



**HAL**  
open science

# Diagnostic de processus continus : application à la détection de valeurs aberrantes dans les signaux d'entrée et de sortie de systèmes

Abdessamad Kobi

## ► To cite this version:

Abdessamad Kobi. Diagnostic de processus continus : application à la détection de valeurs aberrantes dans les signaux d'entrée et de sortie de systèmes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1994. Français. NNT : 1994INPL070N . tel-01751306

**HAL Id: tel-01751306**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751306v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

94 INPL 070N

Institut National Polytechnique de Lorraine  
Ecole Doctorale IAE + M  
DFD Automatique Electronique Electrotechnique



CRAN  
CNRS URA 821

# THESE

présentée pour l'obtention du

## DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité Automatique

par

**Abdessamad KOBI**

### DIAGNOSTIC DE PROCESSUS CONTINUS : APPLICATION A LA DETECTION DE VALEURS ABERRANTES DANS LES SIGNAUX D'ENTRÉE ET DE SORTIE DE SYSTÈMES

soutenue publiquement le 23 Juin 1994 devant la commission d'examen :

- C. HUMBERT : Président
- G. DELAUNAY : Rapporteur
- D. PLACKO : Rapporteur
- H. : Examineur
- ER : Examineur
- J. RAGOT : Directeur de thèse







13602 8992 4

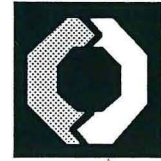
94 INPL 070N

[M] 1994 KOBİ, A.

Institut National Polytechnique de Lorraine

Ecole Doctorale IAE + M

DFD Automatique Electronique Electrotechnique



CRAN

CNRS URA 821

## THESE

présentée pour l'obtention du

Service Commun de la Documentation

INPL

Nancy-Brabois

### DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité Automatique

par

**Abdessamad KOBİ**

### DIAGNOSTIC DE PROCESSUS CONTINUS : APPLICATION A LA DETECTION DE VALEURS ABERRANTES DANS LES SIGNAUX D'ENTRÉE ET DE SORTIE DE SYSTEMES

soutenue publiquement le 23 Juin 1994 devant la commission d'examen :

C. HUMBERT	: Président
G. DELAUNAY	: Rapporteur
D. PLACKO	: Rapporteur
G. BLOCH	: Examineur
D. SAUTER	: Examineur
J. RAGOT	: Directeur de thèse



**A la mémoire de mes parents**  
**A ma femme et ma fille**  
**A mes frères et soeurs**





## REMERCIEMENTS

Le travail présenté s'inscrit dans le cadre des activités du Centre de Recherche en Automatique de Nancy à l'Institut National Polytechnique de Lorraine.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur J. RAGOT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, pour sa constante disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis à ce travail de voir le jour.

Je remercie Monsieur C. HUMBERT, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de l'Ingénieur de Nancy, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Que Monsieur G. DELAUNAY, Professeur à l'Université de Reims, accepte mes vifs remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour nos fructueuses discussions.

J'adresse mes remerciements à Monsieur D. PLACKO, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, pour ses questions judicieuses et pour l'attention qu'il a accordé à ce travail.

Je remercie Monsieur G. BLOCH, Maître de Conférences à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de l'Ingénieur de Nancy, pour ses conseils qui m'ont été d'un précieux apport.

Je tiens à remercier Monsieur D. SAUTER, Professeur à l'Université de Nancy I, d'avoir accepté de participer à ce jury ; sa présence m'honore grandement.

J'adresse également mes remerciements à tous les membres du laboratoire, en particulier à M. OULADSINE, G. MOUROT, E. TAN, G. SCHREIER et M. SCHWARTZ pour leur contribution et pour l'ambiance qu'ils ont su créer au sein de l'équipe.

Enfin, c'est avec une attention toute particulière que je remercie ma femme LYDIA pour m'avoir soutenu et "supporté" tout au long de ce travail, et toute ma famille pour leur aide et les encouragements qu'ils me témoignent.



# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I.....</b>	<b>5</b>
INTRODUCTION .....	7
I.1. GÉNÉRALITÉS .....	7
I.2. ANALYSE FACTORIELLE .....	10
I.2.1. GÉNÉRALITÉS.....	10
I.2.2. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES .....	12
I.3. DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES .....	12
I.3.1. ANALYSE DU NUAGE DES VARIABLES .....	12
I.3.2. ANALYSE DU NUAGE DES OBSERVATIONS .....	13
I.3.3. TESTS STATISTIQUES .....	13
I.4. APPLICATION A LA DÉTECTION EN LIGNE.....	15
I.5. EXEMPLES D'APPLICATION.....	16
CONCLUSION.....	26
<b>CHAPITRE II .....</b>	<b>29</b>
INTRODUCTION .....	31
II.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES .....	31
II.1.1. MOINDRES CARRES SIMPLES .....	32

II.1.2. MÉTHODES D'ESTIMATION ROBUSTE .....	33
II.2. ANALYSE ET DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES .....	34
II.2.1. ANALYSE DE PRÉSENCE DE VALEURS ABERRANTES .....	34
II.2.2. TEST DES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE DE PROJECTION .....	36
II.2.3. TEST D'ÉCART .....	38
II.2.4. DISTANCE DE COOK .....	41
II.2.5. RAPPORT D'ANDREWS-PREGIBON.....	43
II.2.6. TESTS DE BELSLEY .....	45
II.2.7. EXTENSION À PLUSIEURS OBSERVATIONS .....	47
II.2.8. AUTRES VARIABLES TEST POUR LE DIAGNOSTIC.....	47
II.3. APPLICATIONS .....	51
III.3.1. EXEMPLE 1 - PROCESSUS PILOTE.....	51
III.3.2. EXEMPLE 2 .....	58
CONCLUSION.....	61
<b>CHAPITRE III.....</b>	<b>63</b>
INTRODUCTION .....	65
III.1. SIGNAL SUIVANT UNE LOI NORMALE .....	66
III.1.1. DISTRIBUTION DE L'ÉTENDUE .....	66
III.1.2. TEST DE GRUBBS .....	68
III.1.3. TEST DE DIXON .....	69
III.1.4. AUTRES TESTS .....	71
III.2. DÉTECTION EN LIGNE.....	72
III.3. EXEMPLES D'APPLICATION .....	73
III.3.1. EXEMPLE 1 - PROCESSUS PILOTE .....	73



III.3.2. EXEMPLE 2 - DONNÉES SIMULÉES .....	80
III.4. SIGNAL SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE .....	85
III.4.1. GÉNÉRALITÉS .....	86
III.4.2. EXEMPLE ILLUSTRATIF .....	87
CONCLUSION .....	88
<b>CHAPITRE IV .....</b>	<b>89</b>
INTRODUCTION ET HISTORIQUE .....	91
IV.1. GÉNÉRALITÉS .....	92
IV.2. ESTIMATION DES PARAMÈTRES .....	96
IV.2.1. MOINDRES CARRÉS SIMPLES .....	96
IV.2.2. EQUATIONS DE YULE-WALKER.....	97
IV.2.3. ESTIMATION AVEC LES COEFFICIENTS DU POLYNÔME INVERSE .....	98
IV.3. DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES .....	100
IV.3.1. LES DIFFÉRENTS TESTS .....	100
IV.3.2. ÉTUDE COMPARATIVE.....	103
IV.4. ESTIMATION DE L'AMPLITUDE DES VALEURS ABERRANTES .....	107
IV.4.1. VALEUR ABERRANTE INNOVÉE .....	107
IV.4.2. VALEUR ABERRANTE ADDITIVE .....	108
IV.5. PROCÉDURE DE DÉTECTION.....	109
IV.5.1. LOCALISATION, IDENTIFICATION ET CORRECTION .....	109
IV.5.2. EXEMPLES D'APPLICATION .....	110
IV.5.3. ROBUSTESSE ET SIMULATION DE MONTE CARLO .....	111
IV.6. EXTENSION AU MODÈLE AUTO RÉGRESSIF VECTORIEL .....	115

IV.6.1. GÉNÉRALITÉS .....	115
IV.6.2. CARACTÉRISATION DES VALEURS ABERRANTES .....	117
IV.6.3. DÉTECTION DES VALEURS ABERRANTES .....	118
IV.6.4. EXEMPLE .....	120
IV.6.5. SIMULATION DE MONTE CARLO.....	125
CONCLUSION.....	127
<b>CHAPITRE V .....</b>	<b>129</b>
INTRODUCTION .....	131
V.1. DÉTECTION DE DÉFAUT DANS UN PROCESSUS ARX .....	131
V.1.1. POSITION DU PROBLÈME .....	131
V.1.2. DÉFAUT SUR LA SORTIE .....	134
V.1.3. DÉFAUT SUR LA COMMANDE .....	141
V.1.4. PROCÉDURE DE DÉTECTION .....	142
V.1.5. EXEMPLES .....	145
V.2. ESTIMATION DE PARAMÈTRES EN PRÉSENCE DE VALEURS ABERRANTES	161
V.2.1. INTRODUCTION.....	161
V.2.2. PREDICTION ERROR METHOD (PEM) .....	162
V.2.3. ALGORITHME DE PUTHENPURA .....	163
V.2.4. EXEMPLE .....	164
CONCLUSION.....	168
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE.....</b>	<b>171</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>175</b>

ANNEXE A .....	177
A.1. PRÉSENTATION DU PROCESSUS PILOTE .....	177
A.2. SCHÉMA DU PROCESSUS PILOTE.....	178
A.3. CONFIGURATION ÉTUDIÉE.....	180
ANNEXE AI.....	182
ANNEXE AII .....	186
ANNEXE AIII .....	190
<b>RÉFÉRENCES .....</b>	<b>193</b>





# INTRODUCTION GÉNÉRALE



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans un souci d'une meilleure production, d'une économie très fiable, d'un gain de temps appréciable et d'autres facteurs économiques, l'entreprise d'aujourd'hui doit tenir compte de ces contraintes. De nos jours, la plupart des entreprises misent sur l'automatisation de ses unités de production pour répondre d'une façon satisfaisante à ces différents facteurs.

Aussi, pour que la production soit rentable et bénéfique et pour avoir un produit répondant à toutes les normes, il faut assurer le bon fonctionnement de la chaîne de production (processus). En effet, cette dernière ou plus exactement les éléments qui la composent (capteurs, actionneurs ... ) sont sujets à des perturbations de différentes natures. Donc, d'une part, nous avons besoin de connaître ou de déterminer le fonctionnement normal du processus et d'autre part de diagnostiquer les éventuelles perturbations et surtout de réagir.

Ce diagnostic repose surtout sur l'exploitation de résultats de mesure dont on suppose que les observations expérimentales effectuées sur un processus soient exemptes d'erreurs. Ce n'est pas toujours le cas et lorsqu'un appareil de mesure se dérègle, les mesures correspondantes sont affectées d'un biais systématique. D'une façon générale, ces erreurs peuvent avoir comme origine une modification du fonctionnement du processus caractérisant une défaillance de nature passagère ou permanente. Dans la pratique, la surveillance d'un processus requiert l'analyse de son fonctionnement à partir des mesures collectées. Cette surveillance comporte deux étapes essentielles : la détection de défaillances et l'identification de défaillances.

Pour unifier le problème de détection de défaut de processus ou d'actionneurs ou de capteurs, Willsky (1976) a proposé un formalisme conduisant au schéma suivant :

- modéliser le comportement normal du système
- associer au couple (modèle-observation) des caractères permettant d'évaluer un écart par rapport au comportement normal
- décider si l'écart mesuré est significatif ou non.

Pour réaliser ces différentes tâches, deux étapes doivent être considérées (Sauter, 1991). La première consiste à générer des écarts et la deuxième à évaluer ces écarts. Dans cet esprit, plusieurs méthodes ont été développées, nous pouvons citer par exemple les travaux de Clark (1975), de Deckert et al. (1977), de Basseville (1983) et d'Isermann (1984).

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la détection et à l'identification de défaillances de type valeurs aberrantes. L'intérêt pour les valeurs aberrantes est très ancien. En effet, les premiers travaux sont l'oeuvre de Bernoulli (1777). Cependant, la notion de valeurs aberrantes n'a pas beaucoup évolué, nous pouvons citer par exemple la définition donnée par Edgerworth (1887) :

*"Discordant observations may be defined as those which present the appearance of differing in respect of their law of frequency from other observations with which they are combined",*

et celle donnée par Grubbs (1969) quatre vingt deux années plus tard :

*"An outlying observation, or outlier, is one that appears to deviate markedly from the other members of the sample in which it occurs".*

En plus de l'intérêt historique des valeurs aberrantes, la détection de ces erreurs a fait l'objet de plusieurs travaux dans différents domaines : économie, traitement du signal, .... Tous ces travaux peuvent être, néanmoins, répertoriés dans deux catégories. La première suppose qu'on dispose d'un tableau de mesures constitué de plusieurs observations de différentes variables et, a priori, on ne possède aucune autre information. Le chapitre I de ce mémoire traite ce type de problème.

La deuxième catégorie consiste à dire que les variables vérifient une certaine relation. Autrement dit, les différentes variables suivent un modèle mathématique. Ce modèle peut correspondre à plusieurs formes. La première correspond à une régression linéaire dans laquelle une variable, dite variable expliquée, est combinaison linéaire des autres variables, dites variables explicatives. Le chapitre II exhibe quelques stratégies de détection de valeurs aberrantes dans un modèle linéaire. La deuxième forme correspond au cas où les mesures ou plus exactement la série de mesures est supposée suivre une loi de distribution. L'étude présentée au chapitre III consiste à vérifier, par des tests statistiques, si toutes les observations satisfont les hypothèses de la loi de distribution, ce qui permet de mettre en évidence les valeurs aberrantes. La troisième forme est de type auto régressif ou auto régressif à moyenne ajustée, où une variable est combinaison linéaire de ces propres valeurs passées ou retardées et d'une autre variable aléatoire. Les processus auto régressifs et auto régressifs à moyenne ajustée servent généralement à modéliser les séries temporelles. Enfin, pour la quatrième structure, le modèle mathématique peut être tout simplement une fonction de transfert. Dans les chapitres IV et V, nous exposons respectivement ces deux derniers types de structure et nous proposons des procédures de détection et d'identification de valeurs aberrantes.

Nous rappelons que dans le cas où on a un modèle mathématique de type régression linéaire, série temporelle ou fonction de transfert, le modèle présente des paramètres qui sont généralement inconnus. Nous donnerons, dans chaque cas, le principe de quelques techniques d'estimation de ces paramètres.



# Chapitre I

## ANALYSE D'UN TABLEAU DE DONNÉES



## INTRODUCTION

Dans une installation industrielle, il existe un certain nombre de capteurs permettant de connaître la mesure d'une grandeur à tout instant. Lorsqu'on effectue une campagne de mesures sur cette installation, on obtient un tableau de valeurs dont les lignes correspondent aux observations (instants de mesure) et les colonnes aux différentes variables (capteurs). Il existe une multitude de méthodes pour analyser ce tableau de valeurs. Beaucoup de ces méthodes reposent sur un fondement géométrique ou algébrique et conduisent à des résultats généralement obtenus en minimisant un critère. C'est à propos du choix de ce critère que s'est développé parfois un antagonisme entre tenants de *l'analyse de données* sans modèle probabiliste et partisans d'une statistique basée sur des modèles et des propositions.

Le propre de l'analyse de données est de raisonner sur un grand nombre de variables, d'où le nom de l'analyse multivariée ou de l'analyse multicritère. Les premiers travaux dans ce domaine sont l'oeuvre de Spearman (1904) qui introduit pour la première fois le concept de *facteurs* ; ce n'est que vers 1930 que Thurstone pose le problème de la recherche de plusieurs facteurs. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse factorielle et plus particulièrement à l'*Analyse en Composantes Principales*. Nous adapterons cette technique à la détection de valeurs aberrantes.

Notre objectif est lié au diagnostic des systèmes et dans ce chapitre ce diagnostic sera effectué sur un tableau de  $n$  observations des  $p$  variables. Dans la première partie de ce chapitre, on présente les principes de l'analyse factorielle et ces différentes variétés. Dans la deuxième partie, on expose quelques techniques de détection de valeurs aberrantes dans un tableau de valeurs. La troisième partie concerne l'application de l'analyse en composantes principales pour la détection en ligne. Enfin dans la quatrième partie, on présente deux exemples d'application. Dans le premier, on réalise une analyse détaillée d'un tableau de données en utilisant l'analyse en composantes principales ; cette analyse nous permet d'une part de détecter les valeurs aberrantes et d'autre part de définir les différents modes de fonctionnement de ce système. Dans le deuxième exemple, nous effectuons dans un premier temps une analyse en composantes principales sur une partie du tableau (on ne prend que les  $k$  premières observations avec  $k < n$ ). Puis, dans un deuxième temps, on teste les observations postérieures à  $k$  en se servant des différents modes de fonctionnement (ou facteurs) définis dans l'étape précédente. Cette opération nous permet de tester la méthode de détection en ligne et de mettre en évidence soit des valeurs aberrantes soit un nouveau mode de fonctionnement du système.

### I.1. GÉNÉRALITÉS

Les méthodes de l'analyse de données peuvent être regroupées en trois grandes parties. La première concerne l'analyse discriminante, la deuxième utilise les algorithmes de la classification automatique et la dernière est basée sur l'analyse factorielle.

L'origine de l'analyse discriminante remonte aux travaux de Fisher (1936) et de Mahalanobis (1936). On désigne sous ce nom une famille de techniques destinée à décrire et à classer des observations caractérisées par un nombre important de variables. L'analyse discriminante est concernée par les données dans lesquelles chaque observation provient d'un groupe ou d'une population dont les paramètres qui les caractérisent sont connus. Des suppositions sont données à propos de la structure de ces populations et l'objectif est de construire des règles pour affecter l'observation future à une population tout en minimisant la probabilité d'une mauvaise classification. Ce principe d'affectation est bien utile à la détection de valeurs aberrantes. En effet, lorsqu'on est en présence d'une nouvelle observation qui peut être aberrante ou non, nous pouvons voir, par des règles ou des tests statistiques, si elle vérifie les suppositions faites sur la structure de la population. Le critère le plus utilisé dans l'analyse discriminante est sans doute la distance de Mahalanobis. Il consiste à mesurer la distance entre une observation nouvelle et la moyenne des autres observations pondérée par la matrice de variance covariance de la population.

L'utilisation de cette technique pour le diagnostic et plus précisément pour la détection de valeurs aberrantes est très simple. Supposons qu'on a une population dont la moyenne et la matrice de covariance sont connues et que nous avons effectué de nouvelles mesures (une nouvelle observation). Pour savoir si cette observation appartient à la population de base, il suffit de calculer la fonction discriminante et de comparer sa valeur à un seuil défini à l'avance. Cette opération peut engendrer soit une nouvelle population c'est-à-dire un regroupement de plusieurs observations, soit des valeurs aberrantes.

En ce qui concerne la classification automatique, encore appelée analyse typologique, elle est l'une des branches essentielles de l'analyse de données. Elle a pour objectif de discerner dans une population donnée d'individus ou d'observations, décrite par un ensemble de caractéristiques, un certain nombre de sous groupes homogènes. Cette méthode permet d'obtenir une représentation schématique simple d'un tableau rectangulaire de  $n$  observations des  $p$  variables.

L'analyse typologique permet aussi la constitution d'un modèle de type "base de données", où les classes sont représentatives des différents modes de fonctionnement. Cette base de données permet de faire un diagnostic du système en temps réel. En effet, les nouvelles informations disponibles sont caractérisées par leur appartenance à telle ou telle classe, ce qui permet de mettre en évidence les observations aberrantes. Un exemple utilisant cette technique pour la surveillance d'un réacteur nucléaire a été décrit par Dubuisson (1981).

Parmi les méthodes de la classification automatique, on trouve la méthode de réallocation. Cette méthode consiste à choisir une partition initiale des observations et ensuite on déplace progressivement ces observations d'un groupe à l'autre pour obtenir une partition meilleure. Le but est donc de construire une partition unique de l'ensemble des observations à classer en un nombre de classes  $k$ , soit fixé a priori, soit calculé par l'algorithme. Les différents algorithmes existants se distinguent les uns des autres par : le choix de la partition initiale, le choix du critère de sélection de la meilleure partition et enfin le choix des règles de déplacement des

observations. Cependant, ces différents algorithmes ont un point en commun schématisé par la figure ci-dessous :

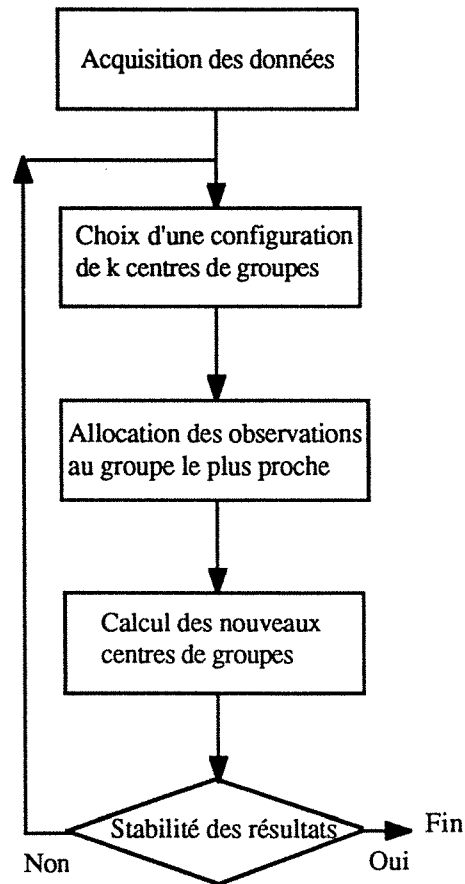


Figure I.1 - Algorithme général des méthodes de réallocation

Parmi les méthodes qui utilisent cet algorithme, on trouve la méthode des centroïdes et la méthode des nuées dynamiques. La première méthode consiste à représenter un groupe par son centre de gravité et pendant la phase de réallocation chaque observation est affectée au groupe dont le centre de gravité est le plus proche en utilisant une distance adéquate. Pour la deuxième méthode, il s'agit de générer  $k$  noyaux, soit au hasard, soit en les demandant à l'utilisateur, ensuite on calcule une distance pour chaque observation et pour tous les noyaux. Puis, on alloue une observation au noyau si sa distance est inférieure à celle existante entre cette observation et les autres noyaux. Pour plus de détails, un exemple illustratif a été étudié par Bloch (1988) concernant des données de circulation d'une journée de trafic autoroutier.

D'autres approches se sont développées dans les dernières années utilisant principalement la reconnaissance des formes et la logique floue et permettant de détecter des observations aberrantes. Dubuisson (1990) et Mourot (1993) ont présenté des synthèses de ces travaux. Pour notre part, nous allons nous intéresser à l'analyse factorielle et plus particulièrement à l'analyse en composantes principales.

## I.2. ANALYSE FACTORIELLE

Comme nous l'avons expliqué précédemment, notre objectif est la détection de valeurs aberrantes. Pour cela, nous avons besoin de savoir quelles sont les informations contenues dans le tableau de valeurs et surtout d'extraire celles qui caractérisent le bon fonctionnement du système. Dans le cas présent, on dispose d'un tableau de valeurs numériques caractérisant les mesures des différentes variables à différents instants. Nous pouvons donc utiliser l'analyse factorielle pour réduire la dimension du tableau et pour extraire les informations utiles.

### I.2.1. GÉNÉRALITÉS

Étant donné un tableau de valeurs numériques représenté par une matrice  $X$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes (les  $n$  lignes correspondent aux mesures des  $p$  variables à différents instants) de terme général  $x_{ij}$ . Nous voulons alors reconstituer les  $n.p$  points de  $X$  à partir d'un plus petit nombre  $k$  ( $n+p$ ), avec ( $k < p$ ), de valeurs numériques qui rassemble les informations les plus utiles. La méthode adoptée consiste à rechercher les vecteurs sur lesquels les projections des  $p$  vecteurs-colonnes ou des  $n$  vecteurs-lignes sont les plus grandes. Le principe de la méthode est la prise en compte des plus grandes *valeurs propres* de la matrice de variance-covariance de l'ensemble des variables. Les vecteurs propres associés sont les vecteurs recherchés et les axes engendrés par ces vecteurs sont appelés *axes factoriels*. La solution mathématique à ce problème repose sur un calcul d'inertie et nécessite l'écriture du lagrangien et les équations de ses conditions de stationnarité (Kobi, 1990).

On considère le nuage des  $n$  points-observations dans  $\mathbb{R}^p$ . Chaque direction de  $\mathbb{R}^p$  peut être repérée par un vecteur unitaire  $U$ . Soit  $pr_i$  la longueur de la projection de l'observation  $O_i$  sur l'axe  $i$  passant par l'origine :

$$pr_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} u_j \quad (1.1)$$

où les  $u_j$  sont les composantes du vecteur unitaire  $U$  porté par l'axe  $i$ , vérifiant la relation :  $U^T U = 1$ . L'inertie par rapport à l'origine expliquée par la direction  $U$ ,  $In(u)$ , est l'inertie des projections.

$$In(u) = \sum_{i=1}^n pr_i^2 = U^T X^T X U \quad (1.2)$$

Le problème est de rendre maximale cette somme par rapport à  $U$ , sous la contrainte  $U^T U = 1$ . Il suffit alors de poser le lagrangien associé et de résoudre les équations formées par les conditions de stationnarité.

Le sous-espace vectoriel de dimension  $k$  qui assure une dispersion maximale des  $n$  points a une base orthonormée formée par les  $k$  vecteurs propres  $U_1, U_2, \dots, U_k$  correspondant aux  $k$  plus grandes valeurs propres de la matrice  $X^T X$ .

A partir de ces valeurs propres et des axes factoriels, nous pouvons donc reconstruire en partie les valeurs numériques de départ tout en gardant le maximum d'informations. Plus généralement, un repère formé par les  $k$  premiers axes factoriels permettra de reconstituer les positions des points avec une bonne précision si la quantité  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$  représente une proportion notable de la trace (Lebart, 1982) :

$$\text{trace}(X^T X) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (1.3)$$

Nous obtenons ainsi une reconstruction approchée du tableau des données numériques  $X$ , en se limitant aux  $k$  premiers axes dans la mesure où les  $\sqrt{\lambda_{k+1}}, \dots, \sqrt{\lambda_p}$  peuvent être considérés comme petits (Lebart, 1982). Nous pouvons alors évaluer la part ou la qualité de la reconstruction. Cette évaluation est donnée par le *taux d'inertie* ou *part de variance*  $\tau_i$  expliquée par chaque axe  $i$ , soit :

$$\tau_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \quad (1.4)$$

et celle expliquée par le sous espace, défini par les  $k$  premiers axes, est :  $\sum_{i=1}^k \tau_i$

De même pour déterminer la contribution de chaque observation  $j$  à l'inertie expliquée par l'axe  $i$ , donc à la détermination de cet axe, nous définissons :

$$\text{ctr}(j) = \frac{pr_i^2(j)}{\lambda_i} \quad (1.5)$$

avec  $pr_i(j)$  la projection de l'observation  $j$  sur l'axe factoriel  $i$ . Cet indicateur se généralise à des sous ensembles d'observations, leur contribution à l'inertie d'un axe est la somme des contributions des observations qui les composent. Ce rapport est précieux pour mettre en évidence le sous-ensemble d'observations qui a contribué principalement à la construction de l'axe. Ainsi, chaque coefficient  $\text{ctr}$  est inférieur ou égal à 1 ; plus il est voisin de 1 et plus la contribution de l'observation  $j$  à la détermination de l'axe est importante.

L'analyse présentée ci-dessus est commune à toutes les méthodes factorielles, mais le plus souvent nous disposons d'informations complémentaires sur la nature des données. La prise en compte de ces informations conduit à procéder à des transformations préalables sur le tableau de départ et c'est sur ce point de vue que les méthodes diffèrent.

Dans la suite, nous allons tout simplement donner le principe de l'analyse en composantes principales. Pour les autres méthodes, le principe est similaire. Cependant, pour des détails approfondis et des exemples numériques concernant ces différentes méthodes et leur dérivées,



on peut consulter des ouvrages de l'analyse de données, par exemple Benzecri (1980), Lebart (1982), Lagarde (1983) et Volle (1985).

## I.2.2. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES

L'analyse en composantes principales permet d'obtenir un résumé descriptif (sous graphique le plus souvent) d'un ensemble de  $n$  observations effectuées sur les  $p$  variables. Les premiers travaux sont l'oeuvre de Pearson (1901) et de Hotelling (1933). D'autres chercheurs ont utilisé cette technique dans différents domaines (Jolliffe, 1986), (Ragot et al., 1990).

Dans notre travail, nous avons utilisé l'analyse en composantes principales pour la détection de valeurs aberrantes dans un tableau de mesures. Pour cette analyse, le tableau de départ, de terme général  $x_{ij}$ , est transformé en un tableau de terme  $r_{ij}$ , tel que :

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - m_j}{n} \quad (1.6)$$

où  $m_j$  désigne la moyenne arithmétique des  $n$  valeurs de la variable  $j$  et  $x_{ij}$  la  $i$ ème observation d'une variable  $j$ . Une autre modification supplémentaire du tableau de départ peut également être nécessaire si les dispersions des variables sont très différentes. Cette transformation conduira à l'Analyse en Composantes Principales Normée. Autrement dit, le terme général du tableau à analyser devient :

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - m_j}{s_j n} \quad (1.7)$$

où  $s_j$  est l'écart-type de la  $j$ ème variable.

Après cette brève introduction à l'analyse en composantes principales, nous présentons dans la suite quelques techniques permettant la détection de valeurs aberrantes ou plus exactement les observations aberrantes. Nous analyserons, pour cela, les nuages des observations et des variables définis par la projection des observations et des variables dans divers plans factoriels. Nous proposerons ensuite une procédure permettant de localiser la variable en défaut et par conséquent le capteur défectueux. Cette procédure est basée sur l'analyse du nuage des variables et des observations et sur la contribution des différentes variables à la construction des axes factoriels.

## I.3. DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES

### I.3.1. ANALYSE DU NUAGE DES VARIABLES

Les composantes principales, qui correspondent aux axes factoriels, peuvent être considérées comme de nouvelles variables, combinaisons linéaires des variables initiales, non corrélées entre elles et de variance maximale. Nous représenterons donc les variables dans

différents plans définis par des couples d'axes factoriels et en particulier les premiers, dont les parts d'inertie sont les plus fortes. Dans la représentation des variables dans un plan factoriel donné, la coordonnée d'une variable sur un axe est égale au coefficient de corrélation entre cette variable et cet axe.

Les variables proches du cercle unité et voisines sont fortement corrélées entre elles par une corrélation positive. Les variables proches du cercle unité et d'un axe donné sont fortement corrélées avec cet axe et ces variables se divisent en deux groupes opposés sur l'axe. Par ailleurs, deux groupes de variables proches l'un du premier axe de projection l'autre du second, sont faiblement corrélés entre eux, les axes étant orthogonaux. Nous voyons ainsi que la projection des variables dans un plan factoriel visualise l'ensemble des dépendances entre les variables et des corrélations entre les variables d'origine et les composantes principales.

### I.3.2. ANALYSE DU NUAGE DES OBSERVATIONS

Les projections des observations dans les divers plans factoriels font apparaître les liaisons entre les différents axes et les observations. Les proximités entre observations s'interprètent en termes de similitude de comportement vis-à-vis des variables que les différents axes synthétisent. Les observations sont alors examinées en fonction de leurs projections sur les différents axes, nous pouvons ainsi délimiter des ensembles d'observations voisines quant à leur comportement par rapport à tel ou tel axe, donc à telles ou telles variables.

Sur quels axes devenons-nous faire porter l'examen. Nous pouvons dire que les premiers axes sont sensibles aux valeurs extrêmes alors que les derniers sont affectés pour l'essentiel par les données aberrantes qui ajoutent de fausses informations et par conséquent de fausses dimensions dans les données de départ.

### I.3.3. TESTS STATISTIQUES

Pour disposer des seuils significatifs de détection, nous transformons le nuage de dispersion sensiblement hyperellipsoïdal en une hypersphère, en divisant pour chaque axe  $k$ , les valeurs de projection par  $\sqrt{\lambda_k}$ . Si toutes les distributions étaient normales et si toutes les relations étaient linéaires, 68%, 95% et 99% des points seraient respectivement à des distances inférieures à 1, 2 et 2.6.

Lorsqu'une observation est ainsi mise en évidence, il faut déterminer quelles variables sont responsables de son éloignement anormal. Une procédure efficace consiste à calculer les distances des points à l'origine, successivement dans l'espace de la première composante principale, puis dans celui de la première et de la deuxième, puis dans celui des trois premières, etc. Une brusque augmentation de la distance d'un espace au suivant indique la contribution particulière de la nouvelle composante prise en considération (Lefebvre, 1983).

Nous avons vu que les derniers axes factoriels sont plus sensibles que les premiers aux observations aberrantes. Rao (1964) et Gnanadesikan et Kettenring (1972) ont suggéré

d'utiliser comme test statistique pour la détection de ces observations aberrantes, la distance  $d_{1i}^2$ , qui est la somme des carrés des dernières composantes principales :

$$d_{1i}^2 = \sum_{k=p-m+1}^p y_{ik}^2 \quad (1.8)$$

où  $y_{ik}$  est la valeur de la  $k$ ème composante principale pour la  $i$ ème observation et  $m$  le nombre de composantes principales qu'on retient. Nous remarquons que cette distance donne un poids insuffisant pour les derniers axes factoriels, spécialement si  $m$  est proche de  $p$ , car les composantes principales ont une variance faible quand l'indice augmente. Cet effet peut être sévère si certaines composantes principales ont une faible variance et c'est insuffisant, puisque précisément et comme nous le verrons dans l'exemple d'application (I.5), les composantes principales à variance faible sont celles qui ont plus d'efficacité pour déterminer la présence de valeurs aberrantes.

Pour remédier à cet effet, nous pouvons donner un même poids à toutes les composantes, (Hawkins, 1980), et cela peut être réalisé en remplaçant  $y_{ik}$  par :

$$y_{ik}^* = \frac{y_{ik}}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (1.9)$$

où  $\lambda_k$  est la variance (voir annexe AI.1) de la  $k$ ème composante principale. Nous définissons alors la distance,  $d_{2i}^2$ , qui s'écrit :

$$d_{2i}^2 = \sum_{k=p-m+1}^p \frac{y_{ik}^2}{\lambda_k} \quad (1.10)$$

Nous pouvons noter que, lorsque  $p = m$ , la distance  $d_{2i}^2$  devient égale à  $\sum_{k=1}^p \frac{y_{ik}^2}{\lambda_k}$  qui est tout simplement la distance de Mahalanobis entre la  $i$ ème observation et la moyenne des observations (Joliffe, 1986). Les distances  $d_{1i}^2$  et  $d_{2i}^2$  permettent de détecter l'observation aberrante et de déterminer, lorsqu'une observation aberrante est mise en évidence, quelles variables sont responsables de son éloignement anormal. En effet, une brusque augmentation de ces distances d'un espace au suivant indique la contribution particulière de la nouvelle composante principale prise en considération.

Une autre solution consiste à multiplier la composante principale par sa variance, nous obtenons alors la distance  $d_{3i}^2$  donnée par Gnanadesikan et Kettenring (1972), définie par :

$$d_{3i}^2 = \sum_{k=p-m+1}^p y_{ik}^2 \lambda_k \quad (1.11)$$

Cette distance permet de mettre en évidence les observations qui ont un grand effet sur le premier axe factoriel. Dans le même contexte, pour détecter les valeurs aberrantes, Hawkins (1974) suggère d'utiliser la distance  $d_{4i}^2$  définie par :

$$d_{4i}^2 = \text{Max}_{p-m+1 \leq k \leq p} |y_{ik}^*| \quad (1.12)$$

avec  $y_{ik}^* = \frac{y_{ik}}{\sqrt{\lambda_k}}$ . Nous remarquons que dans ces quatre distances, nous utilisons la variable  $m$

qui représente le nombre de composantes principales que nous retenons. Par conséquent, le problème est donc de savoir combien doit-on prendre de composantes principales ? Et sur quel critère doit-on se baser ?

Pour répondre à ces différentes questions, nous avons besoin de savoir quelles sont les informations contenues dans les données de départ, par exemple, si les variables sont indépendantes ou non. Mais, d'une manière générale, Hawkins (1974) et Joliffe (1987) proposent de ne retenir, pour la valeur de  $m$ , que les composantes principales qui ont une variance inférieure à 1. Cependant, dans certains cas, cette condition n'est pas toujours vérifiée et par conséquent nous pouvons prendre, pour la valeur de  $m$ , le nombre total de composantes principales.

#### I.4. APPLICATION A LA DÉTECTION EN LIGNE

Les méthodes d'analyse factorielle citées précédemment sont souvent utilisées pour un pré-traitement du tableau de données et par conséquent elles sont applicables dans un premier temps hors ligne. Notre objectif est bien évidemment de pouvoir les utiliser en ligne pour détecter les défauts, réagir le plus rapidement possible et éviter les conséquences catastrophiques résultant de la présence d'un défaut. Pour réaliser cet objectif, nous avons besoin de déterminer le fonctionnement normal du processus. Ce dernier est caractérisé soit par les paramètres moyenne et matrice de variance-covariance des différentes variables, soit par des modes de fonctionnement qui peuvent constituer des classes, soit, enfin, par des variables qui contiennent la plus grande information, ces variables étant souvent appelées les composantes principales.

Pour effectuer la détection des valeurs aberrantes en ligne, nous appliquons l'analyse en composantes principales normée sur le tableau de données de départ. Cette analyse nous permet de mettre en évidence des axes factoriels et de tester les nouvelles observations. Ce test s'effectue en projetant ces nouvelles observations dans le plan défini par les axes factoriels. Cette opération est simple à réaliser ; cependant, nous devons trouver une réponse à la question primordiale qui est de savoir quels sont les axes factoriels retenus pour construire le plan de projection. La réponse la plus logique est de prendre les deux premiers axes. Puisque les composantes principales qui caractérisent ces deux premiers axes factoriels ont une forte contribution et contiennent le maximum d'informations.

Quand une valeur ou une observation aberrante est ainsi mise en évidence par sa projection dans les plans factoriels, nous devons déterminer l'origine de cette aberration ou plus exactement le capteur en défaut. Pour cela, nous continuons l'analyse en projetant l'observation dans d'autres plans factoriels définis par d'autres composantes principales de faible inertie. Ceci nous permet d'avoir d'autres informations et en particulier nous pouvons déterminer la corrélation de cette observation avec les autres ainsi que les corrélations qui existent entre les différentes variables. Une fois cette démarche géométrique terminée, nous présentons une stratégie permettant de mettre en évidence, d'une manière plus précise, la variable incriminée et en même temps le capteur en défaut. Cette stratégie repose, dans un premier temps, sur la détermination de la contribution de l'observation aberrante à la construction des axes factoriels et, dans un deuxième temps, sur la recherche des corrélations entre les axes factoriels et les variables du départ.

En résumé les différentes étapes de la procédure de détection d'observations aberrantes et de localisation de la variable en défaut sont présentées ci-dessous :

**Etape 1** - recherche des axes factoriels en utilisant l'analyse en composantes principales.

**Etape 2** - projection des observations dans les plans définis par les axes factoriels et détection des observations aberrantes. Cette détection se fait soit par la visualisation des projections dans les plans factoriels soit par le calcul d'une distance entre les différentes observations.

**Etape 3** - si on détecte une observation aberrante, on cherche la contribution de cette observation à la construction des différents axes factoriels. On ne retient que l'axe pour lequel la contribution de l'observation est maximale.

**Etape 4** - pour déterminer la variable en défaut, on calcule les corrélations entre l'axe retenu dans l'étape 3 et les variables de départ. La variable incriminée est celle qui présente la corrélation maximale avec cet axe. Si on détecte plusieurs observations aberrantes, la procédure est à entreprendre pour chaque observation aberrante.

## **I.5. EXEMPLES D'APPLICATION**

Pour mettre en pratique les quatre étapes de la procédure de détection, nous allons appliquer l'analyse en composantes principales normée sur un exemple de simulation que nous traitons dans deux cas de figure. Pour le premier cas, nous analysons tout le tableau de mesures sans aucune condition sur la nature des données. Dans le deuxième cas, on suppose que les  $k$  premières observations sont représentatives du fonctionnement normal du système. On n'effectuera l'analyse que sur cet ensemble de mesures et ensuite toutes les observations futures seront placées en observations supplémentaires. On appelle observation supplémentaire toute observation qui n'a pas servi dans le calcul des valeurs propres ni des vecteurs propres ni de la part d'inertie. Ce deuxième cas de figure permet donc de tester la méthode en ligne.

**Exemple 1** : l'ensemble des mesures est constitué de 85 observations pour 13 variables. Ces données ont été simulées de telle sorte que certaines variables soient combinaisons linéaires des autres pour pouvoir effectivement réduire la dimension du système. La mesure de la variable X5 à l'observation 61 est aberrante. On ajoute à la mesure de la variable X5 à cette observation cinq fois l'écart-type de la moyenne de X5. La figure ci-dessous montre l'évolution de cette variable. Pour alléger la présentation, on ne donne que la variable en défaut. Les variations des autres variables sont données à titre indicatif à l'annexe AI.2.

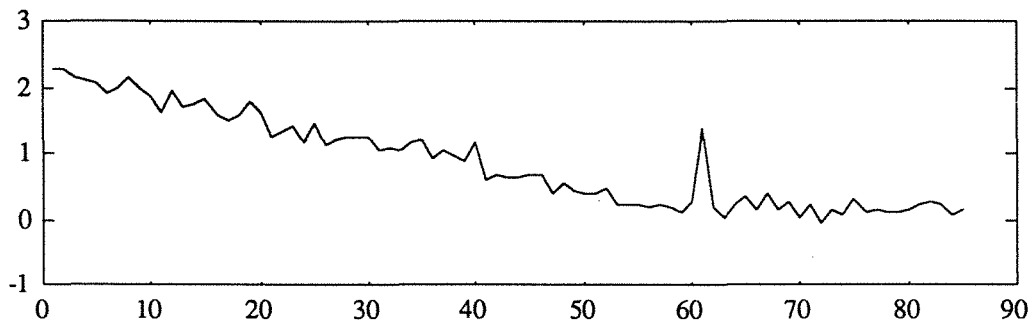


Figure I.1 - Variable X5

On effectue à présent l'analyse du tableau formé par les mesures des  $p = 13$  variables pour les  $n = 85$  observations. On utilise dans ce cas l'analyse en composantes principales normée. Les résultats obtenus pour les valeurs propres  $\lambda$  et la part de variance  $\tau$  cumulée expliquée par les différents facteurs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	$\lambda$	$\tau$ cumulé
1	8.408	64.682
2	3.194	89.255
3	0.733	94.896
4	0.434	98.240
5	0.071	98.791
6	0.047	99.158
7	0.032	99.406
8	0.025	99.605
9	0.019	99.756
10	0.009	99.831
11	0.009	99.901
12	0.007	99.961
13	0.005	100.000

Tableau I.1 - Résultats de l'analyse avec toutes les données

Les parts d'inertie expliquées par le premier axe, par les deux premiers, par les trois premiers et par les quatre premiers sont respectivement de 0.64, 0.89, 0.94 et 0.98. On peut conclure qu'à partir des quatre premières composantes principales, on arrive à construire 98% des informations contenues dans le tableau initial. Cette conclusion est tout à fait justifiée puisque les données ont été simulées en combinant linéairement quatre variables, voir annexe AI. D'après le tableau I.1, seuls les quatre premiers axes sont donc significatifs du fonctionnement normal du système.

On s'intéresse maintenant au nuage des variables et au nuage des observations. La figure 1.2(a) présente les projections des variables dans le plan factoriel défini par les deux premières composantes principales, (v6 désigne la variable X6). Ces projections qui définissent un nuage de points-variables traduisent l'ensemble des dépendances entre les variables et des corrélations entre les variables initiales et les composantes principales.

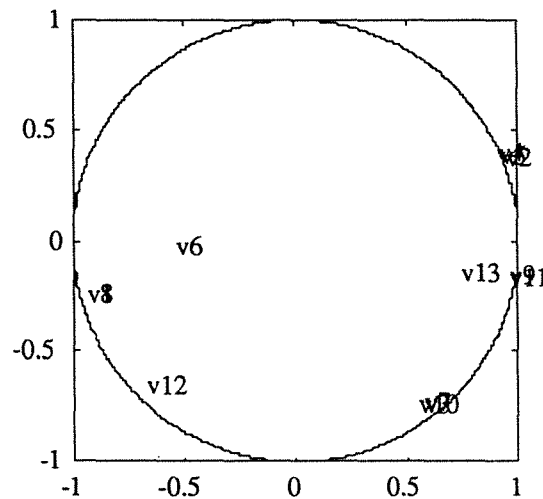


Figure I.2(a) - Projection des variables sur les axes factoriels 1 et 2

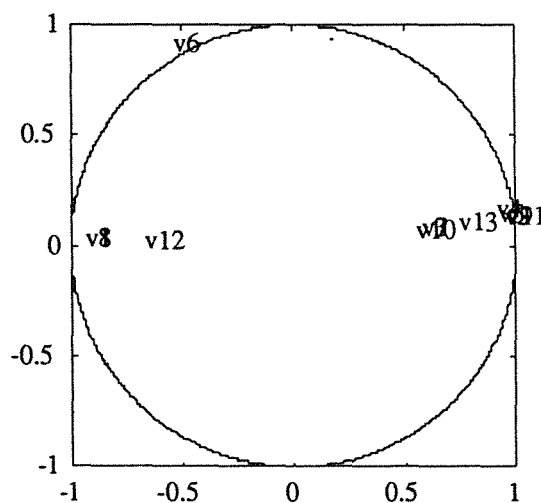


Figure I.2(b) - Projection des variables sur les axes factoriels 1 et 3

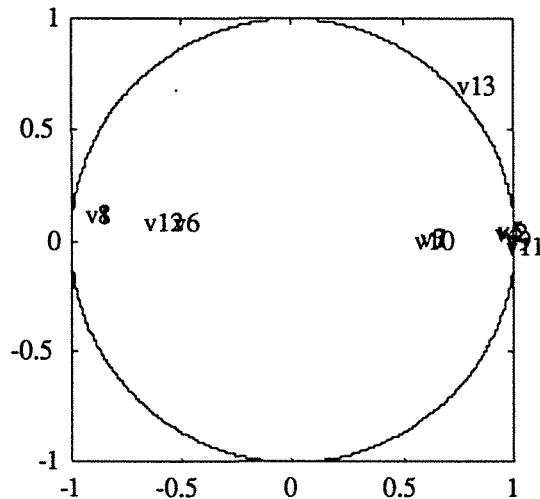


Figure I.2(c) - Projection des variables sur les axes factoriels 1 et 4

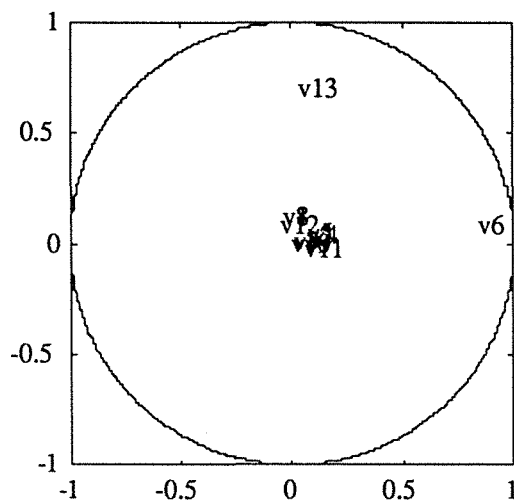


Figure I.2(d) - Projection des variables sur les axes factoriels 3 et 4

A partir de ces figures, on peut constater que la variable X6 est corrélée avec l'axe factoriel 3 et la variable X13 est corrélée avec les axes factoriels 1 et 4. Les figures I.2(b) et (d) illustrent parfaitement cette constatation. On peut remarquer aussi, que la première composante principale est déterminée à partir des variables initiales X1, X2, X4, X5, X8, X9 et X11 puisque les coefficients de corrélation entre cette composante principale et ces variables sont respectivement -0.93, 0.94, 0.90, 0.92, -0.93, 0.96 et 0.95. De même, la seconde composante principale regroupe les variables initiales suivantes, avec leur coefficient de corrélation, X3(-0.81), X7(-0.80) et X10(-0.81). En ce qui concerne la troisième composante principale, elle est corrélée avec la variable X6 et le coefficient de corrélation est égal à 0.83. Enfin, la quatrième composante principale est corrélée avec la variable X13 avec un coefficient de corrélation égal à 0.63. Ces différents résultats peuvent être vérifiés en analysant les courbes de variation des différentes variables initiales (voir Annexe AI).

On désire savoir quelles sont les observations qui ont contribué à la détermination de chaque axe factoriel. Cette information est fournie par la variable ctr qui correspond à la contribution



relative de l'observation j à l'inertie expliquée par l'axe i. La figure I.3 montre la contribution des différentes observations à l'inertie expliquée par l'axe factoriel 6.

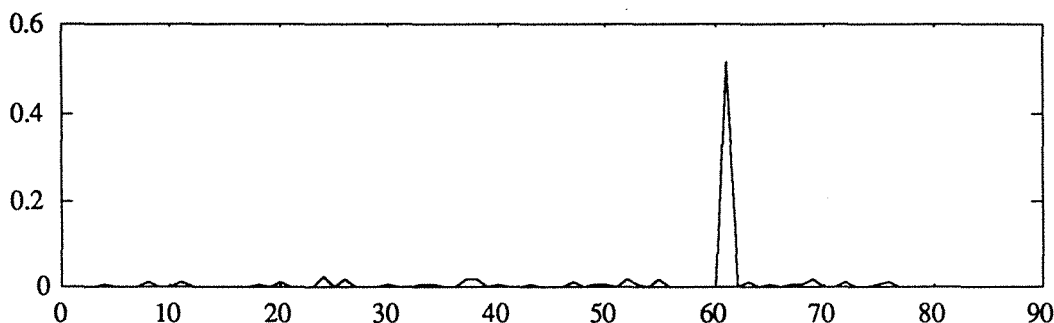


Figure I.3 - Contribution des observations à l'inertie de l'axe 6

A partir de la courbe de la figure I.3, on constate que l'observation 61 a contribué de plus de 50% à la construction de l'axe factoriel 6. Pour les autres axes factoriels la contribution de chaque observation à la construction de ces axes est bien dispersée. Nous venons de faire une analyse des nuages des points qui représentent les projections des variables sur les différents axes factoriels. Nous allons nous intéresser maintenant au nuage des observations. Ces projections des observations sur les différents axes factoriels vont nous permettre de mettre en évidence l'observation aberrante.

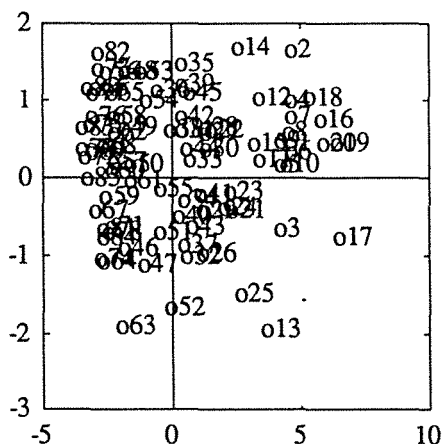


Figure I.4(a) - Projection des observations sur les axes factoriels 1 et 3

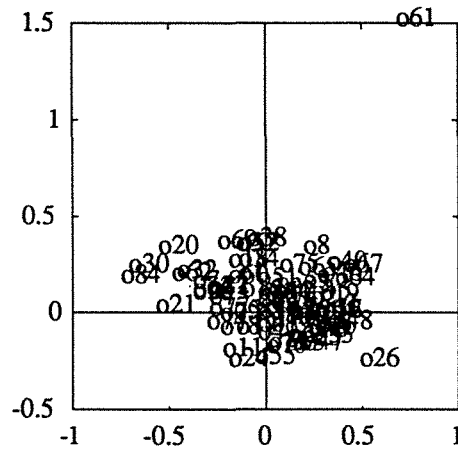


Figure I.4(b) - Projection des observations sur les axes factoriels 5 et 6

La projection des observations sur les premiers axes factoriels de forte inertie ne révèle la présence d'aucune valeur aberrante. Alors que la projection de ces observations sur les axes factoriels de faible inertie par exemple 5 et 6, indique que l'observation 61 est éloignée du reste des observations. Compte tenu de la définition d'une valeur aberrante, donnée dans l'introduction, on peut affirmer que l'observation 61 est aberrante.

Le choix des axes factoriels, sur lesquels on projette les observations, est fonction de la contribution des observations à la construction de ces axes. Dans notre cas, l'axe sur lequel doit être portée la projection est l'axe factoriel 6 puisque la contribution de l'observation aberrante à cet axe est maximale. La figure I.3 montre cette contribution.

Avec l'analyse du nuage des variables et du nuage des observations, on arrive à détecter l'observation aberrante. Or, chaque observation rassemble les mesures des treize variables et par conséquent nous devons déterminer laquelle des variables est en défaut pour localiser d'une façon précise le capteur défectueux. Nous proposons une solution qui consiste à chercher la variable la plus corrélée avec l'axe factoriel pour lequel la contribution de l'observation aberrante est maximale. Dans cet exemple, l'axe factoriel considéré est l'axe factoriel 6. Le tableau I.2 ci-dessous donne les coefficients de corrélation des variables initiales avec cet axe factoriel. On peut constater que l'axe factoriel 6 présente une corrélation maximale avec la variable X5 initiale. On en déduit que la variable X5 était en défaut.

La procédure de détection de valeurs aberrantes que nous proposons se résume en quatre étapes. Dans un premier temps, on effectue l'analyse en composantes principales pour déterminer les différents axes factoriels. Dans la deuxième étape, on projette les observations sur les axes factoriels de faible inertie. Cette projection nous permet de détecter l'observation aberrante. Dans la troisième étape, on cherche les contributions de cette observation à la construction des axes factoriels et on ne garde que l'axe factoriel pour lequel la contribution de l'observation aberrante est maximale. Enfin, dans la dernière étape, on regarde les corrélations entre cet axe factoriel et les variables initiales et la variable qui a la plus grande corrélation avec l'axe factoriel est déclarée en défaut.

	Axe 6
X1	0.0685
X2	-0.0408
X3	0.0427
X4	0.0471
X5	<b>0.1713</b>
X6	-0.0069
X7	-0.0482
X8	0.0531
X9	0.0022
X10	-0.0141
X11	-0.0067
X12	0.0495
X13	-0.0055

Tableau I.2 - Coefficients de corrélation entre l'axe 6 et les variables initiales

Cette procédure de détection d'une observation aberrante et de la variable en défaut est généralisable à plusieurs valeurs aberrantes. La procédure à suivre consiste à détecter les observations aberrantes par projections sur différents axes factoriels. Ensuite, on cherche les axes pour lesquels la contribution de chacune des observations aberrantes est maximale et enfin on analyse les coefficients de corrélation entre ces axes et les variables initiales. La valeur maximale de ces coefficients indique la variable en défaut.

**Exemple 2** : pour appliquer l'analyse en composantes principales en ligne, nous allons choisir par exemple les 50 premières observations. Ensuite, on effectue l'analyse uniquement sur cet ensemble d'observations ce qui va nous permettre de définir les axes factoriels. Puis, toutes les observations nouvelles vont être projetées sur ces différents axes pour voir si ces nouvelles mesures suivent les mêmes modes de fonctionnement ou non. De plus, pour éprouver davantage la procédure de détection utilisant l'analyse en composantes principales, nous créons trois valeurs aberrantes. La première à l'observation 61 pour la variable X5 (comme dans le premier exemple), la deuxième à l'observation 70 pour la variable X13, on ajoute trois fois l'écart-type, et la dernière à l'observation 80 pour la variable X7 (deux fois l'écart-type). Les figures ci-dessous présentent l'évolution des variables X7 et X13.

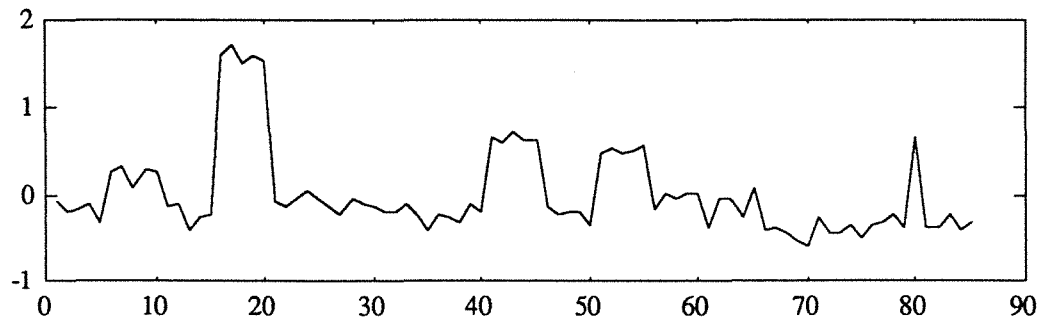


Figure I.4(a) - Évolution de la variable X7

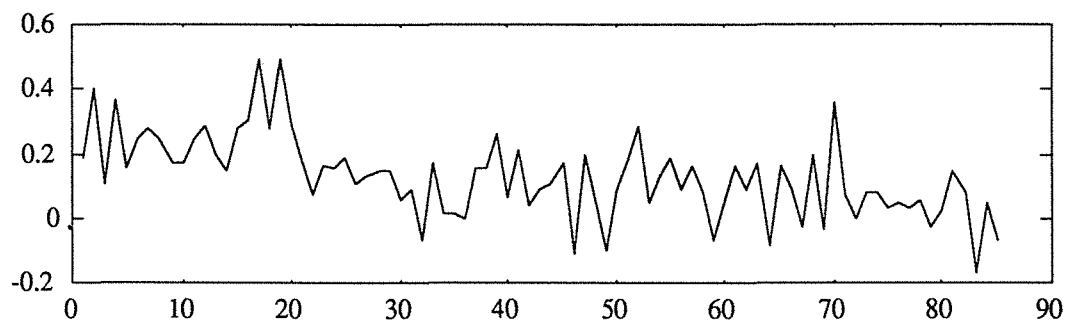


Figure I.4(b) - Évolution de la variable X13

	$\lambda$	$\tau$ cumulé
1	7.206	55.436
2	4.269	88.276
3	0.867	94.946
4	0.395	97.986
5	0.102	98.774
6	0.047	99.138
7	0.029	99.362
8	0.025	99.554
9	0.021	99.722
10	0.012	99.818
11	0.011	99.904
12	0.008	99.966
13	0.004	100.000

Tableau I.3 - Résultats de l'analyse avec les 50 premières observations





	Axe 4	Axe 7	Axe 9
X1	-0.0385	-0.0800	0.0048
X2	0.0113	0.0124	0.0627
X3	0.0591	-0.0148	-0.0351
X4	0.1121	0.0081	0.0071
X5	0.0637	<b>-0.1342</b>	-0.0012
X6	0.0429	0.0061	0.0027
X7	0.0470	-0.0254	<b>0.0859</b>
X8	0.0478	0.0043	-0.0046
X9	0.0720	0.0072	-0.0646
X10	0.0707	0.0456	0.0453
X11	0.0950	0.0157	-0.0535
X12	0.0115	-0.0338	-0.0084
X13	<b>-0.5898</b>	-0.0027	-0.0052

Tableau I.4 - Coefficients de corrélation entre les variables initiales et les axes

Dans la première colonne de ce tableau le coefficient de corrélation le plus grand est pour la variable X13, on en déduit que la variable en défaut est la variable X13. Cette variable est donc à l'origine de l'aberration de l'observation 70. De même, on en déduit que les aberrations de l'observation 61 et 80 sont dues respectivement aux variables X5 et X7 (valeur en gras).

## CONCLUSION

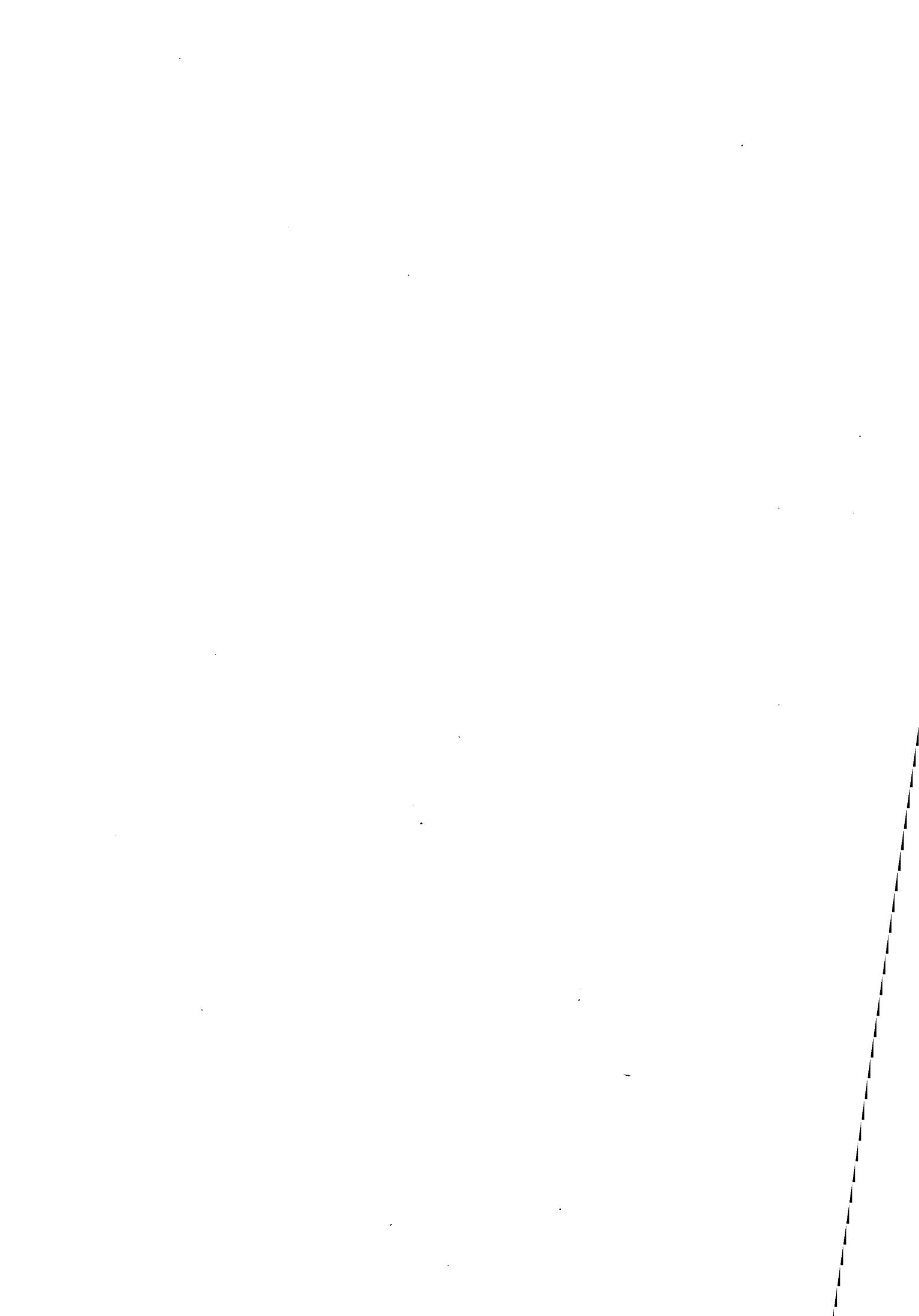
Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'analyse en composantes principales pour d'une part la détection d'observations aberrantes et d'autre part pour la détection et la localisation de variables en défaut. Nous avons montré que cette analyse peut s'appliquer à la détection en ligne en plaçant les observations futures en observations supplémentaires.

En combinant les différents points de l'analyse en composantes principales à savoir les projections des observations, les projections des variables, les contributions des observations à la construction des axes factoriels et les coefficients de corrélation entre les variables initiales et les nouvelles composantes principales, on arrive à reconstruire le tableau de données de départ avec un minimum de variables tout en gardant le maximum d'informations et surtout nous avons mis en oeuvre une procédure permettant de détecter les observations aberrantes et les variables en défaut. Cette procédure est basée sur la détermination de l'observation aberrante par projection de toutes les observations dans les plans définis par les axes factoriels, par le calcul des contributions de toutes les observations à la construction des axes factoriels et enfin

par la détermination de la variable qui a une corrélation maximale avec l'axe factoriel dont la contribution de l'observation aberrante est la plus importante.

Pour les distances statistiques  $d_{1i}^2$ ,  $d_{2i}^2$ ,  $d_{3i}^2$  et  $d_{4i}^2$  que nous avons proposés dans ce chapitre, on n'obtient pas les résultats souhaités. Cela est dû au choix très difficile du nombre de composantes principales qu'il faut retenir pour calculer ces distances.





## Chapitre II

# DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES DANS UNE RÉGRESSION LINÉAIRE



## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons aborder le cas où les données (les mesures) sont reliées entre elles par un modèle mathématique ou une structure bien définie. Plus particulièrement, nous allons nous intéresser à une *régression linéaire simple* ou *multiple*. En régression simple, il n'y a qu'une variable explicative  $x$  et une variable à expliquer  $y$  et on trace la droite dite des moindres carrés à travers le nuage des  $n$  points  $(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, n$  correspondant aux  $n$  observations dont on dispose. Dans la régression multiple, on généralise le procédé à  $p$  variables explicatives. On obtient donc des figures géométriques dans un espace à  $p$  dimensions. Malheureusement, ces figures n'apportent pas grand chose à la compréhension. Il faut donc trouver  $p$  coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  de façon à bâtir la relation

$$y_i = \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \dots + \theta_p x_{ip} + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

qu'on appelle équation de régression. Dans l'équation (2.1), on fait apparaître le terme  $\varepsilon$  qui correspond au résidu et qui représente l'écart entre la valeur observée et la part linéaire de l'observation  $(\theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \dots + \theta_p x_{ip})$ . Ce terme d'erreur est habituellement supposé suivre une loi de distribution normale avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma^2$  inconnue.

Notre objectif est de détecter des éventuelles erreurs ou valeurs aberrantes dans les données dont on dispose qui sont les mesures de la variable  $y$  qu'on appelle variable expliquée ou endogène ou dépendante ou de sortie et les mesures des variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$  qu'on appelle variables explicatives ou exogènes ou indépendantes ou d'entrée. Pour réaliser cet objectif, nous avons besoin de toutes les informations concernant la relation qui lie ces différentes variables et par conséquent nous devons élaborer des techniques pour estimer tous les paramètres inconnus du modèle à savoir les paramètres  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ . Pour ce double objectif, on trouve deux approches dans la littérature ; la première consiste à mettre en oeuvre des techniques d'estimation qui sont insensibles à la présence de valeurs aberrantes ; ces techniques sont souvent appelées méthodes robustes. La deuxième approche consiste à développer des techniques ou plutôt des tests pour détecter ces valeurs aberrantes. Notre travail est à rattacher à la deuxième approche, mais avant d'aborder ce problème nous allons donner le principe de quelques méthodes d'estimation robuste dans un modèle linéaire.

### II.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Pour estimer les paramètres du modèle linéaire, nous considérons l'expression (2.1) écrite sous sa forme matricielle :

$$Y = X \Theta + \varepsilon \quad (2.2)$$

où  $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$  désigne le vecteur des observations de la variable de sortie de dimension  $n \times 1$ ,  $X$  la matrice d'observations de dimension  $n \times p$  constituée par les valeurs des variables

explicatives, comme l'indique l'expression (2.3) ci-dessous,  $\Theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_p)^T$  représente le vecteur de paramètres inconnus de dimension  $p \times 1$ ,  $\mathcal{E}$  le vecteur des résidus de dimension  $n \times 1$ ,  $n$  et  $p$  étant respectivement le nombre d'observations et le nombre de paramètres.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Il arrive souvent qu'un paramètre constant indépendant des variables d'entrée apparaisse dans l'équation du modèle linéaire. Pour estimer ce paramètre nous augmentons la taille de la matrice  $X$  en y ajoutant un vecteur de dimension  $n \times 1$  dont tous les éléments sont égaux à 1.

