Modélisation et conception de structures composites viscoélastiques à haut pouvoir amortissant

Komlan Akoussan

▶ **To cite this version:**

Komlan Akoussan. Modélisation et conception de structures composites viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. Autre. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0188 . tel-01752184

HAL Id: tel-01752184
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752184

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Lorraine
UFR MIM

Ecole doctorale EMMA

Modélisation et conception de structures composites viscoélastiques à haut pouvoir amortissant

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 09 Novembre 2015

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mécanique

par

Komlan AKOUSSAN

Composition du jury :

Président :	Pr. Etienne Balmès	Arts et Metiers ParisTech Paris, France
Rapporteurs :	Pr. Paolo Vannucci	Université Paris-Saclay, France
	HDr. Jean Marc Cadou	Université de Bretagne Sud, France
Examinateurs :	Pr. Noureddine Bouhaddi	Université de Franche-Comté, France
	Mcf. Hakim Boudaoud	Université de Lorraine (ERPI), France
Invité :	Dr. Yao Koutsawa	LIST, Luxembourg
Directeurs :	Pr. El Mostafa Daya	Université de Lorraine (LEM3), France
	Pr. Erasmo Carrera	Ecole Polytechnique de Turin, Italie

Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux - UMR CNRS 7239

Remerciements

Ce travail de thèse est réalisé entre Octobre 2012 et Septembre 2015 dans le Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3).

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Messieurs les professeurs El Mostafa DAYA et Erasmo CARRERA pour m'avoir confié ce sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à Dr. Hakim BOUDAOUD pour son assistance et sa collaboration à ce travail, et au professeur Sonnou TIEM de m'avoir permis de venir en France faire mon Master II et cette thèse.

Je remercie vivement Messieurs Paolo VANNUCCI et Jean Marc CADOU pour avoir accepté la lourde charge de rapporter mes travaux de thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury associés Messieurs Noureddine BOUHADDI, et Etienne BALMES pour avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse et au membre invité Yao KOUTSAWA pour avoir accepté assister à cette soutenance. Qu'il me soit permis de leur exprimer ici ma profonde gratitude.

Je n'oublie pas Mc. Mohamed HAMDAOUI pour m'avoir aidé dans la correction de ce manuscrit.

J'ai une pensée profonde à tous mes collègues et amis avec qui j'ai passé les trois années de cette thèse au sein du LEM3. Je n'oublie également pas mes amis qui sont restés au Togo et qui n'ont jamais cesser de m'encourager. Mes remerciements vont également à tout le personnel du LEM3.

A toute ma famille, ma mère, mon père, mes sœurs et mon frère, à mon ami de tous les jours Messan APETI, à mon beau frère Sabin AWOUSSI, je dis un grand merci. Vous avez été important dans ma vie, cette thèse est à vous.

A toi ma grande sœur Ahoéfa AKOUSSAN, je profite de l'occasion pour dire le merci que je ne t'ai jamais dit de ton vivant pour tous les sacrifices que tu avais consentis pour moi, cette thèse est à toi.

A ma future femme j'ai une pensée pieuse en ce moment.

"La fierté vient des choses bien faites

pour lesquelles nul ne peut se cacher"

Je dédie cette thèse

à mes parents

à mon grand frère

à toutes mes sœurs

Table des matières

Remerciements i

Dédicace iii

Table des matières x

Table des figures xiv

Liste des Tableaux xvii

Liste des symboles et abréviations xix

Introduction générale 1

1 L'amortissement passif : Etat de l'art 5

1.1 Introduction 5

1.2 Les matériaux viscoélastiques 6

1.2.1 Loi de comportement des matériaux viscoélastiques 6

1.2.2 Les facteurs d'influence du comportement des matériaux viscoélastiques 7

1.2.2.1 Dépendance en fréquence 7

1.2.2.2 Dépendance en température 8

1.2.2.3 Variable réduite 9

1.2.3 Représentations du module 10

1.2.3.1 Formes tabulées 10

1.2.3.2 Représentations paramétriques 11
1.3 Structures sandwichs viscoélastiques pour l'amortissement passif 14
1.3.1 Les modèles cinématiques pour les structures sandwichs 15
1.3.1.1 Modèles zig-zag par couches discrètes 17
1.3.1.2 Modèles zig-zag monocouches 18
1.3.2 Modélisation et calcul de l'amortissement passif 20
1.3.2.1 Approches analytiques 20
1.3.2.2 Approches numériques 22
1.3.2.3 Les méthodes de résolution du problème aux valeurs propres 24
1.4 L'amortissement passif à l'aide de matériaux composites 31
1.4.1 Généralités sur les matériaux composites 31
1.4.2 Les différents types de matériaux composites orthotropes 33
1.4.3 Lois de comportement et effets d'orientation des fibres dans la structure 35
1.4.3.1 Lois de comportement dans le repère du matériau 35
1.4.3.2 Lois de comportement en-dehors du repère matériau . . . 38
1.4.3.3 Etat de contraintes planes 40
1.4.4 Matériaux composites pour l'amortissement passif : travaux existants 43
1.4.4.1 Les approches analytiques 44
1.4.4.2 Les approches numériques 46
1.5 Conclusion : Motivations et objectifs de la thèse 48

2 Modélisation des vibrations propres de structures composites viscoélastiques 51

2.1 Introduction 51
2.2 Formulation éléments finis du problème 51
2.2.1 Modèle cinématique et tenseurs de déformation 53
2.2.2 Loi de Hooke généralisée 57

2.2.2.1 Pour les couches élastiques des faces . . . 57
2.2.2.2 Pour la couche viscoélastique . . . 57
2.2.2.3 Efforts normaux, moments fléchissants et effort tranchant 59
2.2.3 Equation du mouvement . . . 60
2.2.4 Discrétisation par éléments finis . . . 62
2.3 Résolution du problème aux valeurs propres non linéaires . . . 68
2.4 Tests de validation et résultats numériques . . . 68
2.4.1 Cas des plaques à trois couches . . . 71
2.4.1.1 Cas d'une plaque sandwich à cœur souple non viscoélastique 71
2.4.1.2 Cas d'une plaque sandwich à cœur viscoélastique de module constant . . . 72
2.4.2 Cas des plaques sandwichs viscoélastiques à face en stratifié . . . 77
2.4.2.1 Cas d'un cœur viscoélastique de module constant . . . 77
2.4.2.2 Cas d'un cœur viscoélastique de module dépendant de la fréquence . . . 80
2.4.3 Temps de calcul . . . 82
2.5 Conclusion . . . 83

3 Une méthode générique de résolution de problèmes à paramètres variables 85

3.1 Introduction . . . 85
3.2 Principes de l'homotopie et de l'approche *diamant* . . . 87
3.2.1 Principe de l'homotopie . . . 87
3.2.2 Résolution d'équations résiduelles par *diamant* . . . 88
3.2.2.1 Principe . . . 88
3.2.2.2 Boite à outil *diamant* . . . 90
3.3 Nouvelle méthode génériques de résolution de problèmes non linéaires . . . 92
3.3.1 Différentiation du problème résiduel . . . 92
3.3.2 Résolution du problème à l'ordre 0 . . . 93

3.3.2.1 Réécriture du problème à l'ordre 0 94
3.3.2.2 Résolution du problème à l'ordre 0 par la technique de l'homotopie 95
3.3.3 Résolution du problème à l'ordre n et continuation 98
3.3.4 Algorithme de la méthode de résolution 101
3.4 Conclusion 102

4 Calcul des propriétés modales en fonction de l'orientation des fibres 103
4.1 Introduction 103
4.2 Plaques sandwichs viscoélastiques trois couches 104
4.2.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion des faces . . 105
4.2.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis 106
4.2.3 Intervalle d'étude 109
4.2.4 Résolution continue du problème 110
4.3 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches 111
4.3.1 Plaques sandwichs de séquences particulières 111
4.3.1.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion . . . 111
4.3.1.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis 113
4.3.1.3 Faces constituées de stratifiés croisés symétrique ou anti-symétrique 116
4.3.2 Plaques sandwichs de faces constituées de stratifié antisymétrique . 116
4.3.2.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion . . . 117
4.3.2.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis 118
4.3.3 Faces constituées de stratifiés équilibrés ou alternés 118
4.3.4 Intervalle d'étude 119
4.3.5 Résolution continue du problème 119
4.4 Tests de validation et Résultats numériques 120
4.4.1 Cas des structures sandwichs à trois couches 120
4.4.1.1 Poutre sandwich viscoélastique 120

4.4.1.2 Plaques sandwichs viscoélastiques 122
4.4.2 Cas des structures plaques sandwichs dont les faces sont en stratifié 126
4.4.2.1 Faces constituées de stratifié croisé symétrique 126
4.4.2.2 Faces constituées de stratifié croisé antisymétrique 130
4.4.2.3 Faces constituées de stratifié antisymétrique 133
4.5 Temps de calcul 134
4.6 Conclusion 136

5 Calcul des propriétés modales en fonction des épaisseurs des couches 139
5.1 Introduction 139
5.2 Variation de l'épaisseur de la couche du cœur viscoélastique 140
5.2.1 Matrice de rigidité de la structure 141
5.2.2 Matrice de masse de la structure 144
5.2.3 problème aux valeurs propres non linéaires et résolution 145
5.2.3.1 problème aux valeurs propres non linéaires 145
5.2.3.2 Intervalle d'étude 146
5.2.3.3 Résolution continue du problème 147
5.3 Variation des épaisseurs, épaisseur totale de la structure étant constante . . 148
5.3.1 Matrice de rigidité de la structure 149
5.3.2 Matrice de masse 154
5.3.3 problème aux valeurs propres non linéaires et résolution 155
5.3.3.1 problème aux valeurs propres non linéaires 155
5.3.3.2 Intervalle d'étude 155
5.3.3.3 Résolution continue du problème 157
5.4 Tests de validation et résultats numériques 157
5.4.1 Variation de l'épaisseur du cœur 158
5.4.1.1 Poutre sandwich viscoélastique 159
5.4.1.2 Plaques sandwichs viscoélastiques trois couches 160
5.4.1.3 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches 175

5.4.2 Variation de l'épaisseur de toutes les couches, l'épaisseur totale de la structure étant constante 179
5.4.2.1 Plaques sandwichs trois couches 180
5.4.2.2 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches 188
5.5 Conclusion 190

Conclusion générale et perspectives **191**

Bibliographie **201**

Résumé **203**

Abstract **205**

Table des figures

1.1 Modèles rhéologiques standards classiques 12
1.2 Modèles rhéologiques fractionnaires de base 13
1.3 Schéma cinématique zig-zag pour les déplacements 16
1.4 Calcul de l'amortissement par la méthode des bandes passantes 25
1.5 Différents types de renforts pour matériau composite 32
1.6 Exemples de stratifiés unidirectionnels 34
1.7 Matériau : repère matériau et de référence de la structure 39

2.1 Plaque sandwich multicouche (représentation des dimensions et des plans moyens) 52
2.2 Plaque sandwich multicouche (représentation des angles d'orientation des couches) 52
2.3 Schéma cinématique d'une plaque sandwich viscoélastique cinq couches . . 53

4.1 Plaque sandwich viscoélastique trois couches 104
4.2 Plaque sandwich de séquence particulière 111
4.3 Stratifiés croisés 116
4.4 Stratifié antisymétrique quatre couches 117
4.5 Etude continue des propriétés modales de la poutre sandwich 122
4.6 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : CCCC 123
4.7 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : CCFF 124
4.8 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : SSSS 125
4.9 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CCCC 127

4.10 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : SSSS 128
4.11 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CFCF 129
4.12 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CCFF 130
4.13 Etude continue des propriétés modales de la plaque 8, CL : CCCC 131
4.14 Etude continue des propriétés modales de la plaque 8, CL : CSCS 132
4.15 Etude continue des propriétés modales de la plaque 9, CL : CFSF 134

5.1 Sandwich multicouche viscoélastique à cœur d'épaisseur variable 141
5.2 Sandwich multicouche viscoélastique à couches d'épaisseur variable 149
5.3 Etude continue des propriétés modales de la poutre en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 30°$) 160
5.4 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 1) 161
5.5 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 2) 163
5.6 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 3) 164
5.7 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60° \, et \, 90°$ mode 1) 165
5.8 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60° \, et \, 90°$ mode 2) 166
5.9 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60° \, et \, 90°$ mode 3) 167
5.10 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en DYAD à 30°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : CCCC 168
5.11 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en DYAD à 30°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : SSSS 169

5.12 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en PVB à 20°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : CCCC 171

5.13 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en PVB à 20°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : SSSS 172

5.14 Etude continue des propriétés modales de la plaque carrée en fonction de l'épaisseur du cœur (mode 1), CL : CCCC et SSSS 173

5.15 Etude continue des propriétés modales de la plaque carrée en fonction de l'épaisseur du cœur (amortissement des modes 2 et 3), CL : CCCC et SSSS 174

5.16 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[0°/90°/0°/c]_s$), CL : CCCC 175

5.17 Etude continue des propriétés modales de la plaque 7 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[90°/0°/90°/c]_s$), CL : CCCC 176

5.18 Etude continue des propriétés modales de la plaque 9 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[0°/90°/0°/90°/c]_s$), CL : CCCC 177

5.19 Etude continue des propriétés modales de la plaque 9 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[90°/0°/90°/0°/c]_s$), CL : CCCC 178

5.20 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : CCCC 181

5.21 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (amortissements mode 2 et 3), CL : CCCC 182

5.22 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : SSSS 183

5.23 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (amortissements mode 2 et 3), CL : SSSS 184
5.24 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 de cœur en PVB à 20°C en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : CCCC 186
5.25 Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 de cœur en PVB à 20°C en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : SSSS 187
5.26 Etude continue des propriétés modales de la plaque 5 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1, CL : CCCC et SSSS) 189

Liste des tableaux

1.1 Lois de comportement et modules opérationnels des modèles standards . . 12

2.1 Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour ISD112 à 27°C et 20°C . 69

2.2 Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour DYAD606 à 10°C, 25°C, 30°C et 38°C 70

2.3 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 1 71

2.4 Résultats de la plaque 1 72

2.5 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 2 73

2.6 Résultats plaque 2 encastrée sur tous les bords 74

2.7 Résultats plaque 2 en appui simple sur tous les bords 75

2.8 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 3 76

2.9 Résultats plaque 3 encastrée sur tous les bords 77

2.10 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 4 78

2.11 Résultats plaque 4 encastrée sur tous les bords 79

2.12 Résultats plaque 4 en appui simple sur tous les bords 80

2.13 Résultats plaque 5 en appui simple sur tous les bords 81

2.14 Résultats plaque 5 encastrée sur tous les bords 82

2.15 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 5 82

2.16 Les temps de calculs 83

3.1 Algorithme de résolution de problème aux valeurs propres non linéaires complexes à paramètres variables 101

4.1 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre sandwich 121
4.2 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 6 124
4.3 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 7 127
4.4 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 8 133
4.5 Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 9 133
4.6 Temps de calculs (en seconde) du CCNM et du CDPM 136

5.1 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 2, $\theta = 0°$) 163
5.2 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 3, $\theta = 0°$) 164
5.3 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 1, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$) 165
5.4 Extrémums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 2, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$) 166
5.5 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 3, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$) 167
5.6 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :CCCC) 181
5.7 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 2 et 3, CL :CCCC) . . . 182
5.8 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :SSSS) 183
5.9 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 2 et 3, CL :SSSS) 184
5.10 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :CCCC) 186
5.11 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :SSSS) 187

5.12 Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 5, épaisseur totale constante (mode 1, CL : CCCC et SSSS) 189

Liste des symboles et abréviations

Symboles alphabétiques

A_i, a_i, B_i, c_{ij} : coefficients matriciels
A_i^j, B_i^j, D_i^j, J_i^j : Coefficients des polynômes
C_f^i, C_f^* : Matrice de comportement en flexion
C_m^i, C_m^* : Matrice de comportement en membrane
C_s^* : Matrice de comportement en cisaillement
E_{xxc}^*, E_g^* : Module d'Young complexes
G_{xyc}^*, G_{xzc}^*, G_{yzc}^* : Modules de cisaillement complexe du cœur
G_0 : Module de cisaillement d'élasticité retardée
H_f : Epaisseur totale des couches d'une face
h_c : Epaisseur de la couche viscoélastique du cœur
h_{cd} : Epaisseur de départ de la couche viscoélastique du cœur
h_{fd} : Epaisseur de départ pour la face
h_{fi} : Epaisseur de la couche i constituant les faces
h_t : Epaisseur totale du sandwich
I_θ, I_e, I : Intervalle d'étude
K, K_R, K_1, K_2, K_3, K_4, K_v, K_g, K_c : Matrices de rigidité
L : Longueur de la plaque sandwich
l : Largeur de la plaque sandwich
M, M_0, M_g : Matrice de masse
M_c, M_i, M_β, M_w : Moments fléchissants
N : Nombre total de couches du sandwich ou degré de troncature de la série de la MAN
n : Nombre total de couches d'une face du sandwich
N_c, N_i : Effort normal
N_w, $N_{\beta x}$, $N_{\beta y}$, N_{wf}, N_f, N_s : Fonctions de forme
δP_{int}, δP_{ext}, δP_{acc} : Puissances virtuelles
Q_c : Effort tranchant
$Q_i^{'}$, $Q_c^{'*}$, $Q_s^{'*}$: Matrice de comportement traduisant la position des fibres
q_1, q_2, q_3, q_4, q_c : coefficients matriciels de comportement traduisant la position des fibres
r : Variable de déplacement ou variable rapport de déplacement
U : Vecteur modal
U_i : Déplacement longitudinal de la couche i dans la direction (o, x)
u_i : Déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i dans la direction (o, x)
V_i : Déplacement longitudinal de la couche i dans la direction (o, y)
v_i : Déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i dans la direction (o, y)

W_i : Déplacement transversal de la couche i dans la direction (o, z)
w : Déplacement transversal commun à toutes les couches dans la direction (o, z)
z_i : Côte du plan moyen de la couche i
$Zint_i$: Côte de l'interface entre les couches i et $i + 1$

Symboles grecs

β_x, β_y, $w_{,x}$, $w_{,y}$: Rotations
θ_c, θ_i, α_i, θ : Angles d'orientation des fibres des couches
$\{\xi_i\}$: Champs de déformation de la couche i
$\{\kappa\}$: Tenseur de déformation linéaire en flexion commun aux couches
$\{\Gamma_i\}$: Tenseur déformation linéaire en membrane de la couche i
$\{\xi_c\}$: Champs de déformation de la couche viscoélastique du cœur
$\{\kappa_c\}$: Tenseur de déformation linéaire en flexion de la couche viscoélastique du cœur
$\{\Gamma_c\}$: Tenseur déformation linéaire en membrane de la couche viscoélastique du cœur
$\{\zeta_c\}$: Champs de déformation en cisaillement du cœur viscoélastique
ρ_c : Masse volumique du cœur
ρ_{fi} : Masse volumique de la couche i
ν_c, ν_{xyc}, ν_{yxc}, ν_{yzc} : Coefficients de Poisson
$(\triangle_j, \Omega_j)$: Paramètres de Maxwell généralisé
Ω : Fréquence propre de vibration
η : Amortissement de la structure
δa, δp : Rayon de convergence
ε : Précision de la série de la MAN

Abréviations

ADF : Anelastic Displacement Field
c : couche viscoélastique du cœur
CCNM : Calcul Continu par la Nouvelle Méthode
CDPM : Calcul Discret par le Présent Modèle
CL : Condition aux limites
DA : Différentiation Automatique
diamant : Différentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée
MAN : Méthode Asymptotique Numérique
MEF : Méthode des Eléments finis
NIN : Nombre d'incréments
NIT : Nombre d'itérations
PM : Présent Modèle
TC : Temps de calcul CPU

Introduction générale

La vibration est un phénomène généralement indésiré dans les infrastructures, car elle peut entrainer la ruine de ces dernières. Le bruit de son côté est nuisible pour la santé d'un être humain surtout lorsque ce dernier en est longuement exposé. Aussi des solutions ont-elles été proposées pour éviter l'endommagement précoce des infrastructures par les phénomènes vibratoires et atténuer le bruit. La solution très efficace et de loin la plus utilisée à cette fin est la méthode dite "d'amortissement passif". L'amortissement passif est très utilisé dans plusieurs domaines (aéronautique, aérospatiale, automobile, électroménager, ...) puisqu'il consiste en l'utilisation des structures sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. Les structures sandwichs viscoélastiques sont constituées d'une couche mince de matériau viscoélastique contrainte entre deux couches épaisses de matériaux élastiques plus rigides.

Il y a quelques années encore, on utilisait des matériaux isotropes pour la conception des structures pour l'amortissement passif. Cependant les exigences de rigidité combinées à la légèreté des infrastructures notamment dans l'aéronautique, l'aérospatial, et l'automobile imposent l'utilisation de matériaux composites pour la conception des structures sandwichs viscoélastiques. En effet, les matériaux composites offrent un bon rapport légèreté/rigidité à un effort spécifique comparé aux matériaux homogènes isotropes et sont donc de plus en plus utiliser. De plus, les matériaux composites présentent une anisotropie qui permet de faire varier l'amortissement de la structure à travers leur positionnement dans la structure globale.

L'une des difficultés principales de la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques est la résolution d'équations aux valeurs propres non linéaires complexes avec une

dépendance en fréquence introduite par la couche viscoélastique. Cette difficulté, même si des solutions de résolution ont été proposées, fait que l'étude du positionnement des matériaux composites dans la structure globale et les effets d'autres paramètres pouvant influer sur l'amortissement de la structure n'ont jamais été étudiés de manière continue.

Le premier objectif du présent travail est de développer un code numérique pour calculer les propriétés modales de plaques sandwichs symétriques viscoélastiques dont les couches sont considérées élastiques orthotropes pour les faces et viscoélastique orthotrope pour le cœur. Basé sur une formulation éléments finis, les équations aux valeurs propres non linéaires complexes dépendant de la fréquence obtenues dans ce code sont résolues par la technique d'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique et à la différentiation automatique. Ensuite nous proposons une méthode de résolution générique de problèmes résiduels aux valeurs propres complexes dépendant à la fois de la fréquence et d'un paramètre physique de conception. Pour ce genre de problèmes résiduels, la dépendance en fréquence est induite par la couche viscoélastique et le second paramètre de dépendance est un paramètre de modélisation devant décrire un intervalle d'étude bien précis. Cette nouvelle méthode de résolution sera utilisée pour étudier les effets du positionnement des matériaux composites dans la structure globale d'une part et des épaisseurs des couches de la structure d'autre part sur les propriétés modales.

Dans le présent rapport de thèse, nous proposons dans le Chapitre 1 un état de l'art sur la modélisation et le calcul des propriétés modales amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques. Puis nous présentons quelques généralités sur les matériaux composites orthotropes et leurs lois de comportement.

Dans le Chapitre 2, nous proposons une formulation par éléments finis des vibrations propres des sandwichs composites à cœur viscoélastique. Le modèle proposé est basé sur une cinématique de type zig-zag avec continuité du déplacement aux interfaces. Le calcul des propriétés modales amortissantes se fait à l'aide de la technique d'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique en utilisant la différentiation automatique.

Dans le Chapitre 3, nous développons une méthode générique de résolution d'équations résiduelles aux valeurs propres non linéaires complexes à double paramètre de dépendance

dont l'un est la fréquence. Deux cas d'utilisation de cette méthode sont présentés. Le premier cas concerne l'étude continue de l'influence du positionnement des matériaux composites sur les propriétés modales de la structure dont la formulation éléments finis est présentée dans le chapitre 4. Le deuxième exemple dont la formulation est présentée dans le chapitre 5 concerne les effets de la variation des couches de la structures sur ces propriétés modales .

Chapitre 1

L'amortissement passif : Etat de l'art

1.1 Introduction

L'amortissement passif est un moyen très efficace pour amortir les vibrations et dissiper des énergies sonores en moyennes et hautes fréquences. Son utilisation assure la longévité des infrastructures et surtout protège la santé des êtres humains ; aussi est il très utilisé dans tous les domaines (aéronautique, aérospatial, automobile, ...). Généralement, l'amortissement passif revient à l'utilisation de structures sandwichs viscoélastiques constituées d'une couche viscoélastique contrainte entre deux couches élastiques.

Au tout début de leur utilisation, les structures sandwichs viscoélastiques sont élaborées avec des matériaux homogènes donc ayant un comportement isotrope. La modélisation de ces structures pose deux problèmes majeurs. Le premier est le choix du champ cinématique adéquat permettant une meilleure approximation des champs de déformation de la structure. Le second est la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaires complexes dépendant de la fréquence pour déterminer les propriétés modales de ces structures. La dépendance en fréquence du problème aux valeurs propres est due à la loi de comportement dépendant en fréquence de la couche viscoélastique du cœur. Pour avoir un champ cinématique adéquat pour la modélisation de ces structures, différents types de champs cinématiques ont été proposés dans la littérature. La résolution de ce problème est délicat et à également fait l'objet de plusieurs travaux rencontrés dans la

littérature.

De nos jours, à cause des exigences de plus en plus élevées de minimisation de la masse des infrastructures, des matériaux présentant une anisotropie dans leur comportement sont de plus en plus utilisés pour l'élaboration des sandwichs viscoélastiques. L'intérêt de ces matériaux appelés composites réside dans leur légèreté comparativement aux matériaux isotropes en plus de leur rigidité à un effort spécifique. En particulier les matériaux orthotropes qui en plus de leur légèreté et de leur bonne rigidité, offrent la possibilité d'améliorer l'amortissement en jouant sur le positionnement de leurs fibres dans la structure du sandwich, prennent une place importante dans les constructions actuelles.

Nous exposerons dans ce chapitre, les différents types de champs cinématiques utilisés pour la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques puis les différentes méthodes de résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes obtenus. Ensuite, nous présenterons quelques généralités sur les matériaux composites orthotropes et quelques travaux déjà réalisés sur les structures sandwichs viscoélastiques élaborées avec ces matériaux. Et pour finir nous présenterons l'objectif de ce présent travail à travers notre apport pour la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques conçues avec des matériaux orthotropes.

1.2 Les matériaux viscoélastiques

1.2.1 Loi de comportement des matériaux viscoélastiques

Les matériaux viscoélastiques présentent un double comportement. Ils se comportent à la fois comme un solide idéal dit "Hookéen" et un liquide visqueux dit "Newtonien". La réponse d'un matériau viscoélastique à une déformation est alors un couplage entre la réponse d'un fluide visqueux et celle d'un solide élastique. Son élasticité traduit sa capacité à conserver et à restituer de l'énergie après déformation (contrainte proportionnelle à la déformation) ; alors que sa viscosité traduit sa capacité à dissiper de l'énergie (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation). Les études ont montré que la loi de compor-

tement des matériaux viscoélastiques linéaires homogènes et non vieillissants peut s'écrire en terme de produit de convolution de Riemann traduisant une évolution dans le temps entre la déformation (ε_{ij}) et la contrainte (σ_{ij}) et vice versa

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(t) \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

ou dans l'espace de Laplace et de Carson ou espace fréquentiel sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = \mathcal{J}^*_{ijkl}(s)\sigma_{kl}(s) \quad s \in \mathbb{C} \\ \sigma_{ij}(s) = \mathcal{R}^*_{ijkl}(s)\varepsilon_{kl}(s) \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\mathcal{R}_{ijkl}$, $\mathcal{R}^*_{ijkl}$ et $\mathcal{J}_{ijkl}$, $\mathcal{J}^*_{ijkl}$ sont respectivement les tenseurs d'ordre quatre des modules opérationnels et des complaisances opérationnelles. La formule (équation 1.2) est analogue à la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations et vice versa. Aussi les deux tenseurs opérationnels sont-ils liés par la relation : $\mathcal{R}^*_{ijkl} = \left[\mathcal{J}^*_{ijkl}\right]^{-1}$. Pour plus de détails, se référer à la thèse de Bilasse [1].

1.2.2 Les facteurs d'influence du comportement des matériaux viscoélastiques

Des mesures expérimentales ont montré que les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques sont liées à des facteurs dits d'environnement. Parmi ces facteurs dans lesquels on retrouve l'humidité, la prédéformation ou la précontrainte statique ε_0, les plus influants sont la fréquence ω de vibration de la structure, et la température T .

1.2.2.1 Dépendance en fréquence

Dans le cadre d'une sollicitation harmonique uniaxiale sur un matériau viscoélastique linéaire homogène isotrope et non vieillissant, le module opérationnel $\mathcal{R}^*(s)$ dans l'espace fréquentiel correspond tout simplement au module de Young complexe s'il s'agit d'une

traction ou une compression, et au module de cisaillement complexe s'il s'agit d'un cisaillement pur. Pour les matériaux viscoélastiques, les constances d'élasticité dépendent de la fréquence et s'écrivent :

$$\begin{cases} E^*(i\omega) = E^{'}(\omega) + iE^{''}(\omega) = E^{'}(\omega)(1 + i\eta(\omega)) \\ G^*(i\omega) = G^{'}(\omega) + iG^{''}(\omega) = G^{'}(\omega)(1 + i\eta(\omega)) \end{cases} \tag{1.3}$$

Il est généralement admis que le facteur de perte des matériaux viscoélastiques isotropes est : $\eta(\omega) = \dfrac{E^{''}(\omega)}{E^{'}(\omega)} = \dfrac{G^{''}(\omega)}{G^{'}(\omega)}$. Dans la réalité, les coefficients de Poisson ν^* des matériaux viscoélastiques sont également complexes et dépendants de la température [2], mais leur mesure pose des problèmes d'ordre expérimental. Aussi, pour des raisons de simplicité des formulations, les coefficients de Poisson sont souvent supposés constants.

1.2.2.2 Dépendance en température

La température est le facteur d'environnement le plus influant sur les caractéristiques mécaniques des matériaux viscoélastiques. Selon Schapery [3] cette dépendance se traduit par la relation constitutive suivante :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathcal{J}(\xi - \xi^{'}) \frac{d\sigma}{d\xi^{'}} d\xi^{'} \tag{1.4}$$

où ε est la déformation uniaxiale due à la contrainte σ induite par la variation de la température du milieu. La fonction $\mathcal{J}(\xi - \xi^{'})$ représente la fonction de fluage dépendant du temps et de la température, ξ est appelé "reduced time parameter" et est défini par :

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha_T} \\ \xi^{'} = \xi^{'}(t) = \int_0^{t^{'}} \frac{d\tau}{\alpha_T} \end{cases} \tag{1.5}$$

avec $\alpha_T = \alpha_T[T(\tau)]$ appelé "facteur de décalage en température" qui est fonction de la température absolue T sur l'incrément de temps $\tau = \xi - \xi^{'}$. Dans l'équation constitutive (1.4), il est admis que $\sigma = \varepsilon = 0$ lorsque $t \leq 0$.

1.2.2.3 Variable réduite

L'analyse des résultats expérimentaux des matériaux viscoélastiques à différentes fréquences montre la possibilité de superposition des courbes à différentes températures. Ceci a amené à poser l'équivalence fréquence/température [4] et l'introduction d'un paramètre de couplage entre la fréquence et la température appelé "fréquence réduite" qui n'est autre que le produit du facteur de décalage en température α_T et de la fréquence ω et est noté $\alpha_T\omega$. Ainsi la double dépendance en fréquence et en température des caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique homogène non vieillissant et isotrope peut se représenter analytiquement à travers son module de Young par la présente formule :

$$E^*(\omega, T) = E^{'}(\omega, T)[1 + i\eta(\omega, T)] = E^{'}(\alpha_T\omega)[1 + i\eta(\alpha_T\omega)] \tag{1.6}$$

Le principe de cette équivalence est que, la valeur du module complexe à une fréquence ω_1 pour une température fixée T_1 est la même qu'à toute autre fréquence ω_2 pour toute autre température T_2 avec l'introduction du facteur de décalage en température :

$$E^*(\omega_1, T_1) = E^*(\omega_2\alpha_T(T_2), T_2) \tag{1.7}$$

Il existe des formules analytiques empiriques donnant ce facteur de décalage dont les plus utilisées sont :

— la loi de Williams, Landel et Ferry plus connue sous le nom de (WLF) applicable dans la zone de transition, à des températures supérieures à celle de la transition vitreuse T_g du matériau. Une plage d'environ 50°C c'est-à-dire T_g à $T_g + 50°C$ est généralement admise. Les coefficients C_1 et C_2 sont des caractéristiques du matériau.

$$\log(\alpha_T) = \frac{-C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g} \tag{1.8}$$

— la loi de Landel

$$\log(\alpha_T) = \frac{T_a}{T} - \frac{T_a}{T_b} \tag{1.9}$$

où les températures T_a et T_b sont caractéristiques du matériau

— la loi empirique de puissance (Power Law)

$$\alpha_T = \left[1 + \frac{T - T_p}{A}\right]^n \tag{1.10}$$

où les températures T_p, A, et le coefficient n sont des caractéristiques du matériau

— la loi d'Arrhenius, applicable aussi bien dans la région des transitions secondaires à basse température ($T < T_g$), que dans la région d'écoulement ($T > T_g$).

$$\log(\alpha_T) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \tag{1.11}$$

où T_0 est une température de référence en degrés Kelvin, E_a correspond à l'énergie d'activation de la réaction [5] et $R = 8.314 \times 10^{-3} KJ.mol^{-1}K^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.

1.2.3 Représentations du module

Les constantes d'élasticité des matériaux viscoélastiques présentent une dépendance en fréquence et en température. Pour les études en vibration où une représentation dans le domaine fréquentiel est nécessaire, des représentations sont alors utilisées pour traduire la valeur de leur module complexe.

1.2.3.1 Formes tabulées

La loi tabulée est utilisée surtout pour les essais expérimentaux où on stocke les valeurs du module de stockage et le facteur de perte du matériau pour différentes fréquences à différentes températures en fonction de la fréquence réduite. De ce fait, pour connaitre le module de stockage ou le facteur de perte en un point de fonctionnement arbitraire (ω_k,T_k), on interpole ou extrapole les valeurs expérimentales du facteur de décalage pour

trouver la fréquence réduite, puis on interpole ou extrapole le module. L'avantage d'une représentation tabulée est qu'elle permet la représentation du comportement général fortement dépendant de la fréquence et de la température sur une large gamme. De plus elle permet de contourner des étapes de choix de représentation et d'identification des paramètres. Cependant pour des besoins de calculs analytiques et numériques, l'utilisation de loi tabulée parait peu adaptée puisqu'elle implique à chaque fréquence (qui n'est pas forcément connue d'avance) et température, la lecture dans des tables.

1.2.3.2 Représentations paramétriques

Pour décrire de façon analytique le comportement viscoélastique des matériaux, on a souvent recours à des représentations rhéologiques et d'autres représentations établies par certains auteurs.

— **Les modèles rhéologiques**

Les modèles rhéologiques sont des représentations analogiques combinant des ressorts (éléments élastiques) et amortissements (élément visqueux dissipatif). Il en existe deux grands groupes : les modèles standards linéaires (figure 1.1) et les modèles fractionnaires. Les lois de comportement et les modules complexes des modèles rhéologiques linéaires sont regroupés dans le tableau (1.1)

$$\begin{cases} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k \dfrac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = b_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{N_2} b_k \dfrac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} \\ \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = \dfrac{b_0 + \sum_{k=1}^{N_2} b_k (i\omega)^k}{a_0 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k (i\omega)^k} \end{cases} \tag{1.12}$$

où N_1 et N_2 sont des entiers , a_k et b_k des coefficients caractéristiques du matériau.

Modèles rhéologiques	Loi de comportement	Module opérationnel $\mathcal{R}^*(i\omega)$
Kelvin-Voigt	$\sigma(t) = E_1\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$	$E_1 + i\omega\eta$
Maxwell	$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_0}\dot{\sigma}(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$	$\frac{i\omega\eta E_0}{E_0 + i\omega\eta}$
Zener	$(E_0 + E_1)\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t)$ $= E_0(E_1\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t))$	$\frac{E_0(E_1 + i\omega\eta)}{E_0 + E_1 + i\omega\eta}$
Kelvin-Voigt généralisé	Loi 1.12	$\left[\frac{E_0 + i\omega\eta}{i\omega\eta E_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k}\right]^{-1}$
Maxwell généralisé	Loi 1.12	$E_0 + i\omega\eta + \sum_{k=1}^{n} \frac{i\omega\eta_k E_k}{E_k + i\omega\eta_k}$

Tableau 1.1 – Lois de comportement et modules opérationnels des modèles standards

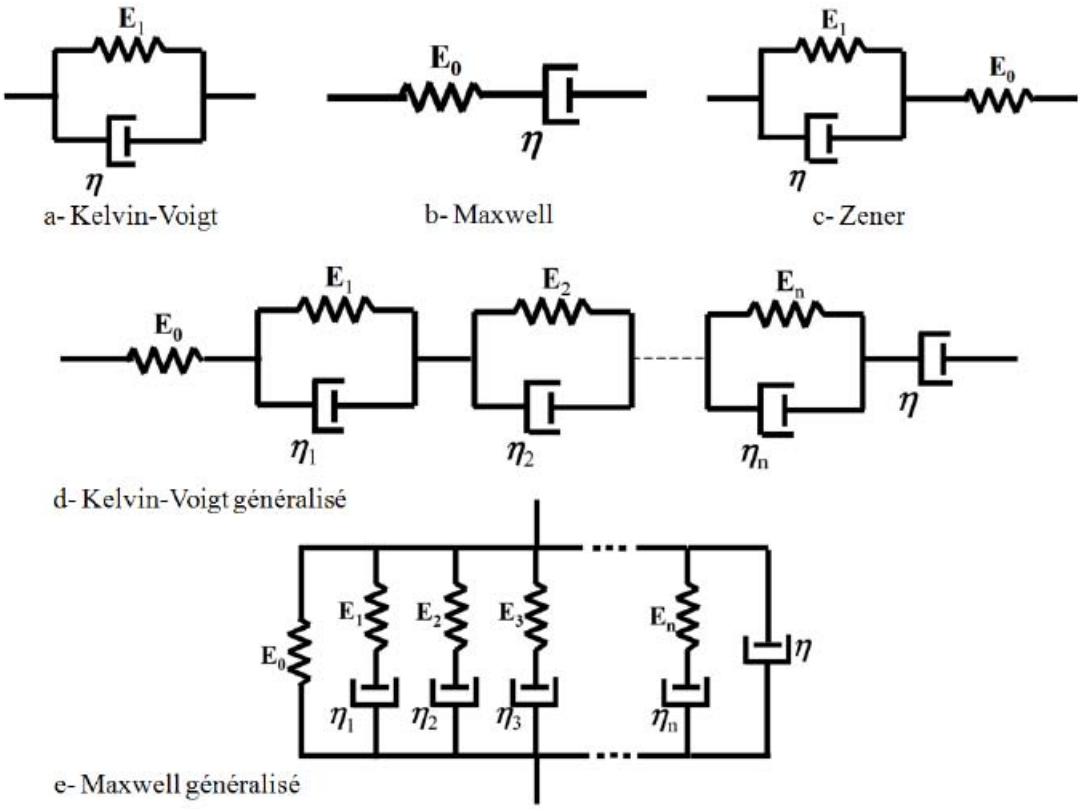
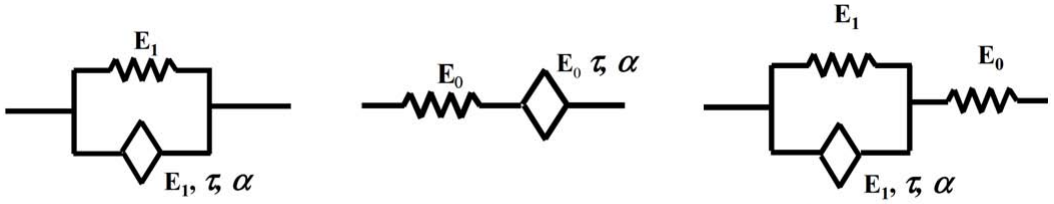


Figure 1.1 – Modèles rhéologiques standards classiques

Les modèles fractionnaires, sont une combinaison des modèles standards linéaires et d'un élément mécanique analogique à mémoire appelé spring-pot et ayant un comportement rhéologique intermédiaire entre celui d'un ressort élastique (spring) et celui d'un amortisseur visqueux (dashpot) (figure 1.2)



a- Kelvin-Voigt fractionnaire b- Maxwell fractionnaire c- Zener fractionnaire

Figure 1.2 – Modèles rhéologiques fractionnaires de base

La loi de comportement et le module complexe du spring-pot est donnée par l'équation (1.13)

$$\begin{cases} \sigma(t) = E\tau^{\alpha} D^{\alpha}\varepsilon(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \mathcal{R}^{*}(i\omega) = E(i\omega\tau)^{\alpha} \end{cases} \tag{1.13}$$

où D^{α} désigne l'opérateur de dérivation non entière d'ordre α [6, 7] et définit pour une fonction $\varepsilon(t)$ par l'équation (1.14)

$$D^{\alpha}\varepsilon(t) = \frac{d^{\alpha}\varepsilon(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \tag{1.14}$$

avec Γ la fonction gamma $\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}dx$ pour tout $z > 0$. Dans les équations (1.13) et (1.14), τ représente le temps de relaxation du modèle. Les modules complexes correspondant à ces modèles rhéologiques fractionnaires de base sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}^{*}(i\omega) = E_1[1 + (i\omega\tau)^{\alpha}] & Kelvin - Voigt\ fractionnaire \\ \mathcal{R}^{*}(i\omega) = \dfrac{E_0(i\omega\tau)^{\alpha}}{1 + (i\omega\tau)^{\alpha}} & Maxwell\ fractionnaire \\ \mathcal{R}^{*}(i\omega) = \dfrac{E[1 + (i\omega\tau)^{\alpha}]}{1 + \frac{E}{E_0}(i\omega\tau)^{\alpha}} & Zener\ fractionnaire \\ E = \dfrac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \end{cases} \tag{1.15}$$

— **L'approche à variables internes**

Elle est basée sur la théorie de la thermodynamique des systèmes irréversibles comme la viscoélasticité. Généralement, elle permet une représentation paramétrique du module de

cisaillement complexe du matériau. La représentation fractionnaire de Bagley et Torvik [8] est utilisée par Galucio et al. [9] pour identifier le comportement du polymère ISD112 avec seulement quatre paramètres. Le modèle de Lesieutre [10] est basé sur la théorie des champs de déplacement anélastique et est plus connu sous le nom de Anelastic Displacement Field (ADF). Celui de MacTavish et Hughes [11] représente le module par des termes mini-oscillateurs et est plus connu sous le nom de Golla Hughes MacTavish (GHM). Les modèles ADF et GHM sont utilisés par Trindade [12, 13, 14] pour identifier le comportement des polymères ISD112 et DYAD606 à l'aide d'une série à trois ou à cinq termes. D'autres représentations comme celle de Biot [15] et Yiu [16] sont également utilisées dans la littérature.

$$\begin{cases} G^*(s) = G_0 + \dfrac{E_1 s^\alpha - E_0 b s^\beta}{1 + b s^\alpha},\ 0 < \alpha, \beta < 1 & \textit{Bagley et Torvik} \\ G^*(s) = G_0 + G_0 \displaystyle\sum_j \frac{a_j s}{s + b_j} & \textit{Biot} \\ G^*(s) = G_0 + G_0 \displaystyle\sum_j \frac{\Delta_j s}{s + \Omega_j} & \textit{Lesieutre} \\ G^*(s) = G_0 + G_0 \displaystyle\sum_j \frac{\alpha_j s^2 + \beta_j s}{s^2 + \beta_j s + \delta_j} & \textit{McTavish et Hughes} \\ G^*(s) = G_0 + G_0 \left(\tau_0 s + \displaystyle\sum_j \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} \right) & \textit{Yiu} \end{cases} \tag{1.16}$$

1.3 Structures sandwichs viscoélastiques pour l'amortissement passif

Les structures sandwichs viscoélastiques utilisées pour l'amortissement passif sont d'une manière globale constituées de trois couches. Une couche centrale, élaborée avec un matériau très mou du type viscoélastique, appelée cœur ou âme. Cette couche viscoélastique est confinée entre deux couches élastiques très rigides et souvent plus épaisses appelées faces (face supérieure et inférieure). L'amortissement des structures sandwichs viscoélastiques est dû à la grande déformation en cisaillement de la couche viscoélastique du cœur [1].

La modélisation des structures sandwichs viscoélastiques nécessite l'utilisation de modèles cinématiques capables de rendre compte de ce cisaillement. Nous rappelons dans ce qui suit, les modèles cinématiques des structures sandwichs existants dans la littérature.

1.3.1 Les modèles cinématiques pour les structures sandwichs

Historiquement, l'analyse des vibrations aurait ses débuts avec Galileo Galilei (1564-1642), qui aurait résolu par des moyens géométriques, la dépendance de la fréquence naturelle d'un pendule simple de sa longueur en 1638. Mais la fondation pour un traitement plus précis de la vibration des systèmes continus a été posée par Hooke quand il a établi la loi fondamentale de l'élasticité, par Newton quand il a établi le principe fondamental de la dynamique et par Liebniz quand il a établi le calcul différentiel. Comme nous pouvons le constater, l'étude des phénomènes vibratoires a attiré bon nombre d'auteurs depuis le XVI siècle et chacun y a mis de sa contribution. Toutefois, la vibration des coques a débuté avec les travaux de Sophie Germain [17] qui a donné une forme presque correcte de l'équation de la plaque mais n'a pas pu définir les matrices de rigidité et de masse en flexion ni la forme correcte des conditions aux limites. Elle posa l'hypothèse selon laquelle, la déformation dans le plan de la surface médiane d'une coque est négligeable. Malgré la brillance de son approche, les erreurs contenues dans ces équations expliquent pourquoi son nom n'est pas attribué aujourd'hui à l'équation des coques. Des corrections et contributions ont été alors faites par des auteurs aux travaux de Germaine. En 1829, Poisson propose une forme correcte pour la matrice de rigidité [18]. La forme correcte des conditions aux limites n'a pu être trouvée qu'en 1850 par Kirchhoff [19]. S'appuyant sur les travaux de Aron [20] qui a réduit à cinq les équations de vibration des plaques à partir des travaux de Germaine, Love propose une équation simplifiée étendue à l'étude de vibration des poutres et plaques en 1888 [21]. Quelques années plutôt, et en 1882, Lord Rayleigh [22] proposa des variantes de simplification en considérant la surface médiane de la coque comme extensionnelle ou non extensionnelle. La théorie générale de Love est une forme simplifiée particulière des variantes proposées par Rayleigh. Les équations de Love,

introduisent le développement de base de la théorie des vibrations des structures continues qui ont une épaisseur négligeable devant n'importe quelle autre longueur de la structure. Les bases de la théorie des vibrations étant ainsi lancées, divers schémas cinématiques ont été proposés au fil du temps pour modéliser des structures multicouches ou sandwichs viscoélastiques. Ces modèles peuvent être regroupés en deux grandes catégories : l'approche monocouche équivalente [23] et l'approche par couche.

Concernant les sandwichs viscoélastiques, seule l'approche par couche est adapté car elle tient compte du cisaillement important dans les couches viscoélastiques. Pour cette approche, la structure multicouche est constituée d'un ensemble de sous-structure où chaque sous-structure représente une couche de la structure. On applique à chaque sous-structure ou couche l'une des théories de l'approche monocouche équivalente. L'objectif de cette approche est de bien décrire les effets d'interface entre les couches et les contraintes hors plan. Le modèle dit zig-zag est le plus utilisé dans l'approche par couche. On distingue globalement deux types de modélisation zig-zag : modèles zig-zag couches discrètes et modèles zig-zag monocouches. Lorsque la continuité des contraintes de cisaillement est assurées aux interfaces des couches, on parle de zig-zag du type "IC-ZZT" et dans le cas contraire de zig-zag du type "ID-ZZT". Du point de vue de l'approximation utilisée pour le champ de déplacement, on peut parler de zig-zag linéaire et zig-zag non-linéaire ou d'ordre supérieur (figure 1.3).

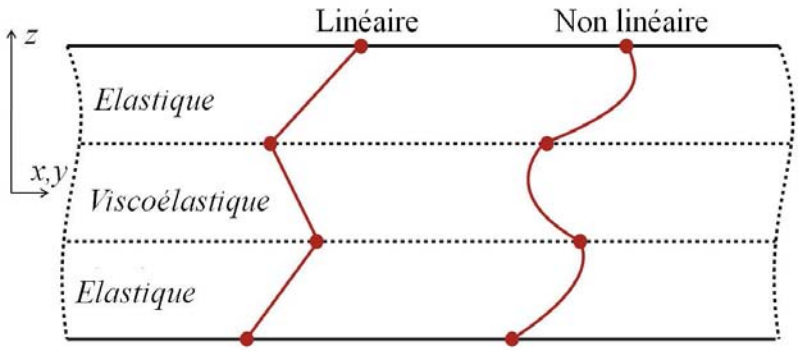


Figure 1.3 – Schéma cinématique zig-zag pour les déplacements

1.3.1.1 Modèles zig-zag par couches discrètes

Les modèles zig-zag par couches discrètes consistent à représenter la structure multicouche par un ensemble de plaques couplées par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont également assurées. Les équations sont alors écrites pour chaque couche et par conséquent le nombre d'inconnues dépend du nombre de couches de la structure. Pour modéliser des structures sandwichs viscoélastiques dont rappelons le, la couche viscoélastique se déforme fortement en cisaillement, des auteurs ont proposé d'appliquer le modèle classique de Love-Kirchhoff [24] aux couches rigides et un modèle enrichi d'ordre supérieur pour la couche viscoélastique. Ainsi lorsqu'on considère une plaque sandwich symétrique trois couches et qu'on impose le repère orthonormé de référence (x, y, z), tel que le plan (x, y) coïncide avec le plan médian de la couche centrale de la structure et côté à $z = 0$, le champ de déplacement peut s'écrire de manière générale :

$$\begin{cases} U_1(x,y,z,t) = u_1(x,y,t) - \left(z - \dfrac{h_c + h_f}{2}\right)\dfrac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} & \dfrac{h_c}{2} < z < \dfrac{h}{2} \\ U_2(x,y,z,t) = u_2(x,y,t) - z\dfrac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\beta_{xj}(x,y,t) & -\dfrac{h_c}{2} < z < \dfrac{h_c}{2} \\ U_3(x,y,z,t) = u_3(x,y,t) - \left(z + \dfrac{h_c + h_f}{2}\right)\dfrac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} & -\dfrac{h}{2} < z < -\dfrac{h_c}{2} \end{cases} \tag{1.17}$$

où $U_k,\ \ k = 1, 2, 3$ est le déplacement longitudinal de la couche k du sandwich (les couches sont numérotés de haut en bas) ; $u_k,\ \ k = 1, 2, 3$ le déplacement longitudinal du plan médian de la couche k ; h_c et h_f les épaisseurs respectives de la couche centrale (cœur ou âme) et des faces, h l'épaisseur totale de la structure ; β_{xj} les rotations additionnelles par rapport à l'axe (x). Le déplacement longitudinal dans la direction (y) s'exprime de la même manière en remplaçant les U, u par V, v et les rotations additionnelles β_{xj}

par β_{yj} relatives à l'axe (y). Les fonctions $f_j(z)$ diffèrent selon les auteurs et suivant l'approximation désirée. Ainsi

- pour $n = 1$, $f_1(z) = z$, on a le modèle de Rao [25]
- pour $n = 1$, $f_1(z) = z - \dfrac{4z^3}{3h_c^2}$, on a le modèle de Reddy [26]
- pour $n = 2$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = z^3$, on a un modèle mixte.

Pour une structure sandwich viscoélastique mince trois couches, il a été prouvé par Hu et al. [23] que le modèle zig-zag linéaire de Rao [25] est performant dans les conditions $h_c/h_f \leq 10$ et $E_c/E_f \leq 0.01$ avec E_c et E_f les modules de Young respectifs du cœur et des faces et h_c, h_f leurs épaisseurs respectives.

1.3.1.2 Modèles zig-zag monocouches

Il existe des approches intermédiaires pour traiter les structures sandwichs. L'une de ces approches intermédiaires est de traiter la structure comme étant une seule couche en modèle non zig-zag en ajoutant au champ de déplacement une fonction dite "fonction zig-zag" [27]. Carrera [28] et Brischetto et al. [29] ont démontré l'intérêt et la simplicité d'implémentation de cette méthode qui permet non seulement d'introduire les effets zig-zag mais également de réduire le nombre des variables, pour l'étude des structures multicouches.

Des comparaisons des résultats d'analyses tridimensionnelles à celles bidimensionnelles ont prouvé qu'il est important d'assurer les conditions de continuité pour les déplacements et les contraintes transversales aux interfaces entre deux couches adjacentes pour une structure multicouche surtout quant cette dernière est épaisse pour une analyse plus précise [30, 31, 32, 33]. Ces conditions de continuité dénommées "C_z^0 -requirements" par Carrera [34] sont introduites par cet auteur avec succès dans plusieurs travaux de modélisation de problème de vibration pour divers modèles de schémas cinématiques [35, 36, 37, 38].

Ganapathi et Makhecha [39] sont allés plus loin en développant un modèle basé sur l'approche monocouche mais en considérant une approximation par un polynôme quadratique du déplacement transversal dans l'épaisseur de la structure et un développement à l'ordre trois pour les déplacements dans le plan. Dans ce modèle, ils ont introduit égale-

ment la fonction zig-zag de Murakami [27] pour satisfaire les conditions de continuité "C_z^0 -requirements". L'expression de leur champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} U(x,y,z,t) = u(x,y,t) + \sum_{j=1}^{3} z^j u_j(x,y,t) + 2(-1)^k \frac{z_k}{h_k} u_4(x,y,t) \\ V(x,y,z,t) = v(x,y,t) + \sum_{j=1}^{3} z^j v_j(x,y,t) + 2(-1)^k \frac{z_k}{h_k} v_4(x,y,t) \\ W(x,y,z,t) = w(x,y,t) + \sum_{j=1}^{2} z^j w_j(x,y,t) + 2(-1)^k \frac{z_k}{h_k} w_3(x,y,t) \end{cases} \tag{1.18}$$

où k est l'indice des couches et varie de 1 à N (nombre total de couches), h_k désigne l'épaisseur de la couche d'indice k, z_k la côte du plan moyen de la couche d'indice k.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne approximation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans le respect des conditions de continuité. L'utilisation des coefficients de correction dans le cas de la théorie de déformation de cisaillement constante ou de premier ordre est ainsi évitée. Rappelons toutefois que Di Sciuva [40, 41, 42] fut le premier à proposer le modèle zig-zag de premier ordre. Dans son modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag. Les avantages de ce modèle ont inspiré d'autres auteurs qui ont développé d'autres théories comme celles de Rao [25] et Reddy [26] pour les sandwichs viscoélastiques. Si l'approche par couche permet l'obtention de résultats plus précis en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan, elle est relativement coûteuse puisque son nombre de variables dépend du nombre de couches de la structure. La plupart du temps l'écriture des équations de continuité permet de réduire les variables dans ces modèles.

Au vue de cette étude cinématique, il est clair que le modèle zig-zag permet une bonne approximation des champs de déplacement pour les structures sandwichs viscoélastiques.

Dans toute analyse de problème de vibration, il est également important de définir le moyen de résolution du problème.

1.3.2 Modélisation et calcul de l'amortissement passif

Pour utiliser une structure sandwich viscoélastique pour l'amortissement passif, il est important de savoir calculer ou du moins estimer ses propriétés modales amortissantes. Le calcul de la fréquence amortie (Ω) et de l'amortissement (η) appelés propriétés modales , passe par la résolution du problème des vibrations libres ou le problème des vibrations harmoniques forcées. Il existe classiquement deux manières d'aborder les problèmes de vibration dans la littérature : les approches analytiques, applicables sur des structures à géométries (poutres et plaques) et conditions aux limites simples et les approches numériques.

1.3.2.1 Approches analytiques

Au tout début de l'utilisation des sandwichs à cœur viscoélastique, les couches sont réalisées avec des matériaux élastiques isotropes pour les faces et viscoélastiques isotropes pour le cœur. Aussi les premiers travaux se sont-ils intéressés à ces types de sandwichs. Les premiers travaux sur les structures sandwichs sont à mettre à l'actif de Kerwin [43] et Ross [44]. Ils ont considéré dans leur étude une poutre sandwich trois couches en appui simple, dont la couche centrale est viscoélastique de faible amortissement . En considérant les effets de membrane dans les trois couches et l'effet de cisaillement uniquement pour la couche viscoélastique, ils ont obtenu une équation différentielle d'ordre quatre du mouvement transversal, équivalente à une équation du mouvement de flexion de type Euler-Bernoulli :

$$\hat{B}\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} = \hat{f}(x,t) \tag{1.19}$$

où $\hat{B} = B_0(1+i\eta)$ et m sont respectivement une rigidité équivalente et une masse linéique ; ce qui leur permet d'établir une expression analytique relativement simple du facteur de perte (η) en fonction des caractéristiques de la structure. DiTaranto [45] a étudié les

conditions aux limites arbitraires sur les mêmes types de poutre en considérant les mêmes hypothèses que Kerwin [43] et Ross [44]. Il a obtenu une équation différentielle d'ordre six pour le déplacement longitudinal du plan moyen des couches élastiques externes et défini la pulsation complexe sous la forme :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \tag{1.20}$$

Ces résultats lui ont permis d'affirmer que le facteur de perte (η) et la fréquence amortie sont fonction de la géométrie de la structure et non des conditions aux limites ; laquelle affirmation sera réfutée plus tard par Mead et Markus [46, 47]. Ces derniers ont réécrit dans la foulée les équations de mouvement et proposé une méthode itérative (semblable à la méthode de Newton-Raphson) de résolution de cette équation. L'approche de Kerwin [43] et Ross [44] fut améliorée et utilisée pour les plaques sandwichs par Yu [48] par une formulation dans le cas bidimensionnel en rajoutant les effets d'inertie pour les trois couches et le cisaillement pour les faces. Yan et Dowell [49] d'une part, Rao et Nakra [50] d'autre part ont étudié les propriétés modales des structures sandwichs asymétriques. Les premiers ont considéré les hypothèses de contrainte plane, la continuité du champ de déplacement et de la contrainte de cisaillement aux interfaces des couches. Les derniers ont ajouté les effets d'inertie transversale, longitudinale et rotationnelle pour une étude de vibration forcée harmonique. Une étude similaire a été réalisée par He et Ma [51]. Les équations obtenues pour l'étude de vibration transversale sont d'ordre élevé et leur résolution pose des problèmes. Aussi Ovarsky et al. [52] ont proposé une méthode basée sur la technique de perturbation permettant de linéariser ces problèmes. Ils ont fait une application dans le cas d'une poutre sandwich encastrée-libre. Une étude plus complète des apports pour la modélisation analytique des structures plaques et poutres sandwichs viscoélastiques est accessible dans les travaux de thèse de Bilasse [1] et Koutsawa [53].

