



**HAL**  
open science

# Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave dans un plasma froid

Takashi Hattori

► **To cite this version:**

Takashi Hattori. Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave dans un plasma froid. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0380 . tel-01752236

**HAL Id: tel-01752236**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752236v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Faculté des Sciences et Technologies

École Doctorale IAEM

D.F.D. Mathématiques

## Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université de Lorraine**

en Mathématiques

par

**Takashi Hattori**

---

### Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave dans un plasma froid

---

Soutenue le 25 juin 2014 et devant le jury composé de :

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <b>Patrick CIARLET</b>     | Professeur, ENSTA, Paris (Rapporteur)                             |
| <b>Bruno DESPRES</b>       | Professeur, Université Paris 6 (Rapporteur)                       |
| <b>Pierre BERTRAND</b>     | Professeur émérite, Université de Lorraine (Examinateur)          |
| <b>Stéphanie SALMON</b>    | Professeur, Université de Reims (Examinateur)                     |
| <b>Jean-Rodolphe ROCHE</b> | Professeur, Université de Lorraine (Directeur de thèse)           |
| <b>Simon LABRUNIE</b>      | Maître de conférence, Université de Lorraine (Directeur de thèse) |



Institut Élie Cartan de Lorraine, Laboratoire de  
Mathématiques, BP 70239,  
54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY Cedex

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Résumé</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .  | 3         |
| 1.1.1 Espaces fonctionnels . . . . .   | 4         |
| 1.1.2 Espaces des traces . . . . .   | 5         |
| 1.1.3 Formules de Green . . . . .  | 7         |
| 1.1.4 Propriétés des opérateurs différentiels et des espaces de<br>Hilbert . . . . . | 7         |
| 1.2 Rappel sur les équations de Maxwell . . . . .                                    | 8         |
| <b>2 Onde électromagnétique : simulation Full-Wave</b>                               | <b>10</b> |
| 2.1 Contexte physique . . . . .  | 10        |
| 2.1.1 Réacteur à fusion nucléaire . . . . .  | 11        |
| 2.1.2 Confinement magnétique . . . . .   | 12        |
| 2.1.3 Chauffage et génération de courant . . . . .                                   | 12        |
| 2.2 Equation de propagation de l'onde hybride . . . . .                              | 14        |
| 2.2.1 L'approche Full-Wave . . . . .   | 14        |
| 2.2.2 L'équation des ondes en régime harmonique . . . . .                            | 15        |
| 2.2.3 Description diélectrique . . . . .   | 16        |
| 2.3 Conditions au bord . . . . .   | 21        |
| 2.3.1 Conditions aux limites naturelle . . . . .                                     | 22        |
| 2.3.2 Conditions aux limites essentielle . . . . .                                   | 23        |
| 2.4 Formulation variationnelle . . . . .   | 24        |
| 2.4.1 Conditions aux limites naturelle . . . . .                                     | 24        |
| 2.4.2 Conditions aux limites essentielle . . . . .                                   | 26        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Analyse mathématique</b>  | <b>28</b> |
| 3.1      | Un théorème d'existence et d'unicité . . . . .                                 | 28        |
| 3.2      | Application aux ondes électromagnétiques . . . . .                             | 31        |
| 3.3      | Propriétés de l'espace $\mathbf{X}_N(\mathbf{K}, \Omega)$ . . . . .            | 39        |
| 3.3.1    | Un résultat de compacité . . . . .   | 39        |
| 3.3.2    | Un résultat de régularité . . . . .  | 42        |
| <b>4</b> | <b>Réduction du problème en 2D</b>   | <b>46</b> |
| 4.1      | Le système cylindrique . . . . .   | 46        |
| 4.2      | Décomposition en série de Fourier . . . . .                                    | 47        |
| 4.3      | Réduction de dimension . . . . .   | 48        |
| <b>5</b> | <b>Discrétisation du problème</b>  | <b>50</b> |
| 5.1      | Éléments finis de Taylor-Hood . . . . .  | 50        |
| 5.2      | Formulation dans les espaces discrets . . . . .                                | 51        |
| 5.3      | Ecriture matricielle . . . . .   | 53        |
| 5.4      | Formule de quadrature . . . . .  | 55        |
| 5.5      | Structure des matrices du schéma . . . . .                                     | 58        |
| 5.5.1    | La matrice $\mathbf{A}_s$ . . . . .  | 58        |
| 5.5.2    | La matrice $\mathbf{B}$ . . . . .  | 62        |
| 5.5.3    | Le vecteur $\mathbf{f}$ (CL naturelle) . . . . .                               | 63        |
| 5.6      | Élimination de la condition essentielle . . . . .                              | 64        |
| 5.6.1    | La base locale . . . . .   | 64        |
| 5.6.2    | Discrétisation de l'espace avec conditions aux limites<br>essentiels . . . . . | 65        |
| 5.6.3    | Matrice de raideur interne . . . . .   | 66        |
| 5.7      | Analyse d'erreur . . . . .   | 68        |
| <b>6</b> | <b>Diagnostics physiques</b>   | <b>73</b> |
| 6.1      | Théorème de Poynting pour le modèle Full-Wave . . . . .                        | 73        |
| 6.1.1    | Théorème de Poynting en régime harmonique . . . . .                            | 74        |
| 6.1.2    | Application au modèle Full-Wave . . . . .                                      | 75        |
| 6.2      | Critère d'accessibilité de l'onde hybride . . . . .                            | 76        |
| 6.2.1    | Relation de dispersion . . . . .   | 76        |
| 6.2.2    | Critère d'accessibilité . . . . .  | 78        |
| 6.2.3    | Conclusion . . . . .   | 84        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>7</b> | <b>Simulation numérique</b>  | <b>87</b>  |
| 7.1      | Adimensionnement du code Full-Wave . . . . .                         | 87         |
| 7.1.1    | Problème modèle avec CL naturelle . . . . .                          | 87         |
| 7.1.2    | Théorème de Poynting adimensionné . . . . .                          | 89         |
| 7.2      | Résultats numériques préliminaires . . . . .                         | 90         |
| 7.2.1    | Introduction . . . . .   | 90         |
| 7.2.2    | Expérimentation numérique . . . . .                                  | 91         |
| 7.3      | Simulation Full-Wave : un premier profil de densité . . . . .        | 95         |
| 7.3.1    | Paramètres physiques . . . . .                                       | 95         |
| 7.3.2    | Valeurs numériques . . . . .   | 98         |
| 7.3.3    | Illustration numérique . . . . .                                     | 100        |
| 7.4      | Simulation Full-Wave : un deuxième profil de densité . . . . .       | 107        |
| 7.4.1    | Variation de la densité . . . . .                                    | 107        |
| 7.4.2    | Influence des paramètres sur l'accessibilité . . . . .               | 111        |
| <b>8</b> | <b>Résolution du système linéaire de type point-selle généralisé</b> | <b>114</b> |
| 8.1      | Classification du problème . . . . .                                 | 114        |
| 8.2      | La méthode GMRES . . . . .   | 115        |
| 8.3      | Préconditionnement . . . . .   | 117        |
| 8.4      | Implémentation du préconditionneur . . . . .                         | 127        |
| 8.4.1    | Préconditionnement de la matrice $\mathbf{A}_s$ . . . . .            | 127        |
| 8.4.2    | Préconditionnement du complément de Schur . . . . .                  | 127        |
| 8.5      | Résultats numériques pour la méthode GMRES préconditionnée           | 130        |
| 8.5.1    | Choix du préconditionneur . . . . .                                  | 130        |
| 8.5.2    | Résultat sur l'optimalité . . . . .                                  | 131        |
| 8.5.3    | Perspectives . . . . .   | 132        |
| <b>9</b> | <b>Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave</b>         | <b>133</b> |
| 9.1      | Le problème Full-Wave généralisé décomposé . . . . .                 | 133        |
| 9.1.1    | Les formulations variationnelles décomposées . . . . .               | 135        |
| 9.1.2    | Une formulation avec contrainte . . . . .                            | 139        |
| 9.1.3    | Discrétisation . . . . .   | 147        |
| 9.2      | Résultats numériques . . . . .                                       | 148        |
| 9.2.1    | Décomposition en 2 sous-domaines . . . . .                           | 149        |
| 9.2.2    | Décomposition en 5 sous-domaines . . . . .                           | 151        |
|          | <b>Conclusions</b>   | <b>161</b> |

# Résumé

De nos jours, les centrales nucléaires produisent de l'énergie par des réactions de fission (division d'un noyau atomique lourd en plusieurs noyaux atomiques légers et neutrons). Une alternative serait d'utiliser plutôt la réaction de fusion de noyaux légers de deutérium et de tritium, isotopes de l'hydrogène. Toutefois, cette technique reste encore du domaine de la recherche en physique des plasmas. Les expériences effectuées dans ce domaine ont révélé que les réacteurs à configuration magnétique toroïdale, dite tokamak, sont les plus efficaces. Un mélange gazeux d'isotopes de l'hydrogène appelé plasma est confiné grâce à un champ magnétique produit par des bobines. Ce plasma doit être chauffé à une température très élevée afin que les réactions de fusion aboutissent. De même, un courant intense doit être maintenu dans le plasma afin d'obtenir une configuration magnétique qui permet de le confiner. Une des méthodes les plus attrayantes parmi les techniques connues pour générer du courant est basée sur l'injection d'ondes électromagnétiques dans le plasma à la fréquence proche de la résonance hybride. Cette méthode offre la possibilité de contrôler le profil de densité dans le plasma. Une analyse de type Full-Wave permet alors de modéliser la propagation et l'absorption de l'onde hybride à partir des équations de Maxwell.

Le but de cette thèse est de développer une méthode numérique pour cette simulation Full-Wave. Le chapitre 2 présente les équations de propagation d'ondes en mettant en évidence les caractères physiques du plasma. Une approche variationnelle de type mixte augmentée est développée et une analyse mathématique de cette dernière est effectuée dans le chapitre 3. Dans le contexte de la géométrie d'un tokamak, le problème Full-Wave dépendant de trois paramètres peut être réduit en une série de problèmes à deux variables à l'aide de la transformation de Fourier, ce sera l'objet du chapitre 4. Dans le chapitre 5, la formulation variationnelle obtenue à partir du problème mode par mode est discrétisée en utilisant des éléments finis nodaux de type

Taylor-Hood. Le chapitre 6 concerne les méthodes de résolution du système linéaire après discrétisation. A l'aide de différents diagnostics physiques présentés dans le chapitre 7, des résultats de la simulation Full-Wave obtenues à partir d'un code MATLAB sont présentées dans le chapitre 8. Enfin, dans le but de développer une version parallèle de la simulation, le chapitre 9 est consacré à une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement associé au système Full-Wave.



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  que l'on suppose ouvert borné connexe à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On note  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : \text{un vecteur et ses composantes dans } \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} : \text{vecteur unitaire sortant normal à } \Gamma,$$

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} : \text{composante normale à } \Gamma \text{ de } \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}_\top = \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) : \text{composante tangentielle à } \Gamma \text{ de } \mathbf{u}.$$

#### Opérateurs différentiels

Pour simplifier, on notera les dérivées partielles selon  $x_i$  :  $\partial_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ .

On note les opérateurs différentiels, exprimés en coordonnées cartésiennes, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{gradient de } v & : \mathbf{grad} v = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 \\ \partial_2 v_2 \\ \partial_3 v_3 \end{pmatrix}, \\ \text{divergence de } \mathbf{v} & : \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3, \\ \text{rotationnel de } \mathbf{v} & : \mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 1.1.1 Espaces fonctionnels

On va rappeler les différents espaces de Hilbert que nous utiliserons principalement par la suite ainsi que leur norme associée.

#### Espaces de champs vectoriels

Soit

$$\mathcal{D}(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))^3 \quad (1.1)$$

l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ .

**Définition 1.1.** *L'espace  $(L^2(\Omega))^3 = \mathbf{L}^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $\mathbf{u}$  sur  $\Omega$ , mesurables et telle que la quantité  $(\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\Omega)^{1/2}$  est finie.*

*L'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel  $(\mathbf{u} | \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\Omega$ .*

On note  $\|\mathbf{u}\|_0^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = (\mathbf{u} | \mathbf{u})$ .

On introduit alors les espaces suivants, qui sont aussi des espaces de Hilbert pour les produits scalaires associés :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) & : = \{v \in L^2(\Omega) | \mathbf{grad} v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega)^3, \\ \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) & : = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) | \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) & : = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) | \mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

munis respectivement des produits scalaires

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^1} &:= (u \mid v) + (\mathbf{grad} u \mid \mathbf{grad} v), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div})} &:= (\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) + (\text{div} \mathbf{u} \mid \text{div} \mathbf{v}), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{rot})} &:= (\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u} \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}).\end{aligned}$$

### 1.1.2 Espaces des traces

**Définition 1.2.** *L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est constitué des restrictions sur  $\overline{\Omega}$ , des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ .*

**Définition 1.3.** *(trace)*

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction régulière définie sur  $\overline{\Omega}$ . On note l'application trace  $\gamma : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}|_\Gamma$ .

**Proposition 1.4.** *L'application  $\gamma$  définie sur  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  sur  $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma(\mathbf{H}^1(\Omega))$ , qui est surjective.*

**Définition 1.5.** *(trace normale)*

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction régulière définie sur  $\overline{\Omega}$ . On note l'application trace normale  $\gamma_n : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$ .

**Proposition 1.6.** *L'application  $\gamma_n$  définie sur  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  sur  $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$  (l'espace dual de  $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ ), qui est surjective.*

**Définition 1.7.** *(trace tangentielle et composante tangentielle)*

Soit  $\mathbf{f}$  une fonction régulière définie sur  $\overline{\Omega}$ . On note les applications trace tangentielle  $\gamma_\top : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f} \times \mathbf{n}|_\Gamma$  et trace composante tangentielle  $\pi_\top : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_\top = \mathbf{n} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{n})|_\Gamma$ .

**Proposition 1.8.** *Les applications  $\gamma_\top$  et  $\pi_\top$  définies sur  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  se prolongent par continuité en applications linéaires continues de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  vers  $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . On note respectivement  $\mathbf{H}_\perp^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\partial\Omega)$  les espaces d'arrivée.*

On renvoie aux articles [16][17] pour les caractérisations de ces espaces.

**Définition 1.9.** On appelle  $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega)$  les duaux des espaces  $\mathbf{H}_\perp^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\partial\Omega)$  par rapport à l'espace pivot  $\mathbf{L}_t^2(\partial\Omega) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega) | \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ .

**Définition 1.10.** On définit l'opérateur divergence tangentielle, noté  $\text{div}_\top$ , de  $\mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega)$  vers  $H^{-3/2}(\partial\Omega)$  satisfaisant

$$\ll \text{div}_\top \boldsymbol{\lambda}, \psi \gg_{\partial\Omega} = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_\top \psi^* \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \psi \in H^{3/2}(\partial\Omega). \quad (1.2)$$

où  $\ll \cdot, \cdot \gg_{\partial\Omega} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-3/2}, H^{3/2}}$ ,  $\psi^* \in H^2(\Omega)$  un relèvement de  $\psi$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{grad}_\top$  est le gradient tangentielle défini par  $\mathbf{grad}_\top v = \pi_\top(\mathbf{grad} v)$ .

On définit le rotationnel vectoriel tangentielle par  $\mathbf{rot}_\top u = \gamma_\top(\mathbf{grad} u)$ . L'opérateur rotationnel scalaire tangentielle de  $\mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\partial\Omega)$  vers  $H^{-3/2}(\partial\Omega)$  est défini par

$$\ll \mathbf{rot}_\top \boldsymbol{\lambda}, \psi \gg_{\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{rot}_\top \psi^* \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \psi \in H^{3/2}(\partial\Omega). \quad (1.3)$$

On a alors les théorèmes suivant prouvés dans [16] :

**Théorème 1.11.** Soit  $\mathbf{Y}_{\partial\Omega} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega) | \text{div}_\top \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)\}$ , l'application trace tangentielle  $\gamma_\top$  est continue de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  vers  $\mathbf{Y}_{\partial\Omega}$  et elle est surjective.

**Théorème 1.12.** Soit  $\mathbf{U}_{\partial\Omega} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\perp^{-1/2}(\partial\Omega) | \mathbf{rot}_\top \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)\}$ , l'application trace composante tangentielle  $\pi_\top$  est continue de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  vers  $\mathbf{U}_{\partial\Omega}$  et elle est surjective.

On introduit les fermetures de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans les espaces  $H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}, \\ \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) &= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) &= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}. \end{aligned}$$

L'existence des traces permet d'identifier ces espaces.

**Théorème 1.13.**

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1 | v|_\Gamma = 0\}, \\ \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) | \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) | \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}. \end{aligned}$$

### 1.1.3 Formules de Green

Les preuves des formules qui suivent sont dans [35].

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} v + (\operatorname{div} \mathbf{u})v] d\Omega = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{\Gamma} \quad (1.4)$$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}] d\Omega = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} \quad (1.5)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}$ .

Lorsque les deux fonctions sont dans  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ , il existe une formule d'intégration par parties, semblable à la formule (1.5), qui utilise la dualité entre la trace tangentielle et la composante tangentielle démontrée dans [16] :

**Proposition 1.14.** *Les espaces  $\Upsilon_{\partial\Omega}$  et  $\mathbf{U}_{\partial\Omega}$  sont duaux. Et on a*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}] d\Omega = \langle \mathbf{u}_{\top}, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{U}_{\partial\Omega}, \Upsilon_{\partial\Omega}} \quad (1.6)$$

### 1.1.4 Propriétés des opérateurs différentiels et des espaces de Hilbert

**Définition 1.15.** - *On dit que l'inclusion d'un espace  $A$  dans  $B$  est continue si*

$$\|v\|_B \leq C \|v\|_A \quad \forall v \in A.$$

- *On dit que l'inclusion de  $A$  dans  $B$  est compacte si toute suite bornée de  $A$  admet une sous-suite convergente dans  $B$ .*

**Théorème 1.16.** *(de Rellich)*  
L'injection  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  est compacte.

*Démonstration.* Voir [35]. □

**Proposition 1.17.** *(inégalité de Poincaré)*  
Il existe une constante  $C_p$  dépendant de  $\Omega$  telle que

$$\|v\|_0 \leq C_p \|\mathbf{grad} v\|_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

On définit l'espace suivant

$$\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$$

muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}} := (\mathbf{u} | \mathbf{v}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u} | \mathbf{rot} \mathbf{v}) + (\mathbf{div} \mathbf{u} | \mathbf{div} \mathbf{v}).$$

**Remarque 1.18.** *L'espace  $\mathbf{X}(\Omega)$  est généralement noté  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbf{div}; \Omega)$ .*

On note les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_N(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega) | \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\} \\ &= \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega). \\ \mathbf{X}_T(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega) | \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{div}, \Omega). \end{aligned}$$

### Propriétés de l'espace $\mathbf{X}(\Omega)$

**Proposition 1.19.** *L'espace  $\mathbf{X}_N(\Omega) \cap \mathbf{X}_T(\Omega)$  coïncide avec l'espace  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Voir [4]. □

Les théorèmes qui suivent sont démontrés dans [4].

**Théorème 1.20.** *L'inclusion  $\mathbf{X}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$  n'est pas compacte.*

**Théorème 1.21.** *L'inclusion de  $\mathbf{X}_N(\Omega)$  ainsi que  $\mathbf{X}_T(\Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est compacte.*

**Théorème 1.22.** *Si  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  ou convexe alors  $\mathbf{X}_N(\Omega)$  ainsi que  $\mathbf{X}_T(\Omega)$  s'injectent continuellement dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .*

## 1.2 Rappel sur les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent les phénomènes électromagnétiques. Elles relient les champs électriques  $\mathcal{E}$  et magnétiques  $\mathcal{H}$  ainsi que les champs

d'induction électrique  $\mathcal{D}$  et d'induction magnétique  $\mathcal{B}$  à la densité de courant  $\mathcal{J}$  et à la densité de charge électrique  $\varrho$  sous la forme suivante :

$$\operatorname{div}\mathcal{D} = \varrho \quad (\text{loi de Gauss électrique}), \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div}\mathcal{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}), \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot}\mathcal{E} = -\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} \quad (\text{loi de Faraday}), \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot}\mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} \quad (\text{loi d'Ampère}) \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{B}, \mathcal{J} : (\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3$ .

On a la relation de conservation de charge :

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathcal{J} = 0. \quad (1.12)$$

Lorsque le milieu est un conducteur imparfait, il existe un tenseur  $\underline{\sigma}$  qui relie le champ électrique  $\mathcal{E}$  et la densité de courant  $\mathcal{J}$  par la loi d'Ohm :

$$\mathcal{J} = \underline{\sigma}\mathcal{E}. \quad (1.13)$$

# Chapitre 2

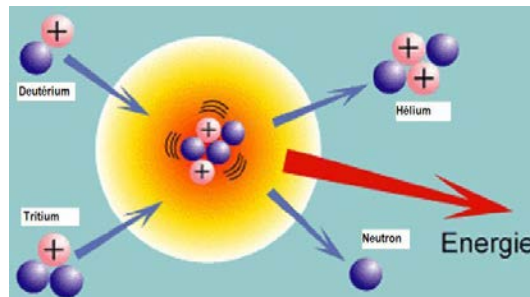
## Onde électromagnétique : simulation Full-Wave

L'objectif de ce chapitre est d'une part de présenter la problématique physique en expliquant le fonctionnement d'un réacteur à fusion nucléaire ainsi que les différents techniques connues pour produire de l'énergie [19][18]. D'autre part, on s'intéresse à une technique en particulier : la simulation Full-Wave [52][57]. Sur la base de travaux déjà effectués [46][36], on étudie un système d'équations de propagation d'onde obtenu à partir des équations de Maxwell en régime harmonique [5][44]. On propose alors une approche variationnelle de type mixte augmentée [21].

### 2.1 Contexte physique

Une possibilité de produire de l'énergie nucléaire sont les réactions de fusion de noyaux légers de deutérium et tritium.

Mais, cette technique reste encore du domaine de la recherche fondamentale

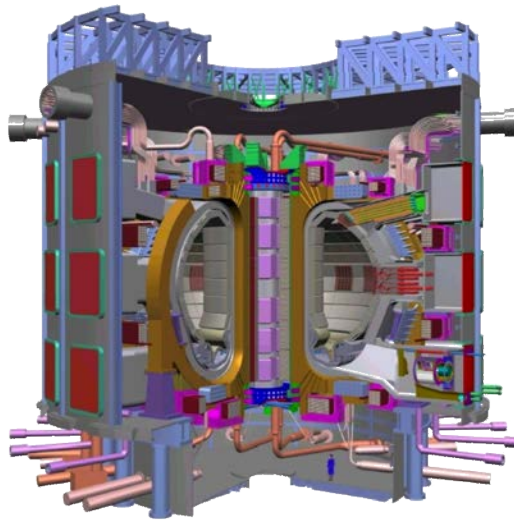




en physique des plasmas et nécessite la mise en œuvre de machines complexes.

### 2.1.1 Réacteur à fusion nucléaire

Un réacteur à fusion est un réacteur thermonucléaire à l'intérieur duquel se trouve le mélange de deutérium et tritium sous forme de gaz ionisé appelé généralement plasma. L'énergie thermique produite par la fusion serait alors transformée en électricité. Parmi les concepts possibles, c'est le tokamak, une configuration magnétique toroïdale, qui s'est révélé le plus prometteur. Un tokamak est constitué d'une chambre à vide de forme torique, entourée de bobines supraconductrices et contenant un anneau de plasma. Il en existe quelques uns dans le monde comme ToreSupra, Jet, etc... Actuellement un prototype à grande échelle de réacteur nucléaire à fusion est en cours de construction en France dans le cadre d'une importante collaboration scientifique internationale. Ce projet se nomme **ITER** (*International Thermonuclear Experimental Reactor*)<sup>1</sup> en référence au terme "chemin" du latin. Les clés de la réussite d'une machine à fusion sont le confinement et le chauffage du plasma.



---

1. pour plus d'information [www.iter.gov.fr](http://www.iter.gov.fr)

### 2.1.2 Confinement magnétique

Dans un tokamak, le confinement du plasma est assuré par la superposition d'un champ magnétique toroïdal  $\mathbf{B}_\phi$  (en bleu sur la figure 2.1) engendré par des bobinages extérieurs et d'un champ poloïdal  $\mathbf{B}_\theta$  (en rouge sur la figure 2.1) induit par un courant circulant toroïdalement dans le plasma. Les

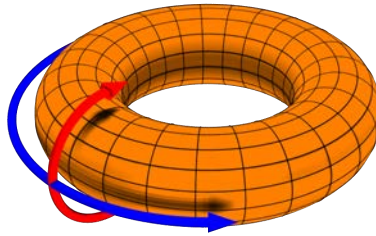
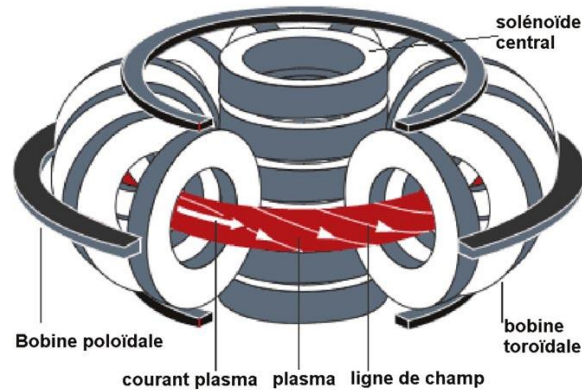


FIGURE 2.1 – champ toroïdal et poloïdal

particules chargées décrivent une trajectoire en hélice en suivant les lignes de champ magnétique, ce qui permet de compenser la pression du plasma (qui cherche à s'étendre comme un gaz) par la pression magnétique. Cependant, un tel équilibre peut devenir instable dans le sens où une petite perturbation peut conduire dans certains cas à la perte complète du confinement. La stabilité de l'équilibre magnétique doit donc être assurée. Il existe alors un régime de confinement amélioré, appelé mode H (pour "High confinement"), qui sera adopté dans les machines des prochaines générations (notamment ITER). Sa découverte dans les années 1980 a été capitale pour la fusion thermonucléaire. Ce mode permet d'établir un seuil de puissance à partir duquel le confinement est considérablement amélioré.

### 2.1.3 Chauffage et génération de courant

Pour que le bilan énergétique du réacteur soit rentable, il faut que l'énergie produite par les réactions de fusion compense l'énergie utilisée pour le fonctionnement du réacteur. Le critère de Lawson [41] permet de quantifier cette condition : la puissance perdue  $P_p$  dans le processus doit être inférieure



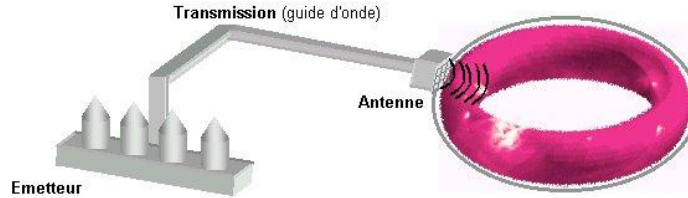
à la puissance  $P_r$  créée par celui-ci. Plus explicitement, pour un tokamak de type ITER, on a la relation [18]

$$nTt_E \geq 10^{21} \text{ keV m}^{-3}\text{s}^{-1}$$

avec  $n$  la densité,  $T$  la température du plasma et  $t_E$  le temps de confinement de l'énergie. Dans un tokamak, les densités de plasma réalisables sont de l'ordre  $10^{20}$  par mètre cube. Ainsi, pour une température optimale  $T$  d'environ 10 keV (correspondant à plusieurs centaines de millions de degrés), il est donc nécessaire que le temps de confinement  $t_E$  dépasse la seconde, performance qui n'a encore jamais été atteinte (le temps maximum étant de 0,8 s pour les machines actuelles). Le courant nécessaire au confinement du plasma permet un chauffage naturel par effet Joule. Cependant, cet effet ne permet d'atteindre que des températures limitées (de l'ordre de 2 keV). Pour atteindre les températures élevées requises, on a recours à des systèmes de chauffages additionnels que l'on classe en deux grandes familles : le chauffage par injection de particules neutres et le chauffage par onde radio-fréquence. Un autre problème fondamental pour le confinement concerne le maintien du courant plasma (20 millions d'ampère dans ITER) pour assurer la présence du champ magnétique poloïdal. On a également recours à l'interaction d'onde radio-fréquence avec le plasma. Dans ce travail, on s'intéresse à ce processus qui consiste à envoyer dans le plasma une onde à une fréquence bien choisie de manière à être en résonance avec les particules et à leur communiquer de l'énergie. Dans un réacteur, l'onde générée par un émetteur se propage jusqu'au tokamak par des lignes de transmission (guides d'onde) et se couple au plasma par l'intermédiaire d'une antenne placée à l'intérieur de la chambre

à vide.

Il existe plusieurs types de chauffage classés suivant la gamme de fréquence



de l'onde :

- le *chauffage à la fréquence cyclotronique ionique* qui est de l'ordre de quelques dizaines de mégahertz (MHz),
- le *chauffage à la fréquence électronique* qui est de l'ordre des centaines de gigahertz.

Chaque chauffage possède ses applications propres et fournit différents résultats suivant la manière dont il est utilisé. Dans le cas de l'entraînement du courant plasma, on va considérer un type particulier d'onde radio-fréquence : l'onde dite "hybride basse".

## 2.2 Equation de propagation de l'onde hybride

### 2.2.1 L'approche Full-Wave

On étudie désormais le modèle où la fréquence de l'onde  $\omega$  avoisine la fréquence de résonance hybride  $\omega_{LH}$  calculée au centre du plasma [19]. Cette onde, dite lente aux alentours de quelques GHz, correspond à des longueurs d'onde de l'ordre du centimètre, ce qui est faible par rapport aux dimensions du plasma. L'hypothèse de base tout au long de notre travail sera alors

$$\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce} \quad (2.1)$$

avec  $\omega_{ce}$  la fréquence cyclotronique électronique et  $\omega_{ci}$  la fréquence cyclotronique ionique [12]. Les expressions de ces fréquences sont données au chapitre 7. Dans ces conditions, la dynamique de l'onde peut être décrite dans l'approximation des plasmas froids. Ce modèle de plasma suppose que les particules du milieu soient immobiles en l'absence de perturbation et que,

sous l'action du champ électromagnétique de l'onde, elles oscillent autour de leur position d'équilibre fixe dans l'espace. La méthode Full-Wave décrit la propagation d'ondes hybrides dans un plasma froid magnétisé à partir des équations de Maxwell.

### 2.2.2 L'équation des ondes en régime harmonique

On considère un modèle simplifié du tokamak : le domaine  $\Omega$  est désormais supposé axisymétrique. On note la présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  extérieur invariant en temps qui confine le plasma contenu dans  $\Omega$ . Ce plasma est supposé non collisionnel et dans un tel milieu, on a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. En régime harmonique, on suppose que les champs électriques

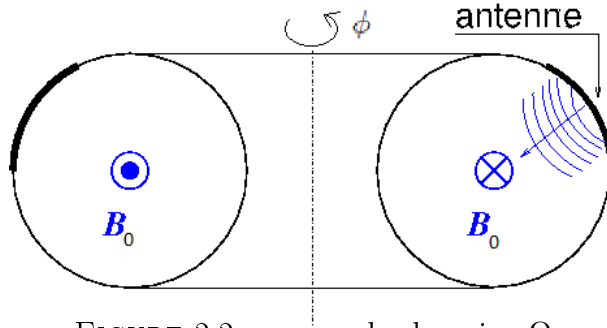


FIGURE 2.2 – coupe du domaine  $\Omega$ .

et magnétiques ont une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ , c'est-à-dire qu'ils s'écrivent sous la forme suivante

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$$

où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega > 0$  la pulsation à laquelle se déroule le phénomène en rad/s. On rappelle que  $\omega = 2\pi f$  avec  $f$  la fréquence en hertz (Hz). De la même manière, on note

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad \text{et} \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

La propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma anisotrope est décrite par les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  solutions des équations de Maxwell (1.8)-(1.11) dans le vide exprimées en régime harmonique :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad (2.6)$$

$$\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \omega \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{J}. \quad (2.7)$$

On élimine le champ  $\mathbf{B}$  à l'aide des équations (2.7) et (2.6),

$$\operatorname{rot} (2.6) \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \omega \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

$$\omega \mu_0 (2.7) \Rightarrow \omega \operatorname{rot} \mathbf{B} - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{J}.$$

On obtient alors :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.8)$$

avec  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Finalement, en soustrayant  $\omega \mu_0 \mathbf{J}$  aux deux membres de (2.8) et en appliquant la loi d'Ohm (1.13), on a

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \underline{\mathbf{I}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.9)$$

On peut trouver une expression explicite de la matrice de la conductivité  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ , c'est le but de la section suivante.

### 2.2.3 Description diélectrique

Dans ce paragraphe, on propose de trouver l'expression du tenseur diélectrique

$$\underline{\mathbf{I}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}).$$

Dans un plasma froid, en présence d'un champ électrique  $\mathcal{E}_{tot}$  et magnétique  $\mathcal{B}_{tot}$ , les particules (de masse  $m$ , de charge  $q$  et animées d'une vitesse  $\mathbf{u}$ ) obéissent à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (cette

équation peut être obtenue à partir de l'équation de Vlasov, pour plus de détails on pourra consulter [53]) :

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + m(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - q(\mathcal{E}_{tot} + \mathbf{u} \times \mathcal{B}_{tot}) + m\nu_c \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

où  $\nu_c$  représente la fréquence de collision électron-ion. Dans le plasma, on considère deux types de particules : les électrons et les ions. Dans cette équation  $m$  et  $q$  correspondent aussi bien aux ions qu'aux électrons.

On suppose qu'avant l'arrivée de l'onde électromagnétique ( $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$ ) dans le plasma, celui-ci était dans un état d'équilibre. Et lorsque l'onde entre dans le plasma, elle agit comme une petite perturbation locale. Ainsi on peut linéariser l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on pose

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$$

avec  $\mathbf{u}_0 = 0$  car les particules sont immobiles avant l'arrivée de l'onde. Les champs s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tot}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathcal{B}_{tot}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{E}_0$  représente le champ électrique régnant dans le plasma avant l'arrivée de l'onde et  $\mathbf{B}_0$  le champ magnétique de confinement. A l'ordre 0 par rapport à la perturbation, l'équation (2.10) donne l'équilibre stationnaire du tokamak et on obtient  $\mathbf{E}_0 = 0$ . Au premier ordre, l'équation (2.10) devient

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) - q(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})) + m\nu_c(\mathbf{r}) \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Ensuite, comme la densité de charge  $\rho := qn$  avec  $n$  la densité des particules et la densité de courant  $\mathcal{J} := \rho \mathbf{u}$ , en multipliant par  $\frac{\rho}{m}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) - \frac{q}{m} (\rho \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})) + \nu_c \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

En régime harmonique, on obtient

$$i(\omega + i\nu_c) \mathcal{J} + \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E} + \text{sign}(q) \omega_c \mathcal{J} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}$  et suivant le cas électrique ou ionique, on a

$$\begin{aligned}\omega_p &:= \sqrt{\frac{nq^2}{\varepsilon_0 m}} \quad \text{la fréquence plasma,} \\ \omega_c &:= \frac{|q|}{m} |\mathbf{B}_0| \quad \text{la fréquence cyclotronique.}\end{aligned}$$

L'équation pour les électrons est

$$i(\omega + i\nu_c)\mathbf{J}_e + \varepsilon_0\omega_{pe}^2\mathbf{E} - \omega_{ce}\mathbf{J}_e \times \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

En faisant le produit vectoriel de (2.14) avec  $\mathbf{b}$  par la droite, on a

$$i(\omega + i\nu_c)\mathbf{J}_e \times \mathbf{b} + \varepsilon_0\omega_{pe}^2\mathbf{E} \times \mathbf{b} - \omega_{ce}(\mathbf{J}_e \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

On se place alors dans le repère suivant introduit dans [53].

**Définition 2.1.** *On appelle repère local de Stix, un système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  tel que le vecteur  $\mathbf{e}_3$  associé à  $x_3$  est parallèle au champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . On note alors*

$$\mathbf{v}_\perp = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\parallel = v_3\mathbf{e}_3.$$

*Dans ce référentiel, les vecteurs  $\mathbf{v}$  peuvent être exprimés à l'aide de leurs composantes parallèles et perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$  :*

$$\begin{aligned}v_1 &= v_\perp \cos \phi \\ v_2 &= v_\perp \sin \phi \\ v_3 &= v_\parallel\end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $v_\perp = |\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  et  $\phi$  représente l'azimut par rapport à l'axe  $x_1 > 0$ .

On a alors  $\mathbf{J}_\perp := \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})$  et donc l'équation (2.15) devient

$$i(\omega + i\nu_c)\mathbf{J}_e \times \mathbf{b} + \varepsilon_0\omega_{pe}^2\mathbf{E} \times \mathbf{b} + \omega_{ce}\mathbf{J}_{e\perp} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

Puis en faisant de nouveau le produit vectoriel de (2.17) avec  $\mathbf{b}$  mais cette fois-ci par la gauche, on a

$$i(\omega + i\nu_c)\mathbf{J}_{e\perp} + \varepsilon_0\omega_{pe}^2\mathbf{E}_\perp - \omega_{ce}\mathbf{J}_e \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$



ce qui nous permet d'éliminer  $\mathbf{J}_e \times \mathbf{b}$  dans (2.17) :

$$((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ce}^2) \mathbf{J}_{e\perp} = \imath(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_\perp + \varepsilon_0\omega_{pe}^2\omega_{ce} \mathbf{E} \times \mathbf{b}. \quad (2.19)$$

L'équation en  $\mathbf{J}_{e\parallel} := (\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$  s'obtient en appliquant le produit scalaire de (2.14) avec  $\mathbf{b}$  :

$$\mathbf{J}_{e\parallel} = \frac{\imath\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{\omega + \nu_c} \mathbf{E}_\parallel. \quad (2.20)$$

La densité de courant des électrons est donné par  $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_{e\parallel} + \mathbf{J}_{e\perp}$  c'est-à-dire

$$\mathbf{J}_e = \frac{\imath\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{\omega + \nu_c} \mathbf{E}_\parallel + \frac{\imath(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ce}^2} \mathbf{E}_\perp + \frac{\varepsilon_0\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ce}^2} \mathbf{E} \times \mathbf{b}. \quad (2.21)$$

Pour les ions, de la même manière on a

$$\mathbf{J}_i = \frac{\imath\varepsilon_0\omega_{pi}^2}{\omega + \nu_c} \mathbf{E}_\parallel + \frac{\imath(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{pi}^2}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ci}^2} \mathbf{E}_\perp - \frac{\varepsilon_0\omega_{pi}^2\omega_{ci}}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ci}^2} \mathbf{E} \times \mathbf{b}. \quad (2.22)$$

Ce qui nous donne le courant total intérieur,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \imath\varepsilon_0\omega \underbrace{\frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \nu_c)}}_{=: \beta} \mathbf{E}_\parallel + \imath\varepsilon_0\omega \underbrace{\frac{\omega + \nu_c}{\omega} \left( \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ci}^2} \right)}_{=: \gamma} \mathbf{E}_\perp + \\ &+ \varepsilon_0\omega \underbrace{\left( \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{\omega((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ce}^2)} - \frac{\omega_{pi}^2\omega_{ci}}{\omega((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{ci}^2)} \right)}_{=: \delta} \mathbf{E} \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$= \imath\varepsilon_0\omega\gamma \mathbf{E} + \imath\varepsilon_0\omega(\beta - \gamma)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} + \varepsilon_0\omega\delta \mathbf{E} \times \mathbf{b}, \quad (2.24)$$

avec  $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel$ .

La loi d'Ohm  $\mathbf{J} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{E}$  nous permet alors de déterminer la conductivité  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ . Or dans la base orthonormale locale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$ , on a  $\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_b\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = E_b$ ,  $\mathbf{E} \times \mathbf{b} = E_2\mathbf{e}_1 - E_1\mathbf{e}_2$ , ce qui nous donne

$$\frac{\imath}{\varepsilon_0\omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\gamma & \imath\delta & 0 \\ -\imath\delta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

et on pose

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{I}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & i\delta & 0 \\ -i\delta & 1 - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

On a donc l'expression du tenseur diélectrique

**Propriété 2.2.** *Dans le repère de Stix, on a*

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} S(\mathbf{r}) & -iD(\mathbf{r}) & 0 \\ iD(\mathbf{r}) & S(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & P(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

où les fonctions  $S$ ,  $D$  et  $P$  sont données par

$$S(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\alpha(\mathbf{r})}{\omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{r})}{\alpha^2(\mathbf{r}) - \omega_{cs}^2(\mathbf{r})}, \quad (2.28)$$

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \left( \frac{-\omega_{ce}(\mathbf{r})\omega_{pe}^2(\mathbf{r})}{\alpha^2(\mathbf{r}) - \omega_{ce}^2(\mathbf{r})} + \sum_{ions} \frac{\omega_{ci}(\mathbf{r})\omega_{pi}^2(\mathbf{r})}{\alpha^2(\mathbf{r}) - \omega_{ci}^2(\mathbf{r})} \right), \quad (2.29)$$

$$P(\mathbf{r}) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{r})}{\omega\alpha(\mathbf{r})}, \quad (2.30)$$

avec  $\alpha(\mathbf{r}) = \omega + i\nu_c(\mathbf{r})$ .

**Remarque 2.3.** *Si  $\nu_c \neq 0$  alors  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})$  n'est pas hermitien.*

Par ailleurs, dans un plasma, il existe des mécanismes qui peuvent absorber une partie de l'énergie de l'onde électromagnétique introduite dans le milieu. Ce phénomène est appelé absorption (ou dissipation) et résulte principalement de deux mécanismes : l'effet collisionnel que l'on a présenté précédemment et l'amortissement sans collision appelé plus couramment l'amortissement Landau [40]. Ce dernier n'apparaît pas dans le tenseur diélectrique

(2.27) puisque l'on est parti d'un modèle fluide. D'après [47], il suffit d'ajouter un terme à  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})$  et on a le tenseur diélectrique au sens phénoménologique :

$$\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_e(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où  $\gamma_e$  correspond au taux d'amortissement Landau dans le plasma. Son expression est [40]

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{\pi} \omega^2 n q^2}{\sqrt{2} m v_{th}^3 k_{\parallel}^3} \exp\left(-\frac{\omega}{2 v_{th}^2 k_{\parallel}^2}\right) \quad (2.32)$$

où  $v_{th}$  est la vitesse d'agitation thermique des particules et  $k_{\parallel}$  la composante du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  parallèle à  $\mathbf{B}_0$ .

Pour simplifier les notations, on écrit dorénavant  $P_L(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}) + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \gamma_e(\mathbf{r})$ .

L'équation (2.9) s'écrit alors

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.33)$$

## 2.3 Conditions au bord

On suppose que le domaine  $\Omega$  est à bord  $\Gamma$  métallique et que  $\Gamma$  est séparé en deux parties  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_C$  de mesure non nulle. On considère que l'antenne est modélisée par  $\Gamma_A$  et on traitera indépendamment les conditions de type Dirichlet et de type Neumann sur l'antenne. La condition de type Fourier ou Silver-Müller harmonique est envisageable mais ne sera pas abordée. Sur l'autre partie du bord que l'on note  $\Gamma_C = \Gamma \setminus \Gamma_A$ , le champ électrique vérifie la condition du conducteur parfait :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C. \quad (2.34)$$

### 2.3.1 Conditions aux limites naturelle

Aucun courant n'est imposé dans le plasma mais l'antenne est parcourue par un courant superficiel  $\mathbf{j}_s$ , supposé connu, et donc on pose

$$\mathcal{J} = \mathbf{j}_s \delta_{\Gamma_A} \quad \text{avec} \quad \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.35)$$

En régime harmonique, le champ électrique  $\mathbf{E}$  vérifie alors sur l'antenne :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A, \quad (2.36)$$

où  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}_s(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ . Cette équation provient du lemme suivant [13] :

**Lemme 2.4.** (*"Condition de saut" entre deux milieux magnétiques*)

Soit  $\Gamma_m$  l'interface entre deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on note  $\mathbf{n}_{12}$  un vecteur unitaire sortant par rapport au milieu  $\Omega_1$ . Les champs magnétiques vérifient alors les égalités suivantes sur  $\Gamma_m$  :

$$\mathcal{B}_{n2} - \mathcal{B}_{n1} = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

$$\mathcal{H}_{\tau2} - \mathcal{H}_{\tau1} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}_{12}. \quad (2.38)$$

Montrons alors l'équation (2.36).

*Démonstration.* On suppose que le plasma représente le milieu  $\Omega_1$  et  $\Gamma_m = \Gamma_A$  alors  $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}$  et  $\mathcal{H}_{\tau1} = \mu_0^{-1} \mathcal{B}_{\tau1}$ . Le milieu  $\Omega_2$  est un conducteur supposé parfait, on a donc  $\mathcal{H} = 0$  dans  $\Omega_2$  et par continuité, on a  $\mathcal{H}_{\tau2} = \mathbf{0}$ . D'où l'équation (2.38) du lemme précédent devient

$$-\frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_{\tau1} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}.$$

En régime harmonique, cette dernière s'écrit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_{\tau1} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n} &\stackrel{(2.6)}{\Rightarrow} -\frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{\omega \mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = (\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \\ &\Rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s. \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A. \quad (2.39)$$

□

La condition sur le bord complémentaire de l'antenne s'écrit  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_C$ .

On résume alors notre problème.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  représentant le volume du plasma. On note  $\mathbf{n}$  un vecteur normal unitaire et  $\Gamma$  le bord de  $\Omega$ . On distingue  $\Gamma_A \subset \Gamma$  l'antenne sur le bord et  $\Gamma_C = \Gamma \setminus \Gamma_A$ . La description diélectrique du plasma est représentée localement par un tenseur diélectrique  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  dont l'expression est donnée par la relation (2.27) auquel il faut ajouter un terme correctif dû à l'interaction entre l'onde électromagnétique et les électrons (2.31). En régime harmonique, le champ électrique  $\mathbf{E}$  vérifie les équations

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A. \quad (2.43)$$

L'équation (2.41) provient tout simplement de la divergence de l'équation (2.40).

### 2.3.2 Conditions aux limites essentielle

On peut remplacer la condition sur l'antenne  $\Gamma_A$  de type Neumann par une condition au limite de type Dirichlet non homogène :

Trouver une fonction  $\mathbf{E}$  vérifiant les équations suivantes

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{sur } \Gamma_A. \quad (2.47)$$

On définit les espaces

$$\mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega). \quad (2.49)$$

#### Relèvement

S'il existe une solution à ces équations qui appartient à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors  $\mathbf{E} \in$

$\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Il faut donc que  $\tilde{\mathbf{h}}$ , prolongement de  $\mathbf{h}$  par 0 à tout  $\Gamma$ , soit la trace d'un champ  $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Or nous verrons que l'application  $\gamma_{\top}$  est surjective de  $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  dans  $\Upsilon_{\partial\Omega}$  (cf. la proposition 3.18), donc si  $\tilde{\mathbf{h}} \in \Upsilon_{\partial\Omega}$  alors il existe  $\mathbf{E}_a \in \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  tel que  $\mathbf{E}_a \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \tilde{\mathbf{h}}$ . La fonction  $\mathbf{E}_a$  est un relèvement de la fonction  $\mathbf{h}$  et on peut écrire

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_a$$

avec  $\tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \mathbf{0}$ .

Le problème (2.44) - (2.47) devient alors

Trouver une fonction  $\tilde{\mathbf{E}}$  vérifiant les équations suivantes

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_a + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_a \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}}) = -\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_a) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.51)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.52)$$

## 2.4 Formulation variationnelle

### 2.4.1 Conditions aux limites naturelle

Pour obtenir la formulation variationnelle qui conduit à la méthode d'éléments finis, on multiplie (2.40) par des fonctions-test et on intègre sur le domaine  $\Omega$ . L'énergie électromagnétique est supposée finie, on impose alors que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  soient  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Cependant, en régime harmonique, la loi de Faraday (2.7) implique que le champ  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ . On prend donc une fonction-test  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  :

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{0} | \mathbf{F}) &= (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F}) \\ &= -\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{F}_{\top} \rangle_{\Gamma} + (\mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F}). \end{aligned}$$

On en déduit d'après (2.36) et si  $\mathbf{F} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_C$ .

$$\langle i\omega\mu_0 \mathbf{j}_s, \mathbf{F}_{\top} \rangle_{\Gamma_A} = (\mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F}). \quad (2.53)$$

On introduit l'espace de fonctions

$$\mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_C} = \mathbf{0}\}. \quad (2.54)$$

On obtient directement une formulation variationnelle de (2.40)–(2.42) :  
Trouver  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$  tel que

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (2.55)$$

avec

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) := (\mathbf{rot} \mathbf{E} \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \mid \mathbf{F}), \quad (2.56)$$

$$l(\mathbf{F}) := \omega \mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \mathbf{F}_\top \rangle_{\Gamma_A}. \quad (2.57)$$

On définit l'espace

$$\mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega). \quad (2.58)$$

On régularise la formulation (2.55) en ajoutant un terme lié à la condition de divergence (2.41), la nouvelle formulation variationnelle dite *augmentée* [21] (FVA)

Trouver  $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  tel que

$$a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega), \quad (2.59)$$

où

$$a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) := a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + s(\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) \mid \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F})), \quad (2.60)$$

avec  $s \in \mathbb{C}$  un paramètre que l'on précisera plus tard.

