



**HAL**  
open science

## K-théorie équivariante et groupoïdes

Ivan Lassagne

► **To cite this version:**

Ivan Lassagne. K-théorie équivariante et groupoïdes. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT : 2013LORR0359 . tel-01751827

**HAL Id: tel-01751827**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751827>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Université de Lorraine

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Ivan LASSAGNE**

---

*K*-théorie équivariante et groupoïdes

---

dirigée par Jean-Louis TU

Soutenue le 29 novembre 2013 devant le jury composé de :

M. Etienne BLANCHARD	Université Denis DIDEROT – Paris VII
M. Pierre JULG	Université d'Orléans
M. Hervé OYONO-OYONO	Université de Lorraine
M. Jean-Louis TU	Université de Lorraine
M. Alain VALETTE	Université de Neuchâtel



# Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu Hervé Oyono-Oyono et Alain Valette d'avoir accepté de faire partie de mon jury ainsi qu'Etienne Blanchard et Pierre Julg d'avoir bien voulu rapporter cette thèse.

Jean Louis Tu a accepté de diriger cette thèse et m'a proposé un sujet de recherche d'un grand intérêt à mes yeux. Je lui suis gré d'avoir été d'une grande disponibilité durant toutes ces années et d'avoir sacrifié son temps précieux pour parfaire mes connaissances. Jean Louis m'a fait bénéficier de son admirable connaissance des mathématiques et je lui en suis très reconnaissant.

Le laboratoire de Mathématiques de Metz m'a permis de travailler dans un cadre agréable et convivial. Les membres du laboratoire m'ont toujours fait un accueil chaleureux, en particulier ceux de l'équipe de Géométrie Non Commutative. Je remercie Hervé Oyono-Oyono avec qui j'ai pris plaisir à échanger mathématiques mais surtout football et jazz manouche. Lors de mon monitorat j'ai eu la chance de partager de nombreux enseignements avec Nicolas Prudhon, ce qui fut une expérience plaisante. Je salue chaleureusement Moulay Benameur que j'ai eu plaisir à cotoyer tout d'abord en tant qu'étudiant puis comme membre doctorant du laboratoire. Je remercie Claude Coppin, Fabrice Crouvezier, Stéphane Lebreton, Sylvie Maggipinto, Isabelle Naviliat et Sedat Yamaner pour leur disponibilité et leur efficacité. Jean-Marc Sac-Epée a eu la générosité de pallier bien souvent ma phobie de l'informatique. Du côté des thésards Hédi, Stéphane, Cédric, Mikael, Jérôme, Ali, Hassan, Laurent, Bichara ont contribué à l'ambiance joyeuse du labo ; je salue spécialement mes "compagnons de bureau" Imen et Alexandre mais aussi les "aficionados" de Géométrie non Commutative El-Kaïoum, Frédéric et Indrava.

C'est lors de diverses conférences que j'ai pu rencontrer un grand nombre de doctorants forts sympathiques : je pense entre autre à Pierre, Moritz, Haija, Eusebio, Lukasz, Thyrone, Jens, Robin. Je remercie Paulo pour son invitation à Toulouse qui fut très enrichissante d'un point de vue mathématique. Je salue également les joueurs et poètes de génie de l'équipe de foot du laboratoire de mathématiques d'Orsay.

A tous les amis que j'ai pu fréquenter durant ces dernières années, qu'ils me pardonnent pour ma propension à ne prendre pas plus souvent de leurs nouvelles. Je profite de l'occasion pour remercier les Gilou, Damien, Alex, MP, Marion, Rachid, Michel, Marc, Bungle, Greg, Terry, Antho, "Jérôme", Xaf, tous les illustres astronautes de la JAR et *tutti quanti* pour les rires, la bière, le foot et tout le reste. Un merci à Cata, Thomas et l'infatigable Don Antonio. Je salue avec plaisir Monsieur Michel Deiss qui m'a assurément transmis le virus de l'enseignement. Si je n'ai su parfaire la pratique de la langue de Goethe qu'il tenta ardemment de m'inculquer, je prends néanmoins pour modèle son humanité et ses qualités d'enseignant. Enfin j'ai une pensée particulière pour Cyril qui aurait sans doute souri en feuilletant ces pages

et pour toute sa famille Christine, Joel, Florent et Lilian avec qui j'ai partagé une grande partie de mon enfance. Je les remercie pour leur constante présence, leur altruisme et leur amitié.

Depuis toujours, le soutien infaillible de mes parents a eu raison de bien des difficultés et leurs sacrifices ne sont pas étrangers à mon parcours. Je témoigne toute mon affection à mon frère Arnaud ainsi qu'à Rose pour tous les bons moments passés ensemble (et ceux qui restent à venir). Un p'tit clin d'oeil au passage aux grands parents, tantes, oncles, cousines et cousins mosellans et périgordins que j'ai toujours plaisir à retrouver. "Un abrazo especial" para Nona, Memo, Maria-Jo, Sergio, Talu y Juan pour leur accueil chaleureux qui a aussi permis la rédaction de ce manuscrit.

Pour clore ces effusions sentimentales bien inhabituelles, je ne saurais trop exprimer ma gratitude et mon amour envers les deux petites Francocolombiennes qui partagent ma vie : Palita pour sa tendresse et sa persévérance à me croire capable d'achever ce travail et notre Violetita pour sa facilité à dispenser sans cesse l'allégresse.

*"Moi, c'est l'temps qui m'dirige"*  
René Remy, architecte de l'Esprit.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Préliminaires sur les groupoïdes</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions générales et constructions pour les groupoïdes . . . . .	1
1.1.1 Groupoïdes topologiques . . . . .	1
1.1.2 Classes de groupoïdes particuliers . . . . .	5
1.1.3 Action et fibré . . . . .	6
1.1.4 Homomorphismes généralisés et équivalence de Morita . . . . .	7
1.1.5 Systèmes de Haar et moyennabilité . . . . .	9
1.2 Algèbres associées à un groupoïde . . . . .	12
1.2.1 Algèbres de convolution et représentations . . . . .	12
1.2.2 $C^*$ -algèbres réduites et pleines d'un groupoïde . . . . .	13
1.2.3 Modules de Hilbert et représentation régulière . . . . .	14
1.3 $C_0(X)$ -algèbre et fibré de $C^*$ -algèbres . . . . .	15
1.3.1 $C_0(X)$ -algèbre . . . . .	15
1.3.2 Fibré semi-continu supérieurement . . . . .	16
1.3.3 Construction de "tiré en arrière" . . . . .	18
<b>2 <math>K</math>-théorie équivariante : action propre d'un groupe discret</b>	<b>21</b>
2.1 Contexte . . . . .	23
2.2 Fibrés vectoriels complexes $G$ -équivariant . . . . .	25
2.3 $C^*$ -algèbres, approximation de l'unité et projection . . . . .	33
2.4 $K$ -théorie équivariante et fibrés de dimension finie . . . . .	42
<b>3 Exactitude de la <math>C^*</math>-algèbre réduite d'un groupoïde étale</b>	<b>53</b>
3.1 Espace universel et groupoïde moyennable . . . . .	56
3.1.1 Quelques propriétés des $C^*$ -algèbres commutatives . . . . .	57
3.1.2 $\mathcal{G}$ -algèbre . . . . .	59
3.1.3 Espace $\beta_X \mathcal{G}$ et propriété universelle . . . . .	62
3.1.4 Espace de mesure . . . . .	66
3.1.5 Existence d'une section continue . . . . .	69
3.1.6 Moyennabilité . . . . .	71
3.1.7 Groupoïde étale exact . . . . .	75
3.2 $C^*$ -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ et approximation de la représentation régulière . . . . .	77
3.2.1 Approximation de l'unité et opérateurs de rangs finis . . . . .	78
3.2.2 Représentation régulière et opérateurs de rang fini . . . . .	81
3.2.3 $C(X)$ -nucléarité et exactitude . . . . .	84

3.2.4	Etude de $E_n$ : projection et application localisante . . . . .	86
3.2.5	Champ de formes vectorielles . . . . .	88
3.2.6	Approximation par factorisation . . . . .	92
3.2.7	Moyennabilité . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Eléments de Kasparov et morphismes <math>K</math>-orientés de groupoïdes étales</b>	<b>103</b>
4.1	Morphisme $K$ -orienté et éléments du groupe de Kasparov . . . . .	103
4.1.1	Notions de $K$ -orientation et éléments du groupe de Kasparov . . . . .	104
4.1.2	Construction de Hilsum-Skandalis . . . . .	107
4.1.3	Groupoïdes moyennables et $KK$ -théorie équivariante . . . . .	110
4.2	Déformation au cône normal . . . . .	117
4.2.1	Définition et exemples de déformation au cône normal . . . . .	118
4.2.2	Fonctorialité de la déformation au cône normal . . . . .	120
4.2.3	Cas des groupoïdes de Lie étales . . . . .	121
4.3	Immersion injective $K$ -orientée de groupoïdes de Lie étales . . . . .	123
4.3.1	Groupoïde normal et fibré de $C^*$ -algèbres . . . . .	123
4.3.2	Quelques résultats et notations . . . . .	125
4.3.3	Métrique riemannienne invariante . . . . .	128
4.3.4	Continuité du fibré de $C^*$ -algèbre . . . . .	132
4.4	Élément de $E$ -théorie . . . . .	134
4.4.1	Suite exacte de $C^*$ -algèbres . . . . .	135
4.4.2	$E$ -théorie . . . . .	135
4.4.3	Fonctorialité dans le cas des groupoïdes moyennables en $K$ -théorie . . .	140
	Bibliographie . . . . .	148

# Introduction

Le sujet de cette thèse tourne autour des groupoïdes étales localement compacts,  $\sigma$ -compacts et séparés. On s'intéresse entre autre aux groupoïdes de feuilletage qui sont par définition les groupoïdes de Lie dont les groupes d'isotropie sont discrets. Dans [CM01], Crainic et Moerdijk prouvent qu'un groupoïde est un groupoïde de feuilletage si et seulement si il est Morita équivalent à un groupoïde de Lie étale ou encore si et seulement si l'application ancre associée à l'algébroïde de Lie est injective. Une algébroïde de Lie muni d'une application ancre injective correspond exactement à un feuilletage : ainsi le théorème de [CM01] dit qu'un groupoïde de Lie est Morita équivalent à un groupoïde de Lie étale si et seulement si il intègre un feuilletage. Les groupoïdes étales servent de modèles lors de l'étude de l'espace des feuilles d'un feuilletage, de l'espace des orbites pour les actions d'un groupes discrets ou encore pour les orbifolds. On donne ci-dessous un bref aperçu du contenu de chacun des chapitres de cette thèse.

La premier chapitre de cette thèse consiste en quelques rappels sur les groupoïdes localement compacts et séparés. La première section de ce chapitre est un bref rappel sur les définitions et propriétés générales concernant les groupoïdes. On s'intéresse à certaines classes de groupoïdes notamment les groupoïdes de Lie, les groupoïdes étales, les groupoïdes propres et les groupoïdes de feuilletage qui sont l'objet des différentes études de cette thèse. On discute aussi de la notion de moyennabilité pour les groupoïdes. La deuxième section aborde la construction, à partir d'un groupoïde topologique, des  $C^*$ -algèbres pleines et réduites associés aux groupoïdes. On y donne en outre quelques résultats classiques sur les modules de Hilbert et leurs opérateurs qui admettent un adjoint. La dernière section porte sur les  $C_0(X)$ -algèbres et les champs (semi-)continu de  $C^*$ -algèbres, qu'on est amené à utiliser dans les divers travaux de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse au cas particulier d'un groupoïde étale propre localement compact  $\sigma$ -compact obtenu par l'action propre d'un groupe discret dénombrable sur un espace localement compact et séparé  $M$ . On étudie le cas où l'espace des orbites  $M/G$  est un espace localement compact et  $\sigma$ -compact. Le groupoïde de transformation  $G \ltimes M \rightrightarrows M$  obtenu est alors un groupoïde étale propre dont la  $C^*$ -algèbre pleine  $C^*(G \ltimes M)$  (qui s'identifie à la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(G \ltimes M)$ ) coïncide avec la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $C_0(M) \rtimes G$ . L'objectif de ce chapitre est de décrire complètement le groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  de la  $C^*$ -algèbre de produit croisé à l'aide des fibrés vectoriels complexes et  $G$ -équivalents sur le  $G$ -espace  $M$ . D'après [Phi89], pour toute action propre d'un groupe localement compact et séparé  $G$  sur un espace localement compact et séparé  $M$ , on sait par l'isomorphisme de Green-Julg généralisé que le groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  est isomorphe au groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(M)$ . Les éléments du groupe  $K_G^0(M)$  sont des classes d'équivalence de  $K$ -cocycles définis notamment à l'aide de fibrés de Hilbert  $G$ -équivalents sur  $M$  qui sont

en quelques sorte des fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants dont les fibres sont des espaces de Hilbert (et peuvent donc être de dimension infinie). Dans le cas général d'une action d'un groupe localement compact et séparé  $G$  sur un espace localement compact et séparé  $M$ , il n'est pas possible de décrire le groupe  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  uniquement en terme de  $K$ -cocycles constitués de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  (dont les fibres sont de dimension finie) : en effet Phillips donne un exemple d'une action propre d'un groupe localement compact et séparé  $G$  sur un espace localement compact et séparé  $M$  pour lequel les fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  ne suffisent pas à décrire  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  en prouvant que certains éléments de  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  ne peuvent être obtenus, par l'isomorphisme de Green-Julg, qu'à partir de  $K$ -cocycles constitués de fibrés de Hilbert  $G$ -équivariants dont les fibres sont de dimension infinie. Qu'en est-il dans le cas particulier d'une action propre d'un groupe discret dénombrable ? Existe-t-il des situations dans lesquelles il est possible de décrire complètement le groupe  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  uniquement à l'aide des  $K$ -cocycles obtenus à partir des fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  (dont les fibres sont de dimension finie) ? Une réponse positive à cette question est donnée dans l'article [BHS10] où les auteurs étudient le cas d'une action propre d'un groupe discret dénombrable  $G$  sur un espace localement compact et séparé  $M$  de telle sorte que l'espace quotient  $M/G$  est compact : on dit que  $M$  est un  $G$ -espace propre  $G$ -compact. Baum, Higson et Schick utilisent un résultat de [LO01] de Lück et Oliver qui leur assure l'existence d'un fibré vectoriel complexe et  $G$ -équivariant sur  $M$  tel que la fibre  $E_x$  en tout point  $x$  de  $M$  contient un multiple de la représentation régulière du groupe des stabilisateurs de  $x$ . L'existence d'un tel fibré  $E$  leur permet de définir une classe de fibrés vectoriels équivariants sur  $M$  appelés  $G$ -fibrés standards jouissant d'une structure ordonnée et de propriétés utiles : tout fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant est isomorphe à un  $G$ -fibré standard. Cette classe de  $G$ -fibrés standards va être l'outil essentiel qui leur permet d'aboutir au résultat voulu. Ils construisent tout d'abord une bijection entre les classes d'équivalences de projections dans  $C_0(M) \rtimes G$  et les classes d'isomorphismes de  $G$ -fibrés standards sur  $M$  puis une approximation de l'unité dans  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections à l'aide des  $G$ -fibrés standards sur  $M$ . Ils peuvent alors prouver que cette bijection induit un isomorphisme naturel entre le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  et le groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$ . Le but du travail réalisé dans le deuxième chapitre de cette thèse est de prolonger les travaux de Baum, Higson et Schick en s'affranchissant notamment de la condition de cocompacité du  $G$ -espace propre  $M$ . On considère donc le cas d'une action propre d'un groupe  $G$  discret et dénombrable sur un espace localement compact et séparé  $M$  tel que l'espace quotient  $M/G$  est  $\sigma$ -compact : plusieurs points essentiels du raisonnement de [BHS10] perdent leur pertinence lorsqu'on remplace l'hypothèse de compacité de l'espace quotient  $M/G$  par celle de  $\sigma$ -compacité notamment le corollaire du résultat de Lück et Oliver sur l'existence du fibré  $E$  sur  $M$  mais aussi l'existence d'une approximation de l'unité dans  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections.

On suppose dans le cadre de notre étude que pour tout sous espace  $G$ -compact  $X$  de  $M$ , il existe un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $X$  la fibre  $E_x$  contient un multiple de la représentation régulière du groupe  $G_x$  d'isotropie (ou des stabilisateurs) de  $x$ . Cette hypothèse (notée *(Hyp)*) est bien sûr satisfaite dans le cas où  $M$  est lui-même  $G$ -compact du fait des résultats de [LO01] mais il n'y a pour l'instant pas de résultat général dans le cas où  $M/G$  est  $\sigma$ -compact de l'existence de tels fibrés. On va alors utiliser la classe des  $G$ -fibrés standards introduite dans [BHS10] et l'hypothèse *(Hyp)* va nous permettre d'obtenir des propriétés analogues à celle de [BHS10] et de construire une sorte de structure d'ensemble ordonnée sur cette classe. On montre ensuite que l'hypothèse *(Hyp)* sur  $M$  équivaut à la donnée d'une approximation de l'unité pour  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections dans l'algèbre des multiplicateurs  $M(C_0(M) \rtimes G)$  : pour prouver cela, on utilise la propriété de structure

ordonnée dans la classe des  $G$ -fibrés standards sur  $M$ . L'existence d'une telle approximation de l'unité pour  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections dans  $M(C_0(M) \rtimes G)$  est l'outil central qui nous permet de décrire complètement le groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  à l'aide des  $K$ -cocycles constitués uniquement de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  (dont les fibres sont de dimension finie). L'idée globale de cette démarche est de considérer un élément quelconque du groupe  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  que l'on regarde comme un élément du groupe de  $KK$ -théorie  $KK_0(\mathbb{C}, C_0(M) \rtimes G)$  puis d'utiliser les propriétés de la théorie des groupes de  $KK$ -théorie pour lui associer un élément ayant la même classe dans  $KK_0(\mathbb{C}, C_0(M) \rtimes G)$  qui soit l'image par l'isomorphisme de Green-Julg généralisé d'un  $K$ -cocycle constitué uniquement de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  (dont les fibres sont de dimension finie).

Le troisième chapitre porte sur l'étude des groupoïdes étales localement compacts et  $\sigma$ -compacts : pour un tel groupoïde  $\mathcal{G}$ , on s'intéresse aux propriétés algébriques d'exactitude de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupoïde et du foncteur  $\rtimes_r \mathcal{G}$ . Dans le cas d'un groupe discret  $G$  (qui est un cas particulier de groupoïde étale) Anantharaman-Delaroche démontre le théorème suivant dans l'article [AD02] :

**Théorème 1.** [AD02] *Soit  $G$  un groupe discret. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *le groupe  $G$  admet une action moyennable sur un espace compact  $X$  (on dit que  $G$  est moyennable à l'infini)*
- (2) *le groupe  $G$  est exact*
- (3) *pour toute  $G$ - $C^*$ -algèbre  $B$ , la  $C^*$ -algèbre  $B \rtimes_r G$  est une  $C^*$ -algèbre exacte*
- (4) *la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(G)$  du groupe  $G$  est une  $C^*$ -algèbre exacte*

Le résultat prouvé par Anantharaman-Delaroche est plus général puisqu'elle s'intéresse au cas des groupes localement compacts pour lesquels elle prouve les implications suivantes (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4). Cependant il est difficile de démontrer en général l'implication (4)  $\Rightarrow$  (1). Anantharaman-Delaroche le fait dans le cas où le groupe  $G$  satisfait une certaine condition, appelée propriété  $(W)$ , qui est une condition plus faible que la condition de moyennabilité intérieure. Comme tout groupe discret vérifie cette propriété  $(W)$ , les assertions sont alors toutes équivalentes dans le cas d'un groupe discret.

On note  $C_b^u(G)$  la sous- $C^*$ -algèbre de  $C_b(G)$  formée des fonctions bornées et uniformément continue à gauche au sens suivant : une fonction  $f$  sur  $C_b(G)$  est uniformément continue à gauche si

$$\lim_{t \rightarrow e} \|tf - f\|_\infty = 0 \quad \text{avec} \quad tf : g \mapsto f(t^{-1}g)$$

Pour tout groupe localement compact  $G$ , la  $C^*$ -algèbre commutative  $C_b^u(G)$  est munie d'une action du groupe et on note  $\beta^u G$  le spectre de  $C_b^u(G)$  qui est un espace compact et séparé muni d'une action continue du groupe  $G$ . Anantharaman-Delaroche montre dans [AD02] que la condition de moyennabilité à l'infini pour un groupe localement compact équivaut à la moyennabilité de l'action de  $G$  sur le spectre  $\beta^u G$ . Dans le cas où  $G$  est discret, il est clair que le  $C_b^u(G)$  coïncide avec  $C_b(G)$  et que le spectre  $\beta^u G$  est alors le compactifié de Stone-Céčh du groupe  $G$ .

Le groupe  $G$  est dit exact si le foncteur  $\rtimes_r G$  transforme toute suite exacte courte de  $G$ - $C^*$ -algèbres en une suite exacte courte de  $C^*$ -algèbres : lorsque le groupe  $G$  est discret, Kirchberg et Wassermann prouvent dans [KW99] que l'exactitude de  $G$  équivaut à l'exactitude de la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(G)$ .

Dans cette thèse, on cherche à généraliser le théorème 1 de [AD02] au cas des groupoïdes étales

localement compact et  $\sigma$ -compacts et séparés. Dans la première section de ce chapitre, on va tout d'abord définir une version de la notion de moyennabilité à l'infini pour un groupoïde étale  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  ainsi qu'une sous- $C^*$ -algèbre de  $C_b(\mathcal{G})$  qui joue le rôle de la  $C^*$ -algèbre des fonctions bornées et uniformément continues à gauche dans le cas des groupes localement compacts : on notera  $C_0^s(\mathcal{G})$  cette  $\mathcal{G}$ - $C^*$ -algèbre et  $\beta_X \mathcal{G}$  le spectre de cette  $\mathcal{G}$ - $C^*$ -algèbre qui est un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact. La moyennabilité à l'infini d'un groupoïde étale  $\mathcal{G}$  implique alors la moyennabilité de l'action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur le spectre  $\beta_X \mathcal{G}$  mais nous n'avons pas obtenu de réciproque à cette proposition et donc d'équivalence, comme dans le cas des groupes localement, compacts entre ces deux notions. On démontre alors en cette fin de section le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde étale d'espace des unités  $X$ . On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  agit moyennablement sur l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$*
- (3) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est exact*
- (4) *la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte*

Alors on a (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4).

La seconde section de ce chapitre tente de prouver l'implication (4)  $\Rightarrow$  (2) en utilisant les techniques analogues à celles de Anantharaman-Delaroche dans [AD02]. On considère un groupoïde étale localement compact et  $\sigma$ -compact séparé  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  tel que la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte et on note  $\nu$  le système de Haar pour  $\mathcal{G}$  constitué des mesures de comptage des  $s$ -fibres de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  la  $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs  $C_0(X)$ -linéaires qui admettent un adjoint, sur le  $C_0(X)$ -module de Hilbert  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ . L'idée est de travailler sur des  $C_0(X)$ -algèbres continues et exactes afin d'utiliser un résultat de [Bla97] de plongement  $C_0(X)$ -linéaire de telles  $C_0(X)$ -algèbres dans la  $C_0(X)$ -algèbre nucléaire  $C_0(X) \otimes \mathcal{O}_2$ , où  $\mathcal{O}_2$  est l'algèbre de Cuntz. Comme la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  n'est pas munie d'une structure de  $C_0(X)$ -algèbre, on construit une  $C_0(X)$ -algèbre, notée  $\mathcal{A}$ , qui est la plus petite sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  contenant l'image de  $C_r^*(\mathcal{G})$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  par la représentation régulière  $\lambda$  et l'image de  $C_0(X)$  par la structure de  $C_0(X)$ -algèbre de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ . On montre alors que l'exactitude de la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  implique l'exactitude de la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . Afin d'utiliser le théorème de [Bla97], on suppose que la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est continue et on se restreint au cas où l'espace des unités  $X$  du groupoïde est compact. On travaille donc sur une classe plus faible de groupoïdes étales localement compact et  $\sigma$ -compact qui satisfont ces deux conditions. Dès lors que l'on a utilisé le théorème de plongement  $C(X)$ -linéaire des  $C(X)$ -algèbres continues et exactes dans la  $C(X)$ -algèbre nucléaire  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ , on va pouvoir utiliser les propriétés de  $C(X)$ -nucléarité pour obtenir une approximation par des factorisations à travers les  $C(X)$ -algèbres  $C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$  de l'application identité sur  $\mathcal{A}$  et donc de la représentation régulière de  $C_r^*(\mathcal{G})$ . C'est par le biais de cette approximation par des factorisations de la représentation régulière de la  $C^*$ -algèbre exacte  $C_r^*(\mathcal{G})$  que nous pouvons montrer la moyennabilité de l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\beta_X \mathcal{G}$ . On obtient alors l'implication (4)  $\Rightarrow$  (2) pour la classe des groupoïdes étales localement compacts et  $\sigma$ -compacts dont l'espace des unités est compact et tels que la  $C(X)$ -algèbre induite  $\mathcal{A}$  est continue.

Le dernier chapitre de cette thèse porte sur les morphismes  $K$ -orientés entre groupoïdes de feuilletages et la construction d'éléments de groupe de Kasparov. On s'inspire des résultats de [HS87] dans lequel pour un morphisme d'espaces singuliers  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ , où  $(V_i, F_i)$  est une variété feuilletée et  $V_i/F_i$  est l'espace des feuilles du feuilletage  $(V_i, F_i)$ , Hilsum et Skandalis

construisent un élément  $f_!$  du groupe de Kasparov  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$ , où  $C^*(V_i, F_i)$  correspond à la  $C^*$ -algèbre (pleine) du groupoïde d'holonomie associé au feuilletage  $(V_i, F_i)$ . Ils étudient également les propriétés fonctorielles d'une telle construction en comparant l'élément de groupe de Kasparov obtenu en composant deux morphismes  $K$ -orientés d'espaces singuliers et le produit de Kasparov des deux éléments de groupe de Kasparov obtenus à partir de chacun de ces morphismes  $K$ -orientés d'espaces singuliers. L'existence de tels éléments, conjecturée par Connes dans [Con82], a été prouvée dans certains cas particuliers : dans [CS84] Connes et Skandalis construisent un éléments  $f_!$  dans le cas où le feuilletage  $F_1$  est trivial (c'est-à-dire  $V_1$  est l'unique feuille du feuilletage) et prouvent l'égalité  $(g \circ f)_! = f_! \otimes g_!$  pour tout morphisme  $K$ -orienté  $f$  et  $g$  qui sont composables. Ce résultat est généralisé dans le cas tordu par Carrillo et Wang dans [CRW11] pour des morphismes  $f : W \rightarrow M/F$  où le groupoïde d'holonomie du feuilletage  $(M, F)$  est muni d'une torsion et la fonctorialité de cette construction est démontrée en utilisant le théorème de l'indice longitudinal. Pour obtenir un tel élément de groupe de Kasparov à partir d'un morphisme  $K$ -orienté, il est courant d'utiliser une factorisation du morphisme  $f = p \circ i$  où  $p$  est une submersion et  $i$  une immersion injective et de réaliser ces constructions sur chacun des morphismes  $p$  et  $i$ . Dans le cas d'une immersion injective et  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ , Hilsun et Skandalis supposent le groupoïde  $\mathcal{G}_1$  moyennable et utilisent la technique de déformations au cône normal pour obtenir le groupoïde normal  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}^{\mathcal{G}_2}$  et la suite exacte courte de  $C^*$ -algèbre suivante

$$0 \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_2 \times ]0, 1]) \longrightarrow C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}^{\mathcal{G}_2}) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_1^N) \longrightarrow 0$$

Par nucléarité de  $C^*(\mathcal{G}_1)$  (car  $\mathcal{G}_1$  moyennable) et avec les techniques de  $KK$ -théorie et l'existence de certains éléments de groupes de Kasparov, ils construisent  $\iota_!$  dans  $KK(C^*(\mathcal{G}_1), C^*(\mathcal{G}_2))$  et prouvent la fonctorialité de cette construction. Dans le cas d'une submersion, ils construisent directement les bimodules de Kasparov à partir d'une submersion  $p : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  d'abord dans le cas presque isométrique puis dans le cas général en se ramenant au cas presque isométrique. Ils parviennent également à prouver la fonctorialité de cette construction.

Pour le cas général, Hilsun et Skandalis considèrent  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  une application  $K$ -orientée et de classe  $C^\infty$ . L'application admet des factorisations de type  $f = p \circ i$  où  $i : V_1/F_1 \rightarrow V/F$  (respectivement  $p : V/F \rightarrow V_2/F_2$ ) est une immersion (respectivement submersion)  $K$ -orientée pour laquelle a été défini un élément  $i_!$  (respectivement  $p_!$ ). Il serait alors tentant de définir  $f_!$  en posant  $f_! := i_! \otimes p_!$ . Il s'agit de répondre aux questions suivantes :

- (a) a-t-on  $i_! \otimes p_! = i'_! \otimes p'_!$  pour deux factorisations différentes de  $f$  ?
- (b) pour  $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  et  $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$  applications  $K$ -orientées et  $C^\infty$ , a-t-on  $(f_1 \circ f_3)_! = (f_3)_! \otimes (f_1)_!$  ?

On rappelle que le groupoïde étale  $\mathcal{G}_1$ , utilisé dans le cas de l'immersion est moyennable ce qui équivaut à la nucléarité de  $C^*(\mathcal{G}_1)$ .

**Proposition 1.** Soit

$$\begin{array}{ccc} & V/F & \\ & \nearrow i & \searrow p \\ V_1/F_1 & & V_2/F_2 \\ & \searrow i' & \nearrow p' \\ & V'/F' & \end{array}$$

un diagramme commutatif d'applications  $K$ -orientées où  $i, i'$  sont des immersions et  $p, p'$  des submersions, alors

$$\gamma_{N'_i} \otimes i_! \otimes p_! = \gamma_{N_i} \otimes i'_! \otimes p'_!$$

où  $N_i$  est le fibré normal de l'immersion  $i$  et  $N_{i'}$  est le fibré normal de l'immersion  $i'$ .

La démonstration de cette proposition se trouve dans [HS87] et on voit que ce résultat montre qu'il n'y a à priori pas de définition naturelle pour  $f_!$  dans le cas général à moins de savoir que  $\gamma_N = 1$  pour tout  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $N$ . Puisque le groupoïde  $\mathcal{G}_1$  est supposé moyennable dans la construction de [HS87], les auteurs donne la conjecture suivante

**Conjecture 1.** Si  $\mathcal{G}_1$  est moyennable, alors pour tout  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $E$ , on a  $\gamma_E = 1$ .

Si cette conjecture est vraie :

- (1) on remarque que pour toute factorisation  $f = p \circ i = p' \circ i'$  vérifiant les conditions de la proposition 1, on a l'égalité  $i'_! \otimes p'_! = i_! \otimes p_!$ , ce qui prouve que  $f_!$  ne dépend pas de la factorisation choisie.
- (2) Hilsun et Skandalis prouvent que pour toutes applications  $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  et  $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$   $K$ -orientée, on obtient  $(f_3 \circ f_1)_! = (f_1)_! \otimes (f_3)_!$

Dans ce quatrième chapitre, on s'intéresse seulement au cas d'une immersion injective  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  qui est un homomorphisme strict entre groupoïdes de Lie étales. On essaie de construire un élément  $\iota_!$  de  $KK$ -théorie dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}_1), C_r^*(\mathcal{G}_2))$  où les  $C^*$ -algèbres  $C_r^*(\mathcal{G}_i)$  sont les  $C^*$ -algèbres réduites du groupoïde  $\mathcal{G}_i$  et non plus les  $C^*$ -algèbres pleines comme dans l'article [HS87]. On n'obtient en général pas un élément du groupe de  $KK$ -théorie mais seulement un élément du groupe de  $E$ -théorie  $E(C_r^*(\mathcal{G}_1), C_r^*(\mathcal{G}_2))$ . Le raisonnement utilisé pour la construction de  $\iota_!$  est à l'origine analogue à celui développé dans [HS87] en considérant la déformation au cône normal associée à l'immersion injective  $K$ -orientée  $\iota$  suivante

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} := \mathcal{G}_1^N \times \{0\} \bigsqcup \mathcal{G}_2 \times ]0, 1]$$

afin d'obtenir si possible une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_2 \times ]0, 1]) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_1^N) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

Une telle suite n'est en général pas exacte. On va donc se restreindre au cas où l'espace des unités  $\mathcal{H}^{(0)}$  du groupoïde de Lie étale  $\mathcal{H}$  est muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante et on montre alors que le fibré de  $C^*$ -algèbres sur  $[0, 1]$ , noté  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{D}), \pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t))$  où  $\pi_t$  est l'homomorphisme d'évaluation, est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu c'est-à-dire que l'application  $t \mapsto \|\pi_t(f)\|$  est continue pour tout élément  $f$  de  $C_r^*(\mathcal{D})$ . Ce problème lié à l'obtention d'une suite exacte courte de la forme 1 n'apparaît pas dans le cas des  $C^*$ -algèbres pleines traité dans [HS87] puisqu'une déformation au cône normal va induire directement une suite exacte courte. Une fois la suite exacte courte 1 construite, on utilise les propriétés de  $E$ -théorie pour obtenir un élément  $\iota_!$  dans le groupe  $E(C_r^*(\mathcal{G}_1), C_r^*(\mathcal{G}_2))$ . La functorialité de cette construction est traitée uniquement dans le cas où les groupoïdes de Lie étales considérés sont moyennables en  $K$ -théorie ce qui implique la nucléarité en  $K$ -théorie de leur  $C^*$ -algèbre réduite. On peut dès lors se placer dans le cadre de la  $KK$ -théorie et la démonstration est exactement la même que celle de [HS87].

Ce chapitre est scindé en quatre sections : la première section de ce chapitre débute par quelques rappels sur les notions de  $K$ -orientation des fibrés vectoriels réels et des homomorphismes généralisés entre groupoïdes de feuilletage, ainsi que la construction de certains éléments du groupe de Kasparov utilisés pour définir l'élément  $\iota_!$  associé à une immersion injective  $\iota$ . On termine cette première section en démontrant la conjecture 1 annoncée par Hilsun et Skandalis : voir 5.9 de [HS87]. On fait une démonstration un peu plus générale de ce résultat en traitant les groupoïdes étales localement compact  $\sigma$ -compacts munis d'un système de Haar et en s'appuyant essentiellement sur la  $KK$ -théorie équivariante par rapport à un groupoïde définie par LeGall dans [LG99]. La deuxième section de ce chapitre est un rappel sur la

---

déformation au cône normal associée à une immersion d'une variété dans une autre ainsi que les propriétés fonctorielles liées à cette construction qui nous sont utiles lorsqu'on travaille sur une immersion d'un groupoïde de Lie étale dans un autre. La troisième section est consacrée à la construction de l'élément  $\iota_!$  du groupe  $E(C_r^*(\mathcal{G}_1), C_r^*(\mathcal{G}_2))$  à partir d'une immersion injective et  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  d'un groupoïde de Lie étale  $\mathcal{G}$  dans un groupoïde de Lie étale  $\mathcal{H}$  dont l'espace des unités  $\mathcal{H}^{(0)}$  est muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante. Enfin la dernière section porte sur la functorialité d'une telle construction dans le cas particulier où les groupoïdes considérés sont moyennables en  $K$ -théorie.



# Chapitre 1

## Préliminaires sur les groupoïdes

Dans cette section, nous rappelons les définitions de bases de la théorie des groupoïdes. On définit, dans le cadre de notre travail, une catégorie dont les objets sont les groupoïdes de Lie et les morphismes des morphismes dits généralisés. On va s'intéresser entre autre aux groupoïdes de Lie issus des feuilletages de variétés, qui nous permettra d'introduire la notion de groupoïdes de feuilletages et leur lien avec les groupoïdes étales.

### 1.1 Définitions générales et constructions pour les groupoïdes

#### 1.1.1 Groupoïdes topologiques

Un groupoïde peut être vu comme une généralisation des groupes et des espaces. Il s'agit d'une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Il est courant d'adopter les notations  $\mathcal{G}^{(0)}$  pour définir les objets et  $\mathcal{G}$  (parfois noté  $\mathcal{G}^{(1)}$ ) pour définir les morphismes (souvent appelés flèches). On donne ci-dessous une définition plus concrète d'un groupoïde

**Définition 1.1.1.** *Un groupoïde consiste en la donnée de deux espaces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{(0)}$  et d'applications*

a)  $s, r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  respectivement applications source et but,

b)  $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ , l'application produit, où  $\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(\gamma) = r(\eta)\}$ ,

ainsi que d'une application unité notée  $u : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$  et d'une application inverse notée  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  vérifiant, si l'on note  $m(\gamma, \eta) = \gamma.\eta$ ,  $u(x) = x$  et  $i(\gamma) = \gamma^{-1}$ , les relations suivantes

- $r(\gamma.\eta) = r(\gamma)$  et  $s(\gamma.\eta) = s(\eta)$
- $\gamma.(\eta.\delta) = (\gamma.\eta).\delta$ , pour tout  $(\gamma, \eta)$  et  $(\eta, \delta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$
- $\gamma.x = \gamma$  et  $x.\eta = \eta$ , pour tout  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)} : s(\gamma) = x = r(\eta)$
- $\gamma.\gamma^{-1} = r(\gamma)$  et  $\gamma^{-1}.\gamma = s(\gamma)$ , pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$

*Notation 1.1.2.* Il est assez courant de simplifier les notations en occultant la fonction  $u$  et en considérant  $\mathcal{G}^{(0)}$  comme un sous espace de  $\mathcal{G}$ . De même, on pourra se permettre d'écrire  $\gamma.\eta$  voire  $\gamma\eta$  pour  $m(\gamma, \eta)$  afin d'alléger les formules.

**Topologie :** on considère par la suite des groupoïdes topologiques c'est-à-dire les groupoïdes  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  pour lesquels les espaces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{(0)}$  sont munis d'une topologie et les applications de structure du groupoïde,  $r, s, m, u, i$  sont continues. On travaille essentiellement avec les groupoïdes topologiques suivants

- (a) un groupoïdes localement compacts et séparés est un groupoïde topologique pour lequel l'espace  $\mathcal{G}$  est localement compact et séparé. Un tel groupoïde est  $\sigma$ -compact si l'espace topologique  $\mathcal{G}$  est  $\sigma$ -compact.
- (b) un groupoïde étale est un groupoïde localement compact et séparé pour lequel les applications but et sources sont des homéomorphismes locaux.
- (c) un groupoïde de Lie est un groupoïde pour lequel les espaces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{(0)}$  sont munis d'une structure de variété et les applications de structures du groupoïde sont des applications lisses. De plus, les applications  $s$  et  $r$  sont des submersions.

**Proposition 1.1.3** ([Tu04]). *Si  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  est un groupoïde séparé localement compact (respectivement localement compact  $\sigma$ -compact) alors  $\mathcal{G}^{(0)}$  est localement compact (respectivement localement compact  $\sigma$ -compact).*

*Démonstration.* On note  $\Delta_{\mathcal{G}}$  la diagonale de l'espace  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ . Le groupoïde  $\mathcal{G}$  étant séparé,  $\Delta_{\mathcal{G}}$  est un sous espace fermé de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ . Alors  $\mathcal{G}^{(0)} = (id, r)^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}})$  est fermé dans  $\mathcal{G}$ , donc localement compact.

Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de sous espaces compacts dans  $\mathcal{G}$ , telle que  $\mathcal{G} = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . L'application  $r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  étant continue,  $(r(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous espaces compacts de  $\mathcal{G}^{(0)}$  telle que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} r(K_n) = \mathcal{G}^{(0)}$ . Alors  $\mathcal{G}^{(0)}$  est localement compact  $\sigma$ -compact. □

**Groupe d'isotropie :** soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde topologique et  $X$  et  $Y$  des sous espaces de  $\mathcal{G}^{(0)}$ . On appelle  $\mathcal{G}_X$  l'ensemble des flèches de  $\mathcal{G}$  qui "commencent dans  $X$ " et  $\mathcal{G}^Y$  l'ensemble des flèches qui "terminent dans  $Y$ " c'est-à-dire les sous espaces de  $\mathcal{G}$  définis par

$$\mathcal{G}_X := \{\gamma \in \mathcal{G} : s(\gamma) \in X\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^Y := \{\gamma \in \mathcal{G} : r(\gamma) \in Y\}$$

On note  $\mathcal{G}_X^Y := \mathcal{G}_X \cap \mathcal{G}^Y$  l'ensemble des flèches qui commencent dans  $X$  et finissent dans  $Y$ . Lorsqu'on considère  $A := \{x\}$  réduit à un seul élément, on dit que  $\mathcal{G}_x$  (resp.  $\mathcal{G}^x$ ) est la  $s$ -fibre (resp.  $r$ -fibre) au point  $x$  et l'ensemble  $\mathcal{G}_x^x$  est muni d'une structure de groupe qu'on appelle le groupe d'isotropie en  $x$  du groupoïde  $\mathcal{G}$ .

**Exemples de groupoïdes :** on donne quelques exemples de groupoïdes topologiques et on montre comment certains ensembles classiques peuvent être vu comme des groupoïdes :

- (1) **Groupe :** tout groupe topologique  $G$  peut être considéré comme le groupoïde topologique  $G \rightrightarrows \{e\}$  où les applications but et source s'identifient à la projection continue sur l'élément neutre  $e$  du groupe, la multiplication (resp. inversion) pour le groupoïde s'identifie à la multiplication (resp. inversion) du groupe. Lorsque le groupe est de Lie, alors le groupoïde induit est aussi de Lie.
- (2) **Espace :** tout espace topologique (resp. variété)  $M$  peut être considéré comme un groupoïde topologique (resp. de Lie)  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ , où l'ensemble  $\mathcal{G}$  est l'espace topologique (resp. la variété)  $M$ , c'est-à-dire l'espace même des unités. Toutes les applications de structures s'identifient à l'identité. On l'appelle le groupoïde identité associé à l'espace topologique (resp. la variété)  $M$ .
- (3) **Groupoïde paire :** pour tout espace topologique  $M$ , on peut construire un autre groupoïde topologique noté  $Pair(M) \rightrightarrows M$  et appelé le groupoïde paire de l'espace

topologique  $M$ , dont l'espace des flèches est l'espace topologique produit  $Pair(M) := M \times M$ . Les applications but et source sont définies  $s(x, y) := y$  et  $r(x, y) := x$ , et la multiplication  $(x, y) \cdot (y, z) := (x, z)$ , pour tout couple  $(x, y)$  et  $(y, z)$  de  $M \times M$ . Les applications inverse et unité sont  $i(x, y) := (x, y)^{-1} = (y, x)$  et  $u(x) := (x, x)$ .

(4) **Action de groupe** : on considère un groupe de Lie  $G$  agissant à gauche par difféomorphismes sur une variété  $M$ . On appelle groupoïde de transformation le groupoïde noté  $G \times M \rightrightarrows M$ , où l'espace des flèches  $G \times M$  est la variété produit  $G \times M$ .

(5) **Pullback** : soient  $M$  un espace topologique,  $\mathcal{G}$  un groupoïde topologique et  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  une application continue et surjective. L'espace

$$\varphi^* \mathcal{G} := \{(m, \gamma, m') \in M \times \mathcal{G} \times M : r(\gamma) = m, s(\gamma) = m'\} = M \times_{\varphi, r} \mathcal{G} \times_{s, \varphi} M$$

est muni d'une structure de groupoïde topologique où l'espace des unités est  $M$  et les flèches reliant  $m'$  et  $m$  dans  $M$  sont les flèches de  $\mathcal{G}$  reliant  $\varphi(m)$  et  $\varphi(m')$ . L'application but étant donnée par la première projection, l'application source par la troisième projection. Le produit est défini par  $(m_1, \gamma, m_2) \cdot (m_2, \gamma', m_3) = (m_1, \gamma\gamma', m_3)$  et l'inverse par  $(m, \gamma, m')^{-1} = (m', \gamma^{-1}, m)$ .

(6) **Feuilletage** : soit  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte et de dimension  $n$ . Un feuilletage de  $M$  consiste grossièrement en une partition de la variété  $M$  en sous variétés plongées (appelées feuilles du feuilletage). Il existe plusieurs définitions d'un feuilletage sur la variété  $M$  qui peut s'exprimer en termes d'atlas de feuilletage ou encore en termes de cocycles de Haefliger ou encore en termes de sous fibré du fibré tangent que l'on donne ici : un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M$  de codimension  $q$  (avec  $1 \leq q \leq n$ ) est la donnée d'un sous fibré  $E$  du fibré tangent  $TM$  de rang  $n - q$  tel que l'ensemble des sections lisses  $C^\infty(E) := \{X \in C^\infty(M, TM) : X_m \in E_m, \forall m \in M\}$  est une sous algèbre de Lie de  $C^\infty(M, TM)$ . On peut associer à tout feuilletage des groupoïdes notamment les groupoïdes de monodromie et d'holonomie ; le groupoïde de monodromie  $\text{Mon}(M, \mathcal{F})$  est défini à l'aide des classes d'homotopie des chemins sur les feuilles du feuilletage : une flèche reliant les points  $x$  et  $y$  d'une même feuille du feuilletage est une classe d'homotopie d'un chemin de points d'extrémités  $x$  et  $y$  et restant sur la feuille de  $x$  et  $y$  et deux points de  $M$  situés sur deux feuilles différentes ne peuvent être liés par une flèche. Son groupe d'isotropie en point  $x$  de la feuille  $L$  est exactement le groupe fondamental  $\pi_1(L, x)$ . Le groupoïde d'holonomie  $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$  est défini de manière similaire en considérant les classes d'holonomie (et non plus les classes d'homotopie) des chemins restant sur une feuille. Le groupoïde d'holonomie a été introduit par Ehresmann [Ehr65] et Winkelkemper [Win83]. On trouve aussi des détails sur ce sujet dans [MM03], [Vas01].

**Homomorphisme** : on considère deux groupoïdes topologiques  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  et  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$  et on note  $s_{\mathcal{G}}$  (respectivement  $s_{\mathcal{H}}$ ) l'application source de  $\mathcal{G}$  (respectivement  $\mathcal{H}$ ) et  $r_{\mathcal{G}}$  (respectivement  $r_{\mathcal{H}}$ ) l'application but de  $\mathcal{G}$  (respectivement  $\mathcal{H}$ ). Un homomorphisme de groupoïdes  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  est défini par deux applications continues

$$\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \varphi^{(0)} : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$$

telles que les relations suivantes sont satisfaites

- $\varphi(\gamma\eta) = \varphi(\gamma) \circ \varphi(\eta)$ , pour tout  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$
- $s_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \varphi^{(0)} \circ s_{\mathcal{G}}$
- $r_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \varphi^{(0)} \circ r_{\mathcal{G}}$

- $\varphi(\gamma^{-1}) = \varphi(\gamma)^{-1}$

Si on considère les groupoïdes du point de vue des catégories, un homomorphisme entre groupoïdes est un foncteur continu  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  c'est-à-dire la donnée d'une application continue entre les espaces des objets et d'une application continue entre les espaces de flèches compatibles avec les applications de structures des groupoïdes.

*Remarque 1.1.4.* On rencontre parfois le terme d'homomorphisme strict de groupoïdes pour caractériser de tels homomorphismes pour éviter les confusions avec les homomorphismes généralisés de groupoïdes que l'on définira plus tard.

**Exemples 1.1.5.** *On donne deux exemples basiques d'homomorphismes stricts de groupoïdes :*

- (1) *Il est clair qu'un homomorphisme de groupes topologique  $f : G \rightarrow H$  est un homomorphisme (strict) de groupoïdes lorsqu'on se place du point de vue des groupoïdes.*
- (2) *Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques définit un homomorphisme strict entre les groupoïdes identités induits par les espaces topologiques. Il en va de même pour les groupoïdes paires associés aux espaces topologiques.*

### Algébroïde de Lie

De la même manière que les algèbres de Lie joue le rôle de la version infinitésimale pour les groupes de Lie, les algébroïdes de Lie jouent un rôle similaire pour les groupoïdes de Lie. On définit dans un premier temps la notion générale d'algébroïde de Lie puis on montre comment associer un algébroïde de Lie à tout groupoïde de Lie.

**Définition 1.1.6.** *Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ . Un algébroïde de Lie sur la variété  $M$  est la donnée d'un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  muni d'un morphisme de fibré ancre  $an : A \rightarrow TM$ , appelé application ancre, et d'un crochet de Lie sur l'espace  $\Gamma(A)$  des sections  $C^\infty(M)$  tels que pour toutes sections  $X, Y$  dans  $\Gamma(A)$  et toute fonction  $f$  dans  $C^\infty$ , on a*

1.  $an([X, Y]) = [an(X), an(Y)]$
2.  $[X, f.Y] = f.[X, Y] + (an(X)(f)).Y$

Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde de Lie, on construit une algébroïde de Lie associée à  $\mathcal{G}$ . Cette construction peut être considérée comme une généralisation de la notion de feuilletage vu comme sous fibré intégrable d'un fibré tangent.

**Définition 1.1.7.** *On appelle fibré des vecteurs  $s$ -verticaux de  $\mathcal{G}$  le sous fibré du fibré tangent  $T\mathcal{G}$ , noté  $T^s\mathcal{G}$ , défini par  $T^s\mathcal{G} := \ker(ds)$ . Un champ de vecteur vertical est une section du fibré  $\pi_s : T^s\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , c'est-à-dire un champ de vecteur  $X : \mathcal{G} \rightarrow T^s\mathcal{G}$ .*

Soient  $\pi_s : T^s\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  la projection canonique et  $u : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$  l'application de structure unité du groupoïde  $\mathcal{G}$ , on note

$$A\mathcal{G} := \{(x, v) \in \mathcal{G}^{(0)} \times T^s\mathcal{G} : u(x) = \pi_s(v)\}$$

c'est-à-dire le tiré en arrière de  $T^s\mathcal{G}$  par le plongement  $u$ . On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A\mathcal{G} & \xrightarrow{du} & T^s\mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_s \\ \mathcal{G}^{(0)} & \xrightarrow{u} & \mathcal{G} \end{array}$$

On rappelle que tout élément  $g$  dans  $\mathcal{G}_x^y$  induit, par translation à droite, un difféomorphisme  $R_g : s^{-1}(y) \rightarrow s^{-1}(x)$  entre  $s$ -fibres (mais pas sur tout le groupoïde).

**Définition 1.1.8.** *Un champ de vecteur  $X$  dans  $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$  est dit  $\mathcal{G}$ -invariant à droite (ou invariant à droite quand l'action est explicite) si  $X$  est un champ de vecteur vertical et si pour tout  $(h, g)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$ , on a*

$$X_{hg} = (dR_g)_h(X_h)$$

On note  $\Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G})$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathcal{G}$ -invariants à droite.

**Proposition 1.1.9.** *L'ensemble  $\Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G})$  des champs de vecteurs  $\mathcal{G}$ -invariants à droite est fermé pour le crochet de Lie de  $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ .*

*Démonstration.* La preuve est dans le dernier chapitre de [MM03]. □

On peut voir qu'un champ de vecteur  $\mathcal{G}$ -invariant à droite est déterminé de manière unique par sa restriction à l'espace  $\mathcal{G}^{(0)}$  des unités du groupoïde, puisqu'on a, pour tout  $X$  dans  $\Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G})$  et tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$  avec  $r(g) = x$ , la relation suivante

$$X_g = X_{u(x).g} = X_{u(x)}.g = (dR_g)_{u(x)}(X_{u(x)})$$

L'homomorphisme d'espace vectoriel  $\phi : \Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}\mathcal{G})$  qui à tout  $X$  dans  $\Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G})$  associe  $\phi(X)$  où  $\phi(X)(x) = X_{u(x)}$ , pour tout  $x$  dans  $\mathcal{G}^{(0)}$  est un isomorphisme dont la réciproque est l'homomorphisme  $\phi^{-1} : \Gamma(\mathcal{A}\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_{inv}(T^s\mathcal{G})$  défini par  $\phi^{-1}(X)(g) = (dR_g)_{u(r(g))}(X(u(r(g))))$ . Il existe alors une unique structure d'algèbre de Lie sur  $\Gamma(\mathcal{A}\mathcal{G})$  de sorte que l'isomorphisme  $\phi$  d'espaces vectoriels soit un isomorphisme d'algèbres de Lie.

**Définition 1.1.10.** *L'application ancre,  $an : \mathcal{A}\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{G}$ , est la composée des applications de fibrés vectoriels suivant*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}\mathcal{G} & \xrightarrow{du} & T^s\mathcal{G} & \xrightarrow{id_{T\mathcal{G}}} & T\mathcal{G} & \xrightarrow{dr} & T\mathcal{G}^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}^{(0)} & \xrightarrow{u} & \mathcal{G} & \xrightarrow{id_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} & \xrightarrow{r} & \mathcal{G}^{(0)} \end{array}$$

*c'est-à-dire  $an := dr \circ du$  et est un morphisme de fibrés vectoriels.*

**Définition 1.1.11.** *Le fibré vectoriel  $\mathcal{A}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  muni de l'application ancre  $an : \mathcal{A}\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{G}^{(0)}$  et du crochet défini sur  $\Gamma(\mathcal{A}\mathcal{G})$  est l'algébroïde de Lie associée au groupoïde de Lie  $\mathcal{G}$ .*

### 1.1.2 Classes de groupoïdes particuliers

On donne dans cette partie la définition de certaines classes de groupoïdes qui nous intéressent à savoir les groupoïdes propres, les groupoïdes étales et les groupoïdes de feuilletage.

**Groupoïdes propres :** on étudie ces groupoïdes dans le deuxième chapitre ainsi que dans la première section du quatrième chapitre. On se réfère principalement à [Tu04] en ce qui concerne les groupoïdes propres.

**Définition 1.1.12.** *Un groupoïde  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  est dit propre lorsque l'application  $(r, s) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$  est propre.*

*Remarque 1.1.13.* Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde et  $Z$  un espace topologique muni d'une action à gauche (respectivement à droite) du groupoïde  $\mathcal{G}$ . L'action de  $\mathcal{G}$  sur  $Z$  est dite propre (ou encore  $\mathcal{G}$  agit proprement sur  $Z$ ) si le groupoïde produit croisé  $\mathcal{G} \times Z$  (respectivement  $Z \times \mathcal{G}$ ) est propre.

**Proposition 1.1.14.** *Si  $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows X_1$  et  $\mathcal{G}_2 \rightrightarrows X_2$  sont des groupoïdes propres, alors le groupoïde produit  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \rightrightarrows X_1 \times X_2$  est propre.*

*Démonstration.* Voir la démonstration dans [Tu04] proposition 2.17 □

**Proposition 1.1.15.** *Soit  $G$  un groupoïde topologique tel que  $G^{(0)}$  est localement compact et  $r : G \rightarrow G^{(0)}$  est ouverte. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Si  $(r, s)(G)$  est localement fermé dans  $G^{(0)} \times G^{(0)}$ , alors  $G^{(0)}/G$  est localement compact*
2. *Si  $G^{(0)}$  est  $\sigma$ -compact, alors  $G^{(0)}/G$  est  $\sigma$ -compact.*
3. *Si  $(r, s)(G)$  est fermé (par exemple quand  $G$  est propre), alors  $G^{(0)}/G$  est séparé.*

**Proposition 1.1.16.** *Si  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde localement compact, séparé tel que les applications source et but soient ouvertes et  $X$  un espace localement compact, séparé muni d'une action propre de  $\mathcal{G}$ , alors l'espace des orbites  $X/\mathcal{G}$  est un espace localement compact et séparé.*

*Démonstration.* Voir la démonstration de la Proposition 1.85 de [Goe09] □

**Groupoïdes étales :** on étudie dans le deuxième chapitre cette thèse un cas particulier de groupoïde étale donné par l'action continue d'un groupe discret sur un espace topologique.

**Définition 1.1.17.** *Un groupoïde topologique  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  est dit étale si les applications but  $r$  et source  $s$  sont des homéomorphismes locaux. Dans le cas où  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie, on demande à ce que les applications but  $r$  et source  $s$  soient des difféomorphismes locaux.*

On remarque que tout groupoïde étale propre possède des groupes d'isotropie qui sont finis.

**Groupoïdes de feuilletages :** on appelle groupoïde de feuilletage tout groupoïde de Lie dont les groupes d'isotropie sont discrets. Par exemples, les groupoïdes de monodromie et d'holonomie associés à un feuilletage d'une variété sont des groupoïdes de feuilletage. Inversement, tout groupoïde de feuilletage va induire une structure de feuilletage sur son espace des unités. Les groupoïdes de feuilletage peuvent être définis de différentes manière par le théorème qui suit :

**Théorème 1.1.18.** *Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde de Lie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$\mathcal{G}$  est Morita équivalent à un groupoïde de Lie étale*
- (ii) *les groupes d'isotropie de  $\mathcal{G}$  sont discrets*
- (iii) *L'application ancre,  $an : A\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{G}^{(0)}$ , de l'algébroïde de Lie associée à  $\mathcal{G}$ , est injective*

*Démonstration.* On trouve la démonstration dans le deuxième chapitre de [CM01]. □

*Remarque 1.1.19.* Un groupoïde de Lie étale est bien sûr un groupoïde de feuilletage.

### 1.1.3 Action et fibré

On donne la définition d'une action à droite d'un groupoïde sur un espace (l'action à gauche étant définie de manière analogue).

**Définition 1.1.20.** *Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde topologique et  $Z$  un espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact. On appelle action à droite du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur l'espace  $Z$ , la donnée d'une application continue  $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  (souvent appelée application momentum) et d'une application continue de  $Z \times_{\sigma, r} \mathcal{G}$  à valeurs dans  $Z$ , noté  $(z, \gamma) = z.\gamma$  et vérifiant pour tout  $z \in Z$*

- a)  $\sigma(z.\gamma) = s(\gamma)$ , pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  tel que  $\sigma(z) = r(\gamma)$ .
- b)  $z.x = z$ , pour tout  $x$  dans  $\mathcal{G}^{(0)}$  tel que  $\sigma(z) = x$ .
- c)  $(z.\gamma).\gamma' = z.(\gamma.\gamma')$ , pour tout  $(\gamma, \gamma')$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$  tel que  $\sigma(z) = r(\gamma)$

*Remarque 1.1.21.* L'application  $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  est appelée parfois application momentum de l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $Z$ .

L'action d'un groupoïde  $\mathcal{G}$  sur un espace  $Z$  permet de construire un groupoïde produit croisé de  $Z$  par  $\mathcal{G}$ , noté  $Z \rtimes \mathcal{G}$ , composé de l'ensemble des triplets  $(z, \gamma, y)$  dans  $Z \times \mathcal{G} \times Z$ , tels que  $z.\gamma = y$ . Les éléments de  $(Z \rtimes \mathcal{G})^{(2)}$  sont les paires  $((x, \gamma, y), (y, \gamma', z))$  et leur multiplication est définie par  $(x, \gamma, y).(y, \gamma', z) = (x, \gamma.\gamma', z)$ . L'inverse de  $(x, \gamma, y)^{-1} = (y, \gamma^{-1}, x)$ .

**Définition 1.1.22.** Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde topologique et  $M$  un espace topologique. Un  $\mathcal{G}$ -fibré sur l'espace  $M$  est la donnée d'un  $\mathcal{G}$ -espace  $Z$ , par rapport à l'application (momentum)  $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ , et d'une application  $\pi : Z \rightarrow M$  telles que pour tout  $(z, \gamma) \in Z \times_{\sigma, r} \mathcal{G}$ , on a  $\pi(z.\gamma) = \pi(z)$ .

**Proposition 1.1.23.** Soient  $Z$  un espace localement compact  $\sigma$ -compact et  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde localement compact et  $\sigma$ -compact agissant sur  $Z$ . Alors le groupoïde  $Z \rtimes \mathcal{G}$  est localement compact et  $\sigma$ -compact.

*Démonstration.* Voir la preuve dans [Tu04] Proposition 2.6. □

*Remarque 1.1.24.* Un  $\mathcal{G}$ -fibré  $Z$  sur  $M$  est dit principal si

- (i)  $\pi : Z \rightarrow M$  est une application surjective qui admet des sections locales,
- (ii) l'application  $Z \times_{\sigma, r} \mathcal{G} \rightarrow Z \times_M Z : (z, g) \rightarrow (z, z.g)$  est un homéomorphisme.

Un  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $Z$  sur  $M$  est dit localement trivial s'il est isomorphe au  $\mathcal{G}$ -fibré principal

$$\frac{\bigsqcup_i U_i \times \mathcal{G}}{(x, j, \gamma) \sim (x, i, c_{i,j}(x).\gamma)}$$

défini par un 1-cocycle à valeur dans  $\mathcal{G}$ ,

$$\{c_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{G} : c_{i,j}(x).c_{j,k}(x) = c_{i,k}(x)\}$$

par rapport à  $(U_i)_i$  un recouvrement ouvert de  $\mathcal{G}^{(0)}$ .

### 1.1.4 Homomorphismes généralisés et équivalence de Morita

On rappelle brièvement les définitions et propriétés essentielles concernant les homomorphismes généralisés entre groupoïdes et les équivalences de Morita qui sont des homomorphismes généralisés particuliers. On peut se référer à [TXLG04] pour certaines preuves.

**Définition 1.1.25.** Un morphisme généralisé d'un groupoïde  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  vers un groupoïde  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$  est la donnée d'un espace  $Z$ , de deux applications  $\rho : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  et  $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & & \mathcal{H} \\ \Downarrow & \swarrow \rho & \searrow \sigma \\ \mathcal{G}^{(0)} & & \mathcal{H}^{(0)} \end{array}$$

d'une action à gauche de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $\rho$  et d'une action à droite de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $\sigma$  sur  $Z$  tels que

- (i) les actions commutent, c'est-à-dire pour tout  $(g, z) \in \mathcal{G} \times_{s, \rho} Z$  et tout  $(z, h) \in Z \times_{\sigma, r} \mathcal{H}$ , on a  $\rho(z.h) = \rho(z)$ ,  $\sigma(g.z) = \sigma(z)$  et  $g.(z.h) = (g.z).h$
- (ii)  $\rho : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  est un fibré  $\mathcal{G}$ -principal localement trivial.

**Exemple 1.1.26.** Soit  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un morphisme strict de groupoïde. On note  $Z_f := \mathcal{G}^{(0)} \times_{f, r} \mathcal{H}$  et on note  $Z_f \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}^{(0)} : (x, h) \rightarrow x$  et  $Z_f \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} : (x, h) \rightarrow s(h)$ . L'action à gauche de  $\mathcal{G}$  sur  $Z_f$  est définie, pour tout  $(g, (x, h)) \in \mathcal{G} \times_{s, \phi} Z_f$ , par  $g.(x, h) := (r(\gamma), f(g).h)$  et l'action à droite de  $\mathcal{H}$  sur  $Z_f$  est définie, pour tout  $((x, h), h') \in Z_f \times_{\psi, r} \mathcal{H}$ , par  $(x, h).h' := (x, h.h')$ . Il est clair que ces actions commutent et on montre aisément que le  $\mathcal{H}$ -fibré  $Z_f$  sur  $\mathcal{G}^{(0)}$  est principal et localement trivial.

Les compositions de morphismes généralisés sont données par la construction suivante : soient  $Z_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  et  $Z_2 : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3$  deux morphismes généralisés et

$$Z_3 = Z_1 \times_{\mathcal{G}_2} Z_2 := (Z_1 \times_{\sigma_1, \rho_2} Z_2) /_{(z_1, z_2) \sim (z_1 \gamma_2, \gamma_2^{-1} z_2)}$$

alors  $Z_3$  définit un morphisme généralisé du groupoïde  $\mathcal{G}_1$  vers le groupoïde  $\mathcal{G}_3$ . On peut représenter une composition de morphismes généralisés par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 \times_{\mathcal{G}_2} Z_2 & & \\
 & \nearrow \rho_3 & & \searrow \sigma_3 & \\
 \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_3 \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathcal{G}_1^{(0)} & & \mathcal{G}_2^{(0)} & & \mathcal{G}_3^{(0)} \\
 \uparrow \rho_1 & & \uparrow \rho_2 & & \uparrow \sigma_2 \\
 Z_1 & & Z_2 & & \\
 \searrow \sigma_1 & & \swarrow \rho_1 & & \swarrow \rho_2 \\
 & & \mathcal{G}_2 & & \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \mathcal{G}_2^{(0)} & & 
 \end{array}$$

*Remarque 1.1.27.* La composition de morphismes généralisés est associative : soient  $Z_i : \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}_{i+1}$  des morphismes généralisés entre groupoïdes, avec  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , on a par composition les morphismes généralisés  $Z = (Z_1 \times_{\mathcal{G}_2} Z_2) \times_{\mathcal{G}_3} Z_3$  et  $Z' = Z_1 \times_{\mathcal{G}_2} (Z_2 \times_{\mathcal{G}_3} Z_3)$  du groupoïde  $\mathcal{G}_1$  vers le groupoïde  $\mathcal{G}_4$ .

On donne maintenant la définition d'une équivalence de Morita entre deux groupoïdes :

**Définition 1.1.28.** Deux groupoïdes  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  sont dits Morita équivalents s'il existe un espace  $Z$  qui soit un homomorphisme généralisé de  $\mathcal{G}$  vers  $\mathcal{H}$  et un homomorphisme généralisé de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{G}^{(0)} \xleftarrow{\phi} Z$  est un fibré  $\mathcal{H}$ -principal et  $Z \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}^{(0)}$  est un fibré  $\mathcal{G}$ -principal.

*Remarque 1.1.29.* Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows_s^r X$  un groupoïde et  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On considère la réunion disjointe  $\amalg_{i \in I} U_i := \{(i, x) \in I \times X : x \in U_i\}$  et l'homéomorphisme local donné par la projection  $p : \amalg_{i \in I} U_i \rightarrow X$ ,  $(i, x) \rightarrow x$ . L'ensemble

$$\mathcal{G}[\mathcal{U}] := \{(i, \gamma, j) \in I \times \mathcal{G} \times I : r(\gamma) \in U_i, s(\gamma) \in U_j\}$$

est muni d'une structure de groupoïde dont l'espace des unités est  $\amalg_{i \in I} U_i$ . Les applications but et source sont définies par  $r(i, \gamma, j) = (i, r(\gamma))$  et  $s(i, \gamma, j) = (j, s(\gamma))$ . Deux triplets sont composables s'ils sont de la forme  $(i, \gamma, j)$  et  $(j, \eta, k)$  avec  $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(2)}$  et leur produit est donné par  $(i, \gamma, j).(j, \eta, k) = (i, \gamma\eta, k)$ . L'inverse de  $(i, \gamma, j)$  est  $(j, \gamma^{-1}, i)$ .

**Lemme 1.1.30.** Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde et  $\mathcal{U} = (U_i)_i$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Alors le morphisme généralisé  $Z_\iota : \mathcal{G}[\mathcal{U}] \rightarrow \mathcal{G}$  induit par l'homomorphisme strict canonique

$$\iota : \mathcal{G}[\mathcal{U}] \rightarrow \mathcal{G}, (i, \gamma, j) \rightarrow \gamma$$

est une équivalence de Morita entre  $\mathcal{G}[\mathcal{U}]$  et  $\mathcal{G}$ .

*Démonstration.* La démonstration est détaillée dans le premier chapitre de [TXLG04].  $\square$

**Proposition 1.1.31.** Tout morphisme généralisé  $G^{(0)} \leftarrow Z \rightarrow \Gamma^{(0)}$  est obtenu par composition d'une équivalence de Morita canonique entre  $G$  et  $G[\mathcal{U}]$ , où  $\mathcal{U}$  est un recouvrement d'ouverts de  $G^{(0)}$  et d'un homomorphisme strict de groupoïde  $f : G[\mathcal{U}] \rightarrow \Gamma$ .

*Démonstration.* La démonstration est détaillée dans le premier chapitre de [TXLG04].  $\square$

**Proposition 1.1.32.** Deux groupoïdes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  sont Morita-équivalents s'il existe un espace topologique  $T$  et des applications continues, ouvertes et surjectives  $f_i : T \rightarrow \mathcal{G}_i^{(0)}$  telles que  $\mathcal{G}_1[T]$  et  $\mathcal{G}_2[T]$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Voir [TXLG04] proposition 2.29.  $\square$

### 1.1.5 Systèmes de Haar et moyennabilité

On a besoin d'introduire un analogue de la mesure de Haar d'un groupe localement compact pour développer une théorie algébrique de fonctions sur un groupoïde localement compact et séparé. Ce rôle va être joué par un système de Haar, qui sera une famille de mesures soumises à certaines conditions de continuité et d'invariance.

**Définition 1.1.33.** Un système de Haar sur un groupoïde localement compact et séparé  $\mathcal{G}$  est un ensemble de mesures de Radon positives (ou encore de mesures boreliennes régulières) sur  $\mathcal{G}$ , noté  $\nu := \{\nu^x : x \in \mathcal{G}^{(0)}\}$  vérifiant les conditions suivantes

(a)  $\text{Supp}(\nu^x) = \mathcal{G}^x$ , pour tout  $x$  dans  $X$

(b) pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ , l'application  $\mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$x \longrightarrow \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma) d\nu^x(\gamma)$$

est continue.

(c) pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on a la condition d'invariance suivante

$$\int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma') d\nu^{r(\gamma)}(\gamma') = \int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma') d\nu^{s(\gamma)}(\gamma')$$

*Remarque 1.1.34.* Intuitivement, un système de Haar est un objet de nature métrique qui joue le rôle des mesures de Haar à gauche pour certains groupes.

La conditions (ii) est la condition de continuité tandis que (iii) est celle d'invariance à gauche. Contrairement au cas des groupes localement compact, un système de Haar sur un groupoïde n'existe pas nécessairement et lorsqu'il existe, celui-ci n'est en général pas unique. Dans les articles [RM88] et [Sed76], les auteurs donnent des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'existence de tel système pour certains groupoïdes.

**Exemples 1.1.35.** On donne quelques exemples de systèmes de Haar dans des cas classiques :

- (a) Soit  $G$  un groupe localement compact et séparé, alors le groupoïde  $G$  admet un unique système de Haar  $\{\lambda_G\}$  où  $\lambda_G$  est la mesure de Haar du groupe  $G$ .
- (b) Soit  $X$  un espace localement compact et séparé, alors la famille  $\{\delta_x : x \in X\}$  où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac en  $x$ , forme un système de Haar pour  $X$  vu comme un groupoïde.
- (c) Soit  $X$  un espace localement compact et séparé et  $G$  un groupe localement compact et séparé agissant de manière continue sur  $X$  alors la famille  $\{\delta_x \times \lambda : x \in X\}$  où  $\lambda$  est une mesure de Haar de  $G$ , forme un système de Haar pour le groupoïde  $X \times G \rightrightarrows X$ .

On rappelle maintenant les notions de moyennabilité dans le contexte des groupoïdes. Les définitions et propositions qui suivent sont toutes énoncées et démontrées dans le livre très complet [ADR00] qui est consacré à la notion de moyennabilité dans la théorie des groupoïdes.

**Définition 1.1.36.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces localement compacts et séparés et  $\pi : X \rightarrow Y$  une surjection continue. On appelle système continu de mesures pour  $\pi$  toute famille  $\{\alpha^y : y \in Y\}$  de mesures de Radon positives sur  $X$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- (a) pour tout  $y$  dans  $Y$ , le support  $\text{Supp}(\alpha^y)$  est inclus dans  $\pi^{-1}(y)$
- (b) pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(X)$  l'application  $\alpha(f) : Y \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\alpha(f) : y \rightarrow \alpha^y(f) = \int_X f(x) d\alpha^y(x)$$

est continue sur  $Y$  et à support compact.

On dit qu'un tel système  $\{\alpha^y\}_{y \in Y}$  continu de mesures pour  $\pi$  est propre si pour tout  $y$  dans  $Y$ , la mesure  $\alpha^y$  est non nulle et il est dit plein si pour tout  $y$  dans  $Y$ , le support  $\text{Supp}(\alpha^y)$  est exactement  $\pi^{-1}(y)$ .

**Définition 1.1.37.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact et  $X$  et  $Y$  des  $\mathcal{G}$ -espaces pour lesquels l'application momentum (c'est-à-dire  $m_X : X \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  et  $m_Y : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ ) est ouverte. On considère  $\pi : X \rightarrow Y$  une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante. Un  $\pi$ -système continu invariant est un système continu de mesure pour  $\pi$  tel que pour tout  $(\gamma, y)$  dans  $\mathcal{G} * Y$ , on a  $\gamma.\alpha^y = \alpha^{\gamma.y}$  où

$$\gamma.\alpha^y : f \rightarrow \int_X f(\gamma.x) d\alpha^y(x)$$

**Définition 1.1.38.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact et  $X$  et  $Y$  des  $\mathcal{G}$ -espaces localement compacts tels que les applications momentum sont ouvertes. On considère  $\pi : X \rightarrow Y$  une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante. Une moyenne continue invariante approchée pour  $\pi$  est une suite généralisée  $\{m_i : i \in I\}$  de systèmes continus de mesures de probabilité pour  $\pi$  telle que la limite de  $\|\gamma.m_i^y - m_i^{\gamma.y}\|_1$  converge vers zéro uniformément sur tout sous espace compact de  $\mathcal{G} * Y$ .

La condition d'invariance d'un système  $\{\alpha^y\}$  continu invariant de mesure pour  $\pi$  se traduit aussi par l'égalité  $\|\gamma.\alpha^y - \alpha^{\gamma.y}\|_1 = 0$ . On peut donc interpréter une moyenne continue invariante approchée comme une suite généralisée de système continu de mesures (de probabilité) pour  $\pi$  dont la limite s'apparente à un système continu invariant de mesure pour  $\pi$ .

Les trois définitions précédentes vont nous permettre de définir les notions de moyennabilité dans le cadre des groupoïdes localement compacts. La définition qui suit donne la moyennabilité pour une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante à partir de laquelle est définie la moyennabilité d'un groupoïde et celle d'un  $\mathcal{G}$ -espace.

**Définition 1.1.39.** Soient  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact et séparé et  $X$  et  $Y$  des  $\mathcal{G}$ -espaces dont les applications momentum sont ouvertes. Une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante  $\pi : X \rightarrow Y$  est dite moyennable si elle admet une moyenne continue invariante approchée  $\{m_i\}_{i \in I}$ . En particulier, un groupoïde dont les applications but et source sont ouvertes est dit moyennable si l'application source  $r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  est moyennable. Le  $\mathcal{G}$ -espace  $X$  est dit moyennable si le groupoïde de transformation associé est un groupoïde moyennable.

La notion de moyennabilité d'une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante  $\pi : X \rightarrow Y$  est définie en terme d'existence d'une moyenne continue invariante approchée pour l'application  $\pi$ . La proposition qui va suivre donne une condition suffisante pour la moyennabilité de  $\pi$  qui s'exprime à l'aide de fonctions continues sur  $X$  dont le support est dit  $\pi$ -compact.

**Définition 1.1.40.** Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  une surjection continue entre des espaces localement compacts et séparés. Un ensemble  $A$  de  $X$  est dit  $\pi$ -compact si pour tout sous espace compact  $K$  de  $Y$ , l'intersection  $A \cap \pi^{-1}(K)$  est compacte dans  $X$ . On définit  $C_{c,\pi}(X)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $X$  et à support  $\pi$ -compact.

On a besoin également de la notion de fonction de type positif sur un groupoïde de transformation

**Définition 1.1.41.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact et séparé et  $X$  un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé. Une fonction  $e : \mathcal{G} \times X \rightarrow \mathbb{C}$  est dite de type positif si pour tout  $x$  dans  $X$ , tout entier  $n$ , tout  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $\mathcal{G}^{m_x(x)}$ , tout  $z_1, \dots, z_n$  dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$\sum_{i,j=1}^n e(\gamma_i^{-1}\gamma_j, \gamma_i^{-1}.x) \bar{z}_i z_j \geq 0$$

On note  $e^{(0)}$  la restriction de  $e$  à  $\mathcal{G}^{(0)} \times X$ .

**Proposition 1.1.42.** [ADR00] Soient  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact et séparé et  $X$  et  $Y$  des  $\mathcal{G}$ -espaces localement compact et séparé pour lesquels les applications momentum sont ouvertes. Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  une surjection continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante pour laquelle il existe un  $\pi$ -système  $\alpha$  continu et invariant de mesures. On considère les assertions suivantes :

- (a)  $\pi$  est moyennable
- (b) il existe une suite généralisée  $(g_i)_{i \in I}$  de fonctions positives dans  $C_{c,\pi}(X)$  telles que
  - (i)  $\int_X g_i d\alpha^y(x) = 1$ , pour tout  $y$  dans  $Y$
  - (ii)  $\int_X |g_i(\gamma.x) - g_i(x)| d\alpha^y(x)$  converge vers zéro uniformément sur tout sous espace compact de  $\mathcal{G} * Y$
- (c) il existe une suite généralisée  $(\xi_i)_{i \in I}$  de fonctions positives dans  $C_{c,\pi}(X)$  telles que
  - (i)  $\int_X |\xi_i|^2 d\alpha^y(x) = 1$ , pour tout  $y$  dans  $Y$
  - (ii)  $\int_X |\xi_i(\gamma.x) - \xi_i(x)|^2 d\alpha^y(x)$  converge vers zéro uniformément sur tout sous espace compact de  $\mathcal{G} * Y$
- (d) il existe une suite généralisée  $(\xi_i)_{i \in I}$  dans  $C_{c,\pi}(X)$  telle que la suite  $(e_i)_{i \in I}$  de fonctions de type positif sur  $\mathcal{G} \times Y$  définie par  $e_i(\gamma, y) := \int_X \xi_i(x) \xi_i(\gamma^{-1}.x) d\alpha^y(x)$  vérifie
  - (i)  $e_i^{(0)} = 1$  pour tout  $i$  dans  $I$
  - (ii) la suite  $(e_i)_{i \in I}$  converge vers un uniformément sur tout sous espace compact de  $\mathcal{G} * Y$

Alors on a : **b**  $\iff$  **c**  $\iff$  **d**  $\implies$  **a**. Si le  $\mathcal{G}$ -espace  $X$  est propre, alors les assertions sont toutes équivalentes.

