Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales et Caractérisation Thermique de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales : " Aspects Théoriques et Expérimentaux "

Christophe Rodiet

▶ **To cite this version:**

Christophe Rodiet. Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales et Caractérisation Thermique de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales : " Aspects Théoriques et Expérimentaux ". Autre. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0283 . tel-01751424v1

HAL Id: tel-01751424

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751424v1

Submitted on 29 Mar 2018 (v1), last revised 15 Apr 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Thèse de Doctorat

Présentée à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) par

Christophe RODIET

En vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mécanique et Energétique

Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales et Caractérisation Thermique de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales :
« Aspects Théoriques et Expérimentaux »

Soutenue publiquement le jeudi 17 juillet 2014 à 9h30
Devant le jury composé de :

Composition du jury

M. Alain DEGIOVANNI	LEMTA	Directeur de thèse
M. Benjamin REMY	LEMTA	Co-Directeur de thèse
M. Thierry DUVAUT	GRESPI	Rapporteur
M. Philippe LE MASSON	LIMATB	Rapporteur
M. Christophe LE NILIOT	IUSTI	Examinateur
M. Jean-Claude KRAPEZ	ONERA	Examinateur
M. Fabrice RIGOLLET	IUSTI	Invité

Mots-clés : Caractérisation thermique, Très hautes températures, Pyrométrie, Thermographie, Méthodes Multi-Spectrales, Métrologie, Méthodes Inverses, Estimation de paramètres, Transformation Intégrales, Transferts thermiques.

Remerciements

J'aimerai remercier Fabrice Lemoine, Professeur de l'Université de Lorraine et directeur du LEMTA[1], de m'avoir accueilli au sein de cet établissement Nancéien dont il a la charge.

J'exprime également toute ma gratitude aux membres du jury, que j'ai eu le plaisir de rencontrer à diverses occasion durant ces années de thèse, et qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps, dans une période où ce dernier leur manquait, pour l'évaluation de ce manuscrit. Je remercie ainsi vivement, Thierry Duvaut, Professeur au GRESPI[2], Philippe Le Masson, Professeur au LIMATB[3], d'avoir accepté d'être rapporteurs ; et Jean-Claude Krapez, Ingénieur de Recherche à l'ONERA[4], Christophe Le Niliot, Professeur à l'IUSTI[5], ainsi que Fabrice Rigollet, Maître de Conférence à l'IUSTI, d'avoir accepté d'examiner ce manuscrit.

Je tiens ensuite à remercier tout particulièrement, et à exprimer toute mon amitié, aux Professeurs Alain Degiovanni et Benjamin Rémy – mes mentors – du LEMTA, d'une part, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant ce doctorat pour lequel j'ai voué un intérêt particulier, et d'autre part, pour leur encadrement irréprochable. Ils ont toujours su trouver du temps à me consacrer, et m'ont fait partager leur passion débordante pour la recherche. Les soirées dégustation – pardon, recherche – autour de spiritueux qui ont tant fait tournoyer les idées, me manqueront beaucoup.

J'aimerais aussi rendre hommage aux personnels administratifs et techniques du LEMTA, pour leur grande sympathie et de l'admirable professionnalisme dont ils ont fait preuve. La réalisation de cette thèse leur doit beaucoup. Il est difficile de tous les citer sans risquer d'en oublier, mais une pensée particulière va à Valérie, Irène, et Edith, qui ont eu la lourde charge de me côtoyer fréquemment ; ainsi que Franck pour la réalisation des porte-échantillons.

Merci à mon ami Youssef, dont les précieuses recherches ont précédé les miennes, et avec qui les discussions scientifiques sont toujours aussi vives et enrichissantes.

Mes plus vifs sentiments et toute mon affection vont à ma famille, pour leur soutien indéfectible malgré les nombreuses heures et weekends qui leur ont été volés. Durant toutes ces années, elle a toujours su m'épauler afin que je puisse me consacrer pleinement à mes études. Sans leur dévouement et sacrifice, cette thèse n'aurait probablement jamais vu le jour. Ainsi, ma plus tendre pensée va à Doriane, ma

[1] LEMTA : Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, de Nancy.

[2] GRESPI : Groupe de Recherche En Sciences Pour l'Ingénieur, de Reims.

[3] LIMATB : Laboratoire d'Ingénierie des MATériaux de Bretagne.

[4] ONERA : Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales.

[5] IUSTI : Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels, de Provence (Marseille).

compagne (dont le châtiment dure déjà depuis 10 ans !), et Lilou, ma fille qui du haut de ses 14 mois s'émerveille autant que moi de ses découvertes. Que soient aussi remerciés Geneviève et Alain, mes parents, qui ont tout fait pour me rendre la vie plus facile ; et Maëva, ma sœur, qui petite à tout fait pour me la rendre plus délicate...

Je remercie également Brigitte, ma tante, qui a accepté la lourde tâche de relecture du manuscrit. Son œil avisé a permis de débusquer de nombreuses coquilles.

Enfin, j'exprime une pensée amicale à tous les oubliés des remerciements précédents, mes amis qui ont beaucoup compté ces dernières années et avec qui j'ai partagé d'excellents moments : Arnaud, Vincent S, Vincent C, Bruno mon ami d'enfance toujours aussi fidèle ; et mes collègues de bureau : Bamdad, Yassine, Jean-Paul, et les autres.

***

Cette thèse doit également beaucoup aux frères Sinus et Cosinus, physiciens de renom qui avaient un *sens* physique hors pair, mais mal reconnu des mathématiciens, car ils leurs reprochaient de ne pas avoir de raisonnements *carrés*. Ayant mal vécu ce manque de reconnaissance, ils finirent par mal *tourner*, mais restèrent *complémentaires* jusqu'à la fin de leurs jours…

Avant-propos

Ce mémoire est constitué de deux parties relativement indépendantes, dont la première partie porte sur les méthodes de mesure de température par méthodes multi-spectrales (pyrométrie optique passive), et la seconde sur la caractérisation thermique à haute température par transformations intégrales de matériaux orthotropes.

Cependant, certains chapitres ou sections de la partie « multi-spectrale » ont une utilité commune aux deux parties. En particulier, la section 6.1 (p.74) présentant les algorithmes d'estimations, ainsi que le chapitre 7 (p.119) traitant de la thermographie seront également utiles à la partie « caractérisation thermique ».

Une démarche directrice des différents chapitres constitutifs de ce manuscrit a été de faire le lien lorsque cela était possible entre différentes méthodes, menant éventuellement aux mêmes résultats. Elle pourrait se résumer en un sens à l'adage : « De la diversité naît la richesse ». Ainsi, par exemple, dans la partie « multi-spectrale » un lien entre rapport signal sur bruit, erreur relative sur la température, sensibilité du flux à la température, écart-type sur la température, critère de séparation de longueurs d'ondes et écarts entre longueurs d'ondes optimales, a été établit. Dans la partie « caractérisation thermique », deux démonstrations de la justification des « fonctions de corrections affines » ont été présentées. La première est basée sur la décomposition en série de la solution complète, et la seconde repose sur le principe de superposition.

La raison de la présentation de ces différentes démarches, pouvant de prime abord alourdir la présentation, repose sur le constat qu'en fonction du problème à résoudre, une méthode peut être plus adaptée/simple qu'une autre, ou être tout simplement inopérante.

Enfin, le choix délicat d'intégrer certaines démarches calculatoires dans le corps du texte a été fait. Cela alourdi sans nul doute la présentation, mais a l'avantage d'exposer clairement le raisonnement ainsi que les différentes hypothèses et subtilités calculatoires (s'il y a) nécessaires à l'obtention des résultats. D'autre part, la volonté personnelle de faire un document « aide-mémoire calculatoire » présentant les démarches calculatoires imposa de mettre les calculs secondaires en annexe et une synthèse des résultats importants dans le corps du texte.

Table des Matières

Remerciements ..... **I**

Avant-propos ..... **III**

PARTIE 1 : Méthodes Multi-Spectrales

Nomenclature Multi-Spectrale non exhaustive ..... **XVII**

1. Introduction **1**

2. Rayonnement thermique **5**

2.1. Classification **5**

2.2. Loi de Wien et loi de Planck **6**

2.2.1. Loi d'émission de Planck 6

2.2.2. Loi de déplacement de Wien 6

2.2.3. Approximations de la loi de Planck : Wien et Rayleigh-Jean 7

2.3. Emissivité **8**

2.4. Flux photonique **10**

2.4.1. Approche statistique du flux photonique 10

2.4.2. Effet du bruit expérimental sur la mesure du flux photonique 11

3. Principe de mesure de température par pyrométrie optique passive : généralités **15**

4. Mesure Mono-Spectrale **19**

4.1. Température de luminance et température vraie **19**

4.2. Erreur de mesure sur la température **20**

4.3. Sensibilités et sensibilités réduites **21**

4.3.1. Sensibilité réduite en fonction de la température 21

4.3.2. Sensibilité en fonction de la température 24

4.3.3. Sensibilité réduite en fonction de la longueur d'onde 24

4.3.4. Sensibilité en fonction de la longueur d'onde 26

4.4. Longueur d'onde optimale en Mono-Spectrale : expression analogue à la loi de Wien 27
4.4.1. Mise en évidence d'une longueur d'onde optimale au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température 27
4.4.2. Expression analytique de la longueur d'onde optimale minimisant l'erreur relative sur la température : loi analogue à la loi de Wien 29
4.4.2.1. Démonstration analytique : approximation de Wien 29
4.4.2.2. Démonstration heuristique : loi de Planck 30

5. Mesures Bi-Spectrales : extension à plusieurs longueurs d'ondes 35

5.1. Température de couleur et température vraie 35

5.2. Intérêt et principe de la mesure Bi-Spectrale 37
5.2.1. Expression de la température 37
5.2.2. Détermination des longueurs d'ondes à l'aide de la fonction de Lambert 38

5.3. Erreur sur la mesure de température 40
5.3.1. Expression générale 40
5.3.2. Expression pour une variation linéaire de l'émissivité 41
5.3.3. Intérêt d'un grand rapport de flux 42

5.4. Influence d'un bruit additif au flux et pas à la température : erreur systématique 44

5.5. Critère sur l'écart minimum $\Delta\lambda_{min}$ entre deux longueurs d'ondes 46

5.6. Choix des filtres à l'aide du critère $\Delta\lambda_{min}$ 48
5.6.1. Choix du 1er filtre 48
5.6.2. Choix des deux autres filtres 49

5.7. Conséquences du critère $\Delta\lambda_{min}$ sur le nombre maximum de longueurs d'ondes, et linéarisation du critère à courtes longueurs d'ondes 52
5.7.1. Position du problème 52
5.7.2. Linéarisation du critère $\Delta\lambda_{min}$ à courtes longueurs d'ondes 53

5.8. Mesure Bi-Spectrale avec linéarisation des fonctions de transfert 55
5.8.1. Modélisation des fonctions de transfert 55
5.8.1.1. Fonction de transfert de l'appareil de mesure 55
5.8.1.2. Fonction de transfert des filtres 56

5.8.2. Expressions du flux et de l'erreur de mesure sur la température 56
5.8.2.1. Filtres modélisés par une fonction créneau 56
5.8.2.2. Filtres modélisés par une fonction gaussienne 57

5.9. Longueur d'onde optimale au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température en Bi-Spectrale : expression analogue à la loi de Wien 59
5.9.1. Solution faible et conjecture dans le cadre de l'approximation de Wien : expression analytique 59
5.9.2. Loi dans le cadre d'une émission de Planck : Solution numérique 68

6. Méthodes Multi-Spectrales : longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type de la température .. 73

6.1. Algorithmes d'estimation 74

6.2. Présentation des différents modèles d'estimation 77
6.2.1. Méthode Multi-Spectrale basée sur le rapport de flux et l'approximation de Wien : Méthode « TNL.TXY » 77
6.2.2. Linéarisation du modèle « TNL.TXY » et estimation par prédiction-correction : Méthode « TL.TXY » 80
6.2.3. Méthode Multi-Spectrale basée sur le rapport de flux et la loi de Planck : Méthode « TNL.Tbc » 84
6.2.4. Méthode Multi-Spectrale basée sur la loi de Planck 85
6.2.4.1. Développement limité de la fonction de transfert globale 85
6.2.4.2. Développement sur la base des polynômes de Lagrange pour la mise en place de contraintes 86

6.3. Nombre de degrés de liberté du système d'équation des méthodes basées sur le rapport de flux 87
6.3.1. Conclusion 88

6.4. Longueurs d'ondes optimales 88
6.4.1. Méthodologie de mesure 89
6.4.2. Modèle commun aux méthodes de minimisation séquentielle et globale 91
6.4.3. Longueurs d'ondes « Pseudo-Optimales » : Méthode Séquentielle 92
6.4.3.1. Principe de la Méthode de Sélection Séquentielle 92
6.4.3.2. Vérification du critère $\Delta_{\min}\lambda$ et choix des longueurs d'ondes « Pseudo-Optimales » 97
6.4.3.3. Synthèse partielle des résultats 98

6.4.4. Longueurs d'ondes optimales globales 98
6.4.4.1. Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale non-contrainte 99
6.4.4.2. Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale contrainte à la gamme spectrale de la caméra 100
6.4.4.3. Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale contrainte à la partie croissante de la courbe de Planck 101
6.4.5. Synthèse des longueurs d'ondes optimales, pseudo-optimales, et remarques concernant l'extension des méthodes 102
6.4.5.1. Synthèse des longueurs d'ondes optimales et pseudo-optimales 102
6.4.5.2. Remarques concernant l'extension des méthodes 103
6.5. Validation Numérique : comparaison des différents modèles pour la mesure de température dans la gamme infrarouge 104
6.5.1. Effet préjudiciable des systèmes surdéterminés sur l'estimation de la température en cas de biais de modèle 106
6.5.2. Simulations non bruitées 107
6.5.3. Simulations bruitées 109
6.6. Résultats expérimentaux 111
6.6.1. Description du banc expérimental 111
6.6.2. Méthodologie de mesure et de traitement des données, et résultats 112
6.7. Conclusion 115
7. Thermographie 119
7.1. Détection du rayonnement et principe de fonctionnement de la camera 119
7.1.1. Types de détecteurs des caméras 119
7.1.2. Principe de fonctionnement de la caméra 120
7.1.2.1. Fonctionnement physique et caractéristiques de la caméra 120
7.1.2.2. Correction de Non Uniformité (NUC, CNUC et BPR) 121
7.1.3. Avantage du refroidissement du détecteur 123
7.1.3.1. Expression générale du flux net reçu par le détecteur 123
7.1.3.2. Expression du flux net pour T_d proche de T 123
7.1.3.3. Expression du flux net pour T_d petit devant T 124
7.2. Equation thermographique 125

7.2.1. Equation thermographique générale 125
7.2.2. Equation thermographique simplifiée 127

7.3. Etalonnage 129
7.3.1. Approximation des flux 129
7.3.2. Constats expérimentaux 130
7.3.3. Expression de la loi d'étalonnage de la caméra 132
7.3.3.1. Loi d'étalonnage à 3 paramètres : Choix expérimental 132
7.3.3.2. Lois d'étalonnage à 4 et 5 paramètres 134
7.3.4. Intérêt de l'adimensionnement 136
7.3.4.1. Cas de fortes variations de température 136
7.3.4.2. Cas de faibles variations de température 137

7.4. Traitement des données issues de la caméra 138
7.4.1. Récupération, Conversion et Stockage des données 138
7.4.2. Détection de contour circulaire, détection de l'excitation, filtrage et champ de températures 139
7.4.2.1. Détection automatique de contour par filtre de Canny 140
7.4.2.2. Détection par méthode statistique 141
7.4.2.3. Détection par méthode graphique 143
7.4.3. Détection de contour rectangulaire, détection de l'excitation, filtrage et champ de températures 144

8. Conclusion générale de la partie Multi-Spectrale et Perspectives 151
8.1. Conclusion 151
8.2. Perspectives 152

PARTIE 2 : Caractérisation Thermique

9. Etat de l'Art 159

9.1. Introduction 159

9.2. Panorama des méthodes de détermination des propriétés thermiques liées à la conduction thermique 160

9.3. La Méthode Flash et ses évolutions 147

9.3.1. Premières études des effets de conduction bidimensionnelle dus à une excitation non uniforme : DONALDSON (1975), AMAZOUZ (1987), et LACHI (1991) 147

9.3.2. Méthode de PHILIPPI (1994) : Estimation de diffusivités longitudinales de matériaux anisotropes 148

9.3.3. Nouvelle fonction d'estimation proposée par REMY (2007) pour l'estimation des diffusivités de matériaux orthotrope 152

9.3.4. Méthode d'estimation 2D locale proposée par KRAPEZ (1999, 2004) : Transformation de Fourier et augmentation des gradients thermiques longitudinaux par utilisation d'une grille 153

9.3.5. Apports de SOUHAR (2011) et RUFFIO (2011) à la méthode de PHILIPPI : Prise en compte d'une excitation de forme temporelle quelconque, mais connue, et améliorations de la méthode d'estimation 156

9.3.6. Méthodes de Plana (2003), Batsale (2004), Bamford (2008), et Ayvazyan (2012) : CND et estimation de diffusivités par discrétisation de l'équation de la chaleur 159

Nomenclature Méthodes de Caractérisation Thermique non exhaustive 165

10. Méthodes de Caractérisation Thermique : Introduction 167

11. Problème Général 173

12. Solution analytique du problème général par superposition et Transformation Fourier-Sinus 179

12.1. Résolution du sous-problème 1 180

12.2. Résolution des sous-problèmes 2 et 3 182

12.2.1. Démonstration du caractère 1D des sous-problèmes 2 et 3 182

12.2.2. Résolution (1D) des sous-problèmes 2 et 3 183

12.2.3. Amplification du bruit par l'opérateur de dérivation : Intérêt du moyennage suivant (Oy) 186
12.2.3.1. Démonstration de l'amplification du bruit par dérivation 186
12.2.3.2. Intérêt du moyennage suivant (Oy) 186
12.2.4. Valeurs des fonctions de correction $\overline{T}^*_{SP2}$ et $\overline{T}^*_{SP3}$, en $x=0$ et $x=L_x$ 188

13. Solutions dégénérées des sous-problèmes 2 et 3 193

13.1. Méthode Heuristique et *DL* : Solutions pseudo-stationnaires issues des fonctions de corrections exprimées dans l'espace de Laplace à l'aide d'un *DL1* 193

13.2. Méthode de superposition : expression des fonctions de correction par utilisation du principe de superposition des solutions d'une EDP linéaire 198

14. Résolution par Transformation Fourier-Cosinus : Hypothèse de conditions aux limites de type flux nuls 203

15. Méthodes d'estimation 207

15.1. Méthode d'estimation classique « Cos H/H », corrélation des paramètres, et évolution de la méthode : méthode « Cos AH » 207
15.1.1. Principe de la méthode d'estimation 207
15.1.2. Différence entre moyenne arithmétique et moyenne intégrale numérique 208
15.1.3. Corrélation aux temps longs des paramètres lors de l'estimation harmonique par harmonique (« Cos H/H »), et intérêt de la méthode « Cos AH ». 209

15.2. Méthodes d'estimation « Sin Ind » et « Sin Imp » 213

15.3. Durée d'exploitabilité des harmoniques 215

16. Comportement des harmoniques d'une excitation symétrique et centrée en $L_x/2$ (centre de l'échantillon) 223

17. Validation numérique 229

17.1. Flux nuls en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$ 232

17.2. Températures nulles en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$ 237

17.3. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$ ... 240

17.4. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation d'extension $L_x/2$ centré en $x=L_x/2$ 246

17.5. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/4$ ... 250

18. Résultats expérimentaux 259

19. Amélioration des « méthodes d'estimation Sinus », et application sur zone réduite : Travaux en cours 265

19.1. Présentation de la méthode d'estimation « Sin-Imp2 » 265

19.2. Détermination du modèle « Sin-Imp2 » par diagonalisation partielle ou totale de l'opérateur différentiel du sous-problème-2 267

19.2.1. Résolution analytique dans l'espace de Fourier-Sinus : Diagonalisation de l'opérateur différentiel spatial d'ordre 2 267

19.2.2. Résolution analytique dans l'espace de Fourier-Sinus et de Laplace : Diagonalisation complète de l'opérateur différentiel du sous-problème-2 ... 269

19.3. Validation numérique 271

19.4. Résultats expérimentaux 273

20. Conclusion Générale et Perspectives de la Partie Caractérisation 277

20.1. Conclusion 277

20.2. Perspectives 279

ANNEXES

A.1. Expression analogue à la loi de Wien pour la détermination des longueurs d'ondes optimales en Mono-Spectrale dans la cadre de la loi de Planck : Démonstration heuristique 283

A.2. Longueur d'onde optimale au sens de la maximisation de la sensibilité du flux à la température 287

A.3. Lien entre écart-type sur la température au sens des moindres carrés, sensibilité du flux à la température, et rapport signal sur bruit 289

A.3.1. Lien entre écart-type sur la température au sens des moindres carrés, et sensibilité du flux à la température 289

A.3.2. Lien entre rapport signal sur bruit, sensibilité du flux à la température, et erreur relative sur la température 290

A.4. Conséquences du critère $\Delta\lambda_{min}$ sur le nombre maximum de longueurs d'ondes, et linéarisation du critère à courtes longueurs d'ondes 295

A.4.1. Position du problème 295

A.4.2. Algorithme de résolution numérique du problème 296

A.4.2.1. Résolution analytique du problème 297

A.4.2.1.1. Détermination de l'équation de récurrence 297

A.4.2.1.2. Calcul du point fixe 298

A.4.2.2. Conclusion 305

A.4.3. Linéarisation du critère $\Delta\lambda_{min}$ à courtes longueurs d'ondes 306

A.5. Nombre de degrés de liberté du système d'équation des méthodes basées sur le rapport de flux 311

A.5.1. Position du problème 311

A.5.2. Démonstration de la corrélation du système à 3 bandes 311

A.5.3. Démonstration du nombre de longueurs d'ondes nécessaire en fonction du degré du polynôme 313

A.5.3.1. Problématique 313
A.5.3.2. Démonstration 314
A.5.3.3. Conclusion 315

A.6. La Méthode Flash et ses évolutions 317

A.6.1. Méthode Flash de PARKER (1961) : Méthode monodimensionnelle 317

A.6.2. Méthode des temps partiels DEGIOVANNI (1977) : Estimation de la diffusivité sur un thermogramme face-arrière, avec prise en compte des pertes 324

A.6.3. Méthode des moments partiels DEGIOVANNI (1986) : Amélioration de la méthode des temps partiels, par prise en compte de l'ensemble des points du thermogramme 325

A.6.4. Méthode de HARMATHY (1964), STEERE (1966), et KATAYAMA (1969) : Rapport de deux températures dans le domaine spatio-temporel 326

A.6.5. Méthodes de KAVIANIPOUR (1977) et de HADISAROYO (1992) : Rapport de deux températures dans l'espace de Laplace .. 327

A.6.6. Méthode de REMY (2005) pour l'estimation de diffusivité longitudinale des isolants 329

A.7. Modélisation et Résolution du problème de diffusion 3D .333

A.7.1. Introduction 333

A.7.2. Présentation du problème 334

A.7.3. Mise en équation du problème général et décomposition par superposition 336

A.7.4. Résolution du Sous-Problème 1 dans le domaine transformé..... 338

A.7.4.1. Transformation de Laplace Unilatérale en temps 340
A.7.4.2. Transformation de Fourier-Sinus suivant (Ox) et (Oy) 341
A.7.4.2.1. Transformation de Fourier-Sinus suivant (Ox) 341
A.7.4.2.2. Transformation de Fourier-Sinus suivant (Oy) 343
A.7.4.3. Solution du Sous-Problème 1 dans le domaine transformé 344
A.7.4.3.1. Expression de la solution générale du Sous-Problème 1 345

A.7.4.3.2. Expression de la solution générale du Sous-Problème 1 en z=0 et z=L_z..... 348

A.7.5. Résolution du Sous-Problèmes 2 dans le domaine transformé 350

A.7.5.1. Transformation de Laplace Unilatérale en temps et Transformation de Fourier-Sinus suivant (Oy) 351

A.7.5.2. Transformation de Fourier-Cosinus suivant (Oz)..... 351

A.7.5.3. Solution du Sous-Problème 2 dans le domaine transformé 353

A.7.6. Résolution du Sous-Problèmes 3 dans le domaine transformé 355

A.7.7. Expression du champ de température complet par superposition et transformations inverses..... 357

A.8. Méthode des "moindres carrés" 363

A.8.1. Principe 363

A.8.2. Propriétés statistiques de l'estimateur 365

Production Scientifique Personnelle 369

Articles dans des revues internationales à comité de lecture ..... - 1 -

Communications orales, et articles publiés dans des conférences internationales avec actes et comité de lecture sur le texte complet- 1 -

Communications orales, et articles publiés dans des conférences nationales avec actes et comité de lecture sur le texte complet ..... - 2 -

Références Bibliographiques.....373

PARTIE 1 :
Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales

Nomenclature Multi-Spectrale non exhaustive

Symboles Latins

b: biais ($photons$)

c: vitesse de la lumière ($m.s^{-1}$)

k : coefficient quelconque

k_b : constante de Boltzmann ($J.K^{-1}$)

h : constante de Planck ($J.s$)

n^r, n : flux photonique total reçu ($photons.s^{-1}$)

n_λ, n_λ^r: flux photonique spectral reçu $\left(photons.s^{-1}\right)$

$n_{\overline{\lambda}}$: flux photonique reçu à $\overline{\lambda}$ ($photons.s^{-1}$)

n_λ^e: flux photonique spectral émis ($photons.s^{-1}$)

q : nombre d'intervalles d'intégration δt

S : surface (m^2)

A : coefficient quelconque (loi d'étalonnage)

A_f : surface sous courbe de transmittance (m^2)

M_λ^o: émittance du corps noir ($W.m^{-2}$)

M_λ : émittance d'un corps non noir ($W.m^{-2}$)

N : flux photonique ($photons.s^{-1}$)

$N_{\exp}$: flux photonique expérimentale

T_d : Température du détecteur (K)

T : température (K)

T_L : température de luminance (K)

X : photons comptés durant δt ou coefficient de la fonction de transfert globale

Y : photons comptés durant Δt ou coefficient de la fonction de transfert globale

$\overline{\mathrm{T}}$: transmitivité constante

U_0 : offset numérique

Symboles Grecques

α : rapport d'émittance

α' : rapport de flux photonique

α_λ : coefficient d'absorption à la longueur d'onde λ

$\delta\lambda$: bande passante des filtres (m)

δt : temps d'intégration (s)

ε : émissivité totale

ε_{app} : émissivité totale apparente

ε_{no} : signal de bruit

ε_λ : émissivité spectrale

$\varepsilon_{\overline{\lambda}}$: émissivité spectrale $\overline{\lambda}$

η : rendement quantique

λ : longueur d'onde (m)

$\overline{\lambda}$: longueur d'onde moyenne des filtres (m)

μ : espérance ($photons$)

σ : écart-type ($photons.s^{-1}$)

$\overline{\tau}$: transmitivité à $\overline{\lambda}$

τ_{obj} : transmitivité de l'objectif

τ_{ep} : transmitivité de l'oculaire

τ_λ : transmitivité spectrale

ϖ : probabilité de réception d'un photon

Δt : temps de comptage (s)

Symboles Mathématiques

$\equiv$: Identique à.

$\triangleq$: Egale par définition à.

Chapitre 1

Introduction

1. Introduction

La physique quantique nous assure que nous ne pourrons jamais faire de mesure exacte, car toute mesure perturbe le milieu et par conséquent l'état des grandeurs physiques que nous voulons mesurer. Fort de cela, la métrologie est la discipline des sciences qui étudie les divers moyens d'améliorer la mesure.

Afin d'améliorer la mesure de température, une idée intéressante est d'effectuer celle-ci par voie optique en champ lointain dans la gamme Ultraviolet-Infrarouge. Avec cette méthode, les échanges d'énergie entre le capteur et l'objet ne peuvent se faire que par transferts radiatifs, ce qui permet de s'affranchir des perturbations par contact. De plus, les mesures s'effectuant à distance, la méthode est applicable à des objets difficiles d'accès ou soumis à de fortes contraintes empêchant la mise en place d'un capteur in situ (très hautes températures ou flux, par exemple).

Ces méthodes ont commencé à être étudiées vers les années trente [1, 2], mais les dernières évolutions technologiques, notamment celles concernant les caméras matricielles à base de détecteurs quantiques refroidis à l'azote liquide, ont permis un bond dans l'avancée des recherches, car jusqu'alors, seules des mesures ponctuelles de température étaient envisageables, à l'aide de sondes thermiques ou de microscopes à force atomique, par exemple. Cela a notamment ouvert la voie au contrôle qualité (contrôle non destructif « CND ») dans les chaines de production industrielle.

Bien que les caméras matricielles à détecteurs quantiques semblent fort intéressantes pour bien des raisons, telles que celles citées précédemment, elles n'en restent pas moins un outil de mesure comportant également ses défauts. En effet, il existe de nombreux facteurs d'influence que nous ne maitrisons pas, tels que l'émissivité et la fonction de transfert de la chaine de mesure, qui pénalisent la précision des mesures.

Dans ce manuscrit nous présenterons l'intérêt d'utiliser les courtes longueurs d'ondes pour la mesure de température, ainsi que les stratégies permettant d'améliorer ces mesures à l'aide, notamment, d'un critère de séparation de longueurs d'ondes et de méthodes multi-spectrales, méthodes, qui comme le fait remarquer Krapez [3], consistent en un compromis entre différents critères souvent contradictoires, pour la mesure de température.

Nous commencerons par montrer en quoi consistent certains de ces compromis, avant de proposer une notion de longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température. En particulier, pour un bruit supposé constant sur le flux, une expression analytique permettant de déterminer ces longueurs d'ondes optimales sera proposée dans le cadre de l'approximation de Wien, et semi-analytique (choix heuristique de l'expression, et validation numérique) dans le cas de la loi de Planck. Ces expressions analytiques et semi-analytiques seront déterminées pour les méthodes mono-spectrales et bi-spectrales.

Dans les cas d'un bruit non constant sur le flux, et/ou de mesures multi-spectrales, deux méthodes seront proposées. L'une appelée « pseudo-optimale », consistant en une sélection séquentielle des longueurs d'ondes, et l'autre, plus générale, permettant une minimisation globale (pondérée ou non, avec ou sans contraintes sur la gamme spectrale et sur les paramètres) de l'écart-type sur la température.

Enfin, ces méthodes seront tout d'abord validées numériquement avant une mise en œuvre expérimentale de la plus probante.

Chapitre 2

Rayonnement Thermique

2. Rayonnement thermique

L'objectif de ce chapitre est de rappeler brièvement les différentes notions et grandeurs thermiques intervenant en transfert radiatif, et utiles à la thermographie et aux mesures de température par méthodes spectrales (monospectrale, bi-spectrale, ou multi-spectrales) qui vont être abordées dans la suite du manuscrit. Notons que de plus amples détails peuvent être trouvés dans [4, 5, 6, 7].

2.1. Classification

Le spectre électromagnétique est divisé en un nombre plus ou moins arbitraire de domaines de longueur d'onde, appelés « bandes » qui ne diffèrent que par les modes de production et de détection de leur rayonnement. Une représentation schématique est donnée ci-dessous :

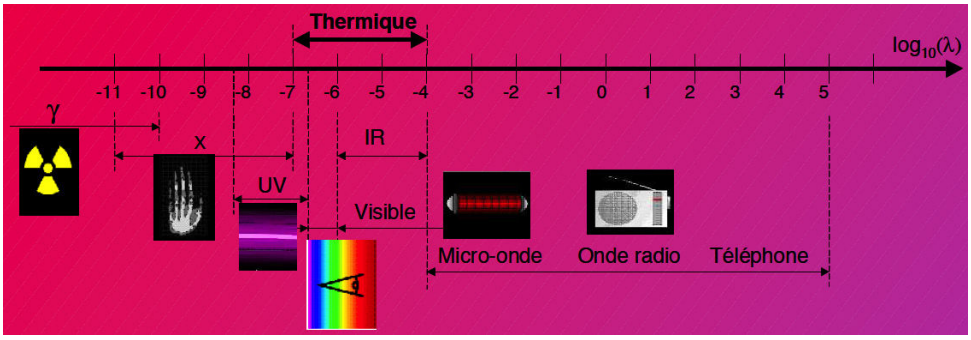


Figure 2.1 : Spectre de longueurs d'ondes, et utilisation courante des différentes bandes [8].

Les bandes Ultraviolet et Visible peuvent être découpées comme suit [9] :

- Ultraviolet : 0,01 µm à 0,4 µm
- Visible : 0,4 µm à 0,8 µm

La thermographie utilise généralement la bande infrarouge comprise entre le rayonnement visible et les micro-ondes radio dans la bande millimétrique.

La bande infrarouge est divisée en 4 régions [9] :

- Le proche infrarouge (IR I) : 0,8 µm à 2,7 µm
- L'infrarouge moyen (IR II) : 2,7 à 5,2 µm
- L'infrarouge lointain (IR III) : 8 à 14 µm
- L'infrarouge extrême (IR IV) : 14 à 100 µm

2.2. Loi de Wien et loi de Planck

2.2.1. Loi d'émission de Planck

Un corps noir[6] à la température T (K) et de surface unité, émet spectralement son énergie[7] dans tout le demi-espace suivant la loi (2.2.1) établit par Planck en 1901 [10, 11, 12] :

$$M^o_{\lambda,T} = \frac{2.\pi.h.c^2.\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{h.c}{\lambda.k_b.T}\right)-1} = \frac{C_1.\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda.T}\right)-1} = \pi L^o_{\lambda,T} \qquad (2.2.1)$$

$M^o_{\lambda,T}$ est appelée émittance monochromatique du corps noir et s'exprime en $\left[W.m^{-2}.\mu m^{-1}\right]$ ou encore en $\left[W.m^{-3}\right]$. $L^o_{\lambda,T}$ est appelée luminance monochromatique du corps noir. Elle s'exprime en $\left[W.m^{-2}.\mu m^{-1}.sr^{-1}\right]$ ou en $\left[W.m^{-3}.sr^{-1}\right]$, et s'interprète comme la puissance (ou énergie) rayonnée par unité d'angle solide entourant une direction donnée et par unité de surface projetée.

$c = \frac{c_o}{n}$: la célérité de la lumière dans le milieu d'indice n.

Dans le vide (on considèrera également vrai pour l'air) : $c \approx 3\times10^8\ m.s^{-1}$

$h \approx 6.6\times10^{-34}\ J.s$: Constante de Planck

$k_b \approx 1.4\times10^{-23}\ J.K^{-1}$: Constante de Boltzmann

$C_1 = 2\pi hc_0^2 \approx 3{,}741.10^{-16}\ W.m^2$

$C_2 = \frac{hc_0}{k_b} \approx 0{,}014388\ m.K$

2.2.2. Loi de déplacement de Wien

Un corps noir à la température T en Kelvin (K) émet le maximum d'énergie à la longueur d'onde λ_m définie par :

$$\lambda_m = \frac{2898}{T}\ \mu m \qquad (2.2.1)$$

Notons que 95% de l'énergie est comprise dans la bande $\left[\frac{\lambda_m}{2}\ ;\ 5\lambda_m\right]$

[6] Défini comme étant l'émetteur et le récepteur théorique parfait. Tout corps réel ne peut recevoir (resp. n'émettre) qu'une fraction du flux que recevrait (resp. n'émettrait) le corps noir théorique dans les mêmes conditions.

[7] Plus largement, tout corps ayant une température non nulle (en Kelvin) émet dans le milieu qui l'entoure un rayonnement électromagnétique, qu'on appellera rayonnement thermique.

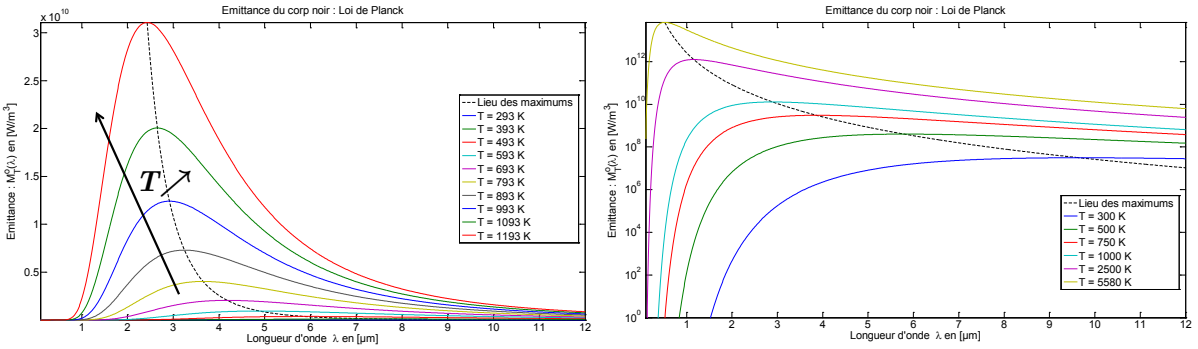


Figure 2.2 : Emittance du Corps Noir (loi de Planck) en échelle linéaire à gauche et semi-log à droite.

2.2.3. Approximations de la loi de Planck : Wien et Rayleigh-Jean

Il existe principalement deux approximations de la loi de Planck, l'une pour $\lambda T >> C_2$ appelée approximation de Rayleigh-Jeans, et l'autre pour $\lambda T << C_2 \approx 14400\ \mu\text{m.K}$ appelée approximation de Wien. C'est de cette dernière dont nous allons nous servir par la suite.

- ***Approximation de Rayleigh-Jeans***

Pour $\lambda T >> C_2$, nous avons :

$$M^o_{\lambda,T} = \frac{C_1.\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda.T}\right)-1} \simeq \frac{C_1}{C_2}\lambda^{-4}T \qquad (2.2.2)$$

- ***Approximation de Wien***

Pour $\lambda T << C_2 \approx 14400\ \mu\text{m.K}$, nous avons :

$$M^o_{\lambda,T} = \frac{C_1.\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda.T}\right)-1} \simeq C_1\lambda^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda.T}\right) \qquad (2.2.3)$$

Le Tableau 2.1 indique la valeur limite de la longueur d'onde pour l'approximation de Wien en fonction de la température [13] :

Température [K]	Longueur d'onde [µm] limite supérieure pour une erreur inférieure à 1K	Longueur d'onde [µm] limite supérieure pour une erreur inférieure à 10K
3500	0,65	0,8
2900	0,8	1,1
2400	1	1,4
1700	1,5	2,2
1300	2	3
900	3	4,8
300	11,3	19,7

Tableau 2.1 : Précision de l'approximation de Wien en fonction de la longueur d'onde.

2.3. Emissivité

L'émissivité d'un corps est définie comme étant le rapport de l'intensité du flux radiatif émis par ce corps, par celle qu'émettrait le corps noir dans les même conditions (températures, angle solide, surface…). L'émissivité dépend de la longueur d'onde, de la température, de l'angle solide et de l'état de surface de l'objet (rugosités, cavités…).

On a donc :

$$\varepsilon\left(\lambda, T, \theta, \varphi, \eta_{surface}(x,y)\right) = \frac{L\left(\lambda, T, \theta, \varphi, \eta_{surface}(x,y)\right)}{L^0\left(\lambda, T\right)} \tag{2.3.1}$$

On en déduit : $d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega} d\Omega$

Dans le cadre de notre application, l'objet et la caméra seront supposés immobiles durant toute l'expérience, par conséquent, l'angle solide sous lequel l'objet est vu par la caméra sera constant ($\Omega = cste$) et chaque élément du détecteur (pixel) verra un unique élément de surface que nous pourrons supposer homogène et ayant un état de surface constant ($\eta = cste$). Nous aurons donc pour chaque pixel $d\Omega = d\eta = 0$ et par conséquent :

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} d\lambda \tag{2.3.2}$$

De nombreux matériaux ont une émissivité qui croît vers les courtes longueurs d'ondes, comme l'illustré la figure ci-dessous [13] :

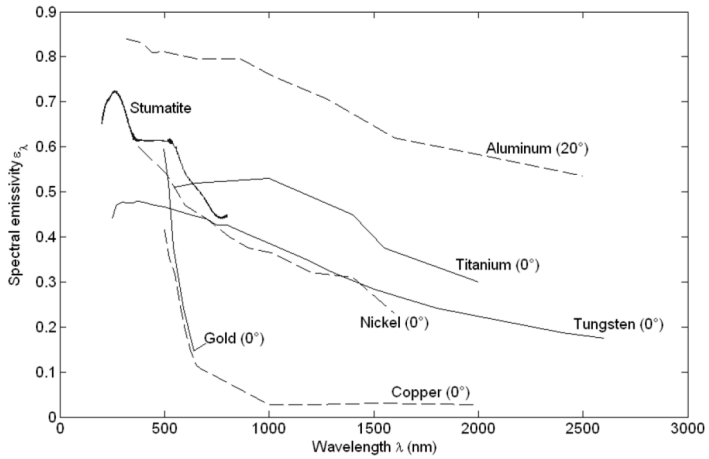


Figure 2.3 : Emissivité Spectrale pour différents matériaux

De plus, souvent en première approximation nous pourrons supposer (cf. Figure 2.4 et Figure 2.5) :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} << \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \tag{2.3.3}$$

Dans la suite, nous noterons l'émissivité $\varepsilon_{\lambda,T}$, même si nous supposerons toujours vérifiée la condition (2.3.3), cela afin de rappeler la dépendance théorique de l'émissivité à la température.

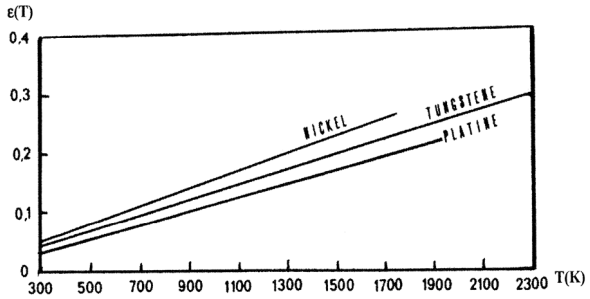


Figure 2.4 : Emissivité totale de métaux [13]

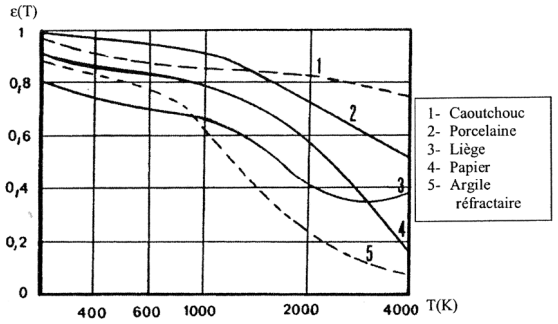


Figure 2.5 : Emissivité totale de diélectriques [13]

Pour finir, remarquons que la variation spectrale directionnelle (d'angle d'incidence nul) de l'émissivité des matériaux métalliques purs et polis peut être décrite par la loi de Drude pour les ondes électromagnétiques [7].

En effet, le coefficient monochromatique d'absorption α_λ est relié à l'indice d'extinction de l'onde K_λ par $\alpha_\lambda = \frac{4\pi}{\lambda} K_\lambda$.

Si le matériau est un métal ou un diélectrique imparfait, alors dans ce cas en appelant r_e la résistance électrique on a : $K_\lambda = \sqrt{\frac{\mu_0 c_0 \lambda}{4\pi r_e}}$

D'où, $\alpha_\lambda = A.\lambda^{-1/2}$, et d'après la loi de Kirchhoff on a : $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$

Donc finalement :

$$\varepsilon_\lambda = A.\lambda^{-1/2} \tag{2.3.4}$$

Ce qui implique que l'émissivité de matériaux métalliques purs et polis augmente lorsque la longueur d'onde diminue.

2.4. Flux photonique

2.4.1. Approche statistique du flux photonique

Lorsqu'on travaille aux courtes longueurs d'ondes (UV) et à des températures inférieures à 1000K, le rayonnement thermique devient discontinu et il convient mieux de parler de nombre de photons émis, que d'énergie [14].

L'énergie transportée par un photon étant : $E_\lambda = h\dfrac{c}{\lambda}$

On définit l'émittance photonique monochromatique du corps noir par :

$$\psi^o_{\lambda,T} = \frac{M^o_{\lambda,T}}{E_\lambda} = \frac{\dfrac{C_1.\lambda^{-4}}{hc}}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda.T}\right) - 1} \text{ en } \left[photon.s^{-1}\right] \tag{2.4.1}$$

L'analogue de la loi de Stefan est : $\psi^o = \dfrac{0,37\sigma T^3}{k_b}$ (2.4.2)

L'approximation de Wien devient : $n^o_{\lambda,T} \simeq \dfrac{C_1.\lambda^{-4}}{hc}\exp\left(\dfrac{-C_2}{\lambda.T}\right)$ (2.4.3)

L'analogue de la loi de déplacement de Wien est : $\lambda_{\max}T = 3663\ \mu m.K$ (2.4.4)

Le flux photonique émis par un objet réel de surface S est donc :

$$n^e_{\lambda,T} \simeq \frac{\varepsilon_{\lambda,T}.S.C_1.\lambda^{-4}}{hc}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda.T}\right) \tag{2.4.5}$$

Cette émission photonique se fait de façon aléatoire et suit une loi Binomiale qui peut être approchée par une loi de Poisson ou une loi Normale en fonction du temps de comptage des photons.

Si nous définissons l'estimation N du flux photonique n comme étant le nombre de photons Y comptés pendant un temps Δt, alors dans ce cas nous avons [14, 15] : $N = \dfrac{Y}{\Delta t}$, et en introduisant $\mu = E(Y)$, on a $n = E(N) = \dfrac{E(Y)}{\Delta t} = \dfrac{\mu}{\Delta t}$

De plus, on montre que si la probabilité d'apparition d'un photon est faible, alors la variance de Y devient égale à μ, et l'écart-type de l'estimateur du flux photonique devient : $V(N) = \sigma_N^2 = \dfrac{n}{\Delta t}$

On en déduit donc, que plus la durée de comptabilisation est importantes, meilleure sera la précision sur le flux photonique.

2.4.2. Effet du bruit expérimental sur la mesure du flux photonique

Le flux photonique N peut être entaché d'une erreur due à un bruit aléatoire e_b non corrélé avec l'émission de la surface. Dans ce cas nous avons [14, 15] :

$N_{\exp} = N + e_b \Leftrightarrow E\left(N_{\exp}\right) = E(N) + E(e_b) = n + b$

Il y a donc apparition d'une valeur non nulle et constante qui représente le biais de mesure dont nous devrons tenir compte dans la mesure du vrai flux photonique n.

Pour estimer l'erreur commise sur $N_{\exp}$, nous pouvons calculer la variance modifiée $V_m(N_{\exp})$. En calculant la variance à partir du flux photonique n au lieu de $E(N_{\exp})$ afin de faire apparaitre le biais, nous avons :

$$V_m(N_{\exp}) = E\left((N_{\exp} - n)^2\right) = V(N) + V(e_b) + b^2 + 2E\left[e_b(N-n) + b\left(e_b - b\right)\right] \qquad (2.4.6)$$

En supposant e_b et N comme des grandeurs stochastiques indépendantes, elles peuvent être supposées décorrélées. Donc le dernier terme de (2.4.6) est nul. L'erreur commise sur N est finalement :

$$V_m(N_{\exp}) = V(N) + V(e_b) + b^2 \qquad (2.4.7)$$

Une estimation de l'erreur sur la variance est donnée par : $e_{V_m(N_{\exp})} = \sqrt{V(e_b) + b^2}$.

Chapitre 3

Principe de mesure de température par pyrométrie optique passive : généralités

3. Principe de mesure de température par pyrométrie optique passive : généralités

La pyrométrie optique consiste à déterminer la température d'un objet en mesurant le flux radiatif (thermique) émit par celui-ci. Cette méthode s'effectuant sans contact, elle a l'avantage d'être peut intrusive. Lorsque la mesure du flux radiatif s'effectue respectivement, pour une ou deux ou plusieurs longueurs d'ondes données, la mesure est dite respectivement, mono-spectrale ou bi-spectrale ou multi-spectrale.

L'une des difficultés de ces méthodes est la méconnaissance de facteurs d'influence tels que la fonction de transfert globale de la chaine de mesure, ou de l'émissivité,…

Afin de pallier ces difficultés, de nombreuses méthodes existent. L'une d'entre elles consiste à proposer des modèles d'interpolation mathématiques ou physique.

La Figure 3.1 propose une vision synthétique du principe de mesure par pyrométrie optique. Les mots ayant été mis en gras correspondent aux cas auxquels nous nous restreindrons dans ce manuscrit.

Notons, que des informations complémentaires ainsi que de nombreuses références bibliographiques peuvent être trouvées dans les états de l'art exhaustifs réalisés par Legrand et Meriaudeau [13, 16], Krapez [3], ou Duvaut [17, 18, 19].

Ces revues bibliographiques peuvent être complétées par les travaux récents de Madura [20] qui propose une « compensation automatique » de l'émissivité à l'aide de trois longueurs d'ondes en choisissant automatiquement le modèle (constant, mononomial, ou exponentiel) le plus adapté par comparaison de résultats avec les températures de luminances et bi-spectrales. On peut également citer ceux de Wen [21, 22, 23] qui teste de nombreux modèles d'émissivité, dont certains dépendent également de la température. Ces différents modèles sont utilisés et comparés à l'aide de méthodes multi-spectrales afin de déterminer l'émissivité et la température de certains métaux. Enfin, on peut conclure sur les travaux de Lu [24], ainsi que ceux de Fu [25], concernant les mesures de température par méthodes multi-spectrale à l'aide de caméra CCD et de filtres de Bayer.

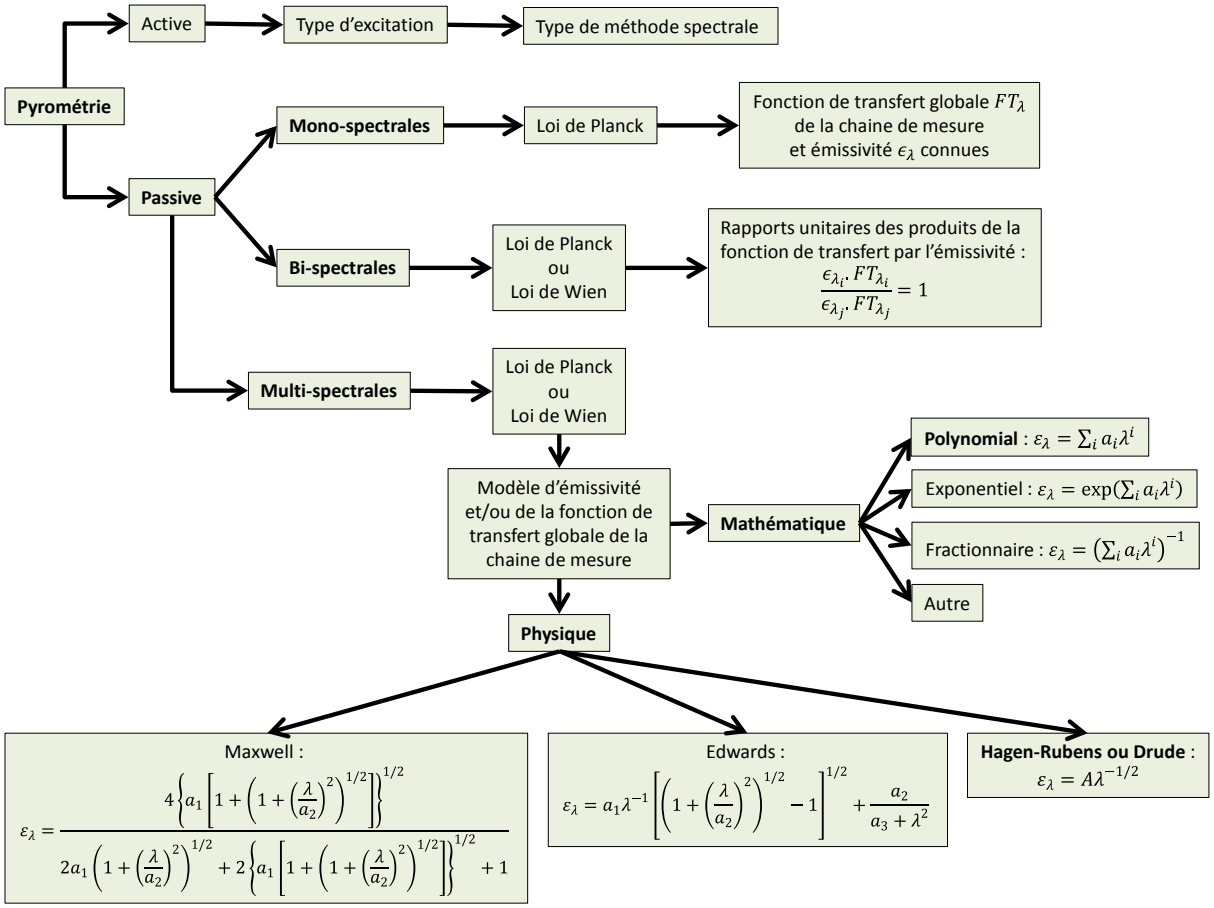


Figure 3.1 : Schéma de synthèse du principe de mesure par pyrométrie optique passive.

Remarque 1 : Sur la Figure 3.1, les coefficients a_i dans les modèles physiques d'émissivité, sont supposés être des constantes. Dans le cas de Drude, le coefficient A peut, dans l'absolu, dépendre de la température[8].

Remarque 2 : Tous les travaux cités précédemment et réalisés pour différents matériaux, différentes températures, et différents nombres de longueurs d'ondes, s'accordent tous pour illustrer la complexité des mesures de températures par pyrométrie optique passive, notamment à cause de la difficulté à extirper une méthode de mesure générale (nombre de longueurs d'ondes, modèle d'émissivité et de la fonction de transfert,…) donnant unanimement les meilleurs résultats (comparés à ceux des autres méthodes) quelles que soient les conditions expérimentales. L'objectif de ce manuscrit est d'apporter une nouvelle pierre à l'édifice en tentant d'établir des critères de mesure permettant de tracer un « chemin » ayant pour vocation d'aider à la détermination du choix des longueurs d'ondes.

[8] Notamment à cause de la dépendance en température de la résistivité électrique du matériau métallique (cf. (2.3.4)).

Chapitre 4

Mesure Mono-Spectrale

4. Mesure Mono-Spectrale

- ***Remarques préliminaires***

Notons tout d'abord, que pour effectuer des mesures à courtes longueurs d'ondes il sera nécessaire que la température soit suffisamment élevée, car plus les longueurs d'ondes sont courtes, plus l'intensité du flux radiatif est faible. Donc si l'on veut avoir un signal exploitable en un temps raisonnable, nous devons respecter un certain seuil.

Dorénanvant, afin d'établir les résultats qui vont suivre, il sera fréquemment fait usage de l'approximation de Wien qui a pour avantage de simplifier/permettre les calculs analytiques.

L'émittance d'un corps réel de surface unitaire s'écrira donc :

$$M(\lambda,T)=\frac{\varepsilon_{\lambda,T}C_1\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1}\underset{\text{de Wien}}{\overset{\text{Approx.}}{\simeq}}\varepsilon_{\lambda,T}C_1\lambda^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda.T}\right) \tag{4.1.1}$$

De plus, le flux $\varphi(\lambda,T)$ émis pouvant généralement être considéré comme proportionnel à l'émittance, dans ce manuscrit, pour des raisons de simplifications, nous confondrons souvent les deux notions. Ainsi, nous poserons :

$$\varphi(\lambda,T)\propto M(\lambda,T)\rightarrow\varphi(\lambda,T)\equiv M(\lambda,T) \tag{4.1.2}$$

4.1. Température de luminance et température vraie

En l'absence de connaissance préalable sur l'émissivité d'une surface, il est coutumier de supposer celle-ci comme étant égale à 1 et de calculer sa température à partir de l'émittance mesurée.

Il est intéressant de voir le lien qui existe entre la température vraie T d'une surface d'émissivité $\varepsilon_{\lambda,T}$ et la température de luminance T_L qui suppose la surface noire. Nous avons donc :

$$M_\lambda^o(T_L)=\varepsilon_{\lambda,T}M_\lambda^o(T)\Leftrightarrow C_1.\lambda^{-5}.\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda.T_L}\right)=\varepsilon_{\lambda,T}.C_1.\lambda^{-5}.\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda.T}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{T}=\frac{1}{T_L}+\frac{\lambda}{C_2}\ln(\varepsilon_{\lambda,T}) \tag{4.1.3}$$

Notons que $\varepsilon_{\lambda,T}\leq 1\Leftrightarrow\ln(\varepsilon_{\lambda,T})\leq 0$.

Nous en déduisons que la température vraie sera toujours supérieure à la température de luminance. Néanmoins, nous voyons que plus nous travaillerons à de courtes longueurs d'ondes plus l'écart entre la température vraie et la température de

luminance sera faible. En effet, lorsque la longueur d'onde diminue, le terme $\lambda \ln(\varepsilon_{\lambda,T})$ tend vers zéro. Ceci est illustré par le graphique ci-dessous Figure 4.1.

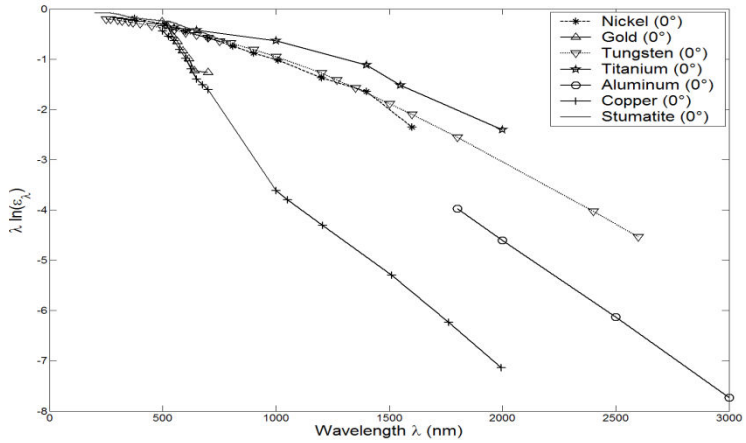


Figure 4.1 : Variations du logarithme de l'émissivité spectrale de quelques matériaux.

4.2. Erreur de mesure sur la température

En différentiant[9] (4.1.1) nous avons :

$$\frac{dM(\lambda,T)}{M(\lambda,T)} = \frac{d\varepsilon_{\lambda,T}}{\varepsilon_{\lambda,T}} + \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda T}\frac{dT}{T} \tag{4.2.1}$$

En assimilant les termes différentiels à des erreurs et en supposant nulle l'erreur sur l'émittance, nous avons :

$$\frac{e_T}{T} = \frac{\lambda T}{C_2}\frac{e_{\varepsilon_{\lambda,T}}}{\varepsilon_{\lambda,T}} + \left|\frac{5\lambda T}{C_2} - 1\right|\frac{e_\lambda}{\lambda} \tag{4.2.2}$$

Si dans un premier temps on suppose également nulle l'erreur sur la longueur d'onde ($e_\lambda = 0$), alors (4.2.2) devient :

$$\boxed{\frac{e_T}{T} = \frac{\lambda T}{C_2}\frac{e_{\varepsilon_{\lambda,T}}}{\varepsilon_{\lambda,T}}} \tag{4.2.3}$$

On constate ainsi, que l'erreur sur la température due à une erreur sur l'émissivité sera d'autant plus atténuée que λT sera petit. De plus, cela sera d'autant plus vrai si la condition $\varepsilon_{\lambda,T} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 1$ est vérifiée.

Si maintenant, nous supposons dans (4.2.2) que c'est l'erreur sur l'émissivité qui est nulle ($e_{\varepsilon_{\lambda,T}} = 0$), alors nous avons :

[9] On emploiera dans ce document le terme (n'existant pas dans le dictionnaire) « différentiant » pour signifier de façon condensée que l'on calcule la différentielle (mathématique) d'une expression.

$$\frac{e_T}{T} = \left|\frac{5\lambda T}{C_2} - 1\right| \frac{e_\lambda}{\lambda} \tag{4.2.4}$$

L'erreur sur la température sera nulle si :

$$\frac{5\lambda T}{C_2} = 1 \Leftrightarrow \lambda T = \frac{C_2}{5} \approx 2877{,}6 \ \mu m.K \tag{4.2.5}$$

Nous retrouvons la loi de déplacement de Wien : $\lambda_m T \approx 2898 \ \mu m.K$; l'écart que l'on trouve est dû à l'approximation de la loi de Planck.

L'équation (4.2.5) nous indique qu'en l'absence d'erreur sur l'émissivité et sur le flux, il existe une longueur d'onde minimisant l'incidence sur la mesure de température d'une erreur sur la longueur d'onde (des filtres, par exemple). Cette longueur d'onde correspond à celle donnée par la loi de déplacement de Wien.

- ***Synthèse partielle***

Premièrement, plus on est à courtes longueurs d'ondes, plus l'émissivité est proche de 1 et plus sa variation est faible (hypothèses expérimentalement vérifiées pour de nombreux matériaux).

Deuxièmement, plus on travaille à de courtes longueur d'onde, plus on doit travailler à de hautes températures afin de récupérer en un temps raisonnable un signal d'amplitude suffisant pour être exploitable. Or, on sait que l'émittance est maximale à la longueur d'onde donnée par la loi de déplacement de Wien.

Pour finir, on déduit d'après (4.2.5) que si les erreurs sur l'émissivité et sur l'émittance sont nulles (ou négligeables), alors l'erreur sur la température sera nulle à la longueur d'onde donnée par la loi de Wien.

On peut donc dire en première conclusion, que pour une mesure mono-spectrale (dans le cadre des hypothèses précédentes), on diminuera l'erreur sur la mesure de température en travaillant à courtes longueur d'onde, et en choisissant comme longueur d'onde celle pour laquelle l'émittance est maximale.

4.3. Sensibilités et sensibilités réduites

4.3.1. Sensibilité réduite en fonction de la température

Si l'on suppose ne s'intéresser qu'à l'émittance émise à une longueur d'onde donnée et telle que l'erreur sur la longueur d'onde soit nulle (on ne s'intéresse qu'au phénomène physique d'émission spectrale), on a alors : $d\lambda \equiv e_\lambda = 0$.

En considérant également qu'en général $\varepsilon_{\lambda,T}$ varie peu avec la température, ce qui est d'autant plus vrai aux courtes longueurs d'ondes que $\varepsilon(\lambda,T) \to 1$ et $d\varepsilon(\lambda,T) \to 0$.

A partir de la loi de Planck, l'émittance (ou flux) émise par un objet de surface unitiaire, est défini par :

$$M(\lambda,T) = \varepsilon_\lambda M^o(\lambda,T) \tag{4.3.1}$$

En supposant λ comme paramètre, la différentielle de l'expression (4.3.1), s'écrit :

$$dM_\lambda(T) = \varepsilon_\lambda dM^o_\lambda(T) + M^o_\lambda(T)d\varepsilon_\lambda \tag{4.3.2}$$

En assimilant les termes différentiels à des erreurs et en supposant que l'erreur e_{M_λ} sur le flux est nulle, ce qui revient à considérer qu'une erreur sur l'émissivité est intégralement compensée par une erreur sur le flux corps noir $e_{M^o_\lambda}$, et par conséquent, sur la température, la relation (4.3.2) peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{e_T = \left(\frac{1}{M^o_\lambda(T)}\frac{dM^o_\lambda(T)}{dT}\right)^{-1}\frac{e_{\varepsilon_\lambda}}{\varepsilon_\lambda}} \tag{4.3.3}$$

On note ainsi à partir de l'expression (4.3.3), que plus la sensibilité réduite $\frac{1}{M^o_\lambda(T)}\frac{dM^o_\lambda(T)}{dT}$ du flux à la température sera grande, plus l'erreur sur la température due à une erreur sur l'émissivité sera faible.

Il est possible de montrer que les sensibilités réduites $\frac{1}{M^o_\lambda(T)}\frac{dM^o_\lambda(T)}{dT}$ et $\frac{1}{M_\lambda(T)}\frac{dM_\lambda(T)}{dT}$ sont d'autant plus grandes que le produit λT est petit. Pour cela, on va utiliser l'approximation de Wien.

D'après l'équation (4.2.1) nous avons :

$$\frac{dM(\lambda,T)}{M(\lambda,T)} = \frac{d\varepsilon_{\lambda,T}}{\varepsilon_{\lambda,T}} + \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda T}\frac{dT}{T} \tag{4.3.4}$$

En considérant comme précédemment que $d\lambda \equiv e_\lambda = 0$, et en supposant[10] $\frac{d\varepsilon_{\lambda,T}}{\varepsilon_{\lambda,T}} << \frac{C_2}{\lambda T^2}dT$, nous avons :

$$\boxed{\chi^*_T \triangleq \frac{1}{M_\lambda(T)}\frac{dM_\lambda(T)}{dT} \simeq \frac{C_2}{\lambda T^2} = \frac{1}{M^o_\lambda(T)}\frac{dM^o_\lambda(T)}{dT}\left(1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right)} \tag{4.3.5}$$

L'égalité de droite s'obtient directement en dérivant (par rapport à T) la loi de Planck (égalité de gauche de (4.1.1), en supposant $\varepsilon_{\lambda,T} \equiv \varepsilon\big(\lambda\big)$).

[10] Cela est d'autant plus vérifié que nous considérons, ici, que λ est un paramètre (la différentielle se résume donc à une simple dérivée en fonction de T) et que l'émissivité varie peu avec la température.

Remarque : En notant que dans le cadre de l'approximation de Wien avec $\varepsilon_{\lambda,T} \equiv \varepsilon(\lambda)$, on a $\dfrac{1}{M_\lambda(T)}\dfrac{dM_\lambda(T)}{dT} = \dfrac{1}{M^o_\lambda(T)}\dfrac{dM^o_\lambda(T)}{dT}$, « l'égalité » de gauche de (4.3.5) aurait également pu être établit en identifiant (4.3.3) et (4.2.3).

On constate donc que la sensibilité réduite χ^*_T augmente lorsque la longueur d'onde diminue ou lorsque la température diminue. Ce constat est illustré par la Figure 4.2. De plus, la sensibilité réduite étant toujours meilleure aux courtes longueurs d'ondes, il n'existe donc pas à priori pour ce critère, de longueur d'onde optimale pour une température donnée.

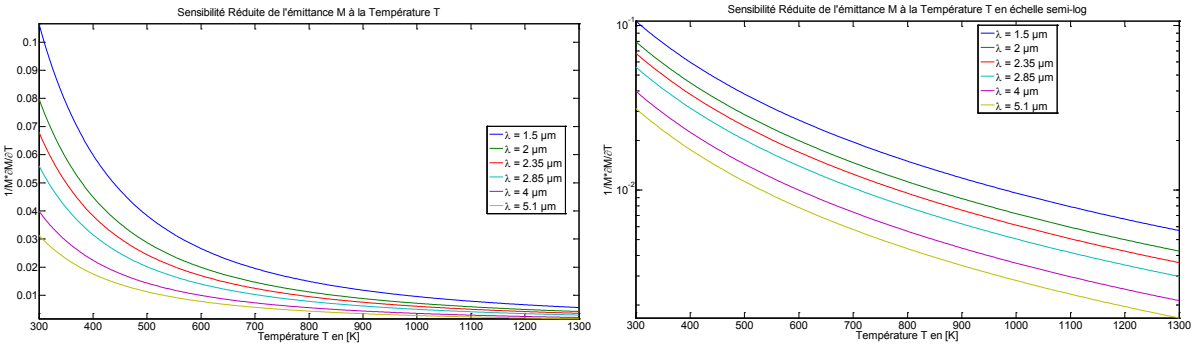


Figure 4.2 : Sensibilité Réduite de l'émittance à la température, en échelle linéaire à gauche et semi-log à droite.

Cependant, une propriété appréciable peu être révélée à partir de l'utilisation simultannée des informations issues des sensibilités réduites du flux à la température (4.3.5), et du flux à la longueur d'onde (cf. section 4.3.3).

Pour cela, considérons une mesure de flux à deux températures différentes, mais à une même longueur d'onde, et posons : $M_i = M_\lambda(T_i)$, $\Delta T = T_{i+1} - T_i$, et $\Delta M_\lambda(T) = M_{i+1} - M_i$. Dans ce cas, on a :

$$\chi^*_T \approx \frac{1}{M_i}\frac{\Delta M_\lambda(T)}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{M_{i+1}}{M_i} - 1\right) \tag{4.3.6}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta T \approx \frac{1}{\chi^*_T}\left(\frac{M_{i+1}}{M_i} - 1\right)} \tag{4.3.7}$$

- ***Conclusion***

D'une part, il a été établit avec l'expression (4.3.5) que la sensibilité réduite χ^*_T augmente lorsque le produit λT diminue. Ainsi, à l'aide de (4.3.3) on en déduit qu'une erreur sur l'émissvité aura un impacte d'autant plus faible sur l'erreur de température, que le produit λT sera faible. D'autre part, l'expression (4.3.7) montre que pour un rapport de flux $\left(\dfrac{M_{i+1}}{M_i}\right)$ donné, plus la sensibilité réduite sera grande, plus l'erreur sur la

température sera petite $\left(\Delta T \to 0\right)$. Notons cependant, que ce critère ne tient pas compte du rapport signal sur bruit.

4.3.2. Sensibilité en fonction de la température

Si maintenant nous décidons non plus de nous intéresser à la sensibilité réduite mais à la sensibilité, il suffit de reprendre l'équation (4.3.5) et nous avons :

$$\chi_T = \frac{dM_\lambda(T)}{dT} \simeq \frac{C_2}{\lambda T^2} M_\lambda(T) \tag{4.3.8}$$

$$\Rightarrow \chi_T \approx \frac{M_i}{\Delta T}\left(\frac{M_{i+1}}{M_i} - 1\right) = M_i \cdot \chi_T^* \tag{4.3.9}$$

On constate que la valeur de la sensibilité dépend de la valeur du flux, ce n'est donc pas un critère objectif simple permettant de conclure sur la diminution ou non de l'erreur de mesure sur la température contrairement à la sensibilité réduite.

Les courbes de sensibilité χ_T du flux à la température sont représentées Figure 4.3.

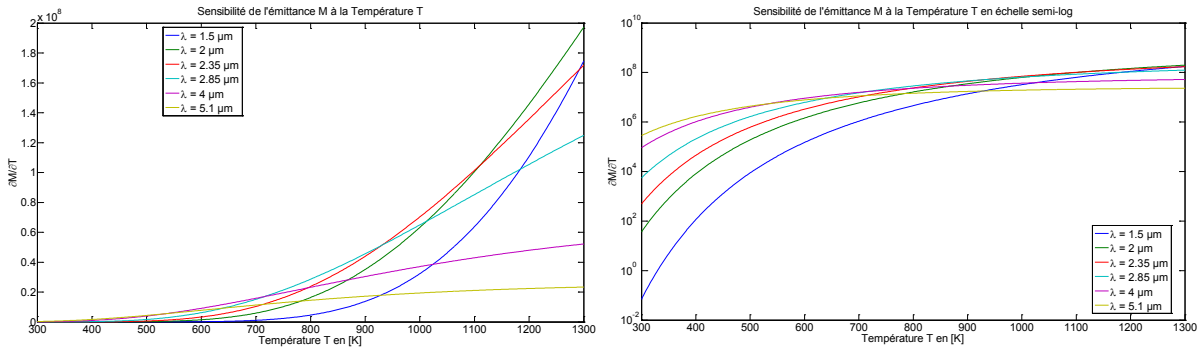


Figure 4.3 : Sensibilité de l'émittance à la température, en échelle linéaire à gauche et semi-log à droite.

Notons que les courbes de sensibilités se croisent, ce qui laisse penser qu'il existe une longueur d'onde optimale pour une température donnée. Il sera montré dans la section 4.4 que cela est effectivement le cas.

4.3.3. Sensibilité réduite en fonction de la longueur d'onde

Rappelons que d'après l'équation (4.2.1) nous avons :

$$\frac{dM(\lambda,T)}{M(\lambda,T)} = \frac{d\varepsilon_{\lambda,T}}{\varepsilon_{\lambda,T}} + \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda T}\frac{dT}{T}$$

En supposant que seule l'évolution de l'émittance en fonction de la longueur d'onde pour une température donnée nous intéresse, que l'erreur commise sur la température est nulle $\left(dT \equiv e_T = 0\right)$ et que $\frac{d\varepsilon_{\lambda,T}}{\varepsilon_{\lambda,T}} << \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{d\lambda}{\lambda}$, dans ce cas nous avons :

$$\chi_\lambda^* \triangleq \frac{1}{M_T(\lambda)}\frac{dM_T(\lambda)}{d\lambda} \simeq \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{1}{\lambda} \tag{4.3.10}$$

Par conséquent, nous voyons que plus la longueur d'onde sera petite, plus la sensibilité réduite du flux à la longueur d'onde sera grande. Une représentation graphique de cette sensibilité réduite est donnée Figure 4.4.

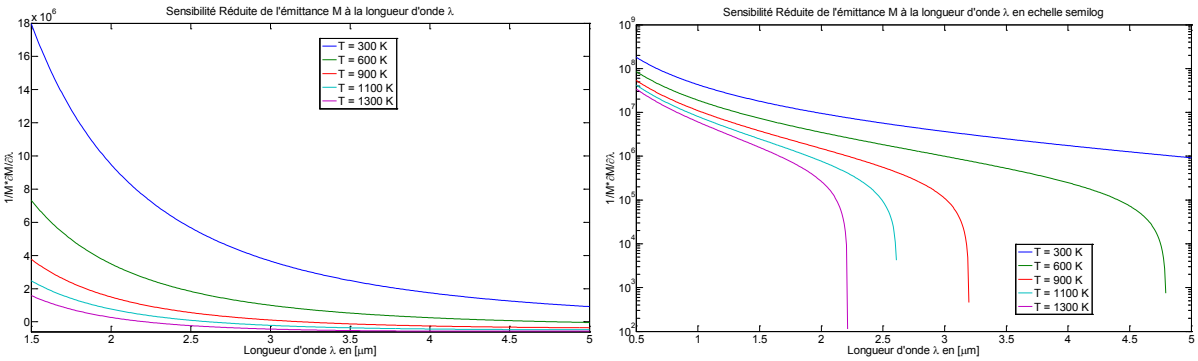


Figure 4.4 : Sensibilité Réduite de l'émittance à la longueur d'onde, en échelle linéaire à gauche et semi-log à droite.

Afin d'en avoir une interprétation différente, comme précédemment manipulons l'expression de la sensibilité réduite χ_λ^*. Pour cela, considérons une mesure de flux à deux longueurs d'ondes différentes, mais à une même température, et posons : $M_i = M_T(\lambda_i)$, $\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i$, et $\Delta M_T(\lambda) = M_{i+1} - M_i$. Dans ce cas, on a :

$$\chi_\lambda^* \approx \frac{1}{M_i}\frac{\Delta M_T(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{1}{\Delta\lambda}\left(\frac{M_{i+1}}{M_i} - 1\right) \tag{4.3.11}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta\lambda \approx \frac{1}{\chi_\lambda^*}\left(\frac{M_{i+1}}{M_i} - 1\right)} \tag{4.3.12}$$

- ***Conclusion***

Sachant que la sensibilité réduite χ_λ^* augmente quand la longueur d'onde diminue (cf. (4.3.10)), on conclut à partir de (4.3.12) que plus on travaillera à courte longueur d'onde, moins les filtres auront besoin d'être éloignés afin d'avoir un rapport de flux $\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right)$ donné. Nous verrons par la suite que c'est une qualité appréciable pour la mesure en multi-spectrale.

4.3.4. Sensibilité en fonction de la longueur d'onde

De la même façon que précédemment, nous pouvons établir l'expression de la sensibilité à l'aide de l'équation (4.3.10). La sensibilité est donc :

$$\chi_\lambda = \frac{dM_T(\lambda)}{d\lambda} \simeq \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{M_T(\lambda)}{\lambda} \tag{4.3.13}$$

$$\boxed{\Rightarrow \chi_\lambda \approx \frac{M_i}{\Delta\lambda}\left(\frac{M_f}{M_{ini}} - 1\right) = M_i \cdot \chi_\lambda^*} \tag{4.3.14}$$

Une illustration graphique des courbes de sensibilité χ_λ du flux à la longueur d'onde est donnée Figure 4.5.

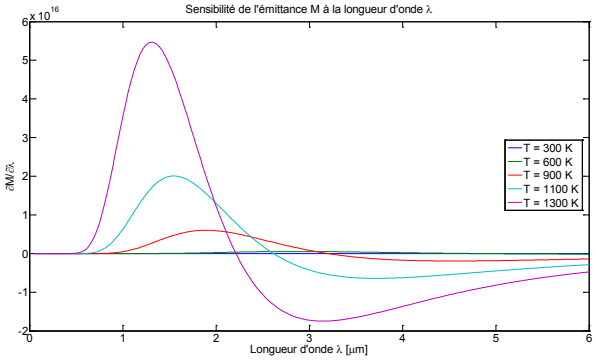


Figure 4.5 : Sensibilité de l'émittance à la longueur d'onde.

Comme précédemment, nous voyons que les courbes de sensibilités font apparaitre des optimums, ce qui laisse penser qu'il peut être possible de définir un critère de mesure optimale. Ce point fait l'objet de la section 4.4.

- ***Synthèse partielle*** :

En conclusion, nous voyons que l'avantage de travailler à courtes longueurs d'ondes est double : d'une part, on améliore la précision sur la température (cf. (4.3.7)), et d'autre part, cette précision pourra être obtenue avec des filtres d'autant plus proches que les longueurs d'ondes seront petites (cf. (4.3.12)). Cependant, ces constats ne tiennent pas compte du rapport signal sur bruit. Par ailleurs, le tracé des courbes de sensibilités insufflent l'idée de l'existence d'un critère objectif de mesure optimale. L'établissement de ce critère fait l'objet de la section suivante.

4.4. Longueur d'onde optimale en Mono-Spectrale : expression analogue à la loi de Wien

L'objectif de cette section est de démontrer, d'une part, qu'il existe une longueur optimale pour la mesure de température en mono-spectrale, et d'autre part, qu'il existe une loi analogue à la loi de déplacement de Wien permettant de la déterminer.

Nous établirons également les liens qui existent entre minimisation d'erreur relative sur la température, écart-type sur la température, et rapport signal sur bruit. En particulier, nous montrerons qu'il est équivalent de minimiser l'écart-type sur la température au sens des moindres carrés, ou l'erreur relative sur la température. Ces deux minimisations donnant exactement la même solution de longueur d'onde optimale.

4.4.1. Mise en évidence d'une longueur d'onde optimale au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température

En assimilant les termes différentiels de la relation (4.2.1) à des erreurs, l'erreur de mesure sur la température est donnée par :

$$\frac{e_M}{M} = \frac{e_{\varepsilon_{\lambda,T}}}{\varepsilon_{\lambda,T}} + \left(\frac{C_2}{\lambda T} - 5\right)\frac{e_\lambda}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda T}\frac{e_T}{T} \tag{4.4.1}$$

Si l'on suppose que les erreurs sur la température ne sont dues qu'à des erreurs sur le flux, c'est-à-dire si l'on suppose[11] $e_\lambda = 0$ et $e_{\varepsilon_{\lambda,T}} / \varepsilon_{\lambda,T} << e_{M_\lambda} / M_\lambda$, dans ce cas l'erreur sur la température devient :

$$\frac{e_T}{T} \simeq \frac{\lambda T}{C_2}\frac{e_{M_\lambda}}{M_\lambda} \tag{4.4.2}$$

Si de plus on suppose que l'erreur sur le flux[12] est constante pour une température fixée, telle que :

$$e_{M_\lambda} = cste \tag{4.4.3}$$

---

[11] Notons que dans le cadre où l'on identifie e_λ à $d\lambda$, poser $e_\lambda = 0$ est équivalent à considérer que λ est un paramètre, et non plus une variable. De plus, rappelons que dans le document on suppose toujours de façon implicite que $\varepsilon_{\lambda,T} \equiv \varepsilon(\lambda)$. Ainsi, nous avons d'une part $e_{M_\lambda} \big/ M_\lambda \equiv e_{M_\lambda^o} \big/ M_\lambda^o$, et d'autre part, sans approximation de Wien : $\frac{e_T}{T} = \frac{\lambda T}{C_2}\frac{e_{M_\lambda^o}}{M_\lambda^o}\left(1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right)$.

[12] Pour des raisons de simplifications, on confondra le terme d'émittance spectrale avec celui de flux (spectral). Ces deux grandeurs étant généralement proportionnelles.

Alors, l'expression (4.4.2) de l'erreur relative sur la température, devient :

$$\frac{e_T}{T} = \underbrace{\frac{kT}{C_2}}_{\substack{\text{constant} \\ \text{à T fixé}}} \frac{\lambda}{M_\lambda} \tag{4.4.4}$$

Ainsi, pour une température fixée (température expérimentale que l'on veut mesurer, par exemple) et une erreur constante sur le flux, on voit que l'erreur relative sur la température est due à une « concurrence » entre la valeur de la longueur d'onde λ et le flux (l'émittance, dans (4.4.4)) M_λ. Ces deux grandeurs apparaissant dans (4.4.4) sous la forme d'un rapport, et M_λ étant non monotone, cela suggère l'existence d'un extrémum.

Comme l'illustre la Figure 4.6 représentant les variations pour T=623K du rapport $\lambda \,/\, M_\lambda \propto \frac{e_T}{T}$, avec et sans approximation de Wien pour l'émittance, cet extremum existe bien, et est en réalité un minimum.

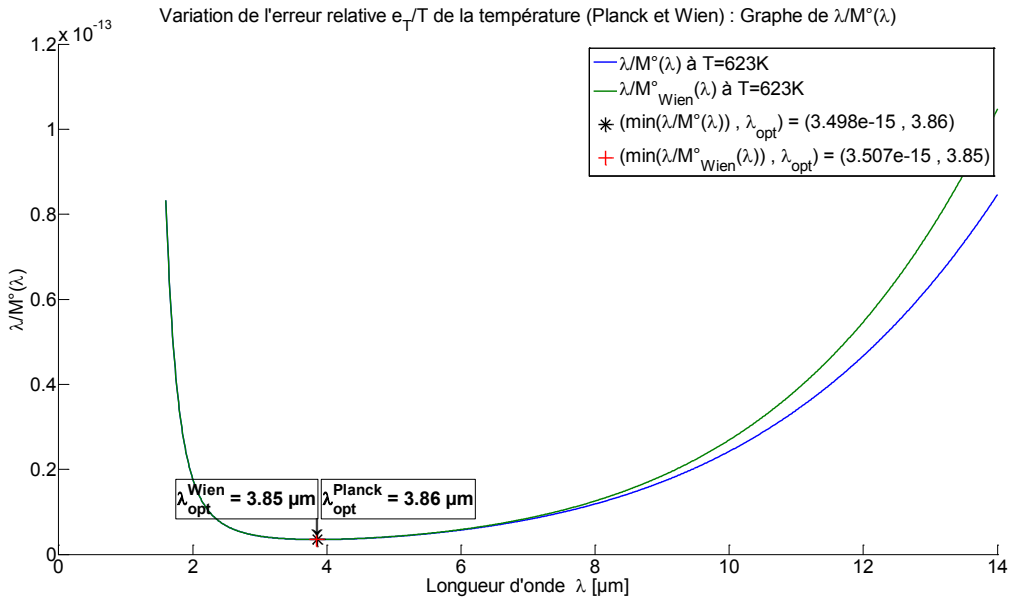


Figure 4.6 : Variation pour T=623K du rapport $\lambda \,/\, M_\lambda^o \propto \frac{e_T}{T}$, avec et sans approximation de Wien pour M_λ^o dans (4.4.4).

On constate que les solutions avec et sans approximation de Wien pour l'émittance dans (4.4.4) sont très proches. En effet, on a :

$$\begin{cases} \lambda_{opt}^{WP}\left(T = 623K\right) \approx 3{,}86\mu m \\ \lambda_{opt}^{Wien}\left(T = 623K\right) \approx 3{,}85\mu m \end{cases} \tag{4.4.5}$$

4.4.2. Expression analytique de la longueur d'onde optimale minimisant l'erreur relative sur la température : loi analogue à la loi de Wien

4.4.2.1. *Démonstration analytique : approximation de Wien*

Nous avons montré graphiquement à partir de la relation (4.4.4), Figure 4.6, qu'il existait une longueur d'onde « optimale » qui minimisait l'erreur relative sur la température.

Une façon d'obtenir une expression analytique de ce minimum dans le cadre de l'approximation de Wien[13], consiste à résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{e_T}{T}\right) = \frac{kT}{C_2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{M_\lambda}\right) = 0 \tag{4.4.6}$$

En utilisant l'approximation de Wien pour l'émittance, l'expression (4.4.4) s'écrit :

$$\frac{e_T}{T} = \underbrace{\frac{kT}{C_1C_2\varepsilon}}_{\substack{=\beta,\\ \text{constant}\\ \text{à T fixé}}}\lambda^6\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) \tag{4.4.7}$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{e_T}{T}\right) = \beta\left[6\lambda^5 - \lambda^6\frac{C_2}{\lambda^2 T}\right]\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) \tag{4.4.8}$$

Par conséquent, résoudre (4.4.6), équivaut à résoudre :

$$6\lambda^5 - \lambda^6\frac{C_2}{\lambda^2 T} = 0 \tag{4.4.9}$$

Ayant pour solution[14] :

$$\lambda_{opt}^{Wien}T = \frac{C_2}{6} = C_{MSW}^R \tag{4.4.10}$$

Ainsi, pour la constante $C_2 = 14388\,\mu m.K$, la longueur d'onde optimale recherchée s'écrit :

$$C_2 = 14388 \Rightarrow \lambda_{opt}^{Wien} = \frac{2398}{T} \tag{4.4.11}$$

[13] Rappelons que la relation (4.4.1) a été obtenue dans la cadre de l'approximation de Wien.

[14] Dans la constante C_{MSW}^R, MSW signifie « **M**ono-**S**pectrale, sous approximation de **W**ien ».

- ***Applications numériques pour T=623K***

La relation (4.4.11) donne pour T=623K :

$$\begin{cases} C_2 = 14388 \\ T = 623K \end{cases} \Rightarrow \lambda_{opt}^{Wien} \approx 3,85\mu m \tag{4.4.12}$$

Notons que la loi de déplacement de Wien donne pour T=623K, $\lambda_{\max} = 2898 \,/\, T \approx 4,65\,\mu m > \lambda_{opt}^{Wien} \approx 3,85\,\mu m$. Les longueurs d'ondes optimales sont donc légèrement décalées à gauche par rapport aux maximums des courbes de Planck.

4.4.2.2. *Démonstration heuristique : loi de Planck*

Remarque préliminaire : Afin d'alléger la présention, cette section à été reléguée en Annexe A.1 p.283. Nous ne présenterons donc, ici, que les résultats essentiels.

L'objectif est de vouloir étendre la relation (4.4.10), au changement de constante près, à une émittance définie par la loi de Planck, et donc de chercher une relation sous la forme[15] :

$$\lambda_{opt}^{Planck} = \frac{C_{MSP}^{R}}{T} \tag{4.4.13}$$

La démarche consiste à différentier l'émittance (définie par la loi de Planck) par rapport à la température, puis à minimiser l'erreur relative sur la température, en supposant que l'erreur sur le flux est constante. Après calcul, l'expression de l'erreur relative sur la température, est définie par :

$$\frac{e_T}{T} = \underbrace{\frac{kT}{C_2}}_{\substack{\text{constant} \\ \text{à T fixée}}} \left[1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right] \frac{\lambda}{M} \tag{4.4.14}$$

Puis, à partir de l'ensemble des longueurs d'ondes optimales $\lambda_{opt}^{Planck}\left(T\right)$ (minimisant (4.4.14)) obtenues numériquement et représentées sur la Figure 4.7, on peut déterminer la constante C_{MSP}^{R} en effectuant, par exemple, une estimation par moindres carrées (cf. Annexe A.8 p.363, et [26]). On obtient alors :

$$\lambda_{opt}^{Planck} T = C_{MSP}^{R} \approx 2410,29\,\mu m.K \tag{4.4.15}$$

Les longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et calculées à partir de la relation (4.4.13) après estimation de la constante[16] $C_{MSP}^{R} \approx 2410,29$, sont représentées

---

[15] Dans la constante C_{MSP}^{R}, MSP signifie « **M**ono-**S**pectrale, avec loi d'émission de **P**lanck ».

[16] En toute rigueur, la constante C_{MSP}^{R} devrait continuer à être notée $\hat{C}_{MSP}^{R}$, car elle est estimée (c'est un estimateur « fourni » par la méthode des moindres carrés), mais afin d'alléger l'écriture, nous l'omettrons dans la suite de ce manuscrit.

sur la Figure 4.8. On observe une parfaite adéquation entre les longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et la loi (4.4.15) proposée.

Remarquons que les longueurs d'ondes optimales obtenues sont indépendantes de la valeur (supposée constante) de l'émissivité.

Ainsi, dans le cadre de la loi d'émission de Planck, bien qu'une démonstration analytique soit délicate, il semble que l'on puisse définir une loi analogue à celle de Wien, permettant d'obtenir les longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température.

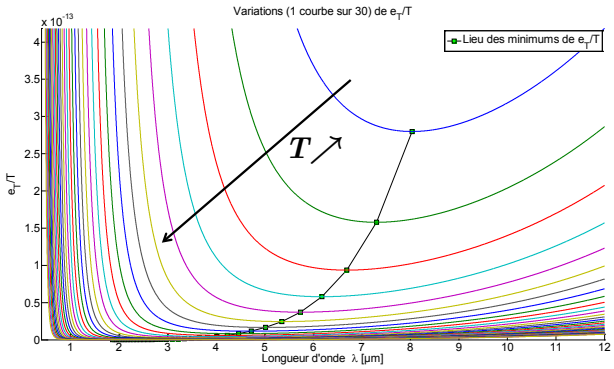


Figure 4.7 : $\left[1-\exp\left(-C_2/\lambda T\right)\right]\lambda/M_\lambda \propto \frac{e_T}{T}$, pour $T \in \left[300K\,;1300K\right]$ et $\lambda \in \left[0,4\mu m\,;12\mu m\right]$.

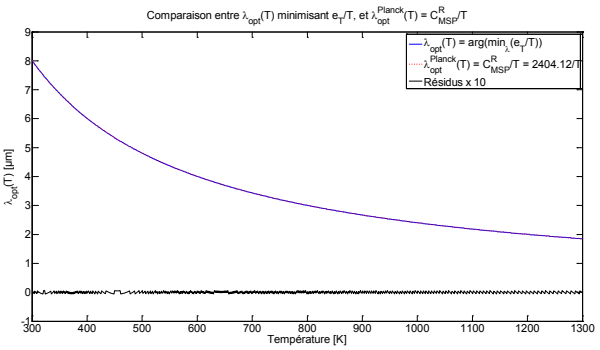


Figure 4.8 : Longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et par la loi $\lambda_{opt}^{Planck} = C_{MSP}^{R} \,/\, T$, pour $T \in \left[300K\,;1300K\right]$ et $\lambda \in \left[0,4\mu m\,;12\mu m\right]$. Les résidus ont été multipliés par 100.

La Figure 4.9 illustre sur les courbes de Planck, les solutions trouvées pour les longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température.

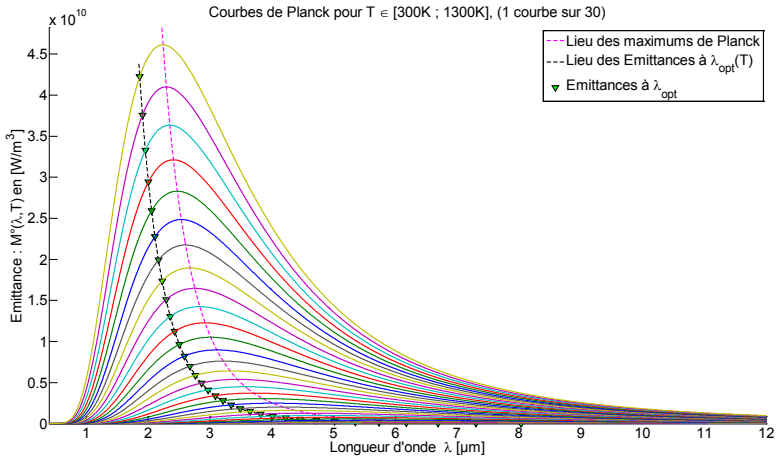


Figure 4.9 : Représentation graphique sur courbes de Planck des longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température en mono-spectrale.

On note que les valeurs trouvées pour les longueurs d'ondes optimales sont légèrement inférieures (décalées à gauche) à celles correspondant au maximum d'émission de la courbe Planck, données par la loi de déplacement de Wien.

Ainsi, ce n'est pas un flux maximum qui permet une mesure optimale de la température (comme aurait pu le laisser penser la relation[17] (4.2.5)), mais une variation maximale du flux pour une variation donnée de la température.

La justification de cette observation peut être obtenue à l'aide de la maximisation de la sensibilité du flux à la température. Cette notion étant elle-même liée à la notion de minimisation d'écart-type sur la température au sens des moindres carrés, ou à la maximisation du rapport signal sur bruit.

Afin d'alléger la présentation, ces derniers points font l'objet des Annexes A.2 p.287 et A.3 p.289. Notons cependant, qu'ils sont à la base des idées et de l'interpretation physique des résultats qui vont permettre la généralisation de la méthode de détermination de longueurs d'ondes optimales (Mono-Spectrales) aux méthodes Bi-Spectrales et Multi-Spectrale.

- ***Synthèse partielle*** *:*

Dans le cas d'une mesure mono-spectrale, sous hypothèse d'erreur nulle sur la longueur d'onde, d'erreur relative sur l'émissivité négligeable devant celle sur le flux, et pour une erreur constante sur le flux ; on a montré que les notions de minimisation d'erreur relative ou d'écart-type sur la température, de maximisation de la sensibilité du flux à la température ou du rapport signal sur bruit en température (en assimilant erreurs et écart-types), sont liées entre elles et conduisent toutes à une notion de longueurs d'ondes optimales, définie par :

$$\begin{cases} \lambda_{opt}^{Wien} T = \dfrac{C_2}{6} \equiv C_{MSW}^{R} \approx 2400\,\mu m.K, & \forall \lambda T << C_2 \\ \lambda_{opt}^{Planck} T = C_{MSP}^{R} \approx 2410,3\,\mu m.K \end{cases} \tag{4.4.16}$$

Les critères permettant de définir les longueurs d'ondes optimales en mono-spectral ayant été établis, ce sont ceux de la méthode bi-spectrale qui vont désormais faire l'objet de la section suivante.

[17] Rappelons que la relation (4.2.5) a été obtenue en supposant nulle l'erreur sur le flux, ce qui bien entendu ne correspond pas à la réalité expérimentale…

Chapitre 5

Mesures Bi-Spectrales

« Extension à Plusieurs Longueurs d'ondes »

5. Mesures Bi-Spectrales : extension à plusieurs longueurs d'ondes

Il a été vu dans la partie précédente qu'il était avantageux d'effectuer des mesures de température à courte longueur d'onde. Néanmoins, il existe de fortes contraintes afin de pouvoir réduire les erreurs sur la mesure. Dans cette partie, une méthode couramment employée et permettant d'améliorer la mesure tout en diminuant ces contraintes, est présentée.

En particulier, cette méthode basée sur le rapport de flux et appelée « Méthode Bi-Spectrale[18] », permet de remonter à la température de surface d'un objet sans connaissance préalable de l'émissivité, à condition que l'émissivité soit indépendante des longueurs d'ondes et des températures considérées.

Elle permet également de diminuer l'influence des diverses fonctions de transferts (filtres, objectifs, rendement quantique du détecteur…) intervenant dans la chaine de mesure.

Dans cette section, le principe de la « Méthode Bi-Spectrale » est présenté ainsi que certains critères permettant d'améliorer la méthode de mesure. En particulier, il est démontré que le modèle est biaisé en cas de bruit sur le flux, qu'il est préférable d'avoir en grand rapport de flux, et des longueurs d'ondes suffisamment éloignées l'une de l'autre. Une prise en compte de la fonction de transfert globle de la chaine de mesure sous la forme d'une fonction linéaire est également présentée. Enfin, la méthode de détermination de longueurs d'ondes optimales à l'aide d'une lois analogue à celle de Wien, et présentée dans le cas de mesure Mono-Spectrales, sera étendue au cas des mesures Bi-Spectrales.

5.1. Température de couleur et température vraie

Soit deux mesures de flux à deux longueurs d'ondes $\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$ différentes. En calculant le rapport, on peut définir la température de couleur (ou pyrométrique) comme étant celle qu'aurait le corps noir afin que ce rapport soit le même. Nous avons donc :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1^o}{M_2^o} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_1 C_1 \lambda_1^{-5}}{\varepsilon_2 C_1 \lambda_2^{-5}} \frac{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_2 T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_1 T}\right) - 1} = \frac{\lambda_1^{-5}}{\lambda_2^{-5}} \frac{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_2 T_c}\right) - 1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_1 T_c}\right) - 1} \tag{5.1.1}$$

En supposant $\lambda T << C_2$ (approximation de Wien), l'équation (5.1.1) devient :

[18] La dénomination Bi-Spectrale est généralement liée à l'hypothèse de corps gris (ou de façon moins restrictive, à celle de rapports d'émissivités constants), et également souvent associée à l'approximation de Wien.

$$\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_C}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\simeq\frac{1}{C_2}\ln\left(\frac{\varepsilon_1\left(\lambda,T\right)}{\varepsilon_2\left(\lambda,T\right)}\right) \tag{5.1.2}$$

En posant $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$, l'équation (5.1.2) s'écrit :

$$\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_C}\right)\simeq\frac{\lambda_1}{C_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}\right)\ln\left(\frac{\varepsilon_1\left(\lambda,T\right)}{\varepsilon_2\left(\lambda,T\right)}\right) \tag{5.1.3}$$

En supposant $\Delta\lambda << \lambda_1$, l'équation (5.1.3) se simplifie en :

$$\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_C}\right)\simeq\frac{\lambda_1^2}{C_2\Delta\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon_1\left(\lambda,T\right)}{\varepsilon_2\left(\lambda,T\right)}\right) \tag{5.1.4}$$

- ***Analyse des ordres de grandeur***

D'une part,

$$\lambda_1 << \sqrt{\Delta\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda} << 1 \tag{5.1.5}$$

En pratique, dans le domaine UV, nous avons :

$$\begin{cases}\lambda_1 \sim 10^{-7}\\ \Delta\lambda \sim 10^{-8}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1^2 \sim 10^{-13}\\ \Delta\lambda \sim 10^{-8}\end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda} \sim 10^{-5} << 1 \tag{5.1.6}$$

Dans le domaine IR, nous avons :

$$\begin{cases}\lambda_1 \sim 10^{-6}\\ \Delta\lambda \sim 10^{-7}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1^2 \sim 10^{-12}\\ \Delta\lambda \sim 10^{-7}\end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda} \sim 10^{-5} << 1 \tag{5.1.7}$$

- ***Remarques***

En comparant les équations (4.1.3) et (5.1.4), exprimant la température vraie respectivement en fonction de la température de luminance (cas mono-spectral), et de la température de couleur (cas bi-spectral) ; nous voyons que le rapport des flux donnera une meilleure approximation de la température vraie si $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ [19]. Or, expérimentalement cela peut arriver localement[20] si les longueurs d'ondes sont choisies suffisamment proches l'une de l'autre $\left(\Delta\lambda\to 0\right)$ pour que $\ln\left(\varepsilon_1\left(\lambda,T\right)/\varepsilon_2\left(\lambda,T\right)\right)\to 0$.

[19] Sauf dans le cas du corps noir, i.e. dans le cas d'une émissivité unitaire.

[20] Le terme est à prendre au sens sens mathématique, et correspond donc à une notion de voisinage.

5.2. Intérêt et principe de la mesure Bi-Spectrale

5.2.1. Expression de la température

Soient, deux mesures de flux effectuées à des longueurs d'ondes λ_i et λ_j pour une température T. D'après l'équation (4.1.1) pour les flux continus (domaine IR) et d'après l'équation (2.4.5) pour les flux discontinus (domaine UV), nous avons :

$$M(\lambda_i,T) = \varepsilon_{\lambda_i,T}.S.C_1\lambda_i^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_i.T}\right) \tag{5.2.1}$$

$$M(\lambda_j,T) = \varepsilon_{\lambda_j,T}.S.C_1\lambda_j^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_j.T}\right) \tag{5.2.2}$$

$$n(\lambda_i,T) = \frac{\varepsilon_{\lambda_i,T}.S.C_1.\lambda_i^{-4}}{hc}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_i.T}\right) \tag{5.2.3}$$

$$n(\lambda_j,T) = \frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}.S.C_1.\lambda_j^{-4}}{hc}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_j.T}\right) \tag{5.2.4}$$

En notant $\alpha\left(\lambda_i,\lambda_j,T\right)$ le rapport de ces flux continus et $\alpha'\left(\lambda_i,\lambda_j,T\right)$ celui des flux discontinus, nous avons :

$$\alpha\left(\lambda_i,\lambda_j,T\right) = \frac{M_{\lambda_i}(T)}{M_{\lambda_j}(T)} = \frac{\varepsilon_{\lambda_i,T}}{\varepsilon_{\lambda_j,T}}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{-5} e^{\frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_i}\right)} \tag{5.2.5}$$

$$\alpha'\left(\lambda_i,\lambda_j,T\right) = \frac{n_{\lambda_i}(T)}{n_{\lambda_j}(T)} = \frac{\varepsilon_{\lambda_i,T}}{\varepsilon_{\lambda_j,T}}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{-4} e^{\frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_i}\right)} \tag{5.2.6}$$

On en déduit :

$$\boxed{T = \frac{C_2\left(1\,/\,\lambda_j - 1\,/\,\lambda_i\right)}{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}}\frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)},\quad \forall\left(\lambda_i,\lambda_j\right)/\,\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}}\frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5} \neq 1} \tag{5.2.7}$$

$$T = \frac{C_2\left(1\,/\,\lambda_j - 1\,/\,\lambda_i\right)}{\ln\left(\frac{n_{\lambda_i}}{n_{\lambda_j}}\frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-4}\right)},\quad \forall\left(\lambda_i,\lambda_j\right)/\,\frac{n_{\lambda_i}}{n_{\lambda_j}}\frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-4} \neq 1 \tag{5.2.8}$$

Ainsi, si l'on suppose[21] que $\varepsilon_{\lambda_i,T} = \varepsilon_{\lambda_j,T}$, il est alors possible de déterminer la température T à partir (5.2.7) ou (5.2.8).

- ***Remarques***

En appellant T_{ij} la température calculée à partir de (5.2.7) ou (5.2.8) à l'aide de flux mesurés aux longueurs d'ondes λ_i et λ_j, une première extension « classique » de la « Méthode Bi-Spectrale » consiste à déterminer la température T comme étant la moyenne des T_{ij}. Une illustration des résultats obtenus par cette méthode est donnée en section 5.3.3 p.42, montrant par la même occasion l'intérêt d'avoir un grand rapport de flux.

Enfin, une extension de la « Méthode Bi-Spectrale » pour la prise en compte de la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité) sera proposée dans la section 6 consacrée aux Méthodes Multi-Spectrales.

5.2.2. Détermination des longueurs d'ondes à l'aide de la fonction de Lambert

Rappelons que l'idée est d'avoir λ_i et λ_j les plus proches possibles afin de pouvoir s'approcher au mieux de : $\varepsilon_{\lambda_i,T} \approx \varepsilon_{\lambda_j,T}$.

Remarquons que si λ_i et λ_j sont suffisamment proches l'un de l'autre afin d'avoir $\left(\lambda_j/\lambda_i\right)^{-5} \approx 1$ (resp. $\left(\lambda_j/\lambda_i\right)^{-4} \approx 1$) et $\varepsilon_{\lambda_j,T}/\varepsilon_{\lambda_i,T} \approx 1$, alors dans ce cas, nous devons éviter d'avoir $M_{\lambda_i}/M_{\lambda_j} \approx 1$ (resp. $n_{\lambda_i}/n_{\lambda_j} \approx 1$), afin de pouvoir remonter à la température. Plus nous travaillerons à courtes longueurs d'ondes plus nous devrons prendre garde à avoir un rapport de flux éloigné de 1 afin d'éviter que le dénominateur de (5.2.7) ne s'annule.

Afin de nous faciliter la tâche dans cette démarche (choisir deux longueurs d'ondes les plus proches possible tout en évitant d'avoir un rapport de flux proche de 1), nous allons utiliser la fonction de Lambert [27, 28, 29, 30, 31, 32]. Pour cela, nous allons procéder comme suit :

[21] En l'absence de connaissance sur l'émissivité, c'est une hypothèse classique sur laquelle repose les mesures Bi-Spectrales.

- ***Pour les flux continus (domaine IR) :***

En posant : $\xi = \frac{\varepsilon_{\lambda_i,T}}{\varepsilon_{\lambda_j,T}}$, $x = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, $x^* = -\frac{C_2}{5\lambda_i T}x$ et $\gamma(\lambda_i) = -\frac{C_2}{5\lambda_i T}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{-1/5} e^{\frac{-C_2}{5\lambda_i T}}$, l'équation (5.2.5) devient successivement :

$$x^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda_i T}(1-x)} = \frac{\alpha}{\xi} \tag{5.2.9}$$

$$\Leftrightarrow x * e^{x^*} = -\frac{C_2}{5\lambda_i T}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{-1/5} e^{\frac{-C_2}{5\lambda_i T}} \tag{5.2.10}$$

$$x * e^{x^*} = \gamma(\lambda_i) \tag{5.2.11}$$

Il est possible de résoudre l'équation (5.2.11) à l'aide de la fonction de Lambert notée W. On a donc :

$$W\left(x * e^{x^*}\right) = x^* \tag{5.2.12}$$

On en déduit :

$$x = -\frac{5\lambda_i T}{C_2} W\left(-\frac{C_2}{5\lambda_i T}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{-1/5} e^{\frac{-C_2}{5\lambda_i T}}\right) \tag{5.2.13}$$

- ***Pour les flux discontinus (domaine UV) :***

En posant $x'^* = -\frac{C_2}{4\lambda_i T}x$ et $\gamma'(\lambda_i) = -\frac{C_2}{4\lambda_i T}\left(\frac{\alpha'}{\xi}\right)^{-1/4} e^{\frac{-C_2}{4\lambda_i T}}$, les résultats sont analogues aux précédents et nous avons :

$$x'^* e^{x'^*} = -\frac{C_2}{4\lambda_i T}\left(\frac{\alpha'}{\xi}\right)^{-1/4} e^{-\frac{C_2}{4\lambda_i T}} \tag{5.2.14}$$

Et on en déduit :

$$x = -\frac{4\lambda_i T}{C_2} W\left(-\frac{C_2}{4\lambda_i T}\left(\frac{\alpha'}{\xi}\right)^{-1/4} e^{\frac{-C_2}{4\lambda_i T}}\right) \tag{5.2.15}$$

La fonction de Lambert est une fonction multiforme à valeurs complexes. Néanmoins, il existe sur l'intervalle $\left[-e^{-1}\ ;\ 0\right]$ deux solutions réelles, puis une seule solution réelle sur $\left[0\ ;+\infty\right]$. Une représentation graphique de ces deux branches de la fonction de Lambert est donnée ci-dessous :

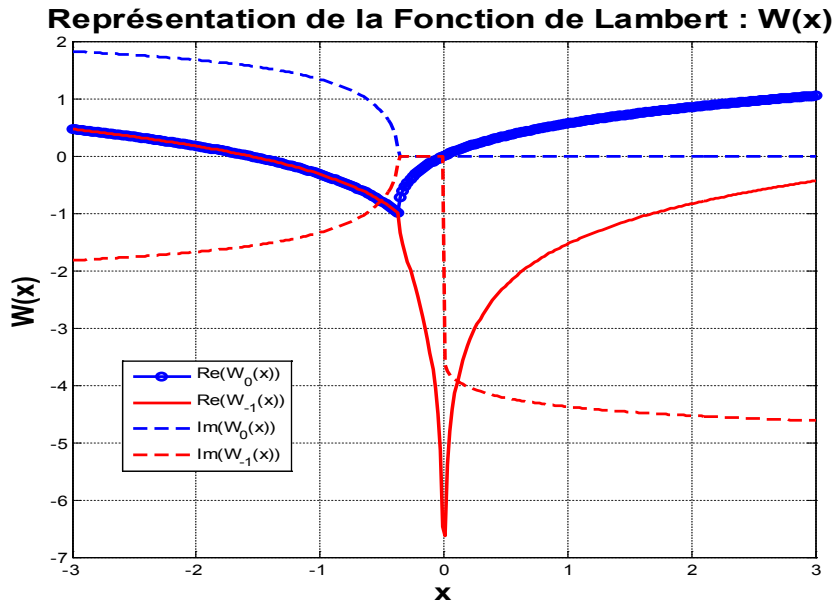


Figure 5.1 : Représentation Graphique des deux branches réelles de la fonction de Lambert

A partir de l'équation (5.2.13) (resp.(5.2.15)) nous voyons que nous pouvons tracer le rapport des longueurs d'ondes $x = \lambda_i/\lambda_j$ en fonction du rapport des flux $\alpha = M_{\lambda_i}/M_{\lambda_j}$ (resp. $\alpha' = n_{\lambda_i}/n_{\lambda_j}$). Donc en se fixant une longueur d'onde initiale λ_i et un rapport des flux α (resp. α'), nous pourrons trouver la deuxième longueur d'onde λ_j à laquelle il faut faire la mesure à partir de la valeur de x.

5.3. Erreur sur la mesure de température

5.3.1. Expression générale

En différentiant respectivement les équations (5.2.5) et (5.2.6) et en considérant les termes différentiels comme des erreurs, nous avons respectivement :

$$\frac{e_T}{T} = \frac{\left(\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}} - \frac{e_{M_{\lambda_j}}}{M_{\lambda_j}} - \frac{e_{\varepsilon_{\lambda_i}}}{\varepsilon_{\lambda_i}} + \frac{e_{\varepsilon_{\lambda_j}}}{\varepsilon_{\lambda_j}}\right) + \left(\frac{5}{\lambda_i} - \frac{C_2}{T\lambda_i^2}\right)e_{\lambda_i} - \left(\frac{5}{\lambda_j} - \frac{C_2}{T\lambda_j^2}\right)e_{\lambda_i}}{\frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right)} \tag{5.3.1}$$

$$\frac{e_T}{T} = \frac{\left(\frac{e_{n^r_{\lambda_i}}}{n^r_{\lambda_i}} - \frac{e_{n^r_{\lambda_j}}}{n^r_{\lambda_j}} - \frac{e_{\varepsilon_{\lambda_i}}}{\varepsilon_{\lambda_i}} + \frac{e_{\varepsilon_{\lambda_j}}}{\varepsilon_{\lambda_j}}\right) + \left(\frac{4}{\lambda_i} - \frac{C_2}{T\lambda_i^2}\right)e_{\lambda_i} - \left(\frac{4}{\lambda_j} - \frac{C_2}{T\lambda_j^2}\right)e_{\lambda_i}}{\frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right)} \tag{5.3.2}$$

5.3.2. Expression pour une variation linéaire de l'émissivité

En supposant que l'on choisisse λ_i et λ_j telles que $\varepsilon_{\lambda_i,T} \approx \varepsilon_{\lambda_j,T}$, dans ce cas, nous pouvons faire un développement de Taylor de $\varepsilon_{\lambda_i,T}$ autour de $\varepsilon_{\lambda_j,T}$ et nous avons :

$$\varepsilon_{\lambda_i} = \varepsilon_{\lambda_j} + \left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i} \left(\lambda_i - \lambda_j\right) + \left.\frac{d^2\varepsilon}{d\lambda^2}\right|_{\lambda_i} \frac{\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2}{2} + O\left(\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^3\right) \tag{5.3.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_{\lambda_i}}{\varepsilon_{\lambda_j}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_{\lambda_j}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i} \left(\lambda_i - \lambda_j\right) + \frac{1}{\varepsilon_{\lambda_j}}\left.\frac{d^2\varepsilon}{d\lambda^2}\right|_{\lambda_i} \frac{\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2}{2} + O\left(\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^3\right) \tag{5.3.4}$$

En utilisant les équations (5.2.5) (resp. (5.2.6)) et en y remplaçant le rapport $\frac{\varepsilon_{\lambda_i}}{\varepsilon_{\lambda_j}}$ par son développement de Taylor à l'ordre 1, puis en différentiant toute l'équation, nous avons à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\frac{d\left(M_{\lambda_i} \,/\, M_{\lambda_j}\right)}{M_{\lambda_i} \,/\, M_{\lambda_j}} = \frac{1}{\varepsilon_{\lambda_i}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i} \left(d\lambda_i - d\lambda_j\right) - 5\frac{d\left(\lambda_i \,/\, \lambda_j\right)}{\lambda_i \,/\, \lambda_j} \ldots \\ + \frac{C_2}{T}\left[\frac{dT}{T}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right) + \left(\frac{d\lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{d\lambda_j}{\lambda_j^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\left(n_{\lambda_i} \,/\, n_{\lambda_j}\right)}{n_{\lambda_i} \,/\, n_{\lambda_j}} = \frac{1}{\varepsilon_{\lambda_i}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i} \left(d\lambda_i - d\lambda_j\right) - 4\frac{d\left(\lambda_i \,/\, \lambda_j\right)}{\lambda_i \,/\, \lambda_j} \ldots \\ + \frac{C_2}{T}\left[\frac{dT}{T}\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right) + \left(\frac{d\lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{d\lambda_j}{\lambda_j^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Nous en déduisons l'erreur relative sur la température en considérant les termes différentiels comme des erreurs. Pour les flux continus nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{e_T}{T} = \left[\left|\frac{e_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right|\left|5 - \frac{C_2}{\lambda_i T} - \frac{\lambda_i}{\varepsilon_{\lambda_i}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}\right| + \left|\frac{e_{\lambda_j}}{\lambda_j}\right|\left|5 - \frac{C_2}{\lambda_j T} - \frac{\lambda_j}{\varepsilon_{\lambda_j}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}\right| \ldots \\ + \left|\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}} + \frac{e_{M_{\lambda_j}}}{M_{\lambda_j}}\right| \Bigg/ \left|\frac{C_2}{T}\right|\left|\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right|\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Pour les flux discontinus nous avons :

$$\frac{e_T}{T} = \left[\left|\frac{e_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right|\left|4 - \frac{C_2}{\lambda_i T} - \frac{\lambda_i}{\varepsilon_{\lambda_i}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}\right| + \left|\frac{e_{\lambda_j}}{\lambda_j}\right|\left|4 - \frac{C_2}{\lambda_j T} - \frac{\lambda_j}{\varepsilon_{\lambda_j}}\left.\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}\right| \ldots$$

$$+\frac{e_{n_{\lambda_i}}}{n_{\lambda_i}}+\frac{e_{n_{\lambda_j}}}{n_{\lambda_j}}\Bigg]\Bigg/\frac{C_2}{T}\left|\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_j}\right| \tag{5.3.8}$$

5.3.3. Intérêt d'un grand rapport de flux

En remarquant que dans les équations (5.3.1) ou (5.3.7) il apparait le terme :

$$\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}}\pm\frac{e_{M_{\lambda_j}}}{M_{\lambda_j}} \tag{5.3.9}$$

Si $M_{\lambda_j} >> M_{\lambda_i}$ et $e_{M_{\lambda_i}} \sim e_{M_{\lambda_j}}$, on a :

$$\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}}\pm\frac{e_{M_{\lambda_j}}}{M_{\lambda_j}}=\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}}\left(1\pm\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}}\frac{e_{M_{\lambda_j}}}{e_{M_{\lambda_i}}}\right)=\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}}+O\left(\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}}\right) \tag{5.3.10}$$

On a donc :

$$\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}}\pm\frac{e_{M_{\lambda_j}}}{M_{\lambda_j}}\simeq\frac{e_{M_{\lambda_i}}}{M_{\lambda_i}} \tag{5.3.11}$$

On en déduit que plus on aura un grand rapport de flux, plus on pourra négliger un terme d'erreur par rapport à l'autre et par conséquent on diminuera l'erreur commise sur la mesure de température.

- ***Illustration de l'intérêt d'un grand rapport de flux*** **:**

Afin d'illustrer l'influence (positive) d'un grand rapport de flux sur l'estimation de la température, nous avons représenté dans le Tableau 5.1 les valeurs moyennes de température estimées par méthode de Monte-Carlo pour la méthode bi-spectrale appliquée à différents couples de longueurs d'ondes, pour différentes variations d'émissivité, et pour une température nominale de 873K.

Les variations (et valeurs) d'émissivité sont les mêmes que celles présentées dans la section 6.5, p.104 (cf. Figure 6.10). Les estimations de température sont réalisées à l'aide de la relation (5.2.7) dans laquelle nous avons supposé $\varepsilon_{\lambda_j,T} \,/\, \varepsilon_{\lambda_i,T} = 1$ pour les différents couples de longueurs d'ondes.

Les longueurs d'ondes choisies pour les simulations correspondent à celles utilisées expérimentalement et permettant de rester sur la partir croissante de la courbe de Planck. Ce choix sera justifié dans la section 5.6. Ainsi, les longueurs d'ondes choisies sont : $\lambda\left[\mu m\right]=\left\{2;2,35;2,85;4\right\}$. En numérotant ces différents filtres de 1 à 4, on peut définir différents rapports pour le calcul de la température par la relation (5.2.7). On propose de comparer les résultats obtenus en utilisant respectivement les rapports

$\left(M_{\lambda_i} / M_{\lambda_{i+1}}\right)_{i\in[\![1;3]\!]}$ d'une part, et les rapports $\left(M_{\lambda_1} / M_{\lambda_i}\right)_{i\in[\![2;4]\!]}$ d'autre part. Notons que compte tenu du fait que l'on soit sur la partie croissante de Planck, on aura toujours : $M_{\lambda_i} / M_{\lambda_{i+1}} \geq M_{\lambda_1} / M_{\lambda_i}$.

Dans le Tableau 5.1, les valeurs de la température estimée correspondent à la moyenne des trois températures bi-spectrales obtenues à partir des rapports proposés.

Moyenne des températures bi-spectrales : λ [m] = {2e-6 ; 2.35e-6 ; 2.85e-6 ; 4e-6} Texp = 873 K ; Loi Emittance : Planck ; Bruit: Non				
Emissivité	Modèle	T [K]	Erreur [K]	Erreur Relative [%]
Constante	Tm (i/i+1)	870,03	2,97	0,34
	Tm (1/i)	871,38	1,62	0,19
Linéaire	Tm (i/i+1)	946,10	73,10	8,37
	Tm (1/i)	927,94	54,94	6,29
Ordre 2	Tm (i/i+1)	944,88	71,88	8,23
	Tm (1/i)	912,56	39,56	4,53
Drude	Tm (i/i+1)	947,61	74,61	8,55
	Tm (1/i)	940,87	67,87	7,77

Tableau 5.1 : Influence du choix des rapports de flux sur l'estimation de la température, pour différentes variations d'émissivités.

Les erreurs de température obtenues (2,97K et 1,62K) dans le cas d'une simulation d'émissivité constante sont principalement dues à l'approximation de Wien utilisée pour l'obtention de l'expression (5.2.7) de la méthode bi-spectrale, alors que le flux simulé est celui de la loi de Planck. Il s'agit donc d'un biais de modèle systématique.

Les différentes estimations de température (moyenne) obtenues pour les différentes variations d'émissivité, montrent clairement que l'utilisation des rapports $\left(M_{\lambda_1} / M_{\lambda_i}\right)_{i\in[\![2;4]\!]}$ donnent toujours de meilleurs résultats que ceux obtenus à l'aide des rapports $\left(M_{\lambda_i} / M_{\lambda_{i+1}}\right)_{i\in[\![1;3]\!]}$. Cela illustre donc clairement l'intérêt d'avoir un grand rapport de flux pour l'estimation de la température par méthode bi-spectrale.

Il faut néanmoins prendre garde à ne pas extrapoler ce constat au fait qu'il soit préférable expérimentalement de prendre les rapports $\left(M_{\lambda_1} / M_{\lambda_i}\right)_{i\in[\![2;4]\!]}$. En effet, une condition forte est d'avoir $\varepsilon_{\lambda_j,T} / \varepsilon_{\lambda_i,T} = 1$ pour tout couple (i,j) choisi. Or, cette approximation est généralement plus difficile à respecter en choisissant les rapports $\left(M_{\lambda_1} / M_{\lambda_i}\right)_{i\in[\![2;4]\!]}$ que ceux en $\left(M_{\lambda_i} / M_{\lambda_{i+1}}\right)_{i\in[\![1;3]\!]}$, d'autant plus que nous montrerons en section 5.5 qu'il est préférable de ne pas choisir des longueurs trop proches afin de ne pas amplifier les différentes erreurs.

5.4. Influence d'un bruit additif au flux et pas à la température : erreur systématique

A l'aide du Tableau 5.1, nous avons montré d'une part, l'intérêt d'un grand rapport de flux pour la mesure de température bi-spectrale[22], et d'autre part, l'incidence néfaste sur l'estimation de la température qu'a l'approximation de Wien utilisée pour l'obtention du modèle bi-spectral (5.2.7).

Une autre conséquence déplaisante de la méthode bi-spectrale est l'apparition d'un biais systématique en présence de bruit sur le flux (qui correspond généralement à ce que l'on mesure expérimentalement).

En effet, en supposant que sur chaque flux M_{λ_i} on a un bruit additif gaussien δM_{λ_i} indépendant de variance constante, alors l'expression (5.2.7) s'écrit en notant $\tilde{T}$ la valeur estimée de la température due au bruit :

$$\tilde{T} = \frac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i} + \delta M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j} + \delta M_{\lambda_j}} \frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)} \tag{5.4.1}$$

En posant, $x_k = \left(\frac{\delta M_{\lambda_k}}{M_{\lambda_k}}\right)_{k\in\{i,j\}}$, $N_{ij} = C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)$, et $Q_{ij} = \frac{\varepsilon_{\lambda_j,T}}{\varepsilon_{\lambda_i,T}}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}$, l'expression (5.4.1) prend la forme :

$$\tilde{T} = \frac{N_{ij}}{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i} + \delta M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j} + \delta M_{\lambda_j}} Q_{ij}\right)} = \frac{N_{ij}}{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}} \frac{(1 + x_i)}{(1 + x_j)} Q_{ij}\right)} \tag{5.4.2}$$

En supposant que le bruit sur le flux est petit vis-à-vis du flux, tel que :

$$x_k = \left(\frac{\delta M_{\lambda_k}}{M_{\lambda_k}}\right)_{k\in\{i,j\}} \ll 1 \tag{5.4.3}$$

Et en utilisant le développement en série entière[23] :

$$\frac{1}{1 + x_j} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x_j)^k, \qquad \forall x_j \in]-1;1[\tag{5.4.4}$$

La relation (5.4.2), devient :

---

[22] Pour laquelle nous rappelons que l'approximation de Wien sera toujours utilisée.

[23] Le rayon de convergence de la série entière (5.4.4) étant $R = 1$, la condition $\left(x_k\right)_{k\in\{i,j\}} \ll 1$ sur le bruit, généralement vérifiée expérimentalement, permet d'assurer la convergence de la série.

$$\tilde{T} = \frac{N_{ij}}{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}} Q_{ij}\left(1+x_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x_j\right)^k\right)} = \frac{N_{ij}}{\underbrace{\ln\left(\frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}} Q_{ij}\right)}_{R_{ij}} + \ln\left(\left(1+x_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x_j\right)^k\right)} \tag{5.4.5}$$

En effectuant les changements de variables, $R_{ij} = \frac{M_{\lambda_i}}{M_{\lambda_j}} Q_{ij}$, $T_{ij} = \frac{N_{ij}}{\ln\left(R_{ij}\right)}$, et $X_{ij} = \frac{\ln\left(\left(1+x_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x_j\right)^k\right)}{\ln\left(R_{ij}\right)}$, l'expression (5.4.5) s'écrit de façon plus compacte, sous la forme :

$$\tilde{T} = \frac{T_{ij}}{\underbrace{1 + \frac{\ln\left(\left(1+x_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x_j\right)^k\right)}{\ln\left(R_{ij}\right)}}_{X_{ij}}} = \frac{T_{ij}}{1+X_{ij}} \tag{5.4.6}$$

Et dans le cas où le bruit sur le flux est toujours suffisamment faible (5.4.3), tel que l'on ait[24] $\left|X_{ij}\right| < 1$ pour pouvoir utiliser (5.4.4) dans la relation (5.4.6), alors on a :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{T_{ij}}{1+X_{ij}} = T_{ij}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-X_{ij}\right)^m \\ \Leftrightarrow \tilde{T} &= T_{ij} + T_{ij}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-X_{ij}\right)^m \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

En substituant l'expression de X_{ij} dans (5.4.7), on obtient :

$$\tilde{T} = \underbrace{T_{ij}}_{\substack{\text{Température} \\ \text{Bi-Spectrale}}} + \underbrace{T_{ij}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\ln\left(\left(1+x_i\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x_j\right)^k\right)}{\ln\left(R_{ij}\right)}\right)^m}_{\substack{\text{Terme (d'espérance non nulle) dû au Bruit} \\ \Rightarrow \text{Biais systématique}}} \tag{5.4.8}$$

On voit ainsi, que la température estimée à partir des flux bruités, s'exprime comme la contribution d'un terme correspondant à la température « vraie » bi-spectrale, et d'un terme d'espérance non nulle[25] dû au bruit sur le flux.

---

[24] C'est en particulier pour la validité du développement en série de $\frac{1}{1+X_{ij}}$, que l'on voit l'importance d'un bruit « suffisamment négligeable » sur le flux, pour avoir $\left|X_{ij}\right| < 1$.

[25] Le second terme de la somme (5.4.8) fait apparaitre des termes d'ordre supérieur à 1.

Cela a pour conséquence d'induire un biais systématique sur l'estimation de la température.

De façon plus générale, le fait de construire un estimateur dont le bruit n'est pas additif à la grandeur que l'on veut estimer, aura généralement pour conséquence d'induire un biais systématique en présence de bruit sur la mesure.

5.5. Critère sur l'écart minimum $\Delta\lambda_{min}$ entre deux longueurs d'ondes

Remarquons que dans les équations (5.3.1) à (5.3.8) il apparaît à chaque fois au dénominateur le même terme $\frac{C_2}{T}\left|\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_j}\right|$, qui selon sa valeur peut amplifier ou atténuer la valeur du terme de l'erreur sur la température relative. Examinons donc à quelle condition ce terme atténuera l'erreur sur la température.

L'erreur sera atténuée si :

$$\frac{C_2}{T}\left|\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_j}\right|>1 \tag{5.5.1}$$

En posant $\Delta\lambda=\lambda_j-\lambda_i>0$, la condition (5.5.1) s'écrit alors :

$$\Delta\lambda>\frac{T}{C_2}\left|\lambda_i\lambda_j\right|=\frac{T}{C_2}\lambda_i\lambda_j \tag{5.5.2}$$

Afin d'obtenir une relation exploitable, il est nécessaire de remanier l'expression (5.5.2) en exprimant le second membre de l'inéquation uniquement à l'aide d'une longueur d'onde (et non du produit de deux longueurs d'ondes).

En conservant la convention $\lambda_j>\lambda_i>0$, deux choix s'offrent à nous pour modifier (5.5.2) : choisir les longueurs d'ondes par ordre décroissant en posant $\lambda_i=\lambda_j-\Delta\lambda$, ou choisir les longueurs d'ondes par ordre croissant en posant $\lambda_j=\lambda_i+\Delta\lambda$. Ce choix aura pour conséquence de fournir ou non le plus grand minorant. Afin de le déterminer, les deux cas sont traités.

