



**HAL**  
open science

# Sur différents problèmes de convergence en loi dans l'espace de Wiener

Rola Zintout

► **To cite this version:**

Rola Zintout. Sur différents problèmes de convergence en loi dans l'espace de Wiener. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0124 . tel-01751830

**HAL Id: tel-01751830**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01751830v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse  
présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université De Lorraine  
en Mathématiques  
par  
Rola Zintout

---

**Sur différents problèmes de convergence en loi dans l'espace de  
Wiener**

---

Soutenue publiquement le XXX 2015

devant le jury composé de :

<b>Marco Dozzi</b>	Professeur, Lorraine (Examineur)
<b>Ivan Nourdin</b>	Professeur, Luxembourg (Directeur de thèse)
<b>Lluís Quer-Sardanyons</b>	Professeur associé, Barcelone (Examineur)
<b>Giovanni Peccati</b>	Professeur, Luxembourg (Examineur)

et après rapports de :

<b>Yaozhong Hu</b>	Professeur, Kansas (Rapporteur)
<b>Lluís Quer-Sardanyons</b>	Professeur associé, Barcelone (Rapporteur)

---



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Chaos de Wiener	3
1.2 Intégrales de Wiener-Itô	4
1.3 Dérivée de Malliavin	5
1.4 Générateur du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck	6
1.5 Opérateur divergence	6
1.6 Le mouvement brownien fractionnaire	7
1.6.1 Définition	7
1.6.2 Variations puissance	8
1.6.3 Intégration	8
1.7 Théorème du moment quatrième	9
1.8 Théorème de Breuer-Major	11
1.9 Nos résultats	12
1.9.1 Distance en variation totale entre deux intégrales doubles	12
1.9.2 Variations croisées des intégrales de Young	14
1.9.3 Convergence multivariée des processus de Volterra	15
<b>2 Total variation distance between two double Wiener-Itô integrals</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Preliminaries	19
2.3 Proof of Theorem 2.1.2	22
2.4 Proof of (2.1.10)	24
<b>3 Cross-variation of Young integral with respect to long-memory fractional Brownian motions</b>	<b>27</b>
3.1 Introduction	27
3.1.1 Foreword and main results	27
3.1.2 Link to the existing literature	28
3.1.3 Plan of the paper	29
3.2 Our framework	29
3.3 Preliminaries	30
3.3.1 Breuer-Major theorem	30
3.3.2 Taqqu's theorem and the Rosenblatt process	31

3.3.3	Two simple auxiliary lemmas . . . . .	32
3.3.4	Asymptotic behaviour of weighted random sums, following Corcuera, Nualart and Podolskij [4] . . . . .	33
3.4	Proof of our main results . . . . .	35
3.4.1	Proof of Theorem 3.1.1 . . . . .	35
3.4.2	Proof of Theorem 3.1.2 . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Multivariate central limit theorems for averages of fractional Volterra processes.</b>	<b>38</b>
4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Preliminaries . . . . .	41
4.2.1	Fractional Brownian motion . . . . .	41
4.2.2	Wiener integral against fBm . . . . .	41
4.2.3	Hermite polynomials and Wiener chaoses . . . . .	42
4.2.4	Fourth moment theorem . . . . .	42
4.2.5	Breuer-Major theorem . . . . .	43
4.3	Proofs of the main results . . . . .	43
4.3.1	Proof of Theorem 4.1.1 . . . . .	43
4.3.2	Proof of Theorem 4.1.2 . . . . .	47
4.4	An application to the estimation of parameters in the fractional CAR( $k$ ) model . . . . .	49

# Introduction

Comme son titre l'indique, cette thèse porte sur l'approximation probabiliste dans un contexte fractionnaire, c'est-à-dire dans des modèles reliés d'une manière ou d'une autre au mouvement brownien fractionnaire. Le dénominateur commun de nos résultats est qu'ils proposent des conditions générales sous lesquelles une variable aléatoire de loi compliquée converge, en loi, vers une variable aléatoire de loi plus aisée. Et quand cela a été possible, nous avons aussi cherché à associer des vitesses de convergence.

Les outils que nous avons utilisés, et que nous allons décrire en détail dans le premier chapitre, sont reliés à un domaine de recherche récent, appelé *approche de Malliavin-Stein*. En 2005, Nualart et Peccati ont découvert un théorème limite surprenant (qui porte aujourd'hui le nom de *théorème du moment quatrième*) pour les suites d'intégrales multiples de Wiener-Itô: pour de telles suites et après renormalisation, la convergence en loi vers la gaussienne standard se trouve être équivalente à la convergence du seul moment quatrième. Peu de temps après la publication de ce joli résultat, Peccati et Tudor l'ont étendu au cadre multivarié. Et, depuis, de nombreuses améliorations et nouveaux développements sont apparus dans la littérature (voir la page <https://sites.google.com/site/malliavinstein> pour un aperçu), notamment un article de Nourdin et Peccati qui, pour la première fois, a combiné la *méthode de Stein* avec le *calcul de Malliavin*, offrant ainsi un cadre dans lequel il est maintenant possible d'associer une vitesse de convergence au théorème du moment quatrième.

La *méthode de Stein* représente un ensemble de techniques probabilistes permettant d'estimer la distance entre deux distributions à l'aide d'opérateurs différentiels. Elle a été introduite dans les années 1970 par Charles Stein [41] (voir aussi [39]). C'est une méthode puissante qui, dans de nombreuses situations (notamment où il n'y a pas d'indépendance sous-jacente), permet de montrer la convergence en loi vers une loi 'universelle' (gaussienne, chi-carré, etc.) et de fournir en même temps une borne d'erreur. Le nombre d'applications depuis son introduction s'est révélé très important: graphes aléatoires, statistique mathématique, matrices aléatoires, etc. C'est un domaine de recherche toujours très actif, comme en atteste par exemple la conférence *Workshop in New Directions in Stein's Method* organisée à Singapour en mai 2015.

De son côté, le *calcul de Malliavin* (aussi appelé calcul stochastique des variations) est un calcul différentiel de dimension infinie sur l'espace de Wiener introduit par Paul Malliavin en 1978 dans [16]. Un livre qui fait référence sur le sujet a été écrit par David Nualart [33]. Ce calcul est particulièrement adapté pour étudier les propriétés de régularité de la loi des fonctionnelles gaussiennes telles que les solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un champs gaussien.

Un tournant pour cette thèse est l'article [24] (voir aussi le livre [34]) dans lequel, comme nous l'avons déjà mentionné, Nourdin et Peccati ont montré qu'en combinant les formules d'intégration

par partie du calcul de Malliavin avec les opérateurs différentiels de la méthode de Stein, on produit un ensemble d'outils puissants permettant de déduire des théorèmes limites centraux et non-centraux généraux, ainsi que les vitesses de convergence qui leur sont associés. Plus précisément, la théorie développée dans le livre [34] (basée sur des travaux antérieurs de Nourdin, Nualart, Peccati, Tudor, Viens et d'autres) fournit un cadre qui, dans de nombreuses situations, permet d'obtenir des théorèmes limites en vérifiant une condition qui a la même complexité que celle consistant à calculer un moment quatrième, évitant ainsi le calcul long et fastidieux de tous les moments (technique connue sous le nom de *méthode des moments*). De plus, une estimation de l'erreur est obtenue sans plus d'efforts.

Ce manuscrit est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous introduisons le mouvement brownien fractionnaire, le calcul de Malliavin et la méthode de Stein. Puis nous donnons quelques définitions, notations, formules et opérations de bases qui seront utiles pour la compréhension des notions qui seront développées par la suite. Enfin, nous faisons un résumé succinct des résultats obtenus dans les chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la distance en variation totale entre les lois de deux intégrales doubles de Wiener-Itô. Nous améliorons des résultats antérieurs dus à Davydov et Martinova [7]. Le troisième chapitre contient l'étude du comportement asymptotique des variations croisées d'un processus bidimensionnel ayant la forme d'une intégrale de Young. Finalement, le quatrième chapitre établit la convergence multivariée de certains processus de Volterra construits à partir du mouvement brownien fractionnaire.



# Chapter 1

## Préliminaires

Ce chapitre est une introduction au calcul de Malliavin sur l'espace de Wiener et aux intégrales multiples de Wiener-Itô, objets mathématiques qui jouent un rôle primordial dans cette thèse. Nous avons principalement suivi les livres de Nourdin [20], Nourdin et Peccati [27] et Nualart [33].

### 1.1 Chaos de Wiener

**Définition 1.1.1.** *Pour  $q \geq 1$ , le polynôme d'Hermite d'ordre  $q$  est défini par:*

$$H_q(x) = (-1)^q e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.1.1)$$

La famille des polynômes d'Hermite  $(H_q)_{q \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$  vérifie les propriétés remarquables suivantes:

1.  $H'_q = qH_{q-1}$  et  $H_{q+1} = XH_q - qH_{q-1}$  pour tout  $q \geq 1$ .
2. La famille  $(\frac{1}{\sqrt{q!}}H_q)_{q \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de  $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)$ .
3. Soit  $(U, V)$  un vecteur gaussien tel que  $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ ,

$$E[H_p(U)H_q(V)] = \begin{cases} q!E[UV]^q & \text{si } q = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Définition 1.1.2.** *Soit  $\mathfrak{H}$  un espace de Hilbert réel séparable, muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$ . On dit qu'un processus stochastique  $W = \{W(h), h \in \mathfrak{H}\}$ , défini sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , est gaussien isonormal s'il est centré et si sa fonction de covariance satisfait  $E[W(f)W(g)] = \langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}}$  pour tous  $f, g \in \mathfrak{H}$ .*

**Définition 1.1.3.** *Pour tout  $q \geq 1$ , notons  $\mathcal{H}_q$  le sous-espace linéaire fermé engendré par les variables aléatoires  $\{H_q(W(h)), h \in \mathfrak{H} \text{ et } \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$ . On l'appelle le **chaos de Wiener** d'ordre  $q$ .*

Pour tout  $p \neq q$ , on peut vérifier que les sous-espaces  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{H}_q$  sont orthogonaux pour le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ . On a aussi la décomposition suivante.

**Théorème 1.1.1.** *L'espace  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se décompose comme la somme orthogonale infinie des sous-espaces de  $\mathcal{H}_p$ . Autrement dit,*

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p,$$

*c'est-à-dire tout variable aléatoire  $F$  de carré intégrable et mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$  s'écrit*

$$F = E[F] + \sum_{p=1}^{\infty} F_p, \quad \text{avec } F_p \in \mathcal{H}_p.$$

*Cette décomposition est unique. Pour chaque  $p$ , on note  $J_p(F) = F_p$  la projection orthogonale de  $F$  sur le sous-espace  $\mathcal{H}_p$ .*

## 1.2 Intégrales de Wiener-Itô

Nous introduisons dans cette partie l'intégrale de Wiener-Itô et nous donnons ses principales propriétés.

Pour tout  $q \geq 1$ , l'application

$$I_q(h^{\otimes q}) = H_q(W(h)) \quad h \in \mathfrak{H}, \quad \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1,$$

se prolonge une isométrie linéaire entre le produit tensoriel symétrique  $\mathfrak{H}^{\odot q}$  (équipé de la norme  $\sqrt{q!} \|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$ ) et le  $q$ -ième chaos de Wiener  $\mathcal{H}_q$  (équipé de la norme  $L^2(\Omega)$ ). Pour  $q = 0$ , prenons la convention que  $I_0(c) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Pour  $q = 1$ , observons qu'on a  $I_1(h) = W(h)$ .

**Définition 1.2.1.** *Si  $h \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ , on dit que  $I_q(h)$  est l'intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre  $q$  et de noyau  $h$ .*

On peut montrer que  $I_q(h)$  a des moments finis de tout ordre et qu'elle vérifie la formule d'isométrie et d'orthogonalité suivante.

**Proposition 1.2.1.** *Pour tout  $p, q \geq 1$ ,  $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$  et  $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ ,*

$$\begin{aligned} E[I_q(f)] &= 0 \\ E[I_p(f)I_q(g)] &= p! \langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}} \mathbf{1}_{\{p=q\}}. \end{aligned}$$

Si on réinterprète le théorème 1.1.1 à l'aide des intégrales multiples de Wiener-Itô, on obtient que toute variable aléatoire  $F$  de carré intégrable admet l'*expansion chaotique* suivante:

$$F = E[F] + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(f_q),$$

où les noyaux  $f_q \in \mathfrak{H}^{\odot q}$  sont uniquement déterminées par  $F$ . La propriété d'hypercontractivité des intégrales multiple de Wiener-Itô suivante est également très utile.

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}$  telle que  $q \geq 1$ . Alors pour tout  $r \in [2, +\infty)$ , on a*

$$E[|I_q(f)|^r] \leq [(r-1)^q q!]^{r/2} \|f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}^r < \infty. \quad (1.2.1)$$

Pour comprendre comment on effectue la multiplication de deux intégrales multiples de Wiener-Itô, il faut tout d'abord introduire la notion de *contractions*. Soit  $\{e_k, k \geq 1\}$  une base orthonormale de  $\mathfrak{H}$ .

**Définition 1.2.2.** Soient  $r \in \{1, \dots, p \wedge q\}$ , et soient  $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$  et  $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ . On note  $f \otimes_r g$  la contraction d'ordre  $r$  de  $f$  et  $g$ , qui est un noyau (non nécessairement symétrique) de  $\mathfrak{H}^{\otimes p+q-2r}$ . Ce noyau est défini comme suit:

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} \langle f, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} \otimes \langle g, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}. \quad (1.2.2)$$

Par convention, on note  $f \otimes_0 g$  le produit tensoriel de  $f$  et  $g$ :

$$f \otimes_0 g = f \otimes g.$$

On remarque aussi (par Cauchy-Schwarz) que

$$\|f \otimes_r g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p+q-2r}} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}} \|g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}, \quad r = 0, \dots, p \wedge q \quad (1.2.3)$$

et que  $f \otimes_p g = \langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}$  quand  $p = q$ . La *formule de multiplication* des intégrales multiples de Wiener-Itô, qui joue un rôle important et qui est utilisée de nombreuses fois dans les chapitres qui suivent, est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 1.2.2.** Soient  $p, q \geq 1$ , et soient  $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$  et  $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$  deux noyaux symétriques. Alors

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \tilde{\otimes}_r g), \quad (1.2.4)$$

où  $f \tilde{\otimes}_r g$  est la symétrisation de  $f \otimes_r g$ .

### 1.3 Dérivée de Malliavin

**Définition 1.3.1.** Soit  $F \in L^2(\Omega)$  admettant la décomposition chaotique  $F = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(f_q)$  et soit  $k \in [1, \infty)$ . On dit que  $F \in \mathbb{D}^{k,2}(\Omega)$  si  $\sum_{q=1}^{\infty} q^k q! \|f_q\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} < \infty$ .

Observons que  $\mathbb{D}^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

**Définition 1.3.2.** Soit  $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\Omega)$  de décomposition chaotique  $F = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(f_q)$ . On peut alors définir la dérivée de Malliavin de  $F$  comme suit:

$$DF = \sum_{q=1}^{\infty} q I_{q-1}(f_q).$$

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des variables aléatoires cylindriques de la forme

$$F = g(W(\phi_1), \dots, W(\phi_n)), \quad (1.3.1)$$

avec  $n \geq 1$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction infiniment dérivable à support compact, et  $\phi_i \in \mathfrak{H}$ . On peut démontrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{D}^{k,2}$  est la clôture de  $\mathcal{S}$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{k,2}}$  définie par la relation

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{k,2}(\Omega)}^2 = E[F^2] + \sum_{i=1}^k E(\|D^i F\|_{\mathfrak{H}^{\otimes i}}^2).$$

La dérivée de Malliavin  $D$  vérifie la règle de dérivation en chaîne. Si  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable avec des dérivées partielles bornées et si  $F = (F_1, \dots, F_n)$  est un vecteur dont les éléments sont dans  $\mathbb{D}^{1,2}$ , alors  $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$  et

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF_i. \quad (1.3.2)$$

On note que (1.3.2) est encore vraie lorsque  $\varphi$  est lipschitzienne et que la loi de  $F$  a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  (voir Proposition 1.2.3 dans [33]).

## 1.4 Générateur du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck

On définit dans cette section le générateur du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

**Définition 1.4.1.** Soit  $F \in L^2(\Omega)$  de décomposition chaotique  $F = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(f_q)$ .

1. Le générateur du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck est l'opérateur linéaire  $L$  défini sur  $\mathbb{D}^{2,2}(\Omega)$  par

$$LF = - \sum_{q=0}^{\infty} q I_q(f_q).$$

2. Le pseudo-inverse de  $L$  est l'opérateur linéaire  $L^{-1}$  défini sur  $L^2(\Omega)$  par

$$L^{-1}F = - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} I_q(f_q).$$

Il est clair que pour tout  $F \in L^2(\Omega)$ , on a que  $L^{-1}F \in \mathbb{D}^{2,2}$  et que  $LL^{-1}F = F - E[F]$ . La proposition suivante donne la relation entre l'opérateur  $L$  et la dérivée de Malliavin  $D$ .

**Proposition 1.4.1.** Soient  $F \in \mathbb{D}^{2,2}(\Omega)$  et  $G \in \mathbb{D}^{1,2}(\Omega)$ , alors

$$E[LF \times G] = -E[\langle DF, DG \rangle_{\mathfrak{H}}].$$

## 1.5 Opérateur divergence

Définissons  $\delta$  l'opérateur adjoint de  $D$ , appelé aussi opérateur divergence. Un élément aléatoire  $u \in L^2(\Omega, \mathfrak{H})$  appartient au domaine de  $\delta$ , noté  $\text{Dom}\delta$ , s'il vérifie l'inégalité suivante:

$$|E(\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}})| \leq c_u \sqrt{E(F^2)} \quad \text{pour tout } F \in \mathbb{D}^{1,2},$$

où  $c_u$  est une constante qui dépend seulement de  $u$ . Si  $u \in \text{Dom}\delta$ , alors la variable aléatoire  $\delta(u)$  est définie par la relation de dualité suivante:

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}) \quad \text{pour tout } F \in \mathbb{D}^{1,2}. \quad (1.5.1)$$

On aura aussi besoin des deux identités suivantes, valables pour  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  et  $u \in \text{Dom}\delta$  tels que  $Fu \in L^2(\Omega, \mathfrak{H})$ :

$$F\delta(u) = \delta(Fu) + \langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}} \quad (1.5.2)$$

$$E(\delta(u)^2) = E\|Du\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}^2 + E\|u\|_{\mathfrak{H}}^2. \quad (1.5.3)$$

Enfin, mentionnons les relations importantes existant entre  $D$ ,  $\delta$  et  $L$ . Si  $F \in \mathbb{D}^{2,2}$  alors

$$\delta DF = -LF. \quad (1.5.4)$$

On peut en déduire la formule d'intégration par parties suivante.

**Théorème 1.5.1.** *Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et lipschitzienne, et soit  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  telle que  $E[F] = 0$ . Alors*

$$E[F\varphi(F)] = E\left[\varphi'(F)\langle DF, -DL^{-1}F \rangle_{\mathfrak{H}}\right].$$

Un corollaire immédiat est le suivant.