## 1.2 Algèbres associées à un groupoïde

Dans cette section, on rappelle les constructions des  $C^*$ -algèbres pleines et réduites associées à un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar.

### 1.2.1 Algèbres de convolution et représentations

On va définir, pour un groupoïde  $\mathcal{G}$  muni d'un système de Haar, une structure  $*$ -algébrique sur l'espace vectoriel complexe  $C_c(\mathcal{G})$  des fonctions continues et à support compact sur le groupoïde. On définit tout d'abord le produit de convolution et l'involution sur  $C_c(\mathcal{G})$  puis on étudie les  $*$ -représentations afin de définir des  $C^*$ -normes qui nous permettront de construire des  $C^*$ -algèbres.

Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde séparé localement compact muni d'un système de Haar  $\nu = \{\nu^x, x \in \mathcal{G}^{(0)}\}$  et  $C_c(\mathcal{G})$  l'espace vectoriel complexe des fonctions continues à support compact sur le groupoïde et à valeurs complexes.

**Définition 1.2.1.** *On définit une involution  $*$  et un produit de convolution  $\star$  sur  $C_c(\mathcal{G})$  de la manière suivante*

(i) *Convolution : pour toutes fonctions  $f, g$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ , on pose*

$$f \star g := \int_{\mathcal{G}^r(\gamma)} f(\gamma') g(\gamma\gamma') d\nu^{r(\gamma)}(\gamma')$$

(ii) *Involution : pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on pose*

$$f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}$$

*Remarque 1.2.2.* On peut munir la  $*$ -algèbre  $C_c(\mathcal{G})$  de la topologie induite par la famille de semi-normes  $\{\|\cdot\|_K : K \subset \mathcal{G} \text{ compact}\}$ , définie pour tout  $K$  compact dans  $\mathcal{G}$  et toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{G})$  par :

$$\|f\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

La structure dépend du choix du système de Haar  $\nu$  : on la note généralement  $C_c(\mathcal{G}, \nu)$  ou  $C_c(\mathcal{G})$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On définit une norme sur  $C_c(\mathcal{G}, \nu)$  de la manière suivante :

**Définition 1.2.3.** *On note  $\|\cdot\|_I$  la norme sur la  $*$ -algèbre topologique  $C_c(\mathcal{G})$  définie, pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  par*

$$\|f\|_I := \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}^x} |f(\gamma)| d\nu^x(\gamma), \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}_x} |f(\gamma)| d\nu_x(\gamma) \right\}$$

*Remarque 1.2.4.* On montre facilement que  $\|\cdot\|_I$  vérifie les propriétés d'une norme sur  $C_c(\mathcal{G})$ . De plus, pour toutes fonctions  $f, g$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ , on a

$$\|f\|_I = \|f^*\|_I \quad \text{et} \quad \|f \star g\|_I \leq \|f\|_I \|g\|_I$$

On rappelle quelques définitions sur les représentations de  $C^*$ -algèbres :

**Définition 1.2.5.** *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et  $H$  un espace de Hilbert. Une  $*$ -représentation de  $B$  dans  $H$  est un  $*$ -homomorphisme  $\pi : B \rightarrow L(H)$ . Une  $*$ -représentation est dite fidèle si elle est injective.*

D'après le théorème de Gelfand, pour toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , il existe un espace de Hilbert  $H$  et une représentation fidèle  $\pi : B \rightarrow L(H)$ . Si la  $C^*$ -algèbre  $B$  est séparable, alors  $H$  peut être l'unique (à isométrie près) espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Ce théorème signifie que toute  $C^*$ -algèbre peut être vue comme une sous-algèbre involutive fermée (pour la norme des opérateurs) de  $L(H)$ .

**Définition 1.2.6.** Soient  $B$  une  $*$ -algèbre de Banach et  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  une famille de  $*$ -représentations continues de  $B$ . Le complété de l'algèbre de Banach involutive  $B$  par la semi-norme

$$\|x\| := \sup_{\alpha \in \Lambda} \|\pi_\alpha(x)\|$$

est une  $C^*$ -algèbre appelée la  $C^*$ -algèbre enveloppante de  $B$ .

*Remarque 1.2.7.* On s'intéresse aux  $*$ -représentations de  $C_c(\mathcal{G})$  dans un espace de Hilbert  $H$  c'est-à-dire aux  $*$ -homomorphismes

$$\pi : C_c(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

continus pour la topologie faible sur  $\mathcal{B}(H)$  et tels que l'espace vectoriel engendré par  $\{\pi(f)\xi, f \in C_c(\mathcal{G}), \xi \in H\}$  est dense dans  $H$ .

**Définition 1.2.8.** Une  $*$ -représentation  $\pi$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|_I$  s'il existe  $M > 0$  tel que pour toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{G})$  on a

$$\|\pi(f)\| \leq M \|f\|_I$$

## 1.2.2 $C^*$ -algèbres réduites et pleines d'un groupoïde

On considère  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda(\mathcal{G})}$  l'ensemble des  $*$ -représentations continues et  $I$ -bornées de  $C_c(\mathcal{G})$ . On utilise ces  $*$ -représentations pour définir des  $C^*$ -normes.

**Définition 1.2.9.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde séparé localement compact muni d'un système de Haar  $\nu$  et  $C_c(\mathcal{G})$  la  $*$ -algèbre topologique associée.

La  $C^*$ -algèbre pleine  $C^*(\mathcal{G})$  est l'algèbre enveloppante de  $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$  c'est-à-dire le complété de l'algèbre de Banach involutive  $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$  pour la semi-norme définie pour toute fonction  $f$  dans  $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$  par

$$\|f\| := \sup_{\alpha \in \Lambda(\mathcal{G})} \|\pi_\alpha(f)\|$$

Pour définir la  $C^*$ -algèbre réduite du groupoïde, on a besoin des quelques remarques qui suivent : on considère  $x$  un élément de  $\mathcal{G}^{(0)}$  et  $L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x)$  l'espace de Hilbert obtenu en complétant  $C_c(\mathcal{G}^x)$  pour la norme

$$\|\xi\|_2 = \left( \int_{\mathcal{G}^x} |\xi(\gamma)|^2 d\nu^x(\gamma) \right)^{1/2}$$

On note  $\pi_x : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x))$  la  $*$ -représentation non-dégénérée définie pour tout  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  et tout  $g$  dans  $L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x)$  par

$$(\pi_x(f)(g))(\gamma) := \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma') g(\gamma'\gamma) d\nu^x(\gamma') = f \star g(\gamma)$$

Pour tout  $x$  dans  $\mathcal{G}^{(0)}$ , la  $*$ -représentation  $\pi_x$  vérifie

$$\|\pi_x(f)\| \leq \|f\|_I$$

**Définition 1.2.10.** La  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$  est la complétion de  $C_c(\mathcal{G})$  pour la  $C^*$ -norme réduite  $\|\cdot\|_r$  définie pour toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{G})$  par

$$\|f\|_r := \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\pi_x(f)\|$$

### 1.2.3 Modules de Hilbert et représentation régulière

On fait un rappel succinct sur les modules de Hilbert. On trouve de nombreuses références sur ce sujet notamment les ouvrages [Lan95], [MT05], [JT91], ou encore [Kas80a]. On rappelle quelques définitions concernant les opérateurs sur les modules de Hilbert ainsi que la construction du produit tensoriel interne.

**Définition 1.2.11.** Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  des  $B$ -modules de Hilbert.

- Un opérateur  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application qui admet un adjoint s'il existe une application  $T^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que,

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{E}$  et tout  $\eta \in \mathcal{F}$ .  $T^*$  est appelé l'adjoint de  $T$ .

- On note  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  l'ensemble des applications de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  qui admettent un adjoint. On note  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  pour  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ .

*Remarque 1.2.12.* Une application qui admet un adjoint est automatiquement  $\mathbb{C}$ -linéaire et même  $B$ -linéaire et est un opérateur borné.

Comme dans le cas des espaces de Hilbert, il existe des opérateurs de rang un dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $\xi$  dans  $E$  et  $\eta$  dans  $F$ , on pose  $\theta_{\xi, \eta}$  l'opérateur de  $\mathcal{L}(E, F)$  défini pour tout  $\zeta$  dans  $E$  par  $\theta'_{\xi, \eta}(\zeta) = \xi \langle \eta, \zeta \rangle$  et tel que  $\theta_{\xi, \eta}^* = \theta_{\eta, \xi}$ . Si  $T$  est un opérateur dans  $\mathcal{L}(F, G)$ , alors on a  $T \circ \theta_{\xi, \eta} = \theta_{T\xi, \eta}$  et si  $T$  est dans  $\mathcal{L}(G, E)$ , alors  $\theta_{\xi, \eta} \circ T = \theta_{\xi, T^*\eta}$ . On note  $\mathcal{K}_0(E, F)$  l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de rang un et la fermeture de  $\mathcal{K}_0(E, F)$  est appelée l'ensemble des opérateurs "compacts" du module de Hilbert  $E$  vers le module de Hilbert  $F$  (même s'ils ne sont pas compacts comme opérateurs entre espaces de Banach) et est noté  $\mathcal{K}(E, F)$ . On note  $\mathcal{K}(E)$  pour l'idéal fermé  $\mathcal{K}(E, E)$  de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

Soient  $B_1$  et  $B_2$  des  $C^*$ -algèbres et pour  $i$  dans  $\{1, 2\}$ , on considère  $E_i$  un  $B_i$ -module de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle -, - \rangle_i$  à valeurs dans  $B_i$ . On suppose qu'il existe un  $*$ -homomorphisme  $\phi : B_1 \rightarrow \mathcal{L}_{B_2}(E_2)$ . Le produit tensoriel interne est une construction qui permet d'associer à  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\phi$  un  $B_2$ -module de Hilbert noté  $E_1 \otimes_{\phi} E_2$  : pour cela on considère  $E_2$  muni de la structure de  $B_1$ -module définie pour tout  $b_1$  dans  $B_1$  et  $e_2$  dans  $E_2$  par  $b_1 \cdot e_2 = \phi(b_1)(e_2)$  et on note  $E_1 \odot_{B_1} E_2$  le produit tensoriel algébrique muni d'une structure de  $B_2$ -module à droite. Le produit tensoriel interne  $E_1 \otimes_{\phi} E_2$  est le complété du produit tensoriel algébrique  $E_1 \odot E_2$  pour le produit scalaire  $\langle -, - \rangle$  à valeur dans  $B_2$  défini pour tout  $e_1$  et  $e'_1$  dans  $E_1$  et tout  $e_2$  et  $e'_2$  dans  $E_2$  par

$$\langle e_1 \otimes e_2, e'_1 \otimes e'_2 \rangle = \langle e_2, \langle e_1, e'_1 \rangle_1 \cdot e'_2 \rangle_2$$

avec  $\langle e_1, e'_1 \rangle_1 \cdot e'_2 = \phi(\langle e_1, e'_1 \rangle_1)(e'_2)$ .

Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar  $\nu$ . On considère sur l'espace vectoriel complexe  $C_c(\mathcal{G})$  le produit scalaire à valeurs dans  $C_0(X)$  défini pour toutes fonction  $\xi$  et  $\zeta$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  par

$$\langle \xi, \zeta \rangle : x \rightarrow \int_{\mathcal{G}^x} \xi^*(\gamma) \zeta(\gamma^{-1}) d\nu^x(\gamma)$$

qui correspond en fait à la restriction à l'espace  $X$  de l'application  $\xi^* \star \zeta$ . On définit une structure de  $C_0(X)$ -module (à gauche) sur  $C_c(\mathcal{G})$  en posant,  $\xi.f(\gamma) = \xi(\gamma)f(s(\gamma))$ , pour toutes fonctions  $\xi$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ ,  $f$  de  $C_0(X)$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ . On obtient alors un  $C_0(X)$ -module préhilbertien et on note  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  le  $C_0(X)$ -module de Hilbert obtenu en quotientant  $C_c(\mathcal{G})$  par le sous-module des éléments de norme nulle.

**Proposition 1.2.13.** *L'ensemble  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  des opérateurs  $C_0(X)$ -linéaires qui admettent un adjoint est muni d'une structure de  $C_0(X)$ -algèbre.*

*Démonstration.* L'ensemble  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  des opérateurs  $C_0(X)$ -linéaires sur  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  qui admettent un adjoint est muni d'une structure de  $C^*$ -algèbre.

Par définition, les opérateurs de  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  sont  $C_0(X)$ -linéaires, c'est-à-dire que

$$T(\xi.f) = T(\xi).f$$

pour tout  $T$  dans  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ ,  $f$  dans  $C(X)$  et  $\xi$  dans  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ . L'algèbre des multiplicateurs  $M(\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu)))$  étant égal à  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ , on pose

$$\phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(M(\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))))$$

définie par  $\phi(f)(T)(\xi) := T(\xi.f) = T(\xi).f$ , pour tout  $T$  dans  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ ,  $f$  dans  $C_0(X)$  et  $\xi$  dans  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ .

L'homomorphisme  $\phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  étant non-dégénéré, il définit une structure de  $C_0(X)$ -algèbre sur  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .  $\square$

*Remarque 1.2.14.* Comme  $C_c(\mathcal{G})$  agit sur lui-même par convolution, on a un homomorphisme injectif  $\lambda : C_c(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  qui s'étend en une  $*$ -représentation de  $\lambda : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  dont l'image est  $*$ -isomorphe à la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$ . On obtient une représentation fidèle de la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  dans le  $C_0(X)$ -module de Hilbert  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ . L'image par la représentation  $\lambda$  de  $C_r^*(\mathcal{G})$  est une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ , qui n'est pas nécessairement stable par la structure de  $C_0(X)$ -module de  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .

### 1.3 $C_0(X)$ -algèbre et fibré de $C^*$ -algèbres

On va dans cette partie donner la définition et des généralités sur les  $C_0(X)$ -algèbres et les  $C^*$ -fibrés semi-continus supérieurement. On trouve des exposés détaillés et plus complets dans [Goe09] et [Wil07].

#### 1.3.1 $C_0(X)$ -algèbre

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre, on note  $M(A)$  l'algèbre des multiplicateurs de  $A$  qui est une  $C^*$ -algèbre pour laquelle  $A$  est un idéal essentiel. On note  $\mathcal{Z}(A)$  le centre de la  $C^*$ -algèbre  $A$  c'est-à-dire  $\mathcal{Z}(A) := \{a \in A : a.b = b.a, \forall b \in A\}$ .

**Définition 1.3.1.** *Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre et  $X$  un espace localement compact et séparé. On dit que  $A$  est une  $C_0(X)$ -algèbre s'il existe un  $*$ -homomorphisme*

$$\phi_A : C_0(X) \longrightarrow \mathcal{Z}(M(A))$$

qui est non-dégénéré au sens où  $\phi_A(C_0(X)).A = \text{Span}\{\phi_A(f).a / a \in A, f \in C_0(X)\}$  est dense dans  $A$ .

Si  $J$  est un idéal dans  $C_0(X)$ , la fermeture de  $\phi_A(J).A$  est un idéal dans  $A$ . Ce résultat permet de visualiser les  $C_0(X)$ -algèbres comme des objets fibrés au-dessus de  $X$  : en effet, en considérant  $J_x$  l'idéal des fonctions de  $C_0(X)$  qui s'annulent en  $x$ , on obtient un idéal  $I_x := \overline{\phi_A(J_x).A}$  dans  $A$  et le quotient  $A(x) := A/I_x$  peut être vu comme une fibre de  $A$  au point  $x$ . Pour tout  $a$  dans  $A$  et  $x$  dans  $X$ , on note  $a(x)$  l'image de  $a$  dans  $A(x)$  par l'application quotient  $A \rightarrow A(x)$  et ainsi  $a$  peut être interprété comme une fonction de  $X$  dans  $\bigsqcup_{x \in X} A(x)$ .

**Exemple 1.3.2.** Soit  $D$  une  $C^*$ -algèbre et  $X$  un espace séparé localement compact, alors  $A = C_0(X, D)$  est une  $C_0(X)$ -algèbre dont l'application de structure est donnée par  $\forall f \in C_0(X), \forall a \in A, \forall x \in X$

$$\phi_A(f)(a)(x) := f(x)a(x)$$

(Chaque fibre  $A(x)$  s'identifie à  $D$ )

**Exemple 1.3.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces séparé localement compacts et  $\mu : Y \rightarrow X$  une surjection.

Alors  $C_0(Y)$  est une  $C_0(X)$ -algèbre pour l'homomorphisme de structure donné par

$$\phi_{C_0(Y)}(f)g(y) := f(\mu(y))g(y)$$

(Chaque fibre  $C_0(Y)_x$  est isomorphe à  $C_0(\mu^{-1}(x))$ .)

**Exemple 1.3.4.** Soit  $\mathcal{A}$  un  $C^*$ -fibré semi-continu supérieurement et  $A = \Gamma_0(X, \mathcal{A})$ .

Alors  $A$  est une  $C_0(X)$ -algèbre pour l'homomorphisme de structure défini par  $\forall \mu \in C_0(X), \forall f \in \mathcal{A}, \forall x \in X$

$$\phi_A(\mu)f(x) := (\mu.f)(x) = \mu(x)f(x)$$

**Définition 1.3.5.** Soient  $A$  et  $B$  deux  $C_0(X)$ -algèbres. Un homomorphisme de  $C_0(X)$ -algèbre (appelé aussi  $C_0(X)$ -homomorphisme) est un homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  de  $C^*$ -algèbres qui est  $C_0(X)$ -linéaire au sens suivant : pour toute fonction  $f$  dans  $C_0(X)$  et tout  $a$  dans  $A$ , on a

$$\varphi(\phi_A(f).a) = \phi_B(f).(\varphi(a))$$

*Remarque 1.3.6.* Dans les conditions de la définition, pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\phi$  induit, par passage au quotient, un homomorphisme  $\phi_x : A_x \rightarrow B_x$  tel que  $\phi_x(a(x)) = \phi(a)(x)$ . De plus si  $\phi$  est un isomorphisme alors chaque  $\phi_x$  est un isomorphisme.

**Proposition 1.3.7.** Soit  $A$  et  $B$  deux  $C_0(X)$ -algèbres et  $\psi : A \rightarrow B$  un homomorphisme  $C_0(X)$ -linéaire. Alors pour tout  $x \in X$ ,  $\psi$  se factorise à travers l'application  $\psi_x : A(x) \rightarrow B(x)$  de sorte que  $\psi_x(a(x)) = \psi(a)(x)$ . De plus si  $\psi$  est un isomorphisme alors chaque application  $\psi_x$  en est un.

### 1.3.2 Fibré semi-continu supérieurement

**Définition 1.3.8.** Un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres sur un espace localement compact et séparé  $X$  est un espace topologique  $\mathcal{A}$  muni d'une application continue, ouverte et surjective  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  et d'une structure de  $C^*$ -algèbre sur chaque fibre  $\mathcal{A}_x := p^{-1}(\{x\})$  vérifiant les conditions suivantes

- (a)  $a \rightarrow \|a\|$  est semi-continu supérieurement comme application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}^+$
- (b) l'involution  $a \rightarrow a^*$  est continue comme application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$
- (c) les applications  $(a, b) \rightarrow a + b$  et  $(a, b) \rightarrow ab$  sont continues de  $\mathcal{A} * \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  où  $\mathcal{A} * \mathcal{A} = \{(a_1; a_2) \in \mathcal{A}^2 : p(a_1) = p(a_2)\}$

(d) pour tout complexe  $\lambda$ , l'application  $a \rightarrow \lambda.a$  est continue comme application  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

(e) Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que  $\lim_i p(a_i) = x$  et  $\lim_i \|a_i\| = 0$ , alors la suite  $(a_i)_{i \in I}$  converge vers  $0_x$ , où  $0_x$  est l'élément nul de  $\mathcal{A}_x$

Si on remplace dans l'axiome (a), la condition " $a \rightarrow \|a\|$  semi-continu supérieurement" par la condition " $a \rightarrow \|a\|$  est continue", alors le fibré  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  est appelé fibré continu de  $C^*$ -algèbres.

*Remarque 1.3.9.* Pour tout  $x$  dans  $X$ , la topologie de la fibre  $\mathcal{A}_x$  comme sous espace de l'espace topologique  $\mathcal{A}$  coïncide avec la topologie de la structure de  $C^*$ -algèbre. L'espace total d'un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbre n'est pas nécessairement séparé. Cependant, dans le cas d'un fibré continu de  $C^*$ -algèbres, l'espace total est séparé.

**Proposition 1.3.10.** Soit  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres. On considère  $a$  un élément de  $\mathcal{A}$  et  $(a_i)_{i \in I}$  une suite dans  $\mathcal{A}$  telle que  $p(a_i)$  converge dans  $X$  vers  $p(a)$ . Supposons que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une suite  $(u_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{A}$  et un élément  $u$  dans  $\mathcal{A}$  tel que

(a)  $(u_i)_{i \in I}$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{A}$

(b)  $p(u_i) = p(a_i)$ , pour tout  $i$  dans  $I$

(c)  $\|a - u\| < \varepsilon$

(d)  $\|a_i - u_i\| < \varepsilon$ , à partir d'un certain rang  $i_\varepsilon$

alors la suite  $(a_i)_{i \in I}$  converge vers  $a$  dans  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* L'espace  $X$  étant séparé, on a  $p(u) = p(a)$ . L'application  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  est ouverte, donc il existe une suite  $(c_i)_{i \in I'}$  où  $I' \subset I$  qui converge vers  $a$  et qui vérifie  $p(c_i) = p(a_i)$ , pour tout  $i$  dans  $I'$ . On considère un réel  $\varepsilon$  strictement positif et  $(u_i)_{i \in I}$  comme supposé dans l'énoncé. L'addition étant continue la suite  $(c_i - a_i)_{i \in I}$  converge vers  $a - u$  dans  $\mathcal{A}$ . L'ensemble  $\{b \in \mathcal{A} : \|b\| < \varepsilon\}$  étant ouvert et  $\|a - u\| < \varepsilon$ , on a  $\|c_i - u_i\| < \varepsilon$ . Par l'inégalité triangulaire on a  $\|a_i - c_i\| < 2\varepsilon$  donc  $\|a_i - u_i\|$  converge vers 0. Par la condition (e) de la définition 1.3.8, on a  $(a_i - c_i)$  converge vers  $0_{p(a)}$ .

$$a_i = (a_i - c_i) + c_i \longrightarrow 0_{p(a)} + a = a$$

□

**Définition 1.3.11.** Soient  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  et  $q : \mathcal{B} \rightarrow X$  deux fibrés semi-continus supérieurement de  $C^*$ -algèbres. Une application continue  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est appelée un homomorphisme de fibrés semi-continus supérieurement de  $C^*$ -algèbres si  $q \circ \phi = p$  et si pour tout  $x$  dans  $X$ , la restriction  $\phi_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_x$  est un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres.

Un isomorphisme de fibrés semi-continus supérieurement de  $C^*$ -algèbres est un homomorphisme de fibrés semi-continus supérieurement de  $C^*$ -algèbres bijectif et bicontinu.

### Espace des sections :

Soit  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres, on s'intéresse à l'espace des sections c'est-à-dire les applications  $f : X \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant la relation  $p(f(x)) = x$ , pour tout  $x$  dans  $X$ . On note  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  l'ensemble des sections continues du fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ . On peut munir l'ensemble  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  d'une structure naturelle d'espace vectoriel où pour toutes sections  $f, g$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  et tout complexe  $\lambda$ , on a

$$f + g : x \rightarrow f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \lambda.f : x \rightarrow \lambda f(x)$$

On peut également munir  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  d'une structure de  $C_0(X)$ -module à gauche en posant pour toute fonction  $\phi$  dans  $C_0(X)$  et toute section  $f$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ ,  $\phi \cdot f$  la section continue définie, pour tout  $x$  dans  $X$ , par

$$(\phi \cdot f)(x) = \phi(x)f(x)$$

On définit ci-dessous des sous  $C_0(X)$ -modules de  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  constitués de sections continues dont le support vérifie certaines conditions :

**Définition 1.3.12.** Soit  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres et  $f : X \rightarrow \mathcal{A}$  une section continue. L'application  $f$  est dite nulle à l'infini si pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif l'ensemble  $\{x \in X : \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$  est compact dans  $X$ . On note  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$  l'ensemble des sections continues de  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  qui sont nulles à l'infini. On note  $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$  le sous ensemble de l'ensemble  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$  constitué des sections à support compact dans  $X$ .

Les sous ensembles  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$  et  $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$  sont clairement des sous  $C_0(X)$ -modules de  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ .  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$  peut être muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ . Si  $\mathcal{A}$  est un  $C^*$ -fibré semi-continu supérieurement, alors on peut munir  $\Gamma(X, \mathcal{A})$  d'une involution et d'un produit.

On a le théorème suivant et un corollaire qui montrent les relations entre  $C_0(X)$ -algèbres et champs semi-continus supérieurement de  $C^*$ -algèbres

**Théorème 1.3.13.** Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est une  $C_0(X)$ -algèbre
2. il existe une application continue  $\sigma_A : \text{Prim}(A) \rightarrow X$
3. il existe un champ semi continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres  $p_A : \mathcal{A} \rightarrow X$  et un isomorphisme  $C_0(X)$ -linéaire de  $A$  dans  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$

De plus  $\mathcal{A}$  est un champ continu de  $C^*$ -algèbre si et seulement si  $\sigma_A$  est ouverte.

**Corollaire 1.3.14.** Soit  $A$  une  $C_0(X)$ -algèbre. On peut alors munir l'union disjointe  $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A(x)$  d'une unique topologie qui en fait un champ semi continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres tel que l'application qui pour tout  $a$  de  $A$  associe la section  $x \rightarrow a(x)$  est un isomorphisme  $C_0(X)$ -linéaire de  $A$  dans  $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ .

### 1.3.3 Construction de "tiré en arrière"

**Définition 1.3.15.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts et séparés et  $\sigma : Y \rightarrow X$  une application continue. On considère  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  un fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres. Le tiré en arrière de  $\mathcal{A}$  (par  $\sigma : Y \rightarrow X$ ) est le sous espace de  $Y \times \mathcal{A}$  défini par

$$\sigma^* \mathcal{A} = \{(y, a) \in Y \times \mathcal{A} : \sigma(y) = p(a)\}$$

$\sigma^* \mathcal{A}$  est muni de la topologie induite par la topologie produit de  $Y \times \mathcal{A}$  et l'application  $q : \sigma^* \mathcal{A} \rightarrow Y$  définie, pour tout  $(y, a)$  dans  $\sigma^* \mathcal{A}$ , par  $q(y, a) = y$  est continue.

Le tiré en arrière  $\sigma^* \mathcal{A}$  est lui-même un fibré de  $C^*$ -algèbres qui est semi-continu supérieurement si  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  l'est et qui est continu si  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  l'est.

**Définition 1.3.16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts et séparés et  $\sigma : Y \rightarrow X$  une application continue. On considère  $A$  une  $C_0(X)$ -algèbre et  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  le fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres associé à  $A$ . Le tiré en arrière de la  $C_0(X)$ -algèbre  $A$  (par l'application  $\sigma : Y \rightarrow X$ ) est la  $C_0(Y)$ -algèbre  $\sigma^* A$  définie par

$$\sigma^* A := \Gamma_0(Y, \sigma^* \mathcal{A})$$

Si l'application continue  $\sigma : Y \rightarrow X$  est surjective le tiré en arrière  $\sigma^*A$  coincide avec la  $C_0(Y)$ -algèbre  $C_0(Y) \otimes_{C_0(X)} A$  où  $C_0(Y)$  est considéré comme  $C_0(X)$ -algèbre. La proposition qui suit donne une généralisation de cette identification.

**Proposition 1.3.17.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts et séparés et  $\sigma : Y \rightarrow X$  une application continue. On considère  $A$  une  $C_0(X)$ -algèbre et  $p : \mathcal{A} \rightarrow X$  le fibré semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres associé à  $A$ . Soit  $f$  une fonction dans  $C_c(Y)$  et  $a$  dans  $\sigma^*A$ . On pose  $f \otimes a : y \rightarrow f(y)a(\sigma(y))$  pour tout  $y$  dans  $Y$ . Alors  $f \otimes a$  est dans  $\Gamma_c(Y, \sigma^*A)$  et*

$$C_c(Y) \odot A := \text{span}\{f \otimes a : f \in C_c(Y), a \in \sigma^*A\}$$

*est dense dans  $\sigma^*A$*



## Chapitre 2

# $K$ -théorie équivariante : action propre d'un groupe discret

Dans l'article [Seg68], Segal construit un groupe de  $K$ -théorie équivariante, noté  $K_G^*(X)$ , dans le cadre de l'action d'un groupe compact  $G$  sur un espace séparé compact  $X$ . Il s'agit ici d'un cas particulier d'une action propre d'un groupe sur un espace. Cette définition du groupe de  $K$ -théorie équivariante consiste en des différences formelles  $E_1 - E_0$  de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $X$  dont les fibres sont *de dimension finie*, modulo une relation d'équivalence

$$K_G^0(X) = \{E_0 - E_1\} / \sim$$

où la relation d'équivalence est donnée par :  $E_0 - E_1 \sim E'_0 - E'_1$  si et seulement si il existe  $F$  un fibré vectoriel  $G$ -équivariant sur  $X$  tel que la relation suivante est vérifiée

$$E_0 \oplus E'_1 \oplus F \cong E'_0 \oplus E_1 \oplus F$$

Le théorème de Green-Julg donne une bijection entre les groupes de  $K$ -théories  $K_G^0(X)$  et  $K_0(C_0(X) \rtimes G)$ .

Dans le livre [Phi89], Phillips généralise la construction du groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^*(X)$  dans le cadre d'une action propre d'un groupe topologique  $G$  localement compact sur un espace localement compact et séparé  $X$ . La construction de Phillips est dans la lignée de celle de Segal mais utilise une classe plus grande de fibré vectoriel localement trivial : ce sont les fibrés de Hilbert sur  $X$  c'est-à-dire les fibrés localement triviaux sur  $X$  dont les fibres sont des espaces de Hilbert  $H$  et le groupe de structure est l'ensemble des isomorphismes isométriques de  $H$ . Pour tout fibré de Hilbert  $E \rightarrow X$ , on note  $\Gamma(E)$  (resp.  $\Gamma_c(E)$ , resp.  $\Gamma_0(E)$ ) l'ensemble des sections continues (resp. continues à support compact, resp. continues et nulles à l'infini) de  $E$ .

L'auteur introduit l'action d'un groupe  $G$  sur un fibré hilbertien et définit alors la notion de fibré  $G$ -hilbertien de la manière suivante :

**Définition 2.0.18.** [Phi89] *Un fibré  $G$ -hilbertien sur un  $G$ -espace  $X$  est la donnée d'un fibré de Hilbert  $E$  sur  $X$  et d'une action continue de  $G$  sur  $E$  par isométrie linéaire telle que  $\pi : E \rightarrow X$  est équivariante. En d'autres termes, il s'agit d'une application continue  $G \times E \rightarrow E$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$  et tout  $g$  dans  $G$ , l'action de  $g$  sur  $E_x$  est une isométrie linéaire de  $E_x$  vers  $E_{gx}$ .*

Dans le cas d'un fibré  $G$ -hilbertien  $\pi : E \rightarrow X$ , l'espace  $\Gamma_0(E)$  est muni d'une structure de  $C_0(X)$ -module de Hilbert avec une action compatible du groupe  $G$ .

Phillips définit également un morphisme équivariant entre fibrés  $G$ -hilbertiens : soient  $E$  et  $F$  deux fibrés  $G$ -hilbertiens sur un  $G$ -espace  $X$ , on appelle morphisme toute application continue  $t : E \rightarrow F$  telle que  $t : E_x \rightarrow F_x$  est une application linéaire pour tout  $x$  de  $X$  et telle que l'application  $t^* : F \rightarrow E$  définie sur chaque fibre  $F_x$  par  $\langle t^*\xi, \eta \rangle = \langle \xi, t\eta \rangle$  pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\xi$  dans  $F_x$  et  $\eta$  dans  $E_x$ , est continue. Le morphisme  $t : E \rightarrow F$  est dit équivariant s'il vérifie  $t(g.\xi) = g.(t(\xi))$ , pour tout  $g$  dans  $G$  et  $\xi$  dans  $E$ . On note  $\text{Mor}(E, F)$  l'ensemble des morphismes de fibrés  $G$ -hilbertiens de  $E$  dans  $F$  muni de l'action de  $G$  définie, pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $t$  dans  $\text{Mor}(E, F)$  et  $\xi$  dans  $E$  par  $(g.t)(\xi) := g.(t(g^{-1}\xi))$ .

Phillips s'inspire de la notion de complexes de Fredholm définie par Segal dans [Seg70] pour définir la notion de morphisme  $G$ -Fredholm défini de la manière suivante :

**Définition 2.0.19.** [Phi89] Soit  $E$  et  $F$  deux fibrés  $G$ -hilbertiens sur un  $G$ -espace  $X$  et  $t : E \rightarrow F$  un morphisme

- (a) on appelle support de  $t$  l'espace  $\text{Supp}(t) := \overline{\{x \in X : t_x \neq 0\}}$
- (b)  $t : E \rightarrow F$  est un morphisme compact si pour tout compact  $K$  dans  $X$ ,

$$\overline{\{t(\xi) : \xi \in E_x, x \in K, \|\xi\| = 1\}} \text{ est compact}$$

- (c) le morphisme  $t$  est dit  $G$ -Fredholm s'il est  $G$ -équivariant et s'il existe  $s : F \rightarrow E$  un morphisme tel que  $1 - st$  et  $1 - ts$  sont des morphismes compacts à support  $G$ -compact.

On appelle  $K$ -cocycle pour le  $G$ -espace  $X$  tout triplet  $(E, F, t)$ , où  $E$  et  $F$  sont des fibrés  $G$ -hilbertiens et  $t : E \rightarrow F$  un morphisme  $G$ -Fredholm. Phillips définit des relations d'équivalences sur les  $K$ -cocycles : soient  $X$  un  $G$ -espace et  $(E_0, F_0, t_0)$  et  $(E_1, F_1, t_1)$  deux  $K$ -cocycles pour le  $G$ -espace  $X$ . Ils sont isomorphes s'il existe des morphismes unitaires  $G$ -équivariants  $u : E_0 \rightarrow E_1$  et  $v : F_0 \rightarrow F_1$  tels que  $t_1 \circ u = v \circ t_0$ . Ils sont dits homotopes s'il existe un  $K$ -cocycle  $(E, F, t)$  pour le  $G$ -espace  $[0, 1] \times X$  tel que la restriction  $(E, F, t)|_{\{i\} \times X}$  est isomorphe à  $(E_i, F_i, t_i)$ , pour  $i = \{0, 1\}$  et  $(E, F, t)$  est appelée homotopie de  $(E_0, F_0, t_0)$  vers  $(E_1, F_1, t_1)$ .

**Définition 2.0.20.** Soit  $X$  un  $G$ -espace propre. On dit qu'un  $K$ -cocycle  $\sigma = (E, F, t)$  est trivial si le morphisme  $t$  est unitaire c'est-à-dire si  $(E, F, t)$  est isomorphe à  $(E, E, 1)$ . La somme directe des deux  $K$ -cocycles  $\lambda_1 = (E_1, F_1, t_1)$  et  $\lambda_2 = (E_2, F_2, t_2)$  est le  $K$ -cocycle

$$\lambda_1 \oplus \lambda_2 := (E_1 \oplus E_2, F_1 \oplus F_2, t_1 \oplus t_2)$$

On dit que deux  $K$ -cocycles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont équivalents s'il existe un  $K$ -cocycle trivial  $\sigma$  tel que  $\lambda_1 \oplus \sigma$  et  $\lambda_2 \oplus \sigma$  sont homotopes. On note  $K_G^0(X)$  l'ensemble des classes d'équivalences de  $K$ -cocycles pour le  $G$ -espace  $X$ .

En utilisant la  $KK$ -théorie de Kasparov, Phillips donne une version généralisée de l'isomorphisme de Green-Julg dans [Phi89] et prouve l'isomorphisme entre le groupes de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(X) \rtimes G)$  et  $K_G^0(X)$ .

Même si dans certains cas d'action propre de groupes non compacts, comme les groupes isomorphes à un sous groupe fermé du groupe  $GL_n(\mathbb{R})$  avec  $n$  entier, les fibrés de dimension finie suffisent à engendrer le groupe de  $K$ -théorie équivariante, l'idée d'introduire des fibrés de dimension infinie dans le cas des actions propres en remplacement des fibrés de dimension finie (comme dans la version de Seagal) est nécessaire : en effet, Phillips donne l'exemple du groupe localement compact et non compact  $G = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4 \rtimes \mathbb{Z}^2$  agissant proprement sur l'espace localement compact et séparé  $X = \mathbb{R}^2$  pour lequel il prouve que les classes de projections dans les algèbres de matrices sur  $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes ((\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4) \rtimes \mathbb{Z}^2)$ , qui correspondent aux classes représentées

par des fibrés de dimension finie, n'engendrent pas le groupe  $K_0(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes ((\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4) \rtimes \mathbb{Z}^2))$  montrant ainsi que les fibrés de dimension finie ne suffisent pas pour définir le groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(\mathbb{R}^2)$ .

Dans cette section, on considère l'action propre d'un groupe discret sur un espace localement compact et séparé  $M$  tel que le quotient  $M/G$  est un espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact. L'objectif principal consiste à démontrer, quand  $M$  satisfait une condition d'existence de certains fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants, que les  $K$ -cocycles définis uniquement à l'aide de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants de dimension finie sur  $M$  suffisent à décrire complètement le groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(M)$ .

## 2.1 Contexte

Dans [Lüc05], l'auteur définit des espaces classifiants pour des familles  $\mathcal{F}$  (fermées par conjugaison et intersection finie) de sous groupes fermés d'un groupe topologique  $G$ . Il donne deux versions de tels espaces classifiants, l'une sous forme de  $G$ - $CW$ -complexes, notée  $E_{\mathcal{F}}G$  et l'autre sous forme de  $G$ -espace qu'on appellera numérable ("numerable  $G$ -space" dans [Lüc05]), notée  $J_{\mathcal{F}}G$ . Sans s'attarder sur les détails de l'article de Lück, on donne ci-dessous quelques résultats de [Lüc05].

Dans la version des  $G$ - $CW$ -complexes, un modèle  $E_{\mathcal{F}}G$  de classifiant pour la famille  $\mathcal{F}$  de sous groupes de  $G$  est un  $G$ - $CW$ -complexe dont tous les groupes d'isotropie sont dans  $\mathcal{F}$  et tel que pour tout  $G$ - $CW$ -complexe  $Y$  dont les groupes d'isotropie sont dans  $\mathcal{F}$ , il existe une unique (à  $G$ -homotopie près) application continue et  $G$ -équivariante  $Y \rightarrow E_{\mathcal{F}}G$ . Le théorème 1.9 de cet article assure l'existence d'un tel espace classifiant qui peut être vu comme un objet terminal dans la catégorie des classe d'équivalence  $G$ -homotopique des  $G$ - $CW$ -complexes, dont les groupes d'isotropie sont dans  $\mathcal{F}$ .

On rappelle qu'un  $G$ -espace est dit  $\mathcal{F}$ -numérable s'il existe un recouvrement d'ouverts  $G$ -invariants  $\{U_i : i \in I\}$  tel que pour tout  $i$  dans  $I$ , il existe

- 1) une application continue  $G$ -invariante  $U_i \rightarrow G/G_i$ , avec  $G_i \in \mathcal{F}$
- 2) une partition de l'unité localement finie  $\{e_i : i \in I\}$  subordonnée au recouvrement constituée de fonctions continues  $G$ -invariantes

Dans la version des  $G$ -espaces numérables, un modèle  $J_{\mathcal{F}}G$  de classifiant pour la famille  $\mathcal{F}$  de sous groupes de  $G$  est un  $G$ -espace qui est  $\mathcal{F}$ -numérable et tel que pour tout  $G$ -espace  $Y$  qui est  $\mathcal{F}$ -numérable, il existe une unique (à  $G$ -homotopie près) application continue et  $G$ -équivariante  $Y \rightarrow J_{\mathcal{F}}G$ . Le théorème 2.5 de l'article [Lüc05] assure l'existence d'un tel espace classifiant  $J_{\mathcal{F}}G$ , dont les groupes d'isotropie sont dans  $\mathcal{F}$  et qui peut être vu comme un objet terminal dans la catégorie des classe d'équivalence  $G$ -homotopique des  $G$ -espaces  $\mathcal{F}$ -numérables.

L'auteur prouve que le  $G$ - $CW$ -complexe  $E_{\mathcal{F}}G$  est  $\mathcal{F}$ -numérable induisant alors l'existence d'une application continue et  $G$ -équivariante  $E_{\mathcal{F}}G \rightarrow J_{\mathcal{F}}G$ , unique à  $G$ -homotopie près. En comparant ces deux versions pour différents groupes topologiques  $G$ , il apparait dans certains cas, notamment celui des groupes discrets, que l'application  $E_{\mathcal{F}}G \rightarrow J_{\mathcal{F}}G$  est une équivalence  $G$ -homotopique.

Dans l'article [BHS10], Baum, Higson et Schick étudient les  $G$ -espaces propres  $G$ -compacts dans le cas où  $G$  est un groupe discret. Pour tout  $G$ -espaces propres  $G$ -compacts  $X$ , ils prouvent dans le théorème 6.8 que le groupe de Grothendieck associé au monoïde des fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur  $X$  est isomorphe au groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(X) \rtimes G)$  et donc que

le groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(X)$  peut être décrit uniquement en termes de fibrés vectoriels  $G$ -équivariants (de dimension finie) sur  $X$ . Pour démontrer ce résultat, Baum, Higson et Schick s'appuient sur le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1** ([BHS10]). *Pour tout  $G$ -espace propre  $G$ -compact, il existe un fibré vectoriel  $G$ -équivariant  $E \rightarrow X$  tel que, pour tout  $x$  dans  $X$ , la fibre  $E_x$  contient un multiple de la représentation régulière du groupe d'isotropie  $G_x$  du point  $x$ .*

Pour prouver le théorème 2.1.1, les auteurs utilisent le théorème 2.8 de l'article [LO01] qui annonce le même résultat dans le cas des  $G$ -CW-complexes  $X$  qui sont  $G$ -finis ( $G$  discret). Le groupe  $G$  étant discret, d'après le succinct rappel sur les espaces classifiants, les  $G$ -espaces  $\underline{E}G$  et  $\underline{J}G$  sont  $G$ -homotopiquement équivalents et il existe alors une application (unique à  $G$ -homotopie près) continue et  $G$ -équivariante  $\pi : X \rightarrow \underline{E}G$ , dont l'image est contenue dans un sous complexe  $G$ -fini de  $\underline{E}G$  et sur lequel il existe donc un tel fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant. Il suffit alors de le "tirer en arrière" par l'application  $\pi$  pour prouver le théorème 2.1.1. Les auteurs prouvent alors que le théorème 2.1.1 équivaut à l'existence d'une approximation de l'unité constituée de projections dans la  $C^*$ -algèbre de produit croisé (réduit)  $C_0(X) \rtimes G$ .

Le travail qui suit adopte un cheminement similaire à celui de l'article [BHS10] dans un contexte plus général d'un point de vue topologique. On considère dans ce travail le cas d'un groupe discret  $G$  agissant à droite de manière continue sur un espace localement compact et séparé  $M$  et on suppose que l'espace  $M$  est un  $G$ -espace propre et  $\sigma$ - $G$ -compact au sens suivant :

**Définition 2.1.2.** *Soit  $G$  un groupe discret, on dit qu'un  $G$ -espace  $M$  est propre et  $\sigma$ - $G$ -compact si*

- (i)  *$M$  est un espace localement compact et séparé muni d'une action continue du groupe  $G$*
- (ii) *l'espace quotient  $M/G$  est  $\sigma$ -compact et séparé (pour la topologie quotient)*
- (iii) *pour tout  $m$  dans  $M$  il existe un voisinage  $U_m$  de  $m$ , un sous groupe  $H_m$  fini et une application continue et  $G$ -équivariante  $\pi_m : U_m \rightarrow G/H_m$*

C'est bien sûr la condition (ii) qui diffère du cadre de l'article [BHS10] dans lequel les  $G$ -espaces propres considérés sont tels que l'espace quotient  $M/G$  est compact, ce qui est une condition plus forte. La classe des  $G$ -espaces propres et  $\sigma$ - $G$ -compacts que nous étudions, contient entre autre les  $G$ -espaces propres  $G$ -compacts étudiés par Baum, Higson et Schick. Cet élargissement du cadre d'étude n'est pas sans conséquence puisque l'on ne peut utiliser en général le théorème 2.1.1 pour les  $G$ -espaces propres et  $\sigma$ - $G$ -compacts. C'est pour cette raison qu'on suppose que les  $G$ -espaces propres et  $\sigma$ - $G$ -compacts  $M$  qu'on étudie, vérifient la condition suivante :

**(Hyp) :** **pour tout sous espace  $G$ -compact  $X$  de  $M$ , il existe un  $G$ -fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  tel que, pour tout  $x$  dans  $X$ , la fibre  $E_x$  contient la représentation régulière du groupe d'isotropie  $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$**

Cette hypothèse, qui est vérifiée dans le cas où  $M$  est un  $G$ -espace propre  $G$ -compact par le biais du théorème 2.1.1, nous permet de montrer l'existence d'une grande richesse de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur l'espace  $M$ , comme on le démontre dans la sous section 2.2. On utilise pour cela le lemme suivant qui est adaptation du corollaire 5.2 de [BHS10] et qui découle de l'hypothèse (Hyp) :

**Lemme 2.1.3.** *Soit  $M$  un  $G$ -espace propre  $\sigma$ - $G$ -compact vérifiant la condition (Hyp) alors pour tout  $X$  sous espace  $G$ -compact de  $M$  et  $F$  un  $G$ -fibré vectoriel sur  $X$ , il existe un  $G$ -fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  tel que  $F$  puisse être plongé dans  $E|_X$ .*

*Démonstration.* D'après la condition (Hyp) vérifiée par  $M$ , il existe un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant  $E \rightarrow M$  tel que pour tout  $x$  dans  $X$ , la fibre  $E_x$  contient un multiple de la représentation régulière du groupe d'isotropie  $G_x$ . Le  $G$ -espace  $X$  étant propre et  $G$ -compact, il existe une famille  $\{U_i\}_{i=1}^n$  d'ouverts  $G$ -invariants dans  $M$  vérifiant :

- (a)  $X$  est inclus dans  $\bigcup_{i=1}^n U_i$
- (b) pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , il existe  $H_i$  un sous groupe fini de  $G$  et  $\pi_i : U_i \rightarrow G/H_i$  une application continue et  $G$ -équivariante
- (c) pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , la restriction  $F|_{U_i}$  est isomorphe au tiré en arrière par l'application  $\pi_i$  d'un fibré vectoriel sur  $G/H_i$
- (d) pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , la restriction  $E'|_{U_i}$  est isomorphe au tiré en arrière par l'application  $\pi_i$  d'un fibré vectoriel sur  $G/H_i$

où les assertions (c) et (d) découlent du lemme 3.7 de l'article [LO01]. Pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et quitte à remplacer  $E$  par une somme directe finie  $E \oplus \dots \oplus E$ , le fibré  $F|_{U_i}$  peut être plongé comme un facteur de  $E$ . En utilisant une partition de l'unité constituée de fonctions continues,  $G$ -invariantes et à support  $G$ -compacts dans les ouverts  $U_i$  et quitte à remplacer encore une fois  $E$  par une somme directe finie, on a alors un plongement du fibré  $F$  dans  $E|_X$ .  $\square$

Si dans le cas d'un  $G$ -espace propre  $G$ -compact  $X$  l'existence d'un tel fibré sur  $X$  équivaut à l'existence d'une approximation de l'unité constituée de projections dans la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $C_0(X) \rtimes G$ , la situation est différente dans le cas plus général d'un  $G$ -espace propre  $\sigma$ - $G$ -compact  $M$  : on obtient également une approximation de l'unité pour la  $C^*$ -algèbre  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections mais celle-ci se trouve dans l'algèbre des multiplicateurs de la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $\mathcal{M}(C_0(M) \rtimes G)$ . Il s'agit alors d'utiliser cette approximation de l'unité pour la  $C^*$ -algèbre  $C_0(M) \rtimes G$  constituée de projections dans  $\mathcal{M}(C_0(M) \rtimes G)$  pour montrer, à l'aide de calcul de  $KK$ -théorie, que le groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(M)$  est défini complètement à l'aide de  $K$ -cocycles dont les  $G$ -fibrés hilbertiens qui le composent, sont des fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur  $M$  dont les fibres sont de dimension finie.

Le travail qui suit se découpe en trois parties : la première étudie les fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur l'espace  $M$  et notamment l'ensemble des  $G$ -fibrés standards qui est muni d'une structure d'ordre grâce à l'hypothèse (Hyp). On s'intéresse dans la deuxième partie à la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $C_0(M) \rtimes G$  et le lien entre l'hypothèse (Hyp) et l'existence d'une approximation de l'unité constituée de projections. Enfin la troisième partie est dédiée à la description du groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(M)$  : on montre en utilisant l'approximation de l'unité de projections et par les calculs de  $KK$ -théorie, que l'on peut décrire complètement  $K_G^0(M)$  à l'aide de  $K$ -cocycles dont les fibrés  $G$ -hilbertiens sont uniquement des fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur  $M$  (dont les fibres sont de dimension finie).

## 2.2 Fibrés vectoriels complexes $G$ -équivariant

L'objectif de cette section est de montrer comment la condition (Hyp) vérifiée par un  $G$ -espace propre,  $\sigma$ - $G$ -compact induit l'existence d'une structure riche de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$ . On va suivre le raisonnement de l'article [BHS10] en introduisant la notion de  $G$ -fibrés standards.

**Définition 2.2.1.** *Un  $G$ -fibré standard sur un  $G$ -espace propre,  $\sigma$ - $G$ -compact  $M$  est un sous espace  $G$ -invariant  $E$  de  $M \times \mathbb{C}[G]$  tel que pour tout sous espace compact  $K$  de  $M$ , il existe un ensemble fini  $S_K$  dans  $G$  pour lequel l'intersection de  $E$  avec  $K \times \mathbb{C}[G]$  est un sous fibré vectoriel complexe du fibré vectoriel complexe trivial  $K \times \mathbb{C}[S_K]$ .*

*Remarque 2.2.2.* Les notions de  $G$ -fibrés standards sur  $M$  et de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$  sont proches par les deux observations suivantes :

- (i) Pour tout sous espace  $K$  compact dans  $M$ , la restriction  $E|_K$  est munie de la topologie induite par l'application injective  $E|_K \hookrightarrow K \times \mathbb{C}[S_K]$ . On munit ainsi l'espace  $G$ -invariant  $E$  d'une structure de fibré vectoriel complexe et  $G$ -équivariant.
- (ii) De plus tout fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant  $F \rightarrow M$  est isomorphe à un  $G$ -fibré standard : il suffit pour cela de considérer les trivialisations locales d'un tel fibré et en utilisant un partition de l'unité de fonctions  $G$ -invariantes.

On va montrer que l'ensemble des  $G$ -fibrés standards est muni d'une structure d'ensemble ordonné qui est exprimée dans le théorème 2.2.6 . Pour aboutir à ce résultat, on s'aidera des trois lemmes qui suivent :

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $E$  un  $G$ -fibré vectoriel sur  $M$  et  $E_2$  un  $G$ -fibré standard sur  $M$ , alors il existe un  $G$ -fibré standard  $E_1$  sur  $M$  tel que*

1.  $E_1$  est isomorphe à  $E$
2.  $E_1$  est orthogonal à  $E_2$

*Démonstration.* La construction se fera en trois étapes :

**Etape 1 : ETUDE LOCALE DE  $E$**

On a un recouvrement de  $M$  par des ouverts  $G$ -invariants  $(U_i)_{i \in I}$  tel qu'il existe une famille  $(H_i)_{i \in I}$  de sous-groupes finis de  $G$  et une famille  $(\pi_i)_{i \in I}$  d'applications continues  $G$ -équivariantes, où  $\pi_i : U_i \rightarrow G/H_i$ , pour tout  $i$  dans  $I$ . Quitte à restreindre les ouverts  $U_i$ , on peut supposer (d'après le lemme 3.7 de [LO01]) que, pour tout  $i$  dans  $I$ , la restriction de  $E$  à l'ouvert  $U_i$  est le "tiré-en-arrière" d'un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $G/H_i$ , qui sont de la forme  $G \times_{H_i} V_i$ , où  $(V_i, r_i)$  est une représentation de dimension finie du groupe  $H_i$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \longrightarrow & G \times_{H_i} V_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \longrightarrow & G/H_i \end{array}$$

L'action du groupe  $H_i$  sur  $G \times V_i$  étant donnée par la relation  $h(g, \xi) = (gh^{-1}, h\xi)$ , la classe d'un élément est

$$[g, \xi]^i = \{(gh^{-1}, h\xi) : h \in H_i\}$$

Pour tout  $g$  dans  $G$ , on note  $\bar{g}^i$  la classe de  $g$  dans  $G/H_i$  et  $\rho_i : G \times_{H_i} V_i \rightarrow G/H_i$  l'application canonique qui, à toute classe  $[g, \xi]^i$  de  $G \times_{H_i} V_i$ , associe  $\rho_i([g, \xi]^i) := \bar{g}^i$ , où  $\bar{g}^i$  est la classe de  $g$  dans le groupe quotient  $G/H_i$ .

On peut décrire explicitement  $E|_{U_i}$  pour tout  $i$  dans  $I$  de la manière suivante :

$$E|_{U_i} = \{(x, [g, \xi]^i) \in U_i \times (G \times_{H_i} V_i) : \pi_i(x) = \rho_i([g, \xi]^i) = \bar{g}^i\}$$

De plus, du fait que  $V_i$  soit une représentation de dimension finie du sous groupe  $H_i$ , il existe un entier  $n_i$  tel qu'on a les inclusions suivantes

$$V_i \hookrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n_i} \mathbb{C}[H_i] \hookrightarrow \mathbb{C}[G_\infty]$$

et l'application suivante est alors bien définie

$$\begin{aligned} G \times_{H_i} V_i &\longrightarrow G/H_i \times \mathbb{C}[G] \\ [g, \xi]^i &\longrightarrow (\bar{g}^i, g\xi) \end{aligned}$$

Pour la trivialisatation de  $E$  sur le sous espace  $U_i$ , on a alors

$$\begin{aligned} E|_{U_i} &= \{ (x, [g, \xi]^i) \in U_i \times (G \times_{H_i} V_i) : \pi_i(x) = \rho_i([g, \xi]^i) = \bar{g}^i \} \\ &\subseteq \{ (x, (g, \eta)) \in U_i \times (G/H_i \times \mathbb{C}[G]) : \pi_i(x) = [g]_i \text{ et } g^{-1}\eta \in \bigoplus_{finie} \mathbb{C}[H_i] \} \\ &\subseteq \{ (x, \eta) \in U_i \times \mathbb{C}[G] : \pi_i(x) = \bar{g}^i \text{ et } g^{-1}\eta \in \bigoplus_{finie} \mathbb{C}[H_i] \} \end{aligned}$$

L'application  $j_i : E|_{U_i} \hookrightarrow U_i \times \mathbb{C}[G]$  définie, pour tout  $(x, [g, \xi]^i)$  dans  $E|_{U_i}$ , par  $j_i(x, [g, \xi]^i) := (x, g\xi)$  auparavant est continue, injective et  $G$ -équivariante :

- Injectivité : l'application  $j_i$  définit un morphisme de fibrés vectoriels dont on voit directement que le noyau est réduit à l'élément nul,  $ker(j_i) = \{0\}$ . L'application est injective.
- $G$ -équivariance : on choisit  $(x, [g, \xi]^i)$  dans  $E|_{U_i}$  et  $\gamma$  dans  $G$ , alors l'action de  $\gamma$  sur  $(x, [g, \xi]^i)$  est donnée par  $(\gamma x, [\gamma g, \xi]^i)$  et

$$\gamma j_i((x, [g, \xi]^i)) = \gamma(x, g\xi) = (\gamma x, \gamma g\xi) = j_i((\gamma x, [\gamma g, \xi]^i)) = j_i(\gamma(x, [g, \xi]^i))$$

ce qui montre que l'application est  $G$ -équivariante.

### Étape 2 : STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE $E$

On va étudier localement, sur les ouverts d'une certaine trivialisatation, le  $G$ -fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant  $E$ . Le  $G$ -espace  $M$  est  $\sigma$ - $G$ -compact c'est-à-dire  $M$  est réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$  de  $G$ -espaces propres  $G$ -compacts (donc  $G$ -invariants) qui vérifient  $M_n \subset \overset{\circ}{M}_{n+1}$ , pour tout entier  $n$ . Ceci équivaut à l'existence d'une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces compacts dans  $M$  telle que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  et vérifiant  $M_n = GK_n$  pour tout entier  $n$ . On définit la famille des espaces  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $C_n = M_n \setminus M_{n-1}$  et  $C_0 = M_0$ . On remarque que les espaces  $C_n$  sont invariants par l'action de  $G$ , ce qui permet d'affiner la trivialisatation du  $G$ -fibré vectoriel  $E$  en remplaçant la famille  $(U_i)_{i \in I}$  par une famille d'ouverts  $G$ -invariants  $(U_{n,i})_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ i \in I_n}}$  telle que pour tout entier  $n$ , on a

$$C_n \subset \bigcup_{i \in I_n} U_{n,i} \quad \text{avec} \quad U_{n,i} \cap C_{n \pm 2} = \emptyset$$

Par le même argument que dans l'étape 1, on a, pour tout entier  $n$  et tout  $i$  dans  $I$ , le diagramme commutatif qui suit

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_{n,i}} & \longrightarrow & G \times_{H_{n,i}} V_{n,i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{n,i} & \longrightarrow & G/H_{n,i} \end{array}$$

et les applications  $j_{n,i} : E|_{U_{n,i}} \longrightarrow U_{n,i} \times \mathbb{C}[G]$  sont toujours continues, injectives et  $G$ -équivariantes.

On supposera également que pour tout couple  $(n, i)$  dans  $\mathbb{N} \times I_n$ , l'espace  $\pi_{n,i}^{-1}(H_{n,i})$  est relativement compact dans  $M$ .

On ne considèrera désormais plus les éléments de  $E|_{U_{n,i}}$  comme étant les triplets  $(x, [g, \xi])$  mais plutôt leurs images dans  $U_i \times \mathbb{C}[G]$  par l'application  $j_{n,i}$ .

Pour le  $G$ -fibré standard  $E_2$ , par définition, on peut associer à tout compact  $K_n$  défini précédemment, une partie finie  $S_{K_n}$  du groupe  $G$  telle que

$$E_2|_{K_n} \hookrightarrow K_n \times \mathbb{C}[S_{K_n}]$$

est un fibré vectoriel complexe (non nécessairement  $G$ -équivariant).

a) **Pour  $n = 0$  et  $i = 0$  :**

On travaille sur le sous espace  $U_{0,0}$  inclus dans  $M$ . On a la trivialisatoin locale suivante

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_{0,0}} & \longrightarrow & G \times_{H_{0,0}} V_{0,0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{0,0} & \longrightarrow & G/H_{0,0} \end{array}$$

où  $\pi_{0,0} : U_{0,0} \rightarrow G/H_{0,0}$  est une application continue et  $G$ -équivariante.

Pour tout élément  $y$  de  $U_{0,0}$  il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $\pi_{0,0}(y) = gH_{0,0}$ , par  $G$ -équivariance de l'application, on a alors

$$\pi_{0,0}(g^{-1}y) = g^{-1}\pi_{0,0}(y) = H_{0,0}$$

Ainsi le sous espace relativement compact  $\pi_{0,0}^{-1}(H_{0,0})$  engendre l'ouvert  $G$ -invariant  $U_{0,0}$ .

Montrons maintenant que pour tout compact  $K$  de  $M$ , l'image  $\pi_{0,0}(U_{0,0} \cap K)$  est finie dans  $G/H_{0,0}$  :

$$U_{0,0} \cap K = (G\pi_{0,0}^{-1}(H_{0,0})) \cap K \subset GF_{0,0} \cap K = \bigcup_{g \in G} gF_{0,0} \cap K$$

où  $F_{0,0}$  est l'adhérence dans  $M$  de  $\pi_{0,0}^{-1}(H_{0,0})$ , donc compact dans  $M$ .

L'action de  $G$  sur  $M$  étant propre, on en déduit que  $\{g \in G : gF_{0,0} \cap K \neq \emptyset\}$  est compact dans  $G$ , donc de cardinal fini. Il existe alors  $g_1, \dots, g_n$  dans  $G$  tels que

$$U_{0,0} \cap K \subset \bigcup_{i=1}^n g_i \pi_{0,0}^{-1}(H_{0,0}) \cap K$$

On en conclut que

$$\pi_{0,0}(U_{0,0} \cap K) \subset \bigcup_{i=1}^n g_i H_{0,0}$$

et pour tout compact  $K \subset M$ , l'image  $\pi_{0,0}(U_{0,0} \cap K)$  est finie.

En considérant le compact  $K_1$ , on peut affirmer que  $\pi_{0,0}(U_{0,0} \cap K_1)$  est fini dans  $G/H_{0,0}$ , ce qui nous permet de choisir une partie finie  $S_{0,0} \subset G$  et définir l'application suivante

$$\begin{aligned} h_{0,0} : E|_{U_{0,0} \cap K_1} &\longrightarrow (U_{0,0} \cap K_1) \times \mathbb{C}[S_{0,0}] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,0}(x, \xi)) \end{aligned}$$

où  $\psi_{0,0} : E|_{U_{0,0} \cap K_1} \rightarrow \mathbb{C}[S_{0,0}]$  est linéaire sur chaque fibre. Ainsi pour tout  $(x, \xi)$  dans  $E|_{U_{0,0} \cap K_1}$

$$\text{Supp}(\psi_{0,0}(x, \xi)) \subset S_{0,0}$$

Puisque  $S_{0,0}$  et  $S_{K_1}$  sont finies, on peut trouver un élément  $\gamma_{0,0}$  dans  $G$  tel que pour tout  $(x, \xi)$  dans  $E|_{U_{0,0} \cap K_1}$ , on a

$$\left( \text{Supp}(\psi_{0,0}(x, \xi))\gamma_{0,0} \right) \cap S_{K_1} = \emptyset$$

L'application  $h_{0,0}$  s'étend naturellement à l'ouvert  $U_{0,0}$  tout entier par la trivialisaton locale du fibré  $E|_{U_{0,0}}$  et on obtient l'application  $G$ -équivariante suivante :

$$\begin{aligned} h_{0,0} : E|_{U_{0,0}} &\longrightarrow U_{0,0} \times \mathbb{C}[G] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,0}(x, \xi)) \end{aligned}$$

En effet, puisque  $E_x \subset U_{0,0} \times \mathbb{C}[G]$ , pour tout  $(x, \eta)$  dans  $E_x$  il existe  $(\gamma, y)$  dans  $G \times (U_{0,0} \cap K_1)$  tel que

$$(x, \eta) = (\gamma y, \eta) = \gamma(y, \gamma^{-1}\eta)$$

on a alors  $\psi_{0,0}(x, \eta) := \gamma\psi_{0,0}(y, \gamma^{-1}\eta) \in \mathbb{C}[\gamma S_{0,0}]$ .

De plus, quitte à traduire par  $\gamma_{0,0}$ , l'image  $h_{0,0}(E|_{U_{0,0}})$  est orthogonale à  $E_2|_{U_{0,0}}$ .

**b) Pour  $n = 0$  et  $i = 1$  :**

On travaille sur le sous espace  $U_{0,1}$  inclus dans  $M$ . On raisonne de la même manière que précédemment pour définir  $S_{0,1}$  une partie finie de  $G$  telle qu'on ait l'application

$$\begin{aligned} h_{0,1} : E|_{U_{0,1} \cap K_1} &\longrightarrow (U_{0,1} \cap K_1) \times \mathbb{C}[S_{0,1}] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,1}(x, \xi)) \end{aligned}$$

De plus, on peut trouver  $\gamma_{0,1}$  dans  $G$  vérifiant les deux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \text{Supp}(\psi_{0,1}(x, \xi))\gamma_{0,1} \right) \cap \left( \text{Supp}(\psi_{0,0}(x, \xi))\gamma_{0,0} \right) = \emptyset \\ \left( \text{Supp}(\psi_{0,1}(x, \xi))\gamma_{0,1} \right) \cap S_{K_1} = \emptyset \end{array} \right.$$

Par une construction analogue au cas  $n = 0$ ,  $i = 0$ , on peut alors étendre l'application  $h_{0,1}$  sur  $E|_{U_{0,1}}$  de sorte qu'elle soit continue et  $G$ -équivariante

$$\begin{aligned} h_{0,1} : E|_{U_{0,1}} &\longrightarrow U_{0,0} \times \mathbb{C}[G] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,1}(x, \xi)) \end{aligned}$$

**c) Pour  $n = 0$  et  $i \in I_0$  :**

On peut alors définir, par récurrence forte, une partie finie  $S_{0,i} \subset G$  et une application  $h_{0,i}$  telles que

$$\begin{aligned} h_{0,i} : E|_{U_{0,i} \cap K_1} &\longrightarrow (U_{0,i} \cap K_1) \times \mathbb{C}[S_{0,i}] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,i}(x, \xi)) \end{aligned}$$

De plus, on peut trouver  $\gamma_{0,i} \in G$  vérifiant les deux relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \bigsqcup_{j < i} \text{Supp}(\psi_{0,j}(x, \xi))\gamma_{0,j} \right) \cap \left( \text{Supp}(\psi_{0,i}(x, \xi))\gamma_{0,i} \right) = \emptyset \\ \left( \text{Supp}(\psi_{0,i}(x, \xi))\gamma_{0,i} \right) \cap S_{K_1} = \emptyset \end{array} \right.$$

Par une construction analogue aux cas précédents, on peut alors étendre l'application  $h_{0,i}$  sur l'ouvert  $U_{0,i}$ , pour obtenir une application continue et  $G$ -équivariante

$$\begin{aligned} h_{0,i} : E|_{U_{0,i}} &\longrightarrow U_{0,i} \times \mathbb{C}[G] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{0,i}(x, \xi)) \end{aligned}$$

On veut maintenant faire cette construction sur chaque espace  $C_n$  pour tout entier  $n$  : on procède également de manière itérative sur les indices  $n$ .

d) **Pour  $n$  fixé et  $i$  dans  $I_n$**

Comme dans les cas précédents, on considère tout d'abord l'espace  $U_{n,i} \cap K_{n+1}$  qui est compact dans  $U_{n,i}$  et on peut encore définir  $S_{n,i}$  une partie finie de  $G$  de sorte que l'on ait l'application suivante

$$\begin{aligned} h_{n,i} : E|_{U_{n,i} \cap K_{n+1}} &\longrightarrow (U_{n,i} \cap K_{n+1}) \times \mathbb{C}[S_{n,i}] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{n,i}(x, \xi)) \end{aligned}$$

On peut de plus trouver un élément  $\gamma_{n,i} \in G$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Supp}(\psi_{n,i}(x, \xi))\gamma_{n,i} \cap S_{K_{n+1}} = \emptyset \\ \left( \bigsqcup_{j < i} \text{Supp}(\psi_{n,j}(x, \xi))\gamma_{n,j} \right) \cap \left( \text{Supp}(\psi_{n,i}(x, \xi))\gamma_{n,i} \right) = \emptyset \\ \left( \bigsqcup_{j \in I_{n-1}} \text{Supp}(\psi_{n-1,j}(x, \xi))\gamma_{n-1,j} \right) \cap \left( \text{Supp}(\psi_{n,i}(x, \xi))\gamma_{n,i} \right) = \emptyset \end{array} \right.$$

Comme dans les cas précédent, on étend alors l'application  $h_{n,i}$  sur l'ouvert  $U_{n,i}$  afin d'obtenir l'application continue et  $G$ -équivariante suivante

$$\begin{aligned} h_{n,i} : E|_{U_{n,i}} &\longrightarrow U_{n,i} \times \mathbb{C}[G] \\ (x, \xi) &\longrightarrow (x, \psi_{n,i}(x, \xi)) \end{aligned}$$

**Étape 3 : CONSTRUCTION DU  $G$ -FIBRÉ STANDARD  $E_1$**

L'objectif est maintenant de construire un  $G$ -fibré standard sur  $M$  qui soit isomorphe au  $G$ -fibré vectoriel  $E$ . Pour cela on se donne une partition de l'unité  $(\varphi_{n,i})$  subordonnée au recouvrement de la trivialisaton  $(U_{n,i})_{n,i}$  définie auparavant et telle que chaque  $\varphi_{n,i}$  soit  $G$ -équivariant.

On a alors l'application suivante

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow M \times \mathbb{C}[G] \\ (x, \xi) &\longrightarrow \left( x, \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ i \in I_n}} \varphi_{n,i}(x) (\psi_{n,i}(x, \xi)\gamma_{n,i}) \right) \end{aligned}$$

Alors  $E_1 := h(E)$  possède une structure de  $G$ -fibré standard sur  $M$  et de plus l'injectivité de  $h$  suffit pour s'assurer que  $E_1$  est isomorphe au  $G$ -fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant  $E$ . Enfin, par construction le  $G$ -fibré standard  $E_1$  est orthogonal au  $G$ -fibré standard  $E_2$ .  $\square$

**Lemme 2.2.4.** *Soit  $U$  un ouvert  $G$ -invariant de  $M$ , soient  $Y$  et  $Z$  deux sous espaces fermés,  $G$ -invariants de  $M$  et  $Y$  est  $G$ -compact. On suppose que les inclusions suivantes sont vérifiées :*

$$Z \subset U \subset Y \subset M$$

Si  $F$  est un  $G$ -fibré standard sur  $Y$ , alors

1. il existe  $E_1 \rightarrow M$  un  $G$ -fibré standard sur  $M$  tel que  $F|_Z \subset E_1|_Z$
2. si  $E_2$  un  $G$ -fibré standard sur  $M$  tel que la restriction  $E_2|_Y$  est orthogonale à  $F$ , alors on peut choisir  $E_1$  de sorte qu'il soit orthogonal à  $E_2$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.1.3, il existe un  $G$ -fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  tel que  $F$  peut être plongé dans  $E|_Y$ . Le sous espace supplémentaire du plongement de  $F$  dans  $E|_Y$  est un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $Y$ , noté  $F'$ , qui peut lui même être plongé dans  $E|_Y$  et par le lemme 2.2.3, il existe un  $G$ -fibré standard  $\tilde{F}$  sur  $Y$  qui est isomorphe au  $G$ -fibré vectoriel  $F'$  sur  $Y$  et orthogonal au  $G$ -fibré standard  $F \oplus E_2|_Y$ . On peut donc définir un isomorphisme

$$\phi : E|_Y \longrightarrow F \oplus \tilde{F}$$

En utilisant le lemme 2.2.3, il existe un  $G$ -fibré standard  $\tilde{E}$  sur  $M$  qui est isomorphe au  $G$ -fibré vectoriel  $E$ , orthogonal au  $G$ -fibré standard  $E_2$  et dont la restriction  $\tilde{E}|_Y$  sur  $Y$  est orthogonale au  $G$ -fibré standard  $F$ . On note  $\psi : E \rightarrow \tilde{E}$  l'isomorphisme induit.

On considère une fonction continue  $f$  à valeurs réelles et  $G$ -invariante sur  $M$  telle que

$$\begin{cases} f \equiv 1 & \text{sur } Z \\ f \equiv 0 & \text{sur } M \setminus U \end{cases} \quad (2.1)$$

et on note  $h = 1 - f$ . Le fibré défini par  $E_1 = (f.\phi + h.\psi)[E]$  est un  $G$ -fibré standard sur  $M$  dont la restriction  $E_1|_Z$  contient le fibré  $F|_Z$  et qui est orthogonal au  $G$ -fibré standard  $E_2$ .  $\square$

Le lemme qui suit est une adaptation du lemme 5.11 de [BHS10] dans le cas des espaces propres  $\sigma$ - $G$ -compacts :

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $M$  un  $G$ -espace propre  $\sigma$ - $G$ -compact. Soit  $K$  un sous espace compact de  $M$  et  $S$  un sous ensemble fini du groupe  $G$ , alors il existe un  $G$ -fibré standard  $E$  sur  $M$  tel que la restriction  $E|_K$  contient  $K \times \mathbb{C}[S]$ .*

*Démonstration.* Soient  $K$  et  $S$  comme dans l'énoncé. On pose alors  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$  où chaque compact  $K_i$  possède un voisinage ouvert  $G$ -invariant  $U_i$  tel qu'il existe des applications continues et  $G$ -équivariantes  $\pi_i : U_i \rightarrow G/H_i$  vérifiant  $\pi_i(K_i) = \bar{e}^i$ .

On raisonne par récurrence et on montre la propriété pour  $K_1$  : on considère  $Y$  un sous espace  $G$ -compact contenant l'ouvert  $U_1$  et pour lequel il existe une application continue et équivariante  $\tilde{\pi}_1 : Y \rightarrow G/H_1$  et on note  $Y_1 := \tilde{\pi}_1^{-1}(\bar{e}^1)$ . On choisit un ensemble fini  $S_1$  dans  $G$  suffisamment grand qui contient  $S$  et qui est  $H_1$ -invariant et on pose  $L := \bigcup_{g \in G} gY_1 \times \mathbb{C}[S_1g]$  est un fibré sur  $Y$  et en appliquant le lemme 2.2.4, il existe un fibré  $G$ -standard  $E_1$  sur  $M$  tel

que  $L|_{K_1}$  est contenu dans  $E_1|_{K_1}$  donc  $E_1$  contient  $K_1 \times \mathbb{C}[S]$ .

Supposons que la propriété est vraie au rang  $n - 1$  c'est-à-dire qu'on suppose l'existence d'un  $G$ -fibré standard  $E_2$  contenant l'ensemble

$$(K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}) \times \mathbb{C}[S]$$

Il existe  $Y$  un sous espace  $G$ -compact de  $M$  contenant un voisinage ouvert  $G$ -invariant  $U_n$  de  $K_n$ . On pose  $\tilde{\pi}_n : Y \rightarrow G/H_n$  et  $Y_n := \tilde{\pi}_n^{-1}(\bar{e}^n)$ , alors le sous espace compact  $K_n$  est inclus dans  $Y_n$ . On pose

$$L = \bigcup_{g \in G} gY_n \times \mathbb{C}[S_n g]$$

avec  $S_n$  un sous ensemble fini de  $G$  suffisamment grand, contenant  $S$  et  $H_n$ -invariant à droite. L'espace  $L$  est un  $G$ -fibré standard sur  $Y$ . On note  $F$  le fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $Y$  qui est le supplémentaire orthogonal de  $E_2|_Y$  dans  $L$  et il vérifie  $F \oplus E_2|_Y = L$ . En appliquant le lemme 2.2.4 pour le  $G$ -fibré standard  $F \rightarrow Y$ , le  $G$ -fibré standard  $E_2 \rightarrow M$  dont la restriction sur  $Y$  est orthogonale au  $G$ -fibré standard  $F$  et pour les inclusions suivantes

$$K_n \subset U_n \subset Y \subset M$$

et il existe alors un  $G$ -fibré standard  $E_1$  sur  $M$  tel que

$$E_1 \perp E_2 \quad \text{et} \quad F|_{K_n} \subset E_1|_{K_n}$$

Alors le  $G$ -fibré standard  $E_1 \oplus E_2$  contient  $K \times \mathbb{C}[S]$ . □

On peut désormais démontrer le théorème suivant qui donne une structure d'ensemble ordonné à l'ensemble des  $G$ -fibrés standards sur  $M$  :

**Théorème 2.2.6.** *Soit  $M$  un  $G$ -espace propre  $\sigma$ - $G$ -compact vérifiant la condition (Hyp).*

- (a) *Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux  $G$ -fibrés standards sur  $M$ , alors pour tout sous espace  $G$ -compact  $X$  de  $M$ , il existe un  $G$ -fibré standard  $E$  sur  $M$  tel que les restrictions  $E_1|_X$  et  $E_2|_X$  soient des sous fibrés de  $E|_X$ .*
- (b) *La réunion de tous les  $G$ -fibrés standards sur  $M$  est l'espace  $M \times \mathbb{C}[G]$ .*

*Démonstration.* : (a) Soient  $E_1$  et  $E_2$  des  $G$ -fibrés standards sur  $M$  et  $X$  un sous espace de  $M$  qui soit  $G$ -compact. On considère  $K$  un sous espace compact de  $M$  tel que  $X$  soit contenu dans le saturé  $KG$  du compact  $K$  par l'action de  $G$ . On peut alors choisir  $S$  un partie finie du groupe  $G$  vérifiant :

$$E_1|_K \subset K \times \mathbb{C}[S] \quad \text{et} \quad E_2|_K \subset K \times \mathbb{C}[S]$$

Alors il existe un  $G$ -fibré standard  $E$  contenant  $K \times \mathbb{C}[S]$ , d'après le lemme 2.2.5 . Par conséquent, la restriction  $E|_X$  contient les restrictions  $E_1|_X$  et  $E_2|_X$ .