La majeure partie des techniques d'estimation des paramètres est basée sur la minimisation d'un critère et c'est sur le choix de ce critère que ces techniques diffèrent. Parmi les critères possibles à minimiser, citons  $\{\sum e_i^2\}$ ,  $\{\sum |e_i|\}$ ,  $\{\max(e_i)\}$  ..., où  $e_i$  représente l'écart défini sur un ajustement par :

$$e_i = y_i - (\hat{\theta}_1 x_{i1} + \hat{\theta}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\theta}_p x_{ip}) \quad (2.4)$$

où  $\hat{\theta}_i$  est l'estimée recherchée du paramètre  $\theta_i$ . Dans la suite, nous donnons le principe de certaines techniques d'estimation.

### II.1.1. MOINDRES CARRÉS SIMPLES

La méthode des moindres carrés simples est la méthode la plus connue et la plus ancienne Gauss (1809) et correspond à la minimisation du critère  $I$  défini par :

$$I = \sum_1^n e_i^2 \quad (2.5)$$

L'idée de base est d'optimiser la prédiction de la variable de sortie de telle sorte que l'écart soit faible. Il s'agit donc de déterminer le vecteur  $\hat{\Theta}$  des coefficients qui minimise le critère  $I$ , appelé critère des moindres carrés. Ce critère conduit à des calculs algébriques simples et se prête à une interprétation géométrique claire. Pour estimer les paramètres du modèle, une condition nécessaire de minimum est l'annulation des dérivées partielles premières ce qui nous donne la solution :

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.6)$$

A partir de cette estimation, nous pouvons donner une prédiction de la variable de sortie, soit :

$$\hat{Y} = X\hat{\Theta} \quad (2.7)$$

Nous constatons que cette technique ne nécessite que la multiplication de matrices et de vecteur ainsi que l'inversion d'une matrice carrée. Malheureusement, elle présente certains inconvénients en particulier sa faible robustesse par rapport à la présence de plusieurs valeurs aberrantes. Pour palier à ce problème, la majorité des auteurs a essayé de rendre la méthode robuste en remplaçant le carré par un autre opérateur.

### II.1.2. MÉTHODES D'ESTIMATION ROBUSTE

Parmi les techniques d'estimation robuste dans une régression linéaire, on peut trouver des méthodes basées sur la minimisation d'un critère qui est fonction de l'écart entre les observations et le modèle. Ces techniques portent le nom des M-estimateurs (Huber, 1981) et la forme générale des critères à minimiser est donnée par l'expression ci-dessous :

$$I = \sum_{i=1}^n f(e_i) \quad (2.8)$$

dans laquelle  $f$  est une fonction linéaire ou non de l'écart  $e_i$ . Dans cette optique Hampel (1975) et Rousseeuw (1984) ont remplacé dans l'expression (2.5) la somme par la médiane. Le critère à minimiser devient alors :

$$I = \text{médiane}(e_i^2) \quad (2.9)$$

Cette technique porte le nom de moindres carrés médians (Least Median of Squares, LMS). Son caractère robuste vient du fait que la fonction médiane est plus robuste que la somme ou la moyenne. Rousseeuw et Leroy (1987) ont montré que cette méthode peut être appliquée à des données dont 50% peuvent être douteuses ou même aberrantes.

Dans le critère des moindres carrés, on additionne tous les carrés des écarts ; Rousseeuw (1983) montre qu'on peut limiter cette somme aux premiers écarts. Pour cela, on classe les carrés des écarts par ordre croissant  $(e^2)_{1:n} \leq (e^2)_{2:n} \leq \dots \leq (e^2)_{n:n}$ , puis on additionne les  $k$  premiers termes de ce classement. Dans ce cas, Rousseeuw (1985) définit la technique des moindres carrés trimming (Least Trimmed Squares, LTS) en minimisant le critère suivant :

$$I = \sum_{i=1}^k (e^2)_{i:n} \quad (2.10)$$

où  $k$  représente la partie entière de  $(n/2)+1$  et  $(e^2)_{i:n}$  désigne le carré de l'écart classé au rang  $i$  parmi les  $n$ .

Pour plus de détail concernant les méthodes d'estimation robuste, le lecteur peut consulter l'ouvrage de Rousseeuw et Leroy (1987) où les auteurs présentent une synthèse de ces différentes techniques.

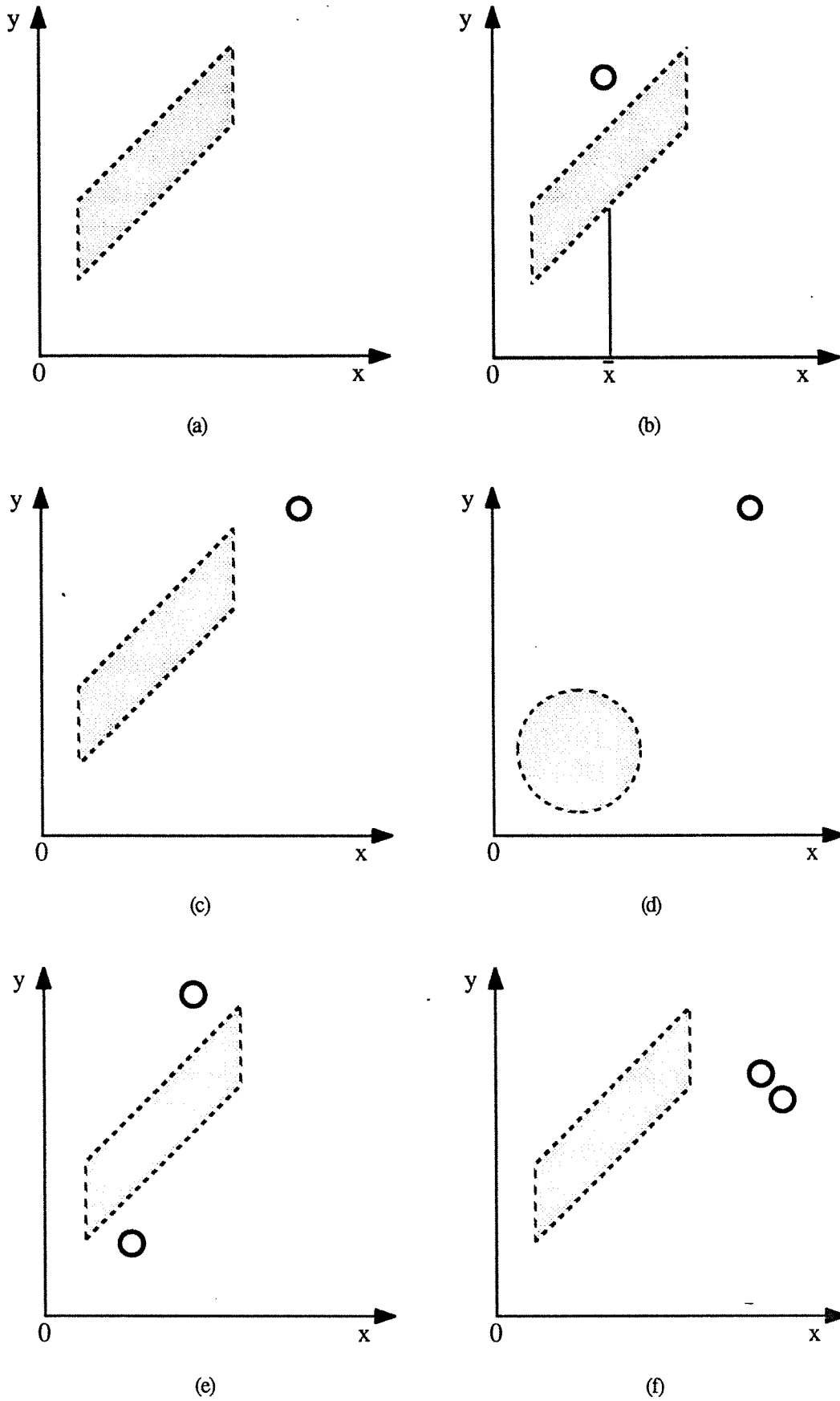
## II.2. ANALYSE ET DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES

### II.2.1. ANALYSE DE PRÉSENCE DE VALEURS ABERRANTES

Comme nous l'avons rappelé précédemment, notre but est de détecter des éventuelles anomalies qui peuvent survenir sur les capteurs mesurant les différentes variables. Dans le cas d'une régression linéaire, nous sommes en présence de deux types de variables : variable expliquée et variable explicative et par conséquent nous allons devoir élaborer des tests capables d'une part de détecter les erreurs et d'autre part d'identifier laquelle des variables est en défaut. Ceci nous permettra de localiser le capteur défaillant et d'agir en conséquence, c'est le but même du diagnostic.

Dans la littérature, une erreur survenue sur la variable de sortie est souvent appelée valeur aberrante (*outlier*) et une erreur sur une variable explicative porte le nom d'observation influente (*influential observation*). Pour plus de clarté, nous n'utilisons que la terminologie valeur aberrante pour les deux types. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la détection de ces valeurs aberrantes dans une régression linéaire, nous pouvons citer par exemple les travaux de Cook et Weisberg (1982), Barnett et Lewis (1984), Chatterjee et Hadi (1986), Rousseeuw et Leroy (1987)... La majorité des diagnostics proposés est basée sur l'écart résultant de l'ajustement par la méthode des moindres carrés. Il existe néanmoins une autre approche basée sur la suppression de l'observation ou de la valeur douteuse et la comparaison des résultats obtenus avec et sans cette observation. Dans ce chapitre, nous allons faire une synthèse détaillée de ces différentes techniques et nous testons les performances de chacune d'elles sur des données réelles du processus pilote présenté dans l'annexe A et aussi sur des données réelles étudiées par plusieurs auteurs dans la littérature.

Avant de décrire ces différents tests de diagnostic de valeurs aberrantes, nous présentons les différentes situations de présence de valeurs aberrantes ; ces configurations sont présentées sous forme de graphique, figures II.1.



Figures II.1 - Différentes configurations de présence de valeurs aberrantes dans une régression linéaire



La figure II.1(a) décrit le cas que nous pouvons qualifier de normal, autrement dit les données sont régulièrement distribuées et obéissent toutes au modèle choisi. Dans la deuxième configuration, figure II.1(b), le point  $\square$  est anormal mais puisqu'il se trouve proche de la moyenne de la variable explicative, ce point n'altère pas l'estimation des paramètres du modèle. Cependant, lorsque le modèle contient un paramètre constant indépendant des variables explicatives alors l'estimation de ce dernier peut être affectée par la présence de cette valeur aberrante. La figure II.1(c) illustre le cas où une rupture existe entre le point aberrant et la majorité de données. Cette situation peut s'expliquer par une autre source d'influence dans laquelle le point aberrant fournit l'information la plus utile. En ce qui concerne la figure II.1(d), il s'agit de la configuration la plus critique qui peut survenir dans la pratique. Dans cette configuration, l'estimation du terme constant est presque totalement déterminée par le point extrême. Dans la cinquième configuration, figure II.1(e), l'un ou l'autre ou les deux points aberrants peuvent avoir une grande influence sur l'estimation des paramètres. Dans ce cas, une action doit être entreprise pour remédier à ce problème ; soit on supprime ces observations, soit on leur donne un nouveau poids soit enfin on choisit une autre structure. Enfin, la dernière configuration, présente un cas très intéressant dans lequel la suppression de l'un ou de l'autre point aberrant n'aurait qu'un léger effet sur les résultats de la régression ; l'effet d'une valeur aberrante est masqué par la présence d'une autre valeur aberrante.

Dans notre étude, nous nous intéressons à la détection de valeurs aberrantes dans un modèle linéaire de type (2.2). Les tests utilisés pour accomplir notre objectif peuvent être répertoriés dans quatre catégories. La première utilise la matrice de projection et ne fait appel qu'aux mesures des différentes variables. Pour la deuxième catégorie, il s'agit des tests basés sur l'écart calculé entre la mesure d'une variable et l'estimée de cette variable. Quant à la troisième catégorie, il s'agit de supprimer une observation douteuse et puis de faire l'analyse avec et sans cette observation. Les conclusions seront tirées en comparant les résultats obtenus dans les deux cas de figure. Enfin, les tests développés dans la quatrième catégorie sont tous issus de la distance de Mahalanobis.

## II.2.2. TEST DES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE DE PROJECTION

Nous avons vu au paragraphe II.1.1 que la variable de sortie peut être estimée à partir de la matrice  $X$  et des paramètres estimés du modèle. Si nous voulons connaître la relation qui lie cette variable à son estimée, il suffit de combiner les deux relations (2.6) et (2.7). Nous obtenons alors :

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.11)$$

On constate donc que chaque estimation  $\hat{y}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de la variable de sortie est une fonction linéaire de  $y_i$ . Nous écrivons  $\hat{Y} = H Y$ , où  $H$  est la matrice de projection définie par :

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (2.12)$$

La matrice  $H$  de dimension  $n \times n$  est aussi connue sous le nom de matrice chapeau puisqu'elle transforme le vecteur d'observation  $Y$  en son estimé  $\hat{Y}$ . Plusieurs auteurs, Hoaglin (1978) Cook et Weisberg (1982) et Chatterjee et Hadi (1986), l'ont utilisée pour la détection des valeurs aberrantes. On peut vérifier facilement que la matrice  $H$  est idempotente ( $H^2 = H$ ) et symétrique ( $H^T = H$ ). On peut montrer alors la relation suivante :

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^n h_{ij} h_{ij} = h_{ii}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h_{ij}^2 \quad (2.13)$$

où  $h_{ij}$  est le terme général de la matrice  $H$  et  $h_{ii}$  correspond aux éléments diagonaux de cette matrice. A partir de la relation (2.13), nous voyons que les éléments diagonaux sont compris entre zéro et un.

On sait que les valeurs propres d'une matrice de projection sont égales à zéro ou à un et que le nombre de valeurs propres différentes de zéro est égal au rang de la matrice. En plus, si on prend deux matrices  $M$  et  $N$  de dimensions respectives  $m \times k$  et  $k \times m$ , et si on pose  $M = X(X^T X)^{-1}$  et  $N = X^T$  on obtient la relation suivante :

$$\text{trace}\left(X(X^T X)^{-1} X^T\right) = \text{trace}\left(X^T X(X^T X)^{-1}\right) = \text{trace}(I_p)$$

on en déduit que la trace de  $H$  vaut  $p$  et donc le rang de  $H$  est égal  $p$ , autrement dit :

$$\sum_{i=1}^n h_{ii} = p \quad (2.14)$$

Par conséquent, la valeur moyenne des éléments diagonaux de la matrice chapeau est  $p/n$ . Cette remarque nous permet donc de fixer la valeur critique de ces éléments. Les essais effectués en simulation ont montré que la valeur seuil peut être prise égale à  $3p/n$ . D'autres auteurs prennent la valeur plus restrictive  $2p/n$  (Rousseeuw et Leroy, 1987). Ainsi, lorsqu'une valeur  $h_{ii}$  dépasse le seuil choisi, l'observation en question est considérée comme une observation aberrante.

D'après la définition (2.12) de la matrice  $H$ , nous pouvons constater qu'elle n'est formée que des variables explicatives et que les éléments diagonaux sont aussi définis à partir de ces variables. L'expression (2.15) donne la définition de ces éléments :

$$h_{ii} = x_i (X^T X)^{-1} x_i^T \quad (2.15)$$

où  $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip})$  est le vecteur ligne de dimension  $1 \times p$ . Avec cette définition, lorsqu'une valeur aberrante est présente sur une variable de sortie, les éléments diagonaux seront

insensibles à cette aberration ; par contre si la valeur aberrante est sur une des variables explicatives, ces éléments peuvent servir à la détecter.

Pour palier à l'insensibilité des éléments diagonaux de la matrice H aux valeurs aberrantes présentes sur la variable de sortie, Gray et Ling (1984) proposent une solution qui consiste à augmenter la matrice X en y ajoutant le vecteur Y. On définit alors une nouvelle matrice de projection H\* donnée par l'expression suivante :

$$H^* = X^* (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} \quad (2.16)$$

où X\* est la matrice X augmentée du vecteur Y. La relation qui lie les éléments diagonaux h<sub>ii</sub> de la matrice H et ceux de la matrice H\* est donnée par (voir annexe AII.1) :

$$h_{ii}^* = h_{ii} + \frac{e_i^2}{e^T e} \quad (2.17)$$

Cette relation montre que les éléments diagonaux de la matrice H\* sont fonctions des éléments diagonaux de la matrice H et des écarts e<sub>i</sub>. Sachant que les éléments diagonaux de la matrice H sont sensibles aux valeurs aberrantes présentes sur les variables explicatives et que l'écart est sensible aux valeurs aberrantes sur les variables de sortie, les éléments h<sub>ii</sub>\* seront donc sensibles aux deux types de valeurs aberrantes. Nous vérifierons ces différentes remarques dans les exemples traités à la fin de ce chapitre.

### II.2.3. TEST D'ÉCART

Le plus souvent, lorsqu'on estime la valeur d'une variable, la solution la plus logique, pour vérifier si l'estimation est bonne, consiste à comparer cette valeur à celle donnée par les appareils de mesure. Il suffit alors de faire la différence entre ces deux valeurs, c'est ce qu'on appelle écart dont la définition est donnée ci-dessous :

$$e_i = \hat{y}_i - y_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

où  $\hat{y}_i$  est une estimation de la variable de sortie  $y_i$ . Le test d'écart est sans doute le test le plus utilisé en diagnostic du fait de sa simplicité de mise en oeuvre et de son efficacité. Ce test a été utilisé par plusieurs auteurs et dans différents domaines, voir Belsley et al. (1980), Cook et Weisberg (1982), Hawkins (1984), Wellman et Gunst (1991).

A partir de l'expression (2.18), on peut donner une estimation de la variance du résidu de l'équation (2.1). Cette estimation est obtenue par la relation (2.19) qui fait apparaître le produit du vecteur des écarts de dimension n x 1 par son transposé et les paramètres n et p.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e^T e}{n - p} \quad (2.19)$$

Nous pouvons montrer aussi que la matrice de covariance du vecteur des écarts est  $\hat{\sigma}^2 (I_n - H)$ , où  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ . De même, à partir des hypothèses faites sur le résidu de l'équation (2.1), le vecteur  $e$ , en l'absence de défaut, suit une loi de distribution normale de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\hat{\sigma}^2 (I_n - H)$  et que la variance de chaque élément du vecteur des écarts est :

$$\text{var}(e_i) = \hat{\sigma}^2 (1 - h_{ii}) \quad (2.20)$$

Cette relation montre encore une fois le rôle que joue la matrice de projection dans une régression linéaire.

Il existe dans la littérature des formes différentes de ce test. La première consiste à diviser l'écart  $e_i$  par l'écart-type du résidu  $\hat{\sigma}$ . C'est ce qu'on appelle généralement l'écart normalisé ou standardisé. Dans ce chapitre, ce test est noté  $e_{ni}$  et son expression est :

$$e_{ni} = \frac{e_i}{\hat{\sigma}} \quad (2.21a)$$

La deuxième forme se limite à diviser l'écart par son propre écart-type, ce test porte souvent le nom de l'écart studentisé ; Velleman et Welsch (1981) et Cook et Weisberg (1982) l'ont baptisé l'écart studentisé interne. Ce test est noté  $e_{si}$  et est donné par :

$$e_{si} = \frac{e_i}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - h_{ii}}} \quad (2.21b)$$

La troisième forme ressemble à la deuxième mais son calcul se fait différemment :

$$e_{si}^* = \frac{e_i}{\hat{\sigma}(i) \sqrt{1 - h_{ii}}} \quad (2.21c)$$

où  $\hat{\sigma}(i)$  est une estimation de l'écart-type  $\sigma$  obtenue sans la  $i$ ème observation. Ce test nommé écart studentisé externe par Velleman et Welsch (1981) est aussi connu sous le nom de Jackknife.

Plusieurs auteurs Velleman et Welsch (1981), Atkinson (1981) et Belsley et al. (1980) préfèrent utiliser  $e_{si}^*$  plutôt que  $e_{si}$  pour les raisons suivantes :

- sous l'hypothèse d'absence de valeurs aberrantes, le test  $e_{si}^*$  suit une distribution de Student avec  $n-p-1$  degrés de liberté pour laquelle les tables de valeurs critiques sont disponibles alors que  $\frac{e_{si}^2}{n-p}$  suit une distribution bêta dont il est difficile de trouver un seuil critique.

- on peut vérifier facilement que

$$e_{si}^* = e_{si} \sqrt{\frac{n-p-1}{n-p-e_{si}^2}} \quad (2.22)$$

A partir de cette relation, on voit que  $e_{si}^*$  est une fonction monotone de  $e_{si}$  et que  $e_{si}^{*2}$  tend vers  $\infty$  quand  $e_{si}^2$  tend vers  $n-p$ . Par conséquent, l'écart studentisé externe reflète beaucoup mieux les anomalies que l'écart studentisé interne.

- l'estimation  $\hat{\sigma}(i)$  est plus robuste aux erreurs présentes dans la  $i$ ème observation, puisque l'estimation se fait sans cette observation.

En plus de l'utilisation de ces différents tests pour la détection de défauts, nous pouvons nous servir du test d'écart pour la validation du modèle de départ. En effet, si nous traçons la variable écart en fonction de l'estimée de la variable de sortie, nous obtenons les différentes courbes de la figure II.2.

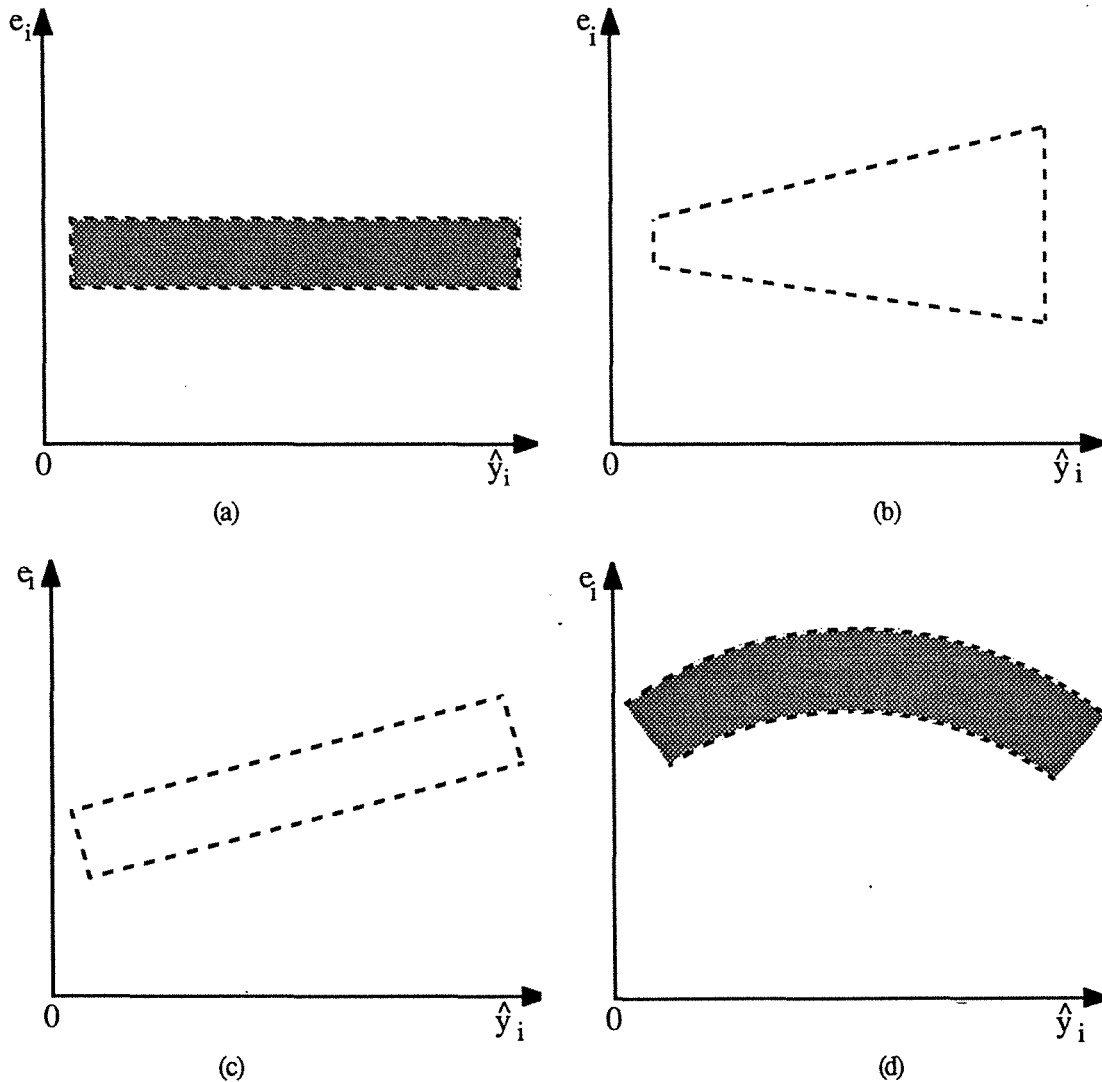


Figure II.2 - Caractéristiques des modèles linéaires

La raison pour laquelle on représente l'écart en fonction de l'estimée de la variable de sortie est que ces deux variables sont non corrélées entre elles. En effet :

$$\text{cov}(e_i, \hat{y}_i) = \sum (e_i - \bar{e})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})$$

en supposant que la moyenne de l'écart est nulle, on obtient la formule suivante :

$$\text{cov}(e_i, \hat{y}_i) = e^T \hat{Y}$$

et comme  $e = (I - H)Y$  et  $\hat{Y} = H Y$ , le coefficient de corrélation entre les deux variables s'écrit donc :

$$\text{cov}(e_i, \hat{y}_i) = Y^T (H - H^2) Y$$

puisque  $H$  est idempotente et symétrique, c'est-à-dire  $H = H^2$ , la corrélation entre l'écart et l'estimée de la variable de sortie est nulle.

L'analyse des différentes caractéristiques de la figure II.2 permet donc de valider le modèle retenu pour représenter la variable expliquée en fonction des variables explicatives. La figure II.2(a) nous informe que l'écart ne présente aucune anomalie et que le modèle retenu est adéquat. Pour la figure II.2(b), elle indique que la variance du résidu n'est pas constante et qu'il faut tenir compte de cette contrainte en utilisant par exemple une autre technique d'estimation des paramètres du modèle. En ce qui concerne la figure II.2(c), il s'agit tout simplement d'une erreur au niveau de l'écriture du modèle. En effet, nous devons dans ce cas particulier ajouter un terme constant dans l'équation du modèle et l'estimer en même temps que les autres paramètres en ajoutant un vecteur à la matrice  $X$  ne contenant que des valeurs égales à un. Enfin, pour la dernière figure, elle nous indique que le modèle n'est pas totalement linéaire et par conséquent nous devons adapter sa structure en tenant compte des formes non linéaires (produit, carré, ...).

#### II.2.4. DISTANCE DE COOK

Pour analyser l'influence d'une observation, il est plus utile d'effectuer la régression avec et sans cette observation. A cet effet, Cook (1977, 1979) propose la distance qui porte son nom et qui consiste à mesurer le changement dans les paramètres du modèle qui pourrait survenir si l'observation est supprimée. Cette distance est donnée par :

$$DC_i = \frac{[\hat{\Theta}(i) - \hat{\Theta}]^T X^T X [\hat{\Theta}(i) - \hat{\Theta}]}{p \hat{\sigma}^2} \quad (2.23a)$$

où  $\hat{\Theta}$  est une estimation du vecteur des paramètres  $\Theta$  avec toutes les observations et  $\hat{\Theta}(i)$  une estimation de ce même vecteur mais en supprimant la  $i$ ème observation. Comme a priori on ne sait pas où se trouve la valeur aberrante, la distance de Cook est calculée pour toutes les observations. Une valeur importante de cette distance indique que l'observation en question a

une influence dans la détermination du vecteur  $\hat{\Theta}$ . Comme tout test statistique, il faut définir la valeur critique ou le domaine de confiance. Cook (1977) suggère de comparer cette distance à la valeur de la variable de Fisher  $F(p, n-p, 1-\alpha)$  au seuil de confiance  $\alpha$  fixé. Cette distribution de Fisher a été introduite tout simplement par analogie à la région de confiance accordée à l'estimation du vecteur des paramètres. Néanmoins, Cook et Wiesberg (1982) et Rousseeuw et Leroy (1987) indiquent que la distance sera considérée large lorsque la valeur de  $DC_i$  est supérieure à un.

La distance de Cook peut aussi être interprétée comme une distance euclidienne entre l'estimation de deux vecteurs lorsque cette estimation est réalisée avec ou sans la  $i$ ème observation. En effet, l'expression (2.23a) peut s'écrire de la manière suivante :

$$DC_i = \frac{[X(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i))]^T [X(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i))]}{p \hat{\sigma}^2} \quad (2.23b)$$

Or, d'après l'expression (2.7), on a  $\hat{Y} = X \hat{\Theta}$  et si on définit  $\hat{Y}(i) = X \hat{\Theta}(i)$  comme le vecteur de prédiction obtenu sans l'observation  $i$ , on obtient donc :

$$DC_i = \frac{[\hat{Y} - \hat{Y}(i)]^T [\hat{Y} - \hat{Y}(i)]}{p \hat{\sigma}^2} \quad (2.23c)$$

Pour mieux comprendre le comportement de la distance de Cook, nous allons établir la relation qui lie cette distance aux éléments diagonaux de la matrice de projection et aux éléments du vecteur des écarts normalisés.

Si on supprime la  $i$ ème observation et si on utilise la technique des moindres carrés simples pour estimer les paramètres du modèle, on obtient :

$$\hat{\Theta}(i) = (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y(i) \quad (2.24a)$$

où  $Y(i)$  est le vecteur  $Y$  dont la  $i$ ème valeur est supprimée,  $X_{(i)}$  est la matrice  $X$  dont la  $i$ ème ligne est supprimée. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que :

$$X_{(i)}^T Y(i) = X^T Y - x_i^T y_i \quad (2.24b)$$

avec  $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip})$  le vecteur ligne de dimension  $1 \times p$  correspondant aux mesures des variables à la  $i$ ème observation. A partir de l'expression (2.24a), le terme  $\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i)$  peut s'écrire, voir annexe AII.2 :

$$\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) = (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} x_i^T (y_i - x_i \hat{\Theta}) \quad (2.24c)$$

Par suite, en utilisant le lemme d'inversion, on peut écrire :

$$\left(\mathbf{X}_{(i)}^T \mathbf{X}_{(i)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} + \frac{\left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1}}{1 - \mathbf{x}_i \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_i^T} \quad (2.24d)$$

et, en substituant (2.24d) dans (2.24c), on obtient :

$$\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) = \frac{\left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_i^T}{1 - \mathbf{x}_i \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_i^T} \left[ y_i - \mathbf{x}_i \hat{\Theta} \right] \quad (2.24e)$$

Dans l'expression ci-dessus, on fait donc apparaître le terme  $y_i - \mathbf{x}_i \hat{\Theta}$  qui correspond à l'écart  $e_i$  et le terme  $\mathbf{x}_i \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{x}_i^T$  qui représente l'élément diagonal  $h_{ii}$  de la matrice H. Par conséquent, la distance de Cook s'écrit :

$$DC_i = \frac{1}{p} e_{ni}^2 \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} \quad (2.25)$$

Il est clair que la distance de Cook dépend de trois quantités : le nombre de paramètres du modèle, le ième écart normalisé et le rapport  $\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}$ . Le terme  $e_{ni}$  permet de savoir si l'observation  $i$  est aberrante ou non. Quand au troisième terme  $\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}$ , il correspond au rapport entre la variance de  $\hat{y}_i$ , c'est-à-dire  $\sigma^2 h_{ii}$ , et la variance du ième écart qui est égale à  $\sigma^2(1 - h_{ii})$ . Une grande valeur de ce rapport indique que l'observation  $i$  a une grande influence sur la détermination de  $\hat{\Theta}$ .

## II.2.5. RAPPORT D'ANDREWS-PREGIBON

Si la suppression d'une observation à un effet grand (faible) sur le déterminant de  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  alors cette observation a une grande (faible) influence sur l'estimation des paramètres, puisque le volume de la région de confiance associé à ces paramètres est proportionnel au déterminant de  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ . De même, plus une mesure dévie de sa valeur estimée, plus sa suppression réduira la somme des carrés des écarts. Ces deux remarques peuvent être combinées pour calculer le changement dans le produit du déterminant de  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  par la somme des carrés des écarts résultant de la suppression d'une observation. Pour évaluer ce changement, Andrews et Pregibon (1978) proposent d'étudier le rapport suivant :

$$AP_i = \frac{\det\left(\mathbf{X}_{(i)}^{*T} \mathbf{X}_{(i)}^*\right)}{\det\left(\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^*\right)} \quad (2.26)$$



où  $X^*$  est la matrice  $X$  augmentée du vecteur  $Y$  et  $X_{(i)}^*$  indique la matrice  $X^*$  dont la  $i$ ème ligne est supprimée. Il est clair que ce rapport est sans dimension et il peut être interprété comme une mesure de l'éloignement de l'observation  $i$  par rapport au reste des données. Cette interprétation est basée sur le fait que  $1 - \sqrt{AP_i}$  correspond à une modification du volume de l'ellipsoïde généré par  $X^{*T} X^*$  quand l'observation  $i$  est omise. De ce fait, Andrews et Pregibon (1978) associent les faibles valeurs du rapport  $AP_i$  à des observations aberrantes.

Nous avons remarqué que si l'observation supprimée n'apporte aucune information, le rapport  $AP$  correspondant reste très proche de la valeur 1. Par contre, si cette observation contient d'autres informations, par exemple une valeur aberrante, alors le rapport  $AP$  diminue. Par conséquent, nous pouvons prendre comme seuil critique la valeur 1. Dans la pratique, nous tolérons une marge d'erreur et la valeur critique est prise égale à 0.95 et toute valeur du rapport  $AP_i$  inférieure à 0.95 signalera l'observation  $i$  comme valeur aberrante. Ce seuil est valable lorsque le nombre d'observations est très grand. Si ce nombre est faible, le seuil peut être fixé à partir de la relation qui lie le rapport  $AP$  aux éléments diagonaux de la matrice  $H^*$ , équation (2.27b).

Le test d'Andrews-Pregibon peut s'écrire aussi en fonction des éléments diagonaux de la matrice de projection et des écarts. On montre, voir annexe AII.3, que :

$$AP_i = \left( 1 - \frac{e_i^2}{1 - h_{ii}} \frac{1}{e^T e} \right) (1 - h_{ii}) \quad (2.27a)$$

Cette expression indique qu'il y a deux facteurs à examiner. Le premier prend une valeur faible si la quantité  $\frac{e_i^2}{1 - h_{ii}}$  est grande et ce premier facteur indique la présence de valeurs aberrantes. Le second facteur,  $1 - h_{ii}$ , concerne seulement les variables estimées et fournit une mesure de l'éloignement de l'observation dans l'espace de prédiction ; une faible valeur de ce facteur indique l'éloignement de l'observation testée. Draper et John (1981) préfèrent utiliser ce dernier facteur pour la détection de valeurs aberrantes mais nous pouvons remarquer que ceci revient à étudier les éléments diagonaux de la matrice de projection présentés au paragraphe II.2.2.

Compte tenu de la relation (2.17), reliant les éléments diagonaux de la matrice  $H$  et ceux de la matrice  $H^*$ , la relation (2.27a) se simplifie sous la forme :

$$AP_i = 1 - h_{ii}^* \quad (2.27b)$$

Cette expression montre encore une fois le rôle que joue la matrice de projection dans le domaine de la régression linéaire. Nous avons fixé la valeur critique pour le test  $AP$  à 0.95. Bien que cette valeur ait été fixée par apprentissage ; nous pouvons justifier son ordre de grandeur. En effet, nous avons vu que le seuil critique pour les éléments diagonaux de la

matrice  $H$  est  $3p/n$ , il est donc pour ceux de la matrice  $H^* 3(p+1)/n$  puisque la matrice  $H^*$  est formée à partir de la matrice  $X^*$  qui est de dimension  $n \times p+1$ . A partir de la relation (2.27b), nous déduisons que la valeur critique pour le test AP est  $1-3(p+1)/n$  et comme  $n \gg p$  et lorsque le nombre d'observation  $n$  est très grand, la valeur 0.95 est donc acceptable. Par contre, si le nombre d'observations est faible le seuil reste égal à  $1-3(p+1)/n$ .

## II.2.6. TESTS DE BELSLEY

Dans une régression linéaire, l'étape d'estimation des paramètres du modèle précède les étapes de détection et de localisation. Pour cette raison, Belsley et al. (1980) s'intéressent plus particulièrement au changement qui peut apparaître sur l'estimation de ces paramètres si une observation est supprimée. Le test le plus élémentaire consiste donc à calculer la différence entre le vecteur des paramètres estimé avec toutes les observations et celui obtenu sans la  $i$ ème observation. La variable test, établie par Belsley et al. (1980), s'écrit sous la forme :

$$CP_i = \hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

$\hat{\Theta}$  étant l'estimée du vecteur de paramètres obtenu avec toutes les observations et  $\hat{\Theta}(i)$  désigne le vecteur de paramètres estimé sans la  $i$ ème observation. La quantité  $CP_i$  dépend aussi des éléments diagonaux de la matrice de projection (relation (2.24)) et de l'écart  $e_i$ .

Si maintenant, on désire mesurer le changement qui peut survenir sur un des paramètres du vecteur  $\Theta$ , on doit donc calculer la différence entre l'estimée de ce paramètre déterminée avec et sans l'observation  $i$ . Cette différence s'obtient facilement à partir de la relation (2.24), on a :

$$\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_j(i) = \frac{\eta_{ji} e_i}{1 - h_{ji}} \quad j = 1, \dots, p \text{ et } i = 1, \dots, n \quad (2.29a)$$

où  $\eta_{ji}$  sont les éléments de la matrice  $N = (X^T X)^{-1} X^T$  et on peut montrer, (voir annexe AII.4), que la variance de chaque élément du vecteur des paramètres est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\text{var}(\hat{\theta}_j) = \hat{\sigma}^2 \sum_{k=1}^n \eta_{jk}^2 \quad (2.29b)$$

Pour mesurer l'influence de chaque observation sur l'estimation de chaque paramètre, Belsley et al. (1980) proposent un test qui consiste à diviser la différence  $\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_j(i)$  par l'écart-type du paramètre  $\hat{\theta}_j(i)$ . Ce dernier est estimé en supprimant l'observation  $i$  par conséquent nous devons remplacer  $\hat{\sigma}$  par  $\hat{\sigma}(i)$ . Finalement, en combinant les deux relations (2.29a) et (2.29b), la variable test est définie par la relation (2.30) :

$$CP_i^j = \frac{\eta_{ji}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \eta_{jk}^2}} \frac{e_i}{\hat{\sigma}(i)(1-h_{ii})} \quad i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p \quad (2.30)$$

$\hat{\sigma}(i)$  est une estimation de la variable  $\sigma$  calculée sans l'observation  $i$ . Une large valeur de la variable test  $CP_i^j$  indique que l'observation  $i$  a une grande influence sur l'estimation du paramètre  $\theta_j$  du vecteur  $\Theta$ . Belsley et al. (1980) choisissent comme seuil critique la valeur  $2/\sqrt{n}$ .

Dans le même esprit, Belsley et al. (1980) proposent un test pour mesurer l'influence de chaque observation sur les estimées de la variable de sortie. Ce test consiste à calculer la différence,  $\hat{y}_i - \hat{y}_i(i)$ , entre l'estimée de la variable de sortie, à chaque observation, déterminées avec et sans cette observation. Soit :

$$\hat{y}_i - \hat{y}_i(i) = x_i \hat{\Theta} - x_i \hat{\Theta}(i)$$

D'après la relation (2.24e), cette différence s'écrit donc :

$$\hat{y}_i - \hat{y}_i(i) = \frac{x_i (X^T X)^{-1} x_i^T}{1 - x_i (X^T X)^{-1} x_i^T} [y_i - x_i \hat{\Theta}]$$

La relation ci-dessus fait apparaître le terme  $x_i (X^T X)^{-1} x_i^T$  qui est égal à  $h_{ii}$  et le terme  $y_i - x_i \hat{\Theta}$  qui correspond à l'écart  $e_i$ . Ensuite, la différence  $\hat{y}_i - \hat{y}_i(i)$  est normalisée par l'écart-type,  $\hat{\sigma}(i)\sqrt{h_{ii}}$ , de la  $i$ ème valeur prédite de  $Y$ . On obtient alors la variable de test suivante :

$$DS_i = \left[ \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} \right]^{1/2} \frac{e_i}{\hat{\sigma}(i)\sqrt{1 - h_{ii}}} \quad (2.31)$$

Belsley et al. (1980) montrent que si la valeur de  $DS$ , pour une observation  $i$  donnée, est supérieure à  $2\sqrt{p/n}$ , cette observation a une influence sur l'estimation de la variable de sortie.

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés à l'influence des observations sur l'estimation des paramètres du modèle, l'estimation de la variable de sortie et sur l'écart fourni par l'ajustement des moindres carrés. Une autre approche consiste à s'intéresser à l'influence de chaque observation sur la matrice de covariance des paramètres du modèle. Il suffit alors de comparer la matrice de covariance des paramètres obtenue avec toutes les observations qui est égale à  $\hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1}$  et celle obtenue en supprimant une seule observation c'est-à-dire  $\hat{\sigma}^2(i) (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1}$ . Pour effectuer cette comparaison, Belsley et al. (1980) proposent le test du rapport des déterminants de ces deux matrices. Soit :

$$\text{CVR}_i = \frac{\det \left[ \hat{\sigma}^2(i) \left( X_{(i)}^T X_{(i)} \right)^{-1} \right]}{\det \left[ \hat{\sigma}^2 \left( X^T X \right)^{-1} \right]} \quad (2.32)$$

Pour déterminer la valeur critique de ce rapport nous pouvons remarquer que si l'observation n'apporte aucune autre information, autrement dit si elle n'a aucune influence sur la matrice de covariance des paramètres alors le rapport est très proche de la valeur 1. Ce seuil a été vérifié par Belsley et al. (1980) qui ont montré que  $|\text{CVR}_i - 1| \leq 3p/n$ . Le nombre d'observations  $n$  est en général très supérieur à  $p$  et par conséquent le terme  $3p/n$  est très proche de zéro.

### II.2.7. EXTENSION À PLUSIEURS OBSERVATIONS

Les différents tests énoncés précédemment qui utilisent le principe de la suppression d'une observation, c'est-à-dire la distance de Cook, le rapport d'Andrews-Pregibon et les tests de Belsley, sont généralisables à plusieurs observations. Autrement dit, nous pouvons par exemple supprimer un groupe d'observations et refaire l'analyse sans ces observations. Cette démarche est très intéressante pour mettre en évidence des nouvelles classes ou de nouveaux modes de fonctionnement du processus considéré. Cependant, on peut se heurter au problème de masquage : une observation aberrante se trouvant dans un groupe d'observations peut avoir un effet dominant par rapport aux autres observations appartenant au même groupe.

Bien entendu, pour adapter les différents tests cités précédemment au cas de plusieurs observations, il suffit de remplacer la variable  $i$  qui correspond à une seule observation par un groupe d'observations. Cette technique n'est pas très commode pour la détection en ligne. En effet, il faut attendre un certain temps pour pouvoir disposer d'un ensemble de mesures et effectuer l'analyse.

### II.2.8. AUTRES VARIABLES TEST POUR LE DIAGNOSTIC

Dans cette section, nous allons nous intéresser uniquement aux valeurs aberrantes présentes sur les variables d'entrée et par conséquent nous utilisons seulement la matrice  $X$  qui représente les  $n$  observations des  $p$  variables. Le test le plus utilisé pour ce type de problème est sans doute la distance de Mahalanobis définie par :

$$\text{DM}_i^2 = (x_i - C)^T V^{-1} (x_i - C) \quad (2.33)$$

où  $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip})$ . Suivant le choix de  $C$  et de  $V$ , on rencontre plusieurs variétés de cette distance. La plus connue consiste à remplacer  $C$  et  $V$  respectivement par la moyenne arithmétique et la matrice de variance-covariance des variables, c'est-à-dire :

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.34a)$$

$$V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - C)(x_i - C)^T \quad (2.34b)$$

Une large valeur de  $DM_i$  indique que l'observation  $i$  est peut être une valeur aberrante. Cependant, en pratique, deux problèmes surgissent. Le premier est que les valeurs aberrantes n'ont pas toujours une valeur grande de  $DM$ , le deuxième est que toutes les observations avec une grande valeur de  $DM$  ne sont pas nécessairement des valeurs aberrantes. Ces deux problèmes sont dus essentiellement au fait que la moyenne et la matrice de variance-covariance données par les expressions (2.34a) et (2.34b) ne sont pas robustes. Une façon de s'affranchir de ces problèmes est d'utiliser des estimateurs robustes pour ces deux paramètres. Campbell (1980), Hampel et al. (1986) et Rousseeuw et Zomeren (1990) ont proposé des solutions à ce problème.

Rousseeuw et Leroy (1987) proposent un algorithme qui permet d'une part d'établir une estimation robuste des paramètres du modèle et d'autre part de fournir un test basé sur la distance de Mahalanobis pour détecter les valeurs aberrantes. Le principe de cette estimation robuste consiste à prendre un échantillon  $J$  de  $p+1$  observations, puis d'estimer le vecteur  $\Theta$  des paramètres du modèle (2.2) en utilisant la technique des moindres carrés simples. Soit  $\hat{\Theta}_J$  le vecteur de paramètres obtenu avec l'échantillon  $J$ , on calcule alors la valeur :

$$\text{médiane}_{i=1, \dots, n} (y_i - x_i \hat{\Theta}_J)^2 \quad (2.35)$$

Cette opération est effectuée pour tous les échantillons de dimension  $p+1 \times 1$ , c'est-à-dire  $C_n^{p+1}$  combinaisons, et finalement on ne retient que l'échantillon qui fournit une estimation du vecteur  $\Theta$  pour lequel la valeur (2.35) est minimale. On peut remarquer que le nombre de combinaisons augmente avec  $n$  et  $p$  et, pour des fortes valeurs, l'exploitation de toutes les combinaisons est irréalisable. Pour remédier à ce problème Rousseeuw et Leroy (1987) proposent de ne prendre qu'une partie de ces combinaisons, par exemple 1000 combinaisons pour  $p = 2$  et  $n > 50$ . Mais, cette solution ne permet pas de trouver un minimum global.

Pour établir un estimateur robuste pour la moyenne et la matrice de variance-covariance, Rousseeuw et Zomeren (1990) proposent la même technique que celle utilisée pour l'estimation des paramètres. Pour chaque échantillon  $J_k$  de  $p+1$  observations, on calcule :

$$C_{J_k} = \frac{1}{p+1} \sum_{i \in J} x_i \quad k = 1, \dots, C_n^{p+1}$$

$$V_{J_k} = \frac{1}{p} \sum_{i \in J} (x_i - C_{J_k})^T (x_i - C_{J_k}) \quad k = 1, \dots, C_n^{p+1}$$

Ces deux quantités définissent une classe dont le centre est  $C_{J_k}$ . La distance de Mahalanobis utilisant ces deux quantités caractérise la distance de chaque point au centre de la classe. Cette distance permet de définir une ellipsoïde centrée en  $C_{J_k}$  dans l'espace à  $p$  dimensions. Pour chaque échantillon, on calcule alors la quantité :

$$m_{J_k}^2 = \underset{i=1, \dots, n}{\text{médiane}} \left\{ \left( x_i - C_{J_k} \right)^T V_{J_k}^{-1} \left( x_i - C_{J_k} \right) \right\} \quad k = 1, \dots, C_n^{p+1} \quad (2.36)$$

Rousseeuw et Leroy (1987) montrent que le volume de l'ellipsoïde formé par  $C_{J_k}$  et  $V_{J_k}$  et qui contient au moins la moitié des observations est proportionnel à  $\{(m_{J_k})^p (\det(V_{J_k}))^{1/2}\}$ . Tenant compte de cette remarque, Rousseeuw et Zomeren (1990) ne gardent que l'échantillon  $J$  pour lequel le volume est minimal. Par la suite, ils définissent une distance robuste sous la forme :

$$DR_i^2 = (x_i - C_J)^T (v V_J)^{-1} (x_i - C_J) \quad (2.37)$$

La constante  $v = c_{np} m_J^2 / \chi_{p,0.50}^2$  correspond au facteur de correction où  $\chi_{p,0.50}^2$  représente la valeur de la distribution de Chi-2 pour  $p$  degré de liberté et un niveau de confiance de 50% et  $c_{np}$  est une constante qui dépend de  $n$  et de  $p$ . En se basant sur les essais en simulation Rousseeuw et Zomeren (1990) donnent  $c_{np} = \{1 + 15/(n-p)\}^2$ .

Cette technique permet d'une part d'estimer les paramètres du modèle et d'autre part de détecter les valeurs aberrantes, on peut comparer la valeur de  $DR$  à des valeurs d'une distribution de Chi-2. Cette méthode est aussi utilisée dans la classification automatique pour déterminer les différentes classes ; Jolion et al. (1991) ont utilisé cette technique pour le traitement d'images. En plus, la méthode robuste de Rousseeuw et Leroy est valable même lorsqu'on est en présence de plusieurs valeurs aberrantes (maximum 50% de données). Malheureusement, elle présente quelques inconvénients ; le nombre de combinaisons à traiter est souvent très élevé et parfois la matrice de variance-covariance d'un échantillon n'est pas inversible. Pour surmonter le premier problème, Rousseeuw et Leroy (1987) proposent de limiter le nombre de combinaisons. Quant au deuxième problème, la solution consiste à ne pas tenir compte des échantillons dont la matrice de variance-covariance est singulière.

Une autre solution a été proposée par Hadi (1992) qui a établi une procédure en quatre étapes basée sur la distance de Mahalanobis. Dans la première étape, on calcule le vecteur  $C_M$  de dimension  $p$  contenant les médianes de toutes les observations et la matrice de variance-covariance  $V_M$  :

$$V_M = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - C_M)^T (x_i - C_M)$$

Avec ces deux paramètres, on calcule la distance de Mahalanobis en remplaçant dans l'expression (2.33) C par  $C_M$  et V par  $V_M$ , puis on classe les observations suivant cette distance par ordre croissant. Ensuite, on attribue un poids à chaque observation par :

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq \text{partie entière de } (n + p + 1) / 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis, on calcule de nouveau la moyenne et la matrice de variance-covariance par :

$$C_\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i x_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i} \quad \text{et} \quad V_\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - C_\beta)^T (x_i - C_\beta)}{\sum_{i=1}^n \beta_i - 1}$$

On calcule maintenant la distance (2.33) en utilisant  $C_\beta$  et  $V_\beta$ . On réarrange de nouveau les observations suivant la nouvelle distance par ordre croissant et on partage l'ensemble des observations en deux groupes. Le premier contient p+1 premières observations qu'on appelle l'échantillon de base et le deuxième les n-p-1 dernières observations.

La deuxième étape consiste à calculer la moyenne  $C_b$  et la matrice de variance-covariance  $V_b$  de l'échantillon de base qui contient les p+1 observations. Ensuite, on calcule la distance (2.33) en remplaçant C par  $C_b$  et V par  $V_b$ . Si la matrice de variance-covariance n'est pas inversible, on peut utiliser une diagonalisation de cette matrice.

Dans l'étape suivante, on réarrange les observations en tenant compte de la distance calculée dans l'étape précédente et on partage de nouveau l'ensemble des observations en augmentant l'échantillon de base d'une observation.

L'étape quatre consiste à répéter les étapes deux et trois jusqu'à un critère d'arrêt. Pour ce critère, Hadi (1992) propose d'arrêter la procédure quand le nombre d'observations contenues dans l'échantillon de base atteint un nombre défini à l'avance, par exemple la partie entière de  $(n+p+1)/2$ .

A la fin de la procédure, on calcule la distance robuste définie par :

$$DH_i^2 = (x_i - C_b)^T (v_b V_b)^{-1} (x_i - C_b) \quad (2.38)$$

où  $C_b$  et  $V_b$  sont respectivement la moyenne et la matrice de variance-covariance de l'échantillon de base obtenu à la dernière étape et qui contient k observations et  $v_b = c_{npk} m_J^2 / \chi_{p,0.50}^2$ , avec  $c_{npk} = \{1+k/(n-p)\}^2$ .

Enfin, la détection de valeurs aberrantes se fait en analysant la distance  $DH_i$  ; une large valeur de cette distance, comparée à un seuil de distribution de Chi-2, indique la présence de

valeurs aberrantes. Par rapport à la technique proposée par Rousseeuw et Leroy (1987), cette procédure diminue largement le temps de calcul. On n'a besoin que de  $k-p$  itérations.

### II.3. APPLICATIONS

Dans cette partie, nous présentons deux exemples. Le premier concerne les données réelles du processus pilote qui a été conçu au laboratoire et dont le schéma de l'installation est présenté à l'annexe A. Le deuxième exemple traite des données réelles, il a été étudié par plusieurs auteurs (Andrews 1974, Cook 1979, Draper et Smith 1980, Carrol et Ruppert 1985, Rousseeuw et Leroy 1987, Hadi 1992, ...).

#### III.3.1. EXEMPLE 1 - PROCESSUS PILOTE

La configuration utilisée pour cet exemple est présentée dans l'annexe A.3 par la figure A.3. Il s'agit de deux variables explicatives et d'une variable expliquée. Cette dernière, notée  $Y$ , représente le signal délivré par le capteur de niveau NP3 de la cuve 3. La première variable explicative correspond au débitmètre DS3 de la sortie de la cuve 3 et la deuxième variable explicative est celle du débitmètre D13 qui se situe entre les cuves 1 et 3. Nous avons provoqué des défauts sur la variable de sortie en perturbant le capteur NP3. Les figures II.3, II.4(a) et II.4(b) présentent respectivement le signal délivré par le capteur NP3 et les deux signaux des deux débitmètres. L'objectif de cette application est de déterminer le modèle qui existe entre les variables et ensuite d'appliquer les différents tests pour pouvoir analyser leur comportement en présence de défauts. Les valeurs négatives de l'échelle des ordonnées de la figure II.4(b) proviennent du fait que le débitmètre D13 est à double sens. L'eau peut circuler dans les deux sens et suivant la configuration choisie, on a des valeurs négatives ou positives.

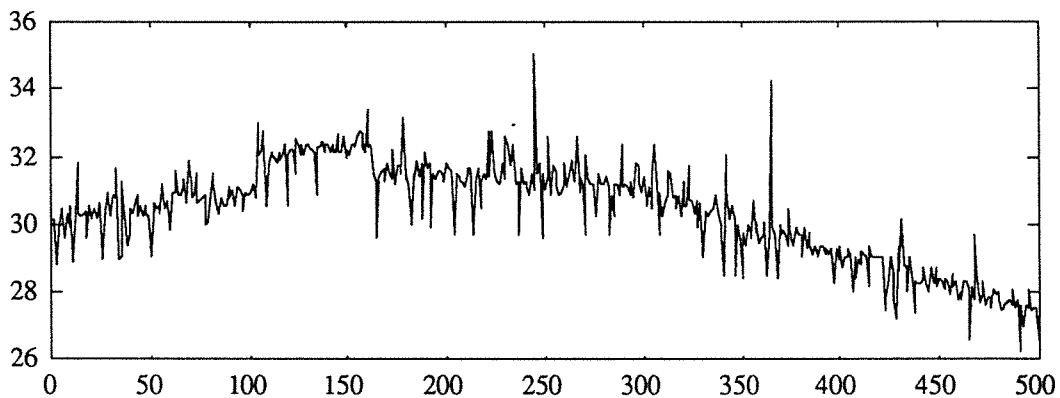


Figure II. 3 - Signal de sortie du capteur NP3



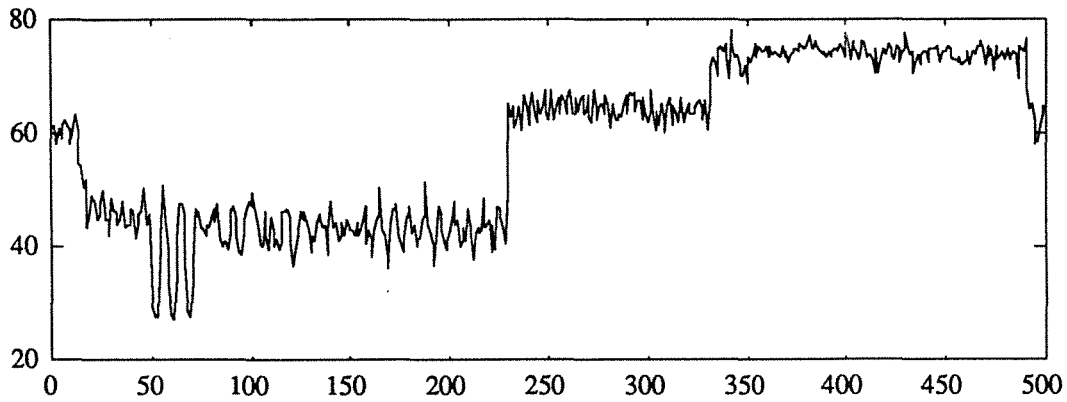


Figure II.4(a) - Signal du débitmètre DS3

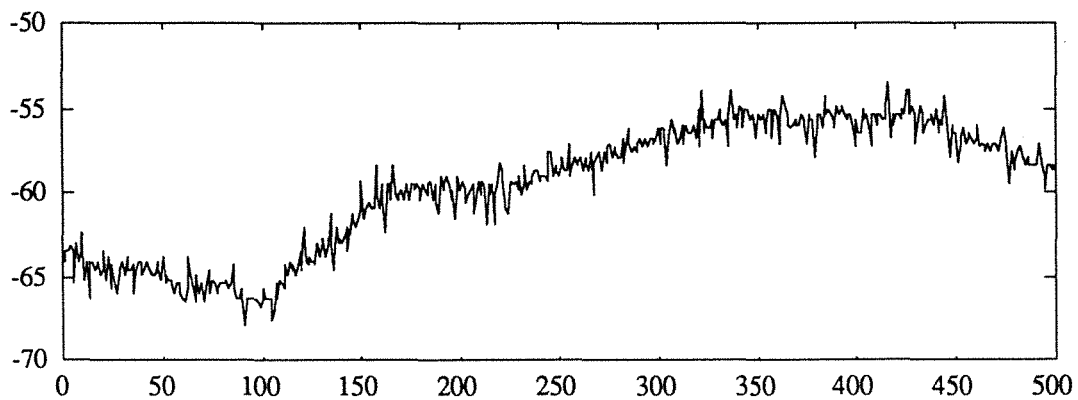


Figure II.4(b) - Signal du débitmètre D13

Pour la détermination de la structure du modèle, on considère dans un premier temps, que le modèle reliant les trois variables ne présente pas de valeur constante indépendante des variables explicatives. Dans ces conditions, le modèle s'écrit :

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} \quad (2.39)$$

où  $x_{1i}$  et  $x_{2i}$  sont définis par les deux relations suivantes :

$$x_{1i} = \sum_{j=1}^i x_1(j)$$

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^i x_2(j)$$

avec  $x_1(j)$  la mesure de débit DS3 à l'instant  $j$  et  $x_2(j)$  la mesure de débit D13 à l'instant  $j$ . L'estimation des paramètres est effectuée avec la technique des moindres carrés simples. Ces

paramètres nous permettent par la suite de valider le modèle (paragraphe II.2.3) en déterminant l'écart entre la sortie estimée et la sortie mesurée. Cette validation s'effectue en traçant l'écart en fonction de l'estimée de la variable de sortie. La figure II.5 donne la variation de l'écart en fonction de l'estimée de la variable de sortie. Cette variation présente les mêmes caractéristiques que la figure II.2(c) ; la pente de la courbe n'est pas nulle et ceci nous amène à dire qu'il faut ajouter un terme constant dans l'équation du modèle (2.39).

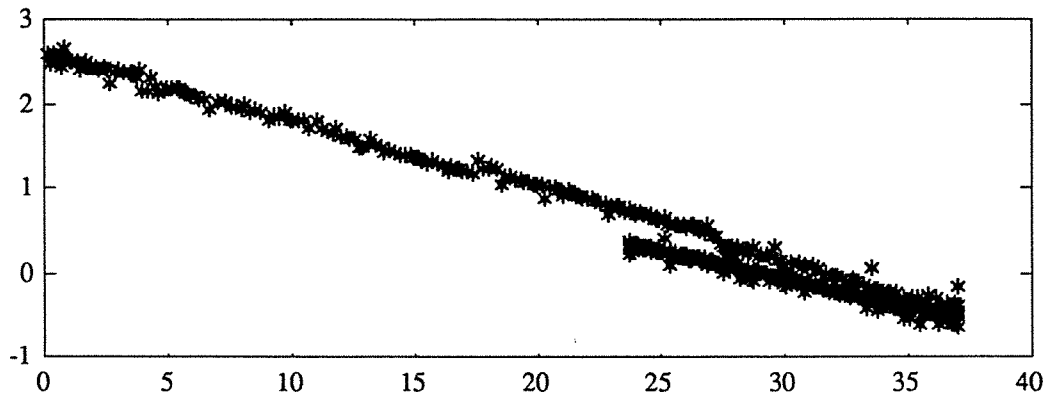


Figure II.5 - Évolution de l'écart en fonction de la variable estimée de la sortie

Une autre manière de valider le modèle est de calculer le coefficient de corrélation entre l'écart et l'estimée de la variable de sortie. On a montré que lorsque le modèle est exact, le coefficient de corrélation entre ces deux variables est nul. Dans le cas où on utilise le modèle (2.39), le coefficient de corrélation est égal à  $-0.99$ , ce qui prouve l'inadéquation de la structure du modèle.

L'écart utilisé pour tracer la courbe de la figure II.5 est calculé à partir des paramètres estimés avec la méthode des moindres carrés simples. Nous pouvons réitérer la même démarche, en utilisant la méthode robuste de Rousseeuw et Leroy (1987). Nous avons obtenu pratiquement les mêmes caractéristiques que celles de la figure II.5.

Par ailleurs, nous pouvons continuer notre analyse en observant le comportement des différentes variables de diagnostic en présence du défaut capteur et en utilisant la structure (2.39). Les résultats obtenus ne révèlent la présence d'aucun défaut. Pour alléger la présentation, nous présentons uniquement les résultats concernant le rapport d'Andrews-Pregibon (AP) et le rapport des variances (CVR). Les figures II.6(a) et (b) donnent les variations de ces deux rapports.

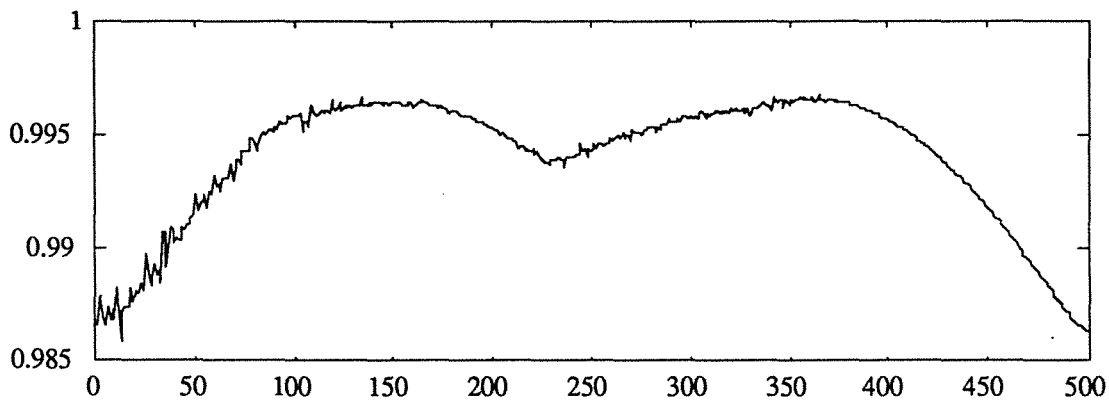


Figure II.6(a) - Variation du rapport AP

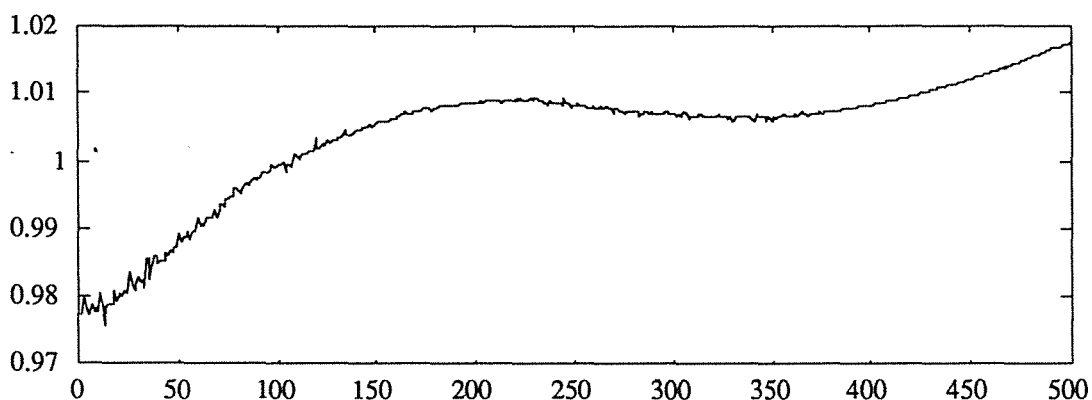


Figure II.6(b) - Variation du rapport CVR

Comme le montre les figures II.6(a) et (b), les deux rapports AP et CVR ne présentent pas de valeurs inférieures au seuil. Nous allons donc reprendre l'analyse avec un modèle présentant une constante. Pour estimer cette constante, on ajoute un vecteur de dimension convenable représentant une variable explicative et dont les valeurs sont égales à 1.

Si on trace maintenant l'évolution de l'écart des moindres carrés en fonction de l'estimée de la variable de sortie, on remarquera que la courbe de la figure II.7 présente une pente nulle. En plus, le coefficient de corrélation entre ces deux variables vaut zéro.

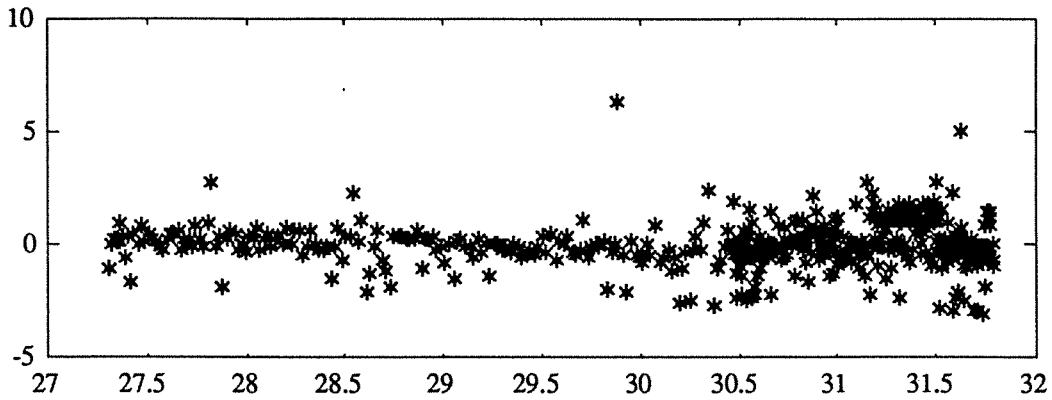


Figure II.7 - Évolution de l'écart en fonction de l'estimée de la variable de sortie

Nous allons maintenant examiner si, avec la nouvelle structure du modèle, nous pouvons détecter la présence de défauts et les localiser. La courbe de la figure II.8 montre l'évolution de l'écart des moindres carrés pour toutes les observations. Cette courbe présente deux valeurs anormales aux instants 245 et 365. Les valeurs respectives de l'écart pour ces deux instants sont 4.99 et 6.32. Pour l'écart studentisé interne  $e_{si}$  équation (2.21b) et externe  $e_{si}^*$  équation (2.21c), on obtient pratiquement les mêmes résultats.