On traite alors la condition de divergence (2.41) comme une contrainte pour obtenir la formulation variationnelle *mixte* augmentée (FVMA) :

Trouver  $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  tel que

$$a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega), \quad (2.61)$$

$$b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (2.62)$$

avec

$$b(\mathbf{F}, p) := (\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) \mid p). \quad (2.63)$$

On s'intéressera dorénavant à cette formulation.

**Remarque 2.5.** *La formulation variationnelle mixte non augmentée (FVMNA) est*

*Trouver  $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{\beta(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (2.64)$$

$$\beta(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega), \quad (2.65)$$

*avec*

$$\beta(\mathbf{F}, p) := -(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \mid \mathbf{grad} p). \quad (2.66)$$

En effet dans la formulation forte, on introduit le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte  $\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} = 0$ . On cherche alors un couple  $(\mathbf{E}, p)$  solution de

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} - \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.67)$$

$$\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A. \quad (2.70)$$

il est alors naturel de chercher  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $p \in H_0^1(\Omega)$ . Sous forme variationnelle, on a (2.64)-(2.65).

Nous verrons dans la suite les motifs de notre intérêt pour la FVMA (2.61)-(2.62) plutôt que la FVMNA (2.64)-(2.65).

## 2.4.2 Conditions aux limites essentielle

En multipliant (2.50) par une fonction test  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ , on a

$$(\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{F}) = -(\mathbf{rot} \mathbf{E}_a \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}) + \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_a \mid \mathbf{F}).$$

Or l'application  $\mathbf{F} \mapsto a(\mathbf{E}_a, \mathbf{F})$  est linéaire et continue. Elle appartient alors à  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$  et peut s'écrire  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{F} \rangle$ . Ecrivons les formulations variationnelles.  $\Rightarrow$  (FV) Trouver  $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  tel que

$$a(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{F}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{F} \rangle \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Comme on a supposé  $\mathbf{E}_a \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  alors  $-\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_a := g \in L^2(\Omega)$  et on peut augmenter la formulation variationnelle.



$\Rightarrow$  (FVA) Trouver  $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  tel que

$$a(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{F}) + s(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{F} \rangle + s(g \mid \mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) \quad (2.71)$$

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega).$$

$\Rightarrow$  (FVMA) Trouver  $(\tilde{\mathbf{E}}, p) \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  tel que

$$a_s(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, p)} = L_s(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \quad (2.72)$$

$$b(\tilde{\mathbf{E}}, q) = \ell(q) \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (2.73)$$

avec

$$a_s(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{F}) := (\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{F}) + s(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} \mid \mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}),$$

$$b(\mathbf{F}, p) := (\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) \mid p),$$

$$L_s(\mathbf{F}) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{F} \rangle + s(g \mid \mathbf{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}),$$

$$\ell(q) := (g \mid q).$$

# Chapitre 3

## Analyse mathématique

Dans ce chapitre, on s'intéresse au caractère bien posé des problèmes (2.61)-(2.62) et (2.72)-(2.73) en mettant en avant le rôle joué par le processus dissipatif du milieu (effet collisionnel et amortissement Landau). Ce résultat s'appuie sur la coercitivité des formes sesquilinéaires [52].

Ensuite, afin de concevoir une méthode d'élément fini qui accompagne naturellement ce genre de formulation variationnelle, des propriétés de l'espace  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  sont présentées.

### 3.1 Un théorème d'existence et d'unicité

On rappelle un théorème fondamental qui assure le caractère bien posé de certaines équations variationnelles.

**Théorème 3.1.** (*Lax-Milgram*)

Soit  $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto \mathbb{C}$  une forme sesquilinéaire continue, i.e.

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}} \quad (3.1)$$

et coercitive [25], i.e.

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq c_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad (3.2)$$

et soit  $l$  une forme linéaire continue sur  $\mathbf{V}$ , alors l'équation

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.3)$$

possède une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  et elle dépend continûment de la donnée :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|l\|_{\mathbf{V}'}. \quad (3.4)$$

En présence d'une contrainte telle que (2.41), on obtient un problème variationnel dit *mixte* (dans notre cas (2.61)-(2.62) ainsi que (2.64)-(2.65)) avec lequel ce théorème se généralise de la façon suivante :

**Théorème 3.2.** (*Babuska-Brezzi*)

Soient  $\mathbf{W}$  et  $Q$  deux espaces de Hilbert,  $a$  et  $b$  deux formes sesquilinéaires continues

$$a(.,.) : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{C}, \quad (3.5)$$

$$b(.,.) : \mathbf{W} \times Q \ni (\mathbf{v}, q) \longmapsto b(\mathbf{v}, q) \in \mathbb{C}, \quad (3.6)$$

et  $L, l$  deux formes linéaires continues

$$L(.) : \mathbf{W} \ni \mathbf{v} \longmapsto L(\mathbf{v}) \in \mathbb{C}, \quad (3.7)$$

$$l(.) : Q \ni q \longmapsto l(q) \in \mathbb{C}, \quad (3.8)$$

On pose  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}; b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}$ . Si

(i) la forme sesquilinéaire  $a$  est  $\mathbf{V}$ -coercitive, i.e. il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (3.9)$$

(ii) la forme sesquilinéaire  $b$  satisfait la condition *inf-sup*, i.e. il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \|q\|_Q} \geq \delta \quad (3.10)$$

alors le problème

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{W} \times Q$  tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{b(\mathbf{v}, p)} = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \quad (3.11)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = l(q) \quad \forall q \in Q, \quad (3.12)$$

est bien posé, i.e. il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, p)$  vérifiant (3.11)-(3.12) et

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}} + \|p\|_Q \leq C(\|L\|_{\mathbf{W}'} + \|l\|_{Q'}) \quad (3.13)$$

*Démonstration.* voir [15] ou [35]. □

**Remarque 3.3.** La condition inf-sup (ii) nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée. Elle est vérifiée si et seulement si :

$$\forall q \in Q \quad \exists \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \text{tel que} \quad |b(\mathbf{v}, q)| \geq \delta \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \|q\|_Q. \quad (3.14)$$

Pour une forme bilinéaire à valeurs complexes, on peut obtenir la  $\mathbf{V}$ -coercitivité (condition (i)) de la manière suivante

**Théorème 3.4.** Soient  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{H}$  des espaces de Hilbert tel que l'injection de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{H}$  soit continue et  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ . Si

- (i') il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $\lambda > 0$  telle que la partie réelle de  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $Re[a(\cdot, \cdot)]$ , vérifie l'inégalité :

$$|Re[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 - \lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.15)$$

- (i'') il existe une constante  $\gamma > 0$ , telle que la partie imaginaire de  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $Im[a(\cdot, \cdot)]$ , vérifie l'inégalité :

$$|Im[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \gamma \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (3.16)$$

Alors la forme sesquilinéaire  $a$  est  $\mathbf{V}$ -coercitive.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 &= |Re[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]|^2 + |Im[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]|^2 \\ &\geq (\alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 - \lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2)^2 + \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4 \\ &\geq \alpha^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^4 - 2\alpha\lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4 + \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4 \end{aligned}$$

Or l'inégalité de Young nous donne

$$-2\alpha\lambda \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \geq -\frac{\alpha^2}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^4 - \varepsilon \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ce qui nous amène à

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 \geq \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^4 + [\lambda^2(1 - \varepsilon) + \gamma^2] \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4.$$

Pour éliminer le terme en  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^4$ , on cherche un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\lambda^2(1 - \varepsilon) + \gamma^2 = 0$  i.e.  $\varepsilon = 1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} > 0$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 &\geq \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2}}\right) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^4 + 0 \\ \Rightarrow |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &\geq \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.5.** *L'hypothèse (i') de la proposition ne suffit pas seule pour que  $a(\cdot, \cdot)$  soit coercitive. Par exemple, on prend  $\mathbf{V} = \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{rot} \mathbf{u} | \mathbf{rot} \mathbf{v})$ .*

*L'hypothèse (i') est vérifiée car*

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 - \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2,$$

*mais  $a$  n'est pas coercitive car on n'a pas*

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \geq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

*En effet, si  $\mathbf{v}$  est un gradient, l'inégalité est fausse.*

## 3.2 Application aux ondes électromagnétiques

On va montrer le théorème suivant

**Théorème 3.6.** *On suppose que les fonctions  $\nu_c$ ,  $\gamma_e$ ,  $\omega_{cs}$  et  $\omega_{ps}$ , pour chaque espèce  $s$  (ions et électrons), sont continues de  $\bar{\Omega}$  dans  $\mathbb{R}$  et bornées inférieurement et supérieurement par des nombres strictement positifs. Alors les problèmes variationnels (2.61)-(2.62) et (2.72)-(2.73) admettent une solution si  $Re(s) > 0$  et  $Im(s) \leq 0$ .*

On considère dorénavant que les hypothèses du théorème sont vérifiées. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.2 de Babuska-Brezzi aux problèmes variationnels.

**Proposition 3.7.** *La forme sesquilinéaire  $a_s$  vérifie la condition (i).*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier les deux hypothèses du théorème 3.4. Pour cela, on se donne deux lemmes

**Lemme 3.8.** *La fonction  $\mathbf{r} \mapsto \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$  est bornée, continue de  $\bar{\Omega}$  dans  $M_3(\mathbb{C})$  et  $\max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} \|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_2 = K^+ < +\infty$  avec*

$$K^+ = \max_{i=1,2,3} \left\{ \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} |\lambda_i(\mathbf{r})| \right\}$$

où  $\|\cdot\|_2$  représente la norme matricielle induite par la norme vectorielle euclidienne et  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $\underline{\mathbf{K}}$  définies dans la proposition 3.10.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{r} \in \overline{\Omega}$ , la norme du tenseur  $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$  induite par la norme vectorielle euclidienne peut être exprimée par

$$\|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_2 = [\text{valeur propre maximale de } \underline{\mathbf{K}}^H(\mathbf{r})\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})]^{1/2}. \quad (3.17)$$

D'après (2.31), on a

$$\underline{\mathbf{K}}^H(\mathbf{r})\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} |S(\mathbf{r})|^2 + |D(\mathbf{r})|^2 & -2i \operatorname{Re}[\overline{S}(\mathbf{r})D(\mathbf{r})] & 0 \\ 2i \operatorname{Re}[\overline{S}(\mathbf{r})D(\mathbf{r})] & |S(\mathbf{r})|^2 + |D(\mathbf{r})|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |P_L(\mathbf{r})|^2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont  $|P_L(\mathbf{r})|^2$ ,  $|S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|^2$ ,  $|S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|^2$ .

D'où (3.17) devient

$$\|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_2 = \max \left\{ |S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|, |S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|, |P_L(\mathbf{r})| \right\}.$$

Ainsi on obtient le résultat du lemme en prenant

$$K^+ = \max \left\{ \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|, \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|, \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |P_L(\mathbf{r})| \right\}$$

qui est effectivement bornée grâce aux hypothèses du théorème 3.6.  $\square$

**Remarque 3.9.** *Le fait que  $K^+$  soit la valeur singulière maximale implique*

$$\operatorname{Re}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \leq K^+(\mathbf{x}^H \mathbf{x}). \quad (3.18)$$

**Proposition 3.10.** *Les valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  sont  $\lambda_1 = S + D$ ,  $\lambda_2 = S - D$  et  $\lambda_3 = P_L$ . De plus, il existe une base de vecteurs propres indépendants des valeurs  $S, D$  et  $P_L$ .*

En effet, les vecteurs propres selon, respectivement, les valeurs propres  $S + D, S - D$  et  $P_L$  sont :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

**Lemme 3.11.** *Il existe une constante  $\zeta > 0$  dépendant de  $\omega$  et telle que*

$$|\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x}| \geq \text{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x})] \geq \zeta(\mathbf{x}^H \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.20)$$

*Démonstration.* La proposition 3.10 nous montre qu'il existe une matrice unitaire  $\underline{\mathbf{U}}$  constante et une matrice diagonale  $\underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r})$  telles que  $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{U}}^H$ . D'où,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$

$$\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{x} = \mathbf{y}^H \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \mathbf{y}$$

avec  $\mathbf{y} = \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{x}$  vérifiant  $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ . On a donc

$$\text{Im}[\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x}] = \text{Im}[\mathbf{y}^H \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \mathbf{y}] = \sum_{i=1}^3 \text{Im}[\lambda_i(\mathbf{r})] |y_i|^2$$

Soit  $b_s(\mathbf{r}) = \omega_{cs}^2(\mathbf{r}) - \omega^2 + \nu_c^2(\mathbf{r})$ , on a alors d'après (2.28)-(2.30)

$$\begin{aligned} \text{Im}[\lambda_1(\mathbf{r})] &= \text{Im}[S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})] \\ &= \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega} \left( \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2(\mathbf{r})}{b_i^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2 \nu_c^2(\mathbf{r})} [(\omega - \omega_{ci}(\mathbf{r}))^2 + \nu_c^2(\mathbf{r})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{pe}^2(\mathbf{r})}{b_e^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2 \nu_c^2(\mathbf{r})} [(\omega + \omega_{ce}(\mathbf{r}))^2 + \nu_c^2(\mathbf{r})] \right), \\ \text{Im}[\lambda_2(\mathbf{r})] &= \text{Im}[S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})] \\ &= \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega} \left( \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2(\mathbf{r})}{b_i^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2 \nu_c^2(\mathbf{r})} [(\omega + \omega_{ci}(\mathbf{r}))^2 + \nu_c^2(\mathbf{r})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{pe}^2(\mathbf{r})}{b_e^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2 \nu_c^2(\mathbf{r})} [(\omega - \omega_{ce}(\mathbf{r}))^2 + \nu_c^2(\mathbf{r})] \right), \\ \text{Im}[\lambda_3(\mathbf{r})] &= \text{Im}[P_L(\mathbf{r})] = \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega(\omega^2 + \nu_c^2(\mathbf{r}))} \sum_s \omega_{ps}^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \gamma_e(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites sur les différentes fréquences, on peut montrer que  $\text{Im}[\lambda_i]_{i=1,2,3}$  sont uniformément bornées inférieurement. On pose alors

$$\zeta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \min_{\mathbf{r} \in \Omega} \text{Im}[\lambda_i(\mathbf{r})] \right\}.$$

Par conséquent  $\zeta > 0$  et on obtient bien le résultat suivant

$$\text{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \geq \zeta(\mathbf{x}^H \mathbf{x}).$$

□

Montrons alors la proposition 3.7.

*Démonstration.* On a

$$a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \|\mathbf{rot} \mathbf{F}\|_0^2 + s \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} | \mathbf{F}).$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &= \|\mathbf{rot} \mathbf{F}\|_0^2 + \operatorname{Re}[s] \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}[(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} | \mathbf{F})], \\ \operatorname{Im}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &= \operatorname{Im}[s] \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Im}[(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} | \mathbf{F})]. \end{aligned}$$

On obtient alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &\geq \min(1, \operatorname{Re}[s]) (\|\mathbf{F}\|_X^2 - \|\mathbf{F}\|_0^2) - \frac{\omega^2}{c^2} K^+ \|\mathbf{F}\|_0^2, \\ \operatorname{Im}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &\leq \operatorname{Im}[s] \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \zeta \|\mathbf{F}\|_0^2. \end{aligned}$$

Si  $\operatorname{Im}[s] \leq 0$  et  $\operatorname{Re}[s] > 0$  alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &\geq \min(1, \operatorname{Re}[s]) \|\mathbf{F}\|_X^2 - (\min(1, \operatorname{Re}[s]) + \frac{\omega^2}{c^2} K^+) \|\mathbf{F}\|_0^2, \\ \operatorname{Im}[a_s(\mathbf{F}, \mathbf{F})] &\leq \operatorname{Im}[s] \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \zeta \|\mathbf{F}\|_0^2 \leq -\frac{\omega^2}{c^2} \zeta \|\mathbf{F}\|_0^2. \end{aligned}$$

Les hypothèses (*i'*) et (*i''*) sont donc bien vérifiées.  $\square$

Grâce au théorème 3.1 de Lax-Milgram, on a alors

**Proposition 3.12.** *Les FVA (2.59) et (2.71) sont bien posées.*

Avant de montrer la deuxième condition du théorème 3.2, on donne une proposition qui nous sera utile pour la suite.

**Proposition 3.13.** *Pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème elliptique*

*Trouver  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$-\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi = -\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi) = f \quad (3.21)$$



est bien posé et la solution vérifie

$$\|\phi\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^{-1}}$$

avec  $C > 0$  une constante indépendante de  $\phi$  et  $f$ .

*Démonstration.* La formule de Green (1.4) nous donne la formulation variationnelle de (3.21) :

$$a'(\phi, \psi) = l'(\psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.22)$$

avec

$$a'(\phi, \psi) = \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \psi} d\Omega \quad \text{et} \quad l'(\psi) = \int_{\Omega} f \bar{\psi} d\Omega.$$

Pour montrer la coercitivité de la forme bilinéaire dans (3.22), on se sert du lemme 3.11 et de l'inégalité de Poincaré (1.7). On a

$$\begin{aligned} |a'(\phi, \phi)| &\geq \text{Im}[a'(\phi, \phi)] \\ &\geq \text{Im}\left[\int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega\right] \\ &\geq \zeta \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \phi|^2 d\Omega = \zeta \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2 \geq \zeta_0 \|\phi\|_1^2. \end{aligned}$$

Donc le théorème de Lax-Milgram nous permet d'affirmer le caractère bien posé du problème et donc  $\|\phi\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^{-1}}$ .  $\square$

**Remarque 3.14.** *Le problème elliptique avec l'opérateur  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}^H}$  est également bien posé.*

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Proposition 3.15.** *Dans les équations (2.61)-(2.62) et (2.72)-(2.73), la forme sesquilinéaire  $b$  vérifie la condition (ii).*

*Démonstration.* Soit  $q \in L^2(\Omega)$ , cherchons un  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  vérifiant (3.14).

On remarque tout d'abord que, comme  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega) \subset \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , il suffit de trouver un  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  vérifiant

$$|b(\mathbf{v}, q)| \geq \delta \|\mathbf{v}\|_X \|q\|_0.$$

Soit  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant (3.21) avec  $f = q \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$  d'où  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  [26]. De plus

$$q \in L^2 \Rightarrow \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) \in L^2 \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega).$$

Ce qui implique que  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega) = \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ .

Le lemme 3.11 nous donne

$$\left| \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right| \geq \operatorname{Im} \left[ \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right] \geq \zeta \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2$$

et on rappelle que

$$\left| \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right| \stackrel{(1.4)}{=} |(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi | \phi)| = |(q | \phi)|.$$

Comme l'inégalité de Poincaré (1.7) nous dit qu'il existe  $C_p > 0$  tel que

$$|(q | \phi)| \leq \|q\|_0 \|\phi\|_0 \leq \|q\|_0 C_p \|\mathbf{grad} \phi\|_0$$

alors il existe une constante  $C = \frac{C_p}{\zeta} > 0$  tel que

$$\|\mathbf{grad} \phi\|_0 \leq C \|q\|_0.$$

Enfin on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_X^2 &= \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 + \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}\|_0^2 \\ &= \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2 + \underbrace{\|\mathbf{rot} \mathbf{grad} \phi\|_0^2}_{=0} + \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi\|_0^2 \\ &= \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2 + \|q\|_0^2 \\ &\leq (1 + C^2) \|q\|_0^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

On obtient au final

$$\frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_X} = \frac{(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} | q)}{\|\mathbf{v}\|_X} \geq \frac{\|q\|_0^2}{\sqrt{1 + C^2} \|q\|_0}$$

d'où la condition *inf-sup* avec  $\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}$ . □

On peut aussi voir que

**Proposition 3.16.** *Dans la FVMNA, les équations (2.64)-(2.65), la forme bilinéaire  $\beta$  vérifie la condition (ii).*

*Démonstration.* Soit  $q \in H_0^1(\Omega)$  ce qui implique  $\mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ . On pose alors  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ . Le lemme 3.11 montre que

$$\begin{aligned} |\beta(\mathbf{v}, q)| &= \left| \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) \cdot \overline{\mathbf{grad} q} d\Omega \right| = |(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \mid \mathbf{v})| \\ &\geq \zeta \|\mathbf{v}\|_0^2 = \zeta \|\mathbf{v}\|_0 \|\mathbf{grad} q\|_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Or

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot})} = (\|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2)^{1/2} = \|\mathbf{v}\|_0$$

et l'inégalité de Poincaré (1.7) montre que

$$\|\mathbf{grad} q\|_0 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + C_p^2}} \|q\|_{H^1}.$$

Donc on a bien dans (3.24)

$$|\beta(\mathbf{v}, q)| \geq C_\beta \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot})} \|q\|_{H^1}$$

avec  $C_\beta = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + C_p^2}}$ . □

**Remarque 3.17.** *On remarque ici que le lemme 3.11 est crucial pour montrer la coercitivité des formes bilinéaires ainsi que les conditions inf-sup des FVMA et FVMNA. Ce qui signifie que sans l'absorption induite par les collisions et l'amortissement Landau, notre raisonnement n'est plus valable. Després et al. [28] ont montré que le problème limite lorsque l'absorption tend vers 0 est mal posé dans certains cas.*

Il nous reste à montrer que la propriété de la trace tangentielle invoquée pour la modélisation du problème avec condition au bord essentielle (paragraphe 2.3.2) est bien vraie.

**Proposition 3.18.** *L'application trace tangentielle  $\gamma_{\top}$  est surjective de  $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  dans  $\Upsilon_{\partial\Omega}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}_{\partial\Omega}$ , par définition, il existe  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  tel que  $\mathbf{w} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}$  dans  $\partial\Omega$ . On sait que le problème elliptique

Trouver  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$-\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi = \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}) \quad \text{avec} \quad \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}) \in H^{-1}(\Omega) \quad (3.25)$$

admet une solution grâce à la proposition 3.13. On pose  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{grad} \phi$ , ce qui implique  $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) = 0$ . Comme  $\mathbf{grad} H_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ , on a  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  vérifiant  $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}$  dans  $\partial\Omega$ .  $\square$

On va maintenant montrer l'équivalence entre toutes les formulations.

**Proposition 3.19.** *Toute solution  $(\mathbf{E}, p)$  de la FVMA (2.61)-(2.62) (respectivement de la FVMNA (2.64)-(2.65)) vérifie  $p = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathbf{E}, p)$  une solution de FVMA, on prend  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ , l'unique fonction vérifiant  $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) = p$  et on choisit  $\mathbf{F} = \mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  comme fonction-test dans (2.61) :

$$\begin{aligned} 0 &= a_s(\mathbf{E}, \mathbf{grad} \phi) + \overline{b(\mathbf{grad} \phi, p)} - l(\mathbf{grad} \phi) \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \mid \mathbf{grad} \phi) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) \mid p) + \|p\|_0^2 - \omega\mu_0 \langle \mathbf{j}_s, (\mathbf{grad} \phi)_\top \rangle_\Gamma \\ &\stackrel{(1.3)}{=} -\frac{\omega^2}{c^2}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \mid \phi) + \|p\|_0^2 - \omega\mu_0 \langle \mathbf{j}_s, (\mathbf{grad} \phi)_\top \rangle_\Gamma \\ &\stackrel{(2.62)}{=} \|p\|_0^2 - \omega\mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \mathbf{n} \times (\mathbf{grad} \phi \times \mathbf{n}) \rangle_\Gamma \\ &= \|p\|_0^2 \quad \text{car} \quad \mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pour la FVMNA, la démonstration est identique.  $\square$

Pour montrer l'équivalence des trois formulations FVA, FVMNA et FVMA, il suffit de montrer que la solution d'une formulation est une solution des autres. En effet, les propositions 3.12, 3.15 et 3.16 ont montré l'unicité de la solution de chaque formulation. Tout d'abord, on a l'implication triviale :

**Proposition 3.20.**  *$(\mathbf{E}, 0)$  est une solution de la FVMA (2.61)-(2.62)  $\Rightarrow \mathbf{E}$  est une solution de la FVA (2.59).*

Enfin montrons que

**Proposition 3.21.**  *$(\mathbf{E}, 0)$  est une solution de la FVMNA (2.64)-(2.65)  $\Rightarrow (\mathbf{E}, 0)$  est une solution de la FVMA (2.61)-(2.62).*

*Démonstration.* Soit  $(\mathbf{E}, 0)$  une solution de la FVMNA, l'équation (2.65) implique que  $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , plus particulièrement dans  $L^2(\Omega)$ . En utilisant la formule de Green (1.4), on a

$$0 = \beta(\mathbf{E}, q) = -(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \mid \operatorname{grad} q) = (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) \mid q) = b(\mathbf{E}, q) \quad \forall q \in H_0^1$$

et comme  $H_0^1$  est dense dans  $L^2$ , on a notre résultat ainsi que l'équation (2.62). Et donc on a  $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . On en déduit alors l'équation (2.61) :

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, 0)} &= a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})) \\ &\stackrel{(2.64)}{=} l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega). \end{aligned}$$

□

### 3.3 Propriétés de l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$

#### 3.3.1 Un résultat de compacité

On se demande ici si le théorème (1.21) ne s'applique pas en remplaçant  $\mathbf{X}_N(\Omega)$  par  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . En effet, dans l'article [56], il est montré que, dans un ensemble  $G$  simplement connexe,  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{e}}, G) = \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, G) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{e}}, G)$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(G)$  si la matrice  $\underline{\mathbf{e}}$  est à valeur dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, bornée et définie positive uniformément. Ce qui est loin d'être le cas pour notre tenseur diélectrique  $\underline{\mathbf{K}}$ , cf. (2.31), ainsi que notre domaine  $\Omega$  qui n'est pas simplement connexe. Néanmoins, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.22.** *Si  $\Omega$  est lipschitzien alors  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .*

On fixe tout d'abord des propriétés topologiques de domaines réguliers mais non simplement connexe.

**Définition 3.23.** *Un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  est dit pseudo-lipschitzien si pour tout point  $\mathbf{x}$  sur le bord  $\partial\Omega$ , il existe un entier  $r(\mathbf{x})$  égal à 1 ou 2 et un réel strictement positif  $\alpha_0$  tel que pour tout réel  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < \alpha_0$ , l'intersection de  $\Omega$  avec la boule de centre  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\alpha$ , a  $r(\mathbf{x})$  composante(s) connexe(s) qui sont chacune lipschitzienne.*

On suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine lipschitzien tel qu'il existe  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  surfaces ouvertes connexes  $\Sigma_j$  (dites coupures),  $1 \leq j \leq \tilde{N}$  inclus dans  $\Omega$  vérifiant :

- $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et les  $\Sigma_j$  ne sont pas tangentes à  $\Gamma$ .
- le bord des  $\Sigma_j$  est contenu dans  $\Gamma$  pour  $1 \leq j \leq \tilde{N}$ .
- si on définit  $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} \Sigma_j$  et  $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma$ , alors  $\dot{\Omega}$  est pseudo-lipschitzien et simplement connexe.

Enfin, on décompose  $\Gamma$  en  $\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ , où  $\Gamma_j$  sont les composantes connexes de  $\Gamma$ . Or le tore vérifie bien ces propriétés avec  $\tilde{N} = 1$  et sa frontière est connexe donc  $m = 1$ .

On a alors le lemme suivant (démontré dans [4]).

**Lemme 3.24.** (*potentiel vecteur tangentiel*)

Si  $\Gamma$  a plusieurs composantes (i.e.  $m > 1$ ), alors une fonction  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  satisfait

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0 \quad 0 \leq j \leq m. \quad (3.27)$$

si et seulement si il existe un potentiel vecteur  $\mathbf{A} \in \mathbf{X}(\Omega)$  tel que

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0 \quad \forall j. \quad (3.29)$$

La fonction  $\mathbf{A}$  est unique et on a

$$\|\mathbf{A}\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.25.** Si la frontière  $\Gamma$  est connexe alors l'hypothèse (3.27) devient

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.31)$$

Enfin on a une décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  en partie gradient et " $\underline{\mathbf{K}}$ -solénoïde".

**Lemme 3.26.** Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors il existe  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  avec  $\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_T) = 0$  tel que

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \mathbf{u}_T \quad (3.32)$$

vérifiant

$$\|\text{grad } \phi\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}_T\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0. \quad (3.33)$$

*Démonstration.* En appliquant  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}$  aux deux membres de l'équation (3.32), on cherche  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}) = \Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi$ . Or  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Rightarrow \underline{\mathbf{K}}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Rightarrow \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}) \in H^{-1}(\Omega)$  car la divergence est continue de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Et donc la proposition 3.13 montre l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

On pose alors  $\mathbf{u}_T = \mathbf{u} - \mathbf{grad} \phi$  et on a

$$\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_T) = 0.$$

□

**Remarque 3.27.** i) Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  alors  $\mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et par conséquent  $\mathbf{u}_T \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et la décomposition (3.32) est continue en norme  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ .

ii) Grâce à la remarque 3.14, on a aussi une décomposition des champs de vecteurs  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  en partie  $\underline{\mathbf{K}}^H$ -gradient et solénoïde : soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors il existe  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  avec  $\operatorname{div} \mathbf{u}_T = 0$  tel que

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} \phi + \mathbf{u}_T. \quad (3.34)$$

On démontre alors le théorème 3.22. On suppose pour simplifier  $\Gamma$  connexe, ce qui est le cas du tore.

*Démonstration.* Soit  $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , elle vérifie alors  $\forall m \in \mathbb{N}$ , il existe un  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|\mathbf{u}_m\|_0 \leq C \quad (2) \quad \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_m\|_0 \leq C \\ (3) \quad & \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m)\|_0 \leq C \quad (4) \quad \mathbf{u}_m \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Par la remarque 3.27. i), on pose  $\mathbf{u}_m^1 \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et  $\mathbf{u}_m^2 \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  avec

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_m^1 + \mathbf{u}_m^2 \quad (2) \quad \mathbf{u}_m^1 = \mathbf{grad} \phi_m \quad \text{avec } \phi_m \in H_0^1(\Omega) \\ (3) \quad & \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m^2) = 0 \quad (4) \quad \mathbf{u}_m^i \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Montrons alors qu'on peut extraire une sous-suite de  $\{\mathbf{u}_m^i\}_{i=1,2}$  qui converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

La suite  $\{\mathbf{u}_m^1\}$  bornée dans  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  par le lemme 3.26, on a  $\|\phi_m\|_{H^1} \leq C$ . En appliquant le théorème 1.16 de Rellich, on peut extraire une sous-suite,

encore notée  $\{\phi_m\}$ , convergente dans  $L^2(\Omega)$ . On pose alors  $\phi_{kl} = \phi_k - \phi_l$  et on a

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl}) | \phi_{kl})| &= |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_l^1)) | \phi_{kl})| \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow +\infty \\ \text{et } |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl}) | \phi_{kl})| &\stackrel{(1.4)}{=} |(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl} | \operatorname{grad} \phi_{kl})| \\ &\stackrel{(3.20)}{\geq} \zeta \|\operatorname{grad} \phi_{kl}\|_0 = \zeta \|\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_l^1\|_0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ce qui implique que la suite  $\{\mathbf{u}_m^1\}$  converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

La suite  $\{\mathbf{u}_m^2\}$  vérifie (3.36)<sub>(3)</sub> et par le théorème du potentiel vecteur tangentiel 3.24, on a

$$\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_m \quad \text{avec } \mathbf{A}_m \in \mathbf{X}(\Omega), \quad (3.38)$$

vérifiant  $\operatorname{div} \mathbf{A}_m = 0$  et  $\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$ .

Il est clair que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}_m \in \mathbf{X}_T(\Omega)$ , on montre alors que la suite  $\{\mathbf{A}_m\}$  est bornée :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_m\|_{\mathbf{X}_T} &\leq \|\mathbf{A}_m\|_0 + \underbrace{\|\operatorname{div} \mathbf{A}_m\|_0}_{=0} + \underbrace{\|\operatorname{rot} \mathbf{A}_m\|_0}_{=\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2} \\ &\stackrel{(3.30)}{\leq} (C+1) \|\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2\|_0 \leq C' \|\mathbf{u}_m^2\|_0 \stackrel{(3.33)}{\leq} C'' \|\mathbf{u}_m\|_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

et par (3.35)<sub>(1)</sub>, on a  $\{\mathbf{A}_m\}$  bornée. Par le théorème 1.21, la suite  $\{\mathbf{A}_m\}$  admet une sous-suite, encore notée  $\{\mathbf{A}_m\}$  convergente dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . On pose alors  $\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_l$  et on a

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \mathbf{A}_{kl})| &= |(\operatorname{rot}(\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_l^2) | \mathbf{A}_{kl})| \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow +\infty \\ \text{et } |(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \mathbf{A}_{kl})| &\stackrel{(1.5)}{=} |(\underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl})| \\ &= |(\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_l^2 | \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_l^2))| \\ &\stackrel{(3.20)}{\geq} \zeta \|\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_l^1\|_0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ce qui implique que la suite  $\{\mathbf{u}_m^2\}$  converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .  $\square$

### 3.3.2 Un résultat de régularité

On suppose désormais  $\underline{\mathbf{K}} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ . Dans le même registre que le résultat de compacité de l'espace  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , on veut montrer le théorème suivant :



**Théorème 3.28.** *On suppose  $\Omega$  un ouvert régulier i.e. de classe  $C^{1,1}$  alors l'espace  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  est inclus dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .*

La démonstration pour  $\mathbf{X}_N(\Omega)$  est faite dans [35], cependant on ne peut pas la transcrire pour notre cas. On propose alors une preuve en deux étapes, l'une portant sur la décomposition dite de Birman-Solomyak [11] et l'autre sur la régularité du problème elliptique.

**Proposition 3.29.** *Toute fonction  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  s'écrit sous la forme*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{BS} + \mathbf{grad} \varphi \quad (3.41)$$

avec  $\mathbf{u}_{BS} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  avec  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\varphi \in L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* On considère  $\mathcal{O}$  un ouvert régulier simplement connexe à bord connexe contenant  $\bar{\Omega}$  (une boule par exemple). Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , on pose  $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(\mathcal{O})$  définie par  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  dans  $\Omega$  et nulle à l'extérieur. Comme  $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega$ , on a alors grâce à la formule de Green (1.5) que  $\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Or  $\text{div} \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}} = 0$  et donc, d'après le théorème du potentiel vecteur ([35], théorème 3.4 p. 45), il existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{O})$  telle que

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (3.42)$$

Or on obtient  $\mathbf{rot}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) = 0$ , donc d'après le théorème du potentiel scalaire ([35], théorème 2.9 p. 31), il existe  $\varphi_1 \in H^1(\mathcal{O})$  telle que

$$\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = \mathbf{grad} \varphi_1 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi_1. \quad (3.43)$$

D'après la définition de  $\tilde{\mathbf{u}}$ , on a  $\mathbf{grad} \varphi_1 = -\mathbf{v}$  dans  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$ , ce qui implique  $\varphi_{1|(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})} \in H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})$ . Il existe alors un prolongement  $\varphi_2 \in H^2(\mathcal{O})$  telle que  $\varphi_{1|(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})} = \varphi_{2|(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})}$  [35]. On peut écrire alors

$$\tilde{\mathbf{u}} = \underbrace{(\mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi_2)}_{:= \tilde{\mathbf{u}}_{BS}} + \mathbf{grad} \underbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}_{:= \tilde{\varphi}}. \quad (3.44)$$

En se restreignant sur  $\Omega$ , on a  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\Omega} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_{BS} := \tilde{\mathbf{u}}_{BS}|_{\Omega} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  et  $\varphi := \tilde{\varphi}|_{\Omega} \in H^1(\Omega)$ . Mieux, comme  $\tilde{\mathbf{u}}_{BS}$  et  $\tilde{\varphi}$  sont nuls sur  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$  alors  $\mathbf{u}_{BS} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Enfin, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{\mathbf{K}}}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &= \text{div} \underline{\mathbf{K}}[\mathbf{u} - (\mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Or par définition,  $\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$  et comme  $(\mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi_2)|_{\Omega} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , on a  $\text{div} \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi_2) \in L^2(\Omega)$  car  $\underline{\mathbf{K}} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ .  $\square$

Le théorème 3.28 est alors prouvé si l'on montre que  $\mathbf{grad} \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  ou encore que  $\varphi \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ . Pour cela, on se sert de la théorie de la régularité des problèmes elliptiques que l'on peut trouver dans [37]. On rappelle ici les principaux résultats : soit une forme sesquilinéaire

$$a(\phi, \psi) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x})}.$$

L'opérateur  $A$  associé, appliquant  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  si  $(a_{i,j}) \in L^\infty(\Omega)$ , s'écrit

$$A\phi = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right).$$

**Définition 3.30.** *On dit que l'opérateur  $A$  est (uniformément) fortement elliptique s'il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3 \quad \operatorname{Re}(\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \mathbf{r}) \geq c |\mathbf{r}|^2$$

avec  $\underline{\mathbf{A}}$  la matrice  $(a_{i,j})$ .

**Théorème 3.31.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier. On suppose que l'opérateur  $A$  est fortement elliptique avec les coefficients  $a_{i,j} \in W^{1,\infty}(\bar{\Omega})$  et que  $f \in L^2(\Omega)$ . Alors la solution du problème*

$$A\phi = f \quad \text{et} \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

*appartient à  $H^2(\Omega)$ .*

On peut alors dire que, si  $\Omega$  est assez régulier :

**Proposition 3.32.** *La fonction  $\varphi$  de la proposition 3.29 appartient à  $\mathbf{H}^2(\Omega)$ .*

*Démonstration.* On ne peut appliquer le théorème précédent au problème

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{\mathbf{K}}} \varphi &= \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \varphi) = f \quad \text{avec } f \in L^2(\Omega) \\ \varphi &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

car l'opérateur  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}$  n'est pas fortement elliptique. Cependant, on sait qu'il existe un  $\zeta > 0$  tel que

$$\operatorname{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \geq \zeta (\mathbf{x}^H \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3.$$

il suffit alors de multiplier par  $-i$  la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  pour qu'on ait un opérateur  $\Delta_{-i\underline{\mathbf{K}}} = -i\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}$  qui soit fortement elliptique. En appliquant le théorème 3.31 au problème

$$\begin{aligned}\Delta_{-i\underline{\mathbf{K}}}\varphi &= \operatorname{div}(-i\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \varphi) = -if \quad \text{avec } f \in L^2(\Omega) \\ \varphi &\in H_0^1(\Omega)\end{aligned}$$

alors  $\varphi \in H^2(\Omega)$ .

□

# Chapitre 4

## Réduction du problème en 2D

Le système (2.40)-(2.43) est posé dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , plus précisément  $\Omega$  est un tore représentant la cavité du plasma. En utilisant les coordonnées cylindriques ainsi que les séries de Fourier, on va montrer qu'on peut réduire le problème à un problème posé dans un ouvert  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  que l'on précisera.

### 4.1 Le système cylindrique

Dans la géométrie torique, on utilise les coordonnées  $(R, Z, \phi)$ , dites cylindriques, où  $R$  désigne la coordonnée radiale mesurée à partir de l'axe  $(Ox)$ ,  $Z$  l'opposé de la coordonnée cartésienne  $z$ , et  $\phi$  l'azimut i.e.

$$x = R \cos \phi \quad y = R \sin \phi \quad z = -Z$$

avec  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes.

On note  $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_\phi)$  la base de vecteurs associée aux coordonnées cylindriques. On désigne par  $\tilde{\Omega}$  l'intersection de  $\Omega$  et d'un demi-plan méridien d'équation  $\phi = \text{constante}$ . Dans ce demi-plan, les coordonnées  $(R, Z)$  s'assimilent aux coordonnées cartésiennes.

**Remarque 4.1.** *La géométrie de  $\Omega$  entraîne le fait que, dans ce système, le*

*vecteur normal n'a pas de composante en  $\phi$  i.e.  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_R \\ n_Z \\ 0 \end{pmatrix}$ .*

## 4.2 Décomposition en série de Fourier

Toute fonction  $f = f(R, Z, \phi) \in L^2(\Omega)$  peut être décomposée en séries de Fourier de la façon suivante :

$$f(R, Z, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(R, Z) e^{ik\phi} \quad (4.1)$$

avec

$$f_k(R, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(R, Z, \phi) e^{-ik\phi} d\phi.$$

On peut ainsi définir les opérateurs différentiels pour un mode de Fourier  $k$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{div}_k \mathbf{w}_k(R, Z) e^{ik\phi} \quad \text{pour } \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \\ \operatorname{rot} \mathbf{w} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{rot}_k \mathbf{w}_k(R, Z) e^{ik\phi} \quad \text{pour } \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_k \mathbf{F} &= \frac{\partial F_\phi}{\partial Z} \mathbf{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_\phi)}{\partial R} \mathbf{e}_Z + \left( \frac{\partial F_Z}{\partial R} - \frac{\partial F_R}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{ik}{R} \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{F} \quad (4.2) \\ &= \left( \frac{\partial F_\phi}{\partial Z} - \frac{ik}{R} F_Z \right) \mathbf{e}_R + \left( \frac{ik}{R} F_R - \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_\phi)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_Z + \left( \frac{\partial F_Z}{\partial R} - \frac{\partial F_R}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_\phi \\ \operatorname{div}_k \mathbf{F} &= \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_R)}{\partial R} + \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{ik}{R} \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial(RF_R)}{\partial R} + \frac{\partial F_Z}{\partial Z} + \frac{ik}{R} F_\phi. \quad (4.3) \end{aligned}$$

On prend les deux hypothèses suivantes :

- i) le champ  $\mathbf{B}_0$  est parallèle à  $\mathbf{e}_\phi$
- ii) les fonctions  $\nu_c$ ,  $\gamma_e$ ,  $\omega_{cs}$  et  $\omega_{ps}$  sont indépendantes de  $\phi$ .

L'hypothèse *i*) est une simplification de la réalité technique (§2.1.2), mais elle simplifie grandement la modélisation. Elle implique en particulier que  $\mathbf{B}_0$  est indépendant de  $\phi$ , puisque  $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$ . L'hypothèse *ii*) provient du fait que la diffusion des particules est beaucoup plus rapide dans la direction du champ  $\mathbf{B}_0$  que dans les directions perpendiculaires. En conséquence, la densité des particules est indépendante de  $\phi$ . Les paramètres physiques définis au chapitre 7, et la matrice  $\mathbf{K}$ , sont donc indépendants de  $\phi$ . On a alors

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{K}(R, Z) \mathbf{w}_k(R, Z) e^{ik\phi}. \quad (4.4)$$

### 4.3 Réduction de dimension

Pour une solution  $\mathbf{E}(R, Z, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_k(R, Z) e^{ik\phi}$  de (2.40)-(2.43), les coefficients de Fourier satisfont des équations similaires au système d'équations initiales (2.40)-(2.43) de par leur linéarité ainsi que par l'égalité (4.4) :

$$\mathbf{rot}_k \mathbf{rot}_k \mathbf{E}_k - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_k = \mathbf{0} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_k) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{E}_k \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_C, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{rot}_k \mathbf{E}_k \times \mathbf{n} = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_{s,k} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_A. \quad (4.8)$$

où  $\tilde{\Gamma}_C$  et  $\tilde{\Gamma}_A$  sont respectivement les intersections de  $\Gamma_C$  et  $\Gamma_A$  avec le demi-plan méridien. De la même manière, on peut montrer que ces coefficients sont solutions d'une formulation semblable à la FVMA. Pour cela, on introduit l'espace suivant :

**Définition 4.2.** *Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , on considère l'espace à poids*

$$\mathbf{L}_\tau^2(\tilde{\Omega}) = \{ \mathbf{w} \text{ mesurable sur } \tilde{\Omega} \text{ tel que } \|\mathbf{w}\|_{0,\tau}^2 = \int \int_{\tilde{\Omega}} |\mathbf{w}(R, Z)|^2 R^\tau dR dZ < \infty \}.$$

Pour tout mode de Fourier  $k$ , l'espace  $\mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega})$  est alors l'espace des coefficients de Fourier qui sont  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  i.e.  $(\mathbf{u}_k e^{ik\phi} \mid \mathbf{v}_k e^{ik\phi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{u}_k \mid \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega})}$ .

**Remarque 4.3.** *Dans notre cas où  $\tilde{\Omega}$  est la section d'un tore, pour tout  $(R, Z) \in \tilde{\Omega}$ , il existe  $R_{\min} > 0$  tel que  $R \geq R_{\min}$ . Ceci implique que  $\mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega})$  est algébriquement et topologiquement égal à  $\mathbf{L}^2(\tilde{\Omega})$  mais les normes sont différentes.*

On a alors le résultat suivant [24] :

**Proposition 4.4.** *Soit l'espace défini par*

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{N,k}^C(\underline{\mathbf{K}}, \tilde{\Omega}) = & \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega}) \text{ tel que } \mathbf{rot}_k \mathbf{u} \in \mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega}) \text{ et } \operatorname{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_1^2(\tilde{\Omega}) \\ & \text{ainsi que } \mathbf{u} \times \mathbf{n}_{|\tilde{\Gamma}_C} = 0 \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

*muni de la norme*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}, \underline{\mathbf{K}}, k}^2 := \|\mathbf{rot}_k \mathbf{u}\|_{0,1}^2 + \|\operatorname{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u})\|_{0,1}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,1}^2.$$

*Le champ  $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  si et seulement si,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , ses coefficients de Fourier  $\mathbf{E}_k \in \mathbf{X}_{N,k}^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et la somme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{E}_k\|_{\mathbf{X}, \underline{\mathbf{K}}, k}^2$  est finie.*

**Remarque 4.5.** *Pour la même raison que la remarque précédente, l'espace  $\mathbf{X}_{N,k}^C(\mathbf{K}, \tilde{\Omega})$  ne dépend pas du mode  $k$ . Il existe un isomorphisme entre  $\mathbf{X}_{N,k}^C(\mathbf{K}, \tilde{\Omega})$  et le sous espace de  $\mathbf{X}_N^C(\mathbf{K}, \Omega)$  formé des champs n'ayant qu'un seul coefficient de Fourier non nul (celui d'indice  $k$ ).*

On peut maintenant affirmer que la linéarité des équations de la FVMA (2.61)-(2.62), ajoutée à cela l'orthogonalité entre les différents modes de Fourier pour le produit scalaire  $L^2(\Omega)$  entraînent que les coefficients de Fourier  $\mathbf{E}_k$  de  $\mathbf{E}$  sont solutions d'une formulation similaire à la FVMA, utilisant les opérateurs  $\mathbf{rot}_k$  et  $\mathbf{div}_k$ . Cette formulation s'écrit alors

Trouver  $(\mathbf{E}_k, p_k) \in \mathbf{X}_{N,k}^C(\mathbf{K}, \tilde{\Omega}) \times L_1^2(\tilde{\Omega})$  tel que pour tout  $s \in \mathbb{C}$

$$a_{s,k}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b_k(\mathbf{F}, p)} = l_k(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_{N,k}^C(\mathbf{K}, \tilde{\Omega}), \quad (4.10)$$

$$b_k(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L_1^2(\tilde{\Omega}), \quad (4.11)$$

avec, en notant également  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire  $L_1^2(\tilde{\Omega})$ ,

$$\begin{aligned} a_{s,k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= (\mathbf{rot}_k \mathbf{u} | \mathbf{rot}_k \mathbf{v}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{K} \mathbf{u} | \mathbf{v}) + s(\mathbf{div}_k(\mathbf{K} \mathbf{u}) | \mathbf{div}_k(\mathbf{K} \mathbf{v})), \\ b_k(\mathbf{v}, q) &:= (\mathbf{div}_k(\mathbf{K} \mathbf{v}) | q), \\ l_k(\mathbf{v}) &:= \omega \mu_0 \langle \mathbf{j}_{s,k}, \mathbf{v}_\top \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

On a donc bien une réduction en 2D des équations (2.61)-(2.62).

On remarque enfin, pour un  $k \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $(R, Z, \phi) \mapsto \mathbf{E}_k(R, Z)e^{ik\phi}$  définie dans  $\Omega$  est solution (2.40) avec une source  $\mathbf{j}_{s,k}(R, Z)e^{ik\phi}$ . De même, la fonction

$$(R, Z, \phi) \mapsto (\mathbf{E}_k(R, Z)e^{ik\phi}, p_k(R, Z)e^{ik\phi})$$

est solution du problème avec condition naturelle (2.61)-(2.62). Il en va de même pour les problèmes avec condition essentielle (2.72)-(2.73). Ce qui permet d'appliquer les résultats 3D (existence, unicité, équivalence des formulations) à nos nouveaux problèmes 2D.

# Chapitre 5

## Discrétisation du problème

L'objectif de cette partie est de formuler une méthode d'éléments finis adaptée à la résolution de l'EDP modale (4.5)-(4.8). La formulation variationnelle (4.10)-(4.11) est discrétisée en utilisant des éléments finis de type Taylor-Hood.

