HAL
open science

Esthétique et modes opératoires en mathématiques : une exploration goodmanienne

Caroline Jullien

To cite this version:

Caroline Jullien. Esthétique et modes opératoires en mathématiques : une exploration goodmanienne. Philosophie. Université Nancy 2, 2006. Français. NNT : 2006NAN21021 . tel-01751298

HAL Id: tel-01751298

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751298v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

NANCY UNIVERSITE
LPHS – Archives Henri Poincaré, CNRS UMR 7117
Ecole Doctorale « Langages, Temps, Sociétés »
Maison des Sciences de l'Homme Lorraine

ESTHETIQUE ET MODES OPERATOIRES EN MATHEMATIQUES

Une Exploration goodmanienne

Caroline Jullien

Thèse présentée pour l'obtention du Doctorat en Philosophie de Nancy Université
soutenue publiquement
Le 02 décembre 2006

DIRECTEUR DE THESE
Gerhard Heinzmann

JURY
Michael Astroh (Ernst-Moritz-Arndt Universität, Greifswald) *Rapporteur*
Robert Gergondey (Université Lille 1)
Gerhard Heinzmann (Nancy Université)
Philippe Lombard (Nancy Université)
Roger Pouivet (Nancy Université)
Norbert Schappacher (Université Louis Pasteur Strasbourg) *Rapporteur*

Remerciements

Habituellement, les premiers remerciements exprimés par un doctorant se tournent vers son directeur de thèse. Je ne dérogerai pas à cette habitude mais sans que cela comporte un soupçon d'orthodoxie universitaire. Gerhard Heinzmann a dirigé ma thèse, il en a surtout rendu possible la réalisation. Je suis aujourd'hui encore toute étonnée de la confiance qu'il m'a témoignée. Je lui suis infiniment reconnaissante de m'avoir fait profiter de sa rigueur intellectuelle au travers de ses critiques fécondes, ses conseils judicieux et ses remarques pertinentes. Je le remercie également de s'être toujours rendu disponible dès que cela s'avérait nécessaire et de s'être montré patient devant les tâtonnements qui ont jalonné mon travail. Je le remercie en particulier de sa bienveillance à mon égard, de sa compréhension face à mes difficultés, mes doutes et mes craintes. Enfin, je le remercie spécialement de son enthousiasme communicatif exprimé si spontanément, si naturellement, ce qui a su transformer nos rencontres de travail en autant d'expériences fructueuses, riches et joyeuses.

Ce travail doit aussi beaucoup à Roger Pouivet que je remercie sincèrement de m'avoir acceptée dans son cours d'esthétique. Chacune des discussions que nous avons pu avoir a été particulièrement utile dans l'élaboration de ma stratégie de recherche. Ses conseils en matière de référence bibliographique se sont toujours révélés judicieux et son regard critique à l'égard de l'œuvre de Goodman m'a permis, du moins je l'espère, de ne pas verser dans la *goodmanie*.

De la même façon, l'aide et le soutien prodigués par Philippe Lombard ont été fondamentaux. Philippe Lombard a fait preuve tout au long de ces années d'une disponibilité tout à fait surprenante. Son intérêt pour mon sujet a été particulièrement stimulant ainsi que l'ont été ses critiques impitoyables. Nos (nombreuses) séances de travail ont été, grâce à sa réactivité, son imagination, sa curiosité ainsi qu'à sa riche qualité d'écoute des échanges intellectuels extrêmement précieux que je souhaite à tout doctorant de pouvoir connaître. Enfin, sa gentillesse et son humour ont été les garants de la bonne humeur qui animait nos débats. Pour tout cela, je le remercie vivement et chaleureusement.

Je remercie également l'équipe des archives Henri Poincaré pour l'aide et l'accueil sympathique qu'elle réserve à ses doctorants. Je remercie en particulier

Philippe Nabonnand, sans qui je n'aurais tout simplement pas connu les archives et qui, non seulement m'a supporté pendant un temps (trop court) dans son bureau mais m'a donné de précieux conseils quant au *métier de doctorant*. Je remercie également Manuel pour sa patience et pour l'attention qu'il a apportée à chacune des questions que j'ai pu lui soumettre. Enfin, au sein des archives, comment pourrais-je ne pas remercier Pierre Edouard ? Son soutien et son réconfort dans les moments difficiles ainsi que sa sympathie dans les moments joyeux ont été pour moi d'une grande aide ; bien plus qu'il ne peut l'imaginer. Je tiens à lui témoigner toute ma reconnaissance pour sa disponibilité et sa générosité. Je le remercie également de m'avoir fait profiter de ses compétences dans des domaines aussi mystérieux et abstraits que sont pour moi les méandres de l'administration ou encore les itinéraires virtuels de la toile.

Enfin je voudrais adresser un grand merci à mes proches, à David en premier lieu, qui a été sur le front et qui a fait preuve d'une patience et d'une confiance inespérées, à Valentine pour l'aide considérable qu'elle m'a apportée grâce à ses relectures, à Armelle, l'experte face à laquelle aucun problème informatique ne fait le poids, à mes amies, Hélène et Annette, pour leur soutien et leur complicité, à mes cinq sixième – Françoise, Laurence, Stéphanie et Véronique, mes sœurs, et Alban, mon frère – sans qui je ne suis finalement plus grand-chose.

A ma Micol, ça va sans dire.

Les formes créées par le mathématicien,
comme celles créées par le peintre ou le poète,
doivent être belles ; les idées, comme les couleurs
ou les mots, doivent s'agencer harmonieusement.
La beauté est le premier critère : il n'y a pas en ce monde
de place permanente pour des mathématiques laides.

Hardy, l'apologie d'un mathématicien[*]

[*][Hardy 1940, 23]

Sommaire

(Table des matières détaillée en fin de volume)

Partie I : Des rapports entre les mathématiques et l'art

A. Description historique

1) De l'antiquité aux temps prémodernes
2) Le XVIIIème, élaboration de l'esthétique
3) Nouvelles spéculations sur le beau et beauté des mathématiques au XVIIIème siècle

B. Description systématique

1) Mathématiques et art : question de finalité
2) Mathématiques et art : question de méthode

Partie II Outils d'interprétation et d'analyse

1) Justification du choix de la théorie goodmanienne
2) Présentation et interprétation de la sémiologie goodmanienne
3) Symptômes et esthétique cognitive

Partie III Symptômes goodmaniens et mathématiques

A. Fonctionnement symbolique des démonstrations algébriques

1) Procédés d'analyse d'une démonstration
2) Principe de démonstration
3) Application : de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aux anneaux factoriels

B. Fonctionnement symbolique des figures mathématiques

1) Preuves hétérogènes
2) 1ère application : les lunules d'Hippocrate
3) 2ème application : le théorème de Rolle
4) Conclusion - Réflexions sur l'éducation mathématique

Conclusion

Index des noms

Bibliographie

Table des matières détaillée

Introduction La Question de l'esthétique en mathématiques

We acknowledge a theorem's beauty when we see
how the theorem "fits" in its place,
how it sheds light around itself, like a Lichtung,
a clearing in the woods.
We say that a proof is beautiful when such a proof
finally gives away the secret of the theorem,
when it leads us to perceive the actual,
not the logical inevitability of the statement that is being proved [1].

La question des relations entre les mathématiques et l'esthétique est généralement entendue par les non mathématiciens sous l'angle du rôle que peuvent jouer les mathématiques dans des domaines artistiques Tel est le cas par exemple lorsque l'on considère le sous-bassement mathématique d'une pièce musicale ou d'une œuvre picturale. Au niveau de la communauté mathématique, cette question revêt une direction supplémentaire, celle qui concerne le rôle de l'esthétique au sein des mathématiques. En effet, il est bien connu que les mathématiciens aiment à défendre l'aspect esthétique de leur science : il est rare de ne pas trouver au détour d'écrits rétrospectifs, de textes de conférences publiques, d'ouvrages de vulgarisation mathématiques ou encore de discours honorifiques, une mention à la beauté de cette science, à l'élégance d'une théorie ou à l'harmonieuse symétrie de telle équation. Cependant, si attribuer des propriétés esthétiques aux mathématiques est un lieu commun largement entretenu par un grand nombre de mathématiciens, il est un autre *topos* qui se trouve également défendu : celui qui affirme que l'appréciation des propriétés esthétiques n'est pas une simple *valeur ajoutée*, un *bonus* qui viendrait en quelque sorte récompenser le labeur mécanique du mathématicien mais qu'au contraire, la prise en compte de l'élément esthétique est nécessaire à la pratique mathématique. Poincaré par exemple, considère que la sensibilité à l'esthétique des mathématiques est l'instrument de l'invention et de la compréhension[2]. Cette conception, loin d'être idiosyncrasique, est tout à fait représentative d'une large communauté de mathématiciens. Ainsi, de façon synthétique, la question de la dimension esthétique des mathématiques comporte

[1] Cf. [Rota 1997, 182]

[2] Cf. [Poincaré 108, 45-53 &128] et [Poincaré 1905, 35-37].

deux facettes, l'une étant évaluative tandis que la seconde est fonctionnelle. Ce n'est pas l'aspect évaluatif qui me préoccupe ici : ce n'est que la partie visible de l'iceberg. La thèse que j'entends défendre est que l'évaluation esthétique des mathématiques succède à un fonctionnement esthétique. Plus précisément : le fonctionnement des mathématiques en tant que système symbolique requiert un versant esthétique au sens de Goodman.

L'initiative de cette entreprise se trouve justifiée par deux principales raisons. La première est, qu'à l'instar de celle de Poincaré, nombre de thèses sur l'aspect esthétique des mathématiques se révèle à l'examen être en fait un plaidoyer en faveur de l'esthétique comme instrument ou comme méthode au-delà d'une défense de leur mérite esthétique. Il s'agit de rendre compte de cela. La seconde raison concerne la théorie de l'esthétique goodmanienne principalement exposée dans *Langages de l'art*[3]. L'œuvre d'art y apparaît comme un point de départ plutôt que comme un point de convergence, le projet explicite de Goodman étant d'avoir accès à une théorie générale des symboles[4]. La théorie de Goodman sort du cadre standard de l'esthétique, celui qui est habituellement délimité par les beaux-arts. C'est en partie cette délocalisation, si l'on peut dire, de l'esthétique goodmanienne qui laisse envisager une confrontation possible avec les mathématiques en tant que langages symboliques. D'autre part, l'approche goodmanienne de la question de l'esthétique se situe sous une perspective cognitive et fonctionnelle : son objectif n'est pas de rendre compte de propriétés esthétiques (ce qui est le *mérite esthétique*) mais de décrire un fonctionnement esthétique (ce qui est la *valeur esthétique*). En tant qu'outil, la théorie goodmanienne semble ainsi toute indiquée pour tâcher d'analyser le rôle des aspects esthétiques des mathématiques au sein de leur processus de développement. Il s'agit de vérifier cela.

On pourra objecter que puisque Poincaré et bien d'autres avant ou après lui, se sont déjà penchés sur la dimension esthétique des mathématiques, il n'est peut-être pas nécessaire d'entreprendre un travail supplémentaire sur la question. C'est qu'étonnamment, on ne dispose pas en fait de véritable construction théorique et

[3] [Goodman 1968]

[4] Cf. [Goodman 1968, 27]

philosophique qui permette d'expliquer, de comprendre et de justifier de façon globalement cohérente ni le rôle ni la signification que l'on peut accorder à cet aspect des mathématiques. Ou tout au moins, les solutions que l'on peut trouver sont souvent dispendieuses en termes d'ontologie ou ne font en tout cas pas l'économie de présupposés métaphysiques. Non que je prétende régler la question, je voudrais au moins en souligner l'importance et au mieux jeter les bases d'une théorie esthétique des mathématiques applicable indépendamment du cadre ontologique et métaphysique dans lequel ces dernières sont considérées. Cela étant, la première partie de ce travail est consacrée à une description historique et systématique de la problématique générale et générique des rapports entre les mathématiques et l'art. La description historique a pour but de souligner le recours que l'on peut avoir, ou pas, à des arguments placés sous l'autorité historique pour justifier l'esthétique des mathématiques. La description systématique consiste quant à elle à construire ou reconstruire les principales solutions théoriques envisageables selon différentes conceptions de l'esthétique et selon différents cadres ontologiques, métaphysiques ou épistémologiques vis-à-vis des mathématiques. Cette étape va permettre de montrer les avantages et inconvénients de chacune de ces approches. C'est à la mesure de cette description systématique qu'il apparaîtra nécessaire d'envisager une solution sémiologique.

Les raisons de la sélection de l'outil goodmanien pour la construction de ladite solution seront alors exposées en prémisse de la seconde partie, consacrée à la présentation de la théorie esthétique de Goodman. Je m'attarderai en particulier sur sa symptomatologie de l'esthétique. Dans la mesure où mon principal souci est de pouvoir utiliser concrètement les symptômes en question, j'en proposerai une interprétation la plus maniable possible, notamment en m'attachant à fournir une interprétation fondée sur les corollaires des symptômes et non uniquement sur leur définition théorique. Pour ce travail d'interprétation, je me référerai principalement, mis à part bien entendu à l'œuvre de Goodman elle-même, aux lectures et analyses qu'en ont proposé Morizot et Pouivet.

Quoi qu'il en soit, il ne faudra pas considérer que l'outil sera exhaustivement mis au point au terme de cette présentation. En effet, la troisième partie aidera, au

travers de l'étude d'exemples particuliers, à raffiner certains points, à préciser des relations et à mettre en évidence des différences. Les exemples sur lesquels je travaillerai ont été choisis d'une part en fonction de l'attrait esthétique qui leur est, ou qui a pu leur être, attribué et d'autre part de façon à rendre compte des principaux modes opératoires en mathématiques. Ainsi je commencerai avec l'analyse d'un exemple tiré de l'arithmétique. Ce premier exemple sera l'occasion d'élaborer un procédé d'analyse esthétique des démonstrations algébriques. J'aborderai alors la question des preuves hétérogènes au travers d'un exemple issu de la géométrie. Enfin, je proposerai une relecture d'une démonstration d'analyse réelle.

Si la motivation première de l'étude transversale de ces différents exemples est de parvenir à justifier de façon analytique la valeur esthétique des mathématiques ainsi que d'en circonscrire le rôle et la signification, l'ambition souterraine et de montrer comment un fonctionnement esthétique vient compléter la logique en mathématique. La critique de Poincaré quant au rôle de la logique en ce qui concerne la compréhension et l'invention mathématique est sans appel :

> « Le logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en un très grand nombre d'opérations élémentaires ; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elles est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration ? L'aura-t-on compris même quand, par un effort de mémoire, on sera devenu capable de répéter cette démonstration en reproduisant toutes ces opérations élémentaires dans l'ordre même où les avait rangées l'inventeur ?
>
> Evidemment non, nous ne posséderons pas encore la réalité tout entière, ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration nous échappera complètement. » [Poincaré 1905, 35-36]

Aussi, le fil conducteur de l'ensemble de ce travail est de s'approcher, grâce à l'outil goodmanien, de ce « je ne sais quoi » nécessaire à la pratique mathématique mais dont la logique standard ne peut pourtant pas rendre compte.

Partie I : Des rapports entre les mathématiques et l'art

A. Description historique

I. De l'antiquité aux temps prémodernes

> « Les rapports des mathématiques et de l'Art ont existé de façon particulièrement significative en Grèce et ceux-ci sont bien connus aussi n'y insisterai-je point trop, m'attachant plutôt à l'époque moderne où ils sont négligés, sinon ignorés. » [Loi 1982, 54]

On peut se demander si les rapports en question, entre les mathématiques et l'art, de l'antiquité jusqu'aux temps prémodernes sont aussi bien connus que Loi le laisse entendre. Peut-être aurait-il été souhaitable qu'il insiste justement sur la nature de ces rapports. C'est en effet un argument couramment employé pour justifier les aspects esthétiques des mathématiques que d'en référer à l'histoire et de souligner que celles-ci, ou en tout cas, certaines branches mathématiques, furent depuis l'Antiquité jusqu'au moins la Renaissance considérées comme un art[5]. Non que cela soit faux, mais dans un sens bien différent de son acception moderne. Cette dernière, qui ne se définit qu'au cours du dix-huitième siècle, nous est tellement familière qu'il est difficile d'imaginer qu'elle pût être différente. L'ambition de cette section est donc de faire une mise au point sur la signification que l'on peut accorder aux rapports établis durant l'Antiquité grecque et latine entre les mathématiques et l'art. La question qui sous-tend l'ensemble de cette

---

[5] Le Lionnais par exemple, évoque le fait que les mathématiques furent classées comme un art dans l'Antiquité pour justifier leur aspect esthétique :

> « La beauté apparaît souvent aux festins où l'on n'avait invité que l'utilité ou la vérité. Comment rester alors insensible aux prenantes séductions dont elle les pare ? Il en va ainsi de toutes les branches de l'action et du savoir, mais nulle part avec autant de force qu'en mathématiques. Et, sans doute, l'Occident moderne n'a-t-il pas ratifié l'opinion de l'ancienne Grèce qui jusqu'à Euclide, tint les mathématiques pour un art plus que pour une science ; ce sont, malgré tout, d'envoûtantes satisfactions esthétiques qui ont, le plus souvent, incité les mathématiciens modernes à cultiver si ardemment leur chères études. » [Le Lionnais 1962,435]

On trouvera une argumentation similaire, bien que concernant plus généralement les rapports entre l'art et la science, dans la préface de Tauber de l'ouvrage collectif *The Elusive Synthesis : Aesthetics and Science*, (cf. [Tauber 1997, VII]) ainsi que dans son article " From Descartes' Dream to Husserl's Nightmare", cf. ([Tauber 1997, 289-312].)

enquête historique est de savoir si ces différents rapports sont susceptibles ou non, de justifier la beauté des mathématiques.

I.1. Artes liberales, technê et mathématiques

I.1.1. Antiquité latine

L'héritage artistique de l'Antiquité latine est fortement présent dans notre environnement culturel, aussi traiterons-nous en premier lieu les rapports entre les mathématiques et l'art durant cette période.

L'Antiquité latine propose une classification systématique des arts sous l'appellation générique des *artes liberales*. Les activités qui la composent, si elles répondent à l'appellation d'art, ne ressemblent pas pour autant aux activités artistiques telles que l'on peut les concevoir depuis deux siècles. L'arithmétique et la géométrie, par exemple, étaient classées parmi les sept arts libéraux[6], au même titre que la grammaire ou la rhétorique. Ainsi, les arts libéraux ont bien peu de rapport avec les beaux-arts actuels. Le dénominateur commun sur la base duquel sont rassemblés les composants des arts libéraux n'est pas un critère esthétique mais est fondé sur la base de ce qui peut être enseigné et appris[7]. La classification de l'Antiquité latine des arts, les *artes liberales*, bien qu'elle comprenne certaines branches mathématiques, ne nous permet pas d'en tirer des conclusions sur les éventuels aspects artistiques ou esthétiques (dans un sens actuel) que les mathématiques peuvent posséder.

L'intersection entre le système moderne des beaux-arts et les arts libéraux n'est pas vide, la musique appartient à ces deux classifications. Cela dit, le lien qui rapproche

---

[6] Dans la classification de Martianus Capella, les sept art libéraux sont : Grammaire, rhétorique, dialectique, arithmétique, géométrie, astronomie et musique.

[7]

> « Le terme grec pour « art » (*technê*) et sa contrepartie latine (*ars*) ne renvoient pas spécifiquement aux « beaux-arts » au sens moderne, mais s'appliquent à tous les genres d'activité humaine que nous qualifierons d'artisanat ou de science. (…) les Anciens ont toujours compris par « art » ce qui pouvait être enseigné ou appris. » [Kristeller 1999, 13]

les mathématiques de la musique dans ce cas ne fournit pas d'argument permettant d'alimenter une thèse sur les aspects artistiques des mathématiques. En effet, en adoptant une terminologie moderne, la conséquence de la parenté établie par la classification des arts libéraux entre les mathématiques et la musique n'est pas de faire bénéficier les mathématiques de l'aura artistique de la musique mais au contraire, d'élever la musique au rang de science. De l'Antiquité latine, jusqu'aux temps prémodernes, le lien entre mathématiques et musique n'est pas fondé sur l'aspect esthétique des mathématiques mais sur la construction mathématique de la théorie musicale[8]. De la même façon, lorsque Leonard de Vinci établi un parallèle entre les mathématiques et la peinture, c'est sur la considération de la peinture en tant que science qu'il le fait et non en tant qu'art[9].

Aujourd'hui, en comparant les mathématiques et l'art, l'ambition est plus souvent de donner quelque chose de l'art aux mathématiques que le contraire. L'artiste actuel bénéficie d'un statut relativement honorable dans le sens où son activité est valorisée par nos sociétés modernes. Il n'en a pas toujours été ainsi : avant l'apparition des académies, les artistes étaient plutôt considérés comme artisans et ne jouissaient que de peu de considération sociale et culturelle. C'est donc dans l'espoir d'améliorer leur condition et de bénéficier des prestiges dont jouissaient déjà les disciplines que nous appellerions aujourd'hui sciences que sont rapprochées ces activités.

On peut alors se demander si les thèses contemporaines qui défendent les affinités entre les mathématiques et l'art n'ont pas comme ambition plus ou moins souterraine

---

8

> « (…) la découverte pythagoricienne des proportions numériques sous-jacentes aux intervalles musicaux donna lieu à un traitement théorique de la musique, fondé sur une base mathématique : en conséquence, la théorie musicale contracta avec les sciences mathématiques une alliance qui est déjà apparente dans la République de Platon, et devait durer jusqu'aux temps prémodernes. » [Kristeller 1999, 18]

Il est clair que cette alliance n'est pas fondée sur l'aspect artistique ou esthétique des mathématiques, mais uniquement sur l'aspect mathématique de la musique.

9

> « (…) la séparation entre peinture et poésie n'est pas maintenue de manière constante, et la comparaison semble étendue aux disciplines mathématiques avec lesquelles la peinture, en tant que science, entretient selon Léonard des liens étroits. » [Kristeller 1999, 42]

d'associer ces activités afin de modifier l'image du mathématicien calculateur, éloigné de la culture, des préoccupations humaines en lui donnant quelques traits de l'artiste. L'ensemble de ce travail devrait montrer que si cette hypothèse peut parfois trouver une certaine résonance, elle est la plupart du temps naïve et ne peut à elle seule justifier l'ardeur déployée pour montrer l'aspect esthétique et artistique des mathématiques.

I.1.2. Antiquité grecque

Il n'y a pas dans la philosophie grecque de classification semblable à celle des arts libéraux. L'art y est considéré comme un savoir faire en général plus qu'une catégorie spécifique d'activités créatrices.

> "(…) for Aristotle there is no distinction at all between what have come to be called in modern times the so-called "fine arts" and the "practical arts ". Such a distinction would have been quite unintelligible to a Greek thinker. For Aristotle and the Greeks, the "artist" is a maker, a craftman, like the shipbuilder or the physician. The different and separate arts are distinguished only by the fact that they make different kinds of thing: the shipbuilder makes ships, the physician makes health, the poet makes plays. Good ships, good health, and good plays are all a delight to behold, because each does something well: the ship sails and parts the waves, the tragic poem arouses pity and fear, and thus purifies the soul." [Randall 1960, 278]

L'art – technê – dans la théorie aristotélicienne, désigne une certaine forme de production et une certaine forme de savoir. En tant que forme de savoir, elle est placée entre l'expérience et l'épistémè. Elle se distingue de l'expérience en cela que, l'expérience est une connaissance, un savoir, de fait et du particulier alors que la technê, comme l'épistémè, est une connaissance par cause et du général. La technê se distingue de l'épistémè en cela que c'est une connaissance qui a pour but une œuvre alors que l'épistémè a pour but la vérité[10].

Comme forme de production, Aristote distingue la production par la nature et celle par l'art :

[10] Pour une analyse des principes et méthodes de technê et épistémè, on pourra se reporter au chapitre VI : Analysis and Synthesis : The Mathematical Sciences and the Arts, de [Crombie 1994, 277-313].

« Parmi les choses qui deviennent, certaines sont des productions de la nature, d'autres, de l'art, d'autres, enfin, du hasard. » [Métaphysique Z, 7 1032a-b 12-13]

Il faut analyser la différence entre la production par la nature et celle par l'art : par technê, la cause se trouve dans celui qui produit et non dans ce qui est produit, à la différence de la génésis : le principe dans la chose naturelle est placé dans la chose naturelle elle-même. L'action est toujours définie finalement, il y a toujours un but. Or, une production par technê correspond à ce but si le producteur est sûr de réaliser son projet, alors que la production naturelle se montre en tant que telle si elle suit une règle.

Bien qu'une telle conception reste distincte de celles qui verront le jour à partir du dix-huitième siècle, il y a cependant des enseignements à tirer en ce qui concerne l'objet de cette section. En effet, j'ai montré que souligner l'appartenance de certaines branches mathématiques aux arts libéraux ne peut pas nous apprendre quelque chose des aspects artistiques des mathématiques au sens moderne. Par contre, la conception même de l'art d'Aristote, si elle ne concerne pas explicitement les mathématiques peut, elle, se révéler instructive pour comprendre l'attribution de propriétés esthétiques à cette science dans la mesure où, dans la technê se retrouvent aujourd'hui les similarités entre science et art. La poétique d'Aristote peut être considérée, post festum, comme un traité d'esthétique[11]. Aussi, j'examinerai cette hypothèse seulement lorsque j'aborderai plus spécifiquement l'élaboration de l'esthétique.

I.1.3. Conclusion

Ni l'expression latine des arts libéraux ni l'art au sens aristotélicien de technê ne recouvrent ce que l'on a pu appeler « art » à partir des temps modernes. Que ce soit dans l'une ou l'autre de ces conceptions de l'art, et de façon plus générale, dans aucune conception de l'art antérieure à la Renaissance, la beauté n'occupe de place

[11] L'une des raisons de cela est que la *Poétique* propose une investigation sur l'art poétique de façon autonome et en tant qu'objet propre de recherche, distinct de l'éthique, la rhétorique, l'histoire ou la philosophie. (cf. [Gernez 2001, VIII]). On pourra voir aussi les *Questions d'esthétiques*, ouvrage collectif dans lequel les auteurs soulignent la dimension cognitive de la conception aristotélicienne de ce que l'on appellerait aujourd'hui l'esthétique [Cometti, Pouivet &Morizot 2000, 90 & 101& 105n].

majeure. Plus encore, la notion de beau a très peu à voir, si ce n'est pas du tout, avec les questions relatives à l'art. Ce n'est donc pas par le biais d'un rapprochement avec l'art dans l'Antiquité qu'il est envisageable d'argumenter sur la beauté ou l'attrait esthétique des mathématiques.

Plus que de difficultés conceptuelles, il s'agit ici de difficultés techniques d'ordre sémantique dues, pour l'essentiel, aux changements et modifications des acceptions d' « art » et de « science ». Fournir un examen sérieux et exhaustif sur le thème de ces changements de significations en étudiant simultanément les intersections entre art et science et les raisons de ces intersections mériterait un travail de recherche à part entière.

Cette brève mise au point sur le recours que l'on peut attendre de l'histoire antique quant aux rapports entre les mathématiques et l'art suffit pour apporter une première conclusion. Dans l'optique où je veux montrer que les mathématiques ont quelque chose de l'art, au sens moderne du terme, l'histoire postérieure à la naissance du système de beaux-arts peut fournir dans une certaine mesure quelques éléments intéressants (notamment en ce qui concerne la conception aristotélicienne de l'art). Encore que, la stratégie consistant à comparer ces activités se révèle le plus souvent inappropriée à cause de leur changement important de signification.

On pourra également objecter que le concept d'art connaît encore actuellement diverses interprétations et ne répond pas à une caractérisation étroite et arrêtée. De toute façon, il n'y a sûrement pas d'argument d'autorité par rapport à l'esthétique. Or, le fait est que toutes les interprétations actuelles, malgré leurs nuances et leurs divergences, parfois de taille, sont construites autour de la notion d'esthétique. Or, c'est justement l'esthétique qui nous intéresse en particulier, avant même l'art. Je rappelle que la raison qui motive cette investigation sur la nature des rapports entre les mathématiques et l'art est de servir une enquête plus générale sur les rapports entre les mathématiques et l'esthétique. L'art étant le domaine d'action privilégié de l'esthétique, il est nécessaire de procéder à un examen préalable des rapports entre les mathématiques et l'art. De plus, la plupart des thèses qui

s'occupent de montrer que les mathématiques et l'art ont un important lien de parenté ne le font pas pour servir ce seul but mais bien pour tenter de justifier par ce biais l'aspect esthétique des mathématiques. J'aurai bientôt l'occasion d'en donner divers exemples.

C'est donc bien la notion d'esthétique qui est centrale ici et qui donne tout son sens à la comparaison mathématiques et art. A ce titre, il semble judicieux de vouloir se pencher sur les liens établis durant l'Antiquité entre les mathématiques et la beauté sans passer par l'intermédiaire d'une comparaison entre les mathématiques et l'art.

I.2. Mathématiques et beauté des mathématiques

La tâche à laquelle il va falloir s'astreindre n'est pas de répertorier un panel de conceptions antiques de la beauté et de tenter de l'appliquer ou tout au moins de l'articuler autour des mathématiques actuelles, mais d'examiner comment un lien entre les mathématiques et la beauté a pu être effectivement établi. Les philosophes qui nous intéresseront donc seront ceux qui ont mis en avant la beauté des mathématiques, non ceux qui développent une théorie particulière de la beauté. Cette stratégie se justifie d'une part par les limites qu'elle impose[12] et d'autre part par sa nécessité pour répondre à la problématique qui sous-tend ces réflexions : quel soutien peut-on attendre d'une autorité de la philosophie antique pour défendre l'aspect esthétique des mathématiques ? L'ambition n'est donc clairement pas de se demander quel soutien peut-on attendre d'une conception antique de la beauté pour justifier, a posteriori, la beauté des mathématiques.

Suite à une discussion avec Thomas Benatouil, j'ai concentré mes recherches sur l'Antiquité grecque. En effet, ce dernier m'a informée que chez les stoïciens ou les épicuriens par exemple, la beauté était longuement discutée, mais sans aucun rapport aux mathématiques, discipline qui ne les préoccupait pas outre mesure.

[12] Ignorer ces limites serait s'exposer à un travail d'une telle ampleur et d'une telle généralité qu'il n'aurait finalement que peu d'intérêt et qui risquerait en outre de constituer une porte ouverte à toutes sortes d'interprétations et d'extrapolations diverses.

Vouloir s'approprier de telles réflexions pour les appliquer aux mathématiques les dénaturerait à un point où l'on serait en droit de s'interroger sur la pertinence d'une telle manœuvre.

Bien que l'on ne trouve pas à proprement parler de textes exhaustifs dans l'œuvre de Platon ni dans celle d'Aristote où la beauté des mathématiques est explicitement traitée[13], pour ces deux philosophes grecs, les mathématiques et la beauté entretiennent une étroite relation. Mais plus encore que l'aspect quantitatif, ce qui retient l'attention est la fréquence et la persévérance avec laquelle nombre de travaux ultérieurs, et jusqu'à nos jours, se réfugient sous l'autorité de l'école platonicienne ou aristotélicienne pour argumenter sur la beauté des mathématiques[14]. Ce n'est donc pas uniquement l'importance directe de ces philosophies grecques qui m'a conduit à les sélectionner mais aussi leur influence et l'usage qui en est fait pour justifier la beauté des mathématiques. Je propose donc d'examiner la façon dont on peut utiliser la philosophie de Platon pour défendre la beauté des mathématiques ainsi que le recours que l'on peut attendre de la théorie aristotélicienne de la compréhension. Je montrerai que pour se réfugier sous l'autorité de ces deux philosophes dans l'optique de défendre la beauté des mathématiques, il y a des choix ontologiques à faire.

I.2.1. La beauté comme propriété métaphysique

De façon succincte, on peut résumer les trois points qui sont le fondement de la théorie platonicienne du beau comme suit :

a) l'unique connaissance désirable est celle de la Beauté

b) le beau n'est beau que par le Beau, ou le beau est un Beau-en-soi

c) la connaissance de la Beauté présuppose que l'on se libère de toutes préoccupations annexes

[13] A ma connaissance, seuls deux paragraphes dans l'ensemble des écrits aristotéliciens, sur lesquels je reviendrai, sont réellement significatifs à ce sujet. Quant à l'œuvre de Platon, il n'y a pas spécialement de passages qui y soient consacrés mais plutôt un ensemble de réflexions diffuses qui peuvent conduire à une interprétation probante.

[14] On pourra lire par exemple, [Heisenberg 1970, 166-183].

Dans la philosophie de Platon, les mathématiques sont belles par la participation du Beau et elles permettent un accès privilégié au Beau-en-soi. En effet, ces dernières se situent entre les idées et les objets du monde de l'empirie. Elles sont plus proches de la (de l'idée de) beauté que ne peuvent l'être les objets concrets, embarrassés des contingences matérielles inhérentes au monde des périssables.

La contemplation des belles sciences est l'ultime démarche amenant à la contemplation du Beau-en-soi. Dans la philosophie de Platon, la connaissance du beau passe par une élévation de la beauté des apparences vers la beauté absolue. La contemplation du beau corps doit s'élever vers celle des belles actions puis vers celle des belles sciences pour finalement conduire à celle du beau tel qu'il est en soi[15].

Adopter ce point de vue ne permet pas de justifier la beauté des mathématiques comme une qualité de cette science mais traduit leur rapport à l'idée de beauté. C'est ici le statut ontologique des mathématiques qui est responsable de leur attrait esthétique. Dans ce cas, dire que les mathématiques sont belles ne nous apprend pas quelque chose sur les objets mathématiques eux-mêmes mais sur les rapports de cette science avec le monde des idées.

I.2.2. La beauté comme propriété cognitive

Il n'y a pas dans les textes d'Aristote une étude systématique sur la beauté et les mathématiques[16]. Cependant on peut trouver deux passages dans lesquels sont

---

[15] Cf. [Le Banquet 211b-212b]]

[16] Dans la *Poétique*, on trouve une réflexion sur la beauté qui mentionne l'ordre et la grandeur :

> « De plus, puisqu'une belle chose composée de parties - qu'il s'agisse d'un animal ou de tout autre chose – suppose non seulement de l'ordre dans ces parties, mais aussi une étendue qui ne soit pas n'importe laquelle : en effet, la beauté réside dans l'étendue et dans l'ordre (…). » [*Poétique* 1450b, 35]

La traductrice Barbara Gernez note à propos de ce passage que :

> « Cette assertion ne reçoit pas d'autres explications. En Métaphysique XIII, 3, 1078b 4, Aristote promet qu'il traitera ailleurs de la question du Beau, il ne semble pas qu'une telle promesse ait été tenue. » [Gernez 2001, 29 note 40]

Le traducteur Hippocrates G.Apostle de la *Métaphysique* remarque quant à lui que :

décrits les caractéristiques particulières de la beauté. A partir de ces critères, je vais montrer que l'on peut 1) justifier la beauté des mathématiques et 2) montrer que la fonction de cette propriété est plus d'ordre cognitif qu'esthétique.

La première des citations est extraite du livre M de la métaphysique. C'est donc dans le livre consacré aux mathématiques qu'Aristote choisit d'exposer ses réflexions sur la beauté :

> « D'autre part, étant donnée la distinction du Bien et du Beau (car le premier ne se rencontre jamais que dans le domaine de l'action, tandis que le Beau se trouve aussi dans les êtres immobiles), les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place ni au Beau, ni au Bien, sont assurément dans l'erreur : le Beau est, au contraire, l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations. Ce n'est pas une raison parce qu'elles ne le nomment pas pour dire qu'elles n'en parlent pas, car elles en montrent les effets et les rapports. Les formes les plus hautes du beau sont l'ordre, la symétrie, le défini, et c'est là surtout ce que font apparaître les sciences mathématiques. Et puisque ces formes (je veux dire l'ordre et le défini) sont manifestement causes d'une multitude d'effets, il est clair que les mathématiciens doivent considérer comme cause d'une certaine manière, la cause dont nous parlons, le Beau en un mot. Mais c'est là un sujet que nous traiterons ailleurs plus à fond. » [*Métaphysique* M 1078a 31b5]

Les critères proposés par Aristote pour déterminer la beauté sont l'ordre, la symétrie ou encore le défini et l'on peut trouver dans la *Poétique* des justifications de ce choix à la fois par des exemples empiriques (ce que nous trouvons beau présente ces critères), et par des explications théoriques :

> « (…) la beauté réside dans l'étendue et dans l'ordre et c'est pourquoi un animal ne saurait être beau s'il est très petit (la vision devient confuse lorsqu'elle ne s'exerce qu'un imperceptible instant) ni s'il est très grand (la vision d'ensemble en est empêchée, l'unité de la totalité échappe à la vue des spectateurs ; comme si un animal mesurait dix mille stades…) ; il faut, de même que les corps et les animaux doivent avoir une étendue qui soit facile à embrasser du regard, que les intrigues aient une longueur telle que l'on s'en souvienne aisément. » [*Poétique* 1450b 40]

"Whether such a work was never written, or written but lost, is not definitely known. A book on mathematics by Aristotle, in which beauty may have been discussed, is listed in the catalogues of Diogenes Laertius and of Hesychius, but the reliability of these catalogues has been questioned by scholars." [Apostle 1966 ,414 note 22]

Les caractéristiques de la beauté sont donc des propriétés commodes qui permettent une perception optimale de l'objet auquel elles s'appliquent. Il semble alors que les exigences d'Aristote en matière de beauté ne sont somme toute que des exigences liées à la perception, qu'elles ne décrivent que les conditions de compréhension. L'homme comprend bien mieux ce qui est ordonné, mesuré et limité que ce qui est chaotique, sans fin apparente, etc. En d'autres termes, est beau ce que l'on peut comprendre dans sa totalité[17].

Dans une perspective aristotélicienne, à la différence d'un point de vue platonicien, l'intérêt fondamental de la beauté n'est pas de révéler la vérité mais de permettre la compréhension. En ce sens, la beauté, plus qu'une propriété esthétique, est une propriété cognitive.

Aristote établit un lien étroit et particulier entre les mathématiques et la beauté : les mathématiques sont elles-mêmes belles et elles fournissent de surcroît un modèle pour la beauté[18]. Peut-être même plus, elles permettent, en l'exemplifiant, de comprendre le fonctionnement cognitif de la beauté. Si l'homme peut comprendre et développer les mathématiques c'est parce qu'elles sont belles au sens où l'on y trouve de l'ordre, de la mesure et de la limite[19].

Dans la philosophie d'Aristote, les objets mathématiques sont des êtres abstraits séparés de leur matière par un processus sui generis[20]. Son modèle est un

---

[17] Dans l'article "Symmetry as an Aesthetic Factor", Osborne souligne la différence entre la *symmetria*, terme grec pour symétrie et la symétrie entendue selon son acception moderne. Il montre alors combien la *symmetria*, comme tous les critères esthétiques, ou les caractéristiques de la beauté en vigueur durant l'Antiquité grecque, est reliée à l'idée de compréhension et d'intelligibilité. Pour plus de détails à ce propos, cf. [Osborne, 1986b].

[18] On pourra mesurer l'influence aristotélicienne à ce propos au sein de différentes conceptions esthétiques au dix-huitième siècle : je montrerai en effet que si les mathématiques ont pu fournir des critères esthétiques, ces derniers s'appliquaient en retour aux mathématiques elles-mêmes (cf. partie I A III).

[19] Il faut toutefois noter que le lien ainsi établi entre mathématiques et beauté n'est sûrement pas interne aux mathématiques. En effet, on peut penser que lorsque Aristote écrit que les mathématiques parlent de la beauté et construisent des théorèmes à son propos, il est fait allusion aux lois mathématiques qui régissent les harmoniques musicales, ou encore aux règles de proportions qui sous-tendent diverses constructions architecturales par exemple. Dans le cadre de la théorie aristotélicienne, cette interprétation reste la plus probable. Elle permet en outre de comprendre en partie en quoi et comment les mathématiques nous parlent de la beauté. Elles le font en nous proposant de suivre des règles qui offrent ordre et mesure, et qui donc permettent d'introduire de la beauté dans différentes entreprises.

[20] Cf. [Crubellier 1997, 311]

conceptualisme dans lequel les mathématiques ne traitent pas d'objets sensibles, ni d'objets non spatiaux et atemporels, mais de propriétés appartenant aux objets sensibles en tant que caractères numériques et géométriques[21]. C'est parce que ces propriétés répondent aux critères de la beauté qu'elles sont intelligibles. La beauté (ordre, mesure, précision) apparaît comme la cause mathématique, elle en est la condition cognitive. Autrement dit, dans le modèle conceptualiste d'Aristote, c'est parce que les mathématiques sont belles qu'elles sont accessibles et intelligibles à l'homme.

Un tel résultat est-il tenable dans une conception platoniste des mathématiques ? Dans une conception anti-platoniste ? J'entends par une conception platoniste non pas les positions de Platon, mais une position courante au XXème siècle qui, premièrement, défend l'existence indépendante des objets mathématiques de notre esprit (versant ontologique), et, deuxièmement, dans laquelle la vérité ou la fausseté des propositions mathématiques ne dépendent pas des moyens de justification (principe de bivalence – versant sémantique).

a) D'un point de vue platoniste

Si je concède aux mathématiques une existence indépendante de la création humaine, si je considère le mathématicien non comme un inventeur mais comme un découvreur alors, je peux penser que les objets mathématiques possèdent en propre, ordre, symétrie et mesure et que ce sont justement ces propriétés qui leur confèrent leur beauté et qui me permettent de les comprendre.

Dans ce cas, la beauté semble être une condition d'accessibilité. Le raisonnement est le suivant : si les résultats auxquels j'aboutis ne sont pas beaux, au sens d'Aristote, ils ne sont pas à la pleine portée de ma perception et de ma compréhension, je ne peux donc pas m'assurer qu'ils sont corrects, ou vrais. Ce qui ne signifie pas, a priori, qu'un tel résultat soit faux, seulement que ne le comprenant pas pleinement, je ne peux m'assurer de sa vérité. Or, si les mathématiques sont belles, je ne peux concevoir qu'un résultat mathématique qui ne présente pas les

[21] Cf. [Ross1924, 416]

caractéristiques de la beauté puisse être correct, quand bien même, je ne parviens pas à établir techniquement sa validité ou sa fausseté. La beauté apparaît alors comme un réquisit préalable à la cognition.

Ici intervient le dilemme de Benacerraf[22] qui pose le problème de l'accessibilité aux objets non spatiaux et atemporels que sont les objets mathématiques dans une perspective platoniste. Cette accessibilité serait-elle rendue possible par une connaissance de la beauté ? Dans cette hypothèse, la beauté des mathématiques pourrait être la cause de la croyance en leur vérité.

Quoi qu'il en soit, les mathématiques exhibent et montrent la beauté en cela qu'elles possèdent littéralement les propriétés qui définissent la beauté. Elles en sont un parfait exemplaire. Dans le cadre de l'adoption d'une ontologie réaliste, l'interprétation de l'assertion d'Aristote qui nous préoccupe pour l'instant ne pose pas de réelles difficultés : les mathématiques existent, et en les découvrant on découvre les attributs de la beauté. Pourquoi dire qu'elles exhibent la beauté ? Les mathématiques pourraient bien être belles sans que cette beauté participe d'aucune manière à la perception que l'on en a, ou tout au moins pourrait-on connaître les mathématiques et ne rien savoir de leur beauté ni de la beauté en général. Or, ce n'est pas la position que défend Aristote. L'ordre, la mesure, la symétrie, les attributs de la beauté ont une fonction cognitive : comprendre les mathématiques implique de prendre conscience de leur ordre, mesure, etc. et donc de leur beauté et du fonctionnement de la beauté en général. Comme dans l'ensemble des questions abordées par Aristote, la problématique fondamentale est celle de la compréhension et le rapport entre les mathématiques et la beauté repose entièrement dessus. D'un point de vue réaliste, celui examiné à présent, les mathématiques sont intelligibles parce qu'elles sont belles. On ne pourrait y avoir accès si ce n'était pas le cas.

b) <u>D'un point de vue non réaliste</u>

[22] cf. [Benacerraf 1983]

L'adoption d'une position non réaliste inverse la relation entre beauté et accessibilité. Disons dès à présent que dans ce cas de figure, la conclusion est que les mathématiques sont belles parce qu'elles sont intelligibles, et non le contraire.

En effet, si le mathématicien crée, invente les mathématiques, c'est lui qui cherche des résultats qui présentent les traits de la beauté. Et ce n'est pas un caprice ou une fantaisie de savant, c'est pour répondre à un besoin. La beauté n'est pas une simple valeur ajoutée, elle participe au développement des mathématiques. La seule façon probante de faire des mathématiques est de les faire avec beauté : les résultats que l'on retient doivent être beaux. La raison en est que la beauté offre une compréhension optimale, ce qui ne veut pas dire que quiconque peut comprendre un beau résultat mathématique, ceci est un autre problème, mais cela signifie que tout est mis en œuvre pour que le résultat soit non seulement pleinement intelligible mais aussi pleinement exploitable. Un résultat mathématique qui ne présenterait pas ces caractéristiques peut sans aucun doute être correct, mais il serait voué à l'oubli. Si des aspects d'un résultat ne sont pas accessibles, il est difficile que ce dernier parvienne à trouver sa place par rapport à l'ensemble des mathématiques déjà existantes. L'un des objectifs des mathématiques est de relier entre eux les résultats, de pouvoir les classer et comprendre leurs relations. Ce but est évidemment plus facilement atteint lorsque une donnée mathématique est pleinement intelligible. En suivant donc une position non réaliste, la beauté des mathématiques au sens d'Aristote peut être interprétée comme une qualité nécessaire à leur bon fonctionnement et développement.

Reste maintenant à comprendre comment les mathématiques exhibent et montrent cette beauté. Peut-être est-il possible d'expliquer cette assertion en disant que le rôle cognitif de la beauté prend tout son sens dans l'activité mathématique et qu'en cela, les mathématiques peuvent être perçues comme un témoin essentiel de l'efficacité cognitive de la beauté : en même temps que l'on fréquente les mathématiques, on prend conscience des attributs de la beauté et de leur rôle dans notre compréhension.

Quel que soit le point de vue ontologique de départ, il est nécessaire, si l'on veut trouver refuge sous l'autorité d'Aristote pour rendre compte de la beauté des mathématiques, d'accepter une conception cognitive de la beauté. Ce que l'on gagne par cette adoption est de donner un rôle fondamental, en rien anecdotique, à la beauté au sein du développement et de la compréhension des mathématiques. Ce que l'on perd par contre en optant pour une telle stratégie est que l'on ne peut pas rendre compte de l'émotion esthétique dont témoignent nombre de mathématiciens. Il faut dans ce cas se pencher vers le plaisir cognitif dû à la satisfaction de la compréhension.

I.2.3. Beauté des mathématiques et unité du réel

Un argument classique pour justifier la beauté des mathématiques consiste à faire intervenir le présupposé métaphysique de la beauté de l'univers. La beauté des mathématiques en serait une conséquence. Au contraire dans la philosophie aristotélicienne, ce n'est pas la beauté supposée du monde qui permet d'attribuer une certaine beauté aux mathématiques, mais l'opposé. Pour comprendre et expliquer ce résultat, il faut traiter le fonctionnement du conceptualisme d'Aristote à travers la problématique de l'unité du réel.

Dans l'article « La beauté du monde »[23], Crubellier montre comment Aristote établit la preuve de l'unité du réel tout en respectant la diversité du monde sensible. L'idée centrale est que si les objets sensibles se présentent à l'homme sous une diversité infinie, il n'en est pas moins possible de déceler des structures qui permettent de les organiser et de les relier sous diverses catégories. Ce sont donc les mathématiques, en tant que science des structures et de la forme qui nous donnent à connaître l'unité sous la diversité[24]. Le divers sensible n'est pas un obstacle à l'unité du réel puisque nous pouvons malgré cette diversité saisir une organisation au moyen des structures mathématiques.

> « Les objets mathématiques représentent donc des structures de la réalité, repérables par analogie et « très générales », si l'on ose dire, puisqu'elles s'étendent en

[23] Cf. [Crubellier 1997]

[24] Cf. [Crubellier 1997, 311]

> fait au-delà des frontières, des genres naturels, à tout le dénombrable ou à tout le mesurable. Ainsi les nombres entiers et les théorèmes de l'arithmétique représentent les propriétés qui se retrouvent dans toutes les collections d'objets particuliers, qu'Aristote appelle « nombres sensibles ». Pour pouvoir les représenter universellement, ils doivent être conçus comme des nombres « monadiques », composés d'unités dont on ne sait rien sinon qu'elles sont indivisibles, et distinctes sans être différentes. » [Crubellier 1997, 316]

Les mathématiques, ainsi conçues, apportent finalement la preuve de l'unité du réel et elles fournissent de surcroît à l'homme un moyen de comprendre l'ordre sous le désordre apparent. Dans le même temps, les mathématiques nous enseignent la beauté de l'univers puisqu'elles mettent en lumière l'ordre, la mesure et l'harmonie du monde des phénomènes naturels. Crubellier montre que la conception aristotélicienne des mathématiques permet au philosophe grec de justifier l'unité du réel sans que le divers sensible y soit un obstacle. Pour l'auteur, la preuve de cette unité réside dans la beauté du monde, perçue uniquement par l'œil du mathématicien :

> « (…) bien que chaque chose ait sa propre nature et sa perfection propre, ces perfections se révèlent apparentées si on les considère – avec le regard du mathématicien – sous l'angle de la détermination, de la mesure et de la proportion. Chacune de ces formes contribue en outre à un ordre d'ensemble, et celui-ci apparaît comme la manifestation de l'activité éternelle d'un principe unique. La preuve de l'unité du réel est donc dans la beauté du monde. » [Crubellier 1997, 330]

Si Crubellier a raison alors il est envisageable, par le biais de l'autorité historique que fournit la philosophie d'Aristote, de justifier la thèse qui défend le regard esthétique sur l'univers rendu possible par le seul regard du mathématicien. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette thèse en particulier dans la suite de cette première partie. En effet, il est fréquent que soit attribué ce rôle particulier aux mathématiques, celui d'offrir un accès, voire le seul envisageable, à la beauté du monde de phénomènes naturels. Ici, la possibilité de cet accès est justifiée de façon cohérente.

Enfin, et pour revenir aux conclusions que j'annonçais précédemment, la dernière phrase de la citation ci-dessus nécessite un commentaire. En effet, Crubellier conclut que la preuve de l'unité du réel réside en la beauté du monde.

Cette conclusion, sans que cela nuise forcement à sa validité, comporte néanmoins un raccourci. Une étape indispensable à la preuve de l'unité du réel consiste à établir, par définition, la beauté des mathématiques. Et c'est cette dernière qui permet d'établir l'existence de l'unité sous la variété et par suite celle d'un principe unique ou de l'unité du réel. En effet, dans un contexte aristotélicien, l'unité du réel et la beauté du monde sont l'équivalent l'un de l'autre. Cette équivalence est la conséquence de la définition de la beauté : supposer que le monde est beau c'est supposer un ordre, une mesure et une harmonie entre tout ce qui le compose, autrement dit, c'est supposer l'existence d'une unité sous la variété. Cela revient donc à supposer l'unité du réel. Ainsi, si l'on veut montrer, en évitant l'écueil d'un cercle vicieux, l'unité du réel il faut montrer la beauté du monde. Or, la beauté des mathématiques permet justement de justifier la beauté du monde. Les mathématiques considérées, d'un point de vue ontologique, comme la science des formes et des structures, et d'autre part, sous un angle esthétique, comme définissant parfaitement les exigences de la beauté offrent la possibilité d'établir la beauté du monde des phénomènes naturels. La preuve de l'unité du réel est justifiée en montrant la beauté du monde, et elle-même est établie grâce à la beauté des mathématiques.

Pour être pleinement abouti, ce raisonnement nécessiterait une analyse davantage minutieuse et précise mais cela dépasserait les limites imposées par le présent travail. Il ne s'agit pour l'instant que d'une suggestion d'interprétation. Si cette dernière est correcte alors, on peut conclure que la définition de la beauté à partir du modèle fourni par les mathématiques est l'élément qui permet au système aristotélicien d'intégrer la preuve d'un principe premier, ou de l'unité du réel, sans nier la diversité du sensible apparent. Dans ce cas, il est fait l'économie du présupposé métaphysique de la beauté de l'univers puisque ce dernier se déduit en fait de la définition de la beauté et de la nature ontologique des mathématiques.

I.3. Conclusion

La conception de la beauté des mathématiques dans la philosophie de Platon n'a de sens que compte tenu du statut ontologique qu'y ont les mathématiques. Dans

ce cadre, elle apparaît comme une propriété métaphysique plus que comme une propriété esthétique au sens moderne.

L'analyse de la tradition aristotélicienne permet quant à elle de cerner les enjeux d'une théorie générale de la beauté des mathématiques. Elle met en évidence la possibilité d'établir la beauté des mathématiques comme cause en mathématiques. Elle permet d'envisager un cadre conceptuel dans lequel le présupposé métaphysique de la beauté de l'univers n'est pas nécessaire pour justifier la beauté de cette science.

De façon plus générale, l'étude de la beauté des mathématiques dans l'Antiquité grecque nous alerte d'ores et déjà sur la question de l'attribution des propriétés esthétiques et les précautions ontologiques nécessaires qui en découlent.

Enfin, elle pose la problématique du rôle des mathématiques dans l'élaboration des critères esthétiques, voire dans la définition de la beauté. Cette question sera le sous-bassement de la partie suivante, consacrée à l'élaboration de l'esthétique en tant que discipline philosophique autonome.

II. Le XVIIIème, élaboration de l'esthétique

L'esthétique se constitue en tant que discipline philosophique autonome au cours du XVIIIème siècle. Au même moment, le système des beaux-arts se dessine et s'affine pour finalement avoir les contours qu'on lui connaît aujourd'hui. Les mathématiques sont peu à peu éloignées du monde des arts dans le sens où elles n'apparaissent pas de façon explicite dans la liste des activités artistiques. Loin de clore une investigation historique sur les propriétés esthétiques des mathématiques, les nouvelles perspectives offertes par les spéculations sur le beau et les théories esthétiques en révèlent un nouvel aspect. En effet, alors que la séparation entre art et science s'affirme, que le système des beaux-arts est défini, et enfin que les théories esthétiques proposent une enquête philosophique sur l'art, les mathématiques occupent néanmoins une place remarquable au sein des réflexions sur le beau et sur l'esthétique : elles apparaissent aussi bien comme sujet propre

d'étude (par exemple : telle conception de la beauté s'applique-t-elle aux mathématiques ?) que comme source d'inspiration pour l'élaboration de critères esthétiques. La tâche initiale, celle de saisir les opportunités offertes par l'Histoire d'asseoir une thèse sur la question de l'aspect esthétique des mathématiques, se double ici d'un autre objectif. Il s'agit non seulement de voir dans quelle mesure l'Histoire peut servir à comprendre et justifier ce trait des mathématiques, mais aussi de montrer comment les mathématiques ont pu servir l'Histoire de l'esthétique. L'argumentation que je propose est construite autour de trois axes d'étude : la première étape consiste en une analyse et une mise au point sur la séparation, amorcée au XVIIème, de la science et de l'art ainsi que sur la définition du système des beaux-arts. L'étape suivante sera consacrée à l'étude des spéculations sur le beau qui rompent significativement avec une conception antique. Enfin, le dernier axe concernera l'élaboration même de l'esthétique en tant que discipline philosophique autonome. Ce n'est qu'au terme de ces trois enquêtes thématiques qu'une synthèse des résultats obtenus permettra de comprendre la place et le rôle particulier des mathématiques par rapport à l'Histoire de l'esthétique.

II.1. Rupture Art / Science

II.1.1. Origine de la séparation art et science

L'idée d'une séparation nette entre l'art et la science s'amorce au cours du dix septième siècle. D'après Kristeller, ce mouvement vers une nouvelle catégorisation est l'une des conséquences de la querelle des Anciens et des Modernes :

> « […] un examen minutieux des revendications des Anciens et des Modernes dans les différents domaines fit apparaître l'idée qu'en certains champs du savoir, où tout était fonction du calcul mathématique et de l'accumulation des connaissances, il était possible de démontrer clairement la supériorité des Modernes sur les Anciens, alors que dans d'autres, qui dépendaient du talent individuel et du goût du critique, les mérites relatifs des Anciens et des Modernes ne pouvaient être établis avec la même clarté et demeuraient sujets à discussion.
>
> Ainsi, pour la première fois le terrain se trouva préparé pour une séparation nette entre les arts et la sciences, séparation absente des discussions antiques, médiévales ou renaissantes portant sur le même sujet, bien que les mêmes mots soient utilisés.

> Autrement dit, la distinction entre les arts et les sciences, au sens moderne, présuppose non seulement les progrès réels des sciences au XVIIe siècle, mais aussi une réflexion sur les raisons pour lesquelles certaines activités humaines, que nous appelons maintenant beaux-arts, ne pouvaient prendre part à ce genre de progrès.» [Kristeller 1999, 55-56]

C'est donc pour Kristeller la notion de progrès qui est à l'origine de la séparation entre les arts et les sciences, et en particulier, les mathématiques[25]. Dans la littérature traitant spécifiquement des rapports entre l'art et les mathématiques, on trouve de façon récurrente l'interprétation selon laquelle c'est le précepte d'une science pure, exempte de tout apport extérieur, introduit par Bacon et renforcé par Descartes qui a conduit à séparer l'art de la science. Agassi, par exemple écrit :

> "The idea of the distinction between art and science comes from the idea of the purity of science, from the view that science is good as long it is kept pure. This idea belongs to Sir Francis Bacon who blamed older philosophers for mixing science and religion, science and metaphysics, science and politics. Bacon himself did not speak of art of aesthetics. Yet the division between the arts and the sciences was accepted by his disciples, Descartes and his followers, as well as the Royal society of London (…)." [Agassi, 1979, 129]

L'idée d'une science pure est intimement liée à la notion de progrès : pour que la science progresse, il faut qu'elle soit pure, objective et hermétique à toute influence étrangère. Aussi il n'y a pas, à proprement parler, de différence fondamentale entre ces deux versions. Agassi précise que Bacon ne parle pas spécifiquement de l'intrusion de l'élément esthétique dans la science ni du fait qu'il faille explicitement séparer art et science. Ceci est relativement naturel dans la mesure où le *Novum Organum* ne paraît qu'en 1621, bien avant que le critère esthétique fasse partie des caractéristiques propres à l'art. Il serait hors de propos de vouloir fournir un exposé détaillé de la genèse de la séparation entre les arts et les sciences mais il faut par contre souligner le fait que cette séparation ne s'est pas opérée sur la base du facteur esthétique, tout simplement parce qu'elle est antérieure à la construction du système des beaux-arts centré sur l'élément esthétique. Ainsi, si les mathématiques sont strictement séparées de l'art, c'est peut-être parce que les arts ne suivent pas le

[25] La distinction dont il s'agit ici est évidemment différente de la distinction aristotélicienne entre technê et épistémè : elle porte sur l'art et la science au sens moderne.

même processus de progrès que ces dernières mais ce n'est en tout cas pas parce qu'elles ne présentent pas des aspects esthétiques. En d'autres termes, les raisons de la séparation nette entre ces activités ne constituent pas un obstacle définitif à l'éventuel aspect esthétique des mathématiques. Cela étant, la nouvelle distinction qui s'opère au cours du XVIIème siècle ne fournit pas encore les modèles de la science et des beaux-arts tels qu'on les connaît aujourd'hui. Le critère en vigueur qui permet d'appeler une activité science est celui du progrès, les arts sont alors parmi les activités humaines celles qui ne progressent guère :

> « Tout comme Perrault l'avait fait avant lui, le traité de Wotton, qui fut le plus important en Angleterre pour représenter les vues des Modernes, tenta de couvrir systématiquement l'ensemble des arts et des activités humaines ; à l'instar de Perrault, il accentua la différence fondamentale entre les sciences, qui avaient fait des progrès depuis l'Antiquité, et les arts qui n'avaient point progressé. » [Kristeller 1999, 73]

Il est difficilement envisageable de faire référence à cette période de l'Histoire pour mettre en défaut, ou au contraire, défendre, le lien esthétique qui relie les mathématiques à l'art. Tout au plus est-il possible d'argumenter que l'idée d'une science pure va amorcer le refus de tout élément non strictement scientifique dans la science, et en particulier toute considération esthétique[26].

II.1.2. Séparer l'art de la science - séparer la science de l'art.

Comme il en a déjà été fait mention, le lien établi dés l'Antiquité entre la musique et les mathématiques était un lien ayant pour fondement l'aspect mathématique de la musique et non l'aspect artistique des mathématiques[27]. De la même façon, c'est en premier lieu des caractéristiques propres à la science qui permettent de séparer les activités artistiques des activités scientifiques. Cela signifie que la reconnaissance de l'ensemble des domaines qui constituent la science précède celle de l'ensemble des activités qui rentrent sous l'appellation d'art. Il ne faut pas voir dans cette remarque un présupposé essentialiste qui en serait le fondement. En effet, rien n'indique de façon plus ou moins implicite qu'il existe un principe commun à tous les arts ainsi qu'un principe commun à toutes les sciences,

[26] On pourra lire [Agassi 1979, 128].

[27] Cf. partie I. A I.1.

une sorte d'essence que le philosophe aurait pour tâche de mettre à jour. Le constat est simplement que l'on a appelé science ce que l'on appelle encore aujourd'hui science avant que l'on appelle art ce que l'on appelle art aujourd'hui. En effet, d'un point de vue strictement historique, les discours et les descriptions systématiques des méthodologies sur la science précédent ceux sur l'art. Et cette constatation vaut pour elle-même, elle ne présuppose pas la mise à jour d'une essence déterminante, pas plus qu'elle n'affirme la validité de ces catégorisations. L'unique point sur lequel je voudrais attirer l'attention est le fait que c'est la science qui est séparée de l'art à partir de réflexions sur la science et non l'art qui est séparé de la science. Une première lecture du titre de cette section pourrait laisser apparaître une sorte de redondance, ou un simple effet de style sans réel effet sur le fond même des commentaires qui suivent. Or, ce n'est pas le cas, il est au contraire important d'insister sur l'unilatéralité première de la séparation de la science et de l'art. Ce changement de catégorisation ne dénote pas un faisceau de réflexions abouties quant à la nature de l'art et aux fonctionnements esthétiques mais seulement une meilleure connaissance de l'activité scientifique dans son ensemble[28]. La fonction de ces remarques est de montrer que les propriétés esthétiques des mathématiques ne sont nullement remises en question par la mise en exergue de leurs propriétés scientifiques, si l'on peut dire. Comme dans bien des cas, l'usage correct des termes précède leur complet éclaircissement, si tant est que ce dernier soit même possible. Aussi, il est envisageable de pouvoir utiliser le terme de « science » ou « d'art » de manière adéquate sans pour autant posséder une définition nécessaire et suffisante grâce à laquelle cet usage correct est obtenu. On ne peut décider des affinités entre les mathématiques et l'art au XVIIIème tant que l'on ne mène pas une enquête sur la nature du ciment qui réunit les arts entre eux. La section à venir est consacrée à cette étude.

[28] Ce raisonnement n'est valable que dans l'optique où l'on considère effectivement que l'esthétique est créée au XVIIIème siècle, et pas seulement nommée. De plus, il faut encore accepter que l'esthétique a pour domaine d'action privilégié l'art pour pouvoir maintenir cette position.

II.2. Système des beaux-arts

II.2.1. Sur la nature de la dichotomie art / science

En ce qui concerne la séparation entre l'art et la science, j'espère l'avoir montré, les activités scientifiques ont été strictement désolidarisées des activités artistiques à cause de l'unité mise à jour des premières et non à cause d'une unification des secondes. Il s'agit à présent de se pencher sur la réunion des arts entre eux. Il peut être légitime de s'interroger sur la nécessité d'une telle démarche. Dans la hâte, on pourrait être tenté de conclure que dès lors que les mathématiques sont clairement une science en cela qu'elles progressent, elles ne sont, pour la même raison, pas un art. Il serait alors inutile de poursuivre le raisonnement et il faudrait chercher ailleurs que dans les affinités entre mathématiques et arts les raisons et les justifications de l'aspect esthétique des mathématiques. La première objection que l'on peut faire à un tel raisonnement est que si les mathématiques ne sont pas à strictement parler, un art, rien ne les empêche a priori d'en partager quelques aspects, dont, bien entendu, l'aspect esthétique. Il faut tout de même être prudent, et cette remarque en appelle une autre : elle comporte en effet un certain anachronisme. Elle n'est valable que si l'on a au préalable conscience de la place fondamentale des propriétés et des aspects esthétiques dans l'art. Or, au moment où les activités scientifiques sont regroupées entres-elles et par là même où elles sont séparées des activités artistiques, ces dernières ne sont pas rassemblées autour de la notion d'esthétique et de beauté. Cette objection trouve une réponse sous un apparent paradoxe : c'est peut-être justement parce que l'art n'est pas encore compris comme le royaume de la beauté, celui des étiquettes esthétiques, que l'on peut sans problème en éloigner les mathématiques. J'aurai l'occasion de développer ce point dans cette section. Mettons cela de côté dans l'immédiat. Le problème principal, et le plus simple à régler, est que le monde des activités créatrices humaines ne subit pas une dichotomie franche et nette selon qu'elles progressent (et appartiennent donc à la science) ou non (et sont alors artistiques). Une telle perspective n'est évidemment pas tenable, dans la mesure où elle implique que tout ce qui n'est pas de la science est de l'art, et vice-versa. Autrement dit, fournir une caractérisation de la science ne permet pas dans le même temps de reconnaître l'art.

Il est évident que je ne tiens pas pour suffisant une caractérisation de la science à partir de la notion de progrès. Je me contente pour l'instant de suivre l'évolution historique et de constater que si l'on a pu accorder quelque crédit à une définition progressiste de la science (dans le sens usuel du progrès comme accumulation linéaire de savoir), cela n'a pas suffit à comprendre l'art. La comparaison entre la science et l'art anime une large partie des débats philosophiques en France à l'aube du XVIIIème siècle[29]. Il est certain que l'on gagne en compréhension pour chacun de ces domaines d'activités en soulignant leurs différences, mais il ne faut pas pour autant que celles-ci effacent, ou fassent oublier, leurs points de convergence. J'entends montrer à présent que de nouvelles réflexions sur l'art[30] ne marquent en aucun cas la fin des rapports et affinités entre l'art et les mathématiques et qu'au contraire, elles permettent de recentrer la nature de ces rapports autour de propriétés esthétiques. Pour cela, il faudra montrer que la notion de beauté devient centrale dans l'organisation des arts entre eux, et que les spéculations sur le beau sont peu à peu solidaires de celles sur les arts. Et d'autre part, il faudra montrer que les mathématiques fournissent, dans un sens à définir, un modèle pour la beauté en cela que nombre de propriétés mathématiques sont tenues pour responsable de la beauté. L'intérêt de cette démarche est de vérifier que si les mathématiques apparaissent comme un modèle pour la beauté, la beauté ainsi caractérisée s'applique en retour à cette science. Ces deux points (le rôle de la beauté dans l'élaboration du système des arts et le rôle des mathématiques dans la construction systématique de canons esthétiques) seront la base de la stratégie adoptée pour montrer combien la création du système des beaux-arts offre un pont esthétique entre les mathématiques et l'art.

II.2.2. Organisation des arts entre eux

Le système des beaux-arts a initialement été fixé par des amateurs ; le public s'est approprié son usage avant qu'il ne soit théorisé et qu'il ne soit l'objet d'enquêtes philosophiques[31]. Savoir pourquoi finalement les arts ont été réunis, au préalable par

[29] On pourra lire à propos [Cassirer 1932, 278-280].

[30] Peut-être faudrait-il écrire : « les premières réflexions sur l'art dans son acception moderne », ou préciser : « les nouvelles réflexions sur l'art qui lui confèrent son acception moderne ».

[31] Cf. [Kristeller 1999, 59-60]

le public, en un système qui est encore dans une certaine mesure, d'actualité, est certainement une question intéressante mais néanmoins hors de propos. Ce qui importe en revanche est de saisir le rôle et la place de la notion de beauté dans le courant des doctrines et des théories qui font l'assise philosophique de cette réunion. D'une part, la beauté a fini par devenir centrale dans les questions relatives à l'art et d'autre part elle a été peu à peu conçue comme la propriété commune à l'ensemble des activités artistiques. La beauté n'est plus seulement une propriété des œuvres d'art mais elle devient la caractéristique qui fait d'une œuvre une œuvre d'art. C'est elle qui a permis de réunir parmi les activités créatrices les activités artistiques. Il est évident que la beauté n'a pas à cette époque, pas plus qu'avant ni même après le dix-huitième siècle, une signification nette et déterminée, partagée par l'ensemble des philosophes. Néanmoins, dans le cadre de ce débat, ni la façon dont est pensée la beauté ni la perspective sous laquelle elle se range ne modifient significativement les conclusions. Le seul fait d'importance est que la notion de beauté, qu'elle soit conçue comme une idée platonicienne ou comme manifestation sensible de la perfection, prend la première place dans la discussion sur le fondement commun des arts. Ces dernières réflexions pourraient laisser penser que l'élaboration du système des beaux-arts, ou tout au moins la classification moderne des arts entres eux, a donné lieu à des discussions explicites sur ce sujet. Or, ce n'est pas le cas. En effet, mis à part peut-être l'ouvrage de l'Abbé Batteux, dont je parlerai bientôt, peu d'écrits témoignent d'une réelle démarche systématique de classification et d'organisation des arts. Ce système s'est imposé peu à peu, il est le fruit d'un faisceau de constructions philosophiques et de discussions d'amateurs. Rares sont d'ailleurs les historiens de l'art ou de l'esthétique qui soulignent l'avènement du système des beaux-arts, considéré la plupart du temps comme une acquisition évidente du dix-huitième siècle. Pourtant, dans la majeure partie des ouvrages qui contribuèrent à l'élaboration de l'esthétique, ou en tout cas à son autonomie, on ne trouve pas de liste explicite qui recense l'ensemble des arts. Par contre, la beauté apparaît comme le ciment qui relie les activités artistiques.

En Angleterre par exemple, les différents traités et écrits sur les arts témoignent de la prise de conscience des affinités des arts entre eux sans toutefois en faire un inventaire mais en comparant la peinture avec la musique, la poésie, ou l'architecture et le jardinage, etc. Même Shaftesbury, qui eut une grande influence

dans le domaine de l'esthétique, n'établit pas à proprement parler de système des arts[32]. Sa motivation ne semble pas tant d'élaborer une classification des arts[33] que de relier l'art à la beauté :

> « Il semble y avoir chez Shaftesbury une tendance à associer non seulement la beauté des sens aux arts de la vue et à la musique, mais aussi la beauté du caractère et de la vertu, la beauté morale, à la poésie. (…) il ne s'agit pas simplement d'un reste de l'ancienne interprétation moralisante de la poésie, mais d'une tentative pour rattacher le système des beaux-arts alors en formation à l'échelle platonicienne de la beauté. » [Kristeller 1999, 77 n1]

De la même façon, on ne trouvera pas dans l'ouvrage du philosophe allemand Baumgarten de liste définitive qui rassemblerait les arts. Cependant, en décrivant le fonctionnement des lois de l'esthétique, ce dernier cite la beauté comme essence commune à tous les arts :

> « Les lois de l'art esthétique, s'éparpillant à travers l'ensemble des arts libéraux, forment pour ainsi dire la constellation des arts particuliers, et étendent ainsi leur sphère d'action : elles entrent en fonction partout où se trouve quelque objet qu'il n'est pas nécessaire de connaître scientifiquement, mais qu'il vaut mieux connaître de belle façon que de manière laide. C'est donc le tout de la constellation, plutôt qu'un des arts particuliers quel qu'il soit, qui mérite d'être ramené à la forme d'un art, de façon à constituer par la suite un système de la beauté présente dans la connaissance, système qui sera plus complet que l'amas de disciplines distinctes qui se laisse déduire de cette même constellation (…) d'arts. Il est toutefois impossible d'espérer que les arts

---

[32] Sur ce point particulier, Shaftesbury n'apparaît pas, d'après Kristeller, comme particulièrement novateur :

> « (…) bien que l'on trouve fréquemment dans ses écrits [ceux de Shaftesbury] des allusions à des arts spécifiques, et que certaines de ses œuvres soient intégralement consacrées à la peinture ou à la poésie, les arts de la vue et la musique ne sont guère fréquents, et ne contiennent pas d'idées plus spécifiques que celle qu'on peut trouver chez des auteurs antérieurs. » [Kristeller 1999, 76]

[33] Un trait dominant des prémisses de l'élaboration de l'esthétique est d'après Cassirer, le rejet de toute construction philosophique systématique, et ce, jusqu'à l'implantation de la philosophie de Leibniz et de l'école de Christian Wolff, (cf. [Cassirer 1932, 322]). Shaftesbury ne fait pas exception :

> « Et de même en Angleterre, c'est justement le penseur le plus profond et le plus riche dans le domaine de l'esthétique, le véritable fondateur et instigateur de son développement futur qui a dédaigné et récusé la contrainte de tout système philosophique. Shaftesbury avait lancé ce trait : « Le chemin le plus sensé pour devenir fou est de passer par un système » {Soliloquy or Advice to an Author, Part.III, Sect.I. Characteristics I, p.290} » [Cassirer 1932, 322-323]

L'absence de toute caractérisation systématique des beaux-arts de la philosophie dans Shaftesbury n'est pas surprenante à la vue de cette citation.

> particuliers, vu leur infinie variété, forment un système absolument complet ; à moins que l'on ne choisisse de remonter jusqu'aux sources de la beauté et de la connaissance, jusqu'à leur essence, de façon à explorer les premières divisions de leur concept (…).» [Baumgarten 1750, 146-147]

Dans la philosophie de Baumgarten, le fondement commun des arts est la beauté, ce qui les distingue fait suite à cette première et nécessaire caractéristique[34]. Il n'est nul besoin ici de s'étendre sur la signification de la beauté dans la pensée du philosophe allemand, seul importe de saisir que, quand bien même la mise au point du système des beaux-arts, au sens moderne, n'est pas la préoccupation majeure, le désir de placer la beauté au centre de discussions sur l'art est omniprésent dans les débats philosophiques du XVIIIème siècle. Toutefois, en France, l'œuvre de l'abbé Batteux se distingue en cela que son ambition est d'établir un principe commun à tous les arts, qui donnerait lieu par la suite à une organisation systématique. Le titre de son ouvrage est suffisamment évocateur : Des Beaux-arts réduits à un même principe. Il s'agit donc de chercher le dénominateur commun qui permet de rassembler les arts entre eux. La méthode de l'auteur est directement inspirée de la méthode scientifique. Cette dernière ayant largement fait ses preuves, il semble naturel de vouloir la transporter dans d'autres domaines pour s'approprier ses bienfaits. Et Batteux l'annonce clairement dans sa préface générale :

> « Imitons les vrais physiciens, qui amassent des expériences, et fondent ensuite sur elles un système qui les réduit en principes » [Batteux 1746, Xij]

Le fondement commun que tente d'établir l'auteur à partir de l'analyse des divers arts est l'imitation de la belle nature. Cela n'est pas spécifiquement novateur en soi. Batteux se place directement sous l'autorité des Anciens et écrit dès le début de son ouvrage qu'il s'inspire de la poétique d'Aristote pour élargir le principe d'imitation aux arts autres que la peinture et la poésie[35]. L'apport principal de l'œuvre de Batteux réside dans sa classification des arts, en particulier des beaux-arts dont il dresse la liste quasi définitive. Il commence par donner une définition générale de l'art :

---

[34] A propos de l'importance de la beauté comme forme de connaissance et comme essence de l'art dans la philosophie de Baumgarten, on pourra lire [Cassirer 1932, 327-345].

[35] Cf. [Batteux 1746, 1-6]

> « Un Art en général est une collection ou un recueil de règles pour bien faire, ce qui peut être fait bien ou mal, car ce qui ne peut être fait que bien ou que mal n'a pas besoin d'art. » [Batteux 1746, 8]

Il distingue alors trois sortes d'arts : les arts mécaniques, qui sont ceux qui ont pour objet le besoin, les beaux-arts, qui ont pour objet le plaisir, et l'on devine ici l'influence aristotélicienne, et enfin les arts qui combinent le plaisir et le besoin, ou l'utile. Chacun de ces arts ont en commun l'imitation de la belle nature. Ce ne sont pas les seuls beaux-arts que Batteux rassemblent autour du principe d'imitation de la belle nature mais bien chacun des arts des trois sortes différentes. Il ne distingue alors les catégories entres elles qu'à partir de leur objet propre et de leur fin.

> « (…) la nature seule est l'objet de tous les arts. Elle contient tous nos besoins et tous nos plaisirs ; les Arts mécaniques et les Arts de goût ne sont faits que pour les en tirer. » [Batteux 1746, 12]

Le propre de l'art, au sens moderne, sera donc d'imiter la belle nature en vue d'en retirer du plaisir (dans la contemplation de l'œuvre ainsi produite). Si l'idée d'un principe commun à tous les arts peut être séduisante, la classification de Batteux n'a pas rencontré un grand succès. Le reproche qui lui est adressé tient à la trop grande généralité de son principe ainsi qu'au manque de clarté quant à ce qu'il faut entendre par « belle nature »[36].

Il ne s'agit pas de faire ici une genèse de l'élaboration du système des beaux-arts ni une histoire de cette classification. L'objectif est simplement de mettre en lumière la place et le rôle de la notion de beauté dans l'évolution de la signification de l'art. Le bref survol des tendances principales sur ce sujet semble à ce titre suffisant. Il a certes été fait l'impasse des ramifications qui ont permis l'émergence du système des beaux-arts tel qu'on le connaît aujourd'hui, de la même façon qu'il n'a pas été fait mention des influences souterraines qui ont amené les auteurs sélectionnés à développer leur thèse. Cependant, en choisissant de faire référence à l'un des acteurs principaux de l'histoire de la naissance du système des beaux-arts et

[36] Ce reproche lui est notamment adressé par Diderot dans son article sur les Arts de l'Encyclopédie. Pour des références davantage détaillées sur la réception du traité de Batteux ainsi que sur les critiques qu'il reçut, on pourra lire [Kristeller 1999, 66-68].

de l'esthétique en Angleterre, en Allemagne et en France, à savoir, Shaftesbury, Baumgarten et l'abbé Batteux, j'espère avoir montré que malgré les différences de conception, les discussions sur l'art tendent, à partir du XVIIIème siècle, à converger vers la notion de beauté. Parallèlement à cela, le discours sur la beauté se modifie et le dogme platonicien commence à chanceler ; les nouvelles spéculations sur la beauté la désolidarisent peu à peu des concepts de bien et de vrai. Le beau devient un concept autonome et c'est peut-être cette nouvelle liberté qui va permettre une plus grande concentration sur ses caractéristiques.