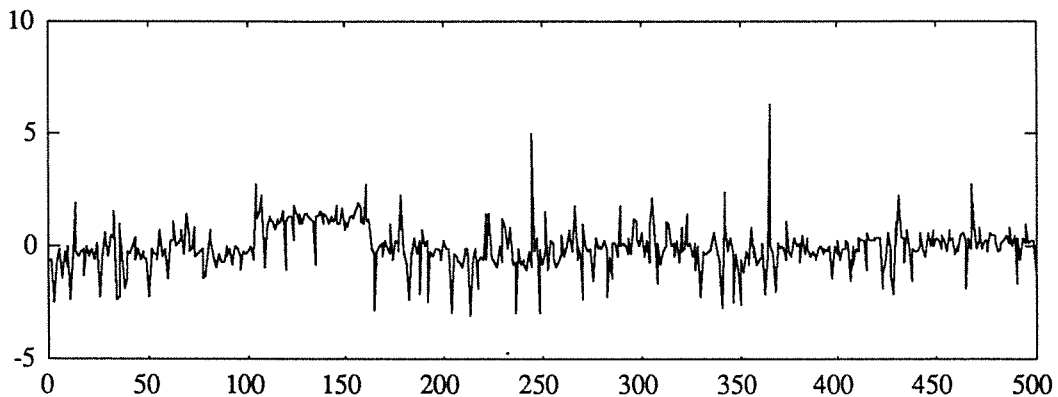


Figure II.8 - Évolution de l'écart obtenu avec la méthode des moindres carrés simples

Nous nous intéressons maintenant aux principaux résultats obtenus pour les autres tests. On se limite au test des éléments diagonaux de la matrice  $H$  et  $H^*$ , à la distance DC de Cook, au test DS de Belsley, au rapport de variance CVR et au test AP d'Andrews-Pregibon. Les figures suivantes présentent l'évolution de ces différentes variables test.

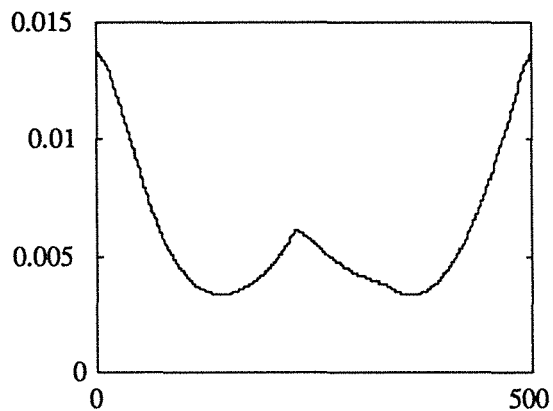


Figure II.9(a) - Les éléments diagonaux de H

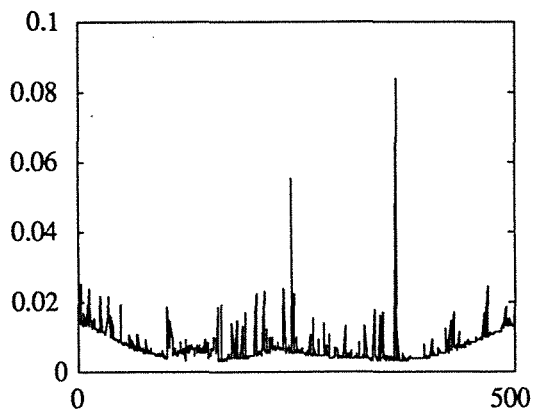


Figure II.9(b) - Les éléments diagonaux de  $H^*$

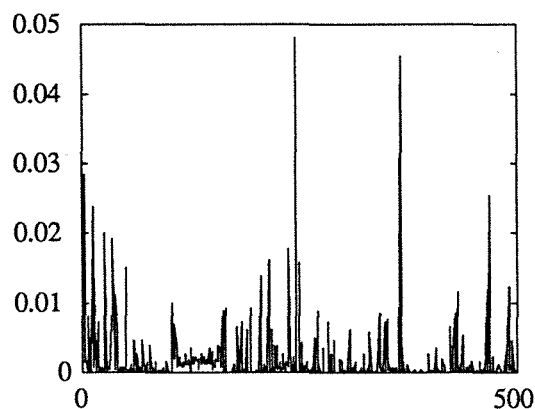


Figure II.9(c) - Distance de Cook

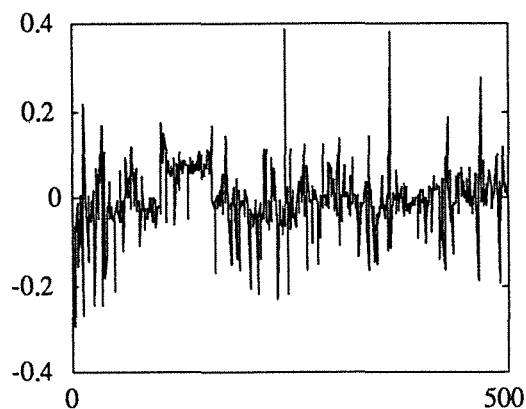


Figure II.9(d) - Test DS de Belsley

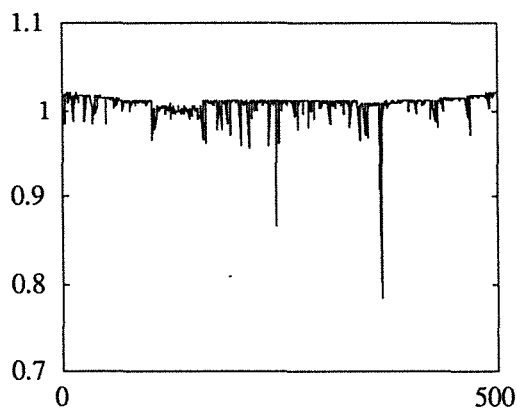


Figure II.9(e) - Rapport de variance CVR

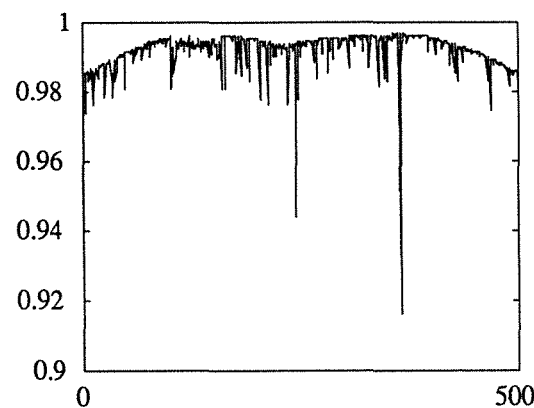


Figure II.9(f) - Rapport AP

Figure II.9 - Évolution des différents diagnostics

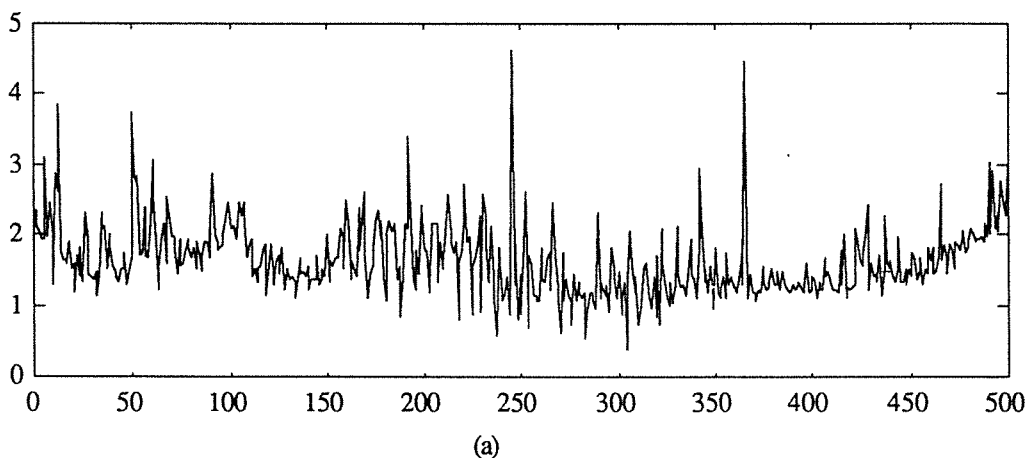
La première remarque que l'on peut formuler concerne les éléments diagonaux de la matrice  $H$  ; ces derniers ne présentent aucune valeur anormale. Cette conclusion se justifie par le fait que la matrice  $H$  n'est constituée que des variables explicatives qui, dans ce cas particulier, ne contiennent aucune valeur aberrante. Aussi, les éléments diagonaux de la matrice  $H^*$  permettent de détecter les valeurs aberrantes. Ce résultat est justifié puisque la matrice  $H^*$  contient la

variable de sortie. A partir de ces deux tests, nous pouvons savoir si le défaut est sur la sortie ou sur les variables d'entrée.

En ce qui concerne la distance de Cook, on note deux valeurs importantes ; cependant, ces valeurs ne dépassent pas le seuil critique fixé à 1. Pour le test DS, il présente des valeurs supérieures au seuil qui est fixé à  $\pm 0.2$ , aux instants 245 et 365. Malheureusement, ce test fournit d'autres valeurs en dehors de l'intervalle de confiance accordé à cette variable.

Les deux figures II.9(e) et (f) représentent respectivement le test de Belsley concernant le rapport des variances et le rapport d'Andrews-Pregibon. En absence de défaut, le rapport des variances doit être voisin de la valeur 1 ou encore, comme le montre Belsley et al. (1980), ce rapport doit vérifier la relation  $|CVR_i - 1| > 3p/n$  où  $p$  et  $n$  désignent respectivement le nombre de paramètres et le nombre d'observations. De même, le rapport AP, en l'absence de défaut, doit avoir des valeurs égales à 1, ici on tolère une marge d'erreur et le seuil pour les deux tests est fixé à 0.95. Les deux tests présentent donc des valeurs très inférieures au seuil aux instants 245 et 365.

Malgré le nombre important des observations (500), nous avons voulu analyser le comportement de la distance de Mahalanobis (DM), de la distance DR et de la distance DH. Ces différentes distances ont été testées de deux manières ; la première en n'utilisant que la matrice  $X$  composée des deux variables d'entrée et la deuxième en utilisant la matrice  $X^*$  qui est composée des variables d'entrée et de la variable de sortie. Dans le premier cas, les trois distances ne fournissent aucune information indiquant la présence de valeurs aberrantes. Par contre, pour le deuxième cas, les trois distances présentent des valeurs supérieures au seuil fixé à 3 (les trois distances doivent suivre une distribution de khi-2 à  $p$  degré de liberté). Malheureusement, nous avons plus de deux observations dont les valeurs dépassent le seuil critique. Les figures ci-dessous montrent les résultats obtenus dans ce deuxième cas. On rappelle que pour la distance DR, nous n'avons utilisé que les 500 premières combinaisons extraites d'un nombre de combinaisons possible supérieur à 20 millions. La combinaison  $J$  avec laquelle nous avons calculé cette distance regroupe les observations [1, 2, 4 et 5] qui donne un volume minimal.



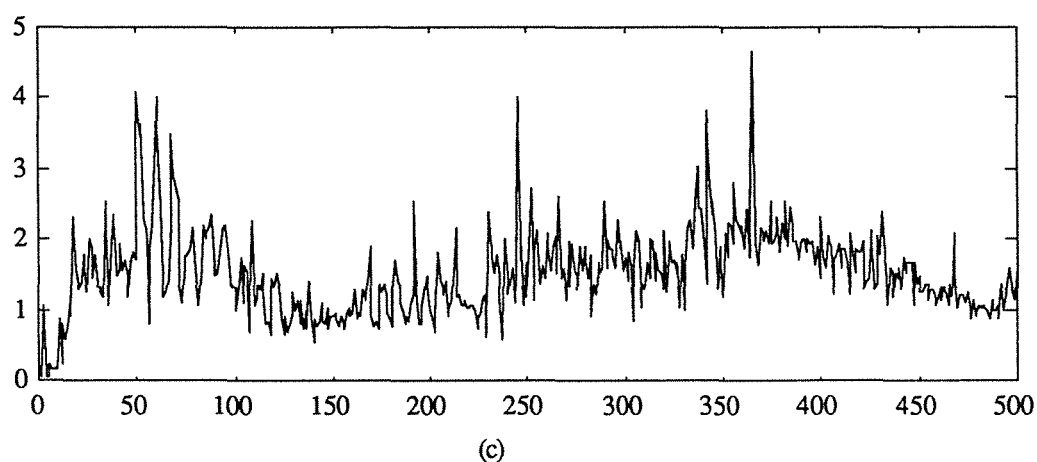
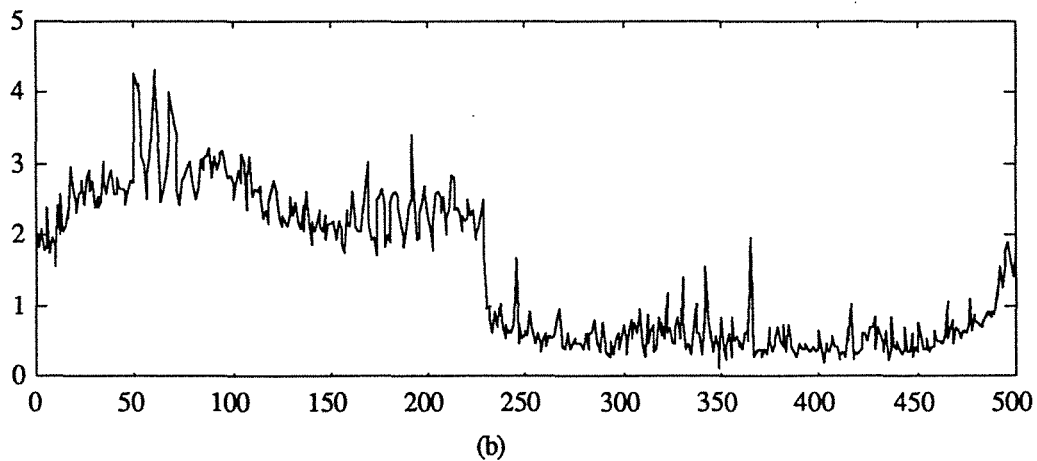


Figure II.10 - Évolution des distances : (a) DM, (b) DH et (c) DR

### III.3.2. EXEMPLE 2

Pour compléter cette étude, nous avons également testé les données d'un exemple proposé par plusieurs auteurs (Andrews 1974, Cook 1979, Draper et Smith 1980, Carrol et Ruppert 1985, Rousseeuw et Leroy 1987, Hadi 1992, ...). Cet exemple concerne des données réelles issues d'une installation chimique d'oxydation de l'ammoniac à l'acide nitrique. La variable de sortie  $y$  correspond au pourcentage de l'ammoniac perdu par échappement du produit non absorbé, les trois variables explicatives  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  représentent respectivement le taux d'écoulement d'air, la température de refroidissement de l'eau et la concentration de l'acide nitrique. Les 21 données sont présentées dans l'annexe AII.5. La plupart des auteurs qui ont étudié cet exemple ont conclu que les observations 1, 3, 4 et 21 sont aberrantes alors qu'une minorité déclare que l'observation 2 est aussi aberrante.

Les paramètres du modèle ont été calculés en utilisant la méthode des moindres carrés simples. La structure de ce modèle est donnée par l'équation (2.40) :

$$y_i = 0.715x_{1i} + 1.295x_{2i} - 0.152x_{3i} - 39.919 \quad i = 1, \dots, 21 \quad (2.40)$$

Comme le nombre d'observations est faible, nous présentons tous les résultats sous forme d'un tableau (II.1). Les valeurs en gras correspondent aux valeurs dépassant le seuil pour chaque test, les seuils sont présentés entre parenthèses dans la première ligne de chaque colonne. Les valeurs soulignées correspondent aux valeurs très proches du seuil critique.

La première remarque qu'on peut déduire du tableau II.1 concerne les distances DH et DR qui permettent d'affirmer que les observations 1, 2, 3 et 21 sont aberrantes, les seuils pour ces deux distances sont pris pour un niveau de confiance de 5%. Alors que la distance de Mahalanobis (DM) et la distance de Cook ne déclarent aucune valeur anormale. D'autres tests permettent aussi de considérer les observations 4 et 17 comme aberrantes. On rappelle que les distances DM, DH et DR sont calculées uniquement à partir de la matrice X formée par les mesures des trois variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et sans tenir compte de la constante. Alors que tous les autres tests sont calculés en utilisant la structure du modèle de l'équation (2.40). En utilisant cette structure et en analysant le tableau II.1, nous pouvons dire que les observations 1, 2, 3, 4, 17 et 21 sont aberrantes.

Cherchons maintenant quelles sont les variables responsables de l'aberration de ces observations. Comme les distances DH et DR sont calculées uniquement à partir des trois premières variables explicatives, nous pouvons conclure que ces trois variables sont responsables de l'aberration des observations 1, 2, 3 et 21. Pour déterminer la variable en défaut pour l'observation aberrante 4, nous avons calculé de nouveau les distances DH et DR en utilisant une matrice  $X^*$  formée par les trois premières variables explicatives  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et la variable expliquée  $y$ . Les résultats obtenus montrent que l'observation 4 est aussi aberrante, les valeurs de ces distances pour cette observation dépassent le seuil fixé. Par conséquent, l'aberration de l'observation 4 est due à la variable de sortie  $y$ .

En ce qui concerne maintenant l'observation 17, on constate que seules cinq variables tests indiquent des valeurs supérieures au seuil. Parmi ces cinq variables, on trouve la variable test  $CP_1^4$ . Or, on sait que cette variable concerne le paramètre constant du modèle, nous pouvons donc déduire que la variable explicative  $x_4$  est responsable de l'aberration de l'observation 17. Pour confirmer ce résultat, nous avons effectué l'analyse en supposant que la structure du modèle ne présente pas de paramètre constant. Dans ces conditions, nous avons constaté qu'aucune variable test ne présente des valeurs anormales à l'observation 17.

On constate aussi que les distances DH et DR fournissent de résultats semblables et que la distance DH est plus avantageuse que la distance DR puisqu'elle ne demande pas beaucoup de temps de calcul. Pour ce deuxième exemple, les temps de calcul respectifs pour DH et DR sont de 5 secondes et de 463 secondes. Ici la distance DR a été calculée pour les 5985 combinaisons de dimension  $4 \times 1$  et la combinaison retenue qui donne le volume minimal regroupe les observations [7, 10, 14, 20].



i	$h_{ii}$ (>0.38)	$h_{ii}^*$ (>0.40)	$e_{ni}$ (>2.50)	$e_{si}$ (>2.50)	$e_{si}^*$ (>2.50)	$DC_i$ (>1.00)	$AP_i$ (<0.70)	$CVR_i$ <6>15	$DS_i$ (>0.87)	$CP_i^1$ (>0.43)	$CP_i^2$ (>0.43)	$CP_i^3$ (>0.43)	$CP_i^4$ (>0.43)	$DM_i$ (>3.06)	$DH_i$ (>3.06)	$DR_i$ (>3.06)
1	0.302	0.361	0.997	1.193	1.209	0.154	0.639	1.286	0.794	0.401	0.103	-0.209	-0.085	2.254	5.176	5.234
2	0.318	0.338	-0.592	-0.716	-0.705	0.059	0.662	1.653	-0.481	-0.250	-0.060	0.165	0.013	2.325	5.212	5.273
3	0.175	0.291	1.404	1.546	1.617	0.126	0.709	0.843	0.744	0.391	-0.004	-0.045	-0.188	1.594	3.939	4.015
4	0.128	0.310	1.756	1.882	2.052	0.131	0.690	0.575	0.788	-0.415	0.618	0.027	-0.122	1.272	0.596	0.839
5	0.052	0.068	-0.527	-0.542	-0.531	0.004	0.932	1.254	-0.124	0.012	-0.029	-0.006	0.012	0.303	0.604	0.804
6	0.077	0.128	-0.927	-0.965	-0.963	0.019	0.872	1.103	-0.279	0.105	-0.168	-0.012	0.038	0.773	0.549	0.779
7	0.219	0.251	-0.736	-0.834	-0.826	0.048	0.748	1.382	-0.437	0.268	-0.263	-0.282	0.295	1.853	0.621	0.640
8	0.219	0.230	-0.428	-0.485	-0.474	0.016	0.770	1.544	-0.251	0.154	-0.151	-0.162	0.169	1.853	0.621	0.640
9	0.140	0.195	-0.969	-1.045	-1.048	0.044	0.804	1.136	-0.423	0.307	-0.328	-0.077	0.077	1.361	0.902	0.826
10	0.200	0.209	0.391	0.437	0.426	0.012	0.791	1.523	0.213	0.124	-0.132	-0.128	0.153	1.746	0.769	0.6402
11	0.155	0.194	0.813	0.884	0.878	0.036	0.806	1.249	0.376	0.108	-0.265	0.157	-0.067	1.466	0.579	0.578
12	0.217	0.261	0.857	0.968	0.966	0.065	0.739	1.297	0.509	0.233	-0.426	0.127	-0.011	1.842	0.709	0.792
13	0.157	0.168	-0.441	-0.479	-0.468	0.011	0.831	1.433	-0.203	-0.116	0.142	0.088	-0.119	1.483	0.602	0.548
14	0.205	0.205	-0.015	-0.017	-0.017	0.000	0.794	1.605	-0.008	0.001	0.003	-0.007	0.005	1.778	0.845	0.640
15	0.190	0.222	0.728	0.809	0.801	0.038	0.778	1.345	0.388	-0.195	-0.028	0.247	-0.116	1.690	2.498	2.234
16	0.131	0.135	0.279	0.299	0.292	0.003	0.864	1.436	0.113	-0.053	-0.010	0.042	-0.000	1.292	2.384	2.113
17	0.412	0.425	-0.468	-0.612	-0.599	0.065	0.575	1.984	-0.502	0.019	-0.063	0.424	-0.462	2.700	2.608	2.075
18	0.160	0.162	-0.141	-0.153	-0.148	0.001	0.838	1.509	-0.065	0.023	-0.013	0.033	-0.046	1.503	2.449	2.091
19	0.174	0.176	-0.185	-0.203	-0.197	0.002	0.824	1.529	-0.091	0.052	-0.042	0.034	-0.049	1.593	2.617	2.288
20	0.080	0.091	0.435	0.454	0.443	0.004	0.908	1.319	0.131	-0.011	0.005	-0.066	0.085	0.807	0.924	0.640
21	0.284	0.577	-2.232	-2.638	-3.705	0.692	0.422	0.216	-2.100	-1.624	1.642	-0.363	0.402	2.177	3.241	3.681

Tableau II.1 - Valeurs des tests pour l'exemple 3

En conclusion de ces exemples d'application, on peut remarquer que le test d'écart et toutes ses variantes permettent dans certaines conditions, c'est-à-dire lorsque l'amplitude de la valeur aberrante est assez importante, de détecter et de localiser le défaut. Le test des éléments diagonaux de la matrice  $H$  est insensible aux valeurs aberrantes sur la variable de sortie. Par contre, nous avons effectué des exemples en simulation où nous avons introduit des valeurs aberrantes sur les variables d'entrée et nous avons constaté que les éléments diagonaux de la matrice  $H$  mettent parfaitement en évidence ces valeurs aberrantes. Les éléments diagonaux de la matrice  $H^*$  permettent de détecter les erreurs sur les variables d'entrée et sur les variables de sortie. La distance de Cook ne permet pas d'affirmer d'une façon catégorique l'existence ou non des valeurs aberrantes. Le test du rapport des variances CVR et le test du rapport des déterminants AP fournissent de bons résultats et permettent de détecter et de localiser le défaut. En ce qui concerne les distances DH et DR, nous avons vu avec l'exemple 2 que ces distances donnent de bons résultats ; malheureusement elles ne peuvent pas être utilisées avec une matrice  $X$  contenant une variable dont tous les éléments sont égaux à un. En effet, lorsqu'on tient compte de cette variable, la matrice de variance-covariance de l'échantillon de base, dans le cas de la distance DH, ou de la combinaison retenue, dans le cas de la distance DR, n'est pas inversible.

## CONCLUSION

L'étude présentée dans ce deuxième chapitre concerne la détection de défaut dans un modèle linéaire où une variable de sortie est supposée être une combinaison linéaire des autres variables dites d'entrée. Nous avons présenté une synthèse des différents outils de diagnostic de valeurs aberrantes dans ce domaine. Ces différents diagnostics peuvent être répertoriés en quatre catégories. La première repose sur l'utilisation de la matrice de projection ou plus exactement les éléments diagonaux de cette matrice qui sont sensibles aux valeurs aberrantes sur les variables d'entrée. L'utilisation de la matrice de projection augmentée permet de détecter les valeurs aberrantes sur les variables d'entrée et de sortie.

La deuxième catégorie est basée sur l'utilisation de l'écart entre la variable mesurée et son estimée. Ce test d'écart et ses dérivées permettent dans certaines conditions de détecter les valeurs aberrantes. Ce test dépend essentiellement de la technique utilisée pour estimer les paramètres du modèle. En plus, pour les seuils de détection, on doit supposer que le résidu ou le bruit de mesure suit une loi de distribution normale.

Pour la troisième catégorie, il s'agit de supprimer la mesure ou l'observation douteuse et de refaire l'analyse avec et sans cette observation. Dans cette catégorie, les tests CVR et AP donnent les meilleurs résultats. En plus, ces deux tests ont des seuils critiques relativement simples à calculer.

Enfin, pour la dernière catégorie, les tests présentés sont essentiellement basés sur la distance de Mahalanobis. L'utilisation de la distance de Mahalanobis est très simple à mettre en oeuvre mais elle n'est pas robuste quand il y a plusieurs valeurs aberrantes. En effet, cette

distance utilise la moyenne qui est très influencée par la présence de plusieurs valeurs aberrantes. Les deux autres distances DR et DH sont robustes mais elles sont très difficiles à mettre en pratique et en plus la distance DR demande un temps de calcul assez conséquent.

## Chapitre III

# DÉTECTION D'ERREURS DANS UNE SÉRIE DE MESURES



## INTRODUCTION

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés à la détection de valeurs aberrantes sur des mesures délivrées par plusieurs capteurs. Dans ce chapitre, l'étude concerne uniquement un seul capteur dont les mesures sont supposées suivre une loi de distribution connue. On est alors en possession d'une série de mesures où il faut s'attendre à l'apparition de mesures écartées des valeurs théoriques.

Pour décider s'il existe ou non des valeurs aberrantes, un test de décision doit être établi. Ce test comporte une procédure de calcul et une règle de décision à partir des résultats expérimentaux. La réalisation du test suppose trois opérations principales (Ragot et al. 1990) :

- définition de l'hypothèse  $H_0$  à contrôler et l'hypothèse alternative  $H_1$ , négation de  $H_0$
- choix d'une statistique dont les distributions de probabilité sous  $H_0$  et sous  $H_1$  sont connues
- prise de décision en fonction des risques d'erreur admissibles.

En ce qui concerne cette dernière opération, on se fixe a priori le seuil de confiance  $\alpha$  qui permettra de prendre la décision. Les valeurs couramment utilisées sont 0.1, 0.05 ou 0.01. Ce seuil de confiance est souvent exprimé par un niveau de probabilité qui est simplement  $1 - \alpha$ .

Lorsqu'on prend une décision, on peut faire une erreur de première espèce qui consiste à rejeter  $H_0$  quand  $H_0$  est vraie. Aussi, on peut accepter l'hypothèse  $H_0$  alors qu'elle est fautive, faisant alors une erreur de seconde espèce. Si on note  $\beta$  le risque de seconde espèce, ce paramètre est lié à la puissance du test par la relation (3.1)

$$\beta = 1 - \text{Prob} \{ \text{rejeter } H_0 \text{ quand } H_0 \text{ est fautive} \} \tag{3.1}$$

On appelle puissance d'un test la probabilité de rejeter  $H_0$  quand  $H_0$  est fautive. Il apparaît qu'en voulant réduire le risque de première espèce, on détériore la puissance, donc on augmente le risque de seconde espèce. Le tableau (III.1) résume les différents cas de figure.

	$H_1$ vraie	$H_0$ vraie
$H_0$ rejetée	<b>Décision correcte</b> <b>Prob = <math>1 - \beta</math></b>	Erreur de première espèce Prob = $\alpha$
$H_0$ acceptée	Erreur de deuxième espèce Prob = $\beta$	<b>Décision correcte</b> <b>Prob = <math>1 - \alpha</math></b>

Tableau III.1 - Types d'erreurs et risques associés aux tests d'hypothèses

Dans la majeure partie des cas, la série de mesures délivrée par un appareil suit une loi de distribution normale (loi de Gauss) ; nous verrons dans la partie III.3 que ce n'est pas toujours le cas. Dans la partie III.1, les tests porteront sur la vérification de l'appartenance de toutes les mesures à la région de confiance associée à la distribution normale. Celle-ci est caractérisée par deux grandeurs importantes : la moyenne et la variance ; ces deux grandeurs peuvent être connues ou inconnues. Dans ce dernier cas, nous utiliserons des techniques d'estimation adéquates pour estimer la (ou les) grandeur (s) inconnue(s).

### III.1. SIGNAL SUIVANT UNE LOI NORMALE

Pour la détection de valeurs aberrantes dans une série de mesures, Pierce (1852) et Chauvenet (1863) furent les premiers à établir des critères basés sur des arguments probabilistes. Traditionnellement, dans la littérature, on peut dénombrer deux types de tests statistiques pour analyser la série de mesures. Le premier consiste à vérifier le caractère aléatoire et normal de la série de mesures, le deuxième est utilisé spécialement pour la détection des mesures "écartées" des valeurs moyennes. Cependant, ces deux types peuvent être néanmoins utilisés pour la détection de valeurs aberrantes, si on admet que lorsqu'une valeur aberrante apparaît dans une série de mesures, cette dernière perd son caractère de normalité. Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement au deuxième type et nous allons exposer les différents tests qui existent dans la littérature. En plus de ces tests, nous avons adapté la distance de Mahalanobis, établie dans le deuxième chapitre, à la détection de valeurs aberrantes dans une série de mesures et nous l'avons comparée aux autres tests sur des exemples de données réelles et simulées.

#### III.1.1. DISTRIBUTION DE L'ÉTENDUE

Nous considérons  $n$  observations  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'une variable  $x$ , ces observations étant des mesures effectuées par un capteur autour d'un point de fonctionnement. Nous disposons donc d'un échantillon de  $n$  valeurs d'écart-type  $\sigma$ . Notre but est de détecter des éventuelles valeurs aberrantes dans cet échantillon de mesures.

Pour cela nous définissons l'étendue de l'échantillon par la différence entre la plus grande valeur  $x_{\max}$  et la plus petite  $x_{\min}$  :

$$W = x_{\max} - x_{\min} \quad (3.2)$$

La fonction discriminante utilisée, qui permet de détecter les valeurs aberrantes, est l'étendue réduite définie par :

$$w_r = \frac{W}{\sigma} \quad (3.3)$$

Comme nous le constatons dans l'équation (3.3), l'application de ce test nécessite la connaissance de la variance. Si ce n'est pas le cas, il faut remplacer  $\sigma$  par son estimée.

Les tables statistiques (C.E.A., 1978, page 51) donnent, en fonction de la dimension de l'échantillon  $n$ , les caractéristiques de la distribution de l'étendue réduite, avec des niveaux de probabilité  $1 - \alpha$ , et les valeurs  $w_{r,1-\alpha}$  telles que  $\text{Prob}(w_r < w_{r,1-\alpha}) = 1 - \alpha$ . Par conséquent, si la valeur expérimentale  $w_r$  est supérieure à  $w_{r,1-\alpha}$  il faut admettre l'une des hypothèses suivantes, avec un risque d'erreur  $\alpha$  :

- l'une au moins des valeurs extrêmes  $x_{\max}$  et  $x_{\min}$  est une valeur aberrante,
- la loi de distribution n'est pas normale,
- la loi est normale, mais sa variance n'est pas  $\sigma^2$ .

Nous constatons donc que ce test ne fournit pas une réponse catégorique quant à la présence de valeurs aberrantes puisqu'il y a trois possibilités d'erreur. Cependant, ce test a l'avantage d'être très facile à calculer et son efficacité n'est pas diminuée par la présence de plusieurs valeurs aberrantes. En plus, nous ne pouvons pas dire s'il s'agit de la valeur  $x_{\max}$  ou  $x_{\min}$  qui est une valeur aberrante. Pour surmonter ce dernier problème, nous pouvons utiliser le test des écarts avec la moyenne établi par Grubbs (1969). Dans ce cas, le test de l'étendue devient un test double ; d'une part nous testons la valeur maximale par rapport à la moyenne de la série de mesures et d'autre part la valeur minimale. Ces deux variables de test sont définies par les deux expressions suivantes :

$$w_{r1} = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{\sigma} \quad (3.4a)$$

$$w_{r2} = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{\sigma} \quad (3.4b)$$

où  $\sigma$  et  $\bar{x}$  sont respectivement l'écart-type et la moyenne de l'échantillon qui sont supposés être connus. Si l'écart-type est inconnu, nous pouvons le remplacer par son estimée définie par l'expression ci-dessous :

$$\hat{\sigma} = \left[ \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

En utilisant la table (C.E.A., 1978, page 75) dans le cas où l'écart-type est connu et la moyenne est connue, nous pouvons donc tester simultanément si la valeur minimale ou la valeur maximale est une valeur aberrante avec un risque d'erreur donné.



Une autre possibilité, pour détecter si la valeur la plus forte ou la plus faible est une valeur aberrante, consiste à regrouper les deux tests  $w_{r1}$  et  $w_{r2}$  en un seul test défini par l'expression suivante :

$$w_{r3} = \frac{\text{Max } |x_i - \bar{x}|}{\sigma} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Cette variable test est calculée pour toutes les mesures et elle ne nécessite aucune autre opération (rangement par ordre croissant ou décroissant).

### III.1.2. TEST DE GRUBBS

Nous considérons toujours les  $n$  mesures classées cette fois-ci par ordre croissant. Grubbs (1950, 1969) a élaboré un test basé sur le rapport des variances de l'échantillon total et de l'échantillon réduit. Nous appelons un échantillon réduit un échantillon dont on retire une valeur ou une mesure qu'on suspecte d'être douteuse. Comme les mesures sont classées par ordre croissant, les deux mesures éventuellement aberrantes sont la première ou la dernière. Par conséquent, si la valeur douteuse est la première, c'est-à-dire  $x_1$ , la variance est estimée à partir de la somme de  $n-1$  carrés par :

$$G_{n-1} = \sum_{i=2}^n (x_i - \bar{x}_{2,n})^2 \quad (3.7)$$

où  $\bar{x}_{2,n}$  est la moyenne arithmétique de l'échantillon réduit. D'une manière générale, on définit la moyenne arithmétique d'un échantillon réduit par :

$$\bar{x}_{j,k} = \frac{1}{k-j+1} \sum_{i=j}^k x_i \quad (3.8)$$

Si maintenant, la valeur douteuse est la dernière de la série, autrement dit la mesure  $x_n$ , alors la variance est estimée à partir de l'échantillon réduit c'est-à-dire sans la mesure  $x_n$ , soit :

$$G_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{1,n-1})^2 \quad (3.9)$$

L'hypothèse  $H_0$  à contrôler est donc l'appartenance de  $x_1$  ou de  $x_n$  à la même population normale que les autres résultats, pour cela Grubbs (1950) a proposé le rapport  $G$ , définissant la fonction discriminante, par :

$$G = \frac{G_{n-1}}{G_n} \quad (3.10)$$

où  $G_n$  représente la variance de l'ensemble des mesures, calculée à partir des  $n$  mesures par l'expression suivante :

$$G_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.11)$$

La table (C.E.A., 1978, page 79) donne, en fonction de  $n$  et de  $\alpha$ , les limites  $G_\alpha$  telles que  $\text{Prob}(G < G_\alpha) = \alpha$ . Lorsque la valeur expérimentale  $G$  est inférieure à la limite  $G_\alpha$ , il faut admettre l'une des hypothèses suivantes :

- la valeur douteuse est une valeur aberrante,
- la distribution n'est pas normale.

Le test cité ci-dessus est conçu pour le cas particulier d'une unique valeur aberrante. Mais, les deux premières ou les deux dernières mesures peuvent être aberrantes. L'hypothèse  $H_0$  à contrôler dans ce cas est l'appartenance de  $x_n$  et  $x_{n-1}$  ou de  $x_1$  et  $x_2$  à la même population normale que les autres résultats. Nous définissons, dans ce cas, la variance de l'échantillon dont les deux premières ou les deux dernières mesures sont omises.

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont douteuses, la variance des  $n-2$  mesures est donnée par :

$$G_{n-2} = \sum_{i=3}^n (x_i - \bar{x}_{3,n})^2$$

Si  $x_n$  et  $x_{n-1}$  sont douteuses, la variance est :

$$G_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - \bar{x}_{1,n-2})^2$$

La fonction discriminante est définie par :

$$G' = \frac{G_{n-2}}{G_n} \quad (3.12)$$

Comme précédemment, en utilisant la table (C.E.A., 1978, page 79) le paramètre  $G'$  sert à la recherche de valeurs aberrantes. En combinant les deux rapports  $G$  et  $G'$ , nous pouvons donc utiliser le test de Grubbs pour la détection de plusieurs valeurs aberrantes.

### III.1.3. TEST DE DIXON

Les  $n$  mesures  $x_1, \dots, x_n$  sont classées par valeurs croissantes, nous désirons savoir si la valeur aberrante est la valeur la plus faible  $x_1$  ou la plus forte  $x_n$ . Dixon (1950) a proposé une

fonction discriminante permettant de résoudre ce problème, malheureusement cette fonction discriminante prend plusieurs formes suivant le nombre de mesures  $n$  et suivant qu'on teste les plus faibles valeurs ou les plus fortes.

Si on désire tester la valeur la plus forte  $x_n$ , ou la plus faible  $x_1$ , Dixon (1953) propose les deux critères suivant :

$$R_{10} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} \quad \text{ou} \quad R_{10} = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} \quad (3.13a)$$

Ces deux variables tests sont à utiliser séparément. Cependant, on voit que dans le premier test, concernant la valeur la plus forte, on utilise la mesure  $x_1$  qui peut être aberrante. Par conséquent, le résultat obtenu n'a aucun sens. Cette remarque est aussi valable dans le deuxième test où la valeur  $x_n$  peut être à son tour aberrante. Pour s'affranchir de ces problèmes, la solution consiste à réduire l'échantillon de mesures, c'est-à-dire dans le premier cas on exclut la mesure la plus faible et dans le deuxième cas la valeur la plus forte. Les deux tests ci-dessus s'écrivent alors :

$$R_{11} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2} \quad \text{ou} \quad R_{11} = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1} \quad (3.13b)$$

Malheureusement, le problème n'est pas totalement résolu. En effet, deux valeurs aberrantes peuvent se succéder. Autrement dit, on peut avoir  $x_n$  et  $x_{n-1}$  aberrantes ou  $x_1$  et  $x_2$  et si on ne tient pas compte de la présence de ces éventuelles valeurs aberrantes on se heurte à l'effet de masque. Par conséquent, si on veut tester la valeur la plus forte  $x_n$ , il faut tenir compte dans un premier temps de  $x_{n-1}$  et dans un deuxième temps de  $x_{n-1}$  et de  $x_1$ . De même, pour tester  $x_1$  il faut tenir compte de  $x_2$  pour éviter l'effet de masque puis si on veut aussi s'affranchir du fait que  $x_{n-1}$  peut être aberrante, il faut tenir compte de  $x_2$  et de  $x_{n-1}$ . Dans ces conditions les tests de Dixon deviennent :

$$R_{21} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2} \quad \text{ou} \quad R_{21} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1} \quad (3.13c)$$

$$R_{22} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3} \quad \text{ou} \quad R_{22} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1} \quad (3.13d)$$

En plus, Dixon (1953), Grubbs (1969) et Barnett et Lewis (1984) donnent plusieurs variantes du test de Dixon. Celles-ci sont obtenues en combinant les différentes configurations que l'on désire prendre en compte. Puisque les mesures sont ordonnées par ordre croissant, les mesures aberrantes sont les plus faibles ou les plus grandes et comme, a priori, nous n'avons aucune autre information sur ces mesures, nous devons envisager tous les cas possibles. Par ailleurs, Grubbs (1969) recommande d'utiliser les deux tests (3.13a) et (3.13b) pour un

échantillon de taille inférieure à 10 et les deux autres tests, équations (3.13c) et (3.13d), pour un échantillon de taille supérieure à 10.

La valeur de chaque test est comparée à un seuil critique qui dépend du nombre de mesures et du seuil de confiance. La table (C.E.A., 1978, page 80) donne les valeurs critiques ou les limites pour  $R_{1-\alpha}$  telles que  $\text{Prob}(R < R_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$  pour des niveaux de probabilités donnés.

### III.1.4. AUTRES TESTS

Il existe d'autres tests pour vérifier d'une part si la série de mesures suit une loi de distribution normale et d'autre part pour détecter des éventuelles valeurs aberrantes. Parmi ceux-ci, nous citons ceux qui nous semblent s'adapter au diagnostic des processus continus.

Le test de Ferguson (1961) est défini par :

$$F_1 = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{3/2}} \quad \text{ou} \quad F_2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2} \quad (3.12)$$

On sait que les observations aberrantes sont dues à un changement de moyenne ou un changement de variance, ou les deux. Ferguson (1961) propose d'utiliser le test  $F_1$  pour détecter un changement de moyenne. Alors que le test  $F_2$  est recommandé pour un changement de moyenne et de variance. De plus, les deux tests  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas affectés par le problème de masquage que peut engendrer la présence de plusieurs valeurs aberrantes. Ces deux tests peuvent aussi être utilisés pour vérifier la normalité de la série de mesures. Les tables des valeurs critiques pour ces deux tests sont données dans Barnett et Lewis (1984) page 392.

Le test proposé par Cochran (1941) et étudié par Epstein (1960), Lewis et Fieller (1979) et Kimber (1982) qui consiste à calculer le rapport entre la valeur extrême et la moyenne de l'échantillon. Il est surtout utilisé lorsque les mesures suivent une autre loi de distribution que la loi normale par exemple la distribution exponentielle (voir, paragraphe III.4).

Le test de Shapiro et Wilk (1965), étudié par Chen (1971), est utilisé quand la moyenne et la variance sont inconnues et dans ce cas la moyenne est remplacée par la moyenne arithmétique de l'ensemble des mesures. L'expression de ce test est donnée par :

$$Q = \frac{\left[ \sum_{i=1}^k a_{n,n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.13)$$

où  $k$  représente la partie entière du terme  $n/2$  et les coefficients  $a_i$  représentent des constantes données par la table C.E.A. (1978) page 70-73 en fonction de  $n$ . Ce test est spécialement conçu

pour vérifier si la série de mesures est issue d'une loi normale. Avec un risque d'erreur  $\alpha$  choisi on admettra que la série de mesures ne suit pas une loi normale quand la valeur expérimentale de  $Q$  est extérieure à l'intervalle  $Q_{\alpha/2}$  et  $Q_{1-\alpha}$ .

Enfin, nous proposons un test très simple à calculer et qui a l'avantage d'être appliqué en ligne. Ce test est donné par l'expression ci-dessous :

$$D_i = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

il consiste à mesurer la distance entre la moyenne de l'échantillon et l'observation suspecte et il est équivalent à la distance de Mahalanobis. En absence de valeurs aberrantes cette distance suit une distribution de Chi-2 à un degré de liberté, la table (C.E.A., 1978, page 26) donne les valeurs de  $\chi^2$  avec un risque d'erreur  $\alpha$ .

L'utilisation de cette distance en ligne se fait de deux manières. Si on connaît la moyenne du signal, alors chaque nouvelle mesure est comparée à cette moyenne. Par contre, si ce paramètre est inconnu on peut prendre au départ un ensemble de 20 mesures, par exemple, dont on calcule la moyenne. Ensuite, les nouvelles mesures sont comparées à cette moyenne en utilisant la distance  $D$ .

### III.2. DÉTECTION EN LIGNE

Nous rappelons que la plupart des tests, cités précédemment, sont valables pour des échantillons de faible longueur c'est-à-dire dont le nombre d'observations est faible. Par conséquent, et pour utiliser ces tests dans leur conditions optimales, nous allons les tester sur une fenêtre glissante de petite taille, comme indiqué sur la figure III.1 ou la figure III.2.

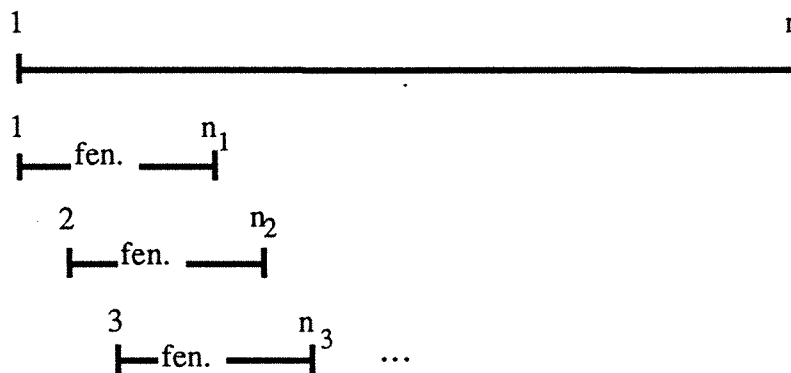


Figure III.1 - Technique d'une fenêtre glissante pas à pas

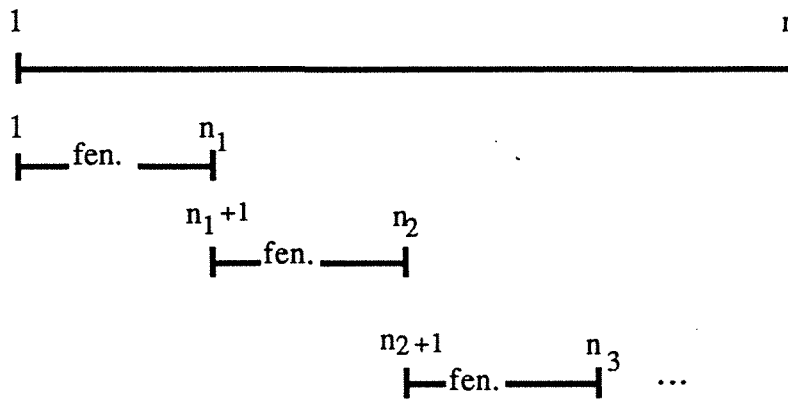


Figure III.2 - Technique d'une fenêtre glissante multiple

La première technique, figure II.1, nous permet de localiser les éventuelles valeurs aberrantes, puisque à chaque étape de calcul on ne prend qu'une seule nouvelle mesure. Cependant, il existe une autre technique qui consiste à utiliser une fenêtre et à la faire glisser du nombre d'observations qui la compose et non d'une seule observation à la fois (figure III.2). L'avantage de cette dernière technique, dite technique d'une fenêtre glissante multiple, est qu'elle est rapide en temps de calcul mais elle possède un inconvénient majeur. En effet, lorsqu'il y a plusieurs valeurs aberrantes et l'une d'entre elles domine les autres soit par l'effet d'une plus grande amplitude ou soit par un autre effet extérieur, on ne détecte que la présence d'une seule anomalie qui correspond à la valeur aberrante dont l'amplitude est la plus importante.

La première approche est très utile pour la détection en ligne des erreurs. En effet, lorsqu'on effectue une mesure, la solution la plus commode, pour la tester, est de déplacer la fenêtre d'un pas. Si cette mesure ne vérifie pas les hypothèses faites sur la série de mesures alors nous sommes en présence soit d'un défaut soit d'un nouveau mode de fonctionnement. Pour s'assurer de l'une ou de l'autre des conclusions, il suffit de tester les mesures suivantes.

### III.3. EXEMPLES D'APPLICATION

Pour comparer les différents tests cités précédemment, nous allons étudier leurs performances sur des exemples d'application. Le premier concerne des données réelles issues du capteur de niveau ultra son du processus pilote présenté dans l'annexe A. Le deuxième est un exemple de simulation où les mesures sont issues d'une distribution normale. En plus, on mettra en évidence les avantages et les inconvénients des deux techniques de fenêtre glissante.

#### III.3.1. EXEMPLE 1 - PROCESSUS PILOTE

Les mesures que nous allons tester maintenant ont été acquises dans une situation "normale" de fonctionnement où le niveau d'eau dans la cuve 1 a été réglé de telle sorte qu'on reste toujours au voisinage du point de fonctionnement désiré. Cette configuration est obtenue avec un volume initial dans la cuve 1 égal à deux fois celui de la cuve 3 ; ensuite toutes les vannes

misent en jeu sont ouvertes au maximum. Ce point de fonctionnement est caractérisé par le volume dans la cuve 1 égal à 63 litres et le volume dans la cuve 3 égal à 39 litres. Le schéma de cette configuration est présenté dans l'annexe A.3.

Nous avons provoqué un défaut de type valeur aberrante sur le capteur de niveau ultra sons de la cuve 1. Ce défaut a été effectué en intercalant un objet entre le capteur et le niveau d'eau. Les mesures obtenues sont présentées sur la figure III.3.

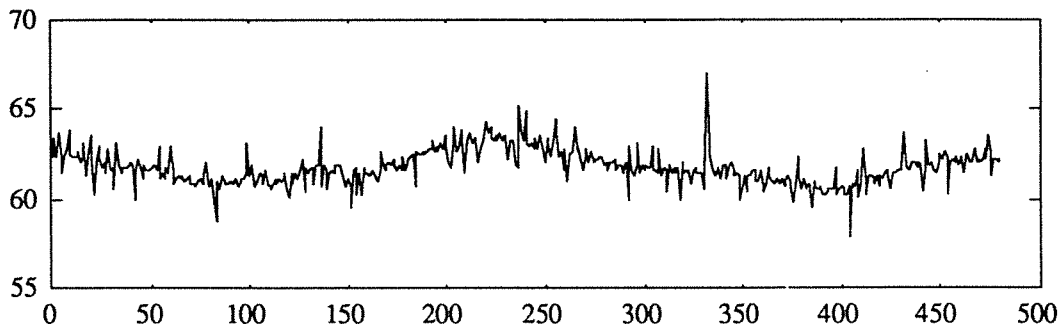


Figure III.3(a) - Signal délivré par le capteur ultra son

Avant de procéder à la détection de valeurs aberrantes, nous allons effectuer un filtrage du signal délivré par le capteur ultra son. Ce filtrage permet de centrer le signal autour d'une valeur moyenne égale à zéro. Le signal obtenu est présenté sur la figure III.3(b).

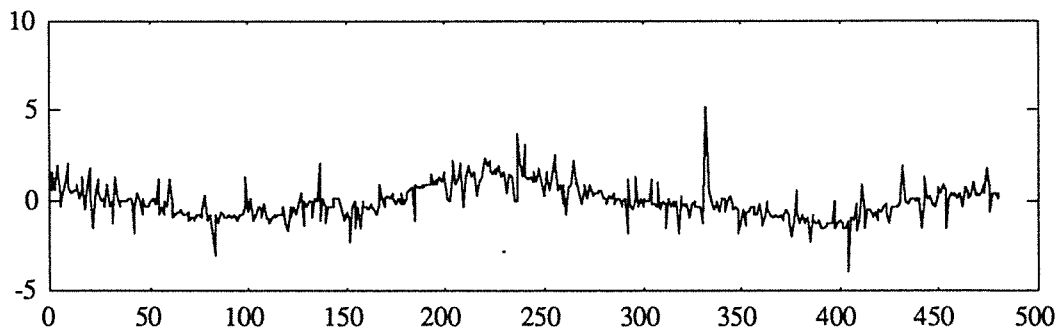


Figure III.3(b) - Signal centré du capteur ultra son

La figure III.4 montre l'histogramme de la série de mesures dont les paramètres moyenne et écart-type sont respectivement 0 et 1.008. Cette figure fait apparaître un point très écarté des autres mesures. Nous allons voir, dans la suite, le comportement des différents tests en présence de cette valeur aberrante.

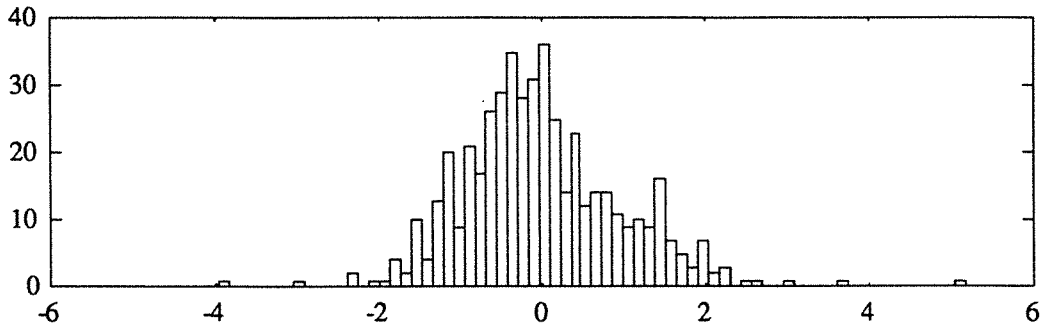


Figure III.4 - Histogramme du signal à tester

Dans un premier temps nous allons étudier le comportement des tests en utilisant la première approche avec une fenêtre glissante pas à pas. On utilise une fenêtre de 20 mesures et ensuite on la fait glisser d'une seule mesure. Dans un deuxième temps, on utilise la deuxième technique de la figure III.2 en prenant la même taille pour la fenêtre glissante que dans le premier cas. Comme nous l'avons vu précédemment, certains tests sont conçus pour tester soit la valeur la plus forte soit la valeur la plus faible par exemple le test de l'étendue, le test de Grubbs et celui de Dixon. Dans l'exemple que nous étudions, les tests relatifs à l'analyse de la valeur la plus faible n'ont donné aucune valeur en dehors du seuil toléré. Pour alléger la présentation, nous ne présentons que les tests relatifs à la détection de la valeur aberrante la plus forte. Avec la technique de la fenêtre glissante pas à pas de la figure III.1, nous obtenons les résultats présentés sur les figures III.5(a) à (j).

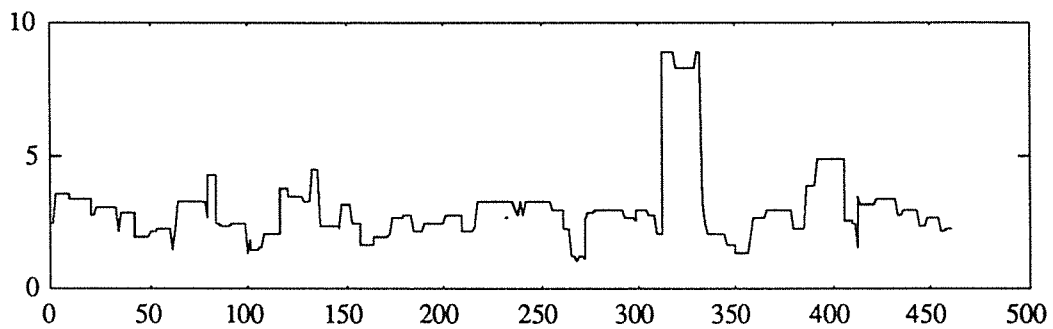


Figure III.5(a) - Variation du test  $w_r$

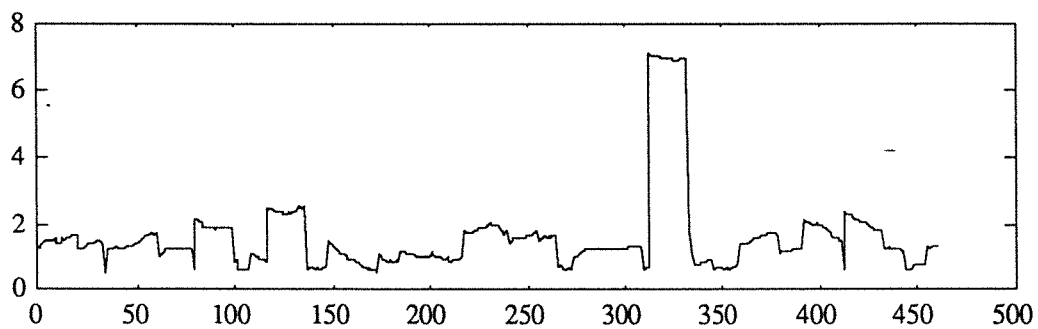


Figure III.5(b) - Variation du test  $w_{r1}$



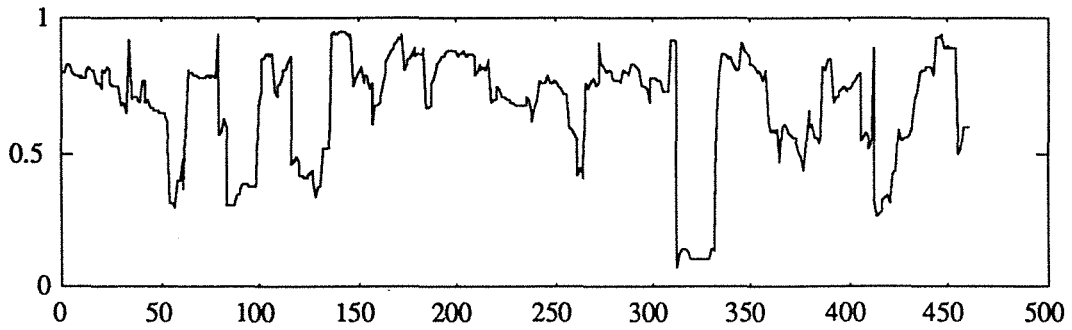


Figure III.5(c) - Variation du test G

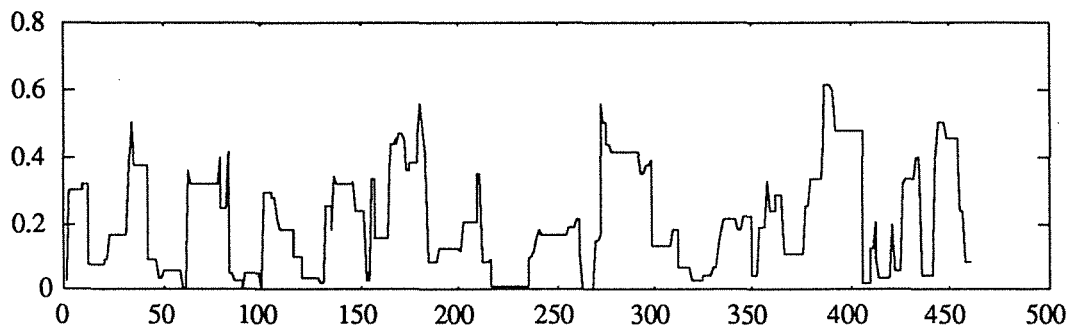


Figure III.5(d) - Variation du test R10

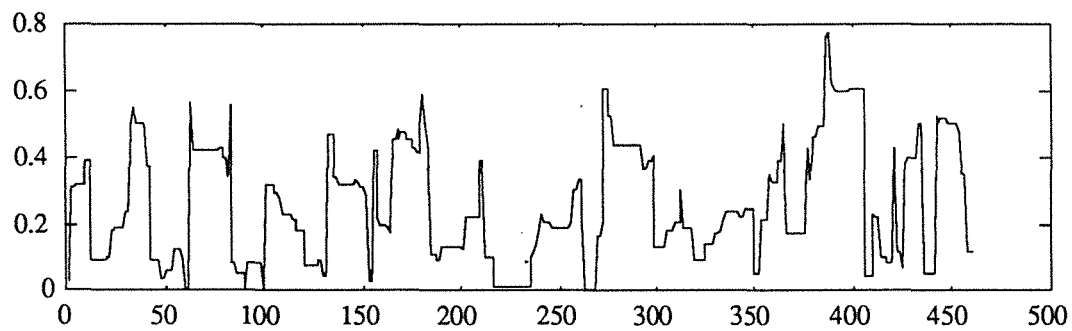


Figure III.5(e) - Variation du test R11

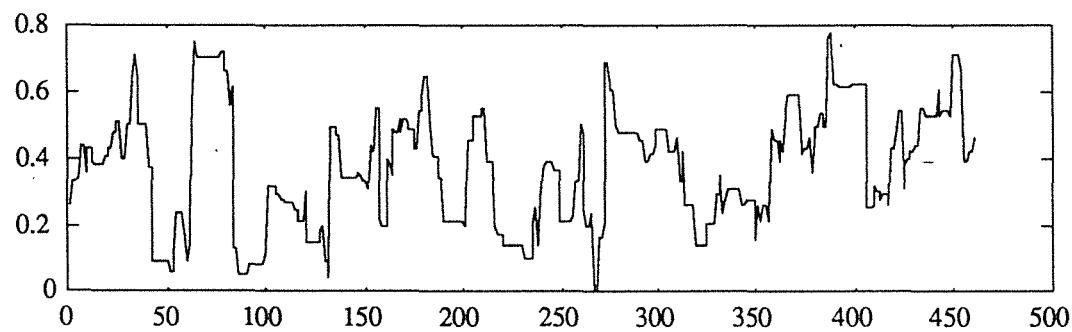


Figure III.5(f) - Variation du test R21

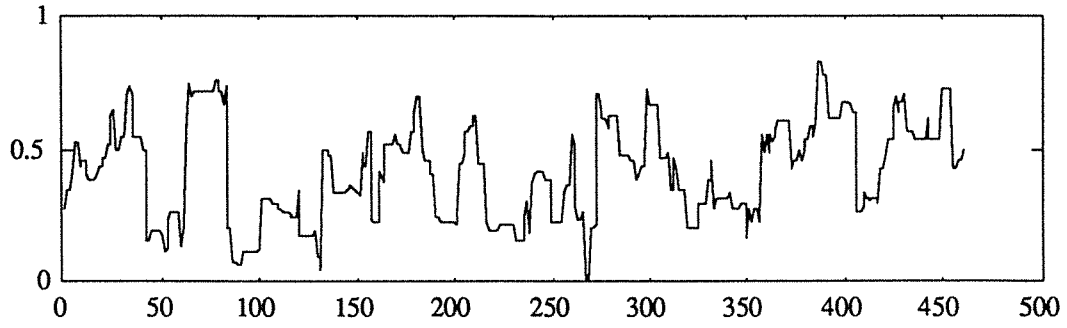


Figure III.5(g) - Variation du test  $R_{22}$

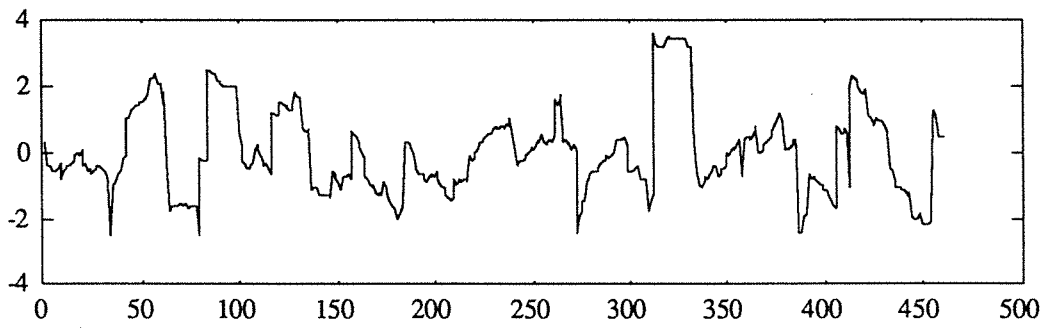


Figure III.5(h) - Variation du test  $F_1$

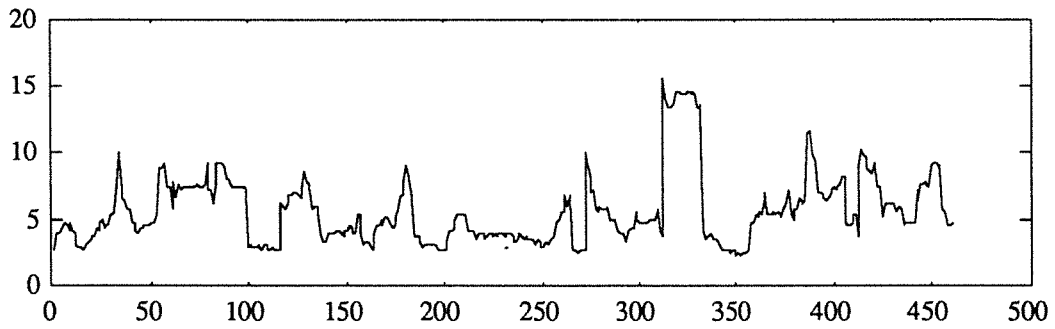


Figure III.5(i) - Variation du test  $F_2$

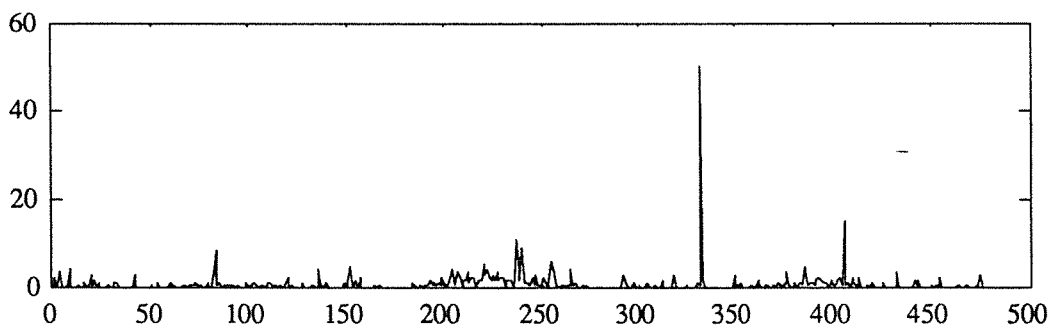


Figure III.5(j) - Variation de la distance  $D$

D'après ces différentes figures, nous pouvons dire que les tests  $w_T$  et  $w_{T1}$  détectent parfaitement la valeur aberrante puisque les valeurs des tests entre les mesures 310 et 330 sont supérieures aux valeurs limites données par les tables. Ici les valeurs limites sont déterminées par un seuil de confiance de 5% et elles sont égales à 5.01 pour  $w_T$  et 2.79 pour  $w_{T1}$ . Les autres tests présentent eux aussi des valeurs largement en dehors des limites tolérées si on prend un niveau de confiance de 5%. Malheureusement, avec ce seuil de confiance, d'autres valeurs aberrantes ont été également détectées.

En ce qui concerne la distance  $D$ , la figure III.5(j) montre qu'on détecte parfaitement la valeur aberrante puisque la valeur de la distance à l'instant 332 est largement supérieure au seuil de tolérance. Ce seuil est égal à 3.84 pour un niveau de confiance de 5%. Là encore, on détecte d'autres valeurs aberrantes, par exemple la mesure 405 dont la valeur de la distance est 15.42.

Par ailleurs deux problèmes se posent, le premier est comment localiser exactement la valeur aberrante. Quant au deuxième problème, il s'agit de trouver des solutions pour ne pas tenir compte des petites variations qui causent des fausses alarmes.

Étant donné que les mesures contenues dans la fenêtre sont rangées dans un ordre croissant, lorsque la valeur aberrante est prise en compte par cette fenêtre le test dépasse le seuil toléré. Ensuite, ce test présente des valeurs anormales jusqu'à ce que la valeur aberrante ne fasse plus partie de la fenêtre. Par conséquent, la valeur aberrante se situe à la fin de ce changement. Cette conclusion est vraie pour les tests qui utilisent une fenêtre glissante ; par contre la distance  $D$  fournit immédiatement la valeur aberrante. A partir des figures III.5(a) et (b), on peut affirmer que la valeur aberrante correspond à la mesure 332.

