AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Lorraine
UFR M.I.M

École doctorale EMMA

Méthodes multi-échelles pour la modélisation des vibrations de structures à matériaux composites viscoélastiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 Mars 2015

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mécanique des Matériaux

par

LOUGOU Komla Gaboutou

Composition du jury

Rapporteurs :	Prof.Dr Loïc DARIDON	Université Montpellier 2, France
	Prof.Dr Jean François DEÜ	CNAM-PARIS, France
Examinateurs :	Dr Salim BELOUETTAR	LIST, Luxembourg
	Dr Sylvain BERGER	Saint-Gobain Recherche, France
	Dr Hakim BOUDAOUD	Université de Lorraine, France
Invité :	MCF.HDR Ali DAOUDJI	Université de Lorraine, France
Directeur :	Prof.Dr El Mostafa DAYA	Université de Lorraine, France

Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux — UMR CNRS 7239

LABORATOIRE D'ÉTUDE DES MICROSTRUCTURES ET DE MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier mon Directeur de thèse le professeur DAYA El Mostafa, pour m'avoir confié ce travail de recherches, pour son aide, ses précieux conseils sa disponibilité et sa rigueur scientifique. Son œil critique a permis d'améliorer considérablement la rédaction de ce mémoire. C'est un immense plaisir pour moi de travailler sous votre houlette. J'ai appris beaucoup de chose avec vous tant sur le plan numérique que scientifique. Je tiens surtout à vous remercier pour les efforts fournis pour le financement des six mois supplémentaires nécessaires pour la finalisation de mes travaux de thèse.

Mes remerciements iront au Professeur Loïc DARIDON et Professeur Jean François DEÜ pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, et pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Mes remerciements iront également aux Docteurs Salim Belouettar chercheur au CRPTH, Luxembourg, Sylvain Berger chercheur chez Saint-Gobain et Hakim Boudaoud maitre de conférence à l'Université de Lorraine pour le temps consacré à examiner cette thèse.

Je tiens à remercier M Koutsawa Yao pour ses nombreux conseils et surtout le code de maillage des structures à matériaux composites qu'il m'a procuré.

Je tiens à remercier M. TIEM Sonnou pour avoir mise en place cette ouverture qui nous permet de poursuivre une formation doctorale.

J'adresse mes remerciements à toute ma famille et à toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réussite de cette thèse. En particulier à ma femme qui été formidable pendant toute la durée de cette thèse, à mon papa et ma maman qui sont mes héros.

En fin j'adresse mes remerciements à tout le personnel de LEM3 notamment les secrétaires et mes collègues doctorants pour les services rendus et pour le cadre de travail. Une pensée particulière au Dr Komlavi Lampoh pour ses multiples assistances techniques en informatique pendant le déroulement de cette thèse.

Cette thèse est spécialement dédiée :

à ma maman Madame LOUGOU AKUA,

à mon papa Monsieur LOUGOU Koffi Edo,

à Ma femme LOUGOU Ablavi Etonam Akofa,

à mes frères et sœurs : Mimi, Hyacinthe, Abel et Virginie.

Table des matières

Table des figures ix

Liste des tableaux xi

Listes des symboles et abréviations xv

Introduction générale 1

Chapitre 1 Bibliographie et positionnement du sujet de la thèse 7

1.1 Introduction . . . 7

1.2 Méthodes numériques de calcul des propriétés modales des structures viscoélastiques . . . 9

1.2.1 Généralités . . . 9

1.2.2 Méthodes approchées . . . 10

1.2.3 Méthodes quasi-exactes de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires . . . 13

1.3 Etat de l'art sur le calcul des valeurs propres pour les longues structures répétitives . . . 18

1.3.1 Généralités . . . 18

1.3.2 La Méthode Asymptotique à Deux Echelles ($MADE$) pour l'analyse des vibrations des longues structures répétitives . . . 20

1.4 Etat de l'art sur l'homogénéisation des matériaux hétérogènes . . . 24

1.4.1 Les techniques d'homogénéisation analytique . . . 25

1.4.2 L'homogénéisation numérique . . . 27

1.4.3 Homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques . . . 29

1.5 Bilan et positionnement du sujet . . . 30

Chapitre 2 Analyse à deux échelles des vibrations des structures sandwichs répétitives **33**

2.1 Introduction . . . 33
2.2 Modèles cinématiques utilisés et équation du mouvement . . . 34
2.2.1 Modèles cinématiques des structures sandwichs viscoélastiques . 35
2.2.2 Equation du mouvement . . . 36
2.3 La Méthode Asymptotique à Deux échelles . . . 44
2.3.1 Introduction . . . 44
2.3.2 Problèmes locaux et équation d'amplitude . . . 46
2.3.3 Résolution de l'équation d'amplitude . . . 51
2.4 Validations numériques et discussions . . . 54
2.4.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant . . . 55
2.4.2 Modèle viscoélastique à module complexe variable et dépendant de la fréquence . . . 59
2.4.3 Influence des caractéristiques géométriques et mécaniques du sandwich sur les largeurs des bandes d'arrêt . . . 64
2.5 Conclusion . . . 67

Chapitre 3 Une approche multi-échelle par éléments finis pour la modélisation des vibrations **69**

3.1 Introduction . . . 69
3.2 L'approche éléments finis multi-échelles pour la résolution des problèmes non linéaires . . . 71
3.2.1 Formulation du problème à l'échelle macroscopique . . . 71
3.2.2 Formulation du problème microscopique . . . 72
3.2.3 Couplage entre les échelles microscopiques et macroscopiques . . 74
3.2.4 Conditions aux limites microscopiques . . . 75
3.2.5 Linéarisation du problème microscopique à travers la MAN . . . 78
3.2.6 Tenseur de localisation . . . 80
3.2.7 Discrétisation et résolution du problème non linéaire à l'échelle microscopique au moyen de la MAN . . . 82
3.2.8 La MAN pour la résolution du problème microscopique . . . 84
3.2.9 Homogénéisation . . . 89
3.2.10 Résolution du problème macroscopique . . . 90
3.3 Tests numériques et discussions . . . 91

3.3.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant 92
3.3.2 Module viscoélastique variable : Modèle ADF 96
3.3.3 Module viscoélastique variable : Modèle à dérivées fractionnaires 100
3.4 Conclusion 103

Chapitre 4 Application : Conception de matériaux sandwichs à haut pouvoir amortissant **107**
4.1 Introduction 107
4.2 Tests de validation sur les structures sandwichs viscoélastiques 108
4.2.1 Cœur à matrice et inclusions à module d'Young constant 109
4.2.2 Cœur à matrice et inclusions à modules d'Young dépendant de la fréquence 110
4.3 Amélioration des propriétés amortissantes des matériaux sandwichs viscoélastiques 112
4.3.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant 113
4.3.2 Modèle viscoélastique à module complexe variable : PVB-ISD112 à 20°C 114
4.4 Etude de l'influence des différents paramètres des inclusions en ISD112 116
4.4.1 Influence du pourcentage volumique des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre 118
4.4.2 Influence de la morphologie des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre 119
4.5 Conclusion 119

Conclusion générale et perspectives **125**

Annexe A Expressions des constantes et fonctions **131**
A.1 Definitions des constants C, $M(\lambda)$, $F(\lambda)$ et H 131
A.2 Expressions des fonctions F_1^1, F_2^1, F_1^2 et F_2^2 132
A.3 Expression de la constance $C_a(\lambda_0)$ 133

Bibliographie **135**

Table des figures

1 Structure sandwich viscoélastique 2

2 Structure hétérogene viscoélastique 2

3 Exemples d'applications des structures composites viscoélastiques . . . 3

4 Longue structure sandwich viscoélastique répétitive 3

1.1 Calcul de l'amortissement par la méthode de la bande passante 11

2.1 Calcul direct (*diamant*) de 80 fréquences propres d'une structure répétitive viscoélastique 35

2.2 Modèles cinématiques 36

2.3 Structure sandwich viscoélastique répétitive 37

2.4 Modèle zigzag 38

2.5 Premier(a), Second(b), dix-neuvième(c) et vingtième(d) modes d'une structure sandwich viscoélastique répétitive calculés par l'approche *diamant* 45

2.6 Modes locaux de périodes $2l$ et l 49

2.7 Evolution des deux premières bandes d'arrêts en fonction du rapport h_c/h_f ($h = 0.05m$, $E_f = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, $E_0 = 1.794 \times 10^6$ Pa) 66

2.8 Evolution des deux premières bandes d'arrêts en fonction du rapport E_c/E_f ($h = 0.05m$, $h_c/h_f = 10^{-2}$, $E_f = 2.1 \times 10^{11}$ Pa) 67

3.1 Concept de l'homogénéisation éléments finis multi-échelle 73

3.2 Maillage d'un VER avec les conditions de périodicité 80

3.3 Morphologie des inclusions 94
3.4 Structure étudiée à l'échelle macroscopique avec un maillage complet . 94

4.1 Structure sandwich à cœur composite viscoélastique 109
4.2 Evolution des propriétés modales du pare brise Verre/PVB/Verre avec un cœur composites en fonction du pourcentage volumique des inclusions en ISD112 121
4.3 Paramètre définissant la morphologie des inclusions 122
4.4 Evolution des propriétés modales du pare brise Verre/PVB/Verre avec un cœur composites en fonction du rapport a/b des inclusions en ISD112 123

Liste des tableaux

2.1 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich étudiée 56

2.2 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du début du premier paquet de la structure simplement appuyée aux deux extrémités étudiée 57

2.3 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) de la fin du premier paquet de la structure simplement appuyée aux deux extrémités étudiée . 58

2.4 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich Verre/PVB/Verre étudiée 61

2.5 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (Ω) du début du premier paquet de la structure en Verre/PVB/Verre à 20°C encastrée-encastrée 61

2.6 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (Ω) de fin du premier paquet de la structure Verre/PVB/Verre à 20°C encastrée-encastrée 62

2.7 Paramètres du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C 62

2.8 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich Aluminium/ISD112/Aluminium étudiée 63

2.9 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du début du premier paquet de la structure Aluminium/ISD112/Aluminium à 27°C simplement appuyée aux deux extrémités 64

2.10 Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du fin du premier paquet de la structure Aluminium/ISD112/Aluminium à 27°C simplement appuyée aux deux extrémités 65

3.1 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique étudiée 95
3.2 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modaux (η) de la poutre composite encastrée-libre étudiée. Matrice élastique inclusions viscoélastiques 95
3.3 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modaux (η) de la poutre composite encastrée-libre étudiée. Matrice viscoélastique contenant des inclusions élastiques 96
3.4 Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C 98
3.5 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant de l'ISD112 à 27°C étudiée 98
3.6 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre composite en ISD112 à 27°C encastrée-libre étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques 99
3.7 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre composite en ISD112 à 27°C encastrée-libre étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques 99
3.8 Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C 101
3.9 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 étudiée 101
3.10 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 à 10°C en appuis simples étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques . . 101
3.11 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 à 10°C en appuis simples étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques . . 102
3.12 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant du PVB étudiée 103

3.13 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du PVB à 20°C encastrée-encastrée étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques 104
3.14 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du PVB à 20°C encastrée-encastrée étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques 104

4.1 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Alumunium/polymère-polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée. 110
4.2 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Aluminium/polymère-polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée. 111
4.3 Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 20°C 112
4.4 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée. 112
4.5 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée. 113
4.6 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich Alumunium/polymère/Aluminium encastrée-libre 115
4.7 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Aluminium/polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée. 115
4.8 Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée. 117
4.9 Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée. 117

Listes des symboles et abréviations

Symboles alphabétiques

a_{max}	:	rayon de convergence
B	:	mode de rotation
C_0	:	matrice de comportement
E_c^*, E^*, E_{ve}^*	:	module d'Young complexe du cœur
E_0, E_c	:	module d'Young d'élasticité retardée du cœur
E_f	:	module d'Young des faces
$E(\omega)$, $E(\lambda)$	:	fonction de la dépendance en fréquence du module d'Young
F	:	vecteur des sollicitations harmoniques imposées
f	:	force harmonique imposée
$\mathcal{F}_k^{nl}$	:	second membre du problème de la MAN
G_c^*, G^*, G_{ve}^*	:	module de cisaillement complexe du cœur
G_0	:	module de cisaillement d'élasticité retardée du cœur
h	:	épaisseur totale du sandwich
h_c	:	épaisseur du cœur
h_f	:	épaisseur des faces
h_i	:	épaisseur de la couche i
I_c	:	moment quadratique de la section droite du cœur
I_f	:	moment quadratique de la section droite des faces
$\mathcal{J}$	:	fonction de fluage

$\mathcal{J}^*$	:	complaisance opérationnelle
k, k_{nl}	:	rigidités modales
K^e, K, K_v^e, K_v, K_0^e, K_0	:	matrices de rigidité
k_i^e, m^e	:	matrices d'intégration des fonctions de forme
$\mathcal{L}$	:	opérateur de la transformation de Laplace
L	:	longueur du sandwich
l	:	largeur du sandwich
M^e, M	:	matrices de masse
M_i, M_β, M_w	:	moments fléchissants
N_i, N, N_0, $N_{2\omega}$	:	efforts normaux
N	:	matrice des fonctions de forme
$\mathcal{R}$	:	fonction de relaxation
$\mathcal{R}^*$	:	module opérationnel
T	:	effort tranchant de cisaillement
t	:	variable temporelle
S_c	:	aire de la section droite du cœur
S_f	:	aire de la section droite des faces
$\overline{u}$	:	vecteur champ de déplacement
U_i, u_i, u, $\overline{u}$, u_0	:	déplacement longitudinal suivant (Ox)
U, $\overline{U}$, U_0	:	vecteur ou mode propre
U_n	:	coefficients de Taylor de U à l'ordre n
W	:	mode de flexion
w	:	déplacement transversal suivant (Oz)

Symboles grecs

β, β_i	:	rotations
(Δ_j, Ω_j)	:	paramètres du modèle de Maxwell généralisé

η_{ve}, η_c	:	facteur de perte du cœur
η	:	amortissement ou facteur de perte structurelle
δ	:	paramètre de précision pour le problème de la MAN
ε, $\overline{\varepsilon}$	:	déformation normale, tenseur de déformation
σ, $\overline{\sigma}$	:	contrainte normale, tenseur de contrainte
ξ_2	:	tenseur de déformation en cisaillement
ν_c	:	coefficient de Poisson du cœur
ν_f	:	coefficient de Poisson des faces
ρ_c	:	densité massique du cœur
ρ_f	:	densité massique des faces
λ	:	Valeur propre λ_n
: coefficients de Taylor de λ à l'ordre n		
Ω	:	fréquence de résonance ou pulsation amortie
ω, ω_0	:	fréquence ou pulsation

Abréviations

ADF	:	Anelastic Displacement Field
DA	:	Différentiation Automatique
diamant	:	DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée
EF	:	Eléments Finis
MAN	:	Méthode Asymptotique Numérique
PVB	:	Polyvinyl de Butyral

Notations

$\delta(\bullet)$	:	quantité virtuelle

δP_{int}	:	puissance virtuelle des efforts intérieurs
δP_{ext}	:	puissance virtuelle des efforts extérieurs
δP_{acc}	:	puissance virtuelle des efforts d'inertie
$\bullet_{,x} = \partial \bullet / \partial x$	:	dérivée spatiale
$\dot{\bullet} = \partial \bullet / \partial t$	:	dérivée temporelle
$(*)$	:	opérateur du produit de convolution

Calcul vectoriel et tensoriel

$$({}^t\mathbf{A})_{ij} = A_{ji}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$\mathbf{A} \ : \ \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$$

$$\mathbf{A} \vdots \mathbf{B} = A_{ijk} B_{kji}$$

$$(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$$

$$(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$$

$$(\mathbf{A} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{B})_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$$

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

Introduction générale

Dans de nombreux domaines tels que l'aéronautique, l'automobile, la construction navale, le génie civil etc ..., il est très important de réduire les phénomènes vibratoires et le bruit, afin d'assurer un maximum de confort aux usagers mais aussi de protéger les ouvrages contre la fatigue structurale qui peut conduire à leur ruine. La solution la plus utilisée et la moins coûteuse à mettre en œuvre est le contrôle passif qui consiste à intégrer aux ouvrages des matériaux viscoélastiques connus pour leur capacité à dissiper de l'énergie vibratoire et acoustique. Un moyen efficace d'utilisation des matériaux viscoélastiques est sous forme de structures sandwichs viscoélastiques à savoir une fine couche viscoélastique intercalée entre deux couches élastiques (Fig. 1). Dans cette configuration, l'amortissement se traduit surtout par un cisaillement important dans la couche viscoélastique grâce à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur. Récemment, le développement de nouveaux procédés de fabrication, ont permis le développement de nouvelles formes d'utilisation des matériaux viscoélastiques : les structures hétérogènes viscoélastiques constituées d'une matrice élastique ou viscoélastique contenant des inclusions ou des particules élastiques ou viscoélastiques (Fig. 2). C'est ainsi que les panneaux sandwichs viscoélastiques sont utilisés dans l'automobile pour la fabrication des pares brises, des capots ou des ailes avant (Fig. 3.a) . Dans le génie civil, une nouvelle formulation de béton contenant des agrégats de caoutchouc (Fig. 3.b) est en plein développement pour la construction d'ouvrages ayant une meilleure isolation acoustique. Lorsqu'une structure est sollicitée sur l'une de ses fréquences propres, elle entre en résonnance, ce qui

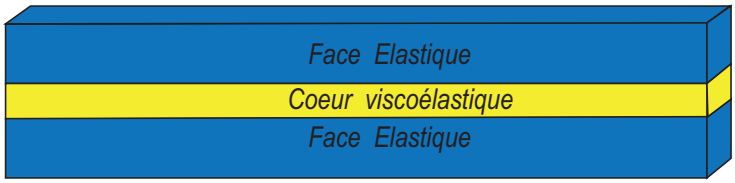


FIG. 1 – Structure sandwich viscoélastique

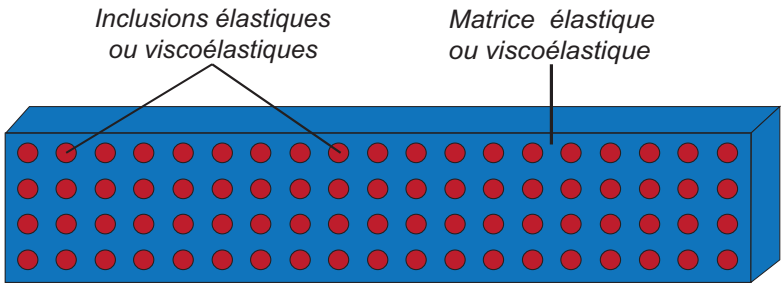


FIG. 2 – Structure hétérogene viscoélastique

est nuisible en terme de bruits et de durabilité de la structure. Afin d'éviter ce phénomène, il est important de connaitre les fréquences et modes propres de vibration de la structure. Par conséquent l'objectif principal de cette thèse, est de développer des techniques de réduction de modèle afin de minimiser les coûts de calcul des propriétés modales (modes propres et valeurs propres) de structures à matériaux composites présentant soit une répétitivité géométrique (Fig. 4) soit une répétitivité matérielle (Fig. 2).

Cependant les propriétés modales des structures à matériaux composites viscoélastiques sont déterminées grâce à la résolution de problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Cette non linéarité de type matérielle est introduite par la dépendance en fréquence et en température du module d'Young des phases viscoélastiques. L'évolution du module d'Young ou de Coulomb de ces matériaux est donnée par des courbes maitresses appelées nomographes. Ces courbes maitresses sont construite en se basant sur des essais mécaniques et un traitement numérique des résultats. Pour plus de détails sur la construction des courbes maitresses, se référer à la thèse de Licie Rouleau [1].



(a) Automobile (b) Génie civil

FIG. 3 – Exemples d'applications des structures composites viscoélastiques

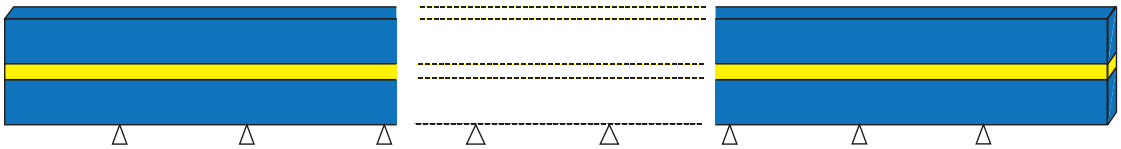


FIG. 4 – Longue structure sandwich viscoélastique répétitive

Plusieurs méthodes ont été développées pour le calcul des propriétés modales. Mais leur mise en œuvre reste difficile dans certains cas de matériaux composites viscoélastiques. Les travaux menés dans cette thèse proposent deux méthodologies numériques. La première est la méthode asymptotique à deux échelles (MADE) qui est développée pour la détermination des propriétés modales (modes propres et valeurs propres) des longues structures sandwichs viscoélastiques avec une répétitivité au niveau des conditions aux limites (Fig. 4). La MADE est une technique d'homogénéisation proposée par Daya et al [2, 3] pour l'analyse des vibrations des matériaux élastiques monocouches sans amortissement. Elle permet de scinder le problème initial de grande taille en deux sous problèmes de tailles relativement petites. Le premier qualifié de local est un problème aux valeurs propres complexes posé sur une, deux ou trois cellules de bases. Le second est une équation différentielle d'amplitude dont les coefficients sont complexes et déterminés à partir de la résolution des problèmes locaux. La deuxième méthodologie développée dans cette thèse est la méthode des éléments finis multi-échelles pour le

calcul des propriétés modales des structures à matériaux hétérogènes viscoélastiques avec la prise en compte de la dépendance en fréquence des phases viscoélastiques. Les matériaux hétérogènes sont constitués de différentes phases ou constituants dont les dimensions caractéristiques sont très inférieures à celles de la structure globale. Dans tout le reste du document nous désignons par "échelle macroscopique", l'échelle de la structure globale et l'échelle des constituants (microstructure) sera désignée par "échelle microscopique". Les échelles atomiques sont exclues dans cette étude. Les travaux réalisés au cours de cette thèse sont présentés dans ce mémoire en quatre chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique des méthodes numériques de résolution des problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques. Dans cette partie nous mettrons un accent particulier sur la DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée (*diamant*) en présentant ses principes généraux. Ensuite un état de l'art sur les techniques d'études des longues structures répétitive sera fait afin de mettre en évidence l'intérêt de la nouvelle approche que nous proposons pour l'analyse vibratoire des longues structures sandwichs viscoélastiques à forme répétitive. Nous ferons une revue non exhaustive des différentes techniques d'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Nous refermerons cette première partie par un positionnement de cette étude dans son contexte.
- Le second chapitre est consacré à l'analyse à deux échelles des vibrations de matériaux sandwichs viscoélastiques ayant un aspect répétitif. L'accent sera mis sur la capacité de cette nouvelle approche à évaluer les propriétés modales de ces structures en terme de fréquences amorties et des amortissements correspondants. Enfin nous montrerons que cette nouvelle approche est une aide à la conception de structures sandwichs ayant une large bande d'arrêt.
- Dans le troisième chapitre, nous étendrons la méthode multi-échelle utilisée par Attipou et al [4], à l'analyse des vibrations des matériaux hétérogènes viscoélastiques avec la prise en compte de la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence du module d'Young des phases viscoélastiques. Une confrontation des résultats

de la présente approche à ceux de la simulation éléments finis sous ABAQUS permettra de confirmer la validité de l'approche proposée.

- Dans le quatrième chapitre, l'approche éléments finis multi-échelle proposée au chapitre 3, est utilisée pour concevoir des matériaux sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. En effet la souplesse et la généricité de l'approche éléments finis multi-échelle permet de considérer des composites à matrices et inclusions viscoélastiques. Par conséquent nous montrerons dans ce chapitre comment on peut améliorer les propriétés amortissantes d'un matériau sandwich viscoélastique en noyant dans le cœur un autre matériau viscoélastique ayant de meilleures propriétés amortissantes. Divers morphologies des inclusions (circulaires, elliptiques etc ...) seront étudiées afin de montrer l'influence de ce paramètre sur les propriétés amortissantes.

Enfin nous clôturerons ce mémoire par un bilan de nos travaux et proposeront de nouvelles perspectives.

Chapitre 1

Bibliographie et positionnement du sujet de la thèse

1.1 Introduction

Les matériaux viscoélastiques sont de plus en plus utilisés pour l'amortissement, le contrôle passif des vibrations et l'élimination ou l'atténuation des bruits dans de nombreux domaines tels que l'automobile, l'aéronautique, le génie civil etc ... Le contrôle passif consiste à incorporer, dès la conception, à la structure, des matériaux viscoélastiques dont le pouvoir amortissant est bien connu. Cependant, les matériaux viscoélastiques présentent un comportement non linéaire sous l'effet des sollicitations et des facteurs environnementaux, en l'occurrence leur dépendance en fréquence et en température conduisent à des lois de comportement non linéaires. Par conséquent, la résolution d'un problème de vibrations amorties de structure en matériaux composites viscoélastiques, revient à la résolution d'un problème non linéaire aux valeurs propres complexes [5]. Plusieurs études de la littérature ont proposé des techniques de résolution numériques des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Dans la première partie de ce chapitre, nous passons en revue ces différentes techniques de résolution numérique des problèmes aux valeurs propres complexes.

Les longues structures à formes répétitives sont de nos jours construites en matériaux composites viscoélastiques. On cumule ainsi les avantages des structures à forme répétitives (compromis entre leur capacité portante, leur poids et leur prix par rapport à des poutres de section pleines) et ceux des matériaux composites viscoélastiques (amortissement et contrôle passif des vibrations). L'étude des vibrations de ce type de structures conduit à un problème non linéaire aux valeurs propres complexes dont la taille peut devenir très grande, rendant ainsi les méthodes traditionnelles de résolution des problèmes aux valeurs propres très coûteuses et peu efficaces. Afin de contourner ces problèmes, des techniques d'homogénéisation ont été proposées dans la littérature pour le calcul des structures de grande taille à forme répétitive. La seconde partie de ce chapitre fera un tour d'horizon des différentes méthodes de calcul pour les longues structures répétitives. Ce tour d'horizon nous permettra de préciser la pertinence de l'analyse à deux échelles que nous proposons dans cette étude pour déterminer les propriétés modales des longues structures sandwichs viscoélastiques à forme répétitive.

Afin d'étudier les vibrations amorties de matériaux composites viscoélastiques, on utilise généralement des techniques d'homogénéisation afin de déterminer le comportement effectif de la structure. Ces méthodes d'homogénéisation peuvent être analytiques ou numériques. De nombreuses études ont proposé diverses techniques d'homogénéisation pour le calcul des matériaux composites [6, 7, 8]. Dans la troisième partie de ce chapitre nous ferons un tour d'horizon des différentes méthodes d'homogénéisation rencontrées dans la littérature.

Un bilan de ce chapitre nous permettra enfin de positionner l'ensemble de cette étude dans son contexte. Il permettra surtout de mettre en évidence l'intérêt et la pertinence de la mise en place de l'analyse à deux échelles des vibrations des longues structures sandwichs viscoélastiques ayant un aspect répétitif, ainsi que la modélisation multi-échelles des vibrations des structures hétérogènes viscoélastiques.

1.2 Méthodes numériques de calcul des propriétés modales des structures viscoélastiques

1.2.1 Généralités

La modélisation numérique des structures composites viscoélastiques (Figs. 1 et 2) a fait l'objet d'une attention particulière ces dernières années. L'un des points importants est le choix de la forme de discrétisation des différentes couches de matériaux surtout en 3D de façon à bien prendre en compte le cisaillement dans le cœur qui est la source d'amortissement dans les sandwichs viscoélastiques. En effet la discrétisation volume/volume/volume des trois couches conduirait à un problème avec un très grand nombre de degrés de liberté ce qui rendrait le calcul très coûteux en temps de calcul et en espace mémoire CPU. Plusieurs études ont donc proposé des simplifications afin de réduire le nombre de degrés de liberté sans pour autant altérer la précision des résultats. Différents modèles ont donc été proposés notamment les éléments plaque/-volume/plaque [9], coque/volume/coque [10, 11, 12], coque/coque/coque ou poutre/-poutre/poutre [13, 14, 15]. Dans l'ensemble de ces structures le module d'Young des matériaux viscoélastiques est variable. Dans le domaine fréquentiel, plusieurs modèles permettent de décrire l'évolution du module d'Young en fonction de la pulsation propre de vibration comme par exemple le modèle Anelastic Displacement Field (ADF) ou le modèle à dérivée fractionnaire [16]. Quel que soit le modèle considéré, la formulation des problèmes de vibrations libres conduit à un problème non linéaire aux valeurs propres complexes s'écrivant sous la forme :

$$[K(\omega) - \omega^2 M]U = 0, \tag{1.1}$$

où $[K(\omega)]$ est la matrice de rigidité dépendant de la fréquence, $[M]$ la matrice de masse, $\{U\}$ est le vecteur propre, ω la pulsation propre à partir duquel sont estimées les propriétés modales de la structure à partir de la formule classique [5] :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \tag{1.2}$$

Où Ω est la pulsation amortie et η le facteur de perte ou amortissement modal (amortissement passif). Dans la littérature plusieurs méthodes ont été proposées pour la détermination de ces propriétés modales. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes dites "approchées" et les méthodes dites "quasi-exactes".

1.2.2 Méthodes approchées

a. Méthode d'analyse directe de réponse fréquentielle

La méthode directe de la réponse fréquentielle consiste à analyser la réponse de la structure soumise à une excitation harmonique d'amplitude F de sorte à exciter les modes d'intérêt. Numériquement le problème à résoudre s'écrit alors sous la forme :

$$[K(\omega) - \omega^2 M]U = F, \tag{1.3}$$

On construit ensuite les courbes de réponses en déplacement $\{U(\omega)\}$ par assemblage et inversion des matrices dynamiques $([K(\omega) - \omega^2 M])$ en faisant varier ω sur une plage donnée de fréquences. Les pics observés sont les fréquences amorties et les amortissements correspondant sont calculés grâce à la méthode de la bande passante à $-3dB$ (Figure 1.1). L'amortissement est alors obtenu comme suit :

$$\eta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega} \tag{1.4}$$

La méthode directe de réponse fréquentielle est utilisée en laboratoire pour la détermination expérimentale des propriétés modales des structures. Cependant cette méthode n'est valable que pour de faibles amortissements et des fréquences propres suffisamment séparées. Afin d'éviter l'assemblage et l'inversion de plusieurs matrices dynamiques nécessaires pour balayer toute la plage de fréquences [11] surtout dans le cas de la dépendance en fréquence, Abdoun et al [17] dans leur travaux ont proposé une approche asymptotique. Cette approche qui permet de réduire le temps de calcul, est basée sur la décomposition du problème (1.3) sous la forme :

$$[K(0) + E(\omega)K_v - \omega^2 M]U = F, \tag{1.5}$$

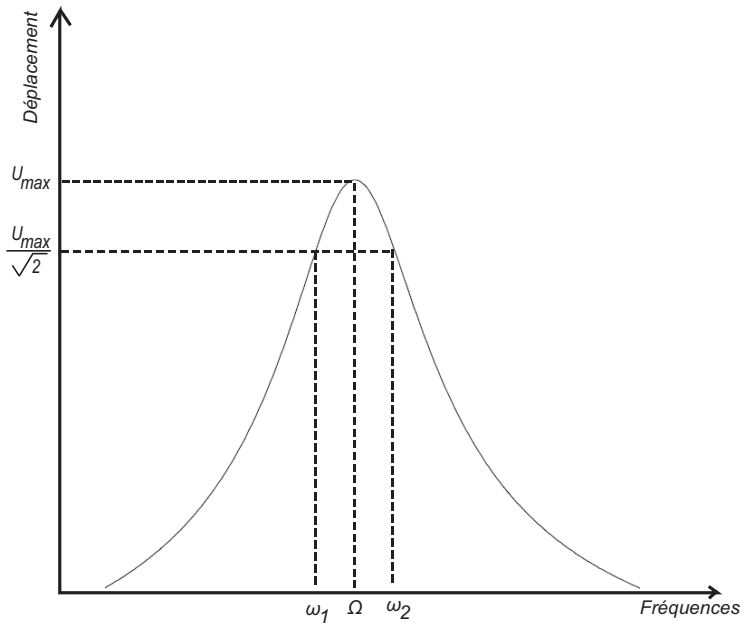


FIG. 1.1 – Calcul de l'amortissement par la méthode de la bande passante

où $E(\omega)$ introduit la dépendance en fréquence du module de Young complexe du matériau viscoélastique qui peut se mettre sous la forme $E^*(\omega) = E^*(0) + E(\omega)$. $[K(0)]$ est la matrice obtenue à partir du module d'élasticité retardé $E^*(0)$ de la phase viscoélastique, $[K_v]$ est une matrice purement réelle. Le développement en série de Taylor des inconnues (ω, U) ainsi que de la fonction $E(\omega)$ et leur introduction dans le problème initial permet d'obtenir une suite de problèmes linéaires. La résolution de ces problèmes linéaires permet de calculer directement la réponse $\{U\}$.

b. La Méthode d'énergie modale

La méthode d'énergie de déformation modale proposée par Jonhson et al [10] est basée sur la répartition de l'énergie de déformation dans la structure. L'amortissement est en effet défini comme la somme des facteurs de perte des sous-structures constitutives pondérées de leur fraction d'énergie de déformation [18] se traduisant par :

$$\eta = \sum_k \eta_k \frac{S_k}{\sum\limits_k S_k} \tag{1.6}$$

où η_k et S_k sont respectivement le facteur de perte et l'énergie de déformation de la sous-structure k. En fonction du mode utilisé (réel ou complexe), on distingue deux versions de la méthode d'énergie modale : la méthode d'énergie modale mode réel et la méthode d'énergie modale mode complexe.

• **La méthode d'énergie modale mode réel :** Elle est basée sur l'hypothèse de la proportionnalité entre le mode propre $\{U\}$ de la structure amortie et le mode propre $\{U_r\}$ de la structure non amortie vérifiant le problème aux valeurs propres réelles :

$$[K(0) - \omega_0^2 M]U_r = 0, \tag{1.7}$$

où la matrice de rigidité $[K(0)]$ est construite en ne considérant que le module d'élasticité retardée dans la phase viscoélastique. Le couple (ω_0, U_r) solution du problème (1.7) permet d'approximer la matrice $K(\omega)$ du problème (1.1) par la matrice $[K(\omega_0)]$. Le problème (1.1) se réécrit alors sous la forme :

$$[K(\omega_0) - \omega^2 M]U_r = 0 \tag{1.8}$$

La pulsation amortie ainsi que le facteur de perte correspondant sont alors calculés à l'aide de la formule :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) = \frac{^T\{U_r\}K(\omega_0)\{U_r\}}{^T\{U_r\}M\{U_r\}} \tag{1.9}$$

Cette méthode bien qu'ayant un coût de calcul relativement faible, ne donne de bons résultats que pour des amortissements faibles d'où la nécessité de l'améliorer en utilisant les modes complexes.