II.2.3. Conclusion

Dans le cadre de la problématique qui motive cette enquête sur la formation du système des beaux-arts, une première conclusion serait que si les arts sont réunis entre eux autour de la notion de beauté, alors la comparaison des mathématiques avec l'art dans le but de justifier la beauté de ces dernières semble faire sens. La beauté apparaît en effet comme un pont susceptible de relier les mathématiques et l'art. Cependant, cette démarche se révèle rapidement inutile, elle trahit une mentalité, si l'on peut dire, bien actuelle, mentalité qui veut que l'on prétexte une similarité entre les mathématiques et l'art pour justifier la beauté de cette science. Or, au moment où le système des beaux-arts se met en place, le besoin d'en référer à ce dernier pour défendre le mérite esthétique des mathématiques ne se fait nullement ressentir. Que les mathématiques puissent être qualifier de belles, qu'elles procèdent d'une expérience esthétique est un fait qui ne pose pas de problème outre mesure aux philosophes du XVIIIème siècle. La majeure partie des traités sur le beau qui paraissent alors mentionne et disserte sur cette qualité des mathématiques sans pour autant faire preuve d'audace. Au contraire, c'est négliger cette propriété des mathématiques qui pourrait paraître choquant. Je vais avoir l'occasion de montrer et de développer ces derniers points dans la section suivante.

III. Nouvelles spéculations sur le beau et beauté des mathématiques au XVIIIème siècle

III.1. Autonomie du beau

Durant le XVIIIème siècle, de nouvelles conceptions du beau se libèrent de la relation de dépendance liant, depuis l'Antiquité grecque, le beau le bien, et le vrai[37]. Plus précisément, il semblerait qu'avec l'œuvre de Kant[38] le beau acquiert un statut de concept autonome[39]. Cependant, on peut formuler deux remarques concernant l'évolution de la signification philosophique du beau qui pourront alimenter notre recherche sur l'étude de son rapport avec les mathématiques. D'un point de vue général et synthétique, on peut remarquer que si le XVIIIème est perçu comme le siècle marquant l'affranchissement du beau par rapport au bien et au vrai, il est rarement souligné que ce même concept tombe alors sous une autre dépendance, celle de l'art. En effet, les arts sont rassemblés autour de la beauté, mais la beauté elle-même entretient peu à peu une relation de dépendance avec l'art. Cette dépendance prend, à partir de la fin du XVIIIème et jusqu'à nos jours, une importance grandissante. Il devient difficile de parler de beauté sans parler d'art. L'autonomie annoncée de la beauté et plus généralement, du beau, ne l'est qu'en théorie. Dans les faits, le beau, affranchi de la dominance du triptyque platonicien, n'en tombe pas moins sous la dominance de l'art. Il y a bien entendu des exceptions, et certaines approches philosophiques contemporaines du beau en apportent un traitement indépendant du domaine artistique. Toutefois, la majeure partie des débats philosophiques que connaît le beau depuis la fin du XVIIIème est centrée sur l'art. Le beau, par exemple, comme sujet d'article dans l'Encyclopaedia Universalis [40] est

---

[37] Cf. [Schaeffer 1992], [Cassirer 1951, 275-345]

[38] Si l'œuvre de Kant marque une rupture dans la conception classique du beau, et comme on le verra, amorce la dichotomie entre cognitif et esthétique, il n'en reste pas moins envisageable de relier l'art et les mathématiques dans l'œuvre de Kant : c'est en particulier ce à quoi se sont attachés Léon Chernyak et David Kazhdan dans l'article "Kant and the Aesthetic-Expressive Vision of Mathematics" (cf. [Chernyak & Kazhdan 1997]) ainsi que A. T. Winterbourne dans l'article "Art and Mathematics in Kant's Critical Philosophy" (cf. [Winterbourne 1988]).

[39] Il serait intéressant de déterminer le gain, ou les avantages philosophiques obtenus par le biais de cet affranchissement ainsi que les raisons profondes qui l'ont motivé. Ces interrogations dépassent largement le cadre de ce travail, il faudra donc les laisser de côté.

[40] Article de Mikel Dufrenne, « Art », cf. [Dufrenne 1995].

traité comme sous partie du sujet général : l'art. De la même façon, dans l'enseignement philosophique classique, le beau fait habituellement parti du cours sur l'art. Je n'entends pas porter ces remarques comme jugement de valeur. Elles sont à prendre comme un simple constat tendant d'une part, à montrer que la liberté, ou l'autonomie, du beau, est supposée, mais ne l'est peut-être pas en pratique et d'autre part à expliquer en partie pourquoi la beauté des mathématiques, si souvent évoquées par les mathématiciens, n'est pas l'objet d'une enquête philosophique systématique. Les mathématiques n'étant pas institutionnellement considérées comme un art, on ne parvient à évoquer leur aspect esthétique que de façon anecdotique, un peu comme si la valeur esthétique des mathématiques était de qualité moindre, à un niveau philosophique, que celle d'une œuvre d'art, comme si la beauté des mathématiques ne pouvait nous apprendre grand-chose de la beauté en général. Ceci n'est pour l'instant qu'une hypothèse mais il est envisageable que le manque d'intérêt de la philosophie contemporaine pour la beauté et l'attrait esthétique des mathématiques soit une conséquence de la dépendance, plus ou moins consciente, qui lie la beauté avec le monde des arts. On peut trouver un premier argument qui, s'il ne permet pas de prouver directement cette hypothèse, permet tout au moins de la rendre légitime. Il s'agit en effet de remarquer que, tant qu'art et beauté n'entretenaient pas de relation privilégiée, voire d'exclusivité, l'étude de la beauté des mathématiques était une partie constituante d'études générales sur le beau ; la section suivante va se consacrer à cela.

III.2. La beauté des mathématiques

Le premier exemple traité est celui de Crouzas qui consacre dans son *Traité sur le beau* un chapitre entier[41] à la beauté des sciences et des mathématiques en particulier, qu'il augmente en outre lors de la deuxième édition, suite à la demande qui lui en a été faite[42]. La principale caractéristique de la beauté réside, d'après

[41]Cf. Chapitre 9 « De la beauté des Sciences » *in* [Crouzas 1724].

42 Dans la préface à la seconde édition Crouzas écrit :

> « On a souhaité que je m'étendisse davantage sur la Beauté des sciences ; je l'ai fait : Mais en même temps j'ai eu soin de ne rien ajouter qui ne fût à la portée de ceux qui liront ce Chapitre avec attention. » [Crouzas 1724, 14]

l'auteur, dans le principe de l'unité dans la variété, principe qui se trouve appliqué de façon éclatante dans les mathématiques :

> « C'est encore dans les spéculations de cette science [les mathématiques] plus que dans aucune autre, que l'esprit découvre avec ravissement des uniformités qui se soutiennent toujours parmi les diversitez infinies. Je ne m'étendrai pas à donner des exemples de cette vérité, ceux à qui ces Belles Sciences sont connues se les rappelleront incontinent, et ceux qui n'en sont pas encore instruits ne les comprendroient pas. » [Crouzas 1724, 190]

Tout au long du chapitre Crouzas commente la beauté des mathématiques en choisissant des exemples tirés de l'algèbre, la géométrie ou l'astronomie, et toujours par rapport à la maxime de la variété ramenée à l'uniformité. Sa démarche n'est pas tant d'asseoir la beauté de cette science que de montrer le bien fondé de la caractéristique de la beauté qu'il a choisie. Autrement dit, Crouzas ne construit pas son raisonnement en vue de convaincre le lecteur que les mathématiques sont belles, ceci semble se passer de démonstration, mais il tâche d'expliquer pourquoi nous les trouvons belles. En ce sens là, l'attrait esthétique des mathématiques joue un rôle dans sa construction philosophique du beau. Elles servent en partie à justifier les caractéristiques du beau telles que Crouzas les a établies.

On pourra objecter que Crouzas applique sa conception de la beauté aussi bien à la vertu, la religion, qu'aux mathématiques et à la musique par exemple. Sa conception serait tellement vaste que sa pertinence serait mise en défaut. Ce n'est peut-être pas faux. Le but ici n'est pas de défendre le point de vue de Crouzas quant aux caractéristiques fondamentales de la beauté, il est simplement de montrer, ou tout au moins de suggérer à travers cet exemple, combien l'appréhension de la beauté mathématique est différente tant que la beauté n'est pas l'apanage de l'art. L'œuvre de Hutcheson fournit un exemple plus frappant encore. Philosophe irlandais, disciple de Shaftesbury, Hutcheson eut une grande influence sur ses contemporains. Anne-Dominique Balmès souligne dans l'avant propos de l'œuvre qui nous intéresse ici, Recherche sur l'origine de nos idées de la beauté et de la vertu, ([Hutcheson 1725]) que les ouvrages principaux de Hutcheson connurent de multiples rééditions et surtout furent imprimés aux Etats-Unis et traduits en français et en allemand avant

même que ne le soient ceux de Hume[43]. L'œuvre en question se compose de deux traités, l'un portant sur le sens du beau, l'autre sur le sens moral. C'est donc en particulier le premier traité qui va m'intéresser dans le cadre de ces réflexions[44]. La tâche à laquelle s'attelle l'auteur dans le premier traité est d'examiner la qualité des objets qui excite l'idée de beauté ou qui en est la cause [Hutcheson 1725, 61]. La description qu'il donne alors est de nature mathématique pourrait-on dire, l'on verra bientôt pourquoi, et les exemples qu'il choisit sont tirés de cette science. De plus, Anne Dominique Balmès note :

> « On remarquera ainsi qu'à l'exception de quelques poètes (qui sont d'ailleurs davantage cités pour la faculté de tel ou tel de leurs vers d'illustrer une théorie que pour la beauté intrinsèque de ceux-ci), Euclide est le seul « artiste » créateur cité (après Dieu). Pas un peintre, sculpteur, architecte ou musicien dont le nom soit mentionné. » [Hutcheson 1725, 9] [45]

On mesure ici l'importance et le rôle des mathématiques dans la conception de la beauté que propose Hutcheson. Après avoir distingué les *sens*, les *perceptions* et les *idées* (section I), l'auteur propose une analyse du fondement ou de la cause générale des idées de beauté chez les hommes (section II). Il commence alors par établir le principe de l'uniformité au sein de la variété et détaille ensuite en dissertant sur l'uniformité puis la variété :

> « Les figures qui excitent en nous les idées de beauté semblent être celles dans lesquelles il y a de l'uniformité au sein de la variété. (…) Mais ce que nous appelons beau dans les objets, pour parler dans le style mathématique, paraît être en raison composée de l'uniformité et de la variété. De sorte que là où l'uniformité est égale, la beauté est fonction de la variété, et réciproquement. (…)
>
> Nous dirons pour commencer, qu'à uniformité égale, la variété augmente la beauté. La beauté d'un triangle équilatéral est moindre que celle d'un carré, qui est elle-même moindre que celle d'un pentagone, celle-ci étant encore surpassée par celle de l'hexagone. (…)

[43] Cf. [Hutcheson 1725, 8]

[44] Il faut cependant noter qu'en distinguant le sens du beau du sens du bien, Hutcheson contribue à préparer le terrain à une esthétique autonome. On pourra lire à ce propos [Kristeller 1999, 78].

[45] Note 4 N.D.T.

> La plus grande uniformité au sein d'une variété égale augmente la beauté dans les exemple suivants : le triangle équilatéral, ou même isocèle, surpasse le scalène ; le carré surpasse le rhombe ou losange, qui surpasse à son tour le rhomboïde, plus beau pourtant que le trapèze ou tout autre figure dont les côtés sont courbes ou irréguliers. » [Hutcheson 1725, 62]

Cette citation n'est qu'un échantillon, le texte de Hutcheson regorge d'exemples mathématiques[46]. Ce qu'il faut souligner, c'est le double, voire triple rôle, que jouent les mathématiques dans cet ouvrage. En effet, elles ont un rôle de modèle : Hutcheson introduit dans ses définitions une structure quasi-mathématique. Par exemple, il n'énonce pas simplement le principe de l'unité dans la variété mais le nuance en introduisant une notion de degré : à variété égale, la plus grande uniformité augmente la beauté, et vice-versa. Ce rôle est sûrement celui qui présente le moins d'intérêt par rapport à mon propos immédiat : le succès et le progrès des mathématiques du XVIIIème siècle expliquent sans aucun doute que l'on ait pu vouloir s'approprier ses méthodes. Le second rôle est qu'elles apparaissent comme source d'inspiration pour la mise au point des critères esthétiques. L'ensemble du texte où Hutcheson décrit les qualités qui sont la cause de la beauté est entièrement basé sur des exemples mathématiques. Ce sont ces derniers qui alimentent sa recherche et lui permettent d'affiner et de détailler le principe premier de l'unité dans la variété. Enfin, les mathématiques apparaissent comme domaine d'application des résultats auquel parvient Hutcheson dans sa *recherche sur l'origine de nos idées de la beauté*. Une section entière est effectivement consacrée à l'étude de la beauté mathématique, de la beauté des théorèmes, à celle des corollaires, propositions, etc.[47].

III.3. Conclusion

Les mathématiques ont donc eu au cours du XVIIIème siècle un rôle d'inspiration pour établir les caractéristiques de la beauté, mais surtout les critères

[46] Pour une discussion sur la conception de la beauté des mathématiques dans l'œuvre de Hutcheson, on pourra lire : [Kivy, 1976].

[47] Et l'on remarquera alors, comme le souligne Balmès (cf. [Hutcheson 1725, 76], note1NDT) que le seul chapitre du traité d'Hutcheson dont le titre fait explicitement référence aux œuvres d'art est placé dans la section consacrée à la beauté de théorèmes.

ainsi obtenus s'y appliquent en retour. C'est ce point en particulier qui est fondamental : en effet, on a pu insister sur le rôle des mathématiques lors de l'élaboration des principes esthétiques mais il est rarement mentionné que les mathématiques s'en trouvaient parées en retour[48]. Le lien qui relie mathématiques et beauté dès le début du XVIIIème siècle ne s'arrête pas au rôle de source d'inspiration ou de modèle des mathématiques pour établir des canons esthétiques, sinon les mêmes auteurs qui établissent ces canons ne montreraient pas nécessairement que les mathématiques les possèdent en retour. Un texte qui décrit les caractéristiques de la beauté n'est pas nécessairement beau. Autrement dit, les mathématiques ne font pas simplement référence à la beauté, en permettant d'établir des critères, mais elles exemplifient la beauté en cela qu'elles possèdent l'étiquette « avoir les qualités qui excitent en nous l'idée de beauté ». La tendance actuelle veut que lorsque l'on évoque les affinités entre les mathématiques et l'art, on fasse référence en fait à la participation des mathématiques au fonctionnement esthétique d'une œuvre. De nombreux artistes contemporains se réclament d'une approche mathématique dans l'élaboration de leurs travaux, et beaucoup attribuent à l'utilisation des mathématiques dans l'art une vertu esthétique. Par contre, les mathématiques ne sont plus, ou seulement dans des cas isolés, considérées comme échantillon de la beauté. Ceci n'est pas nécessairement la preuve de leur manque de mérite

---

[48] Cassirer par exemple justifie l'importance que prend au XVIIIème siècle le précepte de l'unité dans la variété en faisant référence à l'essor des mathématiques :

> « La pensée mathématiques aperçoit enfin la véritable « unité dans la multiplicité ». Elle n'entend pas nier la diversité comme telle, ni la récuser, mais au contraire la comprendre et la fonder. La formule de la fonction sous sa forme générale ne contient, bien entendu, que la règle universelle permettant de déterminer l'interdépendance des variables mais il est toujours possible de se reporter de la formule générale à une figure particulière quelconque caractérisée, comme telle, par des grandeurs déterminées qui sont ses constantes individuelles. Toutes déterminations de ces grandeurs – une longueur déterminée, par exemple, que nous attribuons au petit axe de l'ellipse - aboutit à un nouveau cas particulier ; mais tous ces cas particuliers « sont » en réalité le même pour autant qu'ils ont pour le géomètre une seule et même signification. C'est un même sens géométrique, un être identique et une vérité identique de l'ellipse qui se cachent pour nous dans la masse hétéroclite des figures particulières et que la formule analytique caractérise et en quelque sorte dévoile dans son essence propre. C'est à l'imitation de cette « unité dans la multiplicité » des mathématiques que s'est constituée l' « unité dans la multiplicité » esthétique, exigée par la théorie classique. » [Cassirer 1932, 286]

Pour Cassirer, l'esthétique classique imite les sciences mathématiques et physiques et son élaboration n'a été possible que compte tenu des progrès de ces sciences. Il établit le parallélisme entre art et mathématique comme la thèse centrale du classicisme français. (cf. ibid. 278-293) Cependant, s'il fait référence au rôle de modèle qu'on pu jouer les mathématiques dans l'histoire de l'esthétique, il n'évoque pas le fait que les mathématiques ont été l'objet d'enquête esthétique, au même titre que l'on été les œuvres d'art.

esthétique avéré. Peut-être est-ce la conséquence de la direction adoptée par les théories esthétiques et la philosophie de l'art contemporaines, qui tendent à évacuer tout recours au concept de beauté et n'ont pas en ce sens, besoin d'en étudier des échantillons[49]. Cependant, le point de vue que j'entends soutenir est que l'autonomie du beau par rapport au bien et au vrai s'est effectuée au prix d'une quasi exclusivité du beau par rapport à l'art. Une trop grande spécialisation peut être aussi dommageable qu'une trop grande généralité. La restriction du beau au domaine artistique exclut de fait les mathématiques comme champ d'investigation. La principale perte de cette exclusion n'est pas, à mon sens, ce que l'on pourrait apprendre sur le beau en étudiant les mathématiques, mais plutôt ce que perd l'esthétique, entendue comme étude de la perception et non du raisonnement. Le lien qui relie les mathématiques à l'art n'est pas la beauté mais il est basé sur des considérations esthétiques[50].

[49] Cf. [Cometti, Pouivet & Morizot 2000, 2 ; 7-31]

[50] Engler par exemple défend le point de vue selon lequel la comparaison entre l'art et les mathématiques, et plus généralement entre l'art et la science, est fructueuse et instructive seulement dans la mesure où elle prend l'esthétique pour dénominateur commun entre ces deux disciplines (cf. [Engler 1994, 207]).

B. Description systématique

I. Mathématiques et art : question de finalité

Une solution théorique au problème de la justification de l'aspect esthétique des mathématiques peut être envisagée sur la base d'une comparaison entre leur finalité et celle de l'art[51]. Cette comparaison donne lieu à deux thèses, ou plutôt deux points de vue, principaux : l'un qui défend un but commun à ces activités, et le second qui conclue non à une unification, mais à un déplacement de fonctionnalité : ce qui est but pour l'art est méthode pour les mathématiques.

I.1. La beauté, but des mathématiques

La première thèse peut être défendue selon deux principaux points de vue, ou selon deux cadres ontologique et épistémologique. Chacune de ces solutions emprunte des éléments de la conception de la beauté des mathématiques que l'on peut trouver chez Platon et Poincaré. Bien que l'on ne trouve pas explicitement chez ces auteurs les thèses que je vais développer, ces emprunts justifient néanmoins le choix de terminologie suivant :

1) Solution platonicienne
2) Solution poincaréenne

Ces stratégies concèdent la beauté comme but commun à l'art et aux mathématiques mais elles divergent quant à la conception qui en est faite. Or, c'est justement cette conception qui va faire la différence en ce qui concerne l'interprétation de la thèse qui relie les mathématiques à l'art par le biais de leur finalité commune.

[51] Que la beauté puisse être la finalité des mathématiques, ou plus largement, des sciences mathématiques, est une idée largement répandue mais rarement analysée de façon systématique : voir par exemple [Chandrasekhar 1987] & [Chandrasekhar 1989].

En effet, la thèse en elle-même peut se passer de l'adoption de cadres conceptuels particuliers, et c'est d'ailleurs plus un « point de vue » qu'une véritable thèse. Généralement, la beauté est considérée comme but des mathématiques dès lors que l'analyse évacue comme finalité possible la vérité ou l'utilité. La vérité, entendue comme correction ou adéquation au réel, n'est pas nécessairement le but des mathématiques, ni des sciences en général. Comme l'explique Goodman :

> « En dépit de la doctrine communément acceptée, la vérité par elle-même importe très peu en science. Nous pouvons engendrer à volonté des volumes de vérités dûment fondées aussi longtemps que nous ne soucions pas de leur importance ; les tables de multiplication sont inépuisables et les vérités empiriques abondent. Les hypothèses scientifiques, si vraies soient-elles, sont sans valeur si elles ne satisfont pas à des exigences minimales de portées ou de spécificité que leur impose notre recherche, si elles n'aboutissent pas à une analyse ou à une synthèse intéressante, si elles ne soulèvent pas des questions significatives ou n'y répondent pas. » [Goodman 1968, 306]

De même, l'utilité ne peut qu'être difficilement admise comme le but ultime des mathématiques. L'histoire nous montre de façon régulière que nombre de théories de mathématiques pures ne trouvent pas d'applications immédiates ou qu'en tout cas elles n'ont pas été élaborées en vue de ces éventuelles applications. Poincaré écrit à ce propos :

> « Une science uniquement faite en vue de ses applications est impossible ; les vérités ne sont fécondes que si elles sont enchaînées les unes aux autres. Si l'on s'attache seulement à celles dont on attend un résultat immédiat, les anneaux intermédiaires manqueront, et il n'y aura plus de chaîne. » [Poincaré 1905, 103]

Si la vérité et l'utilité ne s'intègrent pas à la finalité vers laquelle le mathématicien doit obligatoirement orienter ses travaux, quelle est-elle alors ? La recherche de la beauté semble être une réponse envisageable. Tout comme l'artiste, le mathématicien, au-delà des soucis techniques, vise une fin esthétique. Ceci est un *topos* dans la littérature sur les mathématiques. Citons par exemple Bell :

> "Guided only by their feeling for symmetry, simplicity, and generality, and an indefinable sense of the fitness of things, creative mathematicians now, as in the past, are inspired by the art of mathematics rather by any prospect of ultimate usefullness." [52]

De manière plus générale, on retrouve aussi cette idée de la beauté comme quête première parmi les physiciens, où l'utilité aurait pu sembler primordiale. L'un des plus célèbres à défendre ce point de vue est Dirac. Il le justifie par rapport à son expérience personnelle :

> "A good deal of my research work in physics has consisted in not setting out to solve some particular problem, but simply examining mathematical quantities of a king that physicists use and trying to fit them together in an interesting way, regardless of any application that the work may have. It is simply a search for pretty mathematics." [Dirac1982, 603]

Quelles sont les conditions sous lesquelles on peut attribuer la beauté comme but des mathématiques ? Cette attribution ne pose pas, en elle-même, de véritables difficultés et ne nécessite pas de précaution particulière. C'est seulement lorsque l'on entend rendre compte des questions qui en découlent qu'il va falloir faire des choix et des concessions ontologiques. En effet, si la vérité et l'utilité, externe ou interne[53], ne sont pas des qualités suffisantes pour la sélection d'un résultat mathématique, elles sont toutefois nécessaires. Comment alors, en poursuivant un but esthétique, puis-je m'assurer que ces critères soient toujours satisfaits?

Répondre à ces questions nécessite un accord préalable sur le sens à donner à la beauté.

---

[52]Consulter :http://ens.math.univ-montp2.fr/SPIP/-Bell-Eric-Temple-1883-1960,2309-

[53] J'entends par utilité externe toute application à des domaines variés et différents des mathématiques. Cette forme d'utilité est à distinguer de celle, interne, qui correspond à l'usage que l'on peut faire à l'intérieur des mathématiques d'un résultat. Les résultats qui présentent une utilité interne sont donc ceux qui par exemple, peuvent offrir de nouvelles perspectives dans un champ mathématique particulier, servir à la démonstration d'une conjecture, ou permettre l'élaboration de nouvelles théories. Ou plus simplement, qui permettent une meilleure compréhension d'une théorie en rapprochant des faits isolés.

I.2. Solution platonicienne

Des réponses à ces questions peuvent être trouvées à partir de l'adoption d'une conception platonicienne de la beauté. Dans ce cas, la beauté, ou l'idée de beauté, se confond sous un idéal avec la vérité. La poursuite de la beauté équivaut alors à la poursuite de la vérité. Les préoccupations esthétiques qui animent le mathématicien ne le détournent donc pas de celles qui servent la vérité. Plus exactement, il s'agit d'une seule et même quête. Dire que les mathématiques ont pour but la beauté revient alors à dire qu'elles sont un moyen pour l'homme de tendre vers l'unique connaissance désirable, celle de la vérité, dans un sens platonicien. Une telle conception de la finalité des mathématiques traduit autant leur rapport à la vérité que leur aspect esthétique.

Cette solution soulève néanmoins deux types de difficultés, l'une externe et l'autre interne :

La première porte sur le fait que si les mathématiques visent théoriquement la beauté, la pratique mathématique ne rend pas compte de cette ambition. On trouve cette objection chez Agassi, bien qu'il fasse référence aux liens plus généraux entre science et art. En effet, ce dernier souligne le fait que si la science et l'art peuvent être reliés sous un idéal platonicien - la beauté comme fin commune - ce lien ne résiste pas à une confrontation entre la démarche concrète du scientifique et celle de l'artiste. En assumant un point de vue platonicien, Agassi prétend que quand bien même le but ultime de la science est la beauté, son but immédiat est différent :

> "We may say, and I believe we may truly say, that the end of science, its final and ideal end, the Truth, is identical with the final end of art, the Beautiful. It is no accident that Plato's most satisfactory exposition of his theory of ideas is to be found in his Symposium, that classic study of beauty. The ideas, the world of ideas, is True, Beautiful, and good. But scientific research still is, in a straightforward way, the search for truth, not for beauty, and artistic creation aims at beauty, not at truth. Hence, though the final end, perfection itself, may be the same for art and for science (extentionally speaking), the immediate end (intentionally speaking) of artistic and of scientific activity are obviously different." [Agassi 1979, 129]

La difficulté est donc la suivante : si la beauté est le but idéal, ultime, de la science, et des mathématiques en particulier, les méthodes mises en œuvre dans le processus du développement de cette dernière, visent la vérité et non la beauté. Pour asseoir cette objection et l'appliquer au cas des mathématiques, il faut vérifier qu'effectivement, la méthode mathématique ne sert pas une cause esthétique.

La seconde difficulté concerne l'explication de l'efficacité des mathématiques (c'est-à-dire parvenir à expliquer l'efficacité et l'utilité des mathématiques si leur but est la beauté avant tout). L'argumentation va être différente selon que l'on adopte un point de vue platoniste ou non réaliste des mathématiques. Je distingue alors entre la version forte (construite à partir d'une position platoniste par rapport aux mathématiques) de la solution platonicienne et sa version modérée (élaborée à partir d'un point de vue non réaliste par rapport aux mathématiques mais réaliste par rapport à la beauté).

L'examen de ces versions montrera que la solution platonicienne est cohérente dans les deux cas. Cependant, il montrera surtout que dans sa version forte, la solution platonicienne s'apparente en fait à une apologie des mathématiques, la notion de but peut se traduire dans ce cas par « une raison d'être », alors que la version modérée s'inscrit dans une perspective méthodologique. De plus, je montrerai que, dans sa version forte, l'objection soulevée par Agassi reste entière, alors que dans la version modérée, justement à cause de cette perspective méthodologique, il est possible de l'écarter, ou, tout au moins, elle perd de sa pertinence.

I.2.1. Version forte

Dans un cadre platoniste, à chaque proposition mathématique correspond une réalité. Peut-être que ce que décrit un résultat mathématique n'est pas encore connu mais sa nature ontologique donne l'assurance de son utilité potentielle. Un résultat vrai ne peut pas, dans ce cadre conceptuel, être « vide ».

Puisque le beau est le vrai (platonicien) et que le vrai est un fait existant qui est supposé être un élément utile dans sa structure, en visant le beau, on obtient, avec le vrai, l'utile.

Les mathématiques visent la beauté. Mais cela permet-il de dire qu'elles sont elles-mêmes belles ? En d'autres termes, quelles présuppositions faut-il admettre pour conclure qu'en attribuant la beauté comme but des mathématiques, on justifie que les mathématiques sont elles-mêmes belles ? Ces présuppositions sont au moins au nombre de trois, et elles sont toutes admises par (contenues dans) la version forte.

J'entends en effet montrer que la beauté des mathématiques est une conséquence directe des présupposés initiaux de la solution platonicienne dans sa version forte. Présupposés que l'on peut résumer ainsi :

1) Les faits mathématiques ont une existence indépendante de l'esprit

2) La contemplation de la beauté absolue passe par une élévation de l'âme de la beauté sensible vers la beauté intellectuelle puis vers la beauté telle qu'elle est en soi (la contemplation de la beauté est rendue possible par la contemplation des manifestations sensibles de la beauté)

3) Le but des mathématiques est la beauté

Si l'on met en parallèle ces assertions, alors on ne peut que conclure à la nécessaire beauté des mathématiques, et non seulement qu'elles *visent* la beauté. En effet, si le but des mathématiques est de fournir un accès à la contemplation de la beauté (l'idée de beauté) (point 3), si par ailleurs on ne peut accéder à cette contemplation que par la contemplation des manifestations de la beauté (point 2), alors il faut que les mathématiques possèdent des propriétés esthétiques, ou que la beauté participe aux mathématiques. De plus, l'existence des mathématiques étant supposée indépendante (point 1), leur beauté l'est aussi. C'est-à-dire que les objets

mathématiques présentent une certaine beauté, que je les découvre ou non. La beauté des mathématiques dans ce cas est antérieure à leur découverte, elle ne dépend donc pas de la façon dont elles sont découvertes. Ceci implique une attitude passive du mathématicien face à cet aspect de sa discipline. Ce n'est pas lui qui va tenter de donner aux résultats de ses recherches des propriétés qui les rendraient beaux. Son but est par contre de saisir ces traits esthétiques afin d'accéder à la connaissance de la beauté.

En ce sens, les mathématiques fournissent un moyen d'apprendre, de connaître et de reconnaître ce que peuvent être les propriétés esthétiques. Puisque, en découvrant un résultat mathématique, le mathématicien découvre du même coup une manifestation de la beauté. A mesure qu'il fréquente les mathématiques, il affine sa connaissance de la beauté et de ses propriétés.

En définitive, si aucune méthode esthétique n'est impliquée par l'attribution de la beauté comme finalité des mathématiques, n'est-ce pas finalement l'intention qui prévaut, n'est-ce pas uniquement elle qui détermine le mérite esthétique des mathématiques ? Autrement dit, la solution platonicienne version forte, ne dissimulerait-elle pas un sous bassement intentionnaliste ?

Comme je viens de le montrer, l'aspect esthétique des objets mathématiques est ici antérieur à leur découverte. Dire que le but des mathématiques est la beauté signifie que leur but, leur fonction véritable, est de nous faire connaître la beauté. Le problème ne se pose donc pas en terme d'intentionnalisme ou non, et ce, pour deux raisons :

1) d'une part, une perspective intentionnaliste sous-entend qu'il y a un acte de création et ce n'est pas le cas dans le cadre de la solution platonicienne, version forte. Le mathématicien réaliste ne crée pas mais il découvre. Il n'a pas l'intention de *créer quelque chose de beau* mais il a l'ambition de *découvrir quelque chose de beau.*

2) d'autre part, le but du mathématicien n'est pas de faire de belles mathématiques, elles le sont qu'il les découvre ou non, mais de connaître la Beauté en découvrant les mathématiques. Pour comprendre cela, il faut garder à l'esprit que dans la conception platonicienne de la beauté, la beauté sensible, celle qui se manifeste à l'homme, ne l'est que par la participation de l'idée de beauté.

Il n'y a donc pas à craindre dans ce cas de devoir répondre d'une attitude intentionnaliste pour justifier les traits esthétiques des mathématiques.

La solution platonicienne dans sa version forte peut donc justifier la beauté comme finalité des mathématiques ainsi que l'aspect esthétique de cette science. Cependant, cette solution implique en quelque sorte la promesse que les mathématiques peuvent nous apprendre quelque chose de la beauté. Or, sa trop grande généralité ainsi que le manque de précision quant aux propriétés esthétiques qui concernent effectivement les mathématiques laisse envisager que cette promesse est difficile à tenir. Il n'y a pas en effet d'éléments qui permettent de nuancer la beauté des objets mathématiques. Toute proposition, tout résultat mathématique est également beau, vrai et utile. Une telle généralité ne rend pas compte des différences de mérites esthétiques au sein de l'ensemble des objets mathématiques (théorie, preuve, proposition) dont témoignent pourtant nombre de mathématiciens[54].

De plus, si l'on a vu que l'on pouvait écarter une démarche intentionnaliste sans nuire à la cohérence de l'argumentation platonicienne forte, elle n'en partage pas moins une difficulté : celle de n'induire aucune méthode. En effet, la solution

[54] Penrose en argumentant sur le rôle de l'esthétique en mathématiques propose d'établir des critères pour définir la beauté des mathématiques, il souligne alors que toutes les mathématiques ne sont pas également 'belles' au sens où il l'a défini, cette différence évaluative en termes de beauté ou de propriétés esthétiques entre différentes parties des mathématiques lui permet de justifier alors le rôle de cet aspect des mathématiques (cf. [Penrose 1974]. Dans l'article "The Phenomenology of Mathematical Beauty", G.C. Rota compare de même différents objets mathématiques selon leur beauté relative. Pour lui, parler de la beauté des mathématiques sans introduire une notion de degré ne permet pas de rendre compte de façon satisfaisante de l'importance de l'aspect esthétique des mathématiques. S'il défend la beauté de certains objets mathématiques, il entend montrer que d'autres peuvent être qualifiés de 'laids' (ugly) (cf. [Rota 1997]). A l'instar de Rota, Hardy introduit aussi la notion de 'laideur' de certains objets mathématiques. L'exemple de Hardy est particulièrement significatif par rapport à notre propos dans la mesure où ce dernier inscrit sa conception de la beauté des mathématiques dans un cadre réaliste (cf. [Hardy 1940] & [Jullien 1999, 14 -17]).

platonicienne postule l'identité du vrai et du beau et, dans sa version forte, elle postule en plus cette identité indépendamment de la façon dont on l'obtient. Elle ne permet donc pas non plus de rendre compte du rôle de guide qui est fréquemment attribué à l'attrait esthétique dans le processus de développement des mathématiques.

Cette solution est, sous quelques aspects, peut-être trop théorique pour pouvoir finalement expliquer le rôle de l'attrait esthétique en mathématiques ainsi que la caractérisation de la beauté mathématique.

De plus, le fait qu'elle n'induise pas de méthode particulière ni ne nous renseigne sur les critères possibles de la beauté mathématique laisse l'objection d'Agassi sans solution. En effet, comme je l'ai noté, Agassi remarque que si la science vise la beauté, les méthodes qu'elle utilise visent la vérité[55]. La beauté comme but est un idéal inaccessible. Pour répondre de cette difficulté, il faut vérifier qu'effectivement la méthode mathématique ne sert pas une cause esthétique. Cette vérification n'est pas envisageable dans le cadre de la version forte de la solution platonicienne, puisque, justement, elle ne nous renseigne pas sur la méthode préconisée pour atteindre son but esthétique. Ces derniers points sont conséquents de l'adoption d'une ontologie réaliste des mathématiques. Il s'agit donc d'examiner à présent si l'on peut lever ces difficultés en se plaçant dans un cadre non réaliste.

I.2.2. Version modérée

Avant d'examiner les arguments de la solution platonicienne dans sa version modérée, il est nécessaire de vérifier les conditions même de possibilité d'une telle combinaison, à savoir l'adoption d'une conception platonicienne de la beauté et non platoniste des mathématiques.

La principale difficulté est de comprendre, dans ce cas de figure, comment quelque chose qui est créé par l'homme, les mathématiques, peut viser quelque chose dont la réalité est indépendante de l'esprit humain, la beauté.

[55] Cf. partie I section B I.2

Dans la conception platonicienne, le beau n'est beau que par la participation du beau-en-soi. Les propriétés esthétiques ont une réalité indépendante. En tant que non platoniste par rapport aux mathématiques, le mathématicien crée, invente, et s'il vise la beauté, c'est lui qui doit se donner les moyens de l'obtenir en tâchant de créer des objets qui possèdent des propriétés esthétiques et qui, de ce fait, fournissent un accès à la Beauté. Dans la philosophie de Platon, la contemplation de la beauté des sens, de la beauté physique doit s'élever vers celle de la beauté intellectuelle pour finalement conduire à la contemplation du beau tel qu'il est en soi[56]. Les mathématiques ne peuvent conduire à la Beauté que dans la mesure où la beauté participe aux mathématiques. Or, étant donné que les mathématiques sont, dans la version modérée, supposées être une totale création de l'homme, il faut que ce soit l'homme qui y introduise la beauté.

La combinaison ci-dessus n'est donc valable que si l'on présuppose connues certaines propriétés esthétiques, celles qui peuvent s'appliquer aux mathématiques[57]. En la matière, les plus communément admises sont l'ordre, la symétrie et la mesure. On peut alors envisager d'expliquer l'utilité obtenue en ayant visé la seule beauté en terme d'efficacité cognitive de telles propriétés. On rejoint ici, sous certains aspects, la conception aristotélicienne de la beauté comme propriété cognitive[58].

I.2.3. Conclusion

La beauté (la manifestation de la beauté au travers des propriétés esthétiques, telles que l'ordre, la symétrie ou la mesure par exemple) est alors ce qui permet de faire le lien entre quelque chose dont la réalité est dépendante de l'esprit - les mathématiques - et une réalité indépendante - l'idée de vérité ou de beauté - confondue sous un idéal platonicien.

---

[56] Cf. [*Le Banquet* 211b-212b]

[57] On remarquera que ce qui apparaît comme conclusion dans le cas de la version forte, c'est-à-dire une connaissance des propriétés esthétiques, appartient dans le cas de la version modérée aux présupposés initiaux.

[58] Cf. partie I section A. 1.2.2

L'arsenal de critères esthétiques choisis va indiquer une méthode de travail et fournir une orientation dans la recherche. Il ne s'agit pas uniquement de chercher un résultat en respectant les règles mathématiques mais en organisant son travail de façon à obtenir ces critères esthétiques.

La solution platonicienne dans sa version modérée présente donc par rapport à la version forte l'avantage de restituer à l'attrait esthétique le rôle de guide. Cependant, elle ne permet pas, à l'instar de la version forte, de rendre compte des différences de mérites esthétiques des objets mathématiques. Cette difficulté est inhérente à l'identification platonicienne du beau et du vrai.

Enfin, l'attribution de la beauté comme but des mathématiques constitue dans le cadre d'une argumentation platonicienne modérée l'explicitation d'un objectif qui peut être atteint ou non, mais qui oriente le processus de développement de cette science. A l'inverse, dans la version forte, il s'agissait davantage de proposer une apologie des mathématiques qu'une directive méthodologique.

I.3. Solution poincaréenne

Beaucoup moins théorique (abstraite) que la solution platonicienne, la solution que j'appelle poincaréenne repose sur deux présupposés :

1) présupposé métaphysique : la nature, l'harmonie universelle, est source de toute beauté.

2) présupposé méthodologique : les mathématiques sont le seul accès que nous ayons à l'harmonie universelle.

Avant d'examiner l'articulation de ces présupposés à l'intérieur de la solution poincaréénne, il convient de se pencher sur la conception même de la beauté telle que l'on peut la trouver dans les écrits de Poincaré.

Cette dernière apparaît à mi-chemin entre une conception platonicienne et une conception aristotélicienne. Plus exactement, il est possible de dresser des parallèles significatifs entre ce que représente la beauté chez Platon et ce qu'elle représente pour Poincaré ainsi qu'entre les vertus cognitives des propriétés esthétiques chez Aristote et la caractéristique que donne Poincaré des manifestations de la beauté.

I.3.1. Conception poincaréenne de la beauté intellectuelle

En établissant un parallèle entre Platon et Poincaré par rapport à la beauté, je ne fais aucune considération d'ordre ontologique. A ma connaissance, rien dans les textes de Poincaré n'indique qu'il ait une conception strictement réaliste de la beauté. Par contre, et c'est l'aspect qui nous intéresse, il attribue un rôle déterminant au sentiment esthétique, à l'appréhension de la beauté. Cela n'engage pas nécessairement d'attribuer à la beauté une existence indépendante de l'esprit.

Quoi qu'il en soit, il semble tout de même possible de fournir quelques précisions quant au statut d'existence de la beauté telle que la conçoit Poincaré. Pour ce dernier, la nature, entendue comme le monde des phénomènes naturels, est l'occasion de concevoir le modèle de toute beauté[59]. En ce sens, la beauté n'est pas une idée au sens platonicien, mais elle est une catégorie qui permet de préciser le plaisir des sens.

Dans l'article « Le choix des faits », Poincaré expose les raisons qui motivent, d'après lui, le savant à étudier la nature. Il ne le fait pas pour l'utilité mais pour le plaisir, plaisir procuré par la beauté de la nature :

> « (Le savant étudie) la nature parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. » [Poincaré 1908, 22]

La connaissance de la beauté apparaît comme la seule connaissance désirable :

[59] A ce propos, on pourra consulter les travaux de Heinzmann sur l'occasionnalisme de Poincaré, en particulier [Heinzmann 2006] et l'article « L'occasionnalisme de Poincaré : l'élément unificateur de sa philosophie des sciences », disponible en ligne : http://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/heinzman/documents/talk2001-03-b.pdf.

> « Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue. (…) la beauté intellectuelle se suffit à elle-même, et c'est pour elle, plus peut-être que pour le bien futur de l'humanité, que le savant se condamne à de longs et pénible travaux.» [Idem]

Et l'on peut d'ores et déjà mettre cela en parallèle avec l'assertion de Platon :

> « Si la vie vaut jamais la peine d'être vécue, cher Socrate, dit l'étrangère de Mantinée, c'est à ce moment où l'homme contemple la beauté en soi. » [Le Banquet, 211b-212b]

Pour Poincaré, comme pour Platon, il ne s'agit pas là de la beauté physique, perçue par les sens mais bien d'une beauté intellectuelle, accessible à l'intelligence. En effet, Poincaré le précise :

> « Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences, (…), je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir. » [Poincaré 1908,22]

Dans la suite du dialogue dont est extrait la citation précédente, l'étrangère de Mantinée explique que la beauté dont le spectacle ravit l'homme est :

> « (…) le Beau lui-même, simple, pur, sans mélange, et contempler, au lieu d'une beauté chargée de chairs, de couleurs et de cent autres superfluités périssables, la beauté divine elle-même sous sa forme unique. » [Le Banquet, 211b-212b]

Sans que l'on puisse dire que pour Poincaré il existe une idée de beauté indépendante de notre esprit, il conçoit toutefois que la beauté des apparences est structurée par la beauté intellectuelle, elle-même suscitée par le plaisir :

> « C'est elle (la beauté intellectuelle) qui donne un corps, un squelette pour ainsi dire aux chatoyantes apparences qui flattent nos sens, et sans ce support, la beauté de ces rêves fugitifs ne serait qu'imparfaite parce qu'elle serait indécise et toujours fuyante. » [Poincaré 1908, 22]

La conception poincaréenne de la beauté se rapproche encore en cela de celle de Platon qui indique que rien n'est beau que par le beau. La différence est que dans la

première, la beauté n'a pas besoin de se voir attribuer un statut réaliste, elle dépend de notre perception de la nature. Quelque chose est beau dès lors que l'on peut y reconnaître des caractéristiques fixées par l'observation de la nature.

En d'autres termes, Poincaré en présupposant la nature comme source de toute beauté, considère par suite que c'est elle, la nature, qui fournit les canons esthétiques (la nature donne l'occasion de fixer les critères de la beauté). Cette caractérisation de la beauté va lui permettre de justifier l'obtention de résultats probants en ayant visé un but esthétique.

I.3.2. Vertus cognitives de la beauté poincaréenne

Les parallèles que l'on peut dresser entre la théorie aristotélicienne de la beauté et l'approche de Poincaré s'articule autour de deux axes interdépendants : le premier concerne les critères esthétiques tandis que second porte sur les liens entre la beauté et la compréhension.

Dans « l'invention mathématique », Poincaré explique ce qu'il entend par la beauté mathématique, et fournit une description de celle-ci :

> « (…) quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance, et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthétique? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans efforts en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails. Cette harmonie est à la fois une satisfaction pour nos besoins esthétiques et une aide pour l'esprit qu'elle soutient et qu'elle guide. » [Poincaré 1908, 53]

La beauté en général, et celle des mathématiques en particulier, apparaît donc dans la conception que propose Poincaré, comme une propriété qui, au-delà de satisfaire une émotion esthétique, sert la cognition. Les critères esthétiques que décrit l'auteur ne s'appliquent pas seulement aux mathématiques ; Poincaré transporte les mêmes exigences dans les domaines mathématiques que dans des domaines naturellement plus artistiques :

> « Les édifices que nous admirons sont ceux où l'architecte a su proportionner les moyens au but, et où les colonnes semblent porter sans efforts et allègrement le poids qu'on leur a imposé, comme les gracieuses cariatides de l'Erechthéion. » [Poincaré 1908, 53]

On retrouve les mêmes exigences en matière de beauté que dans la conception aristotélicienne[60]. Le choix des critères s'articule autour du principe de l'unité dans la variété, de l'ordre, au sens d'organisation, et de la mesure. A l'instar d'Aristote, Poincaré justifie les critères esthétiques en fonction de leur caractère utile à la cognition. Ces deux conceptions de la beauté en font une propriété cognitive, ou plus exactement, elles établissent une relation d'équivalence entre les propriétés qui servent la beauté et celles qui offrent une compréhension optimale.

I.3.3. Cohérence de la solution poincaréenne

Je vais montrer comment, à partir des présupposés initiaux et de la conception poincaréenne de la beauté, il est possible de construire une argumentation justifiant :

- que fixer la beauté comme but des mathématiques ne dessert pas leur but physique,
- que ce but esthétique, s'il est atteint, confère aux mathématiques leur utilité interne et externe.

Comme on l'a vu précédemment, pour Poincaré, la quête de la beauté constitue la motivation première et principale du mathématicien, du savant de façon générale. Mais elle n'est pas seulement une motivation, elle peut être en effet considérée comme un but, à proprement parler, pour les mathématiques. Poincaré est explicite à ce propos. Il admet aux mathématiques trois buts : un but physique (les

[60] Cf. Partie I section A I.2.2

mathématiques doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature), un but philosophique, et enfin, un but esthétique[61]. La beauté apparaît comme une fin en soi, elle est l'un des buts des mathématiques. Cependant, Poincaré établit une relation d'interdépendance entre le but physique et le but esthétique. C'est ce lien qui va permettre de montrer comment, en visant la beauté, les critères de vérité comme adéquation structurelle au réel[62] et d'utilité externe peuvent être atteints.

En effet, si Poincaré concède que le but physique et le but esthétique ne sont pas solidaires, il prétend toutefois qu'ils sont inséparables ; ainsi explique-t-il que le meilleur moyen d'atteindre l'un, c'est de viser l'autre[63]. Pour justifier que la cause esthétique sert le but physique, Poincaré établit un parallèle avec l'art :

> « (…) les écrivains qui embellissent une langue, qui la traitent comme un objet d'art, en font en même temps un instrument plus souple plus apte à rendre les nuances de la pensée. On comprend alors comment l'analyste qui poursuit un but purement esthétique, contribue par cela même à créer une langue plus propre à satisfaire le physicien. » [Poincaré 1905, 105]

Selon lui, les mathématiques sont nécessaires au physicien dans la mesure où elles sont la seule langue qu'il puisse parler[64]. Et, comme tout langage, elles seront d'autant plus performantes, utiles, qu'elles seront riches, nuancées et précises. Ainsi, travailler les mathématiques avec un but esthétique, c'est-à-dire en les considérant pour elles-mêmes, sans considérer leur utilité pratique, ni leurs applications, mais en tâchant de déceler les analogies, de mettre en valeur les symétries, contribue à enrichir le langage qu'elles sont pour le physicien et à le lui rendre plus opérant[65].

---

[61] Cf. [Poincaré 1905, 104]

[62] Pour Poincaré, les mathématiques peuvent atteindre la vérité dans le sens où elles sont le seul instrument pour décrire l'harmonie (présupposée) de la nature. L'harmonie elle-même offre de saisir les relations entre les phénomènes réels et ces relations sont par ailleurs considérées par Poincaré comme les seuls objets existants. L'expression de vérité comme adéquation structurelle traduit donc le fait que les mathématiques rendent compte de la structure relationnelle de la réalité du monde et non qu'il existerait une équivalence point par point entre la théorie et le phénomène.

[63] Cf. [Poincaré 1905, 104]

[64] Cf. [Poincaré 1905, 105]

[65] Cette idée selon laquelle travailler les mathématiques dans un but esthétique élargit le champ de leur application est relativement fréquente ; on peut citer par exemple Dirac :

> "The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalize the

Cette interprétation est rendue possible par l'adoption du présupposé méthodologique selon lequel les mathématiques sont le seul accès que nous ayons à l'harmonie universelle.

De plus, Poincaré explique que seul l'esprit mathématique peut déceler les analogies véritables et fécondes :

> « Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine ?
>
> C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière (…)
>
> Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité, il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste.
>
> Ce que nous lui demandons, c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui s'offre à nous. Or, celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut. » [Poincaré 1905, 106]

Le service qu'attend le physicien des mathématiques est qu'elles lui fournissent les moyens de généraliser, d'établir des lois à partir d'expériences, de répertorier sous un même registre des phénomènes qui sans l'analyse purement mathématique

---

> mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and after each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities." Cité selon Pais in [Pais 1998, 34].

Lorsqu'il s'agit de parler de l'importance de la beauté des mathématique, Dirac est fréquemment cité pour avoir écrit : " *it is more important to have beauty in one's equations that to have them fit experiment*.". Il ne faut pas cependant en déduire que pour Dirac, la beauté d'un résultat mathématique l'emporte sur son aptitude à décrire le réel. En effet, ce n'est pas aux dépens de la vérité comme adéquation au réel qu'il faille sacrifier à la beauté, seulement Dirac considère que la beauté est un critère qui conduit à faire confiance aux résultats qui en sont parés :

> "I think there is a moral in this story namely that is more important to to have beauty in one's equations that to have them fit experiment. If Schrödinger had been more confident of his work, he could have published it somr months earlier, and he could have published a more accurate equation (...). It seems that if one is working from the point of view of getting beauty in one's equation, and if one has really a sound insight, one is on a sure line of progress. If there is not complete agreement between the results of one's work and experiment, one should not allow oneself to be too discouraged, because the discrepancy may well be due to minor features that are not properly taken into account and that will get cleared up whit further development of the theory." [Dirac 1963, 47]

n'auraient pu être rapprochés. L'injonction de Poincaré (il faut que le mathématicien travaille en artiste) correspond à la condition nécessaire pour rendre les mathématiques opérantes sur le plan de leurs applications externes. Il faut pour comprendre cela examiner ce que signifie pour l'auteur travailler en artiste, de même qu'il faut fournir une interprétation de ce que sont pour Poincaré les analogies véritables.

La métaphore du dédale utilisée dans cette citation permet de relier la directive en question (travailler en artiste) avec l'idée de s'élever à un ordre supérieur afin de dépasser un point de vue purement extensionnel et de retrouver l'unité sous la variété. Cette idée est récurrente dans les textes de Poincaré, on la retrouve notamment dans l'article « Nature du raisonnement mathématique » :

> « Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue de l'esprit, pour qu'elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments.
>
> Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes.
>
> (…) Une construction devient donc intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.» [Poincaré 1902, 44]

Une construction n'est probante que dans la mesure où elle permet de mettre en lumière le schème qui la sous-tend. Ce que l'on peut traduire en disant qu'il faut qu'elle réponde au principe de l'unité dans la variété. Travailler en artiste c'est découvrir le schème, ou la structure qui relie et unifie les différents éléments. Le mathématicien qui ne travaille pas en artiste reste à un niveau analytique, il calcule étape par étape sans se placer sous une perspective d'ordre. Or, ce qui est fécond dans les constructions mathématiques, c'est justement le schème. On comprend alors pourquoi pour Poincaré *il faut* travailler en artiste.

L'intérêt d'une construction est de pouvoir la ranger avec d'autres à partir d'une comparaison entre schèmes généraux, puisqu'il ne s'agit pas de considérer les

éléments même de la construction. C'est donc le schème (la forme pure) qui offre de relier entre elles différentes constructions et par suite, des faits épars. L'interprétation que je propose pour expliquer ce que signifie que d'être une analogie véritable est alors que Poincaré distingue par ce qualificatif les analogies qui portent sur les éléments d'une construction effective au niveau des objets (analogie simple, que l'œil peut distinguer) de celles qui portent sur le schème général, la forme ou la structure de la construction (analogie véritable et profonde, que seule la raison peut voir).

L'argumentation poincaréenne pour montrer que le but esthétique est solidaire du but physique se fait en deux temps :

1. viser la beauté (travailler en artiste) est ce qui permet de rendre les mathématiques plus fines, plus précises, et de mettre en valeur l'unité dans la variété de l'ensemble des constructions mathématiques ;
2. viser la beauté c'est donc se donner les moyens de rendre à la physique les services qu'elle attend des mathématiques. Autrement dit, viser l'esthétique facilite l'obtention d'un but physique.

Ce raisonnement n'est valable que dans la limite de l'adoption des deux présupposés. J'ai déjà mentionné le rôle du présupposé méthodologique, quand est-il alors du rôle du présupposé métaphysique ? Ce dernier intervient lorsqu'il s'agit de s'assurer que la recherche de la beauté ne détourne pas les mathématiques de leur rôle fondamental : celui d'être le seul instrument envisageable pour décrire l'harmonie de la nature (présupposée par Poincaré)[66]. En effet, le lien examiné

[66] Dans l'article "*Aesthetics in Science and in Art*", Engler défend la thèse suivant laquelle la confiance que mettent les scientifiques (en particulier ceux qui s'occupent de mathématiques appliquées) en la beauté de leurs théories exprime en fait la croyance suivant laquelle ce que l'esprit trouve beau doit avoir une application dans la nature :

> "(...) these scientists express essentially the faith that what the mind perceives as beautiful finds its realization in nature, that is, the beauty of a scientific theory implies its truth." [Engler 1990, 24]

D'après l'auteur, cette confiance dans la beauté traduit un retour à une forme de pythagorisme :

> " It is worth noting that these scientists (ceux qui font confiance à la beauté mathématique) convey an ancient attitude, as the philosopher Bertrand Russell noted : « Perhaps the oddest thing about modern science is its return to Pythagoreanism ». Indeed, the Pythagorean view, which has since become a corner-stone in science, was that problems in natural science often yield to the assumption that the natural world has

jusqu'à présent entre le but esthétique et le but physique montre que le premier n'empêche pas les mathématiques de satisfaire à l'exigence d'utilité externe mais au contraire que cette dernière lui est redevable. Dans la solution poincaréenne, qui adopte de surcroît le principe métaphysique suivant lequel c'est la nature qui fournit le modèle de toute beauté, il est aussi possible de montrer que fixer la beauté comme but des mathématiques ne nuit pas à l'exigence de vérité :

> « Il n'y a pas à craindre que cette préoccupation instinctive et inavouée (la recherche de la beauté) ne détourne le savant de la recherche de la vérité. On peut rêver un monde harmonieux, combien le monde réel le laissera loin derrière lui ; les plus grands artistes qui furent jamais, les Grecs, s'étaient construits un ciel ; qu'il est mesquin auprès du vrai ciel, du nôtre. » [Poincaré 1908, 23]

Le plaisir des sens que procure la nature nous fait voir le modèle mathématique, qui est, au niveau scientifique, l'expression de l'harmonie structurelle. Chez Poincaré, la beauté peut être sentie au niveau du plaisir (perception sensorielle) mais c'est seulement au niveau de la théorie qu'elle peut être décrite (perception intellectuelle) ; le plaisir ne peut pas être intersubjectivement décrit.

On remarquera enfin que l'étape1 ci-dessus montre, en même temps que la cohérence entre la beauté et l'utilité externe des mathématiques, le rôle que joue l'attrait esthétique à un niveau plus formel, celui de l'utilité interne. Puisque Poincaré indique que seules les constructions possédant les critères esthétiques sont opérantes à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, il s'ensuit que ce sont les combinaisons esthétiques qui offrent une utilité interne. Ce sont elles qui avant de rendre service à la physique, permettent les progrès des mathématiques. Ce dernier point suggère qu'au sein de la solution poincaréenne, la beauté n'est pas seulement une finalité mais aussi une méthode de travail. Hadamard, qui adopte cette solution,

---

> certain formal and aesthetic features, and that natural processes therefore possess harmonies, symmetries and simplicities.
>
> Another Pythagorean characteristic which these scientists manifest is their perception of the importance of mathematics in describing nature." [Idem]

Le point particulièrement intéressant de cet article est que l'auteur affirme qu'au-delà d'un retour à un point de vue pythagoricien, la foi en la beauté mathématique trahit surtout, d'après lui, une croyance métaphysique : la nature est belle. C'est cette croyance métaphysique qui est à la base du rôle attribué à la beauté mathématiques (cf. [Engler1990, 31]).

Pour plus de détails, on pourra lire [Engler 1990, 24-34].

saisit cette suggestion pour affirmer que la beauté au-delà d'une finalité pour les mathématiques en constitue en outre la principale source d'inspiration :

> « Des étudiants m'ont souvent consulté sur le choix d'un sujet : quand on me demande un tel conseil, je le donne volontiers, mais je dois avouer que (provisoirement, bien sûr) j'ai tendance à classer celui qui me le demande dans les gens du second ordre. (…) Mais comment diriger ce choix important et difficile ? La réponse ne fait guère de doute : c'est la même que celle que nous a donné Poincaré à propos des moyens de découvertes, la même pour le « moteur » que pour le « mécanisme ». Le guide à qui nous devons nous fier est ce sens de la beauté, cette sensibilité esthétique spéciale dont il a souligné l'importance. (…) Il existe un goût scientifique, exactement comme il y a un goût artistique ou littéraire ; et ce goût peut être plus ou moins sûr selon les individus. » [Hadamard 1945, 117][67]

Et elle est le seul guide efficace :

> « Sur le caractère fécond de nos futurs résultats, à propos duquel nous ne savons le plus souvent rien à l'avance, à strictement parler, ce sens de la beauté peut nous renseigner et je ne vois rien d'autre qui nous permette de bâtir des prévisions » [Hadamard 1945, 117].]

Si la solution poincaréenne induit une méthode, on peut alors penser que c'est cette méthode qui va permettre l'obtention de résultats esthétiques en ayant visé la beauté. En effet, j'ai montré que dans la conception de Poincaré, les mathématiques possèdent littéralement des propriétés esthétiques. C'est l'observation et l'expérience qui fournissent l'occasion de fixer les critères esthétiques. Viser la beauté implique alors d'attribuer ces critères aux constructions mathématiques.

I.3.4. Conclusion

A l'intérieur du cadre conceptuel délimité par l'adoption des deux présupposés, la solution de Poincaré est cohérente. Cependant, il faut souligner une tension entre la position non réaliste de Poincaré vis-à-vis des mathématiques et sa position réaliste classique quant à l'esthétique de la nature. Cette tension peut poser

[67] Hadamard s'inspire des propos que tint Poincaré dans une conférence à la Société de Psychologie à Paris (cf. [Hadamard 1945, 8]). On pourra aussi se référer à [Poincaré 1908, 43-57].

des problèmes notamment en ce qui concerne l'interprétation de la conception poincaréenne de la beauté. Kivy, par exemple, à cause du non réalisme de Poincaré, affirme que celui-ci, lors qu'il parle de beauté de la nature, parle en fait de la beauté des mathématiques :

> "Poincaré speaks of the beauty of nature. But I think what it really comes down to is the beauty of the scientific representation of nature. One can, of course, in a portrait, for example, distinguish the beauty of the sitter from the beauty of the representation because one can gaze at the sitter as well as at the representation. We cannot, in a similar manner, contemplate (say) the general theory of relativity and then, if the spirit moves us, gaze at the aspects of nature that were its "sitter". All we have of the sitter is the sitter *as represented* by the theory. So when, as Poincaré says, the scientific intelligence grasps the intimate beauty which comes from the harmonious order of nature's parts, we must understand it as grasping the theory which represents that order and discovers it to us. In science it is only the representation of la belle nature that we can contemplate, not the thing in itself. To say we are contemplating nature is to say we are contemplating theory." [Kivy 1991, 189]

Pour Kivy, tout ce que nous pouvons dire ou apprendre de la nature, nous ne pouvons le dire ou l'apprendre qu'à propos de la nature représentée par une théorie. Par conséquent, l'appréciation esthétique de la nature est de fait l'appréciation esthétique du modèle scientifique représentant la nature. Si ce dernier point s'avère intéressant, il semble par contre trahir les propos de Poincaré. En effet, Poincaré ne suggère nullement que le mérite esthétique d'une théorie puisse être autre chose que celui de la nature, cédé par une sorte de procuration. Si les mathématiques ont une valeur esthétique, ce n'est que parce qu'elles offrent la description de l'harmonie structurelle de la nature (elle-même présupposée par Poincaré). Aussi, je me demande si Kivy a compris l'occasionnalisme de Poincaré.

Néanmoins, la problématique impliquée par la citation ci-dessus est la suivante : fait-il sens de parler d'une esthétique non formelle (d'une esthétique du contenu) des mathématiques dans la mesure où leur contenu (leur signification) est

lui-même contenu dans les mathématiques, au sens où il est entièrement dépendant des mathématiques elles-mêmes ?[68]

En effet, dans le cas de la solution poincaréenne, il est légitime de parler d'une esthétique non formelle : ce ne sont pas les traits formels, les aspects syntaxiques d'une théorie mathématique qui contribuent à son mérite esthétique mais c'est ce qu'elle représente, ce qu'elle permet de saisir de la réalité (l'harmonie de la nature), qui participe et accroît son potentiel esthétique. Une théorie mathématique, considérée sans sa signification vis-à-vis de la réalité physique a peu de chance de charmer Poincaré. Il explique que la nature est, pour le mathématicien comme pour le peintre, source d'inspiration. Plus encore, il écrit que le mathématicien ne peut se passer de cette source, au risque de voir sa créativité s'épuiser et de n'élaborer que des théories stériles et sans cohérence[69]. Comme on l'a vu, cela ne signifie pas que Poincaré néglige ou suppose que l'on ne puisse se passer d'étudier les mathématiques pures, celles qui ne sont pas directement développées en vue des applications pratiques[70]. Cela signifie que les mathématiques, en dehors de leur rapport à la réalité, ne portent pas en elles-mêmes les traits et les aspects qui leur confèrent et leur valeur intellectuelle et leur mérite esthétique.

Le problème est donc le suivant : peut-on parler d'esthétique du contenu dès lors que le contenu, disons le potentiel cognitif, est entièrement lié au média – ici la théorie mathématique ? Si l'on n'a pas d'autre moyen de rendre compte de la réalité physique, si le seul accès envisageable aujourd'hui est la mathématique, comme le conçoit Poincaré, comment être certain que la valeur esthétique d'une théorie ne soit pas la sienne propre, celle qui provient de sa symbolique et de l'interprétation que l'on en fait ? Puisque tout ce que l'on peut saisir de la réalité des phénomènes naturels, évidemment dans le cas où l'on se situe sous la perspective en question, passe par la lunette mathématique, que peut-on finalement connaître du modèle si ce n'est son interprétation mathématiques ? La réalité, au sens de Poincaré, n'a

---

[68] Pour beaucoup d'auteurs, l'esthétique des mathématiques ne peut être qu'une esthétique formelle, bien que la problématique en question ne soit pas évoquée (lire par exemple [Engler, 1994, 207]).

[69] Cf. [Poincaré 1905, 109]

[70] Cf. Partie I B I.1

donc de sens pour nous qu'au travers de son interprétation mathématique. Comment pouvons-nous alors savoir que la nature est belle (il ne s'agit pas dans ce contexte de la nature accessible à la perception quotidienne mais de la réalité du monde physique, des phénomènes naturels) si tout ce que nous savons d'elle, nous le savons par les mathématiques ? La difficulté s'évanouit si l'on tient compte du fait que Poincaré présuppose la beauté de la nature. La relation entre la beauté de la nature et celle des mathématiques est basée sur une double démarche occasionnaliste : l'expérience fournit l'occasion de fixer une théorie et d'appréhender les critères esthétiques. La confrontation de la théorie avec la réalité fournit en retour l'occasion de l'affiner, par une nouvelle expérience par exemple, ainsi que d'affiner les critères esthétiques. La théorie mathématique possède donc en propre les propriétés esthétiques, mais ces dernières ont été établies selon le modèle de beauté que fournit (par occasion) la nature (en inventant les mathématiques, on découvre les attributs de la beauté).

En présupposant la beauté de la nature, Poincaré évite l'écueil du cercle vicieux annoncé par Kivy.

Ainsi, dans le cas de la solution poincaréenne, ce n'est pas la beauté effective des mathématiques qui est transportée sur la nature, comme le dit Kivy, mais c'est la beauté présupposée de la nature qui est transportée sur les mathématiques.

II Mathématiques et art : question de méthode

II.1. Introduction

Les solutions proposées pour défendre le lien entre les mathématiques et l'art sur la base de la beauté comme finalité s'inscrivent dans une logique d'allégement des contraintes ontologiques et des présupposés métaphysiques. La solution platonicienne impose des choix ontologiques contraignants quant au statut des mathématiques et à celui de la beauté. La solution poincaréenne, moins contraignante par rapport à l'ontologie des mathématiques, exige en revanche une conception métaphysique de la beauté.

Cependant, l'examen de la comparaison entre art et mathématiques sur la base de leurs finalités peut également conduire à une nouvelle version des deux solutions qui consiste en un déplacement de fonctionnalité : ce qui est but pour l'art est méthode pour les mathématiques. En effet, une stratégie classique pour justifier l'aspect esthétique des mathématiques consiste à dire que les mathématiques et l'art ont peut-être des buts différents, mais atteints avec une même méthode[71].

La section précédente pose le problème du rôle effectif de la beauté et de l'attrait esthétique en mathématiques : attribuer la beauté comme but des mathématiques n'induit pas nécessairement une méthode particulière visant à garantir l'obtention d'un tel but. Or, de nombreux mathématiciens reconnaissent se fier à la beauté pour mener à bien leurs travaux sans pour autant poser cette dernière comme le but ultime de leur discipline. Je propose donc de vérifier dans quelle mesure la beauté et l'attrait esthétique des mathématiques peuvent se justifier par le biais d'une analyse comparée de la méthode mathématique et de la méthode artistique.

Au-delà d'une comparaison supplémentaire entre mathématiques et art, cette analyse a pour but premier de nous renseigner sur la légitimité du potentiel heuristique des critères esthétiques en mathématiques.

Pour défendre la thèse qui relie mathématiques et art par le biais d'une méthode commune, je ne retiendrai que deux stratégies principales qui seront appelées solution empirique et solution pragmatique. La première est basée sur une description générale des méthodes en question alors que la seconde s'intéresse de façon plus particulière à la description des critères esthétiques et à leur fonctionnement au sein d'un processus mathématique. Ce choix est motivé par le fait que ces stratégies permettent de décrire la majeure partie des différentes argumentations que l'on peut trouver pour défendre cette thèse. Celles qui ne rentrent pas dans la structure argumentative définie par ces stratégies soit sont trop

[71] A titre d'exemple, on peut en référer à un article de Krull, "The Aesthetic Viewpoint in Mathematics", dans lequel l'auteur utilise en premier lieu des arguments d'autorité pour justifier une comparaison entre les mathématiques et l'art. Il entend alors montrer l'aspect esthétique des mathématiques en argumentant que la méthodologie mathématique est principalement motivée par des considérations esthétiques : cf. [Krull 1987]

idiosyncrasiques, soit posent trop d'exigences conceptuelles initiales pour être finalement exploitables.

II.2. Solution empirique

Dans l'article "Mathematical beauty and physical science", Osborne s'interroge sur la nature de la beauté des mathématiques. Il défend le point de vue selon lequel, si les sciences et les mathématiques en particulier partagent avec l'art la large place attribuée à la beauté, sa fonction n'est pas la même pour chacune de ces activités[72] :

> "(…) The function of beauty is different in science and in art. In the fine arts beauty is a goal sufficient in itself. In science it is never a goal in itself, but a method or a signpost believed to be likely to lead to the goal of correct comprehension." [Osborne 1984, 292]

Concevoir que la beauté ou l'attrait esthétique, puisse induire une méthode de travail dans la recherche mathématique est, comme on déjà eu l'occasion de le voir avec par exemple, Hadamard, Bell, ou encore Dirac, une idée largement répandue parmi les mathématiciens ou physiciens théoriques. Il s'agit maintenant de s'assurer que la comparaison entre les mathématiques et l'art sur la base de leur méthode permet effectivement de justifier la beauté des mathématiques, et plus généralement leur fonctionnement esthétique, au sein de cadres conceptuels plus larges.

Il convient de préciser que le but est bien de vérifier si l'on peut montrer l'aspect esthétique des mathématiques à partir d'une comparaison des méthodes artistique et mathématique et non de vérifier si la beauté des mathématiques justifie, ou induit, l'usage d'une méthode esthétique.

---

[72] Il faut peut-être nuancer la comparaison générale entre l'art et la science chez Osborne. En effet, dans l'article "Interpretation in Science and in Art", Osborne distingue la fonction de la beauté dans les sciences en général et dans les mathématiques pures en particulier :

> "Unlike the pure mathematicians, no scientist is interested in producing theories of however great beauty which will turn out to be not keeping with the facts of observations or barren of further discovery." [Osborne 1986a, 12]

Non tenu par l'adéquation avec l'expérience, le mathématicien pur pourrait alors accorder une place plus importante à la beauté dans ses travaux. Il n'y a pas à ma connaissance d'autre endroit dans les écrits de Osborne où se dernier précise comment et pourquoi le mathématicien pur peut rechercher la beauté pour la beauté, si l'on peut dire. Cela étant, quelque soit la nuance qu'il faille introduire, celle-ci ne nuit pas aux réflexions qui suivent.

Un premier cadre interprétatif est fourni par la solution que j'appelle empirique, parce que fondée sur une description empirique. Elle consiste en une schématisation de la méthode mathématique et de la méthode artistique selon deux étapes :

1) le choix des faits / du sujet pour objet d'étude,

2) le traitement par abstraction et généralisation

Cette description est d'une part très générale et d'autre part, le diptyque choix / traitement des faits est un sujet classique de l'épistémologie et de la philosophie des sciences. Cependant, ce découpage s'avère opérationnel dans la recherche d'une solution au problème du parallèle entre art et mathématiques dans la mesure où il va permettre d'aborder la notion de représentation. De plus, si la thèse proposée par la solution empirique est une stratégie répandue pour justifier l'aspect esthétique des mathématiques, elle est en revanche plus rarement argumentée[73]. Il s'agit donc, en outre, de vérifier dans quel cadre elle est acceptable et quelles en sont les limites.

L'idée générale de la solution empirique se fonde sur l'observation du fait que les mathématiques et l'art partagent la même stratégie théorique de production (choix et traitement des faits). Or, le résultat d'une production artistique est esthétique (je ne parle pas ici de mérite esthétique, seulement de valeur esthétique), il doit donc en être de même pour le résultat d'une production mathématique.

Il y a deux critiques majeures à faire par rapport à cette thèse : la première porte sur le rôle effectif de l'attrait esthétique en mathématiques et dans des domaines artistiques.

[73] On pourra se reporter par exemple à l'article de Sullivan : "The Justification of the Scientific Method", (cf. [Sullivan 1919b]) ainsi qu'à la critique qu'en a fait Fry (cf. [Fry 1919, 79-84]).

II.2.1. Subsidiarité de l'attrait esthétique

La première critique classique consiste à remarquer que si la méthode mathématique présente une grande similarité avec la méthode artistique, le rôle effectif de la beauté et du plaisir esthétique est radicalement différent dans les deux cas. Dans l'article "Art and Science", Fry propose de décrire le processus artistique comme une logique de sensation et le processus scientifique comme raisonnement purement mécanique[74]. Il convient du fait que le schéma de la méthode scientifique choix / traitement du sujet (ce qu'il appelle particularising and generalising) trouve son pendant en art mais il fait néanmoins une distinction d'ordre psychologique entre les moyens effectifs de mettre en œuvre cette méthode dans le cadre d'une recherche selon sa nature artistique ou scientifique :

> "(...) allowing that the motives of science are emotional, many of its processes are purely intellectual, that is to say, mechanical. They could be performed by a perfectly non-sentient, emotionless brain, whereas at no point in the process of art can we drop feeling. There is something in the common phraseology by which we talk of seeing a point or an argument, whereas we feel the harmony of a work of art; and for some reason we attach a more constant emotional quality to feeling than to seeing, which is in more frequent request for coldly practical ends.
>
> From the merest rudiments of pure sensation up to the highest efforts of design each point in the process of art is inevitably accompanied by pleasure; it cannot proceed without it. If we describe the process of art as a logic of sensation, we must remember that the premises are sensation, and that the conclusion can only be drawn from them by one who is in an emotional state with regard to them." [Fry 1919,82]

Plus exactement, l'émotion et l'attrait esthétique seraient indissociables du processus artistique alors que subsidiaires dans le processus scientifique :

> " It is quite true that the recognition of inevitability in thought is normally accompanied by a pleasurable emotion, and that the desire for this mental pleasure is the motive force which impels to the making of scientific theory. But the inevitability of the relations remains equally definite and demonstrable whether the emotion accompanies it or not, whereas an aesthetic harmony simply does not exist without the emotional state. The harmony is not *true* - to use our analogy - unless it is felt with emotion.

[74] Cf. [Fry 1919]

> None the less, perhaps, the highest pleasure in art is identical with the highest pleasure in scientific theory. The emotion which accompanies the clear recognition of unity in a complex seems to be so similar in art and in science that it is difficult not to suppose that they are psychologically the same. It is, as it were, the final stage of both processes. This unity emotion in science supervenes upon a process of pure mechanical reasoning ; in art it supervenes upon a process of which emotion has all along been and essential concomitant." [Fry 1919, 82-83]

L'aspect esthétique des sciences en général, des mathématiques en particulier, apparaît dans ce cas comme une sorte de récompense, un plaisir qui surgit devant un travail fini, mais qui ne participe en rien à son élaboration. Ce point de vue trahit une conception de l'esthétique en opposition avec le cognitif. L'article de Fry date du début du vingtième siècle, ce qui peut peut-être expliquer en partie ce refus d'associer un rôle constructif à l'esthétique dans le processus de développement scientifique. En effet, principalement depuis Goodman, les théories esthétiques actuelles rendent compte de la contribution cognitive de l'expérience esthétique. Il est alors envisageable de lever l'objection contre la solution empirique en réfléchissant justement au rôle cognitif de l'esthétique au sein du raisonnement mathématique. De nombreux mathématiciens et philosophes contestent aujourd'hui la double dichotomie art-science et esthétique-cognitif. Par exemple, Root-Bernstein, qui défend dans l'article "The Sciences and Arts share a common Creative Aesthetic" la possibilité d'une esthétique commune à l'art et à la science[75], affirme que la beauté n'est pas, dans l'art comme dans la science, une simple valeur ajoutée, ni un bonus mais qu'elle en fait partie intégrante :

> "A person who cannot appreciate the beauty in a piece of art, or in a piece of science, does not understand it any more than if they cannot appreciate its intellectual content." [Root-Bernstein 1997, 63]

Pour ce dernier, la difficulté à comprendre le rôle fondamental de l'esthétique dans les sciences tient au fait que les critères habituellement référencés (comme la symétrie ou l'harmonie) pour évaluer la valeur esthétique d'une théorie scientifique sont des critères établis a posteriori. Ils permettent peut-être de justifier l'attrait

[75] Cf. [Root-Bernstein 1996]

esthétique d'une théorie en tant que produit fini, si l'on peut dire, mais sûrement pas de rendre compte du rôle qu'a pu jouer l'attrait esthétique pour sa mise au point :

> "(…) these analytical aspects of scientific and artistic aesthetics are those that can be recognized only a posteriori. They miss the actual process of creating science, and cannot explain the aesthetic joy of doing science on a daily basis. Thus, without denying the very important role of intellectual analysis in all complete aesthetics experiences, limiting discussion of aesthetics to this part of the experience disregards the equally important sensual-emotional-imaginative facets that supposedly set the art off from the sciences." [Root-Bernstein 1997, 63]

La remarque de Root-Bernstein invite à penser qu'au-delà d'une tentative de justification de l'esthétique des mathématiques basée sur une seule évaluation esthétique (c'est-à-dire porter un jugement esthétique sur une théorie à partir de critères formels préétablis), il faudrait pouvoir vérifier le fonctionnement esthétique du raisonnement, de la pratique, mathématique.

