



# Prévision de la durée de vie en fatigue des roues ferroviaires sous sollicitations multiaxiale proportionnelle et non-proportionnelle

Abderrahim Chamat

## ► To cite this version:

Abderrahim Chamat. Prévision de la durée de vie en fatigue des roues ferroviaires sous sollicitations multiaxiale proportionnelle et non-proportionnelle. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2005. Français. NNT : 2005METZ009S . tel-01752419

**HAL Id: tel-01752419**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752419>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

Pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz**  
Laboratoire de Fiabilité Mécanique - Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz

Présenté par :

**Abderrahim CHAMAT**

Le 19 / 12 / 2005

Titre :

Prévision de la durée de vie en fatigue

des roues ferroviaires

sous sollicitations multiaxiale proportionnelle et non-proportionnelle

| UNIVERSITE Paul Verlaine METZ |           |
|-------------------------------|-----------|
| S.C.D.                        |           |
| N° Inv.                       | 2005 0255 |
| Cote                          | S/m 05/09 |
| Loc                           |           |

EXCLU DU  
PRÊT

## JURY

Z. AZARI : Professeur Université de Picardie, Amiens  
DANG VAN : Professeur, Ecole Polytechnique de Paris  
H. LIEURADE : Professeur, CETIM  
PALIN LUC : M.C.F, HdR, ENSAM de Bordeaux  
G. PLUVINAGE : Professeur, Université de Metz  
J. GILGERT : Maître de conférence, ENI de Metz  
F. COCHETEUX : Ingénieur SNCF A.E.F de Paris

Directeur de Thèse  
Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



031 536327 8

# THESE

Pour l'obtention du grade de

EXCLU DU  
PRÊT

**Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz**

**Laboratoire de Fiabilité Mécanique - Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz**

Présenté par :

**Abderrahim CHAMAT**

Le 19 / 12 / 2005

|                                         |            |
|-----------------------------------------|------------|
| UNIVERSITE Paul Verlaine METZ<br>S.C.D. |            |
| N° Inv.                                 | 20050255   |
| Cote                                    | S/17305/09 |
| Loc                                     |            |

**Titre :**

Prévision de la durée de vie en fatigue

des roues ferroviaires

sous sollicitations multiaxiale proportionnelle et non-proportionnelle

## JURY

Z. AZARI : Professeur Université de Picardie, Amiens  
DANG VAN : Professeur, Ecole Polytechnique de Paris  
H. LIEURADE : Professeur, CETIM  
PALIN LUC : M.C.F, HdR, ENSAM de Bordeaux  
G. PLUVINAGE : Professeur, Université de Metz  
J. GILGERT : Maître de conférence, ENI de Metz  
F. COCHETEUX : Ingénieur SNCF A.E.F de Paris

Directeur de Thèse  
Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur **Z. AZARI**, qui m'a fait l'honneur de m'encadrer et qui a été d'un support scientifique et humain considérables.

J'associe également à ces remerciements Monsieur **P. JODIN** et **J. GILGERT** qui m'ont aidé à réaliser des essais de qualité.

Mes remerciements vont à Monsieur **F. COCHETEUX** pour son aide matérielle et pour son encouragement.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux Messieurs **AZARI, DANG VAN, PLUVINAGE, LIEURADE, PALIN LUC, GILGERT** et **COCHETEUX** qui ont jugé mon travail.

Je remercie tout les membres du Laboratoire de Fiabilité de Metz et notamment Monsieur **M. ABBADI** pour sa très précieuse aide.

Je remercie **mes Parents, mes Frères et mes Sœurs** pour leurs soutiens et leur sérénité pendant toute ma vie, ainsi que ma femme **R. JEDOUANI** de m'avoir supporté tout au long de ma rédaction. Sans oublier mes amis.

**Sommaire**

**Introduction Générale.....7**

**Chapitre I : Etude Bibliographique.....**

**1.1 Introduction.....9**

**1.2 Amorçage d’une fissure de fatigue.....9**

1.2.1 Evolution physique.....9

1.2.2 Evolution structurale.....10

1.2.3 Mécanismes d’amorçage.....11

**1.3 Critères de Fatigue.....12**

**1.3.1 Procédure d’utilisation d’un critère.....13**

**1.4 Critères globaux.....14**

1.4.1 Critère de Marin.....14

1.4.2 Critère de Kinasushvili.....15

1.4.3 Critère de Kakuno & Kawada.....15

1.4.4 Critère de Deitman & Isseler.....15

1.4.5 Critère de Sines.....15

1.4.6 Critère de Crossland.....16

1.4.7 Critère de Gough & Pollard.....16

1.4.8 Critère de Grübisic & Simbürger.....17

1.4.9 Critère de Fogué-Bahuaud.....17

1.4.10 Critère de Soonbok Lee.....18

1.4.11 Discussion.....19

**1.5 Critères locaux.....19**

1.5.1 Critère de Dang Van.....20

1.5.2 Critère de Stulen & Cummings.....23

1.5.3 Critère de Robert.....24

1.5.4 Critère de Mataké.....25

1.5.5 Critère de McDiarmid.....25

1.5.6 Critère de FINDLEY.....26

1.5.7 Critère de Munday & Mitchell.....26

1.5.8 Critère de Stanfield, Yokobori & Nakanishi.....27

1.5.9 Critère de Morel et Flacelière.....27

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.10 Critère de Carpinteri & al.....                               | 28        |
| 1.5.11 Critère de Galtier & Séguret.....                             | 34        |
| 1.5.12 Critère de Deperrois.....                                     | 35        |
| 1.5.13 Critère de Papadopoulos.....                                  | 36        |
| <b>1.6 Calcul de l'amplitude de contrainte de cisaillement.....</b>  | <b>37</b> |
| 1.6.1 Algorithme de Papadopoulos.....                                | 38        |
| 1.6.2 Algorithme de Dang Van.....                                    | 38        |
| 1.6.3 Algorithme de mini-max.....                                    | 39        |
| <b>1.6.4 Discussion.....</b>                                         | <b>40</b> |
| <b>1.7 Critère semi-local.....</b>                                   | <b>40</b> |
| 1.7.1 Le gradient relatif de contraintes.....                        | 41        |
| 1.7.2 Contrainte effective.....                                      | 42        |
| 1.7.3 Critère de l'approche volumétrique en fatigue multiaxiale..... | 42        |
| 1.7.4 Discussion.....                                                | 42        |
| <b>1.8 Critère énergétiques.....</b>                                 | <b>43</b> |
| 1.8.1 Critère d'Ellyin.....                                          | 43        |
| 1.8.2 Critère de Froustey et Lasserre.....                           | 45        |
| 1.8.3 Critère de Palin-Luc.....                                      | 47        |
| 1.8.4 Critère de Banvillet.....                                      | 50        |
| <b>1.9 Conclusion.....</b>                                           | <b>52</b> |
| <b>Chapitre II : Méthode Expérimentale et Analyse.....</b>           | <b></b>   |
| <b>2.1 Introduction.....</b>                                         | <b>54</b> |
| <b>2.2 Matériau.....</b>                                             | <b>56</b> |
| <b>2.3 Géométrie de l'éprouvette.....</b>                            | <b>57</b> |
| <b>2.4 Essai de Fatigue sous sollicitations simples.....</b>         | <b>57</b> |
| 2.4.1 Essai de Traction alternée.....                                | 57        |
| 2.4.2 Essai de flexion plane alternée symétrique .....               | 58        |
| 2.4.3 Essai de Torsion alternée.....                                 | 60        |
| <b>2.5 Essai de fatigue multiaxiale non-proportionnel.....</b>       | <b>61</b> |
| 2.5.1 Machine d'essai.....                                           | 61        |
| 2.5.2 Acquisition des données.....                                   | 61        |
| 2.5.3 Essai multiaxial non-proportionnel.....                        | 63        |

|                                                                                                                                                      |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5.4 Résultats expérimentaux en traction-torsion.....                                                                                               | 64        |
| 2.5.5 Etude Fractographique .....                                                                                                                    | 66        |
| 2.5.5.1 Aspect Macroscopique.....                                                                                                                    | 66        |
| 2.5.5.2 Aspect Microscopique.....                                                                                                                    | 70        |
| <b>2.6 Conclusion.....</b>                                                                                                                           | <b>73</b> |
| <b>Chapitre III : Applications des différents modèles et proposition d'un nouveau critère basé sur l'approche volumétrique en limite d'endurance</b> |           |
| <b>3.1 Introduction.....</b>                                                                                                                         | <b>74</b> |
| <b>3.2 Applications des différents modèles.....</b>                                                                                                  | <b>74</b> |
| <b>3.2.1 Critères locaux.....</b>                                                                                                                    | <b>74</b> |
| 3.2.1.1 Critère Dang Van.....                                                                                                                        | 74        |
| 3.2.1.2 Critère de Mataké.....                                                                                                                       | 78        |
| 3.2.1.3 Critère de Findley.....                                                                                                                      | 79        |
| 3.2.1.4 Critère de Carpinteri.....                                                                                                                   | 80        |
| <b>3.2.2 Critères globaux.....</b>                                                                                                                   | <b>83</b> |
| 3.2.1 Critère de Crossland.....                                                                                                                      | 83        |
| 3.2.2 Critère de Sines.....                                                                                                                          | 84        |
| <b>3.2.3 Discussion.....</b>                                                                                                                         | <b>85</b> |
| <b>3.3 Modélisation de la durée de vie par l'approche volumétrique.....</b>                                                                          | <b>86</b> |
| <b>3.3.1 Distribution des contraintes.....</b>                                                                                                       | <b>87</b> |
| <b>3.3.2 Gradient relatif de contrainte et contrainte effective.....</b>                                                                             | <b>88</b> |
| <b>3.3.3 Application de l'approche volumétrique pour un chargement multiaxial non-proportionnel.....</b>                                             | <b>89</b> |
| 3.3.3.1 Modélisation de l'éprouvette.....                                                                                                            | 89        |
| 3.3.3.2 Analyse de la distribution de contraintes à la surface utile.....                                                                            | 90        |
| 3.3.3.3 Modèle de Qylafku.....                                                                                                                       | 93        |
| 3.3.3.4 Proposition d'un nouveau modèle basé sur l'approche volumétrique.....                                                                        | 94        |
| <b>3.4 Conclusion.....</b>                                                                                                                           | <b>96</b> |
| <b>Chapitre IV : Etude de l'influence de la forme du signal de chargement sur la durée de vie en endurance</b>                                       |           |
| <b>4.1 Introduction.....</b>                                                                                                                         | <b>98</b> |

**4.2 Extension du modèle énergétique de Palin-Luc.....98**

**4.3 Essai de fatigue multiaxiale proportionnel.....112**

4.3.1 Essai multiaxial proportionnel.....112

4.3.2 Résultats expérimentaux.....113

**4.4 Analyse Fractographique.....115**

4.4.1 Aspect macroscopique.....115

4.4.2 Aspect microscopique.....119

**4.5 Prédiction des différents critères pour un chargement multiaxial proportionnel.....121**

**4.6 Comparaison des deux types de chargements (Proportionnel et non proportionnel).....123**

**4.7 Conclusion.....125**

**Conclusion Générale.....126**

**Bibliographie.....129**

**Annexes.....134**

## Nomenclature

- $\sigma_a$  : Amplitude de contrainte normale en traction,  
 $f_a$  : Amplitude de contrainte en flexion,  
 $\tau_a$  : Amplitude de contrainte de torsion,  
 $\sigma_{-1}$  : Amplitude de contrainte alternée de traction en limite d'endurance,  
 $f_{-1}$  : Amplitude de contrainte alternée de flexion en limite d'endurance,  
 $\tau_{-1}$  : Amplitude de contrainte alternée de torsion en limite d'endurance,  
 $\sigma_0$  : Contrainte répétée de traction en limite d'endurance,  
 $\sigma_m$  : Contrainte moyenne en traction,  
 $f_m$  : Contrainte moyenne en flexion,  
 $R_m$  : Résistance maximale monotone quasi-statique en traction,  
 $J_{2a}$  : Deuxième invariant de la partie alternée du tenseur déviateur des contraintes,  
 $J_{2m}$  : Deuxième invariant de la partie moyenne du tenseur déviateur des contraintes,  
 $\sigma_H$  : Contrainte hydrostatique,  
 $E_n$  : Indicateur d'endommagement sur un plan,  
 $\tau_{pr}$  : Contrainte de cisaillement de Tresca,  
 $\sigma_{\text{équi}}$  : Contrainte équivalente,  
 $dT^\circ$  : Degré de triaxialité,  
 $\tau_{\text{max, effe}}$  : Contrainte de cisaillement maximale effective,  
 $W_{1a}$  : Energie sphérique alternée,  
 $W_{2a}$  : Energie déviatrice alternée,  
 $W_{1m}$  : Energie sphérique moyenne,  
 $W_{2m}$  : Energie déviatrice moyenne,  
 $V_{2a}$  : Energie de distorsion de référence,  
 $W_a$  : Energie de déformation élastique totale,  
 $\varpi_a$  : Moyenne volumique de la quantité d'énergie de déformation élastique totale,  
 $F(dT(\text{soll}), \beta)$  : Fonction du degré de triaxialité calculée pour une sollicitation donnée,

$F(dT(uniax), \beta)$  : Fonction du degré de triaxialité calculée pour une sollicitation uniaxiale,

$\beta$  : Facteur de sensibilité du matériau à la triaxialité,

$k$  : Rapport de contrainte de  $\sigma_{ij}$  par  $\tau_{ij}$ ,

$f_{end}$  : Facteur multiplicateur de charge en endurance.

## Introduction Générale

La rupture, quelle qu'en soit le mécanisme, dépend de nombreux facteurs, la sollicitation, la géométrie, la vitesse et la répartition des chargements, l'homogénéité et le mode d'élaboration de la matière, la température, l'environnement etc.. Statistiquement la plupart des ruptures survenues en service résultent soit d'un processus de fissuration progressive sous sollicitations cycliques appelées "rupture de fatigue", soit des déchirures semi-fragiles, rupture brutale se propageant sans déformation plastique macroscopique, mais avec une déformation plastique microscopique. Cependant, la rupture des structures en fonctionnement normal est souvent due aux phénomènes de fatigue. Ces derniers conduisent très souvent à une rupture brutale et peuvent provoquer des dégâts matériels voire humains considérables. Notre sujet sera une contribution à l'étude des roues de trains sollicitées par un chargement multiaxial non-proportionnel. Pour remédier à ce problème, des études ont été menées par des chercheurs donnant naissance à plusieurs critères qui malgré leurs grands nombres, n'ont pas permis de répondre aux différents problèmes posés en fatigue. Les résultats d'essais sont généralement obtenus sur des éprouvettes sollicitées dans des conditions simples, alors que les chargements en service sont souvent complexes.

L'objectif essentiel de cette étude, réalisée en partie en collaboration avec le bureau d'Agence d'essai Ferroviaire [63], est de caractériser le comportement en fatigue à grande durée de vie d'une roue ferroviaire sous un chargement multiaxial non-proportionnel et de déterminer parmi les méthodes de calcul existantes celles qui donnent les meilleures prévisions.

Le chapitre II regroupe les essais sur des éprouvettes extraites d'une même roue de train, sous un chargement multiaxial non-proportionnel subi par une roue ferroviaire.

Une première analyse consiste à comparer les résultats expérimentaux aux prévisions déduites par les différentes approches théoriques. La grande différence, constatée entre ces modèles, nous a conduit à proposer un modèle semi-local, basé sur l'approche volumétrique qui donne de meilleurs résultats (chapitre III).

Dans le but de vérifier l'influence de la forme du signal sur la durée de vie d'un matériau à grand nombre de cycles, le chapitre IV comprend une étude comparative entre deux signaux : un signal non-proportionnel et un signal proportionnel choisis minutieusement en se basant sur le modèle énergétique de Palin-Luc [51].

Une analyse macroscopique des faciès de rupture en fatigue, des éprouvettes cylindriques en acier, montre le lien entre la dépendance du caractère des surfaces de rupture de fatigue, la nature et l'intensité des sollicitations qui leur donnent naissance.

Une synthèse des diverses discussions de cette étude est présentée à la fin de ce document. Les perspectives, ouvertes à la fois vers l'expérimentation et vers le développement du modèle, sont proposées au chapitre III.

## Chapitre I : Etude Bibliographique

### 1.1 Introduction

La rupture par fatigue est un domaine complexe encore mal maîtrisé. La constatation faite par les industriels sur les différents phénomènes de fatigue parus depuis le 19<sup>e</sup> siècle, tels la rupture des essieux des premières machines à vapeur et la catastrophe du pétrolier Schenectady en construction soudé qui s'est brisé en deux parties ainsi que l'endommagement de plus de deux cent navires de guerre dans la même période..., incitaient les chercheurs à étudier ce phénomène et à proposer des modèles capables de prévoir la durée de vie de ces structures.

Le rôle des modèles de fatigue est de situer tout cycle de contrainte multiaxial par rapport à la limite d'endurance du matériau. La notion généralement réservée à la limite d'endurance est le niveau de contrainte conduisant à l'amorçage d'une fissure observable à l'échelle macroscopique, après un nombre de cycles donné généralement grand (souvent  $10^7$  cycles), appelé seuil de l'endurance illimitée.

### 1.2 Amorçage d'une fissure de fatigue

L'amorçage peut avoir plusieurs interprétations, selon qu'on s'intéresse à l'évolution microstructurale du matériau ou à l'apparition d'une microfissure. L'importance relative des stades d'amorçage et de propagation dépend de plusieurs paramètres tels : l'amplitude de la sollicitation, la géométrie de l'éprouvette, la nature du matériau, la température et l'environnement. Ces différents facteurs peuvent interagir, de sorte que le nombre de paramètres possibles est élevé. Dans le contexte de la fatigue à grand nombre de cycles, la phase d'amorçage est très importante, elle représente souvent un pourcentage élevé du nombre de cycles à la rupture. Au cours du phénomène de fatigue, une évolution physique et une évolution structurale se révèlent.

#### 1.2.1 Evolution physique

Plusieurs propriétés physiques des matériaux évoluent en cours de fatigue : la résistance électrique, la perméabilité magnétique, l'hystérésis mécanique, la capacité d'amortissement, le module d'élasticité, la température et le coefficient de dilatation du matériau. Les évolutions de la résistance électrique et de la température au cours d'un essai de flexion rotative sur une éprouvette en acier doux (fig. 1.1) [5], montrent qu'au dessus de la contrainte d'endurance, il y a variation rapide de ces grandeurs physiques qui se poursuit jusqu'à rupture de l'éprouvette.

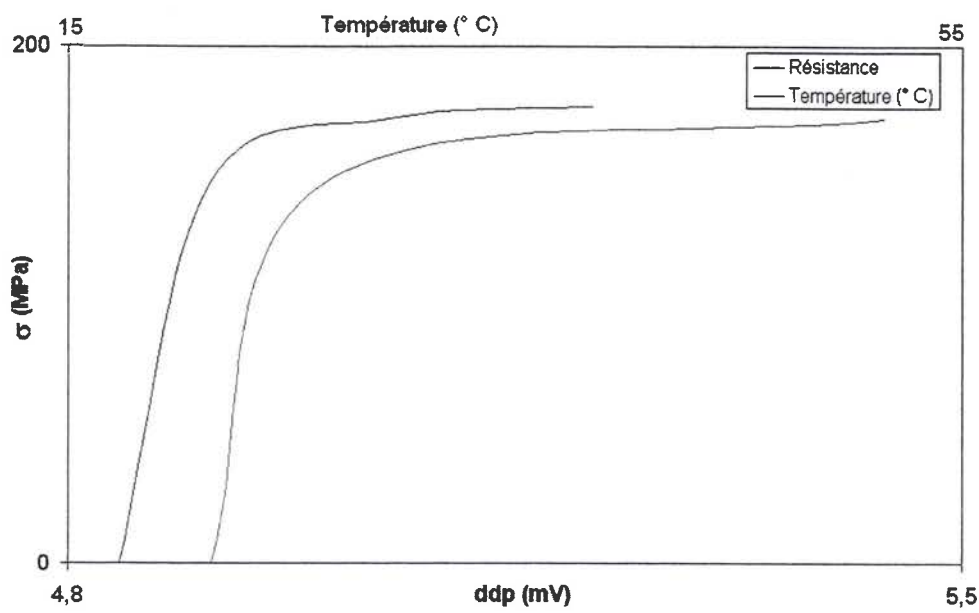


Figure 1. 1 : Variation de la résistance électrique [5].

1.2.2 Evolution structurale

A l’aide d’un microscope optique et en fonction du matériau ainsi que le niveau de contraintes ou de déformations imposés, on observe par fois dès les premiers cycles, à la surface d’une éprouvette sollicitée en fatigue (fig. 1.2) :

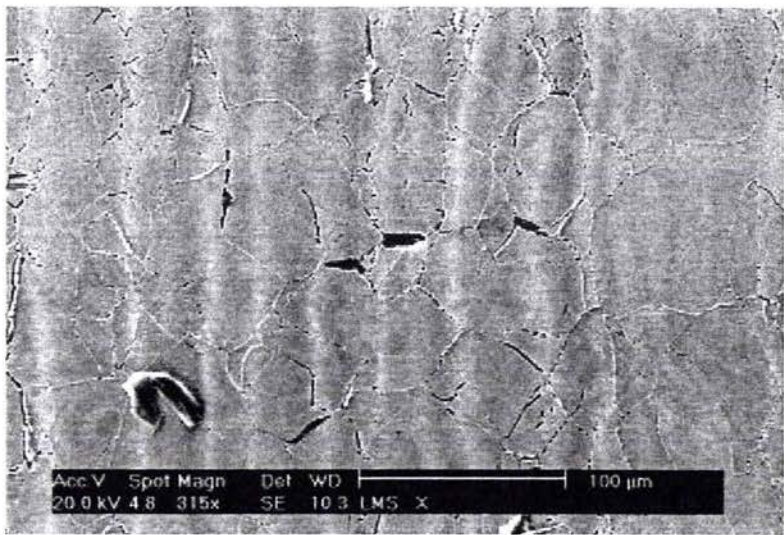


Figure 1.2 : Apparition des fissures à la surface d’une éprouvette en acier doux sollicitée en fatigue [64].

La formation des bandes de glissement par fatigue est observée. Après un grand nombre de cycles, ces bandes deviennent persistantes et ne disparaissent plus par simple polissage ou même après un recuit.

Les bandes observées, en début d’essai de fatigue d’une éprouvette, peuvent être éradiquées par un recuit ou par un polissage électrolytique. La durée de vie augmente dans ce cas, comparée à une éprouvette non traitée. Lorsque ces bandes persistent après polissage ou

recuit, l'éprouvette a subi un endommagement irréversible par fatigue et sa durée de vie ne peut plus augmenter.

### 1.2.3 Mécanismes d'amorçage

L'amorçage des fissures se produit le plus souvent à la surface de l'éprouvette et rarement à cœur. Ceci est dû aux dislocations qui sont plus mobiles en surface qu'en cœur et que les contraintes et les déformations sont souvent maximales en surfaces dans le cas de la flexion et de la torsion plus le problème de l'état de surface. En plus la surface représente un site préférentiel pour la génération des dislocations et à l'agressivité de l'environnement. Dans certains matériaux, les bandes de glissements amènent à l'apparition de microfissures par le mécanisme des intrusions extrusions. En effet, l'atmosphère réagit avec les surfaces fraîches des plans de glissement, et empêche la réversibilité de leur mouvement de va-et-vient, d'où un endommagement du matériau. Les inclusions en surfaces peuvent être aussi des sites préférentiels pour l'amorçage des fissures de fatigue (fig. 1.3).

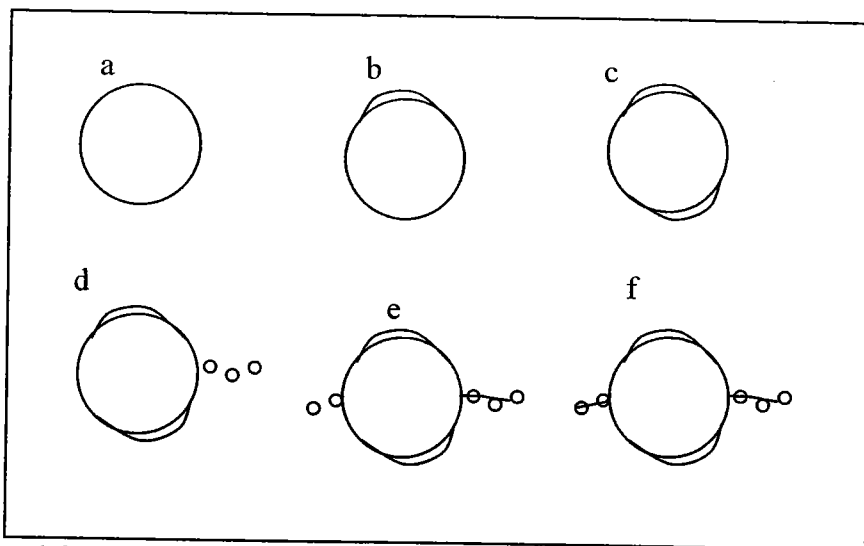


Figure 1.3 : Mécanisme d'amorçage des fissures autour d'une inclusion [64].

Le mécanisme d'amorçage autour d'une inclusion sphérique se déroule en six étapes :

- ❖ a - état initial,
- ❖ b- décohésion à un pôle,
- ❖ c- élargissement de cette décohésion et décohésion à l'autre côté,
- ❖ d- accentuation des décohésions accompagnée de la germination de défauts ponctuels dans la matrice sur le plan équatorial,
- ❖ e- croissance et coalescence de ces défauts pour former une microfissure,
- ❖ f- propagation de cette microfissure et germination de défauts semblables de l'autre côté de l'inclusion.

Ce phénomène de rupture par fatigue intervient de façon générale dans tous les mécanismes soumis à des efforts répétés.

### 1.3 Critères de fatigue

Les critères sont tellement nombreux qu'on ne peut tous les citer, mais on peut les classer dans quatre grandes familles :

1. Critères globaux,
2. Critères locaux,
3. Critères semi-locaux,
4. Critères énergétiques.

Ces critères de fatigue utilisent différentes grandeurs pour caractériser l'état de chargement, qui sont généralement liées au tenseur de contraintes et/ ou de déformations. Pour plus de commodité, ces grandeurs seront définies comme suit :

Soit  $\underline{\underline{\sigma}}(t, M)$  le tenseur des contraintes en un point M de la matière (fig.1.4). Le vecteur contrainte agissant sur une facette de normale  $\vec{n}$  est :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(t, M) \cdot \vec{n}$ . Ce vecteur possède deux composantes :

- vecteur normal au plan  $\vec{n}$  :  $\vec{\sigma}_n(t) = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$
- vecteur de cisaillement dans le plan défini par  $\vec{n}$  :  $\vec{\tau}(t) = \vec{T}(M, \vec{n}) - \vec{\sigma}_n(t)$

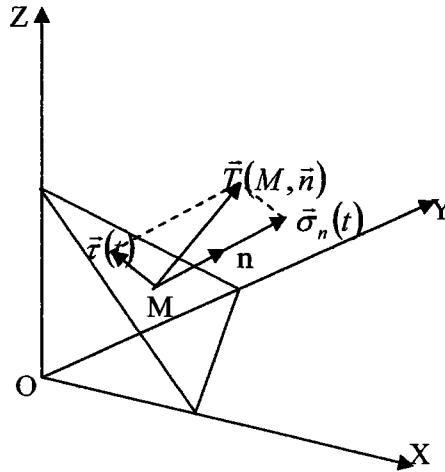


Figure 1.4 : Contraintes agissant sur un plan de la matière

On définit les valeurs moyennes et alternées des contraintes et l'amplitude de cisaillement par :

- La composante normale moyenne sur un cycle de période T :

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_n(t) \cdot dt$$

- La composante normale alternée sur un cycle de période T :

$$\sigma_{na} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \max_t \sigma_n(t) - \min_t \sigma_n(t) \right]$$

- L'amplitude de la cisssion :

$$\tau_a = \frac{1}{2} \cdot \max_{t_0} \left[ \max_t \|\bar{\tau}(t) - \bar{\tau}(t_0)\| \right] \quad \text{avec } t_0 : \text{temps initial.}$$

On introduit également des invariants liés au tenseur des contraintes :

Le premier invariant du tenseur des contraintes :  $I_1(t) = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}(t))$  égale à 3 fois la contrainte hydrostatique  $P(t)$ .

Le deuxième invariant du tenseur déviateur de contraintes :  $J_2 = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{S}}(t) : \underline{\underline{S}}(t)$  et  $S_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma_H(t) \cdot \delta_{ij}$

### 1.3.1 Procédure d'utilisation d'un critère

Pour le dimensionnement des pièces soumises à des sollicitations en fatigue, on détermine le domaine de sécurité délimité par un seuil dont le dépassement provoque la fissuration après N cycles. La plupart des critères sont représentés dans un plan en fonction de deux paramètres généralement homogènes à des contraintes.

En pratique :

- Analytiquement, il suffit de déterminer une contrainte équivalente du critère et de la comparer à un seuil critique.
- Schématiquement, il faut vérifier que le point ou le trajet se trouve à l'intérieur du domaine de sécurité (fig 1.5).

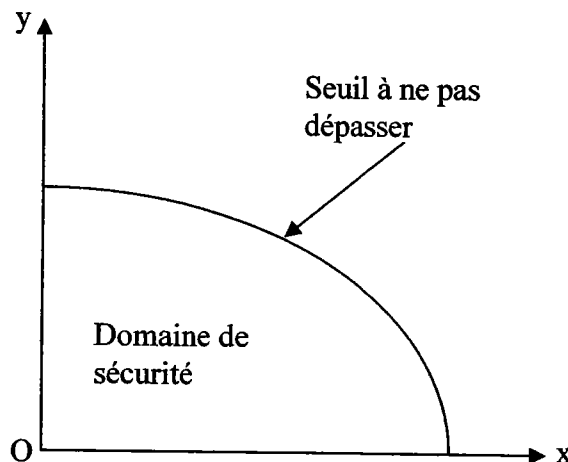


Figure 1.5 : Représentation générale d'un critère en fonction de ses variables.

## 1.4 Critères globaux

Ces critères sont basés sur une formulation théorique ou empirique. Parfois, ils prennent en compte les indicateurs d'endommagements relatifs à toutes les facettes passant par le point où est effectué le calcul. Ils s'expriment souvent en fonction des invariants  $J_2$  et  $I_1$  du tenseur des contraintes. Parmi les critères globaux, on peut citer :

1. Marin
2. Kinasushvili
3. Kakuno et Kawada
4. Deitman et Isseler
5. Sines
6. Crossland
7. Gough et Pollard
8. Grubisic et Simbürger
9. Fogué-Bahuaud
10. Soon book Lee

### 1.4.1 Critère de Marin

Marin [1] propose une équation plus générale de tout les matériaux, qui tient compte de la contrainte normale moyenne  $\sigma_m$  :

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^m + \left(\frac{k \cdot \sigma_m}{R_m}\right)^n < 1 \quad (1)$$

Avec  $\sigma_a$  : La contrainte normale alternée,

$R_m$  : La résistance à la rupture en traction monotone,

$\sigma_{-1}$  : La contrainte normale alternée en limite d'endurance.

$k, m, n$  : Les constantes du matériau.

Marin [2] a proposé un autre critère en utilisant la contrainte équivalente au sens de Von Mises. Ce critère s'écrit :

$$\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{J_{2a}}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{J_{2m}}}{R_m}\right)^2 < 1 \quad (2)$$

avec

$J_{2a}$  : Le deuxième invariant de la partie alternée du tenseur déviateur des contraintes, (annexe)

$J_{2m}$  : Le deuxième invariant de la partie moyenne du tenseur déviateur des contraintes (annexe)

### 1.4.2 Critère de Kinasushvili

L'auteur [3] utilise la contrainte équivalente au sens de Von Mises. Le critère s'écrit :

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{J_{2a}}}{\alpha} + \beta \cdot \sqrt{J_{2m}} < 1 \quad (3)$$

$\alpha, \beta$  : sont des paramètres du matériau.

$$\text{Avec } \alpha = \sigma_{-1} \text{ et } \beta = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_{-1} \cdot \sigma_0}$$

où  $\sigma_0$  : Amplitude de la contrainte répétée en limite d'endurance,

### 1.4.3 Critère de Kakuno & Kawada

Ces deux auteurs [4] ont introduit les pressions hydrostatiques (alternée et moyenne) et le deuxième invariant du déviateur des contraintes dans leur expression.

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \cdot P_m + \beta \cdot P_a < \gamma \quad (4)$$

$$\text{Avec } \alpha = 3 \cdot \tau_{-1} \cdot \left( \frac{2}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_{-1}} \right), \quad \beta = \frac{3 \cdot \tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{3}, \quad \gamma = \tau_{-1} \text{ et } P_m = -\frac{1}{3} \cdot \text{trace}((\sigma_{ij})_m)$$

$\tau_{-1}$  : La contrainte de cisaillement alternée en endurance,

$P_m$  : La pression hydrostatique moyenne,

$J_{2a}$  : Le deuxième invariant de la partie alternée du tenseur déviateur des contraintes.

### 1.4.4 Critère de Deitman & Isseler

En s'inspirant des travaux de Gerber, les auteurs [6] ont proposé ce critère en 1974. Leur expression est la suivante :

$$\left( \frac{3 \cdot \sqrt{J_{2a}}}{f_{-1}} \right)^2 + \frac{3 \cdot P_m}{R_m} < 1 \quad (5)$$

Avec  $f_{-1}$  : Contrainte de flexion alternée en endurance,

$R_m$  : Résistance maximale en traction statique,

$J_{2a}$  : Deuxième invariant de la partie alternée du tenseur déviateur des contraintes.

### 1.4.5 Critère de Sines

Sines [7] a étudié l'influence des valeurs moyennes de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale sur la durée de vie, en utilisant les résultats des essais de flexion et torsion

de Gough et al [8] et ses propres essais biaxiaux. Il a défini une contrainte équivalente  $\sigma_{eq} = \sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H,m}$ . Le critère s'écrit  $\sigma_{eq} < \beta$  où  $\beta$  est une valeur critique.

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H,m} < \beta \quad (6)$$

avec  $\beta = \tau_{-1}$ ,  $\alpha = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  et  $\sigma_{H,m}$  : la contrainte hydrostatique moyenne.

Ce critère est défini pour  $\alpha > 0$ , soit  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . La valeur  $\alpha$  prise positive, est expliquée par

la pente de la droite ( $y = ax + b$  dont la pente est négative  $a < 0$ , et l'équation s'écrit de la forme  $y - ax = b$  comparée à la notre  $\alpha = -a > 0$ ).

### 1.4.6 Critère de Crossland

Ce critère [9] diffère du critère de Sines [7] par le fait qu'il tient compte de la contrainte hydrostatique maximale au lieu de la contrainte hydrostatique moyenne. L'auteur propose une contrainte équivalente  $\sigma_{eq} = \sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H,max}$ , et le critère s'écrit  $\sigma_{eq} < \beta$  où  $\beta$  est une valeur critique.

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \times \sigma_{H,max} < \beta \quad (7)$$

$\beta = \tau_{-1}$ ,  $\alpha = 3 \cdot \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  et  $\sigma_{H,max}$  : la contrainte hydrostatique maximale.

Avec  $\alpha > 0 \implies \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### 1.4.7 Critère de Gough & Pollard

A partir d'essais de flexion-torsion alternée combinée en phase, les auteurs [10] ont proposé les critères suivants :

✓ Pour les métaux ductiles :

$$\left( \frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 < 1 \quad (8)$$

Avec  $f_a, \tau_a$  les amplitudes de contraintes en flexion et en torsion,

$f_{-1}, \tau_{-1}$  les limites de fatigue en flexion et en torsion alternées symétriques.

Cette relation est représentée par un quart d'ellipse dans le plan  $(\sigma_a, \tau_a)$ .

✓ Pour les métaux fragiles :

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sigma_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(2 - \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_a}{f_{-1}}\right) < 1 \quad (9)$$

Cette formulation est l'équation d'un arc d'ellipse dans le plan  $(\sigma_a, \tau_a)$ .

Ce critère est le fruit des résultats expérimentaux en flexion-torsion, et ne s'applique qu'aux configurations qui ont servi à l'établir. Son efficacité n'a pas été prouvée pour des cas de chargements différents de ceux correspondant aux essais de référence.

#### 1.4.8 Critère de Grübisch & Simbürger

Les auteurs [11] se sont servis de l'amplitude de la contrainte de cisaillement sur le plan normal pour déterminer l'indicateur d'endommagement  $E_n$ .

$$E_n = \max_n \left( \frac{\tau_{na}}{\sigma_A} \right)_{R_i} \quad (10)$$

où :

$\tau_{na}$  est l'amplitude du cisaillement sur le plan de normale  $\vec{n}$ .

$\sigma_A$  est l'amplitude de la contrainte de traction-compression calculée sur le diagramme de Haigh établi pour la limite d'endurance. Afin d'introduire l'effet de la valeur de la contrainte de cisaillement moyenne dans son critère, le rapport  $R$  est défini par  $R = (1 + A)/(1 - A)$ , avec  $A = \tau_{nm} / \tau_{na}$ . Ce critère peut être interprété comme une limitation de la moyenne quadratique des cisssions s'exerçant sur toutes les facettes d'une sphère de rayon unité entourant le point considéré :

$$E = \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S E_n^2 dS} < 1 \quad (11)$$

Avec  $S$  : surface de la sphère de rayon unité.

A limite de fatigue, la moyenne quadratique des endommagements est égale à l'unité, ce qui se traduit par  $E=1$ .

#### 1.4.9 Critère de Fogué-Bahuaud

Ce critère est fondé sur le travail de Simbürger [12]. Les auteurs [13] ont défini leur indicateur d'endommagement relatif à un plan de normale  $\vec{n}$  par :

$$E_n = \frac{\alpha \cdot \tau_a + \beta \cdot \sigma_{na} + \gamma \cdot \sigma_{nm}}{\sigma_{-1}} \quad (12)$$

où  $\tau_a$ ,  $\sigma_{na}$  et  $\sigma_{nm}$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte de cisaillement, l'amplitude de la contrainte normale alternée et l'amplitude de la contrainte moyenne sur un plan de

normale  $\bar{n}$ . Les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont identifiés à partir de trois essais simples, leur calcul n'est cependant pas aisé, qui peuvent être des limites d'endurances :

- ✓ La traction compression alternée symétrique  $\sigma_{-1}$ ,
- ✓ La traction répétée  $\sigma_0$ ,
- ✓ La torsion alternée symétrique  $\tau_{-1}$ .

Les auteurs ont intégré la quantité d'endommagement élémentaire  $E_n$  sur toutes les facettes d'une sphère de rayon unité, pour trouver la moyenne quadratique  $E$ , afin d'exprimer leur critère :

$$E = \sqrt{\frac{1}{S} \cdot \iint_S E_n^2 \cdot dS} < 1 \quad (13)$$

avec  $S$  est la surface de la sphère de rayon unité entourant le point considéré.

Fogue-Bahuaud postulent qu'à la limite de fatigue, la moyenne quadratique des endommagements est égale à l'unité. Ce qui se traduit par  $E=1$ .

Le critère de Fogue-Bahuaud s'applique à une gamme de matériaux dont le rapport des

limites de fatigue est :  $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} < 1$ .

#### 1.4.10 Critère de Soon-book Lee

Ce critère est une extension du critère de Gough et Pollard [10] aux cas de chargement de flexion-torsion, hors phase, sans chargement moyen. Il est basé sur le calcul d'une contrainte équivalente  $\sigma_{\text{équi}}$  telle que :  $\sigma_{\text{équi}} = f(\sigma, \tau, \phi)$ , avec  $\sigma$  et  $\tau$  respectivement les contraintes de flexion et de torsion et  $\phi$  le déphasage. L'auteur [14] généralise l'équation de l'ellipse proposée par Gough et Pollard aux chargements complexes de la manière suivante :

$$\left( \frac{\sigma_a}{f_{-1}} \right)^\alpha + \left( \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^\alpha < u^\alpha \quad (14)$$

$\alpha$  : un paramètre qui dépend du déphasage du chargement et du matériau, son détermination nécessite un essai de référence en flexion - torsion déphasé.

$u$  : une variable sans dimension.

La contrainte équivalente défini par Lee [14] est :

$$\sigma_{\text{équi}} = f_{-1} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\tau_a}{\sigma_a} \cdot \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (15)$$

Pour les matériaux ductiles, l'auteur propose  $\alpha = 2 \cdot (1 + \beta \cdot \sin \phi)$ ,  $\beta$  est une constante du matériau. Pour  $\phi = 0$ , on retrouve le critère de Gough et Pollard [10].

#### 1.4.11 Discussion

Les critères globaux sont simples à utiliser dans le cas d'un chargement proportionnel contrairement au cas de chargement non-proportionnel dont le calcul est plus long. Pour ces critères la sensibilité du déphasage dépend du nombre de cycles contrairement conclusion faite par [43]. L'expérience a prouvé l'influence du déphasage sur la tenue en fatigue du matériau. La majorité des critères sont basés sur deux paramètres essentiels, deuxième invariant de tenseur déviateur et pression hydrostatique. Les équations de ces critères sont caractérisées par des évolutions linéaires et non linéaires.

### 1.5 Critères locaux

Les observations expérimentales montrent que la rupture des éprouvettes se fait souvent suivant certaines directions privilégiées. L'endommagement du matériau par fatigue, en un point de la structure, est imposé par le plan matériel le plus sollicité passant par ce point.

En effet, les sollicitations qui entraînent l'amorçage d'une fissure en fatigue à grand nombre de cycles se font pour la plus part des matériaux dans le domaine élastique. Cependant, il y a apparition de plasticité localisée dans certains grains orientés préférentiellement. Une forme très courante de cette plastification dans les matériaux métalliques est l'apparition de bandes de glissement, résultats de l'émergence et de l'arrangement de dislocations. Le glissement de plans cristallographiques les uns par rapport aux autres correspond à du cisaillement inter-atomique. Ainsi, la déformation plastique locale est directement liée à une composante de cisaillement du chargement. Une traction favorisera ce mécanisme alors qu'une compression le freinera. L'étude de 27 matériaux métalliques différents par Sines [17] lui permet de conclure à la non influence de la cisaillement maximale sur l'amplitude de torsion, à condition que celle-ci ne dépasse pas 80 % de la contrainte seuil de plasticité en torsion. Ces différentes composantes des contraintes normales et tangentiels, agissant sur un plan, sont en général utilisées pour traduire le caractère plus ou moins sévère du cycle des contraintes sur le plan en question.

Parmi les critères locaux, on peut citer :

1. Critère de Dang Van
2. Critère de Stulen et Cummings
3. Critère de Robert
4. Critère de Mataké

5. Critère de McDiarmid
6. Critère de Findley
7. Critère de Munday et Mitchell
8. Critère de Stanfield, Yokobori et Nakanishi
9. Critère de Morel et Flacelière
10. Critère de Carpinteri et al.
11. Critère de Galtier et Séguret
12. Critère de Deperrois
13. Critère de Papadopoulos

### 1.5.1 Critère de Dang Van

L'auteur affirme que le mécanisme de base pour l'amorçage des fissures est le cisaillement des plans cristallographiques les plus défavorablement orientés. La contrainte de cisaillement locale agissant sur ces plans est un paramètre important à considérer. L'influence de la pression hydrostatique est prépondérante dans le phénomène d'ouverture des fissures, une traction favorise ce mécanisme, une compression hydrostatique le rend plus difficile. Dang Van [16,18] a développé une approche microscopique-macroscopique pour calculer la contrainte dans les grains en relation avec la contrainte connue à l'échelle macroscopique. A partir de ce concept, l'auteur a proposé son critère, souvent utilisé dans l'industrie automobile française (PSA) et intégré dans les logiciels de conception.

Il s'agit d'un critère d'amorçage au niveau microscopique dans l'état stabilisé du cristal où la notion de cycle de fatigue caractérisée par les grandeurs macroscopiques est remplacée par celle de trajet de charge local à chaque instant du cycle. D'où la nécessité de déterminer les grandeurs locales au niveau des grains.

Le passage des grandeurs macroscopiques aux grandeurs microscopiques permet d'écrire :

$$\sigma_{ij}(y,t) = A_{ijkl}(x,y) \cdot \Sigma_{kl}(x,t) + \rho_{ij}(y,t) \quad (16)$$

avec  $A_{ijkl}(x,y)$  tenseur d'ordre 4 de localisation des contraintes,

$\rho_{ij}(y,t)$  champ des contraintes résiduelles locales.

Il suppose que  $\sigma_{ij}$  tend vers un état adapté pour des contraintes faibles (voisin de la limite d'endurance) et qu'il existe un champ d'autocontraintes  $\rho_{ij}^*(y)$ , on a :

$$\sigma_{ij}(y,t) = A_{ijkl}(x,y) \cdot \Sigma_{kl}(x,t) + \rho_{ij}^*(y) \quad (17)$$

C'est pour cet état dit stabilisé que le critère d'endurance est postulé :

L'amorçage de microfissures se produit dans les grains défavorablement orientés si à un instant du cycle de chargement on a la fonction  $F$  qui viole l'inégalité :

$$F[\sigma_{ij}(y,t)] \geq 0 \quad (18)$$

La microfissure se produit dans des bandes de glissement intragranulaires sous l'effet d'un cisaillement local  $\tau_{l,n}$  et que ces fissures tendent à s'ouvrir ou à se fermer selon que la pression hydrostatique  $p(t)$  est positive ou négative.

Dang Van exprime cette fonction  $F = \tau_{l,n}(t) + \alpha.p(t) - \beta$  en fonction de ces deux paramètres, et pour qu'il n'y aura pas de fissures il faut que :

$$\tau_{l,n}(t) + \alpha.p(t) < \beta \quad (19)$$

Pour estimer les contraintes  $\tau_{l,n}$  et  $p(t)$  agissant sur les grains défavorablement orientés, des hypothèses ont été pris [55]:

H1- Ces grains sont symbolisés par des inclusions élasto - plastiques plongées dans une matrice élastique.

H2- La matrice impose sa déformation (purement élastique)  $E_{ij}$  aux inclusions qui subissent une déformation plastique pour s'adapter au chargement.

H3- La matrice et l'inclusion ont les mêmes caractéristiques élastiques.

H4- L'inclusion obéit à une règle d'écrouissage isotrope et cinématique.

H5- Un seul système de glissement est actif.

Supposons que  $\varepsilon_{ij}$  et  $E_{ij}$  sont respectivement les tenseurs de déformation aux échelles microscopique et macroscopique et posant que les déformations macroscopiques et microscopiques sont identiques pour un point donné, on a :

$$\varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e = E_{ij}^p + E_{ij}^e \quad (20)$$

où  $\varepsilon_{ij}^p$  et  $E_{ij}^p$  désignent respectivement les déformations plastiques à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique ;

$\varepsilon_{ij}^e$  et  $E_{ij}^e$  désignent respectivement les déformations élastique à ces mêmes échelles;

$\sigma_{ij}$  et  $\Sigma_{ij}$  désignent respectivement les contraintes à ces mêmes échelles.

D'après les différents hypothèses, on a :

$$E_{ij} = E_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e \quad (21)$$

Lorsqu'on passe aux contraintes à l'aide des relations de Lamé, et en faisant l'hypothèse d'incompressibilité plastique, l'équation (21) devient :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij}^p \quad (22)$$

L'égalité des deux équations (17) et (22) permet d'identifier les tenseurs  $A_{ijkl}$  et  $\rho_{ij}$  :

$A_{ijkl}$  = tenseur unité.

$$\rho_{ij} = -2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij}^p$$

Il apparaît dès lors que l'évaluation des contraintes locales passe par celle du tenseur des contraintes résiduelles ou des déformations plastiques du cristal.

D'après H5, les déformations plastiques  $\varepsilon_{ij}^p$  sont reliées au glissement plastique  $\gamma^p$  dans le grain par la relation (23) et la cisssion  $\tau_{ij}$  sur le plan de glissement obéit à la relation (24) :

$$\varepsilon_{ij}^p = \alpha_{ij} \cdot \gamma^p \quad (23)$$

$$\tau_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \sigma_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \Sigma_{ij} - \mu \cdot \gamma^p \quad (24)$$

avec  $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1/2$  et  $\alpha_{ij} = (n_i \cdot m_j + n_j \cdot m_i) / 2$

$\alpha_{ij}$  est la matrice d'orientation du grain par rapport à un repère fixe ;

$\vec{n}$  est la normale au plan de glissement ;

$\vec{m}$  est la direction du glissement .

La principale difficulté réside dans le fait que la matrice d'orientation  $\alpha_{ij}$  n'est pas connue, les directions principales du tenseur  $\Sigma_{ij}(t)$  n'étant pas fixe (cas des chargements complexes).

Dang Van choisit alors un critère de plasticité de la forme :  $\|\tau_{l,n}\| - \tau_y \leq 0$ , quelle que soit

l'orientation  $\vec{n}$ ,  $\tau_y$  étant la limite d'élasticité du cristal en cisaillement. La représentation de

ce critère pour l'état adapté du cristal est, dans un plan de normal  $\vec{n}$ , un cercle centré en O. Le rayon de ce cercle est égal à celui du plus petit cercle circonscrit à la courbe fermée décrite par le vecteur cisaillement  $\tau_n(t)$  en un point M du plan (fig. 1.6).