• **La méthode d'énergie modale mode complexe :** C'est une version améliorée de la méthode d'énergie modale mode réel qui approxime le mode $\{U\}$ par un mode complexe $\{U_c\}$ solution du problème suivant :

$$[K(\omega_0) - \omega_0^2 M]U_c = F \tag{1.10}$$

$\{F\}$ étant le vecteur des amplitudes des forces harmoniques imposées. La fréquence amortie ainsi que les amortissements correspondants sont donnés par :

$$\omega^2 = \Omega^2(1+i\eta) = \frac{^T\{U_c\}K(\omega_0)\{U_c\}}{^T\{U_c\}M\{U_c\}} \tag{1.11}$$

Même si la méthode d'énergie modale mode complexe donne de meilleurs résultats que la méthode d'énergie modale mode réel, la précision des estimations reste encore à améliorer. Pour cela, des méthodes numériques plus performantes ont été proposées, que nous pouvons qualifier de méthodes quasi-exactes. La sous-section suivante fera un point sur l'état de l'art sur les méthodes quasi-exactes de résolution des problèmes de vibrations non linéaires.

1.2.3 Méthodes quasi-exactes de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires

Compte tenu de la nature des problèmes qu'elles sont capables de résoudre, on peut classer les méthodes quasi-exactes en deux catégories : Les méthodes quasi-exactes basiques et les méthodes quasi-exactes avancées.

a. Méthodes quasi-exactes basiques

Nous appelons méthodes basiques les méthodes de résolution des problèmes de vibrations linéaires avec un module de Young constant ou nul dans la phase viscoélastique.

- La méthode QR : L'une des méthodes quasi-exactes les plus connues et les plus utilisées pour la résolution numérique des problèmes de vibrations linéaires aux valeurs propres complexes ou réelles, est la méthode QR. Elle a été proposée en 1982 par Bathe [19] pour calculer les valeurs propres d'une matrice ayant des coefficients réels ou complexes. Cette méthode est basée sur la décomposition de la matrice à étudier

$[A]$ sous la forme :

$$[A] = [Q][R], \tag{1.12}$$

où $[Q]$ est une matrice orthogonale et $[R]$ une matrice triangulaire. Une fois cette décomposition effectuée, on calcul la matrice $[R][Q]$. On procède ensuite à plusieurs itérations sur ce calcul. En cas de convergence, la suite matricielle tend vers une matrice triangulaire supérieure semblable à $[A]$. La résolution du système $([A] - \lambda[I])x = 0$ permet de déterminer les vecteurs propres de $[A]$ ($[I]$ étant une matrice identité). Le lecteur est prié de se référer à la thèse de Duigou [20] pour plus de détails. La méthode QR est assez précise dans la détermination des valeurs propres, cependant elle n'est valable que pour des matrices à coefficients constants et pour des matrices de tailles relativement faibles.

- Approche asymptotique : Dans l'approche asymptotique proposée par Ma et He [14], la valeur propre est remplacée par $\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta)$ dans le problème (1.1). Le problème initial à résoudre (1.1) se réécrit alors en fonction des nouvelles inconnues Ω, η et U :

$$[K(\Omega^2, \eta) - \Omega^2(1 + i\eta)M]U = 0 \tag{1.13}$$

Les inconnues Ω, η et U sont ensuite développées en séries entières d'un paramètre donné. Ces développements introduits dans le problème (1.13) et l'identification des puissances entières du paramètre de développement conduit à une succession de problèmes linéaires dont les solutions sont les coefficients du développement asymptotique des inconnues Ω, η et $\{U\}$. Pour plus de détails se référer à la thèse de Bilasse [18]. Cependant cette méthode n'est valable que pour de faibles amortissements et pour des modules d'Young constants.

b. Méthodes quasi-exactes avancées

Nous qualifions de méthodes quasi-exactes avancées, les méthodes de résolution des problèmes non linéaires de valeurs propres complexes où la non linéarité matérielle est introduite par la dépendance en fréquence du module d'Young des matériaux viscoélastiques.

- Méthode d'itération réduction : La méthode d'itération réduction a été proposée par Chen et al [21] pour prendre en compte la dépendance en fréquence de la phase viscoélastique. En posant $\lambda = \omega^2$, le module de cisaillement de la phase viscoélastique peut se mettre sous la forme $G^*(\lambda) = G(\lambda)[1 + i\beta(\lambda)]$. La matrice de rigidité du problème (1.1) peut alors être décomposée en sa partie élastique et viscoélastique comme suit :

$$[K(G(\lambda)) + i\beta(\lambda)K_2(G(\lambda)) - \lambda M]U = 0 \tag{1.14}$$

Dans cette approche, le problème (1.14) est résolu en deux pas. Au premier pas, on calcul une approximation de la solution à l'ordre 0 (λ_r, U_r) solution du problème linéaire aux valeurs propres réelles $[K(G_0) - \lambda M]U = 0$, G_0 étant une valeur fixée de $G(\lambda)$ (généralement le module d'élasticité retardé de la phase viscoélastique) et r le rang du mode. Ensuite la solution asymptotique $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{U}_r)$ à l'ordre 1 est obtenue supposant l'amortissement nul ($\beta = 0$), ramenant ainsi le problème à résoudre à un problème aux valeurs propres réelles non linéaire :

$$[K(G(\lambda)) - \lambda M]U = 0 \tag{1.15}$$

Les inconnues sont ensuite réécrites comme suit :

$$\begin{cases} K(G(\lambda_r)) = K(G_0) + \dfrac{\partial K}{\partial G}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0) \\ \\ \tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \dfrac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0) + \dfrac{\partial^2 \lambda_r}{\partial G^2}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0)^2 + ... \\ \\ \tilde{U}_r = U_r + \dfrac{\partial U_r}{\partial G}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0) + \dfrac{\partial^2 U_r}{\partial G^2}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0)^2 + ... \end{cases} \tag{1.16}$$

En introduisant ces développements (1.16) dans le problème (1.15) et en considérant la condition d'orthogonalité des modes, la solution asymptotique obtenue à l'ordre 1 devient :

$$\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \frac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0}(G(\lambda_r) - G_0) = \lambda_r +^T U_r[\frac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0}]U_r(G(\lambda_r) - G_0) \quad (1.17)$$

Au second pas on pose $\lambda = \tilde{\lambda}_r$ dans le problème (1.14). Le problème à résoudre est alors un problème linéaire aux valeurs propres complexes résolu en utilisant l'algorithme itératif de Lanczos [22] couplé à une base réduite. C'est une technique qui nécessite beaucoup d'itérations, ce qui fait exploser le temps de calcul pour les structures de grande taille.

- Méthode d'Arnoldi non linéaire : La méthode d'Arnoldi non linéaire [23] est une généralisation de la méthode d'Arnoldi [24]. Elle permet de résoudre les problèmes aux valeurs propres non linéaires creux et de grandes tailles pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} T(\lambda)x = 0 \\ T(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n} \end{cases} \quad (1.18)$$

C'est une méthode itérative qui consiste à résoudre le problème (1.18) en le projetant dans des sous espaces de Krylov. Les problèmes linéaires issus de la projection sont de petites tailles et résolus à l'aide de techniques itératives. Pour plus de détails sur cette méthode se référer aux travaux de Voss [23].

- La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) : La MAN est une technique de résolution du problème (1.1) proposée par Daya et Potier-Ferry [25] basée sur le couplage de la technique de perturbation et celle d'homotopie pour laquelle une procédure de continuation est proposée. Dans la mise en œuvre de la MAN, le module d'Young dépendant de la fréquence du cœur est réécrite comme suit en posant $\lambda = \omega^2$:

$$E^*(\lambda) = E^*(0) + E(\lambda) \quad (1.19)$$

La transformation (1.19) permet de réécrire le problème initial (1.1) en injectant un paramètre p d'homotopie :

$$[K(0) + pE(\lambda)K_v - \lambda M]U = 0 \tag{1.20}$$

où $[K(0)]$ est la matrice de rigidité construite en ne considérant que le module d'élasticité retardée de la phase viscoélastique, $[K_v]$ est la matrice purement réelle issue de la décomposition de $[K(\lambda)]$ et $E(\lambda)$ est la fonction traduisant la dépendance en fréquence du module d'Young de la phase viscoélastique. Les inconnues (λ, U) et la fonction $E(\lambda)$ sont ensuite développées en série de Taylor du paramètre p. Les valeurs de départ des séries étant (λ_0, U_0), $E(\lambda_0)$ avec (λ_0, U_0) solution du problème :

$$[K(0) - \lambda M]U = 0 \tag{1.21}$$

correspondant à $p = 0$. Le problème (1.21) est un problème linéaire de vibration libre non amortie qui peut être résolu par la méthode QR [19] ou par la méthode d'Arnoldi [24], implémentées respectivement dans matlab par les fonctions eig et eigs. L'introduction des développements en séries dans l'équation de départ permet d'identifier une suite de problèmes linéaires dont les résolutions génèrent les coefficients de Taylor des inconnues du problème. Afin de réduire le nombre d'inversion de matrice dans la procédure de continuation, Duigou et al [26] proposent deux autres, algorithmes itératifs d'ordre élevé basés sur la MAN, les approximants de Padé sont utilisés pour améliorer la convergence des séries. Dans l'approche classique de la MAN, le calcul des séries de Taylor se fait manuellement et les étapes de la résolution impliquant la loi de comportement viscoélastique dépendant de la fréquence $E^*(\omega)$ sont reformulées à chaque changement de loi, ce qui rendait difficile son utilisation pour la conception de structures en matériaux composites viscoélastiques. Afin de venir à bout de ces difficultés et limites, Bilasse et al [5] proposent une résolution générique du problème quelle que soit la loi de comportement de la phase viscoélastique, en utilisant l'approche *diamant* acronyme de "$DIfférentiation\ Automatique\ de\ la\ Méthode\ Asymptotique\ Numérique\ Typéee$" proposée par Charpentier et Potier-Ferry [27] dont la boîte à outils a été élaboré sous

Matlab par Koutsawa et al [28]. Pour plus de détails sur la version matlab de la boîte à outils *diamant* et son fonctionnement se référer aux travaux de Koutsawa et al [28].

1.3 Etat de l'art sur le calcul des valeurs propres pour les longues structures répétitives

1.3.1 Généralités

Les longues structures flexibles ayant un aspect répétitif sont utilisés dans deux nombreux domaines tels que l'aéronautique et l'aérospatiale (armatures des avions, stations orbitales, ...), le génie civil (support des couvertures des stades, gares et grandes surfaces, ...), car elles offrent un bon compromis entre leur capacité portante, leur poids et leur prix, par rapport à des poutres pleines et homogènes. Pour ce type de structure, la connaissance détaillée des fréquences et modes propres de vibration est essentielle pour la prédiction de leur comportement dynamique, en réponse à une excitation forcée déterministe ou aléatoire. Cependant la longueur et la forme répétitive de ces structures leurs confère certaines propriétés et comportements qui rendent l'étude de leurs vibrations par les méthodes traditionnelles (calculs analytiques et éléments finis) compliquée ou inefficace. Il se pose en général deux types de problème dans l'étude des vibrations des structures flexibles ayant des cellules de base répétitives :

• Des problèmes de calculs liés aux algorithmes de résolutions des problèmes aux valeurs propres : ceux ci fonctionnent mal et la grande taille de la structure rend le calcul chère en temps de calcul et en espace mémoire CPU.

• Des problèmes liés à la tenue de la structure : l'analyse des phénomènes de résonance est très complexe du fait que ces structures présentent des modes voisins très rapprochés. En effet il a été établi [29] que les fréquences propres voisines de vibration de ces structures sont très proches les unes des autres et regroupées dans des paquets distincts. Cette proximité entre les fréquences propres rend impossible l'utilisation de

la méthode d'analyse de la réponse fréquentielle (bande passante à $-3dB$) pour déterminer les propriétés modales de ces structures lorsqu'elles sont en matériaux sandwich viscoélastiques.

Afin de simplifier l'analyse de ces structures et contourner les problèmes et limitations cités précédemment, des techniques d'homogénéisation sont utilisées pour déterminer des modèles macroscopiques tels que des poutres ou coques équivalentes à partir de la microstructure [30, 31, 32]. Ces modèles équivalents peuvent être construits numériquement au moyen de la méthode des éléments finis et ce même avec des cellules de bases ayant des géométries compliquées [33, 34, 35]. Les différentes techniques d'homogénéisation proposées dans les ouvrages susmentionnés donnent de bons résultats en statique et sont aussi valides pour des problèmes de vibration en basses fréquences, mais ne sont pas valides lorsque la longueur d'onde est du même ordre que la microstructure ou la cellule de base. Une autre technique est celle de la matrice de transfert [36], mais elle est inefficace lorsque la structure possède des modes modulés. En effet, les structures répétitives présentent trois formes de modes : les modes globaux [37, 38], les modes modulés [39, 40] et les modes localisés [41]. Afin d'étudier les vibrations libres de longues structures répétitives élastiques présentant des modes modulés, Daya au cours de sa thèse [29] a proposé une méthode asymptotique à deux échelles basées sur l'analyse asymptotique proposée par Sanchez et al [42]. Cette méthode scinde le problème initial de grande taille en deux sous problèmes de tailles relativement petites. Le premier est formulé sur une, deux ou trois cellules de base et le second est une équation d'amplitude semblable à l'équation de Ginzburg-Landau :

$$C_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + (\lambda - \lambda_0) a = 0 \tag{1.22}$$

où a est l'amplitude globale qui rend compte de la modulation lente des modes propres et λ la valeur propre correspondante. Les coefficients C_a et λ_0 sont calculés à partir des problèmes locaux. L'analyse asymptotique évite ainsi la discrétisation de toute la structure. La même analyse à deux échelles a été adoptée par Craster et al [43] pour les structures isotropes élastiques et par Nolde et al [44] pour l'analyse de la propagation

d'onde à travers des structures semi-discrètes.

1.3.2 La Méthode Asymptotique à Deux Echelles ($MADE$) pour l'analyse des vibrations des longues structures répétitives

Dans cette section, nous présentons le principe de la $MADE$ pour l'analyse des vibrations des longues structures répétitives. La $MADE$ est une technique d'homogénéisation qui scinde le problème initial de grande taille en deux sous problèmes : le premier qualifié de local est formulé sur une, deux ou trois cellules de base, le second qualifié de global est une équation différentielle d'amplitude.

a. Problème initial à résoudre

Un problème de vibration structurale se traduit toujours par un problème linéaire ou non linéaire aux valeurs propres réelles ou complexes. La structure étudiée ici est une longue structure élastique répétitive unidimensionnelle. La seule inconnue u n'est donc fonction que de la seule variable x. Le problème de vibration libre linéaire s'écrit alors :

$$\psi(\frac{d}{dx}, \lambda)u = 0 \tag{1.23}$$

où λ désigne la valeur propre ou le carré de la fréquence propre ω ($\omega^2 = \lambda$), u est le mode de vibration et $\psi(\frac{d}{dx}, \lambda)u$ un opérateur linéaire auto-adjoint dont les coefficients sont périodiques par rapport à la variable x.

Après discrétisation et assemblage, le problème (1.23) se réécrit sous la forme du problème numérique suivant :

$$[K - \lambda M]U = 0 \tag{1.24}$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité élastique de la structure et $[M]$ la matrice de masse. Comme nous l'avons évoqué plus haut la résolution numérique de ce problème est

compliquée et très coûteuse lorsque la taille des matrices $[K]$ et $[M]$ est très grande.

b. Définition des modes locaux

Nous cherchons des modes proches des modes locaux de vibration, c'est à dire des modes de vibration définis sur une ou quelques cellules de base avec des conditions de périodicité. Ainsi nous appelons mode local $w_0(x)$ toute fonction périodique de période pl (p entier naturel) telle qu'il existe une valeur propre λ_0 solution de :

$$\begin{cases} \psi(\dfrac{d}{dx}, \lambda_0) w_0 = 0 \\ w_0(x) \ pl \text{ périodique} \end{cases} \tag{1.25}$$

Le calcul de ces modes locaux et des fréquences propres correspondantes ne pose pas de problème et se fait par la méthode des éléments finis, puisque le nombre de degrés de liberté est petit.

c. Passage local-global par la méthode d'échelle double

Le calcul direct des modes d'instabilité cellulaire ou de vibration des structures répétitives faisant l'objet de notre étude, fait apparaître des groupes de modes correspondant à des valeurs propres voisines. Ces modes ressemblent à des modes locaux, mais avec une modulation d'amplitude. Or pour une instabilité cellulaire ou une vibration, les modes locaux sont harmoniques et il est connu qu'une superposition d'harmoniques avec des longueurs d'ondes voisines conduit à une oscillation lentement variable ($\cos(qx)+\cos(px)=2\cos(\dfrac{q-p}{2}x)\cos(\dfrac{q+p}{2}x)$). Nous pouvons donc utiliser la méthode d'échelle double et chercher les inconnues $u(x)$ et λ sous les formes asymptotiques suivantes [42] :

$$\begin{cases} u = u_0(x, X) + \kappa u_1(x, X) + \kappa^2 u_2(x, X) + ... \\ \lambda = \lambda_0 + \kappa\lambda_1 + \kappa^2\lambda_2 + ... \end{cases} \tag{1.26}$$

où κ est un petit paramètre ($\kappa << 1$), x est la variable dite locale ou rapide et $X = \kappa x$ est la variable dite globale ou lente qui décrira ce qui se passe globalement et permettra

de prendre en compte les conditions aux limites globales.

En accord avec la méthode d'échelle double, les variables x et X sont considérées comme des variables indépendantes. Les dérivées par rapport à x suivront la règle suivante :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \kappa \frac{\partial}{\partial X} \tag{1.27}$$

Afin de respecter l'aspect répétitif de la structure étudiée ici, on suppose que le déplacement $u(x, X)$ est périodique de période pl (par rapport à la variable local x). La continuité du mode entre deux cellules voisines est ainsi assurée.

L'introduction des développements asymptotiques (1.26) des inconnues du problème dans l'équation (1.23), en respectant la règle de dérivation (1.27), et l'identification des puissances entières du petit paramètre κ nous conduit à une infinité de problèmes s'écrivant comme suit :

$$\begin{cases} \psi(\partial_x, \lambda_0) u_0 = 0 & \text{ordre } 1 \\ \psi(\partial_x, \lambda_0) u_1 = F_1(u_0, \lambda_1) & \text{ordre } \kappa^1 \\ \psi(\partial_x, \lambda_0) u_2 = F_2(u_0, u_1, \lambda_1, \lambda_2) & \text{ordre } \kappa^2 \\ - \\ \psi(\partial_x, \lambda_0) u_n = F_n(u_0, u_1, ..., u_{n-1}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) & \text{ordre } \kappa^n \end{cases} \tag{1.28}$$

Compte tenu de l'hypothèse de périodicité en x, on voit que λ_0 est nécessairement une valeur propre solution du problème (1.25). Afin de faciliter l'analyse, le mode local $u_0(x)$ est supposé être un mode simple. De plus l'opérateur $\psi(\partial_x, \lambda_0)$ ne dépend que de la variable rapide x et la méthode d'échelle double suppose que les variables x et X sont indépendantes. Donc la solution à l'ordre 1 du problème (1.28) s'écrit sous la forme :

$$u_0(x, X) = A_0(X) w_0(x) \tag{1.29}$$

où la fonction $A_0(X)$ reste à déterminer. Cette fonction est l'amplitude du mode et permet de prendre en compte des solutions modulées. Si le mode est simple, il y a une seule amplitude qui est une fonction à valeurs réelles. Dans le cadre des instabilités cellulaires, le mode est double et la fonction sera à valeurs complexes [29].

d. Equation d'amplitude

Compte tenu du fait que le problème (1.23) est un problème aux valeurs propres, les premiers membres des équations du système (1.28) sont singuliers. Afin de résoudre ces équations, il faut imposer une condition de solvabilité sur leur second membre. Cette condition s'écrit :

$$\langle \psi(\frac{d}{dx}, \lambda_0)u_i, w_0\rangle = \langle F_i, w_0\rangle = 0 \text{ pour } i \text{ variant } de \text{ 1 à } n \tag{1.30}$$

Avec $\langle f, g\rangle = \int_{pl} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
En effet l'opérateur $\psi(\frac{d}{dx}, \lambda)u$ étant auto-adjoint, implique que :

$$\langle \psi(\frac{d}{dx}, \lambda_0)u_i, w_0\rangle = \langle u_i, \psi(\frac{d}{dx}, \lambda_0)w_0\rangle = \langle u_i, 0\rangle = 0 \tag{1.31}$$

L'application de cette conditions solvabilité au second membre de l'équation à l'ordre κ^2 du système (1.28) conduit à l'équation différentielle vérifiée par l'amplitude $A_0(X)$ qui est de la forme :

$$C_a \frac{d^2 A_0}{dX^2} + \lambda_0 A_0 = 0 \tag{1.32}$$

où C_a est une constante calculée à partir des problèmes locaux.

e. Prise en compte des conditions aux limites et calcul asymptotique du spectre des valeurs propres

Afin de résoudre le problème global (1.32), on cherche les conditions aux limites imposées sur l'amplitude $A_0(X)$. En respectant la règle de dérivation (1.27), on peut réécrire les conditions aux limites. Par identification des puissances entières du petit paramètre κ, on obtient les conditions aux limites vérifiées par les problèmes globaux. Par exemple la condition d'encastrement aux deux bords ($x = 0$ et $x = L$) se traduit par :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

Les développements asymptotiques de $u(0)$ et $\frac{d}{dx}u(0)$ introduites dans l'équation (1.33) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} A_0(0)w_0(0) + \kappa u_1(0,0) + 0(\kappa^2) = 0 \\ A_0(0)\frac{d}{dx}w_0(0) + \kappa(\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,0) + \frac{d}{dX}A_0(0)w_0(0)) + 0(\kappa^2) = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

Dans beaucoup de cas, le mode local ne vérifie pas les deux identités $w_0(0) = 0$ et $\frac{d}{dx}w_0(0) = 0$. Alors la condition d'encastrement (1.34) imposera une condition aux limites pour l'amplitude :

$$A_0(0) = 0 \tag{1.35}$$

Une fois toutes les conditions aux limites établies, on peut alors résoudre l'équation d'amplitude (1.32) et déterminer les valeurs possibles des paramètres λ_1, λ_2, ... Le spectre des valeurs propres à cet ordre s'écrira alors :

$$\lambda = \lambda_0 + \kappa\lambda_1 + \kappa^2\lambda_2 + 0(\kappa^2) \tag{1.36}$$

L'analyse à deux échelles permet donc de décomposer le problème des valeurs propres initial en deux problèmes de valeurs propres. Les premier est local dépendant de la variable rapide x et peut être résolu par la méthode des éléments finis. Le second est global dépendant de la variable lente X, est une équation différentielle d'amplitude obtenue par l'application de la condition de solvabilité.

1.4 Etat de l'art sur l'homogénéisation des matériaux hétérogènes

Les matériaux utilisés dans l'industrie sont hétérogènes à une échelle ou une autre. Ces matériaux qui par conséquent, sont qualifiés de matériaux multi-échelles, présentent à une échelle donnée que nous qualifierons de microscopiques (micro), plusieurs zones formées de constituants homogènes se partageant l'espace. Les caractéristiques thermomécaniques, géométriques de chaque constituant de la microstructure influencent

sur le comportement thermomécanique global de la structure ou du matériau lui-même que nous qualifierons d'échelle macroscopique (macro). Le comportement thermomécanique de la structure à l'échelle macroscopique est déterminé expérimentalement à travers les essais mécaniques. Cependant elle peut être prédite par des techniques d'homogénéisation qui consistent à déterminer le comportement thermomécanique globale du matériau hétérogène à partir de ceux de chaque phase de la microstructure. Les techniques d'homogénéisation peuvent être classées en deux catégories : l'homogénéisation analytique et l'homogénéisation numérique.

1.4.1 Les techniques d'homogénéisation analytique

L'homogénéisation des matériaux hétérogènes est l'une des branches les plus jeunes de la mécanique des matériaux. Les premières techniques d'homogénéisation sont analytiques. Les bases de l'homogénéisation analytique telle que nous la connaissons aujourd'hui, ont été posées par Eshelby [45]. La version originale de ses travaux sur les matériaux isotropes a été ensuite modifiée ou adaptée par de nombreux auteurs pour traiter de l'anisotropie notamment Ru [46], Li et Dunn [47], Faux et Pearson [48] pour ne citer que ceux-là. D'autres chercheurs se sont intéressés à la morphologie des hétérogénéités. C'est le cas de Chui [49] qui s'est intéressé au cas des inclusions parallélépipédiques, de Rodin [50], Nozaki et Taya [51] qui traitent le problème d'Eshelby pour des inclusions polyédriques. D'autres auteurs ont aussi beaucoup travaillé à l'amélioration et à l'extension du modèle d'Eshelby. On peut citer entre autres Hashin [52], Budiansky [53], Mori et Tanaka [54]. Une extension du modèle d'Eshelby est l'approche auto-cohérente introduite par Hershey [55] pour le matériau polycristalin et reprise par Hill [56] dans le cadre des matériaux comportant des inclusions ellipsoïdales. Ce schéma suppose que chaque particule (matrice ou inclusion) est entourée par les autres phases du milieu et donc par le milieu homogène équivalent. Cette approche reprise par Christensen et Lo [57] donne de bonnes approximations pour des structures ayant une certaine régularité géométrique. Même si certains auteurs notamment Hutchinson

[58], Berveiller et Zaoui [59] et Gurson [60] ont abordé le cas de matériaux non linéaire en utilisant une version incrémentale de l'approche auto-cohérente généralisée de Hill, les meilleurs approximations des propriétés mécaniques de ces matériaux sont données par les approches variationnelles en étendant les principes variationnels de Hashin-Shtrikman qui ont permis de construire des bornes rigoureuses prenant en compte les informations statistiques à deux points [61, 62, 63, 64]. Pour plus de détails sur cette approche variationnelle le lecteur peut se référer aux travaux de Ponte Castañeda [64] et de Willis [65]

Une autre technique d'homogénéisation analytique de plus en plus utilisée est l'homogénéisation asymptotique introduite par Bensoussan et al [66] et repris deux ans plus tard par Sanchez-Palencia [67]. Cette approche est basée sur le développement asymptotique des inconnues du problème notamment les champs de déplacements et les champs de contraintes par rapport à un petit paramètre choisi souvent comme le rapport entre les dimensions caractéristiques de la microstructure et de la macrostructure. Cette approche a servi dans de nombreux travaux à estimer les champs de déplacements, déformations et de contraintes tant locaux que globaux [68, 69, 70, 71]. Une autre version de l'homogénéisation asymptotique a été proposé par Daya et Potier-Ferry [2], Daya et al [41] pour l'analyse des vibrations des longues structure flexibles à forme répétitive.

Cependant l'homogénéisation analytique n'est souvent efficace que pour des structures ayant des microstructures à géométrie simple et en petites déformations. Pour une large revue bibliographie des différentes méthodes d'homogénéisation, se référer aux travaux de Nemat-Nasser et Hori [72]. Afin de s'affranchir des limites des méthodes analytiques et de traiter des problèmes de plus en plus complexes, et surtout avec le développement des méthodes numériques en mécanique des matériaux, les techniques d'homogénéisation numériques ont connu un essor particulier ces dernières décennies. Nous proposons dans la sous-section suivante un tour d'horizon des principales méthodes d'homogénéisation numérique.

1.4.2 L'homogénéisation numérique

Les nouvelles applications industrielles nécessitent des matériaux hétérogènes avec des microstructures ayant des comportements mécaniques et caractéristiques physiques complexes. Ces complexités ont poussé les chercheurs à mettre en place des techniques d'homogénéisation dont la mise en place a été facilitée par les multiples progrès de la modélisation numérique en mécanique des matériaux. L'une des première méthode d'homogénéisation numérique nommée "méthode de cellule unitaire" fut proposé par Christman et al en 1989 [73]. Elle a été reprise dans de nombreuses applications avec différentes variantes par Tvergaard [74], Bao et al [75], Brockenbrough et al [76], Nakamura et Suresh [77], Patel et al [78]. La méthode dite "de cellule unitaire" fournit des informations du point de vue local de la microstructure ainsi que les propriétés effectives du matériau. Ces propriétés sont généralement déterminées en prenant la moyenne des champs de déformation-contrainte dans la microstructure, résultant de l'analyse microstructurale d'un volume élémentaire représentatif (VER) soumis à des chargements. Cependant en présence de non linéarités (géométriques, matérielles ou géométrico-matériels), il est extrêmement difficile de faire des hypothèses correctes et justifiées sur le problème macroscopique. Par conséquent cette méthode d'homogénéisation n'est pas appropriée, ni en grande déformation, ni pour des cas de chemin de chargement complexe et ne prend pas en compte les changements géométriques et physiques dans la microstructure comme par exemple dans le cas des transformations de phases dans les métaux.

Une autre approche a récemment été développée pour l'homogénéisation numérique mutli-échelle des matériaux hétérogènes. Les bases de cette nouvelle approche ont été posées dans les travaux de Suquet [79], Renard et Marmonier [80], Guedes et Kikuchi [81], Terada et Kikuchi [82]. Ensuite des améliorations y ont été apportées dans les récents travaux de Smit et al [83], Miehe et al [84, 85], Michel et al [86], Feyel et Chaboche [87], Terada et Kikuchi [88], Ghosh et al [89], Kouznetsova et al [90], Miehe et Koch [91]. Cette nouvelle approche ne conduit pas à des équations globales, mais

cherche la contrainte macroscopique ou effective en chaque point d'intégration à partir d'une modélisation détaillée de la microstructure liée à ce point. Cette nouvelle approche présente de nombreux avantages :

• Elle ne nécessite aucune hypothèse au niveau macroscopique comme c'est le cas de la méthode dite de "cellule unitaire".

• Les grandes déformations ainsi que les rotations peuvent être prises en compte tant au niveau macroscopique qu'au niveau microscopique.

• Elle est appropriée pour n'importe quelle loi de comportement non linéaire.

• Elle offre la possibilité d'introduire des informations détaillées sur la microstructure, ainsi que son évolution géométrique et physique dans l'analyse macroscopique.

• Elle offre la possibilité d'utiliser n'importe quelle technique de modélisation à l'échelle de la microstructure, notamment la méthode des éléments finis [83, 87, 90] ou les méthodes numériques basées sur la transformation des séries de Fourier [85, 92].

Cette méthode peut être très coûteuse en temps de calcul et espace mémoire CPU puisqu'il faut calculer la contrainte macroscopique en chaque point d'intégration de la structure macroscopique discrétisée. Une solution à cet inconvénient est d'utiliser la programmation en parallèle, comme l'ont fait Feyel et Chaboche [87], puisque la contrainte en chaque point est calculée indépendamment de la contrainte ou de la microstructure des autres points. Cependant dans le cadre de structure ayant une microstructure périodique comme c'est le cas dans la présente étude, elle peut être très économe en temps de calcul et espace mémoire CPU, puisqu'il suffirait de calculer la contrainte effective en un seul point et la généraliser aux autres points. Dans ce travaille nous traitons des matériaux hétérogènes viscoélastiques. Nous allons à cet effet faire une revue non exhaustive des travaux existant dans la littérature sur l'homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques.

1.4.3 Homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques

Les premiers travaux d'homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques ont été mis au point par Hashin [93] et Christensen [94] en se basant sur l'assemblage des sphères composites développé par Hashin [52] et le principe de correspondance entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire qui s'énonce comme suit : dans l'hypothèse des changements de géométries négligeables et selon le principe d'Onsager [95], la résolution de la plupart des problèmes pour un système constitué d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope se ramène à la résolution du problème analogue pour le même système constitué d'un matériau élastique linéaire anisotrope. Néanmoins l'homogénéisation des matériaux composites viscoélastiques n'a connu son plus grand développement que ces 30 dernières années avec une augmentation des solutions d'amortissement passif des vibrations et de réduction de bruits dans l'ingénierie. Naciri et al [6] mettent en place une méthode d'homogénéisation pour calculer le module effectif complexe des matériaux viscoélastiques à travers l'étude de la propagation d'onde à travers ceux-ci. Dans leur approche, le module effectif complexe est calculé à partir des nombres d'ondes complexes en utilisant la solution de l'équation de Christoffel. En 1998, Yi et al [7] proposent une méthode d'homogénéisation asymptotique, semblable à celle de Sanchez-Palencia [67], pour estimer le module effectif de composites à microstructure périodique dans le domaine fréquentielle. Brinson et Lin [8] ont examiné l'usage des méthodes micromécaniques usuelles pour la détermination des propriétés effectives des matériaux composites viscoélastiques. Chung et al [96] proposent une approche micro/macro pour l'analyse du fluage viscoélastique des supports hétérogènes multicouches en tissus tissés. Haberman et al. [97] ont étendu le modèle micromécanique de Cherkaoui et al. [98] dans le domaine quasi-statique pour l'étude des matériaux hétérogènes viscoélastiques. En 2008, Koutsawa et al [99] remettent au goût du jour le modèle de Lipinski [100] en l'adaptant afin de déterminer les facteurs

de perte dans des composites viscoélastiques avec des inclusions multi-enrobées. Reprenant la méthode dite de "cellule unitaire" de Christman [73], Patel et al [78] mettent en place un outil pour la détermination du facteur de perte effectif des matériaux hétérogènes viscoélastiques en fonction de la fréquence. Attipou et al en 2012 [4] reprennent la nouvelle méthode d'homogénéisation numérique multi-échelle introduite par Feyel et Chaboche [87] pour l'analyse des vibrations des matériaux hétérogènes viscoélastiques. Leurs études se sont limitées au cas des matériaux avec une matrice élastique et des inclusions viscoélastiques avec un module d'Young constant. Dans cette thèse nous reprenons cette étude afin de l'élargir au cas de modules viscoélastiques dépendant de la fréquence.

