} F(\underline{u}) \cdot \underline{X} = 0$ et la relation (57) est démontrée.

En écrivant que le groupe de transformation (48) envoie une solution sur une solution, nous avons écrit que c'est un sous groupe à un paramètre du groupe d'invariance de l'équation. Donc la relation (57) n'est qu'une autre écriture de la condition d'invariance, qui est aussi une condition suffisante d'invariance.

Variations des conditions limites

Il ne nous reste qu'à voir comment varie les conditions limites. Nous ne traiterons, par souci de simplicité, que les conditions de type Dirichlet et Neumann.

i) Variation des conditions de Dirichlet

Soit la relation $\bar{u} = g$ sur $\partial\Omega_\varepsilon$ (\bar{u} est une fonction scalaire, pour plus de simplicité), g est une fonction définie sur un ouvert contenant tous les Ω_ε , ou bien définie sur tout \mathbb{R}^n , c'est à dire qu'elle ne dépend pas de ε . Dérivons par rapport à ε il vient :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \bar{u} \right|_{\varepsilon=0} = \text{grad} g \cdot \underline{X} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Donc :

$$\delta u = \text{grad}(g - u) \cdot \underline{X} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (58a)$$

Mais comme $g - u = 0$ sur $\partial\Omega$, $\text{grad}(g - u)$ est normal à $\partial\Omega$ et l'on peut écrire :

$$\text{grad}(g - u) = \frac{\partial}{\partial n} (g - u) \cdot \underline{n}$$

$$\text{d'où :} \quad \delta u = \frac{\partial}{\partial n} (g - u) \underline{X} \cdot \underline{n} \quad (58b)$$

ii) Variations des conditions de Neumann

La condition à satisfaire est la suivante :

$$\text{grad} \bar{u} \cdot \underline{n} = \frac{\partial}{\partial n} \bar{u} = g \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon$$

Utilisons les résultats de transport et dérivation. La condition de Neumann s'écrit après changement de variables :

$$\underline{n} \cdot (\Phi'^{-1})' \Phi'^{-1} \text{grad} u = \left| \Phi'^{-1} \underline{n} \right| g(\bar{\mathbf{x}}(\underline{x}, \varepsilon))$$

D'où après dérivation et pour $\varepsilon = 0$ il vient :

$$\underline{n} \cdot \left(-(\underline{X}' + \underline{X}') \cdot \text{grad} \bar{\delta} u \right) = \text{grad} g \cdot \underline{X} - (\underline{X}' \underline{n} \cdot \underline{n}) g$$

Soit après regroupement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \delta u &= \text{grad} g \cdot \underline{X} + \underline{n} \cdot \left((\underline{X}' + \underline{X}') \cdot \text{grad} u \right) \\ -\underline{n} \cdot \text{grad}(\text{grad} u \cdot \underline{X}) &- (\underline{X}' \underline{n} \cdot \underline{n}) g \end{aligned} \quad (59)$$

3.3. Dérivation de l'intégrale. Equations d'Euler-Lagrange

Proposition

Considérons une intégrale J de la forme (46) où \underline{u} est éventuellement solution d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur Ω_ε , domaine transformé de Ω par les transformations (48), alors la variation de J est donnée par les relations (54) c'est à dire :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial u_k} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \right) \right] [U_k - u_{k,j} X_j] dx \\ &+ \int_{\partial \Omega} D_i \left[L X_i + \frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} [U_k - u_{k,j} X_j] \right] dx \end{aligned}$$

Notons qu'elle s'écrit encore :

$$\delta J = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial u_k} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \right) \right] \delta u_k dx + \int_{\partial \Omega} \left[L X_i + \frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \delta u_k \right] dx$$

La variation de l'intégrale ne fait intervenir que les variations intrinsèques δu_k et non la partie convective. La deuxième intégrale se transforme en une intégrale de surface. La nullité de cette variation δJ n'entraîne pas comme d'habitude les équations d'Euler-Lagrange standard

$\frac{\partial L}{\partial u_k} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \right) = 0$ car les δu_k ne sont pas quelconques, ils doivent satisfaire les relations (57)-

(58) ou (59), si il existe des contraintes. Ces relations étant linéaires, elles définissent un sous espace vectoriel de l'espace fonctionnel dans lequel on cherche la solution. Les équations d'Euler-

Lagrange s'obtiennent en écrivant que le vecteur $\frac{\partial L}{\partial u_k} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \right)$ est orthogonal au sous espace des variations dans un espace de Hilbert approprié.

Démonstration

Appliquons à J le théorème de Reynolds (54g) et la relation (55) il vient :

$$\frac{d}{d\varepsilon} J = \int_{\Omega} \left(\frac{d}{d\varepsilon} L + L \text{div} \underline{X} \right) dx = \int_{\Omega} (D_u L(\delta \underline{u}) + \text{div}(L \underline{X})) dx$$

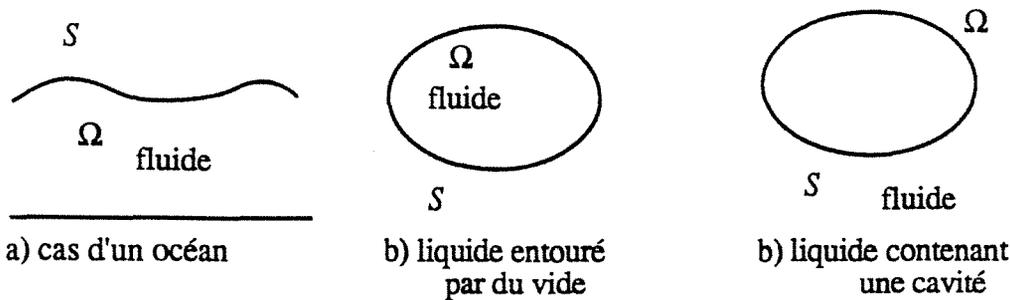
Notons que $D_{\mathbf{u}}L(\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial L}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} D_j(\delta u_k)$.

Il suffit alors de noter que $\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} D_j(\delta u_k) = D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} \delta u_k \right) - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} \right) \delta u_k$ pour obtenir la variation de l'intégrale.

3.4. Exemples

Fluide parfait en écoulement irrotationnel

Nous allons reprendre l'exemple de l'écoulement d'un fluide parfait dont le champ des vitesses est irrotationnel, et telle que la surface du fluide, ou une partie de cette surface est libre. Le domaine occupé par le fluide est Ω , la surface libre est S , la pression extérieure est nulle et la masse volumique du fluide est constante égale à 1.



Dans le cas où le fluide occupe un domaine infini nous supposons que le potentiel de vitesse φ est dans un espace fonctionnel, tel que les intégrales soient convergentes. Soit l'intégrale :

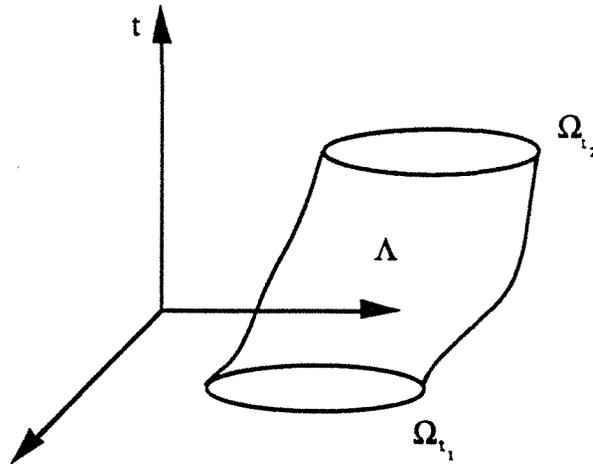
$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} |\text{grad} \varphi|^2 + \varphi_t + gz \right) dx dt$$

où Ω_t est le domaine à l'instant t , φ_t la dérivée du potentiel par rapport au temps, et g est l'accélération de la pesanteur.

Considérons alors des variations géométriques dépendant des coordonnées d'espace mais pas du temps. Nous n'imposerons pas de contrainte sur la variable dépendante φ . La variation de l'intégrale J donne :

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega_t} -(\Delta \varphi) \delta \varphi dx \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega_t} \left(\frac{1}{2} |\text{grad} \varphi|^2 + \varphi_t + gz \right) \delta \underline{x} \cdot \underline{n} dS dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega_t} \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} n_i \delta \varphi \right) dS_t \end{aligned} \quad (60)$$

La troisième intégrale est à calculer comme une intégrale de surface sur le bord du domaine Λ qui représente l'ensemble des positions de Ω_t entre t_1 et t_2 , comme le montre la figure suivante :



Si $f(\underline{x}, t) = 0$ est l'équation de la surface, la normale à Λ a pour composantes :

$$f_i / |\nabla f| \text{ où } |\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}$$

et donc $\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} n_i = \frac{1}{|\nabla f|} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} f \right)$. En annulant la variation de J par rapport à toutes les variations $\delta \varphi$, $\delta \underline{x}$, il vient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{dans } \Omega, & \text{a)} \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} f = 0 & \text{sur } \partial \Omega, & \text{b)} \\ \frac{1}{2} |\text{grad} \varphi|^2 + \varphi_t + gz = h(t) & \text{sur } \partial \Omega, & \text{c)} \end{cases} \quad (61)$$

Ce sont bien les équations du mouvement d'un fluide parfait incompressible.

Ecoulement rotationnel d'un fluide parfait à surface libre

Considérons l'écoulement rotationnel d'un fluide parfait de masse volumique $\rho = 1$, occupant le domaine Ω de \mathbb{R}^3 à frontière libre $\partial \Omega$.

Le fluide satisfait aux équations d'Euler :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad}_{\underline{v}} \underline{v} = -\text{grad}(p + gz) \quad (62)$$

et à la conservation de la masse.

On pose $x = \theta(X, t)$ la représentation lagrangienne. La matérialité de la surface impose la condition cinématique :

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (63)$$

\underline{y} écrit en variables de Clebsch (28) satisfait aux équations dans Ω et aux conditions sur le bord $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{y} \cdot \underline{n} = \nabla\varphi \cdot \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega \\ \operatorname{div}(\alpha\nabla\beta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\beta}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (64a-d)$$

On suppose que l'extérieur est à pression constante, la loi de Laplace s'écrit alors :

$$p = p_e + \sigma C \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (65)$$

où σ est le coefficient de tension superficielle.

Les équations (64)-(65) et les relations (27)-(28) permettent d'établir la relation de Bernoulli qui régit le mouvement du fluide à savoir :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (|\nabla\varphi|^2 - \alpha^2 |\nabla\beta|^2) + \sigma C + gz = k(t) \quad (66)$$

Si l'on note φ_s la valeur de φ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (67)$$

Dans ce qui suit, nous allons établir que les variables de Clebsch (α, β) et (θ, φ_s) sont conjuguées par l'hamiltonien H du système donné par :

$$H = E_g + E_c + E_\sigma$$

où E_g , E_c et E_σ sont respectivement l'énergie gravitationnelle, interfaciale et cinétique et sont données par :

$$E_g = \int_{\Omega} gz \, d\underline{x} \quad E_\sigma = \int_{\partial\Omega} \sigma \, dS \quad E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{y}^2 \, d\underline{x}$$

On a la proposition suivante :

Proposition

Les variables (α, β) ; (θ, φ_s) sont conjuguées par H .

En effet, il faut démontrer :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \beta}{\partial t} & \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_s} = \frac{\partial \theta}{\partial t} & \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \end{cases} \quad (68a-b)$$

Les variables $\alpha, \beta, \theta, \varphi_s$ sont indépendantes, et grâce aux relations (27), (28) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} (\delta\alpha) &= \int_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi + \alpha \operatorname{grad}\beta) \cdot \operatorname{grad}\beta \, \delta\alpha \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \operatorname{grad}\beta \cdot \underline{y} = - \int_{\Omega} \frac{\partial\beta}{\partial t} \, \delta\alpha \, d\underline{x} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \beta} (\delta\beta) &= \int_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi + \alpha \operatorname{grad}\beta) \cdot \alpha \operatorname{grad}\delta\beta \, d\underline{x} \end{aligned}$$

De la relation :

$$\operatorname{div}(\alpha \delta \beta \underline{v}) = \alpha \delta \beta \operatorname{div} \underline{v} + \delta \beta \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \alpha \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(\delta \beta)$$

on en déduit :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta}(\delta \beta) = \int_{\partial \Omega} \delta \beta \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Omega} \delta \beta \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \alpha \, d\underline{x}$$

Vu que $\delta \beta = 0$ sur $\partial \Omega$, on obtient :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta}(\delta \beta) = - \int_{\Omega} \delta \beta \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \alpha \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \delta \beta \, d\underline{x}$$

Reste à démontrer (68b). On montre aisément que :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi_s}(\delta \varphi_s) = \int_{\Omega} \nabla \delta \varphi \cdot \underline{v} \, d\underline{x}$$

Une intégration par parties de cette expression donne :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi_s}(\delta \varphi_s) = \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial n} \delta \varphi_s \, dS + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi_s \, dS$$

et grâce à la condition cinématique (63) et la condition au bord (64b), on a :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi_s}(\delta \varphi_s) = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi_s \, dS = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \varphi_s \, dS$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial H}{\partial \varphi_s} = \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

De la relation du changement de variables (53) d'une intégrale de volume, il vient :

$$E_c(\Omega_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \Phi'^{-1} \underline{v} \cdot {}^t \Phi'^{-1} \underline{v} |\det {}^t \Phi'| \, d\underline{x}$$

et grâce aux relations de transport (53), on a :

$${}^t \Phi'^{-1} = I - \varepsilon {}^t \underline{X}' + o(\varepsilon^2) \quad \det \Phi' = I + \varepsilon \operatorname{div}(\underline{X}) + o(\varepsilon^2)$$

on obtient :

$${}^t \Phi'^{-1} \underline{v} \cdot {}^t \Phi'^{-1} \underline{v} |\det {}^t \Phi'| = \underline{v}^2 + \underline{v}^2 \operatorname{div}(\underline{X}) - 2({}^t \underline{X}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v}$$

D'où après calcul :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \operatorname{div}(\underline{X}) \underline{v}^2 \, d\underline{x} - \int_{\Omega} (\underline{X}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} \, d\underline{x}$$

Comme:

$$\begin{aligned} \nabla(\underline{v}^2) \cdot \underline{X} &= -2({}^t \underline{X}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} + 2 \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \\ \operatorname{div}(\underline{v}^2 \underline{X}) &= \underline{v}^2 \operatorname{div}(\underline{X}) - 2({}^t \underline{X}' \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} + 2 \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \delta E_c &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \operatorname{div}(\underline{v}^2 \underline{X}) \, d\underline{x} - \int_{\Omega} \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \, d\underline{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \underline{v}^2 \underline{X} \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Omega} \underline{v} \cdot \operatorname{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \, d\underline{x} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \cdot \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 \underline{X} \cdot \underline{n} \, dS$$

En effet :

$$\text{div}[(\underline{v} \cdot \underline{X})\underline{v}] = \underline{v} \cdot \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) + (\underline{v} \cdot \underline{X}) \text{div} \underline{v}$$

en conséquence :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \cdot \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} (\underline{v} \cdot \underline{X})\underline{v} \cdot \underline{n} \, dS$$

Si \underline{X} est normal à la surface $\partial\Omega$, alors $\underline{X} = X_n \underline{n} = \delta\theta \underline{n}$, et de (64b) on tire la relation :

$$\underline{v} \cdot \underline{X} = X_n \underline{v} \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} X_n$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \underline{v} \cdot \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{X}) \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 \underline{X} \cdot \underline{n} \, dS$$

et donc :

$$\frac{\partial E_c}{\partial\theta}(\delta\theta) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underline{v}^2 \delta\theta \, dS - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) \delta\theta \, dS$$

D'autre part :

$$\frac{\partial E_g}{\partial\theta} = \int_{\partial\Omega} gz \, \delta\theta \, dS$$

$$\frac{\partial E_\sigma}{\partial\theta} = \int_{\partial\Omega} \sigma C \, \delta\theta \, dS$$

On multiplie la relation de Bernoulli (66) par \underline{X} et on intègre sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial t} X_n \, dS = -\frac{\partial H}{\partial\theta}(X) - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 X_n \, dS$$

d'où :

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) \delta\theta \, dS = -\frac{\partial H}{\partial\theta}(\delta\theta)$$

et grâce à (64) l'expression précédente se ramène à :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi_s}{\partial t}(\delta\theta) \, dS = -\frac{\partial H}{\partial\theta}(\delta\theta)$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial\varphi_s}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial\theta}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abraham .R, Marsden .J.E : "*Foundations of mechanics*". The Benjamin Cumming, 1978
- [2] Arnold .V.I : "*Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires*". J. Mécanique, Vol 5, 29-43, 1966
- [3] Arnold .V.I : "*Méthodes mathématiques de la mécanique classique*". Edition Mir, 1978
- [4] Bluman .G.W, Kumeï .S : "*Symmetries and differential equations*". Springer Verlag, 1989
- [5] Cubisol .F : "*Contribution à l'étude thermomécanique des milieux continus*"
Thèse d'Aix Marseille, 1983
- [6] Eisenhart .L.P : "*Continuous groups of transformations*". Princeton University Press, 1933
- [7] Gelfand .I.M., Fomin .S.V. : "*Calculus of variations*" Prentice-Hall, 1963
- [8] Gouin .H : "*Contribution à l'étude géométrique et variationnelle des milieux continus*"
Thèse d'Aix Marseille, 1978
- [9] Holm .D, Marsden .J.E, Ratiu .T, Weinstein .A : "*Nonlinear stability of fluid plasma equilibria*" Physics Reports, vol 123, 1-116, 1985
- [10] Iooss .G, Joseph .D : "*Elementary stability and bifurcation theory*"
Undergraduate Texts in Maths, Springer, 1980
Phys. Lett, vol 77 A, N°1, 37-38, 1978
- [11] Lamb .H : "*Hydrodynamics*", New York, Dover, 1932
- [12] Littlejohn .R.J : "*Singular Poisson tensors*". A.I.P Conf. Proc, N°88, 47- 66, 1982
- [13] Moreau .J.J : "*Fluid dynamics and the calculus of horizontal variations*". Int .J .Engng .Sci, Vol 20, 389-411, 1982
- [14] Olver .P.J : "*Applications of Lie groups to differential equations*". Springer Verlag, 1986
- [15] Rouché .N, Mawhin .J : "*Equations différentielles ordinaires*". Tome II, Masson, 1973
- [16] Salmon .R : "*Hamiltonian fluid mechanics*". Ann. Rev. Fluid. Mech, vol 20, 225-256, 1988
- [17] Scheck .F : "*Mechanics, from Newton's law to deterministic chaos*". Springer, 1990
- [18] Sero - Guillaume .O : "*Calcul des variations et stabilité en mécanique des fluides*". Cours de D.E.A de Mécanique et Energétique. INPL, 1993
- [19] Sudarshan .E.C, Mukunda .N : "*Classical mechanics, a modern perspective*". Krieger, 1983
- [20] Zakharov .V.E, Kuznetsov .E.A : "*Variational principle and canonical variables in magnetohydrodynamics*". Sov. Phys. Dokl, 15, 913-914, 1971
- [21] Zolésio .J.P : "*The material derivative (or speed) method for shape optimization*".
Optimization of distributed parameter structures. Haug & Cea, ed, 1089-1151, 1981

FORME ET STABILITE D'UNE MASSE LIQUIDE EN ROTATION

INTRODUCTION

Nous allons étudier les figures d'équilibre d'une masse liquide animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. On considère qu'elle est placée dans un repère de référence (i, j, k) et que l'axe k est l'axe de la rotation. Nous noterons ω la vitesse angulaire.

On suppose que la masse de densité ρ_1 est immergée dans un fluide incompressible de densité $\rho_2 < \rho_1$.

La masse tournante est soumise à la gravitation, à la tension superficielle et aux forces d'inertie dues à la rotation.

si $\omega = 0$, la masse est sphérique, on notera Ω_0 cette sphère de rayon R . On la prendra comme domaine de référence.

si $\omega \neq 0$, la masse se déforme, on notera Ω la configuration déformée.

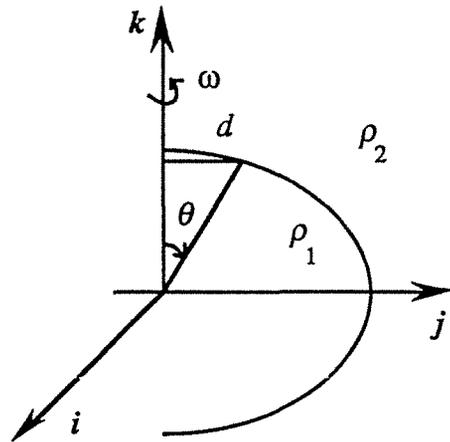


Figure I

Plateau J.A.F 1863, [15] a été le premier à faire des expériences sur la forme d'une masse liquide en rotation. Plateau s'est servi d'une masse d'huile placée dans de l'eau alcoolisée de même densité. La rotation était obtenue au moyen d'un axe vertical, qui entraînait un disque dont le centre coïncidait avec celui de la sphère d'huile.

Plateau conclut ses résultats en 4 phases de rotation :

Phase 1: En faisant tourner la sphère d'huile, il a constaté qu'elle s'aplatit aux pôles et se renfle à l'équateur.

Phase 2 : Pour une vitesse plus grande, elle se creuse aux pôles, en dessus et en dessous, en s'étendant dans le sens horizontal. Les deux pôles se touchent et la masse prend la forme d'un anneau pour une vitesse d'environ un tour par seconde.

Phase 3 : En augmentant encore la vitesse du disque, l'anneau se dilate jusqu'à un diamètre de 9 à 10 cm, la section méridienne de l'anneau prenant une figure sensiblement circulaire.

Phase 4 : Si l'on arrête la rotation, l'anneau se contracte, repasse par les mêmes phases en sens inverse, reforme la masse centrale, qui reprend sa forme sphérique.

L'étude théorique concernant les gouttes captives, relative aux expériences de Plateau à été repris récemment par Brown & Scriven [4], et par d'autres auteurs [5], [10], [23].

Les figures d'équilibre axisymétriques d'une goutte libre en rotation ont fait l'objet de plusieurs travaux (Chandrasekhar 1962, Ross 1968, Brown & Scriven 1982, Rosenkilde 1967). Par la méthode des moments, Chandrasekhar a étudié les oscillations de formes par rapport à de petites amplitudes, et a découvert une rotation critique pour laquelle la forme axisymétrique conduit à une nouvelle forme d'équilibre à deux lobes.

Brown & Scriven ont utilisé une méthode numérique et calculé la famille de figures d'équilibre axisymétriques comme extremum d'une fonctionnelle d'énergie appropriée. Ils ont tracé cette famille de figures en fonction du nombre adimensionnel : le nombre de Bond.

Le problème de l'étude des figures d'équilibre d'une masse liquide soumise à sa propre gravitation et leur stabilité est très ancien.

Historiquement la théorie des masses liquides en rotation comme une représentation idéale des planètes, des astres et des nébuleuses, remonte aux investigations de Newton sur la figure de la terre. Depuis lors cette théorie à été largement développée par plusieurs mathématiciens, parmi ceux ci Mac Laurin, Jacobi, Riemann, Poincaré [16], Lyapounov [13], Jeans, Darwin, Cartan [6], Appell [2] et Lyttleton [14].

Mac Laurin 1742, a montré que l'ellipsoïde de révolution, qui depuis lors porte son nom, est une figure d'équilibre.

Jacobi 1834 a montré que les ellipsoïdes à trois axes inégaux tournant autour du petit axe peuvent être des figures d'équilibre : ils portent depuis le nom d'ellipsoïdes de Jacobi.

A la fin du XIX siècle, le problème a été repris par plusieurs savants. Il convient de citer au premier rang les recherches de Lyapounov 1884 [13], ce dernier démontra la stabilité des ellipsoïdes de Mac Laurin et Jacobi en utilisant le théorème de Lejeune-Dirichlet, et montra qu'il y a d'autres figures d'équilibre voisines de ces ellipsoïdes. A la même époque Poincaré 1885 [16], s'est occupé de la question de l'existence de figure annulaire d'équilibre. Il démontre que les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi forment des familles d'équilibre possédant une infinité de points de bifurcation où apparaissent de nouvelles figures d'équilibre, différentes des ellipsoïdes. Il détermine la forme de ces nouvelles figures par perturbation à l'ordre 1 en ω^2 , dont la plus simple est de forme ovoïde ou piriforme.

L'étude des figures ellipsoïdales d'équilibre a été reprise dernièrement par Lyttleton [14] et surtout par Chandrasekhar [8] qui a élargi ses recherches en tenant compte de la présence d'un champ magnétique. Outre l'application à l'astronomie, cette théorie a trouvé un champ d'application en physique nucléaire [22] par le modèle dit "en goutte" du noyau atomique.

Au paragraphe I nous établissons la formulation variationnelle du problème, à partir des résultats généraux donnés au chapitre I, qui permettent de caractériser la fonctionnelle à minimiser ; on y retrouve les résultats de Poincaré [16] pour la variation du champ de gravitation.

Pour la goutte en rotation avec tension superficielle sans gravitation, les résultats de Brown & Scriven et de Chandrasekhar ne coïncident pas, c'est pourquoi nous allons étudier cette question au paragraphe II. Nous allons procéder par perturbation du domaine de référence Ω_0 à l'aide d'une transformation à un paramètre λ , que nous précisons par la suite. Nous développons ensuite l'équation de la surface libre en une série de perturbation en ce paramètre.

Nous montrons que la goutte s'aplatit au fur et à mesure que la vitesse angulaire ω croît.

Nous avons considéré ce problème comme exemple modèle. Nous l'avons pris pour prototype de calcul au vu des deux autres problèmes à frontière libre que nous allons traiter par la suite.

Au paragraphe III nous présentons le calcul de la forme axisymétrique d'une masse soumise à sa propre gravitation. Nous déterminons la valeur maximale de la vitesse angulaire pour laquelle la masse conserve une forme ellipsoïdale, en comparaison avec les résultats connus énoncés par Appell [2].

I. EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION

Etablissons les équations du mouvement d'un fluide parfait, en rotation soumis à sa propre gravitation et à la tension superficielle, bien que les échelles mises en jeu par ces deux phénomènes ne soient pas du même ordre, il est possible d'écrire un modèle incluant ces deux effets, cf Appell [2], Chandrasekhar [7], [8], Lyttleton [14], Sero-Guillaume [20].

Equation du champ de gravitation

Une masse ponctuelle m située au point O crée au point M un champ de gravitation :

$\underline{E} = -mG \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3}$ avec, G est la constante universelle de la gravitation valant $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$, et

$\underline{x} = \underline{OM}$; elle exerce alors une force attractive sur une masse m' placée en M donnée par

$\underline{F} = m' \underline{E}$. Ce champ de gravitation dérive du potentiel $V = m \frac{x}{|\underline{x}|^2}$ avec $\underline{F} = m'G \text{ grad}V$. Si la

distribution de masse est continue, de masse volumique $\rho(\underline{y})$, dans un domaine Ω , le champ créé en un point \underline{x} de l'espace est alors :

$$\underline{E}(\underline{x}) = G \int_{\Omega} \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \rho(\underline{y}) d\underline{y}$$

Notons que le potentiel associé vérifie dans Ω l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

D'une façon générale, une masse fluide de densité ρ' dans Ω provoque dans tout l'espace un champ de gravitation dont le potentiel V vérifie le système :

$$\Delta V_1 = -4\pi\rho' \quad \text{dans } \Omega \quad (1.a)$$

$$\Delta V_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \text{ extérieur de } \Omega \quad (1.b)$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.d)$$

$$V_2 = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{à l'infini} \quad (1.e)$$

Nous supposons qu'aucune densité de masse n'existe sur la surface $\partial\Omega$ du domaine ; si une telle densité μ existait la condition (1.d) serait remplacé par $\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = \mu$. La force locale de gravitation en un milieu continu de masse volumique ρ' est alors $\underline{F} = G\rho'(\underline{x})\text{grad}V$. Donc les équations du mouvement d'un fluide parfait dans lequel on tient compte de son propre champ de gravitation sont dans le domaine :

La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0 \quad (2.a)$$

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \text{grad} \underline{U} \cdot \underline{U} \right) = -\text{grad} p + G\rho \text{grad} V \quad (2.b)$$

Si W est la vitesse normale de l'interface et \underline{n} la normale unitaire sortante, sur la frontière nous avons la condition :

De matérialité de l'interface :

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = W \quad (2.c)$$

Il faut ajouter la condition de saut portant sur les contraintes à l'interface : en l'absence de tension superficielle pour des fluides parfaits, cette condition revient à l'égalité des pressions intérieure et extérieure ; mais elle se traduit ici par la loi de Laplace-Young. Dans le cas d'un fluide compressible isotherme, nous devons connaître la pression comme fonction de la masse volumique ρ . Enfin le potentiel de gravitation vérifie le système d'équations (1.a)-(1.e) avec $\rho'(\underline{x}) = \rho(\underline{x})$.

Supposons le fluide en mouvement, avec un champ de vitesse relative encore noté \underline{U} , par rapport à un repère en rotation, dont le vecteur rotation instantanée est $\underline{\omega}$. La vitesse absolue \underline{U}_a est donnée par :

$$\underline{U}_a = \underline{U} + \underline{\omega} \wedge \underline{OM}$$

où O est un point fixe du fluide.

Et l'accélération absolue est :

$$\underline{\gamma}_a = \frac{d\underline{U}}{dt} + \underline{\dot{\omega}} \wedge \underline{OM} + 2\underline{\omega} \wedge \underline{U} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{OM}) \quad (3)$$

la dérivée particulaire $\frac{d\underline{U}}{dt}$ étant prise dans le mouvement de champ de vitesses \underline{U} . Notons que

$$\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{OM}) = -\frac{1}{2} \text{grad}(\underline{\omega} \wedge \underline{OM})^2.$$

Supposons le fluide incompressible, c'est à dire $\rho = \text{cte}$, compte tenu de (3) la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \text{grad} \underline{U} \cdot \underline{U} \right) = -\text{grad} \left(p - \frac{1}{2} \rho (\underline{\omega} \wedge \underline{OM})^2 - G\rho V \right) - \rho (\underline{\dot{\omega}} \wedge \underline{OM} + 2\underline{\omega} \wedge \underline{U}) \quad (4.a)$$

$$\text{div} \underline{U} = 0 \quad (4.b)$$

La condition (2.c) restant identique en remplaçant les vitesses absolues par les vitesses relatives. On suppose l'extérieur rempli d'un fluide à pression constante, si σ est le coefficient de tension superficielle, la loi de Laplace-Young s'écrit alors :

$$p = p_* + \sigma C \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.c)$$

Le système d'équations (1.a)-(1.c) et (4.a)-(4.c) est complet.

Cherchons les conditions d'équilibre relatif de la masse fluide, c'est à dire les conditions pour lesquelles le fluide est au repos dans le repère tournant avec la vitesse ω . Il faut donc $\underline{U} = 0$, d'où (4.a) donne :

$$\text{grad} \left(p - \frac{1}{2} \rho (\underline{\omega} \wedge \underline{OM})^2 - G\rho V \right) = -\rho (\underline{\dot{\omega}} \wedge \underline{OM}) \quad (5)$$

La condition (5) implique donc :

$$\text{rot} (\underline{\dot{\omega}} \wedge \underline{OM}) = 2\underline{\dot{\omega}} = 0 \quad (6)$$

Donc cet équilibre relatif n'est possible que si la rotation est uniforme. Posons alors :

$$\underline{\omega} = \omega \underline{k} \quad (7)$$

Si r est la distance du point M à l'axe portant le vecteur \underline{k} , l'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$-p + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V = \text{cte} \quad \text{dans } \Omega \quad (8)$$

Plaçons nous à l'interface, la condition (4.c) implique alors :

$$\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V - \sigma C = \text{cte} + p_* = K \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (9)$$

La constante K se détermine en écrivant que le volume du fluide est donné, c'est à dire :

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} = A \quad (10)$$

Les relations (1.a)-(1.e), (9) et (10) suffisent à déterminer l'équilibre. On peut de plus donner de ce problème une formulation variationnelle.

Proposition

La position d'équilibre de la masse fluide en rotation uniforme est celle qui rend extrémale l'énergie :

$$J = \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V \right) d\mathbf{x} + \sigma \int_{\partial\Omega} dS \quad (11.a)$$

sous la contrainte :

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} = A \quad (11.b)$$

Les positions qui rendent J minimum sont stables par rapport aux perturbations portant sur la vitesse relative, i.e. telles que $\underline{\omega} = \text{cte}$.