(b) Puisqu'il existe toujours un  $G$ -fibré standard contenant  $K \times \mathbb{C}[S]$  pour tout compact  $K \subset M$ , alors la réunion de tous les  $G$ -fibrés standards est l'espace  $M \times \mathbb{C}[G]$ . □

### 2.3 $C^*$ -algèbres, approximation de l'unité et projection

Soit  $G$  un groupe discret et  $M$  un  $G$ -espace propre  $\sigma$ - $G$ -compact. On note  $\alpha$  l'homomorphisme de groupe qui associe à tout élément  $g$  du groupe  $G$  un automorphisme  $\alpha_g : C_0(M) \rightarrow C_0(M)$  défini pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$  par

$$\alpha_g(f) : x \mapsto f(g^{-1}x)$$

On obtient un système dynamique  $(C_0(M), G, \alpha)$  et on rappelle brièvement la construction des  $C^*$ -algèbres de produit croisé plein et réduit associée à  $(C_0(M), G, \alpha)$ . On considère la  $*$ -algèbre  $C_c(G, C_0(M))$  pour laquelle la multiplication et l'involution sont données par

$$\begin{aligned} f \star h : g &\mapsto \sum_{\gamma \in G} f(\gamma) \alpha_\gamma(h(\gamma^{-1}g)) \\ f^* : g &\mapsto \alpha_g(\overline{f(g^{-1})}) \end{aligned}$$

On appelle représentation covariante de  $(C_0(M), G, \alpha)$  la donnée d'une paire  $(\pi, \rho)$  de représentations de  $C_0(M)$  et  $G$  dans un même espace de Hilbert séparable  $H$  satisfaisant, pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$  et  $g$  dans  $G$ , la relation

$$\pi(\alpha_g(f)) = \rho(g)\pi(f)\rho(g)^*$$

On associe à toute représentation covariante  $(\pi, \rho)$  une représentation non dégénérée  $\pi \rtimes \rho$  de  $C_c(G, C_0(M))$  dans  $L(H)$ . On peut alors définir une norme sur  $C_c(G, C_0(M))$  de la manière suivante :

$$\|f\| := \sup_{(\pi, \rho)} \{ \|\pi \rtimes \rho(f)\| : (\pi, \rho) \text{ est une représentation covariante de } (C_0(M), G, \alpha) \}$$

Le complété de  $C_c(G, C_0(M))$  pour la norme est une  $C^*$ -algèbre notée  $C_0(M) \rtimes G$  et appelée  $C^*$ -algèbre de produit croisé plein. On peut également définir une autre norme notée  $\|\cdot\|_r$  en considérant la représentation covariante suivante : soit  $\pi$  une représentation fidèle et non-dégénérée de  $C_0(M)$  dans un Hilbert séparable  $H$ . On considère le système covariant  $(\pi_\alpha, \lambda)$  dans  $l^2(G, H) = l^2(G) \otimes H$  défini de la manière suivante :

$$\pi_\alpha(f)(\xi) : g \mapsto \alpha_g(f)\xi(g) \quad \text{et} \quad \lambda(\gamma)(\xi) : g \mapsto \xi(g^{-1}\gamma)$$

On définit alors la norme réduite  $\|\cdot\|_r$  sur  $C_c(G, C_0(M))$  en posant pour tout  $f$  :

$$\|f\|_r := \|\pi_\alpha \rtimes \lambda(f)\|$$

et on note  $C_0(M) \rtimes_r G$  le complété de  $C_c(G, C_0(M))$  par la norme réduite et est appelée la  $C^*$ -algèbre de produit croisé réduit. Lorsque  $G$  est compact ou moyennable, alors il y a un isomorphisme entre ces deux  $C^*$ -algèbres et  $C_0(M) \rtimes G \cong C_0(M) \rtimes_r G$  (voir [Ped79]). Dans le cas d'une action propre du groupe, il existe un tel isomorphisme d'après le théorème suivant dont on trouve une preuve dans [Phi89]

**Théorème 2.3.1.** *Si  $G$  est un groupe agissant proprement sur l'espace  $M$  alors*

$$C_0(M) \rtimes G \cong C_0(M) \rtimes_r G$$

*Démonstration.* On trouve la démonstration dans le deuxième chapitre de [Phi89]. □

On introduit dans cette partie une  $C^*$ -algèbre, notée  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , comme des fonctions continues sur  $M$  à valeur dans l'ensemble des opérateurs compacts de  $l^2(G)$  et vérifiant certaines conditions. On montre que celle-ci coïncide avec la  $C^*$ -algèbre du produit croisé  $C_0(M) \rtimes G$ . On cherche ensuite à déterminer des critères (en termes de fibrés vectoriels complexes sur  $M$ ) impliquant l'existence d'une approximation de l'unité constituée de projections dans l'algèbre des multiplicateurs de  $\mathbf{C}^*(M, G)$ .

On considère le  $C_0(M)$ -module de Hilbert  $\mathcal{B} = C_0(M) \otimes l^2(G)$  obtenu en complétant  $C_c(M \times G)$  avec la norme

$$\|\xi\|_2 = \left( \sup_{x \in M} \sum_{g \in G} |\xi(x, g)|^2 \right)^{1/2}$$

Par ailleurs, les éléments de  $C_0(M) \otimes l^2(G)$  (appelés champs continus de vecteurs) sont exactement les familles normiquement continues sur  $M$  et nulles à l'infini d'éléments de  $l^2(G)$ . Les éléments de  $\mathcal{L}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  sont les familles  $*$ -fortement continues sur  $M$  et bornées d'opérateurs de  $L(l^2(G))$ . De plus, un opérateur  $T$  de  $\mathcal{L}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  appartient à  $\mathcal{K}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  si et seulement si  $T_x$  est dans  $K(l^2(G))$  pour tout  $x$  dans  $M$  et l'application  $x \rightarrow T_x$  est normiquement continue.

**Lemme 2.3.2.**  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  est muni d'une structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre.

*Démonstration.* On note  $\pi : M \rightarrow M/G$ . Soit  $f$  une fonction de  $C_0(M/G)$  et  $T$  un opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ . On pose  $f.T$  l'opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  tel que pour tout  $x$  dans  $M$  on a  $(f.T)_x := f(\pi(x))T_x$ . □

On considère  $G$  un groupe discret et  $M$  un  $G$ -espace propre et  $\sigma$ - $G$ -compact.

**Définition 2.3.3.** On note  $\mathbf{C}^*(M, G)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $M$  et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs compacts de  $l^2(G)$ , qui sont  $G$ -équivalentes et vérifiant la condition suivante : pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $M'$  sous espace  $G$ -compact dans  $M$ , tel que pour  $x$  dans  $M \setminus M'$ , on a

$$\|f(x)\|_{L(l^2(G))} < \varepsilon$$

On peut munir la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$  d'une structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre : on note  $\pi : M \rightarrow M/G$  l'application quotient et  $\theta : C_0(M/G) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G)))$  définie pour tout  $f$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , toute fonction  $\phi$  de  $C_0(M/G)$  et tout  $x$  dans  $M$  par

$$\theta(\phi)(f)(x) := \phi(\pi(x))f(x)$$

On note dans la suite  $\mathbf{Mat}[G]$  la  $*$ -algèbre des matrices à coefficients complexes  $T = (T_{g,h})_{g,h \in G}$  dont les lignes et colonnes sont paramétrisées par  $G$  et ayant seulement un nombre fini de coefficients non nuls. La  $*$ -algèbre  $\mathbf{Mat}[G]$  est une sous algèbre dense de  $K(l^2(G))$  et on peut la munir d'une action de  $G$  de la manière suivante : pour tout  $g, g_1$  et  $g_2$  dans  $G$

$$(g(T))_{g_1, g_2} = T_{gg_1, gg_2}$$

**Définition 2.3.4.** Soit  $M$  un  $G$ -espace propre, on appelle fonction standard, une fonction  $F : M \rightarrow \mathbf{Mat}[G]$  telle que les fonctions associées suivantes  $F_{g_1, g_2} : x \rightarrow (F(x))_{g_1, g_2}$  sont continues et à support compact ; de plus, pour tout sous espace compact  $K$  de  $M$  presque toutes les fonctions associées (toutes sauf un nombre fini) s'annulent dans  $K$ .

On note  $\mathcal{C}(M, G)$  l'ensemble des fonctions standards et  $G$ -équivariantes de  $M$  dans  $\mathbf{Mat}[G]$  qui sont à support  $G$ -compact.

**Lemme 2.3.5.**  $\mathcal{C}(M, G)$  est une  $*$ -algèbre dense dans la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  dans  $\mathcal{C}(M, G)$  c'est-à-dire une fonction sur  $M$  à valeurs dans  $K(l^2(G))$  (car  $\mathbf{Mat}[G]$  est inclus dans  $K(l^2(G))$ ) qui est continue,  $G$ -équivariante et à support  $G$ -compact, d'où  $f$  est dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et  $\mathcal{C}(M, G)$  est donc une sous algèbre de la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$ .

On considère  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $f$  un élément de  $\mathbf{C}^*(M, G)$ . Par définition, il existe un sous espace  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ) de  $M$  qui est  $G$ -compact tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus M_1$  (respectivement  $M \setminus M_2$ ), on a  $\|f(x)\| < \varepsilon$  (respectivement  $\|f(x)\| < \varepsilon/2$ ). On note  $K_1$  (respectivement  $K_2$ ) le sous espace compact de  $M/G$  tel que  $M_1 = GK_1$  (respectivement  $M_2 = GK_2$ ) et  $\varphi$  une fonction dans  $C_c(M/G)$  telle que  $\chi_{K_1} < \varphi < \chi_{K_2} < 1$ . Par la structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre,  $\theta(\varphi)(f)$  est dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et on a pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\|\theta(\varphi)(f)(x) - f(x)\| < \varepsilon$ .

On considère  $x$  dans  $K_1$ , on a  $\theta(\varphi)(f)(x)$  est dans  $K(l^2(G))$  donc il existe  $m_x$  dans  $\mathbf{Mat}[G]$  tel que  $\|\theta(\varphi)(f)(x) - m_x\| < \varepsilon$ . Par continuité de  $\theta(\varphi)(f)$  sur  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $K_1$  tel que pour tout  $y$  dans  $U_x$ , on a  $\|\theta(\varphi)(f)(y) - m_x\| < \varepsilon$ . Par compacité de  $K_1$ , il existe un recouvrement ouvert fini  $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$  de  $K_1$  pour lequel on peut supposer que  $U_{x_i}$  est inclus dans  $K_2$  pour tout  $i$ . On note  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement ouvert et on pose  $f' := \sum_{i=1}^n \psi_i m_{x_i}$  une fonction telle que pour tout  $x$  dans  $M$ , on a  $f'(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\pi(x)) m_{x_i}$ . On remarque que  $f'$  est dans  $\mathcal{C}(M, G)$  et pour tout  $x$  dans  $M$  on a

$$\begin{aligned} \|f(x) - f'(x)\| &= \|f(x) - \theta(\varphi)(f)(x) + \theta(\varphi)(f)(x) - f'(x)\| \\ &\leq \|f(x) - \theta(\varphi)(f)(x)\| + \|\theta(\varphi)(f)(x) - f'(x)\| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

on a alors montré que pour tout élément  $f$  de  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une fonction  $f'$  dans  $\mathcal{C}(M, G)$  telle que  $\|f - f'\| < \varepsilon$ . La sous algèbre  $\mathcal{C}(M, G)$  est dense dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$ . □

On montre maintenant que l'on peut identifier la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$  avec la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $C_0(M) \rtimes G$ . Pour cela, on utilisera le lemme suivant

**Lemme 2.3.6.** Soit  $F$  dans  $\mathcal{C}(M, G)$  alors il existe un sous ensemble fini  $H$  dans  $G$  tel que pour tout  $g$  dans  $G \setminus H$  la fonction associée  $F_{e,g} : M \rightarrow \mathbb{C}$  est identiquement nulle sur  $M$ .

*Démonstration.* Par définition des éléments de  $\mathcal{C}(M, G)$ , le support de  $F$  est  $G$ -compact donc on considère un sous espace compact  $K$  dans  $M$  tel que  $\text{Supp}(F)$  est inclus dans le saturé  $GK$ . De plus, toujours par définition de  $F$ , presque toutes les fonctions associées de  $F$  (toutes sauf un nombre fini) s'annulent dans  $K$ . En utilisant la  $G$ -équivariance de  $F$ , on conclut qu'il existe un sous ensemble fini  $H$  dans  $G$  tel que pour tout  $g$  dans  $G \setminus H$ , la fonction associée  $F_{e,g}$  est identiquement nulle sur  $M$ . □

**Proposition 2.3.7.** La  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$  est isomorphe à la  $C^*$ -algèbre de produit croisé  $C_0(M) \rtimes G$ .

*Démonstration.* On construit une représentation covariante  $(\pi, U)$  du système dynamique  $(C_0(M), G, \alpha)$  avec  $\pi$  une  $*$ -homomorphisme injectif de  $C_0(M)$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et  $U$  un homomorphisme du groupe  $G$  dans les unitaires de l'algèbre des multiplicateurs de  $\mathbf{C}^*(M, G)$  vérifiant la relation : pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$  et tout  $g$  dans  $G$ , on a

$$\pi(\alpha_g(f)) = U(g)\pi(f)U_{g^{-1}}$$

Pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$ , on pose  $\pi(f)$  l'application sur  $M$  qui à tout  $x$  associe

$$\pi(f)(x) := \sum_{h \in G} \alpha_h(f)(x)E^{h,h}$$

où  $(E^{\gamma_1, \gamma_2})_{\gamma_1, \gamma_2}$  est une matrice de  $\mathbf{Mat}[G]$  dont tous les coefficients sont nuls sauf au rang  $(\gamma_1, \gamma_2)$  où il vaut un. L'application  $\pi(f)$  est clairement continue sur  $M$  et à valeur dans  $\mathcal{L}(C_0(M) \otimes l^2(G))$ . Il est clair que l'application  $\pi : C_0(M) \rightarrow \mathcal{L}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  est un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres.

On montre qu'il est à valeurs dans l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  : pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$  et tout  $x$  dans  $M$ , on a  $\pi(f)(x) = \sum_{h \in G} f(h^{-1}x)E^{h,h}$ . Pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un compact  $K_\varepsilon$  dans  $M$  tel que, pour tout  $m$  dans  $M \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|f(m)| < \varepsilon$ . L'action du groupe  $G$  sur  $M$  étant propre, il existe une partie  $G' = \{g \in G : K_\varepsilon \cap gK_\varepsilon \neq \emptyset\}$  finie dans  $G$  telle que pour tout  $h$  dans  $G \setminus G'$ , on a  $|f(hx)| < \varepsilon$ . On a alors

$$\pi(f)(x) = \sum_{h \in G'} f(h^{-1}x)E^{h,h} + \sum_{h \in G \setminus G'} f(h^{-1}x)E^{h,h}$$

où  $\sum_{h \in G'} f(h^{-1}x)E^{h,h}$  définit un opérateur de rang fini dans  $B(l^2(G))$  et

$$\left\| \sum_{h \in G \setminus G'} f(h^{-1}x)E^{h,h} \right\| < \varepsilon$$

Ainsi pour tout  $\varepsilon$  positif, il existe une partie finie  $G'$  dans  $G$  et telle que

$$\left\| \pi(f)(x) - \sum_{h \in G'} f(h^{-1}x) \right\| < \varepsilon$$

Pour tout  $x$  dans  $M$ , l'opérateur  $\pi(f)(x)$  est un opérateur compact sur  $l^2(G)$  et  $\pi(f)$  est dans  $\mathcal{K}(C_0(M) \otimes l^2(G))$ . Si on considère le sous espace  $GK_\varepsilon$  de  $M$  qui est  $G$ -compact, on remarque également que pour tout  $x$  dans  $M \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|f(x)| < \varepsilon$  et par conséquent

$$\|\pi(f)(x)\|_{L(l^2(G))} < \varepsilon$$

De plus l'application est  $G$ -équivariante : en effet pour tout  $g$  dans  $G$  et tout  $x$  dans  $M$  on a :

$$\begin{aligned} \pi(f)(gx) &= \sum_{h \in G} \alpha_h(f)(gx)E^{h,h} = \sum_{h \in G} f(h^{-1}gx)E^{h,h} \\ &= \sum_{h' \in G} f(h'^{-1}x)E^{gh',gh'} = \sum_{h' \in G} f(h'^{-1}x)(g(E^{h',h'})) \\ &= g\left(\sum_{h' \in G} \alpha_{h'}(f)(x)E^{h',h'}\right) = g\left(\pi(f)(x)\right) \end{aligned}$$

On obtient alors un homomorphisme injectif  $\pi : C_0(M) \rightarrow \mathbf{C}^*(M, G)$  et il est assez facile de voir que l'image de  $C_c(M)$  par  $\pi$  est dans  $\mathcal{C}(M, G)$ .

Pour tout  $g$  dans  $G$ , on note  $\delta_g$  la fonction caractéristique en  $g$  qui est dans  $l^2(G)$ . On considère  $U : G \rightarrow \mathcal{U}(M(\mathbf{C}^*(M, G)))$  défini pour tout  $x$  dans  $X$ , tout  $g$  et  $h$  dans  $G$

$$U_g(x) : \delta_h \rightarrow \delta_{hg^{-1}}$$

On a alors pour tout  $f$  dans  $C_0(M)$ , tout  $g$  dans  $G$  et pour tout  $x$  dans  $M$

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_g(f))(x) &= \sum_{h \in G} \alpha_h \alpha_g(f)(x) E^{h,h} = \sum_{h \in G} f(g^{-1}h^{-1}x) E^{h,h} \\ &= \sum_{h' \in G} f(h'^{-1}x) E^{h'g^{-1}, h'g^{-1}} = \sum_{h' \in G} f(h'^{-1}x) U_g(x) \circ E^{h', h'} \circ U_{g^{-1}}(x) \\ &= (U_g \pi(f) U_{g^{-1}})(x) \end{aligned}$$

La paire d'homomorphismes  $(\pi, U)$  est bien un homomorphisme covariant (au sens de la définition 2.37 de [Wil07]) de  $(C_0(M), G, \alpha)$  dans  $\mathcal{L}(C_0(M) \otimes l^2(G))$ , la  $C_0(M)$ -algèbre des opérateurs du  $C_0(M)$ -module de Hilbert  $C_0(M) \otimes l^2(G)$ . D'après la proposition 2.39 de [Wil07], l'homomorphisme covariant  $(\pi, U)$  induit un homomorphisme  $\pi \times U : C_c(G, C_0(M)) \rightarrow \mathbf{C}^*(M, G)$  qui à tout élément  $f \cdot \delta_g$  associe  $\pi(f) U_g$  et qui se prolonge en un homomorphisme de  $C_0(M) \rtimes G \rightarrow \mathbf{C}^*(M, G)$ . L'image de la  $*$ -algèbre  $C_c(G, C_0(M))$  par l'homomorphisme  $\pi \times U$  est dans la  $*$ -algèbre  $\mathcal{C}(M, G)$ .

On construit maintenant un homomorphisme de  $*$ -algèbres  $i : \mathbf{C}^*(M, G) \rightarrow C_0(M) \rtimes G$ . On considère  $f$  un élément de  $\mathbf{C}^*(M, G)$ . Pour tout  $x$  dans  $M$ , on a  $f(x)$  est un opérateur compact sur  $l^2(G)$ . Pour tout couple  $(g, h)$  dans  $G^2$ , on note  $f_{g,h} : M \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie, pour tout  $x$  dans  $M$ , par

$$f_{g,h}(x) = \langle f(x)(\delta_h), \delta_g \rangle$$

où  $\delta_g$  (respectivement  $\delta_h$ ) est la fonction caractéristique au point  $g$  (respectivement  $h$ ) sur  $G$ , qui est dans  $l^2(G)$ . On pose  $i(f)$  la fonction sur  $G$  à valeurs dans  $C_0(M)$  définie par  $i(f) := \sum_{g \in G} f_{e,g}[g]$ , où pour tout  $g$  dans  $G$ , on a  $f_{e,g} : M \rightarrow \mathbb{C}$ .

Pour tout  $g$  dans  $G$ , on montre que la fonction  $f_{e,g}$  est dans  $C_0(M)$  : en effet, supposons que  $f_{e,g}$  n'est pas dans  $C_0(M)$  c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon$  strictement positif tel que pour tout sous espace compact  $K$  de  $M$ , il existe  $m$  dans  $M \setminus K$  tel que  $|f_{e,g}(m)| \geq \varepsilon$ . On considère une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous espace  $G$ -compact de  $M$  tel que  $M_n \subset M_{n+1}$ , pour tout entier  $n$  et on note  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de sous espaces compacts de  $M$  telle que  $M_n = GK_n$ , pour tout entier  $n$ . On peut alors construire deux suites  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour entier  $n$ , on a  $m_n$  est dans  $M \setminus K_n$  tel que  $|f_{e,g}(m_n)| \geq \varepsilon$  et  $g_n m_n$  est dans  $M \setminus M_n$ . On a pour tout entier  $n$ ,

$$|f_{e,g}(m_n)| = |f_{g_n, g_n g}(m_n g_n)| \geq \varepsilon$$

Ainsi pour tout  $M'$  sous espace  $G$ -compact de  $M$ , il existe  $m$  dans  $M \setminus M'$ , il existe  $(g, h)$  dans  $G^2$ , tel que  $|f_{g,h}(m)| \geq \varepsilon$  ce qui est contradictoire car  $f$  est dans  $\mathcal{C}(M, G)$ . Pour tout  $g$  dans  $G$ , la fonction  $a[g]$  est dans  $C_0(M)$ .

Soit  $f$  un élément de  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et  $i(f) = \sum_{g \in G} f_{e,g}[g]$ , on a alors

$$\begin{aligned}
\|i(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} &= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \|i(f)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \left( \sup_{x \in M} \left( \sum_{g \in G} |i(f)(\xi)(x, g)|^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \left( \sup_{x \in M} \left( \sum_{g \in G} \left| \sum_{h \in G} \alpha_{g^{-1}}(f_{e,h})(x) \xi(hg)(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \left( \sup_{x \in M} \left( \sum_{g \in G} \left| \sum_{h \in G} f_{g,hg}(x) \xi(hg)(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \left( \sup_{x \in M} \|f(\xi)(x)\|_{l^2(G)} \right) = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \\ \|\xi\|=1}} \|f(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})}
\end{aligned}$$

On considère la fonction  $f$  dans  $\mathcal{C}(M, G)$  et il existe  $K$  un sous espace compact de  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus GK$ , on a  $f(x) = 0$ . D'après le lemme 2.3.6, il existe un sous ensemble fini  $H$  dans le groupe  $G$  tel que pour tout  $g$  dans  $G \setminus H$ , la fonction  $f_{e,g}$  est nulle sur  $M$  et on a alors  $i(f) = \sum_{g \in H} f_{e,g}[g]$ . Donc  $i(f)$  est dans  $C_c(G, C_0(M))$ . Ainsi on a une application  $i : \mathcal{C}(M, G) \rightarrow C_0(M) \rtimes G$  qui est de plus clairement linéaire. Pour toute fonction  $f$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et tout réel  $\varepsilon$  strictement positif il existe  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{C}(M, G)$  telle que  $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} < \varepsilon$ . Par conséquent, on a  $\|i(f) - i(\tilde{f})\| < \varepsilon$  et pour tout  $f$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , l'opérateur  $i(f)$  est dans  $C_0(M) \rtimes G$ .

On montre enfin que l'application  $i$  est un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres : pour tout  $f$  et  $\tilde{f}$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  et tout  $g$  dans  $G$ , on a

$$\begin{aligned}
i(f\tilde{f})[g] &= \sum_{h \in G} f_{e,h} \tilde{f}_{h,g} = \sum_{h \in G} f_{e,h} \alpha_h(\tilde{f}_{e,h^{-1}g}) \\
&= \sum_{h \in G} \left( \sum_{k \in G} f_{e,k} \delta_k \right)(h) \cdot \alpha_h \left( \sum_{k \in G} \tilde{f}_{e,h^{-1}g} \delta_k \right)(h^{-1}g) \\
&= \sum_{h \in G} i'(f)[h] \alpha_h(i'(\tilde{f}))[h^{-1}g] \\
&= i(f) \star i(\tilde{f})(g)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
i(f^*)[g] &= (f^*)_{e,g} = \overline{f_{g,e}} = \alpha_g(\overline{f})_{e,g^{-1}} = \alpha_g((f^*))_{e,g^{-1}} \\
&= \alpha_g(i(f)[g^{-1}]^*) = (i(f))^*[g]
\end{aligned}$$

donc  $i : \mathcal{C}(M, G) \rightarrow C_0(M) \rtimes G$  est un homomorphisme de  $*$ -algèbres.

On a ainsi construit un homomorphisme  $\pi \rtimes U : C_0(M) \rtimes G \rightarrow \mathbf{C}^*(M, G)$  qui envoie la  $*$ -algèbre  $C_c(G, C_0(M))$  dans la  $*$ -algèbre  $\mathcal{C}(M, G)$  et un homomorphisme  $i : \mathcal{C}(M, G) \rightarrow C_c(G, C_0(M)) \rtimes G$ . Or pour tout élément  $f$  dans  $\mathcal{C}(M, G)$  on a  $(\pi \rtimes U) \circ i(f) = f$  : en effet,

pour tout  $x$  dans  $M$

$$\begin{aligned} ((\pi \rtimes U) \circ i)(f)(x) &= (\pi \rtimes U)\left(\sum_{g \in G} f_{e,g} \delta_g\right)(x) = \left(\sum_{g,h \in G} \alpha_h(f_{e,g}) E^{h,h} U_g\right)(x) \\ &= \sum_{g,h \in G} f_{e,g}(h^{-1}x) E^{h,hg} = \sum_{g,h \in G} f_{h,hg}(x) E^{h,hg} = f(x) \end{aligned}$$

L'opérateur  $(\pi \rtimes U) \circ i$  coïncide avec  $id_{\mathcal{C}(M,G)}$ . On en déduit que l'image de la restriction de  $\pi \rtimes U$  est la  $*$ -algèbre  $\mathcal{C}(M,G)$  qui est dense dans  $\mathbf{C}^*(M,G)$  et donc que l'image de  $\pi \rtimes U$  est la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M,G)$ . L'homomorphisme  $\pi \rtimes U : C_0(M) \rtimes U \rightarrow \mathbf{C}^*(M,G)$  est donc surjectif. On montre de même que l'application  $i \circ (\pi \rtimes U)$  coïncide avec l'identité  $id_{C_0(M) \rtimes G}$  sur  $C_0(M) \rtimes G$  donc on obtient bien un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres entre  $C_0(M) \rtimes G$  et  $\mathbf{C}^*(M,G)$ . □

Une autre manière de construire la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M,G)$  est donnée dans l'article [TXLG04] en utilisant un procédé consistant à "moyenniser" des opérateurs compacts : l'action du groupe  $G$  sur  $M$  étant propre, il existe une fonction de coupure  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  c'est-à-dire une fonction continue sur  $M$  telle que

1. pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\sum_{g \in G} \varphi(gx) = 1$
2. pour tout compact  $K$  dans  $M$ , on a  $Supp(\varphi) \cap GK$  est compact dans  $M$

En utilisant les fonctions de coupure, on peut transformer les opérateurs de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  en des opérateurs  $G$ -invariants. Pour tout  $T$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ , on pose  $T^G$  un opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  tel que pour tout  $x$  dans  $M$ , on a

$$T_x^G = \sum_{g \in G} \alpha_g(T_{gx}) \varphi(gx)$$

qui définit une projection  $\mathcal{L}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B})^G$ .

On note  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$  le sous ensemble de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  défini par

$$\mathcal{K}_G(\mathcal{B}) := \left\{ T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})^G : \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in M/G}} \|T_x\| = 0 \quad \text{et} \quad \phi T \in \mathcal{K}(\mathcal{B}), \forall \phi \in C_0(M) \right\}$$

En utilisant les résultats énoncés dans le cadre plus général des groupoïdes propres et des  $C^*$ -algèbres de fibrés de Fell de l'article [TXLG04], on a les relations suivantes

- (i)  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$  est une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  qui coïncide avec  $\{T^G : T \in \mathcal{K}(\mathcal{B})\}$ .
- (ii) Soit  $G$  un groupe discret agissant proprement sur un espace localement compact  $M$ , alors on a  $C_0(M) \rtimes G = \mathcal{K}_G(\mathcal{B})$ .
- (iii)  $M(\mathcal{K}_G(\mathcal{B})) = \mathcal{L}(\mathcal{B})^G$ .

Il est clair que la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  est munie d'une structure une  $C_0(M/G)$ -algèbre et que  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$  également.

*Remarque 2.3.8.* L'intérêt d'introduire la sous algèbre dense  $\mathcal{C}(M,G)$  réside dans la relation qu'il existe entre les projections de cette algèbre et les  $G$ -fibrés standards sur  $M$  introduits dans la définition 2.2.1 : en effet, si  $P$  est une projection dans  $\mathcal{C}(M,G)$  alors le fibré induit sur  $M$  dont la fibre au-dessus d'un point  $x$  de  $M$  est l'image de l'opérateur de projection  $P(x)$  dans  $\mathbb{C}[G]$  est un  $G$ -fibré standard sur  $M$ . La réciproque est quelque peu différente : on considère  $E$  un  $G$ -fibré standard sur  $M$ . Pour tout  $x$  dans  $M$  on note  $S_x$  la partie finie de  $G$  telle

que  $E_x = \mathbb{C}[S_x]$ . On pose  $P_E$  la fonction continue et  $G$ -équivariante sur  $M$  qui associe à tout  $x$  dans  $M$  la projection sur  $\mathbb{C}[S_x]$ . On obtient ainsi une projection dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$ . Ainsi à tout  $G$ -fibré standard correspond une projection dans l'algèbre des multiplicateurs  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G))$ .

Le théorème 2.3.10 qui suit annonce l'équivalence entre la condition (*Hyp*) du  $G$ -espace propre et  $\sigma$ - $G$ -compact  $M$  et l'existence d'une approximation de l'unité constituée de projections dans  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G))$ . On utilisera le lemme suivant lors de la démonstration du théorème 2.3.10 :

**Lemme 2.3.9.** *Soit  $G$  un groupe discret agissant continuellement et proprement sur un espace  $M$  localement compact et séparé, alors pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  tel que pour tout  $y$  dans  $V_x$ , le groupe d'isotropie  $G_y$  est inclus dans le groupe d'isotropie  $G_x$ .*

*Démonstration.* Soit  $x$  dans  $M$  et supposons, en raisonnant par l'absurde, que pour tout voisinage  $V_x$  de  $x$ , il existe un  $y$  dans  $V_x$  et un élément  $g$  de  $G_y$  tel que  $g$  n'est pas dans  $G_x$ . On considère  $K$  un voisinage compact de  $x$  dans  $M$ . On note  $A_K := \{g \in G : K \cap K.g \neq \emptyset\}$  le sous ensemble de  $G$  qui est fini car l'action de  $G$  est propre. Pour tout voisinage  $V_i$  de  $x$ , l'intersection  $V_i \cap K$  est un voisinage de  $x$  et il existe  $y_i$  dans  $V_i \cap K$  et  $g_i$  dans  $G_{y_i}$  tel que  $g_i$  n'est pas dans  $G_x$ . On obtient donc une suite généralisée  $\{(y_i, g_i)\}_{i \in \Lambda}$  dans  $K \times A_K$  telle que  $g_i y_i = y_i$  pour tout  $i$  dans  $\Lambda$  et  $(y_i)_{i \in \Lambda}$  converge vers  $x$ . Comme  $A_K$  est fini alors (quitte à extraire une sous suite), on peut supposer la suite  $(g_i)_{i \in \Lambda}$  constante et on note  $g$  l'élément de la suite. On a alors  $\lim_{i \in \Lambda} y_i = \lim_{i \in \Lambda} g y_i = g x$  et donc  $g x = x$ . Ainsi  $g$  est dans  $G_x$ . On obtient une contradiction.  $\square$

**Théorème 2.3.10.** *Soit  $G$  groupe discret et  $M$  un  $G$ -espace propre et  $\sigma$ - $G$ -compact. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour tout sous espace  $G$ -compact  $Y$  dans  $M$ , il existe un  $G$ -fibré vectoriel  $E \rightarrow M$  tel que, pour tout  $y$  dans  $Y$ , la fibre  $E|_y$  contienne la représentation régulière du groupe d'isotropie  $G_y = \{g \in G : g y = y\}$ .*
2. *Il existe une approximation de l'unité  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$  constituée de projections dans la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  telle que l'opérateur  $\varphi.P_n$  est dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ , pour tout entier  $n$  et toute fonction  $\varphi$  dans  $C_c(M)$ ,*

*Démonstration.* On démontre ci-dessous chacune des implications :

(1)  $\Rightarrow$  (2) On se place dans  $\mathcal{C}(M, G)$  pour construire de telles projections puis on utilisera la séparabilité et la densité de  $\mathcal{C}(M, G)$  dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$  pour obtenir le résultat souhaité.

Soit  $n$  un entier, on considère  $F_1, \dots, F_n$  des éléments dans  $\mathcal{C}(M, G)$ . Pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , le support de  $F_i$ , noté  $\text{Supp}(F_i) = \overline{\{x \in M / F_i(x) \neq 0\}}$ , est un sous espace  $G$ -compact de  $M$  et on considère  $K$  un sous espace compact de  $M$  dont le saturé  $GK$  par l'action de  $G$  coïncide avec  $\cup_{i=1}^n \text{Supp}(F_i)$ .

Il existe, par définition des éléments de  $\mathcal{C}(M, G)$ , une partie finie  $S_n$  dans  $G$  telle que pour tout  $x$  dans  $K$ , on a pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$\text{Im}(F_i(x)) \subset \mathbb{C}[S_n]$$

D'après le lemme 2.2.5, il existe un  $G$ -fibré standard  $E_n$  sur l'espace  $M$  vérifiant

$$K \times \mathbb{C}[S_n] \subset E_n|_K$$

D'après la remarque 2.3.8 , la fonction induite  $P = P_{E_n} : M \rightarrow K(l^2(G))$  est une projection dans l'algèbre des multiplicateurs  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G))$  (dont le support n'est pas nécessairement  $G$ -compact) et on a, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$F_i = P_{E_n} F_i = F_i P_{E_n} \quad \text{et} \quad F_i^* = P_{E_n} F_i^* = F_i^* P_{E_n}$$

La  $*$ -algèbre étant séparable et dense dans  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , on peut ainsi définir une famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G))$ , qui soit une approximation de l'unité pour la  $C^*$ -algèbre  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , constituée de projections et vérifiant pour toute fonction  $\varphi$  dans  $C_c(M)$  et tout élément  $F$  de  $\mathbf{C}^*(M, G)$ , les deux relations suivantes :

$$\varphi P_n \in \mathcal{K}(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n F = F$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*(M, G))$  constituée des projections vérifiant les conditions du théorème. On considère  $Y$  un sous espace de  $M$  qui est  $G$ -compact, et montrons qu'il existe un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $M$  tel que la fibre  $E_x$  au-dessus de  $x$  contient la représentation régulière de  $G_x$ , pour tout  $x$  dans  $Y$ .

On considère  $K$  un sous espace compact de  $M$  dont le saturé  $GK$  par l'action de  $G$  coïncide avec  $Y$ . L'action de  $G$  sur  $M$  étant propre, il existe une fonction de coupure  $c$  dans  $C(M)$  à valeurs positives, telle que

1.  $\sum_{g \in G} c(gx) = 1$
2.  $\text{Supp}(c) \cap Z$  est compact, pour tout  $Z$  sous espace  $G$ -compact de  $M$

Pour tout  $x$  dans  $K$ , le groupe d'isotropie de  $G_x$  est un sous groupe fini du groupe  $G$ . D'après le lemme 2.3.9 , il existe alors un voisinage de  $x$  noté  $V_x$  tel que, pour tout  $y$  dans  $V_x$ , le groupe d'isotropie  $G_y$  est inclus dans le groupe d'isotropie  $G_x$ . Ainsi par compacité de  $K$ , il existe  $x_1, \dots, x_n$  des éléments de  $K$  tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$$

On pose  $S = \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}$  qui un sous ensemble fini du groupe  $G$ . Pour tout  $x$  dans  $K$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  est alors inclus dans  $S$ . On pose  $P_S$  l'opérateur dans  $B(l^2(G))$  défini comme la projection sur  $l^2(S)$ . On pose alors l'opérateur  $b$  dans  $\mathcal{K}(C_0(M) \otimes l^2(G))$  défini, pour tout  $x$  dans  $M$ , par

$$b(x) = \varphi(x) P_S$$

où  $\varphi$  est une fonction continue, à support compact  $M$  et à valeurs réelles positives telle que  $\chi_K \leq \varphi \leq 1$ . On utilise le procédé de moyennisation de l'opérateur  $b$

$$a(y) = \sum_{g \in G} (U_g(gy) b(gy) U_g^{-1}(gy)) c(gy)$$

et on obtient un opérateur  $a$  dans  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$ . Par définition de  $Y$  et  $K$ , pour tout  $y$  dans  $Y$ , il existe un couple  $(z, \gamma)$  dans  $K \times G$  vérifiant  $y = z\gamma^{-1}$ . En utilisant l'égalité  $U_\gamma(x) P_S U_\gamma^{-1}(x) = P_{\gamma S}$ , pour tout  $x$  dans  $M$ , on a alors

$$\begin{aligned} a(y) &\geq U_\gamma(\gamma y) b(\gamma y) U_\gamma^{-1}(\gamma y) c(\gamma y) \\ &\geq \lambda U_\gamma(\gamma y) P_S U_\gamma^{-1}(\gamma y) \\ &\geq \lambda P_{\gamma S} \\ &\geq \lambda P_{\gamma G_{y\gamma}} \\ &\geq \lambda P_{(G_y) \cdot \gamma} \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un réel tel que  $\lambda \leq c(\gamma y)$ .

D'après l'hypothèse, il existe une approximation de l'unité  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  constituée de projections dans l'algèbre des multiplicateurs  $M(\mathbf{C}^*(M, G))$  donc pour un certain  $j'$  dans  $\mathbb{N}$ , pour tout  $j' \leq j$ , on a

$$\|P_j(y)P_{(G_y)\cdot\gamma} - P_{(G_y)\cdot\gamma}\| < 1$$

donc pour tout vecteur  $\xi$  dans  $Im(P_{(G_y)\cdot\gamma})$  non nul, l'inégalité stricte suivante est vérifiée

$$\|P_j(y)\xi - \xi\| < \|\xi\|$$

donc  $P_j(y)\xi \neq 0$  et la projection est injective sur  $Im(P_{(G_y)\cdot\gamma})$ . En posant  $E_y := Im(P_j(y))$ , on obtient alors

$$Im(P_{G_y\gamma}) \cong Im(P_j(y)|_{Im(P_{G_y\gamma})}) \subset E_y$$

mais puisque  $Im(P_{G_y\gamma}) \cong l^2(G_y\gamma) \cong l^2(G_y)$  on peut conclure que chaque fibre  $E_y$  du fibré  $E$  contient la représentation régulière de  $G_y$ . □

## 2.4 $K$ -théorie équivariante et fibrés de dimension finie

Dans [Phi89], Phillips généralise l'isomorphisme de Green/Julg ([Jul81] et [Gre82]) dans le cas des actions propres de groupes topologiques localement compacts. Il utilise pour cela la  $KK$ -théorie de Kasparov et construit pour chaque classe de  $K$ -cocycle  $(E, F, t)$  de  $K_G^0(X)$  un bimodule de Kasparov noté  $I([E, F, t])$  :

$$(E, F, t) \longrightarrow \left( \overline{\Gamma_c(E)} \oplus \overline{\Gamma_c(F)}, \begin{pmatrix} 0 & \phi(t^*) \\ \phi(t) & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où  $\overline{\Gamma_c(E)}$  et  $\overline{\Gamma_c(F)}$  sont des modules hilbertiens sur  $C_0(X) \rtimes G$  (obtenus à partir des sections des fibrés) et  $\phi(t) : \overline{\Gamma_c(E)} \rightarrow \overline{\Gamma_c(F)}$  un morphisme de modules hilbertiens sur  $C_0(X) \rtimes G$  induit par  $t : E \rightarrow F$ . En considérant l'image de  $I$  par l'isomorphisme  $KK_0(\mathbb{C}, C_0(X) \rtimes G) \rightarrow K_0(C_0(X) \rtimes G)$ , on obtient une application  $I : K_G^0(X) \rightarrow K_0(C_0(X) \rtimes G)$  qui est un isomorphisme de groupe.

Dans notre cas, on a le théorème suivant

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $G$  un groupe discret et  $M$  un  $G$ -espace propre,  $\sigma$ - $G$ -compact vérifiant la propriété (Hyp). Le groupe de  $K$ -théorie équivariante  $K_G^0(M)$  est engendré par les  $K$ -cocycles  $(E, F, t)$  où  $E$  et  $F$  les fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants dont les fibres sont de dimension finie c'est-à-dire*

$$K_G^0(M) = \left\{ (E, F, t) : E \text{ et } F \text{ fibrés vectoriels } G\text{-équivariants de dimension finie} \right. \\ \left. \text{et } \exists Y \subset M : \forall x \in M \setminus Y \ t_x : E_x \rightarrow F_x \text{ est un isomorphisme} \right\}$$

Pour prouver ce résultat, on montre, en utilisant le groupe de  $KK$ -théorie de Kasparov  $KK_0(\mathbb{C}, C_0(M) \rtimes G)$ , que le groupe  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  est engendré par les images par l'applications  $I$  des classes d'équivalences dans  $K_G^0(M)$  représentées par les fibrés de dimension finie.

On suppose que le  $G$ -espace  $M$  vérifie la condition (Hyp) c'est-à-dire qu'il existe une famille  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de projections dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  telle que pour tout entier  $n$  et toute fonction  $\phi$  dans  $C_c(M)$ ,

l'opérateur  $\phi p_n$  est dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  et qui soit une approximation de l'unité pour  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$ .

Dans cette section, on cherche à décrire le groupe de  $K$ -théorie  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$  en termes de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants de dimension finie sur  $M$ . Par l'identification suivante

$$K_0(C_0(M) \rtimes G) = K_0(\mathcal{K}_G(\mathcal{B})) = KK_0(\mathbb{C}, \mathcal{K}_G(\mathcal{B}))$$

il suffit de considérer les éléments de  $KK(\mathbb{C}, \mathcal{K}_G(\mathcal{B}))$ . Ainsi pour toute classe  $[(E, F)]$  dans  $KK(\mathbb{C}, \mathcal{K}_G(\mathcal{B}))$ , on lui associe par les simplifications standards de la  $KK$ -théorie une classe  $[(E_1, F_1)]$  équivalente que l'on pourra décrire en termes de fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants sur  $M$ . On note dans la suite  $\mathcal{A} = \mathcal{K}_G(\mathcal{B})$ .

Soit  $[(E, F)]$  un élément de  $KK(\mathbb{C}; \mathcal{A})$ . D'après les simplifications standards des éléments de  $KK$ -théorie, on peut supposer :

1.  $E = H_{\mathcal{A}} \oplus H_{\mathcal{A}}$  où  $H_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$
2.  $F = \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}$  et tel que  $1 - T^*T$  et  $1 - TT^*$  sont dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A} \otimes K(H)$

Le travail qui suit consiste en une succession de transformations de l'opérateur  $F$  permettant d'obtenir un nouvel élément de  $KK$ -théorie dont la classe sera la même que celle de l'élément de départ  $(E, F)$ .

**Calcul fonctionnel :** les opérateurs  $1 - T^*T$  et  $1 - TT^*$  étant dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A} \otimes K(H)$ , alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un sous espace  $G$ -compact  $M_\varepsilon$  dans  $M$ , tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus M_\varepsilon$ , on a

$$\|1_x - T_x^*T_x\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|1_x - T_xT_x^*\| < \varepsilon$$

On note  $K_\varepsilon$  le sous espace compact de  $M/G$  tel que  $M_\varepsilon = K_\varepsilon G$ . On considère  $\varepsilon = 1/4$  : pour tout  $x$  dans  $M \setminus M_{1/4}$ , le spectre des l'opérateur  $1_x - T_x^*T_x$  et  $1_x - T_xT_x^*$  se situe dans l'intervalle  $[-1/4, 1/4]$ , ce qui signifie que le spectre de  $T_x^*T_x$  et  $T_xT_x^*$  se trouve dans l'intervalle  $[3/4, 5/4]$ .

Par calcul fonctionnel, en appliquant à l'opérateur  $F$  la fonction  $f$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]-\infty; -1/2] \\ 2x & \text{si } x \in [-1/2; 1/2] \\ 1 & \text{si } x \in [1/2; +\infty[ \end{cases}$$

on obtient un opérateur  $f(F)$  dans  $\mathcal{L}(H_{\mathcal{A}})$  tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus M_{1/4}$ , on a  $f(F)_x^2 = 1$  et la classe de  $(E, f(F))$  dans  $KK_0(\mathbb{C}, \mathcal{A})$  coïncide avec celle de  $(E, F)$  car l'opérateur  $f(F)$  est une perturbation compacte de l'opérateur  $F$ .

**Perturbations compactes :** soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'approximation de l'unité canonique de  $K(H)$  définie, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , de la manière suivante

$$(e_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut construire une suite de projections  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \otimes K(H)$  qui soit aussi une approximation de l'unité formée pour  $\mathcal{A} \otimes K(H)$ , pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , par

$$P_n = p_n \otimes e_n$$

et telle que pour toute fonction  $\psi$  dans  $C_c(M)$ , on a  $\psi P_n$  est dans  $\mathcal{A} \otimes K(H)$ .

On pose  $\varphi$  une fonction dans  $C_c(M/G)$  telle que  $\chi_{K_{1/4}} \leq \varphi \leq 1$ , où  $K_{1/4}$  est le sous espace compact de  $M/G$  défini auparavant. Puisque  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  est muni d'une structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre, alors pour tout entier  $n$ , l'opérateur  $\varphi P_n$  est dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|(\varphi P_n)_x\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|\varphi(\pi(x))(P_n)_x\| = 0, \quad \text{avec } x \in M$$

On en déduit que l'opérateur  $\varphi P_n$  est dans  $\mathcal{A} \otimes K(H) = \mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$

Pour tout entier  $n$ , on note pour simplifier les notations  $H_1^n := P_n H_{\mathcal{A}}$  et  $H_2^n := (1_{H_{\mathcal{A}}} - P_n) H_{\mathcal{A}}$  les sous modules hilbertiens.

On considère l'opérateur  $T'$  défini de la manière suivante

$$T' = T(1_{H(\mathcal{A})} - \varphi P_n)$$

Puisque  $T - T' = T\varphi P_n$  et que  $\varphi P_n$  est dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$ , l'opérateur  $T'$  est une perturbation compacte de l'opérateur  $T$ . Ainsi en notant  $F$  l'opérateur  $\begin{pmatrix} 0 & T'^* \\ T' & 0 \end{pmatrix}$ , on a un élément  $(E, F')$  dont la classe dans  $KK(\mathbb{C}; \mathcal{A})$  coïncide avec celle de  $(E, F)$ . Comme  $T'^* T' = (1_{H_{\mathcal{A}}} - \varphi P_n) T^* T (1_{H_{\mathcal{A}}} - \varphi P_n)$ , alors on peut, pour tout  $x$  dans  $M$ , écrire  $T'_x{}^* T'_x$  sous la forme

$$T'_x{}^* T'_x = \begin{pmatrix} (1 - \varphi(x))^2 (1_{H_1^n})_x & 0 \\ 0 & V_x \end{pmatrix}$$

où  $V$  est la compression de  $T^* T$  sur  $H_2^n$ .

En effet, on distingue les deux cas où  $x$  appartient ou non à l'espace  $G$ -compact  $M_{1/4}$ .

- Si  $x$  est dans  $M_{1/4}$ , alors  $\varphi(x) = 1$  et

$$T'_x{}^* T'_x = (1_{H_{\mathcal{A}}} - P_n)_x T^* T (1_{H_{\mathcal{A}}} - P_n)_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_x \end{pmatrix}$$

- Si  $x$  est dans  $M \setminus M_{1/4}$ , alors  $T_x^* T_x = 1_x$  donc  $V_x = 1$

$$T'_x{}^* T'_x = (1_{H_{\mathcal{A}}} - \varphi(x) P_n)^2 = \begin{pmatrix} (1 - \varphi(x))^2 (1_{H_1^n})_x & 0 \\ 0 & (1_{H_2^n})_x \end{pmatrix}$$

Montrons qu'en prenant un entier  $n$  suffisamment grand, on peut considérer  $V$  inversible : en effet, l'opérateur  $V$  est défini comme la compression de l'opérateur  $T^* T$  sur  $(1 - P_n) H_{\mathcal{A}}$ . Par définition, l'opérateur  $T^* T - 1_{H_{\mathcal{A}}}$  étant compact c'est-à-dire dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$ , pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe des vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_m$  et  $\eta_1, \dots, \eta_m$  dans  $H_{\mathcal{A}}$  tels que

$$\left\| (T^* T - 1_{H_{\mathcal{A}}}) - \sum_{i=1}^m \theta_{\xi_i, \eta_i} \right\| < \varepsilon/2$$

La suite de projections  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant une unité approchée pour  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$ , il existe un entier  $n_\varepsilon$  pour lequel on a

$$\left\| P_{n_\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \theta_{\xi_i, \eta_i} \right) P_{n_\varepsilon} - \sum_{i=1}^m \theta_{\xi_i, \eta_i} \right\| < \varepsilon/2$$

Or pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on a  $P_{n_\varepsilon} \theta_{\xi_i, \eta_i} P_{n_\varepsilon} = \theta_{P_{n_\varepsilon}(\xi_i), P_{n_\varepsilon}(\eta_i)}$ , on a alors

$$\left\| (T^*T - 1_{H_{\mathcal{A}}}) - \sum_{i=1}^m \theta_{P_{n_\varepsilon}(\xi_i), P_{n_\varepsilon}(\eta_i)} \right\| < \varepsilon$$

et par compression des opérateurs sur le sous module  $H_2^{n_\varepsilon}$ , on a

$$\left\| (V - 1_{H_2^{n_\varepsilon}}) - (1_{H_{\mathcal{A}}} - P_{n_\varepsilon}) \left( \sum_{i=1}^m \theta_{P_{n_\varepsilon}(\xi_i), P_{n_\varepsilon}(\eta_i)} \right) (1_{H_{\mathcal{A}}} - P_{n_\varepsilon}) \right\| = \|(V - 1_{H_2^{n_\varepsilon}}) - 0\| < \varepsilon$$

Le spectre de l'opérateur  $V - 1_{H_2^{n_\varepsilon}}$  se trouve dans l'intervalle  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et donc celui de  $V$  qui est dans l'intervalle  $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  ne contient pas la valeur 0. L'opérateur  $V$  est donc positif et inversible ; ceci nous permet de réaliser une nouvelle perturbation compacte décrite ci-dessous en utilisant, par calcul fonctionnel continu, l'opérateur  $V^{-1/2}$  : on pose  $T''$  l'opérateur obtenu à partir de  $T'$  de la manière suivante :

$$T'' = T' \begin{pmatrix} 1_{H_1^{n_\varepsilon}} & 0 \\ 0 & V^{-1/2} \end{pmatrix}$$

On remarque que  $T''$  est une perturbation compacte de  $T'$  puisque

$$T'' - T' = T' \left[ \begin{pmatrix} 1_{H_1^{n_\varepsilon}} & 0 \\ 0 & V^{-1/2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{H_1^{n_\varepsilon}} & 0 \\ 0 & 1_{H_2^{n_\varepsilon}} \end{pmatrix} \right] = T' \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^{-1/2} - 1_{H_2^{n_\varepsilon}} \end{pmatrix} \right]$$

or on sait que  $V - 1_{H_2^{n_\varepsilon}}$  est la compression de l'opérateur  $T^*T - 1$  sur  $H_2^{n_\varepsilon}$  qui est un opérateur dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$  ; donc  $V$  étant une perturbation compacte de l'unité, alors par calcul fonctionnel continu,  $V^{-1/2}$  est une perturbation compacte de l'unité et donc  $V^{-1/2} - 1$  est compact. Ainsi on peut affirmer que  $(E, F'')$  définit un élément de  $KK(\mathbb{C}; \mathcal{A})$  ayant la même classe que celle de l'élément  $(E, F)$ .

Comme précédemment, on peut décrire explicitement l'opérateur  $F''$  en chaque point de l'espace  $M$  : pour  $x$  dans  $M$ , on a

$$T_x'' T_x'' = \begin{pmatrix} (1_{H_1^{n_\varepsilon}})_x & 0 \\ 0 & V_x^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \varphi(x))^2 (1_{H_1^{n_\varepsilon}})_x & 0 \\ 0 & V_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1_{H_1^{n_\varepsilon}})_x & 0 \\ 0 & V_x^{-1/2} \end{pmatrix}$$

- Pour  $x$  dans  $M_{1/4}$ , on a  $1 - \varphi(x) = 0$  et donc  $T_x'' T_x'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1_{H_2^{n_\varepsilon}})_x \end{pmatrix}$
- Pour  $x$  dans  $M \setminus M_{1/4}$ , on a  $V_x = 1$  et donc  $T_x'' T_x'' = \begin{pmatrix} (1 - \varphi(x))^2 & 0 \\ 0 & (1_{H_2^{n_\varepsilon}})_x \end{pmatrix}$

**Sous modules hilbertiens :** par commodité, on note dans la suite  $T$  l'opérateur  $T''$  obtenu précédemment, on note  $P = P_{n_\varepsilon}$  la projection utilisée précédemment et soit  $H_1 = im(P)$  et  $H_2 = ker(P)$ , comme  $P$  est une projection, le module  $H_{\mathcal{A}}$  se décompose en la somme directe de ces sous modules hilbertiens sur  $\mathcal{A}$

$$H_{\mathcal{A}} = H_1 \oplus H_2$$

On peut écrire de manière générale le produit  $T^*T$  sous la forme suivante, en posant  $\psi = 2\varphi - \varphi^2$ .

$$T^*T = \begin{pmatrix} (1 - \psi)1_{H_1} & 0 \\ 0 & 1_{H_2} \end{pmatrix}$$

On va maintenant introduire une nouvelle projection obtenue à partir de l'opérateur  $T$  : d'après l'égalité suivante

$$(1_{H_A} - P)T^*T(1_{H_A} - P) = (1_{H_A} - P) \begin{pmatrix} (1 - \psi)1_{H_1} & 0 \\ 0 & 1_{H_2} \end{pmatrix} (1_{H_A} - P) = 1_{H_A} - P$$

en posant  $q = T(1_{H_A} - P)T^*$ , on obtient une projection  $q : H_A \rightarrow H_A$  : en effet

$$\begin{aligned} q^2 &= T(1_{H_A} - P)T^*T(1_{H_A} - P)T^* \\ &= T[(1_{H_A} - P)T^*T(1_{H_A} - P)]T^* \\ &= T(1_{H_A} - P)T^* = q \end{aligned}$$

$$q^* = T(1_{H_A} - P)T^* = q$$

Cette projection permet de décomposer  $H_A$  en la somme directe de sous modules hilbertiens sur  $\mathcal{A}$  suivante

$$H_A = \text{Im}(1_{H_A} - q) \oplus \text{Im}(q)$$

- l'image  $\text{Im}(q)$  est incluse dans  $T(H_2)$  : en effet, la projection  $q$  s'écrivant  $T(1_{H_A} - P)T^* = TP_{H_2}T^*$  (où  $P_{H_2}$  est la projection canonique sur  $H_2$ ) on remarque que  $\text{Im}(q)$  est inclus dans  $T(H_2)$ .
- l'image  $\text{Im}(1_{H_A} - q)$  est incluse dans  $T(H_2)^\perp$  : en effet, si on considère  $v$  dans  $\text{Im}(1_{H_A} - q)$  et  $\eta$  dans  $H_2$  et  $\xi = T(\eta)$  dans  $T(H_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle v, \xi \rangle &= \langle v - qv, T(\eta) \rangle \\ &= \langle T^*(1_{H_A} - q)v, \eta \rangle \\ &= \langle T^*v - T^*T(1_{H_A} - P)T^*v, \eta \rangle \\ &= \langle T^*v - (1_{H_A} - \psi P)(1_{H_A} - P)T^*v, \eta \rangle \\ &= \langle T^*v - P_{H_2}T^*v, \eta \rangle \\ &= \langle P_{H_1}T^*v, \eta \rangle \\ &= \langle T^*v, P_{H_1}\eta \rangle = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inclusion de  $\text{Im}(1_{H_A} - q)$  dans  $T(H_2)^\perp$ .

On obtient alors les inclusions successives suivantes

$$H_A = \text{Im}(1_{H_A} - q) \oplus \text{Im}(q) \subset T(H_2)^\perp \oplus T(H_2) \subset H_A$$

à partir desquelles on a la décomposition  $H_A = T(H_2)^\perp \oplus T(H_2)$ .

*Remarque 2.4.2.* On pose  $H'_1 := T(H_2)^\perp$  et  $H'_2 = T(H_2)$ .

L'opérateur  $T$  est une isométrie sur  $H_2$  puisque la composée  $T^*|_{H'_2}T|_{H_2}$  des restrictions de  $T$  à  $H_2$  et  $T^*$  à  $H'_2$  est l'opérateur identité de  $H_2$ .

$T$  et  $T^*$  se décomposent alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} T &= T|_{H_1} \oplus T|_{H_2} & : & & H_1 \oplus H_2 & \longrightarrow & H'_1 \oplus H'_2 \\ T^* &= T^*|_{H'_1} \oplus T^*|_{H'_2} & : & & H'_1 \oplus H'_2 & \longrightarrow & H_1 \oplus H_2 \end{aligned}$$

On notera  $T_1, T_2, T_1^*$  et  $T_2^*$  les restrictions précédentes.

L'opérateur de la classe de  $KK$ -théorie considérée s'écrit donc

$$F = \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_1^* \\ T_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_2^* \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} = F_1 + F_2$$

On remarque que l'opérateur  $F_2$  définit un élément  $(H_2 \oplus H'_2; F_2)$  dégénéré donc de classe nulle dans le groupe de  $KK$ -théorie.

La classe considérée peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$\left( H_1 \oplus H'_1, \begin{pmatrix} 0 & T_1^* \\ T_1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (2.2)$$

où  $H_1$  est l'image par la projection  $P$  du  $\mathcal{A}$ -module hilbertien  $H_{\mathcal{A}}$  et  $H'_1$  est l'image par la projection  $1 - q$  du  $\mathcal{A}$ -module hilbertien  $H_{\mathcal{A}}$ .

La dernière expression de la classe de l'élément du groupe de Kasparov permet de donner une version géométrique de la classe de  $K$ -théorie de l'élément initialement considéré, faisant intervenir notamment des fibrés vectoriels équivariants sur l'espace  $M$ . A chacun des  $\mathcal{A}$ -modules hilbertiens  $H_1$  et  $H'_1$ , on va associer un fibré vectoriel  $G$ -équivariant sur  $M$ . On va d'abord faire une construction générale nous permettant d'obtenir des fibrés vectoriels équivariants sur  $M$  à partir de  $\mathcal{A}$ -modules de Hilbert satisfaisant certaines conditions puis on montre que les  $\mathcal{A}$ -modules obtenus satisfont ces conditions.

**Construction générale :** on rappelle tout d'abord quelques résultats généraux concernant les modules de Hilbert et notamment les opérateurs d'un module de Hilbert obtenu par produit tensoriel interne.

Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres,  $E$  un  $A$ -module de Hilbert,  $F$  un  $B$ -module de Hilbert et  $\phi : A \rightarrow \mathcal{K}_B(F)$  un  $*$ -homomorphisme et  $E \otimes_{\phi} F$  le produit tensoriel interne. Si  $T$  est un opérateur dans  $\mathcal{L}(E)$ , alors  $T \otimes id_F$  définit un opérateur de  $\mathcal{L}(E \otimes_{\phi} F)$  et on obtient un  $*$ -homomorphisme unital  $\phi_* : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} F)$  qui est injectif si  $\phi$  est injectif. En général, l'image par  $\phi_*$  des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(E)$  n'est pas incluse dans l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(E \otimes_{\phi} F)$ , cependant, il existe certains cas dans lesquels ce résultat est possible comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.4.3.** [Lan95] Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres,  $E$  un  $A$ -module de Hilbert,  $F$  un  $B$ -module de Hilbert et  $\phi : A \rightarrow \mathcal{K}_B(F)$  un  $*$ -homomorphisme. On considère l'homomorphisme  $\phi_* : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} F)$ . La restriction de  $\phi_*$  à  $\mathcal{K}_A(E)$  est à image dans  $\mathcal{K}_B(E \otimes_{\phi} F)$  et si  $\phi$  est injective (resp. surjective) alors  $\phi_*|_{\mathcal{K}_A(E)}$  est injective (resp. surjective).

*Démonstration.* [Lan95] Pour tout  $x$  dans  $E$ , on note  $L_x$  l'opérateur dans  $\mathcal{L}_B(F, E \otimes_{\phi} F)$  défini pour tout  $y$  dans  $F$  par  $L_x(y) = x \otimes y$ . Son adjoint  $L_x^*$  est défini de la manière suivante : pour tout  $u$  dans  $E$  et tout  $v$  dans  $F$ , on a

$$\begin{aligned} \langle L_x(y), u \otimes v \rangle &= \langle x \otimes y, u \otimes v \rangle = \langle y, \phi(\langle x, u \rangle)(v) \rangle \\ &= \langle y, L_x^*(u \otimes v) \rangle \end{aligned}$$

donc on a  $L_x^*(u \otimes v) = \phi(\langle x, u \rangle)(v)$ . On va utiliser ce type d'opérateur pour démontrer le résultat voulu : pour tout  $a$  dans  $A$ , tout  $x, y, u$  dans  $E$  et tout  $v$  dans  $F$ , on considère tout d'abord le cas particulier de l'opérateur  $\phi_*(\theta_{xa,y})$  :

$$\begin{aligned} \phi_*(\theta_{xa,y})(u \otimes v) &= \theta_{xa,y}(u) \otimes v = xa\langle y, u \rangle \otimes v \\ &= x \otimes \phi(a\langle y, u \rangle)(v) \\ &= x \otimes \phi(a)\phi(\langle y, u \rangle)(v) \\ &= (L_x \circ \phi(a) \circ L_y^*)(u \otimes v) \end{aligned}$$

et on a  $\phi_*(\theta_{xa,y}) = L_x \circ \phi(a) \circ L_y^*$ , or  $\phi(a)$  est dans  $\mathcal{K}_B(F)$  donc  $\phi_*(\theta_{xa,y})$  est compact. Pour obtenir le cas général, il suffit de considérer  $(a_i)_{i \in I}$  une approximation de l'unité dans  $A$  et de voir que  $(\theta_{xa_i,y})_{i \in I}$  converge pour la topologie de la norme vers  $\theta_{x,y}$  dans  $\mathcal{K}_A(E)$  et par conséquent  $(\phi_*(\theta_{xa_i,y}))_{i \in I}$  converge dans  $\mathcal{L}(E \otimes_\phi F)$  vers  $\phi_*(\theta_{x,y})$  pour la topologie de la norme et donc pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ , l'opérateur  $\phi_*(\theta_{x,y})$  est compact et  $\phi_*(\mathcal{K}_A(E))$  est contenu dans  $\mathcal{K}(E \otimes_\phi F)$ . L'injectivité de  $\phi_*$  est évidente dès lors que  $\phi$  est injective. Si  $\phi$  est surjective, alors pour tout  $x'$  et  $y'$  dans  $F$ , il existe  $a$  dans  $A$  tel que  $\phi(a) = \theta_{x',y'}$  et on alors, avec les mêmes notations qu'auparavant :

$$\begin{aligned} \theta_{x \otimes x', y \otimes y'}(u \otimes v) &= x \otimes x' \langle y \otimes y', u \otimes v \rangle = x \otimes x' \langle y', \phi(\langle y, u \rangle)(v) \rangle \\ &= x \otimes \theta_{x',y'}(\phi(\langle y, u \rangle)(v)) = x \otimes \phi(a)(\phi(\langle y, u \rangle)(v)) \\ &= L_x \circ \phi(a) \circ L_y^*(u \otimes v) = \theta_{xa,y}(u \otimes v) \end{aligned}$$

et puisque  $\phi_*$  est à image fermée, on en déduit que  $\phi_*$  est surjective.  $\square$

On considère de manière générale un  $\mathcal{A}$ -module de Hilbert  $E$  qui s'écrit

$$E = PH_{\mathcal{A}}$$

où  $P$  est une projection dans  $\mathcal{M}(A) \otimes K(H)$  telle que  $g.P$  est un opérateur dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B}) \otimes K(H)$ , pour toute fonction  $g$  dans  $C_0(M)$ . On rappelle que la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G$  est munie d'une structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre et il en va bien sûr de même pour sa sous  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$ . Soit  $\phi$  est une fonction dans  $C_0(M/G)$ , alors par la structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})^G$ , alors l'opérateur  $\phi.P$  est dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})^G \otimes K(H)$  et vérifie les deux conditions suivantes : pour toute fonction  $g$  dans  $C_0(M)$

$$g.(\psi.P) \in \mathcal{K}(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in M/G}} \|(\psi.P)_x\| = 0$$

Ainsi pour toute fonction  $\psi$  dans  $C_0(M/G)$ , on a  $\psi.P$  est dans  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B}) \otimes K(H)$  c'est-à-dire dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$ .

Soit  $K$  un sous espace compact dans  $M/G$  et on note  $f$  une fonction de  $C_c(M/G)$  telle que  $\chi_K \leq f \leq 1$ . On note  $\psi_f : E = PH_{\mathcal{A}} \rightarrow PH_{\mathcal{A}} = E$  l'homomorphisme induit par la structure de  $C_0(M/G)$ -algèbre sur  $\mathcal{A}$ . On montre que  $\psi_f$  est un opérateur compact sur  $E$  : en effet, l'opérateur  $\psi_f : PH_{\mathcal{A}} \rightarrow PH_{\mathcal{A}}$  vérifie les égalités suivantes :

$$\psi_f = \psi_f P = P \psi_f P \in \mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$$

car  $P$  est une projection. Par conséquent, comme  $P = P^* = P^2$ , on a  $P \psi_f P \in PK(H_{\mathcal{A}})P$ . Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} PK(H_{\mathcal{A}})P &= P \overline{\{T_{\eta,\eta'} : \eta, \eta' \in H_{\mathcal{A}} \text{ et } \forall \xi \in H_{\mathcal{A}}, T_{\eta,\eta'}(\xi) = \eta \langle \eta', \xi \rangle\}} P \\ &= \overline{\{PT_{\eta,\eta'}P : \eta, \eta' \in H_{\mathcal{A}} \text{ et } \forall \xi \in H_{\mathcal{A}}, T_{\eta,\eta'}(\xi) = \eta \langle \eta', \xi \rangle\}} \\ &= \overline{\{T_{P\eta,P\eta'} : \eta, \eta' \in H_{\mathcal{A}} \text{ et } \forall \xi \in H_{\mathcal{A}}, T_{P\eta,P\eta'}(\xi) = P\eta \langle P\eta', \xi \rangle\}} \end{aligned}$$

Or  $T_{P\eta,P\eta'}(\xi) = P\eta \langle P\eta', \xi \rangle = P\eta \langle P^*P\eta', \xi \rangle = P\eta \langle P\eta', P\xi \rangle$  ce qui permet de considérer  $\xi$  dans  $E$  et non plus dans  $H_{\mathcal{A}}$ .

$$\begin{aligned} PK(H_{\mathcal{A}})P &= \overline{\{T_{\nu,\nu'} : \nu, \nu' \in E \text{ et } \forall \xi \in E, T_{\nu,\nu'}(\xi) = \nu \langle \nu', \xi \rangle\}} \\ &= \mathcal{K}(E) \end{aligned}$$

on en déduit donc que l'opérateur  $\psi_f = P\psi_f P$  est un opérateur compact sur le  $\mathcal{A}$ -module de Hilbert  $E$ .

On note  $C_K(M/G)$  l'idéal fermé bilatère de  $C_0(M/G)$  constitué des fonctions continues de  $C_0(M/G)$  et nulle sur le compact  $K$  et  $I_K := \overline{C_K(M/G)\mathcal{K}_G(\mathcal{B})}$  idéal fermé bilatère de  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})$  : on obtient alors la  $C(K)$ -algèbre  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})/I_K$  qui est isomorphe à la  $C(K)$ -algèbre  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  et un homomorphisme quotient  $\pi_K : \mathcal{K}_G(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{K}_G(\mathcal{B})/I_K$ . On note dans la suite  $\rho_K : \mathcal{K}_G(\mathcal{B}) \rightarrow C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  obtenu par composition de  $\pi_K$  et de l'isomorphisme  $\mathcal{K}_G(\mathcal{B})/I_K \rightarrow C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ . On construit alors un  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert noté  $E_K$  par produit tensoriel interne

$$E_K := E \otimes_{\rho_K} (C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)))$$

On a vu que l'homomorphisme  $\psi_f : E \rightarrow E$  est dans l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(E)$  et d'après la proposition 2.4.3, l'opérateur induit  $\psi_f \otimes 1$  dans  $\mathcal{L}(E_K)$  est dans l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}(E_K)$ . De plus, pour tous  $e, e'$  dans  $E$  et  $g, g'$  dans  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \psi_f \otimes id(e \otimes g), e' \otimes g' \rangle &= \langle \psi_f(e) \otimes g, e' \otimes g' \rangle = \langle g, \rho_K(\langle \psi_K(e), e' \rangle)g' \rangle \\ &= \langle g, \rho_K(f \cdot \langle e, e' \rangle)g' \rangle = \langle g, \rho_K(\langle e, e' \rangle)g' \rangle \\ &= \langle e \otimes g, e' \otimes g' \rangle \end{aligned}$$

et on en déduit que l'opérateur  $\psi_f \otimes id$  de  $\mathcal{K}(E_K)$  coïncide avec l'opérateur identité. Ainsi l'identité sur  $E_K$  est un opérateur compact et on a alors égalité entre les algèbres d'opérateurs  $\mathcal{K}(E_K)$  et  $\mathcal{L}(E_K)$ .

Les  $C^*$ -algèbres  $C(K)$  et  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  sont stablement isomorphes donc Morita équivalentes et  $\mathbb{E} := C(K) \otimes l^2(G)$  est un  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ - $C(K)$ -bimodule d'imprimitivité  $\mathbb{E}$ . On note  $\mathbb{E}^*$  le module dual de  $\mathbb{E}$  où  $\mathbb{E}^* = \{\xi^* : \xi \in \mathbb{E}\}$  muni des opérations  $\xi^* + \eta^* = (\xi + \eta)^*$ ,  $\alpha \cdot \xi^* = (\bar{\alpha}\xi)^*$  est un  $C(K)$ - $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -bimodule d'imprimitivité avec  $f\xi^*F = (F\xi f)^*$  pour tout  $f$  dans  $C(K)$  et  $F$  dans  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ . De plus l'application  $\xi \otimes \eta^* \mapsto \langle \xi, \eta \rangle_{C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))}$  induit un isomorphisme de  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert entre  $\mathbb{E} \otimes_{C(K)} \mathbb{E}^*$  et  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ .

On note  $\mathcal{K}(\mathbb{E})$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $\mathcal{L}_{C(K)}(\mathbb{E})$  et  $\phi : C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{E})$  le  $*$ -isomorphisme associé au bimodule d'imprimitivité. On a le lemme suivant qui dit que  $\phi_* : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{C(K)} \mathbb{E})$  pour laquelle les conditions sont réunies ici et on a le corollaire suivant

**Lemme 2.4.4.** *Pour tout  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert  $E$ , l'application  $\phi_* : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{C(K)} \mathbb{E})$  est un isomorphisme de  $C^*$ -algèbre.*

*Démonstration.* Soit  $E$  un  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert. Le  $*$ -isomorphisme  $\phi : C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{E})$  induit un homomorphisme injectif  $\phi_* : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} \mathbb{E})$  qui à tout  $T$  de  $\mathcal{L}(E)$  associe l'opérateur  $T \otimes id$ . On considère le bimodule dual  $\mathbb{E}^*$ , qui est un  $C(K)$ - $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -bimodule d'imprimitivité donc il existe un  $*$ -isomorphisme  $\phi' : C(K) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{E}^*)$ . L'homomorphisme  $\mathcal{L}(E \otimes_{\phi} \mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} \mathbb{E} \otimes_{\phi'} \mathbb{E}^*)$  est injectif. On a vu que

$$\mathcal{L}(E \otimes_{\phi} \mathbb{E} \otimes_{\phi'} \mathbb{E}^*) \cong \mathcal{L}(E \otimes_{\phi} (C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)))) \cong \mathcal{L}(E)$$

On a alors un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{L}(E \otimes_{\phi} \mathbb{E})$ . □

**Proposition 2.4.5.** *Le  $C(K)$ -module de Hilbert  $\tilde{E}_K := E_K \otimes_\phi \mathbb{E}$  est projectif de type fini.*

*Démonstration.* Il existe une bijection entre l'ensemble des  $C(K)$ -modules de Hilbert et l'ensemble des  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -modules de Hilbert. On note  $\phi : C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{E})$  le  $*$ -isomorphisme associé au  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ - $C(K)$ -bimodule d'imprimitivité  $\mathbb{E}$ .

Soit  $E_K$  un  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert et  $\tilde{E}_K := E_K \otimes_\phi \mathbb{E}$  le  $C(K)$ -module de Hilbert associé. D'après le lemme 2.4.4 l'homomorphisme  $\mathcal{L}(E_K) \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{E}_K)$  qui à tout opérateur  $T$  de  $\mathcal{L}(E)$  associe l'opérateur  $\phi_*(T) = T \otimes id$  est un  $*$ -isomorphisme. D'après la proposition 2.4.3 le  $*$ -homomorphisme  $\phi_* : \mathcal{K}(E) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{E})$  est un  $*$ -isomorphisme. Pour  $E_K$  le  $C(K) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert étudié, on a montré que  $\mathcal{L}(E_K)$  coïncide avec  $\mathcal{K}(E_K)$  par conséquent en utilisant les isomorphismes suivant obtenus

$$\mathcal{L}(E_K) \cong \mathcal{L}(\tilde{E}_K), \quad \mathcal{L}(E_K) \cong \mathcal{K}(E_K) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(E_K) \cong \mathcal{K}(\tilde{E}_K)$$

on en déduit que  $\mathcal{K}(\tilde{E}_K)$  coïncide avec  $\mathcal{L}(\tilde{E}_K)$  et  $\tilde{E}_K$  est alors un  $C(K)$ -module de Hilbert projectif de type fini. □

On rappelle que l'espace  $M/G$  est  $\sigma$ -compact donc il existe une suite croissante de sous espaces compacts  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $M/G$  tel que pour tout entier  $n$ , on a  $K_n$  inclus dans  $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $\rho_{K_n} : \mathcal{K}_G(\mathcal{B}) \rightarrow C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  le  $*$ -homomorphisme défini auparavant et  $\mathbb{E}_n := C(K_n) \otimes l^2(G)$  le  $C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ - $C(K_n)$ -bimodule d'imprimitivité. Ainsi pour le  $\mathcal{A}$ -module de Hilbert  $E = PH_{\mathcal{A}}$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on définit un  $C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ -module de Hilbert  $E_{K_n}$  et un  $C(K_n)$ -module de Hilbert  $\tilde{E}_{K_n}$  en posant

$$E_{K_n} := E \otimes_{\rho_{K_n}} (C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \quad \text{et} \quad \tilde{E}_{K_n} := E_{K_n} \otimes_{\phi_n} \mathbb{E}_n$$

Pour tout entier  $n \geq m$ , on note  $\alpha_{n,m} : C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)) \rightarrow C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  l'homomorphisme surjectif de  $C^*$ -algèbres et on a  $C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G)) \otimes_{\alpha_{n,m}} C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$  est isomorphe en tant que module de Hilbert à  $C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))$ . On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} E_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) &= \left( E \otimes_{\rho_{K_n}} (C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \right) \otimes_{\alpha_{n,m}} (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \\ &= E \otimes_{(\rho_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} id)} \left( (C(K_n) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \otimes_{\alpha_{n,m}} (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \right) \\ &= E \otimes_{\rho_{K_m}} (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) = E_{K_m} \end{aligned}$$

De plus, pour tout couple  $(m, n)$  dans  $\mathbb{N}^2$  tel que  $n \geq m$ , on a la relation suivante entre le  $C(K_n)$ -module de Hilbert  $\tilde{E}_{K_n}$  et le  $C(K_m)$ -module de Hilbert  $\tilde{E}_{K_m}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{K_m} &= E_{K_m} \otimes_{\phi_m} \mathbb{E}_m = \left( E_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \right) \otimes_{\phi_m} \mathbb{E}_m \\ &= E_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} \left( (C(K_m) \otimes \mathcal{K}(l^2(G))) \otimes_{\phi_m} \mathbb{E}_m \right) \\ &= E_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} \mathbb{E}_m = E_{K_n} \otimes_{\alpha_{n,m}} (\mathbb{E}_n \otimes_{C(K_m)} \mathbb{E}_m) = \tilde{E}_{K_n} \otimes_{C(K_m)} \mathbb{E}_m \end{aligned}$$

*Remarque 2.4.6.* Par le théorème de Serre-Swan, pour tout entier  $n$ , il existe un unique fibré vectoriel complexe de dimension finie  $\hat{E}_{K_n} = \cup_{x \in K_n} \hat{E}_{K_n, x}$  sur  $K$  tel que  $\tilde{E}_{K_n}$  soit isomorphe au module des sections continues de  $\hat{E}_{K_n}$ . Pour tout  $x$  dans  $K_n$ , la fibre  $\hat{E}_{K_n, x}$  est définie par  $\hat{E}_{K_n, x} = \tilde{E}_{K_n} \otimes_{ev_x} \mathbb{C}$ .