1.5 Bilan et positionnement du sujet

La revue bibliographique sur les structures répétitives nous a permis de mettre en lumière les difficultés rencontrées dans le calcul des propriétés modales (modes et valeurs propres) des longues structures répétitives. Difficultés liées à la taille des problèmes numériques à résoudre, et aux algorithmes de recherche de valeurs propres qui fonctionnent parfois mal pour des problèmes de grandes tailles. Afin de faire face à ces difficultés, Daya et al [2] ont proposé une analyse à deux échelles pour le calcul des vibrations de ces structures. Cependant la première approche proposée n'est valable que pour des structures monocouches élastiques non amorties et n'est pas capable d'estimer les propriétés modales (fréquences amorties et amortissements) des longues structures viscoélastiques répétitives. Cette première étude montre que les fréquences propres des longues structures répétitives sont regroupées par paquets et ces fréquences sont très proches les unes des autres au sein d'un même paquet. Cette proximité entre les fréquences amorties voisines rend impossible l'utilisation des codes commerciaux de simulation éléments finis à l'instar d'ABAQUS, pour calculer les propriétés modales (fréquences amorties et amortissements) de ces structures. En effet ces codes éléments

finis nécessitent l'utilisation de la méthode de la bande passante à $-3dB$ pour le calcul des amortissements des structures viscoélastiques. C'est pour cela que nous proposons de mettre en place un code de calcul générique et efficace élargissant l'analyse asymptotique à deux échelles de Daya et al [2] pour la détermination des propriétés modales des longues structures sandwichs viscoélastiques avec une répétitivité au niveau des conditions aux limites. La robustesse, la généricité, et la capacité de la nouvelle approche à prendre en compte n'importe quelle loi de dépendance en fréquence du module d'Young du cœur viscoélastique en font un outil de conception de longues structures sandwichs viscoélastiques possédant de larges bandes d'arrêts. Une petite étude sur l'influence des caractéristiques mécaniques et géométriques des faces et du cœur en fera la démonstration.

L'état de l'art sur les techniques d'homogénéisation nous a révéler le développement de nouvelles techniques d'homogénéisation numériques permettant de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Cependant nous avons constaté qu'il existe peu de travaux sur l'homogénéisation des matériaux hétérogènes viscoélastiques, mais surtout qu'il en existe encore moins sur le calcul des propriétés modales. Les quelques rares travaux sur l'homogénéisation des matériaux viscoélastiques sont surtout consacrés à l'homogénéisation analytique qui présente beaucoup de limites et n'abordent pas directement le problème de vibration [93, 94, 6]. Récemment Attipou et al [4] ont proposé l'analyse des vibrations des structures hétérogènes viscoélastiques à l'aide de l'homogénéisation éléments finis multi-échelle proposée par Feyel et Chaboche [87]. Cependant leur approche s'est limitée à des matériaux constitués d'une matrice élastique et des inclusions viscoélastiques ayant des modules d'Young constants. Or dans la réalité les modules d'Young des matériaux viscoélastiques varient en fonction de la température et de la fréquence. Il est donc important dans la modélisation des matériaux viscoélastiques de prendre en compte cette variation du module d'Young en fonction de la température et de la fréquence. Dans le troisième chapitre nous couplons la méthode des éléments finis multi-échelles à la MAN et ses outils de différentiation automatique

afin de calculer les propriétés modales de structures à matériaux hétérogènes viscoélastiques quelle que soit la dépendance en fréquence induite.

L'un des enjeux actuel dans le monde industriel est la conception de structure sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. L'approche éléments finis multi-échelles couplée à la MAN proposée dans le chapitre 3 présente donc un réel intérêt dans la mesure où elle ouvre la voie à une étude sur la conception des matériaux sandwichs viscoélastiques à âme composite constituée d'un mélange de deux ou plusieurs matériaux viscoélastiques. Afin d'optimiser les propriétés amortissantes du sandwich, nous mènerons une étude, qui montrera que les propriétés amortissantes de matériaux sandwichs à âme viscoélastique peuvent être considérablement améliorées, en combinant deux ou plusieurs matériaux viscoélastiques dans le cœur. Une étude de l'influence des différents paramètres des inclusions (fraction volumique et morphologie) sur les propriétés amortissantes du sandwich sera menée.

Chapitre 2

Analyse à deux échelles des vibrations des structures sandwichs répétitives

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous mettons en place une méthode asymptotique à deux échelles pour le calcul des propriétés modales en termes de fréquences amorties et facteurs de pertes, des structures sandwichs viscoélastiques répétitives élancées. Un calcul éléments finis au moyen de *diamant* [5] montre que les fréquences amorties des structures sandwichs viscoélastiques répétitives élancées sont regroupées dans des paquets distincts (FIG. 2.1). La plage de fréquences occupée par chaque paquet est appelée bande passante. Lorsque la structure est excitée à une fréquence appartenant à cette bande, la déformation se propage à toute la structure. La plage de fréquences entre deux paquets est appelée, bande d'arrêt en ce sens qu'une excitation de la structure à une fréquence appartenant à cette bande provoque une déformation localisée à la cellule excitée afin de préserver le reste de la structure. Il est préférable pour une structure que les excitations provoquent des déformations localisées au lieu que celles-ci se propagent à toute

la structure. Il est donc important de concevoir des structures ayant de larges bandes d'arrêts afin d'augmenter la plage de fréquences dans laquelle l'ensemble de la structure reste "insensible" aux excitations extérieures. L'objectif de ce chapitre, est de mettre en place un outil (code), permettant de calculer les propriétés modales (fréquences amorties et facteurs de perte) du début et de la fin de chaque paquet, peu coûteux en temps de calcul et espace mémoire CPU.

Dans un premier temps nous faisons le choix du modèle cinématique à utiliser pour la modélisation de la structure sandwich, en vue de déterminer l'équation de flexion de la structure. Ensuite les principes et formalismes de la Méthode Asymptotique à deux échelles [2] sont décrits et des tests numériques seront effectués pour valider cette nouvelle approche. Enfin nous montrons l'aptitude de notre outil en matière de design de structures viscoélastiques élancées en analysant l'influence des paramètres géométriques et mécaniques des faces et du cœur sur les largeurs des deux premières bandes d'arrêt d'une structure sandwich viscoélastique élancée. La contribution de cette étude est de mettre en place un outil permettant d'étudier les vibrations des structures sandwichs viscoélastiques répétitives élancées en évitant la discrétisation de toute la structure, offrant ainsi un gain en temps de calcul et espace mémoire CPU quelle que soit la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence du module d'Young du cœur viscoélastique.

2.2 Modèles cinématiques utilisés et équation du mouvement

Dans cette section, nous formulons le problème de vibration libre de la structure sandwich répétitive élancée en se limitant au cas des poutres. Nous adoptons le modèle zigzag pour décrire le cisaillement dans le cœur viscoélastique. Après avoir rappelé les hypothèses liées à ce modèle, la formulation variationnelle du problème de vibration libre nous conduira aux équations du mouvement de la structure. Mais avant tout,

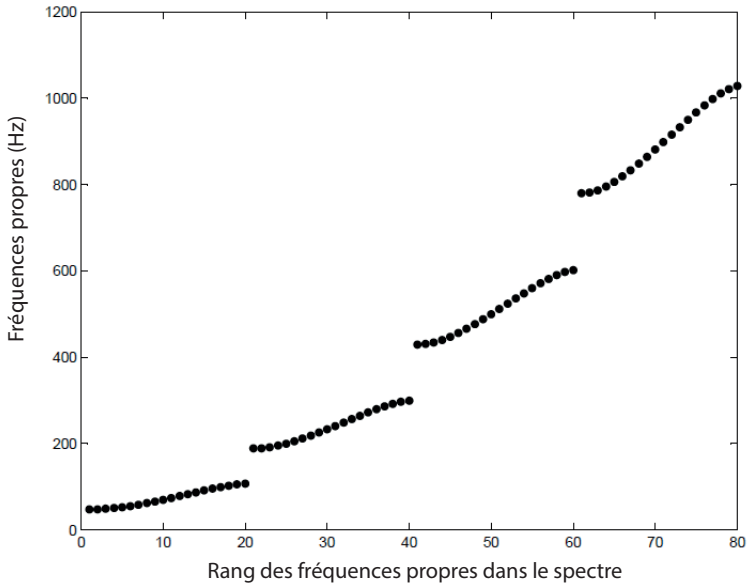
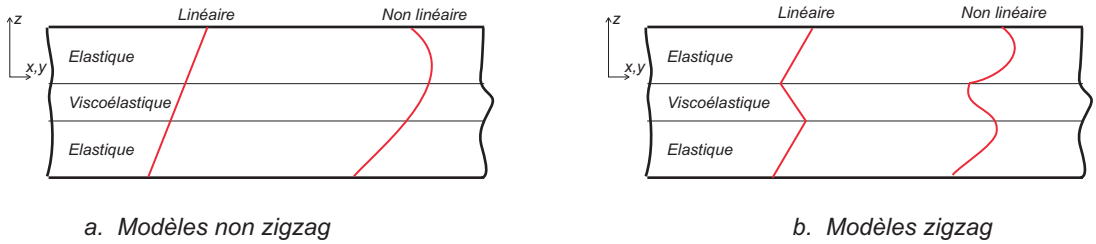


FIG. 2.1 – Calcul direct (*diamant*) de 80 fréquences propres d'une structure répétitive viscoélastique

nous faisons un bref aperçu sur les différents modèles cinématiques proposés dans la littérature pour l'étude des structures sandwichs viscoélastiques.

2.2.1 Modèles cinématiques des structures sandwichs viscoélastiques

Dans les structures sandwichs viscoélastiques, l'amortissement est apporté par le cœur viscoélastique, principalement grâce à un cisaillement important dans cette couche dû à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur viscoélastique. Plusieurs auteurs ont proposé différents modèles cinématiques pour étudier les structures sandwichs. Au départ, les structures sandwichs viscoélastiques étaient étudiées avec la cinématique des structures classiques monocouches moyennant des hypothèses qui diffèrent d'un auteur à un autre [101, 102, 103, 104, 105]. Pour plus de détails sur ces modèles qualifiés de non zigzag (FIG. 2.2.a), se référer à la thèse de Bilasse [18]. Cependant afin d'améliorer et de rendre plus précise la modélisation des sandwichs, il est plus intéressant de décrire le champ de déplacement couche



a. Modèles non zigzag *b. Modèles zigzag*

FIG. 2.2 – Modèles cinématiques

par couche, ce qui conduit à des modèles qualifiés de zigzag (FIG. 2.2.b). Dans les modèles zigzag, les faces sont décrites par le modèle de Kirchhoff-Love et un modèle adapté est utilisé dans le cœur pour rendre compte du cisaillement. Une évaluation des modèles zigzag classiques a été effectuée par Hu et al [106] à travers des tests dynamiques et statiques. Cette évaluation révèle que le modèle zigzag de Rao [107] est performant dans les conditions suivantes : $h_c/h_f \leq 10$ et $E_c/E_f \leq 0.01$ où h_f et h_c représentent respectivement l'épaisseur des faces et du cœur, E_f et E_c représentent respectivement le module d'Young statique des faces et du cœur. Afin de mener à bien cette étude, nous adoptons le modèle zigzag de Rao et nous resterons dans les hypothèses de validité établies par Hu et al [106].

2.2.2 Equation du mouvement

a. Rappel du modèle zigzag et des lois de comportement utilisés

Considérons une structure sandwich viscoélastique symétrique répétitive et élancée telle que représentée sur la figure 2.3. Dans le système de coordonnées (O, x, y, z), où L représente la longueur de la structure dans la direction (O, x), l la longueur d'une cellule de base dans la direction (O, x), h l'épaisseur totale dans la direction (O, z) et b la largeur dans la direction (O, y). Dans la suite, l'indice $i = 1$ et $i = 3$ sont respectivement liés aux couches supérieures et inférieures et l'indice $i = 2$ au cœur. Les paramètres matériaux et géométriques portant les indices f et c seront respectivement liés aux faces et au cœur. L'ordonnée du plan moyen de la couche i par rapport à la

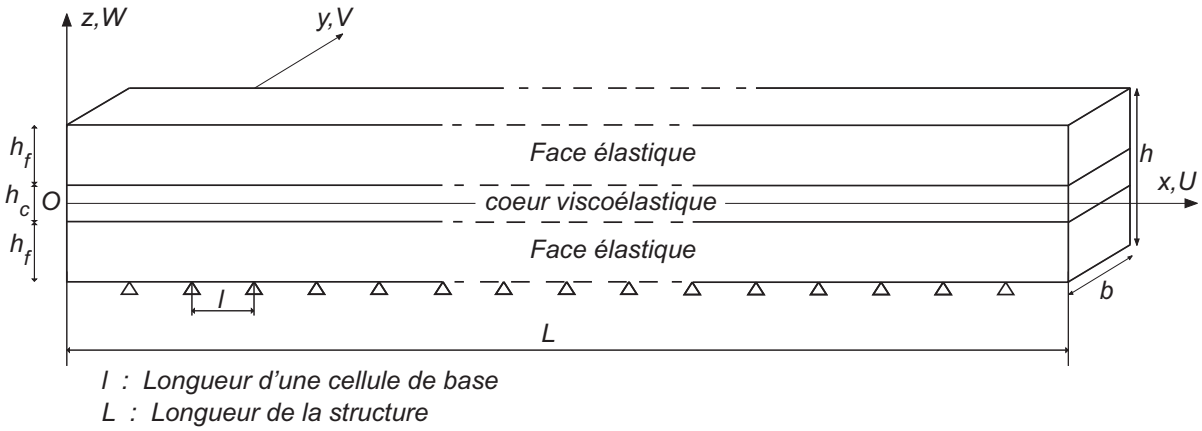


FIG. 2.3 – Structure sandwich viscoélastique répétitive

référence $z = 0$ est notée z_i. Les faces sont supposées identiques et parfaitement élastiques et le cœur est supposé viscoélastique. Les matériaux constituant la structure sont supposés isotropes, linéaires et homogènes ; et le matériau du cœur est non vieillissant. La structure sandwich est assimilée à une poutre comme dans les travaux de Bilasse [18], et la description cinématique utilisée dans son étude est le modèle zigzag de Rao [107] dans laquelle la théorie d'Euler-Bernouilli est appliquée aux faces élastiques et la théorie de Timoshenko au cœur viscoélastique. L'étude est menée en petite perturbation et comme dans [18, 108] le modèle zigzag (2.4) est utilisé en flexion avec les hypothèses suivantes :

- pour chaque couche du sandwich, les sections planes transverses initialement normales au plan moyen demeurent planes et normales au plan moyen durant la flexion ;
- la contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est très faible comparativement à la contrainte normale axiale dans la direction (Ox) ;
- les effets d'inertie axiale et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transversale pour l'étude en flexion ;
- l'effet de cisaillement est pris en compte dans la couche centrale viscoélastique, mais ignoré dans les faces élastiques ;
- les trois couches du sandwich sont parfaitement collées entre elles assurant la continuité du champ de déplacement aux interfaces ;

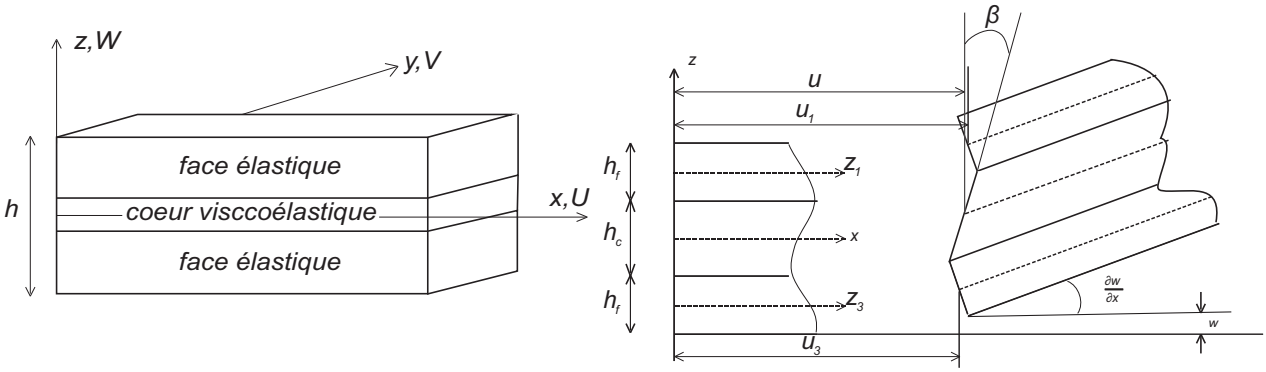


FIG. 2.4 – Modèle zigzag

- le déplacement transverse w est le même dans les trois couches.

La convention $\partial \bullet / \partial x = \bullet_{,x}$ sera adoptée pour la dérivée spatiale. En se basant sur les hypothèses cinématiques décrites ci-dessus, les champs de déplacement et de déformation dans les faces élastiques s'expriment (avec $i = 1, 3$) :

$$\begin{aligned} U_i(x,z,t) &= u_i(x,t) - (z - z_i)w_{,x} \\ W_i(x,z,t) &= w(x,t) \\ \varepsilon_i(x,z,t) &= u_{i,x} - (z - z_i)w_{,xx} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où U_i est le déplacement longitudinal dans la couche i, u_i le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i, $W_i = w$ le déplacement transversal commun dans les trois couches et ε_i la déformation normale dans la couche i obtenue de la formule de Green-Lagrange en petite déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}[grad(\underline{u}) +^T grad(\underline{u})] \tag{2.2}$$

Le repère (O, x, y, z) coïncidant avec le plan moyen de chaque couche : $z_2 = 0$ et $z_1 = -z_3 = (h_f + h_c)/2$. Les champs de déplacement et de déformation dans le cœur $(i = 2)$ sont données par :

$$\begin{aligned} U_2(x,z,t) &= u(x,t) + z\beta(x,t) \\ W_2(x,z,t) &= w(x,t) \\ \varepsilon_2(x,z,t) &= u_{,x} + z\beta_{,x} \\ \xi_2(x,z,t) &= \beta + w_{,x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

où u est le déplacement longitudinal du plan moyen du cœur, β la rotation de la normale au plan moyen de la couche centrale et ξ_2 la déformation de cisaillement dans la couche centrale. L'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces permet d'exprimer la relation entre les déplacements longitudinaux des plans moyens des couches externes et celui de la couche centrale :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + (\frac{h_c}{2}\beta - \frac{h_f}{2}w_{,x}) \\ u_2 &= u - (\frac{h_c}{2}\beta - \frac{h_f}{2}w_{,x}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

La loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.5}$$

Elle permet d'écrire les comportements de la structure à travers l'effort normal N_i et le moment fléchissant M_i de chaque couche i du sandwich comme suit :

$$\begin{aligned} N_i(x,t) &= \int\int_{s_i} \sigma_i \, ds = E_f S_f u_{i,x}, \quad i = 1,3 \\ M_i(x,t) &= \int\int_{s_i} (z - z_i)\sigma_i \, ds = E_f I_f w_{,xx} \end{aligned} \tag{2.6}$$

où σ_i et s_i représentent respectivement la contrainte normale et l'aire de la section droite de la couche i, et I_f le moment quadratique de la section des faces.

Nous admettons que la loi de comportement du matériaux viscoélastique du cœur est déterminée par les sollicitations harmoniques. Son module d'Young en viscoélasticité linéaire correspond au module opérationnel $\mathcal{R}^*$ dans le domaine fréquentiel donnée par :

$$E_c^*(\omega) = \mathcal{R}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{R}(t) e^{-i\omega t} \, dt \tag{2.7}$$

où $\mathcal{R}(t)$ représente la fonction de relaxation du matériau viscoélastique du cœur. Les relations de contrainte-déformation dans le cas des matériaux viscoélastiques non vieillissant s'écrivent [18] :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl} * \dot{\sigma}_{kl}(t) \\ \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

où $(*)$ est une notation que nous adoptons pour représenter les produits de convolution de Riemann ($f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{0} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$), $\mathcal{J}_{ijkl}$ et $\mathcal{R}_{ijkl}$ représentent respectivement les fonctions de fluage et de relaxation et possèdent des propriétés de symétrie c'est à dire : $\mathcal{J}_{ijkl} = \mathcal{J}_{klij} = \mathcal{J}_{jikl} = \mathcal{J}_{ijlk}$ et $\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij} = \mathcal{R}_{jikl} = \mathcal{R}_{ijlk}$. En utilisant la relation (2.8), l'effort normal N_2 et le moment fléchissant M_2 dans la couche centrale s'écrivent également en termes de produits de Riemann :

$$\begin{aligned} N_2(x,t) &= \int\int_{s_2} \sigma_2\,ds = S_c\mathcal{R}(t) * \dot{u}_{,x} \\ M_2(x,t) &= \int\int_{s_2} z\sigma_2\,ds = I_c\mathcal{R}(t) * \dot{\beta}_{,x} \end{aligned} \tag{2.9}$$

où I_c représente le moment quadratique de la section droite de la couche centrale. L'effort tranchant de cisaillement T induit par la déformation de cisaillement ξ_2 dans le cœur s'exprime également en terme de produit de convolution :

$$T(x,t) = \int\int_{s_2} \tau_2\,ds = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)}\mathcal{R}(t) * (\dot{w}_{,x} + \dot{\beta}) \tag{2.10}$$

où τ_2 représente la contrainte de cisaillement dans le cœur.

b. Formulation variationnelle du problème de vibrations libres

L'équilibre de la poutre sandwich est décrit par le principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué à l'ensemble des trois couches en vibrations libres et s'écrit :

$$-\delta P_{int} + \delta P_{acc} = 0 \tag{2.11}$$

où δP_{int} et δP_{acc} représentent respectivement la puissance virtuelle des efforts intérieurs et d'inertie appliquées à l'ensemble des trois couches consécutives et définies par :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} &= \sum_{i=1}^{3} - \int\int\int_{v_i} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}\,dv \\ \delta P_{acc} &= \sum_{i=1}^{3} \int\int\int_{v_i} \rho\underline{\ddot{u}}\delta\underline{u}\,dv \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations, $\underline{u}$ le vecteur champ de déplacement, ρ la masse volumique et v_i le domaine représentant la couche i. Les effets d'inertie longitudinale et rotationnelle étant négligés dans la présente formulation, seuls les effets d'inertie transversale sont pris en compte. la continuité des champs de déplacement aux interfaces (2.4) permet de définir les déplacements généralisés ramenés dans le cœur en fonction du déplacement longitudinal (u), le déplacement transversal ou la flèche (w) et la rotation (β) du plan moyen de ce dernier. Ainsi le PPV (2.11) peut se réécrire uniquement en fonction des trois déplacements généralisés $\{u, w, \beta\}$ du plan moyen du cœur :

$$\int_0^L [N\delta u_{,x} + M_\beta \delta\beta_{,x} + M_\omega \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,xx} + \delta\beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)\ddot{w}\delta w]\, dx = 0 \quad (2.13)$$

où $\{\delta u, \delta w, \delta\beta\}$ sont les déplacements et rotation virtuels, N, M_β, M_w sont respectivement l'effort normal résultant et les moments fléchissants résultants qui s'expriment en fonction des déplacements généralisés grâce aux équations (2.4, 2.6, 2.9) comme suit :

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 2E_f S_f u_{,x} + S_c \mathcal{R} * \dot{u}_{,x}$$

$$M_\beta = M_2 + (N_1 - N_3)\frac{h_c}{2} = I_c \mathcal{R} * \dot{\beta}_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2}(h_c \beta_{,x} - h_f w_{,xx}) \quad (2.14)$$

$$M_w = M_1 + M_3 + (N_3 - N_1)\frac{h_f}{2} = (2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2})w_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2}\beta_{,x}$$

Dans nos travaux nous ne nous intéressons qu'au mouvement de flexion. L'équation d'équilibre (2.13) étant un couplage entre un mouvement membranaire et un mouvement de flexion, nous la découplons afin de récupérer l'équation du mouvement de flexion qui s'écrit :

$$\int_0^L [M_\beta \delta\beta_{,x} + M_\omega \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,xx} + \delta\beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)\ddot{w}\delta w]\, dx = 0 \quad (2.15)$$

Afin d'analyser les vibrations libres en flexion, les fonctions de déplacement et de rotation $\{w, \beta\}$ sont cherchées sous forme harmonique :

$$\begin{cases} w(x,t) = W(x)e^{i\omega t} \\ \\ \beta(x,t) = B(x)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\{W, B\}$ représente le mode propre de vibration linéaire et ω la fréquence de vibration. En introduisant (2.16) dans (2.15) en tenant compte de (2.14) on peut réécrire le problème à discrétiser (dans le cadre d'une étude éléments finis) ou à intégrer (dans le cadre d'une étude analytique) en fonction des variables d'espace $\{W, B\}$ et de la fréquence de vibration ω :

$$\begin{aligned} &\int_0^L [I_c E_c^*(\omega) B_{,x} \delta B_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2}(h_c B_{,x} - h_f W_{,xx})\delta B_{,x} + \\ &(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}) W_{,xx}\delta W_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2} B_{,x}\delta W_{,xx} + \\ &\frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)}(W_{,x} + B)(\delta W_{,x} + \delta B) - \omega^2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c) W \delta W]\, dx = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

où E_f est le module d'Young des faces, $E_c^*(\omega)$ le module d'Young du cœur et dépendant de la fréquence de vibration, I_f et I_c les moments quadratiques respectives des sections droites des faces et du cœur, S_f et S_c les sections droites respectives des faces et du cœur, ρ_f et ρ_c les masses volumiques respectives des matériaux des faces et du cœur, ν_c le coefficient de poisson du matériau du cœur.

Deux intégrations par partie successives de la forme faible (2.17) du problème de vibration nous conduisent à la formulation forte qui est l'équation analytique du mouvement

de la structure :

$$\begin{cases} C\dfrac{d^3W}{dx^3} - M(\lambda)\dfrac{d^2B}{dx^2} + F(\lambda)(\dfrac{dW}{dx} + B) = 0 \\ \\ (H+C)\dfrac{d^4W}{dx^4} - [C + M(\lambda)]\dfrac{d^3B}{dx^3} - \lambda W = 0 \\ \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \tag{2.18}$$

où λ est la valeur propre complexe définie par $\lambda = \omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta)$ avec Ω la fréquence amortie et η l'amortissement ; C, $M(\lambda)$, $F(\lambda)$ et H sont des constantes calculées à partir des caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure et sont définies dans l'annexe A.1

Le problème (2.17) dont la forme forte est le problème (2.18) est un problème aux valeurs propres complexes. Elle peut être résolue numériquement par la méthode des éléments finis au moyen de *diamant* en la discrétisant en éléments unidimensionnels comme dans les travaux de Bilasse et al [5]. L'approche générique développée dans ces travaux permet de résoudre le problèmes de vibration libre non linéaire quelle que soit la loi de dépendance en fréquence du module d'Young du matériau du cœur. Un calcul éléments finis des 80 premières fréquences propres d'une structure sandwich viscoélastique répétitive (figure 2.1) montre que les fréquences propres de ce type de structures sont regroupées par paquets. La proximité entre les fréquences propres d'un même paquet rend difficile et inefficace l'utilisation des codes commerciaux comme ABAQUS qui utilisent l'analyse de la réponse fréquentielle pour déterminer les fréquences amorties et la méthode de la bande passante à $-3db$ pour déterminer les facteurs de pertes correspondant. Lorsque la taille de la structure augmente, entrainant donc l'augmentation de la taille du problème éléments finis à résoudre, le calcul devient coûteux en temps de calcul et espace mémoire CPU, et les algorithmes de recherche de valeurs propres deviennent inefficaces. Afin de contourner tous ces problèmes, nous proposons de résoudre ce problème à l'aide de la Méthode Asymptotique à Deux Echelles ($MADE$).

2.3 La Méthode Asymptotique à Deux échelles

2.3.1 Introduction

Une simulation éléments finis au moyen de *diamant* montre que les fréquences propres des structures sandwichs viscoélastiques répétitives sont regroupées en paquets distincts (FIG. 2.1) et que les modes de début et fin de paquets apparaissent comme des modulations lentes de modes périodiques de périodes l ou $2l$ (FIG. 2.5 a-d). Ces modulations lentes des modes nous permettent d'utiliser la $MADE$ pour déterminer les modes et valeurs propres de ces structures comme dans la bibliographie [39, 41, 3] dans le cadre de l'analyse des vibrations de structures élastiques non amorties et monocouches.

La $MADE$ est une technique d'homogénéisation asymptotique qui permet de scinder le problème de vibration des longues structures répétitives de grandes tailles en deux sous problèmes de tailles relativement réduites. Le premier, qualifié de local est formulé sur quelques cellules de base et résolu à l'aide de la méthode des éléments finis. Le second est une équation différentielle d'amplitude dont la résolution permet d'estimer le début et la fin de chaque paquet de fréquences propres. Etant donné que la structure qui nous intéresse ici est une structure sandwich viscoélastique dont le module d'Young du cœur dépend de la fréquence de vibration, les deux sous problèmes sont des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Le problème local est résolu au moyen de l'algorithme de résolution des problèmes de vibrations libres non linéaires utilisant *diamant* proposé par Bilasse et al [5]. Nous appelons problème local toute solution du problème (2.18) formulé sur un petit nombre de cellules de base avec des conditions de périodicité. Dans la section suivante la $MADE$ est appliquée pour résoudre le problème de vibrations amorties de structures sandwichs viscoélastiques répétitives.

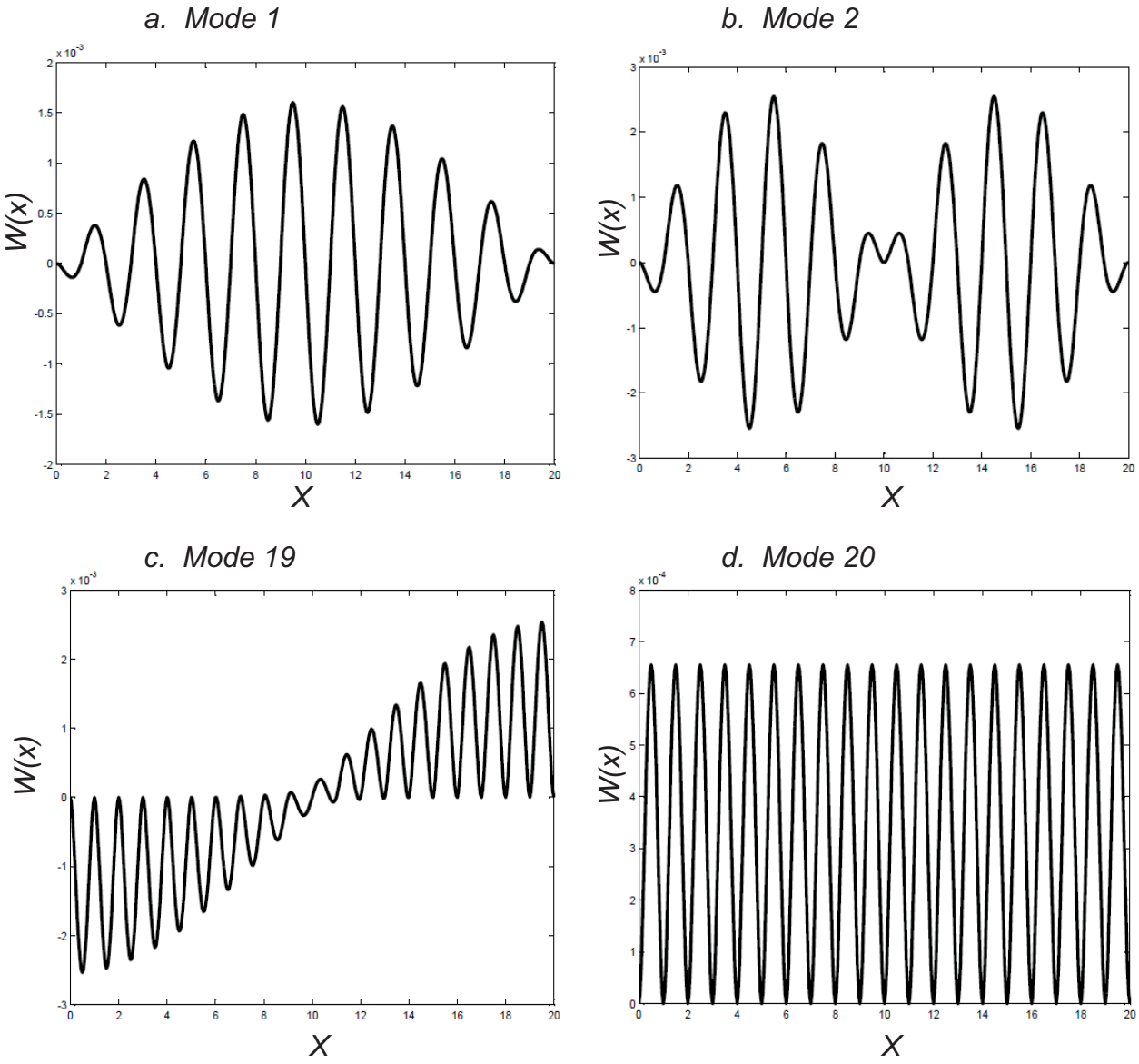


FIG. 2.5 – Premier(a), Second(b), dix-neuvième(c) et vingtième(d) modes d'une structure sandwich viscoélastique répétitive calculés par l'approche *diamant*

2.3.2 Problèmes locaux et équation d'amplitude

Dans l'application de la $MADE$ les inconnues du problème (2.18) à savoir (U, λ) sont développées sous les formes asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} U = \begin{pmatrix} W \\ B \end{pmatrix} = U_0(X,x) + \kappa U_1(X,x) + \kappa^2 U_2(X,x) + ... \\ \lambda = \lambda_0 + \kappa\lambda_1 + \kappa^2\lambda_2 + ... \end{cases} \tag{2.19}$$

où $X = \kappa x$ est la variable globale ou lente qui décrira ce qui se passe globalement, x la variable rapide ou locale, κ est un petit paramètre très petit devant 1 et défini comme étant le rapport entre la longueur d'une cellule de base et la longueur de la structure entière ($\kappa = l/L = 1/N$, N étant le nombre total de cellules de base de la structure). De plus, on suppose que le mode U est localement périodique de période pl (selon la variable x, p étant un entier naturel), ce qui assure une continuité du mode entre deux cellules voisines. En accord avec la méthode d'échelle double [29] les inconnues X et x sont indépendantes et le calcul des dérivées par rapport à la variable rapide x suit la règle suivante :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \kappa\frac{\partial}{\partial X} \tag{2.20}$$

Afin de faciliter les écritures nous introduisons les opérateurs $\psi_1(W_i, B_i)$ et $\psi_2(W_i, B_i)$ définis comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_1(W_i, B_i) &= C\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^3} - M(\lambda)\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + F(\lambda)(\frac{\partial W_i}{\partial x} + B) \\ \psi_2(W_i, B_i, \lambda_0) &= (C+H)\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} - [C + M(\lambda)]\frac{\partial^3 B_i}{\partial x^3} - \lambda_0 W \end{aligned} \tag{2.21}$$

En dérivant le développement asymptotique de $U(X,x)$ suivant la règle (2.20) et en l'introduisant dans le système (2.18), une identification des puissances entières de κ permet de déterminer le problème à chaque ordre de κ comme suit :

- Ordre κ^0

$$\begin{cases} W_0 \text{ et } B_0 \text{ sont } pl \text{ périodiques} \\ \\ \psi_1(W_0, B_0) = 0 \\ \\ \psi_2(W_0, B_0, \lambda_0) = 0 \\ \\ \text{conditions aux limites globales} \end{cases} \tag{2.22}$$

- Ordre κ^1

$$\begin{cases} W_1 \text{ et } B_1 \text{ sont } pl \text{ périodiques} \\ \\ \psi_1(W_1, B_1) = F_1^1(W_0, B_0) \\ \\ \psi_2(W_1, B_1, \lambda_0) = F_2^1(W_0, B_0) + \lambda_1 W_0 \\ \\ \text{conditions aux limites globales} \end{cases} \tag{2.23}$$

où $F_1^1(W_0, B_0)$ et $F_2^1(W_0, B_0)$ calculés à partir des solutions à l'ordre κ^0 sont définis dans l'annexe A.2.