Démonstration

Calculons la variation de J il vient :

$$\delta J = \int_{\Omega} G\rho \delta V d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V \right) \underline{X} \cdot \underline{n} dS + \sigma \int_{\partial\Omega} C \underline{X} \cdot \underline{n} dS$$

Puisque le volume est conservé, on choisit $\text{div} \underline{X} = 0$. Déterminons les variations du potentiel de gravitation, en appliquant les relations (53.I), (58.I) et (59.I) du chapitre I :

$$\Delta \delta V_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Delta \delta V_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_*$$

$$\delta V_1 - \delta V_2 = \frac{\partial}{\partial n} (V_1 - V_2) \underline{X} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\delta V_1 - \delta V_2) = \underline{n} \cdot (\underline{X}'' + \underline{X}') \text{grad}(V_1 - V_2)$$

$$-\underline{n} \cdot \text{grad}(\text{grad}(V_1 - V_2) \cdot \underline{X}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\delta V_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Notons que la continuité du potentiel et de sa dérivée normale à la traversée de l'interface implique la continuité du gradient.

La solution de ce système est $\delta V_1 = \delta V_2 = 0$. Donc la variation d'énergie s'écrit :

$$\delta J = \int_{\Omega} \text{grad} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V \right) \cdot \underline{X} dx + \sigma \int_{\partial\Omega} C \underline{X} \cdot \underline{n} dS \quad (12)$$

La première partie étant obtenue au moyen d'une intégration par parties.

La relation (9) entraîne $\delta J = 0$ car $\text{div} \underline{X} = 0$. Réciproquement la condition $\delta J = 0$ pour tout champ \underline{X} de divergence nulle, entraîne l'existence d'une fonction p telle que :

$$\text{grad} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V \right) = \text{grad} p \quad \text{dans } \Omega$$

Ce qui démontre la première partie de la proposition. Pour étudier la stabilité considérons l'énergie :

$$E = T + J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \underline{U}^2 dx + \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + G\rho V \right) dx + \sigma \int_{\partial\Omega} dS$$

De façon à appliquer les méthodes de stabilité, montrons que E est une intégrale première. Or

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \rho \underline{U} \cdot \frac{d\underline{U}}{dt} dx + \int_{\Omega} \rho \text{grad} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} + GV \right) \cdot \underline{U} dx + \sigma \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

car $\text{div} \underline{U} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Cette dernière égalité est équivalente à $\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0$, elle se montre strictement de la même façon, et nous l'avons démontré précédemment. Donc :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \underline{U} \cdot \left(\rho \frac{d\underline{U}}{dt} - \rho \text{grad} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} + GV \right) + 2\rho(\underline{\omega} \wedge \underline{U}) \right) dx + \sigma \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

la force d'inertie $2\rho(\underline{\omega} \wedge \underline{U})$ ne travaillant pas dans le mouvement réel. L'équation du mouvement implique alors que :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} \underline{U} \cdot (\text{grad} p) dx + \sigma \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

Après intégration par parties il vient :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\partial\Omega} (\sigma C - p) \underline{U} \cdot \underline{n} dS = - \int_{\partial\Omega} p_t \underline{U} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration directe de la stabilité : Après une perturbation de l'équilibre conservant ω l'énergie cinétique devient $T(t)$ et la variation totale ΔE d'énergie est nulle et on peut écrire :

$$T(t) = \Delta T = -\Delta J$$

mais si $J(0)$ est un minimum $\Delta J = J(t) - J(0) \geq 0$ ce qui implique

$$T(t) = \Delta T \leq 0$$

ce qui implique $T(t) = 0$ puisque l'énergie cinétique est positive. Le système ne peut donc s'écarter de sa position d'équilibre, ce dernier est stable.

II. GOUTTE TOURNANTE

Nous allons étudier une goutte, plongée dans un fluide, l'ensemble tournant à la vitesse angulaire $\omega \underline{k}$. Les dimensions sont telles que seule la tension superficielle intervient ici, la gravitation n'est pas prise en compte.

si $\omega = 0$, la goutte est sphérique, on notera Ω_0 cette sphère prise comme domaine de référence.

si $\omega \neq 0$, la masse se déforme, on notera Ω la configuration déformée.

Dans ce qui suit nous allons voir que la forme de la goutte est donnée par l'équation de Laplace-Young qui régit l'équilibre des forces de tension superficielle et des forces d'inertie dûes à la rotation et la pression exercée sur l'interface.

1. Paramétrage de l'interface

On se place en coordonnées sphériques, et on pose (x, y, z) les coordonnées dans la configuration déformée et (X, Y, Z) les coordonnées dans la configuration de référence.

$$\begin{cases} X = r \sin \theta \cos \psi \\ Y = r \sin \theta \sin \psi \\ Z = r \cos \theta \end{cases}$$

On notera (e_r, e_θ, e_ψ) le repère local orthonormé associé aux coordonnées sphériques.

Pour des raisons de symétrie, on ne s'occupera que de la section méridienne de l'interface.

On suppose que la goutte possède en plus une symétrie par rapport au plan équatorial.

Soit T une transformation de domaine de classe C^2 qui envoie Ω_0 en Ω :

$$X \rightarrow x = T(X, \lambda)$$

La goutte étant homogène, seule importe la variation de la frontière.

On choisit donc T de la forme : $T = rg(\theta, \psi, \lambda)e_r$,

Il convient d'imposer à la fonction g les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i) g \in C^2([0, \pi] \times [0, 2\pi]) \\ ii) g(\pi - \theta, \psi, \lambda) = g(\theta, \psi, \lambda) \\ iii) \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} g^3 \sin \theta d\theta d\psi = V_0 \end{cases} \quad (13)$$

où V_0 est le volume de la goutte.

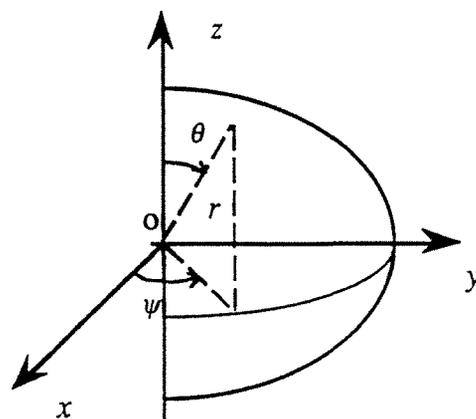


Figure II

La condition i) assure la régularité de l'interface, la condition ii) exprime la symétrie du domaine par rapport au plan équatorial. La condition iii) exprime la conservation du volume.

Notons que la symétrie équatoriale impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \theta}(0, \psi, \lambda) = \frac{\partial g}{\partial \psi}(0, \psi, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(\pi/2, \psi, \lambda) = \frac{\partial g}{\partial \psi}(\pi/2, \psi, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

L'équation de la frontière libre est $r = Rg(\theta, \psi, \lambda) = \bar{g}(\theta, \psi, \lambda)$ et les solutions recherchées sont des surfaces de révolution d'axe k symétriques par rapport au plan xOy .

2. Réduction des équations d'équilibre

Nous allons prendre en compte le fluide extérieur : la pression à l'intérieur de la goutte est donnée par :

$$p^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

alors que celle du fluide ambiant animé de la même rotation, est donnée par :

$$p^2 = p_0^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

où p_0^1 (respectivement p_0^2) est la pression à l'intérieur de la goutte (respectivement atmosphérique) à l'axe de la rotation.

L'équation de Laplace se ramène à :

$$\sigma C = p_0^1 - p_0^2 + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Donc l'équilibre est donné par l'équation dite de Laplace - Young :

$$\sigma C = \Delta p_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho \omega^2 d^2 \quad (15)$$

où $\Delta \rho$ est la différence de densité de la goutte avec celle du fluide ambiant, d est la distance perpendiculaire d'un point de la surface relativement à l'axe de rotation, et Δp_0 est la différence de pression à travers la surface de la goutte à l'axe de rotation.

On réduit les variables par rapport aux grandeurs caractéristiques R et ω :

$$C^* = RC, \quad r = Rr^*$$

la relation (15) devient :

$$\frac{\Delta \rho \omega^2 R^3}{2\sigma} g^2 \sin^2 \theta - C^* + \frac{R(p_0^2 - p_0^1)}{\sigma} = 0$$

On pose : $\lambda = \frac{\Delta\rho\omega^2 R^3}{2\sigma}$

λ est le nombre de Bond rotationnel égal au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle.

$k = \frac{R(p_0^2 - p_0^1)}{\sigma}$ est une constante ne dépendant que de λ .

Dorénavant, on supprimera les astérisques et on notera : $g_\theta = \frac{\partial g}{\partial \theta}$, $g_\psi = \frac{\partial g}{\partial \psi}$

L'équation de Laplace-Young s'écrit sous la forme :

$$\lambda g^2 \sin^2 \theta - C + k = 0 \quad (16)$$

C est la courbure moyenne de l'interface écrite en variables réduites et donnée par :

$$C = \frac{EL - 2FM + GN}{H^3} \quad (17)$$

où :

$$E = g^2 + g_\theta^2 \quad F = g_\psi g_\theta \quad G = g^2 \sin^2 \theta + g_\psi^2 \quad H = g[\sin^2 \theta (g^2 + g_\theta^2) + g_\psi^2]^{1/2}$$

$$L = -g \sin \theta (\cos \theta \sin \theta g g_\theta + g g_{\psi\psi} - 2g_\psi^2 - g^2 \sin^2 \theta) \quad N = -g \sin \theta (g g_{\theta\theta} - 2g_\psi^2 - g^2)$$

$$M = g(2 \sin \theta g_\theta g_\psi - \sin \theta g g_{\theta\psi} + \cos \theta g g_\psi)$$

La contrainte sur le volume entraîne :

$$\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} g^3 \sin \theta d\theta d\psi = 1 \quad (18)$$

3. Formulation analytique de la solution d'équilibre

Remarquons que l'équation (16) admet pour $\lambda = 0$ la solution évidente $C = \text{cte}$, c'est à dire la sphère. Il est alors normal de chercher à obtenir la solution générale sous forme d'une perturbation de cette position "initiale". L'existence et la construction d'une telle solution nous sont données par le théorème des fonctions implicites.

3.1. Existence et unicité

Proposition

Le problème défini par les équations (16)-(18) admet une solution (g, k) fonctions analytiques en λ , pour λ petit.

Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites, cf Sattinger [19], à notre problème. Il s'agit tout d'abord de spécifier les espaces de Banach appropriés au problème.

Soient les espaces de Banach :

$$\mathfrak{E} = \left\{ \varphi = (g, k), g \in C^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]\right) \text{ vérifiant (14)}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{F} = \left\{ \zeta \in C^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]\right) \right\} \times \mathbb{R}$$

Le système d'équations (16) et (18) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} F((g, k), \lambda) &= (F_1((g, k), \lambda), F_2(g)) \\ &= \left(\lambda g^2 \sin^2 \theta - C + k = 0, \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi g^3 \sin \theta d\theta d\psi - 1 \right) = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } F : \mathfrak{E} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathfrak{F} \\ (\varphi, \lambda) &\rightarrow F(\varphi, \lambda) \end{aligned}$$

Il est clair que $F(\varphi_0, 0) = (0, 0)$, où $\varphi_0 = (1, 2)$.

La dérivée de Fréchet de F par rapport à φ est l'opérateur :

$$L_0 = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(g, k)}(\varphi_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g}(\varphi_0, 0) & 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial g}(\varphi_0, 0) & 0 \end{pmatrix}$$

L'analyse spectrale de L_0 sera faite ultérieurement.

Démontrons que l'opérateur L_0 est inversible.

En effet, pour tout $(\zeta, m) \in \mathfrak{F}$, il existe $(\eta, h) \in \mathfrak{E}$ solution de :

$$L_0(\eta, h) = (\zeta, m)$$

L'expression précédente se réduit à :

$$\frac{\partial F_1}{\partial g}(\varphi_0, 0)(\eta, h) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \eta_{\psi\psi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \eta_\theta] + 2\eta + h = \zeta \quad (19.a)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial g}(\varphi_0, 0)(\eta) = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \eta \sin \theta d\theta d\psi = m \quad (19.b)$$

Ce système admet toujours une solution et une seule dans \mathfrak{E} .

En effet, en développant η et ζ suivant les fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \psi)$, c'est à dire qu'elles puissent être représentées sous la forme de série :

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \eta_n^m Y_n^m(\theta, \psi) \\ \zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \psi) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \eta_n^{-m} = (-1)^m \overline{\eta_n^m} \\ \zeta_n^{-m} = (-1)^m \overline{\zeta_n^m} \end{cases}$$

Il est clair que les conditions limites :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(0, \psi) = \frac{\partial \eta}{\partial \psi}(0, \psi) = 0$$

sont automatiquement vérifiées. Par contre les conditions :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = \frac{\partial \eta}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = 0$$

donnent :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \eta_{m+2p+1}^m h(p, m) = 0 \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \bar{\eta}_{m+2p+1}^m k(p, m) = 0 \end{cases} \quad \forall m \geq 0$$

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \eta_{m+2p}^m f(p, m) = 0 \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \bar{\eta}_{m+2p}^m j(p, m) = 0 \end{cases} \quad \forall m \geq 1$$

avec :

$$h(p, m) = 2^{m+1} \frac{\Gamma(p+m+\frac{3}{2})}{\Gamma(p+1)}$$

$$k(p, m) = 2^{-m+1} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})}{\Gamma(p+m+1)}$$

$$f(p, m) = 2^m \frac{\Gamma(p+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$$

$$j(p, m) = 2^{-m} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+m+1)}$$

Du fait que $Y_n^m(\theta, \psi)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \right] + n(n+1) = 0 \quad (20.a)$$

et la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \psi) \bar{Y}_p^q(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi = \delta_{mq} \delta_{np} \quad (20.b)$$

L'expression (19.a) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \eta_n^m (2 - n(n+1)) Y_n^m(\theta, \psi) + h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \psi)$$

On en déduit par identification que :

$$\eta_n^m = \frac{\zeta_n^m}{2 - n(n+1)} \quad \text{pour } n \neq 0,1 \quad (21)$$

$$\text{et : } \eta_0^0 = \frac{\zeta_0^0}{2} - h$$

$\zeta_1^m = 0$, $m = 0, \pm 1$ et η_1^m , $m = 0, \pm 1$ est déterminé respectivement par les expressions :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \eta_{2p+1}^0 h(p,0) = 0 \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \eta_{2p+1}^1 f(p,0) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Proposition

Si ζ ne dépend pas de ψ , alors η ne dépend pas de ψ .

En effet ζ ne dépend pas de ψ , on a $\zeta_n^m = 0$, pour $m \neq 0$ et $\forall n \geq 0$.

On en déduit grâce à (21) que :

$$\eta_n^m = 0, \text{ pour } m \neq 0 \text{ et } \forall n > 1$$

De plus l'expression (22) donne : $\eta_1^m = 0$, pour $m = 0, \pm 1$.

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varphi(\lambda) = (g(\lambda), k(\lambda))$ fonction de classe C^1 solution de $F(\varphi(\lambda), \lambda) = 0$, pour λ assez petit.

En plus F est analytique en les variables g, k et λ donc $g(\lambda)$ et $k(\lambda)$ le sont au voisinage de $\lambda = 0$.

On a donc :

$$g(\lambda) = g(\theta, \psi, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} f_n(\theta, \psi) \quad (23)$$

$$k(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} k_n \quad (24)$$

3.2. Formule de récurrence

Dans ce qui suit nous allons mettre en évidence la structure itérative du problème.

En effet, on sait que :

$$F(\varphi(\lambda), \lambda) = (F_1((g(\lambda), k(\lambda)), \lambda), F_2(g(\lambda))) = (0, 0) \quad \text{avec } F(\varphi_0, 0) = (0, 0)$$

Si l'on dérive n fois l'identité précédente par rapport à λ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial g} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} + \frac{\partial F_1}{\partial k} \frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n} + h_{n-1}^1 = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial g} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} + \frac{\partial F_2}{\partial k} \frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n} + h_{n-1}^2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

où h_{n-1}^1, h_{n-1}^2 contiennent des termes d'ordre inférieur $\frac{\partial^i g}{\partial \lambda^i}, \frac{\partial^i k}{\partial \lambda^i}; 0 \leq i \leq n-1$.

L'expression (25) s'écrit sous la forme :

$$L_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} \\ \frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g}(\varphi_0, 0) & 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial g}(\varphi_0, 0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} \\ \frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{n-1}^1 \\ h_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

Le fait que pour λ petit, l'opérateur L_0 soit un isomorphisme, permet de déterminer (f_n, k_n) connaissant $(f_i, k_i), i \leq n-1$.

Nous cherchons une formule de récurrence sur les termes $\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}$ et $\frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n}$. Nous utilisons l'algorithme des dérivations successives [20] dans le but d'exprimer cette relation de récurrence.

Formule de récurrence

On a posé : $\varphi = (g, k)$, et $\varphi_0 = (1, 2)$, alors $\varphi(\lambda)$ étant analytique en λ , admet la décomposition :

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \varphi_n \quad (26)$$

$$\text{où : } \varphi_n = \left. \frac{\partial^n \varphi}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0} = \left(\left. \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}, \frac{\partial^n k}{\partial \lambda^n} \right) \right|_{\lambda=0}$$

Notons $\varphi^{(n)}(\lambda) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial \lambda^n}$ la dérivée n^{e} de φ par rapport à λ de telle sorte que $\varphi_n = \varphi^{(n)}(0)$.

Introduisons la dérivée totale par rapport à λ :

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_k \varphi^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{(k)}}$$

Proposition

La dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de φ par rapport à λ , $\varphi^{(n+1)}(\lambda) = \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial \lambda^{n+1}}$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi(\lambda), \lambda) [\varphi^{(n+1)}] = A_{n+1}(\lambda, \varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}) \quad (27)$$

avec :

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{d\lambda} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}(\varphi(\lambda), \lambda) [\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}] - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \lambda}(\varphi(\lambda), \lambda) [\varphi^{(n)}] \quad (28)$$

La démonstration se fait par récurrence.

La détermination des termes successifs de la série (26) se fait de la façon suivante :

La première équation à résoudre est :

$$F(\varphi_0, 0) = (0, 0) \quad (29)$$

Il faut calculer itérativement les A_n par (28), les injecter dans (27) et poser $\lambda = 0$; φ_n est alors solution de l'équation :

$$L_0[\varphi_n] = A_{n+1}(0, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (30)$$

Remarquons que l'opérateur L_0 est constant, i.e. ne dépend pas de n , c'est la différentielle de l'application en $\lambda = 0$. Et comme il est inversible, le système (30) admet une solution unique et ceci à tous les ordres.

4. Calcul explicite de la forme de l'interface

4.1. Calcul de la forme

Dans ce qui suit, nous déterminons les développements de g et k compte tenu des relations (23)-(24) et des expressions (27)-(28).

L'équation (27) donne à l'ordre 0 :

$$\text{ordre 0} \quad k_0 = -2 \quad (31)$$

ordre 1

Le système (27)-(28) donne à l'ordre 1 :

$$f_1'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_1' + 2f_1 + \sin^2 \theta + k_1 = 0 \quad (32)$$

$$\int_0^{\pi/2} f_1 \sin \theta d\theta = 0 \quad (33)$$

Déterminons k_1 en multipliant (32.a) par $\sin \theta$ et en intégrant de 0 à $\pi/2$, compte tenu de (18), il reste :

$$-\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = k_1$$

d'où $k_1 = -\frac{2}{3}$.

Les polynômes de Legendre formant une base de vecteurs propres orthogonaux pour L_0 , il est normal d'exprimer la solution de (30) sur cette base. Redonnons ici quelques propriétés des polynômes de Legendre dont nous aurons besoin :

On définit $P_n(x)$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

avec : $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$; $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_n(x)$ est solution de l'équation de Legendre :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (34)$$

On pose $\xi = \cos \theta$ et on décompose $f_1(\theta)$ sur la base des polynômes de Legendre. Compte tenu de (32.b), la solution est :

$$f_1(\theta) = -\frac{1}{6}P_2(\xi)$$

Soit encore : $f_1(\theta) = \frac{1}{12}(1 - 3\cos^2 \theta)$

ordre 2

Le système (27)-(28) donne à l'ordre 2 :

$$f_2'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_2' + 2f_2 - 4f_1^2 - 4f_1''f_1 + 4f_1 \sin^2 \theta - \frac{4f_1 f_1' \cos \theta}{\sin \theta} + k_2 = 0 \quad (35.a)$$

$$\int_0^{\pi/2} f_2 \sin \theta d\theta = -2 \int_0^{\pi/2} f_1^2 \sin \theta d\theta \quad (35.b)$$

En reportant la valeur de $f_1(\theta)$ dans les relations (35.a.b), il vient alors :

$$f_2'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_2' + 2f_2 + \frac{9}{4}\cos^4 \theta - \frac{13}{6}\cos^2 \theta + \frac{17}{36} + k_2 = 0 \quad (35.c)$$

$$\int_0^{\pi/2} f_2 \sin \theta d\theta = -\frac{1}{18} \int_0^{\pi/2} P_2^2(\xi) \sin \theta d\theta \quad (35.d)$$

En multipliant (35.c) par $\sin \theta$ et en intégrant de 0 à $\pi/2$, il vient :

$$k_2 = -\frac{8}{45}$$

On obtient la solution de l'équation différentielle (35.c) en décomposant $f_2(\theta)$ sur la base des polynômes de Legendre et en tenant compte de (18), la solution est :

$$f_2(\theta) = -\frac{1}{630}[18P_4(\xi) - 25P_2(\xi) - 7]$$

L'équation de la frontière libre est alors en coordonnées sphériques :

$$r = g(\theta, \lambda) = 1 - \frac{\lambda}{6}P_2(\xi) - \frac{\lambda^2}{1260}[18P_4(\xi) - 25P_2(\xi) - 7] + o(\lambda^3)$$

Les logiciels de calcul formel Macsyma et Maple nous ont permis de mener le calcul de la forme jusqu'à l'ordre 36 en λ .

On donne ici quelques valeurs de $f_n(\theta)$ et de k_n :

$$f_3(\theta) = -\frac{1}{20790} [54 P_6(\xi) - 351 P_4(\xi) + 561 P_2(\xi) + 154] \quad k_3 = -\frac{88}{495}$$

$$f_4(\theta) = -\frac{148}{75075} P_8(\xi) - \frac{4}{5775} P_6(\xi) + \frac{3481}{150150} P_4(\xi) - \frac{1103}{31185} P_2(\xi) - \frac{89}{9450} \quad k_4 = -\frac{148}{2025}$$

$$f_5(\theta) = \frac{542}{323323} P_{10}(\xi) - \frac{458}{77805} P_8(\xi) - \frac{107}{26180} P_6(\xi) + \frac{11707}{270270} P_4(\xi) - \frac{24611}{442260} P_2(\xi) - \frac{1576}{93555}$$

$$k_5 = -\frac{2584}{18711}$$

D'autre part l'expression (23) peut être réordonnée suivant la base des polynômes de Legendre :

$$g(\lambda, \theta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(\lambda) P_{2n}(\xi) \quad (36)$$

où $\alpha_n(\lambda)$ est une série en λ :

$$\alpha_n(\lambda) = \sum_{k \geq n} b_k^n \lambda^k$$

On constate que les coefficients b_k^n vérifient les inégalités :

$$\forall n > 0, \text{ et } \forall k \geq n :$$

$$\begin{cases} b_k^n > 0 & \text{si } n = 3m + 2, m \geq 0 \\ b_k^n < 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \alpha_0(\lambda) = 1 - \frac{1}{180} \lambda^2 - \frac{13}{810} \lambda^3 - \frac{89}{226800} \lambda^4 - \frac{197}{1403325} \lambda^5 - \dots$$

$$\alpha_1(\lambda) = -\frac{1}{6} \lambda - \frac{5}{252} \lambda^2 - \frac{17}{3780} \lambda^3 - \frac{1103}{1403325} \lambda^4 - \frac{24611}{530071200} \lambda^5 - \dots$$

Dans la figure (III), nous avons tracé différentes formes de la goutte pour des valeurs croissantes du nombre de Bond rotationnel λ .

Au fur et à mesure que λ croît, la forme de la goutte s'écarte de la sphère et devient très allongée.

Pour $0 < \lambda < 2$, la surface du domaine qu'occupe la goutte reste proche d'un ellipsoïde. En $\lambda=1.75$ les pôles s'aplatissent, et au delà de cette valeur, la goutte développe un creux au niveau de l'axe de rotation, le rayon polaire diminue continuellement quand λ augmente sans atteindre une valeur critique voisine de 2.4544 (valeur qui dépend sensiblement de l'ordre de la série (10)) et qui est identique à celle trouvée par Chandrasekhar. En cette valeur la goutte se présente en deux lobes.

Si λ dépasse cette valeur, la figure d'équilibre n'enferme plus l'origine et la goutte devient un tore, et se présente en quatre lobes. Les figures III et IV illustrent cette situation.

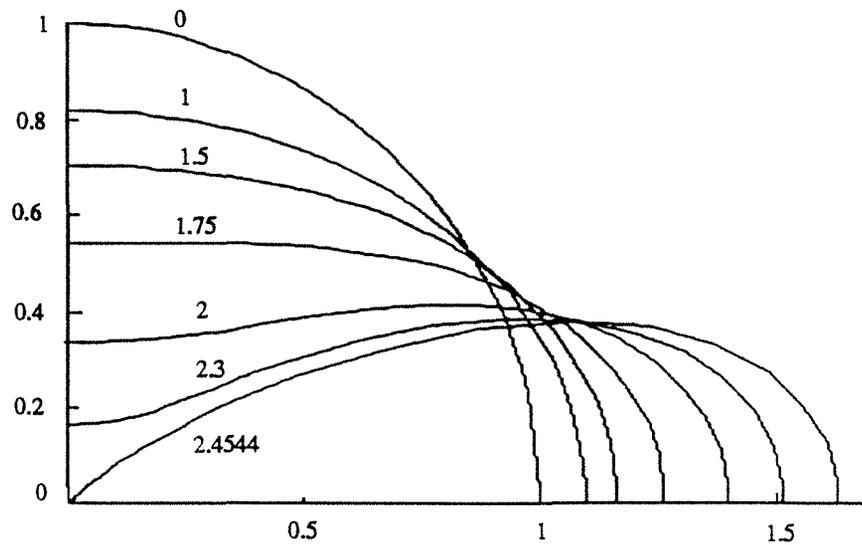


Figure III : Figures d'équilibre de la goutte en rotation pour diverses valeurs du paramètre λ . La courbe correspondant à $\lambda = 0$ représente la sphère, la courbe $\lambda = 2.4544$ correspond à la figure maximale enfermant l'origine.

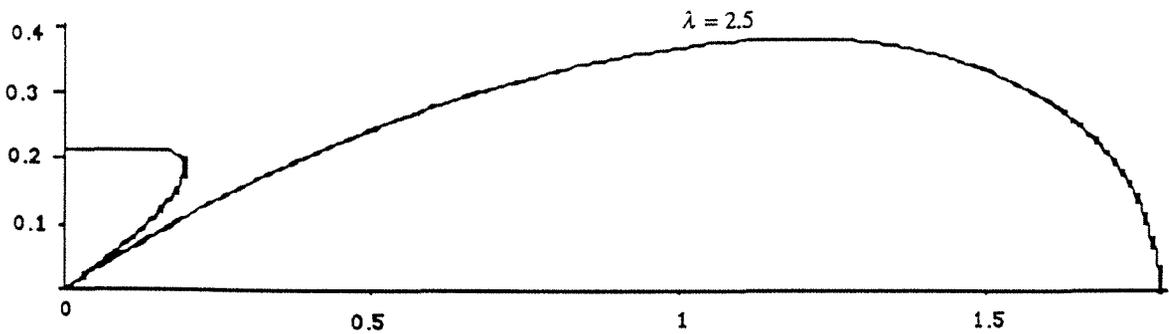


Figure IV: Figure d'équilibre de la goutte pour $\lambda \geq 2.4544$

Le cas où la densité du milieu extérieur est plus grande que celle de la goutte, ce qui correspond à λ négatif, donne lieu aux formes d'équilibre illustrées par la figure V.

Dans ce cas, la goutte est allongée verticalement et sa hauteur croit quand λ diminue.

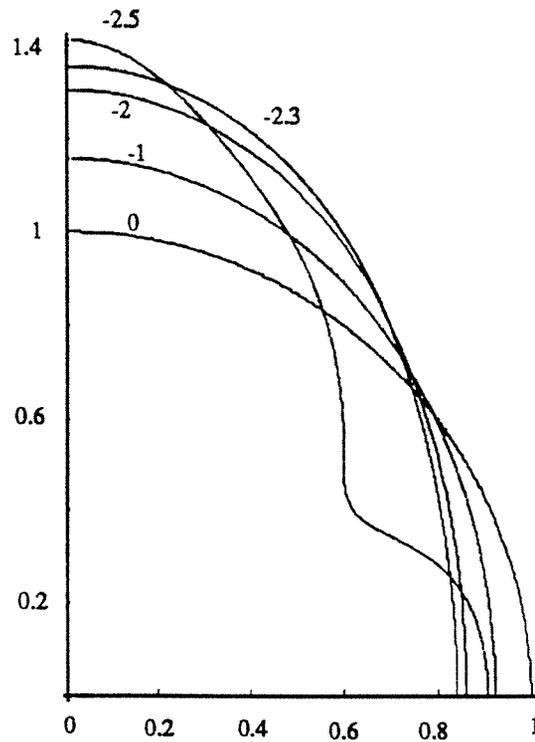


Figure V : Les figures d'équilibre d'une goutte en rotation pour des valeurs négatives de λ .

Remarque

Nous aurions pu utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer la forme. En effet celle ci peut être exprimée comme la solution d'une équation différentielle de premier ordre [7], alors que dans le cas sphérique, elle est du second ordre.

Cette équation du premier ordre ne s'apprête pas à une utilisation d'une méthode de perturbation

de domaine puisqu'elle fait intervenir une quantité $a(\lambda)$ solution implicite de $\int_0^{a(\lambda)} r f(r) dr = cte$. où $z = f(r)$ est l'équation de la section méridionale pour l'hémisphère $z > 0$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.2. Accélération de la convergence et comparaison des résultats

Si les séries (23)-(24) convergent rapidement, la somme des premiers termes fournit une bonne approximation de la solution exacte ; mais en général les séries convergent lentement.

Il existe des transformations capables d'accélérer la convergence des séries de perturbation. Parmi celles ci nous citerons la transformation de Shanks, la table de Neville, l'extrapolation de Richardson et les approximants de Padé, le choix d'une méthode parmi celles-ci dépend de la nature de la série (cf Annexe I).

Soient les sommes partielles de $g(\theta, \lambda)$, et $k(\lambda)$:

$$g_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \frac{\lambda^m}{m!} f_m(\theta) \quad (37.a)$$

$$K_n(\lambda) = \sum_{m=0}^n \frac{\lambda^m}{m!} k_m \quad (37.b)$$

Pour accélérer la convergence de g_n nous utilisons d'abord la transformation de Shanks qui consiste à étudier la suite :

$$s(g_n) = \frac{g_{n+1}g_{n-1} - g_n^2}{g_{n+1} + g_{n-1} - 2g_n} \quad (38)$$

La nouvelle suite $s(g_n)$ converge plus rapidement que g_n . On réitère la procédure : $s^2(g_n)$ converge plus rapidement que $s(g_n)$, et ainsi de suite. Avec les 36 premiers termes de $g_n(\theta, \lambda)$, on obtient 34 termes $s_n = s(g_n)$ et 32 termes $s_n^2 = s^2(g_n)$.

On trouvera dans les tableaux I et II qui suivent, une comparaison des résultats concernant les rayons équatorial et polaire obtenus par la méthode des intégrales elliptiques de Chandrasekhar [7] (colonne I, paramètre Ω), la méthode des éléments finis de Brown et Scriven [3] (colonne II, paramètre Σ), respectivement la méthode des perturbations (colonne III, IV avec Shanks à l'ordre 2, V avec l'approximant de Padé [10,10]).

On remarque que les deux transformations précédentes aboutissent aux mêmes résultats.