En effet, on a vu que la première objection faite à la solution empirique est que si mathématiques et art ont en commun une démarche méthodologique organisée selon les deux étapes choix et traitement du sujet, le mérite esthétique du résultat mathématique peut être considéré comme subsidiaire (Fry). Autrement dit, la valeur esthétique d'un résultat mathématique ne participe pas à sa pleine intelligibilité et compréhension. Si cette objection est correcte, elle implique que l'on ne peut justifier l'esthétique des mathématiques par le biais d'une comparaison entre les méthodes artistique et mathématique. Ce n'est pas la méthode mathématique qui induit la production d'un résultat esthétique. La solution empirique serait donc caduque. Or, comme le note Root-Bernstein, juger de l'esthétique des mathématiques à partir d'une évaluation formelle ne permet pas de rendre compte de son rôle au sein du processus. Le problème de la critique suggérée par l'article de Fry[76] est qu'elle

[76] Fry défend une philosophie de l'art formaliste (cf. *An Essay on aesthetic* [Fry 1960]), ce qui peut expliquer qu'il ne puisse accepter la possibilité d'une évaluation esthétique des sciences. Kivy analyse en ces termes le fait que Fry refuse d'accorder un quelconque rôle effectif à l'esthétique dans l'élaboration et l'évaluation des sciences :

> "But since for Fry the formalist, aesthetic evaluation or appreciation was solely evaluation or appreciation of formal properties, to read that science is evaluated and appreciated primarily for its formal properties, to read that science is evaluated and appreciated primarily on aesthetics grounds is to read that science is evaluated and appreciated for its formal properties, in which cases truth is irrelevant, and a false theory,

entend porter sur une différence méthodologique entre mathématiques et art (en art, l'émotion esthétique accompagne et motive le processus de recherche et de création, en mathématiques elle est un bonus, une simple valeur ajouté, qui, si elle est ignorée ne modifie pas la portée d'un résultat) mais elle se fonde en fait sur une évaluation statique. Cette critique ne permet donc pas d'invalider directement la solution empirique. Par contre, elle exige une mise au point sur le fonctionnement esthétique des mathématiques : est-il nécessaire au bon déroulement d'un raisonnement ? La question qui se pose alors est de savoir dans quelle mesure l'esthétique peut venir compléter, ou tout au moins servir, la logique au sein d'un raisonnement mathématique. Cette question sera précisément l'objet de la troisième et dernière partie. Il faudra donc attendre d'avoir mis au point les outils d'analyse (partie II) pour tâcher d'y répondre. Cela étant, la première étape à franchir en vue d'une tentative de réponse est d'apporter une réflexion générale sur les moyens de traitement d'un sujet en art et en mathématiques. Ce que l'on peut d'ores et déjà faire.

II.2.2. Démonstration mathématique et démonstration artistique

La seconde critique que l'on peut adresser à la solution empirique porte justement sur la nécessité, ou non, d'inclure une dimension esthétique au sein du processus, dynamique, de création mathématique. On peut en effet lui objecter que les moyens de représentation, la façon de traiter un sujet, sont différents selon le domaine : artistique ou mathématique. Le sens commun différencie généralement le raisonnement mathématique de la démarche artistique en cela que le premier suit un procédé purement intellectuel, mécanique, alors que la seconde fait intervenir des choix qui mettent en jeu la sensibilité propre de l'artiste. C'est une critique du même ordre qu'entend justifier Young au travers de l'article "Inquiry in The Arts and Sciences"[77]. En effet, pour Young l'art et la science, et par suite, l'art et les

---

if formally more perfect than a true one, more to be appreciated, more to be preferred – which is, of course, *a reductio ad absurdum* of the position. (...) For Fry, questions of truth or accuracy of representation are never relevant in aesthetic evaluation or appreciation of scientific theories; and from this it follows that aesthetic considerations are never decisive or important in the evaluation and appreciation of science." [Kivy, 1991, 183-184]

[77]Cf. [Young 1996]

mathématiques, ont des méthodes absolument différentes. C'est en fait leur façon de représenter qui distingue nettement ces disciplines :

> "Another similarity between the arts and sciences is that both create representations of objects, and in both cases these representations are designed to help us understand the represented objects. When artists and scientists go beyond the collection of observational data and begin to represent objects their practices begin fundamentally to diverge.
>
> In spite of their similarities the arts and sciences differ both as regards the means of representation they employ and the ways in which these representations advance our understanding." [Young 1996, 256]

Young suggère de distinguer l'art de la science par le biais du type de démonstrations qui y sont respectivement employées. Il forme à cet effet deux catégories principales de démonstrations : les démonstrations immédiates (ou *showing*) et les démonstrations systématiques.

II.2.2.1. Showing et démonstrations systématiques.

Young appelle une démonstration immédiate une démonstration qui exhibe plutôt qu'elle argumente pour convaincre :

> "Immediate demonstration is non-rational. That is, when one learns something by means of an immediate demonstration (or one is shown something) one is not provided with an argument. Instead, one is put (and sometimes prodded) into a position where some perspective on an object becomes apparent." [Young 1996, 257]

Pour l'auteur, de telles démonstrations sont l'apanage de l'art, qui fonctionne en *exhibant* plutôt qu'en *expliquant*. Tandis que les démonstrations systématiques sont celles qui invitent, pour être convaincantes, à suivre un enchaînement d'arguments jusqu'à aboutir à la conclusion. C'est ce qui constitue d'après Young le modèle type de la méthode de démonstration scientifique :

> "Systematic demonstration, in contrast, involves the construction of an argument for some conclusion. Someone who learns something as the result of a systematic demonstration has followed a line of argument." [Ibid.]

La conception de démonstration immédiate ne doit pas cependant laisser supposer une compréhension immédiate, qui se passe d'arrière plan. En effet, Young précise cela en disant :

> "(…) immediate demonstration should not be confused with intuitive non-inferential apprehension. Nothing in this paper should be taken to suggest that such apprehension is possible. When we are provided with an immediate demonstration, a process of inference may still be necessary, if we are to have any knowledge. The process of inference is not however, provided by the immediate demonstration. (…) An immediate demonstration presupposes that we have certain background beliefs. When we are shown something, we are put in a position where we see that these beliefs justify some further belief." [Young, 1996, 258]

La démonstration immédiate est un moyen de mettre en relation différents éléments de notre arsenal conceptuel par le biais de suggestion ouverte. Je parle de suggestion ouverte, dans le sens où il est laissé à l'imagination une grande marge de manœuvre pour choisir parmi des relations et interprétations possibles. Cette notion de suggestion ouverte permet de marquer la différence fondamentale entre les deux sortes de démonstration que propose Young.

En effet, selon sa caractérisation, l'imagination et l'interprétation jouent un rôle fondamental dans les démonstrations immédiates alors que leur rôle est négligeable pour le bon fonctionnement d'une démonstration systématique. Pour justifier ceci, Young explicite les techniques de représentation utilisées pour les démonstrations immédiates. Il en retient cinq : l'amplification, la simplification, la sélection, la juxtaposition et la corrélation. Notons succinctement de quoi il s'agit :

1) La première technique est l'amplification, elle consiste simplement à exagérer, à amplifier certains traits ou certaines propriétés du modèle à représenter :

> "When artists employ amplification, they represent some object as possessing some property to a great extent, or in a higher degree, than it appears to have in ordinary experience." [Young 1996 260]

Les aspects ainsi amplifiés deviennent plus apparents et donc plus accessibles à l'observateur.

2) Une autre méthode est celle de la simplification qui consiste naturellement à négliger certains aspects considérés comme contingents :

"Every object is a conglomeration of a great many properties. When artists employ the technique of simplification, their representation of some object eliminates or downplays many of an object's properties." [Young 1996, 261]

Le but de ce procédé est de mettre en valeur les seuls aspects que l'artiste estime avoir un rôle cognitif. A propos de *Guernica*, Young écrit :

"Picasso eliminates virtually all of the colour and most of the visual detail from the figures of the humans and animals he represents. Only the pure manifestations of suffering and horror remain." [Young 1996, 261]

3) Ce procédé s'apparente à celui que Young appelle la sélection :

"(…) selection is the process of choosing objects or aspects of objects for their representation. By selecting certain objects or properties of objects for their attention, artists direct our attention. A work of art can bring us to focus on items which we have overlooked, or thought unworthy of careful attention." [Ibid.]

4) La juxtaposition est une façon de suggérer des relations au travers d'une organisation particulière :

"When artists employ juxtaposition, they represent objects in relations in which they may not have been observed in ordinary experience. The use of juxtaposition enables audiences to compare and contrast the represented objects." [Young1996, 261-262]

5) Enfin, la dernière technique retenue est celle que Young appelle la corrélation :

"Artists employ the technique of correlation when they represent something in such a way that an audience will see it in relation to something else. Correlation takes a number of forms. In literature, metaphors and similes can be used to correlate a represented object with something else. […] Correlation can also involve the representation of something in such a way that it resembles and recalls something else. This sort of use of correlation is quite common in painting." [Young1996, 262]

En même temps que l'auteur décrit chacune de ces techniques, il montre comment elles participent à accroître le potentiel cognitif de l'œuvre pour laquelle elles sont employées[78]. La validité ou tout simplement la portée de la critique que l'on peut trouver chez Young à la solution empirique est mise en question par le fait que Young ne propose pas une analyse semblable pour les méthodes de démonstrations systématiques. En fait, ce que montre Young n'est pas que les sciences, en particulier les sciences mathématiques, ne peuvent pas utiliser les méthodes de démonstrations immédiates, mais que l'art ne peut pas faire de démonstrations systématiques. En effet, partant du principe que l'art s'occupe du général en traitant le particulier :

> "Art helps us understand general phenomena by representing individual objects." [Young 1996, 271]

Young en déduit que l'objet de l'art ne peut donc pas être sujet d'une assertion et donc être le résultat d'une démonstration systématique :

> "Since representations in the arts do not function as assertions, immediate demonstration is the only sort of demonstration of which works of art are capable. An argument is a series of assertions which are designed to establish the truth of a conclusion. Since scientists record assertion, they are able to provide arguments and systematic demonstrations. On the other hand, since a work of art does not, qua artwork at least, make assertions, a fortiori, it cannot provide arguments. Since works of art do not present arguments, they cannot provide systematic demonstrations." [Young, 1996, 267]

L'intérêt de cet article est donc de nous alerter sur la particularité des méthodes artistiques. Cependant, une étude similaire sur les mathématiques s'avère nécessaire pour décider de leur radicale incompatibilité. En effet, la difficulté de l'argumentation de Young est que, si elle se fonde sur une esthétique construite, l'auteur s'abstient par contre de toute réflexion épistémologique. Il aurait donc fallu, dans l'espoir de valider sa thèse, montrer que les démonstrations scientifiques ne peuvent pas emprunter les outils tels que l'amplification, la simplification ou la juxtaposition des démonstrations immédiates. Or, en ce qui concerne les démonstrations mathématiques, il n'est pas rare que soit utilisé ce type de stratégies.

[78] Pour plus de détails, on pourra lire [Young 1996, 258-265].

On peut dire par exemple que la démonstration classique de l'irrationalité de la racine carrée de deux utilise une méthode d'amplification. En effet, elle focalise l'attention sur le fait qu'un irrationnel ne peut pas s'écrire sous forme d'un quotient. Et, dès lors que l'on suppose pouvoir écrire de cette façon la racine de deux, la démonstration de l'impossibilité d'une telle écriture devient justement, immédiate[79]. La méthode de juxtaposition qui consiste, en résumé, à relier entre eux des faits ou des objets habituellement séparés, est aussi une méthode couramment employée en mathématiques. Pour Poincaré, la puissance généralisante des mathématiques réside justement en le fait qu'elles seules permettent de relier des faits éparts:

> « Mais comment généraliser ? Toute vérité particulière peut évidemment être étendue d'une infinité de manières. Entre ces mille chemins qui s'ouvrent devant nous, il faut faire un choix, au moins provisoire ; dans ce choix, qui nous guidera ?
>
> Ce ne pourra être que l'analogie. Mais que ce mot est vague ! L'homme primitif ne connaît que les analogies grossières, celles qui frappent les sens, celles des couleurs ou des sons. Ce n'est pas lui qui aurait songé à rapprocher par exemple la lumière de la chaleur rayonnante.
>
> Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine ?
>
> C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers. » [Poincaré 1905, 106]

La caractérisation faite par Young des méthodes propres à la démonstration artistique ne semble donc pas suffisante pour affirmer que les mathématiques, en tant que langage symbolique, ne peuvent pas les utiliser et prétendre par suite à un fonctionnement esthétique.

Le problème de la critique portant sur les moyens de représentation utilisés dans les domaines artistiques et dans les domaines mathématiques est qu'elle contient en fait le présupposé suivant lequel en art la manière compte alors qu'elle ne modifie rien en mathématiques. C'est en effet une croyance répandue que de

[79] Une analyse détaillée de cette démonstration sera faite dans la troisième partie (cf. partie III A.).

penser que l'accessibilité au contenu intellectuel d'un résultat mathématique ne dépend pas de la façon dont ce dernier est présenté (ou représenté). Et Young partage cette vision de la démonstration scientifique :

> "The realization that art does not make assertions enables us to explain an often-noted difference between art and science. In science, it does not greatly matter how a theory is expressed. (…) in general, in the sciences, any two assertions with the same empirical content are equally good. This is not the case in the arts. A sentence in a poem, say, can have the same empirical content as a second sentence, but the poem can be much worse if the second sentence were substituted." [Young 1996,272]

Un simple exemple tiré de l'analyse réelle élémentaire suffit pour mettre en faux cette affirmation : le calcul d'une limite d'une fraction rationnelle dépend de la manière dont on écrit celle-ci. La signification de la fonction reste identique, l'analyse que l'on peut en faire, la compréhension de son comportement, est différente.

La solution empirique de la justification du fonctionnement esthétique des mathématiques ne peut pas être éliminée par la critique portant sur les moyens effectifs des représentations artistiques et mathématique. Si cette solution s'avère cohérente (elle ne présente pas d'obstacle théorique), elle est néanmoins basée sur une description générale des méthodes artistiques et mathématiques et ne permet donc pas de rendre compte de la légitimité heuristique de l'usage de procédés esthétiques au sein du processus de développement des mathématiques.

II.3. Solution pragmatique

La défense de la thèse qui entend justifier la valeur esthétique des mathématiques par le biais de l'usage d'une méthode esthétique en mathématiques peut être envisagée à partir de l'analyse des critères épistémiques de la méthodologie mathématique. Cette stratégie constitue la solution que j'appelle pragmatique dans la mesure où elle est élaborée à partir de l'analyse des éléments qui servent le développement probant des mathématiques. Il ne s'agit plus de proposer une comparaison théorique entre les méthodes artistique et mathématique mais de montrer que la pratique mathématique met en jeu l'usage de critères

esthétiques. C'est cet usage qui permet de justifier la valeur esthétique des mathématiques.

La thèse défendue par la solution pragmatique est donc que la méthode mathématique exige, pour être opérationnelle, la prise en compte de critères esthétiques. Le point de départ de cette thèse est que la méthode mathématique ne peut se réduire à la seule inférence logique. Cette dernière permet sûrement d'engendrer une infinité de vérité (de résultats corrects) mais elle ne permet pas nécessairement de distinguer parmi les résultats corrects ceux qui sont susceptibles de participer efficacement au développement des mathématiques. La logique fournit les instruments pour mener à bien une recherche, mais elle ne fournit pas le plan d'une démonstration, son organisation générale. La solution pragmatique prétend que c'est l'attrait esthétique, concrétisé par l'usage de critères esthétiques, qui guide et oriente la recherche mathématique, lui permettant l'obtention de résultats féconds. Aussi, si cette solution est correcte, elle permet d'une part de justifier la valeur esthétique des mathématiques et d'autre part de souligner la non contingence de cette caractéristique.

Avant de se pencher sur la cohérence de cette solution, il faut en examiner les possibilités de justification.

La première cause de légitimité de la conception de l'attrait esthétique comme guide est faite sur la base d'arguments d'autorité : on peut en effet trouver de nombreux témoignages de mathématiciens qui affirment qu'au-delà de compétences techniques, c'est le sens de l'esthétique qui garantit une recherche opérationnelle[80]. Cependant, si la confiance en l'attrait esthétique comme guide peut être justifiée par l'autorité des témoignages, elle pose néanmoins le problème de la légitimité de l'usage de critère esthétique au sein du raisonnement mathématique. En effet, et c'est l'objet de la première critique faite à la solution pragmatique, certains auteurs refusent le statut de critères heuristiques licites aux critères esthétiques. Laudan, par exemple, rejette comme valeurs épistémiques acceptables les critères esthétiques

[80] J'ai déjà eu l'occasion de citer à ce propos Hadamard, Bell, ou encore Poincaré.

au sein du raisonnement scientifique[81]. Cependant, comme le montre Martin dans l'article "Aesthetic Constraints on Theory Selection : A Critique of Laudan", les critères esthétiques ne contredisent pas la liste des valeurs épistémiques acceptables qu'a établi Laudan[82]. Pour ce faire, il propose de considérer les valeurs esthétiques comme des conditions rationnelles de cognition[83].

Si l'objection de Laudan est radicale - l'usage de critères esthétiques pour l'élaboration et l'évaluation des théories scientifiques n'est pas acceptable - on peut en trouver une version plus modérée. Cette version ne rejette pas totalement l'intervention de considérations esthétiques, mais elle ne leur accorde qu'un rôle exceptionnel, lors d'une controverse par exemple ou lorsqu'il s'agit de départager deux théories de même envergure. On peut trouver ce point de vue dans le dernier chapitre de La tension essentielle de Kuhn. Pour ce dernier, le développement « normal » de la science n'a pas besoin de l'esthétique[84]. Son rôle se manifeste à la rigueur, uniquement pour choisir parmi des théories en compétition. Cette conception est remise en question par les travaux de Mc Allister[85].

L'une de ses principales thèses est que les critères esthétiques sont intégrés au processus de développement de la science, en particulier des sciences mathématiques. Son originalité réside dans le fait qu'il propose une explication historico-sociale de ce fait. Il affirme que les critères esthétiques sélectionnés pour les sciences sont déterminés par les théories qui ont rencontré un succès. Il décrit donc une sorte de procédé d'inférence : les théories importantes fixent des canons esthétiques que les savants d'une époque donnée vont tâcher d'appliquer à leurs travaux :

---

[81] Cf. [Laudan 1984]

[82] Cf. [Martin 1989 357-364]

[83] Pour plus de précisions, on pourra lire [Ibid., 361].

[84] Cf. [Kuhn 1977] notamment le dernier chapitre.

[85] Mc Allister a beaucoup écrit sur les rapports entre la beauté et la science. A propos du rôle de l'esthétique lors des controverses, on pourra lire, entre autre, [Mc Allister 1996], [Mc Allister 1989], [Mc Allister 1991] ainsi qu'un article, *Scientists Aesthetic Preferences among Theories : Conservative Factors in Revolutionary Crises*, in [Tauber1997].

> "This is clearly inductive procedure : as a theory demonstrates empirical succes its aesthetics features will gain proportionate weight within the canon which is to serve in the evaluation of current theories, while conversely the aesthetic features of a theory which suffers a streak of empirical fealures will win a progressively lesser weignting in theory-preference. A community thus formulates its indicators of beauty by an induction upon the aesthetic properties of those of its theory which exhibit to the greatest degree indicators of truth. A theory appear beautiful in the measure to which it recalls past sucesses scored by itself and theory formally or aesthetically similar to it: as these instances of sucess pale by rerospective comparison with the empirical attainments of more recent theories, so too fade their associated aesthetic features to be replaced by a fresh canon." [Mc Allister 1989, 39]

Il s'ensuit que Mc Allister considère les critères esthétiques comme des facteurs conservateurs plutôt qu'innovateurs. Par conséquent, leur usage est directement utile pour le bon développement de la science. Par contre, le facteur esthétique peut expliquer, d'après Mc Allister, la résistance avec laquelle sont accueillies les nouvelles théories.

La thèse de Mc Allister sous-entend que les critères esthétiques qui ont un rôle en science sont dépendants du contexte scientifique d'une époque donnée. Ce qui rend difficile la vérification de cette thèse, puisque cela nécessiterait l'examen de l'histoire des critères esthétiques en vigueur selon les époques. Or, comme l'explique Agassi, la science s'est engagée depuis Bacon dans un processus d'objectivation qui consiste à viser une approximation toujours meilleure de la vérité. En conséquent, si la recherche scientifique contient des éléments non rationnels, subjectifs, personnels et esthétiques, l'histoire ne retiendra que les résultats dépouillés de tout aspect inhérent à ces éléments :

> "Even the life of Madame Curie by her daughter shows no significant link between the character of that remarkable woman and her remarkable research. Even Helmholtz's researches – which so obviously reflect of his personality, his conservatism, his philosophic taste, his taste for music – are presented not as personal but as a part of the vast impersonal tapestry that is science.
>
> That the alleged utter aesthetic neutrality of science is linked with its claim for utter objectivity, for absolute truth, can best be revealed in the works of authors about science who deny that utter aesthetic neutrality." [Agassi 1979, 132]

D'après Agassi, on retrouve la démarche opposée dans l'histoire de l'art : des chefs d'œuvres, on ne retiendra que les aspects esthétiques alors que des éléments non esthétiques ont contribué à leur élaboration. Il évoque même un certain dédain de la part des scientifiques lorsque sont soulignés les aspects non rationnels de leur discipline et de la part des artistes lorsque sont mis en évidence les éléments non esthétiques de leur art :

> "I have encoured many budding authors who struggle bitterly because they are steeped in the conviction that a novel should grow organically, one page naturally following another. They regard with dedain the very thought of planning a novel by cerebral analytic means. To write a synopsis of a novel, a table of contents, an estimated length of each chapter – this seems so easy and so pointless, not to say 'commercial', that they refuse to try it. And so they may be hopelessly frustrated. Only such people, and the popularity of the prejudice which frustrate them, can make the public gasp at the publication of Dostoevsky's notebooks. These notebooks, as one should expect, are highly analytic, and entirely cerebral; they record plans, experiments, suggestions; they do not appeal to their author's own emotions, but to his reason. Yet this very characteristic which should be expected a priori is what did cause a stir." [Agassi, 1979, 131]

Alors que l'art et la science ont des aspects cognitifs et esthétiques, l'histoire évacue les aspects esthétiques de la science et les aspects cognitifs de l'art. Cela rend difficile la confrontation de la thèse de Mc Allister avec l'histoire des sciences et des mathématiques en particulier.

II.3.1. Conclusion

Le refus d'un statut heuristique à l'esthétique traduit la crainte de l'introduction d'éléments non objectifs et non rationnels dans la science. Le premier présupposé mis en lumière par les critiques envisageables de la solution pragmatique est celui suivant lequel les critères esthétiques sont non objectifs et non rationnels. Or, si l'esthétique contemporaine parvient à faire chanceler cette opposition entre le cognitif et l'esthétique et à rompre l'antinomie qui a prévalue depuis la naissance de cette discipline (notamment en fait depuis Kant) entre raison et émotion, plus généralement entre logique et esthétique, pourquoi cette croyance en l'opposition

esthétique / cognitif reste-elle profondément ancrée, en particulier dans nos systèmes éducatifs? En effet, comme l'écrit Roger Pouivet :

> « Dans les lycée français, et sans doute ailleurs, on classe les élèves en littéraires et scientifiques. On définit ainsi deux grandes catégories d'esprit. Les uns, esprits sensibles, voire esprits de finesse, ne supportent pas la rigueur logique. Les autres, esprits de géométrie, ne connaissent que l'inférence et refusent le désordre de la suggestion intuitive. Certes, parfois un élève est à la fois esthète et mathématicien. C'est alors un esprit double. De réforme en réforme, ce schéma est reproduit. (…) On dit souvent qu'il faut redonner leur valeur aux études littéraires, qu'elles ont aussi une forme d'excellence. Pour autant, cela ne signifie certainement pas qu'on conteste la dichotomie fondamentale. On dit aussi qu'il y a une poétique de la science, une imagination scientifique, et les savants aiment bien se donner cette image d'artiste des choses abstraites. On dit encore qu'il y a une forme de rigueur dans la littérature ; on cite la dure loi de la versification ou de la version latine. Mais il ne s'agit que d'introduire un peu d'obscur dans le clair et un peu de clair dans l'obscur, certainement pas de contester l'opposition en question. » [Pouivet 1996, 7]

Il me semble que l'on peut expliquer la ténacité de l'opposition entre esthétique et logique en remarquant qu'elle est conséquente au dogme de la science pure.

Les objections faites à la solution pragmatique permettent d'envisager une stratégie plus adaptée pour la justification de l'aspect esthétique des mathématiques sur la base d'une comparaison des méthodes artistique et mathématique. En effet, j'ai montré que l'évaluation d'un résultat mathématique en fonction de critères esthétiques préétablis ne permet pas de montrer le rôle de l'esthétique au sein du processus mathématique. D'autre part, comme on l'a vu avec Mc Allister, il semble difficile d'envisager de pouvoir rendre compte des critères esthétiques en vigueur en mathématiques. Cela pour au moins deux raisons : premièrement, il n'est pas possible d'en dresser une liste exhaustive ni définitive, ces derniers étant liés à une époque et un contexte. Deuxièmement, si Agassi a raison, l'histoire ne retient que l'articulation logique des démonstrations et évacue dans la transcription tout élément propre à l'usage de critères esthétiques.

Ainsi, plutôt que de procéder à une lecture de la méthode mathématique sur la base de critères esthétiques, je suggère qu'il faille montrer, non pas que les

mathématiques mettent en jeu certains critères, telles que la symétrie ou l'harmonie par exemple, mais qu'elles relèvent, en tant que langage symbolique, d'un fonctionnement esthétique, indépendamment des critères choisis.

II.4. Introduction à une solution sémiologique

Une troisième solution consisterait alors en une approche sémiologique dans laquelle les mathématiques seraient traitées comme langage symbolique, indépendamment de toute considération ontologique.

L'idée est de fournir des critères sémantiques et syntaxiques du fonctionnement esthétique et de montrer que :

1) Les mathématiques, en tant que système symbolique, possèdent ou peuvent posséder, ces critères.

2) Que ces critères, en même temps qu'ils contribuent au potentiel esthétique, servent la cognition.

Le fondement théorique de cette thèse est que l'expérience esthétique peut être reliée à l'expérience cognitive. De façon rétrospective, on peut dire que le lien établi par Aristote entre beauté et compréhension, ou en terme plus actuel, entre esthétique et cognition perdure jusqu'à la naissance de l'esthétique et connaît une rupture nette après la troisième critique de Kant. En effet, à la suite de Kant s'instaure une distinction franche entre jugement esthétique et jugement de connaissance. L'émotion et la cognition s'exclue mutuellement. Cependant, dés le début du vingtième siècle, avec le développement de l'art conceptuel mais aussi avec la généralisation de l'abstraction mathématique, on observe un amoindrissement de cette exclusion : l'esthétique est à nouveau pensée comme un moyen de cognition. De nos jours, les plus importantes théories analytiques de l'esthétique remettent fortement en cause la séparation entre l'esthétique et la connaissance et elles plaident au contraire en faveur d'un lien étroit entre émotion et

cognition. C'est pourquoi il semble indispensable de rendre compte de cette approche.

Pour ce faire, il est nécessaire de définir des outils d'analyse sémiologique. En effet, mener une approche sémiologique, c'est tenter de montrer le fonctionnement esthétique des mathématiques en tant que système symbolique, indépendamment de ce pour quoi elles sont tenues (qu'elles soient considérées comme une construction mentale commode, ou comme le langage de la nature ou encore comme objets ayant une existence propre, indépendante de l'esprit). La beauté sera, dans ce cadre, évaluée sur la base de critères internes aux mathématiques. On peut dire qu'une équation par exemple présente une certaine symétrie (syntaxique) ou encore qu'elle permet d'organiser, en les synthétisant, différentes techniques. Ces propriétés sont internes au système mathématique : il n'est pas nécessaire pour les évaluer de prendre en considération les éventuelles applications au monde physique.

Or, pour mener à bien cette enquête sémiologique, il est indispensable de s'entendre sur une théorie de la référence des symboles, ce qui sera fait dans la section consacrée à la théorie symptomatique de l'esthétique de Goodman.

Partie II : Outils d’interprétation et d’analyse

I. Justification du choix de la théorie goodmanienne

I.1. Sémiologie et esthétique

L'œuvre de Goodman marque une rupture nette dans l'histoire de l'esthétique en tant que discipline philosophique autonome ou tout au moins elle en initie un tournant significatif[86]. L'aspect novateur de son approche de l'esthétique réside en cela qu'il analyse les propriétés syntaxiques et sémantiques des systèmes symboliques et fournit une caractérisation, fondée sur une approche symptomatologique, de ce qu'il appelle leur fonctionnement esthétique. Si une œuvre fonctionne en tant qu'œuvre d'art, c'est parce qu'elle remplit certains réquisits syntaxiques et sémantiques qui permettent un fonctionnement esthétique ; l'expérience esthétique est, dans la conception goodmanienne, une expérience dynamique. Goodman remplace la question « qu'est-ce que l'art ? » par la question « quand y a-t-il art ? ». Ce faisant, il établit sa théorie en dehors du cadre habituellement réservé à l'esthétique, celui délimité par les beaux-arts. Plus exactement, l'art est dans le projet de Goodman plus un point de départ qu'un point de convergence[87].

---

[86] Morizot écrit par exemple :

> « On crédite habituellement Nelson Goodman – R. Wollheim et d'autres l'ont explicitement reconnu – d'avoir été chez les philosophes le principal avocat d'un tournant ou, comme il aime à le dire, d'une réorientation de l'analyse en direction de l'art. (…) Tout au long de notre siècle en effet et jusque dans les année récentes, l'esthétique anglo-saxonne a été de façon dominante *a philosophy of criticism* c'est-à-dire, dans les termes de Beardsley, une enquête sur « la signification et la vérité des énoncés critiques ». Contre l'omniprésence du discours justificatif et contre l'expérience massive du Beau, Goodman entreprend au contraire de redécouvrir l'esprit de finesse des connaisseurs du XVIIIe siècle en l'appliquant cette fois à l'examen de la compétence symbolique. » [Morizot 1997, 166-167]

On pourra aussi lire l'article de Elgin : "Relocating Aesthetics : Goodman's Epistemic Turn" (cf. [Elgin 1997]).

[87] En introduction aux *Langages de l'art*, Goodman explique la place qu'il réserve à l'art :

> « (…) mon étude déborde les arts vers des questions qui relèvent des sciences, de la technologie, de la perception, et de la pratique. Les problèmes concernant les arts sont des points de départ plutôt que de convergence. L'objectif est d'avoir accès à une théorie générale des symboles. » [Goodman 1968, 27]

Le déplacement de l'analyse du mérite esthétique vers celle d'un fonctionnement esthétique et la conception cognitive de l'expérience esthétique sont deux points étroitement liés dans la théorie de Goodman. C'est parce l'esthétique y est conçue comme propriété cognitive que l'on peut parler de fonctionnement esthétique.

L'analyse sémiologique du fonctionnement esthétique comme servant la cognition a, au moins, deux conséquences fondamentales par rapport à l'étude des rapports entre science et art. En effet :

1) Elle permet de réconcilier l'esthétique avec le cognitif, notamment en montrant que l'émotif et le cognitif ne s'excluent pas mutuellement. Les émotions dans l'expérience esthétique servent la cognition. Goodman ne considère pas pour autant l'esthétique comme une activité strictement intellectuelle :

> « Dans l'expérience esthétique l'émotion est un moyen de discerner quelles propriétés une œuvre possède et exprime.
>
> Dire ceci c'est inviter à dénoncer vigoureusement une froide sur-intellectualisation ; mais il s'agit moins de déposséder ici l'expérience esthétique des émotions que d'en doter l'entendement. Le fait que les émotions soient partie prenante dans la démarche cognitive n'implique pas davantage qu'elles ne sont pas ressenties que le fait que la vision nous aide à découvrir les propriétés des objets implique qu'il ne se produit pas de sensations-de- couleur. Il ne fait pas de doute que les émotions doivent être ressenties - c'est-à-dire qu'elles doivent se produire, tout comme les sensations - si on doit en faire usage cognitivement. L'usage cognitif suppose leur différentiation et leur mise en rapport afin de jauger et de saisir l'œuvre, et de l'intégrer au reste de notre expérience et au monde extérieur. S'il est l'opposé d'une absorption passive dans les sensations et les émotions, il ne revient en aucune façon à les annuler. Et il explique les modifications que peuvent subir les émotions dans l'expérience esthétique. » [Goodman 1968, 291]

2) Elle élargit les domaines d'applications de l'esthétique, qui n'est plus alors réservée aux seuls domaines artistiques mais s'étend à l'ensemble des activités qui mettent en jeu des systèmes symboliques :

> « Le projet de Goodman (…) s'interdit de remonter aux sources existentielles ou culturelles de la créativité ou de dévoiler le sens dernier de l'art, et (il) s'en tient seulement à expliciter, derrière la diversité et le chatoiement des apparences, la

> régularité des opérateurs sémiotiques et logiques qui les sous-tendent pour espérer en tirer quelques conclusions de portée plus générale. (…) De simple occasion, l'art devient laboratoire pour une vision élargie de la symbolicité et de l'humanité, guide d'une géographie de l'esprit que ses devanciers abordaient de préférence à partir de l'épistémologie ou de la psychologie. » [Morizot 1996, 14]

L'approche sémiologique de l'esthétique de Goodman déplace ainsi les frontières entre la science et l'art. Non qu'il en fournisse une unification, mais il montre que leur différence n'est pas conséquente à la supposée opposition entre émotif et cognitif :

> « Toutes ces incapacités à fournir une formulation acceptable en termes de plaisir ou de satisfaction, qu'ils soient produits, « objectivés » ou anticipés, ne délogent certainement pas la conviction que la distinction entre le scientifique et l'esthétique est de quelque manière enracinée dans la différence entre connaître et ressentir, entre le cognitif et l'émotif. Cette dernière dichotomie, profondément ancrée, est en elle-même douteuse à beaucoup d'égards et son application devient ici particulièrement embarrassante lorsqu'on s'aperçoit que l'expérience esthétique tout comme l'expérience scientifique a fondamentalement un caractère cognitif (…).
>
> Même parmi les œuvres d'art et des expériences esthétiques d'une perfection évidente, la composante émotive est excessivement variable – disons, d'un Rembrandt tardif à un Mondrian tardif, ou bien d'un quatuor de Brahms à un autre de Werben. Le Mondrian et le Werben ne sont manifestement pas plus émotifs que les lois de Newton ou d'Einstein ; une ligne tracée entre l'émotif et le cognitif a toute chance de séparer moins nettement l'esthétique du scientifique que de séparer les uns des autres objets et expériences esthétiques. » [Goodman 1968, 287-289]

L'art est pour Goodman l'occasion d'examiner le fonctionnement esthétique des systèmes symboliques et d'en fournir une description symptomatique générale. A ce titre, sa théorie de l'esthétique doit pouvoir être appliquée, ou confrontée, à des disciplines créatives qui mettent en jeu un langage symbolique. Le choix de la théorie de Goodman pour analyser les mathématiques semble alors tout indiqué.

I.2. Mérite et valeur esthétique

Si l'œuvre de Goodman elle-même invite à une telle manœuvre, confronter la théorie symptomatique de l'esthétique avec les mathématiques, d'autres raisons

viennent encore justifier ce choix. En effet, comme il a été montré dans la première partie, l'attribution d'une certaine beauté aux mathématiques, ne pose finalement pas de réel problème, quand bien même elle dépend fortement de différents présupposés ontologiques, métaphysiques ou méthodologiques. Par contre, il est plus délicat de parvenir à une justification cohérente du rôle effectif accordé à la beauté au sein du processus de développement des mathématiques. Or, Goodman ne propose pas un traité sur le mérite esthétique, c'est-à-dire un moyen de distinguer de façon évaluative l'esthétiquement bon de l'esthétiquement mauvais, mais il propose une étude de la valeur esthétique, c'est-à-dire une analyse fonctionnelle de l'esthétique. Son objectif est de déterminer un moyen de savoir si, et de comprendre pourquoi, quelque chose fonctionne esthétiquement et pourquoi ce fonctionnement sert la cognition. Autrement dit, si Goodman a raison, nous devrions, au terme de cette confrontation, pouvoir justifier le rôle de l'esthétique en mathématiques.

I.3. Contraintes ontologiques

Cette justification devrait de plus être valable en dehors d'un cadre strict délimité par une ontologie particulière des mathématiques. Si le nominalisme de Goodman est à l'origine de la majeure partie des critiques portées à sa théorie[88], il apparaît par contre comme un avantage par rapport à notre préoccupation. En effet, le constat est le suivant : il y a en mathématiques un grand nombre d'ontologies différentes, chacune donnant lieu à une conception des mathématiques différentes. Ces différences ne sont pas que de simples nuances entre diverses conceptions des mathématiques, des objets mathématiques, mais elles sont souvent des raisons suffisantes d'exclusion de ces conceptions les unes envers les autres. D'autres part, le rôle accordé à l'attrait esthétique en mathématiques ne semble pas connaître ces frontières, et l'on en trouve témoignage chez des mathématiciens d'horizons ontologiques divers. Il s'agit donc d'éviter au maximum de tenir compte de considérations ontologiques particulières dans l'espoir justement de pouvoir justifier

[88] La question de la représentation picturale fait partie, avec l'exemplification, des points les plus sujets à la critique dans la théorie de Goodman, on pourra lire par exemple deux articles de Arrell : "What Goodman Should Have Said About Representation" , article dans lequel Arrell propose une alternative non nominaliste de la dénotation et de la représentation (cf. [Arrell 1987]) et "Exemplification Reconsidered", article qui propose cette fois une version non nominaliste de l'exemplification ([Arrell 1990]).

le rôle et la signification de l'esthétique en mathématiques indépendamment d'une ontologie particulière. Nous allons donc essayer de séparer l'outil goodmanien de ses présuppositions ontologiques.

I.4. Critique de la théorie, critique de l'outil

La théorie esthétique de Goodman, si elle a rencontré un grand succès, n'en donne pas moins lieu à d'importantes critiques[89]. Non que je ne veuille en tenir compte, mais dans la mesure où cette théorie va être utilisée par la suite en tant qu'outil, et non en tant que théorie, c'est seulement au niveau de la pratique qu'interviendront les critiques. Or, les plus importantes critiques qui ont été faites à Goodman portent sur la théorie elle-même. A ce titre, elles sont plus à considérer comme un discours méta-esthétique théorique. D'autre part, les critiques, plus rares, qui portent sur l'application de la théorie, donc à un niveau pratique, mettent en lumière des difficultés relatives à l'applicabilité de l'analyse sémiologique goodmanienne par rapport à des objets exclusivement propres à l'art. Par suite, elles relèvent de problématiques propres à l'art, en particulier des questions de représentation et de ressemblance dans les systèmes picturaux[90]. Si Goodman annonce une théorie symptomatique de l'esthétique applicable à tout système symbolique, cette dernière n'a jamais été appliquée aux mathématiques. Je me réserve donc la possibilité de critiquer la théorie de Goodman, en tant qu'outil, seulement après l'avoir appliquée.

---

[89] A titre d'exemple, on pourra lire [Young 1999] et [Dempster 1989] sur l'exemplification et l'exemplification métaphorique, [Zemach 1984] et [Rollins 1999] sur les différences entre description et dépiction (on notera que Zemach y construit de plus une critique du symptôme de densité syntaxique à l'aide de contres exemples), et pour une critique sur les symptômes goodmaniens en général, on pourra se reporter à [Genette 1997]. Enfin, en ce qui concerne le problème de la ressemblance, on pourra lire [Dipert 1996] ou encore [Blanc-Benon 2004]. Ces références sont bien loin d'être exhaustives, elles ne servent qu'à donner une idée dans une certaine mesure des critiques les plus classiques en ce qui concerne les points majoritairement remis en question de la théorie des symboles goodmanienne.

[90] Pour une confrontation entre la théorie de Goodman et la peinture par exemple, on pourra s'en référer à [Blanc-Benon 2004].

II Présentation et interprétation de la sémiologie goodmanienne

II.1. Questions de vocabulaire

Le travail préalable à la présentation des symptômes de l'esthétique goodmanien consiste en une mise au point sur le vocabulaire qui va être employé. En effet, avant même d'introduire les symptômes, qui sont des réquisits syntaxiques ou sémantiques (densité et saturation) ou des modes particuliers de symbolisation (exemplification et référence multiple et complexe), il convient de s'accorder sur le vocabulaire élémentaire, notamment celui attenant à la notion de système symbolique. Une large partie du vocabulaire dont il va être question est introduit dans Langages de l'art afin d'établir une théorie caractéristique de la notation ; Goodman y prépare les outils qui serviront à distinguer les systèmes notationnels d'autres systèmes moins contraignants, en particulier ceux qui interviennent dans les domaines artistiques. La théorie de la notation en elle-même ne sera pas utilisée de façon exhaustive lors des applications mathématiques. Aussi, je ne mentionnerai uniquement les définitions et propriétés qui seront nécessaires.

Marques et caractères

Dans la terminologie goodmanienne, ainsi que dans celle qui sera adoptée par la suite, le terme de symbole est employé de façon neutre et générale :

> « Il [le terme de symbole] recouvre les lettres, les mots, les textes, les images, les diagrammes, les cartes, les modèles, et bien d'autres choses, mais ne véhicule pas de sous-entendus détournés ou occultes. Le portrait le plus littéral et la page la plus prosaïque sont au même titre des symboles, sont aussi « hautement symboliques » que les portraits et les pages les plus imaginatifs et les plus figurés. » [Goodman 1968, 27]

N'importe quel élément d'un système symbolique vaut pour un symbole. Dire ceci invite à préciser aussitôt ce qu'il faut entendre par système symbolique.

Avant d'en donner une caractérisation davantage détaillée, disons de façon synthétique, qu'un système symbolique consiste en la donnée d'un ensemble d'éléments de base, ou atomiques, ainsi qu'en une liste de règles explicites de combinaison pour former des éléments composés à partir des éléments premiers et de règles pour pouvoir les interpréter. Appelons ces éléments premiers des marques[91].

Une marque peut donc être considérée comme l'unité de base de la théorie de la notation, elle est la partie matérielle d'un symbole. Toute inscription visuelle ou auditive est une marque :

> « Une marque subsume toute forme d'inscription matérielle ou de réalisation orale d'inscriptions linguistiques ou musicales. » [Morizot 1996, 123]

Certains aspects des marques peuvent être contingents selon le point de vue, syntaxique ou sémantique, avec lequel on les considère[92]. Il se peut que deux marques soient, par exemple, visuellement distinctes, et que l'on puisse pourtant les interchanger sans modifier l'ensemble. On définit alors un *caractère* comme étant un ensemble de marques équivalentes, ce dernier pouvant être représenté par n'importe quelle marque qui lui appartient. L'exemple typique est celui des marques des lettres constituant un alphabet. Le caractère « a » est la classe de toutes les marques (ici inscriptions) possibles différentes de « a ». Comme l'explique Morizot :

> « Intuitivement la condition pour qu'un groupe de marques relèvent d'un seul et même caractère est que toutes les propriétés contingentes de ces marques n'affectent pas leur appartenance fonctionnelle au caractère.» [Morizot 1996, 123]

Schéma et système symbolique

[91] En fait, Goodman propose de faire une distinction plus fine encore entre les éléments de base, il parle de marque pour inclure toute inscription, visuelle ou auditive par exemple et d'inscription pour inclure les émissions (cf. [Goodman 1968, 169]). Les inscriptions sont dans son vocabulaire des marques particulières. Au vu de nos besoins, il n'est pas nécessaire de tenir compte de cette précision.

[92] Dans la théorie de la notation de Goodman, les propriétés syntaxiques et sémantiques se différencient selon la distinction logique usuelle. Les propriétés syntaxiques spécifient les relations entre les marques, les classes de marques ou les règles de combinaison. Les propriétés sémantiques portent sur la mise en relation de la syntaxe avec un domaine d'interprétation (pour plus de détails, cf. [Morizot 1996, 123]).

Un schéma symbolique est la construction la plus générale que l'on puisse faire avec des caractères : c'est la donnée d'un ensemble de caractères et d'une liste de règles pour en former d'autres[93]. L'alphabet, d'un point de vue strictement syntaxique, est un schéma symbolique très simple : la donnée de 26 caractères que l'on peut combiner indifféremment entre eux par arrangement linéaire. Les inscriptions obtenues par combinaisons d'inscriptions sont appelées inscriptions composées et les inscriptions élémentaires du schéma sont atomiques, et, par suite, les caractères dont toutes les inscriptions sont composées, respectivement atomiques, sont appelés caractères composés, respectivement, atomiques. Ainsi, dans l'exemple de l'alphabet, les lettres sont des inscriptions atomiques et toutes inscriptions de combinaisons de lettres, allant du mot au texte, sont les inscriptions composées. Un schéma symbolique n'engage pas de question sémantique. Si, par exemple l'inscription composée « bzt » n'a pas de correspondance sémantique en français, elle n'en est pas moins une inscription valide dans le schéma symbolique qu'est l'alphabet avec comme règle de combinaison la concaténation linéaire.

Lorsque l'on rajoute à la liste des modes de combinaison des règles qui régissent les relations entre les inscriptions du schéma et leur signification, autrement dit, lorsque l'on rajoute des contraintes sémantiques, on obtient un système symbolique :

> « Un système symbolique consiste en un schéma symbolique mis en corrélation avec un domaine de référence.» [Goodman 1968, 179]

Différents systèmes symboliques peuvent donc avoir le même schéma symbolique de base. Et les applications, ou les interprétations d'un même caractère du schéma ne sont pas nécessairement identiques dans les différents systèmes symboliques construits sur le schéma[94]. Un exemple simple est donné par la distinction entre le français-son « où la notation alphabétique française ordinaire est en corrélation avec des événements-sons conformément à la pratique usuelle de la prononciation» et le français-objet «où la corrélation se fait plutôt avec des objets

[93]Cf. [Goodman 1968 ,169]

[94] Cet aspect de la construction des systèmes symboliques sera particulièrement important en ce qui concerne les applications mathématiques ; il interviendra notamment dans l'interprétation systématique de la notion de généralisation mathématique.

(incluant des événement, etc.) conformément à la pratique usuelle de l'application. »[95]. Dans le système français-son, toutes les inscriptions atomiques correspondent à un événement (sonore) alors que ce n'est pas le cas dans le système français-objet.

Le champ d'application d'un caractère dans un système symbolique est sa classe-de-concordance. La relation qui unit un caractère avec sa classe-de-concordance est une relation de dénotation bien que plus large qu'usuellement étant donné qu'à partir d'un même caractère, on va pouvoir se diriger vers différents dénotants selon le domaine de référence sélectionné.

> « (…) Dénotation est à prendre de manière sensiblement plus large qu'on ne fait d'ordinaire, pour couvrir un système où les partitions sont en corrélation avec des exécutions qui concordent avec elles, ou des mots avec leurs prononciations, aussi bien qu'un système où des mots sont en corrélation avec ce à quoi ils s'appliquent ou qu'ils nomment. En partie afin de ne pas perdre cela de vue, j'utiliserai «concorde avec » comme interchangeable avec « est dénoté par », « a comme concordant » comme interchangeable avec « dénote » et « classe-de-concordance » comme interchangeable avec « extension ». »[Goodman 1968, 180-181]

En français-objet le caractère composé ''bzt'' a une classe-de-concordance vide. Les inscriptions de tels caractères, c'est-à-dire ayant une classe-de-concordance vide, sont vacantes. La vacance n'est pas nécessairement un défaut du système symbolique :

> « La vacance peut résulter soit de ce qu'on n'a pas assigné de concordant à un caractère, soit de ce qu'il n'existe pas de concordants tels que ceux demandés, soit d'une stipulation explicite que le caractère n'a aucun concordant. Une inscription vacante appartient au schéma symbolique de façon aussi réelle que n'importe quelle autre, et peut tenir une aussi grande place ; son déficit est sémantique, non syntaxique. Un objet qui ne concorde avec aucune inscription n'est pas étiqueté dans le système. » [Goodman 1968, 181]

Suite à cette liste de définitions initiales, une première mise au point s'impose. Tout d'abord, je considérerai par la suite les mathématiques comme un système

[95] Cf. [Goodman 1968, 180]

symbolique et j'appellerai objet mathématique toute marque appartenant au schéma symbolique mathématique alors que je tâcherai de réserver le terme de symbole mathématique pour tout objet mathématique du système, c'est-à-dire lorsque seront pris en compte des relations sémantiques.

De façon plus précise, on peut dire que les mathématiques peuvent être considérées comme une réunion non disjointe de systèmes symboliques tous construits sur un schéma symbolique de base, ou élémentaire. Ce dernier étant constitué des marques usuelles : un alphabet littéral et numérique (les premières lettres de l'alphabet classique a, b, c sont souvent réservées pour les constantes, les lettres f, g, h pour des fonctions et les dernières lettres x, y, z pour des inconnues), des opérateurs (=, +, /), des quantificateurs $\exists$ ou $\forall$, ainsi que de règles syntaxiques de construction (par exemple, l'addition réelle de deux nombres s'écrit en plaçant les deux nombres de part et d'autre de l'opérateur +).

Il n'y a pas de dommage à considérer ce schéma comme le schéma de base de tout système symbolique mathématique. Tout au plus risque-t-on un certain encombrement et une certaine redondance. En effet, une première analyse permet de ranger les différents systèmes symboliques sous trois grandes familles :

1. La famille des mathématiques appliquées, où l'on va interpréter les caractères du schéma par rapport au monde physique des phénomènes naturels.

2. La famille des différentes perspectives ontologiques ou méthodologiques des mathématiques, où l'interprétation et le traitement d'un objet mathématique dépend de contraintes méthodologiques ou ontologiques.

3. La famille des sous-ensembles particuliers d'objets mathématiques qui sont interprétés en fonction d'une liste prédéfinie d'axiomes ou de propriétés.

Si l'on considère un système symbolique obtenu en ayant mis en référence le schéma de base avec l'un des membres de la première famille, il se peut que certains caractères soient vacants. Par exemple, une équation qui décrit un

phénomène physique pour lequel une racine négative ne serait pas interprétable. Dans ce cas, il peut y avoir une double vacance :

- une vacance sémantique : certains caractères n'ont pas de concordant,
- une vacance syntaxique : certains phénomènes ne sont les concordants d'aucun caractère.

Dans la deuxième famille, il s'agit de mettre en référence les caractères du schéma, et de les interpréter en fonction de contraintes attenant à une perspective particulière. Par exemple, les quantificateurs $\exists$ ou $\forall$ (« il existe » ou « quelque soit ») n'auront pas de concordant, seront vacants, dans un système mathématique constructiviste.

Enfin, la troisième famille, sûrement la plus large, concerne les systèmes particuliers que l'on peut obtenir à partir de certaines règles ou axiomes. Si l'on met en référence, par exemple, le schéma de base avec les nombres entiers, la racine carrée de deux, qui est un caractère valide du schéma symbolique, ne concorde avec aucun élément des entiers naturels. Les règles de combinaison n'auront pas la même interprétation selon le sous-ensemble concerné : tel est le cas par exemple, pour l'addition de deux nombres entiers et l'addition de deux vecteurs du plan.

Ces familles ne sont clairement pas indépendantes les unes des autres. L'interprétation d'un symbole dans un système de la première famille (que l'on veut donc faire fonctionner en référence au monde physique) dépend d'une interprétation préalable dans un système de la troisième, et, éventuellement deuxième famille. J'aurais pu proposer le découpage habituel des mathématiques qui distingue les mathématiques appliquées (première famille) des mathématiques pures ou fondamentales (qui regrouperait alors les deuxième et troisième familles). Il aurait été également possible de proposer au contraire, un découpage plus détaillé où les raffinement porteraient notamment sur la troisième famille (on distinguerait alors les systèmes selon l'interprétation des axiomes initiaux, par exemple les géométries euclidiennes ou non, ou encore selon l'interprétation d'opérations élémentaires, comme la multiplication selon qu'elle est appliquée entre scalaires ou entres vecteurs).

La première alternative ne permettrait pas de rendre compte de certains réquisits qui vont être explicités ensuite. La seconde alourdirait inutilement cette section, dont l'objectif est de montrer comment les mathématiques peuvent être considérées comme un système symbolique. L'interprétation détaillée du fonctionnement des références entre symboles et objets mathématiques au sein des mathématiques en tant que système symbolique sera analysée de façon plus systématique dans la dernière partie.

II.2. Symptômes de l'esthétique

A partir de son investigation méthodique des différents moyens de référence et de représentation, Goodman établit une liste de propriétés et de réquisits syntaxiques et sémantiques. Parmi ces dernières, il sélectionne celles qui distinguent le plus souvent, d'après lui, l'esthétique du non esthétique. Je propose dans un premier temps d'examiner les propriétés en question sous un angle strictement sémiotique. L'analyse de leur rôle particulier dans les langages de l'art, et donc les raisons de leur sélection en tant que symptômes de l'esthétique sera faite dans un second temps.

Goodman retient cinq symptômes : l'exemplification, la densité syntaxique, la densité sémantique, la saturation relative, et la référence multiple et complexe (les quatre premiers sont présentés dans *Langages de l'art* alors que le cinquième n'apparaît qu'ultérieurement dans *Manière de faire des mondes*[96]). Dans la majeure partie des cas, lorsque la théorie de Goodman est soit critiquée en tant que théorie soit appliquée et critiquée en tant qu'outil, seule l'exemplification joue un rôle significatif, au détriment des autres symptômes. La tendance classique est de considérer l'exemplification comme le trait fondamental de la théorie de Goodman. Peut-être est-ce en partie à cause de son statut particulier : l'exemplification est un mode de symbolisation alors que les trois autres symptômes suivants portent sur la structure interne du système (je laisse pour l'instant de côté le dernier, c'est-à-dire la référence multiple et complexe).

[96] Cf. [Goodman 1978, 91]

Je traiterai les symptômes dans l'ordre suivant : la densité syntaxique, la saturation syntaxique relative, l'exemplification, la densité sémantique puis enfin la référence multiple et complexe. Cet ordre n'est pas anodin : non seulement les notions abordées pour la densité seront nécessaires pour comprendre la saturation mais surtout, sur un plan esthétique, la saturation vient renforcer la densité. Ensuite, la fréquence avec laquelle l'exemplification est abordée dans la littérature générale sur l'esthétique, ou la sémiotique, de Goodman, a tendance à effacer l'importance des autres symptômes. En partie à cause de cela, je choisis de ne pas présenter cette dernière de prime abord. Enfin, il semble judicieux de comprendre d'abord la structure interne (en traitant en premier des questions syntaxiques) pour analyser ensuite le lien entre le schéma et le système auquel il donne lieu.

II.2.1. Densité syntaxique

La densité syntaxique est un réquisit qui a une double fonction dans la théorie goodmanienne : en tant que symptôme de l'esthétique, il contribue à marquer la différence entre l'esthétique et le non esthétique, et en tant que propriété syntaxique, il contribue à marquer la distinction entre les systèmes notationnels et les systèmes non notationnels[97]. De plus, comme on le verra, combinée avec la saturation, la densité syntaxique fournit à Goodman un moyen théorique de distinguer la dépiction de la description.

Puisqu'il s'agit d'un réquisit syntaxique, il est décelable sur les schémas symboliques ; aucune référence sémantique n'est nécessaire. De façon intuitive, un schéma est syntaxiquement dense lorsque qu'il n'existe aucun moyen de recenser exhaustivement chaque caractère, qu'on ne peut les passer en revue ni les isoler les uns des autres. La définition technique est la suivante :

> « Un schéma est syntaxiquement dense s'il comporte une multitude infinie de caractères ordonnés de telle sorte qu'entre deux quelconques il en existe un troisième. » [Goodman 1968, 173]

[97] Cf. [Goodman 1968,191]

La densité syntaxique est l'apanage des systèmes picturaux et elle est au contraire, exclue de tout système linguistique. Il est, par exemple, impossible d'énumérer toutes les marques, ici inscriptions, qui composent un tableau. Même en imaginant un tableau constitué de points isolés, il n'est pas envisageable de décider dans quelle mesure les « blancs » ou espaces, qui séparent les marques n'en sont pas aussi. En revanche, il est nécessaire que le schéma d'un système linguistique ne soit pas syntaxiquement dense. En effet, un système linguistique exige une grammaire et des règles de construction de caractères. Or, pour pouvoir appliquer une grammaire, il faut pouvoir identifier chaque marque comme dénotant un unique caractère, ce que ne permet pas la densité syntaxique :

> « Une différence frappante entre les langages et les systèmes picturaux est la suivante : les langages ont des alphabets, les systèmes picturaux n'en ont pas. Il en résulte que les signes linguistiques qu'on épelle de la même façon sont reconnus comme syntaxiquement équivalents. Les éléments picturaux, aussi similaires soient-ils, ne peuvent jamais être syntaxiquement équivalents. Car sans alphabet, nous n'avons aucun moyen de distinguer les différences significatives et non significatives entre les marques. Il n'y a pas de contrepartie à l'épellation dans les systèmes picturaux. Les langages sont syntaxiquement différenciés ; les systèmes picturaux ou représentationnels sont syntaxiquement denses. » [Goodman 1988, 9]

La densité syntaxique est mise en balance avec le réquisit de *disjointure*, qui impose qu'aucune marque ne peut appartenir à plus d'un caractère[98] et celui de *différenciation finie*, ou *articulation*, qui stipule la possibilité théorique de toujours pouvoir déterminer qu'une marque n'appartient pas à un caractère[99] :

> « Pour tout couple de caractères K et K' et pour toute marque m qui n'appartient pas effectivement aux deux, il est théoriquement possible de déterminer soit que m n'appartient pas à K soit que m n'appartient pas à K'. » [Goodman 1968, 173]

La disjointure implique que deux marques dont on peut déterminer qu'elles sont co-membres d'un même caractère sont toujours des copies vraies l'une de l'autres[100].

---

[98] Cf. [Goodman 1968, 170]

[99] Ces deux derniers réquisits font parti de ceux que doivent nécessairement posséder un système pour être notationnel. N'ayant pas besoin pour l'instant de la caractérisation des notations, je ne ferai pas référence au rôle de ces réquisits à ce propos.

[100] Cf. [Goodman 1968, 172]

La non différentiation finie peut alors être vue comme une sous relation de la converse de la densité syntaxique (c'est-à-dire que la densité implique la non différenciation mais que cette dernière n'implique pas la densité). En effet, là où il y aura densité syntaxique il ne pourra y avoir différentiation finie : la multiplicité des caractères ôte d'emblée tout espoir de disposer d'un moyen, même théorique, de décider de l'appartenance de telle marque à tel caractère[101]. Cependant, tout schéma non différencié de manière finie n'est pas syntaxiquement dense :

> « En toute rigueur d'ailleurs, la densité est une condition plus forte que l'indifférenciation puisqu'elle présuppose, entre deux éléments quelconques, une infinité d'éléments intermédiaires (…).» [Morizot 1996, 126]

En tant que propriété syntaxique, la densité permet d'avoir un discours rigoureux sur des systèmes, ou des schémas, symboliques qui ne peuvent répondre ni d'un alphabet ni d'une grammaire, mais qui n'en possèdent pas moins un fonctionnement syntaxique. D'après R. Pouivet, l'esthétique de Goodman est une métalogique des systèmes formels et en tant que telle

> « (Elle) est ici une branche de la métalogique et ne se caractérise par rien d'autre que l'intérêt pour des symboles appartenant à des systèmes formels que généralement les logiciens délaissent, tout spécialement les images, les gestes, les sons. » [Pouivet 1996, 67]

La densité syntaxique permet en outre de rendre compte d'un fonctionnement symbolique particulier là où l'esthétique échoue habituellement :

> « L'impossibilité d'une détermination finie peut suggérer l'idée d'ineffabilité que l'on a si souvent revendiquée pour l'esthétique ou dont on lui a fait non moins souvent reproche. Mais la densité, loin d'être mystérieuse et vague, est explicitement définie ; elle dérive de l'exigence impossible à satisfaire d'une précision absolue, et elle la renforce. » [Goodman 1968, 295-296]

Néanmoins, en tant que symptôme de l'esthétique, le choix de la densité syntaxique peut ne pas sembler judicieux dans la mesure où elle n'est la marque d'aucun système linguistique, et par conséquent aucune œuvre littéraire n'est syntaxiquement

[101] Cf. [Goodman 1968, 173] et [Morizot 1996, 126]

dense. Or, un symptôme n'est pas un critère décisif, il n'est ni nécessaire ni suffisant de posséder la totalité des symptômes pour décider de la valeur esthétique :

> « Il est probable que les quatre symptômes tendent à être plutôt présents qu'absents, et à occuper une place éminente dans l'expérience esthétique ; mais n'importe lequel d'entre eux peut être absent de l'expérience esthétique ou présent dans l'expérience non esthétique. Le medium symbolique des arts littéraires, par exemple, n'est pas syntaxiquement dense, tandis que le jaugeage des poids ou des températures peut être dense à la fois syntaxiquement et sémantiquement. L'absence d'un des symptômes esthétiques ou la présence d'un symptôme non esthétique ne conduit pas à une totalité moins pure, et il n'est même pas vrai qu'une expérience est d'autant plus esthétique que s'y concentrent davantage de symptômes esthétiques. » [Goodman 1968, 297]

Les mathématiques considérées comme langage symbolique ne sont donc pas syntaxiquement denses, mais elles sont syntaxiquement différenciées de manière finie et disjointe. Si l'on considère pour l'instant uniquement les objets mathématiques relevant non des notations linguistiques (dans ce cas les réquisits en question sont vérifiés de manière évidente en tant que sous-ensemble d'un système linguistique particulier : la langue dans laquelle elles sont exprimées, le français dans notre cas), mais de la symbolique mathématique à proprement parler (signes opératoires, quantificateurs, etc.) sans tenir compte des figures mathématiques, alors on peut toujours vérifier, soit par la forme même, soit par le contexte, qu'une marque appartient à un unique caractère.

Ce manquement, si tant est que cela en soit un, n'est en aucun cas à considérer comme un déficit esthétique, seulement une particularité due au fait que les mathématiques peuvent être considérées comme un langage et sont, par suite, non syntaxiquement denses.

Mais, en fait, les mathématiques ne sont-elles qu'un langage, comme le formalisme le croyait à tord ?

Il faut donc étudier les cas particuliers des figures mathématiques afin d'établir si leur fonctionnement est nécessairement celui d'un diagramme, ou si elles peuvent

être tenues pour images, dans un sens goodmanien. Ce point en particulier sera traité au travers d'exemples tirés de la géométrie dans la deuxième section de la troisième partie, réservée aux applications de la théorie de Goodman[102].

II.2.2. Saturation syntaxique relative

De la même façon que la densité syntaxique, la saturation possède une double fonction : elle est un symptôme de l'esthétique mais aussi un réquisit syntaxique permettant à Goodman d'établir une distinction entre la description et la dépiction, ou, plus exactement, la saturation apparaît comme un facteur de la dépiction[103].

En effet, en introduisant la densité, Goodman permet une première classification entre les images et les non-images[104]. Si la densité syntaxique n'est pas une condition suffisante c'est parce que les images, autant que les diagrammes, sont syntaxiquement denses. Il y a pourtant une différence de fonctionnement ou de lecture entre ces différents systèmes symboliques : c'est la différence entre la

---

[102] Cf. Partie III. B. II.

[103] Dans *Langage de l'art*, Goodman suggère que le réquisit de saturation relative peut affiner sa classification en distinguant, à l'intérieur du pictural les systèmes les moins diagrammatiques, les moins schématiques, de ceux qui le sont davantage (cf. [Goodman 1968, 295]). Mais ce n'est que dans *Reconceptions en philosophie* qu'il développe ce point :

> « Un symbole est d'autant plus saturé que le nombre de ses aspects qui fonctionnent symboliquement est plus élevé. Par exemple, dans un diagramme linéaire, seules les différences de position entre les points sur la ligne, par rapport aux coordonnées, ont une signification ; l'épaisseur et la couleur de la ligne ne comptent pas. Mais dans un dessin au trait – dans une dépiction linéaire – tous ces aspects et d'autres ont une signification. Un dessin est plus saturé qu'un diagramme, y compris lorsque la même ligne fonctionne comme dessin dans certaines circonstances et comme diagramme dans d'autres. Les dépictions tendent à être hautement saturés.
>
> Cataloguée en d'autres endroits de mon œuvre (…) comme un symptôme de l'esthétique, la saturation peut ainsi être également considérée comme un facteur de la dépiction. En complétant au moyen de l'exigence de saturation comparative la nature analogique des phénomènes considérés, il est permis de circonscrire de façon plus étroite la sous-classe des symboles qui consistent en dépictions. » [Goodman 1988, 131]

[104]

> « (…) la classification quotidienne des symboles qui distingue les images des non-images est étroitement apparentée à la frontière qui sépare les symboles appartenant à un système dense ou « analogique » et ceux qui appartiennent à un système de différentiation finie ou « digital ». Il se peut que le fait d'être analogique passe pour une condition nécessaire de la dépiction, mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante.» [Goodman 1988, 131]

dépiction et la description. Goodman suggère donc d'affiner la condition de dépiction en soulignant que parmi des systèmes également denses certains traits sont constitutifs pour les uns alors qu'ils sont contingents pour les autres. La saturation relative d'un système est ainsi la propriété qui caractérise les systèmes denses dans lesquels aucun, ou très peu, des caractères ne peuvent être modifiés sans que cela ne modifie le fonctionnement du système. En ce sens, la saturation est un critère qui distingue les systèmes syntaxiquement denses qui dépeignent (la plus subtile nuance de symbole rentre en compte pour l'interprétation et la compréhension) de ceux qui décrivent (seuls quelques aspects ont une valeur constitutive et informative) :

> « Comparez un fragment d'électrocardiogramme avec un dessin du Mont Fuji-yama par Hokusai. Les lignes noires en zigzag sur des fonds blancs peuvent être exactement les mêmes dans les deux cas. Cependant l'un est un diagramme et l'autre une image. Qu'est-ce qui fait la différence ? A l'évidence, quelque caractéristique des schémas différents dans lesquelles les deux marques fonctionnent comme symboles. Mais, puisque les deux schémas sont denses (et supposés disjoints), quelle caractéristique ? La réponse ne réside pas dans ce qui est symbolisé ; on peut faire des diagrammes de montagnes, et des images de battements de cœur. La différence est syntaxique : les aspects constitutifs du diagrammatique, en tant qu'on les compare avec le caractère imagé, sont l'objet d'une restriction expresse et étroite. Les seuls traits pertinents du diagramme sont l'ordonnée et l'abscisse de chacun des points que traverse le centre de la ligne. L'épaisseur de la ligne, sa couleur et son intensité, la grandeur absolue du diagramme, etc., n'importent pas ; savoir si ce qui est donné comme un double du symbole appartient au même caractère du schéma diagrammatique ne dépend pas du tout de semblables traits. Cela n'est pas vrai de l'esquisse ; Tout empâtement ou affinement de la ligne, sa couleur, son contraste avec le fonds, sa taille, voire les qualités du papier – rien de tout ceci n'est écarté, rien ne peut-être ignoré.» [Goodman 1968, 273]

La saturation d'un système se mesure ainsi au nombre, si l'on peut dire, des aspects non contingents de ses éléments. Par opposition, pour des systèmes dont seuls quelques aspects sont constitutifs, on parlera d'atténuation[105]. La saturation peut ainsi être interprétée comme la propriété qui traduit la contingence ou la non contingence de la densité syntaxique :

[105] Cf. [Goodman 1968, 311 note 2]

> « Bien que le schéma imagé et le diagramme aient en commun de ne pas être articulés, certains traits qui sont constitutifs dans le schéma imagé sont rejetés comme contingents dans le schéma diagrammatique ; dans le schéma imagé, les symboles sont relativement saturés. » [Goodman 1968, 273]

La démarche de Goodman en établissant les propriétés de densité et de saturation n'est pas de fournir un moyen de déterminer ce qui ferait *l'essence* d'une image mais de donner les moyens de répondre à la question « *quand y a-t-il image ?»*. En effet, comme le note R. Pouivet :

> « Quelle différence y a-t-il alors entre une courbe de température accrochée au lit du malade et un dessin représentant la cime des montagnes ? Ce n'est pas d'abord ce qu'ils représentent. C'est-à-dire que la différence n'est pas d'abord sémantique. On peut même imaginer le cas d'un recouvrement parfait par superposition des deux figures. Simplement, ils se lisent dans des systèmes formels différents. Dans le cas de la courbe de température, certaines caractéristiques sont manifestement constitutives, par exemple le rapport entre les points et les coordonnées en abscisse et ordonnée, et d'autres contingents, par exemple la couleur, l'épaisseur du tracé, les légères variations de ce tracé, etc. Dans le cas du dessin, ce qui est constitutif et ce qui est contingent dépend surtout de notre capacité à interpréter le dessin et à trouver une signification à toutes les variations, quelles qu'elles soient. On parlera alors de saturation symbolique. Elle caractérise les systèmes symboliques dans lesquels la distinction entre traits constitutifs et traits contingents n'a pas d'usage ; ce qui fait la différence entre une image et un diagramme. » [Pouivet 1996, 72]

La classification des systèmes symboliques en diagrammatique et représentationnel selon le degré de saturation relative exclut alors l'hypothèse selon laquelle la nature (diagrammatique ou représentationnelle) des systèmes syntaxiquement denses repose sur leur structure interne, puisque qu'un même symbole peut être une image dans un système et un diagramme dans un autre. Autrement dit, il s'agit bien de dire quand il y a image plutôt que ce qu'est qu'une image.

D'autre part, la caractérisation de la dépiction par le biais de la saturation a pour effet d'évacuer toute allusion à la notion de ressemblance :

> « La ressemblance disparaît en tant que critère de représentation, et la similarité structurale en tant que réquisit pour un langage notationnel ou tout autre langage. (…)

> Une réforme aussi radicale s'imposait. Elle prend en compte l'entière relativité de la représentation et la possibilité de représenter par des choses autres que des images. Des objets et des événements, visuels et non-visuels, peuvent être représentés par des symboles visuels ou non-visuels. Les images peuvent fonctionner comme représentations à l'intérieur de systèmes très différents de celui qu'il se trouve que nous considérons comme normal ; des couleurs peuvent tenir lieu de leurs complémentaires ou de grandeurs, la perspective peut être renversée ou autrement transformée, et ainsi de suite. » [Goodman 1968, 274-275]

II.2.2.1. Saturation, syntaxe et sémantique

La saturation relative est clairement établie par Goodman comme une propriété syntaxique. Cependant, c'est au niveau sémantique que l'on peut en mesurer les conséquences. En effet, si nous voulons décider de la saturation relative entre deux systèmes syntaxiquement égaux (comme la courbe de température et la courbe des montagnes) il ne suffit pas d'examiner leur syntaxe (les deux systèmes sont syntaxiquement égaux) mais il faut aussi évaluer les aspects syntaxiques qui sont constitutifs ou contingents selon le mode de lecture requis (selon le système formel dans lequel on veut faire fonctionner le dessin, par exemple si la courbe en question est exposée dans une galerie ou posée sur le bureau du médecin). Cette évaluation engage des considérations sémantiques, puisqu'il s'agit de vérifier si l'interprétation du système se trouve changée si l'on modifie, même de façon très légère, ses éléments syntaxiques. La différence entre l'image et le diagramme est certes syntaxique mais par rapport à un fonctionnement symbolique particulier. Comme le note R. Pouivet :

> « Il n'y a pas de signes naturels, et une image n'est pas constituée de symboles participant de ce qu'ils représentent, mais doit simplement être lue différemment d'un texte. (…) Il n'y a pas de symboles purement verbaux et des symboles purement picturaux. Il n'y a pas plus de symboles purement esthétiques et d'autres strictement scientifiques. En revanche, la lecture d'une courbe de température ou d'un diagramme dans un traité de chimie suppose la distinction de traits constitutifs et de traits contingents, alors que l'appréciation esthétique d'une gravure de Dürer, si elle requiert toujours cette distinction, n'autorise pas la restriction des traits constitutifs à de simple repères en nombre déterminé et restreint (deux dans le cas de la courbe, moins d'une dizaine dans le cas du diagramme). Du reste, on voit aussi que l'idée toute faite selon laquelle l'œuvre picturale découragerait le discours esthétique parce que ce qu'elle représente serait inexprimable ne relève pas d'une irréductibilité de l'iconique au verbal,

> mais d'une caractéristique du mode de fonctionnement des images, le nombre de caractéristiques fonctionnant symboliquement. En droit, cela devrait conduire à reconnaître que l'image donne beaucoup à dire plutôt qu'elle rend impossible de dire quoi que ce soit. En passant de l'image au texte, si on perd quelque chose, ce n'est rien de mystérieux ; on passe d'un mode de lecture à un autre en limitant inévitablement le nombre de caractéristiques fonctionnant symboliquement. » [Pouivet 1996, 73][106]

Ces dernières remarques conduisent à poser la question de la relation qui relie le symbole à son interprétation. En effet, si un même symbole peut avoir différentes interprétations selon le système formel dans lequel on le fait fonctionner[107], la syntaxe seule ne peut pas expliquer ces différences. Il s'agit alors d'examiner les conséquences sémantiques liées à différents contextes d'interprétation afin d'analyser le rôle de la nature de la référence entre un symbole et ce à quoi il réfère.

II.2.3. Dénotation

II.2.3.1. Théorie des symboles et théorie de la référence

L'analyse des langages de l'art et plus généralement celle de la symbolisation, repose dans l'œuvre de Goodman, sur une analyse de la référence. L'enjeu de cette analyse n'est pas de fournir une explication ontologique de la référence – pourquoi tel prédicat s'applique-t-il à tel objet ? – mais il est de cerner les différentes espèces de la référence :

> « La question « Pourquoi des prédicats ont-ils une application métaphorique ? » est tout à fait comparable à la question « Pourquoi ont-ils une application littérale ? » Si nous n'avons de réponse satisfaisante ni dans un cas ni dans l'autre, peut-être est-ce parce que ce n'est pas une bonne question. En tout cas, expliquer de manière générale pourquoi les choses ont les propriétés littérales et métaphoriques qu'elles ont en effet – pourquoi les choses sont ce qu'elles sont- est une tâche que j'abandonne de gaieté de cœur au cosmologiste. » [Goodman 1968, 109]

---

[106] Dans cet extrait, on remarquera que l'auteur utilise la saturation pour comparer l'image avec le texte. Or, pour Goodman, la saturation sert surtout à comparer l'image avec le diagramme, la différence syntaxique entre image (et diagramme) et texte ayant déjà été faite sur la base de la densité syntaxique.

[107] Ou selon le mode de lecture que l'on choisit pour le faire fonctionner. Il est possible de considérer un diagramme scientifique de manière esthétique, de ne plus être seulement attentif aux variations de la courbe mais à son allure, sa couleur, etc.

En ce sens il s'agit moins, comme l'écrit Morizot, d'une approche ontologique de la référence que d'une approche topologique des voies de la référence[108]. C'est dans le dernier chapitre des *Langages de l'art* que l'on trouve une justification de la stratégie adoptée par Goodman. Il y explique que le dessein primordial de la symbolisation ne peut se réduire à un besoin pratique ni à un besoin irrépressible de l'homme qui symbolise pour la joie qu'il en éprouve (l'homme symboliserait parce qu'il est humain, comme le chien aboie parce qu'il est canin[109]), pas plus que la symbolisation ne peut être réduite à un besoin de communication. Pour Goodman, ces trois réponses sont trois facettes partielles de la justification de la symbolisation :

> « Mais l'avocat ou l'amiral qui améliorent leur compétence professionnelle au moyen d'heures passées dans les musées, le chiot qui cabriole ou le puisatier névrotique, et la femme au téléphone, ne livrent pas, séparément ou ensemble, la totalité du tableau. Ce que tous trois laissent échapper, c'est que le moteur est la curiosité et que le but est d'obtenir des lumières. L'usage des symboles au-delà du besoin immédiat joue au profit de l'entendement, non pas de la pratique ; c'est l'impulsion à connaître qui nous motive, la découverte qui nous enchante, et la communication passe après l'appréhension et la formulation de ce qui est à communiquer. Le dessein primordial est la cognition en elle-même et pour elle-même ; l'intérêt pratique, le plaisir, la contrainte, et l'utilité communicative n'en sont que des corollaires. » [Goodman 1968, 301]

Si la finalité de la symbolisation est la cognition, il s'agit donc d'analyser et de rendre compte comment elle peut servir efficacement la cognition. Ainsi, c'est dans l'espoir de répondre à cette ambition que Goodman entreprend d'analyser les divergences et les similitudes entre les différents modes de référence. Ces remarques sont fondamentales par rapport à l'application de l'esthétique de Goodman aux mathématiques. En effet, elles permettent d'en délimiter la portée, (ce qui par ailleurs ne diminue pas l'efficacité de cette application mais au contraire la renforce à l'intérieur de ses limites) : le but n'est pas d'expliquer pourquoi des prédicats mathématiques font référence, ou s'appliquent, à des objets, mais comment ils le font.

Je peux donc reprendre à mon compte l'affirmation de Morizot lorsqu'il écrit que :

---

[108] Cf. [Morizot 1996, 30]

[109] Cf. [Goodman 1968, 300]

> « L'important est moins d'identifier quelle intention ou quelle cause porte la référence que de reconnaître l'éventail de ses espèces, chacune assurant pour son compte un résultat efficace en fonction d'un contexte adéquat. Bâtir une théorie des symboles, c'est explorer la gamme de ces chemins référentiels, multiplier la diversité des parcours et la rassembler autour de ses caractéristiques opératoires. » [Morizot 1996, 30]

L'exploration de la gamme des chemins référentiels prend pour point de départ l'adoption d'une interprétation de la référence comme relation latérale[110] qui unit un symbole et un prédicat (ou, ce qui est équivalent dans la terminologie goodmanienne, un objet et une étiquette). Ce n'est qu'à partir de cette donnée première que seront établis les différents modes de référence :

> « Référer doit pouvoir s'interpréter comme une relation quelconque entre un symbole ou une marque donnée et quelque chose à quoi il réfère. En tant que telle, la symbolisation figure comme donnée primitive du système, elle n'a donc pas à être définie ; c'est elle qui sert de *definiens* à toutes les autres relations qui la spécifient. » [Morizot 1996, 25-26]

La référence ou la symbolisation est donc une relation qui en tant que « donnée primitive du système » ne sera pas définie mais expliquée à partir de ses diverses variétés[111].

Il s'agit à présent de fournir une analyse interprétative des spécifications de la symbolisation, autrement dit de dresser une cartographie des voies de la référence entre objets et étiquettes.

II.2.3.2. Dénotation

La stratégie méthodologique de Goodman consiste à distinguer dans un premier temps les références élémentaires qui opèrent entre une étiquette et un objet en fonction de leur direction. Elle met ainsi en exergue la différence entre la

[110] La notion de latéralité est fondamentale et elle prendra tout son sens lorsque sera établie la différence entre la dénotation et l'exemplification. De plus, elle joue aussi un rôle primordial pour justifier que toutes les espèces de références ne sont pas symétriques.