- Si $\lambda_i=\lambda_j-\Delta\lambda$

L'inéquation (5.5.2) devient :

$$\Delta\lambda>\frac{T}{C_2}\left(\lambda_j-\Delta\lambda\right)\lambda_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta\lambda>\frac{\frac{T\lambda_j^2}{C_2}}{1+\frac{T\lambda_j}{C_2}} \tag{5.5.3}$$

Si l'on fait la même hypothèse que celle faite pour l'approximation de Wien ($\lambda_j T/C_2 << 1$), alors dans ce cas $1+\lambda_j T/C_2 = 1+O\left(\lambda_j T/C_2\right)$, et (5.5.3) devient :

$$\Delta\lambda > \frac{T\lambda_j^2}{C_2} \tag{5.5.4}$$

- Si $\lambda_j = \lambda_i + \Delta\lambda$

Dans ce cas, (5.5.2) devient :

$$\Delta\lambda > \frac{T}{C_2}\left(\lambda_i + \Delta\lambda\right)\lambda_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta\lambda\left(1 - \frac{\lambda_i T}{C_2}\right) > \frac{T\lambda_i^2}{C_2} \tag{5.5.5}$$

En se plaçant comme précédemment dans le cadre de l'approximation de Wien, on a :

$$\Delta\lambda > \frac{T\lambda_i^2}{C_2} \tag{5.5.6}$$

- ***Détermination du meilleur critère*** **:**

En posant, $\Delta\lambda_j > T\lambda_j^2/C_2$ et $\Delta\lambda_i > T\lambda_i^2/C_2$, et en conservant la convention $\lambda_j > \lambda_i > 0$, on a : $\lambda_j^2 > \lambda_i^2 \Leftrightarrow \Delta\lambda_j > \Delta\lambda_i$. Or, on doit avoir $\Delta\lambda > \Delta\lambda_j$ et $\Delta\lambda > \Delta\lambda_i$.

Par conséquent, on en déduit que le plus grand minorant est $\Delta\lambda_j$. Le meilleur critère sur l'écart minimum de longueur d'onde permettant d'éviter tout recouvrement, est par conséquent :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\lambda > \dfrac{T\lambda_j^2}{C_2} \triangleq \Delta\lambda_{\min} \\ \Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_i > 0 \end{cases}} \tag{5.5.7}$$

Les relations (5.5.7) imposent donc de choisir les différentes longueurs d'ondes λ_i par ordre décroissant et définies par :

$$\boxed{\lambda_i < \lambda_j - \frac{T\lambda_j^2}{C_2}} \tag{5.5.8}$$

Ainsi, d'après (5.5.8) plus on travaillera à courte longueur d'onde, plus les longueurs d'ondes λ_i et λ_j pourront être proches l'une de l'autre tout en permettant d'éviter d'amplifier l'erreur sur la mesure de température.

La mise en œuvre pratique du choix des filtres s'appuyant sur le critère[26] (5.5.7) est décrite dans la section suivante.

[26] Initialement, lors de la détermination des filtres expérimentaux, nous ne disposions pas encore du critère de longueur d'onde optimale en Mono-Spectrale et Bi-Spectrale. Ainsi, la méthode de sélection proposée s'appuiera uniquement sur les autres critères présentés précédemment.

5.6. Choix des filtres à l'aide du critère $\Delta\lambda_{min}$

Dans cette partie, nous allons montrer comment ont été choisis nos quatre filtres expérimentaux afin d'effectuer nos mesures de températures, tout en respectant les différents critères précédents, et en particulier le critère $\Delta\lambda$ défini par la relation (5.5.7) . Pour nos mesures, nous devons choisir trois[27] longueurs d'ondes, dont la première est certainement la plus délicate car elle est issue de nombreuses contraintes et compromis.

Afin de simplifier le choix des filtres, il est préférable de choisir tous les filtres dans une zone où la fonction de Planck est monotone.

Nous nous fixerons comme contrainte de toujours choisir nos filtres de telle sorte à ce qu'ils se situent dans la partie croissante de la courbe de Planck, donc à gauche du maximum de la courbe. Il y a deux raisons principales à cela : La première est que dans cette zone la sensibilité réduite de l'émittance à la température est meilleure, la seconde est que c'est également dans cette zone que l'approximation de Wien, ainsi que l'approximation numérique (développement en série) de la fonction de Lambert sont les plus précises[28].

5.6.1. Choix du 1er filtre

Tout d'abord, il convient de connaître au préalable autour de quelle température va évoluer celle de notre objet, ensuite à partir de la loi de déplacement de Wien (2.2.1) nous calculons le $\lambda_{\max}$ à ne pas dépasser, celui-ci devant être inférieur à la longueur d'onde $\lambda_{d\max}$ maximale de la bande passante du détecteur.

Notons, qu'il est préférable de choisir comme premier filtre, celui qui aura la plus grande longueur d'onde, car cela simplifiera[29] le choix des filtres suivants qui seront déterminés à partir du critère (5.5.7) d'écart minimum entre deux filtres (on évitera ainsi les problèmes de recouvrement).

Donc, en fonction des possibilités techniques (disponibilité des filtres fournisseurs, bande passante de la chaine de mesure,…), nous choisirons le premier filtre de telle sorte qu'il ait la plus courte longueur d'onde possible, tout en tâchant de s'assurer qu'il reste au moins deux autres filtres possibles de longueur d'onde inférieure à celui-ci.

Remarque : Il a été montré qu'il est préférable de travailler à courtes longueurs d'ondes, néanmoins, en fonction de la température à mesurer, un compromis doit être fait. En effet, plus la température sera basse, plus les longueurs d'ondes devront être grandes afin d'obtenir un signal exploitable.

---

[27] Le quatrième filtre existant déjà au laboratoire.

[28] Erreur inférieure à 5% sous Matlab, Maple et Mathematica, pour la fonction de Lambert.

[29] Cette notion de « simplification » est due au fait que chronologiquement, les résultats établis dans la section 5.7 sont postérieurs à la méthodologie mise en place pour la sélection des filtres expérimentaux.

Choix de la 1ère longueur d'onde : Pour effectuer des mesures autour de 723 K dans le domaine infrarouge, un filtre de longueur d'onde moyenne maximale $\lambda_1 = 4\,\mu m$ a été choisi, car c'est à cette longueur que l'on a le maximum de la courbe de Planck.

5.6.2. Choix des deux autres filtres

Le 2ème filtre devra respecter le critère d'écart minimum calculé au 1er filtre, puis le 3ième devra respecter le critère d'écart minimum calculé à partir du 2ème filtre choisi. On remarque que l'écart entre le 2ème et le 3ème filtre pourra donc être plus faible que celui entre le premier et le deuxième. Rappelons que nous voulons choisir les filtres les plus proches possibles les uns des autres afin de s'approcher au mieux de $\varepsilon_{\lambda_i} \approx \varepsilon_{\lambda_j}$.

Afin de choisir les différents filtres, un programme Matlab a été réalisé.

Les résultats obtenus à l'aide du programme avec comme longueur d'onde du 1er filtre $\lambda_1 = 4\,\mu m$, sont illustrés par les figures ci-dessous :

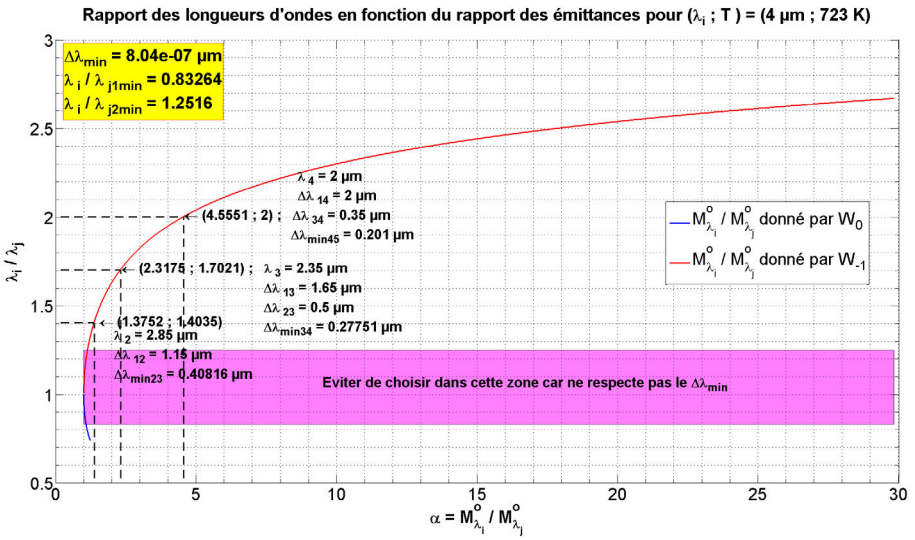


Figure 5.2 : Utilisation de la fonction de Lambert

La Figure 5.2 représente le tracé des deux branches purement réelles de la fonction de Lambert utilisée dans l'équation (5.2.13). A partir de ce graphe, nous pouvons choisir la longueur d'onde du second filtre, soit à partir du rapport des longueurs d'ondes, soit à partir du rapport des flux. En pratique, nous essayons d'avoir un rapport de flux proche de 2, d'une part pour avoir un signal exploitable, d'autre part pour atténuer l'effet du bruit et éviter de changer de calibre sur les appareils de mesure. Remarquons que la zone ne respectant pas le critère d'écart minimum entre deux longueurs d'ondes est représentée sur le graphe afin de simplifier le choix « visuel » des filtres.

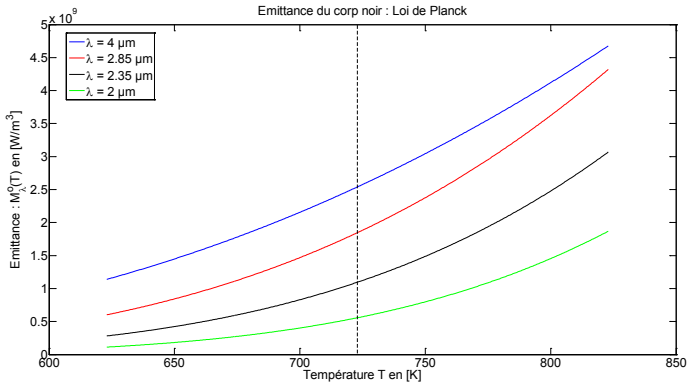


Figure 5.3 : Evolution de l'émittance monochromatique du corps noir en fonction de la température

La Figure 5.3 permet de visualiser l'évolution de l'émittance monochromatique du corps noir en fonction de la température pour chacun des filtres choisis. Il donne une indication sur la sensibilité de l'émittance à la température, ainsi qu'une information sur l'évolution de l'écart de flux entre chacun des filtres. En fonction du rapport de flux que nous désirons, ce graphe peut nous permettre de savoir pour quelle température la condition sera vérifiée (approximativement).

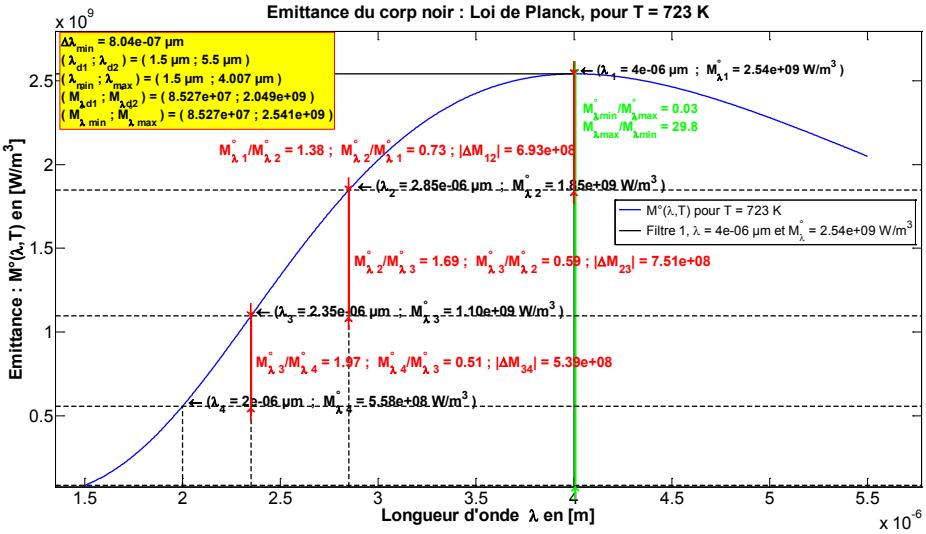


Figure 5.4 : Représentation du choix des filtres sur la courbe de Planck, pour T=723K

La Figure 5.4 permet la visualisation du choix des différents filtres et indique la valeur du rapport des flux ainsi que l'écart de flux entre deux filtres consécutifs. Le but de ce graphique est de vérifier la cohérence et la validité du choix des filtres. En effet, compte tenu des erreurs d'approximations numériques (pouvant dépasser 5%) de la fonction de Lambert, il se peut que celle-ci n'indique aucune solution possible alors qu'il en existe bien une. Pour finir, nous allons présenter les possibilités qu'offre le programme au travers d'une boîte de dialogue. Le programme permet de tester de multiples solutions

de filtres et de les visualiser. N'ayant pas[30] de méthode absolue permettant un choix déterministe des filtres, les fonctions de ce programme permettent un gain de temps considérable et en un certain sens une optimisation rapide du choix des filtres.

La Figure 5.6 représente la boite de dialogue du programme et permet :

- d'entrer directement la longueur d'onde du filtre. Le programme en propose une par défaut qui respecte le critère d'écart minimum tout en évitant de prendre une solution qui dépasserait $\lambda_{\max}$.
- d'entrer la valeur du flux (émittance) que l'on désire avoir (utile si l'on se sert du tracé de la courbe de Planck).
- d'entrer la valeur du rapport des longueurs d'ondes ou d'émittances (utile lorsqu'on se sert de la courbe de Lambert).
- de trouver les longueurs d'ondes permettant d'avoir un rapport d'écart de flux égaux par rapport à la 1ère longueur d'onde (utile si l'on veut par exemple un écart de flux égal par rapport à la longueur d'onde du filtre central).

Pour finir, il permet de recommencer le choix des filtres pour un nouveau filtre.

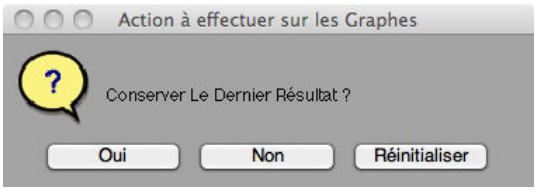


Figure 5.5 : Boite de dialogue de validation du choix des filtres

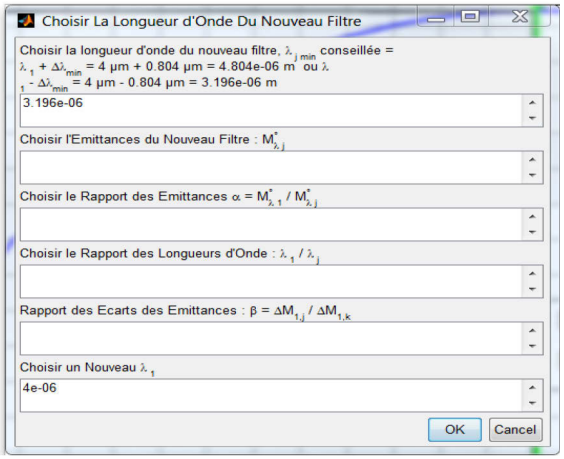


Figure 5.6 : Boite de dialogue permettant la sélection du filtre suivant différents critères

- ***Remarques***

Il sera montré dans la section concernant la détermination des longueurs optimales en multi-spectrale, au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température, que les filtres choisis ne sont pas optimaux au sens global. Cependant, l'optimisation globale donnant des valeurs de filtres n'appartenant pas à la bande passante de la camera, la méthode proposée a l'avantage de pouvoir tenir compte de cette contrainte, ainsi que des contraintes expérimentales (disponibilité réelle des filtres,…). De plus, on verra que l'écart-type obtenu par cette méthode est meilleur que celui que l'on pourrait obtenir

[30] Au moment de la réalisation de ce programme qui a servi à la détermination des filtres expérimentaux dont nous nous servirons dans les parties expérimentales de ce manuscrit.

par une méthode de pseudo-optimisation séquentielle qui sera également présentée, et qui a pour avantage de visualiser à chaque étape l'influence des nouveaux filtres sur l'évolution de l'écart-type de la température.

L'obligation de choisir les filtres de façon décroissante peut être contraignant car nécessite de procéder par étape itérative afin de finir sur la plus courte longueur d'onde possible correspondant à nos contraintes. Une méthode permettant de déterminer les longueurs d'ondes par ordre croissant sera présentée dans la section suivante.

A partir des relations (5.5.7) et (5.5.8), deux autres constats peuvent également être faits. D'une part, on peut démontrer qu'il existe une longueur d'onde maximale $\lambda_{\max}^{c}$ à partir de laquelle il n'est plus possible de respecter le critère (5.5.7), et d'autre part, que ce critère se linéarise à courtes longueurs d'ondes. La démonstration de ces deux points fait l'objet de la section suivante.

5.7. Conséquences du critère $\Delta\lambda_{\min}$ sur le nombre maximum de longueurs d'ondes, et linéarisation du critère à courtes longueurs d'ondes

Remarque preliminaire : Cette section étant particulièrement longue et calculatoire, elle a été reléguée en Annexe A.4 p.295. Ainsi, seuls les résultats essentiels sont présentés ici.

5.7.1. Position du problème

La mesure par méthode multi-spectrale (basée sur la méthode bi-spectrale, ici) impose de respecter de nombreux critères (contraintes) pour que celle-ci soit précise. Parmi ces critères, il y a en a un qui impose que la mesure soit faite à partir d'un écart minimum entre les différentes longueurs d'ondes.

Il a été montré qu'il était possible de déterminer ces longueurs d'ondes par ordre décroissant à l'aide de la relation (5.5.8). Néanmoins, la mesure étant d'autant plus précise lorsqu'elle est faite à courtes longueurs d'ondes[31], il semble préférable expérimentalement de pouvoir les choisir par ordre croissant[32].

Ainsi, l'objectif de cette section est multiple. D'une part, ayant choisi la longueur d'onde minimale, calculer les prochaines longueurs d'ondes auxquelles on peut effectuer la mesure sachant que celles-ci devront respecter le critère d'écart minimum (ou critère de séparation). D'autre part, chercher à déterminer la longueur d'onde maximale $\lambda_{\max}$

[31] En l'absence de considérations du rapport signal sur bruit.

[32] En effet, en utilisant la relation (5.5.8) il est difficile de prévoir à l'avance pour un nombre de longueurs d'ondes fixés, qu'elle sera la valeur de la plus courte longueur d'onde. Or, il se peut que cette longueur d'onde soit hors de la gamme spectrale du détecteur.

à laquelle il est possible d'effectuer nos mesures tout en respectant ce critère. En particulier, on montre qu'en l'absence de contraintes sur la gamme spectrale, il existe une longueur d'onde $\lambda_{\max}$ (ou longueur d'onde limite) à partir de laquelle le critère de séparation ne peu plus être satisfait.

Ainsi, on montre dans l'Annexe A.4 p.295 qu'il est possible de déterminer les longueurs d'ondes par ordre croissant en utilisant les relations :

$$x_{1,2} = \Delta\lambda_{1,2} = \frac{1 - 2\alpha \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{\frac{2\alpha}{\lambda_i}} > 0, \qquad \forall\alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right[\tag{5.7.1}$$

$$x_0 = \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_i\left(1 - 2\alpha\right)}{2\alpha} = \lambda_i, \qquad pour\ \ \alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} = \frac{1}{4} \tag{5.7.2}$$

L'équation (5.7.2) montre que lorsqu'on choisira λ_i tel que $\frac{\lambda_i T}{C_2} = \frac{1}{4}$, alors, il n'y aura plus qu'une solution possible (respectant le critère de séparation) et cette solution vaudra $\Delta\lambda = \lambda_i$.

On en déduit que la dernière longueur d'onde possible (respectant le critère de séparation), est :

$$\lambda_{\max} = \lambda_{\alpha=1/4} + \Delta\lambda_{\alpha=1/4} = 2\lambda_{\alpha=1/4} = \frac{C_2}{2T} \tag{5.7.3}$$

5.7.2. Linéarisation du critère $\Delta\lambda_{\min}$ à courtes longueurs d'ondes

Rappelons que plus on veut effectuer des mesures à hautes températures, plus on devra choisir des filtres ayant des faibles longueurs d'ondes, d'une part pour profiter pleinement du gain de sensibilité, et d'autre part afin de s'assurer d'avoir un bon rapport signal sur bruit.

On peut montrer (cf. Annexe A.4 p.295) qu'à courtes longueurs d'ondes, le critère $\Delta\lambda$ se linéarise, et il est alors possible de choisir des filtres espacés en progression géométrique.

On montre ainsi qu'à courtes longueurs d'ondes l'écart entre les longueurs d'ondes doit respecter :

$$\begin{cases} \Delta\lambda_{sol}^{lin} = \gamma = \dfrac{\alpha\lambda_i}{1 - 2\alpha} = \dfrac{\Delta\lambda_i}{1 - 2\alpha} = \dfrac{\lambda_i^2 T}{C_2 - 2\lambda_i T} \\ \alpha = \dfrac{\lambda_i T}{C_2} < 1 \end{cases} \tag{5.7.4}$$

- ***Remarque** : Simplification due à l'approximation de Wien*

Notons que la relation (5.7.4) peut encore se simplifier si l'on fait appel à l'approximation de Wien $\frac{\lambda_i T}{C_2} \ll 1$.

En effet, dans ce cas on a :

$$\Delta\lambda_{sol}^{lin} = \frac{\Delta\lambda_i}{1-2\alpha} = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2\left(1-2\frac{\lambda_i T}{C_2}\right)} = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2} + \mathrm{O}\left(\frac{\lambda_i^3 T^2}{C_2^2}\right) \tag{5.7.5}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda_{sol}^{lin-Wien} \simeq \Delta\lambda_i = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2} \tag{5.7.6}$$

La relation (5.7.6) montre en particulier qu'à courte longueur d'onde, la relation (5.5.6) est applicable en première approximation, ce qui a pour conséquence de permettre de choisir les longueurs d'ondes de façon simple par ordre croissant, sans avoir besoin d'établir les relations (5.7.1) et (5.7.2).

C'est en particulier ce qui a intuitivement été fait par [14].

- ***Application Numérique*** **:**

Supposons que l'on veuille effectuer des mesures de température à 1300K, avec un premier filtre de longueur d'onde $\lambda = 380\,nm$ (pour fixer les idées, on supposera que cela correspond à la limite basse de la bande passante de la chaine de mesure).

Les solutions obtenues par les expressions (5.7.1), (5.7.4), et (5.7.6) sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$
$\frac{1-2\alpha \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha \;/\; \lambda_i}$	14,03	15,13	16,36
$\frac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha}$	14,01	15,10	16,33
$\lambda_i^2 T \;/\; C_2$	13,05	13,96	14,97

Tableau 5.2 : Comparaison des $\Delta\lambda_{\min}$: Relation générale, relation dégénérée pour les courtes longueurs d'ondes, relation dégénérée sous approximation de Wien.

On constate que les résultats obtenus par la relation générale (5.7.1) et la relation dégénérée sous approximation de courtes longueurs d'ondes sont en bonne adéquation.

Les $\Delta\lambda$ obtenu par la relation dégénérée sous approximation de Wien sont un peu moins précis : Il semble y avoir une erreur systématique d'environ $1nm$, par rapport au deux autres modèles.

5.8. Mesure Bi-Spectrale avec linéarisation des fonctions de transfert

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les phénomènes physiques intervenant dans l'émission du flux thermique. Mais dans la réalité expérimentale, nous n'avons pas accès au flux émis par l'objet, mais seulement au flux reçu par le détecteur qui correspond à une fraction du flux émis. Nous devons donc prendre en compte les différentes fonctions de transfert intervenant dans la chaine de mesure.

Dans cette section, nous chercherons à linéariser chacune des fonctions de transfert, à l'exception de celle des filtres que nous chercherons à modéliser soit par un créneau, soit par une gaussienne. Il est également toujours question de choisir λ_i et λ_j aussi proches que possible afin de pouvoir considérer $\varepsilon_{\lambda_i} \approx \varepsilon_{\lambda_j}$.

L'objectif est de montrer comment étendre la méthode bi-spectrale classique à la prise en compte de la fonction de transfert de la chaine de mesure, qui est souvent non parfaitement connue (ou corrigée), par une fonction de transfert moyenne « équivalente ». En particulier, il est possible (et c'est ce que nous ferons dans les sections suivantes) de globaliser sous la forme d'une « fonction de transfert globale moyenne », l'émissivité avec la fonction de transfert de la chaine de mesure, ou plus généralement, toutes les inconnues du problème.

Afin d'alléger la taille des paragraphes, nous n'établirons ici que les résultats pour les flux continus (domaine IR). Pour avoir leurs analogues en flux photoniques (domaine UV), il suffira de remplacer le chiffre 5 apparaissant dans les différentes équations par le chiffre 4.

5.8.1. Modélisation des fonctions de transfert

En réalité, les filtres ne sont pas monochromatiques mais sont définis par une longueur d'onde moyenne (centrale) $\overline{\lambda}$ et une bande passante de largeur $2\delta\lambda$.

5.8.1.1. *Fonction de transfert de l'appareil de mesure*

En appelant FT_λ la fonction de transfert de l'appareil de mesure (microscope ou camera) ne comprenant pas les filtres mais incluant par exemple le rendement quantique $\eta(\lambda)$ du détecteur, la transmittance de l'objectif $\tau_{obj}(\lambda)$, celle de l'oculaire $\tau_{ep}(\lambda)$, etc…

$$FT_\lambda = \tau_{obj}(\lambda)\tau_{ep}(\lambda)\eta(\lambda) \tag{5.8.1}$$

Nous pouvons définir une fonction de transfert moyenne $\overline{FT_\lambda}$ s'écrivant :

$$\overline{FT_\lambda} = FT_{\overline{\lambda}} = \frac{1}{2\delta\lambda}\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} FT_\lambda d\lambda \tag{5.8.2}$$

5.8.1.2. *Fonction de transfert des filtres*

- *Modélisation par une fonction créneau*

La fonction créneau présente une transmitivité $\overline{\tau}$ constante sur toute la bande passante $\left[\overline{\lambda}-\delta\lambda\ ;\ \overline{\lambda}+\delta\lambda\right]$ du filtre. Il est nécessaire que l'aire $2\delta\lambda\overline{\tau}$ du créneau soit égale à l'aire A_f du filtre original. Nous devons donc avoir l'égalité :

$$\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} \overline{\tau} d\lambda = \int_0^{+\infty} \tau_\lambda d\lambda \Leftrightarrow 2\delta\lambda\overline{\tau} = A_f \tag{5.8.3}$$

On en déduit la valeur de la transmitivité $\overline{\tau}_i$:

$$\overline{\tau} = \frac{A_f}{2\delta\lambda} \tag{5.8.4}$$

- *Modélisation par une fonction gaussienne*

Cette fois ci, l'aire de la gaussienne devant être égale à celle du filtre original, nous devons avoir [14] :

$$\overline{\tau} = \frac{A_f}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{5.8.5}$$

Et,

$$\tau = \overline{\tau} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\sigma}\right)^2} \tag{5.8.6}$$

Notons que la longueur d'onde moyenne $\overline{\lambda}$ et l'écart type σ de la loi normale peuvent être estimés à partir du spectre du filtre original à l'aide d'une méthode de type moindres carrés basée sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt, par exemple.

5.8.2. Expressions du flux et de l'erreur de mesure sur la température

5.8.2.1. *Filtres modélisés par une fonction créneau*

En notant k un facteur prenant en compte les aspects géométriques tels que l'angle solide, l'ouverture numérique, le facteur de forme, etc… ; l'expression du flux reçu (sous approximation de Wien) s'écrit :

$$\varphi(T) = k\frac{C_1 s}{hc}\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} \varepsilon_\lambda \tau_\lambda FT_\lambda \lambda^{-5} e^{\frac{-C_2}{\lambda T}} d\lambda \tag{5.8.7}$$

En remplaçant chacune des fonctions de transfert par leur transmitivité moyenne calculée dans la partie 2.4.1.2, et en considérant que l'émissivité ε_λ est constante sur l'intervalle $\left[\overline{\lambda}-\delta\lambda\ ;\ \overline{\lambda}+\delta\lambda\right]$; dans ce cas, l'émissivité et chacune des fonctions de transfert peuvent être sorties de l'intégrale. De plus, en ne considérant que le développement à l'ordre 1 de $\lambda^{-5}e^{\frac{-C_2}{\lambda T}}$, on montre que [14] :

$$\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda}\lambda^{-5}e^{\frac{-C_2}{\lambda T}}d\lambda \approx \overline{\lambda}^{-5}e^{\frac{-C_2}{\overline{\lambda}T}} \tag{5.8.8}$$

Et l'expression du flux devient :

$$\varphi_{\overline{\lambda}}(T) = k\frac{C_1 s}{hc}\varepsilon_{\overline{\lambda}}\tau_{\overline{\lambda}}FT_{\overline{\lambda}}\overline{\lambda}^{-5}e^{\frac{-C_2}{\overline{\lambda}T}} \tag{5.8.9}$$

En écrivant l'équation (5.8.9) pour deux longueurs d'ondes λ_i et λ_j, puis en calculant le rapport nous en déduisons l'expression de la température et l'erreur de mesure sur celle-ci :

$$T = \frac{C_2\left(1\,/\,\overline{\lambda}_j - 1\,/\,\overline{\lambda}_i\right)}{\ln\left(\dfrac{\varphi_{\overline{\lambda}_i}}{\varphi_{\overline{\lambda}_j}}\dfrac{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j}FT_{\overline{\lambda}_j}\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j}}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i}FT_{\overline{\lambda}_i}\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i}}\left(\dfrac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_i}\right)^{-5}\right)} \tag{5.8.10}$$

$$\frac{e_T}{T} = \left[\left(\frac{e_{\varphi_{\overline{\lambda}_i}}}{\varphi_{\overline{\lambda}_i}} - \frac{e_{\varphi_{\overline{\lambda}_j}}}{\varphi_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i}}}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j}}}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{FT_{\overline{\lambda}_i}}}{FT_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{FT_{\overline{\lambda}_j}}}{FT_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i}}}{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j}}}{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j}}\right)\cdots\right.$$
$$\left.+5\left(\frac{e_{\overline{\lambda}_i}}{\overline{\lambda}_i} - \frac{e_{\overline{\lambda}_j}}{\overline{\lambda}_j}\right) - \frac{C_2}{T}\left(\frac{e_{\overline{\lambda}_i}}{\overline{\lambda}_i^2} - \frac{e_{\overline{\lambda}_j}}{\overline{\lambda}_j^2}\right)\right]\Bigg/\frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\overline{\lambda}_i} - \frac{1}{\overline{\lambda}_j}\right) \tag{5.8.11}$$

5.8.2.2. *Filtres modélisés par une fonction gaussienne*

L'expression du flux reçu s'écrit :

$$\varphi(T) = k\frac{C_1 s}{hc}\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda}\varepsilon_\lambda\tau_\lambda FT_\lambda\lambda^{-5}e^{\frac{-C_2}{\lambda T}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\sigma}\right)^2}d\lambda \tag{5.8.12}$$

Comme la loi normale décroît rapidement avec la longueur d'onde, le domaine d'intégration peut être réduit significativement, en effet :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\overline{\lambda}-3\sigma}^{\overline{\lambda}+3\sigma}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\sigma}\right)^2}d\lambda \approx 0{,}998 \tag{5.8.13}$$

On montre [14] qu'en ne conservant que le développement à l'ordre 1 de $\lambda^{-5}e^{\frac{-C_2}{\lambda T}}$ et en tenant compte de (5.8.13), nous avons :

$$\int_{\overline{\lambda}-3\sigma}^{\overline{\lambda}+3\sigma} \lambda^{-5} e^{\frac{-C_2}{\lambda T}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{\sigma}\right)^2} d\lambda \approx \sigma\sqrt{2\pi}\overline{\lambda}^{-5} e^{\frac{-C_2}{\overline{\lambda} T}} \tag{5.8.14}$$

En faisant les mêmes considérations concernant les fonctions de transfert et l'émissivité que celles faites pour la fonction créneau, l'expression du flux reçu devient :

$$\varphi_{\overline{\lambda}}(T) = k\frac{C_1 s}{hc}\varepsilon_{\overline{\lambda}}\sigma\sqrt{2\pi}\tau_{\overline{\lambda}} F T_{\overline{\lambda}} \overline{\lambda}^{-5} e^{\frac{-C_2}{\overline{\lambda} T}} \tag{5.8.15}$$

En écrivant cette équation pour deux longueurs d'ondes λ_i et λ_j, puis en calculant le rapport nous en déduisons l'expression de la température et l'erreur de mesure sur celle-ci :

$$T = \frac{C_2\left(1/\overline{\lambda}_j - 1/\overline{\lambda}_i\right)}{\ln\left(\dfrac{\varphi_{\overline{\lambda}_i}}{\varphi_{\overline{\lambda}_j}} \dfrac{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j} F T_{\overline{\lambda}_j} \overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j} \sigma_j}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i} F T_{\overline{\lambda}_i} \overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i} \sigma_i} \left(\dfrac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_i}\right)^{-5}\right)} \tag{5.8.16}$$

$$\frac{e_T}{T} = \left[\left(\frac{e_{\varphi_{\overline{\lambda}_i}}}{\varphi_{\overline{\lambda}_i}} - \frac{e_{\varphi_{\overline{\lambda}_j}}}{\varphi_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i}}}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j}}}{\varepsilon_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{FT_{\overline{\lambda}_i}}}{FT_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{FT_{\overline{\lambda}_j}}}{FT_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i}}}{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_i}} + \frac{e_{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j}}}{\overline{\tau}_{\overline{\lambda}_j}} - \frac{e_{\sigma_i}}{\sigma_i} + \frac{e_{\sigma_j}}{\sigma_j}\right)\ldots\right.$$
$$\left.+5\left(\frac{e_{\overline{\lambda}_i}}{\overline{\lambda}_i} - \frac{e_{\overline{\lambda}_j}}{\overline{\lambda}_j}\right) - \frac{C_2}{T}\left(\frac{e_{\overline{\lambda}_i}}{\overline{\lambda}_i^2} - \frac{e_{\overline{\lambda}_j}}{\overline{\lambda}_j^2}\right)\right] \Bigg/ \frac{C_2}{T}\left(\frac{1}{\overline{\lambda}_i} - \frac{1}{\overline{\lambda}_j}\right) \tag{5.8.17}$$

5.9. Longueur d'onde optimale au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température en Bi-Spectrale : expression analogue à la loi de Wien

5.9.1. Solution faible et conjecture dans le cadre de l'approximation de Wien : expression analytique

Comme cela a été montré dans la section précédente, la méthode bi-spectrale permet en un certain sens, de s'affranchir de la fonction de transfert globale moyenne, si celle-ci prend la même valeur aux deux longueurs d'ondes considérées pour la mesure.

Dans cette section, nous allons montrer que sous cette hypothèse il est possible de définir une notion de longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température, au sens des moindres carrés. Pour cela, nous anticipons sur la section 6 traitant des méthodes de mesures multi-spectrales, et allons suivre une démarche analogue à celle utilisée dans la section A.3.1 p.289 pour la détermination des longueurs d'ondes optimales en mono-spectrale.

En particulier, sous l'hypothèse de validité de l'approximation de Wien, nous commencerons par démontrer[33] l'existence pour la détermination des longueurs d'ondes optimales, d'une loi analogue à celle de la loi de déplacement de Wien. Puis nous montrerons que cette loi reste valide dans le cas d'une émission définie par la loi de Planck.

Ainsi, en nommant « a » le facteur modélisant la valeur de la fonction de transfert globale moyenne (incluant cette fois-ci l'émissivité), supposée constante sur la gamme spectrale de mesure, l'approximation de Wien s'écrit :

$$\varphi_{a,T}(\lambda) \simeq aC_1\lambda^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) \tag{5.9.1}$$

La méthode consiste ici à ne pas considérer le rapport des deux mesures, mais à minimiser la somme des écarts quadratiques[34] définis par :

$$J\left(T,a\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\varphi_i^{\exp}\left(\lambda_i\right) - \varphi_i\left(\lambda_i,T,a\right)\right)^2 \tag{5.9.2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta} \triangleq \left(\hat{T},\hat{a}\right) = \underset{(T,a)\in\mathbb{R}^+\times\left]0;1\right]}{\arg\min}\left(J\left(T,a\right)\right) \tag{5.9.3}$$

[33] La démonstration portera en réalité sur l'existence d'une solution faible (à entendre au sens de pseudo-solution, ou de quasi-solution) du problème. La notion de solution faible étant due au fait que nous allons résoudre des conditions suffisantes, ce qui revient à ne considérer que la réciproque de la démonstration. Cela permettra de justifier l'existence de la forme de la solution finale.

[34] L'objectif étant d'élaborer une méthode générale permettant de généraliser la détermination des longueurs d'ondes optimales Mono-Spectrales aux cas des mesures Bi-Spectrales et Multi-Spectrales.

Les paramètres à estimer sont T et a, que l'on peut regrouper au sein d'un vecteur paramètres $\boldsymbol{\beta} = \big(T, a\big)$.

La minimisation de la fonction coût $J\big(T, a\big)$, définie par (5.9.2), fait intervenir (cf. Annexe A.8 p.363, et [26]) la matrice $\boldsymbol{X}$ de sensibilité (également appelée Jacobienne) du flux aux différents paramètres à estimer (regroupés dans $\boldsymbol{\beta}$), définie par :

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial T} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} \end{bmatrix} \tag{5.9.4}$$

A l'aide de l'écart-type (supposé constant) σ_{φ} sur le flux, et de la matrice de sensibilité (5.9.4), on peut définir[35] la matrice de variance-covariance, par :

$$\mathrm{cov}\big(\boldsymbol{\beta}\big) = \begin{bmatrix} \sigma_T^2 & \mathrm{cov}(T,a) \\ \mathrm{cov}(T,a) & \sigma_a^2 \end{bmatrix} = \Big(\boldsymbol{X^t X}\Big)^{-1} \sigma_{\varphi}^2 \tag{5.9.5}$$

De (5.9.4), on en déduit :

$$\boldsymbol{X^t X} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial T}\right)^2 & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial T}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial T}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} & \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{5.9.6}$$

Afin d'alléger les notations, on posera : $\varphi_i^T \triangleq \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial T}$, et $\varphi_i^a \triangleq \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial a}$.

L'expression de l'écart-type σ_T sur la température fait intervenir celle de $\det\Big(\boldsymbol{X^t X}\Big)$, qui s'écrit :

$$\det\Big(\boldsymbol{X^t X}\Big) = \Big(\big(\varphi_1^T\big)^2 + \big(\varphi_2^T\big)^2\Big)\Big(\big(\varphi_1^a\big)^2 + \big(\varphi_2^a\big)^2\Big) - \Big(\varphi_1^T\varphi_1^a + \varphi_2^T\varphi_2^a\Big)^2 \tag{5.9.7}$$

Qui se simplifie en :

$$\det\Big(\boldsymbol{X^t X}\Big) = \Big(\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T\Big)^2 \tag{5.9.8}$$

A partir de (5.9.5), on en déduit l'expression de l'écart-type σ_T sur la température :

$$\sigma_T\big(\lambda_1, \lambda_2\big) = \sqrt{\frac{\big(\varphi_1^a\big)^2 + \big(\varphi_2^a\big)^2}{\Big(\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T\Big)^2}}, \qquad \forall\Big(\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T\Big) \neq 0 \tag{5.9.9}$$

[35] La relation (5.9.5) n'est exacte que dans le cas d'un modèle linéaire vis-à-vis des paramètres. Dans le cas contraire, c'est une approximation qui n'est valide qu'au voisinage de la solution.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, il est équivalent de minimiser la variance sur la température ou son écart-type.

Pour des raisons de commodités calculatoires, on cherchera donc à minimiser :

$$v_T\left(\lambda_1,\lambda_2\right) = \sigma_T^2\left(\lambda_1,\lambda_2\right) = \frac{\left(\varphi_1^a\right)^2 + \left(\varphi_2^a\right)^2}{\left(\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T\right)^2} = \left(\frac{\varphi_1^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right)^2 \quad (5.9.10)$$

Compte tenu de l'approximation de Wien (5.9.1), on a :

$$\begin{cases} \varphi_i^T \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial T} = \dfrac{aC_1C_2\lambda^{-5}}{\lambda_i T^2}\exp\left(\dfrac{-C_2}{\lambda_i T}\right) = \dfrac{C_2}{\lambda_i T^2}\varphi_i \\ \varphi_i^a \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial a} = C_1\lambda_i^{-5}\exp\left(\dfrac{-C_2}{\lambda_i T}\right) = \dfrac{\varphi_i}{a} \\ \varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T = \left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)\dfrac{C_2}{aT^2}\varphi_1\varphi_2 \end{cases} \quad (5.9.11)$$

Afin de simplifier les calculs qui vont suivre, posons :

$$\begin{cases} \phi_1 = \left(\dfrac{\varphi_1^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right)^2 = \dfrac{1}{\left[\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)\dfrac{C_2}{T^2}\varphi_2\right]^2} \\ \phi_2 = \left(\dfrac{\varphi_2^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right)^2 = \dfrac{1}{\left[\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)\dfrac{C_2}{T^2}\varphi_1\right]^2} \end{cases} \quad (5.9.12)$$

- **<u>Propriété de symétrie</u>**

A partir de (5.9.10), on remarque que $v_T\left(\lambda_1,\lambda_2\right) = v_T\left(\lambda_2,\lambda_1\right)$, ce qui implique que la fonction v_T admet la 1ère bissectrice du plan $\left(\lambda_1 O\lambda_2\right)$ comme axe de symétrie.

- **<u>Conditions pour l'existence du minimum local : Cas Général</u>**

Dans le cas général où les longueurs d'ondes $\left(\lambda_1\,;\lambda_2\right)$ sont supposées indépendantes, chercher les points stationnaires[36] (également appelés points critiques) de (5.9.10)

[36] Notons que les points stationnaires ne définnissent pas nécéssairement un extremum local (exemple : points selles). Ainsi, une démarche plus rigoureuse imposerait de déterminer les extremums locaux (qui peuvent ne pas être des points stationnaires : points anguleux ou appartenant à la frontière du domaine), de sélectionner ceux qui sont des minimums, et de les comparer afin de déterminer le minimum global (simple ou multiple). On supposera ici, qu'il n'existe que deux minimums locaux symétriques par rapport à la première bissectrice du plan $\left(\lambda_1 O\lambda_2\right)$. Ce point sera vérifié dans la section 6.4.4.1 traitant de l'optimisation globale des méthodes multi-spectrales. Notons également qu'il conviendrait de montrer que

revient à chercher l'ensemble des couples $\left(\lambda_1^{opt};\lambda_2^{opt}\right)$ appartenant à l'équation du plan tangent à $v_T\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$ et parallèle à $\left(\lambda_1 O\lambda_2\right)$.

On cherche donc les couples solution de :

$$\begin{aligned}&\min_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\sigma_T^2\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\right)\Rightarrow dv_T\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)=0\\&\Rightarrow\left.\frac{\partial v_T}{\partial\lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}d\lambda_1+\left.\frac{\partial v_T}{\partial\lambda_2}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}d\lambda_2=0\end{aligned}\tag{5.9.13}$$

Ce qui est vérifié si, et seulement si :

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial v_T}{\partial\lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}=0\\\left.\dfrac{\partial v_T}{\partial\lambda_2}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}=0\end{cases}\tag{5.9.14}$$

Avec,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_T}{\partial\lambda_1}=\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\lambda_1}+\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\lambda_1}\\\dfrac{\partial v_T}{\partial\lambda_2}=\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\lambda_2}+\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\lambda_2}\end{cases},\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\tag{5.9.15}$$

De plus, si on suppose que v_T est de classe $\mathscr{C}^2$, les coefficients différentiels de dv_T vérifient le théorème de Schwarz[37]. Et compte tenu de (5.9.14) et (5.9.15), on a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_T}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}=\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}+\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}\\\dfrac{\partial^2 v_T}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}=\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}+\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\end{cases}\tag{5.9.16}$$

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 étant supposées de classe $\mathscr{C}^2$, elles vérifient également le théorème de Schwarz, tel que :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}=\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\\\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}=\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial\lambda_2\partial\lambda_1}\end{cases}\tag{5.9.17}$$

---

v_T est bien différentiable (i.e. admet une forme différentielle exacte) aux points (extremums) considérés, ce qui est vérifié si v_T est de classe $\mathscr{C}^1$.

[37] Ce théorème est également appelé « théorème de Clairaut », et indique que si une fonction est deux fois différentiable (ou de classe $\mathscr{C}^2$), alors les dérivées croisées des coefficients différentiels sont égales.

En utilisant les notations de MONGE[38], définies par :

$$r = \left.\frac{\partial^2 v_T}{\partial \lambda_1^2}\right|_{\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}} \quad ; \quad s = \left.\frac{\partial^2 v_T}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}} \quad ; \quad t = \left.\frac{\partial^2 v_T}{\partial \lambda_2^2}\right|_{\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}} \tag{5.9.18}$$

L'existence d'un minimum strict en $\left(\lambda_1^{opt};\lambda_2^{opt}\right)$ est assurée si :

$$\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases} \tag{5.9.19}$$

Ainsi, dans le cas où les longueurs d'ondes $\left(\lambda_1;\lambda_2\right)$ sont indépendantes, l'obtention d'un minimum nécéssite que (5.9.19) soit vérifiée. Néanmoins, compte tenu des résultats obtenus en section 5.5 concernant l'écart minimum entre deux longueurs d'onde (i.e. le critère $\Delta\lambda_{\min}$), il semble raisonnable de supposer que les longueurs d'ondes $\left(\lambda_1^{opt};\lambda_2^{opt}\right)$ sont liées. On est alors amené à résoudre (5.9.13) dans le cadre des fonctions implicites. C'est ce cas particulier qui est proposé dans la suite de cette sous-section.

- **<u>Longueurs d'ondes liées : Conditions d'existence du minimum local</u>**

Dans le cas particulier où les longueurs d'ondes $\left(\lambda_1^{opt};\lambda_2^{opt}\right)$ ne sont pas indépendantes, (5.9.13) peut être vérifié même si les conditions (5.9.14) ne sont pas vérifiées (grâce à un phénomène de compensation). En effet, si $\left(\lambda_1;\lambda_2\right)$ sont liées, i.e. $\lambda_1 = f\left(\lambda_2\right)$, alors (5.9.13) devient (avec $d\lambda_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$) :

$$\left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_2}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)} d\lambda_2 = 0 \tag{5.9.20}$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} + \left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_2}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)} = 0 \tag{5.9.21}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{-\left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_2}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}}{\left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)}} = cste, \qquad \forall \left.\frac{\partial v_T}{\partial \lambda_1}\right|_{\left(\lambda_1^{opt},\lambda_2^{opt}\right)} \neq 0 \tag{5.9.22}$$

$$\lambda_1^{opt} = k\lambda_2^{opt}, \quad k \in \mathbb{R} \tag{5.9.23}$$

[38] La notation de MONGE est généralement employée dans le cas de fonctions à deux variables. Dans le cas général de fonctions à plus de deux variables, l'obtention d'un minimum local strict est assurée si la forme quadratique Q (développement de Taylor-Young à l'ordre 2) de v_T est positive et non dégénérée.

- **Longueurs d'ondes liées : Forme des Solutions**

En tant que variables liées, la théorie des fonctions implicites implique :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_1} = 1 \tag{5.9.24}$$

De plus, d'après le théorème de dérivation de fonctions composées, on a :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_2}}{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_1}} \tag{5.9.25}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\dfrac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_2}}{\dfrac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_1}} \tag{5.9.26}$$

Il reste maintenant à égaliser les expressions (5.9.25) et (5.9.26), afin de trouver une relation entre λ_1^{opt} et λ_2^{opt}. Pour cela, calculons les différentes dérivées partielles apparaisant dans ces deux relation $\left(\forall \lambda_1 \neq \lambda_2\right)$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{\varphi_1^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right) = \frac{T^2}{C_2\varphi_2\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2} \tag{5.9.27}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left(\frac{\varphi_2^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right) = \frac{-T^2}{C_2\varphi_1\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} \tag{5.9.28}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left(\frac{\varphi_1^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right) = \frac{-T^2\left[1+\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_2+\dfrac{C_2}{T}\right)\right]}{C_2\varphi_2\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} \tag{5.9.29}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{\varphi_2^a}{\varphi_1^T\varphi_2^a - \varphi_1^a\varphi_2^T}\right) = \frac{T^2\left[1-\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\dfrac{C_2}{T}\right)\right]}{C_2\varphi_1\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2} \tag{5.9.30}$$

Ainsi, d'une part, en substituant (5.9.27) et (5.9.29) dans (5.9.25), on obtient :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = -\left[1+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_2+\frac{C_2}{T}\right)\right]\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \tag{5.9.31}$$

Et d'autre part, en substituant (5.9.28) et (5.9.30) dans (5.9.26), on a :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_2} = \frac{-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\frac{C_2}{T}\right)\right]} \tag{5.9.32}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_1} = -\left[1-\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\frac{C_2}{T}\right)\right]\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \tag{5.9.33}$$

Enfin, en substituant (5.9.31) et (5.9.33) dans (5.9.24), on obtient finalement :

$$\left[1+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_2+\frac{C_2}{T}\right)\right]\left[1-\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\frac{C_2}{T}\right)\right] = 1 \tag{5.9.34}$$

Afin de résoudre analytiquement (5.9.34), une démarche analogue à celle de Newton[39] pour la résolution de problèmes non linéaires, peut être suivie. Ainsi, au lieu de résoudre directement (5.9.34), l'idée consiste dans un premier temps à trouver une solution du problème (approché) :

$$\left[1+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_2+\frac{C_2}{T}\right)\right]\left[1-\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\frac{C_2}{T}\right)\right] = 0 \tag{5.9.35}$$

Or, (5.9.35) est vérifié si l'un des facteurs est nul, et en particulier si les deux facteurs sont simultanément nuls. C'est dans ce dernier cas que la solution va être cherchée.

---

[39] La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode (ou théorème) du point fixe (de Banach), stipulant que si une fonction f (définie dans l'expression $f(x) = x$) est strictement contractante sur un fermé non vide d'un espace vectoriel normé, alors f admet un unique point fixe. Notons que résoudre $g(x) = a$ est équivalent à résoudre $f(x) = g(x) - a + x$, et à trouver le point fixe de f (en espérant que cette dernière soit contractante, au moins localement).
La méthode de Newton pour la résolution de $f(x) = 0$ consiste alors à trouver le point fixe de $g(x) = x$, avec $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. En pratique, la méthode consiste à choisir une valeur initiale x_0 et à déterminer le pas δx tel que $f(x_0 + \delta x) = 0$. La nature du processus itératif provient du fait que l'on ne résoud pas directement $f(x_0 + \delta x) = 0$, mais qu'un développement de Taylor de f est réalisé, que les termes d'ordre supérieurs à deux sont négligés, et que l'on résoud $f(x_0) + f'(x_0)\delta x \simeq 0 \Leftrightarrow \delta x \simeq -f(x_0)/f'(x_0)$. Ainsi, le pas δx trouvé ne permet pas de trouver rigoureusement $f(x_0 + \delta x) = 0$, car la « correction » n'est pas parfaite. On pose alors $x_1 = x_0 + \delta x$ et on réitère avec x_1 le processus de résolution approchée. Le processus est poursuivi jusqu'à convergence des x_n, définis par : $x_{n+1} = x_n + \delta x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (5.9.35) sera vérifié si :

$$\begin{cases} 1+\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_2+\dfrac{C_2}{T}\right)=0 & \big(E1\big) \\ 1-\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\left(-5\lambda_1+\dfrac{C_2}{T}\right)=0 & \big(E2\big) \end{cases} \tag{5.9.36}$$

En posant, $x_i=\dfrac{C_2}{\lambda_i T}$, les système (5.9.36) s'écrit :

$$\begin{cases} x_2^2-\big(x_1+6\big)x_2+5x_1=0 & \big(E1'\big) \\ x_1^2-\big(x_2+6\big)x_1+5x_2=0 & \big(E2'\big) \end{cases} \tag{5.9.37}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2-\big(x_1+6\big)x_2+5x_1=0 & \big(E1'\big) \\ x_1=11-x_2 & \big(E3\big)\leftarrow\big(\big(E2'\big)-\big(E1'\big)\big) \end{cases} \tag{5.9.38}$$

Puis en substituant $\big(E3\big)$ dans $\big(E1'\big)$, on a :

$$\begin{cases} 2x_2^2-22x_2+55=0 & \big(E4\big) \\ x_1=11-x_2 & \big(E3\big) \end{cases} \tag{5.9.39}$$

Le discriminant de $\big(E4\big)$ donne $\Delta=44>0\Rightarrow$ 2 Solutions, définies par :

$$\begin{cases} x_{2,1}\equiv\dfrac{C_2}{\lambda_{2,1}T}=\dfrac{11+\sqrt{11}}{2}\approx 7{,}16 \\ x_{2,2}\equiv\dfrac{C_2}{\lambda_{2,2}T}=\dfrac{11-\sqrt{11}}{2}\approx 3{,}84 \end{cases} \tag{5.9.40}$$

En injectant les solutions $x_{2,i}$ dans $\big(E3\big)$, on trouve le couple de solutions symétrique. Les deux longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température pour les mesures bi-spectrales, sont donc uniques, et définies par :

$$C_2=14388\,\mu m.K\Rightarrow\begin{cases} \lambda_{opt1-faible}^{bi-Wien}T=C_{BSW}^{R1}\approx 2010\,\mu m.K \\ \lambda_{opt2-faible}^{bi-Wien}T=C_{BSW}^{R2}\approx 3750\,\mu m.K \end{cases} \tag{5.9.41}$$

Remarquons d'une part, que (5.9.41) définit bien des solutions vérifiant (5.9.23), et d'autre part, que le critère $\Delta\lambda_{\min}$ (défini en section 5.5) est respecté entre les deux longueurs d'ondes optimales trouvées. En observant les expressions (5.9.12), on note que le terme ayant permis d'établir le critère $\Delta\lambda_{\min}$ apparait également au dénominateur. De plus, on constate à l'aide de (5.9.12) que l'écart-type tend vers infini si l'on choisit $\lambda_1\rightarrow\lambda_2$ (ce point sera retrouvé numériquement dans la section 6.4.3).

Remarque 1 : Notons que les solutions (5.9.41) du problème (5.9.35) correspondent à des pseudo-solutions[40] de (5.9.34). L'obtention de la soltution finale de (5.9.34) nécessiterait alors la mise en œuvre du calcul itératif de la méthode de Newton. Néanmoins, la validité de la forme de la solution ayant été démontrée par (5.9.23) et confirmée par (5.9.41), la poursuite du processus itératif n'a que peut d'intérêt pratique, car il aurait pour seule conséquence que de faire converger les valeurs des constantes de (5.9.41) vers des valeurs solutions de (5.9.34) (faisant usage de l'approximation de Wien, et ne correspondant pas par conséquent à l'émission réelle des corps).

Remarque 2 : L'intérêt d'une résolution analytique comparée à une résolution numérique est l'étendue souvent plus vaste du domaine de validité de la relation. En effet, une solution numérique n'est valide (avec certitude) que sur le domaine pour lequel elle a été obtenue et toute extrapolation est alors soumise à caution. En revanche, la solution analytique a un domaine de validité défini une fois pour toute. Ainsi, dans le cas de la relation (5.9.41), bien qu'obtenue sous une forme faible, celle-ci est valable $\forall \lambda T$. L'approximation de Wien étant valide sur une large étendue du spectre utile, il est raisonnable de penser que la solution optimale globale soit dans le voisinage proche de la solution faible obtenue. Et comme cela doit être vrai $\forall \lambda T$, on est amené à conjecturer que les solutions optimales seront également définies suivant une loi analogue à celle des solutions faibles $\forall \lambda T$. Une étude de la régularité (infinie dérivabilité, positivité, fonction bornée admettant un unique maximum,…) de la loi de Planck et de l'approximation de Wien, ainsi que de la majoration de l'erreur entre ces deux expressions, légitimerait probablement d'autant plus cette conjecture.

La mise en évidence de l'existence potentielle[41] pour la détermination des longueurs d'ondes optimales en bi-spectrale, de lois analogues à celle de la loi de déplacement de Wien, incite tout naturellement à vouloir étendre ces lois au cadre plus général qui est celui d'une émission régie par la loi de Planck.

[40] Car les solutions ont été obtenues dans un voisinage des solutions de (5.9.34).

[41] En effet, la résolution a été faite par conditions suffisantes, ce qui revient à trouver une solution faible du problème de départ. La notion de solution faible est d'autant plus vraie que les relations (5.9.41) ont été établies dans le cadre de l'approximation de Wien.

5.9.2. Loi dans le cadre d'une émission de Planck : Solution numérique

Afin de déterminer si des relations de la forme de (5.9.41) restent valides dans le cas d'une émission de Planck, nous allons chercher numériquement (par méthode de Nelder-Mead[42], par exemple) l'ensemble des couples $\left(\lambda_{1,i}^{opt}, \lambda_{2,i}^{opt}\right)$ de longueurs d'ondes minimisant (5.9.10) pour différentes températures T_i. Nous obtiendrons ainsi deux ensembles de longueurs d'ondes optimales $\left\{\lambda_{1,i}^{opt}\right\}$ et $\left\{\lambda_{2,i}^{opt}\right\}$, associés respectivement à la première longueurs d'ondes optimale, et à la deuxième longueur d'onde optimale. A partir de ces deux ensembles, nous pourrons estimer numériquement par une méthode de minimisation par moindres carrés la constante optimale pour chacune des relations de (5.9.41). Les fonctionnelles à minimiser sont donc :

$$\begin{cases} J_1\left(C_{BSP}^{R1}\right) = \sum_i \left(\lambda_{1,i}^{opt} - \dfrac{C_{BSP}^{R1}}{T_i}\right)^2 \\ J_2\left(C_{BSP}^{R2}\right) = \sum_i \left(\lambda_{2,i}^{opt} - \dfrac{C_{BSP}^{R2}}{T_i}\right)^2 \end{cases} \tag{5.9.42}$$

Les constantes C_{BSP}^{R1} et C_{BSP}^{R2} seront donc définie par :

$$\begin{cases} \hat{C}_{BSP}^{R1} = \arg\min_{C_{BSP}^{R1}}\left(J_1\left(C_{BSP}^{R1}\right)\right) \\ \hat{C}_{BSP}^{R2} = \arg\min_{C_{BSP}^{R2}}\left(J_2\left(C_{BSP}^{R2}\right)\right) \end{cases} \tag{5.9.43}$$

Remarque : Une méthode alternative consiste à déterminer le couple $\left(C_{BSP}^{R1}, C_{BSP}^{R2}\right)$ en minimisant simultanément la somme des fonctionnelles $J_1\left(C_{BSP}^{R1}\right)$ et $J_2\left(C_{BSP}^{R2}\right)$. Le couple $\left(C_{BSP}^{R1}, C_{BSP}^{R2}\right)$ sera donc solution de :

$$\left(\hat{C}_{BSP}^{R1}, \hat{C}_{BSP}^{R2}\right) = \arg\left(\min_{C_{BSP}^{R1}, C_{BSP}^{R2}} \sum_i \left(\left(\lambda_{1,i}^{opt} - \frac{C_{BSP}^{R1}}{T_i}\right)^2 + \left(\lambda_{2,i}^{opt} - \frac{C_{BSP}^{R2}}{T_i}\right)^2\right)\right) \tag{5.9.44}$$

Les longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement par minimisation de l'écart-type sur la température et celles obtenue à partir des lois (5.9.45) sont représentées Figure 5.7, et les résidus correspondant aux longueurs d'ondes obtenues par les deux méthodes sont illustrés Figure 5.8. A des fins de comparaison, les longueurs d'ondes optimales pour la mesure mono-spectrale ont également été représentées.

[42] Cette méthode est également couramment appelée « méthode du simplexe », mais est à ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe, initialement proposé par Dantzig, et qui est utilisé pour la résolution de problèmes de programmation linéaire. Afin d'éviter toute confusion, nous conserverons la dénomination « Nealder-Mead ».

$$\begin{cases} \lambda_{opt1}^{bi-Planck} = \dfrac{C_{BSP}^{R1}}{T} \approx \dfrac{1830,78}{T}\,\mu m \\ \lambda_{opt2}^{bi-Planck} = \dfrac{C_{BSP}^{R2}}{T} \approx \dfrac{4465,76}{T}\,\mu m \end{cases} \tag{5.9.45}$$

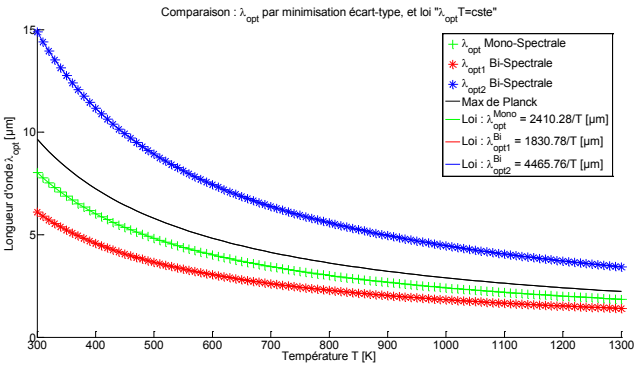


Figure 5.7 : Comparaison des longueurs d'ondes obtenues par minimisation de l'écart-type sur la température, et par la loi de la forme : $\left(\lambda_{opt,k}^{bi-Planck} = \dfrac{C_{BSP}^{R,k}}{T}\right)_{k\in\{1;2\}}$

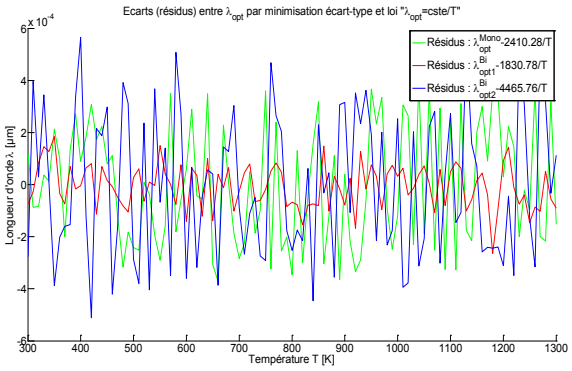


Figure 5.8 : Résidus (écarts) entre les longueurs d'ondes obtenues par minimisation de l'écart-type sur la température, et par la loi de la forme : $\left(\lambda_{opt,k}^{bi-Planck} = \dfrac{C_{BSP}^{R,k}}{T}\right)_{k\in\{1;2\}}$

La faible valeur des résidus (de l'ordre de $10^{-4}\,\mu m$) obtenus, permettent conclure sur la validité de la loi de la forme $\left(\lambda_{opt,k}^{bi-Planck} T = C_{BSP}^{R,k}\right)_{k\in\{1;2\}}$ pour la détermination des longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température par méthode bi-spectrale.

Afin de vérifier si le critère $\Delta\lambda_{\min} = \left(\lambda_{opt2}^{bi-Planck}\right)^2 T \,/\, C_2$ défini en section 5.5 est bien respecté, et déterminer si il existe une relation particulière entre ce critère $\Delta\lambda_{\min}$ et l'écart entre les deux longueurs d'ondes optimales pour la mesure bi-spectrale, nous avons représenté Figure 5.9 l'évolution en fonction de la température des écarts imposés par le critère $\Delta\lambda_{\min}$, et ceux correspondant à la différence $\Delta\lambda_{opt}^{bi-Planck} = \lambda_{opt2}^{bi-Planck} - \lambda_{opt1}^{bi-Planck}$ entre les deux longueurs d'ondes optimales obtenues. Leur rapport $\Delta\lambda_{opt}^{bi-Planck} \,/\, \Delta\lambda_{\min}$ a également été représenté.

Un fait marquant est que l'on a $\Delta\lambda_{opt}^{bi-Planck} = 1,9\,\Delta\lambda_{\min}$, et cela quel que soit la température $T \in \left[300K\,;1300K\right]$. Cela montre ainsi que le critère $\Delta\lambda_{\min}$ initialement utilisé pour choisir les longueurs d'ondes des filtres expérimentaux n'est pas optimal, mais n'est pas non plus complétement aberrant, et est fortement lié à la minimisation de l'écart-type sur la température par méthode bi-spectrale.

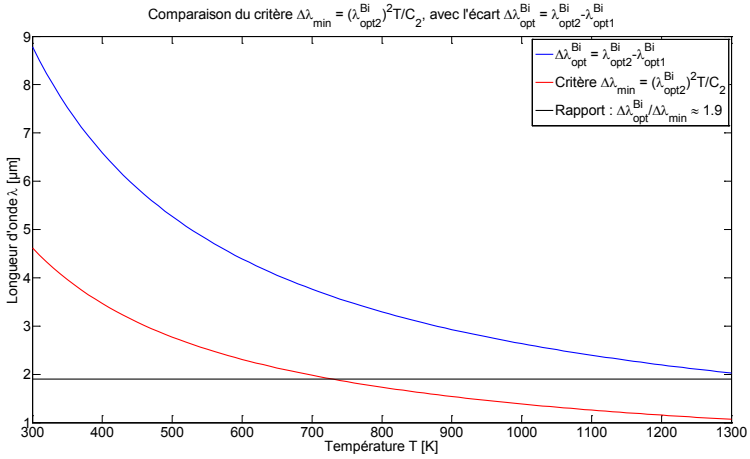


Figure 5.9 : Comparaison des écarts imposés par le critère $\Delta\lambda_{\min} = \left(\lambda_{opt2}^{bi-Planck}\right)^2 T \,/\, C_2$, et ceux correspondant à la différence $\Delta\lambda_{opt}^{bi-Planck} = \lambda_{opt2}^{bi-Planck} - \lambda_{opt1}^{bi-Planck}$.

Enfin, la Figure 5.10 illustre sur les courbes de Planck pour $T \in \left[300K\,;1300K\right]$, les différentes longueurs d'ondes optimales pour les mesures mono-spectrales et bi-spectrales. On note que les longueurs d'ondes mono-spectrales optimales sont toujours comprises entre les deux longueurs d'ondes optimales bi-spectrales.

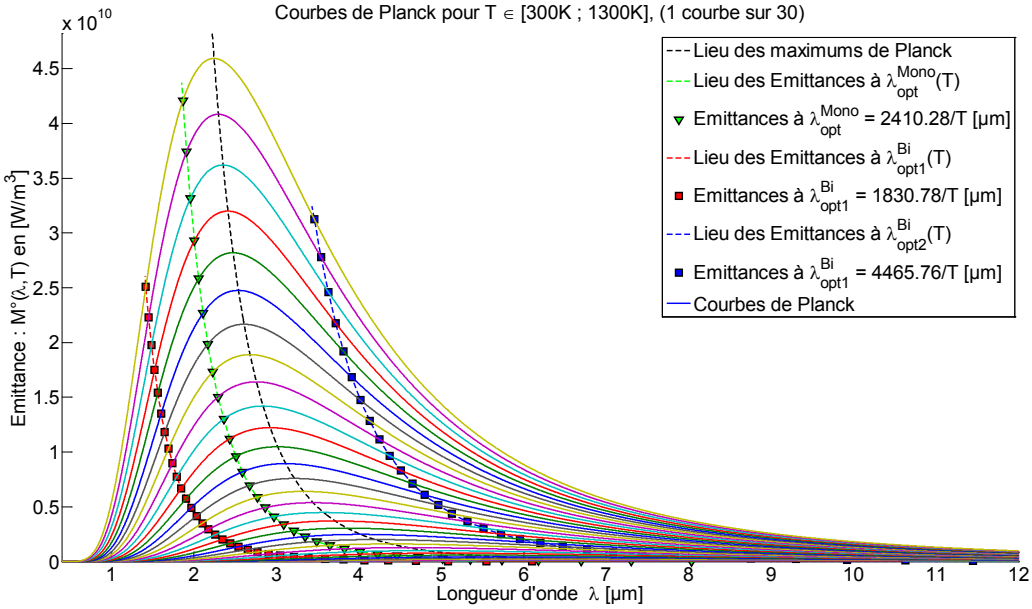


Figure 5.10 : Illustration sur les courbes de Planck pour $T \in \left[300K\,;1300K\right]$, des différentes longueurs d'ondes optimales pour les mesures bi-spectrales et mono-spectrales.

Chapitre 6

Mesures Multi-Spectrales

6. Méthodes Multi-Spectrales : longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type de la température

Dans la section 5.8, il a été montré comment prendre en compte les fonctions de transfert de la chaine de mesure sous la forme d'une fonction de transfert moyenne puis nous l'avons intégrée dans le calcul de la température.

L'objectif de cette section est d'étendre la méthodologie précédente à l'estimation de la température par méthode de moindres carrés avec prise en compte d'une fonction de transfert globale pouvant varier spectralement et incluant l'émissivité. Pour que cela soit rendu possible, il va être nécessaire d'utiliser plusieurs longueurs d'ondes. Ces méthodes (utilisant plusieurs longueurs d'ondes) portent communément la dénomination de « méthodes multi-spectrales ».

Plusieurs méthodes sont possibles pour la modélisation de la fonction de transfert globale. Nous choisirons ici de l'interpoler au plus par une fonction polynomiale d'ordre 2. Ce choix est dû à de nombreux critères.

En effet, le choix d'une base polynomiale d'interpolation est dû au fait que le modèle de variations réelles de l'émissivité est souvent méconnu, néanmoins, le théorème[43] d'approximation de Weierstrass nous assure que cette fonction (si elle est continue sur l'intervalle de mesure) peut être approchée (convergence uniforme[44]) de façon aussi fine que l'on veut par un polynôme, dont le degré et les coefficients dépendent de la précision voulue. On est ainsi assuré qu'il existera toujours du point de vue théorique un polynôme pouvant décrire le comportement de l'émissivité[45].

Concernant le choix du degré maximum du polynôme d'interpolation, celui-ci se base sur le constat que l'estimation de la température avec prise en compte d'un polynôme d'ordre $n-1$ implique $n+1$ inconnues[46] et impose donc l'utilisation de $n+1$ longueurs d'ondes afin que le problème soit exactement déterminé[47]. Or, si nous désirons respecter à minima le critère $\Delta\lambda_{\min}$ pour chacun des couples de longueurs d'ondes, nous serons contraints par deux limitations : d'une part, il existe un nombre maximum de longueurs d'ondes respectant ce critère (comme cela a été démontré en section 5.7), et d'autre part, l'écart entre les deux longueurs d'ondes extrêmes, s'accroissant de façon non linéaire à mesure que l'on rajoute des longueurs d'ondes, non

[43] Ou plus généralement, le théorème de Stone-Weierstrass.

[44] Au sens de la norme infinie.

[45] En d'autres termes, la base de fonctions polynomiales est complète pour les fonctions continues, sur un espace vectoriel normé, associé à la norme infinie.

[46] Une pour la température et n pour les coefficients du polynôme de degré $n-1$.

[47] Au sens de l'adéquation entre nombre d'équations et nombre d'inconnues.

seulement la gamme spectrale de la chaine de mesure risque de ne pas être adaptée, mais de plus, l'hypothèse de modélisation par un polynôme d'ordre $n-1$ tombera probablement très vite en défaut, et engendrera ainsi un biais de modèle.

Enfin, on peut invoquer le fait que lors d'une estimation par une méthode de moindres carrés, on peut montrer que l'écart-type augmente à mesure que le nombre de paramètres augmente.

Nous commencerons par présenter succinctement les différents algorithmes testés, et en particulier celui qui a été retenu pour les estimations. Puis nous aborderons les modèles d'estimation associés à leur fonction coût, qui seront comparés numériquement pour différentes variations d'émissivité à travers des simulations bruitées et non bruitées de type Monte-Carlo, afin de choisir le meilleur modèle pour la présentation de deux méthodes de sélection de longueurs d'ondes « optimales », dont une mise en œuvre expérimentale sera proposée pour le meilleur des modèles étudiés.

La première méthode qui sera présentée consiste en une sélection séquentielle des longueurs d'ondes « pseudo-optimales ». On montrera que cette méthode ne fournit pas les meilleures longueurs d'ondes au sens de la minimisation globale de l'écart-type sur la température, mais a l'avantage de permettre un suivi de l'évolution de ce dernier, non seulement en fonction du nombre de longueurs d'ondes choisi mais également de leurs valeurs, et ainsi de s'adapter à d'éventuelles contraintes expérimentales concernant la (non-)disponibilité des filtres « optimaux ».

Enfin, la seconde méthode qui sera présentée, et sélectionnée pour la mise en œuvre expérimentale car fournissant le minimum de variance[48], est basée sur la minimisation (par méthodes numériques) de l'écart-type sur la température au sens des moindres carrés, comme cela a été illustré à la section 5.9.1.

6.1. Algorithmes d'estimation

Différents algorithmes et méthodes d'estimation (par minimisation au sens des moindres carrés [26, 33, 34]) ont été testés, mais seuls les résultats obtenus à partir de celle qui nous a semblé être le meilleur compromis efficacité-précision-rapidité seront présentés. En particulier, des méthodes avec et sans gradient[49] ont été comparées.
Une méthode d'estimation par essaim de particules[50] a été implémentée, mais elle n'a pas été retenue car prohibitive en temps de calcul, y compris en l'absence de bruit. Cet

[48] Sous hypothèse d'un bruit additif non corrélé, de moyenne nulle, et de variance constante, le théorème de Gauss-Markov affirme que l'estimateur « fourni » par la méthode des moindres carrés est celui qui donne le minimum de variance sur l'estimé.

[49] Les méthodes sans gradient sont également appelée « méthodes d'ordre zéro », et celle avec gradient « méthode d'ordre 1 ».

[50] « Particules Swarm Optimization » (PSO) en anglais. Cette méthode fait partie des méthodes appelées méthodes stochastiques.

algorithme est relativement récent, cependant, la littérature y faisant référence est foisonnante. De nombreuses références pourront être trouvées dans les mémoires de thèse de Ruffio [35] et El Dor [36]. On peut également citer quelques articles récents et/ou faisant références :[37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45].

Une méthode d'estimation basée sur l'algorithme Nelder-Mead[51] [46, 47] a également été testée. Cette méthode également d'ordre zéro présente de nombreux avantages comparée aux autres méthodes d'ordre zéro. En particulier, elle est simple à mettre en œuvre et a l'avantage d'être généralement plus rapide et robuste que les méthodes de minimisation par algorithmes génétiques ou par essaims particulaires, qui nécessitent par ailleurs un réglage empirique d'hyper-paramètres permettant d'ajuster le compromis entre exploration (de l'espace de paramètres) et exploitation (précision de la solution, sous contrainte d'un nombre limité d'itérations). Cependant, la méthode ne convergeait pas nécessairement et présentait une relative lenteur [48, 49, 50]. De nombreuses évolutions de cette méthode existent et permettent d'en améliorer la convergence locale, telle que la méthode de Torczon [51, 52, 53, 54, 55] qui limite les phénomènes de dégénérescence du simplexe[52]. D'autres évolutions de la méthode permettent de prétendre à une convergence globale [56, 57, 58] de l'algorithme par réinitialisation (à partir des valeurs de convergence) ou en l'associant à une méthode métaheuristique telle que les « algorithmes génétiques » [59, 60, 61, 62], ou les « algorithmes à essaim particulaire » [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69], par exemple.

Ces évolutions n'ont pas étés réalisées, car elles ont pour conséquence d'augmenter le temps de calcul, ce qui était contraire à l'objectif recherché.

L'algorithme choisi[53] s'inspire de celui de Gill [70, 71] pour la décomposition en valeurs singulières[54] de la matrice de sensibilité[55], et de celui de Levenberg-Marquardt [72, 73]

---

[51] Méthode couramment appelée « méthode du simplexe », mais est à ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe, iniatialement proposé par Dantzig, et qui est utilisé pour la résolution de problèmes de programmation linéaire. Afin d'éviter toute confusion, nous conserverons la dénomination « Nealder-Mead ».

[52] Egalement appelé « polytope » ou encore « n-polytope », et correspond mathématiquement à la généralisation à la dimension n de la notion géométrique du triangle en dimension 2.

[53] L'algorithme implémenté sous la forme d'une fonction « leasqr.m » et adaptée au logiciel Octave est disponible à l'adresse [230].

[54] Il s'agit plus particulièrement dans l'algorithme utilisé d'une décomposition en valeurs singulières « économique (également appelée « fine ») » qui fait partie de la classe des décompositions en valeurs singulières réduites. La méthode consiste à ne conserver que les n premiers vecteurs singuliers à gauche (i.e, les n premières colonnes de la matrice U, pour les notations classiques de la SVD), n étant le nombre de vecteurs singuliers à droite (i.e, la dimension de la matrice V, toujours pour les notations classique de la SVD). Remarquons que la matrice des valeurs singulières est ainsi carrée, de dimension n, et diagonale. De plus, notons que dans le cas d'une estimation de paramètres, n est égale au nombre de paramètres, car lors d'une décomposition en valeurs singulières de la matrice de sensibilité, le nombre de vecteurs singuliers à droite est égal au nombre de colonnes de la matrice de sensibilité (qui lui-même est égal au nombre de paramètres).

pour la régularisation de l'inversion de l'équation normale[56] par adjonction d'un terme de pénalisation.

Les étapes clefs de l'algorithme utilisé sont :

- Pré-conditionnement[57] [74, 75, 76] de la matrice de sensibilités (également appelée Jacobienne) par adimensionnement (à chaque itération du calcul du nouveau pas de descente) des sensibilités par normalisation au sens de la norme euclidienne.
- Régularisation au sens de Levenberg-Marquardt par adjonction d'un terme de pénalisation dans la matrice diagonale des valeurs singulières, et recherche linéaire « inexacte[58] » (par liste de valeurs prédéfinies) du terme de pénalisation optimal au sens de la minimisation des résidus. Notons que la recherche linéaire donne un caractère globalisant[59] à la convergence de la méthode [77, 78]. Les faibles valeurs du terme de pénalisation impliquent une plus grande fidélité au problème initial, mais qui peut être sensible au bruit/erreurs numériques et de mesure à cause de faibles valeurs singulières, alors que de fortes valeurs du terme de pénalisation impliquent une réduction de la sensibilité au bruit, ainsi que l'apparition d'un biais de modèle [79, 80, 81, 82].

Cette méthode a été choisie pour ses performances, car elle est relativement rapide et robuste comparée aux autres méthodes citées précédemment. De plus, l'utilisation de cet algorithme n'a pas nécessité la mise en place de contraintes pour converger[60].

Enfin, précisons qu'un algorithme à régions de confiance a également été testé, notamment à titre de comparaison lors de la mise en place de contraintes sur les paramètres, mais n'a pas été retenu car était globalement moins performant que l'algorithme choisi.

---

[55] Egalement appelée Jacobienne en mathématique.

[56] En algèbre linéaire, la dénomination « équations normales » est donnée aux équations (matricielles) de la forme : $A^tAx = A^tb$. Les solutions d'un tel système (dont le système initial $Ax = b$ est généralement sur-déterminé) sont appelées « pseudo-solutions ».

[57] De nombreux exemple de l'importance d'un pré-conditionnement et de l'impact d'un mauvais conditionnement sur la sensibilité (et donc l'estimation) du système aux erreurs sont abordés dans les références citées.

[58] La terminologie « inexacte » est employée par opposition à « exacte » car les valeurs sont ici tabulées, contrairement à la recherche linéaire « exacte » de pas optimal qui est issue de la résolution d'un sous-problème de minimisation.

[59] Les méthodes de Newton, de Gauss-Newton, et par extension, de Levenberg-Marquardt classique, ont un caractère de convergence locale. Cependant, on peut montrer que la recherche linéaire (exacte ou inexacte) de pas optimal, confère à ces méthodes un certain caractère de convergence globale. Cela est en grande partie due au fait que la variation du pas de descente permet de « s'extirper » de certains minimums locaux.

[60] A l'exception de rares cas.

6.2. Présentation des différents modèles d'estimation

Trois modèles vont être présentés et comparés. Chacun de ses modèles permettra de prendre en compte une modélisation polynomiale jusqu'à l'ordre 2 des variations spectrales de la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité) de la chaine de mesure. Le premier modèle est basé sur le rapport de flux sous approximation de Wien. Il s'inspire donc du modèle utilisé en mesure bi-spectrale. Le second est uniquement basé sur le rapport de flux, sous hypothèse d'émission de Planck. Enfin, le dernier est simplement basé sur la loi d'émission de Planck.

6.2.1. Méthode Multi-Spectrale basée sur le rapport de flux et l'approximation de Wien : Méthode « TNL.TXY »

En notant $f(\lambda)$ la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité) de la chaine de mesure, le flux $\varphi_i(\lambda_i, T)$ reçu par le détecteur à la longueur d'onde λ_i sous approximation de Wien, s'écrit :

$$\varphi_i = f(\lambda_i)\frac{C_1\lambda_i^{-5}}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda_i T}\right)-1} \simeq f(\lambda_i)C_1\lambda_i^{-5}\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_i T}\right),\ \forall\lambda_i T << C_2 \qquad (6.2.1)$$

En effectuant un développement limité[61] à l'ordre 2 de la fonction $f(\lambda)$ autour de la longueur d'onde moyenne $\lambda_m = \sum_{i=1}^{N_f}\lambda_i \,/\, N_f$, on a alors :

$$f(\lambda) = a_0 + (\lambda - \lambda_m)a_1 + (\lambda - \lambda_m)^2 a_2 \qquad (6.2.2)$$

Le principe de la mesure est alors le suivant : Soient $(\lambda_i, \lambda_j)_{i<j\leq N_f}$ les couples de deux longueurs d'ondes auxquelles on veut effectuer nos mesures, avec N_f le nombre de longueurs d'ondes différentes. Dans notre cas $N_f = 4$, car nous aurons quatre paramètres à estimer : La température T et les trois coefficients du polynôme d'interpolation d'ordre 2. En pratique, ces longueurs d'ondes correspondent à celles des filtres monochromatiques.

Pour chaque couple de longueur d'onde, à partir de l'approximation de Wien (6.2.1), on peut calculer à l'aide du rapport des flux, la température T_{ij} définie par :

[61] Rappelons que la notion de développement limité est plus générale que celle de développement de Taylor, car elle ne nécessite pas, par exemple, que la fonction soit deux fois $\mathbb{R}$-différentiable.

$$T_{ij}\left(a_0,a_1,a_2\right)=\frac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j}-\dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{a_0+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)a_1+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)^2a_2}{a_0+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)a_1+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)^2a_2}\right)\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right]},\ \forall\lambda_i\neq\lambda_j \quad (6.2.3)$$

En factorisant par a_0 numérateur et dénominateur de la fraction correspondant au rapport des fonctions de transferts globales, on peut diminuer le nombre de paramètres à estimer, et l'expression (6.2.3) se simplifie en :

$$T_{ij}\left(a_{10},a_{20}\right)=\frac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j}-\dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{1+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)a_{10}+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)^2a_{20}}{1+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)a_{10}+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)^2a_{20}}\right)\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right]},\quad \forall\lambda_i\neq\lambda_j \quad (6.2.4)$$

Avec : $a_{10}=a_1\ /\ a_0$, et $a_{20}=a_2\ /\ a_0$.

Pour des raisons numériques[62], il peut également être avantageux de réduire les paramètres $a_{10}\,X$ et $a_{20}\,Y$. Ainsi, en mettant λ_m en facteur devant chacune des parenthèses concernées, l'expression (6.2.4) devient :

$$T_{ij}\left(X,Y\right)=\frac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j}-\dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{1+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)X+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)^2Y}{1+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)X+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)^2Y}\right)\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right]},\forall\lambda_i\neq\lambda_j \quad (6.2.5)$$

Avec : $X=\lambda_m a_{10}$, et $Y=\lambda_m a_{20}$.

C'est l'expression (6.2.5) que nous utiliserons pour effectuer l'estimation de paramètres.

Remarque : Nous montrerons en section 6.3 p.87 que l'emploi de la relation (6.2.3) pour chacun des couples de longueurs d'ondes mènerait à un système sous-déterminé. En effet, il y a les quatre paramètres $\left\{T,a_0,a_1,a_2\right\}$ à estimer, et il est possible à l'aide de quatre longueurs d'ondes de former $C_4^2=6$ rapports de flux différents. Cependant, nous montrerons que seuls trois rapports de flux sont indépendants, et que par conséquent il n'est possible d'identifier que trois paramètres. D'où la nécessité des

[62] Du point de vue numérique, afin de limiter les erreurs d'arrondis et de troncatures, il est souvent préférable de manipuler des nombres ayant le même ordre de grandeur. Bien que les erreurs numériques puissent souvent sembler dérisoires à première vue, la propagation de celles-ci, ou leur incidence en cas de matrices mal conditionnées, peuvent être considérables.

expressions (6.2.4) ou (6.2.5) pour que le problème soit bien déterminé au sens de la concordance entre nombre d'équations et de paramètres à estimer.

L'estimation des paramètres $\{T, X, Y\}$ sera réalisée par minimisation de la fonction coût (6.2.6), dans laquelle $T_{ij}(X,Y)$ représente la température bi-spectrale calculée à l'aide du rapport $\frac{\varphi_i^{\exp}}{\varphi_j^{\exp}}$ des flux expérimentaux mesurés aux longueurs d'ondes (λ_i, λ_j) :

$$\begin{aligned} S_W(T,X,Y) &= \sum_{j=2}^{N_f} \big(T - T_{1j}(X,Y)\big)^2 \\ \Leftrightarrow S_W(T,X,Y) &= \big(T - T_{12}(X,Y)\big)^2 + \big(T - T_{13}(X,Y)\big)^2 + \big(T - T_{14}(X,Y)\big)^2 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Notons que l'on aurait également pu choisir toute autre combinaison d'au moins trois couples (i,j) possibles, tels que :

$$\begin{aligned} S_W(T,X,Y) &= \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{N_f-1} \big(T - T_{ij}(X,Y)\big)^2 \\ \Leftrightarrow S_W(T,X,Y) &= \big(T - T_{12}(X,Y)\big)^2 + \big(T - T_{23}(X,Y)\big)^2 + \big(T - T_{34}(X,Y)\big)^2 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Ou encore, la minimisation des $C_4^2 = 6$ couples possibles. Néanmoins, d'une part, dans la section 5.3.3 il a été montré qu'il était préférable de choisir de grand rapport de flux, c'est à dire les rapport $1/i$ au lieu des rapports $i/(i{+}1)$, et d'autre part, non seulement il sera montré en section 6.3 p.87 que toute combinaison de longueurs d'ondes déjà utilisées n'apporte aucune information supplémentaire, mais de plus, des simulations numériques ont montré que les estimations pouvaient s'en trouver fortement dégradées. En particulier, même sans bruit et sans biais de modèle, c'est-à-dire pour un flux simulé à l'aide de la loi de Wien, il est possible d'obtenir des erreurs sur la température de l'ordre de 70K si l'interpolation est réalisée sur les trois premières longueurs d'ondes ! Nous choisirons donc la fonctionnelle (6.2.6) pour toutes nos estimations effectuée à l'aide du modèle (6.2.5).

La méthode présentée dans cette section 6.2.1 sera appelée méthode « TNL.TXY ». Le préfixe « TNL » pour Température par modèle Non Linéaire, et le suffixe « TXY » pour rappeler les paramètres à estimer. Le même principe de dénomination sera utilisé pour les autres méthodes.

6.2.2. Linéarisation du modèle « TNL.TXY » et estimation par prédiction-correction : Méthode « TL.TXY »

Il a été constaté que l'estimation est sensible aux valeurs d'initialisation des paramètres. Ce point soulève les questions de problème bien ou mal posé, bien ou mal conditionné, ou encore de corrélations entre les paramètres. L'étude théorique de ces points est en cours. Cependant, afin de faciliter la convergence de l'algorithme, on se propose de l'initialiser avec les solutions obtenues à l'aide d'un système linéarisé, dont les solutions sont estimées par prédiction-correction à l'aide d'une méthode de moindres carrés ordinaires.

L'idée est de ne considérer dans un premier temps qu'une dépendance linéaire de la fonction de transfert globale, de linéariser le système (6.2.4), d'estimer les paramètres par moindres carrés ordinaires[63] (inversion matricielle de l'équation normale associée), puis de recommencer la procédure en considérant une dépendance quadratique (ordre 2) de la fonction de transfert globale, mais dans laquelle on a injecté la solution précédemment trouvée comme voisinage de recherche de paramètre δX.

Contrairement à la section 6.2.1, supposons :

$$\begin{aligned} & f\left(\lambda_j\right) = a_0 + \underbrace{\left(\lambda_j - \lambda_i\right)}_{\Delta\lambda_{ij}} a_1 + \left(\lambda_j - \lambda_i\right)^2 a_2, \qquad \forall\left(\lambda_i, \lambda_j\right) \\ & \Leftrightarrow f\left(\lambda_j\right) = f\left(\lambda_i\right) + \Delta\lambda_{ij} a_1 + \Delta_{ij}^2 a_2 \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{f\left(\lambda_j\right)}{f\left(\lambda_i\right)} = 1 + \underbrace{\left(\lambda_j - \lambda_i\right)}_{\Delta\lambda_{ij}} \underbrace{\frac{a_1}{f\left(\lambda_i\right)}}_{X} + \left(\lambda_j - \lambda_i\right)^2 \underbrace{\frac{a_2}{f\left(\lambda_i\right)}}_{Y} \\ & \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda_j\right)}{f\left(\lambda_i\right)} = 1 + \Delta\lambda_{ij} X + \Delta_{ij}^2 Y \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

On peut alors exprimer la température bi-spectrale T_{ij} à l'aide du rapport de flux φ_j / φ_i, en écrivant successivement :

$$\frac{\varphi_j}{\varphi_i} = \left(1 + \Delta\lambda_{ij} X + \Delta_{ij}^2 Y\right) \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5} \left(\frac{\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_j T}\right)}{\exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_i T}\right)} \right) \tag{6.2.10}$$

[63] La démarche consiste donc dans un premier temps à trouver la pseudo-solution (au sens de l'algèbre linéaire) du problème faible (au sens mathématique) ne considérant qu'une dépendance linéaire de la fonction de transfert globale.

$$\Rightarrow T = \frac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\left(1 + \Delta\lambda_{ij}X + \Delta_{ij}^2 Y\right)\right]}, \quad \forall \lambda_i \neq \lambda_j \tag{6.2.11}$$

En ne considérant dans (6.2.11) que le développement à l'ordre 1 (en $\Delta\lambda_{ij}$) de la fonction de transfert globale, on a :

$$T \approx T_{L_{ij}} = \frac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\left(1 + \Delta\lambda_{ij}X\right)\right)} = \frac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)\left[1 + \frac{\ln\left(1 + \Delta\lambda_{ij}X\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)}\right]} \tag{6.2.12}$$

On peut alors exprimer (6.2.12) à l'aide de la température bi-spectrale T_{ij} en posant :

$$\begin{cases} T_{ij} = \dfrac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)} \\ \delta_{ij} = \dfrac{\ln\left(1 + \Delta\lambda_{ij}X\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)} \end{cases} \tag{6.2.13}$$

D'où :

$$T \approx T_{L_{ij}} = \frac{T_{ij}}{1 + \delta_{ij}} \tag{6.2.14}$$

En supposant en première approximation que $\delta_{ij} \ll 1$, on a alors au premier ordre $1 / \left(1 + \delta_{ij}\right) \simeq 1 - \delta_{ij}$, et l'expression (6.2.14) se simplifie en :

$$T \approx T_{L_{ij}} \simeq T_{ij} - T_{ij}\delta_{ij} \tag{6.2.15}$$

Sous hypothèse que $\Delta\lambda_{ij}X \ll 1$, au premier ordre on a, $\ln\left(1 + \Delta\lambda_{ij}X\right) \simeq \Delta\lambda_{ij}X$, et la relation (6.2.15) s'écrit finalement :

$$T \approx T_{L_{ij}} \simeq T_{ij} - \underbrace{\frac{T_{ij}\Delta\lambda_{ij}}{\ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)}}_{K_{ij}} X \qquad (6.2.16)$$

$$\Leftrightarrow T + K_{ij}X = T_{ij}$$

Remarque : Notons que dans le cas du corps gris ($\big(X,Y\big) = \big(0,0\big) \Rightarrow \delta_{ij} = 0$), les expressions (6.2.15) et (6.2.16) nous permettent de calculer la température vraie (sous approximation de Wien), qui est égale à la température bi-spectrale, car on a : $T = T_{L_{ij}} = T_{ij}$.

Les paramètres $\big\{T, X\big\}$ de (6.2.16) peuvent alors être estimés au sens des moindres carrés par résolution du système matriciel associé à (6.2.16), en remplaçant dans les expressions $\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}$ par le rapport de flux expérimentaux $\dfrac{\varphi_i^{\exp}}{\varphi_j^{\exp}}$.

En notant $\big(T_0, X_0\big)$ la solution de (6.2.16) au sens des moindres carrés, l'expression (6.2.11) peut alors s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j} - \dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big)\right]}, \quad \forall\lambda_i \neq \lambda_j \qquad (6.2.17)$$

Dont les inconnues sont maintenant $\big(T, \delta X, Y\big)$.

Afin de les estimer, la méthode consiste à linéariser (6.2.17), en supposant $\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big) \Big/ \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right) \ll 1$, et en développant au premier ordre :

$$T = \frac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j} - \dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right) + \ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big)} \qquad (6.2.18)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{T_{ij}}{1 + \dfrac{\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big)}{\ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)}} \simeq T_{ij}\left(1 - \frac{\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big)}{\ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)}\right) \tag{6.2.19}$$

Reste alors à linéariser le logarithme de la fonction de transfert globale, pour cela remarquons que :

$$\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij}\big(X_0 + \delta X\big) + \Delta_{ij}^2 Y\Big) = \ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y\Big) + \ln\left(1 + \frac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y}\right) \tag{6.2.20}$$

Or, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} &\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y\Big) = \ln\left[\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0\Big)\left(1 + \frac{\Delta_{ij}^2 Y}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y\Big) = \underbrace{\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0\Big)}_{L_{X_0}} + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{\Delta_{ij}^2 Y}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0}}_{\delta_Y}\right) \end{aligned} \tag{6.2.21}$$

En supposant $\delta_Y \ll 1$, on a au premier ordre, $\ln\big(1 + \delta_Y\big) \simeq \delta_Y$, d'où :

$$\ln\Big(1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y\Big) \simeq L_{X_0} + \delta_Y \tag{6.2.22}$$

D'autre part, en posant $\delta_{XY} = \dfrac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y}$, et en supposant $\delta_{XY} \ll 1$, au premier ordre nous avons également :

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y}\right) \simeq \frac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0 + \Delta_{ij}^2 Y} \triangleq \delta_{XY} \tag{6.2.23}$$

Si de plus on suppose $\dfrac{\Delta_{ij}^2 Y}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0} \ll 1$, alors δ_{XY} se simplifie en :

$$\delta_{XY} = \frac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{\Delta_{ij}^2 Y}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0}}\right) \simeq \underbrace{\frac{\Delta\lambda_{ij}\delta X}{1 + \Delta\lambda_{ij} X_0}}_{\delta_X} \tag{6.2.24}$$

Finalement, en posant $K_{ij} = \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right)$, l'expression linéarisée de (6.2.18) s'écrit :

$$T \simeq \frac{T_{ij}}{K_{ij}}\Big(K_{ij} - L_{X_0} - \delta_Y - \delta_X\Big) \tag{6.2.25}$$

D'où, en posant $R_{X_0} = \dfrac{\Delta\lambda_{ij}}{1+\Delta\lambda_{ij}X_0}$:

$$T + \frac{T_{ij}}{K_{ij}}R_{X_0}\delta X + \frac{T_{ij}}{K_{ij}}\Delta\lambda_{ij}R_{X_0}Y = T_{ij}\left(1 - \frac{L_{X_0}}{K_{ij}}\right) \tag{6.2.26}$$

Expression à partir de laquelle les paramètres $\big(T, \delta X, Y\big)$ peuvent être estimés au sens des moindres carrés par résolution du système matriciel associé à (6.2.26).

La température estimée à partir de (6.2.26) servira de valeur d'initialisation aux autres modèles (non linéaires) d'estimation.

Cette méthode d'estimation par prédiction-correction sera appelée méthode TL.TXY. Comme indiqué en section 6.2.1, le préfixe « TL » a pour but ici de désigner Température par modèle Linéarisé, et le suffixe « TXY » rappelle les paramètres concernés.

Les méthodes TNL.TXY et TL.TXY étant basées sur l'approximation de Wien, elles induisent par conséquent un biais de modèle qui nuit[64] à la précision de l'estimation de la température.

Dans les deux sections suivantes on se propose de présenter deux méthodes ne reposant pas sur l'approximation de Wien. La première, basée sur le rapport de flux exprimés à l'aide de la loi de Planck est présentée en section 6.2.3, et la seconde, reposant simplement sur la loi de Planck, est présentée section 6.2.4.

6.2.3. Méthode Multi-Spectrale basée sur le rapport de flux et la loi de Planck : Méthode « TNL.Tbc »

La démarche est analogue à celle développée en section 6.2.1, si ce n'est que nous n'utiliserons pas l'approximation de Wien, mais la loi de Planck, et que par conséquent nous ne pourrons exprimer la température T_{ij} en fonction du rapport de flux.

Ainsi, le modèle proposé s'écrit :

[64] Ce terme pourrait être nuancé au sens où dans certains cas, tels que celui des problèmes mal posés, il peut être préférable de biaiser le modèle (par réduction de paramètres, par exemple) afin de réduire la variance sur les paramètres estimés. Cependant, cela n'est pas le cas du modèle TNL.TXY, qui par ailleurs, conserve le même nombre de paramètres que le modèle non biaisé TNL.Tabc qui sera présenté.

$$R_{ij}\left(T,a_0,a_1,a_2\right)=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}=\left(\frac{a_0+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)a_1+\left(\lambda_i-\lambda_m\right)^2a_2}{a_0+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)a_1+\left(\lambda_j-\lambda_m\right)^2a_2}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{-5}\left(\frac{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_jT}\right)-1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_iT}\right)-1}\right) \quad (6.2.27)$$

Qui comme pour les expressions (6.2.4) et (6.2.5), peut se simplifier (diminution du nombre de paramètres) et s'exprimer à l'aide de coefficients réduits, par :

$$R_{ij}\left(T,b,c\right)=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}=\left(\frac{1+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)b+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)^2c}{1+\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)b+\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)^2c}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{-5}\left(\frac{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_jT}\right)-1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_iT}\right)-1}\right) \quad (6.2.28)$$

Avec : $b=\lambda_m a_1\ /\ a_0$, et $c=\lambda_m a_2\ /\ a_0$.

L'estimation des paramètres $\left\{T,b,c\right\}$ sera alors réalisée par minimisation de la fonction coût (6.2.29), dans laquelle $\varphi_k^{\exp}$ désigne le flux expérimental spectral mesuré à la longueur d'onde λ_k :

$$\begin{aligned} S_P\left(T,b,c\right)&=\sum_{j=2}^{N_f}\left(\frac{\varphi_1^{\exp}}{\varphi_j^{\exp}}-R_{1j}\left(T,b,c\right)\right)^2 \\ \Leftrightarrow S_P\left(T,b,c\right)&=\left(\frac{\varphi_1^{\exp}}{\varphi_2^{\exp}}-R_{12}\right)^2+\left(\frac{\varphi_1^{\exp}}{\varphi_3^{\exp}}-R_{13}\right)^2+\left(\frac{\varphi_1^{\exp}}{\varphi_4^{\exp}}-R_{14}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Remarque : Les commentaires de la section 6.2.1 concernant les différentes possibilités de choix de couples de longueurs d'ondes pour la fonction coût (6.2.6), restent également valables pour la fonction coût (6.2.29).

La méthode d'estimation présentée dans cette section 6.2.3 sera appelée méthode « TNL.Tbc », dont la dénomination suit le même principe que celui utilisé pour définir le nom des modèles définis précédemment.

6.2.4. Méthode Multi-Spectrale basée sur la loi de Planck

6.2.4.1. *Développement limité de la fonction de transfert globale*

Les modèles précédents étant basées sur le rapport de flux, éventuellement associés à l'approximation Wien, ces modèles d'estimation présenteront par conséquent un biais systématique en présence de bruit (cf. section 5.4), biais pouvant devenir non négligeable en fonction des conditions expérimentales. C'est pourquoi, nous allons présenter un modèle non biaisé, que nous appellerons modèle « TNL.Tabc », basé sur l'estimation des flux exprimés à l'aide de la loi de Planck. Ce modèle prendra également en compte une modélisation jusqu'à l'ordre 2 de la fonction de transfert

spectrale globale de la chaine de mesure (incluant l'émissivité) à l'aide de coefficients (a,b,c) qui seront à estimer.

Le modèle proposé s'écrit donc :

$$\varphi_i\left(T,a,b,c\right)=\left(a+b\lambda_i+c\lambda_i^2\right)\frac{C_1\lambda_i^{-5}}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda_i T}\right)-1} \qquad \forall i\in\left[\!\left[1;N_f\right]\!\right] \tag{6.2.30}$$

L'estimation des paramètres $\left\{T,a,b,c\right\}$ sera alors réalisée par minimisation de la fonction coût (6.2.31), dans laquelle $\varphi_k^{\exp}$ désigne le flux expérimental spectral mesuré à la longueur d'onde λ_k, et avec $\varphi_k\left(T,a,b,c\right)$ donné par (6.2.30) :

$$\begin{aligned} &J\left(T,a,b,c\right)=\sum_{i=1}^{N_f}\left(\varphi_i^{\exp}-\varphi_i(T,a,b,c)\right)^2 \\ &\Leftrightarrow J\left(T,a,b,c\right)=\left(\varphi_1^{\exp}-\varphi_1(T,a,b,c)\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\left(\varphi_4^{\exp}-\varphi_4(T,a,b,c)\right)^2 \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

6.2.4.2. *Développement sur la base des polynômes de Lagrange pour la mise en place de contraintes*

Afin de pouvoir régulariser la méthode d'estimation par mise en place de contraintes, il peut être avantageux d'exprimer la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité), à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange. En effet, la décomposition de la fonction de transfert $f\left(\lambda\right)$ dans la base de Lagrange a pour conséquence que les coefficients des différents polynômes constitutifs de la base de projection correspondent respectivement aux valeurs $f_i\left(\lambda_i\right)$ de la fonction de transfert aux différentes longueurs d'ondes λ_i.

Afin d'illustrer ces propos, on donne l'expression de la fonction de transfert globale $f\left(\lambda\right)$ à l'ordre n dans la base des polynômes de Lagrange, qui s'écrit :

$$f\left(\lambda\right)=\sum_{i=0}^{n}f_i\left(\lambda_i\right)L_i\left(\lambda\right)=\sum_{i=0}^{n}f_i\left(\lambda_i\right)\underbrace{\left(\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)}_{L_i\left(\lambda\right)} \tag{6.2.32}$$

Les valeurs de la fonction de transfert étant nécessairement compris entre 0 et 1, il nous sera possible de mettre en place un algorithme avec contraintes sur les coefficients du polynôme de Lagrange, ce qui correspond à contraindre les valeurs de la fonction de transfert, tel que $f_i\left(\lambda_i\right)\in\left[0,1\right],\ \forall\lambda$.

En particulier, dans notre cas correspondant au développement à l'ordre 2 de la fonction de transfert globale, on aura :

$$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{2} f_i(\lambda_i)L_i(\lambda)=\sum_{i=0}^{2} f_i(\lambda_i)\underbrace{\left(\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)}_{L_i(\lambda)} \tag{6.2.33}$$

Notons que l'indice i dans l'expression (6.2.33) représente trois longueurs d'ondes quelconques parmi les quatre possibles. En pratique, afin d'améliorer le conditionnement numérique du système, il est préférable de choisir les deux premières longueurs d'ondes proches et de prendre pour dernière longueur d'onde une qui soit très éloignée des deux précédentes[65]. En effet, cela a pour première conséquence de « casser » l'effet linéarisant potentiel d'un choix de longueurs d'ondes proches, ce qui améliorera la sensibilité au coefficient quadratique du polynôme d'interpolation. De plus, cela limitera également les éventuels phénomènes de Runge[66].

Notons également que c'est à l'aide de cette dernière méthode (méthode « TNL.Tabc ») que nous établirons la méthode de sélection des longueurs d'ondes optimales, car le modèle (6.2.30) ne souffre ni d'un biais dû à l'approximation de Wien, ni d'un rapport de flux induisant un biais systématique en présence de bruit.

Rappelons que l'illustration du biais systématique induit par la présence de bruit dans les modèles basés sur le rapport de flux à fait l'objet de la section 5.4. Bien qu'établie dans le cadre des méthodes bi-spectrales, celle-ci s'étend tout naturellement aux méthodes multi-spectrales.

6.3. Nombre de degrés de liberté du système d'équation des méthodes basées sur le rapport de flux

Remarque préliminaire : Cette section étant particulièrement calculatoire, elle a été reléguée en Annexe A.5 p.311. Ainsi, seuls les principaux résultats seront présentés ici.

L'idée initiale de l'extension de la méthode bi-spectrale à plusieurs longueurs d'ondes était de pouvoir estimer la température, ainsi que les deux coefficients $\{X,Y\}$ du polynôme d'ordre 2 modélisant la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité), à partir du rapport des mesures de flux effectuées à 3 longueurs d'ondes différentes, car le rapport permettait de s'affranchir d'un coefficient.

---

[65] Dans l'idéal, si le rapport signal sur bruit est favorable, il est préférable de prendre la plus éloignée de toutes.

[66] Du point de vue de l'interpolation polynomiale « pure », on montre qu'un choix de points régulièrement espacés conduit à des phénomènes de divergence (oscillations parasites) du polynôme d'interpolation. Néanmoins, ces phénomènes peuvent être limités en choisissant des points dits de « Chebyshev-Gauss-Lobatto », qui d'un point de vue géométrique, revient à choisir les abscisses des points régulièrement espacés sur le cercle trigonométrique.

De plus, de prime abord, une autre idée séduisante des méthodes basées sur le rapport de flux est le nombre $C_N^2 = N\big(N-1\big)/2$ de combinaisons différentes de rapports de flux qu'il est possible de former à partir de N mesures de flux.

Cependant, on peut montrer (cf. Annexe Annexe A.5 p.311) que les équations du système formé à partir de l'ensemble de ces combinaisons sont liées. Par conséquent, pour avoir un système linéairement indépendant, il est nécessaire d'avoir une longueur d'onde de plus que de paramètres apparents dans le rapport simplifié de la fonction de transfert, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'avoir autant de longueurs d'ondes que de paramètres « réels » à estimer.

Ainsi, en particulier, si l'on veut estimer les paramètres (T,X,Y) il est nécéssaire d'avoir quatre longueurs d'ondes distinctes.

Bien entendu, ce constat est généralisable pour un plus grand nombre de longueurs d'ondes et une fonction de transfert d'ordre plus élevé (cf. Annexe A.5 p.311).

6.3.1. Conclusion

En conclusion, en numérotant les mesures de flux φ à la longueur d'onde λ_i sous la forme φ_i, nous avons montré qu'en formant tous les rapports de la forme $\varphi_i \,/\, \varphi_{i+1}$, nous pouvons en déduire par combinaisons de ces rapports n'importe quel autre rapport. Ceci traduit en fait, qu'il est indispensable d'introduire des rapports faisant intervenir à chaque fois au moins une longueur d'onde encore non utilisée, sans quoi nous aurons un système lié, et par conséquent, sous-déterminé.

6.4. Longueurs d'ondes optimales

Dans cette section, nous allons tout d'abord établir des critères permettant de déterminer la méthodologie à suivre pour effectuer les mesures sans amplifier les erreurs[67]. Puis, celle-ci sera mise à profit dans la présentation d'une méthode permettant de déterminer séquentiellement les longueurs d'ondes « pseudo-optimales[68] » au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température. Bien que cette méthode ne soit pas optimale, elle présente néanmoins l'avantage de visualiser l'évolution de l'écart-type sur la température en fonction de la valeur des longueurs d'ondes et de leur nombre. Enfin, les résultats obtenus à l'aide de la méthode d'optimisation globale[69] (avec et sans contraintes) seront présentés. Afin de simplifier l'interprétation des résultats, bien que les méthodes restent applicables dans le cas

[67] Dues au bruit de mesure et/ou à la méconnaissance des valeurs réelles des grandeurs concernées.

[68] La terminologie « pseudo-optimales » est due au fait que nous montrerons que cette méthode n'est pas celle qui fournit le minimum d'écart-type sur la température.

[69] Au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température.

d'une émissivité[70] variable, nous la supposerons constante et unitaire pour les deux méthodes : séquentielle et globale.

6.4.1. Méthodologie de mesure

Bien que les modèles présentés précédemment en section 6.2 (cf. équations (6.4.1) à (6.4.3)), consistent à effectuer des mesures de température sans pour autant maitriser tous les facteurs d'influence, il est cependant nécessaire de prendre certaines précautions afin de minimiser l'erreur de mesure sur la température.

D'une part, nous ne travaillerons que sur la partie croissante de la courbe de Planck car les sensibilités réduites du flux à la température χ_T et à la longueur d'onde χ_λ sont d'autant meilleures que l'on travaille à courtes longueurs d'ondes (6.4.4).

D'autre part, nous essayerons d'avoir un rapport de flux le plus grand possible afin de minimiser l'erreur de mesure $e_{\varphi_{\lambda_i}}$ sur le flux à la longueur d'onde λ_i (6.4.5) (on supposera que $e_{\varphi_{\lambda_i}} \approx e_{\varphi_{\lambda_j}}$).

De plus, nos filtres devront respecter un écart minimum $\Delta\lambda$ (6.4.6) pour ne pas amplifier l'erreur de mesure, tout en restant les plus proches possible afin de minimiser l'erreur de mesure due à la variation spectrale[71] de l'émissivité. Cependant, notons qu'aux très courtes longueurs d'ondes (UV), la relation (6.4.6) se linéarise et par conséquent il devient possible de choisir un écart constant entre deux longueurs d'ondes successives.

Remarquons que pour effectuer *N* rapports de flux indépendants, il est nécessaire d'avoir *N+1* mesures. Cela implique que pour estimer trois paramètres à partir de (6.4.1) ou (6.4.2), nous aurons besoin de *3+1=4* longueurs d'ondes. Cette précaution nous permettra d'éviter de lancer nos estimations avec un système sous-déterminé. Pour finir, notons d'une part, que l'approximation de Wien devient d'autant moins précise que la température et/ou la longueur d'onde diminue ($\lambda_i T << C_2$), et d'autre part, que l'erreur relative sur la température due à une erreur sur l'émissivité (en supposant que $e_{\varepsilon_{\lambda,T}} / \varepsilon_{\lambda,T} \approx cste$) diminue dans les mêmes circonstances (6.4.7).

---

[70] Dans cette section, afin d'alléger la présentation des méthodes de sélection des longueurs d'ondes optimales, nous parlerons d'émissivité au lieu de fonction de transfert globale de la chaine de mesure. Ces deux termes pouvant bien entendu être substitués sans perte de généralité, car ces deux fonctions doivent être bornées entre 0 et 1.

[71] Qui, dans l'idéal, doit pouvoir être modélisée par un polynôme d'ordre 2.

$$\text{Méthode "TNL.TXY"} \Rightarrow \begin{cases} T_{ij}\left(X,Y\right) = \dfrac{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j}-\dfrac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left[\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\dfrac{1+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)X+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)^2 Y}{1+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)X+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)^2 Y}\right)\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^{-5}\right]} \\ S_W\left(T,X,Y\right) = \sum_{j=2}^{N_f}\left(T - T_{1j}\left(X,Y\right)\right)^2 \end{cases} \tag{6.4.1}$$

$$\text{Méthode "TNL.Tbc"} \Rightarrow \begin{cases} R_{ij}\left(T,b,c\right) = \left(\dfrac{1+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)b+\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}-1\right)^2 c}{1+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)b+\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_m}-1\right)^2 c}\right)\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{-5}\left(\dfrac{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda_j T}\right)-1}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda_i T}\right)-1}\right) \\ S_P\left(T,b,c\right) = \sum_{j=2}^{N_f}\left(\dfrac{\varphi_1^{\exp}}{\varphi_j^{\exp}} - R_{1j}\left(T,b,c\right)\right)^2 \end{cases} \tag{6.4.2}$$

$$\text{Méthode "TNL.Tabc"} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_i\left(T,a,b,c\right) = \left(a+b\lambda_i+c\lambda_i^2\right)\dfrac{C_1\lambda_i^{-5}}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda_i T}\right)-1} \\ J\left(T,a,b,c\right) = \sum_{i=1}^{N_f}\left(\varphi_i^{\exp} - \varphi_i(T,a,b,c)\right)^2 \end{cases} \tag{6.4.3}$$

$$\begin{cases} \chi_T = \dfrac{1}{\varphi_\lambda(T)}\dfrac{d\varphi_\lambda(T)}{dT} \simeq \dfrac{C_2}{\lambda T^2} \\ \chi_\lambda = \dfrac{1}{\varphi_\lambda(T)}\dfrac{d\varphi_\lambda(T)}{d\lambda} \simeq \left(\dfrac{C_2}{\lambda T}-5\right)\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \tag{6.4.4}$$

$$\frac{e_{\varphi_{\lambda_i}}}{\varphi_{\lambda_i}} + \frac{e_{\varphi_{\lambda_j}}}{\varphi_{\lambda_j}} = \frac{e_{\varphi_{\lambda_i}}}{\varphi_{\lambda_i}}\left(1+\frac{\varphi_{\lambda_i}}{\varphi_{\lambda_j}}\frac{e_{\varphi_{\lambda_j}}}{e_{\varphi_{\lambda_i}}}\right) \simeq \frac{e_{\varphi_{\lambda_i}}}{\varphi_{\lambda_i}}, \qquad \forall(\varphi_{\lambda_i},\varphi_{\lambda_j}) \,/\, \frac{\varphi_{\lambda_i}}{\varphi_{\lambda_j}} << 1 \tag{6.4.5}$$

$$\Delta\lambda = \left|\lambda_j - \lambda_i\right| > \left.\frac{T{\lambda_j}^2}{C_2}\right|_{\lambda_i<\lambda_j} \tag{6.4.6}$$

$$\frac{e_T}{T} = \frac{\lambda T}{C_2}\frac{e_{\varepsilon_{\lambda,T}}}{\varepsilon_{\lambda,T}} \tag{6.4.7}$$

- ***Remarque concernant les dénominations des modèles*** :

La dénomination de chacun des modèles est composée du préfixe « TNL », signifiant Température obtenue par modèle Non Linéaire.

Les différents préfixes utilisés servent à indiquer les paramètres qui sont à estimer. En particulier, « TNL.TXY » indique que les paramètres à identifier sont $\{T, X, Y\}$ (modèle de variation quadratique); alors que « TNL.TX » sera utilisé pour indiquer que les seuls paramètres à estimer sont $\{T, X\}$ (modèle de variation linéaire), le paramètre Y du modèle « TNL.TXY » étant fixé à zéro.

Cette convention de notation sera utilisée pour chacun des différents modèles : « TNL.TXY », « TNL.Tbc », « TNL.Tabc ».

6.4.2. Modèle commun aux méthodes de minimisation séquentielle et globale

Les critères précédemment établis, exprimés pour la plupart sous forme d'inégalités, nous permettent de définir une méthodologie de mesure. Cependant, comme ils apparaissent en termes d'inégalités, ils n'indiquent pas avec précision quelles sont les longueurs d'ondes optimales auxquelles il faut effectuer nos mesures. Pour cela, il faut définir une nouvelle fonctionnelle à minimiser. La méthode utilisée pour l'estimation de la température étant basée sur la minimisation d'une fonction coût à l'aide d'une méthode de moindres carrés [26], il semble alors naturel de définir comme « longueurs d'ondes optimales[72] », celles qui minimisent l'écart-type sur la température estimée. La détermination des différentes longueurs d'ondes optimales sera réalisée à l'aide de la fonction coût $J(T, a, b, c)$ (6.4.3) associée au modèle « TNL.Tabc », car celui-ci est le seul (comparé aux autres modèles proposés) qui ne nécessite ni l'approximation de Wien, ni ne présente de biais systématiques en présence d'un bruit additif au flux et de moyenne nulle[73]. Les propriétés statistiques de l'estimateur des paramètres associées à (6.4.3) et « fourni » par la méthode des moindres carrées sont données par la matrice de Variance-Covariance, matrice à partir de laquelle on peut déterminer les écart-types σ_{β_i} des différents paramètres, et en particulier, celui de la température σ_T. Le modèle « TNL.Tabc » (6.4.3) étant non linéaire, nous utiliserons l'expression approchée de la matrice de Variance-Covariance des moindres carrés ordinaires, qui est donnée pour un vecteur paramètres $\boldsymbol{\beta} = (T, a, b, c)$, sous hypothèses d'un bruit additif, indépendant, identiquement distribué (variance σ^2_{bruit} constante[74], et moyenne nulle), par :

[72] Ou « pseudo-optimales » dans le cas de la sélection séquentielle.

[73] Ce qui n'est pas le cas des méthodes basées sur le rapport de flux, comme cela a été démontré en section 5.4.

[74] En statistique, on emploi également le terme « d'Homoscédasticité », pour désigner le fait que la variance des erreurs stochastiques soit constante (identique pour chaque observation).

$$\mathrm{cov}\left(\boldsymbol{\beta}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_T^2 & \mathrm{cov}\left(T,a\right) & \mathrm{cov}\left(T,b\right) & \mathrm{cov}\left(T,c\right) \\ \mathrm{cov}\left(T,a\right) & \sigma_a^2 & \mathrm{cov}\left(a,b\right) & \mathrm{cov}\left(a,c\right) \\ \mathrm{cov}\left(T,b\right) & \mathrm{cov}\left(a,b\right) & \sigma_b^2 & \mathrm{cov}\left(b,c\right) \\ \mathrm{cov}\left(T,c\right) & \mathrm{cov}\left(a,c\right) & \mathrm{cov}\left(b,c\right) & \sigma_c^2 \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\sigma_{noise}^2 \quad (6.4.8)$$

Avec $\boldsymbol{X}$ la matrice de sensibilité, définie par :

$$\boldsymbol{X} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial T} & \frac{\partial \varphi_N}{\partial a} & \frac{\partial \varphi_N}{\partial b} & \frac{\partial \varphi_N}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (6.4.9)$$

On prendra pour valeur de l'écart-type du bruit, celui que l'on a expérimentalement avec la caméra infrarouge, et ayant pour valeur $\sigma_{bruit} \approx 8,97.10^4\, W.m^{-2}$ (soit $7,43.10^{-3}\,\%$ du maximum de la loi de Planck).

6.4.3. Longueurs d'ondes « Pseudo-Optimales » : Méthode Séquentielle

6.4.3.1. *Principe de la Méthode de Sélection Séquentielle*

La méthode de sélection séquentielle de longueurs d'ondes « pseudo-optimales » consiste à choisir pour premier filtre de longueur d'onde λ_{opt1}, celui qui minimise l'écart-type σ_T sur la température (6.4.8), en supposant que la mesure est mono-spectrale[75]. Il n'y a donc qu'un seul paramètre à estimer[76], la température T. La matrice de sensibilité $\boldsymbol{X}$ n'est alors composée que de la première colonne de (6.4.9). Les résultats obtenus pour la sélection de λ_{opt1} sont illustrés en Figure 6.1 et Figure 6.2. Les résultats obtenus sont bien entendu identiques à ceux de la section 4.4. En particulier, on remarque que la longueur d'onde optimale est légèrement inférieure à celle donnant le maximum de flux (Figure 6.1), et que l'écart-type augmente lorsque le rapport signal sur bruit ou la sensibilité du flux à la température $\varphi_T.\chi_T$ (6.4.4) diminuent (Figure 6.2). Notons également, que la longueur d'onde optimale obtenue est indépendante de la valeur fixée pour l'émissivité[77] (cf. section 4.4).

[75] Les détails de la méthode ont été présentés en section 4.4, et plus précisément en section A.3.1 p.257 dans le cas de l'approximation de Wien. La démarche est ici analogue, si ce n'est l'emploi de la loi de Planck (6.4.3) (et non de l'approximation de Wien), impliquant une minimisation numérique.

[76] L'émissivité est supposée constante.

[77] La valeur de l'émissivité à ici été fixée égale à 1 uniquement pour des raisons de représentations graphiques.

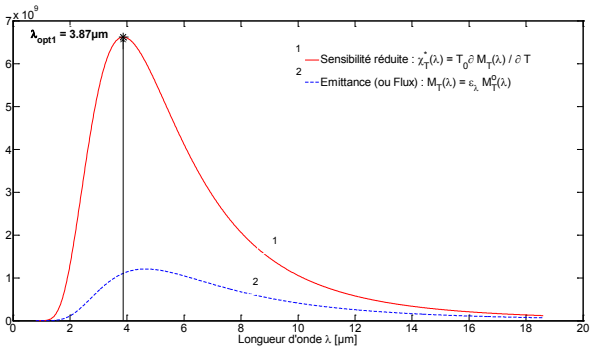


Figure 6.1 : Sensibilité réduite du flux à la température pour une émissivité unitaire ($\varepsilon_\lambda = 1$), $T_0 = 623K$, et avec $M_T(\lambda)$ donnée par (6.4.3).

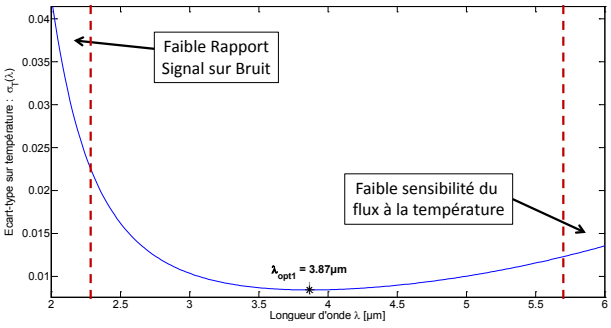


Figure 6.2 : Ecart-type de la température pour une émissivité unitaire ($\varepsilon_\lambda \equiv a = 1$), avec σ_T donné par (6.4.8), et $\beta_0 \equiv T_0 = 623K$ (une seule longueur d'onde : λ_1 ; et le paramètre T)

La sélection du second filtre est réalisée en fixant $\lambda_1 = \lambda_{opt1} \approx 3{,}87\mu m$, et en cherchant pour seconde longueur d'onde, la plus courte ($\lambda_{opt21} \approx 2{,}64\mu m$, ici) qui minimise l'écart-type local de la température dans le modèle « TNL.Ta » (cf. Figure 6.3) tout en appartenant à la gamme spectrale de la caméra. Cette dernière contrainte justifie le fait que λ_{opt21} ait été choisie à la place de λ_{opt22} car cette dernière est en dehors de la gamme spectrale de la caméra.

Notons la présence d'une asymptote verticale ($\sigma_T \to \infty$) en $\lambda_2 \approx 3{,}87\mu m$. Cela peut être expliqué par le fait que le problème à résoudre devienne mal posé (et par conséquent[78] numériquement mal conditionné) et mène ainsi à des écart-types infinis. Le caractère mal posé provient du fait qu'il y ait plus d'inconnues que d'équations (et donc une infinité de solutions) : les deux paramètres (T, a), et une seule équation (dépendant de λ_2). Pour $\lambda_2 < \lambda_{opt21}$ et $\lambda_2 > \lambda_{opt22}$, l'augmentation de l'écart-type $\sigma_T(\lambda_2)$ est respectivement due au faible rapport signal sur bruit et à la décroissance de la sensibilité du flux à la température. Enfin, dans le cas $\lambda_{opt21} < \lambda_2 < \lambda_{opt22}$, $\sigma_T(\lambda_2)$ augmente car le critère (6.4.6) est de moins en moins respecté.

Remarque : Ayant choisi comme 1ère longueur d'onde « pseudo-optimale » celle donnée par la minimisation en mono-spectrale (section 4.4.2.2), cela a pour conséquence directe que le couple des deux longueurs d'ondes « pseudo-optimales » sera à priori différent des longueurs d'ondes optimales (5.9.45) définies pour la mesure bi-spectrale (section 5.9.2). En effet, les longueurs d'ondes optimales en bi-spectrale sont $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{opt}}^{\boldsymbol{bi}} = \left\{\lambda_{opt1}^{bi} \approx 2.94\mu m ; \lambda_{opt2}^{bi} \approx 7.17\mu m\right\}$, et les longueurs d'ondes pseudo-optimales les plus proches de ce couple sont $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{opt}}^{\boldsymbol{seq}} = \left\{\lambda_{opt1}^{seq} \approx 3.87\mu m ; \lambda_{opt2}^{seq} \approx 7.23\mu m\right\}$. Les écart-types

[78] Notons que la réciproque est fausse. En effet, il existe des problèmes bien posés (au sens fonctionnel), mais qui sont numériquement mal conditionnés.

associés sont $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{opt}}^{\boldsymbol{bi}}\right) \approx 0{,}02\,K$, et $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{opt}}^{\boldsymbol{seq}}\right) \approx 0{,}03\,K$. Ces deux résultats sont très proches en terme d'écart-type de la température, cependant, ils supposent tous deux de prendre une longueur d'onde hors de la gamme spectrale de la caméra. Enfin, pour clore la remarque, notons que si l'on avait choisi $\lambda_{opt1}^{seq} = \lambda_{opt1}^{bi} \approx 2.94\mu m$ pour 1ère longueur d'onde pseudo-optimale, alors nous aurions trouvé $\lambda_{opt2}^{seq} \approx 7.17\mu m \equiv \lambda_{opt2}^{bi}$ comme seconde longueur d'onde pseudo-optimale.

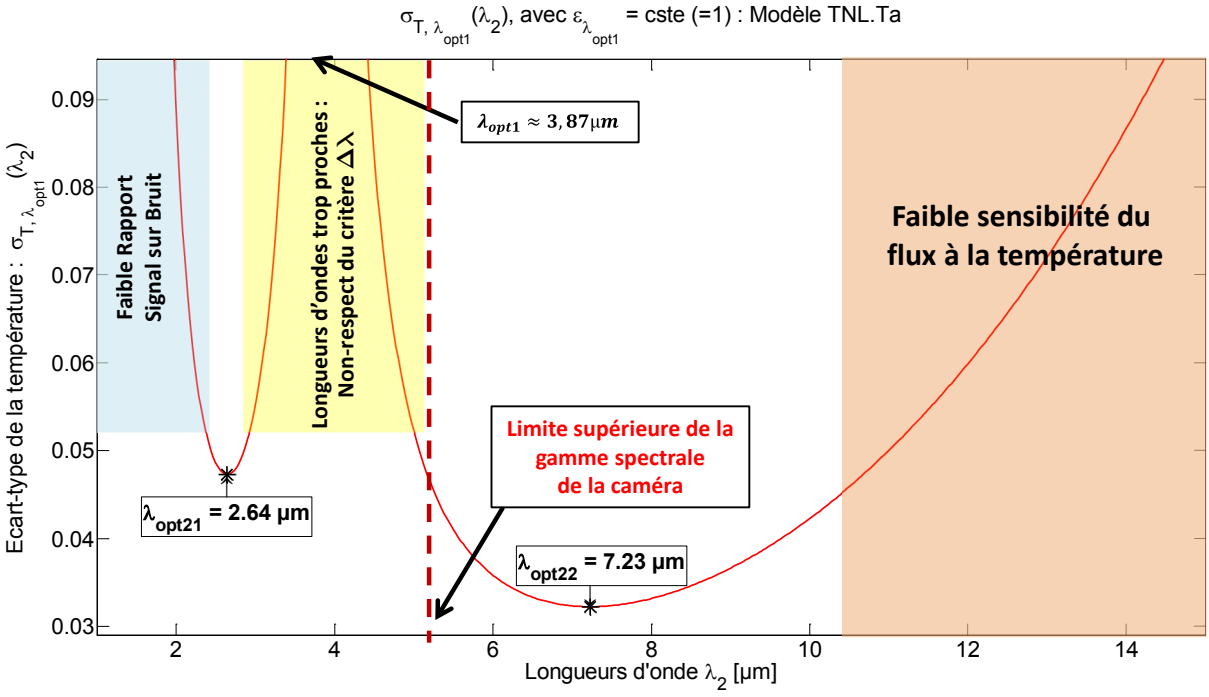


Figure 6.3 : Ecart-type de la température pour une émissivité unitaire ($\varepsilon_{\lambda_1} = \varepsilon_{\lambda_2} = 1$), avec $\lambda_1 = \lambda_{opt1}$ fixée, σ_T donné par (6.4.8) (Modèle « TNL.Ta »), et $\beta_0 \equiv \left(T_0, a_0\right) = \left(623K\,;1\right)$ (une seule longueur d'onde variable : λ_2 ; et deux paramètres : $\{T, a\}$) .