**Corollaire 1.5.1.** *Soit  $B$  un ensemble borélien borné de  $\mathbb{R}$  et soit  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  telle que  $E[F] = 0$ . Alors*

$$E\left[F \int_{-\infty}^F \mathbf{1}_B(x) dx\right] = E\left[\mathbf{1}_B(F)\langle DF, -DL^{-1}F \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right].$$

Shigekawa (voir [38]) a pu déduire du corollaire précédent que la loi de n'importe quelle intégrale multiple de Wiener-Itô est toujours absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (sauf si son noyau est identiquement nul). Autrement dit, on a le résultat suivant

**Corollaire 1.5.2** (Shigekawa). *Soit un entier  $q \geq 1$  et soit un noyau non nul  $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ . Alors la loi de  $F = I_q(f)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

## 1.6 Le mouvement brownien fractionnaire

### 1.6.1 Définition

Le mouvement brownien fractionnaire a été introduit par Kolmogorov [11] puis rendu populaire par Mandelbrot et Van Ness [17]. On pourra trouver un historique dans les livre de Nourdin [20] et Nualart [33].

**Définition 1.6.1.** *Soit  $H \in (0, 1]$ . On appelle mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H$  tout processus gaussien  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  centré, continu et admettant la fonction de covariance*

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (1.6.1)$$

On peut vérifier que le mouvement brownien fractionnaire existe bien<sup>1</sup> pour tout  $H \in (0, 1]$  et aussi qu'il est presque sûrement höldérien d'ordre  $H - \varepsilon$  (pour tout  $\varepsilon > 0$ ) sur tout compact. Lorsque  $H > \frac{1}{2}$ , on peut ré-écrire la covariance (1.6.1) sous la forme

$$E [B_t^H B_s^H] = H(2H - 1) \int_0^t du \int_0^s dv |v - u|^{2H-2}. \quad (1.6.2)$$

L'identité précédente ne s'étend pas au cas  $H \leq \frac{1}{2}$  car le noyau  $|v - u|^{2H-2}$  n'est alors plus intégrable.

Notons aussi que, pour tout  $H \in (0, 1)$ , le mouvement brownien fractionnaire est auto-similaire et à accroissements stationnaires.

### 1.6.2 Variations puissance

L'étude des variations puissance du mouvement brownien fractionnaire peut se faire de manière relativement aisée. On a le résultat suivant.

**Proposition 1.6.1.** *Soit  $B^H$  un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$ , et soit  $p \in [1, \infty)$ . Quand  $n \rightarrow \infty$  on a, dans  $L^2(\Omega)$ ,*

$$\sum_{k=1}^n \left| B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H \right|^p \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } p > \frac{1}{H} \\ E[|G|^p] & \text{si } p = \frac{1}{H} \\ +\infty & \text{si } p < \frac{1}{H} \end{cases}, \quad G \sim N(0, 1).$$

En spécialisant le résultat précédent au cas  $p = 2$ , on obtient les convergences suivantes pour la variation quadratique:

- si  $H < \frac{1}{2}$  alors  $\sum_{k=1}^n \left( B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H \right)^2 \rightarrow \infty$
- si  $H > \frac{1}{2}$  alors  $\sum_{k=1}^n \left( B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H \right)^2 \rightarrow 0$ .

Avec un peu de travail supplémentaire, on peut en déduire que le mouvement brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale, sauf évidemment quand  $H = 1/2$  (c'est alors le mouvement brownien standard).

### 1.6.3 Intégration

Dans cette thèse, nous aurons besoin à plusieurs reprises d'un cadre permettant d'intégrer contre le mouvement brownien fractionnaire. Toutefois, nous ne rencontrerons ce problème que lorsque le paramètre de Hurst  $H$  est plus grand que  $1/2$ . C'est précisément le cas où la régularité höldérienne des trajectoires est suffisante pour faire appel à l'intégrale de Young, que nous décrivons maintenant (en suivant [20]).

Dans ce qui suit, on considérera toujours que les fonctions sont définies sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Pour tout entier  $l \geq 1$ , notons  $\mathcal{C}^l$  l'ensemble des fonctions  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $l$ -fois dérivables et dont la dérivée  $l$ -ième est continue. Par convention,  $\mathcal{C}^0$  est l'ensemble des

<sup>1</sup>Autrement dit, le membre de droite de (1.6.1) est bien une fonction symétrique définie positive et on peut invoquer le théorème de Kolmogorov pour la continuité

fonctions continues  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Notons également  $\mathfrak{C}^\alpha$  l'ensemble des fonctions höldériennes d'indice  $\alpha \in (0, 1)$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient

$$|f|_\alpha := \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|f(t) - f(s)|}{(t - s)^\alpha} < \infty. \quad (1.6.3)$$

Posons  $\|f\|_\alpha := |f|_\alpha + |f|_\infty$ , avec  $|f|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$ . Pour une fonction fixée  $f \in \mathfrak{C}^\alpha$ , on considère l'opérateur  $T_f : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^1$  défini comme suit

$$T_f(g)(t) = \int_0^t f(u)g'(u)du, \quad t \in [0, T].$$

Soit  $\beta \in (0, 1)$  tel que  $\alpha + \beta > 1$ . Alors  $T_f$  se prolonge, de manière unique, en un opérateur  $T_f : \mathfrak{C}^\beta \rightarrow \mathfrak{C}^\beta$  qui vérifie en outre

$$\|T_f(g)\|_\beta \leq (1 + C_{\alpha, \beta})(1 + T^\beta)\|f\|_\alpha \|g\|_\beta,$$

avec  $C_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha + \beta - 1)} < \infty$ . Pour la preuve, voir [20, Theorem 3.1].

**Définition 1.6.2.** Lorsque  $f \in \mathfrak{C}^\alpha$  et  $g \in \mathfrak{C}^\beta$  sont telles que  $\alpha + \beta > 1$ , l'intégrale de Young  $\int_0^{\cdot} f(u)dg(u)$  est définie comme étant égal à  $T_f(g)$ .

Pour tout  $a, b \in [0, T]$  tels que  $a < b$ , l'intégrale de Young vérifie (voir [20, inégalité (3.3)]),

$$\left| \int_a^b (f(u) - f(a))dg(u) \right| \leq C_{\alpha, \beta} |f|_\alpha |g|_\beta (b - a)^{\alpha + \beta}. \quad (1.6.4)$$

L'intégrale de Young fournit un cadre dans lequel on peut exprimer et résoudre des équations différentielles multidimensionnelles dirigées par des fonctions höldériennes d'ordre strictement plus grand que 1/2.

**Théorème 1.6.1.** Soient  $d, m \geq 1$  deux entiers et soient  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_{d, m}(\mathbb{R})$ . On note  $g = (g_j)_{1 \leq j \leq m}$  et  $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ . On fixe  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$  et on suppose que chaque  $g_j$  est  $\beta$ -höldérienne. On suppose aussi que chaque  $\sigma_{ij}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et est bornée ainsi que ses deux dérivées. Finalement, on se donne une condition initiale  $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ . Alors, pour tout  $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta)$ , l'équation intégrale

$$x_i(t) = a_i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(x(u))dg_j(u), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.6.5)$$

admet une solution unique  $x = \{x_i\}_{1 \leq i \leq d}$  sur  $[0, T]$  telles que  $|x_i|_\alpha < \infty$  pour tout  $i = 1, \dots, d$ . Dans (1.6.5), les intégrales par rapport à  $g_j$  sont des intégrales de Young.

## 1.7 Théorème du moment quatrième

Dans les années 1970, Stein a prouvé que la distance en variation totale entre la loi de n'importe quelle variable aléatoire  $X$  centrée et celle de la gaussienne standard  $N$  était majorée comme suit:

$$d_{TV}(F, N) \leq \sup |E[f'(X) - Xf(X)]|,$$

où le sup porte sur l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $C^1$  qui sont bornée par  $\sqrt{\pi/2}$  et qui sont 2-lipschitziennes. En combinant cette découverte de Stein au formule d'intégrations par parties du calcul de Malliavin, Nourdin et Peccati [24] ont obtenu une inégalité très féconde, qui peut notamment servir de base pour prouver une version quantitative du théorème du moment quatrième.

Rappelons tout d'abord la définition de la distance en variation totale.

**Définition 1.7.1.** *La distance en variation totale entre les lois de deux variables aléatoires réelles  $Y$  et  $Z$  est définie par*

$$d_{TV}(Y, Z) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(Y \in B) - P(Z \in B)|, \quad (1.7.1)$$

où  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des boréliens dans  $\mathbb{R}$ .

Le théorème suivant donne une borne pour l'approximation gaussienne d'une variable aléatoire centrée régulière au sens de la dérivée de Malliavin. On utilise les notations introduites dans les sections 1.1 à 1.5.

**Théorème 1.7.1. (Nourdin-Peccati)** *Soit  $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\Omega)$  tel que  $E[F] = 0$ . Alors, si  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,*

$$d_{TV}(F, N) \leq 2E \left[ \left| 1 - \langle DF, -DL^{-1}F \rangle_{\mathfrak{H}} \right| \right]. \quad (1.7.2)$$

Avant d'appliquer le théorème 1.7.1 aux variables aléatoires ayant la forme d'une intégrale multiple de Wiener-Itô, rappelons le lemme suivant, tiré de [27]:

**Lemme 1.7.1.** *Soit  $F = I_q(f)$  avec  $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}$  et posons  $\sigma^2 = E[F^2] = q! \|f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}^2$ . On a alors les identités suivantes:*

$$\frac{1}{q} \|DF\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sigma^2 + q \sum_{r=1}^{q-1} (r-1)! \binom{q-1}{r-1}^2 I_{2q-2r}(f \tilde{\otimes}_r f), \quad (1.7.3)$$

$$\text{Var} \left( \frac{1}{q} \|DF\|_{\mathfrak{H}}^2 \right) = \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 r!^2 \binom{q}{r}^4 (2q-2r)! \|f \tilde{\otimes}_r f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2q-2r}}^2, \quad (1.7.4)$$

$$E[F^4] - 3\sigma^4 = \sum_{r=1}^{q-1} \frac{r^2}{q^2} r!^2 \binom{q}{r} (2q-2r)! \|f \tilde{\otimes}_r f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2q-2r}}^2 \quad (1.7.5)$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} q!^2 \binom{q}{r}^2 \left\{ \|f \otimes_r f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2q-2r}}^2 + \binom{2q-2r}{q-r} \|f \tilde{\otimes}_r f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2q-2r}}^2 \right\}. \quad (1.7.6)$$

En particulier,

$$E \left[ \left( \sigma^2 - \frac{1}{q} \|DF\|_{\mathfrak{H}}^2 \right)^2 \right] \leq \frac{q-1}{3q} (E[F^4] - 3\sigma^4).$$

On peut alors en déduire le théorème suivant, qui donne une borne pour la distance en variation totale entre la loi d'une intégrale multiple de Wiener-Itô normalisée et celle de la gaussienne.



**Théorème 1.7.2. (Nourdin-Peccati)** Soit  $F = I_q(f)$  avec  $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ , et supposons que  $\sigma^2 = E[F^2] = 1$ . Soit  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Alors:

$$d_{TV}(F, N) \leq 2\sqrt{\frac{q-1}{3q} |E[F^4] - 3|}. \quad (1.7.7)$$

Comme corollaire immédiat, on obtient le théorème du moment quatrième de Nualart et Peccati [34]: pour qu'une suite normalisée d'intégrales multiples de Wiener-Itô converge en loi vers la gaussienne standard, il faut et il suffit que son moment quatrième tende vers 3. En travaillant plus, on peut étendre le théorème de Nualart et Peccati au cadre multivarié. Cette extension, décrite dans le théorème ci-dessous, est originellement due à Peccati et Tudor [35].

**Théorème 1.7.3. (Théorème du moment quatrième, version multivariée)** Soient des entiers  $k \geq 1$  et  $q_1, \dots, q_k \geq 1$ . Soit  $F_n = (F_{1,n}, \dots, F_{k,n})$  une suite de vecteurs aléatoires  $k$ -dimensionnels de la forme  $F_{j,n} = I_{q_j}(f_{j,n})$  (où  $f_{j,n} \in \mathfrak{H}^{\odot q_j}$ ). Supposons de plus que, pour tous  $i, j = 1, \dots, k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[F_{i,n} F_{j,n}] = \Sigma_{i,j}.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $F_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[F_{i,n}^4] = 3\Sigma_{i,i}^2$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{j,n} \otimes_r f_{j,n}\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2q_j - 2r}} = 0$  pour tous  $j = 1, \dots, k$  et  $1 \leq r \leq q_j - 1$ .

## 1.8 Théorème de Breuer-Major

Nous présentons maintenant un théorème sur la convergence en loi des sommes de suites stationnaires, sur lequel seront basées plusieurs preuves dans les chapitres qui suivent. Pour une preuve "moderne" de ce théorème, nous renvoyons à [20, Section 7.2].

**Théorème 1.8.1. (Breuer-Major, 1983)** Soit  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  une famille gaussienne et stationnaire de variables centrées réduites. Notons  $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de covariance, donnée par  $E[X_k X_l] = \rho(k-l)$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne, que l'on décompose en polynômes d'Hermite sous la forme  $\varphi = \sum_{q=0}^{\infty} a_q H_q$ . Supposons en outre que  $a_0 = 0$  et notons  $d$  le rang d'Hermite de  $\varphi$ , c'est-à-dire le plus petit entier  $k$  tel que  $a_k \neq 0$ . Si  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^d < \infty$ , alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où  $\sigma^2 = E[\varphi^2(X_1)] = \sum_{q=d}^{\infty} q! a_q^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(k)^q$  est une valeur positive et finie.

On peut facilement déduire du théorème de Breuer-Major que la variation quadratique du mouvement brownien fractionnaire a des fluctuations gaussiennes quand son indice de Hurst est inférieur ou égal à  $3/4$ . Par contre, la situation est radicalement différente quand  $H > 3/4$ : on a convergence vers la loi de Rosenblatt.

**Théorème 1.8.2. (Taqqu)** Soit  $B^H$  un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ . Alors, pour tout  $t \in [0, T]$  fixé, la suite

$$n^{1-2H} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [n^{2H} (B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H)^2 - 1] \quad (1.8.1)$$

converge dans  $L^2(\Omega)$  vers, disons,  $R_t$ . Le processus  $R = (R_t)_{t \geq 0}$  a la loi du processus de Rosenblatt (voir définition juste après).

Le processus de Rosenblatt est défini comme suit.

**Définition 1.8.1** (Processus de Rosenblatt). Soit  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  et soit  $W$  un mouvement brownien standard. Le processus  $R = (R_t)_{t \geq 0}$  défini par

$$R_t = I_2(f_H(t, \cdot)) \quad \text{avec } f_H(t, x, y) = \frac{\frac{H}{2}(2H-1)}{\beta(\frac{H}{2}, 1-H)} \int_0^t (s-x)_+^{\frac{H}{2}-1} (s-y)_+^{\frac{H}{2}-1} ds,$$

où  $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  est la fonction Beta usuelle de paramètres  $a, b > 0$  et  $I_2$  est l'intégrale double par rapport à  $W$ , est appelé processus de Rosenblatt de paramètre  $H$ .

Pour plus de détails sur le processus de Rosenblatt, nous renvoyons à [43] et [45].

## 1.9 Nos résultats

Cette section offre un aperçu rapide et très succinct des résultats obtenus dans cette thèse. Les preuves détaillées sont fournies dans les deuxième, troisième et quatrième chapitres.

### 1.9.1 Distance en variation totale entre deux intégrales doubles

Notre première étude, qui a conduit aux résultats du chapitre 2 ci-après, nous a permis d'améliorer une estimation existante, due à Davydov et Martynova [7], pour la distance en variation totale entre deux intégrales doubles de Wiener-Itô. Pour ce faire, nous avons utilisé une approche récemment développée par Nourdin et Poly [30]. Comme application pratique de notre résultat, nous avons étendu une étude précédente réalisée par Maejima et Tudor [15] à propos de la variation quadratique du mouvement brownien fractionnaire.

On utilise le cadre et les notations des sections 1.1 à 1.5. Le théorème de Davydov et Martynova [7] s'énonce comme suit.

**Théorème 1.9.1. [Davydov-Martynova]** Soit un entier  $p \geq 2$ , et soit  $(f_n)$  une suite dans  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$  qui converge vers  $f_\infty$  dans  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$ . On suppose aussi que  $f_\infty$  n'est pas le noyau identiquement nul. Alors il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $n$ ,

$$d_{TV}(I_p(f_n), I_p(f_\infty)) \leq c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^{1/p}. \quad (1.9.1)$$

En particulier, lorsqu'on spécialise l'égalité précédente au cas où  $p = 2$  on obtient

$$d_{TV}(I_2(f_n), I_2(f_\infty)) \leq c \sqrt{\|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}}. \quad (1.9.2)$$

Pour chaque  $f_\infty \in \mathfrak{H}^{\otimes 2}$ , on peut associer l'opérateur d'Hilbert-Schmidt suivant:

$$A_{f_\infty} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad g \mapsto \langle f_\infty, g \rangle_{\mathfrak{H}}. \quad (1.9.3)$$

Soit  $\lambda_{\infty, k}$ ,  $k \geq 1$ , les valeurs propres de  $A_{f_\infty}$ . Dans plusieurs cas intéressants (voir l'exemple ci-dessous), la propriété suivante est vérifiée pour  $f_\infty$ :

$$\text{le cardinal de } \{k : \lambda_{\infty, k} \neq 0\} \text{ est au moins } 5. \quad (1.9.4)$$

Le principal message de notre théorème 1.9.2 est que, sous l'hypothèse (1.9.4), on peut améliorer l'inégalité (1.9.2) d'un facteur 2. Plus précisément, en suivant une approche développée par Nourdin et Poly dans [30], on arrive au résultat suivant, qui est à comparer avec (1.9.2):

**Théorème 1.9.2.** *Soit  $f_\infty$  un noyau de  $\mathfrak{H}^{\otimes 2}$  vérifiant (1.9.4) (en particulier,  $f_\infty$  n'est pas le noyau nul). Soit  $(f_n)$  une suite de  $\mathfrak{H}^{\otimes 2}$  qui converge vers  $f_\infty$  dans  $\mathfrak{H}^{\otimes 2}$ . Alors, il existe  $c > 0$  (dépendant seulement de  $f_\infty$ ) telle que, pour tout  $n$ ,*

$$d_{TV}(I_2(f_n), I_2(f_\infty)) \leq c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}. \quad (1.9.5)$$

Nous avons aussi prouvé que l'inégalité (1.9.5) est optimale, au sens où on ne peut pas espérer l'améliorer encore. Comme exemple "concret" d'application du théorème précédent, considérons l'exemple suivant tiré d'un article de Maejima et Tudor [15]. Soient  $H_1, H_2 > 1/2$  et soit  $W$  un mouvement brownien standard défini sur  $\mathbb{R}$ . Posons

$$B_t^{H_1} = c(H_1) \int_{\mathbb{R}} dW_y \int_0^t (u-y)_+^{H_1 - \frac{3}{2}} du, \quad t \geq 0, \quad (1.9.6)$$

$$B_t^{H_2} = c(H_2) \int_{\mathbb{R}} dW_y \int_0^t (u-y)_+^{H_2 - \frac{3}{2}} du, \quad t \geq 0, \quad (1.9.7)$$

où les constantes  $c(H_1)$  et  $c(H_2)$  sont choisies de sorte que  $E[(B_1^{H_1})^2] = E[(B_1^{H_2})^2] = 1$ . Il est facile de voir que  $B^{H_1}$  et  $B^{H_2}$  sont deux mouvements browniens fractionnaires d'indices de Hurst  $H_1$  et  $H_2$ , respectivement. Définissons alors

$$Z_n = n^{1-H_1-H_2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_1} - B_{\frac{k}{n}}^{H_1})(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_2} - B_{\frac{k}{n}}^{H_2})}{E \left[ (B_{\frac{k+1}{n}}^{H_1} - B_{\frac{k}{n}}^{H_1})(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_2} - B_{\frac{k}{n}}^{H_2}) \right]} - 1 \right]. \quad (1.9.8)$$

Lorsque  $H_1 = H_2 = H$ , on observe que (1.9.8) n'est rien d'autre que la variation quadratique de  $B^H$  correctement renormalisée. Dans [15], une extension du théorème 1.8.2 de Taqqu est prouvée.