La cisssion microscopique s'écrit alors :

$$\underline{\tau}_{l,n}(t) = \underline{\tau}_n(t) + \underline{OM} \quad (25)$$

$\underline{OM}$  représente le cisaillement résiduel à l'état stabilisé.

Le critère de fatigue s'applique alors sous la forme :

$$\max_{\vec{n}} \max_t \left\{ \|\tau_{l,n}\| + \alpha \cdot p(t) \right\} < \beta \quad (26)$$

$$\text{avec } \beta = \tau_{-1} \quad \text{et} \quad \alpha = 3 \cdot \left[ \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right]$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes définies à partir des limites d'endurance  $\tau_{-1}$  (torsion alternée) et  $\sigma_{-1}$  (traction alternée). La condition d'utilisation de critère est que  $\alpha > 0$ , soit :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$ .

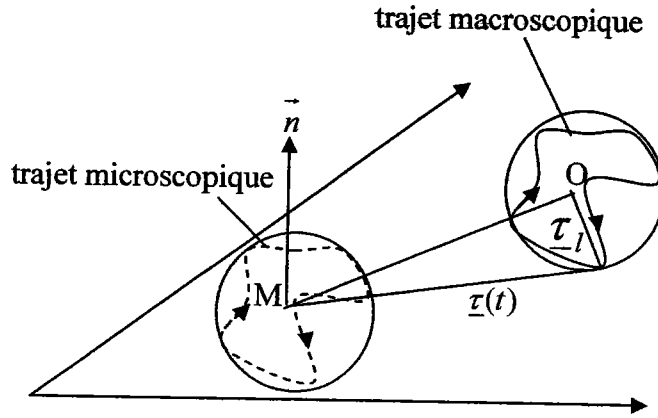


Figure 1.6 : Passage de la cission macroscopique à la cission microscopique.

### 1.5.2 Critère de Stulen & Cummings

Les auteurs [19] ont proposé ce critère en 1954. Utilisant les résultats de Smith [20], Ils ont considéré que la limite d'endurance d'un matériau dépend linéairement d'une contrainte de cisaillement critique de fatigue (fig.1.7). Cette contrainte de cisaillement critique ( $\tau_c$ ) est liée linéairement à la valeur maximale de la contrainte normale sur le plan critique ( $\sigma_{n\max}$ ).

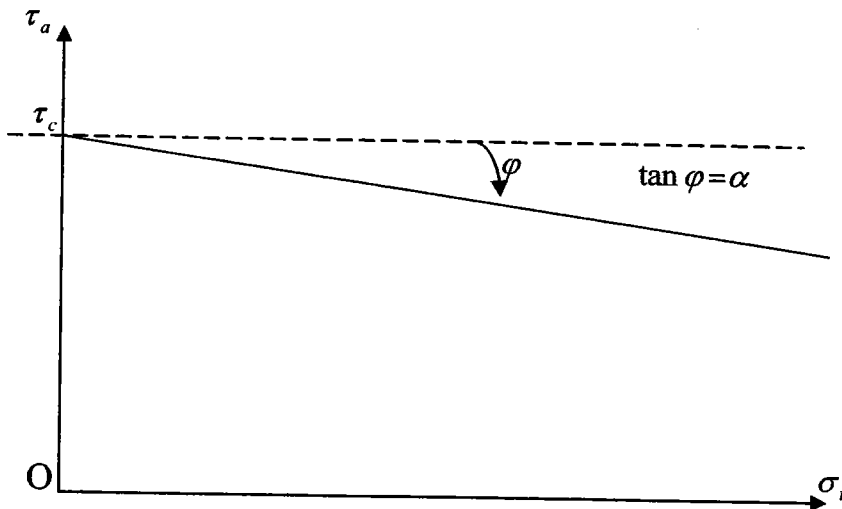


Figure 1.7 : représentation du critère de Stulen [19] dans l'espace  $(\tau_c, \sigma_n)$ .

Le plan critique est déterminé par la relation suivante :

$$\max_n (\tau_a + \alpha \cdot \sigma_{n\max}) < \beta \quad (27)$$

Avec  $\beta = \tau_{-1}$  et  $\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1$

La condition d'utilisation du critère est  $\alpha > 0$ , soit :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$ .

### 1.5.3 Critère de Robert

L'auteur [21] associe la contrainte de cisaillement sur une facette à la contrainte normale correspondante, et non à la contrainte normale octaédrique. Cependant, les contraintes normales moyennes et alternées ne jouent pas le même rôle du point de vue de la fatigue. Le diagramme de Haigh (fig.1.8), en traction-compression, montre cette influence.

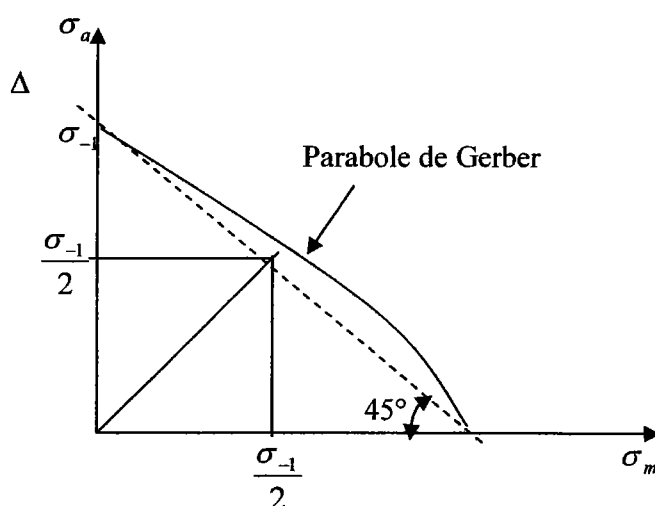


Figure 1.8 : Diagramme de Haigh en traction-compression selon Gerber

En effet, si les parties moyennes et alternées des contraintes normales avaient la même influence sur la tenue en fatigue, le diagramme de Haigh serait représenté par une droite  $\Delta$  de pente négative, inclinée à 45° et passant par  $\sigma_{-1}$ .

Robert [22] a tenu compte dans son critère de l'influence de la contrainte normale alternée ( $\sigma_{na}$ ) et de la contrainte moyenne normale ( $\sigma_{nm}$ ). Il a associé la contrainte de cisaillement ( $\tau_a$ ) sur une facette aux contraintes normales alternées et moyennes par une combinaison linéaire. Pour le calcul de l'indicateur d'endommagement élémentaire  $E_n(t)$ , il choisit l'évolution de la contrainte tangentielle sur une facette donnée de type Tresca. Cet indicateur d'endommagement est donnée par :

$$E_n(t) = \|\tau_a(t)\| + \alpha \cdot \sigma_{na}(t) + \beta \cdot \sigma_{nm}(t) \quad (28)$$

Son critère de fatigue s'écrit :

$$\max_n \left\{ \max_t E_n(t) \right\} < \theta \quad (29)$$

Les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta$  sont positives et peuvent être déterminées par trois essais de fatigue sous sollicitations simples (traction alternée, traction répétée et torsion alternée).

$$\text{Avec } \alpha = \frac{\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \cdot \left(1 - \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}\right)}}, \quad \theta = \tau_{-1} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2 \cdot \theta}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{8 \cdot \theta} - \alpha$$

Le domaine de validité de ce critère est  $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 1$  et  $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} < 1$

#### 1.5.4 Critère de Mataké

Mataké [23] a proposé ce critère en 1977. Ce critère est basé sur les données expérimentales des essais biaxiaux de type torsion-flexion réalisés sur trois différents matériaux (cuivre et acier). Il décrit le plan critique dans lequel l'amplitude de la contrainte de cisaillement est maximale, et que la normale au plan critique est déterminée par  $\max_n(\tau_a(\varphi_c, \theta_c))$ . Le critère s'écrit :

$$\tau_a + \mu * \sigma_{n\max} < \lambda \quad (30)$$

$\mu$  et  $\lambda$  sont les paramètres du matériau, déterminés par deux essais de fatigue :

a) Torsion pure :

$$\tau_a = \tau_{-1} \quad \text{et} \quad \sigma_{n\max} = 0 \quad \text{alors} \quad \lambda = \tau_{-1}$$

b) Traction alternée symétrique

$$\tau_a = \frac{\sigma_{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_{n\max} = \frac{\sigma_{-1}}{2} \quad \text{alors} \quad \mu = 2 \cdot \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1$$

$\varphi$  et  $\theta$  sont les angles qui déterminent la position de la normale au plan matériel. Le domaine

de validité est :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$ .

#### 1.5.5 Critère de McDiarmid

L'auteur [24] a proposé deux critères. Le premier critère (1973), inspiré de l'ellipse de Gough dans le plan critique, est basé sur la facette où se trouve la contrainte de cisaillement maximale.

$$\tau_a + \alpha \cdot \sigma_{na}^2 < \beta \quad (31)$$

Le deuxième critère [25] a été établi en 1974. Le plan critique est toujours le même, mais l'influence de la valeur moyenne de la contrainte normale est prise en compte.

$$\tau_{na} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \sigma_{nm}}{R_m}\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \cdot \sigma_{na}^{\frac{3}{2}} < \beta \quad (32)$$

Avec  $\beta = \tau_{-1}$  et  $\alpha = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

Le domaine de validité est :  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$  et  $\frac{\sigma_{nm}}{R_m} < \frac{1}{2}$ .

### 1.5.6 Critère de FINDLEY

Ce critère [26,59] a été établi en 1957. Findley utilise le même formalisme que Mataké. Cependant, le plan critique est défini en maximisant la combinaison linéaire de deux termes :  $\max_n \{\tau_a(\varphi_c, \theta_c) + k \cdot \sigma_{n\max}(\varphi_c, \theta_c)\}$  au lieu de  $\max_n (\tau_a(\varphi_c, \theta_c))$  proposée par Mataké.  $\tau_a$  est l'amplitude de la contrainte de cisaillement et  $\sigma_{n\max}$  la valeur maximale de la contrainte normale au plan de normal  $\vec{n}$ .

Le critère de fatigue est donné par la relation :

$$\tau_a(\varphi_c, \theta_c) + k \cdot \sigma_{n\max}(\varphi_c, \theta_c) < f \quad (33)$$

avec :  $k = \frac{2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}}{2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1}}$  et  $f = \sqrt{\frac{\sigma_{-1}^2}{4 \cdot \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)}}$

### 1.5.7 Critère de Munday & Mitchell

Ce critère a été proposé en 1989 [27]. Les auteurs calculent la valeur maximale de la contrainte tangentielle ( $\tau_{\max} = \max_i (\tau_n(t))$ ) du plan considéré. Le plan critique est ce lui où  $\tau_{\max}$  est maximal :  $\left(\max_n (\tau_{\max})\right)$ .

Le critère de fatigue est donné par :

$$3 \cdot \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{na}}{f_{-1}}\right)^2 < 1 \quad (34)$$

Ce critère ne tient pas compte de l'effet de la contrainte normale moyenne.

### 1.5.8 Critère de Stanfield, Yokobori & Nakanishi

Ces trois auteurs [28] ont proposé séparément des critères très voisins. Ils ont essayé de corréler les comportements microscopique et macroscopique du matériau.

Le modèle postule que les fissures s'amorcent sur un plan de normal  $\vec{n}$ , lieu où la contrainte de cisaillement est maximale ( $\tau_{\max} = \max_t(\tau_n(t))$ ), à un instant  $t$  du cycle de chargement. Une relation est proposée :

$$\tau_{na} + \alpha \cdot \sigma_n \geq \beta \quad (35)$$

$\tau_{na}$  : la contrainte de cisaillement locale,

$\sigma_n$  : la contrainte normale sur le plan  $\vec{n}$ ,

$\alpha, \beta$  : des constantes relatives au matériau.

### 1.5.9 Critère de Morel et Flacelière

Le concept du maillon faible a été utilisé dans un premier temps par Weibull pour la dispersion de la résistance statique pour les matériaux fragiles et s'est transformé pour le comportement de fatigue. Sa formulation est basée sur l'existence de défaut statistiquement distribué dans le volume d'un matériau. Ce modèle est restreint au matériau dont le domaine d'amorçage est très supérieur au domaine de propagation. Weibull estime que :

- Le matériau est considéré comme un ensemble de maillon et la fissure d'un maillon entraîne la fissure de la structure,
- La taille du défaut est très petite comparée à la distance entre deux maillons.

Les auteurs [29] ont introduit la contrainte équivalente de Papadopoulos dans la loi de Weibull (à 2 ou à 3 paramètres) pour exprimer la probabilité de l'accumulation d'amorçage.

$$P_F(\sigma, V) = 1 - \exp \left[ \frac{-1}{V_0} \cdot \iiint_V \langle f(\sigma_{equ}) \rangle \cdot dV \right] \quad (36)$$

$V_0$  : volume initial et  $f(\sigma_{equ})$  : fonction de contraintes.

$$\begin{cases} f(\sigma_{equ}) = \left( \frac{\langle \sigma_{equ} - \sigma_u \rangle}{\sigma_0} \right)^m \\ f(\sigma_{equ}) = \left( \frac{\sigma_{equ}}{\sigma_0} \right)^m \end{cases} \quad (37)$$

Où  $m, \sigma_0$  et  $\sigma_u$  : paramètres de Weibull,

$\sigma_{equ}$  : contrainte équivalente de Papadopoulos.

L'application du modèle demande une identification des paramètres du matériau. La plupart du temps, les résultats expérimentaux sont disponibles, notamment la limite d'endurance pour une probabilité de 50 %.

### 1.5.10 Critère de Carpinteri & al.

Ce critère a été établi en 2001. Carpinteri [31] estime que la position du plan critique est déterminée à partir des contraintes principales qui favorisent l'amorçage. A chaque instant et en fonction des contraintes appliquées, il détermine les contraintes principales et leurs vecteurs propres. Ces vecteurs propres peuvent être schématisés en fonction des trois angles d'Euler  $(\varphi, \psi, \theta)$  (fig.1.9), qui représentent les trois rotations suivant les axes  $Z$ ,  $Y=2'$  et  $Z=3'$

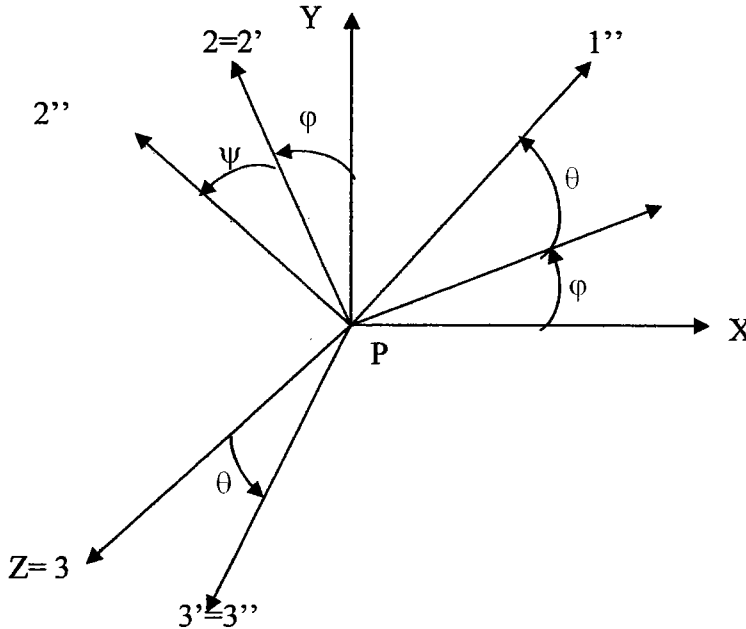


Figure 1.9 : Directions principales des contraintes définies à partir des angles d'Euler.

Les angles d'Euler varient de manière à parcourir tous les points d'un matériau dans l'espace ( $0 \leq \varphi \leq 360^\circ, 0 \leq \psi \leq 180^\circ$  et  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ).

A chaque instant, on détermine les contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  et leurs vecteurs propres associés, exprimés en général dans un repère orthonormé direct  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

Les vecteurs propres des contraintes principales ont pour coordonnées respectivement  $(l_1, m_1, n_1)$ ,  $(l_2, m_2, n_2)$  et  $(l_3, m_3, n_3)$ .

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

La matrice A peut être déterminée en fonction des trois angles d'Euler  $(\varphi, \psi, \theta)$ , qui représentent les trois rotations suivant les 3 axes dans le même repère  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi.C\theta.C\psi - S\varphi.S\psi & -C\varphi.C\theta.S\psi - S\varphi.C\psi & C\varphi.S\theta \\ S\varphi.C\theta.C\psi + C\varphi.S\psi & -S\varphi.C\theta.S\psi + C\varphi.C\psi & S\varphi.S\theta \\ -S\theta.C\psi & S\theta.S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

L'égalité des deux matrices (38 et 39) permet de calculer les angles d'Euler  $(\varphi, \psi, \theta)$  par les équations suivantes :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{l_2 - m_1}{l_1 + m_2 + n_3 + 1}\right) - \arctg\left(\frac{m_3 - n_2}{n_1 - l_3}\right) \quad (40)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m_3}{\sin(\varphi)}\right) \quad (41)$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{l_2 - m_1}{l_1 + m_2 + n_3 + 1}\right) + \arctg\left(\frac{m_3 - n_2}{n_1 - l_3}\right) \quad (42)$$

Une réorganisation des directions principales des contraintes est nécessaire afin de réaliser la continuité d'évolution des contraintes principales au cours du temps. Une fois que cette réorganisation est faite, un organigramme a été proposé par Carpinteri et al [32] pour déterminer les angles d'Euler.

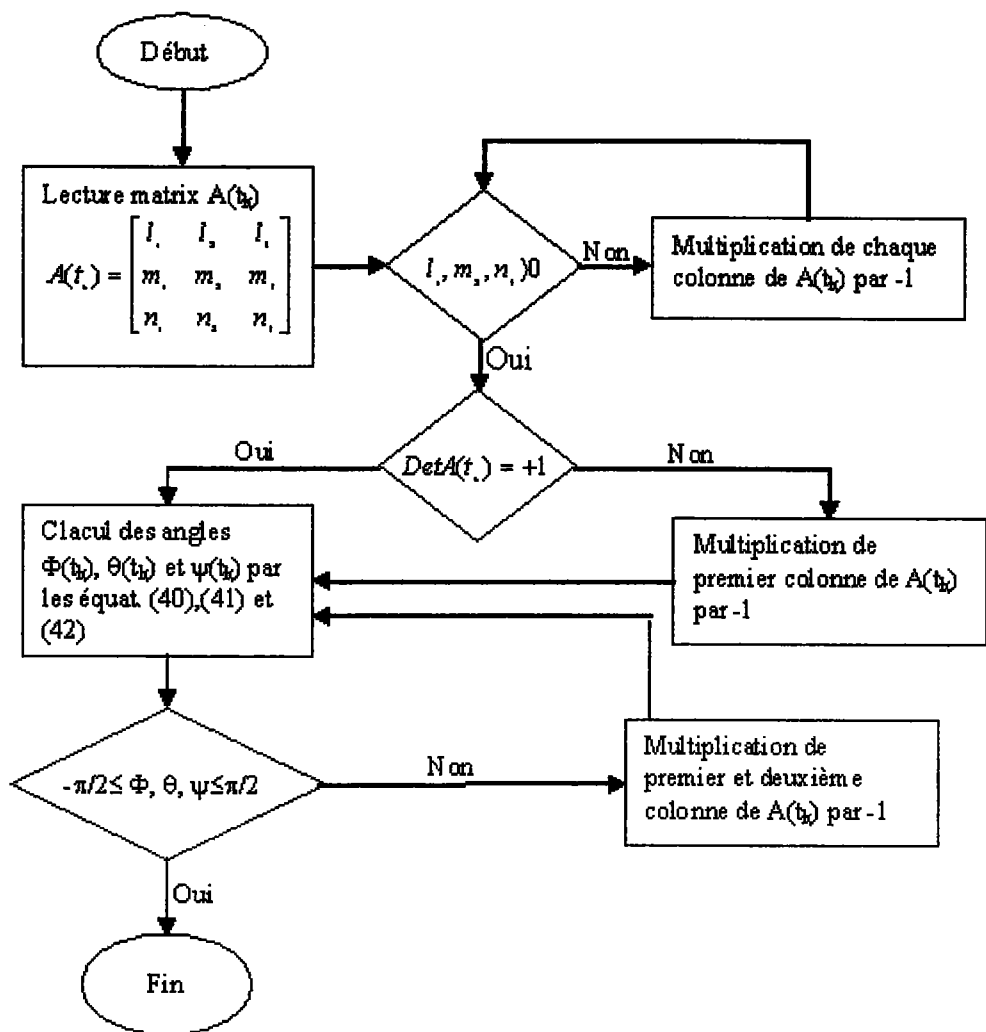


Figure 1.10 : Organigramme pour l’obtention des angles Euler.

Pour la correction de ces angles et le calcul de leurs valeurs moyennes, les auteurs ont proposé des fonctions poids [33] telles que :

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{W} \cdot \sum_{t_1}^{t_k} \varphi(t_k) \cdot W(t_k) \tag{43}$$

$$\hat{\psi} = \frac{1}{W} \cdot \sum_{t_1}^{t_k} \psi(t_k) \cdot W(t_k) \tag{44}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{W} \cdot \sum_{t_1}^{t_k} \theta(t_k) \cdot W(t_k) \tag{45}$$

avec  $W = \sum_{t_1}^{t_k} W(t_k)$  est la sommation des fonctions poids estimée à :

$$W_2 = W(t_k) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{Si } \sigma_1(t_k) < c \cdot \sigma_{-1} \\ \left( \frac{\sigma_1(t_k)}{\sigma_{-1}} \right)^{m_\sigma} & \Rightarrow \text{Si } \sigma_1(t_k) \geq c \cdot \sigma_{-1} \end{cases} \tag{46}$$

où  $\sigma_{-1}$  est l'amplitude de la contrainte normale alternée en fatigue d'endurance,  $m_\sigma = -1/m$  (m la pente de la courbe S-N considérée et c un coefficient de sécurité ( $0 \leq c \leq 1$ )).

Les nouveaux vecteurs propres sont donnés par les équations suivantes :

$$L_1 = C\hat{\phi}.C\hat{\theta}.C\hat{\psi} - S\hat{\phi}.S\hat{\psi}, M_1 = S\hat{\phi}.C\hat{\theta}.C\hat{\psi} + C\hat{\phi}.S\hat{\psi} \text{ et } N_1 = -S\hat{\theta}.C\hat{\psi}.$$

$$L_2 = -C\hat{\phi}.C\hat{\theta}.S\hat{\psi} - S\hat{\phi}.C\hat{\psi}, M_2 = -S\hat{\phi}.C\hat{\theta}.S\hat{\psi} + C\hat{\phi}.C\hat{\psi} \text{ et } N_2 = S\hat{\theta}.S\hat{\psi}.$$

$$L_3 = C\hat{\phi}.S\hat{\theta}, M_3 = S\hat{\phi}.S\hat{\theta} \text{ et } N_3 = C\hat{\theta}.$$

Une fois les angles déterminés, on projette le tenseur de contraintes sur le plan critique et on calcule la contrainte normale maximale  $\sigma_{n\max}$  et l'amplitude de la contrainte de cisaillement  $\tau_a$ .

Le critère est un quart d'ellipse, donné par la relation suivante :

$$\left( \frac{\sigma_{n\max}}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 < 1 \quad (47)$$

### 1.5.10.1 Réorganisation des directions principales

Dans ce paragraphe, notre travail consiste à mettre en évidence l'importance de la réorganisation des directions principales afin d'assurer la continuité du mouvement du trièdre principal. Or, celle-ci n'est pas préservée par les méthodes de calcul des éléments principaux, qui donnent les valeurs propres dans l'ordre décroissant. Pour que la courbe, décrite par la contrainte principale (fig. 1.11), traduise correctement l'évolution du tenseur des contraintes, il est fondamental qu'on garde l'appellation  $\sigma_i$  inchangée de la contrainte appliquée sur le même plan principal de normale  $\bar{x}_i$ . Prenons comme exemple, un tenseur de contrainte plan et traçons l'évolution de ses contraintes principales :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) \\ \sigma_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y})} \text{ correspond un état de contraintes principales } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) \end{bmatrix}_{(\bar{1}, \bar{2})}$$

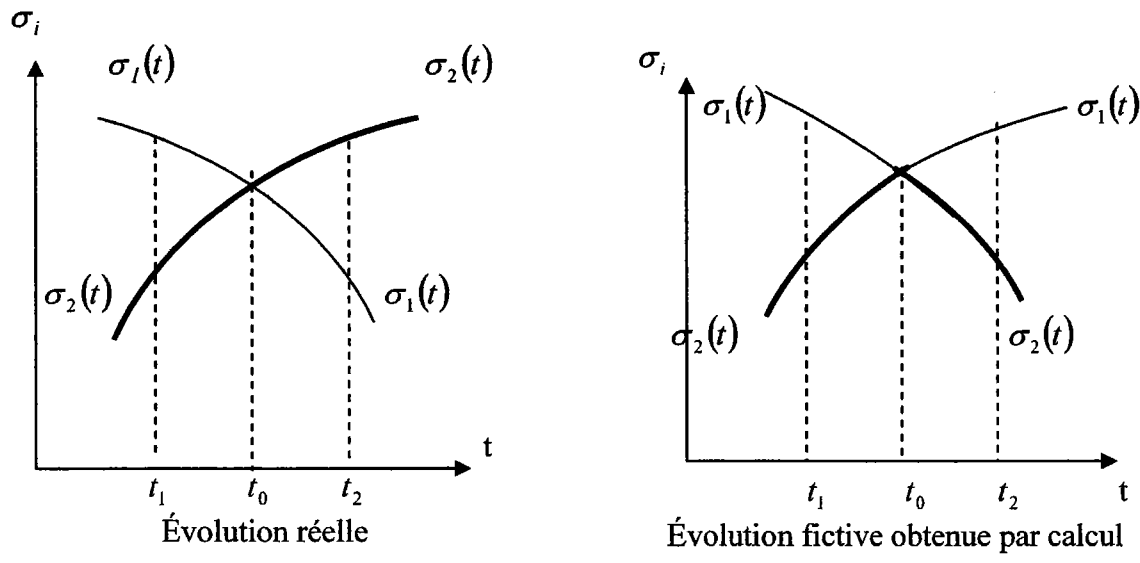


Figure 1.11 : Permutation du rôle de deux valeurs principales.

Les deux situations de la figure 1.12 présentent l'évolution réelle que doit prendre les deux contraintes, et l'évolution que donne les logiciels de calcul. Dans ce cas, on parle d'une interversion du rôle de deux contraintes principales, qui ne peut se produire que si ces deux contraintes principales ont, à un instant donné, la même valeur. Donc, un suivi du mouvement des directions principales de contraintes est nécessaire pour assurer une continuité d'évolution des contraintes principales au cours du temps. La méthode suivante permet de répondre à cette attente afin d'empêcher l'intervention de se produire.

Après la détermination des contraintes principales  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  et  $\sigma_3(t)$  à chaque instant  $t$  et de leurs trois vecteurs principaux associés  $\vec{v}_1(t)$ ,  $\vec{v}_2(t)$  et  $\vec{v}_3(t)$ . On recherche lequel des trois vecteurs  $\vec{v}_1(t+dt)$ ,  $\vec{v}_2(t+dt)$ ,  $\vec{v}_3(t+dt)$  est le plus proche du vecteur  $\vec{v}_1(t)$  en calculant le produit scalaire  $\vec{v}_1(t) \cdot \vec{v}_1(t+dt)$  puis, si cela est nécessaire  $\vec{v}_1(t) \cdot \vec{v}_2(t+dt)$ . On recherche ensuite le vecteur le plus proche de  $\vec{v}_2(t)$ . Si aucune inversion n'a eu lieu entre les instants  $t$  et  $(t+dt)$ , les vecteurs nommés  $\vec{v}_1(t+dt)$ ,  $\vec{v}_2(t+dt)$  et  $\vec{v}_3(t+dt)$  gardent leur nom et l'on passe à l'intervalle de temps suivant. Par contre, s'il y a inversion de deux contraintes principales, il faut renommer les vecteurs propres correspondants de manière à ce que  $\vec{v}_1(t+dt)$ ,  $\vec{v}_2(t+dt)$  et  $\vec{v}_3(t+dt)$  correspondent bien à l'évolution de  $\vec{v}_1(t)$ ,  $\vec{v}_2(t)$  et  $\vec{v}_3(t)$  respectivement.

Pour les cas particuliers qui présentent des indéterminations :

- ✓ Tenseur cylindrique

Dans ce cas, à un moment donné, l'une des trois valeurs propres associées a une valeur différente des deux autres. Pour garantir la continuité entre l'instant  $(t-dt)$  où l'on avait trois valeurs propres distinctes, l'instant  $t$  où deux valeurs propres sont identiques, et l'instant  $(t+dt)$  où l'on aura de nouveau trois valeurs propres distinctes, on utilise la technique suivante.

A l'instant  $(t-dt)$ , le tenseur a trois valeurs propres distinctes, une base des vecteurs propres peut être déterminée. On calcule  $\vec{V}_1(t)$  et le vecteur  $\vec{V}_2(t)$  est obtenu par la relation :

$$\vec{V}_2(t) = \vec{V}_3(t-dt) \wedge \vec{V}_1(t) \quad (48)$$

De cette manière  $\vec{V}_2(t)$ , perpendiculaire à  $\vec{V}_1(t)$ , est normé (fig. 1.12).

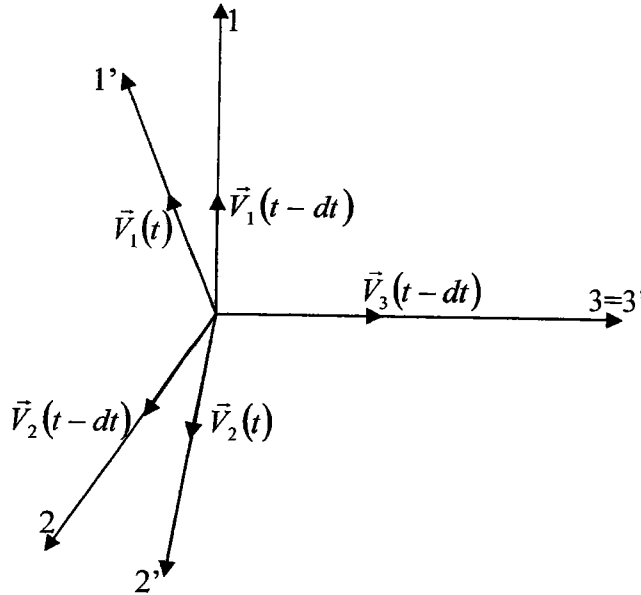


Figure 1.12 : réorganisation des vecteurs propres [60].

$\vec{V}_1(t)$  est l'évolution de  $\vec{V}_1(t-dt)$ . Le vecteur  $\vec{V}_2(t)$  est construit plus proche de  $\vec{V}_2(t-dt)$  pour assurer la continuité. Dans le cas contraire, on pourra trouver facilement le vecteur qu'est devenu  $\vec{V}_1(t)$ . Le troisième vecteur propre est perpendiculaire aux deux autres premiers :

$$\vec{V}_3(t) = \vec{V}_1(t) \wedge \vec{V}_2(t) \quad (49)$$

Ainsi, on a constitué la continuité de rotation des directions principales des contraintes entre les instants  $(t-dt)$ ,  $(t)$  et  $(t+dt)$ .

✓ Tenseur sphérique

Quand le tenseur est sphérique, n'importe quelle direction est principale. Donc, la base à l'instant  $(t)$  est identique à la base à l'instant  $(t + dt)$ . Un organigramme se trouve dans l'annexe 1[60].

### 1.5.11 Critère de Galtier & Séguret

Les auteurs [34] suppose que le matériau s'adapte dès les premiers cycles du chargement avec la symétrisation des cissions microscopiques ainsi que le concept de facette critique est conservée. Ils proposent [35] de prendre en compte l'évolution de la cission, non seulement en norme, mais aussi en direction. L'extrémité du vecteur du cisaillement décrit, sur une facette de normale  $\vec{n}$ , une courbe fermée caractérisée par son périmètre. Ce paramètre prend en considération le déphasage dans le cas de sollicitations combinées. Les variables intervenant dans ce critère sont :

- La pression hydrostatique maximale corrigée par un facteur dépendant du degré de triaxialité.
- Le périmètre maximum du trajet décrit par l'extrémité du vecteur cisaillement noté  $P_e$ .

Le plan du critère est paramétré par :

$$\begin{cases} X_1 = \max_t I_1(t) \cdot \left[ 1 - \alpha \cdot (d_{T,tr}^\circ - \max_t d_{T,ch}^\circ(t)) \right] \\ X_2 = \max_{\vec{n}} P_e \end{cases} \quad (50)$$

$d_{T,tr}^\circ$  : Degré de triaxialité en traction selon De Leiris [36],

$d_{T,ch}^\circ(t)$  : Degré de triaxialité du chargement selon De Leiris [36],

$I_1(t)$  : Premier invariant du tenseur des contraintes,

$\alpha$  : Coefficient lié au matériau.

Le degré de triaxialité sert à caractériser le comportement d'un matériau sous chargement, en évaluant la triaxialité. Le degré de triaxialité définit par De Leiris est :

$$d_T^\circ = \frac{I_1^2(t)}{I_1^2(t) + \frac{6 \cdot (1+\nu)}{(1-2 \cdot \nu)} \cdot J_2(t)} \quad (51)$$

Dans le plan  $(X_1, X_2)$ , le domaine valide est limité par une demi-ellipse qui passe par les points de torsion, de flexion alternée et le point correspondant à la résistance maximale en traction (fig. 1.13).

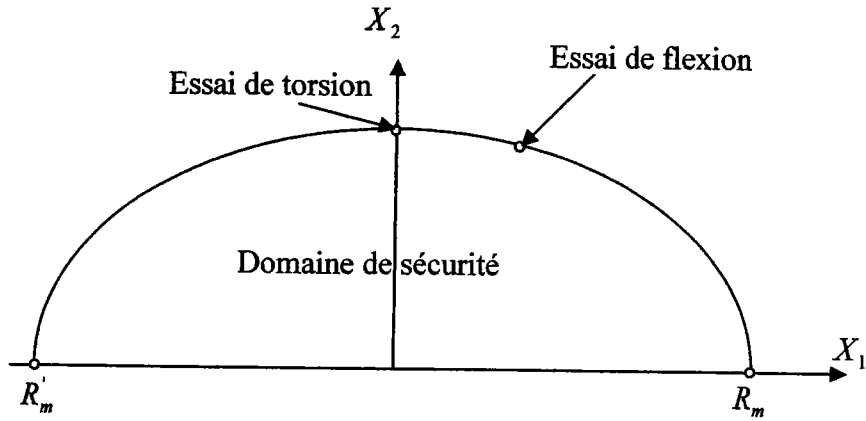


Figure 1.13 : Représentation du critère de Galtier et Séguret [34].

1.5.12 Critère de Deperrois

L’auteur [37] reprend les hypothèses de base de Dang Van (Principe de localisation des contraintes, endommagement lié à la plastification d’un seul grain..), mais modélise le grain critique différemment : à la place d’une inclusion élastoplastique dans une matrice élastique infinie, Deperrois [37] utilise le schéma d’un grain débouchant sur la surface libre, ce qui est plus réaliste. En considérant la courbe fermée  $\psi$  (fig. 1.14) décrite par le trajet d’un chargement périodique dans l’espace du déviateur des contraintes.

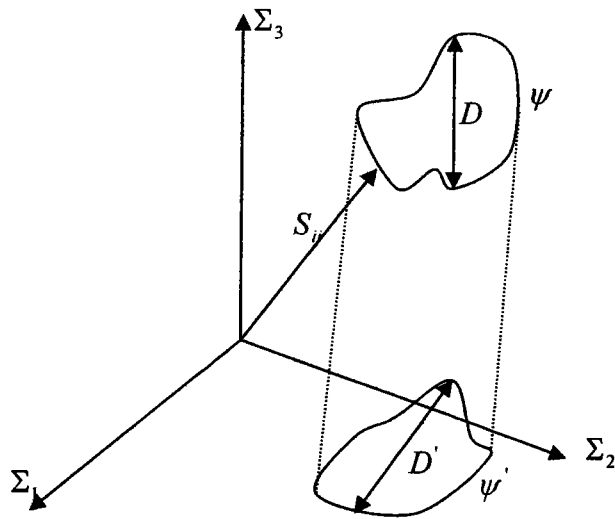


Figure 1.14 : représentation du trajet du vecteur déviateur dans l’espace.

Un critère est proposé :

$A(\psi)+\alpha \cdot p_{\max } < \beta$  (52)

avec  $A(\psi)$  une mesure de la courbe  $\psi$ , qui tient compte à la fois des valeurs  $D$  et  $D'$ , définie par :

$$A(\psi)=\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot\left(D^2+D^{\prime 2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes propres au matériau issues d’essais sous sollicitations simples.

$D$  est la plus grande corde inscrite dans la courbe  $\psi$ .

$D'$  est la plus grande corde inscrite dans la courbe  $\psi'$ , projection de  $\psi$  sur un hyperplan orthogonal à la direction de  $D$ .

1.5.13 Critère de Papadopoulos

La proposition de Papadopoulos [15] vise à réduire les calculs induits par celle de Dang Van. Il s’agit là d’un critère de non nucléation de microfissures où l’endurance est liée à la stabilisation de la déformation plastique et par conséquent à l’adaptation du grain. Dang Van [16] postule pour le cristal un critère de plasticité découlant de la loi de schmid avec écrouissage isotrope linéaire, Papadopoulos choisit le critère de Von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique linéaire.

Le trajet représentant un chargement complexe décrit une courbe fermée  $\psi$  dans l’espace des déviateurs des contraintes macroscopiques (fig.1.15). Le critère de plasticité du cristal est une hypersphère de rayon  $\sqrt{2}.k$  centré en  $\underline{z}$ . La solution cherchée est celle qui minimise  $k^*$  ;  $\underline{z}^*$  et  $\sqrt{2}.k^*$  sont respectivement le centre et le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite à la courbe  $\psi$ .

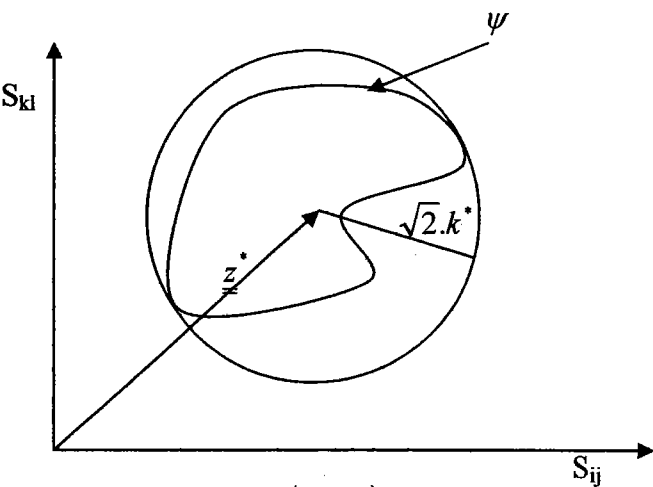


Figure 1.15 : Choix optimum du couple  $\left(\underline{z}^*, k^*\right)$  par la construction de la plus petite hypersphère circonscrite à  $\psi$ .

Papadopoulos propose un critère de fatigue linéaire en fonction de  $k^*$  et de la pression hydrostatique maximale.

$$k^*+\alpha.p_{\max}<\beta \tag{54}$$

$p_{\max}$  : pression hydrostatique maximale atteinte au cours du cycle de chargement, égale à la pression macroscopique,

$\alpha$  et  $\beta$  : caractéristiques du matériau, pouvant être identifiées par des essais de fatigue sous sollicitations simples.  $\alpha$  doit être positif pour rendre compte de l'effet bénéfique d'une pression hydrostatique négative.

### Remarque

Le grand problème, qui se pose aux applications des critères locaux, est la détermination de l'amplitude de la contrainte de cisaillement. Pour cela des méthodes analytiques et graphiques ont été proposés.

### 1.6 Calcul d'amplitude de contraintes de cisaillement

Plusieurs Méthodes sont proposées pour déterminer l'amplitude des contraintes de cisaillement. Lemaître et al. [38] montrent que cette amplitude est égale à la moitié de la corde la plus longue (fig.1.16), dont  $\tau_a = \frac{1}{2} \cdot \max_i \left\{ \max_j \left( \left\| \tau(t_i) - \tau(t_j) \right\| \right) \right\}$ . Pour ("Li et al. [39]"), elle est déterminée par l'ellipse minimale circonscrite au trajet (fig.1.17), dont l'amplitude de cisaillement s'écrit :  $\tau_a = \sqrt{r_A^2 + r_B^2}$ . Pour "Melin [40]", cette contrainte est obtenue par le rectangle minimum circonscrit (fig. 1.18) et dont l'amplitude de contrainte de cisaillement est :  $\tau_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{S_A^2 + S_B^2}$ .

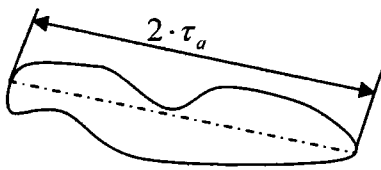


Figure 1.16

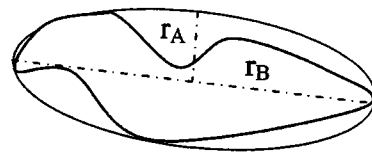


Figure 1.17

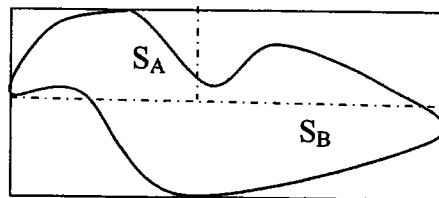


Figure 1.18

Figure (1.16, 1.17, 1. 18) : Evolution de l'amplitude de contraintes tangentielles.

En général la méthode du cercle circonscrit à la courbe décrit par l'extrémité de la contrainte de cisaillement macroscopique, est la plus utilisée. Pour cela plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature. Parmi cela, on trouve la méthode des combinaisons des points proposés par Papadopoulos [15] et la méthode d'incrémentation proposée par Dang Van [41]. Ces deux méthodes nécessitent énormément du temps de calcul. Pour minimiser ce temps de calcul, Zhou et Tilts [42] ont proposé la méthode de Mini-max implémentée dans le logiciel Matlab.

Les constatations faites par Bo Wu [43], sur les périmètres de trajet, ont permis de proposer une nouvelle formulation simple pour la définition de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{na} = \begin{cases} \frac{P_e}{\pi} & \text{En phase} \\ \frac{P_e}{2 \cdot \pi} & \text{Hors phase} \end{cases}$$

avec  $P_e$  le périmètre du trajet décrit par la contrainte de cisaillement macroscopique .

### 1.6.1 Algorithme de Papadopoulos [15]

Cet algorithme permet de trouver le cercle circonscrit à une courbe, et se déroule en 4 étapes :

- 1- Partager la courbe en n points,
- 2- Construire le cercle à partir de deux points, dont le diamètre est le segment joignant les deux points. Choisir le plus petit cercle contenant tout les n-2 points,
- 3- A partir de chaque triplet de points, tracer un cercle passant par ces derniers, et choisir le plus petit cercle contenant les n-3 points,
- 4- Comparer les rayons des deux cercles trouvés aux étapes 2 et 3 ; le cercle circonscrit à la courbe est celui dont le rayon est le plus petit.

### 1.6.2 Algorithme de Dang Van [41]

L'évolution du contrainte du cisaillement est discrétisée :  $0 \leq t_i \leq n$  et  $\tau_0 \leq \tau_i \leq \tau_n$ . La variation  $\tau_{i+1} - \tau_i$  est infinitésimale. A chaque instant,  $R_i$  est la limite élastique courante et  $\tau_{m,i}$  la contrainte résiduelle locale.

(a) Itération principale ; (Fig.1.18)

La question est résolue dès la définition de l'état  $(i+1)$  caractérisé par  $\tau_{i+1}$  et  $R_{i+1}$  de l'état  $(i)$  caractérisé par  $\tau_i$  et  $R_i$ .

$$D = \|\tau_{i+1} - \tau_{m,i}\|,$$

Le rayon du cercle en l'incrémentant s'écrit :

$$R_{i+1} = R_i + k(D - R_i)$$

On calcule de nouveau le centre :

$$\tau_{m,i+1} = \tau_{m,i} + \frac{D - R_{i+1}}{D} (\tau_{i+1} - \tau_{m,i})$$

La convergence de l'algorithme vers le cercle inscrit dépend du choix du paramètre  $k$  qui doit être le plus petit possible.

(b) Initialisation

Les meilleures valeurs initiales de  $R_1$  et  $\tau_{m,1}$  paraissent plus proches respectivement du zéro et de la valeur moyenne de  $\tau_i$ .

$$\tau_{m,1} = \frac{1}{n} \sum_i \tau_i$$

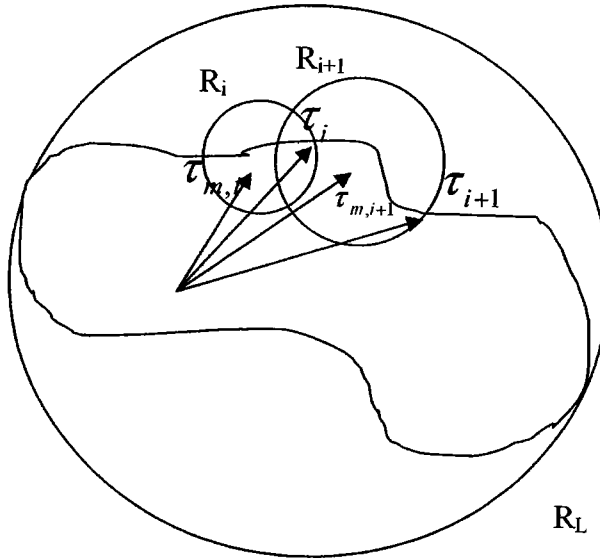


Figure 1.19 : Méthode d'incrémentation.

### 1.6.3 Algorithme de mini-max [42]

Le vecteur de cisaillement est en général exprimé dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  de cisaillement local quelconque. Les composantes de contraintes de cisaillement macroscopique  $\tau_u(t)$  et  $\tau_v(t)$  sont définies dans cette base. Le centre  $(\tau_{u,m}, \tau_{v,m})$  du cercle circonscrit à la courbe formée par l'extrémité du vecteur  $V(\tau_u(t), \tau_v(t))$  et le rayon sont obtenus en résolvant le problème suivant :

$$\min_{(\tau_u, \tau_v)} \max_{t_j} \sqrt{(\tau_u(t_j) - \tau_u')^2 + (\tau_v(t_j) - \tau_v')^2}$$

Cet algorithme est implémenté dans le logiciel Matlab sous le nom de la fonction fminimax.

### 1.6.4 Discussion

Les critères locaux ont été établis en fonction de nombreuses observations expérimentales exposant les différentes fissures engendrées par fatigue. Suivant le type de chargement, des directions des bandes de glissement sont favorisées par rapport aux autres. Néanmoins, la contrainte de cisaillement joue un rôle néfaste dans le processus d'amorçage des fissures, c'est la raison pour laquelle l'amplitude de cisaillement est introduite dans toutes les formulations de ces critères. La contrainte hydrostatique et la contrainte normale ont aussi une influence sur la tenue en fatigue, car elles accélèrent ou retardent le mécanisme de propagation de la fissure. Si l'amplitude de cisaillement et la contrainte normale ou hydrostatique jouent un rôle prépondérant dans le processus d'endommagement, que dirons-nous des contraintes moyennes ?

En fatigue uniaxiale, les expériences ont prouvé l'effet de la contrainte normale moyenne sur le comportement du matériau en fatigue. Dans le cas de la fatigue multiaxiale, une telle influence existe aussi. C'est pourquoi, certains critères ont pris en considération la contrainte moyenne dans leurs expressions. Par contre, la contrainte de cisaillement moyenne est ignorée dans toutes formulations. Ceci est dû aux différents essais réalisés, qui ont montré le peu d'influence de la contrainte moyenne de cisaillement en fatigue sur le matériau, tant que la contrainte maximale de cisaillement ne dépasse pas 80% de la limite d'élasticité du matériau en torsion.

### 1.7 Critère semi-local

L'approche volumétrique [44] est une méthode semi-locale, basée sur l'analyse de la distribution des contraintes dans le volume endommagé. Cette distribution est obtenue par un calcul aux éléments finis, en utilisant la loi de comportement cyclique du matériau. A partir de cette distribution de contrainte, on détermine la contrainte effective qui tient compte du type de chargement ainsi que de la forme géométrique de l'éprouvette. Le volume effectif de l'élaboration du processus de fatigue est limité par une distance effective. Cette distance effective est déterminée par le minimum du gradient des contraintes (fig.1.20)

Dans le cas de la flexion, la contrainte d'ouverture est la cause principale de l'amorçage de fissures par fatigue. La contrainte effective  $\sigma_{ef}$  peut être calculée par l'équation :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \cdot \int_0^{X_{ef}} \sigma_{yy} \cdot dX \quad (55)$$

$\sigma_{yy}$  : La contrainte d'ouverture,

$X_{ef}$  : La distance effective (minimum du gradient de contrainte).