L'ensemble de ces formulations analytiques supposent généralement les hypothèses suivantes :

— Les couches sont homogènes, linéaires, élastiques pour les faces et viscoélastique

non vieillissant pour le cœur

— La couche viscoélastique se déforme principalement en cisaillement

— Tous les points sur une normale à la plaque ont le même déplacement transverse

— La linéarité au sens géométrique du champ de déformation est admise, les études sont alors faites dans les hypothèses des petites perturbations

— Aucun glissement entre les couches n'est permis, assurant ainsi la continuité du champ de déplacement aux interfaces des couches.

Cependant, les équations différentielles obtenues au cours de ces études n'admettent généralement pas de solutions exactes ou du moins sont difficiles à résoudre surtout pour des conditions aux limites arbitraires. De plus il est impossible de prendre en compte dans ces équations différentielles, la dépendance d'un paramètre comme par exemple la dépendance en fréquence induite par le cœur viscoélastique. Pour palier à ces limites, des approches numériques sont introduites et sont de plus en plus utilisées.

1.3.2.2 Approches numériques

Les approches numériques se résument globalement à l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à discrétiser le domaine spatial en petits éléments (mailles), et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément. Ce faisant, on transforme le système d'équations quelconques en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut être représenté par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, pour former une grande matrice (matrice globale). La résolution du système global obtenu donne la solution approchée du problème. Dans la méthode des éléments finis, il existe diverses manières de discrétisation classées selon leur dimension. On distingue donc les éléments 1D (éléments linéiques), 2D (éléments plaques ou coques) et 3D (éléments volumiques).

Pour réaliser une discrétisation en éléments finis épousant parfaitement la forme intégrale d'une structure sandwich, il faudrait utiliser les éléments volumiques. Mais une telle discrétisation engendrerait un nombre considérable de degrés de liberté. Or plus il y a de degré de liberté, plus la taille de la matrice globale est grande et plus la résolution

du problème est difficile et nécessite beaucoup de temps de calcul et d'espace mémoire. Des propositions de discrétisation ont alors été faites par des auteurs pour amoindrir au maximum les degrés de liberté. Dans le cas des structures sandwichs à cœur viscoélastique des propositions coque/volume/coque, plaque/volume/plaque, coque/coque/coque ou plaque/plaque/plaque ont été faites. Nous pouvons citer les travaux de Lu et al. [54] qui ont considéré un élément hexaédrique isoparamétrique (8 nœuds) pour la couche viscoélastique et un élément plaque quadrilatères à 4 nœuds représentatif du plan moyen pour les faces. Johnson et al. [55], ont proposé un modèle similaire en ramenant la représentation des faces sur les interfaces au lieu du plan moyen utilisé par Lu et al. [54]. Daya et Potier-Ferry [56] ont développé un élément du type coque/volume/coque en considérant les hypothèses de continuité des champs de déplacement aux interfaces cœur-peaux où l'élément coque est l'élément triangulaire à trois nœuds DKT. Cet élément sera réécrit par Duigou et al. [57] en remplaçant l'élément triangulaire DKT par un élément quadrilatère à 8 nœuds en vue de mieux prendre en compte la déformation en membrane. Les modèles coque/volume/coque et plaque/volume/plaque posent le problème d'incompatibilité des champs de déplacement des faces et celui du cœur ce qui n'est pas le cas des modèles coque/coque/coque et plaque/plaque/plaque. Cependant ces deux derniers sont plus adaptés à la modélisation des structures sandwichs en flexion où le déplacement transversal est supposé commun pour toutes les couches et la rotation identique pour les faces. En plus, la prise en compte de l'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peau permet de réduire considérablement le nombre de degré de liberté par nœud, en général ces degrés de liberté aux nœuds peuvent être exprimés uniquement soit dans les deux faces élastiques soit dans le cœur viscoélastique. Dans cette logique, Ma et He [58] ont présenté un élément triangulaire à trois nœuds plaque/plaque/plaque avec cinq degrés de liberté (w, $w_{,x}$, $w_{,y}$, β_x, β_y) par nœud. Bilasse [1, 59] dans le cadre de sa thèse a utilisé pour la modélisation en vibration linéaire et non linéaire (non linéarité géométrique) des plaques sandwichs viscoélastiques symétriques trois couches, un élément similaire mais quadrangulaire dans un schéma cinématique zig-zag en appliquant la théorie de Love-Kirchhoff [24] pour les faces et Reissner-Mindlin [60, 61] pour le cœur. Dans

son étude de vibration en flexion, les conditions de continuité lui ont permis de ramener la description de la plaque sandwich au plan moyen de la couche centrale viscoélastique ce qui entraine une diminution considérablement du nombre de degrés de liberté.

Dans la méthode des éléments finis, une chose est de discrétiser la forme faible du problème pour obtenir une équation aux valeurs propres, une autre est de résoudre ce problème aux valeurs propres.

Peu importe le modèle éléments finis utilisé, l'équation aux valeurs propres à résoudre s'écrit de façon générale, pour une vibration libre, lorsqu'on ne considère que la dépendance en fréquence de la couche viscoélastique :

$$\left[K(\omega) - \omega^2 M\right] \{U\} = \{0\} \tag{1.21}$$

où $[K(\omega)]$, et $[M]$, sont respectivement la matrice de rigidité dépendant de la fréquence, et la matrice de masse ; les inconnues ω et $\{U\}$ sont respectivement la fréquence et le vecteur modal.

Le problème posé par l'équation (1.21) est un problème fortement non linéaire aux valeurs propres complexes avec une dépendance en fréquence dont la résolution est délicate et a déjà fait l'objet de plusieurs études dont les détails sont présentés dans la section qui va suivre.

1.3.2.3 Les méthodes de résolution du problème aux valeurs propres

La résolution du problème aux valeurs propres obtenue lors d'une étude de vibration d'une structure est fortement non linéaire à cause de sa dépendance en fréquence introduite par la couche viscoélastique. Des propositions de résolution de ces problèmes sont classées en trois groupes dans la littérature. On distingue :

— **L'analyse de la réponse fréquentielle**

Cette méthode consiste à appliquer une excitation harmonique F à la structure ramenant ainsi l'équation (1.21) sous la forme

$$\left[K(\omega) - \omega^2 M\right] \{U\} = \{F\} \tag{1.22}$$

Il existe deux propositions de résolution pour ce cas dans la littérature. La première consiste à chercher les courbes de réponses en déplacement $\{U(\omega)\}$ en inversant la matrice dynamique $[K(\omega) - \omega^2 M]$ pour diverses valeurs de ω. Ensuite la fréquence amortie Ω est déterminée au pic de la résonance et le facteur de perte $\eta = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{\Omega}$ par la méthode de la bande passante à -3db [62]. Pour cette méthode, plus l'incrément utilisé pour les valeurs de ω est petit plus le résultat est plus précis ; mais cela revient à inverser une multitude de matrices dynamiques $[K(\omega) - \omega^2 M]$ ce qui engendre donc un temps de calcul assez considérable. De plus, l'évaluation du facteur de perte n'est valide que pour un amortissement petit et pour des fréquences propres suffisamment séparées. Précisons toutefois que cette méthode est beaucoup plus utilisée au cours des essais expérimentaux où les déplacements sont déterminés expérimentalement pour différentes valeurs de ω.

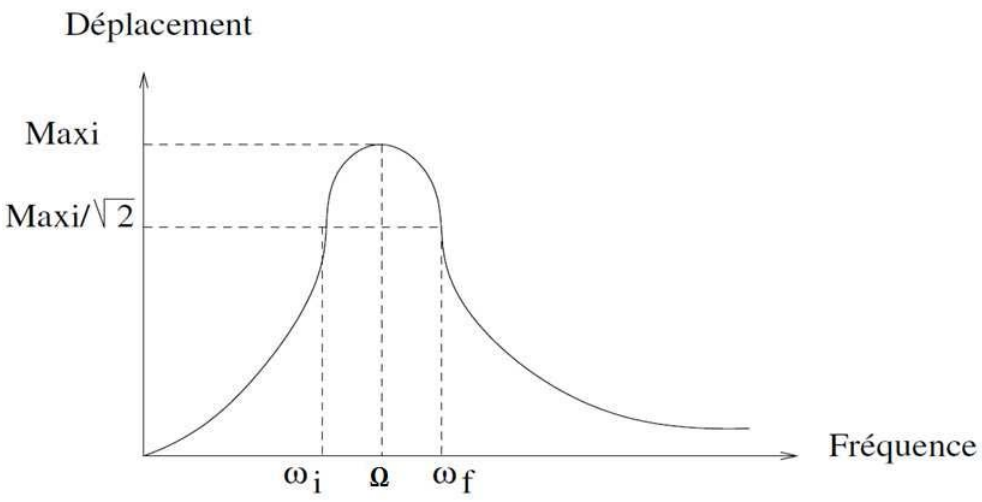


Figure 1.4 – Calcul de l'amortissement par la méthode des bandes passantes

La deuxième méthode est proposée par Abdoun et al. [63] et est basée sur la méthode asymptotique numérique. Ils ont réécrit l'équation de vibration forcée (1.22) sous la forme :

$$\left[K(0) + E(\omega)K_v - \omega^2 M\right]\{U\} = \{F\} \tag{1.23}$$

à partir d'une décomposition du module de Young complexe et dépendant de la fréquence du cœur viscoélastique comme suit :

$$E^*(\omega) = E^*(0) + E(\omega) \tag{1.24}$$

La matrice $[K_v]$ est purement réelle et relative au cœur viscoélastique et $[K(0)]$ est la matrice d'élasticité retardée de la structure. Pour résoudre l'équation (1.23), les inconnues (ω,U) sont développées en séries de Taylor ; une suite récurrente de problèmes linéaires est alors obtenue et sa résolution permet d'obtenir directement la courbe de réponse. Cette technique procure un gain de temps considérable par rapport à la première méthode et est applicable à n'importe quelle genre de structure et n'importe quelle loi de dépendance en fréquence du cœur viscoélastique.

— **Analyse modale**

L'analyse modale consiste à estimer directement à partir de l'équation de vibration libre (formule 1.21) les propriétés modales de la structure. Deux cas sont présentés : le cas de module complexe constant du cœur viscoélastique et le cas de la dépendance en fréquence.

Dans le cas du module de Young complexe constant du cœur viscoélastique, le problème de vibration libre (1.21) s'écrit simplement [64, 65] :

$$\left[K - \omega^2 M\right]\{U\} = \{0\} \tag{1.25}$$

Ce problème est alors résolu par les algorithmes classiques tels que la méthode QR [66] implémentée dans Matlab comme fonction "eig", la méthode itérative des sous espaces

[67], la méthode de Lanczos [68], la méthode de Krylov-Arnoldi [69] implémentée dans Matlab comme fonction "eigs". La fréquence amortie et l'amortissement sont obtenues à partir de la fréquence complexe calculée par une de ces méthodes selon la formule de DiTaranto (équation 1.20)

Dans le cas où le module de Young du cœur viscoélastique dépend de la fréquence, le problème aux valeurs propres devient un problème complexe non linéaire que les méthodes citées plutôt ne permettent pas de résoudre. D'autres méthodes ont alors été proposées et peuvent être classées en deux groupes : les méthodes approchées et les méthodes quasi-exactes.

Les méthodes approchées

La méthode d'énergie de déformation modale ou modal strain energy method (MSE) : elle est basée sur la répartition de l'énergie de déformation dans la structure et définit l'amortissement structurel comme étant la somme des facteurs de perte des sous-structures constitutives pondérés de leur fraction d'énergie de déformation :

$$\eta = \sum_k \eta_k \frac{\mathcal{U}_k}{\sum_k \mathcal{U}_k} \tag{1.26}$$

avec η_k le facteur de perte de la couche k et $\mathcal{U}_k$ son énergie de déformation. Cette méthode s'applique de deux différentes manières suivant la précision désirée en utilisant soit des modes réels (MSER) ou des modes complexes (MSEC). La MSER consiste à résoudre l'équation :

$$\left[K(0) - \omega_0^2 M\right] \{U_r\} = \{0\} \tag{1.27}$$

avec $[K(0)]$ la matrice construite seulement avec l'élasticité retardée. Une fois les inconnues (ω_0, U_r) trouvées, le problème général (1.21) est réécrit de façon approximative :

$$\left[K(\omega_0) - \omega^2 M\right] \{U_r\} = \{0\} \tag{1.28}$$

permettant d'estimer les propriétés modales comme étant :

$$\omega^2 = \Omega^2(1+i\eta) = \frac{{}^t\{U_r\}\,[K(\omega_0)]\,\{U_r\}}{{}^t\{U_r\}\,[M]\,\{U_r\}} \tag{1.29}$$

Cette méthode (MSER) a un coût de calcul relativement faible puisqu'elle permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels. Cependant, elle ne donne de bons résultats que pour des structures de faible amortissement. Sa version complexe permet d'améliorer les estimations des propriétés modales et consiste à remplacer $\{U\}$ par une approximation du mode complexe $\{U_c\}$ obtenu en résolvant l'équation de vibration forcée suivante :

$$\left[K(\omega_0) - \omega^2 M\right]\{U_c\} = \{F\} \tag{1.30}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces harmoniques imposées. Les propriétés modales sont en suite estimées :

$$\omega^2 = \Omega^2(1+i\eta) = \frac{{}^t\left\{\bar{U}_c\right\}\,[K(\omega_0)]\,\{U_c\}}{{}^t\left\{\bar{U}_c\right\}\,[M]\,\{U_c\}} \tag{1.31}$$

Les méthodes quasi-exactes

Dans ces types d'approche, nous distinguons :

La méthode d'Arnoldi non linéaire [70] : Elle consiste en une projection dans des sous-espaces de Krylov des problèmes aux valeurs propres non linéaires creux de grande taille pouvant se mettre sous la forme :

$$T(\lambda)x = 0, \quad T(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{1.32}$$

Les problèmes non linéaires sont ainsi transformés en problèmes linéaires de taille réduite et sont résolus par des techniques itératives.

L'approche asymptotique de Ma et He [58]. Cette approche consiste à remplacer directement dans l'équation (1.21) ω^2 par $\Omega^2(1+i\eta)$ pour obtenir la présente équation

$$\left[K(\Omega^2,\eta) - \Omega^2(1+i\eta)M\right]\{U\} = \{0\} \tag{1.33}$$

Les inconnues (Ω^2,η, U) sont ensuite développées en séries entières d'un paramètre choisi de façon appropriée ce qui permet de ramener le problème à l'origine non linéaire à une suite récurrente de problèmes linéaires à qui on rajoute la condition d'orthogonalité des modes. Dans le cas d'un module complexe dépendant de la fréquence, les séries ne convergent généralement pas et une méthode de continuation est alors utilisée à cette fin. Cette méthode n'a cependant été utilisée que dans le cas particulier d'une structure de faible amortissement avec un module complexe constant.

La méthode d'itération-réduction de Chen et al. [71] : cette approche consiste à poser $\omega^2 = \lambda$ et à écrire le module de cisaillement du matériau viscoélastique de la manière suivante : $G^*(\lambda) = G(\lambda)\,(1+i\beta(\lambda))$. Ce faisant on réécrit l'équation (1.21) sous la forme :

$$\left[K\left(G(\lambda)\right) + i\beta(\lambda)K_2\left(G(\lambda)\right) - \lambda M\right]\{U\} = \{0\} \tag{1.34}$$

La méthode d'itération-réduction, consiste en la résolution de deux problèmes distincts. Le premier consiste à supposer $\beta = 0$ et à développer les inconnues ($\tilde{\lambda}_r$, $\tilde{U}_r$) en séries de Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} K\left(G(\lambda_r)\right) = K(G_0) + \frac{\partial K}{\partial G}|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \\ \tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \frac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \\ \tilde{U}_r = U_r + \frac{\partial U_r}{\partial G}|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \end{cases} \tag{1.35}$$

Le problème à l'ordre 0 est $\left[K(G_0) - \lambda_r M\right]\{U_r\} = \{0\}$. La solution $\tilde{\lambda}_r$ du problème à l'ordre 1, vaut alors en associant la condition d'orthogonalité des modes :

$$\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \frac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) = \lambda_r + {}^t\{U_r\}\left[\frac{\partial K}{\partial G}|_{G=G_0}\right]\{U_r\}\left(G(\lambda_r) - G_0\right) \tag{1.36}$$

Le deuxième problème consiste en la résolution du problème initial (1.34) en posant $\lambda = \tilde{\lambda}_r$ dans $[K]$, $[K_2]$ et β. Avec ces changements, le problème devient un problème linéaire aux valeurs propres complexe qui est résolu par l'algorithme itératif de Lanczos [68] couplé à une base réduite. Cette méthode nécessite beaucoup d'itérations, ce qui augmente le temps de calcul surtout pour les structures de grande taille.

La méthode asymptotique numérique (MAN) de Daya et Potier-Ferry [72] : elle est basée sur la technique de perturbation et d'homotopie. Dans sa formulation, on pose, $\omega^2 = \lambda$ et le module de Young complexe et dépendant de la fréquence de la couche viscoélastique $E^*(\lambda) = E^*(0) + E(\lambda)$ et on introduit le paramètre p d'homotopie. On ramène ainsi l'équation (1.21) sous la forme :

$$[K(0) + pE(\lambda)K_v - \lambda M]\{U\} = \{0\} \tag{1.37}$$

où la matrice de rigidité $[K_v]$ est purement réelle et relative au cœur viscoélastique et $[K(0)]$ est la matrice de rigidité d'élasticité retardée de la structure. Le principe de cette méthode est de partir d'une solution simple correspondant à la valeur $p = 0$ qui est la solution du problème aux valeurs propres correspondant à la structure en ne considérant que son élasticité retardée pour arriver à la solution finale correspondant au cas $p = 1$. Pour parvenir à cette fin, les inconnues (λ,U) sont développées en séries entières en fonction du paramètre p et injectées dans l'équation (1.37). On obtient alors une suite récurrente de problèmes linéaires qui sont résolus à chaque ordre en ajoutant la condition d'orthogonalisation des modes. Une continuation est associée à la méthode pour piloter le paramètre p de 0 à 1. En se basant sur les outils de différentiation automatique [73], Bilasse et al. [74] ont automatisé cette technique de résolution de problème aux valeurs propres non linéaires permettant ainsi de prendre en compte n'importe quelle loi viscoélastique dépendant de la fréquence. Duigou et al [57] ont proposé deux méthodes similaires mais itératives pour la résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires complexes. La première méthode est une sorte de méthode de Newton modifiée avec introduction du paramètre d'homotopie et un développement en série entière d'ordre élevé des inconnues en

fonction du paramètre d'homotopie. La deuxième méthode applicable aux structures de faible amortissement consiste à approximer la matrice $[K(\omega) - \omega^2 M]$ par $[K(0) - \omega_M^2 M]$ et à construire une matrice tangente purement réelle à partir des solutions du problème sans amortissement $[K(0) - \omega_M^2 M]\{U_M\} = 0$. Ils ont ajouté les approximants de Padé pour accélérer la convergence des séries et réduire les temps de calculs. Récemment, Boumediene et al. [75] ont proposé une méthode sur les modèles réduits couplée à la méthode de Newton d'ordre élevé pour ce qui permet de réduire les temps de calculs.

Tous ces acquis ont balisés la voie à la modélisation des sandwichs composites à cœur viscoélastique. Nous présentant dans la section suivante des généralités sur les matériaux composites et les travaux déjà réalisés sur ces derniers dans le cadre de l'amortissement passif.

1.4 L'amortissement passif à l'aide de matériaux composites

1.4.1 Généralités sur les matériaux composites

Un matériau composite est un matériau hétérogène et anisotrope formé d'au moins deux constituants non miscibles qui sont disposés selon une organisation géométrique particulière. Quasiment tous les composites sont constitués d'une matrice dans laquelle sont noyés des renforts. Dans cet ensemble hétérogène, aboutissant à un matériau dont les performances sont supérieures à celui des composants pris séparément, chaque constituant à un rôle particulier. La matrice assure la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques qui sont assurées par les renforts. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différents constituants.

Les matrices employées pour les composites sont de deux types : les matrices orga-

niques regroupant les résines thermodurcissables et les polymères thermoplastiques et les matrices minérales regroupant les céramiques et les métaux. Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune a un domaine particulier d'utilisation. Mais de manière générale, les matrices thermodurcissables sont plus fréquemment employées que les thermoplastiques, en raison de leur plus grande facilité de mise en forme (il est plus facile d'imprégner des fibres avec un liquide qu'avec des granulés ramollis, et les températures à utiliser sont souvent plus raisonnables). Parmi les plus courantes, on peut citer les résines polyester, peu coûteuses et souvent utilisées dans les applications "grande diffusion", et les résines époxy (ou époxydes), très employées dans les applications "hautes performances". Toutefois lorsque le domaine d'application requiert une tenue de la structure aux très hautes températures, les matrices métalliques, en céramiques ou en carbones sont utilisées. De plus les matériaux les plus performants utilisés pour les matrices ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Notons également que d'autres produits sont parfois incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçantes) ou pour diminuer le coût des matrices en résine (charges non renforçantes). Ces produits souvent appelés additifs sont variés et il en existe qui sont utilisés pour le rôle de colorant ou agent de démoulage.

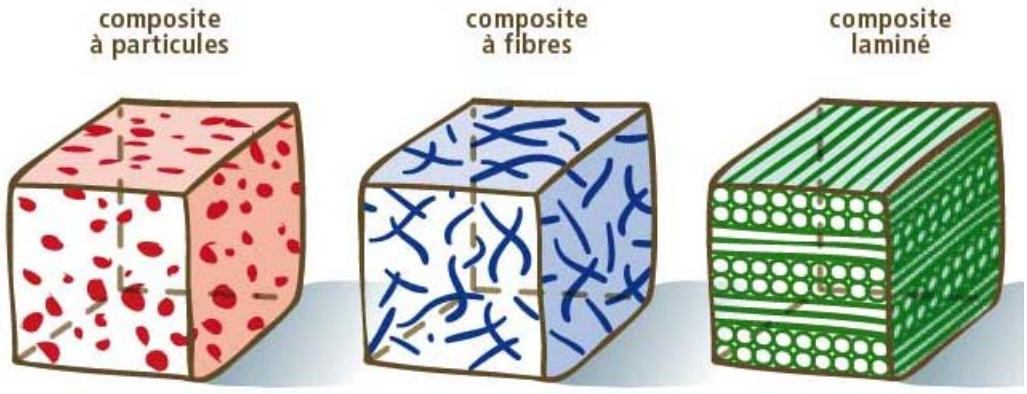


Figure 1.5 – Différents types de renforts pour matériau composite

Les renforts sont généralement conçus de sorte à avoir des propriétés mécaniques notamment la résistance et la rigidité optimales. Les propriétés mécaniques du composite

sont souvent liées aux types de renforts et à leur disposition dans la matrice. On peut distinguer d'un point de vue géométrique, trois grands types de renforts : les renforts de fibres longues (laminés), les renforts de fibres courtes et les particules (inclusions) (figure 1.5). Du point de vue de la matière, les renforts peuvent être groupés en deux grandes catégories : les renforts inorganiques parmi lesquels on peut citer les polyesters et les aramides et les renforts organiques parmi lesquels on retrouve les minéraux (verre, céramiques, bore, les métaux, le carbone) et les végétaux. L'utilisation de tels ou tels renforts est sujette aux propriétés mécaniques souhaitées. Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction des structures composites. Les fibres de carbone par contre ont de très fortes propriétés mécaniques ; on en rencontre classiquement : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J. Un autre renfort souvent rencontré est le Kevlar (verre-kevlar ou carbone-kevlar) qui est très utilisé dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis) et est du type fibres aramides.

Un cas particulier de matériaux composites est les matériaux orthotropes qui sont des composites à fibres longues. Les matériaux composites de type orthotrope seront utilisés dans ce travail et à chaque fois, le terme matériaux composites sous entend les matériaux composites orthotropes.

1.4.2 Les différents types de matériaux composites orthotropes

On distingue parmi les matériaux orthotropes, les matériaux orthotropes unidirectionnels et des stratifiés.

Les matériaux orthotropes unidirectionnels ou plis unidirectionnels, sont constitués de fibres longues continues, toutes parallèles entre elles, prises dans une matrice. L'anisotropie est donc très prononcée pour ces matériaux puisque les fibres sont orientées dans une seule direction (figure 1.7) [76].

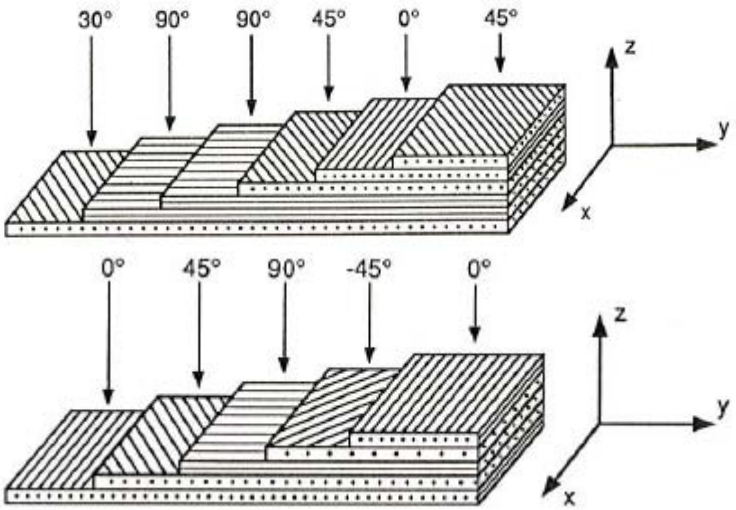


Figure 1.6 – Exemples de stratifiés unidirectionnels

Les stratifiés sont un type particulier de matériaux composites qui sont composés de couches successives. La plupart du temps il s'agit d'une succession de couches unidirectionnelles orientées différemment. Leur désignation se fait suivant un code en fonction du système d'axes choisi [76] :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.
- Les couches successives sont séparées par un "/" si leurs angles sont différents.
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.
- La figure (1.6) montre deux exemples de stratifiés. Le premier est désigné dans sa référence par le code $[45/0/45/90_2/30]$ et le second par le code $[0/-45/90/45/0]$

Une fois le composite conçu, il possède des caractéristiques mécaniques anisotropes bien définies qui feront l'objet de la section suivante.

1.4.3 Lois de comportement et effets d'orientation des fibres dans la structure

Dans ce travail, seuls les problèmes d'élasticité linéaires sont abordés. Les lois de comportement liant les contraintes aux déformations (ou l'inverse) des matériaux composites sont par conséquent écrites dans le cadre d'élasticité linéaire. Les effets d'orientation sont relatives à la différence entre les repères du matériau et celui de la structure. En d'autres termes il s'agit d'un changement de base pour le matériau composite.

1.4.3.1 Lois de comportement dans le repère du matériau

Un matériau possède un comportement élastique linéaire s'il existe une relation linéaire bi-univoque entre son tenseur des contraintes et son tenseur des déformations. Cette relation permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \end{cases} \tag{1.38}$$

où C_{ijkl} et S_{ijkl} représentent respectivement les tenseurs des rigidités et des souplesses d'ordre quatre et sont inverses l'un de l'autre. Les considérations de symétrie matérielle et thermodynamique permettent d'écrire C_{ijkl} avec 21 constantes élastiques indépendantes. Lorsqu'on écrit sous forme vectorielle les tenseurs de contrainte et de déformation comme suite :

$$\begin{cases} \sigma = {}^t \{\sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{33} \;\; \sigma_{23} \;\; \sigma_{13} \;\; \sigma_{12}\} \\ \\ \varepsilon = {}^t \{\varepsilon_{11} \;\; \varepsilon_{22} \;\; \varepsilon_{33} \;\; 2\varepsilon_{23} \;\; 2\varepsilon_{13} \;\; 2\varepsilon_{12}\} \end{cases} \tag{1.39}$$

alors on écrit l'équation de comportement (équation 1.38) d'un matériau anisotrope sous formes vectorielles (équation 1.40) ci après :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & Sym. & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

Dans les matériaux anisotropes (tricliniques) se retrouvent des classes de matériaux qui présentent des matrices de rigidité (de souplesse) particulières dans le repère matériau ici désigné par $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$. On retrouve par exemple :

— Des matériaux orthotropes : Ils possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En général, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. Dans un repère défini par les axes d'orthotropie, la matrice de rigidité de ces types de matériaux peut s'écrire avec 9 constantes (1.41)

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

— Des matériaux unidirectionnels : ils possèdent un axe de symétrie. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope et est souvent appelé orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Dans le repère d'orthotropie, sa matrice s'écrit

avec 5 constantes pour le cas de symétrie d'axe $(\vec{N}_1)$ (1.42)

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & Sym. & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

— Des matériaux isotropes : ils possèdent un même comportement dans les trois sens du repère matériau. La matrice de rigidité des matériaux isotropes est définie par 2 constantes ou constantes de Lamé (E le module de Young et ν le coefficient de Poisson) et est de la forme (1.43)

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & Sym. & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

Comme nous pouvons le remarquer, les matériaux unidirectionnels et isotropes constituent une partie des matériaux orthotropes puisqu'à partir de la matrice de rigidité des matériaux orthotropes on peut facilement retrouver celles des unidirectionnels et isotropes. Aussi pour pouvoir simuler une gamme plus large de matériaux composites et éventuellement les matériaux isotropes, nous convenons d'utiliser des matériaux orthotropes dans ce travail.

Expression des constantes de la matrice de rigidité d'un matériau orthotrope en fonction des paramètres de l'Ingénieur

Un matériau orthotrope possède en effet un comportement différent dans chaque di-

rection du repère matériau. Aussi lorsqu'on considère le repère d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ on note par $E_i \;\; i = 1, 2, 3$ les modules de Young respectifs de chaque direction du repère et par G_{ij}, $\nu_{ij} \quad (i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ respectivement les modules de cisaillements et les coefficients de Poisson. A partir de ces constantes la matrice de souplesse du matériau orthotrope dans le repère d'orthotropie est alors (1.44) :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

Les constantes de rigidité (1.45) sont déduites en inversant la matrice de souplesse

$$\begin{cases} C_{11} = \dfrac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{22} = \dfrac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{33} = \dfrac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} = \dfrac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \dfrac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{13} = \dfrac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \dfrac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{23} = \dfrac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \dfrac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12} \\ \Delta = \dfrac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} & C_{44} = G_{23} \end{cases} \tag{1.45}$$

Les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson sont liés par la relation (1.46)

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.46}$$

1.4.3.2 Lois de comportement en-dehors du repère matériau

Un composite étant un assemblage avec une structure bien définie et possédant un repère matériau dans lequel son comportement élastique est bien connu ; lorsqu'il est

considéré dans un collectif (un sandwich, un stratifié qui est élaboré par couches successives dont la direction des fibres ou de chaîne est décalée d'une couche à une autre), il est alors nécessaire d'exprimer son comportement élastique dans le système de référence de la structure (collectif) avant toute étude faisant appel à la loi de Hooke. Considérant le cas des structures planes telles que les plaques et les poutres, le passage du repère matériau $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) = (1, 2, 3) = (L, T, T')$ au repère de référence de la structure $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = (x, y, z) = (1', 2', 3)$ est équivalent à une rotation d'un angle $-\theta$ autour de l'axe $(\vec{N}_3) = (3)$ du matériau comme le montre la figure (1.7) [76]. Rappelons que la loi de comportement dans le repère matériau du composite ici considéré orthotrope est donné par la formule (1.41)

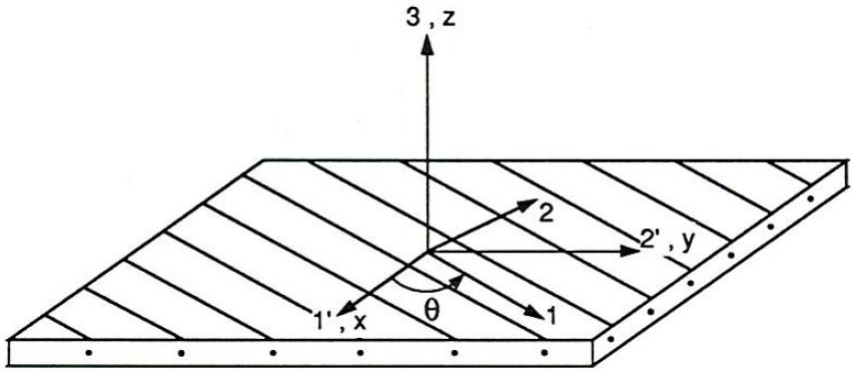


Figure 1.7 – Matériau : repère matériau et de référence de la structure

En appelant par C' la matrice de rigidité dans le repère de référence de la structure, on déduit l'expression de sa matrice de rigidité en fonction de celle du repère matériau par la formule (1.47) qui n'est valable que dans le cas particulier ainsi considéré.

$$C' = {}^t T_\varepsilon \, C \, T_\varepsilon \tag{1.47}$$

Aussi la loi de Hooke dans le repère de référence de la structure se traduit-elle par la suivante formule (1.48)

$$\sigma' = C' \varepsilon' \tag{1.48}$$

avec σ' et ε' respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations dans le repère de la structure. Dans l'équation (1.47), T_ε est la matrice de changement de base des

déformations dont l'expression est donnée par l'équation (1.49) :

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

1.4.3.3 Etat de contraintes planes

Les formules écrites jusqu'à présent font état d'un comportement en dimension trois (3D) des matériaux composites et sont applicables à la résolution d'un problème quelconque d'élasticité. Cependant pour des soucis de mémoires de calcul, et la rapidité des opérations à effectuer dans des calculs de modélisation surtout en élément finis, des formulations en contraintes planes sont utilisées. Dans ces cas, le problème de dimension trois (3D) est ramené à un problème de dimension deux (2D). Lorsqu'on considère un état de contraintes planes où la direction principale est la direction $(\vec{Z})$ correspondant à une valeur propre nulle, le tenseur des contraintes (formule 1.39) se réduit à :

$$\sigma = {}^t\{\sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{12}\} \tag{1.50}$$

les autres composantes étant considérées nulles. La loi de Hooke s'écrit alors dans le repère matériau :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

En réécrivant la loi de Hooke donnée par la formule (1.48) dans le repère de référence de la structure considérée sur la figure (1.7) dans l'état de contraintes planes considéré, on aboutit à la forme simple suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ 2\varepsilon'_{12} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

Dans la formule (1.51) les Q_{ij} sont donnés par les modules d'élasticité du matériau

$$\begin{cases} Q_{11} = \dfrac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \dfrac{E_L}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ Q_{22} = \dfrac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \dfrac{E_T}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} = \dfrac{E_T}{E_L}Q_{11} \\ Q_{12} = \dfrac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT}Q_{22} \\ Q_{66} = G_{LT} \end{cases} \tag{1.53}$$

alors que les Q'_{ij} sont liés aux Q_{ij} par les angles multiples de l'angle θ de rotation permettant le passage du repère de référence au repère d'orthotropie

$$\begin{cases} Q'_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 \\ Q'_{12} = (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 + Q_{12}(\cos^4\theta+\sin^4\theta) \\ Q'_{16} = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ Q'_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 \\ Q'_{26} = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ Q'_{66} = [Q_{11}+Q_{22}-2(Q_{12}+2Q_{66})](\sin\theta\cos\theta)^2 + Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta) \end{cases} \tag{1.54}$$

Lorsque le matériau composite orthotrope est considéré comme viscoélastique, la forme des modules d'élasticité du point de vue de l'ingénieur dans le repère matériau s'écrit comme suit [77, 78] :

$$\begin{cases} E_L^* = E_L(1 + i\eta_L(\omega)) \quad G_{LT}^* = G_{LT}(1 + i\eta_{LT}(\omega)) \\ \\ E_T^* = E_T(1 + i\eta_T(\omega)) \quad \nu_{LT}^* = \nu_{LT}(1 + i\eta_{\nu_{LT}}(\omega)) \end{cases} \tag{1.55}$$

Très souvent pour des raisons de simplicité, le coefficient de Poisson est considéré comme réel et constant ce qui revient à considérer comme nul le coefficient d'amortissement relatif au coefficient de Poisson $\eta_{\nu_{LT}}$. En admettant cette forme des modules de l'ingénieur pour les composites viscoélastiques, et en se plaçant dans les hypothèses de contraintes planes décrites précédemment, les Q_{ij} de la loi de comportement des composites orthotropes (équation 1.52) sont remplacés par leurs équivalents complexes Q_{ij}^* et généralement dépendants de la fréquence de vibration de la structure. L'équation (1.53) devient dans ce cas :

$$\begin{cases} Q_{11}^* = \dfrac{E_L^*}{1 - \nu_{LT}^*\nu_{TL}^*} = \dfrac{E_L^*}{1 - \frac{E_T^*}{E_L^*}(\nu_{LT}^*)^2} \\ \\ Q_{22}^* = \dfrac{E_T^*}{1 - \nu_{LT}^*\nu_{TL}^*} = \dfrac{E_T^*}{1 - \frac{E_T^*}{E_L^*}(\nu_{LT}^*)^2} = \dfrac{E_T^*}{E_L^*}Q_{11}^* \\ \\ Q_{12}^* = \dfrac{\nu_{LT}^* E_T^*}{1 - \nu_{LT}^*\nu_{TL}^*} = \nu_{LT}^* Q_{22}^* \\ \\ Q_{66}^* = G_{LT}^* \end{cases} \tag{1.56}$$

Les $Q_{ij}^{'}$ (équation 1.54) seront également remplacés par leurs équivalents complexes et dépendant de la fréquence $Q_{ij}^{'*}$ et dont les expressions en dehors du repère matériau sont données ci après (équation 1.57) :

$$\begin{cases} Q'^{*}_{11} = Q^{*}_{11}\cos^4\theta + Q^{*}_{22}\sin^4\theta + 2(Q^{*}_{12} + 2Q^{*}_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 \\ Q'^{*}_{12} = (Q^{*}_{11} + Q^{*}_{22} - 4Q^{*}_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 + Q^{*}_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ Q'^{*}_{16} = (Q^{*}_{11} - Q^{*}_{12} - 2Q^{*}_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q^{*}_{12} - Q^{*}_{22} + 2Q^{*}_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ Q'^{*}_{22} = Q^{*}_{11}\sin^4\theta + Q^{*}_{22}\cos^4\theta + 2(Q^{*}_{12} + 2Q^{*}_{66})(\sin\theta\cos\theta)^2 \\ Q'^{*}_{26} = (Q^{*}_{11} - Q^{*}_{12} - 2Q^{*}_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q^{*}_{12} - Q^{*}_{22} + 2Q^{*}_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ Q'^{*}_{66} = [Q^{*}_{11} + Q^{*}_{22} - 2(Q^{*}_{12} + 2Q^{*}_{66})](\sin\theta\cos\theta)^2 + Q^{*}_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{cases} \tag{1.57}$$

1.4.4 Matériaux composites pour l'amortissement passif : travaux existants

Avec le gros intérêt porté sur les matériaux composites, les études en vibration se sont peu à peu orientées vers des structures constituées de ces types de matériaux. Dans un premier temps des auteurs se sont intéressés à la modélisation des structures multicouches composites poutres et plaques tels que les stratifiés. Tous les matériaux possèdent un amortissement ; seulement que la valeur de cette capacité dissipative est très faible pour les matériaux métalliques pour être négligée. Cependant, cette capacité dissipative est quelque fois significative pour les matériaux composites pour être prise en compte en l'absence de matériau viscoélastique. Cette capacité est induite soit par le comportement viscoélastique de la matrice, la friction aux interfaces matrice-fibre soit par un endommagement. D'ailleurs cette capacité a attiré l'attention de plusieurs auteurs dans plusieurs travaux. D'autres auteurs ont considéré les effets de cette capacité dissipative des matériaux composites même en présence de matériau viscoélastique. On distingue deux types d'approches : les approches analytiques et les approches numériques.

1.4.4.1 Les approches analytiques

Se basant sur l'un des modèles cinématiques précités, des auteurs ont étudié à partir des approches analytiques, les comportements en vibration de structures sandwichs viscoélastiques contenant des couches en composites. Nous présentons dans ce qui suit quelques uns de ces travaux.

Adams et Bacon [79] ont développé une méthode basée sur le calcul des énergies totale et dissipée pour l'analyse de l'amortissement d'une structure composite. Dans leur approche qui est basée sur la théorie classique des stratifiés, ils considèrent que, pour un matériau composite poutre en flexion, l'énergie dissipée ($\Delta\mathcal{U}$) est la somme de trois dissipations ($\Delta\mathcal{U}_x$, $\Delta\mathcal{U}_y$, $\Delta\mathcal{U}_{xy}$) chacune relative à la contrainte σ_x, σ_y et σ_{xy}. L'amortissement est finalement estimé comme étant $\eta = \Delta\mathcal{U}/(2\pi\mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est l'énergie de flexion de la poutre. Elle sera améliorée et adaptée aux cas généraux de stratifiés symétriques par Ni et Adams [80] en introduisant les moments de flexions. Cette approche améliorée, appelée théorie de Ni et Adams fut étendue aux sandwichs à couches composites en fibre de carbone et verre [81] et fut par la suite utilisée par beaucoup d'autres auteurs dans l'estimation de l'amortissement des structures multicouches composites et sandwichs avec couche viscoélastique. C'est le cas de Yim et al. [82] qui ont étudié l'amortissement des structures poutres composites contenant une couche viscoélastique pour la condition aux limites encastré-libre. Ils ont montré dans leur étude que l'épaisseur de la couche viscoélastique et la longueur de la poutre ont une influence sur l'amortissement de la structure. Dix ans plutôt, Adams et Maheri [83] ont étudié l'effet de l'orientation sur l'amortissement des poutres composites en CFRP (Carbon-Fiber-Reinforced Polymer) et GRP (Glass-Reinforced Plastic). Ils ont montré la cohérence de leurs résultats par des tests expérimentaux. Yim [84] a étudié l'amortissement des stratifiés symétriques par la méthode de Adams et Bacon en utilisant la forme complexe du coefficient de Poisson qui est souvent considéré comme constant et réel dans beaucoup d'études. Son travail sera étendu à d'autres types de stratifiés par Yim et Jang [85] et par Yim et Gillespie [86] en incluant les effets de cisaillement pour les cas des stratifiés unidirectionnels croisés

[0°/90°].

Sun et al. [87] ont proposé un modèle de prédiction de propriétés modales des stratifiés en se basant sur le modèle classique des stratifiés combiné aux principes de correspondance élastique-viscoélastique de Hashin [88, 89] pour les matériaux composites (écriture en module complexe). Toutefois leur approche ne prend pas en compte les contraintes aux interfaces, en plus ils ne considèrent pas de vraies couches viscoélastiques mais seulement la faible capacité dissipative que possèdent les matériaux composites.

Berthelot et Sefrani [90] ont développé un modèle basé sur la méthode énergétique de Ritz pour décrire le comportement amortissant des plaques constituées de composites unidirectionnels. Dans leur travail, ils ont comparé leurs résultats à ceux obtenus en utilisant les approches de Adams-Bacon et Ni-Adams relevant par la même occasion l'incapacité de ces approches de prendre en compte l'épaisseur des poutres contrairement à la leur. Leur étude sera étendue à l'analyse des sandwichs de face en stratifiés par Berthelot [91]. Ils ont également montré l'influence de l'orientation des fibres sur les propriétés modales de ces structures à travers un calcul discret pour différents angles d'orientation des fibres. Cependant, ils n'ont proposé de solution que pour des conditions aux limites particulières. Li et Narita [92] ont récemment proposé une méthode pour généraliser ces conditions aux limites.

Meunier et Shenoi [93, 94] ont utilisé la théorie raffinée de déformation d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy pour étudier le comportement en vibration des sandwichs constitués de couches composites FRP (Fibre Reinforced Plastic). Avec cette cinématique ils assurent une distribution parabolique de la déformation dans l'épaisseur de la structure. Ils ont étendu cette étude analytique plus tard en considérant le cœur de la structure comme étant en PVC (Polychlorure de Vinyle) avec une dépendance en fréquence. L'équation du mouvement est obtenue par l'application du principe de Hamilton et la résolution de l'équation non linéaire aux valeurs propres obtenue se fait de manière itérative en considérant des valeurs expérimentales du module complexe du PVC pour différentes fréquences ce qui permet de ramener ce problème à une suite de problèmes linéaires plus faciles à résoudre.

Cupial et Niziol [64] ont développé une méthode analytique pour déterminer les fréquences amorties et l'amortissement des structures plaques rectangulaires trois couches en appui simple. La couche centrale est viscoélastique et les faces sont des stratifiés. Ils ont utilisé pour ce travail, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour les faces sans négliger les effets d'inertie pour obtenir une équation générale. Une simplification est en suite faite ramenant ainsi le modèle des faces à celui de Love-kirchhoff. Leurs résultats sont comparés avec succès à ceux obtenus par une modélisation en éléments finis de Johnson et al. [55] pour une plaque symétrique dont les couches de faces sont isotropes. Ils ont également réalisé une étude des propriétés modales (fréquence adimensionnelle et facteur de perte) en fonction d'un paramètre défini liant le module de cisaillement du cœur pour une plaque dont les faces sont en stratifié (0°/90°/0°). Dans tout leur travail, le cœur viscoélastique est considéré comme ayant un module de cisaillement complexe constant.

On rencontre également certains travaux portant sur les approches numériques et sont présentés dans la suite.

1.4.4.2 Les approches numériques

D'autres auteurs ont utilisé les approches numériques pour étudier les comportements en vibration des structures sandwichs viscoélastiques dont les couches comportent des matériaux composites dont voici quelques exemples.

Rikards [95] a conçu un super-élément du type poutre/poutre/poutre pour une poutre sandwich et plaque/plaque/plaque pour une plaque sandwich. Basés sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, ces éléments ont quatre nœuds pour les poutres et six nœuds pour les plaques ; de plus, chaque nœud possède six degrés de liberté (les déplacements et les rotations). Il a utilisé ces éléments pour modéliser le comportement en vibration des structures dont les couches sont en stratifiés [95, 96].

Zhang et Chen [97] ont utilisé la méthode MSE (modal strain energy) pour étudier les propriétés modales des stratifiés composites poutres contenant des couches viscoélastiques. Le modèle utilisé est du type volume/volume/volume avec un élément hexaédrique

SOLID46 possédant huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (w, u, v), ils ont couplé une méthode itérative basée sur la dite méthode MSE pour prendre en compte la dépendance en fréquence de la couche viscoélastique. Ils ont également étudié la variation des propriétés modales de ces structures en fonction du positionnement des fibres des stratifiés toujours par des calculs discrets pour diverses orientations.

Le Maôut et al. [98] ont proposé un outil d'optimisation de l'amortissement pour des structures plaques sandwichs constituées de couches en matériau composite et de couches viscoélastiques. Ils ont joué sur la séquence d'empilement et le nombre de couches pour cette optimisation. Leur méthode consiste à minimiser la fonction $f = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_j\right)^{-1}$ avec N le nombre de fréquence amorties comprise dans [1Hz, 1000Hz] et η_j les amortissements correspondant à ces fréquences amorties. A cette fonction, ils ont ajouté des contraintes sur la masse de la structure, des contraintes de déplacement dans les trois directions pour un chargement en statique de la structure. Pour calculer les fréquences propres non amorties, ils ont utilisé un modèle du type volume/volume/volume avec l'élément hexaédrique à huit nœuds C3D8I, l'amortissement est en suite calculé par la méthode MSE et l'optimisation est réalisée par un code Matlab.

Arvin et al. [99] ont utilisé une théorie d'ordre supérieur pour les structures poutres sandwichs trois couches à cœur viscoélastique et dont les faces sont en matériau composite. Dans leur approche, ils ont considéré un déplacement transversal différent pour les faces et une distribution linéaire dans l'épaisseur pour le cœur. L'écriture des conditions de continuité aux interfaces leur a permis de ramener le problème dans les plans médians des couches des faces. L'équation de mouvement est obtenue par le principe de Hamilton dans lequel les énergies de rotation d'inertie ainsi que l'énergie cinétique dans le cœur viscoélastique sont considérées. Ils ont étudié les effets des paramètres tels que l'orientation des fibres des faces et les épaisseurs des couches sur les propriétés modales de la structure par un calcul itératif incrémental sur ces paramètres en considérant le module du cœur viscoélastique comme complexe constant. Le modèle utilisé est du type poutre/poutre/poutre avec un élément fini linéique à deux nœuds, chacun ayant trois degrés de liberté par nœuds, (w_1, φ_1, u_1) pour la face supérieure et (w_3, φ_3, u_3) pour la

face inférieure.

Moita et al. [100] ont construit un élément triangulaire, en appliquant la théorie de Reissner-Mindlin pour le cœur et la théorie de Love-Kircchoff pour les faces de la structure sandwich viscoélastique. Cet élément comportant trois nœuds et huit degrés de liberté par nœud (w, u, v, $w_{,x}$, $w_{,y}$, β_x, β_y, β_z) est utilisé pour la modélisation des propriétés modales des structures sandwichs à cœur viscoélastique et dont les faces sont en matériau composite et piézoélectriques (les faces externes). Ils ont proposé une nouvelle version de cet élément en utilisant cette fois ci la théorie de déformation de cisaillement d'ordre trois de Reddy pour la couche viscoélastique [101].

Carrera a proposé un modèle élément finis du type zig-zag du premier ordre consistant en une superposition de la cinématique de Reissner-Mindlin et des fonctions zig-zag. Il a construit un élément quadrilatère à neufs nœuds possédant sept degrés de liberté par nœud et de continuité "C_z^0 -requirements". Cet élément d'abord appliqué pour des structures multicouches composites [37, 102, 103] sera par la suite utilisé pour la modélisation en vibration des structures sandwichs à cœur viscoélastique [77].

Des travaux concernant l'étude en dynamique et en statique des contraintes, des déformations des structures composites ont également fait l'objet de plusieurs thèses de doctorat dont voici quelques exemples [104, 105, 106, 107].

1.5 Conclusion : Motivations et objectifs de la thèse

L'amortissement passif est un moyen très efficace pour amortir les vibrations et dissiper les énergies acoustiques dans les infrastructures. Le pouvoir amortissant d'une structure sandwich viscoélastique dépend de ces propriétés modales qui sont généralement estimées à travers une modélisation numérique ou par des essais expérimentaux. Récemment encore, les structures sandwichs viscoélastiques sont conçues avec des matériaux isotropes. Pour augmenter le pouvoir amortissant de ces structures, il est alors nécessaire d'augmenter l'épaisseur de la couche viscoélastique ce qui équivaut à augmenter la masse de cette structure. Or, des besoins d'avoir des structures sandwichs viscoélastiques à haut pou-

voir amortissant pour de faible masse deviennent des soucis majeurs dans les industries d'aujourd'hui. Pour cela, des matériaux composites qui sont souvent plus légers et plus résistants sont utilisés en lieu et place des matériaux isotropes. Par ailleurs, les études ont montré que ces matériaux composites offrent également la possibilité d'un pouvoir amortissant optimal des structures sandwichs viscoélastiques en jouant sur leur positionnement par rapport à la structure globale et même pour de faible épaisseur des couches.

Nous avons montré les difficultés rencontrés pour la modélisation en vibration des structures sandwichs à base de matériaux isotropes. Ces difficultés sont plus importantes dans le cas où les matériaux composites sont utilisés puisque ces derniers présentent une forte anisotropie dans leur loi de comportement. Dans les travaux déjà existants à cet effet, on note des difficultés de résolution du problème aux valeurs propres complexes obtenus pour la détermination de manière précise des propriétés modales de ces structures. De plus il n'existe pas encore une méthode pour étudier de manière continue les effets de l'orientation des composites dans la structure ou des épaisseurs des couches sur les propriétés modales de cette dernière. Des auteurs qui ont tenté de montrer les effets de ces paramètres de conception ont fait des calculs itératifs pour des valeurs particulières, ce qui non seulement ne montre pas ce qui se passe pour les autres valeurs mais nécessite un temps de calcul assez considérable.

Aussi nous proposons dans cette thèse, un code générique numérique de détermination de propriétés modales des structures plaques sandwichs viscoélastiques dont les couches sont en matériaux composites orthotropes. Basé sur une modélisation par éléments finis, le problème aux valeurs propres non linéaires complexes sera résolu de manière quasi-exacte par la technique de l'homotopie couplé à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et de façon automatique en utilisant les outils de différentiation automatiques "*diamant*".

Ensuite nous allons proposer une méthode générique de résolution de problèmes résiduels aux valeurs propres non linéaires complexes dépendant de la fréquence et d'un autre paramètre de conception des structures sandwichs viscoélastiques. La forme générale du

problème résiduel est :

$$\mathfrak{R}\left(U,\omega,p\right)=\left[K\left(\omega,p\right)-\omega^{2}M\left(p\right)\right]U=0\quad p\in I_{e} \tag{1.58}$$

où I_e est un intervalle de valeurs réelles constituant un intervalle d'étude.

Nous allons proposer par la suite une formulation permettant d'étudier de manière continue et précise les effets du positionnement des matériaux composites classiques (les matériaux composites unidirectionnels et les stratifiés tels que les stratifiés antisymétriques, les stratifiés croisés symétriques et antisymétriques) dans la structure globale du sandwich sur ces propriétés amortissantes. Une formulation similaire sera faite pour étudier cette fois-ci les effets de la variation des épaisseurs des couches du sandwich sur ces propriétés amortissantes. Pour ces deux formulations, les paramètres de modélisation sont respectivement l'angle d'orientation et l'épaisseur des couches. Les problèmes résiduels aux valeurs propres non linéaires complexes résolus pour la détermination des propriétés modales sont sous la forme (équation 1.58) dont la résolution constitue des tests d'application de la nouvelle méthode de résolution.

Chapitre 2

Modélisation des vibrations propres de structures composites viscoélastiques à couches orthotropes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un code numérique générique pour le calcul des propriétés modales des plaques sandwichs composites à cœur viscoélastique. Basé sur une modélisation par la méthode des éléments finis de type zig-zag avec la continuité des champs de déplacement aux interfaces des couches, ce code prend en compte l'anisotropie des matériaux composites et n'importe quelles lois de dépendance en fréquence de la couche viscoélastique. La résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes est faite de manière automatique par la technique de l'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN) et à la différentiation automatique (DA) [74].

2.2 Formulation éléments finis du problème

Le problème considéré est le calcul des propriétés modales des plaques sandwichs composites symétriques dont la couche centrale est viscoélastique ayant un comportement

dépendant de la fréquence et dont les des faces sont élastiques. Pour pouvoir modéliser le comportement vibratoire d'une large gamme de sandwichs plaques à cœur viscoélastique, les faces sont considérées élastiques composites et caractérisées par la loi de comportement des matériaux orthotropes tandis que la couche centrale ou âme plus souple est caractérisée par une loi viscoélastique orthotrope. Le sandwich ainsi considéré est symétrique avec un nombre impaire de couches. Ce nombre de couches sera trois lorsque les faces sont faites par une couche orthotrope ou unidirectionnelle. Dans le cas où les faces sont élaborées par un stratifié, chaque sous couche du stratifié sera considérée comme une couche pour le sandwich. Un exemple de structure plaque sandwich multicouche est présentée sur la figure où les faces sont en stratifié (2.1)

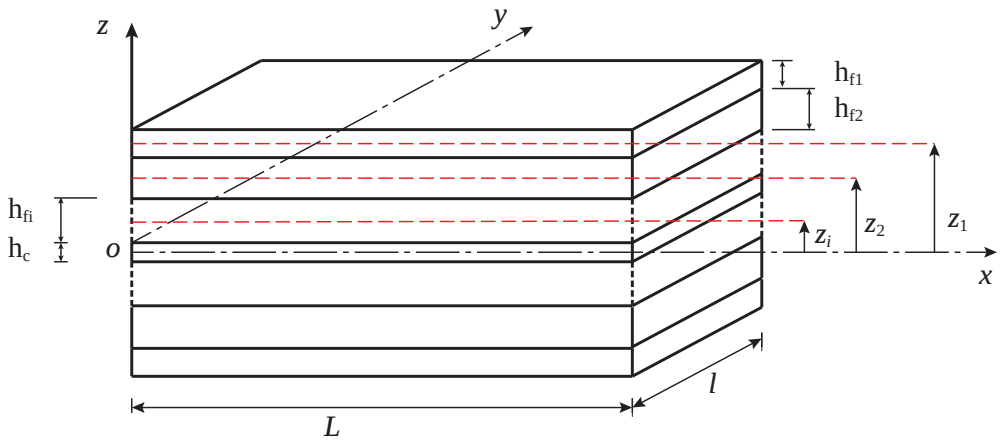


Figure 2.1 – Plaque sandwich multicouche (représentation des dimensions et des plans moyens)

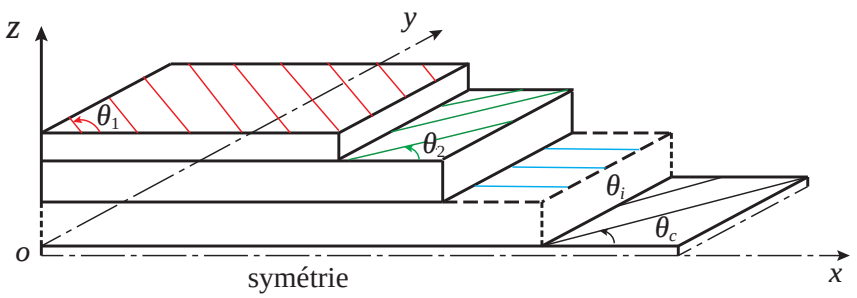


Figure 2.2 – Plaque sandwich multicouche (représentation des angles d'orientation des couches)

2.2.1 Modèle cinématique et tenseurs de déformation

Considérons la structure plaque rectangulaire dans le système de référence de la structure (o, x, y, z) de telle sorte que le plan (o, x, y) soit le plan moyen de la couche centrale viscoélastique (figure 2.1). La longueur de la plaque est notée L, l sa largeur et h_t son épaisseur totale. Le nombre de couches de la plaque est $N = 2n + 1, \quad n \geq 1$. Les couches de la structure sont numérotées du haut vers le bas. L'épaisseur de la couche viscoélastique est notée h_c ; celle d'une couche i des faces est notée h_{fi}. Le passage du repère matériau au repère de référence de la structure pour chaque couche est relatif à une rotation dans le plan (o, x, y) d'un angle θ_i. L'angle de rotation de la couche viscoélastique est par contre notée θ_c(figure 2.2). L'analyse vibratoire en flexion est menée pour cette structure en adoptant un modèle couche discrète zig-zag. Nous donnons à titre d'exemple le schéma cinématique d'un cas simple concernant une plaque sandwich viscoélastique à cinq couches (figures 2.3).