**Proposition 1.9.1.** *Supposons que  $H_1 > \frac{1}{2}$  et  $H_2 > \frac{1}{2}$  soient tels que  $H_1 + H_2 > \frac{3}{2}$ . Alors  $Z_n$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers la variable aléatoire non-symétrique de Rosenblatt  $Z_\infty$ , donnée par*

$$Z_\infty = b(H_1, H_2) \int_{\mathbb{R}^2} dW_x dW_y \int_0^1 (s-x)_+^{H_1 - 3/2} (s-y)_+^{H_2 - 3/2} ds. \quad (1.9.9)$$

Ici  $b(H_1, H_2)$  est une constante explicite normalisée dont la valeur précise n'est pas importante.

En s'appuyant sur (1.9.5), nous avons réussi à associer un taux de convergence explicite à la convergence  $Z_n \xrightarrow{L^2} Z_\infty$  dans la proposition 1.9.1. Plus précisément,

$$d_{TV}(Z_n, Z_\infty) = O(n^{\frac{3}{2}-H_1-H_2}). \quad (1.9.10)$$

Dans le cas particulier où  $H_1 = H_2 = H$ , notons que le taux  $\frac{3}{2} - 2H$  obtenu dans (1.9.10) est deux fois meilleur que celui calculé par Breton et Nourdin dans [2]. Cela est évidemment dû au fait que notre inégalité (1.9.5) améliore l'inégalité (1.9.2) de Davydov et Martynova d'un facteur 2.

## 1.9.2 Variations croisées des intégrales de Young

Dans cette partie, dont le contenu correspond au chapitre 3 et qui représente un travail en collaboration avec Ivan Nourdin, nous étudions le comportement asymptotique des variations croisées d'un processus bidimensionnel ayant la forme d'une intégrale de Young par rapport à un mouvement brownien fractionnaire d'indice  $H > \frac{1}{2}$ .

Cette étude a été inspirée par les résultats de l'article [5] où sont étudiés des théorèmes centraux limites pour les variations multiples d'intégrales de processus fractionnaires. De notre côté, nous nous sommes intéressés à l'analogie *bidimensionnel*. Plus précisément, soit  $\{X_t\}_{t \in [0, T]} = \{(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})\}_{t \in [0, T]}$  un processus stochastique bidimensionnel de la forme

$$X_t^{(i)} = x_i + \int_0^t \sigma_s^{i,1} dB_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{i,2} dB_s^{(2)}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \quad (1.9.11)$$

avec  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , et où  $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$  est un mouvement brownien fractionnaire bidimensionnel d'indice de Hurst  $H > \frac{1}{2}$  tandis que  $\sigma$  est un processus à valeurs matricielles de dimension  $2 \times 2$ . Ce qui nous intéresse ici est le comportement asymptotique de la variation croisée associée à  $X$  sur  $[0, T]$ , qui est la suite de processus  $\{J_n\}$  définie comme suit:

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \Delta X_{k/n}^{(1)} \Delta X_{k/n}^{(2)}, \quad n \geq 1, \quad t \in [0, T], \quad (1.9.12)$$

avec  $\Delta X_{k/n}^{(i)} = X_{k/n}^{(i)} - X_{(k-1)/n}^{(i)}$ . Nous montrons les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1.9.3.** *Pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$n^{2H-1} J_n(t) \xrightarrow{\text{prob}} \int_0^t (\sigma_s^{1,1} \sigma_s^{1,2} + \sigma_s^{2,1} \sigma_s^{2,2}) ds \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.9.13)$$

**Théorème 1.9.4.** *Supposons que  $\sigma^{1,2} = \sigma^{2,1} = 0$  et posons*

$$a_n := \begin{cases} n^{2H-\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} < H < \frac{3}{4} \\ \frac{n}{\sqrt{\log n}} & \text{si } H = \frac{3}{4} \\ n & \text{si } \frac{3}{4} < H < 1 \end{cases}. \quad (1.9.14)$$

Alors, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$a_n J_n \xrightarrow{L} \int_0^\cdot \sigma_s^{1,1} \sigma_s^{2,2} dZ_s \quad \text{dans l'espace de Skorohod } D[0, T]. \quad (1.9.15)$$

La définition de  $Z$ , qui dépend de  $H$ , est comme suit:

1. lorsque  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $Z$  est égal à  $\frac{C_H}{2} \times W$  avec  $W$  un mouvement brownien indépendant de  $B$  et  $C_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H})^2$ ;
2. lorsque  $H = \frac{3}{4}$ ,  $Z$  est égal à  $\frac{C_{3/4}}{2} \times W$  avec  $W$  un mouvement brownien indépendant de  $B$  et  $C_{3/4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \log 2$ ;
3. lorsque  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ ,  $Z$  est égal à  $\frac{1}{2}(R^{(1)} - R^{(2)})$ , avec  $R^{(k)}$  le processus de Rosenblatt construit à partir du mouvement brownien fractionnaire

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{(1)} + (-1)^{k+1}B^{(2)}), \quad k = 1, 2,$$

(voir le théorème correspondant dans le chapitre 3 pour les détails).

### 1.9.3 Convergence multivariée des processus de Volterra

Dans le quatrième et dernier chapitre de cette thèse, qui reprend les résultats d'un travail commun avec David Nualart et Ivan Nourdin, nous étudions la convergence multivariée de certains processus de Volterra construits à partir du mouvement brownien fractionnaire  $B^H$  d'indice de Hurst  $H > \frac{1}{2}$ . Les processus de Volterra fractionnaires  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  que nous avons considérés sont de la forme

$$X_i(t) = \int_0^t x_i(t-s) dB^H(s), \quad t \geq 0, \quad (1.9.16)$$

avec  $x_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions mesurables vérifiant certaines hypothèses d'intégrabilité. Un exemple conduisant naturellement à de tels processus est l'équation différentielle stochastique d'ordre  $k$  suivante:

$$\begin{cases} X^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \theta_j X^{(j)}(t) + \sigma \dot{B}^H(t), & t > 0 \\ X(0) = \dots = X^{(k-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (1.9.17)$$

On peut en effet prouver que l'unique processus  $(X, X^{(1)}, \dots, X^{(k-1)})$  solution de l'équation précédente est de la forme (1.9.16) pour certaines fonctions  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Lorsque  $k = 1$ , on retrouve le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Imaginons que, dans (1.9.17), les paramètres  $\theta_0, \dots, \theta_{k-1}$  sont inconnus mais qu'on observe le processus solution continûment. Il devient alors intéressant de fournir des estimateurs de  $\theta_0, \dots, \theta_{k-1}$  qui se basent sur ces observations. Qui dit estimateur, dit possible normalité asymptotique. Pour vérifier une telle normalité, il faut disposer de théorèmes centraux limites adéquats. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à la situation suivante. Soient des fonctions  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (vérifiant certaines propriétés qui seront données dans la suite) et considérons les vecteurs aléatoires  $U_T = (U_{1,T}, \dots, U_{k,T})$  et  $V_T = (V_{1,T}, \dots, V_{k,T})$  définis comme suit:

$$U_{i,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f_i \left( \frac{X_i(t)}{\sigma_i(t)} \right) dt, \quad \text{où } \sigma_i(t) = \sqrt{E[X_i(t)^2]}, \quad (1.9.18)$$

et

$$V_{i,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f_i \left( \frac{X_i(t)}{\xi_i} \right) dt, \quad \text{pour une certaine constante } \xi_i > 0. \quad (1.9.19)$$

En suivant l'approche développée par Nourdin, Peccati et Podolskij dans [28], nous avons pu démontrer les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1.9.5.** *Supposons que les  $f_i$  soient de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne. Pour chaque  $i$ , notons  $q_i$  le rang d'Hermite de  $f_i = \sum_{l=0}^{\infty} a_{i,l} H_l$ , c'est-à-dire la plus petite valeur de  $l$  telle que le coefficient  $a_{i,l}$  de  $H_l$  est différent de zéro. Pose  $q_* = \min_{1 \leq i \leq k} q_i$  et supposons que  $q_* \geq 2$ . Considérons  $U_T = (U_{1,T}, \dots, U_{k,T})$ , où  $U_{i,T}$  est donné par (1.9.18). Si  $H \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2q_*})$  et si les fonctions  $x_i$  qui définissent  $X_i$  vérifient, pour tout  $i, j = 1, \dots, k$ , à la fois*

$$\int_0^{\infty} \left( \int_{[0,\infty)^2} |x_i(u)x_j(v)| |v - u - a|^{2H-2} dudv \right)^{q_i \vee q_j} da < \infty \quad (1.9.20)$$

et

$$\eta_i := \sqrt{H(2H-1) \int_{[0,\infty)^2} x_i(u)x_i(v)|v-u|^{2H-2} dudv} \in (0, \infty), \quad (1.9.21)$$

alors

$$U_T \xrightarrow{\text{loi}} N_k(0, \Lambda) \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty, \quad (1.9.22)$$

où  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  est donné par

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \sum_{l=q_i \vee q_j}^{\infty} a_{i,l} a_{j,l} l! \frac{H^l (2H-1)^l}{\eta_i^l \eta_j^l} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{[0,\infty)^2} x_i(u)x_j(v)|v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^l da. \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

**Théorème 1.9.6.** *Pour chaque  $i$ , supposons que  $f_i = P_i$  soit un polynôme réel et notons  $q_i$  le rang d'Hermite de  $P_i$ . Posons  $q_* = \min_{1 \leq i \leq k} q_i$  et supposons que  $q_* \geq 2$ . Considérons  $V_T = (V_{1,T}, \dots, V_{k,T})$  donné par (1.9.19), où  $\xi_i = \eta_i$  est donné par (1.9.21). Si  $H \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2q_*})$  et si les fonctions  $x_i$  qui définissent  $X_i$  vérifient (1.9.20), (1.9.21) ainsi que*

$$\int_{[0,\infty)^2} |x_i(u)x_i(v)| ((u \wedge v) \vee 1) |v-u|^{2H-2} dudv < \infty, \quad (1.9.24)$$

alors

$$V_T \xrightarrow{\text{loi}} N_k(0, \Lambda) \quad \text{quand } T \rightarrow \infty, \quad (1.9.25)$$

avec  $\Lambda$  donnée dans (1.9.23).

Nous faisons la démonstration de ces deux théorèmes dans le chapitre 4. Nos preuves sont basées sur le théorème de Breuer-Major et sur le théorème du moment quatrième. Nous donnons aussi un exemple d'application de ces deux théorèmes à l'estimations des paramètres  $\theta_i$  dans l'équation fractionnaire continue auto-regressive d'ordre  $k$  (1.9.17) où, pour simplifier les choses, nous nous sommes restreints au cas où  $k = 2$  et où les  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1$  sont négatifs (correspondant au cas ergodique.)

## Chapter 2

# Total variation distance between two double Wiener-Itô integrals

Dans ce chapitre, nous présentons l'article "Total variation distance between two double Wiener-Itô integrals", écrit sous la supervision d'Ivan Nourdin, et publié dans *Statistic and Probability Letters* (voir [47]).

### 2.1 Introduction

Suppose that  $X = \{X(h), h \in \mathfrak{H}\}$  is an isonormal Gaussian process on a real separable infinite-dimensional Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . For any integer  $p \geq 1$ , let  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$  be the  $p$ th tensor product of  $\mathfrak{H}$ . Also, denote by  $\mathfrak{H}^{\odot p}$  the  $p$ th symmetric tensor product.

The following statement is due to Davydov and Martynova [7], see also [30, Theorem 4.4].

**Theorem 2.1.1.** *Fix an integer  $p \geq 2$ , and let  $(f_n)$  be a sequence of  $\mathfrak{H}^{\odot p}$  that converges to  $f_\infty$  in  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$ . Assume moreover that  $f_\infty$  is not identically zero. Let  $I_p(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , denote the  $p$ th Wiener-Itô integral of  $f_n$  with respect to  $X$ . Then, there exists  $c > 0$  such that, for all  $n$ ,*

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_p(f_n) \in C) - P(I_p(f_\infty) \in C)| \leq c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^{1/p}, \quad (2.1.1)$$

where  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  stands for the set of Borelian sets of  $\mathbb{R}$ .

In this paper,  $p = 2$  and the inequality (2.1.1) becomes:

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_2(f_n) \in C) - P(I_2(f_\infty) \in C)| \leq c \sqrt{\|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}}. \quad (2.1.2)$$

To each  $f_\infty \in \mathfrak{H}^{\odot 2}$ , one may associate the following Hilbert-Schmidt operator:

$$A_{f_\infty} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad g \mapsto \langle f_\infty, g \rangle_{\mathfrak{H}}. \quad (2.1.3)$$

Let  $\lambda_{\infty, k}$ ,  $k \geq 1$ , indicate the eigenvalues of  $A_{f_\infty}$ . In many situations of interest (see below for an explicit example), it happens that the following property, that we label for further use, is satisfied for  $f_\infty$ :

$$\text{the cardinality of } \{k : \lambda_{\infty, k} \neq 0\} \text{ is at least 5.} \quad (2.1.4)$$

The aim of this paper is to take advantage of (2.1.4) in order to improve (2.1.2) by a factor 2. More precisely, relying on an approach recently developed by Nourdin and Poly in [30], we shall prove the following result, compare with (2.1.2):

**Theorem 2.1.2.** *Let  $f_\infty$  be an element of  $\mathfrak{H}^{\odot 2}$  satisfying (2.1.4) (in particular,  $f_\infty$  is not identically zero). Let  $(f_n)$  be a sequence of  $\mathfrak{H}^{\odot 2}$  that converges to  $f_\infty$  in  $\mathfrak{H}^{\otimes 2}$ . Then, there exists  $c > 0$  (depending only on  $f_\infty$ ) such that, for all  $n$ ,*

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_2(f_n) \in C) - P(I_2(f_\infty) \in C)| \leq c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}. \quad (2.1.5)$$

In some sense, the inequality (2.1.5) appears to be optimal. Indeed, consider  $F_\infty = I_2(f_\infty)$  with  $f_\infty$  satisfying (2.1.4) and set  $F_n = I_2(f_n)$  with  $f_n = (1 + c_n)f_\infty$ , where  $(c_n)$  is a sequence of nonzero real numbers converging to zero. Let  $\phi_\infty$  (resp.  $\phi_n$ ) denote the density of  $F_\infty$  (resp.  $F_n$ ), which exists thanks to Shigekawa's theorem (see [38]). Assume furthermore that  $\phi_\infty$  is differentiable and is such that  $0 < \int_{\mathbb{R}} |x\phi'_\infty(x) + \phi_\infty(x)| dx < \infty$ . According to Scheffé's theorem, one has

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_2(f_n) \in C) - P(I_2(f_\infty) \in C)| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_\infty(x)| dx.$$

We deduce, after some easy calculations, that

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_2(f_n) \in C) - P(I_2(f_\infty) \in C)| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |c_n| \int_{\mathbb{R}} |x\phi'_\infty(x) + \phi_\infty(x)| dx.$$

On the other hand,  $\|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}} = |c_n| \|f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}$ . Thus,

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(I_2(f_n) \in C) - P(I_2(f_\infty) \in C)| \sim_{n \rightarrow \infty} c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}},$$

with  $c = \int_{\mathbb{R}} |x\phi'_\infty(x) + \phi_\infty(x)| dx / (2\|f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}})$ .

To illustrate the use of Theorem 2.1.2 in a concrete situation, we consider the following example taken from Maejima and Tudor [15]. Let  $B^{H_1}$ ,  $B^{H_2}$  be two fractional Brownian motions with Hurst parameters  $H_1, H_2 \in (0, 1)$ , respectively. We assume that both  $H_1$  and  $H_2$  are strictly bigger than  $\frac{1}{2}$ . We further assume that the two fractional Brownian motions  $B^{H_1}$  and  $B^{H_2}$  can be expressed as Wiener integrals with respect to the *same* two-sided Brownian motion  $W$ , meaning in particular that  $B^{H_1}$  and  $B^{H_2}$  are *not* independent. Precisely, we set

$$B_t^{H_1} = c(H_1) \int_{\mathbb{R}} dW_y \int_0^t (u-y)_+^{H_1 - \frac{3}{2}} du, \quad t \geq 0, \quad (2.1.6)$$

$$B_t^{H_2} = c(H_2) \int_{\mathbb{R}} dW_y \int_0^t (u-y)_+^{H_2 - \frac{3}{2}} du, \quad t \geq 0, \quad (2.1.7)$$

where the constants  $c(H_1)$  and  $c(H_2)$  are chosen so that  $E[(B_1^{H_1})^2] = E[(B_1^{H_2})^2] = 1$ . Define

$$Z_n = n^{1-H_1-H_2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_1} - B_{\frac{k}{n}}^{H_1})(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_2} - B_{\frac{k}{n}}^{H_2})}{E \left[ (B_{\frac{k+1}{n}}^{H_1} - B_{\frac{k}{n}}^{H_1})(B_{\frac{k+1}{n}}^{H_2} - B_{\frac{k}{n}}^{H_2}) \right]} - 1 \right]. \quad (2.1.8)$$



When  $H_1 = H_2 = H$ , observe that (2.1.8) is related to the quadratic variation of  $B^H$ . In [15], the following extension of a classical result by Taqqu [43] is shown:

**Proposition 2.1.3.** *Assume that  $H_1 > \frac{1}{2}$ ,  $H_2 > \frac{1}{2}$  and  $H_1 + H_2 > \frac{3}{2}$ . Then,  $Z_n$  converges as  $n \rightarrow \infty$  in  $L^2(\Omega)$  to the non-symmetric Rosenblatt random variable  $Z_\infty$ , given by*

$$Z_\infty = b(H_1, H_2) \int_{\mathbb{R}^2} dW_x dW_y \int_0^1 (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} ds. \quad (2.1.9)$$

Here  $b(H_1, H_2)$  is a normalizing explicit constant whose precise value does not matter in the sequel.

In the present paper, by relying on (2.1.5) we are able to associate an explicit rate to the convergence  $Z_n \xrightarrow{L^2} Z_\infty$  of Proposition 2.1.3, namely,

$$\sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(Z_n \in C) - P(Z_\infty \in C)| = O(n^{\frac{3}{2} - H_1 - H_2}). \quad (2.1.10)$$

When  $H_1 = H_2 = H$ , the rate  $\frac{3}{2} - 2H$  we have obtained in (2.1.10) is better (by a power 2) than the one computed by Breton and Nourdin in [2], precisely because our inequality (2.1.5) improves the inequality (2.1.2) of Davydov and Martynova by a power 2.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2.2 contains some preliminary material on Malliavin calculus. In Section 2.3 we prove Theorem 2.1.2. Finally, Section 2.4 contains our proof of (2.1.10).