### 5.1 Eléments finis de Taylor-Hood

La méthode des éléments finis est un outil de discrétisation, qui consiste à découper le domaine  $\bar{\Omega}$  en un nombre fini d'éléments, des triangles dans notre cas. Elle consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie engendré par des fonctions de base. Pour simplifier, on approche  $\bar{\Omega}$  par un polygone. Pour définir les espaces fonctionnels discrets, on considère une triangulation  $\mathcal{T}_{2h}$  de  $\bar{\Omega}$  à l'aide de triangles fermés  $T$ , de diamètre inférieur ou égal à  $2h$  avec  $h > 0$ , telle que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{2h}} T.$$

Le maillage est supposé conforme dans le sens où pour deux éléments distincts  $T, T' \in \mathcal{T}_{2h}$ , l'intersection  $\bar{T} \cap \bar{T}'$  est soit vide, une arête ou un sommet (de  $T$  et  $T'$ ). Pour discrétiser la FVMA, on considère un deuxième niveau de discrétisation obtenue à partir de  $\mathcal{T}_{2h}$  : on note  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme obtenue par décomposition de chaque triangle  $T_{2h}$  en quatre sous-triangles égaux. On note  $\mathbb{P}_n$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .



On considère alors les éléments finis  $\mathbb{P}_2$ -iso- $\mathbb{P}_1$  introduits par Taylor et Hood dans [54].

**Définition 5.1.** *On appelle élément fini de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_2$ -iso- $\mathbb{P}_1$  lorsque le multiplicateur de Lagrange, évalué sur le maillage grossier  $\mathcal{T}_{2h}$ , est approché par les éléments finis de Lagrange continus en  $\mathbb{P}_1$  sur chaque triangle grossier :*

$$V^{2h} = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_{2h}\},$$

*et les composantes du champ électrique, évaluées sur le maillage fin  $\mathcal{T}_h$ , sont aussi approchées par les éléments finis de Lagrange continus en  $\mathbb{P}_1$  sur chaque triangle fin :*

$$\mathbf{Y}^h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}^0(\bar{\Omega}), \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

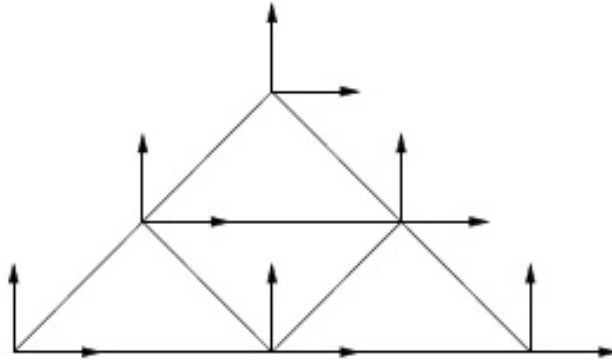


FIGURE 5.1 – élément fini de Taylor-Hood

Les nœuds sur  $\mathcal{T}_h$  (respectivement  $\mathcal{T}_{2h}$ ) sont notés  $\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)$  (respectivement  $\mathcal{N}(\mathcal{T}_{2h})$ ).

## 5.2 Formulation dans les espaces discrets

On note  $\mathbf{X}_N^h$  et  $\mathbf{X}_{N,C}^h$  les espaces  $\mathbf{Y}^h \cap \mathbf{X}_{N,k}(\underline{\mathbf{K}}, \tilde{\Omega})$  et  $\mathbf{Y}^h \cap \mathbf{X}_{N,k}^C(\underline{\mathbf{K}}, \tilde{\Omega})$ , respectivement. Dans le même registre que la remarque 4.5, les espaces  $\mathbf{X}_N^h$  et  $\mathbf{X}_{N,C}^h$  sont isomorphes, respectivement, à des sous espaces de dimension finie

de  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et  $\mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Par analogie avec le cas  $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{I}}$  démontré dans [22], on suppose que les paires d'espaces  $(\mathbf{X}_N^h, Q^{2h})$  et  $(\mathbf{X}_{N,C}^h, Q^{2h})$  vérifient la version discrète du théorème 3.2 de Babuska-Brezzi [15] :

**Théorème 5.2.** *Soient  $\mathbf{W}_h$  et  $Q_h$  respectivement inclus dans  $\mathbf{W}$  et  $Q$ . On considère le problème suivant :*

*Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{W}_h \times Q_h$  tel que*

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \overline{b(\mathbf{v}_h, p_h)} = L(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h, \quad (5.1)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = l(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (5.2)$$

*avec  $a, b, L$  et  $l$  vérifiant les hypothèses du théorème 3.2. On pose  $\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h; b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}$ . Si*

*(i) la forme bilinéaire  $a$  est  $\mathbf{V}_h$ -coercitive, i.e. il existe une constante  $\alpha^* > 0$  indépendant de  $h$  telle que*

$$|a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)| \geq \alpha^* \|\mathbf{v}_h\|_W \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (5.3)$$

*(ii) la forme bilinéaire  $b$  satisfait la condition inf-sup discrète, i.e. il existe une constante  $\delta^* > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_W \|q_h\|_Q} \geq \delta^* \quad (5.4)$$

*alors le problème (5.1)-(5.2) a une solution et une seule et on a l'existence d'une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  mais dépendant de  $\alpha^*$  et  $\delta^*$  telle que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_W + \|p - p_h\|_Q \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_W + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right) \quad (5.5)$$

*où  $(\mathbf{u}, p)$  est la solution au problème (3.11)-(3.12).*

**Remarque 5.3.** *D'après [24], il existe une dépendance de la condition inf-sup discrète en  $k$  le mode de Fourier. On négligera ce problème dans cette monographie car, en pratique,  $k$  est fixé par le second membre et ne tend pas vers 0.*

Le paragraphe suivant concerne l'écriture matricielle de la formulation variationnelle dans l'espace discret sans condition limite. La condition au bord sera traitée à la fin du chapitre.

### 5.3 Ecriture matricielle

Soit  $\mathbf{X}^h = \mathbf{Y}^h$ , on a  $\mathbf{X}^h \subset \mathbf{X}_k(\underline{\mathbf{K}}, \tilde{\Omega})$  isomorphe à un sous espace de dimension finie de  $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . On note  $N_h := |\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)|$  et donc  $\dim \mathbf{X}^h = 3N_h$ . L'espace  $\mathbf{X}^h$  admet une base de vecteur nodale

$$\Phi = \{\phi_1^1, \phi_1^2, \phi_1^3, \dots, \phi_{N_h}^1, \phi_{N_h}^2, \phi_{N_h}^3\}, \quad (5.6)$$

dont les *fonctions de forme* sont définies par

$$\phi_i^m := \varphi_i \mathbf{e}_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad \varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_h. \quad (5.7)$$

Ici  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  est la base  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_\phi\}$ .

On considère de même  $V^{2h} \subset \mathbb{P}_1^{2h}(\Omega)$  l'espace de dimension finie associé à  $L^2(\Omega)$  avec  $\dim V^{2h} = N_{2h}$  et une base nodale

$$\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_{N_{2h}}\}, \quad \psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_{2h}. \quad (5.8)$$

Un vecteur  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{X}^h$  s'écrit alors

$$\mathbf{u}^h = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{N_h} u_i^l \phi_i^l = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^{N_h} u_i^l \varphi_i \right) \mathbf{e}_l. \quad (5.9)$$

On notera dans la suite la coordonnée de  $\mathbf{u}^h$  selon  $\mathbf{e}_l$  comme suit  $u_l^h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i^l \varphi_i$ . De même, une fonction  $p^{2h} \in V^{2h}$  s'écrit

$$p^{2h} = \sum_{i=1}^{N_{2h}} p_i \psi_i. \quad (5.10)$$

#### FVMA discrète

La version discrète de la FVMA modale (4.10)-(4.11) est donnée par

trouver  $(\mathbf{E}^h, p^{2h}) \in \mathbf{X}_{N,C}^h \times V^{2h}$  tel que

$$a_{s,k}(\mathbf{E}^h, \mathbf{F}) + \overline{b_k(\mathbf{F}, p^{2h})} = l_k(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_{N,C}^h, \quad (5.11)$$

$$b_k(\mathbf{E}^h, q) = \mathbf{0} \quad \forall q \in V^{2h} \quad (5.12)$$

avec

$$\mathbf{F} = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{N_h} F_j^l \phi_j^l = \sum_{l=1}^3 F_l^h \mathbf{e}_l, \quad q = \sum_{j=1}^{N_{2h}} q_j \psi_j. \quad (5.13)$$

Les équations (5.11)–(5.12) s'écrivent

$$\sum_{l,m} (F_l^h)^H \underline{\mathbf{A}}_s^{lm} E_m^h + \sum_l (F_l^h)^H (\underline{\mathbf{B}}^l)^H p = \sum_l (\mathbf{F}_l^h)^H \mathbf{f}^l$$

$$\sum_l q^H \underline{\mathbf{B}}^l E^l = \mathbf{0}$$

avec

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{A}}_s^{lm})_{ij} &:= a_{s,k}(\phi_j^m, \phi_i^l), \quad i, j = 1, \dots, N_h; \quad l, m = 1, 2, 3, \\ (\underline{\mathbf{B}}^l)_{ij} &:= b_k(\phi_j^l, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N_{2h}; \quad j = 1, \dots, N_h; \quad l = 1, 2, 3, \\ (\mathbf{f}^l)_i &:= l_k(\phi_i^l), \quad i = 1, \dots, N_h; \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

### Ecriture matricielle

On obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^h \\ \mathbf{F}_2^h \\ \mathbf{F}_3^h \\ q \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s^{11} & \underline{\mathbf{A}}_s^{12} & \underline{\mathbf{A}}_s^{13} & \underline{\mathbf{B}}^{1H} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{21} & \underline{\mathbf{A}}_s^{22} & \underline{\mathbf{A}}_s^{23} & \underline{\mathbf{B}}^{2H} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{31} & \underline{\mathbf{A}}_s^{32} & \underline{\mathbf{A}}_s^{33} & \underline{\mathbf{B}}^{3H} \\ \underline{\mathbf{B}}^1 & \underline{\mathbf{B}}^2 & \underline{\mathbf{B}}^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^h \\ E_2^h \\ E_3^h \\ p \end{pmatrix} = \quad (5.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^h \\ \mathbf{F}_2^h \\ \mathbf{F}_3^h \\ q \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

pour tout  $(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2, \mathbf{F}^3, \mathbf{q}) \in \mathbb{C}^{3N_h + N_{2h}}$ . Enfin, il nous reste à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

avec

$$\underline{\mathbf{A}}_s := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s^{11} & \underline{\mathbf{A}}_s^{12} & \underline{\mathbf{A}}_s^{13} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{21} & \underline{\mathbf{A}}_s^{22} & \underline{\mathbf{A}}_s^{23} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{31} & \underline{\mathbf{A}}_s^{32} & \underline{\mathbf{A}}_s^{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3N_h \times 3N_h}, \quad (5.17)$$

$$\underline{\mathbf{B}} := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{B}}^1 & \underline{\mathbf{B}}^2 & \underline{\mathbf{B}}^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{2h} \times 3N_h}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ u_3^h \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3N_h}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3N_h}. \quad (5.20)$$

## 5.4 Formule de quadrature

Pour la construction des matrices du systèmes (5.16), on évalue les intégrales comme suit

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T f \, d\mathbf{x}, \quad \int_{\Gamma} f \, d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E f \, d\boldsymbol{\sigma}, \quad (5.21)$$

où  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des triangles dans  $\Omega$  et  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes sur  $\Gamma$ . Comme seules quelques fonctions de base sont  $\neq 0$  sur  $T$  (respectivement sur  $E$ ) pour chaque élément, on va obtenir des matrices dites *élémentaires* et des vecteurs *élémentaires*  $\underline{\mathbf{R}}_T^{mn}$ ,  $\underline{\mathbf{M}}_T^{mn}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}_T^{mn}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}_T^n$ , pour chaque élément  $T \in \mathcal{T}$  et  $\mathbf{f}_E^m$ ,  $\mathbf{h}_E^m$  pour chaque  $E \in \mathcal{E}$ . Ensuite, plutôt que de faire tous

les calculs pour chaque élément, nous allons les effectuer sur une maille de référence  $\widehat{T} := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1, \xi_2 \geq 0, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$  pour les triangles et  $\widehat{E} := [0, 1]$  pour les arêtes. Nous transportons les informations sur l'ensemble des mailles par les transformations affines suivantes :

$$\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}) := \mathbf{b}_T + \underline{\mathbf{B}}_T \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widehat{T}, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{b}_T := \mathbf{P}_1^T, \quad \underline{\mathbf{B}}_T := \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2^T - \mathbf{P}_1^T & \mathbf{P}_3^T - \mathbf{P}_1^T \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{F}_E(\xi) := \mathbf{b}_E + \mathbf{B}_E \xi, \quad \xi \in \widehat{E}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{b}_E := \mathbf{P}_1^E, \quad \mathbf{B}_E := \mathbf{P}_2^E - \mathbf{P}_1^E, \quad (5.25)$$

avec  $\mathbf{P}_1^T, \mathbf{P}_2^T, \mathbf{P}_3^T$  et  $\mathbf{P}_1^E, \mathbf{P}_2^E$  les sommets de  $T$  et les extrémités de  $E$ , respectivement. Les intégrales se transforment alors de la façon suivante

$$\int_T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\widehat{T}} (f \circ \mathbf{F}_T)(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (5.26)$$

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathbf{B}_E| \int_{\widehat{E}} (f \circ \mathbf{F}_E)(\xi) d\xi. \quad (5.27)$$

Enfin on va approcher les intégrales d'une fonction par une valeur calculée à l'aide de somme finies i.e.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

où les  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, n$  sont appelés les **nœuds** ou **points** d'intégration. et les  $\omega_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  les **poïds** de la formule de quadrature.

### Formule de Newton-Cotes

Soit  $f$  une fonction connue à des points équidistants  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ , on note  $L(x)$  l'interpolation lagrangienne de  $f$  par les points  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \sum_{i=0}^n l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) \end{aligned}$$

avec  $\omega_i = \int_a^b \sum_{i=0}^n l_i(x)$  où les  $l_i$  sont les polynômes de Lagrange [27].  
 Sur l'arête de référence  $\widehat{E}$ , on obtient

$$\int_{\widehat{E}} f(\xi) d\xi \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{K_E} w_l f(\eta_l), \quad \eta_l := \frac{1}{2}\xi_l + \frac{1}{2}, \quad (5.28)$$

avec les données suivantes

$$K_E = 2, \quad w_1 = w_2 = 1, \quad \xi_2 = -\xi_1 = 1. \quad (5.29)$$

Sur le triangle de référence  $\widehat{T}$ , on a

$$\int_{\widehat{T}} f(\xi) d\xi \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{K_T} w_l f(\xi_l), \quad (5.30)$$

de données

$$K_T = 3, \quad w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}, \quad (5.31)$$

et

$$\text{soit } \xi_1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad \xi_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad \xi_3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad (5.32)$$

$$\text{ou } \xi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \xi_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \xi_3 = \left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (5.33)$$

## 5.5 Structure des matrices du schéma

### 5.5.1 La matrice $\underline{\mathbf{A}}_s$

On rappelle que la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  est une matrice  $3N_h \times 3N_h$ , formée de blocs  $3 \times 3$   $\underline{\mathbf{A}}_s^{ij}$  associés aux sommets de  $\mathcal{T}_h$ , qui se décompose en somme de trois matrices :

$$\underline{\mathbf{A}}_s := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s^{11} & \underline{\mathbf{A}}_s^{12} & \underline{\mathbf{A}}_s^{13} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{21} & \underline{\mathbf{A}}_s^{22} & \underline{\mathbf{A}}_s^{23} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{31} & \underline{\mathbf{A}}_s^{32} & \underline{\mathbf{A}}_s^{33} \end{pmatrix} =: \underline{\mathbf{R}} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{M}} + s \underline{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{3N_h \times 3N_h}$$

avec

$$(\underline{\mathbf{R}}^{mn})_{ij} = (\mathbf{rot}_k \phi_j^n \mid \mathbf{rot}_k \phi_i^m), \quad (5.34)$$

$$(\underline{\mathbf{M}}^{mn})_{ij} = (\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n \mid \phi_i^m), \quad (5.35)$$

$$(\underline{\mathbf{D}}^{mn})_{ij} = (\mathbf{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n) \mid \mathbf{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \phi_i^m)). \quad (5.36)$$

En considérant les formulations des opérateurs en coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_k \phi_j^n &= \left( \delta_{n\phi} \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} - \delta_{nZ} \frac{\imath k}{R} \phi_j \right) \mathbf{e}_R + \left( \delta_{nR} \frac{\imath k}{R} \phi_j - \delta_{n\phi} \frac{1}{R} \frac{\partial(R\phi_j)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_Z + \\ &+ \left( \delta_{nZ} \frac{\partial \phi_j}{\partial R} - \delta_{nR} \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{div}_k(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n) = \frac{1}{R} \frac{\partial(R \underline{\mathbf{K}}_{Rn} \phi_j)}{\partial R} + \frac{\partial(\underline{\mathbf{K}}_{Zn} \phi_j)}{\partial Z} + \frac{\imath k}{R} \underline{\mathbf{K}}_{\phi n} \phi_j. \quad (5.38)$$



Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}^{11})_{ij} &= \int_{\Omega} \left( \frac{k^2}{R^2} \phi_j \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} \frac{\partial \phi_i}{\partial Z} \right) R dR dZ, \\
(\underline{\mathbf{R}}^{12})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial R} \frac{\partial \phi_i}{\partial Z} R dR dZ = (\underline{\mathbf{R}}^{21})_{ji}, \\
(\underline{\mathbf{R}}^{13})_{ij} &= \imath k \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} \phi_j \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial R} \phi_i \right) dR dZ = -(\underline{\mathbf{R}}^{31})_{ji}, \\
(\underline{\mathbf{R}}^{22})_{ij} &= \int_{\Omega} \left( \frac{k^2}{R^2} \phi_j \phi_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial R} \frac{\partial \phi_i}{\partial R} \right) R dR dZ, \\
(\underline{\mathbf{R}}^{23})_{ij} &= \imath k \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} \phi_i dR dZ = -(\underline{\mathbf{R}}^{32})_{ji}, \\
(\underline{\mathbf{R}}^{33})_{ij} &= \int_{\Omega} \left( R \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + \frac{1}{R} \phi_j \phi_i + \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial R} + \frac{\partial \phi_j}{\partial R} \phi_i \right) dR dZ, \\
(\underline{\mathbf{M}}^{mn})_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \underline{K}_{mn} \phi_j R dR dZ, \\
(\underline{\mathbf{D}}^{mn})_{ij} &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} \underline{K}_{Rn} \phi_j + \frac{\partial \underline{K}_{Rn}}{\partial R} \phi_j + \underline{K}_{Rn} \frac{\partial \phi_j}{\partial R} + \frac{\partial \underline{K}_{Zn}}{\partial Z} \phi_j + \underline{K}_{Zn} \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} + \frac{\imath k}{R} \underline{K}_{\phi n} \phi_j \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{R} \overline{\underline{K}}_{Rm} \phi_i + \frac{\partial \overline{\underline{K}}_{Rm}}{\partial R} \phi_i + \overline{\underline{K}}_{Rm} \frac{\partial \phi_i}{\partial R} + \frac{\partial \overline{\underline{K}}_{Zm}}{\partial Z} \phi_i + \overline{\underline{K}}_{Zm} \frac{\partial \phi_i}{\partial Z} - \frac{\imath k}{R} \overline{\underline{K}}_{\phi m} \phi_i \right) \\
&\quad R dR dZ.
\end{aligned}$$

En notant  $\{N_1, N_2, \dots\}$  les fonctions de bases de référence avec  $N_j^T \circ \mathbf{F}_T = N_j$  et  $\mathbf{grad} f \circ \mathbf{F}_T = \underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \mathbf{grad}(f \circ \mathbf{F}_T)$ , l'équation (5.26) donne les intégrales suivants

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{11})_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} \left( \frac{k^2 N_j(\boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 \right) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{12})_{ij} &= -|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

$$= (\underline{\mathbf{R}}_T^{21})_{ji}, \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{13})_{ij} &= ik |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} \left( \frac{N_j(\boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 N_i(\boldsymbol{\xi}) \right) d\boldsymbol{\xi} \tag{5.42}
\end{aligned}$$

$$= -(\underline{\mathbf{R}}_T^{31})_{ji}, \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{22})_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} \left( \frac{k^2 N_j(\boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1 \right) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi}, \tag{5.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{23})_{ij} &= ik |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 N_i(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = -(\underline{\mathbf{R}}_T^{32})_{ji}, \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{33})_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} \left( (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi})) \cdot (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi})) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{N_j(\boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} + N_j(\boldsymbol{\xi}) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1 + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 N_i(\boldsymbol{\xi}) \right) d\boldsymbol{\xi}, \tag{5.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{M}}_T^{mn})_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \underline{K}_{mn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi}, \tag{5.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{D}}_T^{mn})_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_T)| \int_{\hat{T}} \left( \frac{\underline{K}_{Rn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} + \frac{\partial \underline{K}_{Rn}}{\partial R}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) + \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{Rn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 + \frac{\partial \underline{K}_{Zn}}{\partial Z}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) + \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{Zn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 + \frac{ik \underline{K}_{\phi n}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\overline{\underline{K}_{Rm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_i(\boldsymbol{\xi})}}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} + \frac{\partial \overline{\underline{K}_{Rm}}}{\partial R}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_i(\boldsymbol{\xi}) + \right. \\
&\quad \left. + \overline{\underline{K}_{Rm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1} + \frac{\partial \overline{\underline{K}_{Zm}}}{\partial Z}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) N_i(\boldsymbol{\xi}) + \right. \\
&\quad \left. + \overline{\underline{K}_{Zm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2} - \frac{ik \overline{\underline{K}_{\phi m}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{x})) N_i(\boldsymbol{\xi})}}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1} \right) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi}. \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Finalement, on utilise la formule de quadrature (5.30) et on obtient une approximation des matrices élémentaires

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{11})_{ij} &\simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \left( \underbrace{k^2 \sum_{l=1}^{K_T} w_l \frac{N_j(\boldsymbol{\xi}_l) N_i(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1}}_{=:S_{1ij}} + \right. \\
&\quad \left. + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_2 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_2 \underbrace{\sum_{l=1}^{K_T} w_l (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1}_{=:S_2} \right), \quad (5.49)
\end{aligned}$$

$$(\underline{\mathbf{R}}_T^{12})_{ij} \simeq -\frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_2 S_2 \simeq (\underline{\mathbf{R}}_T^{21})_{ji}, \quad (5.50)$$

$$(\underline{\mathbf{R}}_T^{13})_{ij} \simeq ik \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \left( S_{1ij} + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 \underbrace{\sum_{l=1}^{K_T} w_l N_i(\boldsymbol{\xi}_l)}_{=:S_{3i}} \right) \quad (5.51)$$

$$\simeq -(\underline{\mathbf{R}}_T^{31})_{ji}, \quad (5.52)$$

$$(\underline{\mathbf{R}}_T^{22})_{ij} \simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \left( k^2 S_{1ij} + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_1 S_2 \right), \quad (5.53)$$

$$(\underline{\mathbf{R}}_T^{23})_{ij} \simeq ik \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_2 S_{3i} \simeq -(\underline{\mathbf{R}}_T^{32})_{ji} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{R}}_T^{33})_{ij} &\simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \left( (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j) \cdot (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i) S_2 + \right. \\
&\quad \left. + S_{1ij} + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_1 S_{3j} + (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 S_{3i} \right), \quad (5.55)
\end{aligned}$$

$$(\underline{\mathbf{M}}_T^{mn})_{ij} \simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \sum_{l=1}^{K_T} w_l N_i(\boldsymbol{\xi}_l) \underline{\mathbf{K}}_{mn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{D}}_T^{mn})_{ij} &\simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_T)|}{2} \sum_{l=1}^{K_T} w_l \left( \frac{\underline{K}_{Rn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1} + \frac{\partial \underline{K}_{Rn}}{\partial R}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l) + \right. \\
&\quad + \underline{K}_{Rn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 + \frac{\partial \underline{K}_{Zn}}{\partial Z}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l) + \\
&\quad \left. + \underline{K}_{Zn}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_2 + ik \frac{\underline{K}_{\phi n}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{\overline{\underline{K}_{Rm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))} N_i(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1} + \frac{\partial \overline{\underline{K}_{Rm}}}{\partial R}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_i(\boldsymbol{\xi}_l) + \right. \\
&\quad + \overline{\underline{K}_{Rm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_1 + \frac{\partial \overline{\underline{K}_{Zm}}}{\partial Z}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l)) N_i(\boldsymbol{\xi}_l) + \\
&\quad \left. + \overline{\underline{K}_{Zm}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))} (\underline{\mathbf{B}}_T^{-\top} \widehat{\nabla} N_i)_2 - ik \frac{\overline{\underline{K}_{\phi m}(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))} N_i(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1} \right) (\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\xi}_l))_1.
\end{aligned}$$

### 5.5.2 La matrice $\mathbf{B}$

On effectue le même travail que précédemment.

On rappelle que  $\underline{\mathbf{B}}$  est une matrice  $N_{2h} \times 3N_h$

$$\underline{\mathbf{B}} := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{B}}^1 & \underline{\mathbf{B}}^2 & \underline{\mathbf{B}}^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{2h} \times 3N_h}, \quad (5.57)$$

avec

$$(\underline{\mathbf{B}}^n)_{ij} = (\operatorname{div}_k(\underline{\mathbf{K}}\phi_j^n), \psi_i)_{0,\Omega}, \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} \underline{K}_{Rn} \phi_j + \frac{\partial \underline{K}_{Rn}}{\partial R} \phi_j + \underline{K}_{Rn} \frac{\partial \phi_j}{\partial R} + \frac{\partial \underline{K}_{Zn}}{\partial Z} \phi_j + \underline{K}_{Zn} \frac{\partial \phi_j}{\partial Z} + \frac{ik}{R} \underline{K}_{\phi n} \phi_j \right) \\
&\quad \cdot \psi_i R dR dZ, \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Ce qui, avec les fonctions de bases et dans l'élément de référence, nous donne

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{B}}_{T_h}^n)_{ij} &= |\det(\underline{\mathbf{B}}_{T_h})| \int_{\hat{T}} \left( \frac{K_{Rn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}))_1} + \frac{\partial K_{Rn}}{\partial R}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) + \right. \\
&\quad + K_{Rn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_{T_h}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 + \frac{\partial K_{Zn}}{\partial Z}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) + \\
&\quad \left. + K_{Zn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) (\underline{\mathbf{B}}_{T_h}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 + \frac{\imath k K_{\phi n}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi})}{(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}))_1} \right) (5.60) \\
&\quad \cdot N_i^{T_{2h}}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}))_1 d\boldsymbol{\xi} \\
&\simeq \frac{|\det(\underline{\mathbf{B}}_{T_h})|}{2} \sum_{l=1}^{K_{T_h}} w_l \left( \frac{K_{Rn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l))_1} + \right. \\
&\quad + \frac{\partial K_{Rn}}{\partial R}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l) + K_{Rn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) (\underline{\mathbf{B}}_{T_h}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_1 + \\
&\quad + \frac{\partial K_{Zn}}{\partial Z}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l) + K_{Zn}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) (\underline{\mathbf{B}}_{T_h}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j)_2 + \\
&\quad \left. + \imath k \frac{K_{\phi n}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) N_j(\boldsymbol{\xi}_l)}{(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l))_1} \right) N_i^{T_{2h}}(\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l)) (\mathbf{F}_{T_h}(\boldsymbol{\xi}_l))_1. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

### 5.5.3 Le vecteur $\mathbf{f}$ (CL naturelle)

On rappelle que

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3N_h}$$

avec

$$(\mathbf{f}^m)_i = \imath \omega \mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \phi_{\top i}^m \rangle_{\Gamma_A} \quad (5.62)$$

d'où

$$(\mathbf{f}^1)_i = \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i (j_{sR}n_Z^2 - j_{sZ}n_Rn_Z) R dRdZ \quad (5.63)$$

$$(\mathbf{f}^2)_i = \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i (j_{sR}n_Zn_R - j_{sZ}n_R^2) R dRdZ \quad (5.64)$$

$$(\mathbf{f}^3)_i = \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i j_{s\phi} (n_R^2 + n_Z^2) R dRdZ. \quad (5.65)$$

Ce qui, avec les fonctions de bases et dans l'élément de référence, nous donne

$$(\mathbf{f}_E^1)_i = \frac{\omega\mu_0|B_E|}{2} [n_{E,Z}^2 S_i^R - n_{E,R}n_{E,Z} S_i^Z] \quad (5.66)$$

$$(\mathbf{f}_E^2)_i = \frac{\omega\mu_0|B_E|}{2} [n_{E,Z}n_{E,R} S_i^R - n_{E,R}^2 S_i^Z] \quad (5.67)$$

$$(\mathbf{f}_E^3)_i = \frac{\omega\mu_0|B_E|}{2} (n_{E,R}^2 + n_{E,Z}^2) S_i^\phi. \quad (5.68)$$

## 5.6 Elimination de la condition essentielle

La condition au bord  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_C$  entraîne une matrice de masse assez complexe à inverser. L'idée serait alors d'éliminer des degrés de liberté en faisant un changement de base locale sur  $\Gamma_C$  [39].

### 5.6.1 La base locale

L'idée naturelle serait de mettre la normale  $\mathbf{n}$  dans la nouvelle base et de fixer les deux autres composantes. On prend alors comme nouvelle base, la base orthonormée directe  $B = \{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \underbrace{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}}_{=\mathbf{e}_\phi}\}$  avec  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur unitaire

tangent à  $\Gamma$ . Donc  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{h}$  implique

$$\begin{pmatrix} h_B^1 \\ h_B^2 \\ h_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_B^1 \\ E_B^2 \\ E_B^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_B^3 \\ -E_B^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient au finale une "quasi" condition de Dirichlet, à savoir

$$\begin{pmatrix} E_B^2 \\ E_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_B^3 \\ h_B^2 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

### 5.6.2 Discrétisation de l'espace avec conditions aux limites essentielles

Soit  $\mathbf{D}$  (respectivement  $\mathbf{N}$ ) l'ensemble des points de discrétisation du bord avec condition de Dirichlet  $\Gamma_D$  (respectivement  $\Gamma_N$  ceux du bord avec condition de Neumann) et  $N_D = |\mathbf{D}|$  (respectivement  $N_N = |\mathbf{N}|$ ). On note  $N_{\partial\Omega} = N_D + N_N$ .

**Remarque 5.4.** *Pour la modélisation avec condition naturelle (2.40)-(2.43), on a  $\Gamma_D = \Gamma_C$  et  $\Gamma_N = \Gamma_A$ . Et pour la modélisation avec condition essentielle (2.50)-(2.52), on a  $\Gamma_D = \Gamma$  et  $\Gamma_N = \emptyset$ .*

On ordonne alors les sommets du maillage comme suit : intérieurs (notés  $\omega$ ),  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{D}$ . On décompose alors  $\mathbf{I}_\Omega = \mathbf{I}_\omega \cup \mathbf{I}_N \cup \mathbf{I}_D$  avec

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\omega &= \{1, \dots, N_\omega\} \\ \mathbf{I}_N &= \{N_{\omega_h} + 1, \dots, N_\omega + N_N\} \\ \mathbf{I}_D &= \{N_{\omega_h} + N_{hN} + 1, \dots, N_\omega + N_N + N_D\}. \end{aligned}$$

On utilisera donc deux types de bases selon l'emplacement des sommets notés  $M_i$  :

- $\forall i \in \mathbf{I}_\omega \cup \mathbf{I}_N$ ,  $M_i \in \omega \cup \mathbf{N}$ , on travaille dans la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

- $\forall i \in \mathbf{I}_D, M_i \in \mathbf{D}$ , on travaille dans la base locale  $B_i = \{\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i\}$  (que l'on notera aussi  $\{\mathbf{b}_i^1, \mathbf{b}_i^2, \mathbf{b}_i^3\}$ ).

Comme  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{X}_N^h$  ou  $\mathbf{X}_{N,C}^h$ , on a d'après (5.69)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h &= \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{N_h} u_i^l(M_i) \boldsymbol{\phi}_i^l = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{N_h} u_i^l(M_i) \varphi_i \mathbf{e}_l \\
&= \sum_{l=1}^3 \sum_{i \in \mathbf{I}_\omega \cap \mathbf{I}_N} u_i^l(M_i) \varphi_i \mathbf{e}_l + \sum_{l=1}^3 \sum_{i \in \mathbf{I}_D} u_i^l(M_i) \varphi_i \mathbf{e}_l \\
&= \sum_{l=1}^3 \left[ \sum_{i \in \mathbf{I}_\omega \cap \mathbf{I}_N} u_i^l(M_i) \varphi_i \mathbf{e}_l + \sum_{i \in \mathbf{I}_D} u_{B_i}^l(M_i) \varphi_i \mathbf{b}_i^l \right] \\
&= \sum_{l=1}^3 \sum_{i \in \mathbf{I}_\omega \cap \mathbf{I}_N} u_i^l(M_i) \varphi_i \mathbf{e}_l + \sum_{i \in \mathbf{I}_D} u_i^1(M_i) \varphi_i \mathbf{n}_i \\
&\quad - \sum_{i \in \mathbf{I}_D} h_{B_i}^3(M_i) \varphi_i \boldsymbol{\tau}_i + \sum_{i \in \mathbf{I}_D} h_{B_i}^2(M_i) \varphi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i).
\end{aligned}$$

### 5.6.3 Matrice de raideur interne

Soit  $\mathbb{A} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{N_h \times N_h}$  la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  dans la base  $B$  où les sommets du maillage ont été ordonné de la façon décrite précédemment. On écrit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{\omega a, \omega a} & \mathbb{A}_{\omega a, c} \\ \mathbb{A}_{c, \omega a} & \mathbb{A}_{c, c} \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

Les sous-blocs  $\mathbb{A}^{i,j}$  tels que  $i, j \in \mathbf{I}_\omega \cap \mathbf{I}_N$  sont définis dans la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  et ont déjà été calculé précédemment. Ils sont contenus dans la sous-matrice suivante :  $\mathbb{A}_{\omega a, \omega a}$ .

La sous-matrice  $\mathbb{A}_{c,c} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{N_C \times N_C}$  est composée des  $N_C \times N_C$  sous-blocs



$\mathbb{A}_{c,c}^{i,j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tels que :  $\forall i \in \mathbf{I}_D, \forall j \in \mathbf{I}_D$

$$\mathbb{A}_{c,c}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) \\ a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \boldsymbol{\tau}_i) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i) \\ a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \boldsymbol{\tau}_i) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i) \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

La sous-matrice  $\mathbb{A}_{\omega a, c} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{(N_\omega + N_N) \times N_D}$  est composée des  $(N_\omega + N_N) \times N_D$  sous-blocs  $\mathbb{A}_{\omega a, c}^{i,j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tels que :  $\forall i \in \mathbf{I}_\omega \cup \mathbf{I}_N, \forall j \in \mathbf{I}_D$

$$\mathbb{A}_{\omega a, c}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_1) \\ a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_2) \\ a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\varphi_j \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j, \varphi_i \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

Symétriquement, la sous-matrice  $\mathbb{A}_{c, \omega a} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{N_D \times (N_\omega + N_N)}$  est telle que :  $\forall i \in \mathbf{I}_D, \forall j \in \mathbf{I}_\omega \cup \mathbf{I}_N, \mathbb{A}_{\omega a, c}^{i,j} = \mathbb{A}_{c, \omega a}^{j,i}$ .

L'élimination des conditions aux limites essentielle dans  $\mathbb{A}$  correspond à éliminer les lignes et les colonnes de  $\mathbb{A}$  dont les éléments dépendent de  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$ , on appelle  $\mathbb{A}_0$  la matrice obtenue.

Soit  $\mathbb{A}_{\gamma, \gamma} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{N_C \times N_C}$  la matrice  $\mathbb{A}_{c,c}$  dont on a éliminé les termes dépendant des vecteurs en question sauf les termes diagonaux, pour lesquels on a imposé la valeur 1 :  $\forall i \in \mathbf{I}_D, \forall j \in \mathbf{I}_D$

$$\mathbb{A}_{\gamma, \gamma}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{n}_i) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

**Remarque 5.5.** *En imposant la valeur 1 sur les termes diagonaux éliminés, on s'assure que la matrice ainsi modifiée soit inversible.*

De même, soit  $\mathbb{A}_{\omega a, \gamma} \in (\mathbb{R}^{3 \times 3})^{(N_\omega + N_N) \times N_D}$  qui devient :  $\forall i \in \mathbf{I}_\omega \cup \mathbf{I}_N, \forall j \in$

$\mathbf{I}_C$ 

$$\mathbb{A}_{\omega a, \gamma}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_1) & 0 & 0 \\ a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_2) & 0 & 0 \\ a_s(\varphi_j \mathbf{n}_j, \varphi_i \mathbf{e}_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Symétriquement,  $\mathbb{A}_{\omega a, \gamma}^{i,j} = \mathbb{A}_{\gamma, \omega a}^{j,i}$ . On en déduit que

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{\omega a, \omega a} & \mathbb{A}_{\omega a, \gamma} \\ \mathbb{A}_{\gamma, \omega a} & \mathbb{A}_{\gamma, \gamma} \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

Pour résumer le tout, nous avons discrétisé la formulation variationnelle modale de type mixte augmentée (4.10)-(4.11) à l'aide des éléments finis de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_2$ -iso- $\mathbb{P}_1$ . Le système linéaire

$$\underline{\mathcal{A}}_s \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{où} \quad \underline{\mathcal{A}}_s = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

avec  $\mathbf{x}$  contenant les valeurs nodales du champ  $\mathbf{E}_k$  et  $p_k$ , est alors modifié au niveau des nœuds du bord avec conditions aux limites essentielle.

## 5.7 Analyse d'erreur

On s'intéresse maintenant au calcul de l'erreur commise, entre la solution continue et la solution discrète, en fonction du pas de maillage  $h$ . On donne un théorème sur l'ordre de convergence des éléments finis de Taylor-Hood [54].

**Théorème 5.6.** (*Ordre de convergence*) *Si, en plus des hypothèses du théorème 5.2 de Babuska-Brezzi discret,  $\mathbf{W}_h$  contient les polynômes de degré  $k+1$  et le sous-espace  $Q_h$  contient les polynômes de degré  $k$  alors il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{W_h} + \|p - p_h\|_{Q_h} \leq Ch^k \left( \|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k \right) \quad (5.77)$$

si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}$  et  $p \in H^k$ .

On rappelle alors les éléments finis de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_2\text{-}\mathbb{P}_1$  qui est une alternative aux éléments finis  $\mathbb{P}_2\text{-iso-}\mathbb{P}_1$ .

**Définition 5.7.** *On appelle élément fini de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_2\text{-}\mathbb{P}_1$  lorsque le multiplicateur de Lagrange et les composantes du champ électrique sont évalués sur le même maillage. Le multiplicateur de Lagrange est approché par les éléments finis de Lagrange continus en  $\mathbb{P}_1$  et les composantes du champ électrique sont approchées par les éléments finis de Lagrange continus en  $\mathbb{P}_2$ . L'espace d'approximation du champ électrique est*

$$V^h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_2(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

et celui des multiplicateurs de Lagrange est

$$\mathbf{Y}^h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}^0(\bar{\Omega}), \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Il est démontré dans [32] que les éléments finis  $\mathbb{P}_2\text{-iso-}\mathbb{P}_1$  ont le même taux de convergence pour  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  que les éléments  $\mathbb{P}_2\text{-}\mathbb{P}_1$ , on a l'égalité (5.77) avec  $k = 1$ .

Nous allons maintenant établir l'erreur en norme  $L^2$ . On rappelle que  $(\mathbf{E}_h, p_h)$  est la solution approchée et  $(\mathbf{E}, 0)$  la solution exacte aux problèmes mixtes pour le modèle Full-Wave. En utilisant l'astuce d'Aubin-Nitsche, on obtient la convergence en norme  $L^2$  du champ électrique :

**Théorème 5.8.** *On a l'estimation  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_0 \leq Ch^2$ .*

Et lorsque la frontière courbe est approchée par des maillages polygonaux, la convergence en norme  $L^2$  du multiplicateur de Lagrange est donnée par :

**Théorème 5.9.** *On a l'estimation  $\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{3/2}$ .*

On va maintenant montrer qu'on a les mêmes estimations d'erreurs avec ou sans multiplicateur de Lagrange. Soit  $\tau$  le taux de convergence du calcul de  $\mathbf{E}$  solution de la formulation augmentée non mixte.

**Lemme 5.10.** *Il existe une constante  $C_p > 0$  indépendant du domaine et du maillage telle que*

$$\|p_h\| \leq C_p h^\tau.$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  ou  $H_0^{1C}(\Omega)$  tel que

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi = p_h \quad \text{dans } \Omega.$$

L'existence d'un tel  $\phi$  est assurée par la proposition 3.13. On pose  $\mathbf{v}^* = \operatorname{grad} \phi$  d'où  $\mathbf{v}^* \in \mathbf{X} = \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  ou  $\mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  tel que

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}^* = p_h ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}^* = \mathbf{0}.$$

On a donc l'égalité

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}^* \mid \operatorname{rot} \mathbf{F}) + (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}^*) \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F})) = (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F})) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X} \quad (5.78)$$

Soit  $\mathbf{v}_h^* \in \mathbf{X}_h$  la solution du problème discrétisé correspondant, on a

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}_h^* \mid \operatorname{rot} \mathbf{F}_h) + (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*) \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_h)) = (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_h)) \quad \forall \mathbf{F}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.79)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_h^*\|_X &\leq \inf_{\mathbf{F}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{v}^* - \mathbf{F}_h\|_X \text{ d'après le lemme de Céa} \\ &\leq Ch^\tau \|\mathbf{v}^*\|_X \text{ d'après [39]} \\ &\leq C' \|p_h\| h^\tau \text{ d'après (3.23)}. \end{aligned}$$

En choisissant  $\mathbf{F}_h = \mathbf{E}_h$  dans le problème discrétisé (5.79), on a

$$(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*) \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_h)) = (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_h)) \quad (5.80)$$

$$= b(\mathbf{E}_h, p_h) \quad (5.81)$$

$$= (g \mid p_h) = (g \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}^*)) \quad (5.82)$$

On injecte  $\mathbf{F}_h = \mathbf{v}_h^*$  dans la FVMA discrète et on a

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h^*) + \overline{b(\mathbf{v}_h^*, p_h)} &= l_s(\mathbf{v}_h^*) \\ \Rightarrow a(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h^*) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_h) \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*)) + \overline{b(\mathbf{v}_h^*, p_h)} &= l(\mathbf{v}_h^*) + s(g \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*)) \end{aligned}$$

Ce qui implique d'après (5.82)

$$\begin{aligned} (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*)) &= s(g \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*)) - s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_h) \mid p_h) \\ &\stackrel{(5.82)}{=} s(g \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_h^*)) - s(g \mid p_h) \\ &= s(g \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}[\mathbf{v}_h^* - \mathbf{v}^*])) = \mathcal{L}_s(\mathbf{v}_h^* - \mathbf{v}^*) \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{L}_s$  une forme linéaire définie sur  $\mathbf{X}_h$ . D'où

$$\begin{aligned} \|p_h\|_0^2 &= (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^*)) \\ &= (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}[\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_h^*])) + (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_h^*)) \\ &= (p_h \mid \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}[\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_h^*])) + \mathcal{L}_s(\mathbf{v}_h^* - \mathbf{v}^*). \end{aligned}$$

On pose  $\|\mathcal{L}_s\|_{X'} = \sup_{\mathbf{F} \in \mathbf{X}} |\mathcal{L}_s(\mathbf{F})|$  et on a

$$\begin{aligned} \|p_h\|_0^2 &\leq \|p_h\|_0 \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}[\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_h^*])\|_0 + \|\mathcal{L}_s\|_{X'} \|\mathbf{v}_h^* - \mathbf{v}^*\|_X \\ &\leq (\|p_h\|_0 + \|\mathcal{L}_s\|_{X'}) \|\mathbf{v}_h^* - \mathbf{v}^*\|_X \\ &\leq (\|p_h\|_0 + \|\mathcal{L}_s\|_{X'}) C \|p_h\|_0 h^\tau. \end{aligned}$$

On simplifie alors par  $\|p_h\|_0$  et pour  $h$  suffisamment petit, on a  $Ch^\tau < 1/2$  d'où

$$\begin{aligned} \|p_h\|_0 &\leq \frac{\|p_h\|_0}{2} + \|\mathcal{L}_s\|_{X'} Ch^\tau \\ \Rightarrow \|p_h\|_0 &\leq 2\|\mathcal{L}_s\|_{X'} h^\tau = C_p h^\tau. \end{aligned}$$

□

Soient  $\mathbf{E}_h^* \in \mathbf{X}_h$  la solution de la FVA discrète

$$a_s(\mathbf{E}_h^*, \mathbf{F}_h) = L_s(\mathbf{F}_h) \quad \forall \mathbf{F}_h \in \mathbf{X}_h, \quad (5.83)$$

et  $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h$  la solution de la FVMA discrète

$$a_s(\mathbf{E}_h, \mathbf{F}_h) + \overline{b(\mathbf{F}_h, p_h)} = L_s(\mathbf{F}_h) \quad \forall \mathbf{F}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.84)$$

$$b(\mathbf{E}_h, q_h) = \ell(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (5.85)$$

Le but étant de trouver un encadrement de  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_X$ , on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_X &= \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h^*) + (\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h)\| \\ &\leq \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h^*\|_X + \|\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h\|_X. \end{aligned} \quad (5.86)$$

**Proposition 5.11.** *Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que  $\|\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h\|_X \leq C_0 \|p_h\|_0$ .*

*Démonstration.* En injectant, dans les formulations discrète (5.83) et (5.84),  $\mathbf{F}_h = \mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h$ , on a

$$a_s(\mathbf{E}_h^*, \mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h) = L_s(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h),$$

et

$$a_s(\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h) + \overline{b(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h, p_h)} = L_s(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h).$$

En effectuant leur différence, on a

$$a_s(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h) = \overline{b(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h, p_h)}$$

Or la coercitivité de la forme  $a_s$  nous donne une constante  $\alpha > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h\|_X^2 &\leq |a_s(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h)| \\ &\leq |b(\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h, p_h)| \\ &\leq \|p_h\|_0 \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}[\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h])\|_0 \\ &\leq \|p_h\|_0 \|\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h\|_X \end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat avec  $C_0 = 1/\alpha$ . □

D'après la définition de  $\tau$ , il existe une constante  $C_1 > 0$  tel que  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h^*\|_X < C_1 h^\tau$ . La proposition 5.11 et le lemme 5.10 montrent qu'il existe une constante  $C_0 > 0$  tel que  $\|\mathbf{E}_h^* - \mathbf{E}_h\|_X < C_0 h^\tau$ . On rapporte ces deux inégalités dans (5.86) et alors  $\tau$  est le taux de convergence du calcul de  $\mathbf{E}$  solution de la formulation mixte augmentée qui vaut 1 en norme  $X$ .

# Chapitre 6

## Diagnostiques physiques

### 6.1 Théorème de Poynting pour le modèle Full-Wave

Le théorème de Poynting concerne la conservation de l'énergie dans un champ électromagnétique. On définit le vecteur de Poynting instantané [38].

**Définition 6.1.** *On appelle vecteur de Poynting, noté  $\mathcal{S}$ , un champ de vecteur dont le flux à travers une surface donne la puissance électromagnétique traversant cette surface. Sa direction indique celle de la propagation d'une onde électromagnétique. Pour un milieu non magnétique, on a*

$$\mathcal{S} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}. \quad (6.1)$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface  $\Sigma$  donnant la puissance électromagnétique  $\mathcal{P}$  est égale à :

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} \mathcal{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

**Définition 6.2.** *On définit la densité d'énergie électrique instantanée*

$$w_E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}) \quad (6.2)$$

*et la densité d'énergie magnétique instantanée*

$$w_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}). \quad (6.3)$$

**Théorème 6.3.** (*théorème de Poynting instationnaire*)

On a l'égalité :

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}[w_E + w_m] + \operatorname{div} \mathcal{S} = 0, \quad (6.4)$$

où  $\mathcal{J} \cdot \mathcal{E}$  est la densité de puissance instantanée injectée par la source dans le milieu.

### 6.1.1 Théorème de Poynting en régime harmonique

Dans le cas harmonique, il serait plus intéressant de déterminer la valeur moyenne des puissances. On la calcule sur une période du signal. Par exemple, pour le vecteur de Poynting, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) d(\omega t). \quad (6.5)$$

En régime harmonique, on a

$$\begin{aligned} (6.5) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \times \operatorname{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] d(\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} ([\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \times [\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}]) d(\omega t) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{-2i\omega t} + \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}e^{2i\omega t} + \overline{\mathbf{E}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) d(\omega t) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

**Définition 6.4.** On définit le vecteur de Poynting complexe

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}. \quad (6.7)$$

De la même manière, on calcule les densités d'énergie (6.2) et (6.3) en régime harmonique :

$$(6.2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)) d(\omega t) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \cdot \overline{\mathcal{D}})$$

et aussi (6.3) =  $\frac{1}{4} \operatorname{Re}(\mathcal{B} \cdot \overline{\mathcal{H}})$ .