- Ordre κ^2

$$\begin{cases} W_1 \text{ et } B_1 \text{ sont } pl \text{ périodiques} \\ \\ \psi_1(W_2, B_2) = F_1^2(W_0, B_0, W_1, B_1) \\ \\ \psi_2(W_2, B_2, \lambda_0) = F_2^2(W_0, B_0, W_1, B_1) + \lambda_2 W_0 + \lambda_1 W_1 \\ \\ \text{conditions aux limites globales} \end{cases} \tag{2.24}$$

où $F_1^2(W_0, B_0, W_1, B_1)$ et $F_2^2(W_0, B_0, W_1, B_1)$ calculés à partir des solutions aux ordres κ^0 et κ^1 sont définis dans l'annexe A.2.

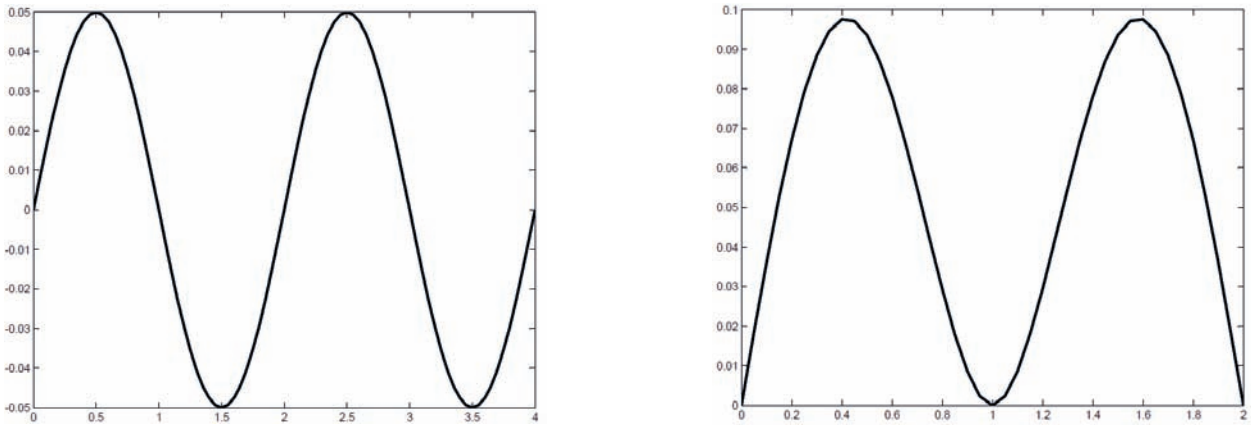
Etant donné que les inconnues X et x sont indépendantes, la solution du problème à l'ordre κ^0 (2.22) peut s'écrire comme un produit de deux fonctions de X et x :

$$\begin{cases} W_0(X, x) = A_0(X) w_0(x) \\ \\ B_0(X, x) = A_0(X) b_0(x) \end{cases} \tag{2.25}$$

où $A_0(X)$ est une fonction de la variable lente X, $w_0(x)$ et $b_0(x)$ sont les modes locaux solutions du problème local suivant :

$$\begin{cases} w_0 \text{ et } b_0 \text{ sont périodiques} \\ \\ \psi_1(w_0, b_0) = 0 \\ \\ \psi_2(w_0, b_0, \lambda_0) = 0 \\ \\ \text{conditions aux limites locales} \end{cases} \tag{2.26}$$

Le problème (2.26) est un problème non linéaire aux valeurs propres complexes. Ce problème est posé sur un domaine qui dépend de la valeur propre λ_0 considérée. Par



a. Mode local de periode 2l (Ici l = 1m)

b. Mode local de periode l (Ici l = 1m)

FIG. 2.6 – Modes locaux de périodes $2l$ et l

exemple dans notre cas ici, les deux premiers modes (FIG. 2.5 a. et b.), apparaissent comme une modulation lente de modes périodiques de période $2l$ (FIG. 2.6a.) alors que les deux derniers modes du premier paquet (FIG. 2.5 c. et d.) apparaissent comme une modulation lente de modes périodiques de période l (FIG. 2.6b.). Afin de calculer les modes de début de paquet le problème local est formulé sur une structure constituée par deux cellules de base et λ_0 correspond au plus petit mode périodique de période $2l$. Pour la fin de paquet le problème local est formulé sur une structure constituée par une seule cellule de base et λ_0 correspond au plus petit mode périodique de période l. Le problème (2.18) est un problème aux valeurs propres, par conséquent les premiers membres des problèmes (2.23, 2.24) sont singuliers. Ces problèmes n'ont de solutions que si leurs seconds membres satisfont la condition de solvabilité suivante [29] :

$$\langle \psi_2(W_i, B_i, \lambda_0), w_0 \rangle = \int_{période} \psi_2(W_i, B_i, \lambda_0) w_0 \, dx = 0 \tag{2.27}$$

La condition de solvabilité (2.27) appliquée au problème à l'ordre κ^1 (2.23) s'écrit :

$$\int_{période} (F_2^1(W_0, B_0) + \lambda_1 W_0) w_0 \, dx = 0 \tag{2.28}$$

En tenant compte de la périodicité du mode local w_0, cette condition de solvabilité (2.28) conduit à $\lambda_1 = 0$. Par conséquent la solution du problème à l'ordre κ^1 peu

s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} W_1(X,x) = A_1(X)w_0(x) + \dfrac{dA_0(X)}{dX}w_1(x) \\ \\ B_1(X,x) = A_1(X)b_0(x) + \dfrac{dA_0(X)}{dX}b_1(x) \end{cases} \tag{2.29}$$

où $A_1(X)$ est une fonction de la variable lente X, $w_1(x)$ et $b_1(x)$ satisfont le problème local suivant :

$$\begin{cases} w_1 \text{ et } b_1 \text{ sont périodiques} \\ \\ \psi_1(w_1,b_1) = -3C\dfrac{d^2w_0(x)}{dx^2} + 2M(\lambda)\dfrac{db_0(x)}{dx} \\ \\ \psi_2(w_1,b_1,\lambda_0) = -4(H+C)\dfrac{d^3w_0(x)}{dx^3} + 3[C+M(\lambda)]\dfrac{d^2b_0(x)}{dx^2} \\ \\ \text{conditions aux limites locales} \end{cases} \tag{2.30}$$

La condition de solvabilité (2.27) appliquée le problème à l'ordre κ^2 s'écrit :

$$\int_{période}(F_2^2(W_0,B_0,W_1,B_1) + \lambda_2 W_0 + \lambda_1 W_1)w_0\,dx = 0 \tag{2.31}$$

En tenant compte de la périodicité du mode local w_0 et du fait que $\lambda_1 = 0$, cette condition de solvabilité (2.31) conduit à l'équation différentielle d'amplitude globale :

$$\begin{cases} C_a(\lambda_0)\dfrac{d^2A_0(X)}{dX^2} + \lambda_2 A_0(X) = 0 \\ \\ \text{conditions aux limites globales} \end{cases} \tag{2.32}$$

où $C_a(\lambda_0)$ est une constante complexe déterminée à partir des problèmes locaux (2.26, 2.30) et donnée dans l'annexe A.3.

L'équation d'amplitude (2.32) est le problème globale qui permettra de déterminer les valeurs propres relatives à λ_0. C'est aussi un problème aux valeurs propres complexes dont la solution est le couple $(A_0(X), \lambda_2)$. Nous discutons de la résolution de l'équation d'amplitude dans la section suivante.

2.3.3 Résolution de l'équation d'amplitude

Le problème (2.32) est une équation différentielle dont les conditions aux limites sont spécifiques. Dans cette section nous traitons ces conditions aux limites avant de déterminer ses solutions. Ces conditions aux limites nécessitent l'analyse des couches limites [39]. Cependant cette analyse n'est pas nécessaire pour déterminer la solution au premier ordre. Comme préciser dans les travaux de Daya et al [39], la solution asymptotique du problème au second ordre s'écrit :

$$U(X,x)=\begin{pmatrix}W(X,x)\\B(X,x)\end{pmatrix}=A_0(X)\begin{pmatrix}w_0(x)\\b_0(x)\end{pmatrix}+\kappa\begin{pmatrix}A_1(X)w_0(x)+\dfrac{dA_0(X)}{dX}w_1(x)\\\\A_1(X)b_0(x)+\dfrac{dA_0(X)}{dX}b_1(x)\end{pmatrix} \tag{2.33}$$

où $\begin{pmatrix}w_0(x)\\b_0(x)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}w_1(x)\\b_1(x)\end{pmatrix}$ sont les modes locaux et sont périodiques.
Dans la suite nous nous intéressons aux solutions de l'équation d'amplitude dans les cas de structures encastrées aux deux extrémités et simplement appuyées aux deux extrémités.

a. Structures encastrées aux deux extrémités

L'encastrement aux deux extrémités se traduit jusqu'à l'ordre κ^1 comme suit ($x_0=0$ ou $x_0=L$) :

$$\begin{cases}W(X_0,x_0)=A_0(X_0)w_0(x_0)+\kappa(A_1(X_0)w_0(x_0)+\dfrac{dA_0}{dX}(X_0)w_1(x_0))=0\\\\B(X_0,x_0)=A_0(X_0)b_0(x_0)+\kappa(A_1(X_0)b_0(x_0)+\dfrac{dA_0}{dX}(X_0)b_1(x_0))=0\end{cases} \tag{2.34}$$

Le système (2.34) est satisfait dans deux cas de figures : les modes périodiques $w_0(x)$ et $b_0(x)$ sont tous les deux simultanément nuls en $x_0=0$ et $x_0=L$ (cas 1) ou non (cas 2). On a alors :

$$\begin{cases}\dfrac{dA_0}{dX}(0)=\dfrac{dA_0}{dX}(L\kappa)=0 & \text{(cas 1)}\\\\A_0(0)=A_0(L\kappa)=0 & \text{(cas 2)}\end{cases} \tag{2.35}$$

La résolution analytique du problème (2.26) donne la forme des modes locaux ($w_0(x)$ et $b_0(x)$) :

$$\begin{cases} w_0(x) = asin(kx) \\ \\ b_0(x) = bcos(kx) \\ \\ k = \dfrac{n\pi}{l}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ... \end{cases} \tag{2.36}$$

où a et b sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites locales. Précisons que l est la longueur d'une cellule de base. La forme générale de l'amplitude $A_0(X)$ s'écrit :

$$A_0(X) = tsin(KX) + vcos(KX) \tag{2.37}$$

où K, t et v sont des constantes à déterminer. Compte tenu de la forme des modes locaux (2.36), on se trouve dans le cas 2 ($A_0(0) = A_0(L\kappa) = 0$). La solution générale de l'équation d'amplitude ($A_0(X)$) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} A_0(X) = tsin(KX) \\ \\ K = \dfrac{n\pi}{L\kappa} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ... \end{cases} \tag{2.38}$$

En introduisant cette solution dans l'équation d'amplitude (2.32), on obtient l'expression de λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_2 = C_a(\lambda_0)\dfrac{n^2\pi^2}{L^2\kappa^2} \\ \\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ... \end{cases} \tag{2.39}$$

L'expression asymptotique des valeurs propres en début et fin de paquet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + C_a(\lambda_0)\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \\ \\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ... \end{cases} \tag{2.40}$$

b. Structures simplement appuyées aux extrémités

Les appuis simples aux deux extrémités se traduisent par :

$$\begin{cases} W(X_0, x_0) = A_0(X_0)w_0(x_0) + \kappa(A_1(X_0)w_0(x_0) + \dfrac{dA_0}{dX}(X_0)w_1(x_0)) = 0 \\ \\ \dfrac{dB}{dx}(X_0, x_0) = A_0(X_0)\dfrac{db_0}{dx}(x_0) + \kappa(A_1(X_0)\dfrac{db_0}{dx}(x_0) + \dfrac{dA_0}{dX}(X_0)\dfrac{db_1}{dx}(x_0)) = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Le système (2.41) est satisfait dans deux cas de figures : les modes périodiques $w_0(x)$ et $\dfrac{db_0(x)}{dx}$ sont simultanément nuls en $x_0 = 0$ et $x_0 = L$ (cas 1) ou non (cas 2). On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{dX}(0) = \dfrac{dA_0}{dX}(L\kappa) = 0 \qquad \text{(cas 1)} \\ \\ A_0(0) = A_0(L\kappa) = 0 \qquad \text{(cas 2)} \end{cases} \tag{2.42}$$

La résolution analytique du problème (2.26) donne la forme des modes locaux ($w_0(x)$ et $b_0(x)$) :

$$\begin{cases} w_0(x) = asin(kx) \\ \\ b_0(x) = bcos(kx) \\ \\ k = \dfrac{n\pi}{l}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ... \end{cases} \tag{2.43}$$

où a et b sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites locales. Comme dans le cas de l'encastrement, la forme générale de l'amplitude $A_0(X)$ s'écrit :

$$A_0(X) = tsin(KX) + vcos(KX) \tag{2.44}$$

où K, t et v sont des constantes à déterminer. Compte tenu de la forme des mode locaux (2.43), on se trouve dans le cas 1 ($\dfrac{dA_0}{dX}(0) = \dfrac{dA_0}{dX}(L\kappa) = 0$). La solution générale de l'équation d'amplitude ($A_0(X)$) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} A_0(X) = vcos(KX) \\ \\ K = \dfrac{n\pi}{L\kappa} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{cases} \tag{2.45}$$

En introduisant cette solution dans l'équation d'amplitude (2.32), on obtient l'expression de λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_2 = C_a(\lambda_0)\dfrac{n^2\pi^2}{L^2\kappa^2} \\ \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{cases} \tag{2.46}$$

L'expression asymptotique des valeurs propres en début et fin de paquet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + C_a(\lambda_0)\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \\ \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{cases} \tag{2.47}$$

A partir de cette nouvelle approche on est désormais capable de déterminer les fréquences amorties et facteurs de perte correspondant pour des structures sandwichs viscoélastiques répétitives ayant un cœur dont le module d'Young dépend de la fréquence. A partir des valeurs propres déterminées grâce à l'expansion asymptotique, on peut déterminer les fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) :

$$\begin{cases} \Omega = \sqrt{\Re(\lambda)} \\ \\ \eta = \dfrac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)} \end{cases} \tag{2.48}$$

où $\Re(\lambda)$ et $\Im(\lambda)$ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de λ. Dans la section suivante nous validons la présente approche à travers des tests numériques sur des structures sandwichs viscoélastiques répétitives avec divers matériaux viscoélastiques dans le cœur.

2.4 Validations numériques et discussions

La nouveauté de la nouvelle approche est sa capacité à calculer les facteurs de perte de structures répétitives viscoélastiques quelle que soit la loi de dépendance en

fréquences du module d'Young du matériau du cœur. Dans cette section nous montrons l'efficacité de la $MADE$. A cet effet nous menons des tests numériques sur de longues structures sandwichs viscoélastiques répétitives (FIG. 2.3). Le cas de module d'Young constant dans le cœur ainsi que celui du module d'Young dépendant de la fréquence est abordé pour montrer la capacité de la nouvelle approche à prendre en compte toutes les configurations des modules d'Young. La comparaison des résultats de la nouvelle approche et ceux du calcul direct par élément finis (*diamant*) permettra de juger de sa précision. Nous commençons par le cas le plus simple qui est celui du module d'Young constant.

2.4.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant

Le modèle à module viscoélastique constant est un modèle simple très utilisé dans la littérature qui permet d'introduire l'amortissement de type viscoélastique. Il est modélisé par une loi complexe de la forme :

$$E_c^*(\omega) = E_0(1 + i\eta_c) \tag{2.49}$$

où E_0 est le module d'élasticité retardée et η_c est le facteur de perte. Avec cette forme de module d'Young, les variables $M(\lambda)$ et $F(\lambda)$ ne dépendent plus de la fréquence. Le problème local est un problème linéaire aux valeurs propres complexes qui est résolu par la méthode QR. La structure traitée dans cette partie a des faces en acier et un cœur en polymère dont le facteur de perte $\eta_c \in \{0.1, 0.6, 1.5\}$. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure étudiée sont regroupées dans le tableau 2.1.
La confrontation des résultats de la présente approche avec ceux du calcul direct éléments finis faisant recours à la discrétisation de toute la structure, dans les tableaux 2.2 et 2.3, montre l'efficacité et la précision de la $MADE$ pour l'estimation des fréquences amorties et des amortissements du début et de la fin de paquet tant pour un facteur de perte faible dans le cœur ($\eta_c = 0.1$) que pour un facteur de perte élevé ($\eta_c = 1.5$). Le plus grand avantage de la $MADE$ c'est sa capacité à donner de bons résultats tout en

Faces élastiques	Module de Young	$E_f = 2.1^{11} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_f = 7800 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 0.02m$
Cœur viscoélastique	Module d'Young	$E_c = 1.794 \times 10^6 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_c = 968.1 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.01m$
Poutre	Longueur	$L = 20m$
	longueur d'une cellule de base	$l = 1m$
	Nombre de cellules de base	$N = 20$
	Largeur	$b = 0.1m$

TAB. 2.1 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich étudiée

permettant une économie considérable en temps de calcul et espace mémoire CPU. En effet avec l'utilisation de la $MADE$, le problème local résolu est un problème linéaire à 108 degrés de libertés, alors que le calcul direct qui nécessite la discrétisation de toute la structure est un problème linéaire à 2103 degrés de libertés. Ce qui a un impact direct sur le temps de calcul qui est de 30 secondes avec la $MADE$ alors que pour le même calcul il faut 335 secondes avec le calcul direct. Afin de montrer la capacité de la $MADE$ à s'adapter aux structures avec des modules d'Young variables et dépendant de la fréquence, nous effectuons des calculs numériques sur des structures ayant respectivement des couches centrales en PVB à 20°C et de l'$ISD112$ à 25°C.

η_c	Rang	Présente approche		Calcul direct (QR)	
		$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
0.1	1	46.87	0.0022	46.87	0.0022
	2	47.20	0.0022	47.20	0.0022
	3	48.17	0.0021	48.18	0.0021
	4	49.74	0.0019	49.77	0.0020
	5	51.86	0.0018	51.91	0.0018
0.6	1	46.87	0.013	46.87	0.013
	2	47.20	0.013	47.20	0.013
	3	48.17	0.012	48.18	0.012
	4	49.74	0.012	49.77	0.012
	5	51.86	0.011	51.91	0.011
1.5	1	46.87	0.033	46.87	0.033
	2	47.20	0.032	47.20	0.032
	3	48.17	0.031	48.18	0.031
	4	49.74	0.029	49.77	0.030
	5	51.86	0.027	51.92	0.027

TAB. 2.2 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du début du premier paquet de la structure simplement appuyée aux deux extrémités étudiée

η_c	Rang	Présente approche		Calcul direct (QR)	
		$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
0.1	20	104.92	0.00055	104.92	0.00055
	19	103.22	0.00056	103.32	0.00057
	18	100.34	0.00060	100.83	0.00060
	17	96.16	0.00065	97.65	0.00064
	16	90.50	0.00073	93.96	0.00069
0.6	20	104.92	0.0033	104.92	0.0033
	19	103.22	0.0034	103.32	0.0034
	18	100.34	0.0036	100.83	0.0036
	17	96.16	0.0039	97.65	0.0038
	16	90.50	0.0044	93.96	0.0041
1.5	20	104.92	0.0082	104.92	0.0082
	19	103.22	0.0085	103.32	0.0085
	18	100.34	0.0089	100.83	0.0090
	17	96.16	0.0097	97.65	0.0096
	16	90.50	0.011	93.96	0.010

TAB. 2.3 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) de la fin du premier paquet de la structure simplement appuyée aux deux extrémités étudiée

2.4.2 Modèle viscoélastique à module complexe variable et dépendant de la fréquence

Pour les matériaux viscoélastiques, le module d'Young est considéré constant pour des raisons de simplification, alors que dans la réalité, ces modules d'Young sont variables et dépendent de la fréquence. Les résultats obtenus en considérant le module d'Young constant, ne sont valables que dans des plages de fréquence où ce dernier varie peu. Par conséquent pour être robuste, fiable et valide sur une très large gamme de fréquence, la nouvelle approche $MADE$ doit être capable de prendre en compte la dépendance en fréquence des modules d'Young des matériaux viscoélastiques du cœur. Dans la présente section, nous testons la capacité de la $MADE$ en présence de matériaux ayant des modules d'Young variables et dépendant de la fréquence. Lorsque le module d'Young dépend de la fréquence, les constantes $M(\lambda)$ et $F(\lambda)$ aussi dépendent de la fréquence. Afin de pouvoir contourner le problème supplémentaire posé par cette dépendance en fréquence, ces constantes sont approchées par $M(\lambda_0)$ et $F(\lambda_0)$ où $\lambda_0 = \lambda_{début}$ en début de paquet et $\lambda_0 = \lambda_{fin}$ en fin de paquet. Le problème local à résoudre est un problème non linéaire aux valeurs propres complexes résolu au moyen de l'approche *diamant*. Nous testons d'abord la capacité de la nouvelle approche en présence d'un module d'Young modélisé par un modèle à dérivée fractionnaire.

a. Modèle à dérivée fractionnaire (PVB à 20°C)

Dans cette section, les propriétés modales (fréquences amorties et amortissements) sont calculées à travers la présente approche pour une structure sandwich viscoélastique répétitive ayant un cœur avec un module de cisaillement G_c^* dépendant de la fréquence. Le cœur de la structure considérée est en PVB (Polyvinyl de Butyral) dont le module de cisaillement est donné par un modèle à dérivée fractionnaire [5] :

$$G_c(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)[1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}]^{-\beta} \tag{2.50}$$

Le PVB est considéré ici à 20°C et les différents coefficients du modèle à cette température sont donnés dans les travaux de Bilasse par [5] : $G_0 = 479\times10^3$ Pa, $G_\infty = 2.35\times10^8$ Pa, $\tau = 0.3979$, $\alpha = 0.46$, $\beta = 0.1946$. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure étudiée sont regroupées dans le tableau 2.4. La structure ainsi obtenue est un pare-brise (Verre/PVB/Verre) qui peut aussi être utilisée pour couvrir la façade d'un grande immeuble. Les tableaux 2.5 et 2.6 regroupent respectivement les fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) correspondant du début et fin de paquet de la structure Verre/PVB/Verre à 20°C étudiée, calculés par la présente approche. La comparaison des résultats de la nouvelle approche avec ceux du calcul direct éléments finis par discrétisation de toute la structure à travers *diamant* montre la capacité de la nouvelle approche, à prendre en compte des matériaux viscoélastiques avec des modules d'Young dépendant de la fréquence. On obtient un gain considérable en terme temps de calcul et d'espace mémoire CPU à travers l'utilisation de l'approche $MADE$. En effet, en utilisant la nouvelle approche, le problème éléments finis à résoudre possède 162 degrés de liberté alors que le problème éléments finis du calcul direct possède 3183 degrés de libertés. Ici le gain en temps de calcul est plus important que pour des modules viscoélastiques constants. En effet environ 70 secondes ont été nécessaires pour le calcul avec l'approche $MADE$ alors que le calcul direct éléments finis a nécessité 13560 secondes. Afin de confirmer la capacité de la $MADE$ à prendre en compte n'importe quelle loi de dépendance en fréquence, nous menons des tests numériques sur une structure dont le cœur est en ISD112, avec un module d'Young modélisé par l'approche ADF.

b. Modèle ADF (ISD112 à 27°C)

Dans cette section, on considère une structure dont le cœur est en ISD112 à 27°C dont le module de cisaillement est décrit par un modèle ADF [5] :

$$G_c^*(\omega) = G_0(1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j}) \tag{2.51}$$

Faces élastiques	Module de Young	$E_f = 6.45^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.22$
	Masse volumique	$\rho_f = 2737 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 0.03m$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.4$
	Masse volumique	$\rho_c = 999 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.002m$
Poutre	Longueur	$L = 30m$
	longueur d'une cellule de base	$l = 1.5m$
	Nombre de cellules de base	$N = 20$
	Largeur	$b = 0.2m$

TAB. 2.4 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich Verre/PVB/Verre étudiée

Rang	Présente approche		Calcul direct [5]	
	$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
1	59.87	0.013	59.85	0.013
2	61.09	0.013	60.98	0.013
3	63.06	0.014	62.82	0.014
4	65.72	0.016	65.31	0.016
5	68.99	0.019	68.36	0.017

TAB. 2.5 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (Ω) du début du premier paquet de la structure en Verre/PVB/Verre à 20°C encastrée-encastrée

Rang	Présente approche		Calcul direct [5]	
	$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
20	124.42	0.033	124.42	0.033
19	123.83	0.033	123.87	0.033
18	122.04	0.032	122.27	0.032
17	118.99	0.030	119.74	0.032
16	114.59	0.029	116.44	0.031

TAB. 2.6 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (Ω) de fin du premier paquet de la structure Verre/PVB/Verre à 20°C encastrée-encastrée

j	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^{-1})$
1		0.746	468.7
2	0.5×10^6	3.265	4742.4
3		43.284	71532.5

TAB. 2.7 – Paramètres du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C

Les différents paramètres du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C sont regroupés dans le tableau 2.7. Les autres caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure étudiée sont régroupées dans le tableau 2.8. Les propriétés modales en terme de fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) sont regroupés dans les tableaux 2.9 et 2.10. La comparaison entre les résultats de la $MADE$ et ceux du calcul direct *diamant* confirment les résultats de la section précédente. Pour les cinq premiers modes et les cinq derniers modes, les résultats des deux approches sont de nouveau très concordants. Pour le calcul par la présente approche la cellule de base a été discrétisé en 35 éléments finis unidirectionnelles dans le sens de la longueur conduisant à un problème à 108 degrés de liberté. Alors que pour le calcul direct toute la structure a été discrétisée en 700 éléments finis unidirectionnelles dans le sens de la longueur conduisant à un problème à 2103 degrés de liberté. Comme dans les précédents tests numériques, le

Faces élastiques	Module de Young	$E_f = 6.9^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_f = 2766 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 0.04m$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.5$
	Masse volumique	$\rho_c = 1600 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.01m$
Poutre	Longueur	$L = 20m$
	longueur d'une cellule de base	$l = 1m$
	Nombre de cellules de base	$N = 20$
	Largeur	$b = 0.2m$

TAB. 2.8 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich Aluminium/ISD112/Aluminium étudiée

gain en temps de calcul est élevé puisque le calcul par la $MADE$ a été achevé en 60 secondes alors que 768 secondes ont été nécessaires pour le calcul direct. Comme toute approche asymptotique, plus la taille de la structure (nombre de cellules de bases) augmente, plus la précision de la $MADE$ augmente. Avec la $MADE$, une augmentation de la taille de la structure n'implique automatiquement ni une augmentation du temps calcul, ni une augmentation de la taille du problème à résoudre puisque la taille du problème à résoudre dépend surtout de la taille de la cellule de base. Cependant, quelle que soit la taille de la structure, lorsqu'on s'approche du milieu de paquet la $MADE$ devient de moins en moins efficace. Cette inefficacité en milieu de paquet s'explique par le fait qu'au milieu de paquet les deux échelles deviennent équivalentes. Dans les tests numériques ci-dessus nous nous sommes contentés de calculer le début et la fin du premier paquet. Néanmoins l'obtention des autres paquet sont possibles moyennant un choix judicieux des $\lambda_{début}$ et λ_{fin}.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les structures sandwichs viscoélastiques fai-

Rang	Présente approche		Calcul direct [5]	
	$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
1	88.61	0.018	88.61	0.018
2	89.22	0.018	89.23	0.018
3	91.06	0.017	91.09	0.017
4	94.04	0.017	94.09	0.017
5	98.05	0.016	98.15	0.016

TAB. 2.9 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du début du premier paquet de la structure Aluminium/ISD112/Aluminium à 27°C simplement appuyée aux deux extrémités

sant l'objet de notre étude présentent entre deux paquets de fréquences propres des bandes d'arrêts. Lorsque ces structures sont excitées à une fréquence appartenant à cette bande, la déformation reste localisée. L'une des objectifs de ce travail est de mettre en place une approche efficace, robuste, peu coûteuse en temps de calcul et espace mémoire CPU, pour la conception de structures présentant de larges bandes d'arrêts. Dans la section suivante nous testons l'influence des caractéristiques géométriques et mécaniques des faces et du cœur sur les largeurs de bandes d'arrêt.

2.4.3 Influence des caractéristiques géométriques et mécaniques du sandwich sur les largeurs des bandes d'arrêt

Dans cette section l'influence des rapports h_c/h_f et E_c/E_f sur les largeurs des bandes d'arrêt est étudiée pour une structure sandwich répétitive viscoélastique donnée. Nous allons nous contenter du cas d'une structure ayant un cœur dont module d'Young est constant et modélisé par la formule 2.49. Cependant la même étude peut être menée pour une structure ayant un module d'Young dépendant fortement de la fréquence. A cet effet les évolutions des largeurs de la première et seconde bandes d'arrêts sont

Rang	Présente approche		Calcul direct [5]	
	$\Omega(Hz)$	η	$\Omega(Hz)$	η
20	198.28	0.0075	198.30	0.0075
19	195.06	0.0076	195.28	0.0077
18	189.58	0.0078	190.58	0.0080
17	181.62	0.0081	184.57	0.0083
16	170.85	0.0086	177.61	0.0087

TAB. 2.10 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements (η) du fin du premier paquet de la structure Aluminium/ISD112/Aluminium à 27°C simplement appuyée aux deux extrémités

étudiées en fonction de h_c/h_f et E_c/E_f. La première bande d'arrêt est la différence de fréquence entre la dernière fréquence amortie du premier paquet et la première fréquence amortie du second paquet. La seconde bande d'arrêt est la différence de fréquence entre la dernière fréquence amortie du second paquet et la première fréquence amortie du troisième paquet. Les évolutions de ces bandes d'arrêts sont construites en fonction des rapports h_c/h_f et E_c/E_f sur les figures 2.7 et 2.8. Cette étude est menée dans le cadre des hypothèses du modèle zigzag définies par Hu et al [106] c'est à dire $h_c/h_f \leq 10$ et $E_c/E_f \leq 10^{-2}$. Afin de confirmer l'efficacité de la $MADE$ nous avons également tracé les résultats du calcul direct à l'aide de *diamant*. La coïncidence entre les deux courbes confirme encore l'efficacité et la précision de l'approche $MADE$.
La figure 2.7, qui représente l'évolution des bandes d'arrêt en fonction de l'évolution du rapport h_c/h_f pour des valeurs fixes de l'épaisseur totale h, E_c et E_f, montre que les plus larges bandes d'arrêts sont obtenues pour les plus faibles valeurs du rapport h_c/h_f. On constate aussi que c'est une fonction qui croit rapidement pour des valeurs du rapport entre 10^{-1} et 10 (limite de validité du modèle zig-zag utilisé). Cependant les largeurs des bandes croissent peu pour des valeurs du rapport h_c/h_f inférieures à 10^{-1}.

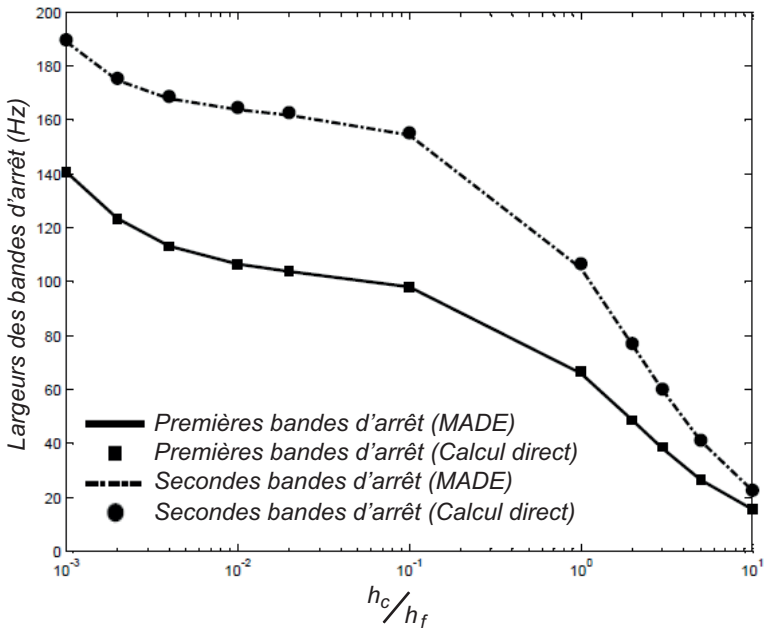


FIG. 2.7 – Evolution des deux premières bandes d'arrêts en fonction du rapport h_c/h_f ($h = 0.05m$, $E_f = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, $E_0 = 1.794 \times 10^6$ Pa)

Un autre paramètre pouvant influencer la largeur de la bande d'arrêt, est le rapport entre les modules d'Young des faces et du cœur. Pour celà nous avons fixé le rapport h_c/h_f égale à 10^{-2} correspondant à une valeur quelconque donnant une large bande d'arrêt dans l'étude précédente sur l'influence de ce rapport. On constate à travers la figure 2.8 que les plus grandes largeurs de bandes d'arrêt sont obtenues pour les plus grandes valeurs du rapport E_c/E_f. Pour des valeurs du rapport E_c/E_f inférieures à 10^{-5} et supérieures à 10^{-3} on constate qu'il y a peu d'évolution des bandes d'arrêt. C'est surtout pour des valeurs du rapport E_c/E_f comprises entre 10^{-5} et 10^{-3} qu'il y a le plus d'évolution des largeurs des bandes d'arrêt. On peut constater au travers de cette petite étude que les largeurs de bandes d'arrêt sont optimiser, par les plus petites valeurs du rapport h_c/h_f et les plus grandes valeurs possibles du rapport E_c/E_f. Par conséquent pour avoir la largeur de bande d'arrêt la plus large possible, il serait judicieux de dimensionner la structure de façon à avoir le plus petit rapport h_c/h_f et la plus grande valeur du rapport E_c/E_f possible.