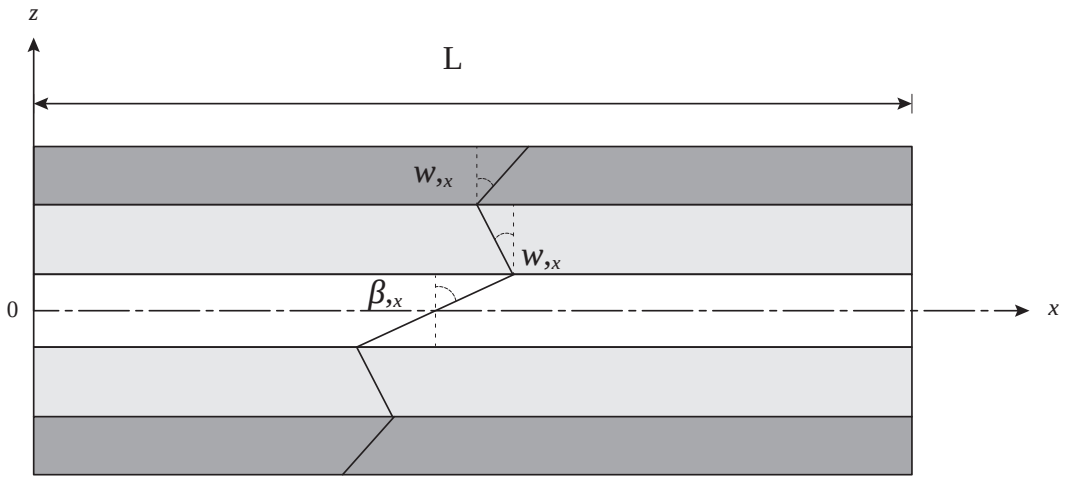


Figure 2.3 – Schéma cinématique d'une plaque sandwich viscoélastique cinq couches

Dans cette analyse, la théorie de Love-Kirchhoff [24] est appliquée aux couches élastiques orthotropes des faces et la théorie de Mindlin-Reissner [60, 61] pour la couche viscoélastique orthotrope du cœur ou âme. Ces théories sont appliquées en admettant les hypothèses suivantes communes à plusieurs auteurs[56, 58, 64]

— tous les points sur une normale au plan moyen de la plaque ont le même déplacement transverse ;

— tous les points sur une normale au plan moyen des couches élastiques ont la même rotation

— la continuité du champ de déplacement aux interfaces est requise en admettant que toutes les couches du sandwich sont parfaitement collées entre elles ;

— la contrainte normale transverse dans la direction $(o,\, z)$ est très faible comparativement aux contraintes normales dans les directions $(o,\, x)$ et $(o,\, y)$;

— la déformation de cisaillement est prise en compte dans la couche centrale viscoélastique, mais ignorée dans les couches élastiques constituant les faces ;

— les effets d'inertie plane et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transverse pour l'étude en flexion ;

— les matériaux constitutifs de la plaque sandwich sont supposés homogènes, orthotropes, linéaires pour les faces et viscoélastique orthotrope et non vieillissant pour la couche du cœur.

— les coefficients de Poisson des matériaux sont supposés constants.

Avec ces hypothèses et ce champ cinématique choisi, le champ de déplacement s'écrit pour les couches élastiques orthotropes des faces :

$$\begin{cases} U_i(x,y,z,t) = u_i(x,y,t) - (z-z_i)\, w_{,x}\,(x,y,t) & \\ V_i(x,y,z,t) = v_i(x,y,t) - (z-z_i)\, w_{,y}\,(x,y,t) \quad i = 1,2,...,n,n+2, & \\ W_i(x,y,z,t) = w(x,y,t) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad n+3,...,2n+1 & \end{cases} \tag{2.1}$$

et pour la couche viscoélastique du cœur

$$\begin{cases} U_i(x,y,z,t) = u(x,y,t) + (z-z_i)\beta_x(x,y,t) & \\ V_i(x,y,z,t) = v(x,y,t) + (z-z_i)\beta_y(x,y,t) \quad i = n+1 & \\ W_i(x,y,z,t) = w(x,y,t) & \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans l'équation (2.1), les u_i, v_i représentent respectivement les déplacements longitudinaux suivant les directions $(o,\, x)$ et $(o,\, y)$ du plan moyen de la couche i de la structure de

côte z_i dans la référence (o, x, y, z) . De même pour l'équation (2.2), les u, v représentent respectivement les déplacements longitudinaux suivant les directions $(o,\ x)$ et $(o,\ y)$ du plan moyen de la couche viscoélastique et β_x et β_y respectivement les rotations autour des axes $(o,\ x)$ et $(o,\ y)$. w est le déplacement transversal commun à toutes les couches. Dans cette référence les plans moyens des couches sont côtés comme suit (équation 2.3) :

$$\begin{cases} z_i = \dfrac{h_c + h_{fi}}{2} + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} \\ z_{2n+2-i} = -z_i \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n \\ z_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Les champs de déformation $\{\xi_i\}$ dans les couches des faces s'écrivent en fonction des tenseurs de déformation linéaire en flexion $\{\kappa\}$ et de déformation linéaire en membrane $\{\Gamma_i\}$:

$$\begin{cases} \{\xi_i\} = \{\Gamma_i\} + (z - z_i)\{\kappa\} \\ \{\Gamma_i\} =^t \{u_{i,x} \quad v_{i,y} \quad u_{i,y} + v_{i,x}\} \qquad i = 1, 2, ..., n, n+2, \\ \{\kappa\} =^t \{-w_{,xx} \quad -w_{,yy} \quad -2w_{,xy}\} \qquad n+3, ..., 2n+1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Dans la couche viscoélastique nous avons comme champ de déplacement :

$$\begin{cases} \{\xi_c\} = \{\Gamma_c\} + (z - z_i)\{\kappa_c\} \\ \{\Gamma_c\} =^t \{u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x}\} \qquad i = n+1 \\ \{\kappa_c\} =^t \{\beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x}\} \end{cases} \tag{2.5}$$

Avec $\{\xi_c\}$, $\{\Gamma_c\}$ et $\{\kappa_c\}$ respectivement champ de déformation , tenseur de déformation linéaire en flexion et tenseur de déformation linéaire en membrane dans la couche viscoélastique. Le champ de cisaillement dans le cœur a pour expression :

$$\{\zeta_c\} =^t \{w_{,x} + \beta_x \quad w_{,y} + \beta_y\} \tag{2.6}$$

Dans cette modélisation, la continuité du champ de déplacement est assurée aux interfaces des couches pour avoir une meilleure approximation des champs de déplacement dans la structure. Cette continuité se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_i(x,y,Z_{int_i},t) = U_{i+1}(x,y,Z_{int_i},t) & i = 1,2,...,2n \\ V_i(x,y,Z_{int_i},t) = V_{i+1}(x,y,Z_{int_i},t) & i = 1,2,...,2n \\ Z_{int_i} = z_i - \dfrac{hf_i}{2} & i = 1,2,...,n \\ Z_{int_i} = z_i - \dfrac{h_c}{2} & i = n+1 \\ Z_{int_i} = z_i + \dfrac{hf_i}{2} & i = n+2, n+3, ..., 2n \end{cases} \tag{2.7}$$

où les Z_{int_i} sont les côtes des interfaces qui sont également numérotés du haut vers le bas. Les faces libres des couches externes (couche 1 et couche $2n+1$) ne sont pas considérées. En mettant les égalités du système (2.7) dans les équations (2.1) , et (2.2), on obtient le système d'équations de continuité aux interfaces suivant :

$$\begin{cases} u_i = u - (z_i - \dfrac{h_c}{2})w_{,x} + \dfrac{h_c}{2}\beta_x & \\ v_i = v - (z_i - \dfrac{h_c}{2})w_{,y} + \dfrac{h_c}{2}\beta_y & i = 1,2,...,n \\ u_k = u - (\dfrac{h_c}{2} + z_k)w_{,x} - \dfrac{h_c}{2}\beta_x & \\ v_k = v - (\dfrac{h_c}{2} + z_k)w_{,y} - \dfrac{h_c}{2}\beta_y & k = n+2, n+3, ..., 2n+1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Cette continuité (système 2.8) se traduit du point de vue des tenseurs de déformation par la relation suivante (système 2.9) :

$$\begin{cases} \{\Gamma_i\} = \{\Gamma_c\} + (z_i - \dfrac{h_c}{2})\{\kappa\} + \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\} & i = 1,2,...,n \\ \{\Gamma_i\} = \{\Gamma_c\} + (z_i + \dfrac{h_c}{2})\{\kappa\} - \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\} & i = n+2, n+3, ..., 2n+1 \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2.2 Loi de Hooke généralisée

2.2.2.1 Pour les couches élastiques des faces

La loi de Hooke (Chapitre 1) appliquée dans le repère de référence de la structure (o, x, y, z) à chaque couche des faces permet de calculer des matrices $Q_i^{'}$ en fonction des angles θ_i des couches i. A partir de ces matrices $Q_i^{'}$ (équation 1.54), on définit les matrices de comportement en membrane $C_m^i(\theta_i)$ et en flexion $C_f^i(\theta_i)$ des couches des faces par la relation :

$$\begin{cases} C_m^i(\theta_i) = h_{fi} Q_i^{'} \\ C_f^i(\theta_i) = \dfrac{h_{fi}^2}{12} C_m^i(\theta_i) \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2.2.2 Pour la couche viscoélastique

Les matrices de comportement en membrane et en flexion de la couche viscoélastique sont obtenues à partir des matrices de module complexe dépendant de la fréquence $Q_c^{'*}$ déjà exprimées par l'équation (1.57)

$$\begin{cases} C_m^*(\theta_c, \omega) = h_c Q_c^{'*} \\ C_f^*(\theta_c, \omega) = \dfrac{h_c^2}{12} C_m^*(\theta_c, \omega) \end{cases} \tag{2.11}$$

La matrice de comportement en membrane peut être réécrite en fonction des modules de Young E_{xxc}^*, et de cisaillement G_{xyc}^* :

$$C_m^*(\theta_c, \omega) = h_c \left((q_1 + q_2 + q_3)(\theta_c) E_{xxc}^*(\omega) + q_4(\theta_c) G_{xyc}^*(\omega) \right) \tag{2.12}$$

celle de comportement en flexion devient alors :

$$C_f^*(\theta_c, \omega) = \frac{h_c^3}{12} \left((q_1 + q_2 + q_3)(\theta_c) E_{xxc}^*(\omega) + q_4(\theta_c) G_{xyc}^*(\omega) \right) \tag{2.13}$$

où les matrices $q_i, \quad i = 1, 2, .., 4$ traduisent la rotation ou le passage du repère matériau au repère de référence de la structure et sont exprimées comme suit :

$$q_1(\theta_c) = \frac{1}{1 - \nu_{xyc}\nu_{yxc}} \begin{bmatrix} \cos^4\theta_c & \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c & \sin\theta_c \cos^3\theta_c \\ \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c & \sin^4\theta_c & \sin^3\theta_c \cos\theta_c \\ \sin\theta_c \cos^3\theta_c & \sin^3\theta_c \cos\theta_c & \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$q_2(\theta_c) = \frac{\nu_{yxc}}{1 - \nu_{xyc}\nu_{yxc}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin^2 2\theta_c & \cos^4\theta_c + \sin^4\theta_c & -\frac{1}{2}\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c \\ \cos^4\theta_c + \sin^4\theta_c & \frac{1}{2}\sin^2 2\theta_c & \frac{1}{2}\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c & \frac{1}{2}\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c & -\frac{1}{2}\sin^2 2\theta_c \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$q_3(\theta_c) = \frac{\nu_{yxc}}{\nu_{xyc}} \frac{1}{1 - \nu_{xyc}\nu_{yxc}} \begin{bmatrix} \sin^4\theta_c & \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c & -\sin^3\theta_c \cos\theta_c \\ \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c & \cos^4\theta_c & -\sin\theta_c \cos^3\theta_c \\ -\sin^3\theta_c \cos\theta_c & -\sin\theta_c \cos^3\theta_c & \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_c \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$q_4(\theta_c) = \begin{bmatrix} \sin^2 2\theta_c & -\sin^2 2\theta_c & -\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c \\ -\sin^2 2\theta_c & \sin^2 2\theta_c & \sin 2\theta_c \cos 2\theta_c \\ -\sin 2\theta_c \cos 2\theta_c & \sin 2\theta_c \cos 2\theta_c & \cos^2 2\theta_c - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta_c \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

La matrice de comportement en cisaillement C_s^* s'exprime en fonction des matrices de modules complexes $Q_s'^*$ qui eux même sont fonctions des modules de cisaillement G_{xzc}^*, G_{yzc}^* et de l'épaisseur de la couche viscoélastique h_c comme le montrent les équations (2.18 et 2.19)

$$\begin{cases} Q'^*_{s44} = G^*_{xzc}\cos^2\theta_c + G^*_{yzc}\sin^2\theta_c \\ Q'^*_{s45} = \left(G^*_{yzc} - G^*_{xzc}\right)\cos\theta_c \sin\theta_c \\ Q'^*_{s55} = G^*_{xzc}\sin^2\theta_c + G^*_{yzc}\cos^2\theta_c \end{cases} \tag{2.18}$$

$$C_s^*(\theta_c\omega) = h_c \begin{bmatrix} Q'^*_{s44} & Q'^*_{s45} \\ Q'^*_{s45} & Q'^*_{s55} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Cette matrice de comportement en cisaillement $C_s^*(\theta_c, \omega)$ est décomposable en deux par-

ties :

$$\begin{cases} C_s^*(\theta_c,\omega) = h_c\left(q_s(-\theta_c)G_{xzc}^*(\omega) + q_s(\theta_c)G_{yzc}^*(\omega)\right) \\ q_s(\theta_c) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_c & \cos\theta_c\sin\theta_c \\ \cos\theta_c\sin\theta_c & \sin^2\theta_c \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.20}$$

Les décompositions des équations (2.12 et 2.20) sont très utiles en ce sens qu'elles permettent d'éviter la différentiation d'ordre élevé des matrices de grande taille avec une dépendance en fréquence assurant ainsi le gain d'espace mémoire et de temps de calcul au cours de la résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes obtenus par cette modélisation.

2.2.2.3 Efforts normaux, moments fléchissants et effort tranchant

La connaissance des matrices de comportement en membrane et en flexion des différentes couches permet de définir les efforts normaux (N_i) et moments fléchissants (M_i) de ces diverses couches. Pour les couches élastiques des faces nous avons :

$$\begin{cases} \{N_i\} = {}^t\{N_{ixx} \quad N_{iyy} \quad N_{ixy}\} = [C_m^i(\theta_i)]\{\Gamma_i\} \quad i \neq n+1 \\ \{M_i\} = {}^t\{M_{ixx} \quad M_{iyy} \quad M_{ixy}\} = \left[C_f^i(\theta_i)\right]\{\kappa\} \end{cases} \tag{2.21}$$

Et pour la couche centrale viscoélastique supposée orthotrope linéaire et non vieillissante, les modules d'élasticités correspondant sont des quantités complexes et dépendant de la fréquence. Dans ce cas, les lois de comportement définissant les efforts (normal et tranchant) et le moment fléchissant dans la couche centrale s'écrivent en termes de produit de convolution qui peut être ramené dans l'espace de Laplace et de Carson pour ressortir la dépendance en fréquence. L'effort normal et le moment fléchissant s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \{N_c\} = {}^t\{N_{xxc} \quad N_{yyc} \quad N_{xyc}\} = [C_m^*(\theta_c,\omega)]\{\Gamma_c\} \\ \{M_c\} = {}^t\{M_{xxc} \quad M_{yyc} \quad M_{xyc}\} = \left[C_f^*(\theta_c,\omega)\right]\{\kappa_c\} \end{cases} \tag{2.22}$$

L'effort tranchant Q_c de la structure due uniquement au cisaillement dans la couche viscoélastique s'écrit :

$$\{Q_c\} = {}^t \{Q_{xzc} \quad Q_{yzc}\} = [C_s^*(\theta_c, \omega)] \{\zeta_c\} \tag{2.23}$$

2.2.3 Equation du mouvement

L'équation du mouvement de vibration libre de la plaque multicouche viscoélastique considérée est obtenue en appliquant le principe des puissances virtuelles. L'application du principe des puissances virtuelles à la structure est équivalente à une sommation des puissances virtuelles associées à chaque couche de la structure prise isolément. Ceci se traduit par les formules de l'équation (2.24) :

$$\begin{cases} \delta P_{acc} = \delta P_{int} + \delta P_{ext} \\ \\ \delta P_{acc} = \int\int_s \left(\rho_c h_c + 2 \sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi} \right) \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \delta\omega ds \\ \\ \delta P_{int} = -\int\int_s \left({}^t \{N_c\} \{\delta\Gamma_c\} + {}^t \{M_c\} \{\delta\kappa_c\} + {}^t \{Q_c\} \{\delta\zeta_c\} \right) ds \\ \qquad\qquad -\int\int_s \left(\sum_{i \neq n+1} {}^t \{N_i\} \{\delta\Gamma_i\} + {}^t \{M_i\} \{\delta\kappa\} \right) ds \\ \\ \delta P_{ext} = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

avec ρ_c la masse volumique du cœur et ρ_{fi} celle de la couche i, δP_{int}, δP_{ext}, δP_{acc} les puissances virtuelles respectivement des efforts intérieurs, extérieurs et d'inertie. En remplaçant les expressions des $\{\delta\Gamma_i\}$ obtenues à partir des équations de continuité aux interfaces (2.9) dans l'expression de δP_{int} (équation 2.24), on réécrit l'expression de la puissance

virtuelle intérieure δP_{int} sous la forme :

$$\delta P_{int} = -\int\int_s \left({}^t\{N\}\{\delta\Gamma_c\} + {}^t\{M_\beta\}\{\delta\kappa_c\} + {}^t\{M_w\}\{\delta\kappa\} + {}^t\{Q_c\}\{\delta\zeta_c\} \right) ds \tag{2.25}$$

Avec :

$$\begin{cases} \{N\} = \{N_c\} + \sum\limits_{i\neq n+1} \{N_i\} \\ \{M_\beta\} = \{M_c\} + \dfrac{h_c}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\{N_i\} - \{N_{2n+2-i}\} \right) \\ \{M_w\} = \sum\limits_{i\neq n+1} \{M_i\} + \sum\limits_{i=1}^{n} (z_i - \dfrac{h_c}{2}) \left(\{N_i\} - \{N_{2n+2-i}\} \right) \end{cases} \tag{2.26}$$

En mettant l'équation (2.9) dans l'équation des efforts normaux (2.21), on détermine la différence d'effort normaux de l'équation (2.26), soit :

$$\left(\{N_i\} - \{N_{2n+2-i}\} \right) = 2\left[C_m^i(\theta_i) \right] \left((z_i - \frac{h_c}{2})\{\kappa\} + \frac{h_c}{2}\{\kappa_c\} \right), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.27}$$

Avec ces transformations, les déplacements généralisés sont ramenés dans la couche centrale viscoélastique orthotrope à l'aide de cinq fonctions indépendantes $\{u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_y\}$ et l'équation du mouvement (2.24) devient :

$$\begin{aligned} \int\int_s \left(\rho_c h_c + 2\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \delta\omega ds = &-\int\int_s \left({}^t\{N\}\{\delta\Gamma_c\} \right) ds \\ &- \int\int_s \left({}^t\{M_\beta\}\{\delta\kappa_c\} + {}^t\{M_w\}\{\delta\kappa\} + {}^t\{Q_c\}\{\delta\zeta_c\} \right) ds \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dans cette équation du mouvement (2.28) l'effort normal ($\{N\}$) et tranchant ($\{Q_c\}$) et les moments fléchissants ($\{M_\beta\}$ et $\{M_w\}$) (équation 2.26) sont définis par :

$$\begin{cases} \{N\} = \{N_c\} + \sum\limits_{i\neq n+1} \{N_i\} \\ \{M_\beta\} = \{M_c\} + \dfrac{h_c}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(2\left[C_m^i \right] \left((z_i - \dfrac{h_c}{2})\{\kappa\} + \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\} \right) \right) \\ \{M_w\} = \sum\limits_{i\neq n+1} \{M_i\} + \sum\limits_{i=1}^{n} (z_i - \dfrac{h_c}{2}) \left(2\left[C_m^i \right] \left((z_i - \dfrac{h_c}{2})\{\kappa\} + \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\} \right) \right) \end{cases} \tag{2.29}$$

Cette équation (2.28) décrit un couplage entre le mouvement membranaire et le mouvement de flexion. Grâce à la symétrie de la structure, l'équation (2.28) peut être découplée en une équation d'équilibre dans le plan à travers laquelle on peut déterminer les déplacements longitudinaux $\{u,\ v\}$ en résolvant l'équation (2.30) :

$$\int\int_s \left({}^t\{N\}\{\delta\Gamma_c\}\right) ds = 0 \tag{2.30}$$

et une équation du mouvement de flexion

$$\begin{aligned}\int\int_s \left(\rho_c h_c + 2\sum_{i=1}^{n}\rho_{fi}h_{fi}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\delta\omega ds = &-\int\int_s \left({}^t\{M_\beta\}\{\delta\kappa_c\}\right) ds \\ &-\int\int_s \left({}^t\{M_w\}\{\delta\kappa\} + {}^t\{Q_c\}\{\delta\zeta_c\}\right) ds\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.2.4 Discrétisation par éléments finis

Puisque nous nous intéressons uniquement aux propriétés modales (fréquences amorties et amortissements) de la structure, seule l'équation de mouvement de flexion (2.31) sera discrétisée. Les fonctions de déplacement transversal et de rotation $\{w,\ \beta_x,\ \beta_y\}$ sont alors cherchées sous la forme harmonique comme suit :

$$\begin{cases} w(x,y,t) = W(x,y)e^{i\omega t} \\ \beta_x(x,y,t) = B_x(x,y)e^{i\omega t} \\ \beta_y(x,y,t) = B_y(x,y)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{2.32}$$

La discrétisation de l'équation du mouvement de flexion (2.31) est faite à l'aide de la méthode des éléments finis avec un élément quadrangulaire à quatre nœuds et nécessitant seulement l'interpolation de cinq degrés de liberté en chacun de ces nœuds à savoir :

— Le déplacement transversal w

— Les pentes $w_{,x}$ et $w_{,y}$

— Les rotations β_x, et β_y

Ainsi pour chaque élément formé par les nœuds $k = 1, 2, 3, 4$, le vecteur élémentaire des déplacements modaux s'écrit :

$$\{U^e\} = {}^t \{W_k \;\; W_{,xk} \;\; W_{,yk} \;\; B_{xk} \;\; B_{yk}\} \tag{2.33}$$

Chaque élément possède donc 4×5 degrés de liberté et le vecteur élémentaire des déplacements modaux est de dimension 20×1. Le déplacement transversal W ainsi que les rotations B_x, et B_y sont interpolés sur chaque élément en utilisant les matrices $[N_w]$, $[N_{\beta x}]$, et $[N_{\beta y}]$ qui sont des matrices 1×20 contenant les fonctions de forme bidimensionnelle classiques de degré quatre pour le déplacement transversal et de degré deux pour les rotations. Le vecteur des déplacements pour chaque élément s'écrit alors sous la forme :

$${}^t \{W \;\; B_x \;\; B_y\} = {}^t [N_w \;\; N_{\beta x} \;\; N_{\beta y}] \{U^e\} \tag{2.34}$$

En introduisant l'équation (2.34) dans l'équation du mouvement de flexion (2.31), on obtient le problème élémentaire aux valeurs propres suivant :

$$\left[K^e(\omega) - \omega^2 M^e\right] \{U^e\} = 0 \tag{2.35}$$

où $[M^e]$ est la matrice de masse élémentaire qui est définie par :

$$[M^e] = \int\int_{s_e} \left(\rho_c h_c + 2 \sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi}\right) {}^t [N_w] \, [N_w] \, ds \tag{2.36}$$

et $[K^e(\omega)]$ la matrice de rigidité élémentaire dépendant de la fréquence et définie par :

$$
\begin{aligned}
[K^e(\omega)] = & \int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[C_f^*(\theta_c,\omega) + 2\left(\frac{h_c}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C_m^i(\theta_i) \right] [N_f] \right) ds \\
& + 2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(C_f^i(\theta_i) + (z_i - \frac{h_c}{2})^2 C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds \\
& + 2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_f] \right) ds \\
& + 2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds \\
& + \int\int_{s_e} \left({}^t[N_s] [C_s^*(\theta_c,\omega)] [N_s] \right) ds
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

s_e désigne l'aire de la section plane élémentaire. Les matrices $[N_{wf}]$, $[N_f]$, et $[N_s]$ sont des combinaisons des fonctions de forme $[N_w]$, $[N_{\beta x}]$, et $[N_{\beta y}]$ [1] :

$$
[N_{wf}] = \begin{bmatrix} -N_{w,xx} \\ -N_{w,yy} \\ -2N_{w,xy} \end{bmatrix} \quad [N_f] = \begin{bmatrix} N_{\beta x,x} \\ N_{\beta y,y} \\ N_{\beta x,y} + N_{\beta y,x} \end{bmatrix} \quad [N_s] = \begin{bmatrix} N_{w,x} + N_{\beta x} \\ N_{w,y} + N_{\beta y} \end{bmatrix} \tag{2.38}
$$

L'assemblage des problèmes élémentaires (équation 2.35) conduit à un problème aux valeurs propres non linéaires complexes dépendant de la fréquence qui se met sous la forme :

$$
\left[K(\omega) - \omega^2 M\right] \{U\} = 0 \tag{2.39}
$$

où $[M]$ et $[K(\omega)]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité globales de la structure plaque sandwich ; $\{U\}$ le mode propre complexe regroupant l'ensemble des degrés de liberté aux nœuds. En se basant sur les décompositions des équations (2.12 et

2.20) la matrice de rigidité complexe et dépendant de la fréquence $[K(\omega)]$ s'écrit :

$$[K(\omega)] = [K_R] + E^*_{xxc}(\omega)\,[K_1] + [K_2]\,G^*_{xyc}(\omega) + [K_3]\,G^*_{xzc}(\omega) + [K_4]\,G^*_{yzc}(\omega) \tag{2.40}$$

où $[K_R]$ est la rigidité due aux couches élastiques des faces et est issue de l'assemblage de la matrice élémentaire $[K^e_R]$ dont l'expression est :

$$\begin{aligned}
[K^e_R] = 2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\left(\frac{h_c}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C^i_m(\theta_i) \right] [N_f] \right) ds \\
+2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(C^i_f(\theta_i) + (z_i - \frac{h_c}{2})^2 C^i_m(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds \\
+2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C^i_m(\theta_i) \right) \right] [N_f] \right) ds \\
+2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C^i_m(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Les matrices $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ et $[K_4]$ sont issues de l'assemblage respectif des matrices élémentaires $[K^e_1]$, $[K^e_2]$, $[K^e_3]$ et $[K^e_4]$ qui ont pour expression :

$$\begin{cases}
[K^e_1] = \dfrac{h_c^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f]\,[(q_1 + q_2 + q_3)\,(\theta_c)]\,[N_f] \right) ds \\
[K^e_2] = \dfrac{h_c^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f]\,[q_4(\theta_c)]\,[N_f] \right) ds \\
[K^e_3] = h_c \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_s]\,[q_s(-\theta_c)]\,[N_s] \right) ds \\
[K^e_4] = h_c \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_s]\,[q_s(\theta_c)]\,[N_s] \right) ds
\end{cases} \tag{2.42}$$

Les modules d'élasticité de l'équation (2.40) peuvent être décomposés en deux parties ; la première partie est réelle et représente l'élasticité retardée et la deuxième partie est complexe

$$\begin{cases} E^*_{xxc}(\omega) = E^*_{xxc}(0) + E_{xxc}(\omega), & E_{xxc}(0) = 0 \\ G^*_{xyc}(\omega) = G^*_{xyc}(0) + G_{xyc}(\omega), & G_{xyc}(0) = 0 \\ G^*_{xzc}(\omega) = G^*_{xzc}(0) + G_{xzc}(\omega), & G_{xzc}(0) = 0 \\ G^*_{yzc}(\omega) = G^*_{yzc}(0) + G_{yzc}(\omega), & G_{yzc}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Ce faisant on réécrit l'équation (2.40) sous la forme :

$$\begin{cases} [K(\omega)] = [K(0)] + E_{xxc}(\omega)\,[K_1] + G_{xyc}(\omega)\,[K_2] + G_{xzc}(\omega)\,[K_3] + G_{yzc}(\omega)\,[K_4] \\ [K(0)] = [K_R] + E^*_{xxc}(0)\,[K_1] + G^*_{xyc}(0)\,[K_2] + G^*_{xzc}(0)\,[K_3] + G^*_{yzc}(0)\,[K_4] \end{cases} \tag{2.44}$$

La dépendance en fréquence de la matrice de rigidité (équation 2.44) se traduit par le module de Young $E_{xxc}(\omega)$, et les modules de cisaillement $G_{xyc}(\omega)$, $G_{xzc}(\omega)$ et $G_{yzc}(\omega)$. Précisons que le coefficient de Poisson est considéré constant pour des raisons de simplification.

— **Cas d'un cœur viscoélastique orthotrope unidirectionnel**

Dans ce cas spécifique, on a les relations :

$$\begin{cases} G^*_{xzc} = G^*_{xyc} \\ G^*_{yzc} = \dfrac{E^*_{yyc}}{2\,(1+\nu_{yzc})} = \dfrac{\nu_{yxc}}{2\nu_{xyc}\,(1+\nu_{yzc})} E^*_{xxc} \\ \nu_{yzc} = \dfrac{E^*_{yyc}}{2G^*_{yzc}} - 1 \end{cases} \tag{2.45}$$

A partir des relations de l'équation (2.45) la matrice de rigidité élémentaire (équation 2.41) s'écrit :

$$\begin{cases} [K^e(\omega)] = [K^e_R] + E^*_{xxc}(\omega)\,[K^e_{14}] + G^*_{xyc}(\omega)\,[K^e_{23}] \\ [K^e_{14}] = [K^e_1] + \dfrac{\nu_{yxc}}{2\nu_{xyc}\,(1+\nu_{yzc})}\,[K^e_4] \\ [K^e_{23}] = [K^e_2] + [K^e_3] \end{cases} \tag{2.46}$$

Les matrices élémentaires $[K_R^e]$, $[K_1^e]$, $[K_2^e]$, $[K_3^e]$, et $[K_4^e]$ sont respectivement définies dans les équations (2.41) et (2.42). La matrice globale de rigidité de la structure après assemblage des matrices élémentaires qui était de la forme (équation 2.44) pour le cas général orthotrope devient :

$$\begin{cases} [K(\omega)] = [K(0)] + E_{xxc}(\omega)\,[K_{14}] + G_{xyc}(\omega)\,[K_{23}] \\ [K(0)] = [K_R] + E^*_{xxc}(0)\,[K_{14}] + G^*_{xyc}(0)\,[K_{23}] \end{cases} \tag{2.47}$$

La dépendance en fréquence de la matrice de rigidité (équation 2.44) est alors réduite au module de Young $E_{xxc}(\omega)$, et au module de cisaillement $G_{xyc}(\omega)$.

— **Cas d'un cœur viscoélastique isotrope**

Dans le cas d'un matériau viscoélastique isotrope, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \nu_c = \nu_{xyc} = \nu_{yxc} = \nu_{xzc} = \nu_{yzc} \\ G^*_c = G^*_{xyc} = G^*_{xzc} = G^*_{yzc} = \dfrac{E^*_c}{2\,(1+\nu_c)} \\ E^*_c = E^*_{xxc} = E^*_{yyc} = E^*_{zzc} = E^*_c(0) + E_c(\omega), \quad E_c(0) = 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Et la matrice de rigidité élémentaire (équation 2.41) devient :

$$\begin{cases} [K^e(\omega)] = [K_R^e] + E^*_c(\omega)\,[K_v^e] \\ [K_v^e] = [K_1^e] + \dfrac{1}{2\,(1+\nu_c)}\,([K_2^e] + [K_3^e] + [K_4^e]) \end{cases} \tag{2.49}$$

Les matrices élémentaires $[K_R^e]$, $[K_1^e]$, $[K_2^e]$, $[K_3^e]$, et $[K_4^e]$ sont respectivement définies dans les équations (2.41) et (2.42). La matrice globale de rigidité de la structure après assemblage des matrices élémentaires pour ce cas particulier et de loin le plus rencontré est :

$$\begin{cases} [K(\omega)] = [K(0)] + E_c(\omega)\,[K_v] \\ [K(0)] = [K_R] + E^*_c(0)\,[K_v] \end{cases} \tag{2.50}$$

Dans ce cas, la dépendance en fréquence de la matrice de rigidité (équation 2.44) est réduite au module de Young $E_c(\omega)$.

2.3 Résolution du problème aux valeurs propres non linéaires

Les problèmes aux valeurs propres non linéaires obtenus dans les divers cas considérés sont des problèmes aux valeurs propres non linéaires complexes dépendant de la fréquence (équation 2.39). Dans ce chapitre, les angles d'orientation des couches (θ_i et θ_c) sont fixés et ne sont donc pas considérés comme des paramètres variables. Les décompositions de la matrice de rigidité dans ces cas considérés, sont adaptés à la résolution par la technique de l'homotopie présentée dans le Chapitre 1. Aussi la résolution de ces équations sera faite par la technique d'homotopie couplée à la *MAN* et à la *DA*. Cette technique a déjà été présentée par Bilasse et al. [74] certes dans le cadre d'une couche viscoélastique isotrope où la dépendance en fréquence est seulement résumée par le module de Young de la structure. Cette méthode sera adaptée aux cas des matériaux viscoélastiques orthotropes lesquels cas, la dépendance en fréquence est due aux modules de Young dans les directions longitudinaux et les trois modules de cisaillement. Cette méthode sera détaillée dans le Chapitre 3.

2.4 Tests de validation et résultats numériques

Pour valider ce modèle, nous proposons dans ce qui suit, des résultats numériques. Différentes structures plaques sont considérées du point de vue de nombre de couches, du point vue de la géométrie (presque carrées et rectangulaires), du point de vue matériaux (orthotropes, unidirectionnels et isotropes) avec différents types de conditions

aux limites. Différents types de lois viscoélastiques avec dépendance en fréquence sont également considérées. Des comparaisons avec des résultats de la littérature ou avec les résultats de simulation éléments finis sur Abaqus sont présentées. Pour des raisons de symétrie, nous donnerons seulement les dimensions et les caractéristiques mécaniques des couches constituants la face supérieure et de la couche centrale viscoélastique. Lorsque les faces sont constituées de stratifiés de même matériau, nous donnerons seulement les caractéristiques mécaniques générales de ce matériau dans son repère matériau. Dans tout ce travail, des types de couches viscoélastiques isotropes seront utilisés. Nous donnons en même temps leurs caractéristiques mécaniques.

— **3M ISD112**

Le polymère 3M ISD112 est un matériau dont la loi viscoélastique dépend fortement de la fréquence et induisant un amortissement élevé. La loi d'évolution du module de cisaillement complexe de ce matériau est représentée par le modèle de Maxwell généralisé à travers le modèle Anelastic Displacement Field (ADF) [12, 14]

$$G_c^*(\omega) = G_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\triangle_j \omega}{\omega - i\Omega_j}\right) \tag{2.51}$$

où G_0 est le module de cisaillement d'élasticité retardée et $(\triangle_j,\ \Omega_j)$ sont les paramètres du modèle obtenus par lissage des courbes maitresses. Les coefficients apparaissant dans la formule (2.51) sont donnés pour deux différentes température et sont regroupés dans le tableau (2.1) avec le nombre de termes $n = 3$. Sa masse volumique est $\rho_c = 1600 Kg.m^{-3}$ et son coefficient de Poisson $\nu_c = 0,5$

	27°C			20°C		
j	$G_0(Pa)$	$\triangle_j$	$\Omega_j\,(rad.s^{-1})$	$G_0(Pa)$	$\triangle_j$	$\Omega_j\,(rad.s^{-1})$
1	$0,5 \times 10^6$	0,746	468,7	$0,0511 \times 10^6$	2,8164	31,1176
2		3,265	4742,4		13,1162	446,4542
3		43,284	71532,5		45,4655	5502,5318

Tableau 2.1 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour ISD112 à 27°C et 20°C

— **Le Polyvinyl de Butyral (PVB)**

Le PVB est un matériau viscoélastique dont le comportement est modélisé par un modèle à dérivées fractionnaires dont la loi d'évolution du module de cisaillement complexe [53] est donnée par le modèle à dérivée fractionnaire :

$$G_c^*(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)\left[1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}\right]^{-\beta} \tag{2.52}$$

A 20°C, les coefficients associés à la caractérisation du PVB sont : $G_0 = 479 \times 10^3 Pa$, $G_\infty = 2,35 \times 10^8 Pa$, $\tau = 0,3979$, $\alpha = 0,46$, et $\beta = 0,1946$, sa masse volumique est $\rho_c = 999 Kg.m^{-3}$ et son coefficient de Poisson : $\nu_c = 0,4$

— **DYAD606**

Le DYAD606 est également un matériau dont la loi viscoélastique dépend de la fréquence et la loi d'évolution de son module de cisaillement complexe est également représentée par le modèle ADF de l'équation (2.51) [13]. Pour le DYAD606 le nombre de termes est $n = 5$, ces autres paramètres sont regroupés dans le tableau (2.2) Sa masse volumique est $\rho_c = 1104 Kg.m^{-3}$ et son coefficient de Poisson : $\nu_c = 0,29$.

	$G_0(Pa)$	$\triangle_j$	$\Omega_j\,(rad.s^{-1})$	$G_0(Pa)$	$\triangle_j$	$\Omega_j\,(rad.s^{-1})$
j		10°C			25°C	
1	$5,94 \times 10^6$	5,88	5,85	$2,02 \times 10^6$	9,89	58,18
2		13,66	2345,09		3,14	6,75
3		8,94	331,7		18,94	403
4		6,47	50,65		35,06	3097,38
5		34,52	25033,79		165,97	57244
j		30°C			38°C	
1	$2,09 \times 10^6$	5,4	73,06	$1,74 \times 10^6$	1,15	27,02
2		14,15	453,34		3,55	213,35
3		1,43	8,83		11,79	1257,50
4		28,33	3406,8		24,41	7585,29
5		128,85	52781,28		113,12	92517,87

Tableau 2.2 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour DYAD606 à 10°C, 25°C, 30°C et 38°C

2.4.1 Cas des plaques à trois couches

Les exemples qui sont présentés dans cette sous section concernent des structures plaques sandwichs symétriques trois couches.

2.4.1.1 Cas d'une plaque sandwich à cœur souple non viscoélastique

Le premier exemple pour tester ce modèle est un exemple souvent considéré dans la littérature. Il s'agit d'une plaque rectangulaire trois couches en appuis simple, dont les faces sont constituées d'un matériau élastique isotropes (aluminium) et le cœur d'un matériau élastique orthotrope souple (plaque 1) . Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette plaque sont regroupées dans le tableau (2.3) et les résultats comparés avec certains résultats de la littérature dans le tableau (2.4).

Dans cet exemple, à cause du grand écart de rigidité entre le matériau du cœur et celui des faces, le cœur se déforme essentiellement en cisaillement. Cette structure a été maillée en 46×30 quadrangles, soit en 1380 éléments pour un total de 7285 degrés de liberté. Le problème obtenu après discrétisation par ce présent modèle est un problème à valeur propre linéaire qui est uniquement résolu avec la méthode de Krylov-Arnoldi [69] implémentée dans Matlab comme fonction "eigs". Les résultats obtenus pour les dix premiers modes (tableau 2.4) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Alam et al. [108].

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = 0,406$	$E_{xxc} = E_{yyc} = 137MPa$	$E_f = 70,23GPa$
$h_c = 0,635$	$G_{xyc} = 45,7MPa$, $G_{xzc} = 137MPa$	$\nu_f = 0,3$
$L = 1829$	$G_{yzc} = 52,7MPa$, $\nu_{xyc} = 0,5$	$\rho_f = 2820kg.m^{-3}$
$l = 1219$	$\rho_c = 124,1kg.m^{-3}$	

Tableau 2.3 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 1

Modes	Présent Modèle	Alam et al. [108]	Araùjo et al. [109]	Ferreira et al. ($4 \times 4Q9$) [77]
1	22,90	-	23,5	23,28
2	43,64	45	44,8	44,91
3	70,67	69	71,7	70,93
4	77,97	78	79,5	83,04
5	90,36	92	92,5	91,72
6	123,20	129	126,5	128,90
7	124,85	133	126,8	139,28
8	149,36	152	150,7	151,62
9	168,00	169	170,7	171,56
10	168,48	177	173,0	181,46

Tableau 2.4 – Résultats de la plaque 1

2.4.1.2 Cas d'une plaque sandwich à cœur viscoélastique de module constant

Nous considérons à présent des cas de structures plaques sandwichs symétriques trois couches avec un cœur viscoélastique isotrope dont le module est modélisé par une loi constante :

$$E_c^*(\omega) = E_c^*(0) + E_c(\omega) = E_c^*(0)(1 + i\eta_c) \tag{2.53}$$

— **Premier test de validation**

Nous considérons une structure plaque (plaque 2) rectangulaire dont le cœur est viscoélastique avec un module de Young constant comme décrit par la formule (2.53). Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure sont regroupées dans le tableau (2.5). Le matériau utilisé pour les faces est le **T700/3234**, un composite unidirectionnel de carbon /epoxy. Cette structure est discrétisée avec 54×18 quadrangles (972 éléments). Le nombre de degré de liberté est alors de 5225. Le coefficient d'amortissement de la couche viscoélastique est prise à $\eta_c = 0,5$. Deux conditions aux limites sont étudiées à savoir l'encastrement sur tous les bords de la plaque et l'appuis simple. Les sont regroupés dans le tableau (2.6) pour le cas d'encastrement et dans le tableau (2.7) pour l'appui simple. Pour avoir un résultat de comparaison, une simulation éléments finis 3D est effectuée sur Abaqus 6.7 où la structure est discrétisée avec l'élément volumique quadratique C3D20R. Le mouvement de flexion en vibration de la plaque 2 est simulé sur Abaqus avec 3600

éléments pour 113322 degrés de liberté. Sur Abaqus, il n'est pas possible de calculer les propriétés modales (fréquence amortie et amortissement) de la structure directement. Le processus se déroule en deux étapes. Une première dans laquelle on calcul les fréquences en utilisant l'élasticité retardée du cœur viscoélastique pour un nombre de modes choisis. La deuxième étape consiste à appliquer une force d'excitation à la structure. L'équation de vibration forcée est résolue incrémentalement sur un intervalle $\Delta\omega$ contenant la fréquence amortie Ω cherchée. Dans le cas d'un module de Young constant du cœur viscoélastique (loi 2.53), la fréquence amortie n'est pas très éloignée de la fréquence calculée dans la première étape ; ce qui n'est pas le cas lorsqu'on considère une véritable dépendance en fréquence du cœur viscoélastique (cas de ISD112 à 27°C). Le choix de l'intervalle $\Delta\omega$ et de l'incrément de pas $\delta\omega$ sont très importants pour la précision du résultat. Une fois ce choix fait après plusieurs tests, la fréquence amortie Ω est obtenue comme étant la valeur ω donnant le maximum de la courbe de réponse de l'équation de vibration forcée. L'amortissement est ensuite obtenue par la méthode de la bande passante à -3db décrite dans le chapitre précédent. Comme nous l'avons déjà expliqué, cette technique est moins précise pour des structures ayant un amortissement élevé mais également quand les modes ne sont pas bien éloignés les uns des autres.

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = 0,762$	$E_c^*(0) = 2670080Pa$	$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_c = 0,254$	$E_c^*(\omega) = E_c^*(0)(1 + 0,5i)$	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$L = 300$	$\nu_c = 0,49$	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$l = 100$	$\rho_c = 999kg.m^{-3}$	$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 2.5 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 2

Concernant la plaque 2, pour les modes 1 et 3, la force est appliquée au point de coordonnées $(L/2, l/2, 0)$ et a pour intensité $F_1 = 1000N$. Pour le mode 2 par contre, nous avons appliqué deux forces de sens opposés $F_2 = -F_3 = 1000N$ aux points de coordonnées respectives $(L/4, l/2, 0)$ et $(3L/4, l/2, 0)$ ou $(L/2, l/4, 0)$ et $(L/2, 3l/4, 0)$ selon l'angle d'orientation des fibres des couches des faces. En générale, les résultats sont beaucoup plus précis quand

les forces sont appliquées sur des points où la déformation en vibration libre de la structure est maximale en valeur absolue.

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/c]_s$	PM	279,79	0,189	363,52	0,156	526,28	0,111
	Abaqus	278,07	0,198	363,64	0,156	527,48	0,106
$[22.5/c]_s$	PM	306,59	0,164	389,39	0,141	519,78	0,120
	Abaqus	304,33	0,173	390,22	0,141	520,02	0,113
$[45/c]_s$	PM	430,79	0,095	477,95	0,100	555,45	0,105
	Abaqus	427,84	0,101	478,42	0,100	555,85	0,095
$[67.5/c]_s$	PM	609,34	0,054	627,84	0,059	662,71	0,068
	Abaqus	602,86	0,059	623,74	0,059	663,34	0,066
$[90/c]_s$	PM	690,88	0,044	702,77	0,047	726,40	0,054
	Abaqus	683,36	0,052	-	-	727,25	0,058

Tableau 2.6 – Résultats plaque 2 encastrée sur tous les bords

L'analyse du tableau (2.6) montre que globalement les résultats obtenus par le présent modèle (PM) sont en bon accord avec les résultats obtenus par la simulation sur Abaqus. Toutefois, les résultats obtenu par le PM et la simulation sur Abaqus de la structure de séquence $[0/c]_s$ sont beaucoup plus proches pour les trois premiers modes que pour les autres structures considérées. En effet, pour toutes les séquences de structures considérées, l'amortissement est relativement faible (de l'ordre de 20%) donc la simulation sur Abaqus doit être en mesure de donner des résultats relativement corrects. Cependant, on constate que les modes de la structure de séquence $[0/c]_s$ sont suffisamment découplés (la différence minimale entre les quatre premiers modes est $\Omega mode\,2 - \Omega mode\,1 = 83,73Hz$) ce qui explique le fait que les résultats obtenus sur Abaqus pour cette structure sont en très bons accord avec nos résultats. Par contre, l'écart minimal entre les fréquences amorties des quatre premiers modes diminue progressivement au fur et à mesure que l'angle d'orientation des fibres des couches des faces augmente au point que cet écart devient $\Omega mode\,2 - \Omega mode\,1 = 11,89Hz$ pour la structure $[90/c]_s$ ce qui explique le faite que les résultats obtenus sur Abaqus sont relativement éloignés de nos résultats pour cette structure que pour les autres surtout pour les fréquences. Pour la méthode de la bande passante à -3db utilisée sur Abaqus, plus les modes sont suffisamment découplés et les

amortissements faibles plus les résultats obtenus sont proches des nôtres ; et dans le cas contraire, les résultats sont moins bons ou simplement impossibles à déterminer c'est le cas du mode 2 de la structure de séquence $[90/c]_s$. Pour cette séquence de structure $[90/c]_s$ le mode 2 influence les résultats du mode 1 qui du coup sont moins bon à cause du faible écart qui existe entre ces derniers ; au même moment le mode 2 est influencé par les modes 1 et 3 à tel point qu'il est impossible de déterminer sa fréquence amortie et son amortissement. Alors que les fréquences amorties croissent avec augmentation de l'angle d'orientation des fibres de 0° à 90° pour les trois modes présentés, l'amortissement fait le chemin inverse pour devenir quasiment négligeable à 90°.

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/c]_s$	PM	172,56	0,168	249,38	0,171	396,54	0,132
	Abaqus	171,62	0,173	248,96	0,173	396,65	0,125
$[22.5/c]_s$	PM	193,10	0,167	274,71	0,156	397,97	0,142
	Abaqus	191,50	0,175	273,66	0,158	396,77	0,134
$[45/c]_s$	PM	243,76	0,164	302,21	0,155	389,30	0,149
	Abaqus	240,57	0,176	300,98	0,157	388,92	0,136
$[67.5/c]_s$	PM	311,37	0,139	338,34	0,137	388,59	0,140
	Abaqus	306,34	0,158	336,47	0,141	389,31	0,133
$[90/c]_s$	PM	343,96	0,128	360,22	0,126	395,50	0,130
	Abaqus	339,24	0,150	358,27	0,130	396,03	0,122

Tableau 2.7 – Résultats plaque 2 en appui simple sur tous les bords

Une analyse similaire peut être faite pour le cas de l'appui simple (tableau 2.7). En effet pour ce cas, les résultats des calculs sur Matlab (PM) et sur Abaqus sont également beaucoup plus proches pour la structure de séquence $[0/c]_s$ où l'écart minimal entre les modes est de $\Omega mode\,2 - \Omega mode\,1 = 76,82Hz$ et un peu moins pour la structure de séquence $[90/c]_s$ pour laquelle l'écart minimal entre les modes est de $\Omega mode\,2 - \Omega mode\,1 = 16,26Hz$. Les fréquences amorties dans ce cas croissent énormément avec l'augmentation de l'angle d'orientation des fibres comme dans le cas de l'encastrement mais les amortissements décroissent cette fois ci de façon modérée contrairement à ce qu'on a observé dans le cas de l'encastrement où ces amortissements décroissaient énormément pour devenir quasiment négligeable à 90° devant les valeurs obtenues pour

0°. De façon globale nous pouvons estimer satisfaisant les résultats obtenus par le PM pour ces séquences de structures pour les deux conditions aux limites considérées.

— **Deuxième test de validation**

Pour montrer que le présent modèle est valide pour n'importe quelle structure du point de vue des dimensions géométriques, nous proposons un deuxième test de validation cette fois ci pour une structure semblable à la dernière (plaque 2) mais du type presque carré.

Caractéristiques géométriques(mm)	Caractéristiques mécaniques	
	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = 0,762$	$E_c^*(0) = 2670080Pa$	$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_c = 0,254$	$E_c^*(\omega) = E_c^*(0)(1 + 0,5i)$	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$L = 348$	$\nu_c = 0,49$	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$l = 304,8$	$\rho_c = 999kg.m^{-3}$	$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 2.8 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 3

Les dimensions de la structure presque carrée (plaque 3) ainsi considérée sont regroupées dans le tableau (2.8) ainsi que ces caractéristiques mécaniques. La condition aux limites étudiée est l'encastrement sur tous les bords de la structure. Les résultats des calculs par le PM et la simulation sur Abaqus sont présentés dans le tableau (2.9). La plaque 3 est maillée sur Abaqus avec 12810 éléments du type C3D20R pour un total de 196494 degrés de liberté alors que 32×28 éléments pour un total de 4785 degrés de liberté ont été nécessaires pour le calcul du PM.

Globalement l'amortissement de la structure est faible (moins de 20%) et les modes sont suffisamment découplés pour permettre l'utilisation de la méthode de vibration forcée couplée à la technique de la bande passante à -3db sur Abaqus. D'ailleurs les résultats (tableau 2.9) le montrent bien. Néanmoins les mêmes constatations observées dans le premier test de validation peuvent de nouveau être faits pour ce deuxième test de validation. En effet comme dans les cas précédents, lorsque l'angle d'orientation des fibres de la couche orthotrope unidirectionnelle augmente de 0 à 90°, la structure se comporte de

plus en plus comme une structure répétitive donc les modes sont de plus en plus proches ce qui diminue fortement la précision des résultats obtenus sur Abaqus. Mais de manière globale les résultats obtenus dans les deux calculs (PM et Abaqus) sont assez proches ce qui justifie la validité de notre modèle pour ces structures. Pour cette structure, les fréquences amorties ainsi que les amortissements varient très peu avec la variation de l'angle d'orientation des fibres pour les trois modes de telle sorte qu'on peut la considérer comme étant globalement insensible à une variation d'orientation des fibres. Cette insensibilité est encore plus forte pour les amortissements du premier mode.

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/c]_s$	PM	89,11	0,172	132,27	0,170	191,73	0,144
	Abaqus	88,47	0,178	131,54	0,164	189,28	0,169
$[22.5/c]_s$	PM	86,76	0,171	136,86	0,166	179,24	0,152
	Abaqus	86,63	0,175	135,43	0,175	176,75	0,168
$[45/c]_s$	PM	87,28	0,170	139,80	0,159	177,83	0,160
	Abaqus	86,90	0,175	138,60	0,158	175,00	0,153
$[67.5/c]_s$	PM	96,06	0,172	129,99	0,163	187,46	0,168
	Abaqus	95,47	0,178	128,91	0,174	188,49	0,158
$[90/c]_s$	PM	102,02	0,170	129,80	0,163	180,29	0,174
	Abaqus	101,06	0,179	129,47	0,158	181,27	0,158

Tableau 2.9 – Résultats plaque 3 encastrée sur tous les bords

2.4.2 Cas des plaques sandwichs viscoélastiques à face en stratifié

Dans cette section, nous considérons des structures plaques sandwichs viscoélastiques dont les faces sont en stratifié de même matériau. Le stratifié est considéré comme étant multicouche suivant les orientations des fibres.

2.4.2.1 Cas d'un cœur viscoélastique de module constant

Nous considérons dans un premier cas, une plaque sandwich rectangulaire dont le cœur viscoélastique est modélisé par la loi constante (2.53) et dont les faces sont constituées de stratifié à deux couches à base du matériau **T700/3234** dans la séquence $[\theta_1/\theta_2]$. Le coefficient d'amortissement de la couche viscoélastique ici considérée isotrope est $\eta_c = 0,5$. Les caractéristiques de la structure (plaque 4) sont présentées dans le tableau (2.10).

Différentes séquences d'orientation des fibres sont considérées. Les résultats obtenus pour le PM et sur Abaqus sont présentés dans le tableau (2.11) pour la condition aux limites d'encastrement sur tous les bords et dans le tableau (2.12) pour le cas de l'appui simple sur tous les bords. Pour faire la simulation sur Abaqus, la structure a été discrétisée avec 6000 éléments du type C3D20R pour un total de 173826 degrés de liberté. La plaque 4 ayant les mêmes dimensions longitudinales que la plaque 2, il a fallu également 972 éléments correspondant à 5225 degrés de liberté pour la simulation sur Matlab (PM).

Dans le tableau (2.11),on observe une bonne cohérence entre les résultats obtenus avec le PM et ceux d' Abaqus pour les structures de séquences $[0/\theta_2/c]_s$, par contre il existe un écart entre ces deux résultats pour les autres structures. En effet, pour les structures de séquences $[0/\theta_2/c]_s$, les modes sont relativement assez découplés ce qui n'est pas le cas des autres séquences de structure. Toutefois cet écart n'excède pas 5% ni au niveau des fréquences qui subissent beaucoup plus cette influence, ni au niveau des amortissements. On note également que les structures de séquence $[0/\theta_2/c]_s$ et de séquence $[\theta_1/0/c]_s$ présentent un meilleur amortissement que pour les autres séquences de structure.

Globalement, on observe une variation des propriétés modales de la structure selon la séquence d'orientation des fibres dans la structure. Ainsi, on est passé d'un amortissement de $\eta = 0.156$ pour la structure $[0/0/c]_s$ à un amortissement de $\eta = 0.075$ pour la structure $[90/60/c]_s$ pour le premier mode, de $\eta = 0.115$ à $\eta = 0.072$ et de $\eta = 0.072$ à $\eta = 0.069$ respectivement pour le deuxième et troisième mode. On montre ainsi l'effet de l'orientation des fibres sur les propriétés modales pour ce type de structures.