## 2.2 Preliminaries

Let  $\mathfrak{H}$  be a real separable infinite-dimensional Hilbert space. For any integer  $p \geq 1$ , let  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$  be the  $p$ th tensor product of  $\mathfrak{H}$ . Also, we denote by  $\mathfrak{H}^{\odot p}$  the  $p$ th symmetric tensor product.

Suppose that  $X = \{X(h), h \in \mathfrak{H}\}$  is an isonormal Gaussian process on  $\mathfrak{H}$ , defined on some probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Assume from now on that  $\mathcal{F}$  is generated by  $X$ . For every integer  $p \geq 1$ , let  $\mathcal{H}_p$  be the  $p$ th Wiener chaos of  $X$ , that is, the closed linear subspace of  $L^2(\Omega)$  generated by the random variables  $\{H_p(X(h)), h \in \mathfrak{H}, \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$ , where  $H_p$  is the  $p$ th Hermite polynomial defined by

$$H_p(x) = \frac{(-1)^p}{p!} e^{x^2/2} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x^2/2}).$$

We denote by  $\mathcal{H}_0$  the space of constant random variables. For any  $p \geq 1$ , the mapping  $I_p(h^{\otimes p}) = p! H_p(X(h))$ ,  $h \in \mathfrak{H}$ ,  $\|h\|_{\mathfrak{H}} = 1$ , provides a linear isometry between  $\mathfrak{H}^{\odot p}$  (equipped with the modified norm  $\sqrt{p!} \|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}$ ) and  $\mathcal{H}_p$  (equipped with the  $L^2(\Omega)$  norm). We call  $I_p(f)$  the  $p$ th multiple Wiener-Itô integral of kernel  $f$ . For  $p = 0$ , by convention  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$ , and  $I_0$  is the identity map. In particular, when  $f, g \in \mathfrak{H}^{\odot p}$ , observe that

$$E \left[ (I_p(f) - I_p(g))^2 \right] = p! \|f - g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^2. \quad (2.2.1)$$

It is well-known (Wiener chaos expansion) that  $L^2(\Omega)$  can be decomposed into the infinite orthogonal sum of the spaces  $\mathcal{H}_p$ . That is, any square integrable random variable  $F \in L^2(\Omega)$  admits the following chaotic expansion:

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(f_p), \quad (2.2.2)$$

where  $f_0 = E[F]$ , and the  $f_p \in \mathfrak{H}^{\odot p}$ ,  $p \geq 1$ , are uniquely determined by  $F$ . For every  $p \geq 0$ , we denote by  $J_p$  the orthogonal projection operator on the  $p$ th Wiener chaos. In particular, if  $F \in L^2(\Omega)$  is as in (2.2.2), then  $J_p F = I_p(f_p)$  for every  $p \geq 0$ .

Let us now introduce some basic elements of the Malliavin calculus with respect to the isonormal Gaussian process  $X$ . We refer the reader to Nourdin and Peccati [27] or Nualart [33] for a more detailed presentation of these notions. Let  $\mathcal{S}$  be the set of all smooth and cylindrical random variables of the form

$$F = g(X(\phi_1), \dots, X(\phi_n)), \quad (2.2.3)$$

where  $n \geq 1$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is an infinitely differentiable function with compact support, and  $\phi_i \in \mathfrak{H}$ . The Malliavin derivative of  $F$  with respect to  $X$  is the element of  $L^2(\Omega, \mathfrak{H})$  defined as

$$DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(X(\phi_1), \dots, X(\phi_n)) \phi_i.$$

By iteration, one can define the  $k$ th derivative  $D^k F$  for every  $k \geq 2$ , which is an element of  $L^2(\Omega, \mathfrak{H}^{\odot k})$ .

For  $k \geq 1$  and  $p \geq 1$ ,  $\mathbb{D}^{k,p}$  denotes the closure of  $\mathcal{S}$  with respect to the norm  $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{k,p}}$ , defined by the relation

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{k,p}}^p = E[|F|^p] + \sum_{i=1}^k E\left(\|D^i F\|_{\mathfrak{H}^{\otimes i}}^p\right).$$

The Malliavin derivative  $D$  verifies the following chain rule. If  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is continuously differentiable with bounded partial derivatives and if  $F = (F_1, \dots, F_n)$  is a vector of elements of  $\mathbb{D}^{1,2}$ , then  $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$  and

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF_i. \quad (2.2.4)$$

Observe that (2.2.4) still holds when  $\varphi$  is Lipschitz and the law of  $F$  has a density with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^n$  (see, e.g., Proposition 1.2.3 in [33]).

We denote by  $\delta$  the adjoint of the operator  $D$ , also called the divergence operator. A random element  $u \in L^2(\Omega, \mathfrak{H})$  belongs to the domain of  $\delta$ , noted  $\text{Dom}\delta$ , if and only if it verifies

$$|E(\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}})| \leq c_u \sqrt{E(F^2)}$$

for any  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ , where  $c_u$  is a constant depending only on  $u$ . If  $u \in \text{Dom}\delta$ , then the random variable  $\delta(u)$  is defined by the duality relationship:

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}), \quad (2.2.5)$$

which holds for every  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ . We will also make use of the following relationships, valid for  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  and  $u \in \text{Dom}\delta$  such that  $Fu \in L^2(\Omega, \mathfrak{H})$ :

$$F\delta(u) = \delta(Fu) + \langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}} \quad (2.2.6)$$

$$E(\delta(u)^2) = E\|Du\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}^2 + E\|u\|_{\mathfrak{H}}^2. \quad (2.2.7)$$

The operator  $L$  is defined on the Wiener chaos expansion as

$$L = \sum_{q=0}^{\infty} -qJ_q,$$

and is called the infinitesimal generator of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. The domain of this operator in  $L^2(\Omega)$  is the set

$$\text{Dom}L = \{F \in L^2(\Omega) : \sum_{q=1}^{\infty} q^2 \|J_q F\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty\} = \mathbb{D}^{2,2}.$$

There is an important relationship between the operators  $D$ ,  $\delta$  and  $L$ . A random variable  $F$  belongs to the domain of  $L$  if and only if  $F \in \text{Dom}(\delta D)$  (i.e.  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  and  $DF \in \text{Dom}\delta$ ), and in this case

$$\delta DF = -LF. \quad (2.2.8)$$

If  $\mathfrak{H} = L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$  (with  $\mu$  non-atomic), then the derivative of a random variable  $F$  as in (2.2.2) can be identified with the element of  $L^2(A \times \Omega)$  given by

$$D_a F = \sum_{q=1}^{\infty} q I_{q-1}(f_q(\cdot, a)), \quad a \in A. \quad (2.2.9)$$

At this stage, we observe that an easy calculation leads to the following identity for  $F = I_p(f)$  and  $G = I_p(g)$  (with  $f, g \in \mathfrak{H}^{\otimes p}$ ), that we label for further use:

$$E\left(\|DF - DG\|_{\mathfrak{H}}^2\right) = pp! \|f - g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}^2. \quad (2.2.10)$$

Finally, the following lemma will play a crucial role in our forthcoming calculations.

**Lemma 2.2.1.** *Let  $F_{\infty} = I_2(f_{\infty})$ , with  $f_{\infty} \in \mathfrak{H}^{\otimes 2}$  satisfying (2.1.4). Then, for all  $r \geq 1$ , we have*

$$E[|F_{\infty}|^{2r}] < \infty, \quad E[\|DF_{\infty}\|_{\mathfrak{H}}^{2r}] < \infty, \quad (2.2.11)$$

as well as

$$E\left[\frac{1}{\|DF_{\infty}\|_{\mathfrak{H}}^{9/2}}\right] < \infty. \quad (2.2.12)$$

*Proof.* The proof of (2.2.11) is classical and follows directly from the hypercontractivity property of multiple Wiener-Itô integrals. So, let us only focus on (2.2.12). Let  $e_k$ ,  $k \geq 1$ , be the eigenvectors associated to the eigenvalues  $\lambda_{f_\infty, k}$  of  $A_{f_\infty}$ , see (2.1.3). Observe that they form an orthonormal system in  $\mathfrak{H}$  and that  $f_\infty$  may be expanded as

$$f_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{f_\infty, k} e_k \otimes e_k, \quad (2.2.13)$$

implying in turn that

$$F_\infty = I_2(f_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{f_\infty, k} (X(e_k)^2 - 1).$$

We have

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^{9/2}} \right] &= \int_0^\infty P \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^{9/2}} \geq x \right) dx \\ &= \int_0^1 P \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^{9/2}} \geq x \right) dx + \int_1^\infty P \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^{9/2}} \geq x \right) dx \\ &\leq 1 + \int_1^\infty P \left( \|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq x^{-4/9} \right) dx \\ &\leq 1 + \frac{9}{4} \int_0^1 P \left( \|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq u \right) \frac{du}{u^{13/4}}. \end{aligned}$$

To achieve the desired conclusion (2.2.12), let us check that

$$P \left( \|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq u \right) = O(u^{5/2}) \quad \text{as } u \downarrow 0. \quad (2.2.14)$$

An immediate calculation leads to

$$\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{f_\infty, k}^2 X(e_k)^2, \quad (2.2.15)$$

where the  $X(e_k)$  are independent  $N(0, 1)$  random variables. Therefore, for any  $u > 0$ ,

$$\begin{aligned} P \left( \|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq u \right) &\leq P \left( \bigcap_{i=1}^5 \{4\lambda_{f_\infty, i}^2 X(e_i)^2 \leq u\} \right) = \prod_{i=1}^5 P \left( |X(e_i)| \leq \frac{\sqrt{u}}{2|\lambda_{f_\infty, i}|} \right) \\ &\leq \frac{u^{5/2}}{(2\pi)^{5/2} \prod_{i=1}^5 |\lambda_{f_\infty, i}|} \end{aligned}$$

and (2.2.14) is checked, thus concluding the proof.  $\square$

## 2.3 Proof of Theorem 2.1.2

Let  $f_\infty \in \mathfrak{H}^{\odot 2}$  satisfying (2.1.4) (in particular,  $f_\infty$  is not identically zero). Let  $(f_n)$  be a sequence of  $\mathfrak{H}^{\odot 2}$  that converges to  $f_\infty$  in  $\mathfrak{H}^{\otimes 2}$ . Write  $F_n = I_2(f_n)$  and  $F_\infty = I_2(f_\infty)$ . Our aim in this

Section 2.3 is to show that there exists  $c > 0$  (depending only on  $f_\infty$ ) such that, for all Borelian set  $C$  and all  $n$ ,

$$|P(F_n \in C) - P(F_\infty \in C)| \leq c \|f_n - f_\infty\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}. \quad (2.3.1)$$

First of all, relying on the Lebesgue's monotone convergence theorem, we notice that it is not a loss of generality to assume that the Borel set  $C$  is bounded in (2.3.1).

Now, we split the proof of Theorem 2.1.2 into several steps and we stress that, in what follows, the constant  $c$  shall denote a generic constant only depending on  $f_\infty$  (not on  $n$ !) and whose value may change from one line to another.

Step 1. Thanks to (2.2.15), we have  $\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2 \geq 4\lambda_{f_\infty, k}^2 X(e_k)^2$  for some  $k$  with  $\lambda_{f_\infty, k} \neq 0$  (assumption (2.1.4)). Since  $X(e_k) \neq 0$  a.s., one has that  $\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}} > 0$  a.s. As a result, one can write

$$|P(F_n \in C) - P(F_\infty \in C)| = \left| E \left[ (1_{F_n \in C} - 1_{F_\infty \in C}) \frac{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right] \right|. \quad (2.3.2)$$

The chain rule for Lipschitz function (for  $n$  large enough, note that  $F_n$  has a density with respect to the Lebesgue measure by Shigekawa theorem [38]) leads to

$$D\left(\int_{-\infty}^{F_n} 1_C(x) dx\right) = 1_C(F_n) DF_n \quad \text{and} \quad D\left(\int_{-\infty}^{F_\infty} 1_C(x) dx\right) = 1_C(F_\infty) DF_\infty.$$

We then have

$$|P(F_n \in C) - P(F_\infty \in C)| \leq |A_n| + |B_n|, \quad (2.3.3)$$

with

$$A_n = E \left[ \frac{\left\langle D\left(\int_{F_\infty}^{F_n} 1_C(x) dx\right), DF_\infty \right\rangle_{\mathfrak{H}}}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right] \quad (2.3.4)$$

$$B_n = E \left[ \frac{1_C(F_n) \langle D(F_\infty - F_n), DF_\infty \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right]. \quad (2.3.5)$$

Step 2 (a bound for  $B_n$ ). Using Cauchy-Schwarz inequality twice, one obtains

$$|B_n| \leq E \left[ \frac{\|D(F_\infty - F_n)\|_{\mathfrak{H}}}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}} \right] \leq \sqrt{E \|D(F_\infty - F_n)\|_{\mathfrak{H}}^2} \sqrt{E \left[ \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right]}.$$

By (2.2.10), one has  $E \|D(F_\infty - F_n)\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq 4 \|f_\infty - f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}^2$ , whereas  $E \left[ \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right]$  is finite by Lemma 2.2.1. Thus,

$$|B_n| \leq c \|f_\infty - f_n\|_{\mathbb{W}} \quad (2.3.6)$$

with  $c$  only depending on  $f_\infty$ .

Step 3 (a bound for  $A_n$ ). Using (2.2.6), (2.2.8) and then Cauchy-Schwarz, one can write

$$\begin{aligned}
A_n &= E \left[ \int_{F_\infty}^{F_n} 1_C(x) dx \delta \left( \frac{DF_\infty}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right) \right] \\
&= E \left[ \int_{F_\infty}^{F_n} 1_C(x) dx \left\{ \frac{2F_\infty}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} - \left\langle DF_\infty, D \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}} \right\rangle_{\mathfrak{H}} \right\} \right] \\
&\leq \sqrt{E[(F_n - F_\infty)^2]} \times \sqrt{8E \left[ \left( \frac{F_\infty}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right)^2 \right] + 2E \left( \left\langle DF_\infty, D \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}} \right) \right\rangle_{\mathfrak{H}}^2 \right)}.
\end{aligned}$$

By Lemma 2.2.1, it is clear that  $E \left[ \left( \frac{F_\infty}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right)^2 \right] < \infty$ . On the other hand, one has

$$\begin{aligned}
&E \left( \left\langle DF_\infty, D \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^2} \right) \right\rangle_{\mathfrak{H}}^2 \right) = 64 E \left( \left\langle DF_\infty, \frac{\langle f_\infty, DF_\infty \rangle_{\mathfrak{H}}}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^4} \right\rangle_{\mathfrak{H}}^2 \right) \\
&= 64 E \left( \frac{\langle f_\infty, DF_\infty \otimes DF_\infty \rangle_{\mathbb{W}}^2}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^8} \right) \leq 64 \|f_\infty\|_{\mathbb{W}}^2 E \left( \frac{1}{\|DF_\infty\|_{\mathfrak{H}}^4} \right),
\end{aligned}$$

which is also finite by Lemma 2.2.1. Thus, see also (2.2.1), one has

$$|A_n| \leq c \|f_\infty - f_n\|_{\mathbb{W}}, \quad (2.3.7)$$

with  $c$  only depending on  $f_\infty$ .

Step 4 (conclusion). Taking into account (2.3.3), (2.3.6) and (2.3.7), we obtain that (2.3.1) holds true, thus concluding the proof of Theorem 2.1.2.  $\square$

## 2.4 Proof of (2.1.10)

To prove (2.1.10), we shall apply our Theorem 2.1.2. The isonormal Gaussian process  $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$  we consider here is a two-sided Brownian motion  $W = \{W(h) : h \in L^2(\mathbb{R})\}$ . We divide the proof of (2.1.10) into several steps.

Step 1. Recall from (2.1.8) and (2.1.9) the definitions of  $Z_n$  and  $Z_\infty$  respectively. In Maejima and Tudor [15], the authors represent  $Z_n$  and  $Z_\infty$  as

$$Z_n = b(H_1, H_2) \times I_2(f_n) \quad \text{and} \quad Z_\infty = b(H_1, H_2) \times I_2(f_\infty),$$

with  $b(H_1, H_2)$  a suitable constant and

$$\begin{aligned}
f_n(x, y) &= n \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i/n}^{(i+1)/n} \int_{i/n}^{(i+1)/n} (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} ds \\
f_\infty(x, y) &= \int_0^1 (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} ds.
\end{aligned}$$

We have moreover, see indeed [15, page 180],

$$\|f_n - f_\infty\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = O(n^{\frac{3}{2}-H_1-H_2}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2.4.1)$$

*Step 2.* Let us check that  $f_\infty$  satisfies (2.1.4). To do so, recall from (2.2.13) that  $f_\infty$  may be expanded, with  $e_k$  the eigenvectors associated to  $\lambda_{f_\infty, k}$ , as

$$f_\infty(x, y) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{\infty, k} e_k(x) e_k(y). \quad (2.4.2)$$

Let us first show that  $e_k$  is bounded on  $[0, 1]$  when  $\lambda_{\infty, k} \neq 0$ . Indeed, using Cauchy-Schwarz inequality as well as the identity

$$\int_{\mathbb{R}} (t-x)_+^\alpha (s-x)_+^\alpha dx = c_\alpha |t-s|^{2\alpha+1}$$

valid for any  $\alpha > -\frac{1}{2}$  (with  $c_\alpha > 0$  a constant depending only on  $\alpha$ ), one can write

$$\begin{aligned} e_k(y)^2 &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left( \int_{\mathbb{R}} e_k(x) dx \int_0^1 ds (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_k^2} \int_{\mathbb{R}} e_k(x)^2 dx \times \int_{\mathbb{R}} dx \left( \int_0^1 ds (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda_k^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{[0,1]^2} dt ds (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} (t-x)_+^{H_1-3/2} (t-y)_+^{H_2-3/2} \\ &= \frac{c_{H_1}}{\lambda_k^2} \int_{[0,1]^2} dt ds (s-y)_+^{H_2-3/2} (t-y)_+^{H_2-3/2} |t-s|^{2H_1-2}, \end{aligned}$$

with  $c_{H_1}$  a constant depending only on  $H_1$ . Thus, for any  $0 \leq y \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} e_k(y)^2 &\leq \frac{c_{H_1}}{\lambda_k^2} \int_{[y,1]^2} dt ds (s-y)^{H_2-3/2} (t-y)^{H_2-3/2} |t-s|^{2H_1-2} \\ &= \frac{c_{H_1}}{\lambda_k^2} \int_{[0,1-y]^2} dt ds s^{H_2-3/2} t^{H_2-3/2} |t-s|^{2H_1-2} \\ &\leq \frac{c_{H_1}}{\lambda_k^2} \int_{[0,1]^2} dt ds s^{H_2-3/2} t^{H_2-3/2} |t-s|^{2H_1-2} \\ &= \frac{2c_{H_1}}{\lambda_k^2} \int_0^1 dt t^{2H_1+2H_2-4} \int_0^1 du u^{H_2-3/2} (1-u)^{2H_1-2} < \infty. \end{aligned}$$

Let us now show that  $f_\infty$  is *not* bounded on  $[0, 1]^2$ . If  $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$ , then

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} ds = \int_{x \vee y}^1 (s-x)^{H_1-3/2} (s-y)^{H_2-3/2} ds \\ &\geq \int_{x \vee y}^1 \frac{ds}{\sqrt{(s-x)(s-y)}} = \int_{x \vee y}^1 \left[ \left( s - \frac{x+y}{2} \right)^2 - \left( \frac{x-y}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{(1-x)(1-y)} \frac{du}{\sqrt{u(u + (\frac{x-y}{2})^2)}} \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{du}{\sqrt{u(u + (\frac{x-y}{2})^2)}}. \end{aligned}$$

Using Fatou's lemma, we conclude that

$$\begin{aligned} \liminf_{y \rightarrow x} \int_0^1 (s-x)_+^{H_1-3/2} (s-y)_+^{H_2-3/2} ds &\geq \liminf_{y \rightarrow x} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{du}{\sqrt{u(u+(\frac{x-y}{2})^2)}} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u} = +\infty. \end{aligned}$$

The fact that  $f_\infty$  is not bounded together with the fact that  $e_k$  is bounded when  $\lambda_{\infty,k} \neq 0$  imply, thanks to (2.4.2), that  $f_\infty$  satisfies (2.1.4).