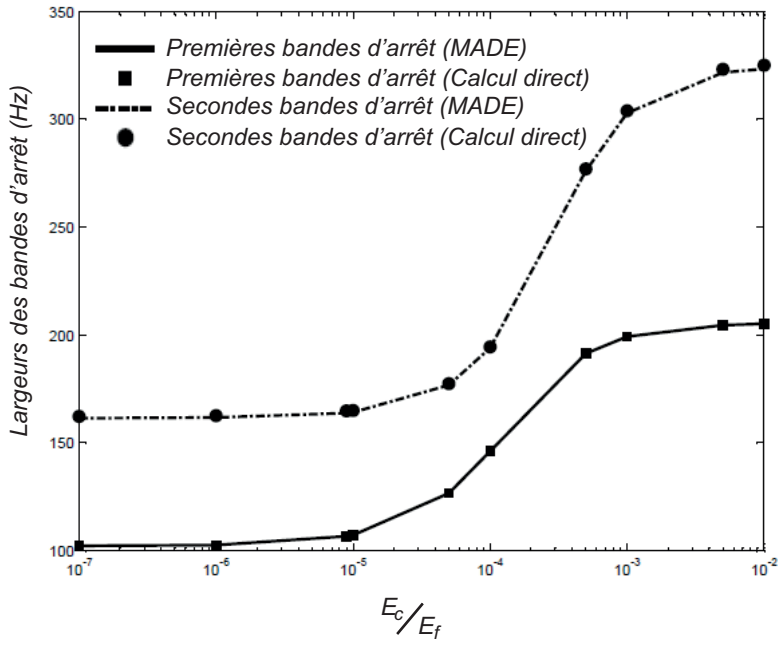


FIG. 2.8 – Evolution des deux premières bandes d'arrêts en fonction du rapport E_c/E_f ($h = 0.05m$, $h_c/h_f = 10^{-2}$, $E_f = 2.1 \times 10^{11}$ Pa)

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse asymptotique à deux échelles a été développée pour le calcul des propriétés modales des longues structures sandwichs viscoélastiques à forme répétitive. La nouvelle approche ayant pour acronyme $MADE$ est une méthode d'homogénéisation qui scinde le problème initial de grande taille en deux sous problèmes de tailles relativement petites. Le premier formulé sur une, deux ou trois cellules de bases et résolu par calcul direct élément fini, et en l'occurrence dans notre cas ici par l'approche *diamant* développée par Bilasse et al [5]. Le second est une équation différentielle à coefficients complexes dont la résolution permet de déterminer le début et la fin de chaque paquet de fréquences amorties ainsi que les amortissements correspondants. Les tests numériques ont montré l'efficacité et la validité de cette approche par rapport à un calcul direct. Cette étude, a permis de mettre en place un outil d'aide à la conception de longues structures sandwich viscoélastiques à forme répétitive à large bande d'arrêt.

Chapitre 3

Une approche multi-échelle par éléments finis pour la modélisation des vibrations des structures à matériaux composites viscoélastiques

3.1 Introduction

Afin d'étudier les vibrations des structures à matériaux composites par la méthode des éléments, la solution traditionnelle est celle qui consiste à formuler un problème classique de vibrations sur toute la structure sans tenir compte de la microstructure. La structure est alors finement discrétisée afin de pourvoir atteindre les plus petites phases du matériau. Cependant cette solution pose plusieurs problèmes :

- Lorsque certaines phases de la microstructure sont plus petites que la taille d'un élément, les effets du matériau de ces phases ne sont pas pris en compte, ce qui affecte directement la fiabilité des résultats.

- Lorsque la structure est maillée assez finement pour prendre en compte l'effet des matériaux des différentes phases aussi petites soient-elles, la taille du problème à résoudre peut devenir très grande posant ainsi d'autres problèmes d'ordre numérique : (i) les algorithmes de résolutions des problèmes aux valeurs propres qui fonctionnent mal à cause de la taille du problème à résoudre, (ii) le coût du calcul qui explose à cause de la taille des problèmes à résoudre.
- L'impossibilité d'effectuer le calcul à cause de la taille du problème à résoudre ou de l'impossibilité de la réalisation du maillage adéquat.

Une solution pour éviter tous ces problème est l'utilisation de la méthode des éléments finis multi-échelles ou multi-niveaux (EF^2) [87, 4]. La méthode des éléments finis multi-échelles est une méthode d'homogénéisation qui permet de déterminer le comportement du matériau composite à l'échelle macroscopique, à partir des comportements de ses constituants à l'échelle microscopique, à travers la résolution d'un problème aux limites sur un VER soigneusement choisi, par la méthode des éléments finis. En présence de matériaux viscoélastiques dont les modules d'Young varient en fonction des fréquences de vibration, le problème à l'échelle microscopique devient non linéaire et le principe de superposition qui nest applicable que pour des problèmes linéaires ne peut plus sappliquer pour construire le tenseur de localisation. La méthode de Newton-Raphson peut être utilisée afin de résoudre une suite de problèmes linéaires et ainsi permettre lutilisation du principe de superposition. Cependant cette méthode présente des limites en présences d'instabilités et elle peut aussi devenir coûteuse en temps de calcul d'autant plus qu'elle nécessite l'inversion d'une matrice tangente à chaque itération. Une alternative à l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson est la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). La MAN est un algorithme de résolution des problèmes non linéaires dépendant d'un paramètre scalaire [109]. Afin d'apporter plus de souplesse dans l'utilisation de la MAN pour la résolution des problèmes non linéaires en supprimant les tâches de différentiations manuelles qui lui sont inhérentes, des codes de différentiation automatiques ont été développés au sein de LEM3. La version C^{++} a été

développée par Charpentiel et al [110], la version Fortran 90 par Charpentier et Potier-Ferry [27] et la version Matlab par Koutsawa et al [28]. Ces outils de différentiation automatique ont donné naissance à une déclinaison de la MAN dénommée *diamant* acronyme de " DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée"[27]. Dans ce travail nous combinons la méthode éléments finis multi-échelles et la MAN associée aux outils de différentiation automatique pour l'analyse des vibrations des matériaux composites viscoélastiques.

3.2 L'approche éléments finis multi-échelles pour la résolution des problèmes non linéaires de vibrations des matériaux composites viscoélastiques

Le problème éléments finis multi-échelles est formulé à deux échelles : l'échelle macroscopique qui est celui de la structure dans sa configuration de référence, et l'échelle microscopique qui est celui du Volume Elémentaire Représentatif (VER). Le choix du VER est déterminant pour l'efficacité de l'approche FE^2.

3.2.1 Formulation du problème à l'échelle macroscopique

A l'échelle macroscopique, la structure est considérée homogène (figure 3.1). Dans la suite de cette section et pour le reste du document, la notation $\bar{(\cdot)}$ sera utilisée pour désigner les variables macroscopiques parce qu'elles sont considérées comme des moyennes de quantités microscopiques. L'échelle macroscopique est considérée comme un domaine Φ dans $\mathcal{R}^D$ (D étant la dimension du domaine), possédant un bord extérieur $\partial\Phi$ séparé en deux bords disjoints et complémentaires $\partial\Phi_{\overline{u}}$ et $\partial\Phi_{\overline{T}}$ telles que : $\partial\Phi_{\overline{u}} \cap \partial\Phi_{\overline{T}} = \emptyset$ et $\partial\Phi_{\overline{u}} \cup \partial\Phi_{\overline{T}} = \partial\Phi$. Dans l'hypothèse de petites perturbations, le problème

dynamique à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overline{\sigma} = \overline{\rho}\dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Phi \\ \overline{u} = \widehat{u} \quad \text{sur } \partial\Phi_{\overline{u}} \\ \overline{\sigma} \cdot \overline{n} = \overline{T} \quad \text{sur } \partial\Phi_{\overline{T}} \\ \overline{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}(\nabla \overline{u} +^T \nabla \overline{u}) \end{cases} \tag{3.1}$$

Le Principe des Puissance Virtuelles (PPV) permet d'obtenir la formulation faible du problème (3.1) en l'absence des forces extérieures :

$$\int_\Phi {}^T\overline{\sigma} : \delta\overline{\varepsilon}\, d\Phi + \int_\Phi \overline{\rho}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}\delta\overline{u}\, d\Phi = 0 \tag{3.2}$$

La loi de comportement à l'échelle macroscopique est donnée par la loi de Hooke en petite déformation :

$$\overline{\sigma} = \overline{C} : \overline{\varepsilon} \tag{3.3}$$

où $\overline{C}$ représente le tenseur symétrique d'ordre 4 du comportement du matériau à l'échelle macroscopique. A ce stade ce tenseur reste inconnu et doit être déterminé à partir du comportement de chaque constituant de la microstructure. Nous formulons dans le paragraphe suivant le problème à résoudre à l'échelle microscopique ou du VER.

3.2.2 Formulation du problème microscopique

Le matériau d'origine est considéré hétérogène avec une microstructure supposée périodique. L'échelle microscopique est un Volume Elémentaire Représentatif (VER) regroupant tous les constituants de la microstructure et occupant un domaine ϕ de bord extérieur $\partial\phi$ dans sa configuration de référence (figure 3.1). Comme dans les travaux d'Attipou et al [4], le problème microscopique est formulé comme un problème standard quasi-statique en mécanique des solides. En petites déformations la condition d'équilibre du VER s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \tag{3.4}$$

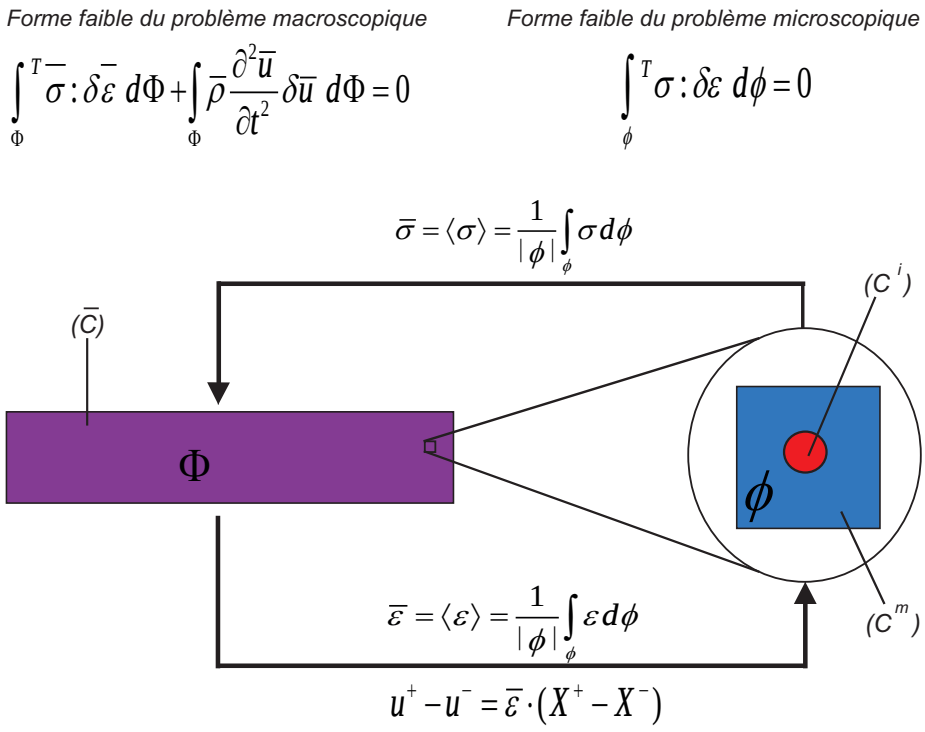


FIG. 3.1 – Concept de l'homogénéisation éléments finis multi-échelle

Dans la présente approche multi-échelles, les conditions aux limites sur le VER sont particulières et permettent de faire le couplage entre les deux échelles (microscopique et macroscopique). Elles sont détaillées dans la section 3.2.3.

La formulation faible associée à la condition d'équilibre (3.4) s'écrit grâce au PPV comme suit :

$$\int_\phi {}^T\sigma : \delta\varepsilon\, d\phi = 0 \tag{3.5}$$

La loi de comportement à l'échelle microscopique est donnée par la loi de Hooke en petite déformation :

$$\sigma = C^{(r)} : \varepsilon \tag{3.6}$$

où $C^{(r)}$ est un tenseur symétrique d'ordre 4 du comportement du matériau de la phase r du VER. Contrairement à l'échelle macroscopique, ce tenseur est supposé connu pour chaque phase r du VER. ε est le tenseur de déformation de Green-Lagrange défini en

petite déformation par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u +^{T} \nabla u) \tag{3.7}$$

Comme toute technique d'homogénéisation, l'approche éléments finis multi-échelle vise à déterminer le comportement macroscopique de la structure à partir des comportements des différents constituants de sa microstructure. A cet effet des relations de couplage permettent de faire le lien entre les deux échelles.

3.2.3 Couplage entre les échelles microscopiques et macroscopiques

La structure à l'échelle macroscopique est considérée comme étant un matériau homogène dont la loi de comportement est inconnu. L'approche éléments finis multi-échelles (FE^2) permet d'établir cette loi de comportement macroscopique à partir des propriétés mécaniques de chaque phase du VER en résolvant un problème aux limites sur le VER, par la méthode des éléments finis. Le couplage entre les échelles macroscopique et microscopique est basé sur la théorie de moyennes. En petites déformations, des expressions intégrales proposées par Hill [111] permettent de déterminer les tenseurs de déformation et de contrainte macroscopiques respectivement en fonction des tenseurs de déformation et de contrainte microscopiques :

- La première relation de couplage définit le gradient de déformation macroscopique ($\overline{\varepsilon}$) comme étant la valeur moyenne du gradient de déformation microscopique (ε) :

$$\overline{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{\mid \phi \mid} \int_{\phi} \varepsilon \, d\phi \tag{3.8}$$

où $\mid \phi \mid$ est le volume du VER.

- La seconde relation de couplage estime que la contrainte effective ($\overline{\sigma}$) en un point d'intégration de la structure macroscopique où l'état de contrainte est supposé homogène dans le voisinage de ce point est défini comme étant la valeur moyenne de la contrainte

microscopique (σ) :

$$\overline{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{\mid \phi \mid} \int_{\phi} \sigma \, d\phi \tag{3.9}$$

Ensuite, le théorème de la moyenne de l'énergie de Hill-Mendel [111] exige que :

$$^{T}\overline{\sigma} : \delta\overline{\varepsilon} = \langle ^{T}\sigma : \delta\varepsilon \rangle = \frac{1}{\mid \phi \mid} \int_{\phi} ^{T}\sigma : \varepsilon \, d\phi \tag{3.10}$$

Les relations entre les deux échelles étant établies, il ne reste qu'à compléter le problème à l'échelle microscopique avec des conditions aux limites, pour le résoudre et déterminer le comportement macroscopique. Dans le cadre de l'approche éléments finis multi-échelles, les conditions aux limites microscopiques nécessitent un traitement particulier.

3.2.4 Conditions aux limites microscopiques

Dans l'approche élément finis multi-échelles, la transition micro-macro est obtenue en imposant le grandient de déformation macroscopique ($\overline{\varepsilon}$) sur les bords du VER. D'autres conditions aux limites peuvent être considérées sur le VER notamment les hypothèses de Taylor (ou Voigt) ou de Sachs (ou Reuss). Pour plus de détails se référer aux travaux de Kouznetsova [112]. En général, trois types de conditions aux limites peuvent être imposées au VER :

- La première condition est associée aux déplacements imposés. Elle suppose que les bords du VER sont soumis aux déformations macroscopiques. Ainsi pour un point appartenant aux bords du VER, le vecteur position après déformation est donné par :

$$u = \overline{\varepsilon} \cdot X, \qquad \forall \; X \in \partial\phi \tag{3.11}$$

- La seconde condition est associée aux tractions uniformes. Elle définit des contraintes homogènes sur le contour du VER :

$$\sigma \cdot n = \overline{\sigma} \cdot n, \qquad \forall \; X \in \partial\phi \tag{3.12}$$

- La troisième condition est une condition de périodicité. Un champ de perturbation $w(X)$ induit par la présence des hétérogénéités est introduit sous la forme :

$$u = \overline{\varepsilon} \cdot X + w(X), \qquad \forall \; X \in \partial\phi \tag{3.13}$$

$w(X)$ est un champ périodique, en ce sens qu'il prend la même valeur sur deux faces opposées ($\partial\phi^+$ et $\partial\phi^-$) du VER (Fig. 3.2) ($\partial\phi = \partial\phi^+ \cup \partial\phi^-$). En nommant face (+) et face (−) deux faces opposées du VER, le déplacement sur la face (+) s'écrit :

$$u^+ = \overline{\varepsilon} \cdot X^+ + w^+(X), \qquad \forall\ X^+ \in \partial\phi^+ \tag{3.14}$$

et le déplacement sur la face (−) s'écrit :

$$u^- = \overline{\varepsilon} \cdot X^- + w^-(X), \qquad \forall\ X^- \in \partial\phi^- \tag{3.15}$$

En considérant la périodicité du champs $w(X)$ c'est à dire en prenant en compte le fait que $w^+(X) = w^-(X)$, et en soustrayant (3.15) de (3.14), on obtient :

$$u^+ - u^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \tag{3.16}$$

Se référer aux travaux de Miehe [113] et Nezamabadi [114] pour plus de détails sur les conditions aux limites à l'échelle microscopiques. Dans la suite, nous considérons les condition aux limites en déformation (3.11) et les conditions de périodicité (3.16) sur les bords du VER. Ces conditions aux limites sont fonction du gradient de déformation macroscopique $\overline{\varepsilon}$. Précisons que le gradient de déformation macroscopique $\overline{\varepsilon}$ est supposé connu. Ici nous cherchons à déterminer les composantes de la loi de comportement (3.3) en l'occurence le tenseur $\overline{C}$ en résolvant le problème aux limites sur le VER. En résumé le problème à résoudre à l'échelle microscopique s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\phi {}^T\nabla u : C^{(r)} : \nabla \delta u \, d\phi = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u^+ - u^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.17}$$

Nous désignons par C_e le tenseur de comportement relatif aux phases élastiques et par C^v celui relatif aux phases viscoélastiques. En réalité pour les matériaux viscoélastiques, le tenseur C^v varie en fonction de la fréquence de vibration de la structure. Quel que soit le modèle utilisé pour le modéliser, ce tenseur peut se mettre sous la forme suivante :

$$C^v = E^*(0)C_0 + E(\lambda)C_0 \tag{3.18}$$

où $E^*(0)$ est le module d'élasticité retardée et $E(\lambda)$ est la fonction scalaire complexe décrivant la dépendance en fréquence ($E(0) = 0$). $\lambda = \omega^2$, ω étant la fréquence de vibration de la structure. Le tenseur C_0 est défini par :

$$C_0 = \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

où ν est le coefficient de poisson supposé constant du matériau viscoélastique considéré. L'introduction de la décomposition (3.18) dans le problème (3.17) permet de réécrire le problème microscopique (3.17) comme suit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\phi_e} {}^T\nabla u : C_e : \nabla \delta u \, d\phi_e + E^*(0) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v + \\ \\ \displaystyle E(\lambda) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v = 0 \\ \\ \text{C. L.} : u^+ - u^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.20}$$

où ϕ_e et ϕ_v désignent respectivement les sous domaines du VER occupés par les phases élastiques et les phases viscoélastiques. Le problème (3.20) est par conséquent non linéaire à cause de la dépendance en fréquence de C^v. Or pour construire le tenseur de localisation à l'échelle micro, l'approche élément finis multi-échelle se base sur le principe de supperposition qui ne peut s'appliquer que pour des problèmes linéaires. Afin de pouvoir appliquer ce principe pour construire le tenseur de localisation, nous devons linéairiser le problème à résoudre. A cet effet nous faisons appel à la MAN qui est connu comme étant un outil très efficace de résolution de problèmes non linéaires en les transformant en une suite de problèmes linéaires à résoudre à chaque ordre. Dans la section suivante, nous linéarisons le problème (3.20) par la MAN.

3.2.5 Linéarisation du problème microscopique à travers la MAN

Le problème (3.20) est un problème non linéaire auquel le principe de superposition ne peut s'appliquer directement pour la construction du tenseur de localisation. Dans cette section la MAN est appliquée afin de le transformer en une suite de problèmes linéaires à résoudre à chaque ordre. Dans le cadre de la MAN, une technique de perturbation est utilisée en développant les inconnues du problème $(u,\, \lambda)$ ainsi que $E(\lambda)$ sous forme de séries entières en fonction d'un paramètre de chemin a :

$$\begin{cases} u(a) = u_0 + \sum_{i=1}^{N} a^i u_i \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{N} a^i \lambda_i \\ E(a) = E_0 + \sum_{i=1}^{N} a^i E_i \end{cases} \tag{3.21}$$

L'introduction des développements en série (3.21) dans le problème (3.20) donne :

$$\begin{cases} \int_{\phi_e} {}^T\nabla\left(\sum_{i=0}^{N} a^i u_i\right) : C_e : \nabla\delta u \, d\phi_e + E^*(0) \int_{\phi_v} {}^T\nabla\left(\sum_{i=0}^{N} a^i u_i\right) : C_0 : \nabla\delta u \, d\phi_v + \\ \left(\sum_{i=0}^{N} a^i E_i\right) \int_{\phi_v} {}^T\nabla\left(\sum_{i=0}^{N} a^i u_i\right) : C_0 : \nabla\delta u \, d\phi_v = 0 \\ \text{C. L. : } u^+ - u^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.22}$$

Afin de simplifier les écritures dans la suite du document, nous introduisons l'opérateur $\mathcal{L}(u_i, \delta u)$ définit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i, \delta u) = &\int_{\phi_e} {}^T\nabla u_i : C_e : \nabla\delta u \, d\phi_e + E^*(0) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u_i : C_0 : \nabla\delta u \, d\phi_v + \\ &E_i \int_{\phi_v} {}^T\nabla u_i : C_0 : \nabla\delta u \, d\phi_v \end{aligned} \tag{3.23}$$

Les solutions initiales (u_0, λ_0) sont les solution du problème à l'ordre 0 défini par :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\phi_e} {}^T\nabla u_0 : C_e : \nabla \delta u \, d\phi_e + E^*(0) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u_0 : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u_0^+ - u_0^- = \overline{\varepsilon}_0 \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.24}$$

C'est un problème linéaire dont la résolution est proposée dans les travaux d'Attipou et al [4]. En développant et en regroupant les termes du problème (3.22) suivant les puissances entière de a, on obtient une suite de problèmes linéaires à résoudre à chaque ordre de la MAN :

Problème à l'ordre 1

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u_1, \delta u) = -E_1 \displaystyle\int_{\phi_v} {}^T\nabla u_0 : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v \\ \\ \text{C. L. : } u_1^+ - u_1^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.25}$$

Problème à l'ordre $k \geq 2$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u_k, \delta u) = \mathcal{F}_k^{nl}(u, \delta u) \\ \\ \text{C. L. : } u_k^+ - u_k^- = \overline{\varepsilon} \cdot (X^+ - X^-) \end{cases} \tag{3.26}$$

où $\mathcal{F}_k^{nl}(u, \delta u)$ est un terme résiduel dépendant des solutions aux ordres antérieurs à k et défini par :

$$\mathcal{F}_k^{nl}(u, \delta u) = -\sum_{m=0}^{k-1} E_{k-m} \int_{\phi_v} {}^T\nabla u_m : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v \tag{3.27}$$

Remarquons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est le même à l'ordre 1 qu'à l'ordre $k \geq 2$. Le problème à chaque ordre de la MAN possède donc la même matrice tangente. Par conséquent une seule inversion de matrice est nécessaire pour résoudre les problèmes (3.25) et (3.26). Ce qui permet de faire un gain important en temps de calcul par rapport à la méthode de Newton-Raphson par exemple. En effet, c'est l'inversion de la matrice tangente qui coûte le plus en temps de calcul. A chaque ordre il s'agira simplement de recalculer

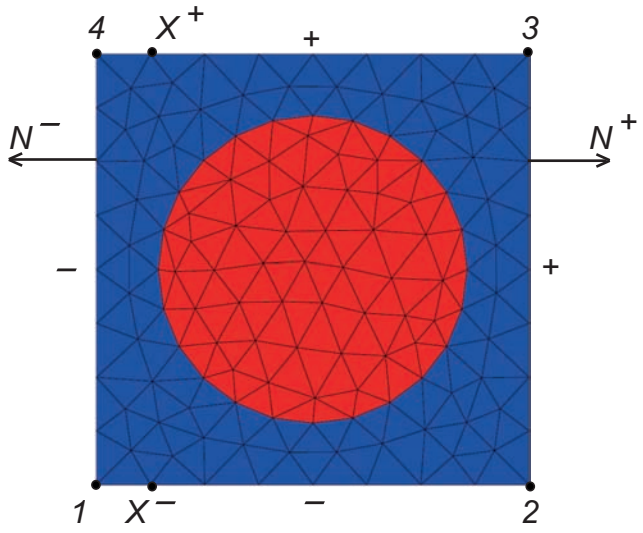


FIG. 3.2 – Maillage d'un VER avec les conditions de périodicité

le terme résiduel $\mathcal{F}_k^{nl}(u, \delta u)$ dont le calcul peut être automatisé grâce aux procédures de différentiation automatique réalisable dans les langages de programmation orientés objets (C^{++}, Fortran 90, Matlab ...).

Nous venons de transformer le problème non linéaire de départ (3.20) en une suite de problèmes linéaires et le principe de superposition peut dès lors s'appliquer. Les solutions de ces problèmes n'étant en général pas analytiques, on a alors recours à la méthode des éléments finis.

3.2.6 Tenseur de localisation

En raison des conditions de couplage entre les deux échelles, nous résolvons d'abord partiellement les problèmes linéaires à l'échelle microscopique à chaque ordre de la MAN. La solution obtenue permet ensuite de construire numériquement le tenseur de localisation, qui à son tour permettra de calculer le tenseur des comportements à l'échelle macroscopique.

Le problème à chaque ordre de la MAN étant linéaire, nous pouvons appliquer le principe de superposition. Par conséquent, la solution (u_k) à l'ordre k (3.26), peut être exprimée comme une combinaison linéaire des modes de la solution obtenue en

imposant indépendamment, les champs de déformation homogène via les conditions aux limites dans le problème (3.26). En 2D on a :

$$\begin{aligned} u_k(X) &= \overline{\varepsilon}^{11}\tilde{u}_k^{11}(X) + \overline{\varepsilon}^{22}\tilde{u}_k^{22}(X) + \overline{\varepsilon}^{12}[\tilde{u}_k^{12}(X) + \tilde{u}_k^{21}(X)], \qquad \text{dans } \phi \\ &= \{\tilde{u}_k^{11}(X), \tilde{u}_k^{22}(X), \frac{1}{2}[\tilde{u}_k^{12}(X) + \tilde{u}_k^{21}(X)]\} \begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon}^{11} \\ \overline{\varepsilon}^{22} \\ 2\overline{\varepsilon}^{12} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3.28}$$

où les $\tilde{u}_k^{ij}$ sont solutions à l'ordre k de la MAN du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{u}^{(ij)}, \delta u) = 0, \qquad \text{dans } \phi \\ \\ \tilde{u}^{(ij)+} - \tilde{u}^{(ij)-} = X^{(ij)+} - X^{(ij)-} \quad \text{sur } \partial\phi \end{cases} \tag{3.29}$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(11)+} - \tilde{u}^{(11)-} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (X^+ - X^-) \\ \tilde{u}^{(22)+} - \tilde{u}^{(22)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (X^+ - X^-) \\ \tilde{u}^{(12)+} - \tilde{u}^{(12)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (X^+ - X^-) \\ \tilde{u}^{(21)+} - \tilde{u}^{(21)-} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (X^+ - X^-) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Les exposants (ij) indiquent tout simplement que la réponse recherchée et relative à la composante $\overline{\varepsilon}^{ij}$ du tenseur de gradient de déformation macroscopique. En posant $\mathbb{A}_k = \{\tilde{u}_k^{11}, \tilde{u}_k^{22}, \frac{1}{2}(\tilde{u}_k^{12} + \tilde{u}_k^{21})\}$ dans (3.28) le déplacement microscopique à l'ordre k se réécrit :

$$u_k = \mathbb{A}_k : \overline{\varepsilon} \tag{3.31}$$

$\mathbb{A}_k$ est un tenseur d'ordre 3 tel que $\mathcal{A}_{k(ijp)} = \tilde{u}^{(jp)}_{k(i)}$. Sachant que $\nabla u_k = \varepsilon_k$, en prenant le gradient de l'expression (3.31), on peut écrire :

$$\varepsilon_k = \mathbb{A}_{k,X} : \overline{\varepsilon} \tag{3.32}$$

Cette expression (3.32) permet de calculer le gradient de déformation microscopique à l'ordre k de la MAN en fonction du gradient de déformation macroscopique et $\mathbb{A}_{k,X}$ est identifié comme le tenseur de localisation à l'orde k de la MAN. Il faut maintenant résoudre le problème (3.29) par la MAN, afin de construire $\mathbb{A}_{k,X}$. Comme il a été précisé à la fin de la section 3.2.5, le problème à l'échelle microscopique est résolu par la méthode des éléments finis. Dans la section suivante nous effectuons la discrétisation éléments finis du problème à résoudre.

3.2.7 Discrétisation et résolution du problème non linéaire à l'échelle microscopique au moyen de la MAN

Le problème non linéaire (3.29) dont les solutions permettent de construire le tenseur de localisation $\mathbb{A}_{k,X}$ est résolu par la méthodes des éléments finis et la MAN avec ses outils de différentiation automatique associés. Dans cette section nous effectuons la discrétisation de problème (3.29) par la méthode des éléments finis. Afin de ne pas surcharger les écritures, nous faisons abstraction des exposants (ij). La forme faible du problème à discrétiser s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\phi_e} {}^T\nabla u : C_e : \nabla \delta u \, d\phi_e + E^*(0) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v + \\ \\ \displaystyle E(\lambda) \int_{\phi_v} {}^T\nabla u : C_0 : \nabla \delta u \, d\phi_v = 0 \\ \\ \text{C. L.} : u^+ - u^- = X^+ - X^- \end{cases} \tag{3.33}$$

Par la suite nous proposons un élément fini bidmensionnel pour la discrétisation de l'équation (3.33). Nous choisissons un élément triangulaire à 3 nœuds possédant chacun

deux degrés de libertés : la flèche (w) et le déplacement longititudinal (v). Ainsi pour un élément délimité par les nœuds numérotés 1, 2, et 3, le vecteur élémentaire des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{u^e\} =^T [w^1 \ v^1 \ w^2 \ v^2 \ w^3 \ v^3] \tag{3.34}$$

Le déplacement u est interpolé dans le problème (3.33) par la matrice d'interpolation $[N]$ contenant des fonctions de forme polynomiale classiques [115] :

$$\{u\} = [N]\{u^e\} \tag{3.35}$$

La forme élémentaire du problème (3.33) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_e \{\delta u^e\} \Big(\int_{\phi_e^e} {}^T[B][C_e][B]\, d\phi_e^e + E^*(0) \int_{\phi_v^e} {}^T[B][C_0][B]\, d\phi_v^e + \\ \\ E(\lambda) \int_{\phi_v^e} {}^T[B][C_0][B]\, d\phi_v^e \Big) \{u^e\} = 0, \text{ dans } \phi^e \\ \\ \text{C. L. : } u^+ - u^- = X^+ - X^-, \text{ sur } \partial\phi \end{cases} \tag{3.36}$$

où $[B]$ est la matrice des gradients des fonctions de forme contenues dans la matrice $[N]$. En posant :

$$\begin{cases} [K_0]^e = \int_{\phi_e^e} {}^T[B][C_e][B]\, d\phi_e^e + E^*(0) \int_{\phi_v^e} {}^T[B][C_0][B]\, d\phi_v^e \\ \\ [K_v]^e = \int_{\phi_V^e} {}^T[B][C_0][B]\, d\phi_V^e \end{cases} \tag{3.37}$$

on peut écrire le problème à résoudre sous sa forme discrétisée :

$$\begin{cases} \sum_e \{\delta u^e\}([K_0]^e + E(\lambda)[K_v]^e)\{u^e\} = 0, \text{ dans } \phi \\ \\ \text{C. L. : } u^+ - u^- = X^+ - X^-, \text{ sur } \partial\phi \end{cases} \tag{3.38}$$

Comme on peut le constater à travers l'équation (3.37), $[K_0]^e$ est la matrice de rigidité construite à partir du module d'Young des phases élastiques et du module d'élasticité

retardée des phases viscoélastiques, et $[K_v]^e$ est une matrice réelle permettant l'introduction de la dépendance en fréquence. L'assemblage des formes élémentaires (3.38) donne le problème non linéaire globale à résoudre à l'échelle microscopique :

$$\begin{cases} [K_0 + E(\lambda)K_v]u = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u^+ - u^- = X^+ - X^- \end{cases} \tag{3.39}$$

Le problème (3.39) est un problème non linéaire dont la résolution par la MAN et les outils de différentiation associés réalisé en Matlab [28] est détaillée dans la section 3.2.8.

3.2.8 La MAN pour la résolution du problème microscopique

a. Technique de perturbation

En introduisant les développements en séries de u et $E(\lambda)$ (3.21) dans le problème (3.39) et en identifiant les puisances entières de a, on obtient les problèmes à résoudre à chaque ordre de la MAN.