	Rayon équatorial			Rayon polaire		
$\Omega^2 = \Sigma = \lambda/4$	I	II	III	I	II	III
0.1393	1.0499	1.0499	1.0499	0.9030	0.9030	0.9029
0.2177	1.0819	1.0820	1.0819	0.8435	0.8434	0.8434
0.3425	1.1425	1.1426	1.1425	0.7358	0.7358	0.7358
0.5000	1.2599	1.2599	1.2549	0.5432	0.5433	0.5501

Tableau I : Comparaison des résultats concernant les rayons polaire et équatorial

	Rayon équatorial				Rayon polaire			
$\Omega^2 = \Sigma = \lambda/4$	I	II	IV	V	I	II	IV	V
0.1393	1.0499	1.0499	1.0499	1.0499	0.9030	0.9030	0.9029	0.9029
0.2177	1.0819	1.0820	1.0819	1.0819	0.8435	0.8434	0.8434	0.8434
0.3425	1.1425	1.1426	1.1425	1.1425	0.7358	0.7358	0.7358	0.7357
0.5000	1.2599	1.2599	1.2599	1.2599	0.5432	0.5433	0.5433	0.5432

Tableau II : Comparaison des valeurs des rayons obtenues par les méthodes d'accélération

4.3. Estimation du rayon de convergence des coefficients de la forme

Nous avons tracé la forme, pour des valeurs assez importantes de λ . Nous ne connaissons pas le rayon de convergence de la série solution. C'est le point que nous allons examiner maintenant, on s'intéressera à l'expression (36) représentant la fonction g dans la base des polynômes de Legendre.

$$\alpha_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{36} c_n \lambda^n$$

$$\alpha_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{36} d_n \lambda^n$$

Avec les 36 termes calculés essayons de déterminer les rayons de convergence de $\alpha_0(\lambda)$ et $\alpha_1(\lambda)$.

Dans ce qui suit nous utilisons la méthode du graphe de Sykes-Domb (Cf Annexe I) pour estimer le rayon de convergence d'une série de perturbation.

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n$$

qui au voisinage de la singularité dominante possède la forme :

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_0)^\gamma & \text{pour } \gamma \neq 0, 1, 2, \dots \\ (\lambda - \lambda_0)^\gamma \log(\lambda - \lambda_0) & \text{pour } \gamma = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

et donc le terme général u_n satisfait la relation :

$$\left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| \sim \pm \frac{1}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1+\gamma}{n} \right) \quad (39)$$

Dans le tableau ci-dessous on calcule le rapport c_n/c_{n-1} :

n	c_n/c_{n-1}	n	c_n/c_{n-1}	n	c_n/c_{n-1}	n	c_n/c_{n-1}
1		10	0.38531590	19	0.40876939	28	0,41803182
2		11	0.38960865	20	0.41017455	29	0,41872835
3	0.22222222	12	0.39323216	21	0.41145681	30	0,41938136
4	0.31785714	13	0.39649780	22	0.41263168	31	0,41999480
5	0.35773464	14	0.39907682	23	0.41371219	32	0,42057219
6	0.35568669	15	0.40147815	24	0.41470931	33	0,42111661
7	0.36552712	16	0.40360817	25	0.41563238	34	0,42163083
8	0.37458687	17	0.40551146	26	0.41648939	35	0,42211730
9	0.38040033	18	0.40722260	27	0.41728722	36	0,42257820

Tableau III : Valeurs du rapport c_n/c_{n-1} pour $\alpha_0(\lambda)$

Dans le schéma ci-dessous, nous avons tracé le graphe de la fonction : $1/n \rightarrow c_n/c_{n-1}$ pour les dix derniers termes :

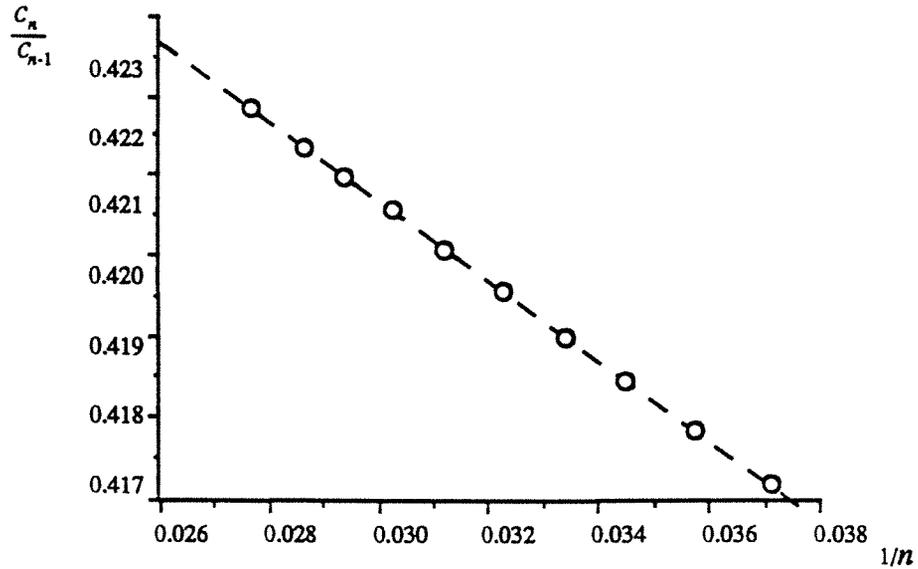


Figure VI : Graphe de Sykes - Domb de $\alpha_0(\lambda)$

Ce qui semble indiquer que c_n/c_{n-1} varie linéairement en fonction de $1/n$ et donc admet un développement limité de la forme (39).

L'intersection avec l'axe $\frac{1}{n} = 0$, donne $\frac{1}{\lambda_0} = 0.4384$ et $\gamma_0 = -0.4284$. D'où $\lambda_0 = 2.2810$.

Le procédé de Richardson (cf Annexe I), permet d'accélérer la convergence des suites admettant un développement limité en $1/n$, en l'appliquant, nous obtenons :

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
21	0.437304	0.439365	0.439646	0.439701	0.439742
22	0.437483	0.439400	0.439654	0.439709	0.439735
23	0.437643	0.439431	0.439663	0.439714	0.439723
24	0.437786	0.439457	0.439670	0.439715	0.439729
25	0.437914	0.439481	0.439677	0.439718	0.439731
26	0.438030	0.439502	0.439682	0.439720	0.439731
27	0.438135	0.439521	0.439687	0.439722	0.439731
28	0.438231	0.439537	0.439692	0.439723	0.439732
29	0.438318	0.439552	0.439696	0.439724	0.439733
30	0.438398	0.439566	0.439699	0.439726	0.439733
31	0.438471	0.439578	0.439702	0.439727	0.439734

Tableau IV : Valeurs de q_{nm} pour $21 \leq n \leq 31$ et $m = 1, \dots, 5$; pour $\alpha_0(\lambda)$

On estime le rayon de convergence de $\alpha_0(\lambda)$ à $\frac{1}{\lambda_0} = 0.4397$, soit $\lambda_0 = 2.2742$.

Pour $\alpha_1(\lambda)$, on obtient le tableau de valeurs du rapport d_n/d_{n-1} :

n	d_n/d_{n-1}	n	d_n/d_{n-1}	n	d_n/d_{n-1}	n	d_n/d_{n-1}
1		10	0.37450910	19	0.40445824	28	0.41568969
2	0.11904761	11	0.38009438	20	0.40618902	29	0.41651608
3	0.226666666	12	0.38477214	21	0.40776045	30	0.41728827
4	0.32768865	13	0.38880418	22	0.40919344	31	0.41801138
5	0.31466745	14	0.39229462	23	0.41050536	32	0.41868992
6	0.33234751	15	0.39534158	24	0.41171083	33	0.41932785
7	0.35060843	16	0.39802733	25	0.41282221	34	0.41992869
8	0.35984455	17	0.40041201	26	0.41385000	35	0.42049556
9	0.36760370	18	0.40254289	27	0.41480032	36	0.42103124

Tableau V: Valeurs de d_n/d_{n-1} pour $\alpha_1(\lambda)$

Le graphe de Sykes - Domb concernant $\alpha_1(\lambda)$ est illustré par le schéma suivant :

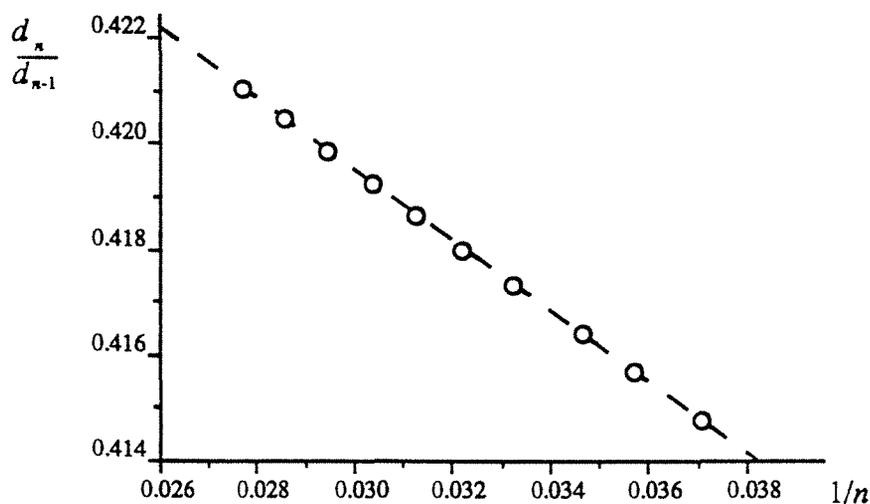


Figure VII : Graphe de Sykes - Domb de $\alpha_1(\lambda)$

L'extrapolation à $\frac{1}{n} = 0$, donne $\lambda_1 = 2.2742$ et $\gamma_1 = -0.3271$.

L'extrapolation de Richardson fournit le tableau ci-dessous :

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
21	0.439286	0.440224	0.439991	0.439841	0.439808
22	0.439367	0.4440195	0.439967	0.439834	0.439754
23	0.439436	0.4401679	0.439947	0.439819	0.439768
24	0.439495	0.440142	0.439928	0.439810	0.439769
25	0.439544	0.440118	0.439911	0.439803	0.439761
26	0.439587	0.440096	0.439896	0.439796	0.439758
27	0.439623	0.440075	0.439883	0.439780	0.439757
28	0.439654	0.440056	0.439871	0.439785	0.439754
29	0.439681	0.440038	0.439860	0.439780	0.439752
30	0.439704	0.440021	0.439850	0.439776	0.439751
31	0.439724	0.440063	0.439842	0.439772	0.439749

Tableau VI: Valeurs de q_{nm} pour $21 \leq n \leq 31$ et $m = 1, \dots, 5$; pour $\alpha_1(\lambda)$

On estime le rayon de convergence de $\alpha_1(\lambda)$ à $\frac{1}{\lambda_1} = 0.4397$, soit $\lambda_1 = 2.2742$.

On conclut que les rayons de convergence de $\alpha_0(\lambda)$ et $\alpha_1(\lambda)$ sont égaux et valent $\lambda_0 = 2.2742$.

Le problème est de savoir si cette valeur est une singularité de la fonction. En effet on sait qu'il existe des singularités sur le cercle de convergence $|\lambda| = \lambda_0$, si $\lambda_0 = 2.2742$ n'est pas une singularité alors la fonction est prolongeable au delà de λ_0 .

Pour conclure, nous utilisons la méthode des approximants de Padé (Cf Annexe I) qui consiste à chercher une fraction rationnelle en λ avec un numérateur de degré N et un dénominateur de degré M telle que son développement en série de Taylor coïncide avec celui de $\alpha_n(\lambda)$.

Cette méthode a l'avantage de localiser la singularité des $\alpha_n(\lambda)$, car les pôles de $P_M^N(\lambda)$ convergent vers ces dernières (cf Annexe I).

Cependant le calcul des pôles des approximants de Padé $P_M^N(\lambda)$ associé à $\alpha_n(\lambda)$, $n = 1, 2$, lorsque M varie et $N = M + j$, $j = -1, 0, 1$; montre qu'ils sont sensiblement différents.

Ceci est illustré par le tableaux VI-VII sur les coefficients $\alpha_0(\lambda)$ et $\alpha_1(\lambda)$.

n	$j = -1$		$j = 0$		$j = 1$	
9	2.2863	(-0.4296)	2.2863	(-0.4294)	2.2870*	(-0.4296)
10	2.2835	(-0.4294)	2.2830	(-0.4293)	2.2828	(-0.4292)
11	2.2810	(-0.4291)	2.2815*	(-0.4292)	2.2807	(-0.4292)
12	2.2803	(-0.4291)	2.2800	(-0.4290)	2.2797	(-0.4288)
13	2.2801*	(-0.4289)	2.2796	(-0.4287)	2.2791	(-0.4286)
14	2.2796*	(-0.4288)	2.2771	(-0.4286)	2.2769	(-0.4286)
15	2.2769	(-0.4287)	2.2770*	(-0.4287)	2.2763	(-0.4286)

Tableau VII : Pôles et résidus (entre parenthèses) des approximants de Padé $[n + j, n]$ associés à $\alpha_0(\lambda)$ (* Approximant avec un faux pôle : Un faux pôle est un pôle dont le résidu est nul, cf Annexe D)

n	$j = -1$		$j = 0$		$j = 1$	
9	2.2883	(-0.3354)	2.2844	(-0.3350)	2.2842	(-0.3354)
10	2.2841	(-0.3345)	2.2851*	(-0.3354)	2.2847*	(-0.3356)
11	2.2840	(-0.3334)	2.2838	(-0.3327)	2.2828	(-0.3317)
12	2.2809	(-0.3310)	2.2805	(-0.3307)	2.2800	(-0.3303)
13	2.2793	(-0.3296)	2.2795*	(-0.3298)	2.2778	(-0.3291)
14	2.2774	(-0.3283)	2.2771	(-0.3281)	2.2778*	(-0.3283)
15	2.2765	(-0.3278)	2.2761	(-0.3273)	2.2754	(-0.3273)

Tableau VIII : Pôles et résidus (entre parenthèses) des approximants de Padé $[n + j, n]$ associés à $\alpha_0(\lambda)$ (* Approximant avec un faux pôle)

Conclusion :

Ces deux tableaux montrent que la fonction solution a une singularité en λ_0 . Cette singularité est sans doute un point de ramification. La valeur, que nous avons trouvé, pour laquelle le rayon polaire s'annule est supérieure à λ_0 , elle n'est donc pas exacte puisque la fonction ne peut être prolongée au delà de cette valeur.

Remarque

Dans la figure V, on remarque que pour $\lambda = -2.5$, la section est non convexe. Cette valeur est au delà du rayon de convergence de la série solution. Par ailleurs le calcul des approximants de Padé, du rayon polaire et des coefficients de la forme, comme nous allons le voir, ne révèle aucun pôle négatif voisin de cette valeur.

4.4. Etude du rayon polaire

De façon à conforter la conclusion précédente nous allons étudier le rayon polaire donné par :

$$a(\lambda) = g(0, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(\lambda)$$

$a(\lambda)$ décroît de 1 jusqu'à la valeur pour laquelle la représentation en coordonnées sphériques n'est plus valable, et devient négatif au delà de cette valeur. Ceci est illustré par la figure VIII.

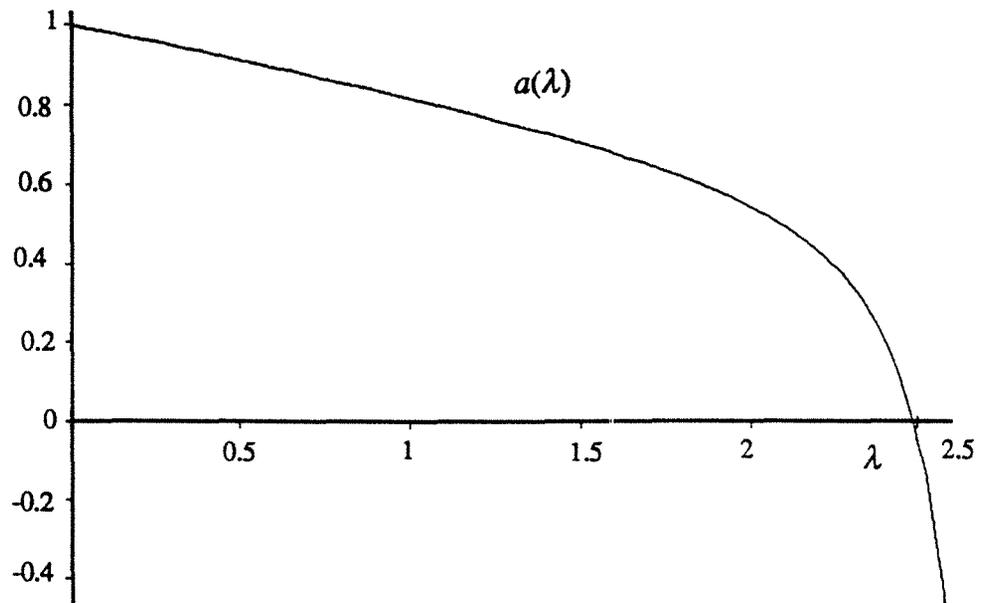


Figure VIII : rayon polaire en fonction de λ

Avec les 36 termes calculés, $a(\lambda)$ se présente comme une série en λ :

$$a(\lambda) = \sum_{n=0}^{36} h_n \lambda^n \quad (40)$$

Les valeurs du rapport $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ aboutissent au tableau ci-dessous :

n	h_n/h_{n-1}	n	h_n/h_{n-1}	n	h_n/h_{n-1}	n	h_n/h_{n-1}
1	0.16666666	10	0.37559690	19	0.40550967	28	0.41640361
2	0.06666666	11	0.38126578	20	0.40719742	29	0.41720070
3	0.30158730	12	0.38600668	21	0.40872662	30	0.41794515
4	0.30175438	13	0.39005170	22	0.41011861	31	0.41864200
5	0.30884425	14	0.39352981	23	0.41139104	32	0.41929567
6	0.33401174	15	0.39655172	24	0.41255879	33	0.41991006
7	0.35023275	16	0.39920338	25	0.41363397	34	0.42048860
8	0.36011895	17	0.40154861	26	0.41462744	35	0.42103434
9	0.36856760	18	0.40363740	27	0.41554807	36	0.42154999

Tableau IX : Valeurs du rapport h_n/h_{n-1} de $a(\lambda)$

Le tracé du graphe de Sykes - Domb possède l'allure suivante :

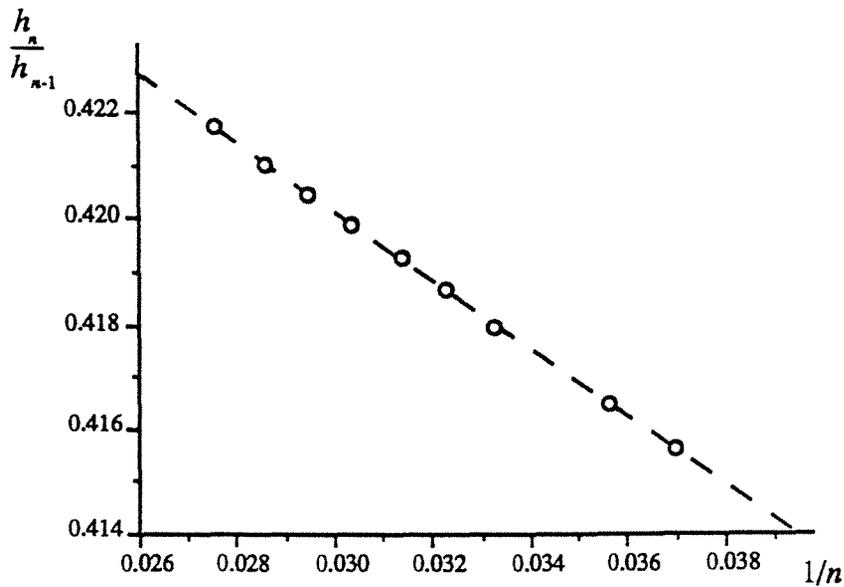


Figure IX : Graphe de Sykes - Domb de $a(\lambda)$

L'extrapolation à l'axe $\frac{1}{n} = 0$, donne $\frac{1}{\lambda_k} = 0.4396$ et $\gamma_k = 0.3518$. D'où $\lambda_k = 2.2747$.

L'extrapolation de Richardson fournit le tableau suivant :

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
21	0.439350	0.439745	0.439736	0.439737	0.439748
22	0.439384	0.439744	0.439736	0.439739	0.439726
23	0.439414	0.439743	0.439737	0.439737	0.439738
24	0.439440	0.439742	0.439737	0.439737	0.439739
25	0.439464	0.439742	0.439737	0.439737	0.439737
26	0.439484	0.439741	0.439737	0.439737	0.439737
27	0.439503	0.439741	0.439737	0.439737	0.439737
28	0.439519	0.439740	0.439737	0.439737	0.439737
29	0.439534	0.439740	0.439737	0.439737	0.439737
30	0.439740	0.439737	0.439737	0.4397377	0.439737
31	0.439737	0.439737	0.439737	0.439737	0.439737

Tableau X : Valeurs de q_{nm} pour $21 \leq n \leq 31$ et $m = 1, \dots, 5$; pour $a(\lambda)$

Ce qui donne l'estimation $\frac{1}{\lambda_k} = 0.4397$, soit $\lambda_k = 2.2742 = \lambda_0$.

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode des approximants de Padé pour déterminer la

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode des approximants de Padé pour déterminer la singularité (cf Annexe I). Nous dressons ci-dessous les pôles diagonaux et paradiagonaux :

n	$j = -1$		$j = 0$		$j = 1$	
9	2.2852	(0.4025)	2.2830	(0.4004)	2.2843*	(0.4015)
10	2.2822	(0.3967)	2.2808	(0.3945)	2.2802	(0.3905)
11	2.2800	(0.3851)	2.2800	(0.3815)	2.2804*	(0.3822)
12	2.2800*	(0.3786)	2.2785*	(0.3755)	2.2789*	(0.3765)
13	2.2787	(0.3705)	2.2784	(0.3685)	2.2781	(0.3663)
14	2.2779	(0.3623)	2.2775	(0.3611)	2.2775	(0.3589)
15	2.2775	(0.3576)	2.2764	(0.3567)	2.2761	(0.3554)
16	2.2759	(0.3545)	2.2757	(0.3538)	2.2753	(0.3529)

Tableau XI : Pôles et résidus (en parenthèses) des approximants de Padé $[n + j, n]$ associés au rayon polaire $a(\lambda)$ (* Approximant avec un faux pôle).

On remarque que les pôles "convergent" vers la valeur déterminée par la méthode de Sykes - Domb : $\lambda_k = 2.2742$, et il semble que les résidus associés "tendent" vers la puissance critique $\gamma_k = 0.3518$. Donc le rayon polaire admet au voisinage de λ_0 un comportement de la forme $a(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{\gamma_k} h(\lambda)$, avec $\lambda_0 = 2.2742$ et $\gamma_k = 0.3518$, la fonction $h(\lambda)$ étant analytique sans singularité au voisinage de λ_0 . Le comportement de $a(\lambda)$ au voisinage de λ_0 ne peut être celui donné par le graphe de la figure VII, car d'après l'expression précédente γ_k est inférieur à un et donc λ_0 doit être un point de retournement et un point de ramification pour cette fonction analytique. L'allure de $a(\lambda)$ est celle donnée par la figure suivante :

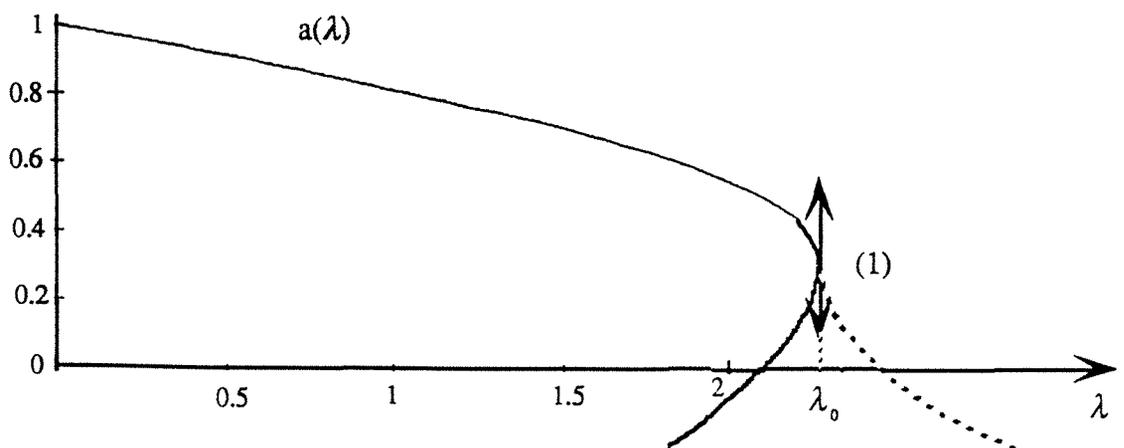


Figure X : Allure $a(\lambda)$ de au voisinage de λ_0

La représentation $\lambda \rightarrow a(\lambda)$ est alors inappropriée et on doit considérer la fonction $a \rightarrow \lambda(a)$.

4.5. Inversion du paramètre λ en fonction du rayon polaire

La série (40) satisfait à $h_0 = 1$, $h_1 \neq 0$, et par conséquent elle est inversible par rapport à $(a-1)$.

On obtient donc :

$$\lambda = \sum_{n=0}^{36} k_n (a-1)^n = \sum_{n=0}^{36} k_n A^n \quad (41)$$

Nous devons déterminer le rayon de convergence de cette nouvelle série. Le rapport $\frac{k_n}{k_{n-1}}$ ne présente aucune régularité, par contre l'étude du rayon de convergence des suites extraites : $u_n^0 = k_{5n}$, $u_n^1 = k_{5n+1}$, ..., $u_n^4 = k_{5n+4}$ aboutit avec les graphiques de Sykes Domb à la même valeur $A=1.18$.

En utilisant le procédé de Richardson, on obtient comme valeur du rayon de convergence pour (41) $A_0 = 1.2227$.

Il résulte que la série (41) est valable pour : $-0.22 < a < 2.2227$. Notons qu'on a amélioré la taille du domaine sur lequel on peut déterminer le rayon polaire, puisque précédemment la série représentant la fonction $\lambda \rightarrow a(\lambda)$ ne pouvait être valable que sur l'intervalle $0 < a \leq 1$.

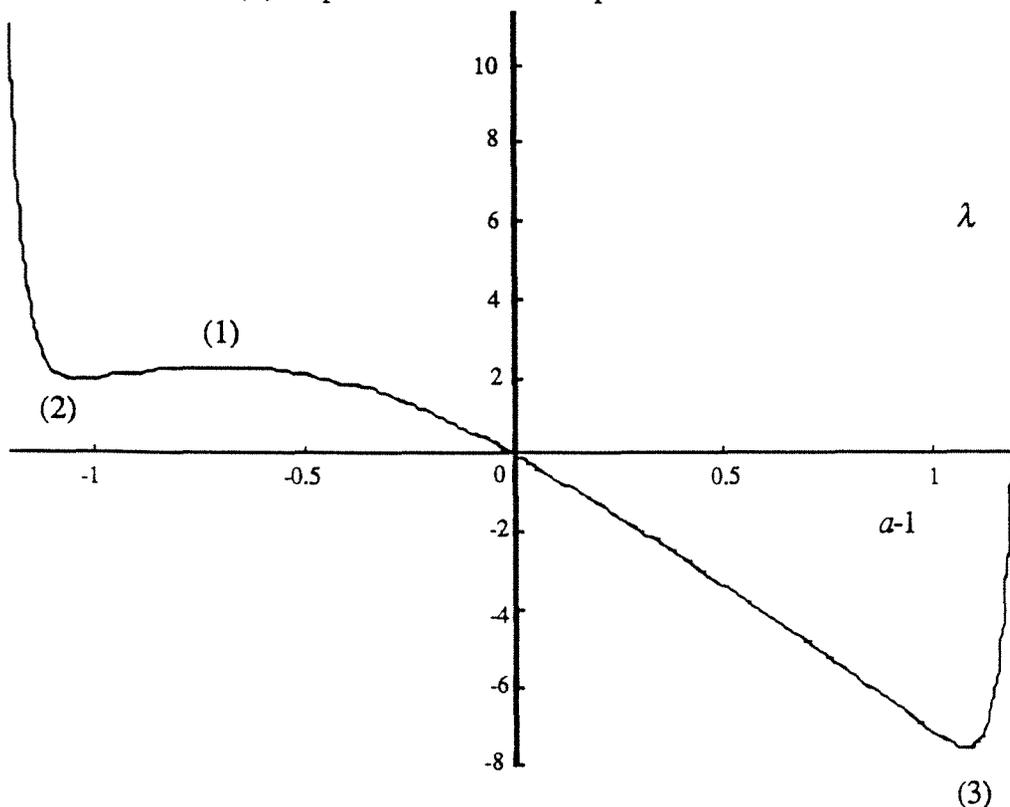


Figure XI : graphe de λ fonction de $a-1$

Remarque

On est en possession que de quelques termes de u_n^i (7 pour u_n^0 et 6 pour les autres). Ce qui induit certainement une estimation moins bonne du rayon de convergence de (41).

Les figures (XI) qui représentent λ en fonction de $(a-1)$, montre qu'au delà de $|A| = 1.22$, la série (41) diverge.

Dans ce qui suit, on va rechercher la valeur critique en utilisant la série inversée par rapport au rayon polaire.

La série (41) s'écrit : $\lambda = h(A)$.

La relation $\frac{dh}{dA} = 0$, admet trois racines aux points notés (1), (2), (3) (cf figure XI) :

$$\begin{cases} a_1 = 0.2964 \\ a_2 = 2.0837 \\ a_3 = -0.0423 \end{cases}$$

et donc $h(A)$ admet 3 extrema en :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2.2740 \\ \lambda_2 = -7.6294 \\ \lambda_3 = 1.9769 \end{cases}$$

Il semble que la valeur λ_1 correspondant à a_1 est sensiblement égale à $\lambda_0 = 2.2742$.

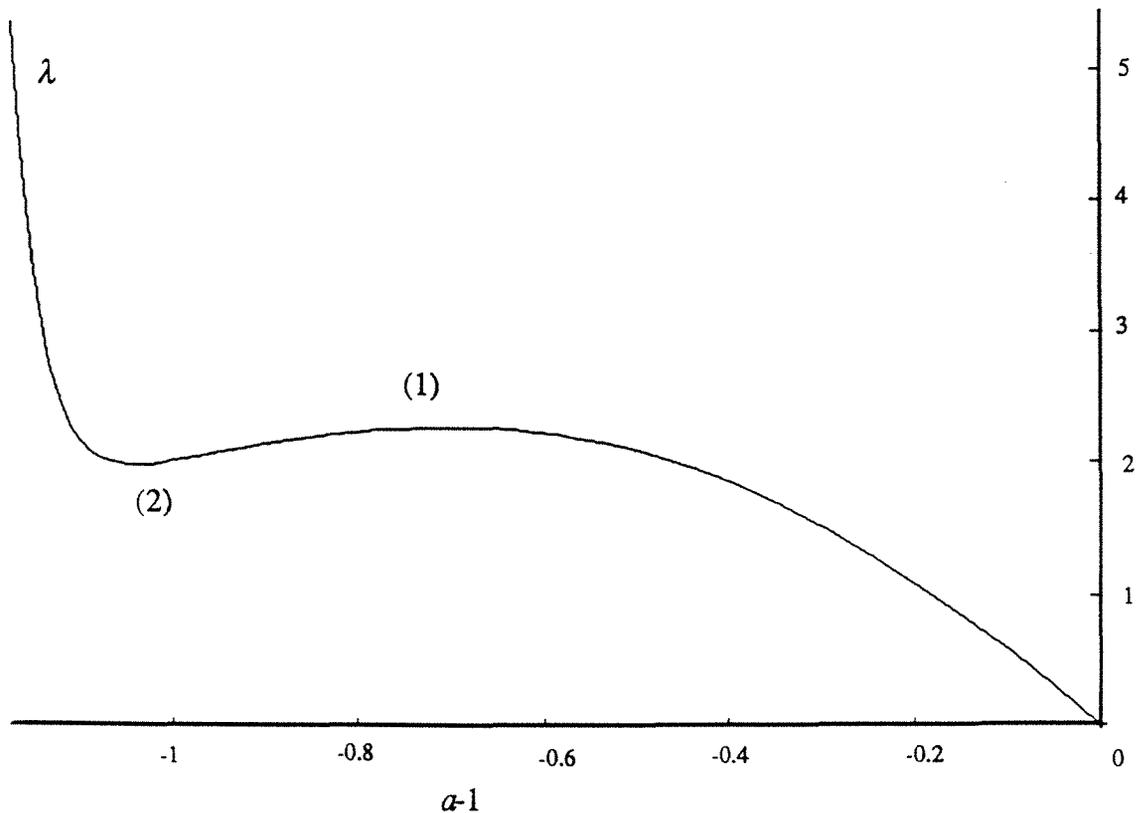


Figure XI bis : graphe de λ fonction de $a-1$, pour $a-1 < 0$

Remarque :

En substituant $a = 0$, dans (41), on obtient $\lambda_4 = 2.009$, valeur pour laquelle la représentation en coordonnées sphériques n'est plus convenable a priori.