Le deuxième problème peut se résoudre en augmentant la dimension de la fenêtre. Dans ces conditions, on se heurte à une autre difficulté qui est le choix d'un nouveau seuil de détection. En effet, les tables qui donnent les seuils de tolérance pour des niveaux de confiance variables dépendent de la taille de l'échantillon à traiter et donc de la dimension de la fenêtre. La plupart des tables sont valables pour des fenêtres de faible dimension. Pour résoudre le problème de seuil, on peut adopter deux solutions (Holz, 1992). La première consiste à fixer un seuil initial qui dépend de l'amplitude de la valeur aberrante qu'on désire détecter et de la dimension de la fenêtre utilisée. La deuxième solution consiste à construire à chaque pas un seuil qui dépend de la variable test. On obtient ainsi un seuil adaptatif.

Dans le test de l'étendue, on emploie la moyenne qui est généralement inconnue. Pour l'estimer on peut utiliser la moyenne arithmétique de toutes les mesures. Les résultats présentés ci-dessus ont été obtenus en utilisant cette estimation. Dans le cas particulier des données du processus pilote, le système est réglé de telle sorte que le niveau de la cuve reste voisin d'une valeur. Cette valeur correspond donc à la moyenne qu'on peut intégrer dans les différents calculs. Les figures III.6(a) et 6(b) présentent les résultats de la variable test  $w_{T1}$  respectivement dans le cas où la moyenne est connue et inconnue.

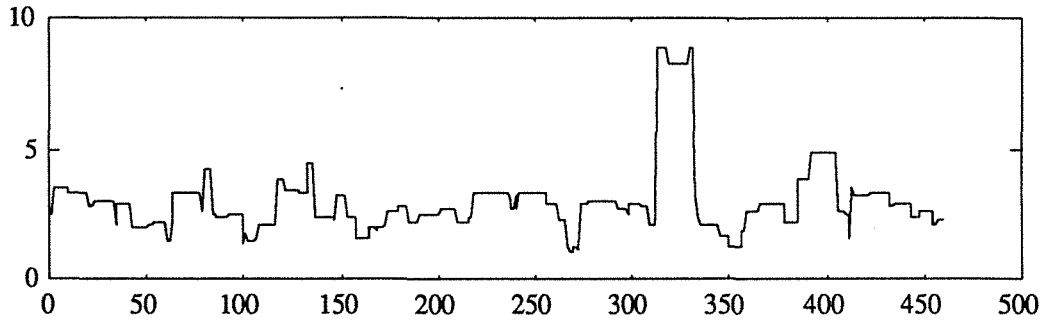


Figure III.6(a) - Variation du test  $w_{r1}$  avec la moyenne connue

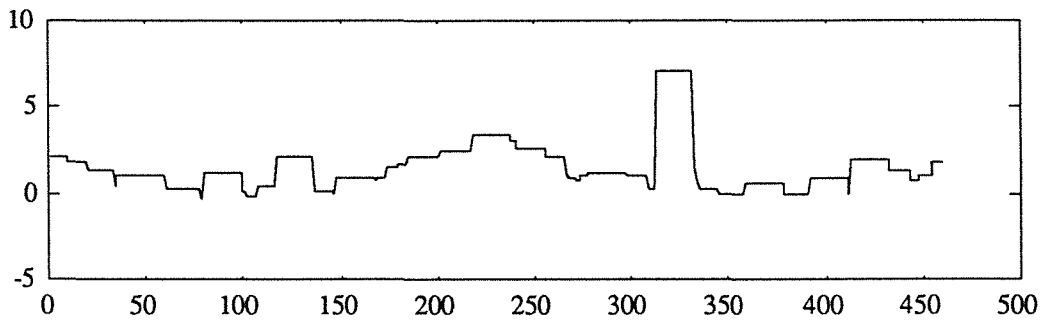


Figure III.6(b) - Variation du test  $w_{r1}$  avec la moyenne inconnue

La connaissance de la moyenne du signal permet dans certains cas d'améliorer la détection et la localisation de la valeur aberrante. Puisque, dans le cas général, l'estimation de la moyenne à partir des mesures n'est pas robuste quand le signal est entaché de valeurs aberrantes.

Les différents résultats présentés précédemment concernent le cas d'une fenêtre glissante pas à pas en ne prenant qu'une seule mesure à la fois, c'est-à-dire en utilisant la configuration de la figure III.1. Regardant maintenant le cas où on déplace la fenêtre du nombre de mesures qui la compose, figure III.2. Dans ces conditions, tous les tests permettent de détecter la présence de valeur aberrante mais on ne peut localiser exactement cette valeur aberrante. En effet, considérons par exemple la variable test  $w_r$  de l'étendue, définie par la formule (3.3) et prenons une fenêtre de 20 points. La figure III.7 présente la courbe de variation de l'étendue  $w_r$  pour le signal à tester de la figure III.3, cette courbe présente une valeur supérieure au seuil de tolérance au point 17.

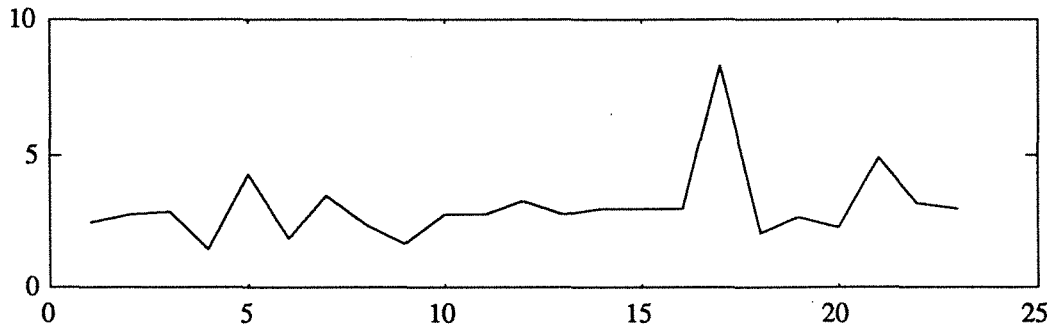


Figure III.7 - Variation du test  $w_T$

Comme la dimension de la fenêtre est 20 et le signal à tester présente 480 mesures, la valeur aberrante se situe donc entre les instants 321 et 340. C'est pratiquement la seule conclusion qu'on peut déduire pour cet exemple lorsqu'on utilise la technique de la fenêtre glissante multiple de la figure III.2. L'utilisation de cette fenêtre glissante ne permet pas de localiser d'une façon précise la valeur aberrante. Cependant, cette technique demande beaucoup moins de calcul que la technique pas à pas de la figure III.1. Pour la détection de valeurs aberrantes, les deux techniques présentent des performances équivalentes, par contre pour la localisation de la valeur aberrante la technique de la fenêtre glissante pas à pas de la figure III.1 présente l'avantage de localiser la valeur aberrante. Nous pouvons, par ailleurs, combiner les deux techniques pour d'une part réduire le temps de calcul et d'autre part localiser la valeur aberrante. Pour réaliser ce double objectif, on utilise dans un premier temps la deuxième technique pour détecter la présence de valeur aberrante et lorsqu'on la détecte on utilise dans un deuxième temps la technique de la fenêtre glissante pas à pas pour la localiser.

### III.3.2. EXEMPLE 2 - DONNÉES SIMULÉES

Dans cette partie, nous avons effectué plusieurs essais en modifiant la dimension de la fenêtre glissante, le nombre de valeurs aberrantes présentent dans le signal ainsi que leur amplitude. Nous présentons quelques résultats qui nous ont semblé les plus intéressants.

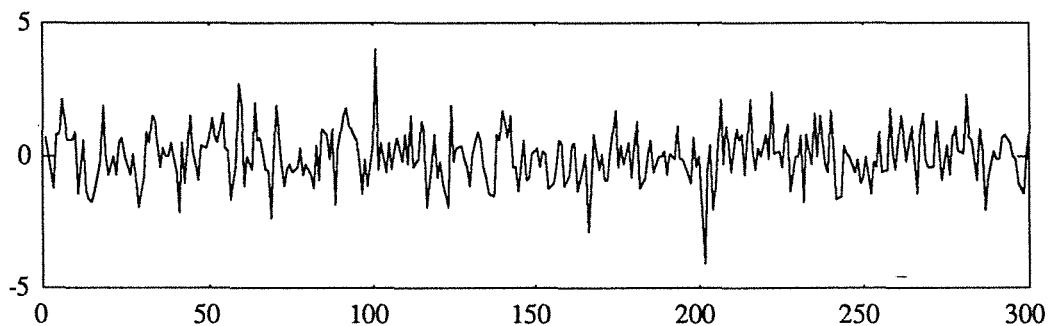


Figure III.8 - Signal présentant deux valeurs aberrantes

La figure III.8 représente un signal où on a simulé deux valeurs aberrantes, une à l'instant 100 et la deuxième à l'instant 200. Nous avons appliqué les tests cités précédemment sur ce signal, en modifiant la dimension de la fenêtre de calcul. La taille de la fenêtre que nous avons étudiée varie de 10, 15, 20, 25, 30, 35 et 40. Les résultats obtenus dépendent bien évidemment de ce paramètre et aussi de l'amplitude de la valeur aberrante. Dans le cas présenté, l'amplitude de la valeur aberrante est égale à 4 fois l'écart-type du signal qui vaut 1. Les figures III.9(a) et 9(b) représentent l'évolution du test de Grubbs pour une fenêtre de 10 points. On constate que le test présente plusieurs valeurs inférieures au seuil toléré à 5% de niveau de confiance, ce seuil est de 0.41. Cette conclusion est valable pour tous les autres tests puisque avec une fenêtre de faible dimension les petites variations sont mises en évidence et influencent par exemple le calcul de la moyenne de l'échantillon. Par ailleurs, nous pouvons signaler que toutes les valeurs aberrantes simulées ont été détectées.

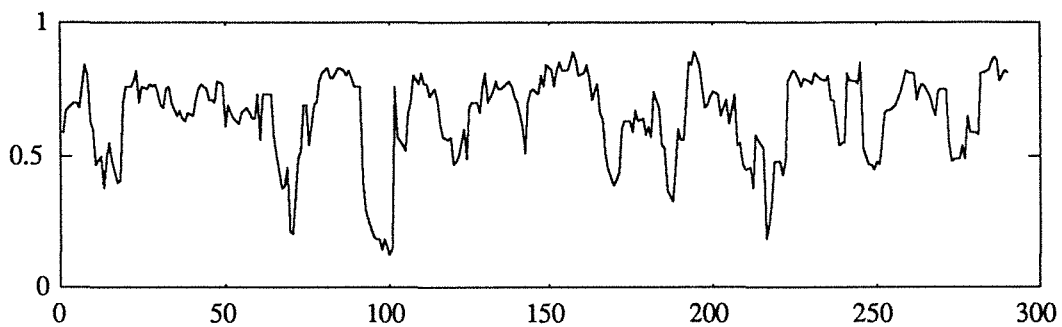


Figure III.9(a) - Variation du test de Grubbs pour une fenêtre de 10 points

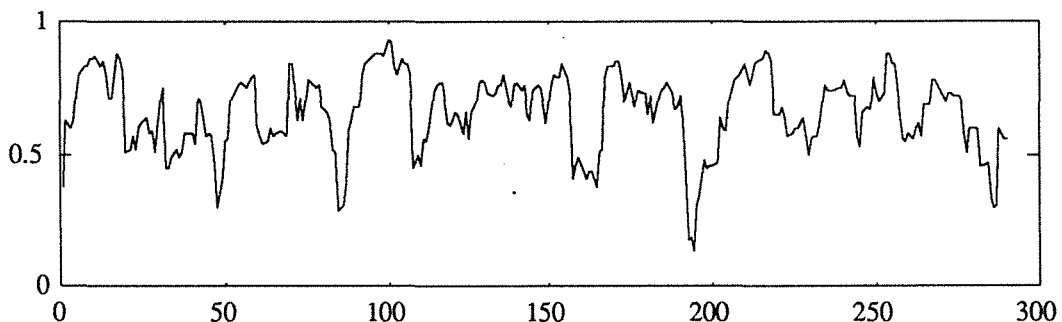


Figure III.9(b) - Variation du test de Grubbs pour une fenêtre de 10 points

Holz (1992) a présenté une étude détaillée de l'influence de la dimension de la fenêtre et de l'amplitude de la valeur aberrante sur le test de Grubbs et celui de Dixon. Les résultats obtenus confirment que lorsque la taille de la fenêtre est petite, les différents tests sont sensibles à des valeurs aberrantes de faibles amplitudes. Au fur et à mesure qu'on augmente la taille de la fenêtre, les tests deviennent de plus en plus robustes par rapport aux valeurs aberrantes de faibles amplitudes et on détecte uniquement les valeurs aberrantes dont l'amplitude est assez importante. A titre indicatif, nous présentons dans les figures III.10(a) et 10(b) les résultats obtenus pour le test de Grubbs pour une fenêtre de 25 points.

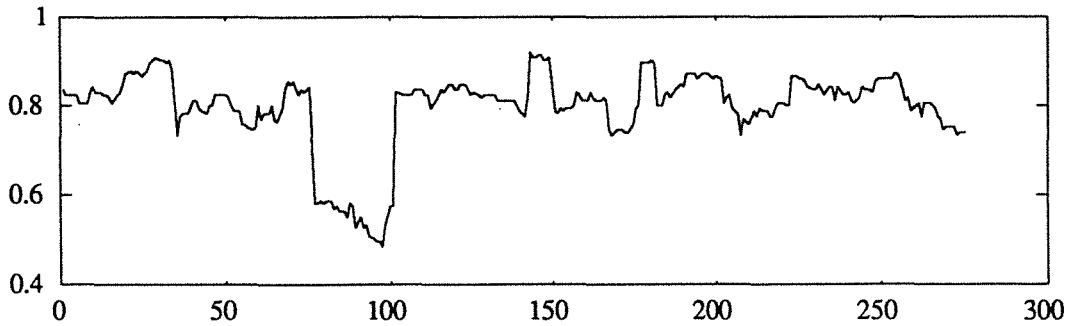


Figure III.10(a) - Variation du test de Grubbs pour une fenêtre de 25 points

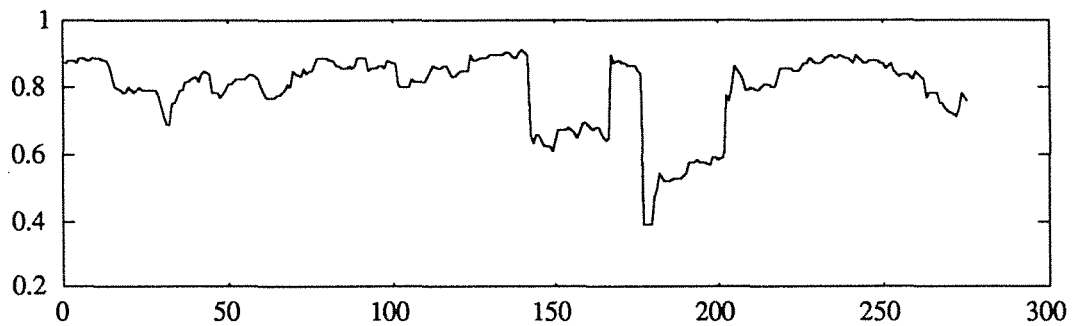


Figure III.10(b) - Variation du test de Grubbs pour une fenêtre de 25 points

En ce qui concerne la distance  $D$ , qui dans notre cas ne dépend pas de la dimension de la fenêtre mais du nombre de mesures dans le signal à traiter, elle permet de mettre en évidence les deux valeurs aberrantes (figure III.11).

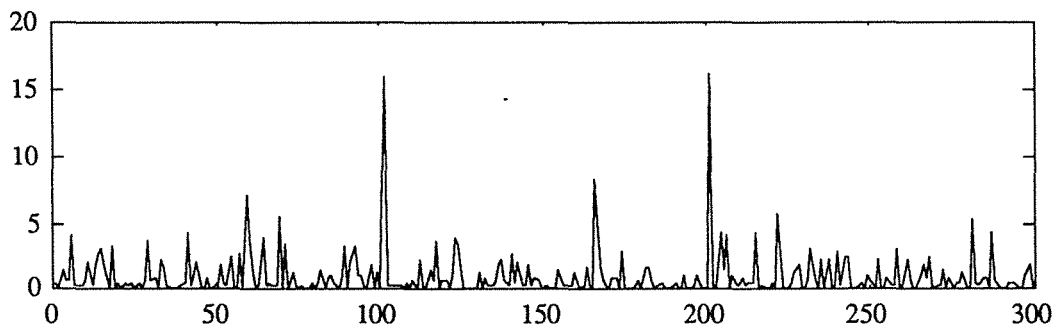


Figure III.11 - Variation de la distance  $D$

Comme le montre la figure III.11, on a d'autres valeurs aberrantes qui sont mises en évidence par cette distance. Ceci s'explique par le fait que la distance  $D$  utilise la moyenne de tout le signal et par conséquent la distance entre cette moyenne et une partie des mesures est beaucoup plus importante.

L'exemple que nous venons d'étudier, figure III.8, présente un signal avec deux valeurs aberrantes espacées dans le temps ; une à l'instant 101 et l'autre à l'instant 201. Nous allons étudier maintenant un autre exemple qui nous a semblé très illustratif pour d'une part comparer les différents tests et d'autre part évaluer les performances des deux techniques de la fenêtre glissante. Le signal à étudier est présenté sur la figure III.12 où on a simulé quatre valeurs aberrantes aux instants 66, 71, 133 et 141.

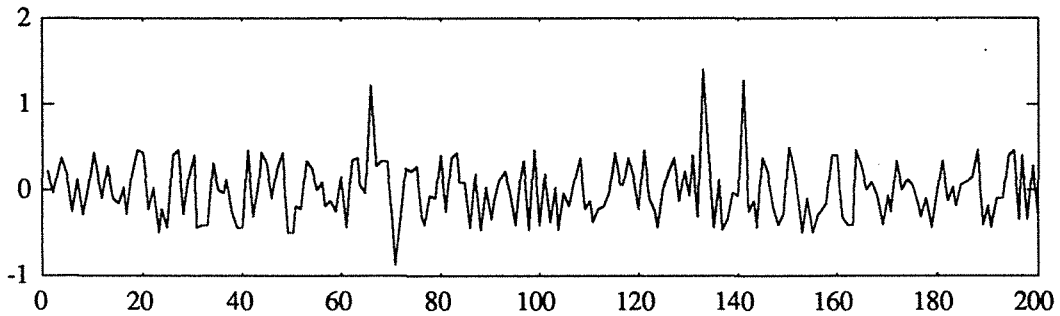


Figure III.12 - Signal à tester avec quatre valeurs aberrantes

Nous avons appliqué les différents tests sur ce signal en utilisant les deux techniques de la fenêtre glissante, la dimension de la fenêtre est prise égale à 20. Nous ne présentons ici que les résultats relatifs aux variables tests  $w_{r1}$ ,  $w_{r2}$ ,  $F_1$  et  $F_2$ .

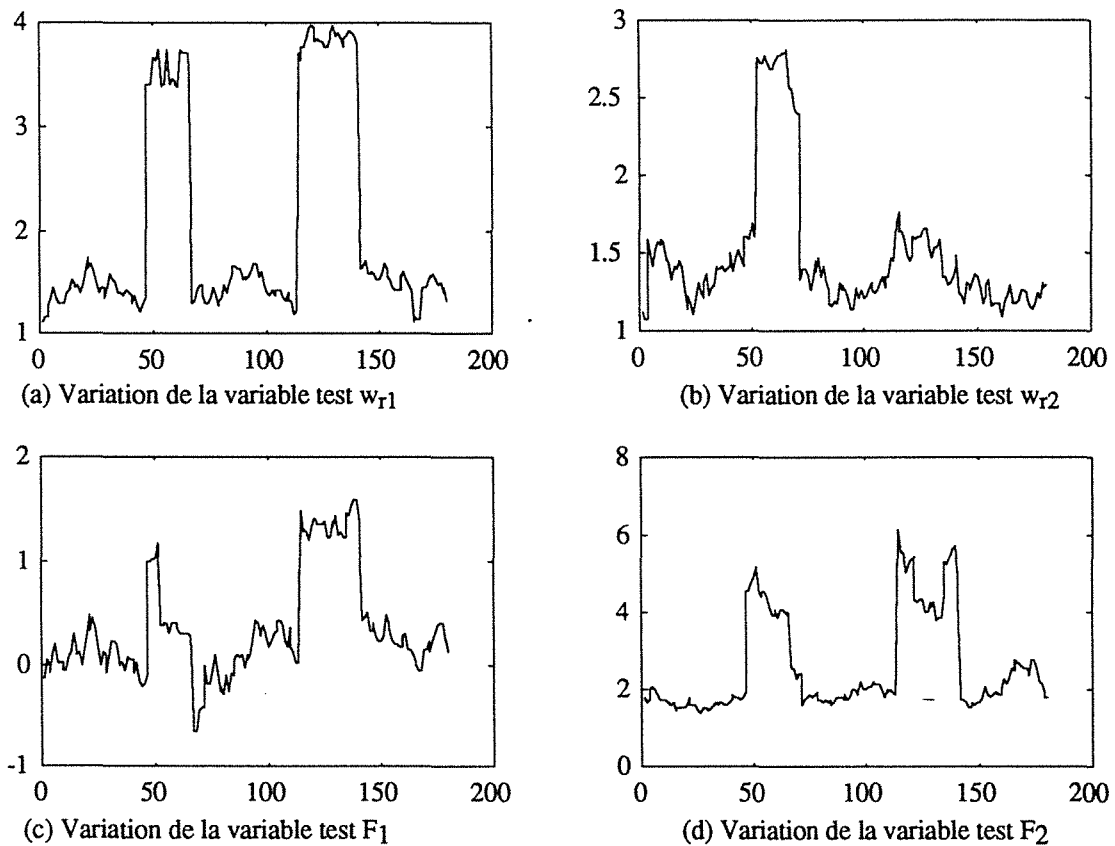


Figure III.13 - Résultats des tests avec une fenêtre glissante pas à pas



Dans la figure III.13(a), la courbe présente des valeurs supérieures au seuil toléré entre les intervalles [47-66] et [114-141]. Pour le premier intervalle, on peut conclure qu'il existe une valeur aberrante à l'instant 66 puisque la dimension de la fenêtre utilisée est égale à 20. Pour le deuxième intervalle, il nous informe qu'une valeur aberrante est présente à l'instant 141 et une autre à l'instant 133 ; cet instant est déterminé par l'instant qui précède le saut, c'est-à-dire 113, plus la dimension de la fenêtre qui est égale à 20. Nous remarquons que le test  $w_{r1}$  ne détecte que les valeurs aberrantes dont l'amplitude est positive ; cette remarque est justifiée car le test  $w_{r1}$  porte sur la valeur la plus forte de la série de mesures. Par contre, dans la figure III.13(b), le test  $w_{r2}$  n'indique que 20 points supérieurs au seuil. Ces points appartiennent à l'intervalle [52-71] par conséquent, la valeur aberrante est présente à l'instant 71. On sait que le test  $w_{r2}$ , voir équation 3.4(b), porte uniquement sur la valeur dont l'amplitude est la plus faible ; c'est pour cette raison que seule la valeur aberrante présente à l'instant 71 est mise en évidence par ce test. Néanmoins, nous pouvons remarquer que la détection de cette valeur aberrante n'est pas mise en évidence par les autres tests ceci est du essentiellement à son amplitude. Enfin, nous pouvons confirmer la présence de quatre valeurs aberrantes en analysant la figure III.14 où la variable test  $w_{r3}$  permet de mettre en évidence ces valeurs aberrantes.

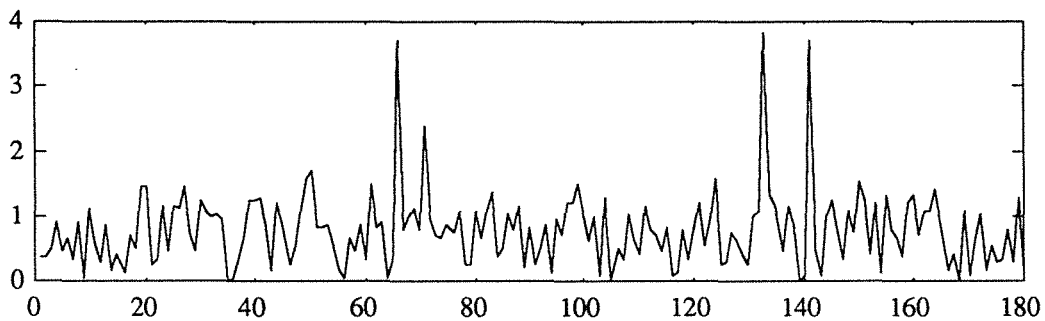


Figure III.14 - Variation du test  $w_{r3}$  pour une fenêtre glissante pas à pas

On rappelle que l'expression du test  $w_{r3}$  est donnée par la formule (3.6) et que le seuil toléré pour un niveau de confiance de 5% est 2.5. D'après la figure III.14, la courbe présente trois valeurs supérieures à ce seuil aux instants 66, 133 et 141. On constate aussi que la variable  $w_{r3}$  présente une valeur égale à 2.39 à l'instant 71 ce qui indique la présence d'une valeur aberrante dont l'amplitude n'est pas assez importante.

On s'intéresse maintenant aux résultats obtenus avec une fenêtre glissante multiple ; ici elle est de dimension 20 et on la fait glisser de 20 points à chaque fois. Les résultats sont présentés par les courbes des figures III.15 dont le nombre de points est égal au nombre de mesures (200) divisé par la dimension de la fenêtre (20). Pour le test  $w_{r1}$ , on dénombre trois points supérieurs au seuil toléré ; ici le seuil est pris égal à 2.56. Seules les valeurs aberrantes d'amplitudes positives sont mises en évidence alors que la variable test  $w_{r2}$  permet de détecter uniquement la présence de la valeur aberrante dont l'amplitude est négative. Pour les figures III.15(c) et (d), les tests  $F_1$  et  $F_2$  ne permettent de détecter que la présence de deux valeurs aberrantes se situant entre les intervalles [121-140] et [141-160]. On rappelle que les seuils

respectifs pour les tests  $F_1$  et  $F_2$  sont 0.8 et 4.17 pour un niveau de confiance de 5%. On remarque aussi que le test  $F_2$  présente une valeur très importante égale à 3.86 au point 4 qui correspond à l'intervalle de calcul comprenant les mesures des instants 61 à 80.

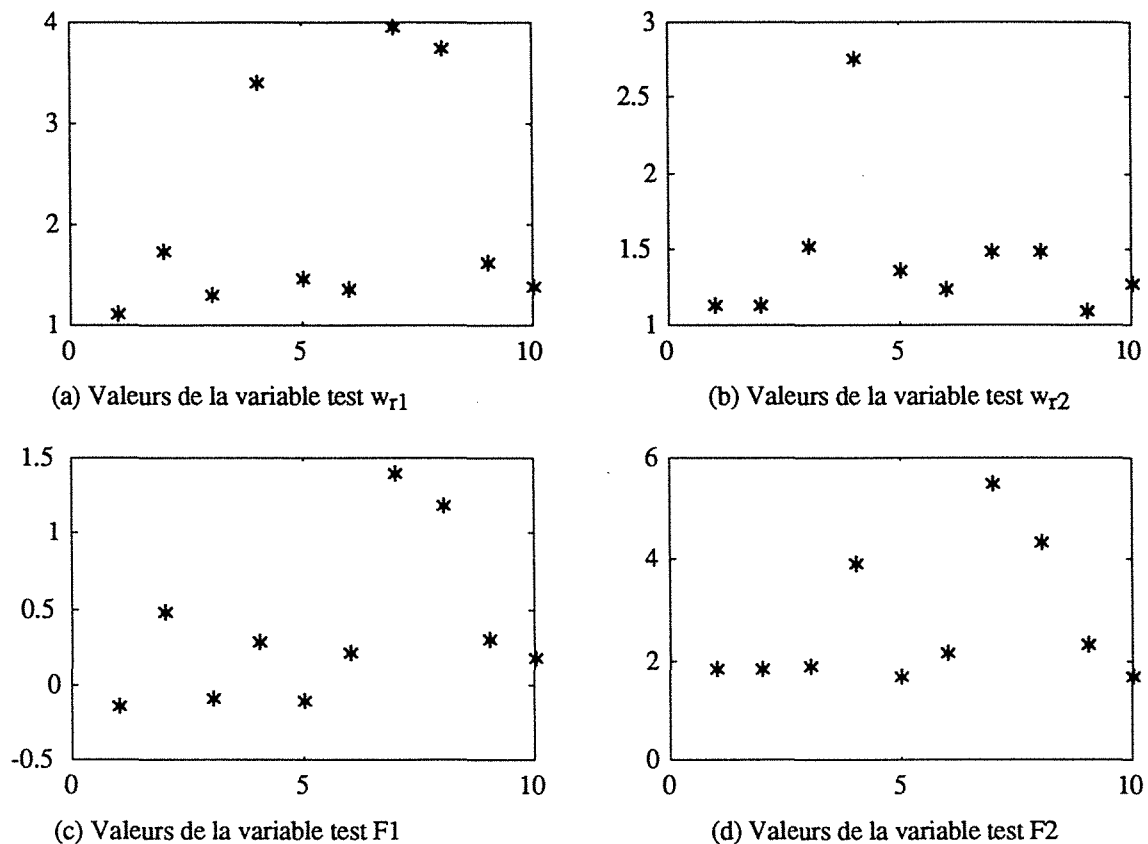


Figure III.15 - Résultats des tests avec une fenêtre glissante multiple

On peut conclure à partir de ces essais et d'autres en simulation que la dimension "optimale" de la fenêtre doit être comprise entre 20 et 30 points. Lorsque la dimension de la fenêtre est supérieure à 30 on a un taux de détection maximal ; ceci n'est valable que lorsque l'amplitude de la valeur aberrante est assez importante, par exemple supérieure ou égale à 3 fois l'écart-type du signal à traiter. Par ailleurs, la technique de la fenêtre glissante pas à pas de la figure III.1 est mieux adaptée à la détection en ligne et à la localisation exacte de la mesure en défaut. Cependant, cette technique prend beaucoup plus du temps de calcul que la technique multiple de la figure III.2.

#### III.4. SIGNAL SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté des tests statistiques permettant de détecter des éventuelles valeurs aberrantes dans une série de mesures. Ces tests sont donc valables pour une série de mesures dont on suppose qu'elle suit une loi de distribution normale d'une moyenne et d'une variance connues ou inconnues. Il arrive, cependant, que la série de mesures suit une autre loi de distribution, par exemple une loi de distribution exponentielle, une

loi de distribution gamma... (Barnett et Lewis, 1984). On ne considère dans cette partie que la distribution exponentielle ; cependant l'étude présentée peut s'étendre à d'autres distributions.

### III.4.1. GÉNÉRALITÉS

Supposons maintenant que les  $n$  mesures ordonnées  $x_1, \dots, x_n$  sont issues d'une distribution exponentielle. Le problème est de décider entre deux hypothèses  $H_0$  ou  $H_1$  :

$H_0$  : Les  $n$  mesures suivent une distribution exponentielle de la forme :

$$FD(x; \sigma) = 1 - \exp(-x/\sigma) \quad (3.15a)$$

$H_1$  : une ou plusieurs mesures sont distribuées selon une loi de distribution :

$$FD(x; \sigma; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda x/\sigma) \quad (3.15b)$$

avec  $x$  la mesure de la variable aléatoire,  $\sigma$  l'écart-type qu'on suppose  $> 0$  et  $\lambda$  une constante telle que  $0 < \lambda < 1$ . Lorsque les mesures sont entachées de plusieurs valeurs aberrantes Kimber (1982) propose d'appliquer un des tests, élaborés dans la première partie de ce chapitre, successivement en commençant par la mesure la plus écartée ; on applique de nouveau le test aux  $n-1$  mesures restantes jusqu'à "épuration" complète de la série de mesures.

Pour effectuer la détection de valeurs aberrantes dans une série de mesures suivant une loi de distribution exponentielle, la plupart des auteurs utilisent les différentes variantes du test de Dixon, équations (3.11). Il existe néanmoins deux autres tests qui sont les plus utilisés lorsque les mesures sont issues d'une distribution exponentielle (Kimber 1982, Chikkagoudar et Kunchur 1987), ces deux tests sont donnés respectivement par les équations (3.16) et (3.17) :

$$R_{31} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \quad (3.16)$$

$$C = \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.17)$$

Le premier test est semblable à celui de Dixon, il a été développé par Likes (1966) et étudié par Barnett et Lewis (1984) et Bendre (1985). Le deuxième test a été proposé par Cochran (1941). Chikkagoudar et Kunchur (1987) ont réalisé une étude comparative de ces deux tests en calculant la puissance de chaque test à détecter les valeurs aberrantes. La puissance de ces tests dépend essentiellement du nombre d'observations et de la variable  $\lambda$ . De ce fait, suivant la valeur de la variable  $\lambda$  les deux tests présentent des avantages l'un par rapport à l'autre. Cependant, le test  $R_{31}$  présente le phénomène de masquage lorsque la mesure  $x_{n-1}$  est aussi

aberrante. Pour surmonter ce problème, Bendre et Kale (1985) proposent le test  $R_{32}$  dont la formule est présentée ci-dessous :

$$R_{32} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n} \quad (3.18)$$

La variable test  $R_{32}$  ressemble aux différents tests de Dixon que nous avons présentés dans la première partie de ce chapitre. La différence par rapport à la variable test  $R_{31}$  se situe uniquement par le remplacement de la mesure  $x_{n-1}$  par  $x_{n-2}$ . Nous allons voir dans l'exemple illustratif suivant les performances des tests  $R_{31}$ ,  $R_{32}$  et C.

### III.4.2. EXEMPLE ILLUSTRATIF

Pour illustrer le comportement de ces tests, nous allons les appliquer à un exemple très simple issu de Bendre et Kale (1985). La série de mesures comprend 12 valeurs qui sont 487, 18, 100, 7, 98, 5, 85, 91, 43, 230, 3 et 30. Les résultats obtenus pour les trois tests  $R_{31}$ ,  $R_{32}$  et C sont présentés dans la deuxième colonne du tableau ci-dessous. On constate qu'aucun test ne dépasse les seuils de tolérance indiqués entre parenthèse à 5% de niveau de confiance.

On multiplie maintenant la valeur la plus forte, c'est-à-dire 487, par 2 ce qui entraîne une valeur aberrante dans la série de mesures. Les résultats obtenus pour ce deuxième essai sont présentés dans la troisième colonne du tableau III.2. Dans ce deuxième cas les trois tests mettent en évidence l'existence d'une valeur aberrante dans la série de mesures, puisque leur valeur respective dépasse le seuil toléré.

	1er cas	2ème cas	3ème cas
$R_{31}$ (0.631)	0.527	0.764	0.527
$R_{32}$ (0.792)	0.733	0.866	0.866
C (0.393)	0.375	0.546	0.484

Tableau III.2 - Valeurs des tests

Nous allons maintenant introduire une autre valeur aberrante en multipliant la valeur 230 par 2. La série de mesures classées par ordre croissant devient alors 3, 5, 7, 18, 30, 43, 85, 91, 98, 100, 460 et 974. Les valeurs des tests sont données dans le tableau ci-dessus à la dernière colonne.

L'analyse du tableau montre que le test  $R_{31}$  donne exactement la même valeur dans le premier cas, où il n'y avait de valeurs aberrantes, que dans le troisième où on a deux valeurs aberrantes. Ceci s'explique par l'effet de masque qu'exerce l'avant dernière valeur 460 sur la dernière valeur de la série ordonnée. Pour les deux autres tests, cet effet de masque n'apparaît pas et pour le test  $R_{32}$  l'avant dernière valeur n'a aucune influence sur ce test.

Cet exemple illustratif permet de voir le comportement des trois tests en présence de deux valeurs aberrantes et leur robustesse par rapport au problème de masque.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse non exhaustive des différentes techniques de détection de valeurs aberrantes dans une série de mesures issues d'un signal délivré par un capteur. Ces techniques sont simples à mettre en oeuvre et ne demandent pas beaucoup de calcul. Malheureusement, la plupart des tests nécessitent le classement par ordre croissant des mesures et cette opération peut entraîner un retard à la détection lorsqu'on désire effectuer la détection en ligne.

La détection en ligne peut se faire de deux manières différentes. Soit on utilise une fenêtre glissante pas à pas dont l'avantage est la localisation précise de la valeur aberrante, soit une fenêtre glissante d'un nombre de points qui la compose. Cette dernière technique ne permet pas de localiser la valeur aberrante ; mais elle présente un avantage au niveau du temps de calcul.

L'application de ces techniques à des données réelles a donné de bons résultats. Cette application n'est réalisable que si on se place dans un cas statique c'est-à-dire lorsque le système évolue autour d'un point de fonctionnement.

## Chapitre IV

# DÉTECTION ET IDENTIFICATION DANS UNE SÉRIE TEMPORELLE



## INTRODUCTION ET HISTORIQUE

Il est d'usage de considérer que tout processus aléatoire peut être caractérisé avec une précision suffisante comme la sortie d'un filtre linéaire avec un bruit blanc comme entrée. La relation dynamique qui relie alors la sortie  $y$  à l'entrée  $\varepsilon$  peut être décrite par :

$$\Theta(q^{-1})y_t = \varepsilon_t \quad (4.1)$$

où  $\Theta(q^{-1})$  est un polynôme d'ordre  $p$  de la variable retard  $q^{-1}$ . Cette relation est connue sous le nom de modèle Auto Régressif (AR) d'ordre  $p$ . Il arrive parfois que la sortie dépende aussi des valeurs passées de l'entrée  $\varepsilon$  ; on parle alors du modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA) donné par l'expression suivante :

$$\Theta(q^{-1})y_t = \Phi(q^{-1})\varepsilon_t \quad (4.2)$$

où  $\Phi(q^{-1})$  est un polynôme d'ordre  $r$  de la variable retard  $q^{-1}$ . Les processus AR et ARMA sont très utilisés dans le domaine du traitement du signal (Box et Jenkins 1976) mais ils sont surtout utilisés pour modéliser des séries temporelles. On appelle série temporelle une séquence de  $n$  observations successives de la variable  $y$  mesurée à des intervalles réguliers.

Il arrive cependant qu'on ait plusieurs sorties interconnectées entre elles et que chacune d'elles suive un modèle ARMA. Ces différentes sorties forment donc un vecteur ; dans ce cas, on parle du modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée Vectoriel (ARMAV). Les processus ARMAV sont souvent utilisés pour modéliser une série multivariée.

On rappelle que notre but principal est la détection de défauts de capteurs qui délivrent les mesures des différentes variables et on s'intéresse plus particulièrement aux valeurs aberrantes. En ce qui concerne les séries temporelles, les premiers travaux sont dus à Fox (1972) qui a mis en évidence l'existence de deux types de valeurs aberrantes, additives et innovées, dont on étudiera les caractéristiques dans les paragraphes suivants. Pour détecter et identifier ces deux types de valeurs aberrantes, nous avons besoin du modèle qui décrit la série temporelle ou le processus. Nous devons donc estimer les paramètres correspondants avant de procéder à la détection de ces valeurs aberrantes. Dans la partie IV.2, nous donnons un aperçu des méthodes d'identification des paramètres de modèles AR et ARMA.

D'un point de vue historique, la détection des valeurs aberrantes a débuté avec les travaux de Fox (1972) qui a proposé une technique basée sur la fonction de vraisemblance. Ensuite, Abraham (1979) a développé une nouvelle approche basée sur l'analyse bayésienne permettant d'étudier les conséquences de ces valeurs aberrantes sur l'estimation des paramètres du modèle. Les deux approches de Fox (1972) et d'Abraham (1979) ainsi que les travaux de Muirhead (1986), basés sur le rapport logarithmique du rapport de vraisemblance, sont limités à un modèle Auto-régressif. Tsay (1986) a étendu l'étude à un modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée. Il a proposé une procédure itérative pour identifier le type de valeurs aberrantes et



pouvoir éliminer leurs effets. Cette procédure est essentiellement basée sur celle d'estimation itérative développée par Chang et Tiao (1983). Ledolter (1990) a présenté une approche basée sur la fonction logarithmique du rapport de vraisemblance développé par Cook (1986) dans le cas d'une régression linéaire. Diaz (1991) propose une solution au problème de valeurs aberrantes dans les séries temporelles en développant une approche basée sur l'analyse bayésienne. Cette solution requiert la connaissance des observations suspectes.

Dans ce chapitre, nous allons adapter et utiliser des méthodes de détection de valeurs aberrantes, développées dans le cas de la régression linéaire, à des séries temporelles modélisées par un processus auto-régressif. Ces méthodes sont le test des éléments diagonaux de la matrice de projection, l'écart normalisé, le rapport d'Andrews-Pregibon et le test de variance des paramètres. Un exemple comparatif permet de tester leurs performances par rapport à la présence des différents types de valeurs aberrantes. Cela nous permet par la suite de présenter une procédure complète permettant la détection de valeurs aberrantes, l'identification de leur type et la correction des mesures en défaut.

A la fin de ce chapitre, nous présentons une extension de cette étude pour des modèles Auto Régressifs Vectoriels. Mais avant de réaliser ces différentes tâches, nous présentons dans un premier temps les caractéristiques des différents types de valeurs aberrantes et dans un deuxième temps quelques techniques d'estimation des paramètres des modèles AR et ARMA.

#### IV.1. GÉNÉRALITÉS

Pour pouvoir interpréter les deux types de valeurs aberrantes, valeur aberrante additive et valeur aberrante innovée, dans une série temporelle, on a besoin de modéliser cette dernière. Soit  $z_t$  une série temporelle,  $t$  variant de 1 jusqu'à  $n$  ( $n$  est le nombre d'observations), modélisée par un processus auto-régressif d'ordre  $p$  :

$$z_t = \sum_{i=1}^p \theta_i z_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.3a)$$

Le modèle (4.3a) peut aussi être écrit sous la forme suivante :

$$\Theta(q^{-1})z_t = \varepsilon_t \quad (4.3b)$$

où  $\Theta(q^{-1}) = 1 - \theta_1 q^{-1} - \dots - \theta_p q^{-p}$  et  $\varepsilon$ , appelée parfois la séquence d'innovation, représente un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . On suppose que le polynôme  $\Theta(q^{-1})$  possède tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité.

Soit  $y_t$  la valeur observée (mesurée) de la variable  $z_t$ . En présence de valeurs aberrantes, Fox (1972), Martin (1983), Abraham et Ledolter (1983) et Tsay (1986) ont modélisé la série de mesures selon le type de l'erreur.

Dans le cas où l'erreur est une valeur aberrante additive, qu'on note type I, la variable de sortie s'écrit :

$$y_t = z_t + \omega \delta_{t,d} \quad (4.4)$$

Cette valeur aberrante affecte tout simplement la mesure de la variable de sortie à un instant  $d$ . Quand l'instant  $t$  est différent de l'instant de défaut, la mesure suit parfaitement le modèle auto-régressif de l'équation (4.3a).

Lorsque la valeur aberrante est une valeur aberrante innovée, type II, le processus est modélisé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} z_t = \sum_{i=1}^p \theta_i z_{t-i} + \varepsilon_t + \omega \delta_{t,d} \\ y_t = z_t \end{cases} \quad (4.5a)$$

A partir de l'équation (4.5a), on peut constater que la valeur aberrante innovée est présente sur la variable  $\varepsilon$  qui correspond à l'entrée ou à l'excitation du processus.

Le système d'équations (4.5a) peut s'écrire d'une autre manière. En effet, on considère la série temporelle  $z_t$  qui suit un modèle de type (4.3b) ; l'équation de mesure, en présence d'une valeur aberrante innovée, s'écrit :

$$\Theta(q^{-1})y_t = \varepsilon_t + \omega \delta_{t,d} \quad (4.5b)$$

D'après les hypothèses faites sur le polynôme  $\Theta(q^{-1})$ , l'équation (4.5b) devient :

$$y_t = \left(\Theta(q^{-1})\right)^{-1} \varepsilon_t + \left(\Theta(q^{-1})\right)^{-1} \omega \delta_{t,d} \quad (4.5c)$$

Le premier terme du second membre de l'expression (4.5c) n'est autre que la variable  $z_t$  définie par la relation (4.3b). On obtient donc la relation suivante liant la variable  $z_t$  sans défaut et la variable  $y_t$  mesurée :

$$y_t = z_t + \left(\Theta(q^{-1})\right)^{-1} \omega \delta_{t,d} \quad (4.5d)$$

où  $\omega$  représente l'amplitude de la valeur aberrante,  $d$  désigne l'instant d'apparition de la valeur aberrante et  $\delta$  est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{t,d} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après l'expression (4.4), une valeur aberrante additive affecte uniquement l'observation  $d$ . Il s'agit dans ce cas d'une erreur de mesure localisée dans le temps qui peut être une erreur de recopie ou d'enregistrement. Par contre, la valeur aberrante innovée représente une perturbation sur l'entrée  $\varepsilon_t$  de la série à l'instant  $d$ .

Pour compléter les différentes définitions ci-dessus sur ces valeurs aberrantes, on présente les différentes configurations de présence de valeurs aberrantes. Les figures IV.1(a) et (b) montrent respectivement le signal  $y_t$  en fonction du temps et l'évolution de la variable  $y_t$  en fonction de  $y_{t-1}$  dans le cas où le processus ne présente aucune valeur aberrante. Par contre, les figures IV.2 présentent les différentes situations de valeurs aberrantes qu'on peut rencontrer dans la pratique. Ces courbes montrent le signal avec une ou plusieurs valeurs aberrantes de différents types et l'évolution de la variable  $y_t$  en fonction de  $y_{t-1}$ .

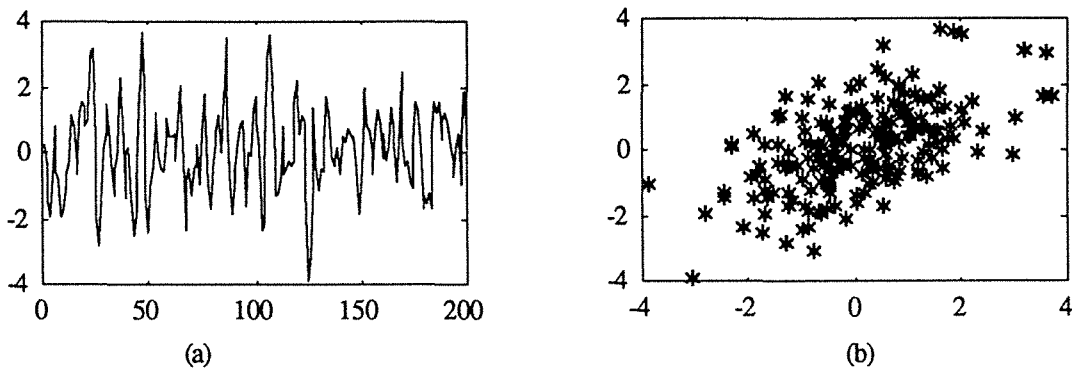
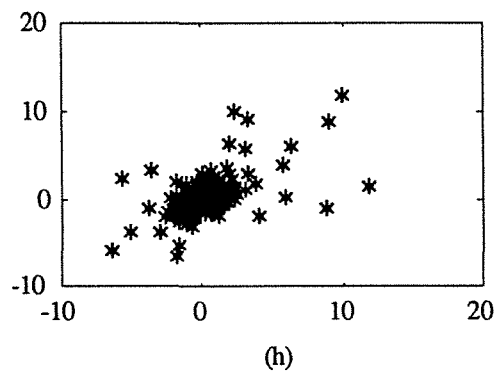
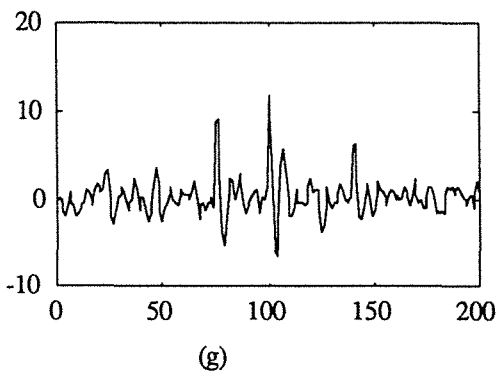
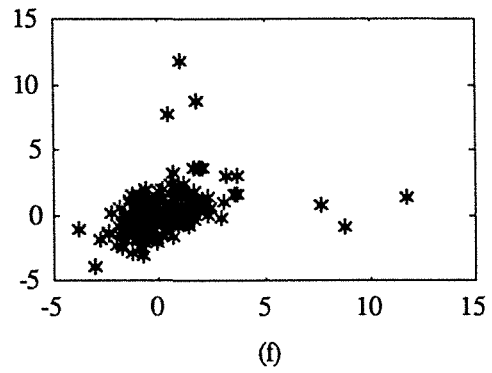
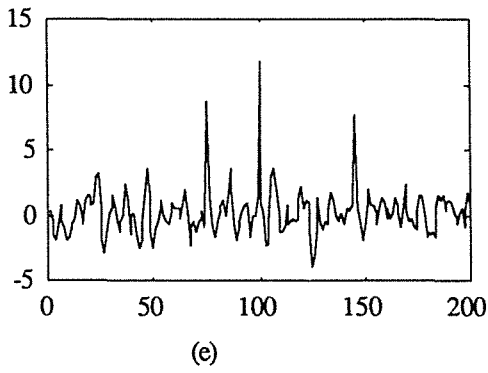
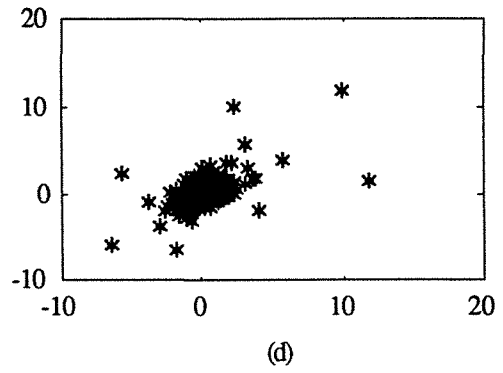
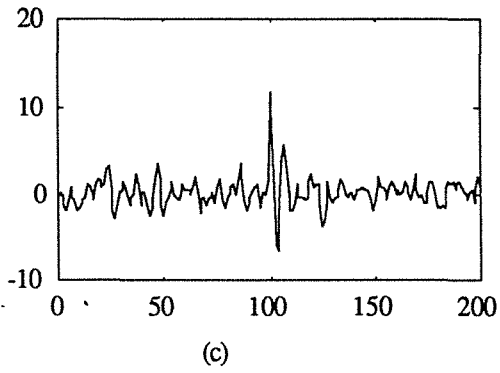
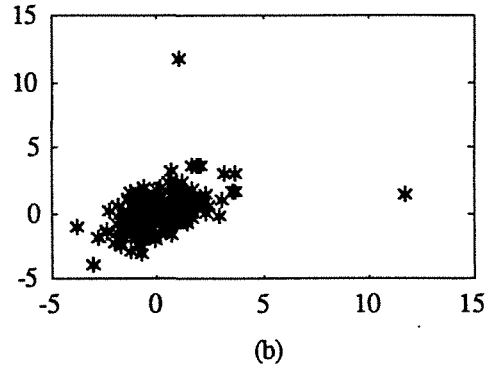
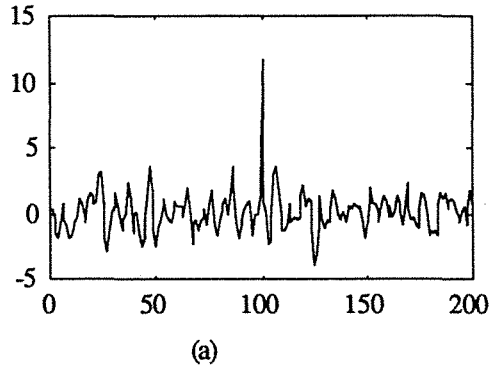


Figure IV.1 - (a), (b) Signal ne présentant aucune valeur aberrante

Le signal  $y_t$  est issu d'un modèle auto-régressif d'ordre 2. Les figures IV.2(a) et (b) présentent le signal avec une valeur aberrante additive à l'instant 100 et la représentation de  $y_t$  en fonction de  $y_{t-1}$  fait apparaître deux points éloignés du reste des données. Le nombre est tout à fait justifié puisqu'il y a deux points  $(y_t, y_{t-1})$  et  $(y_{t+1}, y_t)$  qui contiennent la valeur  $y_{100}$ . Par contre, pour une valeur aberrante innovée la figure IV.2(d) fait apparaître plus de deux points aberrants. Ceci montre que l'erreur s'est propagée au cours du temps.

Les conclusions déduites pour une seule valeur aberrante additive ou innovée sont généralisables pour le cas de plusieurs valeurs aberrantes additives ou innovées. Les courbes des figures IV.2(e), (f) montrent qu'avec trois valeurs aberrantes additives, on a six points éloignés de l'ensemble des données, alors que dans le cas de trois valeurs aberrantes innovées, on a plusieurs points éloignés.

Ces différentes courbes confirment tout simplement la différence existant entre une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée. Nous pouvons par ailleurs choisir une autre représentation, par exemple  $y_t$  en fonction de  $y_{t-2}$ , et tant que les représentations se font sur un plan, on aura toujours les mêmes conclusions. Par contre, si on utilise un espace à  $k$  dimensions, on aura alors  $k$  points aberrants dans le cas d'une valeur aberrante additive.



Figures IV.1 - (a), (b) une valeur aberrante additive, (c), (d) une valeur aberrante innovée, (e), (f) trois valeurs aberrantes additives et (g), (h) trois valeurs aberrantes innovées.

Par ailleurs, en plus des paramètres  $\theta_i$  qui sont inconnus, l'amplitude  $\omega$  de la valeur aberrante et l'instant d'apparition  $d$  de la valeur aberrante sont aussi inconnus. Par conséquent, à partir d'une estimation des paramètres du polynôme  $\Theta(q^{-1})$  et des mesures  $y_t$ , nous devons détecter et localiser l'erreur, identifier son type et enfin estimer son amplitude.

Avant de développer la procédure de détection qui nécessite la connaissance des paramètres du modèle, nous allons donner quelques techniques, très simples à mettre en oeuvre, pour estimer les paramètres du modèle AR ou ARMA.

## IV.2. ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Pour estimer ou identifier les paramètres d'un modèle AR, la méthode la plus utilisée et la plus ancienne est celle des moindres carrés simples. Il existe aussi des méthodes basées soit sur la fonction du rapport de vraisemblance soit sur l'analyse bayésienne. Box et Jenkins (1976) ont présenté une synthèse de ces différentes méthodes. De même, Sawaragi et al. (1981) ont présenté le principe de certaines techniques pour estimer l'ordre et les paramètres du modèle ARMA. Dans la suite, nous présentons une technique qui utilise les équations de Yule-Walker et une autre, développée par Pandit et Wu (1983), basée sur les coefficients du polynôme inverse.

Dans toute la partie estimation des paramètres, on ne dispose que des mesures de la sortie du processus. Par conséquent, pour toutes les techniques présentées dans cette partie et dans la partie IV.3, on n'utilise que les variables  $y_t$ .

### IV.2.1. MOINDRES CARRÉS SIMPLES

On considère les mesures  $y_t$  qui, en l'absence de valeurs aberrantes, suivent un modèle auto-régressif d'ordre  $p$  de type (4.6a) :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \theta_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.6a)$$

L'écriture de cette relation pour toutes les observations, c'est-à-dire pour  $t$  variant de  $p+1$  jusqu'à  $n$ , nous donne :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}}_{\Theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{p+1} \\ \varepsilon_{p+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{\varepsilon}} \quad (4.6b)$$

A partir de cette expression, on voit clairement qu'en utilisant la technique des moindres carrés simples, qui consiste à minimiser la somme des carrés des écarts (voir chapitre II), on peut donner comme estimation des paramètres du modèle :

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (4.7)$$

La majeure partie des méthodes d'estimation des paramètres est inspirée de cette technique. On peut citer par exemple la méthode des moindres carrés généralisée, la méthode de la variable instrumentale et leurs versions récursives, voir Tomczak (1990).

#### IV.2.2. EQUATIONS DE YULE-WALKER

Dans l'équation (4.6a), le terme  $\varepsilon_t$  est supposé être indépendant des mesures ; par conséquent, l'espérance mathématique entre ce terme et la sortie du système est nulle. Nous pouvons donc l'éliminer pour n'avoir que les mesures  $y_t$  et les paramètres  $\theta_i$ . Pour réaliser cette opération, on multiplie, dans un premier temps, les deux membres de l'équation (4.6a) par  $y_{t-j}$  ; on obtient donc :

$$y_t y_{t-j} = \sum_{i=1}^p \theta_i y_{t-i} y_{t-j} + \varepsilon_t y_{t-j} \quad (4.8a)$$

et dans un deuxième temps, on utilise l'opérateur espérance mathématique (Esp). On obtient :

$$\text{Esp}(y_t y_{t-j}) = \sum_{i=1}^p \theta_i \text{Esp}(y_{t-i} y_{t-j}) + \text{Esp}(\varepsilon_t y_{t-j}) \quad (4.8b)$$

Finalement, en notant  $R_j = \text{Esp}(y_t y_{t-j})$ , avec  $R_j = R_{-j}$ , la fonction d'autocovariance du signal  $y_t$ , on obtient :

$$R_j = \sum_{i=1}^p \theta_i R_{j-i} \quad (4.8c)$$

Supposons maintenant qu'on dispose d'une estimation des coefficients de la fonction d'autocovariance ; cette estimation peut être obtenue à partir des mesures  $y_t$ . L'équation (4.8c) est alors considérée comme une régression linéaire où les paramètres  $\theta_i$  sont inconnus. L'équation (4.8c) s'appelle équation de Yule-Walker.

Pour obtenir une estimation des valeurs de la fonction d'autocovariance, nous pouvons utiliser l'un des estimateurs suivants (Kunt, 1981) :

$$R_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} y_t y_{t+j} \quad (4.8d)$$

$$R'_j = \frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} y_t y_{t+j} \quad (4.8c)$$

Le choix de l'un ou de l'autre des deux estimateurs est délicat car chacun présente des avantages et des inconvénients : le premier estimateur est non biaisé, mais sa variance devient très grande lorsque  $j$  tend vers  $n$ . Quand au second, sa variance ne dépend pas de la variable  $j$ , mais il est biaisé (Kunt, 1981). En comparant les erreurs quadratiques moyennes de ces deux estimateurs, l'estimateur  $R_j$  apparaît meilleur que l'estimateur  $R_j$  (Jenkins et Watts, 1968).

Dans l'équation (4.8c) les coefficients  $R_j$  étant connus, les paramètres  $\theta_i$  peuvent être estimés. L'estimation de ces paramètres peut s'obtenir de deux manières différentes. La première consiste à écrire la relation (4.8c) pour  $j$  allant de 1 à  $p$  ; on obtient alors un système d'équations :

$$\begin{cases} \theta_1 R_0 + \theta_2 R_1 + \dots + \theta_p R_{p-1} = R_1 \\ \theta_1 R_1 + \theta_2 R_0 + \dots + \theta_p R_{p-2} = R_2 \\ \theta_1 R_{p-1} + \theta_2 R_{p-2} + \dots + \theta_p R_0 = R_p \end{cases}$$

A partir de ces équations, il est donc possible d'estimer les paramètres  $\theta_i$ . La deuxième solution utilise l'algorithme de Levinson-Durbin qui permet de résoudre le système d'équations ci-dessus en calculant récursivement les paramètres du modèle AR. Pour plus de détail, Tomczak (1990) a présenté une synthèse de ces différentes techniques et leurs performances.

Nous venons de voir deux techniques d'estimation de paramètres pour une série temporelle modélisée par un processus auto-régressif. Malheureusement, le terme  $\varepsilon$  peut dépendre lui aussi, dans certains cas, de ses éléments retardés. On parle d'un processus Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA) et, par conséquent, la méthode utilisée doit permettre d'estimer simultanément les paramètres de la partie AR et ceux de la partie MA. Dans cet esprit, Mayne (Marple, 1987) a proposé un algorithme réalisant de manière itérative l'estimation simultanée des paramètres AR et MA. Toutefois, la plupart des approches développées procèdent en deux phases, estimation des paramètres AR dans un premier temps, et estimation des paramètres MA à partir des paramètres estimés, dans un deuxième temps. Friedlander et Porat (1984) présentent un résumé de ces diverses méthodes pour l'estimation des paramètres MA.

Dans le paragraphe IV.2.3, on présente une technique d'estimation des paramètres AR et MA basée sur les coefficients du polynôme inverse (Pandit et Wu, 1984).

#### IV.2.3. ESTIMATION AVEC LES COEFFICIENTS DU POLYNÔME INVERSE

On considère un modèle ARMA décrit par l'équation suivante :

$$\Theta(q^{-1})y_t = \Phi(q^{-1})\varepsilon_t \tag{4.9}$$

avec  $\Theta(q^{-1}) = 1 - \theta_1 q^{-1} - \dots - \theta_p q^{-p}$  et  $\Phi(q^{-1}) = 1 - \phi_1 q^{-1} - \dots - \phi_r q^{-r}$  deux polynômes de la variable retard  $q^{-1}$ . Pour assurer la stationnarité du processus et pour que les polynômes  $\Theta(q^{-1})$

et  $\Phi(q^{-1})$  soient inversibles, on suppose que les zéros de ces polynômes sont à l'extérieur du cercle unité. A partir de l'équation (4.9), nous pouvons calculer  $\varepsilon_t$  en fonction de  $y_t$  en effectuant la division euclidienne des deux polynômes, on aura :

$$\varepsilon_t = (1 - \pi_1 q^{-1} - \pi_2 q^{-2} - \dots) y_t \quad (4.10)$$

où  $\pi_i$  correspond aux coefficients résultants de la division de deux polynômes  $\Theta(q^{-1})$  et  $\Phi(q^{-1})$ . Ces coefficients sont appelés les coefficients du polynôme inverse.

Si maintenant, on substitue l'expression de  $\varepsilon_t$  dans l'équation (4.9), on obtient une équation où seulement les paramètres du modèle sont présents, soit :

$$1 - \theta_1 q^{-1} - \dots - \theta_p q^{-p} = (1 - \phi_1 q^{-1} - \dots - \phi_r q^{-r})(1 - \pi_1 q^{-1} - \pi_2 q^{-2} - \dots) \quad (4.11)$$

En effectuant le produit des deux termes de droite et en égalant les coefficients pour chaque puissance de  $q^{-1}$ , on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \theta_1 = \phi_1 + \pi_1 \\ \theta_2 = \phi_2 - \phi_1 \pi_1 + \pi_2 \\ \theta_3 = \phi_3 - \phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2 + \pi_3 \\ \vdots \\ \theta_p = \phi_p - \phi_{p-1} \pi_1 - \phi_{p-2} \pi_2 - \dots - \phi_1 \pi_{p-1} + \pi_p \\ \vdots \\ \theta_i = \phi_i - \phi_{i-1} \pi_1 - \phi_{i-2} \pi_2 - \dots - \phi_1 \pi_{i-1} + \pi_i \\ \vdots \end{cases} \quad (4.12a)$$

Pour  $i > \text{maximum}(p, r)$  et sachant que  $\theta_i = 0$  pour  $i > p$  et  $\phi_i = 0$  pour  $i > r$ , on obtient :

$$\pi_i - \phi_1 \pi_{i-1} - \phi_2 \pi_{i-2} - \dots - \phi_r \pi_{i-r} = 0 \quad (4.12b)$$

On voit qu'à partir des équations (4.12a) et (4.12b), si les coefficients du polynôme inverse sont connus, on peut estimer les paramètres du modèle ARMA. L'algorithme d'estimation de ces paramètres, en utilisant la technique du polynôme inverse, est résumé dans les étapes suivantes :

**étape 1** : on commence par estimer les paramètres du modèle AR(m) avec  $m = \text{max}(p, r) + r$  en utilisant la technique des moindres carrés simples. Le choix de la variable  $m$  permet d'écrire les équations (4.12a) jusqu'à un indice  $i$  très supérieur à  $p$ , pour pouvoir, dans l'étape 2, estimer les paramètres de la partie MA. Autrement dit, on suppose que la série temporelle suit un modèle auto-régressif d'ordre très supérieur à  $p$  et on estime les  $m$  paramètres du modèle augmenté. Dans ces conditions, les paramètres obtenus sont les coefficients du polynôme inverse.



**étape 2** : ayant les paramètres  $\pi_i$  obtenus à l'étape précédente, on écrit l'équation (4.12b) pour  $i$  allant de  $r+1$  à  $m$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi_{r+1} - \phi_1 \pi_r - \phi_2 \pi_{r-1} - \dots - \phi_r \pi_1 = 0 \\ \pi_{r+2} - \phi_1 \pi_{r+1} - \phi_2 \pi_r - \dots - \phi_r \pi_2 = 0 \\ \vdots \\ \pi_m - \phi_1 \pi_{m-1} - \phi_2 \pi_{m-2} - \dots - \phi_r \pi_{m-r} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations peut se faire analytiquement et permet de déterminer les paramètres  $\phi_i$  de la partie MA.

**étape 3** : les deux étapes précédentes nous ont permis de déterminer les coefficients du polynôme inverse et les paramètres de la partie MA. On peut maintenant déterminer les paramètres de la partie AR en résolvant le système d'équation (4.12a). Pour cela, il suffit d'écrire les  $p$  premières équations.

Il existe une autre approche utilisant les mêmes principes que la méthode des coefficients du polynôme inverse, mais au lieu de diviser le polynôme  $\Theta(q^{-1})$  par  $\Phi(q^{-1})$ , on effectue la division inverse, c'est-à-dire  $\Phi(q^{-1})$  sur  $\Theta(q^{-1})$ .

Nous avons comparé les trois techniques sur des exemples de simulation et nous avons constaté que les deux premières techniques donnent d'assez bons résultats. Alors la dernière technique, bien qu'elle soit simple à mettre en oeuvre, ne fournit pas de meilleurs résultats. Cela est dû à l'approximation faite à l'étape 1 d'un processus ARMA par un processus AR. Dans la suite, nous ne nous contenterons donc que de la méthode des moindres carrés simples.

Pour clore la partie concernant l'estimation des paramètres AR et MA, on peut signaler qu'il existe plusieurs méthodes dans la littérature. Ces méthodes sont issues de la théorie de l'identification et de la commande des systèmes (Ljung et Soderstrom (1983), Young (1984), Stoica et al. (1987), Paarmann et Korenberg (1992)). Par ailleurs, dans la littérature, il existe une autre approche qui consiste à développer des techniques robustes par rapport à la présence de certaines perturbations (Martin et Thomson (1982), Tuan (1984), Bustos et Yohai (1986), Puthenpura et Sinha (1990), Ouladsine (1993a,b)).

### IV.3. DÉTECTION DE VALEURS ABERRANTES

Comme nous l'avons signalé précédemment, nous allons utiliser, dans ce paragraphe, les tests développés dans le chapitre II pour la détection de valeurs aberrantes ; on se limitera au quatre tests ; test des éléments diagonaux de la matrice de projection, test d'écart, rapport d'Andrews-Pregibon et rapport des variances. Nous présentons un exemple de simulation pour comparer ces différents tests.

#### IV.3.1. LES DIFFÉRENTS TESTS

Dans le domaine de la détection de valeurs aberrantes dans une série temporelle, Fox (1972) a été parmi les premiers à s'intéresser à ce type de problème. Il a proposé une méthode utilisant le test du rapport de vraisemblance. Elle consiste à tester deux hypothèses :  $H_0$  correspondant à l'absence de valeurs aberrantes et  $H_1$  correspondant à la présence de valeurs aberrantes. De même Muirhead (1986) utilise le logarithme de la fonction de vraisemblance dans un modèle auto-régressif mixte c'est-à-dire en présence des deux types de valeurs aberrantes. Bruce et Martin (1989) et Ledolter (1989) étendent la technique de la suppression d'une observation à un modèle ARIMA (Auto Regressive Integrate Moving Average) pour mesurer l'influence d'un ensemble d'observations sur l'estimation des paramètres et l'estimation de la variance de la séquence d'innovation. Abraham et Chuang (1989) adaptent une statistique, développée par Draper et John (1981) et utilisée dans un modèle linéaire, à des séries temporelles. Nous avons donc voulu apporter une contribution dans ce domaine en adaptant des tests énoncés dans le chapitre II. Nous allons nous limiter à quatre d'entre eux en ne donnant que les définitions et les informations importantes ; une étude plus détaillée a été présentée par Kobi (1992) et Kobi et al. (1993a).