Les solutions initiales (u_0, λ_0) sont solution du problème suivant :

$$\begin{cases} [K_T]u_0 = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u_0^+ - u_0^- = X^+ - X^- \end{cases} \tag{3.40}$$

où la matrice tangente $[K_T]$ est défini par $[K_T] = [K_0 + E_0 K_v]$ avec $E_0 = E(\lambda_0)$. Ce problème (3.40) est résolu à l'aide du multiplicateur de Lagrange. Les problèmes à résoudre aux différents ordres de la MAN s'écrivent alors :

Problème à l'ordre 1

$$\begin{cases} [K_T]u_1 = -E_1 K_v u_0 \\ \\ \text{C. L. : } u_1^+ - u_1^- = 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

Problème à l'ordre $k \geq 2$

$$\begin{cases} [K_T]u_k = -\sum_{n=0}^{k-1} E_{k-n} K_v u_n \\ \\ \text{C. L. : } u_k^+ - u_k^- = 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

Le problème (3.42) est mal posé, car il s'agit d'une équation à deux inconnues. Afin de le résoudre il faut y ajouter une seconde équation. En général, dans le cadre de la MAN, le paramètre de chemin a est défini comme étant la projection de l'incrément de déplacement $(u(a)-u_0)$ et de l'incrément de la valeur propre $(\lambda(a)-\lambda_0)$ sur le vecteur tangent (u_1,λ_1) [116] :

$$a = \frac{1}{S^2}\{(u(a)-u_0)\cdot u_1 + (\lambda(a)-\lambda_0)\cdot\lambda_1\} \tag{3.43}$$

où le paramètre scalaire S est la norme du vecteur tangent(u_1,λ_1), permettant de normaliser la projection. Les problèmes à résoudre aux différents ordres de la MAN s'écrivent alors :

Problème à l'ordre 1

$$\begin{cases} [K_T]u_1 = -E_1 K_v u_0 \\ \\ u_1^2 + \lambda_1^2 = S^2 \\ \\ \text{C. L. : } u_1^+ - u_1^- = 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

Problème à l'ordre $k \geq 2$

$$\begin{cases} [K_T]u_k = -\sum_{n=0}^{k-1} E_{k-n} K_v u_n \\ \\ {}^T u_k u_1 + \lambda_k \lambda_1 = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u_k^+ - u_k^- = 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

b. Automatisation de la résolution grâce aux outils de différentiation automatique

Les problèmes (3.45) ont la même matrice tangente et le second membre du problème principal contient les coefficients de Taylor de u et $E(\lambda)$ aux ordres antérieurs à k impliquant des formules de dérivation de degrés élevés. La résolution du problème à travers la MAN alterne donc à chaque ordre le calcul des séries et de l'opérateur non linéaire du second membre. Des outils de différentiation automatique réalisables sous matlab, Fortran ou C^{++} sont proposés pour automatiser ces tâches de différentiation donnant naissance à l'approche *diamant* acronyme de "DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée". La théorie de l'approche *diamant* repose sur la formule de récurrence de Faà di Bruno pour la différentiation de haut degré de la composée de fonction qui permet, pour une fonction analytique $f(a) = hox(a)$, d'écrire les coefficients de Taylor à l'ordre n comme suit :

$$f_n = (hox)_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n!} \frac{\partial^m h}{\partial x^m}(x_0) B_{n,m}(x^{(1)}, \cdots, x^{(n-m+1)}) \tag{3.46}$$

où $x_0 = x(0)$ et $B_{n,m}$ sont les polynomes de Bell[28]. Le principe générique de l'approche *diamant* réside dans le fait que le coefficient de Taylor (3.46) à l'ordre n de f est décomposable en deux parties moyennant des initialisations appropriées :

$$f_n = \{f_{1|x_1=1}\} x_n + \{f_{n|x_n=0}\} \tag{3.47}$$

D'une part, le premier terme $\{f_{1|x_1=1}\}$ est la dérivée linéaire tangente f_1 évaluée avec $x_1 = 1$ et d'autre part, le deuxième terme $\{f_{n|x_n=0}\}$ est le coefficient de Taylor f_n évalué avec $x_n = 0$ pour annuler la contribution de $\{f_{1|x_1=1}\}$. La décomposition (3.47) lorsqu'elle est appliquée au second membre des problèmes linéaires (3.44) et (3.45) permet d'écrire :

Problème à l'ordre 1

$$\begin{cases} [K_T]u_1 = -\lambda_1\{E_{1|\lambda_1=1}\}K_v u_0 \\ \\ u_1^2 + \lambda_1^2 = S^2 \\ \\ \text{C. L. : } u_1^+ - u_1^- = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

Problème à l'ordre $k \geq 2$

$$\begin{cases} [K_T]u_k = -\sum_{n=0}^{k-1} \lambda_{k-n}\{E_{1|\lambda_1=1}\}K_v u_n - \sum_{n=0}^{k-1}\{E_{k-n|\lambda_{k-n}=0}\}K_v u_n \\ \\ {}^T u_k u_1 + \lambda_k\lambda_1 = 0 \\ \\ \text{C. L. : } u_k^+ - u_k^- = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

En définitive l'algorithme de résolution du problème microscopique par la MAN associée aux outils de différentiation automatique est le suivant :

Solution à l'ordre 1

$$\begin{cases} \widehat{u}_1 = -\{E_{1|\lambda_1=1}\}K_T^{-1}K_v u_0 \\ \\ \lambda_1 = \pm\dfrac{S}{\sqrt{1 +^T \widehat{u}_1\widehat{u}_1}} \\ \\ u_1 = \lambda_1\widehat{u}_1 \end{cases} \tag{3.50}$$

Solution à l'ordre $k \geq 2$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k = -K_T^{-1} K_v(\{E_{1|\lambda_1=1}\} \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_{k-n} u_n + \sum_{n=0}^{k-1} \{E_{k-n|\lambda_{k-n}=0}\} u_n) \\ \lambda_k = -\lambda_1 \frac{^T u_1 \widehat{u}_k}{S^2} \\ u_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1} u_1 + \widehat{u}_k \end{cases} \tag{3.51}$$

L'avantage de l'approche *diamant* par rapport à la version classique de la MAN, réside en sa capacité à prendre en compte n'importe quelle loi de dépendance en fréquence dans les phases viscoélastiques. En effet dans la version initiale de la MAN utilisée notamment par Daya et al [25], le calcul des séries de Taylor se faisait manuellement et les étapes de résolution impliquant la loi de comportement viscoélastique dépendant de la fréquence sont reformulées à chaque fois que l'on change de loi de dépendance en fréquence. Avec l'approche *diamant* une fois que la loi de dépendance en fréquence est bien définie, la boite à outil *diamant* [28] génère automatiquement les coefficients de Taylor $\{E_{1|\lambda_1=1}\}$ et $\{E_{k-n|\lambda_{k-n}=0}\}$ à chaque étape de la résolution.

c. Technique de continuation

Les algorithmes présentés précédemment, permettent de calculer des séries d'ordre élévé. En pratique l'ordre $N = 20$ est optimal [116]. La solution finale est construite branche par branche. Cependant la solution asymptotique n'est valable que dans un certains voisinage de la solution de départ de chaque branche (u^j, λ^j) à cause du rayon de convergence des séries. En effet une trop grande valeur de a par rapport à ce rayon, risque de sortir le calcul de la zone de convergence et de s'écarter de la solution cherchée. Par contre une trop petite valeur a va entrainer un grand nombre d'itération qui par conséquent augmenterait le temps de calcul. Une technique de continuation est élaborer afin d'optimiser le calcul. Ainsi la solution évaluée à la fin d'un pas devient le point de départ du pas suivant. On oblige alors la différence entre les solutions de deux ordres

consécutives N et $N-1$ à rester assez petite par rapport à une valeur critique δ. En considérant la forme discrétisée du champ de déplacement, le rayon de validité des séries tronquées est donné à l'aide du critère suivant [116] :

$$a_{max} = (\delta \frac{||u_1||}{||u_N||})^{\frac{1}{N-1}} \tag{3.52}$$

Maintenant que les $\mathbb{A}_k = \{\tilde{u}_k^{11}, \tilde{u}_k^{22}, \frac{1}{2}(\tilde{u}_k^{12} + \tilde{u}_k^{21})\}$ sont entièrement calculés, le tenseur de localisation global $\mathbb{A}_{,X}$ peut alors être construit :

$$\mathbb{A}_{,X}(a) = \mathbb{A}_{0,X} + \sum_{i=1}^{N} a^i \mathbb{A}_{i,X} \tag{3.53}$$

L'approche *diamant* présentée ici est une approche générique, souple et automatique permettant de construire le tenseur de localisation quelque soit la loi de dépendance en fréquence des modules d'Young des phases viscoélastiques. Dans la section suivante, nous nous servons de ce tenseur de localisation afin de calculer la loi de comportement homogénéisée à l'échelle macroscopique.

3.2.9 Homogénéisation

Le but de l'homogénéisation multi-échelle est de caclculer la loi de comportement homogénéisée à l'échelle macroscopique à partir de la loi de comportement des composants du composite à l'échelle de la microstructure. En introduisant la relation (3.32) dans la loi de comportement (3.6) à l'échelle microscopique, nous obtenons :

$$\sigma = C^{(r)} : \mathbb{A}_{,X} : \overline{\varepsilon} \tag{3.54}$$

L'introduction de la relation (3.54) dans la seconde relation de couplage (3.9) permet de la réécrire comme suit :

$$\overline{\sigma} = \langle C^{(r)} : \mathbb{A}_{,X} \rangle : \overline{\varepsilon} = \frac{1}{\mid \phi \mid} \int_{\phi} C^{(r)} : \mathbb{A}_{,X} \, d\phi : \overline{\varepsilon} \tag{3.55}$$

La comparaison entre relations (3.3) et (3.55) permet d'identifier le tenseur symétrique d'ordre 4 des propriétés du matériau à l'échelle macroscopique $\overline{C}$, comme suit :

$$\overline{C} = \langle C^{(r)} : \mathbb{A}_{,X} \rangle = \frac{1}{\mid \phi \mid} \int_{\phi} C^{(r)} : \mathbb{A}_{,X} \, d\phi \tag{3.56}$$

Le comportement effectif à l'échelle macroscopique est maintenant calculé à partir du comportement de chaque phase du VER. Le problème de vibrations (3.2) à l'échelle macroscopique peut être discrétisé et résolu afin de calculer les propriétés modales de la structure en terme de fréquences amorties et amortissements modaux.

3.2.10 Résolution du problème macroscopique

La loi de comportement à l'échelle macroscopique étant entièrement définie, nous pouvons discrétiser et résoudre le problème macroscopique par la méthode des éléments finis. L'introduction de la loi de comportement (3.3) dans la formulation faible du problème macroscopique (3.2) en tenant compte de $\overline{\varepsilon} = \nabla \overline{u}$, permet d'écrire :

$$\int_{\Phi} {}^{T}\nabla \overline{u} : \overline{C} : \nabla \delta \overline{u} \, d\Phi + \int_{\Phi} \overline{\rho} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} \delta \overline{u} \, d\Phi = 0 \tag{3.57}$$

Puisque nous étudions ici les vibrations libres, les déplacements $\overline{u}$ sont cherchés sous forme harmonique :

$$\overline{u} = \overline{U} e^{i\omega t} \tag{3.58}$$

où $\overline{U}$ représente le mode propre de vibration et ω la fréquence de vibration. Le problème à discrétiser s'écrit :

$$\int_{\Phi} {}^{T}\nabla \overline{U} : \overline{C} : \nabla \delta \overline{U} \, d\Phi - \omega^2 \int_{\Phi} \overline{\rho} U \delta \overline{U} \, d\Phi = 0 \tag{3.59}$$

Ensuite nous proposons un élément fini bidmensionnel pour la discrétisation de l'équation (3.59). Nous choisissons un élément quadrangulaire à 9 nœuds possédant chacun deux degrés de libertés : la flèche ($\overline{W}$) et le déplacement longititudinal ($\overline{V}$). Ainsi pour un élément délimité par les nœuds numérotés 1, 2, 3 et 4 le vecteur élémentaire des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{\overline{U}^e\} = {}^{T}[\overline{W}^1 \ \overline{V}^1 \ \overline{W}^2 \ \overline{V}^2 \ \overline{W}^3 \ \overline{V}^3 \ \overline{W}^4 \ \overline{V}^4] \tag{3.60}$$

Le déplacement $\overline{U}$ est interpolé par la même matrice d'interpolation $[N]$ que celle utilisée dans la section 3.2.7 :

$$\{\overline{U}\} = [N]\{\overline{U}^e\} \tag{3.61}$$

Après discrétisation, on peut écrire le problème élémentaire sous sa forme discrétisée :

$$([\overline{K}]^e - \omega^2[\overline{M}]^e)\{\overline{U}^e\} = 0 \tag{3.62}$$

Après assemblage des matrices élémentaires $[\overline{K}]^e$ et $[\overline{M}]^e$, on obtient le problème de vibration à résoudre :

$$([\overline{K}] - \lambda[\overline{M}])\{\overline{U}\} = 0 \tag{3.63}$$

où $[\overline{K}]$ et $[\overline{M}]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité globales de la structure et $\{\overline{U}\}$ le mode complexe de vibration regroupant l'ensemble des degrés de liberté aux noeuds. λ est la valeur propre définie par $\lambda = \omega^2$. L'équation (3.63) caractérise les vibrations libres linéaires de la structure hétérogène viscoélastique étudiée. Ce problème est un problème linéaire de vibration aux valeurs propres complexes, qui sera résolu par la méthode d'Arnoldi [24] implémentée dans matlab par la fonction "eigs". L'un des avantages avec cette approche multi-échelle est la possibilté de résoudre à l'échelle macroscopique un problème linéaire. En effet la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence du module des phases viscoélastiques est traité à l'échelle microscopique.

3.3 Tests numériques et discussions

Le couple solution $(\overline{U}, \lambda)$ du problème (3.63) de vibrations libres de la structure composite viscoélastique étudiée permet de caractériser ses propriétés modales en termes de fréquences amorties (Ω) et d'amortissements modaux (η). Rappelons que le vecteur $\overline{U}$ représente le mode propre complexe et $\lambda = \omega^2$ est la fréquence propre complexe de vibration de la structure. La fréquence (Ω) amortie et l'amortissement modal (η) de la structure se calculent alors comme suit :

$$\begin{cases} \Omega = \sqrt{\Re(\lambda)} \\ \eta = \dfrac{\Im(\lambda)}{\Re(\lambda)} \end{cases} \tag{3.64}$$

où $\Re(\lambda)$ et $\Im(\lambda)$ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de λ.
La difficulté principale dans l'utilisation de l'approche éléments finis multi-échelle pour la résolution du problème de vibration des structures composites viscoélastiques, est la prise en compte des cas de dépendance en fréquence des modules d'Young des phases viscoélastiques. Par conséquent afin de tester la généricité, l'efficacité et les performances de la présente approche, nous calculons les propriétés modales de structures composites poutres de diverses géométries sous diverses conditions aux limites, avec des inclusions de diverses formes et occupant diverses proportions du volume de la structure. On considère des phases viscoélastiques dont les modules d'Young sont régis par diverses lois de dépendance en fréquence : le module d'Young constant, le module d'Young dépendant de la fréquence donné par le modèle à dérivée fractionnaire, le module d'Young dépendant de la fréquence donné par le modèle ADF. L'un des avantages de notre approche et du code éléments finis que nous avons développé, est que l'on peut étudier les vibrations de matériaux composites constitués soit d'une matrice élastique contenant des inclusions viscoélastiques et vice versa, soit d'une matrice et des inclusions viscoélastiques. A cet effet les tests numériques sont menés sur des structures à matrices élastiques et inclusions viscoélastiques ainsi que des structures à matrices viscoélastiques et des inclusions élastiques.
Pour la résolution au moyen de la MAN, l'ordre de troncature des séries est fixé à $N = 20$ et le paramètre de précision pour l'estimation du rayon de convergence est fixé à $\delta = 10^{-6}$. Précisons que ces paramètres resteront inchangés dans toute la suite du manuscrit pour toutes les résolutions par la MAN.

3.3.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant

La nouvelle approche est testée ici sur le cas le plus simple c'est à dire celui d'une structure à matériau composite dont le module d'Young de la phase viscoélastique est constant et modélisé par :

$$E^*_{ve}(\omega) = E_0(1 + i\eta_{ve}) \tag{3.65}$$

où $E^*_{ve}(0) = E_0$ est le module d'Young d'élasticité retardée et η_i le facteur de perte dans les inclusions. La structure considérée est celle étudiée dans les travaux d'Attipou et al [4] dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont regroupées dans le tableau 3.1. Il s'agit d'une poutre composite constituée d'une matrice élastique contenant des inclusions circulaires (figure 3.3), uniformément et périodiquement réparties et occupant 28% du volume de la structure comme le montre la figure fig :maillage complet. Dans les phases viscoélastiques les facteurs de pertes $\eta_{ve} \in \{0.6, 1.5\}$ sont considérés. Afin de montrer la souplesse de notre code notamment sa capacité à prendre en compte le cas des structures à matrice élastique et des inclusions viscoélastiques et visce versa, des tests numériques sont aussi menés sur la même structure en inversant les rôles des deux phases, c'est à dire des inclusions élastiques contenues dans une matrice viscoélastique. Pour le calcul à l'aide de la nouvelle approche, le VER est maillé en 770 éléments triangulaires à 3 nœuds, conduisant à 824 degrés de liberté (ddl). La structure à l'échelle macroscopique est maillé en 500 éléments quadrangulaires à 4 nœuds, conduisant à 4242 ddl.

Les fréquences amorties (Ω) et amortissements modaux (η) de la structure encastrée-libre étudiée sont calculés en utilisant la nouvelle approche proposée et regroupés dans les tableaux 3.2 et 3.3 en comparaison avec ceux de la simulation éléments finis sous ABAQUS et des résultats de la littérature [4]. Afin d'avoir les idées claires sur la validité de l'approche EF^2, nous calculons le pourcentage d'erreur relative (%ER) entre les résultats de la nouvelle approche par rapport à la simulation sous ABAQUS. Comme on peut le constater la valeur maximale de l'erreur est d'environ 0.7% pour les fréquences amorties et 7% pour les amortissements modaux, ce qui montre l'efficacité de notre approche pour le calcul des propriétés modales des matériaux composites viscoélastiques à module constant. Par ailleurs nous mettons en évidence le fait que la nouvelle approche possède beaucoup d'avantage par rapport à la simulation sous ABAQUS. Le calcul des fréquences amorties et amortissements modaux dans la simulation ABAQUS se fait par post traitement à travers la construction des courbes de réponses et l'utilisation de la

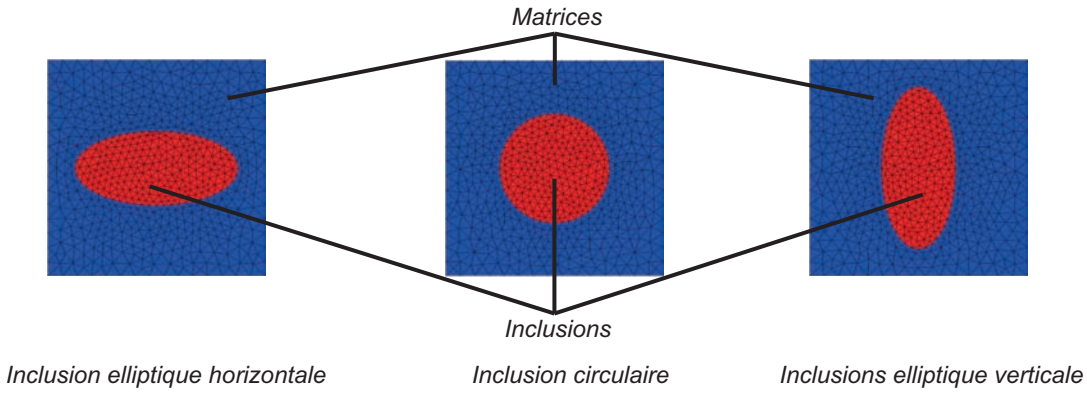


FIG. 3.3 – Morphologie des inclusions

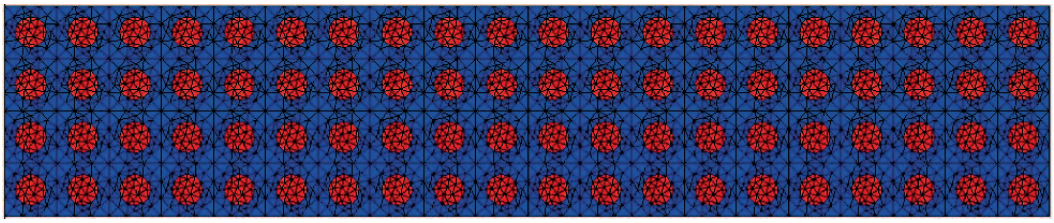


FIG. 3.4 – Structure étudiée à l'échelle macroscopique avec un maillage complet

méthode de la bande passante à $-3dB$. Pour la simultation sous ABAQUS, la structure a été discrétisée en 100870 éléments CPS6M d'ABAQUS conduisant à 1217804 ddl. Le calcul des 16 modes des tableaux 3.2 et 3.3 a été effectué en 33h20min37s sous ABAQUS. Pour comparaison notre approche a nécessité 64 secondes pour calculer les 16 modes des deux tableaux 3.2 et 3.3.

A travers ce premier test nous avant montré l'efficacité de l'approche EF^2 pour la simulation des propriétés modales des matériaux composites viscoélastiques dans le cas de module viscoélastique constant. Cependant dans la réalité les modules d'Young des matériaux viscoélastiques ne sont pas constants, mais ils varient fortement en fonction de la température et de la fréquence de vibration. Dans les sections suivantes nous démontrons la capacité et l'efficacité de notre approche à prendre en compte les cas de dépendance en fréquence des modules d'Young des phases viscoélastiques.

Phase élastique	Module d'Young	$E_e = 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_e = 0.45$
	Masse volumique	$\rho_e = 1550\ Kg/m^3$
Phase viscoélastiques	Module d'Young	$E_{ve} = 1794 \times 10^4 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_{ve} = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_{ve} = 968.1\ Kg/m^3$
Poutre	Longueur	$L = 0.2m$
	Largeur	$h = 0.04m$

TAB. 3.1 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique étudiée

η_i	Modes	Présente Approche				ABAQUS		Attipou et al [4]	
		$\Omega(Hz)$	%ER	η/η_i	%ER	$\Omega(Hz)$	η/η_i	$\Omega(Hz)$	η/η_i
0.6	1	96.45	0.10	0.030	3.44	96.54	0.029	97.00	0.029
	2	498.34	0.30	0.041	0.00	496.86	0.041	502.62	0.0385
	3	1154.68	0.44	0.047	-4.08	1149.67	0.049	1166.68	0.0442
	4	1878.80	0.34	0.052	-5.45	1871.28	0.055	1901.02	0.0486
1.5	1	96.51	0.00	0.030	7.14	96.51	0.028	-	-
	2	498.91	0.22	0.041	2.50	497.79	0.040	-	-
	3	1156.25	0.72	0.047	-2.08	1148.04	0.048	-	-
	4	1881.62	0.26	0.052	-1.89	1876.82	0.053	-	-

TAB. 3.2 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modaux (η) de la poutre composite encastrée-libre étudiée. Matrice élastique inclusions viscoélastiques

η_i	Modes	Présente Approche				ABAQUS	
		$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
0.6	1	25.39	0.63	0.586	0	25.23	0.586
	2	135.56	0.54	0.587	0	134.83	0.587
	3	321.00	0.46	0.588	0	319.52	0.588
	4	531.08	0.40	0.589	0	528.94	0.589
1.5	1	25.77	0.62	1.421	-0.07	25.61	1.422
	2	137.48	0.54	1.427	0	136.74	1.427
	3	325.29	0.46	1.431	0	323.81	1.431
	4	537.83	0.39	1.434	0.07	535.73	1.433

TAB. 3.3 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modaux (η) de la poutre composite encastrée-libre étudiée. Matrice viscoélastique contenant des inclusions élastiques

3.3.2 Module viscoélastique variable : Modèle ADF

L'approche proposée est utilisée ici pour déterminer les propriétés modales de structures composites dont le module d'Young des phases viscoélastiques varie fortement en fonction de la fréquence de vibration. Le modèle ADF à 3 termes pour de l'ISD112 à 27°C est considéré dans la structure étudiée dans la section 3.3.1 et le modèle ADF à 5 termes pour du DYAD606 à 10°C est considéré dans du Béton. L'objectif étant de tester la capacité de notre approche à prendre en compte les différentes variantes du modèle ADF (à trois et à cinq termes) et pour différents matériaux.

Modèle ADF à 3 termes : ISD112 à 27°C

Nous considérons la structure étudiée précédemment dans la section 3.3.1 en remplaçant le matériau viscoélastique à module d'Young constant par de l'ISD112 à 27°C dont le module viscoélastique varie fortement en fonction de la fréquence de vibration

et modélisé par :

$$G^*_{ve}(\omega) = G_0(1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j}) \tag{3.66}$$

Les différents paramètres du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C sont donnés dans les travaux de Bilasse et al [5] et regroupés dans le tableau 3.4. Les autres caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure étudiée sont régroupées dans le tableau 3.5. Les inclusions considérées ici sont des ellipses horizontales (figure 3.3), occupant 50% du volume de la structure.

La condition aux limites encastrée-libre est considérée et les propriétés modales (fréquences amorties et amortissements modaux) calculées en utilisant la nouvelle approche sont comparées à celles données par ABAQUS dans les tableaux 3.6 et 3.7. On peut constater que les erreurs relatives maximums par rapport aux résultats ABAQUS sont inférieures à 1% et 8% respectivement pour les fréquences amorties et les amortissements modaux, montrant ainsi la capacité de la nouvelle approche à prendre en compte le modèle ADF à 3 termes de l'ISD112. Pour le calcul des 4 premiers modes par la nouvelle approche, le VER a été discrétisé en 1370 éléments triangulaires à 3 nœuds conduisant à 1452 ddl et la structure à l'échelle macroscopique a été discrétisé en 500 éléments quadrangulaire à 9 nœuds conduisant à 4242 ddl. Le calcul des quatres modes du tableau 3.6 a duré 243s et les quatre modes du tableau 3.7 ont été calculés en 300s. Pour les simulations ABAQUS, la structure a été discrétisée en 445378 éléments CPS6M conduisant à 2674270 de degrés de liberté. Les calculs ont duré 1j7h38min9s et 1j9h40min50s respectivement pour les résultats des tableaux 3.6 et 3.7. On peut à nouveau constater le gain en temps de calcul et d'espace mémoire qu'on peut faire en utilisant notre approche par rapport à ABAQUS. Nous faisons remarquer que le temps de calcul nécessaire dans le cas du module variable en utilisant notre approche est nettement plus important que dans le cas d'un module constant. Cela s'explique par le fait que dans le cas constant une seule itération a été nécessaire pour calculer les quatre modes alors qu'il a fallu 7 itérations par mode dans le cas des résultats des tableaux 3.6 et 3.7. Néanmoins ce temps de calcul reste très faible devant celui de la

j	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^-1)$
1		0.746	468.7
2	0.5×10^6	3.265	4742.4
3		43.284	71532.5

TAB. 3.4 – Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C

Phase élastique	Module d'Young	$E_e = 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_e = 0.45$
	Masse volumique	$\rho_e = 1550\ Kg/m^3$
Phase viscoélastiques	Coefficient de Poisson	$\nu_{ve} = 0.5$
	Masse volumique	$\rho_{ve} = 1600\ Kg/m^3$
Poutre	Longueur	$L = 0.2m$
	Largeur	$h = 0.04m$

TAB. 3.5 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant de l'ISD112 à 27°C étudiée

simulation ABAQUS.

Modèle ADF à 5 termes : DYAD606 à 10°C

Dans cette partie nous testons notre approche sur une structure en béton dans laquelle des grains de DYAD606 en forme d'ellipses verticales (figure 3.3) occupant 40% du volume totale de la structure sont incorporés. Le module de cisaillement du DYAD606 est donné par un modèle ADF (3.66) à cinq termes. Les valeurs des différents paramètres du modèle (3.66) sont donnés dans les travaux de Bilasse et al [5] et regroupés dans le tableau 3.8 pour le DYAD606 à 10°C. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure étudiée sont regroupées dans le tableau 3.9. Les caractéristiques mécaniques du Béton utilisé ici sont données dans les travaux de

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	70.95	0.60	0.0092	0.00	70.53	0.0092
2	304.20	0.60	0.0507	5.63	302.39	0.0480
3	656.65	0.80	0.0974	1.35	651.47	0.0961
4	1011.90	-	0.138	-	-	-

TAB. 3.6 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre composite en ISD112 à 27°C encastrée-libre étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	10.17	1.80	0.200	5.26	9.99	0.190
2	53.53	4.45	0.897	0.79	51.24	0.890
3	126.31	-1.52	1.374	7.17	128.26	1.282
4	179.16	-	2.921	-	-	-

TAB. 3.7 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre composite en ISD112 à 27°C encastrée-libre étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques

Zhibao et Zhifei [117].

La structure est considérée en appuis simples et les résultats donnés par la nouvelle approche sont comparés à ceux d'ABAQUS dans les tableaux 3.10 et 3.11. On observe une bonne concordance entre les résultats de la simulation sous ABAQUS et les résultats de l'approche éléments finis multi-échelle proposée. L'erreur relative maximale entre les résultats des deux approches est inférieure à 0.5% pour les fréquences amorties et 6% pour les amortissements confirmant ainsi l'efficacité de la nouvelle approche en présence d'un modèle ADF à 5 termes. Pour les simulations par la nouvelle approche, le VER a été discrétisé en 3476 éléments triangulaires à 3 nœuds conduisant à 3598 ddl et la structure à l'échelle macroscopique a été discrétisé en 3200 éléments quadrangulaire à 9 nœuds conduisant à 26332 ddl. Le calcul a duré 41min pour les résultats du tableau 3.10 et 35min pour les résultats du tableau 3.11. Pour la simulation ABAQUS, la structure a été discrétisée en 363428 éléments CPS6M d'ABAQUS conduisant à 2184170 ddl. Le calcul des 3 modes ont durée 2j03h21min16s et 8h10min24s respectivement pour les résultats des tableaux 3.10 et pour le seul résultat qui a pu être calcul par ABAQUS dans le tableau 3.11. L'écart entre les temps de calcul et les nombres de ddl nécessaires pour les deux approches apparaît encore une fois très significatif.

Dans cette section nous avons montré la capacité de la nouvelle approche à prendre en compte le modèle ADF à trois termes puis à 5 termes pour différents matériaux. Dans la section suivante nous testons la capacité de notre approche en présence d'un module viscoélastique modélisé par un modèle à dérivée fractionnaire.

3.3.3 Module viscoélastique variable : Modèle à dérivées fractionnaires

Dans cette section nous testons la capacité de notre code à prendre en compte le module viscoélastique dépendant de la fréquence modélisé par le modèle à dérivées fractionnaires. A cet effet nous considérons une poutre composite dont la phase élastique est en bois (Pin à 12% d'humidité) et la phase viscoélastique est en PVB. Le module

j	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^-1)$
1		5.88	5.85
2		13.66	2345.09
3	5.94×10^6	8.94	331.7
4		6.47	50.65
5		34.52	25033.79

TAB. 3.8 – Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 27°C

Matrice élastique	Module d'Young	$E_e = 30 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_e = 0.20$
	Masse volumique	$\rho_e = 2500\ Kg/m^3$
Inclusions viscoélastiques	Coefficient de Poisson	$\nu_{ve} = 0.29$
	Masse volumique	$\rho_{ve} = 1104\ Kg/m^3$
Poutre	Longueur	$L = 0.4m$
	Largeur	$h = 0.05m$

TAB. 3.9 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 étudiée

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	254.81	0.16	0.0446	2.29	254.39	0.0436
2	941.13	-0.02	0.0606	2.54	941.30	0.0590
3	1899.32	-0.22	0.0844	5.37	1903.57	0.0801
4	3024.64	-	0.0973	-	-	-

TAB. 3.10 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 à 10°C en appuis simples étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	81.31	0.23	0.463	-6.28	81.12	0.494
2	361.26	0.60	0.440	-1.57	359.18	0.447
3	811.77	0.66	0.389	-0.27	806.43	0.390
4	978.31	-0.09	0.388	-1.27	979.16	0.393

TAB. 3.11 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du DYAD606 à 10°C en appuis simples étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques

de cisaillement du PVB est modélisé par un modèle à dérivées fractionnaires :

$$G_{ve}(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)[1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}]^{-\beta} \tag{3.67}$$

Les différents paramètres du modèle 3.67 sont donnés à 20°C dans les travaux de Bilasse et al [5] : $G_0 = 479 \times 10^3$ Pa, $G_\infty = 2.35 \times 10^8$ Pa, $\tau = 0.3979$, $\alpha = 0.46$, $\beta = 0.1946$. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure étudiée sont régroupées dans le tableau 3.12. Les caractéristiques mécaniques du Pin utilisé dans ce test numérique ont été données les travaux de thèse de Bohan [118]. Les inclusions considérées ici sont circulaires (figure 3.3) et représentent 60% du volume total de la structure.

Les propriétés modales de la structure encastrée-encastrée calculées par l'approche proposée sont comparées aux résultats ABAQUS dans les tableaux 3.13 et 3.14. L'erreur relative maximale est de 6.25% et l'efficacité de notre code se trouve ainsi confirmée. Pour le calcul multi-échelle le VER a été discrétisé en 2722 éléments triangulaires à 3 nœuds conduisant à 2844 ddl et à la structure macroscopique a été maillée en 3200 éléments quadrangulaires à 9 nœuds conduisant à 26322 ddl. Le calcul des quatre premiers modes par la nouvelle approche a duré 35min16s et 40min55s respectivement pour les résultats des tableaux 3.13 et 3.14. Pour les simulations ABAQUS, la structure

Matrice élastique	Module d'Young	$E_m = 16.015 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_m = 0.44$
	Masse volumique	$\rho_m = 490\ Kg/m^3$
Inclusions viscoélastiques	Coefficient de Poisson	$\nu_i = 0.4$
	Masse volumique	$\rho_i = 999\ Kg/m^3$
Poutre	Longueur	$L = 0.4m$
	Largeur	$h = 0.05m$

TAB. 3.12 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure composite viscoélastique contenant du PVB étudiée

a été discrétisé en 399716 éléments CPS6M d'ABAQUS conduisant à 2401858 ddl. Il a fallu 1j07h38min09s et 1j20h50min45s repectivement pour achever les calculs des six modes des tableaux 3.13 et 3.14. Comme précédemment le gain en terme de temps de calcul et espace mémoire est encore une fois considérable.