Mais la valeur de λ_4 dépend sensiblement de l'ordre de la série (41) et d'autre part on a $\lambda_4 < \lambda_0$, et donc $g(\lambda_4, 0)$ existe bien en coordonnées sphériques. La conclusion est que la valeur λ_0 est vraiment un point de retournement et de ramification pour la solution du problème de l'équilibre de la goutte. Il s'agit de déterminer si ce point est aussi un point de bifurcation.

5. Bifurcation

5.1. Introduction

Grâce au théorème des fonctions implicites, nous avons démontré dans le paragraphe II, l'existence et l'unicité d'une solution $\varphi(\lambda)$ de $F(\varphi, \lambda) = 0$ au voisinage de $\lambda = 0$.

Si l'on pose :

$$G(u, \lambda) = F(\varphi + u, \lambda) - F(\varphi, \lambda) \quad (42)$$

alors $G(0, \lambda) = 0$ pour tout λ . La solution $u = 0$ est dite triviale.

L'unicité de la solution est assurée tant que $L(\lambda) = G_u(0, \lambda)$ reste inversible.

L'opérateur $L(\lambda)$ est donné par :

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g}(\lambda, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial k}(\lambda, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial g}(\lambda, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial k}(\lambda, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g}(\lambda, 0) & 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial g}(\lambda, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

avec :

$$\frac{\partial F_1}{\partial g}(\lambda, 0)u = 2\lambda g u \sin^2 \theta - \frac{\delta C}{\delta g}(u)$$

et

$$\frac{\partial F_2}{\partial g}(\lambda, 0)u = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3g^2 u \sin \theta \, d\theta d\psi$$

Nous allons voir que $L(\lambda)$ admet un spectre discret. Tant qu'aucune de ses valeurs propres ne s'annule, il est inversible : il y a donc existence et unicité de la solution. La théorie de la bifurcation, cf Sattinger [19], montre que si la valeur propre $\sigma(\lambda)$ s'annule en λ_0 et si le sous espace propre correspondant est de dimension 1, en plus si la dérivée $\sigma'(\lambda_0)$ est non nulle alors une autre branche de solution bifurque en λ_0 .

Dans ce qui suit, nous allons étudier le spectre de la famille des opérateurs $(L(\lambda))_\lambda$.

5.2. Analyse spectrale de $L(\lambda)$

L'opérateur $L(\lambda)$ a pour domaine :

$$D(L(\lambda)) = \{ \varphi = (\gamma(\theta, \psi), \kappa), \gamma \in C^2(0, \pi) \times C^2(0, 2\pi), \kappa \in \mathbb{R} \}$$

avec :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(0, \psi) = \frac{\partial \gamma}{\partial \psi}(0, \psi) = 0 \quad (44.a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial \psi}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = 0 \quad (44.a)$$

Proposition

Etant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une infinité dénombrable de valeurs de σ telles que le système suivant ait une solution φ non identiquement nulle.

$$L(\lambda)\varphi(\lambda) = \sigma(\lambda)\varphi(\lambda) \quad (45)$$

Démonstration

$L(\lambda)$ est un opérateur elliptique, en effet il s'écrit :

$$L(\lambda) = A \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \psi} + C \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + F \left(\lambda, g, g_\theta, g_\psi, \theta, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$$

$$\text{où : } A = A(g, g_\theta, g_\psi, \theta), \quad B = B(g, g_\theta, g_\psi, \theta), \quad C = C(g, g_\theta, g_\psi, \theta)$$

Après un calcul algébrique, il vient que :

$$B^2 - AC = \frac{-\sin^2 \theta}{[(g_\theta^2 + g^2)\sin^2 \theta + g_\psi^2]^2} < 0$$

Alors d'après Agmon [1], le spectre de $L(\lambda)$ est discret et ses valeurs propres sont isolées.

Soit (σ_p) , $p \in \mathbb{N}$ ces valeurs classées dans l'ordre croissant, alors pour tout p , l'application :

$\lambda \rightarrow \sigma_p(\lambda)$ est holomorphe dans un voisinage de $]0, \infty[$ dans \mathbb{C} .

La famille des opérateurs $(L(\lambda))_\lambda$ dépendant holomorphiquement de λ , et chacune de ses valeurs propres étant séparées, il résulte de Kato [11], que ses valeurs propres $\sigma_p(\lambda)$ dépendent holomorphiquement de λ .

Pour tout λ appartenant à un voisinage de λ_0 de $]0, \infty[$, la résolvante $R(\lambda, \mu)$, donnée par :

$$R(\lambda, \mu) = (\mu I - L(\lambda))^{-1}$$

est holomorphe en (λ, μ) , et bornée dans un voisinage de (λ_0, μ) .

Le projecteur sur l'espace propre associé à la première valeur propre $\sigma_0(\lambda)$ de $L(\lambda)$ est donné par la formule de Dunford [9]:

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, \mu) d\mu$$

où Γ est un petit cercle entourant $\sigma_0(\lambda)$, mais ne contenant pas d'autres valeurs propres. Il en résulte que $P(\lambda)$ est aussi holomorphe dans un voisinage de λ_0 . L'espace propre associé à la valeur propre $\sigma_0(\lambda)$ étant de dimension un, la fonction propre associée $\varphi(\lambda)$ est aussi holomorphe dans un voisinage de λ_0 .

$L(\lambda)$ admet donc la décomposition :

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \dots + \lambda^m L_m + o(\lambda^m) \quad (46)$$

On cherche $\sigma(\lambda)$ et $\varphi(\lambda)$ telle que :

$$L(\lambda)\varphi(\lambda) = \sigma(\lambda)\varphi(\lambda)$$

Cette expression est alors équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial g}(\lambda, 0)\psi(\lambda) + \kappa(\lambda) = \sigma(\lambda)\psi(\lambda) \\ \frac{\partial F_2}{\partial g}(\lambda, 0)\psi(\lambda) = \sigma(\lambda)\kappa(\lambda) \end{cases} \quad (47)$$

On développe de la même façon qu'en (46) la valeur propre $\sigma(\lambda)$ et le vecteur propre $\varphi(\lambda) = (\gamma(\lambda), \kappa(\lambda))$:

$$\begin{cases} \sigma(\lambda) = \sigma_0 + \lambda \sigma_1 + \lambda^2 \sigma_2 + \dots + \lambda^m \sigma_m + o(\lambda^m) \\ \gamma(\lambda) = \gamma_0 + \lambda \gamma_1 + \lambda^2 \gamma_2 + \dots + \lambda^m \gamma_m + o(\lambda^m) \\ \kappa(\lambda) = \kappa_0 + \lambda \kappa_1 + \lambda^2 \kappa_2 + \dots + \lambda^m \kappa_m + o(\lambda^m) \end{cases} \quad (48)$$

A l'ordre 0, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta} \right] + (2 - \sigma_0) \gamma_0 + \kappa_0 = 0 \\ 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \gamma_0 \sin \theta d\theta = \sigma_0 \kappa_0 \end{cases} \quad (49)$$

En multipliant la première relation de ce système par $\sin \theta$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\kappa_0 (\sigma_0^2 - 2\sigma_0 + 12\pi) = 0$$

si $\kappa_0 \neq 0$, alors $\sigma_0 = 1 - \sqrt{1 + 12\pi}$, ou $\sigma_0 = 1 + \sqrt{1 + 12\pi}$.

si $\kappa_0 = 0$ le système (49) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta} \right] + (2 - \sigma_0) \gamma_0 = 0 \\ 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \gamma_0 \sin \theta d\theta d\psi = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Si l'on développe γ_0 suivant la base des fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \psi)$:

$$\gamma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m(\theta, \psi)$$

au moyen des relations (20.a-b), le premier terme de (50) aura la forme :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta} \right] + (2 - \sigma_0) \gamma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_n^m (2 - \sigma_0 - n(n+1)) Y_n^m(\theta, \psi)$$

D'autre part :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0 \sin \theta d\theta d\psi = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=-n}^{m=n} f_m^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_m^n(\theta, \psi) \sin \theta d\theta = 0$$

donc $f_0^0 = 0$.

Par ailleurs, les conditions (44) entraînent que $f_m^n = 0$ pour $m \neq 0$ et $f_n^0 = 0$ pour n impair.

On conclut que : $\sigma_0^n = 2 - n(n+1)$ pour n pair non nul, associé à $\gamma_n^0 = Y_n^0(\theta, \psi) = \text{cte} \times P_n(\xi)$.

5.3. Estimation de la valeur critique

σ_0^n est une fonction décroissante en n pour n pair. Etant donné qu'on cherche la première valeur pour laquelle σ s'annule, on est donc amené à prendre $n = 2$.

Soit donc $\sigma_0 = -4$. Une solution du système (49) est :

$$\begin{cases} \gamma_0 = P_2(\xi) \\ \kappa_0 = 0 \end{cases}$$

A l'ordre 1, et du fait que γ ne dépend pas de ψ , le système (47) donne :

$$\begin{aligned} \gamma_1'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \gamma_1' + 3\gamma_1 - 4 \cos^2 \theta + \kappa_1 - \sigma_0^1 + \frac{8}{3} &= 0 \\ 3 \int_0^{\pi/2} \gamma_1 \sin \theta d\theta &= -3\sigma_0^1 - \kappa_1 \end{aligned}$$

de solution :

$$\begin{cases} \sigma_0^1 = 0 \\ \gamma_1 = \frac{5}{27} - \frac{6}{35} P_4(\xi) \\ \kappa_1 = -8/45 \end{cases}$$

de la même façon on obtient pour les ordres supérieurs :

$$\begin{cases} \sigma_0^2 = -\frac{311}{2835} \\ \gamma_2 = -\frac{56}{3645} - \frac{57}{5390} P_4(\xi) + \frac{1}{154} P_6(\xi) \\ \kappa_2 = -277/8505 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_0^3 = \frac{74461}{1178793} \\ \gamma_3 = \frac{15973}{3444525} - \frac{70817}{7357350} P_4(\xi) - \frac{149}{121275} P_6(\xi) - \frac{818}{353925} P_8(\xi) \\ \kappa_3 = 21472/8037225 \end{cases}$$

on réitère la même procédure jusqu'à l'ordre 30, ce qui donne une valeur approchée de $\sigma_0(\lambda)$:

$$\sigma_0(\lambda) = -4 - \frac{311}{283} \lambda^2 + \frac{74461}{1178793} \lambda^3 + \dots = \sum_{n=0}^{30} c_n \lambda^n \quad (51)$$

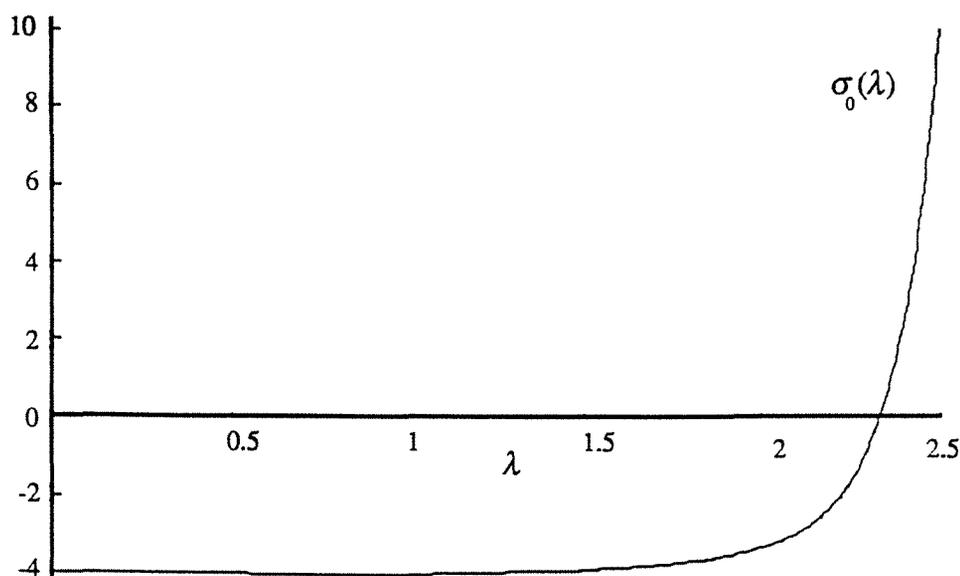
On dresse ci dessus le tableau des coefficients c_n :

n	c_n	n	c_n	n	c_n
1	0	11	$-1.414 \cdot 10^{-5}$	21	$-3.933 \cdot 10^{-8}$
2	-0.1097	12	$-2.449 \cdot 10^{-5}$	22	$1.300 \cdot 10^{-9}$
3	$6.316 \cdot 10^{-2}$	13	$1.444 \cdot 10^{-5}$	23	$8.350 \cdot 10^{-10}$
4	$2.131 \cdot 10^{-2}$	14	$3.933 \cdot 10^{-6}$	24	$-7.221 \cdot 10^{-11}$
5	$-3.505 \cdot 10^{-3}$	15	$-4.379 \cdot 10^{-6}$	25	$8.674 \cdot 10^{-11}$
6	$1.236 \cdot 10^{-3}$	16	$7.522 \cdot 10^{-7}$	26	$2.183 \cdot 10^{-11}$
7	$1.389 \cdot 10^{-3}$	17	$9.984 \cdot 10^{-7}$	27	$-4.433 \cdot 10^{-12}$
8	$-3.279 \cdot 10^{-4}$	18	$-5.277 \cdot 10^{-7}$	28	$-5.824 \cdot 10^{-12}$
9	$-6.806 \cdot 10^{-5}$	19	$-7.941 \cdot 10^{-8}$	29	$2.853 \cdot 10^{-12}$
10	$1.455 \cdot 10^{-4}$	20	$1.804 \cdot 10^{-7}$	30	$-3.218 \cdot 10^{-13}$

Tableau XII : Coefficients de la valeur propre $\sigma_0(\lambda)$

On remarque que les coefficients c_n tendent vers 0 quand n devient grand ; de même, les coefficients κ_n de la constante k , ainsi que les composantes par rapport à la base des polynômes de Legendre de γ_n , tendent vers 0 quand n devient grand.

Ce qui donne l'allure ci dessous de la valeur propre $\sigma_0(\lambda)$ en fonction de λ :

Figure XII : allure de $\sigma_0(\lambda)$

Il s'agit dans ce qui suit de déterminer une valeur critique de λ pour laquelle $\sigma_0(\lambda) = 0$.

Tout d'abord, nous allons déterminer le rayon de convergence de $\sigma_0(\lambda)$.

On est en possession de 30 coefficients c_n . Le rapport $|c_i / c_{i+1}|$ ne présente aucune régularité, le calcul de $1/\sqrt[n]{|c_n|}$ aboutit à des valeurs oscillantes et aucune sous suite extraite ne possède une régularité requise.

Les signes des coefficients c_n présentent la périodicité suivante :

$$- + - + + - + + -, - + - + + - + + -, \dots$$

Ceci indique la présence d'une paire de singularité dominante dans le plan complexe proche de l'origine.

Ci dessous nous mettons en évidence par la méthode des approximants de Padé cette paire de singularité. Pour ce faire, nous prenons la dérivée logarithmique troisième de $\sigma_0(\lambda)$; le calcul des pôles des approximants diagonaux et paradiagonaux donne le tableau XIII. Nous présentons entre parenthèses leurs résidus qui correspondent au calcul de l'exposant associé à cette paire de singularité.

n	$j = -1$		$j = 0$		$j = 1$	
9	-0.509+1.695i	(0.04+0.02i)	-0.539+1.694i	(0.05+0.06i)	-0.535+1.721i	(0.06+0.02i)
10	-0.522+1.711i	(0.05+0.02i)	-0.545+1.717i	(0.07+0.01i)	-0.535+1.720i	(0.06+0.02i)
11	-0.527+1.712i	(0.05+0.02i)	-0.534+1.699i	(0.05+0.01i)	-0.504+1.695i	(0.03+0.14i)
12	-0.529+1.700i	(0.05+0.02i)	-0.516+1.724i	(0.05+0.01i)	-0.516+1.724i	(0.05+0.03i)
13	-0.520+1.705i	(0.05+0.02i)	-0.549+1.721i	(0.05+0.01i)	-0.531+1.713i	(0.05+0.03i)

Tableau XIII : Pôles et résidus (entre parenthèses) des approximants $[n + j, n]$ associés à $\sigma_0(\lambda)$

Ce tableau permet de conclure que la paire de singularité se trouve en :

$$\lambda = -0.529 \pm 1.709i \pm (0.022 \pm 0.015i)$$

et de module : $|\lambda| = 1.788 \pm 0.026$

D'autre part le calcul des pôles des approximants de Padé de $\sigma_0(\lambda)$ aboutit au tableau XIV :

n	$j = -1$		$j = 0$		$j = 1$	
10	-0.608+1.867i	(0.03+0.10i)	-0.618+1.901i	(0.04+0.13i)	-0.664+1.831i	(0.07+0.05i)
11	-0.657+1.830i	(0.06+0.04i)	-0.632+1.896i	(0.05+0.13i)	-0.619+1.865i	(0.04+0.10i)
12	-0.617+1.866i	(0.04+0.10i)	-0.609+1.886i	(0.03+0.11i)	-0.580+1.884i	(0.01+0.11i)
13	-0.582+1.882i	(0.01+0.11i)	-0.607+1.899i	(0.03+0.13i)	-0.626+1.902i	(0.05+0.13i)
14	-0.626+1.901i	(0.05+0.13i)	-0.655+1.895	(0.04+0.12i)	-0.630+1.901i	(0.05+0.13i)

Tableau XIV: Pôles et résidus (entre parenthèses) des approximants de Padé $[n + j, n]$ de $\sigma_0(\lambda)$

Nous remarquons que la paire de singularité se trouve en :

$$\lambda = -0.618 \pm 1.866i \pm (0.038 \pm 0.036i)$$

Elle est donc de module : $|\lambda| = 1.965 \pm 0.052$.

Les valeurs déterminées par les deux méthodes sont sensiblement différentes. Les deux méthodes ne permettent pas de conclure, et donc l'extraction de la singularité ne peut pas se faire.

D'autre part le calcul des zéros des approximants de $\sigma_0(\lambda)$ donne le tableau XV, on se limite aux zéros plus proches de 2.27.

n	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$
8	2.6844	2.6042	2.6151
9	2.5417	2.5830	2.6012
10	2.5090	2.5338	2.5833
11	2.4277	2.5102	2.5461
12	2.4093	2.4559	2.4424
13	2.3828	2.3849	2.3998
14	2.3452	2.3552	2.3077

Tableau XV: Zéros des approximants de Padé $[n + j, n]$ de $\sigma_0(\lambda)$

A défaut de ne pouvoir déterminer plus de coefficients c_n , on remarque que lorsque n devient grand les zéros des approximants $[n + j, n]$ semblent converger vers une valeur qu'on ne peut préciser (cf figure XIII ci dessous).

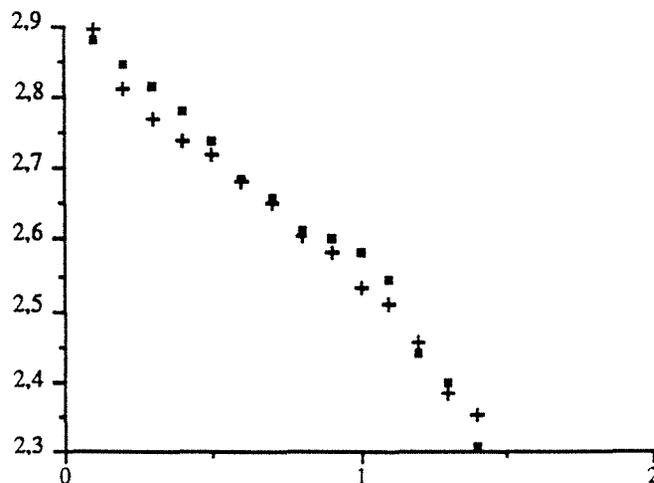


Figure XIII :
 + zéros des approximants $[n-1, n]$
 ■ zéros des approximants $[n, n]$

Conclusion

Au vu de l'étude faite antérieurement, il semble que la valeur propre de l'opérateur linéarisé s'annule en une valeur proche de $\lambda = 2.2742$. Ce point est donc un point de bifurcation, et la fonction donnant la forme ne peut être prolongeable au delà de cette valeur.

Il y a donc une branche de solutions qui émerge lorsque λ traverse cette valeur critique.

Cependant à l'intérieur du cercle de convergence de la série donnant la forme, il existe une singularité parasite associée au problème linéarisé. Celle-ci est gênante parce qu'elle ne peut être extraite correctement. Cette situation est illustrée par la figure ci-contre :

En connaissant plus de coefficients c_n , on pourrait déterminer de façon précise et extraire la singularité parasite. On pourrait donc évaluer la valeur critique et en conséquence déterminer la branche bifurquée.

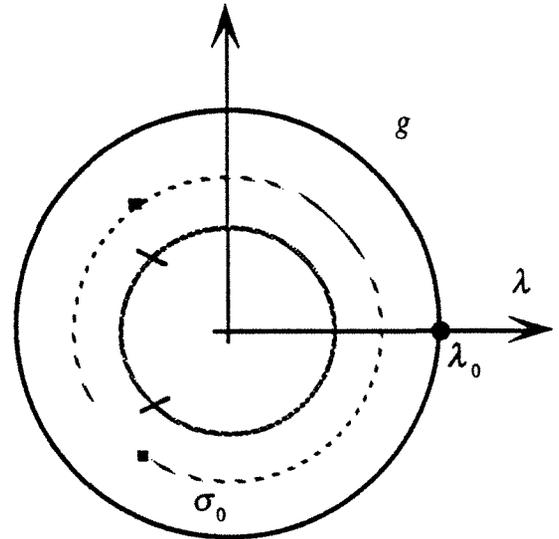


Figure XIV: Cercles de convergence de g et de $\sigma_0(\lambda)$

Nous n'avons pas pu déterminer plus de coefficients car, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, nous nous sommes confrontés au problème de l'explosion combinatoire qui intervient dans ce type de calcul formel, au vu des performances limitées des moyens informatiques que nous possédons.

6. Evaluation informatique des algorithmes

Dans ce paragraphe nous y exposons pourquoi les problèmes que nous étudions peuvent bénéficier considérablement des moyens offerts par le calcul formel. Nous témoignons aussi, à partir de notre expérience des difficultés que peut rencontrer un utilisateur potentiel.

Pour déterminer les termes φ_n de la forme donnée par les relations (27)-(30) et ceux du problème linéarisé $\psi_n = (\sigma_n, \gamma_n, k_n)$ donnés par les relations (47)-(48), nous étions amenés à manipuler des formules algébriques. Celles-ci peuvent contenir des milliers de termes intraitables à la main sans risque d'erreur et demandant un temps exorbitant.

L'utilisation du calcul formel s'impose. Celui-ci a été utilisé depuis une vingtaine d'années, et a été conçu au début pour faire effectuer à la machine certains calculs fastidieux de l'algèbre ou de l'analyse, comme le développement des expressions, la dérivation, l'intégration formelle, développement en séries de Taylor, calcul matriciel, etc.

Depuis, plusieurs logiciels de calcul formel ont été développés et commercialisés (Macysma, Reduce, Maple, Mathematica, Axiom, Mathcad,...).

Nous avons utilisés les logiciels interactifs Macysma, et Maple.

Les calculs ont été effectués premièrement à l'aide de Macysma installé sur une station Sun Sparc, dont les caractéristiques sont :

- Mémoire vive : 24 Mo
- Mémoire de pagination (Swap) : 67 Mo
- Million d'opérations par seconde : 12.5 Mips

Dans une seconde période, les calculs ont été menés au moyen du logiciel Maple que supporte une station Sun Sparc dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Mémoire vive : 32 Mo
- Mémoire de pagination (Swap) : 323 Mo
- Million d'opérations par seconde : 28.5 Mips

Les deux langages utilisés permettent d'utiliser des procédures récursives préétablies comme sous programmes.

Il est à remarquer que Maple possède une interface graphique conviviale. Au vu de notre expérience, Maple semble plus rapide que Macysma, mais ce phénomène dépend des performances des machines utilisées.

De la nature des relations récursives (27)-(30) et (47)-(48) et des équations que nous avons à traiter par la suite dans ce mémoire, on voit que nous avons besoin des programmes effectuant les tâches suivantes, qui sont des fonctions standard de Macysma et Maple :

- Série de Taylor
- Résolution d'équations différentielles ordinaires
- Intégration formelle
- Fonctions spéciales (ici polynômes de Legendre et fonctions sphériques)
- Calcul des approximants de Padé
- Evaluation numérique des zéros et des pôles des approximants.

Les déclarations de procédure sont peu différentes dans les logiciels Macysma et Maple, et l'on retrouve des formules assez semblables pour les structures de contrôle et d'itération : for, while, to, step, etc.

Nous avons dans un premier temps déterminé de façon générique pour chaque ordre de perturbation les équations que vérifient le système, c'est à dire les relations (30) et (48).

Il s'avère que pour calculer le terme φ_{n+1} pour la forme, ou ψ_{n+1} pour le problème à valeurs propres, il faut déterminer le résultat intermédiaire $A_{n+1}(\lambda, \varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)})$ et une expression analogue pour $\psi_{n+1} : B_{n+1}(\lambda, \psi, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)})$ et finalement l'évaluer pour $\lambda = 0$. Ces expressions, pour n dépassant une certaine valeur, contiennent des milliers de termes. Cette méthode d'identification des coefficients se heurte au problème de l'accroissement très rapide de la

complexité (mesurée par le nombre d'opérations élémentaires : addition, multiplication à effectuer) et de la place mémoire nécessaire pour stocker les résultats intermédiaires (mesurée par le Swap qui représente la mémoire virtuelle rajoutée à la mémoire vive de la machine).

Nous avons écrit un sous programme permettant l'identification des coefficients pour chaque ordre de perturbation, ensuite nous avons procédé au calcul des termes suivant les relations (27)-(30) et (47)-(48). Ce calcul dépend de la performances des la machines utilisées. C'est pour cela que nous nous sommes limités à l'ordre 36 pour le calcul de la forme.

D'ailleurs, le calcul de la forme limité à l'ordre 30, suffirait pour déterminer les rayons de convergence des différentes séries que nous avons traité (les deux premiers coefficients de la forme, les rayons polaire et équatorial). En effet, connaissant les 30 premiers termes, la méthode de Sykes-Domb combinée avec l'extrapolation de Richardson aboutit à une valeur du rayon de convergence avec 9 décimales exactes.

Quant au problème linéarisé, la méthode utilisée permet de déterminer de façon générique les 20 premiers termes, et pas plus. Ceci est dû au fait que le problème est plus complexe que le calcul de la forme, car d'une part, il fait intervenir des puissances fractionnaires d'ordre élevé, et d'autre part il fait intervenir l'expression de la série donnant $g(\lambda)$. Ceci fait augmenter considérablement la taille des résultats intermédiaires qui sont plus conséquents que pour la forme.

Ce qui entraîne un allongement prohibitif de la durée du calcul et surtout l'épuisement de la mémoire. C'est ce qu'on appelle l'explosion combinatoire. Ce phénomène est mesuré par le contrôle du Swap. Nous illustrons par la figure ci dessous l'utilisation de cette mémoire par le logiciel Maple, la courbe I concerne le calcul de la forme, II concerne le problème linéarisé. On trace le Swap mesurée en Méga octets en fonction du nombre de termes.

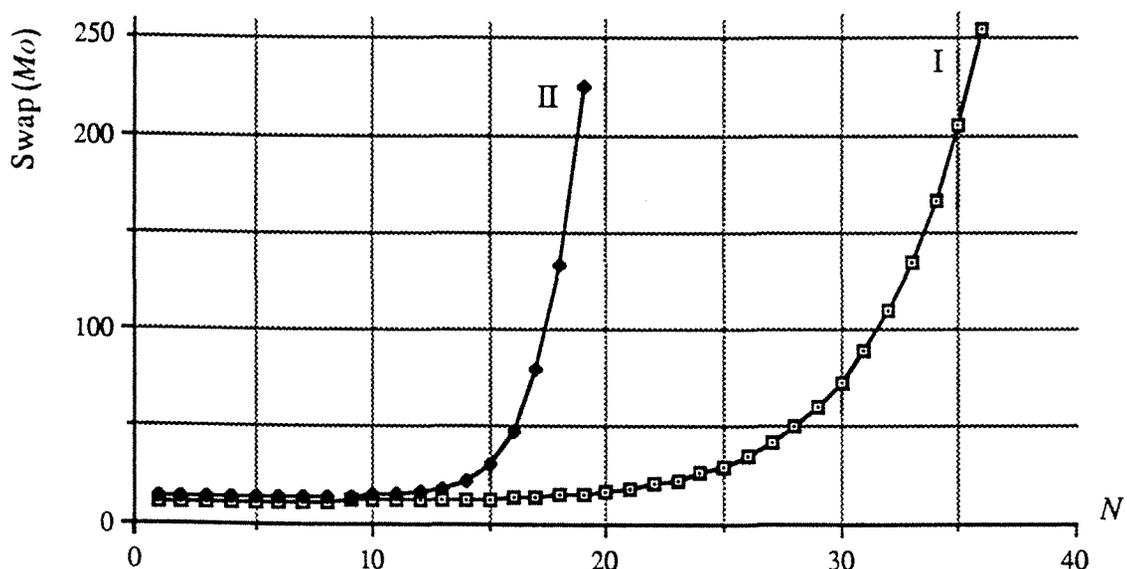


Figure XV : Allure de l'utilisation du swap en fonction des ordres de perturbation

On remarque qu'au fur et à mesure que l'ordre n augmente, l'utilisation du Swap augmente de façon considérable. Comme le montre la figure (XV) pour la forme, il fallait autant de mémoire (100 Mo de Swap) pour calculer les 4 derniers termes, que pour le calcul des 32 premiers termes.

L'expression du fitage est de la forme : $y = A \exp(B N)$

Pour le calcul de la forme : $y = A_1 \exp(B_1 N) = 0.1245 \exp(0.2117 N)$

Pour le calcul de la valeur propre : $y = A_2 \exp(B_2 N) = 0.0163 \exp(0.5225 N)$

L'allure des courbes tracées dans la figure XV est déterminée par la valeur des coefficients B_p et par conséquent la complexité du problème à étudier est mesurée par la donnée de cette valeur. Le fait que B_2 est plus grand que deux fois B_1 , montre que le problème à valeurs propres est plus complexe que celui du calcul de la forme de l'interface.

La figure ci dessous présente l'accroissement de la durée du calcul en fonction de l'ordre de perturbation. La durée du calcul dépend des performances de la machine utilisée, alors que l'usage du Swap est inhérent au logiciel utilisé. La courbe III concerne le calcul de la forme, IV concerne le problème linéarisé.

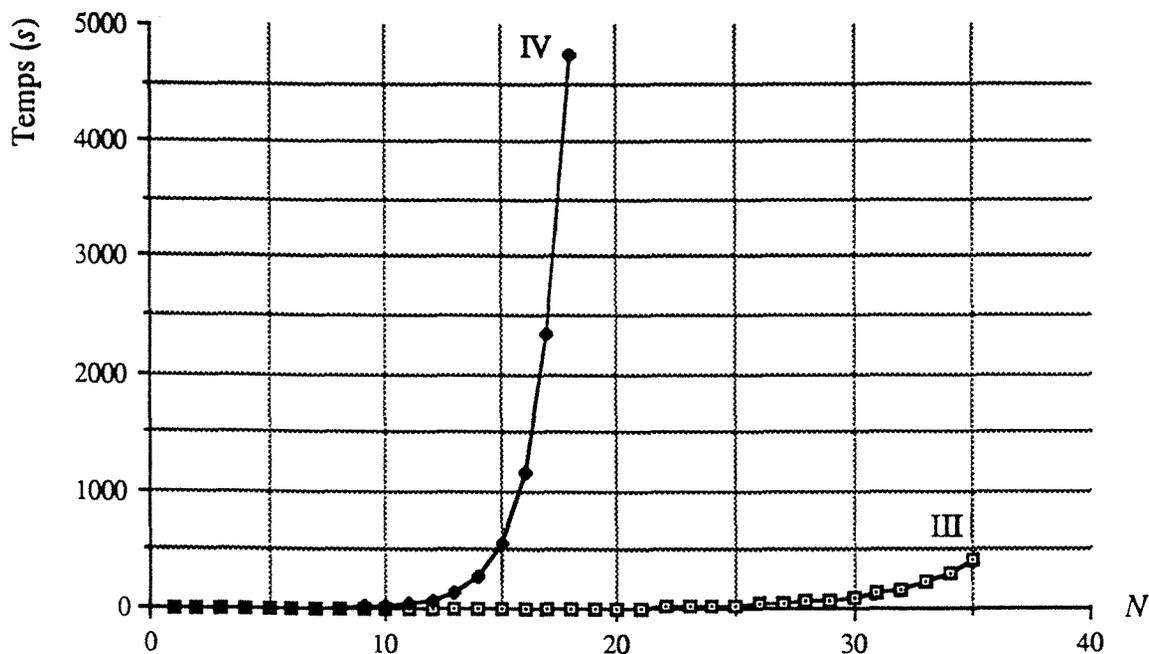


Figure XVI : Allure de la durée du calcul en fonction des ordres de perturbation

Il est difficile de donner des règles précises, pour contrecarrer ce problème. Cependant, il faut essayer de simplifier ou de regrouper les termes. Là se pose le problème encore ouvert concernant les procédés de simplification et de factorisation.