Par conséquent, au niveau des fibrés vectoriels on a pour tout  $x$  dans  $K_m$ ,

$$\begin{aligned}\hat{E}_{K_m,x} &= \tilde{E}_{K_m} \otimes_{ev_x} \mathbb{C} = (\tilde{E}_{K_n} \otimes \mathbb{E}_m) \otimes_{ev_x} \mathbb{C} \\ &= \tilde{E}_{K_n} \otimes_{ev_x} \mathbb{C} = \hat{E}_{K_n,x}\end{aligned}$$

On considère le système inductif  $((K_n, \tilde{E}_{K_n}), f_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ , indexé par  $\mathbb{N}$ , sur la catégorie des fibrés vectoriels complexes sur les espaces topologiques, par la donnée d'un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant  $p_n : \tilde{E}_{K_n} \rightarrow K_n$  et de morphismes  $f_{n,k} : \tilde{E}_{K_n} \rightarrow \tilde{E}_{K_k}$  pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $k \geq n$ . Les morphismes de ce système inductif sont les morphismes d'inclusion de fibrés vectoriels.

La limite inductive de ce système est obtenue par quotient de l'espace des réunions disjointes  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{E}_{K_n}$  par la relation d'équivalence donnée par

$$(x, n) \sim (y, k) \iff \exists p \in \mathbb{N} : \begin{cases} p \geq \max(n, k) \\ f_{n,p}(x) = f_{k,p}(y) \end{cases}$$

Le fibré vectoriel complexe défini sur l'espace  $\sigma$ -compact  $M/G$  peut s'étendre (en respectant l'action de  $G$  sur  $M$ ) en un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur l'espace  $M$  dont la fibre en chaque point de  $M$  est un espace vectoriel de dimension finie.

**Applications :** la construction précédemment réalisée, permettant de construire un fibré vectoriel  $G$ -équivariant sur  $M$  à partir de certain type de  $\mathcal{A}$ -modules de Hilbert, va être utilisée pour démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.4.7.** *Tout élément  $\omega$  dans  $KK_0(\mathbb{C}; \mathcal{A})$  s'écrit comme un triplet  $(\tilde{H}_1, \tilde{H}'_1, \tilde{T}_1)$  où*

- (a)  $\tilde{H}_1$  et  $\tilde{H}'_1$  sont des fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur  $M$  de dimension finie
- (b)  $\tilde{T}_1 : \tilde{H}_1 \rightarrow \tilde{H}'_1$  un homomorphisme pour lequel il existe un sous espace  $G$ -compact  $Y$  dans  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus Y$ , l'application  $\tilde{T}_{1,x} : \tilde{H}_{1,x} \rightarrow \tilde{H}'_{1,x}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* En étudiant une classe  $[(E, F)]$  de  $KK_0(\mathbb{C}, \mathcal{A})$ , on est parvenu à déterminer un élément de même classe (voir 2.2 ) pouvant s'écrire sous la forme

$$\left( H_1 \oplus H'_1, \begin{pmatrix} 0 & T_1^* \\ T_1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où  $H_1$  est l'image par la projection  $P$  du  $\mathcal{A}$ -module hilbertien  $H_{\mathcal{A}}$  et  $H'_1$  est l'image par la projection  $1_{H_{\mathcal{A}}} - q$  du  $\mathcal{A}$ -module hilbertien  $H_{\mathcal{A}}$ .

La démonstration consiste à utiliser les résultats obtenus précédemment aux  $\mathcal{A}$ -modules hilbertiens  $H_1 = PH_{\mathcal{A}}$  et  $H'_1 = (1_{H_{\mathcal{A}}} - q)H_{\mathcal{A}}$  en prouvant que les projections  $P$  et  $1_{H_{\mathcal{A}}} - q$  vérifient la condition suivante : pour toute fonction  $g$  dans  $C_0(M)$ , les opérateurs  $g.P$  et  $g.(1_{H_{\mathcal{A}}} - q)$  sont dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B}) \otimes K(H)$ .

La projection  $P$  étant une projection de l'approximation de l'unité  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alors elle vérifie (par définition) cette condition.

La projection  $1_{H_{\mathcal{A}}} - q$  peut s'écrire

$$1_{H_{\mathcal{A}}} - q = 1_{H_{\mathcal{A}}} - T(1_{H_{\mathcal{A}}} - P_n)T^* = (1_{H_{\mathcal{A}}} - TT^*) + TP_nT^*$$

Par définition de l'élément  $(E, F)$ , l'opérateur  $1_{H_{\mathcal{A}}} - TT^*$  est dans  $\mathcal{K}(H_{\mathcal{A}})$  et comme  $P_n$  vérifie cette condition, alors, pour toute fonction  $g$  dans  $C_0(M)$ , l'opérateur  $fTP_nT^*$  est dans

$\mathcal{K}(\mathcal{B}) \otimes K(H)$

On associe à chacun d'eux un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant sur  $M$ , respectivement notés  $\hat{H}_1$  et  $\hat{H}'_1$ . Pour chaque point  $x$  dans  $M$ , les fibres (de dimension finie) respectives sont  $\hat{H}_{1,x} = \tilde{H}_1 \otimes_{ev_x} \mathbb{C}$  et  $\hat{H}'_{1,x} = \tilde{H}'_1 \otimes_{ev_x} \mathbb{C}$ .

De plus il existe un sous espace compact  $K$  dans  $M$  (dont le saturé est noté  $GK$ ) vérifiant pour tout  $x$  dans  $M \setminus GK$

$$F_{1,x}^2 = 1, \quad \text{avec} \quad F_{1,x} = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,x}^* \\ T_{1,x} & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout  $x$  dans  $M \setminus GK$ , on a  $T_{1,x}^* T_{1,x} = 1$  et  $T_{1,x} T_{1,x}^* = 1$ . On pose  $\hat{T}_1 = (\hat{T}_{1,x})_{x \in M}$  et  $\hat{T}_1^* = (\hat{T}_{1,x}^*)_{x \in M}$  familles d'opérateurs définis (en prenant pour chaque  $x$  de  $M$  un entier  $n$  suffisamment grand) par

$$\begin{aligned} \hat{T}_{1,x} &= ((T_1 \otimes_{\rho_{K_n}} id) \otimes_{\phi_n} id) \otimes_{ev_x} 1_{\mathbb{C}} & : & \hat{H}_{1,x} \longrightarrow \hat{H}'_{1,x} \\ \hat{T}_{1,x}^* &= ((T_1^* \otimes_{\rho_{K_n}} id) \otimes_{\phi_n} id) \otimes_{ev_x} 1_{\mathbb{C}} & : & \hat{H}'_{1,x} \longrightarrow \hat{H}_{1,x} \end{aligned}$$

On obtient alors deux homomorphismes entre les  $G$ -fibrés vectoriels complexes  $\hat{H}_1$  et  $\hat{H}'_1$  vérifiant pour tout  $x$  dans  $M \setminus GK$  :

$$\hat{T}_{1,x}^* \hat{T}_{1,x} = 1_{\hat{H}_{1,x}} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{1,x} \hat{T}_{1,x}^* = 1_{\hat{H}'_{1,x}}$$

Ainsi tout élément  $\omega$  dans  $KK_0(\mathbb{C}; \mathcal{A})$  s'écrit comme un triplet  $(\hat{H}_1, \hat{H}'_1, \hat{T}_1)$  où

- (a)  $\hat{H}_1$  et  $\hat{H}'_1$  sont des fibrés vectoriels  $G$ -équivariants sur  $M$  dont les fibres sont de dimension finie
- (b)  $\hat{T}_1 : \hat{H}_1 \longrightarrow \hat{H}'_1$  un homomorphisme de fibrés vectoriels  $G$ -équivariants pour lequel il existe un sous espace  $G$ -compact  $Y$  dans  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $M \setminus Y$ , l'application  $\hat{T}_{1,x} : \hat{H}_{1,x} \rightarrow \hat{H}'_{1,x}$  est un isomorphisme.

□

On peut alors démontrer le théorème 2.4.1 :

*Démonstration.* (Théorème 2.4.1 ) D'après l'isomorphisme de Green-Julg généralisé au cas des actions propres, on a un isomorphisme de groupe entre  $K_G^0(M)$  et  $K_0(C_0(M) \rtimes G)$ . On a montré dans le lemme 2.4.7 que pour toute classe  $\omega$  dans  $KK_0(\mathbb{C}, C_0(M) \rtimes G)$ , il existe un triplet  $(E_1, E_2, F)$  où, pour  $i = 1, 2$ ,  $E_i$  est un fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant dont les fibres sur  $M$  sont de dimension finie et  $F : E_1 \rightarrow E_2$  un morphisme  $G$ -équivariant de fibré vectoriel complexe  $G$ -équivariant pour lequel il existe un sous espace  $G$ -compact  $Y$  dans  $M$  tel que  $F_x$  est un isomorphisme pour tout  $x$  dans  $M \setminus Y$ . On a ainsi montré que  $K_G^0(M)$  peut être complètement décrit à l'aide de classes d'équivalence de  $K$ -cocycles  $(E_1, E_2, t)$  dont les fibrés  $G$ -hilbertiens  $E_1$  et  $E_2$  sont des fibrés vectoriels complexes  $G$ -équivariants dont les fibres sont de dimension finie sur  $M$ .

□

## Chapitre 3

# Exactitude de la $C^*$ -algèbre réduite d'un groupoïde étale

Les premières notions de moyennabilité d'un groupe apparaissent en 1929 dans l'article [Neu29] de Von Neumann. Un groupe est dit moyennable si l'ensemble de ses parties admet une mesure finie qui est finiment additive et invariante par translation. Il existe de nombreuses définitions de la moyennabilité pour les groupes localement compacts en termes de moyennes invariantes sur certains espaces, en termes de point fixes, en termes de représentations, en termes de suite de Følner etc.... On trouve de nombreuses références littéraires sur la moyennabilité des groupes parmi lesquels [Pie84], [Pat88], [Run02], [BdlHV08] ou encore [ADR00] pour la généralisation de la moyennabilité au cas des groupoïdes. On utilise la définition de moyennabilité d'un groupe localement compact en termes de moyenne invariante : pour tout groupe  $G$  localement compact, on appelle moyenne sur  $G$  une forme linéaire  $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$  positive, c'est-à-dire vérifiant  $m(f) \geq 0$  si  $f \geq 0$  et de norme un.

**Définition 3.0.8.** *Un groupe  $G$  localement compact est moyennable s'il existe une moyenne sur  $G$ , notée  $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , invariante à gauche c'est-à-dire vérifiant pour tout  $g$  dans  $G$  et toute fonction  $f$  dans  $L^\infty(G)$ , on a  $m(g.f) = m(f)$  et telle que  $m(1_{L^\infty(G)}) = 1$ .*

De nombreux travaux sur les groupes portent sur la relation entre la moyennabilité d'un groupe localement compact  $G$  et la nucléarité des  $C^*$ -algèbres pleine  $C^*(G)$  et réduite  $C_r^*(G)$  associées au groupe  $G$ . On rappelle qu'une  $C^*$ -algèbre  $A$  est nucléaire si pour toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , on a l'identification  $A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B$ . Dans le cas d'un groupe discret  $G$ , Lance prouve dans [Lan73] l'équivalence entre la moyennabilité de  $G$  et la nucléarité de  $C_r^*(G)$ .

Dans [Eff75], l'auteur donne une définition plus faible de la moyennabilité pour un groupe localement compact et appelée moyennabilité intérieure : on donne la définition de moyennabilité intérieure des articles [BdlH86], [Pat88], [LP91] ou encore [Sta06] qui diffère de celle de [Eff75]

**Définition 3.0.9.** *Un groupe localement compact  $G$  est dit intérieurement moyennable s'il existe une moyenne  $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $G$  qui soit invariante par automorphismes intérieurs, c'est-à-dire telle que pour tout  $g$  dans  $G$  et tout  $f$  dans  $L^\infty(G)$ , la moyenne  $m$  vérifie  $m(gfg^{-1}) = m(f)$ .*

Lau et Paterson prouvent dans [LP91] que tout groupe  $G$  localement compact et intérieurement moyennable, tel que la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(G)$  est nucléaire, est alors un groupe moyennable.

Dans l'article [AD02], l'auteur étudie le cas de groupe de transformation  $(X, G)$  c'est-à-dire le cas d'un espace localement compact muni d'une action d'un groupe localement compact. Un des objectifs principaux de l'article [AD02] est la généralisation du résultat de Lau et Paterson énoncé auparavant au cas des groupes de transformation. Pour un groupe de transformation  $(X, G)$ , la notion de moyennabilité utilisée est celle de moyennabilité (topologique) du groupoïde  $X \rtimes G$  : Anantharaman-Delaroche donne la définition de moyennabilité du groupe de transformation  $(X, G)$  en termes de moyenne continue invariante approchée de la manière suivante

**Définition 3.0.10.** [AD02] *On dit que le groupe de transformation  $(X, G)$  est moyennable s'il existe une suite  $(m_i)_{i \in I}$  d'applications continues  $x \mapsto m_i^x$  de  $X$  dans l'espace  $\text{Prob}(G)$  telles que*

$$\lim_i \|s.m_i^x - m_i^{sx}\|_1 = 0$$

*uniformément sur tout sous espace compact de  $X \times G$ . Une telle suite  $(m_i)_{i \in I}$  est appelée moyenne continue invariante approchée.*

Anantharaman-Delaroche adapte la proposition 1.1.42 au cas des groupes de transformation pour obtenir une caractérisation de la moyennabilité en termes de suite de fonctions. La notion de groupe intérieurement moyennable n'admet à priori pas de généralisation pour les groupes de transformation. Anantharaman-Delaroche remplace cette condition par une notion plus faible qui est la propriété (W) pour un groupe de transformation  $(X, G)$  exprimée à l'aide de fonctions de type positif sur le  $G \times G$ -espace  $X \times X$  :

**Définition 3.0.11.** *Soient  $G$  un groupe localement compact et séparé et  $X$  un  $G$ -espace localement compact et séparé. Le groupe de transformation  $(X, G)$  a la propriété (W) si pour tout sous espace compact  $K$  de  $X \times G$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une fonction  $h$  continue, bornée de type positif, à support  $\pi$ -propre sur  $(X \times G) \times (X \times G)$  telle que  $|h(x, t, x, t) - 1| \leq \varepsilon$ , pour tout  $(x, t)$  dans  $K$ .*

Tout groupe de transformation  $(X, G)$  moyennable possède la propriété (W). On dit qu'un groupe possède la propriété (W) si le groupe de transformation  $(\{.\}, G)$  possède la propriété (W), où le groupe  $G$  agit trivialement sur l'espace  $\{p\}$  constitué d'un seul point. Dans ce cas, il s'agit d'une notion plus faible que la moyennabilité intérieure d'un groupe localement compact. On montre assez facilement que tout groupe discret possède la propriété (W) ou encore que si un groupe  $G$  possède la propriété (W), alors tout groupe de transformation  $(X, G)$  possède aussi la propriété (W). Anantharaman-Delaroche prouve le théorème suivant qui généralise celui de Lau et Paterson [LP91]

**Théorème 3.0.12.** [AD02] *Soit  $(X, G)$  un groupe de transformation avec  $X$  un  $G$ -espace localement compact et  $G$  un groupe localement compact et séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (a)  $(X, G)$  est moyennable
- (b)  $C_r^*(X \rtimes G)$  est nucléaire et  $(X, G)$  a la propriété (W).

Comme les groupes discrets possèdent la propriété (W), on retrouve l'équivalence entre la moyennabilité du groupe  $G$  et la nucléarité de  $C_r^*(G)$  démontré dans [Lan73]. De même, dans le cas d'un groupe de transformation  $(X, G)$  avec  $G$  un groupe discret, le théorème de Anantharaman-Delaroche prouve qu'il y a équivalence entre la moyennabilité du groupe de transformation  $(X, G)$  et la nucléarité de  $C_r^*(X \rtimes G)$ . Le cas des groupes discrets attire l'attention notamment pour les liens avec la conjecture de Novikov qui est le sujet de nombreux travaux comme [Hig00], [Yu00] ou [HR00]. Dans ces articles, une propriété importante pour un groupe discret est la moyennabilité à l'infini :

**Définition 3.0.13.** *Un groupe localement compact  $G$  est moyennable à l'infini s'il existe un  $G$ -espace compact  $X$  pour lequel le groupe de transformation est moyennable.*

Pour les groupes discrets on a une caractérisation des groupes moyennables à l'infini. On note  $\beta G$  le compactifié de Stone-Cëch de  $G$ , qui coïncide avec le spectre de  $C_b(G)$ , algèbre des fonctions continues et bornées sur  $G$ . Dans l'article [Oza00], l'auteur prouve le théorème suivant

**Théorème 3.0.14** ([Oza00]). *Soit  $G$  un groupe discret. Le groupe  $G$  est exact si et seulement si le groupe  $G$  agit moyennablement sur l'espace  $\beta G$ .*

Pour démontrer ce théorème, Ozawa utilise un résultat de [HR00] qui dit que l'action d'un groupe discret  $G$  par translation à gauche sur son compactifié de Stone-Cëch est moyennable si et seulement si la  $C^*$ -algèbre de Roe est nucléaire. La  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(G)$  étant une sous  $C^*$ -algèbre de la  $C^*$ -algèbre de Roe, alors  $C_r^*(G)$  est exacte. Ozawa prouve alors la réciproque du résultat de [HR00] de Higson et Roe et montre que pour tout groupe  $G$  discret dont la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(G)$  est exacte, la  $C^*$ -algèbre de Roe du groupe est nucléaire.

Dans le chapitre 7 de l'article [AD02], Anantharaman-Delaroche étudie la moyennabilité à l'infini des groupes localement compacts. L'auteur définit pour tout groupe  $G$  localement compact, un  $G$ -espace compact, noté  $\beta^u G$ , comme le spectre d'une algèbre et qui coïncide dans le cas d'un groupe discret avec le compactifié de Stone-Cëch  $\beta G$ . Elle prouve dans la proposition 3.4, que pour tout groupe localement compact  $G$ , la moyennabilité à l'infini de  $G$  équivaut à la moyennabilité du groupe de transformation  $(\beta^u G, G)$ . Elle démontre le théorème suivant

**Théorème 3.0.15** ([AD02]). *Soit  $G$  un groupe localement compact. On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupe  $G$  est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupe  $G$  est exact*
- (3) *Pour toute  $G$ - $C^*$ -algèbre exacte  $B$ , la  $C^*$ -algèbre de produit croisé réduit  $C_r^*(G, B)$  est une  $C^*$ -algèbre exacte.*
- (4) *la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(G)$  est exacte*

*Alors (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4). Si le groupe  $G$  possède la propriété (W), alors (4)  $\Rightarrow$  (1) et les assertions sont toutes équivalentes.*

Le travail qui suit consiste en l'étude des groupoïdes étales localement compacts  $\sigma$ -compacts et séparés qui généralisent les groupes discrets, les groupes de transformations  $(X, G)$  avec  $G$  un groupe discret et  $X$  un  $G$ -espace localement compact  $\sigma$ -compact et séparé ou encore qui apparaissent dans l'étude des groupoïdes d'holonomie de feuilletages. On s'intéresse principalement à des propriétés de moyennabilité; la moyennabilité dans le cadre des groupoïdes localement compacts et séparés joue un rôle dans la théorie des algèbres d'opérateurs : on a vu auparavant les liens entre l'existence d'une action moyennable d'un groupe  $G$  localement compact sur un espace compact et l'exactitude de sa  $C^*$ -algèbre réduite.

On verra notamment les relations entre des propriétés de moyennabilité du groupoïde, des propriétés d'exactitude du groupoïde et d'exactitude de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupoïde.

- La définition 3.1.2 donne une version de la moyennabilité à l'infini dans le cas des groupoïdes étales localement compacts et séparés.

- L'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  est défini comme le spectre d'une certaine  $\mathcal{G}$ -algèbre, notée  $C_0^s(\mathcal{G})$  (définition dans la section 3.1.2) et dans le cas où  $\mathcal{G}$  est un groupe discret, l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  est exactement le compactifié de Stone-Cech  $\beta \mathcal{G}$ .
- Un groupoïde étale localement compact  $\mathcal{G}$  est dit exact si le foncteur " $\rtimes_r \mathcal{G}$ " est exact dans la catégorie des  $\mathcal{G}$ -algèbres et des  $\mathcal{G}$ -homomorphismes.

Les résultats que nous obtenons pour les groupoïdes étales localement compact peuvent être schématisés par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \text{ moyennable à l'infini} & & \\
 \Downarrow & & \\
 \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \text{ moyennable} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathcal{G} \text{ exact} \\
 & \nwarrow & \Downarrow \\
 & & C_r^*(\mathcal{G}) \text{ exact} \\
 & \xrightarrow{+(\text{Cond})} & 
 \end{array}$$

L'implication " $C_r^*(\mathcal{G})$  exact  $\Rightarrow (\beta_X \mathcal{G}, \mathcal{G})$  moyennable" n'a été obtenue dans notre cas qu'en imposant certaines conditions sur le groupoïde  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  : la première est une version pour les groupoïdes de la Propriété (W) introduite dans [Anan]. La seconde intervient dans l'étude de la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  à laquelle on associe un champ de  $C^*$ -algèbres sur  $X$  que l'on supposera continu. Dans toute la section on considère  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde étale localement compact et séparé. On utilise les notions de  $C_0(X)$ -algèbres, de champ (semi-)continu (supérieurement) de  $C^*$ -algèbres dont quelques rappels sont donnés dans la première partie de ce manuscrit.

### 3.1 Espace universel et groupoïde moyennable

Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde étale localement compact et séparé tel que l'espace des unités  $X$  est  $\sigma$ -compact. Le résultat principal de cette section est la démonstration du théorème 3.1.31 que l'on donne ci-dessous :

**Théorème 1.** *Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde étale d'espace des unités  $X$ . On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  agit moyennablement sur l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$*
- (3) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est exact*
- (4) *la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte*

Alors on a (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3)  $\implies$  (4)

Les parties 3.1.1 à 3.1.6 ont pour objectif d'obtenir un résultat analogue à la proposition 3.0.15 dans le cas de groupoïdes étales localement compacts et séparés. Pour cela on doit définir une version de la moyennabilité à l'infini pour les groupoïdes ainsi qu'un espace  $\beta_X \mathcal{G}$  muni d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$  qui joue le rôle du compactifié de Stone-Cech dans le cas des groupes discrets. On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde étale localement compact et  $X$  l'espace localement compact des unités du groupoïde  $\mathcal{G}$ . Si le groupoïde  $\mathcal{G}$  est moyennable à l'infini, alors le groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable.*

On donne tout d'abord une définition de la moyennabilité infinie pour les groupoïdes :

**Définition 3.1.2.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde étale localement compact et  $X$  l'espace des unités (localement compact) du groupoïde  $\mathcal{G}$ . Le groupoïde est dit moyennable à l'infini s'il existe un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé  $Y$ , pour lequel l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  est continue, surjective, ouverte et propre, et tel que le groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable.

Pour démontrer le théorème 3.1.1, on raisonne de la manière suivante :

- 1) il s'agit tout d'abord de définir l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  comme étant le spectre d'une  $C^*$ -algèbre commutative qui sera notée  $C_0^s(\mathcal{G})$
- 2) on munit l'espace topologique  $\beta_X \mathcal{G}$  d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$  et on prouve que  $\beta_X \mathcal{G}$  vérifie une propriété universelle
- 3) à l'aide de la propriété universelle de  $\beta_X \mathcal{G}$  et des propriétés des groupoïdes moyennables, on démontre de théorème 3.1.1.

La partie 3.1.1 de cette section est constituée de quelques résultats généraux sur les  $C^*$ -algèbres qui nous seront utiles dans la suite.

La partie 3.1.2 de cette section consiste à définir la  $C^*$ -algèbre commutative  $C_0^s(\mathcal{G})$  : il s'agit d'une sous- $C^*$ -algèbre de la  $C^*$ -algèbre commutative des fonctions à valeurs complexes, continues et bornées sur  $\mathcal{G}$ . On peut alors définir une structure de  $C_0(X)$ -algèbre sur  $C_0^s(\mathcal{G})$  et la munir d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ . On obtient ainsi un système dynamique de groupoïde  $(C_0^s(\mathcal{G}), \mathcal{G}, \alpha)$ .

La partie 3.1.3 porte sur l'étude de l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  qui est défini comme le spectre de  $C_0^s(\mathcal{G})$ . Le fait que  $C_0^s(\mathcal{G})$  soit une  $\mathcal{G}$ -algèbre commutative induit une action continue de  $\mathcal{G}$  sur l'espace localement compact et séparé  $\beta_X \mathcal{G}$ . On termine cette partie en prouvant que l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  vérifie la propriété universelle suivante : soit  $Z$  un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé tel que  $Z \rightarrow X$  est continue, surjective, propre et admet une section continue (non nécessairement équivariante), alors il existe une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$  continue,  $\mathcal{G}$ -équivariante et propre.

La propriété universelle vérifiée par  $\beta_X \mathcal{G}$  est le résultat essentiel qui nous permet de démontrer le théorème 3.1.1 : en effet, si  $\mathcal{G}$  est moyennable à l'infini, alors il existe un  $\mathcal{G}$ -espace  $Y$  localement compact et séparé tel que l'application  $Y \rightarrow X$  est continue, surjective, ouverte et propre et sur lequel l'action de  $\mathcal{G}$  est moyennable. On ne peut appliquer dans ce cas la propriété universelle car la condition d'existence d'une section de  $Y \rightarrow X$  n'est pas (nécessairement) vérifiée. C'est l'objet des parties 3.1.4 et 3.1.5 qui consiste à définir un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé  $M$  obtenu en considérant un sous espace des mesures de probabilité de  $Y$ . On s'emploie alors à démontrer l'existence d'une section continue pour l'application  $M \rightarrow X$  et prouver ainsi que l'espace  $M$  satisfait les conditions de la propriété universelle de  $\beta_X \mathcal{G}$  : on a alors une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$  continue,  $\mathcal{G}$ -équivariante et propre.

Dans la partie 3.1.6, on prouve que l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $M$  est moyennable et on montre comment on peut "tiré en arrière" le caractère moyennable de  $M \rtimes \mathcal{G}$  sur  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  par le biais de l'application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ .

### 3.1.1 Quelques propriétés des $C^*$ -algèbres commutatives

On démontre ici quelques résultats généraux dans le cadre des  $C^*$ -algèbres commutatives, qui seront utilisés dans cette section.

**Définition 3.1.3.** Soit  $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres ; on dit que  $i$

est non dégénéré si pour toute approximation de l'unité,  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , de  $C_0(X)$ , la suite généralisée  $(i(e_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  est une approximation de l'unité de  $C_0(Y)$ .

**Proposition 3.1.4.** *Si un homomorphisme  $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  de  $C^*$ -algèbres est non dégénéré, alors il existe une application  $i^* : Y \rightarrow X$ , induite par  $i$ .*

*Démonstration.* On considère  $\chi$  un caractère, non nul, de  $C_0(Y)$  c'est-à-dire un homomorphisme non nul  $\chi : C_0(Y) \rightarrow \mathbb{C}$ . Il existe alors un unique  $y \in Y$  tel que pour toute fonction  $f$  dans  $C_0(Y)$ , on a  $\chi(f) = f(y)$ . On pose  $\chi' := \chi \circ i$ . C'est un homomorphisme (car composition d'homomorphismes) de  $C_0(X)$  dans  $\mathbb{C}$ , qui est non nul ; en effet, supposons que  $\chi'$  est l'homomorphisme nul. On considère  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une approximation de l'unité de  $C_0(X)$ . Comme l'homomorphisme  $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$  est non dégénéré, la suite  $(i(e_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  est une approximation de l'unité de  $C_0(Y)$ , donc on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \chi(i(e_\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} i(e_\lambda)(y) = 1$$

Or on a supposé  $\chi' = \chi \circ i$ , d'où  $\chi(i(e_\lambda)) = \chi'(e_\lambda) = 0$ , pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ . On obtient une contradiction. Donc l'homomorphisme  $\chi' : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  est non nul. Il existe alors un unique  $x$  dans  $X$  vérifiant pour toute fonction  $g$  de  $C_0(X)$ , l'égalité  $\chi'(g) = g(x)$ .

Ainsi, par l'homomorphisme  $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ , non dégénéré, à tout  $y$  dans  $Y$ , on peut associer un unique élément  $x$  de  $X$ . On a donc une application  $i^* : Y \rightarrow X$ , induite par  $i$ . □

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $i : C_0(X) \hookrightarrow C_0(Y)$  un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres et  $i^* : Y \rightarrow X$  l'application induite par  $i$ . Si  $i$  est injectif et non dégénéré, alors l'application  $i^* : Y \rightarrow X$  est continue, surjective et propre.*

*Démonstration.* Pour montrer que l'application est continue, on considère  $U$  un ouvert de  $X$ . On pose  $V = (i^*)^{-1}(U)$  l'image réciproque de  $U$  par l'application  $i^*$ . Soit  $y_0$  un élément de  $V$  et  $x_0 = i^*(y_0)$ . On considère une fonction  $f$  dans  $C_0(X)$ , à valeurs réelles positives et à support compact dans  $U$  telle que  $f(x_0) = 1$ . On a alors une fonction  $i(f)$  dans  $C_0(Y)$ , à valeurs réelles positives et à support dans  $V$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , le sous espace  $U_\varepsilon := \{x \in X / 1 - \varepsilon < f(x)\}$  est un sous espace ouvert dans  $U$  contenant  $x_0$ . On a alors  $(i^*)^{-1}(U_\varepsilon) = \{y \in V / 1 - \varepsilon < i(f)(y)\}$ , qui est un ouvert dans  $V$  contenant  $y_0$ . Ainsi  $V$  est un ouvert de  $Y$  et l'application  $i^* : Y \rightarrow X$  est continue.

Pour montrer que l'application  $i^* : Y \rightarrow X$  est propre, on considère  $K \subset X$  un sous espace compact et on montre que  $(i^*)^{-1}(K)$  est compact dans  $Y$ . On considère  $f$  une fonction dans  $C_0(X)$  telle que  $f(x) = 1$ , pour tout  $x$  dans  $K$ . L'application  $i(f)$  est alors dans  $C_0(Y)$  et on a, par définition,  $i(f)(y) = 1$  pour tout  $y$  dans  $(i^*)^{-1}(K)$ .

De plus,  $i(f)$  est dans  $C_0(Y)$ , alors il existe  $\tilde{K}$  un sous espace compact de  $Y$  tel que pour tout  $y$  dans  $Y \setminus \tilde{K}$ , on a  $|f(y)| < 1$  ; le sous espace  $(i^*)^{-1}(K)$  est fermé par continuité de  $i^*$  et contenu dans le compact  $\tilde{K}$ , donc  $(i^*)^{-1}(K)$  est compact. L'application  $i^* : Y \rightarrow X$  est donc propre.

Pour montrer que l'application  $i^*$  est surjective, on prouve tout d'abord que son image  $Im(i^*)$  est dense dans  $X$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ . Montrons qu'il existe  $x$  dans  $U \cap Im(i^*)$  ; en effet, si  $Im(i^*) \cap U = \emptyset$ , alors toute fonction  $f$  de  $C_0(X)$ , non nulle, et à support compact dans  $U$  a pour image par  $i$  la fonction nulle sur  $Y$  ; or ceci est en contradiction avec l'injectivité de  $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ . Ainsi pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , il existe un élément  $x$  qui soit dans l'image  $Im(i^*)$ . Donc  $i^*$  est à image dense dans  $X$ . L'application  $i^*$  étant propre, son image  $Im(i^*)$  est fermée. L'image de  $i^*$  étant fermée et dense, alors l'application  $i^*$  est surjective. □

### 3.1.2 $\mathcal{G}$ -algèbre

Dans cette section, on considère  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde étale localement compact et séparé. On suppose que l'espace des unités  $X$  est  $\sigma$ -compact. On note  $r : \mathcal{G} \rightarrow X$  et  $s : \mathcal{G} \rightarrow X$  les applications but et source. On note  $C_b(\mathcal{G})$  l'algèbre de Banach des fonctions continues et bornées sur  $\mathcal{G}$ , où l'involution et la multiplication sont définies de la manière suivante :

$$f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma)} \quad \text{et} \quad f.g(\gamma) := f(\gamma)g(\gamma)$$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  dans  $C_b(\mathcal{G})$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ . On note  $\|\cdot\|_\infty$  la norme supérieure, définie, pour tout  $f$  dans  $C_b(\mathcal{G})$ , par  $\|f\|_\infty := \sup_{\gamma \in \mathcal{G}} |f(\gamma)|$ . Munie de cette norme, l'algèbre  $C_b(\mathcal{G})$  est une  $C^*$ -algèbre.

Dans la définition qui suit, on introduit un sous ensemble de  $C_b(\mathcal{G})$  que l'on note  $C_0^s(\mathcal{G})$  et on montre que c'est une sous- $C^*$ -algèbre de  $C_b(\mathcal{G})$ . L'objectif dans cette partie est de munir la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s(\mathcal{G})$  d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ . Pour cela, on définit tout d'abord une approximation de l'unité  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la  $C^*$ -algèbre  $C_0(X)$  en utilisant la  $\sigma$ -compacité de  $X$ . A l'aide de l'application source  $s : \mathcal{G} \rightarrow X$ , on construit ensuite un  $*$ -homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(M(C_0^s))$  et on se sert de l'approximation de l'unité  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour montrer que  $s^*$  est non-dégénérée et donc que  $C_0^s(\mathcal{G})$  est une  $C_0(X)$ -algèbre. Pour finir, on définit une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s(\mathcal{G})$  en utilisant les propriétés dues au caractère étale du groupoïde  $\mathcal{G}$ .

**Définition 3.1.6.** *On note  $C_0^s(\mathcal{G})$  le sous ensemble de  $C_b(\mathcal{G})$  formé des fonctions  $f$  continues et bornées telles que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un sous espace compact  $K_\varepsilon$  de  $X$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , tel que  $s(\gamma)$  est dans  $X \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|f(\gamma)| < \varepsilon$ .*

**Proposition 3.1.7.**  *$C_0^s(\mathcal{G})$  est une sous  $C^*$ -algèbre de  $C_b(\mathcal{G})$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $C_0^s(\mathcal{G})$  est un sous espace vectoriel de  $C_b(\mathcal{G})$  stable par l'involution. Pour toute fonction  $f$  (respectivement  $g$ ) de  $C_0^s(\mathcal{G})$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un sous espace compact  $K_\varepsilon$  (respectivement  $K'_\varepsilon$ ) de  $X$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  tel que  $s(\gamma)$  est dans  $X \setminus K_\varepsilon$  (respectivement  $X \setminus K'_\varepsilon$ ) on a  $|f(\gamma)| < \sqrt{\varepsilon}$  (respectivement  $|g(\gamma)| < \sqrt{\varepsilon}$ ). Ainsi pour tout  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$  tel que  $s(\gamma)$  est dans  $X \setminus (K_\varepsilon \cup K'_\varepsilon)$ , on a  $|f.g(\gamma)| < \varepsilon$  et  $C_0^s(\mathcal{G})$  est stable par le produit.

On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C_0^s(\mathcal{G})$  qui converge vers une fonction  $f$  de  $C_b(\mathcal{G})$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif : il existe un entier  $n_1$  tel que, pour tout  $n > n_1$ , on a  $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ . De plus il existe un entier  $n_2$ , tel que pour tout entier  $p, q > n_2$ , on a  $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon/2$  et il existe donc un compact  $K_\varepsilon$  dans  $X$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  pour lequel  $s(\gamma)$  est dans  $X \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|f_p(\gamma)| < \varepsilon/2$ , pour tout  $p > n_2$ . On a alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $n = \max\{n_1, n_2\}$  et un compact  $K_\varepsilon$  de  $X$  tel que pour tout  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$  avec  $s(\gamma)$  dans  $X \setminus K_\varepsilon$ , on a

$$|f(\gamma)| = |f(\gamma) - f_p(\gamma) + f_p(\gamma)| \leq |f(\gamma) - f_p(\gamma)| + |f_p(\gamma)| < \varepsilon$$

pour  $p > n$ . L'algèbre  $C_0^s(\mathcal{G})$  est fermée pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et est une sous  $C^*$ -algèbre de  $C_b(\mathcal{G})$ . □

*Remarque 3.1.8.* A partir de maintenant, on écrit  $C_0^s$  pour la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s(\mathcal{G})$ , ceci afin de simplifier les notations.

On construit tout d'abord une approximation de l'unité pour la  $C^*$ -algèbre  $C_0(X)$ . L'espace  $X$  étant considéré  $\sigma$ -compact, on choisit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite croissante de sous espaces compacts de  $X$ , tels que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ . On considère  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues à support compact dans  $X$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$e_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_n \\ 0 & \text{si } x \notin \overset{\circ}{K}_{n+1} \end{cases}$$

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité de  $C_0(X)$ , puisque chaque fonction  $e_n$  est positive et dans la boule unité de  $C_0(X)$ ; de plus la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et on a, pour toute fonction  $f$  de  $C_0(X)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f.e_n\| = 0$$

On utilise l'approximation de l'unité  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  construite auparavant, pour définir une structure de  $C_0(X)$ -algèbre sur  $C_0^s$ . Pour cela, on considère une fonction  $f$  de  $C_0(X)$  et on pose  $s^*(f)$  la fonction sur  $\mathcal{G}$  définie, pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , par  $s^*(f)(\gamma) := f(s(\gamma))$ . La fonction  $s^*(f)$  est clairement continue et bornée. Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $K_\varepsilon$  sous espace compact de  $X$  tel que pour tout  $x$  dans  $X \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|f(x)| < \varepsilon$ . Ainsi pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  pour lequel  $s(\gamma)$  est dans  $X \setminus K_\varepsilon$ , on a  $|s^*(f)(\gamma)| = |f(s(\gamma))| < \varepsilon$ . La fonction  $s^*(f)$  est donc dans la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s$ . On obtient une application  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$  dont il est facile de prouver qu'elle est un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres.

**Proposition 3.1.9.** *L'homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$  est injectif et non-dégénéré.*

*Démonstration.* On sait que  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$  est un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres. On considère  $f$  une fonction de  $C_0(X)$  vérifiant  $s^*(f) = 0$ , alors pour tout  $\gamma \in \mathcal{G}$ , on a  $s^*(f)(\gamma) = 0 = f(s(\gamma))$ . Or pour tout  $x$  dans  $X$ , on a  $u(x) \in \mathcal{G}$ , et

$$f(x) = f(s(u(x))) = s^*(f)(u(x)) = 0$$

La fonction  $f$  est nulle sur  $X$ . Ainsi  $s^*$  est injectif.

Pour prouver que l'homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$  est non-dégénéré, il suffit de montrer que la suite  $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité de  $C_0^s$ . Chaque fonction  $s^*(e_n)$  est positive et se trouve dans la boule unité de  $C_0^s$ , car  $s^*$  est un homomorphisme injectif donc une application positive et isométrique. De plus, la suite  $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Soit  $f$  une fonction de  $C_0^s$  alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n'$  dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n'$  et pour tout  $\gamma$  hors de  $\mathcal{G}_{K_n}$ , on a  $|f(\gamma)| < \varepsilon$ . On a donc pour tout  $n \geq n'$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}_{K_n}$

$$\begin{aligned} |f(\gamma) - f(\gamma)s^*(e_n)(\gamma)| &= |f(\gamma) - f(\gamma)e_n(s(\gamma))| \\ &= |f(\gamma) - f(\gamma)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

et pour tout  $n \geq n'$  et tout  $\gamma$  en dehors de  $\mathcal{G}_{K_n}$ , on a

$$\begin{aligned} |f(\gamma) - f(\gamma)s^*(e_n)(\gamma)| &= |f(\gamma) - f(\gamma)e_n(s(\gamma))| \\ &\leq |f(\gamma)||1 - e_n(s(\gamma))| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction  $f$  dans  $C_0^s$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $n'$  tel que pour tout  $n \geq n'$  et tout pour tout  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$ , on a

$$|f(\gamma) - f(\gamma)s^*(e_n)(\gamma)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour toute fonction  $f$  de  $C_0^s$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f s^*(e_n)\| = 0$$

Donc  $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité dans  $C_0^s$ . L'homomorphisme  $s^*$  est donc non-dégénéré. □

*Remarque 3.1.10.*  $C_0^s$  étant une  $C^*$ -algèbre commutative, on a une injection de  $C_0^s$  dans  $\mathcal{Z}(M(C_0^s))$ , le centre de l'algèbre des multiplicateurs.

**Proposition 3.1.11.** *La  $C^*$ -algèbre commutative  $C_0^s$  est munie d'une structure de  $C_0(X)$ -algèbre par l'homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(M(C_0^s))$ .*

*Démonstration.* Comme  $C_0^s$  s'injecte dans le centre  $\mathcal{Z}(M(C_0^s))$  de l'algèbre des multiplicateurs de  $C_0^s$ , alors  $s^*$  définit un homomorphisme de  $C_0(X)$  dans  $\mathcal{Z}(M(C_0^s))$ . De plus, l'image  $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de l'approximation de l'unité  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $C_0(X)$  étant une approximation de l'unité de  $C_0^s$ , on a alors  $s^*(C_0(X))C_0^s$  est dense dans  $C_0^s$ ; donc  $C_0^s$  est une  $C_0(X)$ -algèbre par l'homomorphisme  $s^*$ . □

On construit ci-dessous un système dynamique de groupoïde  $(C_0^s, \mathcal{G}, \alpha)$  : pour cela, le caractère étale du groupoïde nous permet de définir une action  $\alpha$  du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s$  et on prouve que cette action est continue. On rappelle quelques notations concernant les  $C_0(X)$ -algèbres que l'on utilise ici : pour tout  $x$  dans  $X$ , on note  $I_x := \overline{s^*(C_x(X))C_0^s}$  idéal fermé de  $C_0^s$  et  $C_0^s(x) := C_0^s/I_x$ , la fibre de  $C_0^s$  sur  $x$ . Pour tout  $x$  dans  $X$  et toute fonction  $f$  de  $C_0^s$ , on notera  $f(x)$  l'image de  $f$  dans la fibre  $C_0^s(x)$ .

On définit une action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s$  c'est-à-dire qu'on construit une famille  $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$  telle que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , l'application

$$\alpha_\gamma : C_0^s(s(\gamma)) \rightarrow C_0^s(r(\gamma))$$

est un isomorphisme vérifiant, pour tout  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$  l'égalité  $\alpha_{\gamma \cdot \eta} = \alpha_\gamma \circ \alpha_\eta$ .

Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{G}$  et  $U_\gamma$  un voisinage ouvert (que l'on peut supposer relativement compact) de  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  tel que les restrictions des applications but et source à  $U_\gamma$  sont des homéomorphismes sur leur image respective  $r(U_\gamma)$  et  $s(U_\gamma)$ . On note  $x = s(\gamma)$  et  $y = r(\gamma)$  dans  $X$  et on pose  $\rho_x : s(U_\gamma) \rightarrow U_\gamma$  et  $\rho_y : r(U_\gamma) \rightarrow U_\gamma$  les homéomorphismes réciproques des restrictions sur  $U_\gamma$  respectivement des applications source et but. Il existe alors un homéomorphisme  $R_\gamma : r(U_\gamma) \rightarrow s(U_\gamma)$  défini, pour tout  $z$  dans  $r(U_\gamma)$ , par  $R_\gamma(z) := s(\rho_y(z))$ . On considère  $K_x$  un voisinage compact de  $x$  dans  $s(U_\gamma)$  et  $\varphi_x$  une fonction continue et à support dans  $s(U_\gamma)$  vérifiant  $\chi_{K_x} \leq \varphi_x \leq 1$ .

Soit  $f$  une fonction de  $C_0^s$  et  $f(x)$  son image dans la fibre  $C_0^s(x)$ . On a alors égalité dans la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s(x)$  des éléments  $f(x)$  et  $(s^*(\varphi_x)f)(x)$ . Pour tout  $\eta$  dans  $\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}$ , on pose

$$\tilde{f}(\eta) := (s^*(\varphi_x)f)(\eta \cdot \rho_y(s(\eta))) \tag{3.1}$$

qui définit une fonction continue sur  $\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}$  et pour tout  $\eta$  tel que  $s(\eta)$  est en dehors de l'ouvert  $r(U_\gamma)$  relativement compact, on a  $\tilde{f}(\eta) = 0$ . Ainsi  $\tilde{f}$  est dans la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s$ .

Pour toute fonction  $f$  dans  $C_0^s$ , on pose  $\alpha_\gamma(f(x)) := \tilde{f}(y)$ . On montre aisément que pour toute fonction  $f$  dans  $C_0^s$  et toute paire  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$ , on a l'égalité

$$\alpha_{\gamma.\eta}(f) = \alpha_\gamma(\alpha_\eta(f))$$

On a ainsi défini une action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s$ .

*Remarque 3.1.12.* Sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0(\mathcal{G})$ , il existe une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ , notée  $a$ , où pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on a

$$a_\gamma : C_0(\mathcal{G})(s(\gamma)) \cong C_0(\mathcal{G}_{s(\gamma)}) \longrightarrow C_0(\mathcal{G})(r(\gamma)) \cong C_0(\mathcal{G}_{r(\gamma)})$$

définie pour toute fonction  $f$  dans  $C_0(\mathcal{G}_{s(\gamma)})$  par  $a_\gamma(f)(\eta) = f(\eta.\gamma)$ , pour tout  $\eta$  dans  $\mathcal{G}_{r(\gamma)}$ . On voit alors que la restriction de l'action  $\alpha$ , définie ci-dessus, à la sous  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0(\mathcal{G})$  coïncide avec l'action continue  $a$  de  $\mathcal{G}$  sur  $C_0(\mathcal{G})$ .

Pour montrer que l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $C_0^s$  est continue, on se place dans le contexte du champ continu de  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{C}_0^s$  associé à  $C_0^s$  et on montre que l'application

$$\mathcal{C}_0^s * \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}_0^s$$

définie par l'action de  $\mathcal{G}$  sur l'espace topologique  $\mathcal{C}_0^s$  est continue. On utilise la proposition 1.3.10 rappelée dans les préliminaires.

On considère une suite  $(a_i, \gamma_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{C}_0^s *_{p,s} \mathcal{G}$  convergeant vers un élément  $(a, \gamma)$  de  $\mathcal{C}_0^s *_{p,s} \mathcal{G}$ . Pour tout  $i$  dans  $I$ , on note  $x_i := p(a_i) = s(\gamma_i)$  et  $x := p(a) = s(\gamma)$ . Pour tout  $i$  dans  $I$ , il existe une fonction  $f_i$  dans  $C_0^s$  telle que  $f_i(x_i) = a_i$  et il existe une fonction  $f$  dans  $C_0^s$  telle que  $f(x) = a$ . On considère  $U$  un voisinage ouvert de  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  homéomorphe à  $V := s(U)$ , voisinage ouvert de  $x$  et on peut supposer qu'il existe un compact  $K_x$  d'intérieur non vide et inclus dans  $V$ . On note  $\varphi_x : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\chi_{K_x} \leq \varphi_x \leq 1$ . Il existe  $i'$  dans  $I$  tel que pour tout  $i \geq i'$ , l'élément  $x_i$  est dans  $\overset{\circ}{K}_x$ . Quitte à utiliser la fonction  $\varphi_x$ , on peut supposer alors qu'il existe que pour tout  $i \geq i'$ , le support de  $f_i$  est inclus dans  $s^{-1}(V)$ . Suivant la construction 3.1, on obtient des fonctions  $\tilde{f}_i$  et  $\tilde{f}$  dans  $C_0^s$  telles que, pour tout  $i \geq i'$ , on a  $\tilde{f}_i(r(\gamma_i)) = \alpha_{\gamma_i}(a_i)$  et  $\tilde{f}(r(\gamma)) = \alpha_\gamma(a)$ . Pour tout  $i \geq i'$ , on note  $u_i = \tilde{f}(r(\gamma_i))$  et la suite  $(u_i)_{i \geq i'}$  converge vers  $\alpha_\gamma(a) = \tilde{f}(r(\gamma))$  dans  $C_0^s$ . Soit un réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $i_\varepsilon$  dans  $I$ , tel que pour tout  $i \geq \max\{i', i_\varepsilon\}$ , on a  $\|\tilde{f}_i(r(\gamma_i)) - \tilde{f}(r(\gamma_i))\| < \varepsilon/2$  et alors  $\alpha_{\gamma_i}(a_i) - \tilde{f}(r(\gamma_i))$  converge vers  $0_{r(\gamma)}$  dans  $C_0^s$ . On a alors

$$\alpha_{\gamma_i}(a_i) = (\alpha_{\gamma_i}(a_i) - u_i) + u_i \longrightarrow 0_{r(\gamma)} + \alpha_\gamma(a)$$

L'action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0^s$  est continue et on a un système dynamique  $(C_0^s, \mathcal{G}, \alpha)$ .

### 3.1.3 Espace $\beta_X \mathcal{G}$ et propriété universelle

Dans cette partie, on utilise la  $\mathcal{G}$ -algèbre commutative  $C_0^s$  construite auparavant pour définir l'espace topologique  $\beta_X \mathcal{G}$ . Une fois l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  défini, on montre qu'il est localement compact et séparé et muni d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ .

Enfin on prouve que le  $\mathcal{G}$ -espace  $\beta_X \mathcal{G}$  vérifie une propriété universelle.

**Définition 3.1.13.** On définit l'espace topologique  $\beta_X \mathcal{G}$  comme le spectre de la  $C^*$ -algèbre commutative  $C_0^s$ .

*Remarque 3.1.14.* La  $C^*$ -algèbre  $C_0(\mathcal{G})$  étant un idéal (bilatère) fermé de la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s$ , l'espace  $\mathcal{G} = \widehat{C_0(\mathcal{G})}$  est un sous espace ouvert de  $\beta_X \mathcal{G}$ . Par la transformée de Gelfand, il existe isomorphisme  $*$ -isométrique de  $C^*$ -algèbres entre  $C_0^s$  et  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$  et on a alors un homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ . On note

$$\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} = \widehat{C_0(\beta_X \mathcal{G})} \longrightarrow \widehat{C_0(X)} = X$$

l'application induite par l'homomorphisme  $s^*$ . L'application  $\tilde{s}$  restreinte à l'ouvert  $\mathcal{G}$  coïncide avec l'application source du groupoïde  $s : \mathcal{G} \rightarrow X$ .

**Proposition 3.1.15.** *L'application  $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$  induite par l'homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$  est continue, propre et surjective.*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.1.9, on sait que l'homomorphisme  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$  est injectif et non-dégénéré et d'après la remarque 3.1.14,  $C_0^s$  est isomorphe à  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ . L'homomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$  est injectif et non dégénéré. En appliquant la proposition 3.1.5, l'application  $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$  est continue, propre et surjective.  $\square$

**Proposition 3.1.16.** *L'espace topologique  $\beta_X \mathcal{G}$  est localement compact et muni d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ .*

*Démonstration.* L'espace topologique  $\beta_X \mathcal{G}$  étant défini comme le spectre de la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s$ , il est donc localement compact.

On a montré auparavant l'existence d'une application  $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$  continue, propre, surjective et ouverte. On pose alors

$$\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G} = \bigsqcup_{x \in X} \widehat{C_0^s(x)} *_r \mathcal{G} := \left\{ (\chi, \gamma) \in \bigsqcup_{x \in X} \widehat{C_0^s(x)} \times \mathcal{G} : \tilde{s}(\chi) = r(\gamma) \right\}$$

Pour  $(\chi, \gamma)$  dans  $\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G}$ , la relation  $\tilde{s}(\chi) = r(\gamma)$  implique que  $\chi$  est dans  $\widehat{C_0^s(r(\gamma))}$ .

On pose  $\phi : \beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G} \rightarrow \beta_X \mathcal{G}$  une application telle que, pour tout couple  $(\chi, \gamma)$  dans  $\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G}$ , on a  $\phi(\chi, \gamma) := \chi \cdot \gamma$  où  $\chi \cdot \gamma \in C_0^s(s(\gamma))$  est tel que

$$\forall f \in C_0^s(s(\gamma)), \quad \chi \cdot \gamma(f) := \chi(\alpha_\gamma(f))$$

On obtient donc une action à droite continue du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$ .  $\square$

La fin de cette partie consiste à démontrer que l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  est un espace universel pour la propriété suivante :

**Proposition 3.1.17.** *Soit  $Z$  un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact pour lequel l'application  $\pi : Z \rightarrow X$  est continue, propre, surjective et admet une section continue (qui n'est pas nécessairement  $\mathcal{G}$ -équivariante)  $\sigma : X \rightarrow Z$ , alors il existe une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$  continue,  $\mathcal{G}$ -équivariante et propre.*

Soit  $Z$  un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact pour lequel l'application  $\pi : Z \rightarrow X$  est continue, propre, surjective et admet une section continue (non nécessairement  $\mathcal{G}$ -équivariante) notée  $\sigma : X \rightarrow Z$ . On pose  $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$  l'application définie pour tout  $\gamma \in \mathcal{G}$  par

$$\theta(\gamma) := \sigma(r(\gamma)) \cdot \gamma$$

Cette application est bien définie car pour tout  $\gamma \in \mathcal{G}$ , on a  $\sigma(r(\gamma)) \in Z_{r(\gamma)}$ , et en appliquant l'action de  $\gamma$  sur  $\sigma(r(\gamma))$ , on obtient bien  $\sigma(r(\gamma)).\gamma$  un élément de  $Z_{s(\gamma)}$ .

L'application  $\theta$  est continue car composée d'applications continues et  $\mathcal{G}$ -équivariante car pour toute paire  $(\gamma_1, \gamma_2)$  de  $\mathcal{G}^{(2)}$ , on a

$$\begin{aligned}\theta(\gamma_1\gamma_2) &= \sigma(r(\gamma_1\gamma_2)).(\gamma_1\gamma_2) \\ &= (\sigma(r(\gamma_1)).\gamma_1).\gamma_2 \\ &= \theta(\gamma_1).\gamma_2\end{aligned}$$

Pour  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on a  $\theta(\gamma) = \sigma(r(\gamma)).\gamma$  est dans le sous espace  $Z_{s(\gamma)} := \pi^{-1}(s(\gamma))$  compact dans  $Z$ .

**Lemme 3.1.18.** *L'application continue  $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$  induit un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$ .*

*Démonstration.* L'application  $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$  induit un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_b(\mathcal{G})$  défini par

$$\theta^*(f)(\gamma) := f \circ \theta(\gamma) = f(\sigma(r(\gamma)).\gamma)$$

pour toute fonction  $f$  de  $C_0(Z)$  et tout  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$ .

Soient une fonction  $f$  dans  $C_0(Z)$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe alors un sous espace compact  $K_\varepsilon$  dans  $Z$  tel que  $|f(z)| < \varepsilon$  pour tout  $z$  en dehors de  $K_\varepsilon$ .

En posant  $K'_\varepsilon := \pi(K_\varepsilon)$ , on obtient un sous espace compact de  $X$  et pour tout  $\gamma$  n'appartenant pas à l'espace  $\mathcal{G}_{K'_\varepsilon}$ , l'élément  $\theta(\gamma) = \sigma(r(\gamma)).\gamma$  se trouve en dehors de  $K_\varepsilon$ , par conséquent

$$|\theta^*(f)(\gamma)| = |f(\sigma(r(\gamma)).\gamma)| < \varepsilon$$

On a montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous espace  $K'_\varepsilon$  compact dans  $X$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  avec  $s(\gamma) \notin K'_\varepsilon$ , on a  $|\theta^*(f)(\gamma)| < \varepsilon$ . Donc  $\theta^*(f)$  est dans  $C_0^s$ . On obtient alors un homomorphisme de  $C^*$ -algèbre,  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$ . □

**Lemme 3.1.19.** *L'homomorphisme  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$  est  $\mathcal{G}$ -équivariant.*

*Démonstration.* Les  $C^*$ -algèbres  $C_0(Z)$  et  $C_0^s$  sont des  $\mathcal{G}$ -algèbres dont les actions sont données par les familles d'isomorphismes  $C^*$ -algèbres  $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$  avec  $\delta_\gamma : C_0(Z)(s(\gamma)) \rightarrow C_0(Z)(r(\gamma))$  et  $(\rho_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ , avec  $\rho_\gamma : C_0^s(s(\gamma)) \rightarrow C_0^s(r(\gamma))$ .

Pour tout  $x$  dans  $X$ , on pose  $\theta_x^* : C_0(Z)(x) \rightarrow C_0^s(x)$  l'homomorphisme de  $C^*$ -algèbres induit par  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$  sur les fibres en  $x$ .

On a pour toute fonction  $g$  de  $C_0(Z)(r(\gamma))$  et tout  $\eta$  dans  $\mathcal{G}_{r(\gamma)}$

$$\begin{aligned}\rho_\gamma \circ \theta_{r(\gamma)}^*(g)(\eta) &= \rho_\gamma(\theta_{r(\gamma)}^*(g))(\eta) = \theta_{r(\gamma)}^*(g)(\eta.\gamma) = g(\theta(\eta.\gamma)) \\ &= g(\theta(\eta).\gamma) = \delta_\gamma(g)(\theta(\eta)) \\ &= \theta_{s(\gamma)}^* \circ \delta_\gamma(g)(\eta)\end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$ , on a  $\rho_\gamma \circ \theta_{r(\gamma)}^* = \theta_{s(\gamma)}^* \circ \delta_\gamma$ , par conséquent, l'homomorphisme  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$  est  $\mathcal{G}$ -équivariant. □

*Démonstration de la propriété 3.1.17.* En étudiant la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s$ , on a montré qu'il existe un  $*$ -isomorphisme isométrique de  $C_0^s$  dans  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ . On obtient un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ .

On considère  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité de  $C_0(Z)$  et on veut montrer que  $(\theta^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité de  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ . Soit  $f$  une fonction dans  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ ; pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous espace  $K$  compact dans  $X$ , tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_K$ , on a  $|f(\gamma)| < \varepsilon$ . En posant  $K' := \overline{\{\sigma(r(\gamma)) \cdot \gamma / s(\gamma) \in K\}} \subset \pi^{-1}(K)$ , on obtient un sous espace compact de  $Z$ . Il existe  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a pour tout  $z$  dans  $\pi^{-1}(K)$   $1 \leq e_n(z) \leq 1 - \varepsilon$ . Par conséquent, on a pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}_K$ ,  $1 \leq \theta^*(e_n)(\gamma) \leq 1 - \varepsilon$  ce qui implique

$$|f(\gamma) - \theta^*(e_n)(\gamma)f(\gamma)| \leq \varepsilon |f(\gamma)|$$

De même, pour  $n \geq n_0$  pour  $\gamma$  n'appartenant pas à  $\mathcal{G}_K$ , puisque  $|f(\gamma)| \leq \varepsilon$  et  $\theta^*(e_n)(\gamma) \in [0, 1]$ , on a

$$|f(\gamma) - \theta^*(e_n)(\gamma)f(\gamma)| < \varepsilon$$

Ainsi on a montré que pour  $f$  fonction de  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ , pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$\|f - \theta^*(e_n)f\|_\infty < \varepsilon \|f\|_\infty$$

On en conclut que  $(\theta^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité de  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$  et l'homomorphisme  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$  est non dégénéré.

D'après la proposition 3.1.4, l'homomorphisme non dégénéré  $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$  induit une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ .

L'application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$  est continue : en effet, on considère  $U$  un ouvert de  $Z$  et on pose  $V = \tilde{\theta}^{-1}(U)$ . Si  $V$  est vide, alors c'est un ouvert de  $\beta_X \mathcal{G}$ . S'il existe  $p_0$  dans  $V$ , on pose  $z_0 = \tilde{\theta}(p_0)$ , son image dans  $U$ . Soit  $f$  une fonction de  $C_0(Z)$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , à support dans  $U$  et pour laquelle  $f(z_0) = 1$ . La fonction  $\theta^*(f)$  de  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ , non nulle car  $\theta^*(f)(p_0) = 1$  et à support dans  $V$ . On a alors  $\theta^*(f)^{-1}([0, 1])$  est un ouvert dans  $\beta_X \mathcal{G}$  contenant  $p_0$  et contenu dans  $V$ . Donc  $V = \tilde{\theta}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\beta_X \mathcal{G}$ . L'application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$  est continue.

L'application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$  est  $\mathcal{G}$ -équivariante : en effet pour tout élément  $(p, \gamma)$  dans  $\beta_X \mathcal{G} *_{\tilde{s}, r} \mathcal{G}$  et toute fonction  $f$  dans  $C_0(Z)$ , on a

$$\begin{aligned} f(\tilde{\theta}(p \cdot \gamma)) &= \theta^*(f)(p \cdot \gamma) = \theta_{r(\gamma)}^*(f)(p \cdot \gamma) = \rho_\gamma(\theta_{r(\gamma)}^*(f))(p) \\ &= \theta_{s(\gamma)}^*(\delta_\gamma(f))(p) = \delta_\gamma(f)(\tilde{\theta}(p)) = f(\tilde{\theta}(p) \cdot \gamma) \end{aligned}$$

Pour tout couple  $(p, \gamma)$  dans  $\beta_X \mathcal{G}$ , on a l'égalité  $\tilde{\theta}(p \cdot \gamma) = \tilde{\theta}(p) \cdot \gamma$ , ce qui prouve que l'application  $\tilde{\theta}$  est  $\mathcal{G}$ -équivariante.

Soit  $K$  un sous espace compact de  $Z$ , montrons que  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  est un sous espace compact de  $\beta_X \mathcal{G}$ . Le sous espace  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  est fermé dans  $\beta_X \mathcal{G}$  et  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  est inclus dans  $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$  car pour tout  $p$  dans  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  il existe  $z$  dans  $K$  tel que :

$$\tilde{\theta}(p) = z \quad \text{et} \quad \tilde{s}(p) = \pi(\tilde{\theta}(p))$$

donc  $p \in \tilde{s}^{-1}(\pi(K))$ . Or l'application  $\pi$  étant continue et l'application  $\tilde{s}$  étant propre, alors  $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$  est un sous espace compact de  $\beta_X \mathcal{G}$ . On en déduit que  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  est un sous espace fermé du compact  $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$ , donc  $\tilde{\theta}^{-1}(K)$  est compact. L'application  $\tilde{\theta}$  est donc propre.  $\square$

### 3.1.4 Espace de mesure

La moyennabilité à l'infinie du groupoïde  $\mathcal{G}$  se caractérise par l'existence d'un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé  $Y$  tel que  $\pi : Y \rightarrow X$  une application continue, propre, surjective et ouverte pour lequel l'action est moyennable. Pour démontrer le théorème 3.1.1, à savoir que la moyennabilité infinie du groupoïde  $\mathcal{G}$  implique la moyennabilité du groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , l'outil essentiel est la propriété universelle de  $\beta_X \mathcal{G}$ . Le premier réflexe serait d'appliquer cette propriété universelle au  $\mathcal{G}$ -espace  $Y$  mais ceci n'est pas possible car l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  n'admet en général pas de section continue.

L'objectif de cette partie et de la suivante vise à remplacer l'espace  $Y$  par un  $\mathcal{G}$ -espace  $M$  de mesures de probabilité sur  $Y$  judicieusement choisi de sorte que l'espace  $M$  possède les mêmes caractéristiques que l'espace  $Y$  et que l'on puisse construire une section continue pour l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  induite par l'action de  $\mathcal{G}$ .

Dans cette partie, on s'emploie tout d'abord à définir l'espace  $M$  de mesures sur  $Y$  puis on montre que l'espace  $M$  est muni d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$  pour lequel l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est continue, surjective, ouverte et propre.

Pour tout  $x \in X$ , on note  $Y_x = \pi^{-1}(x)$ . On note  $R(Y)$  l'espace des mesures de Radon sur  $Y$ . On pose alors

$$M = \{\mu \in R(Y) : \exists x \in X, \text{Supp}(\mu) \subset Y_x \text{ et } \mu(Y) = 1\}$$

L'ensemble  $M$  est un sous espace de la boule unité de l'espace  $R(Y)$ . Pour toute mesure  $\mu$  dans  $M$ , il existe un unique  $x_\mu$  dans  $X$  tel que  $\text{Supp}(\mu)$  est inclus dans  $Y_{x_\mu}$ . On note  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  l'application canonique qui à toute mesure  $\mu$  de  $M$  associe l'élément  $\tilde{\pi}(\mu) = x_\mu$  de  $X$ .

**Proposition 3.1.20.** *L'application canonique  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est continue, surjective, ouverte et propre.*

*Démonstration.* On montre successivement que l'application est surjective, continue, ouverte et propre.

La surjectivité est assez directe : pour toute mesure  $\mu \in M$ , il existe  $x_\mu \in X$  tel que  $\text{Supp} \mu \subset Y_{x_\mu}$ . L'application canonique  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est définie par  $\tilde{\pi}(\mu) = x_\mu$ . Elle est clairement surjective.

Pour montrer la continuité de l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ , on considère  $U$  un ouvert dans  $X$  et on cherche à montrer que  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M$ ; soit  $\mu_0$  un élément de  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  et  $x_0 := \tilde{\pi}(\mu_0)$ . Soit  $U_0$  un ouvert dans  $U$  contenant  $x_0$ ; puisque l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  est continue alors  $\pi^{-1}(U_0)$  est un ouvert de  $Y$ ; soit  $f \in C_c(\pi^{-1}(U_0))$  une fonction continue à support compact dans  $\pi^{-1}(U_0)$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que  $f|_{Y_{\mu_0}} \equiv 1$ . Alors l'ensemble

$$\{\mu \in M : |\mu(f) - \mu_0(f)| < 1\}$$

est un ouvert dans  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  contenant  $\mu_0$ . Ainsi  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M$ . L'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est donc continue.

Supposons maintenant que l'application  $\tilde{\pi}$  n'est pas ouverte c'est-à-dire qu'il existe un ouvert  $U_0$  de  $M$  tel que  $\tilde{\pi}(U_0)$  n'est pas ouvert dans  $X$ . On peut supposer que  $U_0$  est un voisinage ouvert de  $\mu_0$  de la forme

$$U_0 = \{\mu \in M : |\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < a, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

avec  $a$  un réel strictement positif et  $f_i$  est une fonction dans  $C_0(Y)$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Comme  $\tilde{\pi}(U_0)$  n'est pas ouvert dans  $X$ , il existe alors une mesure  $\mu'$  dans  $U_0$  avec  $x' = \tilde{\pi}(\mu')$  tel que pour tout voisinage  $V'$  de  $x'$  dans  $X$ , on a  $V' \not\subseteq \tilde{\pi}(U_0)$ . On peut donc construire une suite généralisée  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  dans  $X$  qui converge vers  $x'$  et telle que pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , l'élément  $x_\lambda$  n'est pas dans  $\tilde{\pi}(U_0)$ , c'est-à-dire pour tout  $\mu_\lambda$  dans  $\tilde{\pi}^{-1}(x_\lambda)$ , il existe  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $|\mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \geq a$ .

On considère  $\varepsilon$  un réel strictement positif tel que pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  on a

$$|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| < a - 2\varepsilon$$

Pour tout  $z$  dans  $Y_{x'}$ , on pose

$$U_z = \cap_{i=1}^n \{y \in Y : |f_i(y) - f_i(z)| < \varepsilon\}$$

qui est un ouvert de  $z$  dans  $Y$ . On obtient un recouvrement d'ouverts du compact  $Y_{x'}$  duquel on peut extraire un sous recouvrement fini et on a  $Y_{x'} \subset \cup_{j=1}^m U_{z_j}$ .

L'application  $\pi : Y \rightarrow X$  étant ouverte, l'espace  $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$  est un ouvert de  $X$  contenant  $x'$ . Ainsi il existe  $\lambda' \in \Lambda$ , tel que pour tout  $\lambda > \lambda'$ , on a  $x_\lambda$  appartient à l'ouvert  $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$ .

On pose  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq m}$ , une partition de l'unité associée au recouvrement de l'espace  $Y_{x'}$  par les ouverts  $\{U_{z_j}\}_{j=1}^m$ .

On considère  $x_\lambda$  dans  $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $y_j$  dans  $U_{z_j} \cap Y_{x_\lambda}$  et on construit une mesure  $\mu_\lambda$  définie par  $\mu_\lambda = \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_{y_j}$ , où  $\delta_j$  est la mesure de Dirac en  $y_j$  et  $\omega_j = \mu'(\phi_j)$ . On obtient une mesure à support dans  $Y_{x_\lambda}$  et comme

$$\mu_\lambda(Y) = \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_j(M) = \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) = \mu'(\sum_j \phi_j) = \mu'(1_{Y_{x'}}) = 1$$

la mesure  $\mu_\lambda$  est dans l'espace  $M$ . Pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , on a

$$\begin{aligned} |\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| &= \left| \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_j(f_i) - \mu\left(\sum_{j=1}^m \phi_j f_i\right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) f_i(z_j) - \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j f_i) \right| \end{aligned}$$

et, pour tout  $1 \leq j \leq m$ , on a  $(f_i(y_j) - \varepsilon)\phi_j \leq \phi_j f_j \leq (f_i(y_j) + \varepsilon)\phi_j$ .

Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) [f_i(z_j) - (f_i(y_j) + \varepsilon)] \leq \mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i) \leq \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) [f_i(z_j) - (f_i(y_j) - \varepsilon)]$$

Par définition des ouverts  $U_j$  construits, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , on a

$$-\varepsilon \leq f_i(z_j) - f_i(y_j) \leq \varepsilon$$

On en déduit alors que pour tout  $\lambda \geq \lambda'$ , pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$  et tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$|\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi on a pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $\lambda'$  dans  $\Lambda$  tel que

$$\begin{aligned} |\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| &= |\mu'(f_i) - \mu_\lambda(f_i) + \mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \\ &\geq \left| |\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| - |\mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \right| \\ &\geq a - 2\varepsilon \end{aligned}$$

On obtient alors une contradiction. L'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est donc ouverte.

Montrons maintenant que l'application est propre : l'espace  $M$  est un sous espace fermé de  $R(Y)$  pour la topologie  $*\sigma(R(Y), C_0(Y))$ . En effet, soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de mesure dans  $M$  qui converge vers une mesure  $\mu$  de  $R(Y)$  pour la topologie  $*\sigma(R(Y), C_0(Y))$ . On note  $S$  le support de  $\mu$  qui est non vide (car  $\mu$  est dans la boule unité de  $R(Y)$ ) et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite dans  $X$  où, pour tout entier  $n$ , on a  $x_n = \tilde{\pi}(\mu_n)$ . Soit  $x$  un élément de  $\tilde{\pi}(S)$ , alors  $x$  est dans l'adhérence de  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Supposons (on raisonne par l'absurde) qu'il existe deux éléments  $x$  et  $x'$  distincts dans  $\tilde{\pi}(S)$ . On considère  $U$  et  $U'$  des voisinages ouverts et disjoints respectivement de  $x$  et  $x'$ . On considère  $f$  (respectivement  $f'$ ) une fonction à support compact dans l'ouvert  $\pi^{-1}(U)$  (respectivement  $\pi^{-1}(U')$ ) telle que  $\mu(f) = 1$  (respectivement  $\mu(f') = 1$ ). Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$ , on a

$$|\mu(f) - \mu_n(f)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\mu(f') - \mu_n(f')| < \varepsilon$$

Pour tout  $n > n_0$ , l'espace  $\text{Supp}(\mu_n)$  est contenu dans  $\pi^{-1}(x_n)$ . L'espace  $\pi^{-1}(x_n)$  est inclus et dans  $\pi^{-1}(U)$  et dans  $\pi^{-1}(U')$ , ce qui est contradictoire. Donc  $\tilde{\pi}(S)$  est réduit à un singleton  $\{x\}$  dans  $X$  et  $\mu$  est dans  $M$ . L'espace  $M$  est fermé dans la boule unité de  $R(Y)$  qui est compacte par le théorème de Banach-Alaoglu. L'espace  $M$  est donc compact et l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est propre. □

**Proposition 3.1.21.** *L'espace topologique  $M$  est un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact.*

*Démonstration.* L'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  étant propre, l'espace  $M$  est alors localement compact. On munit  $M$  d'une action du groupoïde  $\mathcal{G}$  : on considère l'espace  $M * \mathcal{G}$  comme étant l'ensemble  $\{(\mu, \gamma) \in M \times \mathcal{G} : \tilde{\pi}(\mu) = r(\gamma)\}$  et on note  $\theta : M * \mathcal{G} \rightarrow M$  l'application qui à tout  $(\mu, \gamma)$  de  $M * \mathcal{G}$ , associe  $\theta((\mu, \gamma)) = \mu \cdot \gamma \in M$  où  $\mu \cdot \gamma$  est définie pour toute fonction  $f$  dans  $C_0(Y)$  par

$$\mu \cdot \gamma(f) = \int_Y f(y) d\mu \cdot \gamma(y) = \int_{Y_{s(\gamma)}} f(y) d\mu \cdot \gamma(y) = \int_{Y_{r(\gamma)}} f(z\gamma) d\mu(z)$$

On obtient bien une mesure de probabilité et comme  $\tilde{\pi}(\mu \cdot \gamma) = s(\gamma)$ , le support de  $\mu \cdot \gamma$  est un sous espace de  $Y_{s(\gamma)}$ . Ainsi pour tout élément  $(\mu, \gamma)$  dans  $M * \mathcal{G}$ , la mesure de probabilité  $\mu \cdot \gamma$  est dans l'espace  $M$ .

De plus, pour tout  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$  et toute fonction  $f$  dans  $C_0(Y)$ , on a

$$\begin{aligned} (\mu \cdot \gamma \eta)(f) &= \int_{Y_{s(\eta)}} f(y) d(\mu \cdot \gamma \eta)(y) = \int_{Y_{r(\gamma)}} f(z\gamma \eta) d\mu(z) \\ &= \int_{Y_{r(\eta)}} f(z\eta) d\mu \cdot \gamma(z) = \int_{Y_{s(\eta)}} f(y) d(\mu \cdot \gamma) \cdot \eta(y) \\ &= (\mu \cdot \gamma) \cdot \eta(f) \end{aligned}$$

Enfin, pour tout  $\mu \in M$  tel que  $\tilde{\pi}(\mu) = x$  et toute fonction  $f \in C_0(Y)$ , on a

$$\mu \cdot \tilde{\pi}(\mu)(f) = \int_{Y_x} f(y) d\mu \cdot \varepsilon(x)(y) = \int_{Y_x} f(y\varepsilon(x)) d\mu(y) = \mu(f)$$

Ainsi on a muni l'espace localement compact  $M$  d'une action du groupoïde  $\mathcal{G}$ .

L'action est continue si l'application (induite par l'action)  $M *_{\tilde{\pi}, r} \mathcal{G} \rightarrow M$  est continue. On considère une suite  $(\mu_i)_{i \in I}$  de mesures dans  $M$  convergeant vers une mesure  $\mu$  dans  $M$ . Pour tout  $i$  dans  $I$ , on note  $x_i := \tilde{\pi}(\mu_i)$  et  $x := \tilde{\pi}(\mu)$  et on a une suite  $(x_i)_{i \in I}$  dans  $X$  qui converge vers  $x$ . On considère une suite  $(\gamma_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{G}$  telle que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $\gamma_i$  est dans  $\mathcal{G}^{x_i}$  et qui converge vers un élément  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}^x$ . On montre que la suite  $(\mu_i \cdot \gamma_i)_{i \in I}$  converge dans  $M$  vers  $\mu \cdot \gamma$ .

On considère  $U$  un voisinage ouvert de  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  tel que les applications but et source sont des homéomorphismes sur leur image respective. On note  $\rho_x : r(U) \rightarrow U$  l'homéomorphisme inverse de la restriction  $r : U \rightarrow r(U)$ .