3.4 Conclusion

Nous avons développé une approche éléments finis multi-échelle pour la simulation des vibrations des matériaux composites viscoélastiques. Cette nouvelle approche permet de déterminer la loi de comportement homogénéisée de la structure à étudier considérée homogène à l'échelle macroscopique en résolvant un problème aux limites posé sur un VER minutieusement choisi qui est considéré comme l'échelle microscopique. La présence de phases viscoélastiques à module d'Young variant en fonction des fréquences de vibrations conduit à un problème non linéaire à l'échelle microscopique. Cette non linéarité rend impossible l'utilisation du principe de superposition. La MAN est alors utilisée pour linéariser le problème non linéaire à l'échelle microscopique en une suite de problèmes linéaires sur lesquels le principe de superposition peut s'appliquer. Afin d'automatiser le calcul des coefficients de Taylor intervenant dans la MAN,

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	551.62	-0.02	0.0324	0.00	551.72	0.0324
2	1262.39	-0.25	0.0361	-0.27	1265.58	0.0362
3	2111.84	-0.45	0.0370	0.27	2121.30	0.0369
4	3028.24	-	0.0375	-	-	-

TAB. 3.13 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du PVB à 20°C encastrée-encastrée étudiée. Matrice élastique avec des inclusions viscoélastiques

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	401.34	1.96	0.136	-2.16	393.63	0.139
2	1000.08	1.83	0.115	-1.71	982.14	0.117
3	1753.67	1.44	0.105	-6.25	1728.76	0.112
4	2595.14	-	0.098	-	-	-

TAB. 3.14 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la structure composite viscoélastique contenant du PVB à 20°C encastrée-encastrée étudiée. Matrice viscoélastique avec des inclusions élastiques

et rendre le code de calcul développé souple et flexible, les outils d'automatisation du calcul de ces coefficients ont été utilisés. Nous avons ainsi développé un code de calcul robuste, souple et flexible pouvant prendre en compte aussi bien les composites à matrices élastiques que les composites à matrice viscoélastiques, quelle que soit la non linéarité matérielle introduite pas la dépendance en fréquence du module d'Young des phases viscoélastiques. Des tests numériques ont ensuite été menés sur différentes structures sous diverses conditions aux limites en considérant diverses morphologies et proportions pour les inclusions et les résultats de l'approche proposée ont été comparés à ceux de la simulation éléments finis sous ABAQUS. Cette comparaison nous a permis non seulement de confirmer la validité du code éléments développé mais aussi de relever les différents atouts que possède notre approche par rapport à ABAQUS. A la fin de ce chapitre qui a été essentiellement consacré au développement et à la validation de la nouvelle approche basée sur l'homogénéisation éléments finis multi-échelles, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- La nouvelle approche est parfaitement capable de calculer les propriétés modales des structures composites viscoélastiques quelle que soit la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence des modules d'Young des phases viscoélastiques.
- La nouvelle approche présente l'avantage de prendre en compte la morphologie des inclusions sans qu'il soit nécessaire de faire des développements supplémentaires. Un seul développement permet de tenir compte des inclusions circulaires, elliptiques horizontale ou verticale. Elle s'adapte facilement aux matériaux composites à inclusions viscoélastiques et matrice élastique et vice versa. Elle est aussi capable de s'adapter aux composites à matrice et inclusions viscoélastiques.
- C'est une approche souple, générique et efficace qui permet de faire un gain significatif en temps de calcul et d'espace mémoire CPU. Nous disposons par conséquent d'un très bon outil pour la conception de matériaux sandwich viscoélastiques à haut pouvoir amortissant.

Chapitre 4

Application : Conception de matériaux sandwichs à haut pouvoir amortissant

4.1 Introduction

Les matériaux sandwichs viscoélastiques constitués d'une fine couche viscoélastique intercalée entre deux faces élastiques, sont de plus en plus utilisés pour la réduction ou le contrôle des vibrations et la suppression des nuisances sonores et la fatigue structurale qui en résultent. Ces matériaux présentent l'avantage de cumuler les propriétés de bonne tenue mécanique grâce aux faces élastiques et les propriétés amortissantes apportées par le cœur viscoélastique. Avec l'exigence de plus en plus croissante de la part des consommateurs en termes de confort et de performance, l'amortissement apporté par les matériaux viscoélastiques classiques se trouve rapidement insuffisant dans certaines applications industrielles. Une solution pour augmenter l'amortissement de ces matériaux serait alors la conception de matériaux sandwichs viscoélastiques à cœurs composites. L'idée est d'augmenter les propriétés amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques classiques en noyant dans le matériau viscoélastique du cœur

sous forme d'inclusions ou de fibres, un ou plusieurs autres matériaux viscoélastiques de natures différentes possédant de meilleures propriétés amortissantes . Le matériau sandwich viscoélastique aurait alors un cœur composite dont la matrice serait le matériau viscoélastique de base contenant des renforts d'autres matériaux viscoélastiques. Le moyen le plus simple et le moins coûteux pour concevoir un nouveau matériau est la simulation numérique. Par conséquent, l'approche EF^2 développée dans le chapitre 3, apparaît comme un outil très intéressant pour la conception de matériaux sandwichs à cœurs composites viscoélastiques. Nous avons démontré dans le chapitre 3 l'efficacité du code éléments finis développé à partir de la nouvelle approche, à calculer les fréquences amorties et amortissements des matériaux composites à matrice élastique et inclusions viscoélastiques et vice versa. La souplesse de ce code permet également de déterminer la loi de comportement homogénéisée des matériaux composites constitués de deux ou plusieurs matériaux viscoélastiques de natures différentes. Pour s'en convaincre, dans un premier temps, nous menons des tests numériques de validation sur des structures sandwichs à cœurs composites viscoélastiques en comparant les résultats de la nouvelle approche avec ceux de la simulation sous ABAQUS. Ensuite nous montrons comment l'amortissement modal d'une structure sandwich viscoélastique peut être significativement amélioré en noyant dans le matériau viscoélastique du cœur un autre matériau viscoélastique sous forme d'inclusions. Enfin nous étudions l'influence de la fraction volumique et de la morphologie des inclusions sur les propriétés amortissantes de la nouvelle structure conçue.

4.2 Tests de validation sur les structures sandwichs viscoélastiques

Dans cette section nous testons la capacité de la nouvelle approche à déterminer les propriétés amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques à cœur composite. A cet effet, nous comparons les résultats de la nouvelle approche avec ceux de la

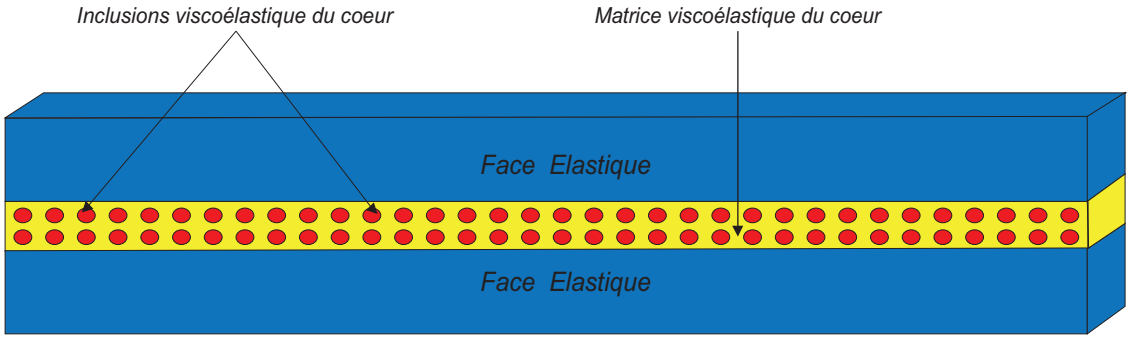


FIG. 4.1 – Structure sandwich à cœur composite viscoélastique

simulation sous ABAQUS. La structure étudiée est une structure sandwich dont le cœur est un matériau composite viscoélastique constitué de deux matériaux viscoélastiques différents comme le montre la figure 4.1. Pour le test de validation, deux cas sont considérés : cœur dont les matériaux de la matrice et des inclusions ont un module d'Young constant et cœur dont les matériaux de la matrice et les inclusions ont un module d'Young dépendant de la fréquence.

4.2.1 Cœur à matrice et inclusions à module d'Young constant

Dans cette section nous considérons une structure sandwich dont les faces sont en Aluminium et le cœur est un composite constitué de deux polymères dont les modules d'Young viscoélastiques sont constants et modélisés par la formule (3.65). Le facteur de perte de la matrice est $\eta_{cm} = 0.6$ et celui des inclusions est $\eta_{ci} = 1.5$. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sandwich ainsi obtenue sont regroupées dans le tableau 4.1. Les inclusions sont circulaires et occupent 20% du volume total du cœur.

Les propriétés modales en terme de fréquences amorties et amortissements de la structure encastrée-libre calculées par la présente approche multi-échelle sont comparées à celles de la simulation sous ABAQUS dans le tableau 4.2. Le pourcentage d'erreur relative maximale entre les deux approches est de 0.87% pour les fréquences amorties et de -2.33% pour les amortissements modaux, ce qui confirme la validité du code proposé à

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 69 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_f = 2766\ Kg/m^3$
	Epaisseur de chaque face	$h_f = 2 \times 10^{-3} m$
Cœur viscoélastique	Module d'Young de la matrice	$E_{0m} = 1794 \times 10^3 Pa$
	Coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_{0m} = 0.3$
	Masse volumique de la matrice	$\rho_{0m} = 968.1\ Kg/m^3$
	Module d'Young des inclusions	$E_{0i} = 1794 \times 10^3 Pa$
	Coefficient de Poisson des inclusions	$\nu_{0i} = 0.3$
	Masse volumique des inclusions	$\rho_{0i} = 968.1\ Kg/m^3$
	Epaisseur du cœur	$h_c = 1 \times 10^{-3} m$
Poutre	Longueur	$L = 200 \times 10^{-3} m$

TAB. 4.1 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Alumunium/polymère-polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée.

simuler les vibrations des structures sandwichs à cœur composite viscoélastique ayant un module constant. Dans la suite, nous testons la capacité de l'approche présentée à prendre en compte le cas d'une structure dont les deux matériaux du cœur ont des modules d'Young qui dépendent de la fréquence.

4.2.2 Cœur à matrice et inclusions à modules d'Young dépendant de la fréquence

Afin de montrer la robustesse et la polyvalence de notre approche, nous testons sa validité dans le cas de matériaux sandwichs à cœur composite viscoélastique avec de la dépendance en fréquence. A cet effet nous considérons une structure dont les faces sont en Verre et le cœur est un composite dont la matrice est en PVB et les inclusions elliptiques horizontales sont en ISD112. Les inclusions représentent 40% du volume to-

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	53.62	-0.04	0.252	-2.33	53.64	0.258
2	263.78	0.42	0.0937	-2.09	262.81	0.0957
3	700.97	0.52	0.0361	-1.37	697.34	0.0366
4	1359.01	0.87	0.0180	-0.55	1347.23	0.0181

TAB. 4.2 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Aluminium/polymère-polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée.

tal du cœur. Le module de cisaillement du PVB variant en fonction de la fréquence de vibration est donné par le modèle à dérivées fractionnaires (3.67). Les valeurs des différents paramètres du modèle sont donnés à 20°C dans les travaux de Bilasse et al [5] : $G_0 = 479 \times 10^3$ Pa, $G_\infty = 2.35 \times 10^8$ Pa, $\tau = 0.3979$, $\alpha = 0.46$, $\beta = 0.1946$. Le module de cisaillement de l'ISD112 est donné par le modèle ADF (3.66). Les paramètres du modèle sont donnés à 20°C dans les travaux de Bilasse et al [5] et regroupés dans le tableau 4.3. Les propriétés mécaniques et les dimensions de la structure étudiée sont regroupées dans le tableau 4.4.

Les propriétés modales en termes de fréquences amorties et amortissements modales de la structure encastrée-encastrée étudiée sont regroupés dans le tableau 4.5 en comparaison avec celles de la simulation sous ABAQUS. Comme on peut le constater l'erreur relative maximum par rapport aux résultats ABAQUS est inférieure à 2% confirmant ainsi la capacité de notre approche à calculer les propriétés modales des structures sandwichs à cœurs composites viscoélastiques quelle que soit la dépendance en fréquence introduite dans la loi de comportement de la matrice et des inclusions du cœur. La généricité, la simplicité et le coût peu élevé en terme de temps de calcul et d'espace mémoire CPU de notre code en font un bon outil de conception de structure sandwich viscoélastique à haut pouvoir amortissant. Dans la section suivante nous montrons comment les propriétés amortissantes d'un matériau sandwich à cœur viscoélastique peuvent être

j	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^-1)$
1		2.8164	31.1176
2	0.0511×10^6	13.1162	446.4542
3		45.4655	5502.5318

TAB. 4.3 – Paramètre du modèle ADF de l'ISD112 à 20°C

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 64.5 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.22$
	Masse volumique	$\rho_f = 2737\ Kg/m^3$
	Epaisseur de chaque face	$h_f = 9 \times 10^{-3} m$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_{0m} = 0.4$
	Masse volumique de la matrice	$\rho_{0m} = 999\ Kg/m^3$
	Coefficient de Poisson des inclusions	$\nu_{0i} = 0.5$
	Masse volumique des inclusions	$\rho_{0i} = 1600\ Kg/m^3$
	Epaisseur du cœur	$h_c = 4 \times 10^{-3} m$
Poutre	Longueur	$L = 800 \times 10^{-3} m$

TAB. 4.4 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée.

améliorées grâce à l'introduction dans le cœur d'un autre matériau viscoélastique de meilleur propriétés amortissantes sous forme d'inclusions.

4.3 Amélioration des propriétés amortissantes des matériaux sandwichs viscoélastiques

Les matériaux sandwichs viscoélastiques sont utilisés pour amortir ou contrôler de façon passive les vibrations qui produisent des nuisances sonores et conduisent à la fa-

Modes	Présente Approche				ABAQUS	
	$\Omega(Hz)$	%ER	η	%ER	$\Omega(Hz)$	η
1	93.75	-1.42	0.109	0.00	95.10	0.109
2	231.94	-1.07	0.0760	-1.55	234.44	0.0772
3	428.64	-0.54	0.0620	-1.81	430.96	0.0609
4	681.79	-0.25	0.0460	-1.50	683.48	0.0467

TAB. 4.5 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée.

tigue et la ruine des ouvrages. Cependant l'amortissement introduit par les matériaux viscoélastiques traditionnels des cœurs peut se retrouver insuffisant. Dans cette section, nous montrons comment on peut améliorer les propriétés d'amortissement d'un matériau sandwich viscoélastique en ajoutant dans le matériau viscoélastique du cœur, une petite proportion d'un autre matériau viscoélastique sous forme d'inclusions, sans être obligé d'augmenter les dimensions du cœur viscoélastique. L'objectif étant de montrer l'intérêt de notre code pour la conception de matériaux sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. A cet effet nous reprenons les structures étudiées dans les travaux de Bilasse et al [5] et nous montrons comment les propriétés d'amortissement de ces structures peuvent être améliorées en ajoutant une petite fraction volumique d'un autre matériau viscoélastique de meilleur propriétés amortissantes sous forme de particules.

4.3.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant

Le premier cas considéré est celui d'une structure sandwich Aluminium/polymère/Aluminium dont les propriétés mécaniques et géométriques sont regroupées dans le tableau 4.6. Le module d'Young du cœur est complexe constant et donné par la formule (3.65). La structure initiale a un cœur dont le facteur de perte est $\eta_{cm} = 0.1$. Afin

d'améliorer son amortissement modal, nous noyons dans le cœur, un autre matériau viscoélastique a module constant ayant le même module d'élasticité retardé que l'originale mais dont le facteur de perte est $\eta_{ci} = 1.5$. Nous montrons comment l'introduction de ce second matériau sous forme d'inclusions circulaires occupant 20% du volume du cœur permet d'améliorer considérablement l'amortissement modal de la structure. Pour cela nous calculons les propriétés modales de la structure "dopée" et nous comparons pour les quatre premiers modes, ses amortissements modaux à ceux de la structure de base donnés dans les travaux de Bilasse et al [5] dans le tableau 4.7. Afin de mieux visualiser l'impact de l'introduction du second matériau, nous calculons les rapports entre les propriétés modales de la structure initiale et celles de la structure modifiée. On peut alors constater que l'introduction de seulement 20% d'un matériau de facteur de perte $\eta_{ci} = 1.5$ dans un matériau de facteur de perte $\eta_{c1} = 0.1$ permet de doubler le facteur de perte de la structure sandwich conçue. Notons que l'introduction de ce nouveau matériau dans le cœur n'a eu aucune influence sur les fréquences amorties qui n'ont quasiment pas variées. Les deux matériaux ayant la même masse volumique, on a donc doublé les propriétés d'amortissement de cette structure sandwich sans augmenter la taille du cœur viscoélastique et donc le poids total de la structure.

4.3.2 Modèle viscoélastique à module complexe variable : PVB-ISD112 à 20°C

Dans cette section nous montrons comment on peut améliorer les propriétés d'amortissement d'une structure sandwich viscoélastique Verre/PVB/Verre (pare-brise) en noyant dans le cœur viscoélastique des inclusions en ISD112. Les deux matériaux viscoélastiques ont des modules de Young dépendant de la fréquence donnés dans la section 3. Les inclusions en ISD112 sont sous forme d'ellipses horizontales dont les dimensions caractéristiques sont : $a = 1.75 \times 10^{-5}$ et $b = 5.253 \times 10^{-6}$ (voir figure 4.3). Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure Verre/PVB-ISD112/Verre ainsi obtenue sont regroupées dans le tableau 4.8. La structure est encastrée aux deux

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 69 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Masse volumique	$\rho_f = 2766\ Kg/m^3$
	Epaisseur de chaque face	$h_f = 1.524 \times 10^{-3} m$
Cœur viscoélastique	Module d'Young de la matrice	$E_c = 1794 \times 10^3 Pa$
	Coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_c = 0.3$
	Masse volumique de la matrice	$\rho_c = 968.1\ Kg/m^3$
	Epaisseur du cœur	$h_c = 0.127 \times 10^{-3} m$
Poutre	Longueur	$L = 177.8 \times 10^{-3} m$

TAB. 4.6 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich Alumunium/polymère/Aluminium encastrée-libre

Modes	Struc. initiale [5]		Struc. Modifiée		$\Omega_{mod}/\Omega_{init}$	η_{mod}/η_{init}
	$\Omega_{init}(Hz)$	η_{init}	$\Omega_{mod}(Hz)$	η_{mod}		
1	64.1	0.0281	65.4	0.0614	1.02	2.19
2	296.7	0.0242	301.3	0.0576	1.02	2.38
3	744.5	0.0154	751.3	0.0382	1.01	2.48
4	1395.7	0.0089	1401.6	0.0225	1.00	2.53

TAB. 4.7 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Aluminium/polymère/Aluminium encastrée-libre étudiée.

extrémités. L'approche éléments finis multi-échelles que nous avons développée est ensuite utilisée pour calculer les propriétés modales de la structure modifiée ainsi obtenue et sont regroupées dans le tableau 4.9 en comparaison avec ceux de la structure initiale Verre/PVB/Verre étudiée dans les travaux de Bilasse et al [5]. L'objectif étant de montrer l'amélioration obtenue sur les propriétés modales de la structure initiale, nous calculons les rapports entre ces propriétés modales et celles de la structure modifiée. Comme on peut le constater à travers le tableau 4.9, en noyant dans le cœur en PVB des inclusions elliptiques horizontales en ISD112 représentant 25% du volume totale de la couche centrale, on peut quadrupler son amortissement modal. Comme pour le cas du module constant, il n'y a quasiment pas d'incidence sur les fréquences amorties. Cette amélioration a été possible parce que les propriétés amortissantes de l'ISD112 sont plus importantes que celles du PVB. Il est donc possible d'améliorer de façon significative les propriétés d'amortissement d'une structure sandwich viscoélastique en noyant dans son cœur viscoélastique un autre matériau viscoélastique de propriétés d'amortissement supérieures.

Au-delà de l'ajout d'un matériau viscoélastique de propriétés amortissantes supérieures, la morphologie et le pourcentage volumique de ces inclusions influent énormément sur les propriétés amortissantes. Dans la section suivante nous étudions linfluence de ces deux paramètres sur la qualité de l'amortissement de la structure obtenue.

4.4 Etude de l'influence des différents paramètres des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre

L'objectif poursuivi en noyant dans la couche centrale viscoélastique du sandwich un autre matériau viscoélastique de propriétés amortissantes supérieures est d'améliorer les propriétés modales de la structure. La qualité de l'amélioration de ces propriétés mo-

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 64.5 \times 10^9 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.22$
	Masse volumique	$\rho_f = 2737\ Kg/m^3$
	Epaisseur de chaque face	$h_f = 9 \times 10^{-3} m$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_{0m} = 0.4$
	Masse volumique de la matrice	$\rho_{0m} = 999\ Kg/m^3$
	Coefficient de Poisson des inclusions	$\nu_{0i} = 0.5$
	Masse volumique des inclusions	$\rho_{0i} = 1600\ Kg/m^3$
	Epaisseur du cœur	$h_c = 0.76 \times 10^{-3} m$
Poutre	Longueur	$L = 1000 \times 10^{-3} m$

TAB. 4.8 – Caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée.

Modes	Struc. initiale [5]		Struc. Modifiée		$\Omega_{mod}/\Omega_{init}$	η_{mod}/η_{init}
	$\Omega_{init}(Hz)$	η_{init}	$\Omega_{mod}(Hz)$	η_{mod}		
1	53.74	0.0091	50.08	0.0416	0.93	4.57
2	145.26	0.0137	129.48	0.0556	0.89	4.06
3	276.26	0.0180	238.55	0.0669	0.86	3.72
4	448.59	0.0221	372.09	0.0757	0.83	3.43

TAB. 4.9 – Fréquences amorties (Ω) et amortissements modales (η) de la poutre sandwich composite Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée.

dales et plus précisément de l'amortissement modale dépendent de certains paramètres des inclusions, notamment la fraction volumique et de la morphologie des inclusions. En partant de l'exemple de la structure sandwich Verre/PVB-ISD112/Verre encastrée-encastrée étudiée dans la section 4.3.2, nous étudions l'influence de ces deux paramètres sur les propriétés modales de la structure.

4.4.1 Influence du pourcentage volumique des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre

Afin d'étudier l'influence de la fraction volumique des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la structure, l'approche multi-échelles est utilisée pour calculer les fréquences amorties et amortissements modaux de la structure pour différentes fractions volumiques allant de 0% (correspondant à un pare-brise de voiture classique Verre/PVB/Verre) à 100% (correspondant à un sandwich Verre/ISD112/Verre). Les inclusions considérées sont des d'ellipses horizontales (figure 3.3). Les courbes d'évolutions des 3 premières fréquences amorties et amortissements modaux en fonction des fractions volumiques sont construites sur la figure 4.2. On peut constater à travers ces deux graphes que lorsque la fraction volumique augmente, les fréquences amorties diminuent alors que les amortissements modaux augmentent. Cela est dû à la baisse progressive de la rigidité du cœur viscoélastique puisque l'ISD112 à 20°C est moins rigide que le PVB à 20°C. On remarque surtout que l'augmentation des amortissements modaux est plus importante que la diminution des fréquences amorties. Il est donc possible d'augmenter sensiblement la qualité de l'amortissement de la structure sans pour autant provoquer une variation importante des fréquences propres de vibrations. Cependant L'ISD112 étant largement moins rigide que le PVB, l'augmentation de la fraction volumique de l'ISD112 et donc la diminution de celle du PVB rend la structure moins rigide et donc affecte sa tenue mécanique même si ses propriétés amortissantes

s'en trouvent améliorées.

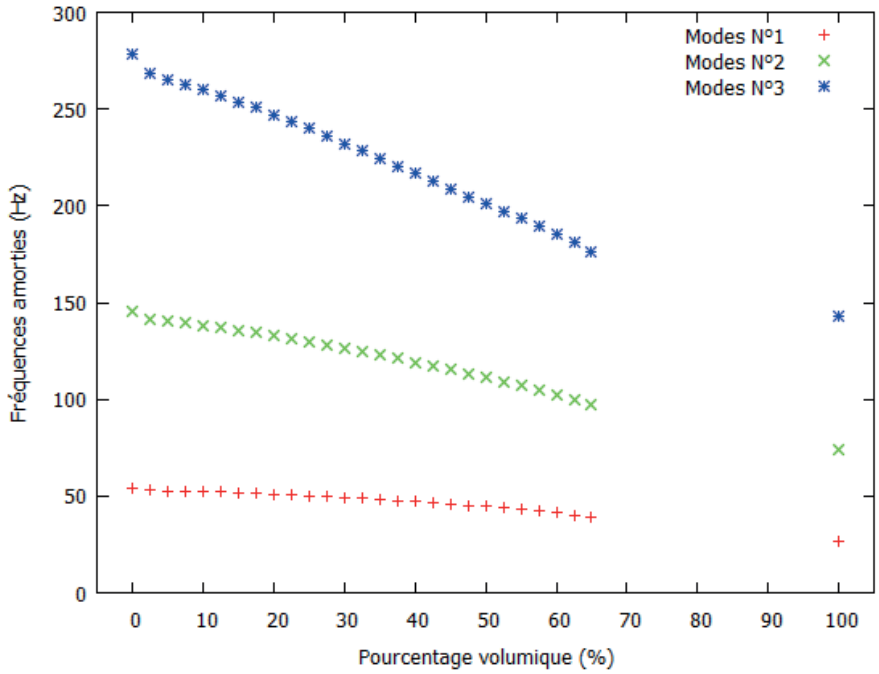
4.4.2 Influence de la morphologie des inclusions en ISD112 sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre

Afin d'étudier l'influence de la morphologie des inclusions, nous construisons sur la figure 4.4, la courbe de variation des propriétés amortissantes de la structure en fonction du rapport $\frac{a}{b}$ (a et b étant les deux dimensions caractéristiques des inclusions comme le montre la figure 4.3). Les inclusions ont une forme elliptique verticale pour $\frac{a}{b} < 1$, une forme elliptique horizontale pour $\frac{a}{b} > 1$ et une forme circulaire pour $\frac{a}{b} = 1$. Afin de montrer comment on peut améliorer les propriétés amortissement simplement en modifiant la morphologie, les calculs des propriétés amortissantes ont été menés pour une même fraction volumique de 20% d'inclusions. La figure 4.4 montre que les fréquences amorties ne varient quasiment pas quelle que soit la morphologie des inclusions. Cependant on peut constater que les amortissements modaux varient fortement. La valeur la plus faible de l'amortissement est atteinte pour des inclusions circulaires tandis que sa valeur maximale est atteinte pour la valeur maximale de a respectivement la valeur minimale de b correspondant à une forme elliptique horizontale. Par conséquent pour une fraction volumique donnée, les inclusions elliptiques horizontales sont les plus appropriées pour optimiser les propriétés amortissantes de la structure.

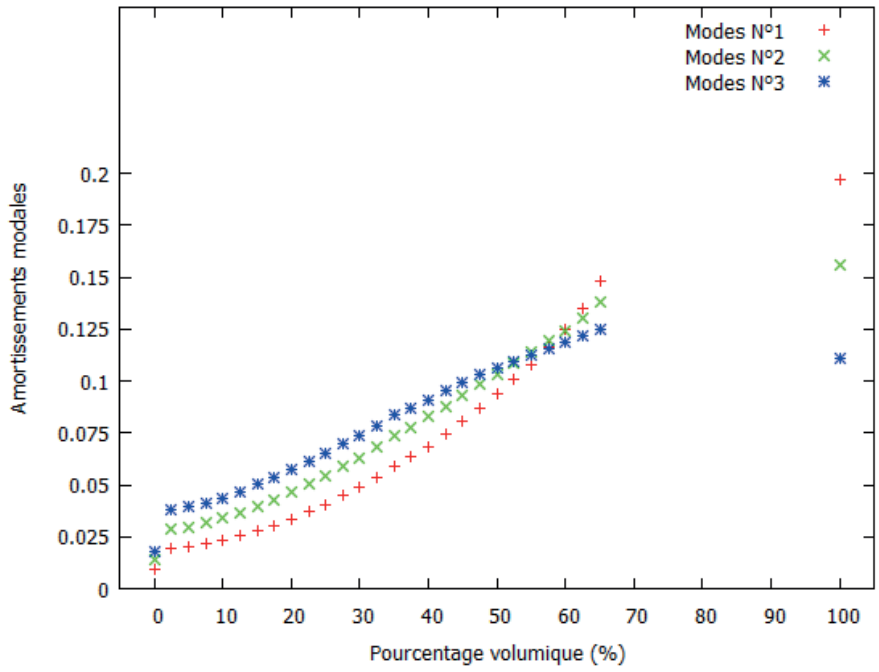
4.5 Conclusion

Dans cette section nous avons montré dans quelle mesure la nouvelle approche développée peut être un outil de conception des structures sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. Dans un premier temps nous avons confirmé l'efficacité de l'approche pour le calcul des propriétés modales de structures sandwichs à cœur viscoélastique composite. A cet effet les résultats de simulations numériques à travers cette

nouvelle approche ont été comparés à ceux de la simulation sous ABAQUS. La concordance entre les résultats des deux approches a été prouvée à travers le calcul des erreurs relatives entres les résultats. Ensuite nous avons montré comment on peut significativement améliorer les propriétés amortissantes d'une structure sandwich viscoélastique, en noyant dans le matériau du cœur un autre matériau ayant un amortissement plus élevé. Des cas de structures dont les matériaux de la couche centrale ont des modules d'Young constants ainsi que celles dont les matériaux ont des modules d'Young variables en fonction de la fréquence ont été traités. Le rapport entre les amortissements modaux de la structure initiale et ceux de la structure modifiée nous a permis de constater que l'amortissement peut être doublé voire quadruplé grâce à l'ajout d'une petite fraction volumique d'un autre matériau ayant un amortissement élevé. Pour aller plus loin dans l'optimisation des propriétés amortissantes, nous avons étudié l'influence des fractions volumiques et de la morphologie des inclusions sur les propriétés amortissantes de la structure. Nous nous sommes donc rendu compte et logiquement d'ailleurs, que plus la fraction volumique des inclusions ayant une rigidité faible par rapport à celle de la matrice augmente, plus la rigidité de la structure diminue. On assiste alors à une diminution lente de la valeur des fréquences amorties mais à une augmentation marquée des amortissements modaux. Afin d'observer l'influence de la morphologie des inclusions sur les propriétés modales, nous avons construit sur un graphe l'évolution de ces propriétés en fonction de la variation des dimensions des inclusions en partant d'une forme elliptique verticale progressivement vers une forme elliptique horizontale en passant évidement par la forme circulaire, pour une fraction volumique constante et égale à 20%. Il en ressort que la morphologie n'a quasiment aucune influence sur les fréquences amorties. Cependant les amortissements modaux varient fortement en fonction de l'évolution de la morphologie. En effet les inclusions elliptiques horizontales permettent d'obtenir les amortissements les plus élevés alors que l'amortissement minimale est obtenu pour des inclusions circulaires.



(a) Evolutions des trois premières fréquences amorties (Ω)



(b) Evolutions des trois premiers amortissements modales (η)

FIG. 4.2 – Evolution des propriétés modales du pare brise Verre/PVB/Verre avec un cœur composites en fonction du pourcentage volumique des inclusions en ISD112

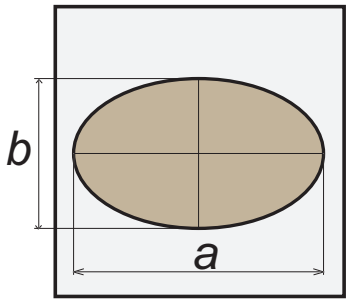
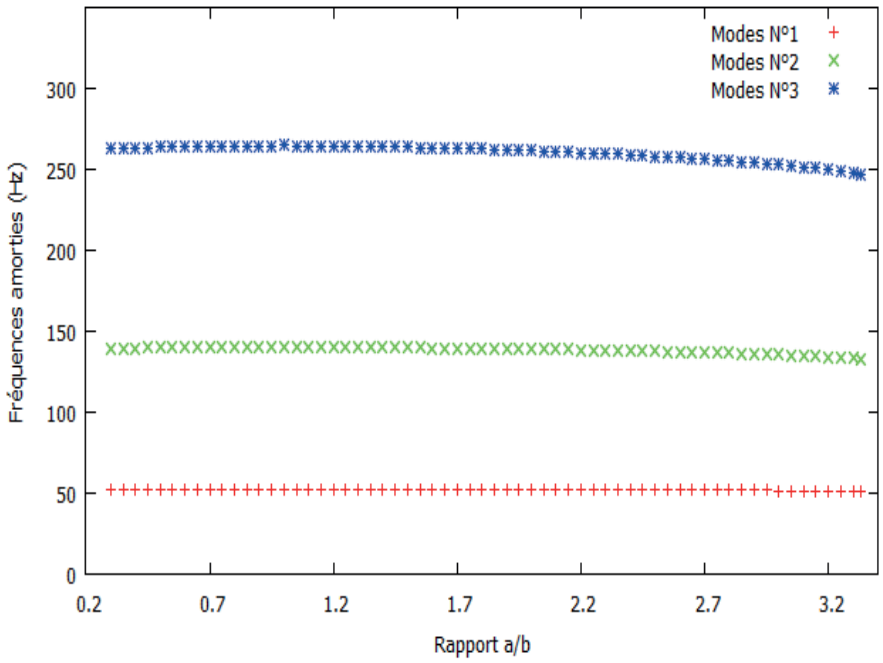
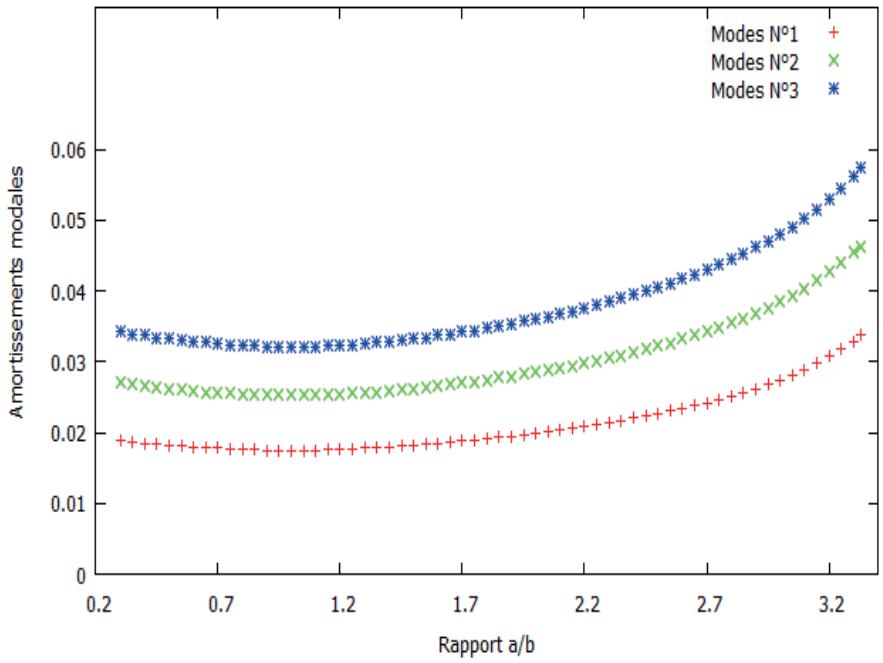


FIG. 4.3 – Paramètre définissant la morphologie des inclusions



(a) Evolutions des trois premières fréquences amorties (Ω)



(b) Evolutions des trois premiers amortissements modales (η)

FIG. 4.4 – Evolution des propriétés modales du pare brise Verre/PVB/Verre avec un cœur composites en fonction du rapport a/b des inclusions en ISD112

Conclusion générale et perspectives

Les matériaux composites viscoélastiques sont de plus en plus utilisés dans de nombreuses applications industrielles pour leurs propriétés amortissantes des vibrations. Ces composites viscoélastiques peuvent se présenter sous plusieurs formes : (i) Les matériaux sandwichs viscoélastiques constitués d'une fine couche viscoélastique intercalée entre deux couches élastiques ; (ii) les composites à matrice soit élastique ou viscoélastique dans laquelle sont noyés des inclusions ou fibres viscoélastiques ou élastiques. L'intérêt des industriels pour ces composites lance un défi pour les chercheurs dans le cadre de la mise en place d'outils numériques performants pour la simulation des comportements de ces matériaux. Dans cette thèse nous mettons en place des outils numériques basés sur les techniques d'homogénéisation pour l'analyse du comportement vibratoire des longues structures sandwichs viscoélastiques répétitives et des matériaux hétérogènes viscoélastiques.