Les versions de Maple et surtout Macsyma, offrent à l'utilisateur un ensemble d'indicateurs permettant de contrôler et d'effectuer des transformations sur les développements des formules, tels que la factorisation ou le réordonnement par rapport à un terme défini à l'avance. Toutefois, il est souvent difficile d'exhiber ce terme.

A propos du problème linéarisé, les 20 premiers coefficients calculés de façon automatique ne nous permettaient pas d'avoir une information suffisamment précise sur la première valeur propre.

La résolution des équations différentielles obtenues pour chaque ordre ne pose aucun problème, par contre la difficulté principale réside dans le développement en séries de Taylor en λ , pour un ordre assez élevé, des termes de la forme $(g^2 + g'^2)^\alpha$, $\alpha = 1, 3, 5$ qui proviennent de l'expression de la courbure moyenne.

Ainsi le développement en séries de Taylor en λ de $(g^2 + g'^2)^{1/2}$ faisant intervenir que des facteurs combinatoires de $1/2$ de la forme $1/2 (1/2-1) (1/2-2) \dots (1/2-n)$, épuise la mémoire de la machine utilisée.

Dans le souci d'avoir une information supplémentaire, nous avons procédé à une subdivision des expressions en une dizaine de bouts et nous les avons traité de la même façon qu'avant.

Cette méthode, bien qu'elle ne résolve pas le problème d'explosion combinatoire, nous a permis de déterminer quelques coefficients de plus (dix coefficients), et en conséquence avoir une information supplémentaire concernant l'extraction de la singularité parasite et le calcul des zéros des approximants de Padé de la valeur propre.

De façon générale, il paraît dans certains cas que le calcul formel est incapable de conclure, compte tenu de la place mémoire qui nous est accordée et / ou l'allongement prohibitif de la durée des calculs nécessaires. C'est en luttant contre la complexité des résultats intermédiaires que nous pouvons accroître la taille des problèmes auxquels nous saurons apporter une solution. Ceci suppose à la fois une programmation plus efficace et surtout l'élaboration de logiciels permettant de maîtriser au mieux ce problème d'explosion combinatoire. La résolution de ce problème peut être appréhendée par la recherche des méthodes, d'aspect purement informatique, liées à la structure des logiciels optimisant le stockage des résultats intermédiaires et permettant la diminution de la durée des calculs.

III. MASSE FLUIDE AUTOGRAVITANTE

1. Introduction

Dans ce paragraphe nous allons étudier les figures d'équilibre d'une masse fluide isolée, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Les seules forces auxquelles est soumis le système sont des forces dues à l'attraction newtonienne et les forces d'inertie dues à la rotation.

En l'absence de la rotation, la masse fluide est une sphère. On notera M sa masse et R son rayon.

Supposons que le mouvement de rotation de la masse suffisamment lent : la surface différera peu de celle d'une sphère, le carré de la vitesse de rotation ω^2 sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre.

Nous allons procéder comme au paragraphe II par perturbation d'un domaine, pris pour référence, à l'aide d'une transformation à un paramètre [21] ; nous développons en conséquence les équations de l'interface et du potentiel en une série de ce paramètre. Dans un premier temps nous identifions les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi, ensuite nous développons le calcul de la figure piriforme en prolongeant l'approximation de Poincaré aux ordres supérieurs.

2. Réduction des équations

Le potentiel du champ de la gravitation V vérifie le système des équations (1.a-e). En l'absence de la tension superficielle, l'équation d'équilibre (9) se réduit à :

$$G\rho V + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 \sin^2 \theta = k \quad (60)$$

Si l'on pose $\tilde{r} = \frac{R}{r}$, $\tilde{V} = \frac{V}{4\pi\rho R^2}$, $\tilde{k} = \frac{k}{4\pi G\rho^2 R^2}$, notés dorénavant r , V et k , et $\lambda = \frac{\omega^2}{2\pi\rho G}$; les

équations (1) deviennent :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta V_1 = -1 \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta V_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_e \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = 0 \\ V_1 - V_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \partial\Omega \\ V_2 = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (61)$$

et l'équation (60) prend la forme :

$$V + \lambda g^2 \sin^2 \theta = k \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (62)$$

Si la masse est sans mouvement de rotation ($\lambda = 0$), la surface est alors équipotentielle et la sphère est une forme d'équilibre [16]. Nous la prenons pour configuration de référence.

Transportons les équations (61) et (62) par le difféomorphisme qui transforme la sphère en la figure déformée Ω :

$$T = rg(\theta, \psi, \lambda)e_r,$$

avec :

$$g(\pi - \theta, \psi, \lambda) = g(\theta, \psi, \lambda)$$

Où note T' la matrice jacobienne de T , et on désigne par \cdot l'application produit scalaire usuel.

En utilisant les résultats de transport énoncés chapitre I, les équations du potentiel, d'équilibre et les conditions sur la surface transportées par T dans la configuration de référence sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}\{\det T' T'^{-1} T'^{-1} \nabla V_2\} = -1 & \text{pour } r > 1 \\ \operatorname{div}\{\det T' T'^{-1} T'^{-1} \nabla V_1\} = 0 & \text{pour } r < 1 \\ \left. \begin{array}{l} T'^{-1} \nabla V_2 \cdot T'^{-1} e_r - T'^{-1} \nabla V_1 \cdot T'^{-1} e_r = 0 \\ V_2 - V_1 = 0 \end{array} \right\} & \text{pour } r = 1 \\ V + \lambda g^2 \sin^2 \theta = k & \text{pour } r = 1 \end{array} \right. \quad (63)$$

où T' est la matrice jacobienne de T et l'application "point" désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 .

On peut comme aux paragraphe II dériver les équations (63) par rapport à λ pour $\lambda = 0$, et appliquer le théorème des fonctions implicites, ce qui donne V_1 , g et k comme fonctions de λ ; de plus les équations sont analytiques en λ et donc la solution l'est aussi.

On peut donc poser :

$$V_1 = V_1(r, \theta, \psi, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(r, \theta, \psi) \quad (64)$$

$$V_2 = V_2(r, \theta, \psi, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} w_n(r, \theta, \psi) \quad (65)$$

$$g = g(\theta, \psi, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} f_n(\theta, \psi) \quad (66)$$

$$k = k(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \kappa_n \quad (67)$$

3. Calcul de la figure axisymétrique

3.1. Formulation analytique

Pour le cas axisymétrique, V_i et g sont indépendants de ψ , les équations du potentiel transportées sont alors :

$$\left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) V_{1r} - \frac{g'}{r} V_{1\theta} \right]_r + 2 \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) V_{1r} - \frac{g'}{r} V_{1\theta} \right] \quad (68.a)$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{g}{r} V_{1\theta} - g' V_{1r} \right]_{\theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left[\frac{g}{r} V_{1\theta} - g' V_{1r} \right] = -1 \quad \text{pour } r < 1$$

$$\left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) V_{1r} - \frac{g'}{r} V_{1\theta} \right]_r + 2 \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) V_{1r} - \frac{g'}{r} V_{1\theta} \right] \quad (68.b)$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{g}{r} V_{1\theta} - g' V_{1r} \right]_{\theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left[\frac{g}{r} V_{1\theta} - g' V_{1r} \right] = 0 \quad \text{pour } r > 1$$

$$(g^2 + g'^2)(V_{2r} - V_{1r}) - gg'(V_{2\theta} - V_{1\theta}) = 0 \quad \text{pour } r = 1 \quad (68.c)$$

$$V_1 - V_2 = 0 \quad \text{pour } r = 1 \quad (68.d)$$

$$V_2 \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty \quad (68.e)$$

En injectant les relations (64)-(67) dans les expressions (68), celles ci deviennent des identités en λ . En tenant compte de la conservation du volume, on détermine les développements de g , k et celui de V_i . Nous présentons ci dessous le calcul jusqu'à l'ordre 1 :

Equations du potentiel à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \Delta v_0 = -1 & \text{pour } r < 1 \\ \Delta w_0 = 0 & \text{pour } r > 1 \\ v_0 = w_0 & \text{pour } r = 1 \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0 & \text{pour } r = 1 \\ w_0 \rightarrow 0 \text{ quand } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (69.a)$$

Les deux conditions sur le bord sont équivalentes à imposer la continuité de V et $\frac{\partial V}{\partial r}$.

Equation d'équilibre à l'ordre 0 :

$$v_0(r, \theta) = k_0 \quad \text{pour } r = 1 \quad (69.b)$$

La solution du système (69) en tenant compte de la conservation du volume est :

$$v_0 = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{6}, \quad w_0 = \frac{1}{3r}, \quad k_0 = \frac{1}{3}$$

Equations du potentiel à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_1 = -f_1 v_{0,rr} + \frac{f_1'' v_{0,r}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} f_1' v_{0,r} - \frac{2}{r} f_1 v_{0,r} - \frac{f_1 v_{0,\theta\theta}}{r^2} + \frac{2f_1' v_{0,\theta r}}{r} - \frac{f_1 v_{0,\theta} \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \quad \text{pour } r > 1 \\ \Delta w_1 = -f_1 w_{0,rr} + \frac{f_1'' w_{0,r}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} f_1' w_{0,r} - \frac{2}{r} f_1 w_{0,r} - \frac{f_1 w_{0,\theta\theta}}{r^2} + \frac{2f_1' w_{0,\theta r}}{r} - \frac{f_1 w_{0,\theta} \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \quad \text{pour } r < 1 \\ \left. \begin{array}{l} f_1 [v_{0,r} - w_{0,r}] + v_1 - w_1 = 0 \\ v_{1,r} - w_{1,r} + f_1 [v_{0,rr} - w_{0,rr}] + 2f_1 [v_{0,r} - w_{0,r}] + f_1' [v_{0,\theta} - w_{0,\theta}] = 0 \end{array} \right\} \quad \text{pour } r = 1 \\ w_1 \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Equations d'équilibre à l'ordre 1 :

$$f_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_1 + \sin^2 \theta = k_1 \quad \text{pour } r = 1$$

On décompose $v_1(r, \theta)$, $w_1(r, \theta)$, et $f_1(\theta)$ dans la base des polynômes de Legendre :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} a_n(r) P_n(\xi) \\ w_1(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} b_n(r) P_n(\xi) \\ f_1(\theta) = \sum_{n \geq 0} h_n P_n(\xi) \end{array} \right. \quad (70)$$

En tenant compte de la relation :

$$\Delta v_1 = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} a_n \right) P_n(\xi)$$

et d'une relation similaire pour Δw_1 ; en les reportant dans les expressions du potentiel et de l'équilibre à l'ordre 1, on obtient :

$$v_1(r, \theta) = \frac{r^2}{22} \left(\frac{19}{3} - 15 \log(r) \right) P_2(\xi)$$

$$w_1(r, \theta) = \frac{1}{11r} \left(\frac{25}{6} - \frac{1}{r^2} \right) P_2(\xi)$$

$$f_1(\theta) = -\frac{25}{22} P_2(\xi)$$

$$k_1 = \frac{2}{3}$$

3.2. Estimation du rayon de convergence de la forme

L'équation de la surface libre est donnée par $g(\theta, \lambda)$. Elle s'écrit dans la base des polynômes de Legendre sous la forme :

$$g(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda) P_{2n}(\xi) \quad \text{avec } \xi = \cos \theta$$

Dans cette section, nous allons déterminer la valeur de λ pour laquelle la solution d'équilibre de révolution cesse d'exister. Pour ce fait, nous allons étudier les rayons de convergence des coefficients $\beta_n(\lambda)$, ainsi que celui des rayons équatorial et polaire :

$$r_p(\lambda) = g(0, \lambda)$$

$$r_e(\lambda) = g(\pi/2, \lambda)$$

Le coefficients $\beta_n(\lambda)$, $r_p(\lambda)$ et $r_e(\lambda)$ s'écrivent comme une série de λ :

$$\beta_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n^i \lambda^i \quad r_p(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} r_p^i \lambda^i \quad r_e(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} r_e^i \lambda^i$$

Dans le tableau XVI, nous dressons les valeurs des rapports r_p^{i+1} / r_p^i , r_e^{i+1} / r_e^i et a_n^{i+1} / a_n^i , $n=1, 2$:

n	a_0^{i+1} / a_0^i	a_1^{i+1} / a_1^i	r_p^{i+1} / r_p^i	r_e^{i+1} / r_e^i
5	0.2675	0.2131	0.2021	0.2104
6	0.2410	0.2099	0.1981	0.2009
7	0.2275	0.1993	0.1973	0.1967
8	0.2124	0.1986	0.1938	0.1944
9	0.2033	0.1967	0.1915	0.1923
10	0.1986	0.1945	0.1903	0.1915
11	0.1933	0.1905	0.1883	0.1893
12	0.1901	0.1886	0.1871	0.1881
13	0.1880	0.1878	0.1874	0.1876

Tableau XVI : Valeurs des rapports des coefficients et des rayons polaire et équatorial

Le calcul des rayons de convergence de $\beta_0(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$, ainsi que celui de $r_p(\lambda)$ et $r_e(\lambda)$, effectué avec le graphique de Sykes-Domb et combiné avec le procédé de Richardson mène à la même valeur :

$$\lambda = 0.1872$$

La méthode des approximants de Padé appliquée à la série du rayon polaire aboutit à des résultats sensiblement identiques : le tableau XVI résume les pôles des approximants $[n+j, n]$, $j = -1, 0, 1$:

n	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$
3	0.2341	0.2435	0.2315
4	0.2113	0.2136	0.2216
5	0.1945	0.1941	0.2072
6	0.1881	0.1907	0.1911
7	0.1878	0.1888	0.1891

Tableau XVII : Pôles des approximants de Padé du rayon polaire

4. Ellipsoïdes de Mac Laurin

Nous allons déterminer la valeur de λ pour laquelle l'ellipsoïde de révolution de Mac Laurin est une solution d'équilibre.

Tout d'abord nous rappelons l'expression du potentiel d'un ellipsoïde.

Soit l'ellipsoïde homogène dont la surface a pour équation :

$$\frac{X^2}{a_1^2} + \frac{Y^2}{a_2^2} + \frac{Z^2}{a_3^2} - 1 = 0$$

On désigne par (x, y, z) les coordonnées d'un point donné P extérieur à l'ellipsoïde, c'est à dire :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 > 0$$

L'équation en u :

$$\frac{x^2}{a_1^2 + u} + \frac{y^2}{a_2^2 + u} + \frac{z^2}{a_3^2 + u} - 1 = 0$$

admet une et une seule racine positive. Celle ci dépend de (x, y, z) , s'annule quand P est sur la surface, et devient infinie quand P s'éloigne indéfiniment.

Le potentiel V au point extérieur P est donné par la relation [2] :

$$V = \pi a_1 a_2 a_3 \int_u^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + v} - \frac{y^2}{a_2^2 + v} - \frac{z^2}{a_3^2 + v} \right) \frac{dv}{\Delta} \quad (71.a)$$

Supposons que P est intérieur à l'ellipsoïde, le potentiel est donné par :

$$V = \pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + v} - \frac{y^2}{a_2^2 + v} - \frac{z^2}{a_3^2 + v} \right) \frac{dv}{\Delta} \quad (71.b)$$

où $\Delta^2 = (a_1^2 + v)(a_2^2 + v)(a_3^2 + v)$.

L'ellipsoïde étant de révolution ($a_1 = a_2$), V se réduit à :

$$V = \pi a_1^2 a_3 \int_0^{\bar{v}} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a_1^2 + v} - \frac{z^2}{a_3^2 + v} \right) \frac{dv}{(a_1^2 + v)\sqrt{a_3^2 + v}} \quad (72)$$

De la relation (9), où l'on ne tient pas compte de la tension superficielle, les surfaces d'égalité pression ($p = \text{cte}$), ont pour équation :

$$(A_1 - \omega^2)(x^2 + y^2) + A_3 z^2 = C \quad (73)$$

où :

$$A_1 = 2\pi a_1^2 a_3 G \rho \int_0^{\bar{v}} \frac{dv}{(a_1^2 + v)\sqrt{a_3^2 + v}} \quad A_3 = 2\pi a_1^2 a_3 G \rho \int_0^{\bar{v}} \frac{dv}{(a_1^2 + v)(a_3^2 + v)^{3/2}}$$

L'ellipsoïde de départ a pour équation :

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0 \quad (74)$$

Pour que les surfaces d'égalité pression et d'équilibre coïncident, il suffit d'exprimer que les coefficients de (73) et (74) sont proportionnels :

$$a_1^2 (A_1 - \omega^2) = a_3^2 A_3 = C \quad (75)$$

Introduisons la quantité $\eta = 1 - \frac{a_3}{a_1}$ qui représente l'aplatissement de l'ellipsoïde. Remarquons que

$$0 \leq \eta \leq 1.$$

En portant les expressions de A_1 et A_2 dans la première égalité de (75), et après un calcul algébrique, il vient :

$$\lambda = \frac{(2\eta^3 + \eta) \arctan(\sqrt{1 - \eta^2}/\eta) - 3\eta^2 \sqrt{1 - \eta^2}}{(1 - \eta^2)^{3/2}} = \lambda(\eta) \quad (76)$$

Et donc pour pouvoir calculer C , l'équation de condition (75) se réduit à cette équation algébrique de $\lambda = \lambda(\eta)$.

Dans la figure ci dessous nous avons tracé la courbe représentative de la fonction $\lambda(\eta)$ en fonction de η :

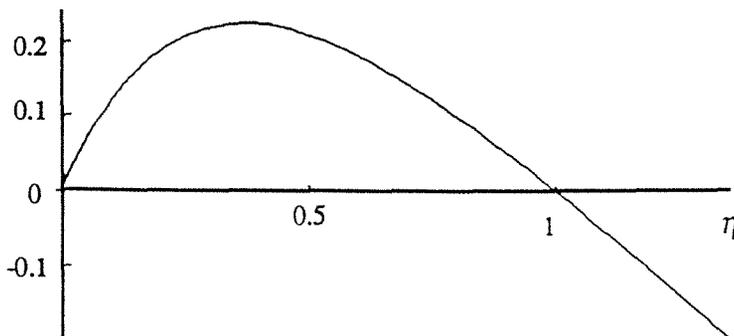


Figure XVII : Courbe représentative de $\lambda(\eta)$

La fonction $\lambda(\eta)$ admet un maximum en $\eta = 0.3675$ qui correspond à $\lambda_{\max} = 0.2246$. On conclut d'une part que l'équation de condition est vérifiée pour une valeur maximale de $\lambda \leq 0.2246$, valeur identique à celle calculée par Appell [2] ; et d'autre part, que pour une valeur de λ dans cet intervalle, il existe deux ellipsoïdes de Mac Laurin dont une est à aplatissement petit η_1 et l'autre est à aplatissement $\eta_2 > 0.3675$.

Lorsque λ est voisin de 0, η_1 devient très petit et l'ellipsoïde associé se rapproche de la sphère ; η_2 est voisin de 1 et par conséquent a_3 est très petit devant a_1 et l'ellipsoïde correspondant est très aplati. Cette figure est une sorte de disque de très grand rayon et de très faible épaisseur.

Remarque :

En d'autres termes, à toute valeur du paramètre λ inférieure à 0.2246, correspondent deux ellipsoïdes, l'excentricité de l'un d'eux étant inférieure, et celle de l'autre supérieure à 0.93.

5. Ellipsoïdes de Jacobi

Jacobi a montré que les ellipsoïdes à trois axes inégaux tournant autour du petit axe peuvent être des figures d'équilibre. Il y détermine en conséquence les équations algébriques que doivent vérifier les axes et la vitesse angulaire. Nous présentons ci dessous un aperçu sur le calcul de ces ellipsoïdes [2], [8].

Le potentiel à l'intérieur de l'ellipsoïde est donné par la relation (71.b) ; les composantes de l'accélération sont :

$$X = G \frac{\partial V}{\partial x} = -A_1 x \qquad Y = G \frac{\partial V}{\partial y} = -A_2 y \qquad Z = G \frac{\partial V}{\partial z} = -A_3 z$$

où :

$$A_1 = 2\pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{dv}{(a_1^2 + v)\Delta}$$

avec des relations analogues pour A_2 et A_3 .

Les surfaces d'égale pression sont données par :

$$(A_1 - \omega^2)x^2 + (A_2 - \omega^2)y^2 + A_3 z^2 = C \qquad (77)$$

Pour que l'ellipsoïde d'axes $a_3 < a_2 < a_1$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0 \qquad (78)$$

soit une figure d'équilibre, il faut que les coefficients de (77) et (78) soient proportionnels, c'est à dire : $a_1^2(A_1 - \omega^2) = a_2^2(A_2 - \omega^2) = a_3^2 A_3$.

Ceci aboutit aux deux équations algébriques :

$$\lambda = \frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \quad (79)$$

$$a_1^2 a_2^2 \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} = a_3^2 A_3 \quad (80)$$

Introduisons avec Appell [2] et Lyapounov [13] les rapports s et t des carrés des axes :

$$s = a_2^2 / a_1^2, t = a_3^2 / a_1^2$$

Les équations de condition (79) et (80) deviennent :

$$\lambda = (1-s)(1-t) \int_0^1 \frac{udu}{\delta^3} = \varphi(s,t) \quad (81)$$

$$(1-s-t) \int_0^1 \frac{udu}{\delta^3} - st \int_0^1 \frac{u^2 du}{\delta^3} = \psi(s,t) = 0 \quad (82)$$

où : $\delta = \sqrt{(1+u)(1+su)(1+tu)}$.

s et t sont des fractions positives vérifiant l'inégalité $s > t$ et comme le montre l'équation (82) elles doivent satisfaire à la condition $s + t \leq 1$.

Pour ω donné, le problème de la recherche des ellipsoïdes de Jacobi se ramène à la résolution de ces deux équations transcendantes (81) et (82) en s et t . Celles ci définissent une courbe de l'espace au moyen des trois variables λ , s , et t .

Dans son ouvrage [2], Appell expose la discussion de Meyer concernant la résolution de ces équations, et démontre que, quand λ croît de 0 jusqu'à un certain maximum de valeur 0.1871, t croît constamment depuis 0, et s décroît depuis 1, et quand λ atteint sa plus grande valeur, s devient égal à t , $s = t = 0.3396$, et l'ellipsoïde est de révolution donc de Mac Laurin.

Donc la condition de l'existence des ellipsoïdes de Jacobi est $\lambda < 0.1871$, et à chaque valeur de λ correspond en apparence deux ellipsoïdes de Jacobi, et du fait de la symétrie des équations (81) et (82), ces deux ellipsoïdes sont identiques à une rotation de $\pi/2$ autour du petit axe.

Si ω tend vers 0, $s = 0$ et $t = 1$, ou $s = 1$ et $t = 0$, ce qui donne le même ellipsoïde. Or si s est nul, $a_3 = 0$, $a_1 = \infty$, $a_2 = 0$ et a_2/a_3 tend vers 1. La forme d'équilibre est alors une sorte d'aiguille allongée.

6. Stabilité des figures ellipsoïdales

Le problème de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre est résolu. Dans ce paragraphe, nous y rappelons les résultats principaux [2], [8], [13], [14], [15].

Partons de $\lambda = 0$, nous avons une masse fluide immobile et la figure stable est la sphère, car l'énergie admet un maximum absolu.

Pour toute valeur de λ inférieure à 0.2246, correspond comme nous l'avons antérieurement, deux ellipsoïdes de Mac Laurin. Quand λ est égal à cette limite, les deux ellipsoïdes se confondent, et pour des valeurs supérieures, les figures ellipsoïdales d'équilibre ne sont pas possibles.

Les ellipsoïdes de révolution sont stables tant que λ reste inférieur à $\lambda_1 = 0.1871$, valeur pour laquelle les ellipsoïdes de révolution se confondent avec ceux de Jacobi. Cette valeur est un point limite pour la famille des ellipsoïdes de Jacobi, mais non pour celle des Mac Laurin ; si nous continuons de suivre la branche des Mac Laurin, l'équilibre devient instable.

Si nous bifurquons, l'équilibre sera stable sur les deux branches des ellipsoïdes de Jacobi, jusqu'à la valeur $\lambda_2 = 0.1422$.

Donc tant que λ se situe entre les limites 0.1422 et 0.1871, il y aura deux figures d'équilibre stables : un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes inégaux. On voit que la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi n'est établie que dans des limites assez étroites de λ .

En $\lambda = \lambda_2$, la famille des ellipsoïdes de Jacobi bifurquent vers les figures piriformes. En utilisant les fonctions de Lamé, Poincaré [15] a établi l'existence de ces figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes de Jacobi. Et il a présenté le calcul de la forme et du potentiel à l'ordre 1.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats au moyen d'un graphique (figure XVIII) tiré de l'ouvrage [15]. s et t représentent les carrés des rapports du petit axe sur le grand, respectivement le petit axe sur le moyen.

Les ellipsoïdes de Mac Laurin sont représentés par la bissectrice OS, ou $s = t$. Pour $\lambda = 0$, on a la sphère $a_1 = a_2 = a_3$ et $s = t = 1$. Elle est représentée par le point S.

Pour les ellipsoïdes de Mac Laurin, λ va en croissant du point S, jusqu'à ce que l'on arrive en un point D correspondant à la valeur 0.2246, puis décroît de cette valeur à 0. La courbe des ellipsoïdes de Jacobi se projette en ABC en deux portions symétrique par rapport à OS représentant le même ellipsoïde ayant tourné de 90° . Le point C ($s_0 = t_0 = 0.3396$) représente l'ellipsoïde de bifurcation qui est à la fois de Mac Laurin et de Jacobi. λ décroît quand on part de C pour aller vers A ou B qui correspondent à l'aiguille allongée $s = 1$, ou $t = 1$. Nous avons tracé sur les ABC les points R et R' qui correspondent au figures piriformes.

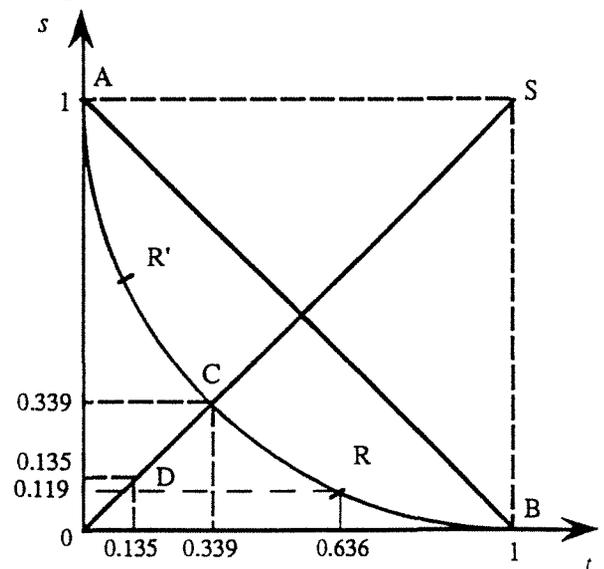


Figure XVIII : Diagramme de bifurcation des ellipsoïdes d'équilibre

Nous allons pousser l'approximation de Poincaré à l'ordre 2, et pour cela, nous utilisons la méthode de Lyapounov - Schmidt [19].

Plaçons nous autour de $\lambda_2 = 0.1422$. L'équation de l'ellipsoïde de bifurcation est donnée par :

$$\frac{x^2}{a_1^2(\lambda_2)} + \frac{y^2}{a_2^2(\lambda_2)} + \frac{z^2}{a_3^2(\lambda_2)} - 1 = 0$$

On pose : $A = a_1(\lambda_2)$, $B = a_2(\lambda_2)$, $C = a_3(\lambda_2)$

Les axes A, B, C sont connus et valent respectivement 1.8859, 0.8153 et 0.6503.

L'équation de l'interface est donc :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{A^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{B^2} + \frac{\cos^2 \theta}{C^2}}} = h_0(\theta, \psi)$$

Le potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de cet ellipsoïde est donné par les relations (71). Donc le potentiel tant à l'intérieur qu'à l'extérieur est déterminé. Nous allons déplacer l'ellipsoïde d'équation $\rho = h_0(\theta, \psi)$ par une transformation à un paramètre ε :

$$T = rh(\theta, \psi, \varepsilon)$$

qui envoie l'ellipsoïde de bifurcation sur la forme piriforme.

La méthode de Lyapounov - Schmidt (cf annexe II) nous permet d'écrire les identités :

$$\begin{cases} V_1(r, \theta, \psi, \varepsilon) = u_0(r, \theta, \psi) + \varepsilon u_1(r, \theta, \psi) + \varepsilon^2 u_2(r, \theta, \psi) + \dots \\ V_2(r, \theta, \psi, \varepsilon) = v_0(r, \theta, \psi) + \varepsilon v_1(r, \theta, \psi) + \varepsilon^2 v_{21}(r, \theta, \psi) + \dots \\ h(\theta, \psi, \varepsilon) = h_0(\theta, \psi) + \varepsilon h_1(\theta, \psi) + \varepsilon^2 h_2(\theta, \psi) + \dots \\ k = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots \\ \lambda - \lambda_2 = \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots \end{cases} \quad (83)$$

Les équations du potentiel et d'équilibre, ainsi que les conditions sur l'interface, exprimées à l'aide des relations transportées (63), deviennent des identités de ε .

En développant $h_0(\theta, \psi)$ suivant la base des fonctions sphériques :

$$h_0(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n,m}^0 Y_n^m(\theta, \psi) \quad (84)$$

Par intégration numérique, on trouve : $A_{0,0}^0 = 2.9661$, $A_{2,-2}^0 = A_{2,2}^0 = 0.1922$, $A_{2,0}^0 = 0.3615$

Tandis que les autres coefficients sont soit nuls, soit négligeables. On peut donc tronquer la série (84) à l'ordre 4.

En faisant de même pour le potentiel $u_0(r, \theta, \psi)$ et $v_0(r, \theta, \psi)$:

$$u_0(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{m=-n}^n U_{n,m}^0(r) Y_n^m(\theta, \psi) \quad v_0(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{n_2} \sum_{m=-n}^n V_{n,m}^0(r) Y_n^m(\theta, \psi)$$

7. Evaluation informatique

Nous illustrons par la figure (XIX) l'utilisation du swap par le logiciel Maple. L'expression du fitage est donnée par la relation :

$$y = A_3 \exp(B_3 N) = 0.2379 \exp(0.7149 N)$$

Le fait que B_3 est plus grand que B_1 et B_2 , montre que le problème est plus complexe. Cette complexité résulte du fait que le problème est non local. Autrement dit, le calcul des séries relatives aux conditions de saut du potentiel à travers l'interface et l'équation d'équilibre, dépendantes du domaine, épuise la mémoire de la machine.