### *Test des éléments de la matrice de projection*

La matrice de projection relie les mesures  $Y$  à leur estimée et porte aussi le nom de la matrice chapeau :

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (4.13a)$$

$$\hat{Y} = H Y \quad (4.13b)$$

La relation (4.13b) est obtenue dans le cas où les paramètres sont estimés par la technique des moindres carrés simples (équation 4.7). La forme scalaire de cette relation est donnée par l'expression (4.13c) :

$$\hat{y}_i = h_{ii} y_i + \sum_{j \neq i} h_{ij} y_j \quad t = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n \quad (4.13c)$$

où  $h_{ii}$  sont les éléments diagonaux de la matrice de projection. On a vu dans le chapitre II, avec la relation (2.13), que les éléments de la matrice  $H$  sont compris entre 0 et 1. Nous avons montré, dans le chapitre II paragraphe II.2.2, que l'analyse de l'amplitude des éléments diagonaux  $h_{ii}$  de la matrice de projection permet de détecter des éventuelles valeurs aberrantes. Le seuil critique que nous avons élaboré est égal à  $3p/n$ , où  $p$  est l'ordre du modèle AR et  $n$  est le nombre d'observations.

### *Test des écarts normalisés*

Le test des écarts normalisés consiste à calculer l'écart entre la mesure et son estimée, puis à le normaliser par une estimation de la variance de la séquence d'innovation. L'expression de cet écart est donnée dans le paragraphe II.2.3 par la formule (2.21a). Sous certaines hypothèses

concernant le résidu  $\varepsilon$  et en l'absence de défaut, l'écart normalisé suit une loi normale de moyenne nulle et de variance 1. Par conséquent, toute valeur qui dépasse le seuil critique, donné par les tables de la loi normale pour un niveau de confiance  $\alpha$ , est considérée comme une valeur aberrante. Nous pouvons aussi utiliser les tests énoncés dans le chapitre III pour vérifier la normalité du vecteur d'écart.

### *Rapport d'Andrews-Pregibon*

Le test d'Andrews-Pregibon (1978) a été conçu pour mettre en évidence les observations qui ont une grande influence sur les paramètres dans une régression linéaire. Son utilisation dans un processus auto-régressif est donc immédiate. Il suffit de déterminer la matrice  $X^*$  qui correspond à la matrice  $X$  augmentée par le vecteur  $Y$  et de faire un test sur une fonction de cette matrice qui contient toutes les informations disponibles du processus considéré. Le test d'Andrews-Pregibon consiste alors à calculer le rapport des deux déterminants, c'est-à-dire :

$$AP_i = \frac{\det(X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^*)}{\det(X^{*T} X^*)} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

où  $X_{(i)}^*$  désigne la matrice  $X^*$  dont la  $i$ ème observation est supprimée. Cette suppression nous permet de mesurer le changement que peut engendrer l'observation  $i$  et de savoir si cette observation apporte des informations nouvelles. La valeur de ce rapport est comparée à une valeur critique que nous avons fixée à 0.95 lorsque le nombre d'observations est très grand. Dans la pratique, le numéro de l'observation suspecte étant inconnu, la recherche doit donc être effectuée pour chaque suppression de mesure et pour chaque observation.

### *Rapport de variance des paramètres*

Le test du rapport de variance des paramètres, élaboré par Belsley et al. (1980), correspond au calcul de l'influence de chaque observation sur la variance des paramètres. Pratiquement, on calcule la variance du vecteur des paramètres avec toutes les observations et ensuite on recalcule la variance du vecteur des paramètres en supprimant une observation. Le rapport de ces deux variances nous permet de mesurer l'influence que peut avoir cette observation sur la variance des paramètres. Ce test est défini par l'expression suivante :

$$CVR_i = \frac{\det[\hat{\sigma}^2(i)(X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1}]}{\det[\hat{\sigma}^2(X^T X)^{-1}]} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.15)$$

où  $\hat{\sigma}^2(i)$  désigne l'estimation de la variance du résidu en n'utilisant que les  $n-1$  observations, c'est-à-dire en supprimant l'observation  $i$ . Le test CVR, en l'absence de défaut, est égal à 1. Par conséquent, en tolérant une marge d'erreur, nous pouvons donc utiliser ce test pour la détection de valeurs aberrantes.

Comme le rapport d'Andrews-Pregibon, ce test doit être effectué pour chaque observation puisque dans la pratique l'instant d'apparition de la valeur aberrante est inconnu.

### IV.3.2. ÉTUDE COMPARATIVE

Dans cette partie, nous étudions le comportement des tests énoncés précédemment dans un modèle auto-régressif en présence des deux types de valeurs aberrantes. Nous avons effectué deux essais, le premier avec une valeur aberrante additive et le deuxième avec une valeur aberrante innovée. Dans les deux cas, la valeur aberrante est placée à l'instant  $t = 100$  et d'amplitude égale à 4. Nous considérons donc un modèle auto-régressif simulé d'ordre  $p = 2$ , défini par son équation génératrice (4.16a) et son équation de mesure (4.16b) :

$$z_t = 0.9z_{t-1} - 0.6z_{t-2} + \varepsilon_t \quad t = 3, \dots, 200 \quad (4.16a)$$

$$y_t = \begin{cases} z_t & \text{pour } t \neq 100 \\ z_{100} + 4 & \text{pour la valeur aberrante additive} \\ z_{100} \text{ et } \varepsilon_{100} = 4 & \text{pour la valeur aberrante innovée} \end{cases} \quad (4.16b)$$

où  $\varepsilon_t = N(0, 1)$  est une séquence aléatoire représentant un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 1. Pour initialiser la série  $z_t$ , on prend  $z_1 = \varepsilon_1$  et  $z_2 = 0.9z_1 + \varepsilon_2$ .

Les figures IV.3(a) et IV.3(b) présentent l'évolution de la série de mesures respectivement pour une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée. Pour mieux mettre en évidence le comportement de chaque test en présence de ces valeurs aberrantes, nous regroupons les résultats pour les deux types de valeurs aberrantes. Les figures IV.4(a), IV.4(b), IV.4(c) et IV.4(d) indiquent l'évolution de ces tests pour une valeur aberrante additive et les figures IV.4(e), IV.4(f), IV.4(g) et IV.4(h) pour une valeur aberrante innovée. Le tableau IV.1 détaille les valeurs numériques des tests au voisinage de l'instant 100.

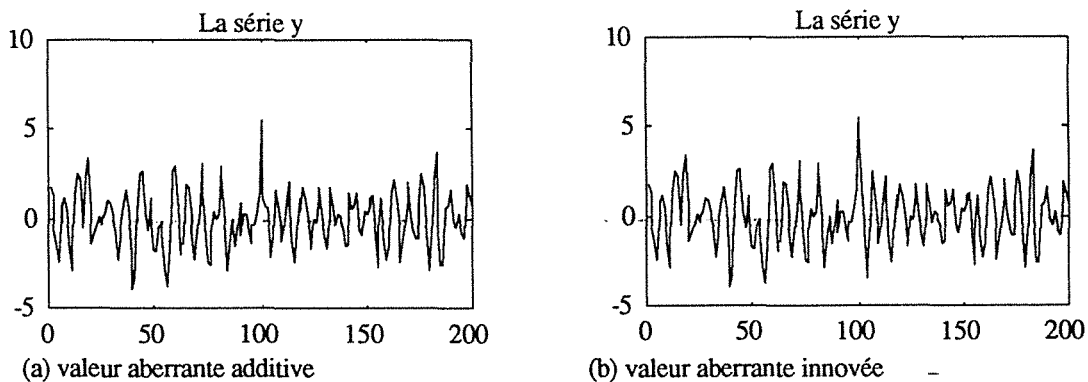
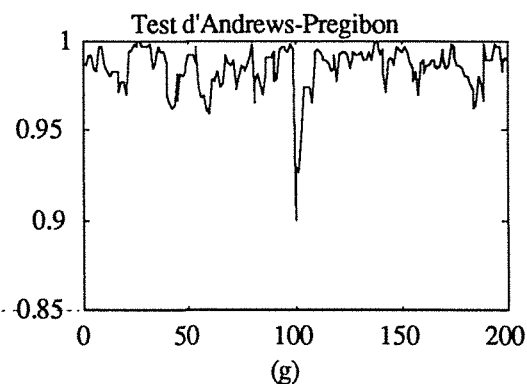
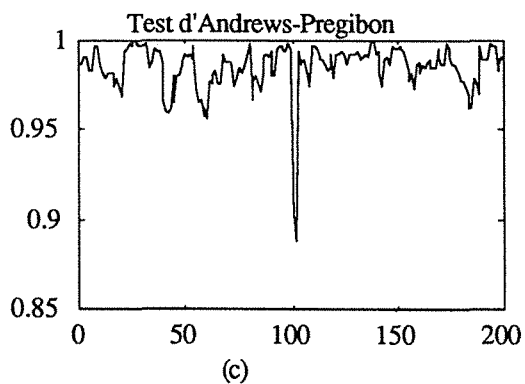
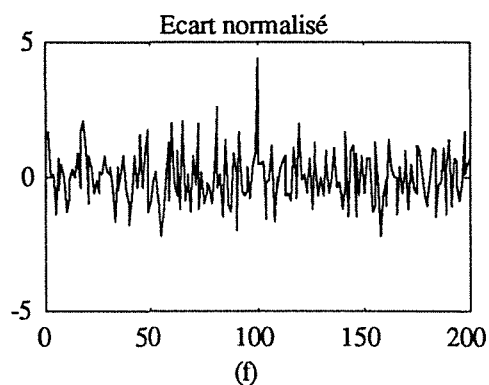
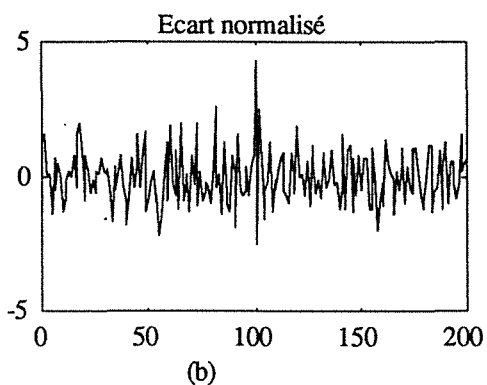
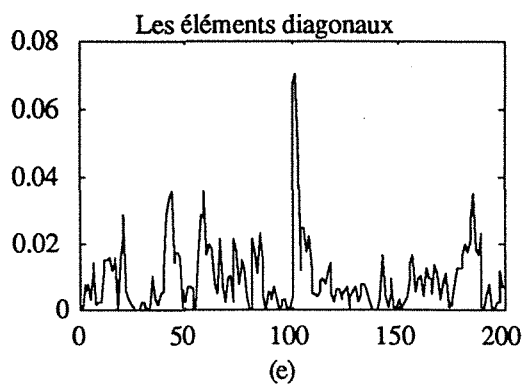
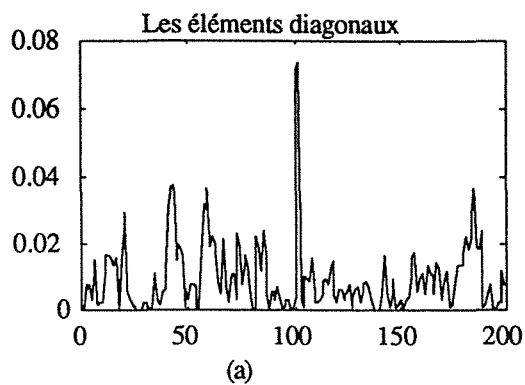


Figure IV.3 - Sortie  $y_t$  du modèle avec défaut

D'après les différentes courbes de la figure IV.4 et le tableau IV.1 qui présente les valeurs des différents tests au voisinage de l'instant de défaut, on remarque que les tests réagissent

différemment en fonction du type de valeurs aberrantes. Pour le test des écarts normalisés, on a pratiquement la même valeur dans le cas type I et type II à l'instant 100. On peut déjà conclure, à partir de cette étude comparative et d'autres essais en simulation, que le test d'écart permet sans ambiguïté de détecter l'instant d'apparition de la valeur aberrante (la valeur de l'écart normalisé à l'instant 100 est supérieure à  $3\sigma$ ) mais on ne peut distinguer ou identifier le type de cette valeur aberrante.



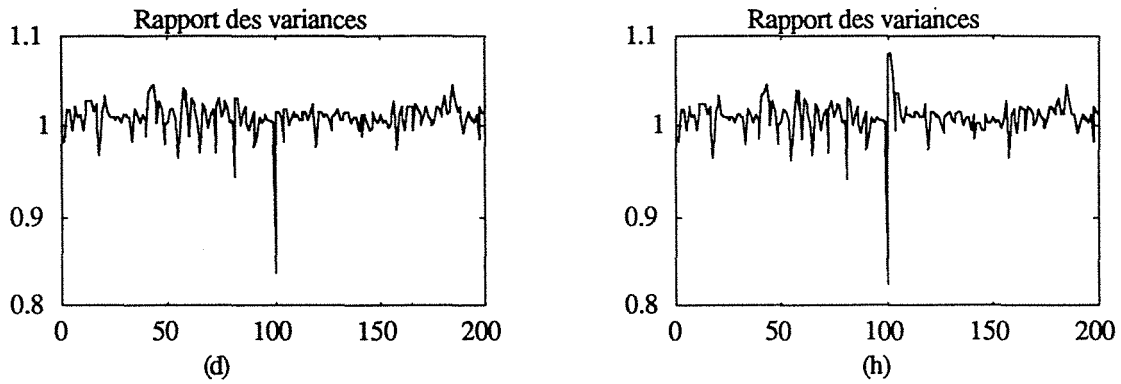


Figure IV.4 - Évolution des différents tests : (a), (b), (c) et (d) pour valeur aberrante additive et (e), (f), (g) et (h) pour valeur aberrante innovée

i	éléments $h_{ij}$		écarts normalisés $e_{ni}$		$AP_i$		$CVR_i$	
	type I	type II	type I	type II	type I	type II	type I	type II
95	0.002	0.002	-0.508	-0.522	0.996	0.996	1.009	1.009
96	0.003	0.003	0.384	0.395	0.996	0.996	1.012	1.012
97	0.003	0.003	-0.711	-0.731	0.994	0.994	1.008	1.008
98	0.000	0.001	0.406	0.417	0.999	0.998	1.008	1.008
99	0.001	0.001	0.847	0.871	0.995	0.995	1.004	1.003
100	0.004	0.004	<b>4.268</b>	<b>4.388</b>	<b>0.901</b>	<b>0.899</b>	<b>0.835</b>	<b>0.826</b>
101	<b>0.071</b>	<b>0.067</b>	-2.469	0.538	<b>0.904</b>	<b>0.929</b>	1.017	<b>1.079</b>
102	<b>0.073</b>	<b>0.070</b>	2.511	0.501	<b>0.888</b>	<b>0.926</b>	1.016	<b>1.083</b>
103	0.003	<b>0.048</b>	0.612	0.665	0.994	<b>0.947</b>	1.009	<b>1.057</b>
104	0.0012	0.012	-1.613	-1.585	0.987	0.975	0.985	0.996
105	0.0110	0.025	-0.431	-0.162	0.988	0.974	1.019	1.034

Tableau IV.1 - Valeurs des différents tests entre les observations 95 et 105

En ce qui concerne les éléments diagonaux de la matrice  $H$ , on voit que ce test présente des valeurs supérieures au seuil, qui a été fixé à  $3 p/n$ , soit 0.03, dans les deux cas. Mais leur nombre diffère d'un type à l'autre ; deux ( $p=2$ ) pour une valeur aberrante additive et trois pour une valeur aberrante innovée. Dans le cas de la valeur aberrante additive, ce résultat était prévisible car la mesure  $y_{100}$  est présente deux fois dans la matrice  $X$ . On peut aussi expliquer ce résultat en utilisant la définition des éléments diagonaux de la matrice  $H$ , soit :

$$h_{ii} = x_i (X^T X)^{-1} x_i^T \quad (4.17)$$

Or, dans le cas d'un modèle auto-régressif d'ordre 2,  $x_i$  est un vecteur ligne de dimension  $1 \times 2$ . Ce qui nous donne pour des éléments  $h_{ii}$ , aux instants 100, 101 et 102, les expressions suivantes :

$$h_{100} = (y_{99} \ y_{98}) (X^T X)^{-1} (y_{99} \ y_{98})^T$$

$$h_{101} = (y_{100} \ y_{99}) (X^T X)^{-1} (y_{100} \ y_{99})^T$$

$$h_{102} = (y_{101} \ y_{100}) (X^T X)^{-1} (y_{101} \ y_{100})^T$$

On constate donc que la mesure  $y_{100}$  est présente deux fois ( $p=2$ ) dans  $h_{101}$  et  $h_{102}$ , ce qui explique les deux valeurs extrêmes de la première colonne du tableau IV.1. Par contre, dans le cas d'une valeur aberrante innovée, on dénombre trois valeurs supérieures au seuil, valeurs en gras. Les essais en simulation ont montré qu'en présence de valeur aberrante innovée, le test des éléments diagonaux de la matrice H présente au moins  $p+1$  valeurs supérieures au seuil.

Dans le tableau IV.1, on constate aussi que le test d'Andrews-Pregibon réagit différemment en fonction du type de valeur aberrante. Dans le cas de la valeur aberrante additive, le test présente trois valeurs anormales par rapport aux autres valeurs. On rappelle que la valeur du test, dans le cas d'absence de valeurs aberrantes, doit être égale à 1, alors que pour la valeur aberrante innovée, le test présente plus de trois valeurs inférieures au seuil. Le nombre de ces valeurs anormales dépend essentiellement de l'ordre du modèle et de l'amplitude de la valeur aberrante. Aussi, dans le cas de la valeur aberrante innovée, la variable de test ne retrouve pas immédiatement sa valeur normale à partir de l'observation 102. Cela montre que le défaut s'est propagé ; cette propagation dépend elle aussi de l'amplitude de la valeur aberrante, de l'ordre et des paramètres du modèle. Par contre, dans le cas d'une valeur aberrante additive, on retrouve la valeur normale du test juste après l'observation 102.

Pour le test du rapport de variances, on obtient pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus par le test d'Andrews-Pregibon.

On conclut de ces essais comparatifs et des autres essais en simulation que :

- le test des écarts normalisés détecte les valeurs aberrantes mais ne peut les différencier,
- les éléments de la matrice de projection, le test AP et le test CVR détectent les valeurs aberrantes des deux types. De plus leur comportement diffère d'un type à l'autre, ce qui permet de les différencier,

- pour le test des éléments diagonaux, le seuil est fonction de l'ordre du modèle, qui n'est pas toujours connu, et du nombre d'observations, alors que le seuil pour le test d'Andrews-Pregibon dépend lui aussi de ces paramètres, mais dans le cas où le nombre d'observations est très grand, ce seuil peut être fixe. Le calcul du test CVR est beaucoup plus complexe que le test AP car il fait intervenir le calcul de l'estimation de la variance  $\sigma^2$ . Pour la procédure de détection et pour la suite, on retiendra donc le test d'Andrews-Pregibon pour détecter et identifier les valeurs aberrantes.

#### IV.4. ESTIMATION DE L'AMPLITUDE DES VALEURS ABERRANTES

Nous venons de montrer comment détecter et localiser une erreur que ce soit une valeur aberrante additive ou une valeur aberrante innovée ; afin de pouvoir proposer un diagnostic plus complet, la détection de ces valeurs aberrantes est complétée par l'estimation de leur amplitude. Cette estimation nous permet par la suite de corriger les erreurs ainsi caractérisées.

Dans le cas où la série temporelle est modélisée par un modèle AR(p) de type (4.1),  $y_t$  étant la valeur observée (mesurée), on suppose qu'on dispose d'une estimation des paramètres  $\theta_i$  du modèle et que l'instant d'apparition du défaut est connu. On définit alors une nouvelle variable qui correspond au résidu de l'équation du modèle AR, notée  $\eta_t$ , par :

$$\eta_t = \Theta(q^{-1})y_t \quad (4.18)$$

En absence de valeurs aberrantes et sous les hypothèses du paragraphe IV.1, cette variable suit une loi de distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma$ . Autrement dit, la variable  $\eta_t$  est l'image de la séquence aléatoire  $\varepsilon_t$ . Par contre, en présence de valeurs aberrantes, l'expression de la variable  $\eta_t$  est différente selon qu'on a une valeur aberrante additive ou une valeur aberrante innovée. Nous allons donc écrire l'expression de cette variable dans les deux cas pour estimer l'amplitude de la valeur aberrante.

##### IV.4.1. VALEUR ABERRANTE INNOVÉE

Nous avons vu qu'en présence d'une valeur aberrante innovée, la variable  $y_t$  peut être modélisée par l'expression (4.5) ; à partir de cette expression et de la relation (4.18), on en déduit la formule suivante :

$$\eta_t = \omega \delta_{t,d} + \varepsilon_t \quad (4.19a)$$

On remarque que si  $\omega = 0$ , autrement dit s'il n'y a pas de valeur aberrante, la variable  $\eta_t$  est une estimée de la séquence d'innovation  $\varepsilon_t$ . L'équation (4.19a) peut s'écrire sous une forme matricielle, pour les  $n$  observations :



$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{d-1} \\ \eta_d \\ \eta_{d+1} \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d-1} \\ \varepsilon_d \\ \varepsilon_{d+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

A partir de cette équation et en utilisant les moindres carrés simples, on peut estimer la valeur de l'amplitude de la valeur aberrante. Soit, si  $d$  désigne l'instant d'apparition de défaut :

$$\hat{\omega} = \eta_d \quad (4.20)$$

Cette expression montre que malgré la complexité du modèle (4.5) caractérisant la valeur aberrante innovée, le calcul de l'amplitude de cette aberration est très facile et ne dépend que de la variable  $\eta_t$ .

#### IV.4.2. VALEUR ABERRANTE ADDITIVE

D'après l'expression de  $y_t$ , (4.4), dans le cas de la présence d'une valeur aberrante additive, et de la relation (4.18), la variable  $\eta_t$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\eta_t = \omega \Theta(q^{-1}) \delta_{t,d} + \varepsilon_t \quad (4.21a)$$

Cette équation permet d'estimer l'amplitude  $\omega$ . En effet, pour l'ensemble des observations, nous avons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{d-1} \\ \eta_d \\ \eta_{d+1} \\ \vdots \\ \eta_{d+p} \\ \eta_{d+p+1} \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \omega + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d-1} \\ \varepsilon_d \\ \varepsilon_{d+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d+p} \\ \varepsilon_{d+p+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad (4.21b)$$

L'estimation de la variable  $\omega$  s'obtient alors par la technique des moindres carrés simples :

$$\hat{\omega} = (M^T M)^{-1} M^T N \quad (4.22a)$$

et si on développe cette expression, on obtient une écriture beaucoup plus simple mettant en évidence les différents paramètres du modèle :

$$\hat{\omega} = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_p^2)^{-1} \sum_{i=1}^p (\eta_d + \theta_i \eta_{d+i}) \quad (4.22b)$$

Ainsi quelque soit le type de la valeur aberrante, si les paramètres du modèle sont connus, il est possible de caractériser l'amplitude de cette valeur aberrante. En effet, à partir des expressions (4.20) et (4.22), les valeurs des estimées des amplitudes ne dépendent que des paramètres du modèle et de la variable  $\eta_t$ . Cette dernière dépend elle aussi des paramètres du modèle et des mesures de la sortie de la série temporelle.

## IV.5. PROCÉDURE DE DÉTECTION

### IV.5.1. LOCALISATION, IDENTIFICATION ET CORRECTION

On peut maintenant regrouper les résultats précédents afin de proposer une procédure complète de diagnostic des valeurs aberrantes. Cette procédure de détection comporte quatre étapes : la localisation de l'instant d'apparition de la valeur aberrante, l'identification du type de valeurs aberrantes, l'estimation de son amplitude et enfin la correction de la mesure en défaut.

#### *Localisation*

A partir des mesures  $y_t$ , on calcule pour chaque observation le rapport  $AP_i$ . Ce rapport est comparé à une valeur seuil, on prend en général 1 mais on tolère une erreur de plus ou moins 5%, soit 0.95. Cette règle nous permet donc de localiser l'instant d'apparition de la valeur aberrante.

#### *Identification*

Après la localisation, on détermine le type de valeur aberrante. Soit  $d$  l'instant de sa localisation. Si la valeur du rapport  $AP$ , aux instants  $d+1, d+2, \dots, d+p$  dépasse le seuil fixé et si la valeur du test à l'instant  $d+p+1$  ne le dépasse pas, alors il s'agit d'une valeur aberrante additive (type I). Par contre, si au moins les  $p+1$  valeurs suivantes (à partir de l'instant  $d$ ) dépassent le seuil, alors il s'agit d'une valeur aberrante innovée (type II).

#### *Estimation de l'amplitude*

L'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante est donnée par la formule (4.22b) s'il s'agit d'une valeur aberrante additive. Sinon, on utilise la formule (4.20). Dans cette étape, on a besoin des paramètres du modèle ; si ces paramètres sont inconnus, on peut les estimer en utilisant une des méthodes énoncées au paragraphe IV.1.

### Correction

Une fois l'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante calculée, on peut corriger la ou les mesures en défaut de la série  $y$ . Supposons que l'instant d'apparition de la valeur aberrante est  $d$  et notons par  $y^*$  la série corrigée.

Si la valeur aberrante est additive, on obtient alors :

$$y_t^* = \begin{cases} y_t & \text{si } t \neq d \\ y_t - \hat{\omega} & \text{si } t = d \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $\hat{\omega}$  est donnée par la relation (4.22b).

Dans le cas où la valeur aberrante est innovée, la correction se fait de la manière suivante :

$$y_t^* = \begin{cases} y_t & \text{pour } t = 1, \dots, d-1 \\ y_t - \pi_{t-d} \hat{\omega} & \text{pour } t = d, \dots, n \end{cases} \quad (4.24)$$

où les  $\pi_i$  sont les coefficients du polynôme  $\Pi(q^{-1}) = \left( \Theta(q^{-1}) \right)^{-1}$  et  $\hat{\omega}$  est donnée par la relation (4.20). A partir d'un certain indice, les coefficients du polynôme  $\Pi(q^{-1})$  tendent vers zéro puisque nous avons supposé que le polynôme  $\Theta(q^{-1})$  admet des zéros à l'extérieur du cercle unité. Par conséquent, la correction est limitée dans le temps.

#### IV.5.2. EXEMPLES D'APPLICATION

Pour illustrer la procédure, nous utilisons l'exemple déjà présenté dans l'étude comparative. Nous considérons deux essais, le premier concerne une valeur aberrante additive introduite à l'instant 100 et d'amplitude 4 et pour le deuxième, il s'agit d'une valeur aberrante innovée.

**Essai 1 :** nous nous intéressons à l'évolution du rapport d'Andrews-Pregibon, la figure IV.5(a) montre cette évolution. Nous constatons que ce rapport dépasse le seuil aux instants 100, 101 et 102 ; par conséquent, la valeur aberrante est bien une valeur aberrante additive. Nous procédons maintenant à l'estimation de l'amplitude de cette valeur aberrante, en utilisant, bien évidemment, les équations correspondantes à ce type d'erreur. L'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante est donnée par l'expression (4.22b), on obtient la valeur **4.115**. Avec cette valeur nous pouvons corriger les mesures en défaut. A cette étape, nous disposons d'une série corrigée et nous allons vérifier s'il n'existe pas d'autres valeurs aberrantes. Cette vérification se fait en calculant de nouveau le rapport d'Andrews-Pregibon pour toutes les observations ; la figure IV.5(b) montre l'évolution de cette variable. On voit clairement que ce rapport ne présente aucune valeur anormale. La procédure du diagnostic est alors "complète".

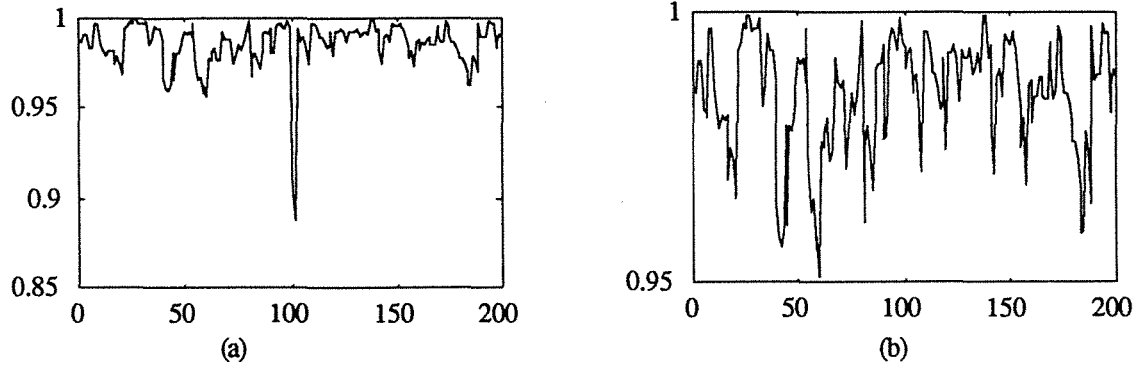


Figure IV.5 - Évolution du rapport d'Andrews-Pregibon : (a) avant correction et (b) après correction

**Essai 2** : nous nous intéressons maintenant aux valeurs aberrantes innovées ; la procédure d'analyse adoptée est la même que dans le premier essai. La figure IV.6(a) montre l'évolution du rapport d'Andrews-Pregibon où on voit clairement le dépassement du seuil aux instants 100, 101, 102, .... Par rapport au cas précédent, on ne retrouve pas immédiatement la valeur normale après l'instant 102 ; cette constatation nous permet d'affirmer qu'il s'agit d'une valeur aberrante innovée et par conséquent l'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante est donnée par l'expression (4.20), soit **4.528**. On passe à l'étape de correction en utilisant les équations (4.24), ce qui nous donne une nouvelle série pour laquelle on applique de nouveau la procédure de détection ; comme le montre la figure IV.6(b), la procédure est donc terminée.

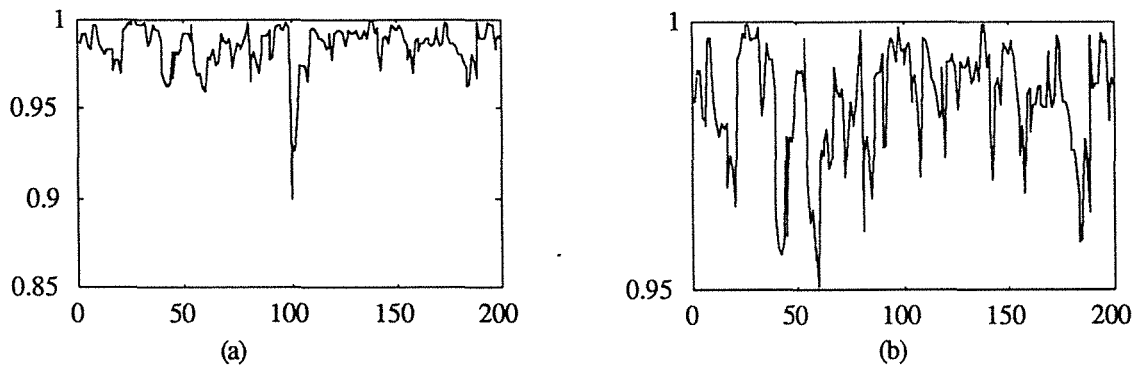


Figure IV.6 - Évolution du rapport d'Andrews-Pregibon : (a) avant correction et (b) après correction

### IV.5.3. ROBUSTESSE ET SIMULATION DE MONTE CARLO

Dans le but d'étudier les performances de la procédure de détection de valeurs aberrantes élaborée précédemment, nous avons réalisé une étude de type Monte Carlo tenant compte du nombre de valeurs aberrantes présentes dans le signal, de l'amplitude de ces valeurs aberrantes, de la connaissance ou non de l'ordre et des paramètres du modèle. Pour chaque cas étudié, nous avons effectué 100 réalisations et ceci pour les valeurs aberrantes additives et innovées.

La série temporelle étudiée dans cette partie a été simulée avec un modèle auto-régressif d'ordre deux dont l'équation de mesure est donnée par la relation (4.16a). Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus avec une seule valeur aberrante (additive ou innovée) en faisant varier l'amplitude de cette aberration et en sous ou surévaluant l'ordre du modèle. Dans un deuxième temps, on réalise les mêmes essais que précédemment mais avec plusieurs valeurs aberrantes (additives ou innovées) présentes dans la série temporelle. Les figures IV.7 et IV.8 présentent respectivement les taux de détection obtenus avec une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée. Le taux de détection correspond au nombre de fois où on a détecté le défaut et identifié la nature de la valeur aberrante.

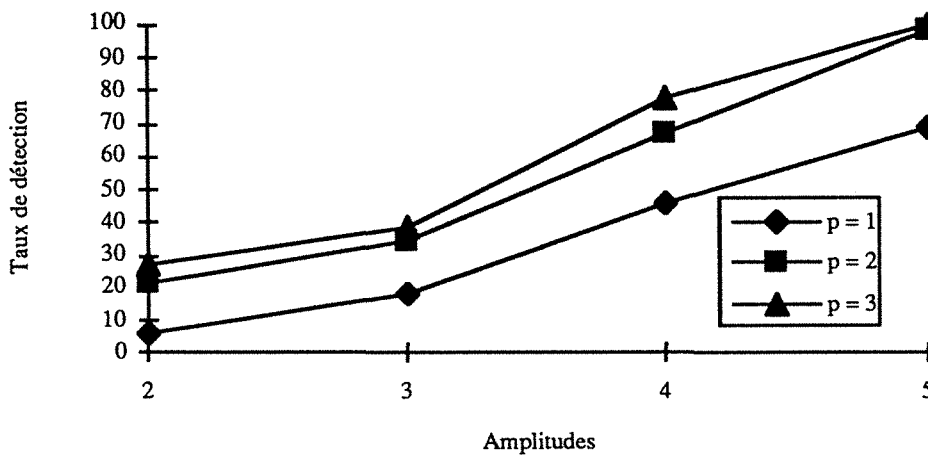


Figure IV.7 - Taux de détection pour une valeur aberrante additive

Les trois courbes représentent le taux de détection en fonction de l'amplitude de la valeur aberrante et en fonction de l'ordre du modèle. Dans le cas où  $p$  est égal à un, on a une sous-évaluation de l'ordre et pour  $p$  égal à trois, on a une surévaluation de l'ordre. On constate, à partir de la figure IV.7, qu'en présence d'une valeur aberrante additive le taux de détection augmente quand l'amplitude de la valeur aberrante augmente. De même, le taux de détection pour une surévaluation de l'ordre est presque identique que dans le cas d'une réalisation avec l'ordre exact. Par contre, lorsque l'ordre du modèle est sous-évalué, le taux de détection est très faible et il atteint 69% pour une amplitude de 5.

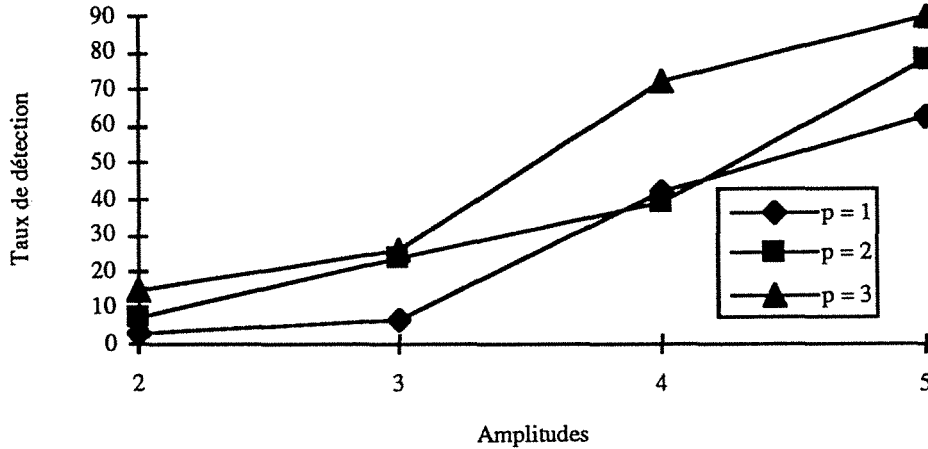


Figure IV.8 - Taux de détection pour une valeur aberrante innovée

En ce qui concerne le taux de détection pour une valeur aberrante innovée, il est au voisinage de 63% pour une sous-évaluation de l'ordre, de 78% pour un ordre exact et de 90% pour une surévaluation dans le cas où l'amplitude de la valeur aberrante est égale à 5. Comme nous l'avons signalé précédemment, une valeur aberrante innovée se propage au cours du temps. Cette propagation dépend de l'amplitude de la valeur aberrante, des paramètres du modèle et de l'ordre du modèle. Ceci peut expliquer les résultats fluctuants au niveau de la valeur de l'amplitude égale à 4.

Dans les figures IV.7 et IV.8, nous avons présenté le taux de détection en fonction de l'amplitude, de l'ordre du modèle et de la nature de valeurs aberrantes. Ce taux de détection correspond au cas où nous avons détecté la valeur aberrante et identifié son type. Si on s'intéresse maintenant uniquement à la détection de valeurs aberrantes sans tenir compte de leur nature, on obtient les résultats présentés dans les figures IV.9 et IV.10. Le pourcentage de détection correspond donc au nombre de fois que nous avons détecté la présence d'une valeur aberrante. On remarque que ce pourcentage est beaucoup plus important que le taux de détection calculé dans les cas précédents.

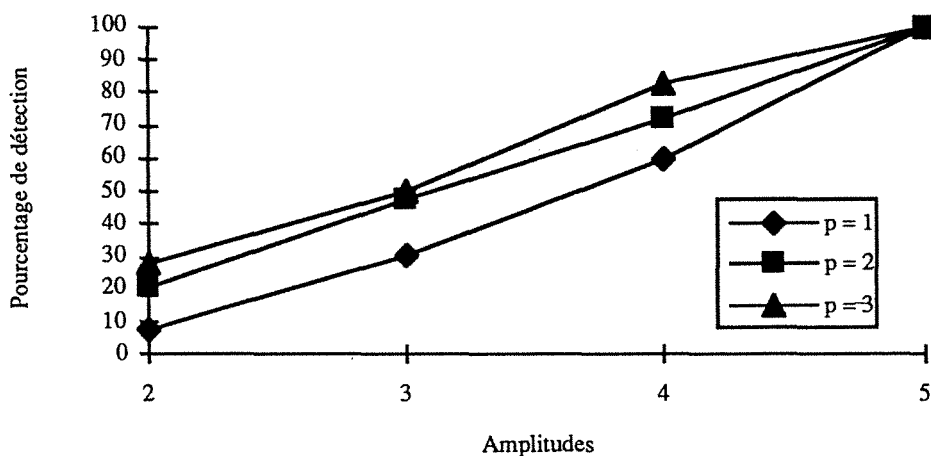


Figure IV.9 - Pourcentage de détection pour une valeur aberrante additive

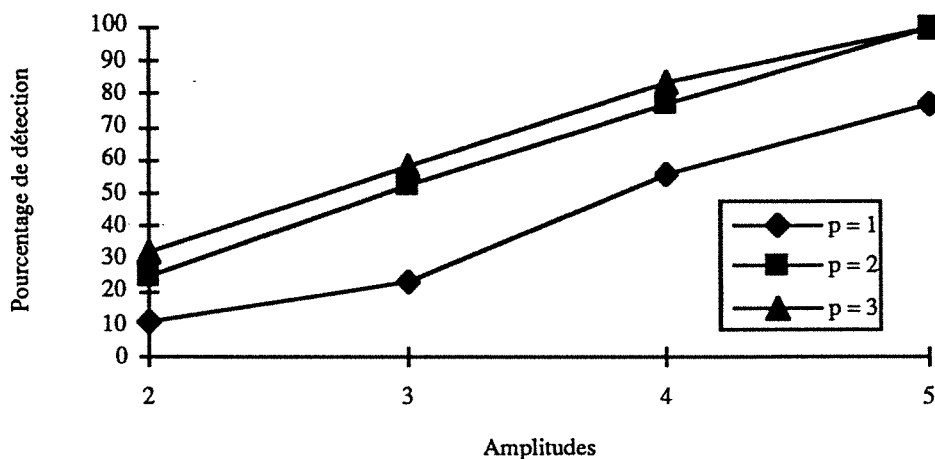


Figure IV.10 - Pourcentage de détection pour une valeur aberrante innovée

Nous avons effectué par la suite les mêmes essais, mais en créant deux valeurs aberrantes dans la série de mesure. Nous avons fait varier d'une part l'ordre du modèle et d'autre part l'amplitude de ces valeurs aberrantes (innovées ou additives). Pour alléger la présentation, nous présentons uniquement les résultats obtenus pour des amplitudes égales à 4 et 5. Le tableau IV.2 donne le taux de détection de ces valeurs aberrantes dans les différentes situations. Nous rappelons que nous avons effectué 100 réalisations pour chaque cas et que le taux de détection est déterminé dans le cas où nous avons à la fois détecté la valeur aberrante et identifié son type.

Type de valeurs aberrantes	Valeurs aberrantes additives		Valeurs aberrantes innovées	
	4	5	4	5
Ordre sous évalué	42%	60%	30%	48%
Ordre exact	52%	88%	29%	52%
Ordre sur évalué	66%	96%	52%	54%

Tableau IV.2 - Taux de détection pour deux valeurs aberrantes

Le tableau IV.2 présente les résultats obtenus pour les deux types de valeurs aberrantes. On constate que pour des valeurs aberrantes additives, les résultats sont sensiblement les mêmes que dans le cas précédent. Par contre, pour les valeurs aberrantes innovées, le taux de détection est faible par rapport au cas précédent. Cette constatation a été vérifiée en effectuant des essais avec trois valeurs aberrantes (additives ou innovées), en faisant varier l'ordre du modèle et l'amplitude de ces valeurs aberrantes. Ceci est dû à la nature des valeurs aberrantes innovées qui se propagent au cours du temps. Cette propagation dépend de plusieurs facteurs (ordre du processus, paramètres du modèle et l'amplitude de la valeur aberrante).

En conclusion de ces essais, on peut dire que pour pouvoir détecter des éventuelles valeurs aberrantes et avoir un taux de détection appréciable, il faut que l'amplitude de ces erreurs soit au moins supérieure à un seuil généralement pris égal à 3 fois l'écart-type du signal. En ce qui concerne le nombre de valeurs aberrantes, étant donné le caractère séquentiel de la procédure,

on détecte la première valeur aberrante, ensuite on estime son amplitude et on corrige les mesures en défaut. La procédure est ensuite appliquée à la nouvelle série de mesures ce qui permet de détecter les autres valeurs aberrantes et ainsi de suite jusqu'à épuration complète de toutes les erreurs de la série.

Lorsque l'ordre du modèle est inconnu, la procédure donne de bons résultats au niveau de la détection et de la localisation. Par contre, pour l'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante, nous n'obtenons pas la valeur exacte car l'estimation de cette dernière dépend des paramètres du modèle. Ce problème est plus fréquent lorsqu'on sous évalue l'ordre du modèle. Dans le cas de la sur évaluation, les paramètres surabondants tendent en général vers zéro et la procédure n'est pas affectée par cette surévaluation.

De plus, si on s'intéresse uniquement à la détection de valeurs aberrantes sans se soucier de leur nature, la procédure de détection utilisant le rapport d'Andrews-Pregibon donne de bons résultats. On obtient, par exemple, un pourcentage de détection de 100% pour des valeurs aberrantes d'amplitudes supérieures ou égales à trois fois l'écart-type du signal.

## IV.6. EXTENSION AU MODÈLE AUTO RÉGRESSIF VECTORIEL

### IV.6.1. GÉNÉRALITÉS

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas multi-variables, c'est-à-dire lorsqu'on a plusieurs sorties qui sont connectées entre elles et que chacune d'elles suit un modèle auto-régressif d'ordre  $p$ . Ces différentes variables de sortie forment donc un vecteur ; on parle alors du modèle Auto-régressif Vectoriel d'ordre  $p$  ARV( $p$ ). La forme générale de ce modèle est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\Phi(q^{-1})Z_t = E_t \quad (4.25a)$$

où  $Z_t$  est le vecteur des mesures de toutes les sorties à l'instant  $t$ ,  $Z_t = (z_t^1 \ z_t^2 \ \dots \ z_t^k)$  et  $E_t = (\varepsilon_t^1 \ \varepsilon_t^2 \ \dots \ \varepsilon_t^k)$  correspond au vecteur de résidus. Les différentes composantes du vecteur  $E_t$  sont supposées être indépendantes et représentent un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma$ . La matrice polynomiale  $\Phi(q^{-1})$  est définie par :

$$\Phi(q^{-1}) = (I - \Phi_1 q^{-1} - \dots - \Phi_p q^{-p})$$

où les matrices  $\Phi_f$  ( $f = 1, \dots, p$ ) sont de dimension  $k \times k$ , avec  $k$  le nombre de variables de sortie.

L'expression (4.25a) peut aussi s'écrire sous une forme scalaire, obtenue en explicitant chacune des composantes du vecteur  $Z_t$ , soit :



$$z_t^i = \sum_{j=1}^k \sum_{f=1}^p \varphi_{fij} q^{-f} z_t^j + \varepsilon_t^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, k \quad (4.25b)$$

où  $\varphi_{fij}$  sont les éléments des matrices  $\Phi_f$  et où la notation  $z_t^i$  indique la mesure de la variable de sortie numéro  $i$  à l'instant  $t$ .

Afin de mieux comprendre les différentes écritures ci-dessus, nous allons prendre l'exemple illustratif de deux sorties qui obéissent au système d'équations suivant :

$$z_t^1 = 0.4 z_{t-1}^1 + 0.5 z_{t-1}^2 + \varepsilon_t^1 \quad (4.25c)$$

$$z_t^2 = 0.48 z_{t-1}^1 + 0.2 z_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2$$

Pour cet exemple,  $k$  est égal à 2 et  $p$  est égal à 1. On voit que la première sortie dépend de sa valeur retardée et qu'elle est en même temps reliée à la deuxième sortie. La deuxième équation fait apparaître les mêmes phénomènes.  $\varepsilon_t^1$  et  $\varepsilon_t^2$  représentent les résidus respectifs pour ces deux sorties. Les équations ci-dessus peuvent s'écrire sous une forme plus générale en faisant apparaître la matrice polynomiale  $\Phi(q^{-1})$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.48 & 0.2 \end{pmatrix} q^{-1}}_{\Phi(q^{-1})} \underbrace{\begin{bmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{bmatrix}}_{Z_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{bmatrix}}_{E_t} \quad (4.25d)$$

Cet exemple illustratif d'un modèle ARV(1) peut aussi être représenté par un schéma bloc. La figure IV.11 ci-après montre cette représentation et nous permet de voir les connexions qui existent entre les deux sorties.

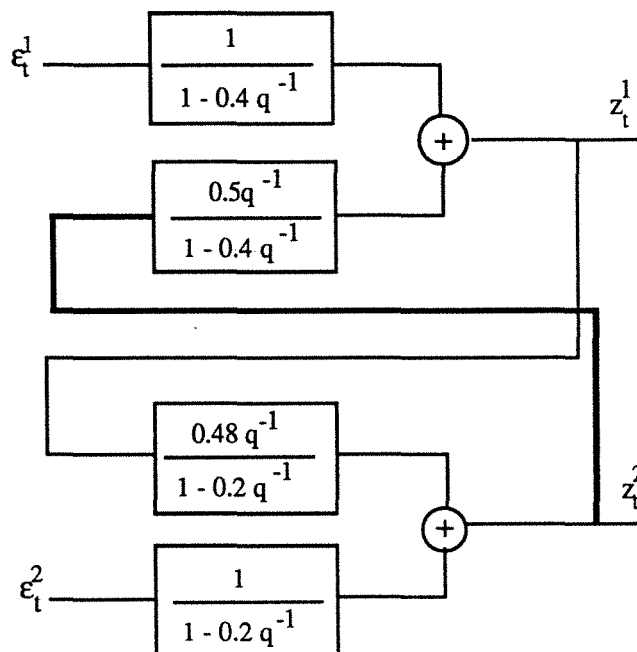


Figure IV.11 - Schéma bloc d'un modèle ARV d'ordre 1

Dans la littérature, le modèle ARV a été largement étudié par des chercheurs de différents domaines ; en particulier, l'estimation des paramètres de ce modèle a été discutée par Tunnicliffe (1973), Hillmer et Tiao (1979), Solo (1984). Le problème de la modélisation des processus ARV a été étudié par Akaike (1976), Tiao et Box (1981), Cooper et Wood (1982), Tiao et Tsay (1983). D'autres auteurs ont étendu l'usage de ce modèle à d'autres applications, par exemple Pandit et Wu (1983) pour la commande optimale, Tsay (1989) qui a montré comment l'analyse canonique peut être utilisée pour identifier la structure d'une série temporelle multi-variée, et de même Tiao et Tsay (1989) ont proposé une méthode pour spécifier un modèle ARMAV plus approprié pour la modélisation d'une série temporelle multi-variée.

Nous présentons dans cette partie un travail original concernant la détection de défauts dans des systèmes dont les sorties sont connectées entre elles. Notre travail est donc à rattacher au problème général de diagnostic et plus particulièrement aux problèmes de détection de sauts et de valeurs aberrantes. Ce problème est très délicat ; en effet, en plus de la complexité du modèle, les variables sont interconnectées et par conséquent le défaut ou la valeur aberrante peut, dans certains cas, affecter plusieurs sorties en même temps ou à des instants différents.

#### IV.6.2. CARACTÉRISATION DES VALEURS ABERRANTES

Soit  $y_t^i$  la mesure correspondant à la grandeur  $z_t^i$  à chaque instant et pour chaque variable. Les capteurs, mesurant ces variables, sont soumis à des perturbations de différents types ; valeurs aberrantes additives ou innovées, qui peuvent apparaître sur n'importe quelle sortie du système. Comme dans le cas du système mono-entrée mono-sortie (équations (4.4) et (4.5a)) et en utilisant les définitions données par Fox (1972) et Muirhead (1986) concernant les valeurs aberrantes dans un processus AR, on obtient :

pour une valeur aberrante additive :

$$y_t^i = z_t^i + \omega \delta_{t,d}^{i,c} \quad (4.26a)$$

pour une valeur aberrante innovée :

$$y_t^i = \sum_{j=1}^k \sum_{f=1}^p \varphi_{fij} q^{-f} y_t^j + \omega \delta_{t,d}^{i,c} + \varepsilon_t^i \quad (4.26b)$$

Dans ces deux expressions,  $t$  varie de 1 jusqu'à  $n$ ,  $i$  qui désigne le numéro de la variable varie de 1 jusqu'à  $k$ ,  $\omega$  désigne l'amplitude de la valeur aberrante,  $d$  étant l'instant d'apparition du défaut,  $c$  le numéro de la composante du vecteur de sortie en défaut et  $\delta_{t,d}^{i,c}$  un vecteur qui ne contient que des zéros sauf à l'instant  $d$ , c'est-à-dire :

$$\delta_{t,d}^{i,c} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq d \text{ et } i \neq c \\ 1 & \text{si } t = d \text{ et } i = c \end{cases}$$

Il apparaît clairement que la valeur aberrante additive affecte localement la valeur d'une seule sortie à un instant particulier alors que la valeur aberrante innovée apparaît sur différentes sorties et se propage dans le temps avec une dynamique liée à celle du système.

L'objectif de l'étude est d'élaborer une procédure permettant de détecter la valeur aberrante, d'identifier le type de la valeur aberrante et de la localiser en temps et en espace. Pour réaliser cette procédure, nous proposons une stratégie qui est une généralisation de techniques établies dans le cas des systèmes mono-entrée mono-sortie.

#### IV.6.3. DÉTECTION DES VALEURS ABERRANTES

Comme nous l'avons indiqué en introduction, la détection de valeurs aberrantes peut être considérée comme un problème de diagnostic. Nous pouvons utiliser une technique séquentielle qui consiste dans une première étape à générer des signaux (écarts ou résidus) sensibles aux valeurs aberrantes. Cette génération s'effectue en calculant l'écart entre la mesure de la variable de sortie et son estimée. Dans la deuxième étape, on analyse ces écarts pour détecter la présence de valeurs aberrantes.

Dans cette partie, nous nous limitons à deux tests (les éléments diagonaux de la matrice de projection et le test d'écart) déjà cités et développés dans le cas de la régression linéaire (chapitre II) et dans le cas d'un modèle auto-régressif (IV.3).

##### Les éléments diagonaux de la matrice de projection

La matrice de projection ou la matrice chapeau a été utilisée par plusieurs auteurs dans le cas d'une régression linéaire Hoaglin (1978), Rousseeuw et Leroy (1987). D'autres l'ont utilisée pour l'analyse d'une série temporelle ; Hau et Tong (1989), Kobi et al. (1993a). Malgré cette

diversification, le principe reste toujours le même et la seule différence avec le cas mono-sortie se situe tout simplement au niveau de l'expression de la matrice d'observation  $X$ . En effet, l'écriture du modèle auto-régressif vectoriel (4.25b) pour toutes les observations ( $t = 1, \dots, n$ ) et toutes les variables ( $i = 1, \dots, k$ ) nous amène à la relation matricielle suivante :

$$Y = X\Psi + E \quad (4.26c)$$

avec :

$$Y = \begin{pmatrix} y_{p+1}^1 & \dots & y_{p+1}^k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_t^1 & \dots & y_t^k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_n^1 & \dots & y_n^k \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} y_p^1 & \dots & y_1^1 & \dots & y_p^k & \dots & y_1^k \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{t-1}^1 & \dots & y_{t-p}^1 & \dots & y_{t-1}^k & \dots & y_{t-p}^k \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{n-1}^1 & \dots & y_{n-p}^1 & \dots & y_{n-1}^k & \dots & y_{n-p}^k \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{p+1}^1 & \dots & \varepsilon_{p+1}^k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon_t^1 & \dots & \varepsilon_t^k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon_n^1 & \dots & \varepsilon_n^k \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \Psi = \begin{pmatrix} \varphi_{111} & \dots & \varphi_{1k1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{p11} & \dots & \varphi_{pk1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{11k} & \dots & \varphi_{1kk} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{p1k} & \dots & \varphi_{pkk} \end{pmatrix}$$

La matrice  $Y$ , de dimension  $n \times pk$ , correspond aux mesures des  $k$  sorties à différents instants, la matrice  $X$ , de dimension  $n \times pk$ , contient les mesures des variables de sortie retardées,  $\Psi$  étant la matrice des paramètres inconnus du modèle de dimension  $pk \times k$  et  $E$  désigne la matrice des résidus de dimension  $n \times k$ .

A partir de ces expressions, nous définissons alors la matrice de projection  $H$  de dimension  $n \times n$  de la façon suivante :

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (4.27)$$

Cette matrice permet, comme nous l'avons vu dans le chapitre II et dans le paragraphe IV.3.1, de détecter des valeurs aberrantes en comparant ses éléments diagonaux à un seuil adéquat. Ce seuil dépend généralement du nombre d'observations et de l'ordre du modèle.

### Test d'écart

Dans le domaine de diagnostic, le test d'écart est l'un des plus "intuitifs" pour la détection de défauts ; ce test est calculé à partir de la mesure d'une grandeur et de son estimée obtenue, par exemple, par une technique des moindres carrés. Nous désignons par  $E_c$  la matrice des écarts calculée entre  $Y$  et  $\hat{Y}$ , soit :

$$E_c = Y - \hat{Y} \quad (4.28)$$

Chaque élément de cette matrice peut être comparé à un seuil qui est déterminé à partir de la table de la loi normale ; ce seuil dépend de l'intervalle de confiance qu'on accorde aux résultats. Nous pouvons aussi utiliser les tests énoncés dans le chapitre III pour vérifier la normalité de la variable écart et détecter les valeurs les plus extrêmes.

#### IV.6.4. EXEMPLE

Nous considérons dans cette partie un exemple à deux variables de sortie. Le modèle suivi par ces deux variables est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} z_t^1 = 0.4z_{t-1}^1 + 0.5z_{t-1}^2 + \varepsilon_t^1 \\ z_t^2 = 0.48z_{t-1}^1 + 0.2z_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \end{cases} \quad (4.29)$$

Chaque variable de sortie suit donc un modèle auto-régressif. Les variables  $\varepsilon_t^1$  et  $\varepsilon_t^2$  sont supposées suivre une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à 1. Pour mettre en évidence les performances des deux tests énoncés ci-dessus, nous avons réalisé quatre essais. Le premier concerne une valeur aberrante additive sur la variable de sortie 1, le deuxième traite le cas d'une valeur aberrante additive sur la sortie 2 ; le troisième essai présente le cas d'une valeur aberrante innovée sur la variable de sortie 1. Ces trois premiers essais seront effectués avec l'ordre exact du modèle c'est-à-dire en prenant  $p = 1$ . Enfin, le quatrième essai sera consacré à l'étude de l'influence de l'ordre du modèle sur la détection d'une valeur aberrante additive sur la variable de sortie 1.

Soient  $y_t^1$  et  $y_t^2$  les mesures correspondantes aux variables de sortie  $z_t^1$  et  $z_t^2$ . Avant d'aborder la procédure de détection, on écrit le système (4.29) sous une forme matricielle. On suppose qu'on ne dispose que des mesures  $z_t^1$  et  $z_t^2$  et que les paramètres du modèle sont inconnus. A partir de l'écriture matricielle, on estime les paramètres du système, en utilisant la méthode des moindres carrés simples. Le tableau IV.3 donne les résultats obtenus pour les trois essais. Ces paramètres seront utilisés pour calculer l'écart défini par la relation (4.28).

	Paramètres exacts	1er essai	2ème essai	3ème essai
$\Phi_{111}$	0.40	0.393	0.399	0.404
$\Phi_{121}$	0.48	0.477	0.471	0.491
$\Phi_{112}$	0.50	0.505	0.515	0.503
$\Phi_{122}$	0.20	0.236	0.225	0.227

Tableau IV.3 - Valeurs des paramètres estimés pour les trois essais

**Essai 1** : en présence d'une valeur aberrante additive à l'instant  $t = 200$  et d'amplitude 5, la sortie 1 et la sortie 2 du système sont respectivement présentées sur les figures IV.12(a) et IV.12(b).

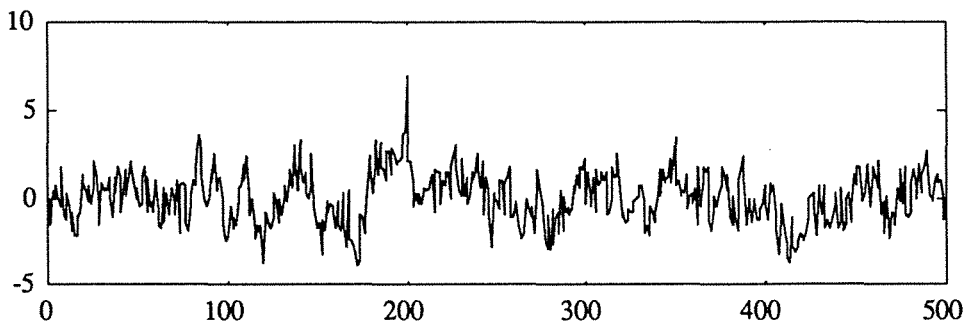


Figure IV. 12(a) - Première sortie mesurée du système

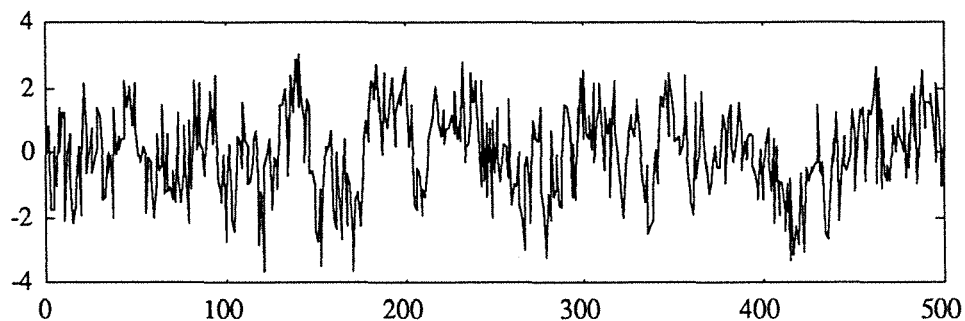


Figure IV. 12(b) - Deuxième sortie mesurée du système

Pour détecter cette erreur, nous nous intéressons dans un premier temps à l'évolution des deux vecteurs de la matrice  $E_c$ . Les figures IV.13(a) et IV.13(b) qui présentent respectivement l'évolution de l'écart pour la première et la deuxième sortie, montrent l'existence d'un défaut à l'instant  $t = 200$ .

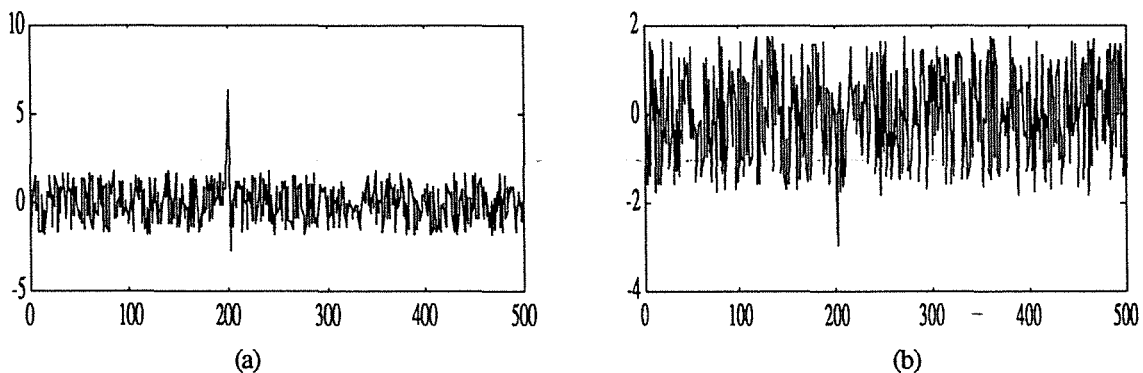


Figure IV.13 - Évolution de l'écart pour le premier essai : (a) première sortie (b) deuxième sortie

En absence de défaut, l'écart doit suivre une loi de distribution normale. Nous choisissons un seuil de confiance à 1% . Nous remarquons donc que seule la courbe IV.13(a) présente une valeur supérieure au seuil qui a été fixé à 3. Cette constatation nous permet d'une part de détecter le défaut et d'autre part de le localiser. Il s'agit ici d'un défaut sur la première sortie. En effet, l'écart calculé pour la première sortie (figure IV.13(a)) présente une valeur supérieure au seuil à l'instant 200 ; cette valeur est égale à **6.341**, alors que l'écart calculé pour la deuxième sortie présente une valeur anormale (-3) à l'instant 201.

**Essai 2** : pour cet essai, nous avons exactement les mêmes constatations. Les figures IV.14(a) et IV.14(b) montrent les résultats obtenus dans le cas d'une valeur aberrante additive sur la deuxième sortie à l'instant 200 et d'amplitude 5.

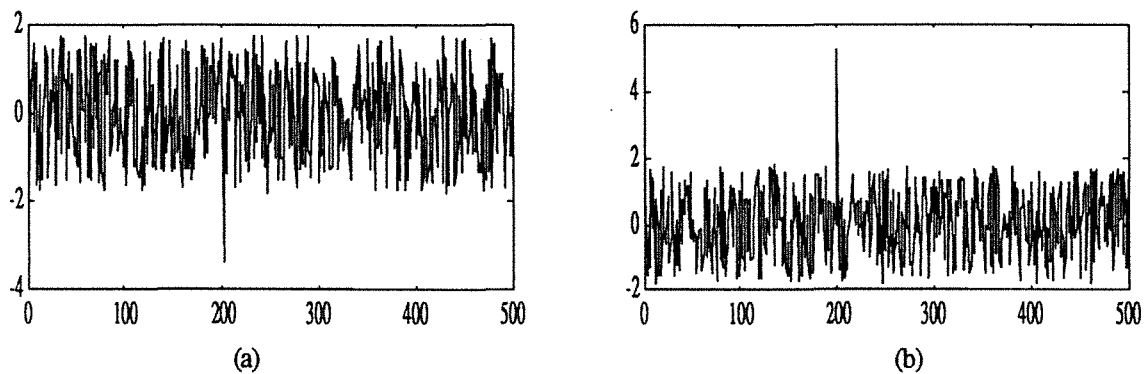


Figure IV.14 - Évolution de l'écart pour le deuxième essai : (a) première sortie (b) deuxième sortie

Nous venons d'examiner le comportement de l'écart lorsqu'une valeur aberrante additive est présente soit sur la première sortie, soit sur la deuxième sortie. En ce qui concerne maintenant les éléments diagonaux de la matrice H, les résultats obtenus pour les deux premiers essais sont présentés sur les figures IV.15(a) et IV.15(b).

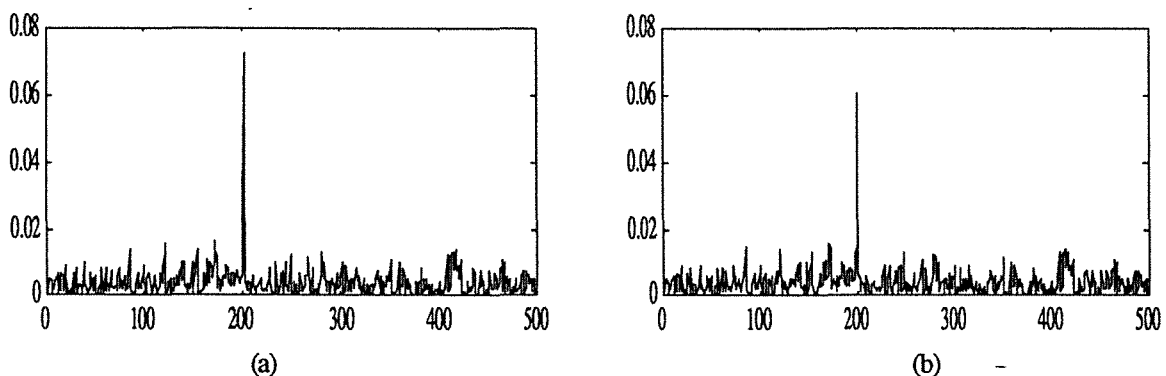


Figure IV.15 - Évolution des éléments diagonaux : (a) premier essai (b) deuxième essai

Nous rappelons que pour le premier essai, il s'agit d'une valeur aberrante additive à l'instant 200 d'amplitude 5 ; pour le deuxième essai, la valeur aberrante additive affecte la

deuxième sortie. Les deux figures IV.15(a) et (b) montrent une fois de plus que le défaut est présent à l'instant 200. Malheureusement, avec les éléments diagonaux de la matrice H, nous ne pouvons pas distinguer entre une erreur sur la première sortie et une erreur sur la deuxième sortie.

**Essai 3** : si maintenant on s'intéresse au cas d'une valeur aberrante innovée sur la première sortie, nous constatons que le test d'écart calculé pour la première sortie et les éléments diagonaux de la matrice H présentent des valeurs supérieures au seuil au voisinage de l'instant 200 (figures IV.16(a) et (b)). Ceci montre qu'on peut utiliser ces deux tests pour détecter les valeurs aberrantes.