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = h_{f2} = 0,5$	$E_c^*(0) = 2670080Pa$	$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_c = 0,5$	$E_c^*(\omega) = E_c^*(0)(1 + 0,5i)$	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$L = 300$	$\nu_c = 0,49$	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$l = 100$	$\rho_c = 999kg.m^{-3}$	$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 2.10 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 4

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/0/c]_s$	PM	315,90	0,156	422,12	0,115	631,52	0,072
	Abaqus	313,73	0,162	421,80	0,116	630,60	0,071
$[0/30/c]_s$	PM	331,34	0,136	421,99	0,119	576,72	0,104
	Abaqus	328,52	0,141	420,32	0,121	576,38	0,098
$[0/45/c]_s$	PM	358,14	0,110	433,25	0,112	559,89	0,111
	Abaqus	355,18	0,114	431,27	0,113	560,25	0,104
$[0/60/c]_s$	PM	395,53	0,082	454,17	0,097	557,78	0,108
	Abaqus	392,76	0,085	452,01	0,098	558,74	0,100
$[0/90/c]_s$	PM	441,98	0,056	484,73	0,079	567,18	0,099
	Abaqus	439,39	0,058	482,29	0,080	568,06	0,091
$[30/0/c]_s$	PM	339,73	0,154	425,48	0,127	568,78	0,096
	Abaqus	335,78	0,162	422,79	0,129	567,67	0,092
$[45/0/c]_s$	PM	375,99	0,146	442,24	0,129	552,94	0,104
	Abaqus	370,35	0,157	438,95	0,131	552,51	0,098
$[60/0/c]_s$	PM	423,64	0,135	470,54	0,125	555,33	0,107
	Abaqus	416,72	0,147	462,76	0,131	555,58	0,099
$[90/0/c]_s$	PM	480,85	0,123	508,79	0,118	571,15	0,106
	Abaqus	471,72	0,137	504,47	0,121	571,22	0,102
$[30/45/c]_s$	PM	433,26	0,074	508,43	0,084	625,11	0,088
	Abaqus	429,55	0,076	505,02	0,085	624,71	0,084
$[30/60/c]_s$	PM	463,14	0,056	520,06	0,077	613,80	0,091
	Abaqus	459,32	0,058	516,48	0,079	612,01	0,085
$[30/90/c]_s$	PM	472,85	0,056	519,52	0,074	599,49	0,089
	Abaqus	468,70	0,058	515,96	0,075	597,96	0,082
$[45/30/c]_s$	PM	449,42	0,102	513,50	0,095	619,64	0,085
	Abaqus	443,47	0,108	509,85	0,097	617,96	0,081
$[45/60/c]_s$	PM	564,89	0,041	608,99	0,056	683,49	0,069
	Abaqus	559,26	0,043	604,27	0,057	681,10	0,064
$[45/90/c]_s$	PM	527,37	0,054	570,53	0,067	641,78	0,078
	Abaqus	521,91	0,057	566,22	0,068	639,40	0,072
$[60/30/c]_s$	PM	493,67	0,107	533,06	0,101	609,95	0,092
	Abaqus	485,39	0,116	528,22	0,103	608,84	0,085
$[60/45/c]_s$	PM	586,47	0,072	619,14	0,072	683,11	0,072
	Abaqus	577,60	0,077	613,44	0,073	680.,3	0,067
$[60/90/c]_s$	PM	622,67	0,051	658,67	0,056	716,84	0,064
	Abaqus	614,75	0,054	653,17	0,057	713,42	0,058
$[90/30/c]_s$	PM	506,86	0,112	538,48	0,105	601,42	0,095
	Abaqus	497,29	0,126	533,55	0,107	600,60	0,089
$[90/45/c]_s$	PM	555,64	0,096	586,76	0,091	644,52	0,084
	Abaqus	545,40	0,109	581,13	0,093	642,21	0,079
$[90/60/c]_s$	PM	642,00	0,075	670,04	0,072	719,81	0,069
	Abaqus	630,85	0,086	663,17	0,073	715,88	0,065

Tableau 2.11 – Résultats plaque 4 encastrée sur tous les bords

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/0/c]_s$	PM	195,05	0,215	284,65	0,161	468,75	0,097
	Abaqus	193,16	0,224	283,96	0,163	468,47	0,094
$[0/30/c]_s$	PM	202,30	0,196	284,54	0,168	422,77	0,146
	Abaqus	200,25	0,206	283,20	0,172	422,44	0,137
$[0/45/c]_s$	PM	209,52	0,182	285,02	0,174	404,93	0,160
	Abaqus	207,39	0,192	283,54	0,178	404,85	0,148
$[0/60/c]_s$	PM	218,34	0,167	284,25	0,181	391,51	0,175
	Abaqus	216,18	0,175	282,85	0,185	392,78	0,158
$[0/90/c]_s$	PM	229,73	0,148	284,09	0,184	378,60	0,191
	Abaqus	227,69	0,155	282,85	0,188	380,99	0,169
$[30/0/c]_s$	PM	215,48	0,234	296,76	0,192	425,30	0,150
	Abaqus	213,83	0,254	294,57	0,198	424,77	0,141
$[45/0/c]_s$	PM	234,95	0,252	301,52	0,209	406,46	0,163
	Abaqus	229,51	0,285	298,96	0,216	406,19	0,150
$[60/0/c]_s$	PM	257,20	0,262	305,79	0,226	390,99	0,175
	Abaqus	249,32	0,311	303,17	0,234	391,77	0,160
$[90/0/c]_s$	PM	283,27	0,263	312,83	0,238	378,59	0,191
	Abaqus	274,70	0,326	309,90	0,249	379,64	0,163

Tableau 2.12 – Résultats plaque 4 en appui simple sur tous les bords

2.4.2.2 Cas d'un cœur viscoélastique de module dépendant de la fréquence

Nous considérons maintenant une plaque sandwich rectangulaire dont les faces sont constituées de stratifié de deux séquences de même épaisseur du matériau **T700/3234**. La couche viscoélastique de la structure est de l'ISD112 à 27°C. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette structure (plaque 5) sont regroupées dans le tableau (2.15). Pour la simulation sur Matlab nous avons utilisé 30×20 éléments pour 3255 degrés de liberté. Pour valider nos résultats, une simulation est une fois encore faite sur Abaqus avec 12000 éléments pour 341466 degrés de liberté en utilisant toujours l'élément 3D C3D20R . Les résultats de nos calculs et ceux obtenus sur Abaqus sont regroupés dans le tableau (2.13) pour les appuis simples sur tous les bords et dans le tableau (2.14) pour le cas d'encastrement sur les bords. Pour appliquer les forces de chargement dans la simulation

sur Abaqus, il a fallu "partitionner" la face supérieure de la structure en petites cellules pour avoir des points de chargement. En effet la forme de la déformation de la plaque 5 en vibration est assez différente des autres cas. Pour les premiers cas étudiés, les points de déformation maximale en valeur absolue de ces structures passent par des points facilement repérables tels que $(L/4, l/2, 0)$, $(3L/4, l/2, 0)$, $(L/2, l/4, 0)$ et $(L/2, 3l/4, 0)$ donc il n'avait pas fallu beaucoup de partition pour ces structures. Cette partition entraine la distorsion de certains éléments de la structure. Pour le cas de la plaque 5, les points de déformation maximale sont assez éloignés de ces points. Or, plus on applique les chargements dans des zones éloignées des points de déformation maximale, plus les résultats obtenus pour les propriétés modales sont moins bons. Ceci peut expliquer la différence sur les résultats surtout pour les modes 2 et 3 malgré le fait que les modes sont un peu plus découplés que dans les autres cas déjà présentés. Néanmoins, les résultats sont globalement en bon accord pour les deux simulations.

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/0/c]_s$	PM	252,93	0,213	553,25	0,281	741,17	0,107
	Abaqus	250,43	0,219	551,80	0,285	739,62	0,110
$[0/30/c]_s$	PM	250,60	0,235	569,65	0,261	644,48	0,197
	Abaqus	248,46	0,247	567,95	0,270	640,60	0,207
$[0/45/c]_s$	PM	252,74	0,230	538,12	0,264	671,47	0,179
	Abaqus	248,43	0,241	536,75	0,272	668,59	0,189
$[0/60/c]_s$	PM	251,83	0,230	507,69	0,280	724,15	0,144
	Abaqus	248,09	0,239	505,38	0,290	721,08	0,150
$[0/90/c]_s$	PM	249,52	0,226	474,50	0,315	792,52	0,102
	Abaqus	247,04	0,234	469,38	0,338	788,06	0,106
$[30/0/c]_s$	PM	254,79	0,280	568,13	0,234	654,86	0,260
	Abaqus	249,83	0,296	566,58	0,255	646,28	0,273
$[45/0/c]_s$	PM	258,92	0,298	532,12	0,220	694,27	0,287
	Abaqus	253,04	0,312	529,97	0,233	688,98	0,299
$[60/0/c]_s$	PM	260,58	0,323	498,32	0,217	760,24	0,291
	Abaqus	254,95	0,335	494,38	0,227	752,90	0,306
$[90/0/c]_s$	PM	263,36	0,359	460,20	0,225	848,15	0,289
	Abaqus	257,73	0,375	455,89	0,233	843,03	0,300

Tableau 2.13 – Résultats plaque 5 en appui simple sur tous les bords

Séquences		mode 1		mode 2		mode 3	
		Ω	η	Ω	η	Ω	η
$[0/0/c]_s$	PM	488,74	0,131	846,24	0,177	1131,13	0,076
	Abaqus	487,10	0,131	845,28	0,180	1128,40	0,080
$[0/30/c]_s$	PM	451,51	0,168	859,11	0,180	950,13	0,130
	Abaqus	449,82	0,166	857,41	0,182	947,92	0,136
$[0/45/c]_s$	PM	449,40	0,162	812,40	0,188	987,20	0,117
	Abaqus	447,86	0,158	810,97	0,193	983,59	0,126
$[0/60/c]_s$	PM	464,51	0,143	772,96	0,192	1085,68	0,093
	Abaqus	462,91	0,144	769,87	0,198	1081,70	0,098
$[0/90/c]_s$	PM	491,97	0,119	749,60	0,191	1218,55	0,197
	Abaqus	492,19	0,119	747,70	0,195	1216,03	0,205
$[30/0/c]_s$	PM	451,34	0,169	850,26	0,145	963,13	0,167
	Abaqus	450,80	0,170	847,58	0,151	960,00	0,175
$[45/0/c]_s$	PM	452,94	0,183	793,82	0,133	1019,85	0,193
	Abaqus	452,17	0,185	791,01	0,140	1016,08	0,203
$[60/0/c]_s$	PM	473,03	0,191	755,99	0,137	1130,13	0,192
	Abaqus	471,54	0,195	754,47	0,143	1127,82	0,205
$[90/0/c]_s$	PM	506,05	0,193	734,63	0,142	1173,19	0,097
	Abaqus	503,48	0,199	732,80	0,150	1169,49	0,105

Tableau 2.14 – Résultats plaque 5 encastrée sur tous les bords

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = h_{f2} = 2$		$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_c = 1$		$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$L = 300$	ISD112 à 27° (2.1)	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$l = 200$		$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 2.15 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 5

2.4.3 Temps de calcul

L'utilité de notre modélisation passe surtout par le gain en temps de calcul CPU et en espace mémoire . Dans le tableau (2.16) nous présentons les temps de calcul pour les simulations de notre modèle (PM) et sur Abaqus.

		Temps de calculs (secondes)	
Plaques		CCCC	SSSS
Plaque 2	PM	860	267
	Abaqus	227486	233735
Plaque 3	PM	774	-
	Abaqus	204737	-
Plaque 4	PM	3905	265
	Abaqus	1335718	549460
Plaque 5	PM	532	391
	Abaqus	3734141	3513717

Tableau 2.16 – Les temps de calculs

Les temps de calculs présentés concernent les résultats des tableaux (2.6, 2.7, 2.9, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14). L'analyse du tableau (2.16) montre que les temps de calculs pour le présent modèle sont négligeables devant ceux des simulation sur Abaqus. En même temps qu'il était attendu qu'un modèle 2D (cas du PM) soit nettement meilleur qu'un modèle 3D (cas de Abaqus) en temps de calculs, la méthode de résolution sur Abaqus est de plus incrémentale et nécessite donc plusieurs inversions de matrices. Le temps de calculs pour le PM regroupe tous les calculs élémentaires à partir du maillage de la structure jusqu'au résultat alors que celui présenté pour les résultats sur Abaqus représente les temps de calculs omis le maillage de la structure et la formation des éléments. Par ailleurs nous n'avons pas comptabilisé le temps de cadrage de l'intervalle $\Delta\omega$ qui se fait avec plusieurs essais de simulations préliminaires. Nous rappelons que les calculs sur Abaqus sont faits sur le Cluster du laboratoire LEM3 alors que les calculs sur Matlab (PM) sur l'ordinateur portable ASUS Intel Core i3-2350M CPU @ 2.30GHz 2.30GHz.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un code générique de calcul des propriétés modales modales des structures sandwichs multicouches à cœur viscoélastique dont le module dépend ou non de la fréquence. L'élément fini utilisé est de type zig-zag avec continuité des champs de déplacement aux interfacesdes couches. L'intérêt de cette modélisation réside dans la diversité des plaques sandwichs qu'elle peut traiter du point de

vue des matériaux pour les couches (orthotropes, stratifiés, isotropes) et les différentes lois viscoélastiques pouvant être considérées pour la couche centrale viscoélastique. La résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes est faite de manière automatique par la technique de l'homotopie couplée à la *MAN* et la *DA*. Les résultats présentés montrent la validité de ce modèle, et le temps de calcul comparé à celui de la simulation sur Abaqus montre toute l'importance du modèle.

Toutefois, pour concevoir des sandwichs viscoélastiques composites à haut pouvoir amortissant, une étude est généralement faite par rapport aux paramètres de conception tels que : les orientations des fibres et les épaisseurs des couches. Jusqu'alors, il n'existe pas de méthode permettant une étude continue des propriétés modales de ces structures en fonction de ces paramètres de conception, faute à un moyen de résolution adéquat des équations aux valeurs propres non linéaires. Dans le chapitre suivant nous développons une méthode de résolution permettant ces études continues.

Chapitre 3

Une nouvelle méthode générique de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires complexes à paramètres variables

3.1 Introduction

La conception de structures sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant, on tient compte des paramètres de modélisation qui influencent les propriétés modales amortissantes de ces structures notamment les angles d'orientation des fibres et des épaisseurs des couches. La prise en compte de l'un de ces paramètres de modélisation introduit une variable décrivant un intervalle d'étude dans le problème aux valeurs propres non linéaires complexes généralement obtenu. Ainsi pour une étude en fonction de l'orientation des fibres des couches d'un sandwich viscoélastique dont les couches sont constituées de composites classiques (composites unidirectionnels, stratifiés croisés, stratifiés antisymétriques), le problème aux valeurs propres non linéaires complexes à résoudre peut se mettre sous la forme :

$$[K(\omega,\theta)-\omega^2 M]\,U=0 \quad \theta\in I_\theta \tag{3.1}$$

où θ est l'angle d'orientation du composite par rapport au repère du sandwich et I_θ l'intervalle des valeurs réelles devant être prises par θ. Et pour une étude en fonction des épaisseurs des couches, le problème à résoudre s'écrit :

$$[K(\omega,r)-\omega^2 M(r)]\,U=0 \quad r\in I_e \tag{3.2}$$

où r est un paramètre relatif à la variation des épaisseurs des couches et I_e l'intervalle de valeurs réelles possibles de r. Jusqu'à ce jour, pour résoudre ces problèmes (équations 3.1 et 3.2), des valeurs discrètes sont utilisées pour les paramètres de modélisation ce qui permet de ramener ces problèmes à ceux classiquement résolus dans les études de vibration des sandwichs viscoélastiques comme ce fut le cas dans le Chapitre 2 où nous avons fixer les angles d'orientation des fibres. Outre le temps de calcul important que ces types de calculs nécessitent, il est difficile de suivre de manière continue les effets de ces paramètres sur les propriétés modales de ces structures. Dans ce chapitre, nous développons une méthode de résolution générique de problèmes résiduels non linéaires aux valeurs propres complexes dépendant de la fréquence de vibration et contenant un paramètre physique variable de modélisation dont on souhaite étudier l'effet sur les propriétés modales de la structure. Cette nouvelle méthode de résolution est basée sur Méthode Asymptotique Numérique (MAN) couplée à la Différentiation Automatique (DA) et la technique de l'homotopie. Pour ce faire, nous allons rappeler dans un premier temps les principes de l'homotopie et de l'approche *diamant* avant de présenter cette nouvelle méthode.

3.2 Principes de l'homotopie et de l'approche *diamant*

3.2.1 Principe de l'homotopie

La technique de l'homotopie est une technique qui permet de résoudre des problèmes complexes en partant d'un problème simple relativement facile à résoudre ou dont on connait la solution pour aller vers la solution du problème d'origine.

Soit à résoudre l'équation :

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 \tag{3.3}$$

On suppose qu'on connait la solution du problème simple

$$f_1(x) = 0 \tag{3.4}$$

ou du moins la résolution de cette équation (3.4) est plus facile à faire. Alors on introduit un paramètre a dit d'homotopie dans l'équation (3.3) pour la réécrire sous la forme :

$$g_h(x, a) = f_1(x) + a f_2(x) = 0 \tag{3.5}$$

où le paramètre d'homotopie d'écrit l'intervalle de nombre réel [0, 1]. Remarquons que $g(x) = 0 \iff g_h(x, 1) = 0$ et $g_h(x, 0) = 0 \iff f_1(x) = 0$.

L'algorithme de résolution de l'équation (3.3) à partir de la technique d'homotopie c'est à dire à partir de l'équation (3.5) peut être résumé comme suit :

— Début

— Initialiser $a = 0$ et x est la solution de l'équation (3.4)

— tant que $a < 1$

1. augmenter légèrement a
2. résoudre l'équation (3.5) en utilisant la solution précédente comme point de départ pour résoudre le nouveau problème

— Fin

La difficulté de cette méthode réside dans le pilotage de la valeur de a et la résolution l'équation (3.5). Dans notre cas, la technique d'homotopie sera couplée à la *MAN*, et le pilotage de la valeur de a est donnée par le rayon de convergence des séries déterminé par la *MAN*.

3.2.2 Résolution d'équations résiduelles par *diamant*

3.2.2.1 Principe

Le principe de la *MAN* est basée sur la différentiation du problème résiduel dont on cherche la solution en des ordres élevés permettant de ramener des problèmes non linéaires à une série de problèmes linéaires. Pour éviter la lourde tâche de différentiation manuelle des fonctions et des séries contenues dans le problème résiduel, la technique de différentiation automatique a été introduite. Ainsi l'approche *diamant* qui n'est autre que l'acronyme de "*Différentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée*" [110] a été introduite comme approche générique pour la résolution des problèmes non linéaires résiduels en utilisant la *MAN* et la *DA*. Cette approche a été développée sous diverses langages de programmation orientés-objet telles que C++, Fortran 90 ou Matlab. La fonction de la *DA* dans cette approche est le calcul automatique des séries de Taylor utilisées dans la formulation de la *MAN,* par des formules de récurrence préalablement établies, une fois que les fonctions à différentier sont données.

En effet, pour un problème résiduel de la forme :

$$\mathfrak{R}\left(U,\lambda\right)=0 \tag{3.6}$$

où $\mathfrak{R}\left(U,\lambda\right)\in\mathbb{C}^q$ est le vecteur résidu dépendant du vecteur inconnu $U\in\mathbb{C}^q$ et du paramètre $\lambda\in\mathbb{C}$. Le principe de la *MAN* requiert un développement en séries entières

tronquées à un ordre N des inconnues ; ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} U\left(a+\delta a\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\delta a\right)^n U_n\left(a\right) \\ \\ \lambda\left(a+\delta a\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\delta a\right)^n \lambda_n\left(a\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

où δa est l'incrément du paramètre de chemin a et

$$\begin{cases} U_n\left(a\right) = \dfrac{1}{n!} U^{(n)}\left(a\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n U}{\partial a^n}\left(a\right) \\ \\ \lambda_n\left(a\right) = \dfrac{1}{n!} \lambda^{(n)}\left(a\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n \lambda}{\partial a^n}\left(a\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

les coefficients de Taylor de U et λ à l'ordre n évalués au point a. Le problème résiduel (équation 3.6) est généralement complété avec l'équation définissant le paramètre de chemin par le pseudo longueur d'arc [111] :

$$a = \left[U\left(a\right) - U\left(0\right)\right] \frac{\partial U}{\partial a}\left(0\right) + \left[\lambda\left(a\right) - \lambda\left(0\right)\right] \frac{\partial \lambda}{\partial a}\left(0\right) \tag{3.9}$$

puisque la différentiation du problème résiduel (équation 3.6) donne N équations linéaires à $N+1$ inconnues. Génériquement, les N équations linéaires peuvent s'écrire sous la forme

$$L_t\left(U_n, \lambda_n\right) = F_n \tag{3.10}$$

où L_t est un opérateur linéaire tangent et F_n le second membre contenant les coefficients de Taylor de U et λ aux ordres antérieurs à n. Les coefficients de Taylor contenu dans le second membre F_n sont un peu différents des coefficients de Taylor obtenus pour une différentiation classique puisqu'ils leurs manquent des termes utilisés pour la construction de l'opérateur linaire tangent L_t.

Pour pouvoir faire la différentiation automatique adaptée aux conditions de la *MAN* c'est à dire obtenir pour les coefficients de Taylor, les termes devant servir dans le second

membre F_n et ceux devant servir pour la construction de l'opérateur linéaire L_t, l'approche diamant utilise la formulation de récurrence de Fàa di Bruno pour la différentiation. Pour une fonction analytique $f(a) = \phi \circ x(a)$, les coefficients de Taylor s'écrivent selon Fàa di Bruno :

$$f_n = (\phi \circ x)_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n!} \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}(x_0) B_{n,m}\left(x^{(1)}, ..., x^{(n-m+1)}\right) \tag{3.11}$$

où $x_0 = x(0)$ et les $B_{n,m}$ sont les polynômes de Bell [73]. L'approche *diamant* décompose alors les coefficients de Taylor en deux parties moyennant des initialisations appropriées comme suit :

$$f_n = \left\{f_{1|x_1=1}\right\} x_n + \left\{f_{n|x_n=0}\right\} \tag{3.12}$$

Décomposition dans laquelle le terme $\left\{f_{1|x_1=1}\right\}$ est la dérivée linéaire tangente f_1 évaluée avec $x_1 = 1$ et le terme $\left\{f_{n|x_n=0}\right\}$ est le coefficient de Taylor f_n évalué avec $x_n = 0$. En appliquant la décomposition de l'équation (3.12) au problème résiduel (3.6) ce dernier est réécrit sous la forme générique suivante :

$$\mathfrak{R}_n = \left\{\mathfrak{R}_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\right\} U_n + \left\{\mathfrak{R}_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\} \lambda_n + \left\{\mathfrak{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\right\} = 0 \tag{3.13}$$

où $\left\{\mathfrak{R}_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\right\}$ est la matrice linéaire tangente. Dans l'expression de cette matrice linéaire tangente, la notation "$U_1 = Id$" traduit le fait que cette matrice peut être calculée en évaluant p fois le premier coefficient de Taylor $\mathfrak{R}_1$ et en choisissant le vecteur U_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^q$. De même, les terme linéaires $\left\{\mathfrak{R}_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\}$ et $\left\{\mathfrak{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\right\}$ sont calculés en initialisant respectivement à $U_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $U_n = 0$ et $\lambda_n = 0$. Pour $\left\{\mathfrak{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\right\}$ l'initialisation $U_n = 0$, $\lambda_n = 0$ permet d'annuler la contribution des deux premiers termes linéaires tangents.

3.2.2.2 Boite à outil *diamant*

La différentiation automatique des équations résiduelles dans la technique de résolution par *diamant* réside dans l'existence d'une boite à outil contenant des formules de récurrence pour la différentiation de haut degré et des techniques de surcharge d'opérateurs.

La technique de surcharge d'opérateurs dans le cadre de l'approche *diamant* consiste à attacher le calcul de dérivées aux opérateurs arithmétiques $(+, -, \times, /, <, >, \circ, ...)$ et aux fonctions mathématiques intrinsèques au langage de programmation. Les formules de récurrences de la boite à outil *diamant* ont été programmées de manière à propager les coefficients de Taylor. Les opérations effectuées par la boite à outil *diamant* pour le calcul des coefficients de Taylor des séries, ne se font pas comme dans les opérations habituelles de calculs. En effet pour une fonction composée notée $Z = \varphi(u, v)$, les séries de Taylor de la fonction Z à l'ordre n sont calculées par une propagation des coefficients de Taylor des séries u et v [112]

$$\begin{cases} Z = u + v, & Z_n = u_n + v_n \\ Z = u \times v & Z_n = \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} \\ Z = u/v & Z_n = \dfrac{1}{v_0}\left[u_n - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} Z_j v_{n-j}\right] \quad v_0 \neq 0 \\ Z = \sqrt{u} & Z_n = \dfrac{1}{2u_0}\left[u_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} Z_j Z_{n-j}\right] \quad u_0 \neq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

où Z_n, u_n, v_n sont les coefficients de Taylor respectifs de Z, u et v à l'ordre n. Pour utiliser ces coefficients de Taylor dans les codes de programmation en Matlab, il a été créé une nouvelle classe d'objet dénommée "TaylorSeries" dans la boite à outil *diamant* version Matlab [73, 53]. A tout élément appartement à cette classe, il est attribué trois propriétés. Ainsi à un élément Z appartenant à cette classe d'objet, il lui est attribué la propriété "value" définie par $Z.value$ et correspondant à la valeur du coefficient de Taylor de Z à l'ordre $n = 0$, la propriété "coef" définie par $Z.coef$ et contenant les coefficients de Taylor aux ordres $n = 1, 2, ..., N$ et pour finir la propriété "order" définie par $Z.order$ correspondant à l'ordre de troncature des séries N.

3.3 Nouvelle méthode générique de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires à paramètres variables

Le problème résiduel non linéaire aux valeurs propres complexes considéré s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\mathfrak{R}_g\left(U,\omega,p\right)=\left[K\left(\omega,p\right)-\omega^2M\left(p\right)\right]U=0,\qquad p\in I \tag{3.15}$$

Dans cette équation (3.15), le paramètre physique ou objectif variable de modélisation est noté par $p\in I$, $K\left(\omega,p\right)\in\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^q$ représente la matrice de rigidité de la structure et dépend à la fois de la fréquence ω et de p, $M\left(p\right)\in\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}^q$ est la matrice de masse dépendante uniquement de p. Le résidu $\mathfrak{R}_g\left(U,\omega,p\right)$ et le vecteur modal U sont des vecteurs appartenant à $\mathbb{C}^q$, la fréquence ω appartient à $\mathbb{C}$ et le paramètre d'étude à un intervalle réel I. La spécificité de cette équation résiduelle, est qu'il existe pour toute valeur de p prise dans l'intervalle I, une unique paire de solution (U, ω) par mode. Dans ce qui va suivre, nous allons proposer une méthode de résolution du problème (équation 3.15) en fonction du paramètre p.

3.3.1 Différentiation du problème résiduel

Dans le problème résiduel défini précédemment (3.15), nous posons :$\lambda=\omega^2$ ramenant le problème sous la forme :

$$\mathfrak{R}_g\left(U,\lambda,p\right)=\left[K\left(\lambda,p\right)-\lambda M\left(p\right)\right]U=0,\qquad p\in I \tag{3.16}$$

Le fait que pour toute valeur p de l'intervalle I, il existe une paire (U, λ) solution de l'équation (3.16) par mode, implique que sur un intervalle réel I_p tel que $I_p\subset I$ et pour une certaine précision ε, la paire solution (U, λ) peut être définie comme une fonction de p : ($U\left(p\right)$, $\lambda\left(p\right)$). L'application de la technique de perturbation permet d'écrire les

inconnues solutions sous la forme de séries entières tronquées à l'ordre N comme dans l'équation (3.7)

$$\begin{cases} U\left(p+\delta p\right)=\sum_{n=0}^{N}\left(\delta p\right)^{n}U_{n}\left(p\right) & \lambda\left(p+\delta p\right)=\sum_{n=0}^{N}\left(\delta p\right)^{n}\lambda_{n}\left(p\right) \\ U_{n}\left(p\right)=\frac{1}{n!}U^{(n)}\left(p\right)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n}U}{\partial p^{n}}\left(p\right) & \lambda_{n}\left(p\right)=\frac{1}{n!}\lambda^{(n)}\left(p\right)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n}\lambda}{\partial p^{n}}\left(p\right) \end{cases} \tag{3.17}$$

L'introduction de ce développement (équation 3.17) dans l'équation résiduelle (équation 3.16) permet d'écrire cette dernière comme une série de Taylor de l'incrément δp

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_{g}\left(U\left(p\right),\lambda\left(p\right),p+\delta p\right)=\sum_{n=0}^{N}\left(\delta p\right)^{n}\mathfrak{R}_{gn}\left(U\left(p\right),\lambda\left(p\right),p\right)=0 \\ \mathfrak{R}_{gn}\left(U\left(p\right),\lambda\left(p\right),p\right)=\frac{1}{n!}\mathfrak{R}_{g}^{n}\left(U\left(p\right),\lambda\left(p\right),p\right)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n}\mathfrak{R}_{g}}{\partial p^{n}}\left(U\left(p\right),\lambda\left(p\right),p\right) \end{cases} \tag{3.18}$$

En utilisant la propriété définie à l'équation (3.12), on écrit l'équation (3.18) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_{g0}=\left\{\mathfrak{R}_{g0|U_{0}=Id}\right\}U_{0}=0 \\ \mathfrak{R}_{gn}=\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_{1}=Id,\lambda_{1}=0}\right\}U_{n}+\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_{1}=0,\lambda_{1}=1}\right\}\lambda_{n}+\left\{\mathfrak{R}_{gn|U_{n}=0,\lambda_{n}=0}\right\}=0 \quad n=1,2,...,N \end{cases} \tag{3.19}$$

Pour trouver la paire solution $(U\left(p\right),\lambda\left(p\right))$, les problèmes résiduels génériques $\mathfrak{R}_{gn}$ doivent être résolus à chaque ordre $n=0,1,2,...,N$.

3.3.2 Résolution du problème à l'ordre 0

Le problème résiduel à l'ordre 0 s'écrit :

$$\mathfrak{R}_{g0}=\left\{\mathfrak{R}_{g0|U_{0}=Id}\right\}U_{0}=\left[K\left(\lambda_{0},p\right)-\lambda_{0}M\left(p\right)\right]U_{0}=0 \tag{3.20}$$

Généralement les problèmes à l'ordre 0 obtenu pour les problèmes non linéaires avec la MAN sont linéaires [63, 72, 74] ce qui n'est pas le cas de notre problème résiduel à l'ordre 0. En effet le problème résiduel (équation 3.20) présente une dépendance en fréquence

puisque la matrice de rigidité $[K(\lambda_0, p)]$ contient encore l'une des inconnues (λ_0) de la paire solution de l'équation. Aussi le problème résiduel à l'ordre 0 sera résolu par la technique de l'homotopie couplée à la *MAN* et à la *DA* [74]. Cependant ce problème (équation 3.20) ne peut être résolu sans connaitre le point de départ pour p. Aussi nous proposons pour pouvoir réaliser cette étude sur tout l'intervalle I, de résoudre le problème à l'ordre 0, en prenant comme première valeur de p, $p_i = inf(I)$ ou $p_s = sup(I)$.

3.3.2.1 Réécriture du problème à l'ordre 0

Dans la pratique, on évite la différentiation des matrices qui sont généralement de taille très considérable lorsqu'on utilise la *MEF* pour la discrétisation de la structure, ce qui permet de gagner en espace mémoire et en temps de calculs CPU. Aussi les matrices de rigidité et de masse sont formulées sous la forme :

$$\begin{cases} [K(\lambda, p)] = \left[E_g^*(\lambda, p)\right][K_g] \\ [M(p)] = [E_m(p)][M_g] \end{cases} \tag{3.21}$$

où $\left[E_g^*(\lambda, p)\right] = \left[E_{g1}^*(\lambda, p),\ E_{g2}^*(\lambda, p),\ ....\right]$, $[K_g] = {}^t[K_1,\ K_2,\ ....]$ et $[M_g] = {}^t[M_1,\ M_2,\ ....]$, $[E_m(p)] = [E_{m1}(p),\ E_{m2}(p),\ ....]$ avec $E_{gi}^* \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, ...,\ E_{mi} \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ...,$ $K_i \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q,\ i = 1, 2, ...,\ M_i \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q,\ i = 1, 2, ...$ De plus, $\left[E_g^*(\lambda, p)\right]$ qui est complexe, a souvent la particularité d'être réécrite en faisant sortir le terme représentant l'élasticité retardée (un exemple est donné à l'équation 2.43).

$$\left[E_g^*(\lambda, p)\right] = \left[E_g^*(0, p)\right] + [E_g(\lambda, p)] \tag{3.22}$$

En prenant la valeur fixe choisie pour p : $p_i = inf(I)$ (éventuellement $p_s = sup(I)$) et en utilisant les écritures des équations (3.21) et (3.22), le problème résiduel à l'ordre 0 devient alors :

$$\mathfrak{R}_{g0} = \left[E_g^*(0, p_i) K_g + E_g(\lambda_0, p_i) K_g - \lambda_0 E_m(p_i) M_g\right] U_0 = 0 \tag{3.23}$$

3.3.2.2 Résolution du problème à l'ordre 0 par la technique de l'homotopie

Le problème à l'ordre 0 (équation 3.23) est un problème aux valeurs propres non linéaires complexes avec une dépendance en fréquence. Pour le résoudre, la technique d'homotopie est utilisée [72, 74]. Cette technique consiste à transformer le dit problème (3.23) en un sous problème résiduel en introduisant le paramètre d'homotopie ici noté a. Cette résolution consiste à construire la solution branche par branche en partant de la valeur initiale $a_{(1)} = 0$ pour obtenir la valeur désirée $a_{(J)} = 1$. Les branches $(a_{(j)},a_{(j+1)})$ sont construites à travers la *MAN*. En introduisant le paramètre d'homotopie dans le problème à l'ordre 0 et en faisant le changement de variables suivant : $(U_0, \lambda_0) = (V, \gamma)$, on définit le nouveau problème résiduel suivant :

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_{g0}\left(U_0, \lambda_0, p_i\right) = \mathfrak{R}_h\left(V, \gamma, p_i, a = 1\right) = 0 \\ \mathfrak{R}_h\left(V, \gamma, p_i, a\right) = S\left(V, \gamma\right) + aT\left(V, \gamma\right) = 0 \\ \mathfrak{R}_h\left(V, \gamma, p_i, a\right) = \left[E_g^*\left(0, p_i\right) K_g - \gamma E_m\left(p_i\right) M_g\right] V + a\left[E_g\left(\gamma, p_i\right) K_g\right] V \end{cases} \tag{3.24}$$

En perturbant le paramètre d'homotopie a de δa, le nouveau problème résiduel $\mathfrak{R}_h$ devient :

$$\mathfrak{R}_h\left(V, \gamma, p_i, a_{(j)} + \delta a\right) = S\left(V, \gamma\right) + \left(a_{(j)} + \delta a\right) T\left(V, \gamma\right) = 0 \tag{3.25}$$

A partir du développement en séries de Taylor des fonctions T et S, l'équation (3.24) devient :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\delta a\right)^n S_n + \left(a_{(j)} + \delta a\right) \sum_{n=0}^{N} \left(\delta a\right)^n T_n = 0 \tag{3.26}$$

avec

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{1}{n!} S^{(n)}\left(a_{(j)}\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n S}{\partial a_{(j)}^n}\left(a_{(j)}\right) \quad T_n = \dfrac{1}{n!} S^{(n)}\left(a_{(j)}\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n T}{\partial a_{(j)}^n}\left(a_{(j)}\right) \\ \\ V_n = \dfrac{1}{n!} V^{(n)}\left(a_{(j)}\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n V}{\partial a_{(j)}^n}\left(a_{(j)}\right) \quad \gamma_n = \dfrac{1}{n!} \gamma^{(n)}\left(a_{(j)}\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\partial^n \gamma}{\partial a_{(j)}^n}\left(a_{(j)}\right) \end{cases} \tag{3.27}$$

L'équation (3.26) est ensuite développée et les termes de même puissance de δa sont regroupés. Nous obtenons alors un système à $N+1$ équations linéaires représentées par (équation 3.28)

$$\begin{cases} S_0 + a_{(j)} T_0 = 0 \\ S_n + a_{(j)} T_n + T_{n-1} = 0 \quad n = 1, 2, ..., N \end{cases} \tag{3.28}$$

La toute première équation linéaire à résoudre et qui correspond au cas $a_{(j=1)} = 0$, est le problème linéaire aux valeurs propres réelles permettant d'obtenir la paire de solution initiale (V_0,γ_0) et qui s'écrit :

$$S_0 = \left[E_g^* \left(0, p_i\right) K_g - \gamma_0 E_m \left(p_i\right) M_g \right] V_0 = 0 \tag{3.29}$$

Cette équation linéaire aux valeurs propres réelles est résolue par l'une des méthodes précitées [66, 67, 68, 69]. Pour la résolution des autres équations linéaires, la décomposition de la formule (3.12) est utilisée ramenant le problème linéaire sous la forme

$$\left[\left\{ S_{1|V_1=Id,\gamma_1=0} \right\} + a_{(j)} \left\{ T_{1|V_1=Id,\gamma_1=0} \right\} \right] V_n = - \left\{ S_{n|V_n=0} \right\} - a_{(j)} \left\{ T_{n|V_n=0} \right\} - T_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{3.30}$$

L'équation (3.30) est mal définie puisque chacune de ces équations contient deux inconnues. Aussi on associe à cette équation, la condition d'orthogonalité des modes :

$$^t V_0 \left(V - V_0\right) = 0 \tag{3.31}$$

On introduit ensuite le multiplicateur de Lagrange χ en combinaison avec les équations (3.30) et (3.31) pour former le système

$$\begin{bmatrix} A & V_0 \\ ^t V_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left\{ S_{n|V_n=0} \right\} - a_{(j)} \left\{ T_{n|V_n=0} \right\} - T_{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad n = 1, ..., N \tag{3.32}$$

où

$$\begin{aligned}[A] &= \left[\left\{S_{1|V_1=Id,\gamma_1=0}\right\} + a_{(j)}\left\{T_{1|V_1=Id,\gamma_1=0}\right\}\right] \\ &= \left[E_g^*\left(0,p_i\right)K_g - \gamma_0 E_m\left(p_i\right)M_g + a_{(j)}E_g\left(\gamma_0,p_i\right)K_g\right]\end{aligned} \tag{3.33}$$

est la matrice linéaire tangente de la série et a la particularité d'être singulière. Cette singularité implique que le système (équation 3.32) n'a de solution que si la condition suivante est satisfaite

$${}^tV_0\left(\left\{S_{n|V_n=0}\right\} + a_{(j)}\left\{T_{n|V_n=0}\right\} + T_{n-1}\right) = 0 \tag{3.34}$$

en réécrivant les termes $\left\{S_{n|V_n=0}\right\}$ et $\left\{T_{n|V_n=0}\right\}$ selon la formule (équation 3.12) on fait apparaitre les γ_n

$$\begin{cases}\left\{S_{n|V_n=0}\right\} = \left\{S_{n|V_n=0,\gamma_n=0}\right\} + \left\{S_{1|V_1=0,\gamma_1=1}\right\}\gamma_n \\ \left\{T_{n|V_n=0}\right\} = \left\{T_{n|V_n=0,\gamma_n=0}\right\} + \left\{T_{1|V_1=0,\gamma_1=1}\right\}\gamma_n\end{cases} \tag{3.35}$$

En introduisant la décomposition (équation 3.35) dans l'équation de solvabilité (équation 3.34), on déduit l'expression générique pour le calcul des γ_n comme suit :

$$\gamma_n = -\frac{{}^tV_0\left[\left\{S_{n|V_n=0,\gamma_n=0}\right\} + a_{(j)}\left\{T_{n|V_n=0,\gamma_n=0}\right\} + T_{n-1}\right]}{{}^tV_0\left[\left\{S_{1|V_1=0,\gamma_1=1}\right\} + a_{(j)}\left\{T_{1|V_1=0,\gamma_1=1}\right\}\right]}\ n = 1,2,...,N \tag{3.36}$$

La valeur calculée est ensuite injectée dans l'équation (3.32) et cette dernière est résolue pour trouver la valeur de la deuxième inconnue V_n. A la fin de la série, le rayon de convergence de la série est estimé à partir de la précision ε choisie au départ par la relation classique [63, 72, 74] :

$$\delta a = \left(\varepsilon\frac{\|V_1\|}{\|V_n\|}\right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{3.37}$$

Après que le rayon de convergence soit calculé, on vérifie la condition d'arrêt de calcul suivante :

$$\begin{cases}a_{(j+1)} = a_{(j)} + \delta a \\ a_{(j+1)} \geq 1\end{cases} \tag{3.38}$$

Si cette condition (équation 3.38) est satisfaite, le calcul est arrêté et la solution du problème résiduel à l'ordre 0 est déterminé comme étant :

$$\begin{cases} U_0 = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - a_{(J)}\right)^n V_n \\ \lambda_0 = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - a_{(J)}\right)^n \gamma_n \end{cases} \tag{3.39}$$

avec $a_{(J)}$ la dernière valeur de a satisfaisant la condition d'arrêt (équation 3.38). Dans le cas contraire, une nouvelle branche de série est entamée par continuation, en partant de la dernière série

$$\begin{cases} V_0 = \sum_{n=0}^{N} (\delta a)^n V_n \\ \gamma_0 = \sum_{n=0}^{N} (\delta a)^n \gamma_n \end{cases} \tag{3.40}$$

et ce jusqu'à ce que la condition d'arrêt (équation 3.38) soit vérifiée.

Le problème résiduel à l'ordre 0 étant résolu, on s'attèle à la résolution des équations au N autres ordres.

3.3.3 Résolution du problème à l'ordre n et continuation

Connaissant la valeur de la paire solution (U_0,λ_0), il faut maintenant calculer les autres paires (U_n,λ_n) de solution à partir des N autres problèmes résiduels qui sont réécrits sous la forme :

$$\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=Id,\lambda_1=0}\right\} U_n = -\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\} \lambda_n - \left\{\mathfrak{R}_{gn|U_n=0,\lambda_n=0}\right\} \quad n = 1, 2, ..., N \tag{3.41}$$

Etant donné que chacune des équations (3.41) sont mal conditionnées car possédant deux inconnues, on leur associe une fois encore la condition d'orthogonalité des modes qui s'écrit cette fois ci :

$${}^t U_0 \left(U - U_0\right) = 0 \tag{3.42}$$

En désignant par $K_t = \left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=Id,\lambda_1=0}\right\}$ la matrice linéaire tangente et en introduisant comme précédemment un multiplicateur de Lagrange, les deux équations (3.41) et (3.42) forme un système dont la résolution donne la paire solution (U_n,λ_n).

$$\begin{bmatrix} K_t & U_0 \\ {}^tU_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\}\lambda_n - \left\{\mathfrak{R}_{gn|U_n=0,\lambda_n=0}\right\} \\ 0 \end{Bmatrix} \; n = 1, ..., N \tag{3.43}$$

La matrice linéaire tangente

$$K_t = \left[E_g^* \left(0, p_i\right) K_g + E_g \left(\lambda_0, p_i\right) K_g - \lambda_0 E_m \left(p_i\right) M_g\right] \tag{3.44}$$

est également singulière. Cette particularité de la matrice K_t exige une condition de solvabilité pour résoudre le système de l'équation (3.43). Cette condition est :

$${}^tU_0 \left(\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\}\lambda_n + \left\{\mathfrak{R}_{gn|U_n=0,\lambda_n=0}\right\}\right) = 0 \tag{3.45}$$

La condition de solvabilité (équation 3.45) permet de calculer d'abord les λ_n à travers la formule générique :

$$\lambda_n = -\frac{{}^tU_0 \left(\left\{\mathfrak{R}_{gn|U_n=0,\lambda_n=0}\right\}\right)}{{}^tU_0 \left(\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\}\right)} \tag{3.46}$$

Ensuite les λ_n calculés sont injectés dans le système (équation 3.43) dont la résolution permet d'obtenir la valeur du vecteur inconnu U_n. A la fin de la série, le rayon de convergence δp de cette dernière est estimé à travers la formule :

$$\delta p = \left(\varepsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_n\|}\right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{3.47}$$

La continuation ou l'arrête de calcul réside dans la vérification de la condition :

$$\begin{cases} p_{(j+1)} = p_{(j)} + \delta p \\ p_{(j+1)} \geq p_s = sup\left(I\right) \end{cases} \tag{3.48}$$

éventuellement

$$\begin{cases} p_{(j+1)} = p_{(j)} - \delta p \\ p_{(j+1)} \leq p_i = inf\left(I\right) \end{cases} \tag{3.49}$$

La condition de l'équation (3.48) est utilisée lorsque l'on débute la construction des branches solutions de l'équation résiduelle (3.15) en partant de la première valeur $p_{(j=0)} = p_i = inf(I)$ de p ; alors que la condition (équation 3.49) est utilisée dans le cas où on commence par $p_{(j=0)} = p_s = sup(I)$. Lorsque la condition d'arrêt est vérifiée, cela signifie qu'on a couvert tout l'intervalle I et le calcul s'arrête. Dans le cas contraire, la construction des branches solutions continue avec la construction d'une nouvelle paire de séries dont la valeur à l'ordre 0 est obtenue à partir de la série précédente par la formule :

$$\begin{cases} U_0 = \sum_{n=0}^{N} (\delta p)^n U_n \\ \lambda_0 = \sum_{n=0}^{N} (\delta p)^n \lambda_n \end{cases} \tag{3.50}$$

éventuellement

$$\begin{cases} U_0 = \sum_{n=0}^{N} (-\delta p)^n U_n \\ \lambda_0 = \sum_{n=0}^{N} (-\delta p)^n \lambda_n \end{cases} \tag{3.51}$$

selon que l'on utilise la condition (3.48) ou la condition (3.49). La différentiation des séries est alors faite par rapport à $p_{(j+1)}$ de même que la matrice linéaire tangente qui est actualisée en considérant les nouvelles valeurs de la paire solution initiale calculée par l'équation (3.50) éventuellement (3.51).

Notons que cette méthode nécessite l'utilisation de la technique d'homotopie juste pour trouver la solution du problème à l'ordre 0 pour la toute première paire de séries. Une fois que cette solution est trouvée, la technique d'homotopie n'est plus utilisée jusqu'à recouvrement total des valeurs de l'intervalle d'étude I. Il est important de mentionner aussi que d'autres conditions d'arrêt peuvent être ajoutées à celle déjà mentionnée, selon les cas considérés. Nous rappelons les formules suivantes permettant le calcul de la fréquence amortie

$$\begin{cases} \omega^2 = \Omega^2 (1 + i\eta) = \lambda^R + i\lambda^I = \lambda \\ \Omega = \dfrac{\sqrt{\lambda^R}}{2\pi}, \quad \eta = \dfrac{\lambda^I}{\lambda^R} \end{cases} \tag{3.52}$$

3.3.4 Algorithme de la méthode de résolution

I. Résolution du problème résiduel à l'ordre 0 par homotopie
- I1. Détermination de la paire (V_0, γ_0) à travers l'équation (3.29)
- I2. Construction de la matrice tangente $[A]$ selon l'équation (3.33)
- I3. Construction du dénominateur de l'équation (3.36)
- I4. Evaluation de T_0
- I5. Calcul des séries γ_n et V_n pour $n = 1, 2, ..., N$
  - I5.1. Evaluation de $\left\{S_{n|V_n=0}\right\}$ et $\left\{T_{n|V_n=0}\right\}$ par la DA
  - I5.2. Evaluation de γ_n selon l'équation (3.36)
  - I5.3. Evaluation de V_n selon l'équation (3.32)
  - I5.4. Actualisation de S_n et T_n par la DA
- I6. Test de convergence pour le calcul d'homotopie
  - I6.1. Estimation du rayon de convergence selon l'équation (3.37)
  - I6.2. Si (3.38) n'est pas satisfaite, calcul de (U_0, λ_0) (3.39), sinon retour à l'étape I2.
- I7. Si l'intervalle d'étude est une constante, faire II.3 et arrêt de calcul sinon aller à II.

II. Résolution du problème résiduel à l'ordre n et continuation
- II.1. Evaluation de la matrice linéaire tangente K_t (équation 3.44)
- II.2. Calcul des séries λ_n et U_n pour $n = 1, 2, ..., N$
  - II.2.1 Evaluation de $\left\{\mathfrak{R}_{g1|U_1=0,\lambda_1=1}\right\}$ et $\left\{\mathfrak{R}_{gn|U_n=0,\lambda_n=0}\right\}$ par la DA
  - II.2.2. Evaluation de λ_n selon l'équation (3.46)
  - II.2.3. Evaluation de U_n selon l'équation (3.43)
  - II.2.4. Actualisation de $\mathfrak{R}_{gn}$ par la DA
  - II.2.5. Estimation du rayon de convergence (équation 3.47)
- II.3. Test d'arrêt
  - Si (3.48) satisfaite (éventuellement 3.49) ou autres conditions ajoutées satisfaites, arrêt de calcul, sinon initialisation des séries (3.50, éventuellement 3.51) et retour à II.1

Tableau 3.1 – Algorithme de résolution de problème aux valeurs propres non linéaires complexes à paramètres variables

Les formulations théoriques des sections 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 sont groupées dans un code numérique programmé sous le logiciel Matlab. Utilisant la boite à outil ***diamant*** pour la différentiation automatique des fonctions et séries, ce code permet une résolution automatique des problèmes résiduels se présentant sous la forme de l'équation résiduelle (3.15). Pour utiliser ce code, il faut lui fournir les entrées suivantes : les coefficients matriciels de rigidité $[K_g]$, de masse $[M_g]$ et leurs fonctions à différentier associées $\left[E_g^*(\lambda, p)\right]$ et $[E_m(p)]$; il faut également à l'entrée donner la première valeur à prendre pour $p : p_i = inf(I)$ (éven-

tuellement $p_s = sup(I)$), les constantes $\left[E_g^*(0, p_i)\right]$ et $[E_m(p_i)]$ sont également données ainsi que le paramètre de précision ε, le nombre de troncature des séries N et l'intervalle d'étude I. A la sortie, on recueille les résultats stockés dans des vecteurs et contenant les valeurs des fréquences amorties, des amortissements et les valeurs correspondantes du paramètre p . L'algorithme de résolution peut être résumé comme suit (tableau 3.1) . Lorsque l'intervalle d'étude I est une constante c'est à dire $p_i = inf(I) = p_s = sup(I)$, l'algorithme de calcul s'arrête après avoir exécuté la technique de l'homotopie. Ce cas particulier concerne surtout les calculs discrets.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle méthode générique de résolution de problème résiduel non linéaire aux valeurs propres complexes à deux paramètres dont l'un est la fréquence et l'autre un paramètre physique de modélisation. Basée sur le couplage entre la technique d'homotopie, la *MAN* et la *DA*, cette méthode est implémentée sous Matlab et utilise la boite à outil *diamant* pour la différentiation des séries. L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet une étude continue des propriétés modales des structures sandwichs viscoélastiques en fonction de la variation du paramètre physique. Par ailleurs cette méthode prend en compte différentes lois viscoélastiques et son automatisation permet de gagner en temps de calcul. Elle peut également être utilisée pour étudier la sensibilité des propriétés modales par rapport à une variation des paramètres physiques de la structure tels que : les coefficients de Poisson, les masses volumiques, les modules d'élasticité, etc....

Dans les deux chapitres suivantes, la méthode développée dans ce chapitre sera utilisée pour deux cas particuliers d'études à savoir l'orientation des fibres et les épaisseurs des couches de la structure.

Chapitre 4

Calcul des propriétés modales de plaques composites viscoélastiques en fonction de l'orientation des fibres

4.1 Introduction

L'utilisation des structures sandwichs viscoélastiques pour l'amortissement passif est fortement fonction de leurs propriétés modales . Pour les structures sandwichs multicouches à cœur viscoélastique dont les couches sont constituées de stratifiés ou des matériaux composites de type orthotrope, l'orientation des fibres des couches et les séquences d'empilement de ces dernières influencent énormément les propriétés modales de ces structures [90, 91, 92, 97, 99].

Nous proposons dans ce chapitre, différentes formulations éléments finis pour une étude continue des effets de la variation de l'orientation des fibres des composites constituant les faces sur les propriétés modales des plaques sandwichs composites à cœur viscoélastique. Les composites de type orthotrope usuels tels que les monocouches unidirectionnelles, les stratifiés antisymétriques et les stratifiés croisés symétriques ou antisymétriques seront considérés. Pour ces types de composites considérés pour les faces du sandwich, les formulations introduisent une nouvelle variable de non linéarité θ qui est l'orientation des fibres

dans le problème aux valeurs propres non linéaires complexes qui d'habitude ne présente pour seule non linéarité que la dépendance en fréquence. Les nouveaux problèmes aux valeurs propres complexes et fortement non linéaires à double dépendance (ω, θ) sont résolus par la nouvelle méthode développée au Chapitre 3. Pour les différentes structures étudiées, les résultats obtenus par la nouvelle méthode seront confrontés à ceux de la littérature [99] ou aux résultats obtenus de manière discrète par la méthode de référence développée au Chapitre 2. Nous montrerons à travers les résultats numériques que les variations des propriétés modales ne sont ni standards ni uniformes par rapport aux dimensions des structures, des conditions aux limites et des types de lois viscoélastiques. En fin, nous présenterons brièvement l'intérêt de ces nouvelles formulations du point de vue de temps de calcul.

4.2 Plaques sandwichs viscoélastiques trois couches

Nous considérons dans cette partie, une plaque symétrique sandwich trois couches à cœur viscoélastique. Les couches des faces sont élastiques et orthotropes et leurs fibres sont orientées dans le repère de référence de la structure par l'angle θ. La couche viscoélastique est supposée orthotrope non vieillissante. Cette structure est représentée sur la figure (4.1).

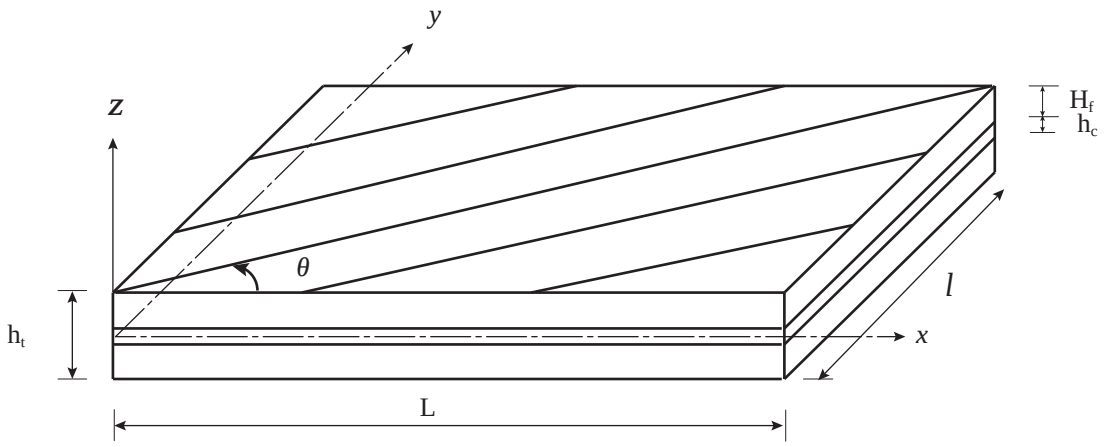


Figure 4.1 – Plaque sandwich viscoélastique trois couches

Pour étudier de manière continue les propriétés modales de cette structure, les formulations éléments finis développées dans le Chapitre 2 seront réécrites afin de mieux

représenter la dépendance en angle d'orientation θ des fibres.

4.2.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion des faces

Pour éviter de différentier des matrices de grandes tailles dépendantes de la fréquence et de l'angle d'orientation des fibres, les matrices de comportement en membrane et en flexion des faces doivent être réécrites de manière convenable.

Les matrices de comportement en membrane et en flexion sont déjà définies par la relation (équation 2.10). Pour réécrire ces matrices, nous posons les constantes (équation 4.1) suivantes à partir des modules d'élasticité du matériau orthotrope utilisé pour les faces

$$\begin{cases} c_{11} = \dfrac{H_f E_{xx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ c_{22} = \dfrac{H_f E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ c_{12} = \dfrac{\nu_{yx} H_f E_{xx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} = \dfrac{\nu_{xy} H_f E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ c_{66} = H_f G_{xy} \end{cases} \tag{4.1}$$

A partir de ces constantes (équation 4.1), nous définissons les matrices A_i, $i = 1, 2, .., 5$ obtenues en utilisant les relations de passage du repère matériau au repère de référence de la structure (équation 1.54). En effet de la relation (1.54), on regroupe dans une même matrice tous les termes de même coefficient $\cos^4\theta$. La même chose est faite pour les coefficients $\sin^4\theta$, $(\sin\theta\cos\theta)^2$, $\sin\theta\cos^3\theta$, et $\sin^3\theta\cos\theta$ respectivement.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_{22} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2(c_{12}+2c_{66}) & c_{11}+c_{22}-4c_{66} & 0 \\ c_{11}+c_{22}-4c_{66} & 2(c_{12}+2c_{66}) & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}+c_{22}-2(c_{12}+c_{66}) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{11}-c_{12}-2c_{66} \\ 0 & 0 & c_{12}-c_{22}+2c_{66} \\ c_{11}-c_{12}-2c_{66} & c_{12}-c_{22}+2c_{66} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{12}-c_{22}+2c_{66} \\ 0 & 0 & c_{11}-c_{12}-2c_{66} \\ c_{12}-c_{22}+2c_{66} & c_{11}-c_{12}-2c_{66} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Ainsi la matrice de comportement en membrane définie comme fonction de l'angle d'orientation θ des faces s'écrit :

$$C_m(\theta) = A_1\cos^4\theta + A_2\sin^4\theta + A_3\sin^2\theta\cos^2\theta + A_4\sin\theta\cos^3\theta + A_5\sin^3\theta\cos\theta \tag{4.7}$$

et la matrice de comportement en flexion :

$$C_f(\theta) = B_1\cos^4\theta + B_2\sin^4\theta + B_3\sin^2\theta\cos^2\theta + B_4\sin\theta\cos^3\theta + B_5\sin^3\theta\cos\theta \tag{4.8}$$

avec

$$B_i = \frac{1}{12}H_f^2 A_i \quad i = 1, 2, .., 5 \tag{4.9}$$

Les matrices A_i, B_i, $i = 1, 2, .., 5$ sont purement réelles et leurs valeurs diffèrent d'un matériau à un autre.