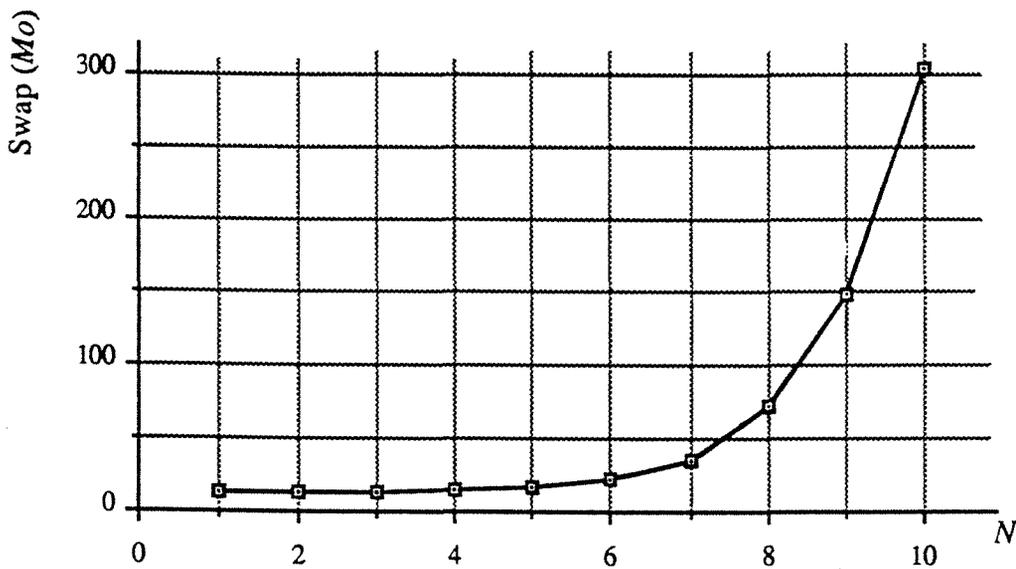


Figure XIX : Allure de l'utilisation du Swap en fonction des ordres de perturbation

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agmon .S : "*Lectures notes on elliptic boundary value problems*". Van Nostrand, 1965
- [2] Appell .P : "*Traité de mécanique rationnelle*". Tome VI, 1922
- [3] Brown .R, Scriven .L : "*The shape and stability of rotating liquid drops*".
Proc .R .Soc .Lond A, vol 371, 331-357, 1980
- [4] Brown .R, Scriven .L : "*The shape and stability of rotating captive drops*".
Phil .Trans .R .Soc .Lond A, vol 297, 51-79, 1980
- [5] Busse .F.H : "*Oscillations of a rotating liquid drop*". J.Fluid.Mech, vol 142, 1-8, 1984
- [6] Cartan .M.E : "*Sur les petites oscillations d'une masse fluide*". Bull. Sci. Math, 1922
- [7] Chandrasekhar .S : "*The stability of a rotating liquid drop*".
Proc .R .Soc .Lond A, 286, 1-26, 1965
- [8] Chandrasekhar .S : "*Ellipsoidal equilibrium figures*". Cambridge Univ. Press, 1965
- [9] Dunford .N, Schwartz .J.T : "*Linear operators, part I*". 1958, interscience publishers
- [10] Gañan-Calvo .A.M : "*Oscillations of liquid captive rotating drops*".
J .Fluid .Mech, vol 226, 63-89, 1991
- [11] Kato .T : "*Perturbation theory for linear operators*", 1984, Springer Verlag.
- [12] Lewis .D, Marsden .J, Ratiu .T : "*Formal stability of liquid drops with surface tension*".
Proc. ONR Conf on nonlinear dynamics, 1986
- [13] Lyapounov .M.A : "*Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé
d'un mouvement de rotation*". Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1904
- [14] Lyttleton .R .A : "*The stability of a rotating liquid masses*". Cambridge Univ. Press, 1953
- [15] Plateau J.A.F : "*Mémoire sur les phénomènes que représente une masse liquide libre et
soumise à l'action de la pesanteur*". Mémoires de l'académie royale de Bruxelles,
tome 16, 1863
- [16] Poincaré .H : "*Figures d'équilibre d'une masse liquide*". 1904, Gauthier - Villars
- [17] Rosenkilde.C.E : "*Stability of a axisymmetric figures of equilibrium of a rotating charged
liquid drop*". J .Math .Phys, vol 8, 98-118, 1967
- [18] Ross .D.K : "*The stability of a rotating liquid mass held together by surface tension*".
Aust .J .Phys, vol 21, 823-835, 1968
- [19] Sattinger .D.H : "*Topics in stability and bifurcation theory*". Lect .Notes in Math, 309,
1973
- [20] Sero-Guillaume .O : "*Calcul des variations et stabilité en mécanique des fluides*". Cours de
D.E.A de Mécanique et Energétique. INPL, 1993
- [21] Sero-Guillaume .O : "*Sur l'équilibre des ferrofluides et des métaux liquides*".
Thèse INPL, 1987

- [22] Swiatecki .W.J : "*The rotating , charged or gravitating liquid drop and problems in nuclear physics and astronomy*". Proc. Int. Coll. on drops and bubbles, ed Collins et al, 1974
- [23] Ungar .L, Brown .R : "*The dependance of the shape and stability of captive rotating drops on multiple parameters*". Phil .Trans .R .Soc. Lond A, vol 306, 347-370, 1982
- [24] Wang .T.G, Trinh .E.H, Croonquist .A.P, Elleman .D.D : "*Shapes of rotating free drops : Spacelab experimental results*". Phys. Review. Lett, 452-455, 1986

FORME ET STABILITE D'UNE GOUTTE LIBRE

1. INTRODUCTION

Nous traitons dans ce chapitre le calcul de l'interface à l'équilibre d'une bulle de gaz, ou une goutte liquide, à pression uniforme en écoulement irrotationnel, dont l'interface est libre, immergée dans un fluide de densité ρ et de vitesse uniforme à l'infini V_∞ . Nous supposons que les effets de la gravitation son négligeables.

A l'équilibre la goutte occupe par raison de symétrie un domaine Ω régulier de révolution autour d'un axe $z'oz$ parallèle à V_∞ , et symétrique par rapport au plan xoy (cf figure I). On notera $\partial\Omega$ le bord de Ω et Ω' le domaine extérieur à la goutte, complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans \mathbb{R}^3 .

On pose $v = V_\infty + \nabla u$, avec $u \rightarrow 0$ et $\nabla u \rightarrow 0$, à l'infini, et tel que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega' \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -V_\infty \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Si $V_\infty = 0$, la goutte est alors sphérique, on note Ω_0 cette sphère de rayon R , et on la prendra pour configuration de référence. Si $V_\infty \neq 0$, la goutte se déforme.

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés ces dernières années concernant l'étude de la déformation d'une goutte liquide ou une bulle de gaz en écoulement irrotationnel ; l'analyse de la forme remonte à Davies & Taylor [4]. La forme est régie par la dépendance par rapport à un nombre adimensionnel We : le nombre de Weber, qui caractérise le rapport des forces d'inertie avec celles de la tension superficielle.

L'analyse théorique à été orientée vers l'étude de l'interaction de la tension superficielle et la pression hydrodynamique menant à des formes instables, c'est à dire l'existence d'un nombre de Weber critique. Hartunian & Sears [8] ont été les premiers à présenter une étude de la stabilité linéaire en supposant que la surface reste sphérique même pour $We > 0$. Récemment des investigations ont été menées concernant la forme et la stabilité, de ce type de problème à frontière libre, nous citons, Saffman, Miksis et al, Meiron, Kang & Leal, El Sawi, la liste n'est pas exhaustive.

Nous allons procéder comme au chapitre II par perturbation du domaine de référence Ω_0 à l'aide d'une transformation à un paramètre ε . Le système (1) devient un système d'équations aux dérivées partielles dépendant de ε . Nous allons ensuite développer l'équation de l'interface libre en une série de perturbation en ε .

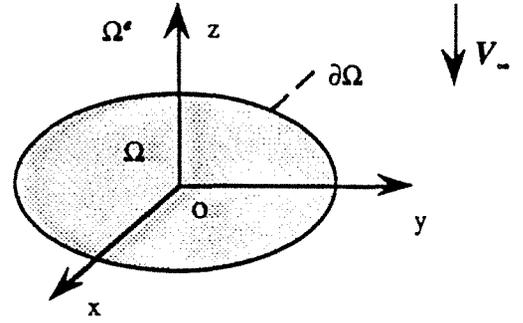


Figure I

Ensuite nous établissons une approche variationnelle du problème et nous montrons que le domaine d'équilibre rend extrémal l'énergie du système et réciproquement. Et enfin nous donnons un aperçu sur la structure hamiltonienne dans le cas dynamique.

2. Réduction des équations

On se place en coordonnées sphériques, on notera (e_x, e_y, e_z) le repère associé aux coordonnées (x, y, z) et (e_r, e_θ, e_ψ) le repère local associé aux coordonnées sphériques.

Il convient de paramétrer la surface $\partial\Omega$ du domaine Ω en coordonnées sphériques par :

$$r = g(\theta, \psi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \psi \in [0, 2\pi]$$

et d'imposer à la fonction g les conditions relatives à la symétrie et la conservation du volume.

A l'équilibre en régime permanent, l'écoulement satisfait à l'équation de Bernoulli :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{cte}$$

où p est le champ de pression. Si p_∞ est la pression à l'infini alors :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \rho \frac{V_\infty^2}{2} + p_\infty$$

Si l'on utilise la condition de Laplace sur la surface :

$$p = p_0 + \sigma C$$

où σ est le coefficient de la tension superficielle, p_0 la pression atmosphérique et C la courbure moyenne de la surface $\partial\Omega$, alors l'équation de Bernoulli devient :

$$\rho \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \nabla u \cdot V_\infty \right] - \sigma C = p_\infty - p_0 \quad (2)$$

En réduisant les variables u et r : $u = (V_\infty R) u^*$, $r = R r^*$, et du fait que $V_\infty = -V_\infty e_z$, le système d'équations (1) devient :

$$\begin{cases} \Delta u^* = 0 & \text{dans } \Omega^* \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = e_z \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{R\rho V_{\infty}^2}{\sigma} \left[\frac{1}{2} |\nabla u^*|^2 - \nabla u^* \cdot e_z \right] - RC = \frac{R(p_{\infty} - p_0)}{\sigma} \quad (3)$$

Posons : $\varepsilon = \frac{R\rho V_{\infty}^2}{\sigma}$, $RC = C^*$, $k = \frac{R(p_{\infty} - p_0)}{\sigma}$.

ε est le nombre de Weber égal au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle, k est une constante ne dépendant que de ε .

Soit T une transformation de domaine de classe C^2 qui envoie Ω_0 en Ω :

$$X \rightarrow x = T(X, \varepsilon)$$

choisie de la forme :

$$T = rg(\theta, \psi, \varepsilon)e_r,$$

Si l'on change V_{∞} en $-V_{\infty}$, la configuration est inchangée, et pour des raisons de symétrie :

$$g(\pi - \theta, \psi, \varepsilon) = g(\theta, \psi, \varepsilon)$$

$g(\theta, \psi, \varepsilon)$ doit vérifier en plus la relation due à la conservation du volume :

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} g^3 \sin \theta \, d\theta d\psi = C^* \quad (4)$$

Les solutions recherchées sont des surfaces de révolution d'axe oz symétriques par rapport au plan xoy , donc l'équation de la frontière libre en coordonnées sphériques est $r = Rg(\theta, \varepsilon)$.

Posons $\bar{u}(X, \varepsilon) = u(x)$ le potentiel du champ de vitesses et on notera sans ambiguïté \bar{u} par u .

Le système est invariant par rotation autour de l'axe oz , la surface étant axisymétrique, le potentiel et sa dérivée normale sont donc indépendants de l'angle ψ .

Dorénavant, on supprimera les astérisques et on pose :

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u_{\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad g'(\theta, \varepsilon) = \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad \xi = \cos \theta$$

En utilisant les relations de transport énoncées au chapitre I, les équations du champ, d'équilibre et la condition de Neumann sur la surface transportées par T sont :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \{ \det T' (T'^{-1})' T'^{-1} \nabla u \} = 0 & \text{pour } r > 1 \\ (T'^{-1})' \nabla u \cdot (T'^{-1})' e_r = (T'^{-1})' e_z \cdot (T'^{-1})' e_r & \text{pour } r = 1 \\ \varepsilon \left[\frac{1}{2} (T'^{-1})' \nabla u^2 - (T'^{-1})' \nabla u \cdot (T'^{-1})' e_z \right] - C = k & \text{pour } r = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Le gradient de u se transporte en :

$$\begin{bmatrix} u_r \\ g \\ u_{\theta} \\ rg \\ -\frac{g' u_r}{g^2} \end{bmatrix}$$

La première équation de (5) s'écrit :

$$\left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right] + \frac{2}{r} \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right] + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right] = 0 \quad \text{pour } r > 1 \quad (6)$$

et la condition limite devient :

$$\left[g^2 + g'^2 \right] u_r - g' g u_\theta = \left[g^2 + g'^2 \right] \cos \theta + g' g \sin \theta \quad \text{pour } r = 1 \quad (7)$$

La dernière équation de (5) se transforme en :

$$\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left[u_r^2 + \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right)^2 \right] - \cos \theta u_r + \left(\sin \theta + \frac{g' \cos \theta}{g} \right) \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right) \right\} - (C + k) g^2 = 0 \quad (8)$$

où C est la courbure moyenne de la surface de la configuration déformée.

3. Approche analytique de l'interface

3.1. Existence et unicité de la solution

L'essentiel de ce paragraphe va porter sur l'existence et l'unicité de la solution du problème extérieur de Neumann :

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^* \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -h & \text{sur } \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

On cherche un espace fonctionnel dans lequel sera située la solution unique. Ce type d'espace a été envisagé par Beppo Levi, et dont les propriétés ont été développées par Deny et Lions [5].

Nous introduisons la définition de ces espaces, et nous énonçons quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite.

On désigne par Ω un ouvert connexe quelconque de \mathbb{R}^3 de frontière régulière Γ , par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω , munis de leurs topologies usuelles.

Nous introduisons avec Nedelec [12] l'espace fonctionnel :

$$W_0^1(\Omega^*) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^*) ; (1+r^2)^{-1/2} u \in L^2(\Omega^*) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega^*) ; i = 1, 2, 3 \right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega^*)} = \left\| (1+r^2)^{1/2} u \right\|_{L^2(\Omega^*)} + \sum_{i=1}^3 \|D_i u\|_{L^2(\Omega^*)}$$

où l'on a posé $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Deny et Lions démontrent que cet espace est un espace de Hilbert, et que la norme associée est équivalente à la norme :

$$\|u\| = \sum_{i=1}^3 \|D_i u\|_{L^2(\Omega^e)}$$

c'est à dire que :

$$\left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_{L^2(\Omega^e)}^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_{W_0^1(\Omega^e)} \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_{L^2(\Omega^e)}^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

où α est une constante strictement positive.

En plus ils démontrent que les éléments de l'espace $W_0^1(\Omega^e)$ admettent une trace sur la frontière Γ appartenant à $H^{1/2}(\Gamma)$, et énoncent la proposition suivante :

Proposition : Théorème de la trace dans $W_0^1(\Omega^e)$

L'application $\gamma_0 : u \rightarrow \gamma_0 u$ est une application linéaire continue surjective de $W_0^1(\Omega^e)$, dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et on a l'inégalité :

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c(\Omega) \|\text{grad } u\|_{L^2(\Omega^e)}$$

Existence et unicité

Le produit scalaire dans $W_0^1(\Omega^e)$ est la forme bilinéaire symétrique :

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial v}{\partial x^i} \right)_{L^2(\Omega^e)}$$

$a(u, v)$ est évidemment continue et coercive. En effet d'après (9) pour tout $v \in W_0^1(\Omega^e)$:

$$|a(v, v)| > \kappa \|v\|_{W_0^1(\Omega^e)}^2 \quad \kappa = \frac{1}{\alpha}$$

Considérons maintenant la forme linéaire :

$$f : v \in W_0^1(\Omega^e) \rightarrow \int_{\Gamma} h \gamma_0 v \, dS$$

si h est dans $H^{1/2}(\Gamma)$, f est la composée de deux applications linéaires continues :

$$v \rightarrow \gamma_0 v \rightarrow \langle h, \gamma_0 v \rangle = \int_{\Gamma} h \gamma_0 v \, dS$$

f est par conséquent continue.

Nous avons en conséquence du théorème de Lax-Milgram, la proposition suivante :

Proposition

Il existe u unique dans $W_0^1(\Omega^e)$ tel que pour tout $v \in W_0^1(\Omega^e)$:

$$\langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle_{W_0^1(\Omega^e)} = \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}$$

L'application formelle de la formule de Green implique que le problème précédent équivaut au problème initialement posé, c'est à dire :

- Dans $\mathcal{D}'(\Omega^*)$, u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$

- Et sur Γ , u satisfait à la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h$$

3.2. Formulation analytique de la solution

Proposition

Le problème défini par les équations (4)-(6)-(7)-(8), possède une solution (u, g) fonctions analytiques en ε , pour ε petit.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites. Il s'agit tout d'abord de spécifier les espaces de Banach appropriés au problème, et ensuite appliquer ce théorème en deux étapes.

Les équations (6) - (7) - (8) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} F_1(u, g) &= 0 && \text{dans } \Omega_0^* \\ F_2(u, g) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_0 \\ F_3(u, g, \varepsilon) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1(u, g) &= \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right]_r + \frac{2}{r} \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right]_\theta + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right] \end{aligned}$$

$$F_2(u, g) = (g^2 + g'^2) u_r - g' g u_\theta - (g^2 + g'^2) \cos \theta + g' g \sin \theta$$

$$F_3(u, g, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left[u_r^2 + \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right)^2 \right] - \cos \theta u_r + \left(\sin \theta + \frac{g' \cos \theta}{g} \right) \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right) \right\} - (C + k) g^2$$

Nous prenons pour u_0 la solution du problème elliptique, avec la condition de Neumann sur la sphère $\partial\Omega_0$:

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0^* \\ u_{0,r} = \cos \theta & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (10)$$

Nous prenons pour espaces de Banach $\mathcal{U} = W_0^1(\Omega^*)$ et :

$\mathcal{G} = \{ g \in C^2([0, \pi/2], \mathbb{R}), \text{ avec } g'(\pi/2) = 0, \text{ et } g \text{ satisfait la condition (4)} \}$

Le système (10) se réduit à : $F_1(u_0, 0) = F_2(u_0, 0) = 0$

Nous allons tout d'abord appliquer le théorème des fonctions implicites au système :

$$\begin{cases} F_1(u, g) = 0 & \text{dans } \Omega_0^* \\ F_2(u, g) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

F_1, F_2 sont continûment différentiables au sens de Fréchet sur l'espace $\mathcal{U} \times \mathcal{G}$, et $\frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, 0)$ (respectivement $\frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, 0)$) est un isomorphisme de $\mathcal{V}(u_0)$ voisinage de u_0 dans \mathcal{U} vers \mathcal{G} , en effet F_1 est linéaire en u et donc pour tout $v \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, g)(v) &= F_1(v, g) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u, g)(v) &= (g^2 + g'^2)v_r - g'gv_\theta \end{aligned}$$

Pour tout $v \in \mathcal{V}(u_0)$ et pour tout $w \in \mathcal{D}'(\Omega_0^*)$ et pour tout $h \in H^{-1/2}(\partial\Omega_0)$, le problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta v = w & \text{dans } \Omega_0^* \\ v_r = h & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

admet une solution unique si la condition de compatibilité ci-dessous est vérifiée :

$$\int_{\Omega_0^*} w dx = \int_{\partial\Omega_0} h dS$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un opérateur intégrodifférentiel $u(g)$ défini dans $\mathcal{V}(u_0)$, de dérivée de Fréchet continue et tel que :

$$\begin{cases} F_1(u(g), g) = 0 & \text{dans } \Omega_0^* \\ F_2(u(g), g) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

En injectant $u(g)$ dans $F_3(u, g, \varepsilon) = 0$, nous obtenons :

$$F_4(g, \varepsilon) = F_3(u(g), g, \varepsilon)$$

Pour pouvoir appliquer une deuxième fois le théorème des fonctions implicites, il faudra montrer que $\frac{\partial F_4}{\partial g}(0, 0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}(0)$ dans \mathcal{G} .

$$\text{En effet : } \frac{\partial F_4}{\partial g}(g, \varepsilon) = \frac{\partial F_3}{\partial g}(u, g, \varepsilon) + \frac{\partial F_3}{\partial u}(u, g, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial g}(g)$$

Par ailleurs on remarque que :

$$\frac{\partial F_3}{\partial u}(u_0, 0, 0) = 0$$

Reste à démontrer que $\frac{\partial F_3}{\partial g}(u_0, 0, 0)$ est inversible, en effet, comme nous l'avons vu au chapitre II, le système :

$$\frac{\partial F_3}{\partial g}(u_0, 0, 0)\eta = \eta'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \eta' + 2\eta = \zeta, \text{ pour tout } \eta \in \mathcal{V}(0) \text{ et } \zeta \in \mathcal{G}.$$

admet une solution unique.

D'autre part F_1, F_2, F_3 sont analytiques en toutes les variables, donc g l'est au voisinage de $\varepsilon = 0$, et par conséquent $u = u(g)$ l'est aussi au voisinage de $g = 1$. Donc u et g admettent les décompositions :

$$u = u(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_n(r, \theta) \quad (11)$$

$$g = g(\theta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\theta) \quad (12)$$

Et en développant $f_n(\theta)$ et $v_n(r, \theta)$, $n \geq 1$, suivant la base des polynômes de Legendre, les relations (11)-(12), ont alors la forme :

$$u = u(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} u_n(r, \varepsilon) P_n(\xi) \quad (13)$$

$$g = g(\theta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} g_n(\varepsilon) P_n(\xi) \quad (14)$$

De même la constante k s'écrit :

$$k(\varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} k_n \quad (15)$$

Dans la suite, nous cherchons une formule de récurrence sur les termes $\frac{\partial^n u}{\partial \varepsilon^n}$, $\frac{\partial^n g}{\partial \varepsilon^n}$ et $\frac{\partial^n k}{\partial \varepsilon^n}$. Dans le but d'exprimer cette relation, nous appliquons l'algorithme des séries de Lie [17].

On pose :

$$F_1(u, g, k) = \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right]_r + \frac{2}{r} \left[\left(g + \frac{g'^2}{g} \right) u_r - \frac{g'}{r} u_\theta \right] \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right]_\theta + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left[\frac{g}{r} u_\theta - g' u_r \right]$$

$$F_2(u, g, k) = [g^2 + g'^2] u_r - g' g u_\theta - [g^2 + g'^2] \cos \theta + g' g \sin \theta$$

$$F_3(u, g, k) = \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left[u_r^2 + \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right)^2 \right] - \cos \theta u_r + \left(\sin \theta + \frac{g' \cos \theta}{g} \right) \left(u_\theta - \frac{g' u_r}{g} \right) \right\}$$

$$F_4(u, g, k) = -(C + k) g^2$$

$$F_5(u, g, k) = 1 - \int_0^{\pi/2} g^3 \sin \theta d\theta$$

Si l'on pose $x = (u, g, k)$, et $y = (u_0, 0, 0)$, alors $v(y) = \frac{dx}{d\varepsilon}$ admet la décomposition :

$$v = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_{n+1} \quad (16)$$

$$\text{où } v_n = \frac{d^n x}{d\varepsilon^n} = \left(\frac{d^n u}{d\varepsilon^n}, \frac{d^n g}{d\varepsilon^n}, \frac{d^n k}{d\varepsilon^n} \right)$$

On peut poser :

$$\mathcal{F}_0 = (F_1(x), F_2(x), F_4(x), F_5(x))$$

$$\mathcal{F}_1 = (0, F_3(x), 0, 0)$$

Alors le problème (4)-(6)-(7)-(8), s'écrit sous la forme condensée :

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = \mathcal{F}_0(x) + \varepsilon \mathcal{F}_1(x) = 0 \quad (17)$$

Les relations de récurrence des séries de Lie adaptées à ce cas, donnent l'algorithme suivant :

$$\mathcal{F}_0^{(n)} = \mathcal{F}_1^{(n-1)} + \nabla_x \mathcal{F}_0^{(n-1)} \cdot \nu_1 \quad (18)$$

$$\mathcal{F}_1^{(n)} = \nabla_x \mathcal{F}_1^{(n-1)} \cdot \nu_1 + \nabla_x \mathcal{F}_0^{(n-1)} \cdot \nu_2 \quad (19)$$

avec $\mathcal{F}_0^{(0)} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1^{(0)} = \mathcal{F}_1$.

3.3. Calcul explicite de la forme de l'interface

Dans ce qui suit nous allons mettre en évidence la structure itérative du problème. En effet les équations (4)-(6)-(8)-(9) sont découplées. Les équations du champ à l'ordre m dépendent des solutions de l'équation d'équilibre jusqu'à l'ordre $m-1$. Ainsi en injectant les sommes partielles de (11)-(12) et (15) d'ordre m , dans (6) et (7), on obtient ν_m étant donnés ν_0, \dots, ν_{m-1} ; f_1, \dots, f_{m-1} ; k_0, \dots, k_{m-1} . Ce qui permet de déterminer $f_m(\theta)$ et k_m en utilisant l'équation (7) et la relation (4).

Nous développons ci dessous le calcul jusqu'à l'ordre 2.

Grâce aux propriétés de $g(\theta, \varepsilon)$, on peut développer la courbure moyenne sous la forme :

$$C = 2 + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} C_n(\theta)$$

avec :

$$\begin{cases} C_1(\theta) = -\left(f_1'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_1' + 2f_1\right) \\ C_2(\theta) = -\left(f_2'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_2' + 2f_2\right) + 4f_1''f_1 + 4f_1f_1' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 4f_1^2 \end{cases} \quad (20)$$

L'équation (5) donnerait aux ordres 0 et 1 respectivement :

$$\begin{cases} \Delta v_0 = 0 \\ \Delta v_1 = -f_1 \nu_{0,r} + \frac{f_1'' \nu_{0,r}}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} f_1' \nu_{0,r} - \frac{2}{r} f_1 \nu_{0,r} - \frac{f_1 \nu_{0,\theta\theta}}{r} + \frac{2f_1 \nu_{0,\theta r}}{r} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_1 \nu_{0,\theta} \end{cases} \quad (21.a-b)$$

et la relation (6) aboutit à :

$$\begin{cases} \nu_{0,r} = \cos \theta \\ \nu_{1,r} = \left(f_1' \nu_{0,\theta} + f_1'' \sin \theta + 2f_1 \cos \theta - 2f_1 \nu_{0,r}\right) \end{cases} \quad (22.a-b)$$

L'équation (7) aboutit aux ordres suivants :

$$\text{ordre } 0 \quad k_0 = -2 \quad (23.a)$$

$$\text{ordre 1} \quad \frac{1}{2}v_{0,r}^2 - v_{0,r} \cos \theta + \frac{v_{0,\theta}^2}{2} + \sin \theta v_{0,\theta} - C_1(\theta) = k_1 \quad (23.b)$$

ordre 2

$$2(v_{0,r} - \cos \theta)v_{1,r} + 2(v_{0,\theta} + \sin \theta)v_{1,\theta} - 2(\sin \theta + v_{0,\theta})f_1'v_{0,r} + 2f_1'v_{0,\theta} \cos \theta - 4C_1(\theta)f_1 - C_2(\theta) - f_1 = k_2 \quad (23.c)$$

$$\text{la solution du système :} \quad \begin{cases} \Delta v_0 = 0 \\ v_{0,r} = \cos \theta \\ v_0 \rightarrow 0, \text{ à l'infini} \end{cases}$$

$$\text{est } v_0(r, \theta) = -\frac{\cos \theta}{2r^2}.$$

En reportant cette expression dans (23.b), on obtient :

$$f_1'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_1' + 2f_1 - \frac{9}{8} \cos^2 \theta + \frac{5}{8} = k_1 \quad (24)$$

La constante dans l'expression précédente est déterminée au moyen de la relation (4).

La solution de (24) est :

$$f_1(\theta) = \frac{3}{32}(1 - 3\cos^2 \theta) = -\frac{3}{16}P_2(\xi), \quad k_1 = \frac{1}{4}$$

où $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre d'ordre n .

De même en reportant les valeurs de $v_0(r, \theta)$ et $f_1(\theta)$ dans les relations (22.b) et (23.b), on obtient le système :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = \frac{9}{16r^4}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) = \frac{9}{8r^4}P_3(\xi) \\ v_{1,r} = \frac{27}{32}(\cos \theta - \cos^3 \theta) = \frac{27}{80}(P_1(\xi) - P_3(\xi)) \\ v_1 \rightarrow 0, \text{ à l'infini} \end{cases} \quad (25)$$

en développant $v_1(r, \theta)$ suivant la base des polynômes de Legendre :

$$v_1(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} a_n(r) P_n(\xi) \quad (26)$$

$$\text{donc :} \quad \Delta v_1 = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} a_n \right) P_n(\xi) = \frac{9}{8r^4} P_3(\xi)$$

D'où pour $n \neq 3$:

$$\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} a_n = 0$$

et pour $n = 3$:

$$\frac{d^2 a_3}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{da_3}{dr} - \frac{3(3+1)}{r^2} a_3 = \frac{9}{8r^4}$$

$$\text{d'où } a_n = \frac{\mu_n}{r^{n+1}} \quad \text{si } n \neq 3 \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{\mu_3}{r^4} - \frac{9}{80} \frac{1}{r^2}$$

D'autre part pour $r = 1$:

$$v_{1,r} = \sum_{n>0} \frac{da_n}{dr} P_n(\xi) = \frac{27}{80} P_1(\xi) - \frac{27}{80} P_3(\xi)$$

$$\text{ce qui donne : } \frac{da_1}{dr} = \frac{27}{80}, \quad \text{et} \quad \frac{da_3}{dr} = -\frac{27}{80}$$

$$\text{Donc } \mu_1 = -\frac{27}{160}, \quad \mu_3 = \frac{9}{64}, \quad \text{et pour } n \neq 1, 3, \mu_n = 0$$

$$\text{Donc } v_1(r, \theta) = -\frac{27}{160r^2} P_1(\xi) + \frac{9}{8} \left(\frac{1}{8r^4} - \frac{1}{10r^2} \right) P_3(\xi)$$

En reportant les expressions de $f_1(\theta)$, $v_0(r, \theta)$ et $v_1(r, \theta)$ dans (23.c), on obtient :

$$f_2'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} f_2' + 2f_2 + \frac{1}{256} (531 \cos^4 \theta - 594 \cos^2 \theta + 147) = k_2$$

$$\text{de solution } f_2(\theta) = \frac{1}{4480} (118P_4(\xi) - 405P_2(\xi) - 63), \quad k_2 = 3/16.$$

Finalement l'équation de la frontière libre en coordonnées sphériques est :

$$r(\theta) = R \left[1 - \frac{3\varepsilon}{16} P_2(\xi) + \frac{\varepsilon^2}{8960} (118P_4(\xi) - 405P_2(\xi) - 63) + o(\varepsilon^3) \right]$$

3.4. Estimation du rayon de convergence de la forme

$g(\theta, \varepsilon)$ s'écrit dans la base des polynômes de Legendre sous la forme :

$$g(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\varepsilon) P_{2n}(\xi) \quad \text{avec } \xi = \cos \theta \quad \text{et} \quad \beta_n(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \beta_n^k \varepsilon^k.$$

Dans cette section, nous allons estimer les rayons de convergence des coefficients $\beta_n(\varepsilon)$. Dans le tableau I, nous dressons les valeurs des rapports $\beta_n^{k+1} / \beta_n^k$, $n=1, 2$; dans les colonnes 4 et 5 ceux des rayons polaire et équatorial:

n	$\beta_0^{k+1} / \beta_0^k$	$\beta_1^{k+1} / \beta_1^k$	r_p^{i+1} / r_p^i	r_e^{i+1} / r_e^i
5	0.7208	0.7121	0.6893	0.7604
6	0.7263	0.7203	0.7251	0.7624
7	0.7486	0.7316	0.7424	0.7637
8	0.7593	0.7403	0.7591	0.7659
9	0.7705	0.7495	0.7707	0.7671
10	0.7785	0.7545	0.7804	0.7687
11	0.7853	0.7563	0.7879	0.7700
12	0.7907	0.7687	0.7940	0.7706
13	0.7950	0.7711	0.7989	0.7726

Tableau I : Valeurs des rapports des coefficients et des rayons polaire et équatorial

Le graphique de Sykes-Domb, combiné avec le procédé de Richardson, appliqué à ce tableau de valeurs aboutit à la même valeur : $\varepsilon = 1.2572$.

La méthode des approximants de Padé appliquée à la série du rayon polaire aboutit à des résultats sensiblement identiques ; le tableau II résume les pôles des approximants $[n+j, n]$, $j = -1, 0, 1$:

n	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$
3	1.3415	1.3354	1.4143
4	1.3115	1.3036	1.3216
5	1.2905	1.2851	1.2972
6	1.2711	1.2717	1.2813
7	1.2618	1.2603	1.2781

Tableau II : Pôles des approximants de Padé du rayon polaire

La valeur trouvée est légèrement inférieure à 1.27, calculée par El Sawi [6], Miksis *et al* [11], et Meiron [10] en utilisant une approche numérique, cependant elle est proche de celle déterminée par Hartunian *et al* [8] (1.26).