**Définition 6.5.** On définit la densité harmonique d'énergie électrique par

$$w_E = \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{D}} \quad (6.8)$$

et la densité harmonique d'énergie magnétique par

$$w_m = \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{H}}. \quad (6.9)$$

**Théorème 6.6.** (théorème de Poynting harmonique)

On a l'égalité :

$$\frac{1}{2} \overline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E} + 2i\omega[w_E - w_m] + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (6.10)$$

*Démonstration.*

$$(2.6) \cdot \overline{\mathbf{H}} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} = i\omega \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{H}} \quad (6.11)$$

$$(2.7) \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{E} - i\omega \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} = \overline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.12)$$

En soustrayant ces deux dernières équations, on obtient

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{E} + i\omega \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \overline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.13)$$

Or on a l'identité vectorielle

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{v}). \quad (6.14)$$

L'équation (6.13) s'écrit alors

$$\overline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E} + i\omega[\overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{H}}] + 2 \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (6.15)$$

□

### 6.1.2 Application au modèle Full-Wave

Soit  $V \subset \Omega$ , on note  $\Sigma_A = \partial V \cap \Gamma_A$ . On va écrire l'expression intégrale de l'équation (6.4) dans  $V$ . Le plasma peut être considéré comme un ensemble de particules chargées se déplaçant dans le vide en créant un courant de conduction  $\mathbf{J}_c$ . On a donc  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , et le courant total est  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_c$  où  $\mathbf{J}_s$  est le courant de l'antenne. L'équation (6.10) s'écrit alors

$$(\overline{\mathbf{J}_s} + \overline{\mathbf{J}_c}) \cdot \mathbf{E} + i\omega(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2) + \operatorname{div} \frac{\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{B}}}{\mu_0} = 0. \quad (6.16)$$

D'après (2.26) modifié par (2.31), on a  $\underline{\sigma} = \imath\varepsilon_0\omega(\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{K}})$ . On arrive alors à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{J}}_c \cdot \mathbf{E} &\stackrel{(1.13)}{=} \overline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = -\imath\omega\varepsilon_0(\overline{\mathbf{E}} - \overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{E} \\ &= -\imath\omega\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \imath\omega\varepsilon_0\overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}$$

L'équation (6.16) devient

$$\overline{\mathbf{J}}_s \cdot \mathbf{E} + \imath\omega[\varepsilon_0\overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{B}|^2] + 2 \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (6.17)$$

On intègre cette équation sur  $V$  :

$$\int_V \overline{\mathbf{J}}_s \cdot \mathbf{E} dV + \imath\omega \int_V [\varepsilon_0\overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{B}|^2] dV + 2 \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV = 0. \quad (6.18)$$

On s'intéresse alors à la partie réelle. En remarquant que  $\operatorname{Re}[\imath\omega\varepsilon_0\overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}] = -\operatorname{Im}[\omega\varepsilon_0\overline{\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}] = \operatorname{Im}[\omega\varepsilon_0\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}}]$  et en divisant par 2, on obtient :

$$\int_{\Sigma_A} \operatorname{Re}[\frac{1}{2}\overline{\mathbf{j}}_s \cdot \mathbf{E}] d\Sigma + \frac{\omega\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}}] dV + \int_V \operatorname{Re}[\operatorname{div} \mathbf{S}] dV = 0. \quad (6.19)$$

**Remarque 6.7.** La valeur  $\mathcal{P}_u = \frac{\omega\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}}] dV$  est égale à la puissance transférée au plasma par effet Joule. Le lemme 3.11 nous montre que cette puissance se dissipe, en effet on a :

$$0 < \frac{\zeta\omega\varepsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV \leq \mathcal{P}_u$$

## 6.2 Critère d'accessibilité de l'onde hybride

### 6.2.1 Relation de dispersion

On cherche une solution à l'équation de type Helmholtz (2.40) sous la forme d'onde plane, à savoir :

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} e^{\imath(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}$  est l'amplitude de l'onde,  $\omega$  sa pulsation et on note  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde. En reportant dans l'équation (2.40), on obtient :

$$\imath\mathbf{k} \times (\imath\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.20)$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) + \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.21)$$

où, exclusivement dans ce paragraphe, on note  $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$  l'indice de réfraction. Cette relation est appelée **relation de dispersion**. On se place dorénavant dans un repère de Stix (définition 2.1) tel que  $k_y = 0$ , on a

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_{\perp} \\ 0 \\ n_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

**Proposition 6.8.** *L'équation (6.21) est linéaire en  $\tilde{\mathbf{E}}$ , elle s'écrit*

$$\underline{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.22)$$

avec

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} S - n_{\parallel}^2 & -iD & n_{\perp} n_{\parallel} \\ iD & S - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 & 0 \\ n_{\perp} n_{\parallel} & 0 & P - n_{\perp}^2 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On utilise la formule du double produit vectoriel, à savoir :

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) &= (n_{\perp} \tilde{E}_x + n_{\parallel} \tilde{E}_z) \begin{pmatrix} n_{\perp} \\ 0 \\ n_{\parallel} \end{pmatrix} - (n_{\perp}^2 + n_{\parallel}^2) \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -n_{\parallel}^2 & 0 & n_{\perp} n_{\parallel} \\ 0 & -n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 & 0 \\ n_{\perp} n_{\parallel} & 0 & -n_{\perp}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Donc l'équation (6.21) s'écrit

$$\underline{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$$

avec

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} S - n_{\parallel}^2 & -\imath D & n_{\perp} n_{\parallel} \\ \imath D & S - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 & 0 \\ n_{\perp} n_{\parallel} & 0 & P - n_{\perp}^2 \end{pmatrix}.$$

□

Pour avoir une solution non triviale en  $\mathbf{E}$ , il faut que  $\tilde{\mathbf{E}} \neq 0$ . Donc dans le système linéaire (6.22), la matrice  $\underline{\mathbf{M}}$  vérifie  $\det \underline{\mathbf{M}} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= \det \underline{\mathbf{M}} \\ &= S n_{\perp}^4 - [(S + P)(S - n_{\parallel}^2) - D^2] n_{\perp}^2 + P[(S - n_{\parallel}^2)^2 - D^2] = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

## 6.2.2 Critère d'accessibilité

On suppose connue la fréquence  $\omega$  et l'on cherche s'il existe des solutions en onde progressive ( $\mathbf{n}$  réel) à la relation de dispersion. Les cas  $\mathbf{n}$  imaginaire pur et complexe représentent respectivement une onde évanescente et amortie. On parle d'**accessibilité stricte** lorsqu'il existe  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\det \underline{\mathbf{M}} = 0$ , ou, de façon équivalente, la valeur de  $n_{\parallel} \in \mathbb{R}$  est telle que l'équation (6.24) admette une solution réelle en  $n_{\perp}$ . Dans la suite de ce chapitre, on suppose donc que  $n_{\parallel}$  est un réel connu et on pose  $r = S - n_{\parallel}^2$ . L'expression  $\det \underline{\mathbf{M}}$  est alors un polynôme en  $n_{\perp}$  de degré 4, plus précisément un polynôme en  $n_{\perp}^2$  de degré 2 :

$$\det \underline{\mathbf{M}} = Q(n_{\perp}^2) = 0 \quad (6.25)$$

avec  $Q(X) = a_M X^2 - b_M X + c_M$  où  $a_M = S$ ,  $b_M = (S + P)r - D^2$  et  $c_M = P(r^2 - D^2)$ .

De plus, on néglige les phénomènes d'absorption (amortissement Landau et collisions), on prend donc :

$$\gamma_e = \nu_c = 0.$$

Ceci entraîne  $\alpha = \omega$  et les coefficients  $S, D, P_L$  sont réels, ce qui permet de simplifier les calculs. En réalité, leur partie imaginaire est négligeable par rapport à la partie réelle. Si on la prend en compte, une onde progressive se propagera encore avec un petit amortissement alors qu'une onde amortie ou évanescence ne se propagera pas mieux. Les coefficients  $S, D, P$  (2.28)-(2.29) s'écrivent alors

$$S = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (6.26)$$

$$D = \frac{1}{\omega} \left( -\frac{\omega_{ce}\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{ci}\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \right) \quad (6.27)$$

$$P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2}. \quad (6.28)$$

Sachant que l'on a toujours

$$\omega_{ci} \ll \omega_{ce} \quad \text{et} \quad \omega_{pi} \ll \omega_{pe}, \quad (6.29)$$

on suppose dans la suite que le coefficient  $\omega, \omega_{ci}$  vérifie

$$\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce} \quad \text{et} \quad \omega_{pi} \leq \omega \ll \omega_{pe}. \quad (6.30)$$

**Proposition 6.9.** *Si les inégalités (6.30) sont vérifiées alors  $S > 0$ ,  $D > 0$  et  $P < 0$  avec  $S, D \ll |P| = -P$ .*

*Démonstration.* Supposons (6.30), alors on a

$$(6.26) \Rightarrow S \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} > 0 \quad (6.31)$$

$$(6.27) \Rightarrow D \approx \frac{\omega_{ce}\omega_{pe}^2}{\omega\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{ci}\omega_{pi}^2}{\omega^3} > 0 \quad (6.32)$$

$$(6.28) \Rightarrow P \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2} < 0. \quad (6.33)$$

On voit facilement que  $S, D \ll |P| = -P$ .  $\square$

On effectue alors une étude de racines du polynôme  $Q$  de degré 2 dans  $\mathbb{R}$ . Tout d'abord on calcule le discriminant  $\Delta_M$  :

$$\begin{aligned}\Delta_M &= ((S+P)r - D^2)^2 - 4SP(r^2 - D^2) \\ &= (S-P)^2 r^2 - 2D^2(S+P)r + D^2(D^2 + 4SP)\end{aligned}$$

Les valeurs de  $r$  telles que  $\Delta_M = 0$  sont alors

$$r_1 = \frac{D^2(S+P) - \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2}$$

et

$$r_2 = \frac{D^2(S+P) + \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2}.$$

**Remarque 6.10.** *La proposition 6.9 entraîne que  $4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)$  est positive.*

On distingue alors deux cas selon le signe de  $\Delta_M$ .

**Le cas  $\Delta_M > 0$**

Comme  $(S-P)^2 > 0$ , On a  $\Delta_M > 0$  si  $r \notin [r_1, r_2]$ . Alors le polynôme  $Q$  admet deux racines réelles et on distingue deux cas :

Si au moins l'une des deux est positive alors il existe un  $n_\perp \in \mathbb{R}$  tel que  $\det \underline{\mathbf{M}} = 0$ , on est dans un cas d'accessibilité stricte.

Sinon les deux racines sont strictement négatives et toutes les solutions en  $n_\perp$  sont alors imaginaires pures. Toutes les ondes sont complètement évanescentes, on dit qu'il y a **inaccessibilité stricte**.

Déterminons les valeurs de  $r$  pour lesquelles les racines du polynôme  $Q$  sont négatives. Du coup, la somme des racines, notée  $\Sigma$ , est strictement négative et leur produit, noté  $\Pi$ , est strictement positif. Or on a

$$\Sigma = \frac{b_M}{a_M} = \frac{(S+P)r - D^2}{S} \quad \text{et} \quad \Pi = \frac{c_M}{a_M} = \frac{P(r^2 - D^2)}{S}.$$

On obtient alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\Sigma < 0 &\Leftrightarrow \frac{(S+P)r - D^2}{S} < 0 \\ &\Leftrightarrow r > r' = \frac{D^2}{S+P}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi > 0 &\Leftrightarrow \frac{P(r^2 - D^2)}{S} > 0 \\ &\Leftrightarrow -D < r < D.\end{aligned}$$

Enfin, on peut remarquer que  $r = S - n_{\parallel}^2$  est inférieur à  $S$ . On en conclut qu'on a :

accessibilité stricte si  $r \notin [r_1, r_2]$ ,  $r < S$  et  $r \notin ]r_2, S[$ . Ce qui implique

$$r \in ]-\infty, r_1[,$$

inaccessibilité stricte si  $r \notin [r_1, r_2]$ ,  $r \in [-D, D]$ ,  $r > r'$  et  $r < S$ . Ce qui implique

$$r \in ]r_2, T[$$

avec  $T = \min\{S, D\}$ . Ce résultat provient de la proposition 6.9 qui montre que  $r_1 < r' < r_2$ . En effet on a

$$\begin{aligned}r_1 - r' &= \frac{D^2(S+P) - \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2} - \frac{D^2}{S+P} \\ &\approx \frac{D^2P - \sqrt{-4D^2SP^3}}{P^2} - \frac{D^2}{P} \\ &= -\frac{\sqrt{-4D^2SP^3}}{P^2} < 0.\end{aligned}\tag{6.34}$$

Montrons maintenant que  $r' < r_2$ . Pour cela, il suffit de voir que  $r' < 0$  et  $r_2 > 0$ . Enfin montrons que  $r_2 < S$  et  $r_2 < D$ , on a :

$$\begin{aligned}S - r_2 &= S - \frac{D^2(S+P) + \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2} \\ &\approx S - \frac{D^2P + 2\sqrt{-D^2SP^3}}{P^2} \\ &= S - \frac{D^2}{P} + 2\sqrt{S}\frac{\sqrt{-D^2P}}{P} = \left(\sqrt{S} + \sqrt{-\frac{D^2}{P}}\right)^2 > 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D - r_2 &= D - \frac{D^2(S + P) + \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S - P)^2)}}{(S - P)^2} \\
&\approx \frac{DP^2 - D^2P + 2\sqrt{-D^2SP^3}}{P^2} \\
&= \frac{D(P^2 - DP) + 2\sqrt{-D^2SP^3}}{P^2} \approx \frac{DP^2 + 2\sqrt{-D^2SP^3}}{P^2} > 0.
\end{aligned}$$

**Le cas  $\Delta_M < 0$**

On a  $\Delta_M < 0$  si  $r \in [r_1, r_2]$ . Alors le polynôme  $Q$  admet deux racines imaginaires donc il n'y a jamais accessibilité stricte. Par ailleurs, on va chercher les cas où on a **accessibilité vague**. On dit qu'il y a accessibilité vague si il existe  $n_\perp \in \mathbb{C}$  tel que  $\det \underline{\mathbf{M}} = 0$  et  $|Re(n_\perp)| \gg |Im(n_\perp)|$  i.e.  $\exists \sigma \in \mathbb{R}^+$  avec  $\sigma$  grand tel que  $|Re(n_\perp)| > \sigma |Im(n_\perp)|$ . De même, on dit qu'il y a **in-accessibilité vague** si  $|Im(n_\perp)|$  est non négligeable devant  $|Re(n_\perp)|$ .

**Remarque 6.11.** *Dans la pratique, on a la même situation entre accessibilité vague et accessibilité stricte si l'atténuation de l'onde due à la partie imaginaire de l'indice est du même ordre que celle due aux phénomènes négligés ( $\nu_c$  et  $\gamma_e$ ).*

Si  $\Delta_M < 0$ , les deux racines imaginaires du polynôme  $Q$  sont :

$$n_\perp^2 = \frac{b_M \pm i\sqrt{-\Delta_M}}{2S}.$$

En écrivant  $n_\perp = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = Re(n_\perp^2) = \frac{b_M}{2S} \\ \alpha^2 + \beta^2 = |n_\perp^2| = \frac{\sqrt{b_M^2 - \Delta_M}}{2S} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 2\alpha^2 = \frac{b_M + \sqrt{b_M^2 - \Delta_M}}{2S} \\ 2\beta^2 = \frac{\sqrt{b_M^2 - \Delta_M} - b_M}{2S}. \end{cases}$$



Les racines du polynôme  $Q$  sont alors

$$n_{\perp} = \frac{1}{2\sqrt{S}} \left[ \pm \left( b_M + \sqrt{b_M^2 - \Delta_M} \right)^{1/2} \pm i \left( \sqrt{b_M^2 - \Delta_M} - b_M \right)^{1/2} \right].$$

On s'aperçoit que

si  $|\Delta_M| \gg b_M^2$  alors la partie réelle et imaginaire de  $n_{\perp}$  sont du même ordre, on a donc inaccessibilité.

si  $|\Delta_M| \ll b_M^2$  alors soit  $b_M < 0$  et on a  $|Re(n_{\perp})| \ll |Im(n_{\perp})|$ , c'est-à-dire inaccessibilité vague; soit on a  $b_M > 0$  et on a  $|Re(n_{\perp})| \gg |Im(n_{\perp})|$ , c'est-à-dire accessibilité vague.

On s'intéresse donc à cette dernière condition :  $|\Delta_M| \ll b_M^2$ . Calculons la limite de l'accessibilité vague i.e. cherchons  $\sigma$  tel que  $|Re(n_{\perp})| > \sigma |Im(n_{\perp})|$ . Déterminons les valeurs de  $r$  pour lesquelles on a  $b_M^2 \gg -\Delta_M > 0$  et  $b_M > 0$  : Calculons d'abord  $\sigma b_M^2 + \Delta_M$ , on a :

$$\sigma b_M^2 + \Delta_M = [\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2]r^2 - 2(\sigma+1)(S+P)D^2r + (\sigma+1)D^4 + 4SPD^2$$

C'est de nouveau un polynôme de degré 2 en  $r$ , d'où les racines sont

$$\rho_{\pm}^{\sigma} = \frac{(\sigma+1)(S+P)D^2 \pm \sqrt{\delta_{\sigma}}}{\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2}$$

avec  $\delta_{\sigma} = 4D^2SP((\sigma+1)D^2 - \sigma(S+P)^2 - (S-P)^2) > 0$ .

Donc comme  $\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2 > 0$ , on a  $\sigma b_M^2 + \Delta_M > 0$  si  $r \notin ]\rho_{-}^{\sigma}, \rho_{+}^{\sigma}[$ .

Enfin, on a

$$b_M > 0 \Leftrightarrow (S+P)r - D^2 > 0 \Leftrightarrow r < \frac{D^2}{S+P} = r'.$$

Pour  $\sigma$  assez grand, on a  $r_1 < \rho_{-}^{\sigma} < r' < \rho_{+}^{\sigma} < r_2$ . En effet

$$\begin{aligned} r_1 - \rho_{-}^{\sigma} &= \frac{D^2(S+P) - \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2} - \frac{(\sigma+1)(S+P)D^2 - \sqrt{\delta_{\sigma}}}{\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2} \\ &\approx \frac{D^2P - \sqrt{-4D^2SP^3}}{P^2} - \frac{(\sigma+1)PD^2 - \sqrt{-4(\sigma+1)D^2SP^3}}{(\sigma+1)P^2} \\ &= \left( \frac{2}{\sqrt{\sigma+1}} - 2 \right) \frac{\sqrt{-D^2SP^3}}{P^2} < 0, \end{aligned} \tag{6.35}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 r' - \rho_-^\sigma &= \frac{D^2}{S+P} - \frac{(\sigma+1)(S+P)D^2 - \sqrt{\delta_\sigma}}{\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2} \\
 &\approx \frac{D^2}{P} - \frac{(\sigma+1)PD^2 - \sqrt{\delta_\sigma}}{(\sigma+1)P^2} \\
 &= \frac{\sqrt{\delta_\sigma}}{(\sigma+1)P^2} > 0.
 \end{aligned}$$

La démonstration est similaire pour  $r' < \rho_+^\sigma < r_2$ . On en conclut qu'on a :

· accessibilité vague si  $r \in [r_1, r_2]$ ,  $r < r'$  et  $r \notin ]\rho_-^\sigma, \rho_+^\sigma[$ . Ce qui implique

$$r \in ]r_1, \rho_-^\sigma[.$$

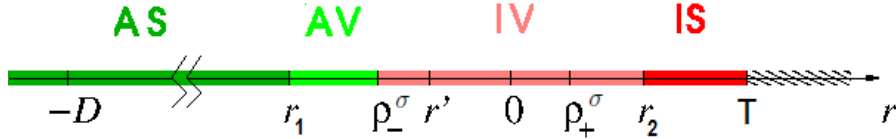
· inaccessibilité vague si  $r \in [r_1, r_2]$  et  $r \notin ]r_1, \rho_-^\sigma[$ . Ce qui implique

$$r \in ]\rho_-^\sigma, r_2[.$$

### 6.2.3 Conclusion

On résume les résultats que l'on a trouvé dans la partie précédente :

- on a accessibilité stricte si et seulement si  $r \in ]-\infty; r_1[$ ,
- on a accessibilité vague si et seulement si  $r \in ]r_1; \rho_-^\sigma[$ ,
- on a inaccessibilité vague si et seulement si  $r \in ]\rho_-^\sigma; r_2[$ ,
- on a inaccessibilité stricte si et seulement si  $r \in ]r_2; T]$ .



**Remarque 6.12.** Le schéma ci-dessus n'est pas à l'échelle. Par exemple, on a d'après (6.34) et (6.35)

$$|r_1 - \rho_-^\sigma| \approx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma+1}}\right) |r_1 - r'|,$$

donc  $\rho_-^\sigma$  est très proche de  $r'$  par rapport à  $r_1$ . On peut alors, dans la pratique, poser  $r'$  comme limite entre l'accessibilité et l'inaccessibilité vagues. Cela tombe bien puisque l'on a  $|Re(n_\perp)| = |Im(n_\perp)|$  lorsque  $r = r'$  et l'on n'a plus à discuter de la valeur précise de  $\sigma$ .

Enfin on rappelle qu'on a posé  $r = S - n_{\parallel}^2$ , donc il nous reste simplement à exprimer les valeurs de  $n_{\parallel}$  pour lesquelles on a accessibilité vague et stricte.

**Proposition 6.13.** (*Critère d'accessibilité large*)

On a accessibilité stricte si  $S - n_{\parallel}^2 < r_1$ , ce qui est équivalent, en valeur approximative, à

$$|n_{\parallel}| > \sqrt{S - r_1} \approx \sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}}.$$

De même, on a accessibilité vague si  $r_1 < S - n_{\parallel}^2 < \rho_{-}^{\sigma}$ , ce qui est équivalent, en valeur approximative, à

$$\sqrt{S + 2 \frac{\sqrt{SD}}{\sqrt{-(\sigma+1)P}} + \frac{D^2}{-P}} < |n_{\parallel}| < \sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}}.$$

*Démonstration.* Exprimons alors  $\sqrt{S - r_1}$ . Sachant que l'on a  $|S| \ll |P|$  et  $|D| \ll |P|$ , on obtient

$$\begin{aligned} S - r_1 &= S - \frac{D^2(S+P) - \sqrt{4D^2SP(D^2 - (S-P)^2)}}{(S-P)^2} \\ &\approx S - \frac{D^2P - 2\sqrt{D^2SP^3}}{P^2} = S - \frac{D^2}{P} + 2\sqrt{S} \frac{D}{\sqrt{-P}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S - \rho_{-}^{\sigma} &= S - \frac{(\sigma+1)(S+P)D^2 - \sqrt{\delta_{\sigma}}}{\sigma(S+P)^2 + (S-P)^2} \\ &\approx S - \frac{(\sigma+1)PD^2 - \sqrt{-2(\sigma+1)D^2SP^3}}{(\sigma+1)P^2} = S - \frac{D^2}{P} + 2\sqrt{S} \frac{D}{\sqrt{-(\sigma+1)P}}. \end{aligned}$$

□

Enfin, en fonction des différents fréquences  $\omega_{ce}$ ,  $\omega_{pe}$ ,  $\omega_{pi}$  et  $\omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{-P} &= \frac{\frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \omega_{ce}^2}}{-1 + \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2}} \\ &= \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \omega_{ce}^2} \cdot \frac{\omega^2}{-\omega^2 + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'indice de réfraction parallèle cité dans [12] :

$$|n_{\parallel}| > \sqrt{S - r_1} \approx \sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}} \approx \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} + \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}}.$$

# Chapitre 7

## Simulation numérique

La méthode d'élément finis pour la résolution du problème Full-Wave (5.11)-(5.12) a été programmée en MATLAB. Un premier test est effectué dans un cas simple, à savoir  $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{I}}$  afin de valider l'algorithme Full-Wave. Ensuite, pour avoir un code évolutif, on suppose connue la densité des particules en tout point de la section du tore. On présente alors des résultats numériques de la simulation Full-Wave avec deux densités de profils différents. Seul le champ électrique est représenté, composante par composante, pour différentes valeurs de la fréquence  $\omega$  et du mode de Fourier  $k$ . La propagation de l'onde est décrite selon le niveau d'accessibilité obtenu pour chaque cas-test. Mais avant tout, un adimensionnement des équations (2.40)-(2.43) est nécessaire pour simplifier la représentation paramétrique du problème physique.

### 7.1 Adimensionnement du code Full-Wave

#### 7.1.1 Problème modèle avec CL naturelle

On propose de mettre le code en unités normalisées afin de ne plus se préoccuper des dimensions. On prend alors comme référence d'espace, le petit rayon du tore  $a$  et comme référence de fréquence, la fréquence  $\omega$  excitée à l'antenne  $\Gamma_A$ . On va montrer qu'on introduit ainsi un coefficient  $\frac{\omega a}{c}$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière, qui est sans dimension.

On traite les équations des ondes électromagnétiques avec condition aux li-

mites naturelle :

$$\mathbf{rot\ rot\ E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.1)$$

$$\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{rot\ E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \check{\mathbf{j}}_s \quad \text{sur } \Gamma_A. \quad (7.4)$$

Pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  (respectivement scalaire  $q$ ), on a  $\mathbf{v} = \check{v} \mathbf{v}'$  avec  $\check{v}$  l'échelle de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}'$  la normalisée de  $\mathbf{v}$  (respectivement  $q = \check{q} q'$ ). Enfin pour les opérateurs, on a

$$\mathbf{rot} = a^{-1} \mathbf{rot}' \quad \text{et} \quad \text{div} = a^{-1} \text{div}' \quad (7.5)$$

Comme les phénomènes électrostatiques sont dominants, on va relier l'échelle de longueur  $\check{E}$  du champ électrique à celles de la charge et du courant comme suit. La conservation de la charge (1.12) nous donne

$$\check{J} = a \omega \check{\rho}.$$

A l'aide de la loi de Gauss dans le vide  $\text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$ , on a l'égalité

$$\check{J} = \omega \varepsilon_0 \check{E}.$$

Or  $\check{j}_s = a \check{J}$  car la dimension de  $\check{j}_s$  est en courant par unité de surface alors que la dimension de  $\check{J}$  est en courant par unité de volume. Ce qui nous donne

$$\check{j}_s = a \omega \varepsilon_0 \check{E}. \quad (7.6)$$

Les équations (2.40), (2.41), (2.42) et (2.43) deviennent alors

$$a^{-2} \mathbf{rot}' \mathbf{rot}' \check{E} \mathbf{E}' - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \check{E} \mathbf{E}' = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega', \quad (7.7)$$

$$a^{-1} \text{div}'(\underline{\mathbf{K}} \check{E} \mathbf{E}') = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (7.8)$$

$$\check{E} \mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma'_C, \quad (7.9)$$

$$a^{-1} \mathbf{rot}' \check{E} \mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \check{j}_s \mathbf{j}'_s \quad \text{sur } \Gamma'_A. \quad (7.10)$$

avec  $\Omega'$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_A$  et  $\Gamma'_C$  les domaines  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_C$  normalisés respectivement. On obtient alors trivialement

$$(7.8) \quad \Rightarrow \quad \text{div}'(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}') = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (7.11)$$

$$(7.9) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma'_C. \quad (7.12)$$

On pose alors

$$\eta = \frac{\omega a}{c} \quad (7.13)$$

le coefficient sans dimension. Ensuite en multipliant l'équation (7.7) par  $a^2 \check{E}^{-1}$ , on a

$$\mathbf{rot}' \mathbf{rot}' \mathbf{E}' - \eta^2 \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}' = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega'.$$

Enfin l'équation (7.10) s'écrit

$$\mathbf{rot}' \mathbf{E}' \times \mathbf{n} = i\omega\mu_0 a \frac{\check{j}_s}{\check{E}} \mathbf{j}'_s \quad \text{sur } \Gamma'_A.$$

Grâce à (7.6), on a

$$\omega\mu_0 a \frac{\check{j}_s}{\check{E}} = \omega\mu_0 a a \omega \varepsilon_0 = \eta^2.$$

On obtient finalement le problème normalisé suivant :

$$\mathbf{rot}' \mathbf{rot}' \mathbf{E}' - \eta^2 \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}' = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega', \quad (7.14)$$

$$\text{div}'(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}') = 0 \quad \text{dans } \Omega', \quad (7.15)$$

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma'_C, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{rot}' \mathbf{E}' \times \mathbf{n} = \eta^2 \mathbf{j}'_s \quad \text{sur } \Gamma'_A. \quad (7.17)$$

### 7.1.2 Théorème de Poynting adimensionné

On va écrire le théorème de Poynting en régime harmonique (6.19) en unités normalisées, c'est-à-dire que l'on va normaliser (6.19).

**Proposition 7.1.** *En unités normalisées, le théorème de Poynting s'écrit*

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma'_A} \text{Re}[\overline{\mathbf{j}'_s} \cdot \mathbf{E}' ds'] + \frac{1}{2} \int_{V'} \text{Im}[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}' \cdot \overline{\mathbf{E}'} dV'] + \frac{1}{\eta^2} \int_{V'} \text{div}' \mathbf{S}' dV' = 0.$$

*Démonstration.* L'équation de Faraday en régime harmonique (2.6) nous donne que  $\check{B} = \frac{a^{-1} \check{E}}{\omega}$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \check{S} \mathbf{S}' &= \frac{\check{E} \check{B}}{2\mu_0} \mathbf{E}' \times \overline{\mathbf{B}'} \\ &= \frac{\check{E}^2}{2a\omega\mu_0} \mathbf{E}' \times \overline{\mathbf{B}'} = \frac{\check{E}^2}{a\omega\mu_0} \mathbf{S}'. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\mathbf{E}' \times \overline{\mathbf{B}'}$  le vecteur de Poynting normalisé. On a alors

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} d\mathbf{V} &= \frac{\check{E}^2}{a\omega\mu_0} \int_{V'} a^{-1} \operatorname{div}' \mathbf{S}' a^3 d\mathbf{V}' \\ &= \frac{a\check{E}^2}{\omega\mu_0} \int_{V'} \operatorname{div}' \mathbf{S}' d\mathbf{V}'. \end{aligned}$$

Puis on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} \operatorname{Re}[\overline{\mathbf{j}_s} \cdot \mathbf{E}] ds &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma'_A} \operatorname{Re}[\check{j}_s \overline{\check{j}_s'} \cdot \check{E} \mathbf{E}'] a^2 ds' \\ &= \frac{a^3 \omega \varepsilon_0 \check{E}^2}{2} \int_{\Sigma'_A} \operatorname{Re}[\overline{\check{\mathbf{j}}_s'} \cdot \mathbf{E}'] ds' \\ \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}}] d\mathbf{V} &= \frac{a^3 \omega \varepsilon_0 \check{E}^2}{2} \int_{V'} \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}' \cdot \overline{\mathbf{E}'}] d\mathbf{V}' \end{aligned}$$

On multiplie l'équation (6.19) par  $\frac{1}{a^3 \omega \varepsilon_0 \check{E}^2}$ , on obtient alors

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma'_A} \operatorname{Re}[\overline{\check{\mathbf{j}}_s'} \cdot \mathbf{E}'] ds' + \frac{1}{2} \int_{V'} \operatorname{Im}[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}' \cdot \overline{\mathbf{E}'}] d\mathbf{V}' + \frac{1}{\eta^2} \int_{V'} \operatorname{div}' \mathbf{S}' d\mathbf{V}' = 0.$$

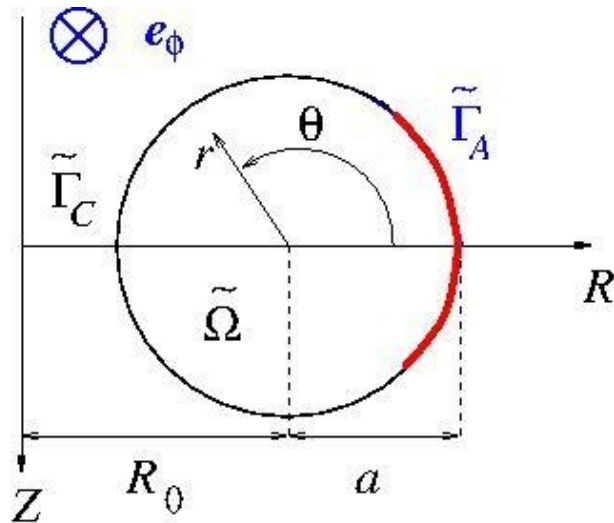
□

## 7.2 Résultats numériques préliminaires

### 7.2.1 Introduction

On considère  $\tilde{\Omega}$  un polygone approchant un cercle de rayon  $a = 1$  et de centre  $(3, 0)$  en coordonnées  $(R, Z)$  adimensionnées. On suppose l'antenne  $\tilde{\Gamma}_A$  est le bord du cercle compris entre les angles  $-\pi/4$  et  $\pi/4$  (cf. figure 7.1). Nous avons travaillé avec quatre différents maillages dont les caractéristiques



FIGURE 7.1 – section du tokamak en coordonnées  $(R, Z)$ 

sont les suivantes :

| Maillage                                   | 1                    | 2                    | 3                    | 4                    |
|--|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $h$ , pas de maillage                      | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
| Nombre de noeuds $\mathbb{P}_1$ (grossier) | 85                   | 383                  | 1580                 | 6671                 |
| Nombre de noeuds $\mathbb{P}_1$ (fin)      | 313                  | 1477                 | 6207                 | 26461                |

## 7.2.2 Expérimentation numérique

Nous allons dans un premier temps simuler numériquement le problème suivant :

$$\mathbf{rot rot E} - 100\mathbf{E} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.18)$$

$$\text{div}(\mathbf{E}) = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.19)$$

qui correspond au problème (7.14)-(7.15) avec le tenseur  $\mathbf{K}$  égal à la matrice identité, un second membre non nul et  $\eta^2 = 100$ . On considère la solution

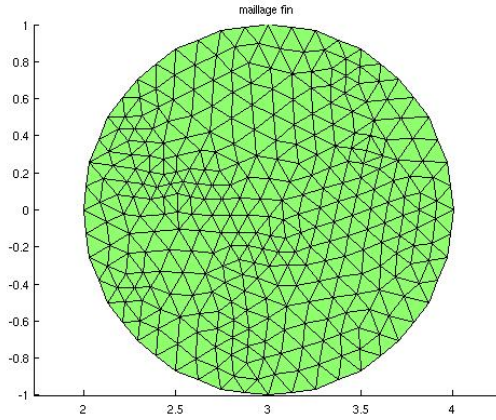


FIGURE 7.2 – maillage.

particulière

$$\mathbf{E}_{ex} = (R - R_0, Z, 0)^T, \quad (7.20)$$

que l'on a choisi délibérément indépendant de  $\phi$  et vérifiant la condition du conducteur parfait sur tout le bord  $\Gamma_C$  et  $\Gamma_A$ . Le paramètre de régularisation  $s$  a été choisi égal à 1 car la solution exacte est réelle et le tenseur  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$  n'a pas à vérifier les hypothèses du théorème 3.4. On obtient, pour les trois composantes  $(E_R, E_Z, E_\phi)$ , les figures suivantes où l'on représente le champ approché à gauche et l'écart entre le champ exact et approché à droite dans un premier temps pour le cas CL essentielle.

On constate que la solution calculée approche très correctement la solution exacte, l'écart étant de l'ordre de  $10^{-3}$ . Afin de confirmer ce résultat, une étude de convergence est ainsi réalisée, on calcule pour chaque cas l'erreur relative  $L^2$  correspondant à  $\|\mathbf{e}\|/\|\mathbf{E}_{ex}\|_{0,\Omega}$  avec  $\|\mathbf{e}\| := \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_{ex}\|_{0,\Omega}$  que l'on calcule à l'aide de la matrice de masse de l'espace du champ électrique. Il en va de même pour la norme du multiplicateur de Lagrange  $\|p\|_{0,\Omega}$ .

|   |                      |                      |                      |                      |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| h   | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
| $\ \mathbf{e}\ /\ \mathbf{E}_{ex}\ _{0,\Omega}$ | $8.5 \times 10^{-3}$ | $2.3 \times 10^{-3}$ | $4.8 \times 10^{-4}$ | $1.4 \times 10^{-4}$ |
| $\ p\ _{0,\Omega}$                              | $1.0 \times 10^{-1}$ | $3.6 \times 10^{-2}$ | $1.4 \times 10^{-2}$ | $5.0 \times 10^{-3}$ |

La convergence du champ électrique en norme  $L^2$  est en  $h^\alpha$  avec  $\alpha = 1.97$  et celle du multiplicateur de Lagrange est en  $h^\beta$  avec  $\beta = 1.44$ . Ces ordres sont bien compatibles avec les théorèmes 5.8 et 5.9.

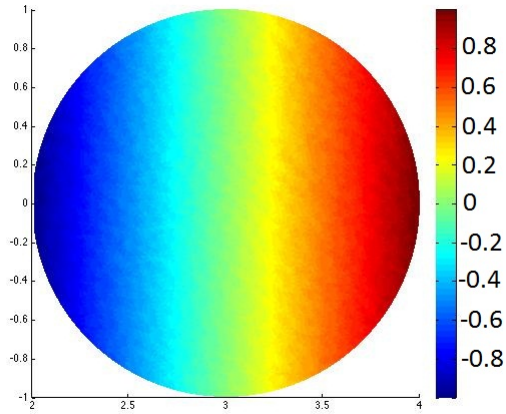


FIGURE 7.3 – partie réelle de  $E_R$

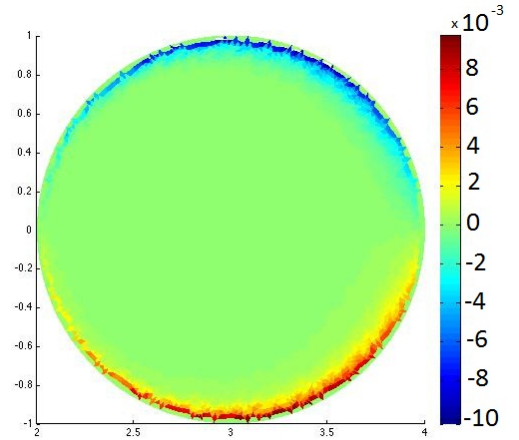


FIGURE 7.4 – écart des  $E_R$

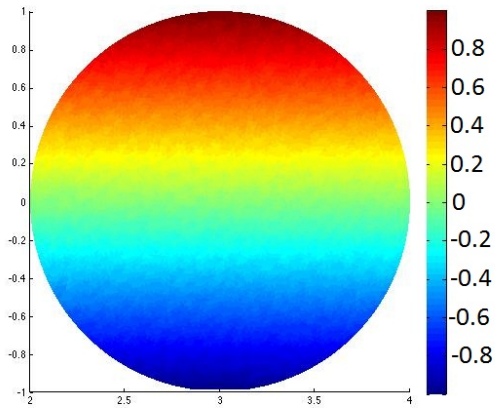


FIGURE 7.5 – partie réelle de  $E_Z$

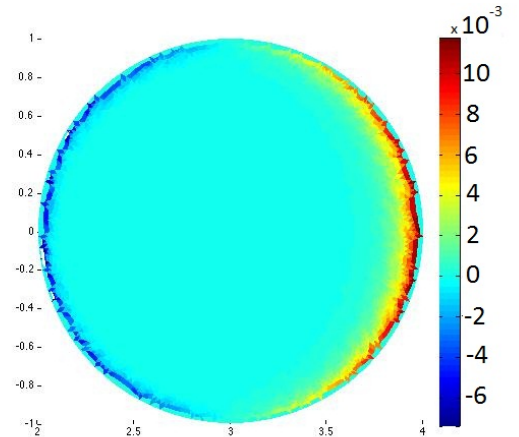


FIGURE 7.6 – écart des  $E_Z$

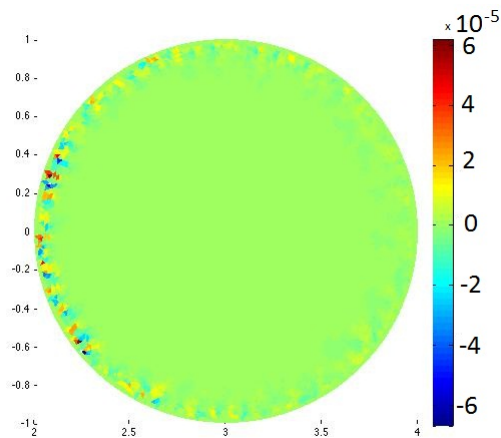


FIGURE 7.7 – partie réelle de  $E_\phi$

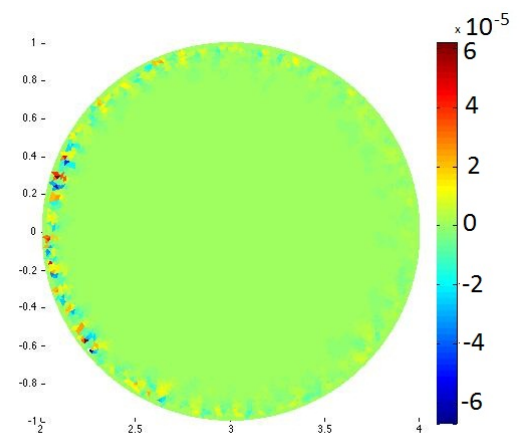


FIGURE 7.8 – écart des  $E_\phi$

Même constat pour le cas CL naturelle, la solution calculée approche très correctement la solution exacte. De plus, sur les figures représentant l'écart entre solution approchée et exacte (celles de droite sur les figures 7.10, 7.12 et 7.14), on observe l'erreur qui se situe clairement sur l'antenne  $\Gamma_A$ . Toutefois, l'erreur relative reste du même ordre que dans le cas CL essentielle.

|   |                      |                      |                      |                      |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| h   | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
| $\ \mathbf{e}\ /\ \mathbf{E}_{ex}\ _{0,\Omega}$ | $7.3 \times 10^{-3}$ | $2.0 \times 10^{-3}$ | $4.7 \times 10^{-4}$ | $9.7 \times 10^{-5}$ |
| $\ p\ _{0,\Omega}$                              | $1.0 \times 10^{-1}$ | $3.6 \times 10^{-2}$ | $1.6 \times 10^{-2}$ | $5.8 \times 10^{-3}$ |

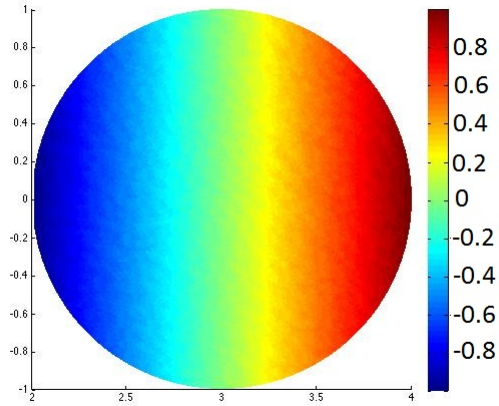
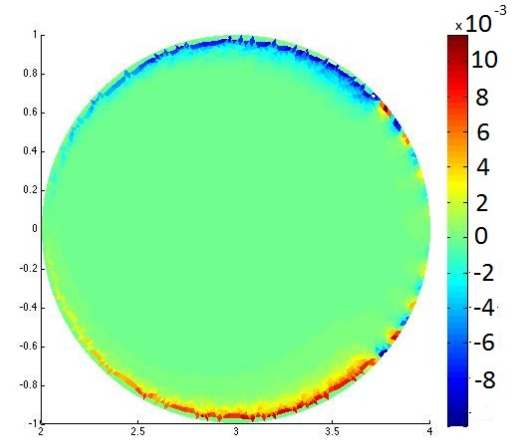
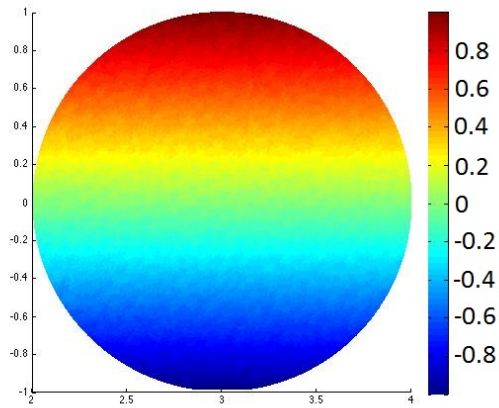
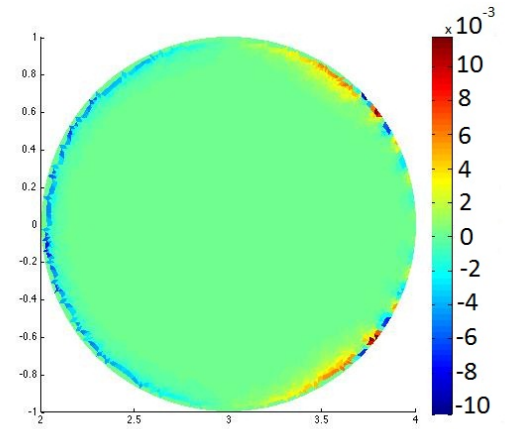
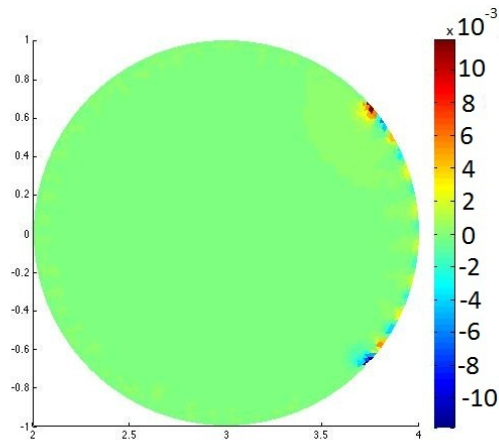
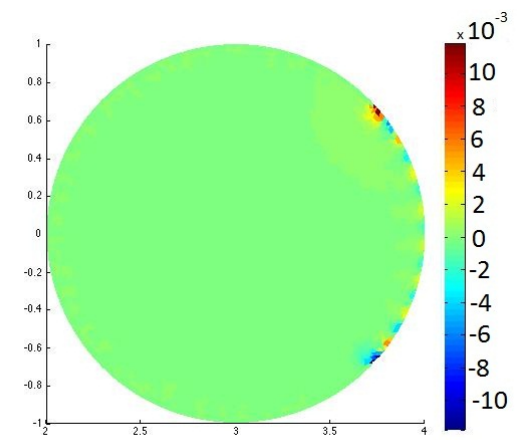
De même, on observe la convergence du champ électrique en  $h^\alpha$  avec  $\alpha = 2.08$  et celle du multiplicateur de Lagrange en  $h^\beta$  avec  $\beta = 1.37$ .

## 7.3 Simulation Full-Wave : un premier profil de densité

Dans cette section, on rappelle tous les paramètres physiques que l'on a introduit dans le chapitre 2. Pour cela, nous les avons classés par catégorie et nous les avons énumérés dans des tableaux où l'on cite leur symbole et leur nom. On se place ensuite dans un plasma particulier dont les données ont été fournies par des physiciens du CEA. On donne ensuite les valeurs des différentes fréquences ainsi que des résultats numériques obtenus.

### 7.3.1 Paramètres physiques

#### Constantes physiques

FIGURE 7.9 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 7.10 – écart des  $E_R$ FIGURE 7.11 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 7.12 – écart des  $E_Z$ FIGURE 7.13 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 7.14 – écart des  $E_\phi$

|                 |                                      |   |
|-----------------|--------------------------------------|---|
| $m_e$           | masse des électrons                  | $0.91094 \times 10^{-30}$ kg              |
| $q_e$           | charge des électrons                 | $-1.6 \times 10^{-19}$ C                  |
| $m_i$           | masse des ions                       | $1.6726 \times 10^{-27}$ kg               |
| $q_i$           | charge des ions                      | $1.6 \times 10^{-19}$ C                   |
| $\varepsilon_0$ | permittivité électrique dans le vide | $8.85 \times 10^{-12}$ Fm <sup>-1</sup>   |
| $k_B$           | constante de Boltzman                | $1.381 \times 10^{-23}$ J K <sup>-1</sup> |

### Paramètres du plasma

|               |                                |  |
|---------------|--------------------------------|--|
| $\omega_{pe}$ | fréquence plasma des électrons | $\sqrt{\frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$ |
| $\omega_{pi}$ | fréquence plasma des ions      | $\sqrt{\frac{n_i q_i^2}{\varepsilon_0 m_i}}$ |

### Fréquence collisionnelle

|             |                              |  |
|-------------|------------------------------|--|
| $\lambda_D$ | longueur de Debye            | $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_e q_e^2}}$ |
| $\Lambda$   | Volume de la sphère de Debye | $\frac{4}{3}\pi \lambda_D^3 n_e$               |
| $\nu_c$     | fréquence collisionnelle     | $\frac{\ln(\Lambda)\omega_{pe}}{\Lambda}$      |

### Fréquences cyclotroniques et fréquence hybride

|               |                                       |                                 |
|---------------|---------------------------------------|---------------------------------|
| $\omega_{ce}$ | fréquence cyclotronique des électrons | $\frac{ q_e B}{m_e}$            |
| $\omega_{ci}$ | fréquence cyclotronique des ions      | $\frac{ q_i B}{m_i}$            |
| $\omega_{LH}$ | fréquence hybride                     | $\sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$ |

### L'amortissement Landau

|           |  |                                      |
|-----------|--|--------------------------------------|
| $v_{the}$ | vitesse d'agitation thermique des électrons                          | $\sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}}$          |
| $k_{  }$  | composante du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ parallèle à $\mathbf{B}_0$ | $\frac{k}{R}$ ( $k$ mode de Fourier) |

### 7.3.2 Valeurs numériques

Les données sur  $\tilde{\Omega}$  sont inchangées par rapport au paragraphe précédent, la dimension du tore est alors proche des tokamaks *Tore Supra* ou *JET* encore en activité. On considère un plasma de densité des particules constant  $n_e(R, Z) = n_i(R, Z) = n_{max} = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . On obtient alors pour les fréquences plasmas :

$$\omega_{pe} \approx 1,7827 \times 10^{11} \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_{pi} \approx 4,1638 \times 10^9 \text{ rad/s}. \quad (7.21)$$

On suppose que l'intensité du champ magnétique externe est constant et à valeur  $B_0 = 3.2 \text{ T}$  et la température cinétique  $k_B T = 1.6 \times 10^{-16} \text{ J} = 10^3 \text{ eV} = 1 \text{ keV}$ . Les fréquences cyclotroniques sont alors données par

$$\omega_{ce} \approx 5,6202 \times 10^{11} \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_{ci} \approx 3,0659 \times 10^8 \text{ rad/s}. \quad (7.22)$$

Auquel cas, la fréquence hybride vaut

$$\omega_{LH} \approx 1,3127 \times 10^{10} \text{ rad/s}. \quad (7.23)$$

D'où la fréquence de l'onde  $\omega = \lambda \omega_{LH}$  avec  $\lambda$  compris entre 0,1 et 10 que l'on précisera pour chaque simulation. Enfin on suppose que la densité de courant  $\mathbf{j}_s = (0 \ 0 \ 1)^T$  correspondant au champ électrique excité à l'antenne.