Dans le cas de la torsion simple, où la contrainte de cisaillement est la cause principale de la rupture par fatigue, la contrainte de cisaillement effective  $\tau_{ef}$  peut être calculée par l'équation :

$$\tau_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \cdot \int_0^{X_{ef}} \tau_{yz} \cdot dX \quad (56)$$

$\tau_{yz}$  : La contrainte de cisaillement.

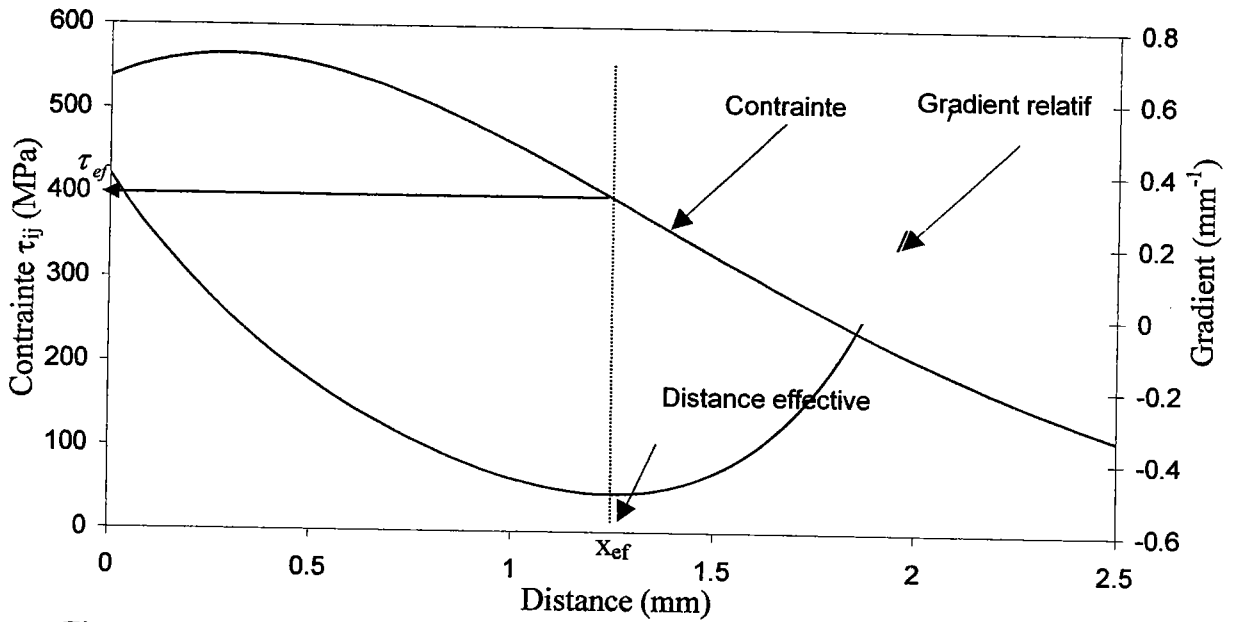


Figure 1.20 : Schématisation de la distribution des contraintes et son gradient relatif.

### 1.7.1 Le gradient relatif de contraintes

Le gradient relatif de contraintes  $\chi_r$  est défini comme le rapport du gradient de contraintes et le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  :

$$\chi_r = \frac{gradf}{\sigma_{ij}} = \frac{1}{\sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \quad (57)$$

$\chi_r$  : Le gradient relatif de contraintes ( $mm^{-1}$ ), calculé suivant une direction donnée,

$r$  : La distance du point d'amorçage au centre de l'éprouvette (cas d'une éprouvette cylindrique).

le gradient relatif a des valeurs variables dans le volume effectif d'élaboration du processus de fatigue. Ces valeurs dépendent de la géométrie, du mode de chargement, de la valeur de charge et du type de matériau.

### 1.7.2 Contrainte effective

La contrainte effective, dans un volume, peut être définie par :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{V_{ef}} \cdot \iiint_V \sigma_{ij} \cdot dV \quad (58)$$

En prenant l'effet des contraintes dans le plan de la contrainte maximale, la contrainte effective s'écrit :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{S_{ef}} \cdot \iint_S \sigma_{ij} \cdot dS \quad (59)$$

En se basant sur les travaux de Weixing [45] et de Taylor et al. [46], la relation (59) devient :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{X_{ef}} \cdot \int_0^{x_{ef}} \sigma_{ij} \cdot dX \quad (60)$$

### 1.7.3 Critère d'approche volumétrique en fatigue multiaxiale

Qylafku et al. [47], à partir d'essais sur deux éprouvettes entaillées avec un rayon d'entaille de 0.4 et 0.2 mm correspondant respectivement à des facteurs de concentration de contraintes de 1.6 et 2.4, ont montré que la représentation des points expérimentaux dans le plan  $(\tau_{\max,effe}, P_{h,effe})$  suit une loi elliptique. Le critère tient compte de la contrainte de cisaillement maximale effective et de la pression hydrostatique effective sur la tenue en fatigue du matériau.

Le critère est un quart d'ellipse, représenté par l'équation suivante :

$$\left( \frac{3 \cdot P_{heffe}}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\max,effe}}{\tau_{-1}} \right)^2 \leq 1 \quad (61)$$

$\tau_{\max,effe}$  : Contrainte de cisaillement maximale effective,

$P_{heffe}$  : Pression hydrostatique effective.

### 1.7.4 Discussion

Le critère semi-local, est une approche volumétrique, situé entre les critères locaux et les critères globaux. Il considère un volume d'élaboration du processus de fatigue où règne une contrainte de cisaillement effective qui provoque l'amorçage des fissures. La contrainte

normale effective et la pression hydrostatique jouent un rôle important sur la tenue du matériau en fatigue. La particularité de ce critère consiste en sa dépendance du mode de chargement et de la forme géométrique de l'éprouvette.

## 1.8 Critères énergétiques

Pour ces critères énergétiques, les auteurs prennent en compte à la fois les sollicitations en déformations et en contraintes. Une loi d'endommagement simple consiste à supposer l'existence de rupture lorsque l'énergie totale atteint une valeur critique. Parmi les critères énergétiques en fatigue d'endurance, on peut citer :

1. Critère d'Ellyin,
2. Critère de Froustey et Lasserre,
3. Critère de Palin-Luc,
4. Critère de Banvillet.

### 1.8.1 Critère d'Ellyin

Aussi bien en endurance qu'aux faibles durées de vie, Ellyin [48] considère que la durée de vie d'une éprouvette peut se diviser en deux parties : la nucléation de microfissures et leur propagation future. L'auteur choisit, comme paramètre de dommage, la densité d'énergie de déformation par cycle. Ce critère, élaboré dans le cadre de travaux sur la fatigue oligocyclique, a été confronté aux résultats d'essais effectués à déformations imposées avant son extension aux essais effectués en fatigue à grand nombre de cycles.

#### Cas Uniaxial

Dans le cas d'un chargement uniaxial à déformation imposée, on obtient une boucle d'hystérésis (Fig. 1.21). L'auteur considère alors la densité d'énergie de déformation totale par cycle  $\Delta W^t$  :

$$\Delta W^t = \Delta W^e + \Delta W^p \quad (62)$$

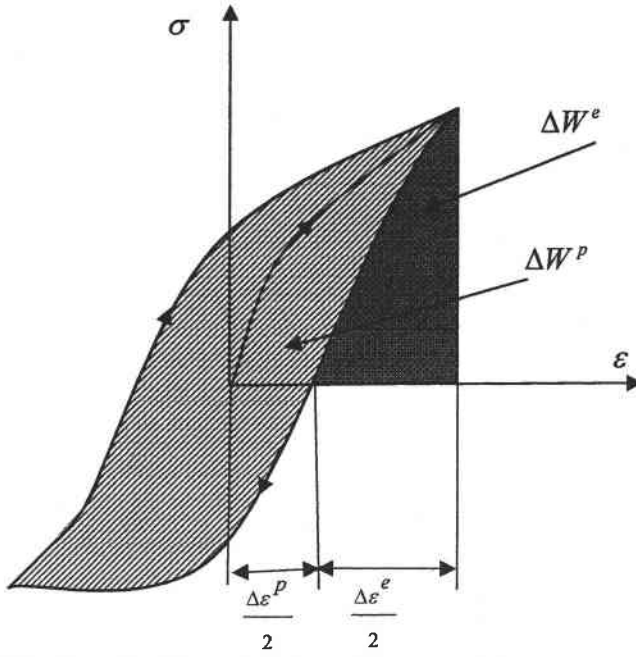


Figure 1.21 : Boucle d'hystérésis et décomposition énergétique selon Ellyin.

Où  $\Delta W^e$  et  $\Delta W^p$  sont respectivement les parties élastiques et plastiques. La définition de ces termes est donnée par :

$$\Delta W^e = \frac{\sigma_a^2}{2E} \quad (63)$$

$$\Delta W^p = A \cdot \Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon^p + (1 - A) \cdot \delta \sigma_0 \cdot \Delta \varepsilon^p \quad (64)$$

$\Delta \varepsilon^p$  : Amplitude de déformation plastique,

$\Delta \sigma$  : Amplitude de contrainte,

$\delta \sigma_0$  : Caractérise un adoucissement ou un durcissement relatif,

$A$  : Paramètre du matériau.

L'expression du critère, cas uniaxial, est liée aux nombres de cycles jusqu'à rupture ("u") :

$$\Delta W^t = K_u \cdot N_f^\alpha + C_u \quad (65)$$

$C_u$  : Energie élastique cyclique du matériau à la limite d'endurance,

$N_f$  : Nombre de cycle à rupture,

$K_u$  et  $\alpha$  : Paramètres du matériau.

**Pour le cas Multiaxial :**  $\Delta W^t = \Delta W^e + \Delta W^p$

$$\Delta W^e = \frac{1}{6E} \cdot [3(1 + \nu) S_{ij} S_{ij} + (1 - 2\nu) \sigma_{kk}^2] \quad (66)$$

$$\Delta W^p = \int_{cycle} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \quad (67)$$

L'incrément de déformation plastique est formulé par :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij}}{E_t} \quad (68)$$

$\nu$  : Coefficient de Poisson,

$E$  : Module d'Young,

$S_{ij}$  : Déviateur du tenseurs des contraintes,

$E_t$  : Module tangent de la courbe contrainte / déformation.

L'expression du critère en Multiaxial est :

$$\Delta W^t = (A\rho + B) \cdot N_f^\alpha + C \quad (69)$$

$A, B$  et  $\alpha$  : Constantes du matériau,

$\rho$  : Ration de déformation.

### 1.8.2 Critère de Froustey et Lasserre

Ce critère est inspiré par de nombreux résultats expérimentaux en flexion-torsion. Les auteurs [49] ont élaboré un modèle basé sur des considérations énergétiques. Le tenseur des contraintes est décomposé en un tenseur moyen  $\sigma_m$  et un tenseur alterné  $\sigma_a$  :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_m + \sigma_a \quad (70)$$

L'énergie totale  $W$  selon Froustey [50] est la somme de deux énergies, énergie moyenne  $W_m$  et énergie déviatrice  $W_a$  :

$$W = W_m + W_a \quad (71)$$

Dans le cas du premier terme exprimant le chargement moyen, l'énergie totale moyenne est définie par :

$$W_m = W_{1m} + W_{2m} \quad (72)$$

$$W_{1m} : \text{Énergie sphérique moyenne égale à } W_{1m} = \frac{1-2\nu}{6E} \cdot I_{1m}^2$$

$I_{1m}$  : Premier invariant du tenseur de contrainte moyen

$$W_{2m} : \text{Énergie déviatrice donnée par : } W_{2m} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot J_{2m}$$

$J_{2m}$  : Deuxième invariant du tenseur déviateur moyen.

Pour le second terme exprimant le chargement dynamique, l'énergie totale s'écrit sous la

forme suivante :

$$W_a = W_{1a} + W_{2a} \quad (73)$$

$$W_{1a} : \text{Énergie sphérique alternée est donnée par : } W_{1a} = \frac{1-2\nu}{6E} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [I_{1a}(t)]^2 \cdot dt$$

$$W_{2a} : \text{Énergie déviatrice ou de distorsion alternée telle que: } W_{2a} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T J_{2a} \cdot dt(t)$$

La triaxialité du chargement est prise en compte par les paramètres  $dT_m = \frac{W_{1m}}{W_m}$  pour la

composante moyenne et  $dT_a = \frac{W_{1a}}{W_a}$  pour la composante alternée.

Pour un chargement moyen fixé à la limite d'endurance, Froustey et Lasserre [49] proposent la relation :

$$\frac{W_a}{V_{2a}} = \frac{1}{1-dT_a} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \ln \left[ 1 + dT_a \cdot (e^\beta - 1) \right] \right\} = F(dT_a, \beta) \quad (74)$$

où  $V_{2a}$  : est l'énergie de distorsion de référence,

$\beta$  : est un paramètre de sensibilité du matériau à la triaxialité des contraintes, égal à la solution de l'équation (75).

$$\left( \frac{\sigma_{Frot}^D}{\tau_{Tor}^D} \right)^2 - 3 \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{3} (e^\beta - 1) \right] \right\} = 0 \quad (75)$$

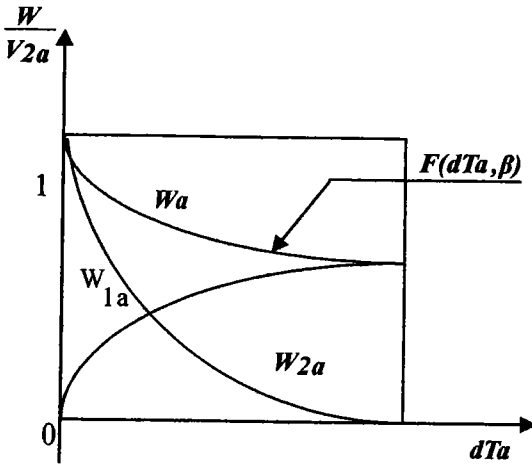
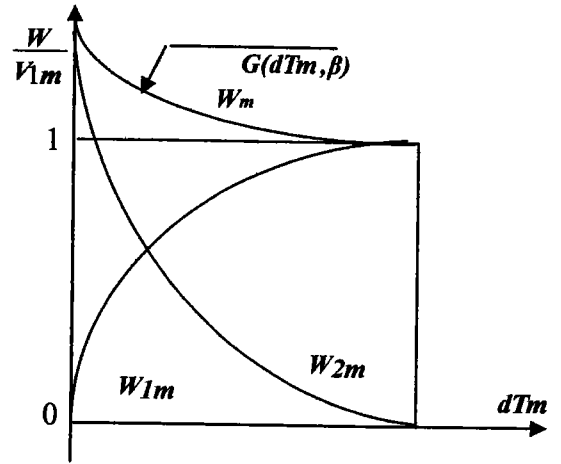
avec  $\sigma_{Frot}^D$  : Limite d'endurance en flexion rotative,

$\tau_{Tor}^D$  : Limite d'endurance en torsion alternée.

Les auteurs postulent que l'influence du degré de triaxialité du chargement moyen peut être donné par la relation (76).

$$\frac{W_m}{V_{1m}} = \frac{\beta}{1-e^{-\beta}} \cdot \frac{1}{1-dT_m} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \ln \left[ 1 + dT_m (e^\beta - 1) \right] \right\} = G(dT_m, \beta) \quad (76)$$

$V_{1m}$  est l'énergie sphérique de référence.

Figure 1.22 : énergie dynamique fonction de  $dTa$ Figure 1.23 : énergie moyenne fonction de  $dTm$ 

Le chargement dynamique admissible et le chargement moyen sont reliés par :

$$V_{2a} = V_{2a}(0) \cdot \left[ 1 - \frac{V_{1m}}{V_{1m}(R_m)} \right] \quad (77)$$

$V_{2a}(0)$  : énergie de distorsion engendrée par la limite de fatigue en torsion alternée,

$V_{1m}(R_m)$  : énergie moyenne correspondant à la résistance maximale du matériau en traction.

$$V_{1m}(R_m) = \frac{R_m^2}{2E G(dT_{tr}, \beta)} \quad (78)$$

$dT_{tr}$  est le degré de triaxialité en traction.

Il s'agit alors de comparer l'énergie de référence prévue par le critère  $V_{2ar}$  à l'énergie de référence résultante du chargement dynamique  $V_{2ap}$ . Le critère s'écrit:

$$V_{2ar} \leq V_{2ap} \quad (79)$$

### 1.8.3 Critères de Palin-Luc [51]

Ce critère est basé sur l'hypothèse suivante : En tout point M du matériau, l'énergie de déformation élastique totale  $W_a$ , pendant un cycle, est définie par l'expression :

$$W_a = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^e(t) \cdot dt \quad (80)$$

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, t, T$  : sont respectivement les contraintes et les déformations appliquées pour un état élastique adapté, le temps et la période.

L'auteur considère que la quantité  $W_a$ , introduite par Lasserre et Froustey [49], représente la moyenne sur un cycle de la densité volumique d'énergie totale mise en jeu.

Pour tout matériau élastique homogène et isotrope, toutes les composantes du tenseur des contraintes sont périodiques de période T. L'expression (80) s'écrit :

$$W_a = \underbrace{\left(\frac{1-2\nu}{6E}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_{1a}^2(t) \cdot dt}_{W_{sa}} + \underbrace{\left(\frac{1+\nu}{E}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T J_{2a}^2(t) \cdot dt}_{W_{da}} \quad (81)$$

Où E : Module de Young,

$\nu$  : Coefficient de poisson,

$I_{1a}(t)$  : Premier invariant du tenseur de contraintes,  $I_{1a}(t) = \text{trace} \sigma(t)$ ,

$J_{2a}(t)$  : Second invariant du tenseur déviateur de contraintes  $J_{2a}(t) = \frac{1}{2} \cdot S_{ija}(t) : S_{ija}(t)$ ,

Dans l'expression (81), le premier terme représente la partie sphérique  $W_{sa}$  de la moyenne sur un cycle de la densité volumique d'énergie élastique, le second représente sa partie déviatrice  $W_{da}$ . Palin-Luc [51] définit le paramètre  $\sigma^*$  comme une limite, telle qu'entre  $\sigma^*$  et  $\sigma_{-1}$  la sollicitation crée un endommagement microscopique qui ne se propage pas si elle est seule, mais contribue à la propagation de l'endommagement si elle est associée à d'autres contraintes supérieures à  $\sigma_{-1}$ .

A partir de ce postulat, Palin-luc [51] calcule la moyenne sur un cycle de sollicitation de la densité volumique d'énergie  $W_a^*$  correspondant à  $\sigma^*$ .

En se basant sur le critère de Froustey et Lasserre, l'auteur définit les points susceptibles d'être critique vis-à-vis de la tenue à la fatigue par l'ensemble des points où  $W_a$  est maximale. Ces points sont situés en surface de la pièce; autour de chacun de ces points et vers l'intérieur de la pièce se trouvent les surfaces d'iso- $W_a$ .

La surface extérieure de la pièce et la surface iso- $W_a^*$  délimitent un volume noté  $V^*$ . Sur ce volume les auteurs définissent la quantité énergétique  $\varpi_a$  donnée par la relation (82).

Pour une pièce et une sollicitation donnée,  $\varpi_a$  représente la moyenne volumique de la quantité d'énergie  $W_a$  supérieure à  $W_a^*$  autour du point critique considéré.

$$V^* = \{\text{point}(x,y,z) \text{ de la pièce tels que } W_a(x,y,z) \geq W_a^*\}$$

$$\varpi_a = \frac{1}{V^*} \cdot \iiint (W_a(x,y,z) - W_a^*) \cdot dV \quad (82)$$

Le critère de rupture est donné par la relation :

$$\varpi_a(C_i) < \varpi_{sol}^D(C_i) \quad (83)$$

La valeur limite  $\varpi_{soll}^D$ , d'un chargement multiaxial, au point critique  $C_i$  considéré est donnée par l'équation suivante :

$$\varpi_{soll}^D(C_i) = \varpi_{uniax}^D \cdot \frac{F(dT_{soll}(C_i), \beta)}{F(dT_{uniax}, \beta)} \quad (84)$$

$$\text{avec } \varpi_{uniax}^D = \frac{(\sigma_{Frot}^D)^2 - (\sigma_{Trac}^D)^2}{4 \cdot E}$$

$\sigma_{Frot}^D$  : La limite d'endurance en flexion rotative,

$\sigma_{Trac}^D$  : La limite d'endurance en traction alternée.

Les deux fonctions de degré de triaxialité sont données par :

- Pour un état de contrainte multiaxiale, la fonction  $F(dT_{soll}(C_i), \beta)$  est égale à :

$$F(dT_{soll}(C_i), \beta) = \frac{1}{(1 - dTa_{soll})} \left[ 1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dTa_{soll} [\exp(\beta) - 1]) \right] \quad (85)$$

avec  $dT_{soll}$  le degré de triaxialité pour un état de charge multiaxiale :

$$dT_{soll} = \frac{W_{sa}}{W_a} \quad (86)$$

Où  $W_{sa}$  et  $W_a$  représentent respectivement l'énergie sphérique alternée et l'énergie de déformation élastique totale.

- Pour un état de contrainte uniaxiale, la fonction  $F(dT_{uniax}, \beta)$  est égale à :

$$F(dT_{uniax}, \beta) = \frac{1}{1 - dTa_{uniax}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \ln(1 + dTa_{uniax} \cdot (\exp(\beta) - 1)) \right) \quad (87)$$

avec  $dTa_{uniax}$  le degré de triaxialité :  $dTa_{uniax} = \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{3}$  et  $\beta$  paramètre de sensibilité à la triaxialité des contraintes propre au matériau déterminé par l'équation (75).

Dans le cadre d'une utilisation prévisionnelle en bureau d'études, la vérification de la tenue en fatigue des structures se fait selon le synoptique ci-après. Il résume les étapes de calculs exposées dans ce critère (fig. 1.24).

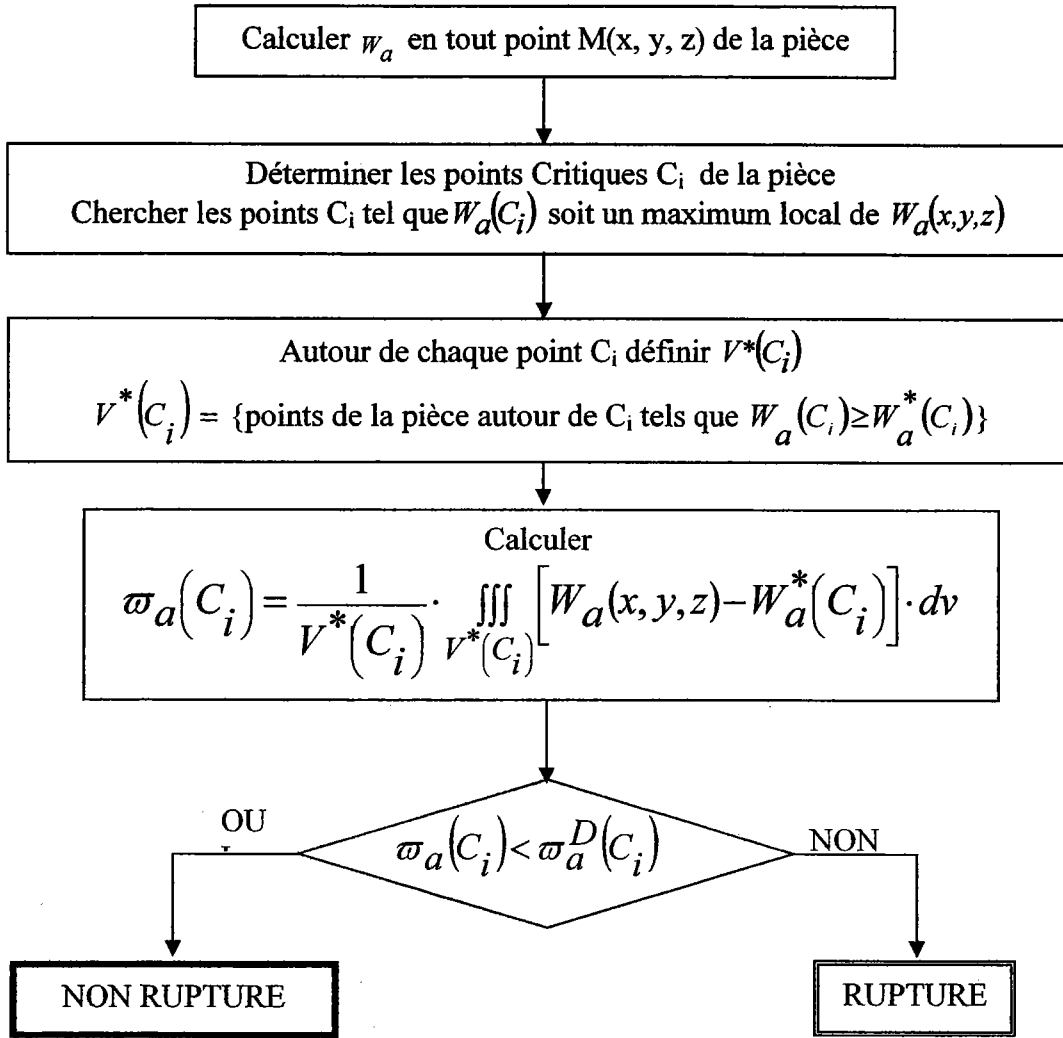


Figure 1.24 : Synoptique d'application du critère de Palin-Luc pour vérifier la tenue en fatigue d'une structure [51].

### 1.8.4 Critère de Banvillet

Banvillet [52] effectue les mêmes démarches que Palin Luc. Il calcule la densité du travail de déformation élastique fourni  $W_f(M)$  en chaque point M de la pièce :

$$W_f(M) = \sum_i \sum_j \int_T \left\langle \sigma_{ij}(M, t) \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^e(M, t) \right\rangle \cdot dt \quad (88)$$

Où  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e(M, t)$  sont les composantes du tenseur des vitesses de déformation élastique après adaptation du matériau,

$\sigma_{ij}(M, t)$  désignent les composantes du tenseur des contraintes au point M à l'instant t,

le symbole  $\langle A \rangle$  signifie  $\langle A \rangle = A$  si  $A \geq 0$  et  $\langle A \rangle = 0$  si  $A < 0$ .

#### 1.8.4.1 Recherche des points critiques

Les points critiques  $C_i$  sont les points de la pièce tels que  $W_f(C_i)$  est maximum local de  $W_f(M)$ .

#### 1.8.4.2 Calcul de degré de triaxialité des contraintes aux points critiques

Le degré de triaxialité des contraintes généré par la sollicitation en  $C_i$  se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$dT_{soll}(C_i) = \frac{W_f^v(C_i)}{W_f(C_i)} \quad (89)$$

où  $W_f^v$  est le travail de changement de volume fourni au point critique  $C_i$ .

#### 1.8.4.3 Calcul de seuil énergétique de non endommagement

La valeur du travail de déformation élastique dynamique fourni  $W_{fsoll}^*(C_i)$ , au-delà de laquelle il y a risque d'endommagement (apparition des microfissures), est donnée par la relation suivante :

$$W_{fsoll}^*(C_i) = W_{funiax}^* \cdot \frac{f(dT_{soll}(C_i), \beta)}{F(dT_{uniax}, \beta)} \quad (90)$$

#### 1.8.4.4 Détermination du volume d'influence

Le volume d'influence  $V^*(C_i)$  est défini autour de chaque point critique  $C_i$  par :

$$V^*(C_i) = \{ \text{points } M(x, y, z) \text{ de la pièce autour du point } C_i \text{ tels que } W_{fsoll}(C_i) \geq W_{fsoll}^*(C_i) \}.$$

#### 1.8.4.5 Calcul de la moyenne volumique de la densité du travail de déformation élastique dynamique

Autour de chaque point critique, la moyenne volumique de la densité du travail de déformation élastique dynamique fourni  $\varpi_{fsoll}(C_i)$ , considérée comme endommageant, est définie par la relation suivante :

$$\varpi_a = \frac{1}{V^*(C_i)} \cdot \iiint_{V^*} (W_{fsoll}(M) - W_{fsoll}^*(C_i)) \cdot dv \quad (91)$$

#### 1.8.4.6 Condition de non amorçage de fissure

Le critère s'exprime enfin par la relation suivante :

$$\varpi_{fsoll}(C_i) \leq \varpi_{fsoll}^D(C_i) \quad (92)$$

La valeur limite  $\varpi_{fsoll}^D$  au point critique  $C_i$  considéré est donnée par l'équation suivante :

$$\varpi_{fsoll}^D(C_i) = \varpi_{funiax}^D \cdot \frac{F(dT_{soll}(C_i), \beta)}{F(dT_{uniax}, \beta)} \quad (93)$$

L'utilisation de ce critère nécessite trois limites d'endurance qui sont la traction alternée, la torsion alternée et la flexion rotative alternée pour identifier les constantes  $W_{funiax}^*$ ,  $\varpi_{funiax,-1}^D$  et  $\beta$ .

- $W_{funiax}^*$  : Densité volumique du travail de déformation élastique fournie en un point M du matériau,
- $\varpi_{funiax}^D$  : Moyenne volumique de la quantité du travail de déformation élastique,
- $\beta$  : paramètre propre au matériau déterminé par l'équation (75).

$$W_f^*(uniax) = \frac{2 \cdot \sigma_{Trac}^{D2} - \sigma_{Frot}^{D2}}{E} \quad (94)$$

$$\varpi_f^D(uniax) = \frac{\sigma_{Frot}^{D2} - \sigma_{Trac}^{D2}}{E} \quad (95)$$

Afin de rendre compte, dans le cas de chargements complexes, de l'effet de la triaxialité des contraintes sur la limite d'endurance d'un matériau donné, Froustey et Lasserre et Palin-Luc ont utilisé une fonction empirique  $F$  dépendant d'un paramètre du matériau  $\beta$  (pris par Palin-Luc), et du degré de triaxialité des contraintes  $dTa$  au point critique  $C_i$ .

#### 1.8.4.8 Discussion

Froustey et Lasserre [49] ont élaboré un modèle basé sur des considérations énergétiques, en décomposant l'énergie totale en une énergie moyenne et une énergie alternée ou dynamique.

Palin-Luc [51] quant à lui propose une approche volumique tenant compte de l'effet de la distribution des contraintes et distinguant le type de chargement tout en se limitant à un rapport de charge égal à -1. Il introduit ensuite une contrainte critique en dessous de laquelle l'amorçage de fissures ne peut se produire. Cependant, si la sollicitation est comprise entre cette contrainte critique et la contrainte d'endurance, elle crée un endommagement microscopique qui ne se propage pas si elle est seule, mais elle contribue à la propagation de l'endommagement si elle est associée à des niveaux supérieurs à la limite d'endurance.

Banvillet [52] propose son critère, avec les mêmes démarches que celles de Palin-Luc, ne tenant compte que du travail fourni et applicable à tout type de chargements.

### 1.9 Conclusion

La liste des modèles, de dimensionnement en endurance, présentée n'est évidemment pas exhaustive. Nous avons tenté de rassembler à la fois les critères les plus connus et les plus récents, et de les répartir en quatre familles :

- Critères globaux :

- ✓ Avantages : simples à appliquer dans le cas d'un chargement proportionnel,
- ✓ Inconvénients : ne tiennent pas compte du type de chargement,
- Critères locaux :
  - ✓ Avantages : - basé sur des observations expérimentales,
  - ✓ Inconvénients : - complexité des algorithmes,
- Critères semi-locaux :
  - ✓ Avantages : - Application relativement simple,
    - tiennent compte de la géométrie de l'éprouvette et du type de chargement,
  - ✓ Inconvénients : - leur application par élément finis dépend de la qualité de maillage.
- Critères énergétiques :
  - ✓ Avantages : - simples à appliquer,

Les approches de type locales (plan critique) sont de plus en plus utilisées, et ce malgré la complexité des algorithmes, grâce à l'expansion de la capacité du calcul des ordinateurs. Pour les trajets de chargements proportionnels, les confrontations des prévisions de ces méthodes aux expériences publiées dans la littérature sont satisfaisantes. Néanmoins, ces prévisions restent souvent moins bonnes dans le cas de chargements non-proportionnels.

La finalité de notre travail est de comparer nos résultats expérimentaux aux prévisions des différents modèles choisis pour cette étude, de dégager les limitations de leur validité et d'en proposer, autant que possible, des améliorations de manière à les rendre plus réalistes.

Pour cela, des échantillons à base d'un acier constitutif des roues ferroviaires appelé ER7 proche du XC48 fourni par l'Agence d'Essai Ferroviaire, ont été découpés dans une roue de train afin d'effectuer des essais de fatigue multiaxiale servant à caractériser la roue en fatigue illimitée.

Chapitre II : Méthode Expérimentale et Analyse

2.1 Introduction

L'expérience industrielle montre que la rupture des pièces de machines ou de structures, quel que soit le mécanisme, dépend de nombreux facteurs : la sollicitation, la vitesse et la répartition des chargements, l'homogénéité et le mode d'élaboration de la matière, la température et l'environnement. Une analyse morphologique macroscopique du faciès de rupture des pièces détermine, en général, l'origine de la rupture. Statistiquement, la plupart des ruptures survenues en service sont dues à un processus de fissuration progressive sous sollicitations cycliques. Ainsi, la caractérisation des structures soumises à la fatigue s'avère judicieuse pour prévoir leur durée de vie.

L'objectif de notre étude concerne la fatigue multiaxiale d'une roue ferroviaire soumise à un trajet de chargement au cours du fonctionnement. Ce type de chargement a été relevé d'une roue étudiée par l'emplacement des différentes jauges qui mesurent les déformations sur la roue, comme le montre la figure 2.1.

Implantation des rosettes

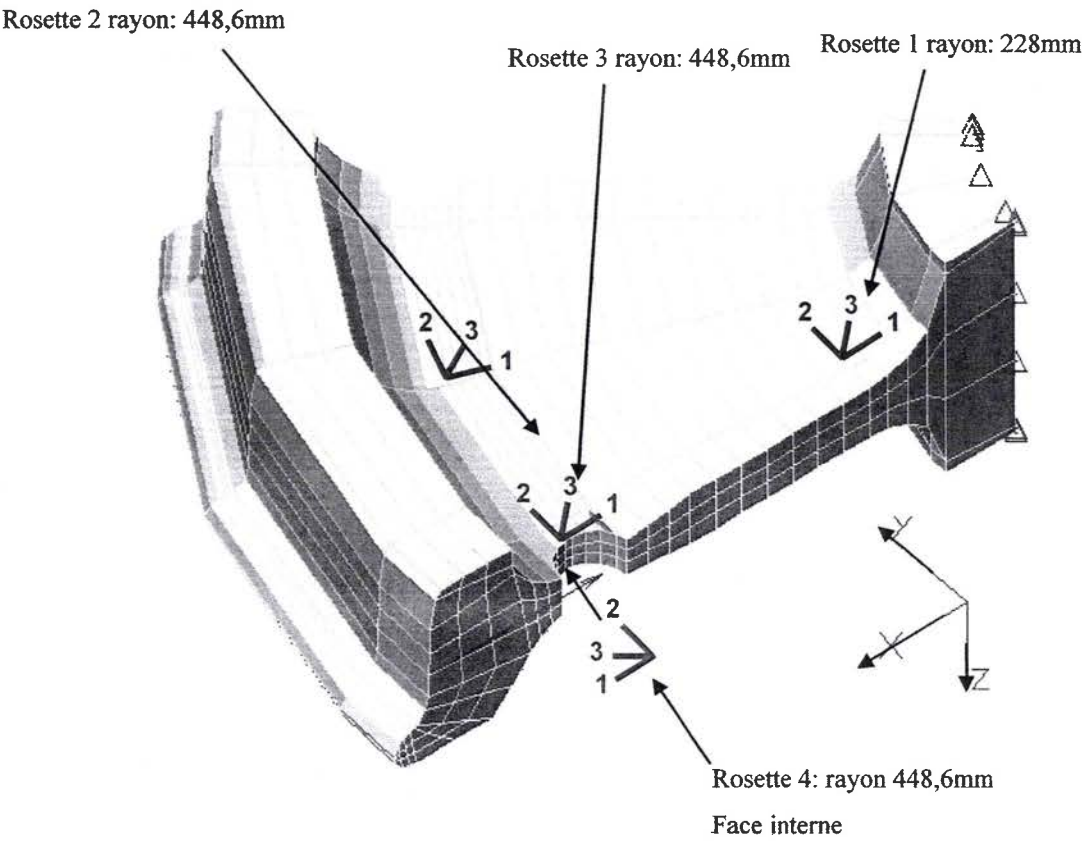


Figure 2.1 : Emplacement des différentes rosettes [63].

Le chargement subi par la roue, pour cette étude, est représenté par la figure 2.2.

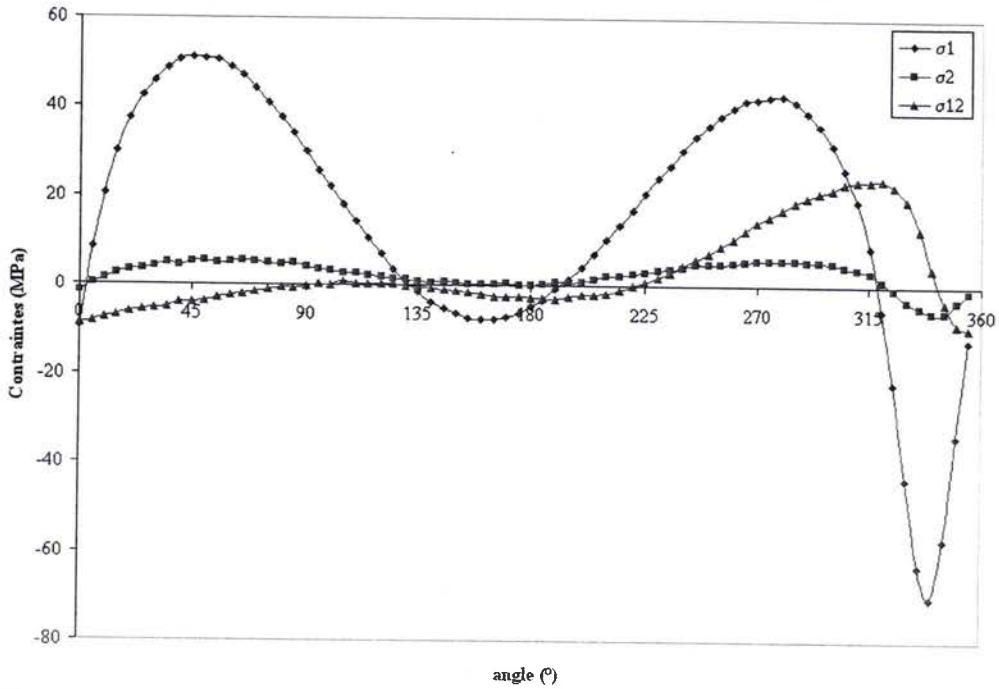


Figure 2.2 : Le chargement subi par la roue ferroviaire [63].

Ce chargement est de type multiaxial, nécessitant pour son application une machine triaxiale. Une telle machine de fatigue est coûteuse. La réalisation de ce type d'essai, dans notre laboratoire (machine de traction-torsion) n'est pas possible et exige une transformation de ce type de chargement en un chargement biaxial équivalent.

Le chargement relevé sur la roue (figure 2.1) est de la forme : 
$$\begin{bmatrix} \sigma_1(t) & \sigma_{12}(t) & 0 \\ \sigma_{12}(t) & \sigma_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
. Nous

avons appliqué le chargement de type : 
$$\begin{bmatrix} \sigma_1(t) & \sigma_{12}(t) & 0 \\ \sigma_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

Pour cela, quatre possibilités ont été suggérées pour  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$ , alors que  $\sigma_{12}(t)$  reste inchangé :

- On néglige  $\sigma_2(t)$  devant  $\sigma_1(t)$ , vu les faibles valeurs relevées de  $\sigma_2(t)$  par rapport à  $\sigma_1(t)$ ,
- On prend la déformation équivalente appliquée de  $\sigma_1(t)$  et de  $\sigma_2(t)$ ,
- L'invariant  $J_2(t)$  est le même pour les deux chargements,
- L'invariant  $I_1(t)$  est identique pour les deux chargements.

En vue de ces possibilités, les deux dernières s'avèrent les plus proches du chargement réel car elles ne négligent aucune composante du tenseur de contrainte. En plus, les contraintes  $\sigma_2(t)$  sont très faibles devant les contraintes  $\sigma_1(t)$ .

Finalement, un compromis entre les responsables de l'agence ferroviaire et du laboratoire de Fiabilité Mécanique a été conclu, pour choisir la dernière proposition pour l'étude du comportement de la roue en fatigue illimitée.

2.2 Matériau

Le matériau étudié est un acier xc48 fourni par l'agence d'essai ferroviaire [63], supposé homogène et isotrope. Les essais statiques ont permis de déterminer les caractéristiques mécaniques illustrées sur le tableau 2.1 et la figure 2.3. La composition chimique est représentée au tableau 2.2.

| Rm (MPa) | Re (MPa) | E (MPa) | A %    |
|----------|----------|---------|--------|
| 719.9    | 448.3    | 199395  | 17.4 % |

Tableau .2.1 : caractéristiques mécaniques du matériau [63].

| C    | Mn   | Si   | P     | S     | Ni   | Cr   | Cu   | Mo   | V     | Al   | Fe   |
|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|
| 0.52 | 0.73 | 0.33 | 0.013 | 0.009 | 0.08 | 0.25 | 0.12 | 0.03 | <0.01 | 0.02 | Base |

Tableau 2.2 : Composition chimique de la roue usinée (%) [63].

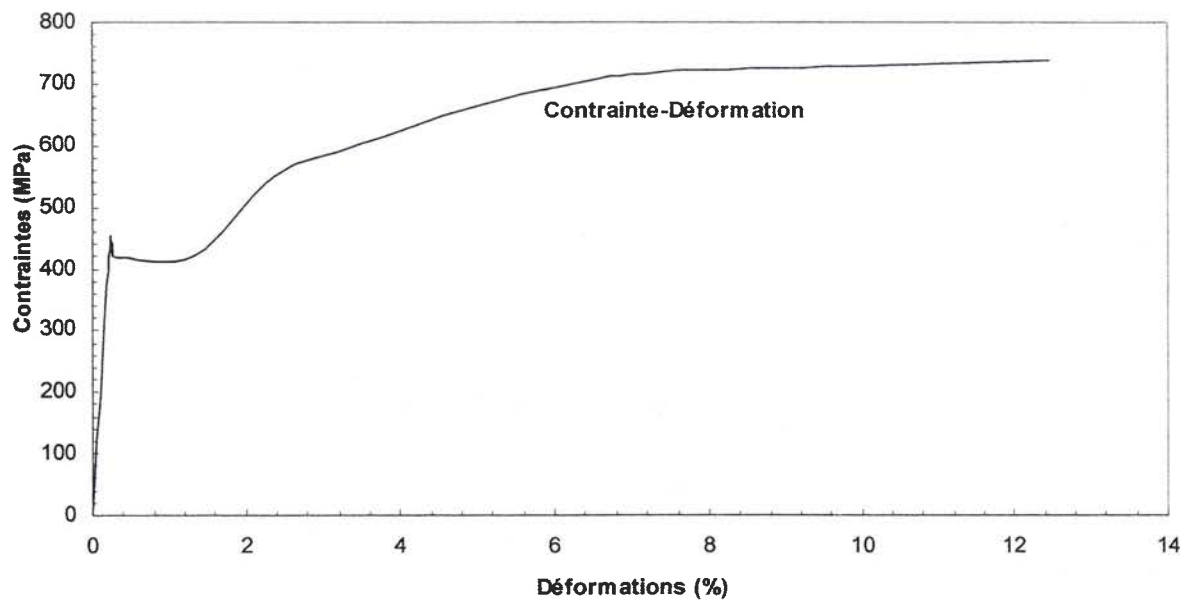


Figure 2.3 : Loi de comportement statique du matériau [63].

2.3 Géométrie des éprouvettes

Les différentes éprouvettes sont extraites d'une roue ferroviaire. Elles sont de forme cylindrique sans entaille, de diamètre  $d=8\text{ mm}$ , de longueur utile  $l=30\text{ mm}$  (fig. 2.4), de rugosité  $Ra\ 0.8\ \mu\text{m}$ .

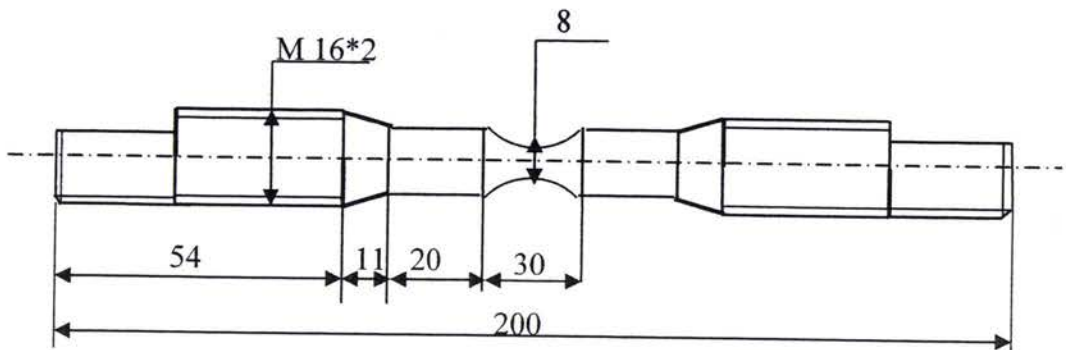


Figure 2.4 : Schéma d'une éprouvette lisse

Pour appliquer convenablement les critères de prévision, des essais de fatigue simple sont nécessaires. Ces essais, réalisés au laboratoire de l'agence d'essai ferroviaire, ont pour but de déterminer les limites d'endurance en traction alternée, torsion alternée et flexion rotative alternée.

2.4 Essai de Fatigue sous sollicitations simples

Les essais de fatigue [63], permettant d'estimer la limite d'endurance ainsi que le nombre de cycles à rupture, sont effectués par la méthode d'escalier.

2.4.1 Essai de Traction alternée symétrique

Les résultats d'essais de traction alternée symétrique, réalisés au laboratoire de l'agence d'essai ferroviaire, sont présentés au tableau 2.3. Ils permettent d'estimer la limite d'endurance du matériau pour une durée de vie de  $10^7$  cycles, à partir du déroulement de la méthode de l'escalier.

| N° éprouvette | $\sigma_a$ (MPa) | Nbre de cycles |
|---------------|------------------|----------------|
| T1            | 220              | 1.00 E+07      |
| 60            | 220              | 1.00 E+07      |
| 55            | 220              | 1.00 E+07      |
| 58            | 220              | 1.00 E+07      |
| 59            | 220              | 1.00 E+07      |
| 63            | 220              | 1.00 E+07      |
| 64            | 220              | 1.00 E+07      |
| 66            | 220              | 1.00 E+07      |
| 69            | 220              | 1.00 E+07      |
| 72            | 220              | 1.00 E+07      |
| 53            | 230              | 2.64 E+05      |
| 57            | 230              | 3.03 E+05      |
| 62            | 230              | 3.72 E+05      |

|    |     |           |
|----|-----|-----------|
| 67 | 230 | 4.71 E+05 |
| 56 | 230 | 4.79 E+05 |
| 71 | 230 | 7.90 E+05 |
| 54 | 230 | 8.13 E+05 |
| 65 | 230 | 1.13 E+06 |
| 61 | 230 | 3.43 E+06 |
| 52 | 230 | 1.00 E+07 |
| 68 | 240 | 4.69 E+04 |
| 51 | 240 | 1.60 E+05 |

|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|----|-----|-----|
| N° éprouvette       |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
| $\sigma_a$<br>(MPa) | T1        | 53        | 60        | 52        | 51        | 54        | 55        | 56        | 58        | 57        | 59        | 61        | 64        | 62        | 63        | 65        | 66        | 67        | 69        | 71        | 72        | i | Ni | iNi | iNi |
|                     | 240       |           |           |           | x         |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           | 2 | 1  | 2   | 4   |
|                     | 230       |           | x         |           | o         |           | x         |           | x         |           | x         |           | x         |           | x         |           | x         |           | x         |           | x         | 1 | 9  | 9   | 9   |
|                     | 220       | o         |           | o         |           |           | o         |           | o         |           | o         |           | o         |           | o         |           | o         |           | o         |           | o         | 0 | 0  | 0   | 0   |
| Nb de cycles        | 1.00 E+07 | 2.64 E+05 | 1.00 E+07 | 1.00 E+07 | 1.60 E+05 | 8.13 E+05 | 1.00 E+07 | 4.79 E+05 | 1.00 E+07 | 3.03 E+05 | 1.00 E+07 | 3.43 E+06 | 1.00 E+07 | 3.72 E+05 | 1.00 E+07 | 1.13 E+06 | 1.00 E+07 | 4.71 E+05 | 1.00 E+07 | 7.90 E+05 | 1.00 E+07 |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           | N | A  | B   |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |
|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |   |    |     |     |

Tableau 2.3 : Essai de fatigue matériau – Roue usinée - Traction R:-1

o : Epreuve non rompue à 1.00 E+07 cycles,  
x : Epreuve rompue.