On considère  $V$  un voisinage ouvert de  $\mu \cdot \gamma$  dans  $M$  que l'on peut supposer de la forme

$$V = \{ \mu \in M : |\mu(f_j) - \mu \cdot \gamma(f_j)| < \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, m\} \}$$

où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif et pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ ,  $f_j$  est une fonction dans  $C_0(Y)$  telle que  $\text{Supp}(f_j)$  est inclus dans l'ouvert  $\pi^{-1}(s(U))$ . Pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on note  $\tilde{f}_j$  la fonction de  $C_0(Y)$  obtenue par l'action de  $\gamma$  sur  $f_j$  telle que le support  $\text{Supp}(\tilde{f}_j)$  est inclus dans  $\pi^{-1}(r(U))$ . On note  $\tilde{V}$  le voisinage ouvert de  $\mu$  dans  $M$  défini par

$$\tilde{V} := \{ \mu' \in M : |\mu'(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, m\} \}$$

et la suite  $(\mu_i)_{i \in I}$  convergeant vers  $\mu$ , il existe  $i_\varepsilon$  dans  $I$  tel que pour tout  $i \geq i_\varepsilon$ , l'élément  $\gamma_i$  est dans  $U$  et on a, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ ,

$$|\mu_i(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon$$

Or on a pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{f}_j) &= \int_Y \tilde{f}_j(y) d\mu(y) = \int_{Y_x} \tilde{f}_j(y) d\mu(y) = \int_{Y_x} f_j(y \cdot \rho_x(\pi(y))) d\mu(y) \\ &= \int_{Y_x} f_j(y \cdot \gamma) d\mu(y) = \int_{Y_{s(\gamma)}} f_j(z) d(\mu \cdot \gamma)(z) = \int_Y f_j(z) (\mu \cdot \gamma)(z) \\ &= (\mu \cdot \gamma)(f_j) \end{aligned}$$

On obtient de même pour tout  $i \geq i_\varepsilon$  dans  $I$  et tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , l'égalité

$$\mu_i(\tilde{f}_j) = \mu_i \cdot \gamma_i(f_j)$$

Ainsi pour tout  $i \geq i_\varepsilon$ , on a, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$

$$|\mu_i \cdot \gamma_i(f_j) - \mu \cdot \gamma(f_j)| = |\mu_i(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon$$

donc  $\mu_i \cdot \gamma_i$  est dans l'ouvert  $V$  pour tout  $i \geq i_\varepsilon$ . L'action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur  $M$  est continue.  $\square$

### 3.1.5 Existence d'une section continue

Pour démontrer que l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  continue, surjective, propre et ouverte possède une section continue (non nécessairement équivariante), on utilise le théorème de sélection de Michael [Mic56] dont on donne un rappel succinct pour la commodité du lecteur.

On considère  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques ( $A$  étant supposé séparé) et on note  $2^B$  l'ensemble des parties non vide de  $B$ . On considère  $\Omega : A \rightarrow 2^B$  une application qui sera dite semi-continue inférieurement si, pour tout ouvert  $V$  de  $B$ , l'ensemble  $\{a \in A : \Omega(a) \cap V \neq \emptyset\}$  est un ouvert de  $A$ .

**Définition 3.1.22.** Soit  $A$  et  $B$  des espaces topologiques et  $\Omega : A \rightarrow 2^B$  une application. On appelle sélection pour l'application  $\Omega$  une application continue  $f : A \rightarrow B$  telle que, pour tout  $a$  dans  $A$ , l'élément  $f(a)$  est dans  $\Omega(a)$ .

On considère à partir de maintenant que  $B$  est un espace de Banach et on note dans la suite de cette sous section  $\mathfrak{F}(B) := \{S \subset B : S \text{ convexe et fermée}\}$  qui est une sous famille de  $2^B$ . Michael donne alors une caractérisation des applications  $\Omega : A \rightarrow \mathfrak{F}(B)$  qui admettent une sélection par le théorème qui suit :

**Théorème 3.1.23** ([Mic56]). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $A$  est un espace paracompact
- b) toute application  $\Omega : A \rightarrow \mathfrak{F}(B)$  semi-continue inférieurement admet une sélection.

*Remarque 3.1.24.* L'intérêt d'introduire l'espace  $M$  réside dans le fait que l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est continue, surjective, propre et ouverte, comme le prouve la proposition 3.1.20. L'espace des mesures de Radon  $R(Y)$  étant un espace de Banach, on va, par le théorème de sélection de Michael 3.1.23, en déduire l'existence d'une section continue de  $\tilde{\pi}$ . En munissant l'espace  $M$  d'une structure de  $\mathcal{G}$ -espace localement compact, on peut ainsi appliquer la propriété universelle de l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$  et définir une application continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ .

**Proposition 3.1.25.** L'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  continue, surjective, propre et ouverte admet une section continue (non nécessairement  $\mathcal{G}$ -équivariante).

*Démonstration.* Il s'agit de réunir les conditions pour appliquer le théorème de sélection de Michael 3.1.23. L'espace  $M$  est un sous espace de l'espace des mesures de Radon  $R(Y)$  qui est un espace de Banach. Pour tout  $x$  dans  $X$ , on note  $M_x := \tilde{\pi}^{-1}(\{x\})$  et on a  $M = \{M_x\}_{x \in X}$  qui est une sous famille de  $2^{R(Y)}$ . On voit clairement que pour tout  $x$  dans  $X$ , l'espace  $M_x$  est fermé et convexe et  $M$  est donc une sous famille de  $\mathfrak{F}(R(Y))$ . On pose  $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$  l'application définie, pour tout  $x$  dans  $X$ , par  $\Omega(x) = M_x$ . Pour montrer que l'application  $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$  est semi-continue inférieurement, on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un ouvert  $V$  dans  $R(Y)$  pour lequel l'ensemble  $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$  n'est pas ouvert dans  $X$ . On peut supposer qu'il existe  $a$  un réel strictement positif,  $\mu_0$  dans  $R(Y)$  et une famille  $(f_i)_{i=1}^m$  de fonctions dans  $C_c(Y)$  tels que  $V$  est de la forme

$$\{\mu \in R(Y) : |\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < a, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

L'espace  $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$  étant supposé non ouvert dans  $X$  (et donc non vide), il existe  $x'$  dans  $X$  et  $\mu'$  dans  $M \cap V$  avec  $\tilde{\pi}(\mu') = x'$ , tels que pour tout voisinage ouvert  $U'$  de  $x'$  dans  $X$ ,  $U'$  n'est pas contenu dans  $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$ .

On considère  $\varepsilon$  un réel dans  $]0, a/2[$ , vérifiant, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , l'inégalité

$$|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| < a - 2\varepsilon$$

On applique un raisonnement similaire à celui de la démonstration de 3.1.20 et on construit alors

- une suite généralisée  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  convergeant dans  $X$  vers  $x'$  tel que pour tout  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , l'intersection de  $M_{\mu_\lambda}$  avec  $V$  est vide
- un recouvrement ouvert fini  $\{U_{z_j}\}_{j=1}^n$  de  $Y_{x'}$  pour lequel il existe  $\lambda_n$  dans  $\Lambda$  tel que, pour tout  $\lambda > \lambda_n$ , l'élément  $x_\lambda$  est dans  $\cap_{j=1}^n \pi(U_{z_j})$ .

- pour  $\lambda > \lambda_1$ , une mesure  $\mu_\lambda$  dans  $M_{x_\lambda}$  telle que pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on a  $|\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| \leq 2\varepsilon$

On aboutit alors à la contradiction  $|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| \geq a - 2\varepsilon$ . Donc l'application  $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$  est semi-continue inférieurement. L'espace  $X$  étant paracompact, l'application  $\Omega$  admet une sélection et il existe donc une section continue de l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  que l'on note  $\sigma : X \rightarrow M$ .

□

Le  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé  $M$  satisfaisant les conditions de la propriété universelle, on obtient alors la proposition suivante :

**Proposition 3.1.26.** *Il existe une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$  continue, propre et  $\mathcal{G}$ -équivariante.*

*Démonstration.* D'après 3.1.21, l'espace  $M$  est un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact. D'après 3.1.20 et 3.1.25 l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow Z$  est continue, surjective, propre et admet une section continue  $\theta : X \rightarrow M$ . Les conditions de la proposition 3.1.17 étant réunies, il existe une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$  continue, propre et  $\mathcal{G}$ -équivariante.

□

### 3.1.6 Moyennabilité

La moyennabilité à l'infini du groupoïde  $\mathcal{G}$  se caractérise par l'existence d'un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact et séparé  $Y$  tel que  $\pi : Y \rightarrow X$  une application continue, propre, surjective et ouverte pour lequel l'action est moyennable. On a construit à l'aide de mesures de probabilité sur  $Y$  le  $\mathcal{G}$ -espace localement compact  $M$  pour lequel l'application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  est continue, surjective, propre et admet une section continue (non nécessairement équivariante). La proposition 3.1.26 donne l'existence d'une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$  continue, propre et  $\mathcal{G}$ -équivariante.

Dans cette partie, on commence par prouver que la moyennabilité du groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  implique celle du groupoïde  $M \rtimes \mathcal{G}$ . Une fois la moyennabilité de  $M \rtimes \mathcal{G}$  établie, on s'attaque à la démonstration du théorème 3.1.1 : on va énoncer deux lemmes 3.1.29 et 3.1.30, qui nous permettront de "tiré en arrière" la moyennabilité de  $M \rtimes \mathcal{G}$  sur  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  en utilisant entre autre l'application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ .

*Remarque 3.1.27.* On considère  $Y'$  un sous espace de  $Y$  et  $\mathcal{G}'$  un sous espace de  $\mathcal{G}$ . On note  $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}'$  le sous espace de  $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$  défini par  $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}' := \{(y, \gamma) \in Y' \times \mathcal{G}' : \pi(y) = r(\gamma)\}$ . Si les espaces  $Y'$  et  $\mathcal{G}'$  sont compacts respectivement dans  $Y$  et  $\mathcal{G}$ , alors l'espace  $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}'$  est compact dans  $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$ ; en effet, l'espace  $Y' \times \mathcal{G}'$  est compact dans  $Y \times \mathcal{G}$ , l'espace  $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$  est fermé dans  $Y \times \mathcal{G}$  et on a  $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}' = (Y' \times \mathcal{G}') \cap (Y *_{\pi,r} \mathcal{G})$ .

On a la proposition suivante :

**Proposition 3.1.28.** *Si  $Y \rtimes \mathcal{G}$  est un groupoïde moyennable, alors  $M \rtimes \mathcal{G}$  est un groupoïde moyennable.*

*Démonstration.* On suppose que  $Y \rtimes \mathcal{G}$  est un groupoïde moyennable c'est-à-dire qu'il existe une suite  $(\phi_i)_{i \in I}$  de fonctions continues, de type positif et à support compact dans  $Y \rtimes \mathcal{G}$  telle que

- $\forall i \in I, \phi_i^{(0)} \leq 1$  où  $\phi_i^{(0)}$  est la restriction de  $\phi_i$  à  $(Y \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$

- $\lim_i \phi_i = 1$  uniformément sur tout sous espace compact de  $Y \rtimes \mathcal{G}$

Pour tout  $i$  dans  $I$ , on pose  $\psi_i$  la fonction définie, pour tout  $(\mu, \gamma)$  dans  $M \rtimes \mathcal{G}$ , par

$$\psi_i(\mu, \gamma) := \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y)$$

On obtient ainsi une suite de fonctions  $(\psi_i)_{i \in I}$  définie sur  $M \rtimes \mathcal{G}$  et on montre successivement que les fonctions  $\psi_i$  sont continues, de type positif, à support compact et qu'elles vérifient un critère de convergence uniforme sur les compacts ce qui implique la moyennabilité du groupoïde  $M \rtimes \mathcal{G}$ .

On prouve tout d'abord la continuité des fonctions  $\psi_i$  : soit  $i$  dans  $I$  et  $(\mu_0, \gamma_0)$  un élément de  $M \rtimes \mathcal{G}$ . Le groupoïde  $\mathcal{G}$  étant étale et localement compact, on considère  $U_0$  un voisinage ouvert de  $\gamma_0$  homéomorphe à l'ouvert  $s(U_0)$  de  $X$  et  $K_0$  un voisinage compact de  $\gamma_0$  inclus dans  $U_0$ . Il existe une fonction continue  $\varphi$  à support dans  $U_0$  telle que  $\varphi|_{K_0} \equiv 1$ . On définit une fonction  $\tilde{\phi}_i$  sur  $Y$  par

$$\tilde{\phi}_i(y) = \begin{cases} \varphi(\gamma) \phi_i(y, \gamma), & \text{si } y \in \pi^{-1}(r(U_0)), \gamma \in U_0 \\ 0, & \text{si } y \notin \pi^{-1}(r(U_0)) \end{cases}$$

qui est continue sur  $Y$ . On a, pour tout  $(\mu, \gamma)$  dans  $M *_{\tilde{\pi}, r} U_0$ ,

$$\begin{aligned} |\psi_i(\mu, \gamma) - \psi_i(\mu_0, \gamma_0)| &= \left| \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y) - \int_Y \phi_i(y, \gamma_0) d\mu_0(y) \right| \\ &= \left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| \end{aligned}$$

Soit  $((\mu_\lambda, \gamma_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  une suite d'éléments de  $M \rtimes \mathcal{G}$  qui converge vers  $(\mu_0, \gamma_0)$ . Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $V_0$  un voisinage ouvert de  $\mu_0$  dans  $M$  tel que, pour tout  $\mu$  dans  $V_0$ , on a

$$\left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| < \varepsilon$$

Ainsi il existe  $\lambda'$  dans  $\Lambda$  tel que pour tout  $\lambda \geq \lambda'$ , l'élément  $(\mu_\lambda, \gamma_\lambda)$  est dans  $V_0 *_{\tilde{\pi}, r} U_0$  et donc

$$|\psi_i(\mu_\lambda, \gamma_\lambda) - \psi_i(\mu_0, \gamma_0)| = \left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_\lambda(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| < \varepsilon$$

Ainsi pour tout  $i$  dans  $I$ , la fonction  $\psi_i$  est continue sur  $M \rtimes \mathcal{G}$ .

On montre que les fonctions  $\psi_i$  sont de type positif : pour tout  $i$  dans  $I$ , la fonction  $\psi_i$  est de type positif : soient  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\mu$  dans  $M$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $\mathcal{G}^{\tilde{\pi}(\mu)}$ , on a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,q=1}^n \bar{\lambda}_p \lambda_q \psi_i(\mu \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) = \sum_{p,q=1}^n \bar{\lambda}_p \lambda_q \int_{Y_{s(\gamma_p)}} \phi_i(y, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu \cdot \gamma_p(y) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \int_{Y_{r(\gamma_p)}} \bar{\lambda}_p \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu(z) \\ &= \int_{Y_{r(\gamma_p)}} \sum_{p,q=1}^n \bar{\lambda}_p \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu(z) \geq 0 \end{aligned}$$

car chaque fonction  $\phi_i$  est de type positif donc  $\sum_{p,q=1}^n \overline{\lambda_p} \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) \geq 0$ . Pour tout  $i$  de  $I$ , la fonction  $\psi_i$  est de type positif.

On montre maintenant que les fonctions  $\psi_i$  sont à support compact : soit  $i \in I$ , on pose  $K_i := \text{Supp}(\psi_i)$ . La fonction  $\phi_i$  étant à support compact, l'espace  $Q_i := \text{Supp}(\phi_i)$  est un sous espace compact de  $Y \rtimes \mathcal{G}$ ; les projections  $p_1 : Y \rtimes \mathcal{G} \rightarrow Y$  et  $p_2 : Y \rtimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  étant continues, les espaces  $p_1(Q_i)$  et  $p_2(Q_i)$  sont compacts respectivement dans  $Y$  et  $\mathcal{G}$  et  $C_i := \pi(p_1(Q_i)) = r(p_2(Q_i))$  est un sous espace compact de  $X$ ; d'après la remarque 3.1.27,  $\tilde{\pi}^{-1}(C_i) *_{\tilde{\pi},r} p_2(Q_i)$  est compact dans  $M \rtimes \mathcal{G}$ . Le support de  $\psi_i$  est donc un fermé contenu dans le sous espace compact  $\tilde{\pi}^{-1}(C_i) \rtimes p_2(Q_i)$ . Pour tout  $i$  dans  $I$ , la fonction  $\psi_i$  est à support compact dans  $M \rtimes \mathcal{G}$ .

On montre le critère de convergence uniforme : soit  $K$  un sous espace compact de  $M \rtimes \mathcal{G}$ , alors on a pour tout  $(\mu, \gamma)$  dans  $K$

$$\begin{aligned} |\psi_i(\mu, \gamma) - 1| &= \left| \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y) - 1 \right| = \left| \int_Y (\phi_i(y, \gamma) - 1) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_Y |\phi_i(y, \gamma) - 1| d\mu(y) \end{aligned}$$

On pose  $p_1(K)$  l'image de  $K$  par la première projection sur  $M$ . L'espace  $p_1(K)$  est un sous espace compact de  $M$  et  $\tilde{\pi}(p_1(K))$  est un sous espace compact de  $X$ . Pour  $(\mu, \gamma)$  dans  $K$ , il existe  $x$  dans  $\tilde{\pi}(p_1(K))$  tel que  $\text{Supp}(\mu) \subset Y_x$  et on a

$$\{y \in Y : \exists (\mu, \gamma) \in K, y \in \text{Supp}(\mu)\} \subset \pi^{-1}(\tilde{\pi}(p_1(K)))$$

où  $\tilde{K} := \pi^{-1}(\tilde{\pi}(p_1(K)))$  est un sous espace compact de  $Y$ , car l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  est propre. De plus  $p_2(K)$  est un sous espace compact de  $\mathcal{G}$ , donc d'après la remarque 3.1.27, l'espace  $\tilde{K} *_{\tilde{\pi},r} p_2(K)$  est un sous espace compact de  $Y \rtimes \mathcal{G}$ . Alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $i_\varepsilon$  dans  $I$  tel que pour tout  $i \geq i_\varepsilon$  on a pour tout  $(y, \gamma)$  dans  $\tilde{K} *_{\tilde{\pi},r} p_2(K)$

$$|\phi_i(y, \gamma) - 1| < \varepsilon$$

ainsi pour tout  $(\mu, \gamma)$  dans  $K$  et tout  $i \geq i_\varepsilon$ , on a

$$|\psi_i(\mu, \gamma) - 1| \leq \int_Y |\phi_i(y, \gamma) - 1| d\mu(y) < \varepsilon \int_Y d\mu(y) < \varepsilon$$

Donc  $\lim_i \psi_i = 1$  uniformément sur tout compact  $K$  de  $M \rtimes \mathcal{G}$ .

Enfin pour tout  $i \in I$ , on note  $\psi_i^{(0)}$  la restriction de  $\psi_i$  à  $(M \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$ . On a pour tout  $x \in X$  et tout  $\mu \in M_x$

$$\begin{aligned} |\psi_i^{(0)}| &= \left| \int_{Y_x} \phi_i(y, \varepsilon(x)) d\mu(y) \right| = \left| \int_{Y_x} \phi_i^{(0)}(y) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_{Y_x} |\phi_i^{(0)}(y)| d\mu(y) \leq \int_{Y_x} 1 d\mu(y) \leq 1 \end{aligned}$$

On a montré l'existence d'une suite  $(\psi_i)_{i \in I}$  de fonctions continues, de type positif et à support compact dans  $M \rtimes \mathcal{G}$  telle que

- pour tout  $i \in I$ ,  $\phi_i^{(0)} \leq 1$  où  $\phi_i^{(0)}$  est la restriction de  $\phi_i$  à  $(M \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$
- $\phi_i$  converge vers un sur tout sous espace compact de  $M \rtimes \mathcal{G}$

ce qui prouve que le groupoïde  $M \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable.  $\square$

**Lemme 3.1.29.** *Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  des groupoïdes topologiques. Soient  $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un homomorphisme de groupoïde continu et  $\varphi$  une fonction continue sur  $\mathcal{H}_2$  et de type positif.*

- (a) *la fonction  $\varphi \circ f$  est continue sur  $\mathcal{H}_1$  et de type positif*
- (b) *si  $f$  est propre et  $\varphi$  à support compact dans  $\mathcal{H}_2$ , alors  $\varphi \circ f$  est à support compact dans  $\mathcal{H}_1$*

*Démonstration.* (a) Il est clair que la composition  $\varphi \circ f$  est continue sur  $\mathcal{H}_1$ . La fonction  $\varphi$  étant de type positif, on a pour tout entier  $n$ ,  $x$  dans  $\mathcal{H}_2^{(0)}$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $\mathcal{H}_2^x$  et tout complexe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(\gamma_i^{-1}\gamma_j)\bar{\lambda}_i\lambda_j \geq 0$$

Ainsi on a pour tout  $n$  entier,  $x$  dans  $\mathcal{H}_1^{(0)}$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $\mathcal{H}_1^x$  et tout complexe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \varphi \circ f(\gamma_i^{-1}\gamma_j)\bar{\lambda}_i\lambda_j = \sum_{i,j=1}^n \varphi(f(\gamma_i)^{-1}f(\gamma_j))\bar{\lambda}_i\lambda_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \varphi(\eta_i^{-1}\eta_j)\bar{\lambda}_i\lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

donc la fonction  $\varphi \circ f$  est de type positif.

(b) On suppose que la fonction  $\varphi$  est à support compact et que  $f$  est propre. On note  $K_1$  le support de la fonction  $\varphi \circ f$ , qui est fermé de  $\mathcal{H}_1$  et  $K_2$  le support de  $\varphi$ , qui est compact dans  $\mathcal{H}_2$ . Soit  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}_1$  tel que  $|\varphi(f(\gamma))| > 0$ , alors  $f(\gamma)$  est dans le support de  $\varphi$  et  $\gamma$  se trouve dans  $f^{-1}(K_2)$ . Comme  $f$  est propre, on a  $f^{-1}(K_2)$  est compact et  $K_1$  est un sous espace fermé de  $f^{-1}(K_2)$ , donc lui aussi compact. La fonction  $\varphi \circ f$  est à support compact.  $\square$

**Lemme 3.1.30.** *Soit  $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un homomorphisme entre groupoïdes topologiques continu et propre. Si  $\mathcal{H}_2$  est moyennable, alors  $\mathcal{H}_1$  est moyennable.*

*Démonstration.* Le groupoïde  $\mathcal{H}_2$  étant moyennable il existe une suite  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de fonctions continues sur  $\mathcal{H}_2$ , de type positif et à support compact telle que

- pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_i^{(0)} \leq 1$  où  $\varphi_i^{(0)}$  est la restriction de  $\varphi_i$  à  $\mathcal{H}_2^{(0)}$
- $\varphi_i$  converge vers 1 uniformément sur tout sous espace compact de  $\mathcal{H}_2$

Pour tout  $i$  dans  $I$ , on note  $\psi_i = \varphi_i \circ f$  la fonction définie sur  $\mathcal{H}_1$ . D'après le lemme 3.1.29, chaque fonction  $\psi_i$  est continue, de type positif et à support compact dans  $\mathcal{H}_1$ . Pour tout  $i$  dans  $I$  et  $x$  dans  $\mathcal{H}_1^{(0)}$ , on a  $\psi_i^{(0)}(x) = \varphi_i^{(0)}(f(x)) \leq 1$ . Soit  $K$  un sous espace compact de  $\mathcal{H}_1$ , par continuité de  $f$ , le sous espace  $f(K)$  est compact dans  $\mathcal{H}_2$ ; la suite  $(\varphi_i)_{i \in I}$  convergeant uniformément vers 1 sur  $f(K)$ , pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $i'$  dans  $I$  tel que pour tout  $i \geq i'$  et tout  $k'$  dans  $f(K)$ , on a  $|\varphi_i(k') - 1| < \varepsilon$ . Ainsi on a pour tout  $i \geq i'$  et tout  $k$  dans  $K$

$$|\psi_i(k) - 1| = |\varphi_i(f(k)) - 1| < \varepsilon$$

Le groupoïde  $\mathcal{H}_1$  est moyennable.  $\square$

On en arrive à la démonstration du théorème 3.1.1

*Démonstration du Théorème 3.1.1.* On suppose qu'il existe un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact  $Y$  pour lequel l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  est continue, propre, surjective et ouverte et le groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable. On considère  $M$  le sous espace de l'espace des mesures de Radon  $R(Y)$  de  $Y$  défini par

$$M = \{ \mu \in R(Y) : \exists x \in X, \text{Supp}(\mu) \subset Y_x \text{ et } \mu(Y) = 1 \}$$

Suivant la proposition 3.1.21, l'espace  $M$  est localement compact et muni d'une action continue du groupoïde  $\mathcal{G}$ . On note  $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$  l'application canonique et d'après la proposition 3.1.20, l'application  $\tilde{\pi}$  est continue, surjective, propre et ouverte. Le groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  étant moyennable, la proposition 3.1.28 implique que le groupoïde  $M \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable. D'après la proposition 3.1.26, il existe une application  $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$  continue, propre et  $\mathcal{G}$ -équivariante. On note  $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}} : \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \rightarrow M \rtimes \mathcal{G}$  l'application définie, pour tout  $(z, \gamma)$  dans  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ , par

$$\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma) = (\tilde{\theta}(z), \gamma)$$

L'application  $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}$  est un homomorphisme de groupoïdes : en effet pour tout  $z$  dans  $\beta_X \mathcal{G}$  et  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$  avec  $r(\gamma) = \tilde{s}(z)$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma) \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z\gamma, \eta) &= (\tilde{\theta}(z), \gamma) \cdot (\tilde{\theta}(z\gamma), \eta) \\ &= (\tilde{\theta}(z), \gamma) \cdot (\tilde{\theta}(z)\gamma, \eta) \\ &= (\tilde{\theta}(z), \gamma\eta) \\ &= \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma\eta) \\ &= \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}((z, \gamma) \cdot (z\gamma, \eta)) \end{aligned}$$

L'homomorphisme de groupoïde  $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}$  est clairement continu et propre, par composition d'applications continues et propres. D'après le lemme 3.1.30, puisque le groupoïde  $M \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable et l'homomorphisme  $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}} : \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \rightarrow M \rtimes \mathcal{G}$  continu et propre, alors le groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable. □

### 3.1.7 Groupoïde étale exact

On dit qu'un groupoïde  $\mathcal{G}$  est exact si pour toute suite exacte  $\mathcal{G}$ -équivariante,

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

de  $\mathcal{G}$ -algèbres, la suite

$$0 \longrightarrow I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte.

On rappelle qu'un groupoïde étale localement compact  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  ( $X$  est l'espace des unités du groupoïde  $\mathcal{G}$ ) est moyennable à l'infini s'il existe un  $\mathcal{G}$ -espace localement compact  $Y$ , pour lequel l'application  $\pi : Y \rightarrow X$  est continue, surjective, ouverte et propre, et tel que le groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable.

**Théorème 3.1.31.** *Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde étale d'espace des unités  $X$ . On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est moyennable à l'infini*

- (2) le groupoïde  $\mathcal{G}$  agit moyennablement sur l'espace  $\beta_X \mathcal{G}$   
 (3) le groupoïde  $\mathcal{G}$  est exact  
 (4) la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte

Alors on a (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)

*Démonstration.* On démontre successivement chacune des implications dans l'ordre de l'énoncé :  
 (1) $\Rightarrow$ (2) : il s'agit de la démonstration 3.1.6 du théorème 3.1.1.

(2) $\Rightarrow$ (3) : on considère une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$  de  $\mathcal{G}$ -algèbres. La suite

$$0 \longrightarrow \pi^* I \longrightarrow \pi^* A \longrightarrow \pi^* A/I \longrightarrow 0$$

est alors une suite exacte de  $C_0(Y)$ -algèbres munies d'une action du groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$ . Le groupoïde  $Y \rtimes \mathcal{G}$  étant moyennable, le foncteur  $B \rightarrow B \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$  est exacte dans la catégorie des  $Y \rtimes \mathcal{G}$ -algèbres. On a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

L'application  $\pi : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  étant continue, surjective et propre, il existe un homomorphisme injectif de  $C^*$ -algèbres  $\phi_I : I \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ . On définit de même des homomorphismes injectifs  $\phi_A : A \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$  et  $\phi_{A/I} : A/I \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I \rtimes_r \mathcal{G} & \xrightarrow{i_r} & A \rtimes_r \mathcal{G} & \xrightarrow{q_r} & A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_I & & \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_{A/I} \\ 0 & \longrightarrow & \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) & \longrightarrow & \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) & \longrightarrow & \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour montrer que la première ligne est exacte, on considère  $a$  dans  $A \rtimes_r \mathcal{G}$  tel que  $q_r(a) = 0$  et  $\phi_A(a)$  est dans  $\pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une approximation de l'unité dans l'idéal  $I$ , alors  $(\phi_I(u_i))_{i \in I}$  est une approximation de l'unité dans l'algèbre des multiplicateurs de  $\pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$  et on a

$$\phi_A(a) = \lim_i \phi_I(u_i) \phi_A(a) = \lim_i \phi_A(u_i \cdot a) \in \phi_I(I \rtimes_r \mathcal{G})$$

Comme  $\phi_A$  est injective, l'élément  $a$  est dans  $I \rtimes_r \mathcal{G}$  et la suite

$$0 \longrightarrow I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte et le foncteur  $B \rightarrow B \rtimes_r \mathcal{G}$  est exact sur la catégorie des  $\mathcal{G}$ -algèbres.

(3) $\Rightarrow$ (4) : on considère la suite exacte de  $C^*$ -algèbres suivantes

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

La  $C^*$ -algèbre  $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$  étant nucléaire, on a alors

$$0 \longrightarrow I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow A \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow A/I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow 0$$

est une suite de  $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ -algèbres telle que la collection d'applications

$$id_\gamma : C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(s(\gamma)) \rightarrow C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(r(\gamma))$$

qui à tout  $i$  dans  $C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(s(\gamma)) = I$  associe  $id_\gamma(i) = i$  dans  $I = C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(r(\gamma))$  définit une action continue de  $\mathcal{G}$  sur  $I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ . On obtient une suite exacte de  $\mathcal{G}$ -algèbres et le foncteur  $\rtimes_r \mathcal{G}$  étant exact, par hypothèse, on a

$$0 \longrightarrow I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

correspondant à la suite

$$0 \longrightarrow I \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow A \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow A/I \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

est exacte. □

### 3.2 $C^*$ -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ et approximation de la représentation régulière

Il est légitime de se demander si l'exactitude de  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$  implique à son tour la moyennabilité à l'infini du groupoïde  $\mathcal{G}$  ou encore la moyennabilité du groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ .

Dans [KW99], Kirchberg et Wassermann donne l'équivalence entre l'exactitude d'un groupe discret et l'exactitude de sa  $C^*$ -algèbre réduite de ce groupe. Dans [Oza00], Ozawa prouve l'équivalence entre l'exactitude de la  $C^*$ -algèbre réduite et la moyennabilité de l'action par translation à gauche du groupe sur son compactifié de Stone-Cech.

Anantharaman-Delaroche donne une réponse affirmative à cette question dans [AD02] dans le cadre plus large des groupes localement compacts et séparés en utilisant une condition suffisante sur le groupe localement compact et séparé qu'elle appelle *propriété (W)* et qui est une condition plus faible que la moyennabilité intérieure :

**Définition 3.2.1.** *On dit qu'un groupe localement compact et séparé possède la propriété (W) si pour tout compact  $K$  de  $G$  et tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une fonction  $f$  continue, bornée, de type positif et à support proprement supporté sur  $G \times G$  telle que  $|f(g, g) - 1| \leq \varepsilon$  pour tout élément  $g$  dans  $K$ .*

et obtient le résultat suivant

**Théorème 3.2.2** ([AD02], Théorème 7.3). *Soit  $G$  un groupe localement compact et séparé. Si le groupe  $G$  possède la propriété (W) et si la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(G)$  est exacte, alors le groupe  $G$  est moyennable à l'infini.*

Il est facile de prouver que les groupes discrets possèdent la *propriété (W)* en considérant la fonction caractéristique sur la diagonale  $\Delta_G$  de l'espace  $G \times G$  ce qui permet de retrouver le résultat de Ozawa [Oza00] :

$$C_r^*(G) \text{ exact} \iff G \text{ moyennable à l'infini} \iff \beta G \rtimes G \text{ moyennable}$$

Dans cette section, on considère un groupoïde étale localement compact et  $\sigma$ -compact séparé  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  tel que la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte et on note  $\nu$  le système de Haar pour  $\mathcal{G}$  constitué des mesures de comptage des  $s$ -fibres de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  la  $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs  $C_0(X)$ -linéaires qui admettent un adjoint, sur le  $C_0(X)$ -module de Hilbert  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ . L'idée est de travailler sur des  $C_0(X)$ -algèbres continues et exactes afin d'utiliser un résultat de [Bla97] de plongement  $C_0(X)$ -linéaire de telles  $C_0(X)$ -algèbres dans la  $C_0(X)$ -algèbre nucléaire  $C_0(X) \otimes \mathcal{O}_2$ , où  $\mathcal{O}_2$  est l'algèbre de Cuntz. Comme la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  n'est pas munie d'une structure de  $C_0(X)$ -algèbre, on construit une  $C_0(X)$ -algèbre, notée  $\mathcal{A}$ , qui est la plus petite sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  contenant l'image de  $C_r^*(\mathcal{G})$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  par la représentation régulière  $\lambda$  et l'image de  $C_0(X)$  par la structure de  $C_0(X)$ -algèbre de

$\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ . On montre alors que l'exactitude de la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  implique l'exactitude de la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . Afin d'utiliser le théorème de [Bla97], on suppose que la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est continue et on se restreint au cas où l'espace des unités  $X$  du groupoïde est compact. On travaille donc sur une classe plus faible de groupoïdes étales localement compacts et  $\sigma$ -compacts qui satisfont ces deux conditions. Dès lors que l'on a utilisé le théorème de plongement  $C(X)$ -linéaire des  $C(X)$ -algèbres continues et exactes dans la  $C(X)$ -algèbre nucléaire  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ , on va pouvoir utiliser les propriétés de  $C(X)$ -nucléarité pour obtenir une approximation par des factorisations à travers les  $C(X)$ -algèbres  $C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$  de l'application identité sur  $\mathcal{A}$  et donc de la représentation régulière de  $C_r^*(\mathcal{G})$ . C'est par le biais de cette approximation par des factorisations de la représentation régulière de la  $C^*$ -algèbre exacte  $C_r^*(\mathcal{G})$  que nous pouvons montrer la moyennabilité de l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\beta_X \mathcal{G}$ . On obtient alors l'implication (4)  $\Rightarrow$  (2) du théorème 3.1.31 pour la classe des groupoïdes étales localement compacts et  $\sigma$ -compacts ayant la propriété (W), dont l'espace des unités est compact et tels que la  $C(X)$ -algèbre induite  $\mathcal{A}$  est continue.

### 3.2.1 Approximation de l'unité et opérateurs de rangs finis

Dans cette partie, on utilise les résultats de l'article d'Arveson [Arv77] sur les  $C^*$ -algèbres que l'on adapte au cas des  $C_0(X)$ -algèbres, dont les éléments sont considérés comme des opérateurs sur un  $C_0(X)$ -module de Hilbert.

Pour  $H$  un espace de Hilbert séparable, on rappelle qu'un opérateur quasidiagonal  $T$  est un opérateur borné sur l'espace de Hilbert séparable  $H$  pour lequel il existe une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de projections de rang fini, qui converge fortement vers l'identité et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n T - T F_n\| = 0$$

Cette définition équivaut à l'existence d'une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de projections de rang fini deux à deux orthogonales telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n = 1$  et  $T$  est une perturbation compacte de l'opérateur  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n T E_n$ .

Dans l'article [Arv77], l'auteur construit, dans le cadre plus général des opérateurs bornés  $T : H \rightarrow H$  (non nécessairement quasidiagonaux), une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs de rang fini, qui converge fortement vers l'opérateur identité et vérifiant la relation, pour tout  $T$  dans  $L(H)$ ,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \|F_n T - T F_n\| = 0$$

Comme dans le cas des opérateurs quasidiagonaux, l'existence d'une telle suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  permet de construire une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs de rang fini dans  $L(H)$  tel que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2 = 1$  et pour laquelle, tout opérateur  $T$  est une perturbation compacte de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n T E_n$ .

Le principal objectif de cette partie consiste à montrer que pour toute  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , considérée comme sous  $C_0(X)$ -algèbre de la  $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs d'un  $C_0(X)$ -module de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et tout idéal  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{A}$  d'espace nul trivial, il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments positifs dans  $\bar{\mathcal{K}}$  vérifiant

- (a)  $E_n \in \bar{\mathcal{K}}$  et  $\sum_n E_n^2 = Id_{\mathcal{H}}$
- (b)  $A - \sum_n E_n A E_n$  est dans  $\mathcal{K}$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$

On montre aussi que pour toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ , il est possible de choisir les éléments  $E_n$  de sorte que, pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{F}$ , la norme  $\|A - \sum_n E_n A E_n\|$  soit aussi petite qu'on le souhaite.

On considère  $\mathcal{A}$  une  $C_0(X)$ -algèbre et  $\mathcal{K}$  un idéal bilatère, non nécessairement fermé, dans  $\mathcal{A}$ .

**Définition 3.2.3.** Une approximation de l'unité pour  $\mathcal{K}$  est une suite croissante  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'éléments positifs de la boule unité de l'idéal  $\mathcal{K}$  tels que  $\lim_\lambda \|e_\lambda k - k\| = 0$  pour tout  $k$  dans  $\mathcal{K}$ . De plus, si  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  satisfait la relation  $\lim_\lambda \|e_\lambda a - a e_\lambda\| = 0$ , pour tout  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , alors la suite est quasimentrale.

Dans le cadre des  $C_0(X)$ -algèbres, on obtient un théorème sur l'existence d'approximation de l'unité quasimentrale, analogue au cas des  $C^*$ -algèbres.

**Théorème 3.2.4.** Tout idéal  $\mathcal{K}$  dans une  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  possède une approximation de l'unité quasimentrale. Si de plus  $\mathcal{A}$  est séparable, cette unité approchée quasimentrale peut être indexée sur  $\mathbb{N}$  et on a  $u_n \leq u_{n+1}$ , pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* L'idéal  $\mathcal{K}$  de la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est aussi un idéal pour la structure de  $C^*$ -algèbre sous-jacente de  $\mathcal{A}$ ; on applique alors la démonstration de [Arv77].  $\square$

*Remarque 3.2.5.* La preuve montre que l'on peut construire, à partir d'une unité approchée  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  quelconque pour  $\mathcal{K}$ , une approximation de l'unité quasimentrale, dont les éléments sont des combinaisons linéaires convexes des éléments de  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et  $\mathcal{H}$  un module hilbertien sur  $B$ .

**Définition 3.2.6.** Soit  $\mathcal{H}$  un  $B$ -module hilbertien séparable et  $T$  un opérateur  $B$ -linéaire et possédant un adjoint sur  $\mathcal{H}$ ; on dit que  $T$  est un opérateur positif si pour tout élément  $\xi$  dans  $\mathcal{H}$  on a  $\langle T\xi, \xi \rangle$  est positif dans  $B$ .

*Notation 3.2.7.* On adoptera les notations suivantes en ce qui concerne les opérateurs de rang fini :

- On appelle opérateur de rang 1, tout endomorphisme sur le  $B$ -module hilbertien  $\mathcal{H}$  qui s'écrit sous la forme  $\theta_{x,y}$ , avec  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{H}$ , où pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{H}$ , on a  $\theta_{x,y}(\xi) = x\langle y, \xi \rangle$ .
- On appelle opérateur de rang fini sur le  $B$ -module hilbertien  $\mathcal{H}$  est un endomorphisme de  $B$ -module  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , qui est une combinaison linéaire d'opérateurs de rang un.
- L'ensemble des opérateurs de rang fini sur un  $B$ -module hilbertien  $\mathcal{H}$  est un idéal dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , noté  $\mathcal{K}_0$ , dont la fermeture, notée  $\mathcal{K}$ , est l'ensemble des opérateurs compacts de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

En utilisant le théorème 3.2.4, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.8.** Soit  $\mathcal{H}$  un  $C(X)$ -module de Hilbert séparable.

- (i) Il existe une suite croissante  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'opérateurs positifs de rang fini qui converge fortement vers l'opérateur identité de  $\mathcal{H}$  et vérifiant la relation  $\lim_\lambda \|F_\lambda T - T F_\lambda\| = 0$ , pour tout opérateur  $C(X)$ -linéaire  $T$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .
- (ii) Pour  $\mathcal{A}$  une  $C(X)$ -algèbre séparable d'opérateurs sur un champ continu d'espaces de Hilbert séparables  $\mathcal{H}$ , il existe une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante d'opérateurs positifs et de rang fini qui converge fortement vers l'identité et vérifiant la relation  $\lim_n \|F_n A - A F_n\| = 0$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $\mathcal{A}$  par la  $C(X)$ -algèbre des perturbations compactes d'opérateurs de  $\mathcal{A}$ , on considère l'idéal  $\mathcal{K}$  des opérateurs de rang fini dans la  $C(X)$ -algèbre séparable  $\mathcal{A}$  et on applique le théorème 3.2.4 pour obtenir la suite voulue.  $\square$

Dans le théorème qui suit, on considère la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  comme une sous  $C(X)$ -algèbre d'opérateurs de l'ensemble des opérateurs bornés,  $C(X)$ -linéaires et possédant un adjoint sur un  $C(X)$ -module hilbertien  $\mathcal{H}_{C(X)}$ . Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{A}$ , on appelle espace nul de  $\mathcal{I}$ , l'espace défini par  $\{\xi \in \mathcal{H}_{C(X)} : T(\xi) = 0, \forall T \in \mathcal{I}\}$ ; on dira que l'espace nul de l'idéal  $\mathcal{I}$  est trivial, s'il est réduit au vecteur nul.

**Théorème 3.2.9.** *Soit  $\mathcal{K}$  un idéal dans  $\mathcal{A}$  dont l'espace nul est trivial. Il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs dans la fermeture  $\overline{\mathcal{K}}$  (pour la topologie de la norme de  $\mathcal{K}$ ) telle que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on a  $E_n^2$  est dans l'idéal  $\mathcal{K}$ ,  $\sum_{n \geq 1} E_n^2 = 1$  et  $A - \sum E_n A E_n$  est dans l'idéal  $\mathcal{K}$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ .*

*De plus, en fixant  $\varepsilon \geq 0$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  un sous ensemble fini, on peut choisir la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sorte que  $\|A - \sum E_n A E_n\| < \varepsilon$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$*

*Remarque 3.2.10.* Avant de s'attaquer à la démonstration du théorème, on peut faire les remarques suivantes :

a) Si une telle suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existe, alors  $\sum E_n A E_n$  est bien définie par l'hypothèse  $\sum E_n^2 = 1$  qui implique la convergence forte de la somme.

En effet, on considère le  $C(X)$ -module hilbertien  $\mathcal{H}' := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)}$  et on note  $i'$  la représentation de  $\mathcal{A}$  dans l'ensemble des opérateurs  $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$  définie par  $i'(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ . On peut alors définir une isométrie, en posant

$$\begin{aligned} V : \mathcal{H}_{C(X)} &\longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)} = \mathcal{H}' \\ \xi &\longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi) \end{aligned}$$

On note  $P_n : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$  la projection sur les  $n$  premières composantes de  $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)}$  et  $V_n := P_n V$ ; alors pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , on a la convergence dans la topologie forte

$$\sum_{k=1}^n E_k A E_k = V^* P_n i'(A) P_n V \longrightarrow V^* i'(A) V = \sum_{k=1}^{+\infty} E_k A E_k$$

b) L'application  $l(A) = \sum E_n A E_n$  pouvant s'écrire sous la forme  $l(A) = V^* i'(A) V$ , elle est complètement positive et son image est dans la fermeture forte  $\overline{\mathcal{A}}^{forte}$  de  $\mathcal{A}$ . Puisque l'élément  $A - l(A)$  est dans  $\mathcal{K}$  qui est un idéal de  $\mathcal{A}$ , alors l'application  $l$  est à image dans  $\mathcal{A}$ .

Pour démontrer le théorème 3.2.9, on utilise le lemme suivant démontré dans [Arv77] :

**Lemme 3.2.11.** *Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  à valeurs complexes et qui soit nulle en 0. Alors il existe un réel  $\delta$  strictement positif tel que pour tout élément  $a$  et tout élément positif  $e$  dans la boule unité de  $\mathcal{A}$ , on a  $\|ae - ea\| \leq \delta$  implique  $\|af(e) - f(e)a\| \leq \varepsilon$ .*

*Démonstration du Théorème 3.2.9.* On va utiliser l'existence de l'approximation de l'unité dans  $\mathcal{K}$  pour construire la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Soit  $\varepsilon$  strictement positif, alors, d'après le lemme 3.2.11, il existe  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 telle que pour tout  $a$  et  $E$  dans la boule unité de  $\mathcal{A}$ , avec  $E$  positif, on a

$$\|Ea - aE\| \leq \delta_n \Rightarrow \|E^{1/2}a - aE^{1/2}\| \leq \varepsilon/2^{n+1}$$

On considère une suite croissante  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous ensembles finis de  $\mathcal{A}$  telle que la réunion  $\bigcup \mathcal{F}_n$  est dense dans la boule unité de  $\mathcal{A}$ . (On supposera de plus que  $\mathcal{F}_1$  contient un nombre

fini d'éléments de norme 1)

On a vu qu'il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité quasimentrale dans  $\mathcal{K}$  et (quitte à considérer une sous suite), on peut supposer que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}_{n+1}$ ,

$$\|u_n A - A u_n\| \leq \delta_n/2$$

On a, en posant  $u_0 = 0$

$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{F}_1, & \|u_1 A - A u_1\| < \delta_1 \\ \forall A \in \mathcal{F}_n, & \|(u_n - u_{n-1})A - A(u_n - u_{n-1})\| < \delta_{n-1} \end{cases}$$

b/ Par calcul fonctionnel continu pour la fonction  $f(x) = x^{1/2}$ , on pose, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $E_n = (u_n - u_{n-1})^{1/2}$ . Alors pour  $\varepsilon \geq 0$  et une suite décroissante de réels positifs tendant vers zéro  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appropriée, on a pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}_n$

$$\|E_n A - A E_n\| \leq \varepsilon/2^n$$

L'élément  $E_n^2 = u_n - u_{n-1}$  est dans  $\mathcal{K}$ ; comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une unité approchée pour  $\mathcal{K}$  (dont l'espace nul est trivial), la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers 1, ce qui implique l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E_n^2 = 1$$

c/ Il reste à montrer que pour tout élément  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , l'image  $l(A)$  est une perturbation compacte de l'opérateur  $A$ . Or pour tout  $A$  dans  $\bigcup \mathcal{F}_n$ , on a par construction  $\sum \|E_n A - A E_n\| < +\infty$ . D'après la remarque 3.2.10, combinée avec l'égalité suivante

$$A - l(A) = A - \sum_{n \geq 1} E_n A E_n = \sum_{n \geq 1} (A E_n^2 - E_n A E_n) = \sum_{n \geq 1} (A E_n - E_n A) E_n$$

on a alors  $A - l(A) \in \mathcal{K}$ , pour tout  $A$  dans  $\bigcup \mathcal{F}_n$ .

Or pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\bigcup \mathcal{F}_n$ , qui converge en norme vers  $A$ . D'après la remarque 3.2.10,  $A - l(A)$  est bien définie et la suite  $(A_k - l(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge en norme vers  $A - l(A)$ . Comme  $A_k - l(A_k)$  est compact pour tout  $k$  entier, on en déduit que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , l'élément  $A - l(A)$  est dans  $\mathcal{K}$ . □

**Définition 3.2.12.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C(X)$ -algèbre, considérée comme sous- $C(X)$ -algèbre de la  $C(X)$ -algèbre des opérateurs bornés,  $C(X)$ -linéaires admettant un adjoint sur un  $C(X)$ -module de Hilbert séparable. On suppose l'existence d'une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs, de rang fini satisfaisant  $\sum_n E_n^2 = 1$ . On pose  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  l'application  $C(X)$ -linéaire positive qui, à tout  $a$  de  $\mathcal{A}$ , associe l'opérateur  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a E_n$ . L'application  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est dite application localisante pour  $\mathcal{A}$  si pour tout  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , l'opérateur  $a - \omega(a)$  est compact.

### 3.2.2 Représentation régulière et opérateurs de rang fini

On a vu dans la section 1.2.2, la construction de  $C^*$ -algèbres associées à un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar. Pour simplifier les notations, on note dans la suite  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  pour la  $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs  $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .

La représentation régulière est le  $*$ -homomorphisme injectif de  $C^*$ -algèbres  $\lambda : C_r^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  et, d'après la proposition 1.2.13, la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$  est munie d'une structure de  $C_0(X)$ -algèbre. L'image par la représentation  $\lambda$  de  $C_r^*(\mathcal{G})$  est une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ , qui n'est pas nécessairement stable par la structure de  $C_0(X)$ -module de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .

Dans cette partie on définit une sous- $C_0(X)$ -algèbre de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ , que l'on note  $\mathcal{A}$ , à partir de la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$ . On montre, via la proposition 3.2.18, que cette construction conserve la propriété d'exactitude. L'idée est de remplacer la sous- $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  exacte par la sous- $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  de manière à pouvoir utiliser un théorème de [Bla97] qui donne l'existence d'un plongement  $C_0(X)$ -linéaire de toute  $C_0(X)$ -algèbre continue et exacte dans la  $C_0(X)$ -algèbre  $C_0(X) \otimes \mathcal{O}_2$ . On termine cette partie en appliquant le théorème 3.2.9 à la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  et l'idéal des opérateurs compacts : la suite d'opérateurs positifs compacts que l'on obtient, joue un rôle central dans l'approximation par factorisation de l'application identité de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 3.2.13.** *On note  $\mathcal{A} = C^*(\lambda(C_r^*(\mathcal{G})), \phi(C_0(X)))$ , la plus petite sous  $C^*$ -algèbre d'opérateurs de  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  contenant  $\phi(C_0(X))$  et  $\lambda(C_r^*(\mathcal{G}))$ .*

Pour tout  $a$  dans  $C_r^*(\mathcal{G})$ , l'opérateur  $\lambda(a)$  sur  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  est  $C(X)$ -linéaire. La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est engendrée par les éléments  $\sum_{i \in I} \phi(f_i) \cdot \lambda(a_i)$  où la somme est finie et  $a_i$  est un élément de  $C_r^*(\mathcal{G})$  et la fonction  $f_i$  est dans  $C(X)$ .

**Proposition 3.2.14.** *La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est une sous- $C_0(X)$ -algèbre de la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .*

*Remarque 3.2.15.* Nous considérons à partir de maintenant la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  comme une sous- $C_0(X)$ -algèbre de la  $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ .

**Définition 3.2.16.** *Soit  $\mathcal{B}$  une  $C_0(X)$ -algèbre. On dit que  $\mathcal{B}$  une  $C_0(X)$ -algèbre continue si le champ semi-continu supérieurement de  $C^*$ -algèbres sur  $X$  est continu, c'est-à-dire si pour tout  $b$  dans  $\mathcal{B}$ , la fonction  $x \rightarrow \|b_x\|$  est continue.*

*Notation 3.2.17.* On dit que le groupoïde  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  vérifie la condition **(Cont)** si la  $C_0(X)$ -algèbre associée  $\mathcal{A}$  introduite dans la définition 3.2.13 est continue. On suppose à partir de maintenant que le groupoïde étale  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  vérifie la condition **(Cont)** c'est-à-dire que la  $C_0(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est continue.

La proposition qui suit permet de voir que la propriété d'exactitude de la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{G})$  est transférée à la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  :

**Proposition 3.2.18.** *Si la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte, alors la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est exacte.*

*Démonstration.* On note  $A$  la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  et on suppose que  $A$  est exacte ; la  $C^*$ -algèbre  $C(X)$  étant nucléaire,  $A \otimes C(X)$  est exacte. On définit un homomorphisme  $\pi : A \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{A}$  défini pour les éléments de la forme  $\sum_i a_i \otimes f_i$  par

$$\pi\left(\sum_i a_i \otimes f_i\right) = \sum_i \phi(f_i) \cdot \lambda(a_i)$$

Cet homomorphisme est surjectif et on a un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres de  $A \otimes C(X)/I$  dans  $\mathcal{A}$ , où  $I := \ker(\pi)$ . D'après un résultat de Kirchberg (voir une version (IV.3.4.19) de [Blac]) affirmant que tout quotient de  $C^*$ -algèbre séparable exacte est exact, la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est exacte. □

On rappelle ci-dessous le théorème de stabilisation de Kasparov pour les modules de Hilbert :

**Définition 3.2.19.** *A toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , on associe le module de Hilbert standard sur  $B$ , que l'on note  $\mathcal{H}_B$  défini par*

$$\mathcal{H}_B = \left\{ (b_k) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} B : \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^* b_k \text{ converge dans } B \right\}$$

**Théorème 3.2.20 (Stabilisation de Kasparov).** *Pour tout  $B$ -module de Hilbert  $\mathcal{F}$ , dénombrablement engendré, il existe un isomorphisme de  $B$ -module de Hilbert entre  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}_B$  et  $\mathcal{H}_B$ .*

On trouve une démonstration du théorème 3.2.20 dans [Kas80a] ou encore dans [Lan95] : il s'agit d'une variante de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. A l'aide du théorème de stabilisation de Kasparov 3.2.20, on prouve la proposition suivante

**Proposition 3.2.21.** *Il existe un homomorphisme de  $C(X)$ -algèbres injectif de la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}))$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$*

*Démonstration.* Comme  $l^2(\mathbb{N})$  est un espace de Hilbert séparable donc dénombrablement engendré  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  est un  $C(X)$ -module de Hilbert dénombrablement engendré, alors le  $C(X)$ -module de Hilbert  $L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})$  est dénombrablement engendré. En appliquant le théorème 3.2.20 de stabilisation de Kasparov au  $C(X)$ -module de Hilbert  $L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})$  dénombrablement engendré, il existe un isomorphisme de  $C(X)$ -module hilbertien entre  $L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{H}_{C(X)}$  et  $\mathcal{H}_{C(X)}$ . L'homomorphisme de  $C(X)$ -module de Hilbert

$$i : L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{H}_{C(X)}$$

étant injectif, il existe un plongement  $C(X)$ -linéaire  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}))$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .  $\square$

On termine cette partie en appliquant le théorème 3.2.9 à la  $C(X)$ -algèbre d'opérateurs  $\mathcal{A}$ . On note  $\mathcal{K}_0$  l'idéal des opérateurs de rang fini sur le  $C(X)$ -module de Hilbert  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ , décrit auparavant. On suppose, quitte à remplacer  $\mathcal{A}$  par la  $C(X)$ -algèbre des perturbations compactes des éléments de  $\mathcal{A}$ , que l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{A}$ .

On considère  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite dans  $\mathcal{L}(C(X) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ , telle que pour tout entier  $n$ , on a  $e_n = 1 \otimes p_n$ , avec  $p_n$  la projection sur les  $n$  premières composantes de  $l^2(\mathbb{N})$ . On obtient une approximation de l'unité dans l'idéal  $\mathcal{K}_0$ , constituée de projections. On va ainsi pouvoir construire une approximation de l'unité quasicentrale  $(u_n)$  dans l'idéal  $\mathcal{K}_0$  de  $\mathcal{A}$  c'est-à-dire une suite croissante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments positifs de la boule unité de  $\mathcal{K}$ , telle que pour tout  $a$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|au_n - u_n a\| = 0$  c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|a(x)u_n(x) - u_n(x)a(x)\| = 0$$

**Lemme 3.2.22.** *L'idéal  $\mathcal{K}_0$  des opérateurs de rang fini dans la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  possède une approximation de l'unité quasicentrale  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , obtenue à partir de combinaisons linéaires convexes d'éléments de l'approximation de l'unité  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K}_0$ .*

*Démonstration.* La preuve est directe en utilisant le théorème 3.2.4.  $\square$

**Lemme 3.2.23.** *L'espace nul de l'idéal  $\mathcal{K}_0$  est trivial.*

**Proposition 3.2.24.** *Il existe une suite d'opérateurs  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positifs dans l'ensemble des opérateurs de rang fini  $\mathcal{K}_0$ , telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2 = 1$  et pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , on a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n$  est une perturbation compacte de  $A$ . De plus, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  et toute partie finie (ou même compacte)  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$ , on peut choisir  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sorte que  $\|A - \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n\| < \varepsilon$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* L'ensemble  $\mathcal{K}_0$  des opérateurs de rang fini sur le  $C(X)$ -module de Hilbert  $\mathcal{H}_{C(X)}$  est un idéal bilatère dans la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , dont l'espace nul est réduit au vecteur nul de  $\mathcal{H}_{C(X)}$ , et on a construit une unité approchée dans  $\mathcal{K}_0$  quasicentrale pour  $\mathcal{A}$ . D'après le théorème 3.2.9 il existe une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs dans l'ensemble des opérateurs compacts  $\mathcal{K}$ , (qui est la fermeture pour la norme de l'idéal  $\mathcal{K}_0$ ) vérifiant pour tout entier  $n$ ,  $E_n^2$  est un opérateur de rang fini,  $\sum_n E_n^2 = 1$  et pour tout opérateur  $A$  de  $\mathcal{A}$ , l'opérateur  $A - \sum_n E_n A E_n$  est compact. De plus, pour tout entier  $n$ , l'opérateur  $E_n$  est de rang fini car  $E_n^2$  l'est. □

La suite d'opérateurs positifs compacts  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par la proposition 3.2.24 nous permet de construire dans les prochaines étapes une application localisante dans  $\mathcal{A}$  et des projections dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .

### 3.2.3 $C(X)$ -nucléarité et exactitude

On considère à partir de maintenant et ceci jusqu'à la fin de cette section que l'espace des unités  $X$  du groupoïde étudié est compact. Dans cette partie, on s'intéresse aux relations entre l'exactitude et la nucléarité dans la catégorie des  $C(X)$ -algèbres continues.

On rappelle tout d'abord les notions de nucléarité pour les  $C(X)$ -algèbres. On définit l'algèbre de Cuntz  $\mathcal{O}_2$  puis on montre que la  $C(X)$ -algèbre continue  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$  est  $C(X)$ -nucléaire. On utilise alors un résultat de Kirchberg qui apparait dans l'appendice de [Bla97] pour définir un homomorphisme injectif de  $C(X)$ -algèbres  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ . On se sert alors de la  $C(X)$ -nucléarité de  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$  pour obtenir les premières approximations par factorisations de l'homomorphisme identité  $id_{\mathcal{A}}$ .

Dans la théorie des  $C^*$ -algèbres, la nucléarité d'une  $C^*$ -algèbre  $B$  peut être caractérisée par l'existence d'approximations par les applications complètement positives de rang fini de l'homomorphisme identité de  $B$ . On dit que l'homomorphisme identité est nucléaire. Cette définition s'étend aux applications linéaires complètement positives.

On définit une notion analogue de  $C(X)$ -nucléarité pour les applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives entre  $C(X)$ -algèbres.

**Définition 3.2.25.** *a) Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux  $C(X)$ -algèbres. Une application  $C(X)$ -linéaire complètement positive  $\theta : A_1 \rightarrow A_2$  est dite  $C(X)$ -nucléaire si et seulement si pour tout sous ensemble compact  $K$  dans  $A_1$  et tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un entier  $n$  et des applications  $C(X)$ -linéaires, complètement positives et contractantes  $\phi_n : A_1 \rightarrow C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$  et  $\psi_n : C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow A_2$  telles que pour tout  $a$  dans  $K$ , on ait*

$$\|\theta(a) - \psi_n \circ \phi_n(a)\| < \varepsilon$$

*b) Une  $C(X)$ -algèbre  $A$  est dite  $C(X)$ -nucléaire si l'homomorphisme identité est  $C(X)$ -nucléaire.*

**Définition 3.2.26.** *On appelle  $C^*$ -algèbre de Cuntz unifère la  $C^*$ -algèbre engendrée par deux isométries  $s_1, s_2$  satisfaisant la relation  $1 = s_1 s_1^* + s_2 s_2^*$ . On note  $\mathcal{O}_2$  cette  $C^*$ -algèbre.*

**Proposition 3.2.27.** *La  $C(X)$ -algèbre  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$  est  $C(X)$ -nucléaire.*

*Démonstration.* La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{O}_2$  étant nucléaire, pour tout sous espace compact  $K$  de  $\mathcal{O}_2$  et tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un entier  $n$  et des applications linéaires continues, complètement positives et contractantes, notées  $\varphi : \mathcal{O}_2 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\psi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_2$  vérifiant pour tout  $o$  dans  $K$ ,

$$\|o - \psi \circ \varphi(o)\| < \varepsilon$$

L'algèbre  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  est une  $C(X)$ -algèbre continue (c'est un champ continu trivial de  $C^*$ -algèbres sur  $X$  de fibre constante  $\mathcal{O}_2$ ). On considère  $\mathcal{K}$  un sous espace compact de  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{K}$ , on pose  $U_f$  le voisinage ouvert défini par  $U_f = \{g \in \mathcal{O}_2 \otimes C(X) : \|f - g\| < \varepsilon/3\}$ . On obtient alors un recouvrement ouvert de  $\mathcal{K}$ . Par compacité, il existe une famille finie  $\{f_1, \dots, f_p\}$  d'éléments de  $\mathcal{K}$ , tels que  $\mathcal{K} \subset \cup_{j=1}^p U_{f_j}$ . Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{K}$ , il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tel que pour tout  $x$  dans  $X$ , on a

$$\|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/3$$

On peut identifier la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  avec la  $C(X)$ -algèbre  $C(X, \mathcal{O}_2)$  et pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, p\}$ , on a  $f_j(K)$  est un sous espace compact de  $\mathcal{O}_2$ . La réunion finie  $K = \cup_{j=1}^p f_j(K)$  est un sous espace compact de  $\mathcal{O}_2$ , et il existe donc  $n$  un entier et des contractions linéaires continues et complètement positives, notées  $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_2 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{\psi} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_2$ , vérifiant  $\|f_j(x) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(f_j(x))\| < \varepsilon/3$ , pour tout  $x$  dans  $X$  et tout  $j$  dans  $\{1, \dots, p\}$ . On pose  $\varphi : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \rightarrow M_n \otimes C(X)$  application  $C(X)$ -linéaire complètement positive et contractante définie par  $\varphi := \tilde{\varphi} \otimes id_{C(X)}$  et  $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  application  $C(X)$ -linéaire complètement positive et contractante définie par  $\psi := \tilde{\psi} \otimes id_{C(X)}$  et on a pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned} \|f_j - \psi \circ \varphi(f_j)\| &= \sup_{x \in X} \|f_j(x) - (\tilde{\psi} \otimes id_{C(X)}) \circ (\tilde{\varphi} \otimes id_{C(X)})(f_j)(x)\| \\ &= \sup_{x \in X} \|f_j(x) \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(f_j(x))\| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{K}$ , il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tel que pour tout  $x$  dans  $X$ , on a  $\|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/3$  et on a

$$\begin{aligned} \|f - \psi \circ \varphi(f)\| &= \|f - f_j + f_j - \psi \circ \varphi(f_j) + \psi \circ \varphi(f_j) - \psi \circ \varphi(f)\| \\ &\leq \|f - f_j\| + \|f_j - \psi \circ \varphi(f_j)\| + \|\psi \circ \varphi(f_j) - \psi \circ \varphi(f)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi \circ \varphi(f_j - f)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi \circ \varphi\| \|f_j - f\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc prouvé que pour tout réel strictement positif et tout sous ensemble compact  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ , il existe un entier  $n$  et deux applications  $\varphi : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \rightarrow M_n \otimes C(X)$  et  $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ ,  $C(X)$ -linéaires continues, complètement positives et contractantes telles que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{K}$ , on a

$$\|f - \psi \circ \varphi(f)\| < \varepsilon$$

Donc la  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  est  $C(X)$ -nucléaire. □

Dans [Blan], l'auteur donne une caractérisation des  $C(X)$ -algèbres continues et nucléaires, étendue au cas des  $C(X)$ -algèbres continues et exactes par Kirchberg (voire appendice de [Blan]). Il démontre le théorème suivant :

**Théorème 3.2.28** ([Bla97]). *Soit  $\mathcal{B}$  une  $C(X)$ -algèbre continue et séparable. La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{B}$  est exacte si et seulement si il existe un plongement  $C(X)$ -linéaire de  $\mathcal{B}$  dans la  $C(X)$ -algèbre  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ .*

On applique alors le théorème 3.2.28 à la  $C(X)$ -algèbre continue et exacte  $\mathcal{A}$  et on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.29.** *Il existe un homomorphisme injectif de  $C(X)$ -algèbres  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ .*

*Démonstration.* La  $C(X)$ -algèbre  $\mathcal{A}$  étant continue et exacte, d'après le théorème 3.2.28, il existe un homomorphisme injectif de  $C(X)$ -algèbres  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ .  $\square$

La proposition qui suit permet de plonger la  $C(X)$ -algèbre continue  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$  :

**Proposition 3.2.30.** *Il existe un homomorphisme injectif de  $C(X)$ -algèbres de  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .*

*Démonstration.* La  $C^*$ -algèbre de Cuntz  $\mathcal{O}_2$  étant séparable, il existe, par le théorème de Gelfand-Naimark, un homomorphisme injectif  $i : \mathcal{O}_2 \hookrightarrow L(l^2(\mathbb{N}))$ . On a alors

$$i \otimes id_{C(X)} : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \hookrightarrow L(l^2(\mathbb{N})) \otimes C(X) \hookrightarrow \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes C(X))$$

$C(X)$  étant une  $C^*$ -algèbre  $\sigma$ -unitale, on a  $\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes C(X)) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .

Il existe donc un homomorphisme injectif de  $C(X)$ -algèbres de  $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .  $\square$

*Remarque 3.2.31.* Le problème que nous devons étudier, à savoir l'approximation de la représentation régulière de  $C_r^*(\mathcal{G})$ , peut se résumer grossièrement par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})) & \hookrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \\
 \downarrow \pi & & & & \uparrow \text{?} \\
 C(X) \otimes \mathcal{O}_2 & \xrightarrow{id} & C(X) \otimes \mathcal{O}_2 & \hookrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \\
 & \searrow & C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) & \nearrow & 
 \end{array}$$

### 3.2.4 Etude de $E_n$ : projection et application localisante

On utilise la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs positifs compacts obtenus dans la proposition 3.2.24 pour construire des projections  $P_{E_n}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$  et une application localisante  $l : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  définie par  $l(A) = \sum_n E_n A E_n$ . L'intérêt d'introduire ces objets est la démonstration de la proposition 3.2.41 .

On rappelle un théorème classique pour les opérateurs sur un module hilbertien, dont l'image est fermée (voir [Lan95] ou [MT05])

**Proposition 3.2.32.** *Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  des  $B$ -modules hilbertiens. Soit  $t \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  à image fermée, alors on a*

- a) Le noyau  $\ker(t)$  est un sous module de  $\mathcal{E}$  qui admet un sous module supplémentaire.
- b) L'image  $\text{Im}(t)$  est un sous module de  $\mathcal{F}$  qui admet un sous module supplémentaire.
- c)  $t^* \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$  a une image fermée.

**Proposition 3.2.33.** *Pour tout entier  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , l'image de l'opérateur  $E_n$  est fermée dans  $\mathcal{H}_{C(X)}$  et admet un sous module supplémentaire.*

*Démonstration.* Pour tout entier  $n$ , l'opérateur  $E_n$  est positif donc  $E_n^*E_n = E_n^2$ . Par définition, on a  $E_n^2 = u_n - u_{n-1}$  et le spectre  $\sigma(E_n^2)$  est un ensemble fini, donc  $\sigma(E_n^2) \setminus \{0\}$  est fermée. L'opérateur  $E_n$  a une image fermée dans  $\mathcal{H}_{C(X)}$ .

En appliquant la proposition 3.2.32 à l'opérateur  $E_n$ , on en déduit que l'image  $\text{Im}(E_n)$  admet un sous module supplémentaire dans  $\mathcal{H}_{C(X)}$ . □

*Remarque 3.2.34.* On note  $P_{E_n} : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}$  la projection associée au sous module  $\text{Im}(E_n)$ .

**Lemme 3.2.35.** *Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe un entier  $N_n$  tel que l'image de l'opérateur  $E_n$  soit incluse dans  $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$ .*

*Démonstration.* Pour tout entier  $n$ , on a, par construction,  $E_n^2 = u_{n+1} - u_n$ . Or chaque  $u_n$  est une combinaison linéaire convexe d'éléments de la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Les opérateurs  $E_n^2$  peuvent alors s'écrire sous la forme  $E_n^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n$ , où  $\lambda_n$  est non nul pour un nombre fini de  $n$  et vérifient  $\sum_n \lambda_n = 0$ . Puisque chaque opérateur  $E_n^2$  est diagonal et de rang fini, il existe un entier positif  $N_n$  tel que l'image de  $E_n$  soit inclus dans  $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$ . □

*Remarque 3.2.36.* On pose  $\check{\mathcal{H}} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}(E_n)$ . L'espace  $\check{\mathcal{H}}$  est muni d'une structure de  $C(X)$ -module hilbertien séparable (voir [Lan95] pour la construction générale) : on définit un élément de  $\check{\mathcal{H}}$  comme une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $x_n$  est dans  $E_n$ , et vérifiant  $\sum_n \langle x_n, x_n \rangle$  convergence dans  $C(X)$  et la structure de  $C(X)$ -module est évidente (voir [Lan95] pour la construction générale).

*Remarque 3.2.37.* On a par construction de  $\check{\mathcal{H}}$  un isomorphisme de  $C(X)$ -module hilbertien entre  $\check{\mathcal{H}}$  et  $\mathcal{H}_{C(X)}$

**Lemme 3.2.38.** *Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe  $N_n$  entier, tel que  $P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$  soit isomorphe au  $C(X)$ -module de Hilbert  $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$ .*

**Lemme 3.2.39.** *Soit  $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$  l'application qui à tout vecteur  $\xi$  de  $\mathcal{H}_{C(X)}$  associe le vecteur  $V(\xi) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi)$ . L'application  $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$  est une isométrie.*

*Démonstration.* Pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{H}_{C(X)}$ , on a

$$\begin{aligned} \|V(\xi)\|^2 &= \|\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi)\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n(\xi), E_n(\xi) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n^2(\xi), \xi \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2(\xi), \xi \right\rangle = \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

Pour tout  $\eta = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$  de  $\check{\mathcal{H}}$  et tout  $\xi$  dans  $\mathcal{H}_{C(X)}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle V\xi, \eta \rangle &= \langle \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \xi, \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n \xi, \eta_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \xi, E_n^* \eta_n \rangle \\ &= \left\langle \xi, \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \eta_n \right\rangle = \langle \xi, V^* \eta \rangle \end{aligned}$$

Son adjoint  $V^*$  est défini pour tout  $\eta = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$  de  $\check{\mathcal{H}}$  par  $V^*(\eta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n(\eta_n)$ .  $\square$

L'application  $l : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  définie pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$  par  $l(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n$  est telle que  $A - l(A)$  est un opérateur compact, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ .

**Définition 3.2.40.** On pose, pour tout  $n$  entier, l'application  $\delta_n : \mathcal{A} \rightarrow P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$  définie, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , par  $\delta_n(A) = P_{E_n} A P_{E_n}$ . On dit que  $\delta_n(A)$  est la compression de l'opérateur  $A$  sur le sous module  $P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$ .

On pose  $\delta = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$  l'application sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans les opérateurs  $\mathcal{L}(\check{\mathcal{H}})$ .

**Proposition 3.2.41.** Il existe un  $C(X)$ -module hilbertien séparable  $\check{\mathcal{H}}$ , une isométrie  $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$  et une application  $C(X)$ -linéaire, complètement positive  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\check{\mathcal{H}})$  tels que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , l'opérateur  $A$  est une perturbation compacte de  $V^* \delta(A) V$ .

*Démonstration.* Le  $C(X)$ -module hilbertien séparable  $\check{\mathcal{H}}$ , l'isométrie  $V$  et l'application  $C(X)$ -linéaire complètement positive ont été construits auparavant. De plus, on a pour tout entier  $n$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , la relation  $E_n \delta_n(A) E_n = E_n A E_n$ , par définition de  $\delta_n(A)$ . Ainsi on a

$$V^* \delta(A) V = V^* \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n = l(A)$$

L'application  $l$  étant localisante, alors pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$  l'opérateur  $A$  est une perturbation compacte de  $V^* \delta(A) V$ .  $\square$

### 3.2.5 Champ de formes vectorielles

Dans cette partie, on s'intéresse aux applications  $C(X)$ -linéaires et complètement positives  $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$ , définies pour tout entier  $i$  dans 3.2.40 : on associe à  $\delta_i$  une application  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  également  $C(X)$ -linéaire et complètement positive qui est un  $C(X)$ -état et on montre que  $\delta'_i$  peut être approchée par des  $C(X)$ -états vectoriels définis eux-même à l'aide de la  $C(X)$ -représentation fidèle  $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  induite par  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$  obtenue au corollaire 3.2.29. On utilisera les résultats d'approximation d'un état d'une  $C^*$ -algèbre par des sommes états vectoriels que l'on peut retrouver dans le livre [Dix96].

On considère la  $C(X)$ -représentation fidèle  $\pi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ , obtenue à partir du plongement  $C(X)$ -linéaire  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ . Pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , on note  $\pi_{n_i} := \pi \otimes id : \mathcal{A} \otimes M_{n_i} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \otimes M_{n_i}$ .

**Lemme 3.2.42.** Pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , l'application  $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  est un champ de représentations fidèles.

*Démonstration.* Soit  $i$  un entier. L'application  $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  est évidemment un homomorphisme de  $C(X)$ -algèbres. Il s'agit de montrer pour tout  $x$  dans  $X$ , que l'homomorphisme  $\pi_{n_i, x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$  est une représentation fidèle de la fibre en  $x$ . On a, pour tout  $x$  dans  $X$  et tout  $A$  dans  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ ,

$$\begin{aligned} \|\pi_{n_i, x}(a_x)\| &= \inf \{ \|\pi_{n_i}(a) - f \cdot \pi_{n_i}(a)\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \inf \{ \|\pi_{n_i}(a - f \cdot a)\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \inf \{ \|a - f \cdot a\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \|a_x\| \end{aligned}$$

On a montré, pour tout  $x$  dans  $X$ , que  $\|\pi_{n_i, x}\| = 1$ , c'est-à-dire que  $\pi_{n_i, x}$  est une représentation fidèle de la fibre  $M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$  dans la  $C^*$ -algèbre des opérateurs de l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$ . Ainsi  $\pi_{n_i}$  est un champ de représentations fidèles.  $\square$

On rappelle un résultat classique pour les états, dans le cadre général des  $C^*$ -algèbres dont les détails se trouvent dans [Dix96].

Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et  $H$  un espace de Hilbert séparable. On considère une représentation fidèle de  $B$  dans l'algèbre des opérateurs de  $H$ , que l'on note  $\pi : B \hookrightarrow L(H)$ . Pour tout vecteur  $\xi$  de  $H$ , on note  $\omega_\xi$  la forme linéaire continue positive sur  $B$ , définie par la représentation  $\pi$  de  $B$  et le vecteur  $\xi$ , c'est-à-dire l'application linéaire continue positive définie pour tout  $b$  dans  $B$ , par

$$\omega_\xi(b) = \langle \xi, \pi(b)\xi \rangle$$

Une telle forme linéaire sera appelée forme vectorielle. Si la représentation  $\pi$  est non dégénérée et si le vecteur  $\xi$  de  $H$  est unitaire, alors la forme linéaire  $\omega_\xi$  est un état et on parle alors d'état vectoriel sur  $B$ .

**Théorème 3.2.43.** [Dix96] Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $K$  l'ensemble des opérateurs compacts sur  $H$ ,  $B$  une sous- $C^*$ -algèbre d'opérateurs de  $L(H)$  et  $\phi$  est un état sur  $B$  nul sur  $B \cap K$ . Alors  $\phi$  est limite  $*$ -faible d'états vectoriels de  $B$ .

**Définition 3.2.44.** [Bla96] Soit  $\mathcal{B}$  une  $C(X)$ -algèbre. On appelle champ continu d'états (ou  $C(X)$ -état) une application  $C(X)$ -linéaire positive  $\varphi$  de  $\mathcal{B}$  dans  $C(X)$  telle que, pour tout  $x$  dans  $X$ , l'application  $\varphi_x = e_x \circ \varphi$  soit un état sur  $\mathcal{B}_x$ .

**Définition 3.2.45.** Soit  $\mathcal{B}$  une  $C(X)$ -algèbre continue et  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  une  $C(X)$ -représentation fidèle dans la  $C(X)$ -algèbre des opérateurs sur le  $C(X)$ -module hilbertien  $\mathcal{H}$ . Un  $C(X)$ -état vectoriel  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow C(X)$  est un  $C(X)$ -état pour lequel il existe un vecteur  $\xi$  dans  $\mathcal{H}$ , tel que  $\xi_x$  est unitaire dans  $\mathcal{H}_x$  pour tout  $x$  dans  $X$  et vérifiant  $\varphi(b) = \langle \xi, \pi(b)\xi \rangle$  pour tout  $b$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 3.2.46.** Pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , l'application  $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$  est  $C(X)$ -linéaire et complètement positive.

*Démonstration.* Soit  $i$  un entier. L'application  $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i} \otimes C(X)$  est  $C(X)$ -linéaire car, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , on a  $\delta_i(A) = P_{E_i} A P_{E_i}$ , où  $P_{E_i}$  et  $A$  (vu comme opérateurs sur  $\mathcal{H}_{C(X)}$ ) sont  $C(X)$ -linéaires.