Dans la figure II, nous pouvons voir différentes formes de la goutte pour des valeurs croissantes du nombre de Weber. Pour des valeurs petites de ce nombre, la goutte possède une forme ellipsoïdale. Quand ce nombre croît continuellement, sans dépasser une valeur critique, la goutte devient très allongée, et développe un creux au niveau de l'axe oz . Le rayon polaire décroît de 1 jusqu'à s'annuler pour une valeur du nombre de Weber proche de 1.3845, valeur pour laquelle la représentation en coordonnées sphériques n'est plus valable.

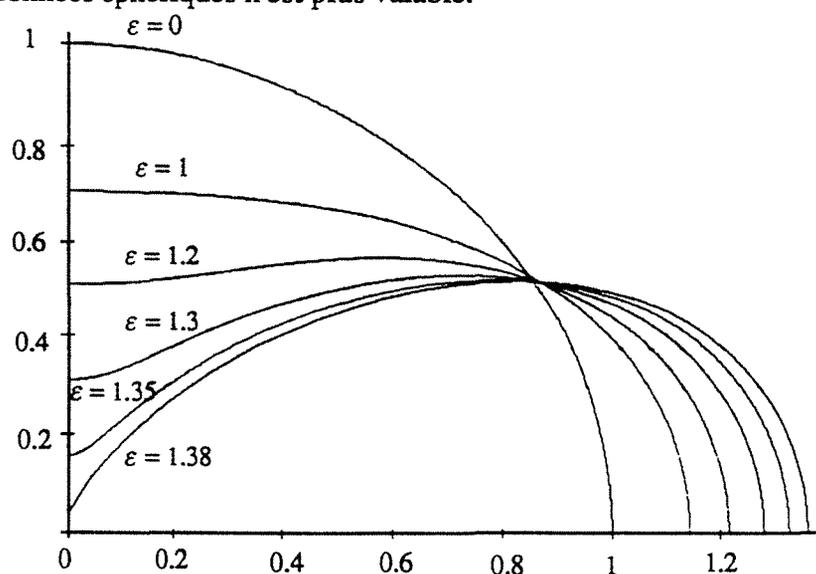


Figure II : Figures d'équilibre de la goutte pour différentes valeurs du nombre de Weber.

Au vu de l'étude faite antérieurement, il semble qu'au delà de la valeur $\varepsilon = 1.2572$, la fonction donnant la forme ne peut être prolongeable.

Nous donnons ci-dessous les perspectives d'approche analytique dans le cas dynamique, et nous illustrons les étapes de calcul permettant d'aborder ce problème.

4. Cas dynamique

Nous donnons dans ce paragraphe une approche variationnelle sur l'équilibre d'une goutte de gaz à frontière libre. Le domaine occupé par la goutte constitue une position d'équilibre si l'énergie est extrémale. L'énergie $H(\Omega)$ est une fonctionnelle du domaine. L'idée essentielle est d'introduire une transformation du domaine et d'examiner ensuite la variation d'énergie par rapport au domaine. Nous verrons qu'au moyen des résultats du chapitre I, le domaine qui minimise l'énergie du système vérifie l'équation d'équilibre (2).

En effet, l'énergie de tension superficielle et l'énergie cinétique sont données par :

$$E_\sigma(\Omega) = \sigma \int_{\partial\Omega} dS \quad E_c(\Omega) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega^c} v^2 dx$$

où Ω^c est le domaine extérieur à Ω , et dx est la forme volume sur Ω^c .

L'hamiltonien du système est la somme de l'énergie superficielle et de l'énergie cinétique :

$$H(\Omega) = E_c(\Omega) + E_\sigma(\Omega)$$

Il s'avère que l'énergie cinétique est non bornée.

Considérons une suite de domaines bornés Ω_m qui converge vers Ω^c : $\Omega_m = \Omega^c \cap B_m$, où B_m est la boule ouverte centrée en un point de Ω et de rayon m (m assez grand pour que B_m contienne Ω , cf figure III ci contre).

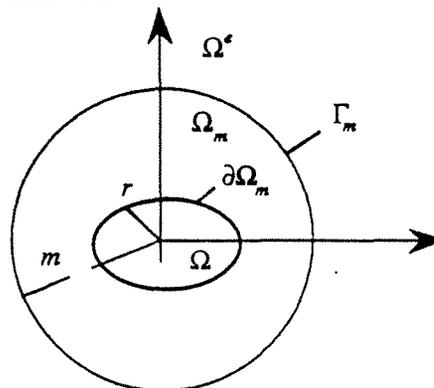


Figure III

Notons :

$$E_c^m(\Omega) = \rho \int_{\Omega_m - \Omega} \frac{v^2}{2} dx - \rho \int_{\Omega_m - \Omega} \frac{V_\infty^2}{2} dx = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega_m - \Omega} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_\infty) dx$$

On choisit alors pour énergie cinétique la fonctionnelle :

$$E_c = \lim_{m \rightarrow \infty} E_c^m(\Omega) \quad (27)$$

Par ailleurs, en utilisant la relation (1) et la première formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} E_c^m(\Omega) &= \frac{\rho}{2} \left[\int_{\partial(\Omega_m - \Omega)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\partial(\Omega_m - \Omega)} u V_\infty \cdot n dS \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \left[\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\partial\Omega} u V_\infty \cdot n dS \right] + \frac{\rho}{2} \left[\int_{\Gamma_m} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\Gamma_m} u V_\infty \cdot n dS \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Pour pouvoir passer à la limite, nous aurons besoin du comportement de u et de son gradient à l'infini.

Proposition

Si $u(x)$ est harmonique dans Ω^r , et tend vers 0, lorsque $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$, alors :

$$u(x) = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

et grâce à la transformation de Kelvin :

$$|\text{grad}u| = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons à la référence [3].

Il en résulte que le second terme du deuxième membre de (28) tend vers 0, quand $m \rightarrow \infty$. En effet, u tend vers 0 en $\frac{1}{r}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}u \cdot n$ tend vers 0 en $\frac{1}{r^2}$, et comme $V_\infty \cdot n$ est borné ; au passage à la

limite l'expression (28) se réduit à :

$$E_c(\Omega) = \frac{\rho}{2} \left[\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\partial\Omega} u V_\infty \cdot n dS \right] = -\frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} u V_\infty \cdot n dS$$

Et par conséquent :

$$H(\Omega) = \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} u V_\infty \cdot n dS + \sigma \int_{\partial\Omega} dS = E_c(\Omega) + E_\sigma(\Omega) \quad (29)$$

D'autre part, l'ouvert Ω est déplacé par une transformation à un paramètre. Les notations étant celles du chapitre I, on peut donc noter :

$$\bar{x} = \Phi(x, \varepsilon)$$

Pour la suite on se limite aux transformations qui laissent invariant le volume, c'est à dire :

$$\text{div}(X) = 0$$

La variation première de l'énergie superficielle donne :

$$\delta E_\sigma(\Omega, X) = - \int_{\partial\Omega} CX \cdot n dS$$

Pour déterminer $\delta E_c(\Omega, X)$, nous calculons :

$$\delta E_m(\Omega, X) = \frac{\rho}{2} \left(\int_{\partial(\Omega_m - \Omega)} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_\infty) X \cdot n dS + 2 \int_{\Omega_m - \Omega} v \cdot \nabla \delta u dx \right)$$

où l'on a noté comme au chapitre I : $\delta u = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{u} \Big|_{\varepsilon=0}$.

En utilisant la formule de Green, le second terme du second membre de cette dernière expression se réduit à :

$$\int_{\Omega_m - \Omega} v \cdot \nabla \delta u dx = \int_{\partial(\Omega_m - \Omega)} \delta u v \cdot n dS = \int_{\Gamma_m} \delta u V_\infty \cdot n dS + \int_{\Gamma_n} \delta u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

D'autre part : $\delta u = -\text{grad}u \cdot X$.

Or : $\frac{\partial u}{\partial n}$ tend vers 0 en $\frac{1}{r^2}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \, dS = 0 \quad \delta u \text{ est borné}$$

Par ailleurs en choisissant X à support compact tel que $\text{supp}(X) \cap \Gamma_\infty = \emptyset$, on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} \delta u \, V_\infty \cdot n \, dS = - \int_{\Gamma_n} (\nabla u \cdot X) (V_\infty \cdot n) \, dS = 0$$

Donc :

$$\delta H(\Omega, X) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\rho}{2} (|\nabla u|^2 + 2 \nabla u \cdot V_\infty) - \sigma C \right) X \cdot n \, dS \quad (30)$$

Et $\delta H(\Omega, X) = 0$, $\forall X$, tel que $\text{div}(X) = 0$. Ce qui donne :

$$\frac{\rho}{2} (|\nabla u|^2 + 2 \nabla u \cdot V_\infty) - \sigma C = \text{cte}$$

relation équivalente à (2).

Remarque : mise sous forme réduite.

En réduisant par rapport aux grandeurs caractéristiques R et V_∞ , l'hamiltonien devient :

$$H^* = -\frac{R}{2} \varepsilon \int_{\partial\Omega^*} u^* \frac{\partial u^*}{\partial n} \, dS^* + \int_{\partial\Omega^*} dS^*$$

où $H^* = \frac{H}{\sigma R^2}$, et ε est le nombre de Weber, et en coordonnées sphériques, H^* est donné par :

$$\frac{H^*}{2\pi} = \varepsilon \int_0^{\pi/2} u^* [g \cos \theta + g' \sin \theta] g \sin \theta \, d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} g \sqrt{g^2 + g'^2} \sin \theta \, d\theta \quad (31)$$

Dans ce qui suit, nous allons établir la formulation hamiltonienne en s'inspirant de [1] et [16] et des des résultats du chapitre I.

L'équation de Newton donne lieu à la relation :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p \quad (32)$$

Le champ de vitesse v possède la décomposition : $v = \nabla u + v_\infty$, où le potentiel u est tel que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^* \\ u \rightarrow 0, |\nabla u| \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (33)$$

où Ω désigne le domaine occupé par la goutte à l'instant t , de bord régulier $\partial\Omega$.

Le système (33) admet une solution u qui s'écrit en coordonnées sphériques, à variables séparées :

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n \geq 0} u_n(t) \frac{P_n(\xi)}{r^{n+1}}$$

L'équation de l'interface est donnée par : $r(\theta, t) = \varphi(\theta, t, \varepsilon) = Rg(\theta, t, \varepsilon)$.

La relation (32) admet une intégrale première sur le bord $\partial\Omega$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{2} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_-) - \sigma C = k(t) \quad (34)$$

appelée équation de Bernoulli généralisée.

On doit considérer en plus la condition cinématique, qui consiste à identifier la vitesse normale de l'interface avec celle du fluide, c'est à dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} + V_- \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (35)$$

On notera $u_s(\theta, t, \varepsilon) = u(r, \theta, t, \varepsilon)|_{\partial\Omega}$ le potentiel sur la surface, il satisfait à la relation :

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\varphi(\theta)} \quad (36)$$

L'hamiltonien du système est donné par la relation :

$$H = \frac{\rho}{2} \left[\int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\partial\Omega} u_s V_- \cdot n dS \right] + \sigma \int_{\partial\Omega} dS$$

En effet, on pose comme en (27) : $H = E_c + E_\sigma$, où $E_c = \lim_{m \rightarrow \infty} E_c^m$

avec $E_c^m(\Omega) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega_m - \Omega} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_-) dx$.

En passant à la limite, E_c se réduit à l'expression :

$$E_c = \frac{\rho}{2} \left[\int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\partial\Omega} u_s V_- \cdot n dS \right]$$

Comme nous l'avons énoncé à la fin du chapitre I, le potentiel sur la surface u_s et le déplacement φ sont conjugués par H .

Ceci signifie que :

$$\begin{cases} \frac{\delta H}{\delta u_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\delta H}{\delta \varphi} = -\frac{\partial u_s}{\partial t} \end{cases} \quad (37)$$

Ces égalités doivent être considérées au sens des fonctionnelles linéaires sur $L^2(\partial\Omega)$, c'est à dire :

Pour tout $\delta u_s, \delta \varphi \in L^2(\partial\Omega)$ on a :

$$\frac{\delta H}{\delta u_s}(\delta u_s) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta u_s dS$$

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi}(\delta \varphi) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_s}{\partial t} \delta \varphi dS$$

En effet par un calcul direct, on obtient :

$$\frac{\delta H}{\delta u_s}(\delta u_s) = \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + 2V_- \cdot n \right) \delta u_s dS + \frac{\rho}{2} \int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial \delta u}{\partial n} dS$$

et puisque :

$$\int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial \delta u}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} \delta u_s \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

alors :

$$\frac{\delta H}{\delta u_s}(\delta u_s) = \rho \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + V_- \cdot n \right) \delta u_s dS$$

On déduit la première relation de (37) en tenant compte de la condition cinématique (35).

Soit un déplacement admissible $\tau = \delta\varphi e_r$, où $\delta\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, et satisfait donc à la relation :

$$\int_{\partial\Omega} \delta\varphi e_r \cdot n dS = 0$$

$$\text{on a : } \frac{\delta E_\sigma}{\delta\varphi}(\delta\varphi) = -\sigma \int_{\partial\Omega} C \delta\varphi dS$$

De plus, le déplacement τ induit une variation du potentiel $\delta u = u_r \delta\varphi$, donc :

$$\frac{\delta E_c}{\delta\varphi}(\delta\varphi) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\rho}{2} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_-) \right] \delta\varphi dS + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m - \Omega} \rho [\nabla u \cdot \nabla \delta u + V_- \cdot \nabla \delta u] dx$$

En tenant compte du comportement à l'infini de u et de son gradient, puis de la condition cinématique, on obtient par passage à la limite :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m - \Omega} \rho [\nabla u \cdot \nabla \delta u + V_- \cdot \nabla \delta u] dx = -\rho \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + V_- \cdot n \right) \delta u dS = -\rho \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} u_r \delta\varphi dS$$

En regroupant les termes, on a :

$$\frac{\delta H}{\delta\varphi}(\delta\varphi) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\rho}{2} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot V_-) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} u_r - \sigma C \right] \delta\varphi dS$$

qui grâce à l'équation de Bernoulli généralisée, et la relation (36) aboutit à la deuxième relation de (37).

Donc φ et u_s sont conjuguées par H , et ils jouent le rôle de coordonnée généralisée et respectivement de moment généralisé.

Si l'on note P l'espace des phases :

$$P = \{(\varphi, u_s), \varphi, u_s \in L^2(\partial\Omega)\}$$

Soient F, G deux fonctionnelles définies sur P , on définit le crochet de Poisson :

$$\{F, G\} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\delta F}{\delta\varphi} \frac{\delta G}{\delta u_s} - \frac{\delta F}{\delta u_s} \frac{\delta G}{\delta\varphi} \right) dS \quad (38)$$

Les équations de Hamilton (37) ont alors la forme :

$$\begin{cases} \{\varphi, H\} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \{u_s, H\} = \frac{\partial u_s}{\partial t} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous allons examiner la stabilité de la forme d'équilibre déterminée dans la section 2, par rapport aux perturbations infinitésimales autour de la solution d'équilibre (u^e, φ^e) .

En réduisant par rapport aux grandeurs caractéristiques R et V_∞ :

$$u = (V_\infty R)\bar{u}, \quad r = R\bar{r}, \quad t = \frac{R}{V_\infty}\bar{t}$$

Les équations (34)-(35) deviennent :

$$\varepsilon \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 - \nabla \bar{u} \cdot \mathbf{e}_z \right] - \bar{c} = \bar{k}(\bar{r}) \quad (39)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (40)$$

Dorénavant, on omettra les tildes.

Pour l'étude de la stabilité du système d'équations donné par les relations (39)-(40), nous posons :

$$\begin{cases} \varphi(\theta, \psi, t) = \varphi_e(\theta) + \eta(\theta, \psi) \\ u(r, \theta, \psi, t) = u_e(r, \theta) + v(r, \theta, \psi, t) \end{cases} \quad (41)$$

La substitution de ces expressions dans (39)-(40), et la linéarisation par rapport à η et v , donne le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_s}{\partial t} = A(u^e, \varphi^e)(\eta, v_s) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = B(u^e, \varphi^e)(\eta, v_s) \end{cases} \quad (42.a-b)$$

où A et B sont des opérateurs différentiels linéaires donnés par :

$$A(u^e, \varphi^e)(\eta, v) = \frac{\delta C}{\delta \varphi}(\varphi^e)(\eta) + \frac{1}{\varphi^{e^3}} \left[\eta [u_\theta^e - \varphi^e \sin \theta] - \varphi^e [u_\theta^e - \varphi^e \sin \theta] v_\theta - \varphi^{e^3} [u_r^e + \cos \theta] v_r \right]$$

$$B(u^e, \varphi^e)(\eta, v) = \frac{1}{\varphi^{e^2}} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-1/2} \left[-\varphi^e \varphi^{e'} v_{s\theta} + \varphi^{e^3} v_r - \varphi^e \eta' u_{s\theta}^e + \eta \varphi^{e'} u_{s\theta}^e + \eta \varphi^{e^3} u_r^e \right]$$

$$+ (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-1/2} \left[(\eta' \sin \theta + \eta \cos \theta) - (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-1} (\varphi^{e'} \eta' + \varphi^e \eta) (\varphi^e \sin \theta + \varphi^e \cos \theta) \right]$$

$$- \frac{1}{\varphi^e} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-3/2} \left[(\varphi^{e'} \eta' + \varphi^e \eta) (\varphi^{e^2} u_r^e - \varphi^{e'} u_{s\theta}^e) \right]$$

où $\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \varphi}(\varphi_e)(\eta)$ est la variation de la courbure qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \varphi}(\varphi_e)(\eta) = C_1(\varphi_e)\eta + C_2(\varphi_e)\eta_\theta + C_3(\varphi_e)\eta_{\theta\theta} + C_4(\varphi_e)\eta_\psi + C_5(\varphi_e)\eta_{\psi\psi} + C_6(\varphi_e)\eta_{\theta\psi}$$

avec :

$$C_1(\varphi^e) = \left[-\frac{C}{\varphi^e} + \varphi^{e'} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-3/2} + (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-5/2} (3\varphi^{e^3} + \varphi^{e''} (\varphi^{e^2} - 2\varphi^{e'^2})) \right]$$

$$C_2(\varphi^e) = -\varphi^e \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-3/2} + 3\varphi^{e'} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-5/2} (\varphi^e \varphi^{e''} - \varphi^{e'^2})$$

$$C_3(\varphi^e) = -\varphi^e \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\varphi^{e^2} + \varphi^{e'^2})^{-3/2}$$

Le système linéaire (42.a-b) admet la solution à variables séparées en t et θ :

$$\begin{cases} \eta(\theta, \psi, t) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \eta_i^j Y_i^j(\theta, \psi) \\ v(r, \theta, \psi, t) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \frac{1}{r^{j+1}} v_i^j Y_i^j(\theta, \psi) \end{cases} \quad (44.a-b)$$

Par substitution dans (42.a-b) et en tenant compte de la conservation du volume, on obtient un problème à valeur propre λ . Pour la résolution de ce problème, on tronque les séries on se contente de la recherche des vecteurs propres (η_i^j, v_i^j) , $i = 1, \dots, N$, $-N \leq j \leq N$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Benjamin .B : "*The hamiltonian theory of bubbles in infinite liquid*".
J. Fluid. Mech, vol 181, 349-379, 1987
- [2] Cox .R : "*The deformation of a drop in a general time dependent flow*".
J. Fluid. Mech, vol 37, 601-623, 1969
- [3] Dautray .R, Lions .J.L : "*Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*". Ed Masson, CEA, 1979
- [4] Davies .R, Taylor .G : "*The mechanics of large bubbles rising through extended liquids in tubes*". Proc. Roy. Soc. A, 200, 375-390, 1950
- [5] Deny .J, Lions .J.L : "*Les espaces du type de Beppo-Levi*".
Ann. Inst .Fourier, (1953-54), 305-370
- [6] El Sawi .M : "*Distorted gas bubbles at large Reynolds number*".
J. Fluid. Mech, vol 62, 163-174, 1974
- [7] Joseph .D.D, Fosdick .J.L : "*The free surface on a liquid between cylinders rotating at different speeds*". Arch. Rat. Mech. Anal, vol 49, 321-350, 1972
- [8] Hartunian .R.A, Sears .W.R : "*On the stability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids*". J. Fluid. Mech, vol 3, 27-47, 1957
- [9] Kang .I.S, Leal .I.G : "*Bubble dynamics in time-periodic straining flows*".
J. Fluid. Mech, vol 218, 41-69, 1990
- [10] Meiron .D.I : "*On the stability of gas bubble rising in an inviscid flow*".
J. Fluid. Mech, vol 218, 101-114, 1989
- [11] Miksis .M, Vanden-Broeck .J.M, Keller .J : "*axisymmetric bubble or drop in a uniform flow*"
J. Fluid. Mech, vol 108, 89-100, 1981
- [12] Nedelec .J.C : "*Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*"
Rapport interne du centre de mathématiques appliquées. Ecole Polytechnique
- [13] Saffmann .P : "*On the rise of small air bubbles in water*".
J. Fluid. Mech, vol 1, 249-275, 1956
- [14] Sattinger .D : "*On the free surface of a viscous fluid motion*".
Proc. R. Soc. Lond. A, vol 349, 183-204, 1976
- [15] Shankar .P.N : "*On the shape of a two dimensional bubble in uniform motion*".
J. Fluid. Mech, vol 224, 187-200, 1992
- [16] Sero-Guillaume .O, Bernardin .D : "*A note on a hamiltonian formalism for the flow of a magnetic fluid with a free surface*". J. Fluid. Mech, vol 181, 381-386, 1987
- [17] Sero-Guillaume .O : "*Calcul des variations et stabilité en mécanique des fluides*". Cours de D.E.A de Mécanique et Energétique. INPL, 1993

CONCLUSION GENERALE

Nous avons utilisé une méthode de perturbation de domaine pour le calcul de la forme d'équilibre de trois problèmes à frontière libre. La solution est recherchée sous la forme d'une série de perturbation en le paramètre. L'utilisation du calcul formel nous a permis de déterminer les figures d'équilibre de façon analytique. Pour déterminer la singularité de la forme au delà duquel la fonction n'est plus prolongeable, nous avons utilisé la méthode de Sykes-Domb combinée avec l'extrapolation de Richardson basée sur l'étude du rapport des coefficients de la série. Cette méthode est applicable si la singularité est réelle.

La singularité de la forme est déterminée comme nous l'avons vu de façon très précise. Par contre la recherche de la singularité par la méthode des approximants de Padé est plus laborieuse. Cette méthode converge moins vite que la méthode précédente. Ceci est dû à l'apparition des pôles parasites qui perturbent la "monotonie" de la convergence. De plus, elle est couteuse en mémoire et gourmande en temps de calcul. D'une part il faut calculer les approximants, ce calcul nécessite la résolution d'un problème linéaire, ce qui devient conséquent si l'ordre est grand car la matrice correspondante n'est pas creuse en général. D'autre part, une fois les approximants calculés, il faut déterminer leurs pôles par des procédures numériques. Néanmoins cette méthode présente l'avantage de pouvoir être utilisée même si la singularité est complexe et peut fournir un prolongement de la série.

On remarque aussi que la singularité est mieux déterminée par la méthode de Sykes-Domb appliquée à l'équation de l'interface, que par la recherche des zéros de la valeur propre du problème linéarisé. Ceci est dû au fait que les équations du problème linéarisé sont plus complexes que celles de l'équilibre de l'interface.

Par ailleurs, on remarque que cette méthode, au moins pour le calcul de l'interface, offre des résultats meilleurs que ceux des méthodes purement numériques proposées par d'autres auteurs.

Compte tenu de la méthode appliquée dans ce mémoire et des procédés techniques du calcul formel et d'analyse des séries de perturbation, une suite intéressante à ce travail nous paraît envisageable sur les points suivants :

- L'extraction des singularités.
- Le calcul de la bifurcation des différents problèmes étudiés au moyen de la méthode de Lyapounov - Schmidt, en utilisant des techniques numériques et / ou formelles.
- La caractérisation de la nature de la bifurcation des branches solutions.

Notons en outre que la méthode appliquée peut s'adapter aisément à d'autres problèmes à frontière libre faisant intervenir un paramètre et dont une solution de base est connue.

ANNEXE I

ANALYSE ET ACCELERATION DE LA CONVERGENCE D'UNE SERIE DE PERTURBATION

INTRODUCTION

Dans diverses branches de la physique, et en particulier en mécanique des fluides, la solution de certains problèmes est obtenue sous forme de développements en séries formelles. C'est en particulier le cas quand on utilise des méthodes de perturbations. La solution s'écrit :

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n \quad (1)$$

En général l'obtention des termes successifs de ces séries nécessite beaucoup de calculs et seuls les quelques premiers termes de la série, peuvent être déterminés convenablement car la procédure devient en général encombrante, au fur et à mesure que l'ordre de l'itération croit.

Récemment, grâce aux développements des logiciels de calcul formel (Macsyma, Maple, etc), il est possible de calculer plusieurs dizaines de coefficients c_n .

Si la série (1) converge rapidement, la somme des premiers termes fournit une bonne approximation de la solution exacte ; mais en général les séries convergent lentement.

Il existe plusieurs méthodes pour récupérer une approximation suffisamment précise de la solution à partir des premiers termes. Nous citerons la transformation de Shanks, l'extrapolation de Richardson et les approximants de Padé, le choix d'une méthode parmi celles-ci dépend de la nature de la série.

Toutefois avant d'essayer d'accélérer la série, il faut chercher son rayon de convergence, localiser ses singularités et définir leurs natures. Quelquefois ces singularités ont une signification physique importante. Le rayon de convergence de la série (1) est déterminé par la singularité la plus proche de l'origine, dite singularité dominante. En pratique cette singularité se situe sur l'axe réel positif. Cependant on peut être confronté à une singularité "non physique" située sur l'axe réel négatif ou dans le plan complexe. Ces situations peuvent être distinguées par la nature des signes de la série.

Pour extraire cette singularité nous disposons de deux méthodes : la méthode graphique de Sykes-Domb [6], et la méthode utilisant les approximants de Padé [8].

La procédure se décompose en trois étapes : la première consiste à programmer l'ensemble des équations à traiter pour être résolu sur ordinateur, et ainsi un nombre assez important de coefficients peut être généré. Deuxième étape : les coefficients de la série permettent de tracer le

graphe de Sykes - Domb, qui permet l'identification, la localisation et la nature de la singularité plus proche de l'origine limitant le champ de la validité de la série.

L'étape finale consiste à reconstruire la série en utilisant une ou plusieurs transformations telles que la transformation de Shanks, la transformation d'Euler, les approximants de Padé, l'inversion des séries, l'extraction des singularités, la table de Neville, l'extrapolation de Richardson, etc.

La série obtenue est en général une bonne approximation de la solution cherchée et a un champ de validité étendu.

Dans cet annexe, nous allons rappeler toutes ces méthodes. Dans la première section nous énonçons les différentes méthodes d'analyse des séries formelles et nous décrivons les techniques d'identification des singularités. Dans la deuxième section nous décrivons quelques procédés d'accélération des séries et leurs propriétés.

1. Définition des Approximants de Padé

1.1. Définitions

L'approximant de Padé est une fraction rationnelle en ε , avec un numérateur de degré N et un dénominateur de degré M telle que son développement en série de Taylor coïncide avec celui de la série $f(\varepsilon)$.

Cela revient à déterminer les coefficients $a_i, b_j, i \in \{0, N\}, j \in \{0, M\}$ tels que :

$$f(\varepsilon) - \frac{\sum_{i=0}^N a_i \varepsilon^i}{\sum_{j=0}^M b_j \varepsilon^j} = O(\varepsilon^{M+N+1}) \quad (2)$$

En multipliant les deux membres par le dénominateur et en identifiant les coefficients des termes de même degré on obtient :

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 b_0 \\ a_1 &= c_1 b_0 + c_0 b_1 \\ &\vdots \\ a_N &= c_N b_0 + c_{N-1} b_1 + \dots + c_{N-M} b_M \\ 0 &= c_{N+1} b_0 + c_N b_1 + \dots + c_{N-M+1} b_M \\ &\vdots \\ 0 &= c_{N+M} b_0 + c_{N+M+1} b_1 + \dots + c_N b_M \end{aligned} \quad (3)$$

Sans restreindre la généralité, on peut choisir $b_0 = 1$. Ainsi b_1, \dots, b_M sont solutions du système linéaire formé par les M dernières équations. Une fois les b_i obtenus, les $N+1$ premières équations fournissent les a_i .

La fraction rationnelle :

$$P_M^N(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \varepsilon^i}{\sum_{j=0}^M b_j \varepsilon^j} \quad (4)$$

est appelé approximant $[N, M]$ de Padé de $f(\varepsilon)$.

Les approximants de Padé peuvent être arrangés dans une table à double entrée, appelée table de Padé, comme suit :

$$\begin{array}{cccccc} [0, 0] & [1, 0] & [2, 0] & \cdots & \cdots & [L, 0] \\ [0, 1] & [1, 1] & [2, 1] & \cdots & & [L-1, 1] \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ [0, L-1] & [1, L-1] & & & & \\ & & & & & \\ [0, L] & & & & & \end{array}$$

où l'on a posé $L = N + M$.

La première ligne de la table de Padé est formée par les sommes partielles de la série f .

1.2. Propriétés des approximants de Padé

Trois questions se posent :

1. Le problème de la convergence d'une suite des approximants de Padé P_M^N lorsque N et M tendent vers l'infini, n'est résolu complètement que pour certaines séries (série de Stieljes et de Polya [1], [2], [3]). Une classe des fonctions pour lesquelles des résultats sont connus est celle des fonctions méromorphes [1].

Définition

On dit que $f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$ est une série de Stieljes si :

$$c_i = \int_0^{\infty} x^i d\alpha(x)$$

avec α bornée et non décroissante dans $[0, \infty]$

Les séries de Stieljes vérifient les conditions suivantes dites de Carleman :

- a) Si la suite diagonale P_N^N décroît lorsque N augmente
- b) Si la suite surdiagonale P_{N+1}^N croît lorsque N augmente
- c) Si la suite P_N^N admet une borne inférieure, et la suite P_{N+1}^N admet une borne supérieure

Alors : $\lim P_N^N = \lim P_{N+1}^N = f$

2. D'autre part, on dispose d'un ensemble fini de coefficients c_n de la série (1). Ces coefficients génèrent une table de Padé. Il importe de définir le "meilleur" approximant de Padé correspondant à ce nombre fini de coefficients. Ce problème n'a été résolu que partiellement par Gilewicz [7] (méthode ρ).

3. La question du lien des pôles des approximants de Padé et des singularités de f n'a été traité que pour le cas des approximants P_1^N de la deuxième ligne de la table de Padé. On énonce ci dessous sans démonstration le théorème de Fabry concernant cette question.

Théorème [5]:

Soit $f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$ une série formelle telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \alpha \quad (5)$$

Alors $f(\varepsilon)$ est analytique dans le disque $|\varepsilon| < \alpha$, et α est une singularité de f .

L'intérêt de ce théorème est le fait que α est réellement une singularité de f , or $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ est le pôle de l'approximant $[n, 1]$ de $f(\varepsilon)$. Donc si les pôles des approximants $[n, 1]$ de $f(\varepsilon)$ convergent vers α , alors α est une singularité de f .

Une généralisation du théorème de Fabry est donnée par le théorème suivant :

Théorème [9]:

Supposons que pour M fixé, les approximants P_M^N de f possèdent exactement M pôles finis et que les quotients Q_M convergent vers un polynôme Q , avec $Q(0) \neq 0$.

Soit α_1 le zéro de Q tel que $|\alpha_1| > |\alpha_i|$ avec α_1 pôle simple, alors f est méromorphe dans le disque avec $M-1$ pôles dans le disque $|\varepsilon| < |\alpha_1|$, et α_1 est une singularité de f .

Bien que ce théorème est difficilement applicable, la difficulté réside dans la recherche du polynôme Q , on peut supposer qu'au fur et à mesure que N et M deviennent grands, un pôle ou une singularité ε_0 de f est approché par une suite de pôles des approximants P_M^N qui sont au voisinage de ε_0 .

2. Détermination du rayon de convergence et extraction des singularités

2.1. Introduction

Nous résumons dans ce paragraphe, les propriétés fondamentales des séries formelles. Supposons que la fonction $f(\varepsilon)$ admette le développement au voisinage de $\varepsilon = 0$:

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

Le rayon de convergence ε_0 peut être défini par le critère de Cauchy :

$$\limsup |c_n|^{1/n} = \varepsilon_0 \quad (6)$$

et la série converge pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ et diverge pour $|\varepsilon| > \varepsilon_0$. Il existe au moins une singularité sur le cercle de convergence $|\varepsilon| = \varepsilon_0$. Malheureusement la suite $|c_n|^{1/n}$ est souvent lentement convergente et ainsi sa valeur pratique pour estimer ε_0 est plutôt limitée.