Cet essai vise à déterminer la limite d'endurance à 10<sup>7</sup> cycles par la méthode de l'escalier pour un lot de 21 éprouvettes (10 sont rompues pour 11 non rompue).

La limite d'endurance obtenue, en traction alternée (R=-1), pour une durée de vie de 10<sup>7</sup> cycles, est de :  $\sigma_D = 226$  MPa .

2.4.2 Essai de flexion plane alternée symétrique

Les résultats des essais de flexion plane alternée symétrique, réalisés au laboratoire de l'agence d'essai ferroviaire, sont présentés au tableau 2.4. Ils permettent d'estimer la limite d'endurance du matériau.

| N° éprouvette | $\sigma_a$ (MPa) | Nbre de cycles |
|---------------|------------------|----------------|
| 501           | 220              | 1.00 E+07      |
| 511           | 240              | 1.00 E+07      |
| 506           | 250              | 3 069 390      |
| 502           | 250              | 1.00 E+07      |
| 503           | 250              | 1.00 E+07      |
| 512           | 250              | 1.00 E+07      |

|     |     |           |
|-----|-----|-----------|
| 521 | 250 | 1.00 E+07 |
| 522 | 250 | 1.00 E+07 |
| 524 | 250 | 1.00 E+07 |
| 505 | 260 | 614 292   |
| 504 | 260 | 1 435 149 |
| 510 | 260 | 1 471 123 |
| 523 | 260 | 3 544 768 |
| 508 | 260 | 6 296 580 |
| 507 | 260 | 1.00 E+07 |
| 514 | 270 | 822 405   |
| 513 | 270 | 903 914   |
| 509 | 270 | 1 307 177 |
| 517 | 280 | 504 249   |
| 516 | 280 | 556 730   |
| 515 | 280 | 556 975   |
| 520 | 290 | 394 854   |
| 518 | 290 | 457 447   |
| 519 | 290 | 483 835   |

|                     |               |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |          |           |           |          |                                     |
|---------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|-------------------------------------|
|                     | N° éprouvette |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |          |           |           |          |                                     |
| $\sigma_a$<br>(MPa) | 521           | 505       | 503       | 504       | 502       | 507       | 509       | 510       | 506       | 511       | 512       | 508      | 522       | 523       | 524      | i<br>Ni<br>iNi<br>i <sup>2</sup> Ni |
| 270                 |               |           |           |           |           |           | x         |           |           |           |           |          |           |           |          | 3 1 3 9                             |
| 260                 |               | x         |           | x         |           | o         |           | x         |           |           |           | x        |           | x         |          | 2 5 10 20                           |
| 250                 | o             |           | o         |           | o         |           |           |           | x         |           | o         |          | o         |           | o        | 1 1 1 1                             |
| 240                 |               |           |           |           |           |           |           |           |           | o         |           |          |           |           |          | 0 0 0 0                             |
| Nb de<br>cycles     | 1.00 E+07     | 6.14 E+05 | 1.44 E+06 | 1.00 E+07 | 1.00 E+07 | 1.00 E+07 | 1.31 E+06 | 1.47 E+06 | 3.07 E+06 | 1.00 E+07 | 1.00 E+07 | 6.30E+06 | 1.00 E+07 | 3.54 E+06 | 1.00E+07 | N A B                               |
|                     |               |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |          |           |           |          | 7 14 30                             |

Tableau 2.4 : Essai de fatigue matériau – Roue usinée - de flexion rotative R :-1.

o : Epreuve non rompue à 1.00 E+07 cycles,  
x : Epreuve rompue.

Cet essai vise à déterminer la limite d'endurance à 10<sup>7</sup> cycles par la méthode de l'escalier pour un lot de 15 éprouvettes (8 sont rompues pour 7 non rompue).  
Pour une même durée de vie à rupture  $N_R=10^7$  cycles, la contrainte de flexion plane alternée est de  $f_{-1P}=255\text{MPa}$ . La valeur de la flexion rotative alternée est calculée à partir de la

valeur en flexion plane alternée pondérée par le coefficient caractéristique de la sollicitation (1/1.05).

$f_{-1Rot} = 243 \text{ MPa}$

2.4.3 Essai de Torsion alternée

Les essais de torsion alternée, réalisés au laboratoire de l'agence d'essai ferroviaire, sont présentés au tableau 2.5. Ils permettent d'estimer la limite d'endurance du matériau pour 10<sup>7</sup> cycles à partir du déroulement de la méthode de l'escalier.

|               |           | N° éprouvette |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|---------------|-----------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|----|-----|-------------------|--|
| $M_t$<br>(Nm) |           | 101           | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 115 | 114 | 116 | i | Ni | iNi | i <sup>2</sup> Ni |  |
| 140           |           |               |     |     |     |     |     | x   |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 3 | 0  | 0   | 0                 |  |
| 130           |           |               | x   |     |     |     | o   |     | x   |     | x   |     |     |     |     |     |     | 2 | 1  | 2   | 4                 |  |
| 120           |           | o             |     | x   |     | o   |     |     |     | o   |     | x   |     | x   |     | x   |     | 1 | 3  | 3   | 3                 |  |
| 110           |           |               |     |     | o   |     |     |     |     |     |     |     | o   |     | o   |     | o   | 0 | 4  | 0   | 0                 |  |
| Nb de cycles  | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   | Z  |     |                   |  |
|               | 8.44 E+05 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 3.80 E+06 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.19 E+05 |               |     |     |     |     |     | x   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 4.49 E+05 |               |     |     |     |     |     |     | x   |     | x   |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     | o   |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 5.64 E+05 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.74 E+06 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     | x   |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 3.89 E+06 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | x   |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     | o   |     |     |     |     |     |     |   |    |     |                   |  |
|               | 3.69 E+06 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | x   |     |   |    |     |                   |  |
|               | 1.00 E+07 |               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | o   |   |    |     |                   |  |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 7 |
|---|---|---|

| Type d'essai                   | Rapport | Limite d'endurance alternée (MPa) |
|--------------------------------|---------|-----------------------------------|
| ✓ Traction alternée symétrique | -1      | 226                               |
| ✓ Flexion Rotative symétrique  | -1      | 243                               |
| ✓ Torsion alternée symétrique  | -1      | 178                               |

Tableau 2.6 : limites d'endurances, obtenues sur géométries lisses, pour les essais simples pour une durée de vie de  $10^7$  cycles.

2.5 Essai de fatigue multiaxiale non-proportionnel

Après transformation du tenseur de contrainte équivalent au chargement subi par la roue étudiée pendant son fonctionnement, celui-ci devient un signal biaxial non proportionnel. Cette non proportionnalité est due à la non constance, tout au long du cycle, du rapport entre la force de traction et le couple de torsion.

2.5.1 Machine d'essai

Pour les essais multiaxiaux de traction-torsion, une machine de type INSTRON 1343 comportant un système de pilotage INSTON 8500 est utilisée (fig. 2.5). Cette machine, à deux cellules de charge (pour la torsion et la traction), est équipée de deux servo-valves et de deux tours de contrôle qui permettent de réaliser des essais bi-axiaux (traction–torsion).

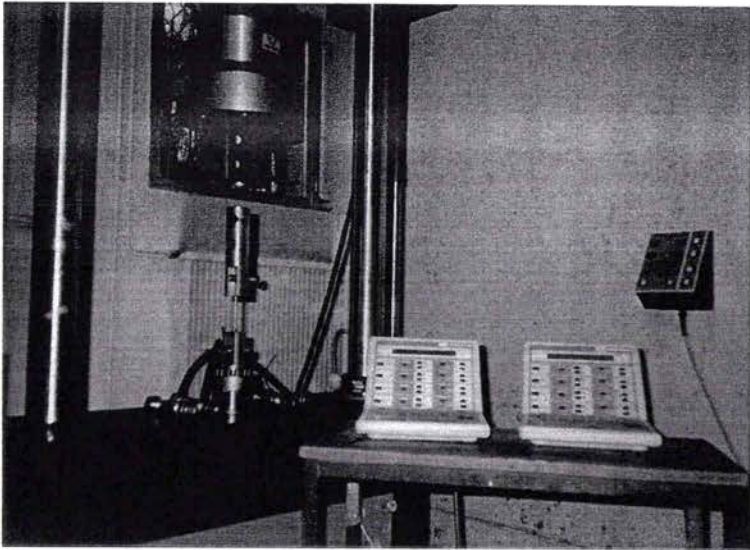


Figure 2.5 : Machine d'essais Instron 1343 avec le système de pilotage 8500.

2.5.2 Acquisition des données

Pour appliquer le chargement, multiaxial non-proportionnel à amplitude variable, à cette machine qui n'est pas prédisposés pour ce type de chargement. Une programmation du signal par le biais du logiciel Labview était nécessaire. Ce programme permet d'appliquer le chargement multiaxial point par point (contrôle en mode de charge), d'assurer et de contrôler

les chargements appliqués. Trois jauges de déformations à 45° ont été collées sur la surface utile de l'éprouvette (fig. 2.6), afin de relever les déformations données par les jauges et de les comparer aux déformations données par l'application du signal réel.

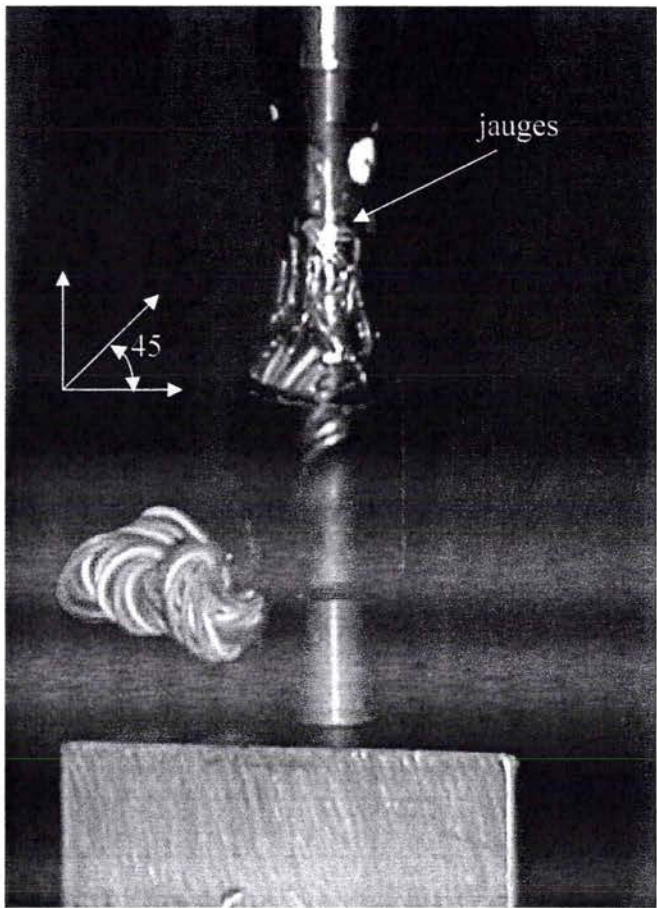


Figure 2.6 : Emplacement des jauges de déformations.

Les mesures des déformations sont enregistrées et comparer aux valeurs appliquées (fig. 2.8).

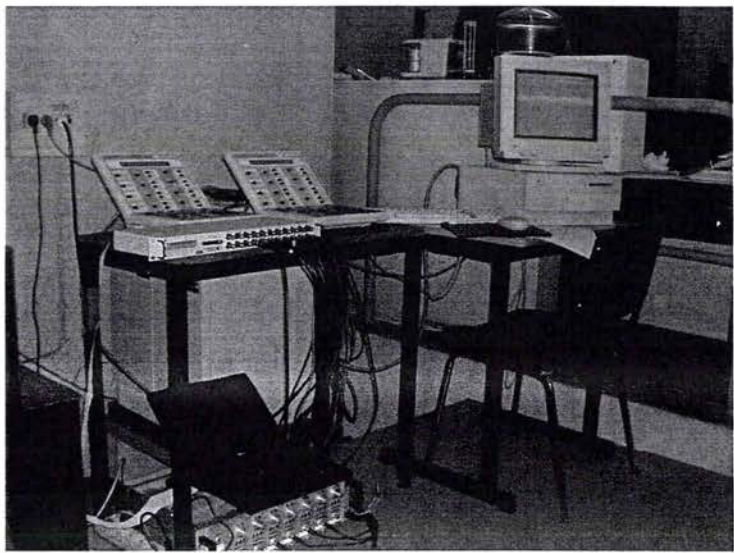


Figure 2.7 : Acquisition des données.

### 2.5.3 Essai multiaxial non-proportionnel à amplitude variable

L'essai consiste à appliquer un chargement multiaxial non-proportionnel à amplitude variable, en l'occurrence traction-torsion sur l'éprouvette cylindrique lisse, et de déterminer le nombre de cycles à rupture (condition d'arrêt est la rupture totale de l'éprouvette). Le chargement a été mesuré et comparé aux valeurs appliquées, figure 2.8.

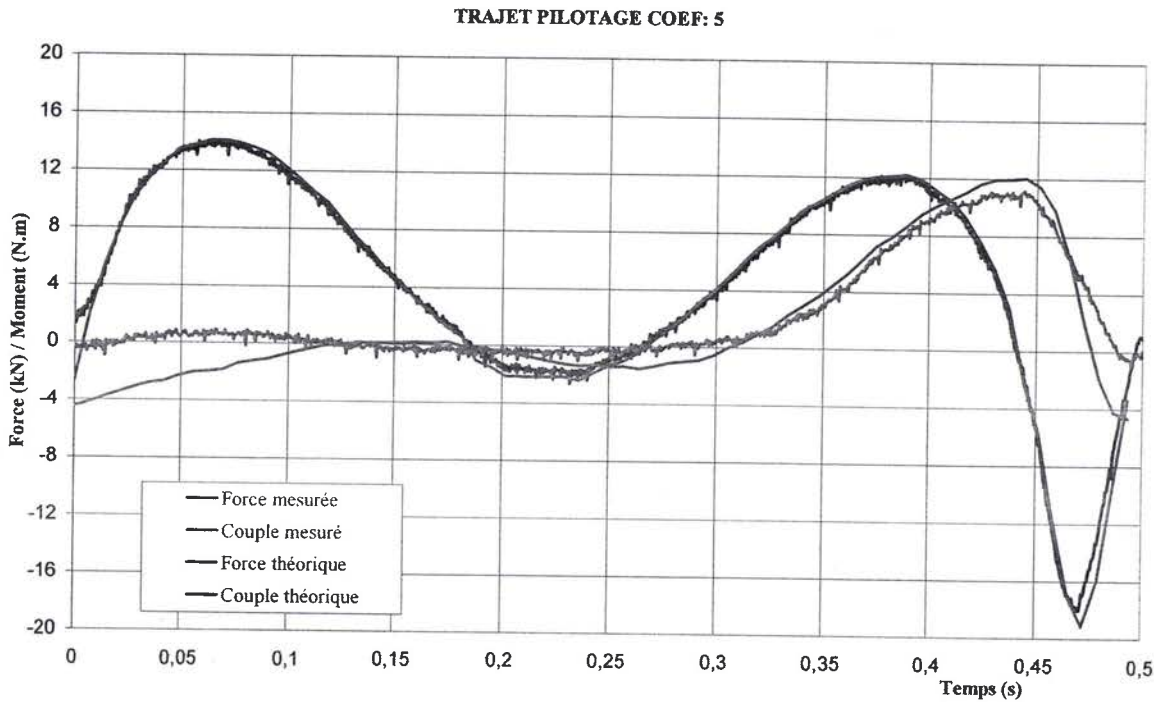


Figure 2.8 : Signal théorique appliqué et mesuré de période  $T = 0.5s$ .

Nous constatons une bonne corrélation entre les deux signaux représentant la charge uniaxiale. Par contre une légère différence est apparue aux faibles valeurs du moment de torsion. Ceci est dû à la précision de la machine. En effet, la pleine échelle de la machine est de  $\pm 2000$  N.m. Cependant, notre intervalle est tellement faible que la commande a du mal à suivre le signal pour les petites valeurs.

NB : Vu le résultat, on a considéré que le chargement bon pour la suite de notre étude.

La plupart des études rencontrées dans la littérature se basent sur des signaux proportionnels ou non-proportionnels à amplitude constante, utilisant la contrainte en fonction du nombre de cycles à rupture pour tracer la courbe de Wöhler ou de Gassner. Cependant, dans notre cas, il s'agit d'un signal multiaxial non-proportionnel à amplitude variable, où la représentation de la courbe de fatigue sous la forme de Wöhler reste complexe.

Pour remédier à cette complexité, nous nous sommes basés, pour une première approche, sur un facteur multiplicateur de charge pour représenter la courbe de fatigue. Ce facteur n'est qu'une expansion de chargement réel.

Les courbes, représentées (fig. 2.9), exposent les différents chargements appliqués au cours des essais de fatigue (une homothétie du signal réel).

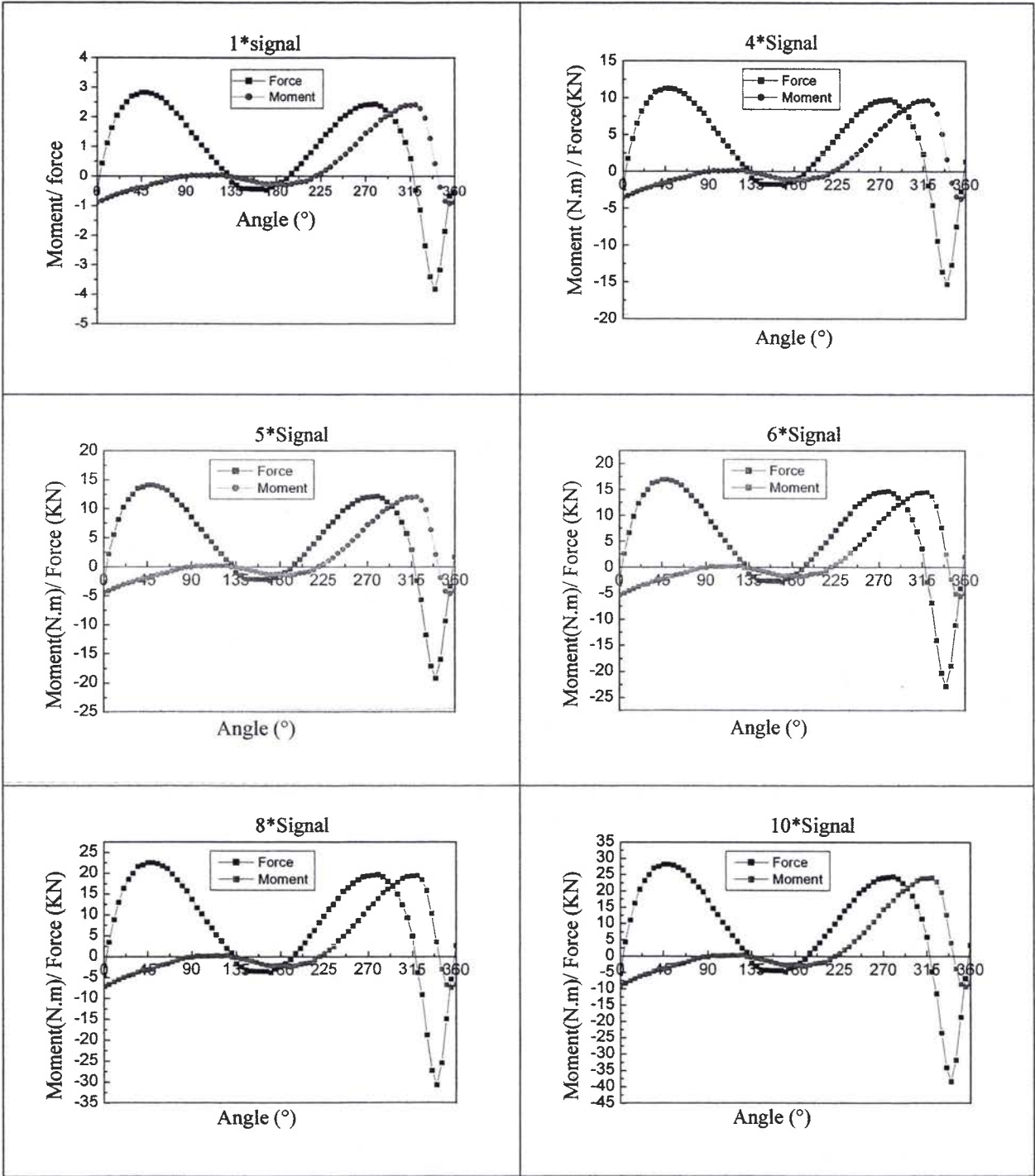


Figure 2.9 : Différents chargements de consignes.

2.5.4 Résultats expérimentaux en traction-torsion

Les résultats relevés durant les essais de traction-torsion sont reportés dans le tableau (2.7). Ils représentent la durée de vie de chaque éprouvette et le coefficient multiplicateur de charge correspondant.

| Facteur multiplicateur de charge | Nr (cycles) |
|----------------------------------|-------------|
| 4*charges                        | 894766      |
| 5*charges                        | 57843       |
| 5*charges                        | 67731       |
| 6*charges                        | 38990       |
| 6*charges                        | 24103       |
| 8*charges                        | 3800        |
| 8*charges                        | 3894        |
| 8*charges                        | 2403        |
| 10*charges                       | 2180        |
| 10*charges                       | 1456        |

Tableau 2.7 : Durée de vie en fonction des différents facteurs de charges.

Pour tracer la courbe de fatigue, nous avons pris pour l'axe des abscisses le nombre de cycles à rupture  $N_R$ , et pour l'axe des ordonnées le facteur multiplicateur de charge correspondant (fig. 2.10). Le lissage des points est réalisé en appliquant l'équation de Basquin, qui donne un bon coefficient de corrélation de  $R^2=0.98$ .

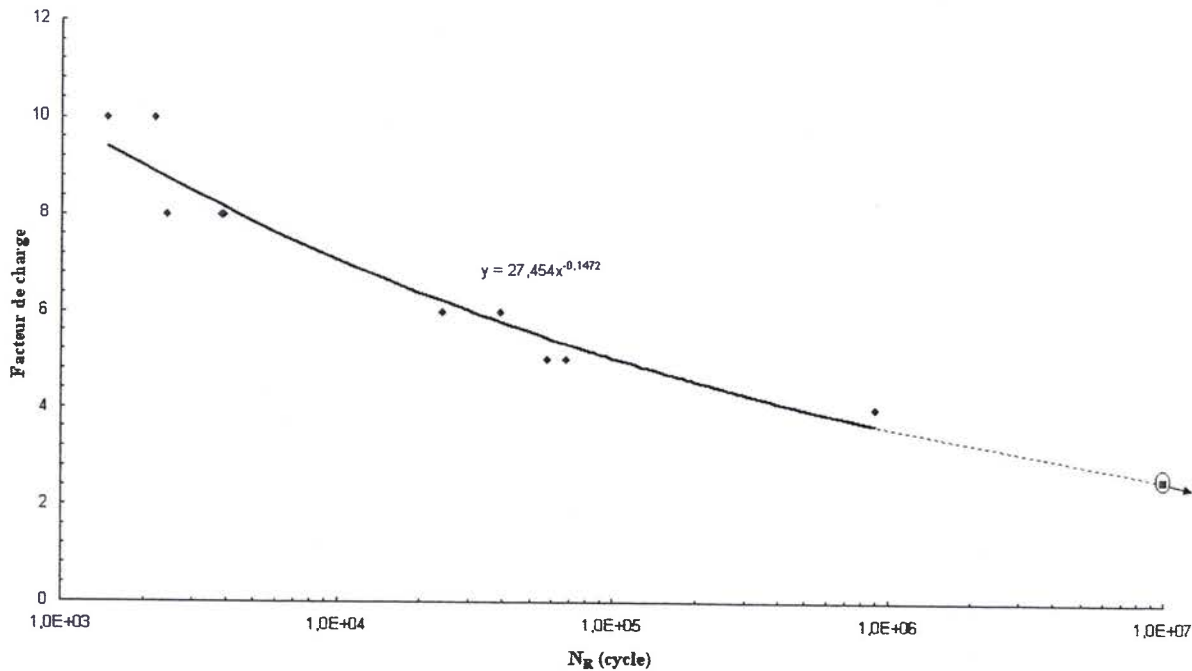


Figure 2.10 : Courbe expérimentale de fatigue sous sollicitation multiaxiale Traction-Torsion non proportionnelle à amplitude variable.

On remarque que l'extrapolation de la courbe, à une durée de vie de  $10^7$  cycles, donne un coefficient multiplicateur de charge de 2.56, valeur prise comme référence. Elle représente la limite d'endurance  $\sigma_D$ .

Remarque : Ce chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable a été réalisé avec une fréquence 2 Hz. Dès qu'on dépasse cette fréquence la machine s'arrête, car le système d'asservissement n'arrive plus à suivre le signal. Donc, on était contraint d'appliquer cette fréquence. L'essai à  $10^7$  cycles demande des semaines d'essais, ce qui est coûteux. Pour cela, on s'est contenté d'une estimation de cette valeur par la courbe de Basquin.

Nota : Cette valeur estimée est prise comme référence et sera comparer avec toutes les prévisions des différents modèles et à prendre avec précaution.

**Discussion**

La faible dispersion relative des résultats expérimentaux, justifiée par le faible nombre de points expérimentaux, au niveau de chaque chargement, nous laisse supposer que le matériau est homogène, sans négliger le fait que les éprouvettes ont été prélevées sur une seule roue.

**2.5.5 Etude Fractographique**

**2.5.5.1 Aspect Macroscopique**

L'étude fractographique macroscopique des éprouvettes, soumises à différents chargements multiaxiaux non proportionnels à amplitude variable, a permis d'analyser la surface de rupture. Le faciès de rupture des échantillons montre une rupture typique de ruine par fatigue : une première zone lisse et soyeuse qui constitue la zone de propagation de fissure de fatigue et une seconde zone plus rugueuse qui correspond à la rupture finale de l'éprouvette (Fig.2.11).

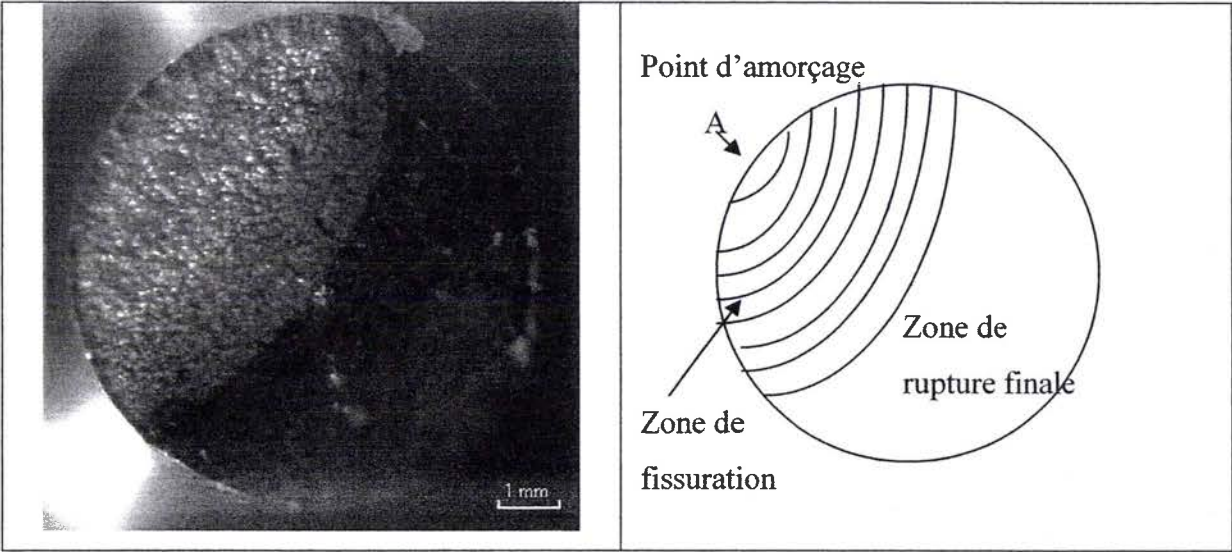


Figure 2.11 : faciès de l'éprouvette ayant rompue à 657 cycles (10 fois le signal).

On constate que la rupture finale est reportée à l'opposé de la zone d'amorçage. Le point d'amorçage est probablement situé en A (fig.2.11). Comme le montre la figure 2.12, la zone de fissuration est perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette, et montre que la fissure de fatigue se propage perpendiculairement à la contrainte de traction.

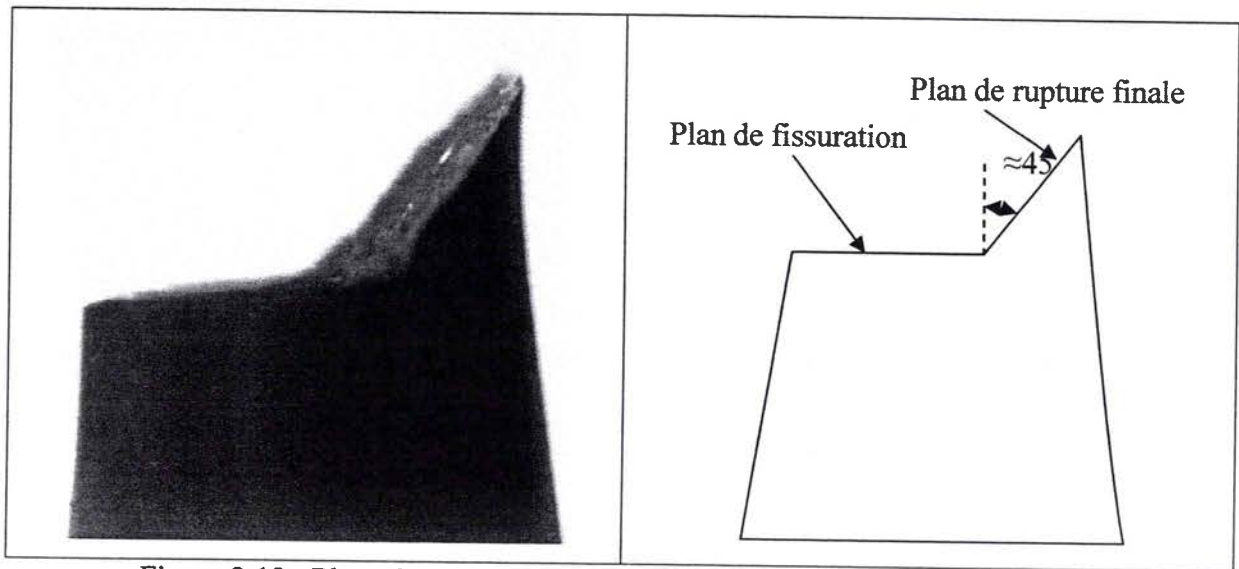


Figure 2.12 : Plans de rupture ayant rompue à 657 cycles (10 fois le signal).

La rupture finale de l'échantillon s'oriente à peu près de 45°. La rupture d'un matériau ductile s'effectue dans le plan de cisaillement maximum. L'orientation du faciès montre à nouveau que la rupture finale de l'échantillon est principalement liée à la composante de traction du cycle appliqué.

La figure 2.13 représente le faciès de rupture d'une éprouvette sollicitée par un chargement de 5 fois le signal.

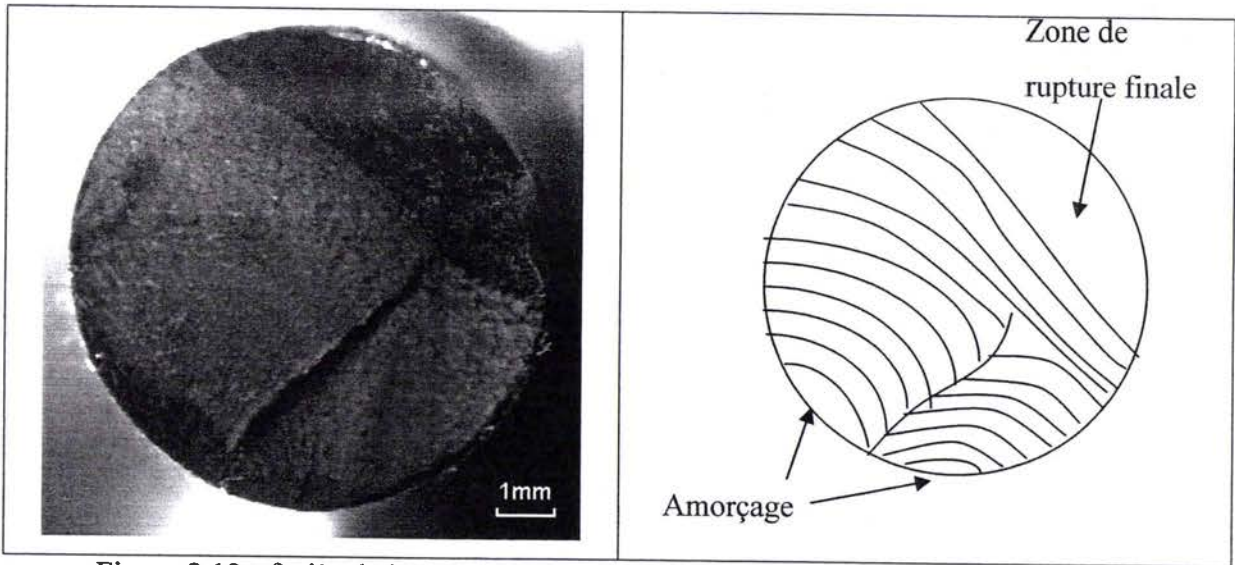


Figure 2.13 : faciès de l'éprouvette ayant rompue à 67731 cycles (5 fois le signal).

Pour ce type de chargement, l'amorçage s'initie dans deux plans différents perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette. Ces plans de fissures se rejoignent.

La figure 2.14 montre le faciès d'une éprouvette sollicité par un chargement de 4 fois le signal.

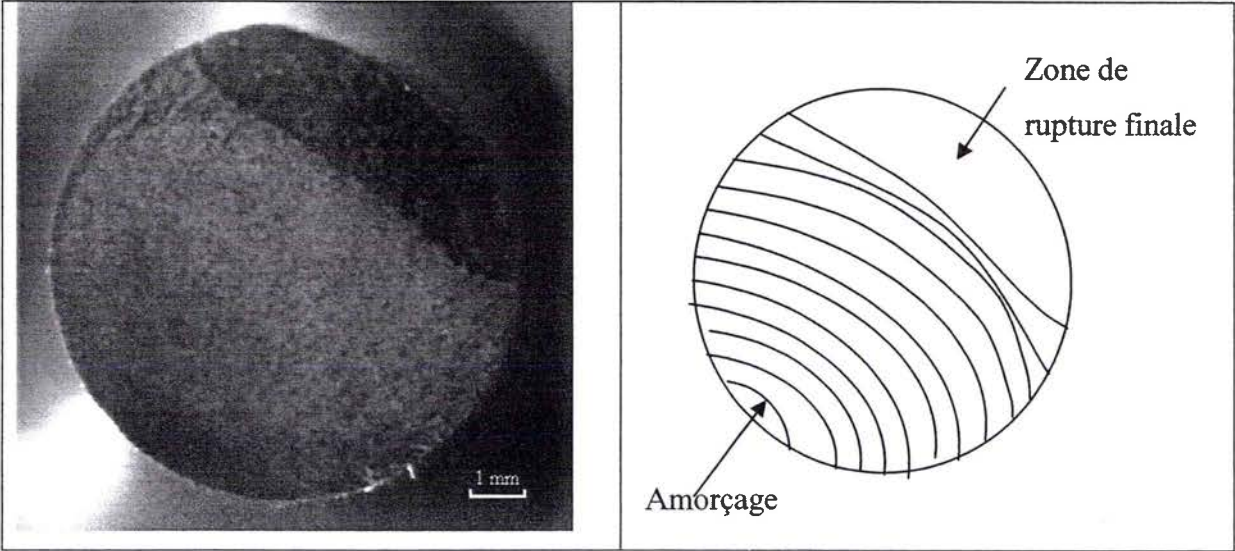
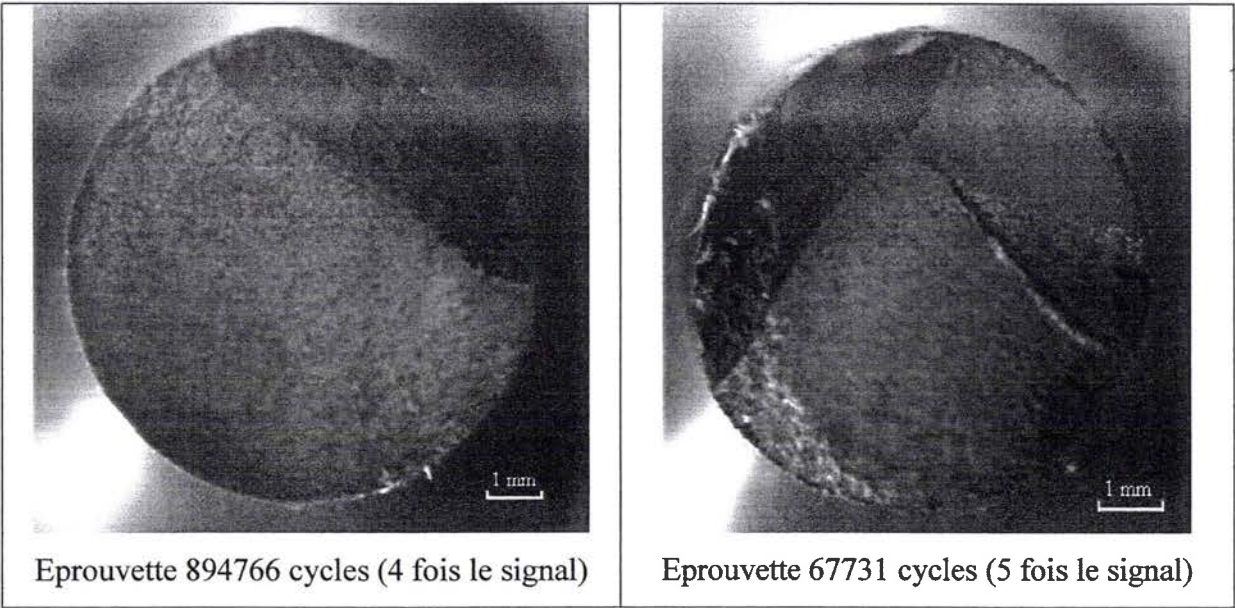


Figure 2.14 : faciès de l'éprouvette ayant rompu à 894 766 cycles (4 fois le signal).

La taille de la zone de rupture finale est fonction du niveau de sollicitation appliqué à l'échantillon, cette zone varie inversement proportionnel au chargement appliqué. En augmentant le coefficient multiplicateur de charge, on s'approche des essais expérimentaux oligocycliques. Toutes ces observations montrent combien le caractère des surfaces de rupture de fatigue est en dépendance direct avec la nature et l'intensité des sollicitations qui leur donnent naissance (Fig.2.15).



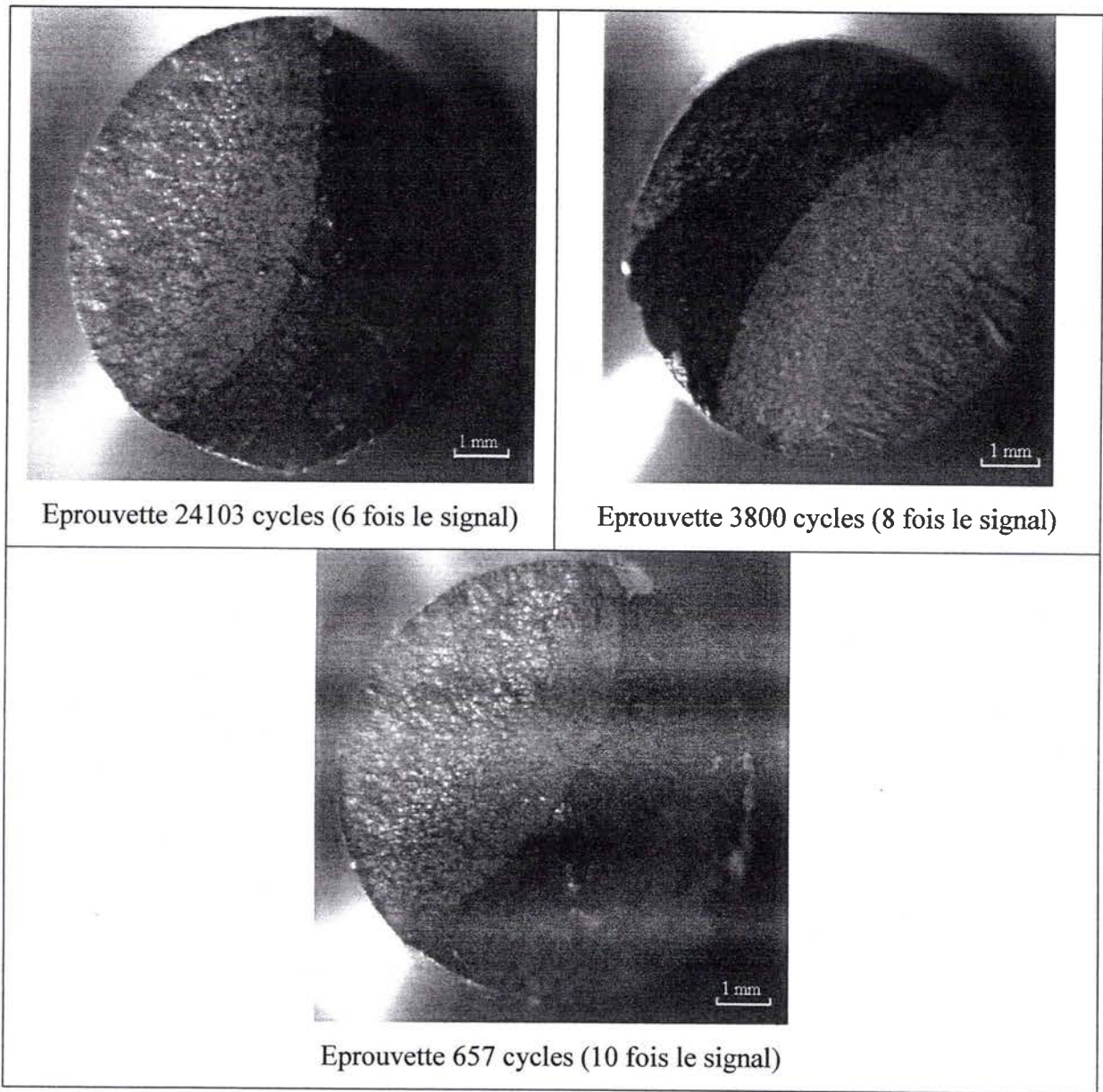


Figure 2.15 : Effet du chargement sur le faciès de rupture.

Le tableau 2.8 montre l'évolution de la propagation des fissures d'éprouvettes en fonction des coefficients multiplicateurs de charge.

| Facteur multiplicateur de charge | (%) diamètre<br>(dans la zone de propagation de fissures) |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 4                                | 74 %                                                      |
| 5                                | 68%                                                       |
| 6                                | 59%                                                       |
| 8                                | 55%                                                       |
| 8                                | 54%                                                       |
| 10                               | 51%                                                       |

Tableau 2.8 : Pourcentage de dégradation des surfaces mesurées.

Cette évolution de dégradation suit une loi puissance représentée par la courbe (fig.2.16).

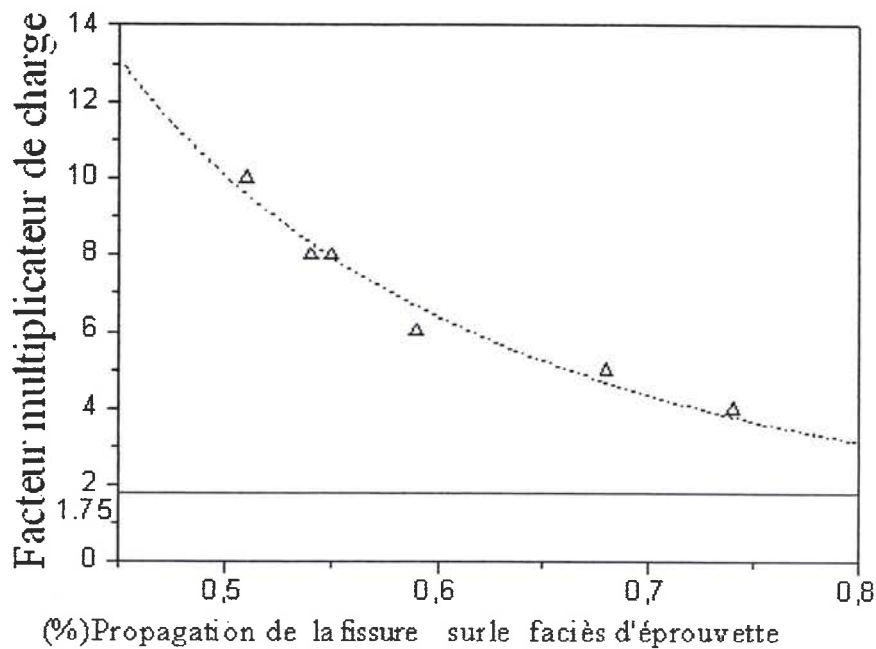


Figure 2.16 : évolution de la propagation de la zone des fissures.

Cette fonction estime que théoriquement, un facteur multiplicateur de charge de 1.75 est suffisant pour que la propagation de fissure atteigne toute la surface. Or, pratiquement la zone de rupture finale existe toujours (ligament). Ce facteur multiplicateur est différent du résultat estimé en endurance qui est de l'ordre de 2.56. Cette différence est due au peu d'échantillons analysés. Si on prend une propagation de la fissure sur 90% de la surface, on obtient un facteur de charge d'une valeur 2.32, valeur proche du résultat extrapolé à  $10^7$  cycles.

**Remarque :** Le chargement appliqué est multiaxial non proportionnel à amplitude variable, donc on a l'amplitude et la direction qui varient pendant toute la période. Or, vu les plans de propagations des fissures des différents chargements, on constate qu'une seule direction qui est imposée.

2.5.5.2 Aspect Microscopique utilisant le Microscope Electronique à Balayage

Cette méthode d'observation est nécessaire pour mieux constater et analyser des fissures de surface.

L'aspect microscopique, utilisant le Microscope électronique à balayage de la surface d'une éprouvette sollicité en chargement multiaxial non-proportionnel à amplitude variable et d'un facteur multiplicateur de charge de 4, est présenté à la figure (2.17).



Figure 2.17 : Propagation des fissures et présence d'inclusions.

Pour un facteur multiplicateur de charge de 4, la traction force la propagation des fissures dans le même sens que sa direction. La torsion a peu d'influence sur la propagation dans ce type de chargement. Le faciès après rupture reste plan. Des microfissures séparent les zones dans lesquelles on observe des stries de fatigue et montre le sens de propagation locale fig.2.18 (a).

Les faciès de rupture, présentés dans les photos de la figure 2.18, montrent le caractère de la propagation des fissures par fatigue dans le cas d'un chargement non-proportionnel de traction-torsion de facteur multiplicateur de charge de 5. La traction force la propagation des fissures dans le même sens que sa direction. L'image (b) grossissement de l'image (a), montre les stries de fatigue.

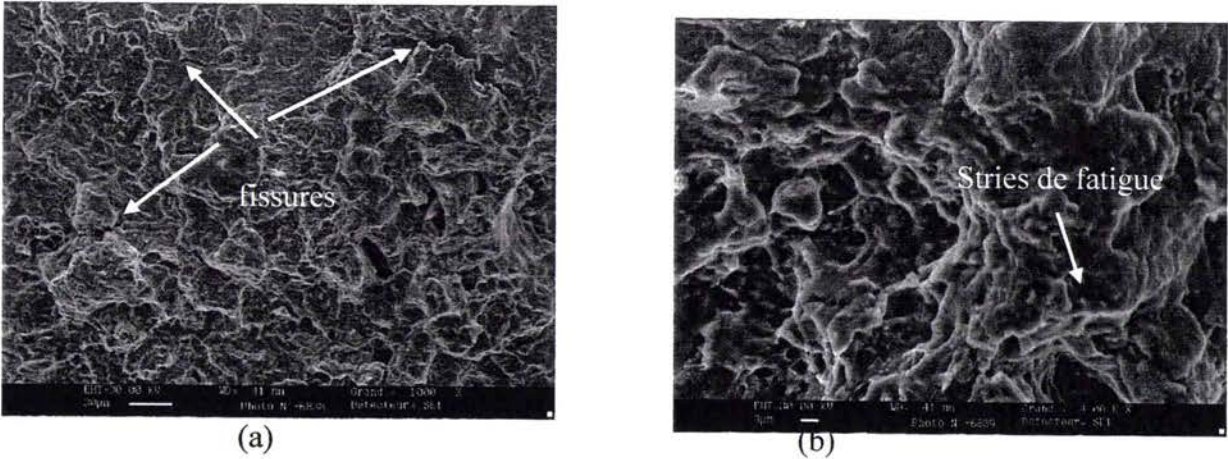


Figure 2.18 : fissures et stries de fatigue.