Pour montrer que  $\delta_i$  est complètement positive, on montre que pour tout entier  $n$ , tout  $(A_1, \dots, A_n)$  dans  $\mathcal{A}$  et tout  $(m_1, \dots, m_n)$  dans  $M_{n_i} \otimes C(X)$ , on a

$$S_n = \sum_{p, q=1}^n m_p^* \delta_i(A_p^* A_q) m_q \geq 0$$

Or pour tout entier  $n$ , tout  $(A_1, \dots, A_n)$  dans  $\mathcal{A}$  et tout  $(m_1, \dots, m_n)$  dans  $M_{n_i} \otimes C(X)$ , on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p, q=1}^n m_p^* \delta_i(A_p^* A_q) m_q = \sum_{p, q=1}^n m_p^* (P_{E_i} A_p^* A_q P_{E_i}) m_q = \sum_{p, q=1}^n (A_p P_{E_i} m_p)^* A_q P_{E_i} m_q \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (A_p P_{E_i} m_p)^* A_q P_{E_i} m_q = \sum_{p=1}^n \left( (A_p P_{E_i} m_p)^* \left( \sum_{q=1}^n A_q P_{E_i} m_q \right) \right) \\ &= \left( \sum_{p=1}^n (A_p P_{E_i} m_p) \right)^* \left( \sum_{q=1}^n (A_q P_{E_i} m_q) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 3.2.47.** *Pour tout entier  $n$  et toute  $C(X)$ -algèbre  $A$ , il existe une correspondance entre les applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives de  $A$  dans  $M_n(\mathbb{C}) \otimes C(X)$  et les applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives de  $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$  dans  $C(X)$ .*

*Démonstration.* On trouve une preuve dans [Bla06] (II.6.9.11).  $\square$

*Remarque 3.2.48.* On associe à  $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i} \otimes C(X)$ , par la correspondance donnée dans le lemme 3.2.47,  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  l'application  $C(X)$ -linéaire complètement positive. On va montrer que  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  est un  $C(X)$ -état et de manière analogue au théorème 3.2.43 sur les états, on prouve, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , que le  $C(X)$ -état  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  est limite  $*$ -faible de  $C(X)$ -états vectoriels.

**Proposition 3.2.49.** *L'application  $\delta'_i$  est un champ continu de formes linéaires continues et positives.*

*Démonstration.* L'application  $\delta'_i$  est une application  $C(X)$ -linéaire (complètement) positive de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$  dans  $C(X)$ . De plus pour tout  $x$  dans  $X$ , l'application  $\delta'_{i,x} := e_x \circ \delta'_i$  est une forme linéaire continue et positive sur  $M_{n_i}(\mathcal{A})_x \cong M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$ .  $\square$

Pour prouver que  $\delta'_i$  est limite  $*$ -faible de  $C(X)$ -états, on va procéder en deux étapes :

- 1) on fait une étude locale de  $\delta_i$  en chaque point  $x$  de  $X$  et on utilise les résultats connus de formes linéaires et continues pour les  $C^*$ -algèbres
- 2) on utilise une partition de l'unité pour revenir dans le cadre global des champs continus de formes linéaires

**Étape 1)** Pour  $i$  dans  $\mathbb{N}$  et  $x$  dans  $X$  fixés, on considère la forme linéaire continue et positive définie par  $\delta'_{i,x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{C}$ , obtenue par la composition  $e_x \circ \delta'_i$ .

**Proposition 3.2.50.** *Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , il existe  $\xi(i, x)$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x$  tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on ait*

$$|\delta'_{i,x}(A_x) - \omega_{\xi(i,x)}(\pi_{n_i,x}(A_x))| < \varepsilon$$

*Démonstration.* En utilisant la représentation fidèle  $\pi_{n_i,x}$ , on considère  $M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$  comme sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$ . Quitte à tensoriser par  $l^2(\mathbb{N})$ , on peut supposer que  $\mathcal{A}_x \cap \mathcal{K}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$  est réduit à l'élément nul. L'application  $\delta'_{i,x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{C}$  est une forme linéaire continue et positive.

En appliquant le théorème 3.2.43, on en conclut que  $\delta'_{i,x}$  est limite  $*$ -faible de formes vectorielles. Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , il existe un vecteur  $\xi(i, x)$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x$  tel que, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$|\delta'_{i,x}(A_x) - \omega_{\xi(i,x)}(\pi_{n_i,x}(A_x))| < \varepsilon$$

$\square$

*Remarque 3.2.51.* Puisque  $\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i}$  est un  $C(X)$ -module de Hilbert, il existe suffisamment de sections au sens où, pour tout  $\eta \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x$ , il existe  $\tilde{\eta} \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  tel que  $\eta = \tilde{\eta}_x$ .

Il existe un vecteur  $\xi_i^{(x)} \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  tel que  $\xi_{i,x}^{(x)} = \xi(i, x)$ .

**Lemme 3.2.52.** *Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , il existe un voisinage ouvert  $U_{i,x}$  de  $x$  dans  $X$ , tel que pour tout  $y$  dans  $U_{i,x}$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on a les inégalités suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} |\delta'_{i,x}(A_x) - \delta'_{i,y}(A_y)| < \varepsilon \\ |\omega_{\xi_{i,x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A_y)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

*Démonstration.* En effet, la première inégalité résulte du fait que  $\delta'_i$  est un  $C(X)$ -état c'est-à-dire un champ continu d'états sur  $X$ . La seconde inégalité s'obtient en considérant la fonction continue  $f := \omega_{\xi_i^{(x)}}(A) = \langle \xi_i^{(x)}; \pi_i(A)\xi_i^{(x)} \rangle$  de  $C(X)$ . On a alors pour tout  $\varepsilon > 0$  un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V_x$  on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\langle \xi_i^{(x)}, \pi_{n_i}(A)\xi_i^{(x)} \rangle(x) - \langle \xi_i^{(x)}, \pi_{n_i}(A)\xi_i^{(x)} \rangle(y)| \\ &= |\langle \xi_{i,x}^{(x)}, \pi_{n_i,x}(A)\xi_{i,x}^{(x)} \rangle - \langle \xi_{i,y}^{(x)}, \pi_{n_i,y}(A)\xi_{i,y}^{(x)} \rangle| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.53.** *Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , il existe un voisinage ouvert  $U_{i,x}$  de  $x$  dans  $X$ , tel que pour tout  $y$  dans  $U_{i,x}$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on a*

$$|\delta'_{i,y}(A_y) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A_y)| < \varepsilon$$

*Démonstration.* On utilise la propriété 3.2.50 et le lemme 3.2.52 pour le réel  $\varepsilon/3$  et la famille finie  $\mathcal{F}$ . On a pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$  et pour tout  $y \in U_{i,x}$

$$\begin{aligned} D &= |\delta'_{i,y}(A) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A_y)| \\ &= |\delta'_{i,y}(A_y) - \delta'_{i,x}(A_x) + \delta'_{i,x}(A_x) - \omega_{\xi_{i,x}^{(x)}}(A_x) + \omega_{\xi_{i,x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A_y)| \\ &< |\delta'_{i,y}(A_y) - \delta'_{i,x}(A_x)| + |\delta'_{i,x}(A_x) - \omega_{\xi_{i,x}^{(x)}}(A_x)| + |\omega_{\xi_{i,x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A_y)| < 3 \times \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

*Remarque 3.2.54.* Pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , il existe un vecteur  $\xi_i^{(x)}$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  et un voisinage ouvert de  $x$ , noté  $U_{i,x}$ , tel que  $\xi_{i,y}^{(x)}$  est unitaire dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_y$  pour tout  $y \in U_{i,x}$  et vérifiant pour tout  $y$  dans  $U_{i,x}$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$

$$|\delta'_{i,y}(A) - \omega_{\xi_{i,y}^{(x)}}(A)| < \varepsilon$$

**Etape 2)** On cherche maintenant à revenir aux champs continus de formes linéaires et continues sur l'espace  $X$ . On fixe  $i$  un entier dans  $\mathbb{N}$ , un réel  $\varepsilon$  strictement positif et une partie finie  $\mathcal{F}$  dans  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ .

Pour l'opérateur  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ , on peut, pour tout  $x$  dans  $X$ , réitérer la démarche précédente assurant l'existence d'un voisinage ouvert  $U_{i,x}$  de  $x$  dans  $X$  et d'un vecteur  $\xi_i^{(x)}$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$  tel que pour tout  $y$  dans  $U_{i,x}$ , le vecteur  $\xi_{i,y}^{(x)}$  est unitaire dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_y$ . On considère  $\tilde{U}_i = \{U_{i,x}\}_{x \in X}$  le recouvrement ouvert de  $X$ .

*Remarque 3.2.55.* Comme  $X$  est un espace topologique supposé compact, il existe un ensemble fini  $F_i$  dans  $X$  tel que  $\mathcal{U}_i = \{U_{i,\alpha}\}_{\alpha \in F_i}$  soit un recouvrement ouvert fini de  $X$ . On note  $\{\xi_i^\alpha\}_{\alpha \in F_i}$  les vecteurs de  $(\mathcal{H}_{C(X)})^{n_i}$ .

On pose  $\{\phi_{i,\alpha}\}_{\alpha \in F_i}$  une partition de l'unité associée à ce recouvrement d'ouverts, où  $\phi_{i,\alpha} : X \rightarrow [0, 1]$  fonctions continues à support compact dans  $U_{i,\alpha}$  vérifiant l'égalité  $\sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(x) = 1$ , pour tout  $x$  dans  $X$ .

**Lemme 3.2.56.** *Il existe une application  $C(X)$ -linéaire  $\omega_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  telle que, pour tout  $y$  dans  $X$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on a  $|\delta'_{i,y}(A) - \omega_i(A)(y)| < \varepsilon$*

*Démonstration.* On pose  $\omega_i := \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha} \omega_{\xi_i^\alpha}$ , application  $C(X)$ -linéaire de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$  dans  $C(X)$  et on a

$$\begin{aligned} |\delta'_i(A)(y) - \omega_i(A)(y)| &= \left| \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) \delta'_{i,y}(A) - \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) \omega_{\xi_i^\alpha}(A)(y) \right| \\ &< \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) |\delta'_{i,y}(A) - \omega_{\xi_i^\alpha}(A)(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

On considère  $F_i$  de la forme  $\{1, \dots, m_i\}$  et on note  $\xi_i := (\sqrt{\phi_{i,1}} \xi_i^1; \dots; \sqrt{\phi_{i,m_i}} \xi_i^{m_i})$ , élément de  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ . En effet, on a

$$\langle \xi_i, \xi_i \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m_i} \langle \sqrt{\phi_{i,\alpha}} \xi_i^\alpha, \sqrt{\phi_{i,\alpha}} \xi_i^\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m_i} \phi_{i,\alpha} \langle \xi_i^\alpha, \xi_i^\alpha \rangle \in C(X)$$

**Lemme 3.2.57.** *L'application  $\omega_i$  est un champ continu de formes linéaires positives vectorielles.*

*Démonstration.* Si on pose  $\omega_{\xi_i} := \sum_{\alpha=1}^{m_i} \phi_{i,\alpha} \langle \xi_i^\alpha; \pi_{n_i}(A) \xi_i^\alpha \rangle$ , on obtient un  $C(X)$ -état vectoriel tel que

$$\omega_{\xi_i} = \omega_i$$

□

*Remarque 3.2.58.* Pour tout entier  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(A)$ , on a obtenu une approximation de chacun des  $C(X)$ -états  $\delta'_i$  par un  $C(X)$ -état vectoriel  $\omega_{\xi_i}$ , où  $\xi_i$  est dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ .

On a montré que pour tout entier  $i$ , l'application  $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$  est limite  $*$ -faible de  $C(X)$ -états c'est-à-dire que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute partie finie  $\mathcal{F}$  de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$  il existe un vecteur  $\xi_i$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$  tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$

$$\|\delta'_i(A) - \omega_{\xi_i}(A)\| < \varepsilon$$

### 3.2.6 Approximation par factorisation

Pour tout entier  $i$ , on a construit le vecteur  $\xi_i = (\sqrt{\phi_{i,1}} \xi_i^1; \dots; \sqrt{\phi_{i,m_i}} \xi_i^{m_i})$  dans le  $C(X)$ -module hilbertien  $\bigoplus_{k=1}^{m_i} \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathcal{H}_{C(X)}$ . On adoptera les notations suivantes, en supposant que  $\xi_i$  s'écrive sous la forme

$$\xi_i = \left( \begin{pmatrix} \xi_i^{1,1} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_i^{1,2} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_i^{1,m_i} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,m_i} \end{pmatrix} \right)$$

où chaque  $\xi_i^{p,q}$  est un élément de  $\mathcal{H}_{C(X)}$ .

On note, pour  $k$  entier,  $\xi_i^{(k)}$  l'élément de  $(\mathcal{H}_{C(X)})^{m_i}$ , défini par  $\xi_i^{(j)} = (\xi_i^{j,1}, \xi_i^{j,2}, \dots, \xi_i^{j,m_i})$ .

**Définition 3.2.59.** On note, pour tout  $i$  entier,  $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ , l'application linéaire définie par  $V_i(f_1, \dots, f_{n_i}) = \bigoplus_{k=1}^{m_i} \bigoplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{j,k} = \bigoplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{(j)}$

**Proposition 3.2.60.** L'application  $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$  est une application  $C(X)$ -linéaire, bornée et possédant un adjoint.

*Démonstration.* L'application  $V_i$  est  $C(X)$ -linéaire. Pour montrer qu'elle est bornée on considère  $(f_1, \dots, f_{n_i})$  un élément de  $C(X)^{n_i}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|V_i(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 &= \sup_{x \in X} |\langle \bigoplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{(j)} f_j, \bigoplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{(j)} f_j \rangle(x)| \\ &= \sup_{x \in X} \left| \sum_{j=1}^{n_i} |f_j|^2(x) \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle(x) \right| = \sup_{x \in X} \sum_{j=1}^{n_i} |f_j(x)|^2 |g_j(x)|^2 \\ &\leq \|(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 \|(g_1, \dots, g_{n_i})\|^2 \leq \|(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 \end{aligned}$$

L'application  $C(X)$ -linéaire  $V_i$  est donc bornée.

On montre que  $V_i^* : (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i} \rightarrow C(X)^{n_i}$  est définie, pour tout  $\eta$  dans  $(\mathcal{H}_X^{n_i})^{m_i}$ , par

$$V_i^*(\eta) = (\langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i}$$

En effet, pour tout  $(f_1, \dots, f_{n_i})$  dans  $C(X)^{n_i}$  et tout  $\eta$  dans  $(\mathcal{H}_X^{n_i})^{m_i}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle V_i(f_1, \dots, f_{n_i}), \eta \rangle &= \left( \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{q=1}^{n_i} \langle \xi_i^{j,k} f_j, \eta^{j,k} f_j \rangle \right) = \sum_{j=1}^{n_i} f_j \sum_{k=1}^m \langle \xi_i^{j,k}, \eta^{j,k} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} f_j \langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle = \left\langle (f_1, \dots, f_{n_i}), (\langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} \right\rangle \\ &= \langle (f_1, \dots, f_{n_i}), V_i^*(\eta) \rangle \end{aligned}$$

L'application  $C(X)$ -linéaire bornée  $V_i$  admet un opérateur adjoint.

De plus pour  $(f_1, \dots, f_{n_i})$  dans  $C(X)^{n_i}$ , on a

$$\begin{aligned} V_i^* V_i(f_1, \dots, f_{n_i}) &= V_i^* \left( \bigoplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{(j)} \right) = (\langle \bigoplus_{k=1}^m \xi_i^{j,k}, f_j \xi_i^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} \\ &= (f_j \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} = \left( f_j \sum_{k=1}^m \langle \xi_i^{j,k}, \xi_i^{j,k} \rangle \right)_{1 \leq j \leq n_i} \\ &= (g_1 f_1, \dots, g_{n_i} f_{n_i}) \end{aligned}$$

où chaque  $g_j$  est une fonction continue positive non nulle sur  $X$  définie, pour tout entier  $j$ , par  $g_j = \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle$ .

L'application  $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$  est dans  $\mathcal{L}_{C(X)}(C(X)^{n_i}, (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i})$   $\square$

*Remarque 3.2.61.* Par le lemme 3.2.47 donnant la correspondance entre les applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives  $f : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$  et les applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives  $f : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ , on associe à l'application  $\omega_{\xi_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ , l'application  $C(X)$ -linéaire et complètement positive  $\tilde{\omega}_{\xi_i} : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$ .

**Lemme 3.2.62.** *L'application  $C(X)$ -linéaire et complètement positive  $\tilde{\omega}_{\xi_i} : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$  est définie pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$  par*

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \left( \left\langle \oplus_{k=1}^{m_i} \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^{m_i} (\pi(A)\xi_i^{q,k}) \right\rangle \right)_{1 \leq p, q \leq n_i}$$

*Démonstration.* L'application étant  $C(X)$ -linéaire et complètement positive sur  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , on peut, pour toute matrice  $A = (A_{p,q})$  dans  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , écrire  $\omega_{\xi_i}(A)$  sous la forme  $\sum_{p,q=1}^{n_i} \omega_{p,q}(A_{p,q})$ . L'application  $C(X)$ -linéaire et complètement positive  $\tilde{\omega}_{\xi_i}$  est défini, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , par la formule

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes \omega_{p,q}(A)$$

Pour toute matrice  $A = (A_{p,q})$  dans  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , on a

$$\begin{aligned} \omega_{\xi_i}(A) &= \left\langle \xi_i, \left( \oplus_{k=1}^m \pi_{n_i}(A) \right) \xi_i \right\rangle \\ &= \left\langle \oplus_{k=1}^m \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \oplus_{k=1}^m \left( \pi_{n_i}(A) \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \left\langle \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \pi_{n_i}((A_{p,q}) \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \left\langle \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \oplus_{p=1}^{n_i} \left( \sum_{q=1}^{n_i} \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \right) \right\rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^{n_i} \left\langle \xi_i^{p,k}, \sum_{q=1}^{n_i} \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \right\rangle \\ &= \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} \left\langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \right\rangle = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} \omega_{p,q}(A_{p,q}) \end{aligned}$$

où  $\omega_{p,q}(A_{p,q}) = \left\langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \right\rangle$ . L'application  $C(X)$ -linéaire et complètement positive  $\tilde{\omega}_{\xi_i}$  est donc définie par

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes \left\langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A) \xi_i^{q,k} \right\rangle$$

□

**Proposition 3.2.63.** *Pour toute partie finie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  il existe un vecteur  $\xi_i$  dans  $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$  tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$*

$$\delta_i(A) - \left( \left\langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \right\rangle \right)_{1 \leq p, q \leq n_i}$$

est un opérateur compact dans  $M_{n_i} \otimes C(X)$ ; de plus pour un réel strictement positif  $\varepsilon$ , on peut choisir  $\xi_i$  de sorte que, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , la norme de cet opérateur compact soit inférieure à  $\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}$ .

*Démonstration.* On pose  $\tilde{\mathcal{F}} = \{A \otimes e_{p,q}, A \in \mathcal{F}, 1 \leq p, q \leq n_i\}$  est une partie finie de  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ . Par le travail précédent, il existe un élément  $\xi_i \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$  tel que pour tout  $\tilde{A}$  dans  $\tilde{\mathcal{F}}$ , on a

$$\|\delta'_i(\tilde{A}) - \omega_{\xi_i}(\tilde{A})\| < \frac{\varepsilon}{n_i^2 2^i}$$

et pour tout  $\tilde{A}$  dans  $M_{n_i}(\mathcal{A})$ , on a l'égalité

$$\begin{aligned} \delta'_i(\tilde{A}) - \omega_{\xi_i}(\tilde{A}) &= \sum_{p,q=1}^{n_i} \delta_{i,p,q}(\tilde{A}_{p,q}) - \sum_{p,q=1}^{n_i} \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(\tilde{A}_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \\ &= \sum_{p,q=1}^{n_i} \left( \delta_{i,p,q}(\tilde{A}_{p,q}) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(\tilde{A}_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \right) \end{aligned}$$

Pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p,q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes (\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle)$$

donc on a

$$\|\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A)\| \leq \sum_{p,q=1}^{n_i} \|\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle\|$$

Pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$  et tout  $p, q$  dans  $\{1, \dots, n_i\}$ , la matrice  $A \otimes e_{p,q}$  est dans  $\tilde{\mathcal{F}}$ , on a alors

$$\begin{aligned} M &= \|\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle\| \\ &= \left\| \delta'_i(A \otimes e_{p,q}) - \sum_{p,q} \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A \otimes e_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n_i^2 2^i} \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute partie finie  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$ , on a pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$\|\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A)\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

□

*Remarque 3.2.64.* Pour tout  $\xi_i \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$  et tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , on a

$$\left( \langle \xi_i^{(j)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(j)}) \rangle \right)_{1 \leq j \leq n_i} = V_i^* ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) V_i$$

**Corollaire 3.2.65.** *Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  et toute partie finie  $\mathcal{F}$  incluse dans  $\mathcal{A}$ , il existe  $V_i$  dans  $\mathcal{L}_{C(X)}(C(X)^{n_i}, (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i})$ , telle que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$*

$$\|\delta_i(A) - V_i^* ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) V_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

**Approximation :** on va maintenant pouvoir donner une approximation de l'application identité de  $\mathcal{A}$  ce qui induit alors une approximation de la représentation régulière du groupoïde  $\mathcal{G}$  localement compact  $\sigma$ -compact et étale. On note dans la suite  $\mathcal{H}_{C(X)}^\infty := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ . On considère  $\delta = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \delta_i : \mathcal{A} \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_{n_i} \otimes C(X)$  et on pose

$$W : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$$

défini par  $W := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$ . On note  $\pi_\infty$  la représentation fidèle définie par

$$\begin{aligned} \pi_\infty : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty) \\ A &\longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.66.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute partie finie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ , on a*

- a) *il existe une application  $W : \mathcal{H}_{C(X)}^\infty \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}^\infty$  qui est  $C(X)$ -linéaire et adjointable tel que  $\delta(A) - W^*(\pi_\infty(A))W$  est compact pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$  et vérifie*

$$\|\delta(A) - W^*(\pi_\infty(A))W\| < \varepsilon$$

- b) *il existe une application  $\tilde{W} : \mathcal{H}_{C(X)}^\infty \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}^\infty$   $C(X)$ -linéaire et adjointable tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$   $A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}$  est compact et vérifie*

$$\|A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}\| < \varepsilon$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\mathcal{F}$  une partie finie de  $\mathcal{A}$ .

- a) Pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe un opérateur borné  $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$ , tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on a  $\|\delta_i(A) - V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$ .

On pose  $W : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i} \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$  défini, pour tout  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i}$  par  $W((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i(f_i)$ .  $W$  est un opérateur défini sur  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i}$ , qui admet un adjoint  $W^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i^*$ , donc continu par le théorème du graphe fermé. On a alors

$$\begin{aligned} \|\delta(A) - W^* \pi_\infty(A) W\| &= \|\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \delta_i(A) - \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \|\delta_i(A) - V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| < \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

- b) Il existe  $V : \rightarrow$  tel que  $A - V^* \delta(A) V$  est compact et  $\|A - V^* \delta(A) V\| < \varepsilon$  donc en notant  $\tilde{W} = VW$ , on a  $A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}$  est compact et vérifie

$$\|A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}\| \leq \varepsilon$$

□

**Théorème 3.2.67.** *Pour toute famille finie  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$  et tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $n$  et des applications  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  et  $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ , chacune  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$*

$$\|A - \psi \circ \varphi(A)\| < \varepsilon$$

*Démonstration.* On considère une famille finie  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Par la proposition précédente, il existe un opérateur  $W$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ , tel que pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$\|A - W^* \pi_\infty(A) W\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par la  $C(X)$ -nucléarité de la  $C(X)$ -algèbre  $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ , on a montré, pour l'ensemble fini  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$  et  $\varepsilon$  le réel strictement positif choisis, l'existence d'un entier  $n$  et d'applications  $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{\psi} : C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ ,  $C(X)$ -linéaires complètement positives et contractantes vérifiant, pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$\|\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)\| < \frac{\varepsilon}{2\|W\|^2}$$

On pose  $\varphi := \tilde{\varphi}$  une application de  $\mathcal{A}$  dans  $M_n \otimes C(X)$  et  $\psi := W^*(\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})W$  une application de  $M_n \otimes C(X)$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ . Ce sont des applications  $C(X)$ -linéaires complètement positives et contractantes et pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$ , on a

$$\begin{aligned}
\|A - \psi \circ \varphi(A)\| &= \|A - W^* \pi_\infty(A)W + W^* \pi_\infty(A)W - \psi \circ \varphi(A)\| \\
&\leq \|A - W^* \pi_\infty(A)W\| + \|W^* \pi_\infty(A)W - \psi \circ \varphi(A)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W^* \pi_\infty(A)W - W^*(\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A))W\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W^*(\pi_\infty(A) - (\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A)))W\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|\pi_\infty(A) - (\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A))\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|(\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)) \otimes id_{l^2(\mathbb{N})}\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \frac{\varepsilon}{2\|W\|^2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

On a montré que pour toute famille finie  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$  et tout  $\varepsilon$  réel strictement positif, il existe un entier  $n$  et des applications  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  et  $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ , chacune  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout  $A$  dans  $\mathcal{F}$

$$\|A - \psi \circ \varphi(A)\| < \varepsilon$$

□

*Remarque 3.2.68.* On peut étendre le résultat du théorème 3.2.67 à des familles  $\mathcal{F}$  compactes (et non plus seulement finie) de  $\mathcal{A}$ . En effet en considérant  $\mathcal{F}$  une famille compacte dans  $\mathcal{A}$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif, on peut pour chaque élément  $a$  de  $\mathcal{F}$  considérer un voisinage ouvert  $U_a$  dans  $\mathcal{A}$  de sorte que pour tout  $a'$  dans  $U_a$ , on a  $\|a - a'\| < \varepsilon/3$ . On obtient ainsi un recouvrement ouvert de  $\mathcal{A}$  duquel on peut extraire un sous recouvrement fini  $\mathcal{U} = \{U_{a_i}\}_{i=1}^n$ . On considère  $\mathcal{F}_1$  le sous ensemble fini de  $\mathcal{F}$  constitué des  $m$  éléments  $a_i$ , pour  $i$  variant de 1 à  $m$ . D'après le théorème 3.2.67, il existe un entier  $n$  et des applications  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  et  $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ , chacune  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m\}$ ,

$$\|a_i - \psi \circ \varphi(a_i)\| < \varepsilon/3$$

Pour tout  $a$  dans  $\mathcal{F}$ , il existe  $a_i$  dans  $\mathcal{F}'$ , tel que  $\|a - a_i\| < \varepsilon/3$ , et on a

$$\begin{aligned}
\|a - \psi \circ \varphi(a)\| &= \|a - a_i + a_i - \psi \circ \varphi(a_i) + \psi \circ \varphi(a_i) - \psi \circ \varphi(a)\| \\
&\leq \|a - a_i\| + \|a_i - \psi \circ \varphi(a_i)\| + \|\psi \circ \varphi(a_i) - \psi \circ \varphi(a)\| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

**Définition 3.2.69.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde séparé, localement compact,  $B$  une  $C_0(X)$ -algèbre et  $\phi : C_r^*(\mathcal{G}) \rightarrow B$  une application  $C_0(X)$ -linéaire complètement positive. L'application  $\phi$  est dite à support compact s'il existe un sous espace compact  $K$  de  $\mathcal{G}$  tel que pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$  vérifiant  $\text{Supp}(f) \cap K = \emptyset$ , on a  $\phi(f) = 0$ .

**Proposition 3.2.70.** *Soit  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  une application  $C(X)$ -linéaire et complètement positive, alors pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif et toute famille finie  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe une application  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et à support compact  $\varphi' : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  telle que pour tout  $a$  dans  $\mathcal{F}$ ,*

$$\|\varphi(a) - \varphi'(a)\| < \varepsilon$$

*Démonstration.* L'application  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  étant  $C(X)$ -linéaire et complètement positive, alors par le théorème de Stinespring pour les  $C(X)$ -modules de Hilbert, il existe un  $C(X)$ -module  $F_\varphi$ , un  $*$ -homomorphisme  $\pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(F_\varphi)$  et un opérateur  $v_\varphi$  dans  $\mathcal{L}(M_n \otimes C(X), F_\varphi)$  tel que pour tout  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , on a  $\varphi(a) = v_\varphi^* \pi_\varphi(a) v_\varphi$  c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  dans  $F_\varphi$  tels que

$$\varphi(a) = v_\varphi^* \pi_\varphi(a) v_\varphi = [\langle e_i, \pi_\varphi(a) e_j \rangle]$$

On a une représentation fidèle de  $\lambda : \mathcal{A}$  dans  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  et pour tout  $\eta > 0$ , quitte à prendre un multiple de la représentation fidèle  $\lambda$ , il existe des vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_n$  dans  $L^2(\mathcal{G}, \nu)$  tels que pour tout  $a$  dans  $\mathcal{F}$

$$|\langle e_i, \pi_\varphi(a) e_j \rangle - \langle \xi_i, \lambda(a) \xi_j \rangle| < \eta$$

On peut supposer que les fonctions  $\xi_i$  sont à support compact et en posant  $\varphi'(a) = [\langle \xi_i, \lambda(a) \xi_j \rangle]$ , on obtient une application  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et à support compact  $\varphi' : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$  telle que pour tout  $a$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$\|\varphi(a) - \varphi'(a)\| < \varepsilon$$

□

### 3.2.7 Moyennabilité

On considère l'espace produit  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  et pour  $i = 1, 2$ , on note  $p_i : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  la projection sur la  $i$ -ième composante. Soit  $F$  un sous espace fermé de l'espace  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , on dit que  $F$  est  $(p_1, p_2)$ -propre si pour tout sous espace compact  $K$  de  $\mathcal{G}$ , les ensembles  $F \cap (K \times \mathcal{G})$  et  $F \cap \mathcal{G} \times K$  sont compacts.

**Définition 3.2.71.** *On dit que le groupoïde  $\mathcal{G}$  a la propriété (W) si pour tout sous espace compact  $K$  de  $\mathcal{G}$  et pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une fonction  $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  continue, bornée, de type positif et à support  $(p_1, p_2)$ -propre vérifiant pour tout  $\gamma$  dans  $K$ ,*

$$|h(\gamma, \gamma) - 1| < \varepsilon$$

On considère  $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue, bornée, à support  $(p_1, p_2)$ -propre et de type positif. Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on note  $h_\gamma$  la fonction continue sur  $\mathcal{G}$  et à support compact définie par  $h_\gamma(\eta) := h(\gamma, \eta)$  pour tout  $\eta$  dans  $\mathcal{G}$ .

**Lemme 3.2.72.** *Soit  $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue, bornée, à support  $(p_1, p_2)$ -propre et de type positif. L'application  $\gamma \rightarrow \lambda(h_\gamma)$  continue sur  $\mathcal{G}$  à valeurs dans  $C_r^*(\mathcal{G})$  est de type positif.*

*Démonstration.* On doit prouver que pour tout entier  $n$ , tout  $x$  dans  $X$ , tout  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $\mathcal{G}^x$ , tout  $\xi_1, \dots, \xi_n$  dans  $L^2(\mathcal{G})$ , on a, pour tout  $y$  dans  $X$

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i, \lambda(h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j}) \xi_j \rangle(y) \geq 0$$

On peut supposer, pour tout  $i$  dans  $N = \{1, \dots, n\}$ , que les fonctions  $\xi_i$  sont dans  $C_c(\mathcal{G})$ . On considère  $F := \cup_{i=1}^n \text{Supp}(\xi_i|_{\mathcal{G}_y})$  l'ensemble fini de  $\mathcal{G}_y$ . On a alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i, \lambda(h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j})\xi_j \rangle(y) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_y} \overline{\xi_i(\alpha)} (h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j} \star \xi_j)(\alpha) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_y} \sum_{\beta \in \mathcal{G}^r(\alpha)} \overline{\xi_i(\alpha)} h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j}(\alpha\beta^{-1}) \xi_j(\beta) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r \in F} \sum_{r' \in F} \overline{\xi_i(\alpha_r)} h(\gamma_i^{-1}\gamma_j, \alpha_r \alpha_{r'}^{-1}) \xi_j(\alpha_{r'}) \end{aligned}$$

Pour tout  $i$  dans  $N = \{1, \dots, n\}$  et  $r$  dans  $F$ , on pose  $\lambda_{i,r} := \xi_i(\alpha_r)$ ,  $\sigma_{i,r} := \gamma_i$  et  $\tau_{i,r} := \alpha_r^{-1}$ , et on a

$$A = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ r \in F \\ r' \in F}} \overline{\lambda_{i,r}} \lambda_{j,r'} h(\sigma_{i,r}^{-1} \sigma_{j,r'}, \tau_{i,r}^{-1} \tau_{j,r'}) \geq 0$$

car par définition, l'application  $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  est de type positif.  $\square$

On suppose que le groupoïde  $\mathcal{G}$  a la propriété  $(W)$ . Soit  $n$  un entier, on considère le sous espace compact  $K_n$  de  $\mathcal{G}$ . Il existe une fonction  $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  continue, bornée, de type positif et à support  $p_1, p_2$ -propre vérifiant pour tout  $\gamma$  dans  $K_n$ ,

$$|h(\gamma, \gamma) - 1| < (2n)^{-1}$$

Pour tout  $\beta$  dans  $\mathcal{G}$ , on note  $h_\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie, pour tout  $\alpha$  dans  $\mathcal{G}$ , par  $h_\beta(\alpha) := h(\beta, \alpha)$  qui est continue et à support compact sur  $\mathcal{G}$ . On considère  $\mathcal{F} = \{\lambda(h_\beta) : \beta \in K_n\}$  qui est une partie compacte de  $C_r^*(\mathcal{G})$ . D'après l'approximation par factorisation de la représentation régulière faite dans 3.2.6, il existe une application  $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante  $\phi_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$  telle que pour tout  $\beta$  dans  $K_n$ ,

$$\|\phi_n(h_\beta) - id_{\mathcal{A}}(h_\beta)\| < (2n)^{-1}$$

et l'application  $\phi_n$  est à support dans un compact  $C_n$  de  $\mathcal{G}$ .

Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on considère  $U_\gamma$  un voisinage ouvert de  $\gamma$  sur lequel les restrictions des applications but et source sont homéomorphismes sur leur image respective. On obtient ainsi un recouvrement d'ouvert  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{G}}$  de l'espace  $\mathcal{G}$  duquel on peut extraire un sous recouvrement localement fini  $\mathcal{U}' = \{U_{\gamma_i}\}_{i \in I}$ , où  $I$  est dénombrable. On note  $\mathcal{U} := \{U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i}\}_{i \in I}$  le recouvrement ouvert localement fini de la diagonale  $\Delta_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ . On lui associe une partition de l'unité  $\{\psi_i\}_{i \in I}$ , où chaque fonction  $\psi_i$  est continue, positive et à support compact dans l'ouvert  $U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i}$  telles que

$$\chi_{\Delta_{\mathcal{G}}} \leq \sum_{i \in I} \psi_i \leq 1$$

On pose  $\psi(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I} \psi_i(\alpha, \beta)$  la fonction définie sur  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  continue et à support dans  $\cup_{i \in I} (U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i})$ . Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , on note  $f_\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_\gamma(\alpha) = \psi(\gamma, \alpha)$  est une fonction continue et à support compact dans  $W_\gamma = \cup_{i \in I_\gamma} U_{\gamma_i}$ , où  $I_\gamma = \{i \in I : \gamma \in U_{\gamma_i}\}$  est une partie finie de  $I$ . La restriction des applications but et source à chaque  $W_\gamma$  est un homéomorphisme sur leur image respective.

Comme  $\mathcal{G}$  est  $\sigma$ -compact, on suppose qu'il existe une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante de compacts de  $\mathcal{G}$  telle que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  pour tout  $n$  entier et  $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{G}$ .

**Proposition 3.2.73.** *Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe une fonction  $\mu_n$  continue sur  $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$ , à valeurs réelles, de type positif et à support dans un tube telle que pour tout  $(\gamma, \eta)$  dans le tube  $T_{K_n}$ , on a*

$$|\mu_n(\gamma, \eta) - 1| < 1/n$$

*Démonstration.* On pose  $\mu_n$  la fonction définie sur  $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$  qui, à tout couple  $(\gamma, \eta)$  de  $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$ , associe  $\mu_n(\gamma, \eta) = \langle f_\gamma^*, \phi_n(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x)$ , où  $x = r(\gamma) = r(\eta)$ .

Les applications  $\gamma \rightarrow f_\gamma$  et  $\beta \rightarrow h_\beta$  étant continue sur  $\mathcal{G}$ , alors  $\mu_n : \mathcal{G} *_r \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue comme composition d'applications continues.

Le support  $C_n$  de l'application  $\phi_n$  un sous espace compact de  $\mathcal{G}$  et la fonction  $h$  est à support  $(p_1, p_2)$ -propre donc on a  $\text{Supp}(h) \cap \mathcal{G} \times C_n$  est compact. On en déduit alors que  $\{\alpha \in \mathcal{G} : \phi_n(h_\alpha) \neq 0\}$  est compact et que la fonction  $\mu_n$  est à support dans un tube.

On montre que les fonctions  $\mu_n$  sont de type positif : l'application  $\phi_n$  étant complètement positive, on a alors pour tout entier  $n$ , tout  $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$  dans  $\mathbb{C}$ , pour tout  $x$  dans  $X$  et tout  $(\gamma_p)_{1 \leq p \leq n}$  dans  $\mathcal{G}^x$ , on a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,q=1}^n \overline{z_p} z_q \mu_n(\gamma_p, \gamma_q) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \overline{z_p} z_q \langle f_{\gamma_p}^*; \phi_n(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})(f_{\gamma_q}^*) \rangle(x) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \langle z_p f_{\gamma_p}^*; \phi_n(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})(z_q f_{\gamma_q}^*) \rangle(x) \end{aligned}$$

or l'application  $\gamma \rightarrow \lambda(h_\gamma)$  est de type positif d'après le lemme 3.2.72 donc la matrice  $[\lambda(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})]_{1 \leq p,q \leq n}$  est positive et comme l'application  $\phi$  est complètement positive alors la matrice  $[\phi(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})]_{1 \leq p,q \leq n}$  est positive et la fonction  $\mu_n$  est donc de type positif pour tout entier  $n$ .

Pour prouver que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers un sur les tubes, on a, pour tout couple  $(\gamma, \eta)$  dans le tube  $T_{K_n}$ ,

$$\begin{aligned} B &= |\mu_n(\gamma, \eta) - 1| = |\langle f_\gamma^*, \phi_n(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x) - 1| \\ &\leq |\langle f_\gamma^*, (\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x)| + |\langle f_\gamma^*, id_{\mathcal{A}}(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x) - 1| \\ &\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_x} \overline{f_\gamma^*(\alpha)} (h_{\gamma^{-1}\eta} \star f_\eta^*)(\alpha) - 1 \right| \\ &\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + \left| \overline{f_\gamma^*(\gamma^{-1}\eta)} \sum_{\beta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\beta) f_\eta^*(\beta^{-1}) - 1 \right| \\ &\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + |h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\eta) f_\eta^*(\eta^{-1}) - 1| \\ &\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + |h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\eta) - 1| \\ &< (2n)^{-1} + (2n)^{-1} \\ &< 1/n \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.2.74.** *Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde étale localement compact  $\sigma$ -compact et séparé ayant un espace des unités  $X$  compact, satisfaisant la propriété (W) et la condition (Cont). Si la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{G})$  est exacte, alors le groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable.*

*Démonstration.* Pour prouver que groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable, il suffit de montrer que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  et tout sous espace compact  $K$  de  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ , il existe une fonction  $\nu_{\varepsilon, K}$  dans  $C_c(\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G})$ , continue, de type positif et à support compact telle que pour tout  $(z, \gamma)$  dans  $K$ , on a

$$|\nu_{\varepsilon, K}(\gamma, \eta) - 1| < \varepsilon$$

Pour cela on va utiliser la  $\sigma$ -compacité de  $\mathcal{G}$  : il existe une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante de compacts de  $\mathcal{G}$  telle que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  pour tout  $n$  entier et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{G}$ .

On a montré que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , il existe une fonction  $\mu_n : \mathcal{G}_{*,r} \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  de type positif, à support dans le tube  $T_{K_{n+1}}$  telle que pour tout couple  $(\gamma, \eta)$  dans  $T_{K_n}$ , on a  $|\mu_n(\gamma, \eta) - 1| < n^{-1}$ .

On note  $p_n : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction continue définie pour tout couple  $(\gamma, \eta)$  dans  $\mathcal{G}^{(2)}$  par  $p_n(\gamma, \eta) = \mu_n(\gamma, \gamma\eta)$ . On remarque que si  $\eta$  est en dehors du compact  $K_{n+1}$  alors pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}_{r(\eta)}$ , on a  $p_n(\gamma, \eta) = 0$ .

Pour tout  $\gamma$  dans  $K_n$ , on considère un voisinage ouvert  $U_n^\gamma$  de  $\gamma$  inclus dans  $\overset{\circ}{K}_n$  de sorte que les applications source et but restreintes à  $U_n^\gamma$  soient des homéomorphismes sur leur image respective. On peut alors définir un recouvrement ouvert fini du compact  $K_n$  noté  $\mathcal{U}_n = \{U_n^j\}_{j=1}^m$ . L'application but étant un homéomorphisme de  $U_n^j$  sur  $r(U_n^j)$  pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on note  $\sigma_n^j : r(U_n^j) \rightarrow U_n^j$  une section de  $r$ . On note  $\{\varphi_n^j\}_{j=1}^m$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\mathcal{U}_n$  telle que pour tout  $\eta$  dans  $K_n$ , on a  $\sum_{j=1}^m \varphi_n^j(\eta) = 1$ .

Pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on considère  $p_n^j : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(\gamma, \eta)$  par  $p_n^j(\gamma, \eta) = p_n(\gamma, \eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta)$  qui est à support dans  $\mathcal{G}_{*,s,r} U_{n,j}$

On pose  $\nu_n^j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $\gamma$  par

$$\nu_n^j(\gamma) = \begin{cases} p_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) & \text{si } s(\gamma) \in r(U_n^j) \\ 0 & \text{si } s(\gamma) \notin \bigcup_{j=1}^m r(U_n^j) \end{cases}$$

On remarque que la fonction  $\nu_n^j$  est continue, bornée sur  $\mathcal{G}$  et pour tout  $\gamma$  hors du compact  $K_{n+1}$  on a  $\nu_n^j(\gamma) = 0$ . Ainsi  $\nu_n^j$  est dans la  $C^*$ -algèbre  $C_0^s$  donc dans  $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ .

On pose  $\nu_n : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(\gamma, \eta)$  par

$$\nu_n(\gamma, \eta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \nu_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta), & \text{si } \eta \in K_{n+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $\nu_n$  est dans  $C_0(\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G})$  et prolonge par continuité la fonction  $p_n$  ; en effet, pour

tout  $(\gamma, \eta)$  dans  $Supp(p_n)$ , on a

$$\begin{aligned}
p_n(\gamma, \eta) - \nu_n(\gamma, \eta) &= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m \nu_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\
&= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\
&= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\
&= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n(\gamma, \eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\
&= p_n(\gamma, \eta) - p_n(\gamma, \eta) \sum_{j=1}^m \varphi_{n,j}(\eta) = 0
\end{aligned}$$

On montre que le support de chaque fonction  $\nu_n$  est compact : le support de la fonction  $\nu_n$  est dans  $\beta_X \mathcal{G} *_{\tilde{s}, r} K_{n+1}$  et  $r(K_{n+1})$  est un sous espace de  $X$  compact (par continuité de l'application but). De plus l'application  $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$  étant propre, l'espace  $\tilde{s}^{-1}(r(K_{n+1}))$  est compact dans  $\beta_X \mathcal{G}$ . Ainsi le support de  $\nu_n$  qui est fermé et inclus dans  $\tilde{s}^{-1}(r(K_{n+1})) *_{\tilde{s}, r} K_{n+1}$  est un compact de  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ . Donc  $\nu_n$  est à support compact.

Puisque les fonctions  $\mu_n$  sont de type positif, il est clair que les fonctions  $\nu_n$  sont également de type positif.

On montre maintenant que la suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur les compacts de  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  : il suffit de considérer le cas particulier  $Z * K$  où  $Z$  est un compact  $\beta_X \mathcal{G}$  et  $K$  un compact de  $\mathcal{G}$ . On note  $\tilde{Z} = Z \cap \mathcal{G}$  le sous espace de  $\mathcal{G}$  et on a alors pour tout  $n$  entier

$$\begin{aligned}
\sup_{(z, \eta) \in Z * K} |\nu_n(z, \eta) - 1| &= \sup_{(\gamma, \eta) \in \tilde{Z} * K} |\nu_n(\gamma, \eta) - 1| \\
&= \sup_{(\gamma, \eta) \in \tilde{Z} * K} |\mu_n(\gamma, \gamma\eta) - 1| \\
&= \sup \{ |\mu_n(\gamma, \gamma') - 1| : (\gamma, \gamma') \in \tilde{Z} * \mathcal{G} / \gamma^{-1}\gamma' \in K \}
\end{aligned}$$

et on en déduit que la suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers un sur les sous espaces compacts de  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ .

Ainsi le groupoïde  $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$  est moyennable. □

## Chapitre 4

# Éléments de Kasparov et morphismes $K$ -orientés de groupoïdes étales

Dans l'article [HS87], Hilsuim et Skandalis construisent pour toute application  $K$ -orientée entre espaces de feuilles de feuilletages  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  un élément du groupe de Kasparov  $f_!$  dans  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$  et ils calculent le produit  $f_! \otimes g_!$ . Ils définissent tout d'abord l'élément  $f_!$  dans le cas d'une immersion puis d'une submersion. Ils démontrent des résultats de functorialité  $(f \circ g)_! = g_! \otimes f_!$  dans ces deux cas. Pour traiter le cas général, ils utilisent une factorisation  $f = p \circ i$ , où  $i$  est une immersion et  $p$  une submersion. Ils comparent les définitions pour différentes factorisations de  $f$  et montrent que le défaut de functorialité est relié à l'élément  $\gamma$  de Kasparov.

Ce chapitre est scindé en quatre sections : la première section de ce chapitre débute par quelques rappels sur les notions de  $K$ -orientation des fibrés vectoriels réels et des homomorphismes généralisés entre groupoïdes de feuilletage, ainsi que la construction de certains éléments du groupe de Kasparov utilisés pour définir l'élément  $\iota_!$  associé à une immersion. On termine cette première section en démontrant la conjecture 1 conjecturée par Hilsuim et Skandalis : voir 5.9 de [HS87] On fait une démonstration un peu plus générale de ce résultat en traitant les groupoïdes étales localement compact  $\sigma$ -compacts munis d'un système de Haar et en s'appuyant essentiellement sur la  $KK$ -théorie équivariante par rapport aux groupoïdes définie par LeGall dans [LG99]. La deuxième section de ce chapitre est un rappel sur la déformation au cône normal associée à une immersion d'une variété dans une autre ainsi que les propriétés functorielles liées à cette construction qui nous sont utiles lorsqu'on travaille sur une immersion d'un groupoïde de Lie étale dans un autre. La troisième section est consacrée à la construction de l'élément  $\iota_!$  du groupe  $E(C_r^*(\mathcal{G}_1), C_r^*(\mathcal{G}_2))$  à partir d'une immersion injective et  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  d'un groupoïde de Lie étale  $\mathcal{G}$  dans le groupoïde de Lie étale  $\mathcal{H}$  dont l'espace des unités  $\mathcal{H}^{(0)}$  est muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante. Enfin la dernière section porte sur la functorialité d'une telle construction dans le cas particulier où les groupoïdes considérés sont moyennables en  $K$ -théorie.

### 4.1 Morphisme $K$ -orienté et éléments du groupe de Kasparov

On rappelle dans cette section la notion de  $K$ -orientation et la construction de certains éléments de groupes de  $KK$ -théorie. On trouve des exposés détaillés de ces objets dans [HS87] et [Val88]. On termine cette section en prouvant un résultat sur les groupoïdes moyennables qui démontre notamment la conjecture 5.9 annoncée par Hilsuim et Skandalis dans l'article [HS87]. Pour réaliser cette preuve, on utilise le cadre de la  $KK$ -théorie équivariante par rapport aux

groupoïdes construite par Le Gall dans [LG99].

#### 4.1.1 Notions de $K$ -orientation et éléments du groupe de Kasparov

On considère  $Ml_n(\mathbb{R})$  le groupe métalinéaire c'est-à-dire le revêtement à deux feuillets du groupe  $Gl_n^+$  des matrices réelles à déterminant strictement positif. On note  $Ml_n^c$  le groupe défini par

$$Ml_n^c := Ml_n(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1)$$

où  $U(1)$  est le groupe multiplicatif des éléments unitaires dans  $\mathbb{C}$ . Si on réalise la même construction à partir du groupe  $SO(n)$ , on obtient d'abord le groupe spinoriel  $Spin(n)$  puis le groupe  $c$ -spinoriel  $Spin^c(n)$ . Le sous groupe compact maximal de  $Ml_n^c$  (resp.  $Ml_n(\mathbb{R})$ , resp.  $Gl_n^+$ ) est le groupe  $Spin^c(n)$  (resp.  $Spin(n)$ , resp.  $SO(n)$ ).

**Définition 4.1.1.** *Soit  $E$  un  $\mathcal{G}$ -fibré vectoriel réel, alors  $E$  est dit  $K$ -orienté si son groupe de structure est réduit à  $Ml_n^c$ .*

**Proposition 4.1.2.** *On considère  $E$  un  $\mathcal{G}$ -fibré vectoriel*

- a) *Si  $E$  est un  $\mathcal{G}$ -fibré complexe, alors  $E$  est  $K$ -orienté*
- b) *Si  $E$  est  $K$ -orienté, alors  $E^*$  est  $K$ -orienté*
- c) *Le  $\mathcal{G}$ -fibré  $E \oplus E^*$  est  $K$ -orienté*
- d) *Soit  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{G}$ -fibrés telle que deux de ces fibrés sont  $K$ -orientés alors le troisième est  $K$ -orienté*
- e) *Soit  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{G}$ -fibrés alors le  $\mathcal{G}$ -fibré  $E_1 \oplus E_2$  est  $K$ -orienté si et seulement si le  $\mathcal{G}$ -fibré  $E$  est  $K$ -orienté*

*Démonstration.* On trouve les démonstrations dans [HS87] et [Val88]. □

Une orientation sur un fibré vectoriel réel  $E$  de rang  $n$  signifie que l'on peut réduire son groupe de structure au groupe  $Gl_n^+(\mathbb{R})$ ; une métrique euclidienne sur un fibré orienté  $E$  signifie que l'on peut réduire son groupe structural au groupe  $SO(n)$ .

Dans [HS87], les auteurs étudient une application  $C^\infty$  entre les espaces de feuilles de variétés feuilletées qu'ils définissent de la manière suivante : soient  $(V_1, F_1)$  et  $(V_2, F_2)$  des variétés feuilletées dont les groupoïdes d'holonomie sont respectivement notés  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ .

**Définition 4.1.3.** [HS87] *Une application  $C^\infty$   $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  est définie par l'une des données équivalentes suivantes :*

- (1) *un  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal  $G_f$  sur  $V_1$  de groupoïde de structure  $\mathcal{G}_2$*
- (2) *un cocycle de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_2$*
- (3) *un homomorphisme (strict) de groupoïdes  $g : \mathcal{G}'_1 \rightarrow \mathcal{G}'_2$  où  $\mathcal{G}'_i$  est un groupoïde Morita équivalent au groupoïde  $\mathcal{G}_i$  pour  $i = 1, 2$*
- (4) *un homomorphisme (strict) de groupoïdes  $\varphi : \mathcal{G}_{1, T_1}^{T_1} \rightarrow \mathcal{G}_{2, T_2}^{T_2}$  où  $T_i$  est une transversale fidèle de  $(V_i, F_i)$  pour  $i = 1, 2$*

La définition (1) correspond en fait en la donnée d'un homomorphisme généralisé du groupoïde d'holonomie  $\mathcal{G}_1$  dans le groupoïde d'holonomie  $\mathcal{G}_2$  et

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_2 \\
 \Downarrow & \nearrow \rho & \searrow \sigma \\
 V_1 & & V_2
 \end{array}$$

Hilsum et Skandalis donnent également les notions de submersion et immersion pour une application  $C^\infty f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  de la manière suivante

**Définition 4.1.4.** *L'application  $f$  est une submersion si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiées*

- (1) *l'application  $\sigma : G_f \rightarrow V_2$  est une submersion*
- (2) *l'homomorphisme  $\varphi : \mathcal{G}_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow \mathcal{G}_{2,T_2}^{T_2}$  est une submersion*

*L'application  $f$  est une immersion si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiées*

- (1) *on a  $d\rho^{-1}(F_1) = d\sigma^{-1}(F_2)$*
- (2) *l'homomorphisme  $\varphi : \mathcal{G}_{1,T_1}^{T_1} \rightarrow \mathcal{G}_{2,T_2}^{T_2}$  est une immersion*

Pour tout  $\mathcal{G}_2$ -fibré réel  $E$  sur  $V_2$ , on considère  $\sigma^{-1}E$  le  $\mathcal{G}_2$ -fibré sur  $G_f$  ("tiré en arrière" de  $E$  par  $\sigma : G_f \rightarrow V_2$ ) sur lequel  $\mathcal{G}_1$  agit trivialement. Comme  $G_f$  est un  $\mathcal{G}_2$ -fibré principal, alors il existe un unique  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $E'$  sur  $V_1$  vérifiant  $\rho^*E' = \sigma^*E$  en tant que  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ -fibrés sur  $G_f$ . On pose dans la suite  $f^*E := E'$ . (Une autre méthode pour construire  $f^*E$  consiste à composer le cocycle  $i : \mathcal{G}_2 \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  associé au  $\mathcal{G}_2$ -fibré réel  $E$  avec le cocycle définissant l'application  $f$  noté  $c_f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ .) Pour  $j$  dans  $\{1, 2\}$ , on note  $\tau_j$  le fibré transverse à  $(V_j, F_j)$  où pour tout  $x$  dans  $V_j$ , on a  $\tau_x = T_x V_j / F_{j,x}$  qui est un  $\mathcal{G}_j$ -fibré sur  $V_j$ . Hilsum et Skandalis définissent alors la notion de  $K$ -orientation pour une application  $C^\infty f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  :

**Définition 4.1.5.** [HS87] *L'application  $f$  est dite  $K$ -orientée si le  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $\tau_1^* \oplus f^*\tau_2$  est  $K$ -orienté.*

On donne maintenant la définition de la  $K$ -orientation pour un homomorphisme généralisé de groupoïdes de feuilletage  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ . On s'inspire de la définition de [HS87] et il s'agit essentiellement de voir quels sont les fibrés équivariants sur  $\mathcal{G}_1^{(0)}$  et  $\mathcal{G}_2^{(0)}$  qui jouent les rôles de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  dans la définition 4.1.5. On utilise pour les définir les algèbroïdes de Lie et les applications ancres associées aux groupoïdes de feuilletage : pour  $j$  dans  $\{1, 2\}$ , on note  $\mathcal{A}_j$  l'algèbroïde de Lie du groupoïde de feuilletage  $\mathcal{G}_j$  et  $q_j$  l'application ancre qui à tout  $x$  dans  $\mathcal{G}_j^{(0)}$  est définie par  $q_{j,x} = ds_x : T_x \mathcal{G}_j^x \rightarrow T_x \mathcal{G}_j^{(0)}$ . On note  $F_{j,x}$  le sous espace de  $T_x \mathcal{G}_j^{(0)}$  obtenu en considérant l'image de  $T_x \mathcal{G}_j^x$  par  $q_{j,x}$ . Puisque nous travaillons avec des groupoïdes de feuilletage, les applications ancre  $q_{j,x}$  sont injectives pour tout  $x$  dans  $\mathcal{G}_j^{(0)}$  et par conséquent  $F_{j,x}$  est un sous espace vectoriel de  $T_x \mathcal{G}_j^{(0)}$ . On considère alors le fibré  $\tau_j := T\mathcal{G}_j^{(0)} / F_j$  qui est un  $\mathcal{G}_j$ -fibré vectoriel sur  $\mathcal{G}_j^{(0)}$  et on définit exactement comme dans [HS87], l'unique  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $f^*\tau_2$  sur  $\mathcal{G}_1^{(0)}$ . On a alors la définition d'un homomorphisme généralisé  $K$ -orienté de groupoïdes de feuilletage :

**Définition 4.1.6.** *Soit  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  un homomorphisme de groupoïdes de feuilletage. L'homomorphisme généralisé  $f$  est dit  $K$ -orienté si le fibré  $\mathcal{G}_1$ -équivariant  $\tau_1^* \oplus f^*\tau_2$  est  $K$ -orienté.*

Pour tout homomorphisme généralisé  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , on a un morphisme entre les groupes de Kasparov de  $KK$ -théorie équivariante par rapport aux groupoïdes

$$\tilde{i}^* : KK_{\mathcal{H}}(A, B) \longrightarrow KK_{\mathcal{G}}(i^*A, i^*B)$$

où  $A$  et  $B$  sont des  $\mathcal{H}$ -algèbres et si on note  $j_r^{\mathcal{G}}$  l'homomorphisme de descente réduit, on a

$$j_r^{\mathcal{G}} : KK_{\mathcal{G}}(i^*A, i^*B) \rightarrow KK((i^*A) \rtimes_r \mathcal{G}, (i^*B) \rtimes_r \mathcal{G})$$

On notera dans la suite pour simplifier les notations  $i^*$  la composition  $j_r^{\mathcal{G}} \circ \tilde{i}^*$  et on a alors l'homomorphisme suivant

$$i^* : KK_{\mathcal{H}}(A, B) \longrightarrow KK((i^*A) \rtimes_r \mathcal{G}, (i^*B) \rtimes_r \mathcal{G})$$

*Notation 4.1.7.* Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde de Lie et  $p : N \rightarrow X$  un fibré  $\mathcal{G}$ -équivariant où  $N$  est muni d'une structure de variété  $C^\infty$ , on note  $\mathcal{G}^N$  le groupoïde  $r^*(N) := \{(v, \gamma) \in N \times \mathcal{G} : p(v) = r(\gamma)\}$  dont l'espace des unités est  $N$ .  $\mathcal{G}^N$  est un groupoïde de Lie et est étale si le groupoïde  $\mathcal{G}$  est étale.

L'élément  $\gamma$  de Kasparov est un outil utilisé pour démontrer dans certains cas la conjecture de Baum-Connes : cette conjecture propose de décrire la  $K$ -théorie de la  $C^*$ -algèbre réduite associée à un groupe ou un groupoïde. Dans le cas où le groupe  $H$  est connexe, Kasparov détermine un élément  $\gamma_H$  dans  $KK_H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  tel que

- $\gamma_H$  est un idempotent :  $\gamma_H \otimes \gamma_H = \gamma_H$
- $\gamma_H = 1_{\mathbb{C}}$  dans le cas où  $H$  est moyennable
- si  $K$  est le sous groupe compact maximal de  $H$ , alors l'homomorphisme de restriction  $rest_H^K : KK_H(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow KK_K(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  induit un isomorphisme de

$$Im(\gamma_H) := \{x \in KK_H(\mathbb{C}, \mathbb{C}) : x\gamma_H = \gamma_H x = x\} \rightarrow KK_K(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

- si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux groupes connexes et si on note  $p_i : H_1 \times H_2 \rightarrow H_i$  la projection canonique pour  $i$  dans  $\{1, 2\}$  alors  $\gamma_{H_1 \times H_2} = p_1^*(\gamma_{H_1}) \otimes p_2^*(\gamma_{H_2})$
- Soit  $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$  un homomorphisme propre de groupes, alors  $\varphi^*(\gamma_{H_1}) = \gamma_{H_2}$

On considère le cas où  $H = GL_n^+(\mathbb{R})$  le groupe connexe des matrices réelles à déterminant strictement positif pour lequel on note  $\gamma_n$  l'élément  $\gamma_{GL_n^+(\mathbb{R})}$ .

Soit  $E$  un  $\mathcal{G}$ -fibré vectoriel réel orienté pour lequel on note  $i : \mathcal{G} \rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$  le cocycle associé.

**Définition 4.1.8.** On note  $\gamma_E$  l'élément du groupe  $KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{G}))$  défini par

$$\gamma_E := i^*(\gamma_n)$$

En utilisant les caractéristiques de l'élément  $\gamma_H$  énoncées auparavant, on a la proposition :

**Proposition 4.1.9.** Soit  $E$  un  $\mathcal{G}$ -fibré vectoriel réel orienté. Les propriétés suivantes sont vérifiées

- a)  $\gamma_E$  est un idempotent
- b)  $\gamma_E = 1$  si le groupe de structure de  $E$  se réduit à un groupe moyennable
- c) Soit  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{G}$ -fibrés vectoriels réels orientés, alors  $\gamma_{E_1} \otimes \gamma_{E_2} = \gamma_E$

*Démonstration.* Voir la démonstration dans [HS87]. □

*Remarque 4.1.10.* Comme le fibré  $E \oplus E$  est canoniquement orienté et que l'on a  $\gamma_{E \oplus E} = \gamma_E$ , alors l'élément  $\gamma_E$  ne dépend pas de l'orientation de  $E$  et peut être défini pour les  $\mathcal{G}$ -fibrés réels (non nécessairement orientés) en posant  $\gamma_E = \gamma_{E \oplus E}$ .

On note  $\alpha'_n$  l'élément de  $KK_{M_n^c}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$  et  $\beta'_n$  dans  $KK_{M_n^c}(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^n))$  vérifiant

$$\beta'_n \otimes \gamma_{M_n^c} = \beta'_n \quad \text{et} \quad \gamma_{M_n^c} \otimes \alpha'_n = \alpha'_n$$

Si on applique l'homomorphisme de restriction  $rest_{M_n^c}^{Spin^c(n)}$  à  $\alpha'_n$  et respectivement à  $\beta'_n$ , on obtient  $\alpha_n$ , appelé élément de Bott, du groupe  $KK_{Spin^c(n)}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$  et respectivement  $\beta_n$ , appelé élément de Bott "inverse", du groupe  $KK_{Spin^c(n)}(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^n))$  construits par Kasparov et qui constituent une formulation de l'isomorphisme de Thom dans la théorie de Kasparov.

**Définition 4.1.11.** Soit  $E$  un  $\mathcal{G}$ -fibré vectoriel réel  $K$ -orienté pour lequel on note  $i : \mathcal{G} \rightarrow M_n^c$  le cocycle associé, alors on définit les éléments  $\alpha'_E$  de  $KK(C_r^*(\mathcal{G}^E), C_r^*(\mathcal{G}))$  et  $\beta'_E$  dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{G}^E))$  par

$$\alpha'_E := i^*(\alpha'_n) \quad \text{et} \quad \beta'_E := i^*(\beta'_n)$$

**Proposition 4.1.12.** On a les propriétés suivantes

- a)  $\gamma_E \otimes \beta'_E = \beta'_E$ ,  $\alpha'_E \otimes \gamma_E = \alpha'_E$  et  $\beta'_E \otimes \alpha'_E = \gamma_E$
- b) Soient  $E_1$  et  $E_2$  des  $\mathcal{G}$ -fibrés vectoriels réels orientés, alors

$$\beta'_{E_1 \oplus E_2} = \beta'_{E_1} \otimes \beta'_{E_2}$$

#### 4.1.2 Construction de Hilsum-Skandalis

On rappelle brièvement les constructions de Hilsum et Skandalis qui associent à tout morphisme  $K$ -orienté de classe  $C^\infty$   $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  entre les espaces (singuliers) de feuilles des feuilletages  $(V_1, F_1)$  et  $(V_2, F_2)$  un élément  $f_!$  de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$ , où  $C^*(V_i, F_i)$  est la  $C^*$ -algèbre du groupoïde d'holonomie du feuilletage  $(V_i, F_i)$ . Pour ce faire, les auteurs étudient le cas des immersions et des submersions à partir desquels ils définissent le cas général.

**Immersion :** dans le cas d'une immersion  $f : F_1/V_1 \rightarrow F_2/V_2$ , on se ramène à l'étude d'un homomorphisme strict de groupoïdes étales  $i : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  qui soient un immersion injective  $K$ -orientée, où  $\mathcal{G}_j$  est le groupoïde étale par restriction du groupoïde d'holonomie de  $(V_j, F_j)$  à une transversale fidèle  $T_j$  de la variété feuilletée  $(V_j, F_j)$ . L'élément  $f_!$  du groupe  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$  s'obtient directement de l'élément construit  $i_!$  du groupe  $KK(C^*(\mathcal{G}_1), C^*(\mathcal{G}_2))$  à l'aide du bimodule d'imprimitivité entre  $C^*(V_1, F_1)$  et  $C^*(\mathcal{G}_1)$  (un tel bimodule d'imprimitivité existe d'après [HS83]).

L'élément  $i_!$  est lui-même obtenu par un produit de Kasparov :  $i_! = \beta'_N \otimes \sigma$  où  $\beta'_N$  est l'élément de la définition 4.1.11 associé au fibré normal  $N$  de l'immersion  $T_1 \rightarrow T_2$  qui est un  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $K$ -orienté.

La construction de l'élément  $\sigma$  fait intervenir la notion de déformation au cône normal (que l'on détaille dans la prochaine section et que l'on utilise également dans notre construction). Au fibré  $\mathcal{G}_1$ -équivariant  $N$  est associé le groupoïde  $\mathcal{G}_1^N$  qui est aussi l'espace total du fibré normal de l'immersion  $i : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ . Hilsum et Skandalis définissent alors le groupoïde normal

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_1^N \times \{0\} \bigsqcup \mathcal{G}_2 \times ]0, 1]$$

dont la structure de variété, compatible avec la structure de groupoïde en fait un groupoïde de Lie étale. En notant  $h_0 : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{G}_1^N)$  et  $h_t : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{G}_2 \times ]0, 1])$ , pour  $0 < t \leq 1$

les homomorphismes d'évaluation, ils en déduisent alors la suite exacte de  $C^*$ -algèbres pleines de groupoïdes suivante

$$0 \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_2 \times ]0, 1]) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{h_0} C^*(\mathcal{G}_1^N) \longrightarrow 0$$

Hilsum et Skandalis supposent dans leur construction que le groupoïde  $\mathcal{G}_1$  est moyennable impliquant alors la moyennabilité du groupoïde  $\mathcal{G}_1^N$  et donc la nucléarité de la  $C^*$ -algèbre  $C^*(\mathcal{G}_1^N)$ . Du fait de la nucléarité de  $C^*(\mathcal{G}_1^N)$ , des propriétés de la  $KK$ -théorie vis-à-vis des suites exactes et de la contractibilité de la  $C^*$ -algèbre  $C^*(\mathcal{G}_2 \times ]0, 1])$ , l'homomorphisme de groupes de  $KK$ -théorie

$$KK^*(C^*(\mathcal{G}_1^N), C^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\otimes [h_0]} KK^*(C^*(\mathcal{G}_1^N), C^*(\mathcal{G}_1^N))$$

est un isomorphisme. L'élément  $[h_0]$  est inversible en  $KK$ -théorie et il existe donc  $[h_0]^{-1}$  dans  $KK(C^*(\mathcal{G}_1^N), C^*(\mathcal{G}))$  tel que  $[h_0] \otimes [h_0]^{-1} = 1_{\mathcal{G}}$  et  $[h_0]^{-1} \otimes [h_0] = 1_{\mathcal{G}_1^N}$ .

**Définition 4.1.13.** Soit  $i : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  un homomorphisme de groupoïdes étales qui est une immersion  $C^\infty$  injective et  $K$ -orientée. On suppose que  $C^*(\mathcal{G}_1)$  est nucléaire. On définit l'élément  $i_!$  de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$  à partir des éléments  $\beta'_N$  de  $KK(C^*(\mathcal{G}_1), C^*(\mathcal{G}_1^N))$ ,  $\sigma = [h_0]^{-1} \otimes [h_1]$  de  $KK(C^*(\mathcal{G}_1^N), C^*(\mathcal{G}_2))$  en posant

$$i_! = [\mathcal{E}_1] \otimes \beta'_N \otimes \sigma \otimes [\mathcal{E}_2]^{-1}$$

où, pour  $j \in \{1, 2\}$ ,  $[\mathcal{E}_j]$  est un élément inversible dans  $KK(C^*(V_j, F_j), C^*(\mathcal{G}_j))$  induit par  $\mathcal{E}_j$  le bimodule d'imprimitivité entre  $C^*(V_j, F_j)$  et  $C^*(\mathcal{G}_j)$ .

**Proposition 4.1.14.** Soient  $i_3 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  et  $i_1 : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3$  deux homomorphismes de groupoïdes étales vérifiant les conditions de 4.1.13 et on note  $i_2 = i_1 \circ i_3$ . Alors on a  $(i_2)_! = (i_3)_! \otimes (i_1)_!$ .

**Submersion :** dans le cas d'une submersion  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$ , le feuilletage  $F_2$  se ramène en arrière par  $f$  en un feuilletage  $F'_2 := f^{-1}F_2$  sur  $V_1$ , avec  $F_1 \subset F'_2$ , et il suffit alors d'étudier le double feuilletage de  $V_1$  ainsi que l'application étale  $V_1/F'_2 \rightarrow V_2/F_2$ .

D'après l'article [CS84], on associe, à l'application étale  $V_1/F'_2 \rightarrow V_2/F_2$ , un  $C^*(V_2, F_2)$ -module de Hilbert, noté  $\mathcal{E}_f$  sur lequel la  $C^*$ -algèbre  $C^*(V_1, F'_2)$  agit par opérateurs compacts et définit donc un élément  $\varepsilon_f$  du groupe  $KK(C^*(V_1, F'_2), C^*(V_2, F_2))$ .

Le cas du double feuilletage de  $V_1$  par  $F_1 \subset F'_2$  se fait en considérant tout d'abord le cas où le  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $F'_2/F_1$  est muni d'une structure presque isométrique. La  $K$ -orientation de  $F'_2/F_1$  induit l'existence d'un  $\mathcal{G}_1$ -fibré complexe hermitien  $S$ . Hilsum et Skandalis construisent alors un  $C^*(V_1, F'_2)$ -module de Hilbert, noté  $\mathcal{E}_S$ , une représentation de  $C^*(V_1, F_1)$  dans  $\mathcal{E}_S$  et d'un opérateur  $D$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{E}_S)$  tel que  $(\mathcal{E}_S, D)$  est un bimodule de Kasparov qui induit un élément de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_1, F'_2))$ . L'élément  $f_!$  de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$  est défini par le bimodule de Kasparov  $(\mathcal{E}_S \otimes \mathcal{E}_f, D \otimes 1)$ .

Pour traiter le cas général où l'application  $K$ -orientée  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  n'est pas nécessairement presque isométrique, Hilsum et Skandalis considèrent le  $\mathcal{G}_1$ -fibré des formes quadratiques sur  $F'_2/F_1$  muni d'un certain feuilletage  $F'_1$  tel que l'application induite  $f' : W/F'_1 \rightarrow V_2/F_2$  est  $K$ -orientée et presque isométrique, définissant alors un élément  $f'_!$  de  $KK(C^*(W, F'_1), C^*(V_2, F_2))$ .

**Définition 4.1.15.** Soit  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  une submersion  $K$ -orientée entre espace de feuilles de feuilletage. L'élément  $f_!$  de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(V_2, F_2))$  est défini par  $f_! = \tilde{\beta}' \otimes f'_!$  où  $\tilde{\beta}'$  est un élément de  $KK(C^*(V_1, F_1), C^*(W, F'_1))$ , obtenu d'une manière analogue à celui de 4.1.11.

**Proposition 4.1.16.** Soient  $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  et  $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$  deux submersions  $K$ -orientées et on note  $f_2 = f_1 \circ f_3$ . Alors on a  $(f_2)_! = (f_3)_! \otimes (f_1)_!$ .

**Cas général :** on considère  $f : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  une application  $K$ -orientée et de classe  $C^\infty$ . L'application admet des factorisations de type  $f = p \circ i$  où  $i : V_1/F_1 \rightarrow V/F$  (respectivement  $p : V/F \rightarrow V_2/F_2$ ) est une immersion (respectivement submersion)  $K$ -orientée pour laquelle a été défini un élément  $i_!$  (respectivement  $p_!$ ). On serait alors tenté de définir  $f_!$  en posant  $f_! := i_! \otimes p_!$ . Il s'agit alors de voir :

- (a) a-t-on  $i_! \otimes p_! = i'_! \otimes p'_!$  pour deux factorisations différentes de  $f$  ?
- (b) pour  $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  et  $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$  applications  $K$ -orientées et  $C^\infty$ , a-t-on  $(f_1 \circ f_3)_! = (f_3)_! \otimes (f_1)_!$  ?

On rappelle que le groupoïde étale  $\mathcal{G}_1$ , utilisé dans le cas de l'immersion est moyennable ce qui équivaut à la nucléarité de  $C^*(\mathcal{G}_1)$ .

**Proposition 4.1.17.** Soit

$$\begin{array}{ccc}
 & V/F & \\
 i \nearrow & & \searrow p \\
 V_1/F_1 & & V_2/F_2 \\
 i' \searrow & & \nearrow p' \\
 & V'/F' &
 \end{array}$$

un diagramme commutatif d'applications  $K$ -orientées où  $i, i'$  sont des immersions et  $p, p'$  des submersions, alors

$$\gamma_{N_{i'}} \otimes i_! \otimes p_! = \gamma_{N_i} \otimes i'_! \otimes p'_!$$

où  $N_i$  est le fibré normal de l'immersion  $i$  et  $N_{i'}$  est le fibré normal de l'immersion  $i'$ .

La démonstration de cette proposition se trouve dans [HS87] et on voit que ce résultat montre qu'il n'y a à priori pas de définition naturelle pour  $f_!$  dans le cas général à moins de savoir que  $\gamma_N = 1$  pour tout  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $N$ . Puisque le groupoïde  $\mathcal{G}_1$  est supposé moyennable dans la construction de [HS87], les auteurs donne la conjecture suivante

**Conjecture 1.** Si  $\mathcal{G}_1$  est moyennable, alors pour tout  $\mathcal{G}_1$ -fibré  $E$ , on a  $\gamma_E = 1$ .

*Remarque 4.1.18.* Si cette conjecture est vraie :

- (a) on remarque que pour toute factorisation  $f = p \circ i = p' \circ i'$  vérifiant les conditions de la proposition 4.1.17, on a l'égalité  $i'_! \otimes p'_! = i_! \otimes p_!$ , ce qui prouve que  $f_!$  ne dépend pas de la factorisation choisie.
- (b) Hilsum et Skandalis prouvent que pour toutes applications  $f_3 : V_1/F_1 \rightarrow V_2/F_2$  et  $f_1 : V_2/F_2 \rightarrow V_3/F_3$   $K$ -orientées, on obtient  $(f_3 \circ f_1)_! = (f_1)_! \otimes (f_3)_!$

On prouve dans la partie suivante que cette conjecture est vérifiée : on utilise pour cela la  $KK$ -théorie équivariante par rapport aux groupoïdes construite par Le Gall dans [LG99] qui est résumé dans [LG97]. Le résultat que nous prouvons est un peu plus général que l'énoncé de la conjecture 1 qui en est un cas particulier.

### 4.1.3 Groupoïdes moyennables et $KK$ -théorie équivariante

Dans cette section, les groupoïdes considérés sont séparés, localement compact  $\sigma$ -compact et munis d'un système de Haar. L'objectif est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 4.1.26 1.** Soit  $f$  un morphisme généralisé du groupoïde  $\mathcal{G}$  vers le groupoïde  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{G}$  est moyennable et si le groupoïde  $\mathcal{H}$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{H}}$ , alors  $f^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$ .

**Espace classifiant :** on rappelle la définition d'un espace classifiant pour les actions propres de groupoïdes et on donne la construction d'un tel espace universel pour certains groupoïdes.

**Définition 4.1.19.** Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde. Un espace  $\underline{E}\mathcal{G}$  est dit universel pour les actions propres de  $\mathcal{G}$  si  $\underline{E}\mathcal{G}$  est un espace séparé, localement compact  $\sigma$ -compact et muni d'une action propre du groupoïde  $\mathcal{G}$  et pour tout espace  $Z$  séparé, localement compact  $\sigma$ -compact et muni d'une action propre du groupoïde  $\mathcal{G}$ , il existe une application continue  $\mathcal{G}$ -équivariante  $Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{G}$ , unique à homotopie  $\mathcal{G}$ -équivariante près.

**Lemme 4.1.20.** Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde,  $Z$  un  $\mathcal{G}$ -espace séparé localement compact et  $\sigma$ -compact dont l'application momentum est notée  $\rho : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ . Soit  $p : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  une application continue où  $Y$  est un espace topologique séparé localement compact et  $\sigma$ -compact. Le groupoïde  $Z \rtimes \mathcal{G}$  est Morita équivalent au groupoïde  $(Y *_{p,\rho} Z) \rtimes \mathcal{G}[Y]$ . De plus  $Z \rtimes \mathcal{G}$  est propre si et seulement si  $(Y *_{p,\rho} Z) \rtimes \mathcal{G}[Y]$  est propre.