Step 3 (conclusion). Due to the conclusion of Step 2, the proof of (2.1.10) now follows from Theorem 2.1.2 and (2.4.1).  $\square$



## Chapter 3

# Cross-variation of Young integral with respect to long-memory fractional Brownian motions

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de l'article:

I. Nourdin and R. Zintout (2014): Cross-variation of Young integral with respect to long-memory fractional Brownian motions, *Probab. Math. Statist.*, à paraître (voir [32]).

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Foreword and main results

In the near past, there have been many applications of stochastic differential equations (SDE) driven by fractional Brownian motion in different areas of mathematical modelling. To name but a few, we mention the use of such equations as a model for meteorological phenomena [1, 42], protein dynamics [13, 12], or noise in electrical networks [18].

Here, we consider more generally a two-dimensional process  $\{X_t\}_{t \in [0, T]} = \{(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})\}_{t \in [0, T]}$  of the form

$$X_t^{(i)} = x_i + \int_0^t \sigma_s^{i,1} dB_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{i,2} dB_s^{(2)}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2. \quad (3.1.1)$$

In (3.1.1),  $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$  is a two-dimensional fractional Brownian motion of Hurst index  $H > \frac{1}{2}$  defined on a complete probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , whereas  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  and  $\sigma$  is a  $2 \times 2$  matrix-valued process. The case where  $X$  solves a fractional SDE corresponds to  $\sigma_t = \sigma(X_t)$ , with  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  deterministic. Since we are assuming that  $H > \frac{1}{2}$ , by imposing appropriate conditions on  $\sigma$  (see Section 3.2 for the details) we may and will assume throughout the text that  $\int_0^t \sigma_s^{i,j} dB_s^{(j)}$  is understood in the Young [46] sense (see, again, Section 3.2 for the details).

In this paper, we are concerned with the asymptotic behaviour of the cross-variation associ-

ated to  $X$  on  $[0, T]$ , which is the sequence of stochastic processes defined as:

$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \Delta X_{k/n}^{(1)} \Delta X_{k/n}^{(2)}, \quad n \geq 1, t \in [0, T]. \quad (3.1.2)$$

Here, and the same anywhere else, we use the notation  $\Delta X_{k/n}^{(i)}$  to indicate the increment  $X_{k/n}^{(i)} - X_{(k-1)/n}^{(i)}$ . We shall show the following two theorems. They might be of interest for solving problems arising from statistics, as for instance the problem of testing the hypothesis  $(H_0)$ : “ $\sigma^{1,2} = \sigma^{2,1} = 0$ ” in (3.1.1).

**Theorem 3.1.1.** *For any  $t \in [0, T]$ ,*

$$n^{2H-1} J_n(t) \xrightarrow{\text{prob}} \int_0^t (\sigma_s^{1,1} \sigma_s^{1,2} + \sigma_s^{2,1} \sigma_s^{2,2}) ds \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.3)$$

**Theorem 3.1.2.** *Assume  $\sigma^{1,2} = \sigma^{2,1} = 0$  and let*

$$a_n := \begin{cases} n^{2H-\frac{1}{2}} & \text{if } \frac{1}{2} < H < \frac{3}{4} \\ \frac{n}{\sqrt{\log n}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ n & \text{if } \frac{3}{4} < H < 1 \end{cases}. \quad (3.1.4)$$

*Then, as  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$a_n J_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot \sigma_s^{1,1} \sigma_s^{2,2} dZ_s \quad \text{in the Skorohod space } D[0, T]. \quad (3.1.5)$$

*In (3.1.5), the definition of  $Z$  is according to the value of  $H$ . More precisely,  $Z$  equals  $\frac{C_H}{2}$  times  $W$  when  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , with  $C_H$  given by (3.3.1)-(3.3.2) and  $W$  a Brownian motion independent of  $\mathcal{F}$ ; and  $Z = \frac{1}{2}(R^{(1)} - R^{(2)})$  when  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ , with  $R^{(k)}$  the Rosenblatt process constructed from the fractional Brownian motion*

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{(1)} + (-1)^{k+1}B^{(2)}), \quad k = 1, 2,$$

*see Definition 2 for the details.*

### 3.1.2 Link to the existing literature

Our results are close in spirit to those contained in [5] (which has been a strong source of inspiration to us), where central limit theorems for power variations of integral fractional processes are investigated.

As we will see our analysis of  $J_n$ , that requires similar but different efforts compared to [5] (as we are here dealing with a *two-dimensional* fractional Brownian motion on one hand and we also consider<sup>1</sup> the case where  $H > \frac{3}{4}$  on the other hand), is actually greatly simplified by the use of a recent, nice result obtained in [4] about the asymptotic behaviour of weighted random sums.

<sup>1</sup>The authors of [5] did not consider the case where  $H > \frac{3}{4}$  since, quoting them, “the problem is more involved because non-central limit theorems are required”.

### 3.1.3 Plan of the paper

The rest of the paper is as follows. Section 3.2 contains a thorough description of the framework in which our study takes place (in particular, we recall the definition of the Young integral and we provide its main properties). Section 3.3 gathers several preliminary results that will be essential for proving our main results. Finally, proofs of Theorems 3.1.1 and 3.1.2 are given in Section 3.4.

## 3.2 Our framework

In this section, we describe the framework used throughout the paper and we fix a parameter  $\alpha \in (0, 1)$ .

We let  $C^\alpha$  denote the set of Hölder continuous functions of index  $\alpha \in (0, 1)$ , that is, the set of those functions  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying

$$|f|_\alpha := \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|f(t) - f(s)|}{(t - s)^\alpha} < \infty. \quad (3.2.1)$$

Also, we set  $\|f\|_\alpha := |f|_\alpha + |f|_\infty$ , with  $|f|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$ .

For a fixed  $f \in C^\alpha$ , we consider the operator  $T_f : C^1 \rightarrow C^1$  defined as

$$T_f(g)(t) = \int_0^t f(u)g'(u)du, \quad t \in [0, T].$$

Let  $\gamma \in (0, 1)$  be such that  $\alpha + \gamma > 1$ . Then  $T_f$  extends, in a unique way, to an operator  $T_f : C^\gamma \rightarrow C^\gamma$ , which further satisfies

$$\|T_f(g)\|_\gamma \leq (1 + C_{\alpha, \gamma})(1 + T^\gamma)\|f\|_\alpha \|g\|_\gamma,$$

with  $C_{\alpha, \gamma} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha + \gamma - 1)} < \infty$ . See, e.g., [20, Theorem 3.1] for a proof.

**Definition 1.** Let  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$  be such that  $\alpha + \gamma > 1$ . Let  $f \in C^\alpha$  and  $g \in C^\gamma$ . The Young integral  $\int_0^\cdot f(u)dg(u)$  is then defined as being  $T_f(g)$ .

The Young integral satisfies (see, e.g., [20, inequality (3.3)]) that, for any  $a, b \in [0, T]$  with  $a < b$ ,

$$\left| \int_a^b (f(u) - f(a))dg(u) \right| \leq C_{\alpha, \gamma} |f|_\alpha |g|_\gamma (b - a)^{\alpha + \gamma}. \quad (3.2.2)$$

As we said in the Introduction, we let  $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$  be a 2-dimensional fractional Brownian motion defined on a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . We assume further that  $\mathcal{F}$  is the  $\sigma$ -field generated by  $B$ . We also suppose that the Hurst parameter  $H$  of  $B$  is the same for the two components and that it is strictly bigger than  $\frac{1}{2}$ .

Let  $\alpha \in (0, 1)$  and let  $\sigma^{i,j} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ , be four given stochastic processes that are measurable with respect to  $\mathcal{F}$ . We will assume throughout the text that the following two additional assumptions on  $\alpha$  and  $\sigma^{i,j}$  take place:

(A)  $\alpha \in (\frac{1}{4} + \frac{H}{2}, H)$ ,

(B) For each pair  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ , the random variable  $\|\sigma^{i,j}\|_\alpha$  has moments of all orders.

Observe that  $\alpha + H > 1$  due to both (A) and  $H > \frac{1}{2}$ , so that the integrals in (3.1.1) are well-defined in the Young sense. Also, recall the following variant of the Garcia-Rodemich-Rumsey Lemma [8]: for any  $q > 1$ , there exists a constant  $c_{\alpha,q} > 0$  (depending only on  $\alpha$  and  $q$ ) such that

$$|B^{(i)}|_\alpha^q \leq c_{\alpha,q} \iint_{[0,T]^2} \frac{|B_u^{(i)} - B_v^{(i)}|^q}{|u - v|^{2+q\alpha}} dudv. \quad (3.2.3)$$

Using (3.2.3), one deduces that  $|B^{(i)}|_\alpha$  has moments of all orders.

### 3.3 Preliminaries

#### 3.3.1 Breuer-Major theorem

The next statement is a direct consequence of the celebrated Breuer-Major [3] theorem (see [20, Section 7.2] for a modern proof). We write ‘fdd’ to indicate the convergence of all the finite-dimensional distributions.

**Theorem 3.3.1** (Breuer-Major). *Let  $\beta$  be a (one-dimensional) fractional Brownian motion of index  $H \in (0, \frac{3}{4}]$ . Then, as  $n \rightarrow \infty$  and with  $W$  a standard Brownian motion,*

(i) *if  $H < \frac{3}{4}$  then*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [(\beta_k - \beta_{k-1})^2 - 1] \right\}_{t \in [0,T]} \xrightarrow{\text{fdd}} \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H})^2 \{W_t\}_{t \in [0,T]};$$

(ii) *if  $H = \frac{3}{4}$  then*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [(\beta_k - \beta_{k-1})^2 - 1] \right\}_{t \in [0,T]} \xrightarrow{\text{fdd}} \frac{3}{4} \log 2 \{W_t\}_{t \in [0,T]}.$$

By a scaling argument (to pass from  $k$  to  $k/n$ ) and by using the seminal result of Peccati and Tudor [35] (to allow an extra  $F$ ), one immediately deduces from Theorem 3.3.1 the following corollary.

**Corollary 3.3.2.** *Let  $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$  be a two-dimensional fractional Brownian motion of index  $H \in (0, \frac{3}{4}]$ . Then, as  $n \rightarrow \infty$  and with  $W$  a (one-dimensional) standard Brownian motion independent of  $\beta$ , we have, for any random vector  $F = (F_1, \dots, F_d)$  measurable with respect to  $\beta$ ,*

(i) if  $H < \frac{3}{4}$  then

$$\left\{ F, n^{2H-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [(\beta_{k/n}^{(1)} - \beta_{(k-1)/n}^{(1)})^2 - (\beta_{k/n}^{(2)} - \beta_{(k-1)/n}^{(2)})^2] \right\}_{t \in [0, T]}$$

$$\xrightarrow{\text{fdd}} \{F, C_H W_t\}_{t \in [0, T]},$$

where

$$C_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H})^2 \quad (3.3.1)$$

(ii) if  $H = \frac{3}{4}$  then

$$\left\{ F, \frac{n}{\sqrt{\log n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [(\beta_{k/n}^{(1)} - \beta_{(k-1)/n}^{(1)})^2 - (\beta_{k/n}^{(2)} - \beta_{(k-1)/n}^{(2)})^2] \right\}_{t \in [0, T]}$$

$$\xrightarrow{\text{fdd}} \{F, C_{3/4} W_t\}_{t \in [0, T]},$$

where

$$C_{3/4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \log 2. \quad (3.3.2)$$

### 3.3.2 Taqqu's theorem and the Rosenblatt process

Taqqu's theorem [43] describes the fluctuations of the quadratic variation of the fractional Brownian motion when the Hurst index  $H$  is strictly bigger than  $\frac{3}{4}$ , that is, for the range of values which are not covered by the Breuer-Major Theorem 3.3.1. We state here a version that fits into our framework. With respect to the original statement, it is worthwhile noting that, in Theorem 3.3.3 (whose proof may be found in [21]), the convergence is in  $L^2(\Omega)$  (and not only in law). This latter fact will reveal to be crucial in our proof of Theorem 3.1.2, as it will allow us to apply the main result of [4] recalled in Section 3.3.4.

**Theorem 3.3.3** (Taqqu). *Let  $\beta$  be a (one-dimensional) fractional Brownian motion of index  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ . Then, for any  $t \in [0, T]$ , the sequence*

$$n^{1-2H} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [n^{2H} (\beta_{k/n} - \beta_{(k-1)/n})^2 - 1] \quad (3.3.3)$$

converges in  $L^2(\Omega)$  as  $n \rightarrow \infty$ .

**Definition 2.** *Let the assumption of Theorem 3.3.3 prevail and denote by  $R_t$  the limit of (3.3.3). The process  $R = \{R_t\}_{t \in [0, T]}$  is called the Rosenblatt process constructed from  $\beta$ .*

For the main properties of the Rosenblatt process  $R$ , we refer the reader to Taqqu [44] or Tudor [45]. See also [20, Section 7.3]. An immediate corollary of Theorem 3.3.3 is as follows.

**Corollary 3.3.4.** Let  $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$  be a two-dimensional fractional Brownian motion of index  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ . Then, for any  $t \in [0, T]$ ,

$$n \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} [(\beta_{k/n}^{(1)} - \beta_{(k-1)/n}^{(1)})^2 - (\beta_{k/n}^{(2)} - \beta_{(k-1)/n}^{(2)})^2] \xrightarrow{L^2(\Omega)} R_t^{(1)} - R_t^{(2)}$$

as  $n \rightarrow \infty$ , where  $R^{(i)}$  is the Rosenblatt process constructed from the fractional Brownian motion  $\beta^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

### 3.3.3 Two simple auxiliary lemmas

To complete the proofs of Theorems 3.1.1 and 3.1.2 we will, among other things, need the following two simple lemmas.

**Lemma 3.3.5.** Let  $B$  and  $\sigma$  be as in Section 3.2. Then there exists a constant  $C = C(\alpha, H, T, \sigma) > 0$  such that, for any  $i, j = 1, 2$ , any  $n \geq 1$  and any  $k \in \{1, \dots, \lfloor nT \rfloor\}$ ,

$$\left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} (\sigma_s^{i,j} - \sigma_{k/n}^{i,j}) dB_s^j \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Cn^{-2\alpha}, \quad (3.3.4)$$

$$\left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{i,j} dB_s^j \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Cn^{-H}. \quad (3.3.5)$$

*Proof.* Without loss of generality, we may and will assume that  $i = j = 1$ . Using (3.2.2) with  $\beta = \alpha$ , we have, almost surely,

$$\left| \int_{(k-1)/n}^{k/n} (\sigma_s^{1,1} - \sigma_{k/n}^{1,1}) dB_s^1 \right| \leq C_{\alpha,\alpha} |\sigma^{1,1}|_{\alpha} |B^1|_{\alpha} n^{-2\alpha}.$$

Using Cauchy-Schwarz inequality, one deduces

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} (\sigma_s^{1,1} - \sigma_{k/n}^{1,1}) dB_s^1 \right)^2 \right] \\ & \leq C_{\alpha,\alpha}^2 \sqrt{E[\|\sigma^{1,1}\|_{\alpha}^4]} \sqrt{E|B^1|_{\alpha}^4} n^{-4\alpha} = Cn^{-4\alpha}, \end{aligned}$$

thus yielding (3.3.4). On the other hand, one has

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{i,j} dB_s^j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} (\sigma_s^{i,j} - \sigma_{k/n}^{i,j}) dB_s^j \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \sigma_{k/n}^{i,j} \Delta B_{k/n}^j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq Cn^{-2\alpha} + Cn^{-2H}, \quad \text{by (3.3.4) and because of (B)} \\ & \leq Cn^{-H}, \quad \text{using (A)}, \end{aligned}$$

which is the desired claim (3.3.5).  $\square$

**Lemma 3.3.6.** *Let  $g, h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  be two continuous functions, let  $\gamma \in \mathbb{R}$ , and let us write  $\Delta h_{k/n}$  to denote the increment  $h(k/n) - h((k-1)/n)$ . If*

$$\forall t \in [0, T] \cap \mathbb{Q} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{[0, t]}(k/n) (\Delta h_{k/n})^2 = t, \quad (3.3.6)$$

then, for all  $t \in [0, T]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} g(k/n) \mathbf{1}_{[0, t]}(k/n) (\Delta h_{k/n})^2 = \int_0^t g(s) ds.$$

*Proof.* Since  $t \mapsto n^\gamma \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[0, t]}(k/n) (\Delta h_{k/n})^2$  is non-decreasing, it is straightforward to deduce from (3.3.6) that, for all  $t \in [0, T]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{[0, t]}(k/n) (\Delta h_{k/n})^2 = t.$$

Otherwise stated, the cumulative distribution function (cdf) of the compactly supported measure

$$\nu_n(dx) = n^\gamma \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} (\Delta h_{k/n})^2 \delta_{k/n}(dx),$$

where  $\delta_a$  stands for the Dirac mass at  $a$ , converges pointwise to the cdf of the Lebesgue measure on  $[0, T]$ . Since  $g$  is continuous, it is then a routine exercise to deduce that our desired claim holds true.  $\square$

### 3.3.4 Asymptotic behaviour of weighted random sums, following Corcuera, Nualart and Podolskij [4]

The following result represents a central ingredient in the proof of both Theorems 3.1.1 and 3.1.2.

**Proposition 3.3.1.** *Let  $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$  be a Hölder continuous process with index  $\alpha > \frac{1}{2}$ , set*

$$K_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} u_{k/n} \Delta B_{k/n}^{(1)} \Delta B_{k/n}^{(2)}, \quad t \in [0, T],$$

and let  $a_n$  be given by (3.1.4). Then, as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$a_n K_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot u_s dZ_s \quad \text{in the Skorohod space } D[0, T]. \quad (3.3.7)$$

Here,  $Z$  is as in the statement of Theorem 3.1.2.

The proof of our Proposition 3.3.1 heavily relies on a nice result taken from Corcuera, Nualart and Podolskij [4]. Actually, we will need a slight extension of the result of [4], that we state here for convenience (and also because we do not share the same notation). The only difference between Theorem 3.3.7 as stated below and its original version appearing in [4] is that  $Z$  need not be a Brownian motion. A careful inspection of the proof given in [4] indeed reveals that the Brownian feature of  $Z$  plays actually no role; the only property of  $Z$  which is used is that the sum of its Hölder exponent and that of  $u$  is strictly bigger than 1, see (H1).

**Theorem 3.3.7** (Corcuera, Nualart, Podolskij). *The underlying probability space is  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

*Let  $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$  be a Hölder continuous process with index  $\alpha \in (0, 1)$ , and let  $\xi = \{\xi_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq [nT]}$  be a family of random variables. Set*

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{k,n}, \quad t \in [0, T].$$

*Assume the following two hypotheses on the double sequence  $\xi$ :*

**(H1)**  $\{g_n(t)\}_{t \in [0, T]} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \{Z(t)\}_{t \in [0, T]}$   $\mathcal{F}$ -stably, where  $Z$  is Hölder continuous with index  $\beta$  such that  $\alpha + \beta > 1$ .