Les 2 photos de la figure 2.19 représentent les faciès de rupture d'une éprouvette lisse sollicitée par un chargement non-proportionnel de traction-torsion de facteur multiplicateur de charge de 6.

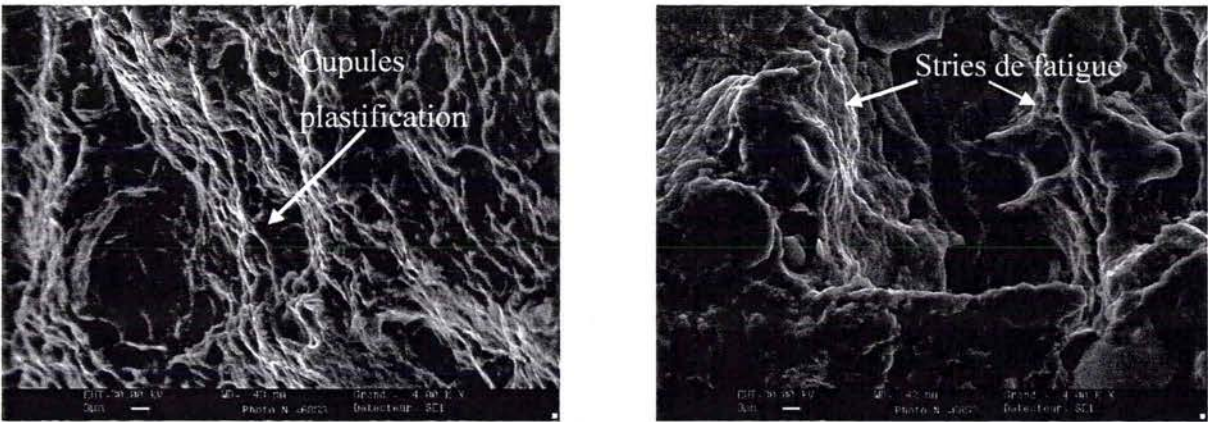
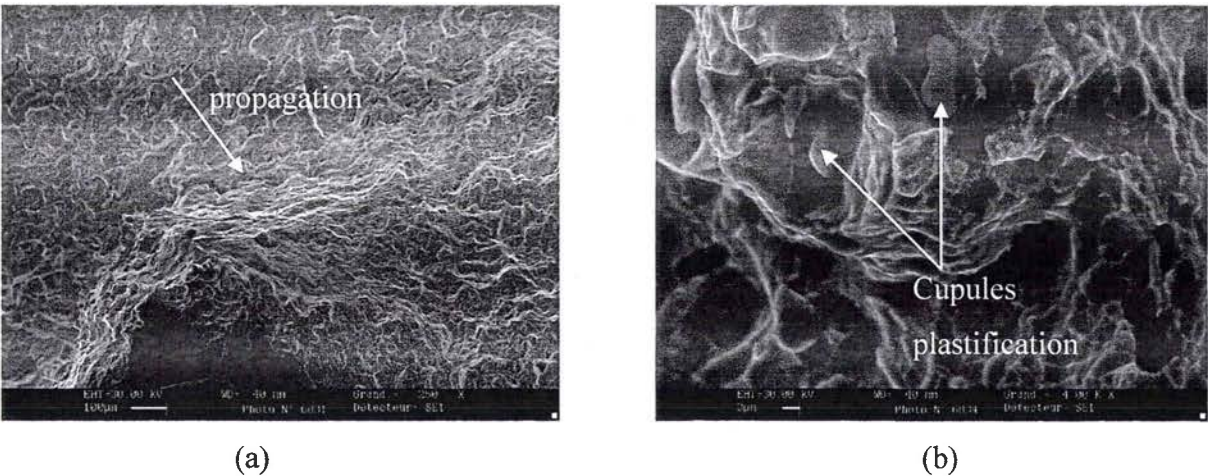


Figure 2.19: Stries de fatigue et décohésion de cupules.

Les faciès de rupture, présentés dans les 2 photos de la figure 2.20 et de facteur multiplicateur de charge de 8, représentent le caractère de la propagation des fissures par fatigue. La figure 2.20.b montre la décohésion de quelques inclusions.



(a) (b)  
Figure 2.20: Stries de fatigue et de décohésion de cupules.

Les 2 photos de la figure 2.21 présentent les faciès de rupture d'une éprouvette sollicitée par un chargement combiné non-proportionnel d'un facteur multiplicateur de charge de 10. La figure (2.21.a) représente une zone de rupture ductile. La figure (2.21.b) représente une propagation des fissures avec des stries accentuées.

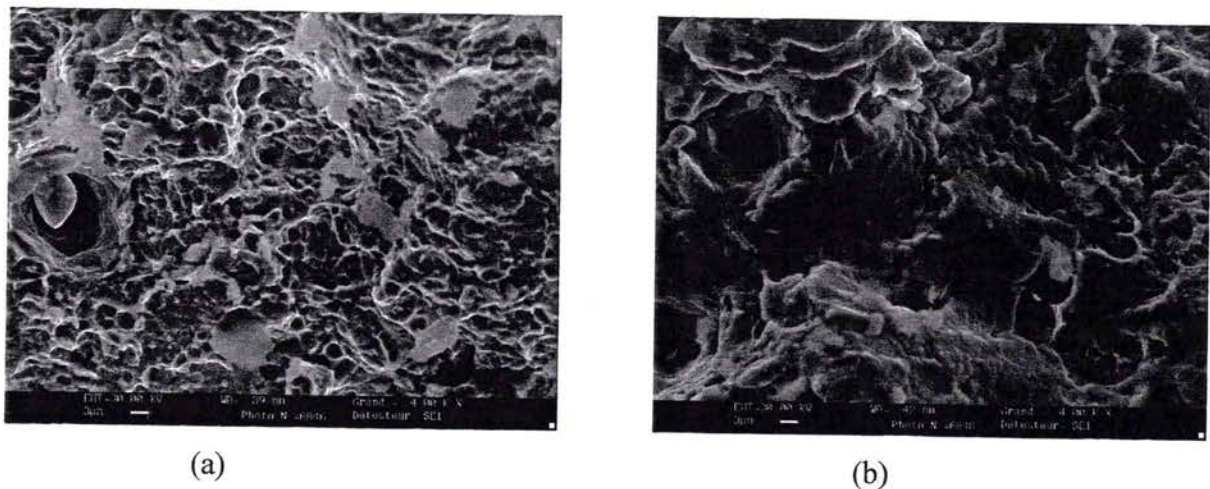


Figure 2.21: Faciès de rupture d'une éprouvette sous un chargement multiaxial non-proportionnel d'un facteur multiplicateur de charge de 10.

### Conclusion partielle :

Compte-tenu du signal multiaxial non-proportionnel appliqué, une première approche a été proposée pour tracer la courbe de fatigue, en considérant un facteur multiplicateur de charge représentant le signal entier. La courbe de fatigue estime que ce facteur d'endurance est de l'ordre de 2.56, alors que la courbe de la propagation de fissure dans les faciès estime que théoriquement ce facteur est de l'ordre de 1.75. Alors que ce facteur est égale à 2.32 pour 90% de la propagation de fissure.

L'étude des faciès a montré que le mode de rupture est ductile, en présence de plusieurs cupules. Même en présence d'un chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable (direction varie pendant la période), la zone de propagation des fissures est perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette, et ces fissures de fatigue sont propagées perpendiculaire à la contrainte de traction. Afin de confronter l'expérience aux prévisions des différents modèles, nous présentons dans le chapitre III de larges détails sur cette confrontation.

**Chapitre III : Applications des différents modèles et proposition d'un nouveau critère basé sur l'approche volumétrique en d'endurance**

**3.1 Introduction**

Ce chapitre analyse les applications des différents critères. Chaque critère a été défini selon ses propres conditions, en utilisant leurs propres coefficients qui dépendent du nombre de cycles correspondant à  $10^7$  cycles. Parmi ces critères, on citera :

- Critère de Dang Van,
- Critère de Mataké,
- Critère de Findley,
- Critère de Carpinteri
- Critère de Crossland,
- Critère de Sines,
- Critère de Qylafku.

Vu la complexité du signal de chargement, une première approche de comparaison entre les différents modèles sera basée sur le choix d'un facteur multiplicateur de charge.

La deuxième méthode est de comparer les contraintes équivalentes données par les différents modèles à la contrainte de Von Mises maximale du chargement multiaxial non-proportionnel.

**3.2 Applications des différents modèles**

**3.2.1 Critères locaux**

**3.2.1.1 Critère de Dang Van**

Le critère de Dang Van s'écrit :

$$\text{Max}_n \text{Max}_t (\tau_a(t) + \alpha \cdot P(t)) \leq \beta \tag{1}$$

Le calcul des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  nécessite deux essais de fatigue simple pour la même durée de vie de  $10^7$  cycles :

- ❖ Pour une torsion alternée pure :  $P(t)=0$  et  $\beta=\tau_{-1}$ ,
- ❖ Pour une traction alternée pure :  $P(t)=\frac{\sigma_{-1}}{3}$  et  $\tau_a(t)=\frac{\sigma_{-1}}{2}$

A partir de ces deux conditions, on peut déterminer les deux paramètres tels que :

$$\begin{cases} \alpha = 3 \cdot \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) = 0.86 \\ \beta = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_{-1} = 226 \text{ MPa} \\ \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \end{cases}$$

Pour appliquer ce modèle, une fonction minimax implémentée dans le logiciel Matlab permet

d’obtenir le plus petit cercle circonscrit dans le trajet. Cette fonction permet de trouver le centre de cercle, et de calculer la contrainte de cisaillement locale.

La précision du résultat dépend de la valeur du pas d’espace choisi sur une période. En fonction de cette valeur, le plan critique change. Dans le but d’éclaircir l’application de ce modèle, nous prenons deux angles  $\varphi$  et  $\theta$  (coordonnées sphériques) pour déterminer la position du plan critique dans l’espace, avec  $(0 \leq \varphi \leq 2.\pi)$  et  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ .

Le trièdre  $(\vec{n}, \vec{r}, \vec{l})$  positionne ce plan critique, figure 1.4. Le chargement multiaxial non-proportionnel appliqué est représenté par le tenseur de contraintes suivant :

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) & \tau(t) & 0 \\ \tau(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

avec  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ .

$$\begin{cases} n_x = \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ n_y = \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ n_z = \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_x = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ r_y = -\sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ r_z = \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_x = -\sin(\varphi) \\ l_y = \cos(\varphi) \\ l_z = 0 \end{cases}$$

La méthode d’obtention des contraintes de cisaillements locales est schématisée par l’organigramme suivant :

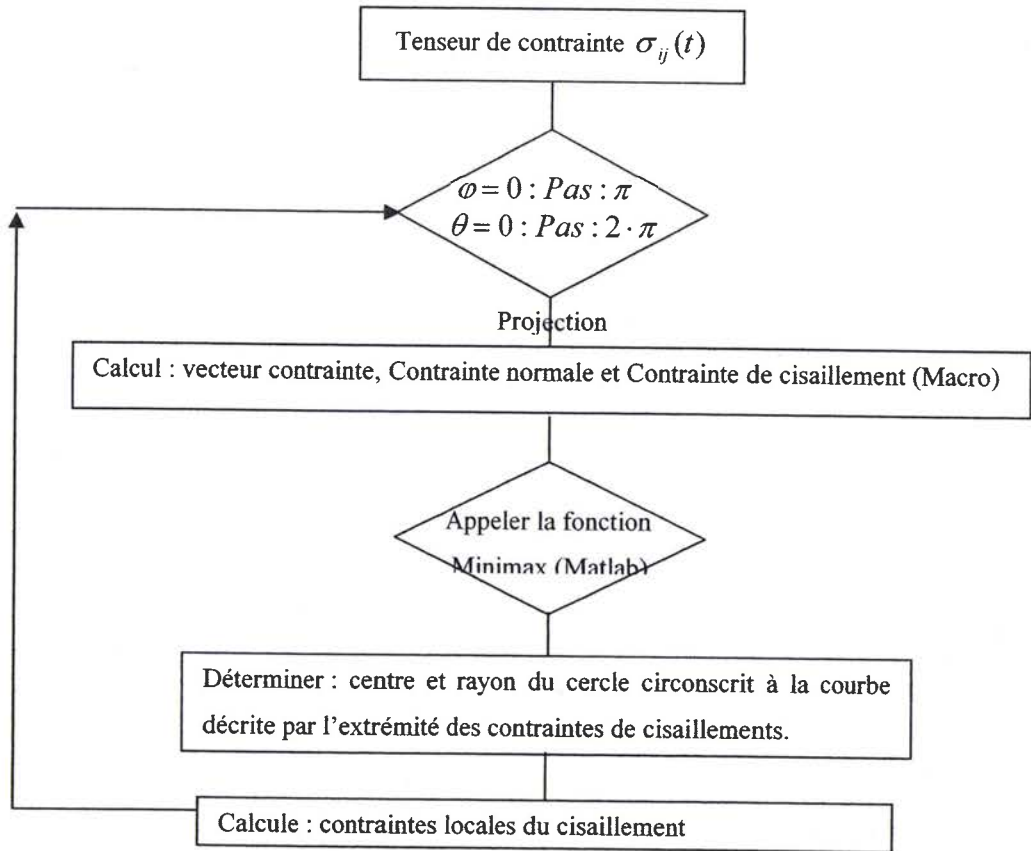


Figure 3.1 : Organigramme d’obtention des contraintes locales de cisaillements.

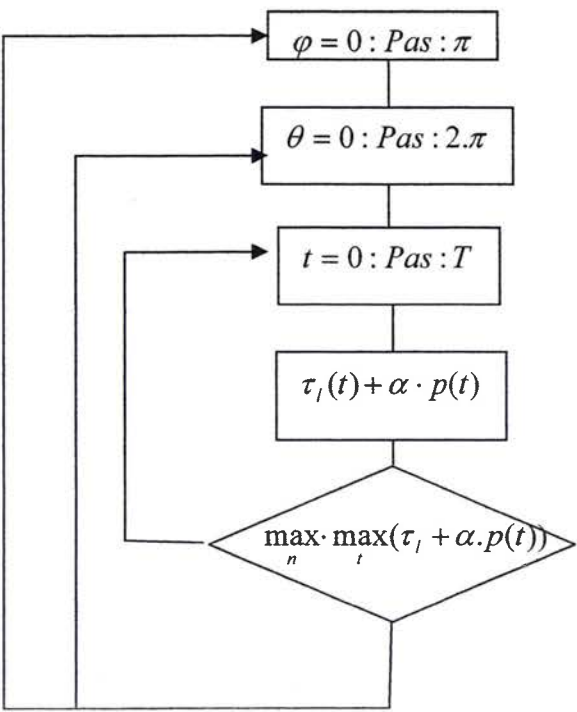


Figure 3.2 : Organigramme d’obtention du plan critique de Dang Van  
Application du modèle : Pour un  $\text{Pas} = \pi/3$ , le plan critique est de  $((\varphi = 60^\circ), (\theta = 30^\circ))$ .  
L’évolution des contraintes de cisaillement dans ce plan est représentée par la figure 3.3.

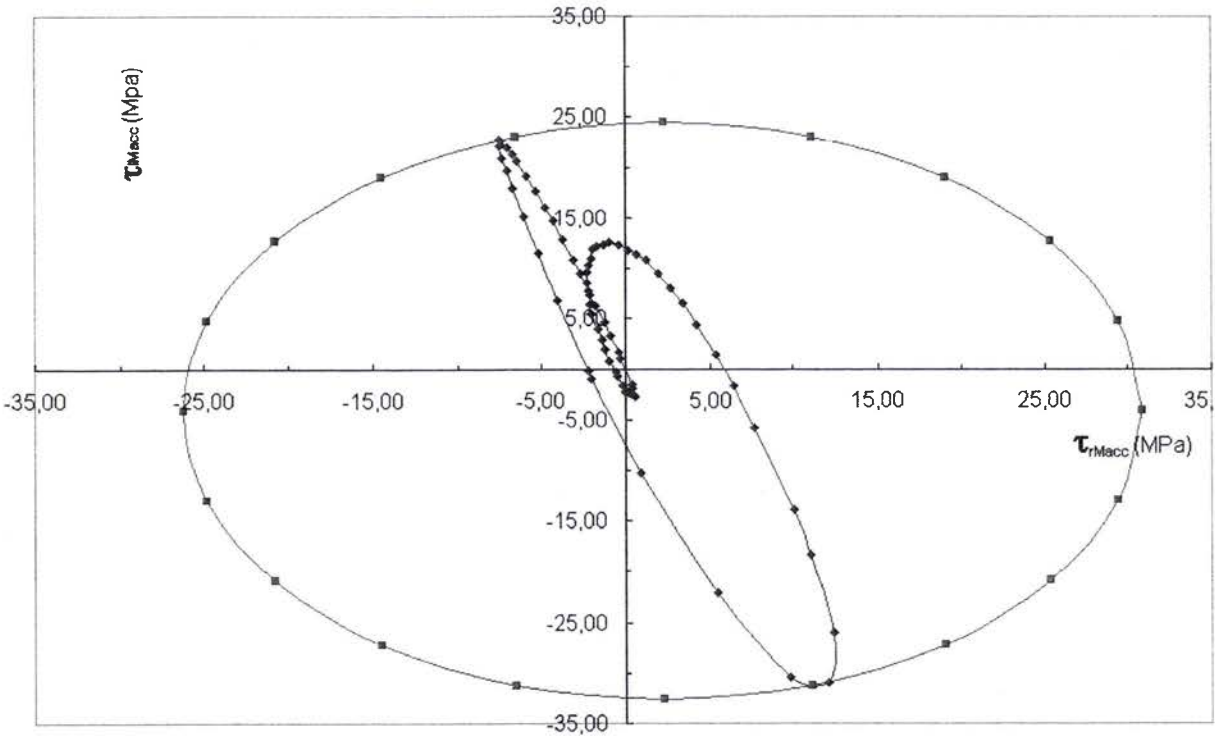


Figure 3.3 : Evolution des contraintes de cisaillements Macroscopiques sur le plan critique.

La fonction minimax, implémentée dans Matlab, nous a permis de déterminer le cercle circonscrit à la courbe ainsi que son centre (x1, x2). Les contraintes de cisaillements locales sont obtenues par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \tau_r = \tau_{rMacc} - x1 \\ \tau_l = \tau_{lMacc} - x2 \end{cases} \tag{2}$$

La figure 3.3 montre l'évolution de ces contraintes de cisaillements locales.

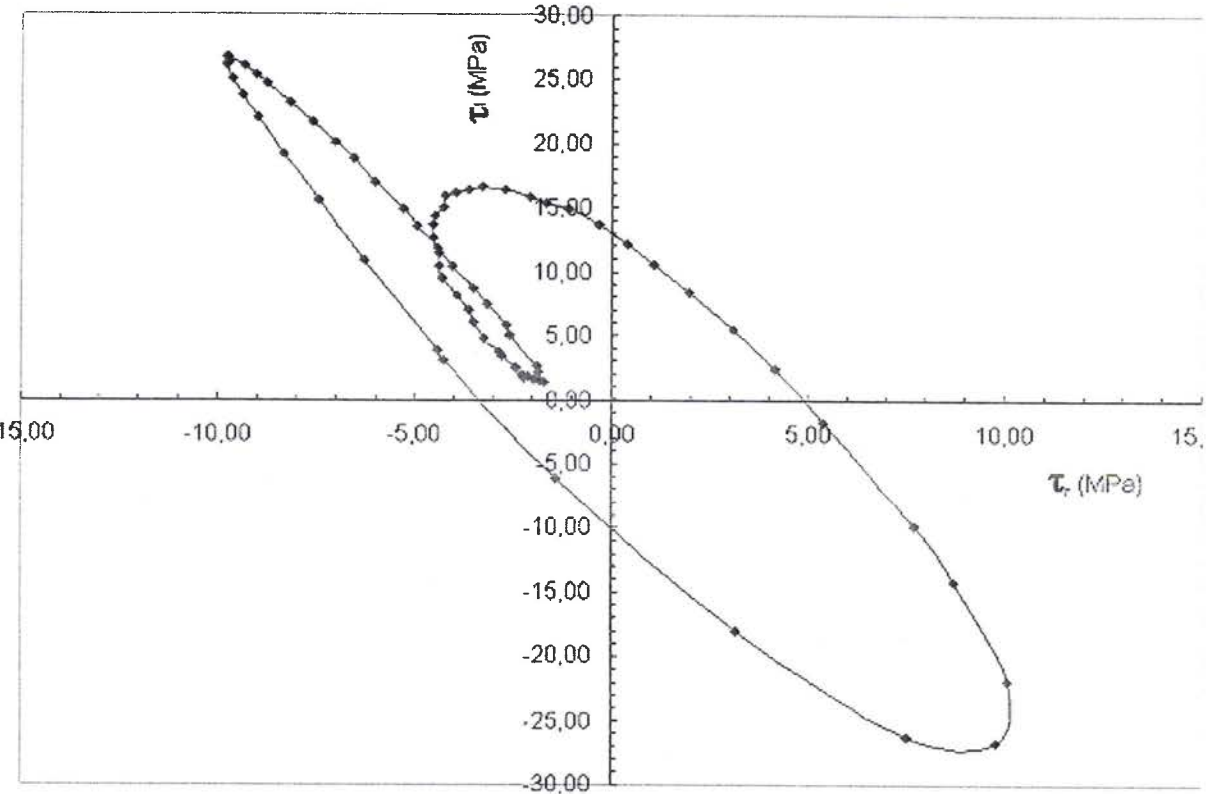


Figure 3.4 : Evolution des contraintes de cisaillements locales sur le plan critique.

La variation du Pas d'incrémentation joue un rôle décisif pour la précision du plan critique. Pour trois Pas différents (pour  $10^7$  cycles), on a :

- ✓ Pas =  $\pi / 4$ , le plan critique est positionné par les angles (135°, 180°), le facteur multiplicateur est de 3.6;
- ✓ Pas =  $\pi / 128$ , le plan critique est défini par les angles (97.03°, 42.2°). le facteur multiplicateur est de 3.6;
- ✓ Pas =  $\pi / 180$ , le plan critique est défini par les angles (135°, 180°), le facteur multiplicateur est de 3.55;

La figure 3.5 représente l'évolution de la pression hydrostatique en fonction de la contrainte de cisaillement locale sur le plan critique.

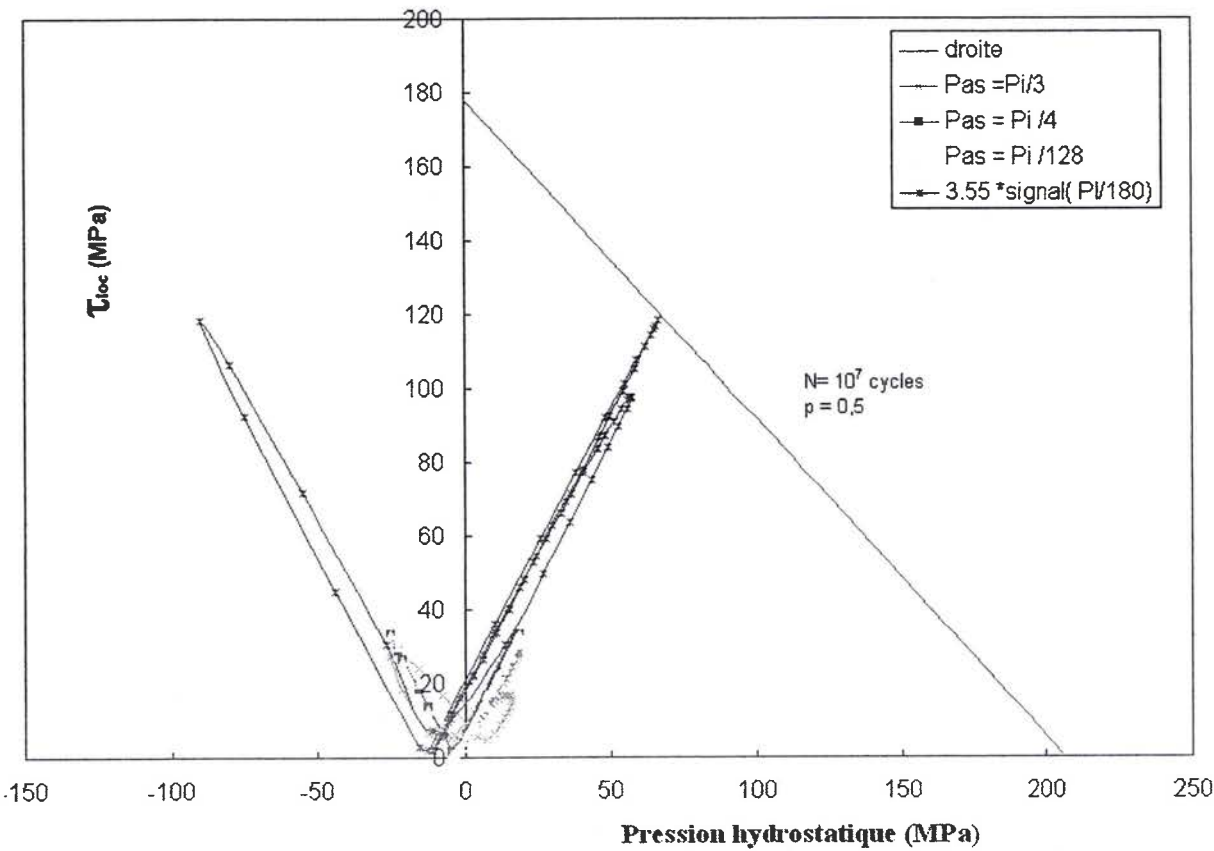


Figure 3.5 : Application du modèle Dang Van

Le critère de Dang Van prévoit alors un facteur de charge de 3.55 fois le signal réel. Alors que l’expérience estime cette valeur à 2.56 fois le chargement réel.

3.2.1.2 Critère de Mataké

Le plan critique de Mataké est défini par le plan sur lequel règne la contrainte de cisaillement maximale. Son critère est défini par une combinaison linéaire entre la contrainte de cisaillement et la contrainte normale maximale appliquée :

$$\tau_a + \mu * \sigma_{n\max} \leq \lambda \tag{3}$$

avec 
$$\begin{cases} \mu = 2 \cdot \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1 = 0.575 \\ \lambda = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_{-1} = 226 \text{ MPa} \\ \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \end{cases}$$

Pour localiser le plan critique, deux angles  $(\varphi, \theta)$  sont proposés tel que  $(0 \leq \varphi \leq \pi)$  et  $(0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi)$ . La précision du résultat dépend du pas choisi.

- ✓ Pas =  $\pi / 6$ , le plan critique est positionné par les angles  $(60^\circ, 30^\circ)$ ,
- ✓ Pas =  $\pi / 180$ , le plan critique est défini par les angles  $(95^\circ, -48^\circ)$ .

Ceci joue une influence visible sur la détermination du plan critique et sur la prévision d’amorçage de l’éprouvette en endurance.

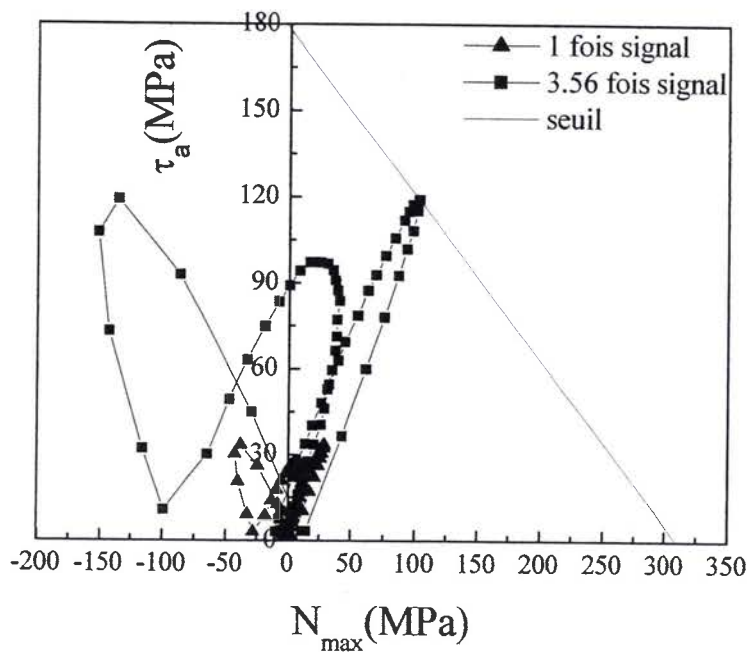


Figure 3.6 : Application du modèle de Mataké

Le critère de Mataké prévoit un facteur multiplicateur de 3.56 fois le signal réel.

3.2.1.3 Critère de Findley

Le plan critique de Findley est obtenu par la maximisation de la combinaison linéaire de  $\tau_a$  (contrainte de cisaillement locale) et de  $\sigma_{n\max}$  (contrainte normale maximale):

$$\max_n \{ \tau_a(\varphi_c, \theta_c) + k \cdot \sigma_{n\max}(\varphi_c, \theta_c) \}.$$

Le critère de fissuration est donné par la relation :

$$\tau_a(\varphi_c, \theta_c) + k \cdot \sigma_{n\max}(\varphi_c, \theta_c) \leq f \tag{4}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} k &= \frac{2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}}{2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1}} = 0.703 \\ f &= \sqrt{\frac{\sigma_{-1}^2}{4 \cdot \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right)}} = 217.6 \text{ MPa} \end{aligned} \right.$$

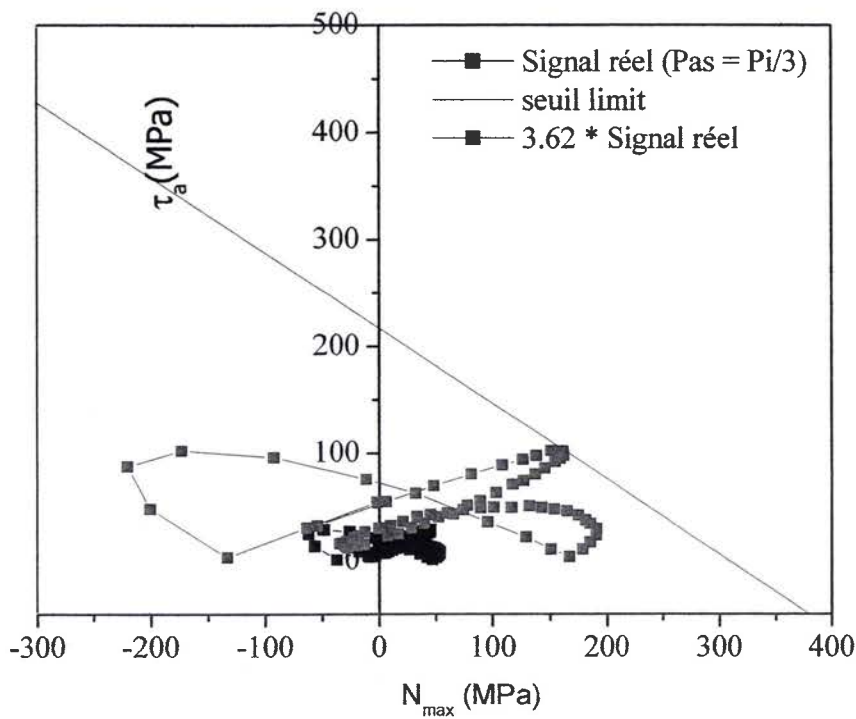


Figure 3.7 : Application du modèle de Findley

Le critère de Findley prévoit la rupture par fatigue pour un facteur multiplicateur de 3.62 fois le signal réel.

3.2.1.4 Critère de Carpinteri

Carpinteri estime que la position du plan critique est déterminée à partir des contraintes principales qui favorisent l’amorçage. La figure 3.8 représente l’évolution du chargement appliqué sur l’éprouvette. La figure 3.9 schématise les contraintes principales.

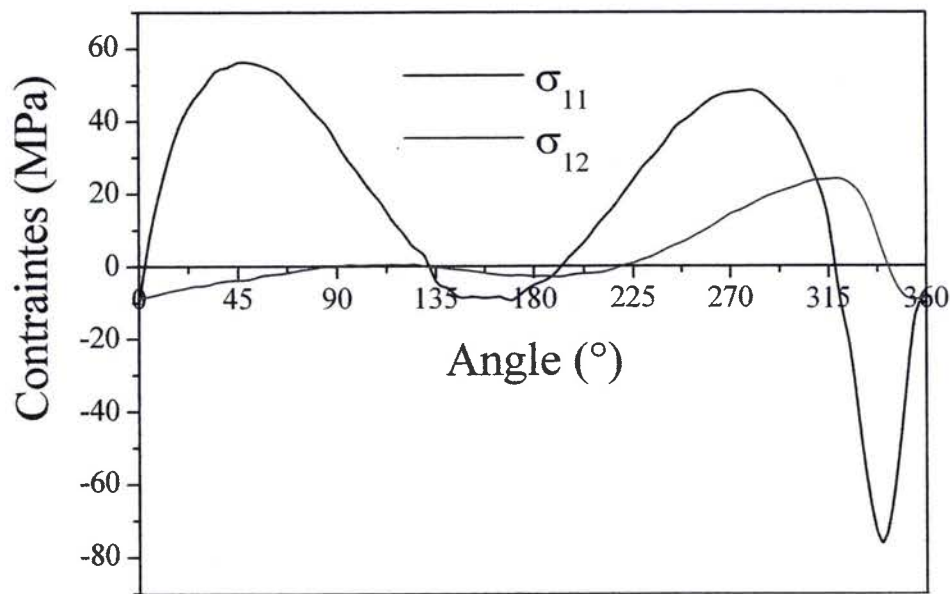


Figure 3.8 : signal appliqué

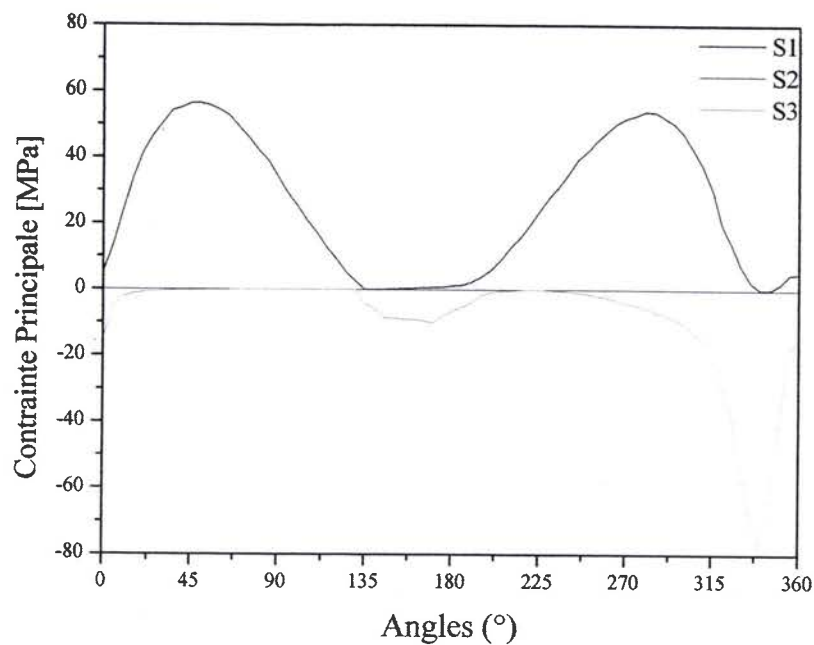


Figure 3.9 : Evolution des contraintes principales.

Le calcul des angles d'Euler ( $\varphi, \theta, \psi$ ) dans, le cas d'un problème plan, est déterminé par l'organigramme (fig. 3.10).

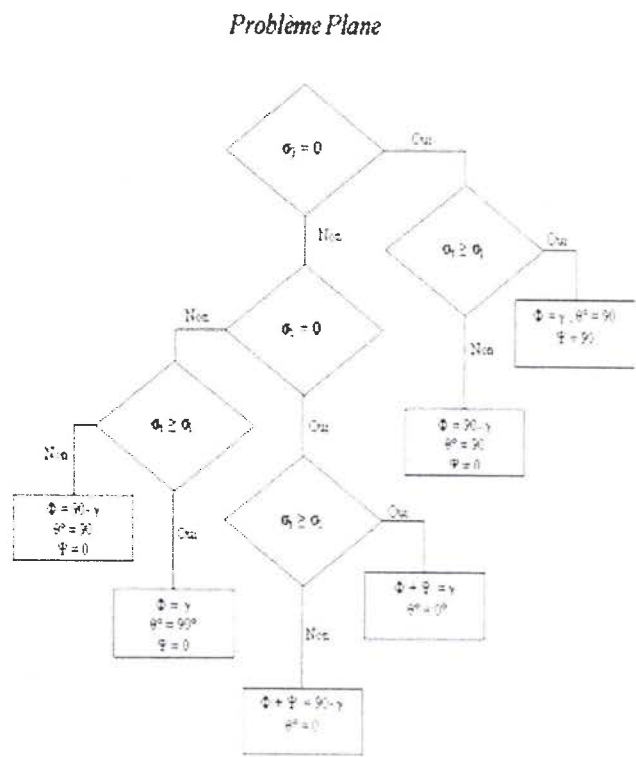


Figure 3.10 : la procédure du calcul des angles d'Euler.

La variation des angles d'Euler est représentée dans la figure 3.11.

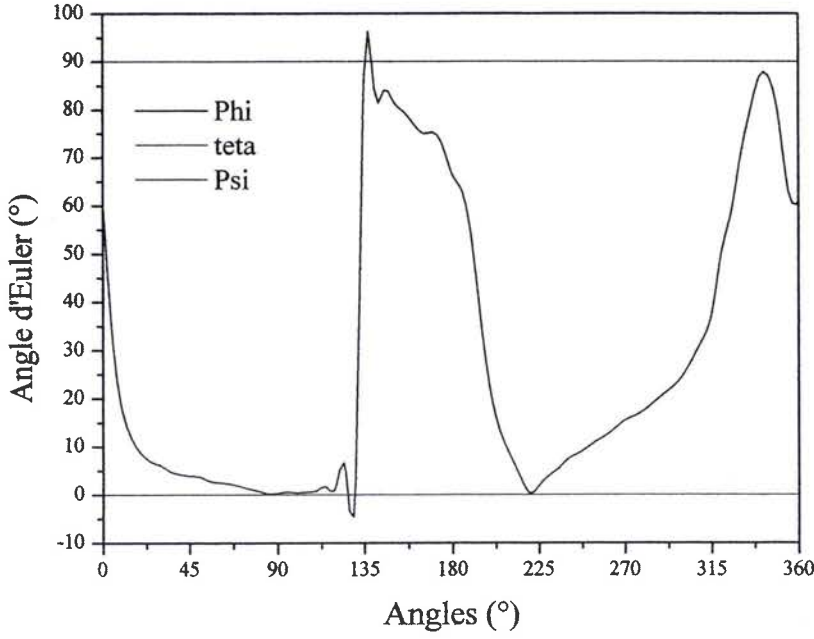


Figure 3.11 : Variation des angles d'Euler.

Les angles moyens sont calculés par :

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{W_t} \sum_1^{t_n} \varphi(t_k) \cdot W(t_k), \quad \hat{\theta} = \frac{1}{W_t} \sum_1^{t_n} \theta(t_k) \cdot W(t_k) \quad \text{et} \quad \hat{\psi} = \frac{1}{W_t} \sum_1^{t_n} \psi(t_k) \cdot W(t_k).$$

La fonction poids est déterminée par :

$$\triangleright W(t_k) = W_1(t_k) = 1 \quad (5)$$

$$\triangleright W(t_k) = W_2(t_k) = \frac{\sigma_1(t_k) - \sigma_{1,\min}}{\sigma_{1,\max} - \sigma_{1,\min}} \quad (6)$$

$$\triangleright W(t_k) = W_3(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_1(t_k) < c \cdot \sigma_{-1} \\ \left( \frac{\sigma_1(t_k)}{\sigma_{-1}} \right)^{m_\sigma} & \text{si } \sigma_1(t_k) \geq c \cdot \sigma_{-1} \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq c \leq 1 \quad (7)$$

$$\triangleright W(t_k) = W_4(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau_{\max}(t_k) < c \cdot \tau_{-1} \\ \left( \frac{\tau_1(t_k)}{\tau_{-1}} \right)^{m_\tau} & \text{si } \tau_{\max}(t_k) \geq c \cdot \tau_{-1} \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq c \leq 1 \quad (8)$$

$$\triangleright W(t_k) = W_5(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau_{\max}(t_k) < c \cdot \tau_{-1} \text{ et } \sigma_1(t_k) < c \cdot \sigma_{-1} \\ \left( \frac{\tau_1(t_k)}{\tau_{-1}} \right)^{m_\tau} & \text{si } \sigma_1(t_k) < c \cdot \sigma_{-1} \text{ et } \tau_{\max}(t_k) \geq c \cdot \tau_{-1} \\ \left( \frac{\sigma_1(t_k)}{\sigma_{-1}} \right)^{m_\sigma} & \text{si } \sigma_1(t_k) \geq c \cdot \sigma_{-1} \text{ et } \tau_{\max}(t_k) < c \cdot \tau_{-1} \\ \left( \frac{\tau_1(t_k)}{\tau_{-1}} \right)^{m_\tau} + \left( \frac{\sigma_1(t_k)}{\sigma_{-1}} \right)^{m_\sigma} & \text{si } \sigma_1(t_k) \geq c \cdot \sigma_{-1} \text{ et } \tau_{\max}(t_k) \geq c \cdot \tau_{-1} \end{cases} \quad (9)$$

Pour choisir la fonction poids  $W_5(t_k)$ , il nous manque des paramètres  $m_\sigma$  et  $m_\tau$  qui sont calculés en fonctions des courbes S-N en traction alternée et en torsion alternée. la fonction  $W_1(t_k)$  du poids, cas 1, est prise dans notre calcul.

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{N} \sum_1^n \varphi_i, \hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_1^n \theta_i, \hat{\psi} = \frac{1}{N} \sum_1^n \psi_i.$$

Le plan critique trouvé est le lieu d’amorçage des fissures, où la contrainte de cisaillement combinée avec la contrainte normale correspondante.

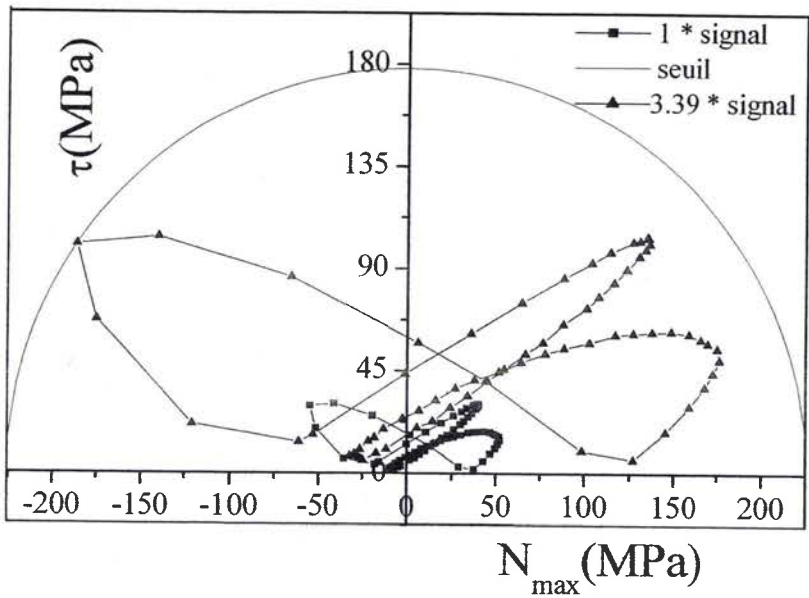


Figure 3.12 : Application du critère Carpinteri

Ce critère prévoit un facteur multiplicateur de charge de 3.39 fois le signal réel.

3.2.2 Critères globaux

3.2.1 Critère de Crossland

Crossland propose un critère reliant le deuxième invariant de la partie alternée de tenseur déviateur de contraintes  $\sqrt{J_{2a}}$  et la contrainte hydrostatique maximale. L’expression de ce critère est :

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \times \sigma_{H,max} \leq \beta \tag{10}$$

avec 
$$\begin{cases} \beta = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \\ \alpha = 3 \cdot \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0.63 \end{cases}$$

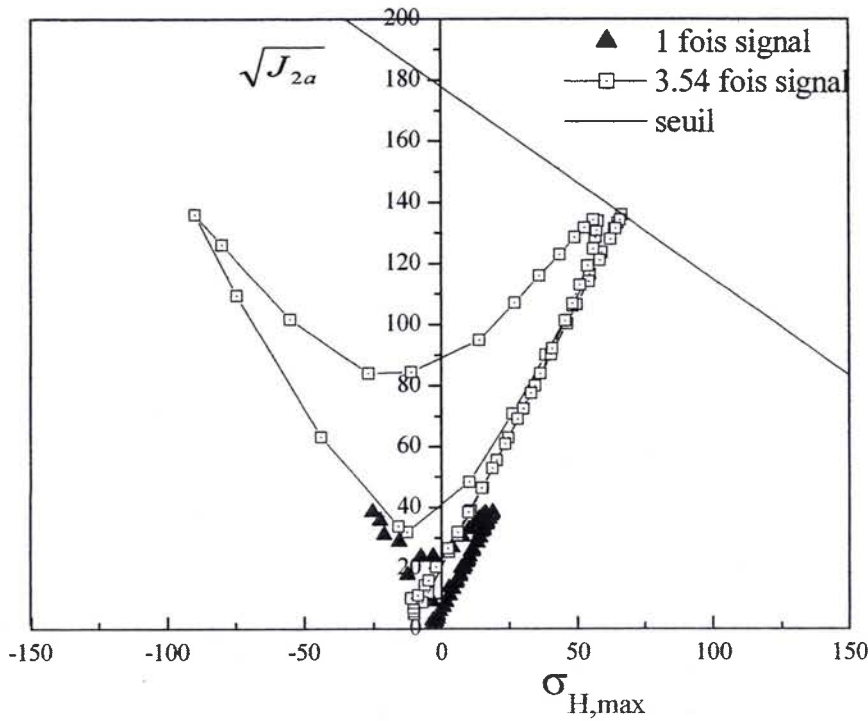


Figure 3.13 : Application du critère de Crossland

Le critère de Crossland prévoit la rupture par fatigue pour un facteur multiplicateur de 3.54 fois le signal appliqué.

3.2.2 Critère de Sines

Sines propose un critère linéaire reliant la racine du deuxième invariant de contrainte et la contrainte hydrostatique moyenne.

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H,m} < \beta \tag{11}$$

$\alpha$  est obtenu par l'essai de flexion plane ondulé à  $10^7$  cycles ( $f_m = 242 \text{ MPa}$  et  $f_a = 198 \text{ MPa}$ ), alors que  $\beta$  est obtenu par un essai de torsion alterné.

$$\begin{cases} \beta = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \\ \alpha = \left( \frac{3 \cdot \tau_{-1}}{f_m} - \frac{\sqrt{3} \cdot f_a}{f_m} \right) = 0.7895 \end{cases}$$

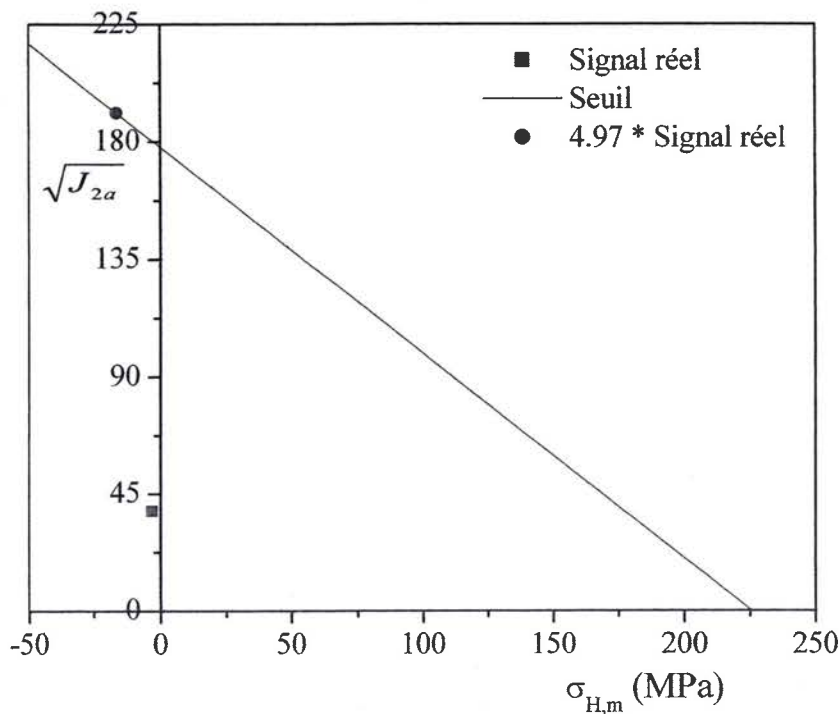


Figure 3.14 : Application du critère de Sines

Le critère de Sines prévoit la rupture par fatigue pour un facteur multiplicateur de 4.97 fois le signal réel.