4.2.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis

L'équation du mouvement de flexion dans ce cas particulier de structure plaque symétrique à trois couches se déduit de l'équation de flexion générale du Chapitre 2 et définie

par l'équation (2.31) mais avec :

$$\begin{cases} \{M_\beta\} = \left[C_f^*(\theta_c,\omega)\right]\{\kappa_c\} + h_c\left[C_m\left(\theta\right)\right]\left(\dfrac{h_f}{2}\{\kappa\} + \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\}\right) \\ \{M_w\} = 2\left[C_f\left(\theta\right)\right]\{\kappa\} + h_f\left[C_m\left(\theta\right)\right]\left(\dfrac{h_f}{2}\{\kappa\} + \dfrac{h_c}{2}\{\kappa_c\}\right) \end{cases} \tag{4.10}$$

En utilisant l'élément fini décrit dans le Chapitre 2 , et en rajoutant la matrice d'interpolation suivante :

$$[N_{wm}] = \frac{H_f}{2}[N_{wf}] + \frac{h_c}{2}[N_f] \tag{4.11}$$

à celles de l'équation (2.38), on écrit l'équation du mouvement de flexion pour un élément sous la forme :

$$\begin{cases} \omega^2 \int\int_{se} \left(\rho_c h_c + 2\rho_f H_f\right) {}^t[N_w]\,[N_w]\,ds = \int\int_{se} \left({}^t[N_f]\left[C_f^*(\theta_c,\omega)\right][N_f]\right) ds \\ + \int\int_{se} \left(2\,{}^t[N_{wm}]\left[C_m\left(\theta\right)\right][N_{wm}] + 2\,{}^t[N_{wf}]\left[C_f\left(\theta\right)\right][N_{wf}] + {}^t[N_s]\left[C_s^*(\theta_c,\omega)\right][N_s]\right) ds \end{cases} \tag{4.12}$$

ce qui permet d'obtenir une équation élémentaire de la forme :

$$\left[K^e(\omega,\theta) - \omega^2 M^e\right]\{U^e\} = 0 \tag{4.13}$$

avec $K^e(\omega,\theta)$ la matrice de rigidité élémentaire dépendant à la fois de la fréquence et de l'angle d'orientation des fibres des faces. Nous rappelons que seuls les angles d'orientation des fibres des faces sont considérés comme des variables, celui du cœur viscoélastique orthotrope θ_c étant supposé constant donc ne constitue pas une dépendance d'étude. Cette matrice peut être découplée en deux parties telles que exprimée par l'équation (4.14) :

$$[K^e(\omega,\theta)] = [K_R^e(\theta)] + [K_c^e(\omega)] \tag{4.14}$$

Dans l'équation (4.14) la matrice de rigidité élémentaire $[K_R^e]$ dépendant de l'angle d'orientation des faces est due à la contribution des deux faces de la structure et s'écrit :

$$[K_R^e(\theta)] = 2\int\int_{se} \left({}^t[N_{wm}]\left[C_m\left(\theta\right)\right][N_{wm}] + {}^t[N_{wf}]\left[C_f\left(\theta\right)\right][N_{wf}]\right) ds \tag{4.15}$$

En introduisant les décompositions des matrices de comportement en membrane (équation 4.7) et en flexion (équation 4.8), on réécrit la matrice de rigidité élémentaire $[K_R^e]$ sous la forme :

$$[K_R^e(\theta)] = [K_{1R}^e]\cos^4\theta + [K_{2R}^e]\sin^4\theta + [K_{3R}^e]\sin^2\theta\cos^2\theta + [K_{4R}^e]\sin\theta\cos^3\theta + [K_{5R}^e]\sin^3\theta\cos\theta \tag{4.16}$$

où les matrices $[K_{iR}^e]$ sont définies par :

$$[K_{iR}^e] = 2\int\int_{se} \left({}^t[N_{wm}]\,[A_i]\,[N_{wm}] + {}^t[N_{wf}]\,[B_i]\,[N_{wf}]\right) ds, \quad i = 1, 2, ..., 5 \tag{4.17}$$

L'orientation des fibres des faces n'a aucun effet sur la masse de la structure puisque la masse volumique des couches n'est pas fonction des orientations de leurs fibres dans la structure. Ainsi, la matrice élémentaire de masse $[M^e]$ reste la même que celle définie au Chapitre 2 (équation 2.36). Par contre, la matrice de rigidité élémentaire $[K_c^e(\omega)]$ dépendante de la fréquence et due à la couche viscoélastique est fonction de l'orientation des fibres θ_c qui n'est pas considéré comme paramètre d'étude dans cette formulation :

$$[K_c^e(\omega)] = \int\int_{se} \left({}^t[N_f]\left[C_f^*(\theta_c,\omega)\right][N_f] + {}^t[N_s]\,[C_s^*(\theta_c,\omega)]\,[N_s]\right) ds \tag{4.18}$$

L'assemblage des matrices élémentaires définies par les équations (4.16, 4.18 et 2.36) permet d'obtenir un problème aux valeurs propres non linéaires complexes avec deux paramètres de dépendance (ω,θ) suivant :

$$\left[K_R(\theta) + K_c(\omega) - \omega^2 M\right]\{U\} = 0 \tag{4.19}$$

Comme dans le Chapitre 2, plusieurs cas sont à considérer pour la couche viscoélastique. Ainsi lorsque cette couche est considérée comme viscoélastique orthotrope (cas général),

la matrice $[K_c(\omega)]$ se déduit de la matrice $[K(\omega)]$ de l'équation (2.44) et s'écrit :

$$\begin{cases} [K_c(\omega)] = [K_c(0)] + [K_{cc}(\omega)] \\ [K_c(0)] = E^*_{xxc}(0)\,[K_1] + G^*_{xyc}(0)\,[K_2] + G^*_{xzc}(0)\,[K_3] + G^*_{yzc}(0)\,[K_4] \\ [K_{cc}(\omega)] = E_{xxc}(\omega)\,[K_1] + G_{xyc}(\omega)\,[K_2] + G_{xzc}(\omega)\,[K_3] + G_{yzc}(\omega)\,[K_4] \end{cases} \tag{4.20}$$

Dans le cas où la couche est considérée comme viscoélastique unidirectionnelle, on a :

$$\begin{cases} [K_c(\omega)] = [K_c(0)] + [K_{cc}(\omega)] \\ [K_c(0)] = E^*_{xxc}(0)\,[K_{14}] + G^*_{xyc}(0)\,[K_{23}] \\ [K_{cc}(\omega)] = E_{xxc}(\omega)\,[K_{14}] + G_{xyc}(\omega)\,[K_{23}] \end{cases} \tag{4.21}$$

et dans le cas viscoélastique isotrope :

$$\begin{cases} [K_c(\omega)] = [K_c(0)] + [K_{cc}(\omega)] \\ [K_c(0)] = E^*_c(0)\,[K_v] \\ [K_{cc}(\omega)] = E_c(\omega)\,[K_v] \end{cases} \tag{4.22}$$

De façon générale, l'équation de vibration libre (4.19) devient :

$$\left[K_c(0) + K_R(\theta) + K_{cc}(\omega) - \omega^2 M\right]\{U\} = 0, \qquad \theta \in I \tag{4.23}$$

pour les trois cas de couches viscoélastiques considérées pour le cœur. Les matrices de rigidité $K_c(0)$ représente l'élasticité retardée de la couche viscoélastique et la matrice de rigidité $K_R(\theta)$ représente la contribution en rigidité des couches des faces.

4.2.3 Intervalle d'étude

Le problème aux valeurs propres non linéaires complexes obtenu pour cette étude (équation 4.23), est sous une forme consistant à étudier les propriétés modales de la

structure en fonction de l'orientation θ des fibres des couches des faces. Cet angle doit varier dans la logique dans l'intervalle [0°, 360°]. Mais la parité et l'imparité des fonctions trigonométriques utilisées dans la décomposition des matrices de comportement en membrane et en flexion des couches des faces (équations 4.7 et 4.8) assurant le passage du repère matériau au repère de référence de la structure, ajouté à la symétrie de la structure, font que l'intervalle d'étude devient [0°, 180°]. Lorsque les conditions aux limites appliquées aux bords de la structure sont symétriques, cet intervalle d'étude se réduit encore et devient [0°, 90°]. Dans le cas où la plaque considérée est carrée et que les conditions aux limites sont également symétriques, l'étude se fera uniquement sur l'intervalle [0°, 45°]. Pour ce cas, l'extension de l'étude sur [0°, 180°], est faite par la symétrie du résultat de [0°, 45°] d'abord par rapport à $x = 45°$; puis la symétrie du résultat obtenu par rapport à $x = 90°$.

4.2.4 Résolution continue du problème

Le problème aux valeurs propres non linéaires complexes (équation 4.19) obtenu par cette formulation est résolu de manière continue par la nouvelle méthode du Chapitre 3. Pour ce faire, nous avons posé les coefficients matriciels et leurs fonctions à différentier comme suit :

$$\begin{cases} [K_g] = {}^{\ddot{\mathrm{t}}}\,[K_{1R},\, K_{2R},\, K_{3R},\, K_{4R},\, K_{5R},\, K_v] \\ [M_g] = [M] \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\left[E_g^*(\lambda,p)\right] = \left[E_{g1}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g2}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g3}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g4}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g5}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g6}^*(\lambda,p)\right] \tag{4.25}$$

avec

$$\begin{cases} E_{g1}^*(\lambda,p) = \cos^4 p & E_{g4}^*(\lambda,p) = \sin p \cos^3 p \\ E_{g2}^*(\lambda,p) = \sin^4 p & E_{g5}^*(\lambda,p) = \sin^3 p \cos p \\ E_{g3}^*(\lambda,p) = \sin^2 p \cos^2 p & E_{g6}^*(\lambda,p) = E_c^*(0) + E_c(\lambda) \end{cases} \tag{4.26}$$

et

$$[E_m(p)] = 1 \tag{4.27}$$

l'intervalle d'étude I est défini suivant les dimensions de la structure et des conditions aux limites qui lui sont appliquées. Nous rappelons que $\lambda = \omega^2$ et que $p = \theta$ est le paramètre d'étude

4.3 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches

Nous considérons à présent, une plaque dont les faces sont constituées de stratifié de plusieurs couches référencées du haut en bas par i, leur épaisseur par h_{fi} et l'orientation de leurs fibres par θ_i comme ce fut le cas dans le Chapitre 2 (figures 2.1 et 2.2).

4.3.1 Plaques sandwichs de séquences particulières

Dans la littérature [94, 113], on rencontre souvent des structures constituées de stratifiés de séquence du type $[\theta + \alpha_1/.../\theta + \alpha_n/c]_s$ (figure 4.2). Pour cette séquence générale, seul l'angle θ sera considéré variable dans cette étude, les autres angles $(\alpha_1, ..., \alpha_n\ )$ sont donc considérés constants. Cette séquence générale permet d'obtenir des séquences particulières telles que les cas où les faces sont constituées des stratifiés croisés symétrique ou antisymétrique.

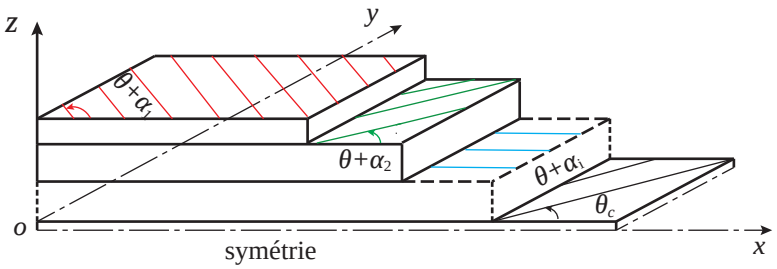


Figure 4.2 – Plaque sandwich de séquence particulière

4.3.1.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion

Pour pouvoir mener à bien cette étude, nous allons récrire la matrice de comportement en membrane et en flexion de chaque couche constituant les faces en linéarisant les

fonctions trigonométriques $(\cos^4\theta,\ \sin^4\theta,\ (\sin\theta\cos\theta)^2,\ \sin\theta\cos^3\theta,\ \text{et}\ \sin^3\theta\cos\theta)$ [1] [2] [3] [4] [5] contenues dans ces expressions. Une telle linéarisation permet de réécrire la matrice de comportement en membrane de l'équation (4.7) sous la forme :

$$C_m(\theta) = a_0 + a_1\cos(4\theta) + a_2\cos(2\theta) + a_3\sin(4\theta) + a_4\sin(2\theta) \tag{4.28}$$

avec $a_j,\quad j = 0, 1, .., 4$ des matrices qui sont fonctions des modules d'élasticité du matériau et sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{3}{8}A_1 + \dfrac{3}{8}A_2 + \dfrac{1}{8}A_3 \\ a_1 = \dfrac{1}{8}A_1 + \dfrac{1}{8}A_2 - \dfrac{1}{8}A_3 \\ a_2 = \dfrac{1}{2}A_1 - \dfrac{1}{2}A_2 \\ a_3 = \dfrac{1}{8}A_4 - \dfrac{1}{8}A_5 \\ a_4 = \dfrac{1}{4}A_4 + \dfrac{1}{4}A_5 \end{cases} \tag{4.29}$$

où les $A_j,\quad j = 1, 2, ..., 5$ sont données par les équations (4.2, 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6). Ainsi pour une couche référencée i, dont les fibres sont orientées par l'angle $\theta + \alpha_i$ la matrice de comportement en membrane s'écrit :

$$C_m^i(\theta+\alpha_i) = a_0^i + a_1^i\cos(4\theta+4\alpha_i) + a_2^i\cos(2\theta+2\alpha_i) + a_3^i\sin(4\theta+4\alpha_i) + a_4^i\sin(2\theta+2\alpha_i) \tag{4.30}$$

Les angles additionnels α_i étant des constantes, les développements [6] [7] des $\cos(k\theta + k\alpha_i)$ et $\sin(k\theta + k\alpha_i)$ $k = 2, 4$ permettent de réécrire cette matrice sous la forme :

$$C_m^i(\theta+\alpha_i) = \mathcal{A}_0^i + \mathcal{A}_1^i\cos(4\theta) + \mathcal{A}_2^i\cos(2\theta) + \mathcal{A}_3^i\sin(4\theta) + \mathcal{A}_4^i\sin(2\theta) \tag{4.31}$$

1. $\cos^4\theta = \cos(4\theta)/8 + \cos(2\theta)/2 + 3/8$
2. $\sin^4\theta = \cos(4\theta)/8 - \cos(2\theta)/2 + 3/8$
3. $(\sin\theta\cos\theta)^2 = 1/8 - \cos(4\theta)/8$
4. $\sin\theta\cos^3\theta = \sin(4\theta)/8 + \sin(2\theta)/4$
5. $\sin^3\theta\cos\theta = -\sin(4\theta)/8 + \sin(2\theta)/4$
6. $\cos(k\theta + k\alpha_i) = \cos(k\theta)\cos(k\alpha_i) - \sin(k\theta)\sin(k\alpha_i)$
7. $\sin(k\theta + k\alpha_i) = \sin(k\theta)\cos(k\alpha_i) + \cos(k\theta)\sin(k\alpha_i)$

où les coefficients matriciels $\mathcal{A}_j^i, \quad , i = 1, 2, ..., n, \quad j = 0, 1, ..., 4$ sont des combinaisons des matrices $a_j, \quad j = 0, 1, .., 4$, combinaisons issues des formules trigonométriques de développement. Ces matrices sont alors exprimées comme suit (équation 4.32) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^i = a_0^i \\ \mathcal{A}_1^i = a_1^i \cos(4\alpha_i) + a_3^i \sin(4\alpha_i) \\ \mathcal{A}_2^i = a_2^i \cos(2\alpha_i) + a_4^i \sin(2\alpha_i) \\ \mathcal{A}_3^i = -a_1^i \sin(4\alpha_i) + a_3^i \cos(4\alpha_i) \\ \mathcal{A}_4^i = -a_2^i \sin(2\alpha_i) + a_4^i \cos(2\alpha_i) \end{cases} \tag{4.32}$$

La matrice de comportement en flexion se déduit de la matrice de comportement en membrane comme ce fut le cas des plaques (section 4.2) trois couches et s'écrit :

$$C_f^i(\theta + \alpha_i) = \mathcal{B}_0^i + \mathcal{B}_1^i \cos(4\theta) + \mathcal{B}_2^i \cos(2\theta) + \mathcal{B}_3^i \sin(4\theta) + \mathcal{B}_4^i \sin(2\theta) \tag{4.33}$$

les coefficients matriciels s'exprimant dans ce cas par :

$$\mathcal{B}_j^i = \frac{1}{12} h_{fi}^2 \mathcal{A}_j^i, \quad , i = 1, 2, ..., n, \quad j = 0, 1, ..., 4 \tag{4.34}$$

4.3.1.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis

Pour utiliser l'élément fini développé pour les plaques multicouches dans le Chapitre 2, il est important de réécrire certaines expressions dans l'équation de mouvement de flexion, notamment les matrices des moments fléchissants $\{M_\beta\}$ et $\{M_w\}$(équation 2.29) qui sont directement affectés par les variations d'angle θ. Pour cela nous allons exprimer les termes portant les sommations dans l'expression de ces moments. Ainsi :

$$\sum_{i \neq n+1} \{M_i\} = 2 \sum_{i=1}^{n} \{M_i\} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left[C_f^i(\theta + \alpha_i)\right] \{\kappa\} \tag{4.35}$$

En remplaçant $C_f^i(\theta+\alpha_i)$ par son expression de l'équation (4.33), la somme des moments (équation 4.35) des couches de faces s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq n+1}\{M_i\} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{B}_0^i\right]\{\kappa\} + 2\cos(4\theta)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{B}_1^i\right]\{\kappa\} + 2\cos(2\theta)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{B}_2^i\right]\{\kappa\} \\ +2\sin(4\theta)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{B}_3^i\right]\{\kappa\} + 2\sin(2\theta)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{B}_4^i\right]\{\kappa\}\end{aligned} \tag{4.36}$$

En remplaçant $C_m^i(\theta+\alpha_i)$ par son expression de l'équation (4.31) dans l'expression de la sommation $\{M_\beta\}$ (équation 2.29) on a :

$$\begin{aligned}\frac{h_c}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left[C_m^i\right]\left((z_i-\frac{h_c}{2})\{\kappa\}+\frac{h_c}{2}\{\kappa_c\}\right)\right) &= h_c\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{A}_0^i\right]\{\kappa_i\} \\ +\cos(4\theta)\,h_c\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{A}_1^i\right]\{\kappa_i\} &+ \cos(2\theta)\,h_c\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{A}_2^i\right]\{\kappa_i\} \\ +\sin(4\theta)\,h_c\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{A}_3^i\right]\{\kappa_i\} &+ \sin(2\theta)\,h_c\sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{A}_4^i\right]\{\kappa_i\}\end{aligned} \tag{4.37}$$

avec

$$\{\kappa_i\} = (z_i-\frac{h_c}{2})\{\kappa\}+\frac{h_c}{2}\{\kappa_c\} \tag{4.38}$$

De manière similaire, la sommation de $\{M_w\}$ (équation 2.29) devient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left(2\left[C_m^i\right]\left((z_i-\frac{h_c}{2})\{\kappa\}+\frac{h_c}{2}\{\kappa_c\}\right)\right) &= 2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left[\mathcal{A}_0^i\right]\{\kappa_i\} \\ +2\cos(4\theta)\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left[\mathcal{A}_1^i\right]\{\kappa_i\} &+ 2\cos(2\theta)\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left[\mathcal{A}_2^i\right]\{\kappa_i\} \\ +2\sin(4\theta)\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left[\mathcal{A}_3^i\right]\{\kappa_i\} &+ 2\sin(2\theta)\sum_{i=1}^{n}(z_i-\frac{h_c}{2})\left[\mathcal{A}_4^i\right]\{\kappa_i\}\end{aligned} \tag{4.39}$$

Les décompositions des formules (équations 4.36, 4.37 et 4.39) évitent de faire une sommation sur l'angle d'étude θ. Leur utilité sera prouvée beaucoup plus loin au cours de la résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes obtenu. En discrétisant l'équation de mouvement de flexion (équation 2.31) avec l'élément fini du Chapitre 2, on obtient un problème élémentaire aux valeurs propres, semblable à celui obtenu dans le cas de plaque trois couches (équation 4.13) mais dont seule l'expression de la matrice

de rigidité diffère. En effet, la matrice de rigidité dépendante des deux paramètres de non linéarité ω et θ peut être découplée comme dans le cas de l'équation (4.14). La matrice $[K_c^e(\omega)]$ reste la même que dans le cas des structures plaques trois couches, quelque soit le type de matière viscoélastique considérée pour le cœur. L'expression de $[K_R^e(\theta)]$ devient par contre :

$$[K_R^e(\theta)] = [K_{0R}^e] + [K_{1R}^e]\cos(4\theta) + [K_{2R}^e]\cos(2\theta) + [K_{3R}^e]\sin(4\theta) + [K_{4R}^e]\sin(2\theta) \quad (4.40)$$

où les matrices élémentaires $\left[K_{jR}^e\right]$, $j = 0, 1, ..., 4$ ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\left[K_{jR}^e\right] &= 2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_f]\left[\left(\frac{h_c}{2}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_j^i\right][N_f]\right)ds \\
&+2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mathcal{B}_j^i + (z_i - \frac{h_c}{2})^2\mathcal{A}_j^i\right)\right][N_{wf}]\right)ds \\
&+2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2})\mathcal{A}_j^i\right)\right][N_f]\right)ds \\
&+2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_c}{2}(z_i - \frac{h_c}{2})\mathcal{A}_j^i\right)\right][N_{wf}]\right)ds
\end{aligned} \quad (4.41)$$

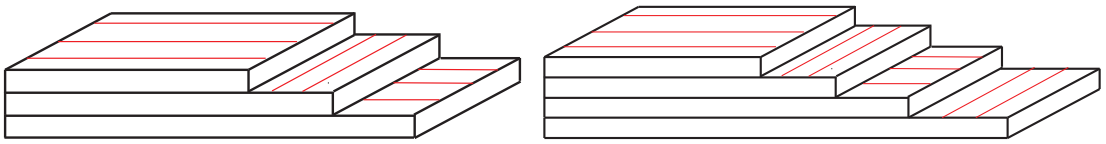
L'assemblage des matrices élémentaires conduit à un problème aux valeurs propres non linéaire et à double dépendance similaire à celui de l'équation (4.23) et dont la matrice de rigidité réelle $[K_R(\theta)]$ dépend de l'angle d'orientation θ et a pour expression :

$$[K_R(\theta)] = [K_{0R}] + [K_{1R}]\cos(4\theta) + [K_{2R}]\cos(2\theta) + [K_{3R}]\sin(4\theta) + [K_{4R}]\sin(2\theta) \quad (4.42)$$

les matrices $[K_{jR}]$, $j = 0, 1, ..., 4$ étant issues de l'assemblage des matrices élémentaires $\left[K_{jR}^e\right]$, $j = 0, 1, ..., 4$ définies à l'équation (4.41).

4.3.1.3 Faces constituées de stratifiés croisés symétrique ou antisymétrique

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à 0° ou 90° des directions de référence du stratifié. Un stratifié croisé est dit symétrique lorsque son nombre de couches est impair soit $n = 2p + 1$, tandis qu'il est dit antisymétrique pour un nombre de couches pair soit $n = 2p$ (figure 4.3).



(a) Stratifié croisé symétrique trois couches (b) Stratifié croisé antisymétrique quatre couches

Figure 4.3 – Stratifiés croisés

Ainsi, pour avoir le cas particulier de structures sandwichs plaques dont les faces sont constituées de stratifié croisé symétrique, il suffit de prendre un nombre impair de couches et prendre les angles d'orientation $\alpha_i = 0°$ (ou 90°) pour les i pairs et $\alpha_i = 90°$ (ou 0°) pour les i impairs. De même pour avoir le cas particulier de structures sandwichs plaques dont les faces sont constituées de stratifié croisé antisymétrique il faut prendre un nombre pair de couches et l'orientation est faite de la même manière que pour le cas de stratifié croisé symétrique. Dans tous les cas, les épaisseurs des couches sont les mêmes. Pour ces deux cas, l'ajout de l'angle θ sur les orientations des différentes couches signifie la rotation de l'angle θ de tout le stratifié constituant les faces .

4.3.2 Plaques sandwichs de faces constituées de stratifié antisymétrique

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique alors que celle des orientations des axes est antisymétrique par rapport au plan moyen du stratifié. Ainsi, pour notre structure sandwich viscoélastique considérée, dire que les faces inférieure et supérieure de la structure sont constituées de stratifié antisymétrique revient à considérer :

— le nombre de couches de chaque face égal à $n = 2p$

— lorsque l'angle d'orientation de la couche i est $\theta+\alpha_i$, celui de la couche $k=n+1-i$ égal à $-(\theta+\alpha_i)$, pour tout $i=1,2,...,p$

— de plus les épaisseurs telles que $h_{fi}=h_{fn+1-i}$, pour tout $i=1,2,...,p$

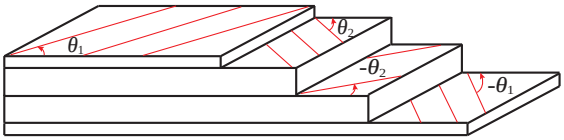


Figure 4.4 – Stratifié antisymétrique quatre couches

4.3.2.1 Matrices de comportement en membrane et en flexion

Pour la plaque sandwich considérée dans cette section, la face supérieure (ou inférieure) est subdivisée en deux parties suivant son plan moyen. Les couches en haut de ce plan moyen (couches de référence $i=1,2,...,p$) ont un comportement en membrane donné par l'équation (4.31) et celui en flexion par l'équation (4.33). Par contre, les couches en dessous de ce plan moyen ont un comportement en membrane pour tout $k=p+1,\ p+2,...,2p$ comme suit :

$$C_m^k\left(-\theta-\alpha_i\right)=\mathcal{A}_0^k+\mathcal{A}_1^k\cos\left(4\theta\right)+\mathcal{A}_2^k\cos\left(2\theta\right)+\mathcal{A}_3^k\sin\left(4\theta\right)+\mathcal{A}_4^k\sin\left(2\theta\right) \tag{4.43}$$

avec des coefficients matriciels différents de ceux de la formule (équation 4.32) et sont exprimées par la formule (équation 4.44)

$$\begin{cases}\mathcal{A}_0^k=a_0^k\\ \mathcal{A}_1^k=a_1^k\cos\left(4\alpha_i\right)-a_3^k\sin\left(4\alpha_i\right)\\ \mathcal{A}_2^k=a_2^k\cos\left(2\alpha_i\right)-a_4^k\sin\left(2\alpha_i\right)\\ \mathcal{A}_3^k=-a_1^k\sin\left(4\alpha_i\right)-a_3^k\cos\left(4\alpha_i\right)\\ \mathcal{A}_4^k=-a_2^k\sin\left(2\alpha_i\right)-a_4^k\cos\left(2\alpha_i\right)\end{cases} \tag{4.44}$$

avec $i=2p+1-k$. Les matrices $a_j^k,\quad j=0,1,...,4$ étant calculées de la même manière que dans la formule (équation 4.29). La matrice de comportement en flexion se déduit

toujours de la matrice de comportement en flexion par la formule générale

$$C_f^i = \frac{1}{12} h_{fi}^2 C_m^i, \quad i = 1, 2, ..., 2p \tag{4.45}$$

La symétrie de la structure impose toujours le développement des formules pour une seule face.

4.3.2.2 Equation du mouvement et discrétisation par éléments finis

L'équation du mouvement de flexion de cette structure est identique à celle détaillée dans le Chapitre 2 (équation 2.31). De même, la discrétisation par éléments finis de cette équation est similaire à celle déjà exposée dans le cas des structures plaques sandwichs de séquence $[\theta + \alpha_1/.../\theta + \alpha_n/c]_s$. Toutefois, les sommations se font en deux parties, d'abord de 1 à p puis de $p+1$ à $2p$ pour bien prendre en compte les expressions des matrices de comportement en membrane et en flexion en se servant des équations (4.31 et 4.43). Ce faisant, le problème aux valeurs propres non linéaire élémentaire et global obtenu sont identiques à ceux des équations (4.13) et (4.23) sauf l'expression de la matrice $[K_R(\theta)]$ qui est similaire à celui de l'équation (4.42).

4.3.3 Faces constituées de stratifiés équilibrés ou alternés

Un stratifié est dit équilibré s'il comporte autant de couches orientées suivant un angle θ que de couches orientées suivant un angle $-\theta$. Il peut être quelconque, symétrique ou antisymétrique.

Lorsque le stratifié est constitué de couches orientées alternativement suivant les directions θ et $-\theta$, relativement aux axes de référence du stratifié, ce dernier est dit alterné. Un stratifié équilibré peut être également alterné.

Pour ces genres de stratifiés, l'équation du mouvement de vibration libre décomposée en fonction de l'angle d'orientation θ, s'obtient en appliquant les comportements respectifs de l'équation (4.31) pour les couches d'orientation θ et de l'équation (4.44) pour les couches d'orientation $-\theta$ les angles additionnels étant $\alpha_i = 0$. Ce faisant, on écrit une fois encore

l'équation de mouvement de vibration libre sous la forme donnée par l'équation (4.23).

4.3.4 Intervalle d'étude

Le comportement observé dans le cas de structure sandwich viscoélastique à trois couches s'observe également dans les cas actuels. En effet les fonctions trigonométriques ($\cos(4\theta)$, $\cos(2\theta)$) sont paires alors que ($\sin(4\theta)$, $\sin(2\theta)$) sont impaires, de plus la structure est toujours symétrique. On se retrouve ainsi dans les mêmes conditions que celles décrites dans la sous section 4.2.3.

4.3.5 Résolution continue du problème

La résolution continue du problème aux valeurs propres non linéaires complexes des sandwichs multicouches viscoélastiques par la nouvelle méthode du Chapitre 3, revient à poser les coefficients matriciels et leurs fonctions associées à différentier comme suit :

$$\begin{cases} [K_g] = {}^t [K_{0R},\, K_{1R},\, K_{2R},\, K_{3R},\, K_{4R},\, K_v] \\ [M_g] = [M] \end{cases} \tag{4.46}$$

$$\left[E_g^*(\lambda,p)\right] = \left[E_{g1}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g2}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g3}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g4}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g5}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g6}^*(\lambda,p)\right] \tag{4.47}$$

avec

$$\begin{cases} E_{g1}^*(\lambda,p) = 1 & E_{g4}^*(\lambda,p) = \sin(4p) \\ E_{g2}^*(\lambda,p) = \cos(4p) & E_{g5}^*(\lambda,p) = \sin(2p) \\ E_{g3}^*(\lambda,p) = \cos(2p) & E_{g6}^*(\lambda,p) = E_c^*(0) + E_c(\lambda) \end{cases} \tag{4.48}$$

et

$$[E_m(p)] = 1 \tag{4.49}$$

Ici encore, le paramètre d'étude est l'orientation des fibres des couches dont l'intervalle décrit varie selon les dimensions de la structure et des conditions aux limites qui lui sont appliquées mais également de la séquence d'empilement des couches. Ici encore $\lambda = \omega^2$ et

$p = \theta$ est le paramètre d'étude

4.4 Tests de validation et Résultats numériques

Pour valider les formulations théoriques développées dans ce chapitre, nous allons présenter dans cette section quelques résultats numériques. Nous allons tout d'abord valider le modèle éléments finis pour les structures sandwichs trois couche (section4.2) en comparant les résultats obtenus avec notre nouvelle méthode de résolution (3) à ceux de la littérature [99]. Ensuite pour des structures plus complexes, n'ayant pas trouvé dans la littérature des résolutions de problèmes de ce type, une comparaison sera faite par rapport à un calcul discret correspondant aux développements du Chapitre 2 où tous les angles d'orientation des fibres sont connus d'avance. La résolution continue par la nouvelle méthode sera dénommée CCNM (Calcul Continu par la Nouvelle Méthode) et la résolution discrète par CDPM (Calcul Discret par le Présent Modèle). Pour les calculs, une étude de convergence non présentée dans le document permet de fixé pour le CCNM, la précision à $\varepsilon = 10^{-4}$ et pour le CDPM à $\varepsilon = 10^{-6}$. Dans les deux cas de calculs, le nombre de troncature des séries est fixé à $N = 20$. Nous rappelons que pour le calcul par homotopie dans le CCNM la précision utilisée est $\varepsilon = 10^{-6}$. Différents types de structures de part les dimensions,les lois viscoélastiques et les conditions aux limites seront présentés. Ces conditions aux limites (CL) seront écrites en adoptant la codification anglaise représentant l'encastrement par C (Clamped) l'appui simple par S (simply supported) et libre par F (Free).

4.4.1 Cas des structures sandwichs à trois couches

4.4.1.1 Poutre sandwich viscoélastique

Le premier test de validation concerne une poutre sandwich viscoélastique trois couches encastrée-libre. Cette poutre dont les faces sont en graphite-epoxy (***T300/5208***) est étudiée par Arvin et al. [99]. Les autres caractéristiques de la poutre sont présentées dans

le tableau (4.1).

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = 4$	$E_c^*(0) = 2,097026MPa$	$E_{xx} = 141,2GPa,$
$h_c = 20$	$E_c^*(\omega) = E_c^*(0)(1 + 0,3i)$	$E_{yy} = 9,72GPa$
$L = 1000$	$\nu_c = 0,49$	$G_{xy} = 5,53GPa,$
$l = 25$	$\rho_c = 970kg.m^{-3}$	$\nu_{xy} = 0,28$
		$\rho_f = 1536kg.m^{-3}$

Tableau 4.1 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre sandwich

Dans leur étude, Arvin et al. ont étudié la variation des propriétés modales de cette poutre en fonction de l'angle d'orientation des faces en incrémentant à pas de 10° sur l'intervalle d'étude $I = [0°,\ 90°]$. Ce problème de vibration propre est repris avec notre formulation et le problème aux valeurs propres non linéaires complexes est résolu de manière continue par la nouvelle méthode du Chapitre 3. Pour faire cette étude, la poutre sandwich viscoélastique trois couches a été maillée à 160×4 éléments. Nous présentons sur la figure (4.5) une comparaison de nos résultats et ceux de Arvin et al. [99] pour les quatre premiers modes de vibration en flexion de cette poutre. On note une bonne corrélation entre résultats des deux formulations pour les quatre premiers modes de flexion tant au niveau des fréquences que des amortissements. Pour le quatrième mode, on observe un écart pour la valeur $\theta = 0°$ au niveau de la fréquence et de l'amortissement pour les deux formulations. En effet il s'agit tout simplement d'une omission puisque pour cette valeur $\theta = 0°$ Arvin et al. [99] ont pris la valeur du cinquième mode à la place du quatrième mode. Nos calculs pour le cinquième mode donnent $\Omega = 141,13Hz$ et $\eta = 0,034$, alors que la valeur qu'ils ont représentée pour le quatrième mode sur la figure est : $\Omega = 140,41Hz$ et $\eta = 0,034$. Pour le quatrième mode, la courbe de variation de la fréquence amortie passe par un point maximum autour de la valeur $\theta = 7,32°$. Pour les valeurs de l'orientation inférieure à la valeur du maximum ($\theta = 7,32°$), l'amortissement du quatrième mode est presque constante et augmente rapidement au delà de $\theta = 7,32°$. Cette observation ne peut pas être faite dans le cas du calcul discret de Arvin et al. [99] puisque le calcul pour l'orientation $\theta = 7,32°$ n'a pas été fait.

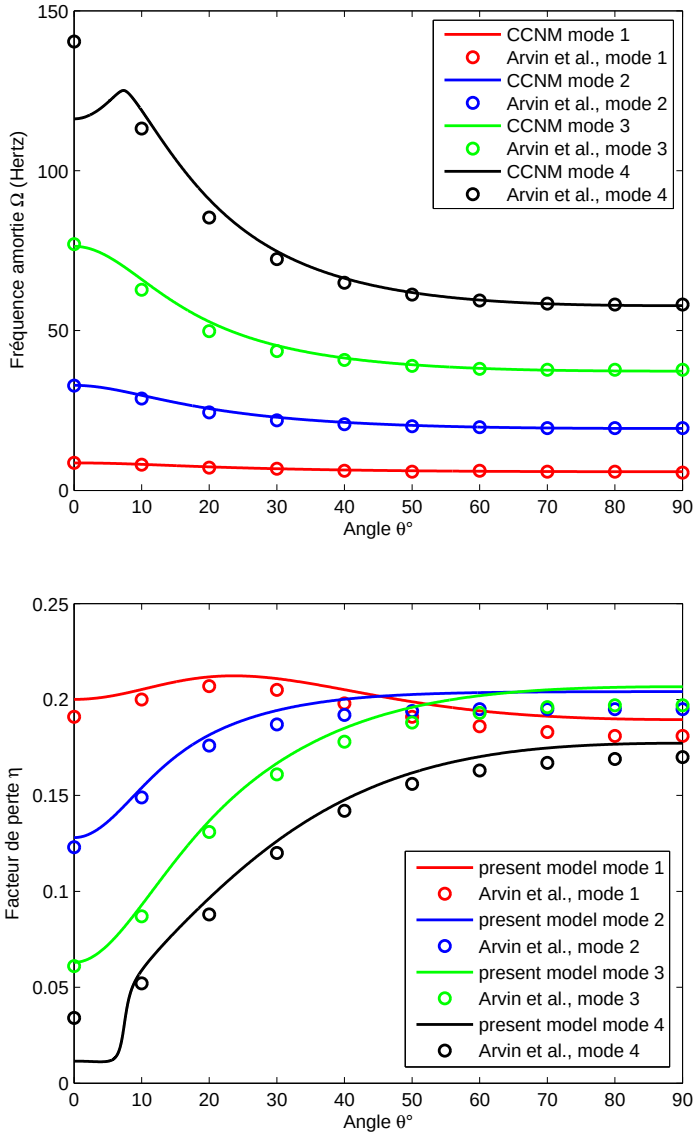


Figure 4.5 – Etude continue des propriétés modales de la poutre sandwich

4.4.1.2 Plaques sandwichs viscoélastiques

Les résultats qui seront présentés dans cette sous section, concerne le cas des structures de la section 4.2. Nous reprenons alors la plaque 2 (tableau 2.5) en remplaçant sa couche centrale viscoélastique par une couche en ISD112 à 27°C (2.4). Cette plaque est dénommée plaque 6 et ces caractéristiques géométriques et mécaniques sont rappelées dans le tableau (4.2).

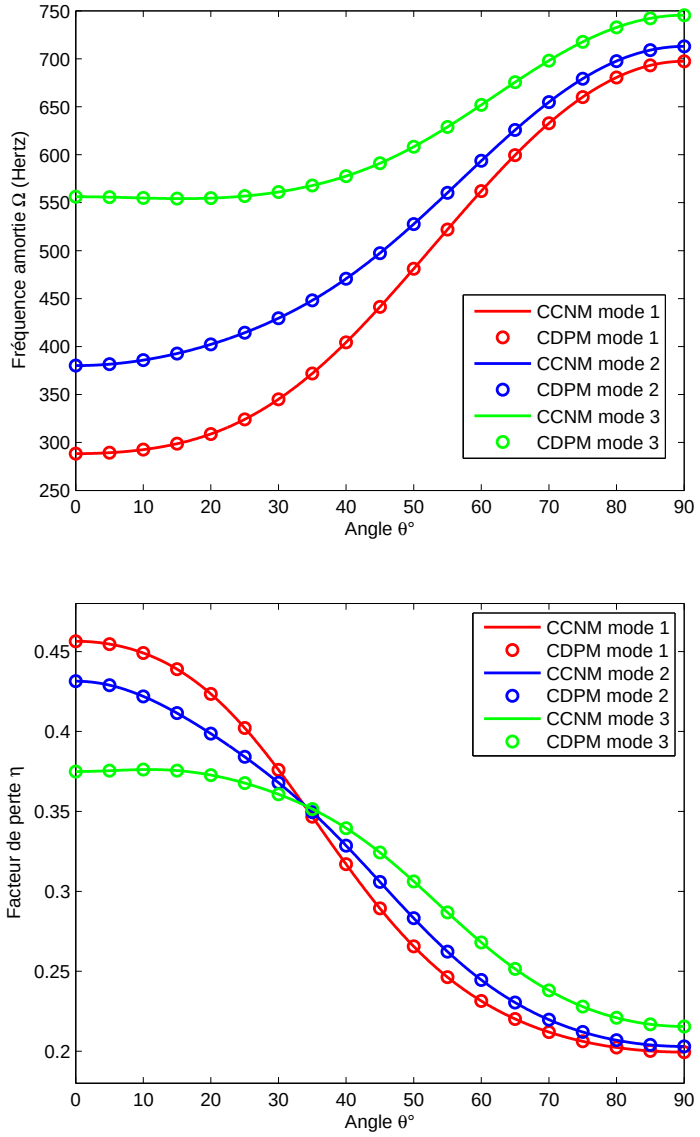


Figure 4.6 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : CCCC

Pour cette plaque, nous présentons la variation des propriétés modales (fréquences amorties et amortissements) pour trois conditions aux limites : encastrements, appui simple et encastrement de deux côtés successifs les deux autres étant libres. Pour les deux premières conditions aux limites, leur symétrie ajoutée au fait que la plaque 6 est rectangulaire impose une étude sur l'intervalle $I = [0°,\ 90°]$ (4.2.3). Pour la dernière condition aux limites par contre, son asymétrie impose une étude sur l'intervalle $I = [0°,\ 180°]$.

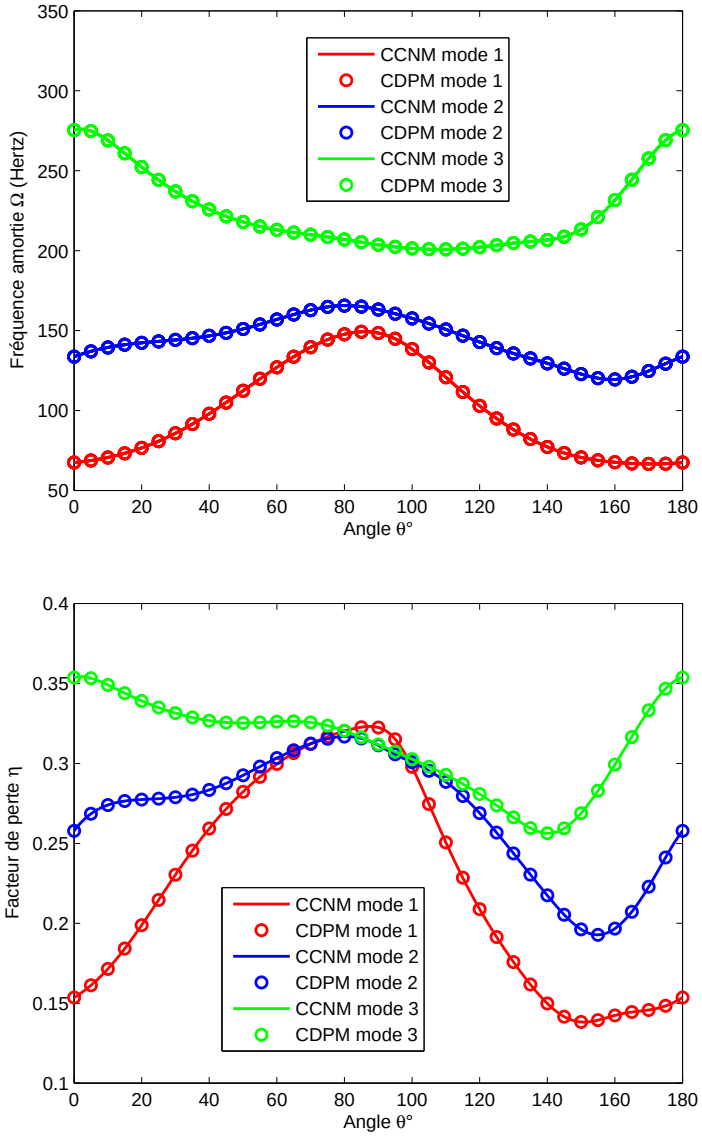


Figure 4.7 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : CCFF

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = 0,762$		$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_c = 0,254$	ISD112 à 27°C	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$L = 300$	Loi (2.1)	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$l = 100$		$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 4.2 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 6

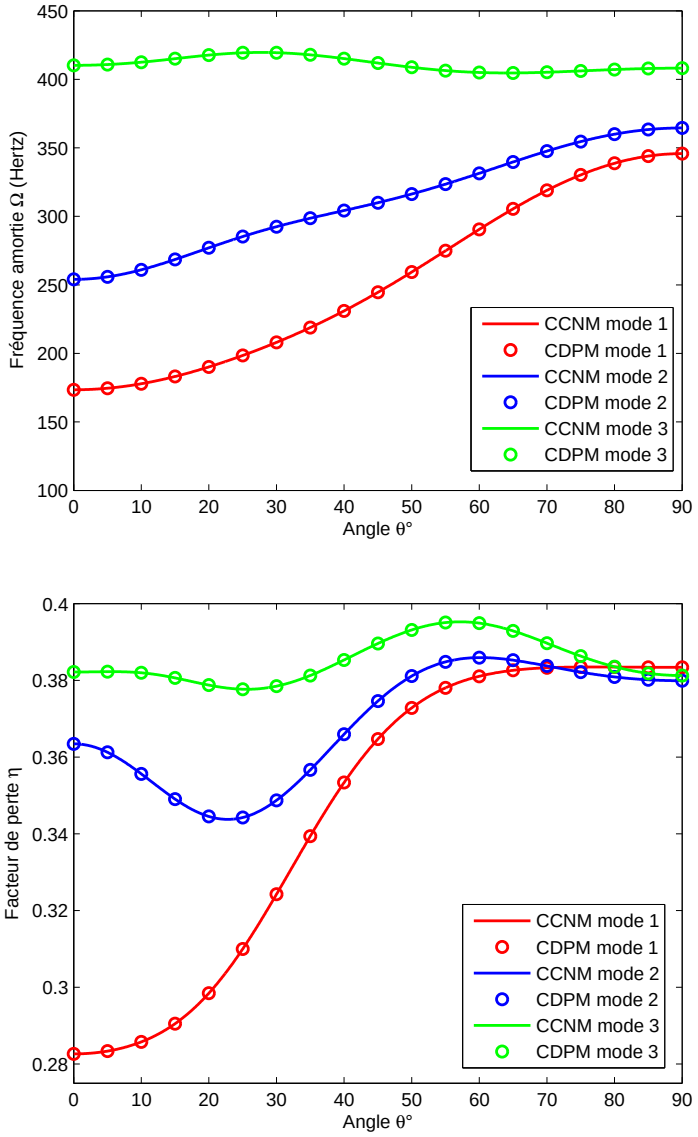


Figure 4.8 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6, CL : SSSS

L'étude continue par la méthode de résolution décrite dans le Chapitre 3 de la plaque 6 pour le cas de l'encastrement (figure 4.6), montre une croissance des fréquences amorties pour les trois premiers modes de vibration sur l'intervalle d'étude I alors que les amortissements correspondants à ces fréquences décroissent. Pour le cas de la condition aux limites appui simple (figure 4.8), les fréquences amorties des deux premiers modes croissent sur l'intervalle d'étude alors que celle du troisième mode croit légèrement d'abord sur $[0°,\ 30°]$ avant de décroitre légèrement sur l'autre partie de I. Pour les amortissements par contre, seul celui du premier mode croit sur l'intervalle d'étude I ; alors que ceux des deuxième et

troisième modes alternent des phases de décroissance et de croissance présentant ainsi des extrémums pour les valeurs $\theta = 23°$, $\theta = 60°$ pour le deuxième mode et $\theta = 25°$, $\theta = 57°$. L'étude de la plaque 6 pour la condition aux limites encastré de deux côtés consécutifs et libres des deux autres, montre réellement la dissymétrie des propriétés modales . Alors que les deux premiers modes présentent des maximums autour de $\theta = 85°$ pour les fréquences amorties, le troisième présente un minimum pour $\theta = 105°$. Pour les amortissements, on observe un maximum à $\theta = 87,5°$, $\theta = 80,5°$, et $\theta = 0°$, $180°$, respectivement pour le premier, le deuxième et le troisième mode.

4.4.2 Cas des structures plaques sandwichs dont les faces sont en stratifié

Les cas d'étude qui vont suivre concernent des structures sandwichs plaques dont les faces sont constituées de stratifié de séquences diverses.

4.4.2.1 Faces constituées de stratifié croisé symétrique

Le premier cas d'étude correspond à l'étude de la sous section 4.3.1.3. Nous considérons pour cette étude, une plaque rectangulaire dont le cœur est conçu avec le matériau viscoélastique DYAD à 25°C (2.4). Cette plaque que nous désignerons par plaque 7 a ses faces constituées de stratifié croisé symétrique avec trois couches chacun dans la séquence générale $[\theta/\theta + 90/\theta]$. La représentation séquentielle générale de la plaque 7 est alors $[\theta/\theta + 90/\theta/c/\theta/\theta + 90/\theta]$ ou plus simplement $[\theta/\theta + 90/\theta/c]_s$ et ces caractéristiques géométriques et mécaniques sont regroupées dans le tableau (4.3). Nous présentons pour cette structure, quatre différentes conditions aux limites pour l'étude continue des propriétés modales .

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{fi} = 0,2$		$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$i = 1,2,3$	DYAD à 25°C (2.4)	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$h_c = 0,2$	Loi (2.51)	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$L = 300$		$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
$l = 100$		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 4.3 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 7

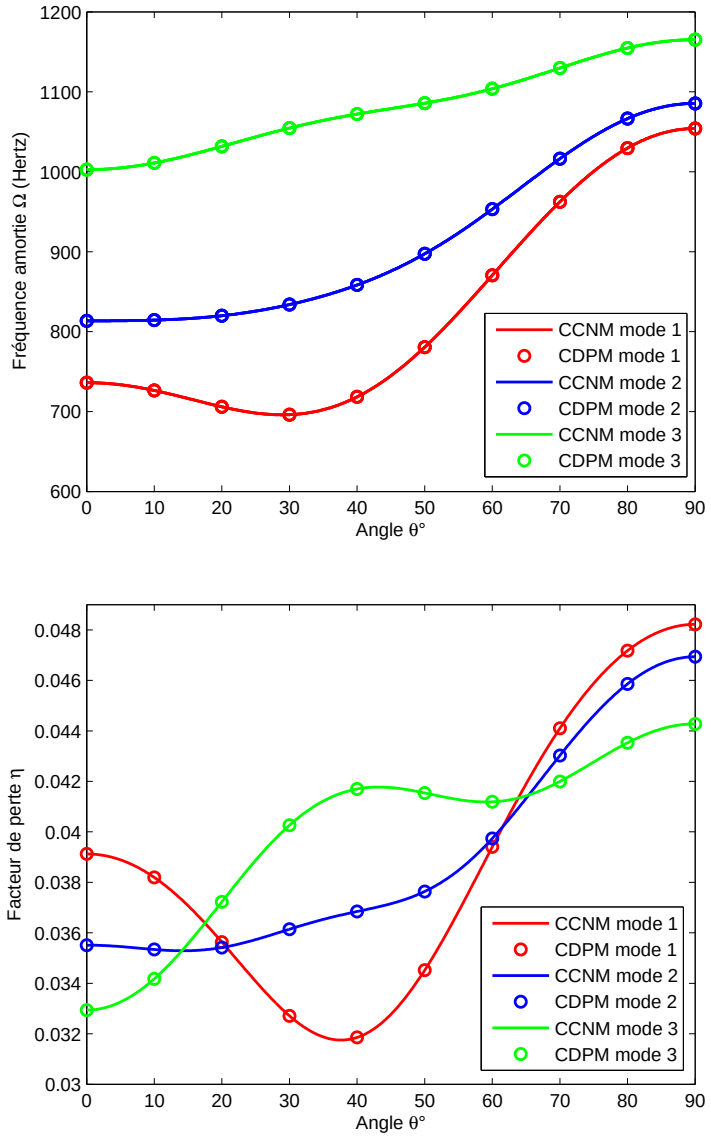


Figure 4.9 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CCCC

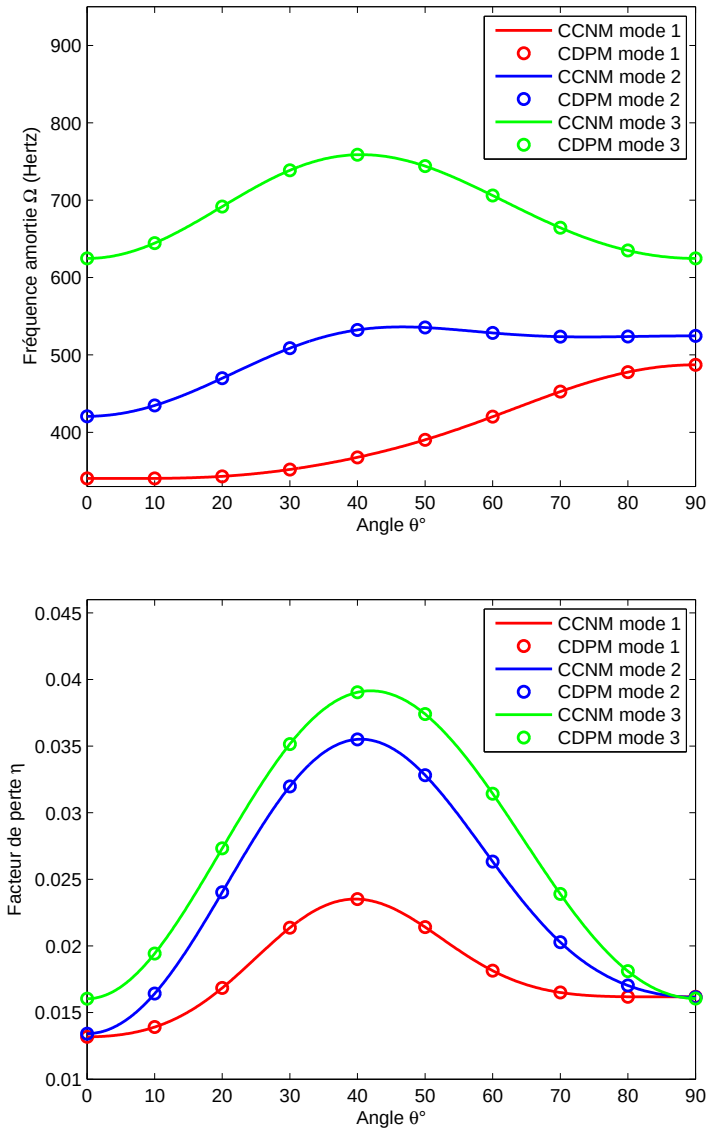


Figure 4.10 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : SSSS

Ainsi la figure (4.9) montre que pour avoir une fréquence amortie et un amortissement maximal pour les trois premiers modes, il faut prendre l'angle $\theta = 90°$ pour la condition aux limites encastrement. Pour la condition aux limites appui simple (figure 4.10) par contre, les amortissements optimaux sont obtenus autour de $\theta = 40°$ pour les trois premiers modes. Dans cette zone d'orientation, les courbes des fréquences amorties des deuxième et troisième mode présentent également des valeurs maximales mais cette valeur maximale s'obtient pour le premier mode pour $\theta = 90°$.

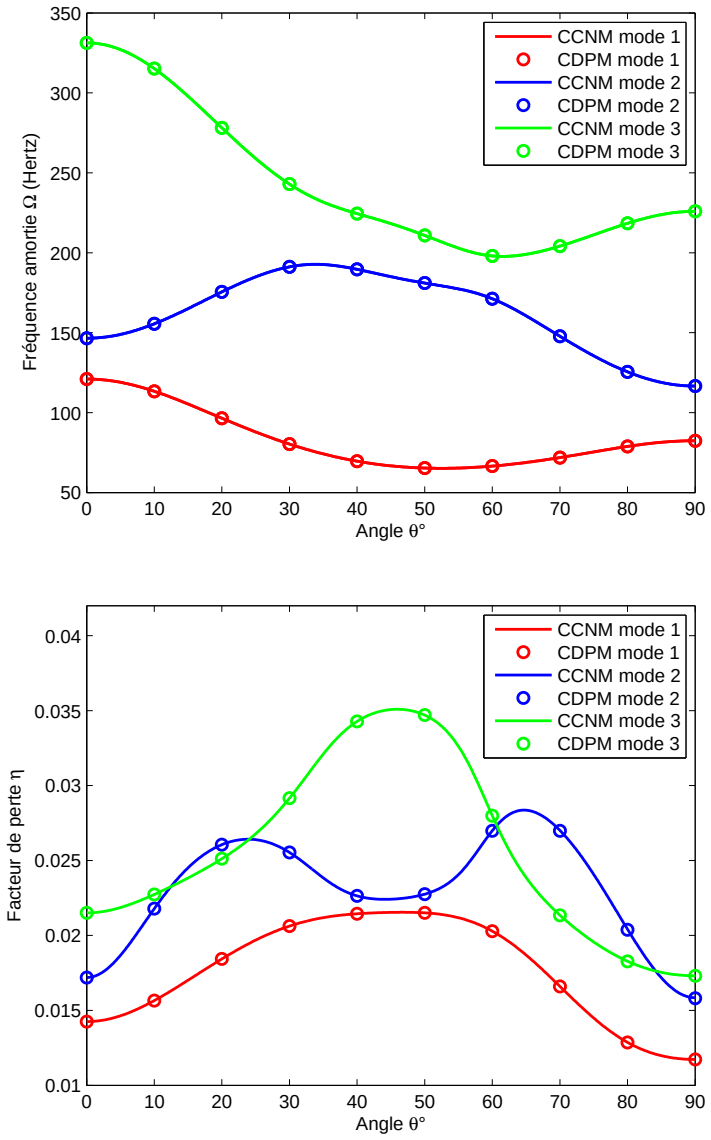


Figure 4.11 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CFCF

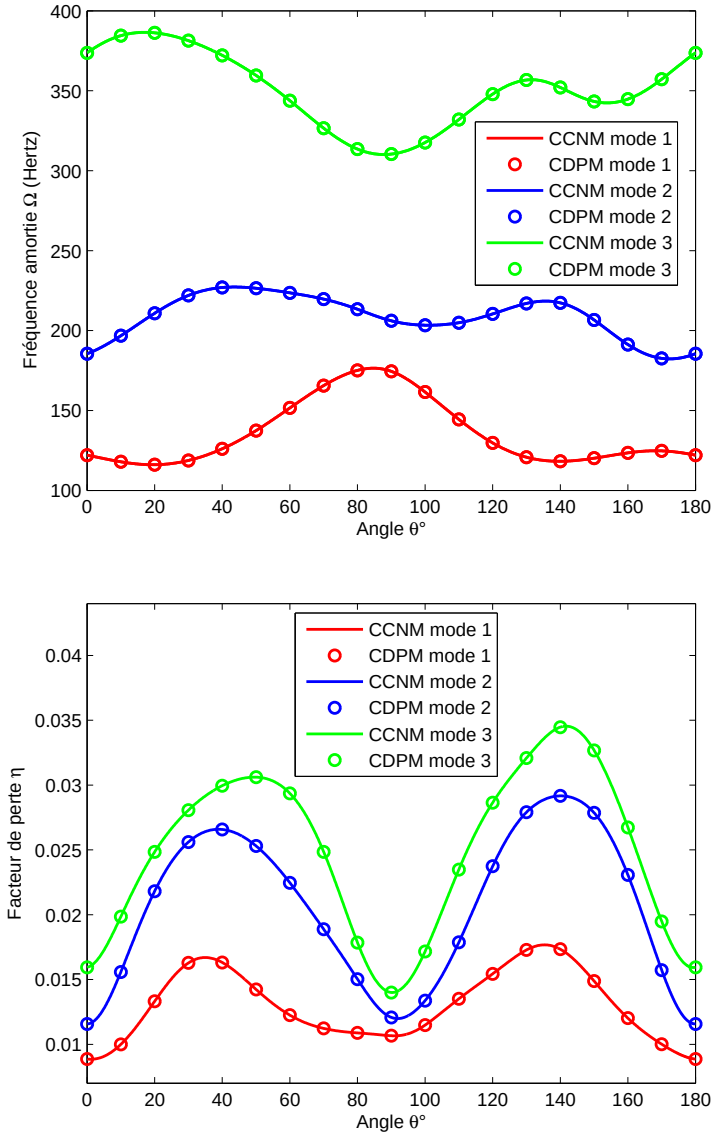


Figure 4.12 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7, CL : CCFF

4.4.2.2 Faces constituées de stratifié croisé antisymétrique

L'exemple présenté ici concerne une plaque sandwich symétrique notée plaque 8 dont chaque face est constituée d'un stratifié croisé antisymétrique de quatre couches de même épaisseur. La couche viscoélastique est cette fois ci du DYAD à 38°C. Les propriétés générales de cette structure sont représentées dans le tableau (4.4). Cet exemple fait référence aux types de structures de la sous section 4.3.1.3. La représentation séquentielle générale de la plaque 8 est $[\theta/\theta+90/\theta/\theta+90/c/\theta/\theta+90/\theta/\theta+90]$ ou plus simplement $[\theta/\theta+90/\theta/\theta+90/c]_s$. Deux conditions aux limites sont présentées pour cette plaque :

encastrement (figure 4.13) et une alternance d'encastrement et d'appui simple (figure 4.14).