**(H2)** *There is a constant  $C > 0$  such that, for any  $1 \leq i < j \leq [nT]$ ,*

$$E \left[ \left( \sum_{k=i+1}^j \xi_{k,n} \right)^4 \right] \leq C \left( \frac{j-i}{n} \right)^2.$$

*Then*

$$\sum_{k=1}^{[n\cdot]} u_{\frac{k}{n}} \xi_{k,n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot u_s dZ_s \quad \text{in the Skorohod space } D[0, T],$$

*where  $\int_0^\cdot u_s dZ_s$  is understood as a Young integral.*

Armed with Theorem 3.3.7, we are now ready to prove Proposition 3.3.1.

*Proof of Proposition 3.3.1.* Set  $\xi_{k,n} = a_n \Delta B_{k/n}^{(1)} \Delta B_{k/n}^{(2)}$  and  $g_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{k,n}$ ,  $t \in [0, T]$ . We shall check the two assumptions **(H1)** and **(H2)** of Theorem 3.3.7.

Step 1: Checking **(H1)**. We make use of the rotation trick. More precisely, let  $\beta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{(1)} + B^{(2)})$  and  $\beta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{(1)} - B^{(2)})$ , so that

$$\xi_{k,n} = \frac{a_n}{2} \left( (\Delta \beta_{k/n}^{(1)})^2 - (\Delta \beta_{k/n}^{(2)})^2 \right).$$

It is easy to check that  $\beta^{(1)}$  and  $\beta^{(2)}$  are two independent fractional Brownian motions of index  $H$ . As a result, assumption **(H1)** is satisfied thanks to Corollary 3.3.2 (resp. Corollary 3.3.4) when  $H \leq \frac{3}{4}$  (resp.  $H > \frac{3}{4}$ ).

Step 2: Checking **(H2)**. Since all the  $L^p(\Omega)$ -norms are equivalent inside a given Wiener chaos (here: the second Wiener chaos), it suffices to check the existence of a constant  $C > 0$  such that, for any  $1 \leq i < j \leq [nT]$ ,

$$E \left[ \left( \sum_{k=i+1}^j \xi_{k,n} \right)^2 \right] \leq C \frac{j-i}{n}. \quad (3.3.8)$$



Using the independence of  $B^{(1)}$  and  $B^{(2)}$ , one computes that

$$E \left[ \left( \sum_{k=i+1}^j \xi_{k,n} \right)^2 \right] = a_n^2 n^{-4H} \sum_{k,k'=i+1}^j \rho(k-k')^2,$$

with  $\rho(r) = \frac{1}{2}(|r+1|^{2H} + |r-1|^{2H} - 2|r|^{2H})$ . As a consequence, for any  $i < j$  in  $\{1, \dots, [nT]\}$ ,

$$E \left[ \left( \sum_{k=i+1}^j \xi_{k,n} \right)^2 \right] \leq a_n^2 n^{-4H} (j-i) \sum_{r=-[nT]}^{[nT]} \rho(r)^2.$$

It is straightforward to show that  $a_n^2 n^{1-4H} \sum_{r=-[nT]}^{[nT]} \rho(r)^2 = O(1)$  as  $n \rightarrow \infty$ . Thus, (3.3.8) is satisfied, and so is **(H2)**.

To conclude the proof of Proposition 3.3.1, it remains to apply Theorem 3.3.7 with  $\xi_{k,n} = a_n \Delta B_{k/n}^{(1)} \Delta B_{k/n}^{(2)}$ .  $\square$

## 3.4 Proof of our main results

### 3.4.1 Proof of Theorem 3.1.1

We divide it into several steps.

Step 1. Recall  $J_n$  from (3.1.2). One can write

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \sum_{k=1}^{[nt]} \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,1} dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,2} dB_s^2 \right) \\ &\quad \times \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{2,1} dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{2,2} dB_s^2 \right) \\ &=: A_n(t) + R_{1,n}(t) + R_{2,n}(t), \end{aligned}$$

with

$$A_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \sigma_{k/n}^{1,1} \Delta B_{k/n}^1 + \sigma_{k/n}^{1,2} \Delta B_{k/n}^2 \right) \left( \sigma_{k/n}^{2,1} \Delta B_{k/n}^1 + \sigma_{k/n}^{2,2} \Delta B_{k/n}^2 \right), \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} R_{1,n}(t) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,1} dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,2} dB_s^2 \right) \\ &\quad \times \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{2,1} - \sigma_{k/n}^{2,1} \right) dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{2,2} - \sigma_{k/n}^{2,2} \right) dB_s^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} R_{2,n}(t) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \sigma_{k/n}^{2,1} \Delta B_{k/n}^1 + \sigma_{k/n}^{2,2} \Delta B_{k/n}^2 \right) \\ &\quad \times \left( \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{1,1} - \sigma_{k/n}^{1,1} \right) dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{1,2} - \sigma_{k/n}^{1,2} \right) dB_s^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Step 2. Let us prove the convergence of  $n^{2H-1}R_{i,n}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in [0, T]$ , in  $L^1(\Omega)$  towards zero. Using Cauchy-Schwarz and Lemma 3.3.5, we see that

$$\begin{aligned} \|R_{1,n}(t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,1} dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s^{1,2} dB_s^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \times \left\| \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{2,1} - \sigma_{k/n}^{2,1} \right) dB_s^1 + \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left( \sigma_s^{2,2} - \sigma_{k/n}^{2,2} \right) dB_s^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Cn^{-(H+2\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Thanks to our assumption **(A)**, one deduces that  $n^{2H-1}\|R_{1,n}(t)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Similarly, one proves that  $n^{2H-1}\|R_{2,n}(t)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ .

Step 3. Let us now consider  $A_n$ . One has

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \sigma_{k/n}^{1,1} \Delta B_{k/n}^1 + \sigma_{k/n}^{1,2} \Delta B_{k/n}^2 \right) \left( \sigma_{k/n}^{2,1} \Delta B_{k/n}^1 + \sigma_{k/n}^{2,2} \Delta B_{k/n}^2 \right) \\ &=: A_{1,n}(t) + A_{2,n}(t) + S_n(t), \end{aligned}$$

with

$$A_{i,n}(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sigma_{k/n}^{1,i} \sigma_{k/n}^{2,i} \left( \Delta B_{k/n}^i \right)^2, \quad i = 1, 2, \quad (3.4.4)$$

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \sigma_{k/n}^{1,1} \sigma_{k/n}^{2,2} + \sigma_{k/n}^{1,2} \sigma_{k/n}^{2,1} \right) \Delta B_{k/n}^1 \Delta B_{k/n}^2. \quad (3.4.5)$$

Using Proposition 3.3.1 and whatever the value of  $H$  compared to  $\frac{3}{4}$ , one immediately checks that  $n^{2H-1}S_n(t)$  converges in law to zero, thus in probability. On the other hand, fix  $i \in \{1, 2\}$  and recall the well-known fact that, for any  $t \in [0, T]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2H-1} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbf{1}_{[0,t]}(k/n) \left( \Delta B_{k/n}^i \right)^2 = t \quad \text{almost surely.}$$

We then deduce that, with probability 1, assumption (3.3.6) holds true with  $h = B^i$  and  $\gamma = 2H - 1$ . Lemma 3.3.6 applies and yields that

$$n^{2H-1}A_{i,n}(t) \rightarrow \int_0^t \sigma_s^{1,i} \sigma_s^{2,i} ds \quad \text{almost surely.}$$

*Step 4.* Plugging together the conclusions of Steps 1 to 3 completes the proof of Theorem 3.1.1.  $\square$

### 3.4.2 Proof of Theorem 3.1.2

Recall from the previous section that  $J_n = A_{1,n} + A_{2,n} + S_n + R_{1,n} + R_{2,n}$ , with  $A_{i,n}$ ,  $S_n$ ,  $R_{1,n}$  and  $R_{2,n}$  given by (3.4.4), (3.4.5), (3.4.2) and (3.4.3) respectively. Using the estimates of Step 2 in the previous section, we easily obtain that, under  $(\mathbf{A})$ ,  $a_n R_{i,n}(t)$  tends to zero in  $L^1(\Omega)$  as  $n \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in [0, T]$ . Moreover, the quantities  $A_{1,n}$  and  $A_{2,n}$  given by (3.4.4) equal zero when  $\sigma^{1,2} = \sigma^{2,1} = 0$ . As a result, the asymptotic behavior of  $a_n J_n$  is the same as that of  $a_n S_n$ , and the desired conclusion follows directly from Proposition 3.3.1.  $\square$

## Chapter 4

# Multivariate central limit theorems for averages of fractional Volterra processes.

Dans ce chapitre, nous présentons l'article:

I. Nourdin, D. Nualart and R. Zintout (2014): Multivariate central limit theorems for averages of fractional Volterra processes and applications to parameter estimation, soumis (voir [22]).

### 4.1 Introduction

Let  $B^H$  be a fractional Brownian motion with Hurst parameter  $H > \frac{1}{2}$ . In this paper, we deal with fractional Volterra processes  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , of the form

$$X_i(t) = \int_0^t x_i(t-s) dB^H(s), \quad t \geq 0, \quad (4.1.1)$$

where  $x_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  are measurable functions satisfying suitable integrability conditions (to be precised later on).

The special case of  $k = 1$  and  $x_1(u) = \sigma e^{-\theta u}$ , with  $\sigma, \theta > 0$ , corresponds to the fractional Ornstein-Uhlenbeck process, which may be defined as the unique solution to the stochastic differential equation

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= -\theta X(t) + \sigma \dot{B}^H(t), \quad t > 0 \\ X(0) &= 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

In (4.1.2) and everywhere else, the dots over  $X$  and  $B^H$  are used to indicate differentiation with respect to  $t$ . More generally, consider the following  $p$ -th order stochastic differential equation driven by  $B^H$ :

$$\begin{cases} X^{(n)}(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} \theta_j X^{(j)}(t) + \sigma \dot{B}^H(t), \quad t > 0 \\ X(0) &= \dots = X^{(p-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

In (4.1.3), the superscript  $(j)$  denotes  $j$ -fold differentiation with respect to  $t$ . Then, it can be proved that the  $p$ -dimensional process  $(X, X^{(1)}, \dots, X^{(p-1)})$  is of the form (4.1.1) with  $k = p$  for suitable functions  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Considering that data are sampled from an underlying continuous-time process, the solution  $X$  to (4.1.3) can, for instance, serve as a model for (possibly irregularly spaced) discrete time long memory data. In such a situation, parameters  $\theta_0, \dots, \theta_{k-1}$  are usually unknown and, therefore, they must be accurately calibrated from the observation of  $X$ . This is how we naturally arrive to the issue of showing a central limit theorem (CLT) for the parameter estimators in the model (4.1.3), in order, e.g., to construct confidence intervals. For instance, in the situation where those estimators are obtained by means of the method of moments, we may be naturally led to show a multivariate CLT for random vectors taking the form

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \left[ (X^{(i_j)}(t))^{m_j} - E(X^{(i_j)}(t))^{m_j} \right] dt : j = 1, \dots, k \right\},$$

for given powers  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$  and differentiation indices  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, p-1\}$ . We refer to [9, 10, 14] for different types of central limit theorems for parameter estimators in this type of models.

Motivated by these statistical problems, our purpose is to derive general central limit theorems for functionals of the process  $X$  solution to (4.1.1). More precisely, let  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , be real measurable functions satisfying

$$\int_{\mathbb{R}} f_i(x) e^{-x^2/2} dx = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} f_i^2(x) e^{-x^2/2} dx < \infty. \quad (4.1.4)$$

The second condition in (4.1.4) ensures that  $f_i$  can be expanded in Hermite polynomials, namely

$$f_i = \sum_{l=0}^{\infty} a_{i,l} H_l \quad \text{with} \quad \sum_{l=0}^{\infty} l! a_{i,l}^2 < \infty, \quad (4.1.5)$$

whereas from the first one we deduce that  $a_{i,0} = 0$ . The first goal of the present paper is to answer the following question.

**Question A:** As  $T \rightarrow \infty$ , can we exhibit reasonable conditions ensuring that a multivariate CLT holds for the family of random vectors  $U_T = (U_{1,T}, \dots, U_{k,T})$ ? Here

$$U_{i,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f_i \left( \frac{X_i(t)}{\sigma_i(t)} \right) dt, \quad \text{with} \quad \sigma_i(t) = \sqrt{E[X_i(t)^2]}, \quad (4.1.6)$$

and  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  are the fractional Volterra processes solution to (4.1.1).

Since, in general, the processes  $X_i$  are not stationary, we stress that one cannot directly apply the classical Breuer-Major theorem (see Theorem 4.2.3) to positively answer Question A. Nevertheless, following the approach developed in Nourdin, Peccati and Podolskij [28] (see also [27, Chapter 7]) we prove the following result.

**Theorem 4.1.1.** *Let  $q_i$  denote the Hermite rank of  $f_i$ , that is, the smallest value of  $l$  such that the coefficient  $a_{i,l}$  of  $H_l$  in (4.1.5) is different from zero. Set  $q_* = \min_{1 \leq i \leq k} q_i$  and assume that  $q_* \geq 2$ . Consider  $U_T = (U_{1,T}, \dots, U_{k,T})$ , where  $U_{i,T}$  is given by (4.1.6). If  $H \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2q_*})$  and if the functions  $x_i$  defining  $X_i$  satisfy both*

$$\int_0^\infty \left( \int_{[0,\infty)^2} |x_i(u)x_j(v)| |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{q_i \vee q_j} da < \infty \quad (4.1.7)$$

and

$$\eta_i := \sqrt{H(2H-1) \int_{[0,\infty)^2} x_i(u)x_i(v)|v-u|^{2H-2} dudv} \in (0, \infty), \quad (4.1.8)$$

for all  $i, j = 1, \dots, k$ , then

$$U_T \xrightarrow{\text{law}} N_k(0, \Lambda) \quad \text{as } T \rightarrow \infty, \quad (4.1.9)$$

where  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  is given by

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \sum_{l=q_i \vee q_j}^{\infty} a_{i,l} a_{j,l} l! \frac{H^l (2H-1)^l}{\eta_i^l \eta_j^l} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{[0,\infty)^2} x_i(u)x_j(v)|v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^l da. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

That one must divide by a quantity depending on  $t$  in (4.1.6), namely  $\sigma_i(t)$ , may appear to be not very convenient for applications. This is why we also address the following related problem.

**Question B:** Can one find constants  $\xi_i > 0$ , as well as suitable assumptions on  $f_i$ ,  $x_i$  and  $H$ , so that  $V_T = (V_{1,T}, \dots, V_{k,T})$  satisfies a CLT? Here

$$V_{i,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f_i \left( \frac{X_i(t)}{\xi_i} \right) dt. \quad (4.1.11)$$

Whatever the value of  $\xi_i$ , observe that the variance of  $X_i(t)/\xi_i$  is different from 1 for most of the values of  $t$ . For this reason and because Hermite polynomials are the orthogonal polynomials associated with the *standard* Gaussian distribution, it seems difficult to deal with *general* functions  $f_i$  while trying to answer Question B. This is why we restrict our analysis to the situation where  $f_i$  are *polynomials*, which is not a loss of generality for the applications we have in mind (see Section 4.4). More precisely, we have the following result, which provides a positive answer to Question B.

**Theorem 4.1.2.** *Suppose that  $f_i = P_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , are real polynomials and denote by  $q_i$  the Hermite rank of  $P_i$ . Set  $q_* = \min_{1 \leq i \leq k} q_i$  and assume that  $q_* \geq 2$ . Consider  $V_T = (V_{1,T}, \dots, V_{k,T})$  given by (4.1.11), where  $\xi_i = \eta_i$  is given by (4.1.8). If  $H \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2q_*})$  and if the functions  $x_i$  defining  $X_i$  satisfy (4.1.7), (4.1.8) as well as*

$$\int_{[0,\infty)^2} |x_i(u)x_i(v)| ((u \wedge v) \vee 1) |v-u|^{2H-2} dudv < \infty, \quad (4.1.12)$$

then

$$V_T \xrightarrow{\text{law}} N_k(0, \Lambda) \quad \text{as } T \rightarrow \infty, \quad (4.1.13)$$

with  $\Lambda$  still given by (4.1.10).

In the last section of our paper, we discuss an application of Theorem 4.1.2 to the problem of parameter estimation in the fractional CAR( $k$ ) model, which generalizes the model introduced in [14].

The paper is organized as follows. Section 4.2 contains preliminary results and concepts. The proof of the two main results, namely Theorems 4.1.1 and 4.1.2, is then provided in Section 4.3. Finally, an application of Theorem 4.1.2 is discussed in Section 4.4.

## 4.2 Preliminaries

### 4.2.1 Fractional Brownian motion

Throughout the paper,  $B^H = (B^H(t))_{t \in \mathbb{R}}$  denotes a fractional Brownian motion (fBm in short) with Hurst index  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ , defined on a complete probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . That is,  $B^H$  is a zero mean Gaussian process with covariance

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

We further assume that the  $\sigma$ -field  $\mathcal{F}$  is the completion of the  $\sigma$ -field generated by  $B^H$ . We denote by  $\mathfrak{H}$  the closure of the space of step functions on  $\mathbb{R}$  endowed with the inner product

$$\langle \mathbf{1}_{[a,b]}, \mathbf{1}_{[c,d]} \rangle_{\mathfrak{H}} = E[(B_b^H - B_a^H)(B_d^H - B_c^H)],$$

for any  $a < b$  and  $c < d$ . We know that the Hilbert space  $\mathfrak{H}$  is isometric to the Gaussian space spanned by  $B^H$ , and we denote this isometry equivalently by  $x \rightarrow B^H(x)$  or by  $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} x(s)dB^H(s)$ .

### 4.2.2 Wiener integral against fBm

It is well-known (see, for instance, Nualart [33, Chapter 5]) that any measurable function  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x(u)x(v)||v-u|^{2H-2}dudv < \infty \quad (4.2.1)$$

belongs to the space  $\mathfrak{H}$ , that is, it can be integrated with respect to  $B^H$ . In this case, the Wiener integral  $B^H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)dB^H(s)$  satisfies the following isometry property:

$$E \left[ |B^H(x)|^2 \right] = \|x\|_{\mathfrak{H}}^2 = H(2H-1) \int_{\mathbb{R}^2} x(u)x(v)|v-u|^{2H-2}dudv.$$

Notice that condition (4.2.1) can be equivalently rewritten as

$$\int_{\mathbb{R}} (|x| * |\tilde{x}|)(t)|t|^{2H-2}dt < \infty, \quad (4.2.2)$$

with  $\tilde{x}(t) = x(-t)$  and where  $x * y$  denotes the convolution of two nonnegative or integrable functions  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(x * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u-v)y(v)dv.$$

The following estimate will be needed in the proof of Theorem 4.1.1.