[111] Cf. [Goodman 1988, 132]

référence qui va d'une étiquette vers un objet et celle qui va de l'objet vers une étiquette.

La dénotation est alors la référence la plus générale qui va d'une étiquette vers un objet auquel on peut appliquer cette étiquette. Elle subsume toute forme de référence ayant la même direction. Ces différentes références seront caractérisées selon leur spécificité mais toutes sont considérées comme sous-espèces de la dénotation. En prenant comme telle la dénotation, Goodman n'entend pas ignorer les autres références ayant ou non même direction mais au contraire, il entend pouvoir les définir plus précisément, comme sous-espèces de la dénotation ou de sa converse:

> « Cette relation commune de s'appliquer à ou de valoir pour, je l'appelle dénotation – non afin d'écarter un examen des types variés de dénotation dans différents systèmes symboliques, et aussi des relations entre la dénotation et d'autre types de références, mais bien afin d'y introduire. » [112]

Pour qu'une étiquette, ou un prédicat, dénote un objet, il suffit qu'elle s'applique à ce dernier. Par exemple, toute inscription de « rouge » dénote les objets rouges. La dénotation n'exige pas la possession, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire que le prédicat possède les propriétés qu'il dénote. Une inscription de « rouge » n'a pas besoin d'être écrite en rouge pour dénoter les objets rouges. Par contre, si tel est le cas, c'est-à-dire si une inscription de rouge est écrite en rouge, on peut dire que le prédicat se dénote lui-même. On parlera alors de symbole auto-dénotant. Par exemple, « monosyllabe » ou bien « court » dénotent tous les mots courts mais le premier n'est pas, à l'inverse du second, auto-dénotant.

II.2.3.3. Dénotation et représentation

La référence dénotative permet à Goodman de spécifier la représentation en assimilant la relation entre une image et ce qu'elle représente à la relation entre un prédicat, ou une étiquette, et ce à quoi il s'applique. Au lieu de situer la ressemblance au cœur de la représentation, Goodman lui substitue la dénotation.

[112] Cité selon [Morizot 1996, 68] d'après sa traduction de [Goodman 1984, 80].

Sans parler pour le moment de prédicat ayant une dénotation nulle (comme tel est le cas pour les étiquettes fictives), on dira qu'une image représente un objet pour autant qu'elle le dénote :

> « Le fait est qu'une image, pour représenter un objet, doit en être un symbole, valoir pour lui, y faire référence ; mais aucun degré de ressemblance ne suffit à établir le rapport requis de référence. La ressemblance n'est d'ailleurs nullement *nécessaire* pour la référence ; presque tout peut valoir pour n'importe quoi d'autre. Une image qui représente un objet – ou une page qui le décrit- y fait référence et, plus particulièrement, le *dénote*. La dénotation est le cœur de la représentation et elle est indépendante de la ressemblance. » [Goodman 1968, 35]

Pour évacuer le problème des entités fictives, Goodman élabore une classification d'image[113]. Dans ce cas, la dénotation intervient à un second degré. Une image de licorne par exemple, représente une licorne dans le sens où elle dénote une image-de-licorne, et non, évidemment, une licorne elle-même. Les tirets dans l'expression image-de-licorne ont pour fonction de souligner l'insécabilité du prédicat là où le langage courant pourrait laisser penser à un prédicat dyadique :

> « Ce qui tend à nous égarer, c'est que des locutions comme « image de » et « représente» ont l'apparence d'honnêtes prédicats à deux places et peuvent parfois s'interpréter ainsi. Mais « image de Pickwick » et « représente une licorne » sont mieux caractérisés comme d'indivisibles prédicats monadiques, ou termes-de-classes, tels « bureau » et « table ». Impossible de décomposer aucun de ceux-ci, ni de quantifier sur leurs parties. De ce que *I* est l'image d'une licorne ou la représente, nous ne pouvons pas inférer qu'il existe quelque chose dont *I* est l'image ou qu'elle représente. » [Goodman 1968, 48]

La différence entre une représentation à dénotation non nulle et celle concernant les entités fictives sera par la suite indiquée par la différence de vocabulaire utilisé : « représentation » dans le premier cas et « image-de- » dans le second.

[113] Goodman propose aussi une spécification de la représentation, à savoir ce qu'il appelle la « représentation en ». Il n'est pas nécessaire de stipuler ici ce type de représentation, toutefois on pourra se reporter pour plus de détails à [Goodman 1968, 52-56].

II.2.4. Exemplification

II.2.4.1. Étiquettes et échantillons

Si la dénotation est très peu restrictive dans ses caractéristiques (comme l'écrit Goodman, à peu près n'importe quoi peut dénoter n'importe quelle chose[114]), l'exemplification est un mode de référence plus exigeant.

L'exemplification se distingue de la dénotation par sa direction : elle va de l'objet vers le prédicat. C'est-à-dire que c'est l'objet qui exemplifie un prédicat qui s'y applique. En ce sens, l'exemplification est une sous relation de la converse de la dénotation. Ce n'est pas la converse de la dénotation, autrement dit il ne suffit pas qu'un objet soit dénoté par un prédicat pour que l'objet exemplifie le prédicat, encore faut-il que l'objet en question possède le prédicat. Selon la formule de Goodman, l'exemplification, c'est la possession plus la référence[115]. De façon plus formelle, on peut transcrire la relation d'exemplification comme suit :

x exemplifie y si et seulement si : a) x est dénoté par y (y s'applique à x)

b) x réfère à y

Alors qu'un signe strictement dénotatif ne possède pas nécessairement ce qu'il désigne, il doit obligatoirement posséder ce qu'il exemplifie. Mais ce n'est pas pour autant qu'un objet exemplifie tous les traits qu'il possède. Une inscription de « rouge » écrite en bleu dénote tous les objets rouges mais n'exemplifie pas le prédicat « être rouge » alors qu'elle peut exemplifier « être une inscription de « rouge » » ou encore le prédicat « être bleu », sous réserve qu'il y soit fait référence. Si tel n'est pas le cas, c'est-à-dire si un objet possède effectivement une propriété sans toutefois y faire référence, on parlera alors d'*instanciation* plutôt que d'exemplification. Une instance d'un prédicat ou d'une étiquette est ainsi un objet auquel le prédicat s'applique sans qu'il y ait référence de l'objet vers le prédicat. C'est la possession qui permet de marquer la différence entre un exemplaire, (ou un échantillon), et une instance (ou un cas). Un échantillon de tailleur, qui est

[114] Cf. [Goodman 1968, 120]

[115] Cf. [Goodman 1968, 87]

habituellement un carré de tissu, est une instance de quelque chose de carré et c'est un exemplaire des aspects significatifs du tissu pour le tailleur (couleur, motif ou texture par exemple).

Jusqu'à présent, j'ai utilisé sans plus de précision, et de façon à peu près équivalente, les termes de prédicat et d'étiquette. Les prédicats sont des étiquettes particulières : celles qui dérivent d'un système linguistique. Tout prédicat, ou plus exactement, toute inscription d'un prédicat, peut être considérée comme une étiquette alors que le contraire est faux. L'introduction de la notion d'étiquette dans la théorie goodmanienne a une double fonction[116] :

1. Elle permet d'assurer la théorie de l'exemplification sous une perspective nominaliste
2. Elle permet d'assurer l'exemplification de signes à dénotation nulle

La notion d'étiquette apparaît dans *Langage de l'art* comme une alternative à un discours sur les propriétés[117] ; c'est en ce sens qu'elle remplit la première fonction ci-dessus[118].

Une étiquette, dans un système linguistique, est une inscription d'un prédicat. Ce qu'un objet exemplifie, c'est bien l'étiquette, c'est-à-dire, une inscription, et non pas l'extension du prédicat, ce qui, le cas échéant, condamnerait l'exemplification de prédicat à dénotation nulle :

> « Ce qui est exemplifié, comme le note C. Elgin[119], ce n'est pas l'extension du prédicat, les objets qu'il dénote, mais le prédicat, c'est-à-dire l'inscription elle-même. Si c'était l'extension, on ne pourrait rendre compte de la possibilité pour une image

[116] En fait, la notion d'étiquette à une troisième fonction, celle de permettre d'englober la symbolisation non verbale. Si cette fonction est fondamentale dans le registre artistique, elle ne concernera pas l'application de la théorie de l'exemplification aux mathématiques. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de la développer ici. Toutefois pour plus de détails, on pourra se reporter à [Goodman 1968, 90-91], [Goodman 1994, 70-77] et [Morizot 1996, 26-30]

[117] Cf. [Goodman 1968, 87-89]

[118] Le nom n'est plus à considérer comme une propriété attachée à l'objet par une liaison causale particulière mais comme une simple étiquette, une expression linguistique qui n'a pas nécessairement de référence individuelle (cf. [Morizot 1996, 25]).

[119] Référencé par Pouivet comme [Elgin 1983, 73-74].

> d'exemplifier des prédicats qui ne dénotent rien (*i.e.* dont l'extension est nulle). Par exemple, le prédicat « être une licorne » a une extension nulle (dans la mesure où aucun objet n'est dénoté par un tel prédicat). Mais l'inscription *elle-même* peut fort bien faire *l'objet* (et ce n'est pas du tout ici une façon de parler, il s'agit bien d'un objet au sens le plus obvie du terme, et pas d'un objet non existant, d'un objet imaginaire, ou quoi que ce soit de cet ordre) d'une référence par une image. » [Pouivet 1996, 116]

L'exemplification définie comme relation entre étiquette et objet autorise sans risque d'incohérence[120] l'exemplification de tout type de prédicat, qu'il soit de dénotation nulle, multiple ou singulière[121]. La seconde fonction ci-dessus est donc bien assurée.

II.2.4.2. Etiquetage et échantillonnage

L'étiquetage dans un système linguistique, plus généralement dans un système symbolique, est une affaire de dénotation : il s'agit de choisir une étiquette qui aura pour rôle de dénoter toute une catégorie d'objets présélectionnés. L'échantillonnage est une affaire d'exemplification : il s'agit de sélectionner un objet par rapport aux aspects que l'on veut exemplifier.

Cette distinction servira à rendre compte de différentes phases du raisonnement mathématique. On verra comment l'utilisation d'un énoncé théorique (tel qu'une définition, une propriété, une proposition ou un théorème) peut être assimilé à un étiquetage (contexte dénotatif) tandis que les techniques de démonstration s'assimilent plus à une démarche d'échantillonnage (contexte exemplificationnel).

---

[120] Je parle d'incohérence pour signifier le fait que si l'on exemplifiait non pas l'étiquette mais l'extension du prédicat alors : 1. les exemplifications de n'importe quel prédicat de dénotation nulle seraient équivalentes entres elles ; dire qu'un objet x exemplifie « être une licorne » serait équivalent à dire qu'il exemplifie « être le père noël » et 2. exemplifier une étiquette en particulier impliquerait l'exemplification de toutes étiquettes coextensives (cf. [Goodman 1968, 89 et [Pouivet 1996, 117]).

[121] Notons alors que Goodman désigne les étiquettes abstraites comme celles de prédicats à extension multiple et les étiquettes singulières comme celles qui correspondent à une extension singulière :

> « Une telle étiquette (i.e., ses inscriptions) peut de fait être « abstraite » en ce qu'elle a une dénotation multiple ; mais on peut tout aussi bien exemplifier une étiquette singulière au moyen de ce qu'elle dénote. » [Goodman 1968, 90]

II.2.4.3. Exemplification et expression

De la même façon que la dénotation est le cœur de la représentation[122], on peut dire que l'exemplification est le cœur de l'expression. Dans la théorie de la référence de Goodman l'expression relève d'une exemplification métaphorique, sans lui être toutefois assimilable. Un objet exemplifie métaphoriquement une étiquette lorsqu'il y fait effectivement référence mais qu'il possède cette étiquette de façon métaphorique, et non littérale. Une possession métaphorique n'en est pas moins une possession, et nous ne pouvons, explique-t-il, exclure le métaphorique du domaine du réel car :

> « Sans doute la possession métaphorique n'est-elle pas la possession littérale ; mais la possession est réelle, qu'elle soit métaphorique ou littérale. Le métaphorique et le littéral doivent être distingués à l'intérieur du réel. Dire qu'une image est triste et dire qu'elle est grise sont simplement des manières différentes de la classer. Je veux dire par-là que bien qu'un prédicat qui s'applique à un objet métaphoriquement ne s'y applique pas littéralement, il s'y applique néanmoins. C'est un trait du genre de la nouveauté qui permet de savoir si l'application est métaphorique ou littérale» [Goodman 1968, 100]

Cependant, il s'en faut que toute exemplification métaphorique soit effectivement une expression. En effet, Goodman précise qu'un symbole exprime seulement les étiquettes qu'il exemplifie métaphoriquement à titre de symbole de son espèce, c'est pourquoi on dira par exemple qu'une peinture exemplifie métaphoriquement « être une mine d'or » sans dire pour autant qu'elle *exprime* cette étiquette :

> « (…) les propriétés exprimées ne sont pas seulement métaphoriquement possédées mais on y fait également référence, on les exhibe, on leur donne une valeur typique, on les met en avant. Un carré de tissu n'exemplifie pas habituellement le fait d'être carré, et une image dont la valeur marchande augmente rapidement n'exprime pas la propriété d'être une mine d'or. Normalement, un échantillon de tissu n'exemplifie que des propriétés qui sont significatives pour un tailleur, tandis qu'une image n'exemplifie littéralement que des propriétés constantes par rapport aux propriétés d'image. Les propriétés exprimées par une image sont celles que l'image exemplifie à titre de symbole imagé, ce qui exclut par exemple le fait d'être une mine d'or. Ainsi la Blanchisseuse de Daumier exemplifie et exprime le poids mais pas une quelconque des propriétés métaphoriques qui dépendent du poids physique de l'image. De manière générale, un

[122] Cf. ci-dessus, section 2. 3.3

> symbole d'une espèce donnée – pictural, musical, verbal, etc. – exprime seulement les propriétés qu'il exemplifie métaphoriquement à titre de symbole de cette espèce. » [Goodman 1968, 117]

R. Pouivet suggère de préciser, et de distinguer l'expression de l'exemplification métaphorique, en rajoutant une exigence supplémentaire à celles établies par Goodman. Il propose la caractérisation suivante[123] :

x exprime y si et seulement si :

i) x réfère à y

ii) x est métaphoriquement une instance de y

iii) x fonctionne comme symbole esthétique

L'expression est alors réservée dans ce cas aux symboles esthétiques, ou tout au moins aux symboles qui fonctionnent esthétiquement. Il n'y a pas à craindre ici l'écueil d'un cercle vicieux. En effet, l'expression n'étant pas l'un des symptômes de l'esthétique goodmanienne, on peut tout à fait envisager de la réserver pour des symboles dont le fonctionnement a déjà été identifié comme étant esthétique (cette identification étant indépendante de l'expression). La précision de R. Pouivet restreint donc l'usage de l'expression au seul système esthétique alors que Goodman délimite l'expression en fonction de chaque type de fonctionnement symbolique particulier. Goodman préconise l'expression seulement dans les cas où il s'agit de propriétés[124] appropriées (standards, habituelles) au type de symbole dont il s'agit : «Seules sont exprimées les propriétés de l'espèce appropriée, métaphoriquement exemplifiées de la manière appropriée.» [Goodman 1968, 118].

L'expression dépend de l'espèce de symbole qui exemplifie (métaphoriquement) : une peinture considérée en tant que symbole esthétique n'exprime pas le fait d'être

[123] Cf. [Pouivet 1996, 117]

[124] Goodman parle effectivement de l'expression de propriété et non d'étiquette. Dans ce cas particulier, il explique pourquoi ce glissement ne nuit pas à une interprétation nominaliste de l'expression (cf. [Goodman 1968, 118 et 131 note 33]).

une mine d'or. Puisque « être une mine d'or » n'est pas de façon usuelle, standard, une propriété qui caractérise en tant que tel, un symbole esthétique, alors qu'elle peut l'être dès lors qu'on la considère en tant qu'investissement.

Une démonstration mathématique n'exprime pas habituellement l'élégance, car elle ne fonctionne pas habituellement comme symbole de cette espèce[125], alors qu'elle peut tout à fait l'exemplifier métaphoriquement (et Goodman le note d'ailleurs[126]).

En résumé, l'expression est un mode de référence particulier[127] qui tend à être présent de façon significative dans les domaines esthétiques plutôt qu'ailleurs[128].

II.2.4.4. Système dénotatif et système exemplificationnel

Selon le système symbolique dans lequel il est considéré, un symbole peut avoir différentes fonctions référentielles. Un même symbole peut dénoter ici et exemplifier ailleurs. Dans le premier cas, il sert d'étiquette, dans le second cas il sert d'échantillon, ou d'exemplaire. La photographie d'une pomme, accolée à sa définition

---

[125] Encore que ce dernier point soit discutable au regard du travail effectué dans la première partie où je montre que les mathématiques ont été considérées comme modèle pour l'élaboration des canons esthétiques. Cependant, dans ce cas, il ne s'agit plus d'expression mais bien d'exemplification, puisque la possession est littérale.

[126]

> « Souvent les symboles exemplifient métaphoriquement. Donc une preuve mathématique peut exemplifier métaphoriquement une propriété telle que l'élégance (…).» [Goodman 1994, 21]

[127] Comme on l'a vu, l'exemplification est le cœur de l'expression. Parmi d'autres modes de référence qui ont à faire avec l'exemplification, Goodman distingue aussi l'allusion et l'ostension (cf. respectivement [Goodman1988, 71] et [Goodman 1968, 127 note5]).

[128] Goodman tempère toutefois la pertinence de la distinction entre expression et exemplification en soulignant le caractère éphémère de leur différence :

> « (…) le statut métaphorique ou littéral d'une propriété est souvent vague et rarement stable ; car il y a relativement peu de propriétés qui soient purement littérales ou définitivement métaphoriques. Même dans des cas patents, le discours ordinaire ne remarque qu'exceptionnellement la différence ente expression et exemplification. Les architectes, par exemple, aiment à dire de certains bâtiments qu'ils expriment leurs fonctions. Mais si efficacement qu'une usine de colle puisse symboliser la fabrication de colle, elle exemplifie le fait d'être une usine de colle littéralement plutôt que métaphoriquement. Un immeuble peut exprimer la fluidité, la frivolité ou la ferveur ; mais pour exprimer le fait d'être une usine de colle, il faudrait qu'il soit quelque chose d'autre, disons une fabrique de cure-dents. Toutefois puisque faire référence à une propriété possédée est le noyau commun des exemplifications métaphorique et littérale, et que la distinction entre elles est éphémère, l'usage populaire du terme « expression » pour des cas relevant des deux espèces n'est ni très surprenant, ni non plus pernicieux. » [Goodman 1968, 121]

dans un dictionnaire, a plutôt une fonction dénotative, et plus particulièrement, représentative. La référence opère dans ce cas de l'image de la pomme vers les objets auxquels elle s'applique. La même photo exposée dans une galerie d'art peut avoir un fonctionnement référentiel inverse, c'est-à-dire qu'au lieu de faire référence à ce qu'elle dénote, elle peut faire référence à certains de ses aspects en les exemplifiant. Dans cet exemple, c'est le contexte qui détermine la référence prioritaire.

Dans un système dénotatif, les symboles sont pris pour étiquettes et leur fonctionnement requiert de répondre, ou tout au moins de se poser, la question suivante : qu'est ce que ce symbole dénote ? Les questions sémantiques engagées dans un système dénotatif sont des questions qui portent sur la classe-de-concordance d'un symbole.

Dans un système exemplificationnel, les symboles sont pris pour exemplaires et les faire fonctionner revient à s'interroger sur les aspects qu'ils exemplifient. Ici, l'enjeu sémantique concerne, non pas la classe-de-concordance (qu'est-ce que ça dénote ?) mais plutôt la classe-de-référence (qu'est-ce que ça exemplifie ?).

La classification ci-dessus ne doit pas laisser penser que l'on peut procéder à un découpage net et définitif des systèmes symboliques en dénotatif et exemplificationnel. Cette différence d'orientation référentielle dépend, la plupart du temps, de tranches spatio-temporelles. Le fonctionnement référentiel des différents symboles usuels est justement déterminé par l'usage et l'habitude. Mais rien n'interdit d'en modifier l'orientation : un carnet d'échantillon de tailleur fonctionne habituellement comme système exemplificationnel, chacun des morceaux de tissu exemplifie sa couleur, sa texture, etc. Mais l'on peut aussi s'en servir pour montrer ce qu'est un échantillon de tailleur. Le cas échéant, son fonctionnement est dénotatif, il sert d'étiquette qui dénote les échantillons de tailleur.

D'autre part, il ne faut pas déduire non plus de la distinction entre systèmes dénotatifs et systèmes exemplificationnels que les systèmes symboliques sont systématiquement soit d'une espèce soit de l'autre, et ce de manière stricte. Un

système peut tout à fait contenir des symboles dénotatifs, d'autres qui référent par exemplification et d'autres encore qui n'ont pas de fonction référentielle.

À la vue de ces dernières remarques, je propose de substituer (sauf dans des cas dénués d'ambiguïté) l'expression de contexte dénotatif ou exemplificationnel à celle de système dénotatif ou exemplificationnel. En effet, le terme de contexte permet de rendre compte de la dépendance du fonctionnement référentiel vis-à-vis du temps et de l'espace[129] et donc d'enlever la connotation rigide et définitive que véhicule le terme de système.

L'introduction de ces différents contextes présente un intérêt majeur par rapport à au moins deux points:

1. La différence de contexte, exemplificationnel ou dénotatif, va permettre d'introduire efficacement la notion de densité sémantique, comme on le verra dans la section suivante.
2. En ce qui concerne les mathématiques, la prise en compte de l'orientation référentielle (c'est-à-dire du contexte référentiel) offre la possibilité d'aborder les objets mathématiques en termes d'intention, et non uniquement selon leur extension.

L'analyse de ces deux points particuliers ne sera faite qu'ultérieurement. Cependant, on peut noter dès à présent que l'enjeu de la clarification de la relation qui unit un objet avec une étiquette (ou le contraire) tient à la différence classique suivante :

---

[129] De plus, on évite ainsi une erreur d'interprétation relativement répandue de la notion de système exemplificationnel. En effet, Arrell conteste l'introduction de la condition de « relation » (*linkage*) entre un échantillon et le prédicat exemplifié (ce qui est, selon lui, l'une des plus sérieuses critiques que l'on puisse faire à la théorie de Goodman) :

> "If exemplifiers were linked to predicates in the manner Goodman describes, there ought to be exemplificatory dictionnaries and grammars." [Arrell 1990, 238]

Ce que ne prend pas en compte Arrell dans son argumentation c'est que la relation entre échantillons et prédicats, ou plus généralement entre échantillons et étiquettes, n'est ni permanente ni stable : elle dépend de tranches spatio-temporelles. Ce fait suffit à lui seul à justifier l'impossibilité d'élaborer un dictionnaire et une grammaire des exemplifications. Comment en effet dresser une cartographie d'ensemble des exemplifications si ces dernières varient selon le temps et le contexte ? De plus, comme on le verra dans la troisième partie (cf. III. B. 1. 3. et en particulier 1.3.3), l'interprétation des exemplifications dépend d'une exploration de la densité sémantique ou syntaxique, ce qui rend impossible la construction d'une grammaire : ceci n'est possible que pour des systèmes articulés et disjoints, donc a fortiori non denses.

> Dans un contexte dénotatif (non modal), un symbole est interchangeable avec n'importe quel autre symbole ayant la même extension (autrement dit, dans ce cas c'est l'identité extensionnelle qui prévaut).
>
> A l'inverse, dans un contexte exemplificationnel, le choix du représentant pour une même classe joue un rôle et l'on ne peut le remplacer par un autre, même d'extension identique (l'intension compte).

Ainsi, par exemple, une partition musicale est, selon son usage normal, assimilable à un système dénotatif (quoique que plus restrictif encore : il s'agit ici d'une notation). Peu importent les représentants des caractères du système, pourvu qu'ils dénotent les mêmes événements sonores. Au contraire, un poème a habituellement un fonctionnement inscrit dans un contexte exemplificationnel : en témoigne la difficulté de la traduction d'œuvres poétiques ; il ne s'agit pas de traduire les termes par n'importe lequel de leurs équivalents dans la langue désirée, encore faut-il pouvoir rendre compte, via la traduction, des aspects qu'ils exemplifient.

II.2.5. Densité sémantique

La densité sémantique est de façon naturelle le pendant sémantique de la densité syntaxique. La définition générale est la suivante :

> Un système est sémantiquement dense si il comporte un nombre infini de caractère avec des classes-de-concordance ordonnées de telle sorte qu'entre deux quelconques il y en a une troisième.[130]

Goodman introduit tout d'abord ce réquisit pour le mettre en balance avec les réquisits sémantiques exigibles d'un système notationnel. Ce n'est qu'après avoir analysé l'apport technique de la densité sémantique par rapport à la caractérisation des notations que Goodman sélectionne ce réquisit comme symptôme de l'esthétique.

---

[130] Cf. [Goodman 1968, 189]

La difficulté de l'interprétation de la densité sémantique tient au fait suivant : Goodman l'introduit alors qu'il traite des systèmes notationnels. Or, de tels systèmes, on va le voir, sont des systèmes purement dénotatifs. Donc, l'approche détaillée de la densité sémantique telle que l'on peut la trouver dans Langage de l'art est tributaire d'un contexte dénotatif. Goodman mentionne seulement que dans le cas des contextes exemplificationnels, il suffit de remplacer « classes-de-concordance » par « classe-de-référence »[131]. Or cette manœuvre n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. Je proposerai donc une interprétation de la densité sémantique dans un contexte exemplificationnel. Mon apport interprétatif concernera notamment la relation d'ordre qui a lieu entre classe-de-concordance (contexte dénotatif) et celle qui a lieu entre classe-de-référence (contexte exemplificationnel).

Jusqu'à présent, le terme de notation a été évoqué sans pourtant être l'objet d'une approche systématique. Cet examen s'avère maintenant nécessaire : de lui dépendra mon argumentation quant à la sélection de la densité sémantique comme symptôme de l'esthétique.

II.2.5.1. Rôle d'une notation : fonction primordiale

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, les définitions et leur analyse ont pour prémisse que les systèmes symboliques dont il s'agit sont des systèmes dénotatifs.

Dans le vocabulaire goodmanien, un caractère dans un système notationnel est appelé une partition[132]. L'exécution d'une partition est un concordant de la

---

[131] Cette substitution est en fait valable pour tous les réquisits qui ont été définis dans des systèmes dénotatifs. C'est pour pouvoir ramener les méthodes d'analyse syntaxique et sémantique dans le domaine des arts, qui est plus spécifiquement concerné par les systèmes exemplificationnels que par les systèmes dénotatifs, que Goodman préconise cette manœuvre :

> « (…) il nous faut maintenant définir de manière plus générale les propriétés sémantiques d'ambiguïté, de disjointure, de différenciation, de densité et de discontinuité, en termes de référence et de classes-de-référence plutôt qu'en termes de concordance (ou dénotation) et de classes-de-concordance (ou d'extensions) ; mais la manière de mener ceci à bien est évidente. Par exemple, un système est sémantiquement différencié en ce sens élargi si et seulement si, pour tout couple de caractères Ket K' et pour tout élément h auquel les deux ne font pas référence, il est théoriquement possible de déterminer soit que K ne fait pas référence à h, soit que K' ne fait pas référence à h. » [Goodman 1968, 277]

[132] Cf. [Goodman 1968, 217]

partition (en tant qu'elle est un caractère), et une œuvre est la classe-de-concordance d'une partition (cette terminologie est valable dans tout système notationnel et pas seulement dans une notation musicale comme le vocabulaire choisi pourrait le laisser penser).

Un système notationnel a pour fonction primordiale de fournir une autorité qui permet l'identification d'une œuvre d'exécution à exécution[133]. Une notation ne donne pas uniquement un moyen de définir parfaitement un objet, mais elle est telle que la donnée d'un objet permet de remonter à sa définition :

> « Les partitions et les exécutions doivent être dans un rapport tel que, dans toute chaîne où chaque pas mène, soit de la partition à une exécution concordante, soit de l'exécution à la partition qui la couvre, soit d'une copie de partition à une autre copie correcte de celle-ci, toutes les exécutions appartiennent à la même œuvre et toutes les copies de partitions définissent la même classe d'exécutions. » [Goodman 1968, 167]

En d'autres termes, œuvres et partitions doivent être reliées par une bijection.

Pour qu'un système remplisse ce rôle, il est donc nécessaire qu'il soit non ambigu dans la mesure où :

> « Il est évident qu'on ne peut garantir le dessein fondamental d'un système notationnel que si le rapport de concordance est invariant. Toute inscription ambiguë est à exclure puisqu'elle entraînera des décisions conflictuelles lorsqu'il s'agira de savoir si quelque objet concorde avec elle. Tout caractère ambigu est à exclure, même si ses inscriptions sont toutes non ambiguës ; car, puisque différentes inscriptions de ce caractère auront des concordants différents, certaines inscriptions qui comptent comme des copies vraies l'une de l'autre auront des classes de concordance différentes. Dans l'un et l'autre cas, on ne préservera pas l'identité de l'œuvre dans toute la chaîne de pas qui vont de l'exécution à la partition qui la couvre et de la partition à l'exécution concordante. » [Goodman 1968, 184]

L'exigence de non ambiguïté se traduit au niveau sémantique par deux réquisits : la disjointure et la différenciation finie.

---

[133] Cf. [Goodman 1968, 166]

Le premier stipule que les classes-de-concordance doivent être disjointes, autrement dit, qu'aucun couple de caractère n'a quelque concordant que ce soit en commun[134]. Ce qui est évidemment transgressé dans le langage ordinaire puisque la plupart des termes appartiennent à des classes-de-concordance différentes. Une table, par exemple, peut concorder avec la classe-de-concordance des objets en bois, avec celle des objets utilitaires ou encore celle des objets rectangulaires bien que toutes ces classes-de-concordance soient différentes. Ce qu'interdit le réquisit de disjointure sémantique est le chevauchement catégoriel.

Le second réquisit impose que l'on puisse toujours décider en un nombre fini d'étapes si un objet appartient ou non à une classe-de-concordance donnée. Son énoncé formel est le suivant :

> « Pour tout couple de caractères K et K' tels que leurs classes-de-concordance ne sont pas identiques, et pour tout objet h qui ne concorde pas avec les deux, il doit être théoriquement possible de déterminer ou bien que h ne concorde pas avec K, ou bien que h ne concorde pas avec K'. » [Goodman 1968, 188]

La différentiation de manière finie traduit le fait que, pour remplir pleinement sa fonction primordiale, un système notationnel doit permettre une décision effective de l'appartenance, ou non, d'un objet à une classe-de-concordance. Comme l'écrit Morizot, la différentiation finie est non pas dépendante mais complémentaire de la disjointure dans la mesure où la seule disjointure ne peut pas assurer un résultat satisfaisant d'un point de vue notationnel[135].

En effet, il ne suffit pas de savoir qu'un objet n'appartient pas effectivement à deux classes-de-concordance distinctes, encore faut-il pouvoir décider à laquelle il appartient effectivement. Cette possibilité de décision doit être concrète, elle doit pouvoir être mise en œuvre. C'est pourquoi, par exemple :

> « Si un système contient deux caractères « a » et « b » et si tous les objets pesant un kilo ou moins concordent avec « a », et si tous les objets pesant davantage

[134] Cf. [Goodman 1968, 187]

[135] Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Morizot 1996, 125-127].

> concordent avec « b », ce système (…) manque de différentiation sémantique et la notationnalité lui fait défaut. » [Goodman 1968, 189]

Si, logiquement, il est possible de savoir si un objet pèse plus ou moins qu'un kilo, aucun instrument de mesure ne peut certifier que tel est le cas pour n'importe quel objet particulier (ceci n'est évidemment pertinent que pour les cas tangents où un objet aurait un poids extrêmement proche d'un kilo). S'il y a indécision avec un instrument de mesure donné, en choisir un plus précis ne fait que reporter cette indécision sur une décimale suivante.

Le réquisit de différentiation sémantique finie traduit en fait un critère de décidabilité. Tout système qui satisfait à ce réquisit ne comporte que des marques pour lesquelles on peut effectivement décider si elles appartiennent ou non, à un caractère. Dans un tel système, il est toujours possible de lever une éventuelle ambiguïté. Ce qu'interdit la différentiation finie c'est la latitude d'interprétation.

La densité sémantique apparaît en ce sens comme un critère suffisant[136] de non différentiation finie : la multiplicité des caractères et la densité des classes-de-concordance (entre deux quelconques, il y en a toujours une troisième) est un obstacle à une vérification récursive en un nombre fini d'étape.

La difficulté à comprendre et à interpréter correctement la notion de densité sémantique tient en particulier à l'interprétation de la relation d'ordre qui est supposée régir les classes-de-concordance d'un système sémantiquement dense. Je n'ai pas eu connaissance, ni dans les travaux de Goodman, ni dans ceux de ses interprètes ou critiques, d'exemples ou d'explications de cette dernière qui ne se ramènent finalement à une comparaison entre classes en termes de « plus ou moins que ». Aussi, l'exemple canonique pour illustrer la densité des systèmes discursifs est celui des couleurs[137]. Chaque classe de couleur contient en effet une infinité de classes ordonnées de telle sorte qu'entre deux quelconques il y en a une troisième :

---

[136] Mais non comme un critère nécessaire, c'est-à-dire qu'un système non différencié n'est pas nécessairement dense (cf. Cf. [Goodman 1968, 189]).

[137] Voir par exemple [Pouivet 1996, 74].

il suffit en fait de raffiner chaque classe à l'aide des comparatifs plus ou moins. L'ordre dont il s'agit est alors la relation d'inclusion classique (la classe de bleu contient celle de bleu plus clair, elle-même contient celle de bleu pâle et entre ces deux dernières on peut placer celle de bleu plus clair, ou moins clair que bleu pâle etc.).

L'aspect artificiel de ce procédé semble être un handicap à la pertinence de la densité sémantique : elle est inhérente à tout système symbolique dans lequel on peut comparer, grâce à l'inclusion, les classes-de-concordance. Ce qui fait de la densité une propriété très répandue et somme toute relativement banale. Cependant, comme on le verra ultérieurement, la densité sémantique, en tant que symptôme de l'esthétique, est une propriété qui permet d'expliquer et de comprendre certains fonctionnements symboliques, qui sans elle, ne se traduisent que par des termes aussi vagues que l'ineffabilité par exemple.

La relation d'ordre imposée par Goodman est un artifice technique qui sert en fait à traduire le phénomène interprétatif lié à la densité sémantique :

> « L'impossibilité d'une détermination finie peut suggérer l'idée d'ineffabilité que l'on a si souvent revendiquée pour l'esthétique ou dont on lui a fait non moins souvent reproche. Mais la densité, loin d'être mystérieuse et vague, est explicitement définie ; elle dérive de l'exigence impossible à satisfaire d'une précision absolue, et elle la renforce. » [Goodman 1968, 295-296]

L'interprétation de la densité est facilitée par la prise en compte de ses conséquences et de ses corollaires plutôt que par sa seule définition technique. Je propose donc de la caractériser à partir des faits suivants :

- Un système est sémantiquement dense dès lors que les classes-de-concordance sont telles que l'on ne peut atteindre simultanément un maximum de généralité et de précision. Elle traduit, en tout cas pour les systèmes discursifs l'impossibilité d'atteindre une précision absolue.

- Elle permet, au contraire des réquisits de disjointure et de différentiation, une latitude d'interprétation. Ce qui explique que :

> « (Le) symbole incisif et prégnant ne perd pas sa valeur en devenant familier, mais il se trouve incorporé au matériel de base en vue d'une exploration plus poussée. Lorsqu'il y a densité dans le système symbolique, cette familiarité n'est jamais ni complète ni définitive ; un autre regard peut toujours dévoiler de nouvelles subtilités significatives. » [Goodman 1968, 303]

Dans un contexte dénotatif, l'ordination entre classes-de-concordance peut s'interpréter comme l'inclusion catégorielle. Cette interprétation est suggérée par une remarque que fait Goodman à propos du problème de la projection dans les langages discursifs :

> « En français-objet, par exemple, aucun objet ou ensemble d'objets ne concorde avec exactement un prédicat. Tous les objets verts examinés à ce jour concordent avec le caractère « objet vert », mais tous concordent également bien avec « objet vert examiné à ce jour ou kangourou » et avec une multitude indéfinie d'autres prédicats. Pratiquement toute classe qui contient tous les objets verts examinés à ce jour est la classe-de-concordance d'une expression dans ce langage. Plus généralement, quelle que soit la sélection opérée, les objets concordent avec une description française qui a, comme autres concordants, n'importe quels autres objets donnés. » [Goodman 1968, 241]

Ainsi, quelle que soit une classe-de-concordance, on peut toujours l'inclure dans une autre classe-de-concordance.

Qu'en est-il dans un contexte exemplificationnel ? Plus exactement, comment peut-on interpréter l'ordination entre classes-de-référence ? Ma thèse est que l'on ne peut pas procéder de la même façon avec les classes-de-référence qu'avec les classes-de-concordance. Un symbole peut exemplifier une multitude de prédicats mais les classes-de-concordance de ces derniers ne sont pas nécessairement comparables et a fortiori, on ne peut pas systématiquement les ordonner. Une orange, par exemple, peut exemplifier « être un fruit », elle peut aussi exemplifier « être un agrume ». Dans ce cas, l'ordination par inclusion est possible, et l'on peut effectivement trouver une classe-de-référence intermédiaire « être un fruit à pépin ». Mais elle peut exemplifier de surcroît « être sphérique » ou encore « être de couleur orange » et l'on ne peut dans ce cas inclure l'une des classes-de-référence dans l'autre. On pourrait proposer d'interpréter les deux exemplifications comme étant

finalement une seule « être sphérique et de couleur orange », c'est-à-dire de considérer l'intersection des classes-de-référence, cependant l'artifice est tel qu'il ne semble pas pouvoir rendre compte de la pertinence de la densité dans le cas des contextes exemplificationnels. Aussi, je propose de ne pas fonder la caractérisation de la densité dans un contexte exemplificationnel sur l'hypothèse d'une relation d'ordre entre classes-de-référence mais simplement sur le fait que chaque caractère possède un nombre indéfini de classes-de-référence, chacune susceptible de modifier l'interprétation correcte du caractère.

Ainsi caractérisée, la densité sémantique pourrait sembler être l'apanage de tout système exemplificationnel, et donc ne pas avoir la pertinence attendue. En fait, ce qui va permettre de justifier que la densité est bien un trait distinctif parmi les systèmes exemplificationnels et non des systèmes exemplificationnels en général, est le rôle que cette dernière doit jouer pour l'interprétation correcte d'un symbole. Par exemple, dans le système exemplificationnel constitué d'un carnet d'échantillons de peinture ou de tissu, la densité sémantique n'est pas effective puisque, quand bien même chaque morceau de tissu ou chaque couleur reproduite pourrait être mis en relation avec une multitude de classes-de-référence, l'interprétation correcte ne dépend de la prise en compte que de quelques aspects déterminés par l'usage approprié. Un échantillon de tissu, utilisé en tant que tel, exemplifie habituellement sa couleur, son motif ou sa texture. Qu'il puisse exemplifier en outre le fait d'être un carré par exemple, n'intervient pas dans son fonctionnement d'usage. En revanche, la couleur de la cape du petit chaperon rouge fait référence à une multitude de prédicats dont on ne peut négliger l'influence sur la lecture et la compréhension du conte.

De façon plus générale, les systèmes exemplificationnels qui sont sémantiquement denses sont plutôt ceux issus de l'art ou de la science que du commerce ou de la vie quotidienne.

Cette interprétation est suggérée par l'analyse que propose Elgin du fonctionnement de certains exemplaires :

> « La fonction normale d'échantillons de peinture est d'aider à sélectionner une peinture pour la maison. On peut présumer que ce qui nous intéresse, c'est la couleur de la peinture que nous sélectionnons, et que notre intérêt se limite aux alternatives disponibles. Aussi le système est-il conçu pour leur fournir un accès épistémique facile. C'est tout ce qu'il fait. En considération de ce pour quoi nous utilisons les échantillons, c'est suffisant.
>
> Bien entendu, les mêmes échantillons exactement pourraient exemplifier aussi d'autres traits : la préférence contemporaine pour les couleurs riches, le faits de ne pas disposer d'un brun chaud, ou l'aspect terne des couleurs d'un fabriquant comparé à la qualité vibrante de celles d'un autre. Ils peuvent même exemplifier des traits qui n'ont rien à voir avec la couleur, par exemple le peu de soin et le manque d'attention accordé au détail exemplifiés par des écaillures de peinture qui se détachent de la planche d'échantillons. Mais voir les échantillons comme exemplifiant de tels traits requiert d'outrepasser les bornes que définissent les règles conventionnelles. » [Elgin 1991, 58]

Elgin distingue les exemplifications de ce type (comme les échantillons de peinture ou de tissu) des exemplifications du type que l'on rencontre en science ou en art en soulignant que dans le premier cas et non dans le second, l'interprétation dépend de règles établies par l'usage. Là où l'interprétation ne consiste pas en l'application de règles conventionnelles, Elgin explique que :

> « (…) les exemplaires sont hautement sensibles au contexte, à la fonction et aux hypothèses d'arrière-plan, et ceux-ci admettent des variations considérables. Néanmoins, l'interprétation n'est ni arbitraire ni désespérément difficile. Les traditions, les procédures empiriques, les pratiques et les précédents interprétatifs qu'on a acceptés nous guident, bien qu'ils ne fournissent pas de recettes. Et quoique non assimilables à des règles, le contexte, la fonction et les hypothèses d'arrière-plan suffisent souvent à déterminer ou à circonscrire étroitement l'interprétation d'exemplaires particuliers. » [Elgin 1991, 58-59]

Une conséquence directe de la densité sémantique, considérée selon mon interprétation, est que dans un système sémantiquement dense, l'interprétation de l'exemplification ne procède pas selon des règles conventionnelles fixes ; elle dépend au contraire d'un contexte, d'hypothèses d'arrière plan, et avant tout autre chose du choix de certains traits ou aspects qui sont exemplifiés. Cette interprétation se verra complétée lorsque sera traitée la question de la densité sémantique en tant que symptôme de l'esthétique et elle sera affinée dans la partie consacrée aux applications mathématiques.

II.2.6. La référence multiple et complexe

Le cinquième et dernier des symptômes de l'esthétique est la référence multiple et complexe. Bien qu'il n'appartienne pas à la liste établie dans les Langages de l'art[138], ce symptôme apparaît comme une synthèse du travail fourni par Goodman dans cet ouvrage quant à la théorie de la référence. La référence multiple et complexe a à voir, comme son nom l'indique, avec la référence. Mais, à la différence de la dénotation ou de l'exemplification, qui portent toutes deux sur un mode particulier de référence, ou plus exactement sur une direction de référence, le cinquième symptôme porte plutôt sur un itinéraire de référence.

Il y a référence multiple et complexe lorsque :

> « (…) un symbole remplit plusieurs fonctions référentielles intégrées et interagissantes, les unes directement et certaines par l'intermédiaire d'autres symboles. » [Goodman 1978, 91]

L'enquête sur la symptomatologie de l'esthétique menée par Goodman procède d'une analyse des différentes espèces de la référence. Parmi celles-ci, une attention particulière a été portée à la dénotation ainsi qu'à l'exemplification et aux principales espèces qui découlent de ces deux dernières (la représentation, la description, l'expression, etc.). Afin de les étudier, il fallait bien que Goodman distingue et isole ces différentes espèces référentielles. Cette nécessité méthodologique présente néanmoins l'inconvénient de laisser penser à une totale indépendance et autonomie de ces références les unes envers les autres. Or, un symbole peut très bien faire référence suivant une chaîne, ou un chemin, référentiel constitué de plusieurs étapes référentielles atteintes chacune suivant différentes espèces de référence. D'autre part, le découpage artificiel des différents modes de référence conduit aussi à une vision statique de la référence alors que le processus de référence est au contraire un processus dynamique dans lequel les variétés référentielles d'un même symbole peuvent interagir les unes envers les autres.

---

[138] Ce dernier symptôme est cité par Goodman dans *Manière de faire des mondes* (cf. [Goodman 1992, 91]).

Le cas échéant, on parlera alors de référence multiple et complexe. La multiplicité concerne le fait qu'un symbole peut avoir plusieurs fonctions référentielles (unidirectionnelles ou non : un symbole peut exemplifier plusieurs étiquettes, il peut aussi fonctionner comme étiquette sous certains aspects et comme échantillon sous d'autres aspects). La complexité met en jeu une forme de transitivité de la référence, ou tout au moins traduit-elle une référence non directe. La référence n'est pas toujours transitive : ce n'est pas parce qu'un symbole S fait référence à un prédicat T qui lui-même dénote S' que l'on peut dire que S fait nécessairement référence à S'. Mais lorsque c'est le cas, c'est-à-dire lorsqu'il y a effectivement transitivité de la référence, alors on peut parler de référence complexe. La complexité ne traduit donc pas ici une quelconque idée de *complication* (chaque référence prise individuellement est simple), mais plutôt le nombre d'étapes référentielles qui conduisent d'un symbole à ce à quoi il fait référence.

On peut imaginer des cas de références multiples et complexes extrêmement élaborés. Il n'y a pas de limite fixée, si ce n'est celle de l'intelligibilité, à multiplier et les références par rapport à une hiérarchie dénotationnelle, et les maillons qui constituent une chaîne de référence transitive. Il n'est pas envisageable de recenser toutes les combinaisons possibles. Un exemple donnera cependant une idée plus précise de ce que l'on peut appeler une référence multiple et complexe. Je reprends alors le cas de l'allusion, qui selon Goodman est une référence qui comporte une chaîne transitive qui renverse au moins une fois la direction référentielle. Goodman trouve l'occasion de décrire l'allusion au cours d'une étude sur la variation musicale :

> « Qu'il réfère aux caractéristiques musicales qu'il doit partager avec le thème ne suffit pas pour qu'un passage fonctionne comme une variation sur un thème ; la variation doit référer au thème *via la caractéristique*. Quand la variation exemplifie la caractéristique, qui à son tour dénote le thème, on obtient une voie de référence qui va de la variation au thème. Cependant, qu'un passage réfère à une caractéristique et la caractéristique au thème, même si cela fournit deux liens référentiels connectés constituant un chemin, n'implique pas que le passage réfère au thème en suivant ce chemin. Quand *a* réfère à *b*, et *b* réfère à *c*, *a* ne réfère pas toujours à *c*. Un nom du nom d'Helsinki réfère à un mot nommant la ville, mais rarement la ville. D'un autre côté, « La croix », en nommant un objet sacré qui réfère au christianisme, réfère aussi au christianisme *via* l'objet. En bref, référer est parfois transitif et parfois pas. (…) Incidemment, une telle référence est un cas particulier d'un type de référence qu'on peut

> très bien appeler *l'allusion* : la référence médiate ou indirecte par un chemin qui, dans une hiérarchie dénotationnelle, la renverse au moins une fois. La référence de la variation au thème va dans une direction (par exemplification) vers certaines caractéristiques et continue dans la direction opposée (par dénotation) depuis la caractéristique vers le thème. » [Goodman 1988, 71]

Au sens où je l'ai interprétée ci-dessus[139], la référence est bien multiple et complexe : en effet, elle est multiple en cela qu'elle met en jeu deux directions différentes et elle est complexe dans la mesure où elle relie un passage musical à un thème *via* une, ou plusieurs, caractéristiques.

La référence multiple et complexe ne se prête pas à une systématisation du même type que celle à laquelle l'analyse de la dénotation ou l'exemplification donne lieu. La raison en est qu'elle n'est pas un mode de référence à proprement parler. Elle n'est pas une nouvelle espèce de la référence qu'il faudrait étudier en tant que telle, mais elle rend compte des tissages que l'on peut effectuer à partir des liens référentiels déjà répertoriés. Il s'agit donc bien de l'étude d'un itinéraire plutôt que d'un moyen de transport, si l'on peut dire.

Que Goodman ait sélectionné ce dernier symptôme de l'esthétique ne doit pas laisser penser qu'il veut pactiser avec une idéologie de l'esthétique obscure, non transparente et mystérieuse : les multiples ramifications de la référence, ses changement de directions et leurs interactions, en ferait une référence impossible à saisir et à relater. Sa sélection porte simplement à souligner la richesse du tissu symbolique lui-même et à montrer qu'au contraire d'une ineffabilité de l'esthétique, c'est d'itinéraire référentiel complexe dont il s'agit. En rendre compte n'est pas impossible mais exige une minutie particulière.

Comme je le montrerai dans la partie suivante, qui a pour but de rendre compte des raisons (empiriques et théoriques) qui motivent la sélection des

[139] La seule information directe que donne Goodman quant à ce qu'il appelle la référence multiple et complexe réside dans le passage cité ci-dessus (cf. [Goodman 1992, 91]). L'interprétation que j'ai proposée se fonde sur l'ensemble de la théorie de la référence de Goodman ainsi que sur la lecture de la référence complexe proposée par Morizot (cf. [Morizot 1996, 210-223]). Goodman ne fournit pas d'exemple pour illustrer explicitement ce symptôme, cependant si mon interprétation est correcte, on peut trouver dans ses ouvrages de nombreux exemples qui se trouvent être des cas de référence multiple et complexe.

symptômes dans l'esthétique de Goodman, la référence multiple et complexe participe fortement à l'aspect cognitif de l'expérience esthétique et justifie l'aspect non définitif des interprétations auxquelles les œuvres d'art, ou plus généralement, les systèmes symboliques dont elle est une propriété, donnent lieu.

III. Symptômes et esthétique cognitive

III.1. Esthétique, connaissance et compréhension

Cela a déjà été souligné, le dessein primordial de la symbolisation est, dans l'approche goodmanienne, la cognition**.** L'entreprise cognitive est selon la reconception qu'en propose Goodman, une entreprise qui vise la compréhension et non la connaissance (bien que la première implique d'une certaine façon la seconde). Cette reconception s'inscrit dans la perspective nominaliste de l'auteur en lui permettant de substituer la notion de correction à celle de vérité[140] :

> « Finalement, dans notre reconception, la connaissance, également harcelée par la certitude et l'incertitude, débouche sur la compréhension. Là où la connaissance exige habituellement vérité, croyance ou preuve, la compréhension n'exige rien de tout cela. Des énoncés peuvent être compris abstraction faite de leur vérité et abstraction faite de la croyance qui s'y attache ; et nous pouvons comprendre requêtes, interrogations, verbes et danses, bien qu'ils ne soient ni vrais ni faux, et qu'ils ne soient pas plus objets de croyance que d'incrédulité ou encore susceptibles de démonstration ou de réfutation. Tout comme la correction est de plus large portée que la certitude, la compréhension est d'une plus grande portée que la connaissance. » [Goodman & Elgin 1988, 172]

140

> « Conçue comme la poursuite de la connaissance, cette entreprise [l'entreprise cognitive] a pour point de départ des vérités sûres ; elle vise à en découvrir d'autres par dérivation, observation et expérience, et à parvenir ainsi à une description complète et exacte du monde « réel » préfabriqué. Les fondations sont présumées solides, les méthodes sont prescrites et la vérité transcendantale en est le but. Par opposition, considérée sous le jour d'un progrès de la *compréhension*, l'entreprise cognitive trouve son point de départ dans ce qui s'avère couramment adopté, et elle se poursuit par intégration et organisation, éliminations et ajouts, non pas afin de parvenir à une vérité qui concernerait quelque chose de déjà fait, mais afin de réaliser quelque chose de correct – afin de construire quelque chose qui fonctionne de manière cognitive, qui s'ajuste à de nouveaux cas et en autorise le traitement, et qui puisse activer la recherche et l'invention ultérieures. » [Ibid. 174]

Mais qu'est alors que la compréhension ? C'est sous sa forme la plus générale un terme qui se rapporte à :

- Une aptitude : l'ensemble des capacités de recherche et d'invention, de discrimination et de découverte, de liaison et de clarification, d'ordre et d'organisation, d'adoption, de contrôle, de refus.
- Un processus (sans fin) : celui qui consiste à utiliser cette aptitude pour savoir faire et refaire un ou des mondes.
- Une réalisation : en ce sens la compréhension est ce que permet d'atteindre ce processus (un peu comme la connaissance consiste d'une certaine façon dans ce qui est connu)[141].

Les langages de l'art procèdent d'une symbolisation et en tant que tels, ils s'inscrivent dans une entreprise cognitive. L'expérience esthétique est une expérience cognitive dans la mesure où elle permet, à sa manière, d'accroître la compréhension que l'on peut avoir d'un sujet. En effet, accroître sa compréhension d'un sujet donné passe par une appréhension de tous les fonctionnements possibles de ce sujet selon le système symbolique dans lequel il est considéré (autrement dit, des interprétations possibles selon les domaines de références alternatifs pour le schème auquel appartient le sujet[142]). L'art, en proposant des systèmes symboliques particuliers participe donc à fournir une meilleure compréhension générale d'un sujet. Ce qu'illustre Elgin en écrivant que :

> « (…) les œuvres de Jane Austen et celles de Karl Marx contiennent des descriptions révélatrices des conditions sociales et des manières dont les facteurs économiques et sociaux contraignent nos choix et limitent nos existences. Toutes deux mettent en évidence les inégalités de revenus et de charges qui découlent de l'appartenance à des classes sociales différents. Mais les systèmes dans lesquels leurs descriptions sont élaborées emploient des outils symboliques différents et font usage de catégories différentes. Les descriptions d'Austen sont fictionnelles, ironiques, particulières et expressives. Celles de Marx sont factuelles, littérales, générales et descriptives. Pour parvenir à une meilleure compréhension des conditions sociales, nous

[141] Cf. [Ibid. 172-173]

[142] Cf. [Elgin 1988, 26]

> ne pouvons pas simplement conjoindre leurs descriptions, parce que nous n'avons aucun moyen de donner une interprétation univoque de leur conjonction.
>
> On peut donc construire une multiplicité de systèmes symboliques, lesquels ne sont pas réductibles ni justifiables en termes d'une unique base préférée. De plus ces systèmes sont soumis à des critères différents et il n'y a aucun point de vue neutre à partir duquel ils puissent être évalués. » [Goodman & Elgin 1988, 26-27]

Si l'expérience esthétique est cognitive, il est évident que toutes les expériences cognitives ne sont pas esthétiques. L'expérience esthétique doit donc avoir son fonctionnement propre qui lui permet d'être, à sa manière, une expérience cognitive.

Goodman défend l'idée selon laquelle plusieurs versions de mondes possibles sont envisageables, et ces versions ne sont pas concurrentes mais complémentaires. L'intérêt de ces versions ou visions de mondes possibles réside en la manière dont elles décrivent, tout simplement parce ce que tout ce que l'on peut dire d'une version est justement limité par ces manières. Le symbolisme esthétique est l'une des manières de décrire des mondes possibles, et c'est cette manière (entre autres) que Goodman entreprend d'analyser en complément de l'approche de Cassirer qui est plutôt une étude des influences mutuelles des différentes versions :

> « Cassirer entreprend sa recherche en conduisant une étude sur la manière dont le mythe, la religion, le langage, l'art, la science, se développent dans le croisement des différentes cultures. Mon approche consiste plutôt en une étude analytique sur les types et fonctions des symboles et systèmes de symboles. » [Goodman 1978, 14]

L'examen du fonctionnement symbolique en usage dans les domaines artistiques permet à Goodman de répertorier les caractéristiques prégnantes du fonctionnement esthétique : ce sont les cinq symptômes de l'esthétique.

III.2. Sélection des symptômes de l'esthétique

La liste des symptômes sélectionnés se constitue comme on l'a vu, de :

- deux réquisits syntaxiques : la densité syntaxique et la saturation syntaxique relative

- un réquisit sémantique : la densité sémantique
- deux réquisits qui concernent la référence : l'exemplification, qui est un mode de référence et la référence multiple et complexe qui est un itinéraire de référence.

De façon succincte, on peut décrire les trois grandes articulations qui sont à l'œuvre dans la démarche goodmanienne pour aboutir à cette sélection[143] :

1) La première étape consiste en l'analyse générale des systèmes symboliques avec la mise à jour de propriétés syntaxiques et sémantiques ainsi que différents aspects de la référence. Ce travail est notamment mené au travers de l'analyse des systèmes notationnels qui fournissent à Goodman l'occasion de définir les réquisits de disjointure, de différentiation finie mais aussi de densité, etc.

2) La deuxième étape consiste à vérifier quelles sont parmi ces propriétés celles qui sont plus particulièrement caractéristiques des systèmes esthétiques. Cette étape peut être qualifiée d'empirique, puisque c'est en analysant divers exemples directement issus de domaines artistiques que Goodman note la prédominance de certaines propriétés (les cinq symptômes donc) plutôt que d'autres.

Ainsi note-t-il à propos de l'exemplification :

> « (…) l'exemplification a la valeur d'un symptôme, car c'est souvent elle qui marque le plus la différence entre l'esthétique et le non-esthétique. » [Goodman 1984,45].

Goodman, en effet, répondant à la question de Nagel[144] portant sur l'élection de l'exemplification et non de la dénotation comme symptôme, fonde son argumentation sur une analyse empirique :

[143] Cette description de la méthodologie goodmanienne est bien entendu artificielle, elle ne rend pas compte en particulier de l'interrelation de chacune de ces étapes. C'est cependant un artifice commode pour les besoins de cet exposé.

> « La réponse tient à ce que l'exemplification est souvent le trait le plus frappant qui distingue les textes littéraires des textes non littéraires : les poèmes, les romans, les nouvelles, des traités scientifiques, des livres de cuisines et des rapports annuels. Dans une œuvre littéraire, ce qui compte, ordinairement, ce n'est pas seulement l'histoire racontée, mais la manière dont elle est racontée. Cela vaut, également, pour la différence qui oppose, parmi les images représentationnelles, les illustrations utiles et les œuvres d'art. La rime, le rythme et d'autres modèles exemplifiés, les sentiments et d'autres propriétés exprimées, jouent un grand rôle dans la plupart des œuvres d'art, tandis qu'ils ne jouent qu'un faible rôle dans les discours scientifiques ou pratiques, de nature verbale ou picturale. » [Goodman 1984, 45]

La sélection de la densité syntaxique et celle de la densité sémantique repose elle aussi sur un constat d'usage :

> « Comme signes de l'esthétique, elles [la densité syntaxique et la densité sémantique] peuvent paraître d'un intérêt limité, car aucun texte, par exemple, qu'il soit littéraire ou non, n'est syntaxiquement dense, alors que tous sont sémantiquement denses. Ainsi, le choix de ces symptômes ne peut reposer sur la supposition que l'esthétique est plus souvent syntaxiquement dense que l'inverse ou sur la supposition que l'absence de densité sémantique est plus fréquente là où nous n'avons pas affaire à des phénomènes esthétiques. Il est préférable de penser que les symboles syntaxiquement et sémantiquement denses auxquels nous avons affaire et que nous utilisons sont plus souvent esthétiques que l'inverse, et que, au sein de l'esthétique, plus souvent que ce n'est le cas ailleurs, c'est la densité qui l'emporte. » [Goodman 1984, 46]

De même, la saturation relative est retenue par rapport à des considérations empiriques :

> « La saturation relative est classée parmi les symptômes de l'esthétique parce qu'elle marque la distinction délicate et cruciale qu'illustre, dans Langages de l'art, la différence existant entre une courbe des cours de la bourse et un dessin du Mont Fuji-Yama par Hokusai. Les lignes peuvent être exactement semblable ; mais sur la courbe, les variations de la finesse et des ombres du trait n'ont aucune importance, alors que dans le dessin toute variation d'un aspect quelconque du trait est important. C'est la saturation qui, dans une œuvre d'art, semble prendre la première importance ; dans un diagramme, c'est l'atténuation. » [Goodman 1984, 45-46]

---

[144] Cf. [Nagel 1981]

Enfin, en ce qui concerne le dernier symptôme, il n'y a pas, comme je l'ai déjà noté, d'exemple explicite à son propos dans les principaux ouvrages de Goodman. Cependant, Morizot fournit une explication sur la base d'un exemple de la prédominance de ce symptôme dans les domaines artistiques :

> « Que les *étapes référentielles* soient au moins aussi importantes que les *strates dénotationnelles*, c'est ce qu'illustre par excellence la littérature. Un roman n'est souvent qu'un détour remarquable entre deux points insignifiants ou arbitraires et une biographie vaut par l'intérêt des épisodes qui s'intercalent entre la naissance et la mort. » [Morizot 1996, 217]

3) La dernière étape revient à un niveau théorique pour rendre compte du rôle des symptômes par rapport à la vocation cognitive des systèmes symboliques. Chacun des symptômes a une valeur cognitive dans la mesure où chacun contribue au développement des aptitudes liées à la compréhension. La progression de la compréhension comme processus consiste en effet en un développement des aptitudes qui conviennent à étendre et à affiner ce qui est compris[145].

Quel est alors l'apport cognitif des symptômes ?

a) Les trois symptômes les plus purement sémiotiques, c'est-à-dire la densité syntaxique et sémantique ainsi que la saturation syntaxique relative, mettent en jeu et développent une sensibilité maximale de discrimination :

> « Densités syntaxique et sémantique exigent une attention sans limite pour déterminer caractère et référent, une fois donnée une marque quelconque du système ; et la saturation syntaxique relative dans un système syntaxiquement dense exige un effort de discrimination analogue portant, pour ainsi dire, sur davantage de dimensions. » [Goodman 1968, 295-296]

Lorsqu'il y a densité, l'interprétation d'un symbole ne peut pas atteindre une précision absolue. Il y a donc un choix à faire. En effet, puisque la densité implique une infinité

[145] Cf. [Goodman 1988, 173]

de possibilité d'étiquetage ou d'échantillonnage[146] pour un même symbole, il va donc falloir, à un moment ou à un autre, choisir l'une de ces possibilités. Il s'agit de sélectionner la classe-de-concordance, ou la classe-de-référence (selon le mode de référence, dénotationnel ou exemplificationnel), qui semble la plus adéquate et pertinente[147]. Dans un contexte esthétique, le fait que l'interprétation dépende d'un choix, lui-même impliqué (ou rendu possible) par la densité, peut expliquer que l'interprétation d'une œuvre varie au fur et à mesure qu'on la fréquente : chaque nouvelle lecture (audition, vision) de l'œuvre est susceptible d'affiner la compréhension que l'on en a et de conduire à opérer de nouveaux choix, qui à leur tour vont conduire à une interprétation plus fine et ainsi de suite.

Ce phénomène est accentué lorsque la densité est combinée avec d'autres symptômes. Notamment lorsque :

1. *la densité syntaxique se combine avec la saturation*

En effet, la densité syntaxique traduit le fait que les aspects syntaxiques les plus subtils du symbole sont susceptibles d'avoir un pendant sémantique, dans le sens où ils peuvent jouer un rôle lors de l'interprétation. Cependant, ce potentiel sémantique, si l'on peut dire, n'est pas toujours effectif. C'est le cas du schéma diagrammatique par exemple. En tant que marque picturale, un diagramme est syntaxiquement dense mais cette propriété est inerte sur le plan du fonctionnement symbolique du diagramme : seuls quelques aspects significatifs du schéma comptent pour son interprétation ; il est atténué (non saturé). Le réquisit de saturation syntaxique active en quelque sorte la densité syntaxique, il lui permet d'être non contingente. L'action cognitive de la densité syntaxique et celle de la saturation se renforcent l'une l'autre. Peut-être pourrions-nous affiner la sélection de ces deux propriétés en tant que symptômes de l'esthétique en stipulant qu'elles n'ont ce statut

[146] Si le mode de référence opérant pour un symbole est la dénotation, je parle d'étiquetage : le symbole joue le rôle d'étiquette, il est pris pour représentant de la (d'une des) classe(s)-de-concordance à laquelle il appartient. Si le mode est l'exemplification, le symbole est tenu pour exemplaire du prédicat qu'il exemplifie (échantillonnage).

[147] Le propos n'est pas ici de fournir une analyse du fonctionnement opérationnel de ce choix, analyse qui relève plus de la psychologie que d'autre chose. Cependant, il faut noter que le choix nécessaire à l'interprétation n'est évidemment pas aléatoire ; il dépend de nombreux facteurs comme, par exemple, savoir si l'interprétation s'inscrit dans un contexte où l'on cherche un maximum de précision ou au contraire un maximum de généralité. Elle dépend aussi des hypothèses qui la sous-tendent ou des connaissances d'arrière plan, etc.

que lorsque elles vont de pair. L'avantage de cette stipulation est de préciser la symptomatologie esthétique en écartant de son champ d'action les diagrammes et non les images. Les premiers, (syntaxiquement denses et atténués) ne relèvent habituellement pas d'un fonctionnement esthétique alors que c'est plus souvent le cas pour les images (syntaxiquement denses et saturées).

2. *la densité sémantique se combine avec l'exemplification*

Imaginons qu'il vous soit indiqué le rendez-vous suivant : « Rue de Seine dix heures et demie» et supposons que vous connaissiez évidemment la ville et le jour concernés. En tant qu'inscription dans un système sémantiquement dense, le français usuel, on peut raffiner à l'infini son interprétation. Cependant, il va de soi que dans un tel contexte, le choix d'interprétation est relativement direct et ne nécessite pas la prise en compte des multiples concordants possibles : il vous faut vous rendre Rue de Seine à dix heures et demie. Le mode de référence adéquat de l'inscription est dans ce cas la dénotation : il s'agit d'effectuer une action telle que l'inscription s'y applique en tant qu'étiquette. La référence va de l'inscription en tant que prédicat, ou étiquette, vers l'objet, ici l'action correspondante. La densité sémantique ne joue pas, dans ce cas, de rôle notable pour l'interprétation. La seule exigence est alors que l'action effectuée soit dénotée par l'inscription.

Replaçons à présent la phrase dans le contexte d'où je l'ai momentanément extraite :

Rue de Seine dix heures et demie
le soir
au coin d'une autre rue
un homme titube…un homme jeune[*]

La fonction référentielle de la même inscription est, dans ce contexte poétique, l'exemplification (littérale ou métaphorique). L'interprétation correcte passe par la prise en compte des prédicats qu'elle exemplifie et non qu'elle dénote.

[*] Extrait de *Rue de Seine*, Prévert.

A cause de cela, je suggère que l'on puisse considérer que la densité sémantique a en fait la valeur de symptôme de l'esthétique dans la mesure où elle s'inscrit dans un contexte exemplificationnel plutôt que dénotatif.

b) Il reste à analyser le rôle et l'apport cognitif des deux symptômes liés à la référence : l'exemplification et la référence multiple et complexe.

L'exemplification a pour rôle principal d'induire de nouvelles organisations catégorielles :

> « Des œuvres servent d'exemple pour (et de ce fait font porter l'attention sur) certaines formes partagées ou partageables – souvent sur des formes non remarquées ou négligées –, ou des couleurs, ou des sentiments. De telles œuvres induisent une réorganisation de notre monde habituel ; la réorganisation se fait en accord avec ces caractéristiques de formes, couleurs ou sentiments, en divisant ainsi et en composant les genres autrefois pertinents, en ajoutant et soustrayant, en effectuant de nouvelles discriminations et intégrations, en réagençant les propriétés. » [Goodman 1978,136-137]

L'apport cognitif de l'exemplification réside notamment dans le fait que ce mode de référence, en réorganisant les catégories, permet de relier des faits épars, de saisir les affinités là où l'on ne voyait que des différences. Toutefois, comme le fait remarquer Elgin, l'exemplification ne consiste pas toujours en la nouveauté d'une organisation catégorielle, elle peut aussi contribuer à une compréhension plus fine d'une connaissance bien établie :

> « Un exemplaire éclairant n'a même pas besoin d'affecter la croyance. Sa contribution cognitive peut consister à augmenter le répertoire conceptuel que l'on a, à affiner son pouvoir de discrimination, à aiguiser sa capacité à reconnaître, synthétiser, réorganiser, etc. Même si des croyances existantes demeurent en place et qu'il ne s'en forme pas de nouvelles, il est difficile de soutenir que des exemplaires qui accomplissent de telles fonctions sont épistémiquement inertes. » [Elgin 1991, 65-66]

L'une des thèses défendues par Elgin est que l'apport d'exemples au sein de l'exposé d'une théorie n'est pas superflu mais participe au contraire pleinement à la compréhension globale de ladite théorie. Elle défend plus généralement la valeur

épistémique, cognitive et heuristique de l'exemplification[148]. L'intérêt de sa démarche est de souligner ces fonctions de l'exemplification dans les domaines artistiques autant que dans les domaines scientifiques. Son argumentation est théorique, la dernière partie de ce travail fournira l'occasion de vérifier sa validité dans des situations concrètes.

Le rôle cognitif de la référence multiple et complexe est en partie conséquent à sa particularité d'être un itinéraire de référence, suivant des étapes référentielles élémentaires. Comme l'écrit Morizot,

> « Aucune des relations qui interviennent n'est individuellement complexe mais il est impossible de subsumer le réseau qu'elle forment à elles toutes sous une unique relation. Il ne s'agit donc pas d'introduire une relation supplémentaire mais de tirer le meilleur parti de l'interaction et de l'intégration des diverses fonctions référentielles. » [Morizot 1996, 212]

En tant que reconstruction de la dynamique d'une chaîne référentielle, contenant notamment des étapes exemplificationnelles, la référence multiple et complexe contient l'apport cognitif de chacun des maillons de la chaîne. Pour reprendre la métaphore que j'avais utilisée à ce propos, la référence multiple et complexe porte sur le chemin (c'est en ce sens que l'on parle d'itinéraire) plus que sur le moyen de transport utilisé. Ce dernier réquisit est un symptôme de l'esthétique en particulier parce qu'il souligne qu'en matière d'esthétique, la manière compte, et non pas seulement le résultat. Si l'on file la métaphore, on peut dire que de différents chemins qui conduisent d'un point à un autre, chacun donne à voir un paysage différent. C'est là particulièrement que l'on peut mesurer la fonction cognitive de la référence multiple et complexe. La combinaison des diverses étapes permet de mettre en lumière des rapports jusqu'alors insoupçonnés et contribue par là à reformer de nouvelles catégories. La contribution de la référence multiple et complexe à la réorganisation des catégories est d'une certaine façon plus subtile que celle que permet l'exemplification. En effet, la référence multiple et complexe passe par une transitivité de la référence alors que tel n'est pas le cas pour l'exemplification : pour qu'un symbole exemplifie une étiquette, il doit impérativement la posséder. La

[148] Pour plus de détails, cf. [Goodman Elgin 1994, 3-27] et [Pouivet (Elgin) 1992, 49-67].

référence par exemplification dévoile une propriété possédée par le symbole. Même si cette possession est dissimulée, non évidente ou non habituelle, littérale ou métaphorique, elle n'en est pas moins réelle. En ce sens, l'exemplification permet en surlignant une propriété du symbole, de le mettre en rapport avec d'autres qui possèdent aussi cette étiquette, alors que par référence multiple et complexe, la possession de l'étiquette à laquelle le symbole fait référence n'est pas nécessaire (puisqu'il peut y avoir transitivité). De la même façon que la fonction exemplificationnelle, la référence multiple et complexe permet une réorganisation interne des catégories (rajouter ou retrancher des éléments d'une même catégorie) mais au contraire de la première, la seconde, grâce à sa tolérance envers une référence transitive, permet de plus une sorte de réorganisation externe entre catégories ; elle nous renseigne sur la nature des liens entre catégories.

Partie III : Symptômes goodmaniens et mathématiques

Si le mathématicien élabore des démonstrations rigoureuses,
sur des canevas parfaitement logiques, il n'en utilise pas moins
les procédés ordinaires de l'intelligence confrontée
aux données concrètes. Il abrège, abstrait, adjoint, assemble,
choisit, classe, compare, compense, construit,
coordonne, déforme, dénombre, déplace, différencie,
économise, élimine, emboîte, empiète, encadre, excepte,
explore, expulse, feint, filtre, groupe, généralise, hiérarchise, identifie,
intercale, majore ou minore, néglige, perfectionne, prélève,
prolonge, reconnaît, réduit, rapproche, renforce, renonce,
répète, renverse, restructure, revalorise, sépare, substitue,
sous-entend, traduit, transpose, recourt à l'analogie,
à l'artifice, à la représentation figurée, aux variables et aux inconnues,
procédant par inégalités, équivalences, médiations, retours, va-et-vient, cherchant des
approximations, des auxiliaires, des avantages,
des gains, des limites, des relais, des repères (…).*

Introduction

Le troisième volet de ce travail consiste en une confrontation entre les mathématiques, en tant que système symbolique, et la symptomatologie esthétique établie par Goodman. Il s'agit en effet davantage d'une confrontation que d'une véritable application qui supposerait une adaptabilité acquise de l'outil à la tâche qu'on lui impose.

La théorie goodmanienne des langages de l'art procède de deux niveaux d'analyse interdépendants : le premier est empirique et se fonde sur l'étude d'exemples particuliers d'œuvres d'art qui sont reconnues en tant que telles tandis que le second, davantage théorique, s'appuie sur une réflexion systématique à propos du fonctionnement symbolique des œuvres. Goodman trouve ainsi à la fois l'occasion d'affiner sa théorie en en vérifiant l'applicabilité sur des exemples et l'occasion d'élaborer des hypothèses supplémentaires afin de pouvoir rendre compte le plus précisément possible des subtilités de fonctionnement. La sélection des symptômes de l'esthétique ne relève pas d'une pure spéculation intellectuelle mais elle est suggérée par la pratique.

* Cf. [Rostand 1985, 95]

De la même façon que Goodman confronte sa théorie des langages de l'art à des œuvres d'art particulières et reconnues en tant qu'œuvres d'art, je tâcherai non pas de décider que certaines œuvres mathématiques possèdent une valeur esthétique selon la seule grille symptomatologique de Goodman mais je tâcherai de vérifier l'adéquation entre les résultats fournis par l'approche goodmanienne et l'attribution standard du qualificatif d'esthétique par une large communauté mathématique. Cela signifie qu'il faudra vérifier si la théorie de Goodman permet de rendre compte du fait que certaines parties des mathématiques sont perçues comme esthétique par un ensemble significatif de mathématiciens.

L'objectif est donc double : le premier, plus strictement mathématique, consiste à vérifier si le raisonnement mathématique se nourrit effectivement de ce que l'on pourrait appeler une méthodologie esthétique dans un sens goodmanien. Le second, plus purement esthétique, consiste à vérifier la pertinence de la théorie de l'esthétique goodmanienne en tant que théorie supposée pouvoir être appliquée à un système symbolique quelconque.

A. Fonctionnement symbolique des démonstrations algébriques

I. Procédés d'analyse d'une démonstration

I.1. Irrationalité de √2

La fréquence avec laquelle la démonstration de l'irrationalité de √2 est citée pour illustrer la beauté des mathématiques[149] semble être une raison suffisante pour prendre cette démonstration comme premier exemple d'application de l'outil

[149] Cf. [Papert 1978,105-119], [Hardy 1940, 28-33], [King 1992, 133-144] ou encore [Davis & Hersh 1982, 287-289].

goodmanien. Avant de mener à bien cette application, il convient de faire deux remarques ou, plus exactement, d'évacuer deux objections.

En effet, on pourrait souligner que la démonstration en question est citée avant tout pour sa grande simplicité, dans le sens où c'est un résultat accessible sans bagage mathématique important. C'est en partie vrai, et les auteurs qui la citent évoquent ce fait pour justifier leurs choix mais ils précisent aussitôt qu'il n'est nul besoin d'aller chercher des mathématiques sophistiquées pour rencontrer la beauté[150].

Une seconde objection consisterait à dire que l'outil goodmanien a été sélectionné pour rendre compte d'un fonctionnement esthétique, c'est-à-dire d'une valeur esthétique, et non pas pour justifier un mérite esthétique. Or, lorsque je parle de la beauté de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, c'est une propriété esthétique, un certain mérite, qui est en jeu, non un fonctionnement. Cependant, nous verrons que les auteurs comme Hardy ou Papert, qui défendent la beauté de cette démonstration fondent leur argumentation sur une analyse du processus dynamique et non sur des considérations statiques de la démonstration en tant que produit fini. A ce titre, c'est bien un fonctionnement esthétique qui est en question plus qu'une évaluation normative des propriétés esthétiques.

Le but de ce premier exemple est d'une part de mettre en place l'interprétation de certains symptômes de l'esthétique, notamment celui d'exemplification, dans un domaine strictement mathématique. D'autre part, il s'agit de montrer que l'on peut substituer à un vocabulaire vague et ambigu, un vocabulaire technique et précis tel celui mis en place par Goodman pour décrire certains aspects du fonctionnement symbolique.

Cet exemple est donc davantage un point de départ pour une analyse générale des symptômes esthétiques en mathématiques qu'une étude qui lui serait strictement consacrée.

[150] Par exemple : [Hardy 1940, 28-30].

L'analyse de l'irrationalité de √2 (le résultat et sa démonstration) sur la base du repérage d'un fonctionnement esthétique comporte deux étapes principales :

- La première étape consiste en une analyse de la démonstration par rapport au résultat sur lequel elle débouche.

- La seconde étape porte sur la construction de la démonstration. L'idée est de montrer que la réutilisation de cette construction pour prouver des résultats similaires relève d'une exploitation de la densité sémantique des mathématiques ainsi que d'une mise à jour des prédicats les plus généraux possibles qu'elle exemplifie.

Une troisième étape consisterait alors à analyser le résultat par rapport à ses contextes ontologiques et sémantiques. Ce travail outrepasse les limites du présent travail à la vue de la dimension historique qu'il devrait comporter, j'apporterai néanmoins une réflexion à ce propos lorsque je ferai la synthèse esthétique des différentes analyses[151].