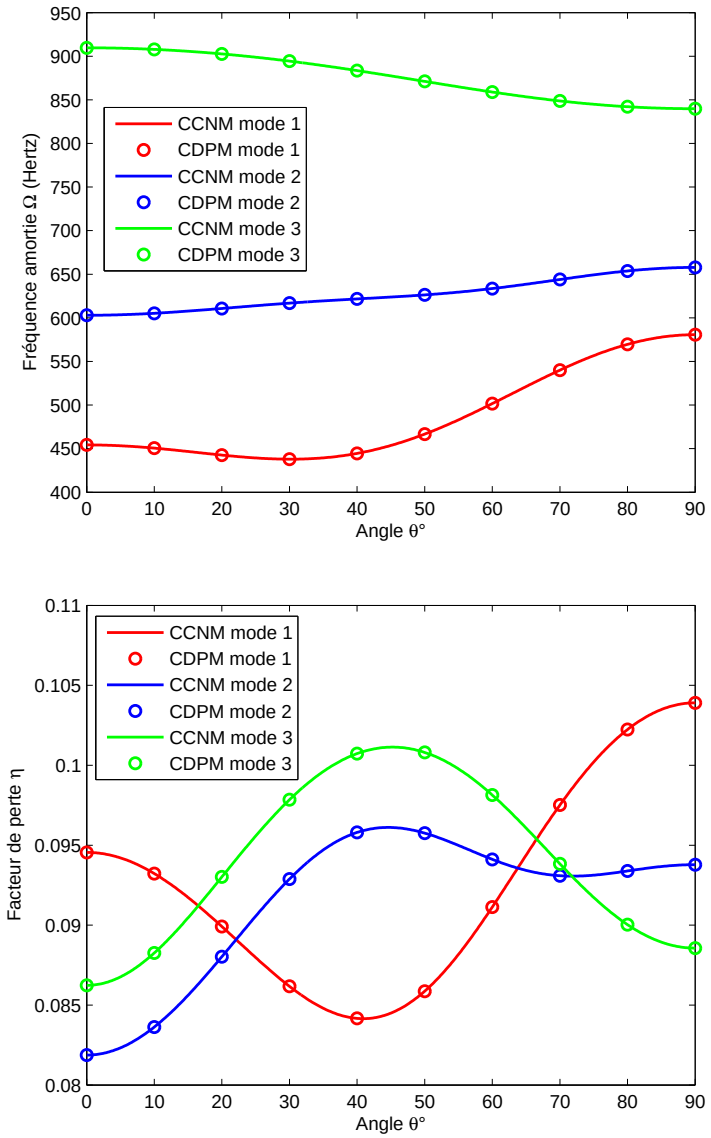


Figure 4.13 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 8, CL : CCCC

Une analyse des courbes de variation pour les trois premiers modes montre pour la condition aux limites encastrement que les fréquences amorties varient très peu ce qui n'est pas le cas des amortissements correspondants. Alors que les modes deux et trois présentent des amortissements optimaux pour l'orientation $\theta = 45°$, on observe un amortissement quasi minimal pour le premier mode pour cette orientation. L'amortissement optimal du premier mode s'obtient pour la valeur $\theta = 90°$ de l'orientation. La figure (4.14) de son

côté révèle que les fréquences amorties sont également peu influencées par la variation de l'angle d'orientation θ et pour obtenir des amortissements optimaux pour les trois premiers modes de vibration, il faut prendre l'angle d'orientation autour de $\theta = 40°$.

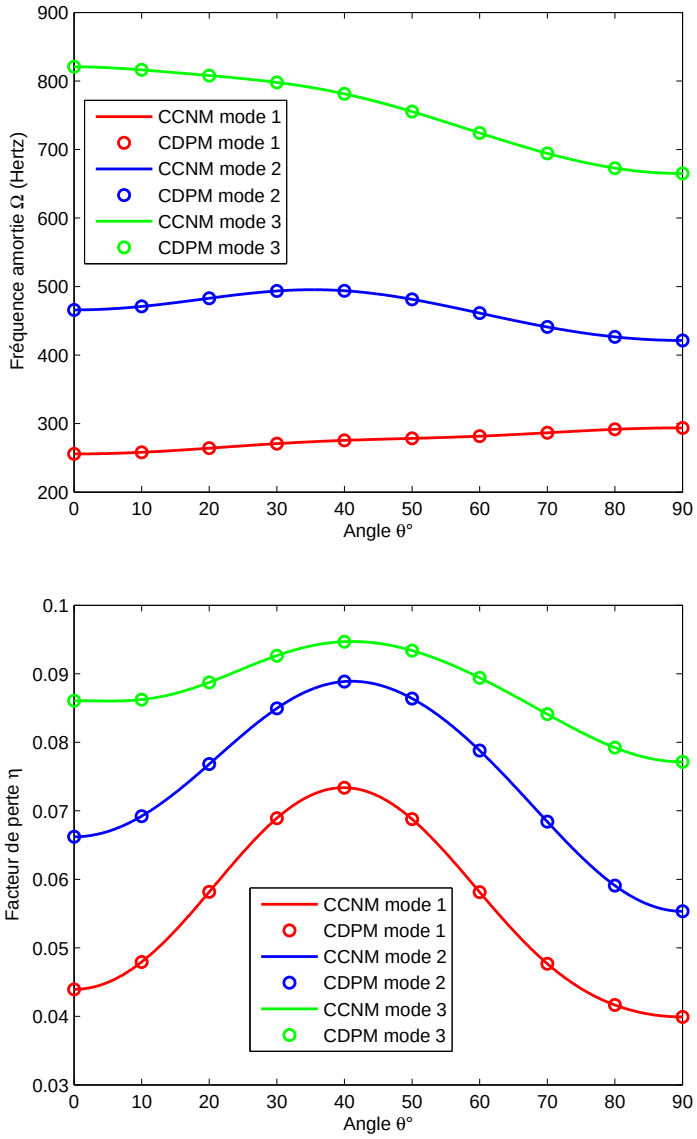


Figure 4.14 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 8, CL : CSCS

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{fi} = 0,2$		$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$i = 1,2,3,4$	DYAD à 38°C (2.4)	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$h_c = 0,2$	Loi (2.51)	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$L = 300$		$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
$l = 100$		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 4.4 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 8

4.4.2.3 Faces constituées de stratifié antisymétrique

Un autre exemple de cette étude continue des propriétés modales concerne une structure plaque rectangulaire dont les faces sont constituées de stratifié antisymétrique tant au niveau des angles d'orientation qu'au niveau des épaisseurs des couches du stratifié. Le stratifié antisymétrique en question est formé de quatre couches. Les angles d'orientation additionnelle ont pour valeur : $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 45$. Dans le repère de référence de la structure plaque sandwich ainsi constituée, ce stratifié a pour séquence $[\theta/\theta + 45/ - \theta - 45/ - \theta]$. La couche viscoélastique de cette plaque qui sera appelée plaque 9 est en PVB à 20°C (2.4). La condition aux limites dissymétrique CFSF seule est représentée pour cette structure plaque sandwich dont les caractéristiques sont représentées dans le tableau (4.5).

Caractéristiques	Caractéristiques mécaniques	
géométriques(mm)	La couche du cœur	Les couches de face
$h_{f1} = h_{f4} = 0,2$		$E_{xx} = 119GPa$, $G_{yz} = 3GPa$
$h_{f2} = h_{f3} = 0,1$	PVB à 20°C (2.4)	$E_{yy} = E_{zz} = 8,7GPa$
$h_c = 0,4$	Loi (2.52)	$G_{xy} = G_{xz} = 4GPa$,
$L = 300$		$\nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,32$
$l = 200$		$\nu_{yz} = 0,3$, $\rho_f = 1560kg.m^{-3}$

Tableau 4.5 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque 9

La courbe de variation des propriétés modales (figure 4.15) de cette structure montre une variation de ces derniers en fonction de l'orientation θ. On notera d'après ces courbes de variation que pour avoir un amortissement optimal en moyenne pour ces trois premiers modes, il faut fixer la valeur de cette orientation à $\theta = 145°$.

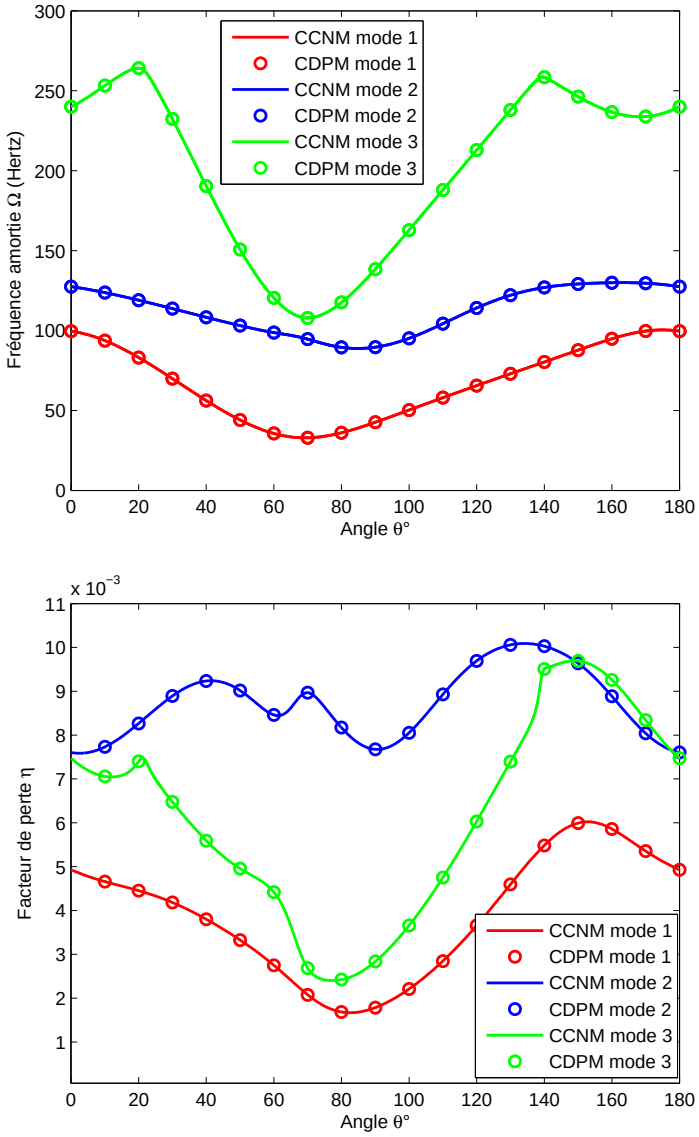


Figure 4.15 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 9, CL : CFSF

4.5 Temps de calcul

L'un des intérêts de ce travail est le gain de temps de calcul ; pour cela il est important de présenter les temps de calcul des deux méthodes. Ces temps de calcul sont résumés dans le tableau (4.6) où CL, NIT, NIN et TC signifient respectivement : conditions aux limites, nombre d'itération, nombre d'incrément et le temps de calcul CPU. Pour la nouvelle méthode de résolution du Chapitre 3, le temps de calcul est fortement dépendant du maillage de la structure mais surtout du type de fonction à différentier. Ainsi, le temps

de différentiation par la DA de la dépendance de l'ISD112 (2.4) est moindre que celui du DYAD (2.4) alors que les deux matériaux sont représentés par le même type de loi, celle de Maxwell généralisé (2.51). Cette différence est due au nombre de termes utilisé pour la représentation de chacun de ces matériaux ($n = 3$ pour l'ISD112 et $n = 5$ pour le DYAD). Le temps de différentiation des lois des modèles fractionnaires de Maxwell est cependant encore meilleur par rapport aux lois de type puissance telle que celle du PVB (2.52). Globalement, plus les courbes de variation des propriétés modales présentent des formes compliquées, plus le nombre d'itération est grand et plus le temps de calcul est également important. Toutefois le temps de calcul par la nouvelle méthode est nettement meilleur à un calcul incrémental. En effet, dans la résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaires complexes par la méthode d'homotopie [74], la résolution du problème initial (3.29) appelant la méthode de Krylov-Arnoldi [69] implémentant la fonction "eigs" sous Matlab constitue environs 80 à 90% du temps de calcul alors que cette méthode est utilisée une seule fois dans le CCNM. De plus alors que la technique d'homotopie fait une, deux, voir jusqu'à cinq itérations pour trouver la solution pour une valeur donnée de l'angle d'orientation, une seule itération de la nouvelle méthode donne les solutions pour un ensemble de valeurs de cet angle d'orientation. Par ailleurs les calculs élémentaires d'intégration de Gauss, d'assemblage, d'application des conditions aux limites qui sont répétés à chaque fois dans le CDPM sont effectués une seule fois dans le CCNM. Le gain en temps de calculs est alors assuré dans tous les cas pour le CCNM par rapport au CDPM. Rappelons que les valeurs du NIT du tableau (4.6) correspondent aux nombres d'itération de chaque mode pour le CCNM. Nous pouvons voir dans le tableau (4.6) que la nouvelle méthode a toujours permis de décrire correctement les variations des propriétés modales en un temps moindre. Le cas le plus flagrant est celui de la plaque 7 pour les conditions CCCC et SSSS. En effet un calcul pour une valeur de l'angle θ coûte environ 300 secondes par la méthode discrète. Pour une simple augmentation de 50%, la nouvelle méthode permet de calculer les propriétés modales de toutes les valeurs de θ de 0 à 90°.

Nous rappelons une fois encore que les calculs sont faits sur l'ordinateur portable ASUS Intel Core i3-2350M CPU @ 2.30GHz 2.30GHz.

		CL	CCCC	SSSS	CCFF	CFCF	CSCS	CFSF
plaque 6	CCNM	NIT	(5,5,5)	(5,6,6)	(12,12,13)	-	-	-
		TC	423	476	790	-	-	-
	CDPM	NIN	17	17	35	-	-	-
		TC	2281	2255	6336	-	-	-
Plaque 7	CCNM	NIT	(5,5,5)	(5,5,5)	(12,12,12)	(6,9,9)	-	-
		TC	468	454	973	643	-	-
	CDPM	NIN	10	10	19	10	-	-
		TC	3058	2940	6212	3707	-	-
Plaque 8	CCNM	NIT	(6,6,6)	-	-	-	(6,5,9)	-
		TC	428	-	-	-	478	-
	CDPM	NIN	10	-	-	-	10	-
		TC	3781	-	-	-	4020	-
Plaque 9	CCNM	NIT	-	-	-	-	-	(10,13,27)
		TC	-	-	-	-	-	1047
	CDPM	NIN	-	-	-	-	-	19
		TC	-	-	-	-	-	4943

Tableau 4.6 – Temps de calculs (en seconde) du CCNM et du CDPM

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé différentes formulations éléments finis pour étudier de manière continue les effets de l'orientation des fibres sur les propriétés modales des structures sandwichs composites viscoélastiques. Nous avons étudier successivement : les structures à faces monocouche unidirectionnelle, les stratifiés antisymétriques, les stratifiés croisés symétrique ou antisymétrique. La nouvelle méthode de résolution présentée au Chapitre 3 a été utilisée et validée pour l'ensemble des structures étudié. L'intérêt de cette étude réside dans le faite qu'à partir d'un seul assemblage on arrive à étudier les propriétés modales sur un grand intervalle prédéfini pour l'angle θ. On supprime ainsi la répétition des calculs élémentaires généralement effectués pour les calculs discrets par éléments finis. De plus, on arrive à suivre rigoureusement la courbe de variation des propriétés modales , peu importe sa complexité ; ce qui n'est pas le cas des calculs incrémentaux où on ne peut envisager ce qui se passe entre deux valeurs consécutives. Le gain de temps de calculs observé prouve l'intérêt de cette méthode.

Nous rappelons toutefois que pour des plaques presque carrées ou carrées, la nouvelle

méthode de résolution ne permet pas une classification des modes de vibration et que sur certain intervalle un mode peut devenir un autre [114]. Le tracé des courbes de variation permet de bien observer le phénomène.

A part l'orientation des fibres des composites par rapport à la structure globale, d'autres paramètres de conception tel que les épaisseurs des couches influent également sur les propriétés amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques. Nous présentons dans le chapitre qui va suivre, les effets de la variation des épaisseurs des couches sur les propriétés modales des structures sandwichs viscoélastiques.

Chapitre 5

Calcul des propriétés modales des plaques composites viscoélastiques en fonction des épaisseurs des couches

5.1 Introduction

Les épaisseurs des couches constituant les structures sandwichs viscoélastiques ont également une grande influence sur les propriétés modales de ces dernières. D'une façon générale, plus l'épaisseur de la couche viscoélastique du sandwich augmente, plus l'amortissement est important. Cependant l'épaisseur des couches devient rapidement une contrainte en ce sens ou plus les épaisseurs augmentent plus la structure est lourde. Or la quête de la légèreté des infrastructures modernes est devenue une exigence très importante dans les industries aéronautique, aérospatiale, automobile alors que la recherche de structure à haut pouvoir amortissant n'a pas diminué pour autant. Pour concevoir des structures sandwichs viscoélastiques répondant à la fois aux exigences de légèreté et d'un haut pouvoir amortissant, il convient de maitriser les effets de la variation des épaisseurs des couches des structures sandwichs viscoélastiques. Jusqu'à ce jour les études sur les propriétés modales des sandwichs en fonction de la variation des épaisseurs des couches sont, comme dans le cas des orientations des fibres des couches (Chapitre 4), limitées à

des calculs discrets pour certaines valeurs fixes des épaisseurs des couches [82, 99, 115]. Ce faisant on ne maitrise pas vraiment les effets de ces paramètres de conception sur les propriétés modales . Par ailleurs, ces calculs discrets incrémentaux nécessitent un temps de calcul assez considérable.

Dans ce chapitre, nous proposons une étude des effets de la variation des épaisseurs des couches sur les propriétés modales des sandwichs viscoélastiques. Deux formulations éléments finis seront proposées pour traiter les problèmes aux valeurs propres non linéaires complexes avec variation d'épaisseur. La première pour étudier de manière continue les effets de la variation de l'épaisseur de la couche viscoélastique du sandwich sur ces propriétés modales et la seconde pour étudier les effets de la variation de toutes les épaisseurs du sandwich dont l'épaisseur totale est supposée constante sur ses propriétés modales . Nous montrerons une fois encore à travers les résultats numériques que les variations des propriétés modales ne sont ni standards ni uniformes par rapport aux dimensions des structures, des conditions aux limites et des types de lois viscoélastiques.

5.2 Variation de l'épaisseur de la couche du cœur viscoélastique

Nous considérons dans cette section, la plaque sandwich viscoélastique multicouche dont nous avons étudié les propriétés modales dans le Chapitre 2. L'étude qui est menée ici, suppose constantes les épaisseurs h_{fi} des couches des faces et variable celle du cœur viscoélastique.

Pour étudier de manière continue les effets de la variation de l'épaisseur de la structure sandwich viscoélastique ainsi considérée, sur ses propriétés modales , nous allons introduire la variable r dans les formulations éléments finis du Chapitre 2. Mais tout d'abord nous posons H_f comme épaisseur totale des couches d'une face de la structure :

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} \tag{5.1}$$

Nous introduisons alors la variable non dimensionnel r comme étant le rapport entre l'épaisseur de la couche viscoélastique et l'épaisseur d'une face de la structure. Ceci se traduit par l'équation (5.2).

$$\begin{cases} r = \dfrac{h_c}{H_f} \\ h_c = rH_f \end{cases} \tag{5.2}$$

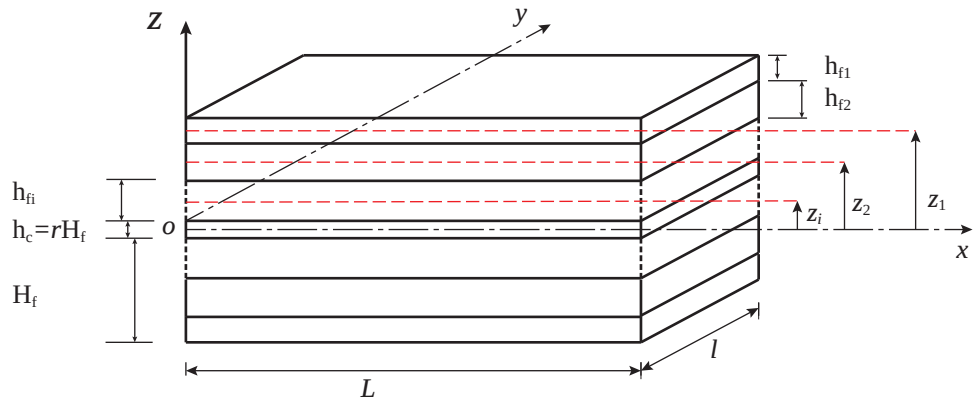


Figure 5.1 – Sandwich multicouche viscoélastique à cœur d'épaisseur variable

L'introduction de cette variable r impose la réécriture des matrices de rigidité et de masse de la structure, lesquelles matrices sont directement affectées par la variation de l'épaisseur de la couche du cœur de la structure.

5.2.1 Matrice de rigidité de la structure

Les formulations développées dans le Chapitre 2 pour la structure multicouche restent valables avec l'introduction de la variable r . La variation de r entraine de facto une variation dans la matrice de rigidité de la structure. En remplaçant dans l'expression de la matrice de rigidité élémentaire réelle $[K_R^e]$ (équation 2.41) l'épaisseur de la couche viscoélastique par son équivalent issu de l'équation (5.2) et en sachant que

$$z_i - \frac{h_c}{2} = \left(\frac{h_c + h_{fi}}{2} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} \right) - \frac{h_c}{2} = \frac{h_{fi}}{2} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} \tag{5.3}$$

nous faisons apparaitre la variable r dans l'expression de la matrice de rigidité élémentaire $[K_R^e]$ qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
[K_R^e(r)] = 2r^2 \int\int_{s_e} {}^t[N_f] \left[\left(\frac{H_f}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C_m^i(\theta_i) \right] [N_f]\, ds \\
+2 \int\int_{s_e} {}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(C_f^i(\theta_i) + \left(\frac{h_{fi}}{2} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} \right)^2 C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}]\, ds \\
+2r \int\int_{s_e} {}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{H_f}{2} \left(\frac{h_{fi}}{2} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} \right) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_f]\, ds \\
+2r \int\int_{s_e} {}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{H_f}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}]\, ds
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Nous venons ainsi d'écrire la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$[K_R^e] = [K_{2R}^e]\, r^2 + [K_{1R}^e]\, r + [K_{0R}^e] \tag{5.5}$$

où

$$\begin{cases}
[K_{0R}^e] = 2 \int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(C_f^i(\theta_i) + (z_i - \frac{h_c}{2})^2 C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds \\
[K_{1R}^e] = 2 \int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{H_f}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_f] \right) ds \\
\qquad +2 \int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{H_f}{2}(z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) \right] [N_{wf}] \right) ds \\
[K_{2R}^e] = 2 \int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\left(\frac{H_f}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C_m^i(\theta_i) \right] [N_f] \right) ds
\end{cases} \tag{5.6}$$

De même les matrices décomposées (équation 2.42) formant la matrice de rigidité de la couche viscoélastique sont réécrites en faisant apparaitre la variable r dans leur expression respective comme suit :

$$\begin{cases} [K_1^e] = r^3 \dfrac{H_f^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_f] \left[(q_1 + q_2 + q_3)(\theta_c) \right] [N_f] \right) ds \\ [K_2^e] = r^3 \dfrac{H_f^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_f] \left[q_4(\theta_c) \right] [N_f] \right) ds \\ [K_3^e] = r H_f \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_s] \left[q_s(-\theta_c) \right] [N_s] \right) ds \\ [K_4^e] = r H_f \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_s] \left[q_s(\theta_c) \right] [N_s] \right) ds \end{cases} \tag{5.7}$$

et en posant

$$\begin{cases} [K_{11}^e] = \dfrac{H_f^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_f] \left[(q_1 + q_2 + q_3)(\theta_c) \right] [N_f] \right) ds \\ [K_{22}^e] = \dfrac{H_f^3}{12} \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_f] \left[q_4(\theta_c) \right] [N_f] \right) ds \\ [K_{33}^e] = H_f \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_s] \left[q_s(-\theta_c) \right] [N_s] \right) ds \\ [K_{44}^e] = H_f \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t [N_s] \left[q_s(\theta_c) \right] [N_s] \right) ds \end{cases} \tag{5.8}$$

nous réécrivons finalement la matrice de rigidité élémentaire (équation 2.37) de la structure plaque sous la forme :

$$\begin{cases} [K^e(\omega, r)] = \left(E^*_{xxc}(\omega) [K_{11}^e] + G^*_{xyc}(\omega) [K_{22}^e] \right) r^3 + [K_{2R}^e] r^2 \\ + \left([K_{1R}^e] + G^*_{xzc}(\omega) [K_{33}^e] + G^*_{yzc}(\omega) [K_{44}^e] \right) r + [K_{0R}^e] \end{cases} \tag{5.9}$$

L'assemblage de cette matrice de rigidité élémentaire conduit à la matrice de rigidité globale de la structure qui s'écrit alors comme une fonction dépendant de la fréquence et de la variable r :

$$\begin{cases} [K(\omega, r)] = \left(E^*_{xxc}(\omega) [K_{11}] + G^*_{xyc}(\omega) [K_{22}] \right) r^3 + [K_{2R}] r^2 \\ + \left([K_{1R}] + G^*_{xzc}(\omega) [K_{33}] + G^*_{yzc}(\omega) [K_{44}] \right) r + [K_{0R}] \end{cases} \tag{5.10}$$

Comme nous l'avons déjà présenté dans les autres chapitres, on peut considérer plusieurs types de matériau pour la couche viscoélastique et pour chaque cas considéré, la matrice de rigidité élémentaire d'abord puis globale peuvent être réécrites en se basant sur les formules (2.45, 2.48). Ainsi lorsque la couche du cœur viscoélastique est supposée isotrope, les matrices de rigidité élémentaire (équation 5.9) et globale (équation 5.10) deviennent respectivement (équation 5.11) et (équation 5.12).

$$\begin{cases} [K^e(\omega,r)] = [K^e_{2R}]\,r^2 + [K^e_{1R}]\,r + [K^e_{0R}] + E^*_c(\omega)\left([K^e_{12}]\,r^3 + [K^e_{34}]\,r\right) \\ [K^e_{12}] = [K^e_{11}] + \dfrac{1}{2\,(1+\nu_c)}\,[K^e_{22}] \\ [K^e_{34}] = \dfrac{1}{2\,(1+\nu_c)}\,([K^e_{33}] + [K^e_{44}]) \end{cases} \tag{5.11}$$

$$[K(\omega,r)] = [K_{2R}]\,r^2 + [K_{1R}]\,r + [K_{0R}] + E^*_c(\omega)\left([K_{12}]\,r^3 + [K_{34}]\,r\right) \tag{5.12}$$

5.2.2 Matrice de masse de la structure

Tout comme la matrice de rigidité de la structure, la matrice de masse subie elle aussi une variation par rapport à l'épaisseur de la couche viscoélastique. Cette variation se traduit par la présence de la variable r dans l'expression de la matrice de masse. En effet, à partir de l'expression de la matrice de masse élémentaire de l'équation (2.36) et en utilisant l'expression de l'épaisseur du cœur viscoélastique donnée à la formule (5.2), nous réécrivons la matrice de masse élémentaire sous la forme :

$$[M^e\,(r)] = \int\int_{s_e} \left(\rho_c H_f r + 2\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi}\right)\,{}^t\,[N_w]\,[N_w]\,ds \tag{5.13}$$

En posant le coefficient matriciel de masse :

$$[M^e_0] = \int\int_{s_e} {}^t\,[N_w]\,[N_w]\,ds \tag{5.14}$$

la matrice de masse élémentaire $[M^e]$ (équation 5.13) s'écrit plus simplement comme une fonction linéaire de la variable r :

$$[M^e(r)] = \left(\rho_c H_f r + 2\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi}\right)[M_0^e] \tag{5.15}$$

L'assemblage de cette matrice élémentaire (équation 5.15) conduit à la matrice de masse globale de la structure qui est :

$$[M(r)] = \left(\rho_c H_f r + 2\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi}\right)[M_0] \tag{5.16}$$

5.2.3 problème aux valeurs propres non linéaires et résolution

5.2.3.1 problème aux valeurs propres non linéaires

En reprenant la même formulation éléments finis développée Chapitre 2, le problème aux valeurs propres non linéaires obtenu est alors similaire à celui de l'équation (2.39). En remplaçant les matrices de masse et de rigidité de ce problème aux valeurs propres non linéaires par leur expression des équations (5.16) et (5.10), nous obtenons :

$$\left[K_R(r) + K_c(\omega, r) - \omega^2 M(r)\right]\{U\} = 0, \qquad r \in I \tag{5.17}$$

équation qui peut se mettre sous la forme générale

$$\left[K_c(0,r) + K_R(r) + K_{cc}(\omega, r) - \omega^2 M(r)\right]\{U\} = 0, \qquad r \in I \tag{5.18}$$

avec

$$\begin{cases} [K_{cc}(\omega, r)] = (E_{xxc}(\omega)[K_{11}] + G_{xyc}(\omega)[K_{22}])\, r^3 + (G_{xzc}(\omega)[K_{33}] + G_{yzc}(\omega)[K_{44}])\, r \\ [K_c(0,r)] = \left(E^*_{xxc}(0)[K_{11}] + G^*_{xyc}(0)[K_{22}]\right) r^3 + \left(G^*_{xzc}(0)[K^e_{33}] + G^*_{yzc}(0)[K^e_{44}]\right) r \\ [K_R(r)] = [K_{2R}]\, r^2 + [K_{1R}]\, r + [K_{0R}] \end{cases} \tag{5.19}$$

et dans le cas particulier de cœur viscoélastique isotrope,

$$\begin{cases} [K_{cc}(\omega, r)] = E_c(\omega)\left([K_{12}]\, r^3 + [K_{34}]\, r\right) \\ [K_c(0, r)] = E_c^*(0)\left([K_{12}]\, r^3 + [K_{34}]\, r\right) \\ [K_R\,(r)] = [K_{2R}]\, r^2 + [K_{1R}]\, r + [K_{0R}] \end{cases} \tag{5.20}$$

et I est l'intervalle dans lequel varie r ou intervalle d'étude. L'équation (5.18) va être résolue de façon continue par la méthode développée au Chapitre 3.

5.2.3.2 Intervalle d'étude

Hu et al. [23] ont établi les conditions de performance d'une structure sandwich viscoélastique symétrique à trois couches pour la formulation utilisée pour cette étude. Certes leur étude a porté sur le cas où les matériaux utilisés sont élastiques isotropes pour les faces et viscoélastique isotrope pour le cœur. Néanmoins nous allons considérer leurs conditions liant les dimensions pour définir un intervalle de calcul pour la variable r. Cette condition est la suivante :

$$\frac{h_c}{H_f} \leq 10 \tag{5.21}$$

cette condition impose des valeurs de r telles que $0 < r \leq 10$. Dans la pratique, nous écrivons cette inégalité sous la forme :

$$\mathcal{H}_c \leq r \leq 10. \tag{5.22}$$

où $\mathcal{H}_c$ est une faible valeur, de l'ordre de 10^{-3} par exemple. L'introduction de $\mathcal{H}_c$ permet d'éviter le cas incompatible où il n'existe pas de couche viscoélastique dans la structure ($r = 0$) mais au contraire on assimile la limite vers 0 de l'épaisseur de la couche viscoélastique par une très faible épaisseur , d'où l'introduction de la valeur $\mathcal{H}_c$.

5.2.3.3 Résolution continue du problème

Pour ce cas, les matrices de rigidité et de masse du problème aux valeurs propres non linéaires complexes à résoudre sont respectivement données par les formules (5.12) et (5.16). Pour appliquer la nouvelle méthode développée pour ce problème, nous avons définit les coefficients matriciels et leurs fonctions associées à différentier comme suit :

$$\begin{cases} [K_g] = [K_{0R},\ K_{1R},\ K_{2R},\ K_{12},\ K_{34}] \\ [M_g] = [M_0] \end{cases} \tag{5.23}$$

$$\left[E_g^*(\lambda,p)\right] = \left[E_{g1}^*(\lambda,p)\,,\ E_{g2}^*(\lambda,p)\,,\ E_{g3}^*(\lambda,p)\,,\ E_{g4}^*(\lambda,p)\,,\ E_{g5}^*(\lambda,p)\right] \tag{5.24}$$

avec

$$\begin{cases} E_{g1}^*(\lambda,p) = 1 & E_{g4}^*(\lambda,p) = p^3\left(E_c^*(0) + E_c(\lambda)\right) \\ E_{g2}^*(\lambda,p) = p & E_{g5}^*(\lambda,p) = p\left(E_c^*(0) + E_c(\lambda)\right) \\ E_{g3}^*(\lambda,p) = p^2 & \end{cases} \tag{5.25}$$

et

$$[E_m(p)] = \left(\rho_c h_f p + 2\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fi}\right) \tag{5.26}$$

Dans la formule (5.26), le nombre n représente le nombre de couches d'une face de la structure sandwich considérée ; à ne pas confondre avec la variable incrémentale n utilisée pour la sommation des séries dans la section (3.3). Dans la pratique, le second membre de la formule (5.26) est directement écrit sous la forme $bp + d$ puisque toutes les constantes sont connues d'avance. L'intervalle d'étude dans ce cas est $I = [\mathcal{H}_c,\ 10]$ (équation 5.22). Pour ce cas, $\lambda = \omega^2$ et $p = r$ est le paramètre d'étude.

5.3 Variation des épaisseurs, épaisseur totale de la structure étant constante

Une autre façon de concevoir des structures sandwichs viscoélastiques est de fixer l'épaisseur totale de la structure défini par l'encombrement maximum autorisé en conception. L'objectif ici est de déterminer les dimensions de structure permettant un amortissement optimal en jouant sur la variation des épaisseurs des couches des faces et du cœur simultanément, l'épaisseur totale de la structure étant fixe. Ce type de contrainte est généralement associé avec d'autres contraintes telle qu'une masse maximale, une déformation maximale à un chargement et d'autres encore. Dans cette section nous ne considérons que la simple contrainte d'épaisseur fixe pour la structure en vue d'obtenir un amortissement optimal.

Nous considérons dans cette étude, la même plaque que dans la section précédente et qui a été définie au Chapitre 2. Les hypothèses utilisées ainsi que les formulations du Chapitre 2 restent valables.

L'hypothèse de la constance de l'épaisseur de la structure se traduit par la relation :

$$2H_f + h_c = h_t \tag{5.27}$$

h_t étant la valeur de l'épaisseur totale constante considérée pour la structure et H_f la somme des épaisseurs des couches d'une face comme définie à l'équation (5.30). Pour introduire le paramètre r de variation des couches, nous posons la relation qui suit :

$$\begin{cases} H_f = h_{fd} - \dfrac{r}{2} \\ h_c = h_{cd} + r \end{cases} \tag{5.28}$$

En effet l'augmentation algébrique de l'épaisseur de la couche centrale viscoélastique est due à une diminution algébrique équitable des épaisseurs des couches des faces supérieure et inférieure de la structure. Lorsque les faces sont des stratifiés, nous allons supposer que

cette diminution algébrique est répartie équitablement sur toutes les couches du stratifié des faces supérieure et inférieure. Il vient alors que l'épaisseur de la couche i du stratifié a donc pour épaisseur pour une augmentation r de la couche viscoélastique du cœur :

$$h_{fi} = h_{fdi} - \frac{r}{2n} \tag{5.29}$$

où h_{fdi} est une épaisseur définie au départ. On notera également les relations :

$$\begin{cases} H_f = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} \\ h_{fd} = \sum_{i=1}^{n} h_{fdi} \end{cases} \tag{5.30}$$

Les équations (5.28, 5.29 et 5.30) permettent de respecter à tout moment la condition de l'équation (5.27).

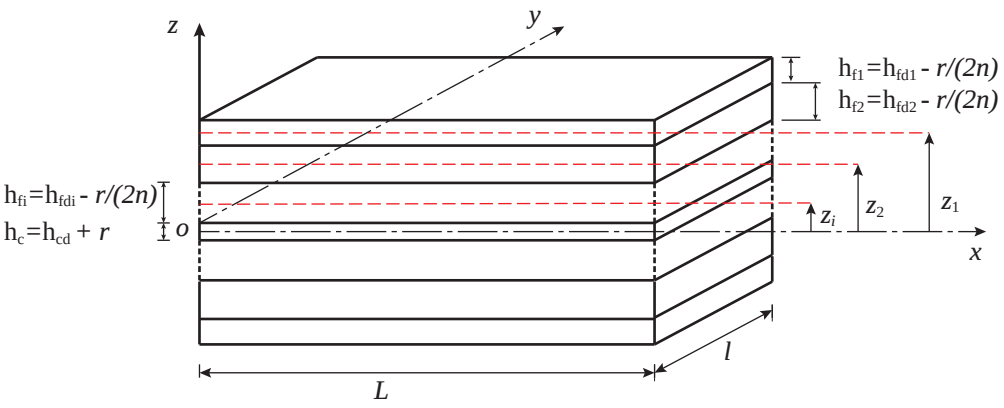


Figure 5.2 – Sandwich multicouche viscoélastique à couches d'épaisseur variable

L'introduction de la variable r passe par la réécriture des expressions des matrices de rigidité et de masse de la structure qui sont une fois encore directement affectées par la variation des épaisseurs des couches de la structure.

5.3.1 Matrice de rigidité de la structure

Pour introduire la variable r dans la matrice de rigidité élémentaire de la structure, nous allons réécrire l'expression de chaque partie de cette matrice de rigidité élémentaire.

Tout d'abord nous allons réécrire l'expression de la matrice $[K_R^e]$ précédemment définie

(équation 2.41). Pour ce faire, redéfinissons tous les termes pouvant contenir le paramètre r de variation d'épaisseur des couches. Ainsi le terme :

$$z_i - \frac{h_c}{2} = \frac{h_{fi}}{2} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fk} = \frac{h_{fdi}}{2} - \left(n - i + \frac{1}{2}\right)\frac{r}{2n} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \tag{5.31}$$

et les matrices de comportement en membrane et en flexion (équation 2.10) sont réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} C_m^i(\theta_i) = h_{fi} Q_i^{'} = \left(h_{fdi} - \dfrac{r}{2n}\right) Q_i^{'} \\ C_f^i(\theta_i) = \dfrac{h_{fi}^2}{12} C_m^i(\theta_i) = \dfrac{1}{12}\left(h_{fdi} - \dfrac{r}{2n}\right)^3 Q_i^{'} \end{cases} \tag{5.32}$$

Dans l'expression de la matrice réelle élémentaire $[K_R^e]$ (équation 2.41) nous avons le terme :

$$\left(\frac{h_c}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C_m^i(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_{cd} + r}{2}\right)^2 \left(h_{fdi} - \frac{r}{2n}\right) Q_i^{'} \tag{5.33}$$

En développant le terme du second membre de cette égalité (équation 5.33), nous transformons ce terme en une somme polynomiale de degré trois de la variable réelle r :

$$\left(\frac{h_c}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} C_m^i(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i^1 + B_i^1 r + D_i^1 r^2 + J_i^1 r^3\right) Q_i^{'} \tag{5.34}$$

Les coefficients des polynômes sont définis pour chaque couche i de la face comme suit :

$$\begin{cases} A_i^1 = \dfrac{1}{4} h_{cd}^2 h_{fdi} \\ B_i^1 = \dfrac{1}{2} h_{cd} h_{fdi} - \dfrac{1}{8n} h_{cd}^2 \\ D_i^1 = \dfrac{1}{4} h_{fdi} - \dfrac{1}{4n} h_{cd} \\ J_i^1 = -\dfrac{1}{8n} \end{cases} \tag{5.35}$$

On retrouve également dans l'expression de $[K_R^e]$ le terme :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(C_f^i(\theta_i) + (z_i - \frac{h_c}{2})^2 C_m^i(\theta_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{12} \left(h_{fdi} - \frac{r}{2n} \right)^3 Q_i' + \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_{fdi}}{2} - \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \frac{r}{2n} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right)^2 \left(h_{fdi} - \frac{r}{2n} \right) Q_i' \end{cases} \tag{5.36}$$

qui est réécrit après développement sous la forme d'une somme polynomiale de degré trois de l'équation (5.37) :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(C_f^i(\theta_i) + (z_i - \frac{h_c}{2})^2 C_m^i(\theta_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i^2 + B_i^2 r + D_i^2 r^2 + J_i^2 r^3 \right) Q_i' \tag{5.37}$$

Les coefficients utilisés pour ces nouveaux polynômes sont définis pour chaque couche i de la face par les égalités de l'équation (5.38)

$$\begin{cases} A_i^2 = \frac{1}{12} h_{fdi}^3 + \left(\frac{1}{2} h_{fdi} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right)^2 h_{fdi} \\ B_i^2 = -\frac{1}{2n} \left[\frac{1}{4} h_{fdi}^2 + \left(\frac{1}{2} h_{fdi} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right) \left(\left(2n - 2i + \frac{3}{2} \right) h_{fdi} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right) \right] \\ D_i^2 = \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \left[\frac{1}{4} h_{fdi} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right)^2 h_{fdi} + (2n - 2i + 1) \left(\frac{1}{2} h_{fdi} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right) \right] \\ J_i^2 = -\left(\frac{1}{2n} \right)^3 \left[\frac{1}{12} + \left(n - i + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \end{cases} \tag{5.38}$$

Le dernier terme à réécrire dans l'expression de la matrice élémentaire réelle $[K_R^e]$ est :

$$\begin{cases} \left(\frac{h_c}{2} (z_i - \frac{h_c}{2}) C_m^i(\theta_i) \right) = \left[\frac{1}{2} h_{fdi} - \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \frac{r}{2n} + \sum_{k=i+1}^{n} h_{fdk} \right] \left(h_{fdi} - \frac{r}{2n} \right) \\ \times \frac{1}{2} \left(h_{cd} + r \right) Q_i' \end{cases} \tag{5.39}$$

Comme les autres termes, il s'écrit sous la forme (équation 5.40) après développement de son second membre :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_c}{2}(z_i-\frac{h_c}{2})C_m^i(\theta_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i^3+B_i^3r+D_i^3r^2+J_i^3r^3\right)Q_i^{'} \tag{5.40}$$

Et les coefficients définissants ces polynômes sont donnés à l'équation (5.41) pour chaque couche i de la face :

$$\begin{cases} A_i^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h_{fdi}+\sum_{k=i+1}^{n}h_{fdk}\right)h_{cd}h_{fdi} \\ B_i^3=-\frac{1}{4n}h_{cd}\left[\left(\frac{1}{2}h_{fdi}+\sum_{k=i+1}^{n}h_{fdk}\right)+\left(n-i+\frac{1}{2}\right)h_{fdi}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h_{fdi}+\sum_{k=i+1}^{n}h_{fdk}\right)h_{fdi} \\ D_i^3=-\frac{1}{4n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)h_{fdi}-\frac{1}{4n}\left[\left(\frac{1}{2}h_{fdi}+\sum_{k=i+1}^{n}h_{fdk}\right)-\frac{1}{2n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)h_{cd}\right] \\ J_i^3=\frac{1}{8n^2}\left(n-i+\frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{5.41}$$

Avec ces décompositions (équations 5.34, 5.37 et 5.40), nous écrivons finalement la matrice de rigidité réelle élémentaire $[K_R^e]$ sous la forme d'un polynôme du troisième degré de la variable r suivante :

$$[K_R^e(r)]=[K_{0R}^e]+[K_{1R}^e]\,r+[K_{2R}^e]\,r^2+[K_{3R}^e]\,r^3 \tag{5.42}$$

avec

$$\begin{cases} [K_{0R}^e]=2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}A_i^1Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}A_i^2Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \\ +2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}A_i^3Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}A_i^3Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\begin{cases} [K_{1R}^e]=2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}B_i^1Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}B_i^2Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \\ +2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}B_i^3Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}B_i^3Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \end{cases} \tag{5.44}$$

$$\begin{cases} [K_{2R}^e]=2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}D_i^1Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}D_i^2Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \\ +2\int\int_{s_e}\left({}^t[N_{wf}]\left[\sum_{i=1}^{n}D_i^3Q_i^{'}\right][N_f]+{}^t[N_f]\left[\sum_{i=1}^{n}D_i^3Q_i^{'}\right][N_{wf}]\right)ds \end{cases} \tag{5.45}$$

$$\begin{cases} [K^e_{3R}] = 2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^n J^1_i Q'_i\right] [N_f] + {}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^n J^2_i Q'_i\right] [N_{wf}] \right) ds \\ +2\int\int_{s_e} \left({}^t[N_{wf}] \left[\sum_{i=1}^n J^3_i Q'_i\right] [N_f] + {}^t[N_f] \left[\sum_{i=1}^n J^3_i Q'_i\right] [N_{wf}] \right) ds \end{cases} \tag{5.46}$$

L'assemblage de cette matrice élémentaire donne la matrice de rigidité globale issue de la contribution des couches des faces de la structure et se met sous la forme :

$$[K_R(r)] = [K_{0R}] + [K_{1R}]\, r + [K_{2R}]\, r^2 + [K_{3R}]\, r^3 \tag{5.47}$$

où les matrices $[K_{iR}]\,,\ i = 0, 1, 2, 3$ sont obtenues par l'assemblage des matrices élémentaires $[K^e_{iR}]\,,\ i = 0, 1, 2, 3$ définies aux équations (5.43, 5.44, 5.45, 5.46).

Pour introduire totalement la variable r dans la matrice de rigidité élémentaire de la structure, il faut également réécrire la matrice de rigidité élémentaire issue de la contribution de la couche viscoélastique de la structure. Pour cela nous définissons les matrices suivantes :

$$\begin{cases} [K^e_{1c}] = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[(q_1 + q_2 + q_3)\,(\theta_c)\right] [N_f] \right) ds \\ [K^e_{2c}] = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_f] \left[q_4(\theta_c)\right] [N_f] \right) ds \\ [K^e_{3c}] = \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_s] \left[q_s(-\theta_c)\right] [N_s] \right) ds \\ [K^e_{4c}] = \displaystyle\int\int_{s_e} \left({}^t[N_s] \left[q_s(\theta_c)\right] [N_s] \right) ds \end{cases} \tag{5.48}$$

La contribution en rigidité élémentaire de la couche viscoélastique s'écrit alors :

$$\begin{cases} K^e_c(\omega, r) = (h_{cd} + r)^3 \left(E^*_{xxc}(\omega) \left[K^e_{1c}\right] + G^*_{xyc}(\omega) \left[K^e_{2c}\right] \right) \\ \qquad\qquad + (h_{cd} + r) \left(G^*_{xzc}(\omega) \left[K^e_{3c}\right] + G^*_{yzc}(\omega) \left[K^e_{4c}\right] \right) \end{cases} \tag{5.49}$$

Et puisque la rigidité élémentaire de la structure est la somme de la contribution en rigidité élémentaire des faces et de la couche viscoélastique elle s'écrit alors :

$$[K^e(\omega, r)] = [K^e_R(r)] + [K^e_c(\omega, r)] \tag{5.50}$$

Son l'assemblage conduit à la matrice de rigidité globale de la structure :

$$[K(\omega, r)] = [K_R(r)] + [K_c(\omega, r)] \tag{5.51}$$

Dans le cas où le matériau viscoélastique du cœur est isotrope, les relations décrites pour le cas des couches viscoélastiques isotropes (équation 2.48) permettent d'écrire la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$\begin{cases} [K^e(\omega, r)] = [K^e_R(r)] + (h_{cd} + r)^3 E^*_c(\omega) [K^e_{12c}] + (h_{cd} + r) E^*_c(\omega) [K^e_{34c}] \\ [K^e_{12c}] = [K^e_{1c}] + \dfrac{1}{2(1+\nu_c)} [K^e_{2c}] \\ [K^e_{34c}] = \dfrac{1}{2(1+\nu_c)} ([K^e_{3c}] + [K^e_{4c}]) \end{cases} \tag{5.52}$$

L'assemblage des matrices élémentaires de l'équation (5.52) conduit à la matrice de rigidité globale suivante :

$$[K(\omega, r)] = [K_R(r)] + E^*_c(\omega) \left((h_{cd} + r)^3 [K_{12c}] + (h_{cd} + r) [K_{34c}] \right) \tag{5.53}$$

en utilisant les décompositions pratiques utilisées dans la technique d'homotopie pour les modules d'élasticité, la matrice de rigidité (équation 5.53) devient :

$$[K(\omega, r)] = [K_c(0, r)] + [K_R(r)] + [K_{cc}(\omega, r)] \tag{5.54}$$

avec

$$\begin{cases} [K_c(0)] = E^*_c(0) \left((h_{cd} + r)^3 [K_{12c}] + (h_{cd} + r) [K_{34c}] \right) \\ [K_{cc}(\omega, r)] = E_c(\omega) \left((h_{cd} + r)^3 [K_{12c}] + (h_{cd} + r) [K_{34c}] \right) \end{cases} \tag{5.55}$$

5.3.2 Matrice de masse

Pour la matrice de masse, en considérant le coefficient matriciel de masse de l'équation (5.14) et en introduisant les relations de l'équation (5.29) dans l'expression de la masse

élémentaire définie précédemment, nous obtenons :

$$[M^e(r)] = \left(\rho_c h_{cd} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fdi}\right) + \left(\rho_c - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi}\right) r\right) [M_0^e] \tag{5.56}$$

Son assemblage conduit à la matrice de masse de la structure qui a pour expression :

$$[M(r)] = \left(\rho_c h_{cd} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi} h_{fdi}\right) + \left(\rho_c - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_{fi}\right) r\right) [M_0] \tag{5.57}$$

5.3.3 problème aux valeurs propres non linéaires et résolution

5.3.3.1 problème aux valeurs propres non linéaires

A partir des matrices de rigidité (équation 5.54) et de masse (équation 5.57) l'équation du problème aux valeurs propres non linéaires complexes s'écrit sous la forme déjà présentée à l'équation (5.18).

5.3.3.2 Intervalle d'étude

Le problème aux valeurs propres non linéaires complexes obtenu dans le cas présent se met également sous la forme décrite par l'équation (5.18) et sera de même résolue de manière continue par la méthode développée au Chapitre 3 sur un intervalle de valeur réelle de la variable r. En utilisant une fois encore la condition de Hu et al. [23] définie à l'équation (5.21) nous pouvons écrire :

$$0 < \frac{h_{cd} + r}{h_{fd} - \frac{1}{2}r} \leq 10 \tag{5.58}$$

cette équation (5.58) induit la condition suivante pour la variable r :

$$-h_{cd} < r \leq \frac{5}{3} h_{fd} - \frac{1}{6} h_{cd} \tag{5.59}$$

En posant

$$r_{max} = \frac{5}{3} h_{fd} - \frac{1}{6} h_{cd} \tag{5.60}$$

nous avons :

$$\begin{cases} H_{fmin} = h_{fd} - \dfrac{1}{2} r_{max} = \dfrac{1}{12} h_t \\ h_{cmax} = h_{cd} + r_{max} = \dfrac{5}{6} h_t \end{cases} \tag{5.61}$$

Ensuite en posant

$$r_{min} = -h_{cd} \tag{5.62}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{cases} H_{fmax} = h_{fd} - \dfrac{1}{2} r_{min} = \dfrac{1}{2} h_t \\ h_{cmin} = h_{cd} + r_{min} = 0 \end{cases} \tag{5.63}$$

Ainsi lorsque l'épaisseur totale de la structure plaque sandwich est définie, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} h_{fd} = \dfrac{1}{12} h_t \\ h_{cd} = \dfrac{5}{6} h_t \\ r = 0 \end{cases} \tag{5.64}$$

comme condition de départ de calcul. La condition d'arrêt de calcul dans ce cas est alors :

$$r = -h_{cd} + \mathcal{H} \tag{5.65}$$

où $\mathcal{H}$ est une épaisseur très faible (de l'ordre de $10^{-6} mm$ par exemple). Puisque lorsque l'on prend $r = -h_{cd}$ on se retrouve dans une situation incompatible où il n'existe pas de couche viscoélastique dans la structure ce qui ne correspond pas au genre de structure traité dans cette étude. Dans le cas où les faces sont constituées de stratifié dont les épaisseurs des couches sont différentes, nous rajoutons la condition d'arrêt supplémentaire suivante :

$$min\left(h_{fi}\right) = min\left(h_{fdi} - \frac{r}{2n}\right) < \mathcal{H}_f \;\; i = 1, 2, ..., n \tag{5.66}$$

où $\mathcal{H}_f$ est une petite valeur d'épaisseur (de l'ordre de $10^{-6} mm$ par exemple) permettant d'éviter la disparition d'une couche des faces au cours de la résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes (5.18) ou pire de créer une couche d'épaisseur

négative dans la structure.

5.3.3.3 Résolution continue du problème

Le deuxième cas d'étude de variation d'épaisseur revient à la résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes dont les coefficients matriciels et leurs fonctions associées pour une résolution continue par la nouvelle méthode sont les suivantes :

$$\begin{cases} [K_g] = [K_{0R},\, K_{1R},\, K_{2R},\, K_{3R},\, K_{12c},\, K_{34c}] \\ [M_g] = [M_0] \end{cases} \tag{5.67}$$

$$\left[E_g^*(\lambda,p)\right] = \left[E_{g1}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g2}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g3}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g4}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g5}^*(\lambda,p)\,,\, E_{g6}^*(\lambda,p)\right] \tag{5.68}$$

avec

$$\begin{cases} E_{g1}^*(\lambda,p) = 1 & E_{g4}^*(\lambda,p) = p^3 \\ E_{g2}^*(\lambda,p) = p & E_{g5}^*(\lambda,p) = (h_{cd}+p)^3\,(E_c^*(0)+E_c(\lambda)) \\ E_{g3}^*(\lambda,p) = p^2 & E_{g6}^*(\lambda,p) = (h_{cd}+p)\,(E_c^*(0)+E_c(\lambda)) \end{cases} \tag{5.69}$$

et

$$[E_m(p)] = \left(\rho_c h_{cd} + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_{fi}h_{fdi}\right) + \left(\rho_c - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_{fi}\right)p\right) \tag{5.70}$$

Ici encore le second membre de l'équation (5.70) est directement écrit sous la forme $bp+d$ puisque toutes les constantes sont connues d'avance. Les valeurs de départ (h_{cd}, h_{fd}) sont définis par les équations (5.64) et l'intervalle d'étude est $I = [-h_{cd}+\mathcal{H},\, 0]$. Nous rappelons toujours que $\lambda = \omega^2$ et que $p = r$ est le paramètre de modélisation.

5.4 Tests de validation et résultats numériques

Nous présentons dans la suite de ce chapitre des résultats numériques montrant la variation des propriétés modales des structures sandwichs viscoélastiques par rapport aux

épaisseurs des couches. Dans un premier temps, nous allons valider le modèle éléments finis développé pour les structures sandwichs viscoélastiques à cœur d'épaisseur variable (section 5.2). Nous présenterons dans un second temps le cas des plaques sandwichs à faces composites avec variation des épaisseurs de toutes les couches (section 5.3). Nous allons démontrer à travers des exemples précis que la variation des propriétés modales en fonction des épaisseurs n'est pas standard mais relative aux dimensions de la structure, au type de conditions aux limites appliquées, à la loi viscoélastique du cœur, et à la séquence d'orientation des fibres des couches des faces de la structure. Tout comme au Chapitre 4, nous validerons nos résultats soit avec des résultats de la littérature, soit par comparaison avec des calculs discrets à partir de la formulation de référence du Chapitre 2. Nous rappelons que les calculs par la nouvelle méthode de résolution seront désignés par CCNM et les calculs discrets par CDPM. Pour les calculs par le CCNM et le CDPM, nous avons fixé la précision et la troncature des séries à $\varepsilon = 10^{-6}$ et $N = 20$ respectivement.

5.4.1 Variation de l'épaisseur du cœur

Nous présentons ici les variations des propriétés modales amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques en fonction de l'épaisseur de la couche viscoélastique. Nous allons tout d'abord présenter un cas de poutre trois couches déjà étudié dans la littérature [99]. Ensuite nous allons présenter des cas de variation des propriétés modales des plaques trois couches. Nous considèrerons pour une même plaque rectangulaire sandwich trois couches, trois couches viscoélastiques (3M ISD112, DYAD et PVB) ayant différentes lois pour montrer que la variation des propriétés modales amortissantes diffère selon le type de matériau viscoélastique utilisé pour le cœur. Plusieurs séquences d'orientations des fibres des couches des faces et conditions aux limites seront également considérées pour montrer qu'elles ont aussi des effets sur la forme de la courbe de variation des propriétés modales de ces structures. Un exemple de plaque carrée sandwich trois couches sera présentée en

comparaison aux résultats de la plaque rectangulaire sandwich trois couches pour montrer que les extrémums locaux ne sont pas toujours fixes mais dépendent des dimensions (longueur, largeur) de la structure. Pour finir, nous présenterons quelques cas de plaques rectangulaires sandwichs multicouches pour diverses séquences d'orientation et conditions aux limites.