En poursuivant la procédure afin d'obtenir la troisième longueur d'onde (λ_{opt3}) qui minimise l'écart-type de la température du modèle « TNL.Tab » avec $\left(\lambda_{opt1}, \lambda_{opt21}\right)$ fixées, on obtient la Figure 6.4 qui montre qu'il n'y a que deux longueurs d'ondes $\left\{\lambda_{opt31} \approx 2{,}05\mu m\,; \lambda_{opt32} \approx 3{,}34\mu m\right\}$ qui appartiennent à la gamme spectrale de la caméra.

En poursuivant le processus à partir de chacune des deux longueurs d'ondes $\left\{\lambda_{opt31} \approx 2{,}05\mu m\,; \lambda_{opt32} \approx 3{,}34\mu m\right\}$, les solutions possibles pour la 4ème longueur d'onde (λ_{opt4}) minimisant l'écart-type de la température du modèle « TNL.Tabc » avec $\left(\lambda_{opt1}, \lambda_{opt21}, \lambda_{opt3}\right)$ fixées sont représentées Figure 6.5 pour $\lambda_{opt3} = \lambda_{opt31} \approx 2{,}05\mu m$, et Figure 6.6 pour $\lambda_{opt3} = \lambda_{opt32} \approx 3{,}34\mu m$.

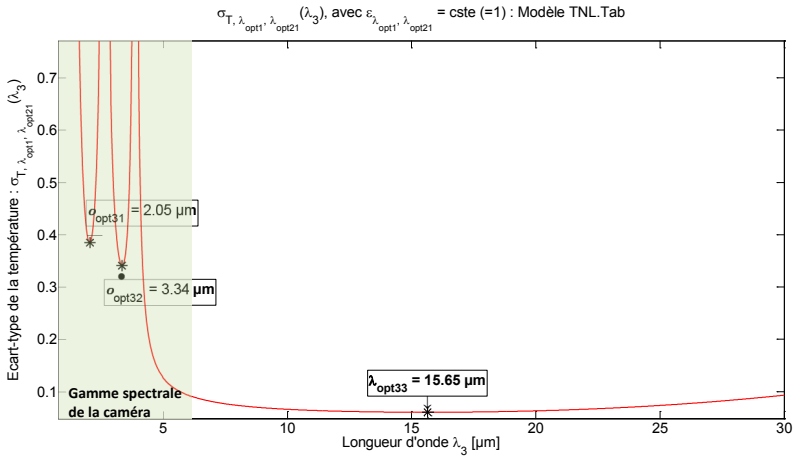


Figure 6.4 : Ecart-type de la température pour une émissivité unitaire ($\varepsilon_{\lambda_1} = \varepsilon_{\lambda_2} = \varepsilon_{\lambda_3} = 1$), avec $\left(\lambda_1 = \lambda_{opt1}\,;\lambda_2 = \lambda_{opt21}\right)$ fixées, σ_T donné par (6.4.8) (Modèle « TNL.Tab »), et $\beta_0 \equiv \left(T_0, a_0, b_0\right) = \left(623K\,;1\,;0\right)$ (une seule longueur d'onde variable : λ_3 ; et trois paramètres : $\left\{T, a, b\right\}$).

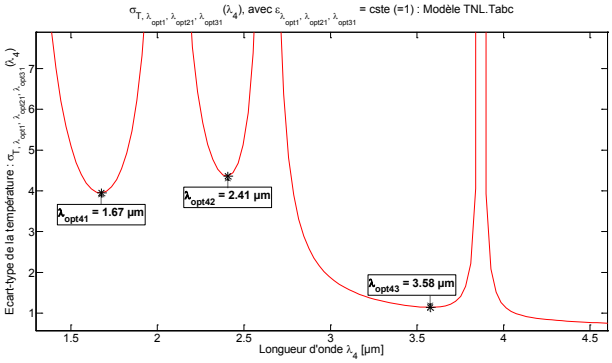


Figure 6.5 : Ecart-type de la température pour $\varepsilon(\lambda) \equiv 1$, $\left(\lambda_{opt1}\,;\lambda_{opt21}\,;\lambda_{opt31}\,;\lambda_4\right)$, Modèle « TNL.Tabc », $\boldsymbol{\beta}_0 = \left(623K, 1, 0, 0\right)$.

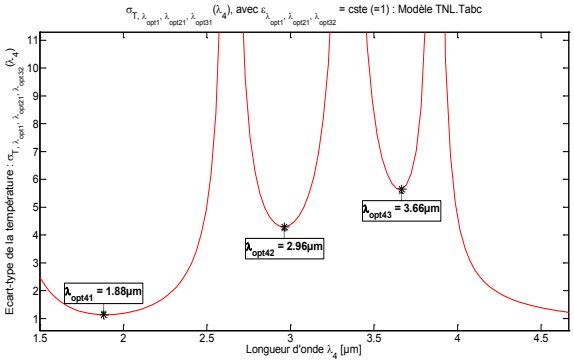


Figure 6.6 : Ecart-type de la température pour $\varepsilon(\lambda) \equiv 1$, $\left(\lambda_{opt1}\,;\lambda_{opt21}\,;\lambda_{opt32}\,;\lambda_4\right)$, Modèle « TNL.Tabc », $\boldsymbol{\beta}_0 = \left(623K, 1, 0, 0\right)$

La question est alors de savoir quel est le meilleur ensemble de longueurs d'ondes parmi les deux choix possibles : $\left(\lambda_{opt3}\,;\lambda_{opt4}\right) = \left(\lambda_{opt31} \approx 2{,}05\mu m\,;\lambda_{opt43} \approx 3{,}58\mu m\right)$ ou $\left(\lambda_{opt3}\,;\lambda_{opt4}\right) = \left(\lambda_{opt31} \approx 3{,}34\mu m\,;\lambda_{opt41} \approx 1{,}88\mu m\right)$. On observe graphiquement que ces deux solutions semblent donner un écart-type similaire sur la température, ce qui est confirmé par la valeur numérique qui donne strictement le même résultat dans les deux cas, et vaut $\sigma_T \approx 1{,}14\,K$. Cependant, du point de vue expérimental, la longueur d'onde $\lambda_{opt41} \approx 1{,}88\mu m$ étant très proche de la limite basse de la gamme spectrale de la caméra, il semble préférable de choisir $\lambda_{opt4} = \lambda_{opt43} \approx 3{,}58\mu m$. De plus, un autre constat favorable au choix de cette longueur d'onde est que c'est-elle qui minimise la largeur de bande spectrale des filtres. En effet, si l'on choisit $\lambda_{opt4} = \lambda_{opt43} \approx 3{,}58\mu m$, les différents

filtres solutions auront pour longueurs d'ondes $\left(\lambda_{opt31};\lambda_{opt21};\lambda_{opt43};\lambda_{opt1}\right)=\left(2.05;2.64;3.58;3.87\right)$ ayant une largeur de bande spectrale $\Delta_{\max}^{1-31}\lambda=1{,}82\mu m$; alors que si l'on choisit pour longueurs d'ondes $\left(\lambda_{opt41};\lambda_{opt21};\lambda_{opt32};\lambda_{opt1}\right)=\left(1.88;2.64;3.34;3.87\right)$, la largeur de bande spectrale est $\Delta_{\max}^{1-41}\lambda=1{,}99\mu m$. L'intérêt de la diminution de la gamme spectrale étant de pouvoir approcher au mieux les variations spectrales de la fonction de transfert globale[79] (incluant l'émissivité) par un polynôme d'ordre 2. Ou tout du moins, de pouvoir interpoler les valeurs d'émissivité aux quatre longueurs d'ondes par un polynôme d'ordre 2. La difficulté étant de pouvoir « interpoler » quatre valeurs d'émissivité à l'aide de trois valeurs, la quatrième étant extrapolée, à cause de la température qui est également inconnue. Une synthèse des différentes solutions possibles ainsi que les écart-types associés est donnée Figure 6.7.

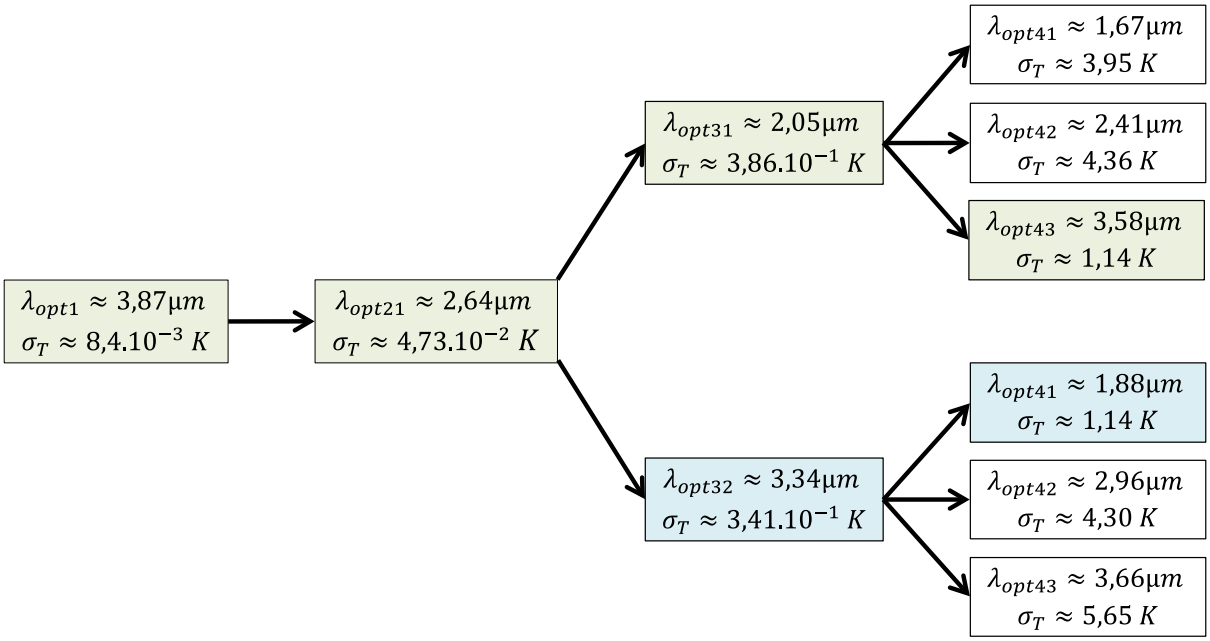


Figure 6.7 : Schémas de synthèse des différentes longueurs d'ondes « pseudo-optimales » obtenues par méthode de minimisation séquentielle.

On observe qu'à chaque fois qu'une longueur d'onde est rajoutée, l'écart-type se détériore d'environ un facteur 10.

Rappelons qu'à priori cette méthode n'est pas optimale, mais son intérêt est de pouvoir l'associer le cas échéant à la méthode globale optimale (qui sera présentée dans la section 6.4.4) afin de choisir les filtres les plus adaptés en cas de contraintes expérimentales, telles que l'indisponibilité ou l'inexistence de certains filtres, par exemple.

[79] Confondue dans cette section 6 avec la notion d'émissivité, pour des raisons de simplicité, mais sans perte de généralité.

6.4.3.2. *Vérification du critère* $\Delta_{\min}\lambda$ *et choix des longueurs d'ondes « Pseudo-Optimales »*

Une question qu'il est légitime de se poser est de savoir si le critère $\Delta_{\min}\lambda$ (6.4.6) est respecté pour chaque couple de longueurs d'ondes.

En considérant que l'on choisisse pour longueurs d'ondes « pseudo-optimales » $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} = \{2.05;2.64;3.58;3.87\}\mu m$, les écarts successives entre les longueurs d'ondes sont $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} = \{0.58;0.94;0.29\}\mu m$, et les écarts définis par le critère (6.4.6) sont $\boldsymbol{\Delta}_{\min}\boldsymbol{\lambda} = \{0.30;0.55;0.65\}\mu m$. On remarque que le critère $\Delta_{\min}\lambda$ est respecté pour les deux premiers couples de longueurs d'ondes, mais pas pour le dernier. Cependant, si la gamme spectrale de la caméra le permet, il sera également possible de choisir une quatrième longueur d'onde permettant de respecter le critère $\Delta_{\min}\lambda$ avec le dernier couple. En effet, en observant la Figure 6.5, on remarque que pour toute longueur d'onde au-delà de $4\mu m$, l'écart-type sur la température sera plus faible que celui obtenu avec $\lambda_4 = 3.87\mu m$, i.e. $\sigma_T(\lambda_4 = 3.87\mu m) > \sigma_T(\lambda > 4\mu m)$. En particulier, si l'on choisit pour quatrième longueur d'onde $\lambda_4 = 5.5\mu m$ (limite haute de la gamme spectrale de la caméra), on a alors $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}}^{\max_cam} = \{2.05;2.64;3.58;5.5\}\mu m$, $\boldsymbol{\Delta}_{\max}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} = \{0.58;0.94;1.92\}\mu m$, et on obtient pour écart-type $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}}^{\max_cam}\right) \approx 0,73\,K$. On améliore ainsi théoriquement[80] l'écart-type d'un facteur 1,56.

On peut également s'intéresser, comme cela a été fait section 5.9.2, au rapport qui existe entre $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq}}$ et $\boldsymbol{\Delta}_{\min}\boldsymbol{\lambda}$. On obtient $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} / \boldsymbol{\Delta}_{\min}\boldsymbol{\lambda} = \{1.93;1.71;0.45\}\mu m$. On voit alors que l'on a comme en section 5.9.2, $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} \approx 1,9\,\boldsymbol{\Delta}_{\min}\boldsymbol{\lambda}$, pour les deux premières valeurs de rapports. Cependant, notons que les valeurs des deux derniers rapports peuvent être ajustées en choisissant pour $\{\lambda_3;\lambda_4\}$, des longueurs d'ondes qui soient plus proches de la limite haute de la gamme spectrale de la caméra.

En particulier, en conservant $\lambda_{opt1} \approx 3,87\mu m$ et en fixant λ_{opt43} à la borne supérieure de la gamme spectrale de la caméra, i.e. $\lambda_{opt43} \approx 3,58\,\mu m \rightarrow \lambda_{opt43} = 5,5\,\mu m$, il est possible de choisir pour longueurs d'ondes séquentielles « pseudo-optimales » $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}}^{\max_cam} = \{2.05;2.64;3.87;5.5\}\mu m$, donnant pour écarts successifs entre les longueurs d'ondes $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}} = \{0.58;1.23;1.63\}\mu m$.

[80] Compte tenu de l'ensemble des hypothèses qui ont été fixées.

Les écarts définis par le critère (6.4.6) sont alors $\boldsymbol{\Delta}_{\min-2}\boldsymbol{\lambda} = \left\{0.30\,;0.65\,;1.31\right\}\mu m$, ce qui implique $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}} \,/\, \boldsymbol{\Delta}_{\min-2}\boldsymbol{\lambda} = \left\{1.93\,;1.89\,;1.25\right\}\mu m$, et $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}}^{\max_cam}\right) \approx 0{,}64\,K$.

On note que les deux premiers rapports respectent désormais $\boldsymbol{\Delta\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}} \approx 1{,}9\,\boldsymbol{\Delta}_{\min-2}\boldsymbol{\lambda}$, ce qui a permis une diminution de l'écart-type. Seul le dernier rapport n'a pu être ajusté à cause de la trop faible gamme spectrale de la caméra. Cependant, notons que l'écart-type de la température étant moins sensible à la plus grande longueur d'onde (cf. Figure 6.3 à Figure 6.6), il est préférable d'ajuster celle-ci en dernier.

Enfin, rappelons qu'à cause de contraintes expérimentales (disponibilités des filtres monochromatiques), nous n'avons pu disposer que des filtres $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \left\{2\,;2.35\,;2.85\,;4\right\}\mu m$, fournissant pour écart-type de la température $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}}\right) \approx 2{,}55\,K$, avec $\boldsymbol{\beta}_0 = \left(623K, 1, 0, 0\right)$.

6.4.3.3. *Synthèse partielle des résultats*

Dans le cadre d'une émissivité (ou fonction de transfert globale, incluant l'émissivité) supposée constante, et compte tenu de la gamme spectrale de la caméra, les longueurs d'ondes « pseudo-optimales » obtenue à l'aide de la méthode de sélection séquentielle sont :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} = \left\{2.05\,;2.64\,;3.58\,;3.87\right\}\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 1{,}14\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}}^{\max_cam} = \left\{2.05\,;2.64\,;3.58\,;5.5\right\}\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 0{,}73\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}}^{\max_cam} = \left\{2.05\,;2.64\,;3.87\,;5.5\right\}\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 0{,}64\,K \end{cases}} \qquad (6.4.10)$$

Et les contraintes expérimentales (disponibilité des filtres monochromatiques et sélection des longueurs d'ondes[81] avant la mise en place de la méthode séquentielle) ont imposé :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \left\{2\,;2.35\,;2.85\,;4\right\}\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 2{,}55\,K} \qquad (6.4.11)$$

6.4.4. Longueurs d'ondes optimales globales

Dans cette section, seront présentés les résultats obtenus en termes de longueurs d'ondes optimales pour des minimisations globales de l'écart-type de la température, sans contraintes, avec contraintes sur la gamme spectrale de la caméra, et avec contraintes spectrales forçant à rester sur la partie croissante de la courbe de Planck.

La méthode consiste à déterminer le minimum global (simultanément pour l'ensemble des longueurs d'ondes et pour l'ensemble des paramètres) de la fonction coût (6.4.3) à

[81] Les longueurs d'ondes ont initialement été sélectionnées à l'aide du critère $\Delta_{\min}\lambda$ (6.4.6) (cf. section 5.5 à 5.7).

l'aide de l'un des algorithmes de minimisation présentés en section 6.1, tel que celui de « Nelder-Mead », de « Levenberg-Marquardt » régularisé, ou de « Région de Confiance ». Cependant, notons que les minimisations avec contraintes sur la gamme spectrale seront ici réalisées à l'aide de l'algorithme de région de confiance.

Comme dans la section 6.4.3, on prendra pour valeur de l'écart-type du bruit, celui obtenu expérimentalement avec la caméra infrarouge, et ayant pour valeur $\sigma_{bruit} \approx 8.97.10^4\,W$ (soit $7.43.10^{-3}\,\%$ du maximum de la loi de de Planck). Les valeurs nominales des paramètres pour le calcul des dérivées de (6.4.9) seront également prises identiques à celles de la section 6.4.3, et seront donc définies par $\boldsymbol{\beta}_0 \equiv \left(T_0\,;a_0\,;b_0\,;c_0\right) = \left(623K\,;1\,;0\,;0\right)$.

6.4.4.1. *Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale non-contrainte*

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T,a,b,c\right)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_global}} = \left\{2.53\,;4.70\,;8.87\,;26.18\right\}\mu m \\ \sigma_T \approx 0{,}07\,K \end{cases} \tag{6.4.12}$$

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T,a,b\right)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_global}} = \left\{2.67\,;5.24\,;12.57\right\}\mu m \\ \sigma_T \approx 0{,}05\,K \end{cases} \tag{6.4.13}$$

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T,a\right)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_global}} = \left\{2.94\,;7.17\right\}\mu m \\ \sigma_T \approx 0{,}02\,K \end{cases} \tag{6.4.14}$$

Les résultats (6.4.14) obtenus pour[82] $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T,a\right)$, c'est-à-dire pour le modèle « TNL.Ta » (6.4.3) correspondant à une méthode bi-spectrale (sans approximation de Wien), appelle plusieurs commentaires.

D'une part, on remarque que les longueurs d'ondes optimales (6.4.14) sont les mêmes que celles que l'on aurait obtenues à l'aide des relations (5.9.45), relations analogues à la loi de Wien, mais pour l'obtention des longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type pour une méthode bi-spectrale sans approximation de Wien (cf. section 5.9.2). D'autre part, la Figure 6.8 montre que le minimum de l'écart-

[82] La dénomination $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T,a,b,c\right)$ est à comprendre au sens de l'utilisation du modèle « TNL.Tabc » : modélisation de la fonction de transfert globale par un polynôme d'ordre 2, et utilisation de 4 longueurs d'ondes.

type de la température défini par $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_global}} = \{2.94;7.17\}\mu m$ est unique (deux solutions symétriques), et correspond par conséquent au minimum global de l'écart-type.

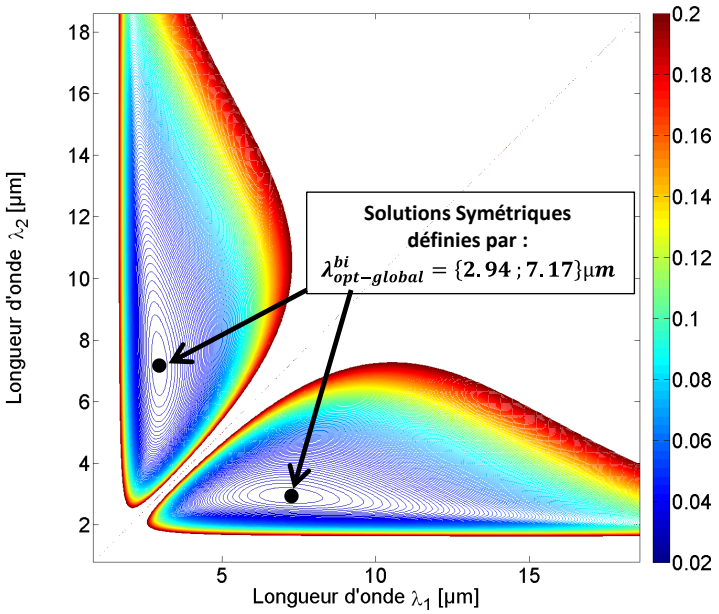


Figure 6.8 : Iso-valeurs de l'écart-type de la température (6.4.8) en bi-spectrale : Modèle « TNL.Ta » (6.4.3), $\boldsymbol{\beta}_0 \equiv \left(T_0, a_0\right) = \left(623K;1\right)$

Enfin, notons que ce constat justifie[83] à postériori l'hypothèse faite en section 5.9.1 (note 36, p.61) concernant l'existence d'un minimum unique, mais éventuellement symétrique.

6.4.4.2. *Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale contrainte à la gamme spectrale de la caméra*

Bien que ces différents ensembles de longueurs d'ondes ((6.4.12) à (6.4.14)) soient les meilleurs en termes de minimisation de l'écart-type sur la température, leur mise en œuvre expérimentale peut être délicate, car la gamme spectrale requise étant très étendue, il peut être difficile, voire impossible de trouver des détecteurs « couvrant » cette gamme spectrale.

Il peut alors être avantageux de contraindre l'estimation à la gamme spectrale du détecteur. Par exemple, en contraignant l'estimation à la gamme spectrale $\left[1.5\mu m;5.5\mu m\right]$, correspondant à celle de la caméra infrarouge qui sera utilisée expérimentalement, nous avons :

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T, a, b, c\right)$:

[83] Une justification plus rigoureuse consisterait à démontrer qu'il existe une bijection entre ces deux minimums $\forall\left(T, a\right)$, et plus généralement, qu'il est possible de définir des fonctions réciproques pour les minimas de σ_T.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_cam}} = \{2.14\,;3.39\,;4.76\,;5.50\}\,\mu m \\ \sigma_T \approx 0,32\,K \end{cases} \tag{6.4.15}$$

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv (T, a, b)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_cam}} = \{2.43\,;4.21\,;5.50\}\,\mu m \\ \sigma_T \approx 0,09\,K \end{cases} \tag{6.4.16}$$

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv (T, a)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_cam}} = \{2.93\ ;\ 5.50\}\,\mu m \\ \sigma_T \approx 0,03\,K \end{cases} \tag{6.4.17}$$

En comparant les résultats de (6.4.17) avec ceux de (6.4.14), on remarque que l'écart-type sur la température est peu sensible à la plus grande longueur d'onde. Ce résultat corrobore ceux de la section 4 à 4.3, et rappelé en section 6.4.1.

Notons que c'est également ici que les graphiques de la méthode « pseudo-optimale » se révèlent être d'un grand intérêt. En effet, en observant les Figure 6.3 à Figure 6.6, on remarque que les minimas (de l'écart-type sur la température) correspondant à la plus grande longueur d'onde, appartiennent à des « bassins » beaucoup plus évasés et plats que les autres. Ainsi, cela illustre que de grandes variations de la dernière longueur, induiront de relativement faibles[84] variations de l'écart-type sur la température.

6.4.4.3. *Longueurs d'ondes optimales pour une minimisation globale contrainte à la partie croissante de la courbe de Planck*

L'approximation de Wien étant d'autant meilleure que l'on se trouve à gauche du maximum de la courbe de Planck, on pourrait pour des raisons pratiques, telles que l'inter-validation des résultats expérimentaux à l'aide des différentes méthodes d'estimations (cf. section 6.2), et en particulier pour la méthode « TNL.TXY », vouloir contraindre l'estimation à la gamme spectrale correspondant à la partie croissante de la courbe de Planck. Dans ce contexte, l'estimation globale avec contrainte par $\lambda \in \left[1.5\mu m\,;2898\,/\,T\,\mu m\right]$[85] , donne :

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv (T, a, b, c)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_max\text{-}Planck}} = \{2.03\,;3.11\,;4.15\,;4.65\}\,\mu m \\ \sigma_T \approx 0,52\,K \end{cases} \tag{6.4.18}$$

[84] Par rapport à la variation de la longueur d'onde, ainsi qu'aux variations qui auraient été induites au voisinage des autres « bassins ».

[85] Dans notre cas, on a : $T = 623\,K \Rightarrow 2898\,/\,T \approx 4,65\,\mu m$.

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T, a, b\right)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\textbf{opt_max-Planck}} = \left\{2.32\,;3.79\,;4.65\right\}\mu m \\ \sigma_T \approx 0{,}14\,K \end{cases} \tag{6.4.19}$$

- Pour $\boldsymbol{\beta} \equiv \left(T, a\right)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\textbf{opt_max-Planck}} = \left\{2.82\,;4.65\right\}\mu m \\ \sigma_T \approx 0{,}03\,K \end{cases} \tag{6.4.20}$$

On constate que dans les deux cas d'estimations contraintes (sections 6.4.4.2 et 6.4.4.3), la plus grande longueur d'onde est toujours égale à la borne supérieure de la contrainte, ce qui laisse supposer que la longueur d'onde optimale est probablement en-dehors de l'intervalle.

Enfin, en comparant les résultats des sections 6.4.4.1 à 6.4.4.3, on remarque que l'écart-type de la température est d'autant plus dégradé par ajout de paramètres supplémentaires, que l'intervalle d'estimation est contraint sur une gamme spectrale réduite. En effet, d'une part, à nombre de paramètres égaux, les écart-types sur la température augmentent d'autant plus que la gamme spectrale d'estimation est réduite (exception faite des mesures bi-spectrales[86]) ; et d'autre part, on observe également que l'écart-type augmente d'autant plus par ajout de paramètres, que la gamme spectrale d'estimation est réduite.

6.4.5. Synthèse des longueurs d'ondes optimales, pseudo-optimales, et remarques concernant l'extension des méthodes

6.4.5.1. *Synthèse des longueurs d'ondes optimales et pseudo-optimales*

Les différents résultats obtenus pour les quatre longueurs d'ondes optimales globales et pseudo-optimales, non contraintes et contraintes sur la gamme spectrale de la caméra, sont regroupés sur la Figure 6.9.

[86] La raison étant celle annoncée en fin de section 6.4.4.2, i.e. la faible sensibilité à la plus grande longueur d'onde.

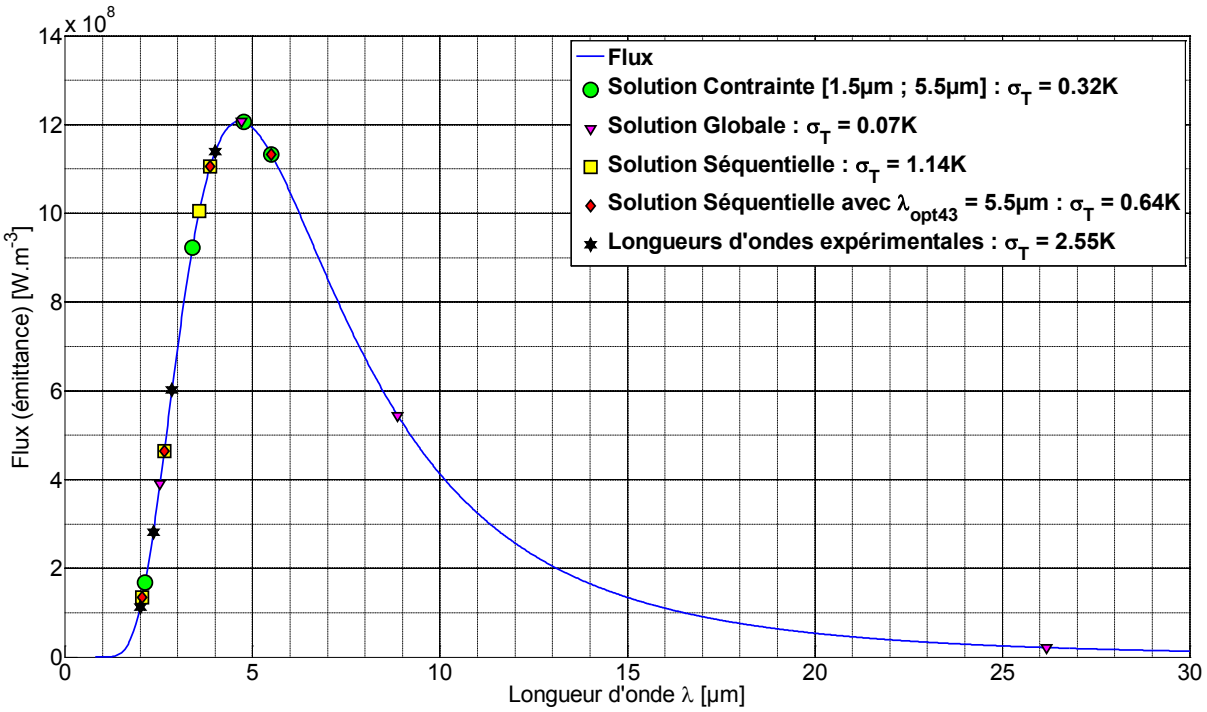


Figure 6.9 : Synthèse sur courbe de Planck pour $T = 623K$, des longueurs d'ondes optimales et « pseudo-optimales », avec et sans contraintes sur la gamme spectrale.

Les différentes longueurs d'ondes de la Figure 6.9 ont pour valeurs :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_cam}} = \{2.14\,;3.39\,;4.76\,;5.50\}\,\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 0,32\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_global}} = \{2.53\,;4.70\,;8.87\,;26.18\}\,\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 0,07\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq}} = \{2.05\,;2.64\,;3.58\,;3.87\}\,\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 1,14\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{opt_seq\text{-}2}}^{\max_cam} = \{2.05\,;2.64\,;3.87\,;5.5\}\,\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 0,64\,K \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \{2\,;2.35\,;2.85\,;4\}\,\mu m \Rightarrow \sigma_T \approx 2,55\,K \end{cases} \quad (6.4.21)$$

6.4.5.2. *Remarques concernant l'extension des méthodes*

Bien que pour des raisons de simplifications d'interprétation des résultats, l'écart-type du bruit sur le flux ainsi que l'émissivité ont été supposés constants[87], notons que la méthode d'optimisation globale, de même que la méthode de sélection séquentielle de longueurs d'ondes « pseudo-optimales » présentée en section 6.4.3, peuvent également s'appliquer lorsque l'écart-type du bruit n'est pas constant[88], lorsque la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité) varie spectralement, et lorsque les paramètres

[87] Ou tout du moins, en ce qui concerne l'émissivité, avoir des valeurs identiques aux différents nœuds d'interpolation, ce qui est moins contraignant que de conserver la même valeur sur toute la gamme spectrale (ce que suppose une fonction constante).

[88] En statistique on parle également « d'Hétéroscédasticité ». Dans ce cas, il est possible d'appliquer la méthode proposée en utilisant les moindres carrés pondérés, dont la matrice de pondération sera, par exemple, constituée des inverses des variances aux différentes longueurs d'ondes [26].

(en plus de la gamme spectrale) sont contraints. Lorsque cela est le cas, il devient alors avantageux d'utiliser la formule d'interpolation de Lagrange (section 6.2.4.2) pour la fonction de transfert globale[89].

En effet, l'interpolation de Lagrange présente de nombreux avantages, dont celui de faire apparaitre la valeur de la fonction transfert globale aux différents nœuds d'interpolation comme coefficients des polynômes de la base d'interpolation. Cela simplifie non seulement la mise en place de contraintes sur les coefficients, qui doivent être compris[90] entre 0 et 1, mais également l'implémentation éventuelle de connaissances à priori, ou expérimentales[91], concernant ces coefficients.

Rappelons que pour des raisons de contraintes expérimentales[92], nous n'avons pu disposer que des filtres $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \left\{2;2.35;2.85;4\right\}\mu m$, fournissant pour écart-type de la température $\sigma_T\left(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}}\right) \approx 2{,}55\,K$, avec $\boldsymbol{\beta}_0 = \left(623K,1,0,0\right)$.

6.5. Validation Numérique : comparaison des différents modèles pour la mesure de température dans la gamme infrarouge

Afin de comparer les différents modèles proposés[93], nous avons simulé par méthode de Monte-Carlo 1000 flux (émittances) bruités[94] (Tableau 6.2) et non bruités (Tableau 6.1) à partir de quatre variations différentes d'émissivité (cf. Figure 6.10) : constante, linéaire, d'ordre 2 et de type Drude ($\varepsilon_\lambda \propto \lambda^{-1/2}$). Nous avons pris garde à ce que les variations d'ordre 2 et de type Drude soient significatives sur l'intervalle spectral (infrarouge) de l'étude, et en accord avec le comportement expérimental de certains matériaux.

---

[89] Ou l'émissivité, si l'on suppose connue les autres fonctions de transfert de la chaine de mesure.

[90] De par leurs définitions, l'émissivité et les fonctions de transfert devant être comprises entre 0 et 1, leur produit le sera également.

[91] Dans le cas où ils seraient mesurés par une méthode ou un appareil de mesure complémentaire, ou donnés par des tables, par exemple.

[92] Disponibilités des filtres monochromatiques, filtres déjà existant, et sélection des nouveaux filtres à l'aide du critère $\Delta_{\min}\lambda$, car commandé avant mise en place des méthodes de sélection optimale.

[93] Les modèles sont : « TNL.TXY », « TNL.Tabc », et « TNL.Tbc », ainsi que les sous-modèles associés correspondant à un nombre inférieur de paramètres utilisés pour interpoler la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité), et rappelés en section 6.4.1.

[94] Bruit normal ayant pour écart-type celui mesuré sur les images thermographiques expérimentales dans les mêmes conditions, $\sigma_{bruit} \approx 8.97.10^4\,W$, soit environ $7.43.10^{-3}\,\%$ du maximum de la loi de Planck.

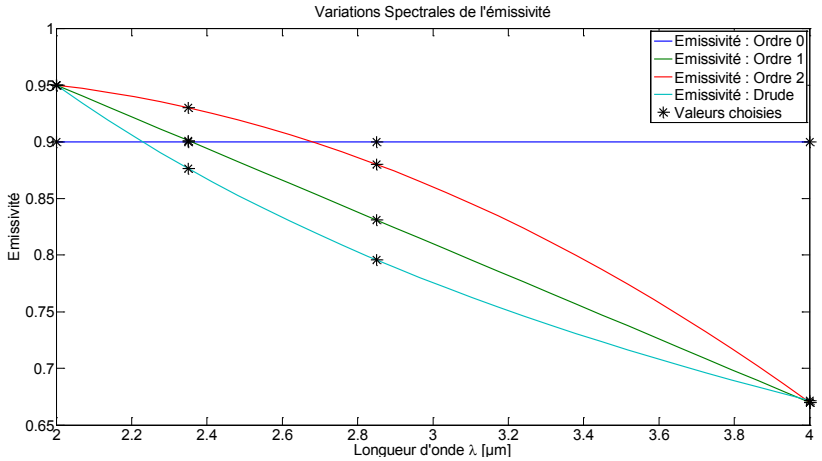


Figure 6.10 : Variations spectrales de l'émissivité utilisées pour la validation numérique

Remarque : De nouveau, dans cette section, pour des raisons de simplicité et afin de donner une certaines justification physique au cas test de la variation de type Drude, nous assimilerons le terme d'émissivité à celui de fonction de transfert globale (incluant l'émissivité), et cela sans perte de généralité car la démarche est strictement analogue dans les deux cas[95]. Cependant, dans le cas expérimental où certaines fonctions de transfert peuvent être connues, il peut être avantageux d'implémenter cette information dans les différents modèles d'estimation en suivant une démarche analogue à celle présentée en section 5.8, plutôt que d'estimer les coefficients de la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité).

Les tableaux ci-dessous donnent les résultats obtenus pour les quatre filtres choisis expérimentalement : $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \{2;2.35;2.85;4\}\,\mu m$.

Nous avons appelé Tm, la température moyenne des T_{ij} correspondant à des mesures bi-chromatiques obtenues en supposant une émissivité constante dans (6.4.1) ($X=Y=0$). L'abréviation TNL signifie que la température est obtenue à partir d'une estimation de type « moindres carrés non linéaires » (cf. (6.4.1) à (6.4.3)) en utilisant l'algorithme régularisé de « Levenberg-Marquardt » décrit en section 6.1 (page 75). La dénomination $TNL.TXY$ (respectivement $TNL.TX$), implique qu'on utilise (6.4.1) avec $N_f=4$ (resp. $N_f=3$), et avec pour paramètres inconnus (T,X,Y) (resp. (T,X)). Notons qu'afin d'alléger la présentation des résultats des différents tableaux, et en vertu du constat de la section 5.3.3, lorsque $N_f=3$ nous prenons les trois plus courtes longueurs d'ondes parmi les quatre utilisées pour réaliser les tableaux[96]. On utilisera une notation

[95] L'émissivité ou la fonction de transfert globale (incluant l'émissivité) étant toute deux comprises entre 0 et 1 (cf. note 90, p.90). On supposera donc dans cette section que les différentes fonctions de transfert de la chaine de mesure sont constantes et unitaires.

[96] Les simulations en prenant les trois plus grandes longueurs d'onde, ont également été réalisées, et le constat de la section 5.3.3 s'est avéré vérifié dans chacun des cas (avec bruit ou sans bruit, et quel que soit la variation d'émissivité).

analogue pour les méthodes/modèles *TNL.Tbc* (6.4.2), *TNL.Tabc* (6.4.3), et *TL.TXY*[97] (décrite en section 6.2.2, p.80).

Notons qu'afin de limiter au mieux les effets d'éventuels problèmes de mauvais conditionnement, la température estimée par la méthode *TL.TXY* servira de température d'initialisation pour les autres méthodes/modèles d'estimation, et tous les autres paramètres seront initialisés avec la valeur 0,5.

Enfin, précisons que bien que cela ne soit pas présenté à des fins d'allègement de présentation, il a été vérifié que les différentes méthodes donnaient des erreurs nulles en l'absence de biais de modèle et de bruit. En particulier, la méthode[98] *TNL.TXY* donne bien des erreurs nulles lorsque le flux simulé (sans bruit) est basé sur l'approximation de Wien.

6.5.1. Effet préjudiciable des systèmes surdéterminés sur l'estimation de la température en cas de biais de modèle

Le choix d'adapter le nombre de longueurs d'ondes utilisées en fonction du nombre de paramètres à estimer, c'est-à-dire de conserver autant de longueurs d'ondes[99] que de paramètres à estimer, peut surprendre de prime abord.

En effet, on pourrait être tenté de vouloir utiliser à chaque fois les quatre longueurs d'ondes, y compris lorsque le nombre de paramètres à estimer serait inférieur à quatre, i.e. pour les modèles *TNL.TX, TNL.Tb, TNL.Tab,* et même éventuellement pour *TNL.Ta*. Cependant, les simulations numériques, qui ne seront pas présentées ici afin de ne pas alourdir la présentation et la taille des tableaux, montrent que cela pénalise fortement la précision de l'estimation en présence de biais de modèle[100]. Cela peut s'expliquer par le fait que les systèmes surdéterminés (plus de données que d'inconnues) sont généralement mal posés par nature (pas de solution unique lorsque le nombre d'équation est supérieur au nombre de degrés de libertés), ce qui se traduit numériquement par un problème mal conditionné, qui aura pour conséquence d'amplifier les erreurs dues aux différents biais. A titre d'exemple, pour la méthode *TNL.Ta*, dès qu'il y a présence d'un biais de modèle (i.e. dès que l'émissivité simulée n'est plus constante), l'erreur absolue sur la température est de l'ordre de 53K pour une émissivité simulée d'ordre 1, de 62K pour une émissivité d'ordre 2, et d'environ 45K pour une émissivité de type Drude. Comme nous le verrons, ces erreurs sont atténuées dans le cas de la méthode *Tm*, car le système résolu n'est pas surdéterminé : moyenne

[97] La méthode *TL.TXY* correspond à une estimation par prédiction/correction qui est basée sur la linéarisation succéssive du modèle *TNL.TXY.*

[98] Ainsi que la sous méthode *TNL.TX*.

[99] Ou de couples de longueurs d'ondes, en fonction de la méthode concernée.

[100] En revanche, les erreurs sont biens nulles dans le cas contraire, i.e. en l'absence de biais de modèle.

des trois résultats (températures T_{ij}) obtenus à l'aide de trois équations[101] à une inconnue, T. La dégradation[102] des résultats d'estimation de la température en cas d'utilisation des quatre longueurs d'ondes pour les méthodes *TNL.TX* et *TNL.Tb*, comparés à ceux que l'on obtient en n'utilisant que trois longueurs d'ondes, est d'environs 5K pour une émissivité simulée d'ordre 2, et de 2K dans le cas de type Drude. En revanche, cette dégradation est environ deux fois plus importante avec la méthode *TNL.Tab*, soit approximativement 9K pour une émissivité simulée d'ordre 2, et 4K pour une émissivité de type Drude.

6.5.2. Simulations non bruitées

Les résultats des estimations de la température obtenus à partir des différents modèles d'estimation et pour des flux non bruités sont regroupés dans le Tableau 6.1.

Les erreurs non nulles d'estimations obtenues avec les modèles/méthodes *TL.TXY, TNL.TXY, TNL.TX* et *Tm* pour une émissivité constante illustrent l'influence du biais de modèle dû à l'approximation de Wien. Et en particulier, la valeur *Tm = 0.13 K* donne la valeur de ce biais. Cependant, nous remarquons que l'estimation *TNL.TXY* (4 bandes[103]) donne de bons résultats jusqu'à une variation d'ordre 2 de l'émissivité, en corrigeant partiellement ce biais. Les fortes erreurs obtenues dans le cas d'une variation de type Drude semblent, au regard des erreurs des autres méthodes (*TNL.Tabc* et *TNL.Tbc*) qui sont du même ordre de grandeur, principalement dues au biais de modèle. Les résultats *TNL.TXY* sont à rapprocher de ceux donnés par *TNL.TX* (3 bandes) qui sont meilleurs jusqu'à ce que les biais de modèles interviennent (ordre 2 et Drude). Les modèles *TNL.Tabc* et *TNL.Tab* n'utilisant pas l'approximation de Wien, leurs erreurs d'estimations sont nulles jusqu'à ce qu'il y ait un biais de modèle (ordre 2 pour *TNL.Tab*, et Drude pour les deux modèles, i.e. *TNL.Tab* et *TNL.Tabc*). On note également que la méthode *TL.TXY* donne des résultats plus que satisfaisant comparée aux autres méthodes. En particulier, erreurs inférieures à 0,6K pour une émissivité constante ou linéaire, et résultats similaires aux méthodes *TNL.TXY*, *TNL.Tabc*, *TNL.Tbc*, en cas de variation d'émissivité de type Drude. Cependant, ses résultats sont intermédiaires entre ceux des méthodes d'ordre 1 et 2 en cas de variations d'ordre 2 de l'émissivité.

Enfin, notons qu'en présence de biais de modèles (émissivité non constante), le modèle *TNL.Ta* (4 bandes) donne les plus mauvais résultats (cf. section 6.5.1).

---

[101] Une pour chaque couple de longueurs d'ondes d'indices : (1,2), (1,3), (1,4).

[102] Ecarts impliquant une température estimée plus éloignée de la température cible, que celle obtenue à partir de seulement trois longueurs d'ondes à l'aide d'un même modèle.

[103] Le terme « bandes » est à entendre au sens « bandes spectrales ». Cette terminologie est justifiée par le fait qu'expérimentalement, les filtres n'étant pas des Dirac, ils ne sont par conséquent pas monochromatiques, mais sont généralement à bande spectrale étroite. Ainsi, dans cette section, lorsqu'on emploiera le terme « n bandes », cela signifiera également « n longueurs d'ondes ».

ESTIMATIONS DE TEMPERATURES : lambda [µm] = {2 ; 2.35 ; 2.85 ; 4} Texp = 623 K ; Loi émittance : Planck							
Bruit	Emissivité	Modèle	T [K]	Erreur Absolue [K]	Erreur Relative [%]	Sigma [K]	Sigma [%]
Sans	Constante	TL.TXY (4)	622.45	-0.55	-0.09	-	-
		TNL.TXY (4)	622.47	-0.53	-0.09	-	-
		TNL.TX (3)	623.16	0.16	0.03	-	-
		Tm (4)	622.87	-0.13	-0.02	-	-
		TNL.Tabc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tab (3)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Ta (2)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tbc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tb (3)	623.00	0.00	0.00	-	-
	Linéaire	TL.TXY (4)	623.25	0.25	0.04	-	-
		TNL.TXY (4)	622.78	-0.22	-0.04	-	-
		TNL.TX (3)	623.10	0.10	0.02	-	-
		Tm (4)	651.21	28.21	4.53	-	-
		TNL.Tabc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tab (3)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Ta (2)	642.80	19.80	3.18	-	-
		TNL.Tbc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tb (3)	623.00	0.00	0.00	-	-
	Ordre 2	TL.TXY (4)	617.36	-5.64	-0.91	-	-
		TNL.TXY (4)	622.72	-0.28	-0.05	-	-
		TNL.TX (3)	608.59	-14.41	-2.31	-	-
		Tm (4)	643.53	20.53	3.30	-	-
		TNL.Tabc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tab (3)	608.52	-14.48	-2.32	-	-
		TNL.Ta (2)	630.81	7.81	1.25	-	-
		TNL.Tbc (4)	623.00	0.00	0.00	-	-
		TNL.Tb (3)	608.52	-14.48	-2.32	-	-
	Drude	TL.TXY (4)	636.50	13.50	2.17	-	-
		TNL.TXY (4)	636.58	13.58	2.18	-	-
		TNL.TX (3)	641.17	18.17	2.92	-	-
		Tm (4)	657.58	34.58	5.55	-	-
		TNL.Tabc (4)	636.91	13.91	2.23	-	-
		TNL.Tab (3)	641.01	18.01	2.89	-	-
		TNL.Ta (2)	653.66	30.66	4.92	-	-
		TNL.Tbc (4)	636.91	13.91	2.23	-	-
		TNL.Tb (3)	641.01	18.01	2.89	-	-

Tableau 6.1 : Estimations non bruitées de la température par les différents modèles.

6.5.3. Simulations bruitées

Les résultats des estimations de la température obtenus à partir des différents modèles d'estimation et pour les 1000 flux bruités sont regroupés dans le Tableau 6.2. Le bruit simulé est un bruit normal ayant pour écart-type celui mesuré sur les images thermographiques expérimentales dans les mêmes conditions ($\sigma_{bruit} \approx 8.97.10^4\,W$). Les valeurs données dans le Tableau 6.2 correspondent aux propriétés statistiques de la température, obtenues à l'aide des 1000 flux bruités.

Notons que le bruit est additif au flux, et non à la température. Le bruit induira donc un biais dans les modèles *TNL.TXY* (6.4.1), *TNL.TX*, *Tm*, *TNL.Tbc* (6.4.2) et *TNL.Tb*, qui sont basés sur le rapport de flux (cf. section 5.4).

De plus, les erreurs non nulles obtenues à l'aide du modèle *TNL.Tabc* pour des variations d'émissivité d'ordre 0 à 2, donc sans biais de modèle, illustrent le caractère mal conditionné du problème, et que par conséquent il risque d'être délicat d'estimer la température avec précision en cas de bruit important sur le flux. Cette observation est corroborée par les meilleurs résultats obtenus par *TNL.TX*, *TNL.Tab*, et *TNL.Tb*, comparés à ceux de *TNL.TXY*, *TNL.Tabc*, et *TNL.Tbc*, dans le cas d'émissivité constante ou linéaire, ce qui montre qu'il est possible de régulariser le problème en diminuant le nombre de paramètres.

Cependant, il est important de noter que les écart-types sur les estimations sont relativement non négligeables, bien qu'ils diminuent globalement de moitié par diminution du nombre de paramètres et de longueurs d'ondes, ce qui implique qu'il sera nécessaire d'avoir beaucoup de points ou avoir un grand temps d'intégration si l'on veut être précis sur la moyenne.

Enfin, remarquons que les constats de la section 6.5.2 sont ici encore globalement vérifiés, et en particulier, le modèle *TL.TXY* donne une fois de plus des résultats (température et écart-types) proches de ceux du modèle *TNL.TXY* tant que l'émissivité à des variations d'ordre 0 ou 1, ou de type Drude.

Le modèle *TNL.Tabc* étant celui qui donne globalement les meilleurs résultats, et qui souffre le moins de biais, c'est le modèle qui sera utilisé pour les essais expérimentaux de la section 6.6.

MOYENNE DES 1000 ESTIMATIONS DE TEMPERATURES : lambda [µm] = {2 ; 2.35 ; 2.85 ; 4} Texp = 623 K ; Loi émittance: Planck ; Bruit: constant ; Ecart-type du Bruit: 8,97.10^4 W							
Bruit	Emissivité	Modèle	T [K]	Erreur Absolue [K]	Erreur Relative [%]	Sigma [K]	Sigma [%]
Avec	Constante	TL.TXY (4)	622.46	-0.54	-0.09	1.13	0.18
		TNL.TXY (4)	622.48	-0.52	-0.08	1.11	0.18
		TNL.TX (3)	623.16	0.16	0.03	0.52	0.08
		Tm (4)	622.87	-0.13	-0.02	0.08	0.01
		TNL.Tabc (4)	623.02	0.02	0.00	1.13	0.18
		TNL.Tab (3)	623.00	0.00	0.00	0.52	0.08
		TNL.Ta (2)	623.00	0.00	0.00	0.02	0.00
		TNL.Tbc (4)	623.02	0.02	0.00	1.13	0.18
		TNL.Tb (3)	623.00	0.00	0.00	0.52	0.08
	Linéaire	TL.TXY (4)	623.25	0.25	0.04	0.60	0.10
		TNL.TXY (4)	622.78	-0.22	-0.03	0.69	0.11
		TNL.TX (3)	623.10	0.10	0.02	0.32	0.05
		Tm (4)	651.21	28.21	4.53	0.07	0.01
		TNL.Tabc (4)	623.01	0.01	0.00	0.70	0.11
		TNL.Tab (3)	623.00	0.00	0.00	0.32	0.05
		TNL.Ta (2)	642.80	19.80	3.18	0.02	0.00
		TNL.Tbc (4)	623.01	0.01	0.00	0.70	0.11
		TNL.Tb (3)	623.00	0.00	0.00	0.32	0.05
	Ordre 2	TL.TXY (4)	617.36	-5.64	-0.91	0.51	0.08
		TNL.TXY (4)	622.73	-0.27	-0.04	1.04	0.17
		TNL.TX (3)	608.59	-14.41	-2.31	0.30	0.05
		Tm (4)	643.53	20.53	3.30	0.07	0.01
		TNL.Tabc (4)	623.02	0.02	0.00	1.05	0.17
		TNL.Tab (3)	608.52	-14.48	-2.32	0.30	0.05
		TNL.Ta (2)	630.81	7.81	1.25	0.02	0.00
		TNL.Tbc (4)	623.02	0.02	0.00	1.05	0.17
		TNL.Tb (3)	608.52	-14.48	-2.32	0.30	0.05
	Drude	TL.TXY (4)	636.51	13.51	2.17	0.75	0.12
		TNL.TXY (4)	636.59	13.59	2.18	0.71	0.11
		TNL.TX (3)	641.17	18.17	2.92	0.37	0.06
		Tm (4)	657.58	34.58	5.55	0.07	0.01
		TNL.Tabc (4)	636.91	13.91	2.23	0.72	0.12
		TNL.Tab (3)	641.01	18.01	2.89	0.37	0.06
		TNL.Ta (2)	653.66	30.66	4.92	0.02	0.00
		TNL.Tbc (4)	636.91	13.91	2.23	0.72	0.12
		TNL.Tb (3)	641.01	18.01	2.89	0.37	0.06

Tableau 6.2 : Estimations bruitées de la température par les différents modèles.

6.6. Résultats expérimentaux

6.6.1. Description du banc expérimental

Le schéma de principe du montage expérimental est illustré en Figure 6.11. Un échantillon en fonte oxydée sur lequel est gravé (perforation) le motif « FT 25 » (sa surface étant non-uniforme, il en sera de même pour son émissivité) est placé dans un four tubulaire régulé par PID à 623K avec une grande stabilité (pas d'oscillations sur la température enregistrée par caméra due à la régulation du four). La température de l'échantillon est mesurée par un thermocouple placé sur sa face arrière.

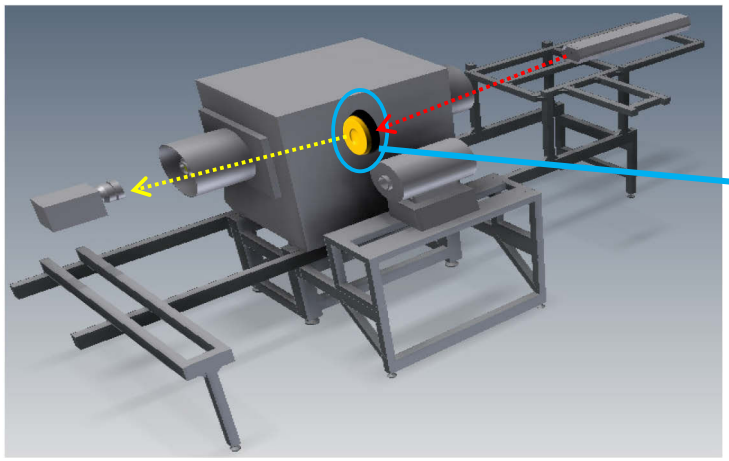


Figure 6.11 : Schéma de principe du banc de mesure multi-spectrale.

Figure 6.12 : Echantillon présentant un défaut d'uniformité d'émissivité.

Devant l'échantillon, est également placée une caméra matricielle à base de capteurs InSb sensible sur la gamme spectrale [1.5µm ; 5.5µm] et équipée de quatre filtres de longueurs d'ondes $\boldsymbol{\lambda}_{\text{exp}} = \{2;2.35;2.85;4\}\mu m$, afin de mesurer le flux radiatif spectral émis par la surface de l'échantillon aux quatre longueurs d'ondes différentes. La camera délivre des niveaux numériques codés sur 14bits (DL, pour Digital Levels), correspondants à la quantification d'une tension qui est l'image[104] du flux reçu. A chaque pixel il sera associé un niveau numérique correspondant au flux partant d'un élément de surface de l'échantillon. Avant la montée en température de l'échantillon, la caméra a été préalablement étalonnée sur la plage de températures $[573K;673K]$ à l'aide d'un corps noir étendu de dimensions $4" \times 4"$.

[104] Quand on est sur la plage de linéarité de la caméra, la tension de la caméra est proportionnelle au flux reçu.

6.6.2. Méthodologie de mesure et de traitement des données, et résultats

A l'aide du four tubulaire, l'échantillon est chauffé aux températures {T_1=573K ; T_2=623K ; T_3=673K}. Pour chaque température, une séquence de 1000 images pour chaque filtre est enregistrée, en prenant soin avant chaque acquisition que l'équilibre thermique des filtres soit atteint (plus de dérive en température à l'écran).

Afin de pouvoir s'affranchir de la réflexion[105] du flux émis par les parois du four sur l'échantillon, nous utilisons les images moyennes réalisées pour chacun des 4 filtres à 573K et 673K pour corriger l'offset existant entre nos mesures à ces 2 températures et le flux qu'émettrait un corps noir à ces mêmes températures. Appelant $M_{\lambda_i}^{\exp}\left(T_j\right)$ le flux mesuré expérimentalement à la longueur d'onde λ_i et à la température T_j, et K_i une variable permettant de corriger l'offset existant entre le flux mesuré et le flux corps noir, nous avons un système de 8 équations à 8 inconnues (les 4 couples $\left(\varepsilon_i ; K_i\right)$) à résoudre. Le système s'écrit :

$$M_{\lambda_i}^{\exp}\left(T_j\right) = \varepsilon_i M_{\lambda_i}^{o} + K_i \qquad ,\forall i \in [\![1\ ;\ 4]\!] \quad et \quad \forall j \in \{1\ ;\ 3\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_{\lambda_1}^{\exp}\left(T_1\right) = \varepsilon_1 M_{\lambda_1}^{o} + K_1 \\ \vdots \\ M_{\lambda_4}^{\exp}\left(T_1\right) = \varepsilon_4 M_{\lambda_4}^{o} + K_4 \\ M_{\lambda_1}^{\exp}\left(T_3\right) = \varepsilon_1 M_{\lambda_1}^{o} + K_1 \\ \vdots \\ M_{\lambda_4}^{\exp}\left(T_3\right) = \varepsilon_4 M_{\lambda_4}^{o} + K_4 \end{cases} \tag{6.6.1}$$

Les 8 inconnues $\left(\varepsilon_i ; K_i\right)_{i\in[\![1;4]\!]}$ sont estimées à l'aide d'une méthode de moindres carrés basée sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt [70, 71, 72, 73] et brièvement décrit en section 6.1.

A l'aide des K_i, supposant que le flux réfléchi est constant entre 573K et 673K, les flux expérimentaux peuvent être corrigés afin de s'affranchir de la réflexion. Finalement, les flux expérimentaux sont corrigés pour chaque pixel à l'aide de la relation :

$$\varphi_{\lambda_i}^{\exp}\left(T_j\right) = M_{\lambda_i}^{\exp}\left(T_j\right) - K_i \quad , \forall i \in [\![1\ ;\ 4]\!] \quad et \quad \forall j \in [\![1\ ;\ 3]\!] \tag{6.6.2}$$

L'objectif est désormais, de pouvoir estimer à l'aide des flux corrigés $\varphi_{\lambda_i}^{\exp}\left(T_j\right)$ émis par chaque pixel, le champ de températures de l'échantillon lorsque le four est à T_2=623K.

[105] Non négligeable à ce niveau de température, due à la présence proche des parois chaudes du four et au fait que l'échantillon soit non noir (au sens radiatif).

Pour cela, nous chercherons, pour chaque pixel, la valeur de la température T qui minimise la fonction coût (6.4.3) de la méthode *TNL.Tabc*.

Les Figure 6.13 à Figure 6.18 montrent la moyenne des 1000 images thermographiques enregistrées par la caméra aux différentes longueurs d'ondes expérimentales $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \{2;2.35;2.85;4\}\mu m$. L'inscription « FT25 » est d'autant plus visible que le flux reçu est important (indiscernable à 2µm et très net à 4µm).

Le résultat de l'estimation de la température par inversion de la loi de Planck (hypothèse d'émissivité unitaire) est donné par la Figure 6.17 pour la longueur d'onde à 4µm. Nous remarquons que cette estimation simpliste ne permet pas de corriger le champ d'émissivité car le motif « FT25 » est encore visible. De plus, l'erreur d'estimation de la température est important car la température expérimentale est environ 623K, alors que la température moyenne estimée est environ 588K (6% d'erreur ou 35K), avec un écart-type de 0,52K.

La Figure 6.18 illustre le résultat de l'estimation du champ de températures $T_{bispectral}$ obtenu par Méthode Bi-Spectrale « classique[106] » avec $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{exp}} = \{2;2.35\}\mu m$. Ces longueurs d'ondes ont été choisies car ce sont celles qui ont un écart minimal (0,35µm), ce qui facilite la validité de l'hypothèse d'émissivité constante (ou égale aux deux longueurs d'ondes). L'hypothèse semble relativement bien vérifiée, car la température estimée est d'environ 616K (1% d'erreur ou 7K) avec un écart-type de 3,6K.

La Figure 6.19 montre l'influence du biais de modèle dû à une émissivité non constante, et par conséquent l'avantage de choisir des longueurs d'ondes les plus proches possibles. En effet, cette figure représente le champ de températures estimé T_m (environ 596K, et un écart-type de 2,3K) donné par la valeur moyenne des trois températures Bi-Spectrales T_{ij} : modèle *TNL.TXY* avec $i = 1$, $j \in [\![2;4]\!]$ et *X=Y=0*. On observe que l'erreur de température (27K, soit 4%) est quatre fois supérieure à celle obtenue par la méthode Bi-Spectrale « classique ». Cela est en grande partie dû à la trop grande distance entre les différentes longueurs d'ondes, ayant pour conséquence de mettre en défaut l'hypothèse d'émissivité constante.

Enfin, la Figure 6.20 montre le résultat de l'estimation du champ de températures par le modèle *TNL.Tabc* (minimisation de la fonction coût (6.4.3)). On observe que le motif « FT25 » a également disparu et que l'erreur sur la température moyenne (environ 625K) est d'environ 2K (0.3%), avec un écart-type de 4K.

Notons que le modèle *TNL.Tab* a également été testé, avec trois et quatre longueurs d'ondes, mais les résultats étant moins concluant que ceux du modèle *TNL.Tabc*, ils n'ont pas été représentés.

[106] i.e. le modèle *TNL.TXY* avec *X=Y=0*, ou le modèle *TNL.Tabc* avec *b=c=0*.

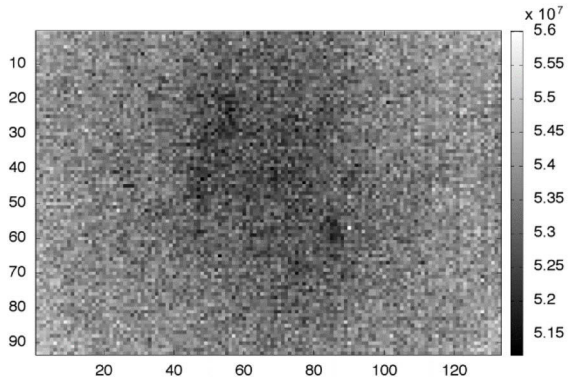


Figure 6.13 : Flux 2µm

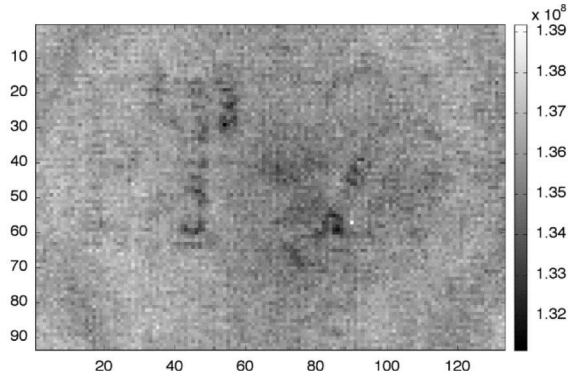


Figure 6.14 : Flux 2.35µm

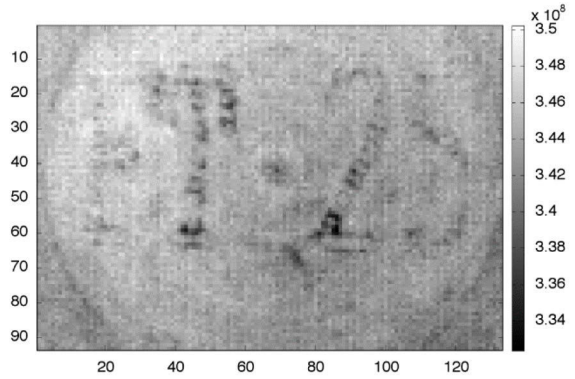


Figure 6.15 : Flux 2.85µm

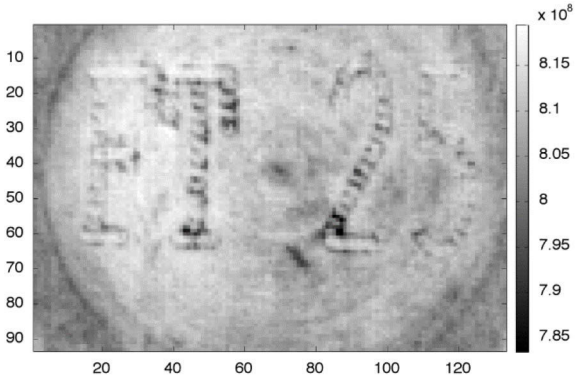


Figure 6.16 : Flux 4µm

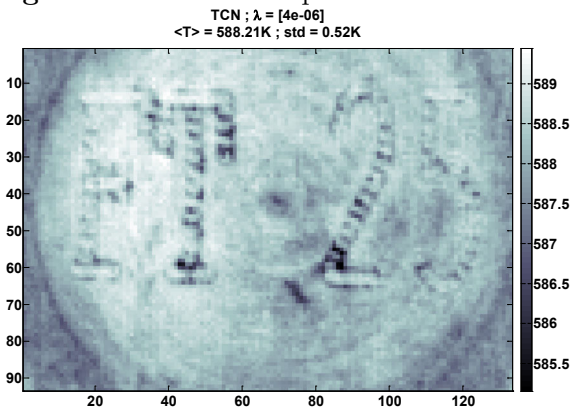


Figure 6.17: Températures estimées : *TCN 4µm*

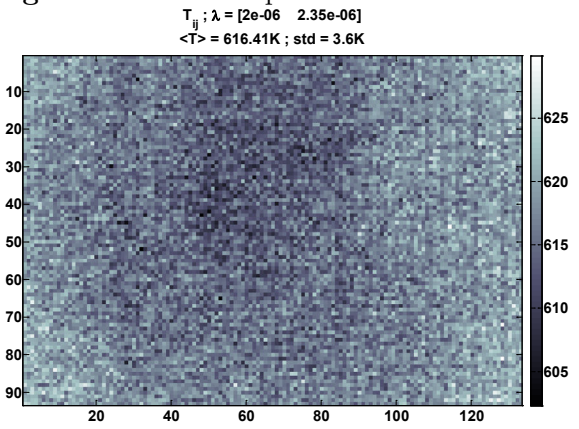


Figure 6.18: Températures estimées : $T_{bispectral}$

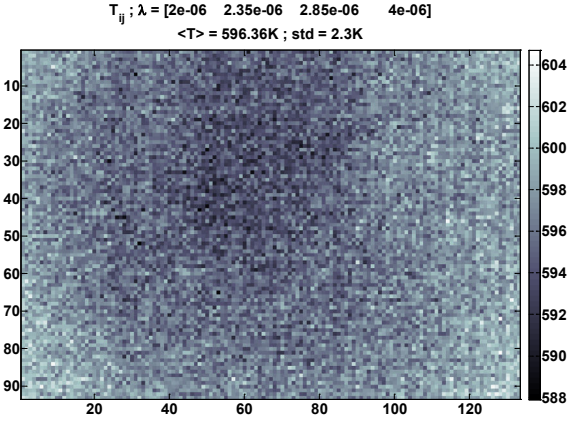


Figure 6.19 : Températures estimées : T_m (moyenne des $T_{bispectral}$)

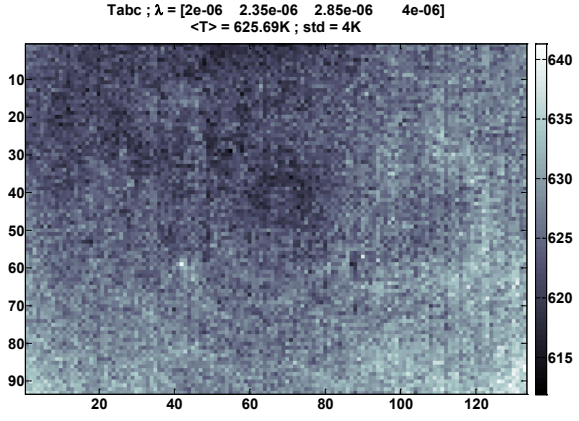


Figure 6.20 : Températures estimées : T_{abc}

6.7. Conclusion

Il a été montré à l'aide des Tableau 6.1 et Tableau 6.2 (simulations non bruitées et bruitées, de type Monté Carlo) que les modèles basés sur le rapport de flux et/ou l'approximation de Wien présentaient un biais dû d'une part à l'approximation de Wien (modèle *TNL.TXY*), et d'autre part à la non additivité de l'erreur du flux aux modèles (*TNL.TXY* et *TNL.Tbc*, cf. section 5.4, p.44).

En revanche, les résultats donnés par le modèle non biaisé *TNL.Tabc*, n'utilisant ni le rapport de flux, ni l'approximation de Wien, et regroupés dans le Tableau 6.2, sont très satisfaisants pour des variations d'émissivité d'ordre 0 à 2. Cependant, le cas des variations de type Drude est plus délicat.

Deux méthodes de sélection de longueurs d'ondes « pseudo-optimales » ou « optimales » minimisant l'écart-type de la température ont également été proposées. La première est basée sur une procédure de sélection séquentielle des longueurs d'ondes. La seconde, donnant les meilleurs résultats, consiste en une minimisation globale avec ou sans contrainte sur la gamme spectrale. Bien que la méthode de sélection itérative soit moins performante en termes de minimisation d'écart-type de la température, elle présente l'avantage de montrer l'importance du choix des différentes longueurs d'ondes, et d'être exploitables expérimentalement. En particulier, elle permet une étude graphique de la sensibilité de l'écart-type de la température aux différentes longueurs d'ondes.

Enfin, notons que les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de la méthode d'estimation *TNL.Tabc* à partir des filtres disponibles expérimentalement $\boldsymbol{\lambda}_{\text{exp}} = \left\{2;2.35;2.85;4\right\}\mu m$ (assez proches des filtres théoriques $\boldsymbol{\lambda}_{opt} = \left\{2.03;3.11;4.15;4.65\right\}\mu m$) sont également très encourageants avec une erreur sur la température moyenne d'environs 2K (0.3%), et un écart-type de 4K, pour une température de consigne de 623K.

Chapitre 7

Thermographie

7. Thermographie

7.1. Détection du rayonnement et principe de fonctionnement de la camera

Ce chapitre a pour objectif de présenter brièvement le principe de fonctionnement et les caractéristiques de la caméra utilisées pour les mesures expérimentales des parties « multi-spectrale » et « caractérisation thermique ». Les principales références qui ont été consultés et dans lesquelles de plus amples détails peuvent être trouvés sont :

- Pour les caractéristiques techniques de la caméra : Documents constructeur livrés avec la caméra, dont certains sont disponibles sur le site du constructeur [83]. Notons également qu'une étude détaillée des caractéristiques expérimentales de la caméra du LEMTA a été réalisée par Souhar [84].
- Pour les informations relatives au fonctionnement et à la physique des détecteurs : [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91].
- Pour la thermographie : [5, 4, 92, 93, 94, 9, 85, 95, 96, 97, 6, 98, 99, 100, 101, 102].
- Pour le traitement d'image : [103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110].

7.1.1. Types de détecteurs des caméras

Il existe principalement deux grandes classes de type de détecteurs implémentés dans les caméras thermiques :

- Les détecteurs thermiques, dont le principe de fonctionnement repose sur la variation d'une grandeur physique sensible à une variation de température, et non directement au flux reçu. Cette classe de détecteurs regroupe généralement les détecteurs de type bolométrique ou microbolométrique, pyroélectrique, pyromagnétique, thermopile, et pneumatique. Ces détecteurs ont pour particularités d'être sensible sur une très large gamme spectrale et ne nécessite pas d'être refroidi, mais ont également un temps de réponse relativement long comparé à celui des détecteurs quantiques.

- Les détecteurs quantiques (photoniques), qui sont sensibles à un flux de photons. Cette classe de détecteur regroupe généralement les détecteurs de type photoémissif, photoconducteur, et photovoltaïque. Ces détecteurs ont la particularité de présenter une meilleure sensibilité et un meilleur temps de réponse que les détecteurs thermiques, mais ne sont sensibles que sur des bandes spectrales généralement peu étendues (le choix du détecteur se fait en fonction de la gamme spectrale de mesure) et nécessitent d'être refroidis. On peut citer

par exemple : les détecteurs à base d'InSb généralement sensibles aux longueurs d'ondes $\lambda \in \left[3,5\mu m\ ;\ 5,5\mu m\right]$, et les détecteurs à base de HgCdTe sensibles pour $\lambda \in \left[8\mu m\ ;\ 12\mu m\right]$.

Pour les mesures expérimentales, une caméra à détecteur quantique à base Antimoniure d'Indium (InSb), refroidi à l'azote liquide (77 K) par un moteur Stirling sera utilisée. Une représentation graphique de son rendement quantique (donnée constructeur) est donnée Figure 7.1, et la détectivité spécifique (correspondant à une mesure du rapport signal sur bruit) de quelques détecteurs quantiques les courants est illustrée Figure 7.2.

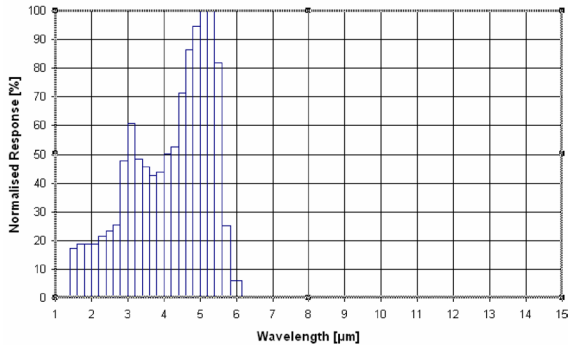


Figure 7.1 : Rendement quantique du détecteur InSb de la Caméra

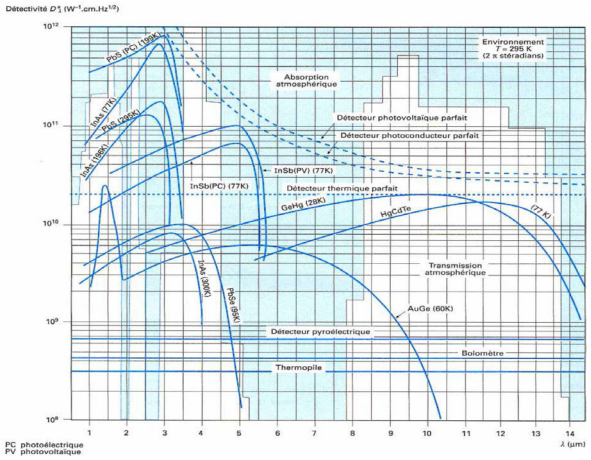


Figure 7.2 : Détectivité spécifique de certains détecteurs quantiques en fonction de la longueur d'onde [85].

7.1.2. Principe de fonctionnement de la caméra

7.1.2.1. *Fonctionnement physique et caractéristiques de la caméra*

- *Le détecteur quantique*

Le principe de fonctionnement des caméras quantiques à base de détecteurs InSb (utilisées pour les expériences) est le suivant :

Un détecteur refroidi par azote liquide (température de changement de phase 77 K) à l'aide d'un moteur Stirling est sensible au flux photonique incident d'un angle solide autour d'une direction. Un mécanisme (roue à filtre) permet de sélectionner le filtre à utiliser pour la mesure (il est possible d'effectuer des mesures sans filtre), puis un Convertisseur Analogique/Numérique permet de convertir le flux reçu par la caméra en niveaux numériques (DL, pour Digital Level).

Ce détecteur est de type photoconducteur, c'est-à-dire qu'un photon incident sur le détecteur ayant une énergie supérieure à la bande interdite (GAP) libère un ou plusieurs électrons qui passent de la bande de valence à la bande de conduction, ce qui a pour effet d'augmenter la conductivité du matériau.

D'où, l'existence d'une longueur d'onde maximum due au GAP à franchir, et une longueur d'onde minimum due au fait qu'au-delà d'une certaine énergie le photon traverse le matériau sans libérer d'électrons.

- ***Caractéristiques techniques***

La caméra (Titanium 560M de chez Cedip-Flir) est capable d'acquérir des images thermographiques à une fréquence pouvant varier de 5 Hz à 100 Hz lorsqu'on l'utilise dans sa résolution maximale 640*512 pixels, mais cette fréquence peut être augmentée par sous-fenêtrage (diminution de la résolution). Ainsi, il est possible d'utiliser une fréquence maximale de 383 Hz en 320*240 pixels, jusqu'à 4980 Hz en 16*4 pixels.

Elle possède une roue à filtres (4 emplacements) dont la rotation est commandée par le logiciel Altair© fourni avec la caméra, et son détecteur est sensible sur la gamme spectrale $\lambda \in \left[1.5\mu m ; 5.1\mu m\right]$.

La mesure de la quantité de photons impactant la surface des photosites est réalisée pour un temps d'intégration durant lequel ils sont comptabilisés. Plus on diminue ce temps et plus l'on peut travailler à haute température.

La caméra offre la possibilité de régler ce temps d'intégration sur une gamme allant de 3 µs à 20 ms, par pas de 1 µs.

Selon les caractéristiques fournies par le constructeur, l'incertitude sur la température mesurée et la température réelle est inférieure à 25 mK (sur une moyenne temporelle) lorsque la mesure est réalisée à 25°C avec un temps d'intégration de 1600 µs.

7.1.2.2. *Correction de Non Uniformité (NUC, CNUC et BPR)*

Lors d'une acquisition d'une image thermographique, bien que l'objet visé soit homogène et ait une température uniforme, il arrive fréquemment que l'image présente une non-uniformité. Cette non-uniformité a différentes causes.

D'une part, les différents photosites (supposés indépendants[107]) composant le détecteur quantique matriciel de la caméra n'ont généralement pas des caractéristiques[108] rigoureusement identiques.

D'autre part, il existe également des aberrations optiques au niveau de l'objectif.

Afin de s'affranchir de ces disparités physiques, une méthode consiste à effectuer une correction numérique appelée NUC[109] (Non Uniformity Correction) lors d'une

[107] En réalité ils sont corrélés car les puits à électrons ne sont pas parfaitement isolés les uns des autres.

[108] Les raisons des disparités sont nombreuses. On peut citer par exemple, la non uniformité des capacités de stockage, des multiplexeurs, des propriétés physiques des galettes de semi-conducteurs utilisées pour la réalisation des différents détecteurs de la matrice (photosites),…

[109] Ou « Correction de Non Uniformité » (de la matrice), en français.

acquisition, et consistant en une correction affine de la quantité de photons reçus par chaque photosite, afin qu'ils aient tous le même comportement statique et dynamique.

Les deux coefficients de cette correction affine sont calculés pour chaque photosite, soit à partir de deux temps d'intégration différents sur une surface homogène, soit à partir de deux températures différentes mesurées sur cette même surface (cette dernière méthode donnant de meilleurs résultats). Expérimentalement, la surface homogène utilisée est un corps noir étendu[110] pour des températures allant de la température ambiante T_{amb} à 500°C, et un corps noir à cavité pour des températures allant de 300°C à 1700°C. Ces différents corps noirs sont représentés Figure 7.3 et Figure 7.4.

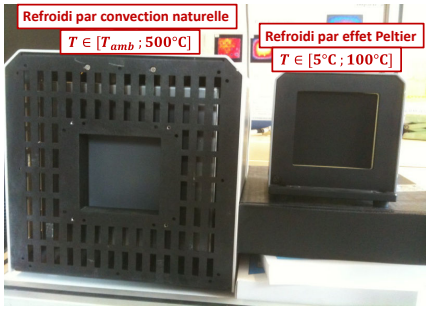


Figure 7.3 : Corps noirs étendus.

Figure 7.4 : Corps noir à cavité.

La correction de l'ordonnée à l'origine, est dite « NUC 1 point », et la correction des deux coefficients (pente et ordonnée à l'origine) est dite « NUC 2 point ».

Une autre correction, appelée CNUC (certainement pour Cedip NUC), est une amélioration de la correction NUC en permettant en fonction de la gamme de température et du temps d'intégration de changer de table de NUC « à la volée ».

La caméra permet également un remplacement des pixels défectueux, appelé BPR (Bad Pixel Replacement). Sont considérés comme défectueux les pixels ayant une courbe de réponse trop éloignée de celle des autres (comme les pixels figés ou morts). Cependant, cette correction a ses limites, car elle consiste à remplacer la valeur du « mauvais » pixel par celle de son voisin le plus proche. Notons qu'il est possible de ne pas utiliser le BPR. Cela laisse ainsi la liberté de les remplacer en post-traitement à l'aide de méthodes plus sophistiquées telles qu'une méthode de moyennage, ou d'interpolation bilinéaire, voire trilinéaire, par exemple.

[110] Le laboratoire LEMTA dispose de deux corps noirs étendus. Le premier est régulé par effet Peltier et permet de travailler sur la gamme de température $T \in \left[5°C;100°C\right]$. Le second, permettant de travailler sur la gamme de température (T_{amb} signifie température ambiante) $T \in \left[T_{amb};500°C\right]$ est régulé par PID et refroidi par convection naturelle.

7.1.3. Avantage du refroidissement du détecteur

- La diminution de la température du détecteur augmente le flux net reçu par celui-ci et diminue le bruit thermique (courant d'obscurité « idark » qui croit avec la température).
- Le refroidir avec de l'azote liquide permet de le garder à une température quasi-constante de 77 K (température de changement de phase de l'azote liquide) et améliore ainsi la précision en évitant toutes fluctuations du flux (et donc des niveaux numériques) dues à une fluctuation de la température du capteur.

7.1.3.1. *Expression générale du flux net reçu par le détecteur*

En considérant un bilan radiatif simplifié, le flux net reçu par le capteur supposé parfait (linéaire et sensible sur une gamme spectrale infinie) peut s'écrire en ne considérant que les échanges entre l'objet et le détecteur (pas d'échange entre le boitier de la caméra et le détecteur, absence de filtre) et en supposant la surface du détecteur petite devant celle de l'objet visé$\left(S_d << S\right)$, nous avons :

$$\Phi_{net} = \frac{\sigma\left(T^4 - T_d^4\right)}{\frac{1-\overline{\varepsilon}}{\overline{\varepsilon} S} + \frac{1}{S_d F_{d-o}} + \frac{1-\overline{\varepsilon}_d}{\overline{\varepsilon}_d S_d}} = \frac{\overline{\varepsilon}_d S_d F_{d-o} \sigma}{F_{d-o}\left(1-\overline{\varepsilon}_d\right) + \overline{\varepsilon}_d}\left(T^4 - T_d^4\right) \tag{7.1.1}$$

En posant $k = \frac{\overline{\varepsilon}_d S_d F_{d-o} \sigma}{F_{d-o}\left(1-\overline{\varepsilon}_d\right) + \overline{\varepsilon}_d}$, le flux net s'écrit finalement :

$$\Phi_{net} = k\left(T^4 - T_d^4\right) \tag{7.1.2}$$

Avec T (resp. $\overline{\varepsilon}$) la température (resp. l'émissivité moyenne) de l'objet visé, T_d (resp. $\overline{\varepsilon}_d$) la température (resp. l'émissivité moyenne) du détecteur, F_{d-o} le facteur de forme géométrique entre le détecteur et l'objet, et S_d (resp. S) la surface du détecteur (resp. de l'objet visé).

Sachant que le détecteur de la camera a une loi de comportement de la forme[111] :

$$U = s.\Phi_{net} \tag{7.1.3}$$

Afin de voir l'intérêt du refroidissement deux cas sont à considérer, lorsque T_d et T sont proches l'un de l'autre, et lorsque T_d est petit devant T.

7.1.3.2. *Expression du flux net pour T_d proche de T*

En posant : $T = T_d + \Delta T$, $k = \frac{\overline{\varepsilon}_d S_d F_{d-o} \sigma}{F_{d-o}\left(1-\overline{\varepsilon}_d\right) + \overline{\varepsilon}_d}$, on a :

[111] Dans sa gamme de linéarité.

$$\Phi_{net} = k.T_d^4.\left[\left(\frac{T}{T_d}\right)^4 - 1\right] = k.T_d^4.\left[\left(1 + \frac{\Delta T}{T_d}\right)^4 - 1\right] \tag{7.1.4}$$

Au premier ordre on a :

$$\left(1 + \frac{\Delta T}{T_d}\right)^4 = 1 + 4\frac{\Delta T}{T_d} + O\left(\left(\frac{\Delta T}{T_d}\right)^2\right) \tag{7.1.5}$$

D'où (7.1.4) devient :

$$\Phi_{net} \simeq 4kT_d^3.\Delta T \tag{7.1.6}$$

La sensibilité du flux à la température est donc :

$$\frac{\partial \Phi_{net}}{\partial T} \simeq 4kT_d^3 = cste \tag{7.1.7}$$

Ainsi, en supposant que la tension délivrée par le détecteur (et donc les niveaux numériques) est proportionnelle au flux, on déduit de (7.1.7) que pour une température T_d du détecteur proche de celle de l'objet, on aura une sensibilité constante du détecteur à la température, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial U}{\partial T} \simeq 4.s.k.T_d^3 = cste \tag{7.1.8}$$

7.1.3.3. *Expression du flux net pour T_d petit devant T*

En posant : $T = T_d + \Delta T$; $k = \dfrac{\overline{\varepsilon}_d S_d F_{d-o}\sigma}{F_{d-o}\left(1 - \overline{\varepsilon}_d\right) + \overline{\varepsilon}_d}$, on a :

$$\Phi_{net} = kT^4\left[1 - \left(\frac{T_d}{T}\right)^4\right] \tag{7.1.9}$$

Pour $T_d << T \Leftrightarrow \dfrac{T_d}{T} << 1$, on a :

$$\left[1 - \left(\frac{T_d}{T}\right)^4\right] \simeq 1 \tag{7.1.10}$$

D'où (7.1.9) devient :

$$\Phi_{net} \simeq kT^4 \tag{7.1.11}$$

La sensibilité du flux à la température est donc :

$$\frac{\partial \Phi_{net}}{\partial T} \simeq 4kT^3 \neq cste \tag{7.1.12}$$

Donc la sensibilité du détecteur à la température sera :

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 4.s.k.T^3 \neq cste \qquad (7.1.13)$$

D'une part, on remarque à partir de l'équation (7.1.11) que tout se passe comme si le détecteur n'intervenait pas dans le bilan radiatif (si ce n'est à travers la présence du terme k) ; d'autre part, à partir de l'équation (7.1.13), on remarque que la sensibilité à la température sera d'autant plus grande que la température sera élevée. Ce dernier point permet de conclure que le refroidissement du détecteur améliore la sensibilité de celui-ci.

7.2. Equation thermographique

7.2.1. Equation thermographique générale

Le bilan que nous allons effectuer comportera dès le début de nombreuses hypothèses simplificatrices, ce qui implique qu'il ne sera pas rigoureusement exact.

On supposera l'air comme étant un milieu semi-transparent homogène, isotherme, non diffusif et à propriétés radiatives constantes. Toutes les propriétés radiatives correspondront aux propriétés radiatives moyennes calculées à partir d'un volume d'atmosphère hémisphérique équivalent.

Enfin, le fond, le boitier, le détecteur, et l'objet seront supposés opaques $\left(\tau = 0 \Rightarrow \rho = \left(1 - \varepsilon\right)\right)$ et la loi de Kirchhoff sera supposée applicable à chacun des milieux. Un schéma illustrant la situation est représenté Figure 7.5.

L'objectif, est d'illustrer sous quelles conditions il est possible d'aboutir à l'expression de la loi d'étalonnage (simple) généralement utilisée pour les caméras.

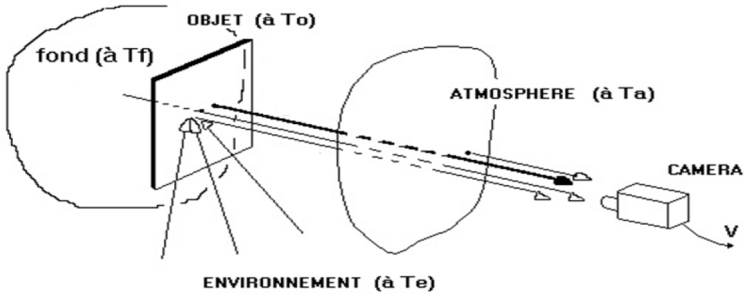


Figure 7.5 : Illustration de la scène thermographique [101]

- *Flux spectral arrivant sur l'atmosphère en direction du détecteur*

Il y a le flux spectral φ_o dû à l'émission propre de l'objet, celui du fond (φ_f), la partie de flux spectral réfléchi sur l'objet provenant, d'une part de l'atmosphère (φ_a), et d'autre part de l'environnement (φ_e). On notera, F_{i-j} la fraction de flux spectral émis par la surface i et reçu par la surface j. Le bilan spectral s'écrit donc :

$$\varphi^{e}_{\to a} = F_{o-d}\left(\underbrace{\varphi_o\left(\lambda,T_o\right)}_{\substack{\text{emission propre}\\ \text{de l'objet}}} + \underbrace{\left(1-\varepsilon_o\right)F_{a-o}\varphi_a\left(\lambda,T_a\right)}_{\substack{\text{réflexion sur l'objet du flux}\\ \text{provenant de l'atmosphère}}} + \underbrace{\left(1-\varepsilon_o\right)F_{e-o}\varphi_e\left(\lambda,T_e\right)}_{\substack{\text{réflexion sur l'objet du flux}\\ \text{provenant de l'environnement}}} \right) + \underbrace{F_{f-d}\varphi_f\left(\lambda,T_f\right)}_{\substack{\text{emission propre}\\ \text{du fond}}} \qquad (7.2.1)$$

- ***Flux incident de l'atmosphère vers le détecteur***

Ce flux est composé de la transmission par l'atmosphère du flux spectral arrivant sur celle-ci en direction du détecteur $\left(\varphi^{e}_{\to a}\right)$, et de son émission propre. En notant, τ_a le facteur de transmission spectral de l'atmosphère, on a :

$$\varphi^{i}_{a\to d} = \underbrace{\tau_a\varphi^{e}_{\to a}}_{\substack{\text{Flux transmis}\\ \text{par l'atmosphère}}} + \underbrace{F_{a-d}\varphi_a\left(\lambda,T_a\right)}_{\substack{\text{émission propre}\\ \text{de l'atmosphère}}} \qquad (7.2.2)$$

- ***Flux incident sur le détecteur***

Avant d'arriver au détecteur, le flux spectral incident de l'atmosphère vers le détecteur traverse un système optique {filtre+objectif} de longueur d'onde moyenne $\overline{\lambda}$ et de bande passante[112] $2\delta\lambda$. A ce flux, il faut ajouter celui provenant du boitier (incluant l'émission propre du filtre, supposé à même température que le boitier).

En notant τ_{so} le facteur de transmission spectral du système optique {filtre+objectif}, le bilan s'écrit :

$$\varphi^{i}_{\to d} = \underbrace{\tau_{so}\varphi^{i}_{a\to d}}_{\substack{\text{flux ayant traversé}\\ \text{le système optique}\\ \text{et provenant de}\\ \text{l'atmosphère}}} + \underbrace{F_{b-d}\varphi_b\left(\lambda,T_b\right)}_{\substack{\text{émission propre}\\ \text{du boitier}}} + \underbrace{F_{b-d}\left(1-\varepsilon_b\right)\varphi_d\left(\lambda,T_d\right)}_{\substack{\text{réflexion sur le boitier du flux}\\ \text{provenant du détecteur}}} \qquad (7.2.3)$$

- ***Flux net reçu par le détecteur***

Il y a le flux spectral incident sur le détecteur et l'émission propre du détecteur. En supposant que le détecteur n'absorbe ce flux que sur un intervalle de longueur d'onde centrée sur $\overline{\lambda}_1$ et d'amplitude $2\Delta\lambda$, dans ce cas le bilan s'écrit :

$$\phi_{net,d} = \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi^{i}_{\to d}d\lambda - \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi_d\left(\lambda,T_d\right)d\lambda \qquad (7.2.4)$$

En faisant apparaitre tous les termes, on a :

[112] On supposera que la restriction de la bande passante n'est due qu'au filtre.

$$\phi_{net,d} = \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \left(\underbrace{\tau_{so} \left(\underbrace{\tau_a F_{o-d} \left(\underbrace{\varphi_o(\lambda,T_o)}_{\substack{\text{emission propre}\\ \text{de l'objet}}} + \underbrace{(1-\varepsilon_o) F_{a-o} \varphi_a(\lambda,T_a)}_{\substack{\text{réflexion sur l'objet du flux}\\ \text{provenant de l'atmosphère}}} + \underbrace{(1-\varepsilon_o) F_{e-o} \varphi_e(\lambda,T_e)}_{\substack{\text{réflexion sur l'objet du flux}\\ \text{provenant de l'environnement}}} \right) + \underbrace{\tau_a F_{f-d} \varphi_f(\lambda,T_f)}_{\substack{\text{emission propre}\\ \text{du fond}}} \right)}_{\substack{\text{Flux transmis}\\ \text{par l'atmosphère}}} + \underbrace{F_{a-d} \varphi_a(\lambda,T_a)}_{\substack{\text{émission propre}\\ \text{de l'atmosphère}}} \right)}_{\substack{\text{flux ayant traversé le système optique}\\ \text{et provenant de l'atmosphère}}} + \underbrace{F_{b-d} \varphi_b(\lambda,T_b)}_{\substack{\text{émission propre}\\ \text{du boitier}}} + \underbrace{F_{b-d}(1-\varepsilon_b) \varphi_d(\lambda,T_d)}_{\substack{\text{réflexion sur le boitier du flux}\\ \text{provenant du détecteur}}} \right) d\lambda - \underbrace{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi_d(\lambda,T_d) d\lambda}_{\substack{\text{émission propre}\\ \text{du détecteur}}} \tag{7.2.5}$$

7.2.2. Equation thermographique simplifiée

- ***Hypothèses simplificatrices***

(H1) : Le coefficient de réflexion de l'atmosphère sera supposé négligeable : $\rho_a = 0 \Rightarrow \varepsilon_a = (1-\tau_a)$

(H2) : Le détecteur sera supposé suffisamment refroidi pour que le flux émis par celui-ci puisse être négligé devant celui des autres flux incidents, et en particulier, devant celui du boitier : $\left(\dfrac{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi_d(\lambda,T_d) d\lambda}{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi(\lambda,T) d\lambda} \approx 0 \right)$

(H3) : L'angle d'ouverture de l'objectif sera supposé suffisamment faible pour que compte tenu du niveau de température du fond, le flux de celui-ci puisse être négligé devant celui de l'objet visé : $\left(\dfrac{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} F_{f-d} \varphi_f(\lambda,T_f) d\lambda}{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} F_{o-d} \varphi_o(\lambda,T_o) d\lambda} \approx 0 \right)$

(H4) : La bande passante de l'ensemble {filtre+objectif} sera supposée inclue dans celle du détecteur : $\left[\overline{\lambda} - \delta\lambda \ ; \ \overline{\lambda} + \delta\lambda\right] \subset \left[\overline{\lambda}_1 - \Delta\lambda \ ; \ \overline{\lambda}_1 + \Delta\lambda\right]$.

(H5) : La distance séparant la caméra de l'objet sera supposée suffisamment faible pour avoir : $\tau_a = 1$ (atmosphère parfaitement transparente). Une représentation des spectres d'absorption de l'atmosphère et des différentes molécules le constituant est donnée Figure 7.6 et Figure 7.7.

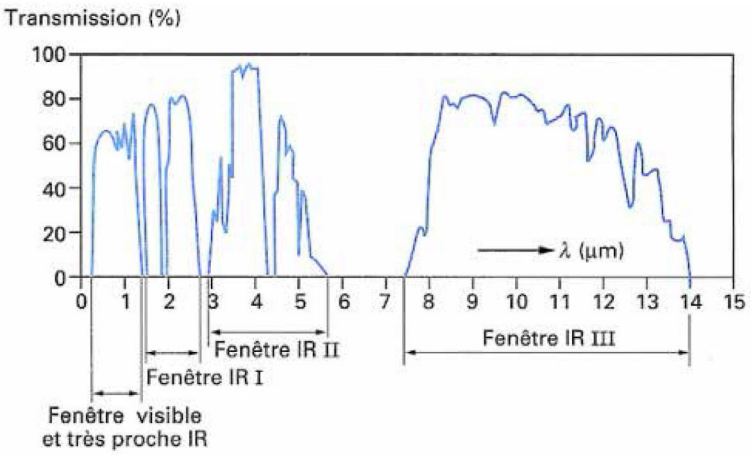


Figure 7.6 : Transmission spectral de l'atmosphère sur 2km au Sol [9]

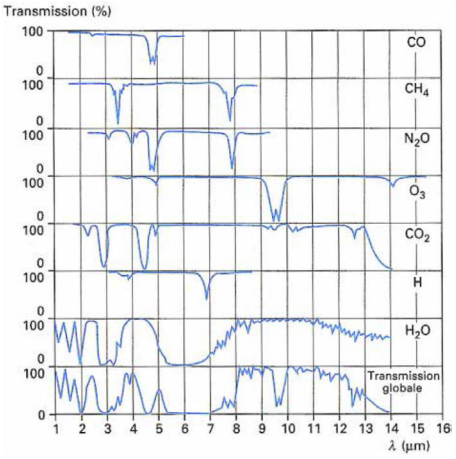


Figure 7.7 : Absorption moléculaire des constituants atmosphériques [9]

- ***Simplification du bilan***

A partir de ***(H1)*** et ***(H5)***, et en rappelant que $\varphi_a\left(\lambda,T_a\right)=\varepsilon_a\varphi_a^o\left(\lambda,T_a\right)$, nous avons respectivement dans les équations (7.2.1) et (7.2.2) :

$$\begin{aligned}\left(1-\varepsilon_o\right)F_{a-o}\varphi_a\left(\lambda,T_a\right)&=\left(1-\varepsilon_o\right)F_{a-o}\varepsilon_a\varphi_a^o\left(\lambda,T_a\right)\\&=\left(1-\varepsilon_o\right)F_{a-o}\left(1-\tau_a\right)\varphi_a^o\left(\lambda,T_a\right)\approx 0\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

Et :

$$F_{a-d}\varphi_a\left(\lambda,T_a\right)=F_{a-d}\varepsilon_a\varphi_a^o\left(\lambda,T_a\right)=F_{a-d}\left(1-\tau_a\right)\varphi_a^o\left(\lambda,T_a\right)\approx 0\tag{7.2.7}$$

A partir ***(H3)*** à ***(H5)***, l'équation (7.2.2) intégrée sur $\left[\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda\ ;\ \overline{\lambda}_1+\Delta\lambda\right]$, devient :

$$\phi_{a\to d}^i\approx\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda}\tau_{so}\tau_aF_{o-d}\left(\varphi_o\left(\lambda,T_o\right)+\left(1-\varepsilon_o\right)F_{e-o}\varphi_e\left(\lambda,T_e\right)\right)d\lambda\tag{7.2.8}$$

A partir de ***(H2)***, l'équation (7.2.3) intégré sur $\left[\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda\ ;\ \overline{\lambda}_1+\Delta\lambda\right]$, donne :

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda}\varphi_{\to d}^i d\lambda\approx&\int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda}\tau_{so}\tau_aF_{o-d}\left(\varphi_o\left(\lambda,T_o\right)+\left(1-\varepsilon_o\right)F_{e-o}\varphi_e\left(\lambda,T_e\right)\right)d\lambda\\&+\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda}F_{b-d}\varphi_b\left(\lambda,T_b\right)d\lambda\end{aligned}\tag{7.2.9}$$

- ***Expression simplifiée du flux net reçu par le détecteur***

Compte tenu de ***(H2)*** et des simplifications précédentes, l'équation (7.2.4) s'écrit :

$$\phi_{net,d} = \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi^i_{\to d} d\lambda - \underbrace{\int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi_d\left(\lambda, T_d\right) d\lambda}_{\substack{\text{émission propre} \\ \text{du détecteur}}} \approx \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} \varphi^i_{\to d} d\lambda$$

$$\Leftrightarrow \phi_{net,d} \approx \int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} \tau_{so}\tau_a F_{o-d}\left(\varphi_o\left(\lambda, T_o\right) + \left(1-\varepsilon_o\right) F_{e-o}\varphi_e\left(\lambda, T_e\right)\right) d\lambda + \int_{\overline{\lambda}_1-\Delta\lambda}^{\overline{\lambda}_1+\Delta\lambda} F_{b-d}\varphi_b\left(\lambda, T_b\right) d\lambda \qquad (7.2.10)$$

Dans le cas où la caméra et l'objet restent immobiles durant toute l'expérience, on a $F_{o-d} = cste$. En supposant que l'émissivité de l'objet et de l'environnement varient peu sur la bande passante étroite $\left[\overline{\lambda} - \delta\lambda \,;\, \overline{\lambda} - \delta\lambda\right]$, que celle du boitier varie peu sur $\left[\overline{\lambda}_1 - \Delta\lambda \,;\, \overline{\lambda}_1 + \Delta\lambda\right]$, et que la température du boitier ainsi que celle de l'environnement sont très peu différentes, respectivement des température moyennes $\overline{T}_b$ et $\overline{T}_e$, dans ce cas le théorème de la moyenne intégrale donne :

$$\phi_{net,d} \approx k_1\varphi_o\left(\overline{\lambda}, T_o\right) + k_{21}\overline{\varphi}_e\left(\overline{\lambda}, \overline{T}_e\right) + k_{22}\overline{\varphi}_b\left(\overline{\lambda}_1, \overline{T}_b\right) \qquad (7.2.11)$$

Avec $k_1 = 2\delta\lambda.\overline{\tau}_{so}\overline{\tau}_a F_{o-d} = cste$, $k_{21} = 2\delta\lambda.\overline{\tau}_{so}\overline{\tau}_a F_{o-d}\left(1-\overline{\varepsilon}_o\right)F_{e-o} = cste$, et $k_{22} = 2\Delta\lambda.F_{b-d} = cste$.

Les flux moyens équivalents $\overline{\varphi}_e\left(\overline{\lambda}, \overline{T}_e\right)$ et $\overline{\varphi}_b\left(\overline{\lambda}_1, \overline{T}_b\right)$ étant constants par définition, l'expression (7.2.11) peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\phi_{net,d} \approx k_1\varphi_o\left(\overline{\lambda}, T_o\right) + k_2} \qquad (7.2.12)$$

Avec, $k_2 = k_{21}\overline{\varphi}_e\left(\overline{\lambda}, \overline{T}_e\right) + k_{22}\overline{\varphi}_b\left(\overline{\lambda}_1, \overline{T}_b\right)$.

Remarque : On voit à partir de l'équation (7.2.12) que si toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées, alors les variations du flux reçu par le détecteur seront proportionnelles à celle flux émis par la surface de l'objet visé.

7.3. Etalonnage

7.3.1. Approximation des flux

En supposant la surface du détecteur petite devant celle du boitier qui l'entoure $\left(\frac{S_d}{S_{cam}} \approx 0 \text{ et } F_{d-cam} \approx 1\right)$, le flux radiatif net émis par le boitier et le filtre (émission

propre due à sa température) de la caméra vers le détecteur pourra s'écrire (en première approximation[113]) :

$$\Phi_{cam-d} \approx \frac{\sigma\left(T_{cam}^4 - T_d^4\right)}{\dfrac{1-\overline{\varepsilon}_{cam}}{\overline{\varepsilon}_{cam} S_{cam}} + \dfrac{1}{S_d} + \dfrac{1-\overline{\varepsilon}_d}{\overline{\varepsilon}_d S_d}} \approx \overline{\varepsilon}_d S_d \sigma\left(T_{cam}^4 - T_d^4\right) \tag{7.3.1}$$

On supposera que la température du détecteur est suffisamment faible devant celle de l'objet visé afin de négliger son influence dans le bilan radiatif.

Soit, $\phi(T) = \int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} \varphi(\lambda, T)\, d\lambda$ un flux provenant de la scène thermique et arrivant sur le détecteur après avoir traversé le filtre (ou système optique) de longueur d'onde moyenne $\overline{\lambda}$ et de bande passante $2\delta\lambda$. En supposant que la bande passante du filtre soit suffisamment étroite afin que les variations de $\varphi(\lambda, T)$ soient linéarisables sur $\left[\overline{\lambda} - \delta\lambda \,;\, \overline{\lambda} + \delta\lambda\right]$, on pourra approcher[114] son intégrale par la méthode du point milieu (équivalente à l'approximation des trapèzes pour une fonction affine) :

$$\phi(T) = \int_{\overline{\lambda}-\delta\lambda}^{\overline{\lambda}+\delta\lambda} \varphi(\lambda, T)\, d\lambda \simeq 2\delta\lambda . \varphi\left(\overline{\lambda}, T\right) \simeq \frac{A}{\exp\left(\dfrac{B}{T}\right) - 1} \tag{7.3.2}$$

7.3.2. Constats expérimentaux

Afin de pouvoir établir la loi d'étalonnage, il peut être avantageux d'étudier au préalable certains comportements expérimentaux propres au fonctionnement de la caméra, telles que l'influence du temps d'intégration sur la mesure, ou la forme de la courbe d'étalonnage.

- ***Courbes DL=f(IT)***

A titre d'exemple, nous avons tracé sur les Figure 7.8 à Figure 7.11, les courbes expérimentales réalisées sur un corps noir étendu, et représentant l'évolution des niveaux numériques (DL) en fonction du temps d'intégration (IT) pour différents filtres et différentes températures.

[113] A un facteur de proportionnalité près.

[114] Méthode analogue à celle utilisée pour obtenir (7.2.11).

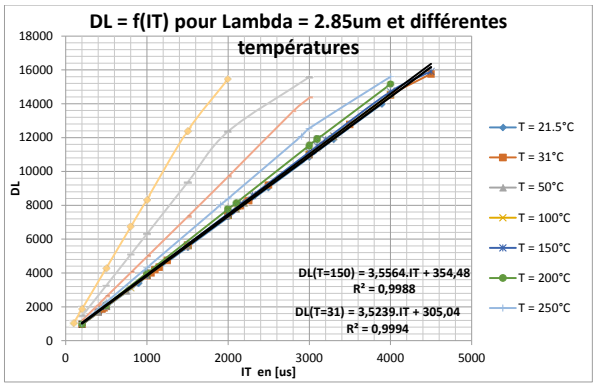


Figure 7.8 : Courbes DL=f(IT), pour $T \in \left[21.5°C;250°C\right]$ et $\lambda = 2,85\mu m$.

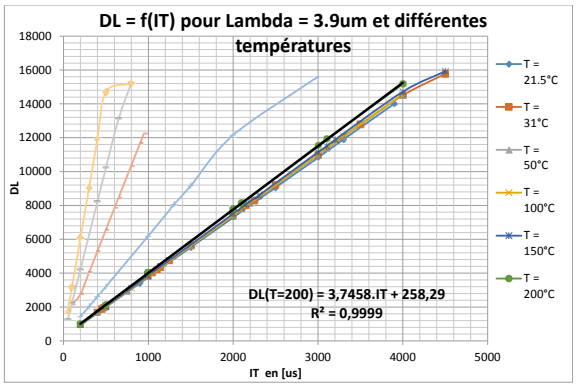


Figure 7.9 : Courbes DL=f(IT), pour $T \in \left[21.5°C;250°C\right]$ et $\lambda = 3,9\mu m$.

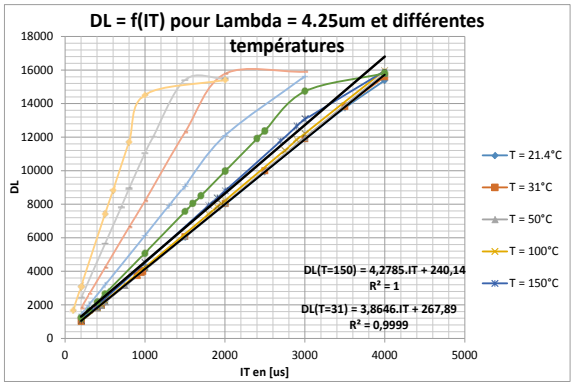


Figure 7.10 : Courbes DL=f(IT), pour $T \in \left[21.5°C;250°C\right]$ et $\lambda = 4,25\mu m$.

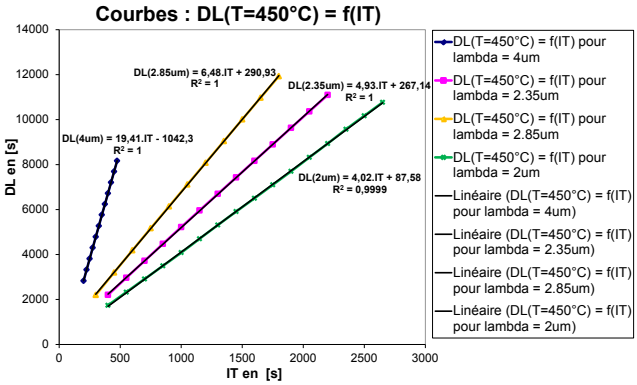


Figure 7.11 : Courbes DL=f(IT), pour $T = 450°C$ et $\lambda = \left\{2;2.35;2.85;4\right\}\mu m$.

<u>Deux constats</u> :

- D'une part, au-delà de 12000 niveaux numériques (DL : Digital Levels), les courbes DL=f(IT) ne sont plus linéaires. Cela est dû à la non linéarité de la caméra à partir de ce seuil.
- D'autre part, nous voyons que pour des niveaux inférieurs à 12000DL, les courbes DL=f(IT) semblent modélisables par des fonctions affines, ayant une ordonnée à l'origine que l'on notera U_0. On en déduit que pour un temps d'intégration nul, il existera un niveau numérique non nul, qui est généralement appelé « offset ».

- ***<u>Courbes d'étalonnages</u>***

Les courbes d'étalonnages expérimentales DL=f(T) réalisées sur un corps noir étendu, pour un temps d'intégration unique (IT = 500µs) sur la gamme de températures $T \in \left[20°C;400°C\right]$, et pour les filtres de longueurs d'ondes $\lambda \in \left\{2.85;3.9;4.25\right\}\mu m$, sont représentées Figure 7.12. Notons que sur ces graphes, il apparait dans la légende deux

filtres à $3.9\mu m$, dont l'un est désigné par « HyperCalV2 ». Cette courbe correspond à celle réalisée à partir du CNUC de la caméra, réalisé par la société FLIR.

Les courbes d'étalonnages expérimentales DL=f(T) réalisées sur un corps noir étendu, pour des temps d'intégration différents pour chaque filtre $\lambda \in \{2;2.35;2.85;4\}\mu m$ sur la gamme de températures $T \in [200°C;500°C]$, sont représentées Figure 7.13.

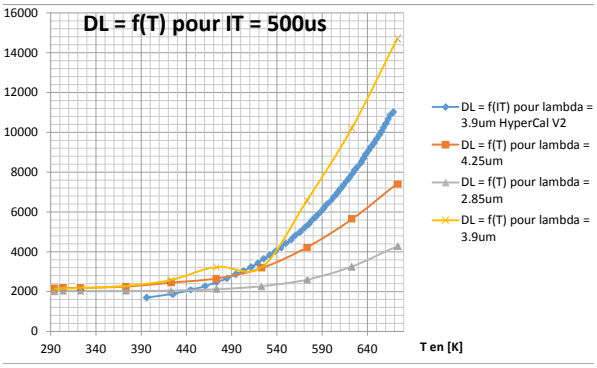


Figure 7.12 : Courbes d'étalonnage DL=f(T), pour IT=500µs, $T \in [20°C;400°C]$, et $\lambda \in \{2.85;3.9;4.25\}\mu m$.

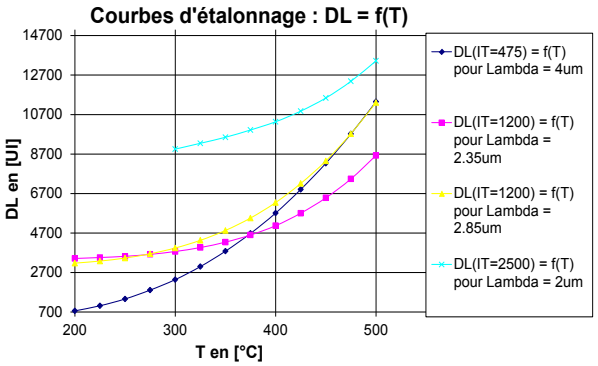


Figure 7.13 :Courbes d'étalonnage DL=f(T), pour différents IT, $T \in [20°C;400°C]$, et $\lambda \in \{2.85;3.9;4.25\}\mu m$.

Les courbes d'étalonnage semblent montrer qu'il existe un offset numérique (pour une température nulle, il existe un niveau numérique non nul) qu'on notera U_0, car cette offset est normalement le même que celui trouvé dans les courbes DL=f(IT).

7.3.3. Expression de la loi d'étalonnage de la caméra

7.3.3.1. *Loi d'étalonnage à 3 paramètres : Choix expérimental*

Sachant d'une part, que pour une température et une longueur d'onde données, la valeur de la tension délivrée par le détecteur (ou valeur des niveaux numériques) est proportionnelle au temps d'intégration, et d'autre part, que pour un temps d'intégration nul, la tension délivrée par le détecteur est non nulle (ce qui revient à dire que la courbe d'étalonnage ne passe pas par 0), on peut écrire la loi d'étalonnage sous la forme :

$$\underbrace{U}_{\text{en } [DL]} = \underbrace{s}_{\substack{\text{Sensibilité} \\ \text{du détecteur} \\ \text{en } [DL.J^{-1}]}} \times \left[\underbrace{\phi(T)}_{\substack{\text{Flux provenant de} \\ \text{la scène thermique} \\ \text{en } [W]}} + \underbrace{k\left(T_{cam}^4 - T_d^4\right)}_{\substack{\text{Flux provenant du} \\ \text{boitier de la caméra} \\ \text{en } [W]}} \right] \times \underbrace{IT}_{\substack{\text{Temps} \\ \text{d'Intégration} \\ \text{en } [s]}} + \underbrace{U_0}_{\substack{\text{Offset Numérique} \\ \text{en } [DL]}} \qquad (7.3.3)$$

Avec $\phi(T)$ pouvant se décomposer comme étant la somme des contributions du flux $\phi_o(T)$ provenant de l'objet visé, et du flux $\phi_e(T_e)$ provenant de l'environnement.

Si on suppose que la température de la caméra et celle du détecteur varient peu au court de l'expérience, dans ce cas on a $\left(T_{cam}^4 - T_d^4\right) \simeq cste$.

En posant $\alpha_0 = k\left(T_{cam}^4 - T_d^4\right) = cste$, (7.3.3) s'écrit également :

$$U = s \times \left(\phi_o\left(T\right) + \phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0\right) \times IT + U_0 \tag{7.3.4}$$

Et en utilisant l'approximation (7.3.2) pour $\phi_o\left(T\right)$, la relation (7.3.4) devient :

$$U = s \times \left(\frac{A_1}{\exp\left(\frac{B}{T}\right) - 1} + \phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0 \right) \times IT + U_0 \tag{7.3.5}$$

Remarque : Le « CNUC HyperCal » de la caméra permet de corriger en temps réel l'influence de la dérive en température du boitier de la caméra, i.e. en déterminant α_0 (variable dans le temps).

Si l'on suppose que la température de l'environnement est constante ($\phi_e\left(T_e\right) \approx cste$), et que l'équilibre thermique du boitier de la caméra est établit ($\alpha_0 \approx cste$), alors sous ces hypothèses, on remarque que dans (7.3.5) les paramètres $\phi_e\left(T_e\right)$, α_0, et U_0 sont corrélés. En globalisant les constantes en posant $A = sA_1$ et $C = s.IT\left(\phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0\right) + U_0$, alors (7.3.5) peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\boxed{U = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right) - 1} IT + C} \tag{7.3.6}$$

Remarque : On aurait également pu globaliser le temps d'intégration (IT) dans la constante A, cependant, celui-ci étant connu, il est préférable de ne pas le globaliser afin de faciliter l'initialisation de l'algorithme d'estimation.

Les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de la loi d'étalonnage (7.3.6) sont représentés sur les Figure 7.14 et Figure 7.15.

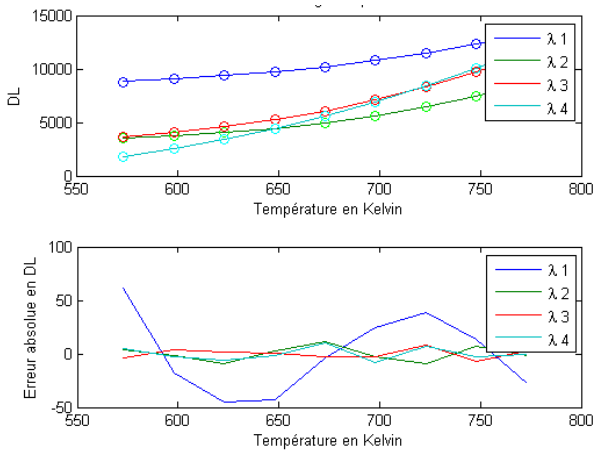


Figure 7.14 : Courbes d'étalonnages estimées (modèle (7.3.6)) et expérimentales (1ère figure), et résidus associés (2ème figure).

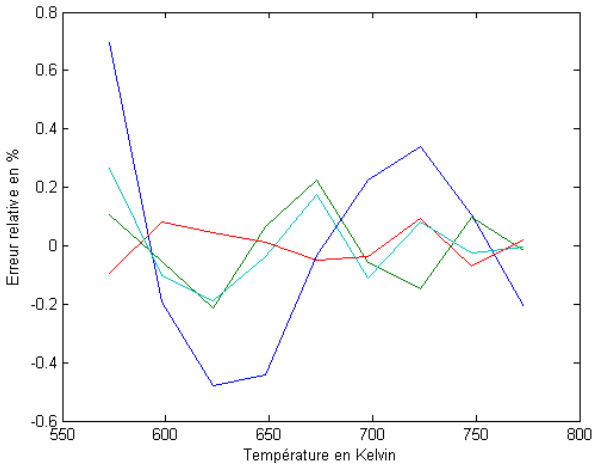


Figure 7.15 : Erreurs relatives associées aux courbes d'étalonnages du modèle (7.3.6).

On constate que l'erreur relative maximale est de l'ordre de 0,7%, pour les courbes en DL, ce qui peut laisser espérer une erreur relative maximale plus faible pour les courbes en température (cf. (7.3.6)).

7.3.3.2. *Lois d'étalonnage à 4 et 5 paramètres*

Compte tenu des résultats des Figure 7.14 et Figure 7.15, on pourrait vouloir augmenter « artificiellement » le nombre de paramètre du modèle (7.3.6), en espérant diminuer les résidus. Plusieurs choix sont alors possibles. En voici quelques-uns.

- ***Modèle à 4 paramètres***

Une solution « classique » consiste à rajouter un paramètre devant le terme en exponentiel. La relation (7.3.6) devient alors :

$$U = \frac{A}{D\exp\left(\frac{B}{T}\right) - 1} IT + C \qquad (7.3.7)$$

Les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de cette loi d'étalonnage sont représentés sur les Figure 7.16 et Figure 7.17.

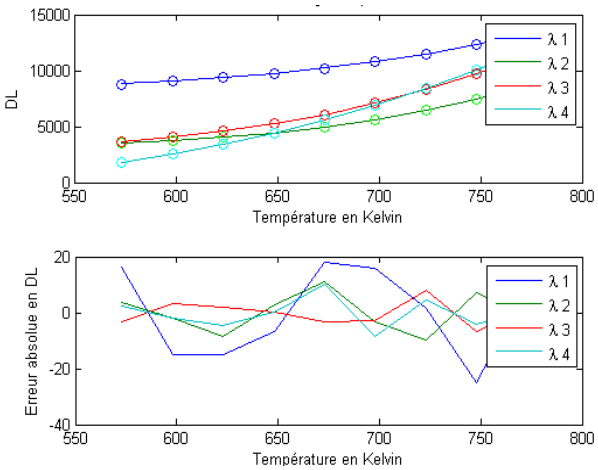


Figure 7.16 : Courbes d'étalonnages estimées (modèle (7.3.7)) et expérimentales (1ère figure), et résidus associés (2ème figure).

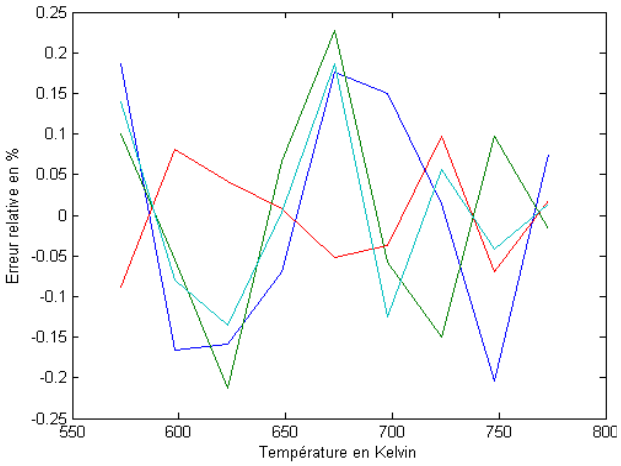


Figure 7.17 : Erreurs relatives associées aux courbes d'étalonnages du modèle (7.3.7).

A l'aide de la Figure 7.17 on constate que dans notre cas, l'erreur relative maximale a approximativement été divisée par 3 comparés à celle obtenue en Figure 7.15.

Bien que le modèle (7.3.7) donne ici de meilleurs résultats que ceux du modèle (7.3.6), il convient néanmoins de rester prudent sur son usage. En effet, dans certaines circonstances les paramètres A et D peuvent devenir corrélés, au point qu'il devienne impossible d'obtenir des résultats satisfaisants. Cette corrélation intervient lorsque l'on a :

$$D\exp\left(\frac{B}{T}\right) \gg 1 \Rightarrow U \simeq \frac{A}{D\exp\left(\frac{B}{T}\right)}IT + C \qquad (7.3.8)$$

La relation (7.3.8) est mal posée (au sens d'Hadamard) à cause de la présence du rapport $A\,/\,D$ qui implique l'existence d'une infinité de valeurs possibles de A et D permettant d'obtenir une unique valeur du rapport $A\,/\,D$.

Remarque : Cette corrélation est généralement d'autant plus favorisée que les conditions expérimentales permettent la validité de l'approximation de Wien $\left(\lambda T \ll C_2\right)$.

- ***Modèles à 5 paramètres, mais corrélés***

Du point de vue expérimental, on pourrait considérer que le temps d'intégration réel de la caméra n'est pas exactement celui qui a été choisi, et ainsi rajouter un paramètre permettant de tenir compte de ce décalage. La relation (7.3.8) deviendrait alors :

$$U = \frac{A}{D\exp\left(\frac{B}{T}\right)}\left(IT - D\right) + C \qquad (7.3.9)$$

Cependant, on remarque que cette solution est vaine car les paramètres A et D sont malheureusement corrélés. Ainsi, en terme de degrés de libertés ce modèle est équivalent à (7.3.8).

- ***Remarque*** *:*

Compte tenu des résultats établis dans cette section 7.3.3, nous avons choisi la relation (7.3.6) comme loi d'étalonnage de la caméra.

7.3.4. Intérêt de l'adimensionnement

Dans certains cas, il n'est pas nécessaire de connaître l'évolution de la température absolue d'un objet mais simplement l'évolution de sa température relative ou du flux relatif (contrôle non destructif, estimations de paramètres thermiques par méthode flash,…). Dans ces cas, l'utilisation de la caméra s'en trouve simplifiée.

7.3.4.1. *Cas de fortes variations de température*

Dans le cas où les hypothèses de la section 7.3.3 sont supposées vérifiées, que les mesures ne sont effectuées qu'à une seule longueur d'onde, que le temps d'intégration est le même pour toutes les mesures, et que la bande passante du filtre est suffisamment étroite (approximation de mesure monochromatique), alors on a :

$$U = s \times \left(\phi\left(T\right) + \alpha_0\right) \times IT + U_0 = s.IT.\phi_o\left(T\right) + \alpha \tag{7.3.10}$$

Avec,

$$\alpha = s.IT\left(\phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0\right) + U_0 \tag{7.3.11}$$

Soient, U_i et U_j deux mesures en $[DL]$ issues de deux températures T_i et T_j différentes, et $U_{\max}$ la valeur maximale relevée durant l'expérience. Si l'hypothèse (2.3.3) est vérifiée ($\varepsilon_{\lambda_k} \approx \overline{\varepsilon}, \forall k$), dans ce cas on a :

$$\frac{U_j - U_i}{U_{\max} - U_i} = \frac{\left(s.IT.\phi_o\left(T_j\right) + \alpha\right) - \left(s.IT.\phi_o\left(T_i\right) + \alpha\right)}{\left(s.IT.\phi_o\left(T_{\max}\right) + \alpha\right) - \left(s.IT.\phi_o\left(T_i\right) + \alpha\right)} \tag{7.3.12}$$

Qui se simplifie en :

$$\frac{U_j - U_i}{U_{\max} - U_i} = \frac{\phi_o\left(T_j\right) - \phi_o\left(T_i\right)}{\phi_o\left(T_{\max}\right) - \phi_o\left(T_i\right)} \tag{7.3.13}$$

En procédant ainsi, on s'affranchi de l'offset numérique U_o, de la sensibilité du détecteur s, de l'émissivité $\overline{\varepsilon}$ (apparaissant dans l'expression de $\phi_o\left(T\right)$), du temps d'intégration IT, et des flux α_0 et $\phi_e\left(T_e\right)$ reçus par le détecteur en provenance de l'environnement et du boîtier de la caméra. Cela permet en particulier d'améliorer le contraste thermique, et est ainsi adapté à du contrôle qualitatif, tel que le CND

(« Contrôle Non Destructif ») de délaminages ou d'équirépartition de chauffe dans des processus de fabrications industriels, par exemple. Cependant, si l'application visée nécessite de manipuler des températures, telle que la caractérisation thermique, par exemple, un étalonnage reste nécessaire afin de transformer la variation relative du flux, non linéaire à cause de l'hypothèse de fortes variations de températures, en variation relative de température.

7.3.4.2. *Cas de faibles variations de température*

Dans le cas où les variations de température sont suffisamment faibles pour pouvoir linéariser la courbe de flux reçu pour un temps d'intégration donné, dans ce cas, il est possible de s'affranchir de l'étalonnage.

En effet, si la bande passante du filtre est suffisamment étroite, nous avons :

$$\phi_o\left(T\right) = \int_{\bar{\lambda}-\delta\lambda}^{\bar{\lambda}+\delta\lambda} \phi_o\left(\lambda,T\right)d\lambda \simeq \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right)-1} \tag{7.3.14}$$

Dans le cas de faibles variations de température, nous avons à l'ordre 1 autour de la température moyenne (ou initiale, c'est selon) T_m :

$$\frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right)-1} = \frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)-1} + \frac{A.B.\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)}{\left(\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)-1\right)^2 T_m^2}\left(T-T_m\right) + O\left(\left(T-T_m\right)^2\right) \tag{7.3.15}$$

En posant, $\alpha = \dfrac{A.B.\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)}{\left(\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)-1\right)^2 T_m^2}$ et $\beta = \dfrac{A}{\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)-1}\left[1 - \dfrac{B.\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)}{\left(\exp\left(\frac{B}{T_m}\right)-1\right)T_m}\right]$, on a :

$$\frac{A}{\exp\left(\frac{B}{T}\right)-1} \simeq \alpha T + \beta \tag{7.3.16}$$

On en déduit l'expression des niveaux numériques délivrés par la caméra :

$$U = s\left(\alpha T + \beta + \phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0\right) + U_0 = \alpha' T + \beta' \tag{7.3.17}$$

Avec, $\alpha' = s\alpha$ et $\beta' = s.\left(\beta + \phi_e\left(T_e\right) + \alpha_0\right) + U_0$

Soient, U_i et U_j deux mesures issues de deux températures T_i et T_j différentes, et $U_{\max}$ la valeur maximale relevée durant l'expérience (dans le cadre de faible variation de température). Dans ce cas, nous avons :

$$\boxed{\frac{U_j - U_i}{U_{\max} - U_i} = \frac{\alpha' T_j + \beta' - \left(\alpha' T_i + \beta'\right)}{\alpha' T_{\max} + \beta' - \left(\alpha' T_i + \beta'\right)} = \frac{T_j - T_i}{T_{\max} - T_i} = \Delta T^*} \qquad (7.3.18)$$

En procédant ainsi, on s'est affranchi de l'offset numérique $\left(U_o\right)$, de la sensibilité du détecteur $\left(s\right)$, de l'émissivité $\left(\overline{\varepsilon}\right)$, et des flux reçus par le détecteur en provenance de l'environnement et du boîtier de la caméra. De plus, on remarque que la mesure est intrinsèque, car la relation (7.3.18) décrit l'évolution relative de la température de l'objet visé. Cela permet de s'affranchir de l'étalonnage lorsque l'application visée ne nécessite pas la connaissance de la température absolue, telle que la caractérisation thermique de matériaux par méthode flash, par exemple.