**Lemma 4.2.1.** *For every  $x, y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfying the condition (4.2.1) (extended with  $x(u) = y(u) = 0$  whenever  $u < 0$ ) and for any  $a \in \mathbb{R}$ , we have*

$$\begin{aligned} & \left( \int_{[0, \infty)^2} x(u)y(v)|v-u-a|^{2H-2}dudv \right)^2 \\ & \leq \int_{[0, \infty)^2} x(u)x(v)|v-u|^{2H-2}dudv \int_{[0, \infty)^2} y(u)y(v)|v-u|^{2H-2}dudv. \end{aligned}$$

*Proof.* We have, by Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^\infty du x(u) \int_0^\infty dv y(v) |v - u - a|^{2H-2} \right)^2 \\
&= \left( \int_0^\infty du x(u) \int_{-a}^\infty dv y(v+a) |v - u|^{2H-2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{H^2(2H-1)^2} \left( E \left[ \int_0^\infty x(u) dB^H(u) \int_{-a}^\infty y(v+a) dB^H(v) \right] \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{H^2(2H-1)^2} E \left[ \left( \int_0^\infty x(u) dB^H(u) \right)^2 \right] E \left[ \left( \int_{-a}^\infty y(v+a) dB^H(v) \right)^2 \right] \\
&= \int_{[0,\infty)^2} x(u)x(v) |v - u|^{2H-2} dudv \int_{[0,\infty)^2} y(u)y(v) |v - u|^{2H-2} dudv.
\end{aligned}$$

□

### 4.2.3 Hermite polynomials and Wiener chaoses

For any integer  $p \geq 1$ , we denote by  $\mathfrak{H}^{\otimes p}$  and  $\mathfrak{H}^{\circ p}$ , respectively, the  $p$ th tensor product and the  $p$ th symmetric tensor product of  $\mathfrak{H}$ . The  $p$ th Wiener chaos of  $X$ , denoted by  $\mathcal{H}_p$ , is the closed linear subspace of  $L^2(\Omega)$  generated by the random variables  $\{H_p(B^H(x)), x \in \mathfrak{H}, \|x\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$ , where  $H_p$  is the  $p$ th Hermite polynomial defined by

$$H_p(x) = (-1)^p e^{x^2/2} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x^2/2}).$$

The mapping  $I_p(x^{\otimes p}) = H_p(B^H(x))$  provides a linear isometry between  $\mathfrak{H}^{\circ p}$  (equipped with the modified norm  $\sqrt{p!} \|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes p}}$ ) and  $\mathcal{H}_p$  (equipped with the  $L^2(\Omega)$  norm).

### 4.2.4 Fourth moment theorem

The following result, known as the *fourth moment theorem*, is a combination of the seminal results of Nualart and Peccati [34] and Peccati and Tudor [35]. Given a sequence of random vectors in a fixed Wiener chaos whose covariance matrix converges, the fourth moment theorem provides necessary and sufficient conditions for the convergence to a normal distribution. We refer to Nourdin and Peccati [27] for an extensive discussion on this theorem, including quantitative versions obtained by means of Stein's method and a wide range of applications and developments.

In the fourth moment theorem, a crucial role is played by the notion of *contractions*. Let  $\{e_k, k \geq 1\}$  be a complete orthonormal system in  $\mathfrak{H}$ . Given  $f \in \mathfrak{H}^{\circ p}$ ,  $g \in \mathfrak{H}^{\circ q}$  and  $r \in \{0, \dots, p \wedge q\}$ , the  $r$ th contraction of  $f$  and  $g$  is the element of  $\mathfrak{H}^{\otimes(p+q-2r)}$  defined by

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} \langle f, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} \otimes \langle g, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}. \quad (4.2.3)$$

**Theorem 4.2.2** (Fourth Moment Theorem). *Let  $k \geq 2$  and  $q_k \geq \dots \geq q_1 \geq 1$  be some fixed integers, and consider a family of kernels*

$$\{(f_{1,T}, \dots, f_{k,T})\}_{T>0}$$



such that  $f_{j,T} \in \mathfrak{H}^{\odot q_j}$  for every  $T > 0$  and every  $j = 1, \dots, k$ . Assume further that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E [I_{q_i}(f_{i,T}) I_{q_j}(f_{j,T})] = \Lambda_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k.$$

Then the following two conditions are equivalent:

(i) For every  $i = 1, \dots, k$  and every  $p = 1, \dots, q_i - 1$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|f_{i,T} \otimes_p f_{i,T}\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2(q_i-p)}} = 0;$$

(ii) as  $T \rightarrow \infty$ , the vector  $(I_{q_1}(f_{1,T}), \dots, I_{q_k}(f_{k,T}))$  converges in distribution to the  $k$ -dimensional Gaussian vector  $N_k(0, \Lambda)$ .

### 4.2.5 Breuer-Major theorem

We conclude this preliminary section with a continuous-time version of the celebrated Breuer-Major CLT for stationary Gaussian sequences.

**Theorem 4.2.3** (Breuer-Major). *Let  $(X(t))_{t \geq 0}$  be a zero mean stationary Gaussian process with unit variance, and let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a measurable function satisfying  $\int_{\mathbb{R}} f^2(x) e^{-x^2/2} dx < \infty$ . Let us expand  $f$  in terms of Hermite polynomials, namely*

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} a_l H_l \quad \text{with } \sum_{l=0}^{\infty} l! a_l^2 < \infty.$$

*Suppose that  $a_0 = 0$  and let  $q$  denote the Hermite rank of  $f$  (that is,  $q$  is the smallest value of  $l$  such that the coefficient  $a_l$  of  $H_l$  is different from zero). Finally, assume that  $\int_{\mathbb{R}} |\rho(t)|^q dt < \infty$ , with  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  the autocovariance function associated with  $X$ , that is,*

$$E[X(s)X(t)] = \rho(t-s), \quad t, s \geq 0.$$

*Then, as  $T \rightarrow \infty$ ,*

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(X(t)) dt \xrightarrow{\text{Law}} N(0, \sigma^2), \quad (4.2.4)$$

*where  $\sigma^2 = \sum_{l=q}^{\infty} l! a_l^2 \int_{\mathbb{R}} \rho(t)^l dt \in (0, \infty)$ .*

## 4.3 Proofs of the main results

### 4.3.1 Proof of Theorem 4.1.1

For the sake of clarity, the proof of Theorem 4.1.1 is divided into several steps.

Step 1: Going away from zero. We claim that, in order to prove (4.1.9) it is enough to show that, for at least one fixed  $T_0 > 0$ , one has

$$\tilde{U}_T \xrightarrow{\text{law}} N_k(0, \Lambda) \quad \text{as } T \rightarrow \infty, \quad (4.3.1)$$

where  $\tilde{U}_T = (\tilde{U}_{1,T}, \dots, \tilde{U}_{k,T})$ , with

$$\tilde{U}_{j,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{T_0}^T f_j \left( \frac{X_j(t)}{\sigma_j(t)} \right) dt.$$

(The only difference between  $U_{j,T}$  and  $\tilde{U}_{j,T}$  is that the integral defining the former is between 0 and  $T$ .) Indeed, using among other the Hermite expansion (4.1.5) of each  $f_j$  and then Cauchy-Schwarz inequality to obtain that  $|E[X_j(t)X_j(s)]| \leq \sigma_j(t)\sigma_j(s)$ , we get

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( U_{j,T} - \tilde{U}_{j,T} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=q_j}^{\infty} l! a_{j,l}^2 \int_{[0, T_0]^2} \left( \frac{E[X_j(t)X_j(s)]}{\sigma_j(t)\sigma_j(s)} \right)^l ds dt \leq \frac{T_0^2}{T} \sum_{l=q_j}^{\infty} l! a_{j,l}^2 = O(T^{-1}), \end{aligned}$$

as  $T \rightarrow \infty$ . Hence, if (4.3.1) holds true, then (4.1.9) takes place as well.

Step 2: Checking that the covariance matrix of  $\tilde{U}_T$  converges whenever  $f_j$  are Hermite polynomials. We can write, for any  $j$  and as  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_j(t)^2 &= H(2H-1) \int_{[0,t]^2} x_j(u)x_j(v)|v-u|^{2H-2} dudv \\ &\rightarrow H(2H-1) \int_{[0,\infty)^2} x_j(u)x_j(v)|v-u|^{2H-2} dudv = \eta_j^2. \end{aligned}$$

Let us choose  $T_0 > 0$  large enough so that  $\sigma_j(t)^2 \geq \frac{1}{2}\eta_j^2$  for all  $t \geq T_0$  and all  $j \in \{1, \dots, k\}$ . We shall check the convergence of the covariance matrix of  $\tilde{U}_T$  with this  $T_0$  at hand and when  $f_j = H_{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , for given integers  $p_j \geq q_j$ . In this case, one has, for any  $T > T_0$  and any  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$\begin{aligned} E[\tilde{U}_{i,T}\tilde{U}_{j,T}] &= \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \frac{p_i!}{T} \int_{[T_0, T]^2} \left( \frac{E[X_i(s)X_j(t)]}{\sigma_i(s)\sigma_j(t)} \right)^{p_i} ds dt \\ &= \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \frac{p_i!}{T} \int_{T_0}^T db \int_{b-T}^{b-T_0} da \left( \frac{E[X_i(b)X_j(b-a)]}{\sigma_i(b)\sigma_j(b-a)} \right)^{p_i} \\ &= \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \frac{p_i!}{T} \int_{T_0}^T db \int_{b-T}^{b-T_0} da \\ &\quad \times \left( \frac{H(2H-1)}{\sigma_i(b)\sigma_j(b-a)} \int_{[0,b] \times [0,b-a]} x_i(u)x_j(v)|v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{p_i} \\ &= \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} p_i! \int_{\mathbb{R}} \Phi(T, a) da, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(T, a) &= \mathbf{1}_{\{|a| \leq T-T_0\}} \frac{1}{T} \int_{T_0 \vee (a+T_0)}^{T \wedge (a+T)} \\ &\quad \left( \frac{H(2H-1)}{\sigma_i(b)\sigma_j(b-a)} \int_{[0,b] \times [0,b-a]} x_i(u)x_j(v)|v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{p_i} db. \end{aligned}$$

Using first that  $\sigma_i(t)^2 \geq \frac{1}{2}\eta_i^2$  for all  $t \geq T_0$  and all  $i$  (by definition of  $T_0$ ) and then Lemma 4.2.1, we deduce that, for any  $a \in \mathbb{R}$  and any  $T > T_0$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} |\Phi(T, a)| \\ & \leq \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \left( \frac{2H(2H-1)}{\eta_i \eta_j} \int_{[0, \infty)^2} |x_i(u)x_j(v)| |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{p_i} \\ & \leq 2^{p_i} \left( \frac{H(2H-1)}{\eta_i \eta_j} \int_{[0, \infty)^2} |x_i(u)x_j(v)| |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{q_i \vee q_j}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Moreover, due to the fact that  $\sigma_i(t) \rightarrow \eta_i > 0$ , one has, as  $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Phi(T, a) &= \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} H^{p_i} (2H-1)^{p_i} \mathbf{1}_{\{|a| \leq T-T_0\}} \int_{\frac{T_0}{T} \vee \frac{a+T_0}{T}}^{1 \wedge (\frac{a}{T} + 1)} \\ & \quad \left( \frac{\int_{[0, bT] \times [0, bT-a]} x_i(u)x_j(v) |v-u-a|^{2H-2} dudv}{\sigma_i(bT)\sigma_j(bT-a)} \right)^{p_i} db \\ & \rightarrow \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \left( \frac{H(2H-1)}{\eta_i \eta_j} \int_{[0, \infty)^2} x_i(u)x_j(v) |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{p_i}. \end{aligned}$$

By dominated convergence (see also (4.1.7)), one deduces that

$$\begin{aligned} E[\tilde{U}_{i,T} \tilde{U}_{j,T}] & \rightarrow \mathbf{1}_{\{p_i=p_j\}} \frac{p_i! H^{p_i} (2H-1)^{p_i}}{\eta_i^{p_i} \eta_j^{p_i}} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{[0, \infty)^2} x_i(u)x_j(v) |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{p_i} da. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Observe that (4.3.4) coincides with  $\Lambda_{ij}$  after taking into account that  $f_i = H_{p_i}$  and  $f_j = H_{p_j}$ .

**Step 3: Proving (4.3.1) whenever  $f_j$  are Hermite polynomials.** To do so, we shall make use of the Fourth Moment Theorem 4.2.2. As in the previous step, suppose that  $f_j = H_{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , for some  $p_j \geq q_j$ . One then has  $\tilde{U}_{j,T} = I_{p_j}(g_{j,T})$ , with

$$g_{j,T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{T_0}^T \frac{e_{j,t}^{\otimes p_j}}{\sigma_j(t)^{p_j}} dt. \quad (4.3.5)$$

In (4.3.5),  $e_{j,t}$  is a short-hand notation for the function  $u \mapsto x_j(t-u)\mathbf{1}_{[0,t]}(u)$ .

According to Theorem 4.2.2, to conclude that (4.3.1) takes place we are left to check that, for all  $j \in \{1, \dots, k\}$  and all  $r \in \{1, \dots, p_j - 1\}$ ,

$$\|g_{j,T} \otimes_r g_{j,T}\| \rightarrow 0 \text{ as } T \rightarrow \infty. \quad (4.3.6)$$

Let us compute  $g_{j,T} \otimes_r g_{j,T}$ . We find

$$g_{j,T} \otimes_r g_{j,T} = \frac{1}{T} \int_{[T_0, T]^2} \frac{e_{j,t_1}^{\otimes(p_j-r)} \otimes e_{j,t_2}^{\otimes(p_j-r)}}{\sigma_j(t_1)^{p_j} \sigma_j(t_2)^{p_j}} E[X_j(t_1)X_j(t_2)]^r dt_1 dt_2.$$

As a result, using moreover that  $\sigma_j(t)^2 \geq \frac{1}{2}\eta_j^2$  for  $T > T_0$  and introducing  $Z_j(t) = \int_{-\infty}^t |x_j(t-s)| dB_s^H$  (after extending  $B^H$  to the whole  $\mathbb{R}$ ), we obtain

$$\begin{aligned}
& \|g_{j,T} \otimes_r g_{j,T}\|^2 \\
&= \frac{1}{T^2} \int_{[T_0, T]^4} \frac{1}{(\sigma_j(t_1)\sigma_j(t_2)\sigma_j(t_3)\sigma_j(t_4))^{p_j}} E[X_j(t_1)X_j(t_2)]^r E[X_j(t_3)X_j(t_4)]^r \\
&\quad \times E[X_j(t_1)X_j(t_3)]^{p_j-r} E[X_j(t_2)X_j(t_4)]^{p_j-r} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \\
&\leq \frac{4^{p_j}}{\eta_j^{4p_j}} \frac{1}{T^2} \int_{[0, T]^4} E[Z_j(t_1)Z_j(t_2)]^r E[Z_j(t_3)Z_j(t_4)]^r \\
&\quad \times E[Z_j(t_1)Z_j(t_3)]^{p_j-r} E[Z_j(t_2)Z_j(t_4)]^{p_j-r} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Set  $\tau_j^2 = E[Z_j(0)^2]$  and let  $h_{j,T}$  denote the function

$$h_{j,T} = \frac{1}{\tau_j^{p_j} \sqrt{T}} \int_0^T \tilde{e}_{j,t}^{\otimes p_j} dt, \quad \text{where } \tilde{e}_{j,t}(u) = |x_j(t-u)| \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(u).$$

Expressing the right-hand side of (4.3.7) by means of  $\|h_{j,T} \otimes_r h_{j,T}\|^2$  leads to

$$\|g_{j,T} \otimes_r g_{j,T}\|^2 \leq \frac{4^{p_j} \tau_j^{4p_j}}{\eta_j^{4p_j}} \|h_{j,T} \otimes_r h_{j,T}\|^2. \tag{4.3.8}$$

On the other hand, it is straightforward to check that  $Z_j$  is a *stationary* Gaussian process and that

$$I_{p_j}(h_{j,T}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T H_{p_j} \left( \frac{Z_j(t)}{\tau_j} \right) dt.$$

From assumption (4.1.7) and with Lemma 2.1, we deduce that  $\int_{\mathbb{R}} |\rho_{Z_j}(t)|^{p_j} dt < \infty$ . Indeed,

$$\rho_{Z_j}(t) = H(2H-1) \int_{[0, \infty)^2} |x_j(u)x_j(v)| |u-v-t|^{2H-2} dudv.$$

As a consequence, Breuer-Major Theorem 4.2.3 implies that  $I_{p_j}(h_{j,T})$  converges in law to a Gaussian. According to Theorem 4.2.2, one deduces that  $\|h_{j,T} \otimes_r h_{j,T}\| \rightarrow 0$  as  $T \rightarrow \infty$ , implying in turn that (4.3.6) holds true (see (4.3.8)), and thus completing the proof of (4.1.9) in the particular case where  $f_j = H_{p_j}$ .

Step 4: Proving (4.1.9) whenever  $f_j$  are polynomials. More precisely, let us suppose in this step that, for each  $j = 1, \dots, k$  one has

$$f_j = \sum_{l=q_j}^{m_j} a_{j,l} H_l, \tag{4.3.9}$$

for a *finite* integer  $m_j$ . Owing to the Cramér-Wold device, it is actually immediate to apply the conclusion of Step 3 in order to get (4.1.9) in the case where  $f_j$  given by (4.3.9).

**Step 5: Proving (4.1.9) in all generality.** Finally, let us consider the general situation of  $f_j$  given by (4.1.5). To reach the conclusion in this case, and taken into account Step 4, it remains to show that, for any fixed  $j = 1, \dots, k$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_{T_0}^T \sum_{l=m}^{\infty} a_{j,l} H_l \left( \frac{X_j(t)}{\sigma_j(t)} \right) dt \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2 \text{ as } m \rightarrow \infty.$$

Using identity (4.3.2) and its associated bound (4.3.3), one has, for any fixed  $j = 1, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{T_0}^T \sum_{l=m}^{\infty} a_{j,l} H_l \left( \frac{X_j(t)}{\sigma_j(t)} \right) dt \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{[T_0, T]^2} \sum_{l=m}^{\infty} l! a_{j,l}^2 \left( \frac{E[X_j(t)X_j(s)]}{\sigma_j(t)\sigma_j(s)} \right)^l ds dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_{[T_0, T]^2} \left( \frac{E[X_j(t)X_j(s)]}{\sigma_j(t)\sigma_j(s)} \right)^{q_j} ds dt \times \sum_{l=m}^{\infty} l! a_{j,l}^2 \\ &\leq \sum_{l=m}^{\infty} l! a_{j,l}^2 \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{2H(2H-1)}{\eta_j^2} \int_{[0, \infty)^2} |x_j(u)x_j(v)| |v-u-a|^{2H-2} dudv \right)^{q_j} da, \end{aligned}$$

which, thanks to (4.1.7) and Lemma 2.1, tends to zero as  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 4.3.2 Proof of Theorem 4.1.2

Set

$$Y_{j,t} = \int_{-\infty}^t x_j(t-s) dB^H(s) \quad \text{and} \quad L_{j,t} = \int_{-\infty}^0 x_j(t-s) dB^H(s),$$

so that  $Y_j = X_j + L_j$ . It is straightforward to check that  $Y_j$  is stationary and that  $\eta_j^2 = \text{Var}(Y_j(0))$ .

We have  $\eta_j^2 = \text{Var}(Y_j(t))$  for all  $t$  by stationarity. So, since  $P$  has Hermite rank  $q_j$  and since (4.1.7) takes place, by applying the same arguments than the ones used in the proof of Theorem 4.1.1 but with  $Y_j$  instead of  $X_j$ , we can prove that, as  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T P_1 \left( \frac{Y_1(t)}{\eta_1} \right) dt, \dots, \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T P_k \left( \frac{Y_k(t)}{\eta_k} \right) dt \right) \xrightarrow{\text{law}} N_k(0, \Lambda).$$

Thus, to reach the desired conclusion it suffices to show that, under (4.1.12) and for any fixed  $j = 1, \dots, k$ , and for any integer  $p \geq 1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (X_{j,t}^p - Y_{j,t}^p) dt \xrightarrow{L^1} 0 \quad \text{as } T \rightarrow \infty. \quad (4.3.10)$$

We shall divide the proof of (4.3.10) into two steps.