5.4.1.1 Poutre sandwich viscoélastique

Nous reprenons la poutre sandwich viscoélastique trois couches de Arvin et al. [99] pour laquelle nous avons comparé les résultats sur l'étude de l'orientation des fibres des couches des faces qui sont en graphite-epoxy (***T300/5208***). Pour cette étude portant uniquement sur la variation de l'épaisseur de la couche viscoélastique, les caractéristiques de la poutre (tableau 4.1) restent inchangées sauf pour l'épaisseur du cœur qui est considérée comme variable et définie sur un intervalle d'étude : $4mm \leq h_c \leq 20mm$ et l'angle d'orientation des fibres des couches des faces est fixée à $\theta = 30°$. La variation des propriétés modales de cette poutre est présentée en fonction de l'épaisseur de la couche du cœur $h_c = rH_f$ sur la figure (5.3) pour les quatre premiers modes. Pour faire cette étude, la structure poutre a été maillée à 160×4 éléments.

La résolution du problème aux valeurs propres complexes obtenu pour cette structure a nécessité respectivement 7, 8, 8 et 9 itérations respectivement pour les modes un, deux, trois et quatre. La comparaison des résultats montrent une bonne cohérence bien que Arvin et al. [99] n'aient pas négligé les effets d'inertie dans leur modèle contrairement à nous. De manière générale, on note que l'amortissement de cette poutre sandwich croit lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente de $4mm$ à $20mm$ du moins pour les quatre premiers modes de vibration alors que les fréquences amorties correspondantes sont un peu moins sensibles à cette variation d'épaisseur même si dans l'ensemble, elles décroissent.

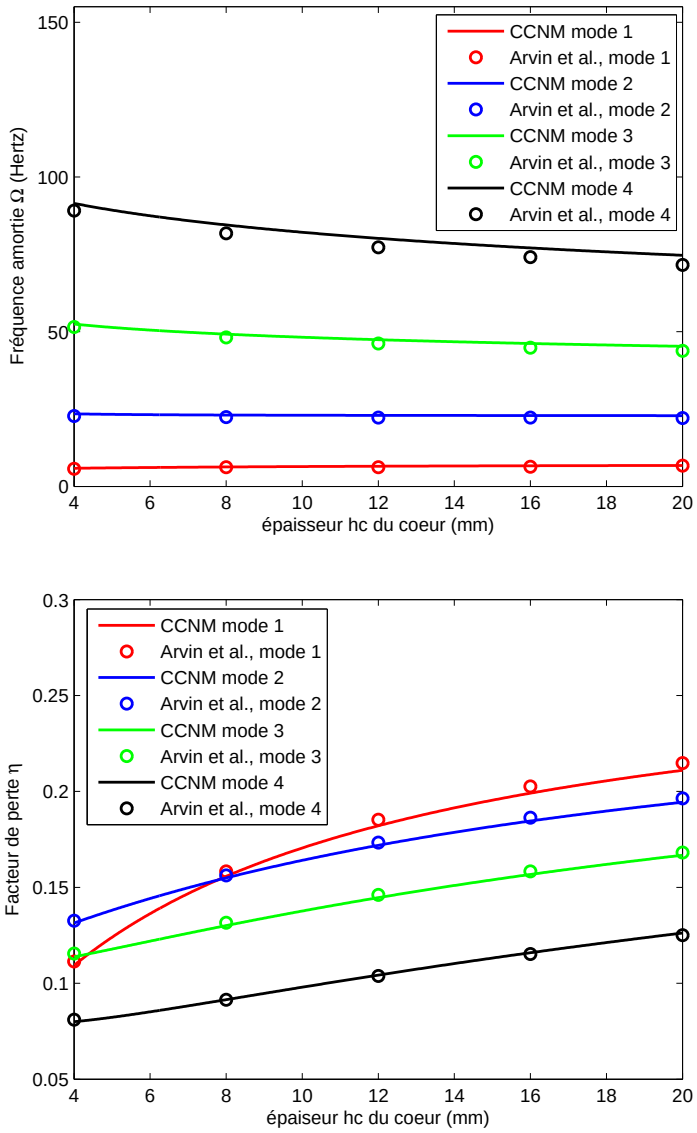


Figure 5.3 – Etude continue des propriétés modales de la poutre en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 30°$)

5.4.1.2 Plaques sandwichs viscoélastiques trois couches

1. Variation selon le matériau viscoélastique du cœur

Pour montrer que la variation des propriétés modales amortissantes n'est pas la même pour tous les matériaux viscoélastiques utilisés comme cœur de la structure, nous considérons trois plaques sandwichs trois couches qui diffèrent seulement par leur couche viscoélastique du cœur :

— **Plaque rectangulaire à cœur en 3M ISD112**

Nous reprenons la plaque sandwich viscoélastique rectangulaire dénommée plaque 6 dont les caractéristiques sont données dans le tableau (4.2). Nous rappelons que cette plaque a un cœur viscoélastique en ISD112 à 27°C , matériau dont la loi viscoélastique dépend fortement de la fréquence (loi 2.1).

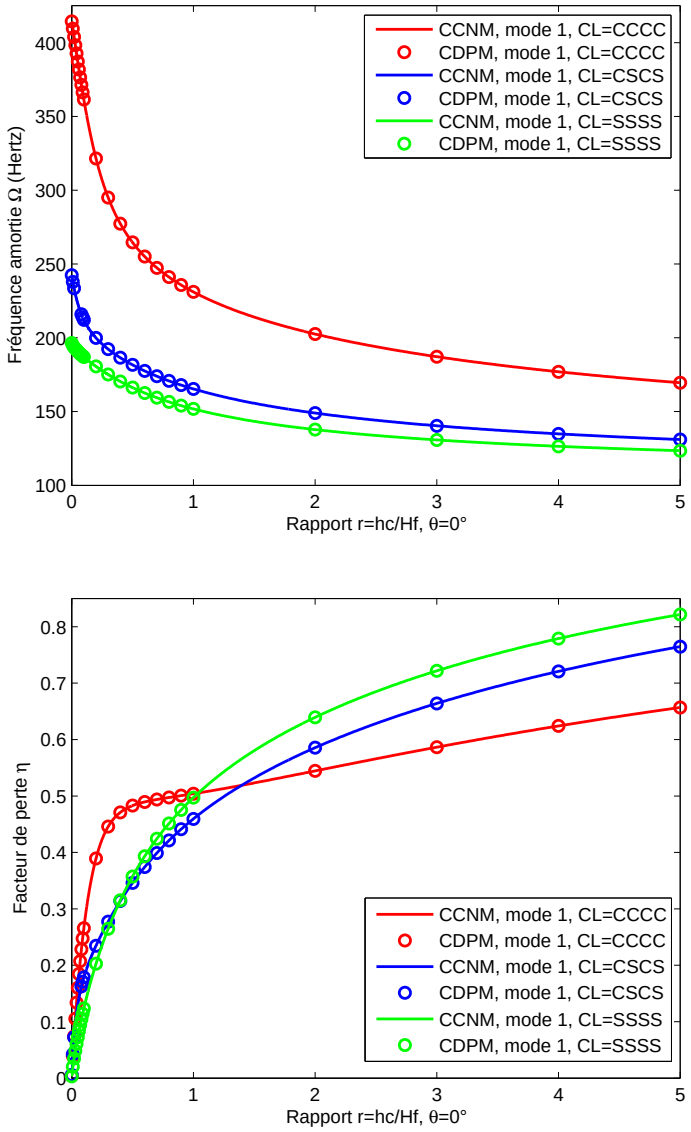


Figure 5.4 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 1)

L'objectif ici étant d'étudier de manière continue, la variation des propriétés modales (fréquence amortie et amortissement) de cette structure en fonction de l'épaisseur de la couche viscoélastique, toutes les caractéristiques données dans le tableau (4.2) sont

maintenues sauf l'épaisseur de la couche viscoélastique qui est considérée variable. D'après l'équation (5.22), cette étude peut se faire, en considérant le rapport des épaisseurs sur un intervalle $I = [\mathcal{H}_c,\ 10]$. Toutefois nous présenterons les résultats sur un intervalle d'étude $I_e = [10^{-3},\ 5]$ pour plus de clarté. Cet intervalle d'étude I_e sera d'ailleurs utilisé pour toutes les études qui seront présentées concernant la variation de l'épaisseur des couches viscoélastiques ou modifié si besoin est. Pour des raisons de clarté les calculs discrets par le CDPM ne sont pas représentés sur certaines figures.

Les résultats de l'étude de cette plaque sont représentés sur les figures (5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). D'une manière générale, l'amortissement augmente lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente (r augmente). Toutefois, pour certaines conditions aux limites, orientations des fibres des couches des faces et certains modes de vibration, la courbe de variation de l'amortissement alterne des phases de croissance et de décroissance. Les courbes de variation de l'amortissement sont, pour ces cas, caractérisées par la présence de maximums locaux (figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9) pour de faibles valeurs de l'épaisseur de la couche viscoélastique. Les caractéristiques de ces maximums locaux sont présentées dans les tableaux (5.1, 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5). L'amortissement correspondant à l'extrémum local de la courbe de variation de l'amortissement pour certains cas est nettement meilleur que pour toute autres valeurs prises dans l'intervalle d'étude considéré (figure 5.7). Pour d'autres cas, on peut obtenir le même amortissement pour deux épaisseurs différentes de la couche viscoélastique. Par exemple, on obtient le même amortissement pour les valeurs $r = 2,377$ et $r = 0,176$ pour le premier mode de la condition CSCS à $\theta = 60°$ soit pour $h_c = 1,811mm$ et $h_c = 0,134mm$ (figure 5.7). La courbe de variation de la fréquence amortie est décroissante pour tous les cas considérés pour cette structure. Ceci s'explique par le fait que lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique (3M ISD112) augmente, la structure perd en rigidité au profit de sa masse. Les résultats de cette plaque montrent que la courbe d'amortissement n'est pas forcément uniforme. On peut alors se demander s'il en serait de même pour tout matériau viscoélastique autre que 3M ISD112.

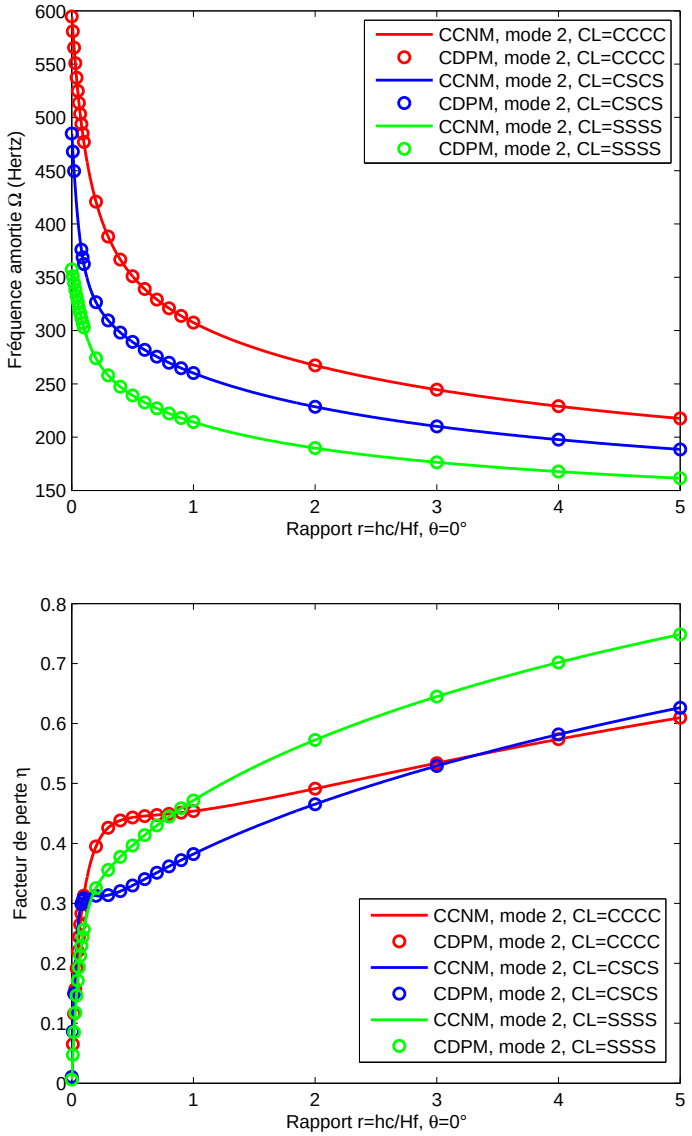


Figure 5.5 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 2)

	Maximum local			
Conditions aux limites	r	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
CCCC	-	-	-	-
CSCS	$0,146$	$0,110$	$341,75$	$0,314$
SSSS	-	-	-	-

Tableau 5.1 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 2, $\theta = 0°$)

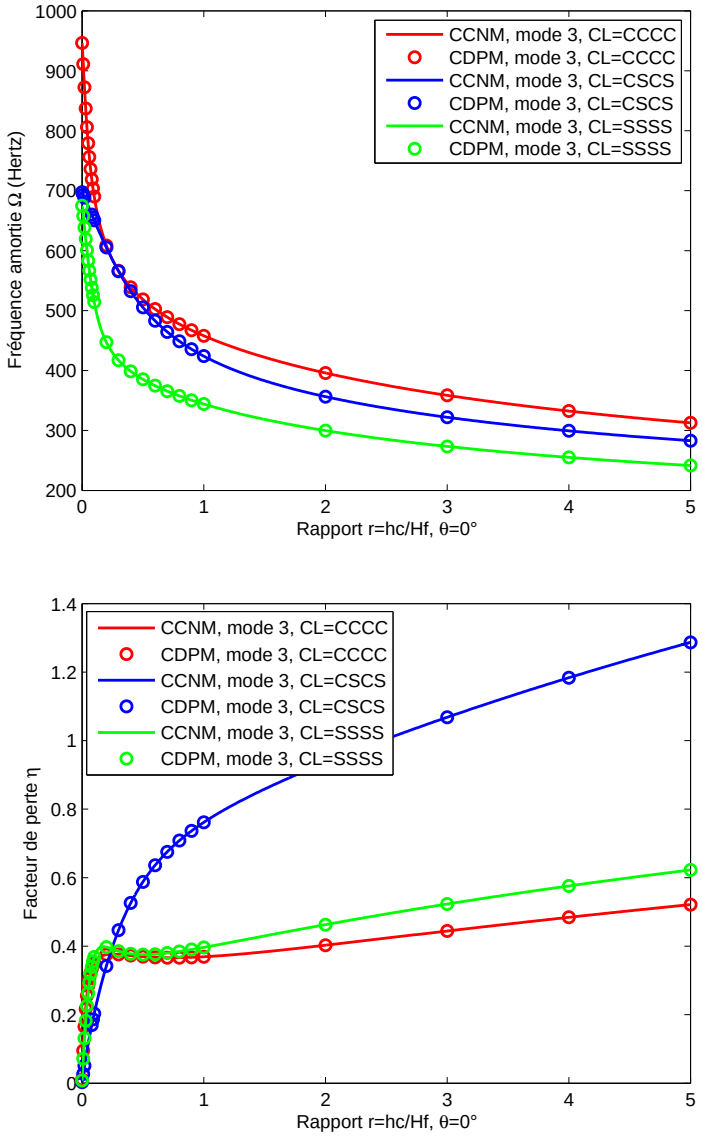


Figure 5.6 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 0°$ mode 3)

	Maximum local			
Conditions aux limites	r	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
CCCC	$0,248$	$0,189$	$585,42$	$0,377$
CSCS	-	-	-	-
SSSS	$0,175$	$0,133$	$458,33$	$0,398$

Tableau 5.2 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 3, $\theta = 0°$)

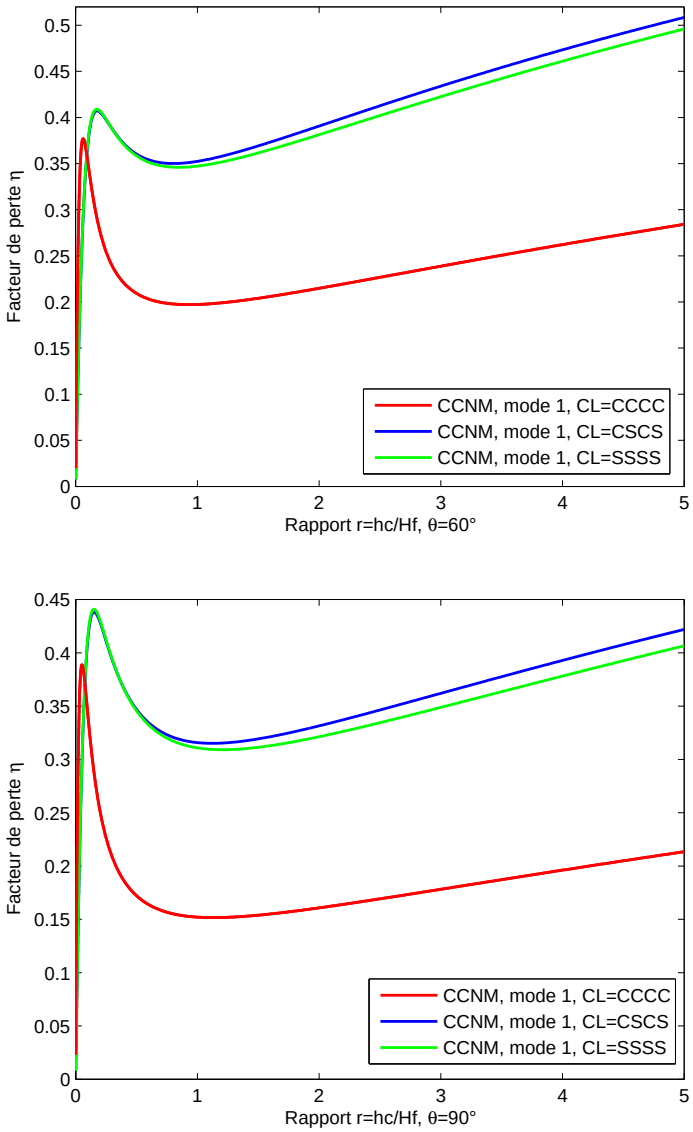


Figure 5.7 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60°\, et\, 90°$ mode 1)

		Maximum local			
Angle d'orientation	Conditions aux limites	r	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
60°	CCCC	$0,061$	$0,046$	$730,90$	$0,377$
	CSCS	$0,176$	$0,134$	$330,78$	$0,407$
	SSSS	$0,174$	$0,132$	$328,43$	$0,409$
90°	CCCC	$0,052$	$0,04$	$929,02$	$0,389$
	CSCS	$0,151$	$0,115$	$407,85$	$0,438$
	SSSS	$0,151$	$0,115$	$405,56$	$0,441$

Tableau 5.3 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 1, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$)

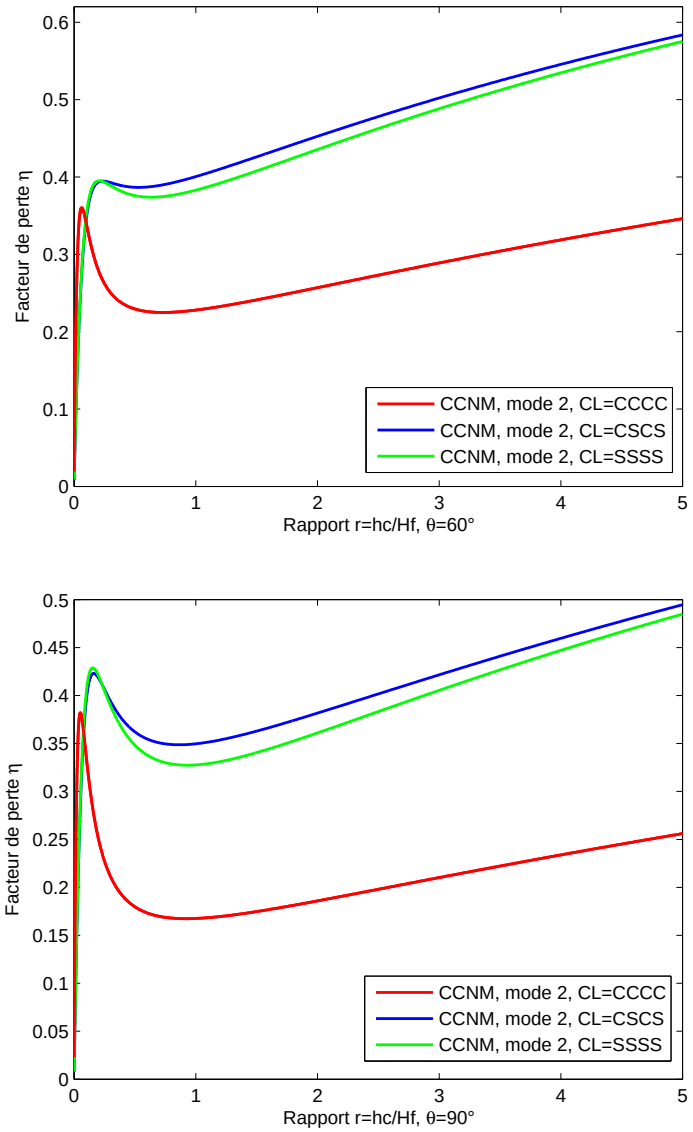


Figure 5.8 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60°\, et\, 90°$ mode 2)

		extrémum local			
Angle d'orientation	Conditions aux limites	r	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
60°	CCCC	$0,062$	$0,047$	$764,17$	$0,360$
	CSCS	$0,233$	$0,177$	$364,63$	$0,395$
	SSSS	$0,208$	$0,158$	$360,32$	$0,395$
90°	CCCC	$0,052$	$0,04$	$945,19$	$0,382$
	CSCS	$0,161$	$0,123$	$429,70$	$0,423$
	SSSS	$0,154$	$0,117$	$422,96$	$0,429$

Tableau 5.4 – Extrémums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 2, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$)

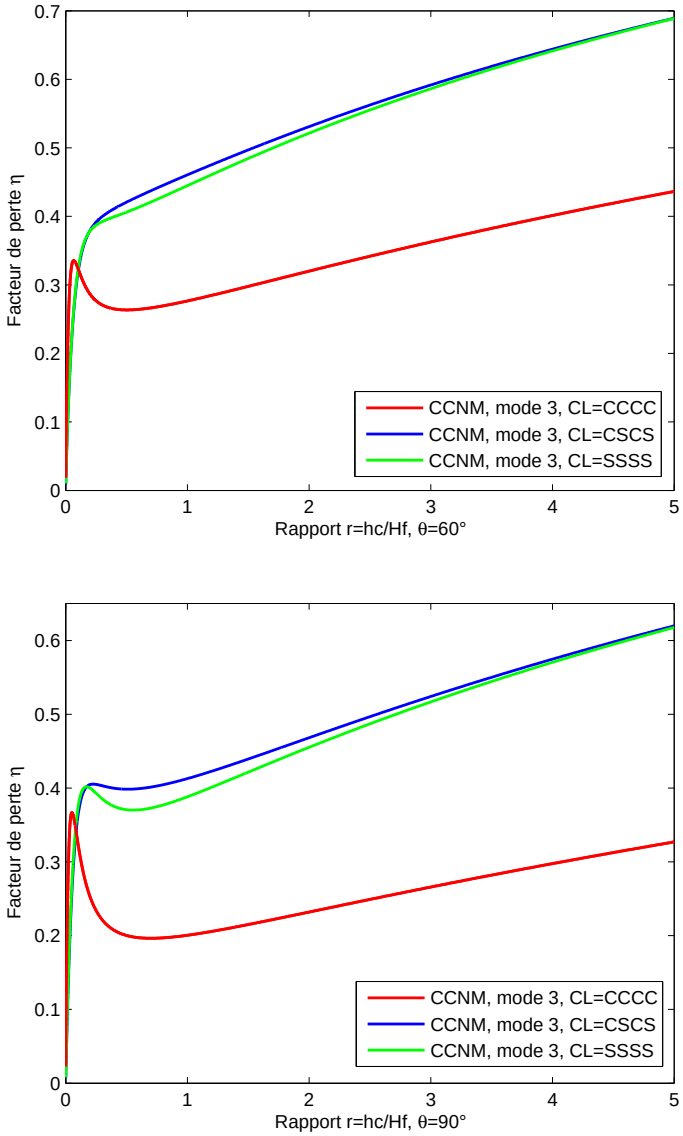


Figure 5.9 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur ($\theta = 60°\ et\ 90°$ mode 3)

		Maximum local			
Angle d'orientation	Conditions aux limites	r	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
60°	CCCC	$0,066$	$0,050$	$719,92$	$0,335$
	CSCS	-	-	-	-
	SSSS	-	-	-	-
90°	CCCC	$0,052$	$0,04$	$978,92$	$0,367$
	CSCS	$0,261$	$0,198$	$451,83$	$0,405$
	SSSS	$0,172$	$0,13$	$458,19$	$0,402$

Tableau 5.5 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (mode 3, $\theta = 60°$, et $\theta = 90°$)

— **Plaque rectangulaire sandwich trois couches à cœur en DYAD606**

Nous changeons de matériaux viscoélastique en remplaçant pour la plaque 6, la couche viscoélastique 3M ISD112 à 27°C par une couche viscoélastique en DYAD606 à 30°C. Nous rappelons que les deux matériaux viscoélastiques (3M ISD112 et DYAD606) ont une loi de type Maxwell généralisé obtenu en utilisant la méthode ADF [12, 13, 14]. Les résultats de l'étude de cette plaque sont représentés sur les figures (5.10 et 5.11).

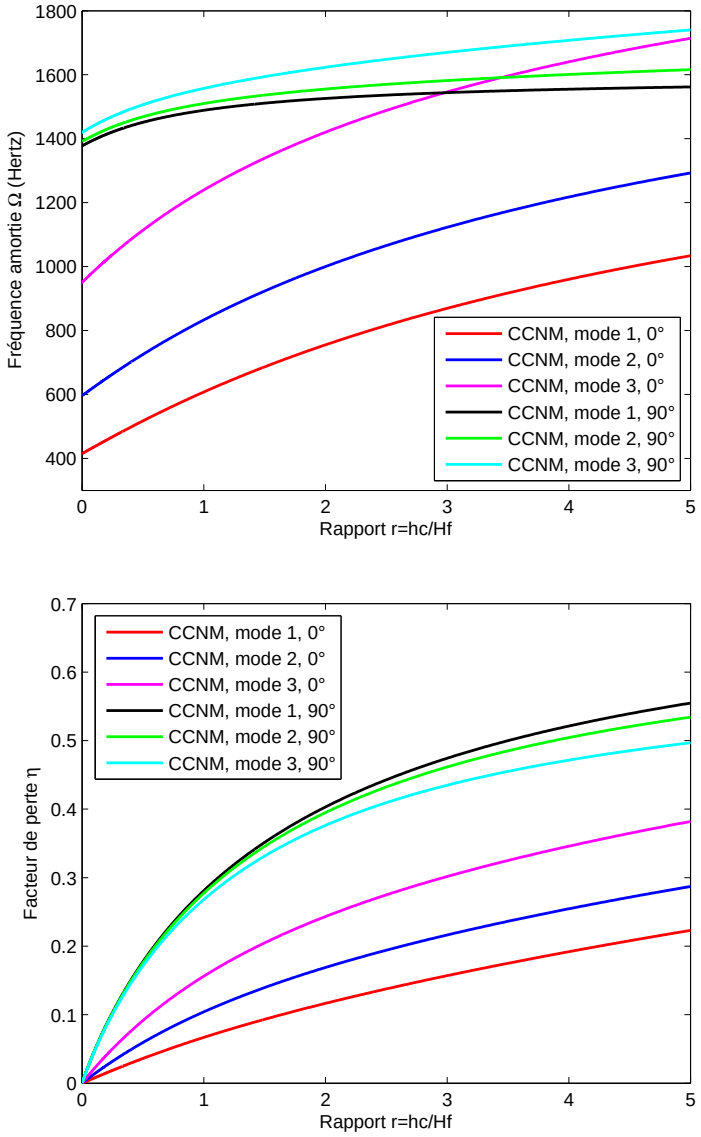


Figure 5.10 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en DYAD à 30°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : CCCC

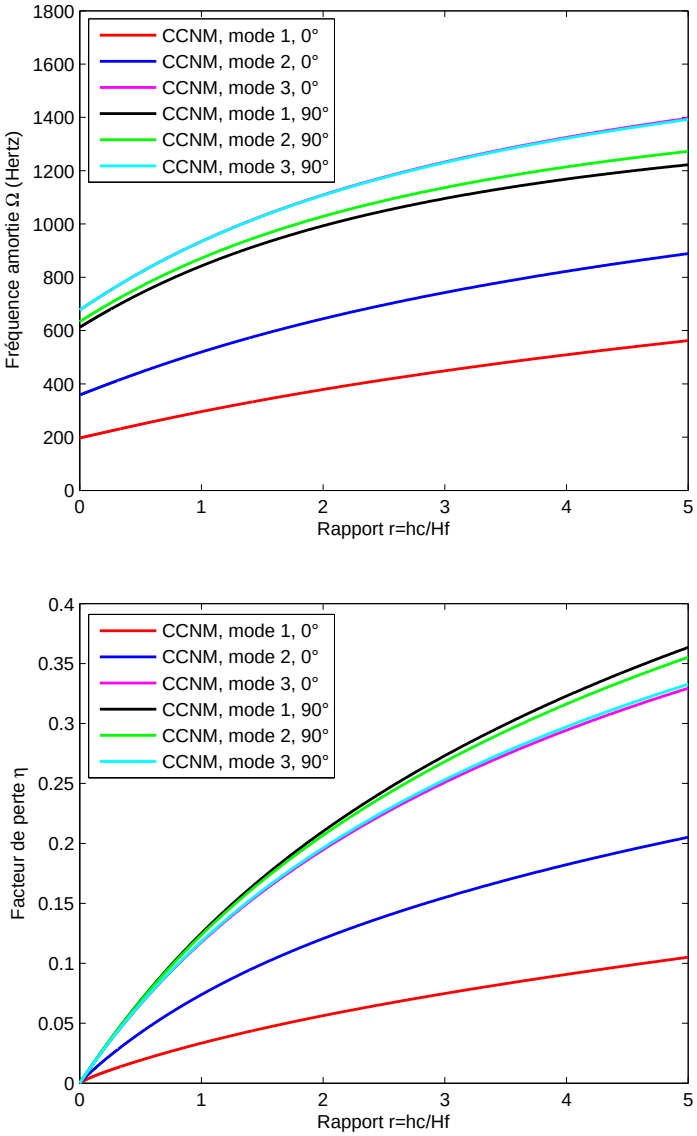


Figure 5.11 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en DYAD à 30°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : SSSS

Ces résultats (figures 5.10, 5.11) montrent que, les courbes de variation des propriétés modales de la plaque 6 avec un cœur en DYAD606 ne sont pas similaires à celles de la plaque 6 avec un cœur en 3M ISD112 présentées plus haut surtout pour les fréquences amorties. En effet, sur ces figures (5.10, 5.11) les courbes des fréquences amorties et les amortissements correspondants croissent lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente ce qui contredit les résultats obtenus avec l'ISD112 malgré que les lois viscoélastiques de ces deux matériaux sont issues du même modèle (Maxwell généralisé obtenu

par la méthode ADF). Ceci montre que la forme de la courbe de variation des propriétés modales de ces structures n'est pas liée au modèle de représentation utilisé pour caractériser la loi viscoélastique du matériau mais plutôt de la nature intrinsèque de ce matériau. Il est à noter que, le matériau 3M ISD112 est beaucoup plus souple et plus lourd que le DYAD606 ($\rho_{ISD112} = 1600kg.m^{-3}$ et $\rho_{DYAD606} = 1104kg.m^{-3}$). Pour le DYAD606 à 30°C, l'augmentation de la rigidité de la structure l'emporte sur celle de sa masse d'où les courbes de fréquences amorties croissent lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente (figures 5.10, 5.11) contrairement à l'ISD112 (figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). Pour étayer ces arguments avancés pour expliquer la différence de forme des courbes obtenues en utilisant l'ISD112 et le DYAD606, nous allons utiliser un matériau viscoélastique dont la loi n'est pas caractérisée par le modèle fractionnaire de Maxwell généralisé.

— **Plaque rectangulaire trois couches à cœur en PVB**

Nous changeons cette fois ci de type de loi viscoélastique en remplaçant la couche viscoélastique du cœur (3M ISD112 à 27°C) de la plaque 6 par une couche viscoélastique en PVB à 20°C. Pour rappel, la loi viscoélastique de 3M ISD112 à 27°C est de type fractionnaire de Maxwell généralisé alors que celle du PVB à 20°C est de type puissance. Les résultats obtenus pour l'étude des propriétés modales de la plaque 6 à cœur en PVB (figures 5.12, 5.13) montrent que les formes des courbes de variation sont similaires à celles obtenues avec un cœur en DYAD606 (figures 5.10, 5.11). En effet, comparativement au DYAD606 et l'ISD112, le PVB est un matériau moins amortissant. De plus sa masse volumique ($\rho_{PBV} = 999kg.m^{-3}$) est nettement inférieure à celles du DYAD ($\rho_{DYAD606} = 1104kg.m^{-3}$) et de l'ISD112 ($\rho_{ISD112} = 1600kg.m^{-3}$). L'apport en rigidité du PVB lorsque son épaisseur augmente est également plus conséquent que l'augmentation de la masse de la structure d'où la croissance uniforme des propriétés amortissantes.

On peut conclure en disant que la forme des courbes de variation des propriétés modales d'une structure dépend de la nature intrinsèque de la couche viscoélastique utilisée notamment sa masse et son taux de contribution en rigidité pour la structure. Toutefois, avant de tirer une conclusion plus générale par rapport aux caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique quant à ce qui concerne la forme des courbes de variation des pro-

priétés amortissantes, il serait intéressant de faire une étude sur les rapports des modules de Young $\left(\frac{E_f}{E_c}\right)$ et de masse $\left(\frac{\rho_f}{\rho_c}\right)$ des couches des faces et du cœur. Nous rappelons que sur la figure (5.13) les courbes de variation des fréquences amorties des troisièmes modes des orientations $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$ sont confondues et presque confondues pour les amortissement correspondants.

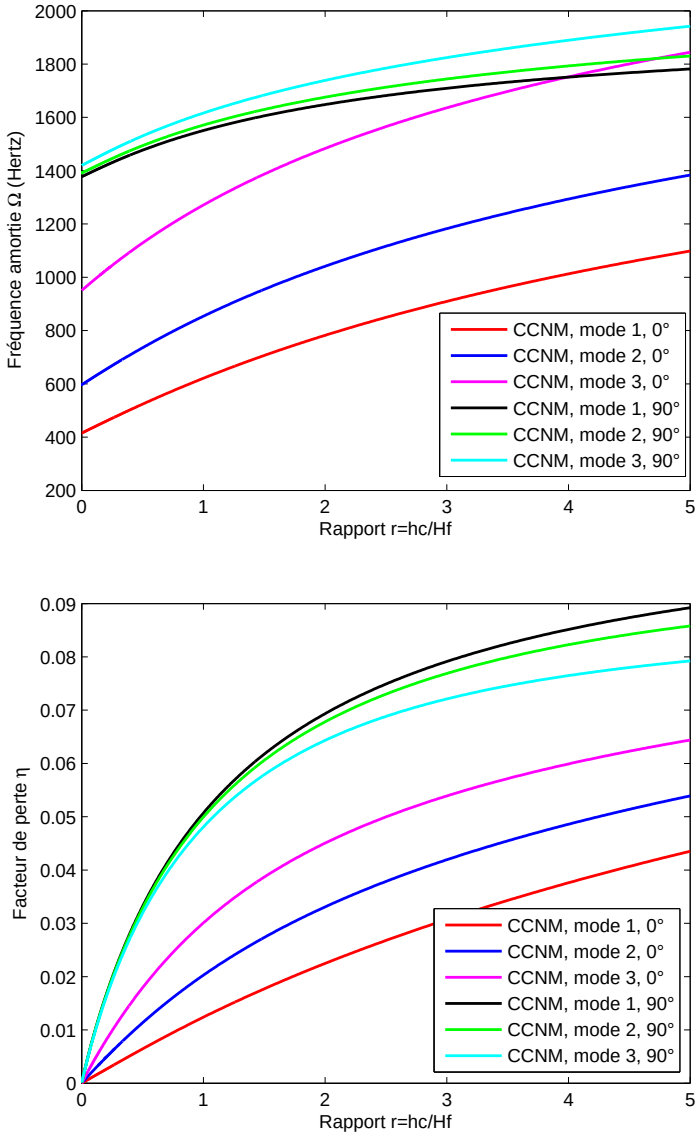


Figure 5.12 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en PVB à 20°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : CCCC

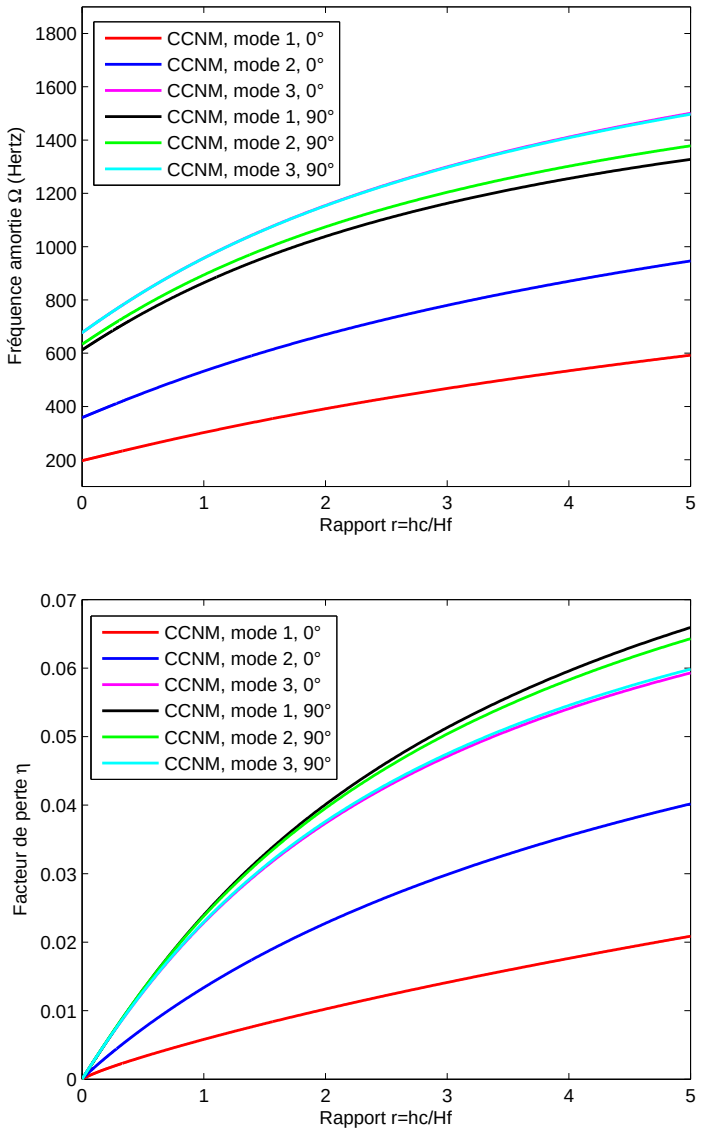


Figure 5.13 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction de l'épaisseur du cœur en PVB à 20°C (trois premiers modes pour $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$), CL : SSSS

2. Variation selon les dimensions de la plaque

Nous allons montrer à présent que les maximums locaux, s'ils existent, ne sont pas localisés en des valeurs fixes pour un même matériau viscoélastique lorsque les dimensions (longueur et largeur) de la structure changent. Pour cela, nous considérons une plaque carrée ayant les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques (épaisseurs des couches) que la plaque 6 mais dont les dimensions dans le plan horizontal sont $300mm \times 300mm$. Les conditions aux limites encastrement sur tous les bords (CCCC) et appuis simples

(SSSS) sont étudiées pour diverses orientations des fibres des faces de la structure. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures (5.14) pour le premier mode de vibration et (5.15) pour les amortissements des deuxième et troisième modes de vibration. Les symétries de la plaque et des conditions aux limites appliquées font que la courbe de variation des propriétés modales de cette structure pour l'orientation $\theta = 90°$ est la même que pour $\theta = 0°$

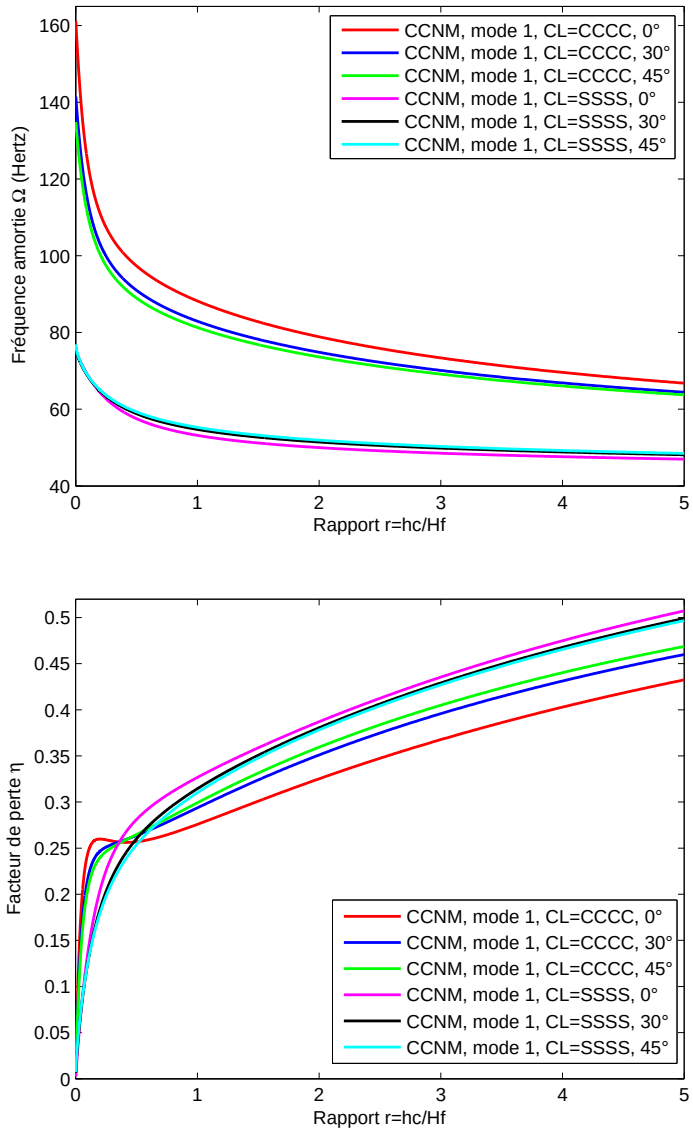


Figure 5.14 – Etude continue des propriétés modales de la plaque carrée en fonction de l'épaisseur du cœur (mode 1), CL : CCCC et SSSS

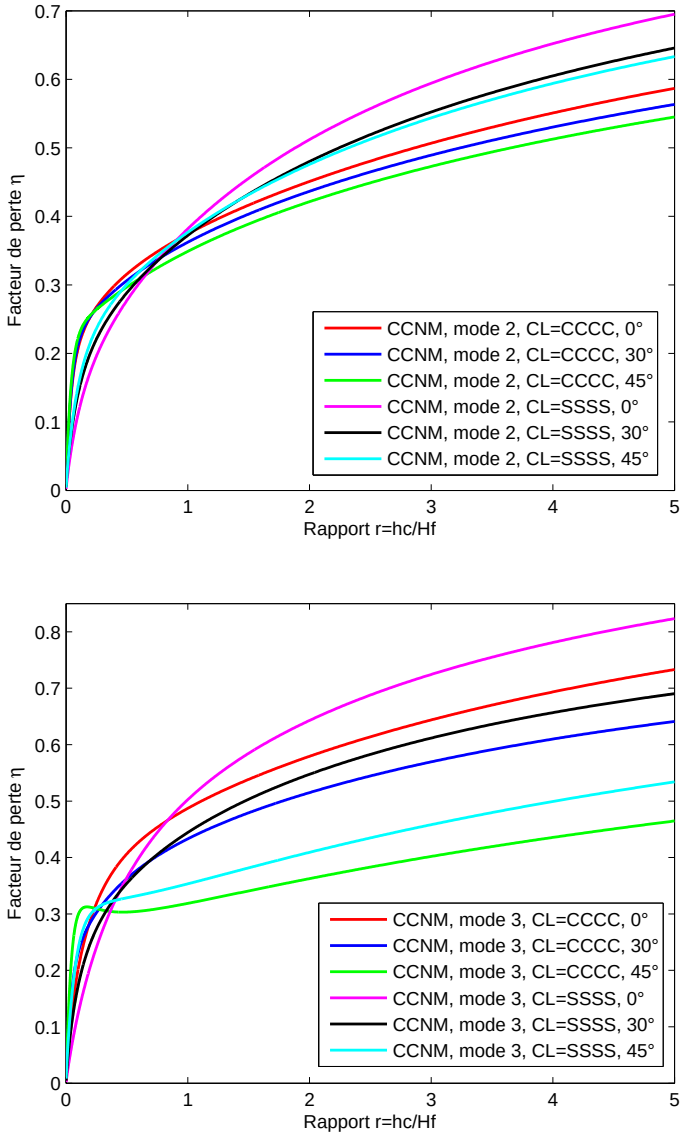


Figure 5.15 – Etude continue des propriétés modales de la plaque carrée en fonction de l'épaisseur du cœur (amortissement des modes 2 et 3), CL : CCCC et SSSS

Si la variation des fréquences amorties (figure 5.14) est similaire à celle obtenue pour la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C (figure 5.4), on n'observe pas cependant les mêmes formes pour les courbes d'amortissement pour la plaque carrée (figures 5.14 et 5.15) et la plaque rectangulaire 6 à cœur en ISD112 à 27°C (figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). Les seuls maximums locaux sont obtenus pour les orientations $\theta = 0°$ ($r = 0,199$, $\Omega = 111,11Hz$, $\eta = 0,260$, $h_c = 0,152mm$) et $\theta = 45°$ ($r = 0,172$, $\Omega = 217,26Hz$, $\eta = 0,312$, $h_c = 0,131mm$) respectivement pour le premier et troisième mode pour l'encastrement.

5.4.1.3 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches

Nous présentons à présent quelques exemples pour des plaques rectangulaires sandwichs viscoélastiques dont les faces sont constituées de stratifié.

— **Faces constituées de stratifié croisé symétrique**

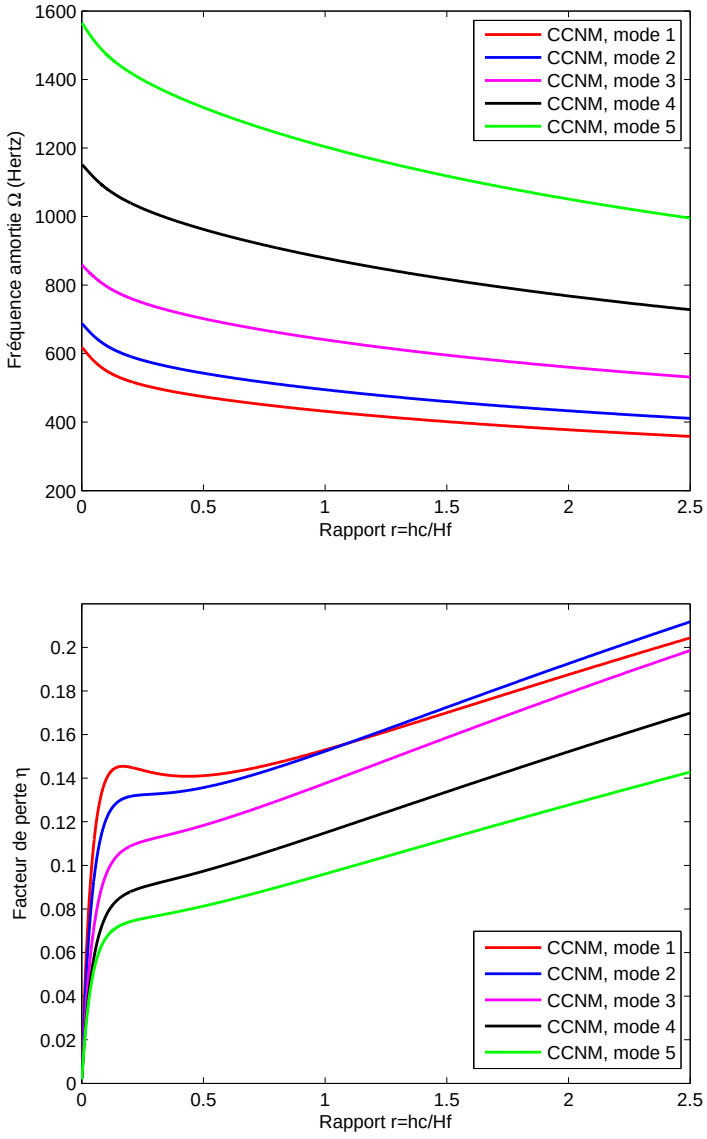


Figure 5.16 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[0°/90°/0°/c]_s$), CL : CCCC

Nous reprenons la structure plaque sandwich dénommée plaque 7 dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans le tableau (4.3). Le matériau viscoélastique constituant sa couche viscoélastique (DYAD à 25°C) est remplacé par de

l'ISD112 à 27°C. Deux séquences d'orientation ($[0°/90°/0°/c]_s$ et $[90°/0°/90°/c]_s$) sont présentées, pour la seule condition aux limites encastrement.

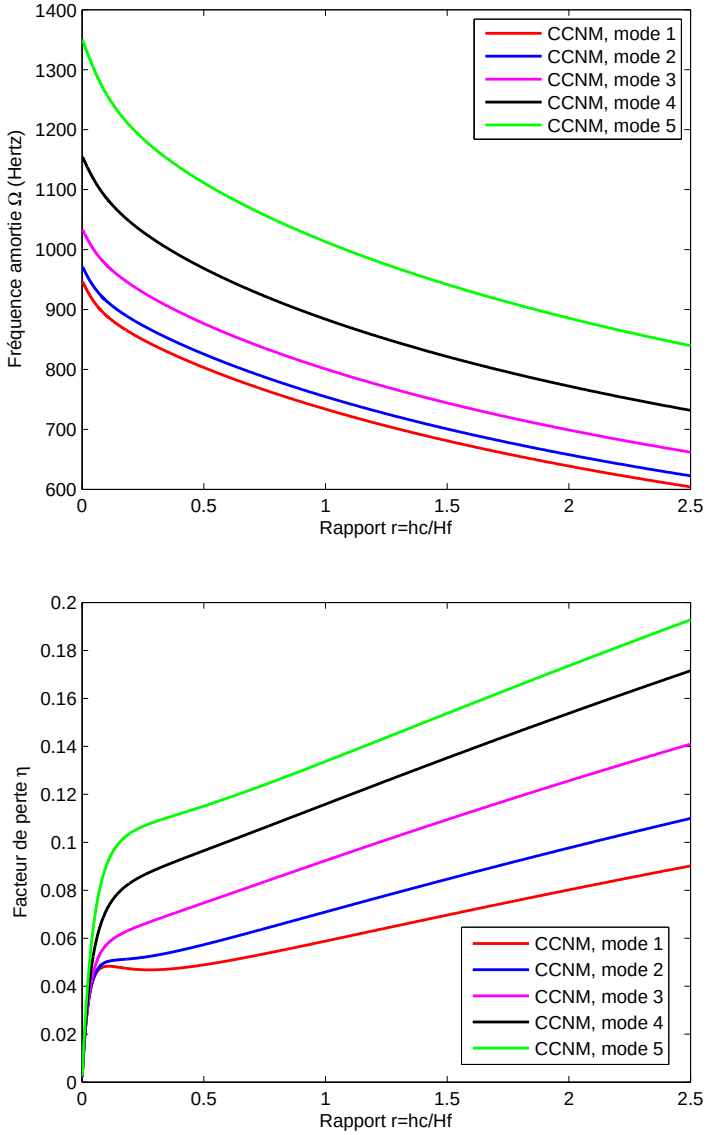


Figure 5.17 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 7 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[90°/0°/90°/c]_s$), CL : CCCC

Les courbes de variation des propriétés modales pour les séquences $[0°/90°/0°/c]_s$ (figure 5.16) et $[90°/0°/90°/c]_s$ (figure 5.17) montrent les même variations que pour la plaque 6 (figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). De plus, les amortissements de la séquences $[90°/0°/90°/c]_s$ sont rangés de manière croissante du premier au cinquième mode, alors que c'est le contraire pour la séquence $[0°/90°/0°/c]_s$. Mais de manière globale, la séquence

$[0°/90°/0°/c]_s$ donne un meilleur amortissement en moyenne sur les cinq premiers modes présentés par rapport à la séquence $[90°/0°/90°/c]_s$ pour une valeur fixe de r prise dans l'intervalle d'étude présentée ($I_e = [10^{-3};\ 2,5]$).

— **Faces constituées de stratifié croisé antisymétrique**

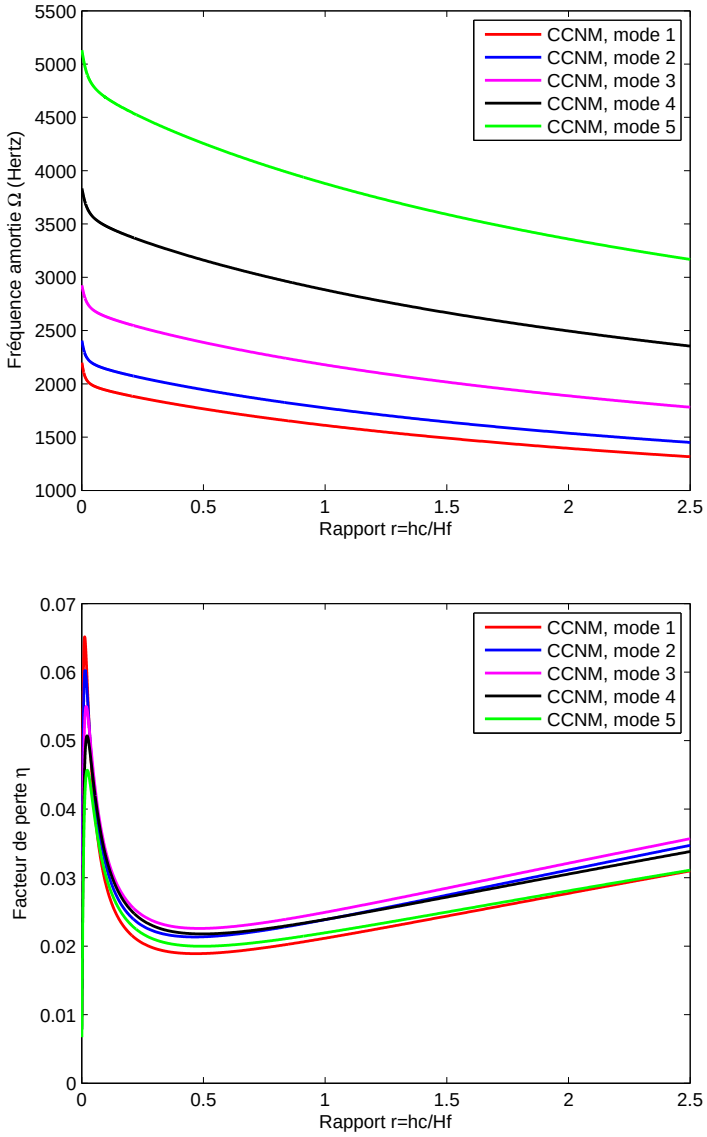


Figure 5.18 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 9 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[0°/90°/0°/90°/c]_s$), CL : CCCC

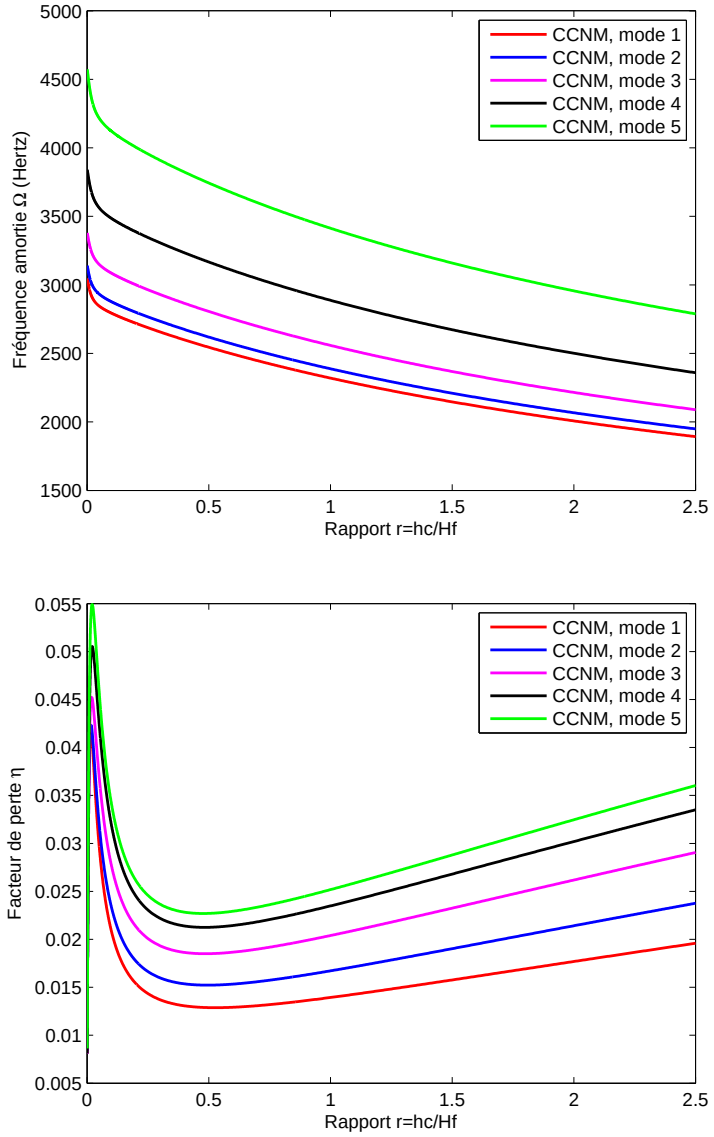


Figure 5.19 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 9 en fonction de l'épaisseur du cœur en ISD112 à 27°C (cinq premiers modes pour la séquence $[90°/0°/90°/0°/c]_s$), CL : CCCC

Pour cet exemple nous reprenons la plaque sandwich viscoélastique rectangulaire 8 dont les caractéristiques sont données dans le tableau (4.4) en remplaçant sa couche viscoélastique par une couche en ISD112 à 27°C et en prenant l'épaisseur de chaque couche du stratifié égale à $h_{fi} = 0,5mm$. Cette plaque est dénommée plaque 9. Comme précédemment, deux séquences sont présentées pour la condition aux limites encastrement. Ces deux séquences sont : $[0°/90°/0°/90°/c]_s$ et $[90°/0°/90°/0°/c]_s$ et les courbes représentatives de la variation de leurs propriétés modales pour les cinq premiers modes de vibration

en flexion sont représentées sur les figures (5.18) pour la première séquence et (5.19) pour la deuxième séquence.