7.4. Traitement des données issues de la caméra

La mesure du champ de températures d'un objet est effectuée à l'aide d'une caméra à base de détecteurs quantiques. L'enregistrement vidéo se fait dans un fichier d'extension «.ptw » qui contient diverses informations. Ce fichier contient un en-tête dans lequel est par exemple indiqué le nombre d'images enregistrées dans celui-ci. Chaque image (codée en niveau de gris « *DL* ») de ce fichier contient également un en-tête dans lequel sont indiqués entre autres, la température de la caméra, la date en seconde à laquelle a été enregistrée l'image, la taille de l'image…

Divers programmes Matlab ont étés créés afin de récupérer, convertir et traiter ces données. On récupère les informations et les images stockées dans le fichier « .ptw », puis on les convertit afin de les stocker dans un tableau de données en « .mat » plus aisément manipulable par Matlab. Les échantillons dont nous disposons pouvant être circulaires ou rectangulaires, deux programmes différents ont étés réalisés afin de s'adapter à chacune de ces situations.

7.4.1. Récupération, Conversion et Stockage des données

L'un des problèmes majeurs de ces films est qu'ils peuvent être très gourmands en espace de stockage ainsi qu'en demande de capacité de calculs. C'est pourquoi en fonction de la taille que l'objet occupe sur l'image, il peut être intéressant de ne stocker que la partie de l'image correspondant à l'objet. Ceci afin de diminuer l'espace qu'occupera le fichier en mémoire statique (généralement le disque dur), ainsi que sa demande de ressource en mémoire vive (généralement la mémoire RAM). En effet, si nous ne prenons pas garde à minimiser la taille des données à traiter et à optimiser le programme de traitement, nous risquons d'avoir des temps de traitement très longs ou une incapacité à traiter ces données à cause d'un « Out Of Memory » (manque de mémoire).

Les Figure 7.18 et Figure 7.19 montrent respectivement, l'image originale avec zone de sélection pour le redimensionnement, et l'image après redimensionnement. . Le

rectangle de sélection est soumis à des contraintes lui évitant de sortir de la zone de l'image et évite ainsi des erreurs de programme.

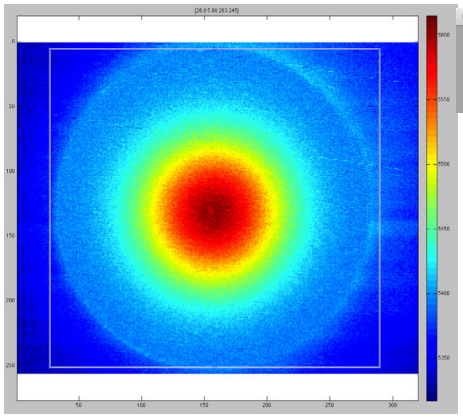


Figure 7.18: Images avant redimensionnent

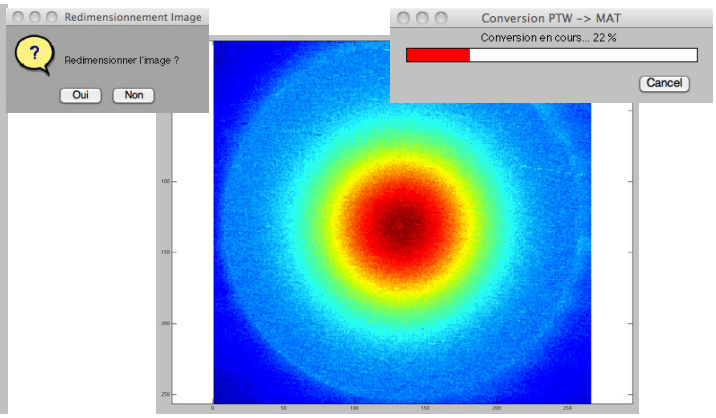


Figure 7.19: Image après redimensionnement

7.4.2. Détection de contour circulaire, détection de l'excitation, filtrage et champ de températures

Une fois les données stockées dans un format manipulable par Matlab, il est possible de traiter les données, et en particulier de récupérer le champ de températures de l'échantillon. Les fonctionnalités principales du programme réalisé sont les suivantes :

- Détection automatique de l'image à laquelle est réalisée l'excitation, par détection d'élévation brutale des niveaux numériques (DL).
- Filtrage des données à l'aide, entre autre, du filtre de Weiner afin d'améliorer la détection de contour, mais enregistrement du champ de températures non filtré.
- Détection du contour de l'échantillon circulaire par 4 méthodes au choix. (1) : En définissant (par clic sur l'image) le centre et le rayon de l'échantillon ; (2) : Par méthode des cordes en utilisant 3 points sur la périphérie de l'échantillon ; (3) : Détermination automatique du centre et du rayon par méthode statistique ou détermination de l'isobarycentre, avec possibilité de réajustement manuel après affichage du résultat ; (4) : Par méthode graphique en définissant un cercle de taille variable et déplaçable sur l'image afin de faire correspondre au mieux ce cercle avec la géométrie de l'échantillon. L'ensemble de ces méthodes peuvent être couplées à une détection de contour automatique à l'aide de filtres de Sobel, Prewitt, Roberts, ou Canny…
- Calcul du champ de températures $T\left(x,y,t\right)$ non filtré de l'échantillon, et conversion en coordonnées cylindriques : $T\left(x,y,t\right) \mapsto T\left(r,\theta,t\right)$.

La partie la plus délicate est la détection de contour de l'échantillon. C'est un domaine qui fait encore pleinement partie de la recherche car de nombreuses améliorations sont à faire. En effet, si les méthodes actuelles donnent de bons résultats dans le cadre de la

détection de contour sur des images à fort contraste (écritures noires sur fond homogène blanc, par exemple), elles ne sont plus du tout aussi efficaces lorsque le contraste est faible et en présence de bruit sur l'image. Malheureusement, c'est ce dernier cas qui correspond à notre situation expérimentale.

Parmi les méthodes les plus connues de détection de contour nous pouvons citer :

- L'approche par convolution : filtres de Roberts, Sobel, Prewitt, Kirsh, le « Seuillage », des méthodes basées sur le Laplacien…
- L'approche par filtrage optimal : filtres de Canny, Dériche…
- Méthodes basées sur les opérateurs Morphomathématiques : dilatation, érosion, dualité, ouverture et fermeture, gradient, amincissement, squelittisation…

Pour ne citer que celles-ci. Dans notre cas, la solution retenue a été l'utilisation du seuillage[115] et du filtre de Canny, car ces méthodes semblaient être un bon compromis entre temps de calcul et efficacité.

7.4.2.1. *Détection automatique de contour par filtre de Canny*

Lorsqu'on exécute le programme, la possibilité est donnée à l'utilisateur de choisir sur quelle image travailler. La première est non traitée et la deuxième correspond à une image de contraste[116] telle que, la moyenne des images avant excitation lui a été retranchée, puis filtrage par un filtre de Wiener afin de réduire le bruit sur l'image de contraste, enfin on lui applique un filtre de Canny afin d'effectuer une détection automatique des contours.

Notons que chaque expérience est différente, aussi il faudra probablement changer le traitement de l'image et/ou le choix de l'image de référence afin d'obtenir de meilleurs résultats. Plusieurs cas ont été implémentés dans le programme, mais ils sont perfectibles. Il est donc préférable d'avoir une supervision humaine.

Afin d'illustrer nos propos, une image avant traitement et après détection automatique de contour par filtre de Canny sont données respectivement en Figure 7.20 et Figure 7.21.

[115] Cette méthode consiste à binariser l'image en fonction du seuil défini. Ainsi, par exemple, tous les pixels ayant des niveaux numériques supérieur au seuil prendront la valeur 1 et les autres 0. La démarche opposée étant également possible.

[116] L'image choisie est généralement une image après flash et telle que la chaleur ait eu le temps d'entièrement diffusée dans le matériau afin d'augmenter le contraste entre celui-ci et le porte échantillon et/ou l'environnement.

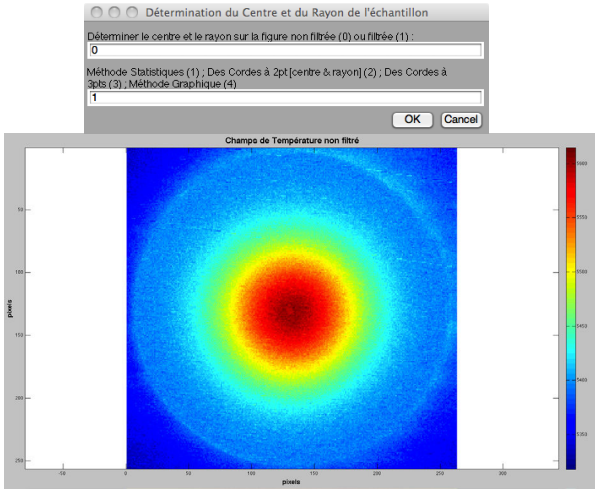


Figure 7.20 : Image exempte de traitements.

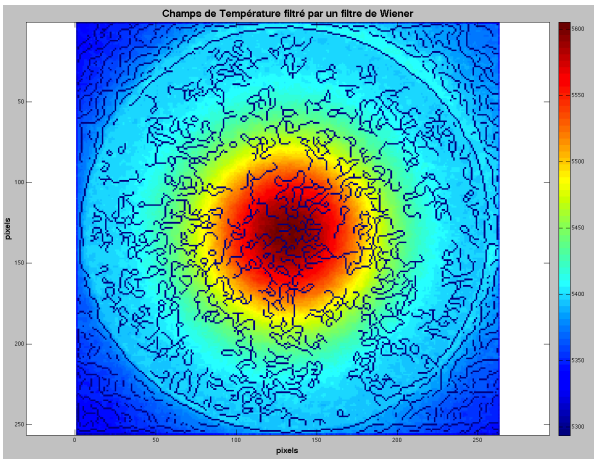


Figure 7.21 : Image après détection automatique des contours par filtre de Canny.

Remarquons que sur la Figure 7.21 il y a bien la présence du contour d'un cercle. En comparant les figures Figure 7.20 et Figure 7.21 nous constatons que la détection de contour semble donner des résultats globalement satisfaisants malgré l'absence de traitements particuliers de l'image.

Néanmoins, afin de pouvoir déterminer par nous-mêmes le contour, d'autres fonctions ont été implémentées dans le programme, elles sont illustrées dans la sous-section suivante.

7.4.2.2. *Détection par méthode statistique*

Le fonctionnement de cette méthode créée par mes soins est globalement le suivant. Un seuillage est effectué par rapport à l'intensité moyenne de l'image, ce qui va permettre la création d'un masque composé de NaN (Not a Number) en dehors de l'échantillon. Après application du masque sur l'image à traiter, on recherche l'isobarycentre de l'ensemble des points du disque, afin de déterminer les coordonnées du centre. Le rayon est ensuite déterminé en calculant l'ensemble des distances entre le centre du cercle et les différents pixels appartenant au disque, puis en choisissant la distance pour laquelle il y a un maximum d'occurances.

Une autre méthode développée, mais plus lente, consiste à rechercher statistiquement pour quelle abscisse et quelle ordonnée il y a le plus de points.

Le résultat obtenu à partir de la méthode statistique, ainsi que la boite de dialogue associée permettant de modifier, si besoin, la taille et la position du cercle, sont affichés sur la Figure 7.22.

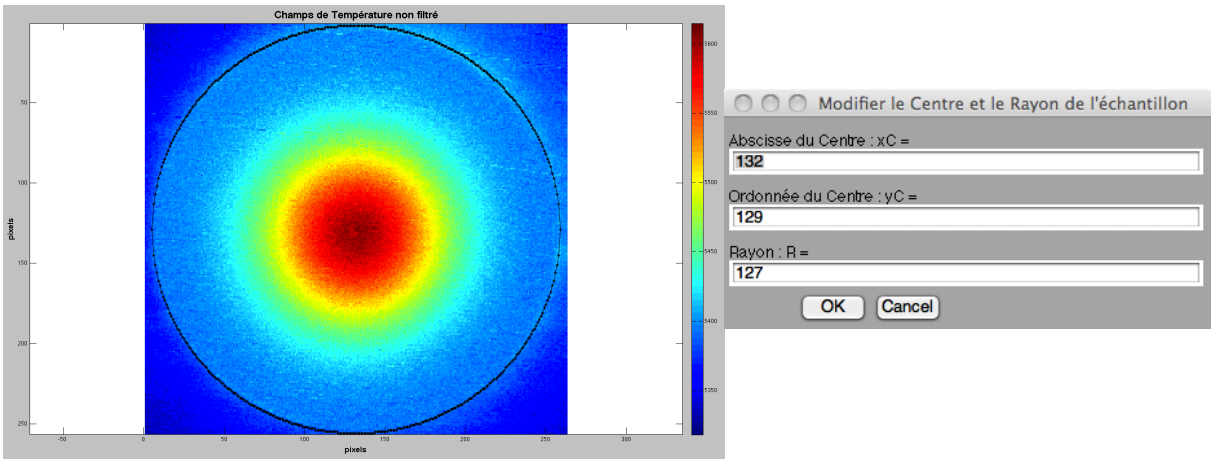


Figure 7.22 : Détection de Contour par Méthode Statistique.

La méthode statistique, qui ne demande pas non plus d'intervention utilisateur, semble ici plus précise que la méthode par filtre de Canny.

Notons que durant le traitement, il y a détection et remplacement des pixels morts par la valeur moyenne du champ de températures.

Une illustration d'images de films thermographiques obtenues après sélection des données par détection de contour est donnée en Figure 7.23 (excitation colimatée de façon circulaire) et Figure 7.24 (excitation colimatée sous forme d'une croix).

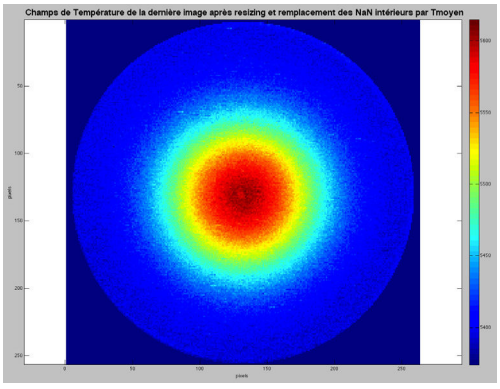


Figure 7.23 : Dernière image après traitement

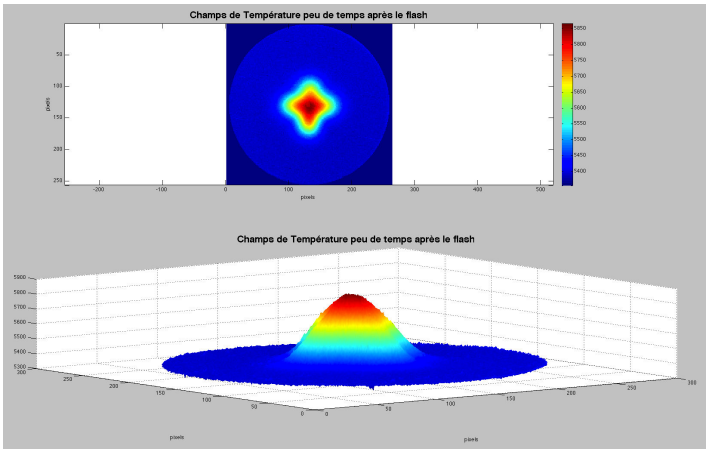


Figure 7.24 : Champ de températures après traitement (20ième image après excitation)

- ***Remarque*** :

Le redimensionnement de l'image avant son stockage a pour conséquence de diminuer l'influence du champ de températures extérieure à l'échantillon sur la détermination des paramètres géométriques de celui-ci par méthode statistique.

La boîte de dialogue permettant de modifier la taille et la position du cercle est présente dans chacune des méthodes : méthode des cordes, méthode statistique, méthode graphique,...

7.4.2.3. *Détection par méthode graphique*

Cette méthode consiste à définir graphiquement un cercle de taille variable et déplaçable sur l'image, afin de faire correspondre au mieux ce cercle avec la géométrie de l'échantillon (cf. Figure 7.25).

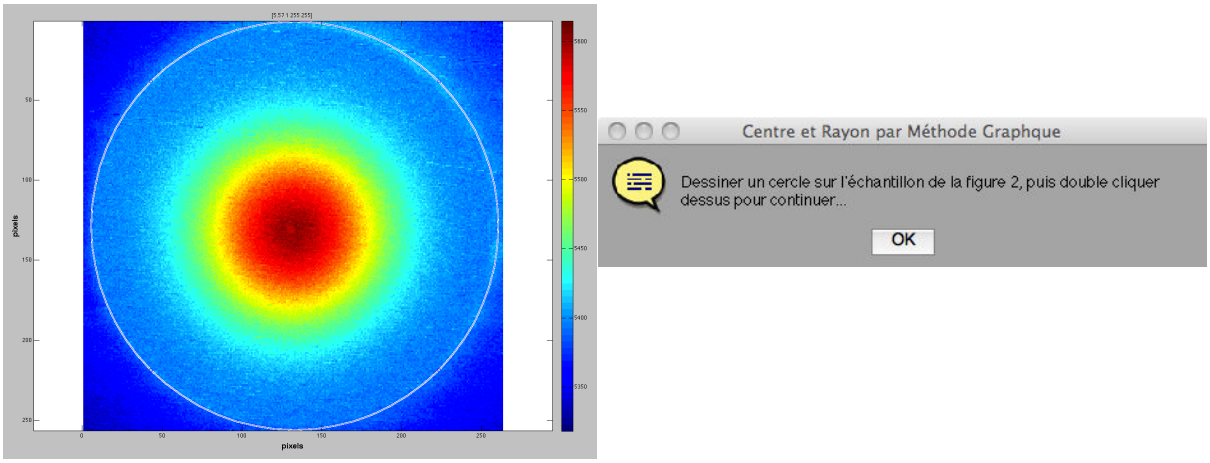


Figure 7.25 : Traçage graphique du cercle permettant l'extraction du champ de températures de l'échantillon.

Les résultats obtenus après traitement ressemblant à ceux obtenus au paragraphe 7.4.2.2, ils ne seront pas représentés ici.

Cette méthode a l'avantage de permettre à l'utilisateur de facilement déplacer, agrandir, rétrécir, ajuster à son gré les dimensions et emplacement du cercle dont le pourtour doit se confondre avec celui de l'échantillon. Elle est principalement utile lorsque la méthode statistique échoue ou lorsque que l'échantillon apparaît nettement sur l'image.

- ***Remarques générales*** :

Le cas idéal pour la détection de contour dans notre cas serait que l'échantillon et l'environnement aient chacun une température uniforme et qu'il existe entre eux un fort contraste d'intensité (ou de température).

Chaque expérience étant différente, il n'existe à priori pas de méthode générale. Cependant, dans certaines situations il est possible de s'approcher du cas idéal.

En effet, si la diffusivité de l'échantillon est grande par rapport à la durée de l'expérience, il est préférable de choisir une image « loin » de celle où s'est produit l'excitation (la dernière, par exemple), car d'une part, la température globale de l'échantillon aura augmenté, d'autre part, on peut supposer que sa température aura eu le temps de s'uniformiser.

Notons, qu'il est généralement préférable de retrancher l'image moyenne avant excitation à l'ensemble du film thermographique, afin d'améliorer les contrastes.

Après sélection de la zone d'étude (celle correspondant à l'échantillon circulaire), le champ de températures de l'échantillon, en données brutes (DL) et en température $T\left(x,y,t\right)$ non filtrés obtenue à l'aide de la courbe d'étalonnage (si elle existe), sont stockés, ainsi que leurs équivalent en coordonnées cylindriques : $T\left(x,y,t\right) \mapsto T\left(r,\theta,t\right)$.

7.4.3. Détection de contour rectangulaire, détection de l'excitation, filtrage et champ de températures

L'extraction du champ de températures d'échantillons de forme rectangulaire posant des difficultés particulières, notamment à cause d'une rotation possible de celui-ci par rapport aux axes principaux de la caméra lors de son placement au centre du four tubulaire[117], un programme différent a été réalisé afin de traiter les images thermographique pour ce type d'échantillons.

Les outils de traitement d'image par seuillage, filtrage, ou détection de contour automatique par filtre de Canny sont encore possibles, mais les outils propres à la détection de contour circulaire ne sont bien entendu plus adaptés.

Contrairement au cas d'échantillon circulaires, l'objectif n'est plus de transformer le champ de températures en coordonnées cartésiennes en champ de températures en coordonnées cylindriques, mais de faire correspondre les axes principaux de l'échantillon avec ceux de la matrice de la caméra en effectuant une rotation sur le champ de températures mesuré (images thermographiques).

Les fonctionnalités principales du programme réalisé sont les suivantes :

- Sélection de la zone pour la détection de l'excitation. Cette option est utile lorsqu'il existe un jour[118], ce qui est fréquent, entre l'échantillon et le tube du four.
- Redimensionnement de l'image afin d'améliorer la détection de contour automatique, et de diminuer l'occupation mémoire.
- Détection automatique de contours (par filtre de Canny).

---

[117] En effet, le diamètre et la longueur du tube du four (tubulaire) ne permet pas un placement précis de celui-ci, car l'échantillon (rectangulaire ou carré) est maintenu par un porte échantillon circulaire (adapté au tube du four), et le placement de l'ensemble au centre du four est généralement réalisé à l'aide d'un réglé. Lorsque le porte échantillon est poussé par le réglé jusqu'au centre du four, il arrive fréquemment qu'il subisse en même temps une rotation désaxant les axes principaux de l'échantillon par rapport à ceux de la matrice de la caméra.

[118] En effet, le porte échantillon est rarement parfaitement ajusté au diamètre intérieur du tube du four, notamment afin d'éviter que lors des montées en température le porte échantillon ne fracture le tube du four due à une trop forte dilatation, par exemple. De plus, il arrive parfois que le porte échantillon lui-même permette de laisser apparaitre à scène thermique arrière, dans le cas où l'échantillon n'est tenu que sur les coins, par exemple.

- Rotation de l'image et ajustement du contraste, avec prévisualisation instantanée.
- Détection automatique de l'image à laquelle est réalisée l'excitation, par détection d'élévation brutale des niveaux numériques (DL), avec vérification visuelle (possibilité de zoomer), décalage du vecteur temps pour que t=0 corresponde à l'instant de l'excitation, et possibilité de modification par boite de dialogue.
- Vérification graphique de la durée de l'excitation, avec possibilité de zoom graphique, et de modification par boite de dialogue.

Les Figure 7.26 et Figure 7.27 montrent respectivement la zone de sélection de détection de l'excitation sur l'image de référence, et différentes boites de dialogues de sélection d'options de traitement.

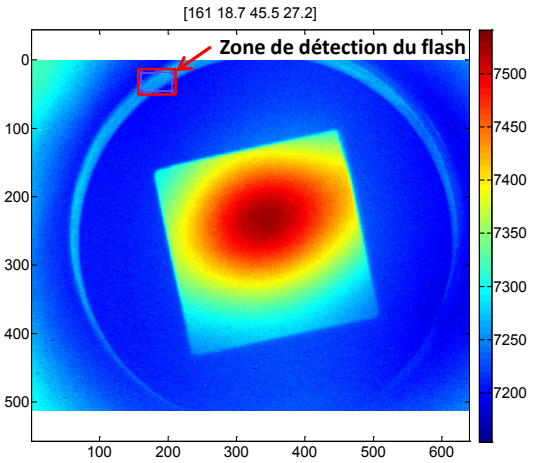


Figure 7.26 : Sélection de la zone de détection de l'excitation.

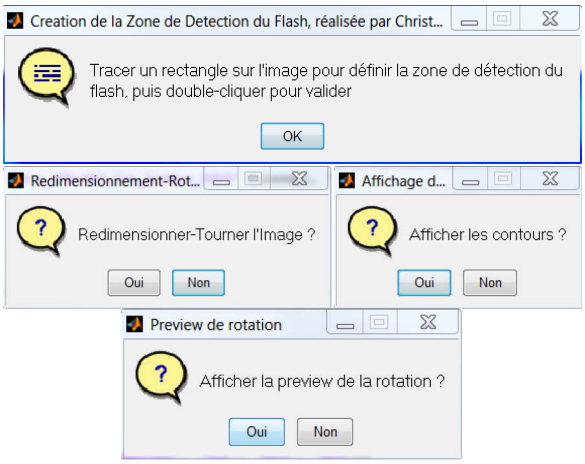


Figure 7.27 : Boites de dialogues de quelques options de traitements possibles.

Sur la Figure 7.28 est indiquée la zone de sélection de l'échantillon permettant de définir les différents paramètres de rotation (centre et angle de rotation) de l'image. Différents paramètres de contrôle sont affichés en instantané au-dessus de l'image. Les couples $\left(x_i\,;y_i\right)$ définissent les différentes positons des quatre points de contrôle matérialisés par les points jaunes sur la figure. Les angles $\left(\alpha_1\,;\alpha_2\right)$ correspondent à deux angles diamétralement opposés de la zone de sélection, afin de vérifier que la zone sélectionnée (ou que l'échantillon) soit bien rectangulaire. La valeur $\left\langle\theta_r\right\rangle$ correspond à la valeur moyenne des quatre angles de rotation θ_{ri} définis à partir des quatre arrêtes du rectangle.

La Figure 7.29 illustre la boite de dialogue de contrôle du contraste ayant permis de passer de l'image de la Figure 7.26 à celle de la Figure 7.28, permettant ainsi d'améliorer la visibilité du contour de l'échantillon.

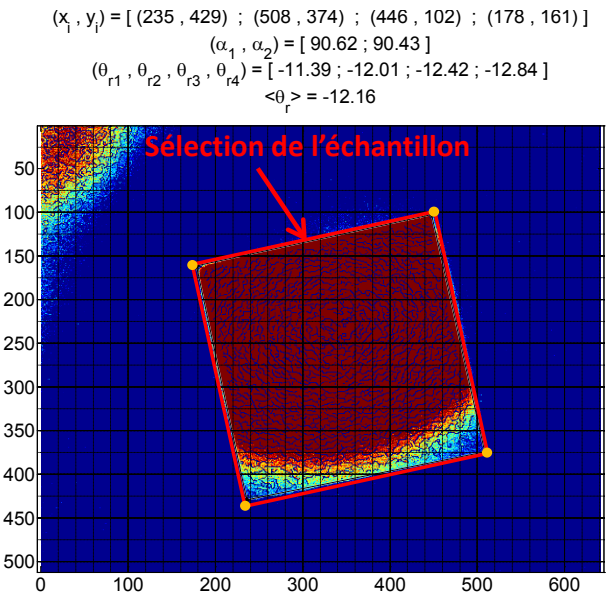


Figure 7.28 : Sélection de l'échantillon et détermination des paramètres de rotation.

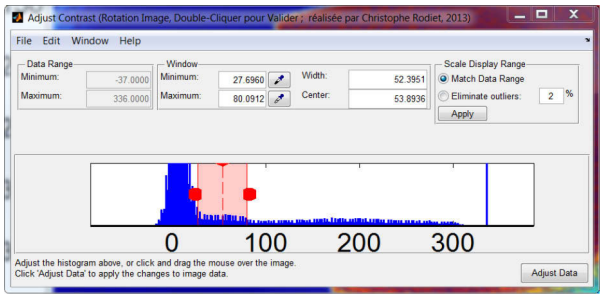


Figure 7.29 : Boite de dialogue de contrôle et modification du contraste.

La Figure 7.30 montre la prévisualisation instantanée qui est réalisée lorsque l'on déplace les différents points de contrôle sur l'image de Figure 7.28, permettant de vérifier le bon alignement des axes principaux de l'échantillon sur ceux de la grille superposée.

Sur la Figure 7.31, est illustrée la zone de sélection de la zone utile à extraire après rotation du champ de températures.

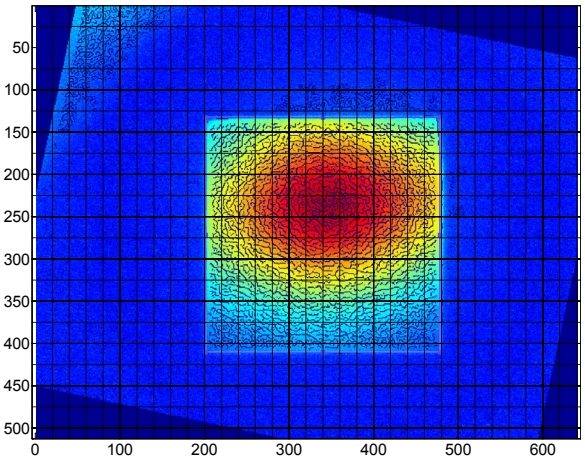


Figure 7.30 : Prévisualisation instantanée de la rotation en fonction des paramètres de la Figure 7.28.

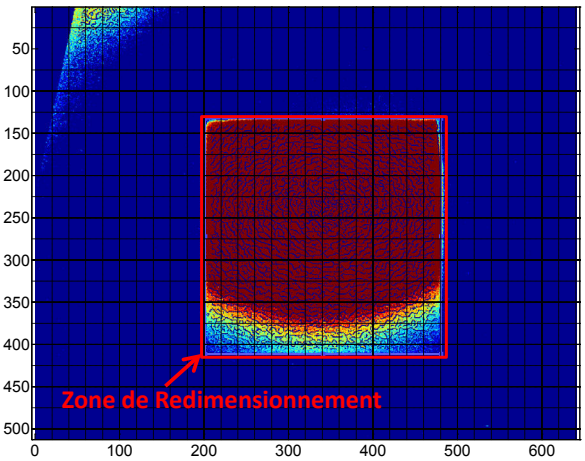


Figure 7.31 : Sélection de la zone utile (échantillon) à extraire après rotation.

La Figure 7.32 correspond à la figure affichée après zoom afin de faciliter la détection du temps initial de l'excitation. L'échelle de temps a été décalée automatiquement à partir de la détection automatique. Il est possible de zoomer d'avantage afin d'effectuer une vérification plus précise. La Figure 7.33 illustre la boite de dialogue associée qui permet d'entrer (ou de confirmer) la valeur du temps initial de l'excitation sur l'échelle

de temps décalée. Ici, la détection automatique ayant réussie, il suffit simplement de valider la valeur 0 en cliquant sur « ok ».

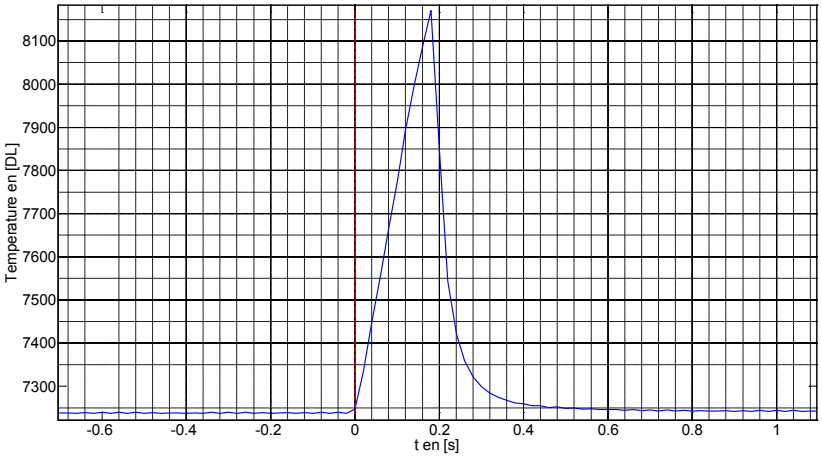


Figure 7.32 : Evolution (zoomée) du flux de la zone de détection de l'excitation.

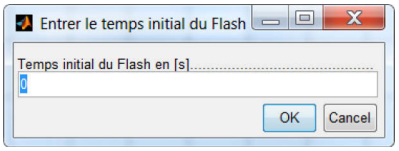


Figure 7.33 : Boite de dialogue permettant d'indiquer le temps initial de l'excitation.

Enfin, la détermination et/ou le contrôle de la durée de l'excitation est réalisée à partir de la Figure 7.34 sur laquelle sont représentés après zoom, les flux moyens normalisés de la zone de détection de l'excitation, et de l'échantillon. La Figure 7.35 représente la boite de dialogue permettant d'indiquer la valeur de la durée de l'excitation.

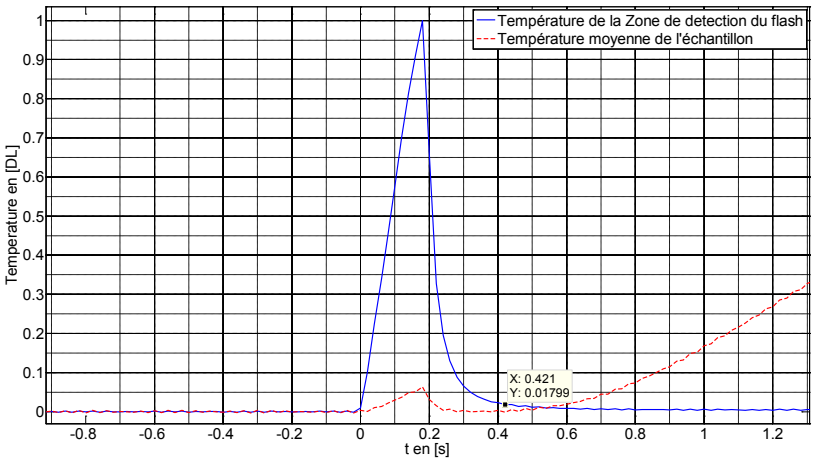


Figure 7.34 : Graphe zoomé permettant l'estimation de la durée de l'excitation.

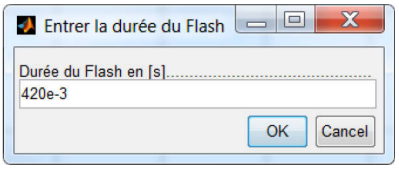


Figure 7.35 : Boite de dialogue permettant d'indiquer la durée de l'excitation.

Le champ de températures ainsi que les différents paramètres utiles (vecteur temps original et décalé, temps initiale et durée du flash,…) sont ensuite

Chapitre 8

Conclusion générale de la partie Multi-Spectrale

8. Conclusion générale de la partie Multi-Spectrale et Perspectives

8.1. Conclusion

Dans cette partie « Mesure de température par méthodes Multi-Spectrales » différents compromis inhérents à ces méthodes ont été présentés, ainsi que différents critères permettant de limiter les erreurs de mesures et/ou d'estimation de la température.

Pour les méthodes Bi-Spectrales, d'une part, un critère de séparation de longueurs d'ondes permettant d'éviter l'amplification de l'erreur de mesure sur la température a été établit, d'autre part, l'intérêt d'avoir un grand rapport de flux sur la minimisation de l'erreur sur la température a également été montré. Ces points impliquent non seulement que les longueurs d'ondes doivent être choisies soigneusement, mais également que les rapports de flux ne doivent pas être réalisés de façon arbitraire. De plus, la présence d'un biais systématique dû au bruit sur le flux et/ou à l'approximation de Wien dans les méthodes basées sur le rapport de flux a été démontrée.

Par ailleurs, les notions de longueurs d'ondes optimales globales et « pseudo-optimales » au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température ont été établies. La première méthode consiste en une optimisation simultanée des longueurs d'ondes minimisant l'écart-type de la température au sens des moindres carrés. Cette méthode peut être réalisée avec ou sans contraintes sur la gamme spectrale et/ou sur les paramètres. La seconde méthode, appelée « pseudo-optimale » car consistant en une sélection séquentielle des longueurs d'ondes « optimales », bien que moins performante que la première, a le mérite de permettre l'observation de l'évolution de l'écart-type de la température en fonction du nombre de filtres et du choix de leur longueurs d'ondes. En particulier, elle permet de s'adapter facilement à des contraintes expérimentales, telle que l'indisponibilité d'un filtre précis dont la longueur d'onde aurait été déterminé par la méthode d'optimisation globale, par exemple. Il a ainsi été possible d'établir un lien entre le critère de séparation de longueurs d'ondes et l'écart entre deux longueurs d'ondes optimales.

De plus, il a été montré dans le cadre des mesures mono-spectrales qu'il était équivalent de minimiser l'écart-type ou l'erreur relative sur la température, ou encore, de maximiser le rapport signal sur bruit ou la sensibilité du flux à la température.

La notion de longueurs d'ondes optimales à également menée à l'établissement d'une loi analogue à la loi de déplacement de Wien, permettant de déterminer les différentes longueurs d'ondes optimales avec et sans approximation de Wien, pour les mesures par méthodes mono-spectrales et bi-spectrales.

Enfin, différents modèles, avec et sans approximation de Wien, avec et sans rapport de flux, ainsi qu'un modèle linéarisé ont été testés à travers des simulations de type Monte-Carlo bruitées et non bruitées pour différentes variations d'émissivités (fonction polynomiale d'ordre 0 à 2, et variation de type Drude). Ces simulations ont permises de mettre en exergue le modèle le plus approprié pour les essais expérimentaux. Le modèle qui a été choisit est le modèle « TNL.Tabc » basé sur le modèle de Planck, ayant l'avantage de ne reposer ni sur l'approximation de Wien, ni sur le rapport de flux, permettant ainsi de limiter la présence de biais systématique au seul biais de modèle (dû au modèle de l'émissivité).

Pour conclure, notons que la mise en œuvre expérimentale a donné des résultats encourageant. En effet, il a été possible par la méthode et le modèle proposés, associés à une méthode permettant de prendre en compte la réflexion[119], de « corriger » des défauts d'uniformité spatiale de l'émissivité d'un échantillon en fonte oxydé et perforé. En particulier, l'erreur obtenue sur la température moyenne est de l'ordre de 2K (0,3%), et avec un écart spatial maximum de température d'environ 25K (4%).

8.2. Perspectives

Les premiers résultats théoriques et expérimentaux sont encourageants, mais à cause de contraintes expérimentales concernant la disponibilité des filtres, ces derniers n'ont pu avoir des longueurs d'ondes correspondant aux longueurs d'ondes optimales théoriques.

Ainsi, une première voie d'amélioration concerne la mise en place de Vari-Spectres[120], afin d'approfondir la validation expérimentale de la méthode de sélection de longueurs d'ondes optimales.

Dans un deuxième temps, une mise en œuvre expérimentale pour le suivi de température lors de la pyrolyse de biomasses, et/ou pour la caractérisation à hautes température de matériaux anisotropes, est également envisagée.

La première étape permettra de tester la méthode dans le cas de températures statiques, avant son application à des températures variables. Cependant, cette seconde phase imposera probablement des contraintes supplémentaires, telles qu'une procédure de sélection-estimation itératives des longueurs d'ondes optimales et de la température.

Un autre axe d'amélioration envisagé (et actuellement à l'étude) concerne une meilleure prise en compte de la réflexion dans la mesure multi-spectrale. La correction proposée dans la section 6.6.2 (p.112) donne des résultats encourageants, mais reste néanmoins perfectible.

---

[119] Sous hypothèse que la réflexion soit constante à trois niveaux de température.

[120] Dispositifs à base de prisme faisant office de filtre, et permettant de sélectionner de façon précise (sélective) et presque continue les longueurs d'ondes expérimentales.

Enfin, afin de mieux cerner la validité ou les limites théoriques de la méthode, une étude analogue à celle qui a été mené dans ce manuscrit, mais pour un écart-type non constant, proportionnel au flux[121] par exemple, et pour un plus large panel de variations d'émissivité, pourrait être réalisée.

[121] Ce cas revêt une importance particulière, car physiquement, il correspond au comportement expérimental observé de l'écart-type du flux.

PARTIE 2 :
Caractérisation de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales

Chapitre 9

Etat de l'Art :

Introduction

9. Etat de l'Art

9.1. Introduction

Au cours du $XX^{ème}$ siècle, la nécessité d'optimisation énergétique s'est faite sentir notamment après les chocs pétroliers qui ont eu pour conséquence une forte hausse du prix de l'énergie. Cela a été le moteur de nombreuses évolutions des méthodes de caractérisation thermique de matériaux ayant eu lieu parallèlement à l'améliorer les appareils de mesure rendues possibles par les évolutions technologiques.

De nombreuses grandeurs physiques interviennent dans la caractérisation thermique de matériaux, et malheureusement, il n'existe pas de méthode unique de caractérisation qui soit adaptée à l'ensemble de ces grandeurs thermiques. Il existe ainsi de nombreuses méthodes différentes, souvent adaptées à l'estimation d'une grandeur particulière.

La profusion des méthodes de caractérisation, souvent adaptées à l'estimation d'une grandeur particulière, rend leur classification délicate. Néanmoins, certains auteurs ont proposé une classification en grandes classes de méthodes en fonction de certains critères.

Dans ce chapitre, une première partie présente un panorama de différentes méthodes permettant la détermination de grandeurs thermiques. Ces méthodes peuvent être avec ou sans contact, et fonctionner en régime permanent ou variable. Elles seront brièvement présentées, et souvent synthétisées sous forme de tableaux. Nous en indiquerons quelques domaines d'applications, les grandeurs thermiques accessibles, ainsi que des références bibliographiques dans lesquelles se trouvent de plus amples développements, et notamment les principes et limites de fonctionnement de ces méthodes.

Une seconde partie est consacrée aux évolutions des méthodes appartenant à la classe des « méthodes flash » (régime variable et sans contact) à laquelle appartiennent les nouvelles méthodes de caractérisation que nous développons dans ce manuscrit. Les méthodes proposées ont pour finalité de permettre la caractérisation à haute température (estimation de diffusivités) de matériaux « localement » orthotropes.

9.2. Panorama des méthodes de détermination des propriétés thermiques liées à la conduction thermique

Une synthèse (« généraliste ») des différentes méthodes de « mesure[122] » des propriétés thermiques (conductivité, diffusivité, effusivité, capacité calorifique) des solides a été réalisée par Degiovanni en 1994 [111]. Pour de plus amples informations concernant les différentes méthodes citées par Degiovanni dans [111], on peut consulter des revues bibliographiques plus spécialisées telles que celle de Deponte réalisée en 2002 [112] notamment pour les isolants, ou celles de Krapez publiées en 2006 [113, 114, 115] sur la mesure d'effusivité, ou encore la synthèse bibliographique de 1979 de Diot [116] sur les mesures de capacité thermique, ainsi que les synthèses plus récentes réalisées en 2010-2011 par Grenet et Legendre [117, 118, 119]. Enfin, on peut citer la revue bibliographique traitant de la méthode flash, et réalisée en 2004 par Hay [120]. Notons que de nombreux détails concernant divers méthodes de mesures des propriétés thermiques (méthode flash, fil chaud, plan chaud, ruban chaud, hot-disk, tricouche…) et libres d'accès sont donnés dans le document réalisé en 2011 par Jannot [121].

Selon Degiovanni [111], la détermination d'une grandeur thermique nécessite trois étapes :

- L'élaboration d'un modèle thermocinétique tenant compte de la réalité physique de l'expérience (prise en compte des transferts au sein de l'échantillon et de l'environnement).
- La mesure de grandeurs physiques intervenant dans le modèle (température et/ou flux, dans le cas du transfert de chaleur).
- La mise en œuvre d'une méthode d'estimation de paramètres (basée sur la comparaison modèle-expérience).

Remarques **:** La détermination simultanée de plusieurs paramètres est souvent délicate, car elle nécessite de maitriser parfaitement les grandeurs constitutives de l'expérience, ainsi que les corrélations éventuelles entre les paramètres. De plus, une méthode optimisée pour la détermination d'un paramètre (grandeur thermique par exemple), ne l'est généralement pas pour les autres. Enfin, on montre [26] que l'augmentation du nombre de paramètres à estimer sur une même expérience a

[122] Par abus de langage, on emploiera le terme de « mesures » (ou on parlera de mesurer) de propriétés thermophysiques, bien que ce ne soient pas ces grandeurs qui sont à proprement parlé mesurées. Un terme plus approprié serait « détermination » ou « estimation ». En effet, la définition exacte de la mesure (dans notre contexte) est : « *Action de déterminer la valeur de certaines grandeurs par comparaison avec une grandeur constante de même espèce, prise comme terme de référence (étalon, unité)* » [Le Petit Robert]. Les propriétés concernées sont en réalités déterminées à partir d'autres grandeurs qui sont accessibles à la *mesure*.

généralement tendance à augmenter l'écart-type sur l'estimation de chacun des paramètres. Ainsi, il est fréquent que plusieurs méthodes soient employées conjointement afin de déterminer un ensemble de paramètres, mais chacune ayant pour objectif principal la détermination d'un unique paramètre. Notons que la diffusivité thermique a $[m^2.s^{-1}]$ (pour une direction spatiale donnée) est à priori[123] l'un des paramètres thermiques les plus simples à déterminer, car elle ne fait intervenir que les grandeurs fondamentales que sont le « temps » et la « longueur ». La méthode d'estimation de la diffusivité de Parker[124] [122] est basée sur ce constat. De plus, ce paramètre intervient naturellement dans l'expression du temps et de la longueur caractéristiques de diffusion, définis respectivement par : $\tau_{cd} = e^2/a$, et $l_{cd} = \sqrt{a\,t}$.

Bien qu'une quête du chercheur soit l'unification… Il n'existe à priori à ce jour aucune méthode unique permettant de déterminer les différentes grandeurs thermiques, ni de classement universel de ces différentes méthodes. Cependant, il est possible de les classer selon différents critères :

- La catégorie de régime à partir duquel l'estimation est réalisée : permanent ou variable. Dans la catégorie « variable », on peut distinguer les types de régimes suivants : lentement variable ou quasi-établi (temps longs), périodique établi, transitoire.
- La forme temporelle de l'excitation : Dirac, échelon, périodique, de formes quelconques mais à support limité en temps et en énergie (excitation de type créneau, Gaussien, aléatoire…).
- La forme spatiale d'excitation : uniforme, locale, modulée (spatialement).
- La méthode d'excitation : électrothermique (chauffage par effet Joule), photothermique…
- La méthode de mesure : avec ou sans contact.
- L'étendue spatiale de mesure : locale ou étendue.
- Le lieu de mesure : localisé sur ou hors de l'excitation.
- Les grandeurs mesurées : températures, flux, pressions, angles,… Deux grandes classes se distinguent à priori lorsque la mesure est sans contact :

[123] Nous utiliserons dans ce document la graphie francisée de « *a priori* » (et nous écrirons donc « à priori ») afin d'éviter l'emploi de l'italique, et en accord avec les conventions d'écritures actuelles (en 2013).

[124] Le principe de cette méthode reposant sur la valeur du nombre de Fourier ($Fo = at_{1/2}/e^2 = 0{,}139$) pour le temps de demi-montée $t_{1/2}$ du thermogramme 1D sans pertes sera développé dans le chapitre traitant des méthodes flash.

- les méthodes photoacoustiques (détection d'effets mécaniques induits) qui sont principalement composées des méthodes interférométriques, piézoélectriques, microphoniques et de photodéformation.
- les méthodes photothermiques principalement composées des méthodes par photoréflexion, effet mirage, et radiométriques.

- La géométrie du problème déterminée par la forme de l'excitation[125] ainsi que la géométrie du système : 1D, 2D, ou 3D. Le repère peut être cartésien, cylindrique ou sphérique. (exemple : un milieu de forme rectangulaire mais pouvant être considéré comme infini, et étant soumis à une excitation circulaire, pourra avantageusement être décrit à l'aide d'un repère cylindrique…)

Compte tenu de la diversité des critères intervenant dans les méthodes de mesures et/ou de caractérisation, il est délicat d'en faire une synthèse les regroupant toutes.

Néanmoins une première tentative de présentation synthétique du panorama des méthodes de détermination de paramètres thermiques fut réalisée en 1994 par Degiovanni [111]. On pourrait représenter son classement par le schéma de principe suivant :

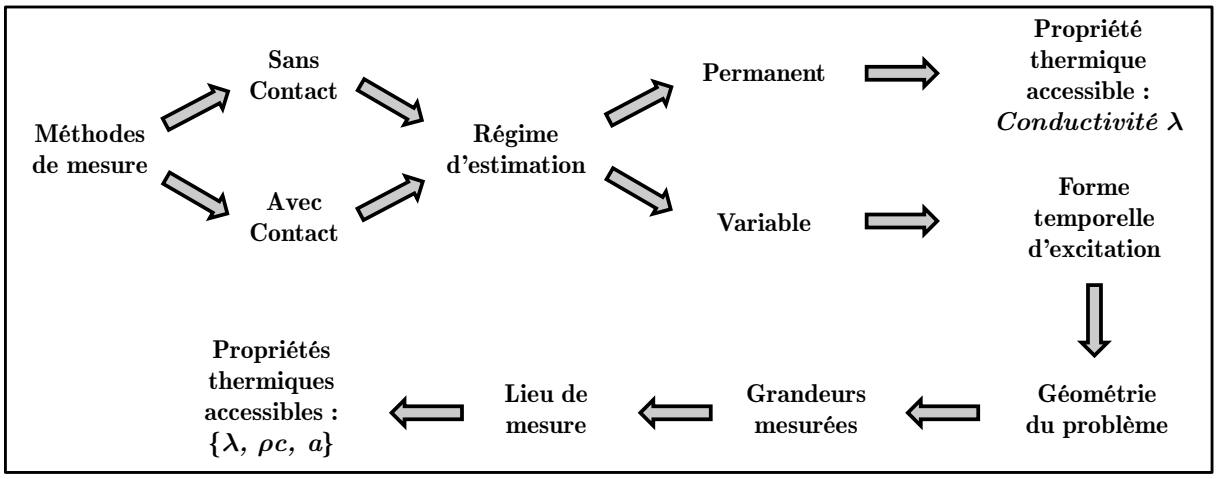


Figure 9.1 : Exemple de classification des méthodes de détermination de propriétés thermiques

- ***Remarques*** **:**
  - En régime permanent (également appelé régime stationnaire) seule la conductivité thermique (équivalente) est accessible. Elle se déduit généralement du calcul de la résistance thermique équivalente[126]. En revanche, le régime variable est plus « riche » et permet l'accès à plus de grandeurs thermiques :

[125] Voir par exemple [231] pour des cas de transfert 1D en géométrie et repérage cartésien, cylindrique et sphérique. Le transfert 1D ayant été obtenu grâce à une excitation uniforme spatialement.

[126] Il est difficile d'avoir un contact parfait entre sonde et échantillon, et la résistance de contact modélisant le contact imparfait est généralement délicate à déterminer…

Conductivité λ, la capacité thermique volumique ρc, l'effusivité thermique $b = \sqrt{\lambda \rho c}$, ou autres groupements de λ et ρc.

- Les méthodes par contact sont génératrices de quelques difficultés : détermination de la résistance de contact (car contact non parfait), de la détermination de la capacité de la sonde[127], problèmes de tenue à haute température… Ces difficultés peuvent être résolues en utilisant des méthodes de mesure sans contact[128] (méthodes photoacoustiques ou photothermiques).

Dans son article, Degiovanni [111] propose de regrouper les méthodes instationnaires suivant la figure ci-dessous :

Perturbations / Mesures	*Echelon*			*Dirac*					*Périodique*			*Quelconque*			*Aléatoire*		
I				A					B						R		
II		C		D			E,F		G						S		
III	H								I	J		K,W	L,M,Z				
IV	N,X,Y	O	P	Q													
V				T	U	V						A					
Géométrie	1a	2a	3a	1a	1b	1c	2a	3a	1a	2a	3a	1a	2a	3a	1a	2a	3a

Mesure

- I – 1 température sur la perturbation
- II – 1 température hors de la perturbation
- III – 2 températures
- IV – 1 flux et 1 température
- V – n températures hors de la perturbation

Géométrie

- 1 – *"mur"*
- 2 – *"cylindre"*
- 3 – *"sphère"*

Perturbation

- a – localisée en espace
- b – périodique en espace
- c – aléatoire en espace

	e
: Méthode flash face avant	Diffusivité a
: Régime sinusoïdal face avant	
C : Sonde thermique bifilaire	
D : Méthode flash	
E : Méthode flash en géométrie cylindrique	
F : Méthode de l'onde convergente	
G : Régime sinusoïdal face arrière	
H : Méthode calorimétrique	Conductivité λ
I : Régime sinusoïdal face avant et arrière	Diffusivité a
J : Régime sinusoïdal sur film mince	
K : Méthode de l'ailette	
L : Sonde thermique trifilaire	
M : Méthode de l'ailette en conduction radiale	
N : Méthode du plan chaud	Effusivité $b = \sqrt{\lambda \rho c}$

[127] La présence de la sonde perturbe localement le champ de température.

[128] Cependant, comme toute méthode, d'autres contraintes inhérentes au principe de mesure vont « apparaître ».

O : Méthode du fil chaud	Conductivité λ
P : Méthode de la sonde sphérique	Groupement $\lambda^3/\rho c$
Q : Méthode flash face avant	Effusivité $b = \sqrt{\lambda \rho c}$
R : Perturbation aléatoire face avant	Diffusivité a
S : Perturbation aléatoire face arrière	
T,U,V : Flash 2D	
W : Méthode du tricouche	{Diffusivité a, Chaleur volumique ρc}
X : Méthode du disque chaud	
Y : Méthode du ruban chaud	
Z : Méthode du tricouche cylindrique	

Figure 9.2 : Regroupement des méthodes de caractérisation instationnaires.

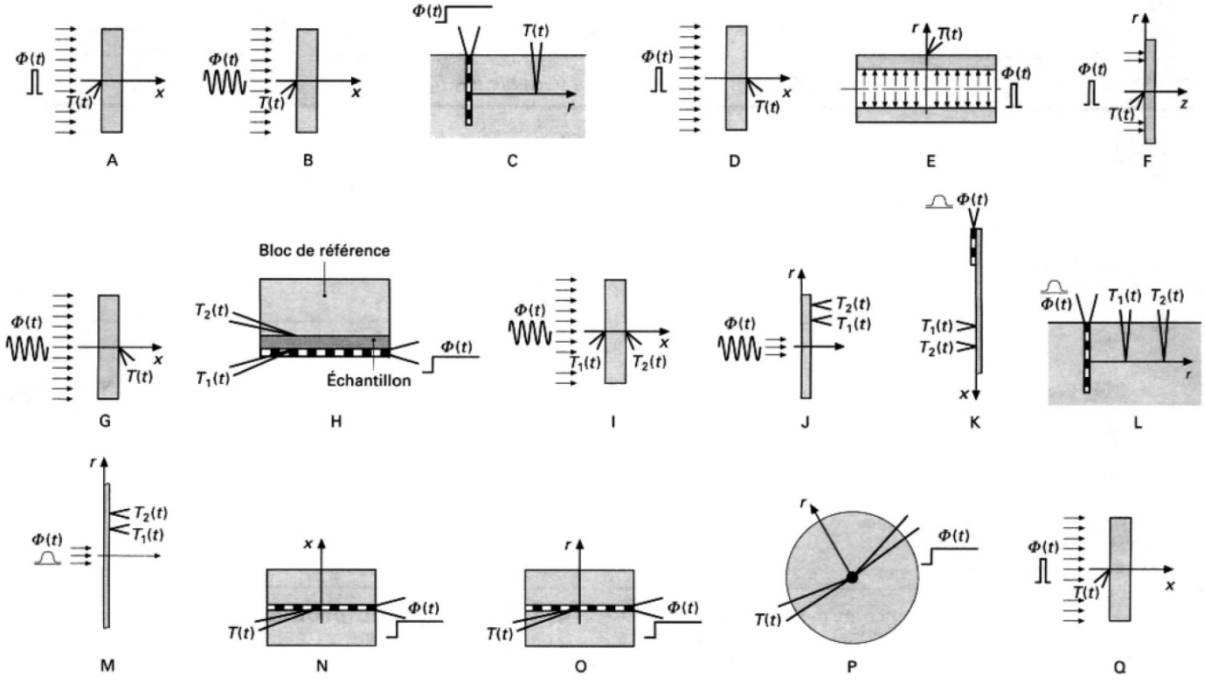


Figure 9.3 : Panorama des méthodes de détermination de grandeurs thermiques en régime instationnaire [111].

- ***Remarques*** **:**
  - Bien que les évolutions technologiques des appareils de mesures (caméras thermiques à détecteurs matriciels) permettent théoriquement d'employer la méthode flash pour une géométrie 3D, en pratique, il est d'usage fréquent de se ramener à une géométrie 1D ou 2D en moyennant suivant l'une ou les autre(s) direction(s)[129].

[129] On montre que des transformations intégrales permettent des séparer les paramètres d'intérêt (diffusivités) suivant chacune des directions principales d'anisotropie. Le nombre important de photodétecteurs présents dans les caméras matricielles permet par prise de moyenne de réduire les effets du bruit et ainsi l'écart-type sur les mesures, bien que les photosites soient souvent corrélés [160, 84].

- Les méthodes « aléatoires en temps » ont généralement pour but de reconstruire le contenu fréquentiel de l'impulsion (Dirac). L'avantage est de pouvoir utiliser des sources d'énergie de plus faible puissance que celles des méthodes flash classiques, limitant ainsi les risques de détérioration locale du matériau. Mais ces méthodes sont souvent complexes car elles nécessitent des méthodes de traitement du signal élaborées (analyses corrélatoires, paramétriques…). Voir par exemple, [123, 124, 125, 126] pour plus de détails concernant les PRBS (Pseudo Random Binary Sequence) et quelques évolutions permettant de se rapprocher du contenu fréquentiel du bruit blanc théorique. Une application au CND (Contrôle Non Destructif) est proposée par Batsale [127], et Battaglia [128] l'utilise conjointement à des dérivées (et modèles) d'ordre non entier très connues des automaticiens de l'Université de Bordeaux I [129, 130, 131, 132]. Ces derniers semblent avoir inspiré les thermiciens de cette même Université pour son extension à la caractérisation thermique [133, 134, 135]. Depuis, cette méthode est également appliquée par Gabano [136] en 2011 pour le CND, et Fudym [137] en 2005 pour la détermination de propriétés thermiques (effusivité et conductivité thermique). Un état de l'art a été réalisé par Malti [131] en 2007 concernant les identifications de systèmes utilisant les modèles fractionnaires.
- La première utilisation d'une modulation spatiale du flux dans le cadre du CND semble due à Lesniak [138, 139] en 1993, et a fait l'objet de brevets [140, 141] ainsi que de nombreuses publications, dont une application à la détection de fractures lors d'essais thermomécaniques [142]. Entre 1997 et 1998, Lesniak perfectionnât sa méthode afin de pouvoir tenir compte de l'influence de l'émissivité (séparation des effets par dérivation) [143, 144, 145, 146]. Ce principe de modulation spatiale d'excitation inspirera Krapez en 1999 [147, 148, 149] pour l'estimation de diffusivité dans le plan. Son objectif est de pouvoir accroitre les gradients thermiques spatiaux du matériau afin d'améliorer le rapport signal sur bruit de la mesure obtenue par caméra infrarouge, tout en évitant d'avoir des élévations locales de température pouvant détériorer le matériau. Cela est rendu possible en répartissant sur une plus grande surface l'énergie émise par la source d'excitation. Cette méthode d'estimation a été appliquée par Zhang [150] en 2006 pour la caractérisation (diffusivité thermique) de plaquettes de freins en carbone. Elle a également été couplée à une méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (DVS ou SVD en anglais pour : Singular Value Decomposition) pour le CND et l'estimation de diffusivité, voir à cet effet les manuscrits de thèse de Bamford et Ayvazyan [151, 152] ainsi que les articles afférents [153, 154, 155, 156, 157, 158].
- De nombreux développements concernant l'utilisation de la méthode d'hétérodynage par thermographie ont été réalisés par Clerjaud, dont la mesure de diffusivité (et de cartographie de diffusivité) d'un échantillon solide [159,

160], ainsi qu'une application à la mesure de vitesse en microfluidique [161]. Le principe de l'hétérodynage[130] est basé sur celui des techniques stroboscopiques et consiste à ralentir artificiellement un phénomène périodique haute-fréquence.

- Des études comparatives d'utilisation de méthode périodiques, et impulsionnelles appliquées au Contrôle Non Destructif (CND) ont étés réalisées par [162, 163, 164, 165].

Ce foisonnement de méthodes différentes pour la détermination (ou « mesure ») de grandeurs thermiques est en grande partie dû au fait que ces différentes méthodes donnent accès qu'à certaines grandeurs physiques, moyennant une certaine précision sur celle-ci pour un domaine d'application donné.

Afin de faciliter le choix de la méthode appropriée, un regroupement de ces différentes informations au sein d'un tableau a été proposé par Krapez [113] :

Méthode	Paramètre(s) accessible(s)	Domaine d'application	Solide / liquide	« incertitude » sur *b*	« incertitude » sur *a*	« incertitude » sur λ	Commentaires
Touchau	*b*	< 2 000 J · m^{-2} · K^{-1} · s$^{-1/2}$	s	1 à 2 % (1)			Information qualitative sur *b*(*z*)
	b, *a*				5 % (3)		avec deux éprouvettes d'épaisseurs différentes
Comparateur thermique							aucun paramètre accessible sans une connaissance de la résistance de contact
Plan chaud	*b*	100 à 6 000 J · m^{-2} · K^{-1} · s$^{-1/2}$	s, l	5 % 2 % (3) < 2 % (2)			céramiques béton
Sonde plane dynamique	*b*, *a*, *c*	conducteurs (+isolants avec modèle adapté)	s		1 à 2 % (1) 3 % (2)	1 à 2 % (1) 3 % (2)	fer, acier fer
Sonde plane dynamique étendue	*b*, *a*	isolants	s		3 % 6 % (3)	4 % 6 % (3)	PMMA BK7, Polyéthylène, altuglas
Plan chaud et capteur séparés	*b*, *a*	isolants	s		4 à 7 % (1) 4 % (2)	1 à 9 % (1) 4 % (2)	altuglas, avec différentes puissances BK7 entre 6 et 10 mm
Fil chaud bitige	λ, *b*	isolants	s, l		20 %	5 %	estimation théorique
Fil chaud asymétrique gardé	λ, *b*	0,03 à 2,2 W · m^{-1} · K^{-1}	s, l			5 %	
Ruban chaud instationnaire sur matériau épais	*b*, *a*	0,01 à 100 W · m^{-1} · K^{-1}	s, l	< 4 % (4)	9 à 10 % < 4 % (1) < 4 % (3) 1,5 % (1)	< 5 % (4) 2 à 3 % < 1,3 % (1) < 4 % (3) 1 % (1)	polymères matériaux de construction acier (ruban avec 10 µm d'isolant) acier isolants et liquide
Ruban chaud sur plaque mince	*b*	plaque conductrice (métal)	s	8 % (3)			cuivre
3ω	*b*, *a*	isolants, conducteurs	s, l	3 % (3)		2 % (1)	silice fondue cristal KDP
Disque chaud	*b*, *a*	0,005 à 500 W · m^{-1} · K^{-1}	s, l		5 à 10 % 7,5 % (3)	2 à 5 % 5,6 % (3)	roches (granite)
Sonde sphérique active	b/λ^2, *a*		l		4 % (3)	4 % (3)	eau/glycol

(1) écart-type relatif de répétabilité
(2) écart-type relatif de reproductibilité
(3) écart par rapport aux résultats d'une méthode « classique »
(4) incertitude de l'estimateur

Tableau 9.1 : Domaine d'application et incertitudes de mesure de quelques méthodes (avec contact), [113].

[130] L'hétérodynage est également très utilisé en électronique pour le décalage de fréquences dans les systèmes de réception d'ondes radio (poste de radio).

Des informations complémentaires concernant les temps caractéristiques ainsi que les échelles de mesures de quelques méthodes sont données par Schick [166] et Clerjaud [160] :

Méthode	τ (s)	f (Hz)	l (m)	Traceur	Contact
Fil chaud -Plan chaud	1	1	10^{-3}	Température de surface	OUI
3ω	$10^{-4} - 10^{-5}$	$10^{4} - 10^{5}$	10^{-5}	Mesure de Résistance électrique	OUI
SThM	$10^{-4} - 10^{-5}$	$10^{4} - 10^{5}$	10^{-5}	Mesure de Flux	OUI
Radiométrie	10^{-6}	10^{6}	10^{-7}	Rayonnement IR émis	NON
Thermoréflectométrie	$10^{-12} - 10^{-9}$	$10^{9} - 10^{12}$	10^{-9}	Variation de Réflectivité	NON

Tableau 9.2 : Temps caractéristiques et échelles spatiales de mesure de quelques méthodes de métrologie, [166].

Des références bibliographiques, ainsi que le principe de fonctionnement et les limites des méthodes $3w$, SThM, de thermoréflectométrie, de radiométrie photothermique modulée, et d'acoustique picoseconde, sont présents dans [166].

Parmi les méthodes basées sur une excitation sans contact (excitation par émission-absorption[131] de photon), on pourrait distinguer deux grandes classes de méthodes : les méthodes photoacoustiques, et les méthodes photothermiques.

Les méthodes photoacoustiques reposent sur l'analyse de phénomènes mécaniques induits, dus à l'échauffement provoqué par l'excitation photothermique.

Les méthodes photothermiques sont plutôt associées à des phénomènes optiques induits (émission photoniques ; variation du facteur de réflexion, de l'indice optique de milieu…).

Une synthèse des méthodes sans contact (photothermique et photoacoustique) a été réalisée par Balageas [167] et Remy [168] :

[131] Emission de photons par une source (radiative, telle que les lampes flash et halogènes, panneaux radiants, diodes lasers…), et absorption par l'échantillon d'une partie des photons émis.

	Méthode	Equations à résoudre	Inconvénients	Avantages
PHOTOTHERMIQUE	Radiométrique	3D Diffusion de la chaleur non couplée	• Sensibilité moyenne à température ambiante • Connaissance parfois nécessaire de l'émissivité de la surface	• Echantillon quelconque • Expérience facile • Très grande bande passante
	Effet mirage	3D Diffusion de la chaleur non couplée	• Surfaces convexes • Bon état de surface • Bande passante et résolution spatiale moyennes	• Très grande sensibilité • Interprétation simple
	Photoréflexion	3D Diffusion de la chaleur non couplée	• Bonnes surfaces réflectrices • Sensibilité dépendant de l'échantillon	• Interprétation simple • Grande résolution spatiale • Grande bande passante (Mhz)
PHOTOACOUSTIQUE	Microphonique	1D Scalaires couplées	• Petits échantillons • Cellule fermée • Bande passante et résolution faibles	• Interprétation 1D possible • Bonne sensibilité
	Piézo-électrique	Vectorielles couplées	• Capteur collé sur échantillon • Interprétation difficile	• Grande bande passante • Utilisable dans les microscopes électroniques
	Photodéformation	3D Vectorielles couplées	• Bonnes surfaces réflectrices • Interprétation difficile	• Grande résolution spatiale • Grande bande passante (Mhz)
	Interférométrie	3D Vectorielles couplées	• Bonnes surfaces réflectrices • Interprétation difficile	• Très grande sensibilité

Tableau 9.3 : Tableau de synthèse des méthodes photoacoustiques et photothermiques (Méthodes sans contact), [168].

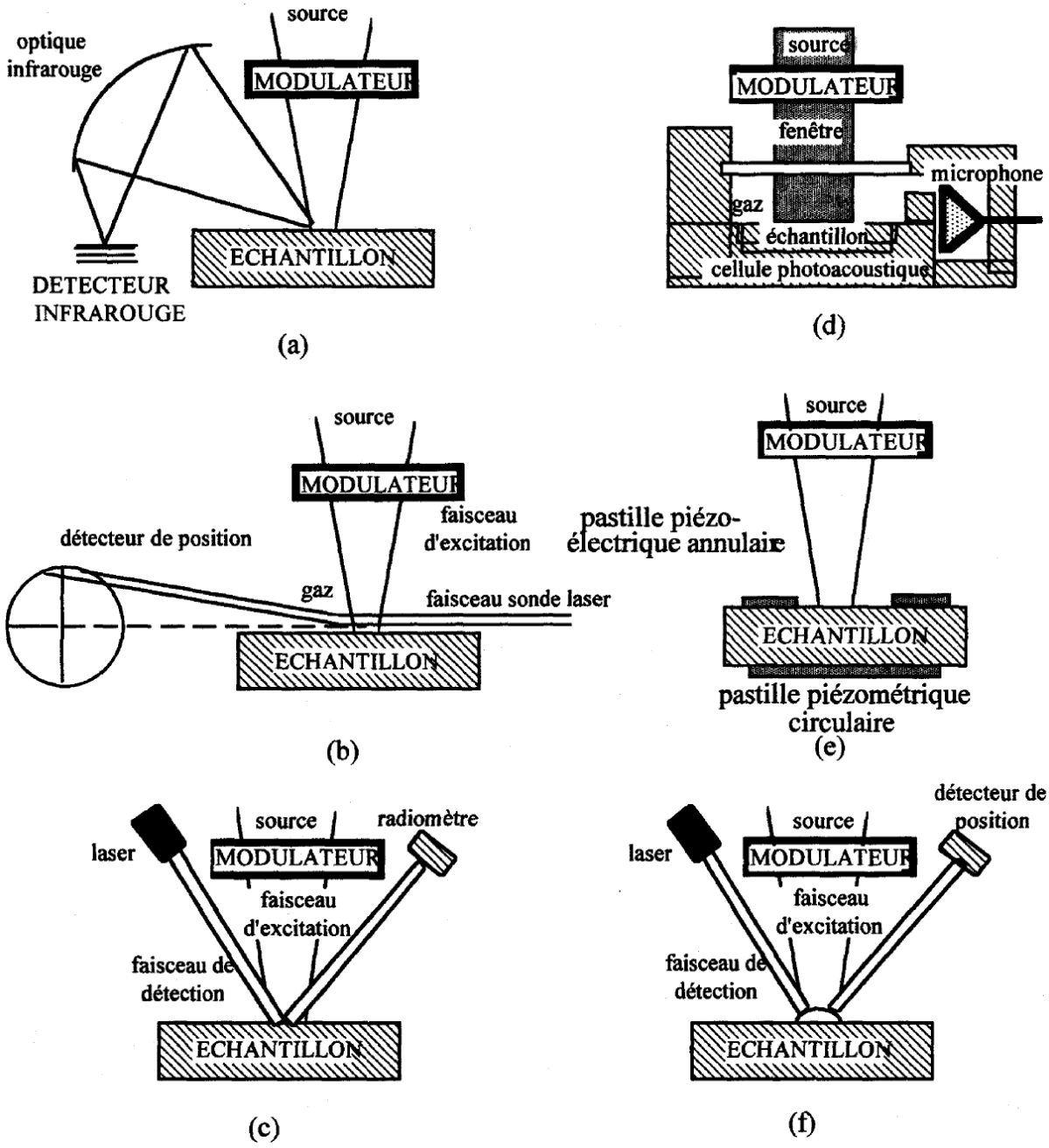


Figure 9.4 : Schémas de principe des méthodes thermiques sans contact. : méthodes photothermiques radiométriques (a), par effet mirage (b) et par photoréflexion (c), méthodes photoacoustiques microphoniques (d), piézoélectriques (e), et par photodéformation (f). [167].

- *Remarques :*
  - Une confusion pourrait régner entre les méthodes par photodéformation, photoréflexion, et effet mirage. Elles sont en effet très proches car elles exploitent la déformation de surface de l'échantillon (ou le gradient d'indice de réflexion), mais diffèrent par le procédé d'analyse. Dans le cas de la photodéformation, on mesure la déviation de la réflexion d'un faisceau sonde due à la déformation de la surface induite par l'échauffement de celle-ci. La photoréflexion est basée sur la mesure des variations d'intensité de la réflexion d'un faisceau sonde due à l'échauffement de la surface à analyser. Enfin, l'effet mirage consiste à mesurer la déviation d'un faisceau sonde léchant (ou traversant l'échantillon si il est semi-transparent) la surface chauffée par un faisceau pompe, cette déviation étant due au gradient d'indice du fluide (échauffé par la paroi) régnant au voisinage de la paroi considérée.
  - Des informations complémentaires ainsi que de nombreuses références bibliographiques concernant les méthodes du Tableau 9.3 sont données dans : [169, 168, 170, 171, 123, 166]. En particulier, des explications synthétiques sont présentes dans [168], et des explications plus étoffées comportant de nombreux schémas (souvent issus des publications initiales des inventeurs des méthodes) se trouvent dans [169, 171]. Ces derniers abordent également de nombreuses autres méthodes.
  - Les avantages et inconvénients des excitations flash, sinusoïdale et aléatoire, sont abordés dans [123].

La radiométrie photothermique repose sur la mesure du rayonnement thermique (généralement infrarouge) émis par une surface en réponse à une excitation photothermique (excitation radiative). La suite du document s'intéressera à la méthode radiométrique appelée Méthode Flash. Pour cela, nous commencerons par rappeler les origines de la méthode, ainsi que ces évolutions, et plus particulièrement celles qui ont inspirées les nouvelles méthodes proposées dans la suite de ce manuscrit.

9.3. La Méthode Flash et ses évolutions

Remarque préliminaire : Afin d'alléger la présentation, la méthode flash de Parker ainsi que les différentes évolutions de cette méthode pour l'estimation 1D de diffusivité ont été reléguées en Annexe A.6 p. 317. Ainsi, seules les méthodes d'estimation flash 2D et 3D sont présenté ici.

9.3.1. Premières études des effets de conduction bidimensionnelle dus à une excitation non uniforme : Donaldson (1975), Amazouz (1987), et Lachi (1991)

Parallèlement au développement de méthodes permettant de prendre en compte la forme temporelle du flash et les pertes, il y eut des études afin d'adapter la méthode flash classique de Parker aux matériaux anisotropes. Donaldson & Taylor en 1975 [172] ont été les premiers à étudier le transfert radial dans un cylindre en l'irradiant sur une surface de rayon inférieur, afin de déterminer les diffusivités selon les axes principaux d'anisotropie. Quelques années plus tard, Amazouz en 1987[173], et Lachi & Degiovanni en 1991 [174], affinent cette technique en séparant le terme radial et axial de l'équation de la chaleur, dans le cas d'un cylindre orthotrope, irradié partiellement sur une surface de rayon inférieur par une excitation impulsionnelle uniformément répartie, et pour un coefficient d'échange thermique supposé uniforme et constant. La méthode nécessite la mesure de deux températures en face arrière, et l'estimation de la diffusivité radiale est réalisée à l'aide des moments d'ordre 0 et -1 du rapport des températures.

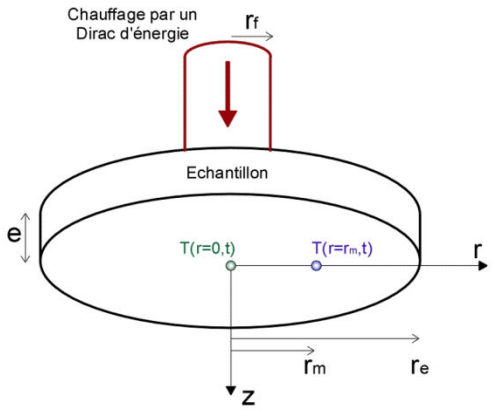


Figure 9.5 : Principe de la méthode flash bidimensionnelle utilisée par Lachi [174]. (Extrait de [170]).

Remarque : Ces méthodes sont très sensibles au positionnement et à la taille de l'excitation et de la détection. Elles illustrent la difficulté technique qu'impose la mesure simultanée des deux grandeurs (diffusivités axiale et radiale).

9.3.2. Méthode de Philippi (1994) : Estimation de diffusivités longitudinales de matériaux anisotropes

En 1994, Philippi & Batsale [175, 176, 177] proposent une méthode afin de déterminer les diffusivités dans le plan[132] d'un matériau anisotrope et homogène (sans hypothèse d'ailette), à l'aide d'une caméra infrarouge. Sa méthode permet non seulement de prendre en compte les échanges thermiques[133] en face avant et arrière (flux latéraux supposés nuls), mais également de s'affranchir de la forme spatiale de l'excitation lorsque celle-ci est impulsionnelle en temps (Dirac). Le schéma de principe est donné Figure 9.6 :

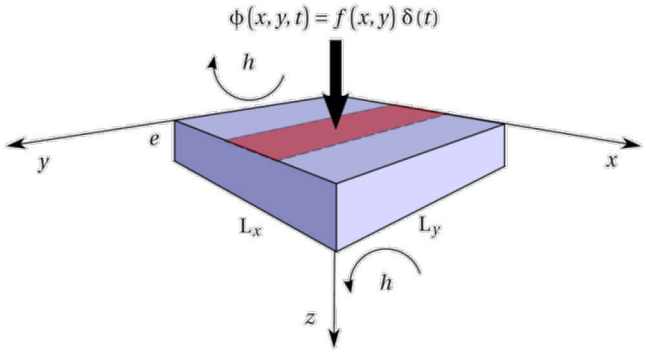


Figure 9.6 : Schéma de principe de la méthode de Philippi 1994. (Extrait de [84])

Le système d'équations différentielles régissant le transfert de chaleur est :

$$\left|\begin{array}{ll} \lambda_x \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial T^*}{\partial t} & \left| \lambda_z \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = hT^* \\ T^*\left(x,y,z,t\right) = T\left(x,y,z,t\right) - T_\infty & \left|\dfrac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y\in\{0,L_y\}} = 0 \\ T^*\left(x,y,z,t=0\right) = 0 & \left|\dfrac{\partial T^*}{\partial x}\right|_{x\in\{0,L_x\}} = 0 \\ \lambda_z \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=0} = hT^* - f\left(x,y\right)\delta\left(t\right) & \end{array}\right. \qquad (9.3.1)$$

Le principe consiste à appliquer au système (9.3.1) transitoire, une double transformation Fourier-Cosinus-Finie en espace, et une transformation de Laplace unilatérale en temps[134]. Elle obtient ainsi l'expression (9.3.3) du champ de températures en face arrière dans l'espace transformé :

[132] La géométrie et le repère utilisés seront cartésiens.

[133] Les échanges latéraux sont négligés, et ceux en face-avant et arrière seront modélisés par un coefficient d'échange h uniforme, et constant.

[134] Les détails calculatoires peuvent être trouvés dans les travaux de Philippi [175, 176, 177], ou l'ouvrage [197], ainsi que dans les travaux plus récents [84, 183, 35]. Les transformations intégrales seront également utilisées dans la suite du manuscrit, dans la partie « Méthode de caractérisation thermique ».

$$\theta\big(\alpha,\beta,z,p\big)=\frac{\left[\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\big(\gamma\big(e-z\big)\big)+\dfrac{h}{\lambda_z\gamma}\mathrm{sh}\big(\gamma\big(e-z\big)\big)\right]}{\underbrace{2h\,\mathrm{ch}\big(\gamma e\big)+\left(\lambda_z\gamma+\dfrac{h^2}{\gamma\lambda_z}\right)\mathrm{sh}\big(\gamma e\big)}_{G\left(z,\,p+a_x\alpha^2+a_y\beta^2\right)}}F\big(\alpha,\beta\big) \tag{9.3.2}$$

$$\Leftrightarrow \theta\big(\alpha,\beta,z,p\big)=G\Big(z,p+a_x\alpha^2+a_y\beta^2\Big)F\big(\alpha,\beta\big)$$

$$\Rightarrow \theta\big(\alpha,\beta,z=e,p\big)=\frac{F\big(\alpha,\beta\big)}{2h\,\mathrm{ch}\big(\gamma e\big)+\left(\lambda_z\gamma+\dfrac{h^2}{\gamma\lambda_z}\right)\mathrm{sh}\big(\gamma e\big)} \tag{9.3.3}$$

Avec :
$$\begin{cases}\alpha=n\pi\,/\,L_x, \quad \forall n\in\mathbb{N}\\ \beta=m\pi\,/\,L_y, \quad \forall m\in\mathbb{N}\\ \gamma=\sqrt{\dfrac{p+a_x\alpha^2+a_y\beta^2}{a_z}}\\ \theta\big(\alpha,\beta,z,p\big)=\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\big(T\big(x,y,z,t\big)-T_\infty\big)\cos\big(\alpha x\big)\cos\big(\beta x\big)\exp\big(-pt\big)\,dx\,dy\,dt\\ \Theta\big(\alpha,\beta,z,t\big)=\displaystyle\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\big(T\big(x,y,z,t\big)-T_\infty\big)\cos\big(\alpha x\big)\cos\big(\beta x\big)\,dx\,dy\\ F\big(\alpha,\beta\big)=\displaystyle\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}f\big(x,y\big)\cos\big(\alpha x\big)\cos\big(\beta x\big)\,dx\,dy\end{cases}$$

En appelant $T_z\big(z,t\big)=\mathscr{L}^{-1}\Big(G\Big(z,\,p\Big)\Big)$ le champ de températures monodimensionnel[135], l'expression du champ de températures dans l'espace réel s'écrit :

$$\begin{cases}T\big(x,y,z,t\big)-T_\infty=\\ \qquad\underbrace{T_z\big(z,t\big)}_{\mathscr{L}^{-1}\left(G\left(z,\,p\right)\right)}\underbrace{\left[\dfrac{1}{L_xL_y}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}k_{n,m}\,F\big(\alpha,\beta\big)\exp\big(-a_x\alpha^2t\big)\exp\big(-a_y\beta^2t\big)\cos\big(\alpha x\big)\cos\big(\beta x\big)\right]}_{T_{x,y}\left(x,y,t\right)}\\ k_{0,0}=1\\ k_{0,m}=2, \qquad \forall m\in\mathbb{N}^*\\ k_{n,0}=2, \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*\\ k_{n,m}=4, \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}^*\end{cases} \tag{9.3.4}$$

[135] Champ de température moyenné suivant (Ox) et (Oy).

$$\Leftrightarrow T\left(x,y,z,t\right)-T_{\infty}=T_{z}\left(z,t\right)T_{x,y}\left(x,y,t\right) \tag{9.3.5}$$

Expressions dans lesquelles, a_i et λ_i représentent respectivement la diffusivité et la conductivité dans la direction principale i d'anisotropie, T_{∞} la température initiale d'équilibre avec l'environnement, et p la variable de Laplace.

On voit ainsi à partir de l'expression (9.3.4) que le champ de températures est séparable en espace, et s'exprime à partir du produit d'une fonction $T_{z}\left(z,t\right)$ dépendant de l'épaisseur z, et l'autre $T_{x,y}\left(x,y,t\right)$ du plan (xOy).

En se servant de la propriété de translation de la variable de Laplace[136], Philippi obtient une expression simple permettant d'identifier les diffusivités suivant les axes principaux du plan :

$$\begin{aligned}
&\theta\left(\alpha,\beta,z,p\right)=F\left(\alpha,\beta\right)G\left(z,\ p+a_{x}\alpha^{2}+a_{y}\beta^{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \Theta\left(\alpha,\beta,z,t\right)=F\left(\alpha,\beta\right)\mathscr{L}^{-1}\left(G\left(z,\ p+a_{x}\alpha^{2}+a_{y}\beta^{2}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \Theta\left(\alpha,\beta,z,t\right)=F\left(\alpha,\beta\right)\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(G\left(z,\ p\right)\right)}_{T_{z}\left(z,t\right)}\exp\left(-a_{x}\alpha^{2}t\right)\exp\left(-a_{y}\beta^{2}t\right)\\
&\Leftrightarrow \Theta\left(\alpha,\beta,z,t\right)=T_{z}\left(z,t\right)F\left(\alpha,\beta\right)\exp\left(-a_{x}\alpha^{2}t\right)\exp\left(-a_{y}\beta^{2}t\right)
\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\Theta\left(\alpha,\beta,e,t_{2}\right)}{\Theta\left(\alpha,\beta,e,t_{1}\right)}\right)=\ln\left(\frac{\Theta\left(0,0,e,t_{2}\right)}{\Theta\left(0,0,e,t_{1}\right)}\right)-a_{x}\alpha^{2}\left(t_{2}-t_{1}\right)-a_{y}\beta^{2}\left(t_{2}-t_{1}\right) \tag{9.3.7}$$

Avec, t_1 et t_2 les deux instants pour lesquels la transformation de Fourier est calculée. $\Theta\left(0,0,z,t\right)$ correspond à la valeur moyenne du champ de températures à la cote z et à l'instant t.

L'expression (9.3.7) est utilisée pour l'identification des diffusivités a_x et a_y. La méthode proposée est alors simple et rapide, car il suffit de tracer cette expression en fonction de $\alpha^{2}\left(t_{2}-t_{1}\right)$ avec $\beta=0$, pour obtenir une droite de pente a_x. L'obtention de a_y se fait de façon analogue en posant $\alpha=0$ et en traçant (9.3.7) en fonction de $\beta^{2}\left(t_{2}-t_{1}\right)$.

De plus, Philippi montre que pour des faibles nombres de Biot[137], et des temps grands devant le temps de diffusion dans l'épaisseur $\left(t_{1}>0{,}8\,e^{2}\ /\ a_{z}\right)$, il est possible d'exprimer l'ordonnée à l'origine en fonction uniquement des pertes, par l'expression :

---

[136] $\mathscr{L}^{-1}\left(F\left(p+a\right)\right)=\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(F\left(p\right)\right)}_{f\left(t\right)}\exp\left(-at\right)=f\left(t\right)\exp\left(-at\right)$

[137] $Bi=\dfrac{he}{\lambda}$

$$\frac{\Theta(\alpha,\beta,e,t_2)}{\Theta(\alpha,\beta,e,t_1)} = \exp\left(-\underbrace{\frac{2h}{\rho c e}}_{H}(t_2-t_1) - a_x\alpha^2(t_2-t_1) - a_y\beta^2(t_2-t_1)\right)$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\Theta(0,0,e,t_2)}{\Theta(0,0,e,t_1)}\right) = -H(t_2-t_1) \tag{9.3.8}$$

Le paramètre identifiable est alors : $H = \dfrac{2h}{\rho c e}$

Et les diffusivités selon les directions x et y sont alors obtenues par :

$$a_x = \frac{1}{\alpha^2(t_2-t_1)}\left[\ln\left(\frac{\Theta(0,0,e,t_2)}{\Theta(0,0,e,t_1)}\right) - \ln\left(\frac{\Theta(\alpha,0,e,t_2)}{\Theta(\alpha,0,e,t_1)}\right)\right]$$
$$a_y = \frac{1}{\beta^2(t_2-t_1)}\left[\ln\left(\frac{\Theta(0,0,e,t_2)}{\Theta(0,0,e,t_1)}\right) - \ln\left(\frac{\Theta(0,\beta,e,t_2)}{\Theta(0,\beta,e,t_1)}\right)\right] \tag{9.3.9}$$

- ***Remarques*** :
  - Une étude de sensibilité réalisée par Philippi pour un champ de températures (moyenné suivant y afin d'améliorer le rapport signal sur bruit) $T(x,z,t)$ montre que pour α fixé, les paramètres H et a_x sont corrélés, et qu'il sera par conséquent impossible de les identifier simultanément. Elle propose ainsi, d'identifier le paramètres H à partir de $\alpha=0$, puis d'identifier a_x avec $\alpha\neq 0$ et pour un écart de temps (t_2-t_1) optimal au sens de l'analyse de sensibilités.
  - Elle montre également que l'estimation de la diffusivité a_x par régression linéaire n'est possible qu'aux basses fréquences, et que l'effet du bruit réduit d'autant la plage de basses fréquences exploitable. Cette mésaventure est imputable au biais de modèle (l'effet des pertes latérales ne peut plus être négligé au temps long), ce qui sera confirmé par Rémy [178]. Un calcul analytique de la matrice de covariance des paramètres sera réalisé, lui permettant ainsi d'optimiser ces mesures. Afin de réduire l'écart-type sur l'estimation des paramètres, elle proposera d'utiliser plusieurs couples de temps[138] (t_1, t_2).
  - La méthode de Philippi est en un sens, l'aboutissement unificateur des tentatives d'amélioration de mesures précédentes. Cependant, il subsiste deux contraintes inhérentes à sa méthode, d'une part, le caractère nécessairement impulsionnel de

[138] Elle sera cependant limitée par les technologies de son époque : espace mémoire limité pour l'acquisition des images thermographiques obtenues par caméra infrarouge, et fréquence d'acquisition d'images moins performantes que de nos jours.

l'excitation, et d'autre part, l'absence de prise en compte des pertes latérales. Cela implique donc des conditions expérimentales particulières pour que les hypothèses restent valides.

- Ces travaux seront la genèse de travaux récents ayant pour objectifs d'accroître la précision ainsi que le caractère général de la méthode, et « d'aller » vers des mesures locales de diffusivités. Des méthodes tentant d'associer CND et caractérisation locale verront également le jour, notamment avec Krapez en 1999 [147, 149], Batsale en 2004 [127], Bamford en 2008 [155, 156], et Ayvazyan en 2010 [158, 152].

9.3.3. Nouvelle fonction d'estimation proposée par Remy (2007) pour l'estimation des diffusivités de matériaux orthotrope

Remy en 2007 [178] propose une extension de la méthode de Philippi en utilisant pour fonction d'estimation :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\theta\left(\alpha_n,\beta_m,e,t\right)}{\theta\left(0,0,e,t\right)}\right) = \ln\left(\dfrac{F\left(\alpha_n,\beta_m\right)}{F\left(0,0\right)}\right) - a_x\alpha_n^2 t - a_y\beta_m^2 t \\ \alpha_n = n\pi \,/\, L_x,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \beta_m = m\pi \,/\, L_y, \forall m \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{9.3.10}$$

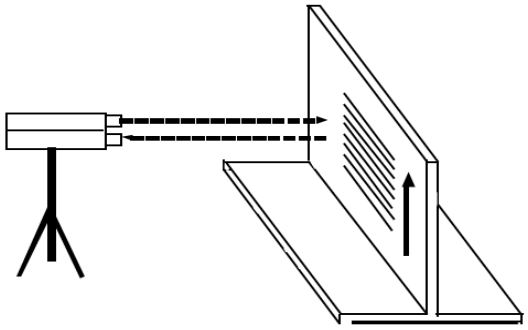
L'estimation est alors réalisée, non plus sur un ensemble restreint de couples de points, mais sur l'ensemble de l'évolution temporelle, permettant ainsi d'améliorer l'estimation des paramètres par réduction de l'écart-type (dû au grand nombre de mesures).

Remy illustrera également l'incidence de pertes latérales non nulles (biais de modèle dû à l'hypothèse de flux latéraux nuls) sur le comportement (non linéarité temporelle) des harmoniques utilisés pour l'estimation des diffusivités.

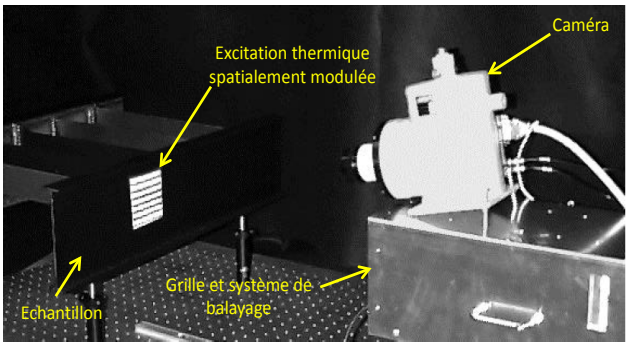
- ***Remarques*** :
  - La méthode proposée constitue une extension de la méthode de Philippi, permettant d'améliorer le rapport signal sur bruit des mesures en exploitant l'ensemble des mesures temporelles disponibles.
  - Il faut néanmoins que l'excitation soit de type Dirac en temps, et que la condition de flux latéraux nuls soit vérifiée.

9.3.4. Méthode d'estimation 2D locale proposée par Krapez (1999, 2004) : Transformation de Fourier et augmentation des gradients thermiques longitudinaux par utilisation d'une grille

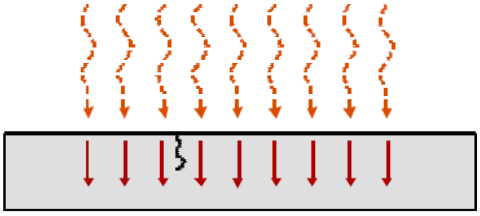
Une méthode permettant d'accroître le rapport signal sur bruit lors de la caractérisation locale de matériaux anisotropes sera proposée en 1999 par Krapez [147, 149], s'inspirant d'un montage expérimental (cf. Figure 9.7) réalisé par Lesniak en 1993 [138, 142, 139, 143, 144, 145, 146] pour le contrôle non destructif par thermographie à diffusion forcée.



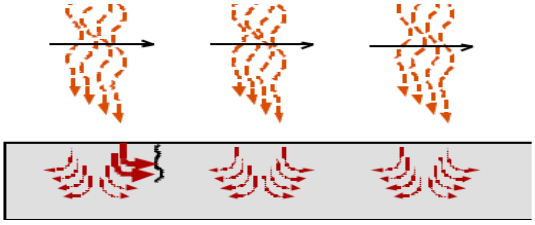
a. Principe de la thermographie à diffusion forcée proposée par Lesniak



b. Montage expérimental utilisé par Lesniak.



c. Diffusion de la chaleur lors d'un chauffage uniforme, pour la détection d'une fissure. Configuration peu sensible à la fissure, car diffusion et fissure sont dans le même sens.

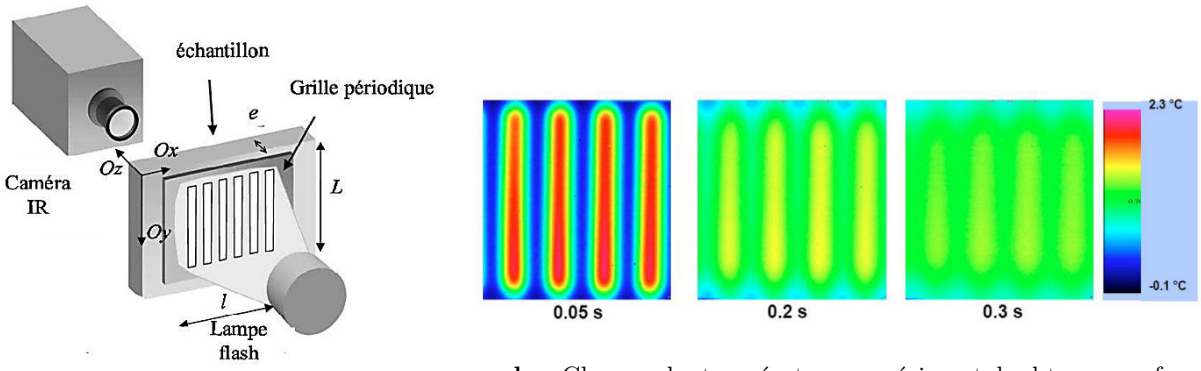


d. Diffusion de la chaleur lors d'un chauffage par diffusion forcée (masque et déplacement), pour la détection d'une fissure. Configuration sensible à la fissure, car la diffusion longitudinale est « freinée » par celle-ci.

Figure 9.7 : Principe de la thermographie à diffusion forcée utilisée par Lesniak pour la détection de fissure. (Extrait de [139]).

Le principe de la méthode consiste à créer, à l'aide d'un « masque » placé devant l'excitation, d'importants gradients thermiques, tant dans le plan que dans l'épaisseur, et à mesurer l'évolution du champ de températures à l'aide d'une caméra. Lesniak utilisait un masque en forme de grille spatialement périodique (et par conséquent l'excitation l'était également), qu'il déplaçait sur l'ensemble de l'échantillon afin de détecter les différentes fissures.

En 1999 (et 2004), Krapez [147, 149] reprendra l'idée de l'utilisation d'un masque permettant l'augmentation des gradients thermiques sur toute la surface de l'échantillon, et par conséquent du rapport signal sur bruit de la mesure du champ de températures. En utilisant un masque en forme de grille spatialement périodique[139], et fixe, il étendra la technique de Lesniak à l'estimation locale de diffusivités, supposées localement constantes (cf. Figure 9.8).



a. Dispositif expérimental proposé par Krapez pour l'estimation locale de diffusivités longitudinales.

b. Champ de température expérimental obtenu en face arrière à divers instants après le flash sur échantillon d'aluminium AU4G, de 3mm d'épaisseur.

Figure 9.8 : Dispositif expérimental de Krapez pour l'estimation locale de diffusivités longitudinales. (Extrait de [147])

Son procédé permet ainsi l'estimation de diffusivité longitudinale tout en s'affranchissant de la contrainte des excitations locales intenses pouvant détériorer localement le matériau.

Le principe d'estimation consiste à appliquer de façon locale la méthode de Philippi[140], sur une fenêtre spatiale glissante de largeur égale à la période spatiale de la grille (cf. Figure 9.9). L'utilisation d'une fenêtre glissante judicieusement choisie (utilisation de la symétrie des bandes d'excitation) lui permet d'avoir une expérience locale en bon accord avec la condition de flux latéraux nuls, bien que cette hypothèse ne soit par nécessaire pour la mise en œuvre de sa méthode.

---

[139] Notons que le cadre général théorique initial de la méthode proposée par Krapez [147, 149] permet de faire usage d'une grille non nécessairement périodique.

[140] Du point de vue formel, le cadre initial de la méthode présentée par Krapez [147, 149] diffère quelque peu de celui de Philippi. En effet, contrairement à Philippi qui considère un échantillon de dimensions finies et utilise des Tranformations de Fourier Finies, Krapez considère un échantillon de dimensions infinies (suivant le plan) et fait usage de Transformations de Fourier (non finies). Cependant, pour la mise en œuvre expérimentale, Krapez particularisera le cadre théorique initial à celui d'un échantillon de dimensions finies, subissant un flux périodique (grille périodique) suivant (Ox) et homogène suivant (Oy). De plus, il utilisera une fenêtre spatiale choisie de façon à ce que les flux latéraux puissent être considérés comme nuls (effet de symétrie). Il est alors possible de montrer (au sens des distributions) que, dans ce cadre, l'approche de Philippi et de Krapez sont équivalentes.

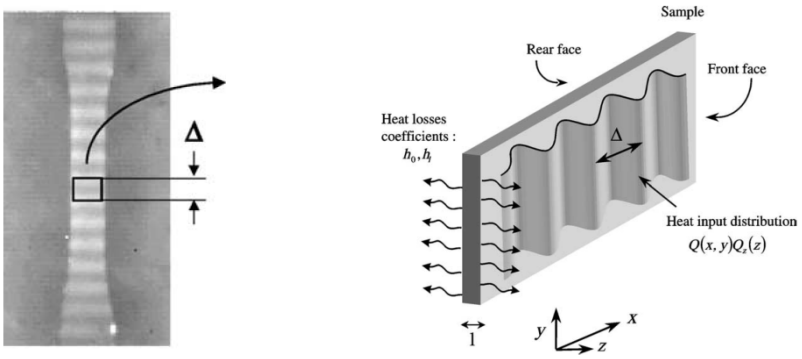


Figure 9.9 : Fenêtre glissante utilisée par Krapez pour l'estimation locale des diffusivités longitudinales (Extrait de [149])

Il propose en particulier pour fonction d'estimation de la diffusivité longitudinale[141] a_x :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\Theta(\alpha,\beta_m,z,t)}{\Theta(0,0,z,t)}\right) = \ln\left(\dfrac{F(\alpha,\beta_m)}{F(0,0)}\right) - a_x\alpha^2 t \\ \alpha = 2\pi \,/\, \Delta \end{cases} \tag{9.3.11}$$

Pour estimer la diffusivité a_y une rotation de 90° du masque est nécessaire.

Par une analyse de sensibilité, il déterminera la meilleure fenêtre temporelle[142] pour effectuer l'estimation des diffusivités. Il obtient par sa méthode des erreurs relatives de l'ordre de 3% aux endroits où la diffusivité est constante et des erreurs plus importantes au niveau des discontinuités de diffusivités.

Sa méthode sera par la suite utilisée par Vavilov [179] et Bison [180].

Vavilov testera différentes forme de grille, et conclura que la forme spatiale de l'excitation n'est pas déterminante, contrairement à la forme temporelle (nécessité d'être de type Dirac).

Bison utilisera la fonction d'estimation aux temps courts sur des matériaux bicouches dans le but d'évaluer le vieillissement de protections thermiques.

- ***Remarques*** :
  - Les résultats obtenus par la méthode de Krapez sont encourageants, et ouvrent la voie à de nombreux travaux[143] portant sur la caractérisation locale par méthode flash.

---

[141] L'estimation de la diffusivité tranverse a_z est réalisée séparement à l'aide du champ moyen $\Theta(0,0,0,t)$

[142] Une analyse de la meilleure période spatiale de la grille en fonction des diffusivités de matériau est également réalisée.

[143] Notamment dans le domaine de la thermomécanique. L'objectif étant souvent, de relier fracturations et variations locales de propriétés thermophysiques.

- Sa méthode conserve non seulement tous les avantages de celle de Philippi, mais elle permet également de réduire le biais de modèle (en diminuant les pertes latérales par effet de symétrie).
- Cependant, l'hypothèse du flux impulsionnel (Dirac) demeure, et il est nécessaire de réitérer l'expérience en décalant la grille de $\Delta / 4$ pour la détection/caractérisation de fissures transverses.

9.3.5. Apports de Souhar (2011) et Ruffio (2011) à la méthode de Philippi : Prise en compte d'une excitation de forme temporelle quelconque, mais connue, et améliorations de la méthode d'estimation

En 2011, Souhar [181, 182, 84, 183] proposera de nouvelles méthodes d'estimation, qui ne seront plus basées sur le rapport de deux températures, et permettront de prendre en compte une excitation de forme temporelle quelconque, mais connue. Il établira également un modèle prenant en compte le couplage par diffusion qui peut exister entre l'échantillon et l'air se situant au voisinage proche des parois. Ce couplage sera formalisé à l'aide d'un modèle quadripolaire 3D multicouche, en modélisant les couches d'air au voisinage des deux faces planes de l'échantillon comme étant des milieux conductifs purs de dimension « transverse » finie ou non (cf. Figure 9.10).

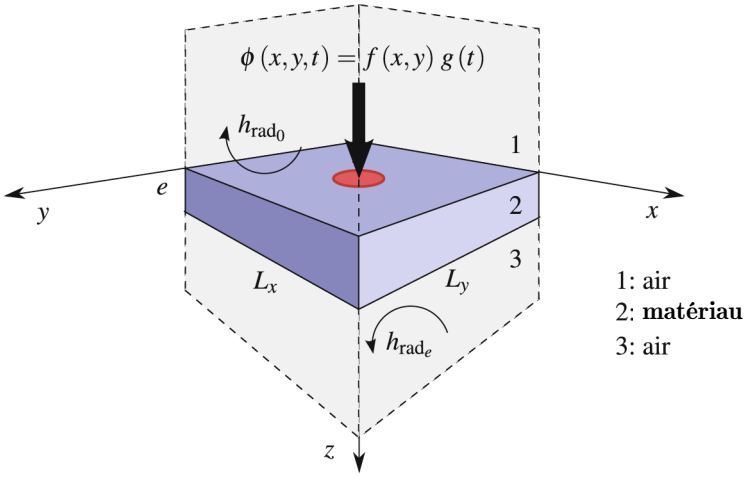


Figure 9.10 : Modélisation de Souhar du couplage conductif entre l'échantillon et l'air avoisinant par modèle multicouches. (Extrait de [183]).

Dans le cas où le couplage avec l'air est négligé, le système d'équations à résoudre ainsi que la démarche de résolution sont alors les mêmes que ceux réalisés par Philippi[144], à l'exception de la forme temporelle du flash qui peut être quelconque.

[144] Notons qu'en l'absence de couplage avec l'air, il proposera également un modèle théorique permettant la prise en compte de conditions aux limites de type Neumann non homogènes (flux de type Newton aux limites).

La solution du problème (sans hypothèse d'excitation impulsionnelle (Dirac) en temps) est alors :

$$\begin{cases} \theta\big(\alpha,\beta,z,p\big) = \dfrac{\left[\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\big(\gamma\big(e-z\big)\big)+\dfrac{h}{\lambda_z\gamma}\mathrm{sh}\big(\gamma\big(e-z\big)\big)\right]}{2h\,\mathrm{ch}\big(\gamma e\big)+\left(\lambda_z\gamma+\dfrac{h^2}{\gamma\lambda_z}\right)\mathrm{sh}\big(\gamma e\big)}F\big(\alpha,\beta\big)G\big(p\big) \\ G\big(p\big) = \mathscr{L}\big(g\big(t\big)\big) \\ F\big(\alpha,\beta\big) = \displaystyle\int_0^{L_y}\int_0^{L_x} f\big(x,y\big)\cos\big(\alpha x\big)\cos\big(\beta x\big)\,dx\,dy \\ \alpha = n\pi \,/\, L_x, \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \beta = m\pi \,/\, L_y, \quad \forall m\in\mathbb{N} \\ \gamma = \sqrt{\dfrac{p+a_x\alpha^2+a_y\beta^2}{a_z}} \end{cases} \tag{9.3.12}$$

Avec, $G\big(p\big)$ la transformée de Laplace de la forme temporelle de l'excitation.

L'expression (9.3.12) peut également s'écrire en face arrière :

$$\begin{cases} \theta\big(\alpha,\beta,z=e,p\big) = \dfrac{e^2\,/\,a_z}{2Bi\,\mathrm{ch}\big(\gamma e\big)+\left(\gamma e+\dfrac{Bi^{\,2}}{\gamma e}\right)\mathrm{sh}\big(\gamma e\big)}T_{\lim}\big(\alpha,\beta\big)G\big(p\big) \\ a_z = \dfrac{\lambda_z}{\rho c} \\ T_{\lim}\big(\alpha,\beta\big) = \dfrac{F\big(\alpha,\beta\big)}{\rho c e} \\ Bi = \dfrac{h\,e}{\lambda_z} \\ \alpha = n\pi \,/\, L_x, \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \beta = m\pi \,/\, L_y, \quad \forall m\in\mathbb{N} \\ \gamma = \sqrt{\dfrac{p+a_x\alpha^2+a_y\beta^2}{a_z}} \end{cases} \tag{9.3.13}$$

Afin de réaliser l'estimation de paramètres une double transformation Fourier-Cosinus discrète sera appliquée (sur l'espace) au champ de températures expérimental mesuré par caméra infrarouge, et une inversion numérique de Laplace (algorithme de de-Hoog [184]) sera utilisée sur le modèle $\theta\big(\alpha,\beta,e,p\big)$.

Les estimations de diffusivités seront réalisées en deux étapes, et harmoniques par harmoniques, dans le domaine temporel à l'aide d'une méthode de moindres carrés (algorithme de Levenberg-Marquardt [72, 73]).

La première étape de l'estimation consiste à estimer $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(0,0\right)\right\}$ à partir de $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ (car γ est alors indépendant de a_x et a_y). Une fois que $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(0,0\right)\right\}$ ont été estimés, les différentes estimations (autant que d'harmoniques α) de a_x sont réalisées de façon séquentielle pour chaque harmonique α, avec $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(0,0\right)\right\}$ fixés, et $\beta = 0$. De la même façon, les estimations de a_y seront réalisées avec $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(0,0\right)\right\}$ fixés, et $\alpha = 0$. La valeur retenue pour les estimations des diffusivités a_x et a_y sera donnée par la moyenne au sens de Gauss-Markov (moyenne arithmétique pondérée par l'inverse de la variance des estimations). Afin d'améliorer les estimations, Souhar proposera d'effectuer un calcul analytique de la jacobienne intervenant dans l'algorithme de régression par moindres carrés.

Remarques : Les travaux de Souhar permettent d'étendre les méthodes de caractérisation locale de matériaux anisotropes à des excitations quelconques (mais finies en temps), pourvu que la forme temporelle soit connue. L'estimation est réalisée harmonique par harmonique, et non plus à l'aide du rapport de deux températures. L'estimation harmonique par harmonique permet de sélectionner les harmoniques sur lesquelles l'estimation doit être effectuée, et par conséquent, de ne garder que les harmoniques contenant un rapport signal sur bruit suffisant. Il propose également un modèle multicouche permettant de prendre en compte un couplage purement diffusif de l'échantillon avec l'air. Cependant, sa méthode repose, comme les autres, sur l'hypothèse de flux latéraux nuls, et par conséquent, un soin tout particulier doit être apporté à la mise en œuvre expérimentale.

Enfin, nous pouvons citer quelques apports des travaux de Ruffio [35] à la méthode flash. Ses travaux ont porté sur les méthodes d'estimations de paramètres et de conditions aux limites thermiques en conduction instationnaire pour des matériaux anisotropes, ainsi que sur les méthodes de conceptions optimales d'expériences.

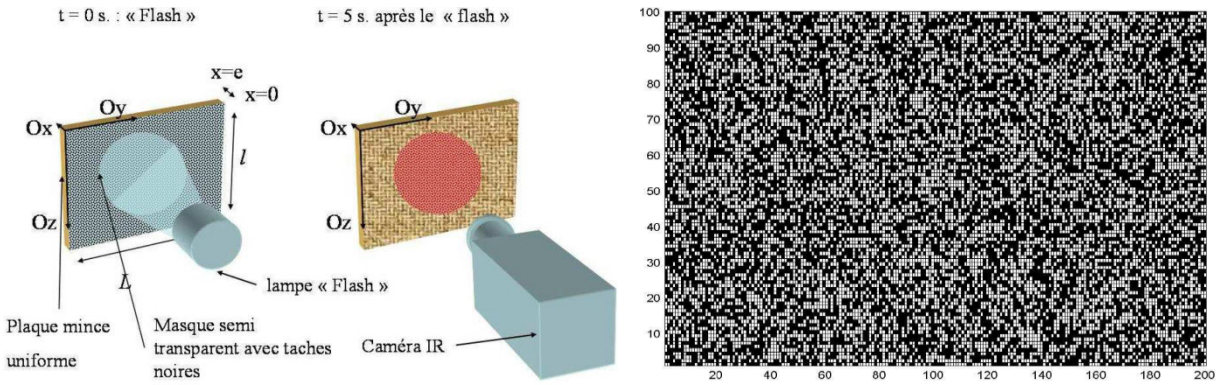
Il proposera plusieurs améliorations de procédés d'estimation. En premier lieu, il recommande d'utiliser pour harmonique de normalisation, non plus l'harmonique $\theta\left(0,0,e,t\right)$ utilisée par Krapez et Remy, mais plutôt l'harmonique $\theta\left(2,2,e,t\right)$ car elle est selon lui porteuse de plus d'informations. Il montrera également, à travers des simulations numériques, que les meilleures estimations sur les paramètres sont obtenues lorsqu'elles sont réalisées simultanément sur l'ensemble des harmoniques et pour l'ensemble des paramètres.

9.3.6. Méthodes de Plana (2003), Batsale (2004), Bamford (2008), et Ayvazyan (2012) : CND et estimation de diffusivités par discrétisation de l'équation de la chaleur

Les méthodes proposées par Plana, Batsale, Bamford, et Ayvazyan sont différentes des méthodes précédemment citées, au sens où elles reposent sur une estimation des propriétés thermiques par discrétisation de l'équation de la chaleur.

Les travaux de Plana [170] portent sur la caractérisation 3D de matériaux composites hétérogènes. La modélisation analytique des transferts au sein de ces matériaux étant complexe, il utilise un code de calcul numérique (non commercial) en différences finis ou en volumes finis, afin de discrétiser les équations de son problème et obtenir une solution numérique (évolution du transfert de chaleur dans le matériau). L'estimation de paramètres est alors obtenue par une méthode de moindres carrés (BFGS) entre le champ expérimental (obtenu par caméra infrarouge) et le champ théorique obtenu par le code de calcul numérique. Des études de sensibilités seront réalisées afin d'obtenir les conditions expérimentales optimales (épaisseur, temps d'excitation,…).

Les travaux de Batsale en 2004 [127] s'inspireront du montage expérimental proposé par Krapez, mais utiliserons une grille ayant une répartition spatiale aléatoire (cf. Figure 9.11) afin de diminuer les zones spatiales où le laplacien de la température serait nul.



a. Dispositif expérimental de méthode flash associée à une excitation spatiale aléatoire.

b. Exemple de masque pouvant être utilisé pour l'excitation.

Figure 9.11 : Dispositif expérimental proposé par Batsale [127], et basé sur une excitation spatiale aléatoire. (Extrait de [152]).

A l'instar des travaux de Plana, la méthode d'estimation de Batsale ne repose pas sur l'application des transformations intégrales de Fourier et de Laplace, mais effectue l'estimation dans l'espace spatio-temporel, à l'aide d'une discrétisation (volumes finis) de l'équation de la chaleur. L'estimation est réalisée à l'aide des moindres carrés, avec pour matrice de sensibilité le laplacien du champ de températures et pour observable la dérivée temporelle de ce même champ. Sa méthode se confronte à de nombreuses

difficultés : matrice de sensibilité bruitée car basée sur des mesures expérimentales, faible sensibilité locale aux paramètres, non validité du modèle local, corrélation de certains termes du modèle,…Tous ces facteurs ayant pour incidences une variation apparente (fictive) des diffusivités locales.

C'est dans le but de remédier à ces contraintes que de nouveaux travaux vont voir le jour, tels que ceux de Bamford [154, 153, 151, 155, 156] (qui utilisera la grille proposée par Krapez [147, 149], ainsi qu'une grille en forme de damier [185]), Ayvazyan [158, 152], ou Godin [186].

Les travaux de Bamford (qui ne tiennent pas compte de la diffusion dans le plan) et Ayvazyan porterons principalement sur l'application de transformations orthogonales de décomposition et développement[145] en valeurs singulières permettant d'une part, de séparer l'espace et le temps dans la formulation discrétisée de l'équation de la chaleur, et d'autre part, de réduire l'effet du bruit haute fréquence sur la mesure par troncature de la SVD. Une étude de corrélation[146] (entre dérivées spatiales et temporelles) sera également réalisée afin de définir les zones spatiales de l'image qui sont les plus sensibles (pour une meilleure inversion de modèle).

Ayvazyan étendra les travaux de Bamford afin de prendre en compte des transferts de chaleur 2D ou 3D, en définissant une SVD-2D s'appliquant à l'espace 2D et au temps, sous conditions que le champ de températures soit à variables séparables en espace tel qu'il puisse s'exprimer sous la forme $T\left(x,y,t\right)=T_x\left(x,t\right)T_y\left(y,t\right)$. Par superposition, le problème initial sera transformé en deux problèmes 1D transitoires.

La méthode Ayvazyan [152] sera appliquée à l'estimation de diffusivités longitudinales de matériaux homogènes (lame de verre mince et plaque de PVC), au contrôle non destructif de matériaux non homogènes, ainsi qu'à l'estimation de la répartition de champs de température initiaux bidimensionnels ou tridimensionnels. Des comparaisons d'estimation de diffusivités longitudinales entre sa méthode et celle de Philippi seront réalisées sur des échantillons, et un écart de 5% différenciera les estimations données par les deux méthodes.

- ***Remarques*** :
  - Les méthodes développées par Bamford et Ayvazyan donnent des résultats convaincants dans le domaine du contrôle non destructif et de l'estimation de champ de températures initiales.

[145] Le terme « décomposition » étant associé au domaine discret, et « développement » à celui des fonctions continues (de l'espace réel).

[146] Il semble d'après leurs travaux, qu'une forte corrélation entre dérivées spatiales et temporelle, implique la validité du modèle diffusif.

- Les méthodes sont annoncées par les auteurs comme étant rapides.
- Leurs méthodes nécessitent l'intervention de nombreux « réglages » pseudo-empiriques, tel que l'ordre de troncature de la SVD, la valeur du seuil de filtrage des données (reliée à la valeur des corrélations), le choix de la largeur de la fenêtre spatiale utilisée pour l'estimation,…
- L'analyse des propriétés statistiques des estimations semblent plus complexe que dans le cas des méthodes classiques (sans SVD). Ce point fera l'objet des travaux de Godin [186].
- Les estimations de diffusivités semblent peu performantes au voisinage des bords de l'échantillon, alors que des erreurs de l'ordre de 2% sont obtenues au centre (lors de simulations numériques).

Chapitre 10

Méthodes de Caractérisation Thermique : *Introduction*

Caractérisation thermique de matériaux anisotropes par transformations intégrales et principe de superposition, avec prise en compte du couplage entre l'échantillon et son support

Nomenclature Méthodes de Caractérisation Thermique non exhaustive

x,y,z	Coordonnées spatiales, m
t	Temps, s
T	Température, K
T^*	T-T_{ext}, K
$\overline{T}^*$	T^* moyennée suivant y, K
$\tilde{T}^*$	Transformée de Fourier de $\overline{T}^*$
θ	Transformée de Laplace de $\overline{T}^*$
$\tilde{\theta}$	$\overline{T}^*$ dans l'espace Fourier-Laplace
a	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
h	Coefficient d'échange global, $W.m^{-2}.K^{-1}$
L	Longueur de la zone d'étude
$\mathscr{L}^{-1}$	Transformation inverse de Laplace
$\overset{t}{\otimes}$	Convolution en temps

Symboles grecs

φ	Flux, W
$\overline{\varphi}$	Flux moyenné suivant y, W
$\tilde{\Phi}$	$\overline{\varphi}$ dans l'espace de Fourier
λ	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
ρ	Masse volumique, $kg.m^{-3}$
c	Chaleur massique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$

Indices et exposants

i	Indice numérique des sous-problèmes
k	Indice numérique d'itérations
x,y,z	Directions spatiales *(Ox), (Oy), (Oz)*
ext	extérieur
SPi	Sous-Problème N°i
flash	associé au flash
z_0, z_L	associé aux pertes (en $z=0$ et $z=Lz$)

10. Méthodes de Caractérisation Thermique : Introduction

En 1961, Parker [122] développe la méthode flash pour l'estimation de diffusivité transverse (suivant l'épaisseur) a_z d'un matériau homogène et isotrope soumis à une excitation uniforme, et impulsionnelle en temps. Cette méthode a été étendue en 1975 et 1991 par Donaldson [172], et Lachi [174] dans le but de permettre la caractérisation thermique de matériaux anisotropes à l'aide d'une excitation localisée. La mesure de diffusivité dans le plan a été améliorée entre 1964 et 1967 par Harmathy [187] and Steere [188, 189] en utilisant le rapport de deux températures mesurées en un même point spatial, mais à deux instants différents, et dans le cadre d'un milieu semi-infini parfaitement isolé. Katayama [190] propose en 1969 de prendre le rapport de l'évolution temporelle de deux températures mesurées à deux positions spatiales différentes. Toutes ces méthodes sont réalisées dans le domaine spatio-temporel (avec des thermocouples), et le flux de chaleur est supposé connu en temps et en espace. Dans le but de s'affranchir de la forme temporelle de l'excitation, Kavianipour & Beck [191] en 1977, et Hadisaroyo [192, 193] en 1992, appliquent une transformation de Laplace (en temps) sur le champ température, mais la forme spatiale de l'excitation doit encore être connue. En notant qu'il est plus aisé de déterminer la forme temporelle du flux (excitation) que sa forme spatiale, Philippi en 1994 [175, 176, 177], Krapez en 2004 [149], et Remy en 2005 [194], proposent de travailler dans l'espace de Fourier (transformation du domaine spatial) afin de s'affranchir de la distribution spatiale de l'excitation. Cependant, Philippi et Krapez [175, 149] supposent une excitation de type Dirac en temps, et Remy [194] suppose qu'il n'y a pas de sources entre les températures mesurées. Finalement, en 2010 Souhar [182, 84, 183] améliore ces méthodes travaillant dans l'espace de Fourier, et effectue les estimations non linéaires de paramètres, harmonique par harmonique, et dans le domaine temporel. La valeur des diffusivités est obtenue par moyenne pondérée au sens de Gauss-Markov. La méthode d'estimation permet de prendre en compte une excitation de forme spatiale quelconque mais connue en temps, et suppose des conditions aux limites latérales de type Neumann homogènes (flux latéraux nuls).

Ainsi, il devient fréquent d'utiliser des transformations intégrales lorsque l'on cherche par méthodes inverses à identifier des distributions de flux [195, 196] ou à caractériser des matériaux anisotropes à hautes températures (méthodes flash 3D). Les méthodes précédemment citées supposent que la surface latérale de l'échantillon soit parfaitement isolée. Cependant, pour la caractérisation de matériaux à hautes températures, il est fréquent de devoir utiliser des porte-échantillons ayant des diffusivités thermiques proches de celles du matériau à caractériser (céramiques, céramiques isolantes,…), pouvant non seulement occulter partiellement la surface apparente de l'échantillon, mais également induire un couplage thermique non négligeable avec celui-ci. Par

conséquent, l'hypothèse de flux latéraux nuls ne sera plus valide. De plus, la présence du support ne permet pas toujours l'accès à l'intégralité de la face arrière de l'échantillon (Figure 11.1). Sous ces conditions, la transformation Fourier-Cosinus classique n'est plus réellement adaptée et induit des erreurs sur les estimations des diffusivités.

Dans une première partie (sections 11 à 16), deux méthodes d'estimation appelées « Sin Imp » et « Sin Ind », et regroupées indifféremment sous le terme global de « méthodes Sinus » ou « Sin AH[147] », sont présentées. Ces méthodes permettent de prendre en compte les variations temporelles du flux et de la température aux bords de l'échantillon. L'idée consiste à utiliser la température mesurée par caméra infrarouge aux bords (de la partie visible par la caméra) de l'échantillon comme conditions aux limites du problème, et à obtenir par superposition un sous-problème simple ayant des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes (températures nulles). Des solutions asymptotiques des solutions des sous-problèmes contenant les conditions aux bords sont présentées, car celles-ci serviront à initialiser l'algorithme d'estimation. L'estimation des paramètres est réalisée simultanément sur l'ensemble des harmoniques.

Le principe de la méthode d'estimation classique « Cos H/H[148] » [182, 84, 183] est rappelé : transformation Fourier-Cosinus, et estimation harmonique par harmonique. Une amélioration « Cos AH[149] » de la méthode classique « Cos H/H » est également proposée : la transformation en Fourier-Cosinus ainsi que les conditions aux limites de type Neumann homogènes sont conservées, mais l'estimation est réalisée simultanément sur l'ensemble des harmoniques.

Un phénomène de corrélation des paramètres inhérente à la méthode « Cos H/H », et la notion de « durée d'exploitabilité des harmoniques » applicable à l'ensemble des méthodes présentées, sont développés.

Dans une deuxième partie (section 17), les méthodes « Sin AH » et « Cos AH » sont validées à l'aide de simulations numériques et les résultats d'estimation sont comparés à ceux donnés par la méthode classique « Cos H/H ». Dans cette partie, plusieurs expériences bruitées et non bruitées, avec différentes conditions aux limites et différentes configurations d'excitation (localisation et extension de l'excitation), ont étés simulées. Les différentes conditions aux limites testées sont de type Dirichlet homogène (températures nulles), Neumann homogène (flux nuls), et résistance de contact permettant de modéliser le contact non parfait entre l'échantillon et son support.

[147] La dénomination « Sin AH » signifie : « Sinus All Harmonics » (Sinus tous harmoniques).

[148] La dénomination « Cos H/H » signifie : « Cosinus Harmonic by Harmonic » (Cosinus harmonique par harmonique).

[149] La dénomination « Cos AH » signifie : « Cosinus All Harmonics » (Cosinus tous harmoniques).

Puis dans la troisième partie (section 18), les différentes méthodes seront appliquées à des mesures expérimentales réalisées sur un matériau (composite) conducteur anisotrope en carbone.

Enfin, dans la dernière partie (section 19), une amélioration des méthodes « Sin Imp » et « Sin Ind » sera proposée. Cette dernière sera comparée aux méthodes précédentes à travers une mise œuvre expérimentale, ainsi que des simulations bruitées et non bruitées de type Monte-Carlo, toutes deux réalisées sur une zone de mesure réduite.

Remarque : Afin de ne pas alourdir la présentation, la modélisation et la résolution (détaillée) du problème 3D général a été reléguée en Annexe A.7 p.333. Les modèles qui y sont établis peuvent être utilisés (en l'absence de contraintes techniques) pour une estimation de diffusivités 3D. Notons qu'une justification du choix et de l'intérêt des transformations intégrales y est également abordée. Ainsi, dans les sections 10 à 20 de cette partie « Méthodes de caractérisation thermique », certains détails calculatoires ont été omis, lorsque ces derniers faisaient l'objet de l'Annexe A.7 p.333.

De plus, notons qu'une justification/présentation des besoins expérimentaux ayant amené aux différents modèles présentés est également abordée dans l'Annexe A.7 p.333.

Chapitre 11

Problème Général

11. Problème Général

L'échantillon à caractériser est supposé de forme parallélépipédique, maintenu en position verticale (suivant (Oy)) à l'aide d'un support sur ses cotés latéraux. Il subit sur l'une de ses faces (« face avant ») une sollicitation sous forme de flux à variables séparables $\varphi_{flash}(x,y,t) \equiv \phi(x,y).\psi(t)$. La mesure du champ de température se fait sur une partie de la face opposée à celle de l'excitation (« face arrière ») comme indiqué sur les Figure 11.1 et Figure 11.2. De plus, le champ de température initial $T(x,z,t=0)$ et la température extérieure T_{ext} sont supposés constants et égaux.

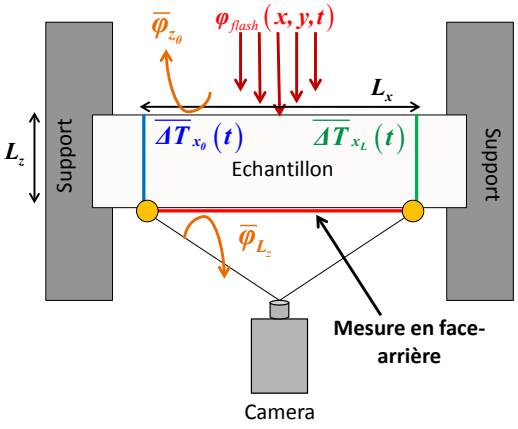


Figure 11.1 : Illustration schématique du principe de mesure

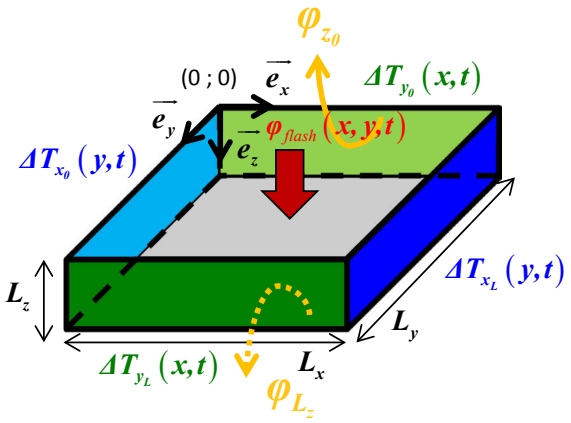


Figure 11.2 : Illustration schématique de la zone de mesure

Soient, $\{L_x,\ L_y,\ L_z\}$ les dimensions de la zone d'étude (inférieures ou égales à celles de l'échantillon total). Les pertes radio-conducto-convectives[150] avec l'extérieur sont linéarisées (faible écart de température) et prises en compte par des coefficients d'échange constants et uniformes notés h_{z_0} et h_{z_L}. Le flux échangé avec l'extérieur par la « face avant » de l'échantillon est noté $\varphi_{z_0}(x,y,t) = h_{z_0}\left(T(x,y,0,t) - T_{ext}\right)$ et celui échangé par la « face arrière » $\varphi_{z_L}(x,y,t) = h_{z_L}\left(T(x,y,L_z,t) - T_{ext}\right)$.