3.2.3 Discussion

L’application des différents critères, malgré le faible nombre de points expérimentaux, prévoit des valeurs allant de 3.4 à 4.97 fois le signal (facteur multiplicateur de charge), pour une durée de vie de 10<sup>7</sup> cycles. Le tableau 3.1 résume les différentes valeurs trouvées

| Dng Van | Mataké | Findley | Carpinteri | Crossland | Sines | Experience  |
|---------|--------|---------|------------|-----------|-------|-------------|
| 3.55    | 3.56   | 3.62    | 3.39       | 3.54      | 4.97  | <b>2.56</b> |

Tableau 3.1 : prédiction des différents modèles

Pour ce type de chargement multiaxial non-proportionnel à amplitude variable, Dang Van, Mataké et Crossland Prévoient la même valeur. Sines prévoit une valeur la plus élevée, alors que Carpinteri prévoit la plus petite valeur.

Une autre façon de confronter ces différents modèles est de calculer la contrainte équivalente de Von Mises maximale du signal appliqué, et de la comparer aux prévisions des contraintes équivalentes des différents modèles (Tab.3.2). Cette contrainte équivalente de Von Mises est égale :

$$\sigma_{\text{équi}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

(12)

Avec  $S_{ij}$  est le tenseur déviateur de contraintes.

La contrainte maximale de Von Mises, du chargement multiaxial non-proportionnel pour une durée de vie de  $N_r = 10^7$  cycles (2.56 fois le signal), estimée expérimentalement à partir de la courbe de Wöhler est de l'ordre de 196 MPa.

|                              | Dang Van | Mataké | Findley | Carpinteri | Crossland | Sines | Exp. |
|------------------------------|----------|--------|---------|------------|-----------|-------|------|
| facteur                      | 3.55     | 3.56   | 3.62    | 3.39       | 3.54      | 4.97  | 2.56 |
| $\sigma_{\text{équi}}$ (MPa) | 178      | 178    | 217.6   | 187.98     | 178       | 178   | 196  |
| Erreur (%)                   | 9.14     | 9.14   | -11.01  | 4.05       | 9.14      | 9.14  | %    |

Tableau 3.2 : différentes contraintes équivalentes pour  $N_r = 10^7$  cycles.

Les valeurs reportées au tableau 3.2 représentent les prédictions de chaque critère pour le chargement multiaxial non-proportionnel dans le domaine d'endurance. A la vue de l'ensemble des résultats, on constate que tous les modèles donnent presque les mêmes résultats.

Pour prendre l'expérience en considération, il faut connaître la prédiction de chaque critère pour un facteur de charge de 2.56 (expérience) (tab. 3.3).

|                              | Dang Van | Mataké | Findley | Carpinteri | Crossland | Sines | Exp.   |
|------------------------------|----------|--------|---------|------------|-----------|-------|--------|
| facteur                      | 2.56     | 2.56   | 2.56    | 2.56       | 2.56      | 2.56  | 2.56   |
| $\sigma_{\text{équi}}$ (MPa) | 126.7    | 127.69 | 152.44  | 141.79     | 128.57    | 91.62 | 195.92 |
| Diff. (%)                    | 35.33    | 34.82  | 22.19   | 27.63      | 34.38     | 53.22 | %      |

Tableau 3.3 : Différentes contraintes équivalentes pour un facteur de 2.56.

Les calculs varient de 22.19% (Findley) à 53.22 % (Sines). Ces modèles locaux et globaux sont applicables dans le cas de chargements multiaxiaux proportionnels. Ils restent moins importants dans notre cas. Pour cela, un modèle semi-local basé sur une approche volumétrique a été développé au sein de notre laboratoire et appliqué pour ce type de chargement.

3.3 Modélisation de la durée de vie par l'approche volumétrique

Le principe de l'approche volumétrique se base sur la contrainte effective qui gouverne l'amorçage. Elle est calculée à partir d'un volume appelé "volume d'élaboration du processus de fatigue". Cette contrainte prend l'état du gradient de contrainte. L'importance de ce gradient et son rôle sur le point d'amorçage de la rupture par fatigue ont été signalés par divers auteurs (Peterson [56], Brand [57]). Pour déterminer la distribution des contraintes, le logiciel Castem 2000 a été utilisé. Ce code de calcul, par éléments finis, est conçu pour

l'analyse des structures. A l'origine, ce code a été développé par le département des Etudes Mécaniques et Thermique (DEMT) du Commissariat français de L'Energie Atomique (CEA).

Le logiciel permet de traiter des problèmes mécaniques, hydrauliques, thermique ou couplés. Que se soit le type du problème de mécanique linéaire, non linéaires (élasto-plastique visco-plastique) ou dynamiques.

Pour effectuer ce genre de calcul, le logiciel utilise trois étapes :

- Etape1 : définition du modèle mathématique :
  - ✓ Discrétisation géométrique du domaine étudié,
  - ✓ Définition des données caractérisant le modèle, parmi lesquelles le type de chargement, le type d'éléments (poutres, coques, etc..), les propriétés du matériau, les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites.
  - ✓ Application des chargements externes,
  - ✓ Application des conditions limites,
- Etape 2 : résolution du problème discrétisé :
  - ✓ Assemblage des matrices de rigidité et de masse de la structure complète,
  - ✓ Résolution du système d'équations d'équilibre.
- Etape 3 : analyse et post-traitement des résultats :
  - ✓ Un pré- processeur, pour la définition du modèle complet, transmet les données au programme de calcul proprement dit, dès que ces dernières sont élaborées.
  - ✓ Un post- processeur qui, dès la réception des résultats, procède aux traitements nécessaires.
  - ✓ Analyse des quantités locales comme les déplacements, les contraintes et les déformations ou des quantités globales, telle l'énergie de déformation.

### **3.3.1 Distribution des contraintes**

Selon l'approche élastique ou élasto-plastique utilisée dans le code de calcul par éléments Finis, on obtient différentes distributions de contraintes. Ce fait est illustré par la Figure 3.15. On remarque que la distribution de contrainte  $\sigma_{xx}$ , par un calcul élastique, est caractérisée par une contrainte maximale, alors qu'en réalité il faut tenir compte de la non linéarité du

comportement du matériau lorsqu'on dépasse la limite d'élasticité. Le calcul non linéaire montre que cette singularité disparaît. Elle est remplacée par une relaxation de contrainte.

La figure 3.16 montre un exemple de l'évolution de la contrainte en fonction de la distance, dans le cas élastique et élasto-plastique. On remarque que la contrainte, dans le cas élasto-plastique, passe par un maximum.

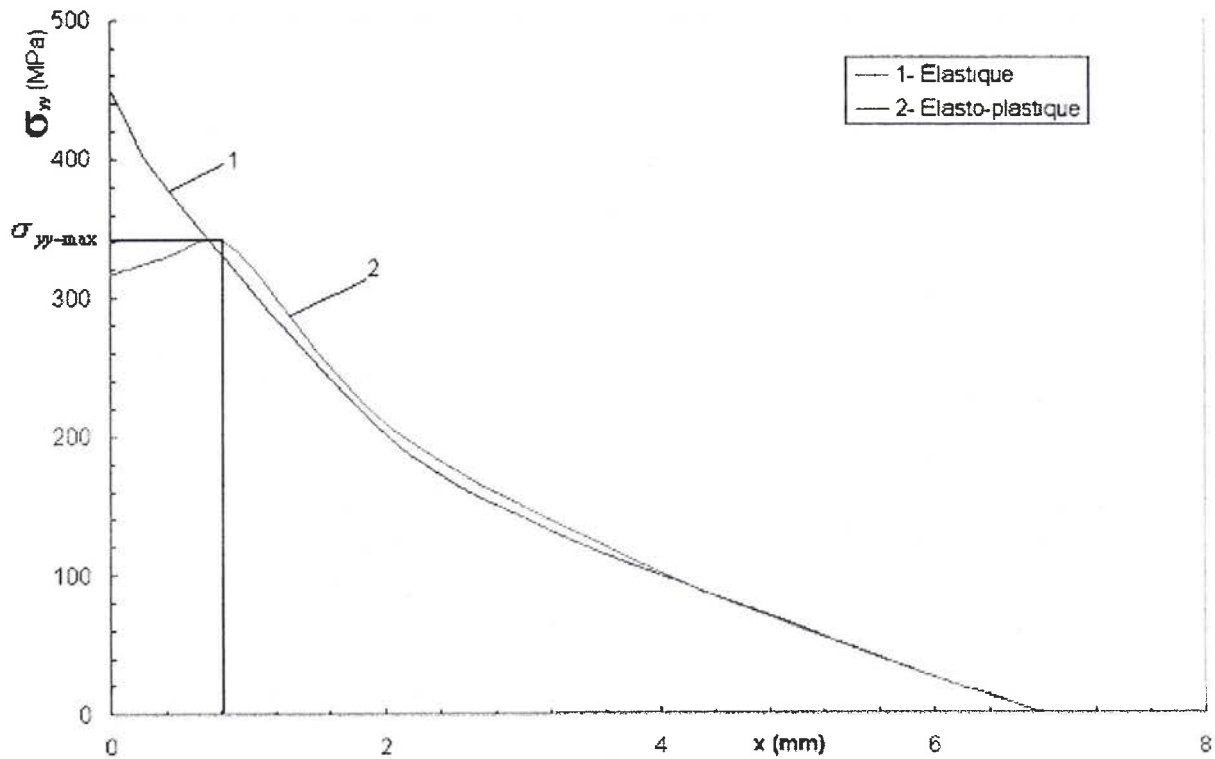


Figure 3.15 : Exemple de comparaison entre la distribution  $\sigma_{yy}$  en fonction de la distance.

3.3.2 Gradient relatif de contrainte et contrainte effective

Le gradient relatif de contrainte ( $\chi$ ), à un point  $x$ , est le rapport de sa dérivée avec la valeur de la contrainte sur ce point :

$$\chi = \frac{gradf}{\sigma(x)} = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma(x)}{dx} \tag{13}$$

L'étude de la fonction  $\chi(x)$  [58] montre que le gradient de contrainte prend une valeur minimale à la distance  $x=x_{ef}$ . L'exemple suivant (fig.3.16) explique la méthode. Cette distance représente la limite de la zone d'élaboration du processus de fatigue. La contrainte effective correspondante se calcule par :

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{x_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \sigma(x).dx \tag{14}$$

La distance effective  $x_{ef}$ , représente la zone plastique ou la zone d'endommagement [61,62].

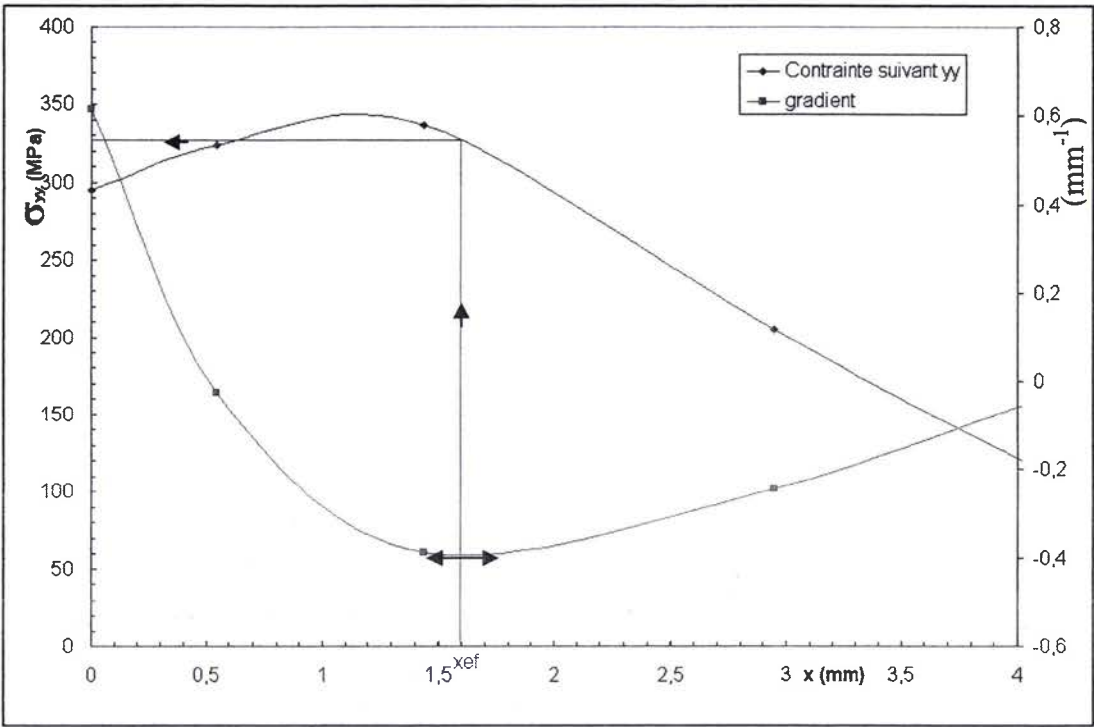


Figure 3.16 : Evolution de la contrainte yy et de son gradient.

**3.3.3 Application de l’approche volumétrique pour un chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable**

**3.3.3.1 Modélisation de l’éprouvette**

Compte tenu du type de chargement appliqué, biaxial traction-torsion, la modélisation de l’éprouvette a été réalisée suivants les options suivantes :

1. Modélisation géométrique tridimensionnelle de l’éprouvette entière (fig. 3.17)
2. Type d’élément cubique à 20 nœuds (Cu20), qui permet une interpolation quadratique du champ de déplacement.
3. Loi de comportement élasto – plastique isotrope induite dans le programme, évolution identique à celle obtenue par les essais.
4. Conditions aux limites : Encastrement selon X, Y et Z à l’extrémité du modèle géométrique de l’éprouvette.
5. Chargement : On applique deux forces opposées parallèles à l’axe Y, pour obtenir un moment équivalent au moment expérimental de torsion, et à la fois une force sous forme de pression sur la surface frontale du modèle afin d’avoir une force équivalente

à la force expérimentale de traction (fig. 3.17).

Pour simuler le chargement réel, multiaxial non-proportionnel, 72 points ont été pris pour représenter le chargement entier, donc 72 itérations à prendre en considération. A chaque itération, il faut introduire deux chargements (traction-torsion) et récupérer les résultats à analyser.

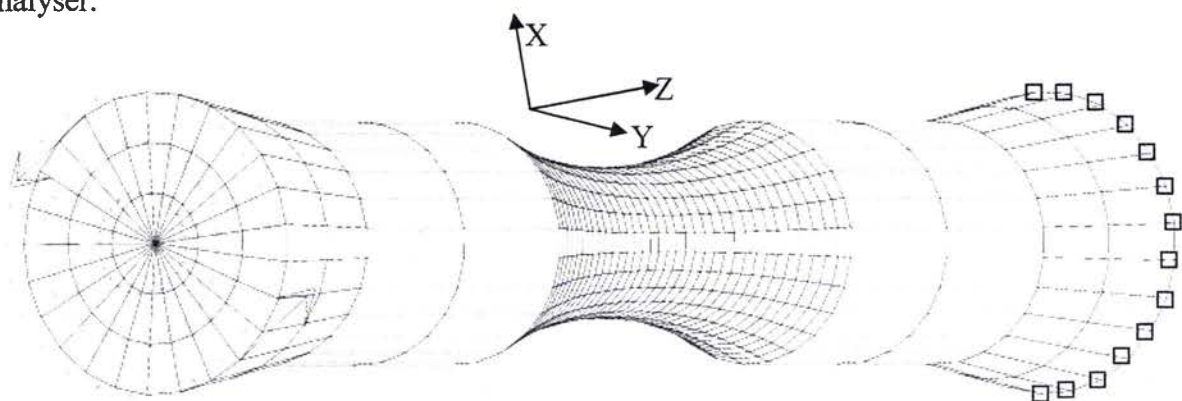


Figure 3.17 : Simulation par éléments finis de la géométrie, des forces extérieures et des conditions limites de l'éprouvette soumise au chargement multiaxial.

### 3.3.3.2 Analyse de la distribution de contraintes à la surface utile

Le sujet consiste à prévoir la fiabilité de la roue ferroviaire dans le domaine illimité (environ  $10^7$  cycles). Le chargement appliqué dans ce cas est un chargement multiaxial non-proportionnel, dont la contrainte équivalente de Von Mises est très inférieure à la limite d'élasticité statique. La figure 3.18 représente la distribution de contraintes  $\sigma_{zz}$  suivant l'axe  $zz$ . L'effet de la non linéarité du matériau reste négligeable, puisque le calcul est pratiqué dans le domaine élastique. La géométrie de l'éprouvette engendre un léger effet de concentration de contraintes (fig.3.20).

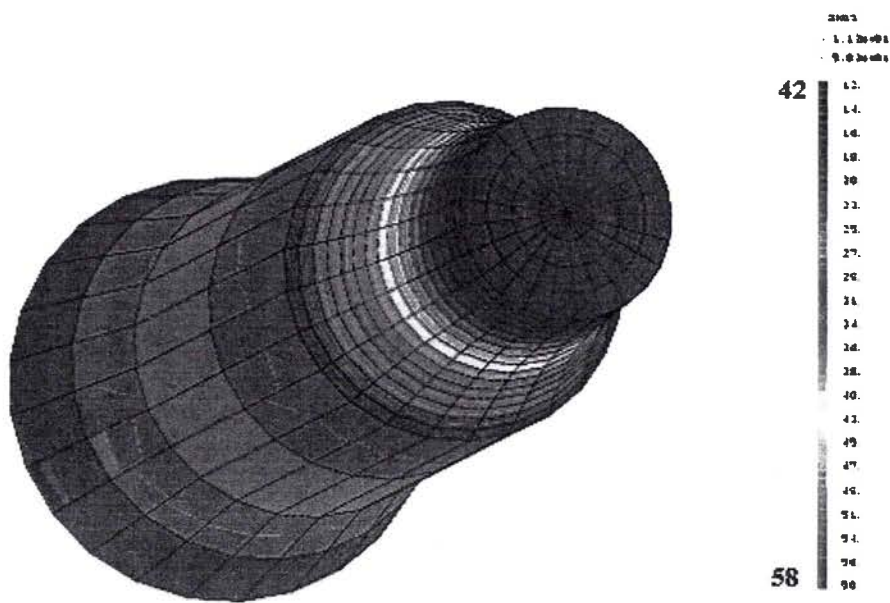


Figure 3.18 : Distribution de contraintes  $\sigma_{zz}$  suivant ZZ, pour un facteur multiplicateur de charge de 1, et pour une force de 2820 N et un moment de (-370) N.mm à  $t = 0.02$  s.

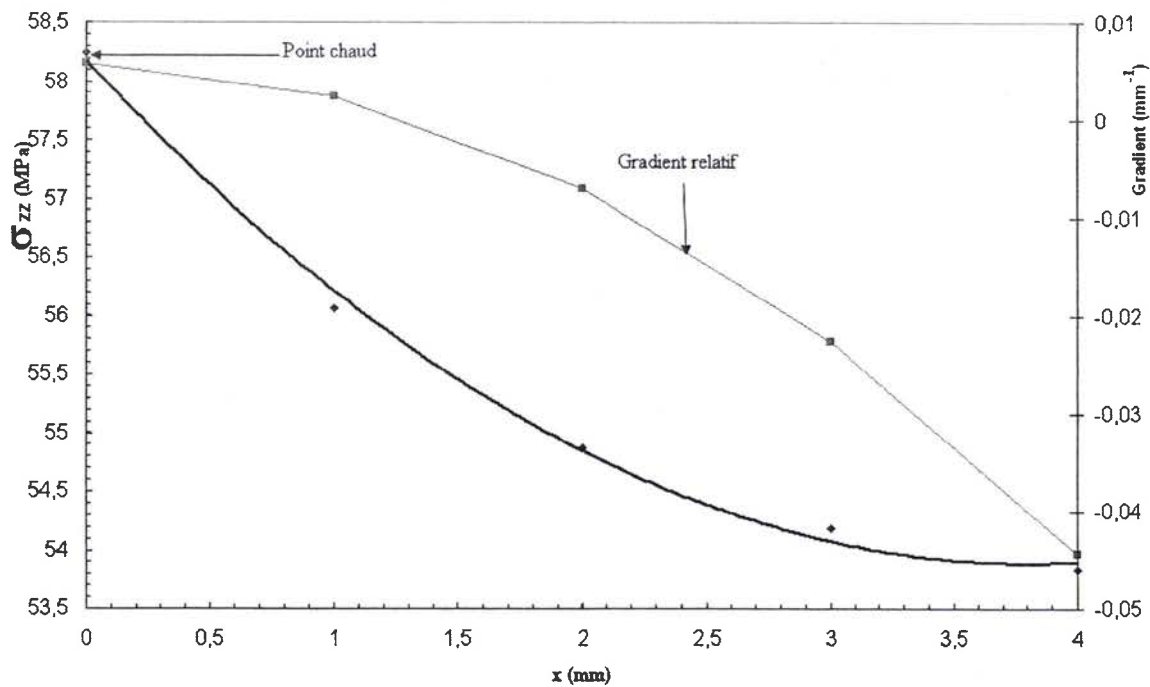


Figure 3.19 : Distribution de contraintes  $\sigma_{zz}$  suivant l'axe ZZ et son gradient relatif pour un facteur multiplicateur de 1.

On constate que le gradient relatif est décroissant. Dans ce cas, la contrainte effective choisie est la contrainte maximale (théorie du point chaud).

La figure (3.20) représente les distributions de contraintes de torsion dans le plan yz, pour un facteur multiplicateur de charge de 1 et dont le chargement appliqué est de -470 N en force de traction et 2410 N.mm en moment à l'instant  $t=9/10 \cdot T$  ( $t = 0.45$  S).

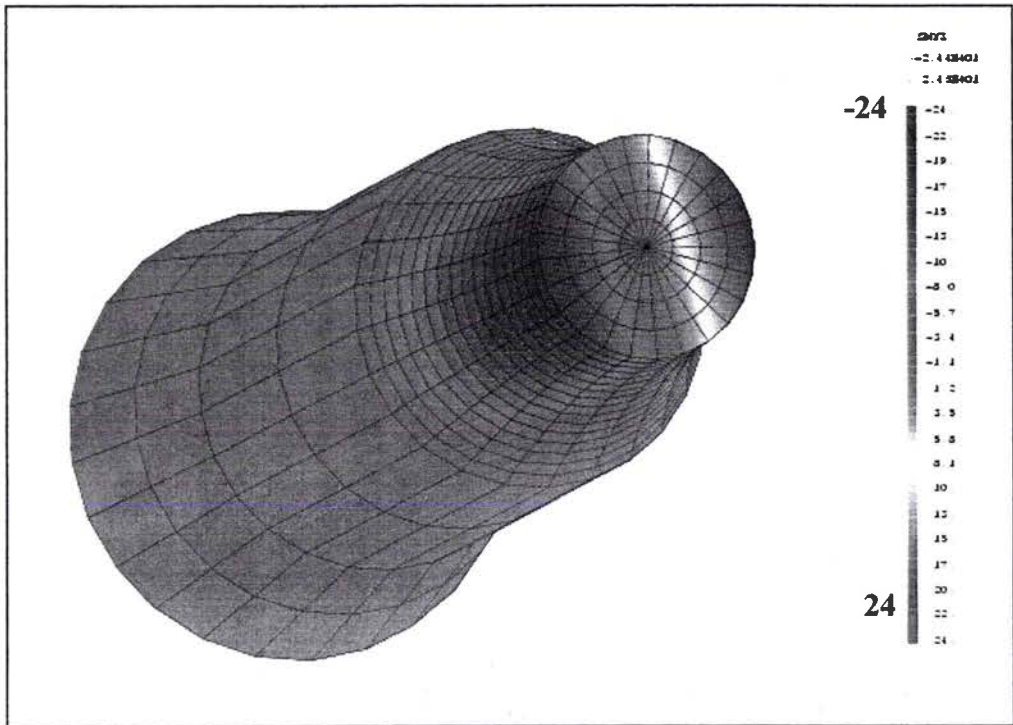


Figure 3.20 : Distribution de contraintes de torsion  $\sigma_{yz}$  dans le plan  $yz$  sous chargement multiaxial.

La figure (3.21) représente la contrainte de cisaillement maximale pour le même chargement et le même facteur multiplicateur de charge, ainsi que son gradient relatif.

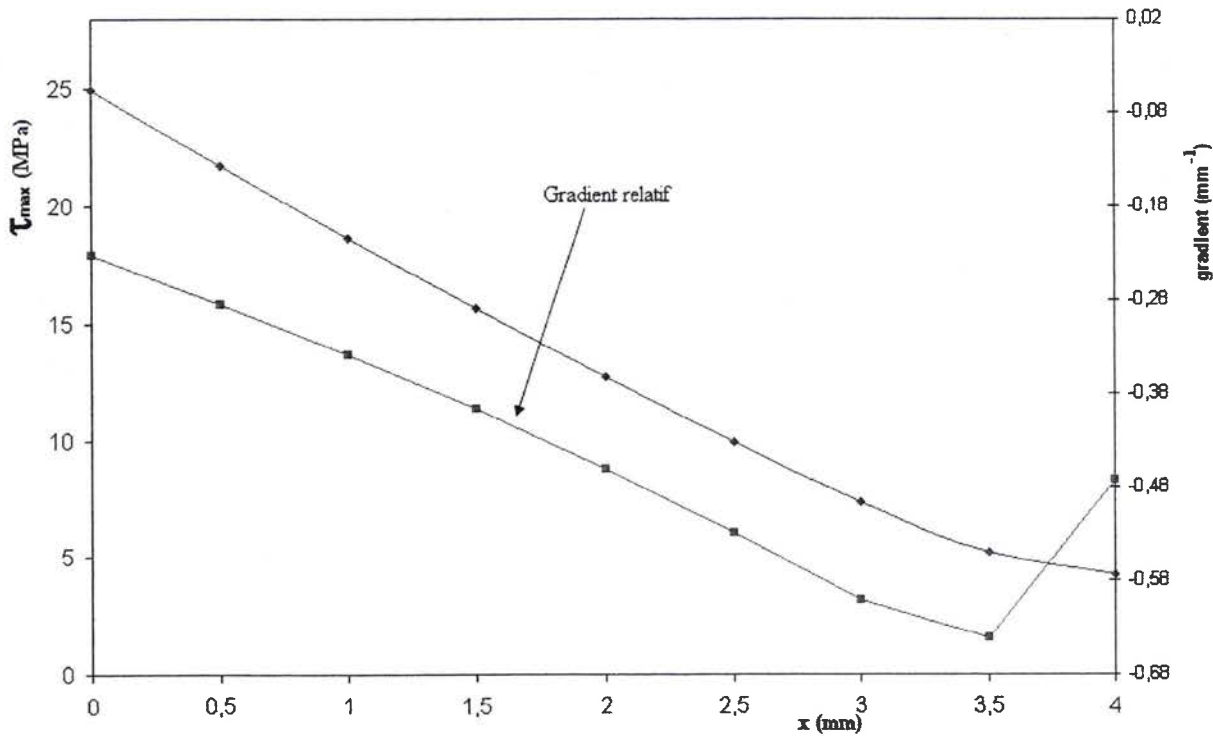


Figure 3.21 : Distribution de cisaillement maximale et son gradient relatif.

A partir des figures 3.19 et 3.21, on peut constater que :

- Dans le cas des éprouvettes lisses, il y a un certain gradient faible non constant.
- La zone de relaxation de contraintes est plus grande pour une éprouvette lisse. La rupture par fatigue nécessite un volume plus important d'élaboration du processus de fatigue pour un niveau de contrainte faible (le nombre de cycle est important).

**Remarques :**

- Dans le cas d'un chargement correspondant au domaine d'élasticité, la contrainte effective est prise égale à la contrainte maximale (théorie du point chaud).
- Dans le cas d'un calcul élasto-plastique, la contrainte effective est déterminée par la méthode du gradient.

**3.3.3.3 Modèle de Qylafku**

Des essais de fatigue multiaxiale proportionnelle, effectués par [58], ont montré que les combinaisons entre la contrainte de cisaillement maximale effective et la pression hydrostatique suit une courbe elliptique. Ce critère, d'approche volumétrique, a donné des résultats satisfaisants dans le cas d'un chargement multiaxial proportionnel (fig.3.22).

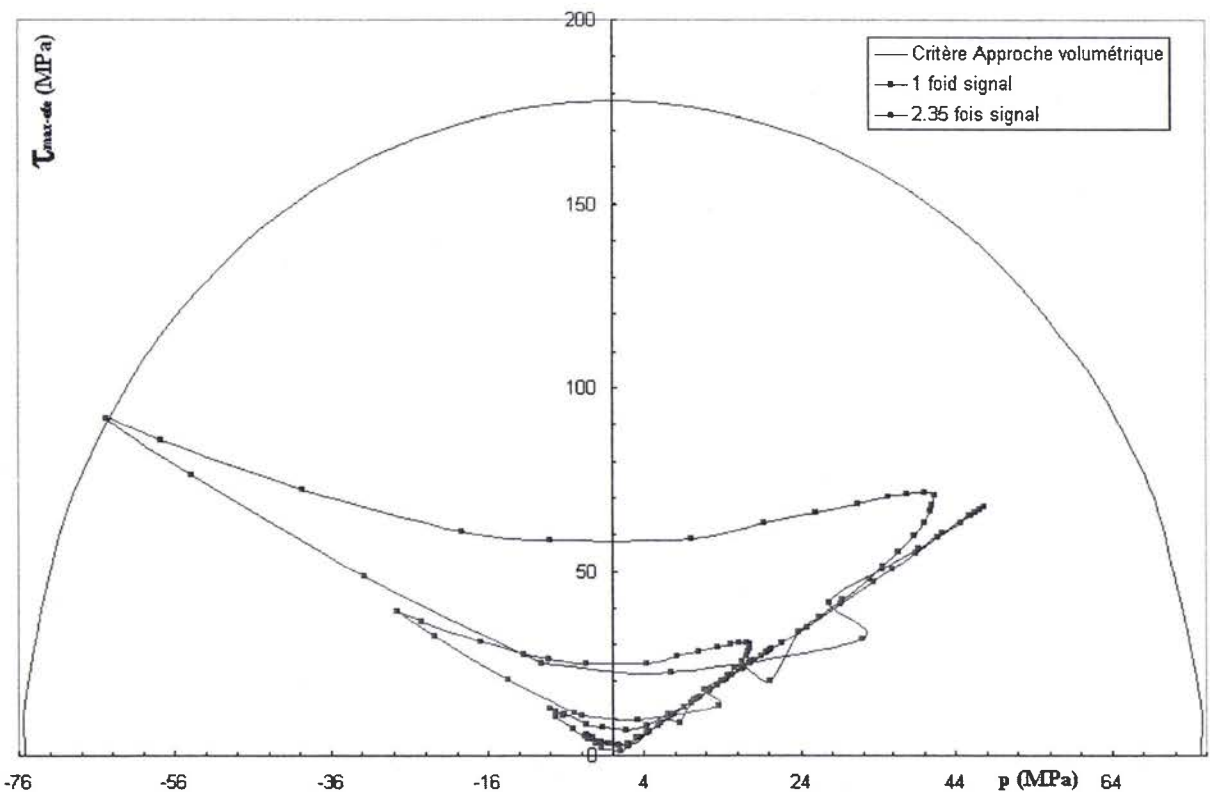


Figure 3.22 : Application de Qylafku pour un chargement multiaxial non-proportionnel.

Ce critère suppose que la contrainte de cisaillement maximale effective et la pression hydrostatique moyenne effective provoquent l'endommagement du matériau. L'application

du modèle de Qylafku prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.35 fois le signal réel. C'est une valeur satisfaisante et proche de l'expérience au niveau du facteur de charge. La contrainte équivalente maximale pour 2.35 fois le signal est 226.75 MPa. Alors que pour un facteur de charge de 2.56, la contrainte équivalente est 247 MPa, soit une différence de 26 %.

Les modèles locaux et globaux sont applicables dans le cas des chargements multiaxiaux proportionnels. Ils restent moins importants dans notre cas. Cette différence des résultats prédits par les différents modèles, nous a permis de proposer un nouveau modèle basé sur l'approche volumétrique. Ce modèle tient compte des paramètres influençant le processus de fatigue observée pendant le déroulement des essais.

**3.3.3.4 Proposition d'un nouveau modèle basé sur l'approche volumétrique**

Genti a supposé que l'amorçage est gouverné par une combinaison entre la pression hydrostatique moyenne effective et la contrainte de cisaillement maximale. Il a privilégié ces deux paramètres (contrainte de cisaillement et pression hydrostatique). Or les observations pendant le déroulement des essais, ont permis de conclure que pour les faibles chargements la contrainte normale gouverne et provoque la rupture. Pour les forts chargements, l'effet de la torsion se révèle important. Ceci confirme les constations de Mataké et de Findley, qui expriment leurs critères de fatigue par une combinaison linéaire entre la contrainte normale et la contrainte de cisaillement. Ces observations se manifestent sur les faciès de rupture des éprouvettes (fig. 3.23).

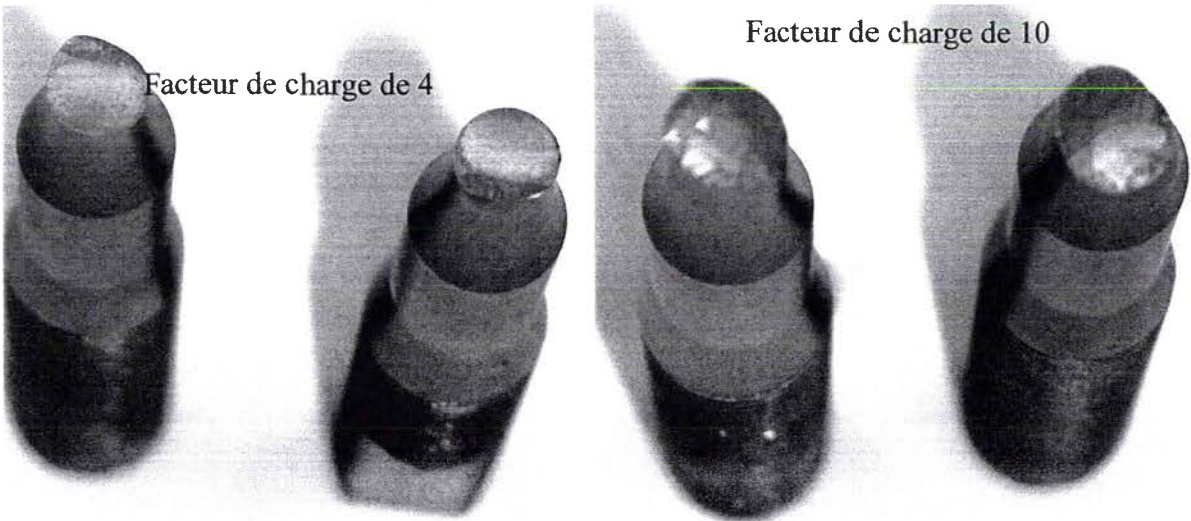


Figure 3.23 : Effets des contraintes normales et de torsion sur les faciès de l'éprouvette.  
Pour un chargement de facteur multiplicateur de charge 4 :

- ❖ Le plan de propagation de fissure est perpendiculaire à la contrainte normale,
- ❖ La surface est presque entièrement dégradée.

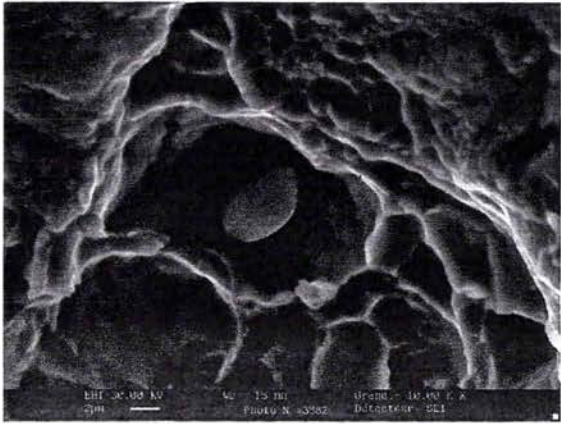
Pour un chargement de facteur de charge de 10 :

- ❖ Le plan de rupture final fait un angle avec la direction de la contrainte normale
- ❖ L'effet de la torsion se manifeste par cette inclinaison.

L'étude microscopique des faciès de deux éprouvettes sollicitées aux deux types de chargements, pour un facteur de charge de 4 et de 10, a confirmé ces propos (fig. 3.24).



**Non proportionnel f=4**



**Non proportionnel f=10**

Figure 3.24 : Influence de la contrainte de cisaillement.

On constate que :

- Pour un facteur de 4 : l'effet de la torsion est négligeable, ceci se traduit par la forme ronde du cavité,
- Pour un facteur de 10 : l'effet de la torsion est visible par la forme elliptique du cavité.

Pour cela, une combinaison entre la contrainte normale effective et la contrainte de cisaillement effective est proposée.

$$\left(\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ef}}{\tau_{-1}}\right)^2 \leq 1 \tag{15}$$

Cette suggestion a été définie sur les mêmes principes que le modèle de Genti en se basant sur les concepts de l'approche volumétrique.

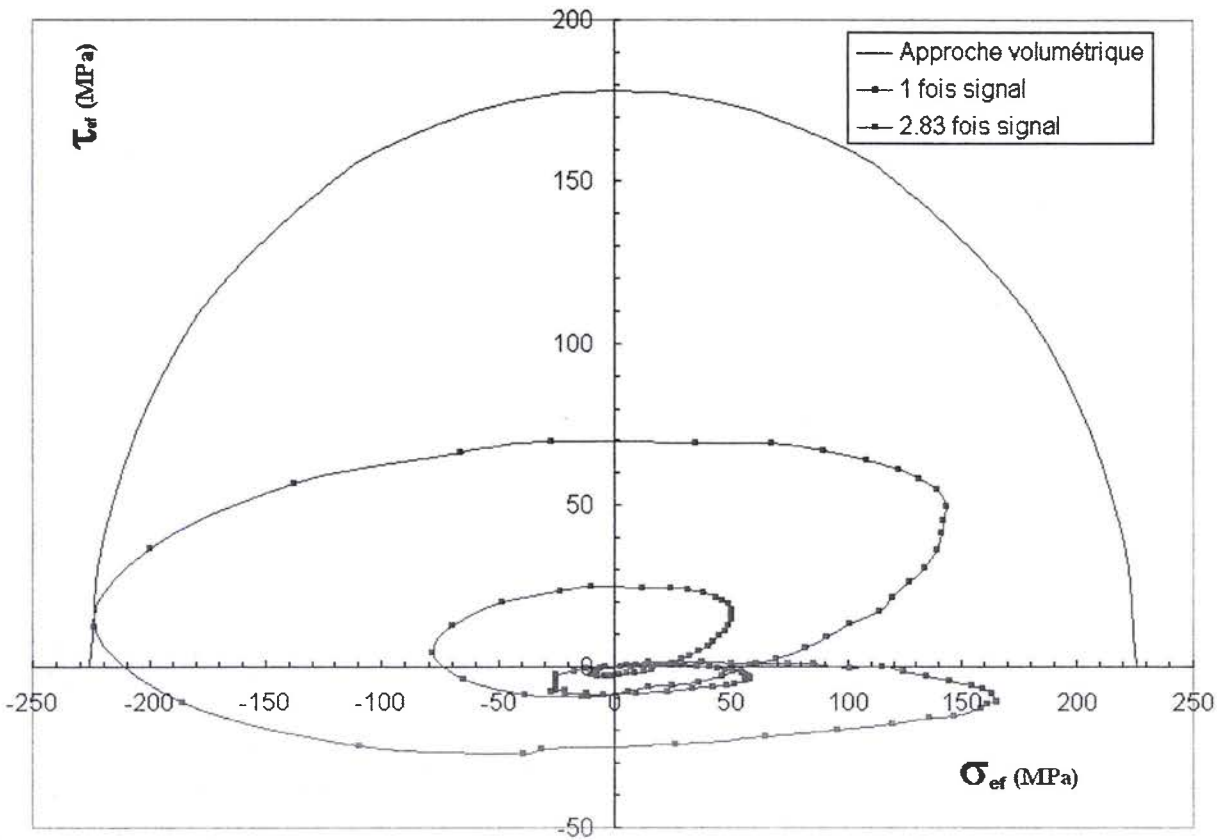


Figure 3.25 : Application de nouvelle proposition pour un chargement multiaxial non-proportionnel.

Ce modèle prévoit un facteur de charge de 2.83 fois le signal réel, une valeur très proche de l'expérience. Notre équation est plus conservative que le modèle de Qylafku. Alors que pour un facteur de charge de 2.56, la contrainte équivalente est égale à 203.25 MPa. Soit une erreur de 3.78%.

3.4 Conclusion

Les différents critères : locaux, globaux et semi-locaux ont été appliqués et comparés à l'expérience, pour une durée de vie de  $10^7$  cycles (point extrapolé). Le tableau 3.4 présente les prévisions des différents modèles. On note que le facteur de charge " $f_{end}$ " extrapolé à  $10^7$  cycles est de 2.56.

| Calcul Elastique |        |         |            |           |       |         |            |
|------------------|--------|---------|------------|-----------|-------|---------|------------|
| Dang Van         | Mataké | Findley | Carpinteri | Crossland | Sines | Qylafku | Nou. Prop. |
| 3.55             | 3.56   | 3.62    | 3.39       | 3.54      | 4.97  | 2.35    | 2.83       |

Tableau 3.4 : Prévision des différents modèles.

On constate que les deux modèles basés sur l’approche volumétrique donnent des valeurs plus proches de l’expérience que les autres critères. Comparons cette prédiction en terme de contraintes équivalentes (tab. 3.5).

|                                              | Dang<br>Van | Mataké | Findley | Carpinteri | Crossland | Sines | Qylafku | Nouv.<br>Prop. |
|----------------------------------------------|-------------|--------|---------|------------|-----------|-------|---------|----------------|
| $f_{end}$                                    | 2.56        | 2.56   | 2.56    | 2.56       | 2.56      | 2.56  | 2.56    | 2.56           |
| $\sigma_{\text{équi}}$ (MPa)<br>des #modèles | 126.7       | 127.69 | 152.44  | 141.79     | 128.57    | 91.62 | 247     | 203.25         |
| Erreur (%)                                   | 35.33       | 34.82  | 22.19   | 27.63      | 34.38     | 53.22 | 26      | 3.74           |

Tableau 3.5 : récapitulatif des différents résultats.

On constate que le nouveau critère semi-local, qui favorise la contrainte normale effective et la contrainte de cisaillement effective, donne une valeur plus proche de l’expérience au niveau des contraintes pour le même facteur de charge de 2.56. Le modèle de Qylafku, qui combine la pression hydrostatique moyenne effective et la contrainte de cisaillement maximale effective, donne une contrainte équivalente très supérieure à l’expérience, soit une différence de 26 %, alors qu’au niveau de facteur de charge donne la valeur la plus proche de l’expérience (2.35). L’avantage des méthodes semi-locales est qu’elles tiennent compte de la géométrie de l’éprouvette et de la loi de comportement du matériau cyclique. Tous ces critères ont été appliqués dans le domaine de l’endurance. Or, plusieurs auteurs ont conclu que la forme du chargement multiaxial a une influence sur la durée de vie d’un matériau. Cette question sera étudiée et traitée au chapitre IV.

## Chapitre IV : Etude de l'influence de la forme du signal de chargement sur la durée de vie en endurance

### 4.1 Introduction

La rupture par fatigue est un domaine complexe mal maîtrisable. La constatation faite par les industriels sur les différents phénomènes de fatigue, parus depuis la deuxième guerre mondiale, incitait les chercheurs à étudier ce phénomène et à proposer des modèles capables de prévoir la durée de vie des structures. Dietman et al. [53], Mielke [54], ont conclu, à partir des observations, que l'influence de la forme du chargement uniaxial sur la durée de vie d'une éprouvette est négligeable en endurance limitée et inexistante en endurance illimitée.

L'objectif de ce chapitre est de comparer la durée de vie d'un matériau sous deux types de chargements : l'un est un chargement multiaxial proportionnel à amplitude constante et l'autre est un chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable. Le modèle énergétique de Palin Luc [51] est choisi pour étudier le type de chargement proportionnel à amplitude constante avec un rapport  $R = -1$ , alors qu'une extension de son modèle toute en introduisant le degré de triaxialité de De Lereis sera une bonne base pour l'étude de chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable.

### 4.2 Extension du modèle énergétique de Palin Luc [51]

Le critère de Palin Luc est applicable pour un chargement alterné multiaxial proportionnel ou non proportionnel mais à amplitude constante dont le rapport du charge est égal à -1, avec un rapport de contraintes  $k = \frac{\sigma_{Trac-Tor}}{\tau_{Trac-Tor}}$ . Afin de passer d'un signal multiaxial non proportionnel à amplitude variable à un signal multiaxial proportionnel à amplitude constante à appliquer à la machine, quatre cas sont étudiés :

**Cas 1 :** Le signal équivalent est une sinusoïde alternée, figure (4.1-4.2), et on choisit les valeurs moyennes des contraintes :  $\sigma_{moy} = 17.15 \text{ MPa}$  ;  $\tau_{moy} = 2.77 \text{ MPa}$ .

$$k = \frac{\sigma_{Trac-Tor\ moy}}{\tau_{Trac-Tor\ moy}} = 6.1954 \quad (1)$$

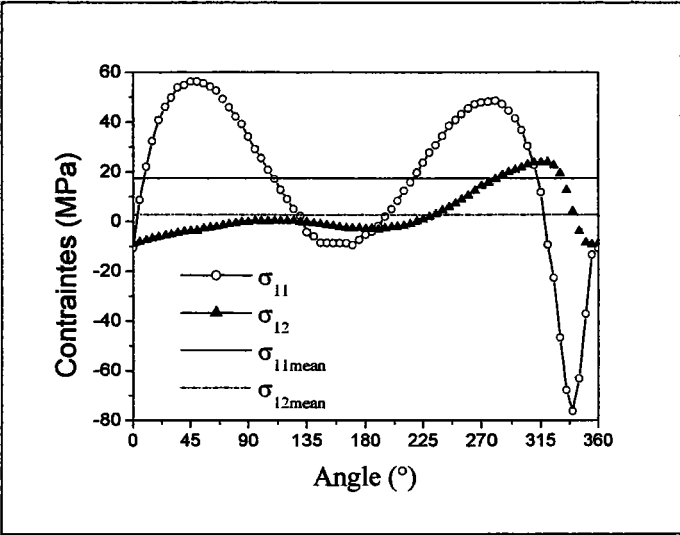


Figure 4.1 : Signal non-proportionnel.

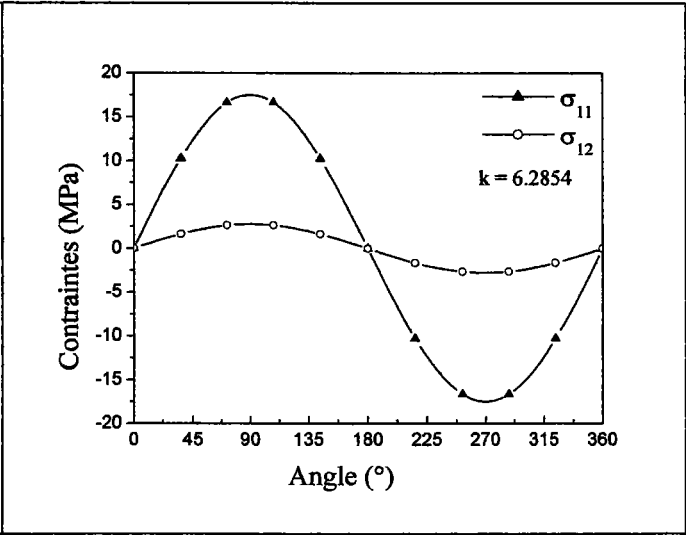


Figure 4.2 : Signal équivalent à appliqué.