Step 1: We shall show that  $E \int_0^\infty L_{j,t}^{2k} dt$  is bounded for any integer  $k \geq 1$ . Indeed, one can write, with  $\mu_{2k}$  denoting the  $k$ -th even moment of the standard Gaussian,

$$\begin{aligned}
& E \int_0^\infty L_{j,t}^{2k} dt \\
&= \mu_{2k} H^k (2H-1)^k \int_0^\infty dt \left( \int_{(-\infty,0]^2} dudv x_j(t-u)x_j(t-v)|v-u|^{2H-2} \right)^k \\
&\leq \mu_{2k} H^k (2H-1)^k \int_0^\infty dt \left( \int_{[t,\infty)^2} dudv |x_j(u)x_j(v)||v-u|^{2H-2} \right)^k \\
&\leq \mu_{2k} H^k (2H-1)^k \int_{[0,\infty)^{2k}} du_1 \dots du_{2k} |x_j(u_1)| \dots |x_j(u_{2k})| \\
&\quad \times |u_2 - u_1|^{2H-2} \dots |u_{2k} - u_{2k-1}|^{2H-2} \times \min\{u_i, i = 1, \dots, 2k\}.
\end{aligned}$$

Now, using that  $\min\{u_i, i = 1, \dots, 2k\} \leq \sum_{i=1}^k \min\{u_{2i-1}, u_{2i}\}$ , and taking into account condition (4.1.12), we deduce

$$\begin{aligned}
& E \int_0^\infty L_{j,t}^{2k} dt \\
&\leq k \mu_{2k} H^k (2H-1)^k \left( \int_{[0,\infty)^2} dudv |x_j(u)x_j(v)||v-u|^{2H-2} \right)^{k-1} \\
&\quad \times \int_{[0,\infty)^2} dudv u \wedge v |x_j(u)x_j(v)||v-u|^{2H-2} \\
&\leq k \mu_{2k} H^k (2H-1)^k \left( \int_{[0,\infty)^2} dudv ((u \wedge v) \vee 1) |x_j(u)x_j(v)||v-u|^{2H-2} \right)^k < \infty.
\end{aligned}$$

Step 2. Let us observe that

$$\left| \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (X_{j,t}^p - Y_{j,t}^p) dt \right| \leq \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt |Y_{j,t}|^{p-k} |L_{j,t}|^k. \quad (4.3.11)$$

For any fixed  $p \geq 1$  and any  $1 \leq k \leq p$ , one has, using the Cauchy-Schwarz inequality, Step 1 and that  $Y$  is stationary,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{T}} E \int_0^T |Y_{j,t}|^{p-k} |L_{j,t}|^k dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} E \int_0^{\rho T} |Y_{j,t}|^{p-k} |L_{j,t}|^k dt + \frac{1}{\sqrt{T}} E \int_{\rho T}^T |Y_{j,t}|^{p-k} |L_{j,t}|^k dt \\
&\leq \text{cst} \left( \sqrt{\rho} + \sqrt{\int_{\rho T}^\infty E[L_{j,t}^{2k}] dt} \right),
\end{aligned}$$

where  $0 < \rho < 1$ . So, by letting  $T \rightarrow \infty$  and then  $\rho \rightarrow 0$ , the desired conclusion (4.3.10) follows, thus concluding the proof of Theorem 4.1.2.  $\square$

## 4.4 An application to the estimation of parameters in the fractional CAR( $k$ ) model

Consider the fractional CAR( $k$ ) model, that is, the solution  $X$  to:

$$X^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i X^{(i)}(t) + \sigma \dot{B}^H(t), \quad t > 0. \quad (4.4.1)$$

Here,  $X^{(k)}$  indicates the  $k$ th derivative of the solution process  $X$  and  $\theta_i$  are real parameters considered as being unknown. Moreover, up to appropriate scaling it is not a loss of generality to assume that  $\sigma = 1$ .

In the sequel, we are going to illustrate the use of our Theorem 4.1.2 to the estimation problem in (4.4.1). To keep the things as simple as possible, we shall only consider the case  $k = 2$ , we shall assume zero initial conditions for  $X$  and we shall put some restrictions on  $\theta_0, \theta_1$ .

More precisely, let  $X$  be defined as the unique solution to

$$\ddot{X}(t) = \theta_0 X(t) + \theta_1 \dot{X}(t) + \dot{B}^H(t), \quad X(0) = \dot{X}(0) = 0, \quad (4.4.2)$$

with  $\theta_0, \theta_1 < 0$  and  $\theta_1^2 + 4\theta_0 > 0$ . The roots of the characteristic equation  $r^2 - \theta_1 r - \theta_0 = 0$  are

$$p = \frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_0}}{2} \quad \text{and} \quad q = \frac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_0}}{2}. \quad (4.4.3)$$

The solution  $X$  to (4.4.2) is given by

$$X(t) = \int_0^t \frac{e^{p(t-s)} - e^{q(t-s)}}{p - q} dB^H(s).$$

The processes  $X_1 = X$  and  $X_2 = \dot{X}$  are of the form (4.1.1), with the corresponding functions

$$x_1(t) = \frac{e^{pt} - e^{qt}}{p - q} \quad \text{and} \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{pe^{pt} - qe^{qt}}{p - q}.$$

We shall apply Theorem 4.1.2 to  $X_1 = X$  and  $X_2 = \dot{X}$  and to the polynomials  $P_1(x) = P_2(x) = x^2 - 1$ , which have Hermite rank 1. Since  $p$  and  $q$  are negative numbers, the functions  $x_1$  and  $x_2$  satisfy conditions (4.1.7) (4.1.8) and (4.1.12). As a consequence, Theorem 4.1.2 implies the following convergence in law as  $T$  tends to infinity, provided  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ :

$$\sqrt{T} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (X(t)^2, \dot{X}(t)^2) dt - m_\infty \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_2(0, \Lambda), \quad (4.4.4)$$

where  $m_\infty = (\eta_1^2, \eta_2^2)$ , with  $\eta_i, i = 1, 2$ , defined in (4.1.8), and  $\Lambda$  is the covariance matrix appearing in (4.1.10). In order to explicitly compute  $m_\infty$  and  $\Lambda$ , we shall use a Fourier transform approach.

*Computation of  $m_\infty$ :* The first component of the vector  $m_\infty$  is given by

$$\eta_1^2 = H(2H - 1) \int_{\mathbb{R}} (x_1 * \tilde{x}_1)(t) |t|^{2H-2} dt.$$

The Fourier transform of  $x_1$  is given by

$$\mathcal{F}x_1(\xi) = \frac{1}{p-q} \left( \frac{1}{p-i\xi} - \frac{1}{q-i\xi} \right).$$

On the other hand, the Fourier transform of  $|t|^{2H-2}$  is  $\kappa_{2H-2}|\xi|^{1-2H}$ , for some constant  $\kappa_{2H-2}$ . Therefore, using Plancherel theorem we can write

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= \frac{d_H}{(p-q)^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{p-i\xi} - \frac{1}{q-i\xi} \right|^2 |\xi|^{1-2H} d\xi \\ &= \frac{d_H}{(p-q)^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{p^2+\xi^2} + \frac{1}{q^2+\xi^2} - \frac{2}{pq+\xi^2} \right) |\xi|^{1-2H} d\xi \\ &= \frac{e_H}{(p-q)^2} (|p|^{-2H} + |q|^{-2H} - 2(pq)^{-H}) = \frac{e_H(|p|^{-H} - |q|^{-H})^2}{(p-q)^2}, \end{aligned}$$

where  $e_H = 2d_H \int_0^\infty \frac{\xi^{1-2H} d\xi}{1+\xi^2}$  and  $d_H = \kappa_{2H-2}H(2H-1)$ .

For the second component of  $m_\infty$  we can write

$$\eta_2^2 = E \left[ \left( \int_0^\infty \frac{pe^{pt} - qe^{qt}}{p-q} dB^H(t) \right)^2 \right] = H(2H-1) \int_{\mathbb{R}} (x_2 * \tilde{x}_2)(t) |t|^{2H-2} dt.$$

The Fourier transform of  $x_2$  is given by

$$\mathcal{F}x_2(\xi) = \frac{1}{p-q} \left( \frac{p}{p-i\xi} - \frac{q}{q-i\xi} \right).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \eta_2^2 &= \frac{d_H}{(p-q)^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{p}{p-i\xi} - \frac{q}{q-i\xi} \right|^2 |\xi|^{1-2H} d\xi \\ &= \frac{d_H}{(p-q)^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{p^2}{p^2+\xi^2} + \frac{q^2}{q^2+\xi^2} - \frac{2pq}{pq+\xi^2} \right) |\xi|^{1-2H} d\xi \\ &= \frac{e_H}{(p-q)^2} (|p|^{2-2H} + |q|^{2-2H} - 2(pq)^{1-H}) = \frac{e_H(|p|^{1-H} - |q|^{1-H})^2}{(p-q)^2}. \end{aligned}$$

*Computation of the matrix  $\Lambda$ :* From (4.1.10), taking into account that  $P_1 = P_2 = H_2$ , we obtain

$$\Lambda_{ij} = 2H^2(2H-1)^2 \int_{\mathbb{R}^3} (x_i * \tilde{x}_j)(u) (x_i * \tilde{x}_j)(v) |u+a|^{2H-2} |v+a|^{2H-2} dudvda.$$

We know that

$$\int_{\mathbb{R}} |u+a|^{2H-2} |v+a|^{2H-2} da = k_H |u-v|^{4H-3},$$

for some constant  $k_H$ . Therefore, using again the Fourier transform, we can write

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= k_H 2H^2(2H-1)^2 \int_{\mathbb{R}^2} (x_i * \tilde{x}_j)(u) (x_i * \tilde{x}_j)(v) |u-v|^{4H-3} dudv \\ &= a_H \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}x_i(\xi)|^2 |\mathcal{F}x_j(\xi)|^2 |\xi|^{2-4H} d\xi, \end{aligned}$$



where  $a_H = k_H 2H^2 (2H - 1)^2 \kappa_{4H-3}$ . The previous computations lead to the following expression for the components of the matrix  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,1} &= \frac{1}{(p-q)^4} \left( \alpha_H (|p|^{-1-4H} + |q|^{-1-4H} + 4(pq)^{-\frac{1}{2}-2H}) \right. \\ &\quad + \beta_H \left( \frac{2}{p^2 - q^2} (|q|^{1-4H} - |p|^{1-4H}) - \frac{4}{p^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |p|^{1-4H}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{q^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |q|^{1-4H}) \right) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,2} &= \frac{1}{(p-q)^4} \left( \alpha_H (|p|^{1-4H} + |q|^{1-4H} + 4(pq)^{\frac{1}{2}-2H}) \right. \\ &\quad + \beta_H \left( \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} (|q|^{1-4H} - |p|^{1-4H}) - 2 \frac{p^2 + pq}{p^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |p|^{1-4H}) \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{q^2 + pq}{q^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |q|^{1-4H}) \right) \right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,2} &= \frac{1}{(p-q)^4} \left( \alpha_H (|p|^{3-4H} + |q|^{-4H} + 4(pq)^{-\frac{3}{2}-2H}) \right. \\ &\quad + \beta_H \left( \frac{2p^2 q^2}{p^2 - q^2} (|q|^{1-4H} - |p|^{1-4H}) - \frac{4p^3 q}{p^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |p|^{1-4H}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4pq^3}{q^2 - pq} ((pq)^{\frac{1}{2}-2H} - |q|^{1-4H}) \right) \right).\end{aligned}$$

In the above expressions the constants  $\alpha_H$  and  $\beta_H$  are given by

$$\alpha_H = 2a_H \int_0^\infty \frac{\xi^{2-4H} d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \quad \text{and} \quad \beta_H = 2a_H \int_0^\infty \frac{\xi^{2-4H} d\xi}{1 + \xi^2}.$$

# Bibliography

- [1] F.E. Benth (2003): On arbitrage-free pricing of weather derivatives based on fractional Brownian motion. *Appl. Math. Finance* **10**, 303-324.
- [2] J.-C. Breton and I. Nourdin (2008): *Error Bounds On The Non-Normal Approximation of Hermite Power Variations of Fractional Brownian Motion*. *Elect. Comm. in Prob* **13**, 482-493.
- [3] P. Breuer and P. Major (1983): Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields. *J. Mult. Anal.* **13**, 425-441.
- [4] J.M. Corcuera, D. Nualart and M. Podolskij (2014): *Asymptotics of weighted random sums*. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, to appear.
- [5] J.M. Corcuera, D. Nualart and J.H.C. Woerner (2006): Power variation of some integral long memory process. *Bernoulli* **12**(4), 713-735.
- [6] S. Darses, I. Nourdin and D. Nualart (2010). *Limit theorems for nonlinear functionals of Volterra processes via white noise analysis*. *Bernoulli* **64**, no 4, 1262-1293.
- [7] Y. A. Davydov and G. V. Martynova (1987). *Limit behavior of multiple stochastic integral*. *Statistics and control of random process*. Preila, Nauka, Moscow, 55-57 (in Russian).
- [8] A.M. Garcia, E. Rodemich and H. Rumsey (1978): A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes. *Indiana Math. J.* **20**, 565-578.
- [9] Y. Hu and D. Nualart (2009). *Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*. ARXIV:0901.4925v1.
- [10] M. L. Kleptsyna and A. Le Breton (2002): Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process. *Stat. Inference Stoch. Process.* **5**, 229–248.
- [11] A.N. Kolmogorov (1940): *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum*. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* **26** 115-118
- [12] S.C. Kou (2008): Stochastic modeling in nanoscale biophysics: subdiffusion within proteins. *Ann. Appl. Statist.* **2**, 501-535.
- [13] S.C. Kou and X. Sunney Xie (2004): Generalized langevin equation with fractional gaussian noise: Subdiffusion within a single protein molecule. *Phys. Rev. Lett.* **93**.

- [14] N. Lin and S.V. Lototsky; *Second Order Continuous-time Non-Stationary Gaussian Autoregression*, ARXIV, (2012).
- [15] M. Maejima and C. A. Tudor (2012): *Selfsimilar processes with stationary increments in the second wiener chaos*. Probab. Math. Statist. **32**, no. 1, 167-186.
- [16] P. Malliavin (1978): Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In: *Proc. Inter. Symp. on Stoch. Diff. Equations, Kyoto 1976*, pp. 195-263.
- [17] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness (1968): *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*. SIAM Review **10**, 422-437.
- [18] D. Meintrup, G. Denk and S. Scheffler (2001): Transient noise simulation: modeling and simulation of  $1/f$  noise. In K. et al. Antreich, editor, *Modeling, simulation and optimization of integrated circuits*, Int. Ser. Numer. Math. **146**, 251-267. Birkhauser.
- [19] I. Nourdin (2011): *Yet Another Proof of the Nualart-Peccati Criterion*. Elect. Comm. in Probab. 16 (2011), 467-481.
- [20] I. Nourdin (2012): *Selected aspects of fractional Brownian motion*. Springer-Verlag.
- [21] I. Nourdin, D. Nualart and C. Tudor (2009): Central and Non-Central Limit Theorems for Weighted Power Variations of Fractional Brownian Motion. *Ann. I.H.P.* **46**, 1055-1079.
- [22] I. Nourdin, D. Nualart and R. Zintout (2014): *Multivariate central limit theorems for averages of fractional Volterra processes and applications to parameter estimation*, to appear.
- [23] I. Nourdin and G. Peccati (2009) : *Non-central convergence of multiple integrals*. Ann. Probab. 37, no. 4, 1412-1426
- [24] I. Nourdin and G. Peccati (2009) : *Stein's method on Wiener chaos*. Probab. Theory Related Fields 145, no. 1, 75-118
- [25] I. Nourdin and G. Peccati (2009) : *Stein's method and exact Berry-Essen asymptotics for functionals of Gaussian Leds*. Ann. Probab. 37, no. 6, 2231-2261
- [26] I. Nourdin and G. Peccati (2010) : *Cumulants on the Wiener Space*. J. Funct. Anal. 258, 3775-3791
- [27] I. Nourdin and G. Peccati (2012). *Normal Approximations Using Malliavin Calculus: from Stein's Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press.
- [28] I. Nourdin, G. Peccati and M. Podolskij (2011): Quantitative Breuer-Major theorems. *Stoch. Proc. Appl.* **121**, 793–812.
- [29] I. Nourdin, G. Peccati and G. Reinert (2009) : *Second order Poincaré inequalities and CLTs on Wiener space*. J. Funct. Anal. 257, 593-609
- [30] I. Nourdin and G. Poly (2013): *Convergence in total variation on Wiener chaos*. Stoch. Proc. Appl. **123**, 651-674.

- [31] I. Nourdin et F.G. Viens (2009) : *Density estimates and concentration inequalities with Malliavin calculus*. Electron. J. Probab. 14, 2287-2309.
- [32] I. Nourdin and R. Zintout (2014): *Cross-variation of Young integral with respect to long-memory fractional Brownian motions*, to appear.
- [33] D. Nualart (2006). *The Malliavin calculus and related topics of Probability and Its Applications*. Springer-Verlag, Berlin, second edition.
- [34] D. Nualart and G. Peccati (2005). *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals*. Ann. Probab. **33**, no. 1, 177-193.
- [35] G. Peccati and C.A. Tudor (2005): Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*. LNM 1857. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 247-262.
- [36] G. Peccati, J. L. Solé, M. S. Taqqu et F. Utzet (2010) : *Stein's method and normal approximation of Poisson functionals*. Ann. Probab. 38, no. 2, 443-478
- [37] V. Pipiras and M. S. Taqqu (2000) *Integration questions related to fractional Brownian motion*. Probab. Theory Rel. Fields **118**, 121–291.
- [38] I. Shigekawa (1980): *Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures*. J. Math. Kyoto Univ. **20** (2), 263-289.
- [39] Ch. Stein (1972) : *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables*. In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II : Probability theory, 583-602. Univ. California Press, Berkeley, Calif.
- [40] Ch. Stein (1986) : *Approximate Computation of Expectations*. Lecture Notes-Monograph Series 7, Institut of Mathematical Statistics, Hayward, California.
- [41] E. M. Stein (1970): *Singular Integrals and Differentiability of Functions*. Princeton Univ. Press.
- [42] J. Syroka, D. Brody and M. Zervos (2002): Dynamical pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance* **2**, 189- 198.
- [43] M.S. Taqqu (1975): *Weak convergence to fractional Brownian motion and to Rosenblatt process*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31**, 287-302.
- [44] M. S. Taqqu (2011): The Rosenblatt process. In *Selected Works of Murray Rosenblatt*, edited by R.A. Davis, K.-S. Lii and D.N. Politis. Selected Works in Probability and Statistics, 29-45.
- [45] C. A. Tudor (2008). Analysis of the Rosenblatt process. *ESAIM Probab. Statist.* **12**, 230-257.
- [46] L.C. Young (1936): An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration. *Acta Math.* **67**, 251-282.
- [47] R. Zintout (2013): *Total variation distance between two double Wiener-Itô integrals* Stat. Probab. Lett. **83**, no. 10, pp. 2160-2167.