Au sujet du paramètre de régularisation  $s$ , un deuxième test similaire a été effectué avec le tenseur diélectrique  $\mathbf{K}$  définie au chapitre 2 et un second membre du même ordre que celui de la FVMA (2.61)-(2.62) afin de trouver une valeur de  $s$  optimale [8]. On donne dans les tableaux suivants l'erreur relative  $\|\mathbf{e}\|/\|\mathbf{E}_{ex}\|_{0,\Omega}$  en fonction des différents valeurs de la partie réelle et imaginaire de  $s$  pour, respectivement,  $h = 0.04, 0.02$  et  $0.01$ .



|                 | $Re(s) = 0.01$       | $Re(s) = 0.1$        | $Re(s) = 1$          | $Re(s) = 10$         |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $Im(s) = -0.01$ | $6 \times 10^{-3}$   | $5 \times 10^{-3}$   | $5.4 \times 10^{-3}$ | $7.7 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -0.1$  | $6.2 \times 10^{-3}$ | $6 \times 10^{-3}$   | $5.6 \times 10^{-3}$ | $7.7 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -1$    | $6.7 \times 10^{-3}$ | $6.6 \times 10^{-3}$ | $6.2 \times 10^{-3}$ | $7.7 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -10$   | $8.8 \times 10^{-3}$ | $8.8 \times 10^{-3}$ | $8.6 \times 10^{-3}$ | $8.8 \times 10^{-3}$ |

|                 | $Re(s) = 0.01$       | $Re(s) = 0.1$        | $Re(s) = 1$          | $Re(s) = 10$         |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $Im(s) = -0.01$ | $1.8 \times 10^{-3}$ | $1.4 \times 10^{-3}$ | $1.2 \times 10^{-3}$ | $2.1 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -0.1$  | $2.2 \times 10^{-3}$ | $2.1 \times 10^{-3}$ | $1 \times 10^{-3}$   | $2.3 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -1$    | $2.6 \times 10^{-3}$ | $2.6 \times 10^{-3}$ | $2.4 \times 10^{-3}$ | $2.7 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -10$   | $3.5 \times 10^{-3}$ | $3.5 \times 10^{-3}$ | $3.4 \times 10^{-3}$ | $3.6 \times 10^{-3}$ |

|                 | $Re(s) = 0.01$       | $Re(s) = 0.1$        | $Re(s) = 1$          | $Re(s) = 10$         |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $Im(s) = -0.01$ | $2.6 \times 10^{-3}$ | $2.6 \times 10^{-3}$ | $2.5 \times 10^{-3}$ | $3.9 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -0.1$  | $2.8 \times 10^{-3}$ | $2.7 \times 10^{-3}$ | $2.6 \times 10^{-3}$ | $4 \times 10^{-3}$   |
| $Im(s) = -1$    | $3. \times 10^{-3}$  | $2.6 \times 10^{-3}$ | $2.3 \times 10^{-4}$ | $4.1 \times 10^{-3}$ |
| $Im(s) = -10$   | $4.8 \times 10^{-3}$ | $4.8 \times 10^{-3}$ | $4.6 \times 10^{-3}$ | $4.8 \times 10^{-3}$ |

On constate qu'il n'y a pas de valeur optimale fixe de  $s$  pour laquelle l'erreur relative en norme  $L^2$  soit minimale pour tous les pas de maillage. Cependant, lorsque  $|Re(s)|$ , ainsi que  $|Im(s)|$ , est compris entre 0.01 et 1, l'ordre de l'erreur diffère peu. Dans la suite, on choisit de prendre  $s$  égal à  $1 - \nu$ , elle vérifie bien l'hypothèse du théorème 3.6 sur l'existence et l'unicité du solution du problème Full-Wave.

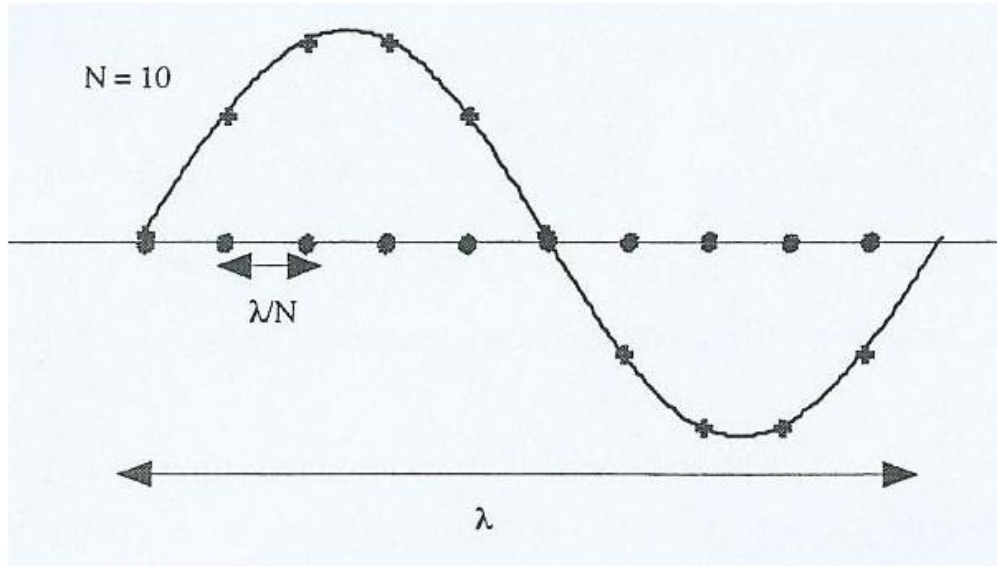


FIGURE 7.15 – nombre de points par longueur d’onde

### 7.3.3 Illustration numérique

Lorsque l’on discrétise un problème de propagation d’onde par une méthode d’éléments finis, afin d’évaluer au mieux la solution, la taille maximale d’une maille doit prendre en compte la longueur d’onde de cette dernière. En effet, il est préférable d’avoir au moins une dizaine de points par longueur d’onde comme le montre la figure 7.15. Dans le cas de la simulation Full-Wave, la longueur d’onde en question est de l’ordre d’au moins une dizaine de centimètres (i.e. 0,1 m), on considère le quatrième maillage, à savoir un pas de maillage  $h = 0,01$  m. La matrice du système linéaire (5.16) est alors de taille d’environ 100000. Une méthode directe, plus précisément la méthode d’élimination de Gauss [48], est utilisée pour résoudre le système.

On analyse alors les parties réelles des composantes du champ électrique pour plusieurs valeurs du mode de Fourier  $k$  et de fréquence  $\omega$  suivant l’accessibilité de l’onde électromagnétique. On se place dans le premier cas de densité des particules, à savoir constant dans tout le plasma.

On a présenté ici le cas  $\omega = \omega_{LH}/2$  pour  $k = 200$ , on a

$$S \approx 0.69 + 1.32 \times 10^{-5} i \quad (7.24)$$

$$D \approx 8.62 - 9.28 \times 10^{-7} i \quad (7.25)$$

$$P_L \approx -736 + 0.15 i. \quad (7.26)$$

On étudie alors l'accessibilité de l'onde. On a

$$\sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}} = 1.154 \quad (7.27)$$

$$\sqrt{S + 2 \frac{\sqrt{SD}}{\sqrt{-(\sigma+1)P}} + \frac{D^2}{-P}} = 0.923 \quad (7.28)$$

$$n_{\parallel} = 2.285, \quad (7.29)$$

où  $n_{\parallel}$  est calculé sur l'antenne. Comme  $|n_{\parallel}| > \sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}}$ , on est dans un cas d'accessibilité stricte et l'on observe un phénomène de pénétration de l'onde.

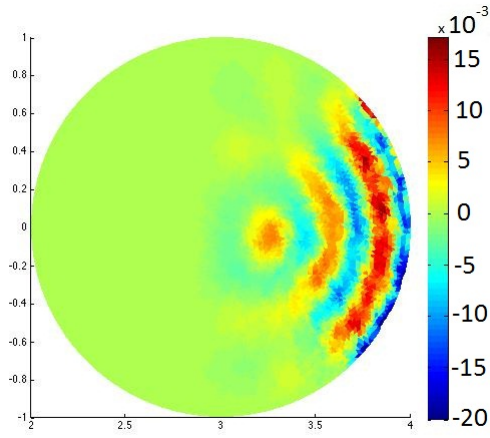


FIGURE 7.16 – partie réelle de  $E_R$

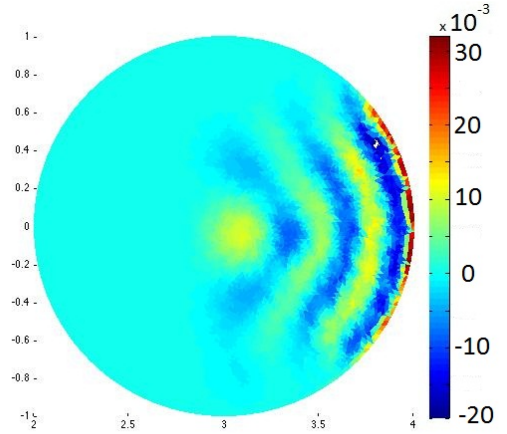


FIGURE 7.17 – partie imaginaire de  $E_R$

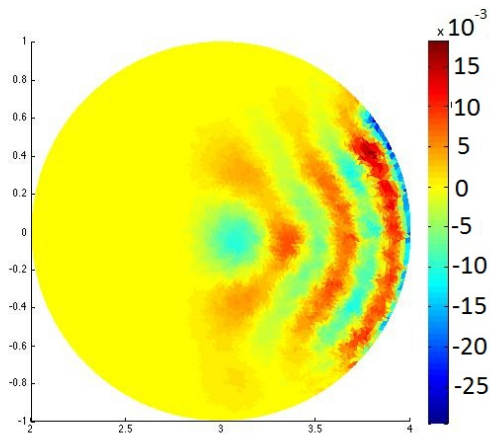


FIGURE 7.18 – partie réelle de  $E_Z$

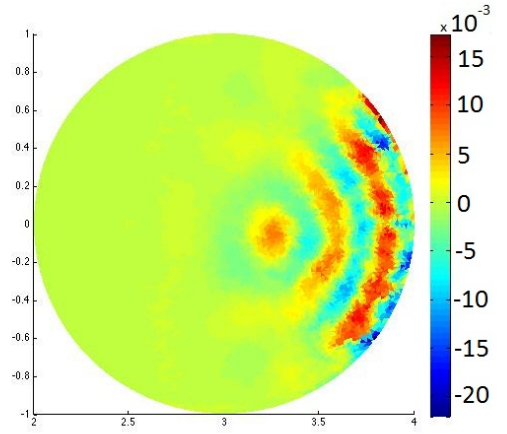


FIGURE 7.19 – partie imaginaire de  $E_Z$

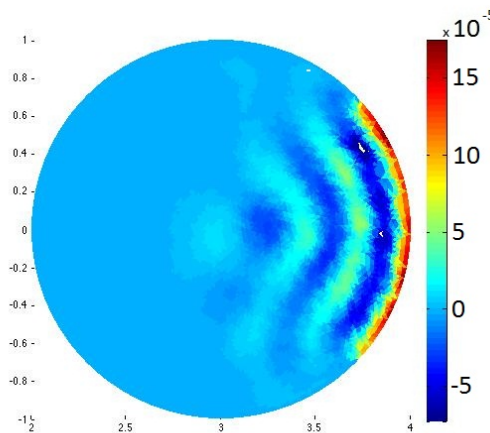


FIGURE 7.20 – partie réelle de  $E_\phi$

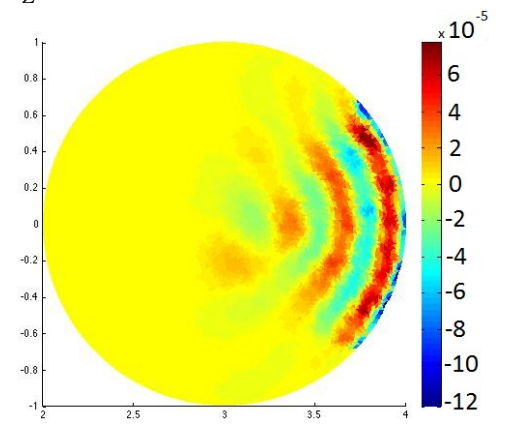


FIGURE 7.21 – partie imaginaire de  $E_\phi$

Lorsque  $\omega = \omega_{LH}$  et  $k = 550$ , on a

$$S \approx 1 + 2.64 \times 10^{-6} \iota \quad (7.30)$$

$$D \approx 4.3 + 2.12 \times 10^{-17} \iota \quad (7.31)$$

$$P_L \approx -183 + 0.03 \iota. \quad (7.32)$$

Au niveau de l'accessibilité de l'onde, on a

$$\sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}} = 1.318 \quad (7.33)$$

$$\sqrt{S + 2 \frac{\sqrt{SD}}{\sqrt{-(\sigma+1)P}} + \frac{D^2}{-P}} = 1.08 \quad (7.34)$$

$$n_{\parallel} = 1.57. \quad (7.35)$$

Comme  $|n_{\parallel}| > \sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}}$ , on est de nouveau dans un cas d'accessibilité stricte mais l'on observe que la propagation de l'onde dans le plasma est moindre par rapport au cas précédent.

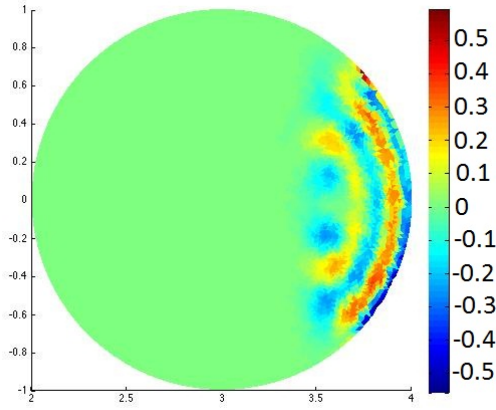


FIGURE 7.22 – partie réelle de  $E_R$

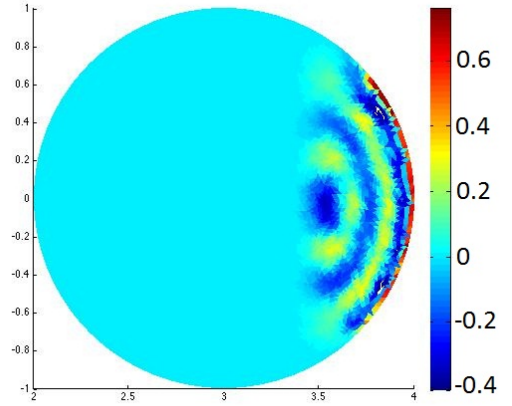


FIGURE 7.23 – partie imaginaire de  $E_R$

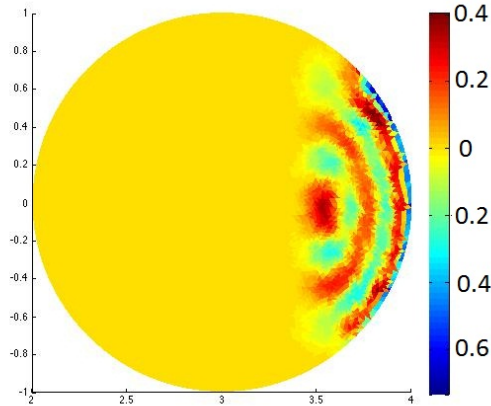


FIGURE 7.24 – partie réelle de  $E_Z$

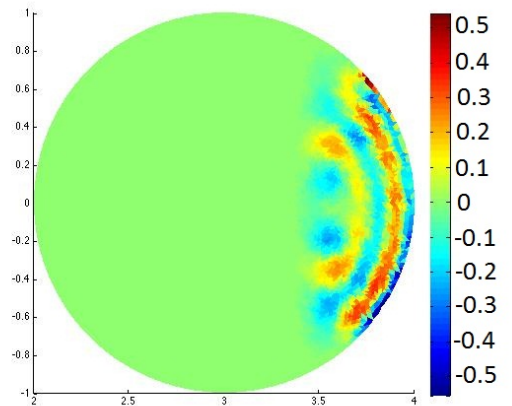


FIGURE 7.25 – partie imaginaire de  $E_Z$

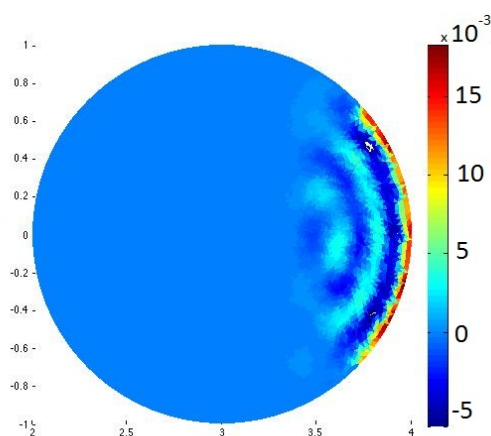


FIGURE 7.26 – partie réelle de  $E_\phi$

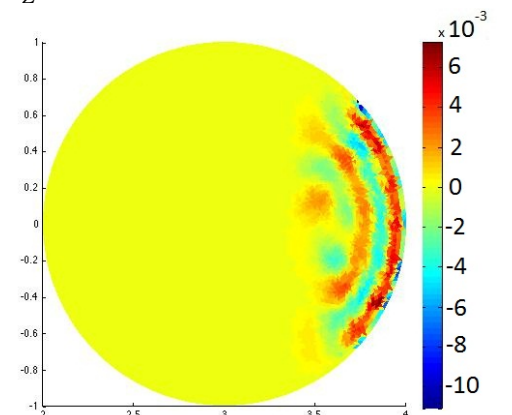


FIGURE 7.27 – partie imaginaire de  $E_\phi$

Lorsque  $\omega = 2\omega_{LH}$  et  $k = 200$ , on a

$$S \approx 1.07 + 8.3 \times 10^{-7} i \quad (7.36)$$

$$D \approx 2.15 + 5.8 \times 10^{-8} i \quad (7.37)$$

$$P_L \approx -45 + 3 \times 10^{-4} i. \quad (7.38)$$

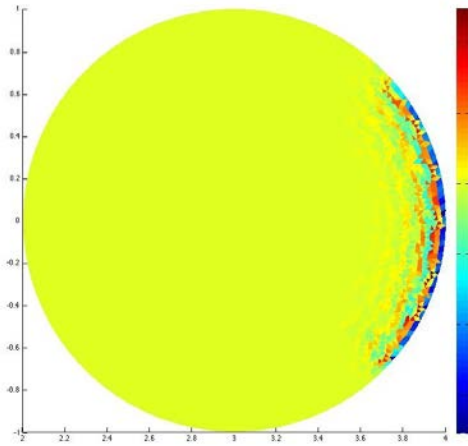
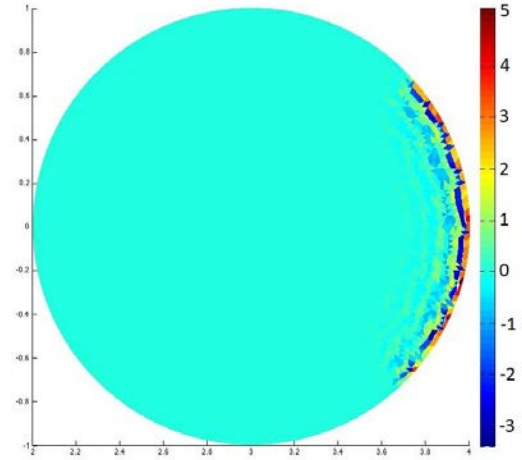
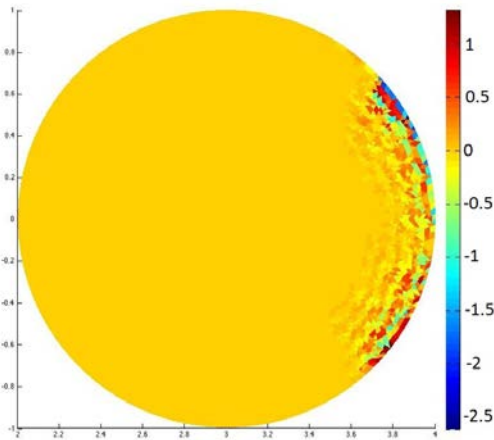
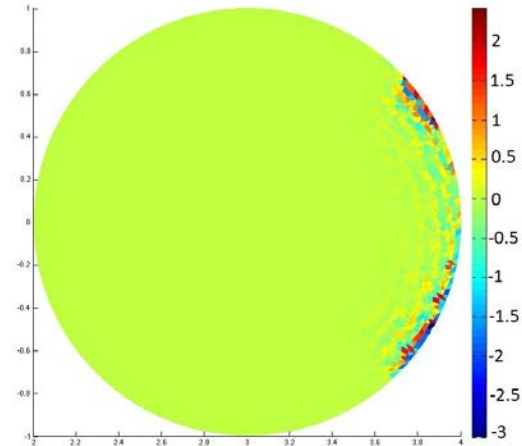
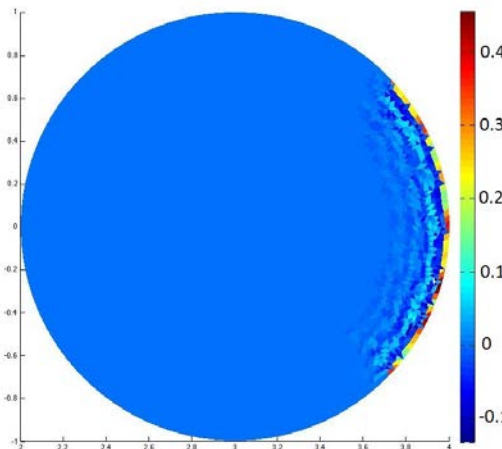
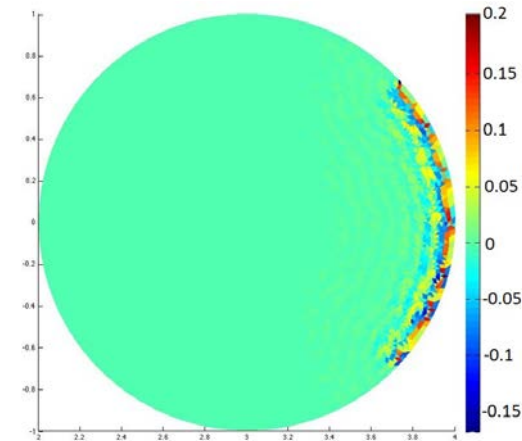
Au niveau de l'accessibilité de l'onde, on a

$$\sqrt{S} + \frac{D}{\sqrt{-P}} = 1.357 \quad (7.39)$$

$$\sqrt{S + 2 \frac{\sqrt{SD}}{\sqrt{-(\sigma+1)P}} + \frac{D^2}{-P}} = 1.115 \quad (7.40)$$

$$n_{\parallel} = 0.57. \quad (7.41)$$

Comme  $|n_{\parallel}| < \sqrt{S + 2 \frac{\sqrt{SD}}{\sqrt{-(\sigma+1)P}} + \frac{D^2}{-P}}$ , on est dans un cas d'inaccessibilité stricte et l'on observe une absence de pénétration de l'onde. On parle alors de phénomène de réfraction.

FIGURE 7.28 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 7.29 – partie imaginaire de  $E_R$ FIGURE 7.30 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 7.31 – partie imaginaire de  $E_Z$ FIGURE 7.32 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 7.33 – partie imaginaire de  $E_\phi$



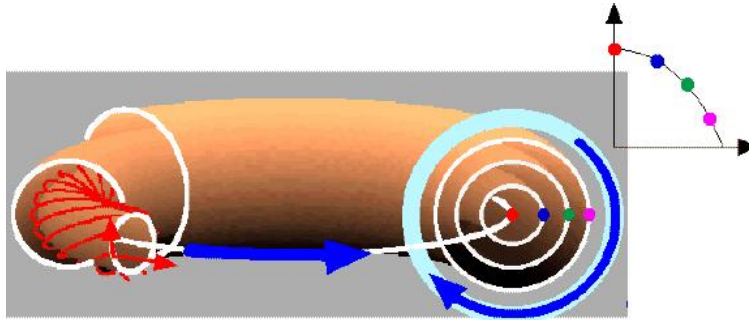


FIGURE 7.34 – profil radial de la densité des particules dans un tokamak

## 7.4 Simulation Full-Wave : un deuxième profil de densité

### 7.4.1 Variation de la densité

On étudie ici un deuxième profil de densité des particules qui se rapproche plus des expérimentations réelles où la densité peut être décrite dans une section du tokamak simplement en fonction du rayon du plasma  $R$ , on parle alors de profil radial [18]. On considère que la densité, ainsi que la température et la pression, maximales au centre du plasma et décroissant vers le bord de la décharge comme illustrée sur la figure 7.34. Pour approcher au mieux cette description, on suppose que la fonction  $n_e$  décroît de façon parabolique à partir du centre de  $\Omega$  jusqu'au bord de celui-ci où la densité est proche de zéro sans jamais être nulle. En effet, si elle était nulle en un point du tore, les fréquences plasmas décrites ci-dessus seraient nulles et les hypothèses du théorème 3.6 ne seraient plus garanties. Si  $d$  est la distance d'un point du section du tore à son centre alors on a

$$d^2 = (R - R_0)^2 + Z^2.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon \ll 1$ , on prend alors comme densité

$$n_e(R, Z) = n_{max}[(1 - \varepsilon)(1 - (R - R_0)^2 - Z^2) + \varepsilon].$$

De là, on peut calculer successivement les paramètres numériques dépendant de cette dernière ainsi que leurs dérivées partielles. Or les seuls paramètres utilisant  $n_e(\mathbf{r})$  sont  $\alpha(\mathbf{r})$ ,  $\omega_{pe}(\mathbf{r})$  et  $\omega_{pi}(\mathbf{r})$ . Si le champ  $\mathbf{B}$  est uniforme alors

les fréquences cyclotroniques sont constantes :  $\omega_{ce}(\mathbf{r}) = \omega_{ce}$  et  $\omega_{ci}(\mathbf{r}) = \omega_{ci}$ .  
On rappelle qu'on a

$$\omega_{pe}(\mathbf{r}) = \frac{q_e}{\sqrt{\varepsilon_0 m_e}} \sqrt{n_e(\mathbf{r})} \quad \text{et} \quad \omega_{pi}(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{\sqrt{\varepsilon_0 m_i}} \sqrt{n_e(\mathbf{r})}. \quad (7.42)$$

**Remarque 7.2.** *On n'utilise que leur carré dans les coefficients  $S, D$  et  $P$ .*

Il nous reste à exprimer  $\alpha(\mathbf{r}) = \omega + \nu_c(\mathbf{r})$  en fonction de  $n_e(\mathbf{r})$ , on a

$$\begin{aligned} \nu_c(\mathbf{r}) &= \frac{\ln(\Lambda(\mathbf{r}))\omega_{pe}(\mathbf{r})}{\Lambda(\mathbf{r})} \quad \text{avec} \quad \Lambda(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{(\varepsilon_0 k_B T)^{3/2}}{q_e^3} \frac{1}{\sqrt{n_e(\mathbf{r})}} \\ &= \frac{q_e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 k_B T^{3/2} \sqrt{m_e}} \left[ \ln\left(4\pi \frac{(\varepsilon_0 k_B T)^{3/2}}{q_e^3}\right) - \frac{1}{2} \ln(n_e(\mathbf{r})) \right] n_e(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

On calcule maintenant les dérivées partielles des coefficients de la matrice  $\underline{\mathbf{K}}(R, Z)$  pour exprimer  $\text{div}_k \underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}$ . D'après (4.3), on a

$$\text{div}_k \underline{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \frac{1}{R} \frac{\partial(RSu_R - iRDu_Z)}{\partial R} + \frac{\partial(iDu_R + Su_Z)}{\partial Z} + \frac{ik}{R} P_L u_\phi. \quad (7.43)$$

Ainsi, pour exprimer  $\frac{\partial S}{\partial \cdot}$  et  $\frac{\partial D}{\partial \cdot}$ , il suffit de calculer  $\frac{\partial \alpha}{\partial \cdot}$  et  $\frac{\partial \omega_{ps}^2}{\partial \cdot}$  en fonction de  $\frac{\partial n_e}{\partial \cdot}$  ( $\partial \cdot$  étant  $\partial R$  ou  $\partial Z$ ). On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ps}^2}{\partial \cdot} &= \frac{q_s^2}{\varepsilon_0 m_s} \frac{\partial n_e}{\partial \cdot} \quad \text{avec } s = e \text{ ou } i, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \cdot} &= i \frac{\partial \nu_c}{\partial \cdot} = -i \frac{q_e^4}{8\pi \varepsilon_0^2 k_B T^{3/2} \sqrt{m_e}} (1 + \ln(n_e)) \frac{\partial n_e}{\partial \cdot}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial R} &= -n_{max}(1 - \varepsilon)2(R - R_0), \\ \frac{\partial n_e}{\partial Z} &= -n_{max}(1 - \varepsilon)2Z. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial S}{\partial \cdot}(R, Z) = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \alpha}{\partial \cdot} \sum_s \left( \frac{\omega_{ps}^2(R, Z)}{\alpha^2(R, Z) - \omega_{cs}^2} \right) \quad (7.44)$$

$$-\frac{\alpha(R, Z)}{\omega} \sum_s \left( \frac{\frac{\partial \omega_{ps}^2}{\partial \cdot}(\alpha^2(R, Z) - \omega_{cs}^2) - 2\omega_{ps}^2(R, Z)\alpha(R, Z)\frac{\partial \alpha}{\partial \cdot}}{(\alpha^2(R, Z) - \omega_{cs}^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \cdot}(R, Z) = \sum_s \delta_s \frac{\omega_{cs}}{\omega} \left( \frac{\frac{\partial \omega_{ps}^2}{\partial \cdot}(\alpha^2(R, Z) - \omega_{cs}^2) - 2\omega_{ps}^2(R, Z)\alpha(R, Z)\frac{\partial \alpha}{\partial \cdot}}{(\alpha^2(R, Z) - \omega_{cs}^2)^2} \right)$$

où  $\delta_e = -1$  et  $\delta_i = 1$ . (7.45)

Lorsque  $\omega = \omega_{LH}/2$ , les parties réelles des coefficients  $S$ ,  $D$  et  $P_L$  définis dans (7.24)-(7.26) vérifient bien la proposition 6.9 et on a  $T = \min\{S, D\} = S$ . On représente alors les composantes  $R, Z, \phi$  du champ  $\mathbf{E}$  pour un mode de Fourier  $k = 100$ .

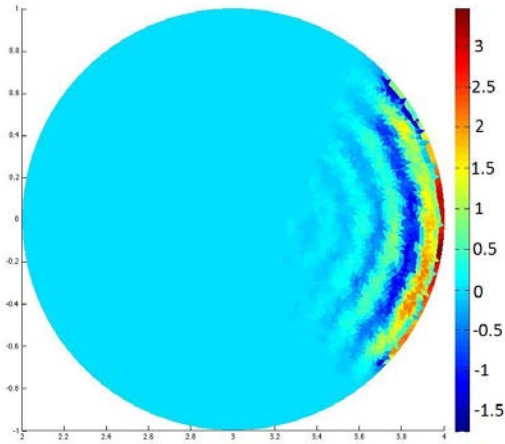


FIGURE 7.35 – partie réelle de  $E_R$

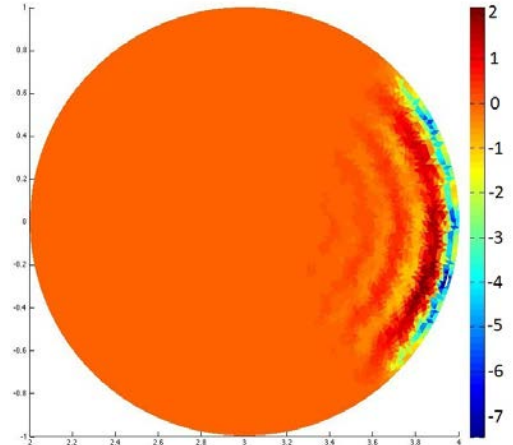


FIGURE 7.36 – partie imaginaire de  $E_R$

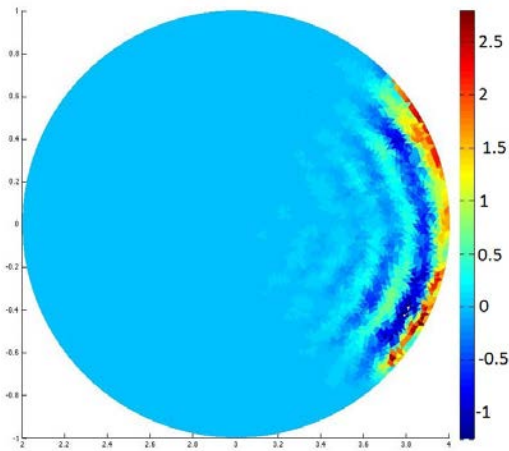


FIGURE 7.37 – partie réelle de  $E_Z$

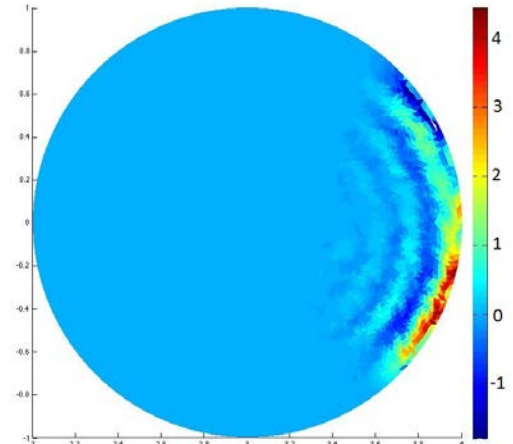


FIGURE 7.38 – partie imaginaire de  $E_Z$

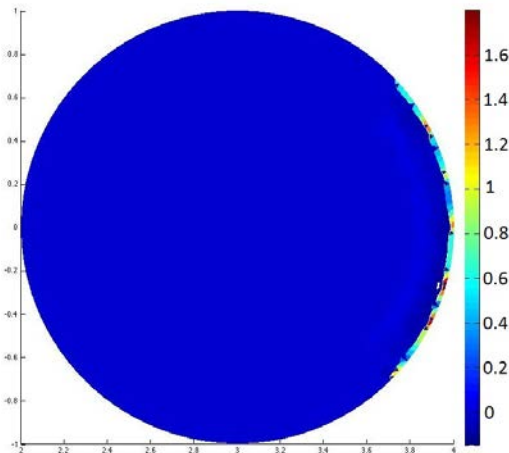


FIGURE 7.39 – partie réelle de  $E_\phi$

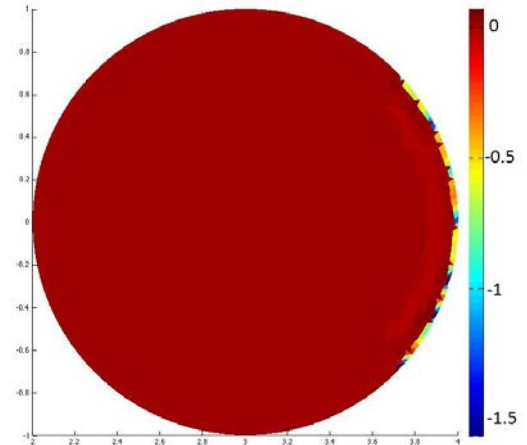


FIGURE 7.40 – partie imaginaire de  $E_\phi$

### 7.4.2 Influence des paramètres sur l'accessibilité

On rappelle la composante parallèle du vecteur d'onde :

$$k_{\parallel}(\mathbf{r}) = \frac{k}{R}. \quad (7.46)$$

L'indice de réfraction donne alors  $n_{\parallel}(\mathbf{r}) = \frac{ck}{\omega R}$ . L'évolution de l'accessibilité dépend alors du mode de Fourier  $k$  et de la fréquence  $\omega$ . En effet, si l'on suppose  $\omega$  constante alors, lorsque le mode de Fourier  $k$  augmente,  $n_{\parallel}$  augmente et l'accessibilité croît. Nous allons confirmer ce résultat par des tests numériques où  $\omega = \omega_{LH}$ . Les figures 7.41-7.46 montrent clairement une évolution de la pénétration de l'onde lorsque l'on augmente  $k$ .

Dans le même registre, on suppose  $k$  constante et l'on fait varier  $\omega$ . Il est clair que lorsque  $\omega$  augmente, l'accessibilité décroît cette fois-ci. On considère le résultat numérique de la figure 7.46, i.e.  $k = 150$  et  $\omega = \omega_{LH}/2$ , où l'on a un cas d'accessibilité stricte. On représente les mêmes résultats lorsque  $\omega$  augmente afin d'observer une décroissance de l'accessibilité. Cette fois-ci, nous observons dans les figures 7.47-7.52 une décroissance de la pénétration de l'onde lorsque  $\omega$  augmente.

Enfin, pour chaque fréquence  $\omega$  choisie, nous avons remarqué qu'il existe un mode de Fourier optimal tel que l'onde émise par l'antenne pénètre au maximum dans le plasma.

| $\omega$    | $\omega_{LH}/2$ | $\omega_{LH}$ | $2\omega_{LH}$ | $3\omega_{LH}$ |
|-------------|-----------------|---------------|----------------|----------------|
| $k$ optimal | $\approx 200$   | $\approx 300$ | $\approx 520$  | $\approx 700$  |

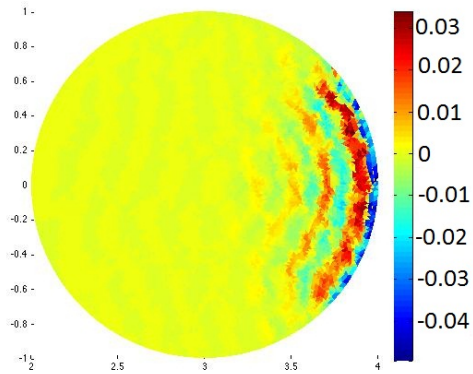


FIGURE 7.41 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $k = 100$

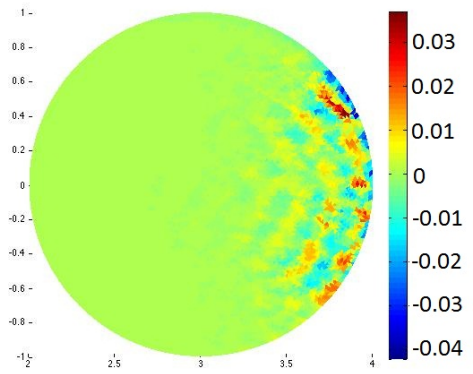


FIGURE 7.42 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $k = 100$

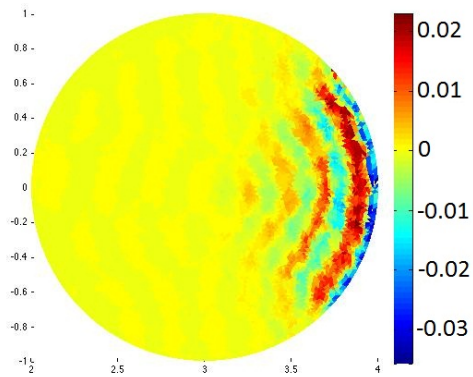


FIGURE 7.43 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $k = 125$

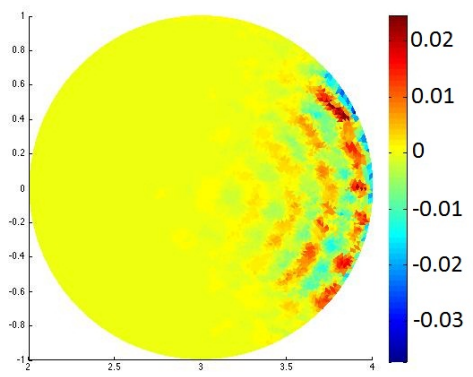


FIGURE 7.44 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $k = 125$

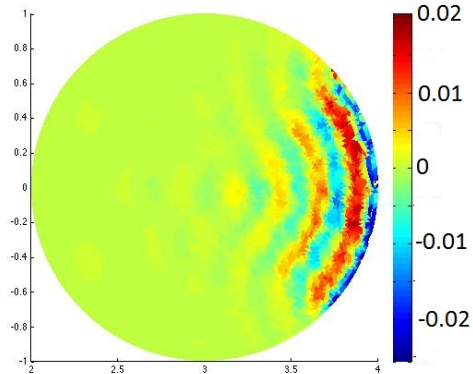


FIGURE 7.45 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $k = 150$

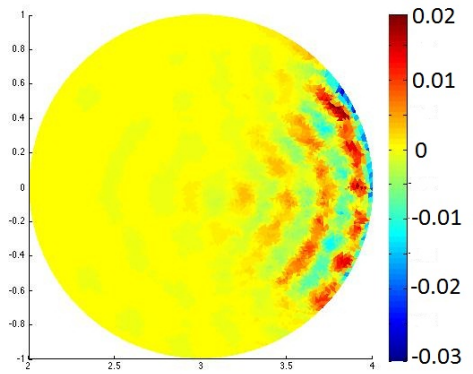


FIGURE 7.46 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $k = 150$

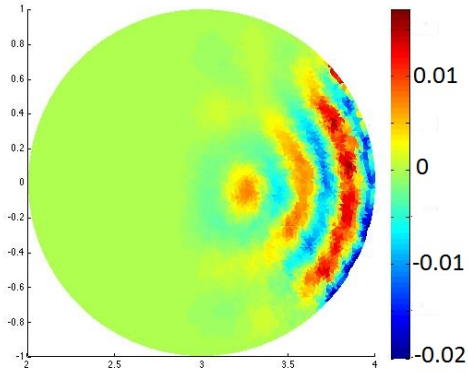


FIGURE 7.47 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $\omega = 0.5\omega_{LH}$

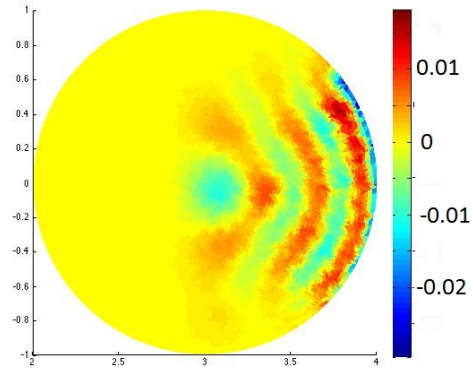


FIGURE 7.48 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $\omega = 0.5\omega_{LH}$

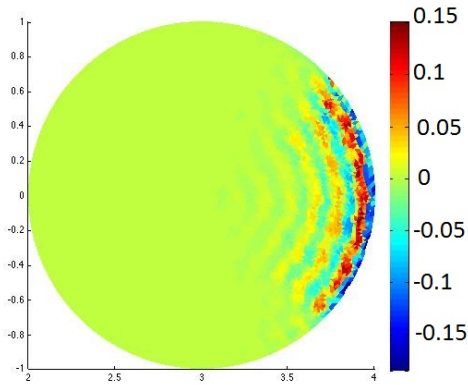


FIGURE 7.49 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $\omega = \omega_{LH}$

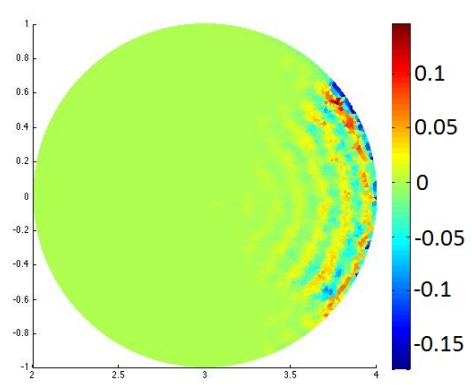


FIGURE 7.50 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $\omega = \omega_{LH}$

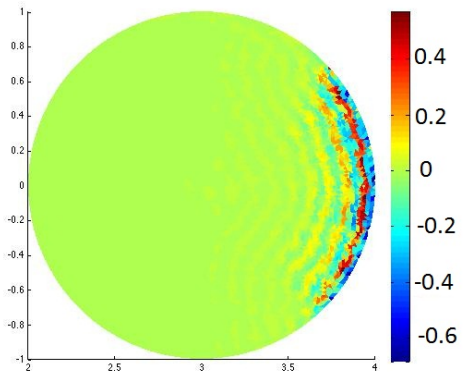


FIGURE 7.51 – partie réelle de  $E_R$   
pour  $\omega = 1.5\omega_{LH}$

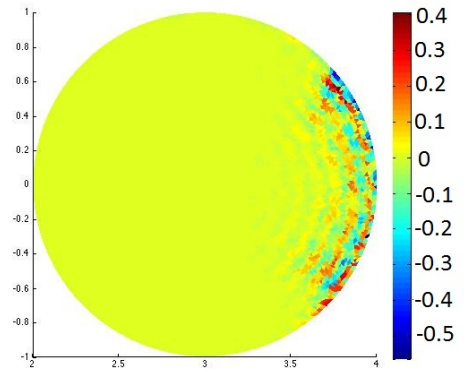


FIGURE 7.52 – partie réelle de  $E_Z$   
pour  $\omega = 1.5\omega_{LH}$

# Chapitre 8

## Résolution du système linéaire de type point-selle généralisé

Le but de ce chapitre est de montrer comment résoudre les systèmes linéaires dits de type point-selle

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{C}}^H \\ \underline{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (8.1)$$

avec  $\underline{\mathbf{A}} \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\underline{\mathbf{C}} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ . On s'intéresse à une méthode itérative en particulier, la méthode GMRES, proposé dans [50], qui sera ensuite préconditionnée. On rappelle d'une part les notions de bases des méthodes itératives de type Krylov pour présenter la méthode GMRES. Et d'autre part, on étudie des préconditionneurs adaptés à la résolution des équations des fluides incompressibles qui donnent lieu au même type de système que la simulation Full-Wave.

### 8.1 Classification du problème

Lorsque  $\underline{\mathbf{A}}$  est hermitienne définie positive alors le système (8.1) devient un problème d'optimisation avec contrainte :

$$\begin{aligned} \min J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^H \underline{\mathbf{A}} \mathbf{u} - \mathbf{f}^H \mathbf{u} \\ \text{tel que } \underline{\mathbf{C}} \mathbf{u} &= \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (8.2)$$



Une solution  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*)$  de (8.2) est alors un point-selle du lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^H \underline{\mathbf{A}} \mathbf{u} - \mathbf{f}^H \mathbf{u} + (\underline{\mathbf{C}} \mathbf{u} - \mathbf{g})^H \mathbf{p}, \quad (8.3)$$

d'où l'appellation de ce type de système.

Dans la littérature, lorsque la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$  n'est pas hermitienne, on parle d'un problème de *point-selle généralisé*, ce qui est le cas pour le système (5.16) de notre simulation Full-Wave. Les articles correspondant aux problèmes de point-selle traitent généralement le cas hermitien, on cite alors, pour le cas non hermitien, l'article de Ciarlet Jr., Huang et Zou [23] ou encore le système matriciel des équations d'Oseen (correspondant aux équations de Navier-Stokes linéarisées) [30]. Une bonne référence regroupant tous les cas est l'article de Benzi, Golub et Liesen [10].