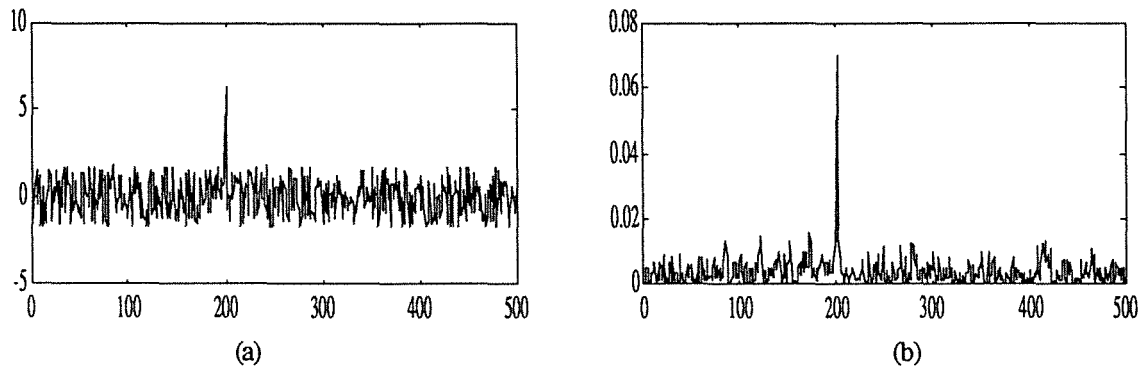


Figure IV.16 - Valeur aberrante innovée : (a) écart (b) éléments diagonaux de H

La difficulté est de reconnaître le type de défaut ; est-ce que le défaut correspond à une valeur aberrante additive ou innovée ? Malheureusement, comme nous venons de le voir sur les différentes figures précédentes, le test de l'écart ne nous permet pas de répondre à cette question, alors que les éléments diagonaux de la matrice H présentent un comportement un petit peu différent entre les deux types de valeurs aberrantes. Cette différence dépend essentiellement de l'amplitude de la valeur aberrante et de l'ordre du modèle. Pour mieux apprécier cette différence, le tableau IV.4 donne les valeurs des éléments diagonaux de la matrice H pour une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée sur une même sortie (il s'agit ici de la première sortie) autour de l'instant 200.

Ce tableau met en évidence à l'instant 201, la présence d'une grande valeur qui dépasse largement la valeur moyenne des éléments diagonaux de la matrice de projection et ceci pour les deux erreurs. Cependant, dans le cas de la valeur aberrante innovée, on a une autre valeur qui dépasse le seuil à l'instant 202. Cette remarque était prévisible car l'erreur en question s'est propagée au cours du temps. Nous pouvons donc différencier les deux types de valeurs aberrantes en testant les éléments diagonaux aux instants qui suivent l'instant du défaut. Toutefois, cette conclusion n'est pas toujours vérifiée ; en effet, la propagation de l'erreur dépend de l'ordre du modèle, des paramètres de ce modèle et surtout de l'amplitude de l'erreur.



t	Valeur aberrante additive	Valeur aberrante innovée
197	0.0047	0.0045
198	0.0063	0.0061
199	0.0118	0.0115
200	0.0140	0.0135
201	<b>0.0725</b>	<b>0.0706</b>
202	0.0067	<b>0.0266</b>
203	0.0044	0.0146
204	0.0015	0.0078
205	0.0041	0.0070
206	0.0040	0.0037
207	0.0038	0.0025

Tableau IV.4 - Valeurs des éléments diagonaux de H pour les deux types d'erreur

**Essai 4** : nous venons de voir comment détecter, localiser et identifier les valeurs aberrantes additives et innovées lorsque l'ordre du modèle est connu. Nous allons maintenant nous placer dans une situation où l'ordre du modèle est inconnu ; nous avons simulé le système (4.29) avec un ordre égal à 1, mais le calcul des éléments diagonaux de la matrice de projection et de l'écart se fait avec un ordre égal à 3. Les résultats obtenus dans ce quatrième essai concernant le test de l'écart ne sont pas significativement modifiés. Par contre, les éléments diagonaux de la matrice de projection H présentent des valeurs sensiblement différentes des cas précédents. Les figures IV.17(a) et IV.17(b) donnent l'évolution de ces éléments respectivement pour une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée (on rappelle que l'erreur est introduite à l'instant 200 et d'amplitude 5).

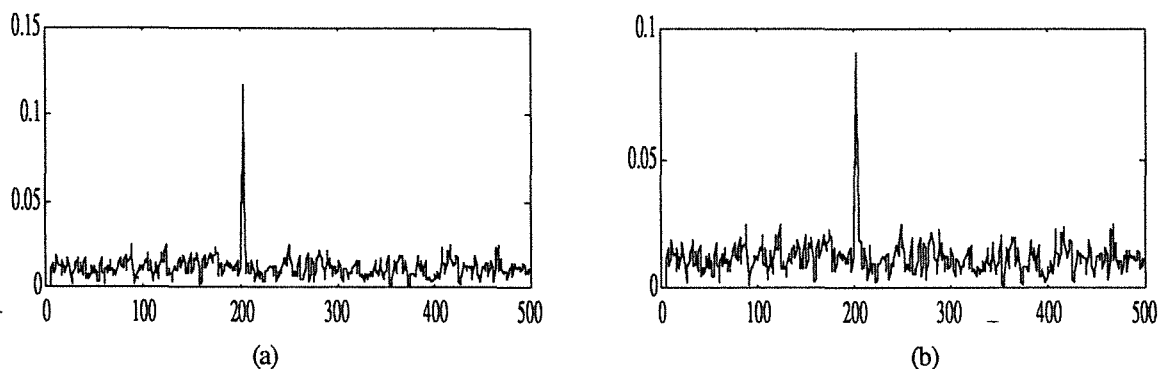


Figure IV.17 - Éléments diagonaux de H : (a) additive (b) innovée

Comme précédemment, pour préciser le comportement du test des éléments diagonaux de la matrice H en fonction de ces erreurs, nous présentons ci-dessous un tableau résumant les valeurs de ces éléments au voisinage de l'instant de défaut.

t	Valeur aberrante additive	Valeur aberrante innovée
197	0.0078	0.0074
198	0.0069	0.0116
199	0.0121	0.0164
200	0.0172	0.0164
201	<b>0.0921</b>	<b>0.0909</b>
202	<b>0.1178</b>	<b>0.0888</b>
203	<b>0.1044</b>	<b>0.0757</b>
204	0.0102	<b>0.0308</b>
205	0.0089	0.0191
206	0.0122	0.0185
207	0.0150	0.0182

Tableau IV.5 - Valeurs des éléments diagonaux de H pour les deux types d'erreur

Dans la deuxième colonne, nous avons trois valeurs supérieures au seuil toléré pour les éléments diagonaux de la matrice de projection. Cette remarque s'explique du fait que la mesure de la première sortie est présente trois fois ( $p = 3$ ) dans la matrice X. On voit aussi, dans cette colonne, qu'on retrouve les valeurs "normales" juste après ces trois valeurs aberrantes. Par contre, dans le cas d'une valeur aberrante innovée, le test présente quatre valeurs d'amplitudes importantes ; de plus on ne retrouve pas les "bonnes" valeurs après l'observation 204.

#### IV.6.5. SIMULATION DE MONTE CARLO

Pour affirmer les résultats obtenus avec les quatre essais, nous avons effectué une étude exhaustive de type Monte Carlo. Cette étude consiste à faire 100 réalisations pour chacun des quatre essais précédent. Le premier essai concerne une valeur additive sur la première sortie, le deuxième est relatif à une valeur aberrante additive sur la deuxième sortie du processus. Les troisième et quatrième essais concernent respectivement une valeur aberrante innovée sur la première et la deuxième sortie du processus.

Le processus simulé est celui utilisé dans le paragraphe IV.6.4, l'amplitude de la valeur aberrante est variable (3, 4 et 5) et pour chaque réalisation on change uniquement les résidus  $\varepsilon_t^1$  et  $\varepsilon_t^2$ . Pour alléger la présentation, on donne les résultats sous forme de deux tableaux récapitulatifs, le premier relatif aux résultats obtenus pour le test d'écart et le deuxième pour les

éléments de la matrice de projection. Comme dans le cas d'une série temporelle, on définit le taux de détection comme étant le nombre de fois où on a détecté la valeur aberrante et identifié sa nature (valeur aberrante additive ou innovée). De même, on définit le pourcentage de détection qui correspond au nombre de fois où nous avons détecté la présence d'une valeur aberrante sans se soucier de sa nature.

Amplitudes	Valeur aberrante additive		Valeur aberrante innovée	
	Première sortie	Deuxième sortie	Première sortie	Deuxième sortie
3	45%	42%	51%	57%
4	80%	79%	81%	80%
5	82%	80%	100%	97%

Tableau IV.6 - Taux de détection pour le test d'écart

Les taux de détection présentés dans le tableau IV.6 correspondent au test d'écart. Ces taux signifient le nombre de fois où nous avons détecté la présence d'une valeur aberrante et déterminé la variable de sortie qui est en défaut. La détermination de la variable en défaut se fait de la manière suivante. Si, à l'instant d'apparition de la valeur aberrante, les valeurs des écarts pour les deux variables de sortie sont supérieures au seuil, on ne retient que la valeur maximale.

Nous avons constaté aussi que le test d'écart ne permet pas de déterminer la nature de la valeur aberrante. Pour répondre à ce problème, nous nous sommes intéressés aux éléments diagonaux de la matrice de projection. Le tableau IV.7 donne les taux de détection en fonction de l'amplitude et de la nature de la valeur aberrante.

Amplitudes	Valeur aberrante additive		Valeur aberrante innovée	
	Première sortie	Deuxième sortie	Première sortie	Deuxième sortie
3	43%	51%	16%	9%
4	80%	89%	24%	29%
5	91%	95%	44%	34%

Tableau IV.7 - Taux de détection pour les éléments diagonaux de la matrice de projection

Les valeurs présentées dans le tableau IV.7 sont obtenues en se plaçant uniquement aux alentours de l'instant d'apparition de la valeur aberrante. Par contre, si l'instant d'apparition de la valeur aberrante est inconnu, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Par ailleurs, on constate, d'après le tableau IV.7, que les taux de détection pour une valeur aberrante additive et une valeur aberrante innovée ne sont pas significatifs. Ceci est dû à la complexité du processus ARV et à la nature de la valeur aberrante innovée.

Nous pouvons donc conclure de ces essais que le test d'écart permet de détecter et de localiser les valeurs aberrantes et que le test des éléments diagonaux de la matrice de projection

permet lui aussi de détecter les valeurs aberrantes. En plus, ce test permet sous certaines conditions de distinguer les deux types de valeurs aberrantes.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans la première partie une procédure permettant de détecter les valeurs aberrantes, de les identifier (valeur aberrante additive et valeur aberrante innovée) et de corriger les mesures en défaut dans des signaux.

La procédure développée dans cette étude est basée d'une part sur le test d'Andrews-Pregibon, habituellement utilisé dans une régression linéaire et d'autre part sur l'estimation de l'amplitude de la valeur aberrante. Nous avons réalisé une étude comparative entre certains tests développés dans le deuxième chapitre. Nous avons constaté que le test d'Andrews-Pregibon permet de localiser et d'identifier les valeurs aberrantes ; le test des éléments diagonaux de la matrice de projection et le test du rapport de variances présentent les mêmes avantages que le test d'Andrews-Pregibon. Pour l'étape de correction des mesures, la procédure utilisée repose sur l'estimation de l'amplitude obtenue en minimisant un critère qui dépend du résidu généré à partir des mesures et des paramètres du modèle AR. Lorsque ces derniers sont inconnus, leur estimation est réalisée avec la technique des moindres carrés simples.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté une étude originale concernant les processus Auto Régressifs Vectoriels. Ces processus sont utilisés pour modéliser les séries temporelles multi-variées où plusieurs variables sont interconnectées entre elles, chacune étant décrite par un modèle auto-régressif. L'originalité de ce travail se situe au niveau de la caractérisation des processus auto-régressifs vectoriels en présence de valeurs aberrantes et la génération des résidus pour détecter et localiser ces valeurs aberrantes dans le temps et dans l'espace. L'étude de ces processus est rendue difficile par le nombre de paramètres à contrôler et à manipuler. De plus, la structure de ces modèles est très complexe et délicate à mettre en oeuvre pour estimer les paramètres.



## Chapitre V

# DÉTECTION DE DÉFAUT DANS UN PROCESSUS ARX



## INTRODUCTION

Dans les quatre premiers chapitres, nous avons présenté quelques travaux concernant la détection de valeurs aberrantes dans des domaines différents. Rappelons quelques uns de ces travaux. Grubbs (1950) et Dixon (1950) ont proposé des tests statistiques pour détecter des éventuelles observations anormales dans un échantillon aléatoire issu d'une distribution connue. Les principes de ces deux tests ont été présentés dans le troisième chapitre. Page (1954) et Hinkley (1971) ont proposé des tests pour déceler un saut de moyenne dans un signal temporel. Les travaux de Cook (1977) pour détecter des valeurs aberrantes, basés sur la distance de Mahalanobis, dans une régression linéaire et ceux de Fox (1972), Tsay (1986), Abraham (1989), Ledolter (1990) et Diaz (1991) concernent la détection de valeurs aberrantes dans les séries temporelles modélisées par un modèle AR ou ARMA. Dans le domaine de l'étude des processus, citons encore les travaux de Patton et al. (1989) utilisant une représentation sous forme d'équation d'état, basés sur les observateurs qui permettent de générer des signaux résiduels accentuant l'effet des valeurs aberrantes. Des synthèses concernant la détection d'un changement dans un signal ou un système ont été présentées par Wilsky (1976), Basseville (1988), Sauter (1991) et Basseville et Nikiforov (1993). D'autres auteurs ont développé des algorithmes robustes pour l'identification des paramètres dans une représentation sous forme de fonction de transfert, tenant compte de la présence des valeurs aberrantes (Puthenpura, 1990).

L'étude présentée dans ce chapitre s'étend à tous les types de défauts et a l'avantage de s'appliquer à des signaux modélisés par des processus AR (Auto Régressif) ou ARMA (Auto Régressif à Moyenne Ajustée) ou ARX (Auto Régressif avec une entrée auxiliaire). Notre étude sera consacrée essentiellement à la détection et l'estimation de ces défauts ; dans une démarche plus générale, le diagnostic s'intéressera à expliquer l'origine de ces défauts et la recherche des causes, à prévoir leur évolution probable (pronostic) et à agir sur le processus de façon à minimiser leurs influences, (Kobi et al. (1993c)). Ce chapitre sera divisé en deux parties. La première concerne la détection de défauts dans un processus ARX ; nous présentons une nouvelle méthode pour détecter les défauts capteurs, qui permet en plus d'estimer l'amplitude des défauts et les paramètres du modèle (Kobi et al. (1993b)). Dans la deuxième partie, on exposera quelques méthodes d'estimation des paramètres connues sous le nom de méthodes robustes et nous comparons les résultats obtenus avec ces techniques et ceux obtenus avec la méthode développée dans la première partie. Cette comparaison sera réalisée en analysant les paramètres estimés par chacune des méthodes en présence de valeurs aberrantes additives sur les signaux de sortie du système.

### V.1. DÉTECTION DE DÉFAUT DANS UN PROCESSUS ARX

#### V.1.1. POSITION DU PROBLÈME

On considère un processus stationnaire modélisé par la relation :



$$z_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

avec  $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_p q^{-p}$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_r q^{-r}.$$

On suppose que les polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  ont leurs zéros à l'intérieur du cercle unité et n'ont pas de facteurs communs. La variable  $z_t$  représente la sortie du processus,  $u_t$  son entrée (ou sa commande) et  $\varepsilon_t$  un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . Notre objectif est de détecter la présence de défauts de capteurs du processus considéré ; ces défauts se traduisent par la présence de valeurs aberrantes dans les séries temporelles  $z_t$  et  $u_t$ . Le principe retenu pour détecter des éventuelles anomalies est l'analyse de l'amplitude de l'écart généré à partir des mesures et de l'équation du processus.

En pratique les paramètres du modèle du processus,  $p$ ,  $r$ ,  $a_1, \dots, a_p$ ,  $b_0, \dots, b_r$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  sont inconnus et leur estimation est réalisée à partir des grandeurs  $z_t$  et  $u_t$ . Il suffit alors d'effectuer des mesures de ces deux grandeurs par les différents moyens dont on dispose, ce qui malheureusement peut s'accompagner d'erreurs. La procédure à mettre en oeuvre doit permettre d'estimer simultanément les paramètres du système et de détecter des éventuelles anomalies. Ces anomalies peuvent être de différente nature : défaut de capteurs ou défaut d'actionneurs.

Soient  $y_t$  et  $v_t$  les mesures correspondantes aux grandeurs  $z_t$  et  $u_t$  respectivement. Les capteurs mesurant ces grandeurs sont parfois soumis à des perturbations de différents types. Dans ce cas, les variables mesurées peuvent être représentées par :

$$y_t = z_t + g_{z,t} \quad (5.2a)$$

$$v_t = u_t + g_{u,t} \quad (5.2b)$$

où  $g_{z,t}$  représente une perturbation à l'instant  $t$  qui affecte la sortie  $z$  du processus et  $g_{u,t}$  une perturbation qui affecte l'entrée  $u$ . En présence de ces perturbations, le système (5.1) peut être représenté par la figure V.1.

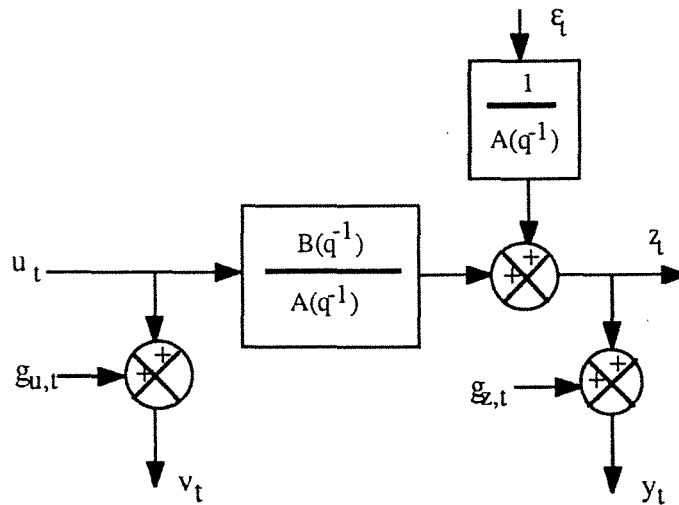


Figure V.1 - Le système en présence des différentes perturbations

Pratiquement les fonctions  $g_{z,t}$  et  $g_{u,t}$  peuvent être considérées comme les réponses impulsionnelles des systèmes de fonctions de transfert  $H_z$  et  $H_u$ , (Figure V.2).

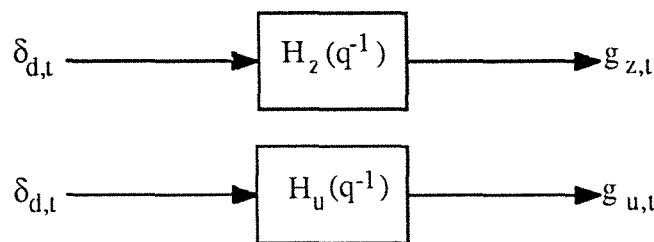


Figure V.2 - Modélisation des fonctions perturbatrices

$\delta_{d,t}$  est une entrée impulsionnelle (impulsion de Dirac) égale à 1 si  $t$  est égal à  $d$  et zéro sinon,  $d$  représentant l'instant d'apparition d'un défaut. La structure des fonctions de transfert  $H_z(q^{-1})$  et  $H_u(q^{-1})$  est directement liée à la nature des défauts envisagés.

En utilisant les mesures  $y_t$  et  $v_t$  données par (5.2), l'équation (5.1) devient :

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})v_t + A(q^{-1})g_{z,t} - B(q^{-1})g_{u,t} + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

On peut définir l'écart  $e_t$  du processus sous la forme (5.4a) qui fait intervenir les mesures et sous la forme (5.4b) qui fait intervenir les perturbations.

$$e_t = A(q^{-1})y_t - B(q^{-1})v_t \quad (5.4a)$$

$$e_t = A(q^{-1})g_{z,t} - B(q^{-1})g_{u,t} + \varepsilon_t \quad (5.4b)$$

La forme (5.4a) est celle qui permet l'évaluation de l'écart en fonction des mesures qui, en l'absence de défaut, est nul. La forme (5.4b) est utilisée pour son analyse, c'est-à-dire pour la détection et la localisation des erreurs  $g_{z,t}$  et  $g_{u,t}$ . Compte tenu des définitions des fonctions perturbatrices  $g_{z,t}$  et  $g_{u,t}$ , on a aussi :

$$e_t = A(q^{-1})H_z(q^{-1})\delta_{d,t} - B(q^{-1})H_u(q^{-1})\delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.4c)$$

Cette expression se prête bien à la mise en évidence de la notion d'isolabilité des défauts ; il faut que les polynômes  $A(q^{-1})H_z(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})H_u(q^{-1})$  soient distincts pour pouvoir séparer les défauts capteurs sur la sortie et sur l'entrée du système.

Selon la forme des fonctions de transfert  $H_z(q^{-1})$  et  $H_u(q^{-1})$ , on distingue plusieurs types de défauts (Box et Tiao, 1975). Dans la suite, nous étudierons les caractéristiques de ces différents défauts sur la sortie et l'entrée du système. La procédure de détection que nous proposons dans cette étude repose sur l'estimation de l'amplitude de défaut normalisée par son écart-type. Ainsi, pour chaque type de défaut, nous estimons son amplitude et la variance de cette amplitude. On suppose de plus que l'on dispose des mesures  $y_t$  et  $v_t$ .

### V.1.2. DÉFAUT SUR LA SORTIE

Les défauts considérés dans cette partie sont les valeurs aberrantes qui peuvent être soit additives soit innovées, un saut de moyenne et enfin une dérive de capteurs. Pour chacune de ces perturbations, on donne l'expression de l'écart  $e_t$  et à partir de cet écart on détermine l'amplitude du défaut et sa variance. Dans ce paragraphe, la fonction  $g_{u,t}$  est nulle puisqu'on considère que les défauts sur la sortie du processus.

#### Valeur aberrante additive

Lorsque la sortie du système présente une valeur aberrante additive, la fonction de transfert  $H_z(q^{-1})$  se comporte comme un gain pur constant noté  $\omega$ . La réponse  $g_{z,t} = \omega \delta_{d,t}$  a l'allure indiquée à la figure V.3(a).

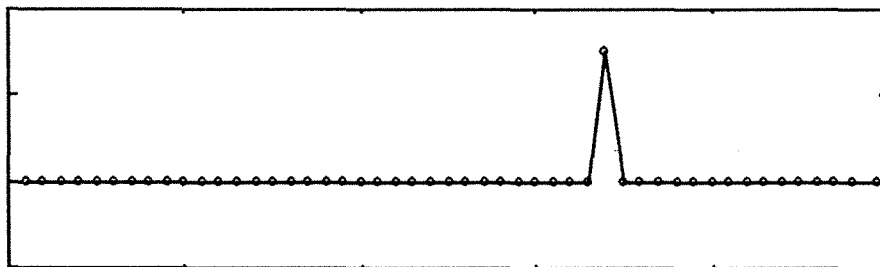


Figure V.3(a) - Réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1})$  pour une perturbation de type valeur aberrante additive

Ce type de perturbation correspond à une erreur de mesure qui se traduit par la présence d'une valeur aberrante additive sur la sortie  $z$ . Regardons maintenant le comportement du processus en présence de cette valeur aberrante. La relation (5.2a) s'écrit :

$$y_t = z_t + \omega \delta_{d,t} \quad \text{et} \quad v_t = u_t \quad (5.5)$$

En reportant dans (5.1)  $z_t$  et  $u_t$  déduites de (5.5), on obtient :

$$A(q^{-1})y_t - B(q^{-1})v_t = \omega A(q^{-1})\delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.6a)$$

Le terme de gauche de l'équation (5.6a) correspond à l'écart du système déterminé à partir des mesures  $y_t$  et  $v_t$ . On obtient donc une relation entre l'écart  $e_t$  et le terme  $\varepsilon_t$  représentant le bruit de mesure.

$$e_t = \omega A(q^{-1})\delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.6b)$$

En absence de défaut, c'est-à-dire lorsque  $\omega = 0$ , l'écart  $e_t$  correspond à une estimée de la séquence d'innovation  $\varepsilon_t$  (Tsay, 1988). Dans l'équation (5.6b), le membre de gauche est connu puisqu'il dépend des mesures et des paramètres ; par contre, dans le membre de droite, la quantité  $\varepsilon_t$  représente un bruit blanc et ni  $\omega$  ni  $d$  ne sont connus. La détection de défaut consiste à déterminer l'instant  $d$  d'apparition de ce défaut et l'estimation de  $\omega$  permet de caractériser son amplitude.

Pour déterminer la variable  $\omega$  qui correspond à l'amplitude de la valeur aberrante, on suppose que l'instant d'apparition  $d$  est connu (l'estimation de cet instant fera l'objet du paragraphe V.1.4). En utilisant la technique de Moindres Carrés Simples (MCS), c'est-à-dire en minimisant le critère  $J = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (e_t - \omega A(q^{-1})\delta_{d,t})^2$ , on obtient un estimateur de  $\omega$  :

$$\hat{\omega} = (M^T M)^{-1} M^T E \quad (5.7a)$$

avec  $M = [0 \dots 0 \ 1 \ \hat{a}_1 \dots \hat{a}_p \ 0 \dots 0]^T$ ,  $E = [e_1 \dots e_{d-1} \ e_d \ e_{d+1} \dots e_{d+p} \ e_{d+p+1} \dots e_n]^T$  où  $n$  est le nombre d'observations et les  $\hat{a}_i$  représentent une estimation des paramètres  $a_i$  du processus.

Compte tenu de la structure particulière des deux vecteurs  $M$  et  $E$ , l'expression (5.7a) se simplifie sous la forme :

$$\hat{\omega} = (1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2)^{-1} \sum_{i=1}^p (e_d + \hat{a}_i e_{d+i}) \quad (5.7b)$$

et on peut montrer, voir annexe AIII, que la variance de  $\hat{\omega}$  est donnée par l'expression :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = (1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2)^{-1} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (5.7c)$$

Ces deux grandeurs vont nous permettre par la suite, de calculer l'amplitude normalisée pour pouvoir identifier la nature du défaut. Nous avons vu au quatrième chapitre que dans une

série temporelle, on peut avoir deux types de valeurs aberrantes ; valeur aberrante additive ou valeur aberrante innovée. Nous allons donc étudier, dans le paragraphe suivant, les caractéristiques de cette dernière dans un processus ARX.

### Valeur aberrante innovée

En présence d'une valeur aberrante sur la sortie du système, la fonction  $g_{z,t} = \frac{\omega}{A(q^{-1})} \delta_{d,t}$ , qui correspond à une réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1}) = \frac{\omega}{A(q^{-1})}$ , est représentée sur la figure V.3(b). Comme le montre cette figure, la réponse impulsionnelle passe par un maximum et s'atténue au cours du temps. Cette atténuation et la propagation de ce défaut dépendent de la fonction de transfert  $\frac{\omega}{A(q^{-1})}$ .

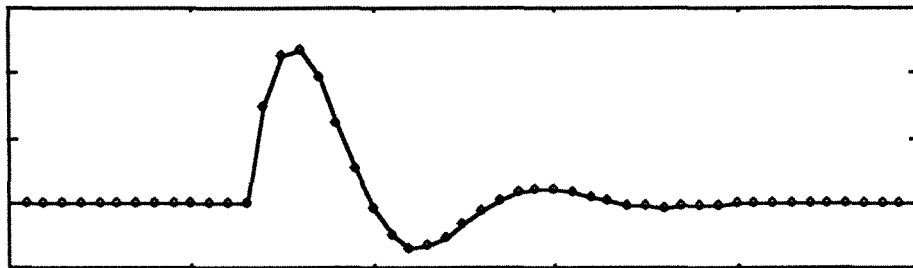


Figure V.3(b) - Réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1})$  pour une perturbation de type valeur aberrante innovée

Les mesures des variables de sortie et de la commande s'écrivent dans ce cas :

$$y_t = z_t + \frac{\omega}{A(q^{-1})} \delta_{d,t} \quad \text{et} \quad v_t = u_t \quad (5.8)$$

Comme précédemment, les quantités  $e_t$  et  $\varepsilon_t$  sont liées par l'équation :

$$e_t = \omega \delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.9a)$$

Si l'instant  $d$  d'apparition de la valeur aberrante est connu et si on écrit la relation (5.9a) pour  $t = 1$  jusqu'à  $n$ , on obtient l'expression matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d-1} \\ e_d \\ e_{d+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d-1} \\ \varepsilon_d \\ \varepsilon_{d+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (5.9b)$$

Par suite à partir d'une méthode de type moindres carrés, les expressions de  $\hat{\omega}$  et de sa variance sont données par :

$$\hat{\omega} = e_d \quad (5.10a)$$

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (5.10b)$$

Comme dans le cas de la valeur aberrante additive, ces deux expressions vont servir dans la procédure de détection du paragraphe V.1.4.

Dans le chapitre IV, nous avons étudié uniquement les valeurs aberrantes additives et les valeurs aberrantes innovées, nous allons donc étendre l'étude à d'autres types de défauts. Il suffit pour cela de caractériser le défaut par sa fonction de transfert génératrice et sa fonction perturbatrice  $g_{z,t}$ . Nous étudierons dans la suite un défaut de type saut de moyenne et une dérive.

### Saut de moyenne

La fonction de transfert génératrice est  $H_z(q^{-1}) = \frac{\omega}{1 - q^{-1}}$  et la fonction  $g_{z,t}$  correspondante traduit un saut de moyenne à l'instant  $d$  d'amplitude  $\omega$ . La figure V.3(c) montre l'évolution de la réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1})$  en fonction du temps.

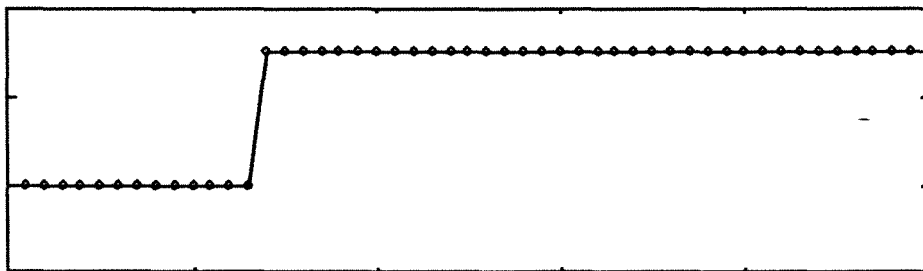


Figure V.3(c) - Réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1})$  pour une perturbation de type saut de moyenne

Ce type de défaut peut aussi caractériser un "offset" au niveau du capteur qui délivre l'information relative à la sortie du système. On procède alors de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en déterminant l'expression des mesures  $y_t$  et  $v_t$  ainsi que la quantité  $e_t$ , on obtient :

$$y_t = z_t + \frac{\omega}{1 - q^{-1}} \delta_{d,t} \quad (5.11)$$

$$e_t = \frac{\omega A(q^{-1})}{1 - q^{-1}} \delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.12)$$

Soit  $\hat{\mu}_i$  les coefficients du polynôme  $\frac{A(q^{-1})}{1 - q^{-1}}$ , l'expression (5.12) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d-1} \\ e_d \\ e_{d+1} \\ e_{d+2} \\ e_{d+3} \\ e_{d+4} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_3 \\ \hat{\mu}_4 \\ \vdots \\ \hat{\mu}_{n-d} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d-1} \\ \varepsilon_d \\ \varepsilon_{d+1} \\ \varepsilon_{d+2} \\ \varepsilon_{d+3} \\ \varepsilon_{d+4} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Si la série  $\frac{A(q^{-1})}{1 - q^{-1}}$  est infinie et comme le nombre d'observations est  $n$ , on ne prend que les coefficients  $\hat{\mu}_i$  dont l'indice  $i$  varie de 1 jusqu'à  $n-d$  où  $d$  est l'instant d'apparition du défaut. On en déduit un estimateur de  $\omega$  en utilisant les moindres carrés :

$$\hat{\omega} = (1 + \hat{\mu}_1^2 + \dots + \hat{\mu}_{n-d}^2)^{-1} \sum_{i=1}^{n-d} (e_d + \hat{\mu}_i e_{d+i}) \quad (5.13a)$$

Comme nous l'avons signalé auparavant, nous avons besoin d'estimer la variance de l'amplitude. Pour effectuer cette estimation, on utilise la même démarche établie dans l'annexe AIII. On obtient :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = (1 + \hat{\mu}_1^2 + \dots + \hat{\mu}_{n-d}^2)^{-1} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (5.13b)$$

Dans les deux expressions (5.13a) et (5.13b), les coefficients  $\hat{\mu}_i$  dépendent des paramètres du polynôme  $A(q^{-1})$ . Avant de commencer la procédure de détection, on suppose que les paramètres du polynôme  $A(q^{-1})$  sont connus.

### Dérive

Nous allons maintenant nous intéresser au dernier type de défaut qui est la dérive. Ce défaut caractérise une rampe au niveau de la mesure de la sortie. La fonction  $g_{z,t} = \frac{\omega}{(1 - q^{-1})^2} \delta_{d,t}$  est représentée sur la figure V.3(d).

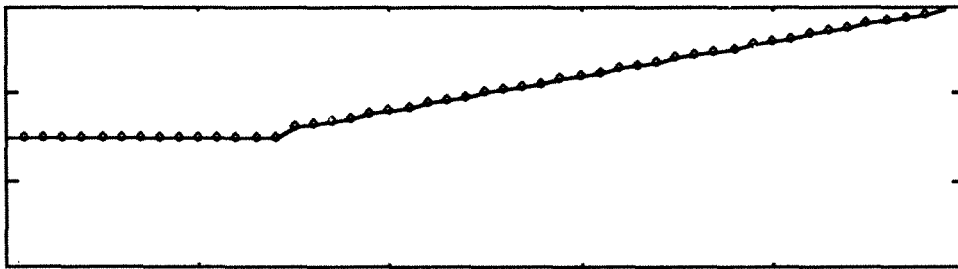


Figure V.3(d) - Réponse impulsionnelle de  $H_z(q^{-1})$  pour une perturbation de type dérive

Lorsqu'une perturbation du type dérive affecte la mesure, la détection ne peut se faire dès l'apparition de cette dérive. En effet, au début de la dérive, l'amplitude est faible puis augmente au fur et à mesure du temps, ce qui rend possible sa détection mais s'accompagne d'un retard de détection.

En présence de cette perturbation, la sortie  $y_t$  est modélisée par :

$$y_t = z_t + \frac{\omega}{(1 - q^{-1})^2} \delta_{d,t} \quad (5.14)$$

et la quantité  $e_t$  définie par l'expression (5.4a) s'écrit :

$$e_t = \frac{\omega A(q^{-1})}{(1 - q^{-1})^2} \delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.15)$$

en écrivant cette relation sous une forme matricielle faisant apparaître les coefficients  $\hat{\psi}_i$  du polynôme  $\frac{A(q^{-1})}{(1 - q^{-1})^2}$ , on obtient :



$$\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d-1} \\ e_d \\ e_{d+1} \\ e_{d+2} \\ e_{d+3} \\ e_{d+4} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_3 \\ \hat{\psi}_4 \\ \vdots \\ \hat{\psi}_{n-d} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d-1} \\ \varepsilon_d \\ \varepsilon_{d+1} \\ \varepsilon_{d+2} \\ \varepsilon_{d+3} \\ \varepsilon_{d+4} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Comme dans le cas d'un saut de moyenne, l'estimation de l'amplitude est obtenue en utilisant la technique des moindres carrés, on obtient comme estimateur :

$$\hat{\omega} = \left( 1 + \hat{\psi}_1^2 + \dots + \hat{\psi}_{n-d}^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n-d} (e_d + \hat{\psi}_i e_{d+i}) \quad (5.16a)$$

La variance de  $\hat{\omega}$  est donnée par l'expression, voir annexe AIII :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \left( 1 + \hat{\psi}_1^2 + \dots + \hat{\psi}_{n-d}^2 \right)^{-1} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (5.16b)$$

Si la série  $\frac{A(q^{-1})}{(1 - q^{-1})^2}$  est infinie, on ne retient que les coefficients  $\hat{\psi}_i$  pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n-d$  puisque le nombre d'observations est limité à  $n$ .

### Remarque

L'estimation de l'amplitude  $\omega$  pour les différents types de défauts étudiés, peut être formulée dans un cas général. En effet, la fonction de transfert génératrice du défaut peut être modélisée dans tous les cas étudiés par :

$$H_z(q^{-1}) = \frac{\omega}{F(q^{-1})} \quad (5.17a)$$

Dans ces conditions la sortie du système s'écrit :

$$y_t = z_t + \frac{\omega}{F(q^{-1})} \delta_{d,t} \quad (5.17b)$$

A partir de cette expression, on peut définir l'écart qui nous permet par la suite d'estimer l'amplitude  $\omega$  du défaut. On aura :

$$e_t = \omega \frac{A(q^{-1})}{F(q^{-1})} \delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.17c)$$

Si les paramètres des polynômes  $A(q^{-1})$  et  $F(q^{-1})$  sont connus et en posant  $\gamma_i$  les coefficients du polynôme  $\frac{A(q^{-1})}{F(q^{-1})}$ , on voit que quelque soit le type de perturbation simulé, il est possible de caractériser l'amplitude de cette perturbation ainsi que sa variance. Il suffit alors d'écrire la relation (5.17c) pour toutes les observations et d'utiliser les moindres carrés pour estimer l'amplitude du défaut et sa variance.

### V.1.3. DÉFAUT SUR LA COMMANDE

La mesure  $v_t$  de la commande  $u_t$  peut aussi être erronée ; en effet le capteur qui la délivre peut présenter de défaillances de même type que celles affectant le capteur mesurant la sortie. Cette perturbation est caractérisée par la fonction  $g_{u,t}$  (figure V.1). La fonction  $g_{u,t}$  peut avoir différentes formes qui correspondent à différents types de défauts. On peut alors reprendre l'étude effectuée dans le paragraphe V.1.2 et refaire les mêmes démarches pour les différents types de défauts (valeur aberrante additive, valeur aberrante innovée, saut de moyenne, dérive). On se contentera, dans cette partie, d'examiner le cas d'une valeur aberrante additive sur la commande.

Avec la fonction de transfert  $H_u(q^{-1}) = \omega$ , la réponse  $g_{u,t} = \omega \delta_{d,t}$  a la même allure que celle de la figure V.3(a). Cette perturbation caractérise une erreur d'enregistrement au niveau du capteur mesurant la commande  $u$  du système. Pratiquement, la valeur avec laquelle le processus a été excité n'est pas celle que l'appareil de mesure nous délivre. Les équations de mesure sont alors :

$$y_t = z_t \quad (5.18a)$$

$$v_t = u_t + \omega \delta_{d,t} \quad (5.18b)$$

Comme nous l'avons signalé précédemment, notre but étant la détection de défauts capteurs, pour réaliser cette opération nous avons besoin d'estimer l'amplitude du défaut et sa variance. Ces deux grandeurs vont nous permettre par la suite de détecter, de localiser le défaut et d'identifier sa nature.

Dans le cas d'une valeur aberrante additive sur la commande, l'expression de la quantité  $e_t$  se déduit facilement à partir de (5.4a) et (5.18) :

$$e_t = -B(q^{-1})\omega \delta_{d,t} + \varepsilon_t \quad (5.19)$$

Comme dans la partie V.1.3, on suppose que l'instant d'apparition de la valeur aberrante est connu et que les paramètres  $b_i$  du polynôme sont connus ou à défaut estimés dans une phase préliminaire. A partir de l'expression (5.19), on peut obtenir un estimateur de  $\omega$  en minimisant le critère  $J = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (e_t + \omega B(q^{-1})\delta_{d,t})^2$ . En utilisant les moindres carrés, on obtient comme estimateur :

$$\hat{\omega} = (M^T M)^{-1} M^T E \quad (5.20a)$$

où  $M = [0 \dots 0 \hat{b}_0 \hat{b}_1 \dots \hat{b}_r 0 \dots 0]^T$  et  $E = [e_1 \dots e_{d-1} e_d e_{d+1} \dots e_{d+r} e_{d+r+1} \dots e_n]^T$ .

L'expression (5.20a) se simplifie sous la forme :

$$\hat{\omega} = (\hat{b}_0^2 + \hat{b}_1^2 + \dots + \hat{b}_r^2)^{-1} \sum_{i=0}^r \hat{b}_i e_{d+i} \quad (5.20b)$$

la variance de  $\hat{\omega}$  se calcule de la même manière que dans le cas d'une valeur aberrante additive sur la sortie, voir annexe AIII. On obtient :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = (\hat{b}_0^2 + \hat{b}_1^2 + \dots + \hat{b}_r^2)^{-1} \hat{\sigma}_e^2 \quad (5.20c)$$

Nous venons de caractériser chaque type de défaut, sur la sortie ou l'entrée du système, par son amplitude et la variance de cette amplitude. Dans la pratique, nous n'avons aucune information sur la nature du défaut ni sur son instant d'apparition. Par conséquent, nous devons élaborer une procédure permettant à la fois de détecter le défaut, de localiser, d'identifier sa nature et d'estimer son amplitude.

#### V.1.4. PROCÉDURE DE DÉTECTION

Dans cette partie, on propose une procédure, basée sur une approche élaborée par Chang (1982) et étudiée par Tsay (1988), permettant de détecter les défauts, les localiser et les identifier. Dans le cas où les erreurs peuvent être multiples, cette procédure est réitérée jusqu'à épuraison complète des séries de mesures.

##### Localisation et identification

Au paragraphe précédent, l'estimation de l'amplitude du défaut suppose que son instant d'apparition est connu. En réalité cet instant est inconnu et doit être estimé en même temps que le type de défaut. Pour cela, on calcule la variable  $\hat{\omega}_n$  (amplitude normalisée du défaut) définie par :

$$\hat{\omega}_n(t) = \frac{\hat{\omega}(t)}{\sqrt{\text{var}(\hat{\omega}(t))}} \quad \text{pour } t = 1, \dots, n \quad (5.21)$$

Cette variable sera calculée pour chaque type de défaut et à chaque instant. On génère ainsi un tableau à deux entrées dont chaque ligne correspond à un instant d'observation et chaque colonne à un type de défaut recensé. Par exemple, pour un nombre d'observations égal à cent et cinq types de défauts recensés, la variable  $\hat{\omega}_n$  sera une matrice de cent lignes et de cinq colonnes. L'examen de ce tableau permet de détecter, de localiser et d'identifier le ou les défauts. On recherche alors le maximum de  $\hat{\omega}_n$  que l'on compare à une valeur seuil. Si ce maximum est supérieur au seuil fixé, on affirme l'existence du défaut à l'instant correspondant au maximum et le type de défaut est déterminé grâce au placement des différents types dans la matrice  $\hat{\omega}_n$ , enfin la mesure ou les mesures affectées seront corrigées, en utilisant la procédure suivante.

### Correction

En fonction de la nature du défaut détecté, on procède à l'estimation de son amplitude en appliquant la loi d'estimation adéquate énoncée aux paragraphes précédents. Comme le calcul de l'amplitude de défaut, la correction des mesures affectées se fait en fonction du type de perturbations. Cette correction concerne la détermination de la vraie valeur  $y^*$  et  $u^*$  de la sortie  $z$  et celle de la commande  $u$ . On donne dans cette étape, pour chaque type de défaut, les résultats obtenus directement à partir des mesures des variables  $y$  et  $v$  et de la connaissance de l'estimée de l'amplitude ( $\hat{\omega}$ ) et de l'instant d'apparition ( $d$ ) du défaut. Les règles d'estimation des valeurs vraisemblables sont résumées ci-après.

#### *Valeur aberrante additive sur la sortie*

$$\begin{cases} y_t^* = y & u_t^* = v & \text{si } t \neq d \\ y_t^* = y_t - \hat{\omega} & u_t^* = v_t & \text{si } t = d \end{cases} \quad (5.22)$$

#### *Valeur aberrante innovée sur la sortie*

$$\begin{cases} y_t^* = y & u_t^* = v & \text{pour } t = 1, \dots, d-1 \\ y_t^* = y_t - \hat{\omega} \hat{\rho}_{t-d} & u_t^* = v_t & \text{pour } t = d, \dots, n \end{cases} \quad (5.23)$$

où  $\hat{\rho}_i$  représentent les coefficients du polynôme  $\frac{1}{A(q^{-1})}$  qui sont soit connus soit estimés dans une étape précédente. On peut signaler que, en fonction des hypothèses faites sur le polynôme  $A(q^{-1})$ , ces coefficients s'annulent à partir d'un certain indice. Par conséquent, la correction des mesures est limitée dans le temps.

#### *Saut de moyenne sur la sortie*

$$\begin{cases} y_t^* = y & u_t^* = v & \text{pour } t = 1, \dots, d-1 \\ y_t^* = y_t - \hat{\omega} \beta_{t-d} & u_t^* = v_t & \text{pour } t = d, \dots, n \end{cases} \quad (5.24)$$

où  $\beta_i$  représentent les coefficients du polynôme  $\frac{1}{1 - q^{-1}}$ . Comme le nombre d'observations est limité, ici on a  $n$  observations, la correction est aussi limitée dans le temps.

*Dérive sur la sortie*

$$\begin{cases} y_t^* = y & u_t^* = v \quad \text{pour } t = 1, \dots, d-1 \\ y_t^* = y_t - \hat{\omega} \pi_{t-d} & u_t^* = v_t \quad \text{pour } t = d, \dots, n \end{cases} \quad (5.25)$$

où  $\pi_i$  représentent les coefficients du polynôme  $\frac{1}{(1-q^{-1})^2}$ .

Ici, on a présenté que des défauts sur la sortie mais bien évidemment la même procédure est à entreprendre pour les défauts survenant sur la commande du processus. Il suffit dans ce cas de remplacer le polynôme  $A(q^{-1})$  par le polynôme  $B(q^{-1})$  et de faire la correction au niveau des mesures  $u_t$ .

L'algorithme de la figure V.4 résume les différentes étapes de la procédure. Si les paramètres des polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  sont inconnus, l'étape d'estimation des paramètres peut être résolue par différentes techniques existant dans la littérature. Cependant, dans notre étude, la technique des Moindres Carrés a été retenue d'une part par sa simplicité de mise en oeuvre et d'autre part, parce que notre principale préoccupation est la détection de défauts et non l'estimation précise des paramètres. On rappelle que la présence de la boucle dans l'organigramme est due au caractère itératif de la technique proposée qui détecte les erreurs les unes après les autres en fonction de leur ordre d'importance décroissant.

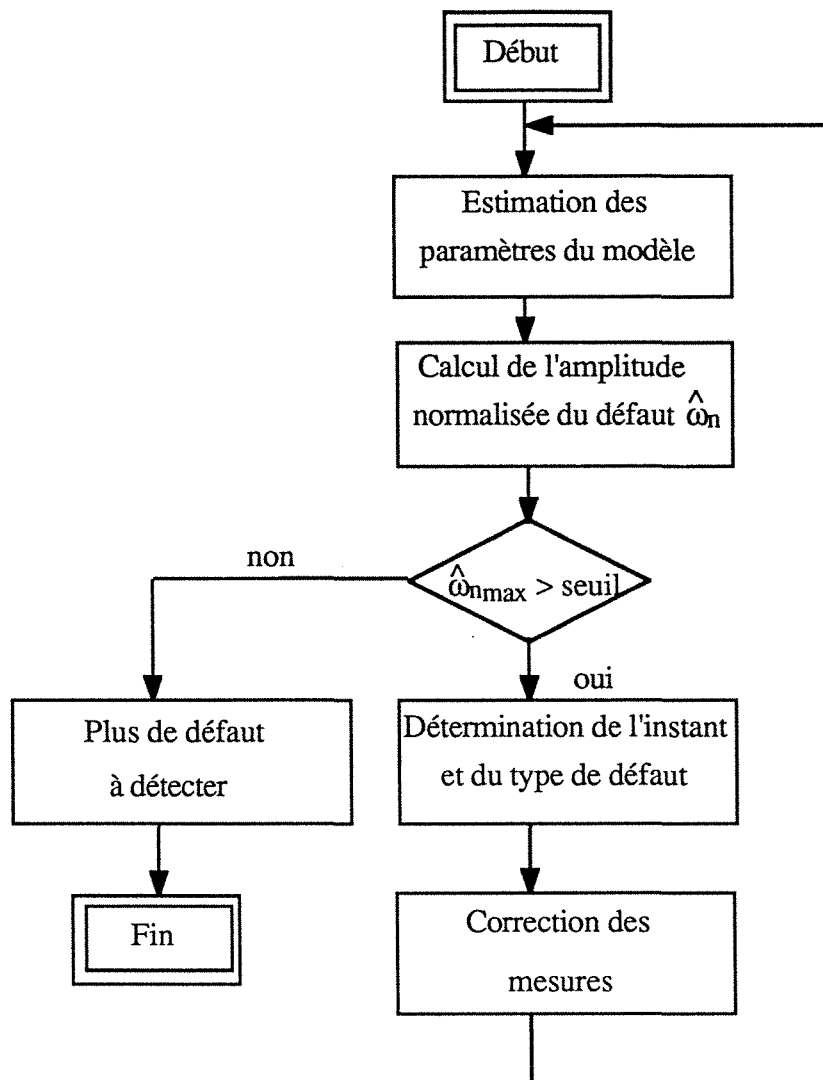


Figure V.4 - Algorithme d'estimation, de détection et de correction

### V.1.5. EXEMPLES

Pour mettre en évidence l'efficacité de la procédure de détection décrite ci-dessus, nous avons réalisé plusieurs essais en simulation. Nous présentons dans cette partie deux exemples qui nous ont semblé intéressants. Dans le premier exemple, la commande  $u$  du système est une séquence aléatoire et dans le deuxième exemple la commande est une séquence binaire pseudo aléatoire.

#### Exemple 1

Dans cet exemple de simulation, on réalise quatre essais. Le premier concerne une valeur aberrante additive sur la sortie, le deuxième une valeur aberrante innovée sur la sortie ; pour le troisième essai, on simulera un saut de moyenne au niveau du capteur délivrant la mesure de la sortie et enfin pour le quatrième, il s'agira d'une erreur (valeur aberrante additive) au niveau de

la mesure de la commande. Pour les différents essais, on donnera l'évolution des différentes valeurs de la variable  $\hat{\omega}_n$  utilisée pour reconnaître le type d'erreur.

Le processus simulé est caractérisé par l'équation suivante :

$$z_t = 1.5z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + u_{t-1} + 0.5u_{t-2} + \varepsilon_t \quad (5.26)$$

où  $u$  est la commande du système,  $z$  la sortie et  $\varepsilon$  un bruit blanc additive de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . La commande du système est présentée sur la figure V.5.

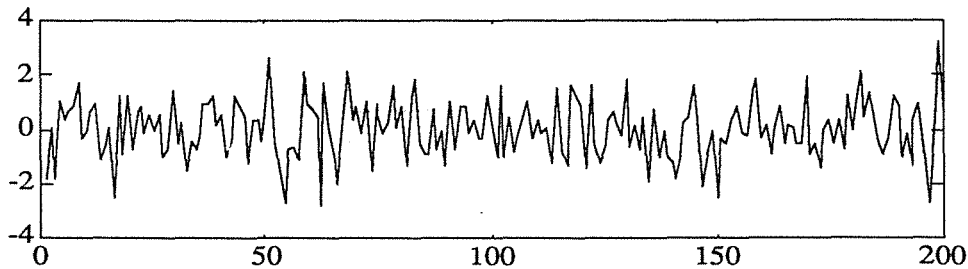


Figure V.5 - Commande  $u$  du système

Pour déterminer l'instant d'apparition du défaut et identifier son type, on calcule les valeurs de  $\hat{\omega}_n$  pour les différents types de défaut, soit :

- $\hat{\omega}_{n1}$  pour une valeur aberrante innovée sur la sortie du processus,
- $\hat{\omega}_{n2}$  pour une valeur aberrante additive sur la sortie,
- $\hat{\omega}_{n3}$  pour une valeur aberrante additive sur la commande,
- $\hat{\omega}_{n4}$  pour un saut de moyenne sur la sortie,
- $\hat{\omega}_{n5}$  pour une dérive au niveau du capteur délivrant la mesure de la sortie.

On rappelle que ces variables sont calculées à chaque instant, de plus, elles sont estimées à partir des paramètres du processus et des paramètres des fonctions de transfert génératrices du défaut. Dans notre exemple, ces paramètres sont inconnus et ils sont estimés avec la méthode des moindres carrés dans la première étape de l'algorithme de la figure V.4.

### Essai 1 - valeur aberrante additive sur la sortie

La figure V.6 représente la mesure de la sortie en présence d'une valeur aberrante additive à l'instant  $t = 100$  et d'amplitude 5.

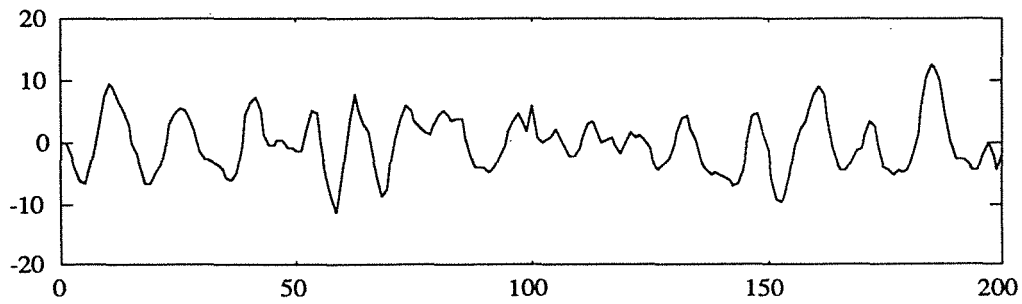
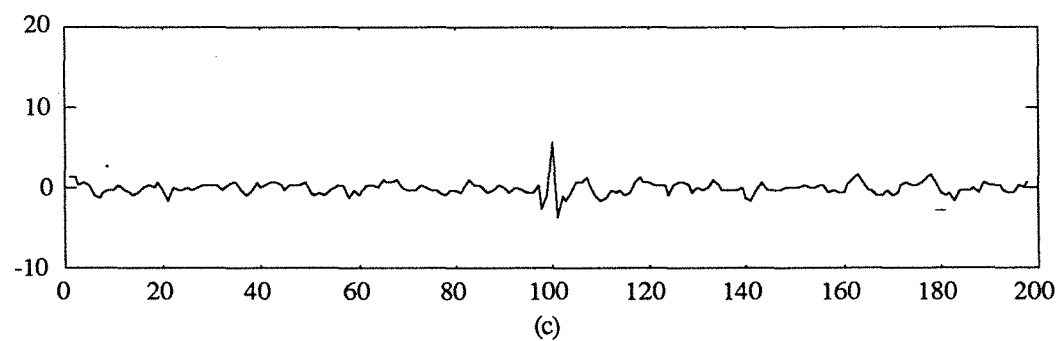
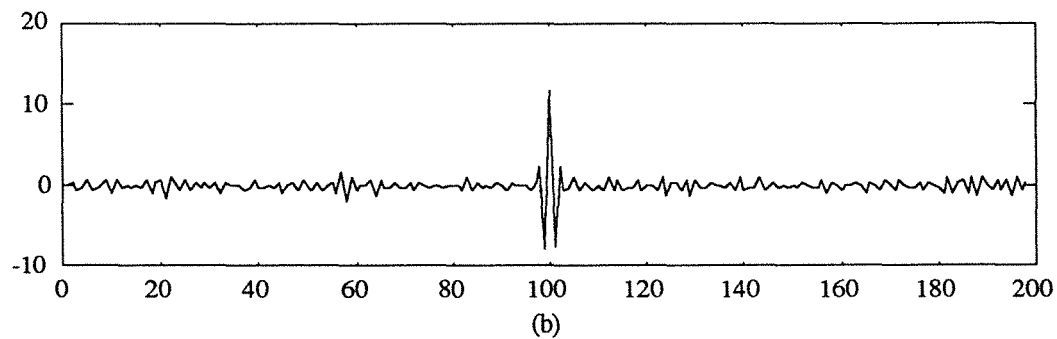
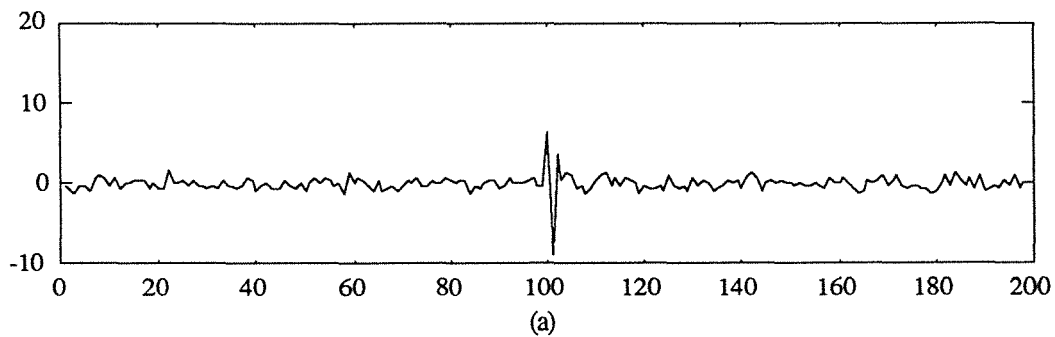


Figure V.6 - Sortie mesurée avec une valeur aberrante additive

Les résultats obtenus, au cours de la première itération, sont présentés sur la figure V.7. On constate que le maximum, pour toutes les valeurs de  $\hat{\omega}_n$ , est de 11.7. Ce maximum, supérieur au seuil fixé à 4, se situe à l'instant 100 et correspond à un défaut de type valeur aberrante additive sur la sortie (figure V.7(b)), car ce maximum est relatif à la variable  $\hat{\omega}_{n2}$ .





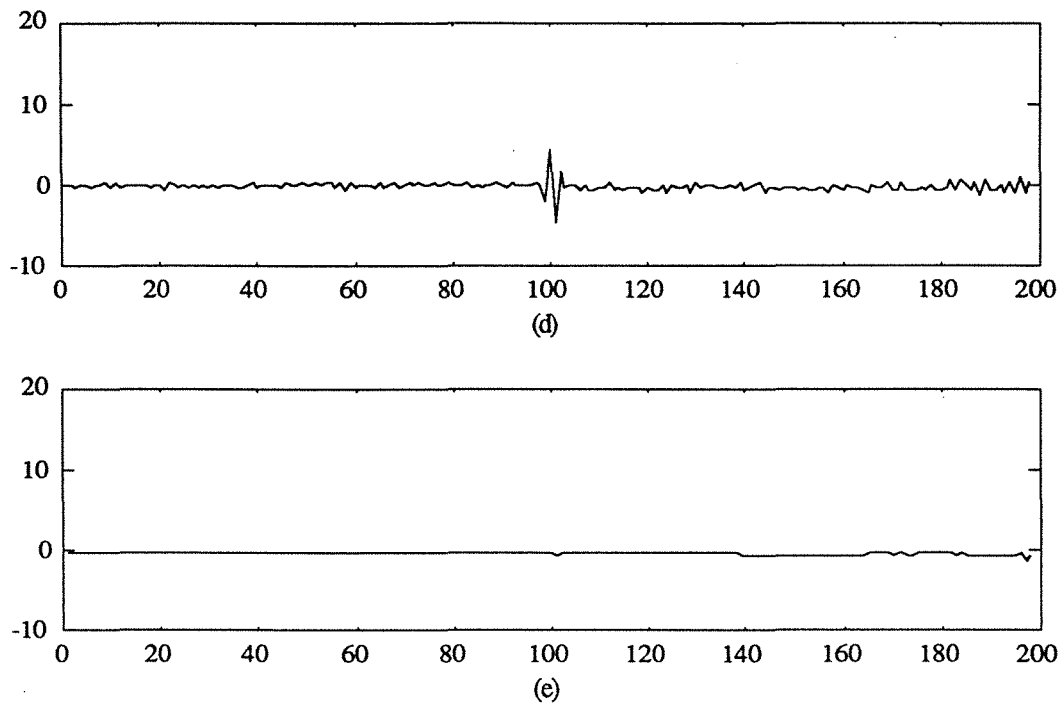


Figure V.7 - Évolution des différentes variables  $\hat{\omega}_n$

Après avoir localisé et identifié le défaut, on passe à l'étape de correction de la mesure ou des mesures en défaut (ici il ne s'agit que d'une mesure à l'instant 100). Après correction, c'est-à-dire à la deuxième itération, le maximum ne dépasse plus le seuil fixé, figure V.7(f), la procédure de détection est donc terminée.

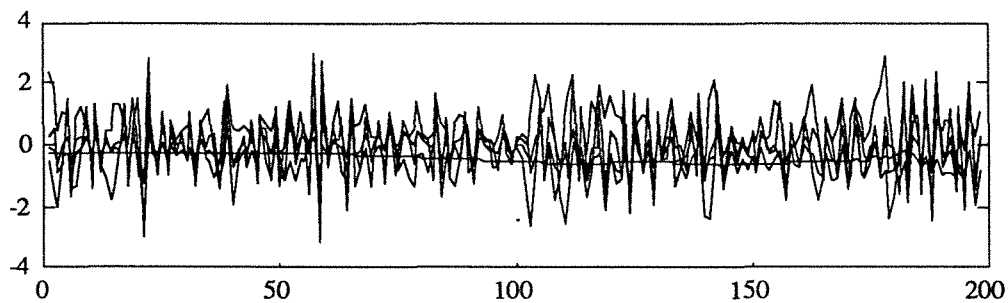


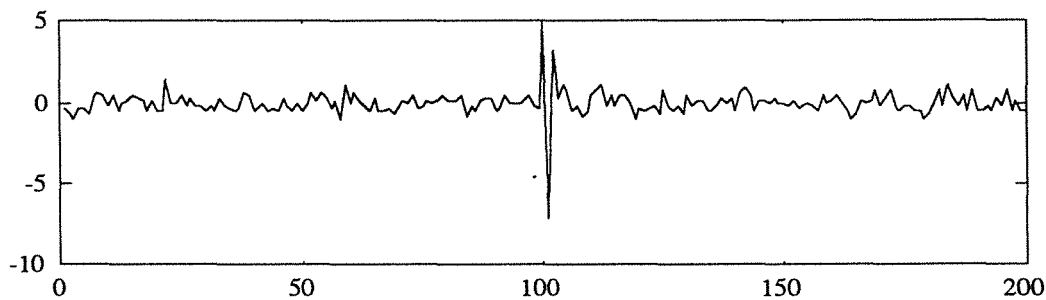
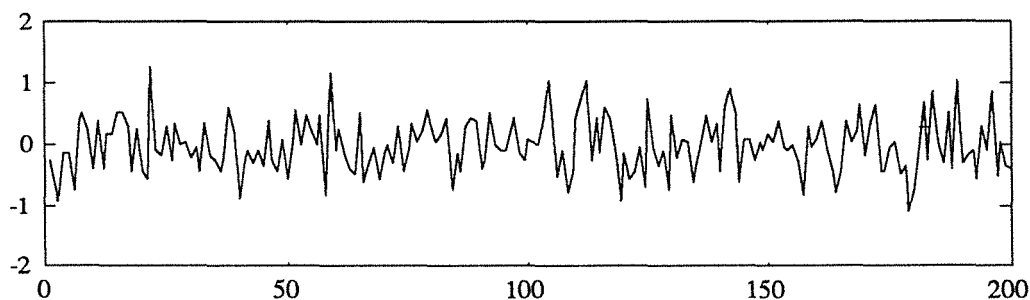
Figure V.7(f) - Évolution des paramètres  $\hat{\omega}_n$  après correction

On remarquera aussi (tableau V.1) que l'estimation des paramètres du modèle est meilleure à la fin de la deuxième itération qu'à la première. Cette estimation a été réalisée en utilisant les Moindres Carrés Simples. De même, l'estimation de l'amplitude du défaut est très satisfaisante (voir la dernière ligne du tableau V.1).

Paramètres	Exacts	Estimés (1ère itération)	Estimés (2ème itération)
a <sub>1</sub>	-1.5	-1.422	-1.480
a <sub>2</sub>	0.7	0.637	0.694
b <sub>0</sub>	1	0.999	0.990
b <sub>1</sub>	0.5	0.578	0.560
Amplitude	5	5.005	—

Tableau V.1 - Estimation des paramètres du modèle

Pour éprouver davantage les performances de la procédure, on s'intéresse à l'écart  $e_t$  défini par l'équation (5.4a). Comme nous l'avons signalé précédemment, la variable  $e_t$  doit être, en l'absence de défaut, l'image de la quantité  $\varepsilon_t$ . Autrement dit, la quantité  $e_t$  doit suivre une loi de distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ . Les figures V.8(a) et V.8(b) présentent respectivement l'évolution de cette variable avant et après détection et correction. Nous pouvons alors utiliser les tests développés dans le troisième chapitre pour effectuer le test sur la variable  $e_t$ . L'examen de cette variable, après correction, permet d'affirmer que l'écart  $e_t$  vérifie les conditions de normalité et ne présente aucune valeur anormale. Cet examen peut se faire en utilisant, par exemple, le test de l'étendue réduite ou le test de Grubbs développés dans le chapitre III.

Figure V.8(a) - Variable  $e_t$  avant correctionFigure V.8(b) - Variable  $e_t$  après correction

**Essai 2 - valeur aberrante innovée sur la sortie**

Pour mettre en évidence ce type de défaut, la figure V.9 présente la sortie simulée avec un défaut à l'instant 100, d'amplitude 5. L'écart obtenu  $e_t$  est donné à la figure V.10.

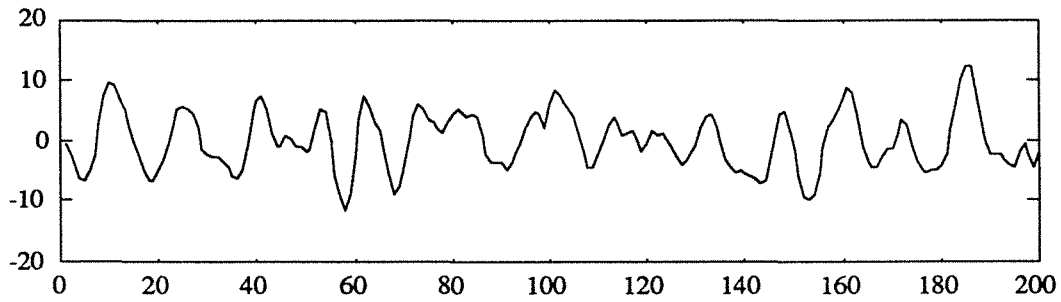


Figure V.9 - Sortie du système avec défaut

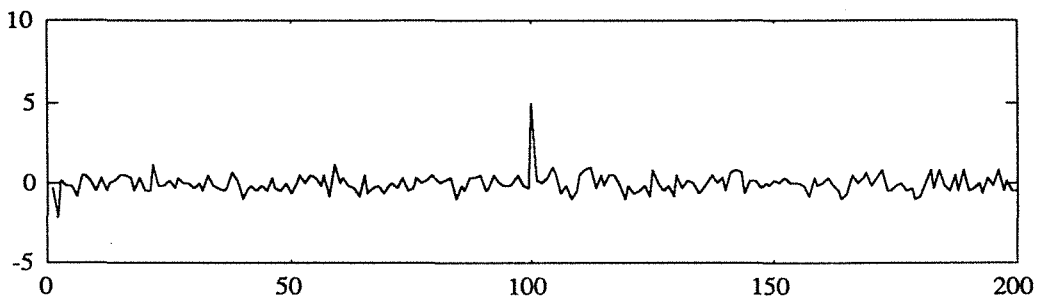


Figure V.10 - Variable  $e_t$  avant correction

Comme précédemment, on calcule à chaque instant les différentes valeurs de  $\hat{\omega}_n$  en utilisant les formules citées pour chaque type de défaut et en se servant des affectations faites précédemment pour les différents types de défauts, on obtient les variations indiquées aux figures V.11.