On pose :

[150] Les pertes sont supposées être dues à des effets radiatifs, conductifs, et convectifs.

$$\begin{cases} T^*\left(x,y,z,t\right) = T\left(x,y,z,t\right) - T_{ext} \\ \overline{T}^* = \dfrac{1}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} T^*\left(x,y,z,t\right)dy \\ \overline{\varphi}_{flash}\left(x,t\right) = \dfrac{1}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} \varphi\left(x,y,t\right)dy = \dfrac{1}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} \phi\left(x,y\right).\psi\left(t\right)dy = \overline{\phi}\left(x\right)\psi\left(t\right) \\ \overline{\Delta T}_{\xi}\left(t\right) = \dfrac{1}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} T^*\left(x=\xi,y,z,t\right)dy, \text{ aux bords (en } x) \Rightarrow \xi \in \left\{x_0\,;\,x_L\right\} \end{cases} \tag{11.1.1}$$

Les conditions aux limites $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)$, $\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)$ (les points jaunes sur la Figure 11.1) mesurées par la caméra sont supposées uniformes dans l'épaisseur au sens de l'approximation de l'ailette (faible écart de température suivant l'épaisseur), ce qui peut être réalisé en utilisant une excitation localisée et une extension spatiale de mesure tenant compte des temps caractéristiques de diffusion. De plus, le champ de température est moyenné suivant (Oy) en supposant que les écarts de gradients aux limites en $y=0$ et $y=L_y$ sont négligeables. Ce dernier point peut être expérimentalement réalisé pour une excitation localisée, en effectuant une excitation centrée suivant (Oy) (et pour de faibles phénomènes convectifs purs sur les faces avant et arrière[151]), et en choisissant une extension spatiale suivant (Oy) suffisamment grande compte tenu de la durée de l'expérience (durée d'acquisition des données thermographiques).

L'équation de la chaleur 3D transitoire moyennée suivant (Oy) s'écrit :

$$\frac{1}{L_y}\int_0^{L_y}\left(\lambda_x\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}+\lambda_y\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}+\lambda_z\frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}\right)dy = \frac{1}{L_y}\int_0^{L_y}\rho c\frac{\partial T^*}{\partial t}dy \tag{11.1.2}$$

En supposant que l'opérateur d'intégration puisse commuter avec les opérateurs de dérivation ne dépendant pas de la variable d'intégration, l'équation devient :

$$\lambda_x\frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\lambda_y}{L_y}\int_0^{L_y}\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}dy}_{\frac{1}{L_y}\left[\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} - \left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\right]} + \lambda_z\frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c\frac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \tag{11.1.3}$$

[151] L'échantillon est supposé être en position verticale (direction (Oy)). Les effets convectifs (purs) peuvent être négligés par exemple pour de faibles élévations de température, ou pour des expériences sous vide.

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_x \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}\right)\left(1 + \frac{\dfrac{\lambda_y}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} dy}{\lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}}\right) = \rho c \frac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \tag{11.1.4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_x \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}\right)\left(1 + \frac{\dfrac{\lambda_y}{L_y}\left[\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} - \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\right]}{\lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}}\right) = \rho c \frac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \tag{11.1.5}$$

Or, si les écarts de gradients aux limites en $y = 0$ et $y = L_y$ sont négligeables par rapport au phénomène de diffusion suivant les deux autres directions spatiales, on a :

$$\frac{\dfrac{\lambda_y}{L_y}\displaystyle\int_0^{L_y} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} dy}{\lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}} = \frac{\dfrac{\lambda_y}{L_y}\left[\left.\dfrac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} - \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\right]}{\lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2}} \ll 1 \tag{11.1.6}$$

Et l'expression (11.1.5) devient :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \tag{11.1.7}$$

Sous ces conditions, le problème illustré Figure 11.1 est modélisé par :

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x, z, t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x, z, t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad \overline{T}^*\left(x, z, t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \\ z = 0, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=0} = \overline{\varphi}_{flash}\left(x, t\right) - \overline{\varphi}_{z_0} \\ z = L_z, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = \overline{\varphi}_{z_L} \end{cases} \tag{11.1.8}$$

Il est à noter qu'en utilisant les données mesurées par la caméra aux bords de l'échantillon comme conditions aux limites $\overline{\Delta T}_{x_0}(t)$, $\overline{\Delta T}_{x_L}(t)$, il n'est pas nécessaire de modéliser le transfert de chaleur à travers le support.

Remarque : Notons que dans le cas d'une excitation centrée, par mégarde nous pourrions être tentés de poser $\left[\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} - \left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\right] = 0$ (au lieu de (11.1.6)) par raison de symétrie. Néanmoins, cette égalité est fausse si les flux sont non nuls aux bords.

En effet, en supposant que le champ de température est symétrique par rapport à l'axe $y = L_y / 2$, on a par définition $T^*\left(\frac{L_y}{2} + h\right) = T^*\left(\frac{L_y}{2} - h\right)$, $\forall h \in \left[0; \frac{L_y}{2}\right]$, et les expressions des flux aux bords s'écrivent[152] :

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0} \simeq \frac{T^*(0+dy) - T^*(0)}{dy} = \frac{T^*(dy) - T^*(0)}{dy} \qquad (11.1.9)$$

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} \simeq \frac{T^*(L_y) - T^*(L_y - dy)}{dy} = -\frac{T^*(L_y - dy) - T^*(L_y)}{dy} \qquad (11.1.10)$$

Or, par symétrie, on a $T^*(L_y) = T^*(0)$ et $T^*(L_y - dy) = T^*(dy)$, d'où (11.1.10) s'écrit :

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} \simeq -\frac{T^*(L_y - dy) - T^*(L_y)}{dy} = -\frac{T^*(dy) - T^*(0)}{dy} = -\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (11.1.11)$$

$$\Rightarrow \left[\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} - \left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0}\right] = 2\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} \neq 0 \qquad (11.1.12)$$

[152] Dans les expressions des flux, on utilise, ici, la signification physique des incréments différentiels dy. Ainsi, ils représentent donc ici un accroissement infinitésimal, ce qui rappellons-le, n'est pas le cas de leur définition mathématique, dans laquelle ils représentent un incrément quelconque…
Par ailleurs, notons d'une part, que la condition de symétrie du champ de température n'est pas nécessaire à la démonstration de la non nullité de la différence des flux, et d'autre part, que cette non nullité aurait également pu être établit par bilan de flux (au sens de l'analyse vectorielle) sur les frontières…

Chapitre 12

Solution analytique du problème général par superposition et Transformation Fourier-Sinus

12. Solution analytique du problème général par superposition et Transformation Fourier-Sinus

Afin de résoudre le problème (11.1.8), deux transformations intégrales lui seront appliquées. Une transformation Fourier-Sinus selon x permettant de s'affranchir de la répartition spatiale de l'excitation, et une transformation de Laplace en temps. Cependant, si aucune modification n'est effectuée préalablement au système (11.1.8), les conditions aux limites étant non homogènes, elles feront apparaitre des termes « sources[153] » durant les transformations intégrales. Afin d'éviter l'apparition de ces termes « sources », par superposition (propriété de linéarité du système (11.1.8)), le problème va être décomposé en la somme de trois sous-problèmes comme indiqué par la Figure 12.1.

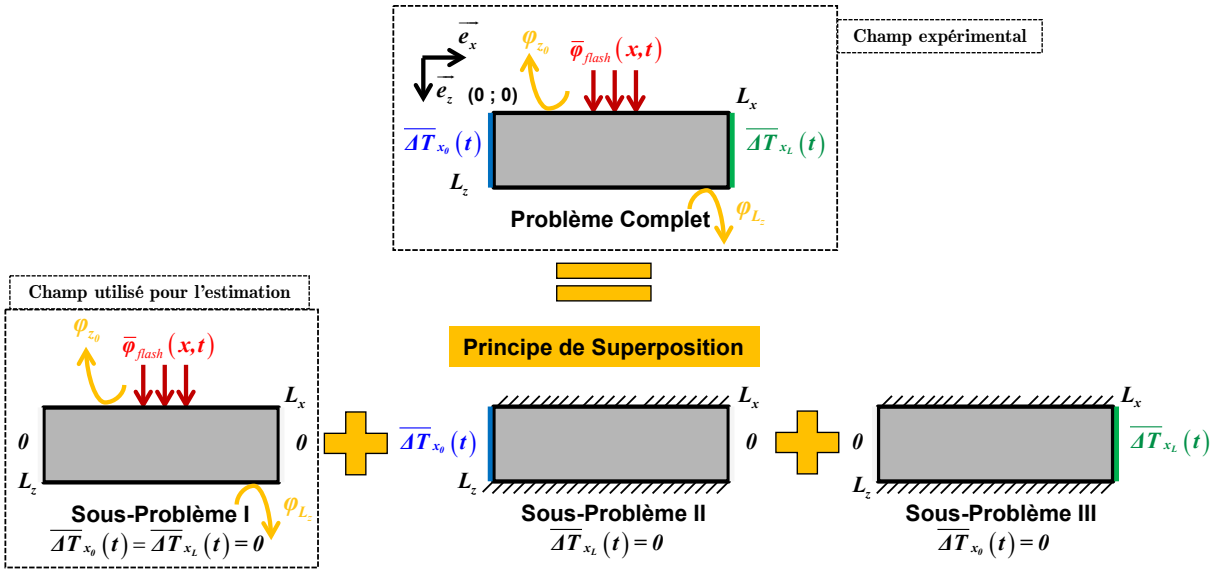


Figure 12.1 : Illustration du principe de décomposition par superposition du problème complet en sous-problèmes

Le champ de température complet peut alors s'écrire :

$$\overline{T}^{*}\left(x,z,t\right)=\sum_{i=1}^{3}\overline{T}_{SPi}^{*}\left(x,z,t\right) \tag{12.1.1}$$

Où, $\overline{T}_{SPi}^{*}$ représente le champ de température du sous-problème i.

Notons que les sous-problèmes 2 et 3 sont des problèmes 1D transitoires (suivant $\vec{e}_x$) dépendant de la diffusivité longitudinale a_x. Pour l'estimation de paramètres, les champs de température de ces sous-problèmes seront soustraits au champ de température expérimental mesuré par la caméra infrarouge afin d'obtenir un champ

[153] La dénomination « termes sources » est due à la physique. Du point de vue mathématique, ces termes sont appelés « termes inhomogènes ».

expérimental « corrigé », et l'estimation sera réalisée par une méthode de moindres carrés minimisant l'écart quadratique entre le sous-problème 1 et le champ de température expérimental corrigé.

12.1. Résolution du sous-problème 1

Par construction, les conditions aux limites du sous-problème 1 sont de type Dirichlet homogènes (températures nulles) suivant (Ox), et le problème est décrit par:

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=0} = 0 \\ x = L_x, \quad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=L_x} = 0 \\ z = 0, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=0} = \overline{\varphi}_{flash}\left(x,t\right) - \overline{\varphi}_{z_0} \\ z = L_z, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = \overline{\varphi}_{z_L} \end{cases} \tag{12.1.2}$$

Ce problème ayant des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes suivant (Ox), il admet des fonctions propres [197] $X_n\left(x\right) = \sin(\alpha_n x)$, avec pour valeurs propres $\alpha_n = n\pi \,/\, L_x$, $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant une transformation de Laplace en temps suivi d'une transformation Fourier-Sinus[154] au système d'équation (12.1.2) et en posant :

$$\begin{cases} \tilde{T}\left(\alpha_n,z,t\right) = \displaystyle\int_0^{L_x} \overline{T}^* \sin\left(\alpha_n x\right) dx \\ \theta\left(x,z,p\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{T}^* e^{-pt} dt \\ \tilde{\theta}\left(\alpha_n,z,p\right) = \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{+\infty} \overline{T}^* e^{-pt} \sin\left(\alpha_n x\right) dt\, dx \\ \tilde{\Phi}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right) = \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{+\infty} \overline{\varphi}_{flash}\left(x,t\right) e^{-pt} \sin\left(\alpha_n x\right) dt dx = \int_0^{L_x} \overline{\phi}\left(x\right) \sin\left(\alpha_n x\right) dx \int_0^{+\infty} \psi\left(t\right) e^{-pt} dt \\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L_x}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{12.1.3}$$

Le système (12.1.2) devient :

[154] Car les fonctions propres sont des Sinus.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{\theta}}{dz^2} - \left(\dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2 \dfrac{a_x}{a_z} \right) \tilde{\theta} = 0 \\ z = 0, \quad -\lambda_z \left. \dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right|_{z=0} = \tilde{\Phi}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right) - h_{z_0} \tilde{\theta}\left(\alpha_n, z, p\right) \\ z = L_z, \quad -\lambda_z \left. \dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right|_{z=L_z} = h_{z_L} \tilde{\theta}\left(\alpha_n, z, p\right) \end{cases} \tag{12.1.4}$$

D'où en posant :

$$\begin{cases} \gamma_n^2 = \dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2 \dfrac{a_x}{a_z} \\ \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right) = \dfrac{\tilde{\Phi}\left(\alpha_n\right)}{\rho c L_z} \\ Bi_{z_0} = \dfrac{h_{z_0} L_z}{\lambda_z} \\ Bi_{z_L} = \dfrac{h_{z_L} L_z}{\lambda_z} \\ \alpha_n = n\pi \,/\, L_x, \; n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{12.1.5}$$

La solution du sous-problème 1 en face-arrière de l'échantillon :

$$\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, p\right) = \frac{\dfrac{L_z^2}{a_z} \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma_n L_z + \dfrac{Bi_{z_0} Bi_{z_L}}{\gamma_n L_z} \right) \mathrm{sh}\left(\gamma_n L_z\right) + \left(Bi_{z_0} + Bi_{z_L} \right) \mathrm{ch}\left(\gamma_n L_z\right)} \tag{12.1.6}$$

Les nombres de Biot (Bi_{z_0} et Bi_{z_L}) étant corrélés dans l'expression (12.1.6) (cf. par exemple [84]), il sera délicat, voire impossible de les estimer correctement. Par conséquent, afin de s'affranchir de la corrélation, nous poserons $Bi_{z_0} = Bi_{z_L} = Bi$, et l'expression (12.1.6) devient ainsi :

$$\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, p\right) = \frac{\dfrac{L_z^2}{a_z} \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma_n L_z + \dfrac{Bi^2}{\gamma_n L_z} \right) \mathrm{sh}\left(\gamma_n L_z\right) + 2Bi \,\mathrm{ch}\left(\gamma_n L_z\right)} \tag{12.1.7}$$

En pratique, l'estimation des propriétés sera réalisée sur les harmoniques spatiaux temporels $\tilde{T}^*\left(\alpha_n, L_z, t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, p\right)\right)$ par une méthode de moindres carrés (cf. Annexe A.8 p.363, et [26]), et l'inversion de Laplace se fera numériquement à l'aide de l'algorithme de de-Hoog [184].

Les paramètres à estimer seront $\left\{a_x,\, a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_1\right),\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_2\right),\, \ldots,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}$. La forme temporelle $\psi(t)$ de l'excitation et sa transformée de Laplace $\Psi(p)$ seront supposées parfaitement connues.

12.2. Résolution des sous-problèmes 2 et 3

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L_x$ sont supposées uniformes suivant (Oz) (au sens de l'approximation de l'ailette) et celles en z étant de type Neumann homogènes (flux nuls), on peut montrer que la conduction est strictement 1D suivant (Ox).

12.2.1. Démonstration du caractère 1D des sous-problèmes 2 et 3

En effet, une méthode simple (minimisant les calculs) pour montrer que la conduction est strictement 1D est d'utiliser le principe de superposition. La méthode pouvant s'appliquer au cas plus général constitué de la réunion (au sens mathématique) des sous-problèmes 2 et 3, nous l'appliquerons donc au problème suivant :

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \\ z = 0, \; -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \\ z = L_z, \; -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = 0 \end{cases} \tag{12.2.1}$$

La solution de (12.2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\overline{T}^*\left(x,z,t\right) = T_1\left(x,t\right) + T_2\left(z\right) \tag{12.2.2}$$

Avec $T_1\left(x,t\right)$ solution de :

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \rho c \dfrac{\partial T_1}{\partial t} \\ t = 0, \qquad T_1\left(x,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad T_1\left(x,t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad T_1\left(x,t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \end{cases} \tag{12.2.3}$$

Et $T_2\left(z\right)$ solution de :

$$\begin{cases} \lambda_z \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0 \\ z = 0, \ -\lambda_z \dfrac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0 \\ z = L_z, \ -\lambda_z \dfrac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=L_z} = 0 \end{cases} \tag{12.2.4}$$

Les relations (12.2.4) mènent à :

$$T_2\left(z\right) \equiv 0 \tag{12.2.5}$$

Par conséquent, on a :

$$\overline{T}^*\left(x,z,t\right) \equiv T_1\left(x,t\right), \ \forall z \in \left[0, L_z\right] \tag{12.2.6}$$

Ainsi, la conduction des sous-problèmes 2 et 3 est strictement 1D suivant (Ox). Pour la résolution de ces sous-problèmes, on posera dans la suite : $\overline{T}^* \equiv \overline{T}^*\left(x,t\right)$.

Remarque : Pour la résolution du problème (12.2.1), on aurait pu chercher la solution sous la forme $\overline{T}^*\left(x,z,t\right) = T_1\left(x,t\right) + T_2\left(z,t\right)$ tel que $T_2\left(z,t=0\right) = 0$, puis chercher la solution $T_2\left(z,t\right)$ à l'aide de la méthode de séparation des variables ou à l'aide d'une transformation de Laplace, et on aurait abouti à $T_2\left(z,t\right) \equiv 0$.

12.2.2. Résolution (1D) des sous-problèmes 2 et 3

Soient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a_x} \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \quad \overline{T}^*\left(x,t\right)_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{12.2.7}$$

Avec comme conditions aux limites pour les sous-problèmes 2 (SP2) et 3 (SP3):

$$\text{SP2}:\begin{cases} x=0, & \overline{T}^{*}\left(x,t\right)_{x=0}=\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x=L_x, & \overline{T}^{*}\left(x,t\right)_{x=L_x}=0 \end{cases}$$

$$\text{SP3}:\begin{cases} x=0, & \overline{T}^{*}\left(x,t\right)_{x=0}=0 \\ x=L_x, & \overline{T}^{*}\left(x,t\right)_{x=L_x}=\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \end{cases} \tag{12.2.8}$$

En appliquant une transformation de Laplace en temps à l'équation de la chaleur (12.2.7), l'équation devient :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{p}{a_x}\theta=0 \tag{12.2.9}$$

Avec comme conditions aux limites pour les sous-problèmes 2 et 3 :

$$\text{SP2}:\begin{cases} x=0, & \theta\left(x,p\right)_{x=0}=\Delta\theta_{x_0}\left(p\right) \\ x=L_x, & \theta\left(x,p\right)_{x=L_x}=0 \end{cases}$$

$$\text{SP3}:\begin{cases} x=0, & \theta\left(x,p\right)_{x=0}=0 \\ x=L_x, & \theta\left(x,p\right)_{x=L_x}=\Delta\theta_{x_L}\left(p\right) \end{cases} \tag{12.2.10}$$

En posant $\gamma^2=\dfrac{p}{a_x}$, les solutions des sous-problèmes 2 et 3 dans le domaine temporel[155], sont :

$$\theta_{SP2}\left(x,p\right)=\underbrace{\frac{\text{sh}\left(\gamma\left(L_x-x\right)\right)}{\text{sh}\left(\gamma L_x\right)}}_{H_{x_0}\left(x,p\right)}\underbrace{\Delta\theta_{x_0}\left(p\right)}_{\mathscr{L}\left(\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_0}\left(x,p\right)\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \tag{12.2.11}$$

Obtenu expérimentalement

Et,

[155] Notons que les expressions analytiques de $\Delta\theta_{x_0}\left(p\right)$ et $\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)$ ne sont pas connues contrairement à celles de $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)$ et $\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)$. Rappelons que $\otimes$ désigne une convolution temporelle.

$$\theta_{SP3}\left(x,p\right)=\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\left(\gamma x\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)}}_{H_{x_L}\left(x,p\right)}\underbrace{\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)}_{\mathscr{L}\left(\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_L}\left(x,p\right)\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \quad \text{(Obtenu expérimentalement)} \tag{12.2.12}$$

Où $H_{x_0}\left(x,p\right)$, $H_{x_L}\left(x,p\right)$ correspondent aux fonctions de transfert (dans le domaine de Laplace) des sous-problèmes 2 et 3. Notons que $H_{x_0}\left(x,p\right)$, $H_{x_L}\left(x,p\right)$ (des fonctions analytiques[156] connues) dépendent de la diffusivité longitudinale a_x, et par conséquent $\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)$, $\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)$ également. Ces solutions sont données dans le domaine temporel car $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)$, $\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)$ sont mesurées expérimentalement par caméra infrarouge (les bords de l'image correspondent aux conditions aux limites en température de la zone visible en face-arrière de l'échantillon). De même que pour (12.1.6), l'inversion numérique de Laplace sera réalisée à l'aide de l'algorithme de de-Hoog.

Cependant, numériquement la convolution avec les réponses impulsionnelles pouvant être délicate[157], une alternative consiste à calculer les champs de températures $\overline{T}^{*}_{SP2}$ et $\overline{T}^{*}_{SP3}$ à l'aide des réponses indicielles (théorème de Duhamel) qui permettent une meilleure précision numérique[158] lorsque le signal expérimental présente un bruit suffisamment faible[159]. Ainsi, nous aurons :

$$\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{H_{x_0}\left(x,p\right)}{p}\right)\overset{t}{\otimes}\frac{\partial\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)}{\partial t} \tag{12.2.13}$$

$$\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{H_{x_L}\left(x,p\right)}{p}\right)\overset{t}{\otimes}\frac{\partial\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)}{\partial t} \tag{12.2.14}$$

---

[156] Elles sont en fait holomorphes sur $\mathbb{C}$ privé des pôles.

[157] A cause des erreurs de troncatures numériques dues au faible support des réponses impulsionnelles, à l'incapacité de reproduire numériquement des Diracs dûs aux singularités des fonctions,…

[158] Il y a deux raisons majeures à cette amélioration de précision. La première raison est dûe au fait, qu'au sens des distributions, la réponse impulsionnelle correspond à la dérivée de la réponse indicielle. Ainsi, si la réponse impulsionnelle est un Dirac, cela implique que la réponse indicielle est un échelon (numériquement plus simple à réaliser). La seconde raison provient du fait que le support des réponses indicielles est souvent plus grand que celui des réponses impulsionnelles.

[159] C'est ici, que le moyennage du champ de température suivant (Oy) revêt tout son intérêt. En effet, celui-ci aura pour effet de diminuer l'écart-type du bruit, et ainsi diminuer le phénomène d'amplification dû à l'opérateur de dérivation (cf. section 12.2.3).

12.2.3. Amplification du bruit par l'opérateur de dérivation : Intérêt du moyennage suivant (Oy)

Le moyennage du champ de température suivant (Oy) revêt plusieurs intérêts.

Le premier concerne la diminution de la taille des matrices à manipuler numériquement, ce qui permet une diminution du temps de calcul et des ressources mémoires nécessaires.

Le second a attrait à un fait souvent bien connu des physiciens, qui est l'amplification du bruit de mesure par l'opérateur de dérivation. Ainsi, en ce sens, les relations (12.2.13) et (12.2.14) ont toutes les chances de donner des résultats peu satisfaisants lorsque le bruit de mesure atteint un seuil critique, à partir duquel, l'amplification des fluctuations du bruit par l'opérateur de dérivation engendre des erreurs prépondérantes par rapport à la diminution des erreurs numériques dues à l'utilisation des réponses indicielles au lieu des réponses impulsionnelles. C'est afin de « compenser » (ou minimiser) les erreurs engendrées par l'amplification du bruit par l'opérateur de dérivation, que le moyennage suivant (Oy) a été réalisé.

12.2.3.1. *Démonstration de l'amplification du bruit par dérivation*

En supposant que la température $T_i \equiv T\left(t_i\right)$, mesurée au temps t_i, est la somme de la température vraie (ou moyenne) T_i^o et d'un bruit d'amplitude (ou d'écart-type) ε_i, on a alors, $T_i = T_i^o + \varepsilon_i$, et la dérivation temporelle numérique s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T^o}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \approx \underbrace{\frac{T_2^o - T_1^o}{\Delta t}}_{\substack{\text{Dérivation du} \\ \text{signal non bruité}}} + \underbrace{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta t}}_{\substack{\text{Dérivation} \\ \text{du bruit}}} \tag{12.2.15}$$

On observe alors à partir de (12.2.15), que pour des pas de temps Δt tels que $\Delta t \ll \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, l'écart crête-à-crête du bruit est amplifié. De plus, les variations temporelles de températures étant généralement plus lentes que celles du bruit, la relation (12.2.15) montre également que la contribution du bruit peut être prépondérante vis-à-vis de celle de la température vraie dans l'opération de dérivation temporelle. Cela aura alors pour conséquence de « noyer » l'information utile dans celle du bruit. Cette situation correspond alors à la situation inverse de la situation initiale, pour laquelle le signal utile T_i^o est supposé plus grand que celui du bruit ε_i.

12.2.3.2. *Intérêt du moyennage suivant (Oy)*

Il est possible de tirer avantage du nombre de détecteurs de la matrice[160] de la caméra, en moyennant le champ de température suivant (Oy) afin de minimiser l'effet

[160] Que l'on supposera ergodique, c'est-à-dire, que les propriétés statistiques spatiales et temporelles des détecteurs sont identiques (ou interchangeables).

d'amplification du bruit lors de la dérivation des conditions aux limites ΔT_{x_0} et ΔT_{x_L} dans (12.2.13) et (12.2.14).

En effet, en assimilant les valeurs données par chacun des détecteurs de la caméra à des variables aléatoires X_i pouvant avoir des lois de probabilités différentes, mais admettant des moments d'ordre 1 (espérance μ_i) et 2 (variance σ_i^2), l'espérance et la variance de la moyenne $\overline{X}$ de ces variables aléatoires sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}\right) \equiv \mathbf{E}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{n} \\ \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}\right) \equiv \mathbf{V}\left(\overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{V}\left(X_k\right)}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{Cov}\left(X_i, X_j\right) \end{cases} \tag{12.2.16}$$

Si l'on suppose que les variables aléatoires associées aux différents détecteurs sont indépendantes[161], ont même espérance[162] (ou moyenne) μ, et même variance σ^2, alors (12.2.16) devient :

$$\begin{cases} \mathbf{E}\left(\overline{X}\right) = \mu \\ \mathbf{V}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases} \tag{12.2.17}$$

En appliquant la relation (12.2.17) aux conditions aux limites $\overline{\Delta T}_{x_0}$ et $\overline{\Delta T}_{x_L}$, moyennées[163] suivant (Oy), on en déduit la relation sur l'écart-type[164] :

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\overline{\Delta T}_{x_0}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\left(\Delta T_{x_0}\right)}{\sqrt{n}} < \boldsymbol{\sigma}\left(\Delta T_{x_0}\right) \tag{12.2.18}$$

Ainsi, en assimilant[165] l'écart-type au bruit, et en appliquant (12.2.18) à (12.2.15), on voit que le moyennage suivant (Oy) diminuera en $1/\sqrt{n}$ le phénomène d'amplification du bruit par l'opérateur de dérivation temporelle. Ce constat justifie ainsi l'intérêt du moyennage. En moyennant suivant (Oy), on aura donc toutes les chances d'améliorer les résultats des relations (12.2.13) et (12.2.14).

Enfin, notons que le moyennage permet également, en vertu du théorème central limite, de prétendre que les variables aléatoires $\overline{X}_i$ suivent (approximativement) une loi

---

[161] Et par conséquent, non corrélées, ce qui implique $\mathbf{Cov}\left(X_i, X_j\right) = 0$. Notons que la réciproque est généralement fausse.

[162] En procédant expérimentalement à une Correction de Non Uniformité de la matrice (NUC 2pts), par exemple (cf. section 7 p.103).

[163] En appelant n le nombre de détecteurs utilisés suivant (Oy) pour effectuer la moyenne.

[164] Notons que les propriétés statisques des détecteurs (variables aléatoires X_i) sont définies en fonction du temps, alors que celles de $\overline{X}$ (la moyenne spatiale suivant (Oy) des X_i) sont définies en fonction de l'espace (suivant (Oy)). Rappelons que l'on a supposé qu'il y avait ergodicité.

[165] Pour une justification de cette assimilation, voir la remarque de la section A.3.2 p.260.

normale $\mathcal{N}\left(\overline{T}\left(x,t\right),\frac{\sigma_{X_i}}{\sqrt{n}}\right)$, ce qui revet un intérêt pour la détermination des propriétés statistiques des estimateurs « fournis » par la méthode des moindres carrés.

12.2.4. Valeurs des fonctions de correction $\overline{T}^*_{SP2}$ et $\overline{T}^*_{SP3}$, en $x=0$ et $x=L_x$

Les réponses impulsionnelles[166] $H_{x_0}\left(x,p\right)$ et $H_{x_L}\left(x,p\right)$, rappelées en (12.2.19) et introduites respectivement dans les expressions (12.2.11) et (12.2.12), admettent des valeurs particulières au voisinage des points $x=0$ et $x=L_x$, que l'algorithme de de-Hoog a des difficultés à calculer.

$$\begin{cases} H_{x_0}\left(x,p\right)=\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma\left(L_x-x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)} \\ H_{x_L}\left(x,p\right)=\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma x\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)} \end{cases} \tag{12.2.19}$$

Notamment, l'algorithme de de-Hoog ne sait pas calculer l'inverse numérique de Laplace des valeurs 0 et 1. Ces incapacités numériques se répercuteront inévitablement lors du calcul des produits de convolution (12.2.11) à (12.2.14). Il est alors intéressant de rentrer « manuellement » ces valeurs, afin de diminuer les erreurs numériques sur le calcul des réponses $\overline{T}^*_{SP2}\left(x,t\right)$ et $\overline{T}^*_{SP3}\left(x,t\right)$. Pour les même raisons, les produits de convolution aux limites par les réponses indicielles seront également calculés analytiquement.

- ***Pour x=0***

Dans ce cas, les réponses impulsionnelles $H_{x_0}\left(x=0,p\right)$ et $H_{x_L}\left(x=0,p\right)$ valent :

$$\begin{cases} H_{x_0}\left(x=0,p\right)=1 \\ H_{x_L}\left(x=0,p\right)=0 \end{cases} \tag{12.2.20}$$

Et, les réponses indicielles ont pour expressions :

$$\begin{cases} \dfrac{H_{x_0}\left(x=0,p\right)}{p}=\dfrac{1}{p} \\ \dfrac{H_{x_L}\left(x=0,p\right)}{p}=0 \end{cases} \tag{12.2.21}$$

Les originaux dans le domaine spatio-temporel s'écrivent donc :

[166] Ou fonctions de transferts du milieu suivant (Ox).

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_0}\left(x=0,p\right)\right)=h_{x_0}^{imp}\left(x=0,t\right)=\delta\left(t\right) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_L}\left(x=0,p\right)\right)=h_{x_L}^{imp}\left(x=0,t\right)=0 \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{H_{x_0}\left(x=0,p\right)}{p}\right)=h_{x_0}^{ind}\left(x=0,t\right)=U\left(t\right) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{H_{x_L}\left(x=0,p\right)}{p}\right)=h_{x_L}^{ind}\left(x=0,t\right)=0 \end{cases} \tag{12.2.22}$$

Avec $U\left(t\right)$ la fonction échelon de Heaviside définie[167] par :

$$U\left(t\right)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t=0 \\ 1 & \text{si } t>0 \end{cases} \tag{12.2.23}$$

On en déduit par conséquent les expressions de $\overline{T}_{SP2}^{*}\left(x=0,t\right)$ et $\overline{T}_{SP3}^{*}\left(x=0,t\right)$ à l'aide de la convolution par les réponses impulsionnelles ((12.2.11) et (12.2.12)) ou des réponses indicielles ((12.2.13) et (12.2.14)).

- Si on utilise les expressions (12.2.11) et (12.2.12) (réponses impulsionnelles), on a :

$$\begin{cases} \overline{T}_{SP2}^{*}\left(x=0,t\right)=\delta\left(t\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)=\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ \overline{T}_{SP3}^{*}\left(x=0,t\right)=0\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)=0 \end{cases} \tag{12.2.24}$$

- Si ce sont les expressions (12.2.13) et (12.2.14) (réponses indicielles) qui sont utilisées, nous avons :

$$\begin{cases} \overline{T}_{SP2}^{*}\left(x=0,t\right)=U\left(t\right)\overset{t}{\otimes}\dfrac{\partial\overline{\Delta T}_{x_0}}{\partial t} \\ \overline{T}_{SP3}^{*}\left(x=0,t\right)=0\overset{t}{\otimes}\dfrac{\partial\overline{\Delta T}_{x_L}}{\partial t}=0 \end{cases} \tag{12.2.25}$$

- ***Pour x=L_x***

[167] D'autres convention existent concernant la définition de la valeur en 0 de la fonction de Heaviside. Celle utilisée ici correspond aux valeurs données par la décomposition en série de Fourier (convergence ponctuelle => convergence vers la régularisée de Heaviside). La valeur donnée à la fonction en 0 n'a cependant aucune incidence sur la valeur du produit de convolution (intégration au sens de Lebesgue), car une valeur ponctuelle constitue un ensemble de mesure nulle.

De façon analogue (les expressions sont les symétriques des précédentes), les réponses impulsionnelles (fonctions de transfert) dans l'espace de Laplace ont pour expression :

$$\begin{cases} H_{x_0}\left(x = L_x, p\right) = 0 \\ H_{x_L}\left(x = L_x, p\right) = 1 \end{cases} \tag{12.2.26}$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} \dfrac{H_{x_0}\left(x = 0, p\right)}{p} = 0 \\ \dfrac{H_{x_L}\left(x = 0, p\right)}{p} = \dfrac{1}{p} \end{cases} \tag{12.2.27}$$

On en déduit les expressions des originaux dans le domaine spatio-temporel :

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_0}\left(x = L_x, p\right)\right) = h_{x_0}^{imp}\left(x = 0, t\right) = 0 \\ \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_L}\left(x = L_x, p\right)\right) = h_{x_L}^{imp}\left(x = 0, t\right) = \delta\left(t\right) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{H_{x_0}\left(x = L_x, p\right)}{p}\right) = h_{x_0}^{ind}\left(x = 0, t\right) = 0 \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{H_{x_L}\left(x = L_x, p\right)}{p}\right) = h_{x_L}^{ind}\left(x = 0, t\right) = U\left(t\right) \end{cases} \tag{12.2.28}$$

Les produits de convolution des expressions (12.2.11) et (12.2.12) (réponses impulsionnelles) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \overline{T}_{SP2}^{*}\left(x = L_x, t\right) = 0 \overset{t}{\otimes} \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) = 0 \\ \overline{T}_{SP3}^{*}\left(x = L_x, t\right) = \delta\left(t\right) \overset{t}{\otimes} \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \end{cases} \tag{12.2.29}$$

Et ceux des expressions (12.2.13) et (12.2.14) (réponses indicielles) sont donnés par :

$$\begin{cases} \overline{T}_{SP2}^{*}\left(x = L_x, t\right) = 0 \overset{t}{\otimes} \dfrac{\partial \overline{\Delta T}_{x_0}}{\partial t} = 0 \\ \overline{T}_{SP3}^{*}\left(x = L_x, t\right) = U\left(t\right) \overset{t}{\otimes} \dfrac{\partial \overline{\Delta T}_{x_L}}{\partial t} \end{cases} \tag{12.2.30}$$

Afin de diminuer les erreurs numériques, les valeurs (numériques) obtenues par les expressions (12.2.24), (12.2.25), (12.2.29), et (12.2.30) remplaceront celles données par l'inversion numérique de Laplace calculées à l'aide de l'algorithme de de-Hoog.

Chapitre 13

Solutions dégénérées des sous-problèmes 2 et 3

13. Solutions dégénérées des sous-problèmes 2 et 3

L'objectif de cette section est d'établir des expressions permettant d'initialiser les algorithmes des méthodes d'estimation qui vont être proposées en section 15.2 (p.213). Cette nécessité d'initialisation est due au caratère itératif des méthodes d'estimation proposées. Cependant, afin d'assurer/faciliter la convergence de l'algorithme et de diminuer le temps de calcul, il est nécessaire que l'initialisation ne soit pas arbitraire, mais soit, dans l'idéal, la plus proche possible de la solution finale. La méthode que nous proposons afin d'obtenir ces valeurs d'initialisation, consiste à utiliser un modèle analytique simplifié (ou « dégénéré »). Deux démarches permettant d'obtenir ce modèle « dégénéré » vont être présentées. La première repose sur l'utilisation d'un développement limité de la solution analytique ((12.2.11) et (12.2.12)) du problème initial, pour lequel on ne conservera que le développement à l'ordre 1. La seconde méthode consiste simplement à faire usage du principe de superposition dans (12.2.7) et (12.2.8), ce qui permettra d'exprimer la solution finale sous la forme d'une somme de deux fonctions, dont l'une est une « fonction affine ». Dans le cas particulier des sous-problèmes *SP2* et *SP3*, on montrera que ces deux méthodes mènent à la même solution « dégénérée ».

13.1. Méthode Heuristique et *DL*[168] : Solutions pseudo-stationnaires issues des fonctions de corrections exprimées dans l'espace de Laplace à l'aide d'un *DL1*

La méthode présentée est une méthode heuristique « à la physicienne » permettant d'obtenir de façon simple une solution dégénérée (au temps long) à partir de la solution complète (au sens des EDO) exprimée dans l'espace de Laplace.

Le système d'équations différentielles ((12.2.9) et (12.2.10)) régissant le transfert de chaleur étant linéaire, il est possible d'exprimer la solution 1D transitoire sous la forme de la superposition[169] d'une solution analogue à celle d'un régime forcé, et d'une solution analogue à celle d'un régime libre. La particularité est qu'ici la réponse du système dépend du temps et de l'espace. Ainsi, en considérant uniquement la réponse spatiale du système (champ de température) à chaque instant t donné (supposé fixé pour le calcul de chaque réponse spatiale), il est possible de décomposer la solution

[168] *DL* signifie ici développement limité, et *DL1* signifie développement limité à l'ordre 1.

[169] Cette méthode de superposition de « régime » est d'usage courant en électrocinétique. Les solutions sont alors appelées : Solution du régime libre (réponse du système à une condition initiale non nulle, et sans source), et solution du régime forcé (réponse du système à une condition initiale nulle, et à une source).

spatiale sous la forme d'une somme d'un pseudo-régime forcé obtenu en exprimant (12.2.11) au temps long avec $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)$ supposé constant, et d'un pseudo-régime libre.

La solution stationnaire correspond physiquement à $t \to +\infty$ (temps longs). Or d'après les théorèmes taubériens et le lemme de Watson, nous avons l'équivalence (sous certaines conditions que nous supposerons vérifiées) :

$$t \to +\infty \Leftrightarrow p \to 0 \tag{13.1.1}$$

En se rappelant que :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} + O\left(x^{2k+2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \\ \mathrm{sh}\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} + O\left(x^{2k+3}\right) \underset{x\to 0}{\sim} x \end{aligned} \tag{13.1.2}$$

On en déduit les expressions stationnaires des réponses impulsionnelles $H_{x_0}\left(x,p\right)$ et $H_{x_L}\left(x,p\right)$ des expressions (12.2.11) et (12.2.12) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma\left(L_x - x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)} = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}\left(L_x - x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}L_x\right)} \underset{p\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}\left(L_x - x\right)}{\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}L_x} = 1 - \dfrac{x}{L_x} = H^s_{x_0}\left(x\right) \\ \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma x\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)} = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}L_x\right)} \underset{p\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}x}{\sqrt{\dfrac{p}{a_x}}L_x} = \dfrac{x}{L_x} = H^s_{x_L}\left(x\right) \end{cases} \tag{13.1.3}$$

Alors, en décomposant les réponses impulsionnelles en la somme d'une partie stationnaire ($H^s_{x_0}\left(x\right)$ et $H^s_{x_L}\left(x\right)$) et d'une partie transitoire ($H^t_{x_0}\left(x,p\right)$ et $H^t_{x_L}\left(x,p\right)$), les réponses impulsionnelles s'écrivent :

$$\begin{cases} H_{x_0}\left(x,p\right) = H^s_{x_0}\left(x\right) + H^t_{x_0}\left(x,p\right) \\ H_{x_L}\left(x,p\right) = H^s_{x_L}\left(x\right) + H^t_{x_L}\left(x,p\right) \end{cases} \tag{13.1.4}$$

Par conséquent, en écrivant aux temps longs ($p \to 0$) les solutions $\overline{T}^*_{SP2}\left(x,t\right)$ et $\overline{T}^*_{SP3}\left(x,t\right)$ des expressions (12.2.11) et (12.2.12), nous avons :

$$\theta_{SP2,3}\left(x,p\right)=H_{x_{0,L}}\left(x,p\right)\Delta\theta_{x_{0,L}}\left(p\right)=\left(H^{s}_{x_{0,L}}\left(x\right)+H^{t}_{x_{0,L}}\left(x,p\right)\right)\Delta\theta_{x_{0,L}}\left(p\right)$$

$$\Rightarrow \overline{T}^{*}_{SP2,3}\left(x,t\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(H^{s}_{x_{0,L}}\left(x\right)\Delta\theta_{x_{0,L}}\left(p\right)\right)+\mathscr{L}^{-1}\left(H^{t}_{x_{0,L}}\left(x,p\right)\Delta\theta_{x_{0,L}}\left(p\right)\right) \tag{13.1.5}$$

$$\Rightarrow \overline{T}^{*}_{SP2,3}\left(x,t\right)=\underbrace{H^{s}_{x_{0,L}}\left(x\right)\overline{\Delta T}_{x_{0,L}}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime forcé}}+\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(H^{t}_{x_{0,L}}\left(x,p\right)\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_{0,L}}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime libre}}$$

Ainsi, en substituant les expressions (13.1.3) et (13.1.4) dans (13.1.5), on a :

$$\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)=\underbrace{\left(1-\frac{x}{L_x}\right)\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime forcé}}+\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(H^{t}_{x_0}\left(x,p\right)\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime libre}} \tag{13.1.6}$$

Et,

$$\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)=\underbrace{\frac{x}{L_x}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime forcé}}+\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(H^{t}_{x_L}\left(x,p\right)\right)\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)}_{\text{pseudo-régime libre}} \tag{13.1.7}$$

Les solutions $\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)$ et $\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)$ apparaissent donc comme la superposition d'une « fonction affine » (de coefficient directeur $\overline{\Delta T}_{x_{0,L}}\left(t\right)/L_x$) et d'un terme temporellement convolutif, c'est-à-dire dont il est nécessaire d'avoir toute l'histoire temporelle pour pouvoir en déduire son expression spatiale à chaque instant donné.

Les expressions $H^{t}_{x_{0,L}}\left(x,p\right)$ correspondent en fait aux restes des développements limités (à l'ordre 1) réalisés en (13.1.3). Ils « contiennent » par conséquent la courbure des réponses $\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)$ et $\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)$. Ainsi, plus le matériau sera diffusif dans le plan ($a_x\rightarrow+\infty$), plus on aura $\sqrt{\frac{p}{a_x}}\rightarrow 0$ pour un même intervalle de temps donné, et plus le terme affine (également appelé improprement « terme linéaire ») deviendra prépondérant.

Par conséquent, pour des temps longs devant le temps de diffusion τ_x dans le plan, tel que :

$$\sqrt{\frac{p}{a_x}}L_x=\sqrt{p\frac{L_x^2}{a_x}}=\sqrt{\tau_x p}\rightarrow 0 \tag{13.1.8}$$

On aura en première approximation (à l'ordre 1) :

$$\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)\simeq\left(1-\frac{x}{L_x}\right)\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \tag{13.1.9}$$

Et,

$$\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right) \simeq \frac{x}{L_x}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \qquad (13.1.10)$$

- ***Remarques*** :
  - Les expressions (13.1.9) et (13.1.10) seront appelées fonctions de correction affines dans la partie « Méthodes d'estimation » (section 15.2, p.213) et serviront à initialiser l'algorithme d'estimation.
  - Les fonctions de correction affines auraient pu être trouvées en exprimant directement les réponses impulsionnelles à l'aide de leur développement (infini, sous réserve de convergence des séries) en série[170] en p, puis en calculant analytiquement l'inverse de Laplace de chacun des termes de la série, et en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égaux à 1. Cependant, cela aurait probablement fait perdre la notion de comportement asymptotique au temps longs (solution stationnaire), souvent chère au physicien.

Une illustration graphique de la « dégénérescence » (asymptotique) des fonctions de correction en fonctions affines est donnée Figure 13.1 à Figure 13.5.

Les graphes ont étés réalisés avec un temps caractéristique $\tau_x = 50\,s$ (tel que par exemple : $L_x = 40\,mm$ et $a_x = 3{,}2\cdot 10^{-6}\,m^2\cdot s^{-1}$), et les conditions aux limites $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) = U\left(t\right)$[171]).

Sur les Figure 13.1 et Figure 13.2 représentant les évolutions spatio-temporelles des fonctions de correction gauche (13.1.6) et droite (13.1.7), on remarque d'une part, que les fonctions de correction gauche et droite sont symétriques par rapport à *x=0,02*, et d'autre part, qu'au temps long les fonctions de correction tendent vers des fonctions affines (affine pour $\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)$, et linéaire pour $\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)$).

---

[170] Ce qui correspond en un sens, à utiliser une démarche inverse à celle couramment utilisée pour trouver les solutions générales des équations différentielles, et consistant à chercher la solution sous la forme d'une série entière. En effet, ici, la solution analytique est connue, mais on la décompose sous la forme d'une série pour n'en garder que les 1er termes.

[171] $U\left(t\right)$ représente la fonction de Heaviside définie en (12.2.23). La fonction d'inversion numérique de Laplace utilisée (basée sur l'algorithme de de-Hoog) n'étant pas capable de donner de résultats pour *t=0*, tous les graphes sont réalisés pour *t>0*.

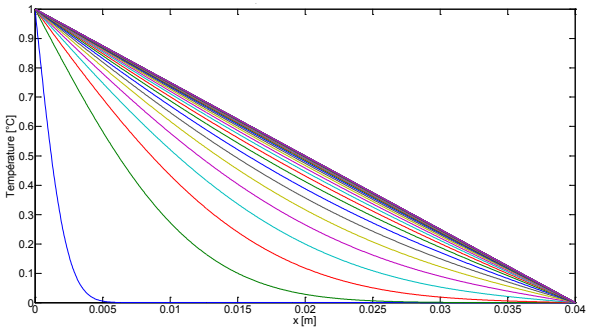


Figure 13.1 : Evolution spatio-temporelle de la fonction de correction gauche $\overline{T}^{*}_{SP2}\left(x,t\right)$ (13.1.6)

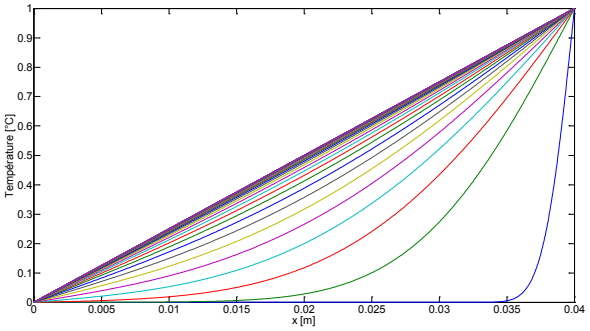


Figure 13.2 : Evolution spatio-temporelle de la fonction de correction droite $\overline{T}^{*}_{SP3}\left(x,t\right)$ (13.1.7)

La fonction de correction gauche ainsi que son approximation affine ont été représentées au temps initial ($t = 0 + \Delta t = 0{,}05\,s$) Figure 13.3, et au temps long ($t = \tau_x = 50\,s$) Figure 13.4. On voit sur la Figure 13.4 qu'au temps long, la fonction de correction semble confondue avec son approximation affine.

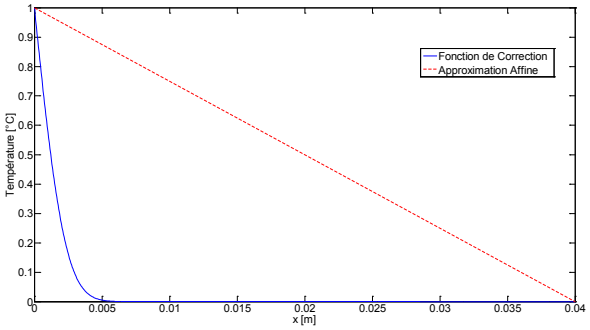


Figure 13.3 : Fonction de correction gauche à *t=0,05s* et son approximation affine

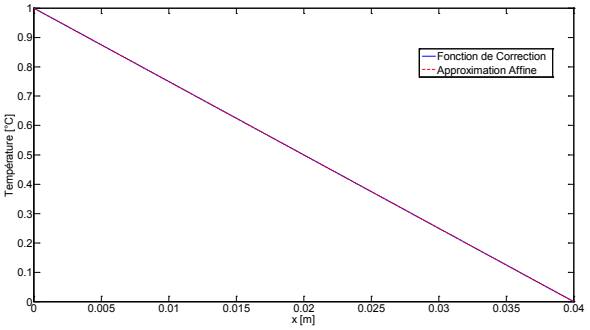


Figure 13.4 : Fonction de correction gauche à *t=50s* et son approximation affine

Afin de mieux visualiser la différence entre la fonction de correction au temps long et son approximation affine, l'écart entre ces deux fonctions a été représenté Figure 13.5.

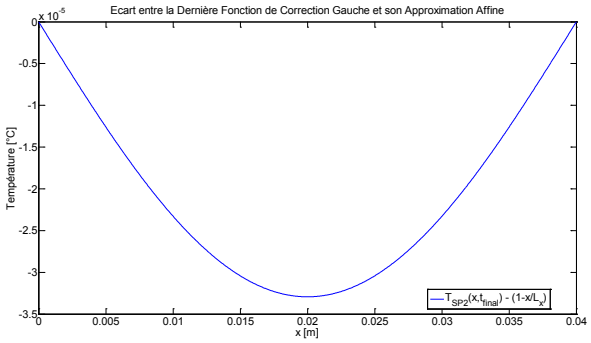


Figure 13.5 : Ecart entre la fonction de correction gauche à *t=50s* et son approximation affine

L'erreur étant de l'ordre de 10^{-5}, cela illustre le fait que les fonctions de correction peuvent être assimilées à des fonctions affines au temps long.

13.2. Méthode de superposition : expression des fonctions de correction par utilisation du principe de superposition des solutions d'une EDP linéaire

Une autre façon d'obtenir les fonctions de correction affine est de se servir de la linéarité du système d'EDP décrivant les sous-problèmes 2 et 3, et défini par les expressions (12.2.7) et (12.2.8). En effet, le système d'EDP étant linéaire, la solution complète peut être obtenue par superposition de solutions particulières. En particulier, l'une de ces solutions particulières sera, ici[172], la fonction de correction affine. Afin d'illustrer la méthode, nous traiterons un cas légèrement plus général que celui des sous-problèmes 1 et 2, en résolvant directement la réunion des sous-problèmes 2 et 3. Puis nous identifierons les contributions des solutions des sous-problèmes 2 et 3. Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a_x} \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad \overline{T}^*\left(x,t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \end{cases} \tag{13.2.1}$$

Le principe est de décomposer le champ de température (solution) $\overline{T}^*$ sous la forme d'une superposition (somme) d'une solution particulière (de correction) $\overline{T}_c^*\left(x,t\right)$ permettant de rendre les conditions aux limites homogènes (en x) et d'une solution $\overline{T}_s^*\left(x,t\right)$ du problème transitoire modifié homogène en x. Pour cela, on cherchera une solution $\overline{T}_c^*\left(x,t\right)$ sous la forme d'une fonction affine en x.

On cherche donc la solution du problème (13.2.1) sous la forme :

$$\overline{T}^*\left(x,t\right) = \overline{T}_c^*\left(x,t\right) + \overline{T}_s^*\left(x,t\right) \tag{13.2.2}$$

Tel que $\overline{T}_c^*\left(x,t\right)$ soit solution de :

$$\begin{cases} \overline{T}_c^*\left(x,t\right) = \alpha\left(t\right)x + \beta\left(t\right) \\ x = 0, \qquad \overline{T}_c^*\left(x,t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad \overline{T}_c^*\left(x,t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \end{cases} \tag{13.2.3}$$

Et que $\overline{T}_s^*\left(x,t\right)$ soit par conséquent, solution de :

[172] Notons, que dans le cas général, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction affine comme solution particulière. Cela dépend de l'équation différentielle et des conditions aux limites.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{T}_s^*}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a_x}\dfrac{\partial \overline{T}_s^*}{\partial t} = \underbrace{\dfrac{1}{a_x}\dfrac{\partial \overline{T}_c^*}{\partial t}}_{\text{Terme Source}} \\ t = 0, \qquad \overline{T}_s^*\left(x,t\right)_{t=0} = -\overline{T}_c^*\left(x,t\right)_{t=0} \\ x = 0, \qquad \overline{T}_s^*\left(x,t\right)_{x=0} = 0 \\ x = L_x, \quad \overline{T}_s^*\left(x,t\right)_{x=L_x} = 0 \end{cases} \tag{13.2.4}$$

On remarque, en comparant (13.2.1) et (13.2.4), que la contrepartie de « l'annulation » des conditions aux limites spatiales, est l'apparition d'un terme source et de la modification de la condition initiale.

La résolution du problème (13.2.3) mène à :

$$\overline{T}_c^*\left(x,t\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L_x}\right)\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)}_{DL1\left(\overline{T}_{SP2}^*\right)} + \underbrace{\frac{x}{L_x}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)}_{DL1\left(\overline{T}_{SP3}^*\right)} \tag{13.2.5}$$

On retrouve donc ainsi les fonctions de correction affines des sous-problèmes 2 et 3 établies en (13.1.9) et (13.1.10).

Chapitre 14

Résolution par Transformation Fourier-Cosinus :

Hypothèse de conditions aux limites de type flux nuls

14. Résolution par Transformation Fourier-Cosinus : Hypothèse de conditions aux limites de type flux nuls

La résolution du problème général par transformation Fourier-Cosinus associée à l'hypothèse de flux nuls sur les bords en x du domaine (conditions aux limite de type Neumann homogènes) est la méthode habituellement utilisée. Le problème (11.1.8) devient alors :

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{x=0} = 0 \\ x = L_x, \quad -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{x=L_x} = 0 \\ z = 0, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=0} = \overline{\varphi}_{flash}\left(x,t\right) - \overline{\varphi}_{z_0} \\ z = L_z, \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = \overline{\varphi}_{z_L} \end{cases} \tag{14.1.1}$$

Le problème (14.1.1) se résoud selon une méthode analogue à celle utilisée pour résoudre le sous-problème 1 (p.180), mais en remplaçant la transformation Fourier-Sinus par une transformation Fourier-Cosinus en espace. Remarquons que 0 est alors cette fois-ci une valeur propre du problème.

On posera ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{T}\left(\alpha_n,z,t\right) = \displaystyle\int_0^{L_x} \overline{T}^* \cos\left(\alpha_n x\right) dx \\ \theta\left(x,z,p\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{T}^* e^{-pt} dt \\ \tilde{\theta}\left(\alpha_n,z,p\right) = \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{+\infty} \overline{T}^* e^{-pt} \cos\left(\alpha_n x\right) dt\, dx \\ \tilde{\Phi}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right) = \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{+\infty} \overline{\varphi}_{flash}\left(x,t\right) e^{-pt} \cos\left(\alpha_n x\right) dt dx = \int_0^{L_x} \overline{\phi}\left(x\right)\cos\left(\alpha_n x\right) dx \int_0^{+\infty} \psi\left(t\right) e^{-pt} dt \\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L_x}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{14.1.2}$$

Et la solution du problème s'écrit alors sous la même forme de (12.1.7), c'est-à-dire :

$$\tilde{\theta}_{\mathrm{c}}\left(\alpha_n, L_z, p\right) = \frac{\dfrac{L_z^2}{a_z}\tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma_n L_z + \dfrac{Bi^2}{\gamma_n L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma_n L_z\right) + 2Bi\,\mathrm{ch}\left(\gamma_n L_z\right)} \tag{14.1.3}$$

Avec :

$$\begin{cases} \gamma_n^2 = \dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2 \dfrac{a_x}{a_z} \\ \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right) = \dfrac{\tilde{\Phi}\left(\alpha_n\right)}{\rho c L_z} \\ Bi = \dfrac{hL_z}{\lambda_z} \\ \alpha_n = n\pi \;/\; L_z,\ \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{14.1.4}$$

Chapitre 15

Méthodes d'estimation

15. Méthodes d'estimation

Dans cette section, nous commencerons par rappeler le principe de la méthode d'estimation classique « Cos H/H », ainsi que les corrélations aux temps longs de certains de ses paramètres. Puis, les nouvelles méthodes d'estimation proposées « Sin-Imp » et « Sin-Ind » seront présentées, et un critère de durée d'exploitabilité des harmoniques, applicable à l'ensemble des méthodes d'estimations présentées, sera établi. Enfin, l'incidence sur les harmoniques, d'une excitation symétrique et centrée sur l'échantillon, sera abordée.

15.1. Méthode d'estimation classique « Cos H/H », corrélation des paramètres, et évolution de la méthode : méthode « Cos AH »

15.1.1. Principe de la méthode d'estimation

A partir de l'équation (14.1.3), la méthode d'estimation classique consiste à estimer les paramètres $\left\{a_x,\, a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right),\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_1\right),\, \ldots\,,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}$ de façon séquentielle. Les ensembles de paramètres $\left\{a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$ et $\left\{a_x,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont obtenus indépendamment.

Les paramètres $\left\{a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$ sont déterminés à l'aide de l'harmonique $\tilde{\theta}_{\mathrm{c}}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)$ d'ordre 0, car celui-ci ne dépend pas de a_x. En effet, on a : $n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow \gamma_0^2 = \dfrac{p}{a_z}$.

Une fois que ces paramètres ont été estimés, ils sont injectés dans le modèle (14.1.3) en tant que constantes. Puis à l'aide des n harmoniques restants, on pourra obtenir n estimations successives des paramètres $\left\{a_x^n,\, \tilde{T}_{\lim}^n\left(\alpha_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ [173]. Enfin, la valeur de a_x est obtenue par moyenne arithmétique pondérée au sens de Gauss-Markov (15.1.1). Cette méthode d'estimation est appelée méthode « harmonique par harmonique » ou méthode « Cos H/H ».

[173] L'exposant n est utilisé ici afin d'indiquer le rang de l'itéré, et ne doit pas être confondu avec une puissance. Dans l'expression (15.1.1), l'indice i dans la notation $a_{x,\,i}$ désigne également le rang de l'itéré.

$$\text{Si, } \sigma_i^2 \equiv \sigma^2\left(a_{x,i}\right) \qquad \text{et} \qquad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\Rightarrow \overline{a}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, a_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{15.1.1}$$

Avec σ_i l'écart-type de la valeur estimée de la diffusivité $a_{x,i}$ à l'aide de l'harmonique de rang i.

15.1.2. Différence entre moyenne arithmétique et moyenne intégrale numérique

Comme cela a été fait remarqué précédemment (section 15.1), les paramètres $\left\{a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$ sont déterminés à l'aide de l'harmonique $\tilde{\theta}_{\mathrm{c}}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)$ d'ordre 0. La transformation intégrale utilisée étant une transformation de Fourier-Cosinus, cet harmonique d'ordre 0 peut s'interpréter au sens fonctionnel comme étant[174] la valeur moyenne de la température (de la surface arrière du matériau). Ainsi, on pourrait être tenté pour réaliser une estimation 1D en face-arrière, de calculer la température moyenne expérimentale par une moyenne arithmétique[175], à l'aide d'une fonction prédéfinie dans le logiciel de calcul numérique, par exemple.

Cependant, du point de vue numérique, l'égalité entre température moyenne arithmétique et température moyenne intégrale numérique n'est pas rigoureusement exacte[176].

En effet, supposons un champ de température 1D (ou déjà moyenné suivant (Oy)) suivant (Ox), dans ce cas, la température moyenne arithmétique T_m de N points, est définie par :

---

[174] De façon plus précise, l'harmonique d'ordre 0 s'interprète (au sens fonctionnel) comme la température moyenne $\overline{T}$, mais à un facteur multiplicatif près, dépendant du coefficient utilisé pour définir les fonctions propres.
Ainsi, si les fonctions propres utilisées sont $X_n = \cos\left(\alpha_n x\right)$, alors l'harmonique d'ordre 0 correspond à $L_x\overline{T}$, alors que, $X_n = \dfrac{\cos\left(\alpha_n x\right)}{L_x} \Rightarrow \tilde{T}_{\mathrm{c}}\left(\alpha_0 = 0\right) = \dfrac{1}{L_x}\displaystyle\int_0^{L_z} T dx \equiv \overline{T}$.

[175] Les estimations étant réalisées à l'aide de logiciel de calculs numériques tel que Matlab™, la tentation a souvent pour cause la présence de fonctions Matlab™ prédéfinies telle que « mean() », facile d'usage et rapide.

[176] Bien entendu, l'erreur diffère en fonction de la méthode de quadrature (numérique) utilisée. Néanmoins, ici, on n'abordera que la méthode des rectangles, car c'est cette dernière qui a été utilisée pour les calculs. De plus, c'est également une méthode de quadrature très fréquenmment utilisée pour le calcul numérique d'intégral.

$$T_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i \tag{15.1.2}$$

Alors que la température moyenne intégrale numérique (des rectangles à gauche), est définie par :

$$\overline{T} = \frac{1}{L_x}\int_0^{L_x} T\left(x\right)dx \approx \frac{1}{L_x}\sum_{i=1}^{N-1} T\left(x_i\right)\Delta x_i = \frac{1}{L_x}\left(-T\left(x_N\right)\Delta x_N + \sum_{i=1}^{N} T\left(x_i\right)\Delta x_i\right) \tag{15.1.3}$$

En supposant que le pas spatial Δx_i est constant entre deux mesures, on a :

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{L_x}{N-1} \\ \overline{T} \approx \dfrac{1}{L_x}\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} T\left(x_i\right)\frac{L_x}{N-1} = \frac{N}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{T\left(x_i\right)}{N} = \frac{N}{N-1}\left(-\frac{T\left(x_N\right)}{N} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{T\left(x_i\right)}{N}}_{T_m}\right) \end{cases} \tag{15.1.4}$$

D'où, en substituant (15.1.2) dans (15.1.4) :

$$\overline{T} \approx -\frac{T\left(x_N\right)}{N-1} + \frac{T_m}{1-\frac{1}{N}} = -\frac{T\left(x_N\right)}{N-1} + T_m\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^n,\ \ \forall N, \left|N^{-1}\right| < 1 \tag{15.1.5}$$

On voit ainsi à partir de (15.1.5), que la température moyenne arithmétique T_m s'identifie d'autant mieux à la température moyenne intégrale numérique $\overline{T}$, que le nombre de points N est grand. Ces deux grandeurs ne pouvant être numériquement égales que lorsque $1\,/\,N < \varepsilon$ et $\dfrac{T\left(x_N\right)}{N} < \varepsilon$, en notant ε la précision numérique (du calculateur). Notons que pour une quadrature par méthode des rectangles à droite, une expression analogue à (15.1.5) est obtenue, mais en remplaçant $T\left(x_N\right)$ par $T\left(x_1\right)$.

15.1.3. Corrélation aux temps longs des paramètres lors de l'estimation harmonique par harmonique (« Cos H/H »), et intérêt de la méthode « Cos AH ».

Sous certaines conditions (données par les théorèmes Taubériens et le lemme de Watson) que nous supposerons vérifiées, il y a l'équivalence (15.1.6) entre les comportements asymptotiques des variables temporelles et de Laplace :

$$t \to +\infty \Leftrightarrow p \to 0 \tag{15.1.6}$$

En posant :

$$\tau_z = \frac{L_z^2}{a_z}, \qquad \text{et} \qquad \tau_x = \frac{L_x^2}{a_x} \tag{15.1.7}$$

Dans l'expression (14.1.3), nous avons :

$$\begin{aligned}
\gamma_n^2 &= \frac{p}{a_z} + \alpha_n^2 \frac{a_x}{a_z} \\
\Leftrightarrow L_z^2\gamma_n^2 &= \Big(p + \alpha_n^2 a_x\Big)\tau_z \\
\Leftrightarrow L_z^2\gamma_n^2 &= \left(p + \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 a_x\right)\tau_z \\
\Leftrightarrow L_z^2\gamma_n^2 &= \left(p + \frac{\big(n\pi\big)^2}{\tau_x}\right)\tau_z
\end{aligned} \tag{15.1.8}$$

Ainsi, aux temps longs et pour des harmoniques[177], tels que[178] :

$$\big|L_z\gamma_n\big| = \left|\sqrt{\left(p + \frac{\big(n\pi\big)^2}{\tau_x}\right)\tau_z}\right| \ll 1 \tag{15.1.9}$$

Nous pouvons effectuer dans l'expression (14.1.3) un développement limité à l'ordre 1 des fonctions hyperboliques $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ au voisinage de 0, avec ($x \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{cases}
\mathrm{ch}\big(x\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \frac{x^{2n}}{\big(2n\big)!} + O\Big(x^{2k+2}\Big) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \\
\mathrm{sh}\big(x\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \frac{x^{2n+1}}{\big(2n+1\big)!} + O\Big(x^{2k+3}\Big) \underset{x\to 0}{\sim} x
\end{cases} \tag{15.1.10}$$

Et l'expression (14.1.3) devient :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_{\mathrm{c}}\big(\alpha_n, L_z, p\big) &\simeq \frac{\dfrac{L_z^2}{a_z}\tilde{T}_{\lim}\big(\alpha_n\big).\Psi\big(p\big)}{\left(\gamma_n L_z + \dfrac{Bi^2}{\gamma_n L_z}\right)\gamma_n L_z + 2Bi} \\
\Leftrightarrow \tilde{\theta}_{\mathrm{c}}\big(\alpha_n, L_z, p\big) &\simeq \frac{\tilde{T}_{\lim}\big(\alpha_n\big).\Psi\big(p\big)}{p + \alpha_n^2 a_x + \dfrac{2Bi}{\tau_z}\left(1 + \dfrac{Bi}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{15.1.11}$$

Notons que dans le cas où l'excitation est suffisamment brève devant le temps de diffusion transverse pour pouvoir être considérée comme une impulsion de Dirac ($\Psi\big(p\big) = 1$), on a :

---

[177] L'expression est particulièrement vraie aux temps longs pour l'harmonique d'ordre 0 (n=0).

[178] La présence des valeurs absolues est due au fait que p est considéré comme étant une variable complexe. Il est possible d'écrire la relation (15.1.9) sans les valeurs absolues à condition de considérer que $p \in \mathbb{R}^+$.

$$\tilde{\theta}_c\left(\alpha_n, L_z, p\right) \simeq \frac{\tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)}{p + \alpha_n^2 a_x + \dfrac{2Bi}{\tau_z}\left(1 + \dfrac{Bi}{2}\right)} \tag{15.1.12}$$

Et en utilisant la propriété de translation de la variable de Laplace, (15.1.12) peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{T}_c\left(\alpha_n, L_z, t\right) \simeq \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right) e^{-\left[\alpha_n^2 a_x + \frac{2Bia_z}{L_z^2}\left(1+\frac{Bi}{2}\right)\right]t} \tag{15.1.13}$$

Notamment, l'estimation des paramètres Bi et a_z se faisant à partir de l'harmonique d'ordre 0, (15.1.13) s'écrit :

$$\tilde{T}_c\left(\alpha_0 = 0, L_z, t\right) \simeq \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0 = 0\right) e^{\frac{-2Bia_z}{L_z^2}\left(1+\frac{Bi}{2}\right)t} \tag{15.1.14}$$

On voit ainsi à partir de l'expression (15.1.11) ou (15.1.14), qu'aux temps longs et pour des harmoniques tels que (15.1.9) soient vérifiés, les paramètres Bi et a_z sont corrélés. Cette corrélation aura d'autant moins d'incidence que l'intervalle temporel d'estimation inclura les temps courts.

Les sensibilités réduites aux paramètres $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$ calculées à partir de l'harmonique d'ordre 0 de l'expression (14.1.3) sont données Figure 15.1, et les sensibilités non réduites Figure 15.2. Les valeurs nominales des différents paramètres ayant servi à la réalisation de ces graphes sont données à la section « Validation numérique » section 17.1 (flux nuls en x=0 et x=L_x).

D'une part, sur la Figure 15.1, on remarque qu'à partir de $t \approx 10\,s$ les différentes sensibilités réduites ont des pentes extrêmement semblables, et que les sensibilités réduites à Bi et a_z sont presque confondues, ce qui confirme le constat fait à partir de l'expression (15.1.11) concernant la corrélation de ces deux paramètres.

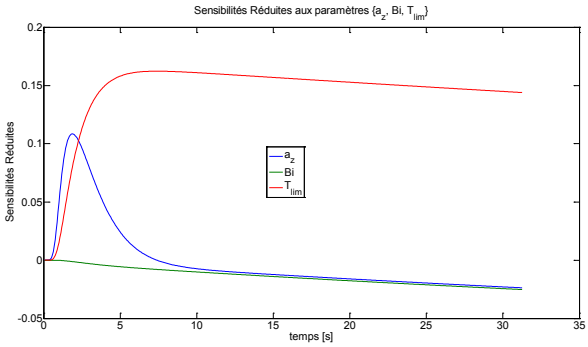


Figure 15.1 : Sensibilités réduites aux paramètres $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$

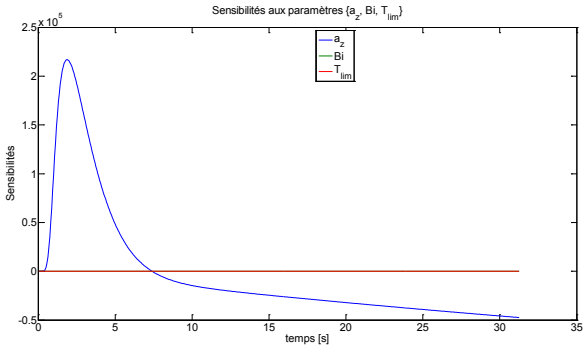


Figure 15.2 : Sensibilités aux paramètres $\left\{a_z, Bi, T_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$

D'autre part, la Figure 15.2 montre que les sensibilités aux paramètres Bi et $T_{\lim}\left(\alpha_0\right)$ sont négligeables vis-à-vis de la sensibilité à a_z.

Ces constats appellent plusieurs remarques[179] :

- La sensibilité réduite à la diffusivité thermique a_z étant plus importante au temps court (cf. Figure 15.1), il est préférable de l'estimer sur cette plage temporelle.
- La sensibilité réduite au nombre de Biot Bi, et donc aux pertes, étant presque nulles au temps court (cf. Figure 15.1), ce paramètre nécessite d'utiliser des temps suffisamment longs pour pouvoir être estimé « correctement ».
- La sensibilité aux paramètres $\tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0 = 0\right)$ et Bi étant négligeable vis-à-vis de celle de a_z (cf. Figure 15.2), cela implique un fort écart d'ordre de grandeur entre les différents coefficients de la matrice de sensibilité. Cette forte disparité d'ordre de grandeur des coefficients aura pour conséquence, un mauvais conditionnement de la matrice de sensibilité. Ce dernier point illustre l'intérêt de travailler avec des sensibilités réduites ou normalisées dans l'algorithme d'estimation (cf. section 6.1 p.74 de la partie Multi-Spectrale) basée sur la méthode de minimisation par moindres carrés, sous peine de risquer d'avoir des fortes erreurs d'estimation, notamment en présence de bruit ou de biais de modèle (cf. sections 17.4 et 17.5).

Afin d'illustrer ces propos, le conditionnement de la matrice de sensibilité X_0 et de sensibilité réduite X_0^* ayant servies à tracer respectivement, les courbes de la Figure 15.2 et de la Figure 15.1, a été évalué dans différents cas :

$$t \in \left]0,16s\right] \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{cond}\left(X_0\right) \approx 1,51.10^6 \\ \mathrm{cond}\left(X_0^*\right) \approx 67,61 \end{cases} \tag{15.1.15}$$

$$t \in \left]16\,\mathrm{s},32s\right] \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{cond}\left(X_0\right) \approx 6,28.10^8 \\ \mathrm{cond}\left(X_0^*\right) \approx 1,06.10^5 \end{cases} \tag{15.1.16}$$

$$t \in \left]0,32s\right] \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{cond}\left(X_0\right) \approx 6,35.10^5 \\ \mathrm{cond}\left(X_0^*\right) \approx 30,12 \end{cases} \tag{15.1.17}$$

La forte dégradation du conditionnement (pour une même largeur temporelle) entre (15.1.15) et (15.1.16), y compris pour la sensibilité réduite, montrent l'effet néfaste de la corrélation des paramètres.

En comparant les conditionnements (15.1.15) et (15.1.17), on observe une amélioration du conditionnement, ce qui à priori tenterait à indiquer qu'il est préférable d'effectuer l'estimation des paramètres sur l'ensemble de la plage temporelle. Cependant, du point de vue « pratique », nous effectuerons les estimations sur l'intervalle $\left]0,16s\right]$ afin de limiter l'effet du biais des nombres de Biot Bi sur l'estimation de la diffusivité a_z. En

[179] Notons que ces constats et remarques enfoncent en réalité des portes ouvertes, car sont bien connus des « inverseurs ».

effet, rappelons que les pertes ont étés supposées constantes et identiques en face-avant et arrière dans le modèle, ce qui a peu de chance de correspondre à la réalité physique[180].

Une estimation sur l'ensemble des harmoniques permet de diminuer ces corrélations (car $\alpha_n \neq cste$) et donc d'améliorer l'estimation, et plus particulièrement l'écart-type comme nous le verrons dans la partie « Validation Numérique » avec les méthodes « Cos AH », « Sin Ind », et « Sin Imp ». De plus, une mise à l'échelle des coefficients[181] de la matrice de sensibilités permettra également d'améliorer le conditionnement de celle-ci.

La méthode « Cos AH » proposée, consiste à estimer simultanément l'ensemble des paramètres en utilisant l'ensemble des harmoniques, par une méthode de moindres carrés régularisés basée sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt (cf. section 6.1 p.74 de la partie Multi-Spectrale).

15.2. Méthodes d'estimation « Sin Ind » et « Sin Imp »

Comme expliqué à la section 11 (p.173), le champ de température instationnaire de la face-arrière de l'échantillon est premièrement moyenné suivant (Oy). Dans ce cas, les profils[182] de température dépendent uniquement des paramètres $\left\{a_x,\, a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_1\right),\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_2\right),\, \ldots,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}$.

Notons que pour estimer a_y, la méthode est similaire, si ce n'est qu'il faille moyenner suivant (Ox).

L'objectif est d'estimer les paramètres inconnus par une technique inverse [26] (moindres carrés basés sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt [72, 73], cf. section 6.1 p.74 de la partie Multi-Spectrale), qui consiste à minimiser une fonction cout définie comme étant la différence entre le champ expérimental corrigé et le champ donné par le modèle théorique SP1, comme expliqué à la section 0 (p.176) et montré Figure 12.1. Le signal expérimental qui est considéré dans notre cas correspond à la transformation de Fourier du champ de température expérimental (mesuré par caméra infrarouge) $\overline{T}^*_{\exp}\left(x, L_z, t\right) = \overline{T}_{\exp}\left(x, L_z, t\right) - T_{ext}$, auquel ont été préalablement retranchées les solutions $\overline{T}^*_{SP2}\left(x,t\right)$, $\overline{T}^*_{SP3}\left(x,t\right)$ des sous-problèmes 2 et 3. La transformation Fourier-Sinus

[180] En effet, la face-avant étant plus chaude que la face-arrière, et soumise à une excitation à durée limitée, les coefficients d'échanges conducto-convectifs ont toutes les chances d'être différents.

[181] Rappelons que cette mise à l'échelle (normalisation) des coefficients de la Jacobienne (matrice de sensibilités) est automatiquement réalisée dans l'algorithme d'estimation utilisée et décrit en section 6.1 p.60 de la partie Multi-Spectrale. Cependant, bien que la normalisation améliore le conditionnement, il n'en reste pas moins préférable, d'avoir une matrice initialement la mieux conditionnée possible.

[182] Un « champ de température 1D » est également appelé « profil de température ».

discrète de $\overline{T}^*_{\exp} - \overline{T}^*_{SP2} - \overline{T}^*_{SP3}$ est notée $\tilde{T}^*_{\exp,cor}\left(\alpha_n, L_z, t\right)$. La fonction cout J est définie à partir des harmoniques expérimentaux $\tilde{T}^*_{\exp,cor}\left(\alpha_n, L_z, t\right)$ et théoriques $\tilde{T}^*_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, t\right)$ (12.1.6) par :

$$J = \sum_{n,\,i}\left(\tilde{T}^*_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, t_i\right) - \tilde{T}^*_{\exp,cor}\left(\alpha_n, L_z, t_i\right)\right)^2 \qquad (15.2.1)$$

Comme le paramètre inconnu a_x apparait dans les sous-problèmes 2 et 3, il sera nécessaire de mettre en place une procédure d'estimation itérative.

La méthode d'estimation consiste à initialiser l'algorithme en annulant les températures $\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) = \overline{T}^*_{\exp}\left(0, L_z, t\right)$ et $\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) = \overline{T}^*_{\exp}\left(L_x, L_z, t\right)$ en effectuant une correction affine (solution approchée de (12.2.13)). On obtient ainsi $\overline{T}^{*0}_{\exp,cor}\left(x, L_z, t\right)$) donnant une première estimation des paramètres $\left\{a_x^0,\, a_z^0,\, Bi^0,\, \tilde{T}^0_{\lim}\left(\alpha_1\right),\, \tilde{T}^0_{\lim}\left(\alpha_2\right),\, \ldots,\, \tilde{T}^0_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}$.

Après cette première estimation, il est ensuite possible d'implémenter une procédure d'estimation itérative consistant à calculer les deux solutions particulières $\overline{T}^{*k}_{SP2}\left(x,t\right)$ et $\overline{T}^{*k}_{SP3}\left(x,t\right)$ (k>1) calculées avec la valeur de diffusivité a_x^{k-1} estimée à l'itération précédente, à les soustraire à $\overline{T}^*_{\exp}\left(x, L_z, t\right)$, dans le but d'obtenir $\tilde{T}^{*k}_{\exp,cor}\left(\alpha_n, L_z, t\right)$ (transformation Fourier=Sinus discrète de $\overline{T}^*_{\exp} - \overline{T}^{*k}_{SP2} - \overline{T}^{*k}_{SP3}$) et estimer $\left\{a_x^k,\, a_z^k,\, Bi^k,\, \tilde{T}^k_{\lim}\left(\alpha_1\right),\, \tilde{T}^k_{\lim}\left(\alpha_2\right),\, \ldots,\, \tilde{T}^k_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}$ à l'aide de (15.2.1). On réitère la séquence jusqu'à convergence.

L'originalité des méthodes « Sin AH » et « Cos AH » est que les diffusivités thermiques sont estimées en même temps en utilisant tous les harmoniques[183], contrairement à la méthode classique « Cos H/H » [182, 183], où les diffusivités a_x et a_z sont estimées indépendamment.

Dans la section 17 (p.229), afin de montrer l'intérêt des méthodes "Sin AH", celles-ci seront comparées à la méthode classique "Cos H/H", ainsi qu'à son amélioration "Cos AH" dont l'estimation est réalisée simultanément sur l'ensemble des harmoniques (la transformation en Fourier-Cosinus étant conservée).

[183] Le genre du nom « harmonique » est initialement masculin (cf. Dictionnaires « Larousse », « Littré », ou « CNRTL »), mais est par abus de langage, souvent employé au féminin. Dans ce manuscrit, nous utiliserons le genre masculin.

15.3. Durée d'exploitabilité des harmoniques

En supposant qu'un harmonique temporel[184] $\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_n, L_z, p\right)\right]$ n'est exploitable que si son module $\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right|$ est supérieur à la fois à son écart-type $\sigma_{\tilde{T}_n}$ et au seuil de détection $S_{\tilde{T}_n}$ qui tient compte du seuil de détection de l'appareil de mesure, ainsi que des précisions de traitement numérique,…, il est possible de définir un temps maximum d'exploitabilité pour chacun des harmoniques. On impose donc :

$$\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right| \geq \max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right) \tag{15.3.1}$$

A partir des expressions (12.1.7), (14.1.3), et à l'aide de la propriété de translation de la variable de Laplace, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right| = \underbrace{\left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right|}_{\text{facteur d'amplitude}} \underbrace{e^{-\alpha_n^2 a_x t}}_{\substack{\text{facteur} \\ \text{d'amortissement}}} \tag{15.3.2}$$

Remarques : Dans le cas d'une transformation Fourier-Cosinus, $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right] \equiv \mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}_c\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]$ représente la solution du transfert de chaleur 1D, avec pertes avant et arrière. Mais cela n'est pas le cas pour la transformation Fourier-Sinus car 0 n'est pas une valeur propre. Ainsi, dans le cas d'une transformation Fourier-Sinus, $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]$ est à considérer au sens symbolique du terme, représentant une fonction de référence à partir de laquelle la décroissance des harmoniques va être décrite.

La fonction $\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right|$ s'exprime donc à l'aide d'un produit de deux fonctions dont l'une est à décroissance exponentielle et peut s'interpréter comme un facteur d'amortissement. En l'absence de pertes, $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}_c\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]$ est une fonction croissante du temps qui admet une asymptote horizontale (régime stationnaire => température constante), et la décroissance de $\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right|$ est par conséquent uniquement due au terme $e^{-\alpha_n^2 a_x t}$, pour tout $\alpha_n \neq 0$. En présence de pertes, la fonction $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}_c\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]$ n'est plus monotone, elle passe par un maximum, puis décroit. Cette décroissance est d'autant plus marquée que les pertes sont importantes. La décroissance de $\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right|$ sera alors plus rapide (produit de deux fonctions décroissantes), et par conséquent, la durée d'exploitabilité des harmoniques s'en trouvera réduite. Ce dernier constat est également vrai pour $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n \neq 0, L_z, p\right)\right]$.

[184] Par extrapolation abusive, les développements qui suivent sont valables que ce soit les méthodes Cosinus ($\tilde{\theta}_c\left(\alpha_n, L_z, t\right)$) ou Sinus ($\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, t\right)$).

Ainsi, pour chaque harmonique $\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right|$ de rang n, il est possible de définir un intervalle de temps $\left[t^n_{\min}\,;t^n_{\max}\right]$ pour lequel la relation (15.3.1) est vérifiée. Et $\forall t \in \left[t^n_{\min}\,;t^n_{\max}\right]$, tel que $\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right] \neq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{T}\left(\alpha_n, L_z, t\right)\right| \geq \max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)\\
&\Leftrightarrow \left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right| e^{-\alpha_n^2 a_x t} \geq \max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)\\
&\Leftrightarrow e^{-\alpha_n^2 a_x t} \geq \frac{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}{\left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right|}\\
&\Leftrightarrow -\alpha_n^2 a_x t \geq \ln\left(\frac{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}{\left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right|}\right)\\
&\Leftrightarrow t^n_{\min} \leq t \leq \underbrace{\frac{1}{\alpha_n^2 a_x}}_{\substack{\text{facteur}\\ \text{d'amortissement}}} \underbrace{\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right)}_{\text{facteur d'amplitude}} \leq t^n_{\max}
\end{aligned}
\qquad (15.3.3)
$$

La relation (15.3.3) montre que le temps maximum d'exploitabilité des harmoniques décroit en $\dfrac{1}{\alpha_n^2 a_x}$.

Par conséquent, plus on utilisera des harmoniques d'ordre élevé, plus la durée d'exploitabilité sera faible (cf. Figure 15.3 et Figure 15.4). De plus, notons que la contrainte est double, car compte tenu du terme $e^{-\alpha_n^2 a_x t}$ dans l'expression(15.3.2), nous avons $t^{n+1}_{\min} > t^n_{\min}$.

A titre d'illustrations, les Figure 15.3 et Figure 15.4 représentent respectivement les harmoniques obtenus par la méthode « Cos H/H », et la méthode « Sin Ind ». Les paramètres de simulation (*FlexPDE*™) sont donnés dans la section 17.1, p.232.

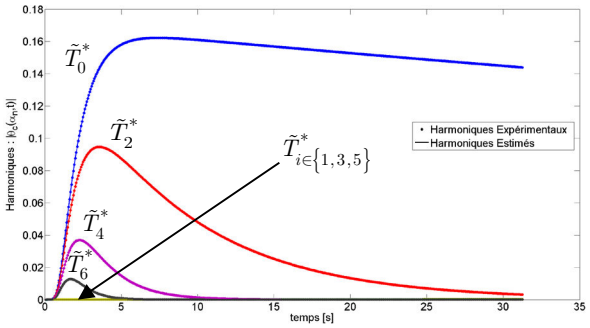


Figure 15.3 : Harmoniques simulés avec *FlexPDE*™ et estimés (Cos H/H)

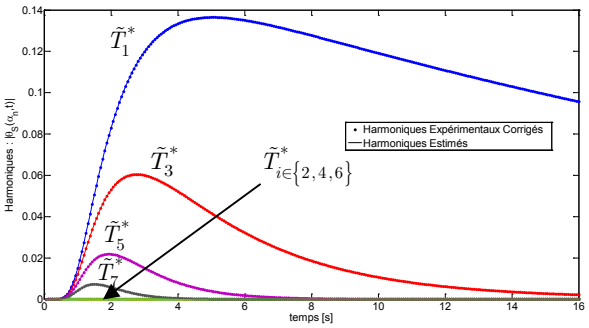


Figure 15.4 : Harmoniques simulés avec *FlexPDE*™ corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

Afin de vérifier la véracité de la relation (15.3.3) de décroissance du temps maximum d'exploitabilité en $\frac{1}{\alpha_n^2 a_x}$, appliquons la aux harmoniques des méthodes « Cos H/H » (Figure 15.3), et « Sin Ind » (Figure 15.4).

- **<u>Application de la relation (15.3.3) aux harmoniques « Cos H/H »</u>**

Supposons que tous les harmoniques sont exploitables pour la même valeur[185] de $\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)$. Afin d'obtenir un ordre de grandeur du facteur d'amplitude $\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right]\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right)$, utilisons l'harmonique $\tilde{T}_2^* \equiv \tilde{T}_{\cos}^*\left(\alpha_2, L_z, t\right)$ d'ordre 2 de la Figure 15.3, et l'inégalité de droite de (15.3.3).

En supposant que l'harmonique $\tilde{T}_2^*$ est exploitable jusqu'à $t_{2,\max} = 30\,s$, on a :

$$\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx t_{2,\max}\alpha_2^2 a_x = \underbrace{30}_{t_{2,\max}}\underbrace{\left(\frac{2\cdot\pi}{40\cdot 10^{-3}}\right)^2}_{\alpha_2}\underbrace{5\cdot 10^{-6}}_{a_x} \approx 3{,}7 \qquad (15.3.4)$$

Avec, $\alpha_n = \frac{n\pi}{L_x}$, et $L_x = 40\cdot 10^{-3}$.

On peut désormais en déduire le temps maximum d'exploitabilité $t_{4,\max}$ de l'harmonique $\tilde{T}_4^*$ d'ordre 4 (par parité, les harmoniques d'ordre impair sont nuls) :

$$t_{4,\max} \approx \frac{1}{\alpha_4^2 a_x}\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx 7{,}5\,s \qquad (15.3.5)$$

De la même façon, on obtient :

$$t_{6,\max} \approx \frac{1}{\alpha_6^2 a_x}\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx 3{,}33\,s \qquad (15.3.6)$$

[185] Une autre manière de présenter le problème est de considérer pour valeur seuil : $\max_{n,t}\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)$.

- **Application de la relation (15.3.3) aux harmoniques « Sin Ind »**

En utilisant cette fois-ci l'harmonique $\tilde{T}_3^* \equiv \tilde{T}\left(\alpha_3, L_z, t\right)$ d'ordre 3 de la Figure 15.4, et en supposant que cet harmonique est exploitable jusqu'à $t_{3,\max} = 16\,s$, nous avons :

$$\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx t_{3,\max}\alpha_3^2 a_x = \underbrace{16}_{t_{3,\max}} \underbrace{\left(\frac{3\cdot\pi}{40\cdot 10^{-3}}\right)^2}_{\alpha_3} \underbrace{5\cdot 10^{-6}}_{a_x} \approx 4,44 \qquad (15.3.7)$$

Ce qui permet de déterminer le temps maximum d'exploitabilité $t_{5,\max}$ de l'harmonique $\tilde{T}_5^*$ d'ordre 5 (par imparité, les harmoniques d'ordre pair sont nuls) :

$$t_{5,\max} \approx \frac{1}{\alpha_5^2 a_x}\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx 5,76\,s \qquad (15.3.8)$$

De même, on a :

$$t_{7,\max} \approx \frac{1}{\alpha_7^2 a_x}\ln\left(\frac{\left|\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_0 = 0, L_z, p\right)\right)\right|}{\max_t\left(\sigma_{\tilde{T}_n}, S_{\tilde{T}_n}\right)}\right) \approx 2,94\,s \qquad (15.3.9)$$

- ***Remarques*** :
  - Les temps obtenus semblent en bon accord avec les valeurs que l'on pourrait obtenir par lecture graphique sur les Figure 15.3 et Figure 15.4.
  - Les durées d'exploitabilités des harmoniques des « méthodes Sinus » seront plus courtes que celles des « méthodes Cosinus ». En effet, l'ordre (ou rang) du premier harmonique non nul des « méthodes Cosinus » est 0, alors que celui des « méthodes Sinus » est 1. Ce décalage unitaire sera conservé pour les autres harmoniques non nuls. L'information utile est ainsi concentrée sur des temps plus courts dans le cas des « méthodes Sinus ». Les expériences et les estimations pourront donc être réalisées sur des durées plus courtes.
  - Le nombre d'harmoniques exploitables dépend de la régularité du champ de températures prolongé (par construction, due à l'utilisation des transformations intégrales Fourier-Sinus ou Fourier-Cosinus) par parité ou imparité, et périodisé (cf. section 16). En effet, si le champ de température[186] $T_t\left(x\right)$ est de classe

[186] On note, ici, le champ de température $T_t\left(x\right)$, afin de rappeler que les transformations de Fourier étant appliquées à la variable spatiale, la variable temporelle est par conséquent considérée comme paramètre.

$\mathscr{C}^{k-1}\left(\mathbb{R}\right)$, et que $T_t^{(k-1)}\left(x\right)$ est de classe[187] $\mathscr{C}_m^1\left(\mathbb{R}\right)$, alors la décroissance des coefficients de Fourier (Harmoniques) $\tilde{T}_n\left(\alpha_n\right)$ est définie par : $\tilde{T}_n\left(\alpha_n\right) \underset{n\to\infty}{=} o\left(1/\left|n\right|^k\right)$. En particulier, comme $T_t\left(x\right) \in \mathrm{L}^2\left[0\,;L\right]$ (cf. note 191, p.223), on est assuré d'après la théorie hilbertienne, et plus particulièrement, d'après le théorème de Parseval[188], que les carrés des harmoniques décroissent plus vite que[189] $1/\left|n\right|$, ce qui est corroboré par le comportement[190] des harmoniques des Figure 15.3 et Figure 15.4.

---

[187] La notation $\mathscr{C}_m^1\left(\mathbb{R}\right)$ signifie, de classe $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Notons, qu'il est équivalent de dire « $T_t\left(x\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^{k-1}\left(\mathbb{R}\right)$, *et* $T_t^{(k-1)}\left(x\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}_m^1\left(\mathbb{R}\right)$ », ou de dire « $T_t\left(x\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^{k-1}\left(\mathbb{R}\right)$, *et de classe* $\mathscr{C}_m^k\left(\mathbb{R}\right)$ ».

[188] Il s'agit plus spécifiquement du théorème de Riesz-Fischer, qui stipule qu'une fonction $f \in \mathrm{L}_L^2\left[0\,;L\right]$ (cf. notes 191 p.203, et 195 p.204) si, et seulement si, la série de ses coefficient Fourier c_n (en représentation complexe) converge en moyenne quadratique, i.e. : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 < +\infty$.

[189] On sait d'après la théorie des séries de Riemann (de terme général $u_n = 1/n^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) ne convergents que pour $\alpha > 1$, que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 < +\infty$ ne pourra converger que si les $\left|c_n\right|^2$ sont d'ordre supérieur à $1/\left|n\right|$.

[190] Comparer l'évolution des amplitudes des différents harmoniques, pour un même temps donné (fixé).

Chapitre 16

Comportement des harmoniques d'une excitation symétrique et centrée en $L_x/2$

16. Comportement des harmoniques d'une excitation symétrique et centrée en $L_x/2$ (centre de l'échantillon)

L'objectif de cette section est d'établir un résultat concernant le comportement des harmoniques d'une excitation symétrique et centrée en $L_x/2$ (centre de l'échantillon). Ce résultat servira de « point de contrôle » afin de vérifier à minima, d'une part, que les simulations numériques (sous *FlexPDE*™) se sont déroulées correctement, et d'autre part, que lors d'une estimation sur zone réduite, celle-ci a bien été centrée sur l'excitation laser (présentant peu d'asymétries).

Cette section a donc pour finalité de démontrer le constat suivant : *Dans le cas d'une fonction ayant pour axe de symétrie* $x=L/2$ *, lors d'une transformation Fourier-Sinus-Finie, les harmoniques de rang pairs sont nuls, alors que pour une transformation Fourier-Cosinus-Finie, ce sont les harmoniques impairs qui sont nuls.*

Soit, $f_o(x)$ la fonction originale appartenant[191] à $\mathrm{L}^2\left[0;L\right]$, d'axe de symétrie $x=L/2$, et que l'on désire projeter (ou décomposer) sur la base hilbertienne de fonctions Sinus ou Cosinus. Cette fonction étant définie sur un intervalle borné, il est possible de la prolonger par parité ou imparité, et/ou par périodicité.

Ainsi, nommons d'une part, $f_s(x)$ la fonction $f_o(x)$ prolongée par imparité sur $\left[-L;0\right[$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$; et d'autre par, $f_c(x)$ la fonction $f_o(x)$ prolongée par parité sur $\left[-L;0\right[$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$. Par construction, nous avons $f_s(x)$ qui est $2L$-périodique, et $f_c(x)$ qui est L-périodique[192]. Ces fonctions admettent donc un développement en série de Fourier.

---

[191] L'espace $\mathrm{L}^2\left[0;L\right]$ des fonctions de $\left[0;L\right]$ dans $\mathbb{C}$, de carré sommable (ou intégrable), et définies à une égalité presque partout, défini l'espace fonctionnel le plus naturel pour le physicien. En effet, en physique classique on suppose toujours, en vertu du premier principe de la thermodynamique, que l'énergie (globale de l'univers) est conservative, et par conséquent, finie. Le physicien (des sciences de l'ingénieur) postule donc toujours, qu'il travaille avec des signaux à énergie finie et à support borné. Or, ces signaux appartiennent justement à l'espace $\mathrm{L}^2\left[0;L\right]$.

[192] Notons que la L-périodicité (au lieu de $2L$) de $f_c(x)$ est due à l'hypothèse de symétrie d'axe $x=L/2$ de $f_o(x)$. Cette symétrie implique en particulier que la périodisée (de période L) de $f_o(x)$ est une fonction paire. Par conséquent, la représentation graphique sur l'intervalle $\left[-L;L\right]$ de la périodisée de $f_o(x)$ est identique à celle de $f_c(x)$ sur ce même intervalle.

Par conséquent, on doit avoir[193] :

$$\forall x \in \left[0;L\right[, \quad f_s\left(x\right) \overset{\text{p.p}}{=} f_c\left(x\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \overset{\text{p.p}}{=} \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right) \qquad (16.1.1)$$

Les coefficients a_p et b_n de (16.1.1), sont définis par :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f\left(x\right)dx \\ a_p = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f\left(x\right)\cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)dx \\ b_n = \dfrac{2}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f\left(x\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{2L}\right)dx = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f\left(x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{cases} \qquad (16.1.2)$$

Afin de fixer les idées, et de permettre une convergence uniforme[194] des deux décompositions en séries de Fourier, on choisira, par exemple, pour fonction $f_o\left(x\right)$ celle qui est illustrée Figure 16.1. Les fonctions $f_s\left(x\right)$ et $f_c\left(x\right)$ associées sont représentées respectivement sur la Figure 16.2 et la Figure 16.3.

La famille de fonctions $\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ formant une famille orthogonale totale[195] de l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathrm{L}^2\left[0;L\right]$, on a (par projection sur la base de fonctions Sinus) :

$$\int_0^L \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \qquad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (16.1.3)$$

---

[193] Car, par construction, les fonctions $f_s\left(x\right)$ et $f_c\left(x\right)$ sont égales (au sens, « presque partout ») à la fonction $f_o\left(x\right)$.

[194] La convergence uniforme implique que la fonction $f_o\left(x\right)$ doit être continue et de classe $\mathscr{C}_m^1$ (i.e, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux). Rappelons que la condition sur la continuité est nécessaire, car $\mathscr{C}_m^1 \Rightarrow \mathscr{C}_m^0 \not\Rightarrow \mathscr{C}^0$. Pour s'en convaincre, il suffit de penser aux fonctions créneaux ou échelons. Notons également que sous cette condition de convergence uniforme, l'égalité (16.1.1) au sens « presque partout », devient une égalité stricte. Ainsi, nous omettrons dorénavant le symbole $\overset{\text{p.p}}{=}$ au profit de $=$.

[195] Elle forme donc une base de l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathrm{L}^2\left[0;L\right]$. Notons que de façon plus générale, la famille $\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une base de l'espace de Hilbert des fonctions de $\mathrm{L}_L^2\left[0;L\right]$, i.e. des fonctions L-périodiques et de carré intégrable (ou sommable) sur $\left[0;L\right]$.

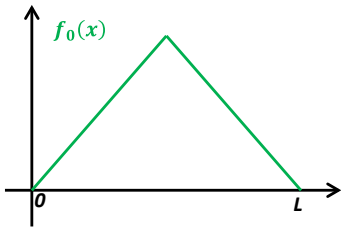


Figure 16.1 : Représentation de la fonction $f_o\left(x\right)$.

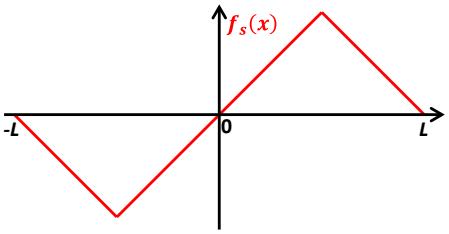


Figure 16.2 : Représentation de la fonction $f_s\left(x\right)$ sur une période (T=$2L$).

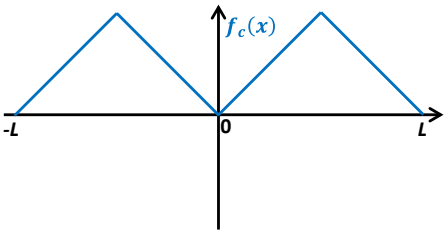


Figure 16.3 : Représentation de la fonction $f_c\left(x\right)$ sur deux périodes (T=L).

Et en faisant usage de la propriété d'orthogonalité des fonctions de la base :

$$\int_0^L b_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad \forall\left(n,p\right)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \tag{16.1.4}$$

Or, la première intégrale vaut :

$$\int_0^L b_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{b_n}{2}\int_0^L 1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}b_n \tag{16.1.5}$$

Et la seconde intégrale vaut :

$$\int_0^L a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_p}{2}\int_0^L \sin\left(\frac{n+2p}{L}\pi x\right)+\sin\left(\frac{n-2p}{L}\pi x\right)dx \tag{16.1.6}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}a_p\left[\frac{1-\cos\left(n\pi\right)}{\left(n+2p\right)\pi}+\frac{1-\cos\left(n\pi\right)}{\left(n-2p\right)\pi}\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L a_p \cos\left(\frac{2p\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}a_p\left[\frac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{\left(n+2p\right)\pi}+\frac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{\left(n-2p\right)\pi}\right] \tag{16.1.7}$$

Donc, (16.1.4) s'écrit :

$$b_n = a_p \left[\frac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{\left(n+2p\right)\pi} + \frac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{\left(n-2p\right)\pi} \right], \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, n \neq 2p \tag{16.1.8}$$

Trois cas sont alors à distinguer. Lorsque n est pair (non nul), impair, et lorsque $n = 2p$. Les deux premiers cas se déduisent de (16.1.8), et on a :

$$n = 2k \Rightarrow b_{2k} = a_p \left[\underbrace{\frac{1+\left(-1\right)^{2k+1}}{2\left(k+p\right)\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1+\left(-1\right)^{2k+1}}{2\left(k-p\right)\pi}}_{=0} \right] = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, n \neq 2p \tag{16.1.9}$$

$$n = 2k+1 \Rightarrow b_{2k+1} = a_p \left[\underbrace{\frac{1+\left(-1\right)^{2k+2}}{\left[2\left(k+p\right)+1\right]\pi}}_{\neq 0} + \underbrace{\frac{1+\left(-1\right)^{2k+2}}{\left[2\left(k-p\right)+1\right]\pi}}_{\neq 0} \right] \neq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2p \tag{16.1.10}$$

Le cas $n = 2p$ nécessite de revenir à la formulation intégrale (16.1.6), d'où l'on déduit :

$$n = 2p \Rightarrow b_{2p} = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \tag{16.1.11}$$

Ainsi, de (16.1.9) et (16.1.11), on déduit que dans la décomposition en série de Fourier-Sinus, tous les harmoniques de rangs pairs sont nuls :

$$b_{2k} = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{16.1.12}$$

Et de (16.1.10), on déduit que dans la décomposition en série de Fourier-Sinus, seuls les harmoniques de rangs impairs sont non nuls :

$$b_{2k+1} \neq 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{16.1.13}$$

- ***Remarques*** :

  - A l'aide d'une démarche analogue à celle présentée, en remplaçant la projection (16.1.3) sur la base de fonctions Sinus par une projection sur la base de fonctions Cosinus, il est possible de montrer que dans la décomposition en série de Fourier-Cosinus, seuls les harmoniques de rangs pairs sont non nuls.

  - Notons que la décomposition en série de Fourier-Sinus (16.1.1) aurait également pu être définie à partir de l'harmonique d'ordre 0, à condition de poser $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 0$. Il n'y aurait alors eu que deux cas (au lieu de trois) à traiter, car la relation (16.1.8) aurait alors été (inchangée, mais) vraie pour $n = 0$, et par conséquent il en aurait été de même pour (16.1.9).

Chapitre 17

Validation numérique

17. Validation numérique

Afin de valider les méthodes d'identification proposées (« Sin Imp», « Sin Ind », et « Cos AH »), plusieurs expériences bruitées et non bruitées, avec différentes conditions aux limites, et différentes configurations d'excitation (localisation et extension de l'excitation), ont été simulées à l'aide du code d'éléments finis *FlexPDE*™. Les différentes conditions aux limites testées sont de type Dirichlet homogène (températures nulles), Neumann homogène (flux nuls), et résistance de contact permettant de modéliser le contact non parfait entre l'échantillon et son support.

L'amplitude du bruit supposé additif, Gaussien, de moyenne nulle, d'écart-type σ_b, et indépendant, représente 5% de la valeur maximale du thermogramme 1D. Ce bruit a été ajouté au champ de températures expérimentales donné par *FlexPDE*™.

Rappelons que « Cos H/H » correspond à la méthode classique basée sur la transformation Fourier-Cosinus avec estimation harmonique par harmonique [182, 183], « Cos AH » signifie méthode classique mais avec estimation simultanée sur l'ensemble des harmoniques, et « Sin Imp », « Sin Ind », représentent les méthodes proposées basées sur la transformation Fourier-Sinus avec estimation simultanée de l'ensemble des paramètres en utilisant simultanément l'ensemble des harmoniques. Les méthodes « Sin Ind » et « Sin Imp » ne diffèrent que par les fonctions de correction utilisées : « Sin Ind » utilise les fonctions de correction données en (12.2.13) et (12.2.14), alors que « Sin Imp » utilise (12.2.11) et (12.2.12).

Pour la méthode classique « Cos H/H », les valeurs des diffusivités sont obtenues par moyenne arithmétique pondérée par l'inverse de la variance (moyenne au sens de Gauss-Markov) (15.1.1). Les écart-types sont calculés pour l'ensemble des estimations faites pour les différents harmoniques. Pour les méthodes proposées « Sin AH » et « Cos AH », les écart-types ont été calculés à partir de la matrice de variance-covariance [26] pour un bruit d'écart-type σ_b.

Compte tenu du mauvais conditionnement de la matrice d'information de la méthode « Cos H/H » (cf. section 15.1.3, p.209), seuls les harmoniques (non nuls) de rang pair seront utilisés lorsque l'excitation[196] est centrée, afin d'améliorer le conditionnement de cette matrice, et par conséquent, de diminuer l'écart-type sur l'estimation des paramètres. En revanche, lorsque l'excitation sera excentrée, les harmoniques d'ordre pair n'étant plus nuls, l'estimation sera réalisée sur l'ensemble des harmoniques (pairs et impairs).

[196] Notons que l'excitation considérée pour les simulations numériques sera toujours symétrique (créneau spatial).

Pour les différentes simulations de validation, on suppose, sauf mention contraire, que l'excitation est réalisée en face-avant ($z=0$), et d'extension spatiale $L_x / 10$. Cinq cas différents sont traités. Les quatre premiers considèrent une excitation ayant lieu au centre de l'échantillon en $x=L_x/2$, alors que le dernier suppose que l'excitation a lieu en $x=L_x/4$ (premier quart de l'échantillon). Les différents cas sont les suivants :

- Echantillon seul avec conditions aux limites (en x) de type Neumann homogène (flux nuls) : c'est un cas favorable aux méthodes « Cos H/H » et « Cos AH ». L'excitation a lieu au centre de l'échantillon en $x=L_x/2$.
- Echantillon seul avec conditions aux limites (en x) de type Dirichlet homogène (températures nulles) : c'est un cas favorable aux méthodes « Sin Ind » et « Sin Imp ». L'excitation a lieu au centre de l'échantillon en $x=L_x/2$.
- Simulation comprenant l'échantillon et son support, avec conditions aux limites (en x) de type résistance de contact : ce cas est celui qui se rapproche le plus du cas réel rencontré lors des expériences. L'excitation a lieu au centre de l'échantillon en $x=L_x/2$.
- Simulation comprenant l'échantillon et son support, avec conditions aux limites (en x) de type résistance de contact : l'excitation a lieu au centre de l'échantillon en $x=L_x/2$, et son extension fait la moitié de la largeur totale de l'échantillon ($D_{flash}=L_x/2$).
- Simulation comprenant l'échantillon et son support, avec conditions aux limites (en x) de type résistance de contact : l'excitation est centrée en $x=L_x/4$, correspondant au centre de la première moitié de l'échantillon.

Les paramètres de simulations choisis sont : $h_{z_0} = h_{z_L} = 10\ W.m^{-2}.K^{-1}$, excitation uniforme, créneau en temps et en espace, de durée $420.10^{-3}s$, échantillon de dimensions $\{ L_x = 40mm\,, \quad L_z = 2.5mm \}$ et de propriétés thermiques $\{ a_x = 5.10^{-6}\ m^2.s^{-1}$, $a_z = 5.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$, $\rho C_p = 1,5.10^5\ J.m^{-3}.K^{-1} \}$. La conductivité du support a été choisie identique à celle de l'échantillon. La durée de la simulation a été fixée à 1,3 fois le temps de réponse (ou temps caractéristique) $t_c = L_z^2 / a_z = 12,5\,s$ dans l'épaisseur, afin de correspondre à la durée expérimentale ($t=16s$) permettant d'avoir des harmoniques exploitables (rapport signal sur bruit). Pour les mêmes raisons, nous n'utiliserons que les harmoniques de rangs inférieurs ou égaux à 6 pour l'estimation par les « méthodes Cosinus » (« Cos H/H » et « Cos AH »), et inférieurs ou égaux à 7 pour les « méthodes Sinus » (« Sin Imp » et « Sin Ind »). Le contact non parfait entre l'échantillon et son support a été modélisé par une résistance de contact ($10^{-4}\ m^2.K.W^{-1}$) aux frontières en $x=0$ et $x=Lx$.

La comparaison des résultats d'estimation de diffusivité des quatre méthodes (Cos H/H, Cos AH, Sin Ind, Sin Imp), va être réalisée à l'aide des différentes simulations

numériques dont les résultats d'estimation pour chacune des simulations seront regroupés dans un tableau.

Dans les tableaux, plutôt que de donner les écart-types (tenant compte de la valeur de l'écart-type du bruit) des valeurs estimées des paramètres, ce sont les écart-types supposant un bruit d'écart-type unitaire qui sera donné. La matrice $\boldsymbol{X^tX}$ est parfois appelée matrice d'information ou matrice de Fisher. Les coefficients diagonaux de sa matrice inverse $(\boldsymbol{X^tX})^{-1}$ peuvent être interprétés comme des facteurs d'amplification du bruit de mesure induisant une amplification de la variance sur l'estimation des paramètres. En effet, si le bruit de mesure est supposé additif, Gaussien, de moyenne nulle, d'écart-type σ_b, et indépendant, alors les variances sur les paramètres sont données (au sens des moindres carrés) par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\beta}}^2 = \mathrm{diag}\big(\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\beta})\big) = \mathrm{diag}\left(\left(\boldsymbol{X^tX}\right)^{-1}\sigma_b^2\right) = \mathrm{diag}\left(\left(\boldsymbol{X^tX}\right)^{-1}\right)\sigma_b^2 \qquad (17.1.1)$$

Avec, $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur de paramètres, $\boldsymbol{X} = \left[\dfrac{\partial \tilde{T}_i^*\left(\alpha_n, t_i\right)}{\partial \beta_j}\right]$ la matrice de sensibilité (Jacobienne) de l'harmonique de rang n, et $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\beta}}^2$ le vecteur des variances des paramètres.

C'est afin de pouvoir comparer l'évolution de ces termes d'amplification lors de l'ajout d'un bruit, que le choix à été fait de les donner dans le tableau au lieu des écart-types. De plus, remarquons qu'il est possible d'obtenir l'écart-type « réel » sur les paramètres estimés (tenant compte de la valeur de l'écart-type du bruit) en multipliant l'écart-type du bruit par les résultats donnés dans la colonne $(\boldsymbol{X^tX})^{-1}$ du tableau (cf . (17.1.1)).

Un code de couleur est utilisé dans les tableaux comparatifs afin de classer qualitativement les méthodes entre elles. Par ordre croissant de qualité d'estimation, il y a : Rouge<Orange<Jaune<Vert. Le classement est fait colonne par colonne et pour chacun des cas : avec bruit, et sans bruit.

Pour des raisons de clarté, seuls certains graphes seront donnés, et seule une courbe sur vingt (1/20) sera représentée sur les graphiques. Ainsi par exemple, les figures représentant « le champ de température bruité », ainsi que les « thermogrammes bruités » ne seront présentées que dans la section 17.1, car l'amplitude relative du bruit étant la même quelles que soient les simulations, ces figures n'apporteraient que peu d'informations supplémentaires par rapport aux graphes non bruités.

17.1. Flux nuls en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$

Le problème considéré est illustré Figure 17.1, et l'évolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur au niveau des conditions aux limites (en x) de type Neumann homogène (flux nuls) est donnée Figure 17.2. Ce problème est un cas favorable aux méthodes « Cos H/H » et « Cos AH » comme l'illustre le Tableau 17.1.

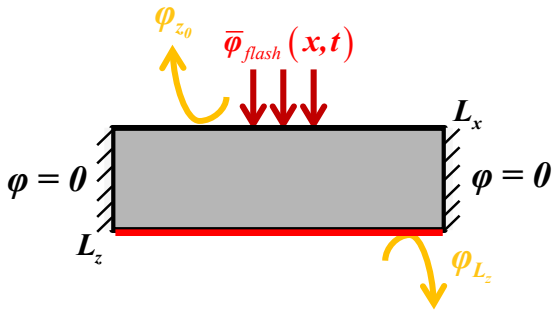


Figure 17.1 : Illustration du Problème (conditions aux limites du type Neumann homogène)

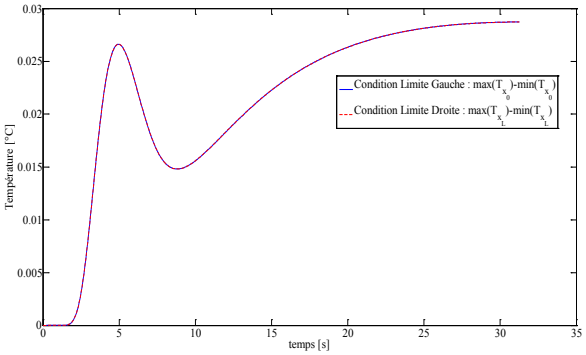


Figure 17.2 : Evolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur (Oz) en $x=0$ et $x=L_x$ (CLs)

Remarques : Dans le cas d'une excitation centrée[197] en $x=L_x/2$, les harmoniques impairs des « méthodes Cosinus » sont nuls (Figure 17.15 et Figure 17.16), alors que ce sont ceux de rangs pairs qui sont nuls pour les « méthodes Sinus » (Figure 17.17 et Figure 17.18). Afin d'améliorer l'écart-type sur les paramètres obtenus par la méthode « Cos H/H », nous n'effectuerons l'estimation que sur les harmoniques de rangs pairs. En revanche, pour les autres méthodes, nous nous placerons dans le cas le plus défavorable, et effectuerons les estimations sur l'ensemble des harmoniques.

Le Tableau 17.1 montre également que les méthodes basées sur la tranformation Fourier-Cosinus donnent des erreurs pouvant être considérées comme nulles, ce qui valide le fait que ces méthodes sont bien adaptées à ce type de problèmes (flux nuls aux bords suivant x).

De plus, on remarque que les écart-types les plus faibles, notammant pour a_z, sont obtenus avec la méthode « Cos AH » utilisant simultanément l'ensemble des harmoniques, alors que les plus élevés sont donnés par la méthode d'estimation harmonique par harmonique « Cos H/H » dans le cas de l'estimation de la diffusivité transverse a_x.

[197] cf. section 16 p.203.

Bruit : 5% du max du thermogramme 1D		a_x (Valeur cible = 5e-6 $m^2.s^{-1}$)				a_z (Valeur cible = 5e-7 $m^2.s^{-1}$)			
Bruit (5%)	**Méthode**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**
Sans	*COS H/H*	5.00E-06	1.79E-10	0.00	5.47E-05	5.00E-07	5.96E-11	0.01	1.17E-06
	COS AH	5.00E-06	2.15E-10	0.00	1.38E-05	5.00E-07	6.96E-11	0.01	9.78E-07
	SIN Ind	4.99E-06	9.53E-09	0.19	2.25E-05	4.99E-07	1.05E-09	0.21	1.21E-06
	SIN Imp	5.00E-06	5.05E-09	0.10	2.25E-05	5.00E-07	4.77E-10	0.10	1.21E-06
Avec	*COS H/H*	5.00E-06	4.97E-09	0.10	5.48E-05	5.00E-07	1.12E-10	0.02	1.17E-06
	COS AH	4.99E-06	5.27E-09	0.11	1.38E-05	5.00E-07	1.42E-11	0.00	9.78E-07
	SIN Ind	5.00E-06	4.07E-09	0.08	2.24E-05	4.97E-07	2.91E-09	0.58	1.21E-06
	SIN Imp	4.99E-06	1.42E-08	0.28	2.24E-05	5.00E-07	4.92E-10	0.10	1.21E-06

Tableau 17.1 : Résultats des estimations des diffusivités donnés par les quatre méthodes pour des conditions aux limites de type flux nuls.

Les nouvelles méthodes proposées « Sin Ind » et « Sin Imp » utilisant également l'ensemble des harmoniques donnent des résultats d'une précision très proche de celle obtenue par les méthodes « Cos H/H » et « Cos AH ». Pour ce cas particulier (flux nuls aux bords), on note que « Sin Imp » donne des estimations légèrement plus précises que « Sin Ind », notamment pour le cas bruité.

En présence de bruit, il semblerait qu'un phénomène de transvasement d'erreurs ait eu lieu pour la méthode « Sin Ind ». En effet, l'erreur sur a_x a été divisée par deux et demi, mais celle sur a_z a triplé. Avec la méthode « Sin Imp » l'erreur d'estimation sur a_z ne varie pas, mais en revanche, celle sur a_x triple.

Des sources d'erreurs possibles pour ces deux méthodes sont les erreurs dues au numérique (erreurs de troncatures/arrondis/quadrature, incapacités à reproduire des distributions telles qu'un Dirac,…), et le biais de modèle dû à l'hypothèse de température uniforme dans l'épaisseur aux bords. Or, ce dernier point n'est pas rigoureusement vérifié comme le montre la Figure 17.2, mais reste néanmoins très faible : l'écart maximum moyen de température est d'environ 0,02°C. De plus, la méthode « Sin Ind » utilisant des fonctions de corrections qui nécessitent de calculer la dérivée du signal, lorsque celui-ci est bruité, l'effet du bruit est amplifié par l'opération de dérivation (comparer Figure 17.17 et Figure 17.18).

Les champs de température et thermogrammes non bruités sont donnés Figure 17.3 et Figure 17.4, et ceux bruités sont donnés Figure 17.5 et Figure 17.6, afin d'illustrer la dégradation de la qualité du signal due au bruit.

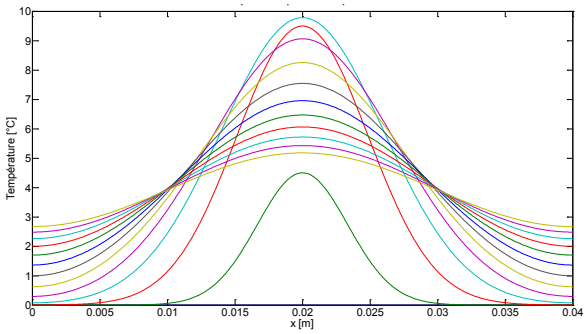


Figure 17.3 : Champ de température

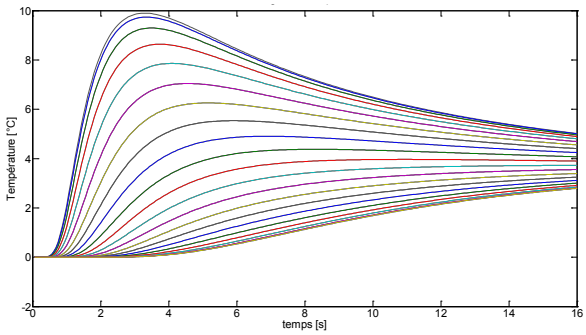


Figure 17.4 : Thermogrammes

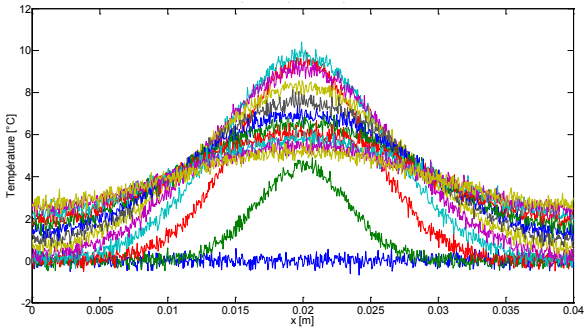


Figure 17.5 : Champ de température bruité

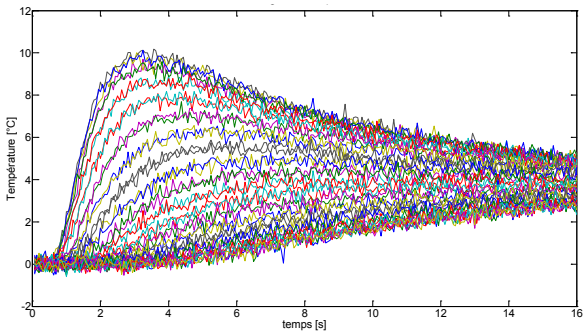


Figure 17.6 : Thermogrammes bruités

L'excitation étant centrée et l'échantillon étant homogène, les fonctions de corrections gauches et droites (expressions (12.2.11) à (12.2.14)) sont symétriques par rapport au centre de l'échantillon (x=$L_x/2$). Ainsi, afin d'alléger la présentation, seules les fonctions de correction gauches sont présentées Figure 17.7 (expression (12.2.11)) et Figure 17.8 (expression (12.2.13)).

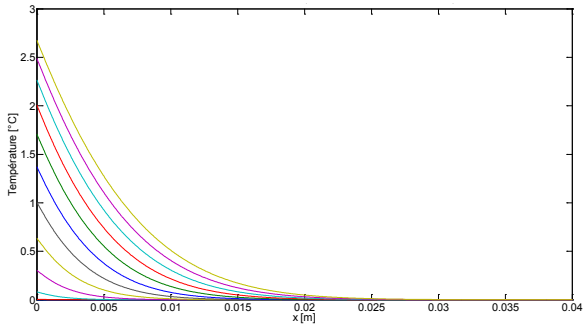


Figure 17.7 : Fonctions de correction gauche de « Sin Ind »

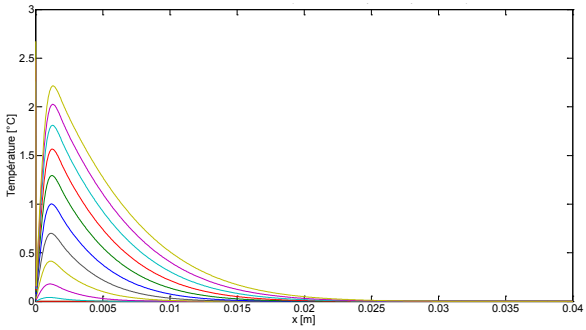


Figure 17.8 : Fonctions de correction gauche de « Sin Imp »

Les champs de température et thermogrammes non bruités, après correction affine utilisée pour l'initialisation du processus d'estimation, sont donnés Figure 17.9 et Figure 17.10.

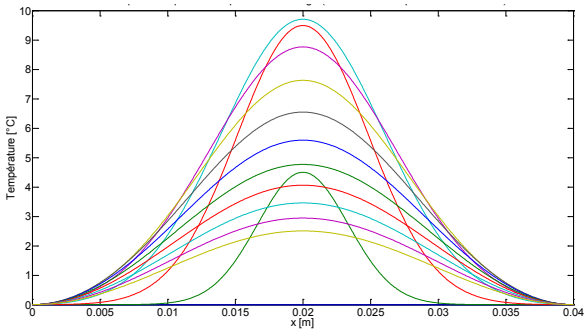


Figure 17.9 : Champ de température après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

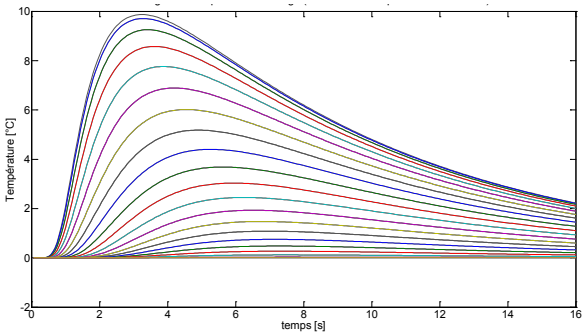


Figure 17.10 : Thermogrammes après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

Ceux obtenus après les corrections (12.2.13) et (12.2.14) (pour la méthode « Sin Ind ») sont représentés Figure 17.11 et Figure 17.12, alors que ceux obtenus après corrections (12.2.11) et (12.2.12) (pour la méthode « Sin Imp ») sont Figure 17.13 et Figure 17.14.

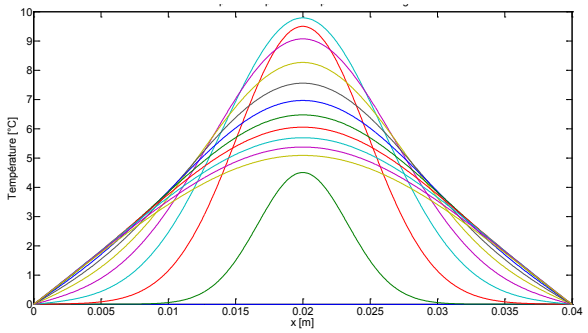


Figure 17.11 : Champ de température après correction (« Sin Ind »)

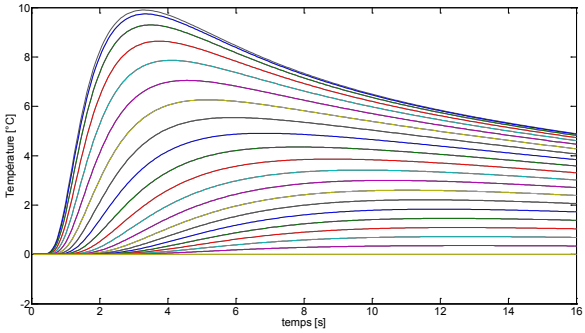


Figure 17.12 : Thermogrammes après correction (« Sin Ind »)

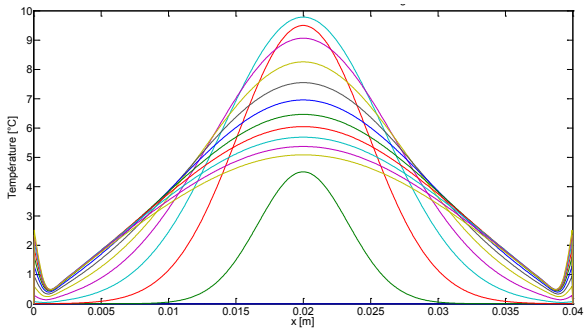


Figure 17.13 : Champ de température après correction (« Sin Imp »)

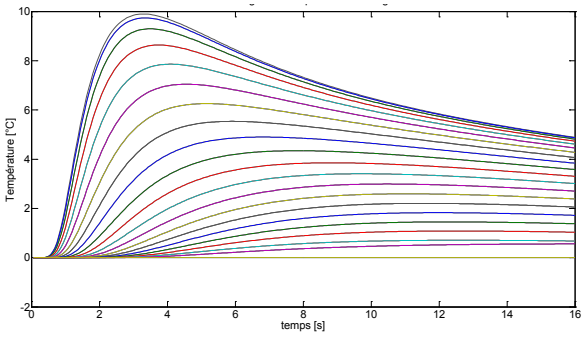


Figure 17.14 : Thermogrammes après correction (« Sin Imp »)

On remarque que le champ de température après correction affine (Figure 17.9) est légèrement plus concave près des bords que celui corrigé par les expressions (12.2.13) et (12.2.14) (Figure 17.11), et que les thermogrammes (Figure 17.10 et Figure 17.12) diffèrent principalement aux temps longs, par une élévation plus faible de la température dans le cas de la correction affine.

La différence de correction entre les méthodes « Sin Ind » et « Sin Imp » se voit principalement sur le champ de température corrigé. Les déformations du champ près des bords dans le cas de la méthode « Sin Imp » (correction par les expressions (12.2.11) et (12.2.12)) sont imputables aux erreurs de troncatures et à l'incapacité numérique de reproduire un Dirac temporel.

Les harmoniques expérimentaux (obtenus par simulation numérique avec *FlexPDE*) bruités et corrigés (SP1), et ceux estimés pour les différentes méthodes sont donnés Figure 17.15 à Figure 17.18. Sur la Figure 17.17 (méthode « Sin Ind ») on remarque sur l'écart-type des harmoniques l'influence d'une correction faisant intervenir la dérivation d'un signal bruité (expressions (12.2.13) et (12.2.14)). Celui-ci se trouve amplifié (comparer la Figure 17.17 avec la Figure 17.18).