L'alternance des signes des coefficients de la série est déterminée par les singularités de $f(\varepsilon)$. La singularité la plus proche de l'origine, si elle est séparée des singularités concurrentes, va dominer les autres. Elle détermine le comportement des coefficients pour n assez grand. Si la singularité dominante se situe sur l'axe réel positif, les coefficients vont avoir le même signe mais si la singularité dominante se situe sur l'axe réel négatif, les signes des coefficients vont éventuellement alterner.

Tout comportement irrégulier des signes pour n grand, indique la présence de singularités dominantes hors de l'axe réel dans le plan complexe, et puisque les coefficients sont réels, les singularités se présentent en paires conjuguées.

Comme on ne dispose que d'un nombre fini de termes dans la série, il est impossible de prédire avec certitude la nature des signes qui va finalement émerger. Cependant, on suppose que le comportement de la série est le même que celui de ses premiers termes.

2.2. Graphe de Sykes - Domb

Dans ce qui suit nous rappelons la méthode du graphe de Sykes-Domb [6] pour estimer le rayon de convergence d'une série de perturbation.

Selon la règle de d'Alembert, le rayon de convergence d'une série formelle :

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

est donné par :

$$\varepsilon_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right| \quad (7)$$

Cependant la plupart des séries de perturbation ont un nombre de termes connus fini, il faudra donc utiliser l'information disponible pour extrapoler à $n = \infty$, et estimer ε_0 .

Si l'on trace le graphe de $\left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right|$ en fonction de n , l'extrapolation à $n = \infty$, est difficile (figure I).

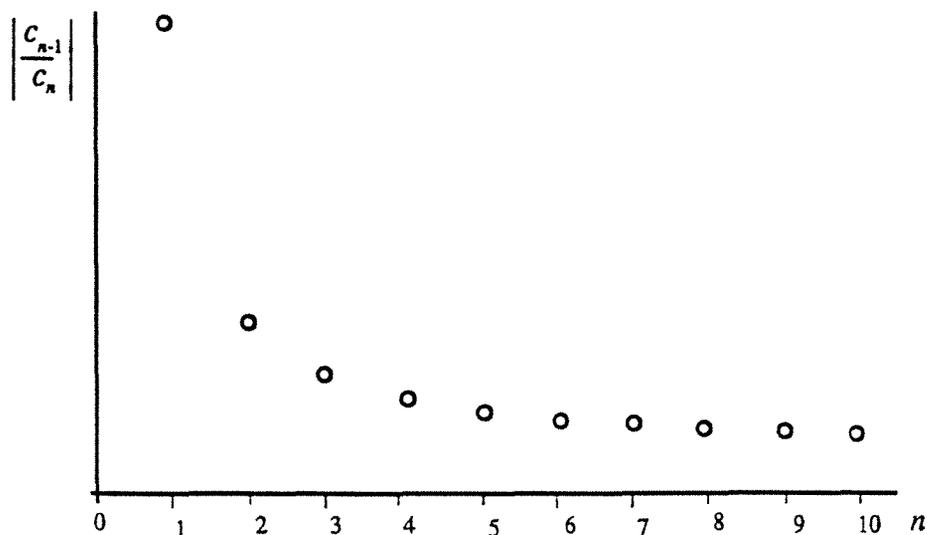


Figure I : Graphe du rapport de d'Alembert

Pour surmonter cette difficulté Sykes et Domb, suggèrent de tracer le graphe de la fonction

$\frac{1}{n} \rightarrow \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right|$. Ils remarquent que cette fonction est souvent linéaire, ce qui simplifie l'extrapolation à

$\frac{1}{n} = 0$, pour estimer $\frac{1}{\varepsilon_0}$.

Si la nature de la singularité en $\varepsilon = \varepsilon_0$ pour f est de la forme :

$$\begin{cases} A(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma & \text{pour } \gamma \neq 0, 1, 2, \dots \\ A(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma \log(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{pour } \gamma = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

alors :

$$\left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| \approx \pm \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1+\gamma}{n} \right) \quad (9)$$

L'intersection du graphe de $\left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right|$ avec l'axe $\frac{1}{n} = 0$, donne $\frac{1}{\varepsilon_0}$ et la pente permet l'évaluation de l'exposant "critique" γ .

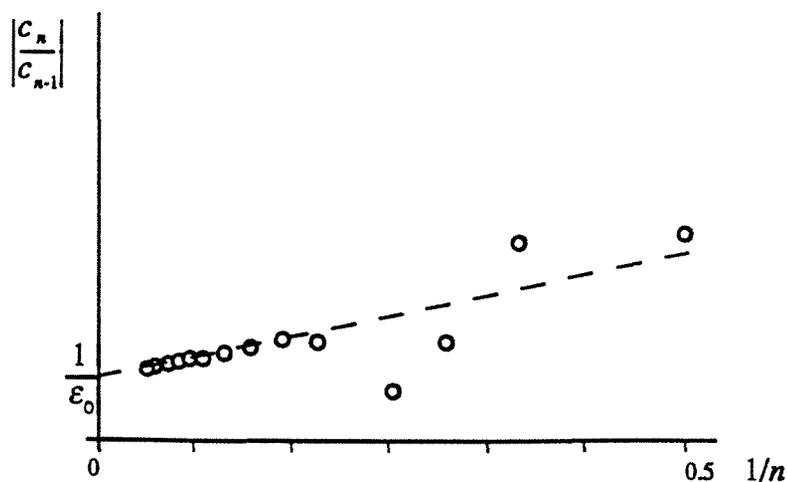


Figure II : Graphe de Sykes-Domb

Remarque

La suite (9) écrite sous la forme :

$$\left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| = \pm \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1+\gamma}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (10)$$

est souvent lentement convergente, et peut être accélérée par des transformations décrites ci-dessous (paragraphe 3).

2.3. Détermination de la singularité à l'aide des approximants de Padé

Dans la plupart des cas, la méthode du rapport ne nous permet de traiter que le cas d'une singularité réelle.

La méthode des approximants de Padé permet d'une part la localisation des singularités et des zéros, réels ou complexes, d'autre part de sommer la série une fois que son rayon de convergence est défini.

Dans le cas où f possède un point de ramification, il est préférable de calculer les pôles des approximants de Padé de la dérivée logarithmique de f .

Supposons qu'une série soit représentée au voisinage de la singularité ε_0 par la fonction :

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma \quad (11)$$

Si $A(\varepsilon)$ est analytique au voisinage de ε_0 , alors :

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma [1 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad (12)$$

où $A = A(\varepsilon_0)$.

Il s'ensuit que la dérivée logarithmique donne au voisinage de ε_0 :

$$D(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \log f(\varepsilon) = \frac{\gamma}{\varepsilon - \varepsilon_0} [1 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad (13)$$

$D(\varepsilon)$ admet donc un pôle simple en ε_0 . Puisque les approximants de Padé peuvent représenter correctement les pôles simples, les approximants de $D(\varepsilon)$ convergent plus rapidement que ceux de $f(\varepsilon)$.

Si un approximant admet un pôle au voisinage de ε_0 , sa localisation donne une estimation de ε_0 , alors que le résidu correspondant donne une estimation de γ .

Si la valeur exacte de γ ou une bonne estimation est connue, les pôles appropriés des approximants de Padé de la série donnée par :

$$[f(\varepsilon)]^{-1/\gamma} = \frac{A^{-1/\gamma}}{\varepsilon - \varepsilon_0} [1 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad \text{au voisinage de } \varepsilon_0 \quad (14)$$

donnera une suite d'estimations rapidement convergente de ε_0 .

En plus les résidus correspondants permettent l'estimation de $A^{1/\gamma}$ et par conséquent celle de l'amplitude "critique" A .

Inversement, si une valeur exacte ou une bonne estimation de ε_0 est connue, une bonne estimation de l'exposant critique peut être obtenue en formant les approximants de Padé de la série :

$$\tilde{\gamma}(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_0)D(\varepsilon) \approx \gamma + O(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad \text{au voisinage de } \varepsilon_0 \quad (15)$$

en l'évaluant en $\varepsilon = \varepsilon_0$, pourvu que $\tilde{\gamma}(\varepsilon)$ soit analytique [1].

Si par ailleurs, ε_0 est connue avec une précision modérée, la série de :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \log\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right) \Big/ \frac{d}{d\varepsilon} \log(f) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} + O(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (16)$$

peut être utile.

Notons que le calcul de cette série ne nécessite pas la connaissance de ε_0 .

Ainsi les approximants de Padé évalués en $\varepsilon = \varepsilon_0$, peuvent fournir une estimation de γ , qu'on espère moins sensible à la précision du choix de ε_0 .

Si ε_0 et γ sont connus de façon précise, une bonne estimation de A peut être obtenue en formant les approximants de Padé de la série :

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)[f(\varepsilon)]^{-1/\gamma} \approx A^{-1/\gamma} + O(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (17)$$

évalués en $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Notons qu'en conséquence de (13), une erreur d'ordre 1 dans la localisation de ε_0 mène à une erreur du même ordre en γ .

D'autre part, lorsque $f(\varepsilon)$ possède la forme simple (12), la fonction :

$$D_p(\varepsilon) = \left[\left(\frac{d}{d\varepsilon} \right)^p \log(f) \right]^{1/p}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

se comporte comme :

$$D_p(\varepsilon) \approx \frac{[(p-1)! \gamma]^{1/p}}{\varepsilon - \varepsilon_0} [1 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^p] \quad (19)$$

Ainsi une erreur d'ordre 1 en ε_0 aboutit à une erreur d'ordre p en γ .

En conséquence les approximants de Padé de la série $D_p(\varepsilon)$ convergeront plus vite pour $p \geq 1$, mieux que pour $p = 1$.

Puisque chaque différentiation nous fait perdre un terme, seules les valeurs petites de p peuvent être utilisées.

Pour réduire le risque d'erreur, nous choisissons les résultats qui sont consistants pour différentes valeurs de p .

Les pôles et les résidus des approximants de Padé de $D_p(\varepsilon)$ fournissent des estimations de ε_0 et γ à la fois. Lorsque ε_0 est donné, la généralisation appropriée de (15) pour les fonctions de la forme (12) est :

$$\tilde{\gamma}_p(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_0)D_p(\varepsilon) \approx [(p-1)!\gamma]^{1/p} + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^p \quad (20)$$

au voisinage de ε_0 .

Alors si γ est connu, une généralisation de (14) devient :

$$\left\{ \frac{d^{p-1}}{d\varepsilon^{p-1}} [f(\varepsilon)]^{-1/\gamma} \right\}^{1/p} \approx \frac{[(p-1)!A^{-1/\gamma}]^{1/p}}{\varepsilon - \varepsilon_0} [1 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^p] \quad (21)$$

Dans les deux cas, le terme de correction est d'ordre p .

L'évaluation des approximants de Padé de (20) en $\varepsilon = \varepsilon_0$, donne une estimation de γ , alors que celles de ε_0 et A sont obtenues à partir des approximants de (21).

Remarque

1°) En pratique la convergence des pôles des approximants de Padé est perturbée par la présence des "faux" pôles, qui apparaissent subitement dans certains approximants. Un faux pôle est reconnu par son faible résidu ; ceci suppose que l'approximant en question admet un zéro proche de ce pôle.

2°) Au niveau du calcul effectif des pôles des approximants de Padé, on se contentera des sous suites diagonale $[n, n]$ et paradiagonale $[n+j, n]$, $j = \pm 1$.

2.4. Extraction de la singularité dominante

Une singularité peut être multiplicative ou additive, ce qui correspond aux relations :

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma + B(\varepsilon) \quad (22)$$

ou bien :

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma \quad (23)$$

où $A(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$ sont analytiques au voisinage de $\varepsilon = \varepsilon_0$ et doivent avoir éventuellement des singularités éloignées de l'origine.

Cependant il est plus simple d'extraire la singularité multiplicative, ce qui évite l'estimation de son amplitude.

D'autre part si la singularité est additive, il est recommandé d'estimer son amplitude et de l'extraire par soustraction.

Si le problème de la localisation et de la nature de la singularité est résolu, ainsi que le calcul de son exposant critique par les méthodes décrites précédemment, alors on peut procéder à son extraction. Supposons que la singularité se situe sur l'axe des réels positifs en $\varepsilon = \varepsilon_0$ (sinon on change ε en $-\varepsilon$), on peut l'extraire en écrivant que :

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n = (\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad (24)$$

où les coefficients a_n sont déterminés en multipliant les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$ et $(\varepsilon - \varepsilon_0)^{-\gamma}$.

Nous donnons ci dessous les quatre premiers coefficients :

$$a_0 = c_0 \varepsilon_0^\gamma$$

$$a_1 = c_1 \varepsilon_0^\gamma + c_0 \gamma \varepsilon_0^{\gamma-1}$$

$$a_2 = c_2 \varepsilon_0^\gamma + c_1 \gamma \varepsilon_0^{\gamma-1} - \frac{c_0 \gamma (\gamma-1)}{2!} \varepsilon_0^{\gamma-2} \quad (25)$$

$$a_3 = c_3 \varepsilon_0^\gamma + c_2 \gamma \varepsilon_0^{\gamma-1} - \frac{c_1 \gamma (\gamma-1)}{2!} \varepsilon_0^{\gamma-2} + \frac{c_0 \gamma (\gamma-1)(\gamma-2)}{3!} \varepsilon_0^{\gamma-3}$$

2.5. Transformation d'Euler

Lorsque les coefficients d'une série ont des signes qui alternent, la singularité dominante ε_0 est localisée sur l'axe réel négatif, et n'a en général aucune signification physique.

Dans ce cas, on dispose de la transformation d'Euler basée sur l'estimation de ε_0 déjà faite par le graphe de Sykes-Domb.

Avec cette transformation, la singularité ε_0 est rejetée à l'infini, et la convergence de la série est alors élargie à la prochaine singularité.

La transformation utilise le changement de variable défini par :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon}} \quad (26)$$

En substituant (26) dans (1), on obtient une nouvelle série :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{\varepsilon}^n \quad (27)$$

où les coefficients b_n sont donnés par :

$$\begin{cases} b_0 = c_0 \\ b_n = \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} c_j \varepsilon_0^j \end{cases} \quad (28)$$

Les signes de la série (27) sont éventuellement constants et la nouvelle série doit avoir une singularité dominante physique.

D'autre part si la singularité dominante de la série (1) est située dans le plan complexe hors de l'axe réel, la transformation d'Euler s'écrit :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_0)}} \quad (29)$$

2.6. Inversion des séries

Si la fonction f présente une singularité isolée de type racine carrée, c'est à dire, de la forme :

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - \varepsilon_0)^{\gamma} g(\varepsilon) \quad \text{avec } g(\varepsilon_0) = 0 \quad (30)$$

ε_0 n'est pas une vraie singularité, et indique seulement que la fonction f est biunivoque.

Une technique simple pour éliminer cette singularité est d'inverser la série pour intervertir les rôles des variables dépendantes et indépendantes. Et par conséquent $\varepsilon(f)$ est univoque.

Si la série originelle peut être écrite sous la forme :

$$f - c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

alors la série inversée s'écrit :

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (f - c_0)^n \quad (31)$$

où les premiers quatres coefficients b_n sont donnés par :

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \quad b_4 = \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{a_1^7}$$

En général on peut définir la série réciproque de la façon suivante :

Soit $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ une série formelle. La série $I(X)$ définie par $I(X) = X$ est un élément neutre

pour la composition des séries formelles : $SoI = IoS = S$.

Etant donné une série formelle S , pour qu'il existe une série formelle T telle que :

$$T(0) = 0, \quad SoT = I$$

il faut et il suffit que : $T(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0$

où S' est la série formelle dérivée de S , donnée par : $S'(X) = \sum_{n \geq 0} n a_n X^{n-1}$.

S'il en est ainsi T est unique et l'on a : $ToS = I$, autrement dit T est l'inverse de S pour la loi de composition des séries [4].

3. Accélération de la convergence des séries de perturbation

Une série de perturbation est éventuellement lentement convergente. Il existe plusieurs procédés d'accélération de convergence. Le choix du procédé le mieux adapté à la série à accélérer est une question qui n'est résolue que pour des cas particuliers.

Dans cette section, nous donnons un aperçu sur quelques procédés d'accélération des séries.

3.1. Transformation de Shanks

Pour accélérer la convergence de (1), nous utilisons la transformation de Shanks [10] qui consiste à étudier les sommes partielles :

$$S_n = \sum_{m \geq 0}^n c_m \varepsilon^m \quad (32)$$

Cette transformation suppose que la suite S_n est une progression géométrique de la forme :

$$S_n = A + BC^n$$

A est déterminé par trois sommes partielles par la relation non linéaire :

$$A = s(f) = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n} \quad (33)$$

La nouvelle suite $s(f)$ converge plus rapidement que S_n . On réitère la procédure : $s^2(f)$ converge plus rapidement que $s(f)$, et ainsi de suite.

Exemple : Considérons la série lentement convergente :

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = 0.693\ 147\ 180$$

L'application de la transformation de Shanks aboutit au tableau de valeurs suivant :

Sommes partielles	Shanks 1	Shanks 2	Shanks 3	Shanks 4
1.000				
0.500				
0.833	0.7000			
0.583	0.6905			
0.783	0.6944	0.693277		
0.617	0.6924	0.693106		
0.760	0.6936	0.693163	0.6931489	
0.635	0.6929	0.693140	0.6931467	
0.746	0.6933	0.693151	0.6931474	0.69314719

3.2. Table de Neville

La table de Neville d'une suite arbitraire e_n^0 est un tableau triangulaire d'éléments e_n^r où n représente le nombre des lignes et $r = 1, \dots, n$ celui des colonnes.

Les éléments de la r^{e} colonne sont générés par la relation :

$$e_n^r = \frac{[ne_n^{r-1} - (n-r)e_{n-1}^{r-1}]}{r} \quad (34)$$

Si la suite est considérée comme fonction de $1/n$, l'élément e_n^r est simplement le point d'intersection de l'axe $1/n = 0$ avec la courbe de degré r passant par les $(r+1)$ points : $e_n^0, e_{n-1}^0, \dots, e_{n-r}^0$.

Si $r = 1$, l'interpolation est linéaire, si $r = 2$, l'interpolation est quadratique, etc.

Exemple :

Si la suite e_n^0 est telle que pour tout n :

$$e_n^0 = e \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)$$

alors :

$$\begin{cases} e_n^1 = e \left(1 - \frac{b}{n(n-1)} \right) \\ e_n^2 = e_n^3 = e \end{cases}$$

3.3. Procédé de Richardson

Il existe plusieurs séries lentement convergentes, non accélérables par la transformation de Shanks.

Si la somme partielle S_n admet un développement asymptotique de la forme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = Q_0 + Q_1 n^{-1} + Q_2 n^{-2} + \dots, \quad n \rightarrow \infty \quad (35)$$

Pour évaluer $Q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, le procédé d'extrapolation de Richardson approprié à ce type de convergence, consiste à calculer l'expression :

$$q_{nm} = \sum_{k=0}^m \frac{S_{n+k} (n+k)^m (-1)^{k+m}}{k!(m-k)!} \quad (36)$$

Lorsque n et m augmentent q_{nm} tend vers la limite Q_0 .

Exemple :

La série

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1.644\ 934$$

est non accélérable par la transformation de Shanks. En effet la somme partielle

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \approx \pi^2/6 - 1/n.$$

La transformation de Shanks donne :

$$s(A_n) = A_n + 1/(2n+1)$$

En appliquant le procédé de Richardson, il vient le tableau suivant :

n	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
1	1.000	1.500 00	1.625 000	1.643 518	1.644 965
5	1.464	1.630 28	1.644 166	1.644 922	1.644 935
10	1.550	1.640 68	1.644 809	1.644 933	1.644 934
15	1.580	1.642 94	1.644 893	1.644 933	1.644 934
20	1.596	1.643 78	1.644 916	1.644 934	1.644 934

3.4. Sommation de Padé

Pour sommer $f(\varepsilon)$, nous remplaçons la série (1) si possible par un meilleur approximant de Padé. Sinon les approximants P_N^{N+j} , ($j = -1, 0, 1$) fournissent une suite de fractions rationnelles qui permettent l'approximation de f .

Exemple :

Considérons la série :

$$\log(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \dots$$

Nous présentons dans le tableau ci dessous les valeurs des approximants diagonaux, pour $\varepsilon = 1$ de cette série et leurs pôles :

N	$P_N^N(1)$	Pôles
1	0.666 666 667	- 2
2	0.692 307 692	-1.267 949
3	0.693 121 693	-1.127 016
4	0.693 146 417	-1.074 612
5	0.693 147 157	-1.049 218
6	0.693 147 179	-1.034 945
7	0.693 147 180	-1.026 110
8	0.693 147 180	-1.020 257
9	0.693 147 180	-1.016 177
10	0.693 147 180	-1.013 219

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Baker .G.A : "*The theory and application of Padé approximant method*".
Adv. Theo .Phys, 1-58, 1965
- [2] Bender .C, Orszag .S : "*Advanced mathematical methods for scientists and engineers*".
Mc Graw Hill, 1978
- [3] Brezinski .C : "*Approximants de Padé*". In : Analyse numérique, ed Baranger, 1992
- [4] Cartan .H : "*Théorie élémentaire des fonctions analytiques*". Ed Hermann, 1961
- [5] Dienes .P : "*Taylor series*". Dover, N. York, 1957
- [6] Domb .C, Sykes .M.F: "*On the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point*".
Proc. R .Soc .Lond, A 240, 214-228, 1957
- [7] Gilewicz .J : "*Approximants de Padé*". Lectures Notes in Math 667, Springer Verlag, 1978
- [8] Gunt .D.S, Guttmann .A.J : "*Asymptotic Analysis of coefficients*". Phase Transitions
and Critical Phenomena, Vol 3, Academic Press, 181-243, 1974
- [9] Karlsson .J, Saff .E.B: "*Singularities of functions determined by the poles of Padé
approximants*". Lectures Notes in Math, 888, 239-254, 1981
- [10] Shanks .D: "*Nonlinear transforms of divergent and slowly convergent sequences*".
J. Math. Physics, 34, 1-42, 1955
- [11] Van Dyke .M : "*Analysis and improvement of perturbation series*".
Q. J. Mech. Appl. Math, vol 27, 423-450, 1974

ANNEXE II

METHODE DE LYAPOUNOV - SCHMIDT

I. GENERALITES

Dans cet annexe, nous rappelons la méthode de Lyapounov -Schmidt, nous avons suivi Sattinger [3] pour cette présentation.

Dans les problèmes que pose la physique et en particulier la mécanique des fluides, pour l'étude des états d'équilibres et leurs stabilité, il intervient généralement un paramètre λ . Ces états d'équilibre sont solutions de l'équation fonctionnelle :

$$F(u, \lambda) = 0 \quad (1)$$

où u est un élément d'un espace de Banach \mathfrak{E} , $F : \mathfrak{E} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{F}$ est généralement un opérateur non linéaire de \mathfrak{E} dans \mathfrak{F} espace de Banach.

Il est fréquent qu'une solution a priori u_0 soit connue pour toute valeur de λ :

$$F(u_0, \lambda) = 0 \quad (2)$$

Comme l'équation à résoudre est souvent non linéaire, il est judicieux de chercher si c'est la seule solution.

Tant que l'opérateur $L(\lambda) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, \lambda)$ (la dérivée est prise au sens de Fréchet) est inversible, le théorème des fonctions implicites nous permet de conclure que u_0 est la seule solution.

D'une façon générale, on suppose qu'il existe $u(\lambda)$ une solution connue de (1), c'est souvent le cas en mécanique des fluides :

$$F(u(\lambda), \lambda) = 0 \quad (3)$$

Soient λ_0 et $u_0 = u(\lambda_0)$, si en (u_0, λ_0) l'opérateur $L(\lambda)$ est inversible, il existe une seule solution $u(\lambda)$. On parlera d'une branche de solution $\lambda \rightarrow u(\lambda)$.

On peut toujours se ramener au cas $u = 0$, en posant $v = u - u(\lambda)$, on obtient :

$$F(v+u(\lambda), \lambda) = G(v, \lambda) \quad (4)$$

Donc l'unicité de la solution est assurée tant que $L(\lambda)$ est inversible. Etudions ce qui se passe quand $\lambda = \lambda_0$, l'opérateur $L(\lambda)$ cesse d'être inversible. C'est le cas lorsqu'il possède par exemple une valeur propre ou plusieurs s'annulant en λ_0 .

Pour simplifier, nous supposons que $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$, et que l'opérateur $L(\lambda)$ est autoadjoint.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) En $\lambda = \lambda_0$, $L(\lambda_0)$ possède un noyau non trivial de dimension 1, c'est à dire que $L(\lambda)$ a une valeur propre isolée $\sigma(\lambda)$ qui s'annule quand λ vaut λ_0 .

b) L'espace de Banach \mathfrak{E} est somme directe du noyau et de l'image de $L(\lambda_0)$:

$$\mathfrak{E} = \text{Im}(L(\lambda_0)) \oplus \text{Ker}(L(\lambda_0)) \quad (5)$$

II. METHODE DE LYAPOUNOV - SCHMIDT

Une approche constructive pour la recherche des branches de solution de l'équation (4) autour de λ_0 est fournie par la méthode de Lyapounov - Schmidt qui consiste à projeter cette équation en une paire d'équations sur des sous espaces de \mathfrak{E} , et résoudre un problème non linéaire sur l'espace de dimension infinie dans un espace approprié de dimension finie. La méthode de Lyapounov - Schmidt est décrite en détail dans [3] et [5].

Soit v_0 le vecteur propre de $L(\lambda_0)$ associé à $\sigma(\lambda_0) = 0$ donc :

$$L(\lambda_0)v_0 = 0$$

Si le paramètre λ franchit une valeur critique λ_0 pour laquelle l'opérateur cesse d'être inversible, alors $(v = 0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation, et il existe une branche de solution $(v(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ différente en ce point.

La projection P sur $\text{Ker}(L(\lambda_0)) : \mathfrak{E} \rightarrow \text{Ker}(L(\lambda_0))$
 $w \rightarrow \langle w, v_0 \rangle v_0$

La projection sur $\text{Im}(L(\lambda_0))$ est alors $Q = I - P$.

Par l'application des opérateurs P et Q à l'équation (4), nous obtenons les relations :

$$PG(v, \lambda) = 0 \quad (6.a)$$

$$QG(v, \lambda) = 0 \quad (6.b)$$

D'autre part, v se décompose sous la forme :

$$v = \alpha v_0 + \psi \quad (7)$$

où $\psi \in \text{Im}(L(\lambda_0))$. En substituant (7) dans les relations (6) on obtient :

$$PG(\alpha v_0 + \psi, \lambda) = 0 \quad (8.a)$$

$$QG(\alpha v_0 + \psi, \lambda) = 0 \quad (8.b)$$

L'équation (8.a) peut s'écrire : $p(\alpha, \psi, \lambda) = PG(\alpha v_0 + \psi, \lambda) = 0$

p vérifie l'expression : $p(0, 0, \lambda_0) = 0$. De plus $p_\psi(0, 0, \lambda_0) = QG_\psi(0, \lambda_0)Q$.

Donc l'opérateur p est régulier et possède une dérivée de Fréchet inversible en $(0, 0, \lambda_0)$. En conséquence du théorème des fonctions implicites, il est possible d'exprimer localement ψ en une fonction de α , ce que l'on écrit :

$$\psi = h(\alpha, \lambda)$$

En substituant cette expression dans (6.b), on obtient l'équation dite de bifurcation:

$$QG(\alpha v_0 + h(\alpha, \lambda), \lambda) = 0 \quad (9)$$

Pour calculer une branche de la solution bifurquée, nous appliquons la méthode de Hopf.

On se place au voisinage de λ_0 ; et on suppose que la condition dite de Hopf : $\sigma'(\lambda_0) \neq 0$ est satisfaite.

On introduit le paramètre ε tel que v , et λ se décomposent en série de ε :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots \\ v = \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 + \dots \end{cases} \quad (10)$$

où $\langle v_i, v_0 \rangle = 0$, pour $i \geq 1$.

On injecte les relations (8) dans l'équation (4), on obtient des identités de ε : en tenant compte de la relation ci dessous exprimant l'orthogonalité de v_i à v_0 .

En identifiant les puissances de ε , il vient alors :

à l'ordre 0 : $L(\lambda_0)v_0 = 0$

à l'ordre 1 : $L(\lambda_0)v_1 = F_1$

et d'après l'alternative de Fredholm, ce système admet une solution si F_1 est orthogonal à v_0 .

Donc λ_1 est choisi tel que : $\langle F_1, v_0 \rangle = 0$.

A l'ordre suivant, connaissant λ_1 et v_1 , on détermine de la même façon v_2 et λ_2 , etc.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Berger .M.S : "*Nonlinearity and functional analysis*". Acad. Press, 1977.
- [2] Sero-Guillaume .O : "*Calcul des variations et stabilité en mécanique des fluides*".
Cours de D.E.A de Mécanique et Energétique. INPL, 1993
- [3] Sattinger .D.H : "*Topics in stability and bifurcation theory*". Lect .Notes in Math, 309, 1973
- [4] Troger .H, Steindel .A : "*Nonlinear stability and bifurcation*". Springer Verlag, 1991
- [5] Vainberg .M, Trenogin .V : "*The method of Lyapounov and Schmidt in the theory of non linear equations and their further development*". Russian Math. Surveys, 17, N°2, 1-60, 1962

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE**

o0o

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur GOUIN Henri, Professeur, Institut de Mécanique de
Marseille,**

**Monsieur BEREST Pierre, Directeur de Recherche, Ecole
Polytechnique Palaiseau.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur ER-RIANI Mustapha

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Contribution à l'étude des équilibres dynamiques de gouttes et
masses fluides".**

en vue de l'obtention du titre de :

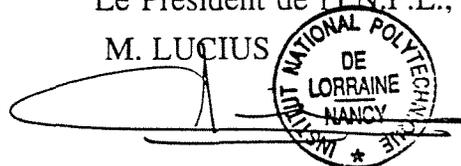
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
LORRAINE**

Spécialité : **"MECANIQUE & ENERGETIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **10 Octobre 1994**

Le Président de l'IN.P.L.,

M. LUCIUS



RESUME

Dans cette thèse, nous présentons le calcul de la forme d'équilibre de trois problèmes à frontière libre, dont deux portent sur le calcul de la la forme d'une goutte. Le troisième concerne le calcul de la forme d'une masse liquide.

Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction générale de la mécanique analytique des milieux continus. Nous y développons le principe de Hamilton en s'appuyant sur des variations qui font intervenir un groupe de transformations à un paramètre permettant de traiter le cas des problèmes à frontière libre.

Le deuxième chapitre est constitué de deux parties, la première traite de la forme et la stabilité d'une goutte d'un liquide, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe et soumise à la tension superficielle, la gravitation n'étant pas prise en compte. La seconde partie traite du calcul de la forme d'une masse liquide soumise à sa propre gravitation, la tension superficielle est négligée.

Dans le chapitre III, nous calculons la forme de l'interface d'une goutte de gaz ou de liquide immergée dans un fluide de vitesse uniforme en écoulement potentiel.

Pour les trois cas, nous appliquons une méthode de perturbation de domaine, et nous utilisons des logiciels de calcul formel permettant de déterminer les coefficients des séries de fonctions associées aux grandeurs intervenant dans le problème. Ensuite, nous déterminons les singularités de la forme de la goutte en appliquant des procédés d'accélération de la convergence.

ABSTRACT

In this thesis, we present the calculation of the equilibrium shape of three free boundary problems. Two of them deal with the shape of a liquid drop, while the third deals with the shape of a liquid mass.

In chapter one, we present a general introduction of analytical mechanics of continuous media. We develop the Hamilton principle by applying the calculus of variations which introduce a one parameter transformation group, suitable to free boundary problems.

The second chapter is composed of two sections, the first treats the equilibrium and stability of the shape of a liquid drop, held together by the action of surface tension and made to rotate about an axis, the effect of gravity being neglected. The second section deals with the computation of a liquid mass subject to its self gravitation, the surface tension being neglected.

In chapter III, we compute the shape of the interface of a bubble or a liquid drop immersed in a fluid with uniform velocity in a potential flow.

For the three cases, we apply a domain perturbation method, and we use software symbolic calculus, allowing us to determine the coefficients of the function series expansion associated with the quantities of the problem. Then, we determine the singularities of the drop shape by applying several methods for accelerating convergence.