Toutes les courbes, sauf celle correspondante à une dérive sur la sortie, présentent une "signature" aux alentours de l'instant 100 indiquant la présence d'un défaut. Si on cherche le maximum de toutes les variables, on constate que ce maximum se situe à l'instant 100 pour la variable  $\hat{\omega}_{n1}$ . Cette variable symbolise un défaut de type valeur aberrante innovée sur la sortie  $y$ . On note que l'amplitude estimée du défaut est égale à 5.027.

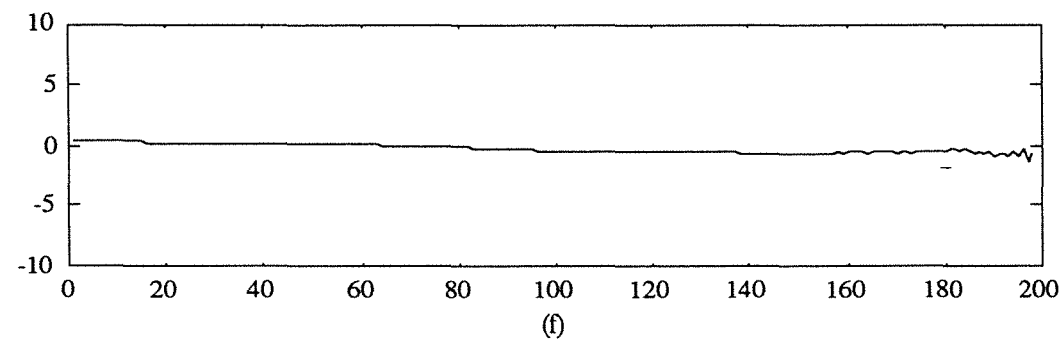
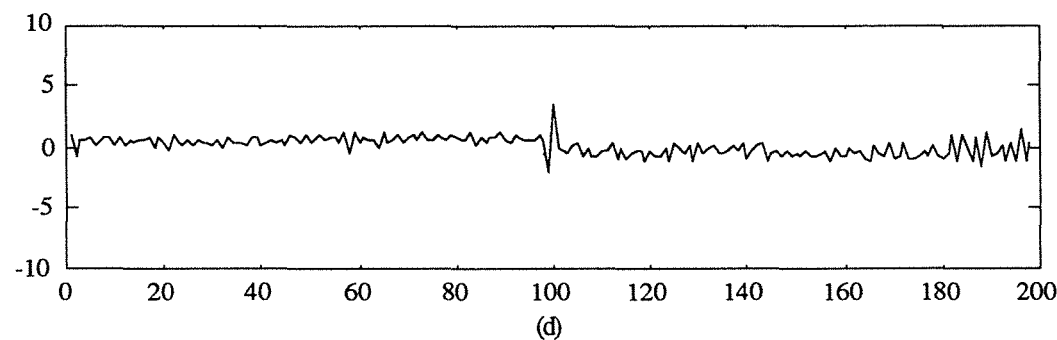
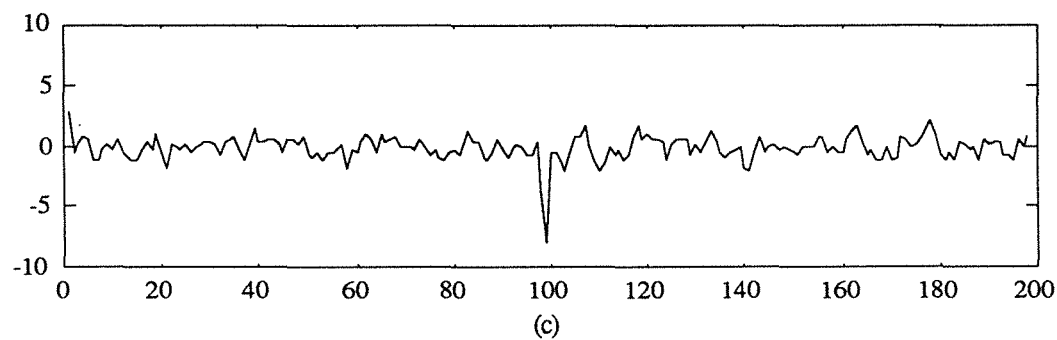
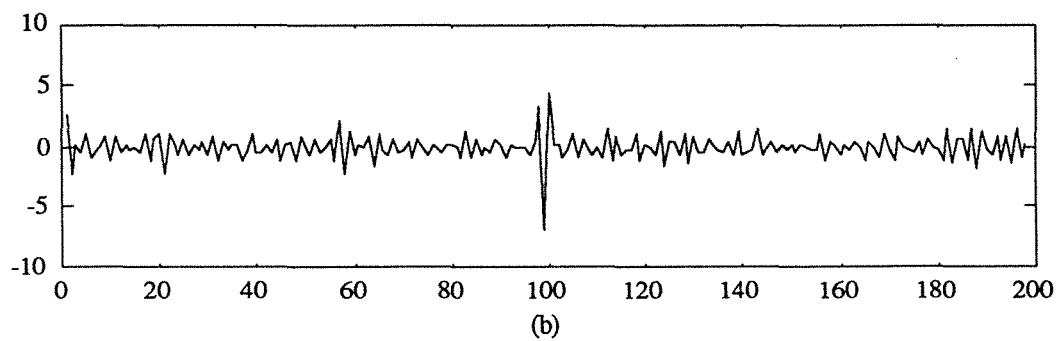
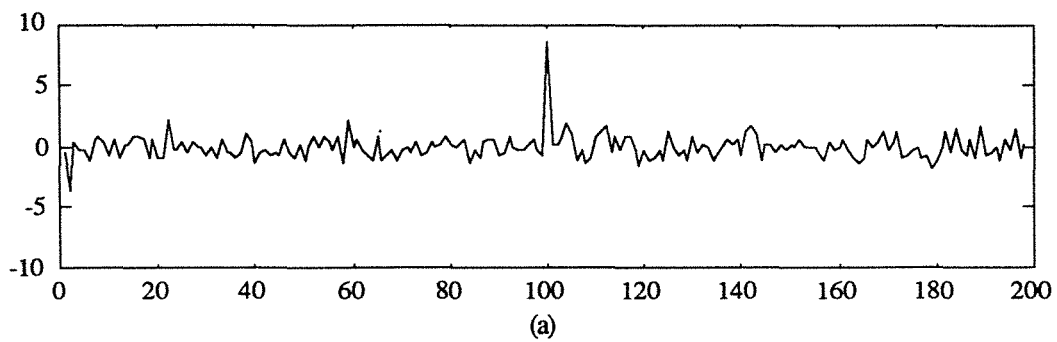


Figure V. 11 - Évolution des différentes variables  $\hat{\omega}_n$

Une autre manière de détecter le défaut consiste à examiner l'écart entre la variable de sortie et son estimée. La figure V.10 montre que la variable écart présente un défaut au voisinage de l'instant 100 durant la première itération.

Avec la localisation du défaut, l'identification de sa nature et l'estimation de son amplitude nous pouvons procéder à la correction des mesures. Une fois cette étape terminée, on s'intéresse de nouveau aux différentes variables  $\hat{\omega}_n$  déterminées à partir des mesures corrigées et aussi à la variable écart. L'examen de cette dernière variable nous informe que les mesures ne présentent aucune valeur anormale, nous rappelons que cet examen peut se faire à l'aide des différents tests cités dans le troisième chapitre.

### Essai 3 - saut de moyenne sur la sortie

La figure V.12 représente la sortie sans défaut (en pointillé) et avec défaut (trait plein). Le défaut correspond à un saut de moyenne d'amplitude 5 et le début du saut a été fixé à 100.

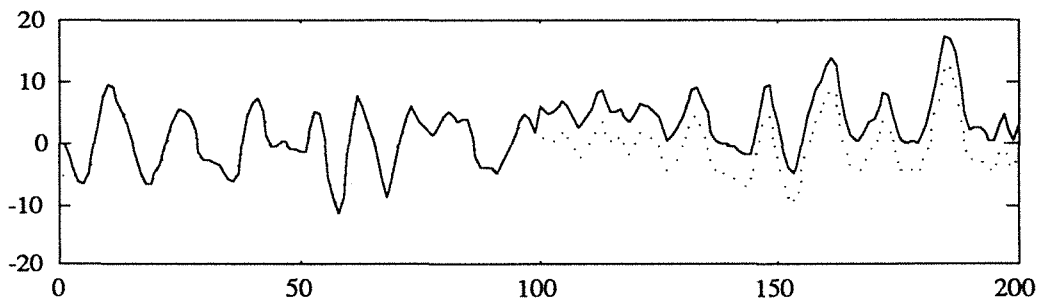


Figure V.12 - Sortie avec défaut et sans défaut

Le calcul de l'écart  $e_t$  et des différentes valeurs de  $\hat{\omega}_n$  indiquent la présence d'un défaut. L'examen de l'écart  $e_t$ , figure V.13(a), confirme la présence d'un défaut à l'instant 100, mais cette variable test ne peut nous informer sur la nature du défaut.

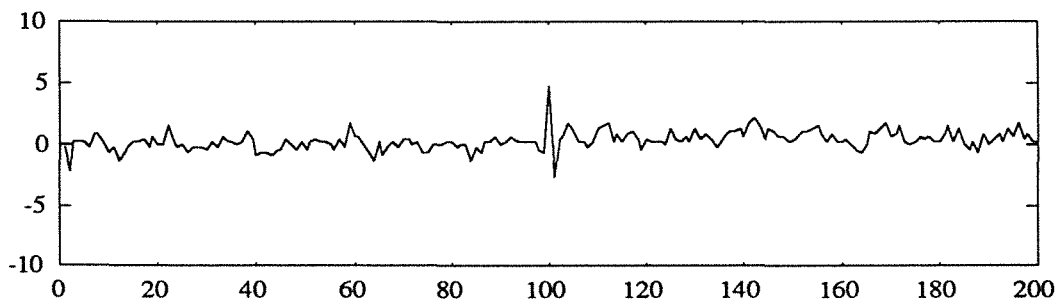


Figure V.13(a) - Écart  $e_t$  avant correction

On s'intéresse donc à d'autres informations que nous possédons à savoir les variables  $\hat{\omega}_n$ . Le tableau V.2 présente les valeurs de ces différentes variables au voisinage de l'instant de défaut déterminé à partir de l'analyse de l'écart.

	$\hat{\omega}_{n1}$	$\hat{\omega}_{n2}$	$\hat{\omega}_{n3}$	$\hat{\omega}_{n4}$	$\hat{\omega}_{n5}$
95	0.056	0.004	-0.245	6.512	7.569
96	0.142	-0.316	0.011	6.533	7.548
97	0.263	0.305	0.854	6.885	7.493
98	-0.548	2.330	-1.967	6.506	7.388
99	-0.836	-6.516	-4.082	4.080	7.691
100	5.950	5.929	2.576	<b>10.841</b>	7.305
101	-3.320	-1.997	-1.180	4.232	7.294
102	0.783	0.330	-1.981	6.495	7.289
103	1.070	-0.759	-2.725	6.155	7.271
104	2.291	0.053	-1.350	7.002	7.200
105	1.468	0.876	-0.263	6.911	7.095

Tableau V.2 - Valeurs des différentes variables  $\hat{\omega}_n$

Le maximum de  $\hat{\omega}_n$  se situe à l'instant 100 et il est de 10.84. Ce maximum est mis à l'actif de la variable  $\hat{\omega}_{n4}$  qui correspond à un défaut de type saut de moyenne. L'amplitude du défaut a été estimée à 5.07. Après l'étape de la correction, les variables  $\hat{\omega}_n$  ne présentent aucune valeur supérieure au seuil de même que l'écart  $e_t$ . La figure V.13(b), qui correspond à l'évolution de l'écart, confirme cette conclusion.

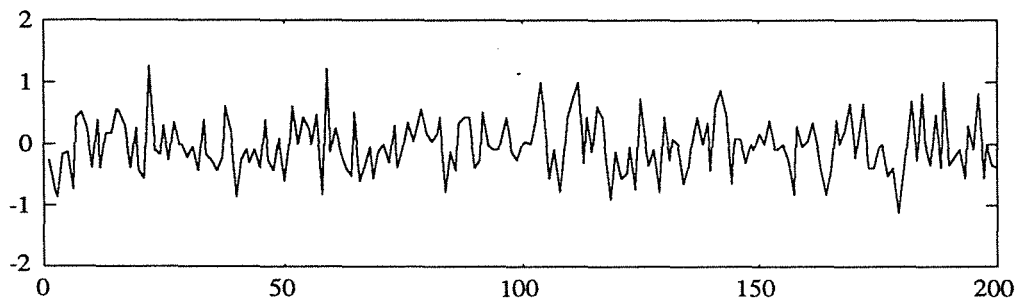


Figure V.13(b) - Écart  $e_t$  après correction

#### Essai 4 - valeur aberrante sur la commande

Dans ce dernier essai, on simule un défaut sur la commande de type valeur aberrante additive à l'instant 100 et d'amplitude 5. La figure V.14 présente la commande du système avec cette valeur aberrante.

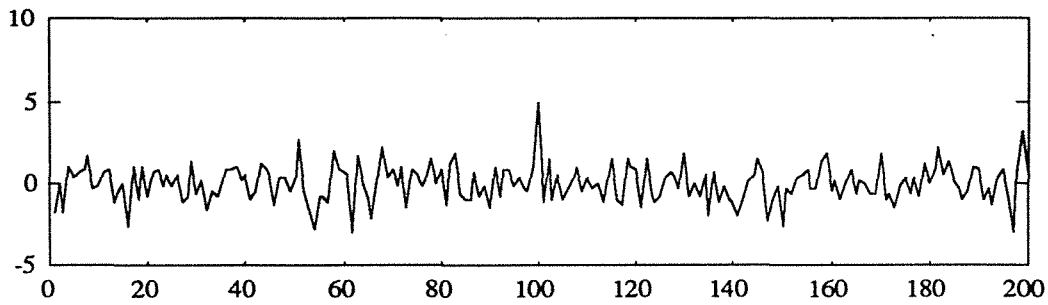


Figure V.14 - Commande mesurée du système

Le calcul des différentes valeurs de  $\hat{\omega}_n$  et de l'écart  $e_t$  montre l'existence d'un défaut au voisinage de l'instant 100, voir figure V.15 et V.16. Puisque le maximum de ces valeurs, 8.46, correspond à la variable  $\hat{\omega}_{n3}$  et compte tenu des affectation des variables  $\hat{\omega}_{ni}$ , faites précédemment, le défaut se situe bien au niveau du capteur mesurant la commande.

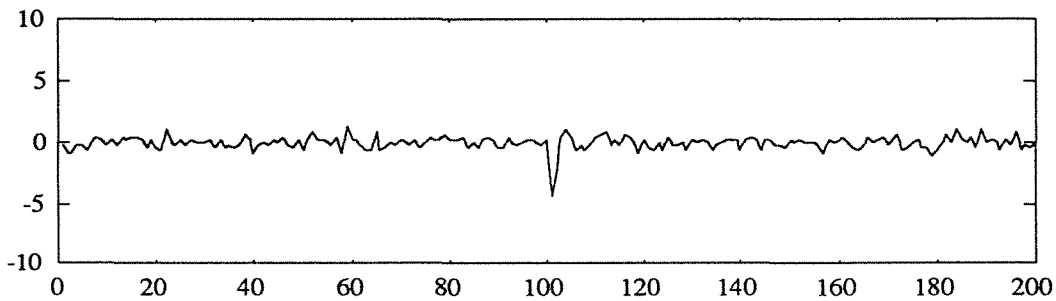
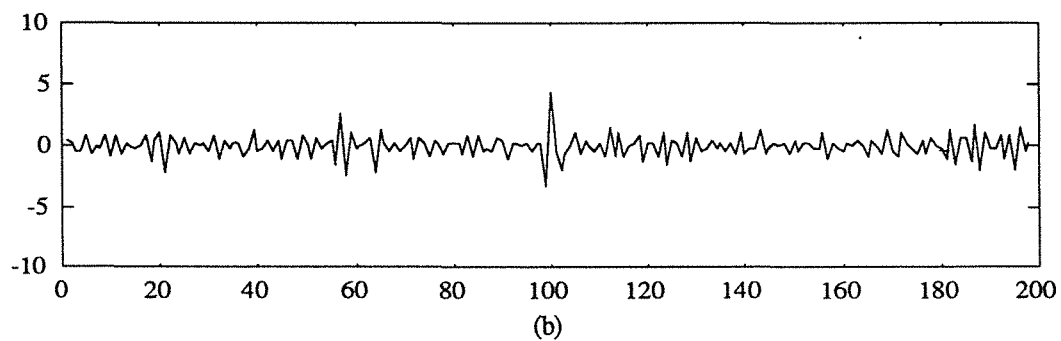
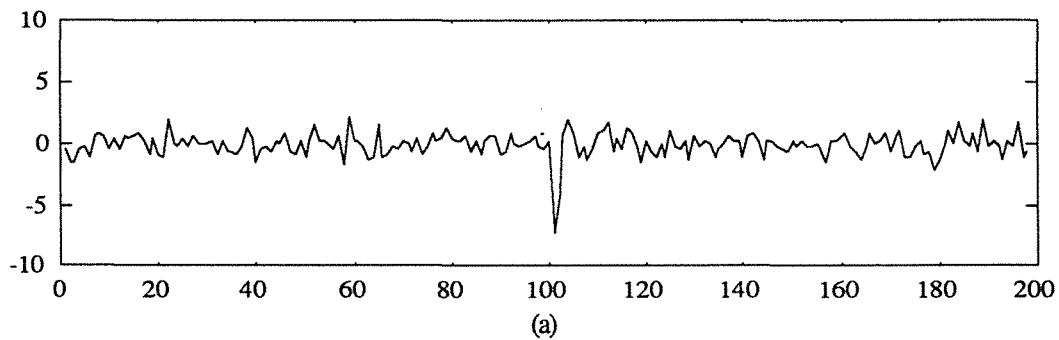


Figure V.15 - Écart  $e_t$  avant correction



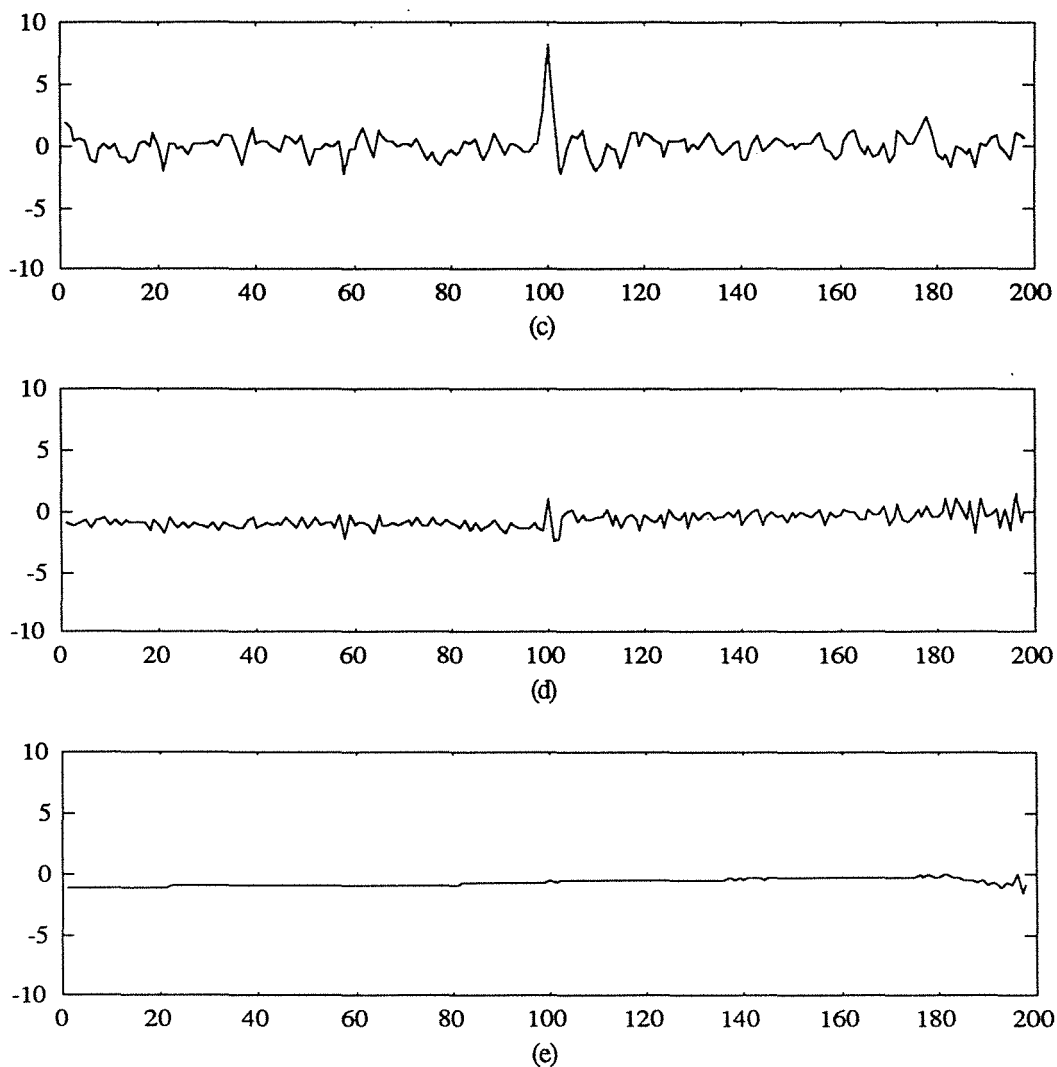


Figure V.16 - Évolution des différentes variables  $\hat{\omega}_n$

L'efficacité de la procédure a été testée dans d'autres conditions, notamment avec des entrées à spectre moins riche. Les résultats se sont révélés aussi satisfaisants que dans le cas précédent. Nous présentons dans le deuxième exemple quelques résultats avec une commande de type séquence binaire pseudo aléatoire.

### Exemple 2

Le système étudié est le même que dans le premier exemple avec une commande  $u$  dont les variations sont présentées sur la figure V.17.



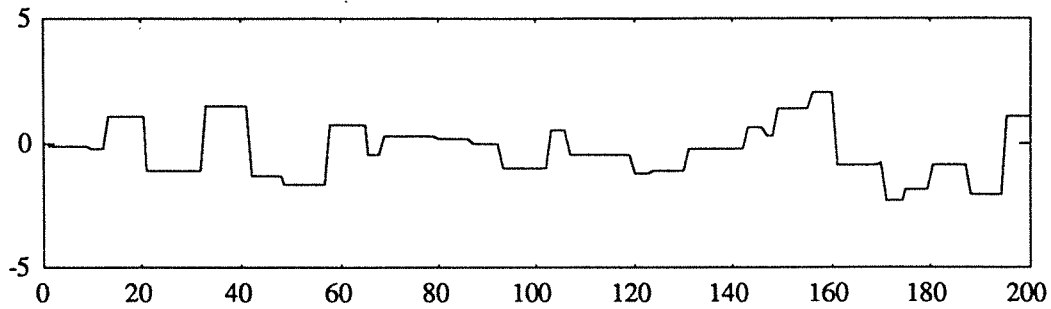


Figure V.17 - Commande u du système

Pour ce deuxième exemple nous avons effectué plusieurs essais traitant les différents types de défauts que nous avons exposés précédemment. Dans cette partie, on se limitera uniquement à deux essais. Dans le premier, nous avons introduit une valeur aberrante additive sur la variable de sortie et dans le deuxième essai nous avons simulé un défaut de type saut de moyenne sur la sortie du modèle.

**Essai 1 - valeur aberrante additive sur la sortie**

La réponse du système avec une valeur aberrante additive à l'instant 100 d'amplitude 5 est donnée par la courbe de la figure V.18. Cette réponse est obtenue avec l'équation (5.26) où le terme  $\epsilon_t$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à un et la commande u est présentée sur la figure V.17. On rappelle que le terme  $\epsilon_t$  représente un bruit additif. Ensuite, la mesure de la variable de sortie à l'instant 100 a été modifiée en lui ajoutant une valeur égale à cinq.

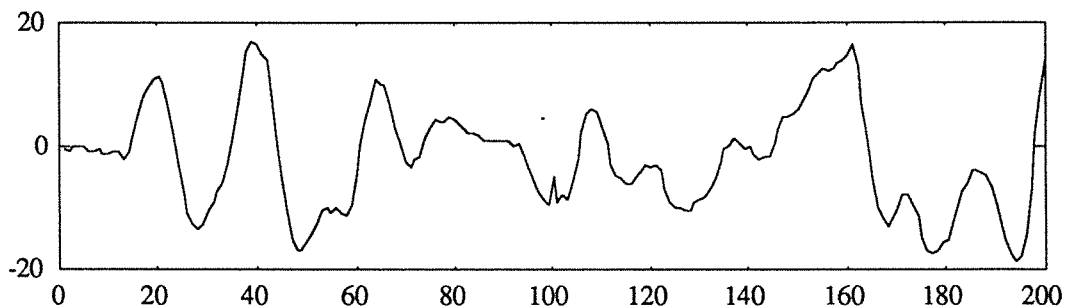


Figure V.18 - Sortie du processus avec une valeur aberrante additive

Nous appliquons par la suite la procédure de détection décrite par l'algorithme de la figure V.4. Comme nous l'avons indiqué dans le premier exemple, deux solutions sont envisageables pour détecter la présence de défaut. La première consiste à examiner le maximum de toutes les variables  $\hat{\omega}_{ni}$  et de comparer ce maximum à une valeur seuil qui est prise égale à 4 dans notre cas. La deuxième solution concerne l'examen de la variable écart calculée à partir de la mesure

et de son estimée. L'évolution de cette variable est présentée sur la figure V.19 où on voit que la courbe présente une valeur très large à l'instant 100.

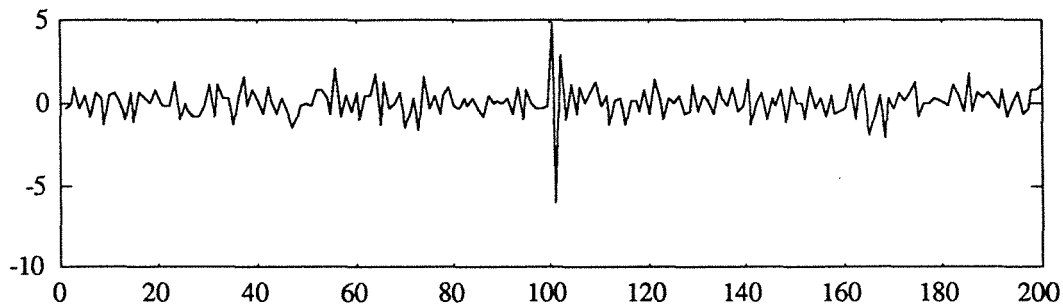


Figure V.19 - Évolution de l'écart

Cette deuxième solution nous permet uniquement d'affirmer ou non la présence d'un défaut mais elle ne peut identifier son type. Alors que la première solution nous permet à la fois de détecter le défaut, de le localiser et d'identifier sa nature. Les figures V.20 représentent les variations des différents variables  $\hat{\omega}_{ni}$  en fonction du temps et de la nature du défaut. Pour alléger la présentation, nous nous intéressons uniquement aux variations de  $\hat{\omega}_{ni}$  pour les défauts sur la sortie.

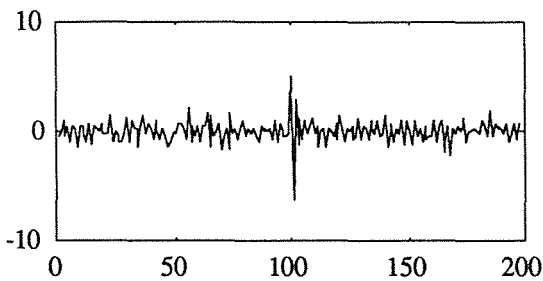


Figure V.20(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n1}$

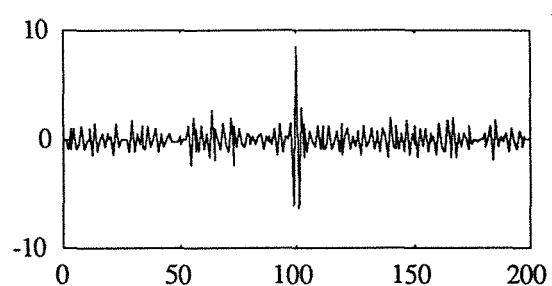


Figure V.20(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n2}$

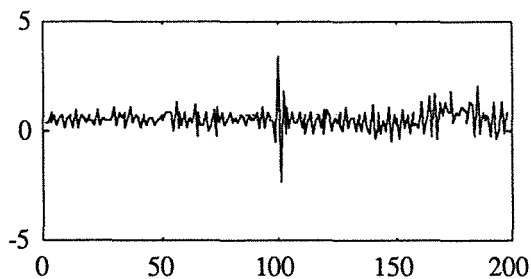


Figure V.20(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n4}$

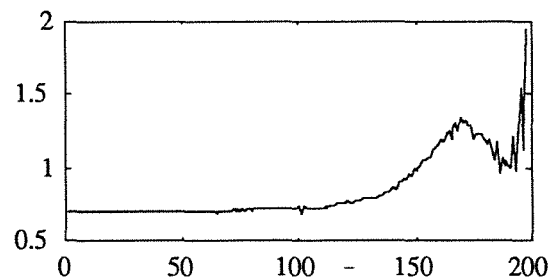


Figure V.20(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n5}$

L'examen de ces différentes courbes montre que les maximums pour chaque variable sont respectivement 5.114, 8.633, 3.453 et 1.947. Le maximum est donc égale à 8.633, se situe à l'instant 100 et il est relatif à la variable  $\hat{\omega}_{n2}$ . Cette variable caractérise une valeur aberrante

additive sur la variable de sortie. On peut signaler que l'amplitude estimée pour cette valeur aberrante additive est égale à 4.753.

A partir de cette estimation, nous avons corrigé la variable de sortie en utilisant les équations (5.22) et ensuite nous avons continué la procédure pour vérifier s'il n'existe pas d'autres valeurs aberrantes. Pour cela, nous avons de nouveau calculé les variables  $\hat{\omega}_{ni}$  et nous avons déterminé le maximum de ces variables. Ce maximum est égal à 3.442 qui ne dépasse pas le seuil fixé (4). La procédure est donc complète.

### Essai 2 - saut de moyenne sur la sortie

Dans cet essai, on utilise la même commande de la figure V.17 et la sortie est simulée à partir de (5.26). On introduit un saut de moyenne, limité dans le temps, entre les instants 100 et 150 d'amplitude égale à cinq. La figure V.21 présente les sorties du processus avec défaut (trait plein) et sans défaut (trait discontinu).

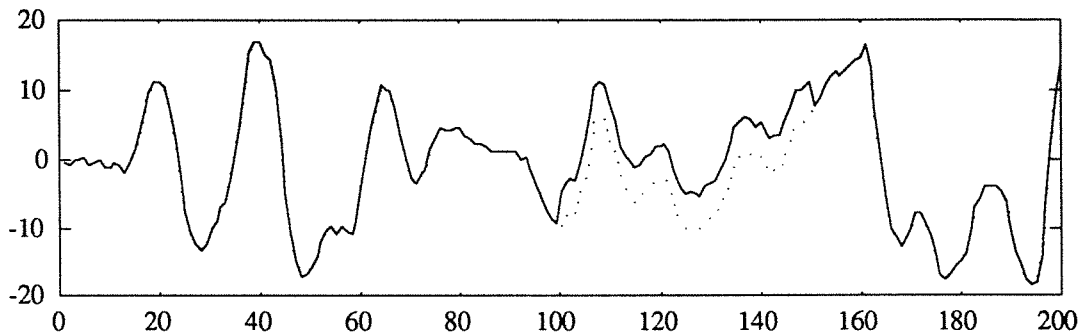
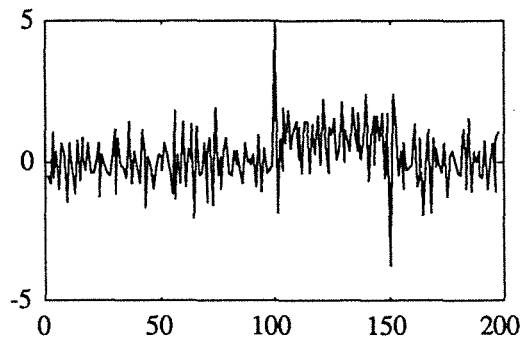
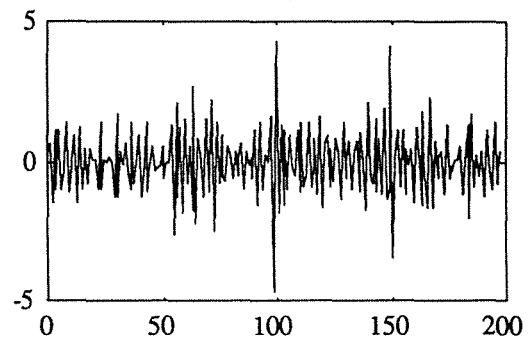
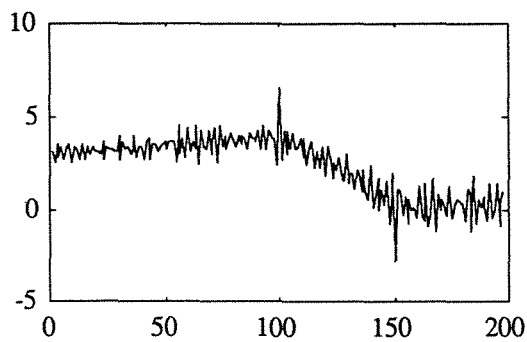
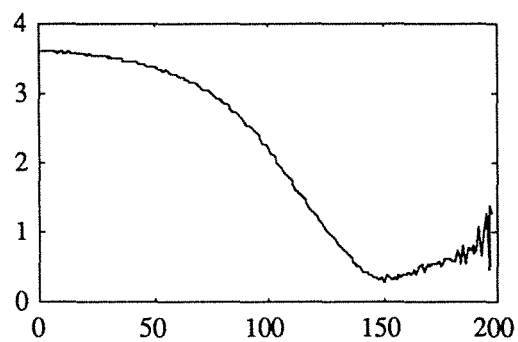


Figure V.21 - Sorties du processus avec et sans défaut

Au cours de la première itération de la procédure de détection, nous avons obtenu les résultats ci-dessous, figures V.22, qui concernent les variations des différents paramètres  $\hat{\omega}_{ni}$  à chaque instant et pour les quatre types de défauts (valeur aberrante additive, valeur aberrante innovée, saut de moyenne et dérive). L'examen de ces courbes montre que le maximum est de 6.524 et se situe à l'instant 100 et sur la variable  $\hat{\omega}_{n4}$ . Cette variable caractérise un saut de moyenne au niveau du capteur mesurant la sortie du processus.


 Figure V.22(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n1}$ 

 Figure V.22(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n2}$ 

 Figure V.22(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n4}$ 

 Figure V.22(a) - Variation de  $\hat{\omega}_{n5}$ 

Si maintenant, on désire corriger les mesures en défaut on doit estimer l'amplitude du défaut. Cette estimation est obtenue à partir des équations (5.13), on trouve une valeur égale à 3.106 qui est loin de la valeur réelle (5). A partir de cette estimation, on passe à l'étape de correction dont les règles sont données par les équations (5.24). Comme nous l'avons expliqué précédemment la correction sur toutes les observations disponibles. Par conséquent, cette étape de correction provoque un nouveau de défaut à partir de l'instant 150. On poursuit alors la procédure de détection (deuxième itération) en calculant les différentes variables  $\hat{\omega}_{ni}$  et en comparant le maximum de ces variables au seuil, nous avons détecté de nouveau un défaut de type valeur aberrante additive à l'instant 150. Par la suite, on estime l'amplitude de la valeur aberrante (équation 5.7) et on corrige les mesures en défaut (équation 5.22). A partir de ces nouvelles mesures, on applique de nouveau la procédure de détection (troisième itération). Les figures V.23 montrent l'évolution de la variable écart pour les trois itérations.

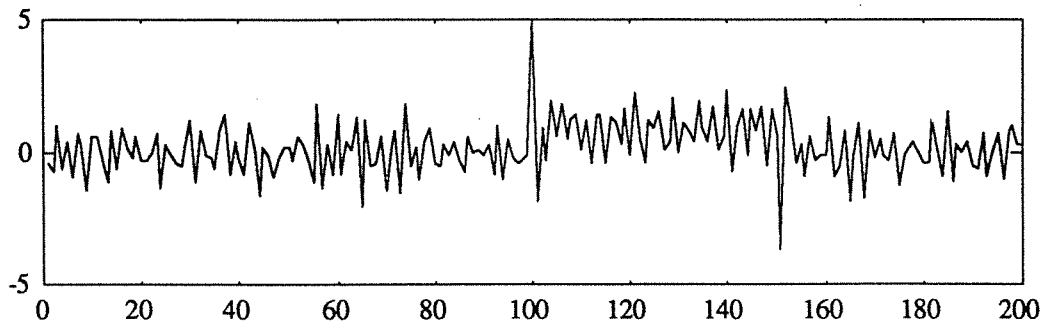


Figure V.23(a) - Écart calculé au cours de la première itération

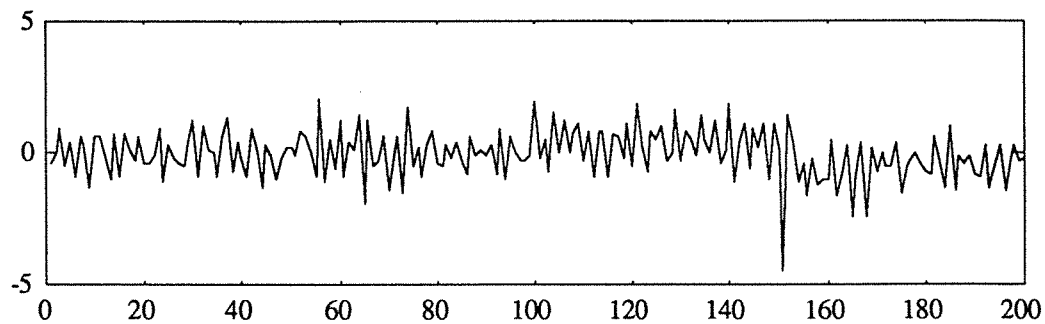


Figure V.23(b) - Écart calculé au cours de la deuxième itération

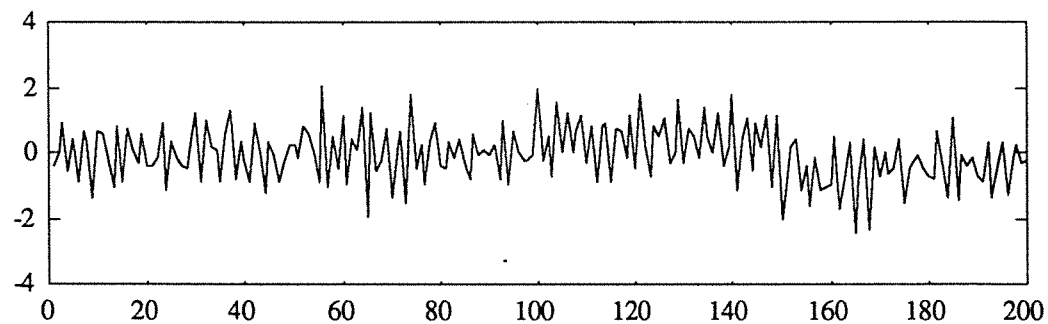


Figure V.23(c) - Écart calculé au cours de la dernière itération

La courbe de la figure V.23(a) montre que l'écart présente deux valeurs anormales, supérieures au seuil, aux instants 100 et 150. Après détection de défaut et correction des mesures affectées, l'écart ne présente qu'une seule valeur anormale. Dans la troisième itération, l'examen de l'écart ne révèle aucune anomalie, la procédure est donc complète.

Nous avons effectué d'autres essais en simulation, tenant compte de l'amplitude du défaut de la connaissance ou non de l'ordre du modèle et du nombre de valeurs aberrantes présentes dans le signal. Nous présentons quelques résultats de ces essais dans l'exemple de la deuxième partie de ce chapitre.

## V.2. ESTIMATION DE PARAMÈTRES EN PRÉSENCE DE VALEURS ABERRANTES

### V.2.1. INTRODUCTION

Nous venons d'établir une procédure permettant de détecter des éventuelles perturbations sur la sortie ou la commande, d'identifier l'amplitude de défaut ainsi que son origine et d'estimer les paramètres du modèle en utilisant uniquement la technique des moindres carrés simples. Avec son caractère itératif, cette procédure peut donc être utilisée comme une méthode d'identification des paramètres d'un processus ARX en présence de valeurs aberrantes.

On considère un processus modélisé par un modèle auto régressif avec une entrée auxiliaire  $u_t$ , défini par :

$$A(q^{-1})z_t = B(q^{-1})u_t + \varepsilon_t \quad (5.27)$$

L'objectif de l'identification est d'estimer les paramètres des polynômes A et B en utilisant que les mesures des variables  $z_t$  et  $u_t$ . Une des principales méthodes utilisée dans ce domaine est la méthode des moindres carrés. Malheureusement, cette technique ne donne pas de bons résultats quand les mesures sont entachées d'erreurs, par exemple des valeurs aberrantes.

La présence de ces valeurs aberrantes a préoccupé plusieurs chercheurs dans différents domaines et depuis plusieurs années. Et comme nous l'avons signalé dans l'introduction, il existe deux approches. La première consiste à établir des tests pour détecter les valeurs aberrantes, la deuxième consiste à développer des techniques d'identification qui sont robustes par rapport à ces valeurs aberrantes. Dans cette deuxième catégorie, plusieurs auteurs ont développé des méthodes basées soit sur l'analyse bayésienne soit sur l'approche minmax. On peut aussi trouver d'autres méthodes qui sont en général issues des méthodes classiques par exemple les moindres carrés pondérés, les méthodes basées sur la fonction du maximum de vraisemblance, le filtre de Kalman ...

En ce qui concerne l'approche minmax, elle a été introduite par Laplace (1893) et a été développée par Fourier (1924) puis par Cauchy (1931). Une synthèse des méthodes d'identification robustes utilisant l'approche minmax a été présentée par Faremothe (1987) dans le cas de l'estimation des paramètres d'un système linéaire. Dernièrement, McMichael (1990) et Walter (1991) ont présenté une technique robuste d'estimation des paramètres basée sur cette approche.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à deux méthodes. La première est basée sur le calcul de l'erreur de prédiction et elle est très connue sous le nom de P.E.M. (Prediction Error Method) dont les premiers travaux sont dus à Ljung (1983). La deuxième méthode utilise l'analyse bayésienne, elle consiste à déterminer la densité de probabilité des paramètres sachant les mesures des deux variables  $z_t$  et  $u_t$ . Dans notre étude, on s'est intéressé à l'algorithme de Puthenpura (1990) qui utilise cette deuxième approche. Les grandes lignes de ces deux

méthodes sont présentées aux paragraphes ci-dessous et une comparaison, sur un exemple de simulation, avec la méthode énoncée dans la première partie est présentée dans le paragraphe V.2.4. Cette comparaison porte sur le nombre de valeurs aberrantes présentes dans le signal de sortie, leur amplitude et sur la connaissance ou non de l'ordre du processus.

### V.2.2. PREDICTION ERROR METHOD (PEM)

L'estimation du vecteur de paramètres est obtenue en minimisant un critère qui dépend de l'erreur de prédiction. Cette erreur est donnée par la formule suivante :

$$er_t = y_t - \hat{y}_t \quad (5.28)$$

où  $\hat{y}_t$  est une prédiction de la sortie à l'instant t. Cette valeur est calculée en utilisant les mesures des entrées et des sorties retardées et une estimation des paramètres à l'instant t-1. Le critère à optimiser est défini par :

$$J_\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n er_i^2 \quad (5.29)$$

La minimisation du critère par rapport aux paramètres est un problème d'optimisation non linéaire, pour lequel une solution analytique est difficile à mettre en oeuvre. Ljung (1983) propose une méthode itérative qui consiste à utiliser la technique de Newton et Raphson :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \left( \frac{\partial^2 J_\theta}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} \Bigg|_{\theta=\theta_k} \quad (5.30)$$

où  $\frac{\partial J_\theta}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial^2 J_\theta}{\partial \theta^2}$  désignent respectivement le gradient et le hessien du critère  $J_\theta$ ,  $\hat{\theta}_k$  étant l'estimation du vecteur des paramètres à l'instant k. La procédure d'identification peut être résumée par les étapes suivantes :

- 1- Choix des valeurs initiales des paramètres.
- 2- Calcul de l'erreur de prédiction, équation (5.28).
- 3- Calcul du gradient et du hessien.
4. Mise à jour des paramètres, équation (5.30).
5. Retour à l'étape 2 ou arrêt si l'erreur de prédiction est inférieure, à chaque instant, à un seuil donné.

### V.2.3. ALGORITHME DE PUTHENPURA

Jusqu'à maintenant, pour caractériser les valeurs aberrantes, nous nous sommes intéressés surtout à modéliser la variable de sortie du processus. Cependant, il existe un autre formalisme pour caractériser ces valeurs aberrantes. Ce formalisme a été introduit par Huber (1981) et consiste à décomposer le résidu  $\varepsilon_t$  en deux termes. Le premier terme  $\varepsilon_{1t}$  traduit l'existence d'un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_1^2$ . Le deuxième terme  $\varepsilon_{2t}$  caractérise la présence des valeurs aberrantes et il est normalement distribué avec une moyenne quelconque et une variance  $\sigma_2^2$  supérieure à  $\sigma_1^2$ . Autrement dit, le résidu  $\varepsilon_t$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\varepsilon_t = (1 - \gamma)\varepsilon_{1t} + \gamma\varepsilon_{2t} \quad (5.31)$$

où  $\gamma$  désigne la probabilité d'apparition d'une valeur aberrante. De plus, on suppose que les variables  $\varepsilon_{1t}$  et  $\varepsilon_{2t}$  sont non corrélées. Pour estimer les paramètres du modèle ARX, Puthenpura (1990) propose une technique basée sur l'approche bayésienne, en déterminant la densité de probabilité a posteriori des paramètres. L'estimateur bayésien du vecteur de paramètres est celui qui maximise cette densité ; Ljung et Soderström (1983) ont proposé un algorithme pour résoudre ce problème. Les grandes étapes de cet algorithme sont données ci-dessous :

$$er_t = y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} \quad (5.32a)$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} \phi_t}{\left[ (1 - \gamma)\sigma_1^2 + \gamma\sigma_2^2 \right] + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} er_t \quad (5.32b)$$

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \phi_t \phi_t^T P_{t-1}}{\left[ (1 - \gamma)\sigma_1^2 + \gamma\sigma_2^2 \right] + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \quad (5.32c)$$

$P_t$  désigne la matrice de variance covariance,  $er_t$  l'erreur de prédiction et  $\phi_t$  correspond au vecteur de régression défini par :

$$\phi_t = \left[ y_{t-1} \ y_{t-2} \ \dots \ y_{t-p} \ u_t \ u_{t-1} \ \dots \ u_{t-r} \right]$$

Si les paramètres  $\gamma$ ,  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  sont connus, on obtient un algorithme similaire à l'algorithme robuste du filtre de Kalman développé par Masreliez et Martin (1977). Mais, en pratique, ces paramètres sont inconnus et pour en tenir compte Puthenpura (1990) définit une fonction  $\delta_t$ , dont la densité de probabilité est  $\text{Prob}(\delta_t = 1) = \gamma$ . Cette probabilité prend la valeur 1 si  $|er_t| \leq \beta$  et 0 si  $|er_t| > \beta$  et où la quantité  $\beta$  représente un seuil qui est variable selon les auteurs ; la valeur la plus recommandée est  $3\sigma_1$  (Aström, 1980). L'algorithme (5.32) devient donc :

$$er_t = y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} \quad (5.33a)$$



$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} \phi_t}{[(1-\delta_t)\hat{\sigma}_{1t}^2 + \delta_t \hat{\sigma}_{2t}^2] + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} er_t \quad (5.33b)$$

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \phi_t \phi_t^T P_{t-1}}{[(1-\delta_t)\hat{\sigma}_{1t}^2 + \delta_t \hat{\sigma}_{2t}^2] + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \quad (5.33c)$$

$$\begin{cases} \delta_t = 1 & \text{si } |er_t| \leq \beta \\ \delta_t = 0 & \text{si } |er_t| > \beta \end{cases} \quad (5.33d)$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{1t}^2 = \hat{\sigma}_{1t-1}^2 + \frac{er_t^2 - \hat{\sigma}_{1t-1}^2}{t-\tau} & \hat{\sigma}_{2t}^2 = \hat{\sigma}_{2t-1}^2 & \text{si } |er_t| \leq \beta \\ \hat{\sigma}_{1t}^2 = \hat{\sigma}_{1t-1}^2 & \hat{\sigma}_{2t}^2 = \hat{\sigma}_{2t-1}^2 + \frac{er_t^2 - \hat{\sigma}_{2t-1}^2}{\tau} & \text{si } |er_t| > \beta \end{cases} \quad (5.33e)$$

En plus de l'estimation des paramètres donnée par les équations ci-dessus, cet algorithme permet donc d'estimer et de mettre à jour les valeurs des variances  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  quand une valeur aberrante est détectée.

Initialement  $\tau = 1$  et lorsque l'algorithme détecte la présence d'une valeur aberrante dans le signal de sortie, c'est-à-dire quand  $|er_t| > \beta$ , le paramètre  $\tau$  s'incrmente. Ceci permet de connaître le nombre de valeurs aberrantes présentes dans le signal de sortie. Une étude plus détaillée de cette technique a été présentée par Ouladsine (1993a).

#### V.2.4. EXEMPLE

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement de chacune des méthodes énoncées précédemment (PEM, algorithme de Puthenpura et la procédure de la première partie schématisée par l'algorithme de la figure V.4) vis-à-vis du nombre et de l'amplitude des valeurs aberrantes dans le signal de sortie et de l'ordre du processus. Nous reprenons donc l'exemple classique de la première partie c'est-à-dire :

$$z_t = 1.5z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + u_{t-1} + 0.5u_{t-2} + \varepsilon_t$$

Le système a été simulé en utilisant la commande  $u$  présentée sur la figure V.24 et on rappelle que le terme  $\varepsilon_t$  est un bruit additif. Autrement dit, on simule dans un premier temps la sortie du processus uniquement avec la commande  $u$  et dans un deuxième temps on ajoute le terme  $\varepsilon_t$ . Dans cette partie, nous présentons trois essais, le premier concerne une seule valeur aberrante, le deuxième essai consiste à étudier le comportement des trois méthodes en présence de plusieurs valeurs aberrantes d'amplitudes différentes. Enfin, le dernier essai sera consacré à

l'étude de ces méthodes en présence d'une valeur aberrante lorsque l'ordre du modèle est inconnu.

### Essai 1

La figure V.24 présente l'entrée du système et la figure V.25 sa sortie avec une valeur aberrante à l'instant 100 d'amplitude 4. Avec ces deux signaux, on applique les trois méthodes citées précédemment et on s'intéresse plus particulièrement aux valeurs des paramètres estimés et obtenues avec ces trois méthodes.

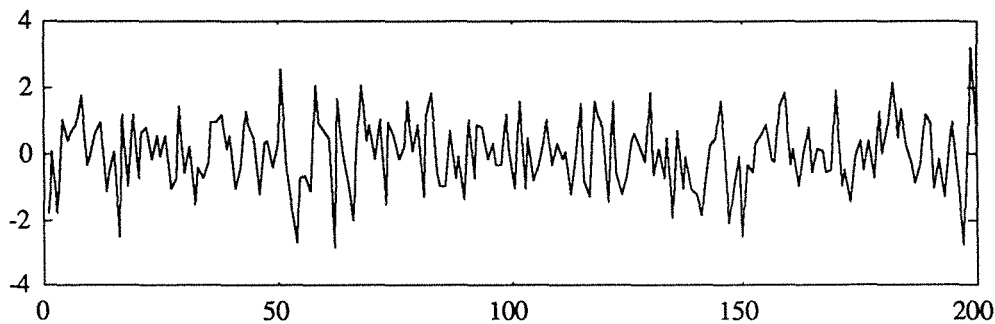


Figure V.24 - Entrée  $u$  du système

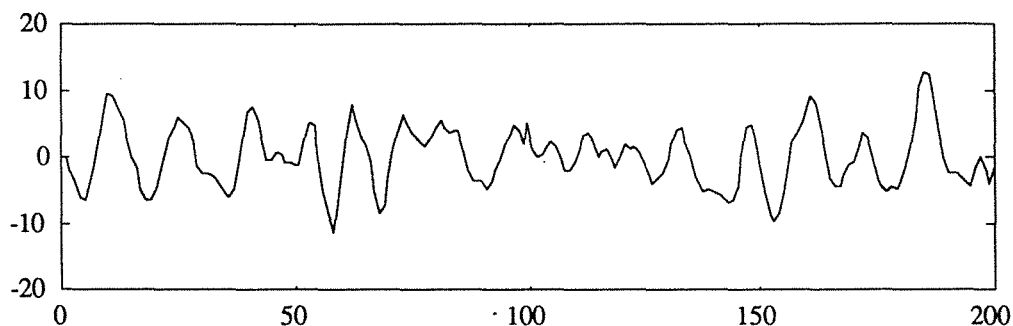


Figure V.25 - Sortie mesurée  $y$  du système

Le tableau V.3 présente les résultats obtenus pour le premier essai. Nous constatons pour ce premier essai comparatif que les trois méthodes fournissent de très bons résultats. Ceci est dû au fait qu'en présence d'une seule valeur aberrante ni les moindres carrés simples, utilisées par la procédure de détection, ni les moindres carrés récurrents, utilisées par l'algorithme de Puthenpura, ne sont affectées par la présence de cette anomalie.

Nous rappelons que les valeurs de la quatrième colonne sont obtenues à la deuxième itération puisque dans la première itération, nous avons détecté une valeur aberrante à l'instant 100 d'amplitude 4 et puis nous avons appliqué de nouveau la procédure de détection à la série de mesures corrigée. Nous pouvons signaler, d'après la figure V.25, que la valeur aberrante n'apparaît pas clairement sur la courbe du signal de sortie.

Paramètres exacts	paramètres obtenus avec PEM	paramètres obtenus avec l'algorithme de Puthenpura	paramètres obtenus avec la procédure de détection
-1.5	-1.473	-1.477	-1.480
0.7	0.686	0.692	0.694
1	0.987	0.986	0.990
0.5	0.558	0.563	0.560

Tableau V.3 - Valeurs des paramètres pour les trois méthodes

Pour éprouver davantage les performances des ces trois méthodes, nous allons étudier maintenant, dans le deuxième essai, la robustesse de ces différentes techniques en présence de plusieurs valeurs aberrantes d'amplitudes différentes dans le signal de sortie.

**Essai 2**

Dans cet essai, nous analyserons donc le comportement des trois méthodes en présence de quatre valeurs aberrantes aux instants 45, 100, 130 et 145 et d'amplitude respective 3, 4, 5 et 6. La figure V.26 présente la sortie du système avec les quatre erreurs. Et comme nous le constatons sur cette courbe, les valeurs aberrantes ne sont pas visibles a priori. Le but de cet essai est de mesurer la capacité de chaque méthode à fournir une bonne estimation des paramètres, en vue des utilisations ultérieures (diagnostic, commande) en présence de plusieurs valeurs aberrantes.

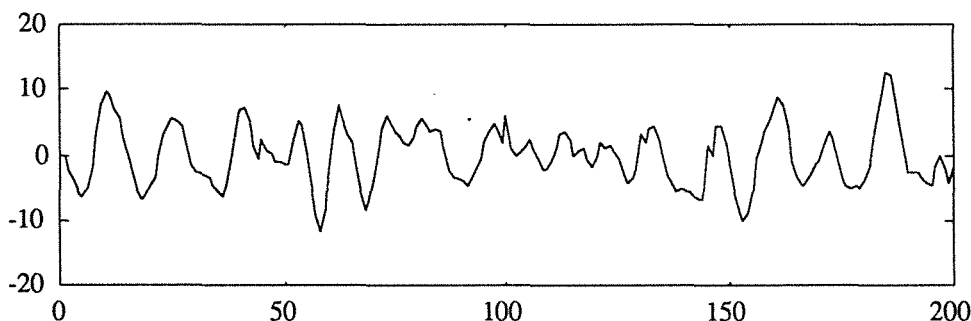


Figure V.26 - Sortie du système en présence de valeurs aberrantes

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau V.4 où la dernière colonne est relative aux résultats fournis par la procédure de détection à la cinquième itération. Nous constatons que les valeurs obtenues avec la procédure de détection sont nettement meilleures que les valeurs obtenues par les deux autres méthodes. Cette conclusion s'explique par le caractère séquentiel de la méthode et par le fait que lorsqu'une erreur est détectée les mesures en défauts sont corrigées.

Paramètres exacts	paramètres obtenus avec PEM	paramètres obtenus avec l'algorithme de Puthenpura	paramètres obtenus avec la procédure de détection
-1.5	-1.444	-1.461	-1.481
0.7	0.657	0.675	0.694
1	0.967	0.987	0.991
0.5	0.607	0.597	0.562

Tableau V.4 - Valeurs des paramètres en présence de quatre valeurs aberrantes

On rappelle que cette correction se fait en utilisant les estimées des amplitudes des valeurs aberrantes données par le tableau V.5 où les instants de défauts sont notés par leur ordre de détection. Là encore, nous constatons que les résultats obtenus sont très concluants. Par ailleurs, la procédure de détection ainsi que l'algorithme de Puthenpura nous ont permis de détecter les instants de défauts avec une bonne précision.

Instants	Amplitudes exactes	Amplitudes estimées
145	6	5.844
100	5	5.058
130	4	4.149
45	3	2.685

Tableau V.5 - Estimation des amplitudes des valeurs aberrantes

Nous venons de voir les performances des différentes techniques en présence d'une seule valeur aberrante et en présence de plusieurs valeurs aberrantes d'amplitudes différentes. Ces deux essais ont été effectués avec un ordre exact du modèle or il arrive que ce paramètre soit inconnu. Le dernier essai traite ce problème.

### Essai 3

Dans ce troisième essai, nous considérons deux cas : dans le premier, l'ordre du polynôme  $A(q^{-1})$  est pris égal à 3 et l'amplitude de la valeur aberrante, placée à l'instant 75, est égale à 2. Par contre, dans le deuxième cas, on prend le même ordre et le même instant de défaut mais l'amplitude est plus élevée égale à 6. Dans le tableau V.6, on résume les résultats obtenus dans cet essai pour les deux cas.

Paramètres obtenus avec PEM		Paramètres obtenus avec l'algorithme de Puthenpura		Paramètres obtenus avec la procédure de détection	
1er cas	2ème cas	1er cas	2ème cas	1er cas	2ème cas
-1.488	-1.459	-1.464	-1.496	-1.507	-1.507
0.705	0.660	0.666	0.723	0.741	0.740
-0.006	0.015	0.011	-0.016	-0.024	-0.024
0.988	0.988	1.000	0.989	0.990	0.990
0.540	0.566	0.566	0.542	0.509	0.510

Tableau V.6 - Valeurs des paramètres estimés par les trois techniques

La première remarque que nous pouvons formuler à partir de cet essai c'est que le troisième paramètre tend vers zéro pour les trois méthodes. Cette remarque peut servir par la suite pour la détermination de l'ordre du système. La deuxième remarque est beaucoup plus importante elle montre que les paramètres obtenus avec la procédure de détection sont nettement plus proches des paramètres exacts qui sont (-1.5, 0.7, 1 et 0.5). Par contre, les deux autres techniques présentent des paramètres sensiblement éloignés des valeurs exactes. Nous précisons encore une fois que les valeurs des paramètres estimés par la procédure de détection sont obtenues à l'issue la deuxième itération c'est-à-dire, pour les deux cas, nous avons dans un premier temps détecté la valeur aberrante, estimé son amplitude (1.823 pour le premier cas et 5.865 pour le deuxième) corrigé les mesures et dans un deuxième temps on applique à nouveau la procédure à la nouvelle série de mesures.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté dans la première partie une procédure permettant de détecter des défauts capteurs mesurant la sortie ou l'entrée, de localiser ces défauts, d'estimer l'amplitude ou l'impact du défaut, cette estimation nous a permis d'identifier la nature de défaut (valeur aberrante, saut de moyenne, ...) et enfin de corriger les mesures en défaut. Malheureusement, cette procédure ne permet pas de détecter les défauts de type dérive cela est due d'une part à la nature très complexe de ce défaut et d'autre part lors de la modélisation de ce type de défaut nous avons constaté qu'il y a une confusion entre ce défaut et la valeur aberrante innovée.

Lors de l'analyse des résultats obtenus par la procédure de détection développée dans la première partie, nous avons constaté, à la fin de la dernière itération, c'est-à-dire lorsque tous les défauts sont détectés et les mesures corrigées, que l'estimation des paramètres du modèle est très satisfaisante. Cette estimation est nettement meilleure à la dernière itération qu'à la première. Cette constatation nous a amené à comparer cette procédure de détection avec les autres techniques d'estimation des paramètres en présence de valeurs aberrantes. La comparaison est présentée dans la deuxième partie de ce chapitre et elle concerne les performances des trois techniques (PEM, Algorithme de Puthenpura et la procédure de

détection) vis-à-vis du nombre de valeurs aberrantes présent dans le signal de sortie, de leur amplitude et aussi de la connaissance ou non de l'ordre du modèle.

Les résultats obtenus par la méthode que nous proposons sont très encourageants surtout lorsque l'ordre du modèle est inconnu. En plus, cette méthode permet de détecter les valeurs aberrantes et d'estimer leur amplitude respectives. Malheureusement, vu son caractère itératif, elle demande un temps de calcul beaucoup plus important que l'algorithme de Puthenpura.



# CONCLUSION GÉNÉRALE





## CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux que nous avons présentés dans ce mémoire se situent dans le cadre du diagnostic de système et de la sûreté de fonctionnement. Ils sont, plus particulièrement, axés sur la détection de défauts de capteurs et de modifications de processus. Ces défauts sont de nature et d'origine différentes, mais pour notre part, nous nous sommes intéressés aux défauts de types valeurs aberrantes. Ces valeurs aberrantes peuvent traduire des erreurs d'enregistrement, des erreurs de structure, ... L'objectif est d'une part de déterminer les modes de fonctionnement normaux du système et d'autre part de détecter des éventuelles anomalies en testant les différentes observations.

La procédure à mettre en oeuvre, pour réaliser ce double objectif, dépend essentiellement des informations dont on dispose (mesures effectuées sur l'installation) et des connaissances physiques du processus. Si, par exemple, nous ne disposons que d'un tableau de valeurs constitué des mesures des variables, alors, dans ce cas, les méthodes classiques de l'analyse de données sont souvent utilisées pour effectuer l'analyse et la détection de valeurs aberrantes. Par contre, si nous savons qu'une relation mathématique lie les différentes variables alors nous devons, dans un premier temps, déterminer les paramètres de ce modèle mathématique, en utilisant les techniques d'identification, et dans un deuxième temps procéder à la détection des anomalies. Ces deux cas de figure concernent le cas multi-variables ou multi-signaux. Cette étude a été présentée dans les deux premiers chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons appliqué l'analyse en composantes principales pour la détection de valeurs aberrantes. Ainsi, nous avons mis en place une stratégie, pour détecter les valeurs aberrantes, basée sur l'analyse des nuages des observations et sur la contribution de ces observations à la construction des axes factoriels. En plus, cette stratégie nous a permis de déterminer avec précision la variable incriminée et par conséquent le capteur défaillant.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une synthèse des différents diagnostics dans une régression linéaire. Dans ce domaine, nous avons regroupé les tests en quatre catégories. La première catégorie repose sur l'utilisation de la matrice de projection. La deuxième regroupe tous les tests issus de l'écart calculé à partir de la différence entre la mesure et son estimée. Quant à la troisième catégorie, il s'agit de supprimer une observation qu'on pense être douteuse. On effectue alors l'analyse avec et sans cette observation et les résultats obtenus permettent de mesurer l'influence de cette observation sur la régression ou l'estimation des paramètres. Enfin, la quatrième catégorie regroupe les diagnostics basés sur la distance de Mahalanobis. Une étude comparative a été réalisée sur des données réelles d'un processus pilote et sur des données réelles issues de la littérature spécialisée.

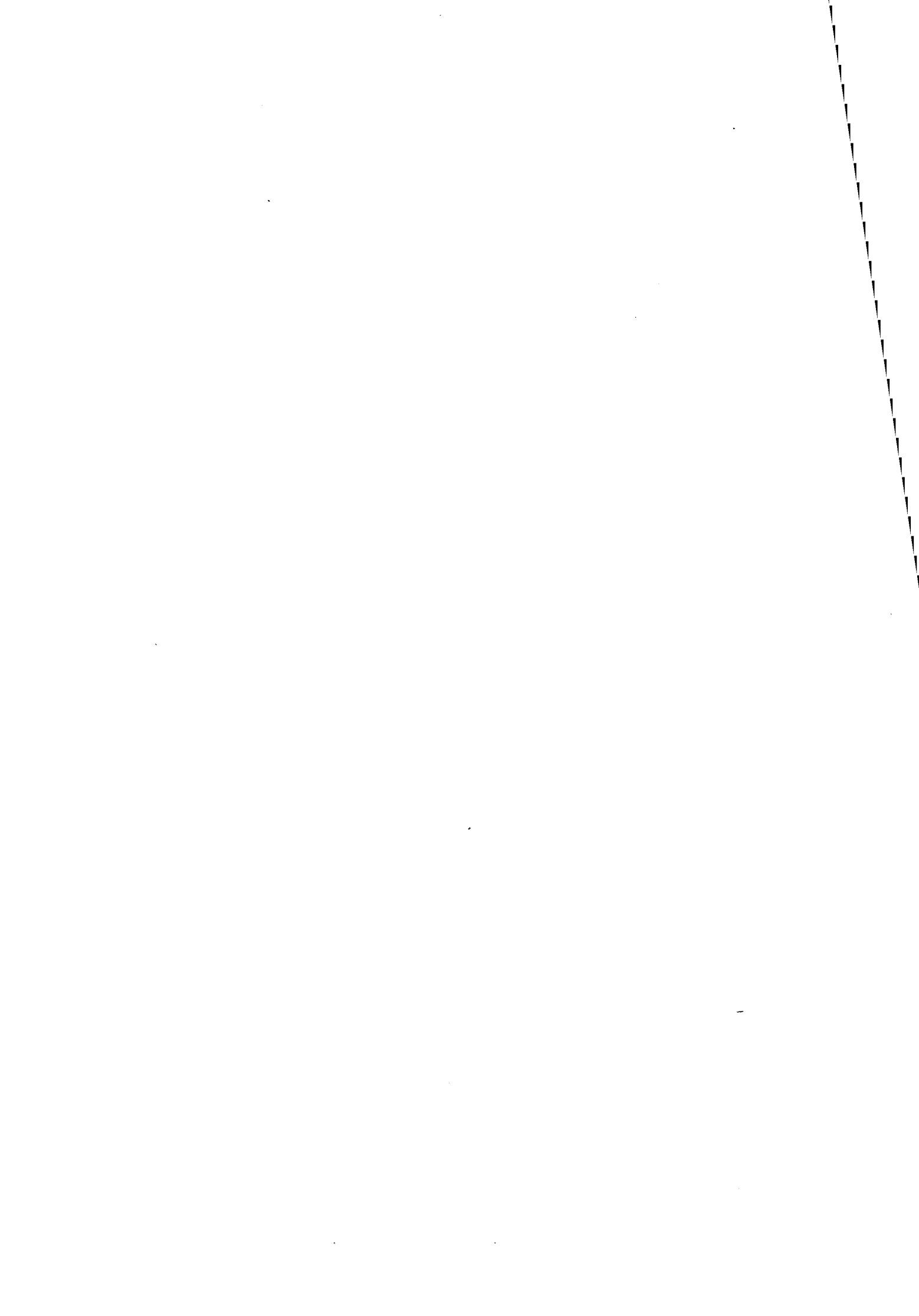
Dans le cas où on dispose d'un signal traduisant soit une série de mesures soit un signal temporel, nous utilisons deux approches. La première, relative à la série de mesures, consiste à appliquer des tests statistiques pour vérifier l'appartenance de toutes les mesures à une loi de distribution connue ou déterminée à l'avance. Dans cette partie, nous avons présenté une synthèse des différents tests que nous avons appliqués sur des données réelles d'un processus

pilote et aussi sur des données en simulation. De même, nous avons montré qu'on peut utiliser ces tests pour la détection en ligne en utilisant une fenêtre glissante dont la taille doit être convenablement choisie. Nous avons testé les performances des différents diagnostics en fonction du choix de la taille de la fenêtre et de l'amplitude de la valeur aberrante.