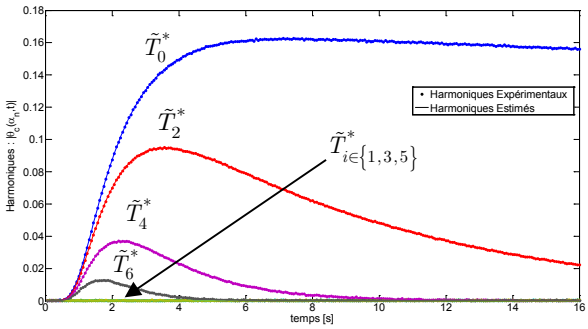


Figure 17.15 : Harmoniques expérimentaux bruités et estimés (Cos H/H)

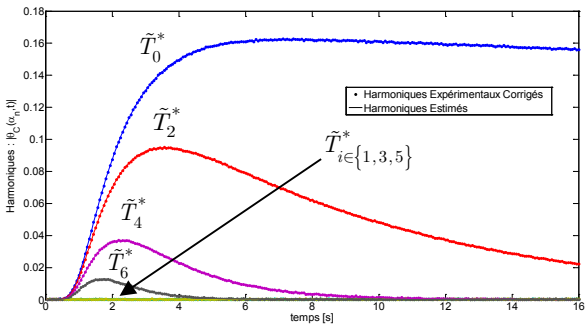


Figure 17.16 : Harmoniques expérimentaux bruités et estimés (Cos AH)

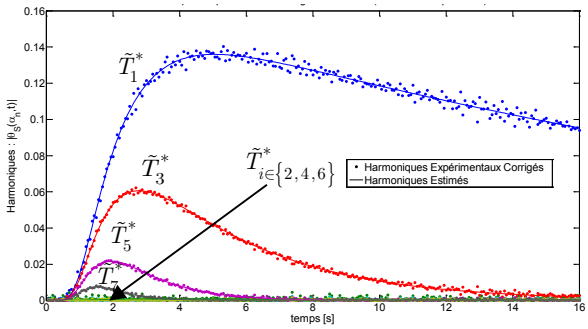


Figure 17.17 : Harmoniques expérimentaux bruités corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

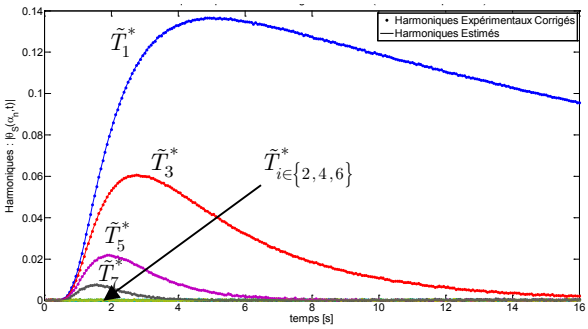


Figure 17.18 : Harmoniques expérimentaux bruités corrigés (SP1) et estimés (Sin Imp)

Notons que l'excitation étant centrée, les harmoniques de rangs impairs sont nuls lorsqu'on utilise une méthode basée sur une transformation Fourier-Cosinus, ce qui est le cas des méthodes « Cos H/H » (Figure 17.15) et « Cos AH » (Figure 17.16). En revanche, pour les méthodes telles que « Sin Ind » (Figure 17.17) et « Sin Imp » (Figure 17.18) basées sur une transformation Fourier-Sinus, ce sont les harmoniques de rangs pairs qui sont nuls (cf. section 16 p.223).

Remarquons également que la durée d'exploitabilité des harmoniques (cf. section 15.3 p.215) des « méthodes Cosinus » (Figure 17.15 et Figure 17.16) est plus grande que celle des « méthodes Sinus », ce qui peut s'interpréter comme une concentration de

l'information utile sur des temps plus courts dans le cas des « méthodes Sinus » (Figure 17.17 et Figure 17.18).

17.2. Températures nulles en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$

Notons que ce problème, illustré Figure 17.19, est équivalent à un problème avec conditions aux limites de type Flux infinis et température extérieure nulle.

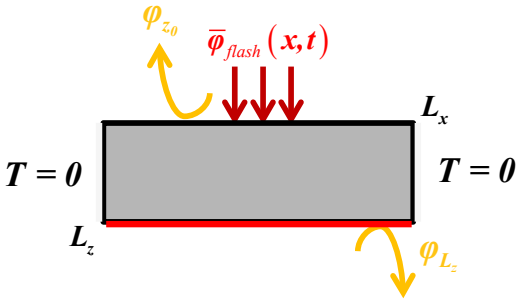


Figure 17.19 : Illustration du Problème (conditions aux limites du type Dirichlet homogène)

Il est favorable aux méthodes « Sin Ind » et « Sin Imp », dont les erreurs d'estimation peuvent être considérées comme nulles, comme l'illustre le Tableau 17.2. En revanche, les flux n'étant plus nuls aux bords (suivant x), on voit que les « méthodes Cosinus » (« Cos H/H » et « Cos AH ») ne sont plus du tout adaptées.

Bruit : 5% du max du thermogramme 1D		a_x (Valeur cible = 5e-6 $m^2.s^{-1}$)				a_z (Valeur cible = 5e-7 $m^2.s^{-1}$)			
Bruit (5%)	**Méthode**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**
Sans	*COS H/H*	2.89E-06	2.11E-06	42.11	5.57E-05	4.58E-07	4.20E-08	8.40	1.06E-06
	COS AH	3.14E-06	1.86E-06	37.15	1.16E-05	4.95E-07	5.01E-09	1.00	9.73E-07
	SIN Ind	5.00E-06	3.67E-10	0.01	2.25E-05	5.00E-07	7.55E-11	0.02	1.21E-06
	SIN Imp	5.00E-06	3.67E-10	0.01	2.25E-05	5.00E-07	7.55E-11	0.02	1.21E-06
Avec	*COS H/H*	2.89E-06	2.11E-06	42.13	5.60E-05	4.58E-07	4.23E-08	8.46	1.06E-06
	COS AH	3.14E-06	1.86E-06	37.18	1.16E-05	4.95E-07	5.37E-09	1.07	9.72E-07
	SIN Ind	4.99E-06	1.37E-08	0.27	2.24E-05	5.00E-07	9.64E-11	0.02	1.21E-06
	SIN Imp	4.99E-06	9.24E-09	0.18	2.24E-05	5.00E-07	3.29E-10	0.07	1.21E-06

Tableau 17.2 : Résultats des estimations des diffusivités donnés par les quatre méthodes pour des conditions aux limites de type températures nulles.

En effet, elles engendrent des erreurs relatives de l'ordre de 40% sur l'estimation de a_x, et de 1% à 8,4% sur a_z, contrairement aux « méthodes Sinus » (« Sin Ind » et « Sin

Imp ») dont les erreurs relatives ne dépassent pas 0,02% sans bruit, et 0,27% avec bruit.

Les températures aux bords étant nulles (conditions aux limites), il en sera de même pour l'évolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur, ainsi que les fonctions de corrections gauches et droites des « méthodes Sinus » (« Sin Ind » et « Sin Imp »). Ces graphes ne seront donc pas représentés.

On remarque que pour ce problème, l'ajout du bruit influe peu sur la précision des « méthodes Cosinus » (très faible augmentation de l'erreur relative).

En revanche, l'ajout de bruit à une légère incidence sur la précsion des « méthodes Sinus » pour l'estimation de a_x. Contrairement au cas précédent (flux nuls), cette fois c'est la méthode « Sin Ind » qui a une erreur relative sur a_z qui varie peu, alors que celle de la méthode « Sin Imp » est multipliée par 3.5, bien qu'elle reste très faible (0,07%).

Les champs de température et thermogrammes non bruités sont donnés Figure 17.20 et Figure 17.21. On remarque sur le champ de température (Figure 17.20) que les températures aux bords sont bien nulles, et que le flux est non nul (pentes non nulles aux bords).

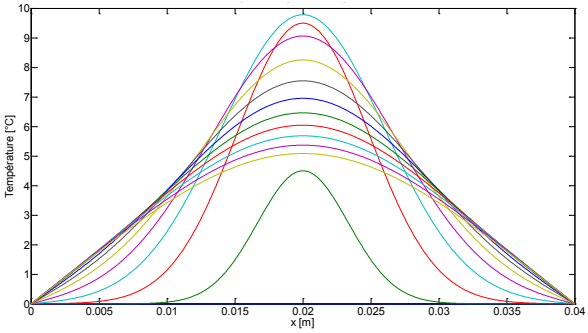


Figure 17.20 : Champ de température

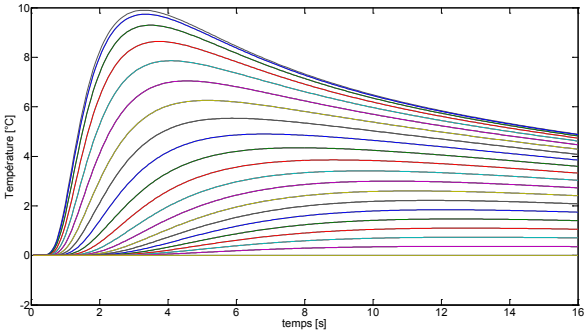


Figure 17.21 : Thermogrammes

Les harmoniques expérimentaux (obtenus par simulation numérique avec *FlexPDE*™), et ceux estimés pour les différentes méthodes sont donnés Figure 17.22 à Figure 17.25. La concordance entre les harmoniques expérimentaux et estimés, semble très bonne dans le cas des « méthodes Sinus », alors que celle obtenue par les « méthodes Cosinus » apparait nettement plus perfectible. Concernant les « méthodes Sinus », les résultats d'estimation du Tableau 17.2 corroborent la bonne adéquation des harmoniques obtenus Figure 17.24 et Figure 17.25.

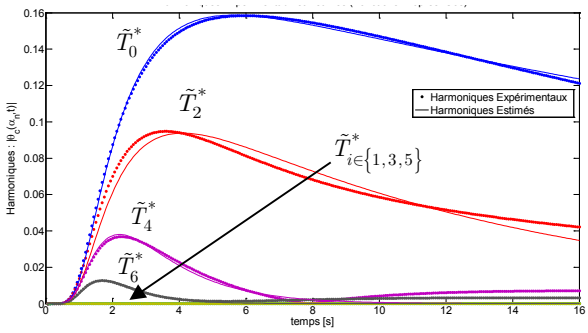


Figure 17.22 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Cos H/H)

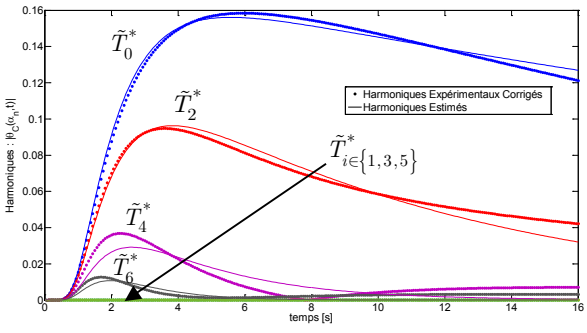


Figure 17.23 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Cos AH)

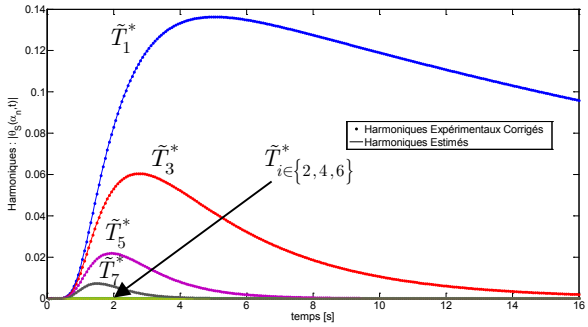


Figure 17.24 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Sin Ind)

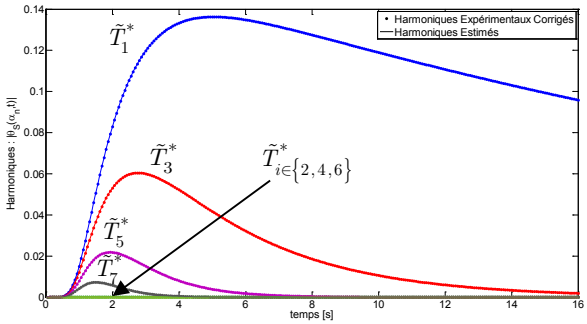


Figure 17.25 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Sin Imp)

En comparant les Figure 17.22 et Figure 17.23, on remarque qu'il semble y avoir une meilleure concordance (ou « fitting » en anglais) entre les harmoniques expérimentaux (simulés par *FlexPDE*™) et estimés par la méthode « Cos H/H » (Figure 17.22), comparée à ceux estimés par la méthode « Cos AH » (Figure 17.23), excepté pour l'harmonique $\tilde{T}_2^*$ de rang 2. Cependant, si l'on observe les résultats d'estimations donnés dans le Tableau 17.2, on constate que les estimations données par la méthode « Cos AH » sont meilleures que celles obtenues par la méthode « Cos H/H ». Une explication possible de ce paradoxe apparent, est la corrélation des paramètres (cf. section 15.1.3 p.209) lors de l'utilisation de la méthode « Cos H/H ». Ces paramètres vont « s'ajuster » pour réduire au mieux l'écart entre les harmoniques expérimentaux et estimés, et « compenser » le biais de modèle. Mais les paramètres étant corrélés (cf. section 15.1.3, p.209), ils pourront prendre une infinité de valeurs différentes pour un même résultat, et par conséquent, avoir des valeurs très éloignées des valeurs nominales attendues. Notamment, l'estimation étant séquentielle, lors de l'estimation des paramètres $\left\{a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$ à l'aide de l'harmonique d'ordre 0, une erreur sur a_z pourra être compensée par une erreur sur Bi, grâce à la corrélation existant entre ces deux paramètres (cf. section 15.1.3, p.209). Or, ces paramètres apparaissent ensuite en tant que constante dans le modèle d'estimation des paramètres $\left\{a_x,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi, un biais sur les premiers paramètres $\left\{a_z,\, Bi,\, \tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_0\right)\right\}$, induira un biais sur les

autres paramètres $\left\{a_x, \tilde{T}_{\lim}(\alpha_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus, notons que d'après Ruffio [35], l'harmonique de rang 2 est l'harmonique qui porte le plus d'information. Ainsi, la meilleure estimation de l'harmonique de rang 2 par la méthode « Cos AH » corrobore les meilleurs résultats d'estimation sur les paramètres.

17.3. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/2$

Afin de valider la méthode d'identification proposée, une expérience avec porte échantillon (support et échantillon supposés orthotropes) est simulée à l'aide du code d'éléments finis *FlexPDE*. Le contact non parfait entre l'échantillon et son support a été modélisé par une résistance de contact (10^{-4} $m^2.K.W^{-1}$) aux frontières en $x=0$ et $x=L_x$. Le problème considéré est celui qui se rapproche le plus du cas réel rencontré lors des expériences, et est illustré Figure 17.26 et Figure 17.27. La Figure 17.27 montre clairement le saut de température à l'interface due aux conditions aux limites de type résistance de contact.

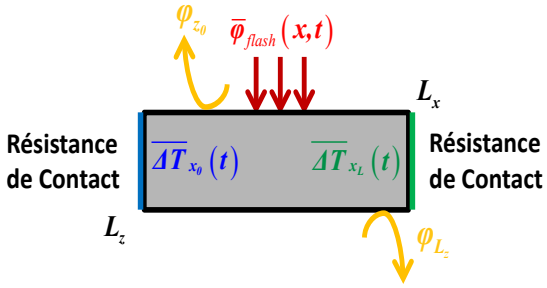


Figure 17.26 : Illustration du Problème (conditions aux limites du type résistance de contact)

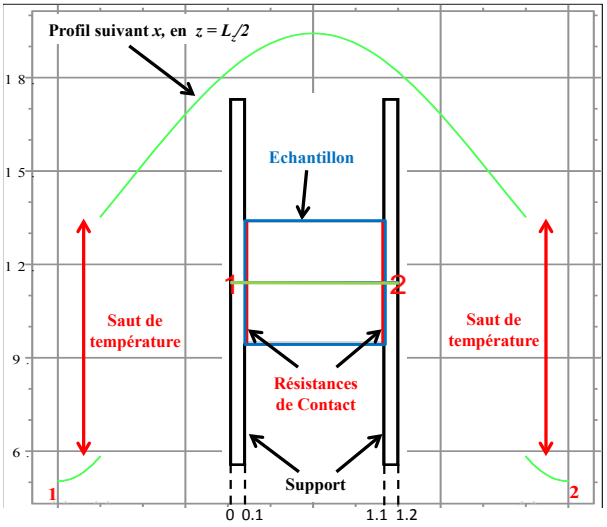


Figure 17.27 : Saut de Température dû à une résistance de contact. Profil suivant x le long de la ligne 1-2 en $z = L_z/2$. Les dimensions spatiales sont adimensionnées.

L'évolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur au niveau des conditions aux limites (en x) de type résistance de contact (saut de température) est donnée Figure 17.28, et la distribution spatiale du flux à la fin de la simulation est montrée Figure 17.29 (l'échelle a été modifiée pour montrer la répartition du flux au sein du matériau et à l'interface entre l'échantillon et le support). La Figure 17.29 illustre clairement que l'hypothèse de flux nuls aux bords faite « implicitement » par les « méthodes Cosinus », n'est pas valide.

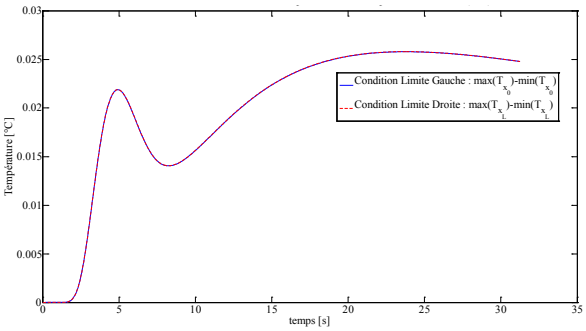


Figure 17.28 : Evolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur (Oz) en x=0 et x=L_x (CLs)

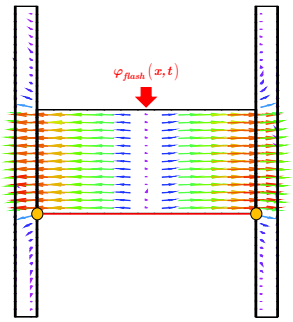


Figure 17.29 : Diffusion du flux dans le support. Figure dilatée afin d'améliorer la visibilité.

Les champs de température et thermogrammes non bruités avant correction sont donnés respectivement Figure 17.30 et Figure 17.31. On remarque sur les Figure 17.30 (aux bords en x=0 et x=L_x) et Figure 17.31 ($\overline{\Delta T}_{x_0,x_L}(t)$) que les températures aux frontières (x=0 et x=L_x) sont non nulles et dépendent du temps.

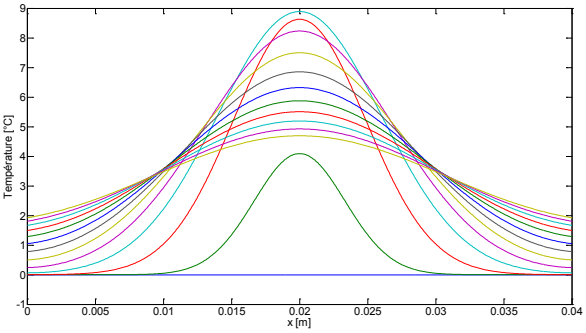


Figure 17.30 : Champ de température avant correction

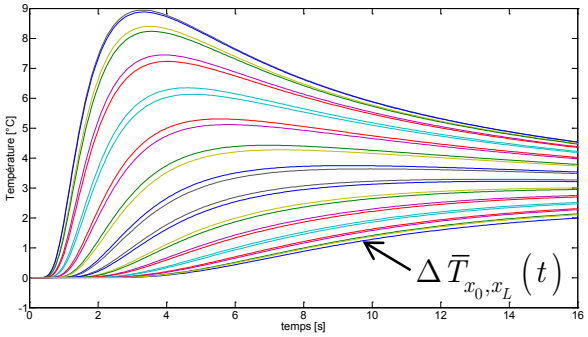


Figure 17.31 : Thermogrammes avant correction

Rappelons que l'excitation étant centrée et l'échantillon étant homogène, les fonctions de corrections gauches et droites (expressions (12.2.11) à (12.2.14)) sont symétriques par rapport au centre de l'échantillon (x=$L_x/2$). Ainsi, seules les fonctions de correction gauches des méthodes « Sin Ind » et « Sin Imp » sont présentées respectivement Figure 17.32 (expression (12.2.11)) et Figure 17.33 (expression (12.2.13)).

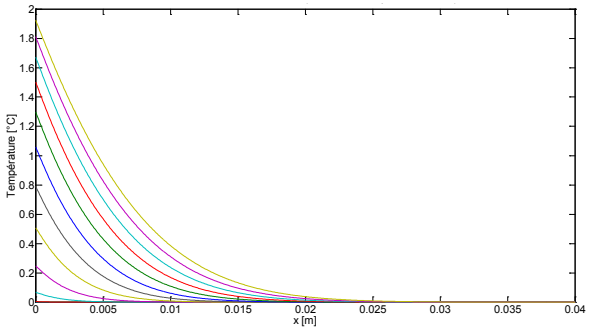


Figure 17.32 : Fonctions de correction gauche de « Sin Ind »

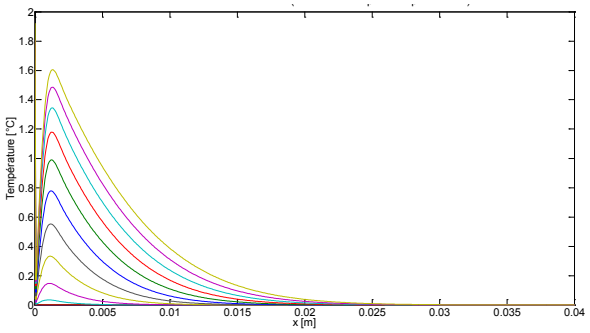


Figure 17.33 : Fonctions de correction gauche de « Sin Imp »

Les champs de température et thermogrammes non bruités, après correction affine utilisée pour l'initialisation du processus d'estimation, sont donnés Figure 17.34 et Figure 17.35.

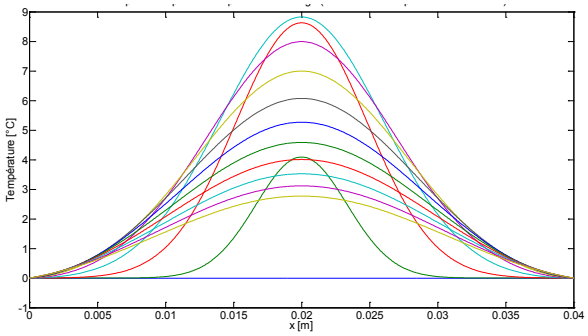


Figure 17.34 : Champ de température après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

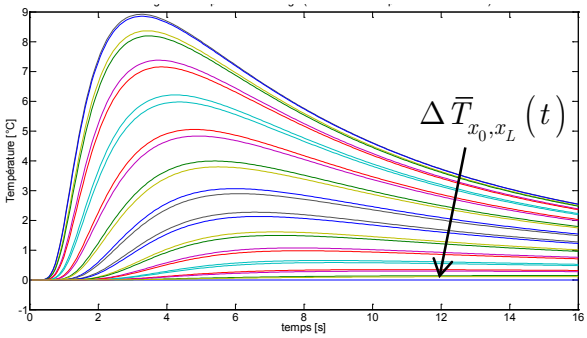


Figure 17.35 : Thermogrammes après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

Ceux obtenus après les corrections (12.2.13) et (12.2.14) de la méthode « Sin Ind » sont représentés Figure 17.36 et Figure 17.37, alors que ceux obtenues après corrections (12.2.11) et (12.2.12) de la méthode « Sin Imp » sont donnés Figure 17.38 et Figure 17.39.

On remarque que quelle que soit la méthode, « Sin Ind » (Figure 17.37) ou « Sin Imp » (Figure 17.39), les températures $\overline{\Delta T}_{x_0,x_L}(t)$ aux bords (en x=*0* et x=L_x) sont bien nulles après correction. Cela pourrait surprendre à la vue du champ de température corrigé de la méthode « Sin Imp » (Figure 17.38), mais rappelons que les solutions aux bords sont calculées de façon analytique (cf. section 12.2.4, p.188).

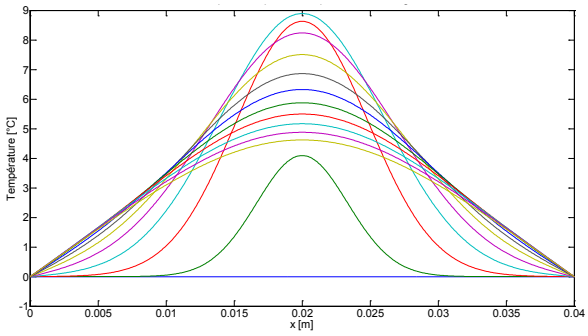


Figure 17.36 : Champ de température après correction (« Sin Ind »)

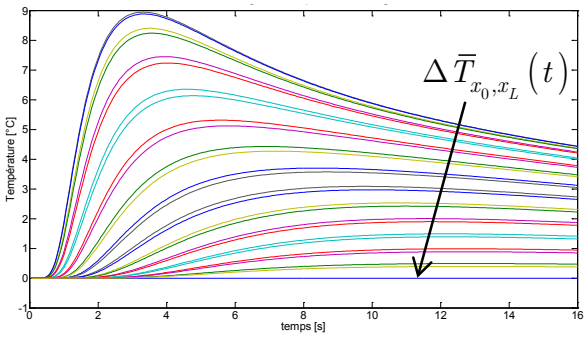


Figure 17.37 : Thermogrammes après correction (« Sin Ind »)

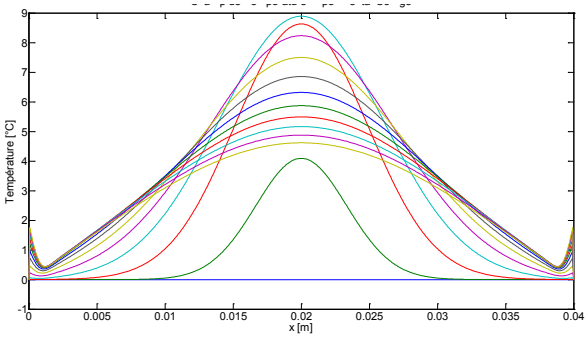


Figure 17.38 : Champ de température après correction (« Sin Imp »)

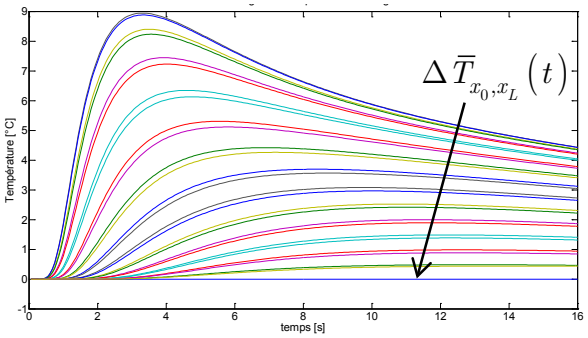


Figure 17.39 : Thermogrammes après correction (« Sin Imp »)

Les constats faits à la section 17.1 p.232, concernant les différences entre les graphes après les différentes corrections, sont également valables ici. En effet, le champ de température après correction affine (Figure 17.34) est légèrement plus concave près des bords, que celui corrigé par les expressions (12.2.13) et (12.2.14) (Figure 17.36). Et les thermogrammes (Figure 17.35 et Figure 17.37) diffèrent principalement au temps long, par une élévation plus faible de la température dans le cas de la correction affine. Les déformations du champ (Figure 17.38) près des bords dans le cas de la méthode « Sin Imp » (correction par les expressions (12.2.11) et (12.2.12)) sont imputables aux erreurs numériques (erreurs de quadrature lors de la convolution) et à l'incapacité numérique de reproduire un Dirac temporel.

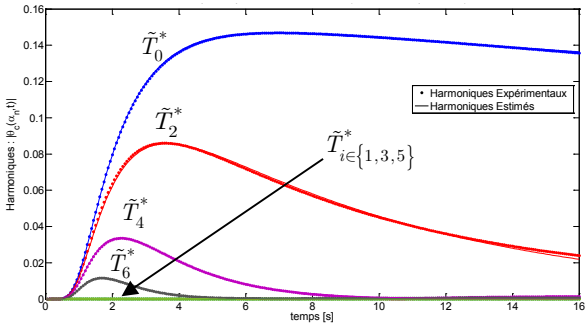


Figure 17.40 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos H/H)

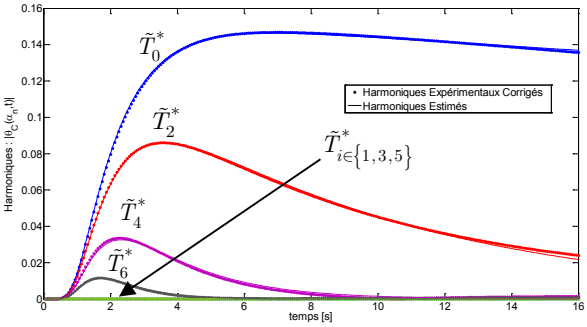


Figure 17.41 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos AH)

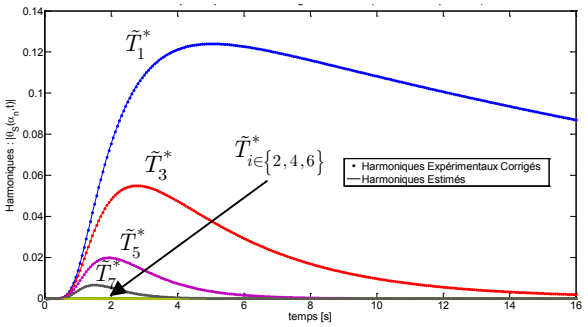


Figure 17.42 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

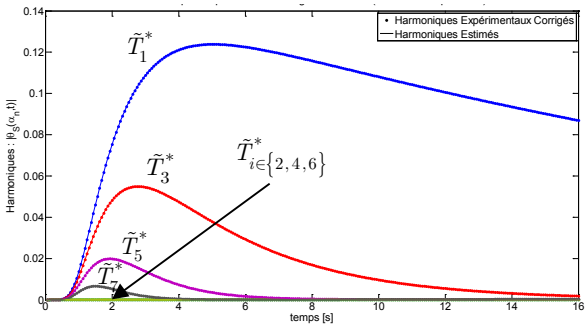


Figure 17.43 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Imp)

Graphiquement, en comparant les harmoniques des « méthodes Cosinus » Figure 17.40 et Figure 17.41, il semble y avoir peu de différences. De même, il est difficile de distinguer une différence entre les harmoniques des « méthodes Sinus » Figure 17.42 et Figure 17.43. Cependant, on constate tout de même que la concordance des harmoniques des « méthodes Sinus » semble meilleure que celle obtenue par les « méthodes Cosinus ». Ce constat sera conforté par les résultats d'estimation des différentes méthodes qui ont étés regroupés dans le Tableau 17.3.

Le problème considéré est celui qui se rapproche le plus du cas réel rencontré lors des expériences, et ne favorise à priori aucune des méthodes car ni la température (Figure 17.27, Figure 17.28, Figure 17.30 et Figure 17.31), ni les flux (Figure 17.29), ne sont nuls aux bords (suivant x).

Cependant, le Tableau 17.3 montre que les méthodes Sinus sont plus précises que les méthodes Cosinus, notamment en ce qui concerne l'estimation suivant a_x. En effet, les « méthodes Cosinus » ont des erreurs d'estimation pour a_x de l'ordre de 7%, alors que les « méthodes Sinus » ont des erreurs maximales allant de 0,1% (sans bruit) à 0,6% (avec bruit). La précision des estimations de a_z obtenues par la méthode « Cos AH » sont globalement du même ordre de grandeur que celle des « méthodes Sinus ». Ainsi, il semble que le biais de modèles est principalement une incidence sur l'estimation de la diffusivité longitudinale a_x.

Bruit : 5% du max du thermogramme 1D		a_x (Valeur cible = 5e-6 $m^2.s^{-1}$)				a_z (Valeur cible = 5e-7 $m^2.s^{-1}$)			
Bruit (5%)	**Méthode**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	$(X^tX)^{-1}$	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	$(X^tX)^{-1}$
Sans	*COS H/H*	4.65E-06	3.50E-07	7.00	6.05E-05	4.91E-07	9.06E-09	1.81	1.26E-06
	COS AH	4.64E-06	3.64E-07	7.28	1.47E-05	4.99E-07	9.83E-10	0.20	1.07E-06
	SIN Ind	4.99E-06	6.69E-09	0.13	2.47E-05	4.99E-07	9.33E-10	0.19	1.33E-06
	SIN Imp	5.00E-06	2.23E-09	0.04	2.47E-05	5.00E-07	4.14E-10	0.08	1.33E-06
Avec	*COS H/H*	4.65E-06	3.47E-07	6.94	6.05E-05	4.90E-07	9.71E-09	1.94	1.26E-06
	COS AH	4.64E-06	3.62E-07	7.23	1.47E-05	4.98E-07	1.52E-09	0.30	1.07E-06
	SIN Ind	4.99E-06	6.68E-09	0.13	2.47E-05	4.95E-07	4.84E-09	0.97	1.33E-06
	SIN Imp	4.97E-06	3.20E-08	0.64	2.46E-05	4.99E-07	5.48E-10	0.11	1.33E-06

Tableau 17.3 : Résultats des estimations des diffusivités donnés par les quatre méthodes pour des conditions aux limites de type résistance de contact.

En l'absence de bruit, la méthode « Sin Imp » est la seule à trouver la valeur exacte des diffusivités a_x et a_z, bien que la méthode « Sin Ind » donne des résultats extrêmement proches (erreur relative inférieur à 0,2%). En présence de bruit, les « méthodes Sinus » donnent des résultats peu différents. Il semble qu'il y ait, comme pour le cas des conditions aux limites de type flux nuls », un effet de transvasement des précisions sur les estimations. En effet, la méthode « Sin Imp » donne de meilleurs résultats pour a_z, alors que c'est l'inverse pour a_x.

17.4. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation d'extension $L_x/2$ centré en $x=L_x/2$

Le problème considéré se rapproche du cas précédent, mais différent par la largeur de l'excitation qui fait ici la moitié de la largeur de l'échantillon. L'objectif est de tester les « méthodes Sinus » dans une configuration de mesure « locale » où l'écart de température suivant l'épaisseur aux bords (suivant x) serait plus important. Ainsi, ce qui nous intéresse principalement cette fois-ci, ce sont les résultats d'estimation (donnés dans le Tableau 17.4), et par conséquent, seuls certains graphes seront donnés à titre d'illustration.

Le problème est illustré Figure 17.44, et l'évolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur au niveau des conditions aux limites (en x) de type résistance de contact est donnée Figure 17.45. En comparant les Figure 17.28 et Figure 17.45, on remarque que dans le cas présent, l'écart maximal de température suivant l'épaisseur est bien supérieur pour un temps de simulation inférieur à 5s, mais qu'après (à partir d'environ 8s), l'écart devient peu différent.

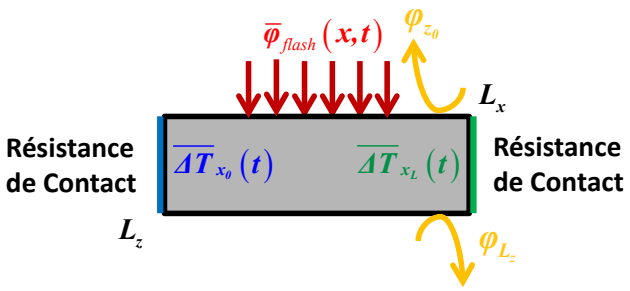


Figure 17.44 : Illustration du Problème : Excitation d'extension $L_x/2$, et conditions aux limites du type résistance de contact

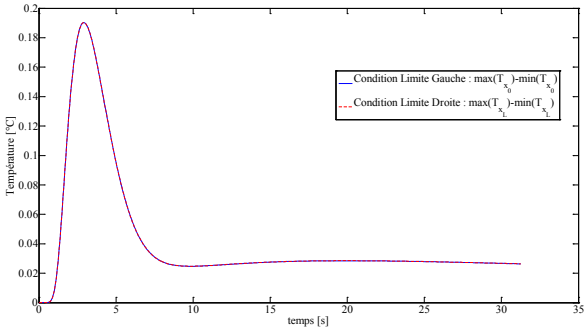


Figure 17.45 : Evolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur (Oz) en $x=0$ et $x=L_x$ (CLs)

Les champs de température et thermogrammes non bruités avant correction sont donnés respectivement Figure 17.46 et Figure 17.47. On remarque sur la Figure 17.46 que le champ de température est beaucoup plus évasé que dans le cas précédent (Figure 17.30). Sur la Figure 17.47 on voit que les températures finales aux bords en face arrière sont identiques au cas précédent, mais que l'augmentation de température se fait deux fois plus rapidement (à partir de 2s, comparé à 5s). Cela s'explique par le fait que l'extension de l'excitation soit plus large, mais que la quantité d'énergie apporté soit identique.

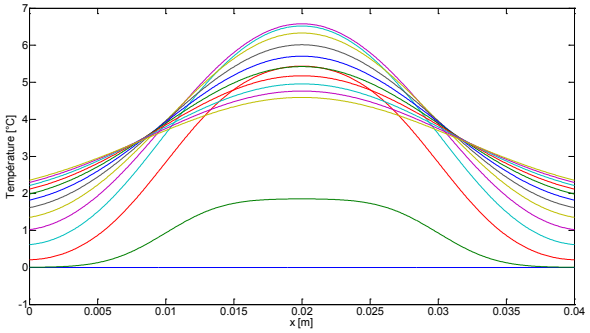


Figure 17.46 : Champ de température avant correction

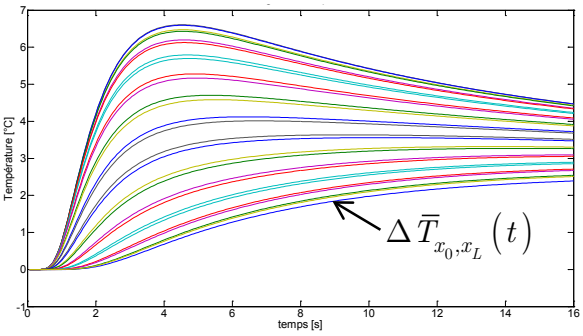


Figure 17.47 : Thermogrammes avant correction

Les champs de température et thermogrammes non bruités, après correction (12.2.13) et (12.2.14) de la méthode « Sin Ind » sont représentés Figure 17.48 et Figure 17.49, alors que ceux obtenus après corrections (12.2.11) et (12.2.12) de la méthode « Sin Imp » sont donnés Figure 17.50 et Figure 17.51.

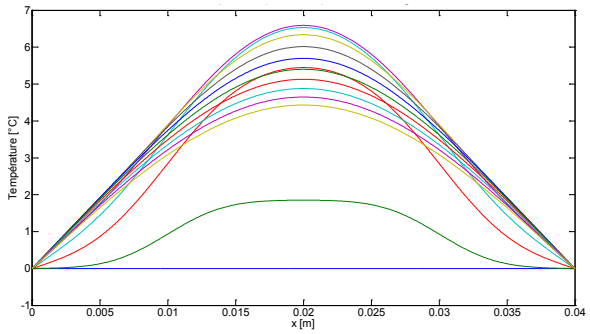


Figure 17.48 : Champ de température après correction (« Sin Ind »)

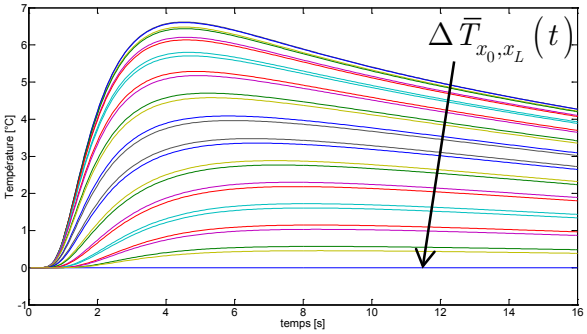


Figure 17.49 : Thermogrammes après correction (« Sin Ind »)

Les harmoniques expérimentaux (obtenus à partir des simulations numériques avec *FlexPDE*™), et ceux estimés pour les différentes méthodes sont donnés Figure 17.52 à Figure 17.55.

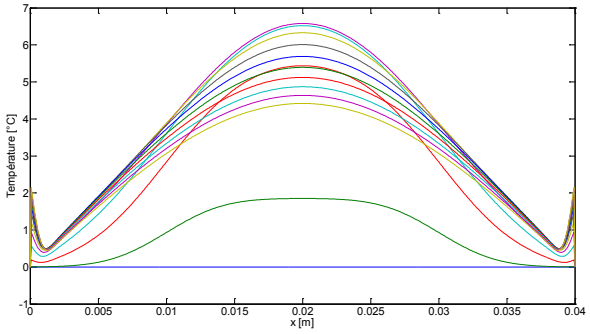


Figure 17.50 : Champ de température après correction (« Sin Imp »)

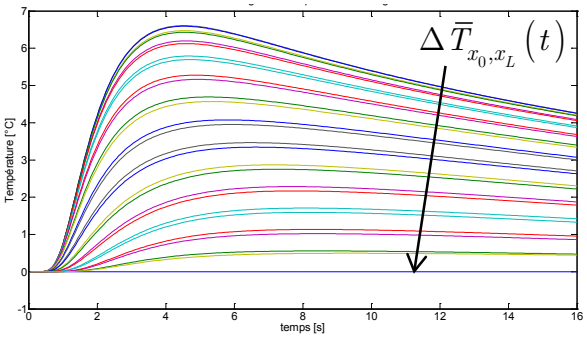


Figure 17.51 : Thermogrammes après correction (« Sin Imp »)

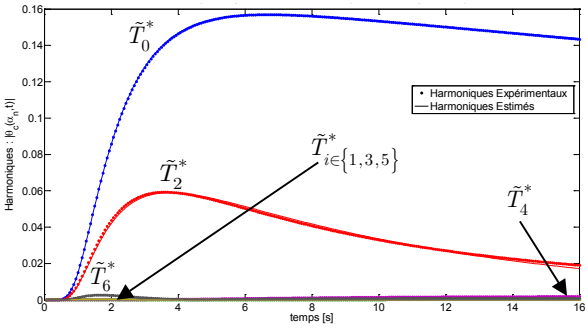


Figure 17.52 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos H/H)

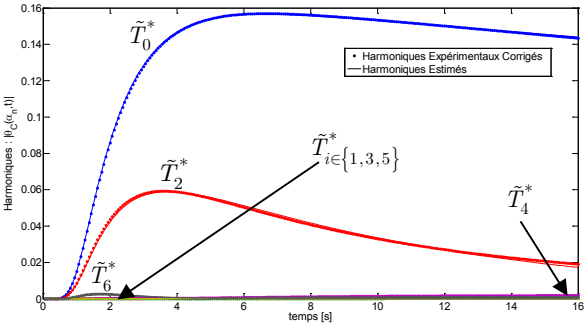


Figure 17.53 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos AH)

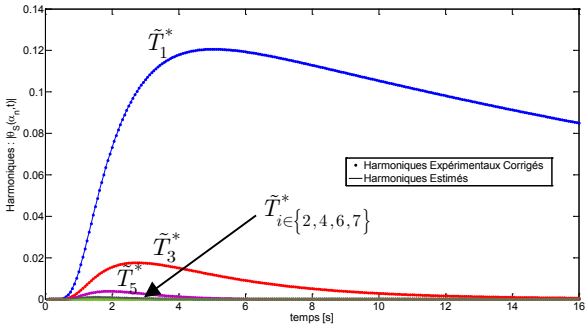


Figure 17.54 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

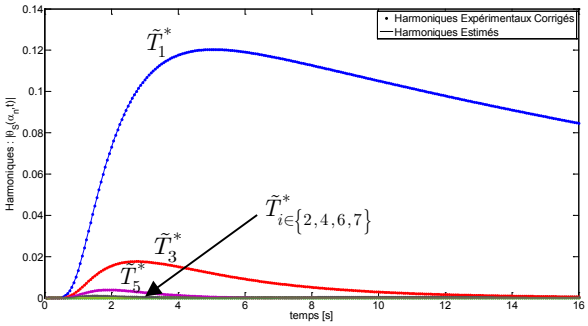


Figure 17.55 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Imp)

On constate premièrement que quelle que soit la méthode utilisée (« Cosinus » ou « Sinus »), seuls deux harmoniques portent réellement de l'information exploitable. Pour les « méthodes Cosinus » (Figure 17.52 et Figure 17.53), ce sont les harmoniques de rangs 0 et 2, et pour les « méthodes Sinus » (Figure 17.54 et Figure 17.55), ce sont les harmoniques de rangs 1 et 3.

Deuxièmement, en observant les harmoniques des « méthodes Cosinus » on remarque un phénomène inhabituel (non survenu jusqu'à présent), l'harmonique d'ordre 6 est devenu plus porteur d'informations que l'harmonique d'ordre 4.

Une explication possible de la diminution du nombre d'harmoniques porteurs d'informations, provient de la largeur de l'excitation. En effet, celle-ci étant plus large ($L_x/2$), on remarque sur la Figure 17.46 que le champ de température aux temps courts a déjà une forme très proche de celle aux temps longs. En particulier, les variations spatiales du champ de température étant plus lentes (variations des dérivées plus faibles) comparées aux différents cas précédents, des harmoniques de plus basses fréquences suffiront à reconstruire le champ de température.

Les résultats d'estimation des différentes méthodes sont donnés dans le Tableau 17.4. Compte tenu du comportement spécifique de l'harmonique $\tilde{T}_4^*$, celui-ci n'est pas pris en compte pour la méthode « Cos H/H » dans le calcul de $(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^{-1}$ de a_x , car il engendre un écart-type infini sur a_x.

Bruit : 5% du max du thermogramme 1D		a_x (Valeur cible = 5e-6 $m^2.s^{-1}$)				a_z (Valeur cible = 5e-7 $m^2.s^{-1}$)			
Bruit (5%)	**Méthode**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**
Sans	*COS H/H*	4.09E-06	9.09E-07	18.18	3.18E-04	4.92E-07	8.30E-09	1.66	1.18E-06
	COS AH	4.07E-06	9.26E-07	18.51	2.05E-05	4.97E-07	3.15E-09	0.63	1.11E-06
	SIN Ind	5.21E-06	2.06E-07	4.12	7.84E-05	5.00E-07	2.30E-11	0.00	1.47E-06
	SIN Imp	5.19E-06	1.90E-07	3.81	7.79E-05	4.99E-07	5.15E-10	0.10	1.48E-06
Avec	*COS H/H*	4.09E-06	9.07E-07	18.14	3.28E-04	4.92E-07	8.19E-09	1.64	1.18E-06
	COS AH	4.08E-06	9.23E-07	18.47	2.05E-05	4.97E-07	3.17E-09	0.63	1.11E-06
	SIN Ind	5.21E-06	2.10E-07	4.19	7.80E-05	4.99E-07	1.46E-09	0.29	1.47E-06
	SIN Imp	5.18E-06	1.80E-07	3.61	7.76E-05	4.99E-07	9.13E-10	0.18	1.47E-06

Tableau 17.4 : Résultats des estimations des diffusivités donnés par les quatre méthodes pour une excitation d'extension $L_x/2$, et des conditions aux limites de type résistance de contact.

On observant le Tableau 17.4 donnant les résultats d'estimation obtenus par les différentes méthodes (« Cosinus » et « Sinus »), on voit que les erreurs d'estimation sur a_x des « méthodes Cosinus » ont presque triplé par rapport au cas précédent (cf. Tableau 17.3), alors que celles des « méthodes Sinus » ont globalement été multipliées par 40.

Cependant, les résultats obtenus par les « méthodes Sinus » sur l'estimation de a_x restent en moyenne 10 fois meilleurs que ceux des « méthodes Cosinus ». En effet, l'erreur moyenne des « méthodes Cosinus » sur l'estimation de a_x est d'environ 18%, alors que celle des « méthodes Sinus » est aux alentours des 4%. Les estimations de a_z sont peu différentes des précédentes. Cependant, on peut noter qu'en l'absence de bruit, la méthode « Sin Ind » donne, ici, une erreur relative nulle sur l'estimation de a_z. Pour finir, remarquons que la méthode « Cos H/H » à une matrice d'information très mal conditionnée, car l'écart-type sur a_x est 3,18E-04 ! Cette méthode ne semble ainsi plus du tout adaptée lorsqu'il y a un fort biais de modèle et/ou peu de points de mesures.

17.5. Résistance de contact en $x=0$ et $x=L_x$, et excitation en $x=L_x/4$

L'objectif est d'étudier le comportement (la précision) des différentes méthodes d'estimation dans le cas d'une excitation excentrée, car expérimentalement il peut être délicat de centrer rigoureusement l'excitation.

Le problème est illustré Figure 17.56, et l'évolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur au niveau des conditions aux limites (en x) de type résistance de contact est donnée Figure 17.57.

En observant la Figure 17.57, on remarque que l'excentrage de l'excitation produit un écart maximum de température suivant l'épaisseur, différent en $x=0$ et $x=L_x$. L'écart en $x=0$ a été multiplié par 10 par rapport au précédent (comparer les Figure 17.57 et Figure 17.45), et est presque nul en $x=L_x$. Cela s'explique par le fait que le bord droit ($x=L_x$) est suffisamment distant de l'excitation pour que la température ait eu le temps de s'uniformiser suivant l'épaisseur.

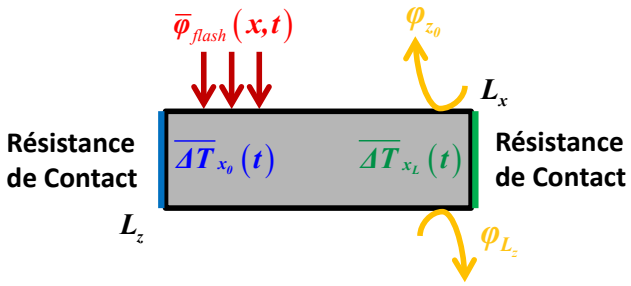


Figure 17.56 : Illustration du Problème : Excitation centrée en $L_x/4$, et conditions aux limites du type résistance de contact

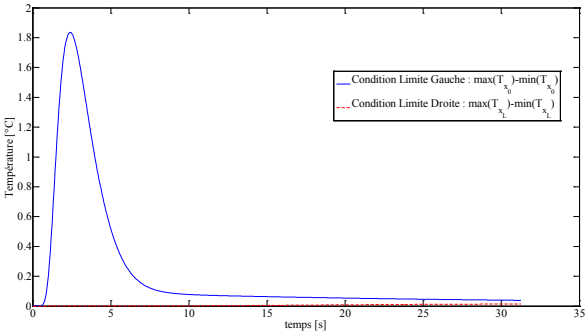


Figure 17.57 : Evolution temporelle de l'écart maximum de température suivant l'épaisseur (Oz) en $x=0$ et $x=L_x$ (CLs)

Les champs de température et thermogrammes non bruités avant correction sont donnés respectivement Figure 17.58 et Figure 17.59. On remarque sur la Figure 17.58 que l'excentrage de l'excitation a pour effet d'asymétriser également le champ de température : plusieurs degrés en $x=0$, et presque nul en $x=L_x$. Les thermogrammes (Figure 17.59) sont également fortement modifiés. En effet, toutes les courbes ne se superposent plus : certaines s'intersectent.

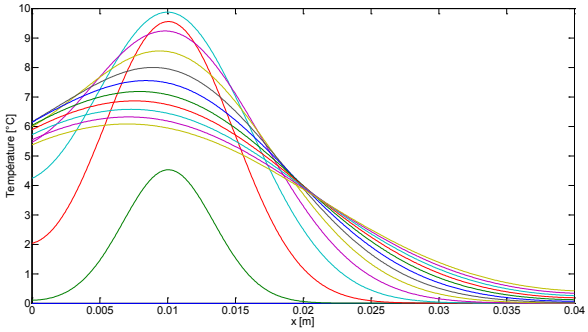


Figure 17.58 : Champ de température avant correction

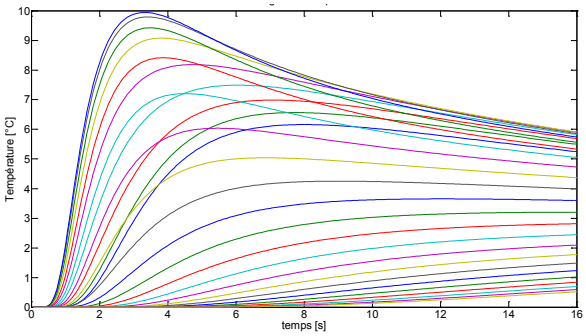


Figure 17.59 : Thermogrammes avant correction

Les représentations graphiques des fonctions de corrections gauches et droites de la méthode « Sin Ind » (expressions (12.2.13) et (12.2.14)) sont données respectivement Figure 17.60 et Figure 17.61, et celles de la méthode « Sin Imp » (expressions (12.2.11) et (12.2.12)) sont Figure 17.62 et Figure 17.63.

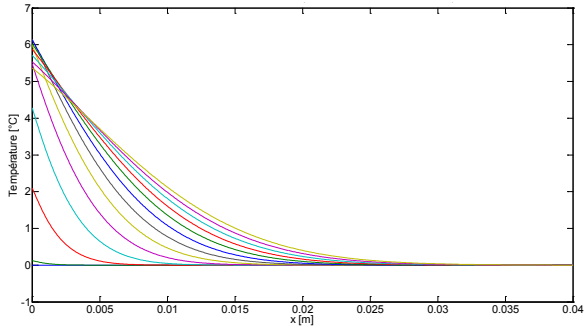


Figure 17.60 : Fonctions de correction gauche « Sin Ind »

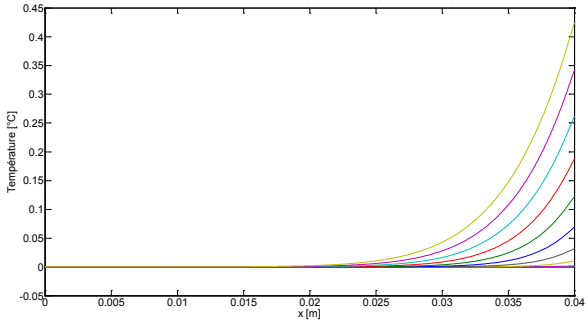


Figure 17.61 : Fonctions de correction droite « Sin Ind »

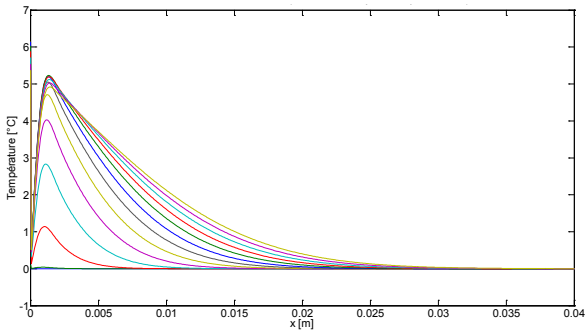


Figure 17.62 : Fonctions de correction gauche « Sin Imp »

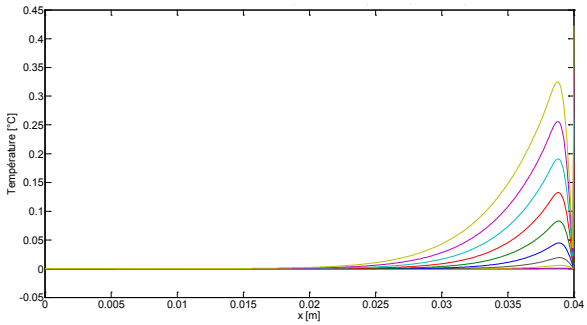


Figure 17.63 : Fonctions de correction droite « Sin Imp »

Le champ de température et les thermogrammes non bruités, après correction affine utilisée pour l'initialisation du processus d'estimation, sont donnés Figure 17.64 et Figure 17.65.

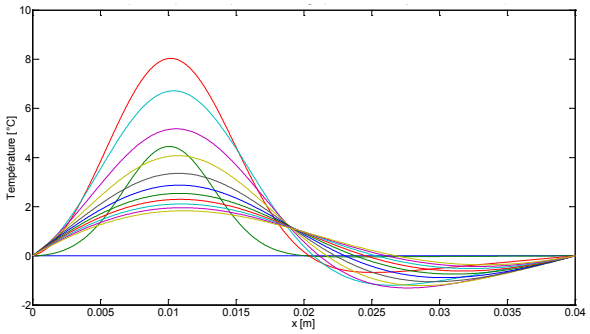


Figure 17.64 : Champ de température après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

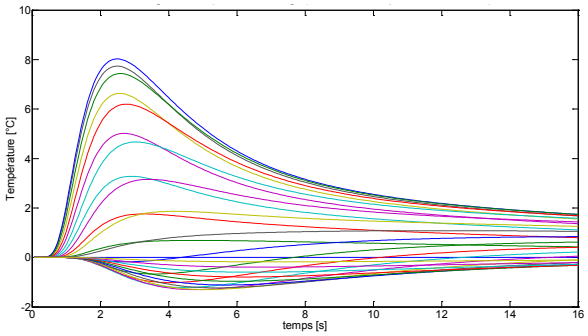


Figure 17.65 : Thermogrammes après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

Ceux obtenus après les corrections (12.2.13) et (12.2.14) de la méthode « Sin Ind » sont représentés Figure 17.66 et Figure 17.67, alors que ceux obtenus après corrections (12.2.11) et (12.2.12) de la méthode « Sin Imp » sont donnés Figure 17.68 et Figure 17.69.

Cette fois-ci, on constate que la correction affine donne des résultats (champ de températures et thermogrammes) très différents des corrections obtenues par les « méthodes Sinus ». Cela est dû au fait que contrairement aux corrections des « méthodes Sinus » (cf. Figure 17.60 à Figure 17.63), la correction affine ne « corrige » (compense) pas la convexité des courbes, ce qui a pour conséquence de donner lieu par exemple à des températures négatives (cf. Figure 17.64 et Figure 17.65).

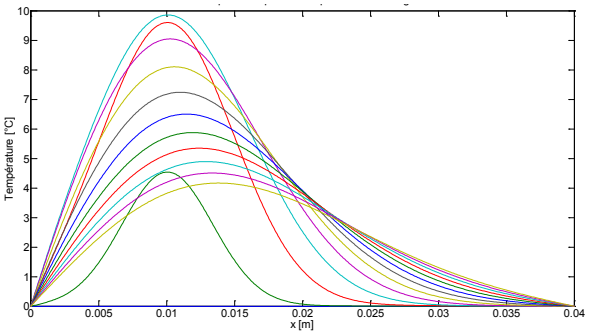


Figure 17.66 : Champ de températures après correction (« Sin Ind »)

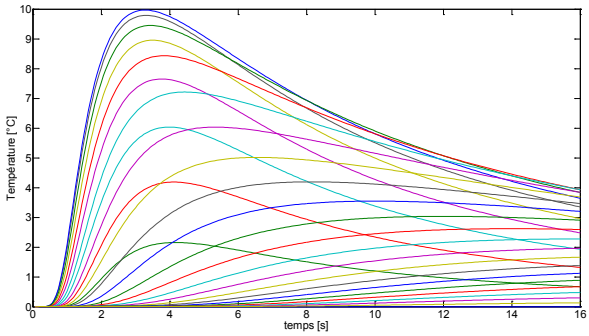


Figure 17.67 : Thermogrammes après correction (« Sin Ind »)

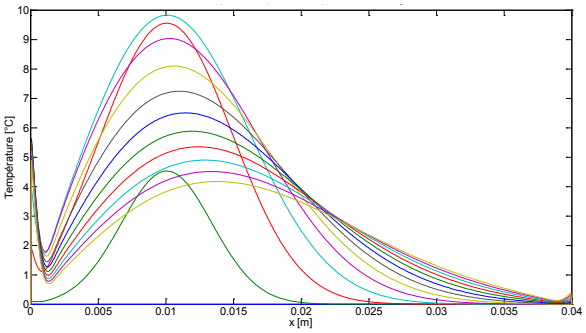


Figure 17.68 : Champ de températures après correction (« Sin Imp »)

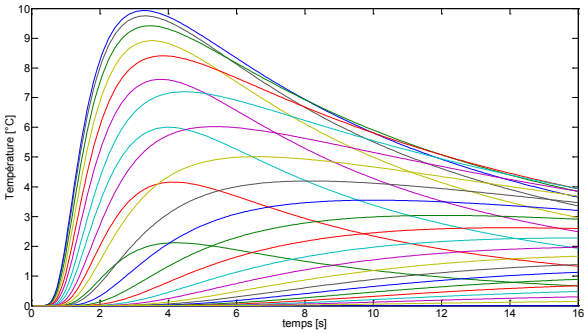


Figure 17.69 : Thermogrammes après correction (« Sin Imp »)

Les harmoniques expérimentaux (obtenus à partir des simulations numériques de *FlexPDE*™), et ceux estimés pour les différentes méthodes sont donnés **Figure 17.70** à Figure 17.73.

L'excitation n'étant plus centrée, on remarque que les harmoniques sont presque tous non nuls, et cela quel que soit la méthode utilisée (« Cosinus » ou « Sinus »).

De plus, on observe un phénomène inhabituel, puisque pour chacune des méthodes, l'harmonique d'ordre 2 n'a pas une amplitude classique. En effet, dans tous les cas précédemment étudiés, les différents harmoniques avaient tous des variations d'amplitude analogues (croissance, puis décroissance). Or, dans le cas présent, pour les « méthodes Cosinus », non seulement l'harmonique d'ordre 2 a une croissance monotone (et donc ne décroît pas comme les autres harmoniques), mais est aussi presque nul. Et dans le cas des « méthodes Sinus », l'harmonique d'ordre 2 intersecte l'harmonique d'ordre 1.

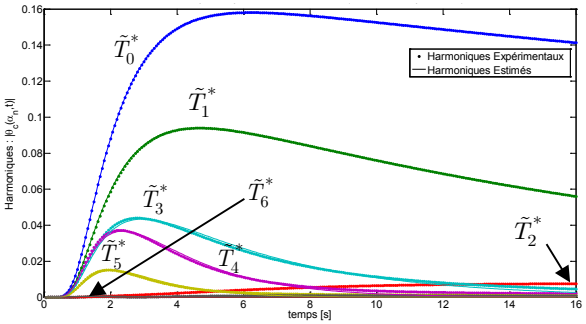


Figure 17.70 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos H/H)

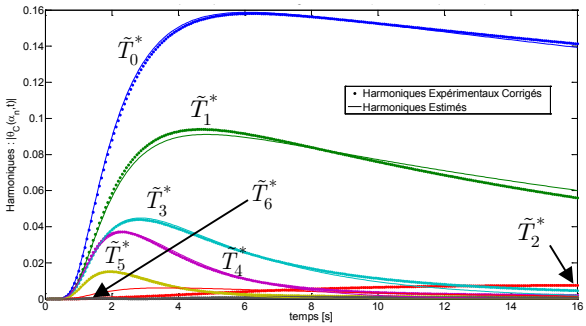


Figure 17.71 : Harmoniques expérimentaux (simulés) et estimés (Cos AH)

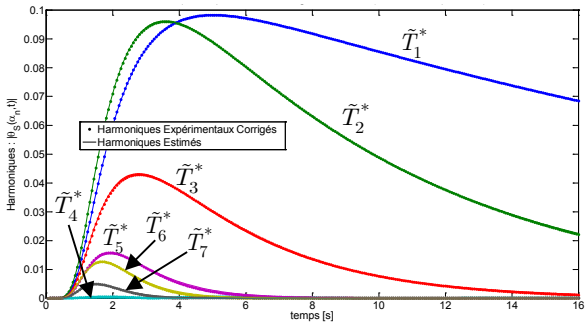


Figure 17.72 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

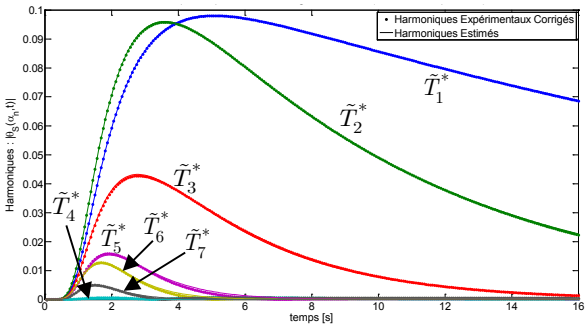


Figure 17.73 : Harmoniques expérimentaux (simulés) corrigés (SP1) et estimés (Sin Imp)

Les résultats d'estimation des différentes méthodes sont donnés dans le Tableau 17.5. Compte tenu du comportement spécifique de l'harmonique $\tilde{T}_2^*$, celui-ci n'est pas pris en compte pour la méthode « Cos H/H » dans le calcul de $(\boldsymbol{X^tX})^{-1}$ de a_x , car il engendre un écart-type infini sur a_x.

A partir du Tableau 17.5 donnant les résultats d'estimation obtenus par les différentes méthodes (« Cosinus » et « Sinus »), on voit que les erreurs d'estimation sur a_x des différentes méthodes ont toutes diminué par rapport au cas précédent (excitation d'extenson $L_x/2$). En l'absence de bruit, les erreurs d'estimation ont globalement été divisées par trois pour les « méthodes Cosinus », et par dix pour les « méthodes Sinus ».

Bruit : 5% du max du thermogramme 1D		a_x *(Valeur cible = 5e-6 m².s⁻¹)*				a_z *(Valeur cible = 5e-7 m².s⁻¹)*			
Bruit (5%)	**Méthode**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**	**Valeur estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**$(X^tX)^{-1}$**
Sans	*COS H/H*	4.46E-06	5.37E-07	10.74	1.8E-03	4.95E-07	5.17E-09	1.03	1.17E-06
	COS AH	4.34E-06	6.56E-07	13.11	1.76E-05	4.97E-07	3.38E-09	0.68	9.60E-07
	SIN Ind	4.98E-06	1.87E-08	0.37	1.84E-05	4.97E-07	2.87E-09	0.57	1.23E-06
	SIN Imp	4.98E-06	2.46E-08	0.49	1.84E-05	4.95E-07	4.92E-09	0.98	1.23E-06
Avec	*COS H/H*	4.46E-06	5.41E-07	10.82	2.0E-03	4.95E-07	5.04E-09	1.01	1.17E-06
	COS AH	4.34E-06	6.58E-07	13.17	1.76E-05	4.97E-07	3.43E-09	0.69	9.60E-07
	SIN Ind	5.09E-06	8.59E-08	1.72	1.89E-05	4.87E-07	1.29E-08	2.58	1.22E-06
	SIN Imp	4.97E-06	2.54E-08	0.51	1.84E-05	4.95E-07	5.26E-09	1.05	1.22E-06

Tableau 17.5 : Résultats des estimations des diffusivités donnés par les quatre méthodes pour une excitation centrée en $L_x/4$, et des conditions aux limites de type résistance de contact.

Pour l'estimation de a_z, les erreurs données par la méthode « Cos H/H » sont légèrement plus faibles que dans le cas précédent, alors que celles de la méthode « Cos AH » sont sensiblement identiques. En revanche, les erreurs des « méthodes Sinus »

ont toutes augmenté. En particulier, en présence de bruit, on remarque que la méthode « Sin Ind » est celle qui produit la plus grande erreur avec 2,58%, soit le double des méthodes « Cos H/H » et « Sin Imp » !

Notons également que les méthodes « Cos H/H » et « Sin Imp » donnent des résultats d'une précision semblable concernant l'estimation de a_z, que ce soit avec ou sans bruit de mesure.

Une explication possible à l'amélioration des estimations des « méthodes Cosinus » est un biais de modèle plus faible. En effet, en comparant la Figure 17.58 et la Figure 17.46, on remarque que sur la Figure 17.46 les flux aux deux bords (pertes en $x=0$ et $x=L_x$) sont non nuls, alors que sur la Figure 17.58 les flux sont non nuls en $x=0$ et presque nuls en $x=L_x$.

La dégradation des estimations par les « méthodes Sinus » est probablement principalement due au biais de modèle causé par la non uniformité de la température aux limites (en x). De plus, contrairement aux différents cas précédents, ici l'écart de signal en $x=0$ et $x=L_x$ est important, et le niveau absolu du signal est très faible en $x=L_x$ (inférieur à 0,5). Cela aura probablement également pour conséquence d'augmenter l'incidence des erreurs numériques. Notamment, les importantes erreurs de la méthode « Sin Ind » peuvent être imputables en grandes partie à l'amplification du bruit de mesure par l'opération de dérivation du signal correspondant aux conditions aux limites. Ainsi, l'influence du bruit sera probablement prépondérante par rapport à celle du signal, lors de la dérivation de la condition aux limites en $x=L_x$.

Chapitre 18

Résultats expérimentaux

18. Résultats expérimentaux

Afin de tester expérimentalement la méthode, nous avons réalisé les estimations à température ambiante sur un échantillon orthotrope en carbone composite de dimensions 39,7mm x 39,5mm x 2.3mm. Le porte échantillon est en céramique (Stumatite), et a une ouverture rectangulaire dimension 37,5mm x 37,5mm (le reste de l'échantillon est en contact avec le support (≈1mm sur chaque bord)). Il est situé au centre du four tubulaire à 90cm de la caméra infrarouge FLIR SC7600 ayant : un détecteur matriciel à base d'InSb sensible dans la gamme spectrale [1.5µm, 5.1µm], une résolution numérique de 640x512 pixels, une fréquence d'acquisition de 100Hz, un temps d'intégration de 2200µs, et un objectif infrarouge de 100mm. La source d'excitation est un faisceau laser CO_2 continu d'une puissance de 130W (longueur d'onde centrale à 10.6µm), avec une durée de 210ms, et le diamètre du faisceau sur l'échantillon est d'environ 4mm. Le montage expérimental est illustré Figure 18.1. Une vue éclatée de l'échantillon et de son support se trouve Figure 18.2 , et le principe schématique de mesures est donné Figure 18.3. De plus amples détails concernant le banc de mesure expérimental peuvent être trouvés dans le manuscrit de Souhar [84].

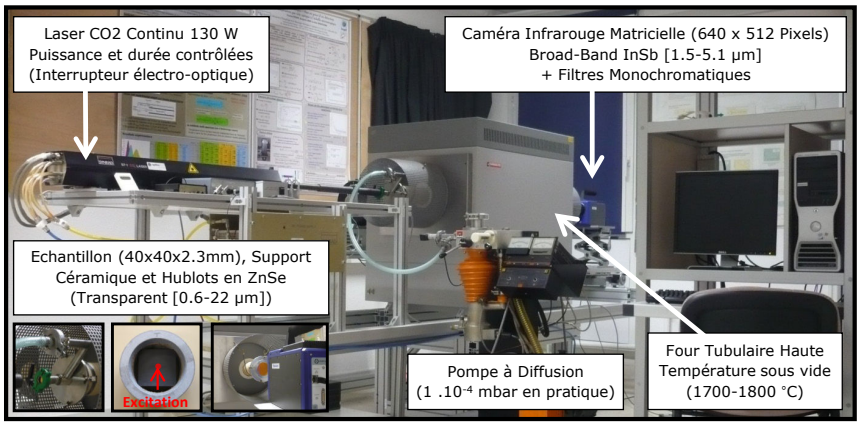


Figure 18.1 : Banc de mesures des diffusivités thermiques à haute température (extrait de [84])

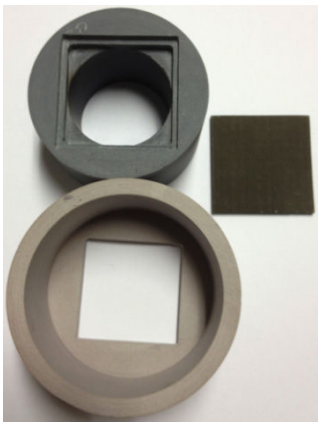


Figure 18.2 : Vue éclatée du support et de l'échantillon

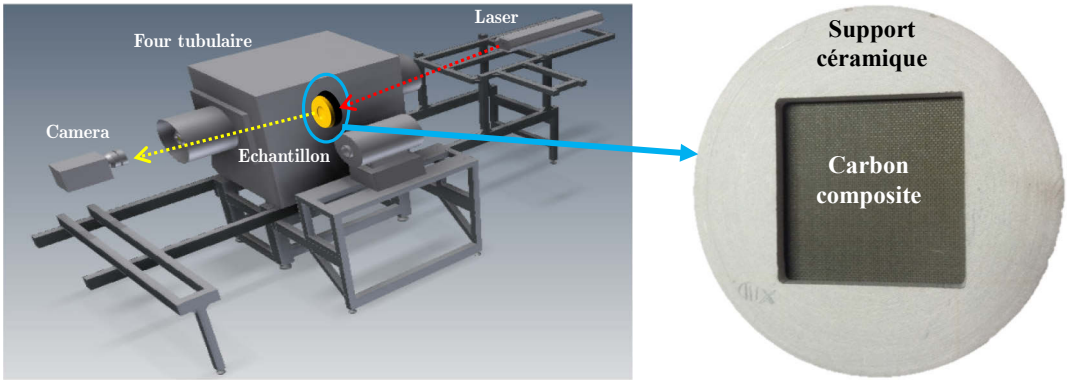


Figure 18.3 : Schéma du montage expérimental

Les champs de température et thermogrammes expérimentaux non corrigés sont donnés respectivement Figure 18.4 et Figure 18.5. On remarque sur la Figure 18.4 que la température en $x{=}L_x$ est légèrement supérieure à celle en $x{=}0$, et que les flux aux bords sont non nuls (pentes non nulles). Sur la Figure 18.5 on voit que deux thermogrammes se croisent, ce qui corrobore l'asymétrie du champ de températures (cf. section 17.5, p.250).

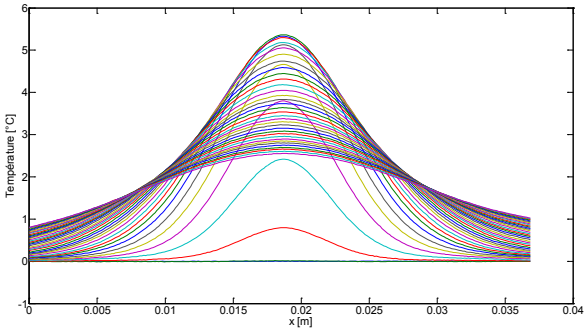


Figure 18.4 : Champ de températures expérimental (avant correction)

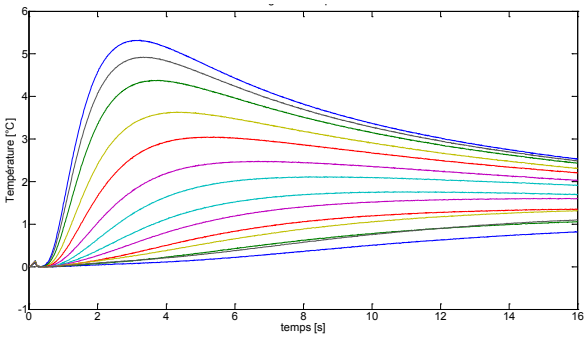


Figure 18.5 : Thermogrammes expérimentaux (avant correction)

Le champ de températures et les thermogrammes expérimentaux, après correction affine utilisée pour l'initialisation du processus d'estimation, sont donnés Figure 18.6 et Figure 18.7.

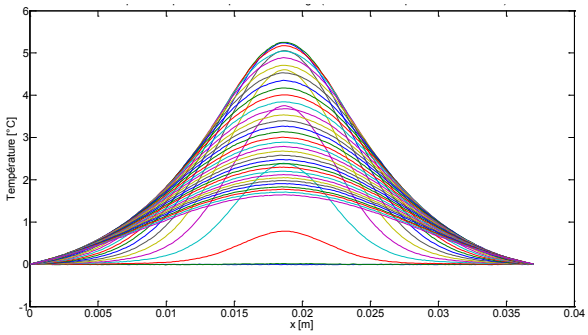


Figure 18.6 : Champ de températures expérimental après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

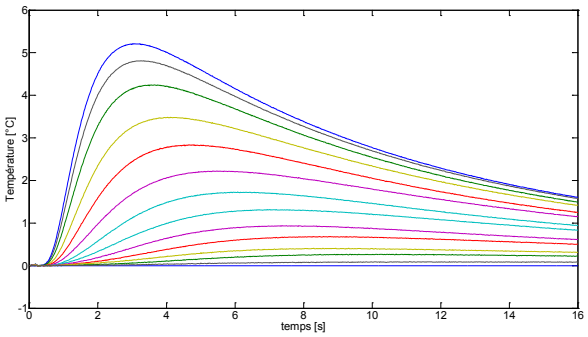


Figure 18.7 : Thermogrammes expérimentaux après correction affine (pour l'initialisation de la procédure d'estimation)

Ceux obtenus après les corrections (12.2.13) et (12.2.14) de la méthode « Sin Ind » sont représentés Figure 18.8 et Figure 18.9, alors que ceux obtenus après corrections (12.2.11) et (12.2.12) de la méthode « Sin Imp » sont donnés Figure 18.10 et Figure 18.11. On constate qu'après corrections plus aucun thermogramme ne se croise (Figure 18.7, Figure 18.9, Figure 18.11).

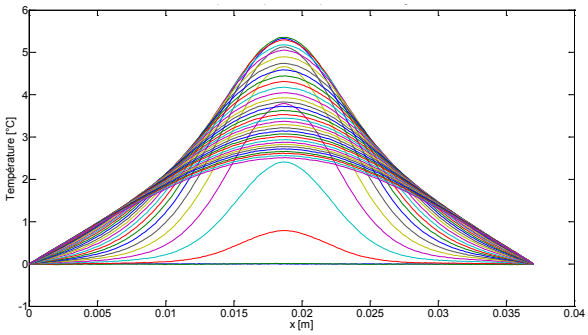


Figure 18.8 : Champ de températures expérimental après correction («Sin Ind»)

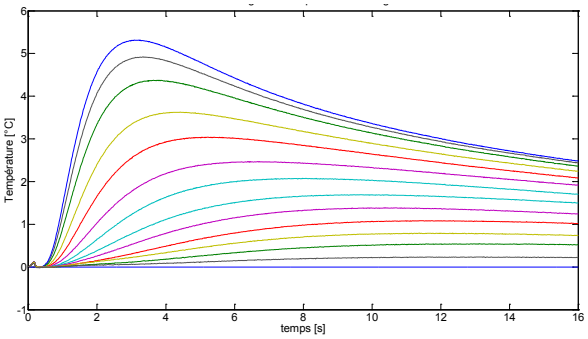


Figure 18.9 : Thermogrammes expérimentaux après correction («Sin Ind»)

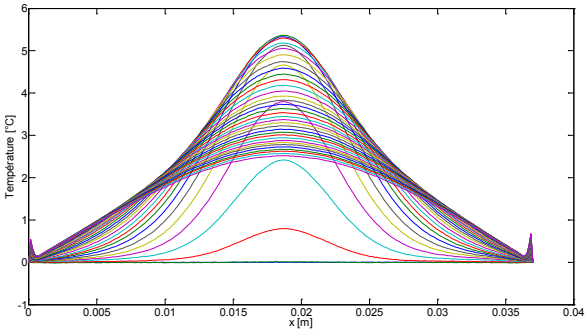


Figure 18.10 : Champ de températures expérimental après correction (« Sin Imp »)

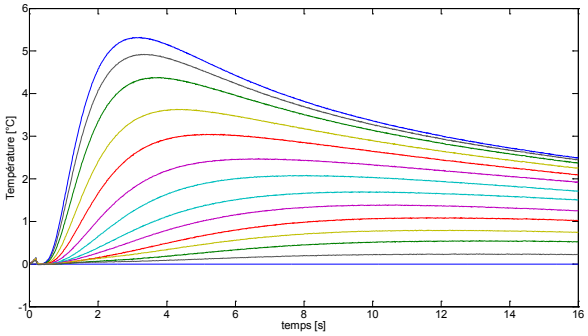


Figure 18.11 : Thermogrammes expérimentaux après correction (« Sin Imp »)

Les harmoniques expérimentaux, et ceux estimés pour les différentes méthodes sont donnés Figure 18.12 à Figure 18.15. Visuellement, il semble que la méthode « Cos H/H » conduise à de meilleurs résultats (adéquation entre harmoniques expérimentaux et estimés) que la méthode « Cas AH », exception faite de l'harmonique d'ordre 0 pour lequel les deux méthodes semblent équivalentes. En revanche, il est plus difficile de discerner une différence entre les méthodes « Sin Ind » (Figure 18.14) et « Sin Imp » (Figure 18.15)

Notons que la non nullité parfaite des harmoniques de rangs impairs pour les « méthodes Cosinus » (Figure 18.12 et Figure 18.13) , et ceux de rangs pairs pour les « méthodes Sinus » (Figure 18.14 et Figure 18.15) corrobore une fois de plus l'asymétrie du champ de températures (Figure 18.4 et cf. section 17.5, p.250).

Les résultats d'estimation des différentes méthodes sont donnés dans le Tableau 18.1.

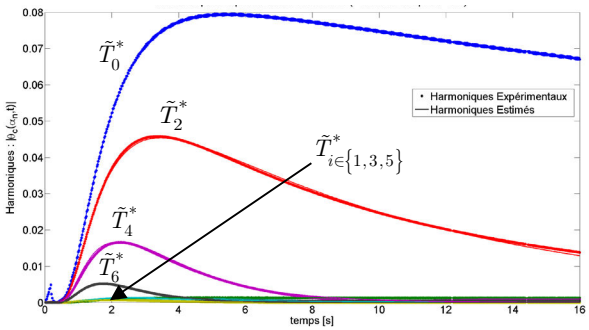


Figure 18.12 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Cos H/H)

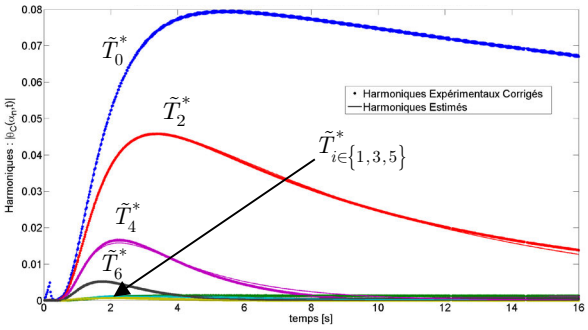


Figure 18.13 : Harmoniques expérimentaux et estimés (Cos AH)

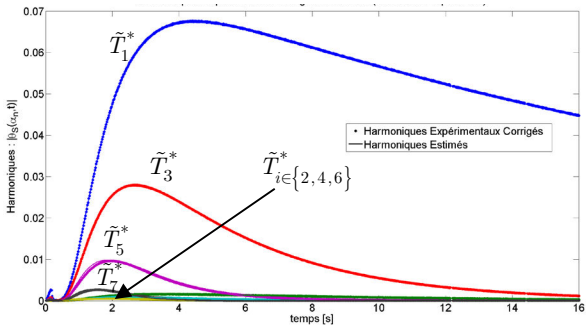


Figure 18.14 : Harmoniques expérimentaux corrigés (SP1) et estimés (Sin Ind)

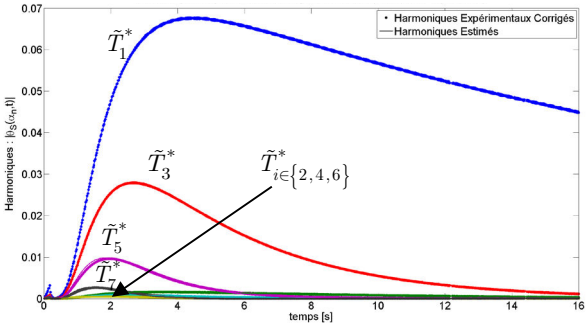


Figure 18.15 : Harmoniques expérimentaux corrigés (SP1) et estimés (Sin Imp)

	a_x $[m^2.s^{-1}]$		a_z $[m^2.s^{-1}]$	
Méthode	**Valeur estimée**	$(X^tX)^{-1}$	**Valeur estimée**	$(X^tX)^{-1}$
COS H/H	4.46E-06	1.8E-03	4.95E-07	1.17E-06
COS AH	4.34E-06	1.76E-05	4.97E-07	9.60E-07
SIN Ind	4.98E-06	1.84E-05	4.97E-07	1.23E-06
SIN Imp	4.98E-06	1.84E-05	4.95E-07	1.23E-06

Tableau 18.1 : Estimation des diffusivités $\{a_x, a_z\}$ pour un échantillon en carbone composite

Une fois de plus, on remarque que la méthode « Cos H/H » est la méthode qui donne le plus grand écart-type sur la valeur estimée de a_x, et que celle qui provoque le plus faible écart-type sur a_z est la méthode « Cos AH ».

On observe que les méthodes Cosinus donnent des valeurs très différentes des méthodes Sinus pour l'estimation de la diffusivité a_x.

En revanche, les différentes méthodes donnent des résultats relativement proches concernant la valeur de la diffusivité a_z.

Notons qu'il n'y a qu'un seul cas étudié dans la partie « Validation numérique » pour lequel les méthodes « Cos H/H » et « Sin Imp » donnent des résultats identiques, c'est celui dans lequel le flux est excentré en $x=L_x/4$ (section 17.5, p.250).

Chapitre 19

Amélioration des « méthodes d'estimation Sinus », et application sur zone réduite : Travaux en cours

19. Amélioration des « méthodes d'estimation Sinus », et application sur zone réduite : Travaux en cours

Il a été montré que les méthodes d'estimation « Sin-Imp » et « Sin-Ind », qu'on appellera respectivement « Sin-Imp1 » et « Sin-Ind1 » dans cette section, souffraient de certaines limitations numériques. En particulier, la méthode « Sin-Imp1 » présente des Diracs en $x=0$ et $x=L_x$ (les bords du domaine), et souffre également d'un faible support. Ces problèmes ont motivés le développement de la méthode « Sin-Ind1 », qui les résous, mais qui nécessite de dériver le signal expérimental (champ de températures), ce qui peut également induire de fortes erreurs numériques en présence de bruit.

L'objectif de cette section[198] est de présenter une nouvelle méthode d'estimation permettant de s'affranchir des difficultés précédentes. Cette nouvelle méthode d'estimation qu'on appellera « Sin-Imp2 », sera comparée aux précédents modèles à travers des simulations numériques de type Monte-Carlo bruitées et non bruitées, avant d'être mise en œuvre expérimentalement pour l'estimation de diffusivités thermiques sur une zone réduite d'un échantillon en carbone composite (identique à celui de la section 18).

19.1. Présentation de la méthode d'estimation « Sin-Imp2 »

Le problème a résoudre, identique à celui de la section 12 p.179, est illustré en Figure 19.1. On rappelle que la solution du sous-problème 1 dans l'espace transformé de Fourier-Laplace, est (cf. section 12.1 p.180) :

$$\tilde{\theta}_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, p\right) = \frac{\dfrac{L_z^2}{a_z}\tilde{T}_{\lim}\left(\alpha_n\right).\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma_n L_z + \dfrac{Bi^2}{\gamma_n L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma_n L_z\right) + 2Bi\,\mathrm{ch}\left(\gamma_n L_z\right)} \tag{19.1.1}$$

Et que le sous-problème 2, est défini par (cf. section 12.2.1 p.182) :

[198] Par manque de temps, les résultats de cette section ayant été obtenus après la réalisation des sections précédentes, ces derniers n'ont malheureusement pas pu être intégrés de façon plus cohérentes dans ce manuscrit (présentation du modèle « Sin-Imp2 » en même temps que les autres modèles, validations numériques pour l'ensemble des cas traités, validation expérimentale sur le même échantillon,…).

$$\begin{cases} a_x \dfrac{\partial^2 \overline{T}^*}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \overline{T}^*}{\partial t} \\ t = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{t=0} = 0 \\ x = 0, \qquad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=0} = \overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) \\ x = L_x, \quad \overline{T}^*\left(x,z,t\right)_{x=L_x} = \overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \end{cases} \tag{19.1.2}$$

Dont la solution dans le domaine spatio-temporel peut s'exprimer à l'aide de la réponse impulsionnelle (méthode « Sin-Imp1 »), sous la forme (19.1.3), ou alors à l'aide de la réponse indicielle (méthode « Sin-Ind1 »), sous la forme (19.1.4) :

$$\overline{T}^*_{SP2-\mathrm{Imp1}}\left(x,t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_0}\left(x,p\right)\right) \overset{t}{\otimes} \underbrace{\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)}_{=\mathscr{L}^{-1}\left(\Delta\theta_{x_0}\left(p\right)\right)} + \mathscr{L}^{-1}\left(H_{x_L}\left(x,p\right)\right) \overset{t}{\otimes} \underbrace{\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)}_{=\mathscr{L}^{-1}\left(\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)\right)} \tag{19.1.3}$$

$$\overline{T}^*_{SP2-\mathrm{Ind1}}\left(x,t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{H_{x_0}\left(x,p\right)}{p}\right) \overset{t}{\otimes} \frac{\partial \overline{\Delta T}_{x_0}}{\partial t} + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{H_{x_L}\left(x,p\right)}{p}\right) \overset{t}{\otimes} \frac{\partial \overline{\Delta T}_{x_L}}{\partial t} \tag{19.1.4}$$

Avec, $H_{x_0}\left(x,p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma\left(L_x - x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)}$, et $H_{x_L}\left(x,p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma x\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma L_x\right)}$.

La méthode « Sin-Imp2 » consiste à effectuer l'estimation simultanée de l'ensemble des paramètres dans l'espace de Fourier-Sinus, à l'aide du champ de températures expérimental transformé et de la réunion (somme) des sous-problèmes 1 et 2, tous deux également exprimés dans l'espace de Fourier.

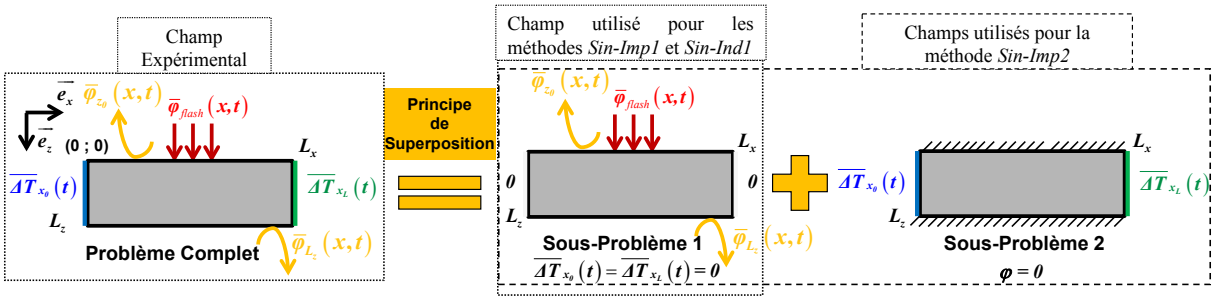


Figure 19.1 : Illustration du principe de décomposition par superposition du problème complet en sous-problèmes.

L'estimation des paramètres est réalisée à l'aide d'une méthode de minimisation par moindres carrés (cf. section 6.1 p.74 et Annexe A.8 p.363, ou [26]) consistant à minimiser la fonction coût :

$$J = \sum_{n,i} \left(\tilde{T}^*_{SP1}\left(\alpha_n, L_z, t_i\right) + \tilde{T}^*_{SP2}\left(\alpha_n, t_i\right) - \tilde{T}^*_{\mathrm{exp}}\left(\alpha_n, z, t_i\right) \right)^2 \tag{19.1.5}$$

Avec, $\tilde{T}^*_{SP2}\left(\alpha_n, t\right)$ la solution du sous-problème 2 (*SP2*, cf. Figure 19.1) exprimé dans l'espace de Fourier-Sinus, et défini par :

$$\tilde{T}^*_{SP2-\mathrm{Imp2}}\left(\alpha_n,t\right)=a_x\alpha_n e^{-a_x\alpha_n^2 t}\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)+\left(-1\right)^{n+1}a_x\alpha_n e^{-a_x\alpha_n^2 t}\overset{t}{\otimes}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right) \quad (19.1.6)$$

Ainsi, contrairement aux méthodes « Sin-Imp1 » et « Sin-Ind1 », il n'y aura pas de procédure itérative pour l'estimation des paramètres, car c'est le champ de températures expérimental complet $\overline{T}^*_{\exp}\left(x,L_z,t\right)=\overline{T}_{\exp}\left(x,L_z,t\right)-T_{ext}$ (« mesuré » par la caméra infrarouge) qui est utilisé (i.e. transformé, et d'expression $\tilde{T}^*_{\exp}\left(\alpha_n,z,t_i\right)$), et non le champ de températures expérimental corrigé (cf. section 15.2 p.213).

Notons, que l'expression (19.1.6) peut être obtenue de deux façon différentes que l'on se propose de présenter dans la section 19.2, avant de comparer les différentes méthodes, à l'aide de simulations numériques de type Monte-Carlo et d'une mise en œuvre expérimentale sur un échantillon en carbone composite.

19.2. Détermination du modèle « Sin-Imp2 » par diagonalisation partielle ou totale de l'opérateur différentiel du sous-problème-2

19.2.1. Résolution analytique dans l'espace de Fourier-Sinus : Diagonalisation de l'opérateur différentiel spatial d'ordre 2

En appliquant une transformation de Fourier-Sinus au système (19.1.2), afin de diagonaliser l'opérateur différentiel spatial d'ordre 2, on a :

$$\int_0^{L_x}\frac{\partial^2\overline{T}^*}{\partial x^2}\sin\left(\alpha_n x\right)dx=\underbrace{\left[\frac{\partial\overline{T}^*}{\partial x}\sin\left(\alpha_n x\right)\right]_0^{L_x}}_{=0}-\alpha_n\int_0^{L_x}\frac{\partial\overline{T}^*}{\partial x}\cos\left(\alpha_n x\right)dx \quad (19.2.1)$$

Avec :

$$\int_0^{L_x}\frac{\partial\overline{T}^*}{\partial x}\cos\left(\alpha_n x\right)dx=\underbrace{\left[\overline{T}^*\cos\left(\alpha_n x\right)\right]_0^{L_x}}_{=\left(-1\right)^n\overline{\Delta T}_{x_L}(t)-\overline{\Delta T}_{x_0}(t)}+\alpha_n\underbrace{\int_0^{L_x}\overline{T}^*\sin\left(\alpha_n x\right)dx}_{\triangleq\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right)} \quad (19.2.2)$$

Donc :

$$\int_0^{L_x}\frac{\partial^2\overline{T}^*}{\partial x^2}\sin\left(\alpha_n x\right)dx=-\alpha_n^2\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right)-\alpha_n\left[\left(-1\right)^n\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)-\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)\right] \quad (19.2.3)$$

D'où, (19.1.2) s'écrit dans l'espace de Fourier-Sinus :

$$\frac{d\tilde{T}^*}{dt} + a_x\alpha_n^2\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right] \tag{19.2.4}$$

La relation (19.2.4) en tant qu'équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre, elle admet pour solution homogène :

$$\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = k\exp\left(-a_x\alpha_n^2 t\right), \quad k\in\mathbb{R} \tag{19.2.5}$$

La solution particulière peut alors être déterminée par la méthode de Lagrange[199] (Méthode de la variation de la constante).

Soit :

$$\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = k\left(t\right)\exp\left(-a_x\alpha_n^2 t\right) \tag{19.2.6}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{T}^*}{dt} = \left[k'\left(t\right) - a_x\alpha_n^2 k\left(t\right)\right]\exp\left(-a_x\alpha_n^2 t\right) \tag{19.2.7}$$

En substituant (19.2.6) et (19.2.7) dans (19.2.4), on a :

$$\frac{d\tilde{T}^*}{dt} + a_x\alpha_n^2\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow k'\left(t\right) = a_x\alpha_n\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right]\exp\left(a_x\alpha_n^2 t\right)$$

$$\Rightarrow k\left(t\right) = \int_0^t k'\left(\tau\right)d\tau = a_x\alpha_n\int_0^t\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(\tau\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(\tau\right)\right]\exp\left(a_x\alpha_n^2\tau\right)d\tau \tag{19.2.8}$$

D'où, en substituant (19.2.8) dans (19.2.6), on déduit que (19.2.4) admet pour solution :

$$\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = k\left(t\right)\exp\left(-a_x\alpha_n^2 t\right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\left\{\int_0^t\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(\tau\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(\tau\right)\right]\exp\left(a_x\alpha_n^2\tau\right)d\tau\right\}\exp\left(-a_x\alpha_n^2 t\right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\underbrace{\int_0^t\overline{\Delta T}_{x_0}\left(\tau\right)e^{-a_x\alpha_n^2\left(t-\tau\right)}d\tau}_{\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)\overset{t}{\otimes}e^{-a_x\alpha_n^2 t}} + a_x\alpha_n\underbrace{\int_0^t\left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(\tau\right)e^{-a_x\alpha_n^2\left(t-\tau\right)}d\tau}_{\left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\overset{t}{\otimes}e^{-a_x\alpha_n^2 t}}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right)\overset{t}{\otimes}e^{-a_x\alpha_n^2 t} + a_x\alpha_n\left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\overset{t}{\otimes}e^{-a_x\alpha_n^2 t} \tag{19.2.9}$$

On obtient ainsi la solution du sous-problème 2 annoncée en (19.1.6).

---

[199] Egalement appelée « méthode de la variation de la constante ». Cette méthode consiste à transformer l'équation différentielle linéaire inhomogène initiale du 1er ordre (à variables non séparables) en EDO à variables séparées (ou séparables), permettant/facilitant ainsi sa résolution.

19.2.2. Résolution analytique dans l'espace de Fourier-Sinus et de Laplace : Diagonalisation complète de l'opérateur différentiel du sous-problème-2

La méthode utilisée dans la section 19.2 pour obtenir (19.2.9) (et donc (19.1.6)) consiste à diagonaliser uniquement l'opérateur différentiel spatial d'ordre 2 ($\frac{\partial^2}{\partial x^2}$), ce qui revient à diagonaliser partiellement l'opérateur différentiel $\mathscr{D} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$ associé aux conditions aux limites (19.1.2).

L'objet de cette section est d'illustrer l'utilité des transformations intégrales dans la résolution d'EDP, en montrant comment celles-ci permettent de transformer un problème d'EDP en un problème algébrique[200], par diagonalisation complète de l'opérateur différentiel définissant l'EDP associée aux conditions aux limites.

La première étape consiste à déterminer les transformations intégrales adaptées à la diagonalisation de chacun des opérateurs différentiels partiels de $\mathscr{D}$ associés aux conditions aux limites[201]. Il est possible de montrer[202] que la transformation intégrale adaptée à l'opérateur différentiel temporel ($\frac{\partial}{\partial t}$) est la transformation de Laplace, alors que celle qui est adaptée à l'opérateur différentiel spatial d'ordre 2 ($\frac{\partial^2}{\partial x^2}$) est la transformation de Fourier-Sinus.

Ainsi, en appliquant successivement une transformation de Fourier-Sinus, puis une transformation de Laplace au système différentiel (19.1.2), nous obtiendrons une

---

[200] On parle également de calcul symbolique ou de calcul opérationnel.

[201] En d'autres termes, il faut trouver les transformations intégrales permettant de transformer le problème aux valeurs limites (19.1.2) en un simple problème algébrique, i.e. en la résolution d'une équation algébrique. Notons que la transformation intégrale adaptée dépend non seulement de l'opérateur différentiel, mais également des conditions aux limites.

[202] La démonstration mathématique rigoureuse fait appel à la notion d'opérateurs adjoints. La démarche générale étant longue et fastidieuse, y compris pour le cas des opérateurs différentiels généraux d'ordre 2 (de la forme $\mathscr{D} \equiv a_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x} + a_3(x)$) dont on montre qu'il peuvent toujours être rendu auto-adjoints, nous utiliserons ici, les résultats généraux déjà établis sur ce sujet. Cependant, notons que les opérateurs compacts auto-adjoints jouissent de nombreuses propriétés intéressantes. En effet, on montre, en particulier, que ces opérateurs admettent une famille dénombrable (mais infinie) de valeurs propres *réelles*, et que les fonctions propres associées forment une base *orthogonale* de $L^2[a,b]$. Cela permet en outre, de résoudre les équations différentielles générales d'ordre 2 avec second membre, de la forme $\mathscr{D}(f) \equiv a_1(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2(x)\frac{\partial f}{\partial x} + a_3(x)f = g(x)$ (fréquentes en physique), en décomposant le second membre sur la base orthogonale de fonctions propres.

équation algébrique dont l'expression analytique de la solution (dans l'espace transformé) sera « simple » à établir.

En appliquant une transformation de Fourier-Sinus au système (19.1.2), on a (cf. section 19.2) :

$$\frac{d\tilde{T}^*}{dt} + a_x\alpha_n^2\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = a_x\alpha_n\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right] \tag{19.2.10}$$

Puis, en appliquant une transformation de Laplace à (19.2.10), cette dernière devient :

$$p\tilde{\theta}\left(\alpha_n,p\right) + a_x\alpha_n^2\tilde{\theta}\left(\alpha_n,p\right) = a_x\alpha_n\left[\Delta\theta_{x_0}\left(p\right) + \left(-1\right)^{n+1}\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)\right] \tag{19.2.11}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\theta}\left(\alpha_n,p\right) = \frac{a_x\alpha_n}{p + a_x\alpha_n^2}\left[\Delta\theta_{x_0}\left(p\right) + \left(-1\right)^{n+1}\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)\right] \tag{19.2.12}$$

Avec :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}\left(\alpha_n,p\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right)e^{-pt}dt \\ \Delta\theta_{x_\kappa}\left(p\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\overline{\Delta T}_{x_\kappa}\left(t\right)e^{-pt}dt, \qquad \forall\kappa\in\left\{0;L\right\} \end{cases} \tag{19.2.13}$$

Enfin, par transformation de Laplace inverse appliquée à (19.2.12), on en déduit l'expression (19.1.6) recherchée. En effet, on a :

$$\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\theta}\left(\alpha_n,p\right)\right)\left(t\right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p + a_x\alpha_n^2}\right)}_{=U\left(t\right)e^{-a_x\alpha_n^2t}} \overset{t}{\otimes} \mathscr{L}^{-1}\left[a_x\alpha_n\left(\Delta\theta_{x_0}\left(p\right) + \left(-1\right)^{n+1}\Delta\theta_{x_L}\left(p\right)\right)\right] \tag{19.2.14}$$

D'où, par linéarité de l'opérateur de Laplace inverse, (19.2.14) devient :

$$\tilde{T}^*\left(\alpha_n,t\right) = e^{-a_x\alpha_n^2t} \overset{t}{\otimes} a_x\alpha_n\left[\overline{\Delta T}_{x_0}\left(t\right) + \left(-1\right)^{n+1}\overline{\Delta T}_{x_L}\left(t\right)\right] \tag{19.2.15}$$

On retrouve ainsi, avec peu de calculs et de difficultés calculatoires, la solution du sous-problème 2 annoncée en (19.1.6).

Remarque : L'utilisation de transformations intégrales adaptées a permis la diagonalisation complète de l'opérateur différentiel, transformant ainsi la résolution d'une EDP, en un problème (équation) algébrique plus « simple » à résoudre. En un certain sens, les transformations intégrales « rejettent les difficultés » de la résolution initiale, dans la transformation inverse permettant d'exprimer la solution (dans l'espace transformé) dans l'espace initial. Ainsi, le retour analytique dans l'espace réel n'est pas toujours aussi aisé que celui de la relation (19.2.14). Cependant, dans ce dernier cas, il est parfois possible de contourner cette difficulté en faisant usage des algorithmes

d'inversion numérique, comme cela a été illustré pour les méthodes « Sin-Imp1 » et « Sin-Ind1 ».

19.3. Validation numérique

Afin de valider la nouvelle méthode d'estimation (« Sin-Imp2 ») proposée, nous allons réaliser des simulations numériques de type Monte-Carlo bruitées et non bruitées. Les estimations seront réalisées sur une zone réduite de l'échantillon, et les résultats seront comparés à ceux obtenus par les méthodes d'estimation présentées précédemment (« Sin-Imp1 », « Sin-Ind1 », et « Cos AH »).

L'expérience numérique avec échantillon supposé orthotrope et porte échantillon, est simulée à l'aide du code d'éléments finis *FlexPDE©*. Les paramètres de simulations choisis sont : *Bi=0,33*, excitation spatialement uniforme et créneau en temps de durée $200.10^{-3}s$, centrée suivant *(Ox)*, d'extension spatiale $L_x/10=4mm$, échantillon de dimensions totales $\{l_x=40mm,\ L_z=2,5mm\}$, zone d'étude définie par $\left\{x \in \left[10mm;30mm\right]; z \in \left[0;2,5mm\right]\right\}$ (la taille de la zone d'étude est donc $\{L_x=20mm,\ L_z=2,5mm\}$), et de propriétés thermiques $\{a_x = 5.10^{-6}\ \ m^2.s^{-1},\ a_z = 5.10^{-7}\ \ m^2.s^{-1}\}$. De plus la diffusivité du support a été choisie identique à celle de l'échantillon. Par la suite on ne considérera que la zone d'étude telle que par changement de coordonnées on ait : $x \in \left[10mm;30mm\right] \rightarrow x \in \left[0;20mm\right]$. La durée de la simulation a été choisie égale au temps de réponse dans l'épaisseur $t_c = L_z^2 / a_z = 12\,s$, afin de correspondre à la durée expérimentale permettant d'avoir des harmoniques exploitables. Pour les mêmes raisons, nous n'utiliserons que les 7 premiers harmoniques pour l'estimation. Le contact non parfait a été modélisé par une résistance de contact ($10^{-4}\ m^2.K.W^{-1}$) aux frontières en $x=0$ et $x=L_x$, et les autres conditions aux limites du support sont du type Neumann homogène. Afin de valider les différents modèles/méthodes, nous avons simulé par méthode de Monte-Carlo avec N=100 thermogrammes face-arrière bruités (bruit normal d'écart-type 1,2K correspondant à 10% du maximum du thermogramme moyen). Les résultats obtenus à l'aide des simulations bruitées et non bruitées sont donnés dans le Tableau 19.1. Nous avons appelé « écart-type TH » la moyenne des N=100 écarts-types théoriques obtenus à l'aide de la matrice de variance-covariance (cf. Annexe A.8 p.363, ou [26]), et « écart-type MC » l'écart-type statistique obtenu à l'aide des différentes (N=100) valeurs estimées de diffusivités.

		a_x (valeur cible = 5e-6 $m^2.s^{-1}$)					a_z (valeur cible = 5e-7 $m^2.s^{-1}$)				
Bruit 1,2K	**Méthode**	**Valeur Estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**Ecart-Type TH**	**Ecart-Type MC**	**Valeur Estimée**	**Erreur Absolue**	**Erreur Relative [%]**	**Ecart-Type TH**	**Ecart-Type MC**
Sans	***COS AH***	**1.97e-06**	3.03e-06	**60.57**	-	-	**5.10e-07**	1.03e-08	2.07	-	-
	SIN Imp1	5.47e-06	4.75e-07	9.49	-	-	4.94e-07	6.28e-09	1.26	-	-
	SIN Ind1	5.29e-06	2.91e-07	5.82	-	-	4.95e-07	5.01e-09	1.00	-	-
	SIN Imp2	**5.00e-06**	5.42e-10	0.01	-	-	**4.96e-07**	3.93e-09	0.79	-	-
Avec	***COS AH***	1.97e-06	3.03e-06	60.57	1.11e-05	8.81e-12	**5.10e-07**	1.03e-08	2.07	1.03e-06	1.71e-14
	SIN Imp1	5.47e-06	4.67e-07	9.33	1.01e-04	1.76e-07	4.94e-07	6.03e-09	1.21	1.47e-06	2.67e-09
	SIN Ind1	5.34e-06	3.42e-07	6.84	1.00e-04	3.48e-07	5.00e-07	1.52e-10	0.03	1.48e-06	4.05e-08
	SIN Imp2	**4.90e-06**	9.96e-08	**1.99**	6.38e-05	1.17e-07	**4.97e-07**	3.26e-09	**0.65**	1.45e-06	2.21e-09

Tableau 19.1 : Simulations de Monte-Carlo (N=100) pour l'estimation de diffusivité en face-arrière sur zone réduite (de 50%) de dimensions {Lx=20mm, Lz=2,5mm}.

Simulations non bruités : Elles permettent de constater que la méthode « Cos AH » est mise en échec pour l'estimation de la diffusivité longitudinale a_x (60% d'erreur), notamment car le flux n'est pas nul aux conditions aux limites, ce qui induit un biais de modèle important. Cependant, elle donne des valeurs acceptables pour la diffusivité transverse a_z (2% d'erreur), en présence de bruit ou non. Les méthodes ont étés classées dans le tableau, de la moins précise à la plus précise (du haut vers le bas). On note ainsi que la méthode « Sin-Ind1 » utilisant la relation (19.1.4), donne de meilleurs résultats que la méthode « Sin-Imp1 » utilisant l'expression (19.1.3), et que la meilleure méthode d'estimation est « Sin-Imp2 » basée sur la relation (19.1.6). Cette dernière est en effet la seule à obtenir la valeur « juste » pour a_x, et donne également les meilleurs résultats pour a_z (0,8% d'erreur).

Simulations bruitées : Tout d'abord, on constate que les écarts-types théoriques (« écart-type TH ») calculés à partir de la matrice de variance-covariance, surestiment beaucoup l'écart-type « réel » donné par la méthode de Monte-Carlo (« écart-type MC »). Le classement des meilleures méthodes est identique à celui des simulations non bruitées. On remarque également que l'amplitude du bruit n'est encore pas suffisante pour que la méthode « Sin-Ind1 » donne de moins bons résultats que la méthode « Sin-Imp1 ». Néanmoins, l'influence du bruit se traduit à travers l'écart-type. Bien que la méthode « Sin-Ind1 » donne la bonne valeur pour la diffusivité a_z, cela n'est pas révélateur, car de nouvelles simulations auraient données des résultats tout autres (dérivation d'un signal bruité). Remarquons que toutes les méthodes donnent des résultats satisfaisants (erreur inférieure à 2%) pour a_z. Enfin, notons que c'est encore la

méthode « Sin-Imp2 » qui donne les meilleurs résultats pour les deux diffusivités, avec une erreur inférieure à 2% pour a_x, et à 1% pour a_z.

19.4. Résultats expérimentaux

Afin de tester expérimentalement la méthode « Sin-Imp2 », des estimations ont été réalisées sur un échantillon anisotrope monolithique en carbone de dimensions totales 40mm x 40mm x 2.3mm, et ayant été étudié par Souhar [84]. Le banc de mesure et le schéma de principe dispositif expérimental sont les mêmes que ceux de la section 18, mais l'échantillon est différent. Le champ de températures a préalablement été moyenné suivant (Oy). La zone d'étude est définie par $x \in \left[9mm\,;33mm\right]$ (soit une réduction de 40% de la zone totale), et l'excitation est réalisée à l'aide du laser CO_2 ayant un diamètre de faisceau d'environ 4mm. La durée d'excitation est contrôlée et fixée à 224ms.

	Méthodes	COS AH	SIN Imp1	SIN Ind1	SIN Imp2
a_x	Valeur Estimée [$m^2.s^{-1}$]	2.21e-06	**4.60e-06**	3.89e-06	**4.02e-06**
	Ecart-Type TH	1.44e-05	7.81e-05	6.56e-05	4.70e-05
a_z	Valeur Estimée [$m^2.s^{-1}$]	4.22e-07	4.17e-07	4.19e-07	**4.18e-07**
	Ecart-Type TH	1.10e-06	1.48e-06	1.48e-06	1.51e-06

Tableau 19.2 : Estimation des diffusivités {ax, az} pour un échantillon monolithique en carbone

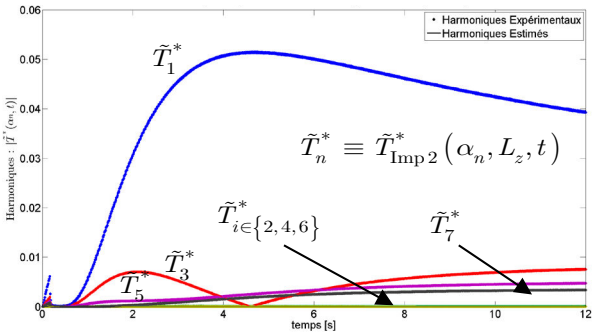


Figure 19.2 : Harmoniques expérimentaux et estimés de la méthode « Sin-Imp2 »

Les résultats des estimations des diffusivités sont donnés dans le Tableau 19.2.

De même que lors des simulations numériques, les différentes méthodes donnent des valeurs très proches pour la diffusivité transverse a_z. On peut donc raisonnablement estimer que $a_z = 4{,}18e\text{-}7\ m^2.s^{-1}$. Concernant la diffusivité longitudinale a_x, on remarque, ici, que les méthodes « Cos AH » et « Sin-Imp1 » donnent des résultats sensiblement différents entre elles, et de ceux obtenus par les méthodes « Sin-Ind1 » et « Sin-Imp2 ». Si l'on se fie aux constats faits lors des simulations numériques, il semble légitime d'accorder plus de confiance aux résultats obtenus par ces deux dernières méthodes, et ainsi, estimer que a_x est peu différent de $4e\text{-}06\ m^2.s^{-1}$. A titre d'illustration, les graphes de la valeur absolue des harmoniques expérimentaux et estimés de la méthode « Sin-Imp2 » sont représentés sur la Figure 19.2. Notons que les harmoniques impairs sont nuls car l'excitation est centrée et les fonctions propres sont des fonctions sinus. Le « rebond » de l'harmonique $\tilde{T}_3^* = \tilde{T}_{SP1}^*\left(\alpha_3, L_z, t_i\right) + \tilde{T}_{SP2}^*\left(\alpha_3, t_i\right)$ est dû au fait que l'on trace la valeur absolue des harmoniques.

Remarque : L'échantillon en carbone étudié dans cette section 19.4, a également fait l'objet d'une caractérisation en face avant dans [198].

Chapitre 20

Conclusion Générale et Perspectives de la Partie Caractérisation

20. Conclusion Générale et Perspectives de la Partie Caractérisation

20.1. Conclusion

De nouvelles méthodes « Sin Ind1 », « Sin Imp1 »„ « Sin Imp2 », et « Cos AH » basées sur une estimation utilisant simultanément l'ensemble des harmoniques ont étés présentées. Les méthodes « Sin Ind1 » et « Sin Imp1 » consistent à « corriger » le champ de températures expérimental par deux solutions particulières (principe de superposition), afin de transformer le problème initial en un problème ayant des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes (températures nulles) pour lequel des transformations intégrales simples existent. Par ailleurs, une notion de durée d'exploitabilité des harmoniques a également été développée.

Il a été montré que la méthode classique « Cos H/H », consistant en une estimation harmonique par harmonique, présente aux temps longs une corrélation entre les paramètres a_z et Bi. En réalisant l'estimation simultanée de l'ensemble des paramètres en utilisant simultanément l'ensemble des harmoniques, la méthode « Cos AH » a permis de s'affranchir de cette corrélation.

Les « méthodes Sinus » permettent de prendre en compte des conditions aux limites plus générales que celles prises en compte par les « méthodes Cosinus » (conditions aux limites de type Neumann Homogène (flux nuls)). Cependant, parmi les « méthodes Sinus1[203] », la méthode « Sin-Imp1 » présente l'inconvénient d'avoir des réponses impulsionnelles qui prennent pour valeur un Dirac en $x=0$ et $x=L_x$ (bords du domaine d'étude) qu'il n'est pas possible de réaliser numériquement, et de provoquer des erreurs de troncature non négligeables dues à leur faible support. La méthode « Sin-Ind1 » comble ces inconvénients (Diracs et faible support), car les réponses indicielles ne présentent pas de Dirac et leur support est plus large, mais en revanche, cette méthode nécessite de dériver le signal expérimental, généralement bruité, ce qui aura pour conséquence d'amplifier l'effet du bruit de mesure si celui-ci n'est pas d'amplitude relativement faible. Afin de diminuer l'effet d'amplification du bruit, le champ de températures a été moyenné suivant une direction du plan.

Dans le but de tester la validité des méthodes dans différentes configurations, des simulations ont étés réalisées avec une excitation centrée (en Lx/2) ou excentrée (en Lx/4), localisée (d'extension Lx/10) ou étendue (Lx/2), et pour différentes conditions aux limites : de type Dirichlet homogène, Neumann homogène, et résistance de contact.

[203] Le terme « méthodes Sinus1 » désigne les méthodes : « Sin-Imp1 » et « Sin-Ind1 ».

Ces simulations numériques ont permis de montrer que les méthodes développées (« méthodes Sinus » et « Cos AH ») mènent toujours à de meilleurs résultats que ceux obtenus par la méthode classique « Cos H/H », en permettant, contrairement à cette dernière, d'estimer simultanément la diffusivité transverse a_z et longitudinale a_x de l'échantillon. Il a également été observé que les « méthodes Sinus » donnent, à quelques rares exceptions près, des résultats proches et sont globalement les plus précises comparé aux « méthodes Cosinus ». En effet, se sont les seules qui permettent de prendre en compte (ou s'affranchir de) la diffusion dans le porte échantillon par introduction des températures mesurées par la caméra infrarouge sur les bords de l'échantillon comme conditions aux limites.

Enfin, afin de remédier aux difficultés numériques rencontrées avec les « méthodes Sinus1 », une nouvelle méthode nommée « Sin-Imp2 » a été développée. Cette dernière diffère des précédentes de par le modèle d'estimation et par le fait que l'estimation est réalisée sur le champ de températures expérimental non corrigé. Cette méthode a été comparée aux « méthodes Sinus1 » et « Cos AH » à l'aide de simulations numériques bruitées et non bruitées de type Monte-Carlo, et sur zone réduite. Ces simulations ont ainsi permis de montrer la pertinence de la méthode « Sin-Imp2 » qui s'est avérée être la plus précise.

Pour conclure, notons que les différentes méthodes ont également été appliquées sur des mesures expérimentales réalisées sur zone réduite et non réduite, et à température ambiante, afin de s'affranchir des difficultés expérimentales imputables à la réalisation de mesures à hautes températures. Dans le cas des mesures sur zone non réduite, une bonne adéquations entre les résultats des méthodes « Sin-Imp1 » et « Sin-Ind1 » a été constatée pour l'estimation des deux diffusivités (longitudinale a_x et transverse a_z). En revanche, dans le cas des mesures sur zone réduite, les résultats entre les différentes méthodes ne sont proches que pour l'estimation de la diffusivité transverse a_z, et diffèrent sensiblement d'une méthode à l'autre pour l'estimation de la diffusivité longitudinale a_x. Cependant, dans ce dernier cas, notons que les méthodes « Sin-Ind1 » et « Sin-Imp2 » donnent néanmoins des résultats relativement proches.

20.2. Perspectives

Les voies d'amélioration des méthodes d'estimation proposées peuvent être numériques et analytiques.

Les possibilités d'amélioration des méthodes numériques peuvent être les suivantes :

- Améliorer l'algorithme d'inversion numérique de Laplace afin de permettre le calcul de la valeur des fonctions de correction à t=0, ce qui est une limitation de l'algorithme actuellement utilisé (de-Hoog). Il existe de nombreux algorithmes d'inversion, dont certains permettent l'inversion en t=0 et/ou l'emploi de calcul symboliques. Il reste à comparer leur précision à celle de l'algorithme de de-Hoog.
- Améliorer la précision de la convolution numérique. Il existe en effet plusieurs méthodes pour effectuer une convolution numérique, telles que : Convolution régulière (« zero-padding »), Convolution circulaire (périodisation du signal), Convolution basée sur la transformée de Fourier discrète, Convolution basée sur la transformée en Z,…
- Améliorer l'algorithme de minimisation, afin de diminuer les erreurs numériques lors de l'estimation de paramètres, en effectuant, par exemple, des calculs analytiques des Jacobiennes intervenant dans l'algorithme de minimisation par moindres carrés, mais cela probablement au prix de long temps de calculs.

Un autre axe d'amélioration concerne celui du modèle analytique d'estimation. En particulier, trois études sont en cours :

- Etendre/développer les « méthodes Sinus », afin de permettre la prise en compte d'une variation spatiale (suivant l'épaisseur) des conditions aux limites.
- Développer un nouveau modèle, mais à convergence uniforme (et non ponctuelle), afin de s'affranchir de certains problèmes numériques persistants.
- Développer un modèle avec identification d'un terme source et adjonction d'informations issues de la caméra, afin de permettre la prise en compte d'un écart de gradients non nuls lors du moyennage suivant une direction du plan. Ce dernier a déjà été appliqué sur des mesures expérimentales, et les résultats sont encourageants. Cependant, les études numériques et de corrélation restent à réaliser.

Les avancées les plus prometteuses ont bien entendu pour vocation d'être fusionnées à terme.

Enfin, un rapprochement entre les méthodes de mesure de températures par méthodes multi-spectrales et les méthodes de caractérisation de matériaux est envisagé, notamment pour les caractérisations à hautes températures.

ANNEXES

A.1. Expression analogue à la loi de Wien pour la détermination des longueurs d'ondes optimales en Mono-Spectrale dans la cadre de la loi de Planck : Démonstration heuristique

L'approximation de Wien étant particulièrement précise sur la partie croissante de Planck, partie dans laquelle sont situées les longueurs d'ondes optimales précédemment trouvées, il est légitime de vouloir étendre la relation (4.4.10), au changement de constante près, à une émittance définie par la loi de Planck.

On cherche donc une relation sous la forme[204] :

$$\lambda_{opt}^{Planck} = \frac{C_{MSP}^{R}}{T} \tag{21.1.1}$$

Pour cela, on va suivre une démarche analogue à celle utilisée dans la section 4.4.1. Cependant, notons que nous ne pouvons réutiliser la relation (4.4.2), car celle-ci a été obtenue à l'aide de l'approximation de Wien.

La démarche consiste donc comme précédemment à différentier l'émittance (définie cette fois-ci par la loi de Planck) par rapport à la température, puis à minimiser l'erreur relative sur la température, en considérant les termes différentiels comme des erreurs et en supposant que l'erreur sur la flux est constante.

Ainsi, la loi de Planck étant définie par :

$$M_{\lambda,T}^{o} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \tag{21.1.2}$$

En supposant que l'on a :

$$dM = \frac{\partial M}{\partial T} dT \tag{21.1.3}$$

On en déduit :

$$\frac{dM}{dT} = M \frac{C_2}{\lambda T^2} \frac{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \tag{21.1.4}$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

[204] Dans la constante C_{MSP}^{R}, MSP signifie « **M**ono-**S**pectrale, avec loi d'émission de **P**lanck ».

$$\frac{dT}{T} = \left[1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right]\frac{\lambda T}{C_2}\frac{dM}{M} \tag{21.1.5}$$

En assimilant les termes différentiels à des erreurs et en supposant :

$$e_M = cste = k \in \mathbb{R} \tag{21.1.6}$$

L'expression de l'erreur relative sur la température, est définie par :

$$\frac{e_T}{T} = \underbrace{\frac{kT}{C_2}}_{\substack{\text{constant} \\ \text{à T fixée}}} \left[1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right]\frac{\lambda}{M} \tag{21.1.7}$$

Notons que pour $\lambda T >> C_2$, la relation (4.4.14) « dégénère » en la relation (4.4.4).

Contrairement au cas précédent (section 4.4.2.1), une démonstration analytique de l'existence de la loi (4.4.13) à partir de l'équation (4.4.14) est délicate. C'est pourquoi nous utiliserons une méthode numérique basée sur la minimisation par moindres carrés.

Ainsi, on cherchera numériquement l'ensemble des minimums de (4.4.14) (avec loi de Planck) pour chacune des températures $T \in \left[300K\,;1300K\right]$, avec $\lambda \in \left[0,4\mu m\,;12\mu m\right]$, afin d'obtenir un ensemble de longueurs d'ondes optimales $\lambda_{opt}^{Planck}\left(T\right)$.

Comme l'illustre la Figure 4.7 représentant les variations de $\left[1 - \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right]\lambda \,/\, M_\lambda$, identiques à celles de l'erreur relative sur la température pour T fixé, pour chaque température $T \in \left[300K\,;1300K\right]$, il existe une unique solution sur l'intervalle de longueurs d'ondes $\left[0,4\mu m\,;12\mu m\right]$.

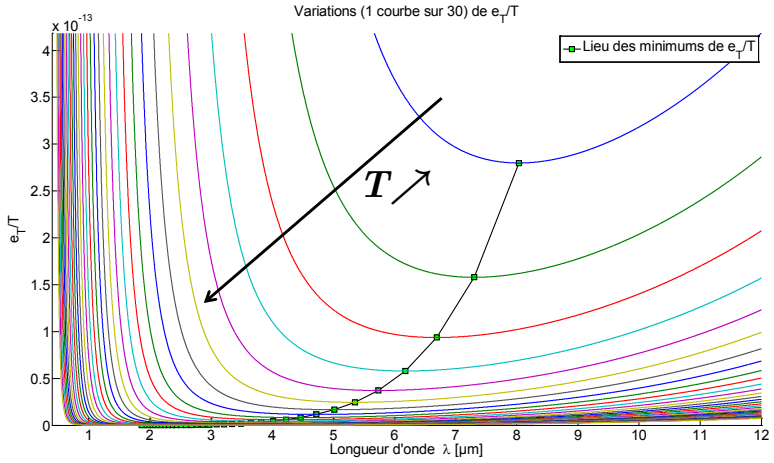


Figure 20.1 : Variations de $\left[1 - \exp\left(-C_2/\lambda T\right)\right]\lambda/M_\lambda \propto \frac{e_T}{T}$, pour $T \in \left[300K\,;1300K\right]$ et $\lambda \in \left[0,4\mu m\,;12\mu m\right]$. Pour des raisons de clarté, seule 1 courbe sur 30 est représentée.

A partir de l'ensemble des longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et représentées sur la Figure 4.7, on peut déterminer la constante C_{MSP}^{R} en effectuant, par exemple, une estimation par moindres carrées (cf. Annexe A.8 p.363, et [26]).

Ainsi, la constante C_{MSP}^{R} sera estimée en minimisant l'écart quadratique défini par :

$$J\left(C_{MSP}^{R}\right)=\sum_{i}\left(\lambda_{opt}^{Planck}\left(T_i\right)-\frac{C_{MSP}^{R}}{T_i}\right)^2 \tag{21.1.8}$$

Elle est donc définie par :

$$\hat{C}_{MSP}^{R}=\arg\min_{C_{MSP}^{R}}\sum_{i}\left(\lambda_{opt}^{Planck}\left(T_i\right)-\frac{C_{MSP}^{R}}{T_i}\right)^2 \tag{21.1.9}$$

On appellera résidus, les écarts entre le modèle et les données, défini par:

$$R\left(T\right)=\lambda_{opt}^{Planck}\left(T\right)-\frac{\hat{C}_{MSP}^{R}}{T} \tag{21.1.10}$$

Les longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et calculées à partir de la relation (4.4.13) après estimation de la constante[205] $C_{MSP}^{R}\approx 2410,29$, sont représentées sur la Figure 4.8 :

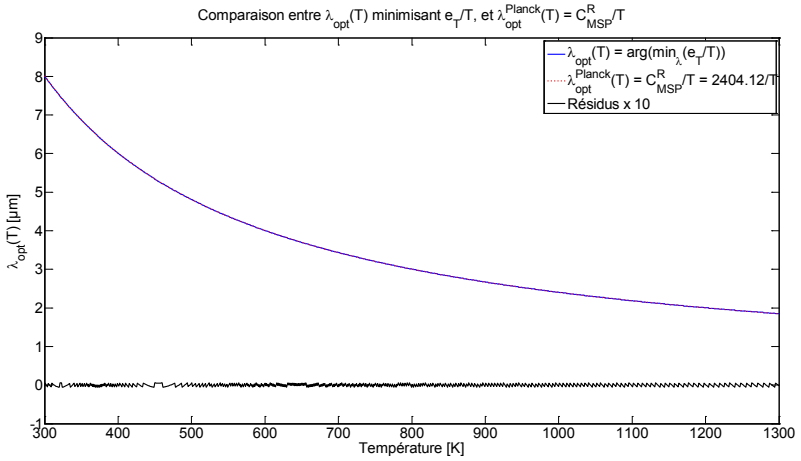


Figure 20.2 : Longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement et par la loi $\lambda_{opt}^{Planck}=C_{MSP}^{R}\,/\,T$, pour $T\in\left[300k;1300K\right]$ et $\lambda\in\left[0,4\mu m;12\mu m\right]$. Les résidus ont été multipliés par 100.

Notons que sur la Figure 4.8, le résidu maximum est de l'ordre de $5.10^{-4}\mu m$, et que la courbe des résidus a été multipliée par 100 afin que les fluctuations puissent être visibles.