**Cas 2 :** Le facteur  $k$  étant pris comme le rapport des contraintes maximales ( $\sigma_{\max} / \tau_{\max}$ ) :  $|\sigma_{\max}| = 76.2 \text{ MPa}$  ;  $\tau_{\max} = 23.99 \text{ MPa}$  La figure (4.3) représente le chargement multiaxial non-proportionnel à amplitude variable appliqué et la figure (4.4) représente le chargement multiaxial proportionnel équivalent avec même rapport des maximums :

$$k = \frac{\max(\sigma_{\text{Trac-Tor}})}{\max(\tau_{\text{Trac-Tor}})} = 3.18 \tag{2}$$

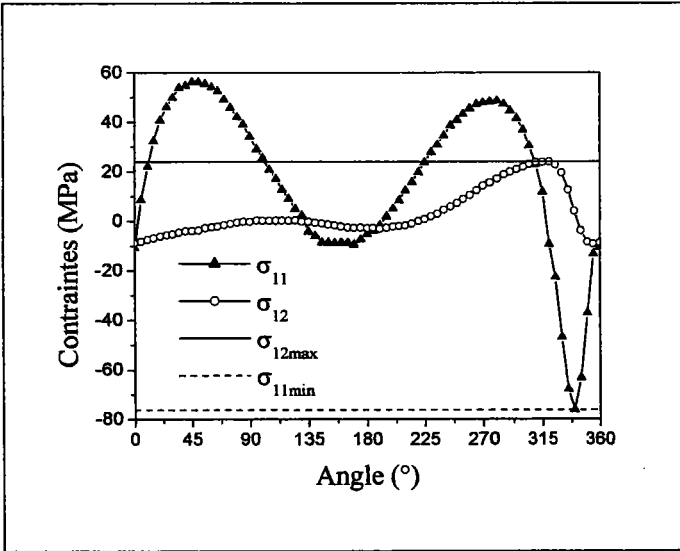


Figure 4.3 : Chargement non-proportionnel

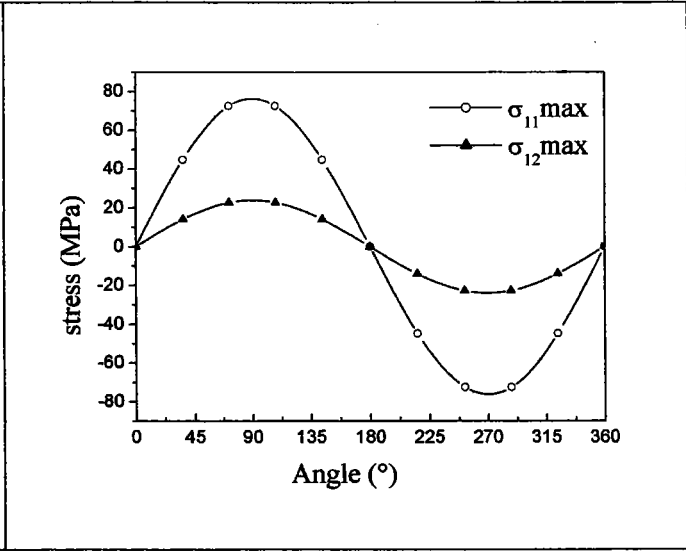


Figure 4.4 : Chargement équivalent à appliquer.

➤ **Cas 3 :** En tenant compte de tous les points du signal de chargement non proportionnel, le rapport  $k$  varie tout au long de cycle, et sa moyenne est calculée soit par une sommation ou par une intégration :

$$k_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T k_i dt = 0.9867 \tag{3}$$

$$k_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{Trac-Tor i}}{\tau_{Trac-Tor i}} = 0.9707 \quad (4)$$

Les deux dernières méthodes donnent presque la même valeur. Nous choisissons  $k = 0.9867$

➤ **Cas 4 :** Tous les points sont considérés et le rapport  $k$  n'est pas constant (signal réel).

#### 4.2.1 Etude des quatre cas

**Cas 1 : Le signal multiaxial non-proportionnel est transformé en un signal proportionnel avec application de la contrainte moyenne**

Les contraintes moyennes appliquées sont  $\sigma_{Trac-Tor} = 17.15 \text{ MPa}$  et  $\tau_{Trac-Tor} = 2.77 \text{ MPa}$ , figure (4.1 et 4.2).  $k = 6.1954$

Calculons les paramètres influençant l'amorçage.

**a- Calcul du facteur de sensibilité de degré de triaxialité  $\beta$  :**

En fonction des deux essais : torsion alternée  $\tau_{Tor}^D = 178 \text{ MPa}$  et flexion rotative alternée symétrique  $\sigma_{FR}^D = 243 \text{ MPa}$ . Le calcul du facteur de sensibilité de degré de triaxialité du matériau est donné par l'équation (5) :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{Frot}^D \\ \tau_{Tor}^D \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta \text{ est la solution de } \left( \frac{\sigma_{FR}^D}{\tau_{tor}^D} \right)^2 - 3 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \cdot \text{Ln} \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{3} (e^\beta - 1) \right] \right\} = 0 \quad (5)$$

La résolution de cette équation donne  $\beta = 2.07$ . Avec  $\nu = 0.3$

**b- Calcul des fonctions de degré de triaxialité :**

Pour prendre en compte l'influence de la triaxialité, Palin luc utilise la fonction introduite par Froustey et Lasserre dans leur critère. Cette fonction est utilisée dans deux cas :

➤ **b-1 cas uniaxial**

$$dT_a_{uniax} = \frac{1-2\nu}{3} = 0.1333 \quad (6)$$

$$F(dT_a(uniax), \beta) = \frac{1}{1 - dT_a_{uniax}} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \text{Ln} \left( 1 + dT_a_{uniax} (e^\beta - 1) \right) \right\} = 0.78954 \quad (7)$$

**b-2 cas biaxial pour  $k = 6.1954$**

$$dT_a_{sol} = \frac{(1-2 \cdot \nu) \cdot k^2}{3 \cdot k^2 + 6 \cdot (1+\nu)} = 0.12486 \quad (8)$$

$$F(dT_a(Trac + tor), \beta) = \frac{1}{1 - dT_a_{sol}} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \text{Ln} \left( 1 + dT_a_{sol} (\exp(\beta) - 1) \right) \right\} = 0.79899 \quad (9)$$

On remarque que la fonction de degré de triaxialité de la sollicitation ( $F(dTa(trac + tor), \beta)$ ) varie faiblement par rapport à la fonction de degré uniaxial ( $F(dTa(uniax), \beta)$ ). Le rapport des deux fonctions est de  $\frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uniax), \beta)} = 1.012$ .

### c- détermination du rayon $r^*$ définissant la ligne iso- $W^*$

Ce critère permet de définir un volume qui contient tous les points susceptibles d'être critiques vis-à-vis de la tenue à la fatigue où  $W_a$  est maximale. Ces points sont délimités par la surface extérieure de la pièce et la surface-iso. Dans notre cas, ceci correspond à la surface hachurée figure (4.5). Sur ce volume, on calcule une quantité énergétique  $\varpi_a$  par l'expression (10). Pour une éprouvette et une sollicitation donnée,  $\varpi_a$  représente la moyenne volumique de la quantité d'énergie  $W_a$  supérieure à  $W_a^*$ .

$$\varpi_a = \frac{1}{V^*(c_i)} \iiint_{V^*(c_i)} \langle (W_a(x, y, z) - W_a^*(c_i)) \rangle dV \quad (10)$$

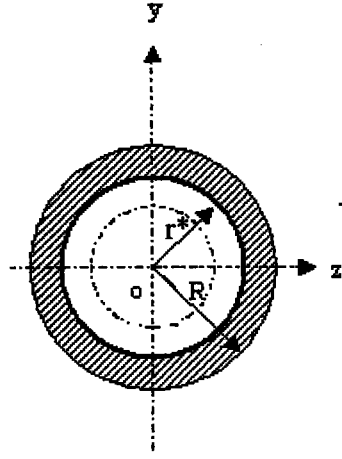
Avec  $\langle (W_a(x, y, z) - W_a^*) \rangle \geq 0$

$$V^* = \{ \text{points } (x, y, z) \text{ de la pièce tels que } W_a(x, y, z) \geq W_a^* \} \quad (11)$$

La forme de l'éprouvette étant lisse, la concentration des contraintes est faible. L'intégrale sur le volume peut se ramener à l'intégrale surfacique si on suppose que la distribution de  $W_a$  est invariante par translation sur X. Le calcul se réduit donc à la section droite de l'éprouvette. L'équation (10) devient :

$$\varpi_a = \frac{1}{S^*} \iint_{S^*} (W_a(x, y, z) - W_a^*) dS \quad (12)$$

Dans notre cas de sollicitation Traction-Torsion, la ligne iso  $W_a^*$  est déterminée par  $r^*$  :



Traction-Torsion

Figure 4.5 : section d'une éprouvette cylindrique.[51]

L'équation (13) permet de calculer  $r^*$  :

$$\left(\frac{r^*}{R}\right)^2 = \left[ \frac{2\sigma_{Trac}^{D2} - \sigma_{Fro}^{D2}}{\sigma_{Trac-Tor}^{D2}} \cdot \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uni), \beta)} - 1 \right] \cdot \frac{k^2}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

Deux cas se présentent :

$$\checkmark \text{ Si } \sqrt{(1+\nu) \frac{(2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2})}{(\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1)}} \geq k \Leftrightarrow 0 < \frac{r^*}{R} < 1 \quad \text{alors}$$

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = \sqrt{\frac{\sigma_{Fro}^{D2}}{1 + 2(1+\nu)/k^2} \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uni), \beta)}} \quad \text{et} \quad \tau_{Trac-Tor}^D = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^D}{k} \quad (14)$$

$$\checkmark \text{ Si } \sqrt{(1+\nu) \frac{(2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2})}{(\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1)}} \leq k \Leftrightarrow r^* = 0 \quad \text{alors}$$

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = \sqrt{\frac{\sigma_{Tra}^{D2}}{1 + (1+\nu)/k^2} \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uni), \beta)}} \quad \text{et} \quad \tau_{Trac-Tor}^D = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^D}{k} \quad (15)$$

$$\text{donc } \sqrt{(1+\nu) \frac{(2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2})}{(\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1)}} = 0.7 < k = 6.1954 \Leftrightarrow r^* = 0$$

Dans ce cas, tous les points de la surface sont critiques.

#### d- Estimation de la contrainte d'endurance de la sollicitation traction-torsion :

Puisque  $r^* = 0$ , on peut estimer les deux contraintes d'endurance de sollicitation à partir de l'équation (15) qui donne :  $\sigma_{Trac-Tor}^D = 223.68 \text{ MPa}$  et  $\tau_{Trac-Tor}^D = 36.09 \text{ MPa}$

#### e - Calcul de la densité volumique d'énergie moyenne :

$$\triangleright W_{Trac-Tor}^* = \frac{2\sigma_{Trac}^{D2} - \sigma_{Fro}^{D2}}{4E} \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uni), \beta)} = 54665 \text{ J/m}^3 \quad (16)$$

$$\triangleright \varpi_{a(Trac-Tor)} = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^2}{4E} \left( 1 + \frac{(1+\nu)}{k^2} \right) - W^* = 0 \quad (17)$$

Pour  $k = 6.1954$  et  $\sigma_{Trac-Tor} = 17.15 \text{ MPa}$  et  $\varpi_{Trac-Tor}^D = \frac{\sigma_{Fr}^{D^2} - \sigma_{Trac}^{D^2}}{4E} \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uniax), \beta)}$

on trouve :

$$\triangleright \varpi_{a(Trac-Tor)} = 0$$

$$\triangleright \varpi_{Trac-Tor}^D = 10112 \text{ J/m}^3$$

Conclusion :  $\varpi_{a(Trac+Tor)} \leq \varpi_D$ , cette solution montre l'absence de fissuration.

La condition  $\varpi_{a(Trac+Tor)} \geq \varpi_D$  n'est vérifiée que pour un facteur multiplicateur de charge égal à 13. (fig.4.6). Ce résultat est très loin de l'expérience dont le facteur multiplicateur de charge est de 2.56, et qui correspond à  $N_R = 10^7 \text{ cycles}$ .

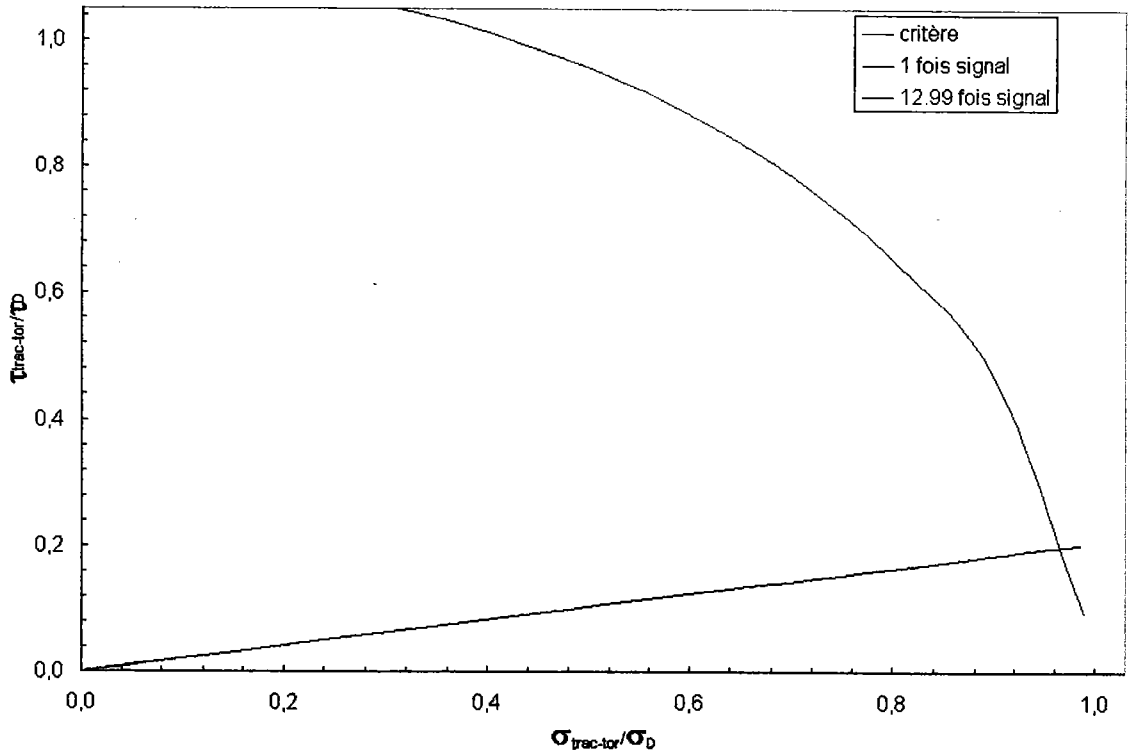


Figure 4.6 : Application du critère de Palin Luc dans le premier cas  
(chargement proportionnel avec R=-1).

Conclusion : cette solution est aberrante et ne correspond pas à la réalité. Elle sera abandonnée.

### Cas 2 : Signal multiaxial non proportionnel transformé en un signal proportionnel avec application de la contrainte maximale

Pour cela  $\sigma_{Trac-TorMax} = \max(\sigma_{Trac-Tor})_i$  et  $\tau_{Trac-TorMax} = \max(\tau_{Trac-Tor})_i \Rightarrow k = \frac{\sigma_{Trac-TorMax}}{\tau_{Trac-TorMax}}$

D'après le signal on a :  $\sigma_{Trac-TorMax} = 76 \text{ MPa}$  et  $\tau_{Trac-TorMax} = 23.99 \text{ MPa} \Rightarrow k = 3.18$

On prend la même valeur du facteur de sensibilité  $\beta = 2.07$

**a - Calcul des fonctions de degré de triaxialité :**

Pour déterminer l'influence du Degré de triaxialité, deux cas sont étudiés :

➤ **a-1 cas uniaxial**

$$dT_{a(uni)} = \frac{1-2\nu}{3} = 0.1333 \longrightarrow F(dT_{a(uni)}, \beta) = 0.78954 \quad (18)$$

➤ **a-2 cas multiaxial**

$$dT_{a\_sol} = \frac{(1-2\nu) \cdot k^2}{3 \cdot k^2 + 6 \cdot (1+\nu)} = \longrightarrow F(dT_{a(trac+tor)}, \beta) = 0.8214 \quad (19)$$

**b - détermination du rayon  $r^*$  définissant la ligne iso- $W^*$**

L'équation suivante permet de calculer  $r^*$  :

$$\left(\frac{r^*}{R}\right)^2 = \left[ \frac{2\sigma_{Trac}^{D2} - \sigma_{Fro}^{D2}}{\sigma_{Trac-Tor}^{D2}} \cdot \frac{F(dT_{a(trac+tor)}, \beta)}{F(dT_{a(uni)}, \beta)} - 1 \right] \cdot \frac{k^2}{2(1+\nu)} \quad (20)$$

Deux cas se présentent pour le calcul

✓ Si  $\sqrt{(1+\nu) \left( \frac{2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2}}{\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1} \right)} \geq k \Leftrightarrow 0 < \frac{r^*}{R} < 1$  alors

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = \sqrt{\frac{\sigma_{Fro}^{D2}}{1 + 2(1+\nu)/k^2} \cdot \frac{F(dT_{a(trac+tor)}, \beta)}{F(dT_{a(uni)}, \beta)}} \quad (21)$$

✓ Si  $\sqrt{(1+\nu) \left( \frac{2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2}}{\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1} \right)} \leq k \Leftrightarrow r^* = 0$  alors

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = \sqrt{\frac{\sigma_{Trac}^{D2}}{1 + (1+\nu)/k^2} \cdot \frac{F(dT_{a(trac+tor)}, \beta)}{F(dT_{a(uni)}, \beta)}} \quad (22)$$

Le calcul donne  $\sqrt{(1+\nu) \left( \frac{2 - \sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2}}{\sigma_{Fro}^{D2} / \sigma_{Trac}^{D2} - 1} \right)} = 0.673 \leq k$  donc  $r^* = 0$

**c - Estimation de la contrainte d'endurance de la sollicitation traction-torsion :**

A partir de l'équation (22), on estime la contrainte d'endurance de sollicitation :

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = 216.95 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_{Trac-Tor}^D = 68.22 \text{ MPa}$$

**d - Calcul de la densité volumique d'énergie moyenne :**

➤  $W_{Trac-Tor}^* = \frac{2\sigma_{Trac}^{D2} - \sigma_{Fro}^{D2}}{4E} \cdot \frac{F(dT_{a(trac+tor)}, \beta)}{F(dT_{a(uni)}, \beta)} = 56219 \text{ J/m}^3 \quad (23)$

➤  $\varpi_{a(Trac-Tor)} = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^2}{4E} \left( 1 + \frac{(1+\nu)}{k^2} \right) - W^* = 0 \quad (24)$

Pour  $k = 3.18$  et  $\sigma_{Trac-Tor} = 76.2 \text{ MPa}$  et  $\varpi_{Trac-Tor}^D = \frac{\sigma_{Fr}^{D^2} - \sigma_{Trac}^{D^2}}{4E} \frac{F(dT(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uniax), \beta)}$

On a :  $\varpi_{a(Trac-Tor)} = 0$  et  $\varpi_{Trac-Tor}^D = 10399 \text{ J/m}^3$

Conclusion :  $\varpi_{a(Trac-Tor)} \leq \varpi_D$  ce qui montre l'absence de fissuration.

L'inégalité  $\varpi_{a(Trac-Tor)} \geq \varpi_D$  prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.84. Cette solution est proche de l'expérience.

Palin Luc propose un seuil suivant la valeur de  $r^*$  :

Si  $0 < \frac{r^*}{R} < 1$

alors  $\frac{\sigma_{Trac-Tor}^{D^2}}{\sigma_{Trac}^{D^2}} + \frac{\tau_{Trac-Tor}^{D^2}}{\tau_{Tor}^{D^2}} \cdot \frac{\sigma_{Frot}^{D^2}}{F(dTa(uniax), \beta) \sigma_{Trac}^{D^2}} = \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uniax), \beta)} \cdot \frac{\sigma_{Frot}^{D^2}}{\sigma_{Trac}^{D^2}}$  (25)

Si  $r^* = 0$

alors  $\frac{\sigma_{Trac-Tor}^{D^2}}{\sigma_{Trac}^{D^2}} + \frac{\tau_{Trac-Tor}^{D^2}}{\tau_{Tor}^{D^2}} \cdot \frac{\sigma_{Frot}^{D^2}}{2 \cdot F(dTa(uniax), \beta) \sigma_{Trac}^{D^2}} = \frac{F(dTa(trac + tor), \beta)}{F(dTa(uniax), \beta)}$  (26)

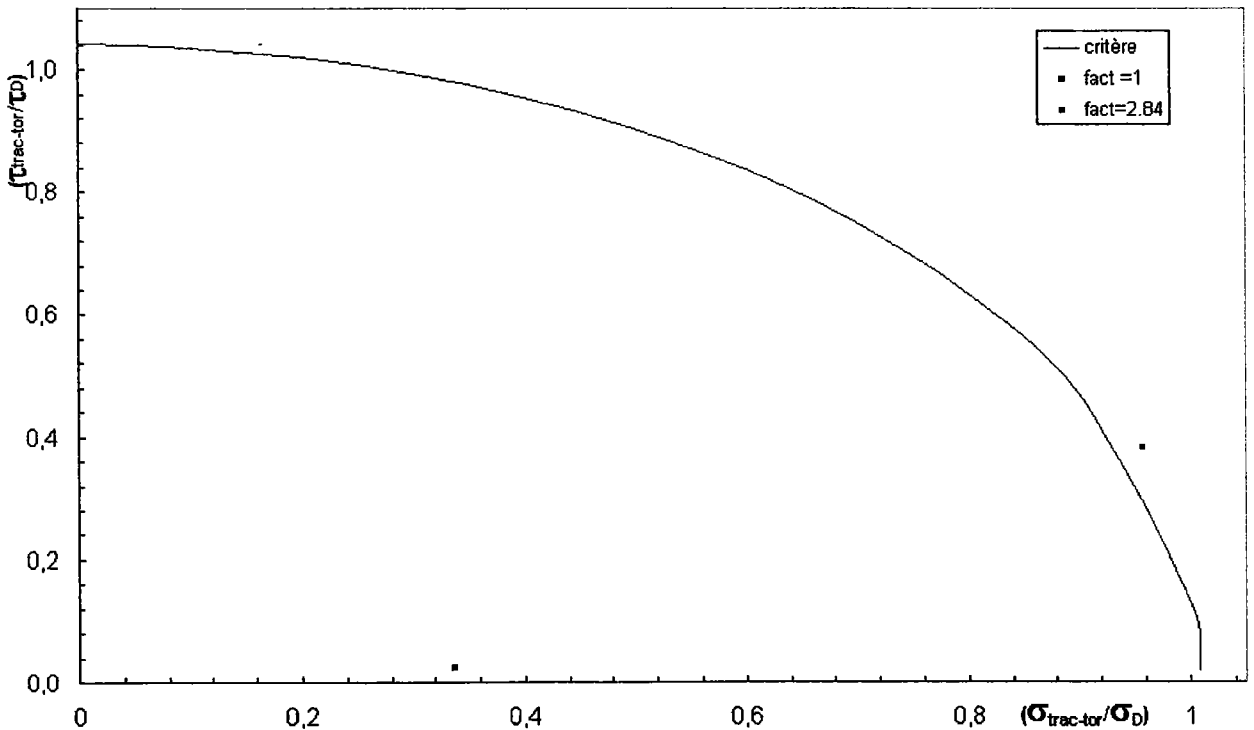


Figure 4.7 : Application du critère de Palin Luc dans le deuxième cas  
(chargement proportionnel avec  $R=-1$ ).

On constate que le critère du Palin Luc donne des résultats proches de l'expérience.

### Cas 3 : calcul de l'énergie de déformation totale pour un cycle

Vu le type de chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable, tous les points sont pris en considération et l'intégration se fait sur tout le cycle pour déterminer l'énergie de déformation totale. Le rapport  $k$  sera l'intégrale de tous les  $k_i = \frac{\sigma_i}{\tau_i}$  (cas 3):

#### a- Calcul des fonctions de degré de triaxialité :

##### ➤ a-1 cas uniaxial

$$\diamond dTa_{uniax} = \frac{(1-2 \cdot \nu)}{3} \quad (27)$$

$$\diamond FdTa_{uniax} = \frac{1}{1-dTa_{uniax}} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dTa_{uniax} \cdot (\exp(\beta) - 1)) \right) \quad (28)$$

Application Numérique :  $dTa_{uni} = 0.1333$  et  $FdTa_{uniax} = 0.928$  et  $\beta = 2.07$

##### ➤ a-2 cas multiaxial

$$\diamond dTsol = \frac{I^2(t)}{I^2(t) + \frac{6 \cdot (1+\nu)}{(1-2 \cdot \nu)} \cdot J(t)}$$

Cette expression est donnée par De Leiris.

$$\diamond FdTsol = 0.9253$$

#### c - détermination du rayon $r^*$ définissant la ligne iso- $W^*$

D'après les équations (7) et (10), on peut calculer le rayon  $r^*$  du cercle définissant la ligne iso- $W_a^*$  dans la section de l'éprouvette.  $k = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^D}{\tau_{Trac-Tor}^D} = 0.9867$ . D'après (20) le rapport  $k > 0.6728$

donc,  $r^* = 0$ .

#### d - Estimation de la contrainte d'endurance de la sollicitation de traction-torsion

Les contraintes de sollicitations d'endurance sont estimées d'après l'équation (22)

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = \sqrt{\frac{\sigma_{Trac}^{D2}}{2 \cdot (1 + (1+\nu)/k^2)} \cdot \frac{FdTa_{sol}}{FdTa_{uniax}}}$$

$$\text{et } \tau_{Trac-Tor}^D = \frac{\sigma_{Trac-Tor}^{D2}}{k} \text{ avec } k = 0.9867 \text{ donc :}$$

$$\sigma_{Trac-Tor}^D = 137.31 \text{ MPa et } \tau_{Trac-Tor}^D = 139.16 \text{ MPa}$$

#### e - Calcul de la densité volumique d'énergie moyenne :

$$\text{➤ } w^D = \frac{\sigma_{FR}^{D2} - \sigma_{Trac}^{D2}}{4E} \cdot \frac{FdTa_{sol}}{FdTa_{uniax}} = 11716 \text{ J/m}^3 \quad (29)$$

$$\triangleright W_{Trac-Tor}^* = 63337 \text{ J / m}^3 \quad (30)$$

$$\triangleright \varpi_a = \frac{1}{2ET} \int_0^T \sigma_{Trac-Tor}^2(t).dt + \frac{(1+\nu)}{ET} \int_0^T \tau_{Trac-Tor}^2(t).dt - W_{Trac-Tor}^* \quad (31)$$

Pour cela, on calcul  $Wa = \frac{1}{2ET} \int_0^T \sigma_{Trac-Tor}^2(t).dt + \frac{(1+\nu)}{2ET} \int_0^T \tau_{Trac-Tor}^2(t).dt$

L'énergie au cours du temps varie pendant tout le cycle, figure (4.8). Pour appliquer l'extension du critère du Palin-Luc, on compare la densité d'énergie moyenne  $\varpi_a$  calculée à l'énergie limite en endurance  $\varpi^D$ .

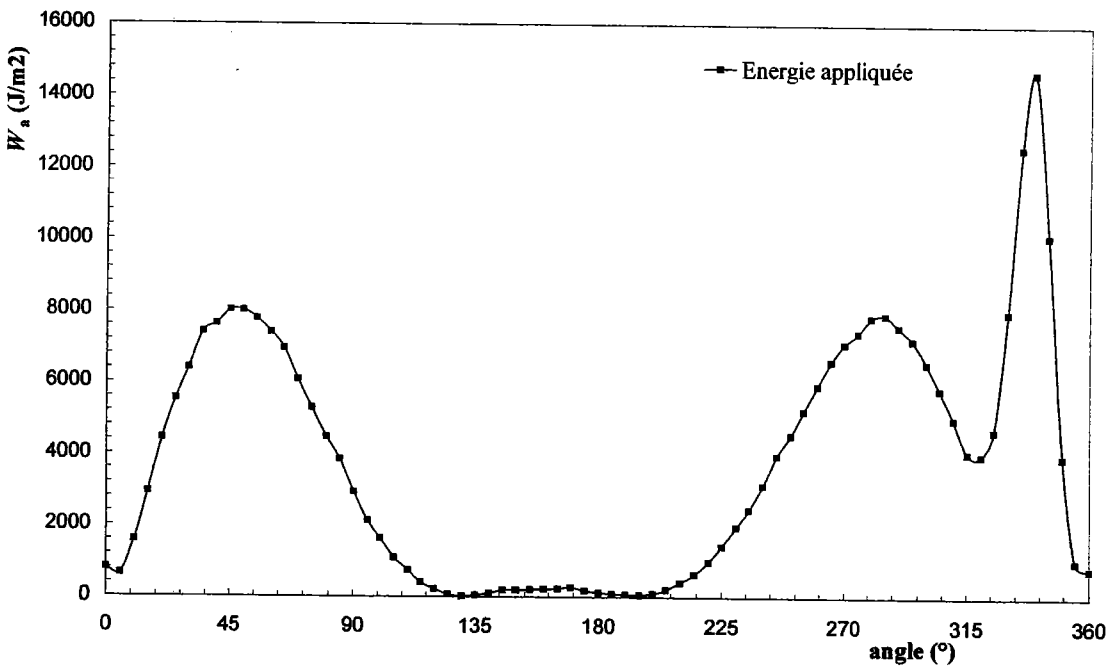


Figure 4.8 : Evolution de l'énergie appliquée au cours de cycle.

$\varpi_a = Wa_{moy} - W^* \leq \varpi^D$ , ce qui signifie l'absence de rupture.

On remarque que le signal ne peut être présenté par une seule valeur de contrainte. Pour qu'on puisse avoir  $\varpi_a \geq \varpi^D$ , il faut un facteur multiplicateur de charge de 4.27. Ce rapport est un facteur multiplicateur du signal appliqué et est désigné par  $f_{end}$ .

Le facteur multiplicateur de charge 4.27 est obtenu à partir de la condition d'amorçage de fissure

$$\varpi_a = Wa_{moy} - W_{moy}^* \geq \varpi^D.$$

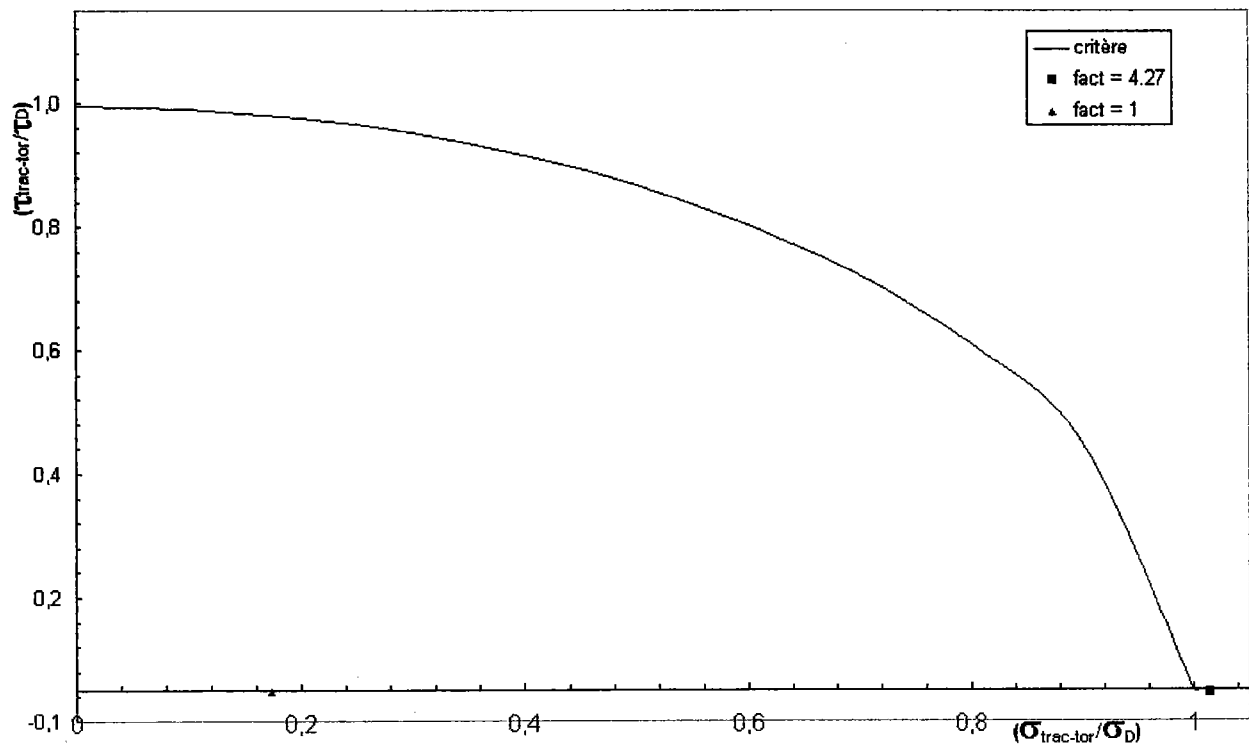


Figure 4.9 : L’extension du critère de Palin-Luc dans le troisième cas.

Récapitulatif :

Le tableau 4.1 fournit les différentes prédictions dans le cas utilisant le quart d’ellipse (tab.4.1.a), et dans le cas du critère énergétique (tab.4.1.b).

| Cas   | $\sigma_a$ | $\tau_a$ | $k$    | $\sigma_{Trac-Tor}^D$ | $\tau_{Trac-Tor}^D$ | $f_{end}$ |
|-------|------------|----------|--------|-----------------------|---------------------|-----------|
| Cas 1 | 17.15      | 2.77     | 6.1954 | 214.24                | 35.956              | 13        |
| Cas 2 | 76.2       | 23.99    | 3.18   | 214.24                | 67.37               | 2.84      |
| Cas 3 | Cycles     | Cycle    | 0.9867 | 160                   | 160                 | 4.27      |

Tableau 4.1 : Résultats de 3 cas.

On constate que le cas 2, correspond au choix des valeurs maximales des contraintes ( $\sigma_{Trac-Tor_{Max}}, \tau_{Trac-Tor_{Max}}$ ), est le plus proche de la valeur expérimentale du nombre de cycle à rupture.

**Cas 4 : Etude de signal réel par extension du modèle Palin-Luc**

Dans ce cas, aucune valeur moyenne n’est prise. Tous les points sont considérés. Le facteur  $k$  varie tout au long du cycle. L’énergie maximale calculée est comparée à l’énergie limite d’endurance.

**a - Calcul des fonctions de degré de triaxialité :**

➤ **a-1 cas uniaxial**

$$\diamond dTa_{\_uniax} = \frac{(1 - 2 \cdot \nu)}{3} \quad (32)$$

$$\diamond FdTa_{\_uniax} = \frac{1}{1 - dTa_{\_uniax}} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dTa_{\_uniax} \cdot (\exp(\beta) - 1)) \right) \quad (33)$$

Application Numérique :  $dTa_{\_uni} = 0.1333$  et  $FdTa_{\_uniax} = 0.928$

➤ a-2 cas multiaxial

Le degré de triaxialité suivant la définition de De Leiris varie en fonction de I et de J qui varient à leur tour en fonction des contraintes appliquées. Donc, tous les termes calculaient en fonction des contraintes varient.

$$\diamond dTsol = \frac{I^2(t)}{I^2(t) + \frac{6(1+\nu)}{(1-2\nu)} J(t)} \quad (34)$$

$$\diamond FdT_{\_sol} = \frac{1}{(1 - dTa_{\_sol})} \left[ 1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dTa_{\_sol} [\exp(\beta) - 1]) \right] \quad (35)$$

b – Influence de la fonction de triaxialité sur  $W^*$  :

$$\diamond W^* = \frac{2\sigma_{Trac}^D{}^2 - \sigma_{FR}^D{}^2}{4E} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T FdT_{\_sol}.dt}{FdTa_{\_uniax}} \quad (36)$$

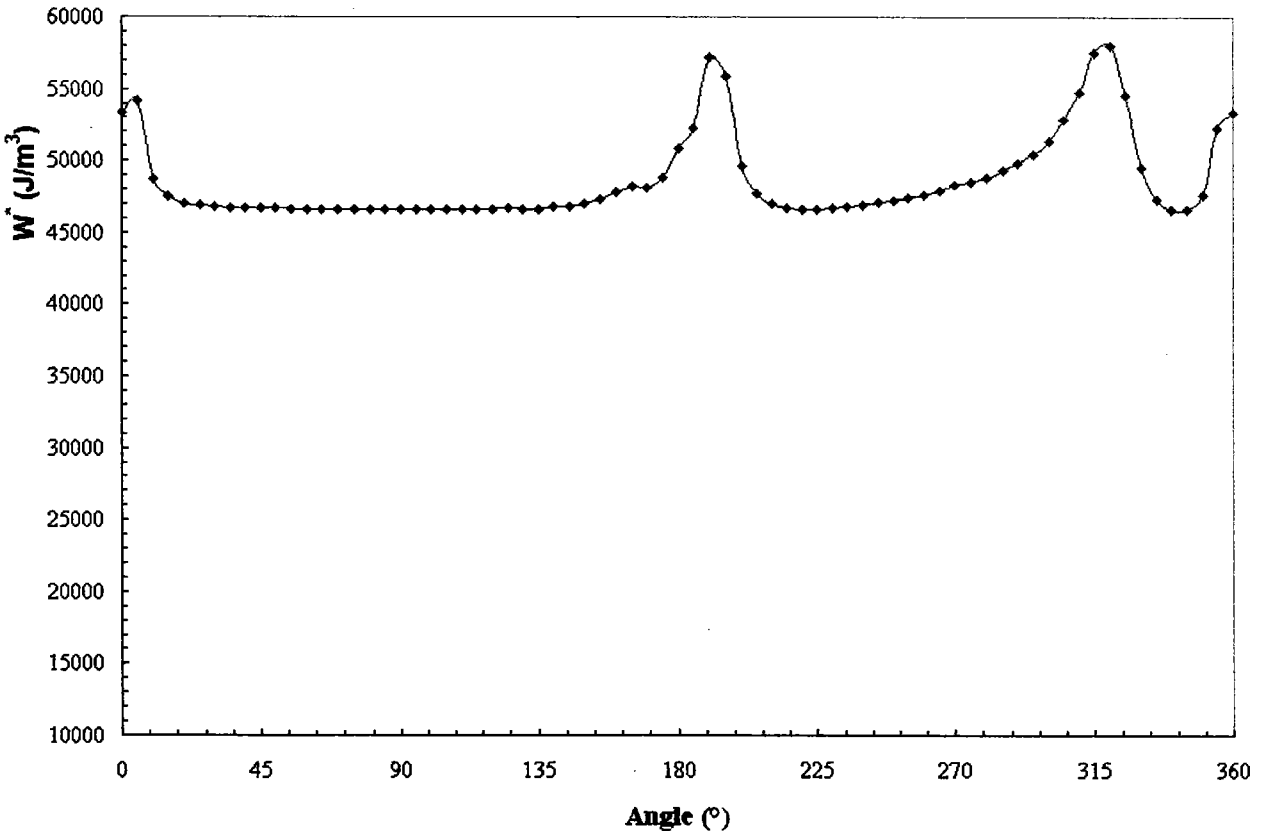


Figure 4.10 : Evolution de l'énergie de déformation par unité de Volume pendant un cycle.

$$\begin{cases} W_{\min}^* = 46549 \text{ J/m}^3 \\ W_{\max}^* = 57988 \text{ J/m}^3 \end{cases}$$

(37)

c - Calcul l'énergie de déformation critique :

L'évolution de l'énergie de déformation critique d'endurance est présentée par la figure (4.11).

L'expression (41) montre l'influence de l'énergie critique en fonction du degré de triaxialité.

$$\varpi_{moy}^D = \frac{\sigma_{FR}^{D2} - \sigma_{Tmc}^{D2}}{4E} \frac{\frac{1}{T} \int_0^T F dTa_{sol} dt}{FdTa_{umax}}$$

(41)

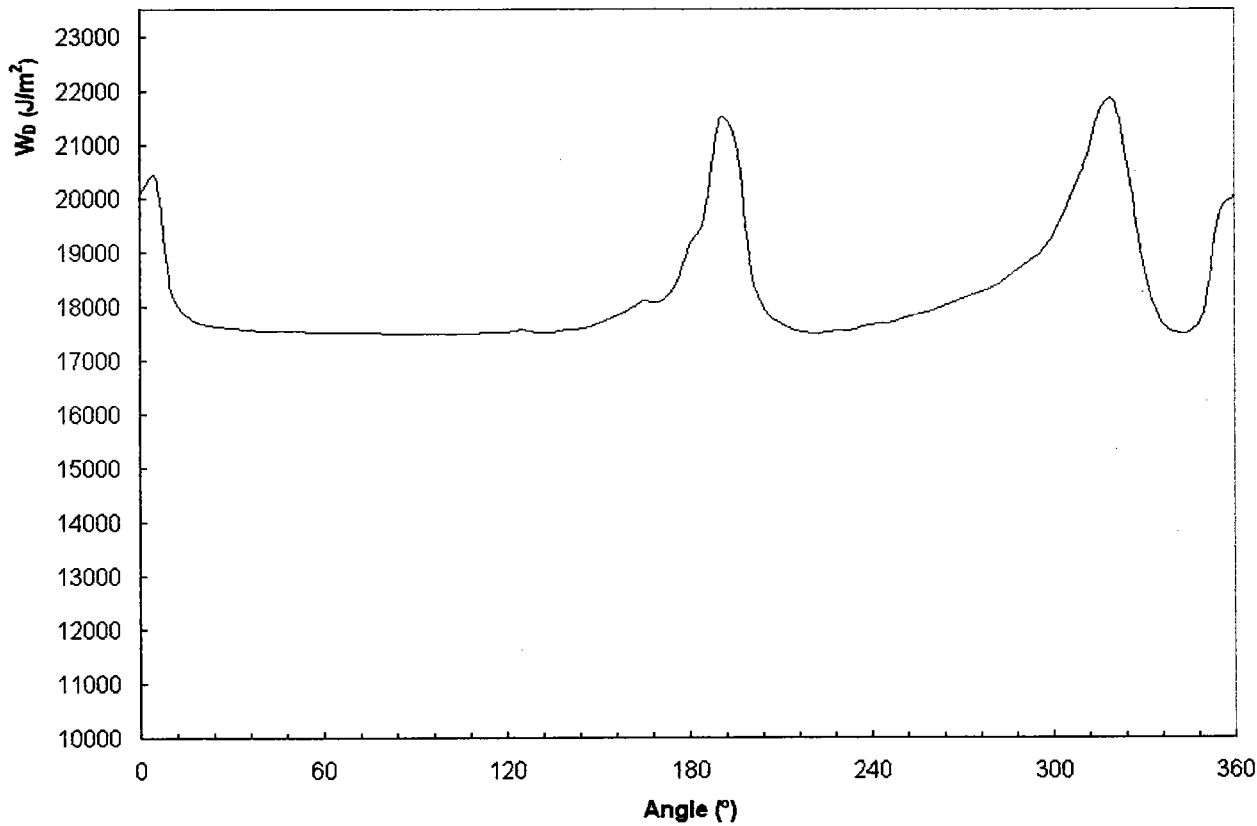


Figure 4.11 : évolution de  $\varpi^D$  pendant un cycle.

$$\begin{cases} \varpi_{\min}^D = 17489 \text{ J/m}^3 \\ \varpi_{\max}^D = 21786 \text{ J/m}^3 \end{cases}$$

d - Calcul l'énergie appliquée

L'évolution de l'énergie critique d'endurance est représentée par la figure (4.12).

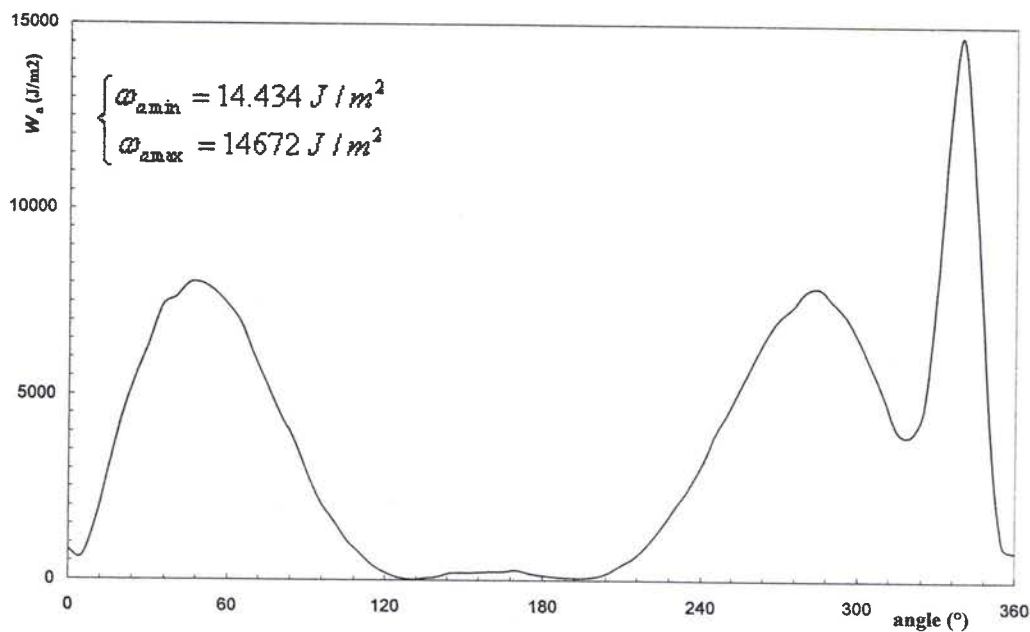


Figure 4.12 : Evolution  $w_a$  pendant un cycle.

Si on considère l'énergie maximale (cas 4), le critère prédit ( $w_a = Wa\_moy - W_{moy}^* \geq w^D$ ) un facteur multiplicateur de charge de 2.34.

4.2.2 Discussion

Le critère du Palin Luc est proposé pour les chargements d'amplitudes constantes (proportionnel ou non) avec un rapport de charge égal à -1. Nous avons proposés quatre méthodes pour transformer un chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable, deux sont basées sur le modèle de Palin Luc et les deux autres sur son extension dont le degré de triaxialité est défini par la relation de De Leiris. Les deux premiers cas sont les contraintes moyennes et maximales. Les deux derniers sont l'énergie maximale et moyenne.

Le tableau (4.2) représente les prédictions du modèle de Palin Luc (cas 1, Cas 2). Alors que l'extension du modèle Palin Luc est donnée par les cas 3 et 4.

|             | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 | Expérience |
|-------------|-------|-------|-------|-------|------------|
| énergétique | 13    | 2.84  | 4.27  | 2.34  | 2.56       |

Tableau 4.2 : Prédictions dans les différents cas.

On constate que :

- Théoriquement, les cas 2 et 4 donnent des valeurs plus proches de l'expérience,
- Le cas 2 représente les contraintes maximales des deux signaux, alors que le cas 4 représente l'énergie maximale du signal.

L'influence du la forme de chargement sur la durée de vie [52, 53, 54] en endurance, nous ont amené au début à vérifier cette hypothèse. Nous avons choisi le chargement multiaxial proportionnel à amplitude constante de type cas 2 comme signal équivalent au chargement multiaxial non proportionnel à amplitude variable. Dans ce contexte, des essais ont été réalisés.

$$(\sigma_{Trac-Tot_{Max}}; \tau_{Trac-Tor_{Max}}).$$

4.3 Essai proportionnel de fatigue multiaxiale

L'essai de fatigue multiaxiale proportionnel a été effectué sur la même machine Instron 1343 (fig.4.13). Les deux vérins sont mobiles et chacun exerce respectivement son chargement indépendamment de l'autre. Le contrôle électronique de la machine, qui commande les vérins hydrauliques, vérifie la différence de phase entre les deux chargements cycliques, qui a été préalablement choisi égale à zéro et maintenu constante par le biais du système d'asservissement. Pour réaliser les essais multiaxiaux proportionnels sur ce type de machine, des données concernant le signal étaient nécessaires tels : la contrainte moyenne, le type de signal, la fréquence et la contrainte maximale.

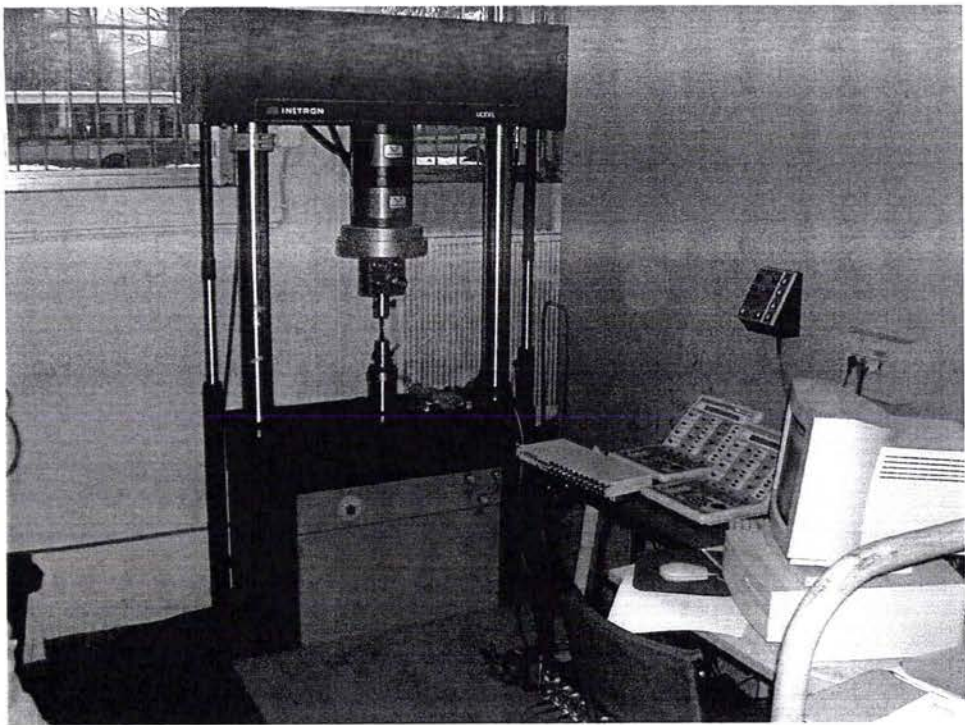


Figure 4.13 : Machine d'essai Instron 1343.