Pour cette structure (plaque 9), l'amortissement des cinq premiers modes de vibration sont globalement faibles. La variation des propriétés modales en fonction de l'épaisseur de la couche viscoélastique est similaire aux autres cas où l'ISD112 est utilisé (figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). Pour les deux séquences considérées, les courbes montrent très bien la présence de maximum local pour les cinq premiers modes présentés, qui est localisé dans les voisinages proches du point $r = 0,00185$ ($h_c = 0,037mm$) et $r = 0,00152$ ($h_c = 0,030mm$) respectivement pour les séquences $[90°/0°/90°/0°/\mathrm{c}]_s$ et $[0°/90°/0°/90°/\mathrm{c}]_s$. Pour ces points extrémums, l'amortissement obtenu pour les cinq modes de vibration est nettement meilleur que lorsqu'on utilise une épaisseur de $h_c = 5mm$ ($r = 2,5$) même s'il peut être difficile dans la conception d'obtenir des structures avec de si faibles couches viscoélastiques correspondantes aux maximums locaux.

5.4.2 Variation de l'épaisseur de toutes les couches, l'épaisseur totale de la structure étant constante

Nous présentons dans ce qui suit, la variation des propriétés modales des plaques sandwichs viscoélastiques en considérant constante l'épaisseur totale de la structure alors que les épaisseurs des couches des faces et du cœur varient. Nous présenterons tout d'abord quelques cas de plaques sandwichs viscoélastiques trois couches puis des cas de plaques sandwichs viscoélastiques multicouches. Différentes séquences et conditions aux limites seront considérées. Nous montrerons que les variations diffèrent selon le matériau viscoélastique utilisé pour le cœur de la structure, en considérant deux différents matériaux viscoélastiques (3M ISD112 et PVB) pour une même plaque. Les variations des propriétés modales seront présentées en fonction de l'épaisseur h_c de la couche viscoélastique. Pour la clarté des figures, les résultats de comparaison par CDPM ne seront pas représentés. Nous déterminerons les caractéristiques des points maximums, lorsqu'ils existent, des courbes des amortissements dans cette étude.

5.4.2.1 Plaques sandwichs trois couches

— **Plaque rectangulaire à cœur en 3M ISD112**

Nous reprenons une fois encore la plaque 6 dont les caractéristiques sont données dans le tableau (4.2) en maintenant son épaisseur totale égale à $h_t = 1,778mm$. Deux conditions aux limites (CCCC et SSSS) et diverses orientations des fibres des faces sont considérées pour cette étude. Nous présentons seulement la variation des propriétés modales pour les trois premiers modes de vibration de la structure.

Les variations des propriétés modales de cette structure en fonction de l'épaisseur de la couche viscoélastique sont représentées sur les figures (5.20, 5.20) pour la condition aux limites encastrement (CCCC) et sur les figures (5.22, 5.23) pour les appuis simples (SSSS). Globalement, l'amortissement de la structure augmente lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente. Néanmoins, la variation de l'amortissement n'est pas uniforme. On note pour presque toutes les courbes d'amortissement la présence de maximums locaux (tableaux 5.6, 5.7, 5.8, 5.9) et parfois même des minimums locaux (amortissements des orientations $\theta = 45°$, $\theta = 60°$, $\theta = 90°$ figures 5.20, 5.20, 5.22, et 5.23). Si physiquement certaines valeurs des points maximums paraissent difficiles à obtenir dans la conception parce que étant trop faible (maximums locaux des amortissements des orientations $\theta = 0°$ $\theta = 30°$ pour la condition aux limites encastrement), cela n'exclus toutefois pas leur existence. On note également que les valeurs des maximums locaux pour la condition aux limites appuis simples sont beaucoup plus réalisables en conception que pour l'encastrement. Les courbes des fréquences amorties par contre décroissent uniformément pour tous les cas considérés lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente (figures 5.20 et 5.22). Les différentes orientations étudiées montrent que globalement, l'amortissement de la structure diminue de $\theta = 0°$ à $\theta = 90°$ pour l'encastrement (figures 5.20 et 5.20). Pour la condition aux limites appuis simples par contre, l'amortissement pour l'orientation $\theta = 90°$ est plus important que pour les autres orientations pour certaines valeurs de l'épaisseur de la couche viscoélastique (figures 5.22 et 5.23).

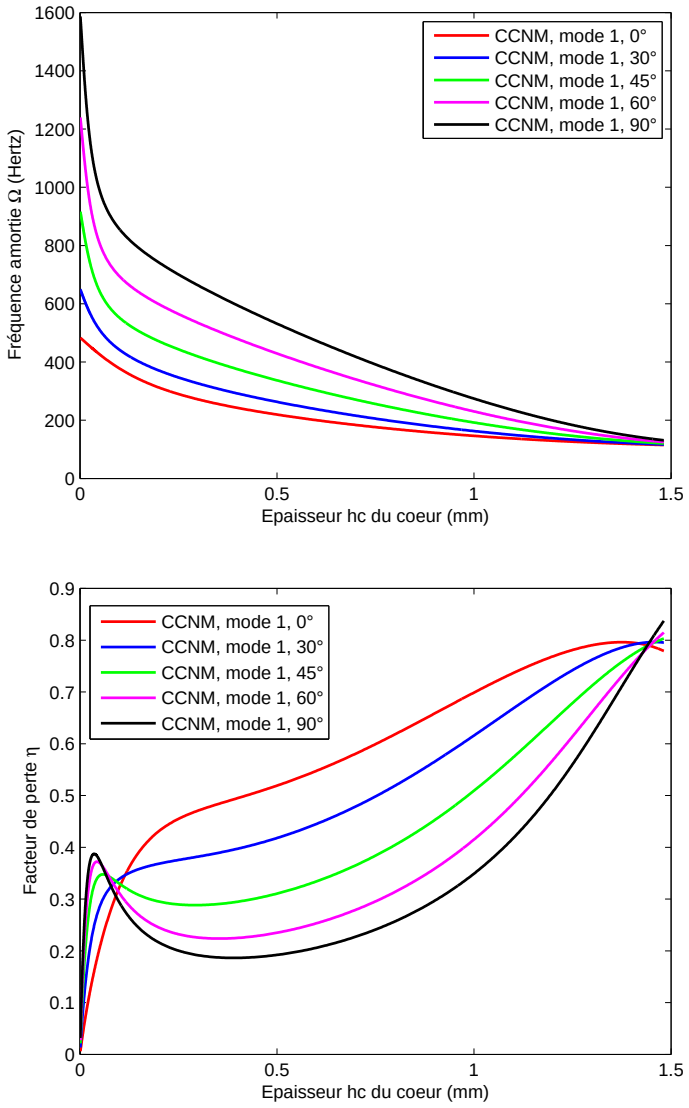


Figure 5.20 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : CCCC

	Maximum local		
Angles d'orientation	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	$1,374$	$119,49$	$0,796$
30°	$1,458$	$117,87$	$0,796$
45°	$0,059$	$620,82$	$0,348$
60°	$0,043$	$834,95$	$0,372$
90°	$0,036$	$1067,81$	$0,387$

Tableau 5.6 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :CCCC)

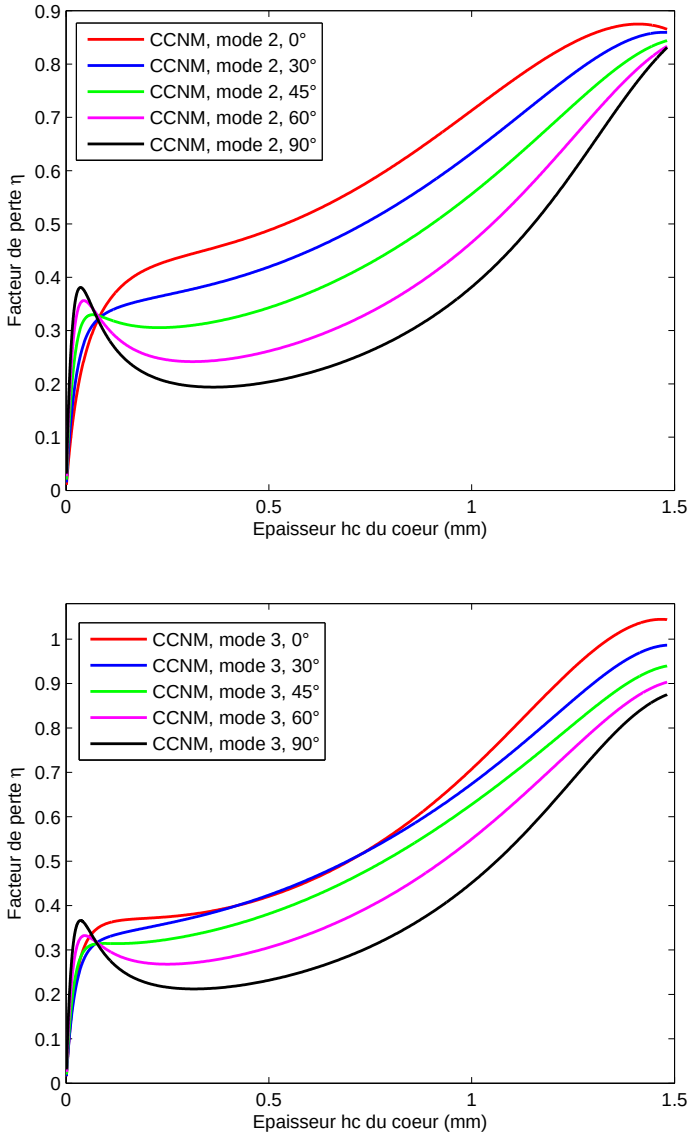


Figure 5.21 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (amortissements mode 2 et 3), CL : CCCC

Angles d'orientation	Maximum local					
	mode 2			mode 3		
	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	$1,411$	$136,95$	$0,875$	$1,467$	$159,80$	$1,044$
30°	$1,473$	$135,04$	$0,860$	-	-	-
45°	$0,099$	$655,52$	$0,33$	$0,147$	$680,53$	$0,315$
60°	$0,044$	$872,74$	$0,356$	$0,046$	$939,49$	$0,332$
90°	$0,036$	$1085,48$	$0,381$	$0,036$	$1124,45$	$0,366$

Tableau 5.7 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 2 et 3, CL :CCCC)

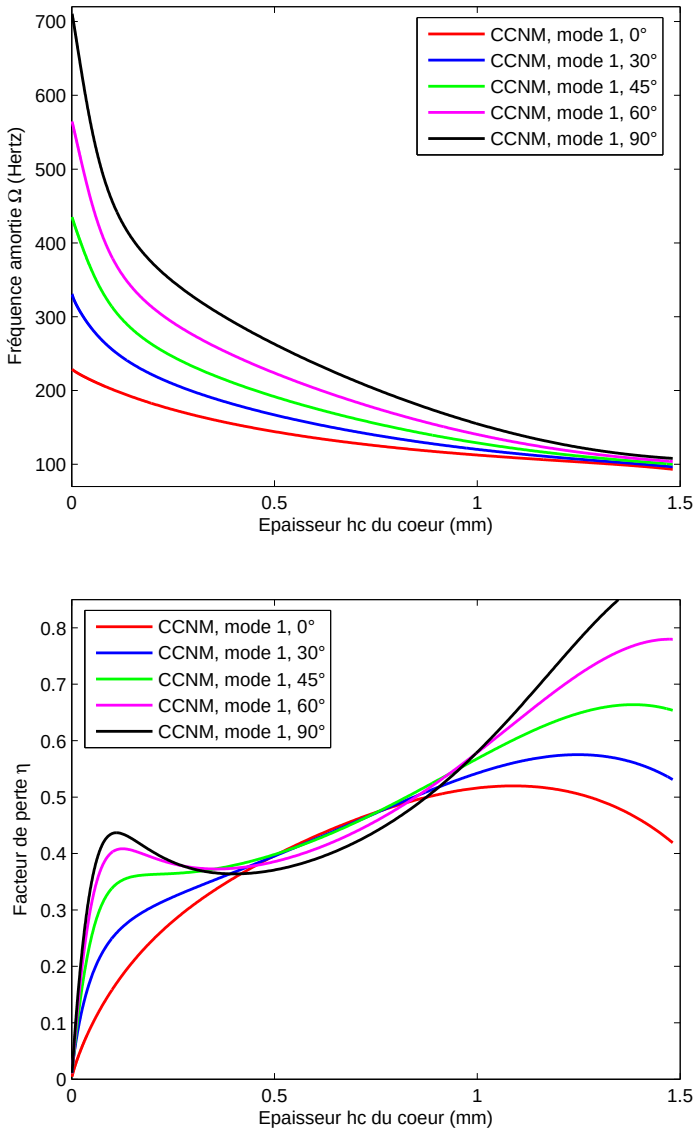


Figure 5.22 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : SSSS

	Maximum local		
Angles d'orientation	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	$1,089$	$109,00$	$0,520$
30°	$1,249$	$106,99$	$0,575$
45°	$1,384$	$104,45$	$0,664$
60°	$0,126$	$356,16$	$0,408$
90°	$0,110$	$443,11$	$0,437$

Tableau 5.8 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :SSSS)

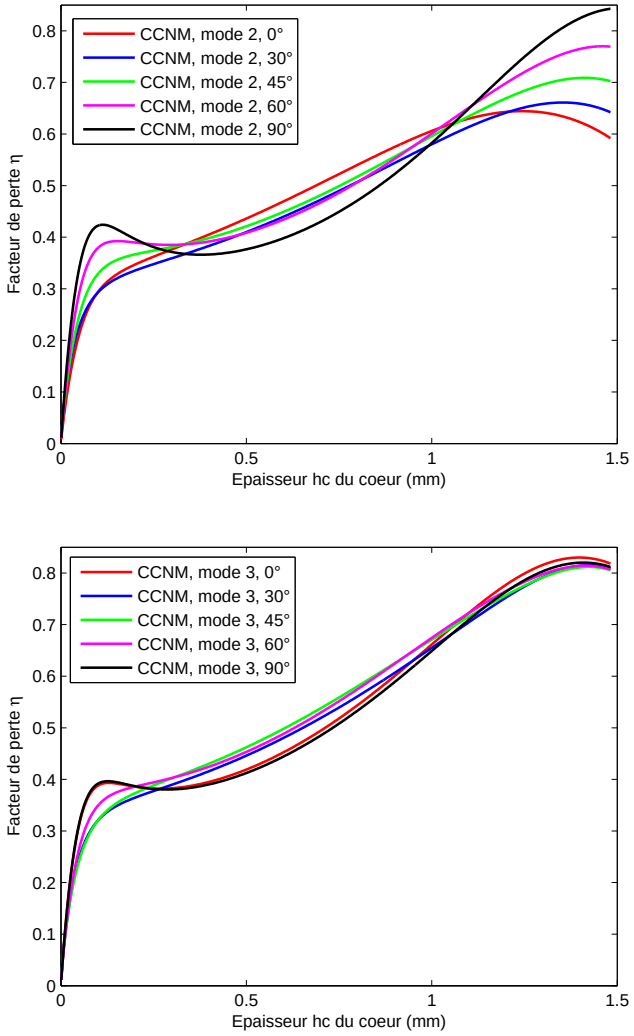


Figure 5.23 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 en fonction des épaisseurs des couches (amortissements mode 2 et 3), CL : SSSS

Angles d'orientation	Maximum local					
	mode 2			mode 3		
	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	1,243	127,31	0,644	0,129 1,397	494,43 150,61	0,393 0,830
30°	1,353	124,99	0,661	1,426	150,64	0,815
45°	1,412	122,86	0,709	1,423	151,11	0,812
60°	0,182 1,414	371,61 150,59	0,392 0,814	1,414	150,59	0,814
90°	0,113	461,69	0,424	0,126 1,409	495,30 148,73	0,396 0,820

Tableau 5.9 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en ISD112 à 27°C, épaisseur totale constante (mode 2 et 3, CL :SSSS)

Dans la section précédente où seule l'épaisseur de la couche du cœur variait (sous-section 5.4.1.2) nous avons montré que la forme des courbes des propriétés modales diffèrent selon la couche viscoélastique utilisée pour une même plaque viscoélastique. Nous allons vérifier s'il en est de même pour ce cas où les épaisseurs de toutes les couches varient en gardant la contrainte d'épaisseur totale constante de la structure.

— **Plaque rectangulaire à cœur en PVB**

Nous reprenons la plaque 6 (caractéristiques données dans le tableau 4.2) en remplaçant sa couche viscoélastique en 3M ISD112 par une couche en PVB à 20°C. Seuls les résultats pour les premiers modes des conditions aux limites encastrement (CCCC) et appuis simples (SSSS) sont présentés pour cette plaque (figures 5.24 et 5.25). Tout comme les fréquences amorties de la plaque 6 à cœur en 3M ISD112 à 27°C (figures 5.20 et 5.22), les fréquences amorties de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C décroissent uniformément lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente. Toutefois, les fréquences amorties de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C sont moins sensibles à la variation de l'épaisseur du cœur que pour la plaque 6 à cœur en 3M ISD112 à 27°C. On observe pour les courbes d'amortissement, des maximums locaux pour des valeurs proches de $h_c = 1mm$ pour toutes les orientations représentées à l'exception de l'orientation $\theta = 0°$ qui ne présente pas de maximum local. Les valeurs exactes de ces points maximums ainsi que les propriétés modales correspondantes sont données dans les tableaux (5.10 et 5.11).

On retiendra que pour le PVB, les maximums locaux, lorsqu'ils existent, sont regroupés autour de la valeur $h_c = 1mm$ pour les deux conditions aux limites (CCCC et SSSS) pour le premier mode de vibration contrairement au 3M ISD112 pour lequel les maximums locaux sont beaucoup plus dispersés suivant les orientations. Par ailleurs, les variations des amortissements (figures 5.24 et 5.25) montrent que les amortissements ne sont pas toujours croissants lorsque que l'épaisseur de la couche viscoélastique de la structure augmente.

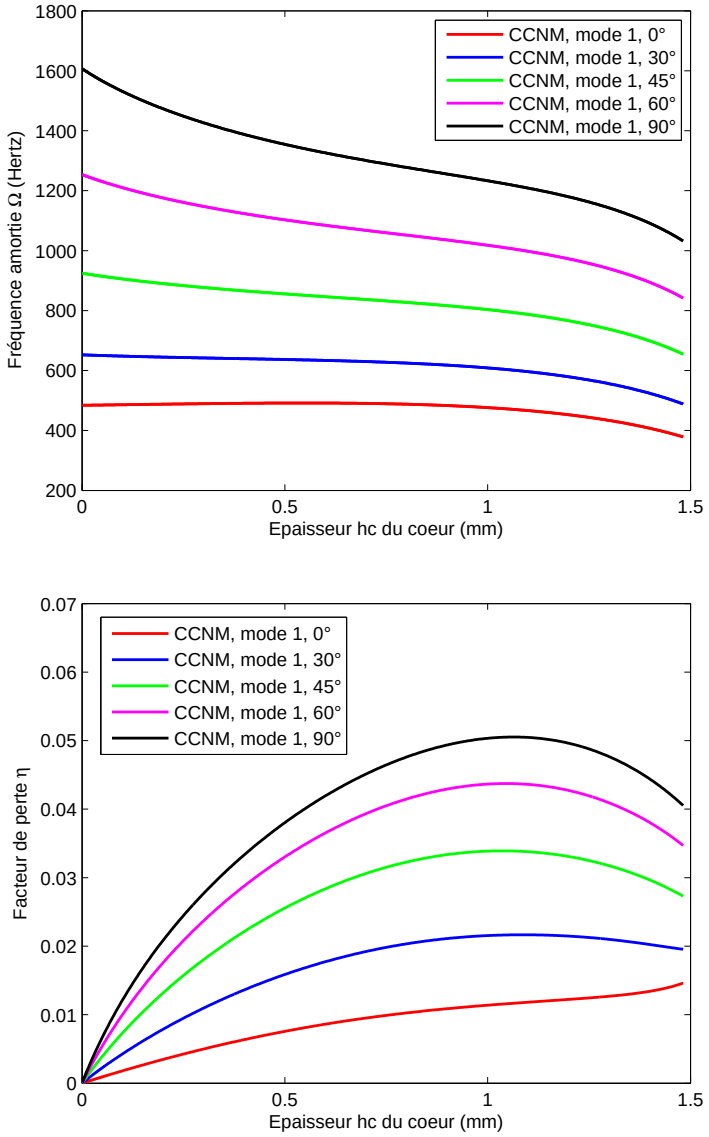


Figure 5.24 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 de cœur en PVB à 20°C en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : CCCC

	Maximum local		
Angles d'orientation	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	-	-	-
30°	$1,085$	$598,25$	$0,022$
45°	$1,035$	$797,95$	$0,034$
60°	$1,045$	$1009,26$	$0,044$
90°	$1,064$	$1217,66$	$0,050$

Tableau 5.10 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :CCCC)

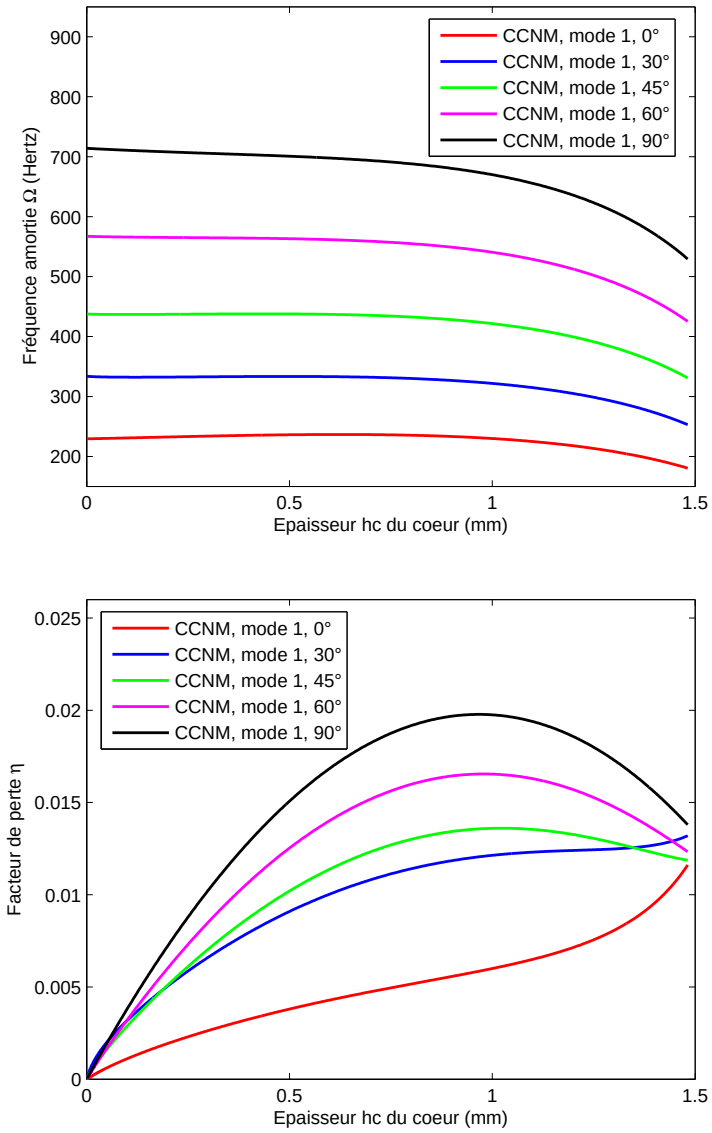


Figure 5.25 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 6 de cœur en PVB à 20°C en fonction des épaisseurs des couches (mode 1), CL : SSSS

	Maximum local		
Angles d'orientation	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
0°	-	-	-
30°	-	-	-
45°	1,023	419,67	0,014
60°	0,980	542,53	0,016
90°	0,966	673,97	0,020

Tableau 5.11 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 6 à cœur en PVB à 20°C, épaisseur totale constante (mode 1, CL :SSSS)

Les résultats de la plaque 6 à cœur en 3M ISD112 (figures 5.20 et 5.22,) comparés à ceux de la plaque 6 à cœur en PVB (figures 5.24 et 5.25) permettent de conclure une fois encore que la variation des propriétés modales est fonction du type de matériau viscoélastique utilisé au cœur de la structure.

5.4.2.2 Plaques sandwichs viscoélastiques multicouches

Nous présentons pour les plaques sandwichs viscoélastiques multicouches, les résultats de la plaque rectangulaire sandwich 5 dont les faces sont constituées de stratifié. Ses caractéristiques sont données dans le tableau (2.15). Nous présentons uniquement la variation de l'amortissement du premier mode de vibration pour deux conditions (CCCC et SSSS). Diverses séquences sont considérées pour cette structure ; et les résultats sont présentés sur la figure (5.26).

Pour les différentes séquences étudiées, les courbes d'amortissement montrent globalement que, la séquence $[90°/0°/C]_s$ donne un meilleur amortissement et qu'il vaut mieux éviter de prendre l'épaisseur de la couche viscoélastique entre $1mm$ et $5mm$ si l'on désire avoir un amortissement assez conséquent pour cette structure et ce, pour les deux conditions aux limites considérées. Nous rappelons que la séquence $[0°/0°/C]_s$ est la séquence de référence et est équivalente à une plaque trois couches dont les fibres des faces sont orientées dans la direction $\theta = 0°$ et d'épaisseur équivalente $H_f = 4mm$. Cette séquence de référence donne toutefois un amortissement très moyen comparé aux autres séquences. Par ailleurs pour avoir un amortissement maximal pour une faible épaisseur de la couche viscoélastique, il faut prendre une valeur autour de $h_c = 0,07mm$ pour l'encastrement et autour de $h_c = 0,18mm$ pour l'appui simple. On voit très bien à travers cet exemple de plaque sandwich multicouche que les séquences d'orientation des couches influencent énormément l'amortissement de la structure.

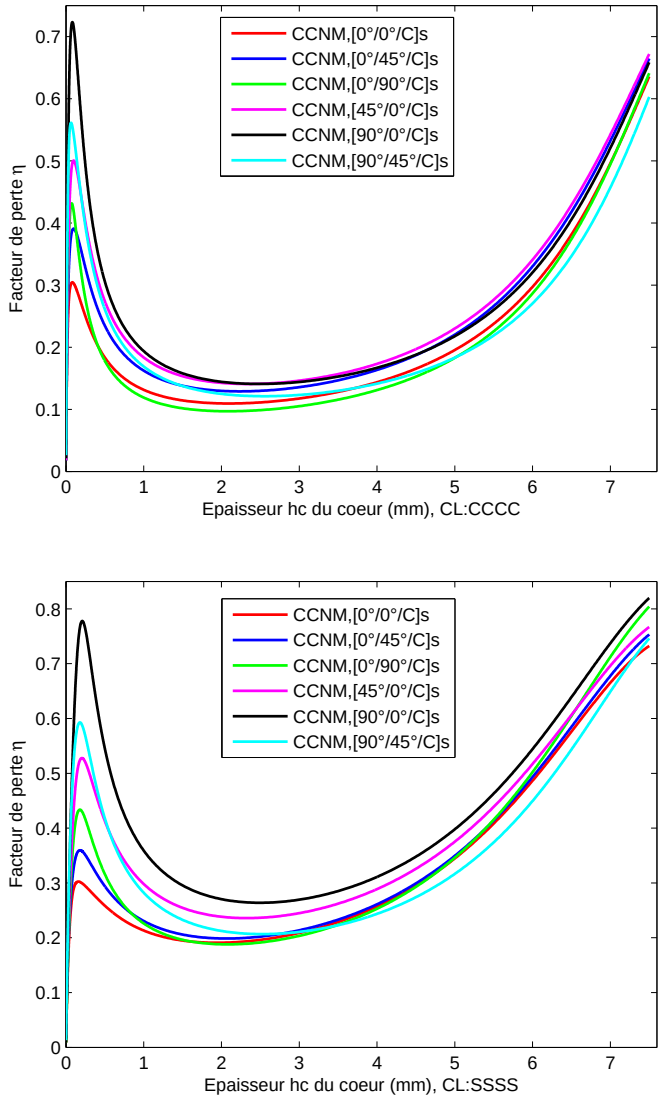


Figure 5.26 – Etude continue des propriétés modales de la plaque 5 en fonction des épaisseurs des couches (mode 1, CL : CCCC et SSSS)

Séquences d'orientation	Maximum local					
	CCCC			SSSS		
	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η	$h_c(mm)$	$\Omega(Hz)$	η
$[0°/0°/C]_s$	$0,081$	$746,11$	$0,304$	$0,160$	$363,71$	$0,302$
$[0°/45°/C]_s$	$0,098$	$135,04$	$0,860$	$0,181$	$367,12$	$0,360$
$[0°/90°/C]_s$	$0,074$	$787,64$	$0,431$	$0,179$	$369,50$	$0,434$
$[45°/0°/C]_s$	$0,099$	$752,97$	$0,501$	$0,205$	$394,62$	$0,528$
$[90°/0°/C]_s$	$0,082$	$931,46$	$0,723$	$0,209$	$422,22$	$0,778$
$[90°/45°/C]_s$	$0,065$	$1086,24$	$0,561$	$0,179$	$484,06$	$0,593$

Tableau 5.12 – Maximums locaux des courbes d'amortissement de la plaque 5, épaisseur totale constante (mode 1, CL : CCCC et SSSS)

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux différentes formulations éléments finis pour l'étude continue de la variation des propriétés modales des structures sandwichs viscoélastiques composites. La première formulation traite le cas où seule l'épaisseur de la couche viscoélastique de la structure varie. La deuxième formulation suppose variables toutes les épaisseurs de la structure en ajoutant la condition d'encombrement qui limite l'épaisseur totale de la structure à une valeur fixe. Ces formulations éléments finis ont conduit à la résolution de problèmes aux valeurs propres complexes non linéaires par la méthode développée au Chapitre 3. Nous avons validé ces formulations par un exemple de poutre tiré de la littérature et des exemples de plaques sandwichs trois couches et multicouches viscoélastiques en faisant des comparaisons avec des calculs discrets obtenus à partir de la formulation de référence du Chapitre 2. Différents types de plaques viscoélastiques de part les dimensions, les couches viscoélastiques, et diverses séquences d'orientation et de conditions aux limites ont été considérés pour les deux types de formulations. Les résultats ont montré que la forme des courbes de variation des propriétés modales de ces structures varie en fonction des dimensions, des conditions aux limites, des séquences d'orientation des couches des faces mais surtout de la couche viscoélastique utilisée au cœur de ces structures. Contrairement à ce qu'on peut imaginer, la courbe de variation de l'amortissement n'est pas toujours uniformément croissante lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique augmente puisque pour certains cas, elle présente des maximums locaux. Ainsi, on peut avoir un même amortissement pour deux valeurs différentes de l'épaisseur de la couche viscoélastique dans certains cas. L'intérêt de ces formulations réside dans le gain de temps de calcul puisqu'à partir de la résolution d'un seul problème aux valeurs propres non linéaires complexes par la technique d'homotopie, on décrit de manière continue la variation des propriétés modales par des branches solutions à travers la *MAN* et la continuation.

Conclusion générale et perspectives

Le travail effectué dans ce mémoire a pour objectif la modélisation et la conception de structures composites viscoélastiques. Le but principal est l'obtention de structures légères possédant un haut pouvoir amortissant pour un usage dans les domaines de l'aéronautique, l'aérospatiale, l'automobile. Pour atteindre cet objectif, les sandwichs à faces composites et à cœur viscoélastique ont été proposés. La modélisation proposée tient compte à la fois de l'anisotropie des faces et la dépendance en fréquence des caractéristiques mécaniques du cœur. L'anisotropie présente dans la loi de comportement de ces matériaux composites a constitué une difficulté qui venait s'ajouter aux difficultés déjà rencontrées dans la modélisation en vibration libre de structures sandwichs viscoélastiques telles que le choix du schéma cinématique adéquat et la résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes pour la détermination des propriétés modales amortissantes de ces dernières. Le Chapitre 1 a été consacré à une revue bibliographie sur les structures sandwichs viscoélastiques, les difficultés rencontrées dans leur modélisation en vibration propre libre, les solutions proposées pour surmonter ces difficultés ainsi que quelques généralités sur les matériaux composites et les travaux déjà effectués concernant les sandwichs viscoélastiques composites. Cette étude bibliographie a non seulement montré des difficultés dans la modélisation en vibration libre des sandwichs viscoélastiques composites et la détermination de manière exacte de leurs propriétés modales amortissantes mais également la non existence de méthode ou technique permettant de réaliser une étude continue des effets d'un paramètre de conception sur les propriétés modales des sandwichs viscoélastiques.

Contributions originales

Pour surmonter ces difficultés qui sont importantes pour la modélisation et la conception des sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissant et satisfaisants les exigences de légèreté et de rigidité, nous avons :

1. dans le Chapitre 2 proposé une modélisation en vibration libre de plaques sandwichs composites à partir des éléments finis de type plaque/plaque/plaque pour le calcul de manière directe et exacte des propriétés modales de ces structures et ce pour n'importe quelle loi viscoélastique dépendante de la fréquence. A partir de cette formulation théorique, nous avons implémenté sous le logiciel Matlab, un outil générique de détermination des propriétés modales amortissantes des plaques sandwichs composites dont les faces sont considérées en stratifié de plusieurs couches orientées dans diverses directions et le cœur viscoélastique orthotrope dont la loi de comportement dépend de la fréquence. Pour résoudre le problème aux valeurs propres non linéaires complexes, nous avons adapté la méthode de résolution directe et exacte des propriétés modales utilisée par Bilasse et al. [74] dans le cas d'un cœur isotrope viscoélastique. Cette méthode est un couplage entre la technique d'homotopie, la méthode asymptotique numérique et la différentiation automatique,

2. dans le Chapitre 3, développé une méthode générique de résolution de problème résiduel non linéaire aux valeurs propres complexes à double dépendance dont l'une est la fréquence et l'autre un paramètre de conception décrivant un intervalle d'étude spécifique. Basée sur la méthode asymptotique numérique, la différentiation automatique, l'homotopie et la continuation, cette méthode a été implémentée sous Matlab et utilise la boite à outil diamant pour les différentiations automatiques. Son efficacité a été prouvée à travers la résolution des équations non linéaires aux valeurs propres complexes à double dépendance obtenues dans les Chapitres 4 et 5

3. dans le Chapitres 4 proposé une formulation élément finis à partir de l'élément plaque/plaque/plaque utilisé dans le Chapitre 2 pour étudier de manière continue les effets des angles d'orientation des fibres des composites classiques (monocouches unidirectionnelles, stratifiés antisymétriques, stratifiés croisés symétriques ou anti-

symétriques) sur les propriétés modales amortissantes des plaques sandwichs viscoélastiques composites. Cette formulation a débouché sur un problème aux valeurs propres non linéaires complexes à double dépendance (fréquence et angle d'orientation) qui a été résolu avec succès par la nouvelle méthode développée dans le Chapitre 3,

4. dans le Chapitre 5 développé également à partir de l'élément plaque/plaque/plaque utilisé dans le Chapitre 2, une formulation pour étudier de manière continue cette fois ci les effets des épaisseurs des couches du sandwich sur les propriétés modales amortissantes de ce dernier. Le problème aux valeurs propres obtenu dans cette formulation est similaire à celui du Chapitres 4 et est également résolu par par la nouvelle méthode développée dans le Chapitre 3

Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont certes apportés une contribution importante dans la modélisation en vibration libre des sandwichs composites, néanmoins il reste beaucoup de travaux à effectuer soit pour améliorer les présents travaux soit pour les compléter.

Du point de vue modélisation

Les améliorations suivantes sont envisageables :

Modèle cinématique et élément fini :

Dans ce travail nous avons utilisé un schéma cinématique zig-zag avec continuité aux interfaces des couches en appliquant la théorie de Love-kirchhoff pour les faces et la théorie de déformation du premier ordre de Mindlin-Reissner au cœur. Cependant, il serait beaucoup plus intéressant d'utiliser des théories de déformation d'ordre élevé, pour mieux prendre en compte l'anisotropie et le cisaillement dans la structure. Notre modèle utilisant un élément fini de type plaque/plaque/plaque, pour modéliser des structures plus épaisses et de géométries plus complexes, il serait souhaitable de développer un élément fini de type coque prenant en compte les courbures. Par ailleurs il serait également judicieux de tester la nouvelle méthode de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires

complexes à double dépendance développé dans le Chapitre 3 sur un modèle éléments finis introduisant les effets de la température sur les propriétés modales de la structure. Ceci permettra de prendre en compte le couplage fréquence-température contenue dans la loi des matériaux viscoélastiques. On peut également envisager un couplage de la méthode de résolution développée au Chapitre 3 avec une base réduite pour réduire la taille des matrices pour gagner en temps de calcul. On pourra s'inspirer des travaux de Boumediène et al. [75]

Calcul des propriétés amortissantes

Les méthodes proposées pour le calcul de l'amortissement et les fréquences amorties à partir de la résolution des problèmes de vibrations libres peuvent être étendues au calcul des vibrations forcées dans le cas linéaire et non linéaire (non linéarité géométrique). Ces méthodes peuvent être couplées avec les techniques de réductions classiques (Analyse modale, PGD, MAN, ... etc) pour la modélisation de structures complexes.

Du point de vue pratique

Les outils numériques développés peuvent être utilisés à des fins d'optimisation de l'amortissement. En effet, on peut les utiliser dans les procédures d'optimisation et de calcul de sensibilité. L'aspect générique de ces formulations permettrait de prendre d'autres critères et paramètres de conception.

Bibliographie

[1] M. Bilasse : *Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique.* Phd thesis, Université de Metz, 2010.

[2] T. Pritz : Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214(1):83–104, juillet 1998.

[3] R.A. Schapery : *Viscoelastic behaviour and analysis of composite materials.* Vol. 2 (Ed. G. Sandeskj), New York, academic p édition.

[4] A.D. Nashif et J.P. Henderson : *Vibration Damping.* 1985.

[5] C. G'Sell et J.M. Haudin : *Introduction à la mécanique des polymères.* 1994.

[6] K.B. Oldham et J. Spanier : *The fractional calculus.* New York, academic p édition, 1974.

[7] A. Oustaloup : *La Dérivation non entière : théorie, synthèse et applications.* Hermès, 1995.

[8] R.L. Bagley et J. Torvik : Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21(5):741–748, mai 1983.

[9] A.C. Galucio, J.-F. Deü et R. Ohayon : Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, 33(4):282–291, mars 2004.

[10] G.A. Lesieutre : Finite elements for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 29(12):1567–1579, janvier 1992.

[11] D.J. McTavish et P.C. Hughes : Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(1):103, janvier 1993.

[12] M.A. Trindade, A. Benjeddou et R. Ohayon : Modeling of Frequency-Dependent Viscoelastic Materials for Active-Passive Vibration Damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122(2):169, avril 2000.

[13] M.A. Trindade : *Contrôle hybride actif-passif des vibrations des structures par des matériaux piezoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwichs multicouches intelligentes.* Thèse de doctorat, CNAM Paris, 2000.

[14] M.A. Trindade : Reduced-Order Finite Element Models of Viscoelastically Damped Beams Through Internal Variables Projection. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(4):501, août 2006.

[15] M. A. Biot : Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. *Phys. Rev.*, 97:1463–1469, Mar 1955.

[16] Y. Yiu : Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials. *In Proceedings of the 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, 1993.

[17] S. Germain : *Recherches sur la theorie des surfaces elastiques. - Paris, V. Courcier.* (Livre numérique Google), 1821.

[18] S.D. Poisson : *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques.* Paris, mémoirs of édition, 1829.

[19] G.R. Kirchhoff : Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, 1850.

[20] H. Aron : Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 78:136–174, 1874.

[21] A.E.H. Love : On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells. *Philo. Trans. Roy. Soc. London*, 179A, 1888.

[22] J.W.S. Lord Rayleigh : On the infinitesimal bending of surfaces of revolution. *London Math. Soc. Proc.*, 13, 1882.

[23] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry et E.M. Daya : Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Composite Structures*, 84(3): 282–292, juillet 2008.

[24] A.E.H. Love : *The mathematical theory of elasticity.* 4th editio édition, 1927.

[25] D.K. Rao : Frequency and loss factor of sandwich beams under various boundary conditions. *J Engng Sci*, 20(5):271–82, 1978.

[26] J.N. Reddy : A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4):745–752, décembre 1984.

[27] H. Murakami : Laminated Composite Plate Theory With Improved In-Plane Responses. *Journal of Applied Mechanics*, 53(3):661, septembre 1986.

[28] E. Carrera : On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82(7-8):541–554, mars 2004.

[29] S. Brischetto, E. Carrera et L. Demasi : Improved bending analysis of sandwich plates using a zig-zag function. *Composite Structures*, 89(3):408–415, juillet 2009.

[30] N.J. Pagano et H.J. Hatfield : Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites. *AIAA Journal*, 10(7):931–933, juillet 1972.

[31] N.J. Pagano : Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Material*, 4:20–36, 1970.

[32] N.J. Pagano : Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Material*, 3:398–411, 1969.

[33] S. Srinivas et A.K. Rao : Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 6(11):1463–1481, novembre 1970.

[34] E. Carrera : A class of two dimensional theories for multilayered plates analysis. *Atti Accademia delle Scienze di Torino. Mem Sci. Fis.*, 1920: :49–87, 1995.

[35] E. Carrera : Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis. *Composite Structures*, 43(1):57–70, septembre 1998.

[36] E. Carrera : Evaluation of layer-wise mixed theories for laminated plate analysis. *AIAAJ*, 36:830–9, 1998.

[37] E. Carrera : C0 Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(11):1797–1820, juin 1996.

[38] E. Carrera : Developments, ideas, and evaluations based upon Reissnerś mixed variational theorem in the modelling of multilayered plates and shells. *Appl Mech Rev*, 54:301–9, 2001.

[39] M. Ganapathi et D.P. Makhecha : Free vibration analysis of multi-layered composite laminates based on an accurate higher-order theory. *Composites Part B : Engineering*, 32(6):535–543, septembre 2001.

[40] M. Di Sciuva : A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, 118:279–295, 1984.

[41] M. di Sciuva : Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates : An evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*, 105(3):425–442, mars 1986.

[42] M. Di Sciuva : An improved shear coeur-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 54:589–596, 1987.

[43] E.M. Kerwin : Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7):952, juillet 1959.

[44] D. Ross et E.M. Kerwin : Damping of flexural vibration in plates by free and constrained viscoelastic layers. *Technical report, BBN Report*, 623, 1959.

[45] R.A. DiTaranto : Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 32(4):881, décembre 1965.

[46] D.J. Mead et S. Markus : The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10(2): 163–175, septembre 1969.

[47] D.J. Mead et S. Markus : Loss factors and resonant frequencies of encastré damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 12(1):99–112, mai 1970.

[48] Y.-Y. Yu : Damping of Flexural Vibrations of Sandwich Plates. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29:790–803, août 1962.

[49] M.-J. Yan et E.H. Dowell : Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4):1041, décembre 1972.

[50] Y.V.K. Sadasiva Rao et B.C. Nakra : Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration*, 34(3):309–326, juin 1974.

[51] J.F. He et B.A. Ma : Analysis of flexural vibration of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 126:37–47, 1988.

[52] V. Oravský, Š. Markuš et O. Šimková : A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever. *Journal of Sound and Vibration*, 33(3):335–352, avril 1974.

[53] Y. Koutsawa : *Modélisation et conception multi-échelles des matériaux : de la description atomique discrète aux modèles du continu . Application aux propriétés amortissantes des pare-brises.* Phd thesis, Université de Metz, 2008.

[54] Y.P. Lu, J.W. Killian et G.C. Everstine : Vibrations of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64(1):63–71, mai 1979.

[55] C.D. Johnson et D.A. Kienholz : Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers. *AIAA Journal*, mai 2012.

[56] E.M. Daya et M. Potier-Ferry : A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11:39–56, 2002.

[57] L. Duigou, E.M Daya et M. Potier-Ferry : Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1323–1335, mars 2003.

[58] B.-A. Ma et J.-F. He : A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 152(1):107–123, janvier 1992.

[59] M. Bilasse, E.M. Daya et L. Azrar : Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 329(23):4950–4969, novembre 2010.

[60] E. Reissner : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12:69–76, 1945.

[61] E. Mindlin : Influence of the rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18:1031–1036, 1951.

[62] M.L. Soni : Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock Vibr Bull*, 55(1):97–109, 1981.

[63] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya et M. Potier-Ferry : Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, 87(1-2):91–100, janvier 2009.

[64] P. Cupial et J. Niziol : Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1):99–114, mai 1995.

[65] M.G. Sainsbury et Q.J. Zhang : The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers and Structures*, 71(3):239–256, mai 1999.

[66] K.J. Bathe : Finite element procedures in engineering analysis. *NJ : Prentice-Hall,*, 1982.

[67] A.Y.T. Leung : Subspace iteration for complex symmetric eigenproblems. *Journal of Sound and Vibration*, 184(4):627–637, juillet 1995.

[68] C. Lanczos : An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 45(4):255, 1950.

[69] W.E. Arnoldi : The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Q. Appl. Math*, 9(17):17 – 29, 1951.

[70] H. Voss : An Arnoldi Method for Nonlinear Eigenvalue Problems. *BIT Numerical Mathematics*, 44(2):387–401, mai 2004.

[71] X. Chen, H.L. Chen et X.L. Hu : Damping Prediction of Sandwich Structures by Order-Reduction-Iteration Approach. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5):803–812, mai 1999.

[72] E.M. Daya et M. Potier-Ferry : A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79(5):533–541, février 2001.

[73] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E.M. Daya et M. Cherkaoui : A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I : The Diamant toolbox. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3-4):572–577, décembre 2008.

[74] M. Bilasse, I. Charpentier, E.M. Daya et Y. Koutsawa : A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II : Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(49-52):3999–4004, novembre 2009.

[75] F. Boumediene, J.M. Cadou, L. Duigou et E.M. Daya : A reduction model for eigensolutions of damped viscoelastic sandwich structures. *Mechanics Research Communications*, 57:74–81, avril 2014.

[76] J.-M. Berthelot : *Comportement mécanique et analyse des structures.* Masson édition, 1992.

[77] A.J.M. Ferreira, A.L. Araújo, A.M.A. Neves, J.D. Rodrigues, E. Carrera, M. Cinefra et C.M. Mota Soares : A finite element model using a unified formulation for the analysis of viscoelastic sandwich laminates. *Composites Part B : Engineering*, 45(1):1258–1264, février 2013.

[78] A.L. Araújo, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares et J. Herskovits : Damping optimization of viscoelastic laminated sandwich composite structures. *Struct Multidiscip optim*, 39:569–79, 2009.

[79] R.D. Adams et D.G.C. Bacon : Effect of Fibre Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP. *Journal of Composite Materials*, 7(4):402–428, octobre 1973.

[80] R.G. Ni et R.D. Adams : The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminated Composite Beams–Theoretical and Experimental Results. *Journal of Composite Materials*, 18(2):104–121, janvier 1984.

[81] R.G. Ni, D.X. Lin et R.D. Adams : The dynamic properties of carbon-glass fibre sandwich-laminated composites : theoretical, experimental and economic considerations. *Composites*, 15(4):297–304, octobre 1984.

[82] J.H. Yim, S.Y. Cho, Y.J. Seo et B.Z. Jang : A study on material damping of 0^o laminated composite sandwich cantilever beams with a viscoelastic layer. *Composite Structures*, 60(4):367–374, juin 2003.

[83] R.D. Adams et M.R. Maheri : Dynamic flexural properties of anisotropic fibrous composite beams. *Composites Science and Technology*, 50(4):497–514, janvier 1994.

[84] J.H. Yim : A damping analysis of composite laminates using the closed form expression for the basic damping of Poisson's ratio. *Composite Structures*, 46(4):405–411, décembre 1999.

[85] J.H. Yim et B.Z. Jang : An analytical method for prediction of the damping in symmetric balanced laminated composites. *Polymer Composites*, 20(2):192–199, avril 1999.

[86] J.H. Yim et J.W Gillespie Jr : Damping characteristics of 0º and 90º AS4/3501-6 unidirectional laminates including the transverse shear effect. *Composite Structures*, 50(3):217–225, novembre 2000.

[87] C.T. Sun, J.K. Wu et R.F. Gibson : Prediction of material damping of laminated polymer matrix composites. *Journal of Materials Science*, 22(3):1006–1012, mars 1987.

[88] Z. Hashin : Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media. *Journal of Applied Mechanics*, 32(3):630, septembre 1965.

[89] Z. Hashin : Complex moduli of viscoelastic composites-I. General theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 6(5):539–552, mai 1970.

[90] J.-M. Berthelot et Y. Sefrani : Damping analysis of unidirectional glass and Kevlar fibre composites. *Composites Science and Technology*, 64(9):1261–1278, juillet 2004.

[91] J.-M. Berthelot : Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method. *Composite Structures*, 74(2):186–201, juillet 2006.

[92] J. Li et Y. Narita : Analysis and optimal design for the damping property of laminated viscoelastic plates under general edge conditions. *Composites Part B : Engineering*, 45(1):972–980, février 2013.

[93] M. Meunier et R.A. Shenoi : Free vibration analysis of composite sandwich plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 213(7):715–727, juillet 1999.

[94] M. Meunier et R.A. Shenoi : Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 54(2-3):243–254, novembre 2001.

[95] R. Rikards : Finite element analysis of vibration and damping of laminated composites. *Composite Structures*, 24(3):193–204, janvier 1993.

[96] R. Rikards, A. Chate et E. Barkanov : Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers & Structures*, 47(6):1005–1015, juin 1993.

[97] S.H. Zhang et H.L. Chen : A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers. *Composite Structures*, 74(1):63–69, juillet 2006.

[98] N. Le Maoût, E. Verron et J. Bégué : Simultaneous geometrical and material optimal design of hybrid elastomer/composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(3):1153–1157, février 2011.

[99] H. Arvin, M. Sadighi et A.R. Ohadi : A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core. *Composite Structures*, 92(4):996–1008, 2010.

[100] J.S. Moita, A.L. Araújo, P. Martins, C.M. Mota Soares et C.A. Mota Soares : A finite element model for the analysis of viscoelastic sandwich structures. *Computers & Structures*, 89(21-22):1874–1881, novembre 2011.

[101] J.S. Moita, A.L. Araújo, P.G. Martins, C.M.M. Soares et C.A.M Soares : Analysis of Active-Passive Plate Structures Using a Simple and Efficient Finite Element Model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, février 2011.

[102] E. Carrera et B. Kröplin : Zigzag and interlaminar equilibria effets in large-deflection and postbuckling analysis of multlayered plates. *Mechanics of Composite Materials and Structures An International Journal*, 4(1):69–94, mai 1997.

[103] E. Carrera : A refined multilayered finite-element model applied to linear and non-linear analysis of sandwich plates. *Composites Science and Technology*, 58(10):1553–1569, octobre 1998.

[104] V.T. Nguyen : *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. Phd thesis, ENPC Paris, 2004.

[105] R. Brault : *Etude du comportement mécanique des matériaux composites par corrélation volumique : Application à l'analyse des effets du cisaillement transverse*. Phd thesis, INP Toulouse, 2013.

[106] G. Giunta : *Deterministic and stochastic hierarchical analysis of failure and vibration of composite plates and shells*. Phd thesis, Politecnico Di Torino.

[107] S. Brischetto : *Classical and mixed multilayered palte/shell models for multifield problems analysis*. Phd thesis, Politecnico Di Torino, 2009.

[108] N. Alam et N.T. Asnani : Vibration and damping analysis of multilayered rectangular plates with constrained viscoelastic layers. *Journal of Sound and Vibration*, 97(4):597–614, décembre 1984.

[109] A.L. Araújo, C.M. Mota Soares et C.A. Mota Soares : A viscoelastic sandwich finite element model for the analysis of passive, active and hybrid structures. *Application Composite Materials*, 17:529–42, 2010.

[110] I. Charpentier et M. Potier-Ferry : Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche Diamant. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(3):336–340, mars 2008.

[111] B. Cochelin : A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5):1181–1192, décembre 1994.

[112] A. Griewank et A. Walther : Evaluating Derivatives. Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation. 2008.

[113] A. Maher, F. Ramadan et M. Ferra : Modeling of vibration damping in composite structures. *Composite Structures*, 46(2):163–170, octobre 1999.

[114] K. Akoussan, H. Boudaoud, E.M. Daya et E. Carrera : Vibration Modeling of Multilayers Composite Structures with Viscoelastic Layers. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22:136–149, 2015.

[115] B.R. Sher et R.A.S. Moreira : Dimensionless analysis of constrained damping treatments. *Composite Structures*, 99:241–254, mai 2013.

Résumé

L'objectif de ce travail est de développer des outils numériques utilisables dans la détermination de manière exacte des propriétés modales des structures sandwichs viscoélastiques composites au vue de la conception des structures sandwichs viscoélastiques légères mais à haut pouvoir amortissant. Pour cela nous avons tout d'abord développé un outil générique implémenté en Matlab pour la détermination des propriétés modales en vibration libre des plaques sandwichs viscoélastiques dont les faces sont en stratifié de plusieurs couches orientées dans diverses directions. L'intérêt de cet outil, basé sur une formulation éléments finis, réside dans sa capacité à prendre en compte l'anisotropie des couches composites, la non linéarité matérielle de la couche viscoélastique traduit par diverses lois viscoélastiques dépendant de la fréquence ainsi que diverses conditions aux limites. La résolution du problème aux valeurs propres non linéaires complexes se fait par le couplage entre la technique d'homotopie, la méthode asymptotique numérique et la différentiation automatique. Ensuite pour permettre une étude continue des effets d'un paramètre de modélisation sur les propriétés modales des sandwichs viscoélastiques, nous avons proposé une méthode générique de résolution de problème résiduel non linéaire aux valeurs propres complexes possédant en plus de la dépendance en fréquence introduite par la couche viscoélastique du cœur, la dépendance du paramètre de modélisation qui décrit un intervalle d'étude bien spécifique. Cette résolution est basée sur la méthode asymptotique numérique, la différentiation automatique, la technique d'homotopie et la continuation et prend en compte diverses lois viscoélastiques. Nous proposons après cela, deux formulations distinctes pour étudier les effets, sur les propriétés amortissantes, de deux paramètres de modélisation qui sont importants dans la conception de sandwichs viscoélastiques à haut pouvoir amortissement. Le premier est l'orientation des fibres des composites dans la référence du sandwich et le second est l'épaisseur des couches qui lorsqu'elles sont bien définies permettent d'obtenir non seulement des structures sandwichs à haut pouvoir amortissant mais très légères. Les équations fortement non linéaires aux valeurs propres complexes obtenues dans ces formulations sont résolues par la nouvelle méthode de résolution d'équation résiduelle développée. Des comparaisons avec des résultats discrets sont faites ainsi que les temps de calcul pour montrer non seulement l'utilité de ces deux formulations mais également celle de la méthode de résolution d'équations résiduelles non linéaires aux valeurs propres complexes à double dépendance.

Mots-clés : sandwichs viscoélastiques, anisotropie, orthotropie, vibration libre, amortissement, fréquence propre, technique d'homotopie, méthode asymptotique numérique, différentiation automatique, éléments finis, problème résiduel non linéaire aux valeurs propres complexes à double dépendance, orientation des fibres et propriétés amortissantes, épaisseurs des couches et propriétés amortissantes

Abstract

The aim of this thesis is to develop numerical tools to determine accurately damping properties of composite sandwich structures for the design of lightweight viscoelastic sandwichs structures with high damping power. In a first step, we developed a generic tool implemented in Matlab for determining damping properties in free vibration of viscoelastic sandwich plates with laminate faces composed of multilayers. The advantage of this tool, which is based on a finite element formulation, is its ability to take into account the anisotropy of composite layers, the material non-linearity of the viscoelastic core induiced by the frequency-dependent viscoelastic laws and various boundary conditions . The nonlinear complex eigenvalues problem is solved by coupling homotopy technic, asymptotic numerical method and automatic differentiation. Then for the continuous study of a modeling parameter on damping properties of viscoelastic sandwichs, we proposed a generic method to solve the nonlinear residual complex eigenvalues problem which has in addition to the frequency dependence introduced by the viscoelastic core, a modeling parameter dependence that describes a very specific study interval. This resolution is based on asymptotic numerical method, automatic differentiation, homotopy technique and continuation technic and takes into account various viscoelastic laws. We propose after that, two separate formulations to study effects on the damping properties according to two modeling parameters which are important in the design of high viscoelastic sandwichs with high damping power. The first is laminate fibers orientation in the sandwich reference and the second is layers thickness which when they are well defined allow to obtain not only sandwich structures with high damping power but also very light. The highly nonlinear complex eigenvalues problems obtained in these formulations are solved by the new method of resolution of eigenvalue residual problem with two nonlinearity developed before. Comparisons with discrete results and computation time are made to show the usefulness of these two formulations and of the new method of solving nonlinear complex eigenvalues residual problem of two dependances.

Keywords : Viscoelastic sandwichs , anisotropic, orthotropic, free vibration, damping, natural frequency, homotopy technic, asymptotic numerical method, automatic differentiation, finite element, nonlinear complex eigenvalues residual problem with double dependency, fiber orientation and damping properties, layers thicknesses and damping properties.