[205] En toute rigueur, la constante C_{MSP}^{R} devrait continuer à être notée $\hat{C}_{MSP}^{R}$, car elle est estimée (c'est un estimateur « fourni » par la méthode des moindres carrés), mais afin d'alléger l'écriture, nous l'omettrons dans la suite de ce manuscrit.

On observe donc une parfaite adéquation entre les longueurs d'ondes optimales obtenues numériquement par minimisation de l'erreur relative sur la température (équation (4.4.14)), et la loi proposée, définie par :

$$\boxed{\lambda_{opt}^{Planck} T = C_{MSP}^{R} \approx 2410,29\,\mu m.K} \tag{21.1.11}$$

Remarquons également que les longueurs d'ondes optimales obtenues sont indépendantes de la valeur (supposée constante) de l'émissivité.

Ainsi, dans le cadre de la loi d'émission de Planck, bien qu'une démonstration analytique soit délicate, il semble que l'on puisse définir une loi analogue à celle de Wien, permettant d'obtenir les longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température.

La Figure 4.9 illustre sur les courbes de Planck, les solutions trouvées pour les longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température.

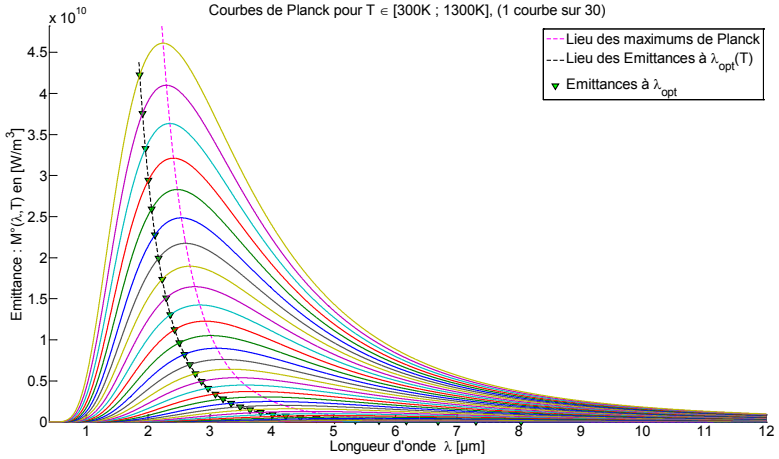


Figure 20.3 : Représentation graphique sur courbes de Planck des longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température en mono-spectrale.

On note que les valeurs trouvées pour les longueurs d'ondes optimales sont légèrement inférieures (décalées à gauche) à celles correspondant au maximum d'émission de la courbe Planck, données par la loi de déplacement de Wien.

Ainsi, ce n'est pas un flux maximum qui permet une mesure optimale de la température (comme aurait pu le laisser penser la relation[206] (4.2.5)), mais une variation maximale du flux pour une variation donnée de la température.

La justification de cette observation peut être obtenue à l'aide de la maximisation de la sensibilité du flux à la température. Cette notion étant elle-même liée à la notion de minimisation d'écart-type sur la température au sens des moindres carrés.

[206] Rappelons que la relation (4.2.5) a été obtenue en supposant nulle l'erreur sur le flux, ce qui bien entendu ne correspond pas à la réalité expérimentale…

A.2. Longueur d'onde optimale au sens de la maximisation de la sensibilité du flux à la température

Afin de pouvoir obtenir une expression analytique, nous allons de nouveau, dans cette section, faire usage de l'approximation de Wien.

L'objectif est de montrer qu'il existe un lien étroit entre la minimisation de l'erreur relative sur la température, et la maximisation de la sensibilité du flux à la température.

Pour cela, nous allons démontrer que les longueurs d'ondes solution de la maximisation de la sensibilité du flux à la température sont obtenues à l'aide de la relation (4.4.10), définie précédemment à partir de la minimisation de l'erreur relative sur la température.

En assimilant le flux à l'émittance pour des raisons de simplifications[207], et en définissant la sensibilité du flux à la température par la relation :

$$\chi_T = \frac{\partial \varphi(\lambda,T)}{\partial T} \equiv \frac{\partial M(\lambda,T)}{\partial T} \tag{22.1.1}$$

Une interprétation graphique de la sensibilité du flux à la température, et à la longueur d'onde est donnée par la Figure 20.4.

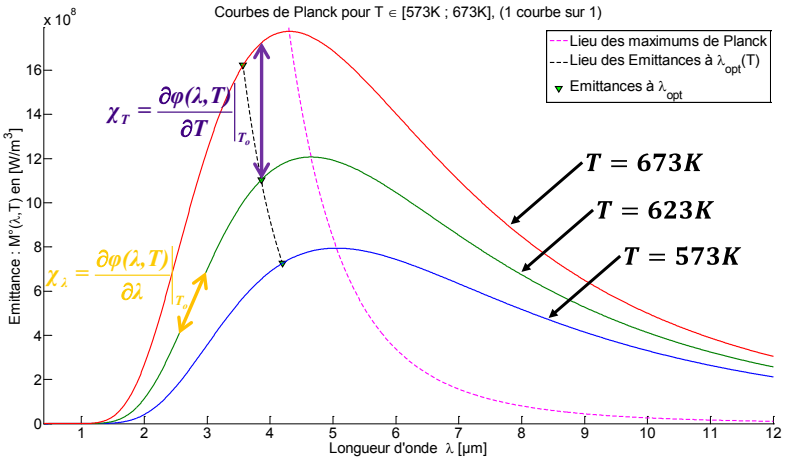


Figure 20.4 : Interprétation graphique de la sensibilité du flux à la température, et à la longueur d'onde.

[207] Le flux pouvant généralement s'exprimer comme étant proportionnel à l'émittance, le résultat de la démonstration de cette section restera inchangée que l'on considère le flux ou l'émittance.

On observe graphiquement que les longueurs d'ondes optimales obtenues précédemment correspondent aux longueurs d'ondes pour lesquelles la variation du flux est la plus importante pour une variation donnée de la température.

Ces longueurs d'ondes optimales, au sens de la minimisation de l'erreur relative sur la température, maximise donc la sensibilité du flux à la température.

Ainsi, en supposant l'émissivité comme constante, et en utilisant la loi de Wien, on a :

$$\varphi\big(\lambda,T\big) = \varepsilon C_1 \lambda^{-5} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) \tag{22.1.2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi\big(\lambda,T\big)}{\partial T} = \frac{\varepsilon C_1 C_2 \lambda^{-6}}{T^2} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) \tag{22.1.3}$$

Maximiser (22.1.3) en fonction de λ, revient à résoudre :

$$\frac{\partial^2 \varphi\big(\lambda,T\big)}{\partial \lambda \partial T} = 0 \tag{22.1.4}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi\big(\lambda,T\big)}{\partial \lambda \partial T} &= \frac{\varepsilon C_1 C_2}{T^2}\left[-6\lambda^{-7} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) + \lambda^{-6}\frac{C_2}{\lambda^2 T} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\right] \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi\big(\lambda,T\big)}{\partial \lambda \partial T} &= \frac{\varepsilon C_1 C_2}{T^2}\lambda^{-6} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right)\left(-6\lambda^{-1} + \frac{C_2}{\lambda^2 T}\right) \end{aligned} \tag{22.1.5}$$

Ainsi, résoudre (22.1.4) est équivalent à résoudre :

$$-6\lambda^{-1} + \frac{C_2}{\lambda^2 T} = 0 \tag{22.1.6}$$

Ayant pour unique solution :

$$\lambda_{opt}^{Wien} T = \frac{C_2}{6} \equiv C_{MSW}^{R} \approx 2400\,\mu m.K \tag{22.1.7}$$

La relation (22.1.7) étant identique à (4.4.10), on en conclut qu'il est équivalent de minimiser l'erreur relative sur la température, ou de maximiser la sensibilité du flux à la température, pour une émissivité constante.

Il est également possible de relier ces notions à la minimisation de l'écart-type sur la température au sens des moindres carrés, ainsi qu'au rapport signal sur bruit.

La présentation de l'interconnexion de ces notions fait l'objet de la section suivante.

Notons que ces liens seront mis à profit dans les méthodes multi-spectrales afin de déterminer les longueurs d'ondes optimales.

A.3. Lien entre écart-type sur la température au sens des moindres carrés, sensibilité du flux à la température, et rapport signal sur bruit

Dans cette section, pour des raisons de cohérences avec les notions présentées précédemment, nous anticipons sur la section traitant de l'estimation de la température par méthodes multi-spectrales à l'aide d'une minimisation par moindres carrés.

A.3.1. Lien entre écart-type sur la température au sens des moindres carrés, et sensibilité du flux à la température

A partir de l'approximation de Wien, et en supposant l'émissivité constante, l'objectif est d'estimer la température par une méthode de moindres carrés en minimisant la fonctionnelle :

$$J\big(T\big) = \sum_{i=1}^{1}\Big(\varphi_i^{\exp} - \varphi_i\big(\lambda_i, T\big)\Big)^2 = \Big(\varphi_1^{\exp} - \varphi_1\big(\lambda_1, T\big)\Big)^2 \tag{23.1.1}$$

Où, i désigne l'indice de la longueur d'onde à laquelle est effectuée la mesure, $\varphi_i^{\exp}$ désigne la mesure expérimentale du flux à la longueur d'onde correspondante, et $\varphi_i\big(T\big)$ correspond à la valeur numérique du flux obtenu pour la même longueur d'onde à l'aide du modèle théorique du flux, assimilé à la loi de Wien (23.1.2).

$$\varphi\big(\lambda, T\big) = \varepsilon C_1 \lambda^{-5} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T}\right) \tag{23.1.2}$$

La minimisation de la fonction coût $J\big(T\big)$, définie par (23.1.1), fait intervenir (cf. section 6.4.2) la matrice $\boldsymbol{X}$ de sensibilité (également appelée Jacobienne) du flux aux différents paramètres à estimer, et l'écart-type σ_T sur la température est donnée ici[208] (en mono-spectrale) en fonction de l'écart-type σ_φ sur le flux, par[209] :

$$\sigma_T = \sqrt{\Big(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\Big)^{-1}}\sigma_\varphi \tag{23.1.3}$$

[208] Dans le cas de la mesure mono-spectrale (une seule mesure et un seul paramètre à estimer : T), la matrice de covariance se réduit à la variance sur la température estimée.

[209] L'obtention de la relation (23.1.3) nécessite également certaines propriétés particulières du bruit sur le flux : bruit Normal, indépendant (non corrélés), et d'écart-type σ_φ constant.

N'ayant qu'une seule mesure (mesure mono-spectrale, $i = 1$), et l'émissivité étant supposée ici constante (mais de valeur quelconque), le seul paramètre que l'on peut estimer est la température T.

Par conséquent,

$$X \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial T} \Rightarrow X^t X = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)^2 \Rightarrow \left(X^t X \right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)^2} \tag{23.1.4}$$

D'où, l'écart-type sur la température :

$$\sigma_T = \frac{\sigma_\varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial T}} \tag{23.1.5}$$

Or,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{\varepsilon C_1 C_2 \lambda^{-6}}{T^2} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda T} \right) = \frac{C_2}{\lambda T^2} \varphi \tag{23.1.6}$$

Ainsi, pour un écart-type constant sur le flux, minimiser l'écart-type sur la température (23.1.5), revient à maximiser la sensibilité du flux à la température $\frac{\partial \varphi}{\partial T}$, ce qui mène à la démarche présentée en section A.2.

On trouve donc que l'écart-type sur la température sera minimisé si, et seulement si :

$$\lambda_{opt}^{Mono} T = \frac{C_2}{6} \equiv C_{MSW}^R \approx 2400\, \mu m.K \tag{23.1.7}$$

Il est donc équivalent de minimiser l'écart-type sur la température, ou l'erreur relative sur la température, ou encore, de maximiser la sensibilité du flux à la température.

Fort de ce lien entre ces trois notions, il est également possible en un certain sens de relier ces notions au rapport signal sur bruit. Ce point fait l'objet de la section suivante.

A.3.2. Lien entre rapport signal sur bruit, sensibilité du flux à la température, et erreur relative sur la température

En désignant la température comme étant le signal, et en assimilant[210] l'écart-type sur la température au bruit sur la température, on peut définir le rapport signal sur bruit par :

[210] Il existe normalement une différence fondamentale entre ces deux notions. L'écart-type est une grandeur statistique (mais également utilisée en probabilité en tant que racine carré du moment central

$$RSB_T = \frac{T}{\sigma_T} \tag{23.2.1}$$

Or, compte tenu des relations (23.1.5) et (23.1.6), on a :

$$RSB_T = \frac{C_2}{\lambda T} \underbrace{\frac{\varphi}{\sigma_\varphi}}_{RSB_\varphi} \tag{23.2.2}$$

On note ainsi que le rapport signal sur bruit de la température est fonction du rapport signal sur bruit du flux, et qu'à T et λ fixés, ils sont proportionnels.

En effet, (23.2.2) s'écrit également :

$$RSB_T = \frac{C_2}{\lambda T} RSB_\varphi \tag{23.2.3}$$

Il est également possible d'exprimer le rapport signal sur bruit en fonction de la sensibilité réduite en température du flux à la température :

$$RSB_T = \frac{1}{\sigma_\varphi} \underbrace{T \frac{\partial \varphi}{\partial T}}_{\chi_T^+} = \frac{\chi_T^+}{\sigma_\varphi} \tag{23.2.4}$$

Bien entendu, les expressions (23.2.2) et (23.2.4) sont équivalentes, et elles peuvent être reliées à l'erreur relative sur la température.

En effet, à partir de la relation (4.4.2), on a :

$$\frac{T}{e_T} = \frac{C_2}{\lambda T} \frac{\varphi}{e_\varphi} \tag{23.2.5}$$

Ce qui s'écrit compte tenu de (23.2.2) :

$$\frac{T}{e_T} = \frac{\sigma_\varphi}{e_\varphi} RSB_T \tag{23.2.6}$$

Ainsi, si l'on identifie l'erreur sur le flux à son écart-type, on a :

$$\frac{T}{e_T} \equiv RSB_T \tag{23.2.7}$$

Et (23.2.1) associée à (23.2.7) donnent l' « équivalence triple » :

---

d'ordre 2 de la fonction de distribution) reliée à la notion de dispersion et d'intervalle de confiance à 68,3% (pour une loi normale), alors que l'erreur (stochastique/statistique, ou systématique) est une grandeur physique reliée à l'écart entre les données expérimentales et celles du modèle. Cependant, il est coutumier en physique « expérimentale », pour des raisons de commodités, de confondre par moment ces deux grandeurs, tout en gardant à l'esprit que cela suppose une distribution gaussienne, avoir assimilé la valeur « vraie » de la grandeur physique à la moyenne de la distribution, et l'erreur à l'écart-type de la distribution.

$$\frac{T}{e_T} \equiv RSB_T \equiv \frac{T}{\sigma_T} \tag{23.2.8}$$

Qui s'écrit également :

$$\frac{e_T}{T} \equiv \frac{1}{RSB_T} \equiv \frac{\sigma_T}{T} \tag{23.2.9}$$

Finalement, en associant (23.2.4) à (23.2.9), on aboutit à :

$$\frac{e_T}{T} \equiv \frac{1}{RSB_T} \equiv \frac{e_\varphi}{\chi_T^+} \equiv \frac{\sigma_T}{T} \tag{23.2.10}$$

La relation (23.2.10) exprime de façon synthétique le fait que minimiser l'erreur relative sur la température est équivalente à maximiser le rapport signal sur bruit, ce qui est également équivalent à minimiser l'écart-type[211] sur la température, ou encore à maximiser la sensibilité du flux à la température, l'erreur sur le flux étant supposée constante. On retrouve donc dans cette relation toutes les notions abordées précédemment, et reliées à la notion de rapport signal sur bruit.

En particulier, pour une température donnée et un écart-type (ou erreur, en confondant les deux grandeurs) constant sur le flux, on note à partir de (23.2.2) que maximiser RSB_T est équivalent à minimiser λ / φ, comme présenté en section 4.4.1.

En effet :

$$RSB_T = \frac{C_2}{\lambda T}\frac{\varphi}{\sigma_\varphi} = \frac{\frac{C_2}{T\sigma_\varphi}}{\frac{\lambda}{\varphi}} \equiv \frac{\frac{C_2}{e_\varphi T}}{\frac{\lambda}{\varphi}} \tag{23.2.11}$$

- ***Remarque concernant la définition du Rapport Signal sur Bruit***

En physique, la définition du rapport signal sur bruit peut varier en fonction du champ disciplinaire considéré. Par exemple, en traitement du signal, le rapport signal sur bruit est définit comme étant le rapport de la puissance (ou énergie) contenue dans le signal utile par celle contenue dans le bruit. En revanche, en physique « expérimentale », il est coutumier d'assimiler le bruit à l'écart-type du signal mesuré, ou à l'erreur maximale (écart maximum entre le modèle, s'il y en existe un, et le signal bruité). Ce choix est généralement guidé par des raisons de simplifications, mais également à des fins de cohérence avec l'assimilation des différentielles aux termes d'erreurs (en valeurs absolues), lors des calculs d'incertitudes. Notons cependant, que toutes ces définitions

[211] Rappelons que la seule variable explicite dans ces relations est la longueur d'onde. La température « jouant » le rôle de paramètre. Ainsi, minimiser l'écart-type relatif sur la température, est ici, équivalent à minimiser l'écart-type absolu.

trouvent une justification mathématique qui est donnée par la théorie de la mesure[212]. En effet, la définition du rapport signal sur bruit basée sur la puissance (ou énergie) du signal, fait appelle à la mesure au sens de la 2-norme (norme euclidienne) associée à l'espace[213] ℓ^2, celle basée sur l'erreur (écart) maximale fait référence à la norme infinie associée à l'espace ℓ^∞, alors que celle basée sur la notion d'écart-type (ou de variance) est issue de la notion de mesure au sens des probabilités. Il existe en réalité de nombreuses manières de mesurer (des ensembles) en mathématiques, dont la plus ancienne et connue est probablement la notion de moyenne arithmétique.

- *Synthèse partielle* :

Dans le cas d'une mesure mono-spectrale, sous hypothèse d'erreur nulle sur la longueur d'onde, d'erreur relative sur l'émissivité négligeable devant celle sur le flux, et pour une erreur constante sur le flux ; on a montré que les notions de minimisation d'erreur relative ou d'écart-type sur la température, de maximisation de la sensibilité du flux à la température ou du rapport signal sur bruit en température (en assimilant erreurs et écart-types), sont liées entre elles et conduisent toutes à une notion de longueurs d'ondes optimales, définie par :

$$\begin{cases} \lambda_{opt}^{Wien} T = \dfrac{C_2}{6} \equiv C_{MSW}^R \approx 2400\,\mu m.K, & \forall \lambda T << C_2 \\ \lambda_{opt}^{Planck} T = C_{MSP}^R \approx 2410,3\,\mu m.K \end{cases} \tag{23.2.12}$$

Les critères permettant de définir les longueurs d'ondes optimales en mono-spectral ayant été établis, ce sont ceux de la méthode bi-spectrale qui vont désormais faire l'objet de la section suivante.

[212] S'appuyant elle-même sur la théorie des ensembles, et en particulier, des ensembles mesurables.

[213] Les espaces ℓ^p munis de la p-norme, $p \geq 1$, son défini comme l'ensemble des suites infinies de nombres réels ou complexes dont la p-norme est finie.

A.4. Conséquences du critère $\Delta\lambda_{min}$ sur le nombre maximum de longueurs d'ondes, et linéarisation du critère à courtes longueurs d'ondes

A.4.1. Position du problème

La mesure par méthode multi-spectrale (basée sur la méthode bi-spectrale, ici) impose de respecter de nombreux critères (contraintes) pour que celle-ci soit précise. Parmi ces critères, il y a en a un qui impose que la mesure soit faite à partir d'un écart minimum entre les différentes longueurs d'ondes des filtres monochromatiques. Afin d'avoir la mesure la plus juste possible, les filtres ne doivent pas avoir des longueurs d'ondes centrales trop proches.

De plus, la mesure étant d'autant plus précise lorsqu'elle est faite à courtes longueurs d'ondes, l'objectif ici sera multiple. D'une part, ayant choisi la longueur d'onde minimale, nous chercherons à calculer les prochaines longueurs d'ondes auxquelles on peut effectuer la mesure sachant que celles-ci devront respecter le critère d'écart minimum (ou critère de séparation). D'autre part, nous chercherons à déterminer la longueur d'onde maximale $\lambda_{\max}$ à laquelle nous pouvons effectuer nos mesures tout en respectant ce critère.

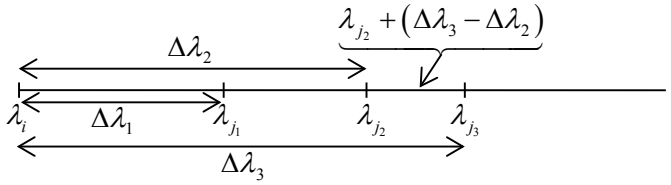


Figure 20.5 : Décalage itératif des longueurs d'onde

Une contrainte supplémentaire nous sera fixée, car expérimentalement nous sommes limités dans notre choix par la disponibilité (ou existence) des filtres aux différentes longueurs d'ondes. L'objectif principal sera donc d'obtenir les écarts minimum à respecter entre les différents filtres, pour un ensemble de filtres donné.

Le problème est donc le suivant : ayant choisi une longueur d'onde initiale minimale λ_i , nous pouvons déterminer à partir du critère de séparation des longueurs d'ondes, la longueur d'onde suivante $\lambda_{j_1} = \lambda_i + \Delta\lambda_1 = \lambda_i + \frac{\lambda_i^2 T}{C_2}$. Mais nous voyons (cf. Figure 20.5) qu'en calculant ce critère à partir de cette nouvelle longueur d'onde λ_{j_1}, nous avons un recouvrement. En effet, $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_{j_1} = \frac{\lambda_{j_1}^2 T}{C_2} > \Delta\lambda_i = \Delta\lambda_1 \Rightarrow \lambda_{j_1} - \Delta\lambda_{j_1} < \lambda_i$.

Il nous faut donc prendre pour nouvelle longueur d'onde $\lambda_{j_2} = \lambda_i + \Delta\lambda_2$. Mais une fois de plus, lorsqu'on calcule le critère pour λ_{j_2}, il y a recouvrement car $\Delta\lambda_{j_2} = \Delta\lambda_3 > \Delta\lambda_2$. De nouveau, nous allons choisir pour nouvelle longueur d'onde $\lambda_i + \Delta\lambda_3$, ce qui revient à décaler λ_{j_2} de l'amplitude du recouvrement, à savoir : $R = \Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_2$. Et ainsi de suite jusqu'à ce que le recouvrement soit nul.

Afin de résoudre ce problème, deux approches sont possibles, l'une est numérique, l'autre analytique (si le problème est analytiquement soluble). Cependant, notons que la résolution numérique ne converge pas nécessairement. Ce point sera également abordé.

A.4.2. Algorithme de résolution numérique du problème

Notre problème peut être modélisé par le schéma suivant :

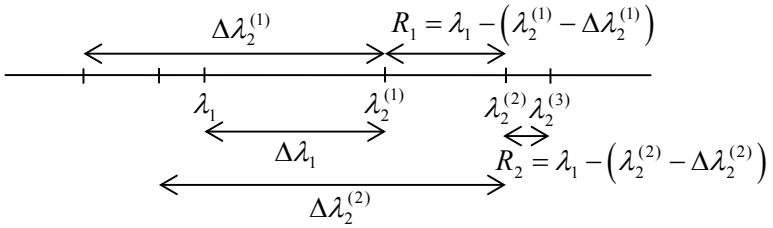


Figure 20.6 : Illustration des recouvrements successifs

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, qu'ayant choisi la longueur d'onde de notre 1er filtre, celle du deuxième sera déterminée par essais successifs jusqu'à ce que le recouvrement dû à l'application du critère de séparation des filtres soit nul.

Nous avons successivement :

- 1er calcul du 2nd filtre : $\lambda_2^{(1)} = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$
- 1er recouvrement : $R_1 = \lambda_1 - \left(\lambda_2^{(1)} - \Delta\lambda_2^{(1)}\right)$
- 2ième calcul du 2nd filtre : $\lambda_2^{(2)} = \lambda_1 + \Delta\lambda_2^{(1)}$
- 2ième recouvrement : $R_2 = \lambda_1 - \left(\lambda_2^{(2)} - \Delta\lambda_2^{(2)}\right)$
- ⋮
- kième calcul du 2nd filtre : $\lambda_2^{(k)} = \lambda_1 + \Delta\lambda_2^{(k)}$
- kième recouvrement : $R_k = \lambda_1 - \left(\lambda_2^{(k)} - \Delta\lambda_2^{(k)}\right)$

Il y a convergence lorsque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = 0$.

Afin de résoudre ce problème non linéaire nous pouvons utiliser l'algorithme ci-dessous dans un logiciel de calcul numérique tel que Matlab®.

- *Choisir la valeur de la longueur d'onde* λ_1 *du 1er filtre.*
- *Choisir la valeur de la température nominale T.*
- *Choisir la valeur du seuil de convergence* ε *.*
- *Choisir la valeur du nombre maximum N d'itérations (critère d'arrêt si non convergence).*
- *Initialiser l'algorithme avec :* $\lambda_j = \lambda_1$ *, et* $C_2 \approx 14388.10^{-6}$ *.*
- *Tant que* $R > \varepsilon$ *et* $k < N$ *, faire :*

$$\Delta\lambda_j = \frac{\lambda_j^2 T}{C_2}$$

$$\lambda_j = \lambda_1 + \Delta\lambda_j$$

$$R = \lambda_1 - \left(\lambda_j - \Delta\lambda_j\right)$$

- *Fin Tant que.*
- *Afficher la solution* λ_j

A.4.2.1. Résolution analytique du problème

A.4.2.1.1. *Détermination de l'équation de récurrence*

Afin de pouvoir espérer résoudre algébriquement ce problème par la méthode du point fixe, il est nécessaire d'établir une équation de récurrence, c'est-à-dire la façon dont on passe d'un terme au suivant. Pour cela, après un changement de variable, nous allons écrire les premiers termes de la suite.

En posant :

$$\alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_i} \tag{24.2.1}$$

On a successivement :

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2} = \lambda_i \alpha$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\lambda_{j_1}^2 T}{C_2} = \frac{\left(\lambda_i + \Delta\lambda_1\right)^2 T}{C_2} = \left[\lambda_i\left(1+\alpha\right)\right]^2 \frac{T}{C_2} = \alpha\lambda_i\left(1+\alpha\right)^2 = \alpha\lambda_i\left(1+\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_i}\right)^2$$

$$\Delta\lambda_3 = \frac{\lambda_{j_2}^2 T}{C_2} = \frac{\left(\lambda_i + \Delta\lambda_2\right)^2 T}{C_2} = \frac{\left[\lambda_i + \alpha\lambda_i\left(1+\alpha\right)^2\right]^2 T}{C_2} = \alpha\lambda_i\left[1+\alpha\left(1+\alpha\right)^2\right]^2 = \alpha\lambda_i\left[1+\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_i}\right]^2$$

De la même manière nous avons :

$$\Delta\lambda_4 = \alpha\lambda_i\left[1+\alpha\left[1+\alpha\left(1+\alpha\right)^2\right]^2\right]^2 = \alpha\lambda_i\left[1+\frac{\Delta\lambda_3}{\lambda_i}\right]^2$$

$\vdots$

$$\Delta\lambda_n = \alpha\lambda_i\underbrace{\left[1+\alpha\left[1+\alpha\left[1+.....\right]^2\right]^2\right]^2}_{n-1\ fois} = \alpha\lambda_i\left[1+\frac{\Delta\lambda_{n-1}}{\lambda_i}\right]^2 \tag{24.2.2}$$

$$\Delta\lambda_{n+1} = \alpha\lambda_i\underbrace{\left[1+\alpha\underbrace{\left[1+\alpha\left[1+\alpha\left[1+.....\right]^2\right]^2\right]^2}_{n-1\ fois}\right]^2}_{n\ fois} = \alpha\lambda_i\left[1+\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_i}\right]^2 \tag{24.2.3}$$

D'où finalement :

$$\begin{cases}\Delta\lambda_0 = 0\\ \Delta\lambda_{n+1} = f\left(\Delta\lambda_n\right) = \alpha\lambda_i\left[1+\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_i}\right]^2,\ \forall n\in[\![1;+\infty[\![\end{cases} \tag{24.2.4}$$

Remarquons qu'à ce stade, (24.2.4) n'est qu'une conjecture. Ceci étant, nous pouvons la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence en utilisant les expressions (24.2.2) et (24.2.3).

A.4.2.1.2. *Calcul du point fixe*

Avant d'entrer dans le vif du sujet, rappelons quelques définitions et théorèmes utiles.

- **Définition : Stabilité d'un intervalle par une fonction**

On dit qu'un intervalle I est stable par f lorsque $f\left(I\right)\subset I$.

- **Théorème**

Si I est un intervalle stable par f, alors la suite définie par :

$$\begin{cases}u_0\in I\\ u_{n+1}=f\left(u_n\right),\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}\quad \textit{est définie } \forall n\in\mathbb{N}.$$

Remarque : Une telle suite est appelée suite récurrente associée à *f*.

- **Définition : Point fixe**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et à valeur dans $\mathbb{R}$. *On dit que* γ *est un point fixe de f lorsque* $f\left(\gamma\right)=\gamma$.

La solution à notre problème correspond à la valeur que prend la suite lorsque celle-ci a convergé. Or, on dit qu'une suite a convergé, lorsque $f(\Delta\lambda_n) = \Delta\lambda_n$, ce qui revient à trouver le point fixe de la fonction *f*.

Soit,

$$f(x) = \alpha\lambda_i\left(1 + \frac{x}{\lambda_i}\right)^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \tag{24.2.5}$$

Remarque : Notons que la courbe représentative de f est la translaté de la courbe $y = \frac{\alpha}{\lambda_i}x^2$ par le vecteur $-\lambda_i.\vec{e}_x$, par conséquent, $f(x) \geq 0,\ \forall x > 0$.

Déterminer le point fixe de cette fonction, revient à résoudre : $f(x) = x \Leftrightarrow \alpha\lambda_i\left(1 + \frac{x}{\lambda_i}\right)^2 = x$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda_i}x^2 + (2\alpha - 1)x + \alpha\lambda_i = 0 \tag{24.2.6}$$

Le discriminant de (24.2.6) vaut : $\Delta = (1 - 4\alpha)$

Le nombre de points fixes dépendant de la valeur de Δ, nous avons :

α	0	1/4	$+\infty$
$\Delta = (1-4\alpha)$	+	0	-
Nb de Solutions	2 Sols	1Sol	Pas de Sols

Tableau 20.1 : Nombre de solutions en fonction de la valeur de $\alpha = \lambda_i T\ /\ C_2$

Les solutions sont donc :

$$\boxed{x_{1,2} = \Delta\lambda_{1,2} = \frac{1 - 2\alpha \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{\frac{2\alpha}{\lambda_i}} > 0, \qquad \forall\alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} \in \left]0;\frac{1}{4}\right[} \tag{24.2.7}$$

$$\boxed{x_0 = \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_i(1 - 2\alpha)}{2\alpha} = \lambda_i, \qquad pour\ \ \alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} = \frac{1}{4}} \tag{24.2.8}$$

L'équation (24.2.8) montre que lorsqu'on choisira λ_i tel que $\frac{\lambda_i T}{C_2} = \frac{1}{4}$, alors, il n'y aura plus qu'une solution possible (respectant le critère de séparation) et cette solution vaudra : $\Delta\lambda = \lambda_i$.

On en déduit que la dernière longueur d'onde possible (respectant le critère de séparation), est :

$$\lambda_{j_{\max}} = \lambda_{\alpha=1/4} + \Delta\lambda_{\alpha=1/4} = \lambda_{\alpha=1/4} + \lambda_i \tag{24.2.9}$$

Or, la valeur de $\lambda_{\alpha=1/4}$ revient à choisir λ tel que :

$$\frac{\lambda T}{C_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda_{\alpha=1/4} = \frac{C_2}{4T} \tag{24.2.10}$$

Et en vertu de (24.2.8), on en déduit :

$$\Delta\lambda_{\alpha=1/4} = \lambda_{\alpha=1/4} \tag{24.2.11}$$

D'où,

$$\boxed{\lambda_{\max} = \lambda_{\alpha=1/4} + \Delta\lambda_{\alpha=1/4} = 2\lambda_{\alpha=1/4} = \frac{C_2}{2T}} \tag{24.2.12}$$

Quelques représentations graphiques des solutions données par la méthode du point fixe dans des configurations initiales différentes sont données ci-dessous.

La **Figure 20.7**, réalisée avec λ = 2µm et T = 873K => $\alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} \approx \frac{2 \times 873}{14388} \approx 0{,}12 < \frac{1}{4}$, montre qu'il y a bien présence de deux points fixes.

Cela traduit l'existence de deux $\Delta\lambda$ possibles ($\Delta\lambda_1$ ou $\Delta\lambda_2$ définies par (24.2.7)), tels que le calcul des $\Delta\lambda$ aux nouvelles longueurs d'ondes définies par $\lambda_2 = \lambda_i + \Delta\lambda_1$ ou $\lambda_2 = \lambda_i + \Delta\lambda_2$ n'induisent pas de recouvrement avec la longueur d'onde λ_i initialement choisie pour déterminer ces nouvelles longueurs d'ondes.

Cependant, remarquons que parmi les deux solutions possibles, il y en a une qui est très éloignée de la longueur d'onde initiale. Le choix de cette dernière aura une double conséquence : Tout d'abord, elle risque de dépasser la longueur d'onde critique $\lambda_{\alpha=1/4}$ et ainsi annihiler toute possibilité de choisir une nouvelle longueur d'onde respectant le critère $\Delta\lambda$. Ensuite, il y a un fort risque pour que cette longueur d'onde soit hors de la bande passante de l'appareil de mesure (caméra thermique, par exemple).

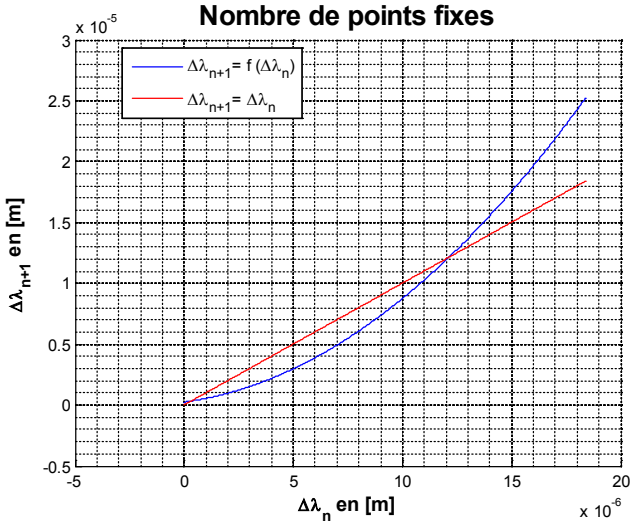


Figure 20.7 : Calcul des points fixes pour λ = 2µm et T = 873K

Le cas limite défini par T= 873K et $\lambda = \lambda_{\alpha=1/4} = \frac{C_2}{4T} \approx \frac{14388}{4 \times 873} \approx 4{,}12\,\mu m$, impliquant la présence d'un unique point fixe (un unique $\Delta\lambda$) est illustré par la Figure 20.8.

On en déduit donc que la longueur d'onde maximale respectant le critère $\Delta\lambda$ pour T = 873K, est $\lambda_{\max} = 2\lambda_{\alpha=1/4} \approx 8{,}24\,\mu m$.

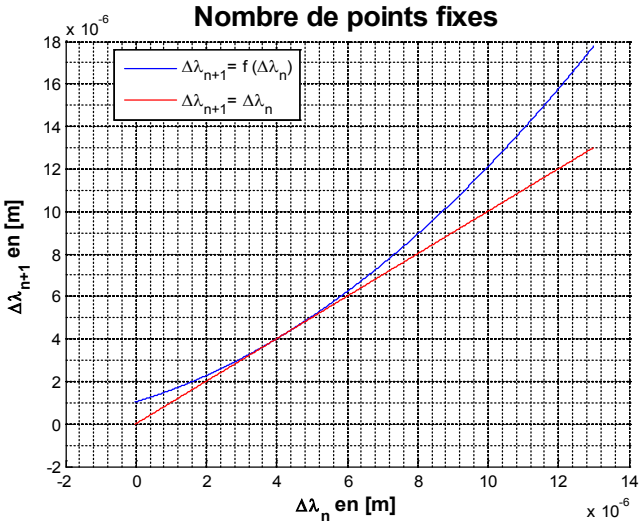


Figure 20.8 : Calcul des points fixes pour λc = 4.12 µm et T = 873K

Enfin, la Figure 20.9 présente le calcul successif pour λ = 2 µm et T = 873K des différentes longueurs d'ondes respectant le critère $\Delta\lambda$, sachant qu'il a été choisi à chaque fois la plus courte longueur d'onde (la plus petit $\Delta\lambda_{1,2}$ solution) comme nouvelle longueur d'onde initiale.

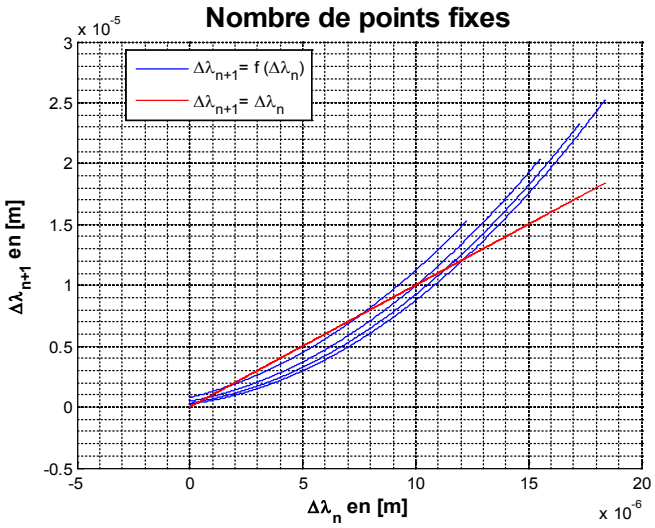


Figure 20.9 : Calcul successif des points fixes à partir de $\lambda = 2$ µm et $T = 873$K

Afin de s'assurer de la véracité des relations analytiques (24.2.7) et (24.2.8), on pourrait vouloir vérifier que la résolution numérique de (24.2.5) donne les même résultats. Se pose alors la question de l'algorithme, qui peut être basé sur une méthode avec ou sans gradient (également appelée respectivement, méthode d'ordre 1 ou d'ordre 0). Seules les méthodes (d'ordre 0) métaheuristiques[214] permettront sans modifications particulières de trouver les deux solutions. Cependant, leur mise en œuvre et leur temps de calcul sont généralement lourds. C'est pourquoi nous allons plutôt utiliser l'algorithme du point fixe[215] qui a l'avantage d'associer simplicité et rapidité de mise en œuvre. Néanmoins, cet algorithme ne converge pas nécessairement à moins de prendre certaines précautions que nous allons aborder.

Notons que l'algorithme du point fixe ne convergera (s'il converge) que vers une seule des deux solutions. On s'arrangera donc pour que celui-ci converge vers les solutions à plus courtes longueurs d'ondes. Cependant, le cas d'une mise en œuvre pour une convergence vers les plus grandes longueurs d'ondes sera également abordé.

Afin de déterminer la nature des points fixes nous allons nous servir de quelques notions mathématiques rappelées ci-dessous.

- **Définition : Application strictement contractante**

Soit f une application définie sur un intervalle I, non nécessairement borné de $\mathbb{R}$. Dire que f est une application strictement contractante sur I signifie qu'il existe un réel $K \in \left[0;1\right[$, tel que $\forall (x,y) \in I$, $\left|f(x)-f(y)\right| \leq K\left|x-y\right|$.

Il est équivalent de dire que f est K-lipchitzienne de rapport $K<1$. Remarquons qu'une telle application est nécessairement continue sur I.

---

[214] Tels que les algorithmes : «du recuit simulé », « par essaims particulaires (PSO, en anglais ») « génétiques », « des fourmis »…

[215] Dont un algorithme succinct appliqué à notre problème est donné dans l'encadré de la section A.4.2.

➢ **Théorème concernant les applications strictement contractantes**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, non nécessairement borné.

Si la dérivée f' vérifie $\max_{x\in I}\left|f'(x)\right| = K < 1$, *alors f est une application strictement contractante sur I.*

➢ **Théorème : point fixe attractif**

Si $\left|f'(\gamma)\right| < 1$, *alors il existe un intervalle* $J \subset I$ *pour lequel la suite* (u_n) *définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ *converge vers* γ.

Dans ce cas, le point fixe γ est appelé point fixe *« attractif »*.

➢ **Théorème : point fixe répulsif**

Si $\left|f'(\gamma)\right| < 1$, *alors il existe un intervalle* $J \subset I$ *et tel que,* $\forall u_0 \neq \gamma, u_0 \in J$, *la suite récurrente associée à f de premier terme* u_0 *ne converge pas vers* γ.

Dans ce cas, le point fixe γ est appelé point fixe *« répulsif »*.

L'intérêt de ce qui va suivre est de savoir si numériquement la méthode (numérique) du point fixe convergera toujours vers nos solutions (du moins vers celle qui nous intéresse) ou si seule la résolution analytique nous assure de trouver les solutions à notre problème. Cela a donc pour but de légitimer ou non l'étude analytique.

La fonction $f : x \mapsto \lambda_i\alpha\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^2$ est contractante si et seulement si :

$$x \leq \frac{C_2}{2T} - \lambda_i \qquad (24.2.13)$$

De plus, f admet au moins un point fixe si et seulement si $0 < \alpha = \frac{\lambda_i T}{C_2} \leq \frac{1}{4}$.

- En effet, pour $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ il existe deux points fixes dont les valeurs sont :

$$x_{1,2} = \Delta\lambda_{1,2} = \frac{1-2\alpha \pm \sqrt{1-4\alpha}}{\frac{2\alpha}{\lambda_i}} \underset{\substack{\text{En remplaçant} \\ \alpha \text{ par } \frac{\lambda_i T}{C_2}}}{=} \left(\frac{C_2}{2T} - \lambda_i\right) \pm \frac{C_2}{2T}\sqrt{1-4\alpha}$$

Or, $0 < \alpha < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{C_2}{2T}\sqrt{1-4\alpha} > 0$

D'où :

$x_1 = \Delta\lambda_1 = \left(\frac{C_2}{2T} - \lambda_i\right) - \frac{C_2}{2T}\sqrt{1-4\alpha} < \frac{C_2}{2T} - \lambda_i$, est un **point fixe attractif** (car d'après (24.2.13), f est strictement contractante).

$x_2 = \Delta\lambda_2 = \left(\frac{C_2}{2T} - \lambda_i\right) + \frac{C_2}{2T}\sqrt{1-4\alpha} > \frac{C_2}{2T} - \lambda_i$, est un **point fixe répulsif** (car d'après (24.2.13), f n'est pas contractante).

- Le cas $\alpha = 1/4$ est un cas particulier, car il existe un unique point fixe valant $x_0 = \Delta\lambda_0 = \lambda_i = \frac{C_2}{4T}$.

La condition (24.2.13) s'écrit donc : $x_0 \leq \frac{C_2}{2T} - \lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i \leq \frac{C_2}{2T} - \lambda_i \Leftrightarrow \frac{C_2}{4T} \leq \frac{C_2}{4T}$

Nous nous trouvons donc dans le cas d'une égalité, ce qui veut dire que f n'est plus strictement contractante, mais simplement contractante en ce point. Par conséquent, la nature de ce point fixe est indéterminée. Afin de lever cette indétermination (fixer la nature du point fixe) et rendre attractif ce point fixe, nous pouvons utiliser la méthode suivante qui s'appuiera sur deux théorèmes rappelés ci-dessous.

➢ **Théorème 1 : Existence d'un point fixe sur un intervalle fermé et borné**

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] fermé, borné et stable par f, alors f admet au moins un point fixe dans [a ; b].

Remarques : La stabilité d'un intervalle ne garantit pas l'existence d'un point fixe, hormis dans le cas d'un intervalle fermé et borné.

➢ **Théorème 2 : Condition nécessaire de convergence**

Soit I un intervalle stable par la fonction f et sur lequel celle-ci est continue. Si la suite récurrente (u_n) associée à f converge, c'est nécessairement vers un point fixe.

➢ **Théorème 3 : Sens de variation de la suite associée à une fonction**

Soit I un intervalle stable par f. Si la fonction f est strictement croissante sur I, alors la suite récurrente (u_n) associée à f est monotone.

Remarque **:** Dans notre cas, f étant strictement croissante $\forall x > 0$, alors $\left(u_n\right)$ associée à f est monotone. De plus $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $\left(u_n\right)$ est croissante.

➢ **Théorème 4 : Point fixe sur un intervalle fermé**

Si f une fonction définie sur un intervalle fermé I, non nécessairement borné, de $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes : I est stable par f et f est strictement contractante

sur I. Alors f admet un unique point fixe γ *et la suite* (u_n) *définie par* $u_0 \in I$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* γ *.*

En prenant $I = \left]0;\Delta\lambda_i = \lambda_i\right]$ pour intervalle d'étude, sur celui-ci $\left|f'(x)\right| \leq 1$, il est donc stable par f $(\text{car}(f(I) \subset I))$. Par conséquent, on en déduit du théorème 1 qu'il existe au moins un point fixe sur *I.* La suite (u_n) est croissante sur I et est majorée par $\Delta\lambda_i = \lambda_i$, donc elle est convergente, et en vertu du théorème 2 cette convergence se fait vers le point fixe.

Remarques : $\forall x > \Delta\lambda_i = \lambda_i$, les intervalles ne sont plus stables par f , par conséquent, il n'y aura plus de convergence vers un point fixe, sauf si la valeur initiale de la suite est la valeur du point fixe. Notons, que dans notre cas, ayant pu résoudre analytiquement le problème du point fixe, nous sommes d'une part, assuré de l'existence d'un point fixe, et d'autre part, nous pouvons déterminer sa valeur sans avoir recours à la suite récurrente associée au problème.

A.4.2.2. Conclusion

Deux points de vue étaient possibles afin de résoudre ce problème de calcul d'écart minimum de longueur d'onde, une résolution numérique et une résolution analytique.

D'une part, nous avons montré que la solution numérique convergerait toujours vers une seule des solutions, celle qui nous intéresse (la plus proche de zéro, sous réserve de choisir convenablement l'intervalle d'étude) ; et d'autre part, que le problème était également algébriquement soluble, ce qui nous a permis d'établir des critères de longueurs d'ondes critiques ou d'écarts de longueurs d'ondes critiques et de déterminer toutes les solutions du problème.

Sachant que seuls les points fixes (écarts de longueurs d'ondes) les plus proches de zéro nous intéressent, nous avons également pu déterminer la longueur d'onde maximale à laquelle pouvaient être effectuées nos mesures tout en respectant le critère $\Delta\lambda_{\min}$ de séparation des longueurs d'ondes.

Ainsi, pour une température donnée, on a montré que le nombre de longueurs d'ondes utilisables (respectant le critère $\Delta\lambda_{\min}$) pour une mesure multi-spectrale, sera non seulement limité par la bande passante des différents dispositifs, mais également par la nature du critère, étant lui-même fonction de la nature physique de l'émission de Planck.

A.4.3. Linéarisation du critère $\Delta\lambda_{min}$ à courtes longueurs d'ondes

Rappelons que plus on veut effectuer des mesures à hautes températures, plus on devra choisir des filtres ayant des faibles longueurs d'ondes, d'une part pour profiter pleinement du gain de sensibilité, et d'autre part afin de s'assurer d'avoir un bon rapport signal sur bruit.

L'objectif de cette sous-section est de montrer qu'à courtes longueurs d'ondes, le critère $\Delta\lambda$ se linéarise, et il est alors possible de choisir des filtres espacés en progression géométrique.

La démarche consiste à partir de la relation de récurrence (24.2.4) permettant d'obtenir les points fixes :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda_i T}{C_2} = \dfrac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \\ \Delta\lambda_0 = 0 \\ \Delta\lambda_{n+1} = f\left(\Delta\lambda_n\right) = \alpha\lambda_i\left(1 + \dfrac{\Delta\lambda_n}{\lambda_i}\right)^2, \forall n \in [\![1;+\infty[\![\end{cases} \tag{24.3.1}$$

Si l'on est suffisamment courtes longueurs d'ondes pour que $\Delta\lambda_n \,/\, \lambda_i \ll 1$, alors la relation de récurrence (24.3.1) se linéarise sous la forme :

$$\Delta\lambda_{n+1} = \alpha\lambda_i\left(1 + 2\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_i}\right) = 2\alpha\Delta\lambda_n + \underbrace{\alpha\lambda_i}_{=\Delta\lambda_i} \tag{24.3.2}$$

La relation (24.3.2) étant de la forme $\Delta\lambda_{n+1} = a\Delta\lambda_n + b$, on en déduit que la suite $\left(\Delta\lambda_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique (également appelée, suite affine) pouvant s'exprimer explicitement en fonction de n.

Remarque **:** En première approximation, on supposera que : $\Delta\lambda_i \,/\, \lambda_i = \lambda_i T \,/\, C_2 \ll 1 \Rightarrow \Delta\lambda_n \,/\, \lambda_i \ll 1$ $\Rightarrow$ la suite (24.3.1) dégénère en suite arithmético-géométrique.

Afin de résoudre le problème, la méthode que l'on propose consiste à déterminer le point fixe γ de la suite $\left(\Delta\lambda_n\right)$, à démontrer qu'une suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = \Delta\lambda_n - \gamma$ est géométrique et qu'elle converge vers zéro. On en conclut d'une part que $\left(\Delta\lambda_n\right)$ converge vers le point fixe γ, et d'autre part l'expression explicite de $\left(\Delta\lambda_n\right)$.

Chercher le point fixe de la suite $\left(\Delta\lambda_n\right)$ définie par (24.3.2), revient à résoudre :

$$\begin{aligned} & x = 2\alpha x + \alpha\lambda_i \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha} \triangleq \gamma \end{aligned} \tag{24.3.3}$$

En posant, $v_n = \Delta\lambda_n - \gamma$, on a :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha} \\ v_{n+1} = \Delta\lambda_{n+1} - \gamma \\ \Delta\lambda_{n+1} = 2\alpha\Delta\lambda_n + \alpha\lambda_i \end{cases} \tag{24.3.4}$$

Ce qui après calculs permet d'écrire :

$$v_{n+1} = 2\alpha\underbrace{\big(\Delta\lambda_n - \gamma\big)}_{v_n} = 2\alpha v_n \tag{24.3.5}$$

L'expression (24.3.5) implique que $\big(v_n\big)$ est une suite géométrique, de raison 2α, et de premier terme :

$$v_0 = \underbrace{\Delta\lambda_0}_{=0} - \gamma = \frac{-\alpha\lambda_i}{1-2\alpha} \tag{24.3.6}$$

Ainsi, la suite $\big(v_n\big)$ admet pour expression explicite :

$$\begin{cases} v_n = -\gamma\big(2\alpha\big)^n = \dfrac{-\alpha\lambda_i}{1-2\alpha}\big(2\alpha\big)^n = \dfrac{-\Delta\lambda_i}{1-2\alpha}\big(2\alpha\big)^n \\ \alpha = \dfrac{\lambda_i T}{C_2} < 1 \end{cases} \tag{24.3.7}$$

Le fait d'avoir $\alpha = \dfrac{\lambda_i T}{C_2} < 1$ nous assure la convergence vers zéro de la suite $\big(v_n\big)$ définie par (24.3.7), ce qui a pour conséquence directe d'impliquer la convergence de la suite $\big(\Delta\lambda_n\big)$ vers $\gamma = \dfrac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha}$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} & v_n = \Delta\lambda_n - \gamma \\ \Leftrightarrow\ & \Delta\lambda_n = v_n + \gamma \\ \Leftrightarrow\ & \Delta\lambda_n = \gamma\Big(1 - \big(2\alpha\big)^n\Big) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ |2\alpha|<1}]{} \gamma \end{aligned} \tag{24.3.8}$$

La suite $\big(\Delta\lambda_n\big)$ converge donc vers la solution cherchée γ :

$$\begin{cases} \Delta\lambda_{sol}^{lin} = \gamma = \dfrac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha} = \dfrac{\Delta\lambda_i}{1-2\alpha} = \dfrac{\lambda_i^2 T}{C_2 - 2\lambda_i T} \\ \alpha = \dfrac{\lambda_i T}{C_2} < 1 \end{cases} \tag{24.3.9}$$

- ***Remarque** : Simplification due à l'approximation de Wien*

Notons que la relation (24.3.9) peut encore se simplifier si l'on fait appel à l'approximation de Wien $\dfrac{\lambda_i T}{C_2} \ll 1$.

En effet, dans ce cas on a :

$$\Delta\lambda_{sol}^{lin} = \frac{\Delta\lambda_i}{1-2\alpha} = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2\left(1-2\dfrac{\lambda_i T}{C_2}\right)} = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2} + \mathrm{O}\left(\frac{\lambda_i^3 T^2}{C_2^2}\right) \tag{24.3.10}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda_{sol}^{lin-Wien} \simeq \Delta\lambda_i = \frac{\lambda_i^2 T}{C_2} \tag{24.3.11}$$

La relation (24.3.11) montre en particulier qu'à courte longueur d'onde, la relation (5.5.6) est applicable en première approximation, ce qui a pour conséquence de permettre de choisir les longueurs d'ondes de façon simple par ordre croissant, sans avoir besoin d'établir les relations (24.2.7) et (24.2.8).

C'est en particulier ce qui a intuitivement été fait par [14].

- ***Application Numérique*** **:**

Supposons que l'on veuille effectuer des mesures de température à 1300K, avec un premier filtre de longueur d'onde $\lambda = 380\,nm$ (pour fixer les idées, on supposera que cela correspond à la limite basse de la bande passante de la chaine de mesure).

Les solutions obtenues par les expressions (24.2.7), (24.3.9), et (24.3.11) sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$
$\dfrac{1-2\alpha \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha \;/\; \lambda_i}$	14,03	15,13	16,36
$\dfrac{\alpha\lambda_i}{1-2\alpha}$	14,01	15,10	16,33
$\lambda_i^2 T \;/\; C_2$	13,05	13,96	14,97

Tableau 20.2 : Comparaison des $\Delta\lambda_{\min}$: Relation générale, relation dégénérée pour les courtes longueurs d'ondes, relation dégénérée sous approximation de Wien.

On constate que les résultats obtenus par la relation générale (24.2.7) et la relation dégénérée sous approximation de courtes longueurs d'ondes sont en bonne adéquation.

Les $\Delta\lambda$ obtenu par la relation dégénérée sous approximation de Wien sont un peu moins précis : Il semble y avoir une erreur systématique d'environ $1nm$, par rapport au deux autres modèles.

A.5. Nombre de degrés de liberté du système d'équation des méthodes basées sur le rapport de flux

A.5.1. Position du problème

L'idée initiale de l'extension de la méthode bi-spectrale à plusieurs longueurs d'ondes était de pouvoir modéliser les variations de la fonction de transfert globale de la chaine de mesure incluant l'émissivité (ou de l'émissivité seule si les appareils de mesures sont supposés idéaux) par un polynôme d'ordre 2. Puis, à partir du rapport des mesures de flux effectuées à 3 longueurs d'ondes différentes, estimer la température ainsi que les deux coefficients $\{X,Y\}$ du polynôme modélisant la fonction de transfert, car le rapport permettait de s'affranchir d'un coefficient.

De plus, de prime abord, une autre idée séduisante des méthodes basées sur le rapport de flux, est le nombre $C_N^2 = N\left(N-1\right)/2$ de combinaisons différentes de rapports de flux qu'il est possible de former à partir de N mesures de flux.

Cependant, nous montrerons que les équations du système formé à partir de l'ensemble de ces combinaisons sont liées, et que par conséquent elles n'apportent aucune information supplémentaire. En particulier, nous démontrerons que pour avoir un système linéairement indépendant, il est nécessaire d'avoir une longueur d'onde de plus que de paramètres apparents dans le rapport simplifié de la fonction de transfert, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'avoir autant de longueurs d'ondes que de paramètres « réels » à estimer.

Notons que, bien que la démonstration de ces différents points soit réalisée à partir du modèle « TNL.TXY », elle est généralisable au modèle « TNL.Tbc ».

A.5.2. Démonstration de la corrélation du système à 3 bandes

Soit, $\varphi_i = \underbrace{S_i f\left(\lambda_i\right) C_1 \lambda_i^{-5}}_{g(\lambda_i)} \exp\left(\frac{-C_2}{\lambda_i T}\right)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ le flux émis par l'objet de surface S_i, et $\{i,j,k\}$ les indices[216] des mesures effectuées à 3 longueurs d'ondes différentes.

Soient trois points (couples de mesures) : $\left(\varphi_i, T\right)$; $\left(\varphi_j, T\right)$; $\left(\varphi_k, T\right)$ obtenus à l'aide de trois filtres différents mais pour une température unique.

[216] Tel que $\left(i,j,k\right)$ puisse représenter toutes permutations de $\left(1,2,3\right)$.

En effectuant le rapport des flux mesurés pour une même température, nous avons :

$$T = \frac{C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right)} \tag{25.2.1}$$

Posons : $\varphi_{ij} = \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}$, $g_{ji} = \dfrac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}$, et $T_{ji} = C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_j} - \dfrac{1}{\lambda_i}\right)$

A l'aide des trois mesures de flux, nous pouvons écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\dfrac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) \times T - T_{ji} = 0 \quad \left(E1\right) \\ \ln\left(\dfrac{\varphi_j}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right) \times T - T_{kj} = 0 \quad \left(E2\right) \\ \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) \times T - T_{ki} = 0 \quad \left(E3\right) \end{cases} \tag{25.2.2}$$

Par combinaison, (*E1*)+(*E2*) nous donne :

$$\left[\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) + \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right)\right]T - \left(T_{kj} + T_{ji}\right) = 0 \tag{25.2.3}$$

Or,

$$T_{kj} + T_{ji} = C_2\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_j}\right) + C_2\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i}\right) = C_2\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_i}\right) = T_{ki}$$

$$\Leftrightarrow T_{kj} + T_{ji} = T_{ki} \tag{25.2.4}$$

Et,

$$\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) + \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right) = \ln\left(\frac{\varphi_i}{\cancel{\varphi_j}}\frac{\cancel{\varphi_j}}{\varphi_k}\frac{\cancel{g\left(\lambda_j\right)}}{g\left(\lambda_i\right)}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{\cancel{g\left(\lambda_j\right)}}\right) = \ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_k}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) \tag{25.2.5}$$

D'où, en substituant (25.2.4) et (25.2.5) dans (25.2.3), nous avons :

$$\left[\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right) + \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right)\right]T - \left(T_{kj} + T_{ji}\right) = \ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_k}\frac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right)T - T_{ki} \tag{25.2.6}$$

Le second membre de l'égalité donnant l'équation (*E3*), on en déduit que le système (25.2.2) est lié, et par conséquent :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\dfrac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right)\times T - T_{ji} = 0 \quad \left(E1\right) \\ \ln\left(\dfrac{\varphi_j}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right)\times T - T_{kj} = 0 \quad \left(E2\right) \\ \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right)\times T - T_{ki} = 0 \quad \left(E3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\dfrac{g\left(\lambda_j\right)}{g\left(\lambda_i\right)}\right)\times T - T_{ji} = 0 \quad \left(E1\right) \\ \ln\left(\dfrac{\varphi_j}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}\right)\times T - T_{kj} = 0 \quad \left(E2\right) \end{cases} \tag{25.2.7}$$

Nous avons donc en réalité un système sous-déterminé à deux équations {(*E1*), (*E2*)} et trois inconnues (*T,X,Y*). Pour résoudre ce système, il est alors nécessaire de rajouter une équation indépendante (faire une mesure avec une nouvelle longueur d'onde) ou de diminuer le nombre d'inconnues (diminuer le degré du polynôme).

A.5.3. Démonstration du nombre de longueurs d'ondes nécessaire en fonction du degré du polynôme

A.5.3.1. Problématique

Compte tenu de ce qui a été démontré précédemment, on peut conjecturer qu'il sera nécessaire d'avoir au moins une longueur d'onde de plus que d'inconnues apparaissant dans le modèle « TNL.TXY ». En d'autre termes, si l'on veut identifier un polynôme de degré *n* ainsi que la température T, soit *n+2* inconnues, nous devrons effectuer nos mesures avec *n+2* filtres de longueurs d'ondes différentes afin que la matrice associée au problème soit de plein rang, et cela, même si une inconnue peut se simplifier à l'aide du rapport de deux mesures. La démonstration de cette conjecture est le but de ce paragraphe.

Afin d'alléger l'écriture, nous remplacerons ici, $\dfrac{\varphi_j}{\varphi_k}\dfrac{g\left(\lambda_k\right)}{g\left(\lambda_j\right)}$, par $\dfrac{\varphi_j}{\varphi_k}$. Le raisonnement et les résultats restent bien évidemment inchangés en l'absence de ce changement de notation.

Soient, $p \in [\![2;+\infty[\![$ le nombre de mesures et φ_i le flux numéro i avec $\varphi_i > 0$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que, $\forall\left(j,k\right)_{j\neq k} \in \left[\!\left[1;p\right]\!\right]^2$, $\exists\left(a_i\right)_{i\in[\![1;p-1]\!]} \in \mathbb{R}^{p-1}$, tel que

$$\ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right) \tag{25.3.1}$$

Or,

$$\ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i}\right)$$

La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$\ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi_j}{\varphi_k} = \prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i} \tag{25.3.2}$$

Il est donc question ici (et équivalent) de démontrer (25.3.1) ou (25.3.2). De plus, notons que (25.3.1) revient à démontrer que $\left(\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)\right)_{i\in[\![1;p-1]\!]}$ forme une base de notre système. Une démonstration analogue et équivalente reviendrait à démontrer que $\left(\ln\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_i}\right)\right)_{i\in[\![2;p]\!]}$ forme une base du système considéré.

A.5.3.2. Démonstration

Soit, $i \in [\![1;p-1]\!]$, montrons que $\forall\left(j,k\right)_{j\neq k} \in [\![1;p]\!]^2$, $\frac{\varphi_j}{\varphi_k} = \prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i}$

Avec : $\prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i} = \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^{a_1} \times \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^{a_2} \times ..... \times \left(\frac{\varphi_{j-1}}{\varphi_j}\right)^{a_{j-1}} \times \left(\frac{\varphi_j}{\varphi_{j+1}}\right)^{a_j} \times ..... \times \left(\frac{\varphi_{p-1}}{\varphi_p}\right)^{a_{p-1}}$

Afin de démontrer (25.3.2) nous allons raisonner par disjonction de cas et en supposant $a_i = \{-1;0;1\}$.

- ***Si k>j***

Remarquons qu'en développant le produit de j à k et en choisissant $a_i=1$, nous avons le produit télescopique :

$$\prod_{i=j}^{k-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{1} = \underbrace{\frac{\varphi_j}{\cancel{\varphi_{j+1}}} \times \frac{\cancel{\varphi_{j+1}}}{\cancel{\varphi_{j+2}}} \times ..... \times \frac{\cancel{\varphi_{m-1}}}{\cancel{\varphi_m}} \times \frac{\cancel{\varphi_m}}{\varphi_k}}_{\substack{\text{numérateurs et dénominateurs se simplifient}\\ \text{deux à deux par effet télescopique}}} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k}$$

Donc, si :

$$a_i = \begin{cases} 0,\ \forall i \notin [\![j;k-1]\!] \\ 1,\ \forall i \in [\![j;k-1]\!] \end{cases}$$

Alors,

$$\prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i} = \underbrace{\prod_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{0}}_{=1}\underbrace{\prod_{i=j}^{k-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{1}}_{=\frac{\varphi_j}{\varphi_k}}\underbrace{\prod_{i=k}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{0}}_{=1} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k}$$

- ***Si k<j***

Remarquons qu'en développant le produit de k à j et en choisissant a_i=*-1*, nous avons :

$$\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{-1} = \underbrace{\left(\frac{\varphi_k}{\cancel{\varphi_{k+1}}}\right)^{-1} \times \left(\frac{\cancel{\varphi_{k+1}}}{\cancel{\varphi_{k+2}}}\right)^{-1} \times \ldots\ldots \times \left(\frac{\cancel{\varphi_{j-1}}}{\varphi_j}\right)^{-1}}_{\text{simplification par effet télescopique}} = \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_j}\right)^{-1} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k}$$

Donc, si :

$$a_i = \begin{cases} 0,\ \forall i \notin [\![j;k-1]\!] \\ -1,\ \forall i \in [\![j;k-1]\!] \end{cases}$$

Alors,

$$\prod_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{a_i} = \underbrace{\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{0}}_{=1}\underbrace{\prod_{i=k}^{j-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{-1}}_{=\frac{n_j}{n_k}}\underbrace{\prod_{i=j}^{p-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{0}}_{=1} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k}$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{cases} \text{Si } k > j, \quad \dfrac{\varphi_j}{\varphi_k} = \displaystyle\prod_{i=j}^{k-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = \sum_{i=j}^{k-1}\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right) \\ \text{Si } k < j, \quad \dfrac{\varphi_j}{\varphi_k} = \displaystyle\prod_{i=j}^{k-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^{-1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k}\right) = -\sum_{i=k}^{j-1}\ln\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right) \end{cases} \tag{25.3.3}$$

Par conséquent, tout rapport de flux φ_i / φ_j peut être obtenu par combinaison des différents rapports de la forme $\varphi_i / \varphi_{i+1}$ (ou φ_1 / φ_i). Ainsi, tout rapport formé à partir de longueurs d'ondes déjà introduites dans d'autres rapports, n'apportera aucune information supplémentaire, et par conséquent ne pourra pas d'un point de vue théorique améliorer l'estimation.

A.5.3.3. Conclusion

En conclusion, en numérotant les mesures de flux φ à la longueur d'onde λ_i sous la forme φ_i, nous avons montré qu'en formant tous les rapports de la forme $\varphi_i / \varphi_{i+1}$, nous pouvons en déduire par combinaisons de ces rapports n'importe quel autre rapport. Ceci traduit en fait, qu'il est indispensable d'introduire des rapports faisant

intervenir à chaque fois au moins une longueur d'onde encore non utilisée, sans quoi nous aurons un système lié, et par conséquent, sous-déterminé.

A.6. La Méthode Flash et ses évolutions

A.6.1. Méthode Flash de Parker (1961) : Méthode monodimensionnelle

La Méthode Flash (ainsi que le nom « Méthode Flash ») à initialement été inventée par Parker en 1961 [122] pour la caractérisation[217] à haute température de matériaux conducteurs [122, 199, 200]. Un schéma de principe est présenté Figure 20.10, une illustration des évolutions relatives de températures en face avant et arrière est donné Figure 20.11, et des exemples de montages expérimentaux sont représentés Figure 20.12.

Son principe consiste à exciter un échantillon sur l'une de ses faces, appelée face avant (la face opposée est appelée face arrière), puis à mesurer l'évolution de la température sur la face arrière et/ou avant, à l'aide de thermocouples (le cas de Parker), ou de photodétecteurs (cameras matricielles thermographiques, pour les cas plus récents). L'excitation photothermique impulsionnelle est généralement réalisée à l'aide de lampes flash (le cas de Parker), ou de laser (pour les cas plus récents).

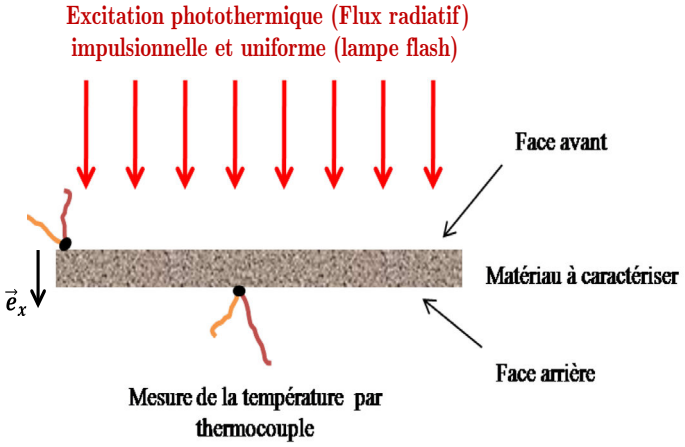


Figure 20.10 : Principe de la méthode flash de Parker (modifié de [152])

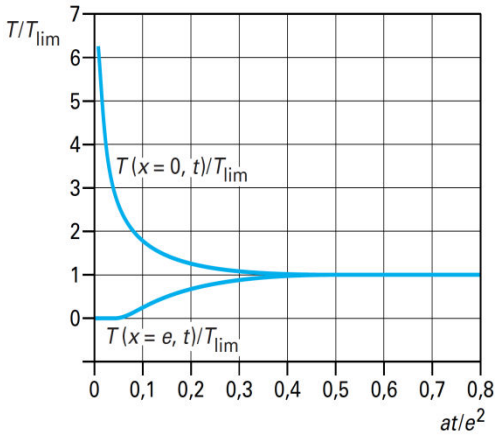
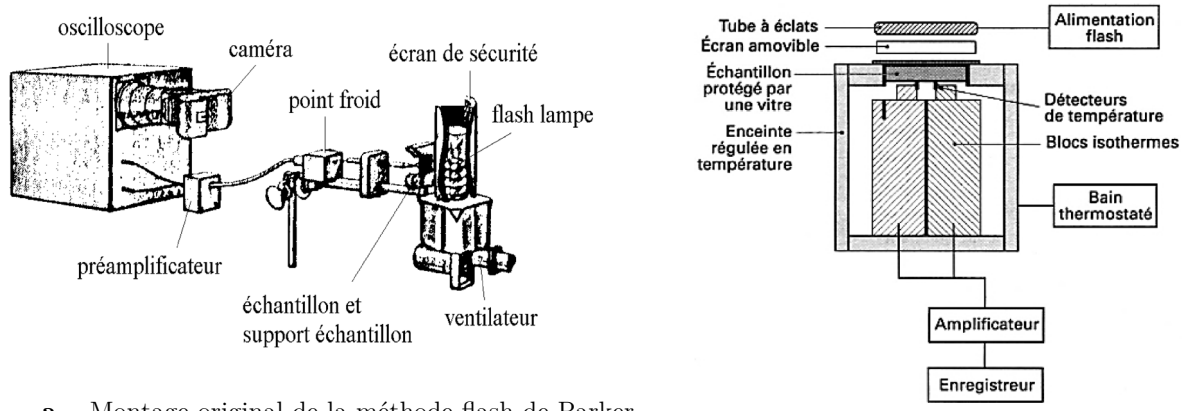


Figure 20.11 : Réponses en température sur la face avant et arrière d'un mur d'épaisseur e et de diffusivité a, à une impulsion flash sur la face avant [120]

[217] Parker propose dans son article des méthodes pour identifier les trois propriétés thermiques uniformes et constantes : {diffusivité, conductivité, chaleur spécifique}, moyennant la connaissance préalable (avant expérience) de la masse volumique de l'échantillon.



a. Montage original de la méthode flash de Parker [122]

b. Exemple de montage expérimental proposé par Degiovanni [111]

Figure 20.12 : Exemples de montages expérimentaux pour la méthode flash.

L'objectif de Parker était de remédier aux difficultés des méthodes de mesure de son époque auxquelles on reprochait de nécessiter des temps d'expérience trop longs, une taille importante d'échantillons, ainsi que des difficultés d'extension de ces méthodes pour des mesures à haute température.

Dans sa version originale, la méthode flash de Parker était réservée aux matériaux plans, homogènes, isotropes, opaques, de propriétés thermiques constantes (faible élévation de température), et parfaitement isolés (excepté de l'excitation photothermique). Ce qui constitue le cas expérimental idéal.

Sous ces conditions[218], Parker propose deux relations (obtenues graphiquement) pour déterminer la diffusivité thermique a à partir du thermogramme face-arrière :

$$a = \frac{1,38\, e^2}{\pi^2\, t_{1/2}} \tag{26.1.1}$$

$$a = \frac{0,48\, e^2}{\pi^2\, t_x} \tag{26.1.2}$$

Avec e l'épaisseur de l'échantillon, $t_{1/2}$ le temps (de demi-montée) pour lequel T/T_{Max}=0.5, et t_x le temps pour lequel la tangente au thermogramme au point de demi-montée, coupe l'axe des abscisses (cf. Figure 20.13).

Le point défini par la relation (26.1.1) correspond au temps pour lequel le thermogramme est le plus sensible[219] à la diffusivité thermique (cf. Figure 20.14), et est en ce sens le meilleur point à utiliser pour estimer celle-ci.

[218] Il fait également l'hypothèse d'une connaissance de l'énergie absorbée par l'échantillon.

[219] Ce n'est pas rigoureusement exact, mais le point se trouve dans le voisinage proche du maximum.

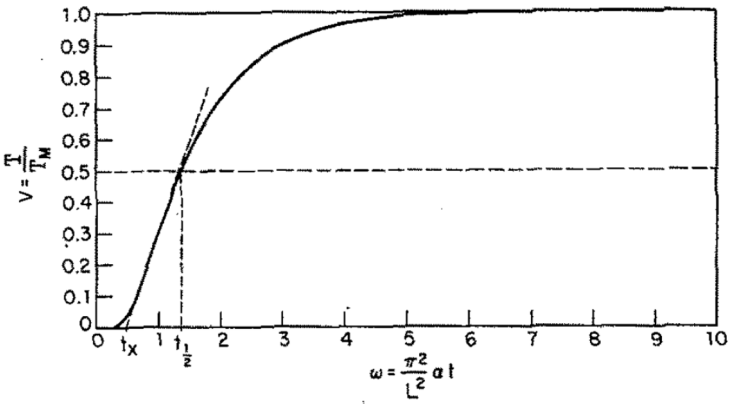


Figure 20.13 : Thermogramme réduit de la température face-arrière. (Extrait de [122]).

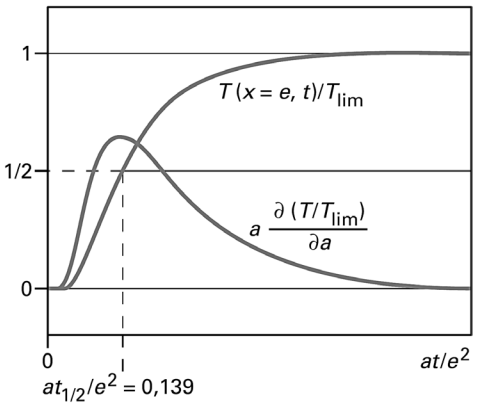


Figure 20.14 : Thermogramme en face arrière, courbe de sensibilité réduite et temps de demi-montée [120].

Dans le cadre de Parker (cas idéal), le champ[220] (1D transitoire) de températures[221] au sein de l'échantillon est défini au par :

$$T\left(x,t\right)=\underbrace{\frac{Q}{\rho ce}}_{T_{\lim}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi\frac{x}{e}\right)\exp\left(-\left(n\pi\right)^{2}\frac{at}{e^{2}}\right)\right)=T_{\lim}\,f\left(\frac{x}{e},\frac{at}{e^{2}}\right)\qquad(26.1.3)$$

Notons que le terme $T_{\lim}=Q\,/\,\rho ce$, correspond à la température adiabatique de l'échantillon (notée T_M par Parker).

De l'expression (26.1.3) on déduit l'expression du champ de températures en face avant (x=*0*) et arrière (x=e) :

$$T\left(x=0,t\right)=\frac{Q}{\rho ce}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\left(n\pi\right)^{2}\frac{at}{e^{2}}\right)\right)\qquad(26.1.4)$$

$$T\left(x=e,t\right)=\frac{Q}{\rho ce}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\exp\left(-\left(n\pi\right)^{2}\frac{at}{e^{2}}\right)\right)\qquad(26.1.5)$$

Parker propose également une relation pour estimer de façon approchée, dans le cadre d'une excitation flash brusque (saut d'énergie lors du flash) et à décroissance linéaire), la température maximale $T_{f_{max}}$ atteinte par la face avant afin de dimensionner la durée du flash, dans le but d'éviter de détériorer localement l'échantillon.

---

[220] Par définition, un champ (vectoriel) est une application continue $f:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{K}^{p},\ \forall\left(n,p\right)\in\mathbb{N}^{2}\setminus\left(0,0\right)$, où $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes. Cette définition reste vraie pour des parties des ensembles de départ et d'arrivée. Ainsi, la température étant un champ scalaire à valeurs réelles, on aura : $p=1$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Le cas 1D transitoire implique $n=2$.

[221] L'évolution temporelle en un point de l'espace d'un champ de température 1D transitoire est généralement appelé « thermogramme ».

$$T_{f_{\max}} = \frac{38\, e\, T_M}{a^{1/2}} \tag{26.1.6}$$

De plus, il fournit également les relations permettant de déterminer la chaleur spécifique c et la conductivité, lorsque que la masse volumique de l'échantillon est connue, ou la capacité calorifique massique et la conductivité thermique dans le cas contraire :

$$\rho c = \frac{Q}{e T_{\lim}} \tag{26.1.7}$$

$$\lambda = \rho c a \tag{26.1.8}$$

Il avait ainsi déjà réalisé qu'il lui serait impossible d'obtenir les trois grandeurs simultanément au cours d'une même expérience.

Il existe également d'autres expressions permettant d'obtenir la valeur de la diffusivité à partir du thermogramme face-avant.

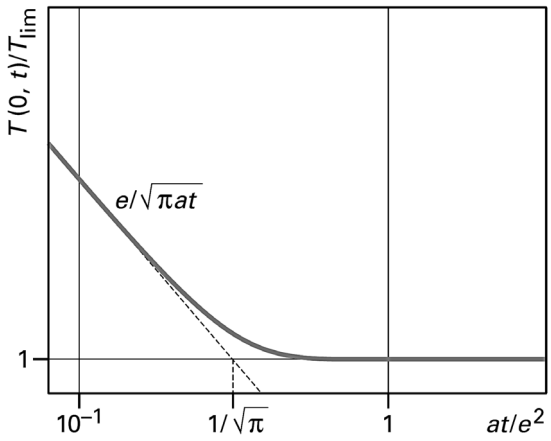


Figure 20.15 : Réponse (adimensionnée) au flash en face avant en échelles logarithmiques, et définition du temps de rupture de pente [120].

Le tracé en échelle logarithmique du thermogramme face-avant permet d'estimer la diffusivité à partir du temps de rupture de pente (également appelé temps caractéristique), défini comme étant l'abscisse du point d'intersection des asymptotes du thermogramme au temps court et au temps long (cf. Figure 20.15).

Au temps court, le comportement de l'échantillon s'apparente à celui d'un milieu semi-infini défini par :

$$\lim_{t\to 0} T\left(x=0,t\right) = \frac{Q}{\sqrt{\lambda\rho c}\sqrt{\pi t}} = T_{\lim}\frac{e}{\sqrt{\pi a t}} \tag{26.1.9}$$

Au temps long, l'échantillon a eu le temps d'atteindre sa température adiabatique tel que :

$$\lim_{t\to\infty} T\left(x,t\right) = \frac{Q}{\rho c e} = T_{\lim}, \qquad \forall x \in \Omega \text{ [222]} \tag{26.1.10}$$

Le point d'intersection de ces asymptotes est défini par :

$$T_{\lim}\frac{e}{\sqrt{\pi a t_r}} = T_{\lim} \tag{26.1.11}$$

D'où l'on déduit l'expression du temps de rupture de pente :

$$t_r = \frac{e^2}{a\pi} \tag{26.1.12}$$

Remarque : Sur ce principe, Djelloul [123] définit également des temps de décrochage et de rupture de pente, tenant compte des pertes en face avant et arrière.

Les avantages de la méthode flash sont nombreux comme le souligne Souhar [84], car elle est :

- Rapide (une seule expérience en régime transitoire est nécessaire pour la mesure).
- Peu intrusive (l'excitation et la mesure par voie optique sont possibles).
- Ne nécessite ni étalonnage en température (normalisation du signal et faible élévation de température), ni échantillon étalon (mesure directe).
- Permet d'estimer indépendamment la diffusivité thermique des pertes convectives[223].

Ses divers avantages font d'elle l'une des techniques expérimentales les plus utilisées à l'heure actuelle dans les laboratoires scientifiques et industries du monde entier. Cette méthode est largement acceptée comme la méthode standard pour la détermination de la diffusivité thermique. En effet, elle forme la base des standards[224] français[225] (selon le LNE), britannique (BS), américain (ASTM) et japonais (NMIJ) pour la détermination de la diffusivité thermique.

Cependant, cette méthode est sujette à de nombreuses sources d'incertitudes dont une liste exhaustive a été réalisée par Vozard [201, 202] et Hay [120, 203, 204]. Certaines difficultés qui ont fait l'objet d'études pour la détermination de la diffusivité thermique de matériaux plans, opaques, homogènes, et isotropes, sont[226] :

- La forme et la durée de l'impulsion (cf. Figure 20.16 et Figure 20.17) [205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213].

---

[222] Ω Désigne ici l'échantillon. La relation (26.1.10) est donc également vraie pour *x=0*.

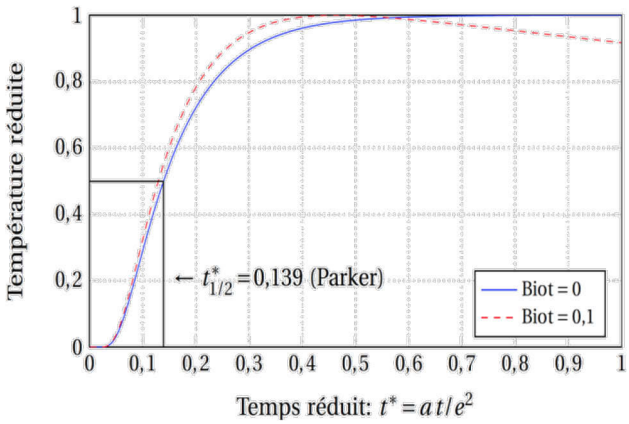
[223] Ce point constitue une évolution de la méthode flash classique de Parker.

[224] [232] : http://www.norme-standard.com

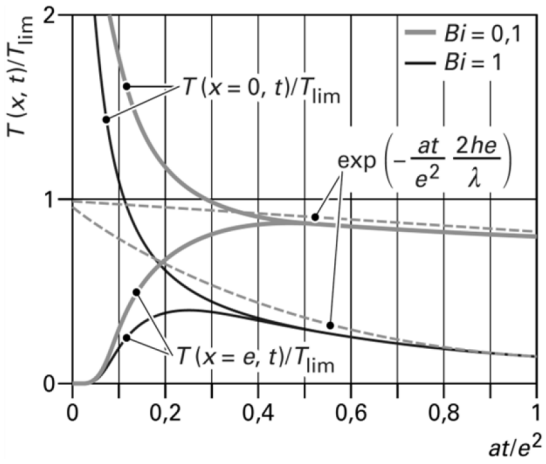
[225] [233] : http://www.metrologie-francaise.fr/fr/references/temperature-thermique.asp#thermophy

[226] Voir également Philippi et Ruffio [176, 35].

- La dépendance des propriétés thermiques avec la température [214, 204].
- L'influence du capteur sur la mesure de température [215, 203, 202, 204] et celle de son temps de réponse [202, 216].
- L'influence des pertes thermiques avec l'environnement, et sa modélisation à travers un ou deux coefficients d'échange[227] [217, 218, 219, 220].
- L'influence de la non-uniformité de l'excitation [221, 202, 216].
- L'influence d'une couche de peinture sur l'échantillon [192, 193, 197, 212, 222].



a. Thermogramme sans pertes (Biot=0) et avec perte (Biot=0,1) [84].



b. Influence de de l'amplitude des pertes [120].

Figure 20.16 : Influence des pertes sur le thermogramme

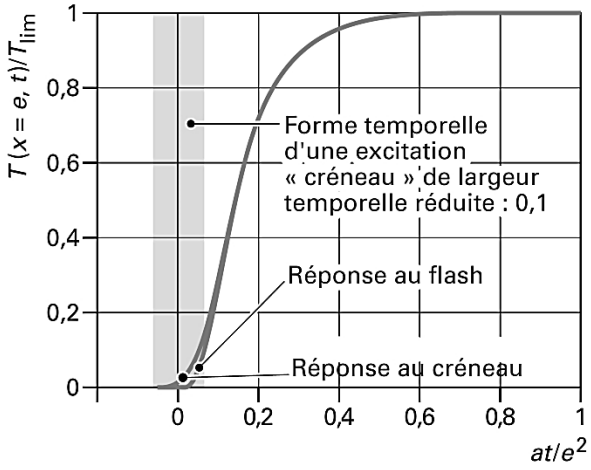


Figure 20.17 : Influence de la durée de l'excitation (cas adiabatique) [120].

Remarques : La durée et la forme de l'impulsion influent particulièrement dans le cas d'échantillons minces et très diffusif. Plusieurs solutions ont alors été proposées :

[227] En particulier, Maillet [220] montre que le biais de modèle dû à l'emploi d'un nombre de Biot équivalent est négligeable dans toute la période précédant le maximum du thermogramme réduit.

- Dans le cadre du cas idéal, mais pour une excitation quelconque, Azumi (1981) [209] propose de prendre l'abscisse temporelle du barycentre énergétique de l'excitation comme origine des temps, et d'estimer la diffusivité à partir de l'expression $at_c / e^2 \approx 0{,}1388$.

- En 1987, Degiovanni [210] étend la méthode aux modèles avec pertes. A l'aide de la correction proposée, l'erreur sur le thermogramme reste inférieure à 1% tant que $at_{bary} / e^2 \leq 0{,}03$.

- Une autre méthode consiste à réaliser une acquisition simultanée du thermogramme et de l'impulsion (à l'aide d'un photodétecteur), puis convoluer le modèle théorique avec la forme expérimentale du flash, pour finalement estimer la diffusivité par moindres carrés entre thermogramme expérimental et semi-théorique.

Le terme de méthode flash désigne désormais une large classe de méthodes[228] basées sur une excitation photothermique généralement brève, mais non nécessairement impulsionnelle, pouvant être localisée, et non uniforme. La méthode de Parker n'a cessé d'évoluer afin d'étendre son champ d'applications[229] [120] : CND[230], couches minces, matériaux multicouches[231], poreux, semi-transparents[232], composites [223], hautes températures [224, 225, 226, 181, 84, 183], etc.

Les méthodes d'estimation de diffusivités associées à la méthode flash ont également beaucoup évolué, les méthodes principales étant :

- Méthode du temps de demi-montée du thermogramme sans pertes.
- Méthode des temps partiels de Degiovanni (thermogramme avec pertes) [217].
- Méthode des moments partiels de Degiovanni (thermogramme avec pertes) [227, 219].
- Méthode des moindres carrés [228].
- La méthode logarithmique[233] [229].

---

[228] Il semble ainsi préférable d'utiliser la désignation « Méthodes flash ».

[229] Hay [120] propose entre autres, une liste bibliographique (97 références) classée par méthode.

[230] Voir également remarque page 141 pour d'autres références concernant le CND.

[231] A ce sujet, on peut citer une référence récente [234] utilisant la méthode des quadripôles thermiques, mais dont les coefficients sont exprimés à l'aide de fonctions exponentielles décroissantes (contrairement aux quadripôles classiques dont les coefficients sont des fonctions hyperboliques) afin d'éviter des problèmes de convergences numériques qui apparaissent lorsque les arguments des fonctions hyperboliques deviennent très grands (correspondant notamment au temps court).

[232] Des références pouvant compléter celles données par HAY [120] sur ce sujet, sont : [235, 236, 237, 238, 239, 240, 241]

[233] Thermitus [229] propose une estimation de la diffusivité à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt et du filtre de Kalman étendu (EKF).

A.6.2. Méthode des temps partiels Degiovanni (1977) : Estimation de la diffusivité sur un thermogramme face-arrière, avec prise en compte des pertes

Initialement l'estimation de la diffusivité était réalisée à l'aide de méthodes (présentées précédemment) n'utilisant qu'un point particulier du thermogramme sans pertes :

- temps de demi-montée du thermogramme réduit [122, 199, 200].
- temps de rupture de pente [120, 123].
- temps de décrochage [123].

La prise en compte des pertes pour la détermination de la diffusivité a ensuite été proposée par Degiovanni en 1977 à l'aide de la méthode « des temps partiels » [217]. Cette méthode utilise quatre points du thermogramme avec pertes (cf. Figure 20.18).

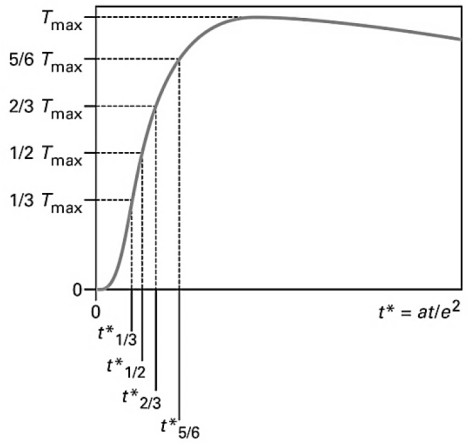


Figure 20.18 : Définition des temps caractéristiques adimensionnels relatifs à la méthode des temps partiels

A partir de ces points particuliers, la diffusivité thermique du matériau peut être obtenue à l'aide de trois expressions différentes (généralement on en prend la moyenne) :

$$\begin{cases} a = \dfrac{e^2}{t_{5/6}}\left[0,818 - 1,708\dfrac{t_{1/3}}{t_{5/6}} + 0,885\left(\dfrac{t_{1/3}}{t_{5/6}}\right)^2\right] \\ a = \dfrac{e^2}{t_{5/6}}\left[0,954 - 1,581\dfrac{t_{1/2}}{t_{5/6}} + 0,558\left(\dfrac{t_{1/2}}{t_{5/6}}\right)^2\right] \\ a = \dfrac{e^2}{t_{5/6}}\left[1,131 - 1,222\dfrac{t_{2/3}}{t_{5/6}}\right] \end{cases} \tag{26.2.1}$$

A.6.3. Méthode des moments partiels Degiovanni (1986) : Amélioration de la méthode des temps partiels, par prise en compte de l'ensemble des points du thermogramme

En 1986, Degiovanni développe la méthode « des moments partiels » [227, 219] utilisant l'ensemble des points du thermogramme, et améliorant ainsi le procédé d'estimation de la diffusivité.

La méthode consiste à calculer les moments[234] d'ordre 0 et -1, définis par :

$$\begin{cases} M_0 = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{T(t)}{T_{\max}} dt \\ M_{-1} = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,8}} \frac{1}{t} \frac{T(t)}{T_{\max}} dt \end{cases} \tag{26.3.1}$$

La diffusivité thermique est ensuite obtenue par :

$$a = e^2 \frac{F(M_{-1})}{M_0} \tag{26.3.2}$$

Avec,
$$F(M_{-1}) = 0,08548 - 0,314(0,5486 - M_{-1}) + 0,500(0,5486 - M_{-1}), \quad si\ M_{-1} > 0,27$$
$$F(M_{-1}) = -0,08519 - 0,305M_{-1}, \qquad si\ M_{-1} > 0,44$$

Remarques : Ces méthodes, qui ont désormais laissé place à des techniques d'estimations plus perfectionnées, étaient des moyens simples d'obtenir une valeur de la diffusivité, et nécessitant peu de calculs.

Une grande difficulté des méthodes flash concerne l'excitation : temps initial, durée de l'excitation, répartition spatio-temporelle…

Lorsque les évolutions technologiques et industrielles ont nécessité une plus grande précision sur la valeur de la diffusivité, ou la caractérisation de matériaux anisotropes, il y eut nécessité de faire évoluer la méthode flash classique (monodimensionnelle) de Parker (excitation uniforme sur l'ensemble de l'échantillon, pertes négligées…) car elle n'était alors plus adaptée à la demande (plus grande précision de mesures et

[234] Habituellement utilisé en probabilité et en statistique, le moment $\mathcal{M}_n(f)$ d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ d'une fonction f est défini en analyse par : $\mathcal{M}_n(f) = \int_{I \subset \mathbb{R}} x^n f(x) dx$. Les moments d'une variable aléatoire (dans ce cas f est la densité de probabilité, notée p, de la variable aléatoire) sont des indicateurs de dispersion de cette variable. En particulier, le moment d'ordre 1 est appelé moyenne, celui d'ordre 2 : variance, celui d'ordre 3 : asymétrie…

d'estimations, détermination de la diffusivité suivant les axes principaux d'anisotropie, CND…).

C'est alors que de nouveaux modèles et méthodes ont vu le jour : Méthodes de l'ailette, méthodes bidimensionnelles, tridimensionnelles, transformations intégrales…

A.6.4. Méthode de Harmathy (1964), Steere (1966), et KATAYAMA (1969) : Rapport de deux températures dans le domaine spatio-temporel

Parmi ces nouvelles méthodes, certaines s'inspirent de celle proposée par Harmathy [187, 188], [190] (pour les plus anciennes ; nous verrons que des méthodes récentes s'en inspirent également). L'idée consiste à utiliser pour l'estimation de la diffusivité, l'expression du rapport de deux températures : soit à une même position spatiale, mais à deux temps différents [187, 189] ; soit à deux positions spatiales différentes, mais pour la même évolution temporelle [190]. Ce principe sera par la suite appliqué dans le domaine fréquentiel : rapport de deux températures, soit à une même fréquence spatiale, mais à deux temps différents [176, 175, 177], soit à deux fréquences spatiales différentes, mais pour la même évolution temporelle [147, 149, 178].

Dans sa version initiale, la méthode de Harmathy est trop restrictive pour répondre aux nouvelles exigences car elle suppose un échantillon homogène, isolé (sans pertes), fin (d'épaisseur e), et d'extension longitudinale infinie, ainsi qu'une excitation uniforme en espace et en temps (échelon ou créneau) (cf. Figure 20.19).

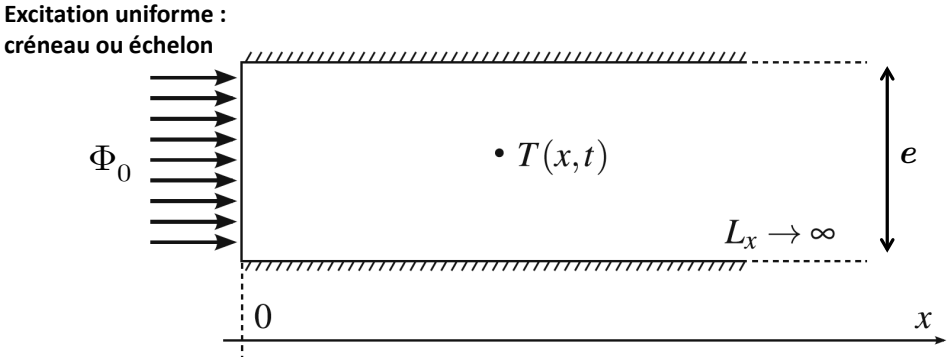


Figure 20.19 : Modèle de milieu semi-infini isolé de la méthode de Harmathy, pour la mesure de diffusivité dans le plan (modifié de [183]).

Le transfert de chaleur étant transitoire et 1D, l'évolution du champ de températures (la température initiale est supposée nulle) est donnée par :

$$T\left(x,t\right) = \frac{\Phi_0 x}{\lambda}\sqrt{\frac{at}{x^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \sqrt{\frac{x^2}{4at}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{x^2}{4at}}\right)\right) \qquad (26.4.1)$$

La méthode proposée par Harmathy et Steere [187, 188] est basée sur le rapport de deux températures mesurées en un même point spatial, mais à deux instants différents. Pour un flux de type échelon en temps, l'expression est :

$$\frac{T\left(x,2t\right)}{T\left(x,t\right)}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ierfc}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x^2}{at}}\right)}{\mathrm{ierfc}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2}{at}}\right)} \tag{26.4.2}$$

Avec, $\mathrm{ierfc}\left(x\right)=\int_x^\infty \mathrm{erfc}\left(u\right)du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-x^2\right)-x\,\mathrm{erfc}\left(x\right)$

Dans le cas d'un flux de type créneau en temps de durée τ, Steere [189] en mesurant le temps t_m correspondant au maximum de température, obtient :

$$\frac{at_m}{e^2}=0,5\frac{\tau}{t_m}\frac{\ln\left(1-\tau\,/\,t_m\right)}{\left(1-\tau\,/\,t_m\right)} \tag{26.4.3}$$

L'idée du rapport de deux températures va être reprise et modifiée en 1969 par Katayama [190]. Il utilisera le rapport de l'évolution temporelle de la température en *x=0* et *x=e*, où *e* est l'épaisseur de l'échantillon, et supposera le solide fini et isolé ou à température constante sur l'extrémité opposée au flash. Il obtiendra ainsi l'expression :

$$\frac{T\left(x=e,t\right)}{T\left(x=0,t\right)}=\exp\left(-\frac{e^2}{4at}\right)-\sqrt{\frac{\pi e^2}{4at}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{e^2}{4at}}\right) \tag{26.4.4}$$

Remarque : Ces méthodes montrent qu'en utilisant le rapport de deux températures, il est possible de s'affranchir de la connaissance de l'énergie absorbée par l'échantillon, à condition que le flux soit parfaitement uniforme et de type créneau ou échelon en temps, et que l'échantillon soit isolé. Ce constat va donner naissance à de nouveaux développements qui tenteront d'assouplir ces conditions restrictives.

A.6.5. Méthodes de Kavianipour (1977) et de Hadisaroyo (1992) : Rapport de deux températures dans l'espace de Laplace

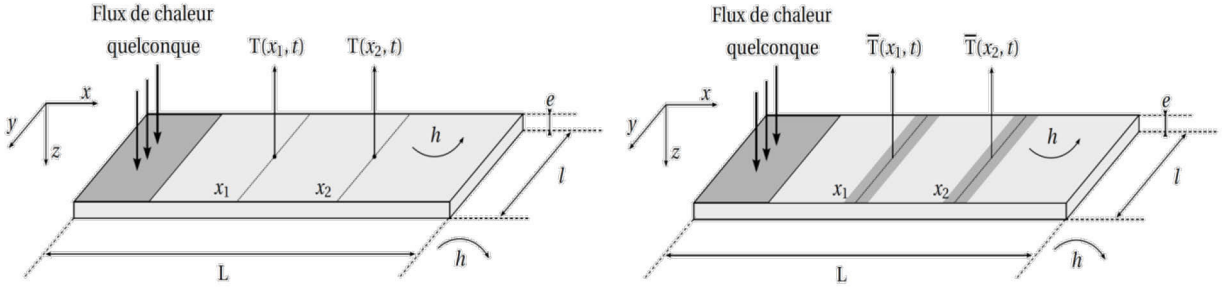
En 1977 Kavianipour & Beck [191] proposent une amélioration des méthodes précédentes en montrant qu'il est possible de s'affranchir de la connaissance de la forme temporelle de l'excitation en travaillant dans l'espace de Laplace. En supposant le matériau semi-infini, le transfert 1D transitoire, et effectuant le rapport des transformées de Laplace de deux températures mesurées à deux positions spatiales différentes, ils obtiennent :

$$\ln\left(\frac{\theta\left(x_2,p\right)}{\theta\left(x_1,p\right)}\right)=\left(x_2-x_1\right)\sqrt{\frac{p}{a}} \tag{26.5.1}$$

Avec p la variable de Laplace et $\theta\left(x,p\right)$ la transformée de Laplace de $T\left(x,t\right)-T_\infty$, où T_∞ représente la température initiale de l'échantillon et celle de l'environnement.

Hadisaroyo [192, 193] en 1992 exploitera la méthode de Kavianipour & Beck dans le cadre d'une approximation d'ailette (cf. Figure 20.20.a) afin de permettre une prise en compte des pertes. Il montrera qu'à l'aide de son modèle, il est possible d'estimer la diffusivité et le nombre de Biot à travers la relation :

$$\ln\left(\frac{\theta\left(x_2,p\right)}{\theta\left(x_1,p\right)}\right)=\left(x_2-x_1\right)\sqrt{\frac{p}{a}+\frac{2\,h}{\lambda\,e}} \tag{26.5.2}$$



a. Principe de la mesure par effet d'ailette.

b. Mesure par effet d'ailette et moyenne de zone.

Figure 20.20 : Principe de la mesure par effet d'ailette de Hadisaroyo. (Extrait de [84])

Il proposera également une extension de sa méthode à l'aide de températures moyennées (cf. Figure 20.20.b), permettant de s'affranchir de la non uniformité spatiale de l'excitation ainsi que de certains effets bidimensionnels, et d'améliorer le rapport signal sur bruit de la mesure. L'expression du modèle deviendra :

$$\ln\left(\frac{\overline{\theta}\left(x_2,p\right)}{\overline{\theta}\left(x_1,p\right)}\right)=\left(x_2-x_1\right)\sqrt{\frac{p}{a}+\frac{2\,h}{\lambda\,e}} \tag{26.5.3}$$

Avec, $\overline{\theta}\left(x_i,p\right)=\dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_{x_i}^{x_i+\Delta x}\theta\left(x,p\right)$, et Δx l'étendue spatiale sur laquelle son moyennées les deux températures.

Il fournit également la relation pour des moyennes de température effectuées sur des extensions spatiales différentes :

$$\frac{\overline{\theta}\left(x_2,p\right)}{\overline{\theta}\left(x_1,p\right)}=\frac{L_1}{L_2}\exp\left(-\left(x_2-x_1\right)\sqrt{\frac{p}{a}+\frac{2\,h}{\lambda\,e}}\right)\frac{\exp\left(-L_2\sqrt{\dfrac{p}{a}+\dfrac{2\,h}{\lambda\,e}}\right)-1}{\exp\left(-L_1\sqrt{\dfrac{p}{a}+\dfrac{2\,h}{\lambda\,e}}\right)-1} \tag{26.5.4}$$

Avec, $\overline{\theta}\left(x_i,p\right)=\dfrac{1}{L_i}\int_{x_i}^{x_i+L_i}\theta\left(x,p\right)$, et L_i les étendues spatiales (si elle sont prisent égale, on retrouve l'expression (26.5.3)) sur lesquelles son moyennées les deux températures.

Remarque : La méthode de Hadisaroyo « souffre » principalement de deux défauts : Son modèle est basé sur l'hypothèse d'ailette, il n'est par conséquent réellement valide que pour des matériaux de type plaque-mince, et sa méthode ne permet pas de prendre en compte des transferts bidimensionnels. C'est en essayant de combler ces faiblesses que sont nées de nouvelles méthodes. Il faudra attendre les travaux de Philippi [175, 176, 177] (1994) pour que les lacunes de la méthode de Hadisaroyo soient comblées.

A.6.6. Méthode[235] de Remy (2005) pour l'estimation de diffusivité longitudinale des isolants

Dans le cadre de la caractérisation d'isolants, Remy proposera en 2005 [194] une méthode d'estimation basée sur le modèle d'ailette, mais permettant de s'affranchir de la connaissance des conditions aux limites du problème. L'excitation sera un échelon, afin de permettre un apport suffisant d'énergie pour avoir un signal exploitable (cf. Figure 20.21).

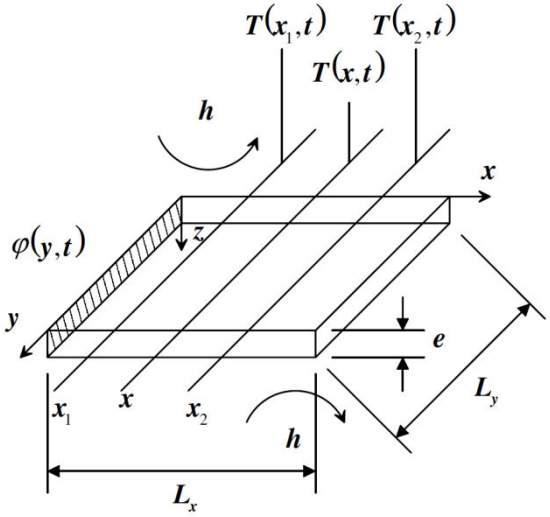


Figure 20.21 : Méthode de mesure basée sur le modèle de l'ailette, et proposée par Remy

Le principe consiste à moyenner les températures suivant l'axe (Oy), et à exprimer dans l'espace de Laplace le champ de températures $\theta\left(x,p\right)$ au sein du matériau à l'aide d'une combinaison linéaire des températures (transformées) en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2. En nommant $T_1\left(x_1,t\right)$, $T_2\left(x_2,t\right)$ les températures mesurées par

[235] Cette méthode est quelque peu différente du principe de la méthode flash, mais l'idée utilisée sera reprise dans la partie traitant de la présentation de la nouvelle méthode proposée pour la caractérisation locale à haute température de matériaux anisotropes.

caméra infrarouge, et $\theta_1(x_1,p)$, $\theta_2(x_2,p)$ respectivement leur transformée de Laplace. Le transfert de chaleur est déterminé dans l'espace de Laplace, par :

$$\begin{cases} \theta(x,p) = \theta_1(x_1,p)F_1(x,p) + \theta_2(x_2,p)F_2(x,p) \\ F_1(x,p) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma(x_2-x)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma(x_2-x_1)\right)} \\ F_2(x,p) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma(x-x_1)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma(x_2-x_1)\right)} \\ \gamma = \sqrt{\dfrac{p}{a_x} + \dfrac{2h}{e\lambda_x}} \end{cases} \tag{26.6.1}$$

La parfaite connaissance des conditions aux limites n'est alors pas nécessaire, et la solution dans le domaine spatio-temporel est donnée par :

$$\begin{cases} T(x,t) = T_1(x_1,t) \overset{t}{\otimes} f_1(x,t) + T_2(x_2,t) \overset{t}{\otimes} f_2(x,t) \\ f_i(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\left(F_i(x,p)\right), \qquad \forall i \in \{1;2\} \end{cases} \tag{26.6.2}$$

La transformation inverse de Laplace se fera numériquement à l'aide de l'algorithme de de-Hoog, et les températures $T_1(x_1,t)$, $T_2(x_2,t)$ seront mesurées par caméra infrarouge. Les estimations seront effectuées dans le domaine temporel afin d'exploiter l'important nombre de mesures disponibles (contrairement aux fréquences spatiales exploitables), et ainsi améliorer le rapport signal sur bruit.

Une étude de sensibilité définira les positions de mesures optimales (en $x=0$ et $x=L_x$), et il sera montré que des pertes modélisées par un coefficient d'échange non uniforme (pour un échantillon vertical) peuvent être prises en compte par un coefficient d'échange uniforme équivalent, sans qu'il y ait d'effets apparents sur les estimations de la diffusivité, à condition que l'excitation soit réalisée sur l'un des côtés (gauche ou droit), mais pas sur les bords haut ou bas.

- ***Remarque*** :
  - La méthode développée par Remy propose une solution pour la caractérisation de matériaux isolants pour lesquels il est généralement nécessaire d'apporter une énergie conséquente, compte tenu de la faible diffusion et de l'aspect dominant des échanges (pertes) avec l'extérieur.
  - Cependant, l'excitation se doit d'être impulsionnelle (Dirac), et les hypothèses de l'approximation du modèle de l'ailette réalisées. De plus, il ne doit pas y avoir de présence de source entre les deux zones de mesures.

Modélisation et Résolution du problème de diffusion 3D

« Résolution du problème de diffusion 3D transitoire avec conditions aux limites non homogènes, par utilisation de transformations intégrales et du principe de superposition »

A.7. Modélisation et Résolution du problème de diffusion 3D

A.7.1. Introduction

Lorsque l'on désire caractériser thermiquement des matériaux anisotropes, il est nécessaire de pouvoir modéliser le transfert de chaleur ayant lieu au sein du matériau. En fonction de l'excitation et de la géométrie du matériau, il est parfois possible de modéliser le transfert de chaleur par des modèles simplifiés tels que : hypothèse d'excitation Dirac en temps, modèles d'ailette, conduction 1D (éventuellement par prise de moyenne suivant les autres directions), diffusion 2D avec condition aux limites homogènes, etc…

Cependant, la caractérisation thermique à très hautes températures de matériaux conducteurs nécessite généralement d'avoir des temps d'excitation plus long (pour apporter plus d'énergie) et des portes échantillons[236] de diffusivités non négligeables vis-à-vis de celle de l'échantillon à caractériser, et il est ainsi difficile de pouvoir négliger les transferts aux bords de l'échantillon, à travers le support par exemple.

Par ailleurs, la caractérisation d'isolants nécessite également d'avoir des temps d'excitation plus long et/ou de travailler sur des zones d'étude réduites afin d'améliorer le rapport signal sur bruit.

Il devient alors nécessaire de pouvoir modéliser des transferts de chaleur 2D ou 3D instationnaires avec prise en compte de conditions aux limites non homogènes.

Nous nous restreindrons dans la suite de ce document aux matériaux homogènes, opaques, et présentant des directions principales d'anisotropie (matrice[237] diagonale de conductivités), et nous supposerons que les directions du repère d'étude sont suivant ces directions principales.

[236] Il s'avère qu'expérimentalement, les portes-échantillons résistant aux hautes températures ont fréquemment des diffusivités proches de celles des matériaux à étudier, ou de façon plus générale, des diffusivités non négligeables vis-à-vis de la conduction thermique.

[237] Ou plus généralement : tenseur d'ordre 2.

A.7.2. Présentation du problème

Le but final de cette modélisation est de permettre la caractérisation thermique à hautes températures de matériaux anisotropes et/ou d'isolants, avec prise en compte de conditions aux limites non homogènes. Ce point sera traité plus en détail dans la partie « Méthodes d'estimations ».

Une photographie du banc expérimental qui sera utilisé est donnée Figure 20.22, et une vue schématique en est donnée Figure 20.23.

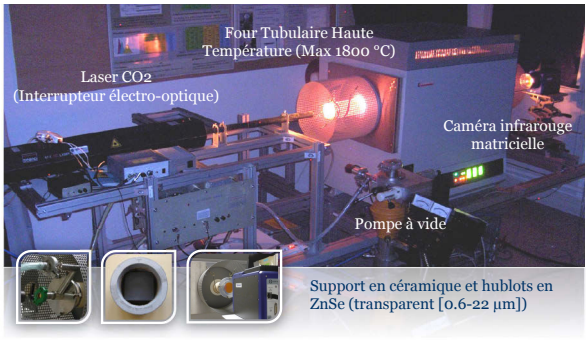


Figure 20.22 : Banc expérimental de caractérisation à haute température

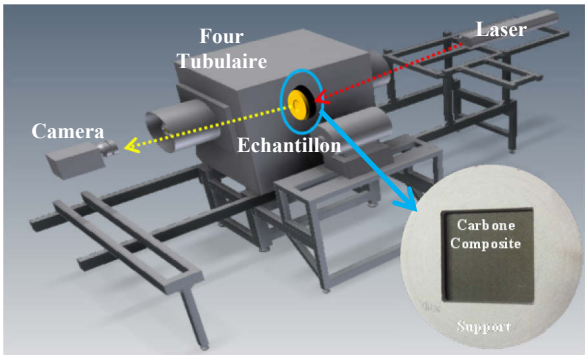


Figure 20.23 : Vue schématique de l'expérience

L'échantillon à caractériser est supposé de forme parallélépipédique et de dimensions $\left\{l_x, l_y, L_z\right\}$, maintenu en position verticale (suivant (Oy)) à l'aide d'un support sur ses cotés latéraux. Il subit sur l'une de ses faces (« face avant ») une sollicitation sous forme de flux à variables séparables $\varphi_{flash}\left(x,y,t\right) \equiv \phi\left(x,y\right)\cdot\psi\left(t\right)$, et la mesure du champ de température se fait sur une partie (ou totalité) de la face opposée à celle de l'excitation (« face arrière ») comme illustré sur la Figure 20.23. De plus, le champ de température initial $T\left(x,y,z,t=0\right)$ et la température extérieure T_{ext} sont supposés constants et égaux.

Soient, $\left\{L_x, L_y, L_z\right\}$ les dimensions de la zone parallélépipédique d'étude (inférieure ou égale à celles de l'échantillon total). Les pertes radio-conducto-convectives[238] avec l'extérieur sont linéarisées (faible écart de température) et prises en compte par des coefficients d'échange global constants et uniformes notés h_{z_0} et h_{z_L}. Le flux échangé avec l'extérieur (relation de type Newton) par la « face avant » de l'échantillon est noté $\varphi_{z_0}\left(x,y,t\right) = h_{z_0}\left(T\left(x,y,0,t\right) - T_{ext}\right) \equiv h_{z_0}\left(T_{z_0} - T_{ext}\right)$ et celui échangé par la « face arrière » $\varphi_{z_L}\left(x,y,t\right) = h_{z_L}\left(T\left(x,y,L_z,t\right) - T_{ext}\right) \equiv h_{z_L}\left(T_{z_L} - T_{ext}\right)$.

Une vue schématique 3D de l'échantillon et de la zone d'étude est donnée Figure 20.24.

[238] Les pertes sont supposées être dues à des effets radiatifs, conductifs, et convectifs.

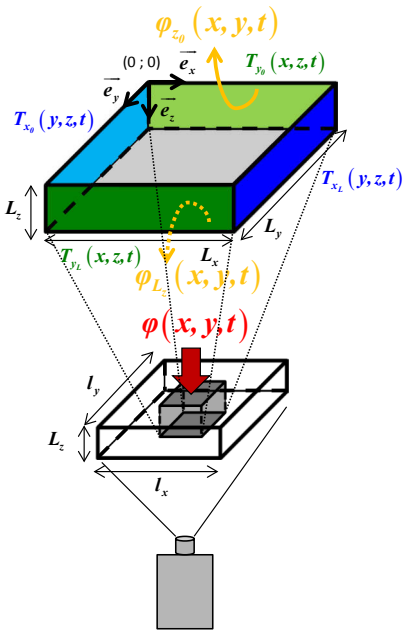


Figure 20.24 : Vue schématique 3D de l'échantillon et de la zone d'étude

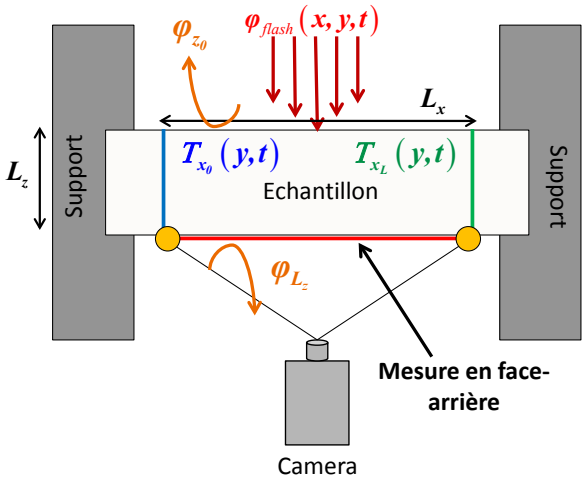


Figure 20.25 : Vue du dessus de l'échantillon et de son support

Les méthodes de caractérisations qui vont être proposées par la suite reposent sur le fait que les conditions aux limites en x et y soient uniformes suivant l'épaisseur z.

Ainsi, pour la résolution du problème 3D, on supposera les conditions aux limites $\left\{T_{x_0}(y,z,t), T_{x_L}(y,z,t), T_{y_0}(x,z,t), T_{y_L}(x,z,t)\right\}$ (expérimentalement mesurées par la caméra) uniformes dans l'épaisseur au sens de l'approximation de l'ailette (faible écart de température suivant l'épaisseur), ce qui peut être réalisé en utilisant une excitation localisée et une extension spatiale de mesure tenant compte des temps caractéristiques de diffusion.

Une vue du dessus de l'échantillon et de son support est donné Figure 20.25, sur laquelle seules les conditions aux limites en x uniformes suivant l'épaisseur $\left\{T_{x_0}(y,t), T_{x_L}(y,t)\right\}$ sont indiquées.

A.7.3. Mise en équation du problème général et décomposition par superposition

En supposant les conditions aux limites en x et y uniforme suivant l'épaisseur, pour le domaine physique étudié Ω de frontière $\partial\Omega$, nous avons :

$$\left\{T_{x_0}(y,z,t),T_{x_L}(y,z,t),T_{y_0}(x,z,t),T_{y_L}(x,z,t)\right\} \equiv \left\{T_{x_0}(y,t),T_{x_L}(y,t),T_{y_0}(x,t),T_{y_L}(x,t)\right\}$$

Concernant les conditions aux limites en z, on notera :

$$\left\{T(x,y,0,t),T(x,y,L_z,t)\right\} \equiv \left\{T_{z_0}(x,y,t),T_{z_L}(x,y,t)\right\}$$

Les différents indices sont utilisés afin de rappeler que ce sont des conditions aux limites. De plus, on posera :

$$\begin{cases} T^*(x,y,z,t) = T(x,y,z,t) - T_{ext} \\ \Delta T_\xi = T_\xi - T_{ext}, \qquad \text{avec} \quad \xi \in \left\{x_0\,;x_L\,;y_0\,;y_L\right\} \end{cases} \tag{27.3.1}$$

La notation ΔT_ξ est utilisée à la place de T^*_ξ afin de rappeler le caractère particulier de ces conditions aux limites. C'est-à-dire qu'elles sont d'une part supposées homogènes suivant l'épaisseur, et d'autre part, qu'elles sont mesurées expérimentalement (par caméra infrarouge).

Le problème considéré avant changement de variables (27.3.1) est illustré Figure 20.26, et après changement de variables Figure 20.27.

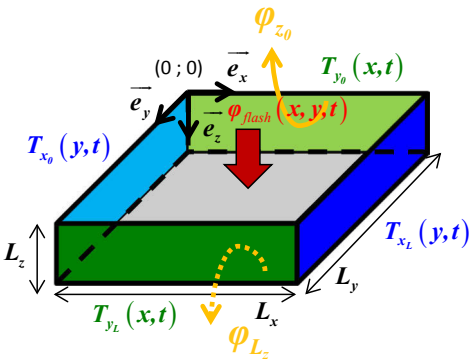


Figure 20.26 : Illustration schématique du problème 3D avant changement de variables

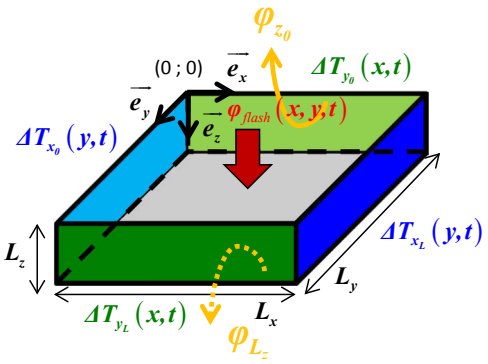


Figure 20.27 : Illustration schématique du problème 3D après changement de variables

Le système d'équation régissant le transfert de chaleur (diffusion) au sein d'un matériau orthotrope, homogène et opaque, et illustré Figure 20.26, est[239] :

[239] On appellera Ω le domaine spatial du problème physique, et $\partial\Omega$ sa frontière.

$$
\begin{cases}
\lambda_x \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}, \ \ \forall t > 0, \ \ \forall x, y, z \in \Omega \backslash \partial\Omega \\
x = 0 \quad ; \qquad T\left(x,y,z,t\right)_{x=0} = T_{x_0}\left(y,t\right) = T_{ext} + \Delta T_{x_0}\left(y,t\right) \\
x = L_x \ ; \qquad T\left(x,y,z,t\right)_{x=L_x} = T_{x_L}\left(y,t\right) = T_{ext} + \Delta T_{x_L}\left(y,t\right) \\
y = 0 \quad ; \qquad T\left(x,y,z,t\right)_{y=0} = T_{y_0}\left(x,t\right) = T_{ext} + \Delta T_{y_0}\left(x,t\right) \\
y = L_y \ ; \qquad T\left(x,y,z,t\right)_{y=L_y} = T_{y_L}\left(x,t\right) = T_{ext} + \Delta T_{y_L}\left(x,t\right) \\
z = 0 \quad ; \qquad -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi_{flash}\left(x,y,t\right) - h_{z_0}\left(T_{z_0}\left(x,y,t\right) - T_{ext}\right) \\
z = L_z \ ; \qquad -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L_z} = h_{z_L}\left(T_{z_L}\left(x,y,t\right) - T_{ext}\right) \\
t = 0 \quad ; \qquad T\left(x,y,z,t\right)_{t=0} = T_{ext}
\end{cases}
\tag{27.3.2}
$$

Afin de pouvoir résoudre « simplement » ce problème, il est avantageux de rendre un maximum de conditions aux limites homogènes par changement de variables et d'appliquer le principe de superposition (linéarité du système différentiel (27.3.2)).

Ainsi, en utilisant le changement de variables défini en (27.3.1), le système différentiel (27.3.2) devient :

$$
\begin{cases}
\lambda_x \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial T^*}{\partial t}, \qquad \forall t > 0, \ \ \forall x, y, z \in \Omega \backslash \partial\Omega \\
\left.\begin{array}{ll}
x = 0 \quad ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{x=0} = \Delta T_{x_0}\left(y,t\right) \\
x = L_x \ ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{x=L_x} = \Delta T_{x_L}\left(y,t\right)
\end{array}\right\} \text{Sous-Problème 2} \\
\left.\begin{array}{ll}
y = 0 \quad ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{y=0} = \Delta T_{y_0}\left(x,t\right) \\
y = L_y \ ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{y=L_y} = \Delta T_{y_L}\left(x,t\right)
\end{array}\right\} \text{Sous-Problème 3} \\
\left.\begin{array}{ll}
z = 0 \quad ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi_{flash}\left(x,y,t\right) - h_{z_0} T^*_{z_0}\left(x,y,t\right) \\
z = L_z \ ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = h_{z_L} T^*_{z_L}\left(x,y,t\right)
\end{array}\right\} \text{Sous-Problème 1} \\
t = 0 \quad ; \qquad T^*\left(x,y,z,t\right)_{t=0} = 0
\end{cases}
\tag{27.3.3}
$$

Le système différentiel (27.3.3) peut être décomposé par superposition en la somme de trois sous-problèmes, tels que chaque sous-problème n'est que les conditions aux limites indiqués par « Sous-Problème i », $\forall i \in [\![1;3]\!]$ dans (27.3.3), comme conditions aux limites non homogènes.

A.7.4. Résolution du Sous-Problème 1 dans le domaine transformé[240]

Le système d'équations aux dérivées partielles correspondant au sous-problème 1 est donné par (27.4.1).

Le problème physique décrit par le système (27.4.1) est supposé causal, c'est-à-dire que $T^*\left(x,y,z,t\right)=0\,,\ \forall t\leq 0\,.$

Afin d'obtenir une solution analytique à ce problème, nous allons lui appliquer des transformations intégrales (une de Laplace et deux de Fourier-Sinus) permettant de transformer l'équation aux dérivées partielles en équation différentielle ordinaire.

Les transformations intégrales adaptées[241] sont déterminées par l'ordre des opérateurs différentiels (dérivées partielles) ainsi que le type de conditions aux limites.

$$\begin{cases} \lambda_x \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}+\lambda_y \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}+\lambda_z \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}=\rho c\dfrac{\partial T^*}{\partial t}, & \forall t>0,\ \forall x,y,z\in\Omega\backslash\partial\Omega \\ x=0 \quad ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{x=0}=0 \\ x=L_x \ ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{x=L_x}=0 \\ y=0 \quad ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{y=0}=0 \\ y=L_y \ ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{y=L_y}=0 \\ z=0 \quad ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=0}=\varphi_{flash}\left(x,y,t\right)-h_{z_0}T^*_{z_0}\left(x,y,t\right) \\ z=L_z \ ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=L_z}=h_{z_L}T^*_{z_L}\left(x,y,t\right) \\ t=0 \quad ; & T^*\left(x,y,z,t\right)_{t=0}=0 \end{cases} \tag{27.4.1}$$

Les transformations intégrales adaptées au problème (27.4.1) sont :

- Une Transformation de Laplace Unilatérale appliquée à la variable temporelle t, car l'opérateur différentiel associé à cette variable est d'ordre 1, et l'évolution du champ de température est supposée causale et à support[242] limité en temps.

[240] On parle également d'espace transformé, mais le terme « espace » est à comprendre dans son sens mathématique général, en tant qu'espace de dimension n. En physique, l'espace est alors de dimension 4, trois pour les coordonnées spatiales (l'espace géométrique), et une pour la coordonnée temporelle (le temps). Cependant, afin d'éviter toute confusion, nous emploieront le terme domaine lorsqu'il s'agit à la fois de variables spatiales et temporelle.

[241] De nombreuses applications des transformations intégrales à la résolution des problèmes de transfert de chaleur peuvent être trouvées dans [197].

- Une Transformation de Fourier-Sinus[243] Finie appliquée aux variables spatiales x et y, car les opérateurs différentiels associés à ces variables sont d'ordre deux, et les conditions aux limites (du domaine spatial fini) sont de type Dirichlet homogène (température nulle).

- ***Remarques*** :

  - Si l'opérateur différentiel est d'ordre 2 et les conditions aux limites (d'un domaine spatial fini) sont du type Neumann homogène (flux nuls), alors la transformation intégrale adaptée est une Transformation de Fourier-Cosinus Finie.

  - Notons qu'en utilisant les transformations intégrales de type Fourier, dans notre cas cela a pour conséquence de périodiser[244] spatialement de façon virtuelle le champ de température. La solution au problème initial correspondra donc à la restriction de la solution trouvée à l'intervalle (borné) physique.

Une autre façon (moins générale) d'obtenir de façon indirecte les transformations intégrales adaptées consiste à utiliser la méthode de la « séparation des variables », les valeurs propres et fonctions propres étant alors déterminées à l'aide du problème aux valeurs propres apparaissant après séparation des variables. Cependant, cette méthode présuppose que la solution soit à variable séparable (ce qui n'est pas toujours le cas), et est ainsi un facteur limitant que ne possède pas la méthode proposée basée sur la détermination de noyaux diagonalisant les opérateurs différentiels[245].

---

[242] La notion de « support » est à entendre au sens mathématique du terme, et correspond ainsi au plus petit ensemble fermé tel que la fonction soit non nulle. Le terme « support limité » indique donc que celui-ci doit également être borné. Cette notion, bien que mathématique, a une importance capitale dans l'existence de la transformation intégrale considérée, et plus particulièrement pour le support de la convolution.

[243] Dans la suite, nous omettrons le qualificatif « Finie », mais il sera toujours sous-entendu.

[244] La périodisation n'est pas directement liée à l'utilisation des transformations intégrales de Fourier (puisque celles-ci généralisent la décomposition de fonctions périodiques aux fonctions non périodiques), mais au fait que nous ayons à résoudre des problèmes non singuliers de Sturm-Liouville qui admettent comme fonctions propres (formant une base topologique de l'espace de Hilbert) des fonctions harmoniques de Fourier généralisées.

[245] Une méthode analogue consiste à déterminer le noyau qui diagonalise (totalement) l'équation aux dérivées partielles (EDP) du système (27.4.1). Lorsque la diagonalisation est complète, l'EDP devient une simple équation algébrique dans l'espace transformé. Les difficultés d'obtention de la solution du problème sont alors « rejetées » sur le calcul des transformations inverses.

A.7.4.1. Transformation de Laplace Unilatérale en temps

On notera respectivement la Transformation de Laplace Unilatérale[246] $\mathscr{L}_t$ en temps du champ de température $T^*\left(x,y,z,t\right)$ et du flux $\varphi_{flash}\left(x,y,t\right)$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_t\Big[T^*\left(x,y,z,t\right)\Big]\left(p\right) = \int\limits_0^{+\infty} T^*\left(x,y,z,t\right)e^{-pt}dt = \theta\left(x,y,z,p\right),\ \forall p \in \mathbb{C} \\ \mathscr{L}_t\Big[\varphi_{flash}\left(x,y,t\right)\Big]\left(p\right) = \phi\left(x,y\right)\cdot\int\limits_0^{+\infty}\psi\left(t\right)e^{-pt}dt = \phi\left(x,y\right)\cdot\Psi\left(p\right) \end{cases} \tag{27.4.2}$$

Remarque : Dans ce document, pour les différentes transformations $\mathscr{T}$ on utilisera la notation abusive $\mathscr{T}_{x_k}\Big[f\left(x_1,...,x_k,...,x_n\right)\Big]\left(\kappa\right) = F\left(x_1,...,\kappa,...,x_n\right)$, pour désigner que la transformation $\mathscr{T}$ de variable κ s'applique à la fonction f selon la variable (considérée comme muette) x_k.