*Démonstration.* On note  $T$  l'espace topologique  $Y *_{p,\rho} Z$ . Les groupoïdes  $Z \rtimes \mathcal{G}$  et  $Y *_{p,\rho} Z \rtimes \mathcal{G}[Y]$  ont pour espaces des unités respectifs  $Z$  et  $Y *_{p,\rho} Z$ . On considère  $f_1 : T \rightarrow Z$  la projection sur la deuxième composante et  $f_2 : T \rightarrow Y *_{p,\rho} Z$  l'application identité. Les applications  $f_1$  et  $f_2$  sont continues, ouvertes et surjectives. On a

$$T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) = \left\{ ((y, z), (y, \gamma, y'), (y', z')) \in T \times \mathcal{G}[Y] \times T : p(y) = r(\gamma) \text{ et } p(y') = s(\gamma) \right\}$$

Comme  $\left( T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) \right) [T]$  est un groupoïde dont l'espace des unités est  $T$ , on a alors

$$\left( T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) \right) [T] = T \rtimes (\mathcal{G}[Y])$$

D'autre part, on a

$$(Z \rtimes \mathcal{G})[T] = \left\{ ((y, z), (z, \gamma), (y', z')) \in T \times (Z \rtimes \mathcal{G}) \times T : z' = z\gamma \right\}$$

On considère l'application  $\phi : (Z \rtimes \mathcal{G})[T] \rightarrow \left( T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) \right) [T]$  définie, pour tout élément  $((y, z), (z, \gamma), (y', z'))$  dans  $(Z \rtimes \mathcal{G})[T]$  par

$$\phi((y, z), (z, \gamma), (y', z')) = ((y, z), (y, \gamma, y'), (y', z'))$$

L'application  $\phi$  est clairement un homomorphisme de groupoïdes et l'homomorphisme  $\psi : \left( T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) \right) [T] \rightarrow (Z \rtimes \mathcal{G})[T]$  définie pour tout  $((y, z), (y, \gamma, y'), (y', z'))$  dans  $\left( T \rtimes (\mathcal{G}[Y]) \right) [T]$ , par  $\psi((y, z), (y, \gamma, y'), (y', z')) = ((y, z), (z, \gamma), (y', z'))$  est l'homomorphisme inverse de  $\phi$ . Les applications  $f_1$  et  $f_2$  étant continues, ouvertes et surjectives, en utilisant la proposition 1.1.32, on conclut que les groupoïdes  $Z \rtimes \mathcal{G}$  et  $(Y *_{p,\rho} Z) \rtimes \mathcal{G}[Y]$  sont Morita-équivalents.

D'après la proposition 2.36 de [Tu04], le groupoïde  $Z \rtimes \mathcal{G}$  est propre si et seulement si le groupoïde  $(Y *_{p,\rho} Z) \rtimes \mathcal{G}[Y]$  est propre. □

**Proposition 4.1.21.** *Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde et  $\underline{EG}$  l'espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}$ . Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  et on note  $Y = \coprod_i U_i$  la réunion disjointe des ouverts du recouvrement, alors*

$$\underline{EG} \times_{\pi,p} Y := \{(z, x_i) \in \underline{EG} \times Y : \pi(z) = p(x_i)\}$$

où  $p : \mathcal{G}[Y] \rightarrow \mathcal{G}$  et  $\pi : \underline{EG} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ , est un espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}[Y]$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 4.1.20, le groupoïde  $\underline{EG} \rtimes \mathcal{G}$  est Morita-équivalent au groupoïde  $(\underline{EG} *_{\pi,p} Y) \rtimes \mathcal{G}[Y]$  et  $(\underline{EG} *_{\pi,p} Y) \rtimes \mathcal{G}[Y]$  est un groupoïde propre. L'espace  $\underline{EG} *_{\pi,p} Y$  est séparé, localement compact,  $\sigma$ -compact et muni d'une action propre du groupoïde  $\mathcal{G}[Y]$ .

Soit  $Z$  un espace séparé localement compact  $\sigma$ -compact sur lequel agit proprement le groupoïde  $\mathcal{G}[Y]$ . On note  $\rho : Z \rightarrow Y$  l'application induite par l'action de  $\mathcal{G}[Y]$  sur  $Z$  et  $\rho' := p \circ \rho$  et  $Z \times_{\rho',r} \mathcal{G} := (p \circ \rho, r)^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}^{(0)}})$  qui est un sous espace séparé, localement compact  $\sigma$ -compact et qui est fermé dans  $Z \times \mathcal{G}$ . Le groupoïde  $\mathcal{G}[Y]$  agit à gauche sur  $Z \times_{\rho',r} \mathcal{G}$ , en posant,  $(x_i, \eta, x_j).(z, \gamma) = (z(x_i, \eta, x_j), p(\eta)^{-1}\gamma)$ , pour tout  $(z, \gamma) \in Z \times_{\rho',r} \mathcal{G}$  et tout  $(x_i, \eta, x_j) \in \mathcal{G}[Y]$  tel que  $\rho(z) = x_i$ . Cette action de  $\mathcal{G}[Y]$  est propre.

L'espace des orbites de l'action de  $\mathcal{G}[Y]$  sur l'espace  $Z \times_{\rho',r} \mathcal{G}$  est noté  $Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G}$ . L'action de  $\mathcal{G}[Y]$  étant propre, alors, d'après la proposition 1.1.16, l'espace  $Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G}$  est un espace séparé, localement compact  $\sigma$ -compact. Le groupoïde  $\mathcal{G}$  agit à droite sur l'espace  $Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G}$  en posant  $(z, \gamma).\eta := (z, \gamma\eta)$ , où  $(z, \gamma) \in Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G}$  et  $\eta \in \mathcal{G}$ , avec  $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(2)}$ . Cette action de  $\mathcal{G}$  est propre.

L'espace  $\underline{EG}$  étant l'espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}$ , il existe une application  $\mathcal{G}$ -équivariante (unique à homotopie  $\mathcal{G}$ -équivariante près)  $f : Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G} \rightarrow \underline{EG}$ . On note  $i : Z \rightarrow Z \times_{\mathcal{G}[Y]} \mathcal{G}$  telle que  $i(z) = (z, \rho'(z))$ , pour tout  $z \in Z$ , et on pose  $f : Z \rightarrow \underline{EG} * Y$  l'application définie pour tout  $z$  dans  $Z$  par  $f(z) = (\tilde{f}(i(z)), \rho(z))$ . Pour tout  $z$  dans  $Z$  et tout  $(x_i, \gamma, x_j) \in \mathcal{G}[Y]$  tels que  $\rho(z) = x_i$ , on a

$$\begin{aligned} f(z.(x_i, \gamma, x_j)) &= (\tilde{f}(i(z)), p \circ \rho(z.(x_i, \gamma, x_j))) = (\tilde{f}(z.(x_i, \gamma, x_j), p(x_j)), x_j) \\ &= (\tilde{f}(z, p(\gamma)p(x_j)), x_j) = (\tilde{f}(z, \gamma), x_j) = (\tilde{f}(z, p(x_i)).\gamma, x_j) \\ &= (\tilde{f}(z, p(x_i))x_i).(x_i, \gamma, x_j) = f(z).(x_i, \gamma, x_j) \end{aligned}$$

donc  $f$  est une application  $\mathcal{G}[Y]$ -équivariante.

On remarque que pour toute application  $f : Z \rightarrow \underline{EG} * Y$  qui est  $\mathcal{G}[Y]$ -équivariante, on peut écrire  $f(z) = (\tilde{f}(z), \rho(z))$ , pour  $z$  dans  $Z$ .

On considère, pour  $i \in \{1, 2\}$ , deux applications  $\mathcal{G}[Y]$ -équivariantes  $f_i : Z \rightarrow \underline{EG} * Y$ . On note  $(f_1, f_2) : Z \rightarrow (\underline{EG} \times_{\pi} \underline{EG}) \times_{\pi,p} Y : z \mapsto ((\tilde{f}_1(z), \tilde{f}_2(z)), \rho(z))$  et on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{EG} * Y \\ & \nearrow f_1 & \uparrow pr_1 \times id \\ Z & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & (\underline{EG} \times_{\pi} \underline{EG}) \times_{\pi,p} Y \\ & \searrow f_2 & \downarrow pr_2 \times id \\ & & \underline{EG} * Y \end{array}$$

où  $pr_i : \underline{EG} \times \underline{EG} \rightarrow \underline{EG}$  est la projection sur la  $i$ -ième composante, avec  $i \in \{1, 2\}$ . L'espace  $\underline{EG}$  étant le classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}$ , les applications  $\mathcal{G}$ -équivariantes  $pr_1$  et  $pr_2$  sont  $\mathcal{G}$ -homotopes. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , les applications  $pr_i \times id : (\underline{EG} \times \underline{EG}) \times_{\pi, p} Y \rightarrow \underline{EG} * Y$  sont  $\mathcal{G}[Y]$ -équivariantes et  $\mathcal{G}[Y]$ -homotopes. Par conséquent, les applications  $\mathcal{G}[Y]$ -équivariantes  $f_1$  et  $f_2$  sont  $\mathcal{G}$ -homotopes.

L'espace  $\underline{EG} * Y$  est un espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}[Y]$ . □

**Element  $\gamma$  de Kasparov :** on rappelle la définition de l'élément  $\gamma$  de Kasparov pour un groupoïde et on utilise les propriétés connues des espaces classifiants pour les actions propres et celles de l'élément  $\gamma$  pour les groupoïde pour prouver le théorème 4.1.26 .

**Définition 4.1.22.** Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  un groupoïde,  $\underline{EG}$  l'espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}$ ,  $\pi : \underline{EG} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  l'application correspondant à l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\underline{EG}$ . On dit que  $\mathcal{G}$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{G}}$ , s'il existe une  $\underline{EG} \rtimes \mathcal{G}$ -algèbre  $A$  et des éléments  $\eta_{\mathcal{G}} \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), A)$  et  $D_{\mathcal{G}} \in KK_{\mathcal{G}}(A, C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$  tels que  $\pi^*(\eta_{\mathcal{G}} \otimes_A D_{\mathcal{G}}) = 1 \in KK_{\underline{EG} \rtimes \mathcal{G}}(C_0(\underline{EG}), C_0(\underline{EG}))$ .

**Lemme 4.1.23.** Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows X$  un groupoïde,  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un recouvrement ouvert de  $X$  et on note  $Y := \coprod_i U_i$  et  $p : Y \rightarrow X$  l'application continue, ouverte et surjective. Si  $\mathcal{G}$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, alors  $\mathcal{G}[Y]$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov et  $\gamma_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(\gamma_{\mathcal{G}})$ .

*Démonstration.* Soit  $\underline{EG}$  le classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}$  et  $\pi : \underline{EG} \rightarrow X$  l'application associée à l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\underline{EG}$ . Il existe  $\mathcal{D}$  une  $\underline{EG} \rtimes \mathcal{G}$ -algèbre et des éléments  $\eta_{\mathcal{G}} \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(X), \mathcal{D})$  et  $D_{\mathcal{G}} \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{D}, C_0(X))$  tels que  $\gamma_{\mathcal{G}} = \eta_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{D}} D_{\mathcal{G}}$  vérifie  $\pi^*(\gamma_{\mathcal{G}}) = 1 \in KK_{\underline{EG} \rtimes \mathcal{G}}(C_0(\underline{EG}), C_0(\underline{EG}))$ .

On note  $p : \mathcal{G}[Y] \rightarrow \mathcal{G}$  l'homomorphisme strict canonique. D'après le théorème 7.1 de [LG99], pour toutes  $\mathcal{G}[Y]$ -algèbres  $A$  et  $B$ , l'application  $p^* : KK_{\mathcal{G}}(p_!A, p_!B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}[Y]}(A, B)$  est un isomorphisme de groupes. En prenant  $A = B = C_0(Y)$ , on a  $p_!A = C_0(X)$  et on obtient l'isomorphisme de groupes

$$p^* : KK_{\mathcal{G}}(C_0(X), C_0(X)) \rightarrow KK_{\mathcal{G}[Y]}(C_0(Y), C_0(Y))$$

On note  $\eta_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(\eta_{\mathcal{G}})$  élément de  $KK_{\mathcal{G}[Y]}(C_0(\coprod_i U_i), p^*\mathcal{D})$  et  $D_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(D_{\mathcal{G}})$  élément de  $KK_{\mathcal{G}[Y]}(p^*\mathcal{D}, C_0(Y))$ . La  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{D}$  est une  $C_0(\underline{EG})$ -algèbre et  $C_0(Y)$  est une  $C_0(Y)$ -algèbre. Par définition,  $p^*\mathcal{D} = \mathcal{D} \otimes_{C_0(X)} C_0(Y)$ , on peut donc lui donner une structure de  $C_0(\underline{EG}) \otimes_{C_0(X)} C_0(Y)$ -algèbre. Par construction, les  $C^*$ -algèbres  $C_0(\underline{EG}) \otimes_{C_0(X)} C_0(Y)$  et  $C_0(\underline{EG} \times_{\pi, p} Y)$  sont isomorphes et l'espace  $\underline{EG} \times_{\pi, p} Y$  est classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{G}[Y]$ . On note  $\pi_Y : \underline{EG} \times_{\pi, p} Y \rightarrow Y$  l'application induite par l'action de  $\mathcal{G}[Y]$ . La  $C^*$ -algèbre  $p^*\mathcal{D}$  est munie de structures de  $\mathcal{G}[Y]$ -algèbre et de  $C_0(\underline{EG} \times_{\pi, p} Y)$ -algèbre qui sont compatibles.

Si on note  $p_1 : \underline{EG} \times_{\pi, p} Y \rightarrow \underline{EG}$  la projection canonique sur la première composante, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{EG} \times_{\pi, p} Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ \underline{EG} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

et par functorialité par rapport au produit de Kasparov,

$$\begin{aligned}\pi_Y^*(\eta_{\mathcal{G}[Y]} \otimes_{p^*\mathcal{D}} D_{\mathcal{G}[Y]}) &= \pi_Y^*(p^*(\eta_{\mathcal{G}} \otimes D_{\mathcal{G}})) \\ &= p_1^*(\pi^*(\eta_{\mathcal{G}}) \otimes \pi^*(D_{\mathcal{G}})) = 1\end{aligned}$$

Il existe une  $(\underline{E}\mathcal{G} \times_{\pi,p} Y) \rtimes \mathcal{G}[Y]$ -algèbre  $p^*\mathcal{D}$  et des éléments  $\eta_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(\eta_{\mathcal{G}})$  appartenant à  $KK_{\mathcal{G}[Y]}(C_0(Y), p^*\mathcal{D})$  et  $D_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(D_{\mathcal{G}})$  appartenant à  $KK_{\mathcal{G}}(p^*\mathcal{D}, C_0(Y))$  tels que l'élément

$$\pi_Y^*(\eta_{\mathcal{G}[Y]} \otimes_{p^*\mathcal{D}} D_{\mathcal{G}[Y]}) \in KK_{\underline{E}\mathcal{G} \times_{\pi,p} Y \rtimes \mathcal{G}[Y]}(C_0(\underline{E}\mathcal{G} \times_{\pi,p} Y), C_0(\underline{E}\mathcal{G} \times_{\pi,p} Y))$$

est l'élément neutre du groupe de Kasparov.

Ainsi le groupoïde  $\mathcal{G}[Y]$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{G}[Y]}$ , et on a

$$\gamma_{\mathcal{G}[Y]} = \eta_{\mathcal{G}[Y]} \otimes_{p^*\mathcal{D}} D_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(\gamma)$$

□

**Lemme 4.1.24.** *Soient  $\mathcal{G}_i \rightrightarrows X_i$  des groupoïdes pour  $i \in \{1, 2\}$ . Si chaque groupoïde  $\mathcal{G}_i$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{G}_i}$ , alors le groupoïde  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \rightrightarrows X_1 \times X_2$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}$  et on a  $\gamma_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2} = pr_1^*(\gamma_{\mathcal{G}_1}) \otimes pr_2^*(\gamma_{\mathcal{G}_2})$ , où  $pr_i : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_i$  est la projection sur  $\mathcal{G}_i$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, 2$ , on note  $\underline{E}\mathcal{G}_i$  l'espace classifiant pour les actions propres de  $\mathcal{G}_i$  et  $\pi_i : \underline{E}\mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}_i^{(0)}$ . Il existe une  $\underline{E}\mathcal{G}_i \rtimes \mathcal{G}_i$ -algèbre  $A_i$  et des éléments  $\eta_i$  appartenant à  $KK_{\mathcal{G}_i}(C_0(X_i), A_i)$  et  $D_i$  appartenant à  $KK_{\mathcal{G}_i}(A_i, C_0(X_i))$  tels que  $\pi_i^*(\eta_i \otimes D_i) = 1$  dans  $KK_{\underline{E}\mathcal{G}_i \rtimes \mathcal{G}_i}(C_0(\underline{E}\mathcal{G}_i), C_0(\underline{E}\mathcal{G}_i))$ .

On montre que l'espace  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$  est un espace classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ . L'espace  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$  est localement compact  $\sigma$ -compact car les espaces  $\underline{E}\mathcal{G}_1$  et  $\underline{E}\mathcal{G}_2$  le sont. Le groupoïde produit  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  agit sur  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$  et on a un isomorphisme de groupoïdes

$$(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2) \rtimes (\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \xrightarrow{\cong} (\underline{E}\mathcal{G}_1 \rtimes \mathcal{G}_1) \times (\underline{E}\mathcal{G}_2 \rtimes \mathcal{G}_2)$$

D'après la proposition 1.1.14,  $(\underline{E}\mathcal{G}_1 \rtimes \mathcal{G}_1) \times (\underline{E}\mathcal{G}_2 \rtimes \mathcal{G}_2)$  est propre comme produit de groupoïdes propres donc  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  agit proprement sur l'espace  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$ .

Soit  $Z$  un espace localement compact sur lequel agit proprement le groupoïde  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ . L'espace  $Z$  admet alors une action canonique de  $\mathcal{G}_i$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , qui est aussi propre. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , il existe une application  $f_i : Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{G}_i$  continue  $\mathcal{G}_i$ -équivariante et unique à homotopie  $\mathcal{G}_i$ -équivariante près. On pose  $f_1 \times f_2 : Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$  est une application  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ -équivariante et continue et unique à homotopie  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ -équivariante près. Donc  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$  est l'espace classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $pr_i : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_i$  la projection sur la  $i$ -ième composante. On a  $pr_i^*C_0(X_i) = C_0(X_1 \times X_2)$  et  $pr_i^*(\gamma_i)$  est un élément de  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(pr_i^*C_0(X_i), pr_i^*C_0(X_i))$  c'est-à-dire de  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(C_0(X_1 \times X_2), C_0(X_1 \times X_2))$ . On note  $(\gamma_1, \gamma_2) := pr_1^*(\gamma_1) \otimes pr_2^*(\gamma_2)$  et on a, par les propriétés du produit de Kasparov,

$$\begin{aligned}(\gamma_1, \gamma_2) &= pr_1^*(\eta_1 \otimes_{A_1} D_1) \otimes_{C_0(X_1 \times X_2)} pr_2^*(\eta_2 \otimes_{A_2} D_2) \\ &= (pr_1^*(\eta_1) \otimes_{A_1} pr_1^*(D_1)) \otimes_{C_0(X_1 \times X_2)} (pr_2^*(\eta_2) \otimes_{A_2} pr_2^*(D_2)) \\ &= pr_1^*(\eta_1) \otimes_{A_1} (pr_1^*(D_1) \otimes_{C_0(X_1 \times X_2)} pr_2^*(\eta_2)) \otimes_{A_2} pr_2^*(D_2) \\ &= pr_1^*(\eta_1) \otimes_{A_1} (\tau_{pr_1^*A_1}(pr_2^*(\eta_2)) \otimes_{pr_1^*A_1 \otimes pr_2^*A_2} (\tau_{pr_2^*A_2}(pr_1^*(D_1)))) \otimes_{A_2} pr_2^*(D_2) \\ &= (pr_1^*(\eta_1) \otimes_{A_1} \tau_{pr_1^*A_1}(pr_2^*(\eta_2))) \otimes_{pr_1^*A_1 \otimes pr_2^*A_2} (\tau_{pr_2^*A_2}(pr_1^*(D_1)) \otimes_{A_2} pr_2^*(D_2)) \\ &= \tilde{\eta} \otimes_{pr_1^*A_1 \otimes pr_2^*A_2} \tilde{D}\end{aligned}$$

où  $\tilde{\eta}$  est un élément de  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(C_0(X_1 \times X_2), pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2)$ ,  $\tilde{D}$  est élément de  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2, C_0(X_1 \times X_2))$  et  $pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2$  est une  $(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2) \rtimes (\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ -algèbre.

On montre que le  $(\pi_1 \times \pi_2)^*((\gamma_1, \gamma_2)) = 1$  : en considérant les applications canoniques, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\sigma_i} & \underline{E}\mathcal{G}_i \\ \pi_1 \times \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ X_1 \times X_2 & \xrightarrow{pr_i} & X_i \end{array}$$

et on a, en  $KK$ -théorie de Kasparov, l'égalité

$$(\pi_1 \times \pi_2)^*(pr_i^*(\gamma_i)) = p_i^*(\pi_i^*(\gamma_i))$$

et

$$\begin{aligned} (\pi_1 \times \pi_2)^*((\gamma_1, \gamma_2)) &= (\pi_1 \times \pi_2)^*(pr_1^*(\gamma_1) \otimes pr_2^*(\gamma_2)) \\ &= (\pi_1 \times \pi_2)^*(pr_1^*(\gamma_1)) \otimes (\pi_1 \times \pi_2)^*(pr_2^*(\gamma_2)) \\ &= p_1^*(\pi_1^*(\gamma_1)) \otimes p_2^*(\pi_2^*(\gamma_2)) = p_1^*(1) \otimes p_2^*(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soient  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  deux groupoïde étales, tel qu'il existe un élément  $\gamma_1$  pour  $\mathcal{G}_1$  et  $\gamma_2$  pour  $\mathcal{G}_2$ , alors il existe une  $(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2) \rtimes (\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ -algèbre,  $pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2$ , et des éléments  $\tilde{\eta}$  dans  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(C_0(X_1 \times X_2), pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2)$  et  $\tilde{D}$  dans  $KK_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2}(pr_1^* A_1 \otimes pr_2^* A_2, C_0(X_1 \times X_2))$  tel que

$$(\pi_1 \times \pi_2)^*(\tilde{\eta} \otimes \tilde{D}) = 1 \in KK_{(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2) \rtimes (\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)}(C_0(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2), C_0(\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2))$$

pour  $\pi_1 \times \pi_2 : \underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  l'application correspondant à l'action de  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  sur  $\underline{E}\mathcal{G}_1 \times \underline{E}\mathcal{G}_2$ . □

**Lemme 4.1.25.** *Soient  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  et  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$  des groupoïdes et  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un homomorphisme strict et propre de groupoïdes. Si  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  possèdent un élément  $\gamma$  de Kasparov, notés respectivement  $\gamma_{\mathcal{G}}$  et  $\gamma_{\mathcal{H}}$ , alors on a  $h^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = \gamma_{\mathcal{G}}$ .*

*Démonstration.* On note  $\underline{E}\mathcal{H}$  l'espace classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{H}$ . On note  $\pi : \underline{E}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$  l'application associée à l'action du groupoïde  $\mathcal{H}$  sur  $\underline{E}\mathcal{H}$ . On considère  $\underline{E}\mathcal{H}'$  le sous espace fermé de  $\underline{E}\mathcal{H}$  défini de la manière suivante

$$\underline{E}\mathcal{H}' := \pi^{-1}(h(\mathcal{G}^{(0)})) := \{z \in \underline{E}\mathcal{H} : \pi(z) \in h(\mathcal{G}^{(0)})\}$$

Par construction, l'espace  $\underline{E}\mathcal{H}'$  est un espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact.

On note  $\pi' : \underline{E}\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  l'application canonique continue et on munit  $\underline{E}\mathcal{H}'$  d'une action continue à droite du groupoïde  $\mathcal{G}$  à partir de l'action de  $\mathcal{H}$  sur  $\underline{E}\mathcal{H}$  : pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  et tout  $z$  dans  $\underline{E}\mathcal{H}'$  tel que  $\pi'(z) = r(\gamma)$ , on pose

$$z \cdot \gamma = z \cdot h(\gamma)$$

On montre que l'espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact  $\underline{E}\mathcal{H}'$  est l'espace classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire

- (1) l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\underline{E}\mathcal{H}'$  est propre  
 (2) pour tout  $\mathcal{G}$ -espace propre  $Z$ , localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact, il existe une application  $\mathcal{G}$ -équivariante  $Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}'$ , unique à homotopie  $\mathcal{G}$ -équivariante près.

(1) On note  $b : \underline{E}\mathcal{H}' \rtimes \mathcal{G} \rightarrow \underline{E}\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H}$  l'application définie pour tout  $(z, \gamma)$  dans  $\underline{E}\mathcal{H}' \rtimes \mathcal{G}$  par  $b(z, \gamma) = (z, h(\gamma))$ . C'est une application continue et propre car l'inclusion  $\underline{E}\mathcal{H}' \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}$  et l'homomorphisme  $h$  sont propres. On note  $d : \underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}' \rightarrow \underline{E}\mathcal{H} \times \underline{E}\mathcal{H}$  l'inclusion canonique. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}\mathcal{H}' \rtimes \mathcal{G} & \xrightarrow{a} & \underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}' \\ \downarrow b & & \downarrow d \\ \underline{E}\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H} & \xrightarrow{c} & \underline{E}\mathcal{H} \times \underline{E}\mathcal{H} \end{array}$$

où les applications  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont propres. L'application  $a : \underline{E}\mathcal{H}' \rtimes \mathcal{G} \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}'$  est alors propre et l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\underline{E}\mathcal{H}'$  est propre.

(2) Soit  $Z$  un espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact sur lequel le groupoïde  $\mathcal{G}$  agit proprement et  $p : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  l'application. On pose  $Z * \mathcal{H}$  l'espace défini par

$$Z * \mathcal{H} := Z *_{h \circ p, r} \mathcal{H} = \{(z, \gamma) \in Z \times \mathcal{H} : h \circ p(z) = r(\gamma)\}$$

qui, par construction, est un espace localement compact, séparé et  $\sigma$ -compact. On définit une action continue à gauche du groupoïde  $\mathcal{G}$  de la manière suivante :  $g.(z, \gamma) = (z.g, h(g^{-1})\gamma)$ , pour tout  $(z, \gamma)$  dans  $Z * \mathcal{H}$  et tout  $g$  dans  $\mathcal{G}$  tels que  $r(\gamma) = r(g)$ . L'action de  $\mathcal{G}$  sur  $Z * \mathcal{H}$  est propre : en effet on considère  $K$  un sous espace compact de  $Z * \mathcal{H}$  et on note  $pr_1 : Z * \mathcal{H} \rightarrow Z$  l'application continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante qui consiste en la projection sur la première composante. L'image  $pr_1(K)$  est un sous espace compact de  $Z$ . L'action de  $\mathcal{G}$  sur  $Z$  étant propre, l'espace  $\{g \in \mathcal{G} : pr_1(K)g \cap pr_1(K) \neq \emptyset\}$  est compact dans  $\mathcal{G}$ . Comme  $\{g \in \mathcal{G} : g.K \cap K \neq \emptyset\}$  est un sous espace fermé de  $\{g \in \mathcal{G} : pr_1(K)g \cap pr_1(K) \neq \emptyset\}$ , alors il est compact. Ainsi l'action du groupoïde  $\mathcal{G}$  sur  $Z * \mathcal{H}$  est propre.

On note  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  l'espace des orbites de l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $Z * \mathcal{H}$ . D'après la proposition 1.1.16, le groupoïde  $\mathcal{G} \times (Z * \mathcal{H})$  étant propre, l'espace des orbites  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  est localement compact,  $\sigma$ -compact et séparé.

Le groupoïde  $\mathcal{H}$  agit à droite sur l'espace  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  en posant pour tout  $(z, \gamma)$  dans  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  et tout  $\gamma'$  dans  $\mathcal{H}$ ,  $(z, \gamma).\gamma' = (z, \gamma\gamma')$ . Le groupoïde  $\mathcal{H}$  étant séparé, l'action de  $\mathcal{H}$  sur lui-même est propre. On note  $pr_2 : Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  la projection sur la deuxième composante. Pour tout sous espace compact  $K$  de  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ , l'image  $pr_2(K)$  est un sous espace compact de  $\mathcal{H}$  et  $\{\gamma \in \mathcal{H} : pr_2(K).\gamma \cap pr_2(K) \neq \emptyset\}$  est compact dans  $\mathcal{H}$ . Puisque  $\{\gamma \in \mathcal{H} : K.\gamma \cap K \neq \emptyset\}$  est un sous espace fermé de  $\{\gamma \in \mathcal{H} : pr_2(K).\gamma \cap pr_2(K) \neq \emptyset\}$ , alors il est compact et l'action de  $\mathcal{H}$  sur  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  est propre.

L'action de  $\mathcal{H}$  sur  $Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  étant propre, il existe  $f : Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H} \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}$ , une application continue,  $\mathcal{H}$ -équivariante et unique à homotopie  $\mathcal{H}$ -équivariante près.

Soit  $i : Z \hookrightarrow Z \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}$  l'application continue et propre définie, pour tout  $z$  dans  $Z$ , par  $i(z) = (z, h \circ p(z))$ . L'application  $i$  est  $\mathcal{G}$ -équivariante car pour tout  $z$  dans  $Z$  et  $g$  dans  $\mathcal{G}$  avec

$p(z) = r(g)$ , on a

$$\begin{aligned} i(z.g) &= (z.g, h \circ p(z.g)) = (z, h(g)h(p(z.g))) \\ &= (z, h(g.s(g))) = (z, h(g)) \\ &= (z, h(r(g))).h(g) = i(z).h(g) \end{aligned}$$

On note  $f' : Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}$  l'application continue, propre et  $\mathcal{G}$ -équivariante obtenue par la composition  $f \circ i$  dont l'image  $f'(Z)$  est dans le sous espace  $\underline{E}\mathcal{H}' = \pi^{-1}(h(\mathcal{G}^{(0)}))$ . On a alors  $f' : Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}'$  une application continue et  $\mathcal{G}$ -équivariante et propre.

Il reste à prouver que cette application est unique à homotopie  $\mathcal{G}$ -équivariante près : supposons qu'il existe, pour  $i \in \{1, 2\}$ , des applications  $\mathcal{G}$ -équivariantes,  $f'_i : Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}'$ . On obtient alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{E}\mathcal{H}' \\ & \nearrow f'_1 & \uparrow pr'_1 \\ Z & \xrightarrow{(f'_1, f'_2)} & \underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}' \\ & \searrow f'_2 & \downarrow pr'_2 \\ & & \underline{E}\mathcal{H}' \end{array}$$

où  $pr'_i : \underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}' \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}'$  est la projection sur la  $i$ -ième composante, c'est-à-dire une restriction au sous espace  $\underline{E}\mathcal{H}' \times \underline{E}\mathcal{H}'$  de la projection sur la  $i$ -ième composante  $pr_i : \underline{E}\mathcal{H} \times \underline{E}\mathcal{H} \rightarrow \underline{E}\mathcal{H}$ . Les applications  $pr_1$  et  $pr_2$  étant  $\mathcal{H}$ -homotopes, les restrictions, respectivement  $pr'_1$  et  $pr'_2$ , sont donc  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^{(0)}}$ -homotopes. Le groupoïde  $\mathcal{G}$  étant un sous groupoïde de  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^{(0)}}$ , les applications  $pr'_1$  et  $pr'_2$  sont  $\mathcal{G}$ -homotopes. Par commutativité du diagramme précédent, les applications  $f'_1$  et  $f'_2$  sont  $\mathcal{G}$ -homotopes.

On a ainsi montré que l'espace  $\underline{E}\mathcal{H}'$  est l'espace classifiant pour les actions propres du groupoïde  $\mathcal{G}$ .

L'homomorphisme strict de groupoïde  $b : \underline{E}\mathcal{H}' \times \mathcal{G} \rightarrow \underline{E}\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  est propre et on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} KK_{\underline{E}\mathcal{H} \times \mathcal{H}}(C_0(\underline{E}\mathcal{H}), C_0(\underline{E}\mathcal{H})) & \xrightarrow{b^*} & KK_{\underline{E}\mathcal{H}' \times \mathcal{G}}(C_0(\underline{E}\mathcal{H}'), C_0(\underline{E}\mathcal{H}')) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi'^* \\ KK_{\mathcal{H}}(C_0(\mathcal{H}^{(0)}), C_0(\mathcal{H}^{(0)})) & \xrightarrow{h^*} & KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)})) \end{array}$$

Par définition de l'élément  $\gamma$  de Kasparov, pour  $\gamma_{\mathcal{H}}$  dans  $KK_{\mathcal{H}}(C_0(\mathcal{H}^{(0)}), C_0(\mathcal{H}^{(0)}))$ , on a  $\pi^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$  et, par commutativité du diagramme précédent, on obtient l'égalité

$$\pi'^*(h^*(\gamma_{\mathcal{H}})) = b^*(\pi^*(\gamma_{\mathcal{H}})) = 1$$

Il existe une  $\underline{E}\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ -algèbre  $A$  et des éléments  $\eta_{\mathcal{H}}$  dans  $KK_{\mathcal{H}}(C_0(\mathcal{H}^{(0)}), A)$  et  $D_{\mathcal{H}}$  dans  $KK_{\mathcal{H}}(A, C_0(\mathcal{H}^{(0)}))$  tels que  $\gamma_{\mathcal{H}} = \eta_{\mathcal{H}} \otimes_A D_{\mathcal{H}}$ . On a

$$h^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = h^*(\eta_{\mathcal{H}} \otimes_A D_{\mathcal{H}}) = h^*(\eta_{\mathcal{H}}) \otimes_{h^*(A)} h^*(D_{\mathcal{H}})$$

avec  $h^*(\eta_{\mathcal{H}})$  dans  $KK_{\mathcal{H}}(h^*(C_0(\mathcal{H}^{(0)})), h^*(A))$  et  $h^*(D_{\mathcal{H}})$  dans  $KK_{\mathcal{G}}(h^*(A), h^*(C_0(\mathcal{H}^{(0)})))$ . Or  $h^*(C_0(\mathcal{H}^{(0)})) = C_0(\mathcal{G}^{(0)})$  et  $h^*(A)$  est une  $\underline{E}\mathcal{H}' \rtimes \mathcal{G}$ -algèbre. On en déduit alors que  $h^*(\gamma_{\mathcal{H}})$  correspond à l'élément  $\gamma_{\mathcal{G}}$ . □

**Théorème 4.1.26.** *Soit  $f$  un morphisme généralisé du groupoïde  $\mathcal{G}$  vers le groupoïde  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{G}$  est moyennable et si le groupoïde  $\mathcal{H}$  possède un élément  $\gamma$  de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{H}}$ , alors  $f^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$ .*

*Démonstration.* Le morphisme généralisé  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  est la composition d'une équivalence de Morita entre  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}[\mathcal{U}]$ , où  $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$  est un recouvrement ouvert de  $\mathcal{G}^{(0)}$  et d'un homomorphisme strict  $f' : \mathcal{G}[Y] \rightarrow \mathcal{H}$ , avec  $Y := \coprod_i U_i$ .

On note  $p : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  l'application continue, surjective et ouverte, induite par l'homomorphisme strict  $p : \mathcal{G}[Y] \rightarrow \mathcal{G}$ . D'après [LG99], l'application  $p : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$  induit un isomorphisme de groupes

$$p^* : KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)})) \longrightarrow KK_{\mathcal{G}[Y]}(C_0(Y), C_0(Y))$$

L'application  $f'$  étant la composée  $f \circ p$ , on a alors  $(f')^* = p^* \circ f^*$ . On se ramène donc à montrer que  $(f')^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$ .

Le groupoïde  $\mathcal{G}$  étant moyennable, il possède un élément gamma, noté  $\gamma_{\mathcal{G}}$  appartenant à  $KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$  et  $\gamma_{\mathcal{G}} = 1$ . D'après le lemme 4.1.23,  $\mathcal{G}[Y]$  possède un élément gamma de Kasparov, noté  $\gamma_{\mathcal{G}[Y]}$  et vérifiant  $\gamma_{\mathcal{G}[Y]} = p^*(\gamma_{\mathcal{G}}) = 1$ .

On considère l'homomorphisme strict, propre et injectif  $h = (id, f') : \mathcal{G}[Y] \rightarrow \mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H}$ , dont l'image  $h(\mathcal{G}[Y])$  est fermé dans  $\mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H}$ . On note  $pr_1 : \mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}[Y]$  la projection sur la première composante et  $pr_2 : \mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  la projection sur la deuxième composante. Les applications  $pr_1$  et  $pr_2$  sont des homomorphismes stricts de groupoïdes et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}[Y] & \xrightarrow{f'} & \mathcal{H} \\ & \searrow (id, f') & \nearrow pr_2 \\ & \mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H} & \end{array}$$

Par commutativité, on a  $f'^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = h^*(pr_2^*(\gamma_{\mathcal{H}}))$ . Puisque  $\gamma_{\mathcal{G}[Y]} = 1$ , on a  $pr_1^*(\gamma_{\mathcal{G}[Y]}) = 1$ . D'après les lemmes précédents, on a

$$\begin{aligned} h^*(pr_2^*(\gamma_{\mathcal{H}})) &= h^*(pr_1^*(\gamma_{\mathcal{G}[Y]}) \otimes pr_2^*(\gamma_{\mathcal{H}})) = h^*(\gamma_{\mathcal{G}[Y] \times \mathcal{H}}) \\ &= \gamma_{\mathcal{G}[Y]} = 1 \end{aligned}$$

et on en déduit alors l'égalité  $f'^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$ .

On déduit alors de  $(f')^* = p^* \circ f^*$  que l'on a l'égalité suivante

$$f^*(\gamma_{\mathcal{H}}) = 1$$

□

## 4.2 Déformation au cône normal

On rappelle la construction de la déformation au cône normal associée à une immersion injective d'une variété lisse  $X$  dans une variété lisse  $M$ . On reprend la démarche développée dans [CR07] ou encore dans [CRW11] en étudiant le cas où  $X$  est une sous variété de  $M$ .

### 4.2.1 Définition et exemples de déformation au cône normal

On considère  $M$  une variété  $C^\infty$  et  $X$  une sous variété  $C^\infty$  de  $M$ . On note  $N_X^M$  le fibré normal sur  $X$  associé à l'immersion de  $X$  dans  $M$ , c'est-à-dire le fibré défini par  $N_X^M := T_X M / TX$ . On définit l'ensemble  $\mathcal{D}_X^M$  de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_X^M = N_X^M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*$$

L'objectif de cette section est de munir l'ensemble  $\mathcal{D}_X^M$  d'une structure de variété  $C^\infty$ . Pour y parvenir, on construit un atlas  $C^\infty$  pour l'ensemble  $\mathcal{D}_X^M$  à partir d'un atlas  $C^\infty$  de la variété  $M$  dont les cartes vérifient certaines conditions.

On se place tout d'abord dans le cas particulier où  $M = \mathbb{R}^n$  et  $X = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ . On note  $q = n - p$ . L'ensemble  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^p}^{\mathbb{R}^n}$  que l'on note  $\mathcal{D}_p^n$  par commodité, a la forme suivante

$$\mathcal{D}_p^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \{0\} \bigsqcup \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$$

et on note  $\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_p^n$  la bijection d'ensemble définie pour tout  $(x, \xi, t)$  dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$  par

$$\psi(x, \xi, t) = \begin{cases} (x, \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (x, t\xi, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On munit l'ensemble  $\mathcal{D}_p^n$  de la topologie induite par la bijection  $\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_p^n$ . Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$  et l'espace  $\mathcal{D}_V^U = V \times \mathbb{R}^q \times \{0\} \bigsqcup U \times \mathbb{R}^*$  est un sous espace ouvert de  $\mathcal{D}_p^n$  : en effet, on pose

$$\Omega_V^U := \psi^{-1}(\mathcal{D}_V^U) = \{(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} : (x, t\xi) \in U\}$$

est un ouvert dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ .

On considère maintenant le cas général où  $M$  est une variété  $C^\infty$  et  $X$  une sous variété  $C^\infty$  de  $M$ . On utilise les résultats du cas particuliers précédent. On va construire un atlas de cartes pour  $\mathcal{D}_X^M$  à partir de cartes particulières de la variété lisse  $M$ , appelée cartes adaptées à  $X$ , que l'on définit de la manière suivante :

**Définition 4.2.1.** Une carte de coordonnées  $(\mathcal{U}, \phi)$  pour la variété  $M$  est appelée carte adaptée à  $X$  si elle vérifie :

- (a)  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  est un difféomorphisme
- (b) Si on pose  $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap X$ , alors  $\mathcal{V} = \phi^{-1}(V)$  où  $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$

On considère  $(\mathcal{U}, \phi)$  une carte adaptée à  $X$ . Pour tout  $x$  dans  $\mathcal{V}$ , on a  $\phi(x) = (\phi_1(x), 0)$  où  $\phi_1 : \mathcal{V} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$  est un difféomorphisme. On définit alors une bijection

$$\tilde{\phi} : \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{D}_V^U$$

en posant

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(v, \omega, 0) := (\phi_1(v), (d_N \phi)_v(\omega), 0) \\ \tilde{\phi}(u, t) := (\phi(u), t) \end{cases}$$

où l'application  $(d_N\phi)_v : (\mathcal{N}_V^U)_v \rightarrow \mathbb{R}^q$  est la composante normale de l'application  $d\phi_v : T_v\mathcal{U} \rightarrow T_{\phi(v)}U$ . La bijection  $\tilde{\phi}$  induit une structure  $C^\infty$  sur  $\mathcal{D}_V^U$  et en considérant l'ouvert  $\Omega_V^U = \psi^{-1}(\mathcal{D}_V^U)$ , on a un difféomorphisme

$$\varphi := \psi^{-1} \circ \tilde{\phi} : \mathcal{D}_V^U \longrightarrow \Omega_V^U$$

On considère  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  un atlas de la variété  $M$  formé de cartes adaptées à  $X$  et on a  $\mathcal{D}_X^M = \cup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}$ . On montre que la collection  $(\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  associée à l'atlas de  $M$  forme un atlas  $C^\infty$  pour  $\mathcal{D}_X^M$ , en prouvant, pour tout  $\alpha, \beta$  dans  $\Lambda$ , que l'application suivante

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \cap \mathcal{D}_{V_\beta}^{\mathcal{U}_\beta}) \longrightarrow \varphi_\beta(\mathcal{D}_{V_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \cap \mathcal{D}_{V_\beta}^{\mathcal{U}_\beta})$$

est  $C^\infty$ . Par définition on a

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \xi, t) = \begin{cases} (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x), d_N(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_x(\xi), 0) & \text{si } t = 0 \\ (\frac{1}{t}\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, t\xi), t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Pour  $t \neq 0$ , il est facile de voir que l'application est de classe  $C^\infty$  par composition d'applications de classe  $C^\infty$  et le problème se situe en  $t = 0$  : on obtient le résultat en utilisant la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2.** *Soient  $U$  sous espace ouvert de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  et  $U'$  un sous espace ouvert de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  et  $F : U \rightarrow U'$  une application  $C^\infty$  telle que  $F_2(x, 0) = 0$ , si on écrit  $F = (F_1, F_2)$ . Alors l'application  $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \Omega_{V'}^{U'}$ , définie pour tout  $(x, \xi, t)$  dans  $\Omega_V^U$ , par*

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x, t\xi), \frac{1}{t}F_2(x, t\xi), t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

est de classe  $C^\infty$ .

*Démonstration.* On se réfère à [CR07] pour les détails et notamment l'utilité du lemme 3.1.2.  $\square$

**Définition 4.2.3.** *Soit  $X$  une sous variété  $C^\infty$  de la variété  $C^\infty$   $M$ , alors l'ensemble  $\mathcal{D}_X^M$  munie de la structure  $C^\infty$  induite par l'atlas des cartes adaptées à  $X$  est appelé la déformation au cône normal associée au plongement de  $X$  dans  $M$ .*

*Remarque 4.2.4.* Dans le cas où  $\iota : X \hookrightarrow M$  est une immersion injective, on peut définir de manière analogue une déformation au cône normal  $\mathcal{D}_X^M$  associée à l'application  $\iota$ .

**Exemples 4.2.5.** *On donne quelques exemples de déformations au cône normal. On considère  $M$  une variété  $C^\infty$  :*

- (a) *On considère le cas extrême où  $X$  est l'ensemble vide  $X = \emptyset$ . On obtient alors la déformation*

$$\mathcal{D}_\emptyset^M = M \times \mathbb{R}^*$$

*munie de la topologie produit de variété  $C^\infty$ .*

- (b) *L'autre cas extrême consiste à prendre  $X = M$  et on a la déformation suivante*

$$\mathcal{D}_M^M = M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^* = M \times \mathbb{R}$$

*munie de la topologie produit.*

(c) Il est possible de donner une version générale des cas (a) et (b) en considérant  $X$  comme une sous variété ouverte de  $M$ . On sait alors que  $T_X M$  est isomorphe à  $TX$  et on a la déformation suivante

$$\mathcal{D}_X^M = X \times \{0\} \sqcup M \times \mathbb{R}^*$$

(d) On considère  $x_0$  dans  $M$ . On s'intéresse au cas où  $X = \{x_0\}$  et on obtient la déformation suivante :

$$\mathcal{D}_{\{x_0\}}^M = T_{x_0} M \times \{0\} \sqcup M \times \mathbb{R}^*$$

*Remarque 4.2.6.* (Restriction à l'intervalle  $[0, 1]$ ) Pour tout couple  $(M, X)$  de variétés  $C^\infty$ , on a construit la déformation au cône normal  $\mathcal{D}_X^M = \mathcal{N}_X^M \times \{0\} \sqcup M \times \mathbb{R}^*$  sur laquelle nous avons défini une structure de variété  $C^\infty$ . Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons surtout à la restriction de  $\mathcal{D}_X^M$  à l'intervalle  $[0, 1]$ , que l'on note encore  $\mathcal{D}_X^M$ ,

$$\mathcal{D}_X^M = \mathcal{N}_X^M \times \{0\} \sqcup M \times ]0, 1]$$

qui est une variété à bord lorsqu'on la munit de la topologie induite par celle de  $\mathcal{D}_X^M = \mathcal{N}_X^M \times \{0\} \sqcup M \times \mathbb{R}^*$ .

#### 4.2.2 Functorialité de la déformation au cône normal

Une caractéristique importante de la construction de déformation au cône normal associée au couple  $C^\infty (M, X)$  réside dans sa functorialité : soient  $(M, X)$  et  $(M', X')$  deux couples  $C^\infty$ , on va montrer que pour toute application  $C^\infty F : M \rightarrow M'$  satisfaisant la condition  $F(X) \subset X'$ , alors il existe une application  $C^\infty$  entre les variétés de déformation au cône normal  $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_X^M \rightarrow \mathcal{D}_{X'}^{M'}$ . Cette propriété de functorialité nous est très utile par la suite lorsque l'on considère la déformation au cône normal dans le cas des groupoïdes de Lie.

On se place tout d'abord dans le cas particulier où  $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $U' = \mathbb{R}^{p'} \times \mathbb{R}^{q'}$  avec  $p + q = n$  et  $p' + q' = n'$  des entiers. On note  $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$  et  $V' = U' \cap (\mathbb{R}^{p'} \times \{0\})$ . On considère une application  $C^\infty F : U \rightarrow U'$  telle que  $F(V)$  est un sous espace de  $V'$  et on définit  $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_U^V \rightarrow \mathcal{D}_{U'}^{V'}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{D}(F)(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x, \xi), F_2(x, \xi) \cdot \xi, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

et on a la caractéristique suivante pour l'application  $\mathcal{D}(F)$

**Proposition 4.2.7.** *L'application  $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_U^V \rightarrow \mathcal{D}_{U'}^{V'}$  est une application de classe  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* On considère  $\Omega_U^V$  et  $\Omega_{U'}^{V'}$  les ouverts respectifs de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  et de  $\mathbb{R}^{p'} \times \mathbb{R}^{q'}$  et  $\psi : \Omega_U^V \rightarrow \mathcal{D}_U^V$  et  $\Omega_{U'}^{V'} \rightarrow \mathcal{D}_{U'}^{V'}$  les difféomorphismes  $C^\infty$  construits dans la section 4.2.  $\square$

On considère  $\mathcal{C}_2^\infty$  la catégorie dont les objets sont des couples  $(M, X)$  où  $M$  est une variété  $C^\infty$  et  $X$  un sous variété  $C^\infty$  de  $M$  et les morphismes  $F : (M, X) \rightarrow (M', X')$  sont des applications  $C^\infty F : M \rightarrow M'$  telles que  $F(X)$  est inclus dans  $X'$ . A tout morphisme  $F : (M, X) \rightarrow (M', X')$  dans la catégorie  $\mathcal{C}_2^\infty$ , on associe l'application

$$\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_X^M \longrightarrow \mathcal{D}_{X'}^{M'}$$

définie par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(F)(v, \omega, 0) := (F(v), (d_N F)_v(\omega), 0) \\ \mathcal{D}(F)(u, t) := (F(u), t) \end{cases}$$

où  $d_N F : \mathcal{N}_X^M \rightarrow \mathcal{N}_{X'}^{M'}$  est la composante normale de l'application  $dF : TM \rightarrow TM'$ .

**Proposition 4.2.8.** *L'application  $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_X^M \rightarrow \mathcal{D}_{X'}^{M'}$  est une application de classe  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* Voir [CR07] □

*Remarque 4.2.9.* Si on note  $\mathcal{C}^\infty$  la catégorie dont les objets sont les variétés  $C^\infty$  et les morphismes les applications de classe  $C^\infty$ , on obtient alors, par la construction des déformations au cône normal, un foncteur  $\mathcal{D} : \mathcal{C}_2^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ .

On utilise dans la suite de notre travail la proposition suivante

**Proposition 4.2.10.** *Soient  $(M, X)$  et  $(M', X')$  deux objets de la catégorie  $\mathcal{C}_2^\infty$  et  $F : (M, X) \rightarrow (M', X')$  un morphisme, alors l'application*

$$\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}_X^M \rightarrow \mathcal{D}_{X'}^{M'}$$

*est une immersion (respectivement une submersion) si et seulement si les applications  $F : M \rightarrow M'$  et  $d_N F : N_X^M \rightarrow N_{X'}^{M'}$  sont des immersions (respectivement des submersions).*

*Démonstration.* Voir [CR07]. □

### 4.2.3 Cas des groupoïdes de Lie étales

On considère  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  des groupoïdes de Lie étales. On note, sans faire de distinction entre les deux groupoïdes,  $s, r, m, i$  et  $u$  les applications de structure des groupoïdes  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$  et  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$ . On considère  $\iota : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$  un morphisme strict de groupoïdes qui est une immersion injective. On peut appliquer la construction de la déformation au cône normal et on obtient alors une variété  $C^\infty$  :

$$\mathcal{D}_\mathcal{G}^\mathcal{H} = \mathcal{N}_\mathcal{G}^\mathcal{H} \times \{0\} \bigsqcup \mathcal{H} \times \mathbb{R}^*$$

Soit  $\iota_0 : \mathcal{G}^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{H}^{(0)}$  l'immersion injective obtenue par restriction de l'immersion injective  $\iota$  à l'espace des unités et par déformation au cône normal, on obtient la variété  $C^\infty$  :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}} \times \{0\} \bigsqcup \mathcal{H}^{(0)} \times \mathbb{R}^*$$

De même, en considérant l'immersion injective  $\iota_2 : \mathcal{G}^{(2)} \hookrightarrow \mathcal{H}^{(2)}$ , on construit par déformation au cône normal, la variété  $C^\infty$  :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}} \times \{0\} \bigsqcup \mathcal{H}^{(2)} \times \mathbb{R}^*$$

Sans se soucier (pour l'instant) des structures  $C^\infty$  des objets considérés, on peut construire un groupoïde  $\mathcal{D}_\mathcal{G}^\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  en définissant les applications de structure de la manière suivante : pour tout  $(\gamma, \omega, 0)$  dans  $\mathcal{N}_\mathcal{G}^\mathcal{H}$ ,  $(h, t)$  dans  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^*$ ,  $(x, v, 0)$  dans  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  et  $(y, t)$  dans  $\mathcal{H}^{(0)} \times \mathbb{R}^*$ , on pose :

$$\begin{array}{lll} (1) & s_\iota(\gamma, \omega, 0) = (s(\gamma), (d_N s)_\gamma(\omega), 0) & \text{et} & s_\iota(h, t) = (s(h), t) \\ (2) & r_\iota(\gamma, \omega, 0) = (r(\gamma), (d_N r)_\gamma(\omega), 0) & \text{et} & r_\iota(h, t) = (r(h), t) \\ (3) & i_\iota(\gamma, \omega, 0) = (\gamma^{-1}, (d_N i)_\gamma(\omega), 0) & \text{et} & i_\iota(h, t) = (h^{-1}, t) \\ (4) & u_\iota(x, v, 0) = (u(x), (d_N u)_x(v), 0) & \text{et} & u_\iota(y, t) = (u(y), t) \end{array}$$

et pour tout  $(\gamma', \omega', 0)$  tel que  $s_\iota(\gamma, \omega, 0) = r_\iota(\gamma', \omega', 0)$  et tout  $(h', t)$  tel que  $s_\iota(h, t) = r_\iota(h', t)$ , on définit la multiplication par

$$(5) \quad m_\iota((\gamma, \omega, 0), (\gamma', \omega', 0)) = (\gamma\gamma', (d_N m)_{(\gamma, \gamma')}(\omega, \omega'), 0) \text{ et } m_\iota((h, t), (h', t)) = (hh', t)$$

Il est assez facile de montrer que les applications  $s_\iota, r_\iota, m_\iota, i_\iota$  et  $u_\iota$  vérifient les relations nécessaires pour induire une structure de groupoïde sur  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \rightrightarrows \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$ .

La démarche qui suit tend à montrer la compatibilité entre la structure de variété  $C^\infty$  de  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$  et la structure de groupoïde  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  définie auparavant. Il s'agit de prouver que les applications de structures  $s_\iota, r_\iota, m_\iota, u_\iota$  et  $i_\iota$  du groupoïde sont de classes  $C^\infty$  pour la structure de variété. On utilise pour cela la propriété de functorialité de  $\mathcal{D} : \mathcal{C}_2^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ .

**Lemme 4.2.11.** *Les applications  $s_\iota, r_\iota, i_\iota$  et  $u_\iota$  sont de classes  $C^\infty$ . De plus, les applications  $s_\iota$  et  $r_\iota$  sont des submersions.*

*Démonstration.* D'après les propriétés de functorialité de  $\mathcal{D} : \mathcal{C}_2^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ , le morphisme  $s : (\mathcal{H}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{G}^{(0)})$  dans la catégorie  $\mathcal{C}_2^\infty$  induit un morphisme  $\mathcal{D}(s) : \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  dans la catégorie  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\mathcal{D}(s)$  est une application de classe  $C^\infty$  entre variétés  $C^\infty$  définie par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(s)(\gamma, \omega, 0) = (s(\gamma), (d_N s)_\gamma(\omega), 0) & , \text{ si } t = 0 \\ \mathcal{D}(s)(h, t) = (s(h), t) & , \text{ si } t \neq 0 \end{cases}$$

donc on voit que  $\mathcal{D}(s)$  coïncide avec l'application de structure  $s_\iota$  définie auparavant et  $s_\iota$  est de classe  $C^\infty$ .

On prouve de manière analogue en utilisant les propriétés de functorialité que les applications  $r_\iota, i_\iota$  et  $u_\iota$  sont des applications de classe  $C^\infty$ .

Dans le cas des submersions  $s$  et  $r$ , en utilisant la proposition 4.2.10, on obtient directement que les applications  $\mathcal{D}(s) = s_\iota$  et  $\mathcal{D}(r) = r_\iota$  sont des submersions. □

Il reste à prouver que l'application de multiplication  $m_\iota : (\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}})^{(2)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$  est de classe  $C^\infty$ . On considère le morphisme  $m : (\mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{G}^{(2)}) \rightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{G})$  dans la catégorie  $\mathcal{C}_2^\infty$  qui induit un morphisme

$$\mathcal{D}(m) : \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$$

**Lemme 4.2.12.** *Les variétés lisses  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}}$  et  $(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}})^{(2)}$  sont difféomorphes et l'application de multiplication  $m_\iota : (\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}})^{(2)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$  est de classe  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* Chaque variété est décrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}} &= \mathcal{N}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}} \bigsqcup \mathcal{H}^{(2)} \times ]0, 1] \\ (\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}})^{(2)} &= (\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \times \{0\}) *_{s_\iota, r_\iota} (\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \times \{0\}) \bigsqcup (\mathcal{H} \times \mathbb{R}^*) *_{s_\iota, r_\iota} (\mathcal{H} \times \mathbb{R}^*) \end{aligned}$$

et il existe une application canonique  $p : (\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}})^{(2)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(2)}}^{\mathcal{H}^{(2)}}$  définie, pour tout élément  $((\gamma, \omega, 0), (\gamma', \omega', 0))$  dans  $(\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \times \{0\}) *_{s_\iota, r_\iota} (\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \times \{0\})$  et tout élément  $((h, t), (h', t))$  dans  $(\mathcal{H} \times \mathbb{R}^*) *_{s_\iota, r_\iota} (\mathcal{H} \times \mathbb{R}^*)$ , par

- a)  $p((\gamma, \omega, 0), (\gamma', \omega', 0)) = ((\gamma, \gamma'), (\omega, \omega'), 0)$
- b)  $p((h, t), (h', t)) = ((h, h'), t)$

Cette application canonique est clairement un difféomorphisme  $C^\infty$  et l'application  $m_\iota$  est obtenue par la composition  $\mathcal{D}(m) \circ p$  qui est de classe  $C^\infty$ . L'application de multiplication  $m_\iota$  est donc de classe  $C^\infty$ . □

**Proposition 4.2.13.** *Le groupoïde  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \rightrightarrows \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  est un groupoïde de Lie pour les structures de variété induite par le procédé de déformation au cône normal associé aux immersions injectives  $\iota : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$  et  $\iota_0 : \mathcal{G}^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{H}^{(0)}$ .*

*Démonstration.* L'espace des flèches  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$  et l'espace des unités  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  qui forment le groupoïde  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \rightrightarrows \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  sont des variétés  $C^\infty$ , d'après la section consacrée au déformation au cône normal ; les applications de structures  $s_\iota, r_\iota, m_\iota, i_\iota$  et  $U_\iota$  sont de classe  $C^\infty$  et  $s_\iota$  et  $r_\iota$  sont des submersions d'après les lemmes 4.2.11 et 4.2.12 . Le groupoïde  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}} \rightrightarrows \mathcal{D}_{\mathcal{G}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$  est un groupoïde de Lie pour les structures de variété induites par le procédé de déformation au cône normal.  $\square$

### 4.3 Immersion injective $K$ -orientée de groupoïdes de Lie étales

On considère dans cette section le cas d'une immersion injective et  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  où  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  sont des groupoïdes de Lie étales. On obtient alors une déformation au cône normal  $\mathcal{D}$  que l'on restreint à l'intervalle  $[0, 1]$  et on utilise la notation suivante

$$\mathcal{D} = \mathcal{N} \times \{0\} \sqcup \mathcal{H} \times ]0, 1]$$

L'objectif est construire un élément  $\iota_!$  dans le groupe de  $E$ -théorie  $E(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{H}))$  et d'étudier la functorialité de la construction. De tels éléments ont déjà été construits (dans le groupe de  $KK$ -théorie) dans certains cas particuliers dans [BC00] [Con82] [CS84] et [HS87]. Cette construction est faite ici en imposant l'existence d'une métrique riemannienne sur  $\mathcal{H}^{(0)}$  invariante par action de  $\mathcal{H}$  comme on le verra plus tard.

#### 4.3.1 Groupoïde normal et fibré de $C^*$ -algèbres

On note  $\mathcal{D} = \mathcal{N} \times \{0\} \sqcup \mathcal{H} \times ]0, 1]$  la restriction à l'intervalle  $[0, 1]$  du groupoïde de déformation au cône normal induit par l'immersion injective et  $K$ -orientée  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  entre groupoïdes de Lie étales. On a vu dans la section 4.2.3 que  $\mathcal{D}$  est muni d'une structure de variété compatible avec la structure de groupoïde de sorte que  $\mathcal{D}$  soit un groupoïde de Lie étale.

*Remarque 4.3.1.* Pour l'homomorphisme  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  de groupoïdes de Lie étales qui est une immersion injective  $K$ -orientée, on note  $N$  le fibré normal de l'immersion  $\iota_0 : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$  obtenue par restriction de  $\iota$  à l'espace des unités du groupoïde  $\mathcal{G}$ . Le fibré normal  $N$  est  $\mathcal{G}$ -équivariant et le groupoïde  $\mathcal{G}^N = r^*(N)$  coïncide avec le fibré normal  $\mathcal{N}$  de l'immersion  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ . Le groupoïde  $\mathcal{D}$  peut donc aussi s'écrire (et on utilise cette notation en fin de section)

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}^N \times \{0\} \sqcup \mathcal{H} \times ]0, 1]$$

On choisit une métrique riemannienne sur  $\mathcal{H}$ . On construit maintenant à l'aide de la structure riemannienne sur  $\mathcal{H}$  un sous espace  $\tilde{\mathcal{O}}$  ouvert dans  $\mathcal{N} \times [0, 1]$  qui nous sera utile pour la suite. Pour tout  $h$  de  $\mathcal{H}$  et tout vecteur  $\omega$  dans  $T_h\mathcal{H}$ , il existe une unique géodésique  $c_\omega$  telle que  $c_\omega(0) = h$  et  $\dot{c}_\omega = \omega$ . On considère le réel  $l_\omega$  pour lequel  $[0, l_\omega[$  est l'intervalle non négatif maximal sur lequel la géodésique est définie. On note  $\mathcal{O}_h$  l'ensemble des vecteurs  $\nu$  de  $T_h\mathcal{H}$  pour lesquels le réel  $l_\nu$  associé la géodésique  $g_\nu$  vérifie  $l_\nu > 1$ . On définit l'application exponentielle en  $h$ ,

$$\begin{aligned} \exp_h : \mathcal{O}_h &\rightarrow \mathcal{H} \\ \omega &\longrightarrow \exp_h(\omega) := c_\omega(1) \end{aligned}$$

En construisant de cette manière une application exponentielle en tout point  $h$  de  $\mathcal{H}$  et en notant  $\mathcal{O} = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{O}_h$ , on obtient une application  $\exp : \bigcup_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{O}_h \rightarrow \mathcal{H}$ , dont la restriction à  $\mathcal{O}_h$  est  $\exp_h$ . On l'appelle l'application exponentielle. Le sous espace  $\mathcal{O}$  est ouvert dans  $T\mathcal{H}$ . Pour tout  $h$  dans  $\mathcal{H}$ , l'application  $\exp_h$  est un difféomorphisme local dans un voisinage de  $(h, 0)$  de  $T_h\mathcal{H}$ . Cette propriété locale des applications exponentielles provient du résultat suivant,

**Propriété 4.3.2.** [Wil93] *Pour tout  $h$  dans  $\mathcal{H}$ , il existe un voisinage ouvert  $W_h$  de  $h$  et un réel  $\varepsilon$  strictement positif tels que pour tout  $h'$  dans  $W_h$ ,  $B(h', \varepsilon) \subset T_{h'}\mathcal{H}$  la boule ouverte centrée en  $(h', 0)$  de rayon  $\varepsilon$  dans  $T_{h'}\mathcal{H}$  est difféomorphe à son image dans  $\mathcal{H}$  par l'application  $\exp_{h'}$ . De plus,  $W_h \subset \exp_{h'}(B(h', \varepsilon))$ .*

On considère le sous espace ouvert  $\tilde{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{N} \times [0, 1]$  défini par

$$\tilde{\mathcal{O}} = (\mathcal{N} \times \{0\}) \bigsqcup (\cup_{t>0} \mathcal{O}(t))$$

où  $\mathcal{O}(t) := \{((\gamma, \omega), t) \in \mathcal{N} \times \{t\} : (\gamma, t\omega) \in \mathcal{O}\}$  et on note  $\varphi : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{D}$  l'application définie par

$$\varphi(\gamma, \omega, t) = \begin{cases} (\gamma, \omega, 0) & \text{si } t = 0 \\ (\exp_\gamma(t\omega), t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

*Remarque 4.3.3.* La structure de variété du groupoïde  $\mathcal{D}$  peut être décrite de la manière suivante : la structure de variété sur  $\mathcal{H} \times ]0, 1]$  correspond à la structure induite par le produit de variétés. En zéro les cartes locales ont la forme suivante : soit  $\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ , d'après la propriété 4.3.2, il existe un voisinage  $W$  de  $\gamma$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $U := \bigcup_{\eta \in W} B_{\mathcal{N}}(\eta, \varepsilon)$  est un ouvert de  $\mathcal{N} \cap \mathcal{O}$ . L'application  $\varphi$  induit une bijection entre les ensembles

$$\{(\eta, \omega, t) \in \mathcal{N} \times [0, 1] : (\eta, t\omega) \in U\} \cong \left( \bigcup_{\eta \in W} \mathcal{N}_\eta \times \{0\} \right) \bigsqcup (\varphi(U \times ]0, 1]))$$

où  $\{(\eta, \omega, t) \in \mathcal{N} \times [0, 1] : (\eta, t\omega) \in U\}$  est un sous espace ouvert de  $\mathcal{N} \times [0, 1]$  et  $(\bigcup_{\eta \in W} \mathcal{N}_\eta \times \{0\}) \bigsqcup (\varphi(U \times ]0, 1]))$  est un sous ensemble de  $\mathcal{N}$  et  $\varphi$  est un difféomorphisme. C'est par cette méthode que Hilsum et Skandalis ont muni le groupoïde normal associé à une immersion d'une structure de variété (voir partie 3 de [HS87]). On utilisera parfois cette description des cartes locales dans la suite de notre travail.

L'objectif consiste en l'étude de la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_r^*(\mathcal{D})$  associée au groupoïde  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire le complété de  $\lambda(C_c(\mathcal{D}))$  dans l'algèbre d'opérateurs  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{D}, \nu))$ , où  $\lambda : C_c(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{D}, \nu))$  est la représentation régulière et  $\nu$  un système de Haar pour  $\mathcal{D}$  où les mesures qui constituent le système de Haar sont les mesures de comptage. Le but est de montrer qu'en imposant l'existence d'une métrique riemannienne sur  $H^{(0)}$  qui est  $\mathcal{H}$ -invariante, on a la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{D}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{0\}) \longrightarrow 0$$

On utilise les notations suivantes : pour tout  $(\alpha, t)$  dans  $\mathcal{D}^{(0)}$ , on note

$$\pi_{(\alpha, t)} : C_c(\mathcal{D}) \rightarrow C_c(\mathcal{D}_{(\alpha, t)})$$

la restriction des fonctions de  $C_c(\mathcal{D})$  au sous espace fermé  $\mathcal{D}_{(\alpha, t)} = s^{-1}((\alpha, t))$ . De même, pour tout  $(\alpha, t)$  dans  $\mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$ , on note

$$\tilde{\pi}_{(\alpha, t)} : C_c(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_c(\mathcal{N}_\alpha \times \{t\})$$

la restriction des fonctions de  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  au sous espace fermé  $\mathcal{N}_\alpha \times \{t\} = \tilde{s}^{-1}((\alpha, t))$ . Pour toute fonction  $F$  de  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$ , on note  $\lambda_{(\alpha, t)}(F)$  dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{N}_\alpha \times \{t\}, \nu_{(\alpha, t)}))$  pour désigner la restriction de l'opérateur  $\lambda(F)$  au sous espace  $L^2(\mathcal{N}_\alpha \times \{t\}, \nu_{(\alpha, t)})$ .

Dans ce qui suit, on définit pour les  $C^*$ -algèbres  $C_r^*(\mathcal{D})$  et  $C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1])$  une structure de fibré de  $C^*$ -algèbres au sens de Kirchberg et Wasserman [KW95], dont on rappelle ici la définition :

**Définition 4.3.4.** [KW95] *Un fibré de  $C^*$ -algèbres (appelé aussi  $C^*$ -fibré) sur un espace topologique localement compact séparé  $X$ , est un triplet  $(X, A, \pi_x : A \rightarrow A_x)$  où  $A$  est une  $C^*$ -algèbre, appelée  $C^*$ -algèbre fibrée,  $A_x$  est une  $C^*$ -algèbre pour tout  $x$  de  $X$  et  $\pi_x : A \rightarrow A_x$  est un  $*$ -épipomorphisme de  $C^*$ -algèbres tels que*

- (i) la famille  $\{\pi_x : x \in X\}$  est fidèle c'est-à-dire  $\|a\| = \sup_{x \in X} \|\pi_x(a)\|$
- (ii) pour tout  $f \in C_0(X)$  et tout  $a \in A$ , il existe un élément  $f.a$  de  $A$  tel que  $\pi_x(f.a) = f(x)\pi_x(a)$ , pour tout  $x$  dans  $X$ .

*Remarque 4.3.5.* On rappelle qu'un fibré de  $C^*$ -algèbres  $(X, A, \pi_x : A \rightarrow A_x)$  est dit semi continu supérieurement (respectivement continu) si l'application  $x \rightarrow \|\pi_x(a)\|$  est semi continue supérieurement (respectivement continue) pour tout  $a$  dans  $A$ .

Soit  $t$  un réel dans  $[0, 1]$ , on note  $\mathcal{D}_t := p^{-1}(\{t\})$ , où  $p : \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$  est la projection canonique. L'espace  $\mathcal{D}_t$  est un sous espace fermé de  $\mathcal{D}$  et la restriction de toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{D})$  au sous espace fermé  $\mathcal{D}_t$  est une fonction de  $C_c(\mathcal{D}_t)$ . On note  $\pi_t : C_c(\mathcal{D}) \rightarrow C_c(\mathcal{D}_t)$  l' $*$ -épipomorphisme de  $*$ -algèbres ainsi obtenu. Pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ ,  $\pi_t : C_c(\mathcal{D}) \rightarrow C_c(\mathcal{D}_t)$  s'étend en un  $*$ -épipomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t)$ .

De manière analogue, pour  $t$  dans  $[0, 1]$ , on considère l' $*$ -épipomorphisme de  $*$ -algèbres  $\tilde{\pi}_t : C_c(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_c(\mathcal{N} \times \{t\})$ , de restriction des fonctions de  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  sur le sous espace fermé  $\mathcal{N} \times \{t\}$ . L'application  $\tilde{\pi}_t$  s'étend en un  $*$ -épipomorphisme  $\tilde{\pi}_t : C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{t\})$  de  $C^*$ -algèbres. Le triplet  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]), \tilde{\pi}_t : C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{t\}))$  est un fibré de  $C^*$ -algèbres.

### 4.3.2 Quelques résultats et notations

Les résultats qui suivent nous permettront d'établir, par la suite, des critères de continuité sur le fibré de  $C^*$ -algèbres associé à la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{D})$ .

**Lemme 4.3.6.** *Soit  $f \in C_c(\mathcal{D})$ , alors il existe une fonction continue  $\psi \in C([0, 1])$  et un réel  $\tilde{t} > 0$  tels que*

$$\begin{cases} \text{Supp}(\psi.f) \subset \varphi(\tilde{\mathcal{O}}) \\ \text{Supp}((1 - \psi).f) \subset \mathcal{H} \times [\tilde{t}, 1] \end{cases}$$

*Démonstration.* Pour  $t > 0$  et  $(\gamma, t) \in \text{Supp}(f)$ , il existe un voisinage ouvert  $V_\gamma$  de  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}$  et un réel  $t_\gamma > 0$  tels que  $V_\gamma \times ]t_\gamma, 1]$  est un voisinage ouvert de  $(\gamma, t)$  dans  $\mathcal{D}$ .

En  $t = 0$  on utilise la remarque 4.3.3 et la description des cartes locales : soit  $(\gamma, \omega, 0)$  dans  $\text{Supp}(f)$ , il existe un voisinage ouvert  $U_{(\gamma, \omega)}$  de  $(\gamma, \omega)$  dans  $\mathcal{N}$  et un réel  $t_{(\gamma, \omega)} > 0$  tels que  $U_{(\gamma, \omega)} \times [0, t_{(\gamma, \omega)}[$  est un ouvert dans  $\tilde{\mathcal{O}}$ . On obtient donc un recouvrement ouvert du support de  $f$ ,

$$\text{Supp}(f) \subset \left( \bigcup_{(\gamma, \omega, 0) \in \text{Supp}(f)} \varphi(U_{(\gamma, \omega)} \times [0, t_{(\gamma, \omega)}[) \right) \cup \left( \bigcup_{(\gamma, t) \in \text{Supp}(f)} V_\gamma \times ]t_\gamma, 1] \right)$$

Le support  $Supp(f)$  étant compact, il existe une partie finie  $\{(\gamma_1, \omega_1), \dots, (\gamma_m, \omega_m)\}$  d'éléments de  $\mathcal{N}$  et une partie finie  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  telles que

$$Supp(f) \subset \left( \bigcup_{i=1}^m \varphi(U_{(\gamma_i, \omega_i)} \times [0, t_{(\gamma_i, \omega_i)}[) \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^n V_{\eta_j} \times ]t_{\eta_j}, 1] \right)$$

On pose  $\tilde{t} := \min \{t_{\eta_j} : j \in \{1, \dots, n\}\}$  et on considère une fonction continue, décroissante  $\psi$  de  $C([0, 1])$  telle que  $\psi|_{[0, \tilde{t}/2]} = 1$  et  $\psi|_{[\tilde{t}, 1]} = 0$ . On a alors  $f = \psi.f + (1 - \psi).f$ , où  $Supp(\psi.f)$  est dans  $\varphi(\tilde{\mathcal{O}})$  et  $Supp((1 - \psi).f)$  est dans  $\mathcal{H} \times [\tilde{t}, 1]$ . □

*Remarque 4.3.7.* Quitte à utiliser une fonction  $\psi \in C([0, 1])$  comme dans le lemme 4.3.6, on suppose (sauf affirmation contraire) dans la suite que les fonctions  $f$  de  $C_c(\mathcal{D})$  ont un support qui est dans  $\varphi(\tilde{\mathcal{O}})$ . Pour toute fonction  $f$  dans  $C_c(\mathcal{D})$ , il existe  $\{U_i \times [0, t_i[ \}_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'ouverts de  $\mathcal{N} \times [0, 1]$  tels que  $Supp(f) \subset \bigcup_{i=1}^n \varphi(U_i \times [0, t_i[)$ .

**Définition 4.3.8.** On appelle fonction associée à  $f$ , une fonction notée  $F$  de  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  définie pour tout  $(\gamma, \omega, t) \in \mathcal{N} \times [0, 1]$  par

$$F(\gamma, \omega, t) = \begin{cases} f(\gamma, \omega, 0) & \text{si } t = 0 \\ f(\exp_\gamma(t\omega), t) & \text{si } (\gamma, \omega, t) \in \bigcup_{i=1}^n U_i \times [0, t_i[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Remarque 4.3.9.* Soit  $f$  une fonction dans  $C_c(\mathcal{D})$  et  $F$  une fonction associée à  $f$  dans  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$ . On note  $S := s(Supp(f))$ ,  $R := r(Supp(f))$  les sous espaces compacts de  $\mathcal{D}^{(0)}$  et  $S' := s(Supp(F))$ ,  $R' := r(Supp(F))$  les sous espaces compacts de  $\mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$ . Pour tout sous espace  $Y$  de  $\mathcal{D}^{(0)}$ , on appelle saturé de  $Y$  dans  $\mathcal{D}^{(0)}$  le sous espace

$$Sat(Y) := \{z \in \mathcal{D}^{(0)} : \exists \gamma \in \mathcal{D}_z^Y\}$$

**Lemme 4.3.10.**  $Sat(S) = Sat(R)$

*Démonstration.* Soit  $(x, t)$  un élément de  $Sat(S)$  alors il existe  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$  tel que  $r(\gamma)$  est dans  $S$ . Il existe alors  $\eta$  dans  $Supp(f)$  tel que  $s(\eta) = r(\gamma)$  et  $r(\eta)$  est dans  $R$ . Alors l'élément  $\eta\gamma$  est dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}^R$ , donc  $(x, t)$  est dans  $Sat(R)$ . □

**Lemme 4.3.11.** Soit  $(x, t)$  un élément de  $\mathcal{D}^{(0)}$ . L'opérateur  $\lambda_{(x,t)}(f)$  est un opérateur non nul si et seulement si  $(x, t)$  est dans  $Sat(S)$ .

*Démonstration.* On considère  $(x, t)$  dans  $\mathcal{D}^{(0)} \setminus Sat(S)$  et  $\xi$  une fonction de  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)})$ . Supposons qu'il existe  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$  tel que  $|(\lambda_{(x,t)}(f)(\xi))(\gamma)| > 0$ . Il existe alors  $\eta$  dans  $\mathcal{D}_{r(\gamma)}$  tel que  $|f(\eta^{-1})| > 0$ . Puisque  $r(\gamma) = r(\eta^{-1}) \in R$ , on a  $(x, t)$  est dans  $Sat(R)$  donc d'après le lemme 4.3.10,  $(x, t)$  est dans  $Sat(S)$ . Ce qui est impossible car  $(x, t)$  est dans  $\mathcal{D}^{(0)} \setminus Sat(S)$ . Ainsi pour tout  $\xi$  dans  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)})$  et pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$ , on a  $(\lambda_{(x,t)}(f)(\xi))(\gamma) = 0$ , et  $\lambda_{(x,t)}(f)$  est donc l'opérateur nul.

Réciproquement, si  $\lambda_{(x,t)}(f) = 0$  alors pour toute fonction  $\xi$  dans  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)})$  et tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$ ,

$$(\lambda_{(x,t)}(f)(\xi))(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{r(\gamma)}} f(\eta^{-1})\xi(\eta\gamma) = 0$$

donc pour tout  $\eta$  de  $\mathcal{D}_{Sat(x,t)}$ ,  $f(\eta^{-1}) = 0$ . Puisque  $Supp(f) \cap \mathcal{D}_{Sat(x,t)} = \emptyset$ , alors  $(x, t)$  n'est pas dans  $Sat(S)$ . □

**Lemme 4.3.12.** *Pour tout  $(x, t)$  dans  $Sat(S)$ ,*

$$\lambda_{(x,t)}(f) : l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^S) \longrightarrow l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^R)$$

*Démonstration.* Soit  $(x, t)$  dans  $Sat(S)$ , on a  $\lambda_{(x,t)}(f) : l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}) \rightarrow l^2(\mathcal{D}_{(x,t)})$ . En notant  $\bar{S}$ , le complémentaire de  $S$  dans  $\mathcal{D}^{(0)}$ , on a  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}) = l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^S) \oplus l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^{\bar{S}})$ . Ci dessous, on montre successivement

(i) que  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^{\bar{S}})$  est dans  $\ker(\lambda_{(x,t)}(f))$ ,

(ii) que  $Im(\lambda_{(x,t)}(f))$  est dans  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^R)$ .