La deuxième approche consiste à modéliser le signal temporel par un modèle Auto Régressif (AR) ou un modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA) dont on estime les paramètres. La procédure que nous avons mise en oeuvre permet d'estimer les paramètres du modèle, en utilisant la technique des moindres carrés simples, de détecter et de localiser le défaut, d'identifier la nature de ce défaut et enfin de corriger les mesures. Nous avons étendu cette approche à des séries temporelles multi-variées. Ces dernières sont généralement modélisées par des processus Auto Régressifs Vectoriels. L'originalité du travail, réalisé dans cette partie, réside dans l'écriture du modèle en présence des deux types de valeurs aberrantes (valeur aberrante additive et valeur aberrante innovée). En plus, nous avons pu détecter ces valeurs aberrantes et déterminer l'instant et la variable en défaut. Malheureusement, nous n'avons pas obtenu de bons résultats pour l'identification de la nature de la valeur aberrante.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous avons développé une technique originale pour détecter à la fois les défauts sur la sortie et sur la commande du processus. Cette technique, basée sur le calcul de l'amplitude du défaut normalisée par son écart-type, a été appliquée à un processus Auto Régressif avec une entrée auxiliaire (ARX) et en plus elle a été étendue à tous les types de défauts (valeurs aberrantes, saut de moyenne, dérive, ...). La procédure qui a été mise en oeuvre permet aussi de déterminer la nature du défaut et aussi son impact. Comme les paramètres du modèle ARX sont généralement inconnus, la procédure peut être utilisée comme une méthode d'identification des paramètres. Dans cette optique, nous avons réalisé une étude comparative entre cette procédure et les techniques d'estimation des paramètres, en présence des valeurs aberrantes.

# ANNEXES



## ANNEXE A

### A.1. PRÉSENTATION DU PROCESSUS PILOTE

La mise au point de méthodes de détection de pannes de capteur et d'actionneurs, pour accroître la disponibilité et la sûreté de fonctionnement des processus industriels, ne peut se faire uniquement sur les processus simulés. Il s'est avéré nécessaire de construire une installation pilote couvrant une large gamme de processus industriels. Le pilote qui a été réalisé au sein du laboratoire possède toutes les caractéristiques d'une installation de type industriel :

- processus physique,
- capteurs et actionneurs
- appareils de saisie et traitement de données.

De véritables défauts de capteurs et de processus peuvent être ainsi créés permettant ensuite de tester les algorithmes mis en oeuvre. Dans cet esprit, plusieurs travaux ont été effectués sur cette installation pilote, Vaezi-najed (1989), Aitouche (1990), Gaddounna (1991), Egongolo (1992), Schreier (1993).

En plus de ce processus, un système d'acquisition permet de centraliser les signaux délivrés par les capteurs et de les enregistrer dans des fichiers appropriés. Il est constitué d'un boîtier servant d'interfaçage et d'un micro-ordinateur (PC équipé d'un coprocesseur mathématique 80387). Ce PC est muni d'une carte d'acquisition DT2801A de Data Translation et d'un logiciel de supervision LT/CONTROL. Le schéma ci-dessous représente l'ensemble de toute l'installation.

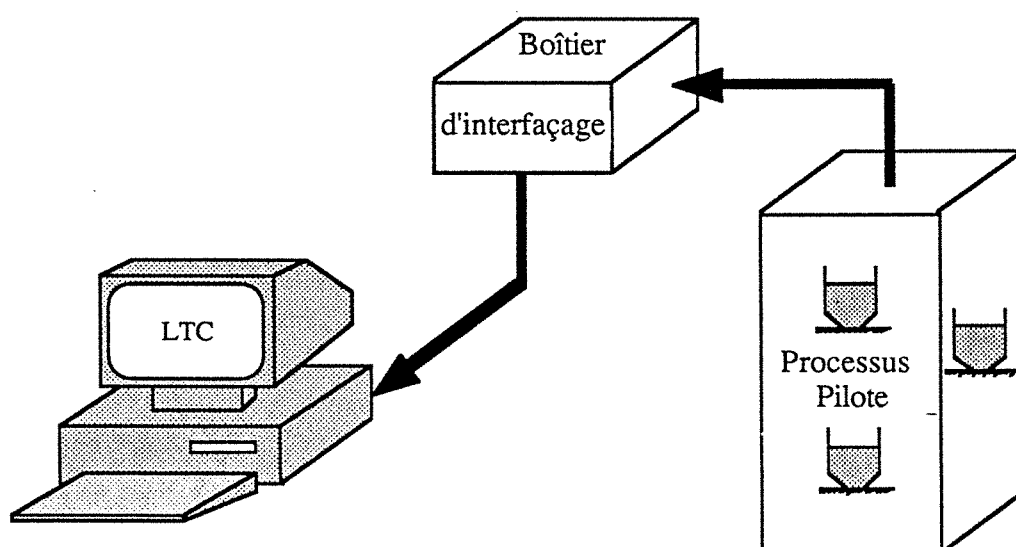


Figure A. 1 - Schéma de l'installation

## A.2. SCHÉMA DU PROCESSUS PILOTE

Le processus pilote est composé de trois cuves qui servent de réservoirs d'eau, d'organes de commandes et de capteurs. Le schéma simplifié de ce processus est présenté sur la figure A.2 avec la nomenclature dans le tableau A.1.







Symbole	Désignation	Nature	Échelle de mesure
	EV	électrovanne	5 volts
		vanne	manuelle
	P1 P2 P3	pompe pompe pompe	2000 l / h 1200 l / h 685 l / h
	NUS NP1 NC1 NC2 NP3	capteur ultra son capteur différentiel sonde capacitive sonde capacitive capteur différentiel	4 --> 20 mA 4 --> 20 mA 4 --> 20 mA 4 --> 20 mA 1 --> 5 volts
	N1-1_N2-2 N2-1_N2-2 N3-1_N3-4	capteurs tout ou rien	niveaux logiques
	DAR-O D1-2 D1-3 D2-3 DS-1 DS-3 D3-4	débitmètres électromagnétiques	4-->20mA 4-->20mA 4-->20mA 4-->20mA 4-->20mA 4-->20mA 4-->20mA

Tableau A.1 - Nomenclature

Les mesures faites sur le pilote portent essentiellement sur les niveaux d'eau dans les cuves et leurs débits à travers les canalisations de liaison inter-cuves. Ces mesures sont délivrées par différents capteurs :

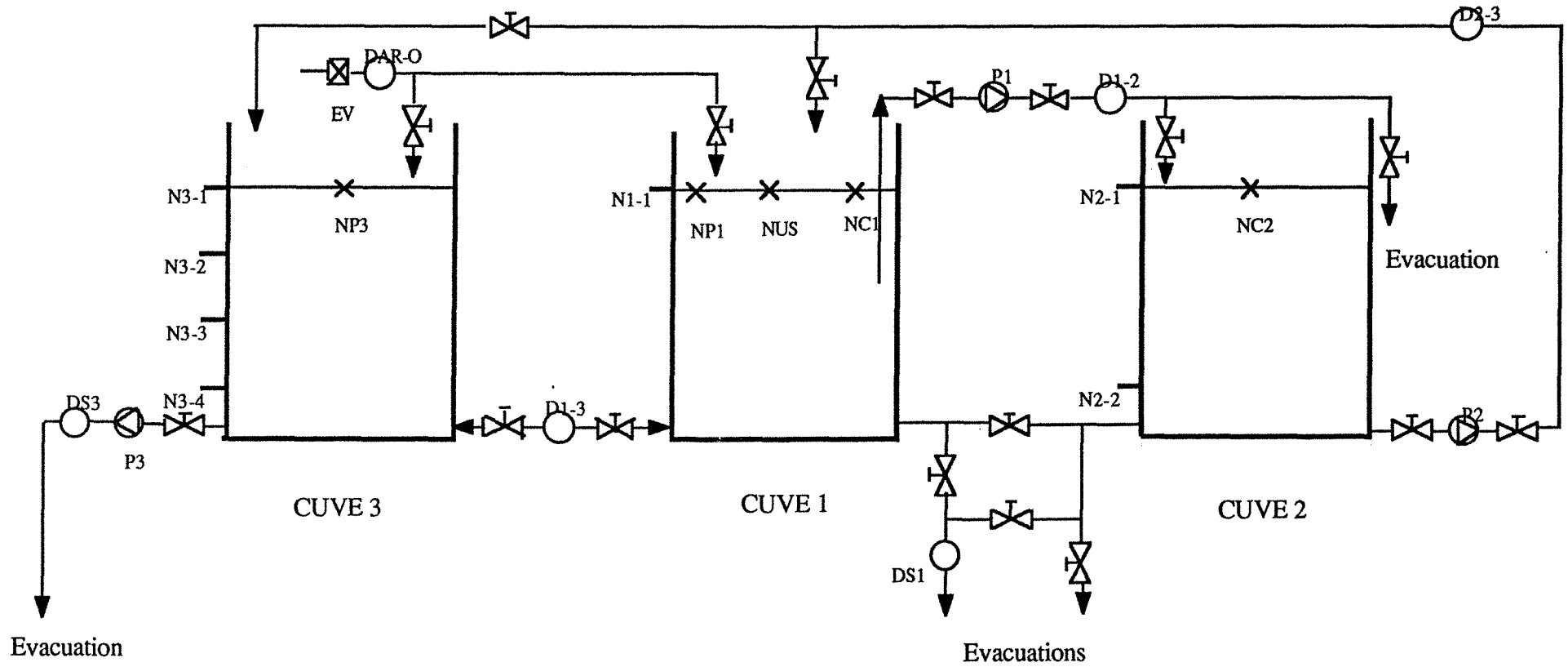


Figure A.1 - Schéma du processus pilote



Capteur de pression hydrostatique sur lequel une membrane à semi-conducteur transforme la pression exercée sur la sonde par le liquide environnant en un signal électrique amplifié entre 1 et 5 volts.

Un capteur de pression différentiel qui utilise aussi à la surface de son élément actif une membrane qui peut entraîner, sous l'action de la pression, le noyau mobile d'un transformateur différentiel.

Un capteur ultra sons émet des trains d'impulsion ultrasonore de fréquence 46 kHz. Ces ondes se propagent alors vers la surface du liquide qui les réfléchit. L'écho créé est recueilli par la sonde et le temps de parcours entre l'émission et la réception est transformé par l'électronique en un signal variant entre 4 et 20 mA proportionnel au niveau.

Deux sondes capacitives ; leur fonctionnement est basé sur les principes physiques du condensateur. Ici, la sonde est donc un condensateur dont les armatures sont : une tige implantée verticalement près de la paroi interne du réservoir et la dite paroi recouverte d'une fine couche métallique sur la partie en regard de la tige. La capacité de ce condensateur dépend donc de la hauteur du liquide se trouvant entre ses deux armatures. On la mesure en appliquant à leurs bornes une tension à une fréquence élevée et constante permettant de générer un courant qui est transformé en un signal continu, proportionnel à la hauteur du liquide dans le réservoir et variant de 4 à 20 mA.

Sept capteurs tout ou rien qui indiquent un niveau haut lorsqu'ils sont totalement immergés dans un liquide. Ils permettent donc, par l'intermédiaire de voyants lumineux de disposer d'alarmes indiquant le franchissement de certains paliers.

Les débitmètres sont tous de type électromagnétique. Ils fonctionnent suivant le principe d'induction de Faraday.

Vu le nombre important de capteurs implantés, nous pouvons utiliser plusieurs configurations selon l'étude que l'on désire réaliser. Par exemple, on peut utiliser la redondance matérielle ou analytique pour détecter les défauts capteurs. Pour notre étude, nous avons utilisé deux configurations.

### A.3. CONFIGURATION ÉTUDIÉE

La première configuration est étudiée dans le deuxième chapitre. Le schéma de cette configuration est donné par la figure A.3. Elle consiste à n'utiliser que les deux cuves 1 et 3. Dans cet exemple d'application, nous nous sommes intéressés à la relation qui lie le signal délivré par le capteur différentiel NP3 et les signaux recueillis par les deux débitmètres D13 et DS3. Par la suite, nous avons provoqué un défaut sur le capteur différentiel NP3. Ce défaut est obtenu en déplaçant ce capteur.



## ANNEXE AI

## ANNEXE AI.1 :

On appelle kème composante principale le vecteur  $Y_k$  dont les composantes sont les coordonnées du point du nuage sur le kème axe principale. C'est un vecteur à  $n$  composantes dont la ième composante est donnée par :

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^p x_{ij} u_{kj} \quad k = 1, \dots, p \text{ et } i = 1, \dots, n$$

Ou sous forme d'écriture matricielle :

$$Y = XU$$

avec  $Y = (Y_1 \dots Y_p)$  matrice des composantes principales et  $U = (U_1 \dots U_p)$  matrice des vecteurs propres ordonnés selon les valeurs propres croissantes. Le nuage des observations (projection des observations) donne donc les coordonnées de chaque composante principale sur les différents axes factoriels. Lorsque les données de départ sont centrées et réduites (Analyse en composantes principales normée), on montre que la moyenne de chaque composante principale est nulle et que la variance de la kème composante principale est égale à la kème valeur propre de la matrice  $X^T X$ . En effet :

$$\text{Var}(Y_k) = \sum_{i=1}^n y_{ik}^2$$

$$\text{Var}(Y_k) = \sum_{i=1}^n u_k^T x_i x_i^T u_k$$

$$\text{Var}(Y_k) = u_k^T \sum_{i=1}^n x_i x_i^T u_k$$

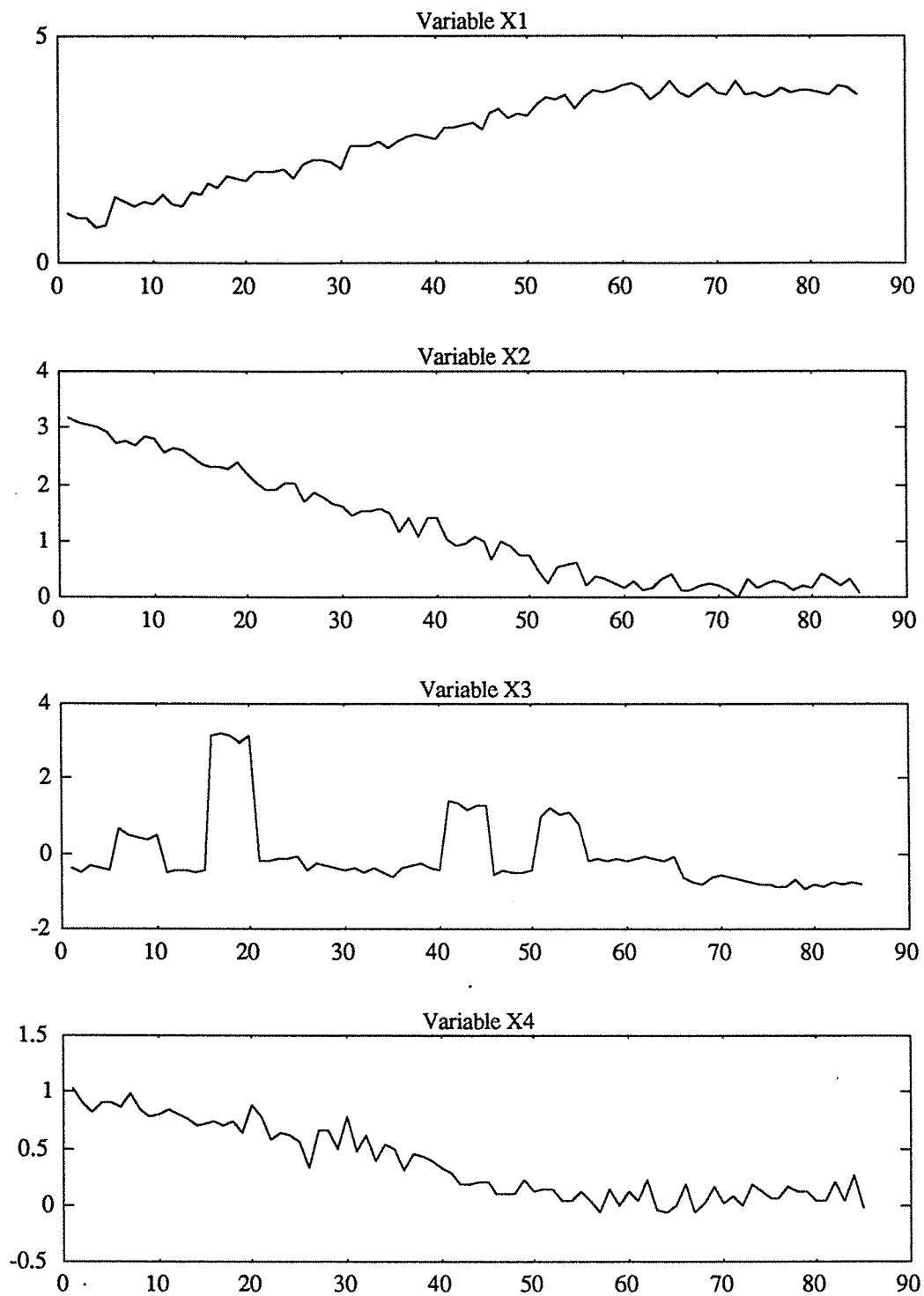
$$\text{Var}(Y_k) = u_k^T X^T X u_k$$

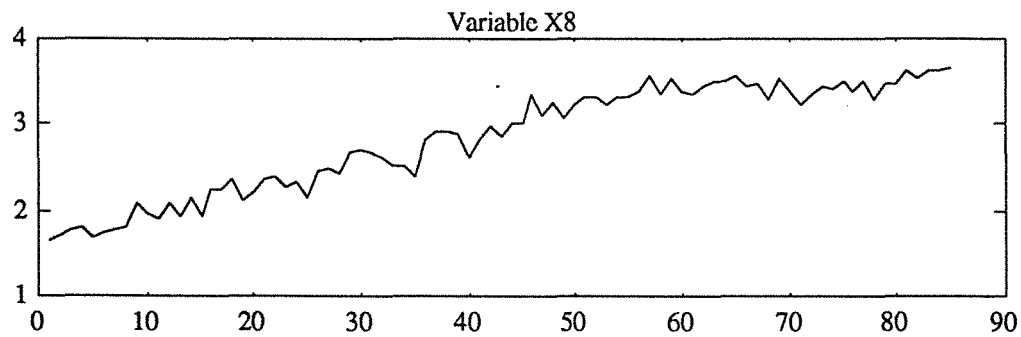
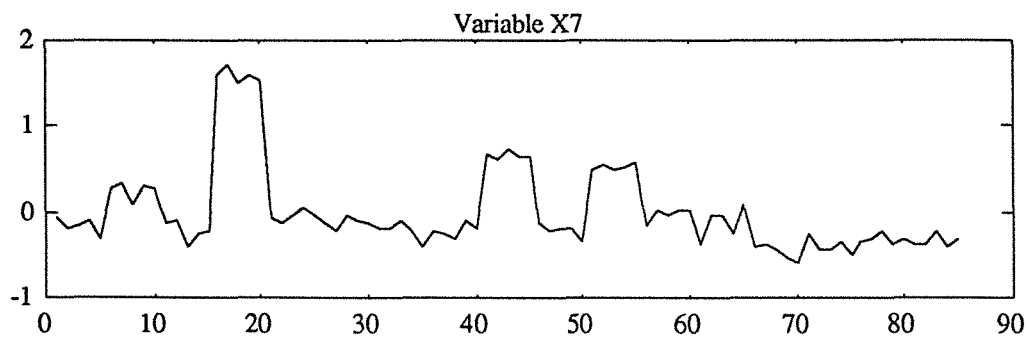
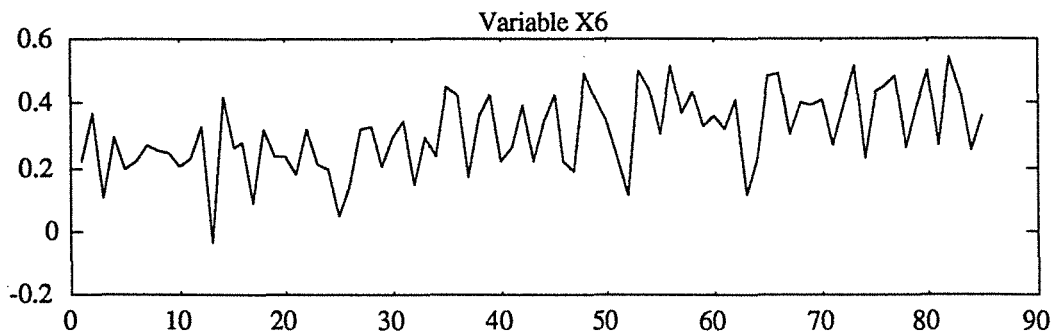
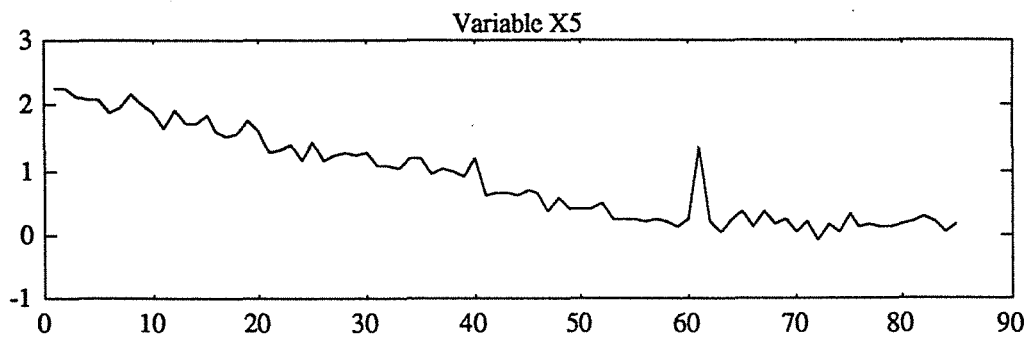
$$\text{Var}(Y_k) = \lambda_k$$

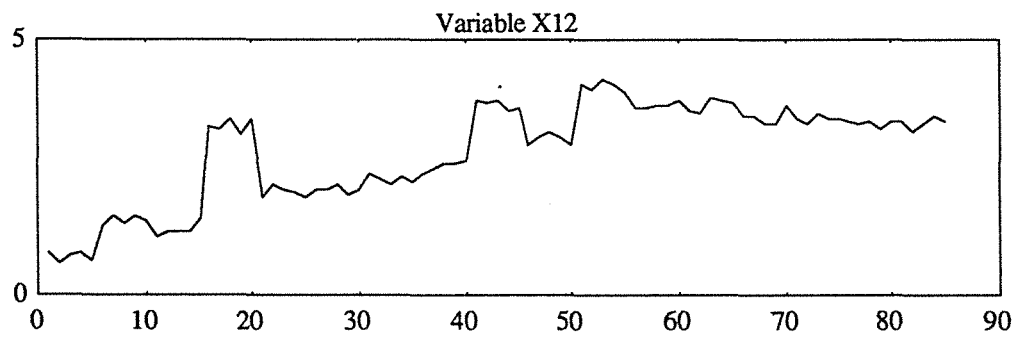
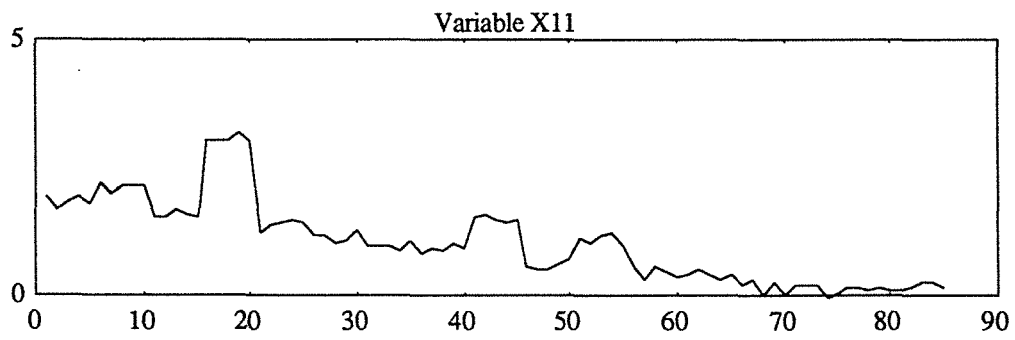
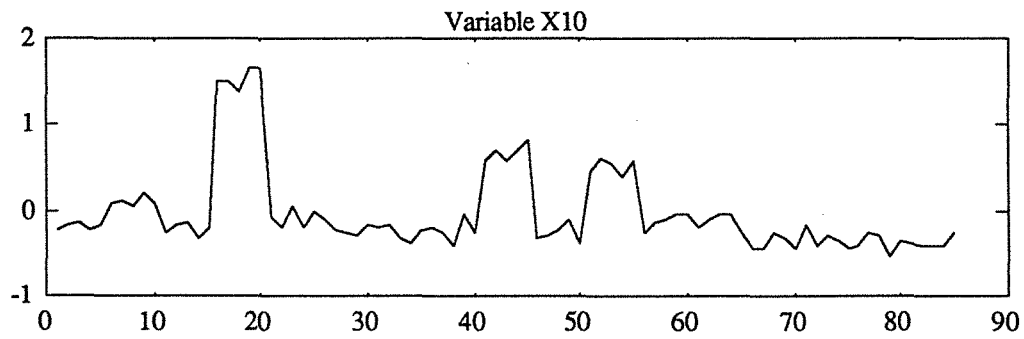
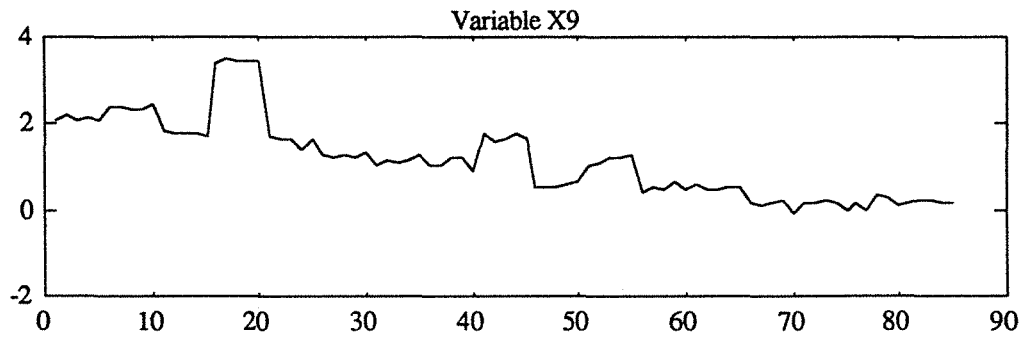
## ANNEXE AI.2

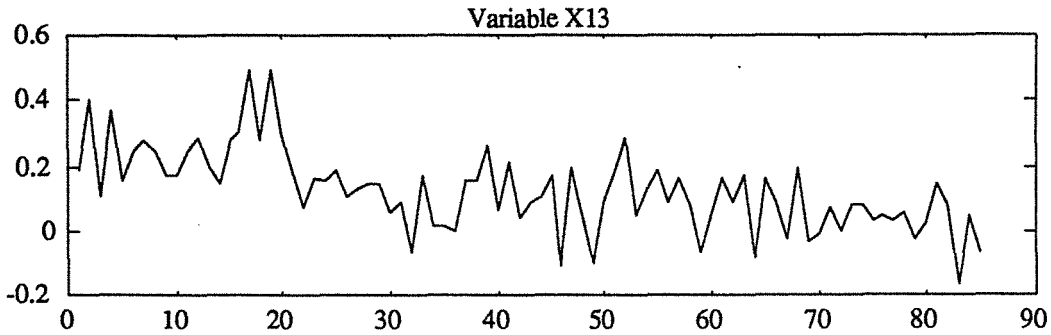
On présente ici les différentes variables qui ont servi à l'analyse en composantes principales dans le premier chapitre pour le premier exemple. Ces variables sont en nombre de

13 et le nombre d'observations est 85. Les courbes ci-dessous montrent l'évolution de ces différentes variables. Pour le deuxième exemple seules les variables 5, 7 et 13 sont en défaut.









**ANNEXE AII**

L'annexe AII correspond au chapitre II dont on donne ici quelques démonstrations de certaines relations utilisées dans ce chapitre et le tableau de valeurs pour l'exemple 3.

**AII.1 - DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (2.17)**

La formule (2.17) relie les éléments diagonaux de la matrice  $H = X(X^T X)^{-1} X^T$  et les éléments diagonaux de la matrice  $H^* = X^*(X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T}$ . La matrice  $X^*$  correspond à la matrice  $X$  augmentée du vecteur  $Y$ .

$$\begin{aligned}
 H^* &= (X \ Y) \left[ \begin{matrix} (X \ Y)^T & (X \ Y) \end{matrix} \right]^{-1} (X \ Y)^T \\
 H^* &= (X \ Y) \left[ \begin{matrix} X^T X & X^T Y \\ Y^T X & Y^T Y \end{matrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} X^T \\ Y^T \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{a.1}$$

Pour calculer l'inverse de la matrice entre crochet, on utilise la relation suivante :

si  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  alors son inverse est :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}
 \tag{a.2}$$

L'expression de  $H^*$  s'écrit alors :

$$H^* = (X \ Y) \left[ \begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} X^T \\ Y^T \end{pmatrix}
 \tag{a.3}$$

avec :

$$H_{11} = (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X^T Y H_{22} Y^T X (X^T X)^{-1}, \quad H_{12} = -(X^T X)^{-1} X^T Y H_{22},$$

$$H_{21} = -H_{22} Y^T X (X^T X)^{-1} \text{ et } H_{22} = \left[ Y^T Y - Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y \right]^{-1}$$

La multiplication des trois matrices fait apparaître la matrice H et après simplification on obtient :

$$H^* = H + \frac{(I_n - H) Y Y^T (I_n - H)}{Y^T (I_n - H) Y} \quad (\text{a.4})$$

Or on sait que l'écart des moindres carrés peut être écrit en fonction de la matrice H, c'est-à-dire  $e = (I_n - H) Y$ . Comme la matrice H est idempotente et symétrique, on en déduit :

$$e^T e = Y^T (I_n - H) Y \text{ et } e e^T = (I_n - H) Y Y^T (I_n - H)$$

La relation entre les éléments diagonaux de la matrice H et  $H^*$  s'écrit donc :

$$h_{ii}^* = h_{ii} + \frac{e_i^2}{e^T e} \quad (\text{a.5})$$

## AII.2 - DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (2.24C)

On sait que  $\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  et  $\hat{\Theta}(i) = (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}$ . Le vecteur de paramètres  $\hat{\Theta}$  est obtenu avec toutes les observations et le vecteur  $\hat{\Theta}(i)$  est obtenu avec toutes les observations sauf la ième observation. La différence de ces deux vecteurs s'écrit :

$$\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) = (X^T X)^{-1} X^T Y - (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)} \quad (\text{a.6})$$

Si on ajoute et on retranche au membre de droite de l'équation ci-dessus le terme  $(X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) &= (X^T X)^{-1} X^T Y - (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)} - (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y + (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y \\ \hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) &= (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} [X^T Y - X_{(i)}^T Y_{(i)}] - (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} [X^T X - X_{(i)}^T X_{(i)}] (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

Or on sait que  $X^T Y - X_{(i)}^T Y_{(i)} = x_i^T y_i$  et  $X^T X - X_{(i)}^T X_{(i)} = x_i^T x_i$ , où  $y_i$  et  $x_i$  sont respectivement la mesure de la sortie et le vecteur des mesures des variables d'entrée à l'observation i. Par suite, on aura :



$$\begin{aligned}
\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) &= \left( X_{(i)}^T X_{(i)} \right)^{-1} x_i^T y_i - \left( X_{(i)}^T X_{(i)} \right)^{-1} x_i^T x_i \left( X^T X \right)^{-1} X^T Y \\
\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) &= \left( X_{(i)}^T X_{(i)} \right)^{-1} x_i^T \left[ y_i - x_i \left( X^T X \right)^{-1} X^T Y \right] \\
\hat{\Theta} - \hat{\Theta}(i) &= \left( X_{(i)}^T X_{(i)} \right)^{-1} x_i^T \left( y_i - x_i \hat{\Theta} \right)
\end{aligned} \tag{a.7}$$

### AII.3 - DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (2.27A)

Le test d'Andrews-Pregibon est défini comme le rapport des déterminants de deux matrices  $X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^*$  et  $X^{*T} X^*$  de dimension  $p \times p$ . La matrice  $X^*$  correspond à la matrice  $X$  augmentée du vecteur  $Y$  et  $(i)$  indique que l'observation  $i$  a été supprimée. Pour démontrer la formule (2.27a), on démontre dans un premier temps la formule (2.27b) reliant le test d'Andrews-Pregibon et les éléments diagonaux de la matrice  $H^*$ . Nous avons besoin dans cette partie du résultat suivant concernant les déterminants :

$$\det(A + BB^T) = \det(A) \det(I + B^T A^{-1} B) \tag{a.8}$$

La relation ci-dessus est valable sous certaines conditions ; la matrice  $A$  doit être inversible et les dimensions des deux matrices  $A$  et  $B$  doivent être convenablement choisies.

Lorsqu'on supprime la  $i$ ème observation de la matrice  $X^*$ , l'expression qui relie les deux matrices  $X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^*$  et  $X^{*T} X^*$  est :

$$X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^* = X^{*T} X^* - x_i^{*T} x_i^* \tag{a.9}$$

et en appliquant la relation (a.8) à l'expression (a.9), on aura :

$$\det(X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^*) = \det(X^{*T} X^* - x_i^{*T} x_i^*) = \det(X^{*T} X^*) \det\left(1 - x_i^{*T} (X^{*T} X^*)^{-1} x_i^*\right) \tag{a.10}$$

Par suite le rapport d'Andrews-Pregibon s'écrit :

$$AP_i = \frac{\det(X_{(i)}^{*T} X_{(i)}^*)}{\det(X^{*T} X^*)} = 1 - x_i^{*T} (X^{*T} X^*)^{-1} x_i^* = 1 - h_{ii}^* \tag{a.11}$$

Nous venons de montrer la relation qui existe entre le rapport d'Andrews-Pregibon et les éléments diagonaux de la matrice  $H^*$ . Si maintenant, on désire montrer la relation (2.17a) il suffit de combiner les deux équations (a.5) et (a.11), on obtient :

$$AP_i = 1 - h_{ii}^* = 1 - h_{ii} - \frac{e_i^2}{e^T e} \tag{a.12}$$

#### AII.4 - DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (2.29B)

L'estimation du vecteur des paramètres par la technique des moindres carrés est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (\text{a.13})$$

Si on remplace le vecteur de sortie par la relation (2.2), on obtient :

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T (X\Theta + \varepsilon) \quad (\text{a.14})$$

Comme  $\varepsilon$  est supposé suivre une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on en déduit que la variance de chaque élément du vecteur de paramètres est :

$$\text{var}(\hat{\theta}_j) = \hat{\sigma}^2 \sum_{k=1}^n \eta_{jk}^2 \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{a.16})$$

où  $\eta_{ji}$  sont les éléments de la matrice  $N = (X^T X)^{-1} X^T$ ,  $n$  est le nombre d'observations et  $\hat{\sigma}^2$  est une estimée de la variance du vecteur du résidu  $\varepsilon$ .

#### AII.5 - TABLEAU DE VALEURS POUR L'EXEMPLE 3

Le tableau ci-dessous concerne l'exemple étudié dans le chapitre II et contient les mesures correspondantes aux trois variables explicatives X1, X2 et X3 et une variable expliquée Y.

i	X1	X2	X3	Y
1	80	27	89	42
2	80	27	88	37
3	75	25	90	37
4	62	24	87	28
5	62	22	87	18
6	62	23	87	18
7	62	24	93	19
8	62	24	93	20
9	58	23	87	15
10	58	18	80	14
11	58	18	89	14
12	58	17	88	13
13	58	18	82	11
14	58	19	93	12
15	50	18	89	8
16	50	18	86	7

17	50	19	72	8
18	50	19	79	8
19	50	20	80	9
20	56	20	82	15
21	70	20	91	15

### ANNEXE AIII

Dans le chapitre V, la procédure de détection repose sur l'estimation de l'amplitude du défaut et sur la variance de cette estimation. Nous allons donc montrer comment calculer cette variance. On prend, par exemple, le cas d'une valeur aberrante additive sur la sortie où l'estimation de l'amplitude est donnée par l'équation (5.7) et dont on rappelle ici son expression (a.17) ci-dessous :

$$\hat{\omega} = \left(1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2\right)^{-1} \sum_{i=1}^p (e_d + \hat{a}_i e_{d+i}) \quad (\text{a.17})$$

On rappelle que l'expression de l'écart  $e_t$  est donnée par la relation suivante :

$$e_t = A(q^{-1})g_{z,t} - B(q^{-1})g_{u,t} + \varepsilon_t \quad (\text{a.18})$$

Supposons que la variance de  $\varepsilon_t$  est égale à  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ , ce qui implique que la variance de  $e_t$  est égale à  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ . On désigne par l'opérateur  $\text{var}(x)$  la variance de  $x$  et sachant que  $\text{var}(a x) = a^2 \text{var}(x)$  ( $a$  est une constante), nous en déduisons à partir de l'équation (a.17) que :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \left(1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2\right)^{-2} \text{var}\left(\sum_{i=1}^p (e_d + \hat{a}_i e_{d+i})\right) \quad (\text{a.19})$$

On sait que la variance d'une somme est égale à la somme des variances de chaque terme de la somme, on obtient donc :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \left(1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2\right)^{-2} \left(\text{var}(e_d) + \text{var}(\hat{a}_1 e_{d+1}) + \dots + \text{var}(\hat{a}_p e_{d+p})\right) \quad (\text{a.20})$$

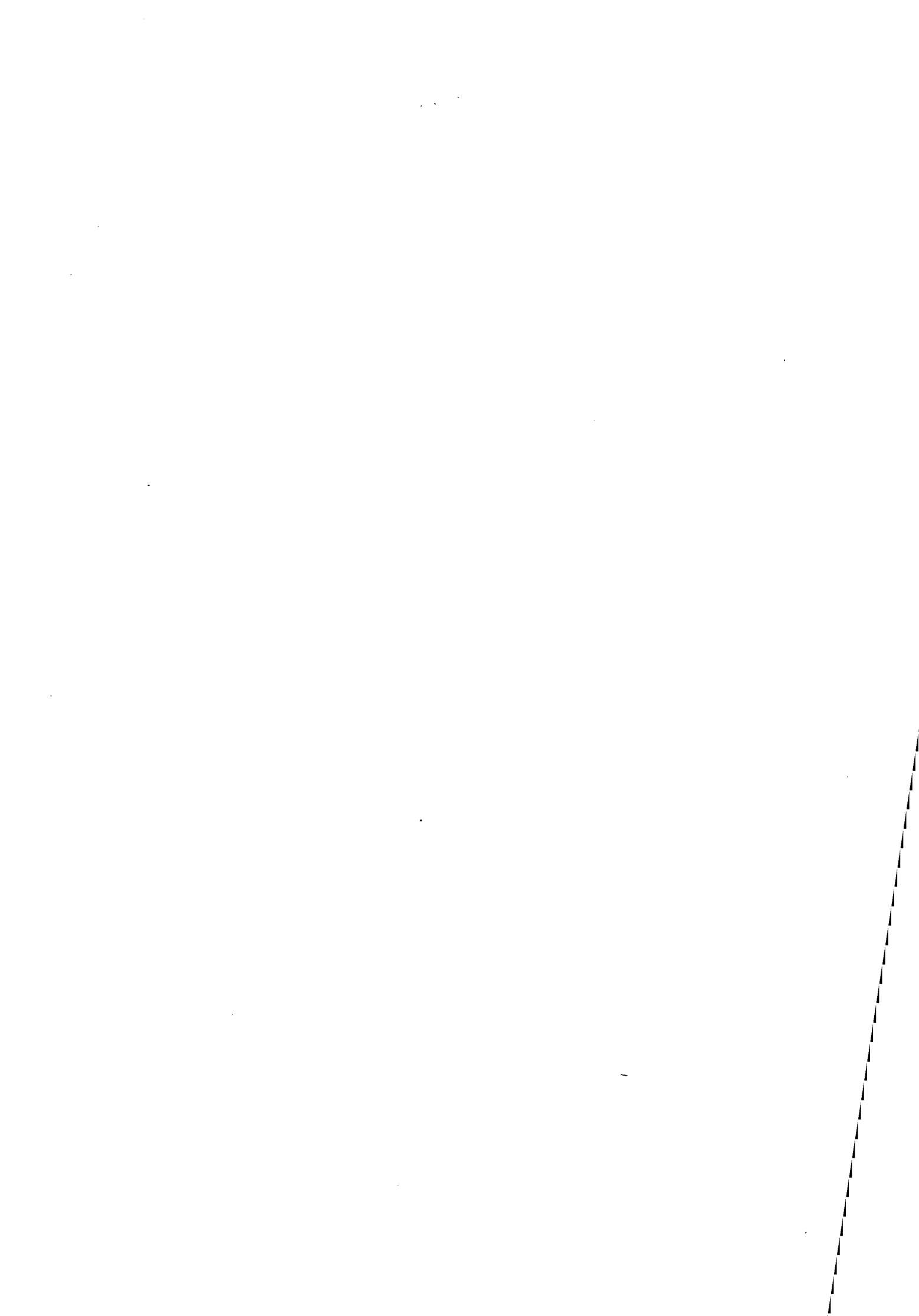
Comme  $\text{var}(e_t) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2$  pour tout  $t$ , l'équation (a.20) devient :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \left(1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2\right)^{-2} \left(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{a}_1^2 \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \dots + \hat{a}_p^2 \hat{\sigma}_\varepsilon^2\right) \quad (\text{a.21})$$

En mettant  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  en facteur, on obtient la formule de l'équation (5.7c) du chapitre V, soit :

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \left(1 + \hat{a}_1^2 + \dots + \hat{a}_p^2\right)^{-1} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (\text{a.22})$$

Cette démonstration est valable pour les formules (5.13b), (5.16b) et (5.20c).



# RÉFÉRENCES



## RÉFÉRENCES

- Abraham B. and Box G. E. P.** (1979), *Bayesian Analysis of Some Outliers Problems in Time Series*, *Biometrika*, vol. 66, n° 2, pp. 229-236.
- Abraham B. and Chuang A.** (1989), *Outlier Detection and Time Series Modeling*, *Technometrics*, vol. 33, n° 2, pp. 241-248.
- Abraham B. and Lodolter J.** (1983), *Statistical Methods for Forecasting*, John Wiley.
- Aïtouche A.** (1990), *Détection et Localisation de Défaillances de Capteurs*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I.
- Akaike H.** (1976), *Canonical Correlation Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion, in Systems Identification : Advances and Case Studies*, pp. 27-96, New York, Academic Press.
- Andrews D. F.** (1974), *A Robust Method for Multiple Linear Regression*, *Technometrics*, 16, pp. 523-531.
- Andrews D. F. and Pregibon D.** (1978), *Finding the Outliers That Matter*, *J. Roy. Stat. Soc. B*, 40, n° 1, pp. 85-93.
- Atkinson A. C.** (1981), *Robust and Diagnostic Regression Analysis*, *Comm. Stat. Theor. Meth.* 11(22), pp. 2559-2571.
- Atkinson A. C.** (1986), *Masking Unmasked*, *Biometrika*, vol. 73, pp. 533-541.
- Barnett V. and Lewis T.** (1984), *Outliers in Statistical Data*, John Wiley, New York.
- Basseville M.** (1988), *Detecting Changes in Signals and Systems, A Survey*, *Automatica*, vol. 24, n° 3, pp. 309-326.
- Basseville M. and Benveniste A.** (1983), *Design and Comparative Study of Some Sequential Jump Detection Algorithms for Digital Signals*. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-31, n° 3, pp. 521-535.
- Basseville M. and Nikifirov I.** (1993), *Detection of Abrupt Changes : Theory and Applications*, Prentice Hall.
- Beckman J. and Cook R. D.** (1983), *Outlier ..... s*, *Technometrics*, vol. 25, pp. 119-149.
- Belsley A., Kuh and Welsch** (1980), *Regression Diagnostics*, John Wiley, New York.
- Bendre S. M. and Kale B. K.** (1985), *Masking Effect on Tests for Outliers in Exponential Models*. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 80, n° 392, pp 1020-1025.



- Bendre S. M. and Kale B. K** (1987), *Masking Effect on Tests for Outliers in Normal Samples*. *Biometrika*, vol. 74, n° 4, pp 891-896.
- Benzecri J. P.** (1980), *L'Analyse des Données, Tome 2 : L'Analyse des Correspondances*, Dunod, Paris.
- Bernoulli D.** (1777), *The Most Probable Choice Between Several Discrepant Observations and the Formation Therefrom of the Most Likely Induction*, in C. G. Allen (1961), *Biometrika*, vol. 48, pp. 3-13.
- Bloch G.** (1988), *Modélisation des Procédés : des Méthodes, un Outil Logiciel*, Thèse de Doctorat de Nancy I.
- Box G. E. P. and Jenkins C. R.** (1976), *Times Series Analysis. Forecasting and Control*, Holden day.
- Box G. E. P. and Tiao G. C.** (1975), *Intervention Analysis with Applications to Economic and Environment Problems*. *J. Amer. Stat. Assoc., theory and methods section*, vol. 70, n° 349, pp. 70-79.
- Bruce A. and Martin A. G.** (1989), *Leave-k-Out Diagnostics for Time Series*, *J. R. Stat. Soc., B*, 51, n° 3, pp. 363-424.
- Bustos O. H. and Yohai V. J.** (1986), *Robust Estimates for ARMA Models*, *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 81, n° 393, pp. 155-168.
- C.E.A.** (1978), *Commissariat à l'Energie Atomique, Statistique Appliquée à l'Exploitation des Mesures*, Masson.
- Campbell N. A.** (1980), *Robust Procedures in Mutivariate Analysis : I Robust Covariance Estimation*, *Appl. Stat.*, vol. 29, pp. 231-237.
- Carrol R. J. and Ruppert D.** (1985), *Transformation in Regression : A Robust Analysis*, *Technometrics*, vol. 27, pp. 1-12.
- Cauchy A. L.** (1831), *Sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés pa un grand nombre d'observations pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un minimum*, *J. de l'Ecole Polytechnique*, 13, pp. 175-221, Gauthier-Villars, Paris.
- Chang I. Tiao G. C.** (1983), *Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers*, *Technometrics*, vol. 30, n° 2, pp. 193-204.
- Chatterjee S. and Hadi A. S.** (1986), *Influential Observations, High Leverage Points, and Outliers in Linear Regression*, *Stat. Science*, vol. 1, n° 3, pp. 379-416.

- Chauvenet W.** (1863), *Manual of Spherical and Pratical Astronomy*, Philadelphia. Appendix on the Method of Least Squares, pp. 57-60.
- Chen E. H.** (1971), *The Power of the Shapiro-Wilk W-test for Normality in Samples from Contaminated Distributions*, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 66, pp. 760-762.
- Chikkagoudar M. S. and Kunchur S. H.** (1987), *Comparison of Many Outlier Procedures for Exponential Samples*, Comm. Stat. Theory Meth., vol. 16, n° 3, pp. 627-647.
- Clark R. N.** (1975), *Detecting Instrument Malfunctions in Control Systems*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems, vol. 16, pp. 468-473.
- Cochran W. G.** (1941), *The Distribution of the Largest of a Set of Estimated Variance as a Fraction of Their Totals*, Annals of Eugenics, vol. 11, pp. 47-52.
- Cook R. D.** (1977), *Detection of Influential Observation in Linear Regression*, Technometrics, vol. 19, pp. 15-18.
- Cook R. D.** (1979), *Influential Observation in Linear Regression*, J. Amer. Stat. Assoc., 74, pp. 169-174.
- Cook R. D.** (1986), *Assessment of Local Influence*, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, vol. 48, pp. 133-169.
- Cook R. D. and Weisberg S.** (1982), *Residuals and Influence in Regression*, New York, Chapman & Hall.
- Cooper D. M. and Wood E. F.** (1982), *Identifying Multivariate Time Series Models*, J. Time Ser. Anal., vol. 3, pp. 153-164.
- Deckert J. C., Desai M. N., Deyst J. J. and Willsky A. S.** (1977), *F-8 DFBW Sensor Failure Identification Using Analytic Redundancy*, IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-22, n° 5, pp. 795-803.
- Denby L. and Martin R. D.** (1979), *Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter*, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 74, pp. 140-146.
- Diaz J.** (1991), *A Bayesian Solution to the Multiple Outlier Problem in Time Series*. Comm. Stat. A. Theory-Methods, vol. 20, n° 1, pp. 45-61.
- Dixon W. J.** (1950), *Analysis of Extreme Values*, Annals of Math. Stat., vol. 21, pp. 488-506.
- Dixon W. J.** (1953), *Processing Data for Outliers.*, Biometrics, pp. 74-89.
- Draper N. R. and John J. A.** (1981), *Influential Observation and Outliers in Regression*, Technometrics, vol. 23, pp. 21-26.

- Draper N. R. and Smith H. (1980)**, *Applied Regression Analysis*, Second Edition, John Wiley, New York.
- Dubuisson B. (1981)**, *Aide à la Décision pour la Surveillance d'un Système Technologique Complexe*, in Pruvost J. C., *Le Point en Automatique*, vol. 1, pp. 124-139.
- Dubuisson B. (1990)**, *Diagnostic et Reconnaissances des Formes*. Hermes, *Traité des Nouvelles Technologies, Série Diagnostic et Maintenance*, Ed. Hermes, Paris.
- Edgeworth F. Y. (1887)**, *On Observations Relating to Several Quantities*, *Hermathena*, vol. 6, pp. 279-285.
- Ekongolo B. S. (1992)**, *Diagnostic de Processus : Application à un Système Hydraulique Pilote*, Rapport de Stage, Université de Nancy I.
- Epstein B. (1960)**, *Tests for the Validity of the Assumption that the Underlying Distribution of Life is Exponential, Part I*, *Technometrics*, vol. 2, pp. 83-101.
- Faremothe R. W. (1987)**, *The Historical Development of the  $l_1$  and  $l_\infty$  Estimation Procedures*, in Y. Dodge (Ed.) *Statistical data analysis based on the  $l_1$ -norm*, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, pp. 37-63.
- Ferguson T. S. (1961)**, *Rules for Rejection of Outliers*, *Revue Inst. Int. Stat.*, vol. 3, pp. 29-43.
- Fisher R. A. (1936)**, *The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems*, *Ann. Eugen.*, vol. 7, pp. 179-188.
- Fourier J. B. J. (1824)**, *Extract From Histoire de l'Académie pour 1824*, pp. 325-328, Gauthier-Villars, Paris.
- Fox A. J. (1972)**, *Outliers in Time Series*. *J. R. Stat. Soc. B*, vol. 34, pp. 350-363.
- Friedlander B. and Porat B. (1984)**, *The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation*, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronique Syst.*, vol. 20, n° 2, pp. 158-173.
- Gaddounna B. (1991)**, *Méthodes de Détection de Défauts par Observateurs d'Etats*, D.E.A. M.A.E. Université de Nancy I.
- Gauss K. F. (1809)**, *Theoria Motus Corporum Coelestium*, Dover, New York.
- Gnanadesikan R. and Kettenring J. R. (1972)**, *Robust Estimates, Residuals and Outlier Detection with Multiresponse Data*, *Biometrics*, vol. 28, pp. 81-124.
- Gray J. B. and Ling R. F. (1984)**, *K-clustering as a Detection Tool for Influential Subsets in Regression*, *Technometrics*, vol. 26, pp. 305-330.

- Grubbs F. E.** (1950), *Sample Criteria for Testing Outlying Observations*, *Annals of Math. Stat.*, vol. 21, pp. 27-58.
- Grubbs F. E.** (1969) *Procedures of Detection Outlying Observations in Samples*, *Technometrics*, vol. 4, n° 1, pp. 1-21.
- Hadi A. S.** (1992), *Identifying Multiple Outliers in Multivariate Data*, *J. Roy. Stat. Soc. B*, 54, n° 3, pp. 761-771.
- Hampel F. R.** (1975), *Beyond Location Parameters : Robust Concepts and Methods*, *Bull. Int. Stat. Inst.*, vol. 46, pp. 375-382.
- Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J. and Stahel W. A.** (1986), *Robust Statistics : The Approach Based on Influence Functions*, New York, John Wiley.
- Hau M. C. and Tong H.** (1989), *A Practical Method for Outlier Detection in Auto-Regression Time Series Modelling*, *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, vol. 3, n° 4, pp. 241-260.
- Hawkins D. M.** (1974), *The Detection of Errors in Multivariate Data Using Principal Components*, *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 69, n° 346, pp. 340-344.
- Hawkins D. M.** (1980), *Identification of Outliers*, Chapman and Hall, London.
- Hawkins M., Bradu D. and Kass G. V.** (1984), *Location of Several Outliers in Multiple-Regression Data Using Elemental Sets*, *Technometrics*, vol. 26, pp. 197-208.
- Hillmer S. C. and Tiao G. C.** (1979), *Likelihood Function of Stationary Multiple Auto Regressive Moving Average Models*, *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 74, pp. 652-660.
- Hinkley D.V.** (1971), *Inference About the Change Point From Cumulative Sum Tests*, *Biometrika*, vol. 58, n° 3, pp. 509-523.
- Hoaglin D. C. and Welsch R. E.** (1978), *The Hat Matrix in Regression and ANOVA*, *Amer. Stat.*, 32, pp. 17-22.
- Holz P.** (1992), *Détection d'Evénements dans les Signaux Temporels, Application à la Surveillance d'un Train de Laminage à Chaud*, Mémoire d'Ingénieur C.N.A.M., Université de Nancy I.
- Hotelling H.** (1933), *Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components*, *J. Educ. Psychol.*, vol. 24, pp. 417-441.
- Huber P. J.** (1981), *Robust Statistics*, New York, John Wiley.
- Isermann R.** (1984), *Process Fault Detection Based on Modeling and Estimation Methods, A Survey*, *Automatica*, vol. 20, n° 4, pp. 387-404.

- Jolion J. M., Meer P. and Bataouche S. (1991), *Robust Clustering with Applications in Computer Vision*, IEEE Trans. on Patter. Anal. and Mach Intel., vol. 13, n° 8, pp. 791-802.
- Jolliffe I. T. (1986), *Principal Components Analysis*, New York, Springer, Cop.
- Kimber A. C. (1982), *Tests of Many Outliers in Exponential Samples*, Appl. Stat., vol. 31, pp. 263-271.
- Kobi A. (1990), *Application des Méthodes Mutidimensionnelles à la Détection de Valeurs Aberrantes*, D.E.A. M.A.E. Spécialité Automatique, Université de Nancy I.
- Kobi A. (1992), *Détection et caractérisation de valeurs aberrantes dans une série temporelle*. CNRS, GdR Automatique, 21 Octobre 1992, Paris.
- Kobi A., Nowakowski S., Ragot J. (1993c), *Fault Detection-Isolation and Control Reconfiguration*. IMACS/IFAC MIM. S<sup>2</sup> '93, vol. 1, pp. 250-255, Brussels, April 12-16, 1993, Belgium.
- Kobi A., Ouladsine M. and Bloch G. (1993a), *Outliers Detection, Localisation and Identification in Time Series*, IMACS/IFACMIM. -S<sup>2</sup> '93, vol. 1, pp. 275-280, Brussels, April 12-16, Belgium.
- Kobi A., Ouladsine M. and Ragot J. (1993b), *Fault Detection in ARX Process*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, vol. 3, pp. 394-399, Le Touquet, October 17-20, France.
- Lagarde J. (1983), *Initiation à l'Analyse de Données*, Dunod.
- Laplace P. S. (1893), *Sur quelques points du monde, mémoire de l'académie des sciences de Paris*, 1-87. Reprinted in his oeuvres, vol. 11, Gauthier-Villars, Paris, 1895, pp. 477-558.
- Lebart L. (1982), *Traitement des Données Statistiques : Méthodes et Programmes*, Dunod, Paris.
- Ledolter J. (1989), *The Effect of Additive Outliers on the Forecasts from ARIMA Models*, Int. J. Forecast., vol. 5, pp. 231-240.
- Ledolter J. (1990), *Outliers Diagnostics in Time Series Analysis*, J. Time Series Analysis, vol. 11, n° 4, pp. 317-324.
- Lefebvre J. (1983), *Introduction aux Analyses Statistiques Mutlidimensionnelles*, Masson, Paris.
- Lewis T. and Fieller N. R. J. (1979), *A Recursive Algorithm for Null Distributions for Outliers : I. Gamma Samples*, Technometrics, vol. 21, pp. 371-376.

- Ljung L. and Soderström T.** (1983), *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press.
- Mahalanobis P. C.** (1936), *On the Generalized Distances in Statistics*, Proc. Nat. Inst. Sciences India. vol. 12, pp. 49-55.
- Marple S. L.** (1987), *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey.
- Martin R. D.** (1980), *Robust Estimation of Auto Regressive Models*, in Directions in Time Series, Institute of Math. Stat., pp. 228-254.
- Martin R. D. and Thomson D. J.** (1982), *Robust Resistant Spectrum Estimation*, Proceedings of the IEEE, vol. 70, n° 9, pp. 1097-1115.
- Masreliez C. J. and Martin R. D.** (1977), *Robust Bayesian Estimation for the Linear Model and Robustifying the Kalman Filter*, IEEE Trans. vol. AC-22, pp. 361-371.
- McMichael D. W.** (1990), *Robust Recursive Lp Estimation*, IEE Proceedings, vol. 137, Pt. D, n° 2, pp. 67-76.
- Mourot G.** (1993), *Contribution au Diagnostic des Systèmes Industriels par Reconnaissance des Formes*, Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy.
- Muirhead C. R.** (1986), *Distinguishing Outliers Types in Time Series*, J. Roy. Stat. Soc., B, vol. 48, pp. 39-47.
- Ouladsine M.** (1993a), *Identification des Systèmes Dynamiques Multivariables*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I.
- Ouladsine M., Kobi A. and Ragot J.** (1993b), *Recursive and sequential Identification of Jumping Interconnected Systems Through Multiple Models*, 10th IFAC Symposium on System Identification, Copenhagen, Denmark.
- Paarmann L. O. and Korenberg J. M.** (1992), *Estimation of the Parameters of an ARMA Signal Model Based on an Orthogonal Search*, IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 37, n° 3, pp. 347-352.
- Page E. S.** (1954), *Continuous Inspection Schemes*, Biometrika, vol. 41, pp. 100-115.
- Pandit S. M. and WU S. M.** (1983), *Time Series and System Analysis With Application*, John Wiley.
- Patton R. J., Frank P. M. and Clark R. N.** (1989), *Fault Diagnosis in Dynamic Systems, Theory and Applications*, Ed. Prentice-Hall.

- Pearson K.** (1901), *On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space*, Phil. Mag., vol. 6, n° 2, pp. 559-572.
- Pierce B.** (1852), *Criterion for The Rejection of Doubtful Observations*, Astronomical Journal, vol. 2, pp. 161-163.
- Puthenpura S. and Sinha N. K.** (1990), *A Robust Recursive Identification Method*, Control-Theory and Advanced Technology, vol. 6, n° 4, pp. 683-695.
- Ragot J., Darouach M., Maquin D. and Bloch G.** (1990), *Validation de données et Diagnostics*, Traité des Nouvelles Technologies, Série Diagnostic et Maintenance, Ed. Hermes, Paris.
- Rao C. R.** (1964), *The Use and Interpretation of Principal Components Analysis in Applied Research*, Sankhya A, vol. 26, pp. 329-358.
- Rousseeuw P. J.** (1984), *Least Median of Squares Regression*, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 79, pp. 871-880.
- Rousseeuw P. J.** (1985), *Multivariate Estimation With High Breakdown Point*, Math. Stat. and Appl., vol. B, pp. 283-297.
- Rousseeuw P. J. and Leroy A.** (1987), *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley, New York.
- Rousseeuw P. J. and Van Zomeren B. C.** (1990), *Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points*, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 85, n° 411, pp. 633-651.
- Sauter D.** (1991), *Contribution à l'Etude des Méthodes de Détection de Rupture de Modèle, Application à la Détection d'Evénements dans les Signaux et au Diagnostic de Défauts de Systèmes*, Thèse de l'Université de Nancy I.
- Sawaragi Y., Soeda T. and Nakamizo T.** (1981), *Classical Methods and Time Series Estimation*, Trends and Progress in System Identification, pp. 67-102.
- Schreier G.** (1993), *Détection de Défauts à l'Aide d'un Filtre de Kalman*, Projet de Fin d'Etudes, Université de Nancy I, Université de Karlsruhe.
- Shapiro S. S. and Wilk M. B.** (1965), *An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)*, Biometrika, n° 52, pp. 591-612.
- Solo V.** (1984), *The Exact Likelihood for a Multivariate ARMA Model*, J. Multiv. Anal., vol. 14, pp. 164-173.
- Spearman C.** (1904), *The Proof and Measurement of Association Between two Things*, Amer. J. Psychol., vol. 15, pp. 72-101.

- Stoica P., Friedlander B. and Soderstrom T.** (1987), *Approximate Maximum Likelihood Approach to ARMA Spectral Estimation*, Int. J. Control, vol. 45, n° 4, pp. 1281-1310.
- Tiao G. C. and Box G. E. P.** (1981), *Modeling Multiple Time Series with Applications*, J. Amer. Stat. Assoc., vol. 76, n° 376, pp. 802-816.
- Tiao G. C. and Tsay R. S.** (1983), *Multiple Time Series Modeling and Extended Sample Cross Correlations*, J. Bus. Econ. Stat., vol. 1, pp. 43-56.
- Tiao G. C. and Tsay R. S.** (1989), *Model Specification in Multivariate Time Series*, J. Roy. Stat. Soc., B, vol. 51, n° 2, pp. 157-213.
- Tomczak M.** (1990), *Modélisation ARMA de Séries Chronologiques, Application à l'Automatisation d'un Réseau d'Irrigation, Application à l'Analyse Spectrale, et au Traitement d'Eléctro-Encephalogrammes Non-Stationnaires*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I.
- Tsay R. S.** (1986), *Time Series Model Specification in the Presence of Outliers*, J. Amer. Assoc., vol. 81, n° 393, pp. 132-141.
- Tsay R. S.** (1988), *Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series*, J. of Forecasting, vol. 7, pp. 1-20.
- Tsay R. S.** (1989), *Identifying Multivariate Time Series Models*, J. of Time Series Analysis, vol. 10, n° 4, pp. 357-372.
- Tuan P. D.** (1984), *On Robust Estimation of Parameters for ARMA Models*, Collection : Robust and Nonlinear Time Series Analysis, Lectures Notes in Statistics, vol. 26, pp. 273-286, Springer, New York, Berlin.
- Tunnicliffe W. G.** (1973), *The Estimation of Parameters in Multivariate Time Series Models*, J. Roy. Stat. Soc., B, vol. 35, pp. 76-85.
- Vaezi-nejad H.** (1989), *Détection de Défauts d'Instruments de Mesure*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I.
- Velleman P. F. and Welsch R. E.** (1981), *Efficient Computing of Regression Diagnostics*, Amer. Stat., vol. 35, pp. 234-242.
- Volle M.** (1985), *Analyse des Données*, Economica, 3ème Edition.
- Walter E. and Piet-Lahanier H.** (1991), *Recursive Robust MinMax Estimation for Models Linear in Their Parameters*,
- Wellman J. M. and Gunst R. F.** (1991), *Influence Diagnostics for Linear Measurement Error Models*, Biometrika, vol. 78, n° 2, pp. 373-380.



- Willsky A. S.** (1973), *A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems*. Automatica, vol. 12, pp. 601-611.
- Willsky A. S. and John H. L.** (1976), *A Generalized Likelihood Ratio Approach to the Detection and Estimation of Jumps in linear Systems*. IEEE Trans. Auto. Control. pp. 108-112.
- Young P. C.** (1984), *Recursive Estimation and Time Series Analysis*, Springer - Verlag, New York.



Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy-Brabois

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE LORRAINE**

o o o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur DELAUNAY, Professeur, Laboratoire des Applications de la  
Microélectronique Reims,**

**Monsieur PLACKO Professeur, ENS L.E.S.I.R Cachan**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :



**Monsieur KOBİ Abdessamad**

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Diagnostic de processus continus. Application à la détection de  
valeurs aberrantes dans les signaux d'entrée et de sortie de  
systèmes".**

NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAY  
BOITE POSTALE  
F - 5 4 5 0  
VANDŒUVRE CEDEX

en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE**

Spécialité : **"GEOSCIENCES & MATIERES PREMIERES"**

Fait à Vandoeuvre le, **9 Juin 1994**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIUS





**Mots clés : Détection de défauts capteur, valeurs aberrantes, analyse en composantes principales, régression linéaire, série temporelle, processus AR, ARMA et ARX.**

**RESUME** - Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le cadre du diagnostic de processus continus. Ils sont axés sur la détection de défauts de capteurs et de modifications de processus industriels. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux défauts de types valeurs aberrantes. Dans le premier chapitre, nous avons appliqué l'analyse en composantes principales sur un tableau de valeurs. Ainsi, nous avons mis en place une stratégie basée sur l'analyse des nuages des observations et sur la contribution de ces observations à la construction des axes factoriels pour la détection de valeurs aberrantes. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une synthèse des différents diagnostics dans une régression linéaire. Une étude comparative a été réalisée et une application a été effectuée sur des données réelles du processus pilote réalisé au laboratoire. Pour le troisième chapitre de ce mémoire, nous avons appliqué des tests statistiques pour vérifier l'appartenance de toutes les mesures délivrées par un capteur à la loi de distribution connue ou déterminée à l'avance. Cette application a été effectuée d'une part sur des données du processus pilote et d'autre part sur des données simulées. Lorsque le signal délivré par le capteur est modélisé par un processus Auto Régressif, la procédure que nous avons mis en oeuvre, dans le quatrième chapitre, permet d'estimer les paramètres du modèle, en utilisant la technique des moindres carrés, de détecter et de localiser le défaut, d'identifier sa nature et enfin de corriger les mesures. Nous avons étendu cette approche à des processus Auto Régressifs Vectoriels. Enfin, dans le cinquième chapitre, nous avons développé une technique originale, basée sur le calcul de l'amplitude de défaut normalisée par son écart-type, pour détecter les défauts capteurs sur les entrées et les sorties du système.

---

**Key words : Sensor fault detection, outlier, principal components analysis, linear regression, time series, AR, ARMA and ARX process.**

**ABSTRACT** - The aim of this thesis is to study the sensor fault detection. In particular, we are interested in outlier detection. In the first chapter, we apply the Principal Components Analysis to the numerical data. So we have developed one strategy, for outlier detection, based on the plotting data and the contribution of each observation to determine the principal components. In the second chapter, we present a survey of outlier diagnostics and influential observation in linear regression. In this field, a comparative study is presented with the real and the simulated data. At the third chapter, we present some statistical tests, usually using in treatment of outliers in simple normale samples, to detect the errors in the sensor data. The fourth chapter is concerned with the problem of Auto Regressive process in the presence of outlier. An iterative procedure is proposed to estimate the parameter's model, to identify the outlier and to remove their effects. We have extended this approach to the Auto Regressive vector process. Finally, in the fifth chapter, we develop an original technique, based on the fault magnitude estimation, to detect faulty sensors (outlier, level shift ...) in Auto Regressive Moving Average (ARMA) and Auto Regressive with eXogenous input process (ARX).