En appliquant la transformation de Laplace au système d'équation (27.4.1), l'équation de la chaleur (équation aux dérivées partielles « EDP ») devient :

$$\begin{aligned} &\lambda_x\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \lambda_y\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \lambda_z\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \rho c\left(p\theta - \underbrace{T^*\left(x,y,z,t=0\right)}_{=0}\right) \\ &\Leftrightarrow \lambda_x\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \lambda_y\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \lambda_z\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \rho c p\theta \end{aligned} \tag{27.4.3}$$

Et les conditions aux limites (restantes), deviennent :

$$\begin{cases} x = 0 \quad ; & \theta\left(x,y,z,p\right)\Big|_{x=0} \equiv \theta_{x_0}\left(y,z,p\right) = 0 \\ x = L_x \ ; & \theta\left(x,y,z,p\right)\Big|_{x=L_x} \equiv \theta_{x_L}\left(y,z,p\right) = 0 \\ y = 0 \quad ; & \theta\left(x,y,z,p\right)\Big|_{y=0} \equiv \theta_{y_0}\left(x,z,p\right) = 0 \\ y = L_y \ ; & \theta\left(x,y,z,p\right)\Big|_{y=L_y} \equiv \theta_{y_L}\left(x,z,p\right) = 0 \\ z = 0 \quad ; & -\lambda_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} = \phi\left(x,y\right)\cdot\Psi\left(p\right) - h_{z_0}\theta_{z_0}\left(x,y,p\right) \\ z = L_z \ ; & -\lambda_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=L_z} = h_{z_L}\theta_{z_L}\left(x,y,p\right) \end{cases} \tag{27.4.4}$$

[246] Dans la suite du document la dénomination « Transformation de Laplace Unilatérale en temps » sera abusivement remplacé par « Transformation de Laplace », en sous-entendant à chaque fois qu'elle est unilatérale et appliquée à la variable temporelle.

A.7.4.2. Transformation de Fourier-Sinus suivant (Ox) et (Oy)

Les transformations intégrales de Fourier suivant les variables de l'espace ont pour but de diagonaliser l'opérateur différentiel définit par (27.4.3) et (27.4.4). Ainsi, par exemple, la transformation Fourier-Sinus suivant x doit diagonaliser l'opérateur différentiel d'ordre 2 correspondant à la variable x associé aux conditions aux limites afférentes de type Dirichlet homogène (températures nulles). Cela revient à résoudre un problème régulier de Sturm-Liouville qui admet sur un espace de Hilbert[247] une famille de fonctions sinus définit par $X_n = \sin\left(\alpha_n x\right)$ comme base de fonctions propres. Les nombres $\alpha_n = \left.\frac{n\pi}{L_x}\right|_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont les valeurs propres du problème. Par symétrie du problème, les variables x et y jouent le même rôle, ainsi, les fonctions propres associé au problèmes suivant y auront pour expression $Y_m = \sin\left(\beta_m y\right)$, de valeurs propres $\beta_m = \left.\frac{m\pi}{L_y}\right|_{m\in\mathbb{N}^*}$.

Ces fonctions propres étant orthogonales et définies à une constante multiplicative près, il est possible si besoin de rendre les bases orthonormées en choisissant $X_n = \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\left(\alpha_n x\right)$, et $Y_m = \sqrt{\frac{2}{L_y}}\sin\left(\beta_m y\right)$.

A.7.4.2.1. *Transformation de Fourier-Sinus suivant (Ox)*

On notera respectivement la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_x^s$ suivant x du champ de température $\theta\left(x,y,z,p\right)$ et du flux $\phi\left(x,y\right)\cdot\Psi\left(p\right)$ par :

[247] La notion d'espace de Hilbert est notamment utile pour donner un sens aux notions de bases infinies mais dénombrables de fonctions, et de convergence en moyenne quadratique d'une décomposition (de fonctions) sur ces bases. Bien que la notion de convergence semble à première vue une considération purement mathématicienne (Fourier a développé sa théorie sans se préoccuper de la notion de convergence, et prétendait même que toutes fonctions étaient décomposables en « série de Fourier »), nous verrons dans la partie concernant les estimations de paramètres que celle-ci s'avérera de première importance pour l'explication d'erreurs d'estimation de certains modèles. En particulier, la notion de classe d'équivalence et d'égalité au sens presque partout expliquera certaines impossibilités d'effectuer des estimations avec une précision arbitrairement choisie. Pour s'en convaincre, une conséquence célèbre de la convergence ponctuelle et non uniforme, lors de fonctions discontinues, est l'apparition de phénomène de Gibbs.

$$\begin{cases} \mathscr{F}_x^s\big[\theta\big(x,y,z,p\big)\big]\big(\alpha_n\big) = \displaystyle\int_0^{L_x} \theta\big(x,y,z,p\big)\sin\big(\alpha_n x\big)dx = \tilde{\theta}_n\big(\alpha_n,y,z,p\big) \\ \mathscr{F}_x^s\big[\phi\big(x,y\big)\cdot\Psi\big(p\big)\big]\big(\alpha_n\big) = \Psi\big(p\big)\cdot\displaystyle\int_0^{L_x}\phi\big(x,y\big)\sin\big(\alpha_n x\big)dx = \tilde{\Phi}_n\big(\alpha_n,y\big)\cdot\Psi\big(p\big) \\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L_x}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases} \tag{27.4.5}$$

En appliquant la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_x^s$ à l'équation de la chaleur (27.4.3), et en supposant que les opérateurs de dérivation et d'intégration peuvent commuter, nous avons :

$$\lambda_x\int_0^{L_x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\big(\alpha_n x\big)dx + \lambda_y\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n}{\partial y^2} + \lambda_z\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n}{\partial z^2} = \rho cp\tilde{\theta}_n \tag{27.4.6}$$

En effectuant une intégration par partie et en utilisant les conditions aux limites, $\displaystyle\int_0^{L_x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\big(\alpha_n x\big)dx$ se simplifie en :

$$\int_0^{L_x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin\big(\alpha_n x\big)dx = \underbrace{\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\big(\alpha_n x\big)\right]_0^{L_x}}_{=0} - \alpha_n\underbrace{\int_0^{L_x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\big(\alpha_n x\big)dx}_{=\alpha_n\tilde{\theta}_n} = -\alpha_n^2\tilde{\theta}_n \tag{27.4.7}$$

L'expression (27.4.7) se simplifie grâce aux conditions aux limites et aux propriétés des fonctions propres. En effet, les fonctions propres imposent $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\big(\alpha_n x\big)\right]_0^{L_x} = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=L_x}\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{\cancel{L_x}}\cancel{L_x}\right)}_{=0} - \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}\underbrace{\sin\big(0\big)}_{=0} = 0 \tag{27.4.8}$$

Et on a :

$$\int_0^{L_x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\big(\alpha_n x\big)dx = \underbrace{\big[\theta\cos\big(\alpha_n x\big)\big]_0^{L_x}}_{=0} + \alpha_n\underbrace{\int_0^{L_x}\theta\sin\big(\alpha_n x\big)dx}_{=\tilde{\theta}_n} = \alpha_n\tilde{\theta}_n \tag{27.4.9}$$

Car les conditions aux limites $\theta_{x_0}\big(y,p\big) = \theta_{x_L}\big(y,p\big) = 0$, impliquent :

$$\big[\theta\cos\big(\alpha_n x\big)\big]_0^{L_x} = \underbrace{\theta_{x_L}}_{=0}\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{L_x}}\cancel{L_x}\right) - \underbrace{\theta_{x_0}}_{=0}\cos\big(0\big) = 0 \tag{27.4.10}$$

Ainsi, l'expression (27.4.6) se simplifie en :

$$-\alpha_n^2\lambda_x\tilde{\theta}_n + \lambda_y\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n}{\partial y^2} + \lambda_z\frac{\partial^2\tilde{\theta}_n}{\partial z^2} = \rho cp\tilde{\theta}_n \tag{27.4.11}$$

En appliquant la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_x^s$ aux conditions aux limites (27.4.4), nous avons[248] :

$$\begin{cases} y = 0 \quad ; & \tilde{\theta}_{y_0}\left(\alpha_n, z, p\right) = 0 \\ y = L_y \; ; & \tilde{\theta}_{y_L}\left(\alpha_n, z, p\right) = 0 \\ z = 0 \quad ; & -\lambda_z\left.\dfrac{\partial\tilde{\theta}_n}{\partial z}\right|_{z=0} = \tilde{\Phi}_n\left(\alpha_n, y\right)\cdot\Psi\left(p\right) - h_{z_0}\tilde{\theta}_{z_0}\left(\alpha_n, y, p\right) \\ z = L_z \; ; & -\lambda_z\left.\dfrac{\partial\tilde{\theta}_n}{\partial z}\right|_{z=L_z} = h_{z_L}\tilde{\theta}_{z_L}\left(\alpha_n, y, p\right) \end{cases} \tag{27.4.12}$$

La transformation suivant x étant finalisée, il ne reste plus qu'à effectuer la transformation de Fourier-Sinus suivant y afin de transformer l'équation aux dérivées partielle (EDP) (27.4.11) en équation différentielle ordinaire (EDO).

A.7.4.2.2. *Transformation de Fourier-Sinus suivant (Oy)*

La variable y jouant le même rôle que x dans le système définit par (27.4.3) et (27.4.4), la démarche est analogue[249] à celle utilisée pour la transformation Fourier-Sinus suivant x.

On notera respectivement la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_y^s$ suivant y du champ de température $\tilde{\theta}_n\left(\alpha_n, y, z, p\right)$ et du flux $\tilde{\Phi}_n\left(\alpha_n, y\right)\cdot\Psi\left(p\right)$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{F}_y^s\left[\tilde{\theta}_n\left(\alpha_n, y, z, p\right)\right]\left(\beta_m\right) = \displaystyle\int_0^{L_y}\tilde{\theta}_n\sin\left(\beta_m y\right)dy = \tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m, z, p\right) \\ \mathscr{F}_y^s\left[\tilde{\Phi}_n\left(\alpha_n, y\right)\cdot\Psi\left(p\right)\right]\left(\beta_m\right) = \Psi\left(p\right)\cdot\displaystyle\int_0^{L_y}\tilde{\Phi}_n\sin\left(\beta_m y\right)dy = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right)\cdot\Psi\left(p\right) \\ \beta_m = \dfrac{m\pi}{L_y}, \qquad \forall m\in\mathbb{N}^* \end{cases} \tag{27.4.13}$$

En appliquant la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_y^s$ à l'équation (27.4.11), et en supposant que les opérateurs de dérivation et d'intégration peuvent commuter, nous avons :

---

[248] Afin d'alléger l'écriture, les conditions aux limites suivant x ne sont pas rappelées dans (27.4.12). En effet, elles ne seront pas nécessaires aux transformations intégrales qui suivront.

[249] Les variables x et y « jouent » le même rôle, car les opérateurs différentiels et les conditions aux limites sont semblables pour les deux variables.

$$-\alpha_n^2\lambda_x\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} - \beta_m^2\lambda_y\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} + \lambda_z\underbrace{\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{\partial z^2}}_{\equiv\frac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz^2}} = \rho cp\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} \tag{27.4.14}$$

En posant $a_\xi = \dfrac{\lambda_\xi}{\rho c}$ avec $\xi \in \Big\{x\,,y\,,z\Big\}$, et $\gamma = \sqrt{\dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_z}\right) + \beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_z}\right)}$, l'équation (27.4.14) peut s'écrire[250] :

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz^2} - \left[\frac{p}{a_z} + \alpha_n^2\left(\frac{a_x}{a_z}\right) + \beta_m^2\left(\frac{a_y}{a_z}\right)\right]\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} = 0 \tag{27.4.15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz^2} - \gamma^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} = 0, \qquad \gamma \in \mathbb{C} \tag{27.4.16}$$

En appliquant la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_y^s$ aux conditions aux limites (27.4.12), nous avons[251] :

$$\begin{cases} z = 0 \quad ; & -\lambda_z\left.\dfrac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=0} = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\big(\alpha_n,\beta_m\big)\cdot\Psi\big(p\big) - h_{z_0}\tilde{\tilde{\theta}}_{z_0}\big(\alpha_n,\beta_m,p\big) \\ z = L_z \; ; & -\lambda_z\left.\dfrac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=L_z} = h_{z_L}\tilde{\tilde{\theta}}_{z_L}\big(\alpha_n,\beta_m,p\big) \end{cases} \tag{27.4.17}$$

A.7.4.3. Solution du Sous-Problème 1 dans le domaine transformé

Le sous-problème 1 initialement définie par le système d'équations aux dérivées partielles (27.4.1) est devenu un simple système différentielle ordinaire dans l'espace transformé, et défini par :

[250] Les paramètres thermiques $\Big\{\rho c\,;\lambda\Big\}$ sont tous supposés strictement positifs, ce qui implique que les diffusivités sont toujours définies et strictement positives.

[251] Pour les même raisons que pour (27.4.12), les conditions aux limites suivant y ne sont pas rappelées dans (27.4.17).

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz^2} - \gamma^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} = 0, & \gamma \in \mathbb{C} \\ z = 0 \quad ; & -\lambda_z \left.\dfrac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=0} = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right) \cdot \Psi\left(p\right) - h_{z_0} \tilde{\tilde{\theta}}_{z_0}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right) \\ z = L_z \ ; & -\lambda_z \left.\dfrac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=L_z} = h_{z_L} \tilde{\tilde{\theta}}_{z_L}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right) \\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L_x}, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \beta_m = \dfrac{m\pi}{L_y}, & \forall m \in \mathbb{N}^* \\ \gamma = \sqrt{\dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_z}\right) + \beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_z}\right)} \end{cases} \tag{27.4.18}$$

A.7.4.3.1. *Expression de la solution générale du Sous-Problème 1*

- *<u>Solution générale de l'équation différentielle homogène</u>*

La solution générale de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz^2} - \gamma^2\left(p\right)\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} = 0, \qquad \gamma \in \mathbb{C} \tag{27.4.19}$$

Peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m} = K_1 \operatorname{ch}\left(\gamma z\right) + K_2 \operatorname{sh}\left(\gamma z\right), \qquad \forall\left(K_1, K_2\right) \in \mathbb{C}^2 \tag{27.4.20}$$

- *<u>Relation issue de la condition aux limites en z=0</u>*

A partir de la condition aux limites en *z=0*, et de l'expression (27.4.20), on a :

$$-\lambda_z \left.\frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=0} = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right) \cdot \Psi\left(p\right) - h_{z_0} \underbrace{\tilde{\tilde{\theta}}_{z_0}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)}_{=\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m, z=0, p\right)}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda_z \gamma \left(K_1 \underbrace{\operatorname{sh}\left(\gamma z\right)}_{=0} + K_2 \underbrace{\operatorname{ch}\left(\gamma z\right)}_{=1} \right)_{z=0} = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right) \cdot \Psi\left(p\right) - h_{z_0} \left(K_1 \underbrace{\operatorname{ch}\left(0\right)}_{1} + K_2 \underbrace{\operatorname{sh}\left(0\right)}_{=0} \right) \tag{27.4.21}$$

Ce qui se simplifie en :

$$h_{z_0} K_1 - \lambda_z \gamma K_2 = \tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right) \cdot \Psi\left(p\right) \tag{27.4.22}$$

- ***Relation issue de la condition aux limites en $z=L_z$***

De façon analogue, à partir de la condition aux limites en $z=L_z$, et de l'expression (27.4.20), on a :

$$\begin{aligned} -\lambda_z \left.\frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}}{dz}\right|_{z=L_z} &= h_{z_L} \underbrace{\tilde{\tilde{\theta}}_{z_L}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)}_{=\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m,z=L_z,p\right)} \\ \Leftrightarrow -\lambda_z\gamma\left(K_1\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+K_2\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)\right) &= h_{z_L}\left(K_1\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+K_2\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)\right) \end{aligned} \tag{27.4.23}$$

Ce qui s'écrit également :

$$\left(h_{z_L}\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)\right)K_1+\left(h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)\right)K_2=0 \tag{27.4.24}$$

- ***Détermination des constantes d'intégration K_1,K_2***

Pour déterminer les constantes d'intégration $K_1,K_2\in\mathbb{C}$, il suffit de résoudre le système formé des équations (27.4.22) et (27.4.24), définit par :

$$\begin{cases} \underbrace{h_{z_0}}_{A}K_1-\underbrace{\lambda_z\gamma}_{-B}K_2=\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\cdot\Psi\left(p\right) \\ \underbrace{\left(h_{z_L}\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)\right)}_{C}K_1+\underbrace{\left(h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)\right)}_{D}K_2=0 \end{cases} \tag{27.4.25}$$

Système dans lequel afin d'alléger la résolution, on pourrait poser :

$$\begin{cases} A=h_{z_0} \\ \mathrm{B}=-\lambda_z\gamma \\ C=h_{z_L}\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right) \\ D=h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right) \end{cases} \tag{27.4.26}$$

Le système (27.4.25) peut se résoudre à l'aide de la méthode de Cramer (à condition que le déterminant du système soit non nul), et on obtient ainsi :

$$\begin{cases} K_1=\dfrac{\left[h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)\right]\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)}{\lambda_z^2\gamma^2\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\left(h_{z_0}+h_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+h_{z_0}h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)} \\ K_2=\dfrac{-\left[h_{z_L}\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)\right]\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)}{\lambda_z^2\gamma^2\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\left(h_{z_0}+h_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+h_{z_0}h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)} \end{cases} \tag{27.4.27}$$

- ***Expression de la solution générale du Sous-Problème 1***

A l'aide des expressions (27.4.20) et (27.4.27), on en déduit que la solution du sous-problème 1 s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)=\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)\times$$
$$\frac{\left[\lambda_z\gamma\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)\right]\mathrm{ch}\left(\gamma z\right)-\left[\lambda_z\gamma sh\left(\gamma L_z\right)+h_{z_L}\,\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)\right]\mathrm{sh}\left(\gamma z\right)}{\lambda_z^2\gamma^2\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\lambda_z\gamma\left(h_{z_0}+h_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+h_{z_0}h_{z_L}\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)} \quad (27.4.28)$$

Qui peut s'écrire en fonction du nombre de Biot $Bi_\xi=\dfrac{h_\xi L_z}{\lambda_z}$ avec $\xi\in\left\{z_0,z_L\right\}$, et du paramètre[252] $\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)=\dfrac{\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)}{\rho cL_z}$, sous la forme :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)=\frac{L_z^2}{a_z}\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)\times$$
$$\frac{\left(\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma z\right)-\left(\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma z\right)}{\gamma L_z\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\left(Bi_{z_0}+Bi_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_0}Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}} \quad (27.4.29)$$

Avec, $\forall n,m\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{L_x}$, $\beta_m=\dfrac{m\pi}{L_y}$, et $\gamma=\sqrt{\dfrac{p}{a_z}+\alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_z}\right)+\beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_z}\right)}$.

En posant :

$$\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)=$$
$$\frac{L_z^2}{a_z}\frac{\left(\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma z\right)-\left(\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma z\right)}{\gamma L_z\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\left(Bi_{z_0}+Bi_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_0}Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}} \quad (27.4.30)$$

L'équation (27.4.29) peut se mettre sous la forme :

---

[252] La dénomination de ce paramètre est généralement due au fait qu'il s'inspire de la définition de la température moyenne limite définie en thermodynamique pour un matériaux ayant une énergie Q et des parois adiabatiques. Sous hypothèse que la seule variable d'état modifiée soit la température, on a alors : $dQ=\rho cVdT\Rightarrow T_{\lim}=\dfrac{Q}{\rho cV}=\dfrac{Q}{\rho cL_xL_yL_z}$. En appelant φ_0 la densité de flux de l'excitation, le matériau reçoit alors une énergie $Q=\varphi_0L_xL_y$. D'où, $T_{\lim}=\dfrac{\varphi_0}{\rho cL_z}$. En étendant cette relation aux harmoniques du flux, on obtient la relation proposée : $\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)=\dfrac{\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)}{\rho cL_z}$

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)=\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)\cdot\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)\qquad(27.4.31)$$

Cette écriture en dehors du fait « d'alléger » l'expression de $\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)$, elle trouvera son intérêt à travers une interprétation physique de $\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)$ qui sera donnée dans la section A.7.4.3.2 qui suit.

Du point de vue expérimental, n'ayant accès qu'aux faces extérieures de l'échantillon, et plus particulièrement aux faces avant[253] ($z=0$) et arrière ($z=L_z$), seuls ces deux cas sont d'un intérêt pratique pour la caractérisation thermique de matériaux.

A.7.4.3.2. *Expression de la solution générale du Sous-Problème 1 en $z=0$ et $z=L_z$*

- ***Expression de la solution générale du Sous-Problème 1 en $z=0$***

En posant $z=0$ dans l'expression (27.4.29), on obtient l'expression de l'évolution dans l'espace transformé du champ de température en face avant, qui a pour expression (cf. (27.4.21) et (27.4.27)) :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m,z=0,p\right)\equiv\tilde{\tilde{\theta}}_{z_0}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)=K_1$$

$$\Leftrightarrow\tilde{\tilde{\theta}}_{z_0}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)=\frac{\dfrac{L_z^2}{a_z}\left(\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma L_z+\dfrac{Bi_{z_0}Bi_{z_L}}{\gamma L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\left(Bi_{z_0}+Bi_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)}\qquad(27.4.32)$$

- ***Expression de la solution générale du Sous-Problème 1 en $z=L_z$***

En posant $z=L_z$ dans l'expression (27.4.29) et en se souvenant que $\mathrm{ch}^2\left(x\right)-\mathrm{sh}^2\left(x\right)=1$, on obtient l'expression de l'évolution du champ de température en face arrière dans l'espace transformé, qui a pour expression :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m,z=L_z,p\right)\equiv\tilde{\tilde{\theta}}_{z_L}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)$$

$$\Leftrightarrow\tilde{\tilde{\theta}}_{z_L}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)=\frac{\dfrac{L_z^2}{a_z}\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)}{\left(\gamma L_z+\dfrac{Bi_{z_0}Bi_{z_L}}{\gamma L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\left(Bi_{z_0}+Bi_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)}\qquad(27.4.33)$$

---

[253] Rappelons que les notions de face avant et arrière ne sont pas liées directement aux valeurs de la variable z, mais à la réalité physique de l'expérience. En effet, la « face avant » correspond à la surface excitée (sous forme de flux) de l'échantillon, et « la face arrière » est définit comme étant la face opposée à la « face avant ». Ainsi, par changement d'axe, il serait tout à fait possible (pour des raisons calculatoires, par exemple) de définir la « face avant » en $z=L_z$ et la « face arrière » en $z=0$.

Remarques : En posant $\xi \in \left\{z_0, z_L\right\}$, on remarque que les expressions du champ de température (dans l'espace transformé) en face avant et arrière s'écrivent sous la forme[254] $\tilde{\tilde{\theta}}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right) = \mathscr{H}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right) \cdot \tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n, \beta_m\right)\Psi\left(p\right)$. Cette dernière expression exprime que dans l'espace transformé il existe une relation linéaire entre l'excitation $\left(\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m} = \rho c L_z \tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\right)$ et l'évolution du champ de température. En fonction du point de vue adopté, on peut attribuer différentes dénomination à $\mathscr{H}_{z_\xi}$.

En traitement du signal (ou en automatique), $\mathscr{H}_{z_\xi}$ s'interprète comme étant la réponse impulsionnelle généralisée, ou fonction de transfert généralisée[255] du système (le matériau), car si l'excitation $\dfrac{\varphi_{flash}\left(x, y, t\right)}{\rho c L_z}$ peut être modélisée par la distribution de Dirac[256] $\delta\left(x, y, t\right)$, alors on a dans l'espace transformé : $\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n, \beta_m\right)\Psi\left(p\right) / \left(\rho c L_z\right) = 1 \Rightarrow \tilde{\tilde{\theta}}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right) = \mathscr{H}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)$.

En revanche, si l'on adopte le point de vue de l'électrocinétique, en considérant la température comme l'analogue de la tension, et le flux (ou la température limite)

---

[254] A chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, l'exposant rappelant le sous-problème auquel se réfèrent les différents termes sera omit. Ainsi, par exemple, on notera $\mathscr{H}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)$ au lieu de $\mathscr{H}^{SP1}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)$, et $\tilde{\tilde{\theta}}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)$ au lieu $\tilde{\tilde{\theta}}^{SP1}_{z_\xi}\left(\alpha_n, \beta_m, p\right)$ …

[255] L'emploi du terme « généralisée » dans les notions de réponse impulsionnelle et fonction de transfert est dû au fait que l'excitation et la réponse sont ici de nature physique différente, contrairement au cadre l'emploi classique de la notion de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert en traitement du signal.

[256] La distribution (singulière) de Dirac δ est définie (mathématiquement) par : $\delta : \begin{array}{c} \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \mapsto \mathbb{C} \\ \phi \to \left\langle \delta, \phi \right\rangle \triangleq \delta\left(\phi\right) = \phi\left(\vec{0}\right) \end{array}$, où $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ représente l'espace des fonctions test.

A cette écriture (définition), le physicien préfère généralement une écriture (impropre) inspirant une notion de distribution régulière (voire, de fonction) à la distribution singulière δ, et la définit (improprement) par : $\left\langle \delta\left(\vec{x}\right), \phi\left(\vec{x}\right)\right\rangle \triangleq \int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} \delta\left(\vec{x}\right)\phi\left(\vec{x}\right) d^n\mathscr{V} = \phi\left(\vec{0}\right)$, avec $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un multiplet (représentant un point) de l'espace $\mathbb{R}^n$, et $d^n\mathscr{V} \triangleq \prod_{i=1}^{n} dx_i$ l'hyper-volume élémentaire centré autour du point représentatif de $\vec{x}$. Cette dernière notation est d'un intérêt calculatoire « pratique », mais fait perdre de vue la nature de δ comme étant une fonctionnelle linéaire complexe également appelée forme linéaire (application d'un ensemble de fonctions dans un ensemble de complexes), et peu ainsi porter à confusion en laissant penser que δ est une fonction ayant pour valeur numérique $\delta\left(\vec{x}\right)$ en $\vec{x}$ …

comme l'analogue de l'intensité, alors $\mathscr{H}_{z_\xi}$ s'interprète comme étant l'impédance opérationnelle (ou symbolique, ou isomorphe) généralisée[257] du système.

Enfin, notons que du point de vue mathématique, $\mathscr{H}_{z_\xi}$ porte généralement le nom de fonction de Green associée au problème. Ces fonctions de Green servent de fonctions « de base » à partir desquelles peuvent s'exprimer les solutions du problème pour différentes conditions aux limites (ou termes sources).

A.7.5. Résolution du Sous-Problèmes 2 dans le domaine transformé

Afin de résoudre le sous-problème 2, on utilisera une démarche analogue à celle utilisée pour résoudre le sous-problème 1. On appliquera une transformation de Laplace unilatérale pour la variable temporelle, et deux transformations de Fourier pour les variables spatiales y et z. Cependant, contrairement au sous-problème 1, les deux transformations de Fourier seront ici différentes car les conditions aux limites suivant y et suivant z n'imposent pas les mêmes fonctions propres. Ainsi, nous appliquerons une transformation Fourier-Sinus suivant (Oy), et une transformation Fourier-Cosinus suivant (Oz). Une conséquence importante[258] est que zéro est valeur propre pour la transformation Fourier-Cosinus suivant (Oz).

Le système d'équations aux dérivées partielles correspondant au sous-problème 2 est défini par :

[257] Le terme « généralisée » qualifie ici le fait que l'impédance dépende non seulement de la variable de Laplace, mais également des variables de Fourier, considérées comme paramètres pour la transformée de Laplace.

[258] En effet, c'est la valeur propre 0, admettant pour fonction propre 1, qui permet d'identifier à un facteur multiplicatif près l'harmonique d'ordre 0 du champ de température à la valeur moyenne de ce champ suivant la direction (Oz).

$$
\begin{cases}
\lambda_x \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial T^*}{\partial t}, & \forall t > 0,\ \forall x, y, z \in \Omega \backslash \partial\Omega \\
x = 0 \quad ; & T^*\left(x, y, z, t\right)_{x=0} = \Delta T_{x_0}\left(y, t\right) \\
x = L_x \ ; & T^*\left(x, y, z, t\right)_{x=L_x} = \Delta T_{x_L}\left(y, t\right) \\
y = 0 \quad ; & T^*\left(x, y, z, t\right)_{y=0} = 0 \\
y = L_y \ ; & T^*\left(x, y, z, t\right)_{y=L_y} = 0 \\
z = 0 \quad ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \\
z = L_z \ ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=L_z} = 0 \\
t = 0 \quad ; & T^*\left(x, y, z, t\right)_{t=0} = 0
\end{cases}
\tag{27.5.1}
$$

Remarque : Comme précédemment, dans cette section, afin d'alléger l'écriture, nous ne rappellerons pas les conditions aux limites qui ne serviront pas aux transformations intégrales suivantes.

A.7.5.1. Transformation de Laplace Unilatérale en temps et Transformation de Fourier-Sinus suivant (Oy)

En appliquant au système (27.5.1) une transformation de Laplace unilatérale en temps et une transformation de Fourier-Sinus suivant (Oy), et en conservant la démarche et les notations définies pour le sous-problème 1, on obtient :

$$
\begin{cases}
\lambda_x \dfrac{\partial^2 \tilde{\theta}_m}{\partial x^2} - \beta_m^2 \lambda_y \tilde{\theta}_m + \lambda_z \dfrac{\partial^2 \tilde{\theta}_m}{\partial z^2} = \rho c p \tilde{\theta}_m \\
x = 0 \quad ; & \tilde{\theta}_{x_0}\left(\beta_m, z, p\right) = \Delta\tilde{\theta}_{x_0}\left(\beta_m, p\right) \\
x = L_x \ ; & \tilde{\theta}_{x_L}\left(\beta_m, z, p\right) = \Delta\tilde{\theta}_{x_L}\left(\beta_m, p\right) \\
z = 0 \quad ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \\
z = L_z \ ; & -\lambda_z \left.\dfrac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial z}\right|_{z=L_z} = 0 \\
\beta_m = \dfrac{m\pi}{L_y}, & \forall m \in \mathbb{N}^*
\end{cases}
\tag{27.5.2}
$$

A.7.5.2. Transformation de Fourier-Cosinus suivant (Oz)

La transformation Fourier suivant z doit diagonaliser l'opérateur différentiel d'ordre 2 correspondant à la variable z associé aux conditions aux limites afférentes de type Neumann homogène (flux nuls). Cela revient à résoudre un problème régulier de Sturm-

Liouville qui admet sur un espace de Hilbert une famille de fonctions cosinus définit par $Z_k = \cos\big(\xi_k z\big)$ comme base de fonctions propres. Les nombres $\xi_k = \left.\dfrac{k\pi}{L_z}\right|_{k\in\mathbb{N}}$ sont les valeurs propres du problème. Notons que cette fois-ci, zéro est valeur propre du problème.

Ces fonctions propres étant orthogonales et définies à une constante multiplicative près, il est possible si besoin de rendre la base orthonormée en choisissant $Z_k = \sqrt{\dfrac{2}{L_z}}\cos\big(\xi_k z\big)$.

On notera la transformation de Fourier-Cosinus $\mathscr{F}_z^{\,c}$ suivant z du champ de température $\tilde{\theta}_m\big(x,\beta_m,z,p\big)$, par :

$$\begin{cases} \mathscr{F}_z^{\,s}\Big(\tilde{\theta}_m\big(x,\beta_m,z,p\big)\Big)\big(\xi_k\big) = \displaystyle\int_0^{L_z} \tilde{\theta}_m \cos\big(\xi_k z\big)dz = \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}\big(x,\beta_m,\xi_k,p\big) \\ \xi_k = \dfrac{k\pi}{L_z}, \qquad \forall k\in\mathbb{N} \end{cases} \tag{27.5.3}$$

En l'appliquant à l'équation de la chaleur du système (27.5.2), et en supposant que les opérateurs de dérivations et d'intégrations peuvent commuter, on obtient :

$$\lambda_x \frac{\partial^2\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{\partial x^2} - \beta_m^2\lambda_y\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} + \lambda_z\int_0^{L_z}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_m}{\partial z^2}\cos\big(\xi_k z\big)dz = \rho cp\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} \tag{27.5.4}$$

En effectuant une intégration par partie et en utilisant les conditions aux limites, $\lambda_z\displaystyle\int_0^{L_z}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_m}{\partial z^2}\cos\big(\xi_k z\big)dz$ se simplifie en :

$$\lambda_z\int_0^{L_z}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_m}{\partial z^2}\cos\big(\xi_k z\big)dz = \underbrace{\left[\frac{\partial\tilde{\theta}_m}{\partial z}\cos\big(\xi_k z\big)\right]_0^{L_z}}_{=0} + \xi_k\underbrace{\int_0^{L_z}\frac{\partial\tilde{\theta}_m}{\partial z}\sin\big(\xi_k z\big)dz}_{=-\xi_k\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}} = -\xi_k^2\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} \tag{27.5.5}$$

L'expression (27.5.5) se simplifie grâce aux conditions aux limites et aux propriétés des fonctions propres. En effet, les conditions aux limites impliquent $\forall k\in\mathbb{N}$:

$$\left[\frac{\partial\tilde{\theta}_m}{\partial z}\cos\big(\xi_k z\big)\right]_0^{L_z} = \underbrace{\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_m}{\partial z}\right|_{z=L_z}}_{=0}\cos\left(\frac{k\pi}{\cancel{L_z}}\cancel{L_z}\right) - \underbrace{\left.\frac{\partial\tilde{\theta}_m}{\partial z}\right|_{z=0}}_{=0}\cos\big(0\big) = 0 \tag{27.5.6}$$

Et on a :

$$\int_0^{L_z} \frac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial z} \sin\left(\xi_k z\right) dz = \underbrace{\left[\tilde{\theta}_m \sin\left(\xi_k z\right)\right]_0^{L_z}}_{=0} - \xi_k \underbrace{\int_0^{L_z} \tilde{\theta}_m \cos\left(\xi_k z\right) dx}_{=\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}} = -\xi_k^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} \tag{27.5.7}$$

Car les fonctions propres imposent $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\left[\tilde{\theta}_m \sin\left(\xi_k z\right)\right]_0^{L_z} = \tilde{\theta}_{z_L} \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{\cancel{L_z}} \cancel{L_z}\right)}_{=0} - \tilde{\theta}_{z_0} \underbrace{\sin\left(0\right)}_{=0} = 0 \tag{27.5.8}$$

Ainsi, l'expression (27.5.4) se simplifie en :

$$\lambda_x \underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{\partial x^2}}_{\equiv \frac{d^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{dx^2}} - \beta_m^2 \lambda_y \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} - \xi_k^2 \lambda_z \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = \rho c p \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} \tag{27.5.9}$$

En posant $a_\xi = \dfrac{\lambda_\xi}{\rho c}$ avec $\xi \in \left\{x, y, z\right\}$, et $\kappa = \sqrt{\dfrac{p}{a_x} + \beta_m^2 \left(\dfrac{a_y}{a_x}\right) + \xi_k^2 \left(\dfrac{a_z}{a_x}\right)}$, l'équation (27.5.9) peut s'écrire[259] :

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{dx^2} - \left[\frac{p}{a_x} + \beta_m^2 \left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \xi_k^2 \left(\frac{a_z}{a_x}\right)\right] \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = 0 \tag{27.5.10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{dx^2} - \kappa^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = 0, \qquad \kappa \in \mathbb{C} \tag{27.5.11}$$

En appliquant la transformation de Fourier-Sinus $\mathscr{F}_z^c$ aux conditions aux limites suivant x de (27.5.2), nous avons[260] :

$$\begin{cases} x = 0 \quad ; & \tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, \xi_k, p\right) = \Delta \tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, p\right) \\ x = L_x \; ; & \tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, \xi_k, p\right) = \Delta \tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, p\right) \end{cases} \tag{27.5.12}$$

A.7.5.3. Solution du Sous-Problème 2 dans le domaine transformé

Le sous-problème 2 initialement définie par le système d'équations aux dérivées partielles (27.5.1) est devenu un simple système différentielle ordinaire dans l'espace transformé, et défini par :

---

[259] Les paramètres thermiques $\left\{\rho c ; \lambda\right\}$ sont tous supposés strictement positifs, ce qui implique que les diffusivités sont toujours définies et strictement positives.

[260] Afin d'alléger l'écriture, les conditions aux limites suivant y et z ne sont pas rappelées dans (27.5.12), car elles ne sont pas nécessaires pour les calculs restant.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{dx^2} - \kappa^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = 0, & \kappa \in \mathbb{C} \\ x = 0 \quad ; & \tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, \xi_k, p\right) = \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, p\right) \\ x = L_x \ ; & \tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, \xi_k, p\right) = \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, p\right) \\ \beta_m = \dfrac{m\pi}{L_y}, & \forall m \in \mathbb{N}^* \\ \xi_k = \dfrac{k\pi}{L_z}, & \forall k \in \mathbb{N} \\ \kappa = \sqrt{\dfrac{p}{a_x} + \beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_x}\right) + \xi_k^2\left(\dfrac{a_z}{a_x}\right)} \end{cases} \tag{27.5.13}$$

- ***Solution générale de l'équation différentielle homogène***

La solution générale de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}}{dx^2} - \kappa^2 \tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = 0, \qquad \kappa \in \mathbb{C} \tag{27.5.14}$$

Peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k} = k_1 \operatorname{ch}\left(\kappa z\right) + k_2 \operatorname{sh}\left(\kappa z\right), \forall \left(k_1, k_2\right) \in \mathbb{C}^2 \tag{27.5.15}$$

- ***Détermination des constantes d'intégration k_1,k_2***

La condition aux limites en $x=0$ implique :

$$k_1 = \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, p\right) \tag{27.5.16}$$

En tenant compte de (27.5.16), la condition aux limites en $x=L_x$ impose :

$$\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, p\right)\operatorname{ch}\left(\kappa L_x\right) + k_2 \operatorname{sh}\left(\kappa L_x\right) L_x = \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, p\right) \tag{27.5.17}$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m, p\right)}{\operatorname{sh}\left(\kappa L_x\right)} - \frac{\operatorname{ch}\left(\kappa L_x\right)}{\operatorname{sh}\left(\kappa L_x\right)}\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m, p\right) \tag{27.5.18}$$

- ***Expression de la solution générale du Sous-Problème 2***

En substituant (27.5.16) et (27.5.18) dans (27.5.15), et en se rappelant que $\operatorname{sh}\left(a\right)\operatorname{ch}\left(b\right) - \operatorname{sh}\left(b\right)\operatorname{ch}\left(a\right) = \operatorname{sh}\left(a-b\right)$, on obtient :

$$\tilde{\tilde{\theta}}^{SP2}_{m,k}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)=\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\left(\kappa\left(L_x-x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)}}_{\substack{\mathscr{H}^{SP2}_{x_0}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\\ \text{terme associé à la CL } x=0}}\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m,p\right)+\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\left(\kappa x\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)}}_{\substack{\mathscr{H}^{SP2}_{x_L}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\\ \text{terme associé à la CL } x=L_x}}\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m,p\right) \tag{27.5.19}$$

Avec, $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \beta_m=\dfrac{m\pi}{L_y}$; $\forall k\in\mathbb{N},\ \xi_k=\dfrac{k\pi}{L_z}$; et $\kappa=\sqrt{\dfrac{p}{a_x}+\beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_x}\right)+\xi_k^2\left(\dfrac{a_z}{a_x}\right)}$.

En posant[261] :

$$\begin{cases}\mathscr{H}^{SP2}_{x_0}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)=\dfrac{\mathrm{sh}\left(\kappa\left(L_x-x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)}\\ \mathscr{H}^{SP2}_{x_L}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)=\dfrac{\mathrm{sh}\left(\kappa x\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)}\end{cases} \tag{27.5.20}$$

L'expression (27.5.19) s'écrit :

$$\tilde{\tilde{\theta}}^{SP2}_{m,k}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)=\underbrace{\mathscr{H}^{SP2}_{x_0}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m,p\right)}_{\text{terme associé à la CL } x=0}+\underbrace{\mathscr{H}^{SP2}_{x_L}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m,p\right)}_{\text{terme associé à la CL } x=L_x} \tag{27.5.21}$$

Ainsi, on voit que le champ de température solution du sous-problème 2 est la superposition des contributions des conditions aux limites en $x=0$ et $x=L_x$. En effet, il aurait été possible de décomposer le sous-problème 2 en deux autres sous-problèmes, ne contenant chacun qu'une condition aux limites non nulle, et par superposition, on aurait retrouvé le résultat (27.5.19).

A.7.6. Résolution du Sous-Problèmes 3 dans le domaine transformé

Le système d'équations aux dérivées partielles correspondant au sous-problème 3 est défini par :

[261] Pour les sous-problèmes 2 et 3, on notera les réponses impulsionnelles associées aux différentes conditions aux limites avec un indice rappelant la condition aux limites afférentes. Cependant, il ne faudra pas confondre cette notation avec celle utilisée pour le sous-problème 1, dont l'indice indique la valeur de la variable à laquelle est évaluée la réponse impulsionnelle.

$$
\begin{cases}
\lambda_x \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \lambda_z \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = \rho c \dfrac{\partial T^*}{\partial t}, & \forall t > 0,\ \forall x, y, z \in \Omega \backslash \partial\Omega \\
x = 0 \quad ; & T^*\big(x, y, z, t\big)_{x=0} = 0 \\
x = L_x \ ; & T^*\big(x, y, z, t\big)_{x=L_x} = 0 \\
y = 0 \quad ; & T^*\big(x, y, z, t\big)_{y=0} = \Delta T_{y_0}\big(x, t\big) \\
y = L_y \ ; & T^*\big(x, y, z, t\big)_{y=L_y} = \Delta T_{y_L}\big(x, t\big) \\
z = 0 \quad ; & -\lambda_z \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0 \\
z = L_z \ ; & -\lambda_z \dfrac{\partial T^*}{\partial z}\bigg|_{z=L_z} = 0 \\
t = 0 \quad ; & T^*\big(x, y, z, t\big)_{t=0} = 0
\end{cases}
\tag{27.6.1}
$$

Les variables x et y jouant un rôle parfaitement symétrique dans le problème physique complet (27.3.3), le sous-problème 3 est l'analogue exact du sous-problème 2. Sa résolution peut donc se déduire de celle du sous-problème 2 en remplaçant x par y dans les différentes équations.

Ainsi, la solution du sous-problème 3 s'écrit :

$$
\tilde{\tilde{\theta}}^{SP3}_{n,k}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big) = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\big(\chi\big(L_y - y\big)\big)}{\mathrm{sh}\big(\chi L_y\big)}}_{\mathscr{H}^{SP3}_{y_0}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)} \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_0}\big(\alpha_n, p\big)}_{\text{terme associé à la CL } y=0} + \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\big(\chi y\big)}{\mathrm{sh}\big(\chi L_y\big)}}_{\mathscr{H}^{SP3}_{y_L}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)} \Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_L}\big(\alpha_n, p\big)}_{\text{terme associé à la CL } y=L_y}
\tag{27.6.2}
$$

Avec, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L_x}$; $\forall k \in \mathbb{N},\ \xi_k = \dfrac{k\pi}{L_z}$; et $\chi = \sqrt{\dfrac{p}{a_y} + \alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_y}\right) + \xi_k^2\left(\dfrac{a_z}{a_y}\right)}$.

De la même manière que pour (27.5.21), en posant :

$$
\begin{cases}
\mathscr{H}^{SP3}_{y_0}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big) = \dfrac{\mathrm{sh}\big(\chi\big(L_y - y\big)\big)}{\mathrm{sh}\big(\chi L_y\big)} \\
\mathscr{H}^{SP3}_{y_L}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big) = \dfrac{\mathrm{sh}\big(\chi y\big)}{\mathrm{sh}\big(\chi L_y\big)}
\end{cases}
\tag{27.6.3}
$$

L'expression (27.6.2) s'écrit également :

$$
\tilde{\tilde{\theta}}^{SP3}_{n,k}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big) =
\underbrace{\mathscr{H}^{SP3}_{y_0}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_0}\big(\alpha_n, p\big)}_{\text{terme associé à la CL } y=0} + \underbrace{\mathscr{H}^{SP3}_{y_L}\big(\alpha_n, y, \xi_k, p\big)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_L}\big(\alpha_n, p\big)}_{\text{terme associé à la CL } y=L_y}
\tag{27.6.4}
$$

A.7.7. Expression du champ de température complet par superposition et transformations inverses

Les trois sous-problèmes composant le problème complet (27.3.3) ont étés résolus dans le domaine transformé afin de simplifier les démarches calculatoires. Il reste désormais à exprimer ces diverses solutions dans le domaine spatio-temporel à l'aide des transformations inverses associées à chacune des transformations intégrales utilisées.

La solution du problème complet dans le domaine réel s'exprimera alors par :

$$T_{complet}\left(x,y,z,t\right) = \sum_{i=1}^{3} T_{SPi}\left(x,y,z,t\right) \tag{27.7.1}$$

En conservant les notations précédentes :

$$\left|\begin{array}{ll} X_n = \sin\left(\alpha_n x\right) & \left|\alpha_n = n\pi \,/\, L_x,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\right. \\ Y_m = \sin\left(\beta_m y\right) & \left|\beta_m = m\pi \,/\, L_y, \forall m \in \mathbb{N}^*\right. \\ Z_k = \cos\left(\xi_k z\right) & \left|\xi_k = k\pi \,/\, L_z,\ \ \forall k \in \mathbb{N}\right. \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \gamma = \sqrt{\dfrac{p}{a_z} + \alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_z}\right) + \beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_z}\right)} \\ \kappa = \sqrt{\dfrac{p}{a_x} + \beta_m^2\left(\dfrac{a_y}{a_x}\right) + \xi_k^2\left(\dfrac{a_z}{a_x}\right)} \\ \chi = \sqrt{\dfrac{p}{a_y} + \alpha_n^2\left(\dfrac{a_x}{a_y}\right) + \xi_k^2\left(\dfrac{a_z}{a_y}\right)} \end{array}\right. \tag{27.7.2}$$

En notant l'inverse de Laplace d'une fonction $F\left(x,y,z,p\right)$ de la variable complexe p, et d'abscisse de sommabilité[262] α_0, par :

$$\mathscr{L}_t^{-1}\left[F\left(x,y,z,p\right)\right]\left(t\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F\left(x,y,z,p\right)e^{pt}dp = f\left(x,y,z,t\right), \quad \forall\alpha > \alpha_0 \tag{27.7.3}$$

Et en se rappelant que les fonctions propres forment des bases de projection du champ de température sur un espace de Hilbert, les solutions dans le domaine spatio-temporel des différents sous-problèmes, s'expriment sous les formes suivantes :

- ***Expression du champ de température du sous problème 1***

La solution (champ de température) dans le domaine spatio-temporel du sous-problème 1, s'écrit sous la forme[263] :

[262] Egalement appelée abscisse de convergence.

$$T_{SP1}\left(x,y,z,t\right)=\mathscr{L}_t^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)\right]\left(t\right) \tag{27.7.4}$$

Par linéarité de la transformation de Laplace, (27.7.4) s'écrit également :

$$T_{SP1}\left(x,y,z,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\mathscr{L}_t^{-1}\left[\tilde{\tilde{\theta}}_{n,m}^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)\right]\left(t\right) \tag{27.7.5}$$

$$\Leftrightarrow T_{SP1}\left(x,y,z,t\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,p\right)\cdot\tilde{\tilde{\Phi}}_{n,m}\left(\alpha_n,\beta_m\right)\Psi\left(p\right)\right]\left(t\right) \tag{27.7.6}$$

Avec,

$$\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)=$$

$$\frac{L_z^2}{a_z}\frac{\left(\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma z\right)-\left(\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}\right)\mathrm{sh}\left(\gamma z\right)}{\gamma L_z\,\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)+\left(Bi_{z_0}+Bi_{z_L}\right)\mathrm{ch}\left(\gamma L_z\right)+Bi_{z_0}Bi_{z_L}\dfrac{\mathrm{sh}\left(\gamma L_z\right)}{\gamma L_z}} \tag{27.7.7}$$

En notant :

$$\begin{cases}H_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,t\right)=\mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,p\right)\right]\left(t\right)\\ \psi\left(t\right)=\mathscr{L}_t^{-1}\left[\Psi\left(p\right)\right]\left(t\right)\end{cases} \tag{27.7.8}$$

Et en se rappelant qu'un produit de fonctions dans l'espace de Laplace (espace image) correspond à un produit de convolution dans l'espace original, l'expression (27.7.6) devient :

$$T_{SP1}\left(x,y,z,t\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\tilde{\tilde{T}}_{\lim_{n,m}}\left(\alpha_n,\beta_m\right)H_z^{SP1}\left(\alpha_n,\beta_m,z,t\right)\right)\overset{t}{\otimes}\psi\left(t\right) \tag{27.7.9}$$

- ***<u>Expression du champ de température du sous problème 2</u>***

En procédant de façon analogue à celle utilisée pour le sous-problème 1, on obtient pour le sous-problème 2 :

$$T_{SP2}\left(x,y,z,t\right)=\mathscr{L}_t^{-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\right]\left(t\right) \tag{27.7.10}$$

---

[263] Dans les différentes expressions, on notera le carré de la norme d'une fonction f dans l'espace L_2 (espace des fonctions de carré sommable, également appelé de carré intégrable) par $\left\|f\right\|_2^2$.

En remplaçant $\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)$ par son expression :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{m,k}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right) = \underbrace{\mathscr{H}_{x_0}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m,p\right)}_{\text{terme associé à la CL } x=0} + \underbrace{\mathscr{H}_{x_L}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m,p\right)}_{\text{terme associé à la CL } x=L_x} \tag{27.7.11}$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathscr{H}_{x_0}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\kappa\left(L_x-x\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)} \\ \mathscr{H}_{x_L}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\kappa x\right)}{\mathrm{sh}\left(\kappa L_x\right)} \end{cases} \tag{27.7.12}$$

Et en mettant à profit la linéarité de la transformation de Laplace, l'expression (27.7.10) devient :

$$\begin{aligned} T_{SP2}\left(x,y,z,t\right) = & \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}H_{x_0}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,t\right)\overset{t}{\otimes}\Delta\tilde{\tilde{T}}_{x_0}\left(\beta_m,t\right)\right)}_{\text{solution associée à la CL } x=0} \\ & + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_m}{\left\|Y_m\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}H_{x_L}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,t\right)\overset{t}{\otimes}\Delta\tilde{\tilde{T}}_{x_L}\left(\beta_m,t\right)\right)}_{\text{solution associée à la CL } x=L_x} \end{aligned} \tag{27.7.13}$$

Avec :

$$\begin{cases} H_{x_0}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_{x_0}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\right]\left(t\right) \\ H_{x_L}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_{x_L}^{SP2}\left(x,\beta_m,\xi_k,p\right)\right]\left(t\right) \\ \Delta\tilde{\tilde{T}}_{x_0}\left(\beta_m,t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_0}\left(\beta_m,p\right)\right]\left(t\right) \\ \Delta\tilde{\tilde{T}}_{x_L}\left(\beta_m,t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{x_L}\left(\beta_m,p\right)\right]\left(t\right) \end{cases} \tag{27.7.14}$$

- ***Expression du champ de température du sous problème 3***

La démarche permettant d'obtenir la solution du sous-problème 3 dans le domaine spatio-temporel étant parfaitement analogue à celle utilisée pour le sous-problème 2, nous ne donnerons que le résultat.

Ainsi, la solution du sous-problème 3 dans le domaine spatio-temporel s'écrit :

$$T_{SP3}\left(x,y,z,t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}\tilde{\tilde{\theta}}_{n,k}^{SP3}\left(\alpha_n,y,\xi_k,p\right)\right]\left(t\right) \tag{27.7.15}$$

En se souvenant que :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{n,k}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right) = \underbrace{\mathscr{H}_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_0}\left(\alpha_n, p\right)}_{\text{terme associé à la CL } y=0} + \underbrace{\mathscr{H}_{y_L}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_L}\left(\alpha_n, p\right)}_{\text{terme associé à la CL } y=L_y} \tag{27.7.16}$$

Et que :

$$\begin{cases} \mathscr{H}_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\chi\left(L_y - y\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\chi L_y\right)} \\ \mathscr{H}_{y_L}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right) = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\chi y\right)}{\mathrm{sh}\left(\chi L_y\right)} \end{cases} \tag{27.7.17}$$

En appliquant l'inverse de Laplace à (27.7.15), on obtient :

$$\begin{aligned} T_{SP3}\left(x, y, z, t\right) = & \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}H_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, t\right)\overset{t}{\otimes}\Delta\tilde{\tilde{T}}_{y_0}\left(\alpha_n, t\right)\right)}_{\text{solution associée à la CL } y=0} \\ & + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{X_n}{\left\|X_n\right\|_2^2}\frac{Z_k}{\left\|Z_k\right\|_2^2}H_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, t\right)\overset{t}{\otimes}\Delta\tilde{\tilde{T}}_{y_L}\left(\alpha_n, t\right)\right)}_{\text{solution associée à la CL } y=L_x} \end{aligned} \tag{27.7.18}$$

Avec :

$$\begin{cases} H_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_{y_0}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)\right]\left(t\right) \\ H_{y_L}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\mathscr{H}_{y_L}^{SP3}\left(\alpha_n, y, \xi_k, p\right)\right]\left(t\right) \\ \Delta\tilde{\tilde{T}}_{y_0}\left(\beta_m, t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_0}\left(\alpha_n, p\right)\right]\left(t\right) \\ \Delta\tilde{\tilde{T}}_{y_L}\left(\beta_m, t\right) = \mathscr{L}_t^{-1}\left[\Delta\tilde{\tilde{\theta}}_{y_L}\left(\alpha_n, p\right)\right]\left(t\right) \end{cases} \tag{27.7.19}$$

On retrouve ainsi dans l'expression du champ de température du sous-problème 2 et 3, la superposition des contributions des (deux) champs associés aux deux conditions aux limites.

L'expression du champ de température complet s'écrit alors :

$$T_{complet}\left(x, y, z, t\right) = \sum_{i=1}^{3} T_{SPi}\left(x, y, z, t\right) \tag{27.7.20}$$

Remarque : Afin de rester dans le cadre le plus général et illustrer la mise en œuvre des différentes transformations intégrales (Laplace, Fourier-Sinus, et Fourier-Cosinus), les sous-problèmes 2 et 3 ont étés résolus sans considérations simplificatrices. Cependant, il est important de noter que pour ces sous-problèmes, compte tenu des conditions aux limites de type Neumann homogène (flux nuls) suivant (Oz), et

températures uniformes dans l'épaisseur sur les bords en x et en y, sont en réalité bidimensionnels car ils ne dépendent pas de la variable z. Une démonstration de cette affirmation sera donnée pour un cas plus simple (problème moyenné suivant (Oy)) dans le chapitre suivant, traitant des méthodes de caractérisation de matériaux anisotropes.

Notons qu'en exprimant la solution complète du problème 3D dans l'espace de Laplace, à l'aide d'un algorithme d'inversion numérique de Laplace il est possible d'obtenir la solution temporelle du problème complet 3D pour une forme quelconque, mais analytique et connue, de l'excitation.

Il est alors possible d'effectuer une estimation 3D sur l'ensemble des harmoniques, mais cela nécessite de manipuler des matrices de tailles considérables, pouvant mener à des temps de calcul extrêmement longs, voire conduire à une incapacité de calcul due à des dépassements de mémoire machine.

C'est pourquoi dans le chapitre suivant, on propose une méthode d'estimation basée sur le champ de température moyenné suivant (Oy). Cela a pour conséquence de diminuer la taille des matrices à manipuler, mais impose une hypothèse de flux identiques aux bords en y afin de ne pas introduire de termes sources ou de biais de modèle.

De plus, en anticipant sur le chapitre suivant, notons que la prise de moyenne permet de diminuer l'amplitude du bruit de mesure (théorème central limite) et permet ainsi d'améliorer les résultats obtenus par la méthode « Sin-Ind » basée sur la dérivation du signal expérimental.

A.8. Méthode des "moindres carrés"

A.8.1. Principe

La méthode que nous avons choisie pour réaliser cet ajustement est la méthode de Gauss-Newton. Il s'agit d'une méthode non linéaire de type "moindres carrés" qui consiste à minimiser une norme. Ici, la norme choisie est la somme des écarts quadratiques entre la courbe expérimentale et la courbe théorique donnée par le modèle. La méthode est souvent appelée méthode des "moindres carrés" pour cette raison. Soit S cette somme :

$$S = \sum_i \left(Y_i - F(t_i, \boldsymbol{\beta}) \right)^2 \tag{1}$$

Y représente la courbe expérimentale, F la courbe théorique fonction du temps et des paramètres inconnus. L'indice i fait référence à l'instant t_i.

Minimiser S par rapport aux paramètres β_j revient à annuler ses dérivées. Soit :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial F\left(t, \boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \beta_j} \left(Y_i - F\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right) \right) = 0 \quad \left(\forall\ j \right) \tag{2}$$

On définit le coefficient de sensibilité X_j comme étant la dérivée du signal par rapport au paramètre β_j. Soit :

$$X_j\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right) = \frac{\partial\ F\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \beta_j} \tag{3}$$

Il mesure les variations induites sur le signal par de faibles variations du paramètre β_j. Ainsi, plus le coefficient de sensibilité d'un paramètre sera grand, plus le modèle sera sensible à ce paramètre et plus il sera facile d'estimer sa valeur par des algorithmes d'inversion. On peut remarquer également que le coefficient de sensibilité est fonction non seulement des paramètres du modèle mais aussi du temps. Par conséquent, l'importance du rôle joué par un paramètre n'est pas identique à chaque instant.

Le système d'équations non linéaires que nous avons à résoudre dépend directement des coefficients de sensibilité par la relation :

$$\sum_i X_j\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right) \left(Y_i - F\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right) \right) = 0 \tag{4}$$

Ces sensibilités jouent donc un rôle fondamental dans les techniques d'inversion puisqu'elles conditionnent non seulement les valeurs estimées des paramètres mais aussi les erreurs commises sur ces paramètres.

Il est commode pour des raisons d'écriture et de calcul d'utiliser le formalisme matriciel. On définit ainsi :

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F\left(t_1, \boldsymbol{\beta}\right) \\ F\left(t_2, \boldsymbol{\beta}\right) \\ \vdots \\ F\left(t_n, \boldsymbol{\beta}\right) \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ représente le vecteur paramètre. Pour distinguer les paramètres identifiés des paramètres réels du modèle qui compte-tenu du processus d'identification ne sont pas identiques car entachés d'erreurs systématiques ou aléatoires, on marquera le vecteur paramètre $\boldsymbol{\beta}$ du signe «$\hat{}$» chaque fois que l'on fera référence aux paramètres estimés.

Les vecteurs $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{F}$ représentent respectivement les réponses expérimentale et théorique du système. Chaque composante $Y_i$et F_i représentent les valeurs mesurée et calculée à l'instant t_i.

On définit également la matrice de sensibilité $\boldsymbol{X}$ où chaque composante $X_{ij} = X_j\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right)$ représente la sensibilité au paramètre β_jà l'instant t_i.

On peut ainsi écrire la somme S :

$$S = \left(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\right) \tag{5}$$

et :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0 \qquad \left(\forall\ j\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{X}^t \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}\right) = 0 \tag{6}$$

Dans le cas linéaire où on a : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, la matrice de sensibilité ne dépend pas des paramètres. Il est alors facile d'inverser la relation et d'obtenir $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

On trouve alors :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^t \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^t \boldsymbol{Y} \tag{7}$$

En l'absence de bruit de mesure et en supposant le modèle est sans biais, c'est à dire qu'il décrit de manière idéale l'évolution du système, on a :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \qquad \text{et} \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \tag{8}$$

Dans le cas non linéaire, il n'est plus possible d'exprimer aussi simplement $\mathbf{F}$ en fonction de $\boldsymbol{\beta}$. La solution s'obtient alors par un processus itératif en développant en série de Taylor la fonction au voisinage de la solution :

$$F\left(t_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{n}+1}\right) = F\left(t_i, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{n}}\right) + \sum_j \left(\hat{\beta}_j^{n+1} - \hat{\beta}_j^{n}\right) \left.\frac{\partial F\left(t_i, \boldsymbol{\beta}\right)}{\partial \beta_j}\right|_{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{n}}} + \ldots \tag{9}$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{n}+1)} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{n})} + \boldsymbol{X}^{(\mathrm{n})} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\mathrm{n}+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\mathrm{n})}\right) \tag{10}$$

L'exposant **(n)** sur **X** indique que la matrice de sensibilité est calculée avec les valeurs de $\boldsymbol{\beta}$ évaluées au rang **(n)** soit : $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(n)}$. On écrit alors que pour des valeurs de $\boldsymbol{\beta}$ proches de la solution, le système d'équations est vérifié, c'est à dire que :

$$\boldsymbol{X}^{(n)t}\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}^{(n+1)}\right) = 0 \tag{11}$$

Si on remplace $F^{(n+1)}$ par son développement, on obtient alors une relation de récurrence entre les valeurs des paramètres estimés au rang **(n)** et au rang **(n+1)** :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(n+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(n)} + \left(\boldsymbol{X}^{(n)t}\boldsymbol{X}^{(n)}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{(n)t}\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}^{(n)}\right) \tag{12}$$

Sous réserve de convergence, la solution est donnée par la valeur limite de cette suite.

Nous voyons ainsi apparaître l'intérêt de la méthode des moindres carrés qui permet d'obtenir une expression explicite de la solution linéarisée.

A.8.2. Propriétés statistiques de l'estimateur

A partir de la relation précédente, il est ensuite possible d'établir les propriétés de l'estimateur, notamment ses propriétés statistiques et d'évaluer les erreurs commises sur les valeurs des paramètres identifiés. C'est ce qui va être fait maintenant.

Le modèle théorique est fonction des valeurs estimées des paramètres $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, obtenues à partir de la relation de récurrence, soit :

$$\boldsymbol{F}^{(n)} = \boldsymbol{F}\left(t,\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{13}$$

La courbe expérimentale est quant à elle fonction des valeurs réelles de ces paramètres. Elle est également bruitée. Ce bruit est alors source d'erreur sur les paramètres identifiés. En l'absence d'informations particulières sur le bruit de mesure, on adopte les hypothèses habituelles d'un bruit additif à la grandeur mesurée, ici la température. On supposera ce bruit de mesure $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme étant aléatoire, non corrélé et suivant une loi de distribution normale de moyenne nulle $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ et de variance constante $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}_b^{\,2}$ (σ_b: écart-type du bruit de mesure). Ainsi, si on suppose que le modèle théorique est sans biais, on a :

$$\boldsymbol{Y}(t,\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{14}$$

On cherche ensuite à estimer les erreurs commises sur les paramètres identifiés. Pour cela, on va supposer que les valeurs des paramètres données par le processus itératif sont proches de la solution et qu'elles vérifient les relations :

$$\boldsymbol{X}\Big|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{t}\left(\boldsymbol{Y}(t,\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{F}\left(t,\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) = 0 \tag{15}$$

On développe ensuite la fonction **F** au premier ordre au voisinage de la solution, soit :

$$\boldsymbol{F}\left(t,\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{X}\Big|_{\boldsymbol{\beta}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right) \tag{16}$$

A partir de cette relation, on peut remarquer qu'au premier ordre, on a toujours : $\boldsymbol{X}\big|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \boldsymbol{X}\big|_{\boldsymbol{\beta}}$.

Si on injecte cette expression dans l'équation précédente, on trouve une relation entre les paramètres réels et estimés :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t}) \tag{17}$$

La matrice de sensibilité peut s'exprimer soit à partir des paramètres estimés, soit à partir des paramètres réels.

On peut remarquer que cette relation qui n'est qu'une approximation au premier ordre pour un problème non linéaire, devient une égalité pour un problème linéaire car la matrice de sensibilité n'est plus fonction des paramètres.

- *Espérance mathématique de l'estimateur :*

  A partir de la relation que l'on vient d'établir, il est facile de montrer que :

$$\mathbf{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t})\right] = \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\,\mathbf{E}\left[\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t})\right] \tag{18}$$

$$\mathbf{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta} \tag{19}$$

  On montre ainsi que le processus itératif mis en place converge bien vers les valeurs réelles des paramètres.

- *Variance-Covariance de l'estimateur :*

  Par définition de la matrice de variance-covariance, on a :

$$\mathrm{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\right) = \mathbf{E}\left[\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\right)\right)\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{E}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\right)\right)^{\mathrm{t}}\right] = \mathbf{E}\left[\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)^{\mathrm{t}}\right] \tag{20}$$

En remplaçant $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ par son expression, on a alors :

$$\mathrm{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\,\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right] = \left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right)\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1} \tag{21}$$

Comme on a supposé $\boldsymbol{\varepsilon}$ non corrélé, la matrice $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}\right)$est diagonale. De plus, l'écart-type du bruit de mesure étant supposé constant, la matrice est sphérique et $\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}\right) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{b}}{}^2$, d'où :

$$\mathrm{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{b}}{}^2\left(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X}\right)^{-1} \tag{22}$$

Les termes diagonaux de cette matrice représentent les variances de chaque paramètre, c'est à dire les carrés des écarts-types de leurs estimateurs.

On peut alors faire les remarques suivantes :

- En l'absence de bruit, les variances et covariances des paramètres sont nulles.

- En présence de bruit de mesure, lorsque les sensibilités du signal aux paramètres sont nulles ou lorsqu'elles sont corrélées, le déterminant de X^tX devient faible et les écarts-types sur les paramètres sont très grands.
- En augmentant le nombre de points de mesure et en prenant des points proches du maximum de sensibilité à chaque paramètre, on diminue les écarts-types des paramètres.
- En effectuant la moyenne des valeurs estimées à partir de plusieurs manipulations, on diminue l'écart-type sur la valeur moyenne.

L'espérance mathématique montre que les valeurs des paramètres identifiés tendent bien vers les valeurs des paramètres réels, donc que l'estimateur est sans biais. Ce qui permet de justifier l'utilisation de la méthode des *"moindres carrés"* pour la détermination de ces paramètres. Cette méthode est d'autant plus intéressante qu'elle permet de déterminer explicitement les erreurs commises sur ces valeurs par une approche statistique (matrice de variance-covariance). En particulier, l'expression de cette matrice montre que ces erreurs seront d'autant plus faibles que le bruit de mesure sera petit.

L'optimisation de l'estimation des paramètres consiste à réduire les écarts-types, donc les variances des paramètres. Pour ce faire, on va chercher à réaliser une expérience susceptible de favoriser au mieux cette estimation. Ceci peut se faire soit en cherchant à rendre minimal l'écart-type du bruit de mesure sur la température, soit en mettant au point une stratégie d'identification visant à identifier le ou les paramètres les plus intéressants ou encore à estimer au mieux le paramètre le plus sensible du modèle.

Production Scientifique Personnelle

Articles dans des revues internationales à comité de lecture

1. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, F. Demeurie, Optimization of the wavelengths selection used for the multi-spectral temperature measurement by ordinary least squares method of surfaces exhibiting non uniform emissivity, QIRT Journal, 2013.

2. C. Rodiet, B. Remy, T. Pierre, A. Degiovanni, Optimizing the number of wavelength for the temperature measurement by multi-spectral method on opaque materials with variable emissivity in the Infrared-Ultraviolet range, HTHP, 2014.

3. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, Thermal characterization of anisotropic materials at high temperature by integral transforms taking into account time dependent boundary conditions, IJTS, 2014.

4. C. Rodiet, M. Niezgoda, B. Remy, A. Degiovanni, F. Demeurie, New estimation method based on integral transforms for the thermal diffusivity measurement of anisotropic materials, Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15, Aout 2014, Japon.

Communications orales, et articles publiés dans des conférences internationales avec actes et comité de lecture sur le texte complet

1. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, F. Demeurie, Optimization of the wavelength range and number of bands used for the multi-spectral temperature measurement of surfaces exhibiting non uniform emissivity, 11th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography - QIRT Conference, Juin 2012, Naples. (Conférence Orale).

2. C. Rodiet, M. Niezgoda, B. Remy, A. Degiovanni, F. Demeurie, New estimation method based on integral transforms for the thermal diffusivity measurement of anisotropic materials, Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15, Aout 2014, Japon. (Conférence Orale).

3. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, Analogous of Wien's law for the optimal wavelengths selection in bi-spectral method used for temperature measurement of surfaces exhibiting non-uniform emissivity, and general methodology for the multi-spectral method, 12th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography - QIRT Conference, Juillet 2014, Bordeaux. (Conférence Orale – Article présélectionné pour le "Best Student Award").

Communications orales, et articles publiés dans des conférences nationales avec actes et comité de lecture sur le texte complet

1. C. Rodiet, T. Pierre, B. Remy, A. Degiovanni, Mesure de température par méthode multi-spectrale dans l'Infrarouge et l'Ultraviolet, SFT, Mai 2011, Actes du congrès annuel de la Société Française de Thermique (SFT), Perpignan. (Poster).

2. C. Rodiet, B. Remy, T. Pierre, A. Degiovanni, Optimisation du nombre de longueur d'onde pour la mesure de température par méthode multi-spectrale sur matériaux opaques à émissivité variable dans la gamme Infrarouge-Ultraviolet, SFT, Mai 2012, Actes du congrès annuel de la Société Française de Thermique (SFT), Bordeaux. (Poster – 3ème Prix Biot-Fourier).

3. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, Caractérisation thermique de matériaux anisotropes à haute température par transformations intégrales avec prise en compte de conditions aux limites variables en temps, SFT, Mai 2013, Actes du congrès annuel de la Société Française de Thermique (SFT), Gérardmer. (Poster).

4. C. Rodiet, B. Remy, A. Degiovanni, Prise en compte du couplage échantillon-support pour la caractérisation thermique à haute température de matériaux anisotropes, SFT, Mai 2014, Actes du congrès annuel de la Société Française de Thermique (SFT), Lyon. (Poster – Papier accepté).

Références Bibliographiques

[1] N. R. CAMPBELL, H. GARDINER, and OTHERS, “Photo-electric colour-matching,” *Journal of Scientific Instruments*, vol. 2, no. 6, p. 177, 1925. [Online]. Available: http://iopscience.iop.org/0950-7671/2/6/301

[2] G. RIBAUD, *Traité de pyrométrie optique: Encyclopédie photométrique*. Ed. dl Revue d’Opt. théor. et instr, 1931, vol. 4.

[3] H. R. ORLANDE, *Thermal measurements and inverse techniques*. CRC Press, 2011, ch. 6, p. 185, "Radiative measurements of temperature".

[4] M. N. OZISIK, *Radiative transfer and interactions with conduction and convection*. Wiley-Interscience, 1973.

[5] J.-F. SACADURA, *Initiation aux transferts thermiques*, Lavoisier, Ed. Tec&doc, 1980. [Online]. Available: http://books.google.fr/books?id=T2WyAQAACAAJ

[6] R. SIEGEL, *Thermal radiation heat transfer*. CRC press, 2001, vol. 1.

[7] J. TAINE and J.-P. PETIT, *Transferts thermiques*. Dunod, 2003.

[8] Y. JANNOT. (2012) FrTransferts thermiques. [Online]. Available: http://-www.thermique55.com/principal/thermique.pdf

[9] Y. COJAN and J.-C. FONTANELLA, “Propagation du rayonnement dans l’atmosphère,” *Techniques de l’ingénieur*, vol. TIB448DUO, no. E4030, p. E4030, 1995. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=16005663

[10] M. PLANCK, “Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum,” *Annalen der physik*, vol. 309, no. 3, pp. 553–563, 1901. [Online]. Available: http://-onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19013090310/abstract

[11] ——, “On the law of the energy distribution in the normal spectrum,” *Ann. Phys*, vol. 4, no. 553, p. 90, 1901.

[12] ——, *The theory of heat radiation*. Courier Dover Publications, 1959.

[13] A.-C. LEGRAND, “Thermographie multispectrale, haute et basse température, application au controle non destructif,” Ph.D. dissertation, Université de Bourgogne, 2002.

[14] T. PIERRE, “Mesure de la tempÃ©rature Ã l’échelle microscopique par voie optique dans la gamme ultraviolet-visible,” Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.

[15] T. PIERRE, B. REMY, and A. DEGIOVANNI, “Microscale temperature measurement by the multispectral and statistic method in the ultraviolet-visible wavelengths,” *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 3, pp. 034904–034904, 2008. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4946379

[16] F. MERIAUDEAU, “Real time multispectral high temperature measurement: Application to control in the industry,” *Image and Vision Computing*, vol. 25, no. 7,

pp. 1124–1133, 2007. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/-article/pii/S026288560600271X

[17] T. DUVAUT, D. GEORGEAULT, and J. BEAUDOIN, "Multiwavelength infrared pyrometry: optimization and computer simulations," *Infrared physics & technology*, vol. 36, no. 7, pp. 1089–1103, 1995. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/1350449595000402

[18] ——, "Pyrométrie multispectrale infrarouge: application aux métaux," *Revue générale de Thermique*, vol. 35, no. 411, p. 184, 1996. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0035315996800316

[19] T. DUVAUT, "Comparison between multiwavelength infrared and visible pyrometry: Application to metals," *Infrared Physics & Technology*, vol. 51, no. 4, pp. 292–299, 2008. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S1350449507001375

[20] H. MADURA, M. KASTEK, and T. PIATKOWSKI, "Automatic compensation of emissivity in three-wavelength pyrometers," *Infrared Physics & Technology*, vol. 51, no. 1, pp. 1–8, 2007. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/-article/pii/S1350449506001551

[21] C.-D. WEN, "Investigation of steel emissivity behaviors: Examination of multispectral radiation thermometry (mrt) emissivity models," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 53, no. 9, pp. 2035–2043, 2010. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931009007248

[22] K.-H. WENG and C.-D. WEN, "Effect of oxidation on aluminum alloys temperature prediction using multispectral radiation thermometry," *INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER*, vol. 54, no. 23-24, pp. 4834–4843, NOV 2011.

[23] C.-D. WEN and T.-Y. CHAI, "Experimental investigation of emissivity of aluminum alloys and application of multispectral radiation thermometry," *Applied Thermal Engineering*, vol. 31, no. 14, pp. 2414–2421, 2011. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431111001931

[24] H. LU, L.-T. IP, A. MACKRORY, L. WERRETT, J. SCOTT, D. TREE, and L. BAXTER, "particle surface temperature measurements with multicolor band pyrometry," *AIChE Journal*, vol. 55, no. 1, pp. 243–255, 2009. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1002/aic.11677

[25] T. FU, Z. YANG, L. WANG, X. CHENG, M. ZHONG, and C. SHI, "Measurement performance of an optical ccd-based pyrometer system," *Optics & Laser Technology*, vol. 42, no. 4, pp. 586–593, 2010. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030399209002205

[26] J. V. BECK and K. J. ARNOLD, *Parameter estimation in engineering and science*. Wiley, 1977.

[27] D. BARRY, J.-Y. PARLANGE, L. LI, H. PROMMER, C. CUNNINGHAM, and F. STAGNITTI, "Analytical approximations for real values of the lambert w-function," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 53, no. 1, pp. 95–103, 2000. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S0378475400001725

[28] ——, "Erratum to analytical approximations for real values of the lambert w-function," *Mathematics and computers in simulation*, vol. 59, no. 6, pp. 543–543, 2002. [Online]. Available: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=638920

[29] R. M. CORLESS, G. H. GONNET, D. E. HARE, D. J. JEFFREY, and D. KNUTH, "Lambert's w function in maple," *Maple Technical Newsletter*, vol. 9, pp. 12–22, 1993.

[30] R. M. CORLESS, G. H. GONNET, D. E. HARE, D. J. JEFFREY, and D. E. KNUTH, "On the lambert w function," *Advances in Computational mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 329–359, 1996.

[31] R. M. CORLESS, D. J. JEFFREY, and D. E. KNUTH, "A sequence of series for the lambert w function," in *Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. ACM, 1997, pp. 197–204. [Online]. Available: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=258783

[32] R. M. CORLESS, H. DING, N. J. HIGHAM, and D. J. JEFFREY, "The solution of s exp (s)= a is not always the lambert w function of a," in *Proceedings of the 2007 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. ACM, 2007, pp. 116–121. [Online]. Available: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1277565

[33] D. PETIT and D. MAILLET, "Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 1," *Techniques de l'ingénieur Mécanique physique*, vol. base documentaire : TIB110DUO., no. ref. article : af4515, 2008, fre. [Online]. Available: http://-www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/sciences-fondamentales-th8/-mecanique-physique-42110210/techniques-inverses-et-estimation-de-parametres-partie-1-af4515/

[34] ——, "Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 2," *Techniques de l'ingénieur Mécanique physique*, vol. base documentaire : TIB110DUO., no. ref. article : af4516, 2008, fre. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/sciences-fondamentales-th8/mecanique-physique-42110210/techniques-inverses-et-estimation-de-parametres-partie-2-af4516/

[35] E. RUFFIO, "Estimation de paramètres et de conditions limites thermiques en conduction instationnaire pour des matériaux anisotropes. apport des algorithmes stochastiques à la conception optimale d'expérience." Ph.D. dissertation, ISAE-ENSMA

Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique-Poitiers, 2011. [Online]. Available: http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00664748/

[36] A. EL DOR, "Perfectionnement des algorithmes d'optimisation par essaim particulaire: applications en segmentation d'images et en électronique," Ph.D. dissertation, Université Paris-Est, 2012. [Online]. Available: http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00788961/

[37] M. CLERC and J. KENNEDY, "The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space," *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, vol. 6, no. 1, pp. 58–73, 2002. [Online]. Available: http://-ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=985692

[38] M. CLERC, "Binary particle swarm optimisers: toolbox, derivations, and mathematical insights," 2005. [Online]. Available: http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00122809/

[39] ——, *Particle swarm optimization*. John Wiley & Sons, 2010, vol. 93.

[40] R. POLI, J. KENNEDY, and T. BLACKWELL, "Particle swarm optimization," *Swarm intelligence*, vol. 1, no. 1, pp. 33–57, 2007. [Online]. Available: http://-link.springer.com/article/10.1007/s11721-007-0002-0

[41] A. EL DOR, M. CLERC, and P. SIARRY, "A multi-swarm pso using charged particles in a partitioned search space for continuous optimization," *Computational Optimization and Applications*, vol. 53, no. 1, pp. 271–295, 2012. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s10589-011-9449-4

[42] ——, "Hybridization of differential evolution and particle swarm optimization in a new algorithm: Depso-2s," in *Swarm and Evolutionary Computation*. Springer, 2012, pp. 57–65. [Online]. Available: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-29353-5_7

[43] Y. COOREN, M. CLERC, and P. SIARRY, "Optimisation par essaim particulaire améliorée par hybridation avec un algorithme à estimation de distribution," 2008.

[44] ——, "Performance evaluation of tribes, an adaptive particle swarm optimization algorithm," *Swarm Intelligence*, vol. 3, no. 2, pp. 149–178, 2009. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s11721-009-0026-8

[45] ——, "Mo-tribes, an adaptive multiobjective particle swarm optimization algorithm," *Computational Optimization and Applications*, vol. 49, no. 2, pp. 379–400, 2011. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s10589-009-9284-z

[46] J. A. NELDER and R. MEAD, "A simplex method for function minimization," *Computer journal*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, 1965.

[47] D. M. OLSSON and L. S. NELSON, "The nelder-mead simplex procedure for function minimization," *Technometrics*, vol. 17, no. 1, pp. 45–51, 1975. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1975.10489269

[48] R. R. BARTON and J. S. IVEY JR, "Nelder-mead simplex modifications for simulation optimization," *Management Science*, vol. 42, no. 7, pp. 954–973, 1996. [Online]. Available: http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.42.7.954

[49] K. I. MCKINNON, "Convergence of the nelder-mead simplex method to a nonstationary point," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 148–158, 1998. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623496303482

[50] J. C. LAGARIAS, J. A. REEDS, M. H. WRIGHT, and P. E. WRIGHT, "Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 112–147, 1998. [Online]. Available: http://-epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623496303470

[51] V. J. TORCZON, "Multi-directional search: a direct search algorithm for parallel machines," Ph.D. dissertation, Citeseer, 1989.

[52] V. TORCZON, "On the convergence of the multidirectional search algorithm," *SIAM journal on Optimization*, vol. 1, no. 1, pp. 123–145, 1991. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0801010

[53] ——, "On the convergence of pattern search algorithms," *SIAM Journal on optimization*, vol. 7, no. 1, pp. 1–25, 1997. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/-doi/abs/10.1137/S1052623493250780

[54] R. M. LEWIS, V. TORCZON, and M. W. TROSSET, "Direct search methods: then and now," *Journal of computational and Applied Mathematics*, vol. 124, no. 1, pp. 191–207, 2000.

[55] R. M. LEWIS and V. TORCZON, "Pattern search methods for linearly constrained minimization," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 3, pp. 917–941, 2000. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623497331373

[56] C. J. PRICE, I. COOPE, and D. BYATT, "A convergent variant of the nelder-mead algorithm," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 113, no. 1, pp. 5–19, 2002. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1023/-A:1014849028575

[57] M. LUERSEN, R. LE RICHE, and F. GUYON, "A constrained, globalized, and bounded nelder-mead method for engineering optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 27, no. 1-2, pp. 43–54, 2004. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s00158-003-0320-9

[58] M. A. LUERSEN and R. LE RICHE, "Globalized nelder-mead method for engineering optimization," *Computers & structures*, vol. 82, no. 23, pp. 2251–2260,

2004. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S0045794904002378

[59] N. DURAND and J.-M. ALLIOT, "A combined nelder-mead simplex and genetic algorithm," in *GECCOÂ'99: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*, 1999, pp. 921–928.

[60] R. CHELOUAH and P. SIARRY, "Genetic and nelder-mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multiminima functions," *European Journal of Operational Research*, vol. 148, no. 2, pp. 335–348, 2003. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S0377221702004010

[61] ——, "A hybrid method combining continuous tabu search and nelder-mead simplex algorithms for the global optimization of multiminima functions," *European Journal of Operational Research*, vol. 161, no. 3, pp. 636–654, 2005. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221703006301

[62] S.-K. S. FAN, Y.-C. LIANG, and E. ZAHARA, "A genetic algorithm and a particle swarm optimizer hybridized with nelder-mead simplex search," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 50, no. 4, pp. 401–425, 2006. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835206000404

[63] K. PARSOPOULOS and M. VRAHATIS, "Particle swarm optimizer in noisy and continuously changing environments," *methods*, vol. 5, no. 6, p. 23, 2001.

[64] S. DAS, P. KODURU, M. GUI, M. COCHRAN, A. WAREING, S. M. WELCH, and B. R. BABIN, "Adding local search to particle swarm optimization," in *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on*. IEEE, 2006, pp. 428–433. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1688340

[65] S.-K. S. FAN and E. ZAHARA, "A hybrid simplex search and particle swarm optimization for unconstrained optimization," *European Journal of Operational Research*, vol. 181, no. 2, pp. 527–548, 2007. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706004711

[66] E. ZAHARA and Y.-T. KAO, "Hybrid nelder-mead simplex search and particle swarm optimization for constrained engineering design problems," *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no. 2, pp. 3880–3886, 2009. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417408001735

[67] O. BEGAMBRE and J. E. LAIER, "A hybrid particle swarm optimization-simplex algorithm (psos) for structural damage identification," *Advances in Engineering Software*, vol. 40, no. 9, pp. 883–891, 2009. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997809000040

[68] T. NIKNAM, "A new fuzzy adaptive hybrid particle swarm optimization algorithm for non-linear, non-smooth and non-convex economic dispatch problem," *Applied Energy*, vol. 87, no. 1, pp. 327–339, 2010. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030626190900213X

[69] A. LIU and M.-T. YANG, "A new hybrid nelder-mead particle swarm optimization for coordination optimization of directional overcurrent relays," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, 2012.

[70] P. E. GILL and W. MURRAY, "Algorithms for the solution of the nonlinear least-squares problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 15, no. 5, pp. 977–992, 1978. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0715063

[71] C. FRALEY, "Algorithms for nonlinear least-squares problems," DTIC Document, Tech. Rep., 1988. [Online]. Available: http://oai.dtic.mil/oai/-oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA196071

[72] K. LEVENBERG, "A method for the solution of certain problems in least squares," *Quarterly of applied mathematics*, vol. 2, pp. 164–168, 1944.

[73] D. W. MARQUARDT, "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters," *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, vol. 11, no. 2, pp. 431–441, 1963. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/-0111030

[74] Y. BARD, *Nonlinear parameter estimation*. Academic Press New York, 1974, vol. 513.

[75] P. LASCAUX and R. THÉODOR, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur: Méthodes directes*, ser. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Dunod, 2000, vol. Volume 1. [Online]. Available: http://-books.google.fr/books?id=RFpZAQAACAAJ

[76] P. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation: cours et exercices corrigés*, ser. Collection Mathématiques appliquées pour la matrise. Dunod, 2006. [Online]. Available: http://books.google.fr/books?id=a8b3PAAACAAJ

[77] J.-F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL, and C. A. SAGASTIZÁBAL, *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer, 2006.

[78] J. C. GILBERT, "Optimisation différentiable," *Techniques de l'ingénieur Méthodes numériques*, vol. base documentaire : TIB105DUO., no. ref. article : af1252, 2008, fre. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/-sciences-fondamentales-th8/methodes-numeriques-42105210/optimisation-differentiable-af1252/

[79] P. C. HANSEN, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*. Siam, 1998, vol. 4.

[80] ——, "Regularization tools version 4.0 for matlab 7.3," *Numerical Algorithms*, vol. 46, no. 2, pp. 189–194, 2007. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/-10.1007/s11075-007-9136-9

[81] R. ASTER, B. BORCHERS, and C. THURBER, *Parameter Estimation and Inverse Problems*, Elsevier, Ed. Academic Press, 2005.

[82] P. C. HANSEN, *Discrete inverse problems: insight and algorithms*. SIAM, 2010, vol. 7.

[83] FLIR. Caractéristique techniques titanium 760m. FLIR. [Online]. Available: http://www.flir.com/thermography/americas/us/view/?id=50093

[84] Y. SOUHAR, "Caractérisation thermique de matériaux anisotropes à hautes températures," Ph.D. dissertation, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2011. [Online]. Available: http://www.theses.fr/2011INPL029N

[85] G. GAUSSORGUES, F. MICHERON, J.-P. POCHOLLE, and J.-L. MEYZONNETTE, "Détecteurs infrarouges," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB451DUO, no. E4060, p. E4060, 1996. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/-?aModele=afficheN&cpsidt=16005652

[86] M. SAVELLI, D. GASQUET, and B. ORSAL, "Physique des dispositifs électroniques," *Techniques de l'ingénieur. Electronique*, vol. 1, no. E1100, pp. E1100–1, 1996. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=15989574

[87] G. BOUCHARLAT and J.-P. TRAHAND, "Détecteurs ultraviolet, visible et proche infrarouge," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIP350DUO, no. E4065, p. E4065, 1998. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=16005655

[88] L. AUDAIRE, "Détecteurs de rayonnements optiques," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB451DUO, no. R6450, p. R6450, 2000. [Online]. Available: http://-cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=18979453

[89] D. PAJANI and L. AUDAIRE, "Thermographie: Technologies et applications," *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, vol. TIP672DUO, no. R2741, p. R2741, 2001. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=16613800

[90] G. BOUCHARLAT, "Dispositifs à transfert de charges (ccd)," *Techniques de l'ingénieur. Electronique*, vol. 2, no. E2530, 2006. [Online]. Available: http://-cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21688820

[91] N. GUERINEAU, R. HAIDAR, S. BERNHARDT, I. RIBET-MOHAMED, and M. CAES, "Caractérisations électro-optiques des détecteurs plans focaux ir," *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, no. R6460, 2007. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21907797

[92] F. DESVIGNES, “Radiométrie. photométrie,” *Techniques de l’ingénieur. Mesures et contrôle*, vol. 7, no. R6410, 1992.

[93] M. HUETZ-AUBERT, “Rayonnement thermique des matériaux opaques,” *Techniques de lÂ’Ingénieur, BE (A1520)*, pp. 1–37, 1992.

[94] M. HUETZ-AUBERT, S. KLARSFELD, and P. DE DIANOUS, “Rayonnement thermique des matériaux semi-transparents,” *Techniques de lÂ’Ingénieur, BE (B 8 215)*, pp. 1–38, 1995.

[95] F. CABANNES, “Température de surface: Mesure radiative,” *Techniques de l’ingénieur. Mesures et contrôle*, vol. TIB542DUO, no. R2735, p. R2735, 1996. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=16613794

[96] G. GAUSSORGUES, *La thermographie infrarouge: Principes, technologie, applications (4 ed.)*, Lavoisier, Ed. Tec&doc, 1999. [Online]. Available: http://-www.lavoisier.fr/livre/notice.asp?id=3LKW2OARL23OWD

[97] X. P. V. MALDAGUE, *Theory and Practice of Infrared Technology for Non Destructive Testing*. Wiley-Interscience, 2001.

[98] P. HERVE, “Mesure de l’émissivité thermique,” *Techniques de l’ingénieur*, vol. TIB542DUO, no. R2737, p. R2737, 2005. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/mesure-de-temperature-42542210/mesure-de-l-emissivite-thermique-r2737/

[99] S. MATTEI, “Rayonnement thermique des matériaux opaques,” *Techniques de l’ingénieur. Génie énergétique*, no. BE8210, 2005. [Online]. Available: http://-cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21801310

[100] P. FABRE, “Appareillages de thermographie industrielle,” *Techniques de l’ingénieur. Mesures et contrôle*, no. R2750, 2006. [Online]. Available: http://-cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21905243

[101] D. PAJANI, “Thermographie - principes et mesure,” *Techniques de l’ingénieur*, vol. TIB542DUO, no. R2740, pp. R2740–1, 2013. [Online]. Available: http://-www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/mesure-de-temperature-42542210/thermographie-r2740/

[102] FLIR. The ultimate infrared handbook for r&d professionals. FLIR. [Online]. Available: http://www1.flir.com/rd_handbook_offer

[103] G. BUREL, *Introduction au traitement d’images*. Hermes, lavoisier, 2001.

[104] P. MARCHAND and O. T. HOLLAND, *Graphics and GUIs with Matlab, third edition*. Chapman & Hall/CRC, 2003.

[105] D. HANSELMAN and B. LITTLEFIELD, *Mastering Matlab*. pearson, prentice hall, 2005.

[106] S. T. SMITH, *Matlab advanced GUI development*. Dog ear publishing, 2006.

[107] A. QUINQUIS, *Le traitement du signal sous Matlab*. Hermes, lavoisier, 2007.

[108] D. LINGRAND, *Introduction au traitement d'images*. Vuibert, 2008.

[109] J.-T. LAPRESTE and C. VIAL, *Outils mathématiques pour l'étudiant, l'ingénieur et le chercheur avec Matlab*. ellipses, 2008.

[110] A. BIRAN and M. BREINER, *MATLAB pour l'ingénieur: Version 7*. Pearson Education, 2009. [Online]. Available: http://books.google.fr/-books?id=0LUhPwAACAAJ

[111] A. DEGIOVANNI, "Conductivité et diffusivité thermique des solides," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB544DUO, p. R2850, 1994. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/mesure-des-grandeurs-thermophysiques-42544210/conductivite-et-diffusivite-thermique-des-solides-r2850/

[112] F. DE PONTE and S. KLARSFELD, "Conductivité thermique des isolants," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB384DUO, p. R2930, 2002.

[113] J.-C. KRAPEZ, "Mesure de l'effusivité thermique: Introduction," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB544DUO, p. R2957, 2006.

[114] ——, "Mesure de l'effusivité thermique: Méthodes par contact," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB544DUO, p. R2958, 2007. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/-?aModele=afficheN&cpsidt=21905247

[115] ——, "Mesure de l'effusivité thermique - méthodes photothermiques," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB544DUO, p. R2959, 2007. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21905245

[116] M. DIOT, "Capacités thermiques," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Archive, p. R2970, 1979. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/-?aModele=afficheN&cpsidt=16613817

[117] B. LEGENDRE and M. DIOT, "Détermination des capacités thermiques spécifiques en fonction de la température," *Techniques de l'ingénieur Mesure des grandeurs thermophysiques*, vol. TIB544DUO, p. R2970, 2011. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/mesure-des-grandeurs-thermophysiques-42544210/determination-des-capacites-thermiques-specifiques-en-fonction-de-la-temperature-r2970/

[118] J. GRENET and B. LEGENDRE, "Analyse calorimétrique différentielle à balayage (dsc)," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB384DUO., p. P1205, 2010. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/methodes-thermiques-d-analyse-42384210/analyse-calorimetrique-differentielle-a-balayage-dsc-p1205/

[119] ——, "Analyse calorimétrique différentielle à balayage à température modulée (dsc-tm)," *Techniques de l'ingénieur*, vol. TIB384DUO., p. P1206, 2011. [Online]. Available: http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/methodes-thermiques-d-analyse-42384210/analyse-calorimetrique-differentielle-a-balayage-a-temperature-modulee-dsc-tm-p1206/

[120] B. HAY, *Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash*. Ed. Techniques Ingénieur, 2004.

[121] Y. JANNOT. (2011, Octobre) Métrologie thermique : Théorie et pratique de la métrologie thermique. [Online]. Available: http://www.thermique55.com/principal/-metrologiethermique.pdf

[122] W. PARKER, R. JENKINS, C. BUTLER, and G. ABBOTT, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity," *Journal of applied physics*, vol. 32, no. 9, pp. 1679–1684, 1961. [Online]. Available: http://-ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5124748

[123] A. S. BRAHIM DJELLOUL, A. S.DJELLOUL, "Radiométrie photothermique sous excitation aléatoire: application à la mesure de propriétés thermophysiques," Ph.D. dissertation, Université de Reims, 2008.

[124] S. BRAHIM DJELLOUL, P. GROSSEL, and OTHERS, "Thermal diffusivity measurement by photothermal radiometry under random excitation and parametric analysis," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 214, no. 1. IOP Publishing, 2010, p. 012065. [Online]. Available: http://iopscience.iop.org/1742-6596/214/1/012065

[125] J.-C. CANDORE, "Détection et caractérisation de défauts par thermographie infrarouge stimulée: application au contrôle d'oeuvres d'art," Ph.D. dissertation, Université de Reims, 2010.

[126] J. BODNAR, S. BRAHIM, P. GROSSEL, and V. DETALLE, "Rear-face photothermal analysis under random excitation and parametric analysis: Application to thermal-diffusivity measurement," *International Journal of Thermophysics*, vol. 33, no. 10-11, pp. 1976–1981, 2012. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/-10.1007/s10765-012-1319-5

[127] J.-C. BATSALE, J.-L. BATTAGLIA, and O. FUDYM, "Autoregressive algorithms and spatially random flash excitation for 2d non destructive evaluation with infrared cameras," *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, vol. 1, no. 1, pp. 5–20, 2004. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3166/qirt.1.5-20

[128] J.-L. BATTAGLIA, L. PUIGSEGUR, and A. KUSIAK, "Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique," *International journal of thermal sciences*, vol. 43, no. 1, pp. 69–85, 2004. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S1290072903001042

[129] L. LE LAY, "Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier," Ph.D. dissertation, Université Bordeaux I, 1998. [Online]. Available: http://-cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=1815485

[130] E. BATTAGLIA, "Identification temporelle par modèle non entier," Master's thesis, Université Bordeaux I, 1999.

[131] R. R. MALTI, S. VICTOR, O. NICOLAS, A. OUSTALOUP, and OTHERS, "System identification using fractional models: state of the art," in *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2007)*, 2007. [Online]. Available: http://-hal.archives-ouvertes.fr/hal-00182374/

[132] S. VICTOR, "Identification par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude," Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux 1, 2010.

[133] J.-L. BATTAGLIA, L. LE LAY, J.-C. BATSALE, A. OUSTALOUP, and O. COIS, "Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction," *International journal of thermal sciences*, vol. 39, no. 3, pp. 374–389, 2000. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/-article/pii/S1290072900002209

[134] J.-L. BATTAGLIA, O. COIS, L. PUIGSEGUR, and A. OUSTALOUP, "Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, no. 14, pp. 2671–2680, 2001. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931000003100

[135] J. BATTAGLIA, "HDR : Méthodes d'identification de modèles à dérivées d'ordre non entier et de réduction modale - application à la résolution de problèmes thermiques inverses dans des systèmes industriels," Université Bordeaux I, Tech. Rep., 2002.

[136] J.-D. GABANO and T. POINOT, "Fractional modeling applied to non destructive thermal characterization," in *World Congress*, vol. 18, no. 1, 2011, pp. 13972–13977.

[137] O. FUDYM, J.-L. BATTAGLIA, and J.-C. BATSALE, "Measurement of thermophysical properties in semi-infinite media by random heating and fractional model identification," *Review of Scientific Instruments*, vol. 76, no. 4, p. 044902, 2005. [Online]. Available: http://link.aip.org/link/?RSI/76/044902/1

[138] J. R. LESNIAK and B. R. BOYCE, "Forced diffusion thermography," in *SPIE's 1993 International Symposium on Optics, Imaging, and Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics, 1993, pp. 92–102. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=934414

[139] J. R. LESNIAK and D. J. BAZILE, "Forced-diffusion thermography technique and projector design," in *Aerospace/Defense Sensing and Controls*. International Society for Optics and Photonics, 1996, pp. 210–217. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=1019385

[140] J. R. LESNIAK, "Forced-diffusion thermal imaging apparatus and method," Dec. 27 1994, uS Patent 5,376,793. [Online]. Available: http://www.google.com/-patents?hl=en&lr=&vid=USPAT5376793&id=-vcgAAAAEBAJ&oi=fnd&dq=forced+diffusion+thermography&printsec=abstract

[141] ——, "Structure analysis method using time-varying thermal signal," Dec. 10 1996, uS Patent 5,582,485. [Online]. Available: http://www.google.com/-patents?hl=en&lr=&vid=USPAT5582485&id=Ml0aAAAAEBAJ&oi=fnd&dq=forced+diffusion+thermography&printsec=abstract

[142] J. R. LESNIAK and B. R. BOYCE, "Differential thermography applied to structural integrity assessment," in *SPIE's 1995 Symposium on OE/Aerospace Sensing and Dual Use Photonics*. International Society for Optics and Photonics, 1995, pp. 179–189. [Online]. Available: http://proceedings.spiedigitallibrary.org/-proceeding.aspx?articleid=999301

[143] J. R. LESNIAK, D. J. BAZILE, and M. J. ZICKEL, "Structural integrity assessment via coating tolerant forced diffusion thermography," in *proceedings of the 1997 ASCE Structures Congress, Portland, OR*, 1997.

[144] ——, "Coating tolerant thermography for the detection of cracks in structures," *Materials evaluation*, vol. 55, no. 9, pp. 961–965, 1997. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/data/Conferences/SPIEP/38851/235_1.pdf

[145] ——, "Theory and application of coating tolerant thermography," in *Aerospace/Defense Sensing and Controls*. International Society for Optics and Photonics, 1998, pp. 325–330. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=947615

[146] J. R. LESNIAK, D. J. BAZILE, and B. R. BOYCE, "Coating-tolerant thermography inspection system," in *Nondestructive Evaluation Techniques for Aging Infrastructures & Manufacturing*. International Society for Optics and Photonics, 1999, pp. 82–87. [Online]. Available: http://proceedings.spiedigitallibrary.org/-proceeding.aspx?articleid=975384

[147] J.-C. KRAPEZ, "Simultaneous measurement of in-plane and out-of-plane diffusivity by using a grid-like mask," 1999.

[148] L. SPAGNOLO, J.-C. KRAPEZ, M. FRIESS, H.-P. MAIER, and G. NEUER, "Flash thermography with a periodic mask: profile evaluation of the principal diffusivities for the control of composite materials," in *AeroSense 2003*. International

Society for Optics and Photonics, 2003, pp. 392–400. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?articleid=762853

[149] J.-C. KRAPEZ, L. SPAGNOLO, M. FRIE, H.-P. MAIER, and G. NEUER, "Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography," *International journal of thermal sciences*, vol. 43, no. 10, pp. 967–977, 2004. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S129007290400047X

[150] Y. ZHANG and T. CHU, "In-plane thermal diffusivity measurements of c/c brakes using thermography," in *SEM Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, 2006.

[151] M. BAMFORD, J.-C. BATSALE, and O. FUDYM, "Différentes stratégies pour l'estimation de profils de diffusivités thermiques d'une éprouvette composite sicf/sic après un flash," in *SFT*. Société Française de Thermique/Congrès Français de Thermique, 29 mai-1 juin 2007, Île des Embiez, 2007. [Online]. Available: http://-sam.ensam.eu/handle/10985/6603

[152] V. AYVAZYAN, "Etude de champs de température séparables avec une double décomposition en valeurs singulières. quelques applications à la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux et au contrôle non destructif," Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux I, 2012.

[153] M. BAMFORD, J. C. BATSALE, and O. FUDYM, "Singular value decomposition of infrared image sequences. application to thermal diffusivity profile estimation after a flash excitation," in *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, IPDO*, 2007, pp. 16–20.

[154] M. BAMFORD, "Méthode flash et thermographie infrarouge pour la cartographie de propriétés thermophysiques : Application à la caractérisation en thermomécanique." Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux I, 2007.

[155] M. BAMFORD and J. C. BATSALE, "Analytical singular value decomposition of infrared image sequences: microcrack detection on ceramic composites under mechanical stresses," *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 336, no. 5, pp. 440–447, 2008. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S163107210700263X

[156] M. BAMFORD, J. C. BATSALE, and O. FUDYM, "Nodal and modal strategies for longitudinal thermal diffusivity profile estimation: Application to the non destructive evaluation of sic/sic composites under uniaxial tensile tests," *Infrared Physics & Technology*, vol. 52, no. 1, pp. 1–13, 2009. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350449508000534

[157] M. BAMFORD, M. FLORIAN, G. L. VIGNOLES, J.-C. BATSALE, C. A. A. CAIRO, and L. MAILLÉ, "Global and local characterization of the thermal diffusivities

of sic_f/sic_f composites with infrared thermography and flash method," *Composites Science and Technology*, vol. 69, no. 7, pp. 1131–1141, 2009. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353809000578

[158] V. AYVAZYAN, J. BATSALE, and C. PRADERE, "Simple possibilities of thermal diffusivity estimation for small-sized samples, with a laser pulse heating and infrared cameras," in *QIRT*, 2010.

[159] L. CLERJAUD, "Méthode d'hétérodynage pour la caractérisation de propriétés thermophysiques par thermographie infrarouge dans une large gamme spatiale et temporelle," Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux I, 2010. [Online]. Available: http://www.theses.fr/2010BOR14040

[160] L. CLERJAUD, C. PRADERE, J.-C. BATSALE, and S. DILHAIRE, "Heterodyne method with an infrared camera for the thermal diffusivity estimation with periodic local heating in a large range of frequencies (25 hz to upper than 1 khz)," *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, vol. 7, no. 1, pp. 115–128, 2010. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3166/qirt.7.115-128

[161] L. CLERJAUD, C. PRADERE, S. DILHAIRE, J. CHRISTOPHE, and S. G. BATSALE, "Méthode d'hétérodynage pour la caractérisation d'écoulement microfluidique en gouttes par thermographie infrarouge," in *SFT*, 2008.

[162] C. IBARRA-CASTANEDO, M. GENEST, S. GUIBERT, J.-M. PIAU, X. P. MALDAGUE, and A. BENDADA, "Inspection of aerospace materials by pulsed thermography, lock-in thermography and vibrothermography: A comparative study," *Knettel KM, Vavilov VP, Miles J J. Proc SPIE Thermosense XXIX. Bellingham, WA: SPIE*, vol. 6541, pp. 654116–1, 2007. [Online]. Available: http://-proceedings.spiedigitallibrary.org/data/Conferences/SPIEP/15945/654116_1.pdf

[163] W. B. LARBI, C. IBARRA-CASTANEDO, M. KLEIN, A. BENDADA, and X. MALDAGUE, "Experimental comparison of lock-in and pulsed thermography for the nondestructive evaluation of aerospace materials," in *6 th International Workshop, Advances in Signal Processing for Non Destructive Evaluation of Materials (IWASPNDE), Ontario, Canada. Citeseer*. Citeseer, 2009.

[164] C. IBARRA-CASTANEDO, J.-M. PIAU, S. GUILBERT, N. P. AVDELIDIS, M. GENEST, A. BENDADA, and X. P. MALDAGUE, "Comparative study of active thermography techniques for the nondestructive evaluation of honeycomb structures," *Research in Nondestructive Evaluation*, vol. 20, no. 1, pp. 1–31, 2009. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09349840802366617

[165] I. AMENABAR, A. MENDIKUTE, A. LÓPEZ-ARRAIZA, M. LIZARANZU, and J. AURREKOETXEA, "Comparison and analysis of non-destructive testing techniques suitable for delamination inspection in wind turbine blades," *Composites*

Part B: Engineering, vol. 42, no. 5, pp. 1298–1305, 2011. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836811000539

[166] V. SCHICK, "Caractérisation d'une mémoire à changement de phase. mesure de propriétés thermiques de couches minces à haute température," Ph.D. dissertation, Université de Bordeaux I, 2011.

[167] D. BALAGEAS, D. BOSCHER, A. DEOM, and F. ENGUEHARD, "Panorama des méthodes thermiques de cnd à l'onera," in *Journée d'études de la S.F.T.* Office national d'études et de recherches aérospatiales, 1990.

[168] B. REMY, "Mesure de propriétés thermophysiques de matériaux minces et de dépôts par la méthode flash," Ph.D. dissertation, Instiut National Polytechnique de Lorraine, 1998.

[169] F. NAJAR, "Contrôle non destructif par thermographie infrarouge des matériaux hétérogènes contenant des défauts," Ph.D. dissertation, Université de Cergy-Pontoise, 1997.

[170] V. PLANA, "Caractérisation par méthode inverse et modélisation des propriétés thermophysiques orthotropes des matériaux composites," Ph.D. dissertation, Ecole nationale superieure de l'aeronautique et de l'espace, 2003.

[171] N. MILOSEVIC, "Mesure de la diffusivité thermique et de la résistance de contact thermique des couches minces sur des substrats par la méthode impulsionnelle," Ph.D. dissertation, Institut national des sciences appliquèes de lyon, 2008.

[172] A. DONALDSON and R. TAYLOR, "Thermal diffusivity measurement by a radial heat flow method," *Journal of Applied Physics*, vol. 46, no. 10, pp. 4584–4589, 1975. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/-abs_all.jsp?arnumber=5101211

[173] M. AMAZOUZ, C. MOYNE, and A. DEGIOVANNI, "Measurement of the thermal diffusivity of anisotropic materials," *High Temperatures. High Pressures*, vol. 19, no. 1, pp. 37–41, 1987.

[174] M. LACHI and A. DEGIOVANNI, "Détermination des diffusivités thermiques des matériaux anisotropes par méthode flash bidirectionnelle," *Journal de Physique III*, vol. 1, no. 12, pp. 2027–2046, 1991. [Online]. Available: http://-jp3.journaldephysique.org/-
index.php?option=com_article&access=dkey&dkey=10.1051/-
jp3:1991249&Itemid=129&lang=en

[175] I. PHILIPPI, "Mesure sans contact de diffusivié thermique de plaques minces en mouvement uniforme," Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), 1994.

[176] I. PHILIPPI, J. BATSALE, D. MAILLET, and A. DEGIOVANNI, "Traitement d'images infrarouges par transformation intégrale: application à la mesure de diffusivité thermique de matériaux anisotropes par méthode flash," *Revue générale de thermique*, vol. 33, pp. 392–93, 1994. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/-?aModele=afficheN&cpsidt=4245925

[177] ——, "Measurement of thermal diffusivities through processing of infrared images," *Review of scientific instruments*, vol. 66, no. 1, pp. 182–192, 1995. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4992111

[178] B. REMY, A. DEGIOVANNI, and D. MAILLET, "Mesure de la diffusivité thermique de matériaux anisotropes de petites dimensions par thermographie infrarouge et transformations intégrales," in *SFT*, 2007.

[179] V. VAVILOV, D. BURLEIGH, and V. SHIRYAEV, "Ir thermographic evaluation of thermal diffusivity anisotropy: comparative analysis of some algorithms," *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, vol. 4, no. 2, pp. 187–200, 2007. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3166/qirt.4.187-200

[180] P. BISON, F. CERNUSCHI, and E. GRINZATO, "In-depth and in-plane thermal diffusivity measurements of thermal barrier coatings by ir camera: evaluation of ageing," *International Journal of thermophysics*, vol. 29, no. 6, pp. 2149–2161, 2008. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s10765-008-0421-1

[181] Y. SOUHAR, J. DILLET, B. REMY, Y. JANNOT, and A. DEGIOVANNI, "Caractérisation de matériaux anisotropes à haute température par méthode impulsionnelle et thermographie infrarouge," in *SFT*, 2008.

[182] Y. SOUHAR, B. REMY, and A. DEGIOVANNI, "High temperature facility under vacuum for the thermal characterization of anisotropic materials," in *IHTC*. ASME, 2010. [Online]. Available: http://link.aip.org/link/abstract/ASMECP/v2010/-i49385/p381/s1

[183] Y. SOUHAR, B. RÉMY, and A. DEGIOVANNI, "Thermal characterization of anisotropic materials at high temperature through integral methods and localized pulsed technique," *International Journal of Thermophysics*, vol. 34, pp. 322–340, 2013. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s10765-013-1415-1

[184] F. R. DE HOOG, J. KNIGHT, and A. STOKES, "An improved method for numerical inversion of laplace transforms," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, no. 3, pp. 357–366, 1982. [Online]. Available: http://-epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0903022

[185] M. BAMFORD, J. BATSALE, D. REUNGOAT, and O. FUDYM, "Two dimensional velocity and diffusion mapping in the case of three dimensional transient diffusion:Â¬Ã¬flashÂ¬Ã® method and infrared image sequence analysis," in *Eighth Conference on Quantitative Infrared Thermography, QIRT*, 2006, pp. 27–30.

[186] A. GODIN, “Estimation sur des bases orthogonales des propriétés thermiques de matériaux hétérogènes à propriétés constantes par morceaux,” Ph.D. dissertation, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2013. [Online]. Available: http://-hal.archives-ouvertes.fr/tel-00821884/

[187] T. HARMATHY, “Variable-state methods of measuring the thermal properties of solids,” *Journal of Applied Physics*, vol. 35, no. 4, pp. 1190–1200, 1964. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5127229

[188] R. C. STEERE, “Thermal properties of thin-film polymers by transient heating,” *Journal of Applied Physics*, vol. 37, no. 9, pp. 3338–3344, 1966. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5135185

[189] ——, “Thermal diffusivity of low-conductivity materials,” *Journal of Applied Physics*, vol. 38, no. 7, pp. 3039–3040, 1967. [Online]. Available: http://-pdfserv.aip.org/JAPIAU/vol_38/iss_7/3039_1.pdf

[190] K. KATAYAMA, K. OHUCHI, and S. KOTAKE, “Transient method of simultaneous measurement of thermal properties using plane heat source,” *Japan Soc Mech Engrs-Bul*, vol. 12, no. 52, pp. 865–872, 1969.

[191] A. KAVIANIPOUR and J. BECK, “Thermal property estimation utilizing the laplace transform with application to asphaltic pavement,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 20, no. 3, pp. 259–267, 1977. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931077902125

[192] D. HADISAROYO, J. BATSALE, and A. DEGIOVANNI, “Un appareillage simple pour la mesure de la diffusivité thermique de plaques minces,” *Journal de Physique III*, vol. 2, no. 1, pp. 111–128, 1992. [Online]. Available: http://-jp3.journaldephysique.org/articles/jp3/abs/1992/01/jp3v2p111/jp3v2p111.html

[193] D. I. HADISAROYO, “Mesure de diffusivité thermique de plaques minces, conductrices ou isolantes,” Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), 1993. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/-?aModele=afficheN&cpsidt=6500668

[194] B. REMY and A. DEGIOVANNI, “Inverse method applied to the measurement of the thermal conductivity of powders by a hot-wire technique,” in *Thermal Conductivity 26: Thermal Expansion 14: Joint Conferences, August 6-8, 2001, Cambridge, Massachusetts, USA*. DEStech Publications, Inc, 2005, p. 334. [Online]. Available: http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=Fh24-GRNQ8YC&oi=fnd&pg=PA334&dq=remy+degiovanni+maillet&ots=v0WYhR9n-o&sig=dvoVRkNc8AEaBLfpUvSpzYoQrKc

[195] B. REMY, A. SERRAND, A. DEGIOVANNI, J.-P. LASSERRE, Y. LOREAU, L. VOISIN, T. DESANLIS, B. BICREL, and A. GALTIÉ, “Estimation of the spatial distribution of high heat flux pulse stimulations through infrared thermography,”

Quantitative InfraRed Thermography Journal, vol. 7, no. 2, pp. 237–254, 2010. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/-17686733.2010.9737141

[196] M. Gradeck, J. Ouattara, B. Rémy, and D. Maillet, "Solution of an inverse problem in the hankel space - infrared thermography applied to estimation of a transient cooling flux," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 36, pp. 56–64, 2012. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S0894177711001646

[197] D. MAILLET, S. ANDRÉ, J.-C. BATSALE, A. DEGIOVANNI, and C. MOYNE, *Thermal quadrupoles: solving the heat equation through integral transforms*, WILEY, Ed. Wiley New York, 2000.

[198] C. RODIET, M. NIEZGODA, B. REMY, and A. DEGIOVANNI, "New estimation method based on integral transforms for the thermal diffusivity measurement of anisotropic materials," *Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, IHTC-15*, Aout 2014.

[199] R. RUDKIN, R. JENKINS, and W. PARKER, "Thermal diffusivity measurements on metals at high temperatures," *Review of Scientific Instruments*, vol. 33, no. 1, pp. 21–24, 1962. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/-abs_all.jsp?arnumber=5051048

[200] R. RUDKIN, W. PARKER, and R. JENKINS, "Measurements of the thermal properties of metals at elevated temperatures," *Temp. Meas. Control Sci. Ind.*, vol. 3, p. 2, 1962. [Online]. Available: http://www.osti.gov/energycitations/-product.biblio.jsp?osti_id=4682991

[201] L. VOZAR and W. HOHENAUER, "Flash method of measuring the thermal diffusivity. a review," *High temperatures-High pressures*, vol. 36, no. 3, pp. 253–264, 2004.

[202] ——, "Uncertainty of thermal diffusivity measurements using the laser flash method," *International journal of thermophysics*, vol. 26, no. 6, pp. 1899–1915, 2005. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s10765-005-8604-5

[203] B. HAY, J. FILTZ, J. HAMEURY, and L. RONGIONE, "Uncertainty of thermal diffusivity measurements by laser flash method," *International journal of thermophysics*, vol. 26, no. 6, pp. 1883–1898, 2005. [Online]. Available: http://-link.springer.com/article/10.1007/s10765-005-8603-6

[204] B. HAY, J.-R. FILTZ, J. HAMEURY, and L. RONGIONE, "Estimation de l'incertitude de mesure de la diffusivité thermique par méthode flash-application à cinq matériaux homogènes," *Revue Francaise de métrologie*, vol. 14, pp. 3–11, 2008. [Online]. Available: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=20614507

[205] J. CAPE and G. LEHMAN, "Temperature and finite pulse-time effects in the flash method for measuring thermal diffusivity," *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 7, pp. 1909–1913, 1963. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5126452

[206] R. TAYLOR and J. CAPE, "Finite pulse-time effects in the flash diffusivity technique," *Applied Physics Letters*, vol. 5, no. 10, pp. 212–213, 1964. [Online]. Available: http://pdfserv.aip.org/APPLAB/vol_5/iss_10/212_1.pdf

[207] K. LARSON and K. KOYAMA, "Correction for finite-pulse-time effects in very thin samples using the flash method of measuring thermal diffusivity," *Journal of Applied Physics*, vol. 38, no. 2, pp. 465–474, 1967. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5091596

[208] R. HECKMAN, "Finite pulse-time and heat-loss effects in pulse thermal diffusivity measurements," *Journal of Applied Physics*, vol. 44, no. 4, pp. 1455–1460, 1973. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5099470

[209] T. AZUMI and Y. TAKAHASHI, "Novel finite pulse-width correction in flash thermal diffusivity measurement," *Review of scientific instruments*, vol. 52, no. 9, pp. 1411–1413, 1981. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4984233

[210] A. DEGIOVANNI, "Correction de longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par méthode flash," *International journal of heat and mass transfer*, vol. 30, no. 10, pp. 2199–2200, 1987.

[211] T. LECHNER and E. HAHNE, "Finite pulse time effects in flash diffusivity measurements," *Thermochimica acta*, vol. 218, pp. 341–350, 1993. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004060319380434C

[212] A. P. F. ALBERS, T. A. RESTIVO, L. PAGANO, and J. B. BALDO, "Effect of testing conditions on the laser flash thermal diffusivity measurements of ceramics," *Thermochimica acta*, vol. 370, no. 1, pp. 111–118, 2001. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040603100007796

[213] J. BLUMM and S. LEMARCHAND, "Influence of test conditions on the accuracy of laser flash measurements," *High Temperatures High Pressures*, vol. 34, no. 5, pp. 523–528, 2002.

[214] Z. SOILIHI and A. DEGIOVANNI, "Influence de la non-linéarité dans la mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash," *Revue générale de thermique*, vol. 22, no. 262, pp. 649–661, 1983.

[215] M. LACHI and A. DEGIOVANNI, "influence de l'erreur de mesure de température de surface par thermocouples de contact sur la détermination de la

diffusivité thermique par méthode flash," *Journal de Physique III*, vol. 2, no. 11, pp. 2247–2265, 1992. [Online]. Available: http://jp3.journaldephysique.org/articles/jp3/-abs/1992/11/jp3v2p2247/jp3v2p2247.html

[216] M. AKOSHIMA and T. BABA, "Study on a thermal-diffusivity standard for laser flash method measurements," *International journal of thermophysics*, vol. 27, no. 4, pp. 1189–1203, 2006. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/-10.1007/s10765-006-0091-9

[217] A. DEGIOVANNI, "Diffusivité et méthode flash," *Revue générale de thermique*, vol. 185, pp. 420–442, 1977.

[218] D. BALAGEAS, "Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle (méthode flash)," *Revue de Physique Appliquée*, vol. 17, no. 4, pp. 227–237, 1982. [Online]. Available: http://rphysap.journaldephysique.org/articles/rphysap/abs/1982/04/-rphysap_1982___17_4_227_0/rphysap_1982___17_4_227_0.html

[219] A. DEGIOVANNI and M. LAURENT, "Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash," *Revue de physique Appliquée*, vol. 21, no. 3, pp. 229–237, 1986. [Online]. Available: http://-rphysap.journaldephysique.org/articles/rphysap/abs/1986/03/-rphysap_1986___21_3_229_0/rphysap_1986___21_3_229_0.html

[220] D. MAILLET, S. ANDRÉ, and A. DEGIOVANNI, "Les erreurs sur la diffusivité thermique mesurée par méthode flash: confrontation théorie-expérience," *Journal de Physique III*, vol. 3, no. 4, pp. 883–809, 1993. [Online]. Available: http://-jp3.journaldephysique.org/articles/jp3/abs/1993/04/jp3v3p883/jp3v3p883.html

[221] T. BABA, M. KOBAYASHI, A. ONO, J. HONG, and M. SULIYANTI, "Experimental investigation of the nonuniform heating effect in laser flash thermal diffusivity measurements," *Thermochimica acta*, vol. 218, pp. 329–339, 1993. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004060319380433B

[222] K.-H. LIM, S.-K. KIM, and M.-K. CHUNG, "Improvement of the thermal diffusivity measurement of thin samples by the flash method," *Thermochimica Acta*, vol. 494, no. 1, pp. 71–79, 2009. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/-science/article/pii/S0040603109002068

[223] T. KABAYABAYA, F. YU, and X. ZHANG, "Thermal diffusivity measurement of glass at high temperature by using flash method," *Journal of Thermal Science*, vol. 13, no. 1, pp. 91–96, 2004. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/-10.1007/s11630-004-0015-6

[224] R. TAYLOR, "Construction of apparatus for heat pulse thermal diffusivity measurements from 300-3000k," *Journal of Physics: Scientific Instruments*, vol. 13,

no. 11, p. 1193, 1980. [Online]. Available: http://iopscience.iop.org/0022-3735/13/11/-014

[225] T. BABA and A. CEZAIRLIYAN, "Thermal diffusivity of poco axm-5q1 graphite in the range 1500 to 2500 k measured by a laser-pulse technique," *International journal of thermophysics*, vol. 15, no. 2, pp. 343–364, 1994. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/BF01441590

[226] B. HAY, S. BARRE, J.-R. FILTZ, M. JURION, D. ROCHAIS, and P. SOLLET, "EnglishNew apparatus for thermal diffusivity and specific heat measurements at very high temperature," *EnglishInternational Journal of Thermophysics*, vol. 27, no. 6, pp. 1803–1815, 2006. [Online]. Available: http://-dx.doi.org/10.1007/s10765-006-0120-8

[227] A. DEGIOVANNI, "Identification de la diffusivité thermique par l'utilisation des moments temporels partiels," *High Temperatures. High Pressures*, vol. 17, no. 6, pp. 683–689, 1986.

[228] J. GOUNOT and J. L. BATTAGLIA, "Thermal diffusivity identification and measurement noise," *High Temperatures. High Pressures*, vol. 26, no. 2, pp. 177–182, 1994.

[229] M.-A. THERMITUS and M. LAURENT, "New logarithmic technique in the flash method," *International journal of heat and mass transfer*, vol. 40, no. 17, pp. 4183–4190, 1997. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/-pii/S001793109700029X

[230] LEASQR. (2014, Mars) Fonction matlab (utilisée pour les estimations) "leasqr.m" basée sur l'algorithme de levenberg-marquardt et sur l'utilisation de la svd. [Online]. Available: http://www.ee.nmt.edu/~rison/ee289_fall10/hw/leasqr.m

[231] A. SALAZAR, R. FUENTE, E. APINANIZ, and A. MENDIOROZ, "Thermal diffusivity of nonflat plates using the flash method," *Review of Scientific Instruments*, vol. 82, no. 1, p. 014902, 2011. [Online]. Available: http://link.aip.org/link/?RSI/82/-014902/1

[232] NORMESTANDARD. (2013, Septembre) Site contenant les différentes normes françaises, européennes, et internationales : http://www.norme-standard.com. ConsultÃ© le 20.09.2013. [Online]. Available: http://www.norme-standard.com

[233] METROLOGIEFR. (2013, Septembre) Site dédié à la métrologie française : http://www.metrologie-francaise.fr/fr/references/temperature-thermique.asp. ConsultÃ© le 20.09.2013. [Online]. Available: http://www.metrologie-francaise.fr/fr/-references/temperature-thermique.asp#thermophy

[234] J. PAILHES, C. PRADERE, J.-L. BATTAGLIA, J. TOUTAIN, A. KUSIAK, A. AREGBA, and J.-C. BATSALE, "Thermal quadrupole method with internal heat

sources," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 53, pp. 49–55, 2012. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072911003036

[235] M. LAZARD, S. ANDRÉ, D. MAILLET, and A. DEGIOVANNI, "Radiative and conductive heat transfer: a coupled model for parameter estimation," *High Temperatures–High Pressures(UK)*, vol. 32, no. 1, pp. 9–17, 2000.

[236] M. LAZARD, S. ANDRE, D. MAILLET, D. BAILLIS, and A. DEGIOVANNI, "Flash experiment on a semitransparent material: interest of a reduced model," *Inverse Problems in Engineering*, vol. 9, no. 4, pp. 413–429, 2001. [Online]. Available: http://-www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/174159701088027772

[237] A. DEGIOVANNI, B. REMY, and S. ANDRE, "Transient radiation-conductive heat transfer problems: The quadrupole method," *Journal of Thermal Science*, vol. 11, no. 4, pp. 359–371, 2002. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/-s11630-002-0050-0

[238] T. KABAYABAYA, F. YU, and X. ZHANG, "Theoretical determination of thermal diffusivity of composite material," vol. 11, p. 1, 2004. [Online]. Available: http://d.wanfangdata.com.cn/periodical_bjkjdxxb-e200401010.aspx

[239] L. DAVID, B. NACER, B. PASCAL, and J. GÉRARD, "Transient radiative and conductive heat transfer in non-gray semitransparent two-dimensional media with mixed boundary conditions," *Heat and mass transfer*, vol. 42, no. 4, pp. 322–337, 2006. [Online]. Available: http://link.springer.com/article/10.1007/s00231-005-0023-4

[240] F. ASLLANAJ, X. BRIGE, and G. JEANDEL, "Transient combined radiation and conduction in a one-dimensional non-gray participating medium with anisotropic optical properties subjected to radiative flux at the boundaries," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 107, no. 1, pp. 17–29, 2007. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/-S0022407307000854

[241] Z. CHEHEB, F. ALBOUCHI, and S. BEN NASRALLAH, "Measurement of thermal radiative and conductive properties of semitransparent materials using a photothermal crenel method," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 109, no. 4, pp. 620–635, 2008. [Online]. Available: http://-www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407307002063

Résumé : Ce mémoire est constitué de deux parties relativement indépendantes, dont la première porte sur les méthodes de mesure de température par méthodes Multi-Spectrales, et la seconde sur la Caractérisation Thermique à haute température par transformations intégrales de matériaux orthotropes. Dans chacune de ces deux parties, les méthodes/modèles développés ont été traités du point de vue théorique, numérique, et expérimental. Dans la partie multi-spectrale, une méthode de mesure de température permettant de prendre en compte les variations spectrales de la chaine de mesure globale (incluant l'émissivité) a été présentée. De plus, une méthode de détermination des longueurs d'ondes optimales au sens de la minimisation de l'écart-type sur la température, a été développée. Enfin, il a également été montré que les longueurs d'ondes optimales pour les mesures mono-spectrales et bi-spectrales pouvaient être déterminées à l'aide de lois analogues à la loi de déplacement de Wien. Dans la partie Caractérisation Thermique, différentes méthodes et modèles ont été développés. Les méthodes proposées effectuent l'estimation des diffusivités longitudinales et transversales sur l'ensemble des harmoniques simultanément. De plus, ces méthodes permettent de s'affranchir du couplage thermique dû à la présence d'un porte-échantillon, et/ou d'effectuer des mesures de diffusivités pseudo-locales, en injectant comme conditions aux limites les informations expérimentales obtenues par caméra infrarouge. Enfin, les notions de corrélation entre les paramètres et de durée d'exploitabilité des harmoniques ont également été abordées.
Mots clés : Caractérisation thermique, Très hautes températures, Pyrométrie, Thermographie, Méthodes Multi-Spectrales, Métrologie, Méthodes Inverses, Estimation de paramètres, Transferts thermiques.
Titre : Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales et Caractérisation Thermique de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales : « Aspects Théoriques et Expérimentaux ».

Abstract: This thesis consists of two relatively independent parts, the first part focuses on methods of temperature measurement using Multi-Spectral methods, and the second on the Thermal Characterization by integral transforms at high temperature of orthotropic materials. In each of these two parts, methods / models developed were treated from a theoretical point of view, numerical and experimental. In the multi-spectral part, a method of temperature measurement to take into account a spectral variation of the overall measurement chain (including the emissivity) was introduced. Moreover, a method of determining the optimal wavelengths in the sense of minimizing the standard deviation of temperature has been developed. Finally, it has also been shown that the optimal wavelengths for mono-spectral and bi-spectral measurements could be determined with similar laws to Wien's displacement law. In the Thermal Characterization part, different methods and models have been developed. The proposed methods perform the estimation of longitudinal and transverse diffusivities on all harmonics simultaneously. Furthermore, they allow overcoming the thermal coupling due to the presence of a sample holder, and / or making pseudo-local measurements of diffusivities. Finally, the concepts of correlation between parameters and duration of harmonics exploitability were also discussed.
Keywords: Thermal characterization, High temperatures, Pyrometry, Thermography, Multi-Spectral Method, Metrology, Inverse Methods, Parameter estimation, Thermal transfers.
Title: Temperature Measurement by Multi-Spectral Methods and Thermal Characterization of Anisotropic Materials by Integral Transforms: "Theoretical and experimental aspects".