I.2. 1ère étape - Stades d'exemplification

Prenons comme base de travail la démonstration que propose Hardy[152] dans *L'apologie d'un mathématicien* :

> « Un « nombre rationnel » est une fraction a / b, où *a* et *b* sont des entiers ; nous supposerons que *a* et *b* n'ont pas de facteurs commun, puisque, dans le cas contraire, celui-ci peut être éliminé. Affirmer que « √2 est irrationnel » revient simplement à dire que 2 ne peut être écrit sous la forme $(a / b)^2$. Soit encore, que l'équation

[151] Cf. Partie III A. section III. 3

[152] Cette démonstration est la plus classique, celle que l'on trouve habituellement dans les manuels mathématiques. Hardy écrit qu'elle est attribuée à Pythagore mais il précise que l'on peut la trouver sous une forme beaucoup plus générale dans Euclide, *Eléments* X, 9 (cf. [Hardy 1970, 28 note 2]). Quoi qu'il en soit, j'appellerai par commodité « théorème de Pythagore » le résultat de l'irrationalité de √2, bien que l'on qualifie habituellement ainsi le résultat portant sur les triangles rectangles. Je marquerai la différence là où le contexte ne préviendrait pas d'une éventuelle confusion.

Pour une étude détaillée des différentes démonstrations, on pourra se reporter à [Vuillemin 2001].

(B) $a^2 = 2b^2$

ne peut être satisfaite par deux nombres entiers a et b sans facteur commun. Ceci est un théorème de pure arithmétique, qui ne fait appel à aucune connaissance sur les « nombres irrationnels » et ne dépend d'aucune théorie concernant leur nature.

Raisonnons (…) par l'absurde : supposons que (B) soit vérifiée, *a* et *b* étant deux nombres entiers sans facteur commun. Il s'ensuit de (B) que a^2 est pair (puisque $2b^2$ est divisible par 2), et donc que *a* lui-même est pair (le carré d'un nombre impair étant lui-même impair). Si *a* est pair, alors

(C) $a = 2c$

pour un entier *c* ; et donc

$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$

soit

(D) $b^2 = 2c^2$

Ainsi b^2 est pair et donc (pour les mêmes raisons que précédemment) *b* est pair. *a* et *b* sont donc tous deux pairs, et ont donc comme facteur commun 2. Ceci contredit notre hypothèse, et celle-ci est donc fausse. » [Hardy1940, 28-29]

Je propose d'interpréter les justifications classiques de la « beauté » de cette démonstration en fonction d'une analyse sémiologique faite sur la base de la symptomatologie de Goodman.

L'étape charnière, ou la clé, de la démonstration consiste en l'écriture de l'équation B, ou plutôt de la phrase relationnelle B. En fait, les phrases A (on appelle A la relation : a / b = √2) et B sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont la même valeur de vérité pour tout a et pour tout b, et elles sont deux représentations de la même équation.

Cependant, la relation interne entre les termes singuliers *a*, *b* et √2 peut être lue d'une part comme instanciation du terme général “ = ” (phrase A) et d'autre part

comme exemplification du prédicat “être pair” (phrase B)[153], et c’est ce que l’on cherche.

En termes frégéens, les phrases A et B ont même sens (elles représentent la même équation) et même dénotation (elles sont extensionnellement équivalentes). Leur différence se traduit en terme d’exemplification : elle est la traduction goodmanienne de la coloration frégéenne.

La plupart des démonstrations mathématiques procèdent de façon similaire. A grands traits, ce procédé consiste à faire passer un objet mathématique (une équation ou une fonction par exemple) du statut d’instance à celui d’échantillon[154]. Si l’on appelle H l’étiquette que l’on peut fabriquer à partir des hypothèses d’une proposition mathématique et C celle qui correspond à la conclusion de cette proposition alors le processus de vérification de la proposition peut être schématisé de la façon suivante : on sélectionne un objet tel que H s’y applique et l’on transforme l’objet à l’aide de règles valides de façon à rendre explicite la possession de C par l’objet. La première étape est ainsi une question de dénotation (il s’agit de choisir n’importe quel objet du moment qu’il est dénoté par H) tandis que la seconde étape est une affaire d’exemplification (il s’agit de choisir parmi les écritures possibles celles qui exemplifient C)[155].

Par exemple, la démonstration classique de la proposition suivante : « toute fonction réelle dérivable est continue » illustre le processus décrit ci-dessus. L’étiquette H est ici “être dérivable” (et réelle) et l’étiquette C est “être continue”. La démonstration est directe, elle consiste à considérer une fonction quelconque f dénotée par l’étiquette “être dérivable”. On traduit alors par l’écriture

[153] En effet, la phrase B exhibe la parité de *a* (plus exactement, la parité de a^2). L’écriture de a^2 comme étant égale à $2b^2$ fournit une référence directe, on pourrait même dire canonique, entre a^2 et l’une des étiquettes possédées par ce nombre, à savoir « être pair ». La nature de la référence entre cette étiquette et a^2 est, dans la phrase A, une dénotation, alors que dans la phrase B, c’est une exemplification puisque dans ce cas il y a possession *et* référence.

[154] Dans le langage goodmanien, je rappelle qu’une instance d’une étiquette est quelque chose auquel s’applique cette étiquette. Un échantillon est quelque chose qui possède manifestement cette étiquette. La différence entre la relation qui unit une étiquette avec une instance et celle qui unit une étiquette avec un échantillon est une différence d’orientation. Dans le premier cas, il s’agit d’une référence qui va de l’étiquette vers l’instance alors que dans le second cas, la référence va de l’échantillon vers l’étiquette.

[155] Ce procédé s’apparente aux diagrammes de Peirce, pour plus de détails voir [Heinzmann 1994, 297-310].

mathématique cette propriété de f puis l'on transforme l'écriture jusqu'à ce que l'on rende manifeste la possession par f de l'étiquette C : "être continue", autrement dit, jusqu'à que l'on obtienne une écriture qui permette l'exemplification par f de l'étiquette C ; la proposition est alors démontrée.

En fait, d'un point de vue sémantique, ce que l'on montre est que la classe-de-concordance de H est incluse dans la classe-de-concordance de C, c'est-à-dire que tout objet dénoté par H est aussi dénoté par C. Du point de vue théorique, le processus de démonstration ainsi décrit exige une transformation (syntaxique) d'une instance de H en échantillon de C. Au niveau de la pratique, la reconnaissance d'un objet dénoté par H suffit à le considérer comme instance de C. La relation transitive d'inclusion établie en théorie (par la démonstration) se traduit, en pratique, par une « économie de pensée », qui est d'après Poincaré l'un des buts des mathématiques[156].

Les transformations qui permettent le passage du statut d'instance de H à celui d'échantillon de C sont (des implications) logiquement formalisables. Ce qui n'est pas le cas de leurs articulations et enchaînements, qui relèvent plus d'un choix stratégique et de règles de simplification tacites. Que faut-il entendre par règles de simplification ?

Un moyen d'expliciter ce dernier point peut être fourni par une expérience menée par Papert. Dans son article "The Mathematical Inconscious"[157], Papert défend la thèse selon laquelle si un sens aigu de l'esthétique est nécessaire pour la compréhension et la création mathématique, comme le considère Poincaré, cette qualité n'est pas nécessairement innée mais elle doit pouvoir être acquise par un enseignement adéquat. Papert livre alors la description d'une expérience qu'il a faite dans le but de sensibiliser un public à la beauté de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Il fournit à cet effet un exemple d'enchaînement d'étapes qui conduit de l'écriture de la phrase A à celle de B :

---

[156] Naturellement, Poincaré interprète par rapport aux mathématiques, le principe d'économie de Mach, cf. [Poincaré 108, 28].

[157] [Papert 1978, 105-119]

> "(…) many subjects engage in a process of mathematical « free association » trying in turn various transformations associated with equations of this sort. Those who are more sophisticated mathematically need a smaller number of tries, but none of the subjects seem to be guided by a prevision of where the work will go. Here are some examples of transformations in the order they were produced by one subject:
>
> $\sqrt{2} = p / q$
>
> $\sqrt{2} \times q = p$
>
> $p = \sqrt{2} \times q$
>
> $(\sqrt{2})^2 = (p / q)^2$
>
> $2 = p^2 / q^2$
>
> $p^2 = 2 q^2$
>
> All subjects who have become more than very superficially involved in the problem show unmistakable signs of excitement and pleasure when they hit on the last equation." [Papert 1978, 111]

Ce qui est intéressant dans cet exemple ce n'est pas le mérite esthétique à proprement parler que propose Papert[158], mais l'enchaînement des transformations, que l'on peut numéroter par commodité de 1 à 6. Ce que je veux montrer c'est que chacune de ces étapes répond à une « règle de simplification tacite » :

- Le passage de 1 à 2 est conséquent au principe selon lequel il est plus aisé de manipuler une expression qui ne comporte pas d'écriture fractionnelle.
- Le deuxième enchaînement traduit pour sa part une habitude qui veut que l'on écrive une égalité en notant plutôt à gauche l'expression la plus courte, celle qui comporte le moins de symboles possibles.

[158] Le mérite esthétique de cette démonstration réside, d'après Papert, dans l'écriture de la dernière phrase relationnelle, qui correspond d'ailleurs à la phrase appelée B jusqu'à présent. Son obtention provoque selon lui une excitation qu'il qualifie d'esthétique, cf. [Papert 1978, 111-113].

- Le passage de 3 à 4 (ou de 3 à 5) est du même ordre que celui de 1 à 2 : il est plus aisé de manipuler une expression sans racine que le contraire.
- Enfin, la dernière écriture réorganise l'égalité de façon à mettre un seul terme à gauche.

Il va de soi que ces enchaînements présentent une certaine redondance qui s'explique sûrement par le manque d'expérience du sujet (en particulier, le passage de 3 à 4 n'est pas « naturel », il traduit plus un tâtonnement qu'un enchaînement logique). En reprenant les règles énoncées ci-dessus et en éliminant toute redondance, on peut proposer l'enchaînement suivant :

$$\sqrt{2} = p / q$$

$$\sqrt{2} \times q = p$$

$$p = \sqrt{2} \times q$$

$$(p)^2 = (\sqrt{2} \times q)^2$$

$$p^2 = 2\, q^2$$

Chacune des implications qui conduisent des écritures 1 à 5 est logiquement formalisable. Par contre, aucun des passages de l'une à l'autre n'est imposé par la logique. Le déroulement, l'articulation de ces écritures répond à des règles tacites. Ma thèse est que ce sont des règles de confort, de commodité, dictées par l'habitude. L'ordre de l'invention devient ici un aspect de l'ordre de justification, les deux ordres étant les faces différentes de la même médaille. Il est bien connu[159] que l'on ne comprend pas une démonstration si on la suit pas à pas sans comprendre les critères de choix déterminant l'ordre des enchaînements.

La question qui se pose alors est de savoir si ces règles particulières (ce ne sont pas vraiment des règles, plutôt des conventions commodes) ne sont pas ce qui permet de déterminer des critères de simplicité.

[159] Voir par exemple [Poincaré 1908, 46] ou [Hadamard 1945, 67].

I.3. Simplicité et règles extralogiques

I.3.1. Mesure de la simplicité

La notion de simplicité est largement discutée dès lors que sont abordées, sous une perspective épistémologique, des questions de méthodologie. La principale difficulté à traiter de façon systématique et analytique la simplicité est naturellement son aspect relatif ainsi que les multiples points de vue sous lesquels on peut tenter de l'évaluer (simplicité syntaxique ou sémantique par exemple). Cependant, Goodman, en s'interrogeant sur la mesure possible de la simplicité remarque que :

> "Attempts at formulating a general criterion run so quickly into trouble that the problem is often dismissed as hopeless. Can we measure a property so multifarious, inconstant, and subjective? Before we give up, let's observe that the prospect of measuring physical size must once have looked equally dim for similar reasons. Size may mean total displacement or maximum diagonal or height and lenght and breadth, or any of many other qualities. It changes with time and circumstances, and our judgments of it vary with our physiology, prejudices, and point of view. Indeed, the case against the measurability of almost any property is overwhelming – until the property is measured. Consistency and objectivity are the products of measurement, not prerequisites for it." [Goodman 1967, 69]

Atteindre une forme d'objectivité en parlant de simplicité n'est pas impossible, il suffit de sélectionner les propriétés qui serviront à l'évaluer. Sans parvenir à un résultat définitif, Goodman propose toutefois des pistes pour une mesure de la simplicité dans les sciences formelles. Pour lui, il n'y a pas de science sans simplicité (ni de simplicité sans quelque chose qui ressemble à la science)[160] et il est donc fondamental de s'entendre sur les possibilités d'évaluation de la simplicité. Il restreint son champ d'investigation à la simplicité formelle ou structurelle plutôt qu'à la simplicité sémantique ou psychologique. Et c'est au niveau du vocabulaire extralogique qu'il concentre ses efforts puisque :

[160] Cf. [Goodman 1967, 77]

> "Since the usual logical apparatus is common to all the systems under considerations, the question now before us is how to measure the structural simplicity of the basic *extralogical* vocabulary of a system." [Goodman 1967, 70]

Compte tenu de l'interrogation qui a introduit cette section – les règles tacites de l'écriture d'une démonstration mathématique (codage) sont-elles des critères de simplicité ? – et compte tenu de la problématique de la simplicité en mathématiques telle que la circonscrit Goodman, je suggère que l'on puisse compléter son analyse en lui ajoutant un versant qui porte non pas sur le vocabulaire extralogique, mais sur les règles extralogiques. La question devient donc de savoir dans quelle mesure on peut évaluer la simplicité formelle des règles extralogiques.

I.3.2. Codage et esthétique

Les démonstrations mathématiques sont rarement rédigées selon la pure rigueur que pourrait exiger la logique. Ceci ne signifie pas qu'elles présentent des erreurs logiques et ne remet pas en cause leur validité. Une preuve peut être correcte, valide, quand bien même elle serait rédigée de façon non strictement formelle. Je souligne simplement le fait que la rédaction d'une démonstration comporte la plupart du temps des raccourcis commodes. Chaque étape qui constitue une preuve n'a pas nécessairement besoin d'être explicitée, soit parce qu'elle fait appel à un résultat connu, soit parce que le rédacteur suppose une certaine compétence chez son lecteur qui lui permet d'omettre des détails qui semblent évidents. Le passage de la phrase relationnelle (A) à la phrase relationnelle (B) dans la démonstration de Hardy donnée ci-dessus n'est absolument pas explicité. Et pour cause, il est quasi immédiat pour un lecteur d'un niveau mathématique élémentaire.

La rédaction des démonstrations mathématiques telle qu'on peut la trouver dans les manuels, dans les revues ou dans les comptes rendus constitue ce que l'on pourrait appeler le codage mathématique. Le codage n'a pas pour seule vertu d'être pratique. En effet, s'il permet de raccourcir les démonstrations, de les

rendre plus lisibles et maniables, ce n'est pas là, d'après Poincaré, l'essentiel de son rôle :

> « (…) Ceux qui les premiers se sont préoccupés avant tout de la rigueur nous ont donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter : mais si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les traités de mathématiques vont devenir bien longs : et si je crains les longueurs ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que le crains qu'en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué tout à l'heure le rôle utile. » [Poincaré 1908, 31]

Pour Poincaré, l'aspect formel d'un raisonnement est fondamental pour sa compréhension[161]. Qu'il soit juste et rigoureux ne suffit pas à gagner sa pleine satisfaction, encore faut-il que l'on puisse en saisir l'harmonie, l'aspect esthétique : c'est ce qui constitue selon lui la clé de la compréhension des mathématiques[162]. L'esthétique des mathématiques est donc à chercher au niveau du codage, non au niveau de sa logique formelle[163]. Il faudra alors analyser si les règles tacites de rédaction (ou règles extralogiques), qui prévalent au niveau du codage, ont à voir avec la question de l'esthétique.

---

[161] Le rôle cognitif du codage ainsi que sa dimension esthétique est un point de vue que l'on retrouve actuellement fréquemment, on pourra lire par exemple [Serfati 2005], [Rostand 1985], [Ritter 2002] ou encore [Patras 2001]. Le pendant de ce point de vue est une certaine méfiance à l'égard d'une approche excessivement formalisée des mathématiques, comme le formule Atiyah :

> « Je pense que la tradition russe en mathématiques a été moins formalisée et structurée que la tradition occidentale, qui est sous l'influence des mathématiques françaises. Les mathématiques françaises ont été dominantes et ont formé une école très formalisantes. Je crois qu'il est regrettable que la plupart des livres aient tendance à être écrits de cette manière par trop abstraite et ne cherchent pas à communiquer la compréhension des choses. » (Traduction française selon Patras in [Patras 2001, 120]).

[162] Dans l'article « L'invention mathématique », Poincaré s'étonne que les mathématiques ne soient pas comprises par tous. En effet, explique-t-il, la chose surprenante n'est pas que tout le monde ne soit pas capable d'invention en mathématiques, ni ne puisse retenir par cœur une démonstration, mais que quiconque ne puisse comprendre un raisonnement lorsqu'on le lui expose. Cela tient au fait que si un tel raisonnement est constitué d'éléments qui répondent chacun à des règles logiques, les accepter (les comprendre) individuellement ne suffit pas. Encore faut-il pouvoir comprendre l'ordre dans lequel ils s'enchaînent. Ce qui permet de saisir cet ordre c'est une sensibilité spéciale à l'harmonie et l'esthétique des mathématiques (cf. [Poincaré 1908, 45-47]). Les propriétés esthétiques sont pour Poincaré la clé, la condition d'accessibilité à la pleine compréhension des mathématiques.

[163] Ce dernier point est renforcé par le fait qu'entre deux démonstrations d'un même résultat, le mérite et la valeur esthétique qui leur sont accordés peuvent être totalement différents (voir par exemple le chapitre « Esthétique comparée » de [Davis & Hersh 1982]).

Les réflexions précédentes conduisent à supposer que la simplicité est étroitement liée aux propriétés esthétiques en mathématiques. En effet, la simplicité, quand bien même ne fait elle pas encore l'objet d'une évaluation, est à chercher au niveau des règles extralogiques (donc du codage). D'autre part, c'est au même niveau rédactionnel que se situent, comme on l'a vu avec Poincaré, les propriétés qui permettent un fonctionnement esthétique. Si l'on ajoute à cela le fait que la simplicité apparaît la majeure partie du temps dans la liste des critères esthétiques qui sont attribués aux mathématiques[164] alors cette supposition semble justifiée.

Je propose de montrer que l'on peut évaluer la simplicité formelle atteinte avec les règles extralogiques en termes de saturation. La saturation pourrait ainsi être un critère de simplicité. Si cela est correct, alors, le lien entre l'esthétique et la simplicité sera rendu effectif.

I.3.3. Simplicité et saturation

Il s'agit dans un premier temps de fournir une interprétation du symptôme de saturation dans le cadre des systèmes symboliques mathématiques. La saturation relative syntaxique, telle que Goodman l'a décrite, est une propriété qui concerne surtout les systèmes picturaux. Elle permet d'établir une graduation entre une saturation maximale et une saturation minimale (atténuation). C'est une propriété relative en cela qu'un système est toujours plus ou moins saturé (ou atténué) qu'un autre. La saturation se mesure en fonction du nombre d'aspects syntaxiques qui sont contingents dans le système. Plus ce nombre est faible, plus le système est saturé et pour pouvoir décider si le nombre en question est « faible », il faut le comparer à un autre, d'où la relativité de la saturation.

Etant une propriété clairement syntaxique, son application aux systèmes linguistiques ne semble pas faire sens. En effet, mis à part la calligraphie et ses dérivés, la plupart des textes, qu'ils soient littéraires ou non, sont atténués dans le

[164] Voir par exemple : [Engler 1990, 29-30], [Penrose 1974, 268], [Osborne 1984, 293], [Machan 1977, 362], [Lamouche 1955] ou encore [Jacquette 1990, 661].

sens où l'on n'en modifie pas le fonctionnement symbolique en modifiant un grand nombre de caractéristiques syntaxiques (on peut changer sans dommage la police, le support, ou encore la couleur de l'encre par exemple). Dans un texte, la distinction entre les aspects syntaxiques constitutifs et ceux qui sont contingents est habituellement claire.

En est-il de même avec l'écriture des mathématiques ?

L'une des différences entre les mathématiques, en tant que système symbolique, et un système linguistique quelconque tient en cela que dans le premier cas, les règles de combinaison des symboles entre eux tolèrent une plus grande latitude que dans le second cas. Dans le cas des systèmes linguistiques, la règle qui prévaut est la concaténation linéaire. Dans le cas des mathématiques, on combine les symboles entre eux suivant diverses lois, ou grâce à des opérateurs. Ces derniers ayant des propriétés qui permettent plusieurs écritures différentes pour un même objet. Par exemple, dans le corps des réels **R**, un polynôme P(x) peut être représenté par x^4+9x^5-12, par $-12+x^5\ 9 + x^4$ ou encore de multiples façons obtenues grâce à la commutativité et la symétrie de la multiplication et de l'addition dans **R**.

Dans un système purement linguistique, la latitude pour choisir un représentant syntaxique se situe au niveau de la marque, au sens goodmanien. Ce choix n'a pas de conséquence sur le fonctionnement du système. En mathématiques, la latitude est plus large, et l'on peut choisir, outre la marque, l'organisation des symboles entre eux. Cette organisation syntaxique, comme on l'a vu dans la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, est susceptible d'avoir une fonction exemplificationnelle. Si l'on modifie l'organisation, on modifie l'exemplification et on modifie donc le fonctionnement général de la démonstration.

C'est au niveau du rapport entre organisation syntaxique et fonctionnement du système que l'on peut situer l'interprétation du symptôme de saturation syntaxique. Je propose de la caractériser de la façon suivante : une écriture est saturée si l'on modifie la marche du raisonnement en modifiant son organisation

syntaxique. Ainsi interprétée, la saturation reste un symptôme syntaxique et relatif. La différence avec la saturation goodmanienne porte sur deux points :

- la saturation est dans ce cas relative à une autre écriture équivalente (on compare deux écritures qui sont deux représentations du même objet et qui ont la même dénotation)
- la saturation concerne alors davantage l'organisation des marques entres elles que les marques elles-mêmes.

Malgré ces différences, qui sont d'ailleurs plus un élargissement du symptôme que de réelles différences[165], la saturation ainsi entendue conserve son statut de symptôme de l'esthétique. En effet, comme on l'a vu, la saturation est un symptôme de l'esthétique en cela qu'elle contribue à affiner notre capacité de discrimination. Dans un système (mathématique) saturé, le nombre de caractéristiques syntaxiques qui fonctionnent symboliquement est plus élevé puisque l'ordre et le choix des combinaisons pour l'écriture comptent ; l'interprétation d'un système saturé met en jeu, et contribue donc à améliorer, une capacité de discrimination.

Une conséquence de cela est alors que si le nombre de caractéristiques qui fonctionnent symboliquement est élevé, les caractéristiques contingentes sont par suite peu nombreuses. Il y a donc, dans une écriture saturée, une sorte d'élimination du superflu[166]. A cause de ce dernier point, je suggère d'établir la

---

[165] A ce propos, on peut remarquer que la saturation ainsi entendue trouve une application dans les systèmes linguistiques, ce qui n'est pas le cas de la saturation goodmanienne. En effet, si les règles de combinaison des symboles atomiques (les « lettres ») est la concaténation linéaire, les combinaisons des symboles composés (les « mots ») sont plus variés : dans une même phrase, les mots peuvent occuper différences places. On parlera alors de système linguistique saturé lorsque l'ordre, la place de chaque mot ne peut être modifié sans que le soit aussi le fonctionnement global du système. Dans les textes non littéraires, l'ordre importe généralement peu (du moment que l'ensemble reste compréhensible), dans les textes littéraires, l'ordre peut avoir un rôle important au niveau de l'interprétation (mise en exergue d'un mot, amplification d'un adjectif lorsqu'il est placé avant le nom, etc.).

[166] Ainsi interprétée, la saturation rend compte d'un processus méthodologique opérant dans les mathématiques qui est fréquemment appelé la méthode du sculpteur. Mamchur y fait par exemple référence pour souligner les convergences entre l'art et la science :

> "Intellectual discomfort in scientists springs from different, causes, and is variously overcome. One way is to eliminate redundancies in conceptual constructions- for example, some theoretical essences, parameters, and statement […]. When asked once how he created such perfect works of art, Rodin replied that he

saturation comme un critère possible de la simplicité. Une écriture est plus simple qu'une autre si elle est plus saturée. Cette caractérisation de la simplicité ne contredit pas le sens commun qui veut que, de façon générale, on trouve plus simple quelque chose qui ne présente pas de complication de détail inutile.

La simplicité ainsi circonscrite est bien évaluée au niveau syntaxique, puisqu'elle concerne l'arrangement des symboles entre eux. Autrement dit, la simplicité entendue comme corollaire de la saturation se mesure bien au niveau du codage mathématique.

La question initiale de cette section portait sur la nature du rapport entre simplicité et codage. L'ensemble des réflexions précédentes conduit à la conclusion suivante : le lien entre simplicité et codage est l'esthétique, plus exactement, ce lien se fonde sur la saturation qui est à la fois un critère de simplicité et un symptôme de l'esthétique.

I.4. Conclusion

Les symptômes identifiés pour la démonstration de l'irrationalité de √2 sont l'exemplification et la saturation. L'un et l'autre ne sont pas indépendants : au sein de cette démonstration, la fonction exemplificationnelle de l'écriture de la phrase B est permise par son aspect saturé. C'est la combinaison des deux symptômes qui justifie le mérite esthétique de la démonstration plutôt que leur présence individuelle.

---

took a stone and hewed away what was unnecessary. Baring this analogy in mind, we can argue that a similar process (the "sculptor's method) operates in science." [Mamchur 1987, 210]

Quinet mentionne une démarche similaire :

« J'étais frappé de l'art avec lequel les mathématiciens éloignent, rejettent, éliminent peu à peu tout ce qui est inutile pour arriver à exprimer l'absolu, avec le plus petit nombre possible de termes, tout en conservant dans l'arrangement de ces termes un choix, un parallélisme, une symétrie qui semblent être l'élégance et la beauté visible d'une idée éternelle. » cité in [Le Lionnais 1962, 437]

Lorsque Hardy entreprend de décrire les qualités « purement esthétiques » de cette démonstration il parle de son « très haut degré d'inattendu, allié à l'inévitable et à l'économie ». Il n'y a pas, écrit-il, « de complication de détail et pour être belle, une démonstration mathématique doit ressembler à une constellation simple et nettement définie, pas à un amas diffus de la Voie Lactée »[167]. Mais, l'économie, la simplicité, ne peuvent-elles être traduites en terme d'exemplification et de saturation puisque, comme il a été souligné, la première implique une forme d'économie et la seconde une forme de simplicité ?

Dans son argumentation, Hardy évoque en outre le fait que la démonstration en question est en quelque sorte "réutilisable" :

> « On constatera tout d'abord que le raisonnement de Pythagore peut s'étendre très loin, et s'appliquer, sans grande modification de son principe, à de très vastes ensembles d'irrationnels. » [Hardy 1940, 31]

La compréhension de cette propriété nécessite que l'on situe l'analyse au niveau du principe de la démonstration, ou, en termes plus poincaréens, de sa construction.

II. 2ème étape - Principe de démonstration

La démonstration de l'irrationalité de √2 peut servir pour prouver de la même façon l'irrationalité de beaucoup d'autres nombres, ou, plus exactement, elle peut servir de modèle. C'est cette propriété que Hardy appelle « le sérieux » d'une preuve et qui fait partie, selon lui, de ses aspects esthétiques. Ce qui devient alors objet d'étude c'est le principe de la démonstration, plus que les éléments qui la composent. Il s'agit donc d'une part d'analyser ce que signifie que « d'étendre le principe d'une démonstration » (ce qui sous-entend une double mise au point : l'une sur la notion elle-même de principe de démonstration, et l'autre sur la faculté de l'étendre). Il faudra d'autre part mettre en lumière le lien entre cette capacité et un fonctionnement esthétique.

[167] Cf. [Hardy 1940, 38-39]

II.1. Identification du principe de démonstration

De façon intuitive, on peut comprendre la notion de principe de démonstration comme étant ce qui reste lorsque l'on élimine de la démonstration tous les aspects contingents inhérents à la particularité de l'objet auquel le raisonnement est appliqué. Cette interprétation est guidée par la notion poincaréenne de construction, ou d'architecture, d'une démonstration[168]. Pour Poincaré, comme pour Hardy d'ailleurs, ce qui importe dans une démonstration ce sont les relations qui unissent ses divers éléments, plus que les éléments eux-mêmes pris dans leur individualité. En effet, l'étude de ces relations permet de déterminer les seules propriétés qui sont en jeu, ce qui permet par la suite de parvenir à appliquer le même type de démonstration à des objets qui présentent ces propriétés. De façon plus précise, on peut caractériser le principe, ou la construction d'une démonstration, comme l'ensemble des propriétés strictement nécessaires à la validité des relations en jeu dans la démonstration (relations qui permettent l'application du raisonnement). La description de la méthode axiomatique par Henri Cartan donne l'occasion de clarifier ceci et fournit en même temps une explication sur les moyens d'avoir accès à la construction :

> « Un mathématicien qui entreprend de construire une démonstration a en tête des objets mathématiques biens définis, qu'il étudie à ce moment-là. Lorsqu'il pense avoir trouvé la démonstration, et qu'il commence à tester soigneusement toutes ses conclusions, il se rend compte que seul un très petit nombre des propriétés spécifiques des objets considérés a joué un quelconque rôle dans la démonstration. Il découvre ainsi qu'il peut utiliser la même démonstration pour d'autres objets possédant uniquement les propriétés qu'il a employées auparavant. Ici nous pouvons voir l'idée simple sous-jacente à la méthode axiomatique ; au lieu de déclarer quels objets doivent êtres examinés, il suffit d'établir la liste des propriétés […] à utiliser dans l'investigation. On met alors ces propriétés en exergue en les exprimant par des axiomes : dès lors, il n'est plus important d'expliquer ce que sont les objets à étudier. Au lieu de cela, on peut construire la preuve de telle façon qu'elle soit vraie pour tout objet satisfaisant aux axiomes. »[169]

---

168 Cf. partie I B. I.3

169 Cité par Maurice Mashaal in [Mashaal 2000, 47] comme étant un propos que tint Henri Cartan lors d'une conférence en Allemagne en 1958.

Finalement, l'identification de la construction d'une démonstration suppose que l'on parvienne à identifier quelles sont les propriétés des objets auquel il est fait référence pour la conduite du raisonnement. En termes goodmaniens, il s'agit donc non pas de connaître de façon exhaustive l'ensemble des étiquettes qui s'appliquent à un objet (c'est-à-dire, toutes les étiquettes qui dénotent l'objet), mais il faut pouvoir distinguer parmi celles-ci, celles envers lesquelles il est fait expressément référence ; autrement dit, celles qui sont exemplifiées par l'objet au cours de la démonstration. La construction reste en quelque sorte invisible tant que l'on n'identifie pas la direction des chaînes référentielles qui relient les différentes étapes du raisonnement. C'est-à-dire qu'il faut, pour y avoir accès, savoir repérer le statut référentiel, échantillon ou étiquette, des objets en jeu. On peut trouver ici une explication analytique du problème évoqué par Poincaré par rapport au fait qu'il ne suffit pas de comprendre pas à pas les étapes d'une démonstration pour la comprendre véritablement (i.e. pouvoir la refaire ou la réutiliser ailleurs), encore faut-il en saisir l'ordre et la raison des enchaînements[170]. Cependant, qu'est-ce qui distingue une démonstration analytique, c'est-à-dire logique, d'une démonstration esthétique de surcroît ? A cet égard, comme on l'a vu, la solution, ou l'explication qu'en donne Poincaré, est la nécessité de travailler en artiste, de s'élever afin de parvenir à distinguer les éléments contingents de ceux qui jouent un rôle constitutifs. Il s'agit pour lui de se placer sous une perspective d'ordre et non pas dans une démarche de calcul strictement logique. L'outil fourni par Goodman permet de traduire cela dans une approche sémiologique de la théorie de la référence : la compréhension véritable (au sens poincaréen) d'une démonstration passe par une identification de sa construction qui elle-même est permise par l'identification du statut référentiel de chacun des éléments qui la composent. En ce sens, on peut d'ores et déjà dire que la compréhension véritable d'une démonstration nécessite que l'on sache la faire fonctionner esthétiquement, puisque l'attention ne doit pas être portée sur sa seule fonction dénotative mais aussi, et surtout, sur ce qu'elle exemplifie. Ceci est la traduction goodmanienne de l'injonction de Poincaré : il faut travailler en artiste[171].

[170] Cf. [Poincaré 1908, 46]

[171] Cf. [Poincaré 1905, 106]

La possibilité de pouvoir étendre une démonstration s'interprète alors comme la possibilité de pouvoir déplacer sa construction, ou plutôt, de pouvoir l'appliquer à d'autre cas pour lesquels elle n'était pas nécessairement prévue à l'origine. Le déplacement s'effectue vers des objets qui présentent les propriétés requises pour le raisonnement. Il permet donc de démontrer des faits analogues et ce faisant, de relier - sur la base des propriétés communes - des faits épars. Cette manœuvre est à la fois, d'après Poincaré et Hardy, source d'esthétique autant que d'utilité pour le développement des mathématiques : la première peut se comprendre en termes d'unité dans la variété qu'est susceptible de révéler un tel déplacement tandis que l'utilité doit se comprendre en terme d'économie de pensée d'une part (le principe de la démonstration mis à jour, il ne reste qu'à vérifier si les objets auxquels on veut l'appliquer possèdent les propriétés en question) et en termes de nouvelle catégorie mise à jour (catégorie des objets auxquels on peut appliquer la démonstration) d'autre part.

Une description sémiologique de l'action de déplacer une construction offre de justifier, et de mieux comprendre, son rôle esthétique et utile en en révélant des affinités avec le procédé métaphorique. Toutefois, avant d'en arriver à cette description, il va falloir s'accorder sur un vocabulaire particulier, celui attenant à la métaphore dans la théorie goodmanienne. Il faudra ensuite analyser les usages possibles d'une construction (deux usages principaux seront retenus : le premier consistant en l'emploi d'une construction pour démontrer des faits analogues, le second consistant en l'étude d'une construction dans le but d'en saisir la structure), ce qui nous amènera à distinguer différents types de généralisation. Ces étapes intermédiaires conduiront à une mise au point sur la notion d'analogie. Ce n'est qu'au terme de ces investigations qu'il sera possible de proposer une interprétation de l'action de déplacer une construction en termes de manœuvre métaphorique.

II.2. Métaphore et transfert de schème

Le but de cette section n'est pas de traiter de manière exhaustive la problématique de la métaphore, qui est par ailleurs largement abordée par la

philosophie contemporaine[172]. Il s'agit uniquement de montrer que l'approche goodmanienne de la métaphore permet de jeter quelque lumière sur le rôle cognitif et esthétique du déplacement de construction en mathématiques.

Qu'est-ce que la métaphore dans la théorie goodmanienne ? C'est, pour l'essentiel, l'usage non indiqué par l'habitude, quoique déterminé par cette dernière, d'une étiquette :

> « Dans la métaphore (…) un terme dont l'extension est établie par l'habitude est appliqué ailleurs sous l'influence de cette habitude ; il y a à la fois manquement et déférence envers ce qui précède. Lorsqu'un emploi défini d'un terme en précède et en commande un autre, c'est le second qui est métaphorique. » [Goodman 1968, 102-103]

Le point central, comme le note Morizot, est que la métaphore combine un aspect de nouveauté et un aspect de filiation[173] : il y a manquement et déférence. L'usage métaphorique d'une étiquette est inattendu ou inhabituel dans le sens où il est fait envers un objet n'appartenant pas à l'extension de l'étiquette mais il est en même temps guidé par l'examen des propriétés communes aux objets de cette extension. C'est ce denier point que traduit l'exigence de déférence, ou de filiation. L'application de l'étiquette « renard » à Jacques, un homme très rusé, est autorisée par le fait que bien qu'un homme quelconque ne fasse pas partie de l'extension de « renard », Jacques en étant particulièrement rusé, exemplifie l'étiquette « être rusé » qui elle-même est exemplifiée, en général, par un renard quelconque.

Un autre aspect important de la métaphore est qu'une étiquette ne fonctionne habituellement jamais de manière isolée mais elle appartient à une famille d'étiquettes, à un *schème*, qui détermine son usage littéral et son usage métaphorique. Le choix du schème auquel appartient l'étiquette peut faire varier l'interprétation de la métaphore, aussi :

---

[172] On pourra lire à ce propos [Pouivet 1996, 94-111] et notamment la première section où l'auteur énumère les erreurs les plus classiques en la matière.

[173] Cf. [Morizot 1996, 107]

> « Comprendre la métaphore exige en outre de reconnaître qu'une étiquette ne fonctionne pas isolement mais dans une appartenance à une famille. Nous catégorisons au moyen d'ensembles d'alternatives. Même la constance de l'application littérale est d'ordinaire relative à un ensemble d'étiquettes : ce qu'on tient pour rouge, par exemple, variera quelque peu selon qu'on aura classé des objets en rouges ou non-rouges, ou bien en rouges, oranges, verts, bleus ou violets. C'est bien sûr moins souvent par une déclaration expresse que par la coutume et le contexte que sont déterminées les alternatives admises. » [Goodman 1968, 103]

La métaphore entraîne donc non pas l'unique déplacement d'une étiquette vers un objet n'appartenant pas à son extension littérale, mais elle implique un transfert de schème (entendu comme une famille d'étiquettes alternatives ou complémentaires) dans sa totalité. Ce qu'illustre Pouivet à partir de l'application métaphorique de l'étiquette "rose" à une femme :

> « Le *schème* auquel le terme « rose » littéralement utilisé appartient est transféré dans l'usage métaphorique. (…) Ainsi l'application du prédicat « rose » est relatif à la différence entre les roses et les autres fleurs, tulipes, œillets, azalées, mais aussi aux caractéristiques particulières des roses. Les prédicats concernés sont alors « épines », « boutons », etc., c'est-à-dire les prédicats descriptifs des roses. On peut leur ajouter tous les prédicats attachés aux roses dans l'usage littéral, mais également les prédicats métaphoriques qu'on leur attache couramment. Le *règne* est le domaine que le schème explore et organise. (…) Il se compose des objets dénotés par l'une ou par l'autre des étiquettes du schème. Ainsi, le domaine d'extension de l'étiquette « rose » comprend toutes les roses tandis que le schème comprend toutes les fleurs et le système des différences grâce auxquelles on a spécifié l'usage du terme « rose », c'est-à-dire son extension particulière, son domaine d'application. Quand je dis [Lise est une rose], c'est alors le schème que je transfère, donc un système de différences entre les catégories et pas une simple étiquette. Dans cette mesure, il n'y a pas que le domaine qui change, mais le règne lui-même. Plus exactement le règne se trouve réorganisé par la projection d'un schème nouveau. » [Pouivet 1996, 100]

La métaphore induit une réorganisation de *règne* ; elle induit des rapports nouveaux entre les objets du règne[174]. Son mode opératoire est la redistribution

[174] Une mise au point sur le vocabulaire employé s'impose. Pour ce faire je reprend la synthèse proposée par Pouivet : le règne est le domaine organisé par le schème, le domaine est l'extension d'une étiquette ou d'un ensemble d'étiquettes (un domaine est donc toujours connu relativement à un schème), cf. [Pouivet 1996, 101].

de la configuration initiale par migration des concepts[175]. La perspective nominaliste de Goodman est ainsi conservée : il ne s'agit pas d'attribuer de nouvelles propriétés aux objets mais bien de les considérer sous l'angle inédit de leurs nouveaux rapports :

> « Cette analyse révèle une fois de plus et avec force la justesse d'une orientation nominaliste, mais pas nécessairement verbaliste, qui met l'accent sur les étiquettes. Quelque respect qu'on puisse éprouver pour les classes ou les attributs, ce ne sont certainement pas les classes qu'on déplace de règne en règne, ni les attributs qu'on extraits pour ainsi dire de certains objets et qu'on injecte dans d'autres. On dira plutôt qu'il y a transport d'un ensemble de termes, d'étiquettes alternatives ; et l'organisation qu'ils produisent dans le règne étranger est guidée par leur emploi habituel dans le règne d'origine. » [Goodman 1968, 105]

Bien que la question de la métaphore soit loin d'être résolue par l'ensemble de ces réflexions, nous sommes suffisamment armés pour en comprendre le fonctionnement référentiel et sémiologique basique afin envisager une confrontation avec le problème qui l'a introduite ici. Il s'agit en effet de voir dans quelle mesure l'application d'une démonstration mathématique, via sa construction, à un objet pour lequel elle n'était pas initialement prévue s'apparente à un procédé métaphorique. En fait, il s'agit surtout de mesurer ce que ce lien de parenté nous apprend sur cette manœuvre mathématique.

II.2.1. Schème, domaine et règne en mathématique

Il faut commencer avec l'interprétation des termes techniques intervenant dans l'initiative métaphorique. Tout d'abord, ce que l'on a appelé la construction ou le principe d'une démonstration correspond, dans une approche théorique de la référence, à un schème. Comme on l'a vu, un schème est la donnée d'une famille d'étiquettes qui servent à classer des objets en fonction de leurs propres caractéristiques et des relations qui les unissent. Or, qu'est-ce qu'une construction ? C'est justement un ensemble de propriétés caractéristiques de certains objets et de propriétés nécessaires à l'application d'un raisonnement (famille d'étiquettes). Le domaine relatif au schème est l'ensemble des objets

[175] Cf. [Morizot 1996, 108]

dénotés par le schème. Enfin, le règne correspondant est le domaine (l'extension du schème) organisé et structuré en fonction du choix du schème. Deux domaines identiques dans le sens où ils seraient constitués des mêmes objets, mais relatifs à deux schèmes différents, donnent lieu à deux règnes différents : c'est la façon de considérer les objets qui changent. Nous pouvons par exemple choisir un schème servant à décrire les triangles quelconques de la géométrie euclidienne et les triangles rectangles en caractérisant ces derniers par la propriété de Pythagore. Le domaine est l'ensemble de tous les triangles possibles, le règne correspondant est celui où les triangles sont organisés entre eux selon qu'ils sont rectangles ou non. L'exploration du règne en question dépend de données numériques et la connaissance (au sens goodmanien de compréhension) des triangles qui en découle est basée sur la connaissance d'une relation entre les trois longueurs de la figure. Maintenant, on peut aussi différencier les triangles rectangles des triangles quelconques grâce à la propriété du cercle circonscrit. Si l'on substitue cette dernière à la propriété de Pythagore dans le premier schème, on a le même domaine (l'ensemble des triangles), mais le règne est différent. Il correspond à l'ensemble des triangles structuré selon qu'ils sont inscrits dans un cercle ayant pour diamètre leur plus grand coté, ou non. La connaissance qui en découle est basée sur des considérations géométriques, et traduit plus un lien entre cercle et triangle plutôt qu'une relation numérique entre les trois longueurs.

Les mathématiques sont sémantiquement denses et en tant que telles il y a une infinité de manières différentes (mais non nécessairement exclusives les unes des autres) de faire concorder tel objet avec telle classe-de-concordance[176]. Une conséquence de cela est qu'à chaque domaine correspond un nombre non déterminé de règnes différents. Autrement dit, il y a pour chaque objet, ou famille d'objet, une infinité de façons de les considérer ; certaines peuvent être redondantes et d'autre, au contraire, riches d'enseignement. On peut penser par exemple aux conséquences sur le développement de la théorie des nombres complexes qu'a apporté une vision géométrique de ces derniers.

[176] Par exemple, le nombre « 2 » concorde avec les étiquettes : « être le successeur de 1 », « être solution de l'équation réelle X – 2 = 0 », « être le quotient de 12 par 6 » mais aussi avec « être pair » ou « être plus grand que 1 » etc.

Si les notions goodmaniennes de schèmes, domaines et règnes trouvent leurs pendants en mathématiques, peut-on pour autant interpréter l'idée de la projection de schème d'une démonstration comme un transfert de schème par analogie ? Et, le cas échéant, cette interprétation permet-elle d'apparenter cette manœuvre à une métaphore ? Pour répondre à ces questions, il va falloir distinguer différentes formes de généralisation. En effet, le chemin qui mène de l'étude d'une démonstration à l'utilisation de son schème pour produire d'autres démonstrations n'est ni direct ni unidirectionnel. Son analyse met à jour différentes étapes qui correspondent chacune à différentes formes de généralisation, ou plus exactement, comme on le verra, qui concernent différentes puissances généralisantes. Je propose donc dans un premier temps de reconstruire cet itinéraire afin d'une part, de clarifier les sortes de généralisation en jeu et d'autre part, d'isoler et de décrire l'étape susceptible d'être apparentée à un procédé métaphorique (notons qu'il s'agit bien d'une reconstruction et en aucune manière d'une genèse ; cette dernière, si tant est qu'elle soit réalisable, ne pourrait se faire sans une solide approche historique).

II.3. Puissances généralisantes

II.3.1. Généralisation élémentaire – libéralisation des hypothèses

La première étape correspond en fait à ce à quoi il a été fait référence jusqu'à présent, c'est-à-dire à la reconnaissance du schème de la démonstration par le biais de l'élimination des propriétés contingentes. Ceci peut être vu comme un premier niveau d'abstraction. L'élaboration du schème offre une généralisation entendue dans le sens le plus courant du terme, c'est-à-dire dans le sens où l'on parle de généralisation lorsque l'on parvient à une forme de libéralisation des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème. Cette libéralisation est alors faite grâce à la sélection des seules propriétés nécessaires à l'application de la démonstration du théorème, autrement dit, par reconnaissance du schème. Dans ce cas, la mise au point de la forme généralisée d'un théorème se fait via le

schème de sa démonstration[177]. En ce sens, un théorème sous une forme généralisée est un théorème dont la classe-de-concordance (les objets auquel il s'applique) contient la classe-de-concordance du théorème sous sa forme initiale. Par exemple, le rapport du théorème des accroissements finis, avec valeur moyenne, au théorème de Rolle est une généralisation de ce type. En effet, voici les énoncés standard de ces deux théorèmes :

Théorème des accroissements finis, avec valeur moyenne :

Soit a et b deux réels tels que a < b et f une fonction réelle continue sur I = [a, b].

Si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un point c compris strictement entre a et b tel que :

$f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$

Théorème de Rolle:

Soit a et b deux réels tel que a < b et f une fonction réelle continue sur I = [a, b].

Si f(a) = f(b) et si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un point c compris strictement entre a et b tel que :

$$f'(c) = 0$$

Les fonctions qui vérifient les hypothèses du théorème de Rolle vérifient nécessairement celles du théorème des accroissements finis. Il s'ensuit que la classe-de-concordance du théorème de Rolle est incluse dans la classe-de-concordance du théorème des accroissements finis : toutes les fonctions auxquelles s'applique le premier théorème peuvent se voir appliquer le second. Cette inclusion illustre la généralisation élémentaire caractérisée ci-dessus. Dans cet exemple, la généralisation provient bien d'une libéralisation des hypothèses, ou allégement des contraintes. Il n'est pas nécessaire de reprendre ici les

[177] Ce qui justifie que telle démonstration d'un théorème ne permet pas une généralisation alors que telle autre le permet : c'est qu'elles ne définissent pas le même schème. Par exemple la démonstration euclidienne du théorème de Pythagore fournit un résultat qui ne concerne que les triangles rectangles, alors que si on démontre ce théorème en faisant intervenir un produit scalaire, le résultat est généralisable aux triangles quelconque (le résultat sous sa forme généralisé est connu sous le nom de « théorème d'Al Kashi »).

démonstrations des théorèmes en question, cependant on peut montrer sans difficulté que c'est une interprétation exemplificationnelle de la démonstration du théorème de Rolle qui permet la libéralisation des contraintes. En effet, ce que dénote le théorème de Rolle c'est que les fonctions continues sur un intervalle, dérivables sur son intérieur et ayant même valeur aux bornes sont telles que leur dérivée s'annule au moins une fois à l'intérieur de l'intervalle. Ce que cela exemplifie, c'est que la courbe représentative de ce type de fonctions admet une tangente horizontale. C'est l'exploitation de cette exemplification qui permet la généralisation en montrant la contingence de l'exigence « avoir même valeur aux bornes » (on peut d'ailleurs à partir du théorème des accroissements finis poursuivre de la même façon la généralisation pour obtenir un résultat similaire pour les courbes planes définies paramétriquement, c'est-à-dire par une fonction vectorielle à valeur dans **R**x**R**)[178].

A ce stade, il n'y a pas lieu de parler de transfert de schème. La manœuvre de généralisation décrite s'apparente à la mise au point d'un algorithme de calcul qui permet d'appliquer une même forme de démonstration aux objets du domaine défini par le schème. Le schème est alors dans ce cas un moyen d'immerger un objet particulier (ou une classe d'objets particulière) au sein d'un domaine d'objets (ou de classe de classe d'objets). Ce que l'on gagne avec cette première abstraction c'est de connaître le domaine auquel appartient l'objet (ou la classe) de la démonstration initiale. Pour reprendre le même exemple, la généralisation du théorème de Rolle permet de considérer les fonctions auxquelles il s'applique non pas comme des fonctions dont la courbe représentative admet une tangente horizontale, mais comme des fonctions dont la courbe représentative admet une tangente dont le coefficient directeur est le taux d'accroissement de la fonction sur l'intervalle.

A ce titre, si quelque chose est transféré ce n'est pas le schème mais la perception d'un objet particulier vers la perception du même objet au sein d'un domaine. Ce type de généralisation, que l'on peut qualifier d'élémentaire, offre une exploration du domaine d'application du schème. Dans l'exemple de la

[178] Pour plus de détails on pourra consulter par exemple [Arnaudiès & Fraysse 1988, 182-183].

démonstration de l'irrationalité de √2, on peut considérer que la démonstration de Théodore, qui permet de démontrer en plus l'irrationalité de √3, √5, √7, √11, √13 et √17 est une généralisation de ce type[179]. Elle nous apprend que √2 n'est pas le seul objet du domaine défini par le schème de la démonstration pythagoricienne.

Ce processus de généralisation peut être apparenté à une sorte d'élévation dans une hiérarchie dénotationnelle. En effet si l'on considère le couple formé par une démonstration avec son objet d'application[180] et le couple formé par le schème de la démonstration et son domaine, alors le second dénote le premier, ou plus exactement, le premier couple est un échantillon du second. Il y a donc élévation dans la hiérarchie dénotationnelle puisque d'un couple « échantillon », on passe à un couple « étiquette ». La généralisation élémentaire que j'ai qualifiée antérieurement d'abstraction de premier niveau, passe donc par une reconnaissance des aspects exemplifiés au sein de la démonstration. L'abstraction exige alors deux mouvements : le premier consiste en la reconnaissance des propriétés qui sont, non seulement possédées par les divers composants de la démonstration mais auxquelles il est fait précisément référence (c'est-à-dire celles qui servent la validité des enchaînements de la démonstration). Le second mouvement consiste à répertorier ces étiquettes, les isoler, afin de constituer le schème[181]. L'abstraction ainsi entendue est une affaire d'élucidation de la nature des références avant toute autre chose.

Pour Granger, ce type de généralisation est le style originaire de tout calcul. Dans son ouvrage *Essai d'une philosophie du style*[182], il se penche en particulier

---

[179] Pour plus de détails, on pourra lire le chapitre V de l'ouvrage de Hardy et Wright : *An Introduction of Theory of Numbers* (cf. [Hardy &Wright 1938]).

[180] Dans un souci de clarté, je parle simplement d'objet d'application mais cette expression recouvre en fait les objets singuliers ainsi que les classes (d'objet) d'application ou classes-de-concordance. Par exemple, la démonstration de l'irrationalité √2 s'applique à l'objet singulier √2, la démonstration du théorème de Pythagore s'applique à tous les triangles rectangles.

[181] Cette description systématique dissimule en fait un problème d'ordre ontologique**.** En effet, dire que la première abstraction consiste à répertorier les aspects exemplifiés dans le but d'obtenir le schème général pose de manière indirecte la question de l'existence préalable des étiquettes qui vont finalement constituer le schème. Rien n'indique cependant la nécessité de l'antériorité d'une telle existence. L'élaboration d'un schème peut être au contraire l'occasion de la création de nouvelles étiquettes.

[182] [Granger 1968]

sur l'œuvre de Descartes et parvient à caractériser ce qui confère à l'algèbre cartésienne sa puissance généralisante :

> « [Dans le cas de l'algèbre cartésienne], la puissance généralisante de l'outil dépend de l'aptitude des formules à se présenter comme *formes* à remplir par un contenu varié. (…) L'algorithme cartésien fournit un modèle de calcul, qui permet de réaliser des démonstrations. » [Granger 1968, 66]

Le mouvement cartésien pris dans son mode de traitement des formes consiste en fait, écrit-il, « à passer de la démonstration particulière à son modèle, par évacuation des contenus contingents, et du modèle à la démonstration, par remplissement des places vides »[183]. On retrouve ici la distinction entre le schème, vu comme un modèle, et les démonstrations particulières auxquelles il donne lieu. La détermination du schème permet de reconstituer le domaine d'appartenance de l'objet de la démonstration initiale. Le schème prend bien là le rôle d'outil à visée généralisante et unificatrice (il permet une unification d'objets différents sous l'angle de l'appartenance à un même domaine). Cependant, à ce stade, la description de l'abstraction s'avère insuffisante. En effet, elle ne rend pas compte de la possibilité de transférer un schème sur un domaine différent et elle ne permet pas non plus de comprendre le rôle de l'analogie dans cette manœuvre. Il faut pour cela diriger les investigations vers le schème lui-même.

II.3.2. Généralisation seconde - transfert de schème

La généralisation élémentaire donne un moyen de reconnaître différents objets comme appartenant à un même domaine. Elle porte en ce sens sur les objets du domaine. La généralisation seconde porte non pas sur les objets eux-mêmes et leurs relations mais sur le schème et ses relations avec d'autres schèmes. Il s'agit ici de se dégager de l'individualité des objets d'un domaine particulier pour tâcher de repérer les lois qui régissent le schème afin de mettre le domaine en relation avec d'autres domaines, définis à partir de lois similaires. La clé de cette analyse réside en l'interprétation de l'analogie en termes d'étiquette commune entre différents schèmes. Cette approche est guidée par les résultats

[183] Cf. [Granger 1968, 67]

obtenus avec Poincaré : la seule démarche intellectuelle féconde pour le développement des mathématiques est celle qui consiste à retrouver les analogies véritables, celles qui portent sur le schème.

De la même façon que les travaux de Granger sur le style cartésien illustraient la généralisation élémentaire, son étude sur le style arguésien permet d'introduire ce que j'appelle la généralisation seconde. En effet, Granger distingue la méthode cartésienne de celle de Desargues en cela que si la première consiste à élaborer un algorithme de calcul (généralisation élémentaire), celle de Desargues consiste plutôt à montrer la possibilité même des démonstrations[184]; il justifie par là l'emploi de l'épithète de métamathématique à son propos. Granger emprunte à Cavaillès sa conception de construction thématique pour expliciter la démarche arguésienne :

> « (…) la distinction proposée naguère par Cavaillès entre construction paradigmatique et construction thématique peut servir ici à caractériser le style de Desargues, en l'opposant au style cartésien. (…) « La formalisation n'est réalisée que lorsqu'au dessin des structures se superposent, systématisées, les règles qui les régissent. La thématisation prend son départ dans l'enchaînement saisi cette fois dans son vol, trajectoire qui ce mue en sens. » (Cavaillès, Sur la logique et la théorie de la science, p 30) C'est là le style second qui engendre les calculs de calculs, ou, tout au moins, des raisonnements sur les calculs. Sans doute, Desargues est-il très loin d'aller jusqu'à une formalisation véritable ; sans doute fait-il alterner assez confusément des procédés du premier genre – et sous une forme bien plus frustre que celle du calcul cartésien - , et des procédés du second genre. Il n'en introduit pas moins une mathématique de la *thématisation* qui ne devait prendre conscience d'elle-même qu'environ deux siècles plus tard. » [Granger 1968, 66-67]

De façon synthétique, l'abstraction première conduit d'une démonstration particulière à son schème. Ce dernier détermine les propriétés nécessaires à l'application de la démonstration. L'abstraction seconde conduit du schème vers les lois qui le régissent ; elle doit mettre à jour les propriétés nécessaires pour avoir les propriétés du schème. En ce sens, on pourrait parler de schème du schème, ou encore de métaschème. Ce type d'abstraction permet une

[184] Cf. [Granger 1968, 66]

généralisation non pas d'une démonstration particulière via son schème mais d'un schème via son métaschème.

Le schème peut alors être considéré comme une réalisation particulière du métaschème de la même façon que la démonstration peut être considérée comme réalisation particulière du schème. L'intérêt de cette reconstruction de l'abstraction réside dans le fait qu'elle offre de traduire en termes référentiels la notion d'analogie. En effet, comme on l'a vu avec Poincaré, la clé de la compréhension mathématique ainsi que la clé de l'invention en mathématique passe par une organisation des constructions, c'est-à-dire lorsque l'on parvient à ranger les constructions analogues les unes avec les autres. Le résultat obtenu dans la première partie était qu'une telle organisation se faisait sur la base des analogies qui portent sur le schème et non sur des réalisations diverses du schème[185]. Nous pouvons à présent compléter cette interprétation en apportant la précision suivante : l'analogie peut être comprise comme un métaschème commun entre deux schèmes quelconques. Ainsi par exemple, l'analogie entre l'ensemble des réels muni de l'addition et l'ensemble des déplacements du plan euclidien muni de la composition des applications est que ces deux ensembles sont les deux domaines d'application de deux schèmes différents mais ayant le même métaschème, celui qui définit un groupe[186]. L'exemple est simple mais il semble toutefois suffisant pour comprendre comment on peut interpréter l'analogie comme métaschème commun. En termes référentiels, l'analogie est donc affaire de dénotation, plus précisément de degré de dénotation : deux démonstrations sont analogues si elles sont dénotées par deux schèmes tels que ces derniers soient dénotés par le même métaschème. Ainsi interprétée, l'analogie est une étiquette commune entre deux schèmes. Il est à peu près évident que cette interprétation de l'analogie a à voir avec l'idée générale de structure, qui traduit, d'après Dieudonné, la prépondérance des relations entre objets plutôt que la nature des objets :

[185] Cf. Partie I. B. I.3.3

[186] Je n'ai jusqu'à présent évoqué que les schèmes en ce qui concerne les constructions de démonstration, mais on peut de la même façon évoquer les schèmes d'ensembles particuliers. Dans ce cas, le métaschème s'apparente à l'axiomatique de l'ensemble, c'est-à-dire à la liste des propriétés minimales pour fabriquer cet ensemble.

> « Elle (l'idée de structure) est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les *relations* entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la *nature* de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s'expriment de la même manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » aux deux théories. » [Dieudonné 1987, 114]

Cependant, ce n'est qu'en faisant la synthèse des investigations sur l'abstraction et la généralisation mathématiques que j'aborderai plus en détail le structuralisme mathématique.

Cette première conclusion sur l'analogie comme étiquette commune est l'occasion d'ouvrir une parenthèse afin de souligner la cohérence des propos de Poincaré lorsqu'il caractérise les mathématiques comme étant « l'art de nommer de la même façon des objets différents »[187]. Pour Poincaré, trouver les analogies est ce qui permet le développement des mathématiques et qui est en même temps source d'esthétique. Or, si l'interprétation ci-dessus est correcte, trouver les analogies revient à mettre à jour une étiquette commune, autrement dit, à nommer de la même façon des objets différents. On comprend alors sa caractérisation particulière des mathématiques, à la fois en tant que description méthodologique et en tant qu'art. Cette citation mise en parallèle avec une caractérisation classique de la poésie comme étant « l'art de nommer de façon différente les mêmes objets » donne de plus l'occasion de réfléchir à l'exploitation de la densité sémantique en mathématiques. En effet, la poésie exploite la densité sémantique de la langue en considérant un même objet sous les multiples angles définis par la diversité de ses concordants, alors qu'en mathématiques, il s'agit de voir de la même façon des objets différents en cherchant leur(s) étiquette(s) commune(s). La poésie s'intéresse ainsi à la multiplicité des concordants d'un objet tandis que les mathématiques s'intéressent à l'intersection des concordants de plusieurs objets. Dans les deux cas, c'est bien la densité qui est exploitée[188].

---

[187] « (...) la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes» [Poincaré 1908, 32]

[188] En algèbre par exemple, le nom de « groupe » recouvre aussi bien l'ensemble **R** des nombres réels muni de l'addition, ainsi que l'ensemble des similitudes de l'espace (muni du produit des similitudes comme loi de composition) ou encore un ensemble réduit à un seul élément {e} (muni de la loi de composition telle que : e x e = e). Ces ensembles, aussi différents qu'ils soient par rapport aux objets qu'ils concernent possèdent

L'interprétation de l'analogie comme étiquette commune donne la possibilité de proposer une traduction de l'idée de projection de schème d'une démonstration en termes de transfert par analogie. Mon hypothèse est la suivante :

> Le schème S d'une démonstration définit un domaine D particulier (celui des objets où l'on peut appliquer la démonstration). La possibilité de projeter S sur un domaine D' dépend de la possibilité de montrer que le schème qui définit D', mettons S', a avec S un métaschème commun. La projection de S sur D' revient ainsi à transférer S sur un autre domaine que son domaine initial via un métaschème commun, autrement dit, une analogie.

Si cette interprétation est correcte, la comparaison avec la métaphore semble faire sens. C'est bien la reconnaissance d'une analogie entre deux schèmes qui est à l'œuvre dans l'idée de projection. Cependant, la comparaison n'est pas absolue ; un aspect crucial de la métaphore goodmanienne résiste en effet à cette confrontation avec la projection mathématique. Il s'agit précisément de la différence entre l'usage littéral et l'usage métaphorique, c'est-à-dire de la question de la paternité et de la filiation. Pour Goodman, une métaphore n'est envisageable

---

néanmoins une étiquette commune, et c'est ce qui permet de les nommer de la même façon, de les rassembler autour d'une même caractérisation.

Dans le domaine de la poésie, un même objet, un même symbole peut être utilisé de façon totalement différente, il peut servir à exemplifier de multiples étiquettes. A titre d'exemple, on peut considérer les extraits de poèmes suivants où un même objet (en l'occurrence un bateau ou un navire) en étant nommé de façon différente a un fonctionnement symbolique différent :

« Les chars d'argent et de cuivre
Les proues d'acier et d'argent
Battent l'écume,
Soulèvent les souches des ronces. » (extrait de Marine, Arthur Rimbaud)

« Tout au plus un navire
Tout au plus un navire à demi englouti

Comme un poignard dans sa blessure
Connaît encore l'ombre

Tout au plus un radeau
La mort simple
Et la mer est plus vide qu'un ivrogne pauvre. » (extrait de Marines, Paul Eluard)

« Les cœurs de méduse ravagés vont s'échouer dans les ports
sous forme de pétroliers ou de charbonniers » (extrait de Marine, Raymond Queneau)

que lorsque l'on peut cerner l'usage littéral d'une étiquette. Dans la traduction mathématique, comment distinguer un usage littéral d'un usage métaphorique ? Le seul moyen semble être dans ce cas de recourir à l'histoire de cette science et si cela est correct, ce recours dépasse le cadre du présent travail. On peut toutefois noter que pour Goodman le succès d'une métaphore passe par son extinction, sa 'mort' :

> « Puisque la métaphore dépend de facteurs aussi fugaces que la nouveauté et l'intérêt, on comprend qu'elle soit mortelle. Par répétition, une application transférée d'un schème devient routine et cesse de dépendre de son application de base ou d'y faire allusion. Ce qui était originalité devient lieu commun, son passé est oublié, et la métaphore se défraîchit en simple vérité. » [Goodman 1968, 102-103]

L'appréciation de la métaphore en tant que figure esthétique serait donc l'apanage du mathématicien créateur et non du praticien. Ce résultat n'est pas surprenant outre mesure : il corrobore d'une part le parallèle avec la métaphore littéraire ou linguistique dans la mesure où la compréhension et l'appréciation d'une métaphore suppose que l'on connaisse parfaitement la langue dans laquelle elle est faite ; en témoigne la difficulté que nous avons à saisir une métaphore dans une autre langue que notre langue maternelle. D'autre part, ce résultat ne contredit pas non plus, au contraire, un point de vue largement répandu qui veut que l'esthétique des mathématiques ne soit accessible qu'au "véritable" mathématicien (celui qui invente plutôt que celui qui applique), c'est-à-dire celui qui a une certaine compétence au-delà d'une certaine connaissance. Aussi, un étudiant qui calcule le produit de deux nombres complexes en ajoutant leur argument et en multipliant leur module n'a sûrement pas l'impression de suivre une initiative métaphorique. Pourtant, si mon hypothèse du transfert de schème est correcte, l'interprétation géométrique des nombres complexes est de l'ordre de la métaphore.

Par contre, ne peut-on voir dans le récit que fait Poincaré de sa découverte des fonctions fuschiennes différentes de celles qui dérivent de la série hypergéométriques, un exemple de ce que peut être le procédé métaphorique en mathématiques ? En effet, Poincaré raconte cette découverte en soulignant qu'elle

est la conséquence de l'application d'un raisonnement ailleurs qu'initialement prévu :

> « (…) l'idée me vint, sans que rien de mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuschiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. (…) Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétiques sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. (…) l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.
>
> Etant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuschiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuschiennes et que, par conséquent, il existait des fonctions fuschiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. » [Poincaré 1908, 49]

Finalement, il semble à la lumière de cet exemple que ce qui importe, au-delà de la distinction entre usage littéral, ou usage d'origine, et usage métaphorique, est de comprendre l'apport cognitif et esthétique du procédé métaphorique. C'est-à-dire qu'il me semble que sous une perspective d'analyse du fonctionnement esthétique des mathématiques cette distinction n'est pas fondamentale en elle-même, quand bien même elle peut intéresser les historiens. Je propose alors de réfléchir au rôle cognitif et esthétique de la métaphore.

II.4. Manœuvre métaphorique

II.4.1. Métaphore et cognition

Ce qui est important dans la métaphore est l'idée qu'elle permet de transporter les connaissances que l'on a d'un domaine vers un autre domaine :

> « Ce qui importe donc dans la métaphore, c'est qu'elle apporte une connaissance : le schème auquel appartient l'étiquette transportée produisant par sa

> nouvelle application en territoire étranger une restructuration éclairante. » [Pouivet 1996, 104]

En fait, comme l'écrit Pouivet, la manœuvre métaphorique apporte une *restructuration éclairante*, c'est donc davantage de compréhension que de connaissance qu'il s'agit avec la métaphore. Comme on l'a vu, la compréhension est un terme qui se rapporte à la capacité de liaison et de clarification, d'ordre et d'organisation[189]. Et c'est bien cette aptitude qui est en jeu dans la métaphore, puisqu'elle a pour conséquence de relier des domaines différents et d'induire de nouvelles organisations. De plus, la métaphore participe à l'accroissement de la compréhension en proposant une interprétation alternative d'un domaine (celle fournie par l'organisation induite par le transfert). En résumé, en projetant un schème, on projette aussi, pour ainsi dire, la compréhension du domaine d'origine sur le nouveau domaine d'application du schème. Cependant, il ne s'agit pas de multiplier de façon fortuite les façons de considérer un domaine ; la pertinence de l'emploi de la métaphore, ou du transfert de schème, se mesure à l'économie de pensée réalisée :

> « [l'] emploi incessant de la métaphore ne naît pas simplement d'un amour de la couleur littéraire mais aussi d'un besoin pressant d'économie. Si nous ne pouvions aisément transférer des schèmes pour réaliser des nouveaux tris et ordinations, nous aurions à nous charger d'une quantité non maniable de schèmes différents, soit en adoptant un immense lexique de termes élémentaires, soit en élaborant un nombres colossal de termes composés. » [Goodman 1968, 111]

Goodman justifie donc l'emploi de la métaphore ; ce n'est pas qu'une figure de style, il faut qu'elle soit pertinente. Si cette justification porte, chez Goodman, plus particulièrement sur les domaines littéraires, il en va de même en mathématiques. Dans mon interprétation, le transfert de schème par analogie passe par des étapes de généralisation successives de plus en plus abstraites. La description proposée répond à la méthodologie axiomatique bourbachique qui préconise une abstraction croissante par élimination des contingents et détermination des propriétés communes, ce qui, j'en ai déjà fait mention, s'apparente à la méthode structuraliste. Or, il ne s'agit pas non plus de « l'abstraction pour l'abstraction » ni

[189] Cf. partie II section III 1

de « généraliser pour généraliser » ; ce procédé n'est pas gratuit et il doit s'inscrire dans une problématique. Comme l'écrit Dieudonné, la recherche de structures abstraites doit répondre à

> « (…) un besoin pour attaquer avec succès des problèmes hérités des mathématiques classiques, et non à une fantaisie de mathématicien créant de nouvelles notions abstraites sans aucun but précis. » [Dieudonné 1987, 114-115]

De même, la généralisation doit posséder un caractère utile, comme en témoigne par exemple Mandelbrojt :

> « Le fait d'être général est une grande vertu pour un fait mathématique, et l'on éprouve une sorte de léger mépris pour le fait particulier.
>
> Je n'arrive pourtant pas à diviniser la généralité en soi. L'affirmation, qu'on pourrait traiter de particulière, que le nombre e est transcendant, et surtout sa démonstration, me laisse rêveur, et il y a, d'autre part, tant de faits mathématiques généraux qui m'ennuyent. La généralité est belle lorsqu'elle possède un caractère *explicatif*. Lorsqu'on découvre un théorème avec des hypothèses restrictives qu'on sent peu liées au sujet ou qui paraissent dues uniquement à la méthode employée pour sa démonstration, on cherche, évidemment, à se débarrasser de ces conditions gênantes. On cherche donc à généraliser le résultat pour donner au phénomène son aspect naturel. C'est une généralisation, en quelque sorte, technique. Mais, même, une fois débarrassé de ces, si j'ose dire, impuretés artificielles, le résultat ainsi démontré ne nous donne pas toute satisfaction. On sent la nécessité de se placer sur un plan plus élevé, on sait qu'on ne comprendra pas son vrai caractère que s'il concerne un plus grand nombre d'objets. Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème. Il serait, je crois, juste de dire, que c'est après avoir trouvé un théorème, qu'on doit chercher, que d'ordinaire on cherche, le vrai objet, ou le vrai ensemble d'objets, auquel il s'applique. C'est ainsi qu'on obtient la généralisation explicative. Personnellement, je sens qu'il *y a un optimum* à cette généralité. » [Mandelbrojt 1952, 427-428]

L'initiative métaphorique, lorsqu'elle qu'elle est entreprise de façon pertinente, c'est-à-dire dans le but d'apporter une économie de pensée et une meilleure compréhension, a donc une vocation cognitive. Qu'en est-il de son aspect esthétique ? Dans les domaines artistiques, il est acquis que la métaphore participe au mérite esthétique. Peut-on pour autant conclure que l'usage d'une

manœuvre comparable en mathématique, la projection de schème, a aussi vocation esthétique ? Le point de vue que je souhaite défendre est qu'effectivement, la projection de schème contribue au mérite esthétique des mathématiques en cela qu'elle dépend d'une exploitation des symptômes esthétiques de la symbolique mathématique. Pour montrer cette hypothèse il va falloir faire une analyse des propriétés sémantiques ainsi que des modes de référence en jeu dans le processus de projection.

II.4.2. Métaphore et esthétique

De façon générale, le mérite esthétique d'une métaphore réside, non pas dans sa réalisation, mais dans sa compréhension. C'est-à-dire que ce n'est pas l'action de faire une métaphore qui présente un aspect esthétique mais c'est plutôt son interprétation qui relève d'un jugement esthétique. Jusqu'à présent, la métaphore mathématique (i.e. projection de schème par analogie) a été abordée sous l'angle théorique de sa réalisation. Il faut maintenant considérer les conditions de sa compréhension, autrement dit, il faut aborder le processus de son fonctionnement symbolique.

L'analyse que je propose défend le point de vue selon lequel la métaphore a à voir avec l'esthétique dans la mesure où le mode de référence qui y est en jeu est multiple et complexe. Le contexte correct d'interprétation est par suite un contexte exemplificationnel et non strictement dénotationnel. De plus, la possibilité même du procédé métaphorique dépend pour une grande part de la richesse du tissu symbolique, ce qui se traduit, en mathématiques, ou dans un système linguistique quelconque, par la densité sémantique.

Comprendre une métaphore, que ce soit en mathématiques ou ailleurs, signifie savoir la faire fonctionner afin qu'elle remplisse son rôle cognitif, c'est-à-dire, qu'elle permette d'apporter des informations nouvelles sur un domaine tout en réalisant une économie de pensée. Pour que l'économie de pensée soit effective, il faut être en mesure d'interpréter la référence entre les deux termes de la métaphore comme une référence médiatisée par les traits exemplifiés par

chacun des termes. Il faut donc faire fonctionner les termes en jeu dans un contexte exemplificationnel. Morizot considère la métaphore comme variante du schéma référentiel de l'allusion (manoeuvre que l'on a déjà vue comme exemple type de la référence multiple et complexe)[190] **:**

> « Une variante de ce schéma n'est autre que la métaphore dans laquelle sont associés deux termes qui exemplifient la même étiquette. Je sais qu'Achille appartient à l'espèce humaine mais, s'agissant d'un guerrier, il exemplifie une étiquette comme « être vaillant et généreux » qui convient aussi au roi des animaux, d'où la contraction : « Achille est un lion ». Ce modèle se généralise aisément à des chaînes plus longues ; qualifier par exemple un homme de « souris », c'est jouer sur la double extension de l'étiquette « souris » appliquée à un animal craintif et à un homme dont le comportement est spécialement discret. Puisque « timide » s'applique métaphoriquement à une souris, le résultat global de la chaîne est que l'étiquette « souris » s'applique métaphoriquement à un homme. » [Morizot 1996, 221-222]

Dans l'étiquette « Achille est un lion », le but de la métaphore est atteint si je reconnais chacun de ses termes comme échantillon de l'étiquette « être vaillant et généreux ». La recherche adéquate pour cette reconnaissance consiste donc à se poser la question de ce que chaque étiquette exemplifie et non de ce qu'elle dénote. C'est en ce sens que je dis que l'interprétation correcte d'une métaphore s'inscrit dans un contexte exemplificationnel.

En mathématiques, l'interprétation de l'application métaphorique d'une étiquette exige de la même façon que soient reconnus les aspects exemplifiés. Ce qui distingue le procédé métaphorique en mathématiques d'un procédé résolument logique c'est que le premier exploite la référence multiple et complexe, en construisant des chaînes référentielles qui inversent au moins une fois le sens de la dénotation, alors que le second privilégie la référence directe et unidirectionnelle. Cette différence se traduit au niveau du codage mathématique : une rédaction qui comporte une initiative métaphorique est plus courte, au sens littéral, qu'une rédaction qui adopte une rigueur strictement logique. En effet, la première va choisir une écriture particulière (au sens de coloration frégéenne) de façon à mettre en relation deux termes par le biais de ce que le choix d'écriture

[190] Cf. Partie II section II 2.6

permet d'exemplifier, alors que la seconde va détailler chaque implication qui permet de passer d'un terme à un autre. On sait que Poincaré redoute la longueur des rédactions strictement logiques justement à cause du fait qu'elles ne présentent pas l'apparence d'harmonie et l'aspect esthétique si utiles d'après lui à la véritable compréhension. On peut donc en déduire que ces raccourcis (par le biais d'une exemplification et/ou par le biais d'un pont métaphorique) contribuent au mérite esthétique.

Le bénéfice de la métaphore n'est valable que si l'on adopte un raisonnement esthétique en plus d'un raisonnement logique. Peut-être pouvons nous expliquer à l'aide de cette dernière remarque le fait que les initiatives métaphoriques ne soient généralement pas bien accueillies par les mathématiciens qui défendent le dogme de la science pure. La représentation géométrique des complexes par exemple, rencontra des réticences de cet ordre. En effet, Dahan et Peiffer expliquent dans leur Histoire des mathématiques, que les algébristes de l'école de Cambridge avaient pour exigence première la pureté de la science algébrique, et Servois, rattaché à cette école, exprime l'objection faite à la méthode d'Argand[191] :

> « Pour moi, j'avoue que je ne vois dans cette notation qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. » [Dahan – Peiffer 1986, 257]

Quand bien même cette objection porte sur la relative simplicité de la méthode analytique, elle n'en traduit pas moins la difficulté à admettre le procédé non purement logique qui consiste à transférer une compréhension géométrique dans un domaine algébrique.

II.5. Conclusion

A l'initiative de l'ensemble des investigations sur le procédé métaphorique et son interprétation en mathématiques était la recherche d'une interprétation

[191] Lettre de 1813 publiée par les Annales de Gergonne, cf. [Dahan - Peiffer 1986, 257].

systématique de la notion de principe de démonstration et d'extension. L'outil goodmanien a permis de montrer que le principe de démonstration peut être apparenté à un schème et que l'extension d'une démonstration correspond à l'exploration du domaine défini par le schème. Cette première étape a permis de substituer un vocabulaire précis à des notions vagues et mal définies. Elle a surtout permis d'identifier un schème comme ensemble d'étiquettes ayant une double fonction référentielle : celle de dénoter un domaine et celle d'exemplifier un métaschème. C'est l'analyse de cette dernière fonction référentielle qui permet d'une part de fournir une interprétation de l'analogie et d'autre part de fournir une description sémiologique de la projection de schème. La comparaison avec le procédé métaphorique offre alors de comprendre le rôle cognitif et esthétique de cette manœuvre.