## 8.2 La méthode GMRES

On s'intéresse ici à une méthode de résolution du système (8.1). Lorsque la taille de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$  est modérée, une méthode directe [20] reste faisable, sinon il serait plus convenable d'utiliser une méthode itérative. On rappelle qu'une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs  $(\mathbf{x}_m)$  convergeant vers  $\mathbf{x}$  la solution du problème. En particulier, on considère une méthode itérative dite de type Krylov, en particulier la méthode GMRES qui est adaptée à notre système linéaire (5.16) car elle ne requiert pas que la matrice du système soit hermitienne définie positive contrairement aux méthodes itératives classiques telle que la méthode du gradient conjugué. Le terme GMRES provient de *Generalized Minimum RESidual* et cette méthode a été proposée par Saad [50] en 1986. L'idée consiste à calculer une solution approchée sous la forme  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}$  où  $\mathbf{x}_0$  est un vecteur initial et  $\boldsymbol{\delta}$  un vecteur appartenant au  $m$ -ième espace de Krylov  $\mathbf{K}_m(\underline{\mathbf{A}}, \mathbf{b}) = \text{Vect}\{\mathbf{b}, \underline{\mathbf{A}}\mathbf{b}, \underline{\mathbf{A}}^2\mathbf{b}, \dots, \underline{\mathbf{A}}^{m-1}\mathbf{b}\}$ . À l'aide du processus d'Arnoldi, on peut générer une base orthonormale  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  de cette espace. On exprime alors  $\mathbf{x}_m$  dans cette base :  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \underline{\mathbf{V}}_m \mathbf{y}_m$  où  $\underline{\mathbf{V}}_m \in \mathbb{C}^{n \times m}$  la matrice formée des vecteurs  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ . L'algorithme d'Arnoldi permet de calculer une matrice de Hessenberg supérieure  $\underline{\mathbf{H}}_m \in \mathbb{C}^{(m+1) \times m}$  telle que  $\underline{\mathbf{H}}_m = \underline{\mathbf{V}}_{m+1}^H \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{V}}_m$ . Soit  $\mathbf{r}_m := \underline{\mathbf{A}} \mathbf{x}_m - \mathbf{b}$  le résidu à l'étape  $m$ , la matrice  $\underline{\mathbf{V}}_m$  étant orthogonale, on a

$$\|\mathbf{r}_m\|_2 = \|\underline{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}_m - \beta \mathbf{e}_1\|_2,$$

où  $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$  et  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . On calcule alors  $\mathbf{y}_m$  de telle manière à ce que le résidu soit minimisé, ce qui revient à résoudre un problème de moindres carrés. L'algorithme GMRES se résume comme suit :

1. Choisir  $\mathbf{x}_0$ .  
Calculer  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$ ,  $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$  et  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\beta$ .
2. Processus d'Arnoldi (Gram-Schmidt classique).  
Pour  $i = 1, 2, \dots, m$   
 $\mathbf{w} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{v}_i$   
 Pour  $k = 1, 2, \dots, i$   
 $h_{k,i} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{C}^n}$  avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$  le produit scalaire standard,  
 $\mathbf{w} = \mathbf{w} - h_{k,i}\mathbf{v}_k$  ;  
 $h_{i+1,i} = \|\mathbf{w}\|_2$ ,  
 $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{w}/h_{i+1,i}$ .
3. Problème de moindres carrés  
 $\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \|\underline{\mathbf{H}}_m \mathbf{y} - \beta \mathbf{e}_1\|_2 = \|\underline{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}_m - \beta \mathbf{e}_1\|_2$ .
4. L'approximation de la solution  
 $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \underline{\mathbf{V}}_m \mathbf{y}_m$ .

On peut faire une estimation du taux de convergence de la méthode GMRES à l'aide du conditionnement et des valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$ . En effet, la solution approchée  $\mathbf{x}_m$  appartenant à  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_m(\underline{\mathbf{A}}, \mathbf{b})$ , elle peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + q_{m-1}(\underline{\mathbf{A}})r_0$$

où  $q_{m-1}$  est un polynôme de degré  $m - 1$ . On a alors

$$\|r_m\|_2 = \|\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_m - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_m(\underline{\mathbf{A}}, \mathbf{b})} \|\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2.$$

Or  $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0 + q_{m-1}(\underline{\mathbf{A}})r_0) - \mathbf{b} = \underbrace{\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}}_{r_0} + \underline{\mathbf{A}}q_{m-1}(\underline{\mathbf{A}})r_0$ . D'où

$$\|r_m\|_2 = \min_{p \in \Pi_m} \|p(\underline{\mathbf{A}})r_0\|_2$$

avec  $\Pi_m$  l'ensemble des polynôme de degré  $m$  qui vaut 1 en 0. Supposons alors que  $\underline{\mathbf{A}}$  est diagonalisable, i.e  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{X}}^{-1}$  avec  $\underline{\mathbf{D}} = \text{diag}(\lambda_j)$ , la

norme du résidu satisfait alors

$$\begin{aligned}
\|r_m\|_2 &= \min_{p \in \Pi_m} \|p(\underline{\mathcal{A}})r_0\|_2 \\
&\leq \min_{p \in \Pi_m} \|\underline{\mathcal{X}}p(\underline{\mathcal{D}})\underline{\mathcal{X}}^{-1}\|_2 \|r_0\|_2 \\
&\leq \|\underline{\mathcal{X}}\|_2 \min_{p \in \Pi_m} \|p(\underline{\mathcal{D}})\|_2 \|\underline{\mathcal{X}}^{-1}\|_2 \|r_0\|_2 \\
&= \|r_0\|_2 \|\underline{\mathcal{X}}\|_2 \|\underline{\mathcal{X}}^{-1}\|_2 \min_{p \in \Pi_m} \max_{\lambda_j} |p(\lambda_j)|. \tag{8.4}
\end{aligned}$$

**Définition 8.1.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle, on appelle conditionnement d'une matrice inversible  $\underline{\mathbf{M}}$ , la valeur

$$\text{cond}(\underline{\mathbf{M}}) = \|\underline{\mathbf{M}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{M}}^{-1}\|.$$

Cette valeur permet de mesurer l'amplification des erreurs d'arrondi au cours d'un calcul [20]. L'inégalité (8.4) contient le conditionnement de la matrice  $\underline{\mathcal{X}}$ .

**Propriété 8.2.** Pour toute matrice inversible  $\underline{\mathbf{M}} \in M_m(\mathbb{C})$ , on a

- $\text{cond}(\underline{\mathbf{M}}) \geq 1$ ,
- $\text{cond}(\underline{\mathbf{M}}) = \text{cond}(\underline{\mathbf{M}}^{-1})$ ,
- $\text{cond}(\underline{\mathbf{M}}) = \text{cond}(\alpha \underline{\mathbf{M}}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^*$ .

On dit qu'une matrice est bien conditionnée si son conditionnement est proche de sa valeur minimale 1.

### 8.3 Préconditionnement

On traite dans ce paragraphe, la notion de preconditionnement d'un système linéaire qui permet d'accélérer considérablement la convergence des méthodes itératives de Krylov et de les stabiliser.

Soit  $\underline{\mathbf{P}}$  une matrice inversible, on considère le système linéaire

$$\underline{\mathcal{A}}\underline{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{b}, \tag{8.5}$$

avec  $\mathbf{x}' = \underline{\mathbf{P}}\mathbf{x}$  qui est équivalent au système (8.1) de telle sorte que la matrice du système (8.5) soit plus facile à inverser numériquement. La matrice  $\underline{\mathbf{P}}$  est appelé preconditionneur (à droite) de  $\underline{\mathcal{A}}$

**Remarque 8.3.** *Le préconditionneur à gauche est celui qui est le plus couramment utilisé et le système se transforme en*

$$\underline{\mathbf{P}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \underline{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.6)$$

*Plus généralement, un système linéaire peut être préconditionné à la fois à droite et à gauche :*

$$\underline{\mathbf{P}}_L^{-1} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{P}}_R^{-1} \mathbf{x} = \underline{\mathbf{P}}_L^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.7)$$

Nous allons étudier un préconditionneur convenable à notre système linéaire (5.16). Pour cela, on écrit  $\underline{\mathbf{A}}_s = \underline{\mathbf{H}}_s + \underline{\mathbf{N}}_s$  où  $\underline{\mathbf{H}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{A}}_s + \underline{\mathbf{A}}_s^H)$  est la partie hermitienne de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  et  $\underline{\mathbf{N}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{A}}_s - \underline{\mathbf{A}}_s^H)$  sa partie anti-hermitienne. On rappelle que  $\underline{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  une matrice carrée de taille  $m$ .

On s'intéresse alors à deux types de préconditionneurs [30] : soit  $\underline{\mathbf{C}}_s$  est un préconditionneur hermitien du complément de Schur  $\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{H}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H$ , on pose

$$\underline{\mathbf{P}}_{1s} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{C}}_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{P}}_{2s} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{C}}_s \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

respectivement, le préconditionneur diagonal par bloc et le préconditionneur triangulaire par bloc. Nous allons montrer le résultat suivant :

**Proposition 8.4.** *Les valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  du problème Full-Wave préconditionnée par  $\underline{\mathbf{P}}_{is}$  ( $i = 1, 2$ ) se situent dans un rectangle de taille indépendant de  $h$  et ne contenant pas 0.*

L'inégalité (8.4) montre clairement le lien entre la convergence de la méthode GMRES et la localisation du spectre de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$ . On suit alors le même raisonnement que dans [42] pour les équations d'Oseen. Dans ce dernier, la matrice hermitienne correspondant à  $\underline{\mathbf{H}}_s$  est supposée définie positive,

ce qui ne l'est pas forcément dans notre cas : en effet, soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$  correspondant à la discrétisation d'un  $\mathbf{v}_z \in \mathbf{X}^h \subset \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , i.e.  $\mathbf{v}_z = \sum_{i=1}^{3N_h} z_i \phi_i$ , on a

$$\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}_s \mathbf{z} = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}_z\|_0^2 + \operatorname{Re}(s) \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}[(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z | \mathbf{v}_z)].$$

Cependant, on a

**Lemme 8.5.** *Si  $\underline{\mathbf{P}}$  est un préconditionneur de  $\underline{\mathbf{M}}$  alors  $\alpha \underline{\mathbf{P}}$  est un préconditionneur de la matrice  $\alpha \underline{\mathbf{M}}$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .*

En l'occurrence, on choisit  $\alpha = \iota$  et on a

**Proposition 8.6.** *La matrice hermitienne  $\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_s = \iota \underline{\mathbf{N}}_s = \frac{1}{2}[(\iota \underline{\mathbf{A}}_s) + (\iota \underline{\mathbf{A}}_s)^H]$  est définie positive.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ , on a

$$\mathbf{z}^H \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_s \mathbf{z} = -\operatorname{Im}(s) \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z\|_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Im}[(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z | \mathbf{v}_z)]. \quad (8.9)$$

Or  $-\operatorname{Im}(s) \geq 0$  (cf. théorème 3.6) et le lemme 3.11 montre qu'il existe  $\zeta > 0$  tel que  $\operatorname{Im}[(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z | \mathbf{v}_z)] \geq \zeta \|\mathbf{v}_z\|_0^2$ . On a donc  $\mathbf{z}^H \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_s \mathbf{z} > 0$ .  $\square$

Dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations en mettant des "tildes" sur toutes les matrices, on suppose que la multiplication par  $\iota$  a été effectuée. On pose  $\underline{\mathbf{S}}_s = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H$  le complément de Schur de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$ , le résultat suivant permet d'exprimer les valeurs propres du système préconditionné par rapport aux valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{C}}_s^{-1} \underline{\mathbf{S}}_s$ .

**Proposition 8.7.** *Soient  $\mu_s^i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, m$  les valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{C}}_s^{-1} \underline{\mathbf{S}}_s$  alors :*

- $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}_{1s}^{-1}$  admet comme valeurs propres  $\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^m \left\{ \frac{1 \pm \sigma_s^i}{2} \right\}$ .
- $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}_{2s}^{-1}$  admet comme valeurs propres  $\{1\} \cup \{\mu_s^i\}$

avec  $\sigma_s^i$  une racine carrée complexe de  $1 + 4\mu_s^i$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}^{-1}$  et  $\mathbf{v}$  son vecteur propre associé, on a alors  $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ . En posant  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{v}$ , on a  $\underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{u} = \lambda \underline{\mathbf{P}} \mathbf{u}$ . Pour  $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_{1s}$ ,  $\lambda$  vérifie alors

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{C}}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{u}_1 + \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 = \lambda \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{u}_1 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 = \lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 + \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 = \lambda \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 = \lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{S}}_s \mathbf{u}_2 = (\lambda - 1) \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 = \lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \underline{\mathbf{S}}_s \mathbf{u}_2 = (\lambda - 1) \lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2
\end{aligned}$$

Soit  $\mu$  une valeur propre de  $\underline{\mathbf{C}}_s^{-1} \underline{\mathbf{S}}_s$ , alors elle vérifie

$$\mu = \lambda(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sigma}{2}$$

avec  $\sigma$  une racine carrée complexe de  $1 + 4\mu$ . D'autre part, il est clair que 1 est une valeur propre de  $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}^{-1}$  associé au vecteur propre  $(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0})^T$  quelque soit  $\mathbf{u}_1$ .

Pour  $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_{2s}$ ,  $\lambda$  vérifie alors

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{C}}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{u}_1 + \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 &= \lambda \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{u} + \lambda \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 &= -\lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 + \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 &= \lambda \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 + \lambda \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{u}_2 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 &= -\lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} (1 - \lambda) \underline{\mathbf{S}}_s \mathbf{u}_2 &= (\lambda - 1) \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_1 &= -\lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \underline{\mathbf{S}}_s \mathbf{u}_2 = \lambda \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{u}_2 \quad \text{si } \lambda \neq 1.
\end{aligned}$$

La valeur propre  $\mu$  de  $\underline{\mathbf{C}}_s^{-1} \underline{\mathbf{S}}_s$  vérifie alors

$$\mu = \lambda.$$

et 1 est valeur propre comme avant.  $\square$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que les  $\mu_s^i$  sont bornés indépendamment de  $h$ . Pour cela, on utilise le lemme suivant [42].

**Lemme 8.8.** (*Bendixson*) Soit  $\underline{\mathbf{M}}$  une matrice carrée à valeurs complexes de taille  $m$ , on note sa partie hermitienne  $\underline{\mathbf{H}}$  et sa partie anti-hermitienne  $\underline{\mathbf{N}}$ . On suppose que :

· la matrice  $\underline{\mathbf{P}}$  est hermitienne définie positive de taille  $m$  telle que l'on ait  $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$

$$\gamma_1 < \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}} \mathbf{z}} < \gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_1 < \frac{1}{i} \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}} \mathbf{z}} < \delta_2 \quad (8.12)$$

·  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $\underline{\mathbf{P}}^{-1} \underline{\mathbf{M}}$ .

Alors on a

$$\gamma_1 < \text{Re}(\lambda) < \gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_1 < \text{Im}(\lambda) < \delta_2. \quad (8.13)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
& \underline{\mathbf{M}}\mathbf{z} = \lambda\underline{\mathbf{P}}\mathbf{z} \\
\Rightarrow & \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{M}}\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}}\mathbf{z} \\
\Rightarrow & \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{M}}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}}\mathbf{z}} = \lambda \\
\Rightarrow & \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}\mathbf{z} + \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}}\mathbf{z}} = \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Comme  $\underline{\mathbf{H}}$  est hermitienne et  $\underline{\mathbf{N}}$  anti-hermitienne, on a

$$\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}\mathbf{z} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}}\mathbf{z} \in i\mathbb{R}. \quad (8.14)$$

Comme  $\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{P}}\mathbf{z} \in \mathbb{R}$  (car  $\underline{\mathbf{P}}$  hermitienne) et avec les inégalités (8.12), on a bien

$$\gamma_1 < \text{Re}(\lambda) < \gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_1 < \text{Im}(\lambda) < \delta_2.$$

□

**Proposition 8.9.** *On pose  $\check{\underline{\mathbf{N}}}_s = \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2} \underline{\mathbf{N}}_s \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}$ . On suppose qu'il existe  $\gamma > 0$  indépendant de  $h$  tel que  $\|\check{\underline{\mathbf{N}}}_s\| < \gamma$  et que le préconditionneur hermitien  $\underline{\mathbf{C}}_s$  vérifie*

$$\beta_1 < \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H\mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{C}}_s\mathbf{z}} < \beta_2 \quad (8.15)$$

avec  $\beta_1$  et  $\beta_2$  strictement positives et indépendant de  $h$ . Alors les valeurs propres  $\mu_s^i$  de  $\underline{\mathbf{C}}_s^{-1}\underline{\mathbf{S}}_s$  de la proposition 8.7 sont contenues dans un rectangle du plan complexe de taille indépendante de  $h$  et ne contenant pas 0.

Avant de démontrer la proposition, on va montrer que  $\gamma = K^+\zeta^{-1}$  (cf. lemmes 3.8 et 3.11) vérifie l'hypothèse  $\|\check{\underline{\mathbf{N}}}_s\| < \gamma$ . On va montrer d'abord que  $i\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}}_s\mathbf{z} \leq \gamma \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}_s\mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
K^+\zeta^{-1}\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}_s\mathbf{z} &= -K^+\zeta^{-1}\text{Im}(s)\|\text{div } \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_z\|_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2}K^+\zeta^{-1}\text{Im}[(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_z \mid \mathbf{v}_z)] \\
&\geq -K^+\zeta^{-1}\text{Im}(s)\|\text{div } \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_z\|_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2}K^+\|\mathbf{v}_z\|_0^2 \geq \frac{\omega^2}{c^2}K^+\|\mathbf{v}_z\|_0^2
\end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned} \iota \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}}_s \mathbf{z} &= -\|\mathbf{rot} \mathbf{v}_z\|_0^2 - \operatorname{Re}(s) \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z\|_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}[(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z \mid \mathbf{v}_z)] \\ &\stackrel{(3.18)}{\leq} -\|\mathbf{rot} \mathbf{v}_z\|_0^2 - \operatorname{Re}(s) \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_z\|_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} K^+ \|\mathbf{v}_z\|_0^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2} K^+ \|\mathbf{v}_z\|_0^2. \end{aligned}$$

On a alors  $\iota \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{N}}_s \mathbf{z} \leq K^+ \zeta^{-1} \mathbf{z}^H \underline{\mathbf{H}}_s \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ . En posant  $\mathbf{y} = \underline{\mathbf{H}}_s^{1/2} \mathbf{z}$ , on en déduit que

$$|\mathbf{y}^H \check{\underline{\mathbf{N}}}_s \mathbf{y}| \leq K^+ \zeta^{-1} \mathbf{y}^H \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m. \quad (8.16)$$

Comme  $\check{\underline{\mathbf{N}}}_s$  est anti-hermitienne, elle est diagonalisable en base unitaire et elle peut s'écrire sous la forme

$$\check{\underline{\mathbf{N}}}_s = \iota \underline{\mathbf{U}} \underline{\boldsymbol{\Lambda}}_s \underline{\mathbf{U}}^H \quad (8.17)$$

où  $\underline{\boldsymbol{\Lambda}}_s$  est une matrice réelle diagonale et  $\underline{\mathbf{U}}$  une matrice unitaire. La majoration (8.16) s'écrit alors

$$\left| \sum_i \lambda_i |\mathbf{w}_i|^2 \right| \leq K^+ \zeta^{-1} \sum_i |\mathbf{w}_i|^2 \quad \forall \mathbf{w} = \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m,$$

ce qui est équivalent à  $|\lambda_i| \leq K^+ \zeta^{-1}$  pour tout  $i$ . On a alors

$$\begin{aligned} |\check{\underline{\mathbf{N}}}_s \mathbf{y}|^2 &= \mathbf{y}^H \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H \check{\underline{\mathbf{N}}}_s \mathbf{y} = \mathbf{y}^H \underline{\mathbf{U}} \underline{\boldsymbol{\Lambda}}_s \underline{\mathbf{U}}^H \underline{\mathbf{U}} \underline{\boldsymbol{\Lambda}}_s \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{y} \\ &= \mathbf{w}^H \underline{\boldsymbol{\Lambda}}_s^2 \mathbf{w} = \sum_i \lambda_i^2 |\mathbf{w}_i|^2 \\ &\leq (K^+ \zeta^{-1})^2 \sum_i |\mathbf{w}_i|^2 = (K^+ \zeta^{-1})^2 |\mathbf{y}|^2. \end{aligned}$$

On a donc bien  $\|\check{\underline{\mathbf{N}}}_s\| \leq K^+ \zeta^{-1}$ .

*Démonstration.* On va appliquer le lemme de Bendixson aux matrices  $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{C}}_s$  et  $\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{S}}_s$  i.e. on va montrer que les  $\mu_i^s$  sont bornés. Soit  $\underline{\mathbf{D}}_s$  la partie hermitienne de  $\underline{\mathbf{S}}_s = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H$  et on pose  $\check{\underline{\mathbf{N}}}_s = \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2} \underline{\mathbf{N}}_s \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}$ , on a

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}_s &= \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{S}}_s + \underline{\mathbf{S}}_s^H) \\ &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{B}} (\underline{\mathbf{A}}_s^{-1} + \underline{\mathbf{A}}_s^{-H}) \underline{\mathbf{B}}^H \\ &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} (\underline{\mathbf{A}}_s + \underline{\mathbf{A}}_s^H) \underline{\mathbf{A}}_s^{-H} \underline{\mathbf{B}}^H \\ &= \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} \underline{\mathbf{H}}_s \underline{\mathbf{A}}_s^{-H} \underline{\mathbf{B}}^H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \underline{\mathbf{A}}_s^{-1} &= (\underline{\mathbf{H}}_s + \underline{\mathbf{N}}_s)^{-1} = \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}. \\
\Rightarrow \underline{\mathbf{D}}_s &= \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-H}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H \\
&= \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \underbrace{\check{\underline{\mathbf{N}}}_s + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H}_{=0} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H\check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H.
\end{aligned}$$

On considère le quotient de Rayleigh  $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$

$$\frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{D}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{D}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}} \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{z}}.$$

Il suffit de montrer que les deux quotients du terme de droite sont bornés. Le second quotient l'est grâce à l'hypothèse (8.15). Il reste à montrer que

$\frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{D}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}}$  est borné, on a

$$\frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{D}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H\check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}}.$$

On pose  $\mathbf{w} = \underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}$  et comme  $\check{\underline{\mathbf{N}}}_s = -\check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H$ , on obtient

$$\frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{D}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{w}^H(\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)^{-1}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}}. \quad (8.18)$$

La matrice  $\check{\underline{\mathbf{N}}}$  étant anti-hermitienne, son carré est une matrice hermitienne définie négative. On a

$$\frac{\mathbf{w}^H(\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}} = 1 - \frac{\mathbf{w}^H\check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}} > 1 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}. \quad (8.19)$$

En posant  $\mathbf{y} = (\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)^{-1/2}\mathbf{w}$

$$\frac{\mathbf{w}^H(\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)^{-1}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{y}^H\mathbf{y}}{\mathbf{y}^H(\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)\mathbf{y}} < 1 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}. \quad (8.20)$$

Et comme  $\|\check{\underline{\mathbf{N}}}_s\| < \gamma$ , on a, à l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\frac{1}{1 + \gamma^2} < \frac{\mathbf{y}^H\mathbf{y}}{\mathbf{y}^H(\underline{\mathbf{I}} - \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^2)\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}. \quad (8.21)$$

On obtient alors

$$\frac{\beta_1}{1 + \gamma^2} < \frac{z^H \underline{\mathbf{D}}_s z}{z^H \underline{\mathbf{C}}_s z} < \beta_2 \quad \forall z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}. \quad (8.22)$$

Pour la partie anti-hermitienne  $\underline{\mathbf{E}}_s$ , on a

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_s &= \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{S}}_s - \underline{\mathbf{S}}_s^H) \\ &= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{A}}_s^{-1} - \underline{\mathbf{A}}_s^{-H})\underline{\mathbf{B}}^H \\ &= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{A}}_s^{-1}(\underline{\mathbf{A}}_s^H - \underline{\mathbf{A}}_s)\underline{\mathbf{A}}_s^{-H}\underline{\mathbf{B}}^H \\ &= -\underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{A}}_s^{-1}\underline{\mathbf{N}}_s\underline{\mathbf{A}}_s^{-H}\underline{\mathbf{B}}^H \\ &= -\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{H}}_s + \underline{\mathbf{N}}_s)^{-1}\underline{\mathbf{N}}_s(\underline{\mathbf{H}}_s + \underline{\mathbf{N}}_s)^{-H}\underline{\mathbf{B}}^H \\ &= -\underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}\check{\underline{\mathbf{N}}}_s(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-H}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\iota} \frac{z^H \underline{\mathbf{E}}_s z}{z^H \underline{\mathbf{C}}_s z} = \frac{1}{\iota} \frac{z^H \underline{\mathbf{E}}_s z}{z^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H z} \frac{z^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H z}{z^H \underline{\mathbf{C}}_s z}.$$

Le quotient de droite est borné (cf. (8.15)). Pour celui de gauche, on refait comme avant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\iota} \frac{z^H \underline{\mathbf{E}}_s z}{z^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H z} &= \frac{z^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-1}\check{\underline{\mathbf{N}}}_s(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-H}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H z}{z^H \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1}\underline{\mathbf{B}}^H z} \\ &= \frac{w^H \check{\underline{\mathbf{N}}}_s w}{w^H(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^H w} \quad \text{avec } w = (\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s)^{-H}\underline{\mathbf{H}}_s^{-1/2}\underline{\mathbf{B}}^H z \\ &= \frac{w^H \check{\underline{\mathbf{N}}}_s w}{w^H(\underline{\mathbf{I}} + \check{\underline{\mathbf{N}}}_s \check{\underline{\mathbf{N}}}_s^H)w} \quad (8.23) \\ &\stackrel{(8.17)}{=} -\frac{w^H \underline{\mathbf{U}}\underline{\Lambda}_s \underline{\mathbf{U}}^H w}{w^H(\underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{U}}\underline{\Lambda}_s^2 \underline{\mathbf{U}}^H)w} \\ &= -\frac{x^H \underline{\Lambda}_s x}{x^H(\underline{\mathbf{I}} + \underline{\Lambda}_s^2)x} \quad \text{avec } x = \underline{\mathbf{U}}^H w. \end{aligned}$$

Or l'inégalité de Young nous donne

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda^2) \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (8.24)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}^H \underline{\Lambda}_s \mathbf{x}| &= \left| \sum \lambda_{ii} x_i^2 \right| \\
&\leq \sum |\lambda_{ii}| x_i^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_i \lambda_{ii}^2 \right) x_i^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^H (\underline{\mathbf{I}} + \underline{\Lambda}_s^2) \mathbf{x}. \tag{8.25}
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{E}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{H}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}} \right| &= \left| \frac{\mathbf{x}^H \underline{\Lambda}_s \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H (\underline{\mathbf{I}} + \underline{\Lambda}_s^2) \mathbf{x}} \right| < \frac{1}{2}. \\
\Rightarrow -\frac{\beta_2}{2} &\leq \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{E}}_s \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{C}}_s \mathbf{z}} \leq \frac{\beta_2}{2}
\end{aligned}$$

□

On rappelle que les valeurs propres des matrices  $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{P}}_{is}^{-1}$  pour  $i = 1, 2$  sont respectivement

$$\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^m \left\{ \frac{1 \pm \sigma_s^i}{2} \right\} \quad \text{et} \quad \{1\} \cup \{\mu_s^i\}. \tag{8.26}$$

D'après la proposition 8.9, ces valeurs propres sont contenues dans un rectangle du plan complexe de taille indépendante de  $h$  et ne contenant pas 0. Il nous reste donc plus qu'à montrer que les  $\frac{1 \pm \sigma_s^i}{2}$  sont contenues dans un même type de rectangle. En effet, dans le plan complexe, on a

$$\begin{aligned}
\mu_s^i &\in \left[ \frac{\beta_1}{1 + \gamma^2}, \beta_2 \right] \times \left[ -\frac{\beta_2}{2}, \frac{\beta_2}{2} \right] \\
\Rightarrow 1 + 4\mu_s^i &\in \left[ 1 + \frac{4\beta_1}{1 + \gamma^2}, 1 + 4\beta_2 \right] \times [-2\beta_2, 2\beta_2] \\
\Rightarrow |1 + 4\mu_s^i| &\geq 1 + \frac{4\beta_1}{1 + \gamma^2} \\
\Rightarrow |\sigma_s^i| &\geq \left( 1 + \frac{4\beta_1}{1 + \gamma^2} \right)^{1/2} \\
\Rightarrow \left| \frac{1 \pm \sigma_s^i}{2} \right| &> \varepsilon,
\end{aligned}$$

avec  $\varepsilon > 0$  indépendant de  $h$ . On a alors démontré la proposition 8.4.

## 8.4 Implémentation du préconditionneur

Dans ce paragraphe, on va donner les expressions des préconditionneurs  $\underline{P}_{is}$ ,  $i = 1, 2$  de la formule (8.8).

### 8.4.1 Préconditionnement de la matrice $\underline{A}_s$

On sait qu'une matrice est un préconditionneur pour elle-même mais que c'est trivialement inefficace à cause du coût de calcul qu'il peut engendrer. Alors dans les préconditionneurs  $\underline{P}_{is}$ , on remplace la matrice  $\underline{A}_s$  par une matrice  $\widehat{\underline{A}}_s$  proche de  $\underline{A}_s$  qui est facile à inverser.

On décompose la matrice  $\underline{A}_s$  sous la forme  $\underline{A}_s = \underline{D}_s + \underline{E}_s + \underline{F}_s$  où  $\underline{D}_s$  est la diagonale de  $\underline{A}_s$ ,  $\underline{E}_s$  sa partie triangulaire strictement inférieure et  $\underline{F}_s$  sa partie triangulaire strictement supérieure. On considère alors les trois préconditionneurs classiques suivants [48] qui sont assez faciles à implémenter ;

#### 1. préconditionneur diagonal

Dans le cas où la matrice  $\underline{A}_s$  est hermitienne définie positive, on prend  $\widehat{\underline{A}}_s = \underline{D}_s$ . Sinon, on prend  $\widehat{\underline{A}}_s = (d_{ii})$  où  $d_{ii} = (\sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$  avec  $a_{ij}$  les éléments de la matrice  $\underline{A}_s$ .

#### 2. préconditionneur LU incomplète sans remplissage (ILU)

On calcule deux matrices  $\underline{L}_s$  et  $\underline{U}_s$  qui sont respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure, de sorte que le résidu  $\underline{R}_s = \underline{A}_s - \underline{L}_s \underline{U}_s$  possède des propriétés données, comme celle d'avoir certains coefficients nuls. On prend alors comme préconditionneur  $\widehat{\underline{A}}_s = \underline{L}_s \underline{U}_s$ .

#### 3. préconditionneur de surrelaxation successive (SOR)

On prend  $\widehat{\underline{A}}_s = \underline{D}_s + \nu \underline{E}_s$  avec  $\nu$  le paramètre de relaxation. Lorsque  $\nu = 1$ , le préconditionneur  $\widehat{\underline{A}}_s$  est aussi appelé Gauss-Seidel.

### 8.4.2 Préconditionnement du complément de Schur

On vérifie un résultat que l'on a sur le complément de Schur des équations de Navier-Stokes. Soit  $\underline{M}_p$  la matrice de masse de l'espace des multiplicateurs de Lagrange :  $p_h^H \underline{M}_p p_h = \|p_h\|_0^2$ . On a alors la proposition suivante [15] :

**Proposition 8.10.** *Si les formes bilinéaires associées aux matrices  $\underline{\mathbf{H}}_s$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  vérifient les hypothèses du théorème 5.2 de Babuska-Brezzi discret alors il existe deux constantes strictement positives  $\beta_1$  et  $\beta_2$  indépendantes de  $h$  telles que*

$$\beta_1 < \frac{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{H}}_s^{-1} \underline{\mathbf{B}}^H \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \underline{\mathbf{M}}_p \mathbf{z}} < \beta_2. \quad (8.27)$$

Soient  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  une forme sesquilinéaire hermitienne et coercitive sur un espace  $\mathbf{W}$  avec

$$\alpha_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}}^2 \geq \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},$$

et  $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$  une forme sesquilinéaire satisfaisant la condition inf-sup avec une constante  $\delta > 0$  :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}} \frac{|\tilde{b}(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \|q\|_Q} \geq \delta.$$

Soient  $\mathbf{W}_h$  et  $Q_h$  des espaces de Hilbert de dimension finie respectivement inclus dans  $\mathbf{W}$  et  $Q$ . On note  $\mathbf{W}'_h$  et  $Q'_h$  les espaces duaux de  $\mathbf{W}_h$  et  $Q_h$  avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$  leur produit de dualité respectivement. On définit les notations suivantes :

– l'opérateur  $\tilde{\underline{\mathbf{A}}} : \mathbf{W}_h \rightarrow \mathbf{W}'_h$  défini par

$$\langle \tilde{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{W}} = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h,$$

– l'opérateur  $\tilde{\underline{\mathbf{B}}} : \mathbf{W}_h \rightarrow Q'_h$  défini par

$$\langle \tilde{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{u}, \mu \rangle_Q = \tilde{b}(\mathbf{u}, \mu), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}_h, \quad \forall \mu \in Q_h.$$

**Lemme 8.11.** *On suppose qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|\tilde{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{v}\|_{Q'} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_h. \quad (8.28)$$

Alors le complément de Schur  $\tilde{\underline{\mathbf{S}}} = \tilde{\underline{\mathbf{B}}}\tilde{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\tilde{\underline{\mathbf{B}}}^H$  vérifie

$$\frac{\delta^2}{\alpha_1^2} \|q\|_Q^2 \leq \langle \tilde{\underline{\mathbf{S}}}q, q \rangle_Q \leq \frac{c^2}{\alpha_0^2} \|q\|_Q^2. \quad (8.29)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, l'opérateur  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{W}'_h \rightarrow \mathbf{W}_h$  est bien défini car la forme sesquilinéaire  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  est hermitienne et définie positive. De plus, on a  $\tilde{\mathbf{B}}^H : Q_h \rightarrow \mathbf{W}'_h$  d'où l'opérateur  $\tilde{\mathbf{S}} : Q_h \rightarrow Q'_h$  est bien défini. On a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{S}}q, q \rangle_Q &= \langle \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q, q \rangle_Q \\ &= \langle \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q, \tilde{\mathbf{B}}^H q \rangle_{\mathbf{W}'} \\ &= \langle \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q, \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q \rangle_W \\ &= \|\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q\|_{\tilde{\mathbf{A}}}^2, \end{aligned}$$

où  $\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{A}}} = \langle \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_W$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q\|_{\tilde{\mathbf{A}}}^2 &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q, \mathbf{v} \rangle_W^2}{\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}^2} \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H q, \mathbf{v} \rangle_W^2}{\langle \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_W} \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{\mathbf{B}}^H q, \mathbf{v} \rangle_W^2}{\langle \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_W}. \end{aligned}$$

Alors la condition inf-sup implique que

$$\langle \tilde{\mathbf{S}}q, q \rangle_Q \geq \frac{\delta^2}{\alpha_1^2} \|q\|_Q^2,$$

et l'hypothèse (8.28) que

$$\langle \tilde{\mathbf{S}}q, q \rangle_Q \leq \frac{c^2}{\alpha_0^2} \|q\|_Q^2.$$

□

Il nous reste à appliquer ce dernier lemme pour démontrer la proposition 8.10. La forme sesquilinéaire associée à  $\mathbf{H}_s$ , définie par (8.9), est hermitienne et coercitive. La forme sesquilinéaire associée à  $\mathbf{B}$  vérifie bien la condition inf-sup et on a aussi :

$$|\mathbf{q}_h \mathbf{B} \mathbf{v}_h| = |b(\mathbf{v}_h, q_h)| = |(\operatorname{div}(\mathbf{K} \mathbf{v}_h) | q_h)| \leq C^* \|\mathbf{v}_h\|_X \|q_h\|_0.$$

On a alors trouvé un préconditionneur (hermitien défini positif)  $\underline{\mathbf{C}}_s = \underline{\mathbf{M}}_p$  du complément de Schur  $\mathbf{B} \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{B}^H$  qui vérifie l'inégalité (8.15) de la proposition 8.9. Dans la pratique, on prendra  $\underline{\mathbf{C}}_s$  un préconditionneur de la matrice  $\underline{\mathbf{M}}_p$  qui sera du même type que celui de  $\underline{\mathbf{C}}_s$ .

## 8.5 Résultats numériques pour la méthode GMRES préconditionnée

Nous allons effectuer une série de tests numériques sur la simulation Full-Wave afin de valider la méthode itérative introduite dans ce chapitre. Une étude comparative des coûts de calculs de la méthode GMRES avec préconditionneurs sera présentée. Dans la suite, on note  $id$ ,  $diag(i)$ ,  $ilu(i)$  et  $sor(i)$  pour désigner la méthode GMRES avec le préconditionneur  $\underline{P}_{is}$  (cf. (8.8)) correspondant, respectivement, au préconditionneur identité (équivalent à une absence de préconditionneur), diagonal, ILU et SOR avec le paramètre de relaxation  $\nu = 1$  (Gauss-Seidel). Tous les tests numériques utilisent le critère d'arrêt  $\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} < 10^{-6}$ .

Les tests Full-Wave qui vont suivre, reprennent les mêmes paramètres numériques qu'au chapitre 7 en précisant les valeurs des variables modifiées.

### 8.5.1 Choix du préconditionneur

Le premier test a été effectué pour la fréquence  $\omega = \omega_{LH}$  et le mode de Fourier  $k = 300$  dans le cas où la densité est variable, avec un pas de maillage  $h = 0.04$ . Les résultats des itérations de la méthode GMRES appliquée aux différents préconditionneurs sont résumés sur le tableau suivant

| préconditionneur     | id | diag | ILU   | SOR |
|----------------------|----|------|-------|-----|
| $\underline{P}_{1s}$ | 80 | 70   | > 100 | 25  |
| $\underline{P}_{2s}$ | 80 | 65   | > 100 | 20  |

On constate tout d'abord que le préconditionneur ILU n'est pas du tout satisfaisant. Ce résultat provient du fait que ce préconditionneur est très sensible pour des matrices indéfinies [50]. Pour les autres cas, on remarque bien que la méthode sans préconditionneur est plus coûteuse que la méthode avec un préconditionneur. On note que le comportement des préconditionneurs  $\underline{P}_{1s}$  et  $\underline{P}_{2s}$  sont très proches. Néanmoins le préconditionneur triangulaire par bloc  $\underline{P}_{2s}$  est meilleur que la diagonal par bloc  $\underline{P}_{1s}$ , un argument est que les valeurs propres du système préconditionné par  $\underline{P}_{1s}$  (cf. (8.26)) sont contenues dans les deux côtés du plan complexe séparé par l'axe imaginaire [30]. Toutefois le



préconditionneur diagonal est simple à mettre en œuvre et peu coûteux mais n'est pas efficace. Finalement, c'est le preconditionneur SOR qui fonctionne relativement bien, résultats cohérents avec ceux obtenus dans [29].

### 8.5.2 Résultat sur l'optimalité

On s'attend à ce que la méthode GMRES preconditionnée par  $sor(2)$  dépende très faiblement de la taille du maillage, on parle alors de preconditionneur **optimal**. En effet, l'étude spectrale effectuée au début du chapitre a donné des résultats spectraux similaires à ceux des équations d'Oseen auquel le preconditionneur était optimal [30]. On représente alors le nombre d'itérations de la méthode GMRES preconditionnée par  $sor(2)$  pour les quatre maillages décrits dans la section 7.2.1.

|        | h=0.08 | h=0.04 | h=0.02 | h=0.01 |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| sor(2) | 20     | 30     | 46     | 72     |

Dans notre cas, on constate que l'on n'a pas d'optimalité. D'autres tests avec différentes valeurs des variables  $\omega$  et  $k$  ont été effectués mais l'absence d'optimalité était toujours présente. Par ailleurs, le nombre de degrés de liberté est multiplié par 4 lorsque l'on divise le pas de maillage par 2. Or le nombre d'itérations de  $sor(2)$  augmente linéairement, d'environ 50%, quand  $h$  est divisé par 2. Par conséquent, l'usage de la méthode GMRES preconditionnée est justifié lorsque  $h$  est petit.

L'absence d'optimalité s'explique à l'aide de l'inégalité (8.4) :

$$\frac{\|r_m\|_2}{\|r_0\|_2} \leq \text{cond}(\underline{\mathbf{X}}) \min_{p \in \Pi_m} \max_{\lambda_j} |p(\lambda_j)|.$$

En effet, nous n'avons pas déterminé  $\text{cond}(\underline{\mathbf{X}})$ . Cette dernière vaut 1 lorsque la matrice du système linéaire  $\underline{\mathbf{A}}$  est normale (alors  $\underline{\mathbf{X}}$  est unitaire) mais ce n'est pas le cas pour la matrice de notre problème Full-Wave et ce conditionnement peut augmenter lorsque  $h$  augmente. Cependant, on arrive à justifier les résultats sur la dépendance de la convergence de la méthode par rapport au variable  $\omega$  et  $k$ . Les tableaux suivants représentent le nombre d'itération de la méthode GMRES( $sor(2)$ ) pour  $h = 0.02$ .

| $\omega = \omega_{LH}$ | $k = 100$ | $k = 150$ | $k = 200$ | $k = 250$ |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| nombre d'itérations    | 64        | 60        | 44        | 32        |

| $k = 200$           | $\omega = \omega_{LH}/2$ | $\omega = \omega_{LH}$ | $\omega = 1.5\omega_{LH}$ | $\omega = 2\omega_{LH}$ |
|---------------------|--------------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------|
| nombre d'itérations | 60                       | 44                     | 38                        | 36                      |

On constate que lorsque les variables  $\omega$  et  $k$  augmentent alors le nombre d'itération diminue. Les raisons sont les suivantes :

Lorsque  $\omega$  augmente, le tenseur  $\underline{\mathbf{K}}$  tend vers la matrice identité et alors  $\underline{\mathbf{A}}_s$  tend vers une matrice hermitienne ce qui implique que  $cond(\underline{\mathbf{x}})$  diminue et tend vers 1.

Lorsque  $k$  augmente, les parties imaginaires des coefficients de  $\underline{\mathbf{A}}_s$  augmente donc  $\underline{\mathbf{A}}$  tend vers une matrice anti-hermitienne ce qui implique que  $cond(\underline{\mathbf{x}})$  diminue et tend vers 1.

### 8.5.3 Perspectives

On a montré que la partie anti-hermitienne de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  du système linéaire du problème Full-Wave est définie positive (cf proposition 8.6), ce qui nous a permis de situer les valeurs propres de la matrice préconditionnée mais c'était insuffisant pour que le préconditionneur soit optimal. Le problème vient donc de l'absence de caractère hermitien et défini positif de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  qui écarte notre problème par rapport au cas classique des problèmes de point-selle généralisés. Parmi les idées envisageables pour contourner ce piège, on pourrait étudier les valeurs singulières de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  plutôt que les valeurs propres ou utiliser une méthode de type *splitting* telle que le HSS (Hermitian and skew-Hermitian splitting). C'est une méthode itérative introduit par Bai, Golub et Ng en 2003 [7] dont la convergence a été démontré pour des matrices non hermitienne définies positives. La matrice  $\underline{\mathbf{A}}_s$  n'est malheureusement pas définie positive. Cependant, il serait intéressant de séparer la partie hermitienne et anti-hermitienne pour les préconditionner de façons différentes.

# Chapitre 9

## Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave

Le principe de la méthode de décomposition de domaine consiste à transformer un problème donné en plusieurs sous-problèmes de taille plus petite afin de les résoudre en parallèle. Les références sont les ouvrages de Quarteroni et Valli [49] ainsi que celui de Mathew [42].

On distingue deux grandes catégories : les méthodes sans recouvrement et les méthodes avec recouvrement. Plusieurs approches de décomposition de domaine pour les équations de Maxwell ont été développées. Pour la méthode avec recouvrement, on cite par exemple les articles de Toselli [55], Pasciak [45] ou encore celui de Benamou et Desprès [9]. On s'intéresse par contre aux décompositions sans recouvrement lesquels sont étudiées notamment par Alonso et Valli [1][2]. Plus précisément, notre travail est basé sur l'article de Assous et al. [6] qui s'applique bien à notre problème.

Une décomposition en  $n \geq 2$  sous-domaines a été traitée, cependant on considère ici une décomposition en 2 sous-domaines pour simplifier. Les subtilités entre le cas général et simplifié seront mis en remarque.

### 9.1 Le problème Full-Wave généralisé décomposé

On considère le problème général suivant qui découle du problème Full-Wave (2.50)-(2.52) :

Trouver un champ  $\mathbf{E}$  vérifiant

$$\mathbf{rot rot E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (9.1)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (9.2)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (9.3)$$

avec les seconds membres  $\mathbf{f}$  et  $g$  supposés connus et, pour simplifier la rédaction, de régularité  $L^2$ . On prend ce modèle qui a l'avantage de ne pas différencier les conditions aux bords ( $\Gamma_A$  et  $\Gamma_C$ ) et donc de ne pas alourdir les notations. En pratique, on n'utilise pas de relèvement pour résoudre de problème de Dirichlet non homogène, donc ce qui suit est une justification théorique.

On partitionne le domaine  $\Omega$  en sous-domaines disjoints  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note l'interface  $\Sigma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$  et le bord extérieur  $\Gamma^i = \Gamma \cap \partial\Omega_i$  pour  $i = 1, 2$ . De même, soient  $\mathbf{E}_i$  la restriction à  $\Omega_i$  du champ  $\mathbf{E}$  solution des équations (9.1)-(9.3). On va alors le reformuler sous une forme équivalente. On s'intéresse alors aux problèmes suivants :

Trouver les champs  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, 2$ ) vérifiant

$$\mathbf{rot rot E}_i - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i = \mathbf{f}_i \quad \text{dans } \Omega_i,$$

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i) = g_i \quad \text{dans } \Omega_i,$$

$$\mathbf{E}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma^i,$$

On rajoute à cela des conditions de transmission sur l'interface  $\Sigma$  sur les champs  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ . Deux d'entre eux concernent, respectivement, la régularité  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  des champs :

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_2 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (9.4)$$

Une dernière condition est nécessaire pour satisfaire l'équation (9.1) dans le sens des distributions

$$\mathbf{rot E}_1 \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{rot E}_2 \times \mathbf{n}_2 \quad (9.5)$$

où  $\mathbf{n}_i$  est le vecteur normal de  $\Sigma$  unitaire sortant par rapport à  $\Omega_i$ . On note le saut  $[\mathbf{F}]_\Sigma = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$  sur  $\Sigma$  et donc les sauts (9.4) et (9.5) s'écrivent

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0 \quad (9.6)$$

$$[\mathbf{rot E} \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0. \quad (9.7)$$

### 9.1.1 Les formulations variationnelles décomposées

On introduit quelques espaces :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_i &= \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_i) \mid \mathbf{v}_i \times \mathbf{n}_{|\Gamma^i} = \mathbf{0}\}, \\ \mathbf{V}_i^0 &= \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega_i), \\ \chi_\Sigma^V &= \{\varphi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma) \mid \varphi = \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Sigma}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)\}.\end{aligned}$$

Les caractéristiques de l'espace  $\chi_\Sigma^V$  se trouvent dans [16][17]. Il est clair que  $\tilde{\varphi}$  le prolongé de  $\varphi \in \chi_\Sigma^V$  par 0 à  $\partial\Omega_i$  est la trace tangentielle d'un champ  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$  sur  $\partial\Omega_i$  et donc  $\tilde{\varphi} \in \Upsilon_{\partial\Omega_i}$  (cd. théorème 1.11). L'espace  $\chi_\Sigma^V$  coïncide donc avec l'espace des traces tangentielles de  $\mathbf{V}_1$  et de  $\mathbf{V}_2$  sur  $\Sigma$ .