Dans le premier chapitre consacré à la revue bibliographique, nous avons fait le tour d'horizon de l'état de l'art des différents aspects des problèmes abordés dans cette thèse. Dans un premier temps, nous avons passé en revue les différentes méthodes de résolutions des problèmes linéaires et non linéaires aux valeurs propres complexes résultant de la formulation du problème de vibrations des structures. Ce passage en revue des techniques de calcul des propriétés modales des structures amorties ou non amorties nous a permis de répertorier les avantages et limites de ces différentes techniques. Dans le cadre d'une simulation éléments finis classique basée sur la discrétisation totale de toute la structure, nous avons constaté que les techniques actuelles sont assez limi-

tées pour le calcul des propriétés amortissantes de longues structures sandwichs et les structures hétérogènes viscoélastiques. La plus part de ces limites sont surtout dues à la grande taille du problème éléments finis à résoudre. L'homogénéisation apparait alors comme une solution efficace permettant de réduire la taille des problèmes à résoudre. Afin de choisir les techniques d'homogénéisation les mieux adaptées aux structures faisant l'objet de cette étude, nous avons mené une étude bibliographique des différentes techniques d'homogénéisation. Cette étude nous permet de choisir l'homogénéisation asymptotique à deux échelles pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des longues structures sandwichs viscoélastiques répétitives et l'homogénéisation éléments finis multi-échelles pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des matériaux hétérogènes viscoélastiques.

Dans le second chapitre nous mettons en œuvre la méthode asymptotique à deux échelles pour l'analyse des vibrations des longues structures sandwichs viscoélastiques répétitives. Les fréquences propres de ce type de structures sont regroupées par paquets et les fréquences propres d'un même paquet sont très proches les unes des autres. L'intervalle entre deux paquets successifs est appelé bande d'arrêt c'est à dire une zone sans fréquence propre dans laquelle la structure peut être excitée sans que la déformation résultante ne se propage à toute la structure. La Méthode Asymptotique à Deux Echelles est une méthode d'homogénéisation qui scinde le problème initial de grande taille en deux sous problèmes de tailles relativement petites. Le premier est un problème éléments finis classique de vibrations non linéaire formulé sur un petit nombre de cellules de base (un, deux ou trois ...). Le second est une équation différentielle d'amplitude à coefficients complexes dont la résolution permet de calculer les propriétés modales en termes de fréquences amorties et amortissements modaux du début et de la fin de chaque paquet de fréquences propres. Cette approche permet d'éviter la discrétisation de toute la structure, et de ne résoudre que des problèmes éléments finis sur des structures de petites tailles. On obtient ainsi une réduction de la taille du problème à résoudre, ce qui aboutit à un gain considérable en temps de calcul et en es-

pace mémoire CPU. Grâce à ces avantages, cette nouvelle approche ouvre de nouvelles perspectives en matière de conception de longues structures répétitives présentant de larges bandes d'arrêts. Pour donner une idée sur l'utilité de l'approche proposée la dernière section du chapitre a montré comment on peut agir sur les largeurs des bandes d'arrêt à travers un bon choix des différents paramètres de la structure notamment le rapport entre les modules d'Young des faces et du cœur d'une part et le rapport entre les épaisseurs des faces et du cœur d'autre part. Une véritable investigation en vue de la modélisation de ce type de structure mérite d'être menée en utilisant des outils d'optimisation plus sophistiqués prenant en compte tous les paramètres pouvant influencer sur les largeurs des bandes d'arrêts. Dans ce travail seul la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence du module d'Young du cœur viscoélastique a été prise en compte. Il est donc nécessaire de poursuivre ses travaux afin d'aborder les cas de non linéarités géométriques résultant de la prise en compte des grands déplacements par exemple. Afin de compléter cette étude qui demeure essentiellement numérique, il serait intéressant d'effectuer des essais expérimentaux afin de confirmer la validité de cette approche. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des vibrations des matériaux composites viscoélastiques. Ici, il s'agit d'étendre la méthode d'homogénéisation éléments finis multi-échelles proposée par Attipou et al [4], pour prendre en compte les non linéarités matériels introduites par la dépendance en fréquence du module d'Young des phases viscoélastiques. Dans la mise en œuvre de cette nouvelle approche, un VER est soigneusement choisi. Le problème éléments finis est formulé à deux niveaux : à l'échelle de toute la structure (échelle macroscopique) et à l'échelle du VER (échelle microscopique). La résolution du problème à l'échelle microscopique permet de déterminer la loi de comportement macroscopique puis le problème linéaire de vibration amortie est ensuite résolu à travers les méthodes classiques notamment la méthode d'Arnoldi (fonction "eigs" dans Matlab). La difficulté dans cette étude c'est la résolution à l'échelle microscopique du problème non linéaire résultant de la dépendance en fréquence de la phase viscoélastique (matrice ou inclusions). En effet la résolution

du problème à l'échelle microscopique se base sur le principe de superposition pour l'établissement du tenseur de localisation, principe qui n'est plus valable en présence d'un problème non linéaire. La MAN est alors utilisée pour linéariser le problème à résoudre et ainsi rendre le principe de superposition utilisable. Pour rendre générique et flexible la résolution, des outils de différentiation automatiques ont été utilisés pour le calcul des coefficients de Taylor des développements en série. On dispose alors d'un outil robuste, souple et générique permettant de calculer les propriétés modales des composites viscoélastiques. Cette approche permet d'éviter la discrétisation de toute la structure et permet la prise en compte de toutes les lois viscoélastiques. La souplesse de cette approche permet de prendre en compte les composites à matrices élastiques et inclusions viscoélastiques et vice versa, les composites à matrices et inclusions viscoélastiques et les composites à matrice et inclusions élastiques. Des tests numériques ont été menés pour confirmer la validité de cette approche en prenant les résultats de la simulation sous ABAQUS comme résultats de référence. Les cas de matériaux viscoélastiques à module constant, à module variable donné par le modèle ADF, le modèle à dérivées fractionnaires ont été testés. Nous disposons désormais d'une approche générique, souple, robuste, efficace, peu coûteuse en temps de calcul et espace mémoire CPU, pour la conception des structures composites à haut pouvoir amortissant. Cependant des efforts de recherche restent à faire notamment la prise en compte des non linéarités géométriques à travers le traitement des grands déplacements par exemple. La totalité de cette étude a été menée en 2D, une approche 3D reste nécessaire afin de confirmer la capacité de l'approche à aborder des cas concrets et des géométries plus complexes. En parallèle des développements numériques, des travaux expérimentaux seront nécessaires pour une confirmation de l'efficacité de l'approche proposée.

Une des nombreuses applications de l'homogénéisation éléments finis multi-échelles développée dans cette thèse, est la conception de structures sandwichs viscoélastiques à cœur composites à haut pouvoir amortissant. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons montré comment les propriétés amortissantes de matériaux sandwichs vis-

coélastiques dont le matériau du cœur est un matériau viscoélastique classique, peuvent être significativement augmentées par l'ajout d'un autre matériau viscoélastique sous forme d'inclusions ou de fibres. L'approche multi-échelle apparaît alors comme un outil idéal pour le calcul des propriétés amortissantes et la conception de ces structures. En effet, compte tenu de l'épaisseur des couches viscoélastiques par rapport à la taille de la structure globale, et les tailles éventuelles de ces inclusions, la méthode éléments finis classique basée sur la discrétisation directe de toute la structure est quasiment impossible à utiliser pour ces calculs dans certains cas. Après validation de la nouvelle approche dans le cadre des sandwichs à cœurs composites, nous avons montré comment, en noyant dans le cœur viscoélastique d'un matériau sandwich, 20% d'un autre matériau viscoélastique, on peut doubler voir quadrupler son amortissement modal, sans pour autant modifier de façon significative les fréquences amorties. Aussi nous avons montré qu'à fraction volumique des inclusions constante, on peut également améliorer les propriétés amortissantes grâce à un choix judicieux de la morphologie des inclusions. Ainsi il ressort des premiers tests que les meilleurs amortissements sont obtenus pour des inclusions elliptiques horizontales et les plus petits amortissements sont obtenues pour des inclusions circulaires. A ce stade cette étude est limitée aux cas des poutres sandwichs viscoélastiques et ouvre la voie à d'autres axes de recherche. Elle doit notamment être élargie à la théorie des plaques. Afin de poursuivre dans la voie de la conception, l'influence d'autres paramètres sur les propriétés amortissantes restent à aborder, notamment les dimensions des faces et du cœur, les modules d'Young des différents matériaux.

Annexe A

Expressions des constantes et fonctions intervenant dans le développement de la $MADE$

A.1 Definitions des constants C, $M(\lambda)$, $F(\lambda)$ et H

$$C = \frac{E_f S_f h_f h_c}{2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c)}; \quad M(\lambda) = \frac{E_c^*(\lambda) I_c + \frac{E_f S_f h_c^2}{2}}{2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c)}$$
$$F(\lambda) = \frac{G_c^*(\lambda) S_c}{2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c)}; \quad H = \frac{E_f(2I_c + \frac{E_f S_f h_c^2}{2})}{2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c)} \tag{A.1}$$

où λ est la valeur propre complexe définie par $\lambda = \omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta)$ avec Ω la fréquence amortie et η l'amortissement ; E_f est le module d'Young des faces, $E_c^*(\omega)$ le module d'Young du cœur et dépendant de la fréquence de vibration, I_f et I_c les moments quadratiques respectives des sections droites des faces et du cœur, S_f et S_c les sections droites respectives des faces et du cœur, ρ_f et ρ_c les masses volumiques respectives des matériaux des faces et du cœur, ν_c le coefficient de poisson du matériau du cœur.

$G_c^*(\lambda) = E_c^*(\lambda)/(2(1+\nu_c))$ est le module de cisaillement du matériaux du cœur.

A.2 Expressions des fonctions F_1^1, F_2^1, F_1^2 et F_2^2

$$F_1^1(W_0, B_0) = -3C\frac{\partial^3 W_0(X,x)}{\partial x^2 \partial X} + 2M(\lambda)\frac{\partial^2 B_0(X,x)}{\partial x \partial X} - F(\lambda)\frac{\partial W_0(X,x)}{\partial X} \tag{A.2}$$

$$F_2^1(W_0, B_0) = -4H\frac{\partial^4 W_0(X,x)}{\partial x^3 \partial X} + 3C\frac{\partial^3 B_0(X,x)}{\partial x^2 \partial X} + F(\lambda)\left(2\frac{\partial^2 W_0(X,x)}{\partial x \partial X} + \frac{\partial B_0(X,x)}{\partial X}\right) \tag{A.3}$$

$$F_1^2(W_0, B_0, W_1, B_1) = -C\left(3\frac{\partial^3 W_1(X,x)}{\partial x^2 \partial X} + 3\frac{\partial^3 W_0(X,x)}{\partial x \partial X^2}\right) + 2M(\lambda)\left(\frac{\partial^2 B_1(X,x)}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 B_0(X,x)}{\partial X^2}\right) - F(\lambda)\frac{\partial W_1(X,x)}{\partial X} \tag{A.4}$$

$$F_2^2(W_0, B_0, W_1, B_1) = -H\left(4\frac{\partial^4 W_1(X,x)}{\partial x^3 \partial X} + 6\frac{\partial^4 W_0(X,x)}{\partial x^2 \partial X^2}\right) + C\left(3\frac{\partial^3 B_1(X,x)}{\partial x^2 \partial X} + 3\frac{\partial^3 B_0(X,x)}{\partial x \partial X^2}\right) + F(\lambda)\left(2\frac{\partial^2 W_1(X,x)}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 W_0(X,x)}{\partial X^2} + \frac{\partial B_1(X,x)}{\partial X}\right) \tag{A.5}$$

A.3 Expression de la constance $\mathbf{C}_a(\lambda_0)$

$$C_a^1(\lambda_0) = \frac{-4(C+H)\langle w_1''', w_0\rangle - 6(C+H)\langle w_0'', w_0\rangle + 3[C + M(\lambda_0)]\langle b_1'', w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} \tag{A.6}$$

$$C_a^2(\lambda_0) = \frac{3[C + M(\lambda_0)]\langle b_0', w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} \tag{A.7}$$

$$C_a(\lambda_0) = C_a^1(\lambda_0) + C_a^2(\lambda_0) \tag{A.8}$$

Bibliographie

[1] Lucie ROULEAU. *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwi munies de matériaux viscoélastiques*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), 2013.

[2] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. Vibrations of long repetitive structures by a double scale asymptotic method. *Structural Engineering and Mechanics*, 12 :203–215, 2001.

[3] N. Moustaghfir, E.M. Daya, B. Braikat, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Evaluation of continuous modelings for the modulated vibration modes of long repetitive structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44(21) :7061 – 7072, 2007.

[4] Kodjo Attipou, Saeid Nezamabadi, El Mostafa Daya, and Hamid Zahrouni. A multiscale approach for the vibration analysis of heterogeneous materials : Application to passive damping. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :725 – 739, 2013.

[5] Massamaesso Bilasse, Isabelle Charpentier, El Mostafa Daya, and Yao Koutsawa. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. part ii : Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(49-52) :3999–4004, 2009.

[6] T. Naciri, P. Navi, and A. Ehrlacher. Harmonic wave propagation in viscoe-

lastic heterogeneous materials part ii : Effective complex moduli. *Mechanics of Materials*, 18(4) :335 – 350, 1994.

[7] Yeong-Moo Yi, Sang-Hoon Park, and Sung-Kie Youn. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *International Journal of Solids and Structures*, 35(17) :2039 – 2055, 1998.

[8] L.C. Brinson and W.S. Lin. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures*, 41(3â4) :353 – 367, 1998.

[9] Y. P. Lu, J. W. Killian, and G. C. Everstine. Vibration of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64 :63–71, 1979.

[10] C. D. Jonhson, D. A. Kienholz, and L. C. Rogers. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, 51 :71–81, 1981.

[11] M. L. Soni. Finite element analysis of viscoelastically damped damped structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55 (1) :97–109, 1981.

[12] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11 :39–56, 2002.

[13] E. Ioannides and P. Grootenhuis. A finite element analysis of the harmonic response of damped three-layer plates. *Journal of Sound and Vibration*, 67(2) :203–218, 1979.

[14] B. Ma and J. He. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 152 :107–123, 1992.

[15] R. Rickards, A. Chate, and E. Barkanov. Finite element analysis fo damping the vibrations of laminated composites. *Computers & Structures*, 47 :1005–1015, 1993.

[16] M. Bilasse, E.M. Daya, and L. Azrar. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 329(23) :4950 – 4969, 2010.

[17] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, 87(1â2) :91 – 100, 2009.

[18] M. Bilasse. *Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sSandwich à âme viscoélastique*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, 2010.

[19] K. J. Bathe. Finite element procedures in engineering analysis. In *NJ : Prentice-Hall*, 1982.

[20] L. Duigou. *Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, 2002.

[21] X. Chen, Chen H. L., and Hu X. L. Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5) :803812, 1999.

[22] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal on Research of the National Bureau of Standards*, 45 :255282, 1950.

[23] H. Voss. An arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems. *BIT Numerical Mathematics*, 444 :387401, 2004.

[24] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution fo the matrix eigenvalue problem. *Quartery of Applied Mathematics*, 9 :17–29, 1951.

[25] E.M. Daya and M. Potier-Ferry. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers & Structures*, 79(5) :533 – 541, 2001.

[26] Lt. Duigou, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11â12) :1323 – 1335, 2003.

[27] Isabelle Charpentier and Michel Potier-Ferry. Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche diamant. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(3) :336–340, 2008.

[28] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E. M. Daya, and M. Cherkaoui. A generic approach for the solution of non linear residual equations. part i : The diamant toolbox. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3-4) :572–577, 2008.

[29] E. M. Daya. *Vibration des longues structures flexibles à forme répétitive*. PhD thesis, University of Metz, 1994.

[30] A. L. Kalamkarov. Composite and reinforced elements of construction. Technical report, Wiley, Chichester, 1992.

[31] A. G. Kolpakov and A. L. Kalamkarov. Homogenized thermoelastic model for the beam of a periodic structure. *International Journal of Engineering Science*, 37 :631–642, 1999.

[32] D. Briassoulis. Equivalent orthotropic properties of corrugated sheets. *Computers & Structures*, 23 :129–138, 1986.

[33] N. Buannic, P. Cartraud, and T. Quesnel. Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, 59 :299–312, 2003.

[34] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J. F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3163–3177, 2003.

[35] P. Cartraud and T. Messager. Computational homogenization of periodic beam-like structures. *Int. Journal of Solids ans Structures*, 43 :686–696, 206.

[36] J. Yeh and L. Chen. Wave propagations of a periodic sandwich beam by fem and the transfert matrix method. *Compt. Struct.*, 73 :53–60, 2006.

[37] A. K. Noor. Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Applied Mechanic Review*, 41 :285–296, 1988.

[38] G. Moreau and D. Caillerie. Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. *Computers & Structures*, 68 :181–189, 1998.

[39] El Mostafa Daya, Bouazza Braikat, Noureddine Damil, and Michel Potier-Ferry. Modelisation of modulated vibration modes of repetitive structures. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :117 – 124, 2004.

[40] N. Damil and M. Potier-Ferry. Influence of local wrinkling on membrane behaviour : A new approach by the technique of slowly variable fourier coefficients. *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 58 :1139–1153, 2010.

[41] El Mostafa Daya, Khalid Jeblaoui, and Michel Potier-Ferry. A two scale method for modulated vibration modes of large, nearly repetitive, structures. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(6) :443 – 448, 2003.

[42] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. Vibrating and coupling continuous systems, asymptotic methods. Technical report, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[43] R. V. Craster, J. Kaplunov, and A. V. Pichugin. High-frequency homogenization for periodic media. *Procedings of The Royal Society A*, 466 :2241–2362, 2010.

[44] E. Nolde, R.V. Craster, and J. Kaplunov. High frequency homogenization for structural mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(3) :651 – 671, 2011.

[45] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society A*, 241 :376396, 1957.

[46] C. Q. Ru. Eshelby inclusion of arbitrary shape in an anisotropic plane or half-plane. *Acta Mech.*, 160 (3-4) :219234., 2003.

[47] J. Y. Li and M.L. Dunn. Anisotropic coupled-field inclusion and inhomogeneity problems. *Philosophical Magazine*, A 77 (5) :13411350., 1998.

[48] D. A. Faux and G. S. Pearson. Greens tensors for anisotropic elasticity : Application to quantum dots. *Physical Review*, 62 (8) :R4798R4801, 2000.

[49] Y. P.Chiu. On the stress field due to initial strains in cuboid surrounded by an infinite elastic space. *ASME J. Appl. Mech.*, 44 :587590., 1977.

[50] G. J. Rodin. Eshelbys inclusion problem for polygons and polyhedra. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 (12) :1977–1995, 1996.

[51] H. Nozaki and M. Taya. Elastic fields in a polyhedral inclusion with uniform eigenstrains and related problems. *ASME J. Appl. Mech.*, 68 :441–452, 2001.

[52] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29 :143150, 1962.

[53] B. Budiansky. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :223227, 1965.

[54] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta. Metall.*, 21 :571574, 1973.

[55] A. V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21 :226–240, 1954.

[56] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :213222, 1965.

[57] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330, 1979.

[58] J.W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society A*, 348 :348 :101127, 1976.

[59] M. Berveiller and A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325344, 1979.

[60] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :215, 1977.

[61] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :127140, 1963.

[62] Z. Hashin. Analysis of composite materials. *A survey. J. Appl. Mech.*, 50 :481505, 1983.

[63] J. R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.*, 21 :178, 1981.

[64] P. Ponte Castañeda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech.*, 34 :171302, 1998.

[65] J.R. Willis. The overall response of nonlinear composite media. *European Journal of Mechanics A, Solids*, 19 :165184, 2000.

[66] et G. Papanicolaou. A. Bensoussan, J.-L. Lionis. Asymptotic analysis for periodic structures. Technical report, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[67] E. Sanchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory, in : Lecture notes in physics. *Springer-Verlag, Berlin*, 127 :Sanchez–Palencia1980, 1980.

[68] A Toledano and H. Murakami. A high-order mixture model for periodic particulate composites. *Int. J. Solids Structures*, 23 :9891002, 1987.

[69] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, and F. Lene. Homogenization and damage for composite structures. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 27 :285298, 1989.

[70] S. J. Hollister and N. Kikuchi. A comparison of homogenization and standard mechanics analysis for periodic porous composites. *Comput. Mech.*, 10 :7395, 1992.

[71] J. Fish, Q. Yu, and K. Shek. Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenisation. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 45 :16571679, 1999.

[72] S. Nemat-Nasser and M. Hori. Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials. *Elsevier, Amsterdam*, 1993.

[73] T. Christman, A. Needleman, and S. Suresh. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metall.*, 37(11) :30293050, 1989.

[74] V. Tvergaard. Analysis of tensile properties for wisker-reinforced metal-matrix composites. *Acta Metall. Mater.*, 38(2) :185–194, 1990.

[75] G. Bao, J. W. Hutchinson, and R. M. McMeeking. Plastic reinforcement of ductile materials against plastic flow and creep. *Acta Metall. Mater*, 39(8) :1871–1882, 1991.

[76] J. R. Brockenbrough, S. Suresh, and H. A. Wienecke. Deformation of metalmatrix composites with continuous fibers : geometrical effect of fiber distribution and shape. *Acta Metall. Mater.*, 39(5) :735–752, 1991.

[77] T. Nakamura and S. Suresh. Effect of thermal residual stress and fiber packing on deformation of metal-matrix composites. *Acta Metall. Mater.*, 41(6) :1665–1681, 1993.

[78] R. K. Patel, B. Bhattacharya, and S. Basu. A finite element based investigation on obtaining high material damping over a large frequency range in viscoelastic composites. *Journal of Sound and Vibration*, 303 :753766, 2007.

[79] P. M. Suquet. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. *In Sawczuk, A. and Bianchi, G., editors, Plasticity today : modelling, methods and applications*, page pages 279310 London Elsevier Applied Science Publishers., 1985.

[80] J. Renard and M. F. Marmonier. Etude de linitiation de lendommagement dans la matrice dun matériau composite par une méthode dhomogénisation. *Aerospace Science and Technology*, 9 :3751, 1987.

[81] J. M. Guedes and N. Kikuchi. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 83 :143–198, 1990.

[82] K. Terada and N. Kikuchi. Nonlinear homogenization method for practical applications. *In Ghosh, S. and Ostoja-Starzewski, M., editors, Computational Methods in Micromechanics*, AMD-Vol.212/MD-Vol. 62 :1–16. ASME, 1995.

[83] R. J. M. Smit, W. A. M. Brekelmans, and H. E. H. Meijer. Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155 :181–192, 1998.

[84] C. Miehe, J. Schotte, and J. Schröder. Computationalmicro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Comput. Mater. Sci.*, 16 :372–382, 1999.

[85] C. Miehe, J. Schotte, and J. Schröder. Computational homogenization analysis in finite plasticity. simulation of texture development in polycrystalline materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 171 :387–418, 1999.

[86] J. C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172 :109–143, 1999.

[87] F. Feyel and J-L. Chaboche. Fe^2 multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber sic/ti composite materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183 :309330, 2000.

[88] K. Terada and N. Kikuchi. A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :5427–5464, 2001.

[89] S. Ghosh, K. Lee, and P. Raghavan. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *Int. J. Solids Structures*, 38 :2335–2385, 2001.

[90] V. Kouznetsova, W. A. M. Brekelmans, and F. P. T. Baaijens. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Comput. Mech.*, 27 :37–48, 2001.

[91] C. Miehe and A. Koch. Computational micro-to-macro transition of discretized microstructures undergoing small strain. *Arch. Appl. Mech.*, 72 :300–317, 2002.

[92] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of non-linear composites with complex microstructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 :69–94, 1998.

[93] Z. Hashin. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :630636, 1965.

[94] R.M. Christensen. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(1) :23 – 41, 1969.

[95] J. Salençon. Cours de calcul des structures anélastiques. viscoélasticité. *Presse de lécole nationale des ponts et chaussées.*, 1983.

[96] Peter W. Chung, Kumar K. Tamma, and Raju R. Namburu. A micro/macro homogenization approach for viscoelastic creep analysis with dissipative correctors for heterogeneous woven-fabric layered media. *Composites Science and Technology*, 60(12â13) :2233 – 2253, 2000.

[97] M.R. Haberman, Y. Berthelot, J. Jarzynski, and M. Cherkaoui. Micromechanical modeling of viscoelastic composites in the low frequency approximation. *Journal of the Acoustical Society of America 112 (5)*, 112(5) :19371943., 2002.

[98] M. Cherkaoui, H. Sabar, and M. Berveiller. Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116 :274278, 1994.

[99] Y. Koutsawa, M. Cherkaoui, and E. M. Daya. Multi-coating inhomogeneities problem for effective viscoelastic properties of particulate composite materials. *Journal of Engineering Materials and Technology.*, 131(2) :[Note(s) : 021012.1–021012.11], 2009.

[100] P. Lipinski, E.H. Barhdadi, and M. Cherkaoui. Micromechanical modeling of an arbitrary ellipsoidal multi-coated inclusion. *Philosophical Magazine*, 86(10) :13051326, 2006.

[101] A. E. H. Love. The mathematical theory of elasticity, 4th edition. In *Cambridge University Press*, 1927.

[102] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :69–76, 1945.

[103] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia effect and shear deformation in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :1031–1036, 1951.

[104] J. N. Reddy. A simple higher-order theory of laminated composite plate. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :745–752, 1984.

[105] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29 :901–916, 1991.

[106] Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, and El Mostafa Daya. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Composite Structures*, 84(3) :282 – 292, 2008.

[107] D.K. Rao. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Mechanical Engineering Science*, 20 :271282, 1978.

[108] Yao Koutsawa and El Mostafa Daya. Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25â26) :8735 – 8750, 2007.

[109] Bruno COCHELIN, Noureddine DAMIL, and Michel POTIER-FERRY. *Méthode asymptotique numérique : une technique de résolution des équations non linéaires.* Hermes Science Publications, 2007.

[110] I. Charpentier, A. Lejeune, and M. Potier-Ferry. The diamant library for an efficient automatic differentiation of the asymptotic numerical method. advances in automatic differentiation. *in Lecture Notes in Computational Science and engineering*, 64 :139 – 149, 2008.

[111] Hill R. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 :357–372., 1963.

[112] V. Kouznetsova. *Computational homogenization for the multi-scale Analysis of multi-phase materials*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.

[113] Miehe C. Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogenous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :559–591., 2003.

[114] Nezamabadi S., Yvonnet J., Zahrouni H., and Potier-Ferry M. A multilevel computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities. *Comput.Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2099-2110 :2009, 198.

[115] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. 2ème édition, 1984.

[116] B. COCHELIN. A path-following-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.

[117] Zhibao Cheng and Zhifei Shi. Vibration attenuation properties of periodic rubber concrete panels. *Construction and Building Materials*, 50 :257–265, 2014.

[118] Bohan XU. *Modélisation du comportement mécanique d'assemblages bois avec prise en compte de critères de rupture*. PhD thesis, UNIVERSITE BLAISE PASCAL-CLERMONT II, 2009.

Résumé

Dans cette thèse, des techniques d'homogénéisation multi-échelles sont proposées pour l'analyse des vibrations des matériaux composites viscoélastiques. Dans la première partie, la Méthode Asymptotique à Deux Echelles ($MADE$) est proposée pour la modélisation des vibrations des longues structures sandwichs viscoélastiques répétitives. Pour ce type de structures les pulsations amorties correspondant aux modes propres de vibration sont regroupées en paquets bien distincts. La $MADE$ décompose le problème initial de grande taille en deux problèmes de petites tailles. Le premier est défini sur quelques cellules de base et le second est une équation différentielle d'amplitude à coefficients complexes. La résolution de ces problèmes permet de déterminer les propriétés amortissantes correspondant aux modes de début et de fin de paquet de la structure tout en évitant la discrétisation de toute la structure. Pour les structures dont les cœurs ont un module d'Young dépendant de la fréquence, le problème non linéaire formulé sur les cellules de bases est résolu par l'approche *diamant*. Les modèles ADF et à dérivées fractionnaires ont été considérés dans les tests numériques. En utilisant la $MADE$, on évite la discrétisation de toute la structure, ce qui permet donc de réduire considérablement le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire CPU nécessaires. L'approche proposée a été validée en comparant les résultats à ceux de la simulation éléments finis basée sur la discrétisation de toute la structure, et utilisant l'approche *diamant*. Dans la seconde partie de cette thèse, la méthode des éléments finis multi-échelles (EF^2) a été développée pour le calcul des propriétés modales des structures à matériaux hétérogènes viscoélastiques en terme de fréquences amorties et amortissements modaux. Dans le principe de l'approche EF^2, le problème de vibration est formulé à deux échelles : l'échelle de la structure globale (échelle macroscopique) et l'échelle d'un VER minutieusement choisi (échelle microscopique). Le problème à résoudre à l'échelle microscopique est un problème non linéaire alors que le problème à résoudre à l'échelle macroscopique est un problème linéaire. La non linéarité à l'échelle microscopique est introduite par la dépendance en fréquence du module d'Young des matériaux des phases viscoélastiques. Le problème non linéaire ainsi généré à l'échelle microscopique est résolu grâce à la MAN et ses outils de différentiation automatique réalisés sous Matlab, Fortran et C++. Un outil numérique, générique, robuste, peu coûteux en temps de calcul et espace mémoire CPU, de résolution des problèmes de vibrations non amorties des structures composites viscoélastique est ainsi mis en place. Le modèle viscoélastique à module constant ainsi que des modèles à modules dépendant de la fréquence notamment le modèle ADF et le modèle à dérivées fractionnaires ont été considérés pour les tests numériques de validation. Les comparaisons avec les résultats ABAQUS ont confirmé l'efficacité du code proposé. Le modèle est ensuite utilisé pour le calcul des propriétés amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques à cœur composite. Les capacités de la nouvelle approche à concevoir

des structures sandwichs viscoélastiques à cœur composite et à haut pouvoir amortissant ont été testées avec succès à travers l'étude de l'influence des différents paramètres des inclusions sur les propriétés amortissantes d'une structure sandwich viscoélastique à cœur composite.

Mots-clés: Vibrations, structures répétitives, matériaux viscoélastiques, amortissement, développement asymptotique, matériaux composites, éléments finis multi-échelles (EF^2), Méthode Asymptotique Numérique (MAN), homogénéisation non linéaire.

Abstract

In this thesis, multiscale homogenization techniques are proposed for vibration analysis of structures with viscoelastic composite materials. In the first part, the Double Scale Asymptotic Method is proposed for vibration modeling of large repetitive viscoelastic sandwich structures. For this kind of structures, la eigenfrequencies are closely located in well separated packets. The DSAM splits the initial problem of large size into two problems of relatively small sizes. The first problem is posed on few basic cells, and the second one is an amplitude equation with complex coefficients. The resolution of these equations permits to compute the damping properties that correspond to the beginning and the end of every packets of eigenmodes. In case of structure with frequency dependent Young modulus in the core, the *diamant* approach is used to solve the nonlinear problem posed on basic cells. The ADF and fractional derivative models are considered in numerical tests. By using the DSAM, one avoid the discretization of the whole structure, and the computation time and needed CPU memory are thus reduced. The proposed method is validated by comparing its results with those of the direct finite element method using the *diamant* approach. In the second part of these thesis, the multiscale finite element method (FE^2) is proposed for computation of modal properties (resonant frequency and modal loss factors) of structures with composite materials. In the principle of the (FE^2) method, the vibration problem is formulated at two scales : the scale of the whole structure (macroscopic scale) and the scale of a Representative Volume Element (RVE) considered as the microscopic scale. The microscopic problem is a nonlinear one and the macroscopic problem is linear. The nonlinearity at the microscopic scale is introduced by the frequency dependence of the Young modulus of the viscoelastic phases. This nonlinear problem is solved by the Asymptotic Numerical Method and its automatic differentiation tools realizable in Matlab, Fortran or C^{++}. From this approach, numerical tool that is generic, flexible, robust and inexpensive in term of CPU time and memory, is proposed for vibration analysis of viscoelastic structures. The constant Young modulus and frequency dependent Young modulus are considered in validation tests. The results of numerical simulation with ABAQUS are used are reference. The model is then used to compute the modal properties of sandwich structure with viscoelastic composite core. To test the capacities of the proposed approach to design sandwich viscoelastic structure with high damping properties, the influence of parameters of the inclusions are studied.

Keywords: Vibrations, repetitive structures, viscoelastic materials, damping, asymptotic expansion, composite materials, Multiscale finite element (FE^2), Asymptotic Numerical Method (ANM), Nonlinear homogenization.