Au-delà de ce résultat, l'enquête menée trace les grandes lignes d'une reconstruction de l'abstraction en mathématiques et montre en quoi l'exploitation du fonctionnement esthétique y participe. Les travaux de Granger quant au style cartésien et au style arguésien ont servi d'illustration pour le premier et second temps de l'abstraction. Il faut noter à présent une autre concordance entre les analyses faites par Granger et l'interprétation que j'ai proposée. En effet, on a vu que l'initiative métaphorique pouvait être localisée au niveau de l'abstraction seconde, celle qui consiste à élaborer un métaschème. C'est là, d'après Granger, le mouvement du style arguésien, qui cherche à analyser les lois de conditions de réalisation d'une démonstration plutôt que fournir un modèle de calcul. Or, Granger suggère que ce style rencontre des figures de type métaphorique. Pour ce faire, il utilise la théorie de Jakobson :

> « Les diverses formes conjuguées d'un verbe, les différents vocables pouvant servir d'épithète à un même nom, sont, par exemple, des classes paradigmatiques ; la succession d'un substantif et d'un verbe constitue un syntagme.
>
> On sait que les deux figures fondamentales de langage qui se rattachent à ces deux modes de liaison ont été décrites surtout par Jakobson sous les noms respectifs de métonymie et de métaphore. La première consistant à prendre l'une pour l'autre des expressions liées syntagmatiquement, par leur voisinage pour ainsi dire horizontal ; la seconde à prendre l'une pour l'autre des expressions liées paradigmatiquement, par leur possibilité de substitution verticale. Toutes réserves

> faites sur l'universalité d'une telle distinction linguistiques (...) il semble qu'elle puisse suggérer une transposition très valable dans le domaine général de l'apparition, de la manifestation et de l'application des formes. Un style « thématique » comme celui de Desargues, qui tend à dégager non des modèles algorithmiques de pensées démonstratives, mais plutôt des schèmes de traitement des raisonnements eux-mêmes, rencontrerait donc des figures d'expression du type « métaphorique ». Dans un tel régime de structuration, une forme tend à devenir le représentant d'une famille de formes engendrée non par variation interne des éléments, mais par remodelage de la forme elle-même, dont la *loi de transposition devient alors le véritable thème de la pensée*. Ce serait là l'équivalent de la métaphore. » [Granger 1968, 67-68]

Bien que ne se servant pas de la théorie goodmanienne, les suggestions de Granger viennent renforcer l'interprétation faite de la notion de projection de schème en tant que métaphore. En effet, ce qui est en jeu dans la métaphore, d'un point de vue goodmanien, c'est la restructuration qu'elle offre. Et c'est bien ce que met en avant Granger : il situe la métaphore au niveau du remodelage de la forme elle-même ; c'est dans ce cas la loi de transposition qui devient centrale, autrement dit c'est la structure commune qui importe, au-delà de ses diverses réalisations. Granger considère d'ailleurs à ce titre que Desargues a su, de par son attitude à l'égard de l'objet géométrique, utiliser, avant la lettre, les structures[192].

Comme il a été montré, il y a un lien étroit entre le mouvement de la pensée structurale, celle qui tend à mettre à jour les structures, et le mouvement que j'ai décrit comme le second temps de l'abstraction, qui permet de passer du schème au métaschème[193]. Il convient à présent de vérifier les investigations théoriques en les confrontant à la pratique. Je propose, pour ce faire, de revenir à la démonstration qui nous a intéressée initialement, celle de l'irrationalité de racine de deux.

---

[192] Cf. [Granger 1968, 69]

[193] Bien que je ne puisse poursuivre, faute de temps, l'investigation théorique sur l'abstraction, il semble en fait possible de continuer l'analogie et d'interpréter de façon similaire, en rajoutant encore un degré d'abstraction, le concept de catégorie.

III. Application : de l'irrationalité de √2 aux anneaux factoriels

III.1. Abstraction première

Le but de cette section est d'appliquer la description théorique des différentes phases d'abstraction à un cas particulier et de montrer le rôle de l'exploitation du fonctionnement esthétique de la symbolique mathématique. Cette application concrète à un exemple sera en outre l'occasion de dégager une nouvelle interprétation de la saturation.

Revenons pour commencer à l'argumentation de Hardy concernant sa description du mérite esthétique de certains théorèmes mathématiques et en particulier celui de l'irrationalité de √2. Pour l'auteur, deux qualités au moins sont essentielles pour qu'un résultat réponde d'un mérite esthétique. La première de ces qualités est une certaine généralité :

> « Une idée mathématique importante, un théorème sérieux, sont « généraux » dans le sens suivant. L'idée doit être un élément constitutif de nombreuses constructions mathématiques, utilisé dans la démonstration de théorèmes très divers. Le théorème, même s'il est énoncé à l'origine, comme celui de Pythagore, sous une forme très particulière doit être susceptible d'une extension considérable et caractéristique de tout un ensemble de théorèmes de la même espèce. La démonstration enfin, doit mettre en évidence la grande variété des idées mathématiques qu'elle relie. » [Hardy 1940, 33]

La seconde qualité qu'il exige est celle qu'il nomme la profondeur. Pour la décrire, il fait appel à l'image de strates géologiques :

> « Il semble que les idées mathématiques soient disposées en strates, les idées de chaque strate étant liées à la fois entre elles et avec celles des strates inférieures et supérieures par un réseau complexe. Plus la strate est basse, plus l'idée est profonde et en général difficile. Ainsi l'idée d'un « irrationnel » est plus profonde que celle d'un entier, et pour cette raison, le théorème de Pythagore est plus profond que celui d'Euclide. » [Hardy 1940, 37]

Pour Hardy, le théorème de Pythagore est particulièrement *profond* et *général*. Autrement dit, ce résultat est non seulement susceptible d'une extension considérable mais il constitue aussi une sorte de point de départ d'un itinéraire qui mène d'une idée relativement simple, l'irrationalité de √2, à des idées mathématiques beaucoup plus sophistiquées. Notons que la notion de profondeur a quelque rapport avec celle de difficulté mais ne se confond pas avec elle ; Hardy précise en effet que si les idées les plus profondes sont habituellement les plus difficiles à saisir, il n'y a pourtant pas d'équivalence entre ces deux qualités. Il note ainsi que « les idées qui sous-tendent le théorème de Pythagore et ses généralisations sont très profondes, mais aucun mathématicien d'aujourd'hui ne les trouverait difficiles »[194].

La question légitime que l'on se pose alors est de savoir quelles sont les idées avec lesquelles ont peut relier le théorème de Pythagore. En effet, si ce que Hardy note à propos de ce théorème et de sa démonstration semble convaincant, la démonstration qu'il en propose ne permet cependant pas, en l'état, de vérifier et de comprendre les qualités qu'il lui attribue. Je propose alors une reconstruction d'un itinéraire qui montre comment à partir du résultat de l'irrationalité de √2 on peut aboutir à des constructions mathématiques bien plus générales. L'objectif est donc double : il s'agit à la fois d'illustrer le procédé théorique décrit dans la section précédente et de vérifier l'argumentation de Hardy quant aux qualités qui participent au mérite esthétique en mathématiques. Il n'est pas indispensable pour parvenir à cet objectif de rentrer dans les détails techniques, toutefois j'indiquerai, chaque fois que cela semblera nécessaire, des ouvrages de référence auxquels on pourra se reporter pour approfondir un point technique.

[194] Cf. [Hardy 1940, 36]

III.1.1. 1ère étape, questions sur le schème de la démonstration de l'irrationalité de √2 [195]

La démonstration proposée par Hardy, celle dont je me suis servi jusqu'à présent, est en fait la forme la plus particulière que l'on puisse trouver parmi les multiples façons de démontrer ce résultat. Particulière dans le sens où elle est spécialement adaptée à l'objet auquel elle s'applique, c'est-à-dire à √2. La particularité de cette quantité est que son carré est un nombre pair (par excellence pourrait-on dire, puisque c'est 2). De ce fait, on a mis en exergue la parité qui en découle pour a^2. Mais en fait, il se trouve que la parité n'est elle-même qu'un cas particulier de la notion, plus générale, de divisibilité. Si l'on cherche le schème de la démonstration, c'est-à-dire, si l'on cherche à en éliminer les aspects contingents, c'est dans le but d'obtenir la forme générale d'une démonstration à contenu varié (qui pourrait s'appliquer à de multiples irrationnels). Ayant en vue ce but, il est naturel d'essayer de voir si l'on peut éliminer du raisonnement les articulations qui relèvent exclusivement de la particularité de √2 ; la parité de son carré en fait partie. Il s'agit donc de réinterpréter la phrase relationnelle A : $a^2 = 2b^2$ en termes plus généraux. Une réécriture de cette phrase, obtenue par transformation selon les règles tacites de codage, permet de comprendre ce qui est en jeu dans la relation entre a^2 et b^2.

Je propose la liste d'enchaînements suivants qui montre comment on peut obtenir une phrase relationnelle équivalente d'un point de vue extensionnel et intensionnel [196] mais qui, par contre, en modifie le fonctionnement exemplificationnel :

A	$a^2 = 2b^2$
A_1	$a^2 = 2 \times b^2$
A_2	$a^2 = 2 \times b \times b$
A_3	$a^2 = (2b) \times (b)$

[195] Dans tout ce qui suit et sauf contre-indication, j'utiliserai les mêmes notations qui ont servi jusqu'à présent dans cette démonstration. Ainsi par exemple, lorsque je fais référence à a et b, il s'agit des nombres que l'on a supposé premiers entres eux et tels que √2 = a / b.

[196] Dans ce qui suit, et dans un soucis de clarté, je dirai qu'une phrase mathématique est strictement équivalente à une autre lorsque toutes deux auront même extension et même intension.

La phrase relationnelle A_3 est ainsi strictement équivalente à la phrase relationnelle initiale A. Mais tandis que A porte sur l'égalité entre deux termes singuliers, A_3 traduit l'égalité entre le terme singulier a^2 et le *produit* de termes singuliers (2 x b) x (b). Le jeu de transformation consistant à rajouter les signes de délimitation (les parenthèses) et les signes multiplicatifs (la croix) est inerte sur le plan extensionnel ainsi que sur le plan intensionnel, son rôle consiste à rendre manifeste la référence qui va de A_3 vers le lemme de Gauss. Ce dernier établit un critère de divisibilité pour une quantité exprimée comme produit de deux termes tels que l'un d'entre eux soit premier avec la quantité initiale. Le lemme de Gauss peut s'énoncer ainsi :

<u>Lemme de Gauss</u>

Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux. Si il existe c tel que p divise c x q alors p divise c.

Ou, de façon plus formelle :

$$\text{Si } p \wedge q = 1 \text{ et si } p \mid c \times q \text{ alors } p \mid c$$

Le trait dominant exemplifié par la phrase A_3 est le fait que le lemme de Gauss s'applique dans ce cas au triplet de termes singuliers, a^2, (2b) et (b). En effet, puisque A_3 est une instance d'une situation où le lemme s'applique et que la forme de A_3 fait référence au lemme, il y a donc possession et référence entre la phrase et le lemme, ce qui traduit bien une exemplification. L'application du lemme permet alors de déduire de A_3 le raisonnement suivant :

a divise a^2

or $a^2 = (2b) \times (b)$

donc a divise (2 b) x (b)

comme a est supposé premier avec b, en vertu du lemme de Gauss on en déduit que

a divise (2b)

Le dernier résultat peut s'écrire à son tour comme suit :

$a \mid (2) \times (b)$

On peut réitérer l'application du lemme de Gauss pour finalement déduire que

puisque $a \wedge b = 1$ on a

$a \mid 2$

A partir de cette étape, la démonstration ne nécessite plus qu'une vérification des deux seules possibilités offertes par le dernier résultat.

P_1 En effet, 2 n'admet comme seuls diviseurs que 1 et lui-même. Donc, a est nécessairement égal à 1 ou à 2.

Or, si a = 1, alors on peut le remplacer par 1 dans la phrase relationnelle A et l'on a :

$1 = 2 \times b^2$

ce qui est absurde puisque b est un nombre entier donc supérieur ou égal à 1 (et donc on a nécessairement $1 < 2 \times b^2$)

Il ne reste alors que l'autre possibilité, à savoir :

$a = 2$

ce qui implique après remplacement dans A

$2^2 = 2 \times b^2$

puis simplification

$2 = b \times b$

P_2 Ce qui est impossible : on vérifie aisément que la seule décomposition en produit d'entier que 2 admet est 2×1. Le nombre 2 ne peut donc être égal à un produit de nombres entiers égaux.

L'examen des conclusions obtenues si l'on suppose que √2 est rationnel conduit dans tous les cas à une absurdité. C'est donc que l'hypothèse initiale est fausse, et l'on peut donc conclure à l'irrationalité de √2.

Maintenant, si l'on réfléchi à la cause ou à la source de ces absurdités alors on peut identifier les propriétés de √2 qui permettent la marche du raisonnement.

Reprenons pour ce faire les phases P_1 et P_2 de la démonstration, qui en sont précisément les étapes charnières. Ces dernières sont en fait valables dès que l'on a à faire à un nombre premier. En effet, un nombre premier n'a pas, par définition, d'autre diviseur que 1 et lui-même, ce qui permet P_1. De plus, tout nombre premier n'a, comme seule décomposition en produit d'entier, que celle consistant à multiplier le nombre en question par 1. Et c'est bien là la propriété qui permet P_2.

Ainsi, la reconstruction de la démonstration qui vient d'être menée montre d'une part le fait que l'on peut éliminer du raisonnement tout enchaînement relatif à la parité du carré de $\sqrt{2}$ et que la seule propriété inhérente à $\sqrt{2}$ qui est finalement nécessaire à la démonstration est que c'est la racine d'un nombre premier. D'autre part, on est à présent en mesure d'identifier le lemme de Gauss comme une étiquette du schème puisque c'est précisément cette propriété qui permet les enchaînements démonstratifs.

III.1.2. Généralisation élémentaire

A partir de là, on va donc pouvoir élaborer une démonstration qui s'applique à tous les nombres irrationnels de la forme $\sqrt{p}$, où p est premier et appartient à un ensemble dans lequel le lemme de Gauss est valide. Comme on va le voir, il n'y a pas en fait de grande modification ; il suffit de remplacer 2 par p, où p est un nombre premier quelconque.

Supposons que $\sqrt{p}$ soit rationnel

Alors, par hypothèse, il existe a et b premiers entre eux tels que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

cette phrase relationnelle est strictement équivalente à

$$a^2 = (pb) \times b$$

or a divise a^2 donc a divise (pb) x b

En vertu du lemme de Gauss, a étant premier avec b, on en déduit

a divise (pb)

ce qui est strictement équivalent à

a divise (p) x (b)

le lemme de Gauss s'applique à nouveau, et finalement, on obtient :

a divise p

ce qui implique deux seules possibilités ; p étant premier ses uniques diviseurs sont 1 et p lui-même

Donc, nécessairement on a :

a = 1 ou a = p

Or, si a = 1 alors, par remplacement dans la phrase relationnelle initiale on a :

$1 = p \times b^2$

ce qui est absurde puisque le terme de gauche est supérieur à 1

Reste à examiner la seconde possibilité :

si a = p

De même, après remplacement, on obtient

$p^2 = p \times b^2$

et, après simplification par p on a finalement

$p = b^2$

ce qui est absurde : p étant premier, il ne peut pas être égal à un produit de nombres entiers égaux.

Dans tous les cas, l'hypothèse initiale conduit à une absurdité, elle est donc fausse et l'on peut conclure à l'irrationalité de tout nombre $\sqrt{p}$ avec p premier.

La généralisation élémentaire, conséquente à l'abstraction première sur la démonstration initiale consiste donc, comme on le voit avec cet exemple, à éliminer les propriétés contingentes et à sélectionner au contraire celles qui sont indispensables à la marche générale du raisonnement. Ce faisant, ce processus de généralisation par abstraction conduit à l'élaboration d'une forme de démonstration que l'on peut appliquer à toute une classe d'objets (dans notre

exemple, la classe en question est la classe dénotée par l'étiquette « être de la forme √p avec p premier »). Avant de réfléchir sur le métaschème, c'est-à-dire de mettre à jour les conditions de réalisation du schème, il faut s'intéresser au domaine que définit le schème en question. En effet, cette étape est indispensable au regard de l'un des objectifs de cette section : il s'agit en particulier de mettre en évidence un transfert de schème par analogie. Or cette manœuvre vise à réorganiser un domaine selon différents schèmes ; il faut donc étudier l'organisation induite par ce schème sur son domaine d'application.

III.2. Abstraction seconde

III.2.1. Exploration du règne

Comme on peut le voir dans la généralisation que l'on a obtenue de la démonstration de l'irrationalité de √2, les étiquettes « disposer du lemme de Gauss » ainsi que « disposer de la notion de nombre premier » sont comprises dans le schème. Qu'en est-il du domaine défini ? Le schème de la démonstration donne un moyen de montrer l'irrationalité de certains nombres exprimés sous forme de racine. Allons alors plus loin : qu'est-ce qu'un nombre exprimé sous forme de racine, mettons, la racine de m ? C'est, par définition, un nombre x qui est solution d'une équation du type $X^2 - m = 0$, ou ce qui revient au même, c'est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - m$.

Afin de poursuivre, il nous faut donner ici quelques définitions de l'algèbre générale et de la théorie algébrique des nombres[197] :

1 Anneaux :

Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition, une addition notée + et une multiplication, notée x, telles que :

a) (A, +) est un groupe commutatif, c'est-à-dire

[197] Je considère connue la théorie élémentaire des groupes, ainsi que les définitions générales des polynômes. Je ne donne que quelques définitions générales qui interviendront dans la suite du raisonnement. Cependant, pour plus de détail, on pourra voir par exemple [Dixmier 1976] pour l'algèbre élémentaire et [Samuel 1967] pour la théorie algébrique des nombres.

- $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $x + y = y + z$, quels que soient x, y et z dans A

- il existe un élément neutre, noté 0, pour l'addition et chaque élément de A possède un opposé, noté – x tel que :

$(-x) + x = x + (-x) = x$ avec $0 + x = x + 0$

b) la multiplication est associative :

$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ quels que soient x, y et z dans A

c) la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ et $(y + z) \times x = y \times x + z \times x$ quels que soient x, y et z dans A

Remarques :

- Notons qu'il n'est pas nécessaire que tout élément de A possède un inverse pour la multiplication.
- Un anneau dans lequel $x \times y = y \times x$ quels que soient ses éléments x, y est un anneau commutatif.

  Par exemple, on vérifie aisément que **Z**, l'ensemble des entiers relatifs (… -3, -2, -1, 0, 1, 2…) est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication usuelles et que seul 1 et -1 sont inversibles.

2 Anneau intègre

Un anneau A est intègre si il est commutatif et qu'il n'a pas de diviseur de zéro, c'est-à-dire tel que le produit de deux éléments non nuls de A soit non nul.

Exemple : **Z** est un anneau intègre puisque si $a \times b = 0$ dans **Z** alors $a = 0$ ou $b = 0$.

L'ensemble P(**Z**) des polynômes à coefficients dans Z est aussi un anneau intègre.

3 Sous-anneaux et idéaux

On dit qu'une partie B d'un anneau A est un sous-anneau de A si

a) B est un sous-groupe du groupe additif A

b) Si x et y appartiennent à B alors l'élément x x y appartient à B

Une partie B d'un anneau A est un idéal de A si

a) B est un sous-anneau de A et si de plus,

b) Si x appartient à B et y appartient à A alors l'élément x x y appartient à B

Remarque :

- Un idéal est un sous anneau qui *absorbe* en quelque sorte les éléments de l'anneau, c'est-à-dire que le produit d'un élément de l'idéal par un élément quelconque de l'anneau appartient à l'idéal.
  Par exemple, dans l'anneau P(**Z**) l'ensemble constitué des polynômes de degré nul, c'est-à-dire des scalaires, est un sous-anneau mais ce n'est pas un idéal. Dans l'anneau **Z**, le sous-anneau constitué des entiers relatifs pairs est un idéal puisque le produit d'un nombre pair par n'importe quel entier relatif est encore un nombre pair.

3 Eléments entiers sur un anneau, éléments algébriques et entiers algébriques

a) éléments entiers sur un anneau

Soient A un anneau et B un sous anneau de A, un élément x de A est dit entier sur B si il existe $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ dans B tels que

(E) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0 = 0$

Autrement dit, un élément x de A est entier sur B si il est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans B.

b) entier algébrique

On dira qu'un nombre x est un entier algébrique lorsqu'il est solution d'une équation du type (E) mais telle que les a_i soient des entiers relatifs.

(Notons alors que les entiers algébriques sont des éléments entiers de **C** sur l'anneau **Z**)

c) éléments algébriques

Soient R un anneau et K un sous-corps de R, un éléments x de R est algébrique sur K s'il est solution d'une équation du type (E) :

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1x + a_0 = 0$

où les a_i sont des éléments non tous nuls de K.

Remarques :

- Parmi les nombres complexes, les nombres que l'on appelle nombres algébriques sont ceux qui satisfont à une équation du type (E) :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1x + a_0 = 0$$

  les a_i étant des nombres rationnels.
- Sur un corps, les éléments entiers sont identiques aux éléments algébriques.

On peut montrer la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> :

Soient A un anneau et B un sous anneau de A, l'ensemble B' des éléments de A qui sont entiers sur B, est un sous-anneau de A qui contient B [198]

Ainsi, par exemple, l'ensemble des éléments entiers sur **Z** constitue un anneau. Ce qui signifie en particulier que la somme et le produit de deux entiers sur **Z** est encore un élément entier sur **Z**. Ce fait n'est pas trivial, la démonstration nécessite

[198] On trouvera une démonstration de cette proposition dans [Samuel 1967, 35].

un certain degré de sophistication. On peut s'en rendre de compte en essayant de montrer "à la main" que la somme de √2 et de √3 est un entier algébrique sur **Z** :

Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Pour montrer que x est un entier algébrique sur **Z**, il faut montrer que x est une racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans **Z**.

Dans ce but, on va tâcher de construire un tel polynôme en partant de la définition de x (c'est-à-dire de l'égalité $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$) et en lui appliquant les règles de simplification tacite :

Puisque que l'on cherche à construire un polynôme à coefficient dans **Z**, la démarche naturelle consiste à éliminer de l'égalité entre x et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ les nombres qui ne sont pas des entiers relatifs :

$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

Après développement, on obtient :

$x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$

On isole à gauche les termes qui ne contiennent pas de racines :

$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$

on réitère alors l'opération qui consiste à élever l'égalité au carré afin de ne plus avoir de racine :

$(x^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2$

$x^4 - 10x^2 + 25 = 24$

Enfin, on réorganise l'égalité afin de retrouver l'écriture canonique d'une équation :

$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

On obtient ainsi que x est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans **Z** ; donc par définition, x est un entier algébrique sur **Z**.

4 fermetures intégrales, clôture intégrale

Soient A un anneau et B un sous-anneau de A, la fermeture intégrale B' de B dans A est l'anneau des éléments de A entier sur B

> Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions199. La clôture intégrale de A dans K est l'ensemble des éléments de K entier sur A, la clôture intégrale a une structure d'anneau.

Ainsi, par exemple, l'ensemble des racines rationnelles des polynômes unitaires à coefficient dans **Z** est la clôture intégrale de **Z** dans **Q**.

Il convient à présent de faire un retour sur le domaine défini par le schème de la démonstration de l'irrationalité des nombres √p, où p est un nombre premier.

En reprenant les définitions ci-dessus, on peut dire que le domaine en question est constitué d'éléments entiers algébriques sur l'anneau **Z**. En effet, les éléments du domaine sont les solutions des équations du type $X^2 – p = 0$, où p est un nombre premier. Ce sont donc des racines de polynômes unitaires à coefficients dans **Z**.

Mais, étant donné que ces nombres sont structurés selon leur non appartenance à **Q**, l'organisation induite par le schème sur cet ensemble d'entiers algébriques est une affaire de localisation. Autrement dit, le règne obtenu est un ensemble particulier d'éléments entiers algébriques sur **Z**, vu non pas comme solutions de polynômes particuliers unitaires à coefficient dans **Z**, mais comme entiers algébriques sur **Z** qui n'appartiennent ni à **Z** ni à **Q**, son corps des fractions (donc qui n'appartiennent pas en particuliers à la clôture algébrique de **Z**).

L'exploration de ce domaine sous l'angle du schème de la démonstration de l'irrationalité de √2 met l'accent sur le fait que l'anneau des nombres algébriques ne contient ni n'est inclus dans **Q.** Cela étant, il faut noter ici que l'ensemble de ces réflexions porte sur une reconstruction de la mise en place de la problématique des entiers sur un anneau. C'est-à-dire qu'il s'agit d'une lecture

---

[199] Le corps des fractions d'un anneau A est le plus petit corps contenant A que l'on puisse construire à partir de A. Par exemple, **Q** le corps des nombres rationnels est le corps des fractions de **Z** (voir par exemple, [Dixmier 1976 57-60]).

faite depuis un point de vue moderne sur cette théorie et non pas une genèse historique de la mise en place des points qui sont évoqués.

Dans cette perspective, l'étude du métaschème, c'est-à-dire l'étude des conditions de réalisation du schème, va nous conduire à traduire d'un point de vue structural la problématique soulevée par l'exploration du règne.

III.2.2. 2ème étape, questions sur le métaschème

Comme on l'a vu, l'étude du métaschème relève d'une abstraction secondaire qui porte sur les conditions de réalisation des propriétés du schème. Le lemme de Gauss est la condition sine qua non de la démonstration qui nous intéresse, mais quelles sont donc les conditions sous lesquelles on a effectivement ce lemme ? Une analyse ascendante montre que l'on peut avoir ce lemme dans tout anneau muni de la division euclidienne (car on peut montrer alors la propriété de Bézout et en déduire le lemme de Gauss[200]). Tel est le cas par exemple dans l'anneau **Z** et dans l'anneau des polynômes P(**Z**)[201].

Le transfert de schème de la démonstration initiale via ce métaschème peut alors être envisagé vers tout ensemble muni au moins d'une structure d'anneau et de la division euclidienne (c'est-à-dire vers tout ensemble dénoté par le métaschème). Le moment métaphorique correspond au transport du raisonnement dans un anneau quelconque (et non pas **Z** en particulier) et à l'exploration du domaine défini par l'ensemble des éléments entiers sur cet anneau (et non pas des entiers algébriques particuliers solutions du polynôme $x^2 - p$) en fonction de leur localisation (appartiennent-ils à l'anneau, à son corps des fractions ?). Il faut bien comprendre que le domaine dont il est question est déjà défini comme étant l'ensemble des éléments entiers sur l'anneau, ce que permet le transfert de schème c'est la réorganisation de ce domaine selon la localisation

[200] On pourra consulter par exemple le manuel de Mathématiques, section T°S (spécialité), Collection math'x programme 2002, éd. Didier, Paris 2002.

[201] Il faut noter que la condition évoquée, à savoir, la division euclidienne, n'est qu'une condition suffisante. On verra ultérieurement qu'elle n'est pas nécessaire, ce qui permet par exemple d'étendre les résultats obtenus aux anneaux de polynômes à plusieurs variables (anneaux dans lesquels il n'y a pas de division euclidienne).

de ses éléments. Autrement dit, le domaine reste inchangé, c'est son organisation qui est modifiée. Ainsi, l'initiative métaphorique porte dans ce cas sur le règne puisqu'elle permet de considérer l'ensemble des éléments entiers algébriques comme nombre.

Pour Goodman l'intérêt de la métaphore est d'autant plus important qu'elle amène ce type de résultat :

> « La métaphore a le résultat le plus convaincant lorsque le schème transféré crée une organisation nouvelle et remarquable plutôt qu'un simple réétiquetage d'une ancienne. » [Goodman 1968, 110]

Or, l'exploration des ensembles d'éléments entiers sous l'angle de leur localisation conduit à l'élaboration de constructions fondamentales pour la théorie des nombres actuelle. En effet, la problématique soulevée par le schème de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ concerne le fait que les solutions des polynômes dont les coefficients appartiennent à un anneau A n'appartiennent pas nécessairement à A ni même à son corps des fractions (qui est le plus petit corps contenant A). L'abstraction faite sur la démonstration puis sur le schème de la démonstration permet de mettre à jour les raisons pour lesquelles des racines "s'échappent", pour ainsi dire, de certains anneaux, ce qui permet par suite de construire des anneaux particuliers dans lesquels ce phénomène n'a pas lieu. De tels anneaux sont ce que l'on appelle des anneaux *intégralement clos* :

> Un anneau est intégralement clos si il est intègre et si sa clôture intégrale est l'anneau lui-même, c'est-à-dire si tout élément x du corps des fractions de l'anneau entier sur l'anneau est élément de l'anneau lui-même[202].

Considérons alors des anneaux particuliers, appelés anneaux principaux, définis comme suit :

> Un anneau A est principal si il est intègre et si tout idéal de A est principal.

[202] Pour plus de détails, voir [Samuel 1967, 33-36].

(Un idéal d'un anneau A est dit principal s'il est engendré par un élément[203].)

On peut montrer la proposition suivante :

Proposition :

(P) Tout anneau principal est intégralement clos, c'est-à-dire que tout élément du corps des fractions d'un anneau principal entier sur cet anneau appartient à l'anneau lui-même.

Comme on va le voir, la démonstration de ce résultat est construite sur le même schème que la démonstration de l'irrationalité de √p, avec p premier. Je propose d'exposer la démonstration et de l'analyser ensuite.

Démonstration de (P) :

Soit A un anneau principal, il est donc par définition intègre.

Soit x un élément de K, le corps des fractions de A, tel que x soit entier sur A, ce qui signifie que x est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans A.

Autrement dit, il existe des coefficients, que je noterai c_{n-1}, c_{n-2},…c_1, c_0 tels que x est solution de l'équation suivante :

(E): $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots c_1x + c_0 = 0$

x appartient à K, ce qui signifie qu'il existe a et b appartenant à A et premiers entre eux tels que : $x = \frac{a}{b}$

Si l'on réécrit l'équation (E) ci-dessus après avoir remplacé x par $\frac{a}{b}$, on obtient :

$$(\frac{a}{b})^n + c_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + \dots c_1(\frac{a}{b}) + c_0 = 0$$

[203] Dire qu'un idéal est engendré par un élément *a* signifie que tous ses éléments sont des multiples de *a*. L'ensemble de nombres pairs constitue par exemple un idéal de l'anneau **Z** car tout nombre pair est un multiple de 2.

On applique alors une règle de simplification tacite, celle qui consiste à multiplier l'équation par b^n afin de ne plus avoir d'écriture fractionnaire :

$$a^n + c_{n-1}ba^{n-1} + \dots c_1 a\, b^{n-1} + c_0\, b^n = 0$$

L'étape suivante consiste, compte tenu des analogies avec la démonstration établie pour l'irrationalité de $\sqrt{p}$, à réécrire l'équation afin de retrouver la référence au lemme de Gauss. Pour ce faire, on met b en facteur afin d'obtenir une relation entre un terme singulier et un produit :

$$a^n + b(c_{n-1}a^{n-1} + \dots c_1 a\, b^{n-2} + c_0\, b^{n-1}) = 0$$

Finalement, on obtient l'écriture suivante:

$$a^n = -\, b(a_{n-1}a^{n-1} + \dots a_1 a\, b^{n-2} + a_0\, b^{n-1})$$

Donc b divise a^n, or, comme on peut écrire a^n comme produit de a par a^{n-1} on a en fait la relation de divisibilité suivante : b divise a x a^{n-1}.

Ce dernier résultat permet la référence au lemme de Gauss : b divise a x a^{n-1} et b est supposé premier avec a, donc b divise a^{n-1}.

On peut réitérer ce raisonnement (par récurrence, en écrivant a^{n-1} comme produit de a par a^{n-2}, etc.) jusqu'à l'obtention de la conclusion suivante : b divise a. Ainsi a et b ne sont pas premier entre eux et donc il existe un élément e dans A tel que a = e x b d'où

$$x = \frac{a}{b}$$

$$x = \frac{bxe}{b}$$

$$x = e$$

Donc x est un élément de A.

On a ainsi montré que tout élément x de K qui est entier sur A est en fait un élément de A lui-même. Autrement dit, on a montré que si A est un anneau principal alors A est intégralement clos, on a donc démontré la proposition P.

Une question légitime suit l'analyse de cette démonstration : en quoi le fait de supposer l'anneau principal est-il nécessaire pour l'enchaînement argumentatif précédent ? L'hypothèse que A doit être principal permet en fait d'utiliser la notion de nombre premier ainsi que le lemme de Gauss, soit les deux étiquettes principales du schème de la démonstration.[204]

III.3. Synthèse esthétique

On montre ainsi comment par une exploitation des analogies entre schèmes (qui dépend elle-même d'une exploitation de la densité mathématique) on peut remonter de l'idée de nombre irrationnel à celle de nombre entier algébrique puis à celle d'anneau factoriel.

Ces abstractions successives ne sont pas fortuites mais elles s'inscrivent dans une problématique générale. En effet, la théorie des nombres algébriques apparaît finalement comme le cadre naturel de l'arithmétique initiée par Diophante et auquel appartient, par exemple le théorème de Fermat. L'irrationalité de$\sqrt{2}$ (le résultat et sa démonstration) répond ainsi aux critères de généralité et de profondeur annoncés par Hardy ; critères qui déterminent selon lui, le mérite esthétique des mathématiques.

Il convient d'ouvrir une parenthèse concernant l'un des aspects de l'argumentation de Hardy quant à l'aspect esthétique du théorème de l'irrationalité de$\sqrt{2}$. En effet, je le notais dans l'introduction générale à l'étude de cet exemple, on peut envisager une analyse du résultat et de sa démonstration par rapport à ses contextes ontologiques et sémantiques[205]. L'ensemble de l'analyse esthétique de la démonstration proposée n'a concerné jusqu'à présent que ses aspects internes aux mathématiques. La saturation et l'exemplification ont été identifiées par rapport au fonctionnement même de la démonstration ; la densité quant à elle

[204] L'étude des propriétés nécessaires à cette démonstration montre qu'en fait tous les anneaux factoriels (qui sont des anneaux plus généraux que les anneaux principaux) sont intégralement clos En effet, seules les propriétés multiplicatives des anneaux principaux sont utilisées : le raisonnement peut alors être utilisé pour montrer que tout anneau factoriel est intégralement clos. Pour plus de détails, voir [Samuel 1967, 36].

[205] Cf. Partie III A section I.1

concerne le potentiel de généralisation, le rôle de modèle que peut avoir la forme de cette démonstration pour obtenir des résultats mathématiques similaires. Il reste cependant un aspect externe à souligner.

Comme l'écrit Hardy, l'irrationalité de √2 est un résultat qui a des conséquences sur notre façon de penser[206]. Sa découverte met en évidence l'incommensurabilité de certaines grandeurs comme celle entre la diagonale du carré et son côté (il n'existe pas d'unité dont chacun soit un multiple entier). L'arithmétique élémentaire, l'ensemble des nombres entiers, ne sont pas suffisants pour rendre compte des grandeurs qui s'offrent à nous. En termes goodmaniens, on peut parler ici de modification d'une vision d'un monde ou de construction de nouvelles catégories. En ce sens là, l'irrationalité de √2 exemplifie l'insuffisance de l'arithmétique d'Euclide.

Au-delà d'avoir illustré ces critères sur cet exemple, le principal résultat de cette dernière section est d'avoir montré que la mise en place de ces critères dépend d'un fonctionnement esthétique de la symbolique mathématique. Ce résultat est particulièrement intéressant dans la mesure où, chez Hardy, la conception de l'esthétique des mathématiques est ancrée au sein d'une position fortement réaliste. Son argumentation visant à justifier l'esthétique de cette science est basée sur le présupposé de l'existence indépendante et autonome des objets mathématiques[207]. Or, en montrant que l'on peut traduire les critères qu'il établit pour le mérite esthétique par un fonctionnement particulier de la symbolique mathématique, on montre que l'on peut obtenir une caractérisation similaire à celle qu'il préconise, mais indépendamment de tout présupposé d'ordre ontologique. Dans ce cas, le nominalisme de Goodman ne semble pas être un obstacle à l'utilisation de sa théorie de l'esthétique pour les mathématiques, quelle que soit par ailleurs la perspective ontologique sous laquelle elles sont considérées.

---

[206] Cf. [Hardy 1970, 29-31]

[207] Cf. [Jullien 1999, 91-98]

III.4. Conclusion

L'un des objectifs de cette application était de dégager une nouvelle interprétation de la saturation. Il ne s'agit pas de se réapproprier la saturation goodmanienne dans son sens précis de symptôme syntaxique relatif (la saturation traduit la non contingence de l'ensemble des marques en jeu dans un système symbolique, elle est de fait l'apanage des systèmes picturaux) mais d'en dégager des corollaires afin de mieux comprendre le mouvement global de généralisation mathématique.

En effet, reprenons l'exemple de la théorie des nombres algébriques. On peut y observer une évolution selon des stades de construction d'ensembles particuliers : l'étude de l'ensemble des nombres algébriques sur un anneau quelconque montre que ces derniers forment à leur tour un anneau, différent de l'anneau initial. Ce stade conduit à l'élaboration de la notion d'anneaux principaux qui sont plus restrictifs dans leur caractérisation (tout anneau n'est pas un anneau principal) mais qui sont en revanche intégralement clos, c'est-à-dire qu'ils contiennent l'ensemble des racines rationnelles de leurs polynômes. Enfin, l'étude du schème de la démonstration de cette dernière proposition montre que seules les propriétés de divisibilité des anneaux principaux y sont nécessaires. On peut donc généraliser en fait ce résultat aux anneaux factoriels (tout anneau principal est factoriel, le contraire n'est pas vrai).

Mon hypothèse de travail est que l'on peut interpréter cette évolution des anneaux quelconques vers les anneaux factoriels en termes de saturation. Cette hypothèse est suggérée par le fait que chaque stade d'abstraction consiste comme on l'a vu à éliminer des hypothèses contingentes. Ainsi, le schème le plus abstrait est alors celui où la question de savoir s'il comporte des étiquettes contingentes ne doit plus se poser. Autrement dit, c'est un schème dans lequel chacun des éléments doit avoir un rôle constitutif en vue de son fonctionnement. Et l'on retrouve ici l'un des corollaires de la saturation. En effet, comme l'explique

Pouivet, la saturation caractérise les systèmes symboliques dans lesquels la distinction entre traits constitutifs et traits contingents n'a pas d'usage[208].

On peut dire alors que dans ce cas la généralisation mathématique relève d'un processus de saturation (le procédé de généralisation par abstraction ne s'arrête pas tant que l'on ne parvient pas à produire un schème saturé). Ceci peut être vu comme la formulation moderne de la proportionnalité inverse entre intension et extension.

Un autre objectif de la section précédente était d'illustrer les notions théoriques de schème et de métaschème ainsi que les mouvements d'abstractions première et secondaire, et de transfert de schème par analogie. Cette application a permis de mieux comprendre comment le processus de développement et de compréhension des mathématiques s'inscrit dans une exploitation des aspects esthétiques, au sens de Goodman, de la symbolique et du codage des mathématiques. C'est en effet l'interprétation des aspects exemplifiés par les symboles en jeu dans la démonstration qui conduit à la mise à jour du schème. Cette interprétation dépend en amont d'une exploitation de la densité sémantique des mathématiques puisqu'il s'agit de sélectionner de façon pertinente une classe-de-référence particulière parmi la multiplicité des classes-de-référence possibles (et non disjointes) pour un même symbole.

Au niveau de la construction d'une démonstration, les symptômes identifiés sont donc en particulier l'exemplification et la densité sémantique ; et cette dernière, comme le montre l'exemple étudié, n'est pas contingente, dans le sens où son exploitation revêt un rôle constitutif dans le développement des mathématiques. En effet, l'un des points sur lequel il faut être particulièrement prudent à propos de la densité réside dans le fait que cette dernière est inhérente à tout système linguistique. Or, les mathématiques, si elles ne sont pas réductibles à un système linguistique, sont de toute façon d'intersection non vide avec un tel système. Les mathématiques présentent de ce fait une certaine densité sémantique, mais l'erreur serait d'analyser aussitôt cette caractéristique comme

[208] Cf. [Pouivet 1996, 72]

ayant un rôle au niveau du processus de compréhension et de développement de cette science, et, par, suite de lui attribuer une fonction de symptôme de l'esthétique[209].

Or, l'ensemble de l'étude précédente montre que c'est justement le fait que la majeure partie des symboles mathématiques peuvent faire référence à une multitude d'étiquettes telles que leurs classes-de-concordance aient une intersection non vide qui permet la sélection d'une étiquette commune à des objets différents. Autrement dit, l'un des résultats obtenus avec l'exemple de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ tend à justifier la non contingence de la densité en mathématiques.

De même, le rôle de l'exemplification est majeur dans le processus de démonstration et dans celui de généralisation (première et secondaire). Il n'est pas réduit à un artifice heuristique[210]. C'est-à-dire que l'exemplification ne sert pas uniquement à illustrer une théorie ou un raisonnement particulier mais au contraire elle peut en faire partie intégrante. Pour être plus précis, c'est en exploitant le double statut référentiel des symboles mathématiques, i.e. exemplificationnel et dénotatif, que l'on peut bâtir une démonstration. Autrement dit, c'est sur un réseau de références multiples et complexes que se construit un raisonnement. Les démonstrations mathématiques ne se réduisent donc pas à un enchaînement mécanique d'arguments selon une ligne référentielle directe (c'est-à-dire sans inversion de hiérarchie dénotationnelle). En effet, lorsque l'on veut démontrer qu'un résultat est valable pour toute une classe particulière d'objets, on choisit un représentant quelconque de cette classe et l'on exploite ce que ce représentant peut exemplifier. Le représentant d'une classe a d'une part, une fonction dénotative (celle de dénoter les éléments de la classe) et il a d'autre part, une fonction exemplificationnelle (celle de faire référence à l'un de ses aspects)[211].

---

[209] Cf. Partie II section II. 2. 5.

[210] Cf. Partie II section II. 2. 4.

[211] Si la possibilité de faire fonctionner un même symbole comme dénotant et comme échantillon est un avantage méthodologique pour la construction des démonstrations, elle est aussi une source d'erreur classique en mathématique. En effet, la bonne l'exploitation du double fonctionnement référentiel des symboles mathématiques requiert une grande capacité de discrimination : il s'agit de pouvoir distinguer

Cette description du fonctionnement de la symbolique mathématique constitue un obstacle majeur à la thèse de Young d'après laquelle seul l'art procède selon des démonstrations immédiates (showing) tandis que la science ne connaît que les démonstrations systématiques[212].

Le lien entre codage et esthétique a été établi au cours de cette première confrontation entre la théorie de l'esthétique de Goodman et un exemple mathématique tiré de l'arithmétique. Il faut à présent vérifier la pertinence des interprétations et des outils mis en place dans les domaines géométriques. En effet, il s'agit de s'assurer de la compatibilité entre mes interprétations et des exemples tirés de la géométrie dans la mesure où la notion de codage y revêt une importance particulière. De plus, les domaines géométriques sont souvent considérés comme source importante de propriétés esthétiques, il apparaît alors important de vérifier si une analyse goodmanienne permet d'en rendre compte ou tout au moins si elle permet de rendre compte de la nécessité d'un fonctionnement esthétique pour l'interprétation correcte de systèmes mathématiques issus de la géométrie.

La considération de ce que l'on appellera les preuves sans mot, ou plus généralement, les preuves hétérogènes, fournira en outre l'occasion de revenir à nouveau sur la thèse de Young afin d'en montrer les limites en ce qui concerne les démonstrations mathématiques.

---

parmi les traits exemplifiés par un symbole ceux qui peuvent l'être aussi par toute la classe dont il est pris pour représentant de ceux qui dépendent exclusivement de sa particularité. L'erreur consiste alors à insérer au sein du raisonnement des enchaînements qui ne sont pas valides pour toute la classe d'objets initiale. Dans notre exemple, $\sqrt{2}$ est un échantillon de l'étiquette « être de la forme $\sqrt{p}$, p premier », mais c'est aussi un échantillon de « avoir un carré pair » et la seconde étiquette ne concorde évidemment pas avec tous les concordants de la première.

[212] Cf. Partie I.B. II. 2.2.

B. Fonctionnement symbolique des figures mathématiques

I. Preuves hétérogènes

I.1. Remarques préalables sur la valeur esthétique de la géométrie

La partie des mathématiques à laquelle le sens commun attribue le plus volontiers un mérite esthétique est sûrement la géométrie. Ou, plus exactement, il faudrait dire que c'est au rendu visuel de certaines représentations géométriques qu'il est fréquemment attribué un attrait esthétique. La raison en est à peu près évidente : certaines constructions géométriques répondent aux canons classiques de la beauté tels que la symétrie ou l'harmonie par exemple (les fractales fournissent les exemples les plus flagrants). Le fait que la perception de l'esthétique de telles représentations géométriques ne nécessite aucune connaissance spécifique pas plus qu'elle ne nécessite une quelconque compréhension des mathématiques, explique peut-être le fait que des auteurs en appellent à la géométrie pour témoigner envers un large public de la beauté des mathématiques. Par exemple, l'article « Les mathématiques et la beauté »[213] de Le Lionnais est illustré d'une trentaine de représentation de courbes géométriques. Pourtant, la lecture de l'article en question montre que l'auteur entend défendre la beauté des mathématiques en tant que système structurel de pensée. Il développe sa thèse autour d'un découpage des différentes méthodes de raisonnement en mathématiques et des différents styles que l'on peut y trouver. Aussi, le rapport entre les propos tenus par Le Lionnais et les illustrations qu'il en donne n'est pas réellement convaincant : produire une courbe, qui possède peut-être certaines propriétés esthétiques, ne fournit pas un exemple de beauté mathématique, à la limite cela donne un exemple d'une belle figure géométrique (dans le sens où sa construction relève de règles mathématiques).

[213] [Le Lionnais 1962]

Le problème serait similaire si l'on voulait qualifier un édifice architectural d'échantillon de la beauté des mathématiques. Les mathématiques sont dans ce cas un moyen pour construire quelque chose (un édifice, une courbe ou un tableau de Mondrian), qui présente par ailleurs certaines propriétés esthétiques, à peu prés de la même façon que des ciseaux de tailleurs sont un moyen pour réaliser une sculpture.

Il y a donc là une sorte de confusion. Cependant, l'amalgame évoqué ci-dessus ne rentre pas directement en ligne de compte par rapport à la problématique qui sous-tend l'ensemble de mon enquête sur le fonctionnement esthétique des mathématiques. En effet, le but fixé est de comprendre et d'expliquer dans quelle mesure les mathématiques possèdent une valeur esthétique au sens de Goodman[214]; or la confusion soulignée précédemment porte sur une question de mérite esthétique (point de vue évaluatif), et non de valeur (point de vue fonctionnel). Il s'agit alors de réfléchir si il reste néanmoins envisageable de justifier la valeur esthétique des mathématiques en exhibant des constructions géométriques, ou plus exactement, si un fonctionnement esthétique peut être requis dans le cas d'une interprétation mathématique d'une figure géométrique.

L'un des problèmes que soulève l'usage de la figure géométrique comme témoin de l'esthétique des mathématiques est que ce type de représentation fonctionne dans ce cas indépendamment de toutes considérations d'ordre mathématique. Ce n'est pas en faisant fonctionner une courbe en tant que construction mathématique que l'on apprécie son mérite esthétique (en tout cas dans les exemples précédents) mais c'est en la considérant en tant que représentation picturale. Autrement dit, la courbe peut être considérée comme marque d'un système symbolique mathématique ou comme marque d'un système pictural[215]. Aussi, le mérite esthétique de ces constructions peut être tout au plus

[214] Pour la distinction entre mérite esthétique et valeur esthétique, voir Partie II. I. 2.

[215] Dans la théorie goodmanienne de la référence, un schéma symbolique est la donnée d'un ensemble de caractères et de règles de combinaison pour en former d'autre. Dans un schéma symbolique, il n'est question que de syntaxe. Lorsque qu'un schéma est mis en corrélation avec un domaine de référence, on parle alors de système symbolique. C'est dans le cas de système symbolique qu'interviennent les questions d'ordre

redevable de leur sous-bassement mathématique, mais il ne traduit pas nécessairement la valeur esthétique d'un système mathématique. Il apparaît en ce sens comme un bonus, ou une valeur ajoutée qui n'intervient pas dans l'interprétation (le fonctionnement).

Selon le même procédé d'analyse utilisé avec la démonstration de l'irrationalité de √2, je propose de vérifier si un fonctionnement esthétique est requis pour une bonne interprétation d'une figure géométrique en tant que marque d'un système symbolique mathématique.

I.2. Projet

Ces dernières réflexions convergent finalement vers le problème du statut de la figure géométrique, ou plus généralement de la figure mathématique. Cependant, il faut distinguer différents angles sous lesquels cette problématique peut être envisagée et sélectionner celui qui correspond aux questionnements précédents. Ces derniers sont de nature esthétique ; ils portent donc, dans un cadre goodmanien, sur un mode de fonctionnement relatif à un système symbolique. A cause de cela, il n'est pas nécessaire de prendre en considération des questions d'ordre ontologique quand aux figures et représentations mathématiques afin de déterminer leur rôle par rapport à la valeur esthétique de cette science. Il suffit de vérifier si leur interprétation nécessite une exploitation des caractéristiques propres à l'expérience esthétique. En effet, si nous montrons que le symbolisme de la figure en tant que schéma pictural mis en corrélation avec un domaine de référence mathématique requiert, pour son interprétation, un mode de fonctionnement à la fois esthétique et logique [216]alors nous pourrons conclure à la justesse de la perception de la figure en tant que témoin de la valeur esthétique des mathématiques.

---

sémantique. A partir d'un même schéma, il peut être construit différent système, c'est ce à quoi il est fait allusion ici. Pour plus de détails, cf. [Goodman 1968, 179-184].

[216] Il n'est pas sous-entendu ici que l'esthétique et la logique s'excluent mutuellement, mais au contraire qu'elles peuvent tout à fait cohabiter.

Le projet de cette section est donc plus modeste qu'un examen exhaustif du statut de la figure en mathématique (les questions de mise en relation, de référence, entre une figure et ce qu'elle représente ne seront pas spécifiquement abordées ; ce sont par ailleurs des points que la philosophie analytique contemporaine aborde largement). Mais, d'un autre côté, ce projet propose une exploration du mode de fonctionnement symbolique de la figure sous l'angle inédit de la symptomatologie esthétique goodmanienne.

En partie en raison de la confusion évoquée précédemment, je choisi de mener cette exploration à travers l'étude de quelques cas exemplaires qui sont, a priori, défavorables à la démonstration de ma thèse. En effet, les exemples sélectionnés ne présentent pas de façon ostensible un quelconque mérite esthétique : il s'agit de ne pas influencer l'enquête sur le mode de fonctionnement requis par d'éventuelles considérations évaluatives telles que la symétrie, l'harmonie, etc. Enfin, puisqu'il s'agit bien d'une étude sur le fonctionnement symbolique, j'ai choisi les exemples de façon à représenter les usages les plus courant de la figure en mathématiques. Je distingue à cet effet deux grandes catégories d'usage : la première concerne le rôle de la figure en tant qu'argument démonstratif tandis que la seconde s'occupe du rôle de la figure en tant que support intuitif[217]. Il faudra se demander si, lorsque l'on argumente à travers une figure, la figure n'est pas en fait un support intuitif ou sémiotique pour l'argument, même si elle est plus qu'une aide. De même la question se posera de déterminer si la figure est elle-même un argument ou plutôt la suite des figures ?

Ces deux catégories marquent la différence entre la figure qui fait partie intégrante d'une démonstration et la figure qui guide, ou illustre, une démonstration. L'analyse transversale des exemples de ces catégories conduira finalement à la question beaucoup plus générale de la syntaxe et du symbolisme mathématique.

[217] Cette classification n'est pas la plus fine possible dans le sens où l'on pourrait trouver bien d'autres usages significatifs de la figure en mathématiques. Cependant, ce découpage est suffisant pour les besoins de cette section. Il sera affiné lorsque cela sera nécessaire.

I.3. Figure et valeur démonstrative [218]

I.3.1. Démontrer – illustrer

L'un des résultats obtenus précédemment est que l'esthétique des mathématiques est à chercher au niveau du codage, c'est-à-dire au niveau de l'écriture (non strictement formelle) des démonstrations mathématiques. Il a été aussi établi que le codage apparaît comme le lieu de l'accessibilité et de la compréhension d'un raisonnement, bien plus que ne le permet la rédaction strictement formelle d'une démonstration[219]. Cette accessibilité tient en partie au fait que, lors du codage, la référence par exemplification permet l'économie d'un ensemble d'étiquettes dénotatives. Un simple échantillon, explique Goodman, présente souvent l'avantage de remplacer un amalgame complexe de prédicats[220]. Et c'est probablement la substitution d'un nombre conséquent de prédicats interdépendants par un échantillon pertinent qui justifie le sentiment d'immédiateté que procure l'interprétation des systèmes symboliques fonctionnant selon ce type de référence.

L'exemplification permet de montrer, ou d'exhiber, plutôt que de démontrer, ou d'expliquer. A l'instar de Goodman, Young considère que l'exemplification est le mode de référence privilégié dans les domaines artistiques, et il justifie en partie ainsi la terminologie de « démonstration immédiate » qu'il leur réserve. L'usage des démonstrations immédiates en art et des démonstrations systématiques en science marque, pour Young, la différence fondamentale qu'il y a entre l'art et la science. Il n'affirme pas que la science n'use pas de tel procédé, mais il suggère que, si elle le fait, ce n'est pas pour démontrer quelque chose, comme cela serait le cas en art, mais à la limite pour illustrer un résultat, pour servir d'artifice

[218] Jusqu'à présent, le terme de figure est employé dans un sens large. Il désigne toute marque picturale, tout symbole qui n'appartient pas à un alphabet et qui n'est pas régit par une grammaire. Ce n'est que lorsque seront abordés précisément des questions relatives au fonctionnement symbolique que seront introduit des distinctions, principalement entre image et diagramme. Tant qu'il n'est pas fait mention du contraire, le terme de figure recouvre indifféremment les images et les diagrammes ainsi que tout autre type de symbole pictural.

[219] Cf. Partie III. I. 2. 2.

[220] Cf. [Goodman 1968, 106]

heuristique. Or, on a vu dans les analyses précédentes que des phases argumentatives de démonstrations mathématiques pouvaient êtres entièrement construites à partir de références par exemplification. Cependant, la caractérisation des démonstrations immédiates au sens de Young ne se résume pas à la prédominance de l'exemplification : Young introduit d'autres critères pour délimiter les démonstrations immédiates (artistiques) des démonstrations systématiques (scientifiques) tels que la juxtaposition, l'amplification, la corrélation, etc.

La critique de la thèse de Young, effectuée en première partie de ce travail, montre qu'il manque à celle-ci une étude des démonstrations scientifiques afin de pouvoir décider de leur incompatibilité avec les démonstrations immédiates. J'ai, au cours de cette critique, donné quelques contre-exemples qui montrent comment on peut envisager de mettre en défaut l'argumentation de Young[221]. L'analyse du premier exemple de l'usage de la figure mathématique en tant que démonstration va fournir l'occasion de préciser ce dernier point en montrant comment une démonstration mathématique peut tout à fait répondre à la caractérisation youngienne des démonstrations artistiques.

I.3.2. Figures démonstratives

D'après Dieudonné, les preuves sans mots sont le type de démonstration prédominant chez les géomètres chinois et indiens qui se contentent dès que possible de dire « vois » en guise de démonstration. Loin d'en formuler une critique, Dieudonné mentionne les preuves sans mots pour souligner que le rôle d'une figure mathématique ne peut être systématiquement réduit à celui d'une simple aide pour comprendre une démonstration formelle[222]. Dans le cas d'une preuve sans mot, la figure fait partie intégrante de la démonstration, elle y est indispensable. Elle n'y a donc pas pour fonction d'apporter un éclairage au raisonnement formel, mais elle est au contraire la base du raisonnement. Si l'on peut effectivement substituer une ou plusieurs figures à une rédaction formelle, la

[221] Cf. Partie I. B. II.2.2.

[222] Voir [Dieudonné 1987, 50-52].

figure a alors une fonction argumentative et démonstrative et non une fonction heuristique, elle n'est donc pas en ce sens une simple aide. L'un des objectifs de cette section sera d'analyser les conditions de réalisations d'une telle fonction, argumentative ou démonstrative, par une figure.

I.3.3. Preuves sans mot

Pour commencer, il convient naturellement de donner une caractérisation précise de ce que l'on peut appeler preuve sans mot.

Comme l'appellation l'indique, les preuves sans mot consistent en la donnée d'une ou plusieurs figures judicieuses qui suffisent à elles-mêmes à apporter la certitude qu'une démonstration formelle, logique et rigoureuse est possible. Une preuve sans mot ne fournit pas le détail de chaque étape déductive et de chaque implication, comme le ferait une preuve strictement formelle, mais son mode opératoire est complètement implicite et dépend d'une interprétation correcte des figures. Dans l'article « Démonstrations et certitude en mathématiques », Jean-Paul Delahaye discute de différents types de démonstrations mathématiques, en particulier des preuves sans mot, qu'il définit ainsi :

> « Une preuve sans mot est une suite d'arguments qu'on se formule à soi-même, stimulé et guidé par une figure judicieuse qu'on a sous les yeux, ces arguments ne devant pas laisser la place au moindre doute. » [Delahaye 2005, 38]

Delahaye dresse dans son article un bref survol historique ainsi qu'un état des lieux actuel de l'usage de telles démonstrations. Cette mise au point est suffisante pour montrer qu'elles ne sont pas l'apanage des mathématiques orientales. Le théorème de Pythagore a par exemple était démontré par dissection en 1830 par le mathématicien londonien Henri Perigal, en 1967 le mathématicien américain L. J. Upton[223] démontre celui du partage du disque en deux aires égales par une preuve constituée de deux figures, etc. Les mathématiques occidentales ne sont

[223] Cf. [Upton 1967], [Perigal 1874]

pas en reste quant à la manipulation de ce genre de preuves[224]. En outre, avec le développement de l'outil informatique, une forme plus sophistiquée des preuves sans mots connaît un net essor : il s'agit des preuves animés. Ces dernières partent du même principe, à savoir, fournir par le biais de figure la certitude de la correction d'une proposition géométrique, mais en intégrant une dimension dynamique.

Cependant, il faut souligner une tension entre la théorie et la pratique des preuves sans mot. En effet, si l'utilisation des preuves sans mots n'est pas marginale au sein de la communauté mathématique, elle est par contre généralement proscrite de l'enseignement classique des mathématiques. L'utilisation de figure est dans la plupart des cas enseignée comme un moyen d'illustrer un résultat ou au mieux comme un guide ou une aide pour construire une démonstration formelle mais rarement l'utilisation de figure est présentée comme technique démonstrative. Au contraire, on apprend à se méfier des figures, considérées comme source d'erreurs importantes. Ce point est souligné par Jon Barwise et John Etchemendy dans leur article "Visual Information and Valid Reasoning" où ils contestent le dogme d'une tradition mathématique qui rejette toute forme non linguistique de représentation au sein de ses démonstrations. Selon eux, ce dogme est entretenu par l'enseignement des mathématiques :

> "Psychologists have long been interested in the relationship between visualization and the mechanisms of human reasoning. Mathematicians have been aware of the value of diagrams and other visual tools both for teaching and as heuristics for mathematical discovery. (...) But despite the obvious importance of visual images in human cognitive activities, visual representation remains a second-class citizen in both the theory and practice of mathematics. In particular, we are all taught to look askance at proofs that make crucial use of diagrams, graphs, or other nonlinguistic forms of representation, and we pass on this disdain to our students.(...)
>
> The modern attitude is that diagrams are at best a heuristic in aid of finding a real, formal proof of a theorem of geometry, and at worst a breeding ground for fallacious inferences." [Allwein & Barwise 1996, 3]

[224] On pourra consulter [Nelsen 2000] pour un ouvrage qui collecte un ensemble significatif de preuve sans mot.

Les auteurs de cet article défendent la légitimité de ce qu'ils appellent les preuves hétérogènes ou les déductions hétérogènes (heterogeneous proofs or heterogeneous inferences). Leur argumentation a pour point de départ la remise en question de la croyance selon laquelle l'introduction de figure en tant qu'élément fondamental dans une démonstration serait la porte ouverte à des erreurs d'interprétation et de déduction. En effet, selon ces derniers, la figure n'est pas plus sujette à ce type d'erreur que ne l'est le formalisme standard :

> "First, we note the obvious fact that a wide variety of mistaken proofs and fallacious inferences do not use visual information. These range from the traditional informal fallacies, to the misapplication of formal rules (for example, inadvertently capturing a free variable in a substitution), to mistakes far harder to classify or categorize. And, as we all know, a simple diagram can often be used to pinpoint such an error. The mere existence of fallacious proofs is no more a demonstration of the illegitimacy of diagrams in reasoning than it is of illegitimacy of sentences in reasoning. Indeed, what understanding we have of illegitimate forms of linguistic reasoning has come from careful attention to this form of reasoning, not because it was self-evident without such attention." [Allwein & Barwise 1996, 6]

La thèse majeure qui ressort de ce constat est que c'est un apprentissage particulier qui permet d'acquérir la compétence nécessaire à l'interprétation correcte des systèmes linguistiques ou formels, cette dernière étant ni immédiate ni évidente. Ce qui suggère que la correction de l'interprétation des systèmes visuels dépend à son tour d'une compétence interprétative appropriée. Et, d'après Barwise et Etchemendy, cette dernière ne doit pas pour autant être calquée sur la compétence linguistique :

> "(…) our aim is to develop a semantic analysis of valid inference that is not inextricably tied to linguistic forms of representation." [Allwein & Barwise 1996, 6]

Il semble alors judicieux d'analyser la tension évoquée précédemment entre l'aspect théorique et l'aspect pratique de l'usage des preuves sans mots en termes de modes de lecture et de compétences appropriées et différentes. Ou plus exactement, il me semble que l'on peut expliquer que les preuves hétérogènes, au sens de Barwise et Etchemendy, ne bénéficient pas d'une légitimité théorique (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas considérées comme des

preuves formelles rigoureuses) à cause du fait que leur mode de fonctionnement lui-même n'est pas correctement identifié au niveau théorique. Ce dernier ne doit pas être assimilé au mode de fonctionnement des systèmes linguistiques. En effet, comme l'explique Elgin, le modèle du linguiste ne peut pas s'appliquer aux systèmes picturaux dans la mesure où de tels systèmes sont syntaxiquement denses. Ils ne répondent donc pas de ce fait aux réquisits syntaxiques nécessaires[225] à une telle application :

> « Lexiques et grammaires ne se conçoivent que pour les systèmes dont les symboles sont susceptibles de détermination et de discrimination. Car les lexiques et les grammaires consistent seulement en généralisations qui s'appliquent à des symboles dans la mesure où ils consistent en tokens de types syntaxiques spécifiques. Là où il est impossible de déterminer le type auquel un symbole appartient, il est impossible de le tenir pour sujet à des règles lexicales et grammaticales. Et là où il est impossible de dire de deux symboles qu'ils appartiennent au même type, il est impossible de les considérer comme syntaxiquement interchangeables. » [Goodman Elgin 1988, 117]

La densité syntaxique des systèmes picturaux implique une différence au niveau de leur fonctionnement comparativement à des systèmes articulés. C'est la raison pour laquelle toute tentative de traduction d'un modèle d'analyse valable pour les seconds en un modèle d'analyse valable pour les premiers conduits inévitablement à un échec (tout au moins, tel est le cas chaque fois que le modèle en question fait intervenir de manière plus ou moins explicite les réquisits syntaxiques de disjointure et d'articulation). Ce qui ne signifie pas que les systèmes denses, en particulier les systèmes picturaux, ne peuvent pas répondre d'une logique de fonctionnement. Celle-ci doit simplement être adaptée à leurs particularités. Comme l'explique Pouivet, les systèmes denses et non disjoints n'en sont pas moins des systèmes symboliques formels, seulement :

> « La différence entre une image et un texte, entre le verbal et le pictural, relève d'une différence de fonctionnement syntaxique entre deux systèmes formels.(…) Il est inutile de supposer que [l'image] possède une structure quasi-perceptive. Il n'y a pas d'essence iconique de l'image, mais une lecture dans un

[225] La densité est un obstacle à la différentiation finie et les systèmes picturaux ne sont pas disjoints, cf. Partie II. II. 2. 1.

> système formel non disjoint (dense) et non articulé d'un ensemble de symboles. » [Pouivet 1996, 69]

Le fait de comprendre une figure est ainsi dépendant d'un mode de lecture approprié qui, comme le montre Elgin, n'a rien à voir avec la possibilité de faire intervenir des règles universelles qui déterminent l'identification et la manipulation des symboles entrant dans sa composition[226].

L'ensemble de ces dernières réflexions permet de revenir au problème de la légitimité des preuves sans mot. En effet, j'ai parlé d'une tension, d'une divergence, que l'on peut observer entre la légitimité théorique de ce type de preuve et leur utilisation en pratique dans le travail de recherche mathématique. Ne peut-on voir là une lacune, sinon une erreur, de la logique qui voudrait pouvoir rendre compte de la même façon des preuves formelles standard et des preuves hétérogènes ? Car, si le mathématicien doit comprendre un symbole ou un système symbolique, la logique doit, elle, pouvoir rendre compte de cette compréhension. Ce qui à bien des égards sont deux choses différentes. Il se peut en effet que l'on comprenne un symbole sans pour autant pouvoir analyser et expliquer (c'est-à-dire rendre compte) cette compréhension. De la même façon que l'on peut s'exprimer correctement, grammaticalement et syntaxiquement, sans pour autant être à même de rendre compte des règles syntaxiques et grammaticales qui permettent justement cette correction[227].

---

[226] Cf. [Goodman Elgin 1994, 117]

[227] Dans l'article de Kathleen Hull "Why Hanker after Logic ? Mathematical Imagination, Creativity and Perception in Peirce's Systematic Philosophy." on pourra trouver une solution au problème de la tension entre la théorie et la pratique mathématique en termes de diagrammes peircéens :

> "Today, many psychologists believe that thinking visually allows for creative breakthroughs and flexibility which a rigidly structured language and a consciously applied deductive logic don't readily permit. Constructing diagrams may result in finding hidden relationships and patterns which were obscured by our habitual contextual expectations. Peirce seems to have known that sketching and diagramming thoughts (the essence of mathematical thinking) is an integral part of the creative process. He gives us phenomenological and logical tools to understand this process. I want to suggest that the relationship between mathematics and logic in Peirce's architectonic reflects this awareness. Mathematics is the activity of reasoning, while logic is the theory of reasoning. In any inquiry, the non-verbal, playful manipulation of signs and images in often the source of real innovation. After a solution is found, then words may be used to translate a sign into logical, verbal form. We say that mathematical thinking can be translated into a form of logical inference *as if* it occurred in just that way; not that is actually followed this form." [Hull 1994, 290]

La question est alors de savoir si la logique mathématique est à même de rendre compte de la compréhension mathématique d'une figure, étant donnée la densité syntaxique de tels symboles[228].

Le procédé logique usuel pour décider de la correction d'une preuve passe par l'identification de chacun des symboles rentrant dans sa composition et par la vérification du bien fondé de l'application des règles qui permettent l'enchaînement de chaque étape. Un tel procédé nécessite donc que le système symbolique auquel on veut l'appliquer soit articulé et disjoint. Mais est-ce le cas des figures utilisées en mathématiques? Si l'on considère que ces dernières sont des symboles picturaux, on serait tenté, (en invoquant la densité syntaxique), de répondre non. On pourrait alors conclure que le procédé logique usuel d'analyse d'une preuve n'est pas adapté au cas des preuves sans mot.

Mais raisonner ainsi, c'est ne faire aucun cas des différences de fonctionnements symboliques parmi des systèmes picturaux également syntaxiquement denses. Le problème de cette argumentation est sa trop grande généralité : elle ne distingue pas les figures qui malgré la densité, sont décomposables en symboles aisément identifiables et manipulables de celles dont ce n'est pas le cas. En effet, de la même façon que tout texte, qu'il soit littéraire ou non, est sémantiquement dense, cette caractéristique n'a pas le même rôle : elle est généralement constitutive dans le premier cas alors qu'elle est contingente dans le second. Il va donc être nécessaire d'analyser plus précisément les cas de contingence de la densité syntaxique. Dans cette optique, il faut reprendre en premier lieu certains des résultats obtenus précédemment[229].

Pour plus de détails, cf. [Hull, 1994].

[228] Ceci peut être vue comme la forme moderne d'un argument de Poincaré contre le formalisme logique non esthétique d'une démonstration.

[229] Je reprends alors certains points qui ont été traités dans la section II.2.2. de la deuxième partie en y apportant des compléments informatifs et en détaillant l'interprétation.

I.4. Image et diagramme

I.4.1. Questions de fonctionnement

Dans *Langages de l'art*, le réquisit syntaxique de densité apparaît comme caractéristique des systèmes non linguistiques en général, des systèmes picturaux en particulier[230]. Mais cette distinction s'avère insatisfaisante dans la mesure où, si elle marque la différence entre le pictural et le non pictural, elle ne permet pas de distinguer parmi les systèmes picturaux les diagrammes des images ou les schémas des esquisses. Goodman souligne cette insuffisance dans Reconceptions en Philosophie :

> « Jusqu'à ce jour, dans mes écrits, je n'ai nulle part proposé une définition de la dépiction ; je me suis contenté de suggérer que la classification quotidienne des symboles qui distingue les images des non-images est étroitement apparentée à la frontière qui sépare les symboles appartenant à un système dense ou « analogique » et ceux qui appartiennent à un système de différenciation finie ou « digital ». Il se peut que le fait d'être analogique passe pour une condition nécessaire à la dépiction, mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante. Un thermomètre non gradué indique les températures dans un système analogique, mais il n'en offre pas une image, au sens courant du terme. » [Goodman 1988, 131]

La classification en pictural ou non pictural selon le réquisit de densité syntaxique définit des catégories trop larges pour être vraiment pertinente au niveau d'une analyse sémiologique : on ne peut se satisfaire d'une catégorie picturale qui recouvre autant les dessins au trait que les diagrammes, les peintures les plus réalistes que les radiographies médicales. Comme on l'a déjà vu, c'est l'introduction du réquisit de saturation relative qui permet à Goodman de compléter sa classification[231]. Ce dernier apparaît alors comme un moyen de distinguer parmi les systèmes picturaux ceux qui dépeignent de ceux qui décrivent. Dans le premier cas, le système est syntaxiquement dense et relativement saturé tandis que dans le second cas, le système est syntaxiquement dense mais atténué (faiblement saturé). On parlera alors d'« image » lorsque le

[230] Cf. [Goodman 1968, 168-176 et 295]

[231] Cf. partie II section II.2.2

système pictural sera hautement saturé tandis que le terme de « diagramme » sera réservé au cas d'atténuation[232]. Il convient de rappeler que la classification précédente dépend de tranches spatio-temporelles. En effet, un système pictural peut fonctionner comme image ou comme diagramme selon l'importance du nombre de ses aspects qui entre en jeu lors de son interprétation, cette dernière étant contextuellement déterminée. C'est ce dernier point qui justifie que l'on puisse classer en image ou en diagramme deux schémas picturaux parfaitement identiques au niveau syntaxique.

L'ensemble de ces réflexions invite à reconsidérer la question initiale quant à la possibilité de la logique à analyser les preuves sans mots. Il ne suffit pas de souligner la densité syntaxique des figures mathématiques, encore faut-il déterminer si elle est constitutive lors de leur interprétation. Autrement dit, il va falloir se pencher sur le mode de fonctionnent de ce type de figures avant de pouvoir statuer sur la façon dont on peut en rendre compte.

I.4.2. Densité syntaxique et figures mathématiques

La complexité de la question qui porte sur la représentation en général a conduit Goodman à modifier sa méthode d'analyse. Parti d'une perspective de critériologie d'ensemble (qui a abouti à la distinction entre verbal et pictural, sur la base du critère de densité syntaxique), Goodman adopte finalement une stratégie du pas-à-pas pour tenter de délimiter la multiplicité des schémas picturaux[233]. De manière analogue, je propose de montrer la façon dont on peut établir les frontières entre différents types de figures mathématiques. J'ai déjà opéré une classification générale basée sur un critère fonctionnel (les figures comme argument démonstratif et les figures comme support intuitif)[234]. Chacune de ces deux familles recouvre cependant des situations différentes que l'on ne peut pas confondre dans une perspective d'analyse du compte rendu. Il ne s'agit pas de

[232] Cette appellation permet de rendre compte de l'usage quotidien de ces deux termes : une image dépeint tandis qu'un diagramme décrit.

[233] Cf. [Goodman 1988, 129-141] et [Morizot 1996, 169]. En fait, Goodman ne montre pas à proprement parler quelles sont les frontières entre les différents systèmes picturaux mais il suggère les outils adéquats nécessaire à cette entreprise.

[234] Cf. Partie III. B. I.2.

produire un catalogue complet de tous les cas de figure – aux deux sens du terme – ce qui par ailleurs semble impossible, mais de fournir des outils d'analyse sémiologique capable d'être adaptés.

Cela étant, je rappelle que l'ambition générale de cette section est de vérifier si un fonctionnement esthétique peut être requis pour l'interprétation mathématique d'une figure mathématique. J'ai choisi de traiter en premier le cas des preuves sans mot comme exemple de figure à valeur démonstrative (c'est-à-dire comme exemple issue de la première famille des figures). Les remarques préliminaires à ce propos ont déterminé l'hypothèse selon laquelle la logique mathématique usuelle n'est peut-être pas adaptée pour rendre compte de ce type de preuve. Cette hypothèse devra donc être testée sur les exemples choisis. On remarquera alors que les deux tâches à effectuer se complètent l'une l'autre, ou tout au moins elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre : l'enquête sur le rôle de la densité syntaxique des figures mathématiques et sur leur saturation relative permet de statuer en même temps sur l'introduction d'éléments esthétiques dans le raisonnement et sur la capacité de la logique à pouvoir, ou non, rendre compte de tels raisonnements.

Le premier exemple traité est celui d'une preuve sans mot d'un théorème attribué à Hippocrate de Chios, choisi pour sa simplicité et le peu de connaissances mathématiques nécessaires à la compréhension de son énoncé et de sa démonstration[235].

[235] Je précise que l'ensemble des réflexions sur ce théorème et sa démonstration nécessite que l'on se place dans un cadre de géométrie euclidienne. Sans le stipuler à nouveau, ceci est à considérer comme un prérequis à toutes les démonstrations de cette section.

II. 1ère application : les lunules d'Hippocrate

II.1. Preuve sans mot du théorème des lunules

Le théorème dont il va être question établit une égalité entre la somme des aires de deux lunules construites à partir d'un triangle rectangle et de l'aire du triangle rectangle lui-même. On peut en donner l'énoncé suivant :

Théorème :

> L'aire d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des lunules obtenues en ayant soustrait le demi-cercle construit sur l'hypoténuse aux demi-cercles construits sur les deux autres côtés du triangle.

Une preuve sans mot de ce théorème consiste en la donnée de trois figures telles celles qui sont proposées à la page suivante[236] :

[236] Les figures proposées sont inspirées de la preuve sans mot que donne Delahaye dans son article *Démonstrations et certitude en mathématiques* [Delahaye 2005, 38-43].

Fig. 1

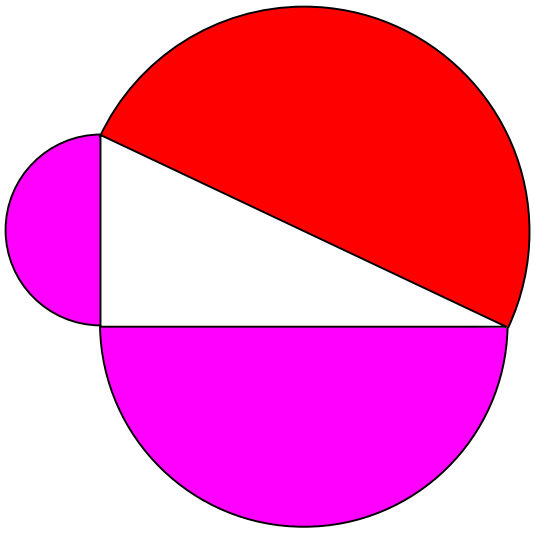


Fig.2

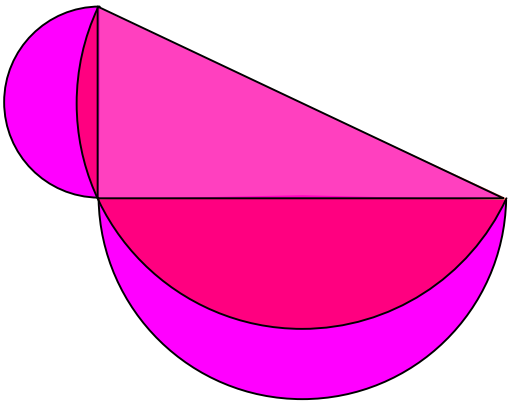
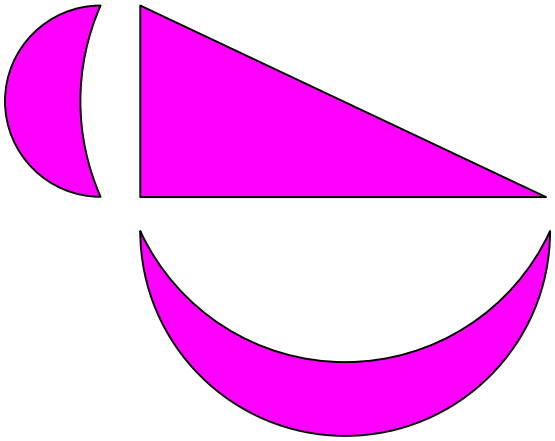


Fig.3



Les figures contiennent tous les éléments qui permettent, grâce à une lecture adéquate, de démontrer le résultat. Je propose d'écrire dans un premier temps le commentaire mathématique (mental) qui découle de cette lecture. J'analyserai ensuite les conditions de réalisations de ce commentaire.

Notons tout d'abord que les trois figures fournissent une explication plus claire, ou tout au moins plus explicite, quant aux données du théorème (les lunules) et à son résultat, que ne le fait le théorème sous sa forme rédigée (on retrouve ici l'un des avantages des échantillons : celui de remplacer avantageusement un amalgame de prédicat).

Figure 1

La figure 1 permet de saisir une première égalité : l'aire du grand demi-cercle est égale à la somme des aires des deux petits demi-cercles. Autrement dit, l'aire coloriée en rouge est égale aux aires coloriées en rose.

Le raisonnement est le suivant :

1) le triangle étant rectangle, on peut lui appliquer le théorème de Pythagore : la somme des carrés de la longueur de ses deux cotés et égale au carré de la longueur de son hypoténuse.