(i) On considère  $\xi$  une fonction de  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)})$  telle que  $r(Supp(\xi)) \cap S = \emptyset$  et pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$ , on a  $(\lambda_{(x,t)}(f)(\xi))(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{r(\gamma)}} f(\eta^{-1})\xi(\eta\gamma)$ . Pour tout  $\eta$  dans  $\mathcal{D}_{r(\gamma)}$  tel que  $\eta^{-1}$  est dans  $Supp(f)$ , on a  $r(\eta) = s(\eta^{-1})$  est dans  $S$ , donc  $\eta\gamma$  est dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}^S$ . La fonction  $\xi$  étant nulle sur  $\mathcal{D}_{(x,t)}^S$ , on a  $\xi(\eta\gamma) = 0$ . On a alors  $\lambda_{(x,t)}(f)(\xi) = 0$ . Donc  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^{\bar{S}})$  est dans le noyau de l'opérateur  $\lambda_{(x,t)}(f)$ .

(ii) Soit  $\xi$  une fonction dans  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^S)$  et  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}$  tels que

$$|(\lambda_{(x,t)}(f)(\xi))(\gamma)| > 0$$

alors il existe  $\eta$  dans  $\mathcal{D}_{r(\gamma)}$  tel que  $\eta^{-1}$  est dans  $Supp(f)$  et  $|f(\eta^{-1})\xi(\eta\gamma)| > 0$ . Puisque  $r(\gamma) = s(\eta) = r(\eta^{-1})$  est dans  $R$ , alors  $\gamma$  est dans  $\mathcal{D}_{(x,t)}^R$ . Ainsi l'image de l'opérateur  $\lambda_{(x,t)}(f)$  est dans  $l^2(\mathcal{D}_{(x,t)}^R)$ . □

*Remarque 4.3.13.* Pour toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{D})$ , la norme de l'opérateur  $\lambda(f)$  sur  $L^2(\mathcal{D}, \nu)$ , est

$$\|\lambda(f)\| = \sup_{(x,t) \in \mathcal{D}^{(0)}} \|\lambda_{(x,t)}(f)\| = \sup_{(x,t) \in Sat(S)} \|\lambda_{(x,t)}(f)\|$$

Pour tout  $(x, t)$  dans  $Sat(S)$ , les sous ensembles fermés  $\mathcal{D}_{(x,t)}^S$  et  $\mathcal{D}_{(x,t)}^R$  sont discrets et il existe des parties discrètes  $\Lambda$  de  $S$  et  $\Lambda'$  de  $R$ , telles que

$$\mathcal{D}_{(x,t)}^S = \bigsqcup_{a \in \Lambda} \mathcal{D}_{(x,t)}^a \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{(x,t)}^R = \bigsqcup_{b \in \Lambda'} \mathcal{D}_{(x,t)}^b$$

*Remarque 4.3.14.* On peut, par un raisonnement similaire, transposer les lemmes 4.3.10, 4.3.11, 4.3.12 et 4.3.13 dans le cadre d'une application  $F$  associée à  $f$ . On obtient alors les assertions suivantes :

1.  $Sat(S') = Sat(R')$
2. Pour tout  $(x, v, t)$  dans  $\mathcal{N}^{(0)} \times \{t\}$ , l'opérateur  $\lambda_{(x,v,t)}(F)$  est nul si et seulement si  $(x, v, t)$  n'est pas dans  $Sat(S')$ .
3. Pour tout  $(x, v, t)$  dans  $\mathcal{N}^{(0)} \times \{t\}$ ,  $l^2(\mathcal{N} \times \{t\}_{(x,v,t)}^{\bar{S}'})$  est dans le noyau de  $\lambda_{(x,v,t)}(F)$  et son image est dans  $l^2(\mathcal{N} \times \{t\}_{(x,v,t)}^{R'})$
4. Pour tout  $(x, v, t)$  dans  $\mathcal{N}^{(0)} \times \{t\}$ , il existe des parties discrètes  $\Upsilon$  de  $S'$  et  $\Upsilon'$  de  $R'$  et telles que

$$\mathcal{N}_{(x,v,t)}^{S'} = \bigsqcup_{(a,u,t) \in \Upsilon} \mathcal{N}_{(x,v,t)}^{(a,u,t)} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{(x,v,t)}^{R'} = \bigsqcup_{(b,w,t) \in \Upsilon'} \mathcal{N}_{(x,v,t)}^{(b,w,t)}$$

### 4.3.3 Métrique riemannienne invariante

Pour montrer que la suite  $0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{D}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{0\}) \longrightarrow 0$  est exacte on va prouver que le fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{D}), \pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t))$  est continu en montrant que l'application  $t \rightarrow \|\lambda_t(f)\|$  est continue sur  $[0, 1]$ . On va pour cela utiliser le sous espace  $\tilde{\mathcal{O}}$  ouvert dans  $\mathcal{N} \times [0, 1]$ . On impose alors l'existence d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante sur  $\mathcal{H}^{(0)}$  et on montre alors que l'espace  $\tilde{\mathcal{O}}$  est un sous groupoïde de Lie étale ouvert du groupoïde de Lie étale  $\mathcal{N} \times [0, 1]$  ce qui nous permet de montrer alors la continuité du fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{D}), \pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t))$ .

On a besoin de la proposition suivante qui est assez évidente :

**Proposition 4.3.15.** *Le fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]), \tilde{\pi}_t : C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{t\}))$  est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu.*

*Démonstration.* La  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1])$  est isomorphe à la  $C^*$ -algèbre  $C([0, 1], C_r^*(\mathcal{N}))$  qui est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu. Donc le fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]), \tilde{\pi}_t : C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{N} \times \{t\}))$  est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu.  $\square$

**Proposition 4.3.16.** *Soit  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$  un groupoïde de Lie étale tel que  $\mathcal{H}^{(0)}$  est muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}$ ,  $\gamma$  induit une isométrie d'un voisinage  $V_{s(\gamma)}$  de  $s(\gamma)$  dans  $\mathcal{H}^{(0)}$  dans un voisinage  $V_{r(\gamma)}$  de  $r(\gamma)$  dans  $\mathcal{H}^{(0)}$ .*
- (ii) *Il existe une métrique riemannienne sur  $\mathcal{H}$  pour laquelle les applications  $r$  et  $s$  sont des isométries locales.*
- (iii) *Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}$ , les applications  $(dr)_\gamma : T_\gamma \mathcal{H} \rightarrow T_{r(\gamma)}(\mathcal{H}^{(0)})$  et  $ds_\gamma : T_\gamma \mathcal{H} \rightarrow T_{s(\gamma)}(\mathcal{H}^{(0)})$  sont des isométries.*

*Démonstration.* On a clairement l'équivalence entre (ii) et (iii). Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}$ , on note  $R_\gamma$  le difféomorphisme  $R_\gamma : V_{s(\gamma)} \rightarrow V_{r(\gamma)}$  où  $V_{s(\gamma)}$  (resp.  $V_{r(\gamma)}$ ) est un voisinage de  $s(\gamma)$  (resp.  $r(\gamma)$ ) dans  $\mathcal{H}^{(0)}$ . On considère  $g := s^*(g_0)$  la métrique riemannienne induite sur  $\mathcal{H}$  : alors l'application  $R_\gamma$  est une isométrie locale si et seulement si  $r$  est une isométrie locale.  $\square$

On considère que le groupoïde  $\mathcal{H}$  est muni d'une métrique riemannienne invariante.

**Corollaire 4.3.17.** *Les applications de structure, à savoir la multiplication  $m : \mathcal{H}^{(2)} \rightarrow \mathcal{H}$ , l'application inverse  $i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , l'application unité  $u : \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}$  sont des isométries locales.*

*Démonstration.* Les applications de structure de groupoïde étale sont des difféomorphismes locaux.

D'après le lemme 4.3.16, les applications  $r$  et  $s$  sont des isométries locales; l'application  $(r, s) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{(0)} \times \mathcal{H}^{(0)}$  est une isométrie locale et pour tout  $(\gamma_1, \gamma_2)$  dans  $\mathcal{H}^{(2)}$  et  $(\omega_1, \omega_2)$  dans  $T_{(\gamma_1, \gamma_2)}\mathcal{H}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \|(dm)_{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega_1, \omega_2)\| &= \|(dr, ds)_{\gamma_1, \gamma_2}(dm)_{(\gamma_1, \gamma_2)}(\gamma_1, \gamma_2)\| \\ &= \|d((r, s) \circ m)_{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega_1, \omega_2)\| \\ &= \|d(r \times s)_{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega_1, \omega_2)\| \\ &= \|((\omega_1, \omega_2))\| \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que les applications inverses et unités associées au groupoïde  $\mathcal{H}$  sont des isométries locales.  $\square$

Dans les prochaines démonstrations on utilise parfois l'équivalence suivante : une courbe  $c : [0, l[ \rightarrow M, \mathcal{C}^1$  par morceaux est une géodésique dans une variété riemannienne  $M$  si et seulement si  $c$  est paramétrée à vitesse constante et est localement minimisante.

**Lemme 4.3.18.** *Soient  $(\gamma, \omega)$  dans  $\mathcal{N}$  et  $c : I \rightarrow \mathcal{H}$  une géodésique telle que  $c(0) = \gamma$  et  $\dot{c}(0) = \omega$ . Les applications  $r \circ c : [0, l[ \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$  et  $s \circ c : [0, l[ \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$  sont des géodésiques vérifiant  $r \circ c(0) = r(\gamma)$ ,  $(r \circ c)(0) = (dr)_\gamma(\omega)$  et  $s \circ c(0) = s(\gamma)$ ,  $(s \circ c)(0) = (ds)_\gamma(\omega)$ .*

*Démonstration.* Par définition des géodésiques, les isométries préservent les géodésiques. Les courbes  $s \circ c$  et  $r \circ c$  sont des géodésiques dans  $\mathcal{H}^{(0)}$ . □

**Proposition 4.3.19.** *Le sous espace  $\tilde{\mathcal{O}}$  est un sous groupoïde de Lie étale du groupoïde de Lie étale  $\mathcal{N} \times [0, 1]$ .*

*Démonstration.* On considère les applications de structure  $r, s, m, i, u$  induites par celles du groupoïde  $\mathcal{N} \times [0, 1]$ .

1) APPLICATIONS BUT ET SOURCE : soit  $r, s : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$  la restriction des applications but et source au sous espace  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Soit  $(\gamma, \omega, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}$  et  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  la géodésique associée à  $(\gamma, \omega)$ . D'après le lemme 4.3.18, la courbe  $r \circ c$  est une géodésique associée à  $(r(\gamma), tdr_\gamma(\omega))$ . Donc  $r(\gamma, \omega, t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$ . On démontre de manière analogue que  $s(\gamma, \omega, t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$ .

2) MULTIPLICATION : on considère  $(\gamma_1, \omega_1, t)$  et  $(\gamma_2, \omega_2, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}$  tels que  $(s(\gamma_1, \omega_1, t)) = r((\gamma_2, \omega_2, t))$  et pour  $i$  dans  $\{1, 2\}$ ,  $c_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  la géodésique associée à  $(\gamma_i, \omega_i)$ . On considère la courbe  $c_3 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  définie pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$  par  $c_3(x) = m(c_1(x), c_2(x))$ . La courbe  $c_3$  est alors localement minimisante : en effet la courbe  $r \circ c_3 = r \circ c_1$  est une géodésique (d'après 4.3.18) donc localement minimisante et pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ , il existe un voisinage ouvert  $V_{c_3(x)}$  de  $c_3(x)$  et un voisinage ouvert  $V_{r(c_3(x))}$  de  $r(c_3(x))$  tel que  $r : V_{c_3(x)} \rightarrow V_{r(c_3(x))}$  est une isométrie. Quitte à restreindre les voisinages choisis,  $c_3$  est minimisante sur  $V_{c_3(x)}$ . De plus  $c_3$  est paramétrée à vitesse constante : en effet, d'après 4.3.17,  $m$  est une isométrie locale, on a pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$

$$\|\dot{c}_3(x)\| = \|dm_{(c_1(x), c_2(x))}(\dot{c}_1(x), \dot{c}_2(x))\| = \|(\dot{c}_1(x), \dot{c}_2(x))\|$$

or les courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont paramétrées à vitesse constante donc  $c_3$  aussi. La courbe  $c_3 = m(c_1, c_2)$  est donc une géodésique associée à  $(\gamma_1 \gamma_2, tdm_{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega_1, \omega_2))$ .

Ainsi  $(\gamma_1, \omega_1, t)(\gamma_2, \omega_2, t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}}$ .

On démontre de manière analogue (en utilisant le fait que les applications inverses et unités sont des isométries locales) que pour tout  $(\gamma, \omega, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}$ , on a  $i(\gamma, \omega, t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}}$  et pour tout  $(x, v, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{N}^{(0)} \times [0, 1]$ , on a  $u(x, v, t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Ainsi  $\tilde{\mathcal{O}}$  est un sous groupoïde du groupoïde étale  $\mathcal{N} \times [0, 1]$ . □

**Lemme 4.3.20.** *Soient deux courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$ . Si  $r \circ c_1 = r \circ c_2$  et s'il existe  $t_0$  dans  $[a, b]$  tel que  $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ , alors  $c_1 = c_2$ .*

*Démonstration.* L'ensemble  $X := \{t \in [a, b] : c_1(t) = c_2(t)\}$  est un ensemble fermé de l'intervalle  $[a, b]$  et non vide puisque  $t_0$  en est un élément. Pour tout  $x$  dans  $X$ , il existe un voisinage

ouvert  $V$  de  $c_1(x) = c_2(x)$  dans  $\mathcal{H}$  pour lequel  $r : V \rightarrow r(V)$  est un difféomorphisme. Par continuité de  $c_1$ , l'ensemble  $U := c_1^{-1}(V)$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $[a, b]$ . Or pour tout  $t$  dans  $U$ , on a  $r(c_1(t)) = r(c_2(t))$ , donc pour tout  $t$  dans  $U$ ,  $c_1(t) = c_2(t)$  et  $U \subset X$ . Ainsi  $X$  est un sous espace de  $[a, b]$  non vide, ouvert et fermé. Donc par connexité,  $X = [a, b]$ .  $\square$

*Remarque 4.3.21.* Le lemme 4.3.20 est également vérifié si on remplace la condition  $r \circ c_1 = r \circ c_2$  par la condition  $s \circ c_1 = s \circ c_2$ .

**Proposition 4.3.22.** *Soit  $(\dot{x}, v, t)$  un élément de  $\tilde{\mathcal{O}}^{(0)}$  tel que  $\exp_{\dot{x}}(tv) = x$ , l'application  $\varphi : \tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)} \rightarrow \mathcal{H}_x^x \times \{t\}$  est un homomorphisme injectif de groupe.*

*Démonstration.* Soit  $(\dot{x}, v, t)$  un élément de  $\tilde{\mathcal{O}}^{(0)}$  tel que  $\exp_{\dot{x}}(tv) = x$ , et  $(\gamma, \omega, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$ , alors par définition de  $\tilde{\mathcal{O}}$ ,  $\varphi(\gamma, \omega, t)$  est bien définie et on a

$$\begin{aligned} r(\varphi(\gamma, \omega, t)) &= r((\exp_{\gamma}(t\omega), t)) \\ &= (r(\exp_{\gamma}(t\omega)), t) \\ &= (\exp_{r(\gamma)} t(dr_{\gamma}(\omega)), t) \\ &= (x, t) \end{aligned}$$

de même, on a  $s(\varphi(\gamma, \omega, t)) = (x, t)$  et l'application  $\varphi : \tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)} \rightarrow \mathcal{H}_x^x \times \{t\}$  est donc bien définie.

Soit  $(\gamma, \omega, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$ , son inverse  $i(\gamma, \omega, t) = (\gamma^{-1}, di_{\gamma}(\omega), t)$  est aussi dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$ . On note  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  la géodésique associée à  $(\gamma, t\omega)$  et  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  la géodésique associée à  $(\gamma^{-1}, t(di_{\omega}))$ . Puisque  $i \circ c = \tilde{c}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \varphi(i(\gamma, \omega, t)) &= \varphi((\gamma^{-1}, di_{\gamma}(\omega), t)) = (\exp_{\gamma^{-1}}(tdi_{\gamma}(\omega)), t) = (\tilde{c}(1), t) \\ &= (i \circ c(1), t) = i(\exp_{\gamma}(t\omega), t) \\ &= i(\varphi(\gamma, \omega, t)) \end{aligned}$$

Soit  $(\gamma', \omega', t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$ , l'élément  $(\gamma, \omega, t)(\gamma', \omega', t) = (\gamma\gamma', dm_{(\gamma, \gamma')}(\omega, \omega'), t)$  est dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$ ; on considère  $c' : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  une géodésique associée à  $(\gamma', t\omega')$  et  $c'' : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  une géodésique associée à  $(\gamma\gamma', tdm_{(\gamma, \gamma')}(\omega, \omega'))$ . Comme  $m(c, c') = c''$ , on a alors

$$\begin{aligned} \varphi((\gamma, \omega, t)(\gamma', \omega', t)) &= (\exp_{\gamma\gamma'}(tdm_{(\gamma, \gamma')}(\omega, \omega')), t) = (c''(1), t) \\ &= (c(1), t) \cdot (c'(1), t) = ((\exp_{\gamma}(t\omega), t) \cdot (\exp_{\gamma'}(t\omega'), t)) \\ &= \varphi(\gamma, \omega, t) \cdot \varphi(\gamma', \omega', t) \end{aligned}$$

Pour montrer que l'homomorphisme de groupe  $\varphi : \tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)} \rightarrow \mathcal{H}_x^x \times \{t\}$  est injectif, on considère  $(\gamma_1, \omega_1, t)$  et  $(\gamma_2, \omega_2, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$  tels que  $\varphi((\gamma_1, \omega_1, t)) = \varphi((\gamma_2, \omega_2, t))$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on considère  $c_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  la géodésique associée à  $(\gamma_i, t\omega_i)$ , vérifiant  $c_i(0) = \gamma_i$ ,  $\dot{c}_i(0) = t\omega_i$  et  $c_i(1) = \exp_{\gamma_i}(t\omega_i)$ . Les géodésiques sont  $r \circ c_1$  et  $r \circ c_2$  et on a  $c_1(1) = \varphi((\gamma_1, \omega_1, t)) = \varphi((\gamma_2, \omega_2, t)) = c_2(1)$ . D'après le lemme 4.3.20, on a  $c_1 = c_2$  et  $(\gamma_1, \omega_1, t) = (\gamma_2, \omega_2, t)$ . L'homomorphisme  $\varphi$  est injectif.  $\square$

La proposition qui suit est un résultat général sur les groupoïdes de Lie étales et qui généralise un résultat classique (voir [BO08]) des groupes discrets : si  $G$  est un sous groupe d'un groupe discret  $H$ , alors pour toute fonction  $f$  dans  $\mathbb{C}[G]$ , on a  $\|\lambda_G(f)\|_{L^2(G)} = \|\lambda_H(f)\|_{L^2(H)}$ . On utilisera la proposition suivante dans la suite :

**Proposition 4.3.23.** *Soient  $\mathcal{H}$  un groupoïde de Lie étale et  $\mathcal{G}$  un sous groupoïde ouvert de  $\mathcal{H}$ . Pour toute fonction continue à support compact  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ , on a*

$$\|\lambda(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} = \|\lambda(f)\|_{C_r^*(\mathcal{G})}$$

*Démonstration.* Soit  $f$  dans  $C_c(\mathcal{G})$ , on note  $S = s(\text{Supp}(f))$  et  $R = r(\text{Supp}(f))$ ; ce sont des sous espaces de  $\mathcal{H}^{(0)}$ . On a  $\|\lambda(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} = \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})}$  où  $\lambda_x(f) : l^2(\mathcal{H}_x^S) \rightarrow l^2(\mathcal{H}_x^R)$ . Pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^{(0)}$  et tout  $y$  dans  $\text{Sat}(x)$ , on a

$$\|\lambda_x(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} = \|\lambda_y(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})}$$

Pour tout  $x$  en dehors de  $\text{Sat}(S)$ , on a  $\lambda_x(f) = 0$  donc  $\|\lambda_x(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} = \sup_{x \in S} \|\lambda_x(f)\|$ .

Soit  $x \in S$ , on a alors  $\lambda_x(f) : l^2(\mathcal{H}_x^S) \rightarrow l^2(\mathcal{H}_x^R)$  et on a  $\mathcal{H}_x^S = \sqcup_{a \in S} \mathcal{H}_x^a = \sqcup_{a \in S} \eta_a \mathcal{H}_x^x$  où  $\eta_a \in \mathcal{H}_x^a$  quelconque et de même  $\mathcal{H}_x^R = \sqcup_{b \in R} \eta_b \mathcal{H}_x^x$  avec  $\eta_b \in \mathcal{H}_x^b$  quelconque. On a alors

$$\lambda_x(f) : \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{H}_x^x) \longrightarrow \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{H}_x^x)$$

Le groupe d'isotropie  $\mathcal{G}_x^x$  étant un sous groupe discret du groupe d'isotropie discret  $\mathcal{H}_x^x$ , on considère  $\{\alpha_k\}_{k \in \kappa_x}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{H}_x^x$  contenant exactement un représentant de chaque classe à droite de  $\mathcal{G}_x^x$  dans  $\mathcal{H}_x^x$  et on a  $\mathcal{H}_x^x = \bigsqcup_{\alpha \in \kappa_x} \mathcal{G}_x^x \alpha_k$  et on a alors

$$\lambda_x(f) : \bigoplus_{k \in \kappa_x} \left( \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \right) \longrightarrow \bigoplus_{k \in \kappa_x} \left( \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \right)$$

Pour tout  $i$  dans  $\kappa_x$ , on note  $P_i^S : \bigoplus_{k \in \kappa_x} \left( \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \right) \rightarrow \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x \alpha_i)$  et  $P_i^R : \bigoplus_{k \in \kappa_x} \left( \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \right) \rightarrow \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x \alpha_i)$  les projections orthogonales. On a l'égalité  $P_i^R \circ \lambda_x(f) = \lambda_x(f) \circ P_i^S$ .

On note  $\lambda_x^i(f) : \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x \alpha_i) \rightarrow \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x \alpha_i)$  l'opérateur induit.

On considère les opérateurs unitaires  $V_i^S : \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \rightarrow \bigoplus_{a \in S} l^2(\eta_a \mathcal{G}_x^x)$  et  $V_i^R : \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x \alpha_k) \rightarrow \bigoplus_{b \in R} l^2(\eta_b \mathcal{G}_x^x)$  les opérateurs unitaires et on a alors

$$(V_i^R)^* \lambda_x^i(f) V_i^S = \lambda_x^i(f)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\lambda(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} &= \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} = \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \left\| \bigoplus_{k \in \kappa_x} \lambda_x^k(f) \right\|_{C_r^*(\mathcal{H})} \\ &= \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \left( \sup_{k \in \kappa_x} \|\lambda_x^k(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} \right) = \sup_{k \in \kappa_x} \left( \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|\lambda_x^k(f)\|_{C_r^*(\mathcal{H})} \right) \\ &= \sup_{k \in \kappa_x} \left( \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|(V_k^R)^* \lambda_x^k(f) V_k^S\|_{C_r^*(\mathcal{H})} \right) = \sup_{k \in \kappa_x} \left( \sup_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|_{C_r^*(\mathcal{G})} \right) \\ &= \|\lambda(f)\|_{C_r^*(\mathcal{G})} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.3.24.** *Soit  $f$  de  $C_c(\mathcal{D})$  et  $F$  une fonction dans  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  associée à  $f$ . On a l'égalité*

$$\|\lambda(F)\|_{C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1])} = \|\lambda(F)\|_{C_r^*(\mathcal{D})}$$

*Démonstration.* Le groupoïde  $\tilde{\mathcal{O}}$  est un sous groupoïde ouvert du groupoïde étale  $\mathcal{N} \times [0, 1]$ . On applique la proposition 4.3.23, et pour toute fonction  $F$  de  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  à support dans  $\tilde{\mathcal{O}}$ , on a

$$\|\lambda(F)\|_{C_r^*(\mathcal{N} \times [0, 1])} = \|\lambda(F)\|_{C_r^*(\tilde{\mathcal{O}})}$$

□

#### 4.3.4 Continuité du fibré de $C^*$ -algèbre

Soient  $f$  une fonction de  $C_c(\mathcal{D})$  et  $F$  une fonction dans  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  associée à  $f$ .

**Lemme 4.3.25.** *Soit  $f$  une fonction de  $C_c(\mathcal{D})$  et  $F$  une fonction associée dans  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$ . Alors pour tout  $(x, v, t) \in \tilde{\mathcal{O}}$ , on a l'égalité*

$$\|\lambda_t(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{D}_t))} = \|\lambda_t(F)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{N} \times \{t\}))}$$

*Démonstration.* On considère séparément les cas  $t = 0$  et  $t > 0$ .

a) Pour  $t = 0$ , on a clairement l'égalité puisque, pour tout  $(\gamma, \omega) \in \mathcal{N}$ ,  $f(\gamma, \omega, 0) = F(\gamma, \omega, 0)$ , par définition de  $F$  et

$$\begin{aligned} \|\lambda_0(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{N} \times \{0\}))} &= \sup_{(x, v) \in \mathcal{N}^{(0)}} \sup_{\xi \in L^2(\mathcal{N}_{(x, v)})} \langle f \star \xi, \xi \rangle \\ &= \sup_{(x, v) \in \mathcal{N}^{(0)}} \sup_{\xi \in L^2(\mathcal{N}_{(x, v)})} \langle F \star \xi, \xi \rangle \\ &= \|\lambda_0(F)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{N} \times \{0\}))} \end{aligned}$$

b) On considère  $t > 0$  et on étudie la représentation régulière

$$\lambda_t : C_r^*(\mathcal{D}_t) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{D}_t))$$

dont la norme est donnée, pour tout  $f$  dans  $C_r^*(\mathcal{D}_t)$  par  $\|\lambda_t(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{H}))} = \text{Sup}_{x \in \mathcal{H}^{(0)}} \|\lambda_{(x, t)}(f)\|$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathcal{H}^{(0)}$ , on a d'après le lemme 4.3.12,  $\lambda_{(x, t)}(f) : l^2(\mathcal{H}_x^S) \rightarrow l^2(\mathcal{H}_x^R)$ . D'après la remarque 4.3.13, il existe des parties discrètes  $\Lambda$  dans  $S$  et  $\Lambda'$  dans  $R$  telles que

$$\mathcal{D}_{(x, t)}^S = \bigsqcup_{(a, t) \in \Lambda} \mathcal{H}_x^a \times t \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{(x, t)}^R = \bigsqcup_{(b, t) \in \Lambda'} \mathcal{H}_x^b \times t$$

En utilisant les décomposition en réunions disjointes de  $\mathcal{D}_x^S$  et de  $\mathcal{D}_x^R$ , on a

$$\lambda_{(x, t)}(f) : \bigoplus_{(a, t) \in \Lambda} l^2(\mathcal{H}_x^a) \longrightarrow \bigoplus_{(b, t) \in \Lambda'} l^2(\mathcal{H}_x^b)$$

Pour tout  $(a, t) \in \Lambda$  (respectivement  $(b, t) \in \Lambda'$ ), on considère  $\eta_a$  (respectivement  $\eta_b$ ) un élément (quelconque) de  $\mathcal{H}_x^a$  (respectivement de  $\mathcal{H}_x^b$ ) tel que l'espace  $\mathcal{H}_x^a$  (respectivement  $\mathcal{H}_x^b$ ) s'identifie à  $\eta_a \cdot \mathcal{H}_x^x$  (respectivement  $\eta_b \cdot \mathcal{H}_x^x$ ).

On obtient alors

$$\lambda_{(x, t)}(f) : \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2(\eta_a \cdot \mathcal{H}_x^x) \longrightarrow \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2(\eta_b \cdot \mathcal{H}_x^x)$$

Il existe  $(\dot{x}, v, t)$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}^{(0)}$  tel que  $\varphi(\dot{x}, v, t) = (x, t)$ . L'application  $\varphi : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{H}$  étant un homomorphisme injectif sur les groupes d'isotropies, le sous groupe  $\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}$  du groupe

d'isotropie  $\mathcal{N}_{(\dot{x},v)}^{(\dot{x},v)} \times \{t\}$  est isomorphe au sous groupe  $\varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)$  du groupe d'isotropie  $\mathcal{H}_x^x$ . On considère  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  une partie de  $\mathcal{H}_x^x$  contenant exactement un représentant de chaque classe à droite suivant  $\varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)$  et on obtient

$$\mathcal{H}_x^x = \bigsqcup_{i \in I} \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i$$

On note, pour tout  $i$  dans  $I$ ,

$$P_{x,\Lambda}^i \in \mathcal{L}\left(\bigoplus_{\substack{a \in \Lambda \\ i \in I}} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right)\right) \quad \text{et} \quad P_{x,\Lambda'}^i \in \mathcal{L}\left(\bigoplus_{\substack{b \in \Lambda' \\ i \in I}} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right)\right)$$

les projections orthogonales respectivement sur la composante  $\bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right)$  et la composante  $\bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right)$  qui vérifient, pour tout  $i$  dans  $I$ , l'égalité

$$P_{x,\Lambda'}^i \circ \lambda_{(x,t)}(f) = \lambda_{(x,t)}(f) \circ P_{x,\Lambda}^i = P_{x,\Lambda'}^i \circ \lambda_{(x,t)}(f) \circ P_{x,\Lambda}^i$$

Pour tout  $i$  dans  $I$ , on note  $\lambda_{(x,t)}^i(f)$  l'opérateur dans  $\mathcal{L}\left(\bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)\right)\right)$  de restriction obtenu par composition de  $\lambda_{(x,t)}(f)$  avec les projections et on a  $\lambda_{(x,t)}(f) = \bigoplus_{i \in I} \lambda_{(x,t)}^i(f)$ .

Les opérateurs

$$\begin{aligned} V_{\Lambda}^{x,i} &: \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right) \longrightarrow \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)\right) \\ V_{\Lambda'}^{x,i} &: \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right) \cdot \alpha_i\right) \longrightarrow \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)\right) \end{aligned}$$

sont des opérateurs unitaires et on note

$$\widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)} := (V_{\Lambda'}^{x,i}) \circ \lambda_{(x,t)}^i(f) \circ (V_{\Lambda}^{x,i})^*$$

on a alors  $\|\widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)}\| = \|\lambda_{(x,t)}^i(f)\|$ . On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_{(x,t)}(f) &= \bigoplus_{i \in I} \lambda_{(x,t)}^i(f) \\ &= \bigoplus_{i \in I} (V_{\Lambda'}^{x,i})^* \left(\widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)}\right) (V_{\Lambda}^{x,i}) \\ &= \left(\bigoplus_{i \in I} V_{\Lambda'}^{x,i}\right)^* \left(\bigoplus_{i \in I} \widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)}\right) \left(\bigoplus_{i \in I} V_{\Lambda}^{x,i}\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $i$  dans  $I$ , l'opérateur

$$\widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)} : \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)\right) \longrightarrow \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi\left(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x},v,t)}^{(\dot{x},v,t)}\right)\right)$$

Il nous suffit de montrer l'égalité pour tout  $(x, t)$  dans  $\mathcal{H}^{(0)}$  des normes des opérateurs  $\widetilde{\lambda_{(x,t)}^i(f)}$  et  $\lambda_{(\dot{x},v,t)}(F)$ .

On considère les opérateurs

$$\begin{aligned}\pi &: \bigoplus_{(\dot{a}, \vec{a}, t) \in \Upsilon} l^2\left(\alpha_{(\dot{a}, \vec{a}, t)} \cdot \mathcal{O}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}\right) \longrightarrow \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)})\right) \\ \pi' &: \bigoplus_{(\dot{b}, \vec{b}, t) \in \Upsilon'} l^2\left(\alpha_{(\dot{b}, \vec{b}, t)} \cdot \mathcal{O}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}\right) \longrightarrow \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)})\right)\end{aligned}$$

défini, pour tout  $\xi = \bigoplus_{(\dot{a}, \vec{a}, t) \in \Upsilon} \xi_{(\dot{a}, \vec{a}, t)}$ , par  $\pi(\xi) := \bigoplus_{a \in \Lambda} \xi_a$  où

$$\xi_a(\eta_a \cdot \gamma) := \xi_{\varphi^{-1}(a, t)}(\alpha_{\varphi^{-1}(a, t)} \cdot \varphi^{-1}(\gamma, t))$$

On définit de manière analogue l'opérateur  $\pi'$ . Les opérateurs  $\pi$  et  $\pi'$  sont unitaires et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{(\dot{a}, \vec{a}, t) \in \Upsilon} l^2\left(\alpha_{(\dot{a}, \vec{a}, t)} \cdot \mathcal{O}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}\right) & \xrightarrow{\lambda_{(\dot{x}, v, t)}(F)} & \bigoplus_{(\dot{b}, \vec{b}, t) \in \Upsilon'} l^2\left(\alpha_{(\dot{b}, \vec{b}, t)} \cdot \mathcal{O}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)}\right) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \bigoplus_{a \in \Lambda} l^2\left(\eta_a \cdot \varphi(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)})\right) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda_{(x, t)}^i}(f)} & \bigoplus_{b \in \Lambda'} l^2\left(\eta_b \cdot \varphi(\tilde{\mathcal{O}}_{(\dot{x}, v, t)}^{(\dot{x}, v, t)})\right)\end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|\lambda_{(x, t)}(f)\| &= \left\| \left( \bigoplus_{i \in I} V_{\Lambda'}^{x, i} \right)^* \left( \bigoplus_{i \in I} \widetilde{\lambda_{(x, t)}^i}(f) \right) \left( \bigoplus_{i \in I} V_{\Lambda}^{x, i} \right) \right\| = \sup_{i \in I} \left\| \widetilde{\lambda_{(x, t)}^i}(f) \right\| \\ &= \left\| \widetilde{\lambda_{(x, t)}^i}(f) \right\| = \left\| \lambda_{(\dot{x}, v, t)}(F) \right\|\end{aligned}$$

□

**Proposition 4.3.26.** *Le fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{D}), \pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t))$  est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer pour toute fonction  $f$  de  $C_c(\mathcal{D})$ , que l'application  $t \rightarrow \|\lambda_t(f)\|$  est continue sur  $[0, 1]$ . Le problème de la continuité se pose essentiellement en zéro. On utilise le lemme 4.3.6 ainsi que la remarque 4.3.7 pour se ramener à une fonction à support dans  $\varphi(\tilde{\mathcal{O}})$ . Soit  $F$  dans  $C_c(\mathcal{N} \times [0, 1])$  la fonction associée à  $f$  que l'on a définie dans 4.3.8. D'après le lemme 4.3.25, pour tout  $(x, t)$  dans  $Sat(S)$ , on a l'égalité suivante

$$\|\lambda_{(x, t)}(f)\| = \|\lambda_{(\dot{x}, v, t)}(F)\|$$

L'application  $t \rightarrow \|\lambda_t(F)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{N} \times \{t\}))}$  étant continue d'après la proposition 4.3.15, alors l'application  $t \rightarrow \|\lambda_t(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{D}_t))}$  est continue sur  $[0, 1]$  et le fibré de  $C^*$ -algèbres  $([0, 1], C_r^*(\mathcal{D}), \pi_t : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}_t))$  est un fibré de  $C^*$ -algèbres continu.

□

## 4.4 Élément de E-théorie

On étudie dans cette section la suite  $0 \rightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}^N \times \{0\}) \rightarrow 0$  et on prouve qu'elle est exacte. On utilise ensuite les propriétés du bifoncteur de E-théorie pour déterminer un morphisme de groupe de K-théorie  $K(C_r^*(\mathcal{G}^N))$  dans  $K(C_r^*(\mathcal{H}))$ .

#### 4.4.1 Suite exacte de $C^*$ -algèbres

**Proposition 4.4.1.** *La suite courte de  $C^*$ -algèbres*

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \xrightarrow{i} C_r^*(\mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_0} C_r^*(\mathcal{G}^N) \longrightarrow 0$$

est exacte.

*Démonstration.* Il est clair que les homomorphismes de  $C^*$ -algèbres

$$i : C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \rightarrow C_r^*(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad \pi_0 : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}^N \times \{0\})$$

sont respectivement injectif et surjectif. De même, l'inclusion  $\mathfrak{S}(i) \subset \ker(\pi_0)$  est évidente. Il s'agit de prouver que l'on a l'inclusion  $\ker(\pi_0) \subset \mathfrak{S}(i)$ . Soit  $a$  un opérateur dans  $C_r^*(\mathcal{N})$  vérifiant  $\pi_0(a) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $f_\varepsilon$  dans  $C_c(\mathcal{N})$  telle que  $\|a - \lambda(f_\varepsilon)\| < \varepsilon$ . Ainsi on a  $\|\pi_0(f_\varepsilon)\| < \varepsilon$ . Soit  $\delta \in [0, \frac{1}{2}[$  et  $\psi_\delta$  une fonction croissante sur  $[0, 1]$ , telle que  $\psi|_{[0, \delta]} = 0$  et  $\psi|_{[2\delta, 1]} = 1$ . On note  $h_{\varepsilon, \delta} := \psi_\delta \cdot f_\varepsilon$  la fonction dans  $C_c(\mathcal{H} \times ]0, 1])$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|a - \lambda(h_{\varepsilon, \delta})\| &= \|a - \lambda(f_\varepsilon) + \lambda(f_\varepsilon) - \lambda(h_{\varepsilon, \delta})\| \\ &\leq \|a - \lambda(f_\varepsilon)\| + \|\lambda(f_\varepsilon) - \lambda(h_{\varepsilon, \delta})\| \\ &\leq \varepsilon + \max \left\{ \|\lambda_0(f_\varepsilon)\| \quad ; \quad \sup_{0 < t < 2\delta} |1 - \psi_\delta(t)| \|\lambda_t(f_\varepsilon)\| \right\} \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.3.26, l'application  $t \rightarrow \|\lambda_t(f_\varepsilon)\|$  est continue sur  $[0, 1]$ . Il existe un réel  $\eta > 0$  vérifiant pour tout  $t \in [0, \eta[$  l'inégalité  $\|\lambda_t(f_\varepsilon)\| < 2\varepsilon$ . On choisissant  $\delta < \frac{\eta}{2}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|a - \lambda(h_{\varepsilon, \delta})\| &< \varepsilon + \max \{ \varepsilon ; 2\varepsilon \} \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi pour tout opérateur  $a$  de  $C_r^*(\mathcal{D})$  tel que  $a$  est dans  $\ker(\pi_0)$ , et pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $h$  dans  $C_c(\mathcal{H} \times ]0, 1])$  telle que  $\|a - \lambda(h)\| < \varepsilon$ . L'opérateur  $a$  est donc dans  $Im(i)$  et on a  $\ker(\pi_0) = Im(i)$ . La suite courte de  $C^*$ -algèbres

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \xrightarrow{i} C_r^*(\mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_0} C_r^*(\mathcal{G}^N) \longrightarrow 0$$

est exacte. □

L'exactitude de la suite va nous permettre d'obtenir un élément de  $E$ -théorie et par conséquent un morphisme entre groupes de  $K$ -théorie. Ceux-ci sont explicités dans la section qui suit où on rappelle tout d'abord quelques notions succinctes sur la  $E$ -théorie puis on applique les propriétés de ce foncteur sur la suite exacte que nous venons d'obtenir.

#### 4.4.2 $E$ -théorie

On rappelle très brièvement quelques notions de la  $E$ -théorie. On se réfère principalement aux articles [CH90], [Bla86] et [GHT00]. On trouve également des exposés détaillés sur la  $E$ -théorie dans [Con94] ou encore dans [Tho99] et [Pop04] pour la version équivariante par rapport à un groupe et un groupoïdes. Toutes les  $C^*$ -algèbres considérées dans notre travail sont séparables.

**Morphismes asymptotiques :** on utilise la définition originale d'un morphisme asymptotique défini dans [CH90] :

**Définition 4.4.2.** Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres. Un morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$  est une famille asymptotique d'applications  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  de  $A$  dans  $B$  telle que pour tout  $a$  dans  $A$ , l'application  $t \rightarrow \varphi_t(a)$  est continue et vérifie les conditions suivantes : pour tout  $a$  et  $a'$  dans  $A$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$

- 1)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(a^*) - \varphi(a)^*\| = 0$
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(a + \lambda a') - \varphi(a) - \lambda \varphi(a')\| = 0$
- 3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(aa') - \varphi(a)\varphi(a')\| = 0$

Deux morphismes asymptotiques  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  et  $(\phi_t)_{t \in [1, \infty[}$  de  $A$  dans  $B$  sont dits équivalents si pour tout  $a$  dans  $A$ ,

$$\lim_{t \in \infty} \|\varphi_t(a) - \phi_t(a)\| = 0$$

Deux morphismes asymptotiques  $(\varphi_t^0)_{t \in [1, \infty[}$  et  $(\varphi_t^1)_{t \in [1, \infty[}$  de  $A$  dans  $B$  sont dits homotopes s'il existe un morphisme asymptotique  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  de  $A$  dans  $B \otimes C([0, 1])$  tel que pour tout  $a$  dans  $A$  et tout  $t$  dans  $[1, \infty[$

$$[\varphi_t(a)](0) = \varphi_t^0(a) \quad \text{et} \quad [\varphi_t(a)](1) = \varphi_t^1(a)$$

On note  $[[A, B]]$  l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques de  $A$  dans  $B$ .

*Remarque 4.4.3.* Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres, on note  $IB = C_b([0, 1], B)$  la  $C^*$ -algèbre des fonctions  $f : [1, \infty[ \rightarrow B$  continues et bornées et on note  $I_0B = C_0([0, 1], B)$  l'idéal de  $IB$  constitué des fonctions continues sur  $[1, \infty[$  à valeurs dans  $B$  et qui s'annulent (en norme) à l'infinie. On appelle algèbre asymptotique de  $B$  la  $C^*$ -algèbre quotient  $\mathfrak{A}B := IB/I_0B$ . Tout morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$  induit un homomorphisme de  $C^*$ -algèbres de  $A$  dans  $\mathfrak{A}B$  et réciproquement tout homomorphisme de  $C^*$ -algèbres de  $A$  dans  $\mathfrak{A}B$  induit un morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$ .

**Exemples 4.4.4.** On donne un exemple canonique de morphisme asymptotique ainsi que les relations avec la  $K$ -théorie des  $C^*$ -algèbres :

- (a) Tout homomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\varphi : A \rightarrow B$  induit un morphisme asymptotique canonique de  $A$  dans  $B$  : on pose pour tout  $t$  dans  $[1, \infty[$ ,  $\varphi_t := \varphi$ . On obtient ainsi une application naturelle  $F : [A, B] \rightarrow [[A, B]]$  de l'ensemble des classes d'homotopie d'homomorphismes de  $C^*$ -algèbres entre  $A$  et  $B$  vers l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques de  $A$  dans  $B$  qui n'est pas surjectif et qui peut ne pas être injectif.
- (b) Soit  $\phi$  un morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$  et  $p$  une projection dans  $A$  alors pour un  $t$  suffisamment grand  $\phi_t(p)$  est "proche" d'une projection  $q$  dans  $B$ . La classe de  $q$  dans l'ensemble des classes d'idempotents de  $B$  ne dépend que de celle de  $p$  dans  $A$ . Sans entrer dans les détails, le morphisme asymptotique  $\phi$  définit une application  $\phi_* : K_i(A) \rightarrow K_i(B)$  entre les groupes de  $K$ -théorie des  $C^*$ -algèbres, pour  $i = 0, 1$ .

Il est possible de composer les morphismes asymptotiques comme on compose les homomorphismes entre  $C^*$ -algèbres : la définition d'une composition de deux morphismes asymptotiques n'est pas aussi directe que la composition d'homomorphismes car pour tout morphisme asymptotique  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  de  $A$  dans  $B$  et  $(\phi_t)_{t \in [1, \infty[}$  de  $B$  dans  $D$ , la famille d'applications

$(\phi_t \circ \varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  n'est en général pas un morphisme asymptotique. Pour construire une telle composition, on considère une classe particulière de morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$  appelé morphisme asymptotique uniforme (qui satisfont en plus des relations de convergence uniforme sur des compact de  $A$ ) et pour lesquels on définit une composition. Enfin pour généraliser la construction à tout morphisme asymptotique, il suffit de prouver que tout morphisme asymptotique est équivalent à un morphisme asymptotique uniforme (cf. [CH90]) et la composition est définie par le théorème suivant :

**Théorème 4.4.5.** [CH90],[Bla86] Soient  $A, B$  et  $D$  des  $C^*$ -algèbres.

- a)  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  un morphisme asymptotique uniforme de  $A$  dans  $B$  et  $(\phi_t)_{t \in [1, \infty[}$  un morphisme asymptotique uniforme de  $B$  dans  $D$ , alors il existe  $r : [1, \infty[ \rightarrow [1, \infty[$  fonction continue et croissante telle que  $(\phi_{r(t)} \circ \varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  est un morphisme asymptotique de  $A$  dans  $D$ .
- b) La classe d'homotopie du morphisme asymptotique  $(\phi_{r(t)} \circ \varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  obtenu par composition ne dépend que de la classe d'homotopie des morphismes asymptotiques  $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}$  et  $(\phi_t)_{t \in [1, \infty[}$ . On a alors une application

$$[[A, B]] \times [[B, D]] \longrightarrow [[A, D]]$$

- c) La composition de morphisme asymptotique est associative, commute avec le produit tensoriel et coïncide avec la composition classique d'homomorphismes (vu comme des morphismes asymptotiques).

**Foncteur de  $E$ -théorie et suite exacte :** on donne la définition du groupe de  $E$ -théorie pour les  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  comme classe d'homotopie de morphismes asymptotiques. On rappelle que  $SA$  est la suspension de  $A$  c'est-à-dire la  $C^*$ -algèbre séparable définie par

$$SA := \{f : [0, 1] \rightarrow A : f \text{ continue et } \lim_{t \rightarrow 0} \|f(t)\|_A = 0 = \lim_{t \rightarrow 1} \|f(t)\|_A\}$$

**Définition 4.4.6.** Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres séparables, alors

$$E(A, B) := [[SA \otimes \mathbb{K}, SB \otimes \mathbb{K}]]$$

où  $\mathbb{K}$  est l'ensemble des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable  $H$ .

*Remarque 4.4.7.* Il est possible de munir  $E(A, B)$  d'une structure de groupe en donnant une structure additive dans  $E(A, B)$  et une application d'inversion. On ne donne pas les détails de ces constructions que l'on trouve dans [CH90], [Bla86] ou encore [GHT00]. On s'intéresse aux propriétés du bifoncteur de  $E$ -théorie notamment vis-à-vis des suites exactes.

**Lemme 4.4.8.** Soit  $0 \longrightarrow J \longrightarrow A \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$  une suite exacte de  $C^*$ -algèbres. On suppose que  $J$  possède  $(u_t)_{t \in [1, \infty[}$  une approximation de l'unité quasicontrainte continue et qu'il existe  $\sigma$  une section de  $q$ . Alors la famille  $(\phi_t)$  définie pour tout  $t$  par  $\phi_t(f \otimes b) := f(u_t)\sigma(b)$  est un morphisme asymptotique de  $C_0(0, 1) \odot B$  dans  $J$  qui s'étend en un morphisme asymptotique de  $SB$  dans  $J$ . Ce dernier que l'on note  $\varepsilon_q$  ne dépend ni du choix de l'approximation de l'unité ni du choix de la section.

On pose pour toutes  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$ ,  $E^0(A, B) := E(A, B)$  et  $E^1(A, B) := E(A, SB) = E(SA, B)$ . En utilisant le lemme précédent, il est possible de démontrer le théorème suivant qui donne au bifoncteur une propriété de semi-exactitude et qui permet d'avoir des suites exactes à six termes

**Théorème 4.4.9.** Soit  $0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$  une suite exacte de  $C^*$ -algèbres et  $D$  une  $C^*$ -algèbre.

(i) alors les suites suivantes sont exactes en leur milieu

$$E(D, J) \xrightarrow{i_*} E(D, A) \xrightarrow{q_*} E(D, B)$$

$$E(B, D) \xrightarrow{q^*} E(A, D) \xrightarrow{i^*} E(J, D)$$

(ii) on a les suites exactes à six termes suivantes

$$\begin{array}{ccccc} E^0(D, J) & \xrightarrow{i_*} & E^0(D, A) & \xrightarrow{q_*} & E^0(D, B) \\ \varepsilon_q \uparrow & & & & \downarrow \varepsilon_q \\ E^1(D, B) & \xrightarrow{i_*} & E^1(D, A) & \xrightarrow{q_*} & E^1(D, J) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} E^0(B, D) & \xrightarrow{q^*} & E^0(A, D) & \xrightarrow{i^*} & E^0(J, D) \\ \varepsilon_q \uparrow & & & & \downarrow \varepsilon_q \\ E^1(D, J) & \xrightarrow{q^*} & E^1(D, A) & \xrightarrow{i^*} & E^1(D, B) \end{array}$$

**Application :** d'après la proposition 4.4.1, on a obtenu à partir de toute immersion injective d'un groupoïde de Lie étale  $\mathcal{G}$  dans un groupoïde de Lie étale  $\mathcal{H}$  muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{H}$ -invariante, la suite exacte de  $C^*$ -algèbres suivante

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \xrightarrow{i} C_r^*(\mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_0} C_r^*(\mathcal{G}^N) \longrightarrow 0$$

On remarque que la  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1])$  est isomorphe à la  $C^*$ -algèbre  $C_0([0, 1]) \otimes C_r^*(\mathcal{H})$  qui est contractile. On note  $[\pi_0]$  l'élément de  $E(C_r^*(\mathcal{D}), C_r^*(\mathcal{G}^N))$  induit par l'homomorphisme d'évaluation de  $C^*$ -algèbre  $\pi_0 : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}^N)$ . Pour toute  $C^*$ -algèbre séparable  $A$ , on a alors la suite exacte de groupes de  $E$ -théorie suivante

$$\begin{array}{ccc} E(A, C_r^*(\mathcal{D})) & & \\ \downarrow \otimes[\pi_0] & \swarrow & \\ E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N)) & & E(A, C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1]) \end{array}$$

La  $C^*$ -algèbre  $C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1])$  étant contractile, on a alors  $E(A, C_r^*(\mathcal{H} \times ]0, 1])$  est réduit au groupe à un seul élément et

$$\otimes[\pi_0] : E(A, C_r^*(\mathcal{D})) \longrightarrow E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N))$$

est un isomorphisme de groupes et on note  $(\otimes[\pi_0])^{-1} : E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N)) \rightarrow E(A, C_r^*(\mathcal{D}))$  le morphisme inverse. On note  $\pi_1 : C_r^*(\mathcal{D}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{H})$  l'homomorphisme de  $C^*$ -algèbres d'évaluation en un qui induit un morphisme de groupes de  $E$ -théorie

$$[\pi_1] : E(A, C_r^*(\mathcal{D})) \longrightarrow E(A, C_r^*(\mathcal{H}))$$

et on note  $\phi^A : E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N)) \rightarrow E(A, C_r^*(\mathcal{H}))$  qui à tout élément  $x$  de  $E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N))$  associe l'élément  $\left( (\otimes [\pi_0])^{-1}(x) \right) \otimes [\pi_1]$ .

Si on considère le cas particulier où  $A = C_r^*(\mathcal{G}^N)$ , on obtient alors l'homomorphisme de groupes de  $E$ -théorie suivant

$$\phi^{C_r^*(\mathcal{G}^N)} : E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{G}^N)) \longrightarrow E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{H}))$$

On note  $1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)}$  l'élément de  $E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{G}^N))$  induit par l'identité sur  $C_r^*(\mathcal{G}^N)$  qui est l'élément neutre de la multiplication dans  $E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{G}^N))$  vu comme anneau et on pose  $\sigma = \phi^{C_r^*(\mathcal{G}^N)}(1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)})$  l'image de l'élément unité. On pose

$$\alpha^A : E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N)) \longrightarrow E(A, C_r^*(\mathcal{H}))$$

le morphisme de groupes définie pour tout  $x$  dans  $E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N))$  par  $\alpha^A(x) = x \otimes \sigma$  et on montre par le diagramme commutatif suivant que l'on a  $\phi^A = \alpha^A$  : pour tout  $x$  dans  $E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N))$

$$\begin{array}{ccccc}
 E(A, C_r^*(\mathcal{G}^N)) & \xleftarrow{x \otimes} & E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{G}^N)) & & \\
 \uparrow [\pi_0] & & \uparrow [\pi_0] & & \\
 E(A, C_r^*(\mathcal{D})) & \xleftarrow{x \otimes} & E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{D})) & & \\
 \downarrow [\pi_1] & & \downarrow [\pi_1] & & \\
 E(A, C_r^*(\mathcal{H})) & \xleftarrow{x \otimes} & E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{H})) & & \\
 \phi^A \curvearrowright & & \phi^{C_r^*(\mathcal{G}^N)} \curvearrowright & & 
 \end{array}$$

ainsi pour  $1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)}$  dans  $E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{G}^N))$  on a alors

$$\phi^A(x) = \phi^A(x \otimes 1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)}) = x \otimes \left( \phi^{C_r^*(\mathcal{G}^N)}(1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)}) \right) = x \otimes \sigma = \alpha^A(x)$$

**Définition 4.4.10.** Soit  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un homomorphisme de groupoïdes de Lie étales qui soit une immersion injective. On pose  $\sigma_\iota = \phi^{C_r^*(\mathcal{G}^N)}(1_{C_r^*(\mathcal{G}^N)})$  élément de  $E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{H}))$ .

On rappelle une proposition de [HS87] qui nous sera utile dans l'étude de la functorialité qui est faite dans la prochaine section.

*Remarque 4.4.11.* Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde de Lie étale et  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de fibrés  $\mathcal{G}$ -équivariants et  $K$ -orientés sur  $\mathcal{G}^{(0)}$ . Le fibré normal de l'immersion  $i : E_1 \rightarrow E$  est le fibré  $E_1 \oplus E_2$  sur  $E_1$  et on obtient un élément  $\sigma_i$  de  $E(C_r^*(\mathcal{G}^{E_1 \oplus E_2}), C_r^*(\mathcal{G}^{E_1}))$ . De plus d'après 4.1.11 la  $K$ -orientation des fibrés induit l'existence des éléments  $\beta'_E$  dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}^E), C_r^*(\mathcal{G}^{E_1}))$  et  $\beta'_{E_1 \oplus E_2}$  dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{G}^{E_1 \oplus E_2}))$ . Comme il existe un morphisme canonique de la  $KK$ -théorie vers la  $E$ -théorie, on considère les éléments de  $KK$ -théorie comme des éléments de  $E$ -théorie pour les calculs qui suivent.

**Proposition 4.4.12.** [HS87] Avec les notations utilisées précédemment, on a

$$\beta'_E = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes \sigma_i$$

*Démonstration.* On trouve la démonstration dans [HS87] qui est la preuve de la proposition 3.6.  $\square$

**Définition 4.4.13.** Soit  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un homomorphisme de groupoïdes de Lie étales qui est une immersion injective et  $K$ -orientée. On définit l'élément  $\iota_!$  de  $E(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{H}))$  à partir des éléments  $\beta'_N$  de  $KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{G}^N))$  et  $\sigma_\iota$  de  $E(C_r^*(\mathcal{G}^N), C_r^*(\mathcal{H}))$  en posant

$$\iota_! = \beta'_N \otimes \sigma_\iota$$

### 4.4.3 Functorialité dans le cas des groupoïdes moyennables en $K$ -théorie

On rappelle quelques notions concernant la nucléarité en  $K$ -théorie pour les  $C^*$ -algèbres ainsi que la moyennabilité en  $K$ -théorie d'un groupoïde.

**Nucléarité en  $K$ -théorie :** dans l'article [Ska88], Skandalis définit la notion de nucléarité en  $K$ -théorie pour les  $C^*$ -algèbres séparables. Skandalis démontre que si  $A$  est une  $C^*$ -algèbre nucléaire en  $K$ -théorie alors pour toute  $C^*$ -algèbre quelconque  $D$ , l'application  $A \otimes_{max} D \rightarrow A \otimes_{min} D$  est une équivalence de  $K$ -théorie et que le foncteur  $D \rightarrow KK(A, B)$  est semi-exact : toute suite exacte  $0 \rightarrow J \rightarrow D \rightarrow D/J \rightarrow 0$  induit une suite exacte hexagonale de groupes  $KK(A, \cdot)$ . La notion de nucléarité en  $K$ -théorie se définit à l'aide de bimodule nucléaire que nous rappelons ci-dessous et que l'on trouve dans la première partie de [Ska88] :

**Définition 4.4.14.** Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres séparables et  $\varphi : A \rightarrow B$  une application complètement positive.

- (a) l'application  $\varphi$  est dite factorisable s'il existe des applications  $\sigma : A \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tau : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow B$  toutes deux complètement positives vérifiant  $\varphi = \tau \circ \sigma$ .
- (b) si  $B$  est l'algèbre des multiplicateurs d'une  $C^*$ -algèbre  $J$ , alors l'application  $\varphi$  est dite strictement nucléaire si elle est limite simple stricte d'applications complètement positives factorisables.

Pour  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres séparables, on appelle  $A, B$ -bimodule un  $B$ -module de Hilbert  $\mathcal{E}$  dénombrablement engendré, muni d'un  $*$ -homomorphisme  $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .

**Définition 4.4.15.** Soient  $A$  et  $B$  des  $C^*$ -algèbres séparables et  $\mathcal{E}$  un  $A, B$ -bimodule. Le bimodule  $\mathcal{E}$  est dit nucléaire si l'homomorphisme  $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$  est strictement nucléaire

La définition d'une  $C^*$ -algèbre nucléaire en  $K$ -théorie s'exprime en terme de bimodule nucléaire de la manière suivante

**Définition 4.4.16.** [Ska88] Une  $C^*$ -algèbre séparable  $A$  est dite nucléaire en  $K$ -théorie s'il existe un  $A, A$ -bimodule nucléaire  $\mathcal{E}$  et  $F$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  tel que  $(\mathcal{E}, F)$  soit un bimodule de Kasparov de classe  $1_A$ , l'élément neutre du groupe  $KK(A, A)$ .

Dans le théorème 3.6 de [Ska88], Skandalis généralise un résultat de Kasparov [Kas80b] sur des propriétés de semi-exactitude

**Théorème 4.4.17.** [Ska88] Pour toute  $C^*$ -algèbre  $A$  nucléaire en  $K$ -théorie, le foncteur  $KK(A, \cdot)$  est semi-exact.

**Moyennabilité en  $K$ -théorie :** on note  $H = l^2(\mathbb{N})$  l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $\hat{H} = H \oplus H$  muni de la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation canonique. Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar. On note  $\hat{H}^{\mathcal{G}}$  le  $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ -module de Hilbert  $\mathcal{G}$ -équivariant  $L^2(\mathcal{G}) \hat{\otimes} \hat{H}$ . On rappelle la définition de la forte moyennabilité en  $K$ -théorie d'un groupoïde :

**Définition 4.4.18.** *On dit que  $\mathcal{G}$  est fortement moyennable en  $K$ -théorie si l'élément neutre  $KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$  est représenté par un bimodule de Kasparov de la forme  $(\hat{H}^{\mathcal{G}}, F)$ .*

On montre que notre construction est fonctorielle pour les compositions d'immersions injectives de groupoïdes de Lie étales. On se place dans le cas particulier où les groupoïdes considérés sont fortement moyennables en  $K$ -théorie ce qui implique que les  $C^*$ -algèbres pleines et réduites qui leur sont associées sont nucléaires en  $K$ -théorie : cela est donné par la proposition 4.12 de [Tu99]

**Proposition 4.4.19.** [Tu99] *Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar. On considère les assertions suivantes :*

- (i) *le groupoïde  $\mathcal{G}$  est fortement moyennable en  $K$ -théorie*
- (ii) *pour toute  $\mathcal{G}$ -algèbre  $A$ , les  $C^*$ -algèbres  $A \rtimes \mathcal{G}$  et  $A \rtimes_r \mathcal{G}$  sont nucléaires en  $K$ -théorie.*

*On a alors (i)  $\Rightarrow$  (ii).*

On montre que la construction qui à tout immersion injective  $K$ -orientée  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  de groupoïdes de Lie étales associe un élément  $i_!$  de  $E(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{H}))$  est fonctorielle pour la composée de deux telles immersions injectives  $K$ -orientées. On se place dans le cas particulier où les groupoïdes utilisés sont moyennables en  $K$ -théorie ce qui implique d'ailleurs que les  $C^*$ -algèbres réduites des groupoïdes sont nucléaires en  $K$ -théorie. La nucléarité en  $K$ -théorie et ses propriétés concernant les suites exactes à six-termes en  $KK$ -théorie permet d'utiliser la  $KK$ -théorie (au lieu de la  $E$ -théorie) et dans ces conditions, on se ramène au cas de l'article [HS87] et on obtient pour chaque immersion injective  $K$ -orientée  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un élément  $i_!$  du groupe de  $KK$ -théorie  $KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{H}))$ . La démonstration de la fonctorialité pour la composition est alors exactement la même que celle donnée dans la troisième partie de [HS87] et que l'on retranscrit tout de même ici

**Théorème 4.4.20.** *Soient  $\iota_3 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  et  $\iota_1 : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3$  des homomorphismes qui sont des immersions injectives et  $K$ -orientées de groupoïdes de Lie étales moyennables en  $K$ -théorie tels que  $\mathcal{G}_i^{(0)}$  est muni d'une métrique riemannienne  $\mathcal{G}_i$ -invariante, pour  $i$  dans  $\{2, 3\}$ . On a alors*

$$(\iota_2)_! = (\iota_1 \circ \iota_3)_! = (\iota_3)_! \otimes (\iota_1)_!$$

*Démonstration.* [HS87] On obtient une suite exacte de fibrés  $\mathcal{G}_1$ -équivariants

$$0 \longrightarrow N_3 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_1' \longrightarrow 0$$

dont l'immersion  $N_3 \hookrightarrow N_2$ , qui a pour fibré normal  $N_3 \oplus N_1'$ , induit un élément  $\sigma_1'$  dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}^{N_3 \oplus N_1'}), C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_2}))$ . De plus l'immersion  $K$ -orientée  $N_1' \hookrightarrow N_1$  de fibré normal  $N_3 \oplus N_1'$  induit un élément  $\sigma_3'$  dans  $KK(C_r^*(\mathcal{G}^{N_3 \oplus N_1'}), C_r^*(\mathcal{G}_2^{N_1}))$ .

En utilisant les lemmes 4.4.21 , 4.4.22 , 4.4.23 qui suivent, on montre que le diagramme

suisant (où les flèches désignent des éléments de  $KK$ -théorie) est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_3}) & \xrightarrow{\sigma_3} & C_r^*(\mathcal{G}_2) & & \\
 \uparrow \beta'_3 & \searrow \beta'_{N'_1} & \searrow \beta'_1 & & \\
 & & C_r^*(\mathcal{G}_2^{N_1}) & & \\
 & & \uparrow \sigma'_3 & & \\
 C_r^*(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\beta'_2} & C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_3 \oplus N'_1}) & \xrightarrow{\sigma'_3} & C_r^*(\mathcal{G}_2^{N_1}) \\
 & \searrow \beta'_2 & \downarrow \sigma'_1 & & \downarrow \sigma_1 \\
 & & C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_2}) & \xrightarrow{\sigma_2} & C_r^*(\mathcal{G}_3)
 \end{array} \tag{4.1}$$

**Lemme 4.4.21.** [HS87] On a  $\beta'_2 = \beta'_3 \otimes \beta'_{N'_1} \otimes \sigma'_1$

*Démonstration.* On utilise la proposition 4.1.12 et la proposition 4.4.12 et le résultat est immédiat.  $\square$

**Lemme 4.4.22.** [HS87] On a  $\sigma_3 \otimes \beta'_1 = \beta'_{N'_1} \otimes \sigma'_3$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{G}$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_2$  et  $\mathcal{G}'$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1^{N'_1}$  dans  $\mathcal{G}_2^{N_1}$ . Le groupoïde  $\mathcal{G}'$  est aussi l'espace total du fibré vectoriel  $N$  sur  $\mathcal{G}$  qui est  $K$ -orienté et par les propriétés de naturalité, on a le diagramme commutatif suivant où les flèches désignent des éléments de  $KK$ -théorie

$$\begin{array}{ccc}
 C_r^*(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\beta'_{N'_1}} & C_r^*(\mathcal{G}_2^{N_1}) \\
 [h_1] \uparrow & & \uparrow [h'_1] \\
 C_r^*(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta'_N} & C_r^*(\mathcal{G}') \\
 [h_0] \downarrow & & \downarrow [h'_0] \\
 C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_3}) & \xrightarrow{\beta'_{N'_1}} & C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_3 \oplus N'_1})
 \end{array}$$

$\square$

**Lemme 4.4.23.** [HS87] On a  $\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = \sigma'_3 \otimes \sigma_1$

*Démonstration.* On note  $\mathcal{H}'_1$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_2$  et  $\mathcal{H}_2$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_3$ . On a alors une immersion de  $\mathcal{H}'_1$  dans  $\mathcal{H}_2$  dont le fibré normal s'identifie au groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1^{N'_1}$  dans  $\mathcal{G}_2^{N_1}$ .

On considère l'ensemble

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_1^{N_3 \oplus N'_1} \cup \left( \mathcal{G}_1^{N_2} \times ]0, 1] \times \{0\} \right) \cup \left( \mathcal{G}_2^{N_1} \times \{0\} \times ]0, 1] \right) \cup \left( \mathcal{G}_3 \times ]0, 1] \times ]0, 1] \right)$$

On note  $\Gamma_1 := \mathcal{G}_1^{N_2} \times \{0\} \cup \mathcal{G}_3 \times ]0, 1]$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_3$  et  $\Gamma_2 := \mathcal{G}_1^{N_3 \oplus N'_1} \times \{0\} \cup \left( \mathcal{G}_1^{N_2} \times ]0, 1] \right)$  le groupoïde normal de l'immersion de  $\mathcal{G}_1^{N_3}$  dans  $\mathcal{G}_1^{N_2}$ .

Les groupoïdes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des sous groupoïdes fermés du groupoïde  $\mathcal{G}$ . On a le diagramme commutatif d'homomorphismes d'évaluation de  $C^*$ -algèbres de groupoïdes suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 C_r^*(\mathcal{G}_2^{N_1}) & \xleftarrow{h_0^1} & C_r^*(\mathcal{H}_2) & \xrightarrow{h_1^1} & C_r^*(\mathcal{G}_3) \\
 \uparrow f_1^1 & & \uparrow p_1 & \nearrow h_{(1,1)} & \uparrow f_1^2 \\
 C_r^*(\mathcal{H}_1) & \xleftarrow{q_0} & C_r^*(\mathcal{G}) & \xrightarrow{q_1} & C_r^*(\Gamma_1) \\
 \downarrow f_0^1 & & \downarrow p_0 & \searrow h_{(1,0)} & \downarrow f_0^2 \\
 C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_3 \oplus N_1'}) & \xleftarrow{h_0^2} & C_r^*(\Gamma_2) & \xrightarrow{h_1^2} & C_r^*(\mathcal{G}_1^{N_2}) \\
 & & \nearrow h_{(0,0)} & & \searrow h_{(1,0)}
 \end{array}$$

Les éléments de  $KK$ -théorie  $[h_{(0,0)}]$ ,  $[f_0^i]$ ,  $[h_0^i]$ ,  $[p_0]$  et  $[q_0]$  sont inversibles et on a par définition

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_0^2]^{-1} \otimes [h_1^2] \otimes [f_0^2]^{-1} \otimes [f_1^2]$$

et en utilisant le diagramme commutatif précédent on a

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}]$$

De la manière analogue, on a par définition

$$\sigma'_3 \otimes \sigma_1 = [f_0^1]^{-1} \otimes [f_1^1] \otimes [h_0^1]^{-1} \otimes [h_1^1]$$

ce qui par commutativité induit

$$\sigma'_3 \otimes \sigma_1 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}] = \sigma'_1 \otimes \sigma_2$$

□

Ce qui permet de conclure que le diagramme 4.1 est commutatif.

□



# Bibliographie

- [AD02] Claire Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their  $C^*$ -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4153–4178.
- [ADR00] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monographies de L’Enseignement Mathématique [Monographs of L’Enseignement Mathématique], vol. 36, L’Enseignement Mathématique, Geneva, 2000, With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.
- [Arv77] William Arveson, *Notes on extensions of  $C^*$ -algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 2, 329–355.
- [BC00] Paul Baum and Alain Connes, *Geometric  $K$ -theory for Lie groups and foliations*, Enseign. Math. (2) **46** (2000), no. 1-2, 3–42.
- [BdlH86] Erik Bédos and Pierre de la Harpe, *Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples*, Enseign. Math. (2) **32** (1986), no. 1-2, 139–157.
- [BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan’s property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [BHS10] Paul Baum, Nigel Higson, and Thomas Schick, *A geometric description of equivariant  $K$ -homology for proper actions*, Quanta of maths, Clay Math. Proc., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 1–22.
- [Bla86] Bruce Blackadar,  *$K$ -theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Bla96] Étienne Blanchard, *Déformations de  $C^*$ -algèbres de Hopf*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), no. 1, 141–215.
- [Bla97] Etienne Blanchard, *Subtriviality of continuous fields of nuclear  $C^*$ -algebras*, J. Reine Angew. Math. **489** (1997), 133–149.
- [Bla06] B. Blackadar, *Operator algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of  $C^*$ -algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.
- [BO08] Nathaniel P. Brown and Narutaka Ozawa,  *$C^*$ -algebras and finite-dimensional approximations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [CH90] Alain Connes and Nigel Higson, *Déformations, morphismes asymptotiques et  $K$ -théorie bivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), no. 2, 101–106.
- [CM01] Marius Crainic and Ieke Moerdijk, *Foliation groupoids and their cyclic homology*, Adv. Math. **157** (2001), no. 2, 177–197.
- [Con82] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 521–628.

- [Con94] ———, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [CR07] P. Carrillo Rouse, *Indices analytiques à support compact pour les groupoïdes de lie*, Ph.D. thesis, Université de Paris VII, 2007.
- [CRW11] Paulo Carrillo Rouse and Bai-Ling Wang, *Twisted longitudinal index theorem for foliations and wrong way functoriality*, *Adv. Math.* **226** (2011), no. 6, 4933–4986.
- [CS84] A. Connes and G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 6, 1139–1183.
- [Dix96] Jacques Dixmier, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars., Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the second (1969) edition.
- [Eff75] Edward G. Effros, *Property  $\Gamma$  and inner amenability*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **47** (1975), 483–486.
- [Ehr65] Charles Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
- [GHT00] Erik Guentner, Nigel Higson, and Jody Trout, *Equivariant  $E$ -theory for  $C^*$ -algebras*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **148** (2000), no. 703, viii+86.
- [Goe09] Geoff Goehle, *Groupoid crossed products*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2009, Thesis (Ph.D.)–Dartmouth College.
- [Gre82] P Green, *Equivariant  $K$ -theory and crossed product  $c^*$ -algebras*, *Poc. Symposia Pure Math* **38** (1982), no. 13, 337–338.
- [Hig00] N. Higson, *Bivariant  $K$ -theory and the Novikov conjecture*, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 3, 563–581.
- [HR00] Nigel Higson and John Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, *J. Reine Angew. Math.* **519** (2000), 143–153.
- [HS83] M. Hilsum and G. Skandalis, *Stabilité des  $C^*$ -algèbres de feuilletages*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33** (1983), no. 3, 201–208.
- [HS87] Michel Hilsum and Georges Skandalis, *Morphismes  $K$ -orientés d'espaces de feuilles et functorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **20** (1987), no. 3, 325–390.
- [JT91] Kjeld Knudsen Jensen and Klaus Thomsen, *Elements of  $KK$ -theory*, *Mathematics : Theory & Applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.
- [Jul81] Pierre Julg,  *$K$ -théorie équivariante et produits croisés*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **292** (1981), no. 13, 629–632.
- [Kas80a] G. G. Kasparov, *Hilbert  $C^*$ -modules : theorems of Stinespring and Voiculescu*, *J. Operator Theory* **4** (1980), no. 1, 133–150.
- [Kas80b] ———, *The operator  $K$ -functor and extensions of  $C^*$ -algebras*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), no. 3, 571–636, 719.
- [KW95] Eberhard Kirchberg and Simon Wassermann, *Operations on continuous bundles of  $C^*$ -algebras*, *Math. Ann.* **303** (1995), no. 4, 677–697.
- [KW99] ———, *Exact groups and continuous bundles of  $C^*$ -algebras*, *Math. Ann.* **315** (1999), no. 2, 169–203.
- [Lan73] Christopher Lance, *On nuclear  $C^*$ -algebras*, *J. Functional Analysis* **12** (1973), 157–176.
- [Lan95] E. C. Lance, *Hilbert  $C^*$ -modules*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, A toolkit for operator algebraists.

- [LG97] P. Y. Le Gall, *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 6, 695–698.
- [LG99] Pierre-Yves Le Gall, *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. I*, *K-Theory* **16** (1999), no. 4, 361–390.
- [LO01] Wolfgang Lück and Bob Oliver, *The completion theorem in K-theory for proper actions of a discrete group*, *Topology* **40** (2001), no. 3, 585–616.
- [LP91] Anthony To Ming Lau and Alan L. T. Paterson, *Inner amenable locally compact groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **325** (1991), no. 1, 155–169.
- [Lüc05] Wolfgang Lück, *Survey on classifying spaces for families of subgroups*, *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, *Progr. Math.*, vol. 248, Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 269–322.
- [Mic56] Ernest Michael, *Continuous selections. I*, *Ann. of Math. (2)* **63** (1956), 361–382.
- [MM03] I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 91, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [MT05] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, *Hilbert  $C^*$ -modules*, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 226, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, Translated from the 2001 Russian original by the authors.
- [Neu29] J. Neumann, *Zur allgemeinen theorie des masses*, *Fundamenta Mathematicae* **13** (1929), no. 1, 73–116 (ger).
- [Oza00] Narutaka Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 8, 691–695.
- [Pat88] Alan L. T. Paterson, *Amenability*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [Ped79] Gert K. Pedersen,  *$C^*$ -algebras and their automorphism groups*, *London Mathematical Society Monographs*, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979.
- [Phi89] N. Christopher Phillips, *Equivariant K-theory for proper actions*, *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, vol. 178, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.
- [Pie84] Jean-Paul Pier, *Amenable locally compact groups*, *Pure and Applied Mathematics (New York)*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, A Wiley-Interscience Publication.
- [Pop04] Radu Popescu, *Equivariant E-theory for groupoids acting on  $C^*$ -algebras*, *J. Funct. Anal.* **209** (2004), no. 2, 247–292.
- [RM88] Jean Renault and Bill Moran, *Ideal structure of groupoid crossed product  $C^*$  algebras*, *Miniconferences on harmonic analysis and operator algebras (Canberra, 1987)*, *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, vol. 16, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988, pp. 267–268.
- [Run02] Volker Runde, *Lectures on amenability*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Sed76] A. K. Seda, *Haar measures for groupoids*, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **76** (1976), no. 5, 25–36.
- [Seg68] Graeme Segal, *Equivariant K-theory*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), no. 34, 129–151.

- [Seg70] ———, *Fredholm complexes*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **21** (1970), 385–402.
- [Ska88] Georges Skandalis, *Une notion de nucléarité en  $K$ -théorie (d'après J. Cuntz)*, *K-Theory* **1** (1988), no. 6, 549–573.
- [Sta06] Yves Stalder, *Moyennabilité intérieure et extensions HNN*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 2, 309–323.
- [Tho99] Klaus Thomsen, *Asymptotic homomorphisms and equivariant  $KK$ -theory*, J. Funct. Anal. **163** (1999), no. 2, 324–343.
- [Tu99] Jean-Louis Tu, *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables*, *K-Theory* **17** (1999), no. 3, 215–264.
- [Tu04] ———, *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and  $K$ -theory*, Doc. Math. **9** (2004), 565–597.
- [TXLG04] Jean-Louis Tu, Ping Xu, and Camille Laurent-Gengoux, *Twisted  $K$ -theory of differentiable stacks*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 6, 841–910.
- [Val88] Alain Valette, *Le rôle des fibrés de rang fini en théorie de Kasparov équivariante*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8<sup>o</sup> (2) **45** (1988), no. 6.
- [Vas01] S. Vassout, *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal*, Ph.D. thesis, Université de Paris VII, 2001.
- [Wil93] T. J. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993.
- [Wil07] Dana P. Williams, *Crossed products of  $C^*$ -algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [Win83] H. E. Winkelnkemper, *The graph of a foliation*, Ann. Global Anal. Geom. **1** (1983), no. 3, 51–75.
- [Yu00] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240.