On note  $R^V : \chi_\Sigma^V \rightarrow \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  un opérateur de relèvement tel que  $(R^V \varphi \times \mathbf{n})_{|\Sigma} = \varphi$  et  $R_i^V$  ses restrictions sur  $\Omega_i$  i.e.  $R_i^V \varphi = R^V \varphi|_{\Omega_i}$ . On a une formulation variationnelle du problème (que l'on appelle FVD) :

Trouver  $\mathbf{E}_i \in \mathbf{V}_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que

$$a_i(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) = L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0 \quad (9.8)$$

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0 \quad (9.9)$$

$$a_1(\mathbf{E}_1, R_1^V \varphi) = L_1(R_1^V \varphi) + L_2(R_2^V \varphi) - a_2(\mathbf{E}_2, R_2^V \varphi) \quad \forall \varphi \in \chi_\Sigma^V \quad (9.10)$$

avec, en notant  $(\mathbf{v}|\mathbf{w})_i := \int_{\Omega_i} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}} d\Omega_i$

$$\begin{aligned}a_i(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) &:= (\mathbf{rot} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}_i)_i - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i)_i \quad (9.11) \\ L_i(\mathbf{F}_i) &:= (\mathbf{f}_i \mid \mathbf{F}_i)_i.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour obtenir l'équation (9.8), on multiplie (2.44) par une fonction test  $\mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0$  et on intègre sur le domaine  $\Omega_i$  :

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}_i \mid \mathbf{F}_i)_i &= (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i)_i - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i)_i \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0 \\ &= \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial\Omega_i} + (\mathbf{rot} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}_i)_i - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i)_i \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0 \\ &= (\mathbf{rot} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}_i)_i - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i)_i \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0.\end{aligned}$$

La fonction  $R^V \boldsymbol{\varphi}$  appartient bien à  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ , on pose alors

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f} \mid R^V \boldsymbol{\varphi}) &= (\mathbf{f}_1 \mid R_1^V \boldsymbol{\varphi})_1 + (\mathbf{f}_2 \mid R_2^V \boldsymbol{\varphi})_2 = L_1(R_1^V \boldsymbol{\varphi}) + L_2(R_2^V \boldsymbol{\varphi}) \\
&= (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 \mid R_1^V \boldsymbol{\varphi})_1 - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_1 \mid R_1^V \boldsymbol{\varphi})_1 \\
&\quad + (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 \mid R_2^V \boldsymbol{\varphi})_2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_2 \mid R_2^V \boldsymbol{\varphi})_2 \\
&= a_1(\mathbf{E}_1, R_1^V \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_1, R_1^V \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma^1} + \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_1, R_1^V \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}_1 \rangle_{\Sigma} \\
&\quad + a_2(\mathbf{E}_2, R_2^V \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_2, R_2^V \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma^2} + \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_2, R_2^V \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}_2 \rangle_{\Sigma} \\
&= a_1(\mathbf{E}_1, R_1^V \boldsymbol{\varphi}) + a_2(\mathbf{E}_2, R_2^V \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 + \mathbf{rot} \mathbf{E}_2, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Sigma} \\
&\stackrel{(9.7)}{=} a_1(\mathbf{E}_1, R_1^V \boldsymbol{\varphi}) + a_2(\mathbf{E}_2, R_2^V \boldsymbol{\varphi}).
\end{aligned}$$

□

Soient  $Y_i = \{q \in H^1(\Omega_i) \mid q|_{\Gamma^i} = \mathbf{0}\}$  et  $Y_i^0 = H_0^1(\Omega_i)$ . En introduisant le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte (2.45), on obtient l'équivalent de la FVMNA sur chaque sous-domaines (que l'on appelle FVMNAD) :

Trouver  $(\mathbf{E}_i, p_i) \in \mathbf{V}_i \times Y_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que

$$a_i(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) + \overline{\beta_i(\mathbf{F}_i, p_i)} = L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{V}_i^0 \quad (9.12)$$

$$\beta_i(\mathbf{E}_i, q_i) = l_i(q_i) \quad \forall q_i \in Y_i^0 \quad (9.13)$$

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0 \quad (9.14)$$

$$[p]_{\Sigma} = 0 \quad (9.15)$$

$$a_1(\mathbf{E}_1, R_1 \boldsymbol{\varphi}) + \overline{\beta_1(R_1 \boldsymbol{\varphi}, p_1)} = L_1(R_1 \boldsymbol{\varphi}) + L_2(R_2 \boldsymbol{\varphi}) - a_2(\mathbf{E}_2, R_2 \boldsymbol{\varphi}) - \overline{\beta_2(R_2 \boldsymbol{\varphi}, p_2)} \quad (9.16)$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\chi}_{\Sigma}^V$$

avec

$$\beta_i(\mathbf{E}_i, p_i) := -(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{grad} p_i)_i. \quad (9.17)$$

**Proposition 9.1.** *Si  $(\mathbf{E}, p)$  est solution de FVMNA alors  $(\mathbf{E}|_{\Omega_1}, p|_{\Omega_1})$  et  $(\mathbf{E}|_{\Omega_2}, p|_{\Omega_2})$  sont solutions de FVMNAD. Réciproquement, si  $(\mathbf{E}_i, p_i)$  est solution de FVMNAD alors  $(\mathbf{E}, p)$ , défini par  $\mathbf{E}|_{\Omega_i} := \mathbf{E}_i$  et  $p|_{\Omega_i} := p_i$ , est solution de FVMNA. En particulier, le problème FVMNAD admet une unique solution.*

*Démonstration.* Supposons  $(\mathbf{E}, p)$  solution de FVMNA, on pose  $(\mathbf{E}_i, p_i) = (\mathbf{E}|_{\Omega_i}, p|_{\Omega_i})$  ( $i = 1, 2$ ). On a  $(\mathbf{E}_i, p_i) \in \mathbf{V}_i \times Y_i$  et les équations (9.12)-(9.15) sont vérifiées. Soit  $\varphi \in \chi_\Sigma^V$ , on considère la fonction  $R^V \varphi$  définie dans la démonstration précédente, on a  $a(\mathbf{E}, R^V \varphi) + \overline{\beta(R^V \varphi, p)} = l(R^V \varphi)$  si et seulement si

$$a_1(\mathbf{E}_1, R_1^V \varphi) + \overline{\beta_1(R_1^V \varphi, p)} + a_2(\mathbf{E}_2, R_2^V \varphi) + \overline{\beta_2(R_2^V \varphi, p)} = L_2(R_2^V \varphi) + L_1(R_1^V \varphi).$$

Réciproquement, supposons  $(\mathbf{E}_i, p_i)$  ( $i = 1, 2$ ) solution de FVMNAD, on pose

$$(\mathbf{E}, p) = \begin{cases} (\mathbf{E}_1, p_1) & \text{dans } \Omega_1, \\ (\mathbf{E}_2, p_2) & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Les équations (9.14) et (9.15) impliquent que  $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Soit  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ , on pose  $\varphi = \mathbf{F}|_\Sigma \in \chi_\Sigma^V$ . On a  $(\mathbf{F}|_{\Omega_i} - R_i^V \varphi) \in \mathbf{V}_i^0$  et on a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{\beta(\mathbf{F}, p)} &= \sum_{i=1}^2 [a_i(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}|_{\Omega_i} - R_i^V \varphi) + \overline{\beta(\mathbf{F}|_{\Omega_i} - R_i^V \varphi, p_i)} \\ &\quad + a_i(\mathbf{E}_i, R_i^V \varphi) + \overline{\beta(R_i^V \varphi, p_i)}] \\ &= \sum_{i=1}^2 [L_i(\mathbf{F}|_{\Omega_i} - R_i^V \varphi) + L_i(R_i^V \varphi)] \\ &= L(\mathbf{F}). \end{aligned} \tag{9.18}$$

□

On s'intéresse maintenant à la FVA et à la FVMA pour la version décomposée.

**Proposition 9.2.** *Les conditions (9.6) sont équivalents à la condition*

$$[\mathbf{E}]_\Sigma = 0. \tag{9.19}$$

D'après le théorème 3.6, la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  est continue sur l'interface  $\Sigma$ . La démonstration de la proposition se ramène au lemme suivant.

**Lemme 9.3.** *Pour tout  $\mathbf{x}$  sur l'interface  $\Sigma$ , on appelle  $T_{\mathbf{x}}\Sigma$  le plan tangent à  $\Sigma$  au point  $\mathbf{x}$ . L'application*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \times T_{\mathbf{x}}\Sigma \\ \mathbf{v} &\mapsto (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \times \mathbf{n}(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

*est bijective.*

*Démonstration.* En dimension finie, il suffit de vérifier que son noyau est réduit à 0. Comme  $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$  est équivalent à  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}$  avec  $\lambda$  un scalaire, il nous reste à montrer que  $\lambda$  est nul.

$$\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^H \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{n} = \mathbf{v} \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{n} = (\lambda \mathbf{n})^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{n}. \quad (9.20)$$

D'après le lemme 3.11, il existe une constante  $\zeta > 0$  telle que

$$|\mathbf{n}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{n}| > \zeta (\mathbf{n}^H \mathbf{n}) = \zeta. \quad (9.21)$$

Ce qui donne

$$\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0.$$

□

On considère les espaces suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_i &= \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) | \mathbf{v}_i \times \mathbf{n}_{|\Gamma^i} = \mathbf{0}\}, \\ \mathbf{W}_i^0 &= \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) = \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i), \\ \chi_\Sigma^W &= \{\varphi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma) | \varphi = \mathbf{v}_{|\Sigma}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)\}.\end{aligned}$$

**Proposition 9.4.** *Il existe un relèvement continu  $R^W : \chi_\Sigma^W \rightarrow \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  satisfaisant  $(R^W \varphi)_{|\Sigma} = \varphi$ .*

*Démonstration.* D'après la définition de l'espace  $\chi_\Sigma^W$ , l'application trace  $\gamma : \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \rightarrow \chi_\Sigma^W$  est surjective. Soit l'espace  $E \subset \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  l'orthogonal du noyau de la trace,  $\gamma : E \rightarrow \chi_\Sigma^W$  est alors injective : on a un isomorphisme de  $E$  dans  $\chi_\Sigma^W$ . On prend pour  $R^W$  la bijection réciproque qui est continue par le théorème de Banach-Schauder [14]. □

On note la restriction  $R_i^W$  sa restriction sur  $\Omega_i$ . on obtient la FVA (que l'on appelle FVAD) :



Trouver  $\mathbf{E}_i \in \mathbf{W}_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que

$$a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) = L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{W}_i^0 \quad (9.22)$$

$$[\mathbf{E}]_\Sigma = 0 \quad (9.23)$$

$$a_{1,s}(\mathbf{E}_1, R_1^W \varphi) = L_1(R_1^W \varphi) + L_2(R_2^W \varphi) - a_{2,s}(\mathbf{E}_2, R_2^W \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}_\Sigma^W$$

avec

$$a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) := (\mathbf{rot} \mathbf{E}_i | \mathbf{rot} \mathbf{F}_i)_i - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i | \mathbf{F}_i)_i + s(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i | \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_i)_i;$$

ainsi que la FVMA (que l'on appelle FVMAD) :

Trouver  $(\mathbf{E}_i, p_i) \in \mathbf{W}_i \times L^2(\Omega_i)$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que

$$a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) + \overline{b_i(\mathbf{F}_i, p_i)} = L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{W}_i^0 \quad (9.24)$$

$$b_i(\mathbf{E}_i, q_i) = l_i(q_i) \quad \forall q_i \in L^2(\Omega_i) \quad (9.25)$$

$$[\mathbf{E}]_\Sigma = 0 \quad (9.26)$$

$$a_{1,s}(\mathbf{E}_1, R_1^W \varphi) + \overline{b_1(R_1^W \varphi, p_1)} = L_1(R_1^W \varphi) + L_2(R_2^W \varphi) - a_{2,s}(\mathbf{E}_2, R_2^W \varphi) - \overline{b_2(R_2^W \varphi, p_2)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}_\Sigma^W \quad (9.27)$$

avec

$$b_i(\mathbf{E}_i, p_i) := (\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i | p_i)_i. \quad (9.28)$$

### 9.1.2 Une formulation avec contrainte

On décide de prendre les sauts (9.6) comme contrainte [6], on définit alors les espaces suivants :

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) | \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega_i)\},$$

$$\mathbf{W}_0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W} | \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Les espaces  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{W}_0$  s'identifient respectivement avec le produit cartésien des  $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i)$  et  $\mathbf{W}_i = \mathbf{X}_N^{\Gamma_i}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i)$  pour  $i = 1, 2$ . On dualise les conditions d'interface (9.6) en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  décomposé en composantes normale et tangentielle. Le saut (9.6)<sub>1</sub> appartient à  $\mathcal{X}_\Sigma^V \subset$

$H^{-1/2}(\Sigma)$  et le saut (9.6)<sub>2</sub> à  $\tilde{H}^{-1/2}(\Sigma)$ . On introduit alors l'espace  $\mathbf{S}_\Sigma^W \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \times \boldsymbol{\chi}_\Sigma^V$ , l'espace d'arrivée de l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &\mapsto (\tilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \times \boldsymbol{\chi}_\Sigma^V) \\ \mathbf{w} &\rightarrow ([\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}], [\mathbf{w} \times \mathbf{n}]). \end{aligned}$$

Il s'identifie à l'espace d'arrivée des applications suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i &\mapsto (\tilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \times \boldsymbol{\chi}_\Sigma^V) \\ \mathbf{w} &\rightarrow (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{w} \times \mathbf{n}). \end{aligned}$$

La donnée des traces (respectivement des sauts) sous cette forme est équivalente à celle des traces et sauts tri-dimensionnels grâce au lemme 9.3. Il est alors naturel de choisir  $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{S}_\Sigma^W)'$ . On va alors s'intéresser à une nouvelle formulation (appelée FVMADL) définie sur le domaine décomposé : Trouver  $(\mathbf{E}, p, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W}_0 \times L^2(\Omega) \times (\mathbf{S}_\Sigma^W)'$  tels que

$$\begin{aligned} \sum_i (a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) + \overline{b_i(\mathbf{F}_i, p_i)}) + \overline{\langle \lambda_n, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}] \rangle_\Sigma} + \overline{\langle \lambda_\top, [\mathbf{F} \times \mathbf{n}] \rangle_\Sigma} \\ = \sum_i L_i(\mathbf{F}_i), \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{W}_0, \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\sum_i b_i(\mathbf{E}_i, q_i) = \sum_i l_i(q_i), \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (9.30)$$

$$\langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] \rangle_\Sigma + \langle \mu_\top, [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] \rangle_\Sigma = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in (\mathbf{S}_\Sigma^W)'. \quad (9.31)$$

**Proposition 9.5.** *Le problème variationnel mixte (9.29)-(9.31) est bien posé.*

*Démonstration.* Les équations (9.29)-(9.31) peuvent s'écrire : trouver  $(\mathbf{E}, p, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W}_0 \times L^2(\Omega) \times (\mathbf{S}_\Sigma^W)'$  tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{\mathcal{B}(\mathbf{F}; p, \boldsymbol{\lambda})} &= \mathcal{L}(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{W}_0, \\ \mathcal{B}(\mathbf{E}; q, \boldsymbol{\mu}) &= \ell(q, \boldsymbol{\mu}) \quad \forall (q, \boldsymbol{\mu}) \in L^2(\Omega) \times (\mathbf{S}_\Sigma^W)', \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) &:= \sum_i \left[ (\mathbf{rot} \mathbf{E}_i \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}_i) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_i \mid \mathbf{F}_i) + s(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_i \mid \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{F}_i) \right], \\ \mathcal{B}(\mathbf{E}; q, \boldsymbol{\mu}) &:= \sum_i (\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_i \mid q_i) + \langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] \rangle_\Sigma + \langle \mu_\top, [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] \rangle_\Sigma. \end{aligned}$$

Montrons d'abord la coercitivité de  $\mathcal{A}_s$  sur  $\ker \mathcal{B}$ . On rappelle la norme sur  $\mathbf{W}_0$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_0}^2 = \sum_i \left[ \|\mathbf{v}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{v}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right].$$

Soit  $\mathbf{v} \in \ker \mathcal{B}$ , elle vérifie en particulier

$$\langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \rangle_\Sigma + \langle \mu_\top, [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] \rangle_\Sigma = 0, \quad \forall \mu \in (\mathbf{S}_\Sigma^W)'$$

Ce qui implique  $[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0$  et  $[\mathbf{v} \times \mathbf{n}] = 0$ , d'où  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Or sur l'espace  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , la norme  $\mathbf{W}_0$  est égale à la norme  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  et la forme sesquilinéaire  $\mathcal{A}_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est coercitive (cf. proposition 3.7).

On note  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\Sigma^W$ . Pour montrer la condition inf-sup (3.10), on fixe  $(q, \mu) \in L^2(\Omega) \times \mathbf{S}'$  et on cherche  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0$  tel que

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}; q, \mu) \geq \delta \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_0} (\|q\|_{L^2}^2 + \|\mu\|_{\mathbf{S}'}^2)^{1/2} \quad (9.32)$$

avec  $\delta$  indépendant de  $q$  et  $\mu$ .

On traite d'abord le cas de  $\mu : \mathbf{S}$  étant un espace de trace, sa norme est

$$\|\varphi\|_{\mathbf{S}} = \inf \{ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_0} : [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = \varphi_n \text{ et } [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] = \varphi_\top \}.$$

Par le même argument que la proposition 9.4, il existe un relèvement continu de  $\mathbf{S}$  dans  $\mathbf{W}_0$  :

$$[R\varphi \times \mathbf{n}] = \varphi_\top, \quad [\underline{\mathbf{K}} R\varphi \cdot \mathbf{n}] = \varphi_n \quad \text{et} \quad \|R\varphi\|_{\mathbf{W}_0} \leq C_R \|\varphi\|_{\mathbf{S}}.$$

Par définition de la norme duale, on a

$$\|\mu\|_{\mathbf{S}'} = \sup_{\varphi \in \mathbf{S}} \frac{|\langle \mu, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{\mathbf{S}}}. \quad (9.33)$$

On décompose  $\mathbf{S} = \ker \mu \oplus \mathbb{C}\varphi_0$ , où  $\varphi_0$  vérifie  $\langle \mu, \varphi_0 \rangle = 1$  et  $\varphi_0 \perp \ker \mu$ , ce qui entraîne  $\|\varphi_0\|_{\mathbf{S}} = \frac{1}{\|\mu\|_{\mathbf{S}'}}$ . On introduit ensuite la forme linéaire continue  $l_\mu$  sur  $\mathbf{W}_0$  définie par

$$\langle l_\mu, \mathbf{v} \rangle = \langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \rangle_\Sigma + \langle \mu_\top, [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] \rangle_\Sigma \quad (9.34)$$

On a alors  $\|l_\mu\|_{\mathbf{W}_0'} \leq \|\mu\|_{\mathbf{S}'}$ . On introduit la décomposition  $\mathbf{W}_0 = \ker(l_\mu) \oplus \mathbb{C}\mathbf{w}_0$ , avec  $\mathbf{w}_0 = \alpha_0 R\varphi_0$  et  $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ . On normalise  $\mathbf{w}_0$  par la condition  $\langle l_\mu, \mathbf{w}_0 \rangle = \|\mu\|_{\mathbf{S}'}$ . On a alors  $\langle \mu, \alpha_0 \varphi_0 \rangle = \|\mu\|_{\mathbf{S}'}$ , ce qui implique  $\alpha_0 = \|\mu\|_{\mathbf{S}'}$ , d'où  $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{W}_0} \leq C_R \|\mu\|_{\mathbf{S}'}$ .

Pour prendre en compte le multiplicateur  $q$ , on pose  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{grad} \phi$ , où  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  satisfait  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi = f$  avec  $f_i = q_i - \text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}_{0i})$  dans  $\Omega_i$ . On a alors  $\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_i = q_i$  dans  $\Omega_i$  et

$$\begin{aligned} |\phi|_{H^1(\Omega)} &\leq C_1(\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{w}_0}) \\ &\leq C'_1(\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{S'}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{w}_0}^2 &= \|\mathbf{w}_0 + \mathbf{grad} \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_i \left[ \|\mathbf{rot} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|q\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right] \\ &\leq 2[\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{w}_0}^2 + |\phi|_{H^1(\Omega)}^2] + \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_2(\|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\mu}\|_{S'}^2). \end{aligned}$$

Or  $\mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , ce qui implique

$$[\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n}] \quad \text{et} \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] = [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{n}].$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{v}; q, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_i (\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}_i | q_i) + \langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \rangle_{\Sigma} + \langle \boldsymbol{\mu}_T, [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] \rangle_{\Sigma}, \\ &= \sum_i \|q_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \underbrace{\langle \mu_n, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n}] \rangle_{\Sigma} + \langle \boldsymbol{\mu}_T, [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{n}] \rangle_{\Sigma}}_{\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}_0 \rangle = \|\boldsymbol{\mu}\|_{S'}^2}, \\ &= \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\mu}\|_{S'}^2, \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{w}_0} (\|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\mu}\|_{S'}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Avant de montrer l'équivalence entre la FVMADL (9.29)-(9.31) et la FVMAD (9.24)-(9.27), on propose quelques lemmes.

**Lemme 9.6.** Soit  $\Phi_0(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) = \{w \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \Delta_{\underline{\mathbf{K}}}w \in L^2(\Omega)\}$ ; l'application

$$\begin{aligned} s_n : \Phi_0(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) &\longrightarrow \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \\ \phi &\longmapsto [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} \end{aligned} \quad (9.35)$$

est surjective.

*Démonstration.* On va montrer que le problème

Trouver  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} -\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ s_n\phi &= g \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

est bien posé. En effet, la formulation variationnelle s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi \cdot \overline{\mathbf{grad} \psi} d\Omega &= \int_{\Omega_1} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi \cdot \overline{\mathbf{grad} \psi} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi \cdot \overline{\mathbf{grad} \psi} d\Omega_2 \\ &= \int_{\Sigma} [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} \overline{\psi} d\Sigma = \langle g, \psi \rangle_{\Sigma} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On a bien  $\psi|_{\Sigma} \in \tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$  et  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi \in L^2(\Omega)$ . Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure que le problème précédent admet bien une solution.  $\square$

**Lemme 9.7.** *Une application linéaire continue  $L_W$  sur  $\mathbf{W}_0$  s'annule sur  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  si et seulement si il existe un unique élément  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbf{S}_{\Sigma}^W)'$  tel que*

$$L_W(\mathbf{F}) = \int_{\Sigma} \mu_n [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_{ij}} + \boldsymbol{\mu}_{\top} \cdot [\mathbf{F} \times \mathbf{n}]_{\Sigma_{ij}} d\sigma. \quad (9.36)$$

*Démonstration.* Soit  $L_W^i \in (\mathbf{W}_i)'$ , alors une application du théorème de Hahn-Banach et de la représentation de Riesz (cf. [14], théorème VIII.13) implique qu'il existe  $\mathbf{g}_0^i \in \mathbf{L}^2(\Omega_i)$ ,  $g_1^i \in L^2(\Omega_i)$  et  $\mathbf{g}_2^i \in \mathbf{L}^2(\Omega_i)$  tel que  $\forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{W}_i$  on ait

$$L_W^i(\mathbf{F}) = \int_{\Omega_i} (\mathbf{g}_0^i \cdot \mathbf{F} + g_1^i \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{F}^i + \mathbf{g}_2^i \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}_i) dx.$$

Comme  $\mathbf{W}_0 = \prod_i \mathbf{W}_i$ , on a  $(\mathbf{W}_0)' = \prod_i (\mathbf{W}_i)'$ . Il s'en suit qu'une application linéaire sur  $\mathbf{W}_0$  s'écrit sous la forme

$$L_W(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega_i} (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{F} + g_1 \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} + \mathbf{g}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) \right) dx$$

avec  $\mathbf{g}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g_1 \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . On applique maintenant la décomposition de Helmholtz en partie  $\underline{\mathbf{K}}^H$ -gradient et solénoïde à  $\mathbf{g}_0$  de la remarque 3.27 : il existe un unique couple  $(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_T)$  tel que  $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_L + \mathbf{g}_T$  avec

$\mathbf{g}_L = \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} \psi$  où  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\text{div} \mathbf{g}_T = 0$ .

On suppose dorénavant que  $L_W$  s'annule sur  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Soit  $\mathbf{F} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , il existe une décomposition de type Helmholtz en partie gradient et " $\underline{\mathbf{K}}$ -solénoïde" où on a  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_T$  avec  $\text{rot} \mathbf{F}_L = \mathbf{0}$  car  $\mathbf{F}_L$  est un gradient et  $\text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_T = 0$ . Les fonctions  $\mathbf{F}_L$  et  $\mathbf{F}_T$  appartiennent à  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  (remarque 3.27). On remarque qu'on a  $\int_{\Omega} \mathbf{F}_T \cdot \mathbf{g}_L dx = \int_{\Omega} \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{g}_T dx = 0$ . Comme  $L_W$  s'annule sur  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , on a

$$0 = L_W(\mathbf{F}_L) = \int_{\Omega} (\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{F}_L + \underbrace{\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{F}_L}_{=0} + g_1 \text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_L + \underbrace{\mathbf{g}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_L}_{=0}) dx.$$

En ajoutant  $\int_{\Omega} (\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{F}_T + g_1 \text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_T) dx = 0$ , on a

$$\int_{\Omega} (\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{F} + g_1 \text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) dx = 0 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (9.37)$$

Ce qui implique  $\underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} g_1 = \mathbf{g}_L$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , et comme  $\mathbf{g}_L \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors  $g_1 \in H^1(\Omega)$ . On a  $\mathbf{grad} g_1 = \mathbf{grad} \psi$  et  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ , donc  $g_1$  est constante sur le bord  $\partial\Omega$ .

Soit  $w \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}} w \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et donc  $\mathbf{grad} w \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} 0 = L_W(\mathbf{grad} w) &= \int_{\Omega} (\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{grad} w + g_1 \Delta_{\underline{\mathbf{K}}} w) dx \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \int_{\Omega} \underbrace{(\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{grad} w - \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} g_1 \cdot \mathbf{grad} w)}_{=0} dx \\ &\quad + \langle g_1, \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

On peut construire  $w$  tel que  $\langle 1, \underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} \neq 0$  (cf. lemme 9.6), ce qui implique que  $g_1$  est nulle sur le bord d'où  $g_1 \in H_0^1(\Omega)$ . De même, on a

$$0 = L_W(\mathbf{F}_T) = \int_{\Omega} (\underbrace{\mathbf{g}_L \cdot \mathbf{F}_T}_{=0} + \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{F}_T + \underbrace{g_1 \text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}_T}_{=0} + \mathbf{g}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_T) dx.$$

Or en ajoutant  $\int_{\Omega} (\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{F}_L + \mathbf{g}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_L) dx = 0$ , on a

$$\int_{\Omega} (\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{g}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}) dx = 0 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (9.38)$$

De la même manière, on a  $\mathbf{rot} \mathbf{g}_2 = -\mathbf{g}_T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et comme  $\mathbf{g}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  ainsi que  $\operatorname{div} \mathbf{g}_T = 0$  alors  $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{X}(\Omega)$ . En additionnant (9.37) et (9.38), on a une forme linéaire continue  $L_W$  sur  $\mathbf{W}_0$  s'annulant sur  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$  qui s'écrit

$$L_W(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (g_1 \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} + \underline{\mathbf{K}}^H \operatorname{grad} g_1 \cdot \mathbf{F} + \mathbf{g}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{F}) dx.$$

avec  $g_1 \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{X}(\Omega)$ . En utilisant les formules de Green (1.4) et (1.5), on a

$$L_W(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} (g_1(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{g}_2 \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{n})) d\sigma$$

mais comme  $g_1$  est nul sur le bord  $\Gamma$  et  $\mathbf{F} \in \mathbf{W}_0$  alors il nous reste que les termes sur l'interface :

$$L_W(\mathbf{F}) = \int_{\Sigma} (\mu_n[\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}_T \cdot [\mathbf{F} \times \mathbf{n}]_{\Sigma}) d\sigma$$

où  $\mu_n \in \tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$  est la trace de  $g_1$  sur  $\Sigma$  et  $\boldsymbol{\mu}_T \in (\boldsymbol{\chi}_{\Sigma}^V)'$  est la composante tangentielle de la trace de  $\mathbf{g}_2$  sur  $\Sigma$ .

Il nous reste à prouver l'unicité de  $\mu_n$  et  $\boldsymbol{\mu}_T$ . Grâce à la linéarité, il suffit de montrer que  $L_W(\mathbf{F}) = 0 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{W}_0$  implique  $\mu_n = 0$  et  $\boldsymbol{\mu}_T = \mathbf{0}$ .

Montrons d'abord  $\mu_n = 0$  dans  $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ . Soit  $g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma)$ , d'après le lemme 9.6, il existe  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $[\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} = g$ . On pose  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi$ , on a alors  $\mathbf{F} \in \mathbf{W}_0$ ,  $[\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} = g$  et  $[\mathbf{F} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0$ . D'où

$$0 = L_W(\mathbf{F}) = \int_{\Sigma} \mu_n [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} d\sigma.$$

Ce qui veut dire que l'on a

$$\langle \mu_n, g \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall g \in \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \quad \Rightarrow \mu_n = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$$

Il nous reste à démontrer  $\boldsymbol{\mu}_T = 0$  dans  $(\boldsymbol{\chi}_{\Sigma}^V)'$ . Soient  $\mathbf{f} \in \boldsymbol{\chi}_{\Sigma}^V$  et  $i = 1$  ou  $2$ , il existe alors  $\mathbf{F}_i^1 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_i)$  tel que  $\mathbf{F}_i^1 \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma^i$  et  $\mathbf{F}_i^1 \times \mathbf{n}_i$  soit égal à  $\mathbf{0}$  d'un côté de  $\Sigma$  et à  $\mathbf{f}$  de l'autre de manière à ce que  $[\mathbf{F}_i^1 \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = \mathbf{f}$ . Soit alors  $\phi_i$  la solution du problème elliptique

Trouver  $\phi_i \in H_0^1(\Omega_i)$  tel que

$$-\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi_i = -\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F}_i^1) \quad (9.39)$$

On écrit  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{grad} \phi_i$  et on a  $\mathbf{F}_i \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma^i$  et  $\mathbf{F}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{F}_i^1 \times \mathbf{n}$  sur  $\Sigma$ . On pose  $\mathbf{F}$ , défini sur  $\Omega$ , qui vaut  $\mathbf{F}_i$  dans  $\Omega_i$  et nul dans  $\Omega \setminus \Omega_i$  alors  $\mathbf{F} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) \subset \mathbf{W}_0$  et  $[\mathbf{F} \times \mathbf{n}]_\Sigma = \mathbf{f}$ . Comme  $L_W(\mathbf{F}) = 0$ , cela implique

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\top, \mathbf{f} \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \boldsymbol{\chi}_\Sigma^V \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_\top = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad (\boldsymbol{\chi}_\Sigma^V)'. \quad \square$$

**Théorème 9.8.** *La FVMADL (9.29)-(9.31) et la FVMA (2.72)-(2.73) sont équivalentes, et on a*

$$\lambda_n = (sg - s \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} - p)|_\Sigma \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}_\top = (\mathbf{rot} \mathbf{E})_{\top|\Sigma} \quad (9.40)$$

*Démonstration.* Supposons  $(\mathbf{E}, p, \boldsymbol{\lambda})$  solution de la FVMADL. L'équation (9.31) implique les sauts (9.6), ce qui donne  $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . Si on prend comme fonction test  $\mathbf{F} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , les termes en  $\lambda_n$  et  $\boldsymbol{\lambda}_\top$  disparaissent dans l'équation (9.29). Cette dernière équation accompagné de (9.30) est identique à la FVMA, autrement dit  $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  est solution de cette dernière.

Réciproquement, soit  $(\mathbf{E}, p)$  solution de la FVMA (2.72)-(2.73). Comme  $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ , on a automatiquement  $[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0$  et  $[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0$  ce qui implique l'équation (9.31). Pour l'équation (9.30), on a

$$\sum_i (\operatorname{div} \mathbf{E}_i | q_i) = (\operatorname{div} \mathbf{E} | q) = (g | q) = \sum_i (g_i | q_i).$$

On définit l'application antilinéaire  $L_W$  sur  $\mathbf{W}_0$  :

$$\mathbf{F} \mapsto \sum_i (-a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) - b_i(\mathbf{F}_i, p_i) + L_i(\mathbf{F}_i))$$

Elle s'annule alors sur  $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ . D'après le lemme 9.7, il existe un unique  $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{S}_\Sigma^W)'$  tel que

$$L_W(\mathbf{F}) = \int_\Sigma \lambda_n [\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma + \boldsymbol{\lambda}_\top \cdot [\mathbf{F} \times \mathbf{n}]_\Sigma d\sigma.$$

et donc l'équation (9.29) est vérifiée. Pour l'interprétation de  $\lambda_n$  et  $\boldsymbol{\lambda}_\top$ , grâce à la formulation forte et à l'équation (9.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle -\mathbf{rot} \mathbf{E}, \overline{\mathbf{F} \times \mathbf{n}} \rangle_\Sigma + s \langle \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}, \overline{\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}} \rangle_\Sigma + \overline{\langle \underline{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, p \rangle}_\Sigma \\ + \langle \lambda_n, \overline{\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}} \rangle_\Sigma + \langle \boldsymbol{\lambda}_\top, \overline{\mathbf{F} \times \mathbf{n}} \rangle_\Sigma = s \langle g, \overline{\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}} \rangle_\Sigma. \end{aligned}$$

On en déduit les expressions de  $\lambda_n$  et  $\boldsymbol{\lambda}_\top$ . □



### 9.1.3 Discrétisation

Afin d'utiliser la même méthode d'éléments finis pour la FVMADL, on réduit la formulation comme dans le chapitre 4. On considère une nouvelle FVMADL définie pour chaque mode de Fourier  $k$ . On poursuit le même raisonnement que dans le chapitre 5 pour discrétiser. Soient  $\mathcal{T}_{2h}^i$  et  $\mathcal{T}_h^i$  des triangulations conformes de  $\tilde{\Omega}_i$  de telle sorte que  $\mathcal{T}_{2h}^1 \cup \mathcal{T}_{2h}^2$  soit une triangulation conforme de  $\tilde{\Omega}$ . Cela induit sur l'interface  $\tilde{\Sigma}$  une décomposition en segments  $\mathcal{I}_{2h}$ . On définit alors les espaces de dimension finie sur chaque sous-domaine. On note :

·  $\mathbf{W}_i^h$  l'espace d'approximation des fonctions de  $\mathbf{W}_i$  :

$$\{\mathbf{v} \in \mathbf{C}^0(\tilde{\Omega}), \mathbf{v}|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h^i; \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}^i\}$$

Soit  $\{\phi_j\}$  les fonctions de bases, linéaires par morceaux, de  $\mathbf{W}_i^h$ , on a

$$\mathbf{u}^h \in \mathbf{W}_i^h \Rightarrow \mathbf{u}^h = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_j^l \phi_j^l = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 u_j^l \varphi_j \right) \mathbf{e}_l, \quad (9.41)$$

·  $Q_i^{2h}$  l'espace d'approximation des fonctions dans  $L^2(\tilde{\Omega}_i)$  :

$$\{v \in C^0(\tilde{\Omega}), v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_{2h}^i\}$$

$$p^h \in Q_i^{2h} \Rightarrow p^h = \sum_{j=1}^3 p_j \psi_j \quad (9.42)$$

On introduit alors

$$\mathbf{S}^h = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{C}^0(\tilde{\Sigma}), \boldsymbol{\tau}|_I \in \mathbb{P}_1(I) \forall I \in \mathcal{I}_h\}$$

l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange sur les interfaces où les fonctions de bases sont les traces sur  $\Sigma$  de  $\phi_j^l$  :

$$\boldsymbol{\lambda}^h \in \mathbf{S}^h \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^h = \sum_{l=1}^3 \sum_{m: x_m \in \Sigma} \lambda_m^l \phi_m^l. \quad (9.43)$$

En notant, par un indice  $i$ , les matrices de masses des équations (5.17)-(5.20) sur le domaine  $\tilde{\Omega}_i$  et  $\underline{\mathbf{G}}_{ij}$  la matrice correspondant à  $\langle \mathbf{E}_i, \boldsymbol{\mu} \rangle$ , la FVMADL

s'écrit

$$\underline{\mathbf{R}}_i \mathbf{E}_{hi} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}_{hi} + s \underline{\mathbf{D}}_i \mathbf{E}_{hi} + \underline{\mathbf{B}}_i^H p_{2hi} + \sum_j \epsilon_{ij} \underline{\mathbf{G}}_{ij}^H \boldsymbol{\lambda}_{hij} = \mathbf{f}_{hk} \quad (9.44)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_i \mathbf{E}_{hi} = \mathbf{g}_{2k} \quad (9.45)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{ij} (\mathbf{E}_{hi} - \mathbf{E}_{hj}) = 0 \quad (9.46)$$

avec  $\epsilon_{ij} = 1$  si  $i < j$  et  $\epsilon_{ij} = -1$  si  $i > j$ . L'expression des matrices sont données au chapitre 5 sauf celle de la matrice  $\underline{\mathbf{G}}_{ij}$  qui est :

$$(\underline{\mathbf{G}}_{ij}^{mn})_{lp} := \langle \phi_p^n, \phi_l^m \rangle, \quad l = 1, \dots, N_{hi}; \quad p : \mathbf{x}_p \in \Sigma_{ij}; \quad m, n = 1, 2, 3,$$

On va donner maintenant l'expression du système linéaire tout entier (i.e. avec les deux sous-domaines réunis). On note alors  $\mathbf{u} = (\mathbf{E}_1, p_1, \mathbf{E}_2, p_2)^T$  et  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_\Sigma)^T$ . Le système linéaire à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Q}}_s & \underline{\mathbf{G}}^H \\ \underline{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (9.47)$$

avec

$$\underline{\mathbf{Q}}_s := \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Q}}_{1s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{Q}}_{2s} \end{bmatrix}, \quad (9.48)$$

$$\underline{\mathbf{Q}}_{is} := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{is} & \underline{\mathbf{B}}_i^H \\ \underline{\mathbf{B}}_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.49)$$

Le système linéaire (9.47) est, de nouveau, un problème de type point-selle généralisé. On peut alors utiliser la méthode GMRES préconditionné du chapitre 6 pour la résolution de ce système.

## 9.2 Résultats numériques

A partir du code MATLAB élaboré pour le monodomaine, on utilise la *Parallel Computing Toolbox* pour élaborer le code de décomposition de domaine. Les tests numériques présentés dans ce chapitre sont d'une part le cas

test (7.20) où le domaine  $\tilde{\Omega}$  est divisé en deux sous-domaines et d'une autre part la simulation Full-Wave sur 5 sous-domaines. Nous allons faire une étude comparative entre les solutions obtenues avec la méthode monodomaine et décomposition de domaine. Pour la résolution des systèmes algébriques, nous avons utilisé de nouveau la méthode d'élimination de Gauss.

### 9.2.1 Décomposition en 2 sous-domaines

On considère le problème (7.18)-(7.19) avec la solution exacte (7.20) dans le domaine  $\tilde{\Omega}$ , cercle de centre  $(3, 0)$  et de rayon 1. On choisit de décomposer  $\tilde{\Omega}$  en deux sous-domaine comme l'illustre la figure 9.1. Les figures 9.2-9.7

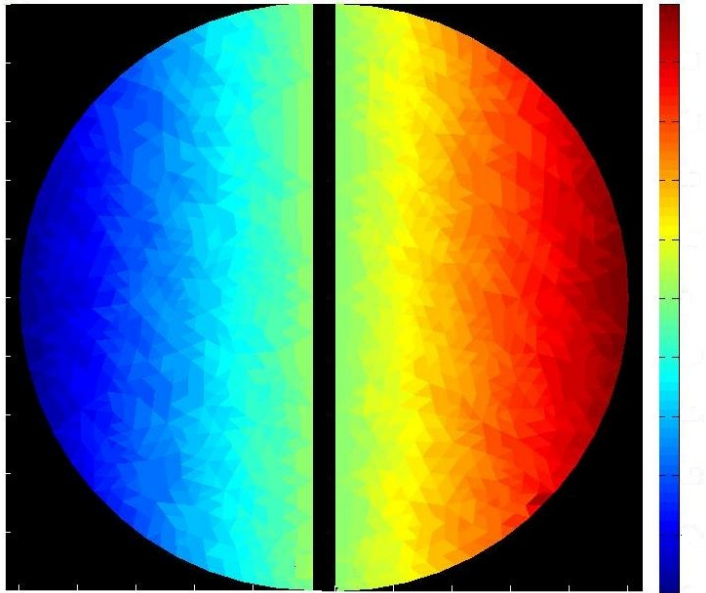


FIGURE 9.1 – décomposition en deux sous-domaines

montrent, pour  $h = 0.01$ , à gauche les composantes de la solution obtenues sur le domaine tout entier et, à droite, l'écart avec la solution exacte. On constate que la solution approchée présente principalement une faible erreur au niveau de l'interface. Toutefois le tableau suivant montre que l'erreur relative reste pratiquement identique au cas monodomaine.

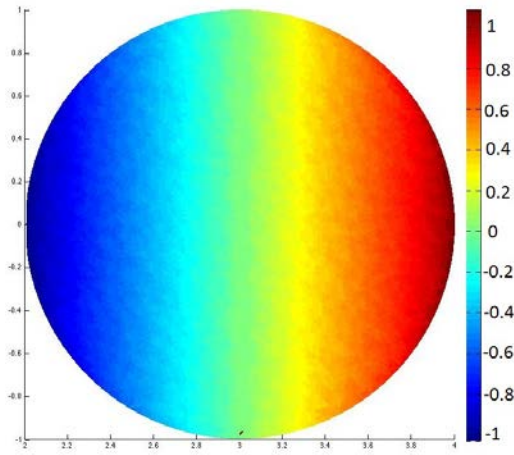


FIGURE 9.2 – partie réelle de  $E_R$

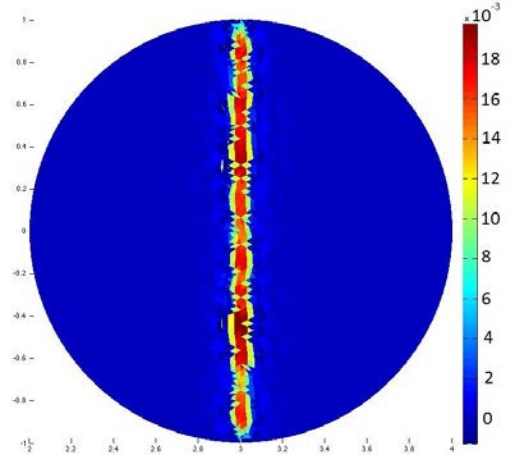


FIGURE 9.3 – écart des  $E_R$

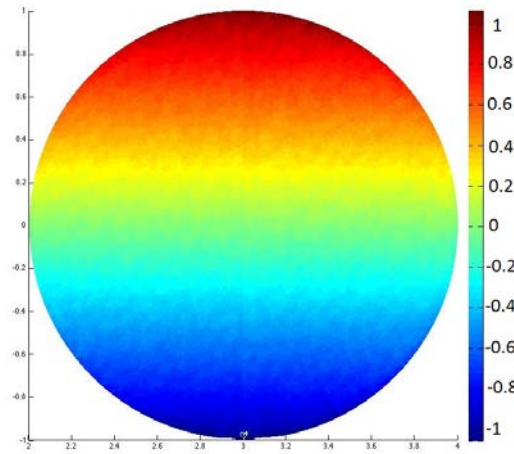


FIGURE 9.4 – partie réelle de  $E_Z$

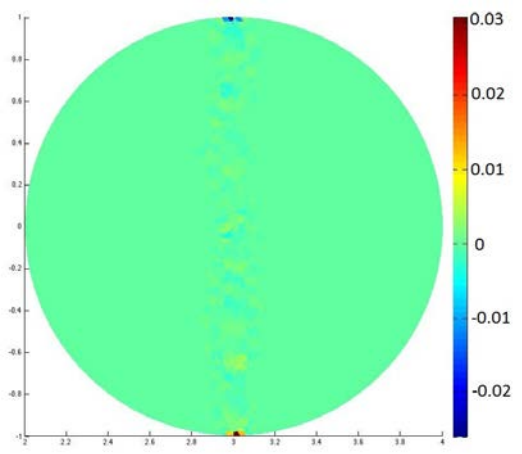


FIGURE 9.5 – écart des  $E_Z$

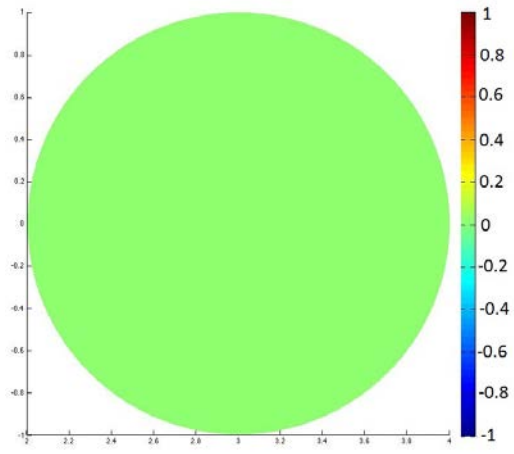


FIGURE 9.6 – partie réelle de  $E_\phi$

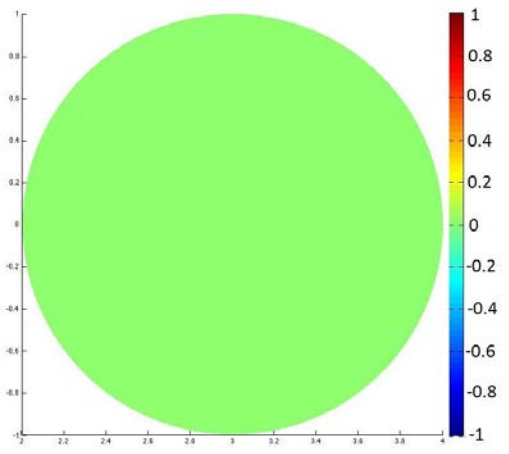


FIGURE 9.7 – écart des  $E_\phi$

|                               |                      |                      |                      |                      |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| h                             | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
| $\ e\ /\ E_{ex}\ _{0,\Omega}$ | $1.3 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-3}$ | $7.8 \times 10^{-4}$ | $1.7 \times 10^{-4}$ |

### 9.2.2 Décomposition en 5 sous-domaines

On considère le problème Full-Wave (2.40)-(2.43) avec le second membre et les paramètres définis dans 7.3.2. Le domaine  $\tilde{\Omega}$  est cette fois-ci divisé en cinq sous-domaines comme le montre la figure 9.8. Ne connaissant pas l'ex-

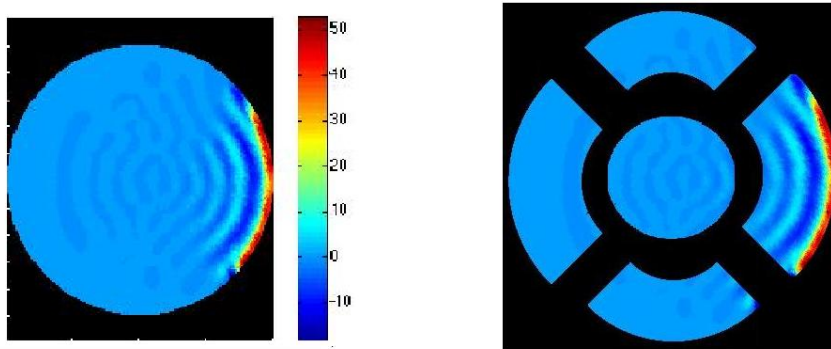
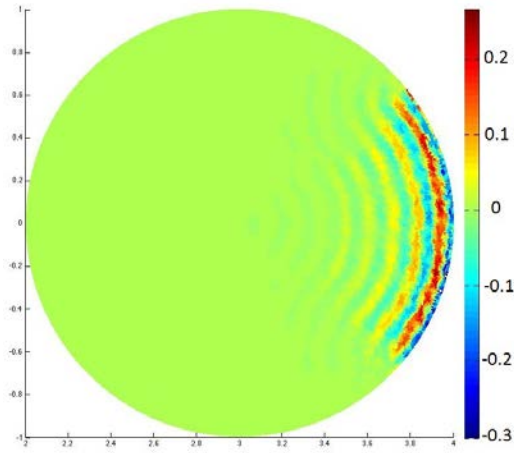
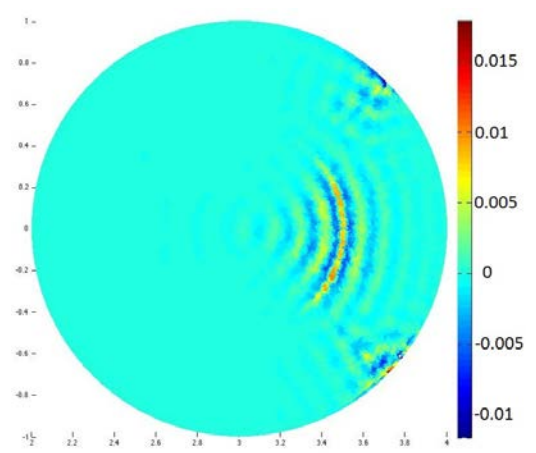
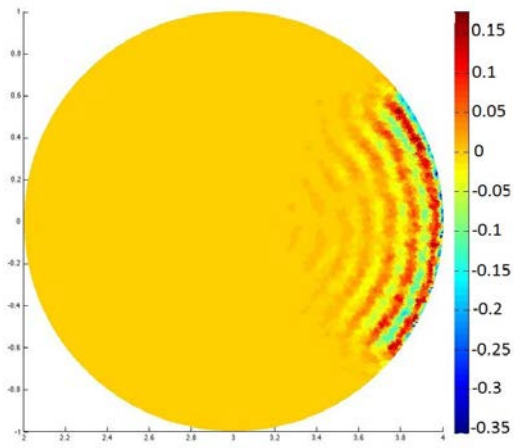
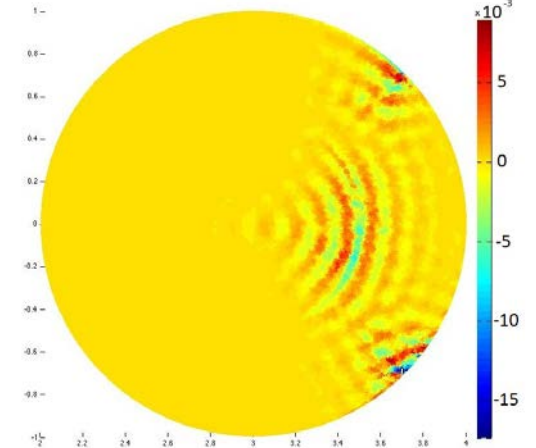
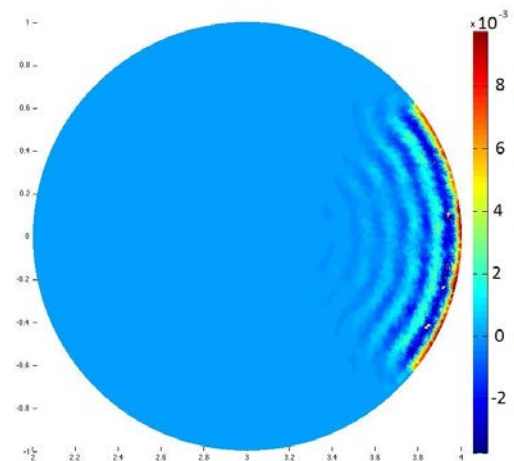
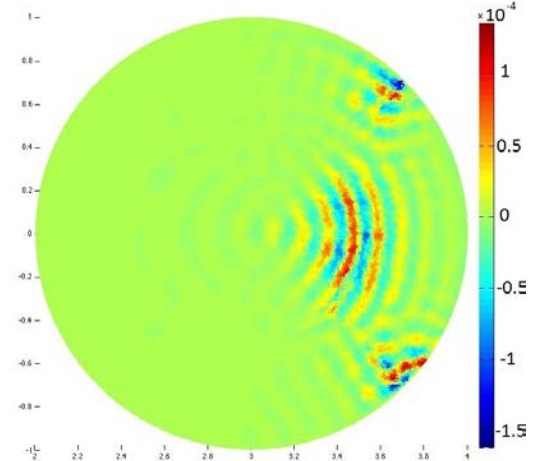


FIGURE 9.8 – décomposition en cinq sous-domaines

pression de la solution exacte du problème, nous allons comparer la solution obtenue par la méthode multidomaine avec celle obtenue par monodomaine. Les figures (9.9)-(9.20) montrent les composantes de la solution multidomaine à gauche et l'écart avec la solution monodomaine à droite pour les paramètres  $\omega = \omega_{LH}$  et  $k = 250$  avec un pas de maillage  $h = 0,01$ . Nous observons une faible erreur entre les solutions. Nous allons évaluer l'erreur  $L^2$  relative entre les deux solutions pour différents maillages afin de montrer leur convergence. On pose  $e_{MD} = E_M - E_D$  où  $E_M$  est la solution approchée par la méthode monodomaine et  $E_D$  celle approchée par décomposition de domaine.

|                                 |                      |                      |                      |                      |
|---------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| h                               | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
| $\ e_{MD}\ /\ E_M\ _{0,\Omega}$ | 0.25                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |

FIGURE 9.9 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 9.10 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.11 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 9.12 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.13 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 9.14 – écart de  $E_\phi$

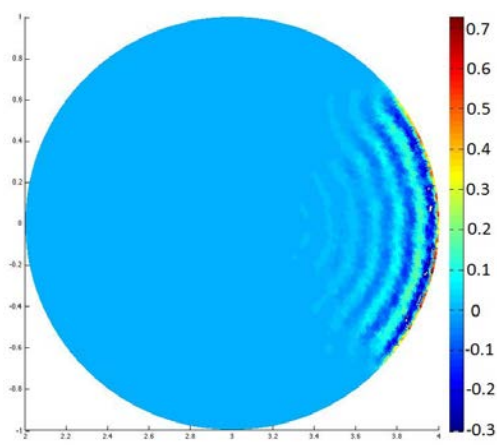


FIGURE 9.15 – partie imaginaire de  $E_R$

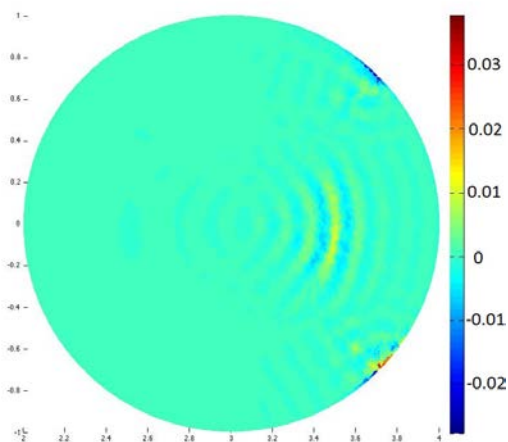


FIGURE 9.16 – écart des  $E_R$

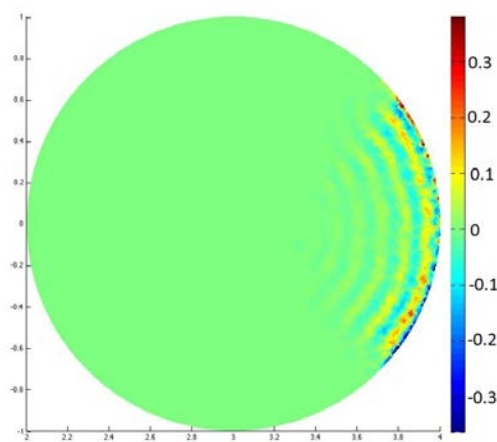


FIGURE 9.17 – partie imaginaire de  $E_Z$

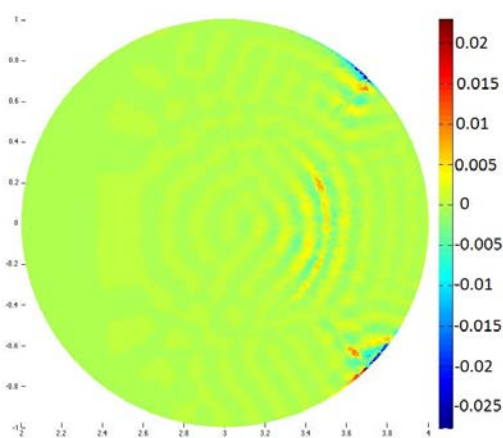


FIGURE 9.18 – écart des  $E_Z$

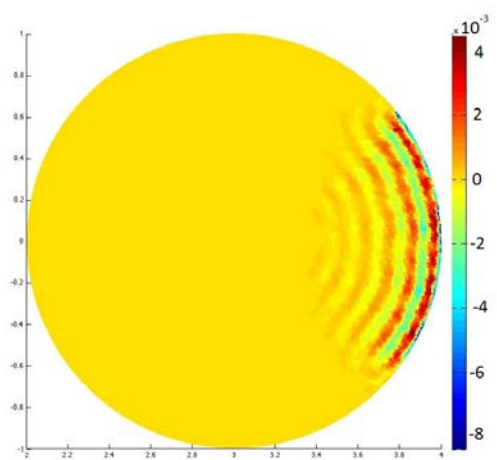


FIGURE 9.19 – partie imaginaire de  $E_\phi$

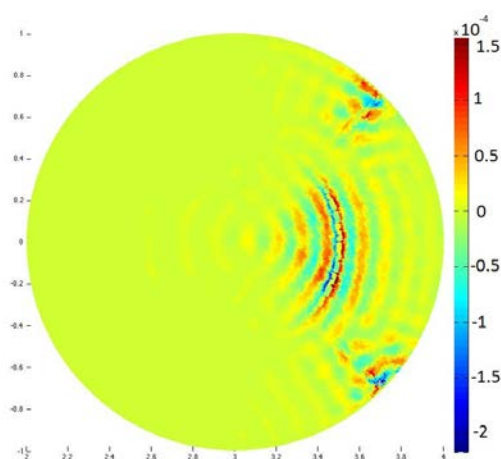


FIGURE 9.20 – écart de  $E_\phi$

On constate que les deux solutions convergent vers un même résultat lorsque  $h$  diminue.