2) l'aire d'un demi-cercle est exprimée par la formule suivante : πr^2, où r est le rayon du cercle. La somme des aires des deux petits demi-cercles est proportionnelle à la somme des carrés de leur rayon, donc elle est proportionnelle à la somme des carrés des longueurs des côtés du triangle. En effet, si l'on appelle a et b les longueurs des côtés du triangle et c celle de l'hypoténuse, on a les égalités suivantes :

$a^2 + b^2 = c^2$ (d'après le théorème de Pythagore)

et

$\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8} c^2$ (on ne modifie pas une égalité en multipliant les membres de droite et de gauche par un même nombre)

en développant la dernière égalité, on obtient :

$$\left(\frac{\pi}{8}\right)a^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)b^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)c^2$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Ce qui traduit bien l'égalité entre la somme des aires des demi-cercles et celle du grand demi-cercle puisque leur rayon est exprimé respectivement par $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ et $\frac{c}{2}$.

En langage plus formel, on a donc l'égalité suivante :

$$A + B = C$$

où A et B sont les aires des deux petits demi-cercles et C celle du grand demi-cercle.

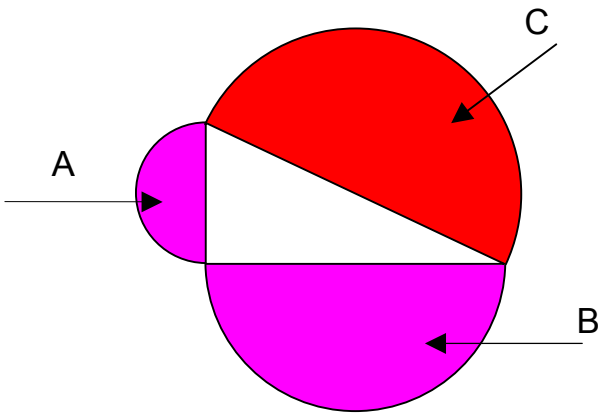
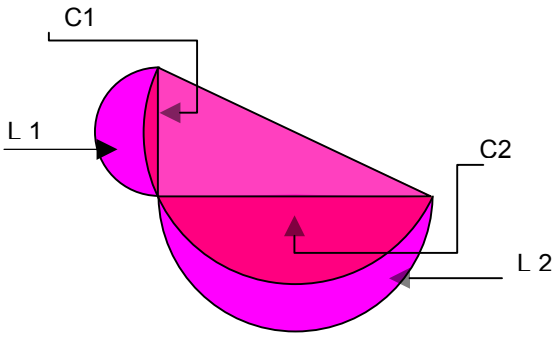


Figure 2

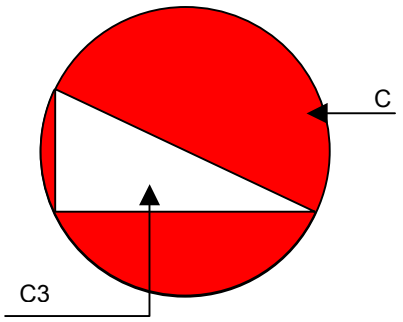
La figure 2 met en évidence un découpage des aires de chacun des trois demi-cercles :

L'aire de chacun des deux petits demi-cercles apparaît comme somme de l'aire d'une lunule (partie rose) et d'une partie délimitée par un arc de cercle et un coté du triangle (partie violette)



$A = C_1 + L_1$ $B = C_2 + L_2$

L'aire du grand demi-cercle apparaît comme somme de l'aire du triangle rectangle et des deux aires délimitées par un arc de cercle et par l'un des petits côtés du triangle (partie violette)



$C = C_1 + C_2 + C_3$

Ce découpage met en évidence le fait que les aires des petits demi-cercles peuvent être exprimées en fonction des aires des lunules et d'une partie du grand demi-cercle.

Figure 3

La dernière figure invite à reconsidérer l'égalité obtenue avec la figure 1 en fonction du découpage des aires des demi-cercles pour obtenir le résultat recherché. En effet, si l'on injecte le découpage dans l'égalité précédemment obtenue, on obtient :

$$C_1 + L_1 + C_2 + L_2 = C_1 + C_2 + C_3$$

Les aires C_1 et C_2 étant communes de part et d'autre de l'égalité, on peut les simplifier pour avoir finalement :

$$L_1 + L_2 = C_3$$

Ce qui traduit bien le résultat escompté, à savoir : l'aire d'un triangle rectangle (C_3) est égale à la somme des aires des lunules construites sur ses côtés autre que l'hypoténuse ($L_1 + L_2$).

II.2. Analyse sémiologique

L'analyse de cette démonstration a pour but de déterminer le mode de fonctionnement requis pour l'interprétation correcte de ces figures. Il s'agit d'examiner les variétés de références en jeu ainsi que les critères syntaxiques qui participent au fonctionnement symbolique adéquat.

La clé de la démonstration réside dans le découpage de l'aire de la somme des deux demi-cercles et dans celui de l'aire du grand demi-cercle. En effet, c'est précisément ces découpages qui permettent de décrire ces aires, que l'on sait égales par ailleurs, en fonction de leur partie commune. Le résultat recherché devient alors évident. La déduction tient au fait que si deux aires, mettons A et B sont égales et si toutes deux peuvent être décrites en fonction d'une partie commune, mettons C, alors on peut naturellement déduire que les aires obtenues

en ayant soustraie cette partie commune sont encore égales. En langage formel, cela peut s'écrire comme suit :

Si l'on a les égalités suivantes :

$A = B$

$A = C + A'$

$B = C + B'$

Alors on a l'égalité : $A' = B'$

Dans notre cas, les aires des petits demi-cercles auxquelles on soustrait la partie visiblement commune avec celle du grand demi-cercle correspondent à la somme des aires des lunules, tandis que l'aire du grand demi-cercle amputé de la partie commune est celle du triangle rectangle. Or on cherche justement à montrer l'égalité entre la somme des aires des lunules et l'aire du triangle rectangle. Autrement dit, la clé est bien d'établir le découpage qui met en avant la partie commune, puisqu'une fois qu'il est établi, on obtient le résultat cherché. Ce qui va donc nous intéresser en premier lieu est de déterminer comment les figures conduisent à considérer le découpage en question.

Pour ce faire, il faut souligner une première différence entre le mode de lecture adéquat d'une démonstration formelle et celui d'une preuve sans mot.

Le commentaire que j'ai écris pour expliciter la démonstration du théorème laisse penser que les figures 1, 2 et 3, qui constituent ce que l'on appelle la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate, sont trois figures bien distinctes telles que chacune contribue à élaborer une étape de la démonstration. Or, cette conception est conséquente à la rédaction (quasi) formelle du commentaire. En effet, lorsque l'on écrit une démonstration on doit nécessairement respecter un ordre au sein duquel on ne peut pas faire intervenir dans une étape des éléments qui n'interviennent que dans une étape ultérieure. Une démonstration rigoureusement logique est une succession de phases argumentatives qui s'enchaînent les unes aux autres selon l'ordre établi par la succession. Le fait qu'une preuve sans mot soit constituée uniquement de figures implique une lecture différente qui présente

notamment une plus grande souplesse. En effet, la lecture n'est pas dans ce cas assujettie à un ordre imposé : on voit en même temps les trois figures. L'interprétation de chaque figure peut ainsi être guidée par la donnée des autres figures, ou tout au moins, elle peut être faite en fonction des autres figures. A cause de cela, il serait plus juste de présenter la preuve sans mot comme une seule figure elle-même constituée de différents éléments (que nous avons appelé jusqu'ici figure 1, figure 2 et figure 3 et qui seront dorénavant désignés par : élément 1, élément 2 et élément 3) et non comme trois figures distinctes.

Cette différence de lecture prend tout son sens pour l'interprétation de la preuve sans mot. En effet, la prise en compte de l'influence mutuelle des éléments de la figure les uns envers les autres est ce qui rend manifeste certains aspects de la figure. C'est-à-dire que c'est ce qui permet de distinguer parmi les multiples étiquettes possédées par la figure, celles qui sont exemplifiées de celles qui sont simplement possédées (l'exemplification, c'est la possession plus la référence). Ma thèse est alors que la figure permet d'établir le découpage des aires (étape clé de la démonstration) en l'exemplifiant. Ce qui peut être justifié ainsi :

Appelons P la propriété qui traduit ce découpage[237].

L'élément 2 de la preuve sans mot possède P (P est vérifiée par les demi-cercles de l'élément 2)

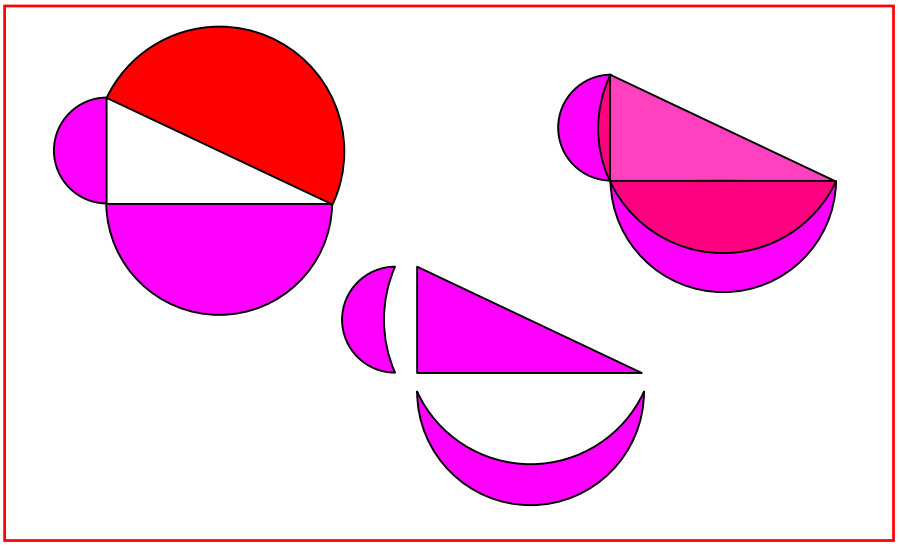
L'élément 2 fait référence à P compte tenu des éléments 1 et 3.

[237] Compte tenu de la lourdeur relative à la tâche de cette section – qui s'apparente à une tentative de traduction d'une figure par un texte – je simplifie ici en remplaçant le détail de la situation de découpage par la simple lettre P. Cela étant, s'il fallait expliciter P, il faudrait en fait deux étiquettes. La première serait : «être une aire qui admet un découpage en deux parties telles que l'une égale à une quantité C et l'autre égale à la somme de deux lunules construites sur le triangle rectangle T» tandis que la seconde serait : « être une aire qui admet un découpage en deux parties, l'une égale à une quantité C et l'autre à l'aire du triangle rectangle T ».

> En effet, l'élément 1 permet de saisir l'égalité entre les aires roses et l'aire rouge, l'élément 3 quant à lui montre ce que l'on cherche à vérifier. La prise en considération de ces deux informations conduit à sélectionner l'étape charnière (P).

L'interprétation correcte de la figure (c'est-à-dire celle qui conduit à élaborer le raisonnement démonstratif) dépend du mode de lecture avec lequel on choisit de la faire fonctionner. La clé de l'interprétation réside principalement en la sélection d'une étiquette exemplifiée (P). Ce premier point renseigne sur le fait que le mode de lecture doit admettre une direction exemplificationnelle. Ce qui signifie que l'on ne doit pas uniquement s'intéresser à ce que la figure dénote mais aussi, et surtout, à ce qu'elle exemplifie. Or, comprendre ce que la figure exemplifie sous-entend que l'on sache repérer les références afin de repérer parmi les instances celles qui sont des échantillons. Cette dernière compétence dépend à son tour d'une appréhension de la figure dans son ensemble et non comme une simple juxtaposition d'éléments disjoints. Bien que non expressément destinée au cas des preuves sans mot, on retrouve ici l'injonction poincaréenne qui stipule que, pour comprendre une démonstration, il faut pouvoir en saisir l'ensemble en même temps que les détails. Comment traduire cette compétence d'un point de vue sémiologique ? Je suggère que l'on puisse faire appel ici à deux des symptômes de l'esthétique goodmanienne. Le premier est la densité syntaxique. Ce réquisit stipule qu'entre deux marques quelconques il y en a toujours une troisième. Comme avec la densité sémantique, c'est plutôt les corollaires de ce réquisit qui se révèlent pertinents pour l'analyse. La conséquence de ce symptôme sur le fonctionnement symbolique d'un système effectivement syntaxiquement dense est l'impossibilité d'isoler les marques les unes des autres et de les traiter individuellement, indépendamment les unes des autres. Et c'est bien ce qui a lieu avec l'exemple de la preuve sans mot, puisque son interprétation correcte dépend de la capacité à considérer la figure dans sa globalité et non comme une juxtaposition disjointe de marques isolables. Je suggère alors qu'une représentation optimale en termes d'interprétation probante serait davantage une

configuration dans laquelle un ordre artificiel n'est pas introduit entre les trois principaux éléments :



Cette aptitude n'est cependant pas suffisante pour rendre précisément compte de la compétence nécessaire à la bonne compréhension de la preuve. Comme on l'a vu, le raisonnement argumentatif sur la figure passe en premier lieu par un examen sans discrimination de chacun de ses aspects et des relations entre ses divers éléments. Autrement dit, il faut savoir faire acte d'une saturation relative. Ma conclusion est donc que l'on peut traduire la compétence appropriée à l'interprétation de la preuve sans mot en termes de densité syntaxique et de saturation relative. La première traduit la capacité à faire une lecture globale de la figure, c'est-à-dire faisant cas de l'interdépendance de ses composants, tandis que la seconde traduit l'aptitude à considérer comme constitutif l'ensemble des traits et aspects de la figure. Ces deux facettes du mode de lecture d'une preuve sans mot sont l'interprétation goodmanienne de la méthodologie poincaréenne : il faut pouvoir saisir l'ensemble en même temps que les détails.

L'introduction de la saturation syntaxique au sein d'une analyse d'une preuve hétérogène (au sens de Barwise) peut toutefois être sujet à contestation. En effet, Goodman illustre la saturation en comparant un dessin du mont Fuji avec une courbe de température. Il évoque la saturation pour traduire le fait que tous les aspects, ou presque, du premier dessin sont constitutifs (tels que l'épaisseur du trait, son empâtement ou sa finesse la couleur, le papier, etc.) alors que dans

le cas de la courbe seuls les rapports des ordonnées avec les abscisses sont importants. On pourra alors objecter que la finesse ou l'épaisseur du trait ou encore la taille de la figure de la preuve sans mot, sont des traits contingents pour son interprétation. Mais dire ceci c'est oublier que la saturation goodmanienne est un symptôme relatif et non un symptôme absolu. Ce qui signifie qu'un système est toujours saturé relativement à un autre et non en lui-même. Un même dessin peut être saturé ou non, selon le système dans lequel on choisit de le faire fonctionner. Ainsi, la courbe évoquée ci-dessus peut être saturée si elle est considérée comme une représentation du mont Fiji, et atténuée si elle est considérée comme une courbe de température. La figure de la preuve sans mot a été jusqu'à présent considérée comme une preuve mathématique, c'est-à-dire comme le codage de la démonstration d'une assertion et non comme l'illustration d'une assertion. Et c'est au niveau de cette différence de fonction que l'on peut, me semble-t-il, mesurer la saturation relative : la figure est saturée dans le premier cas relativement au second. Dans le premier cas de fonctionnement, c'est-à-dire lorsque la figure tient le rôle d'une démonstration, tous ses aspects sont susceptibles, comme on va le voir, de contribuer à l'interprétation.

Dans l'exemple que j'ai proposé, le premier élément de la figure est constitutif pour l'interprétation. Il permet de faire référence au théorème de Pythagore et d'établir l'égalité entre la somme des aires des deux petits demi-cercles et celle du grand demi-cercle. Pour cette référence, la construction de l'élément n'est pas arbitraire. On aurait pu en effet tracer ce demi-cercle, comme il l'est fait dans le deuxième élément, vers l'intérieur du triangle (d'ailleurs, l'énoncé du théorème invite plutôt à choisir cette configuration, puisqu'il concerne les lunules et que ces dernières sont mises en exergue lorsque le grand demi-cercle est orienté vers l'intérieur du triangle). L'élément obtenu aurait alors été équivalent d'un point de vue dénotationnel avec l'élément 1 de la figure (tous deux concordent avec la classe des figures constituées d'un triangle rectangle et de trois demi-cercles dont les diamètres sont les côtés du triangle). Mais, d'un point de vue exemplificationnel, les deux configurations ne sont pas équivalentes : la première, au contraire de la seconde, exemplifie l'égalité que l'on peut établir entre les aires des demi-cercles en mettant en évidence le rapport entre les aires en

question et les côtés du triangle. La question de savoir pourquoi la première configuration plutôt que la seconde, met en évidence ce rapport est une affaire de convention tacite établie par l'usage. Autrement dit, c'est par rapport à l'illustration standard qu'il faut se baser pour comprendre la différence exemplificationnelle entre les deux configurations. L'une et l'autre des configurations fournissent une représentation picturale acceptable du rapport évoqué ci-dessus mais la première, au contraire de la seconde y fait référence de manière directe. Ce dernier point est conséquent à l'usage standard. Vouloir s'interroger sur les raisons qui ont fait que l'une ou l'autre configuration s'est stabilisée nécessite d'entreprendre une recherche comportant une dimension psychologique et historique, ce qui est ici hors de propos. Cela étant, dans le cadre du présent travail, il est possible d'apporter une partie de la justification en notant que la première configuration est plus simple (relativement à l'interprétation de rapport) que l'autre dans le sens où elle ne présente pas les intersections (inutiles) que présente la seconde. Comme je l'ai déjà montré dans l'étude de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il est possible de traduire la simplicité en termes de saturation[238]. En effet, la première configuration est plus simple que la seconde dans la mesure où elle est relativement plus saturée, puisque dans son cas il n'y a pas de complications de détails inutiles (les chevauchements de traits entre le grand demi-cercle et le reste des éléments). La saturation entendue comme un critère de simplicité fournit par suite un moyen de comprendre pourquoi telle configuration plutôt qu'une autre se stabilise par l'usage pour acquérir un statut de standard. La stabilisation d'une configuration (dans le sens où elle devient standardisée) justifie que l'exemplification soit effective, c'est-à-dire que, non seulement la configuration constitue une illustration du résultat qui l'a dénote mais en plus elle en constitue un échantillon, elle y fait référence. En ce sens, on peut dire alors que la configuration devient un codage et non une simple illustration, d'un résultat[239]. Ce qui justifie son intervention au sein d'une preuve. On remarquera que l'on peut ainsi rendre compte des choix opérant en matière de standardisation, c'est-à-dire

[238] Cf. Partie III I.2.3.

[239] Le résultat sur le rapport des aires dénote chacune des configurations. La première configuration en est un échantillon (elle y fait référence par exemplification) tandis que la seconde n'en est qu'une instance (elle concorde avec le résultat mais n'y fait pas référence directement). Dans le premier cas, la chaîne référentielle est directe et bidirectionnelle ce qui justifie que l'on parle de codage à son propos. Dans le second cas la chaîne référentielle est unidirectionnelle. Cependant, la seconde figure peut faire aussi référence au résultat mais de manière indirecte : il faut d'abord établir l'équivalence extensionnelle entre les deux configurations.

les motivations qui amènent à l'élection d'une forme plutôt qu'une autre pour un usage standard, par les biais de la symptomatologie esthétique de Goodman puisque les critères identifiés sont la saturation et l'exemplification. Ce résultat permet d'apporter une réponse à la question que se pose Rostand au terme de son analyse des *Procédés de la pensée mathématique* :

> « Ne peut-on interpréter toutes les opérations arithmétiques, algébriques, analytiques, voire formelles, à la lumière d'une *Gestalttheorie*, c'est-à-dire en remarquant que le choix d'une forme, témoigné par l'importance qui lui est accordée dans le développement des mathématiques, atteste qu'elle est une bonne forme, et que pareillement le choix d'un type d'opération atteste qu'elle est une bonne opération, de sorte qu'en fin de compte le meilleur critère capable de s'appliquer aux procédés fondamentaux des mathématiques est d'ordre esthétique ? » [Rostand 1985, 98]

Le choix de l'orientation du grand demi-cercle est donc ni arbitraire ni contingent lorsque l'on veut faire fonctionner la figure comme une preuve du théorème d'Hippocrate. Maintenant, dans le cas où l'on voudrait utiliser la même figure non pas pour démontrer ce théorème mais pour l'illustrer, alors le choix de la construction de l'élément 1 est non seulement contingent mais l'élément 1 lui-même s'avère inutile ou en tous cas redondant. En fait, dans ce cas de fonctionnement, seul l'élément central (2) de la figure est nécessaire pour remplir correctement ce rôle. Il est suffisant pour comprendre ce que le théorème signifie alors les trois éléments sont nécessaires pour montrer le théorème. On pourrait encore mentionner l'usage des couleurs pour justifier la saturation relative de la figure en tant que preuve par rapport à la figure en tant qu'illustration. Ces dernières contribuent à mettre en valeur les éléments clés de la démonstration alors qu'elles ne sont pas indispensables pour l'illustration du résultat.

L'étude de la saturation relative sur l'exemple des lunules conduit naturellement à se demander si la distinction entre la figure en tant que preuve d'un résultat et la figure en tant qu'illustration d'un résultat ne gagnerait pas à être explicitée en termes d'image ou de diagramme. Dans la théorie goodmanienne, un même schéma pictural peut fonctionner comme image lorsque le nombre de ses aspects à fonctionner symboliquement est élevé (schéma saturé) ou comme

diagramme lorsque son fonctionnement symbolique nécessite la prise en considération de peu d'éléments. On peut alors dire que la figure proposée dans l'exemple constitue une preuve sans mot du théorème d'Hippocrate sous réserve qu'on la fasse fonctionner en image et qu'elle en fournit une illustration lorsque elle est considérée comme diagramme.

La généralisation de ce résultat nécessiterait un travail de recherche à part entière dont l'étude de cet exemple légitime l'entreprise. Cependant, l'étude des exemples qui vont suivre devrait fournir l'occasion d'affiner les outils et les stratégies de recherche dans cette direction.

II.3. Synthèse esthétique

L'analyse du fonctionnement symbolique approprié au cas des preuves hétérogènes montre qu'un fonctionnement esthétique peut être requis pour l'interprétation d'une figure mathématique en tant que preuve. Ce résultat apparaît comme synthèse des différents niveaux d'investigation de l'analyse :

- Au niveau syntaxique, il a été établi que l'interprétation correcte de la preuve sans mot, c'est-à-dire d'une construction géométrique, passe par une exploitation de la densité syntaxique de la figure ainsi que par la prise en considération de nombreux traits et aspects de la figure (saturation). Ce premier résultat a apporté la conclusion suivant laquelle le potentiel démonstratif de la figure est révélé par un fonctionnement en *image* de cette dernière.

- Au niveau sémantique, ou référentiel, la nécessité de prendre en considération les aspects exemplifiés par la figure pour l'interpréter correctement (i.e. en tant que preuve) montre que le fonctionnement symbolique doit se situer dans un contexte exemplificationnel et non uniquement dénotatif. La référence de la figure vers la démonstration du théorème est multiple et complexe dans la mesure où les symboles en jeu ont à la fois un statut d'échantillon (instance de certaines propriétés. Par exemple, le triangle rectangle de la figure exemplifie un

cas d'application du théorème de Pythagore) et un statut d'étiquette (le même triangle rectangle dénote tous les triangles rectangles)

Dans une perspective goodmanienne, la figure mathématique présente une valeur esthétique, puisque quatre des cinq symptômes de l'esthétique ont été identifiés lors de l'analyse de son fonctionnement symbolique.

La mise en lumière de l'aspect esthétique du fonctionnement requis pour la figure en tant que preuve montre qu'en fait la figure mathématique contribue à la valeur esthétique de cette science et non uniquement à son mérite esthétique. En effet, la question initiale de cette section était de savoir si la figure (mathématique), au-delà d'un certain mérite esthétique dû à des propriétés esthétiques classiques telles que la symétrie, l'ordre, l'harmonie, etc., pouvait relever d'une valeur esthétique des mathématiques, c'est-à-dire si son fonctionnement symbolique en tant que symbole mathématique comportait une dimension esthétique au sens de Goodman.

L'une des raisons qui a motivé le choix de la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate est la neutralité esthétique, si l'on peut dire, qu'elle présente en tant qu'objet visuel. La figure proposée ne témoigne pas particulièrement de qualités habituellement associées à la beauté des figures géométriques. Pourtant cette figure, comme d'autres du même type (par exemple la preuve sans mot du théorème de Pythagore par Perigal) suscitent dans les articles ou ouvrages qui leur sont consacrés des commentaires sur leur beauté et leur attrait esthétique. Delahaye par exemple, parle des preuves sans mot citées ci-dessus comme étant parmi « les plus beaux exemples de merveilleuses démonstrations mathématiques »[240]. Sans une perspective fonctionnelle de l'esthétique, il semble difficile d'accréditer l'attribution de tels qualificatifs. La théorie de l'esthétique de Goodman permet de justifier et de comprendre l'aspect esthétique de ce genre de preuve : c'est au niveau de leur fonctionnement qu'il se situe et non au niveau de leurs qualités ou propriétés visuelles indépendantes de leur interprétation mathématique. Autrement dit, dans le cas des preuves sans mot, l'aspect

[240] Cf. [Delahaye 2005, 41]

esthétique est dépendant de l'interprétation de la figure en tant que symbole mathématique.

Si cela est correct, alors on peut dire que même dans les domaines géométriques[241], l'esthétique en mathématique s'apparente plus à une méthode qu'à une finalité. Dans l'exemple traité, c'est le mode opératoire pour aboutir au résultat (c'est-à-dire la démonstration du théorème) qui est esthétique et non le résultat en lui-même. Ce dernier point contribue alors à rapprocher la méthode mathématique des méthodes artistiques, en particulier les démonstrations mathématiques des démonstrations artistiques. Comme je l'ai rappelé dans l'introduction de cette section, Young défend la thèse selon laquelle les méthodes de démonstrations en art et en mathématiques sont radicalement différentes. L'ensemble de l'analyse des preuves sans mot fourni à nouveau des contres arguments à cette thèse[242]. Cependant, on pourra objecter que les outils que j'ai utilisés pour cela ne sont pas ceux que Young préconise pour l'argumentation de sa thèse. En effet, il construit son raisonnement, non à partir de la symptomatologie goodmanienne, comme je l'ai fais, mais à partir de la distinction entre ce qu'il appelle les démonstrations immédiates et les démonstrations systématiques. Les premières, qui sont d'après Young l'apanage de l'art, exhibent plutôt qu'elles expliquent, elles montrent plutôt qu'elles argumentent, tandis que les secondes, réservées alors à la science, relèvent d'un procédé mécanique d'enchaînements logiques. Pour plus de rigueur, il faut donc vérifier si les preuves sans mot peuvent être apparentées à des démonstrations immédiates. A partir de quels critères distingue-t-on les démonstrations immédiates des démonstrations systématiques dans la théorie youngienne ? Il y en a en fait cinq :

- *l'amplification*, technique qui consiste à exagérer ou amplifier certains traits ou aspects afin d'attirer l'attention de l'observateur

[241] Le "même" fait ici référence à deux points : d'une part, il compare ce résultat à celui obtenu précédemment (la première application de la théorie goodmanienne a apporté cette conclusion dans les domaines algébriques des mathématiques). D'autre part, il souligne le fait que l'on aurait pu s'attendre à ce qu'en géométrie l'aspect esthétique se situe plus naturellement au niveau du rendu visuel du résultat, et que par suite, l'esthétique s'apparente plus à une fin recherchée qu'à une méthode de construction.

[242] La thèse de Young a déjà été discutée et remise en question dans la première et la seconde partie, cf. Partie I. B. II.2.2. et Partie III. B. 1.3.1.

- *la simplification* : il s'agit dans ce cas d'éliminer les aspects qui ne jouent aucun rôle constitutifs

- *la sélection* combine les deux techniques ci-dessus, elle consiste à suggérer une interprétation plutôt qu'une autre en sélectionnant les aspects des objets que l'on représente

- *la juxtaposition* suggère des relations au travers une organisation particulière

- Enfin, *la corrélation* est la technique qui consiste à représenter quelque chose de manière à ce que l'observateur le perçoive comme étant en relation avec autre chose

Il n'est pas nécessaire de reprendre de façon exhaustive la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate pour montrer qu'elle s'apparente plus à une démonstration immédiate qu'à une démonstration systématique. En effet, on peut d'ores et déjà noter qu'il ne s'agit pas d'une démonstration systématique, puisque aucun enchaînement formel d'arguments logiques n'y est explicitement proposé. D'autre part, les trois premières techniques sont manifestement utilisées :

- la figure représentant la preuve en question amplifie par exemple le fait que la somme des aires des lunules est égale à celle du triangle rectangle : l'élément 3 en séparant les aires en question met en exergue ce résultat (par ailleurs déductible de l'élément 2 ; l'élément 3 est donc bien là pour amplifier cette propriété). On peut aussi souligner le rôle de la technique de simplification : dans l'élément 1, l'orientation du grand demi-cercle en simplifie la configuration de façon à rendre évidente l'égalité entre la somme des aires des petits demi-cercles et celle du grand. Enfin, la sélection est conséquente à l'usage de ces deux premières techniques.

- En ce qui concerne la juxtaposition et la corrélation, il semble que l'on peut les réinterpréter en termes d'exemplification, technique utilisée comme en l'a vu pour la démonstration du théorème des lunules. Ces deux techniques consistent en fait à rendre manifestes certaines propriétés par ailleurs possédées par l'objet (ou le symbole), puisqu'il s'agit de faire référence à certains aspects en soulignant une relation, que ce soit par une organisation particulière (juxtaposition) ou par une analogie (corrélation).

> Autrement dit, c'est bien d'exemplification dont il s'agit : faire référence à une propriété possédée.

Ainsi, selon la caractérisation youngienne des démonstrations immédiates, l'exemple traité met en défaut sa thèse selon laquelle ces dernières sont à l'exclusivité réservées aux domaines artistiques.

II.4. Conclusion

L'étude de la démonstration de l'irrationalité de √2 a montré le rôle de l'exploitation de la densité sémantique selon un procédé par métaphore lors du processus de généralisation et de démonstration en arithmétique. L'application des outils mis en place pour cette étude au cas des preuves sans mot (plus généralement à la figure géométrique comme codage démonstratif) montre cette fois que le mode opératoire peut être décrit comme une exploitation de la densité syntaxique selon un fonctionnement en image. Autrement dit, le mode de fonctionnement adéquat pour une figure utilisée en tant que preuve est donc celui d'un système syntaxiquement dense et relativement saturé. En même temps, cette étude a permis de distinguer la fonctionnalité de la figure en tant que preuve de celle de la figure en tant qu'illustration. Dans ce dernier cas, le résultat obtenu est que le fonctionnent approprié est celui d'un diagramme, c'est-à-dire un système relativement atténué. Au niveau fonctionnel, la distinction entre preuve et illustration traduit en fait la contingence ou non de la densité syntaxique (elle est constitutive dans le cas d'une figure en tant que preuve alors qu'elle est contingente lorsque la figure tient lieu d'illustration). Au niveau référentiel, la différence est une affaire d'orientation : la référence entre la figure en tant qu'illustration et la proposition qu'elle illustre va de la seconde vers la première (la référence va de l'étiquette vers un symbole auquel elle s'applique, il s'agit de dénotation) ; le contexte référentiel est ici clairement extensionnel. Tandis que la figure en tant que preuve fait référence à la démonstration d'une proposition (la référence va du symbole vers l'étiquette qui le dénote, il s'agit d'exemplification), son fonctionnement doit s'inscrire dans un contexte intensionnel.

L'étude de l'exemple de la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate permet de dégager deux raisons principales qui tendent à expliquer la tension évoquée entre l'usage effectif de la figure comme preuve et le discrédit qui lui est accordée au niveau théorique. La première est la conséquence de l'analyse du contexte référentiel : la logique extensionnelle ne peut pas rendre compte d'un système dont le fonctionnent requiert des inversions dans la hiérarchie dénotationnelle puisque ces dernières exigent de prendre en compte les intensions (exemplification) et non uniquement les extensions, comme le préconise la logique standard. La seconde raison est d'ordre plus strictement fonctionnelle et provient de l'analyse du rôle de la densité syntaxique : ce dernier est constitutif pour la bonne interprétation de la figure en tant que preuve. Ce qui revient à dire que la figure dans ce cas s'apparente à une image. Or, deux des réquisits syntaxiques préalables à une analyse selon la logique classique sont la différenciation finie et la disjointure, réquisits qui sont violés dans le cas d'un système syntaxiquement dense.

Si la logique montre dans ce cas une défaillance, loin s'en faut de réduire l'ensemble des réflexions précédentes à un débat « logique versus esthétique ». D'une part, la question de la valeur esthétique y est traitée de façon fonctionnelle et tout à fait logique au sens courant du terme. A ce titre, j'adopte la thèse que Pouivet expose dans son livre *Esthétique et logique* :

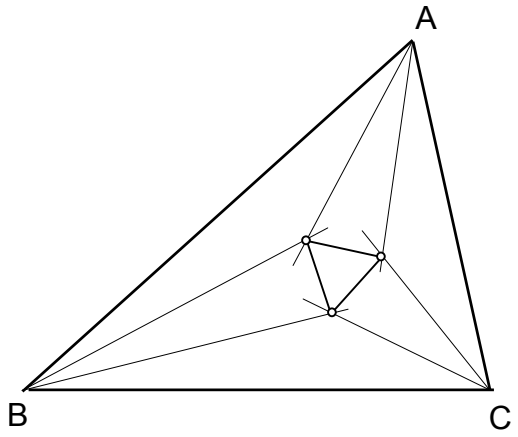
> « L'expérience esthétique est de part en part cognitive et suppose la maîtrise de systèmes symboliques, c'est-à-dire la capacité à mettre en œuvre des relations logiques entre éléments déterminés. [Cela signifie] que l'activité cognitive est une et s'exerce aussi bien, et selon des modalités au moins comparables, dans le domaine esthétique et dans des domaines conceptuels, comme ceux de la science. Le plaisir esthétique, bien loin de supposer une suspension de la logique, survient sur l'activité cognitive en œuvre dans l'expérience esthétique. » [Pouivet 1996, 8]

D'autre part, le but est de montrer la compatibilité et même la complémentarité de l'esthétique envers la logique en les présentant comme les deux versants du raisonnement mathématique.

Cela étant, il convient de tempérer les résultats obtenus. En effet, si j'ai montré qu'il était nécessaire de faire fonctionner en image une figure mathématique pour activer sa fonction démonstrative, je n'ai nulle part suggéré que cela était suffisant. Toute illustration de théorèmes géométriques ou analytiques ne fournit pas en retour une preuve. Un exemple particulièrement explicite dans ce cas est le théorème de Morley :

Théorème :

Les six trisectrices d'un triangle *quelconque* ont trois points d'intersections qui forment un triangle équilatéral.



Toute illustration de ce théorème est relativement convaincante, dans le sens où elle persuade de la véracité de ce résultat, sans toutefois la démontrer. Autrement dit, la figure ici montre sans démontrer. Mais si elle ne démontre pas, elle permet de construire des configurations qui suggèrent le moyen de démontrer ce théorème [243]. A ce jour, il n'est pas possible de démontrer ce résultat sans passer par des considérations algébriques. Mon hypothèse est que dans ce cas, la densité syntaxique fait obstacle à une preuve sans mot. Avant de développer ce point de vue, il faut donner une précision quant aux limites qui en définissent le cadre.

Compte tenu de la grande variété et diversité des figures mathématiques, il ne semble pas envisageable de dégager une critériologie d'ensemble qui

[243] Pour plus de détails, on pourra lire [Lombard 2004, 19-46].

permettrait de définir une ou plusieurs conditions suffisantes et nécessaires pour distinguer celles qui peuvent avoir une fonction démonstrative de celles qui ne le peuvent pas (c'est-à-dire celles qui ne peuvent fonctionner que comme illustration et non comme preuve). De plus, il n'est pas certain que la question soit correctement posée : rien n'indique en effet que l'on puisse obtenir une classification définitive : il se peut qu'une figure ayant un statut d'illustration soit finalement interprétée comme preuve. Quoi qu'il en soit, la question de savoir pourquoi un résultat peut ou ne peut pas, être démontré par une figure dépasse le cadre d'un questionnement portant sur le fonctionnement des systèmes picturaux mathématiques. Cependant, ce que permet ce type de questionnement c'est non pas d'aborder cette problématique de la figure de manière générale et frontale, dans l'espoir d'aboutir à une sorte d'algorithme de classification mais c'est de procéder à une approche au cas par cas dans le but de mettre en lumière des indices syntaxiques et sémantiques qui contribuent à une meilleure compréhension (et donc une connaissance au sens goodmanien) des figures mathématiques et de leurs fonctionnements symboliques appropriés. L'étude de la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate montre le rôle constitutif que peut avoir la densité syntaxique. L'exemple du théorème de Morley montrerait au contraire que la densité syntaxique peut être un obstacle à une démonstration non formelle[244]. Il n'y a en fait rien de novateur à dire cela : ceci est simplement le problème général de la notion d'exactitude géométrique mais vu sous une perspective syntaxique et analytique[245]. D'après Granger, le style cartésien est empreint de cette problématique : c'est la difficulté de rendre compte précisément d'une courbe ou d'un objet géométrique qui conduit Descartes à les traduire par des équations. Le style cartésien, explique Granger, consiste à réduire l'aspect intelligible de l'étendue à la mesure, et dans cette optique, une courbe ne relève de la connaissance géométrique que si elle est susceptible d'être décrite au

[244] Il est exclut d'espérer une démonstration « pure », c'est-à-dire sans aucune forme de calcul, du théorème de Morley car ce théorème est faux en géométrie non euclidienne. Ainsi, sa démonstration doit faire intervenir la propriété selon laquelle la somme des angles d'un triangle est *exactement* égale à 180°. Or cette exactitude n'est pas accessible par le seul biais d'une figure à cause de la densité syntaxique, il est donc nécessaire de passer dans ce cas par des considérations algébriques. La question des représentations de résultats géométriques qui ne seraient pas valables en géométrie non euclidienne est une question difficile et qui pour être traitée correctement exigerait une étude à part entière. Je ne la développerai donc pas dans le cadre du présent travail.

[245] On pourra lire par exemple [Connes 2002, 217-220].

moyen de longueurs exactement mesurables, pourvu que le procédé employé permette de garder l'ordre[246]. Il me semble que l'on peut traduire l'impossibilité d'une détermination exacte et précise des objets géométriques en termes de densité syntaxique, puisque justement tout schéma syntaxiquement dense est caractérisé par le fait qu'il est impossible de déterminer exactement toutes les marques qui le composent. Dans ce cas, une lecture goodmanienne du style cartésien consiste à dire que Descartes a évité la densité syntaxique en substituant à un schéma syntaxiquement dense (un objet géométrique), une description articulée et différenciée de manière finie (une équation). Cette interprétation est guidée par la conclusion des travaux de Granger sur le style cartésien :

> « On voit donc que le style cartésien se caractérise par la construction d'un objet géométrique dont l'intelligibilité est strictement liée à la possibilité d'une détermination « exacte et précise » de la mesure de ses éléments, c'est-à-dire d'une détermination algébrique. Un tel parti pris le conduit à étendre le champ géométrique des Anciens, puisque, libérées d'une correspondance biunivoque avec les dimensions de l'étendue, l'Algèbre peut désormais user des équations d'un degré quelconque pour décrire les rapports des lignes ; mais en contrepartie, la rigueur de la condition d'intelligibilité qu'il exige l'amène à délimiter strictement le domaine géométrique, dont il élimine les figures irréductibles à la description algébrique. Au prix de cette limitation draconienne, la structure de l'objet cartésien se prête aux procédures générales et exhaustives. L' « inexactitude » et l'approximation des courbes baptisées mécaniques, et plus tard transcendantes, se trouvent exorcisées. L'infinité des points d'une courbe est alors rendue gouvernable par le jeu du nombre fini des termes d'une équation.» [Granger 1968, 54]

Si le procédé d'algébrisation de certains objets géométriques initié par Descartes est restrictif (il ne concerne que les courbes géométriques), il n'en a pas moins permis de nouvelles interprétations qui ont ouvert le champ de l'analyse mathématique[247]. N'est-ce pas en fait la substitution d'un schéma syntaxiquement

[246] Cf. [Granger 1968, 51]

[247] Descartes restreint sa méthode de traitement algébrique des courbes aux courbes géométriques : celles où les deux coordonnées x et y sont reliées par une équation algébrique P(x, y) = 0, (courbes qui correspondent aujourd'hui aux courbes algébriques (cf. [Dahan 1986, 214])). Ce traitement permet de substituer l'ensemble des propriétés d'un système d'équations algébriques à « la confuse complexité phénoménologique de la figure, c'est-à-dire de l'objet géométrique imagé » (cf. [Granger 1968, 54]). Plus tard, c'est ce qui permit par exemple le développement de la théorie des anneaux de polynômes et de corps algébriques par Abel et Galois. En ce qui concerne les courbes non géométriques, au sens cartésien, Dahan et Peiffer notent que :

dense par un système sémantiquement dense qui peut expliquer la richesse des développements ultérieurs ?

Dans le but de trouver des éléments de réponse, je propose de considérer un exemple issu de l'analyse dans lequel une figure peut avoir un rôle de suggestion ou d'intuition mais où la densité syntaxique rend impossible l'exploitation de la figure en tant que preuve.

III. 2ème application : le théorème de Rolle

III.1. Figure et valeur intuitive

La deuxième grande catégorie d'usage de la figure au sein d'un raisonnement mathématique est celle qui concerne les figures en tant que guide ou support intuitif. Cette fonctionnalité s'acquiert en général dès l'apprentissage des mathématiques élémentaires où l'enseignant conseille de faire un schéma ou de faire une figure, pour trouver la solution d'un problème énoncé de façon formelle. Une double mise en garde accompagne cependant l'aide que l'on peut attendre d'une figure : premièrement, elle ne constitue pas une preuve et deuxièmement elle peut conduire à avoir de "fausses bonnes idées". L'exemple le plus classique par rapport à ce dernier type d'erreur concerne l'interprétation graphique des fonctions. Les notions de continuité et de dérivabilité exigent en particulier des précautions lorsque l'on veut les interpréter graphiquement. L'histoire de l'émergence de ces concepts montre que parmi les difficultés qu'il a fallu surmonter, beaucoup sont dues au fait de l'interprétation géométrique des notions de dérivabilité et de continuité (par exemple, le fait qu'il existe des fonctions continues et pourtant non dérivables contredit l'intuition géométrique immédiate, de même que l'existence de fonctions nulle part continues)[248]. Il ne

> « L'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations constitue une étape très importante dans le développement des mathématiques. Cette méthode de représentation des fonctions devait immédiatement quitter son champ d'origine de la géométrie analytique pour être étendue à d'autres branches des mathématiques et, avant tout, dans le domaine de l'analyse infinitésimale. » [Dahan & Peiffer 1986, 215]

[248] Pour plus de détails cf. [Dahan & Peiffer 1986, 208-257]. Dans son article « La beauté en mathématiques », Le Lionnais mentionne quelques exemples de faits mathématiques qui contredisent une

s'agit pas de dresser un procès de l'usage de la figure en tant que guide, ou support intuitif, en particulier dans le domaine de l'analyse mathématique, mais seulement de souligner, s'il était nécessaire, que son rôle s'arrête généralement là dans ce cas. C'est-à-dire que la figure, si elle peut guider un raisonnement ne peut pas dans certains cas avoir une fonction démonstrative (elle ne peut pas se substituer à une démonstration formelle).

De la même façon qu'il ne semble pas envisageable de produire une liste de critères permettant de déterminer quel type de figure peut, ou ne peut pas, avoir une valeur démonstrative, il ne semble pas plus envisageable de donner les raisons générales qui font qu'une figure peut suggérer un résultat, éventuellement guider un raisonnement, sans pour autant fournir d'arguments démonstratifs. L'entreprise la plus raisonnable semble à nouveau d'adopter une stratégie au cas par cas dans l'espoir de circonscrire peu à peu les aspects syntaxiques et sémantiques responsables du potentiel démonstratif d'une figure. Cette façon originale d'aborder la figure mathématique devrait permettre de mettre à jour de nouvelles affinités ou de rendre saillantes des différences reconnues et de ce fait contribuer au développement de la compréhension que nous pouvons en avoir. La démarche proposée s'inscrit donc dans une perspective de connaissance au sens goodmanien.

D'un autre côté, la question du rôle de la figure en tant que guide est étroitement liée à celle de la valeur esthétique des mathématiques. En effet, l'un des arguments les plus fréquents pour défendre l'importance de l'esthétique en

---

intuition géométrique. A propos des fonctions continues non dérivables, il cite et commente la réaction de Charles Hermite lorsque ce dernier en prit connaissance :

> « Lorsque Riemann et Weierstrass firent connaître l'existence de fonctions continues sans dérivées, quel tollé parmi les mathématiciens, à l'encontre des nouvelles venues. « *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées* » s'exclamait Charles Hermite. S'il est difficile de raisonner sur de telles fonctions, il devient impossible de se représenter pleinement les infinis caprices des courbes qui les incarnent. Les arcs qui joignent deux points aussi rapprochés que le voudra de telles courbes ont toujours une longueur infinie ! Mais la ménagerie des fonctions a recueilli, depuis un siècle, tant d'hôtes équivoques ou fantastiques que l'on a fini par s'acclimater aux difformités somme toute assez discrètes des fonctions sans dérivées ! » [Le Lionnais 1962, 447]

mathématique est le rôle de guide qui lui est attribué[249]. La question se pose alors de savoir si ce n'est pas en fait un fonctionnement esthétique particulier de la figure qui détermine une forme d'accessibilité aux objets mathématiques traités, ce qui lui confère par là ce rôle de guide, ou de support intuitif. Autrement dit, le rôle ou le potentiel que peut avoir une figure à guider un raisonnement ou à établir des conjectures ne serait-il pas conséquent à son fonctionnement esthétique ?

L'étude d'un exemple doit déjà permettre de vérifier si ces questions font sens, en même temps qu'elle doit fournir l'occasion d'amorcer une réflexion plus générale visant à mieux comprendre la fonctionnalité heuristique et/ou démonstrative d'une figure mathématique.

III.2. Approche intuitive

Plusieurs raisons ont motivé le choix du théorème de Rolle. La première est un souci de cohérence : je l'ai déjà utilisé pour illustrer les mouvements de généralisation élémentaire en mathématiques[250]. A cette occasion, ce sont en particulier des questions de références (dénotation – exemplification, au sens de Goodman) qui ont été utilisées pour l'analyse de ce théorème. Le reprendre à nouveau mais pour en traiter plus précisément des aspects syntaxiques et sémantiques toujours sous une grille de lecture goodmanienne permet d'assurer une forme de continuité et de globalité à ce type d'entreprise. La seconde raison porte sur le fait que le théorème de Rolle est l'un des théorèmes importants de l'analyse (il est par exemple souvent utile lorsque l'on cherche les zéros d'une fonction) qui est enseigné au cours du premier cycle universitaire. La compréhension de sa démonstration ne nécessite donc pas un bagage mathématique trop conséquent. Enfin, sa représentation graphique est particulièrement "parlante" si l'on peut dire, dans le sens où elle permet d'illustrer de façon convaincante le résultat du théorème.

---

[249] Ce rôle de guide revêt en fait deux aspects : un guide dans le choix des faits et un guide dans le processus de l'invention mathématique (comme le défendent notamment Poincaré, Hardy, Hadamard, Bell , Dirac ou encore Sullivan (cf. [Sullivan 1919b], [Sullivan 1925]) par exemple). Pour plus de détails, on pourra se référer à la partie 1 et à [Jullien 1999, 21-27].

[250] Cf. Partie III. A. II.3.1

Ce dernier point sous-entend une utilisation illustrative de la figure, c'est-à-dire la considération de la représentation graphique une fois le résultat connu. En fait, comme on va le voir, la figure dans ce cas peut tout à fait précéder le théorème, c'est-à-dire en être le support intuitif. Pour montrer ceci, je propose de remonter de la figure au résultat plutôt que de commencer par exposer le résultat et sa démonstration puis seulement, l'illustrer par une figure.

III.2.1. Préambule

Quelques remarques et définitions s'imposent avant de proposer une reconstruction de l'approche intuitive que permet d'avoir une figure donnée, à propos du théorème de Rolle.

1. Afin de simplifier cet exposé, nous considérerons que les fonctions étudiées sont toutes réelles, les intervalles seront des intervalles de **R**.

2. Je suppose connues les notions de limites d'une fonction, je rappelle cependant qu'une fonction réelle est continue sur un intervalle si et seulement si :

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, pour tout point a de l'intervalle

Dire qu'un fonction est continue en *a* implique donc en particulier que l'on peut toujours rendre la différence entre f(x) et f(*a*) aussi petite que l'on veut, pour peu que l'on choisisse x suffisamment proche de *a*[251].

3. Pour comprendre ce qui va suivre il faut connaître la notion de dérivée et son interprétation géométrique. Je rappelle donc rapidement les conditions de dérivabilité d'une fonction réelle :

<u>définition 1 :</u>

Une fonction f définie sur un intervalle non trivial est dite dérivable en un point *a*, $a \in$ I, si et seulement si :

[251] La définition moderne et formelle de la continuité est la suivante : f définie sur I est continue en *a* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour $x \in I$ $|x-a| \leq \rho \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

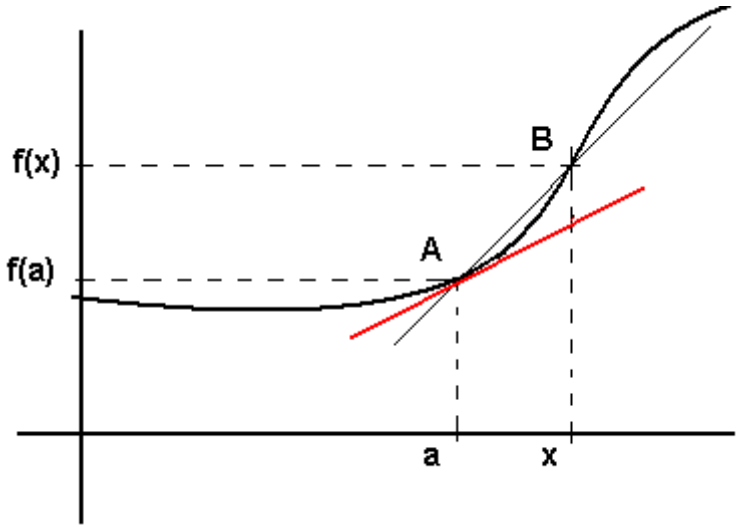
Si c'est le cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en *a* et elle est notée f '(*a*).

<u>définition 2</u>

Une fonction f est dérivable sur I si elle l'est en tout point de I. La dérivée de f est alors la fonction définie sur I qui associe à tout point x de I le nombre f '(x).

4. Interprétation géométrique

La dérivée d'une fonction permet en fait de calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction partout où celle-ci est dérivable. En effet, considérons la représentation suivante :



Le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (que l'on appelle coefficient directeur de la droite qui passe par A (*a*, f(*a*)) et B (x, f(x))) s'interprète comme la pente, ou l'inclinaison, de la droite (AB). Si la fonction est continue, f(x) tend vers f(*a*) lorsque x tend vers *a* et donc le point B tend vers le point A. Lorsque la fonction est dérivable, la limite lorsque x tend vers *a* du rapport ci-dessus existe et la droite (AB) admet donc une position limite : c'est la tangente à la courbe au point A (en rouge sur la figure). Ainsi, la condition de dérivabilité en un point *a*, exprimée de

façon géométrique, traduit l'existence d'une tangente au point A (a, f(a)) à la courbe représentative de la fonction f.

Enfin, on remarquera que lorsque la tangente en un point est "croissante", la valeur de la dérivée en ce point est positive et elle est négative si la tangente est "décroissante".

Remarque : La notion de tangente est une notion mathématique très compliquée. Elle peut être abordée et caractérisée de multiples façons différentes[252]. Le point de vue que j'ai sélectionné ici est dynamique dans le sens où l'on y considère la tangente en un point A comme la position limite d'une corde (AB). Il y a donc derrière ce point de vue une idée de mouvement : le point B parcours la courbe jusqu'à ce qu'il atteigne le point A. On peut alors remarquer que l'on peut considérer la tangente comme la position limite de la corde (AB) indifféremment de la position initiale du point B, que ce dernier soit situé à gauche ou à droite du point A.

5. Enfin, je supposerai connues les notions de topologie élémentaire de **R** telles que les définitions des intervalles fermés, ouverts, bornés ou non. Je rappelle cependant qu'un intervalle non trivial est un intervalle non réduit à un élément.

III.2.2. Interprétation graphique

Considérons à présent une figure représentant une fonction continue sur un intervalle et ayant la même valeur aux bornes de cet intervalle :

[252] Il est bien entendu possible de relier entre eux les divers points de vue sur la tangente. Le lien qui les réunit est fondé sur le théorème de Rolle lui-même.

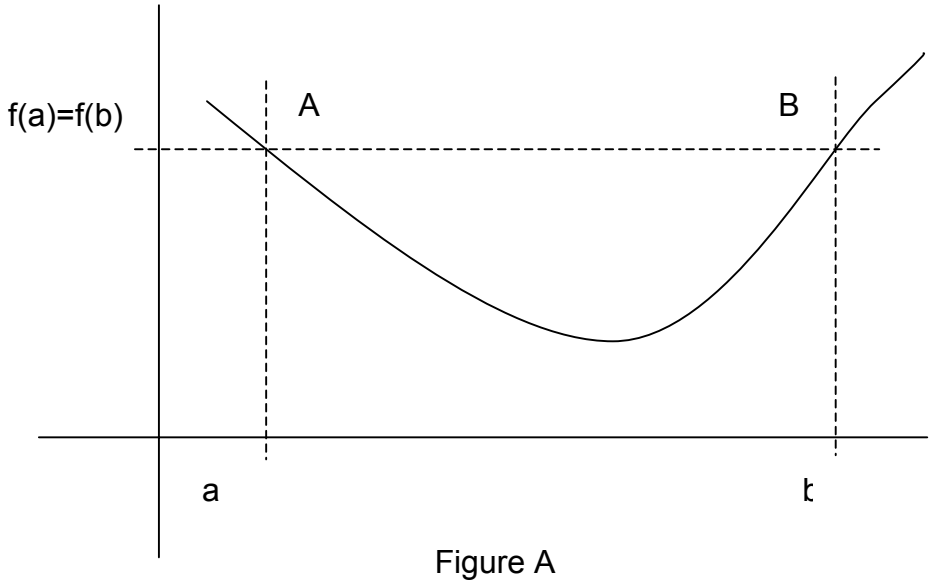


Figure A

Je propose de décrire un raisonnement intuitif et empirique (c'est-à-dire que c'est l'expérimentation qui guide l'intuition) qui va nous conduire vers le théorème de Rolle. Pour ce faire, je me dégage pour l'instant de toute rigueur mathématique, au sens fort du terme, pour ne conserver que des résultats et des hypothèses guidés par des expériences successives sur la figure. Dans un premier temps, j'omets donc volontairement de souligner les erreurs mathématiques souterraines que contient le raisonnement suivant.

A partir de cette configuration, on peut évaluer de manière empirique l'allure générale des tangentes à la courbe. Un bref examen permet de constater que ces dernières sont décroissantes sur une première partie de l'intervalle [a,b] puis croissantes sur le reste de l'intervalle [a,b]. En particulier, il semble, à partir de la figure, qu'au point où la courbe change de variation, la tangente à la courbe y est horizontale. Peut-on pour autant en conclure que toute courbe qui relie de façon continue deux points de même hauteur admet toujours « quelque part » une tangente horizontale ? Afin d'éviter les contingences liées à une configuration en particulier, on peut imaginer les différentes configurations possibles :

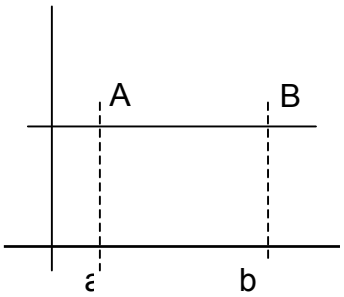


Fig.1

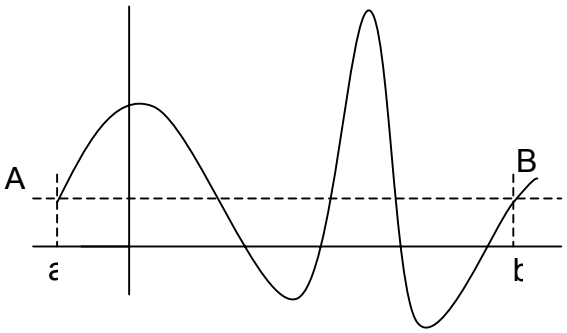


Fig. 2

Soit le point A et le point B sont reliés par une courbe horizontale (Fig. 1), c'est-à-dire par une droite, auquel cas la tangente à la courbe est confondue avec la courbe elle-même et donc il y a bien une tangente horizontale (en fait la tangente en chaque point est horizontale).

Soit le point A et le point B sont reliés par une courbe non horizontale (Fig. 2). La figure 2 peut se ramener sans perte de généralité à la figure A initialement proposée : il suffit de découper tout d'abord l'intervalle de définition afin de se ramener à une figure du type de la figure A, puis de répéter le même raisonnement à chaque partie de l'intervalle (dans la mesure, évidemment, où la figure donne une idée suffisamment correcte des changements du sens de variation).

Il y a donc en fait deux types de configurations possibles : la première (courbe horizontale) ne pose pas de difficulté, la seconde peut se ramener à la configuration de la figure A. Raisonnons donc à partir de cette dernière.

Le raisonnement guidé par l'intuition est le suivant : si le point A et le point B sont à la même hauteur, il faut bien que la courbe qui les relie compense à un

moment donné la hauteur perdue ou gagnée en variant d'un point à l'autre. Autrement dit, de façon intuitive, il semble nécessaire que la courbe connaisse au moins un changement de variation : si elle est croissante sur une partie de l'intervalle [a, b], elle doit être décroissante sur une autre partie de l'intervalle (puisqu'elle relie deux points de même hauteur)[253]. On obtient donc une première hypothèse légitimée par l'approche intuitive. Supposons que l'on admette cette hypothèse et continuons le raisonnement. A partir d'expérimentations sur la figure, on peut conjecturer qu'au point où la courbe change de variation, disons le point C, il y a une tangente horizontale. Cette dernière hypothèse est obtenue en traçant successivement différentes tangentes autour du point où la courbe change de variation. On observe alors que plus on se rapproche de ce point plus les tangentes se rapprochent de l'horizontale. Ce dont la figure B rend compte :

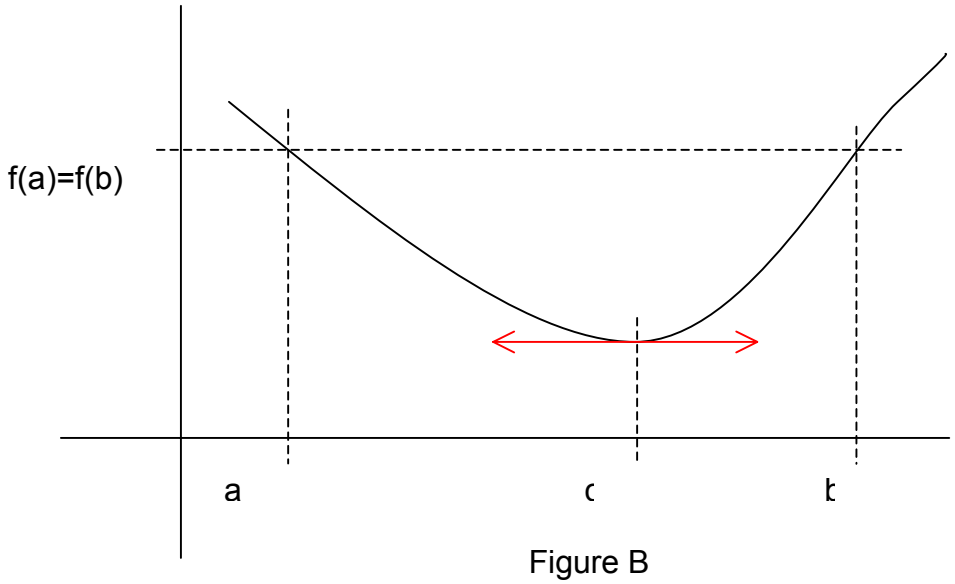


Figure B

Sans se soucier dans l'immédiat de la validité de ce résultat, il convient d'en donner une interprétation en termes de dérivées. En effet, comme le stipule la remarque 4 ci-dessus, la dérivée d'une fonction en un point est égale au

[253] Le raisonnement est identique si la courbe admet plusieurs changements de variation.

coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point. En remarquant qu'une tangente (ou plus généralement une droite) horizontale a un coefficient directeur égal à zéro, on peut réinterpréter le résultat obtenu par l'approche intuitive en disant que la dérivée d'une fonction définie sur un intervalle, de même valeur aux bornes de cet intervalle, s'annule au moins en un point de l'intervalle. Cet énoncé est, en substance, le théorème de Rolle. Plus précisément, ce résultat est une forme affaiblie du théorème de Rolle dans le sens où il suppose des hypothèses plus restrictives que nécessaire.

On va voir qu'en fait le raisonnement élaboré à partir de la figure conduit à une fausse bonne idée de démonstration. Dans l'approche intuitive, tout porte à croire que le résultat (avoir quelque part une tangente horizontale) provient de considérations dynamiques : en bref, la figure amène à raisonner sur la fonction dérivée comme étant une fonction ayant des valeurs négatives puis positives (ou le contraire) puisque l'on considère l'allure des tangentes avant et après le point extremum. On conclut alors que puisque la fonction prend des valeurs positives et négatives, elle doit s'annuler à un moment donné. Or, ceci présuppose la continuité de la fonction dérivée, ce qui n'est pas nécessaire (et n'apporte pas de simplification véritable dans la démonstration). La démonstration analytique permet quant à elle d'avoir une approche statique du problème, c'est-à-dire de raisonner en termes de point et non de mouvement.

Il s'agit à présent de se pencher plus précisément sur la démonstration rigoureuse de ce résultat afin, premièrement, d'en exposer clairement les hypothèses nécessaires et, deuxièmement, de montrer pourquoi la figure ne peut pas, dans ce cas, se substituer à une démonstration.

III.3. Approche démonstrative du théorème de Rolle

L'objectif premier de cette section n'est pas de donner une démonstration exhaustive du théorème mais de fournir une explication d'ordre sémiologique quant à l'impossibilité de construire cette démonstration sur la seule base de la figure. A cause de cela, je ne traiterai pas tous les détails techniques de la

démonstration formelle mais j'essayerai de mettre en lumière les enjeux syntaxiques et sémantiques qui en déterminent les articulations.

L'une des difficultés que dissimule l'approche du théorème à partir de la figure réside dans le fait qu'il semble, à partir de cette dernière, acquis que la courbe possède effectivement en chaque point une tangente et c'est ce présupposé qui permet de raisonner sur l'allure générale des tangentes à la courbe. Or, mathématiquement, pour qu'une courbe admette une tangente en un point, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable en ce point. Est-il alors nécessaire et suffisant de supposer la dérivabilité de la fonction sur son intervalle de définition ? Et, quoi qu'il en soit, la figure en elle-même permet-elle d'établir cette condition?

En ce qui concerne la première interrogation, on remarquera que si l'on s'en tient au raisonnement intuitif, alors oui, il est nécessaire de supposer la dérivabilité de la fonction puisque ce dernier passe par une évaluation de l'allure générale des tangentes à la courbe – ce qui suppose donc que celles-ci existent. De plus, toujours d'après ce raisonnement, c'est le fait de remarquer que la fonction dérivée prend nécessairement des valeurs de signes différents sur l'intervalle qui conduit à conclure qu'elle doit s'annuler. Or, pour que cet enchaînement, cette implication, soit valide, il faut en outre supposer que la dérivée est une fonction continue[254]. Le raisonnement intuitif présuppose donc plus que la dérivabilité : il exige la continuité de la fonction dérivée.

En fait, cette hypothèse est beaucoup trop forte par rapport au résultat cherché. Le théorème de Rolle est un moyen d'affirmer l'existence d'*un point* où la dérivée s'annule. Ainsi, ce résultat porte sur le nombre dérivé (c'est-à-dire la valeur de la dérivée en un point) et non sur la fonction dérivée (le comportement global de la dérivée sur l'intervalle, ou l'ensemble des valeurs qu'elle y prend). On observe alors une sorte de décalage entre le résultat voulu, qui est statique, et le raisonnement supposé y conduire, qui est dynamique. L'une des raisons de ce décalage est que l'on ne peut pas raisonner autrement à partir de la figure : cette

[254] En effet, le résultat que l'on utilise ici de manière implicite est le théorème des valeurs intermédiaires qui garantit que toute fonction continue sur [a, b] prend toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b).

dernière étant syntaxiquement dense, il nous est impossible de raisonner de façon locale ou ponctuelle, c'est-à-dire en isolant un point particulier. Un corollaire à la densité syntaxique est le fait que sur un schéma syntaxiquement dense, on ne peut atteindre simultanément un maximum de généralité et un maximum de spécificité ; il faut sacrifier l'une pour l'autre. Sur la figure, on ne peut pas conjecturer la valeur du nombre dérivé en un point (précision), mais on peut, en revanche, tester l'allure générale de la fonction dérivée, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs (généralité) et c'est ce qui nous conduit à devoir supposer que la fonction doit être dérivable et que sa dérivée doit être continue. En fait, comme on va le voir, seule la dérivabilité de la fonction à l'intérieur de son intervalle de définition est nécessaire tandis qu'il n'est pas nécessaire de supposer la continuité de la fonction dérivée.

En ce qui concerne la seconde interrogation, à savoir la possibilité d'établir à partir de la figure des hypothèses de continuité ou de dérivabilité, le problème est en fait plus général : il s'inscrit dans la problématique des fonctions continues et non dérivables. Ces dernières (en tout cas les fonctions continues nulle part dérivables) sont relativement contre-intuitives si l'on entend par cela une expérimentation à partir de figures. L'histoire montre d'ailleurs que la mise au point des premières fonctions de ce type a fortement contredit la conviction qu'avaient les mathématiciens que toutes les fonctions continues étaient dérivables. En témoigne l'exemple du commentaire d'Hermite cité précédemment. La difficulté tient ici au fait qu'il est impossible de représenter ce type de fonction sans passer par leur expression analytique. Ce n'est pas du point de vue de la technicité mathématique en jeu dans la clarification des concepts de fonctions continues et de fonctions dérivables que je voudrais aborder le rôle de la figure mais c'est du point de vue du fonctionnement symbolique. Je rappelle qu'un système symbolique est la donnée d'un schéma symbolique et d'un domaine de référence. Le fonctionnement symbolique est relatif aux règles syntaxiques auxquelles est soumis le schéma ainsi qu'aux règles sémantiques qui régissent la corrélation entre le schéma et le domaine de référence. Le système symbolique dont il est ici question est constitué d'une figure (représentant une fonction) mis en relation avec le domaine de référence de l'analyse réelle. Ma thèse est que le problème

évoqué jusqu'à présent quant aux limites du rôle de la figure se traduit d'un point de vue sémiologique par une impossibilité de la figure à exemplifier certaines étiquettes du domaine de références. Comment vérifier en effet la possession d'une étiquette P telle que « être la représentation d'une fonction dérivable » par une figure dans la mesure où cette vérification nécessite de prendre en considération des quantités infiniment petites ? La condition de dérivabilité en un point se traduit analytiquement par un rapport fini entre deux quantités qui tendent vers zéro ou elle se traduit géométriquement par l'existence d'une tangente en ce point. Dans le premier cas, la vérification effective à partir d'une figure est rendue impossible par le fait même qu'il faudrait pouvoir mesurer des quantités infiniment petites. Dans le deuxième cas, (c'est-à-dire vérifier qu'il existe une tangente) il faudrait non seulement pouvoir s'assurer que la courbe et la droite supposée tangente ont un unique point de contact et que ces deux dernières sont infiniment proches sur un voisinage de ce point.

L'écueil sur lequel échoue toute tentative de vérification effective pour ce type de propriété a une double cause : d'une part, la vérification passe par l'évaluation de quantités non mesurables (infiniment petites) et d'autre part, la densité syntaxique de la figure empêche que l'on puisse isoler et repérer chaque marque qui la constitue (et donc par exemple de vérifier l'existence d'un unique point de contact). Bien que la première cause soit d'ordre conceptuelle et la seconde d'ordre opératoire, toutes deux sont intimement liées : leur base commune est la notion d'infini. Et c'est parce que la démonstration du théorème de Rolle dissimule en fait la manipulation de ce concept qu'il est impossible que la figure puisse dans ce cas avoir un rôle démonstratif. Je reviendrai sur ce résultat dans la section consacrée à la synthèse esthétique.

Avant d'éliminer les hypothèses non nécessaires (dérivabilité sur l'intervalle de définition et continuité de la fonction dérivée), il convient de vérifier toutefois si la figure permet d'avoir une valeur démonstrative pour cette forme affaiblie du théorème de Rolle.

L'hypothèse de dérivabilité sur l'intervalle permet d'affirmer que la courbe admet une tangente en chacun de ses points. Reste à montrer alors à partir de la figure qu'il existe un point où cette tangente est horizontale, c'est-à-dire de coefficient directeur égal à zéro. Dans le raisonnement guidé par l'approche intuitive de la figure, on a commencé par observer à partir de la configuration générale que la courbe devait connaître au moins un changement de variation pour répondre aux hypothèse de départ (avoir la même valeur aux bornes). Le deuxième pas du raisonnement nous a conduit à conjecturer qu'au point où la courbe change de variation, elle admet une tangente horizontale. A nouveau, la difficulté pour accréditer ces deux étapes du raisonnement à partir de la seule figure est le fait qu'elles portent en fait sur des quantités infiniment petites (plus précisément, sur une infinité de quantités infiniment petites). En effet, la première étape revient à dire qu'il y a un point où la courbe change de variation, c'est-à-dire qu'en ce point, mettons α, la fonction admet un extremum local. Ce qui signifie que la valeur f(α) est supérieure (respectivement inférieure) à celle de f(x) pour tout x assez proche de α si la courbe est croissante pour des valeurs inférieures à α puis décroissante pour des valeurs supérieures (respectivement, si la courbe est décroissante puis croissante). Pour affirmer que tel est le cas (c'est à dire que α existe en tant qu'extremum local) il faut donc pouvoir affirmer que la valeur f(α) est effectivement supérieure, ou inférieure, à toutes les valeurs que peut prendre f(x) dès que x est dans un voisinage de α. La courbe, en tant que marque d'un système syntaxiquement dense, ne permet pas d'aboutir à une telle affirmation puisqu'il est impossible d'isoler et de manipuler tous les points (et donc toutes les valeurs de f(x)) qui la composent. Quel que soit l'instrument de mesure que l'on puisse utiliser rien ne garantit que si l'on rajoutait une décimale à sa graduation, on ne trouverait pas finalement un point, même unique, qui viendrait infirmer l'ordre établi par les mesures antérieures. En ce qui concerne la deuxième étape du raisonnement, à savoir l'implication entre un changement de variation et une tangente horizontale, l'objection est du même ordre dans la mesure où il s'agit dans ce cas de s'assurer qu'il existe une droite de coefficient directeur nul et infiniment proche de la courbe autour du point où elle est tangente. Ainsi, dans cette deuxième étape c'est encore la densité syntaxique qui ôte tout espoir de vérification effective à partir de la courbe. La difficulté rencontrée dans cette

approche démonstrative est que les résultats obtenus par l'approche intuitive semblent convaincants et il est difficile de les mettre en défaut par la seule imagination. Et, en effet, les contre-exemples que l'on peut trouver nécessitent des calculs compliqués en amont d'une représentation graphique.

III.4. Démonstration du théorème de Rolle

Il s'agit à présent de montrer comment l'on peut toutefois démontrer le théorème en toute rigueur.

Comme on va le voir, la démonstration de la première étape fait appel à des résultats de topologie. La problématique soulevée par cette étape porte sur l'existence d'une valeur maximale ou minimale de l'ensemble des valeurs prises par la fonction sur son intervalle de définition, ce que l'on appelle l'image de la fonction. Il faut donc pouvoir s'assurer que dans les conditions du théorème, l'image de la fonction contient une valeur supérieure ou inférieure à toutes les autres. Le résultat dont on va se servir est un théorème de topologie qui affirme que :

Théorème 1[255]

> L'image de toute fonction réelle continue sur un intervalle non trivial, fermé et borné, possède un maximum et un minimum[256].

Par le biais de ce théorème, on a donc l'assurance que la fonction possède une valeur supérieure *et* une valeur inférieure. Autrement dit, la fonction f admet bien au moins un maximum et un minimum (notons alors que l'on obtient avec ce

[255] Ce théorème est en fait un corollaire du théorème suivant : L'image de toute fonction réelle continue sur un intervalle non trivial, fermé et borné de **R** est un intervalle fermé et borné.

[256] Il suffit de savoir dans ce contexte que les intervalles fermés et bornés de **R** sont les intervalles réels de la forme [a, b], ces intervalles sont appelés les compacts de **R**. La démonstration de ce résultat est basée sur la propriété de Bolzano Weierstrass qui porte sur les suites extraites (cf. [Arnaudiès & Fraysse 1988, 118]).

résultat plus que nécessaire puisque par rapport à notre raisonnement, on cherche à montrer l'existence d'une valeur maximale *ou* minimale).

La deuxième étape quant à elle consiste à démontrer l'existence d'une tangente horizontale, ou de manière équivalente, à montrer que la dérivée de la fonction s'annule. Pour ce faire, on va utiliser le résultat suivant :

Théorème 2

Si une fonction réelle f est dérivable sur un intervalle non trivial I et si f admet en un point β intérieur à l'intervalle un extremum local, alors $f'(\beta) = 0$ [257].

Ainsi, en utilisant ce résultat, il suffit de montrer qu'une fonction dérivable donnée admet un extremum local à l'intérieur de son intervalle de définition pour avoir l'assurance que sa dérivée s'annule en ce point (et donc que sa courbe admet en ce point une tangente horizontale)[258].

On peut à présent reconstruire de façon rigoureuse une démonstration du théorème de Rolle.

Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point c, $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$

[257] Une fonction admet un extremum (global) M lorsque $f(x) < M$ (si M est un maximum et $f(x)>M$ si M est un minimum) pour tout x de l'intervalle de définition de la fonction.

Une fonction admet au point α un extremum local M si $f(x) < M$ (si M est un maximum local et $f(x)>M$ si M est un minimum local) pour tout x appartenant à un voisinage de α

[258] Il n'est pas nécessaire de proposer une démonstration de ce théorème. Notons toutefois que cette dernière est basée sur l'étude du signe de la limite du coefficient directeur de la tangente lorsque x tend vers l'abscisse du point extremum par valeurs inférieures puis par valeurs supérieures, c'est le fait que la limite à droite et la limite à gauche sont soit nulles soit de signes différents qui permet de conclure finalement que la dérivée est nulle. Pour plus de détails : [Arnaudiès & Fraysse 1988, 181].

Démonstration :

Si la fonction f est constante, alors sa dérivée est nulle et donc toute valeur c comprise entre a et b convient.

Supposons alors f non constante. Puisque f est une fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné de **R** alors le théorème 1 permet d'affirmer que l'image de f est un intervalle fermé borné de **R**, par suite, f possède un maximum et un minimum. De plus, la fonction étant non constante, l'un de ces deux nombres au moins est différent de f(a) (et donc de f(b)), ce qui permet d'affirmer que f possède à l'intérieur de son intervalle de définition (c'est-à-dire sur l'intervalle moins les bornes de l'intervalle) un maximum ou un minimum. Elle possède donc a fortiori un extremum local, appelons c le point où cet extremum est atteint. On est alors dans les hypothèses du théorème 2 qui permet de conclure puisque ce dernier nous assure que l'on a f '(c) = 0.

La démonstration ne comporte pas de considérations dynamiques (il n'est nul besoin de connaître l'allure de la fonction dérivée), au contraire elle passe par une appréhension statique de la courbe, plus exactement par la considération d'un point extremum sur la courbe. Ainsi le théorème porte sur la notion de *nombre dérivé* plutôt que de *fonction dérivée*. Notons qu'en ce qui concerne l'hypothèse de dérivabilité, seul le fait que la fonction soit dérivable en son extremum est finalement nécessaire mais que l'on est obligé de supposer la dérivabilité sur l'intérieur de l'intervalle puisque on ne peut pas localiser de façon générale cet extremum. L'intérêt majeur du théorème réside justement dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de supposer la continuité de la dérivée : il permet de s'assurer de l'existence d'un zéro (point où une fonction s'annule) pour une fonction non nécessairement continue. Dans la pratique, il suffit par exemple de montrer qu'une fonction est la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné et ayant les mêmes valeurs aux bornes de l'intervalle pour affirmer l'existence d'un zéro. Le théorème peut ainsi être considéré comme un raffinement du théorème des valeurs intermédiaires.

III.5. Analyse comparée

Le raisonnement élaboré par l'approche intuitive à partir de la figure est proche du raisonnement démonstratif dans sa structure, dans le sens où les

étapes charnières de la démonstration rigoureuse sont relativement proches de celles du raisonnement intuitif. A cela près que les considérations de l'approche intuitive sont d'ordre géométrique et dynamique (l'étude des configurations possibles suggère la nécessité d'un changement de variation de la courbe, ce qui à son tour laisse prévoir une valeur extrême, minimale ou maximale, pour la courbe. Cette hypothèse permet d'établir celle de la présence d'une tangente horizontale) alors que les considérations du raisonnement argumentatif sont d'ordre analytique et statique (possession d'un extremum pour une fonction continue sur un fermé borné donc preuve de l'existence un nombre dérivé nul). La question est alors de savoir pourquoi la figure ne peut pas être un codage acceptable de la démonstration. Comme on l'a vu, l'une des raisons est que les propriétés en jeu dans cette démonstration ne peuvent pas être exemplifiées par la figure puisque ces dernières font intervenir des considérations contenant la notion d'infini. La densité syntaxique de la courbe ne permet pas l'évaluation des quantités infiniment petites (en fait, d'une infinité de quantités infiniment petites) D'autre part, la courbe en tant que système pictural est syntaxiquement dense, et cette caractéristique invite de façon naturelle à en avoir une lecture continue, globale : la courbe est considérée et traitée comme un tout insécable[259]. C'est en soulignant ceci que l'on peut comprendre pourquoi l'approche intuitive est basée sur des considérations dynamiques. On retrouve ainsi la distinction entre l'analogique et le digital : la courbe s'apparente à un système analogique (ensemble de positions sur un continuum) qui empêche d'en avoir une lecture discrète, point par point, ou autrement dit, statique (ce qui serait le cas pour un système digital). Or cette lecture est pourtant nécessaire pour la démonstration du théorème.

La densité syntaxique est donc identifiée comme la raison de l'impossibilité de la figure à fonctionner en tant que démonstration (ou tout au moins à avoir une valeur démonstrative). Comment cet obstacle est-il alors évacué ? La solution consiste, comme le montre le procédé démonstratif du théorème, à substituer une représentation formelle et linguistique ("f") à une représentation géométrique (une

[259] La même caractéristique des systèmes syntaxiquement denses a été exploitée lors de l'analyse de l'exemple des lunules. Mais dans ce cas, c'était alors un avantage : c'est la lecture globale, continue de la preuve sans mot qui permet d'interpréter les éléments qui la constituent les uns en fonction des autres.

courbe)[260]. D'un point de vue d'une analyse des systèmes symboliques, ce que l'on gagne par cette substitution est que l'on remplace un système syntaxiquement dense par un système articulé mais sémantiquement dense. On retrouve ici en substance l'avantage décrit par Granger : L'infinité des points d'une courbe est alors rendue gouvernable par le jeu du nombre fini des termes d'une équation[261]. Cette citation n'illustre pas exactement le phénomène décrit ici puisque dans le cas traité, on n'a pas besoin de connaître explicitement l'équation de la fonction étudiée, la nommer suffit. Quoi qu'il en soit, c'est bien la même idée que traduit Granger, celle du traitement algébrique des courbes.

Il s'agit à présent de se pencher plus en détail sur la traduction en termes de la théorie des systèmes symboliques des différentes représentations d'une même fonction (géométrique ou analytique) afin de mieux comprendre le fonctionnement symbolique de chacune.

En fait, on peut considérer le système symbolique construit sur le schéma symbolique pictural (la représentation graphique de la fonction) et le système symbolique construit sur le schéma symbolique formel (l'équation ou le l'expression formelle de la fonction) comme étant deux intensions de la même extension. La fécondité du raisonnement trouve dans ce cas sa source dans la dialectique entre ces deux intensions. La première permet d'élaborer une approche intuitive qui ne peut être démontrée que par la traduction analytique de la problématique entrevue. Et, alors que la densité est un obstacle au fonctionnement de la figure en tant que démonstration, elle devient un avantage en ce qui concerne le traitement algébrique du problème. En effet, c'est l'exploitation de la densité, mais sémantique cette fois, qui permet de considérer la fonction comme échantillon de diverses étiquettes non disjointes. Par exemple, la

---

[260] Pour poursuivre la comparaison entre analogique et digital, il est intéressant de noter un autre parallèle. Goodman explique le rôle des instruments analogiques et celui des instruments digitaux en notant que :

> « Lorsqu'il est question de jauger ou de mesurer, on peut penser que l'instrument analogique a essentiellement un rôle exploratoire, avant qu'on ait fixé des unités de mesure ; puis un instrument digital convenablement conçu prend la relève » [Goodman 1968, 197]

Cette manœuvre s'apparente à celle qui consiste à explorer la problématique à l'aide de la figure puis de la résoudre par un traitement algébrique et analytique.

[261] Cf. [Granger 1968, 54]

fonction répondant aux hypothèses du théorème de Rolle est considérée, en tant que fonction continue sur un intervalle compact, comme une fonction dont l'image est elle-même compacte (elle est un échantillon de la classe-de-concordance du théorème 1). Si l'on considère de plus le fait que la fonction prend les mêmes valeurs aux bornes de son intervalle de définition, alors la fonction exemplifie l'étiquette : « avoir un extremum local ». En prenant en considération la dérivabilité de la fonction, on la reconnaît alors comme échantillon du théorème 2, etc.[262]

Le lien référentiel qui unit la figure et la traduction algébrique et analytique du raisonnement auquel elle conduit est de l'ordre de la dénotation, ou tout au moins c'est la dénotation qui prévaut. Plus exactement, l'interprétation adéquate de la figure traitée dans l'exemple revient à s'interroger sur ce avec quoi concorde la figure et non ce qu'elle exemplifie. Comme on l'a vu, l'exemplification n'est pas adaptée dans ce cas, puisque la possession des étiquettes en jeu ne peut pas être effectivement vérifiée à partir de la figure[263]. Cette remarque est l'occasion de souligner l'importance de la possession dans la référence exemplificationnelle. En effet, l'exemplification est une sous relation de la converse de la dénotation. Ce qui signifie en particulier que si une étiquette dénote un symbole, ce n'est pas pour autant que le symbole exemplifie l'étiquette, encore faut-il qu'il la possède effectivement et non seulement qu'il concorde avec. Dans notre exemple, une interprétation exemplificationnelle de la figure conduit à un raisonnement faux, ou en tout cas incorrect dans le sens où il est beaucoup trop restrictif.

Ainsi, selon la caractérisation mise en place à l'occasion de l'étude de la preuve sans mot du théorème des lunules, le fonctionnement adéquat de la figure étudiée à présent est celui d'un diagramme et non d'une image. Faire fonctionner dans ce cas la figure en image abouti à une erreur d'interprétation. L'approche démonstrative montre que la figure illustre le résultat dans le sens où elle fournit un cas exemplaire d'application mais elle ne fournit pas en retour un moyen de

[262] Par souci de clarté, cet exposé comporte un certain nombre de raccourcis. Pour montrer explicitement qu'il s'agit bien dans les cas cités d'exemplification, il faudrait outre la possession, mentionner la référence entre la fonction et les étiquettes. Pour cela, on pourra se reporter à la démonstration elle-même qui permet de comprendre le contexte référentiel.

[263] Il semble évident dans cas de ne pas envisager une possession métaphorique.

remonter vers la démonstration. D'un point de vue démonstratif, la relation est en quelque sorte unilatérale.

Au terme de cette analyse, il faut porter une précision quant à la présentation initiale de la figure comme ayant une valeur intuitive. En effet, l'objet général de cette section était l'étude d'un exemple de figure ayant une valeur intuitive mais non démonstrative. Il faut alors préciser que l'intuition porte sur le résultat et non sur sa démonstration[264]. L'étude des différents cas de figures donne l'occasion de conjecturer le résultat mais elle ne permet pas d'avoir l'intuition de sa démonstration. La principale raison, identifiée par le biais des outils goodmaniens, est que c'est la densité syntaxique de la figure qui fait obstacle à la fois à l'exemplification des étiquettes comportant la notion d'infini et à une approche statique (qui sous-entend une lecture discrète de la courbe). La solution consiste à traiter le problème de façon formelle, ou linguistique, et donc de contourner la densité syntaxique du système pictural en lui substituant un système sémantiquement dense : là où la densité était un obstacle (technique), elle devient un avantage (conceptuel).

On aboutit finalement à un résultat inattendu : en bref, la "ressemblance" entre le symbole pictural (la courbe) et l'objet étudié (la représentation graphique de la fonction) est plutôt un inconvénient à une bonne interprétation de celui-ci. Le nom "f" ou l'équation d'une fonction étant beaucoup plus éloigné, syntaxiquement parlant, de la notion de courbe que ne l'est la courbe elle-même, permet en fait de faire abstraction des contingences liées au symbole lui-même, ou pour reprendre une expression poincaréenne, de s'élever plus haut.

Cela étant, noter ce dernier point ne signifie pas que je rejoins ici le scepticisme à l'égard de l'usage de la figure. Cette partie avait en partie vocation à tempérer les résultats obtenus à l'occasion de l'étude de la preuve sans mot du théorème des lunules en montrant en particulier qu'un fonctionnement en image ne garantit pas une valeur démonstrative. Toutefois, la figure, outre sa fonction heuristique, peut avoir pour rôle de suggérer des problématiques. En effet, on peut faire une figure

[264] L'intuition est pour l'instant entendue sans considération esthétique.

sans savoir par quoi elle est dénotée, ou sans connaître l'ensemble des étiquettes qui la dénote. L'expérimentation sur des cas de figures fournit l'occasion d'élaborer de nouveaux étiquetages. J'ai noté en introduction à l'étude générale du fonctionnement des figures mathématiques une remarque de Goodman sur l'avantage de échantillons : ils peuvent remplacer un amalgame compliqué de prédicats. On peut à présent remarquer que, dans le cas des figures mathématiques, cet amalgame n'est pas toujours connu par avance. L'un des travaux du mathématicien consiste en fait à concevoir les prédicats pertinents qui dénotent une figure.

Avant de considérer les implications ontologiques qu'entraîne cette dernière réflexion, il faut remarquer qu'elle met en lumière une particularité de la figure mathématique, ou tout au moins permet-elle de remettre en partie en question la caractérisation des images mathématiques telle que la présente Blanc-Benon. En effet, selon elle, la différence entre les images scientifiques, y compris les représentations mathématiques, et les images artistiques tient en cela que les premières et non les secondes, répondent d'un processus de production explicité, expliqué et justifié[265]. Autrement dit, si cela est correct, cela signifie en particulier qu'une représentation mathématique succède à la justification théorique de sa production. Or, pour garder le même exemple, la configuration du théorème de Rolle a précédé, historiquement, sa justification théorique, sa démonstration rigoureuse. De façon plus générale, la continuité a longtemps été tenue pour impliquer la dérivabilité (ce qui est faux), il s'ensuit que l'on a pu voir dans certaines représentations des phénomènes liés à la continuité alors qu'en fait c'était des propriétés inhérentes à la dérivabilité qu'il fallait voir. Aussi, je ne suis pas certaine que la thèse de Blanc-Benon : « voir, c'est d'abord savoir ce que l'on doit voir » où le « savoir » en question ne sous-entend pas une simple connaissance mais une compréhension, s'applique aux cas des figures mathématiques. En effet, l'étude de l'exemple du théorème de Rolle montre qu'une représentation de ce résultat ne succède pas à un processus de production explicité, expliqué et justifié par rapport à ce que l'on voit (il y a une tangente horizontale). Il en va de même avec une représentation donnée du

[265] Cf. [Blanc-Benon 2004, 202]

résultat du théorème de Morley. Evidemment, on pourra objecter que pour voir un triangle équilatéral dans cette dernière, encore faut-il savoir que l'on doit le voir, plus précisément l'on doit connaître la propriété illustrée. Autrement dit, l'on voit que les six trisectrices d'un triangle quelconque permettent de former un triangle équilatéral dés lors qu'une illustration de cette propriété est donnée en tant que telle. Il n'est pas certain que je puisse voir cette propriété sur une figure de ce type si je ne connais pas ce qu'elle illustre. Mais cela ne signifie pas que la figure provient d'un procédé de construction, ou de production justifié par rapport à ce que je vois ; autrement dit qui me permettrait de comprendre ce que je vois. La production d'une figure de ce type provient certes d'un programme de construction explicite (tracer un triangle quelconque – tracer ses six trisectrices – construire le triangle formé par les trois points d'intersection des trisectrices) mais ce procédé n'est pas justifié en fonction de ce que je peux alors observer (un triangle équilatéral), il ne donne pas la clé qui me permettrait de comprendre pourquoi est-ce que j'obtiens nécessairement un triangle équilatéral. Dans ce sens, le procédé de production est strictement descriptif et en aucun cas argumentatif ou démonstratif.

Au contraire d'une différence, on pourrait voir là un moyen de rapprocher, ou tout au moins de trouver un point de comparaison entre les représentations artistiques et les représentations mathématiques. En effet, de la même façon qu'il ne suffit pas de décrire le processus de production d'un tableau (sa composition, ses couleurs, la technique utilisée, etc.) pour le comprendre (pour comprendre ce que m'apprend le tableau et pourquoi le fait-il), il ne suffit pas non plus de décrire une figure mathématique pour comprendre la propriété que l'on peut alors observer. Il ne semble pas envisageable de poursuivre dans l'immédiat la comparaison. Cette manœuvre exigerait un examen minutieux des questions de représentation et de production de représentation mené simultanément sur les domaines picturaux artistiques et mathématiques.

Cela étant, ces dernières réflexions trouvent leur place au sein de cette analyse dans la mesure où elles permettent de mettre à jour une difficulté sous

jacente à l'ensemble du traitement sémiologique de la figure mathématique auquel j'ai procédé jusqu'à présent.

En effet, c'est un lieu commun largement répandu de dire que la géométrie s'occupe de percer les secrets de la figure[266]. Ce qui semble être correctement illustré par les exemples du théorème de Rolle et du théorème de Morley. Au niveau sémiologique, on peut traduire cette activité, percer les secrets de la figure, par l'activité qui consiste à chercher les prédicats qui dénotent une figure donnée, ou les étiquettes que celle-ci exemplifie. Comme je l'ai noté précédemment, on ne connaît pas systématiquement et par avance, l'amalgame de prédicats que remplace une figure. Mais, dire ceci ne revient-il pas à présupposer une forme de réalisme ? Ou plus précisément ne sous-entendons nous pas lorsque l'on dit que l'on cherche à percer les secrets de la figure, ou que l'on cherche l'ensemble des prédicats qui la dénotent, que la figure possède indépendamment de la perception que l'on en a, une signification en elle-même (que le géomètre a alors pour but de découvrir) ? D'un point de vue épistémologique, il semble en effet nécessaire de se placer dans un contexte réaliste pour accréditer cette description de l'activité mathématique, puisque son interprétation naturelle se fait en termes de découverte. Maintenant, par le biais d'une traduction au sein de la théorie de la référence goodmanienne, on peut réinterpréter cette activité en termes de recherche de fonctionnement symbolique adéquat selon les différentes intensions d'une même extension. C'est ce que nous a montré en particulier l'exemple du théorème de Rolle : le fonctionnement en image d'une représentation donnée conduit à une mauvaise interprétation tandis que son fonctionnement en tant qu'illustration conduit à considérer la fonction traitée non à partir d'une représentation graphique mais à partir de son nom (représentation linguistique). La fécondité de cette stratégie réside dans le fait qu'en construisant différents systèmes symboliques à partir d'un même schéma symbolique, on multiplie les possibilités d'étiquetage ainsi que les classes-de-concordance possibles. Il ne s'agit plus de découverte mais de nouvelles façons de « voir ».

[266] Par exemple, dans son l'article « Le goût de la géométrie », Lombard s'inspirant d'une formule de Grothendieck, écrit : « [La géométrie] ne se consacre guère qu'à percer les secrets des nombres et des formes » [Lombard, 2004, 20].

L'intérêt de l'application des outils goodmaniens se révèle être dans ce cas de permettre de rendre compte d'une description classique de l'activité mathématique en dehors de tout présupposé ontologique. Elle permet en outre d'aborder de façon technique et précise des problématiques en termes d'intensions et non uniquement en termes d'extensions comme le ferait la logique standard. Plus simplement, l'utilisation de la théorie goodmanienne de la référence permet d'utiliser un vocabulaire approprié là où l'on ne trouve habituellement que des expressions métaphoriques, sûrement faute de mieux. En effet, le point de départ de l'ensemble des dernières réflexions était l'expression « percer les secrets des formes, ou des figures ». J'aurai pu choisir de la même façon une expression qu'utilise Granger : « vivre le symbolisme » pour décrire la stratégie qui consiste en résumé, à considérer sous différents angles le même objet mathématique[267]. C'est en exposant la méthode d'investigation à laquelle il s'attelle dans les chapitres mathématiques de son *Essai d'une philosophie du style* qu'il l'explique :

> « Qu'est-ce donc qu'un langage nouveau en mathématiques ? Ce n'est pas seulement le décalque pur et simple, avec des moyens différents, de concepts repris à un autre système. L'adoption d'une grille nouvelle pour véhiculer des informations portant sur la structure des objets en général équivaut presque toujours à la détermination de catégories nouvelles, et le déplacement du terrain sur lequel s'échafaude la construction de l'objet fait apparaître de nouveaux résidus de la réduction formelle. En termes traditionnels, un nouveau sous-bassement intuitif est, explicitement ou implicitement, peu à peu constitué (…).
>
> [On] pourrait croire que notre méthode d'investigation va consister en une histoire des concepts. Ce n'est pas exactement notre dessein. Il s'agira plutôt de discerner la pluralité des modes d'expression et de construction d'un concept, de faire comprendre comment cette pluralité est liée à différentes manières de pratiquer, et même, si l'on veut bien admettre cette formule, de *vivre* le symbolisme. » [Granger 1968, 23-24]

[267] Serfati emploie une expression du même ordre, il parle *de pratique aveugle* pour décrire le processus qui est selon lui à la base de toute création mathématique et qui consiste à transformer par jeu combinatoire les expressions symboliques mathématiques jusqu'à ce qu'apparaisse une expression qui puisse faire sens [Serfati 2005, 310-313]. Je ne discuterai pas spécifiquement ceci dans la mesure où la thèse défendue par Serfati concerne le symbolisme dans son ensemble et non le cas particulier des figures, on pourra toutefois se reporter à son ouvrage *La Révolution symbolique*, [Serfati 2005].

L'adoption de nouvelles grilles peut se traduire par l'opération qui consiste à construire un système symbolique à partir d'un même schéma symbolique (changement d'intension), la détermination de nouvelles catégories s'apparente alors à la mise au point de nouvelles classes-de-concordance. Le déplacement de terrain dont parle Granger se rapproche quant à lui d'une différence de fonctionnement symbolique selon les aspects du symbole qui sont exploités (fonctionnement en image ou en diagramme par exemple).

III.6. Synthèse esthétique

Au contraire de l'exemple de la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate, le fonctionnement adéquat du système pictural proposé dans cette section n'est pas celui d'une image mais il est celui d'un diagramme. Compte tenu du système d'analyse mis en place dans la dernière section, ce résultat nous amène à qualifier le système pictural constitué d'une représentation du résultat du théorème de Rolle plutôt comme non esthétique. L'interprétation correcte exige dans ce cas que l'on se place dans un contexte dénotationnel et la densité syntaxique n'intervient pas dans le mode de lecture requis.

Cela étant, on ne peut pour autant conclure que l'esthétique, au sens goodmanien, est exclue de tout ce qui concerne le théorème de Rolle et d'une illustration de ce dernier. En fait ce n'est pas au niveau du théorème et d'une représentation donnée en tant que produit fini qu'il faut chercher l'esthétique mais c'est au niveau de l'élaboration de ce type de système. Que faut-il entendre par produit fini ? Cette expression sert ici à souligner la différence qu'il y a entre les relations référentielles unissant une représentation et le théorème de Rolle (démonstration comprise) et l'étude des mouvements qui ont conduit à établir ces relations. Autrement dit, une fois le théorème démontré et illustré, on peut parler de produit fini pour désigner le système symbolique constitué d'une représentation (une courbe du type de la figure B) et de son interprétation formelle (la démonstration). Ma thèse est alors que si le fonctionnement adéquat de ce système comme produit fini est non esthétique, son élaboration par contre comporte des facettes esthétiques. Comme je l'ai montré, la construction de la

démonstration du résultat suggérée par la figure est fondée sur la dialectique entre deux représentations d'une fonction donnée, l'une géométrique (sa représentation graphique) et l'autre algébrique (son expression formelle). Par souci de clarté, je parlerai désormais de dialectique entre algèbre et géométrie. C'est une fois cette dialectique instaurée que l'on peut avoir un raisonnement esthétique. La mise en place de la dialectique sert en quelque sorte de déclencheur, si l'on peut dire, du fonctionnement esthétique. Les raisons de cela s'articulent autour de deux axes. Le premier concerne les particularités syntaxiques et sémantiques des systèmes en question. Le traitement géométrique de la démonstration est rendu impossible par la densité syntaxique du schéma pictural alors que c'est par contre la densité sémantique du système algébrique qu'il le rend possible. De plus, le fonctionnement de la courbe est non syntaxiquement saturé, ou, ce qui revient au même, il est atténué. En effet, la densité syntaxique y étant dans ce cas un obstacle, elle est de fait contingente : l'interprétation correcte de la figure ne passe pas par la prise en compte d'un grand nombre des traits et aspects des marques qui la constitue (seuls quelques uns font sens : la position relative des points en fonction de leurs abscisses et ordonnées, la continuité apparente du tracé et l'égalité des ordonnées aux bornes de l'intervalle). Mais, l'interprétation algébrique de la fonction est quant à elle saturée. La saturation est ici à entendre de la façon qui a été mise au point lors de l'étude de l'exemple de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. C'est-à-dire que l'interprétation algébrique, plus exactement, la traduction algébrique de la problématique mise en place de façon géométrique permet de diminuer, c'est-à-dire de saturer les hypothèses nécessaires à l'application du résultat en même temps qu'elle permet d'agrandir son champ d'application.

Le deuxième axe concerne le fonctionnement référentiel des deux systèmes. Le système pictural, comme on l'a vu, a un fonctionnement dénotatif, son interprétation passe par la recherche des étiquettes avec lesquelles concorde le schéma symbolique. L'exemplification est dans ce cas non opérationnelle dans la mesure où les étiquettes en jeu contiennent la notion d'infini. Tandis que le système algébrique requiert un fonctionnement exemplificationnel, puisque son fonctionnement passe par la prise en compte des étiquettes que la fonction (*son expression formelle*) exemplifie en tant que fonction continue et dérivable.

Il est alors intéressant de noter que la clé de la démonstration du théorème de Rolle est la substitution d'un système qui ne requiert pas un fonctionnement esthétique par un système qui lui, en requiert un. Une explication de ce dernier point peut être trouvée dans un cadre réaliste. En effet, on a vu dans la première partie de ce travail qu'une solution envisageable au dilemme de Benacerraf était de considérer l'esthétique comme condition d'accessibilité aux objets mathématiques. En acceptant les présupposés ontologiques que comporte ce cadre, on trouve alors dans les dernières réflexions un argument supplémentaire pour cette solution : c'est parce que le fonctionnement du système algébrique est esthétique que l'on peut avoir accès aux véritables raisons qui justifient le résultat obtenu.

Maintenant en dehors d'un cadre ontologique particulier, on peut peut-être simplement voir la fécondité de cette substitution d'un système symbolique qui ne présente pas de valeur esthétique par un autre qui au contraire exige un fonctionnement esthétique, comme une manifestation de l'efficacité cognitive de l'esthétique. Néanmoins, il semble qu'une piste de recherche sur la question pourrait être de s'intéresser à la question particulière du traitement symbolique de l'infini mathématique. Il faudrait alors étudier différents systèmes symboliques qui font référence à l'infini et tenter de déterminer s'il est nécessaire que ce type de système ait un fonctionnement esthétique. Cette hypothèse de travail est suggérée par l'étude menée sur le théorème de Rolle qui montre notamment le recours fait à un fonctionnement esthétique pour dissoudre des difficultés d'interprétations liées à la notion d'infini.

IV. Conclusion - Réflexions sur l'éducation mathématique

A la différence de la preuve sans mot du théorème d'Hippocrate, une représentation quelconque du théorème de Rolle ne peut pas avoir de valeur démonstrative. Plus précisément elle ne peut pas constituer un codage adéquat de la démonstration formelle et rigoureuse du théorème en question. Mais elle

peut par contre suggérer le résultat en l'illustrant. Le fonctionnement approprié est dans ce cas celui d'un diagramme, ce qui n'est pas, dans un sens goodmanien, un fonctionnement esthétique. Remarquons alors que quand bien même faire fonctionner une représentation du théorème de Rolle de façon esthétique (en image) ne fournit pas un codage de la démonstration, son fonctionnement correct (celui d'un diagramme) ne fournit pas plus d'éléments permettant de « remonter » jusqu'à la démonstration. La figure montre le résultat, sans l'expliquer ni en donner les justifications.

L'approche démonstrative montre que pour comprendre pleinement ce dont il est question avec ce théorème, il faut installer une dialectique entre une représentation géométrique donnée et un traitement algébrique du problème. La section précédente (*synthèse esthétique*) montre que l'aspect esthétique de l'exemple choisi se mesure à l'aune de cette dialectique : ce n'est pas au niveau de la compréhension du système constitué par le théorème, sa démonstration et une illustration du résultat qu'un fonctionnement esthétique s'impose mais c'est au niveau de son élaboration à partir de l'approche fondée sur une représentation picturale mis en vis-à-vis avec sa traduction algébrique. Ainsi, la compréhension complète de ce théorème dépend de l'appréhension de ce dernier au travers de la dialectique algèbre – géométrie à laquelle il donne lieu et cette dernière implique un fonctionnement esthétique pour être correctement interprétée.

D'une certaine façon, ce constat accrédite une thèse, présentée en première partie, selon laquelle l'Histoire évacue les aspects esthétiques des mathématiques[268]. En effet, l'enseignement classique, usuel, du théorème de Rolle consiste généralement en l'exposition de la démonstration, une fois connues les notions de continuité et de dérivabilité, accompagnée d'une illustration du type de la figure B que j'ai proposée. Mais, si l'on propose effectivement une interprétation géométrique du résultat, on n'enseigne habituellement pas pourquoi la figure ne permet pas de remonter jusqu'à la démonstration. Autrement dit, on

[268] Cf. Partie I. B. II.3.

évacue du processus de transmission les aspects esthétiques[269]. Ce qui est dommageable, à la fois parce que l'attention n'est alors pas portée sur l'intérêt fondamental du théorème (raffinement du théorème des valeurs intermédiaires) et parce qu'une telle transmission du savoir mathématique ne permet pas d'en transmettre les aspects esthétiques. Ces deux manque à gagner ne sont pas indépendants l'un de l'autre puisque c'est finalement le fonctionnement esthétique qui permet la pleine compréhension du résultat.

La question de la bonne transmission des mathématiques amène à reconsidérer l'une des thèses défendues par Poincaré à propos de la pratique mathématique, plus exactement à propos des qualités nécessaires à la pratique de cette discipline. La véritable compréhension des faits mathématiques et l'invention en mathématiques exigent d'être pourvu d'une grande sensibilité esthétique, et c'est là pour Poincaré la qualité indispensable, au-delà d'une bonne mémoire et d'une force d'attention importante[270]. Cette sensibilité apparaît chez Poincaré comme une qualité innée, puisque « celui qui en est dépourvu ne sera jamais un véritable inventeur. »[271]. Or, ne peut-on pas envisager, à la lumière des réflexions précédentes sur la bonne transmission des mathématiques, la possibilité d'une éducation à l'esthétique des mathématiques ? Plus exactement, ne peut-on pas dire que c'est à cause d'une tradition d'enseignement (inscrite sous le dogme d'une science pure) qui néglige la dimension esthétique de cette science qu'une grande majorité y reste hermétique ? C'est en tout cas ce que

---

[269] Que l'enseignement des sciences mathématiques ne comporte pas une approche de leur dimension esthétique est un trait également souligné et regretté par Root-Bernstein :

> "The notion that sciences are characterized by rigorous personal styles as integral to their form and fonction as in the arts is a very important insight, for it reveals to us the inadequacies of the ways in which we teach mathematics and the sciences. Students rarely, if ever, are given any notion whatever of the aesthetic dimension or multiplicity of imaginative possibilities of the sciences, and therefore, no matter how technically adept, can never truly understand or appreciate them." [Root-Bernstein 1997, 64]

[270] Cf. [Poincaré 1908, 43-54]

[271] Cf. [Poincaré 1908, 54]

soutient King[272]. Ce dernier partage le point de vue poincaréen sur la nécessité d'un sens aigu de l'esthétique pour faire des mathématiques, il en conteste cependant le caractère inné. Pour lui, il s'agit plutôt d'une compétence qui doit s'acquérir par un apprentissage approprié :

> "In holding this view [sensitivity to the aesthetics of mathematics is something granted only to the tiny subset of the population destined to be creative mathematicians], Poincaré falls right in line with the unstated but tacitly held position of contemporary mathematicians who also believe this aesthetic sensibility to be innate. If you have it, they believe, you will become one of them. If you do not, nothing can be done for you. (...)
>
> I refuse to believe that this is the nature of things, that mathematics must remain forever beyond all but a tiny minoriy of our citizens. The notion that there exists a large subset of the populace who are capable of appreciating and understanding music, art, and literature but are somehow innate mathematical cripples seems to be simultaneously arrogant, apologetic, and just plain wrong. But, obviously, we have no reached these people with our present system of mathematics instruction which turns on the concept that mathematics is best presented through emphasis on its value as a scientific tool. We can do ourselves no harm by trying another approach, by presenting to our students early on those characteristics of mathematics which, in Poincaré's words, contain "this character of beauty and elegance, and which are capable of developing in us a sort of aesthetic emotion." [King 1992, 131-133]

Si King a raison, alors la thèse de Poincaré sur la nécessité d'un sens aigu de l'esthétique pour faire, au sens fort, des mathématiques est soutenable en dehors de tout présupposé quant à la nature, innée ou acquise, de cette qualité. Cependant, deux remarques viennent nuancer les propos de King. La première concerne l'aspect pratique et concret de la mise en œuvre du projet de King. Prétendre à une éducation en matière d'esthétique mathématique sous-entend déjà la mise au point d'un programme spécifiant de manière suffisamment précise ce qu'il faut entendre par les aspects esthétiques de cette discipline, les outils pédagogiques adaptés à leurs transmissions, les compétences précisément visées, etc. Et surtout, il faut pouvoir mettre au point un moyen d'évaluer les résultats obtenus par le biais de ce type d'éducation. Il est évident qu'il s'agit là de

[272] King propose un module d'enseignement intitulé Aesthetics of mathematics au sein du département de mathématique de Lehigh University Bethlehem.

questions d'ordre pédagogique, de problématiques liées à l'éducation et à la psychologie de l'éducation et plus particulièrement qui relèvent du domaine de la recherche de l'enseignement mathématique. Il est clair que ce n'est pas mon propos dans le cadre du présent travail. On notera toutefois que l'ambition d'une éducation à l'esthétique des mathématiques comme la préconise King est une chose sûrement plus facile à dire qu'à faire. On pourra d'ailleurs en référer à l'ouvrage de Goodman *L'art en théorie et en action*[273] dans lequel il propose en particulier une description de la raison d'être du *projet zéro* et où il en expose les difficultés de réalisation ; ces dernières laissent pressentir les difficultés semblables que l'on pourrait rencontrer dans les domaines mathématiques. Je rappelle que le projet zéro vise en particulier une éducation esthétique dans les domaines artistiques, il a pour cadre théorique la théorie des symboles exposée dans *Langages de l'art*, et son l'approche générale est la suivante:

> « L'usage de systèmes symboliques – l'interprétation, l'application, l'invention, la révision – est impliqué dans de nombreux aspects de la connaissance, de l'action et de la compréhension dans les arts, les sciences et la vie en général. De tels systèmes symboliques peuvent être classés en espèces, en fonction de certaines caractéristiques significatives. En identifiant les espèces de systèmes symboliques en jeu dans une phase donnée d'une activité artistique particulière, nous avons gagné certains indices concernant les capacités requises, aussi bien que les manières de discerner et de développer ces capacités. » [Goodman 1984, 68]

Il semble envisageable de s'inspirer du projet zéro pour mener un projet similaire dans le domaine mathématique à partir des données collectées dans cette dernière partie, qui sont en fait autant d'indices concernant les caractéristiques syntaxiques et sémantiques significatives en jeu dans le fonctionnement de divers systèmes symboliques mathématiques et autant de manière de circonscrire les capacités requises pour les différents types de fonctionnement.

La seconde remarque à faire à propos de l'argumentation de King pour contester le caractère inné de la sensibilité esthétique en mathématique porte sur la différence entre les niveaux de mathématiques concernés. En effet, il est clair

[273] [Goodman 1984] en particulier le chapitre 2 (Explorations dans le domaine de l'éducation artistique) de la seconde partie : *L'Art en action*.

que pour Poincaré, la sensibilité esthétique est une qualité nécessaire pour une pratique professionnelle pourrait-on dire, des mathématiques. Son rôle est indispensable à l'invention mathématique. La thèse de Poincaré concernerait donc en un sens une certaine élite mathématique, celle qui pratique les mathématiques de façon créatrice. La solution de King pour éluder la question sur la nature de cette qualité porte quant à elle sur la pratique élémentaire de mathématiques, l'apprentissage scolaire de bases mathématiques. Peut-on comparer ces deux activités, ou plus exactement, peut-on invoquer la seconde pour parler d'une thèse qui porte sur la première ? King anticipe cette objection et s'en défend en remarquant que si on ne peut pas affirmer que l'esthétique poincaréenne des mathématiques s'applique au niveau élémentaire des mathématiques, on ne pas affirmer non plus que tel n'est pas le cas :

> "The mathematical elite share with Poincaré the sensitivity to the aesthetics of mathematics. Of this, there can be no doubt. But maybe the rest of us can share it too *provided the methods of presenting and writing mathematics are changed so as to bring the aesthetic component out into the open* and to develop a sensitivity for it in students as we now attempt to develop in them a sensitivity for the poetry of Shakespeare, the music of Brahms, and the paintings of Cézanne. We cannot *assume* (...) that Poincaré's aesthetics notions (which he associated only with the highest levels of mathematics) apply to more elementary mathematical work. But, until we have some data and some experience with alternate approaches to mathematics, *we cannot assume the contrary either*." [King 1992, 134]

Cette deuxième remarque a en fait un fondement commun avec l'une des objections qu'a pu rencontrer Goodman quant à la mise en oeuvre de son projet zéro. En effet, plus qu'une différence entre un niveau, disons, élitiste, et un niveau élémentaire, cette objection trahit une confusion entre la créativité et l'éducation :

> « Une confusion supplémentaire résulte de l'erreur qui consiste très souvent à prendre le problème de l'éducation artistique pour celui de la créativité. L'étude de la créativité, quelle qu'en soit la nature, est une partie de notre programme [du projet zéro], mais elle n'en représente pas la totalité, pas même sa composante principale. Les arts réclament certainement des moyens de découvrir et d'entretenir l'originalité, le talent supérieur, le génie, pas plus toutefois que dans le domaine des technologies et des sciences. Que nous n'ayons aucune méthode sûre pour produire des Edison

> ou des Einstein ne rend pas moins important l'enseignement dont ils ont eu besoin (…). » [Goodman 1984, 71]

Cette mise au point semble suffisante pour écarter l'objection évoquée ci-dessus. King ne propose pas d'enseigner la créativité mathématique mais de développer la sensibilité esthétique à certains aspects des mathématiques au travers d'une approche adéquate de ces dernières.

Cela étant, il convient de remarquer toutefois qu'il est hâtif d'affirmer que Poincaré ne réserve un rôle à la sensibilité esthétique qu'en ce qui concerne l'invention, les mathématiques professionnelles. En effet, cet aspect de sa conception apparaît au terme d'une investigation sur la compréhension des mathématiques, même élémentaires. Le point de départ du développement qui le conduit à conclure à la nécessité de l'esthétique est le constat suivant lequel tout le monde ne peut pas comprendre un raisonnement mathématique lorsque on le lui expose[274]. Pour Poincaré, le sens de l'esthétique est nécessaire au niveau de la compréhension puisqu'il place cette dernière sous une perspective de l'ordre et de l'harmonie :

> « Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'œil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire. » [Poincaré 1908, 46]

274

> « Que tout le monde ne soit pas capable d'invention, cela n'a rien de mystérieux. Que tout le monde ne puisse retenir une démonstration qu'il a apprise autrefois, passe encore. Mais que tout le monde ne puisse pas comprendre un raisonnement mathématique au moment où on lui expose, voilà qui parait bien surprenant quand on y réfléchit. Et pourtant ceux qui ne peuvent suivre ce raisonnement qu'avec peine sont en majorité : cela est incontestable et l'expérience des maîtres de l'enseignement secondaire ne me contredira certes pas. » [Poincaré 1908, 44]

Ainsi, dans sa conception poincaréenne, le rôle de l'esthétique n'est pas limité aux questions qui concernent la pure créativité mathématique mais il concerne tout autant les questions de compréhension élémentaire. Ce dernier point fournit finalement un argument supplémentaire en faveur de la légitimité d'une entreprise qui viserait à élaborer une méthode d'éduction aux mathématiques intégrant leur dimension esthétique.

Conclusion Langages de l’art et langages des mathématiques

Quelle signification et quel rôle a l'esthétique en mathématique ? Telle pourrait être une façon de synthétiser la question initiale à l'origine de ce travail.

Que les mathématiques possèdent une certaine beauté[275], une certaine valeur esthétique, que cet attribut puisse être considéré comme l'une des plus importantes motivations du mathématicien pour se condamner par avance à de longs et pénibles travaux[276], que l'attrait esthétique soit le meilleur guide dans cette entreprise[277] ou finalement que les mathématiques puissent être qualifiées d' « art »[278], voilà des suppositions qui sont habituellement admises par une large partie des mathématiciens et des philosophes. On pourrait même parler de lieu commun tant il semble aujourd'hui banal de trouver au détour d'écrits rétrospectifs de mathématiciens ou d'ouvrages sur l'esthétique une évocation de cette dimension des mathématiques. Le vocabulaire utilisé est délibérément choisi : la beauté ou l'esthétique des mathématiques, son rôle au sein du processus de développement de cette science est admis, on l'évoque comme on évoque un fait indubitable. Au-delà de souligner le statut particulier de la question de l'esthétique des mathématiques – particulier dans le sens où c'est en fait une question qui ne semble pas devoir être posée – le choix du vocabulaire précédent veut mettre en valeur les amalgames et les confusions qui ont lieu dans ce domaine. La première étape de la quête d'une réponse à la question initiale pourrait être comparée à une sorte d'état des lieux doublé d'un travail de nettoyage. Il a fallu procéder à un examen des recours possibles à l'Histoire en écartant les fausses pistes, comme se fut le cas par exemple avec l'idée d'un recours à des arguments d'autorité de philosophes de l'Antiquité grecque ou latine pour espérer justifier une comparaison entre les mathématiques et l'art. De façon à vérifier la nécessité d'entreprendre de nouvelles

[275] Cf. [Hutcheson 1725]

[276] Cf. [Poincaré 1908, 22

[277] Cf. [Hadamard 1945, 117]

[278] Cf. [Sullivan 1956, 2012-2015]

recherches sur la question, j'ai élaboré une description systématique des solutions philosophiques déjà explicitement ou implicitement proposées en tâchant autant que possible de souligner les confusions et de dénoncer les amalgames. Cela a permis en outre de mettre en lumière les présupposés ontologiques ou métaphysiques souterrains et donc d'indiquer les choix à faire par rapport à ces derniers afin de préserver la cohérence des argumentations exposées.

L'examen de l'ensemble de ces solutions ainsi que l'état des lieux des avantages et des inconvénients de chacune, ont finalement conduit à sélectionner une approche sémiologique et fonctionnelle de l'esthétique en vue de montrer et de justifier le rôle de l'esthétique au niveau du développement et de la compréhension des mathématiques. La théorie goodmanienne de l'esthétique a été choisie comme le candidat idéal susceptible de fournir une solution la plus économique possible, d'un point de vue ontologique, et la plus générale possible, par rapport à sa dimension explicative. Reste alors à vérifier la pertinence de ce choix

Au terme des exemples d'applications des outils goodmaniens, il est manifeste que ces derniers offrent une économie en termes d'ontologie. Dans l'ensemble des relectures de divers procédés mathématiques, il n'a nullement été nécessaire de présupposer un cadre ontologique en particulier afin que les applications puissent faire sens. Au contraire, j'ai montré que certaines conceptions de l'esthétique en mathématiques construites à l'intérieur d'une perspective ontologique donnée pouvaient en fait s'en abstraire. Ce résultat permet de réconcilier l'ensemble des différentes conceptions du statut ontologique des mathématiques sur la base de leur fonctionnement esthétique.

Le principal résultat attendu d'une analyse systématique de l'esthétique en mathématique est, avant tout autre chose, sa capacité à rendre compte du rôle de l'esthétique dans le processus de développement de cette discipline. En effet, c'est bien là la véritable difficulté : que les mathématiques possèdent certaines propriétés esthétiques, que l'on puisse leur attribuer une certaine beauté ne pose finalement pas de réel problème. Il existe d'ailleurs de nombreuses descriptions satisfaisantes

de ce que l'on peut entendre par la beauté des mathématiques, ces dernières se fondent pour l'essentiel sur les notions de symétrie, d'ordre ou encore d'harmonie. Ce qui nécessite en revanche des considérations plus délicates est l'explication du rôle effectif de l'esthétique au sein du raisonnement mathématique ; celui-ci est souvent affirmé mais rarement démontré. Dans la mesure où la problématique des rapports entre l'esthétique et les mathématiques se réduit en fait à un problème de rôle et de fonction plus qu'à un problème de propriété, il semble naturel pour le résoudre de vouloir l'aborder en terme de fonctionnement plutôt qu'en terme d'évaluation. C'est la raison pour laquelle une théorie fonctionnelle et symptomatique est davantage appropriée qu'une critériologie évaluative. Le choix de l'outil goodmanien est donc, en théorie, pertinent, puisqu'il s'inscrit dans une perspective cognitive et fonctionnelle de l'esthétique. Naturellement, ce que l'on demande à un outil est davantage d'être performant en ce qui concerne son utilisation, que d'être judicieux en ce qui concerne sa sélection. Q'est-ce qu'a alors permis la théorie de Goodman, en tant qu'outil ?

La confrontation entre la théorie de Goodman et les mathématiques a donné lieu à la construction d'un procédé systématique d'analyse du mode opératoire de la méthode mathématique. Le bénéfice de ce procédé réside dans le fait qu'il est adapté à la pratique des mathématiques et non à leur seule ossature logique. De ce fait, l'outil goodmanien a notamment permis de restituer à certaines phases du raisonnement une rigueur que la logique extensionnelle ne peut pas prendre en compte. En particulier, on a pu montrer que la compréhension du raisonnement d'une démonstration sous la perspective de l'ordre de ses enchaînements passe par l'identification du rôle tenu par les écritures choisies au niveau du codage de la démonstration. L'exploration des références à partir d'une analyse de la syntaxe et de la sémantique mathématique a montré que l'on peut en fait distinguer deux objets mathématiques qui ont pourtant le même sens et la même dénotation en prenant en compte leur rôle exemplificationnel. C'est ainsi que l'on parvient à interpréter la coloration frégéenne en termes d'exemplification. En ce qui concerne les figures mathématiques, l'analyse de leurs modes de fonctionnement à partir de la symptomatologie goodmanienne a montré quels sont leurs aspects syntaxiques et

sémantiques qui en déterminent les articulations. L'étude de deux cas de figure, l'une démonstrative et l'autre illustrative, a notamment donné lieu à une classification entre les figures qui fonctionnent en image et celles qui fonctionnent en diagramme. La mise au point de cette classification a permis de justifier et d'expliquer la valeur démonstrative de la figure mathématique. L'un des bénéfices de cette approche est qu'elle offre de montrer la valeur esthétique de la géométrie indépendamment de toute considération relative à des questions de représentation. D'autre part, l'analyse goodmanienne de la figure géométrique permet d'en révéler la valeur esthétique en tant que symbole mathématique et non en tant que symbole pictural quelconque.

De façon synthétique et résumée, la théorie sémiologique de Goodman offre d'intégrer à une analyse du mode opératoire des considérations qui portent sur la syntaxe et la sémantique du codage mathématique. Le gain d'une telle analyse est qu'il est alors possible de considérer le rôle d'un symbole mathématique au sein d'un raisonnement particulier en fonction de son intension ou de sa coloration là où la logique standard ne prendrait en compte que sa seule extension.

Une conséquence de cela est qu'il a été possible de justifier le fonctionnement esthétique des mathématiques, c'est-à-dire leur *valeur esthétique* au sens de Goodman, et d'en montrer le rôle au sein du processus de développement et de compréhension des mathématiques. Plus précisément, l'identification des symptômes de l'esthétique a permis de montrer la valeur esthétique des mathématiques puisque l'on a pu vérifier la nécessité d'exploiter les symptômes en question pour le bon fonctionnement des mathématiques en tant que système symbolique. A ce propos, l'un des principaux résultats obtenus est que la densité syntaxique des systèmes picturaux en mathématiques et la densité sémantique des systèmes littéraux mathématiques ne sont pas des caractéristiques systématiquement contingentes en ce qui concerne le fonctionnement symbolique de ces systèmes. Au contraire, le raisonnement trouve sa fécondité dans l'exploration de la densité. C'est la multiplicité des classes-de-référence non disjointes qui rend possible l'exemplification dans une démonstration et c'est l'exploitation de cette même propriété qui offre de mettre à jour de nouvelles catégorisations. Le développement des mathématiques se nourrit de la densité du système symbolique

mathématique en même temps qu'il participe à la construire, puisque chaque nouvelle catégorie, chaque nouvelle façon de voir un objet vient se rajouter aux classes-de-référence possibles.

De façon plus générale, l'interprétation des symptômes goodmaniens par rapport à leur application aux mathématiques a clarifié certains mouvements fondamentaux de la pensée mathématique. On a pu ainsi fournir une description des processus de généralisation et d'abstraction ainsi qu'une interprétation de la notion poincaréenne d'analogie.

On pourra reprocher à l'approche choisie de la problématique de l'esthétique des mathématiques de ne traiter que sa dimension fonctionnelle et cognitive, autrement dit de ne pas aborder l'esthétique de façon évaluative, en termes de propriétés esthétiques. A cela, je répondrai tout d'abord que le fonctionnement esthétique précède l'évaluation esthétique[279]. A ce titre, ce travail peut être considéré comme prémisse à une approche davantage qualitative et évaluative de l'esthétique des mathématiques. Cependant, je ne suis pas certaine que ce soit là le point fondamental de la dimension esthétique des mathématiques, qui du reste m'apparaît comme résolument fonctionnelle et cognitive. Cela étant, il semble qu'il n'y aurait pas de difficulté outre mesure à réinterpréter les critères esthétiques habituellement attribués aux mathématiques, tels que l'ordre, la symétrie, l'analogie ou encore la simplicité par le biais de la symptomatologie goodmanienne (j'ai d'ailleurs eu l'occasion d'expliciter par exemple la simplicité en termes de saturation ou l'analogie en termes d'étiquette commune).

Finalement, l'adéquation entre la théorie goodmanienne et les mathématiques est presque « trop parfaite », si l'on ose dire. Il a certes fallu procéder à quelques arrangements, notamment celui qui a consisté à évacuer de la caractérisation de la densité un recours systématique à la notion d'ordre, mais dans l'ensemble la théorie de l'esthétique de Goodman s'applique avec une étonnante adéquation aux

[279] Cf. [Pouivet 1996, 32-51]

mathématiques. L'aspect surprenant de cette adaptabilité réside surtout dans le fait qu'il n'en va pas de même avec l'application de ladite théorie aux domaines artistiques, ce qui pourtant aurait dû poser a priori bien moins de problèmes[280]. Ne pourrions nous pas alors penser qu'en fait Goodman a emprunté aux mathématiques pour construire sa théorie ? Ce qui resituerait ainsi les *Langages de l'art* dans la lignée des premiers traités de l'esthétique tel celui de Hutcheson ou encore, d'un point de vue rétrospectif, du livre M de la Métaphysique d'Aristote puisque, comme on l'a montré, les mathématiques y sont considérées comme le modèle de la beauté ; ce sont ces dernières qui permettent aux auteurs en question de construire les critères esthétiques en même tant qu'elles fournissent l'occasion de montrer le rôle cognitif de l'esthétique. Quoi qu'il en soit, la question de l'influence des mathématiques sur l'entreprise goodmanienne quant aux langages de l'art trouve peut-être une légitimité en tant qu'hypothèse à la vue du travail effectué dans la troisième partie mais elle n'y trouve en aucun cas une réponse argumentée. La justification d'une telle hypothèse nécessiterait de poursuivre la construction de l'édifice dont l'ensemble de ce travail constitue les fondations, en puisant les matériaux dans l'œuvre de Goodman, en particulier dans *La Structure de l'apparence*[281].

Mais finalement, est-il vraiment important de déterminer qui de l'art ou des mathématiques possède la primeur du statut de modèle pour une analyse du fonctionnement esthétique ? Il me semble pour ma part qu'il importe bien plus d'avoir montré la parenté entre les démonstrations artistiques et les démonstrations mathématiques et d'avoir pu ainsi restituer à la dimension esthétique l'importance de son rôle au sein du développement des mathématiques en tant qu'activité créatrice.

[280] Cf. par exemple, [Blanc-Benon, 2004]

[281] Cf. [Goodman 1951]

Index des noms

A

Abel, N. H. 256
Agassi, J. 34, 35, 54, 55, 59, 90, 91, 92
Allwein, G. 227, 228
Apostle, H. G. 23, 24
Argand, R. 194
Aristote 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 41, 62, 65, 93
Arnaudiès, J. M. 181, 271, 272
Arrell, D. 100, 129
Atiyah, M. 166
Austen, J. 143

B

Bacon F. 34, 90
Balmès A. D. 46
Barwise, J. 227, 228, 244
Batteux, C. (Abbé) 39, 41, 42, 43
Baumgarten, A. G. 40, 41, 43
Bell, E. 52, 53, 76, 88, 259
Benacerraf, P. 27, 284
Benatouil, T. 21
Bézout, E. 210
Blanc-Benon, L. 101, 278
Brahms, J. 99, 289

C

Capella, M. 16
Cartan, H. 172
Cassirer, E. 38, 40, 41, 49, 144
Cavaillès, R. 184
Cézanne, P. 289
Chandrasekhar, S. 51
Chernyak, L. 44
Cometti, J. P. 19
Connes, A. 255
Crombie, A. 18
Crouzas, J. P. 45, 46
Crubellier, M. 25, 29, 30
Curie, M. 90

D

Dahan-Dalmedico, A. 194, 256, 257
Davis, P. J. 156, 166
Delahaye, J. P. 226, 235, 249
Dempster, D. 101
Desargues, G. 184, 196
Descartes, R. 34, 183, 255, 256
Diderot, D. 42
Dieudonné, J. 185, 186, 191, 225
Diophante 214
Dipert, R. R. 101
Dirac, P. A. M.. 53, 66, 76, 259
Dixmier, J. 204, 209
Dostoevsky, F.M. 91
Dufrenne, M. 44

Dürer, A. 116

E

Einstein, A. 99, 290
Elgin, C. Z. 97, 123, 137, 138, 142, 143, 144, 150, 151, 229, 230
Eluard, P. 187
Engler, G. 69, 70
Etchemendy, J. 227, 228
Euclide 15, 47, 158, 197, 215

F

Fermat (de), P. 214
Fraysse, H. 181
Frege, G. 160, 193
Fry, R. 78, 79, 80

G

Galois, E. 256
Gauss, C. F. 200, 201, 202, 203, 204, 210, 213, 214
Genette, G. 101
Gernez, B. 19, 23
Goodman, N.52, 79, 94, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 139, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 147, 150, 151, 155, 156, 157, 159, 164, 165, 167, 173, 175, 176, 177, 187, 188, 190, 211, 215, 217, 219, 221, 222, 224, 229, 230, 232, 233, 244, 247, 249, 259, 274, 275, 278, 288, 289, 290
Granger, G. G. 182, 183, 184, 195, 196, 255, 256, 275, 281, 282
Grothendieck, A. 280

H

Hadamard, J. 70, 71, 76, 88, 163, 259
Hardy, G. H. 58, 156, 157, 158, 165, 171, 172, 174, 182, 197, 198, 199, 214, 215, 259
Heinzmann, G. 62, 160
Helmholtz, H. 90
Hermite, C. 258, 268
Hersh, R. 166
Hippocrate (de Chios) 234, 235, 241, 247, 248, 249, 251, 253, 255, 282, 284
Hokusai, K. 114, 146
Hull, K. 230, 231
Hume 47
Hutcheson, F. 46, 47, 48

J

Jacquette, D. 167
Jakobson, R. 195
Jullien, C. 58, 215, 259

K

Kant 44, 91, 93
Kashi (-Al) 180
Kazhdan, D. 44
King, J. P. 156, 287, 288, 289, 290
Kivy, P. 72, 74, 80, 81

Kristeller, P. O. 16, 17, 33, 34, 35, 38, 40, 42, 47
Krull, W. 75
Kuhn, T. S. 89

L

Lamouche, A. 167
Laudan, L. 88, 89
Le Lionnais, F. 15, 170, 220, 257, 258
Leonard de Vinci 17
Loi, M. 15
Lombard, P. 254, 280

M

Mach, E. 161
Machan, T. R. 167
Mamchur, E. 169, 170
Mandelbrojt, S. 191
Martin, J. E. 89
Mashaal, M. 172
Mc Allister, J. W. 89, 90, 91, 92
Mondrian, P. 99, 221
Morizot, J. 97, 99, 103, 111, 118, 119, 120, 123, 133, 141, 147, 151, 175, 177, 193, 233
Morley, F. 254, 255, 278, 280

N

Nagel, A. 145
Nelsen, R. 227
Newton, I. 99

O

Osborne, H. 76, 167

P

Papert, S. A 156, 157, 161, 162
Patras, F. 166
Peiffer, J. 194, 256
Penrose, R. 167
Perigal, H. 226, 249
Perrault, C. 35
Pierce, C. S. 230
Platon 17, 22, 23, 26, 31, 51, 60, 62, 63
Poincaré, H. 51, 52, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 86, 88, 161, 163, 166, 167, 172, 173, 174, 184, 185, 186, 188, 189, 194, 259, 286, 287, 289, 290
Pouivet, R. 92, 111, 115, 116, 117, 123, 124, 126, 134, 151, 175, 176, 190, 217, 229, 230, 253
Prévert, J. 149
Pythagore 158, 171, 178, 180, 182, 197, 198, 226, 237, 245, 249

Q

Queneau, R. 187
Quinet, E. 170

R

Randall, J. H. 18
Rembrandt, V. R. 99
Riemann, B. 258
Rimbaud, A. 187
Ritter, J. 166
Rolle, M. 180, 181, 257, 259, 260, 262, 263, 266, 267, 269, 271, 272, 275, 278, 280, 282, 283, 284, 285
Rollins, M. 101
Root-Bernstein, R.S. 79, 80
Ross, W. D. 26
Rostand, F. 247
Rota, G. C. 58
Russel, B. 69

S

Samuel, P. 204, 207, 211, 214
Schaeffer, J-M. 44
Serfati, M. 281
Servois, F. 194
Shaftesbury, A. 39, 40, 43
Shakespeare, W. 289
Sullivan, J. W. N. 77, 259, 295, 320

T

Tauber, A. I. 15, 89
Théodore 182

U

Upton, L. J. 226

V

Vuillemin, J. 158

W

Weierstrass, K. 258, 271
Werben, A. 99
Winterbourne, A. T. 44
Wollheim, R. 97
Wotton, W. 35

Y

Young, J. O. 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 101, 219, 224, 225, 250

Z

Zemach, E. M 101

Bibliographie

Agassi, Joseph

1979 Art and Science, *Scientia* 114 : 127—152.

Allwein, Gerard & Barwise, Jon.

1996 *Logical Reasoning with Diagrams*, New York : Oxford University Press 1996.

Aristote

Métaphysique. Traduction anglaise, introduction et commentaires par W. D. Ross, volume II, Oxford : Oxford University Press 1924.

La Poétique. Traduction française, introduction et notes par Barbara Gernez, Paris : les Belles Lettres 2001.

Arnaudiès, Jean-Marie & Fraysse, Henri

1988 *Analyse*, Paris : Bordas 1988.

Arrell, Douglas

1987 What Goodman Should Have Said About Representation; *The Journal of Aesthetics and Art Criticism* 46 : 41— 49.

1990 Exemplification Reconsidered, *British Journal of Aesthetics* 30, (3) : 233—243.

Batteux, Abbé Charles

1746 *Les Beaux-Arts réduits à un même principe,* tome 1 de la nouvelle édition de *Principes de la littérature,* 6 tomes, Lyon : Amable Leroy, 1802.

Baumgarten, Alexander Gottlieb

1750 *Esthétique*. Traduction française, présentation et notes par Jean-Yves Pranchère, Paris : L'Herne 1988.

Benacerraf, Paul & Putnam Hilary

1964 *Philosophy of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University press 1983.

Blanc-Benon Laure

2004 *La Question du réalisme en peinture*, thèse universitaire de l'université Nancy2, UFR Connaissance de l'homme, département de philosophie soutenue le 13 novembre 2004.

Borevitch, Z. I. & Chafarevitch, I. R.

1967 *Théorie des nombres*, Paris : Gauthier-Villars 1967.

Cassirer, Ernst

1932 *Die Philosophie Der Aufklärung*, Tubingen : J. C. B. Mohr (éd.). Traduction française par Pierre Quillet, *La philosophie des lumières*, Paris : Fayard 1976.

Chandrasekhar, Subrahmanyan

1987 *Truth and Beauty : Aesthetics and Motivations in Science*, Chicago : University of Chicago Press 1987.

1989 The Perception of Beauty and the Poursuit of Science, *Bulletin of the American Academy of Arts and Sciences* 43 (3) : 14—29.

Chernyak Léon & Kazhdan David

1997 Kant and the Aesthetic-Expressive Vision of Mathematics, in [Tauber 1997, 203—227].

Colyvan Mark

2001 The Miracle of Applied Mathematics, *Synthese* 127 (3) : 265—277.

Cometti J-P., Morizot, J. & Pouivet, R

2000 *Questions d'esthétique*, Paris : PUF 2000.

2005 *Esthétique contemporaine - Art, représentation et fiction*, Paris : Vrin 2005.

Connes, Alain

2002 Géométrie non-commutative in [Michaud 2002, 217-236].

Crombie Alistair C.

1994 *Styles of Scientific Thinking in the European Tradition : The history of Argument and the Explanation Especially in the Mathematical and Bio Medical Sciences and Arts*, volume 1 (3 volumes), London : Duckworth 1994.

Crouzas (de) Jean-Pierre

1724 *Traité du Beau*, Paris : Fayard 1985.

Crubellier, Michel

1997 La Beauté du monde : les sciences mathématiques et la philosophie première, *Revue internationale de philosophie* 51 (201) : 307—331.

Dahan-Dalmedico, Amy & Peiffer, Jeanne

1986 *Une Histoire des mathématiques, routes et dédales*, Paris : Seuil 1986.

Davis, Philip & Hersh, Reuben

1982 *L'Univers mathématique*, Paris : Gauthier-Villars, 1985.

Delahaye, Jean-Paul.

2005 Démonstrations et certitude en mathématiques, *Pour la science* 49 : 38— 43.

Dempster Douglas J

1989 Exemplification and The Cognitive Value of Art, *Philosophy and Phenomenological Research* 49 (3) : 393— 412.

Dieudonné, Jean

1987 *Pour l'Honneur de l'esprit humain*, Paris : Hachette 1987.

Dipert, Randall,R.

1996 Reflections on Iconicity, Representation and Resemblance : Peirce's Theory of Signs. Goodman on Resemblance and Modern Philosophies of Language and Mind, *Synthese* 106 (3) : 373—397.

Dirac, Paul A. M.

1963 The Evolution of the Physicist's Picture of Nature, *Scientific American* 208 : 45—53.

1982 Pretty Mathematics, *International Journal of Theoretical Physics*, 21 (8/9) : 603—605.

Dixmier, Jacques

1976 *Cours de mathématiques du premier cycle*, Paris : Bordas 1976.

Dufrenne, Mikel

1995 Art, *Encyclopædia universalis,* Paris : Encyclopædia universalis, 3, 29—35.

Elgin, Catherine Z.

1991 Understanding Art and Science, *Midwest Studies of Philosophy* 16, 196—208. Cité d'après la traduction française par Roger Pouivet, Comprendre : l'art et la science in *Lire Goodman, les voies de la référence*, Combas : L'éclat 1992.

1997 *Nelson Goodman's Theory of Symbols and Its Applications*, Catherine Z. Elgin (ed.) New york : Garland Publishing 1997.

Engler Gideon A.

1990 Aesthetic in Science and in Art, *The British Journal of Aesthetic* 30 (1) : 24—34.

1994 From Art and Science to Perception : the Role of Aesthetics, *Leonardo* 27 : 207—209.

Fry, Roger

1919 *Vision and Design*, London : Chatto and Windus 1960.

Genette, Gérard

1997 *L'Oeuvre d'art : la relation esthétique*, Paris : Le Seuil 1997.

Goodman, Nelson

1951 *The Structure of Appearance*, Cambridge : Harvard University Press 1951. Traduction française coordonnée par Jean-Baptiste Rauzy : *La Structure de l'apparence* Paris: Vrin 2004.

1967 Science and Simplicity in [Morgenbesser 1967, 68-78].

1968 *Langages of Art, An Approach to a Theory of Symbols,* Indianapolis : Hackett, 1968. Traduction française par Jacques Morizot : *Langages de l'Art*, Nîmes : Chambon, 1990.

1978 *Ways of Worldmaking*, Hackett Publishing Company. Traduction française par Marie-Dominique Popelard : *Manières de faire des mondes*, Nîmes : Chambon 1992.

1984 *On Mind and Other Matters*, Harvard University Press, Cambrige Mass. Traduction française des deux premiers chapitres par Cometti, J-P. & Pouivet, R. : *L'Art en théorie et en action*, Paris : L'éclat 1996.

Goodman, N. & Elgin, C.

1988 *Reconceptions in Philosophy and other Arts and Sciences*, Cambridge : Hackett Publishing Company. Traduction française par Cometti, J-P. & Pouivet, R. *Reconceptions en philosophie dans d'autres arts et dans d'autres sciences*, Paris : PUF 1994.

Granger, Gilles-Gaston

1968 *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Odile Jacob 1988.

Hadamard, Jacques

1945 *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Paris : Gauthier-Villars 1975.

Hardy, G. H.

1940 *A Mathematician's Apology* Cambridge University Press 1940. Traduction française par Jullien, D. et Yoccoz, S : *L'Apologie d'un mathématicien*, Paris : Belin 1985.

Hardy G. H. & Wright E. M.

1938 *An Introduction of Theory of Numbers*, London : Oxford University Press 1938.

Heisenberg, Werner

1970 *Schritte uber Grenzen : Gespräche im Umkreis der Physik,* Munich: R. Piper 1971. Traduction anglaise par Peter Healt, *Across the Frontiers*, New York : Harper and Row 1974.

Heinzmann, Gerhard

1994 Mathematical Reasoning and Pragmatism in Peirce, in : D. Prawitz & D. Westerstahl (éds.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Dordrecht:/Boston/London : Kluwer, 297—310.

1997 Raisonnement mathématique et art, *Philosophia.scientiae*, 2 (1) : 31—145.

2006 Henri Poincaré et sa pensée en philosophie des sciences, in : E. Charpentier, E. Ghys, A. Lesne (éds.), *L'Héritage scientifique de Poincaré* Paris : Belin 2006.

Hoy, Ronald C

1973 Cognitive Aspects of Art and Science, *Philosophy of Science* 40 : 294—297.

Hutcheson

1725 *Inquiry into the Origin of our Ideas of Beauty and Virtue*, London, 1725. Traduction française, avant-propos et notes par Anne-Dominique Balmès *Recherche sur l'origine de nos idées de la beauté et de la vertu*, Paris : Vrin 1990.

Hull, Kathleen

1994 Why Hanker after Logic ? Mathematical Imagination, Creativity and Perception in Peirce's Systematic Philosophy, *Transactions of the Charles. S. Peirce Society* 30 (2) : 271—296.

Jacquette, Dale

1990 Aesthetics and Natural Law in Newton's Methodology, *Journal of the History of Ideas* 51 (4) : 659— 666.

Jullien, Caroline

1999 Les Mathématiques et l'esthétique, mémoire de DEA, LPHS Archives Henri Poincaré 1999.

King, Jerry P.

1992 *The Art of Mathematics*, New York : Plenum Press 1992:

Kivy, Peter

1976 *The Seventh Sense, A Study of Francis Hucheson's Aesthetics and its Influence in Eighteenth-Century Britain*, New York : Burt Franklin & Co. Inc. 1976.

1991 Science and Aesthetic Appreciation, *Midwest Studies in Philosophy*, XVI, 180—195.

Koyré, Alexandre

1973 Attitude esthétique et pensée scientifique in *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Paris : Gallimard 1973.

Kristeller, Paul Oskar

1999 *Renaissance Thought and the Arts*, Princeton : Princeton University Press. Cité selon la traduction française par Béatrice Han, *Le Système moderne des arts, étude d'histoire de l'esthétique*, Nîmes : Chambon 1999.

Krull, Wolfgang

1987 The Aesthetic Viewpoint in Mathematics, *The mathematical Intelligencer* 9 (1) : 48—52.

Kuhn, Thomas S.

1977 *La Tension essentielle,* traduction française par Michel Biezunski, Pierre Jacob, Andrée Lyotard-May et Gilbert Voyat, Paris : Gallimard 1977.

Lamouche, André

1955 *Le Principe de simplicité dans les mathématiques et dans les sciences physiques*, Paris : Gauthier-Villars 1955.

Lamarque, Peter & Olsen, Stein H.

2004 *Aesthetics and the Philosophy of Art, The Analytic Tradition*, P. Lamarque & S. Olsen, éds., Blackwell publishing Ltd 2004.

Laudan, Larry

1984 *Science and Values*, Berkeley : University of California Press 1984.

Le Lionnais, François

1962 *Les Grands courants de la pensée mathématique*, Paris : Blanchard 1962.

Loi, Maurice

1982 Les Mathématiques et l'art : de Pythagore à Bourbaki, *Diotima* 10 : 54 — 61.

Lombard, Philippe

2004 Le Goût de la géométrie, *Revue des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* 57 :19— 46.

Machan, Tibor, R.

1977 Kuhn, Paradigm Choice and the Arbitrariness of Aesthetic Criteria in Science, *Theory and Decision* 8 : 361—362.

Mandelbrojt, Szolem

1952 Pourquoi je fais des mathématiques, *Revue de métaphysique et de morale* 4 : 422— 429.

Margolis, Joseph

1997 Objectivity : False Leads from Kuhn on the Role of Aesthetic in the Science, in [Tauber 1997, 189-203].

Marquit, Erwin

1978 Scientific Creativity as an Aesthetic Activity, *Dialectics and Humanism* 5 : 19—25.

Martin, James E.

1989 Aesthetic Constraints on Theory Selection : A Critique of Laudan, *British Journal for the philosophy of Science* 40 : 357—364.

Mashaal, Maurice

2000 Cap sur l'axiomatique et les structures, *Pour la science* 2 : 45—54.

Mc Allister, James W.

1989 Truth and Beauty in Scientific Reason, *Synthese* 78: 25—51.

1990 Dirac and the Aesthetic Evaluation of Theories, *Methodology and Science* 23 (2) : 87—102.

1991 Scientists' Aesthetic Judgements, *British Journal of Aesthetics* 31 (4) : 332—341.

1996 *Beauty and Revolution in Science*, New York : Cornell University Press 1996.

1997 Scientists' Aesthetic Preferences among Theories : Conservative Factors in Revolutionary Crises in [Tauber 1997, 169-187].

Michaud, Yves

2002 *Les Mathématiques*, Paris : Odile Jacob 2002.

Morizot, Jacques

1996 *La Philosophie de l'art de Nelson Goodman*, Nîmes : Chambon 1996.

1997 L'Art de la symbolisation; *Philosophia Scientiae* 2 (2) : 161—178.

Morgenbesser, Sidney

1967 *Philosophy of Science Today*, Sidney Morgenbesser (ed.), London : Basic Books 1967.

Mamchur, Elena

1987 The Heuristic Role of Aesthetics in Science, *International Studies in the Philosophy of Science* 1 (2) : 209—222.

Nagel, Alan

1981 "Or as a blanket" : Somme Comments and Questions on Exemplification, *Journal of Aesthetics and Art Criticism* 39 : 264—266.

Nelsen, Roger B.

2000 *Proofs Whitout Words II: More Exercices in Visual Thinking*, Mathematical Association of America 2000.

Osborne, Harold

1984 Mathematical Beauty and Physical Science, *The British Journal of Aesthetics* 24 (4) : 291—300.

1986a Interpretation in Science and in Art, *The British journal of Aesthetic* 26 : 3—15.

1986b Symmetry as an Aesthetic Factor, *Computer and Mathematics with Applications* 12B (1/2) : 77—82.

Pais, Abraham

1998 Paul Dirac, Aspects of his Life and Work, in Pais A. Jacob m., Olive d. Atiyah M. *Paul Dirac, The Man and his Work*, Cambridge: Goddard 1998.

Panofsky, Erwin

1956 Galileo as a Critic of the Arts : Aesthetic Attitude and Scientific Thought, *Isis* 47 : 3—15.

Papert, Seymour A.

1978 The Mathematical Unconscious in [Wechsler 1978, 105-119].

Patras, Frédéric

2001 *La Pensée mathématique contemporaine*, Paris : PUF 2001.

Penrose, Roger

1974 The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* 10 : 266—271.

Perigal, Henri

1874a On Geometric Dissections and Transformations, *The Messenger of Mathematic* I : 103—106.

1874b Geometric Dissections and Transformations, *The Messenger of Mathematic* II : 103—104.

Platon

Le Banquet, traduction française, notices et notes par Emile Chambry, Paris : Garnier-Flammarion 1964.

Poincaré, Henri

1902 *La Science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion 1968.

1905 *La Valeur de la science*, Paris : Flammarion 1970.

1908 *Science et méthode*, Paris : Kimé 1999.

Pouivet, Roger

1996 *Esthétique et logique, Philosophie et langage*, Liège : P. Mardaga 1996.

1996 Compétence, survenance et émotion esthétique, *Revue Internationale de Philosophie* 50 (198) : 635— 649.

Randall, John Herman Jr.

1960 *Aristotle*, New York: Colombia university press 1960.

Ritter, Jim

2002 Les Nombres et l'écriture in [Michaud 2002, 139-158].

Rollins, Mark

1999 Pictorial Representation : When Cognitive Science Meets Aesthetics, *Philosophical Psychology* 12 (4) : 387— 413.

Root-Bernstein, Robert S.

1997 The Science and the Art Share a Common Creative Aesthetic in [Tauber 1997, 49-82].

Rostand, François

1985 *Procédés de la pensée mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences 11.

Rota, Gian Carlo

1997 The Phenomenology of Mathematical Beauty, *Synthese* 111 (2) : 171—182.

Samuel, Pierre

1967 *Théorie algébrique des nombres*, Paris : Hermann 1967.

Schaeffer, Jean-Marie

1992 *L'Art de l'âge moderne*, Paris : Gallimard 1992.

Serfati, Michel

2005 *La Révolution symbolique, La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Petra 2005.

Sullivan, John W. N

1919a The Place of Science, *The Athenaeum*11 avril 1919 : 274—275,.

1919b The Justification of the Scientific Method, *The Athenaeum* : 274—275.

1956 Mathematics as an Art, in J.R. Newman, *The World of Mathematics*, New York : Simon and Shuster tome 3 : 2012—2015.

Tang Paul CL & Leonard Arne R.

1985 Creativity in Art and Science, *Journal Of Aesthetic Education*, 19 : 5—19.

Tauber, Alfred I.

1997 The *Elusive Synthesis : Aesthetics and Science*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers 1997.

Upton, L. J.

1967 Divisors of a Circle, problem 660 in *Mathematics Magazine* 40.

Vuillemin, Jules

2001 *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*, Paris : Blanchard 2001.

Wechsler, Judith

1978 *On Aesthetic in Science*, Cambridge : MIT Press 1978.

Winterbourne, A. T.

1988 Art and Mathematics in Kant's Critical Philosophy, *The British journal of Aesthetic* 28 (3) : 266—277.

Young, James O.

1996 Inquiry in the Arts and Sciences, *Philosophy* 71 (276) : 255—273.

1999 Art, Knowledge, and Exemplification, *British Journal of Aesthetics* 39 (2) : 126—137.

2001 *Art and Knowledge*, London and New York : Routledge 2001.

Zemach, Eddy M.

1975 Description and Depiction, *Mind* 84 : 567—578.

Table des matières détaillée

Introduction La Question de l'esthétique en mathématiques 7

Partie I : Des rapports entre les mathématiques et l'art 13

A. Description historique 15

I. De l'antiquité aux temps prémodernes 15

I.1. Artes liberales, technê et mathématiques 16

I.1.1. Antiquité latine 16
I.1.2. Antiquité grecque 18
I.1.3. Conclusion 19

I.2. Mathématiques et beauté des mathématiques 21

I.2.1. La beauté comme propriété métaphysique 22
I.2.2. La beauté comme propriété cognitive 23
I.2.3. Beauté des mathématiques et unité du réel 29

I.3. Conclusion 31

II. Le XVIIIème, élaboration de l'esthétique 32

II.1. Rupture Art / Science 33

II.1.1. Origine de la séparation art et science 33
II.1.2. Séparer l'art de la science - séparer la science de l'art. 35

II.2. Système des beaux-arts 37

II.2.1. Sur la nature de la dichotomie art / science 37
II.2.2. Organisation des arts entre eux 38
II.2.3. Conclusion 43

III. Nouvelles spéculations sur le beau et beauté des mathématiques au XVIIIème siècle 44

III.1. Autonomie du beau 44

III.2. La beauté des mathématiques 45

III.3. Conclusion 48

B. Description systématique 51

I. Mathématiques et art : question de finalité 51

I.1. La beauté, but des mathématiques 51

I.2. Solution platonicienne 54

I.2.1. Version forte 55
I.2.2. Version modérée 59
I.2.3. Conclusion 60

I.3. Solution poincaréenne 61

I.3.1. Conception poincaréenne de la beauté intellectuelle 62
I.3.2. Vertus cognitives de la beauté poincaréenne 64
I.3.3. Cohérence de la solution poincaréenne 65
I.3.4. Conclusion 71

II Mathématiques et art : question de méthode 74

II.1. Introduction 74

II.2. Solution empirique 76

II.2.1. *Subsidiarité de l'attrait esthétique* *78*
II.2.2. *Démonstration mathématique et démonstration artistique* *81*
II.2.2.1. Showing et démonstrations systématiques. 82
II.3. Solution pragmatique 87
II.3.1. *Conclusion* *91*
II.4. Introduction à une solution sémiologique 93

Partie II : Outils d'interprétation et d'analyse 95

I. Justification du choix de la théorie goodmanienne 97
I.1. Sémiologie et esthétique 97
I.2. Mérite et valeur esthétique 99
I.3. Contraintes ontologiques 100
I.4. Critique de la théorie, critique de l'outil 101

II Présentation et interprétation de la sémiologie goodmanienne 102
II.1. Questions de vocabulaire 102
II.2. Symptômes de l'esthétique 108
II.2.1. *Densité syntaxique* *109*
II.2.2. *Saturation syntaxique relative* *113*
II.2.2.1. Saturation, syntaxe et sémantique 116
II.2.3. *Dénotation* *117*
II.2.3.1. Théorie des symboles et théorie de la référence 117
II.2.3.2. Dénotation 119
II.2.3.3. Dénotation et représentation 120
II.2.4. *Exemplification* *122*
II.2.4.1. Étiquettes et échantillons 122
II.2.4.2. Etiquetage et échantillonnage 124
II.2.4.3. Exemplification et expression 125
II.2.4.4. Système dénotatif et système exemplificationnel 127
II.2.5. *Densité sémantique* *130*
II.2.5.1. Rôle d'une notation : fonction primordiale 131
II.2.6. *La référence multiple et complexe* *139*

III. Symptômes et esthétique cognitive 142
III.1. Esthétique, connaissance et compréhension 142
III.2. Sélection des symptômes de l'esthétique 144

Partie III : Symptômes goodmaniens et mathématiques 153

Introduction 155

A. Fonctionnement symbolique des démonstrations algébriques 156

I. Procédés d'analyse d'une démonstration 156
I.1. Irrationalité de √2 156
I.2. 1ère étape - Stades d'exemplification 158
I.3. Simplicité et règles extralogiques 164
I.3.1. *Mesure de la simplicité* *164*
I.3.2. *Codage et esthétique* *165*
I.3.3. *Simplicité et saturation* *167*
I.4. Conclusion 170

II. 2ème étape - Principe de démonstration 171

II.1. Identification du principe de démonstration 172

II.2. Métaphore et transfert de schème 174

II.2.1. Schème, domaine et règne en mathématique 177

II.3. Puissances généralisantes 179

II.3.1. Généralisation élémentaire – libéralisation des hypothèses 179

II.3.2. Généralisation seconde - transfert de schème 183

II.4. Manœuvre métaphorique 189

II.4.1. Métaphore et cognition 189

II.4.2. Métaphore et esthétique 192

II.5. Conclusion 194

III. Application : de l'irrationalité de √2 aux anneaux factoriels 197

III.1. Abstraction première 197

III.1.1. 1ère étape, questions sur le schème de la démonstration de l'irrationalité de √2 199

III.1.2. Généralisation élémentaire 202

III.2. Abstraction seconde 204

III.2.1. Exploration du règne 204

III.2.2. 2ème étape, questions sur le métaschème 210

III.3. Synthèse esthétique 214

III.4. Conclusion 216

B. Fonctionnement symbolique des figures mathématiques 220

I. Preuves hétérogènes 220

I.1. Remarques préalables sur la valeur esthétique de la géométrie 220

I.2. Projet 222

I.3. Figure et valeur démonstrative 224

I.3.1. Démontrer – illustrer 224

I.3.2. Figures démonstratives 225

I.3.3. Preuves sans mot 226

I.4. Image et diagramme 232

I.4.1. Questions de fonctionnement 232

I.4.2. Densité syntaxique et figures mathématiques 233

II. 1ère application : les lunules d'Hippocrate 235

II.1. Preuve sans mot du théorème des lunules 235

II.2. Analyse sémiologique 240

II.3. Synthèse esthétique 248

II.4. Conclusion 252

III. 2ème application : le théorème de Rolle 257

III.1. Figure et valeur intuitive 257

III.2. Approche intuitive 259

III.2.1. Préambule 260

III.2.2. Interprétation graphique 262

III.3. Approche démonstrative du théorème de Rolle 266

III.4. Démonstration du théorème de Rolle 271

III.5. Analyse comparée 273

III.6. Synthèse esthétique 282

IV. Conclusion - Réflexions sur l'éducation mathématique 284

Conclusion Langages de l'art et langages des mathématiques 293

Index des noms 301

Bibliographie 307

Table des matières détaillée 323