On s'intéresse maintenant à la dépendance de cette erreur par rapport au mode de Fourier  $k$  et à la fréquence  $\omega$ . Le tableau suivant représente l'erreur relative  $\|\mathbf{e}_{MD}\|/\|\mathbf{E}_M\|$  en fonction de plusieurs valeurs de ces derniers.

| h                                | $8.0 \times 10^{-2}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ |
|----------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\omega = \omega_{LH}, k = 150$  | 0.24                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = \omega_{LH}, k = 50$   | 0.26                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 2\omega_{LH}, k = 250$ | 0.17                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 2\omega_{LH}, k = 150$ | 0.18                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 2\omega_{LH}, k = 50$  | 0.19                 | 0.13                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 3\omega_{LH}, k = 250$ | 0.16                 | 0.1                  | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 3\omega_{LH}, k = 150$ | 0.17                 | 0.11                 | 0.06                 | 0.03                 |
| $\omega = 3\omega_{LH}, k = 50$  | 0.19                 | 0.12                 | 0.06                 | 0.03                 |

On observe ainsi une dépendance très faible en  $k$  et  $\omega$ .

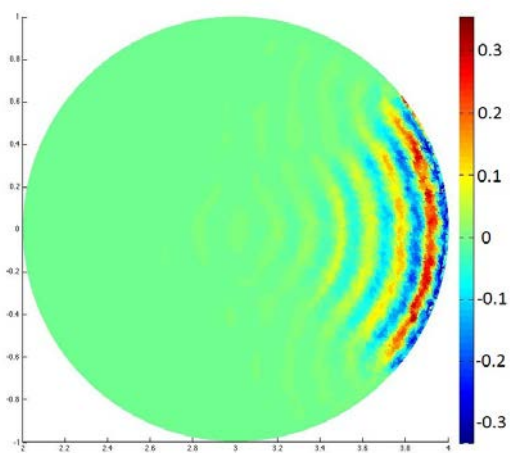
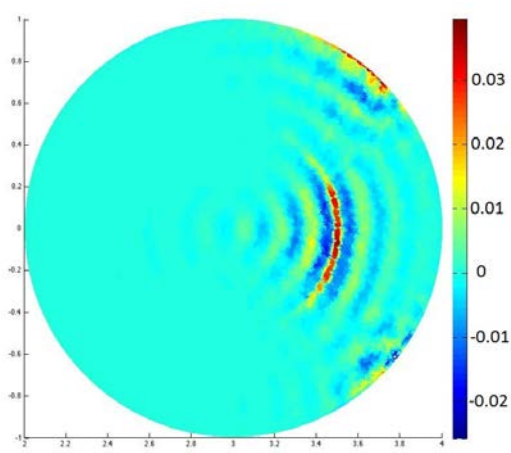
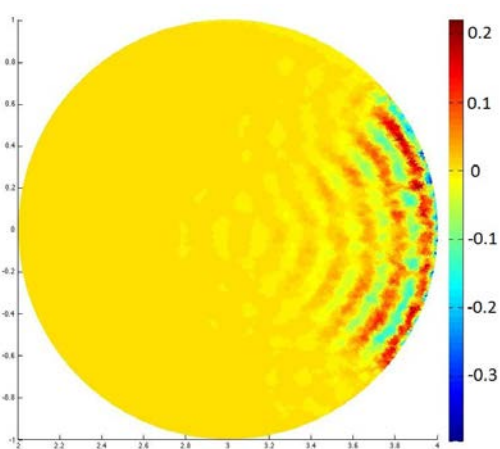
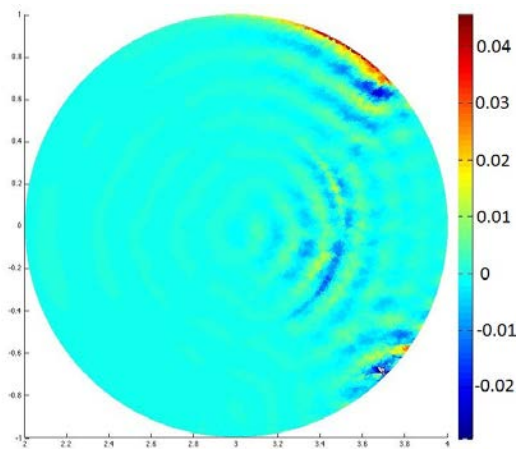
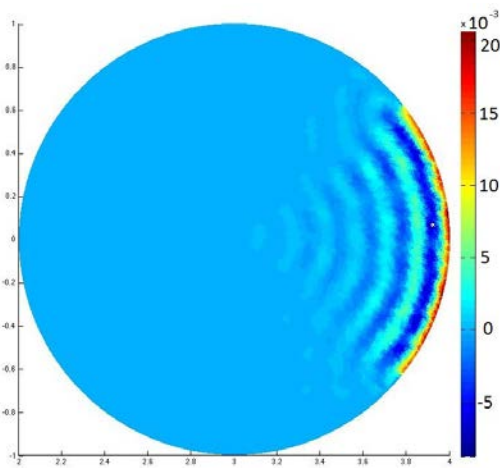
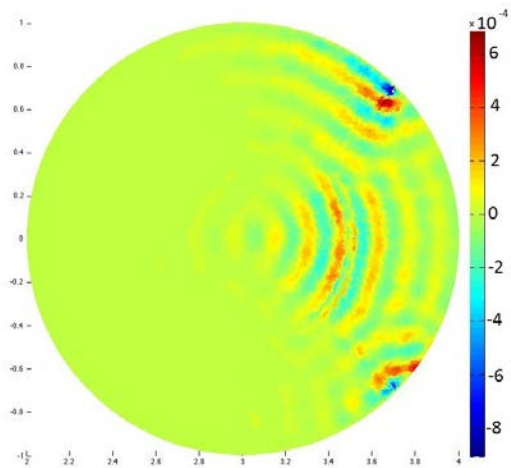
Enfin, on représente quelques simulations qui ont été fait dans le cas monodomaine :

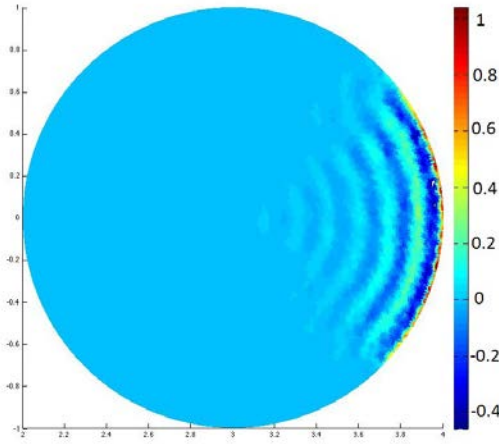
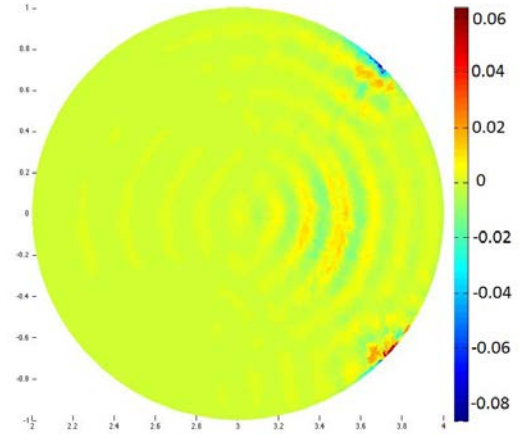
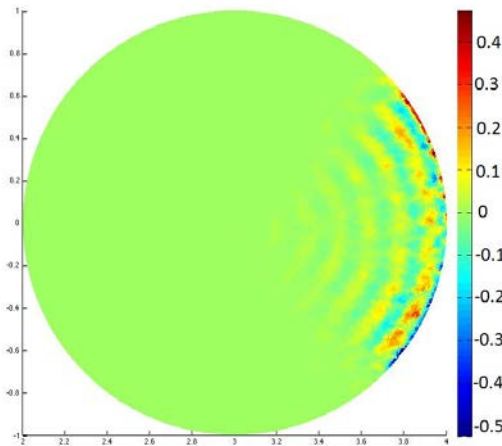
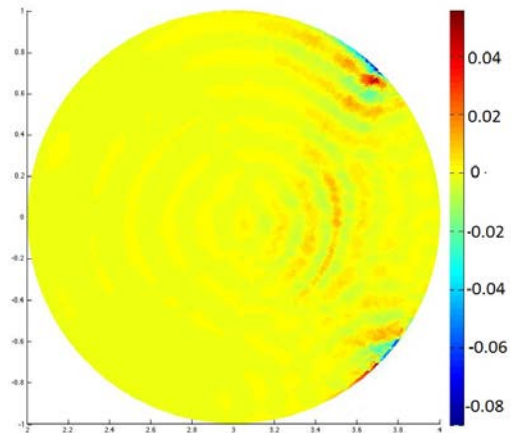
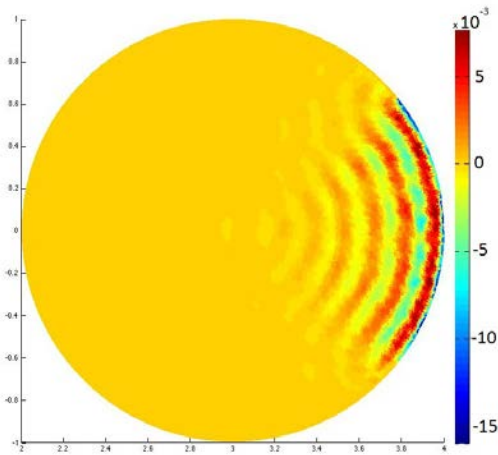
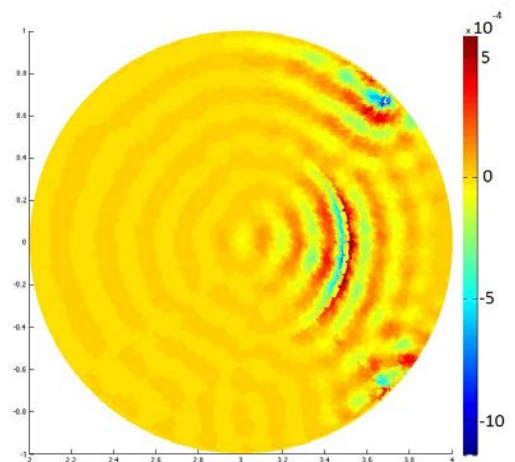
le cas  $\omega = \omega_{LH}/2$  et  $k = 100$  dans un plasma à densité constante sur les figures 9.21-9.32.

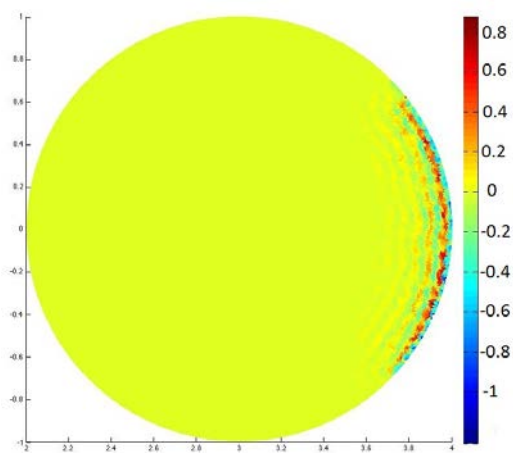
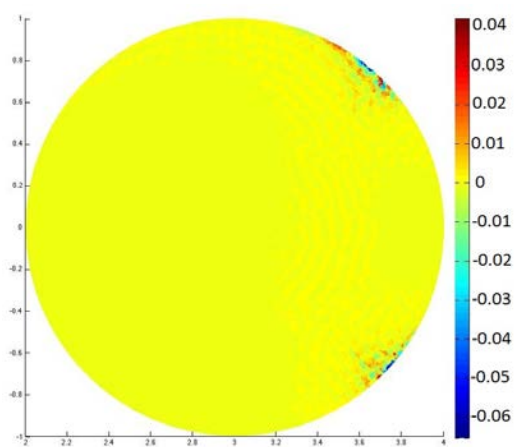
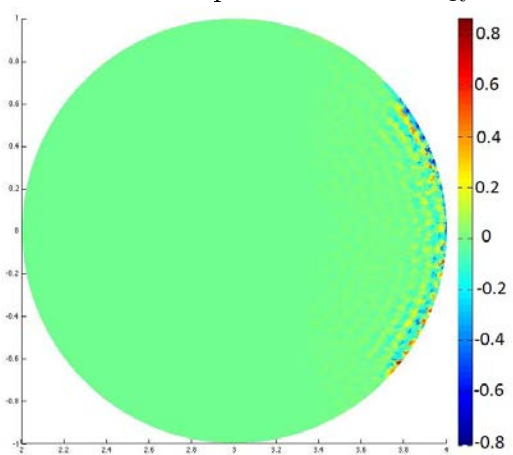
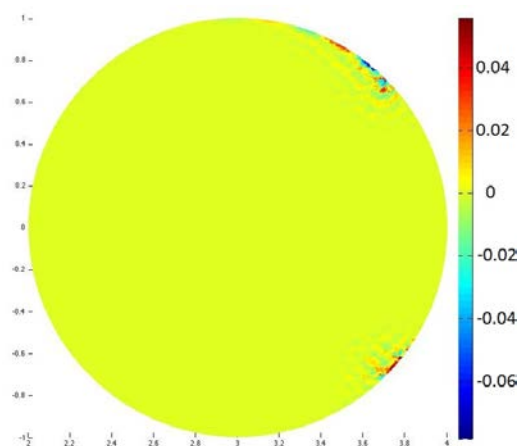
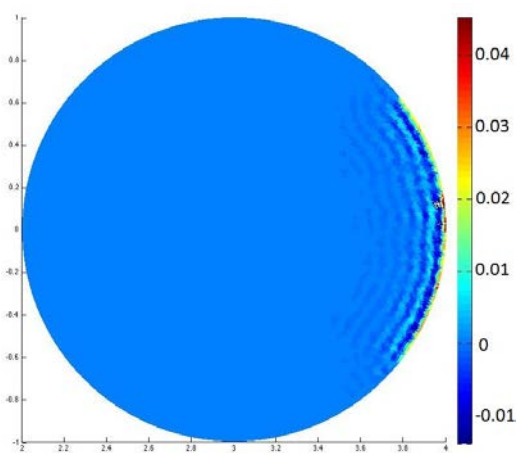
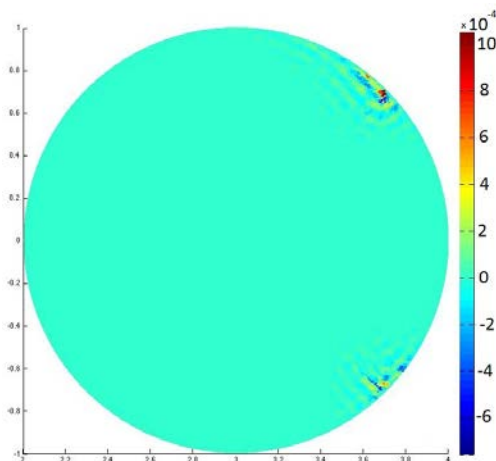
le cas  $\omega = 2\omega_{LH}$  et  $k = 200$  dans un plasma à densité constante sur les figures 9.33-9.44.

le cas  $\omega = \omega_{LH}/2$  et  $k = 100$  dans un plasma à densité variable sur les figures 9.45-9.56.



FIGURE 9.21 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 9.22 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.23 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 9.24 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.25 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 9.26 – écart de  $E_\phi$

FIGURE 9.27 – partie imaginaire de  $E_R$ FIGURE 9.28 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.29 – partie imaginaire de  $E_Z$ FIGURE 9.30 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.31 – partie imaginaire de  $E_\phi$ FIGURE 9.32 – écart de  $E_\phi$

FIGURE 9.33 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 9.34 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.35 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 9.36 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.37 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 9.38 – écart de  $E_\phi$

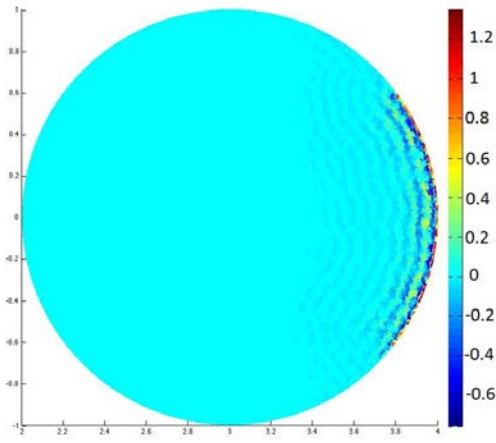


FIGURE 9.39 – partie imaginaire de  $E_R$

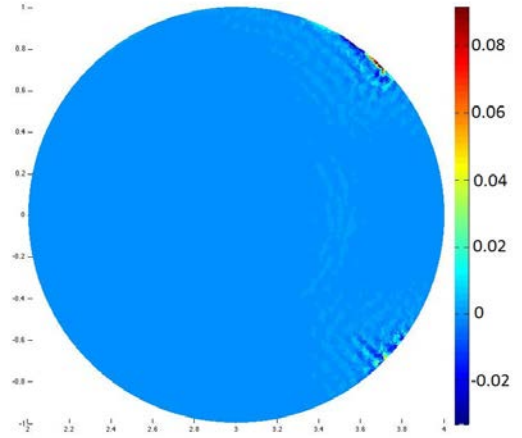


FIGURE 9.40 – écart des  $E_R$

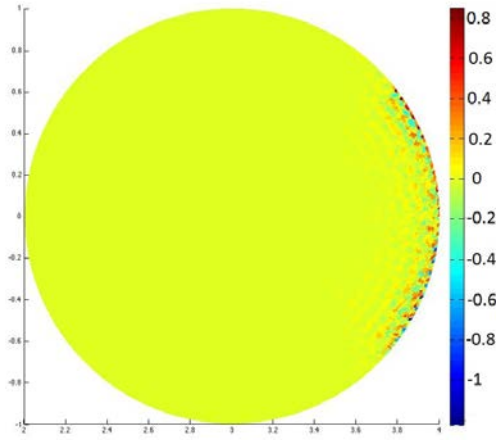


FIGURE 9.41 – partie imaginaire de  $E_Z$

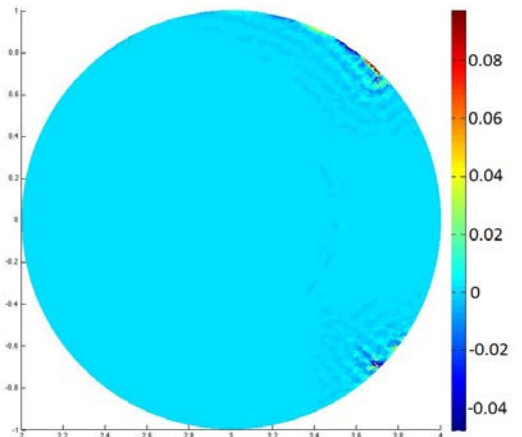


FIGURE 9.42 – écart des  $E_Z$

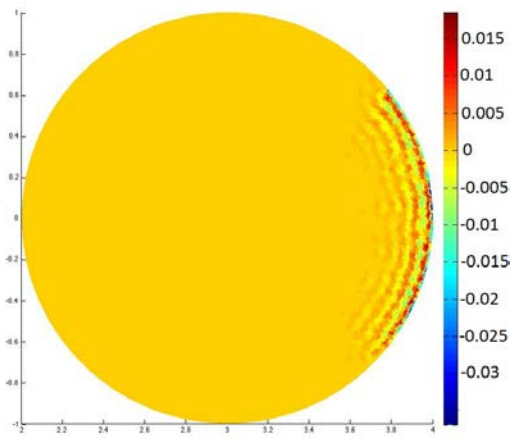


FIGURE 9.43 – partie imaginaire de  $E_\phi$

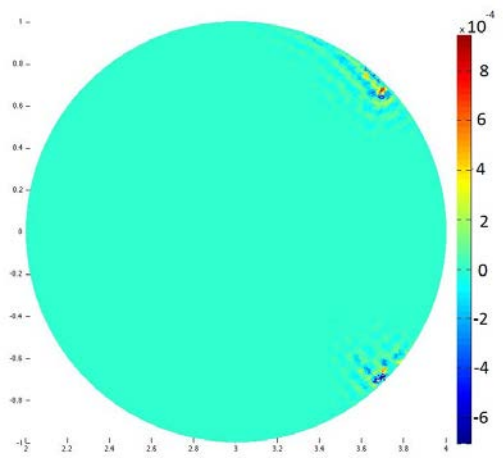
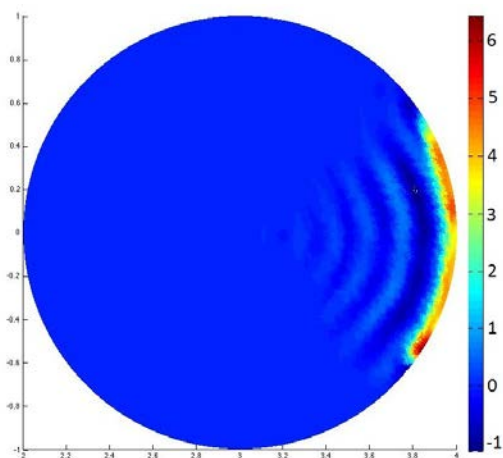
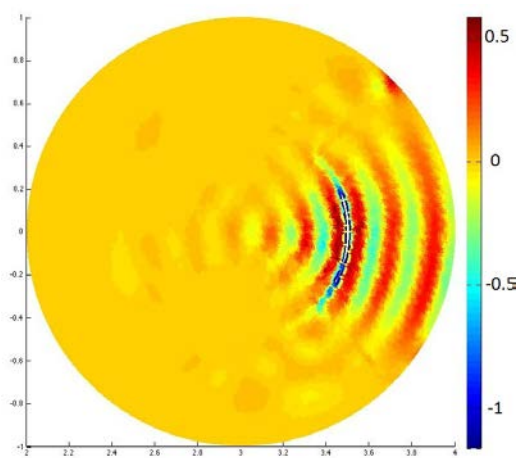
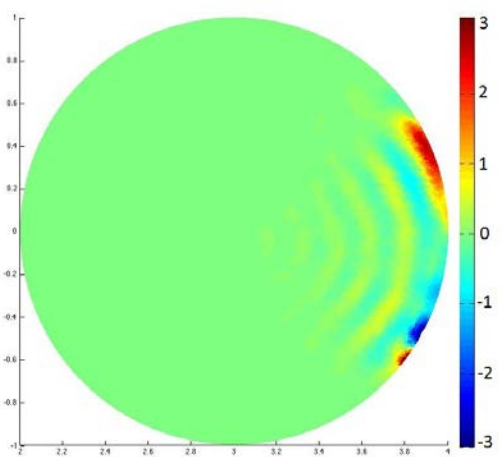
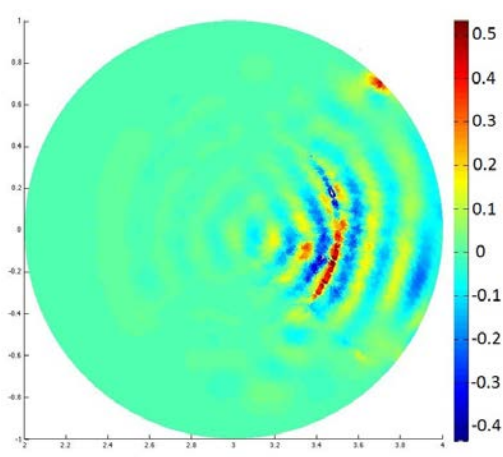
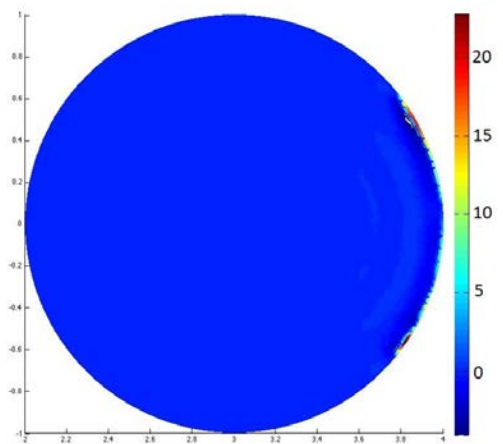
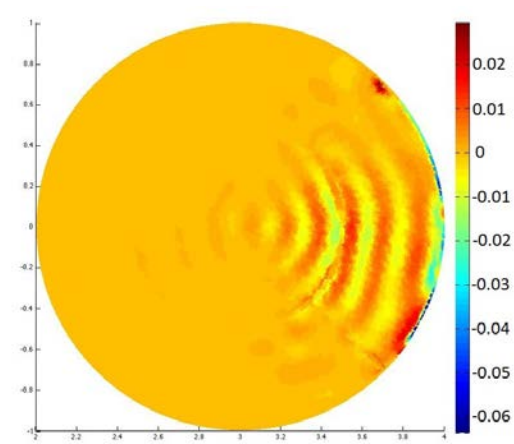
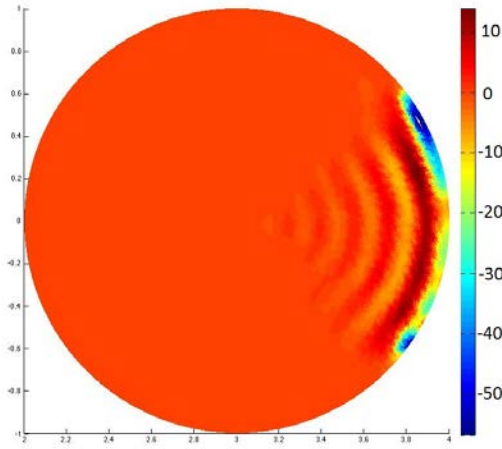
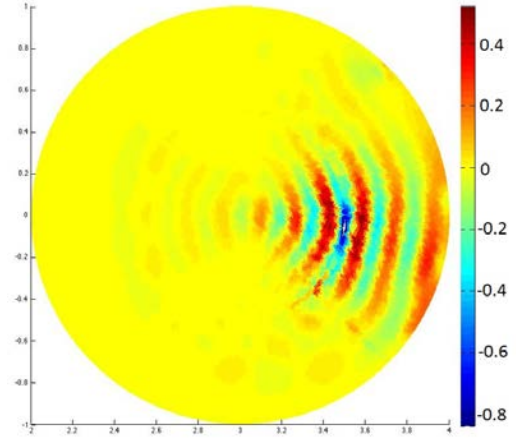
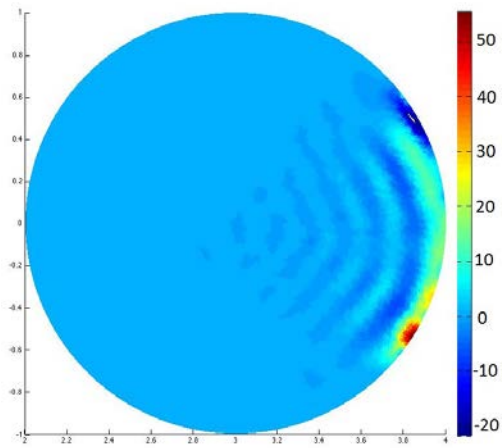
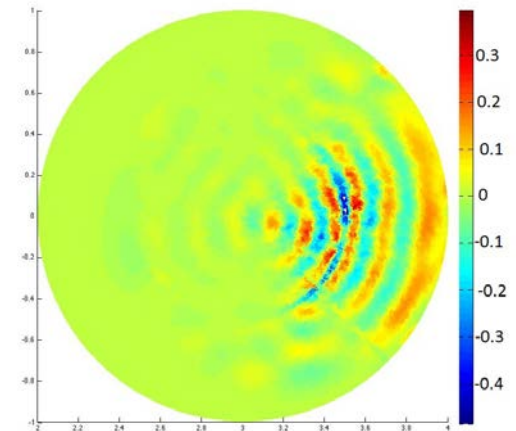
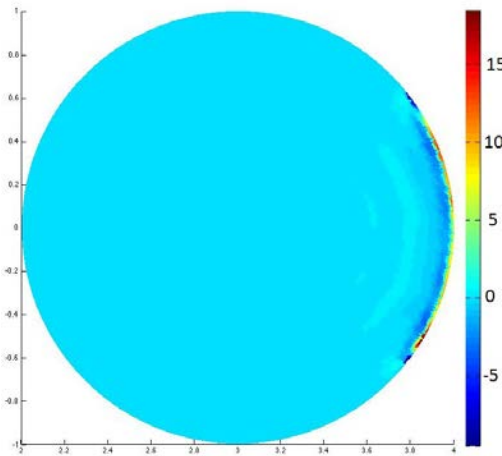
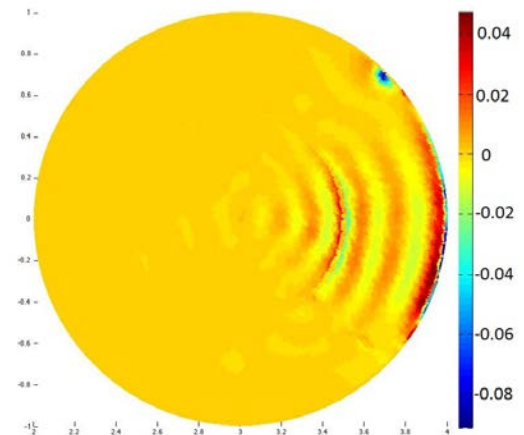


FIGURE 9.44 – écart de  $E_\phi$

FIGURE 9.45 – partie réelle de  $E_R$ FIGURE 9.46 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.47 – partie réelle de  $E_Z$ FIGURE 9.48 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.49 – partie réelle de  $E_\phi$ FIGURE 9.50 – écart de  $E_\phi$

FIGURE 9.51 – partie imaginaire de  $E_R$ FIGURE 9.52 – écart des  $E_R$ FIGURE 9.53 – partie imaginaire de  $E_Z$ FIGURE 9.54 – écart des  $E_Z$ FIGURE 9.55 – partie imaginaire de  $E_\phi$ FIGURE 9.56 – écart de  $E_\phi$

# Conclusions

Notre objectif était de proposer une méthode de décomposition de domaine qui résout un problème de propagation d'onde hybride dans un plasma froid magnétisé contenu dans un tokamak. Nous présentons ici quelques conclusions sur le travail réalisé.

Nous avons débuté cette thèse par la mise en équation de la propagation d'ondes électromagnétiques en régime harmonique, modèle appelé Full-Wave. Une des principales caractéristiques de ce problème est que le tenseur diélectrique de notre équations aux dérivées partielles, provenant d'un modèle de plasma froid, est à valeur complexe et non hermitienne. Nous avons étudié deux conditions aux bords, naturelle et essentielle, sur l'antenne. Parmi les formulations variationnelles proposées, selon que la condition de divergence soit prise comme contrainte ou non, nous nous sommes intéressés à la formulation de type mixte augmentée. Les propriétés spectrales du tenseur diélectrique permettent d'établir l'existence et l'unicité du problème en question. En effet, sous certaines hypothèses sur les diverses fréquences du modèle physique ainsi que sur le paramètre de régularisation, nous avons montré, à l'aide du théorème de Babuska-Brezzi, que la formulation variationnelle mixte augmentée est bien posée. Une étude sur l'espace auquel appartient le champ électrique a été réalisée. Nous avons obtenu un résultat de régularité de l'espace justifiant l'usage d'éléments finis nodaux.

Nous avons exprimé le problème Full-Wave en coordonnées cylindriques  $R$ ,  $Z$  et  $\phi$ . Cela nous a permis de réduire le problème en deux dimensions à l'aide de développement en série de Fourier par rapport à  $\phi$ . Nous avons considéré une approximation numérique où la discrétisation est établie à l'aide des éléments finis de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_2$ -iso- $\mathbb{P}_1$ . Le système matriciel obtenu est alors un système linéaire de type point selle où la matrice en question n'est ni hermitienne ni définie positive. Des résultats numériques ont été mis en évidence pour des problèmes simplifiés (le tenseur diélectrique égal à la

matrice identité) pour les différents conditions aux bords sur l'antenne avec lesquelles une solution explicite a été calculée. Un taux de convergence de l'erreur relative, compatible avec la valeur théorique a été trouvé. Le modèle Full-Wave, avec deux profils de densité possibles, a alors été étudié. Les expériences numériques ont conduit à des résultats mettant en évidence la notion d'onde pénétrante et réfractante. La solution exacte ne pouvant être calculée, le critère d'accessibilité donne une idée de la description physique du champ électrique. Une seconde étude sur l'évolution de l'accessibilité par rapport au mode de Fourier et de la fréquence de l'onde permet de confirmer nos simulations.

Nous avons achevé la partie numérique par une étude sur le préconditionnement du système linéaire de type point-selle généralisé. Le préconditionneur triangulaire supérieur par bloc s'est alors montré plus adapté que le préconditionneur diagonale par bloc.

La dernière partie de la thèse décrit une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement pour résoudre le problème Full-Wave. En posant le problème originel sur chaque sous-domaine, l'équivalence avec le cas monodomaine est obtenue grâce à diverses conditions de saut sur les interfaces entre chaque sous-domaine. Nous avons étudié les formulations variationnelles décomposées, de type identique à ceux de la première partie, et montré les équivalences entre elles. Afin de réutiliser le travail numérique réalisé dans le cas monodomaine, nous nous sommes intéressés à la version décomposée de la formulation variationnelle mixte augmentée. Nous avons alors dualisé les conditions de saut, équivalent à une seule condition de saut de continuité du champ électrique, afin d'obtenir une formulation multidomaine de type mixte augmentée et nous avons montré que celle-ci est bien posée. Une discrétisation par éléments finis de Taylor-Hood a été utilisée et nous avons mené une étude comparative avec les résultats obtenus dans le cas monodomaine. Après vérification du même taux de convergence de l'erreur relative pour le cas test lorsque le domaine est divisé en deux, les mêmes simulations que celles de notre problème Full-Wave monodomaine ont été effectuées avec, cette fois-ci, un domaine divisé en cinq sous-domaines. L'étude de l'erreur relative entre les solutions monodomaine et multidomaine montre que la solution approchée par la méthode de décomposition de domaine converge vers celle du cas monodomaine lorsque le pas de maillage  $h$  diminue. Cette convergence est indépendante du mode de Fourier et faiblement dépendant de la fréquence de l'onde.



# Bibliographie

- [1] A. Alonso et A. Valli : *A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 147, (1997), pp. 97-112.
- [2] A. Alonso et A. Valli : *An optimal domain decomposition preconditioner for low-frequency time-harmonic Maxwell equations*, Math. Comp. **68**, (1999), pp. 607-631.
- [3] A. Alonso et A. Valli : *Some remarks on the characterization of the space of tangential traces  $H(\mathbf{rot}; \Omega)$  and the construction of an extension operator*, Manuscripta Math. 89, (1996), pp. 159-178.
- [4] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge et V. Girault : *Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (1998), pp. 823-863.
- [5] F. Assous, P. Degond, E. Heintz , P.A. Raviart et J. Segre : *On a Finite Element Method for Solving the Three-Dimensional Maxwell Equations*. J. Comput. Phys. 109, (1993), pp. 222-237.
- [6] F. Assous, J. Segr  et E. Sonnendr cker : *A domain decomposition method for parallelization of a three-dimensional Maxwell solver based on a constrained formulation*, Mathematics and Computers in Simulation 81, (2011), pp. 2371-2388.
- [7] MZ Bai, G.H. Golub, M.K. Ng : *Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24, (2003), pp. 603-626.
- [8] E. B cache, P. Ciarlet Jr, C. Hazard et E. Lun ville : *La m thode des  l ments finis. De la th orie   la pratique. II. Compl ments*, Les presses de L'ENSTA, Collection Les Cours, 2010

- [9] J.D. Benamou, B. Desprès : *A domain decomposition method for the Helmholtz equation and related optimal control problems*, J. Comput. Phys., 136, (1997), pp. 68-82.
- [10] M. Benzi, G.H. Golub, J. Liesen : *Numerical solution of saddle point problems*, Acta Numerica., 14, (2005), pp. 1-137.
- [11] M.Sh. Birman et M.Z. Solomyak : *Maxwell operator in regions with nonsmooth boundaries*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 28, (1987), pp. 12-24.
- [12] P.T. Bonoli : *Wave Heating and Current Drive in Plasmas*, Gordon and Breach, New York 1985
- [13] A. Bossavit : *Electromagnétisme, en vue de la modélisation*, Springer, 1993
- [14] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris 1983
- [15] F. Brezzi et M. Fortin : *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [16] A. Buffa, P. Ciarlet Jr : *On traces for functionnal spaces related to Maxwell's equations. Part I : an integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Meth. Appl. Sci., 24, (2001), pp. 9-30.
- [17] A. Buffa, P. Ciarlet Jr : *On traces for functionnal spaces related to Maxwell's equations. Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications*, Math. Meth. Appl. Sci., 24, (2001), pp. 31-48
- [18] [www.cea-fusion.fr](http://www.cea-fusion.fr)
- [19] F.F. Chen : *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Vol. 1 : Plasma Physics*, Plenum Press, 1984
- [20] P.G. Ciarlet : *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982
- [21] P. Ciarlet Jr : *Augmented formulations for solving Maxwell equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194, (2005), pp. 559-586.
- [22] P. Ciarlet Jr, V. Girault : *condition inf-sup pour l'élément fini de Taylor-Hood  $P_2$ -iso- $P_1$ , 3-D; application aux équations de Maxwell*, C. R. Acad. Sci. Paris, (2002), pp. 827-832.
- [23] P. Ciarlet Jr, J. Huang, J. Zou : *Some observations on generalized saddle-point problems*, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. Vol 25, No. 1, (2003), pp. 224-236.

- [24] P. Ciarlet Jr et S. Labrunie : *Numerical solution of Maxwell's Equations in axisymmetric domains with the Fourier Singular complement method*, Differential Equations and Applications 3, (2011), pp. 113-155.
- [25] M. Costabel : *A coercive bilinear form for Maxwell's Equations*, Journal of mathematical analysis and applications, (1991), pp. 527-541.
- [26] R. Dautray et J-L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1985
- [27] J.P. Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006
- [28] B. Després, L.M. Imbert-Gérard, R. Weder : *Hybrid resonance of Maxwell's equations in slab geometry*, (à paraître), 2012
- [29] A. El Malki : *Résolution de problèmes aux limites à l'aide de méthodes itératives hiérarchiques à préconditionneur variable*, thèse, 2007
- [30] H. Elman, D. Silvester : *Fast Nonsymmetric Iterations and Preconditioning for Navier-Stokes Equations*, SIAM J. Sci. Comput., 17, (1996), pp. 33-46.
- [31] H. Elman, D. Silvester, D. Kay et A. Wathen : *An Efficient preconditioning of the linearized Navier-Stokes equations of incompressible flow*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS, 128, (2001), pp. 261-279.
- [32] A. Ern et J.L. Guermond : *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*, Springer, 2000
- [33] J.P. Freidberg : *Plasma physics and fusion energy*, Cambridge University Press, 2007
- [34] V. Georgescu : *Some boundary value problems for differential forms on compact Riemannian manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 122, (1979), pp. 159-198.
- [35] V. Girault et P-A. Raviart : *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [36] E. Heintzé : *Résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles instationnaires par une méthode d'éléments finis conformes*, thèse, Université de Paris 6, 1992
- [37] L. Hormander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1984

- [38] J.D. Jackson : *Classical electrodynamics*, New York Wiley, 1998
- [39] E. Jamelot : *Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus*, thèse, Ecole polytechnique, 2005
- [40] L.D. Landau : *On the vibrations of the electronic plasma*, Journal of Physics (U.S.S.R), 1946. Réédité dans *Collected papers of L.D. Landau*, Pergamon Press, (1965), pp. 445-460.
- [41] J.D. Lawson : *Some criteria for a power producing thermonuclear reactor*, Proceedings of the Physical Society B, 70, (1957), pp. 6.
- [42] T.P.A. Mathew : *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2008
- [43] P. Monk : *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003
- [44] P. Monk : *A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations*, Numer. Math. 63, (1992), pp. 243-261.
- [45] J.E. Pasciak et J. Zhao : *Overlapping Schwarz methods in  $H(\text{curl})$  on polyhedral domains*, J. Numer. Math., Vol. 10,(2002), pp. 221-234.
- [46] Y. Peysson, J.R. Roche, P. Bertrand, J.H. Chatenet, C. Kirsch, A. Mokrani et S. Labrunie : *Mixed augmented formulation (MAVF) for lower hybrid full-wave calculations*, RF : The 18th Topical Conference on Radio Frequency Power in Plasmas, AIP Conf. Proc. 1187, (2009), pp. 633-636.
- [47] Y. Peysson, E. Sébelin, X. Litaudon, D. Moreau, J.C. Miellou, M.M. Schoucri et I.P. Schkarofsky : *Full Wave modelling of lower hybrid current drive in tokamaks*, Nuclear Fusion 38(6), (1998), pp. 939-944.
- [48] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri : *Méthodes Numériques; Algorithmes, analyse et applications*, Springer, Milano, 2007
- [49] A. Quarteroni et A. Valli : *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford Science Publications, 1999
- [50] Y. Saad : *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for industrial and applied mathematics, 2003
- [51] Y. Saad Jr et M. Schultz : *GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., (1986).

- [52] E. Sebelin : *Développement des méthodes numériques pour la résolution de la propagation et de l'absorption de l'onde hybride dans les tokamaks*, thèse, 1997
- [53] T.H. Stix : *Waves in plasmas*, American Institute of Physics, New York, 1992
- [54] C. Taylor et P. Hood : *A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique*, Computers and fluids, 1973
- [55] A. Toselli : *Overlapping Schwarz methods for Maxwell's equations in three dimensions*, Numer. Math. 86, (2000), pp. 733-752.
- [56] C. Weber : *A local compactness theorem for Maxwell's equations*, Math. Meth. in the Appl. Sci. 2, (1980), pp. 12-25.
- [57] J.C. Wright et al. : *Calculations of fast wave mode conversion and lower hybrid propagation in tokamaks*, Phys. Plasmas 11, (2004), pp. 2473-2479.