4.3.1 Essai multiaxial proportionnel

L'essai consiste à appliquer un chargement multiaxial sinusoïdal proportionnel (fig.4.14), en l'occurrence traction-torsion, sur l'éprouvette cylindrique lisse et déterminer le nombre de cycles à rupture. Pour ne pas influencer les essais et fonctionner dans les mêmes conditions, on a choisi la même fréquence 2 Hz pour les deux types de chargements.

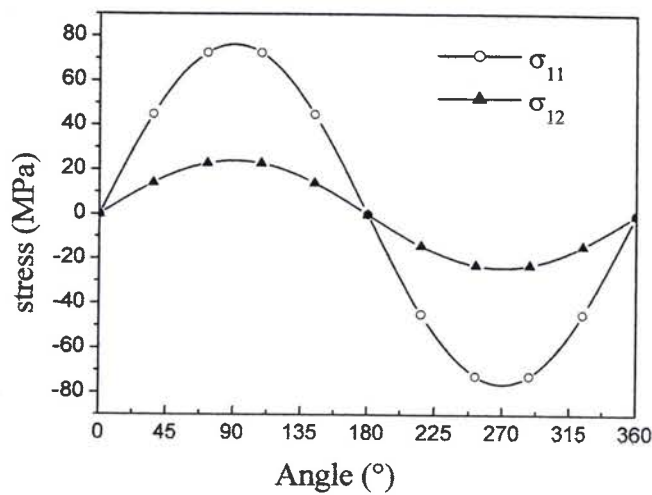


Figure 4.14 : chargement multiaxial sinusoïdal proportionnel.

4.3.2 Résultats expérimentaux

La courbe de Wöhler, résultante des travaux expérimentaux sous chargements multiaxiaux proportionnels, est présentée dans la figure 4.15. La contrainte équivalente de Von Mises a été utilisée pour représenter les coordonnées de la courbe de Wöhler. La durée de vie correspondant en fatigue est exprimée en nombre de cycles à rupture.

Afin de décrire mathématiquement les courbes expérimentales de fatigue, on pratique la méthode de régression linéaire. On peut ainsi écrire la loi de Basquin comme suit :

$\sigma = \sigma_f' \cdot (N_R)^b$  où  $\sigma_f'$  est la résistance en fatigue, b l'exposant de la loi de Basquin.

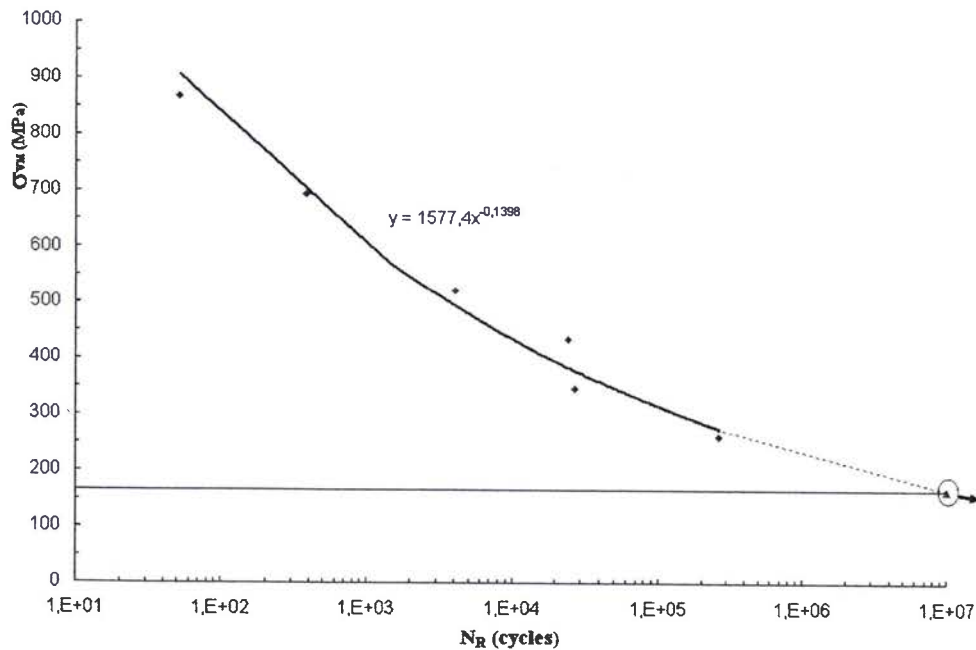


Figure 4.15 : Courbe expérimentale de fatigue sous chargement combiné.

Les valeurs des coefficients de la loi de Basquin, résultant de dépouillement, sont reportées dans le tableau 4.3.

| Type d'éprouvette | $\sigma_f'$ (MPa) | b       | $R^2$  |
|-------------------|-------------------|---------|--------|
| Lisse             | 1577.4            | -0.1398 | 0.9691 |

Tableau 4.3 : Valeurs des coefficients de la loi de Basquin.

La figure (4.16) représente les résultats exprimés en facteur multiplicateur de charge en fonction de la durée de vie.

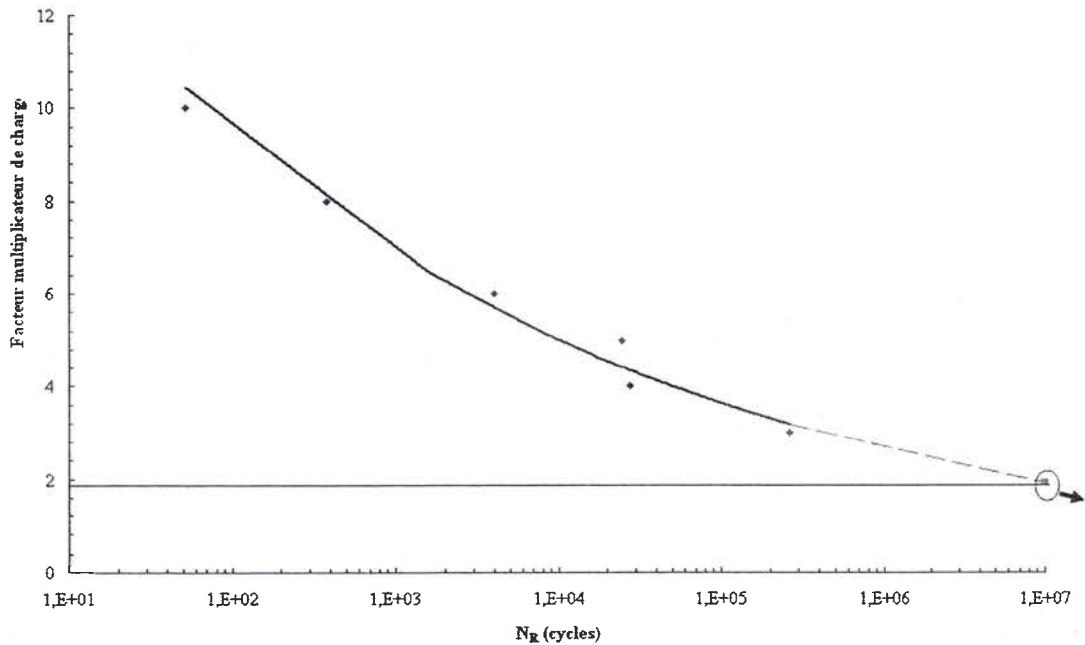


Figure 4.16 : résultats expérimentaux du chargement multiaxial proportionnel.

Le facteur multiplicateur de charge pour le chargement proportionnel est de 1.92 (point à prendre avec précaution), pour la durée de vie de  $10^7$  cycles. Ce point est estimé à partir de la courbe de Basquin et il est pris comme point de référence pour la comparaison avec les prévisions des autres modèles. Or, Le facteur multiplicateur de charge en chargement multiaxial réel non-proportionnel est estimé à 2.56. Ces résultats confirment l'influence du signal sur la durée de vie du matériau dans le domaine de fatigue d'endurance.

4.4 Analyse Fractographique

Pour identifier les modes de rupture et de déformation, des examens ont été effectués en microscopie optique (MO) et microscopie électronique à balayage (MEB) sur des éprouvettes rompues en fatigue d'amplitude constante sous différents chargements.

4.4.1 Aspect macroscopique

L'aspect macroscopique d'une éprouvette lisse soumise au chargement multiaxial proportionnel à amplitude constante, d'un facteur multiplicateur de charge de 3, est présenté dans la figure

4.17. La surface de rupture est divisée en deux zones. La première est lisse qui représente la propagation de la fissure de fatigue, alors que la deuxième est rugueuse et schématise la rupture finale. D'après la même figure, on constate l'existence de points d'amorçages qui s'est crée à la surface de l'éprouvette et s'est mis à se propager.

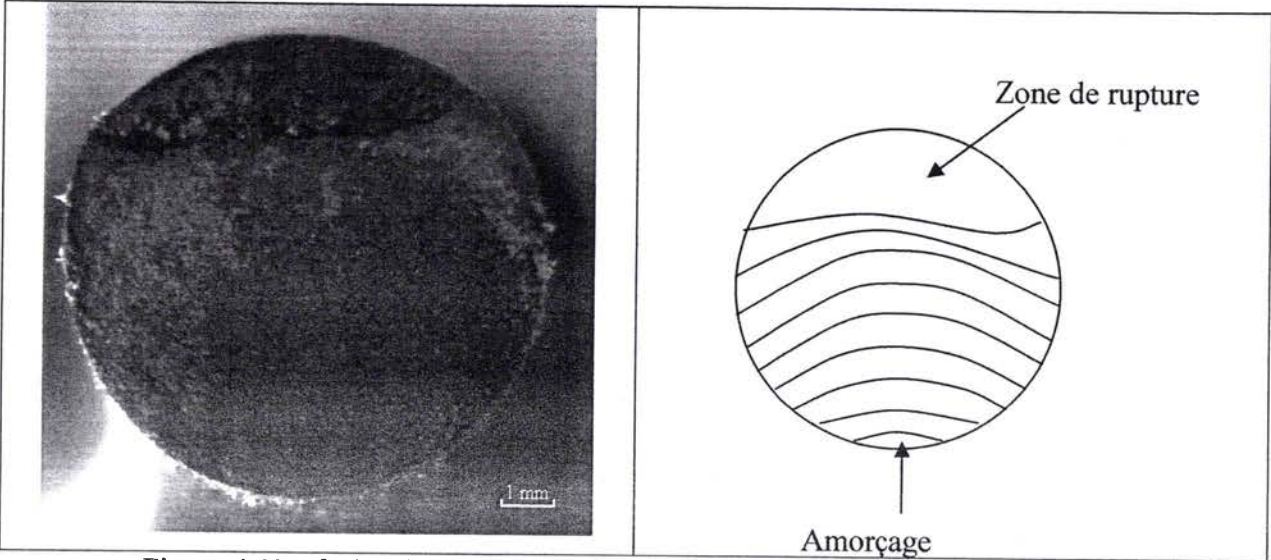


Figure 4.17 : faciès de l'éprouvette rompue à 264901 cycles (3 fois le signal).

On constate un changement progressif de courbure et d'orientation. Un autre faciès d'une éprouvette sollicitée par un chargement multiaxial proportionnel à amplitude constante, d'un facteur multiplicateur de charge de 5 (traction-torsion en phase), est montré dans la figure 4.18.

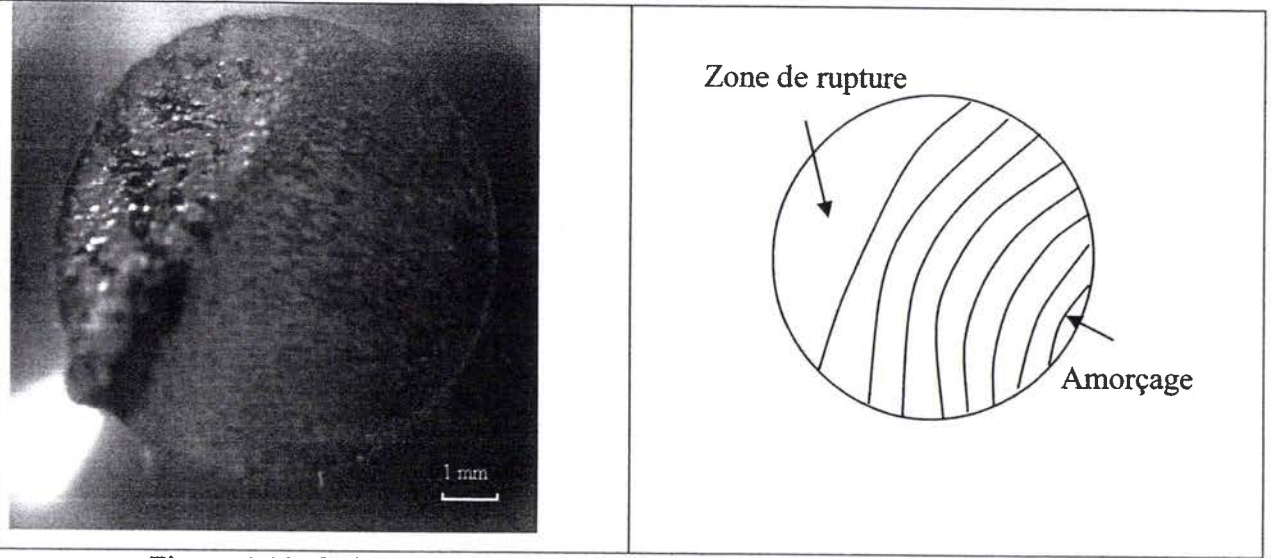


Figure 4.18: faciès de l'éprouvette rompue à 98381 cycles (4 fois le signal).

On peut conclure les mêmes constatations faites auparavant, excepté la zone de propagation de fissure qui a diminué. Comme le montre la figure 4.19, la zone de fissuration est perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette et montre que la fissure s'amorce et se propage perpendiculaire à la contrainte de traction.

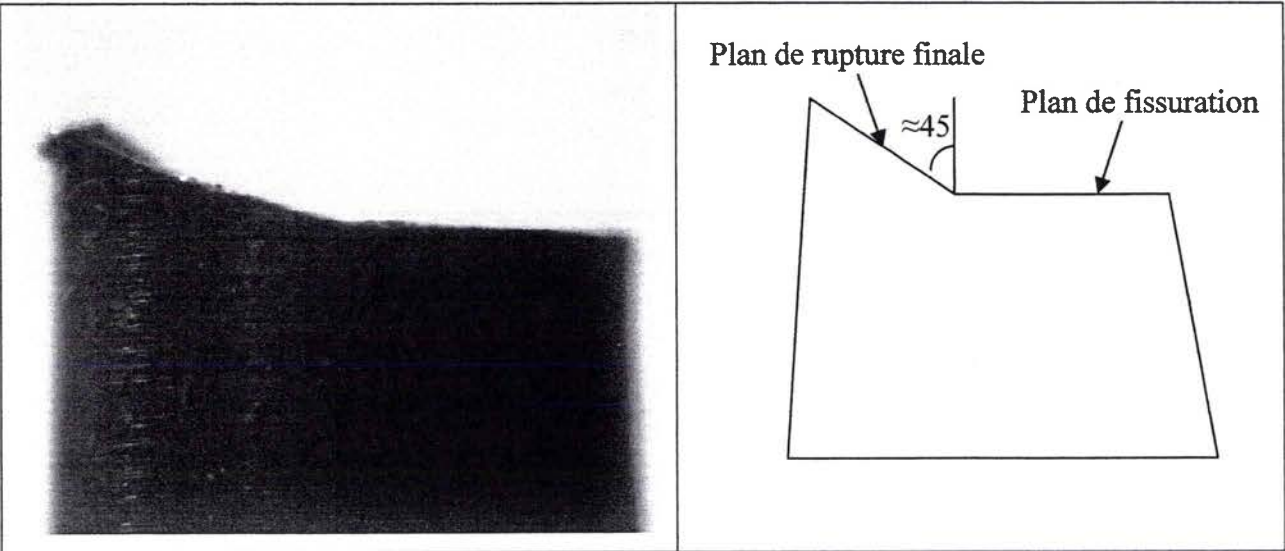
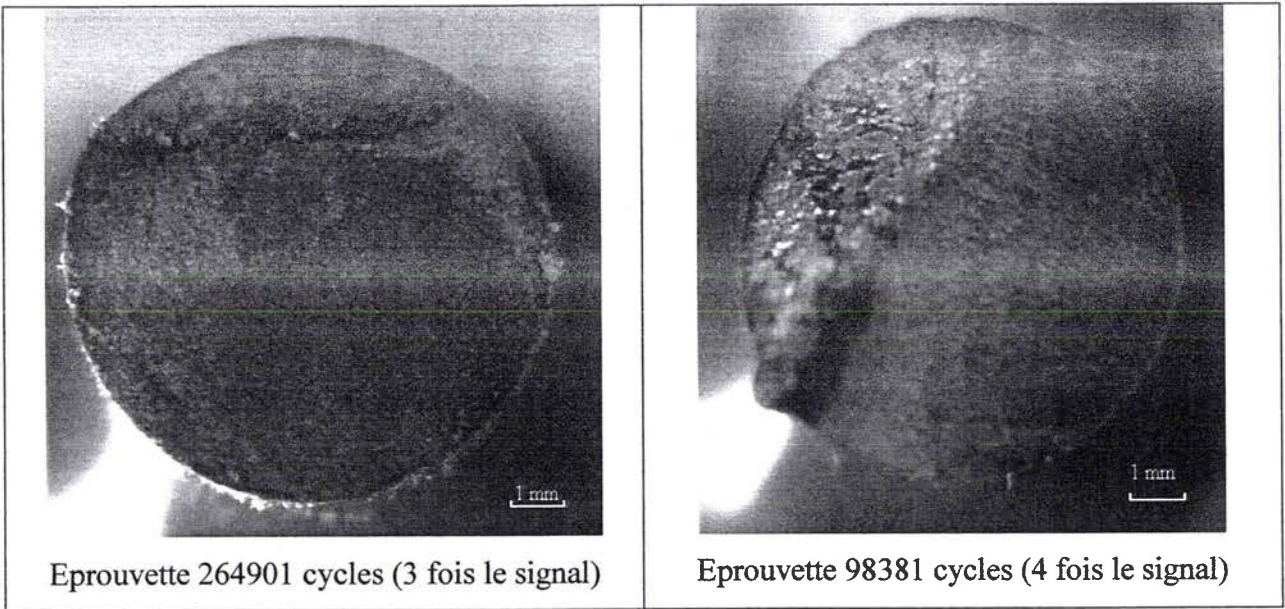


Figure 4.19: plan de rupture de l'éprouvette 98381 cycles (4 fois le signal).

La taille de la zone de propagation de fissures varie inversement proportionnel à la charge. La surface de rupture de fatigue est en dépendance directe avec la nature et l'intensité des sollicitations qui leur donnent naissance (Fig. 4.20).



Eprouvette 264901 cycles (3 fois le signal)

Eprouvette 98381 cycles (4 fois le signal)

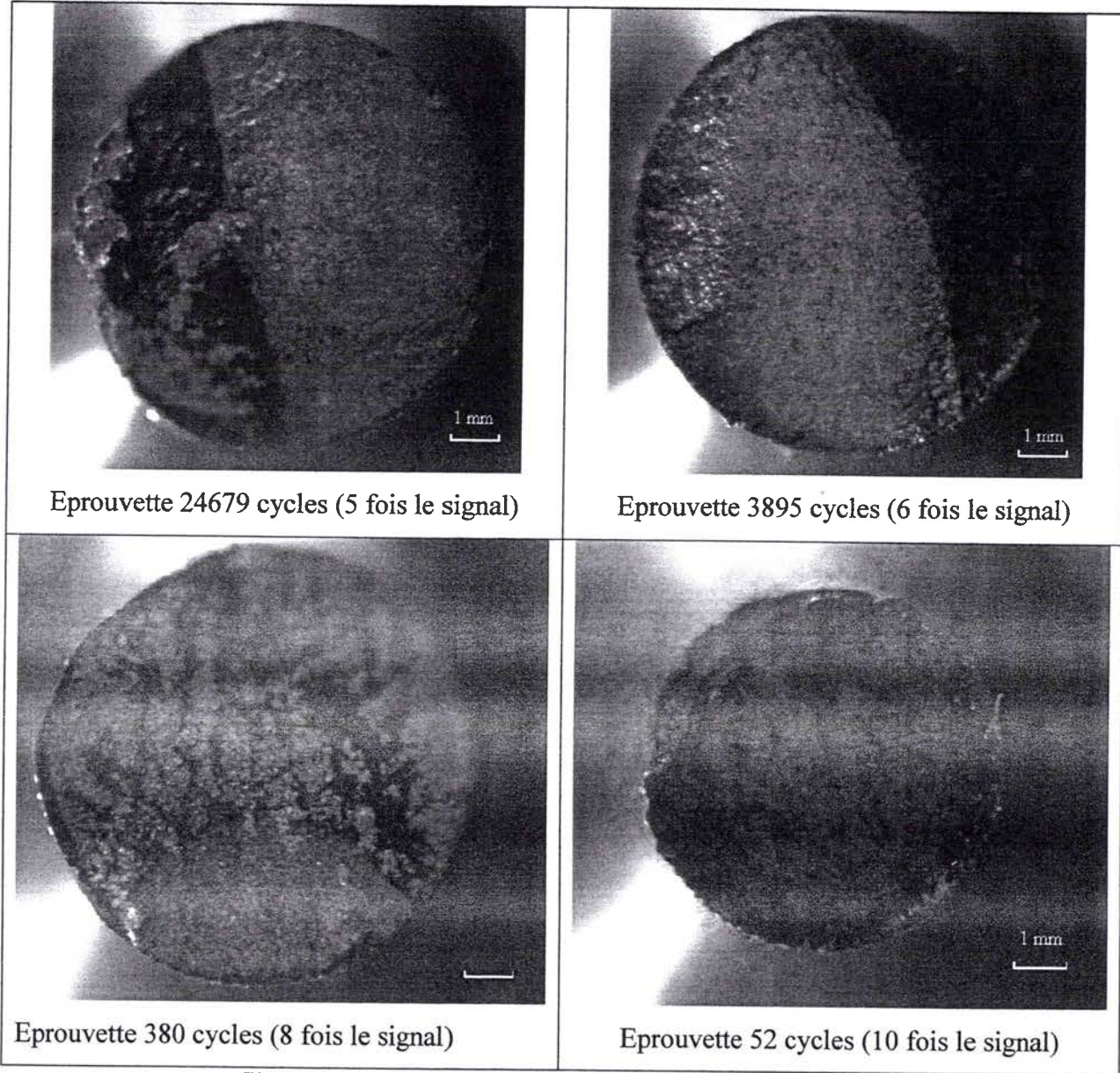


Figure 4.20 : Effet du chargement sur le faciès de rupture

Le tableau 4.4 montre l'évolution de cette dégradation de surface des éprouvettes en fonction des coefficients multiplicateurs de charge.

| Facteur multiplicateur de charge | (%) diamètre<br>(zone de propagation des fissures) |
|----------------------------------|----------------------------------------------------|
| 3                                | 63%                                                |
| 4                                | 59 %                                               |
| 5                                | 56%                                                |
| 6                                | 53%                                                |
| 6                                | 47%                                                |
| 8                                | 43%                                                |

Tableau 4.4 : Pourcentage de dégradation des surfaces.

Cette évolution de dégradation, suit une loi puissance, représentée par la courbe ci-dessous ; figure (4.21).

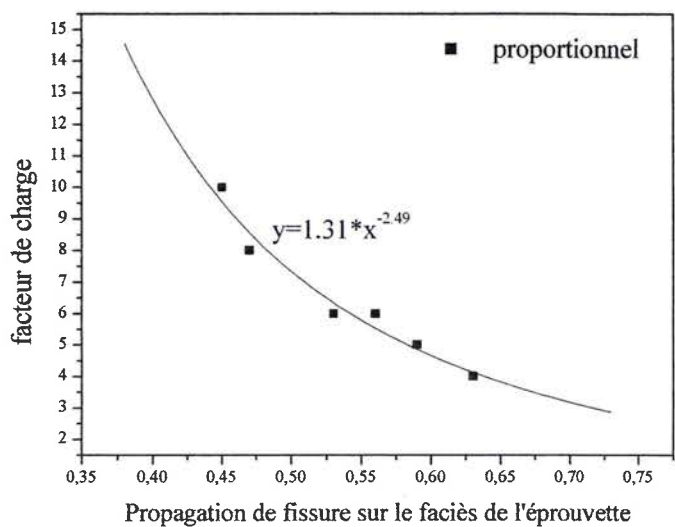


Figure 4.22 : évolution de la propagation de fissure (% diamètre).

Cette fonction estime théoriquement, qu'un facteur multiplicateur de charge de 1.31 est suffisant pour que la propagation de fissure atteigne toute la surface. Or, réellement une zone de rupture finale existe toujours. Le point extrapolé pour  $10^7$  cycles est de 1.92.

4.4.2 Aspect microscopique

Pour cette partie, on analyse séparément l'influence de chaque type de chargement sur le comportement de l'éprouvette en fatigue.

L'aspect microscopique d'une éprouvette lisse, soumise au chargement proportionnel d'un facteur multiplicateur de charge égal à 3, est présenté dans la figure 4.22. La surface libre des éprouvettes présente, après rupture, de nombreuses fissures secondaires. Dans la figure 4.22.a, on remarque l'effet de matage du au type de chargement appliqué et des stries de fatigue bien marquées dans la zone de propagation. Les fissures sont orientées perpendiculaire à la direction de la contrainte normale. Alors que dans la figure 4.22.b, qui ne représente qu'un grandissement d'une partie du faciès de la figure 4.22 a, montre des inclusions qui peuvent provoquer la fissure par décohésion, ce qui prouve le caractère ductile du matériau.

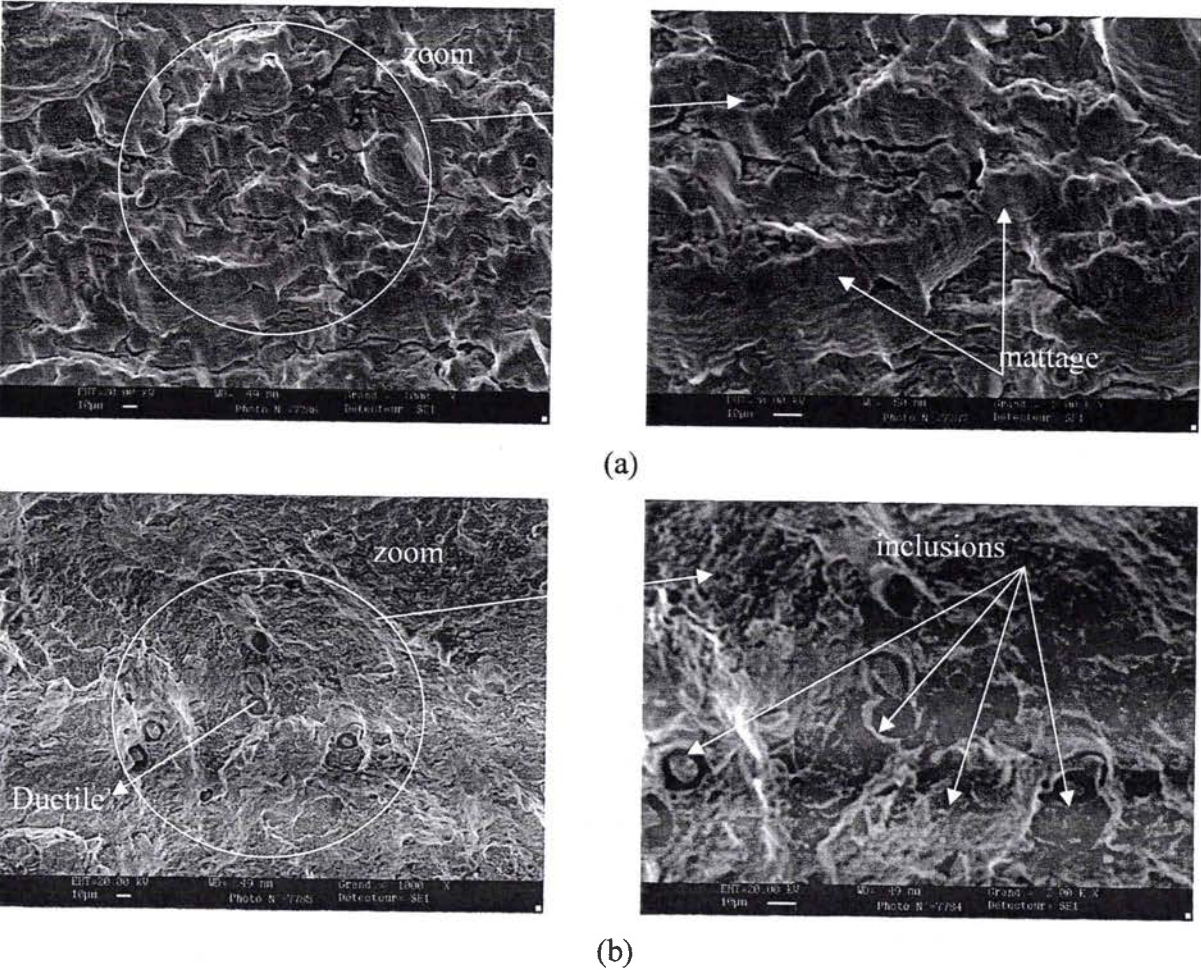


Figure 4.22 : Aspect microscopique d'une éprouvette soumise à 3 fois le chargement multiaxial proportionnel pendant 264 901 cycles.

L'aspect microscopique d'une éprouvette, soumise à un chargement multiaxial proportionnel, d'un facteur multiplicateur de charge égal à 10, est présenté dans la figure 4.23. Les images (a, b, c, d) représente respectivement un grossissement de 200, 500, 1000 et 2000 fois la partie B, zone de propagation instable. Ces images montrent, par la présence importante de cavités, que l'éprouvette a été sollicitée par une contrainte très élevée par rapport à la contrainte équivalente d'endurance.

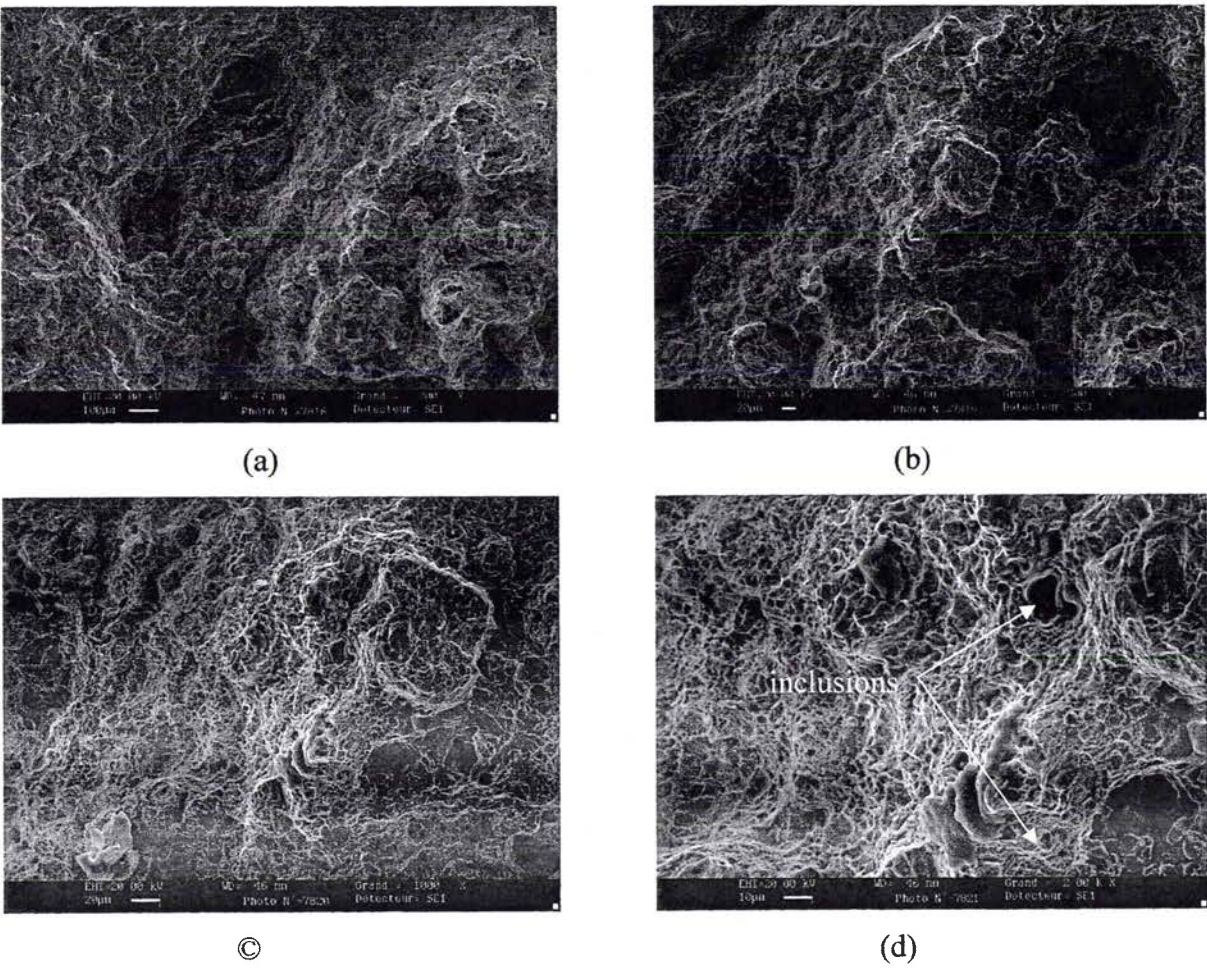


Figure 4.23 : Aspect microscopique d'une éprouvette sollicitée à 10 fois le chargement proportionnel pendant 52 cycles.

**Discussion :**

L'évolution, de la durée de vie en fatigue multiaxiale proportionnelle à amplitude constante en fonction du facteur multiplicateur de charge, a estimé qu'une limite d'endurance de ce facteur multiplicateur de charge est de 1.92. Alors que la courbe de la propagation de fissures (%&) dans les faciès l'estime à 2.67. Ce qui montre une différence significative entre les deux résultats qui est du sûrement aux faibles nombres d'essais. Une confrontation est nécessaire pour les modèles de Dang Van, Crossland, Sines, Approche volumétrique de Qylafku et le nouveau critère proposé dans le cas de chargement multiaxial proportionnel.

**4.5 Prédiction des différents critères pour un chargement multiaxial proportionnel**

Pour ce type de chargement multiaxial proportionnel, les contraintes maximales alternées appliquées (cas 2) sont :

➤  $\sigma_{trac-tor} = 76.2 \text{ MPa} ,$

➤  $\tau_{trac-tor} = 23.99 \text{ MPa}$ ,

➤ Le déphasage entre traction et torsion est nul.

#### ❖ Critère de Dang Van

Le modèle de Dang Van est simple à utiliser dans le cas d'un chargement multiaxial proportionnel. Pour le calcul de la contrainte de cisaillement locale, il utilise le principe de Tresca. Le critère prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.66.

#### ❖ Critère de Crossland

Le critère de Crossland relie le deuxième invariant  $\sqrt{J_{2a}}$  et de la pression hydrostatique maximale par :

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \times \sigma_{H,\max} \leq \beta \text{ avec } \begin{cases} \beta = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \\ \alpha = 3 \cdot \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0.63 \end{cases}$$

Ce critère prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.69.

#### ❖ Critère de Sines

Ce critère utilise une combinaison linéaire entre la deuxième invariant du tenseur déviateur  $\sqrt{J_{2a}}$  et de la contrainte hydrostatique moyenne.

$$\sqrt{J_{2a}(t)} + \alpha \cdot \sigma_{H,m} < \beta \text{ avec } \begin{cases} \beta = \tau_{-1} = 178 \text{ MPa} \\ \alpha = \left( \frac{3 \cdot \tau_{-1}}{f_m} - \frac{\sqrt{3} \cdot f_a}{f_m} \right) = 0.7895 \end{cases}$$

Il prévoit un facteur multiplicateur de charge de 3.55.

#### ❖ Critère de Qylafku

Le critère basé sur l'approche volumétrique, en combinant la contrainte de cisaillement maximale effective avec la pression hydrostatique moyenne effective, prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.28.

#### ❖ Nouveau critère

Ce critère basé sur les concepts de l'approche volumétrique, en favorisant l'effet de la contrainte normale effective combinée avec la contrainte de cisaillement effective, prévoit un facteur multiplicateur de charge de 2.65.

Récapitulatif

|                                             | Dang Van | Crossland | Sines  | Qylafku | Palin Luc (cas 2) | Nouv. Crit. | Exp. |
|---------------------------------------------|----------|-----------|--------|---------|-------------------|-------------|------|
| $f_{end}$                                   | 2.66     | 2.69      | 3.55   | 2.28    | 2.84              | 2.65        | 1.92 |
| $\sigma_{\text{équi}}$ (MPa)                | 178.06   | 177.9     | 178    | 226.97  |                   | 224.73      | 167  |
| $\sigma_{\text{équi}} (f_{end}=1.92)$ (MPa) | 128.53   | 126.97    | 96.21  | 191.13  |                   | 162.82      |      |
| Différence %                                | 22 %     | 23.8%     | 50.87% | -14.7%  |                   | 2.29%       |      |

Tableau 4.5 : Prédictions des différents modèles pour un chargement multiaxial proportionnel.

Si on compare ces critères en fonction des facteurs multiplicateurs de charge, on constate que les prédictions varient de 2.28 pour Qylafku à 3.55 pour Sines. Dang Van, Crossland et le nouveau critère proposé donnent presque le même facteur au dixième près. Le modèle de Qylafku donne la valeur la plus proche de l'expérience.

Maintenant, comparons ces critères au niveau des contraintes équivalentes pour le même facteur multiplicateur de charge ( $f=1.92$ ). Les critères prévoient des contraintes équivalentes allant de 96.21MPa pour Sines à 191.13 MPa pour Qylafku. Donc, une différence varie de -14.7 % à 50.87%. Le nouveau critère proposé donne une valeur proche de l'expérience avec 3% d'erreur. Ensuite, on trouve les critères de Qylafku, Dang Van suivi de Crossland et de Palin Luc et enfin celui de Sines. On peut conclure que les critères basés sur le concept de l'approche volumétrique donnent les meilleurs résultats tant pour les chargements multiaxiaux non-proportionnels à amplitude variable que pour les chargements proportionnels. Les critères plans utilisés sont plus adaptés aux chargements multiaxiaux proportionnels qu'aux non-proportionnels.

4.6 Comparaison des deux types de chargements

Pour comparer les deux types de chargements, le facteur multiplicateur de charge est un bon moyen. La deuxième méthode de confrontation est de comparer les contraintes de Von Mises maximales des deux chargements.

Cas 1 : Facteur multiplicateur de charge

Nous avons représenté sur la figure 4.24 les points expérimentaux des deux cas de chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels, on constate que pour une durée de vie de 1.0E7 cycles, les deux courbes ont deux facteurs multiplicateurs de charges différents.

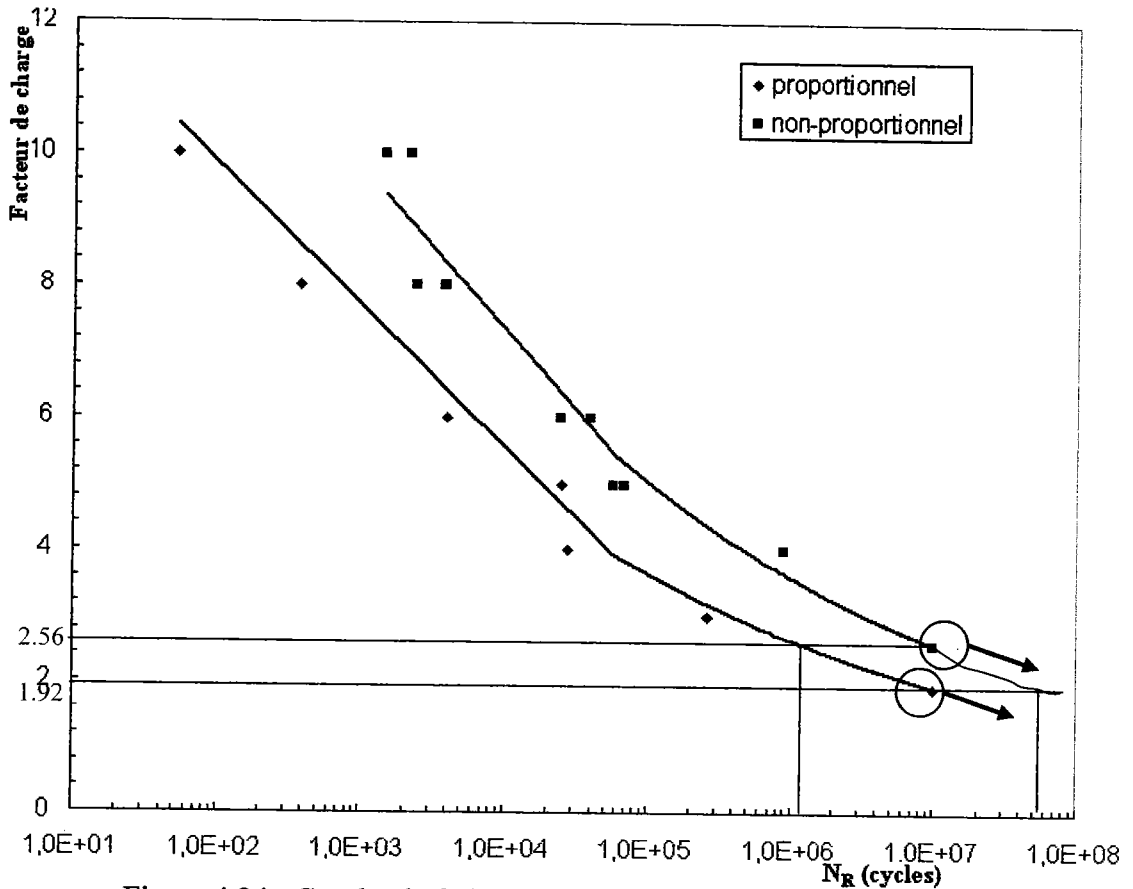


Figure 4.24 : Courbe de fatigue pour les deux types de chargements.

La courbe de chargement non-proportionnel a un facteur multiplicateur de charge estimé égal à 2.56 alors qu'il est estimé à 1.92 pour un chargement multiaxial proportionnel. En plus, un facteur au dessous de 2.56 pour le chargement non-proportionnel donne une durée de vie illimitée. On prend en considération les deux équations de lissage des points expérimentaux des deux chargements. On constate que pour le facteur 1.92, on obtient une durée de vie de  $7.03E7$  cycles sur la courbe du chargement non proportionnelle. Nous trouvons donc une différence de 603 %. Les deux équations se convergent pour une durée de vie de  $10^{19}$  cycles, c.à.d. pour des faibles valeurs de contraintes.

On peut conclure que le type de chargement influence la durée de vie d'un matériau même en limite d'endurance. Alors pour qu'il n'y a pas d'influence du chargement sur la durée de vie pour le matériau étudié, il faut travaillé dans des durées de vie supérieures à  $10^{19}$  cycles

### Cas 2 : Contraintes maximales de Von Mises des deux types de chargements

Vu la complexité du chargement non-proportionnel et dans le but de le comparer avec un chargement proportionnel, le choix de la contrainte maximale de Von Mises sera la base de cette confrontation. Sur la figure 4.25, nous avons représenté les deux cas de chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.

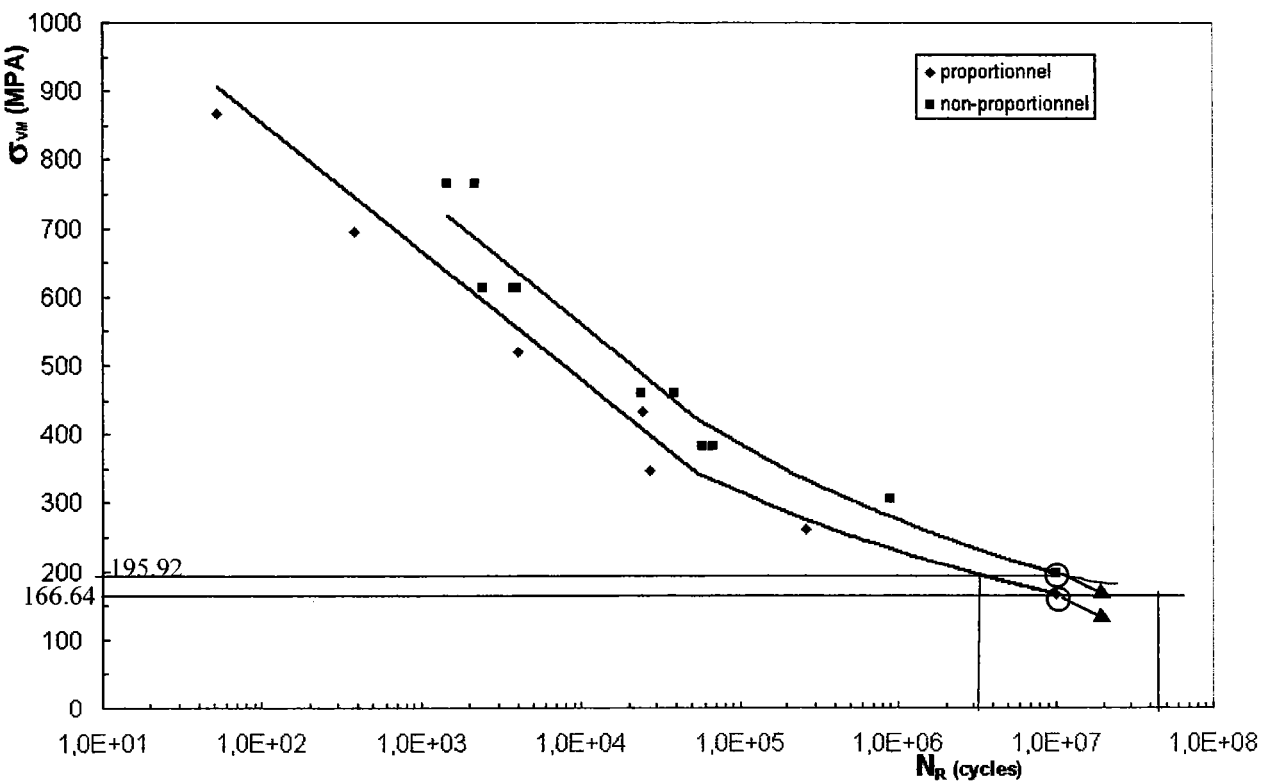


Figure 4.25 : Comparaison des contraintes de Von Mises pour les deux types de chargements. On note d’après les courbes de Wöhler (figure 4.25), l’existence d’une différence visible entre les deux types de chargements. Pour une durée de vie de 1.0E7 cycles, les deux courbes ont deux contraintes équivalentes de Von Mises. La courbe de chargement non-proportionnel à une contrainte équivalente de 196 MPa, alors que la proportionnel à une contrainte de 167 MPa. En plus, en dessous de la contrainte critique de 196 MPa, pour le chargement non-proportionnel, il n’y a pas de rupture, et la durée de vie est illimitée. La différence entre les deux contraintes est de 29.28 MPa.

Est-ce que cette différence permet de dire qu’il y a une influence du chargement sur la durée de vie d’un matériau ou non ?

Si l’étude est dans le domaine limité ou en fatigue oligocyclique, on peut considérer que cette différence est négligeable. Or dans le domaine d’endurance, cette valeur est très significative, et son effet existe.

4.7 Conclusion partielle

Nous avons confirmé les constations des différents auteurs étudiés sur l’influence du signal sur la durée de vie en fatigue d’un matériau. En se basant sur les résultats expérimentaux, on ne peut que confirmer l’influence du type de chargement sur la durée de vie d’un matériau dans le domaine d’endurance illimitée. Une comparaison entre les différents critères plans, globaux, semi-locaux et énergétique, dans le domaine d’endurance, a montré que les deux critères basés sur l’approche volumétrique (Qylafku, Chamat) répondent mieux à notre attente.

Les observations macroscopiques et microscopiques des faciès des éprouvettes, sous différents chargements multiaxiaux proportionnels, ont permis de comprendre le caractère de rupture des faciès. La courbe représentant le pourcentage de propagation stable dans le diamètre des éprouvettes est une estimation de la courbe de fatigue représentant le facteur multiplicateur de charge en fonction de la durée de vie.

## Conclusion Générale

Plusieurs modèles sont proposés pour déterminer la fiabilité d'une structure soumise à des chargements inférieurs à la limite d'élasticité, dans le domaine de l'endurance. Ces modèles sont à caractère global, local, semi-local et énergétique.

Nous avons proposé un nouveau critère non linéaire, puis nous avons utilisé le critère de Palin-Luc et de son extension en introduisant le degré de triaxialité de De Leris pour les chargements multiaxiaux non proportionnels à amplitude variable.

Des séries d'essais, avec des chargements proportionnels et non-proportionnels, ont été réalisées afin de comparer les prédictions données par l'application des différents modèles.

Cette comparaison montre que :

### ❖ Pour les essais multiaxiaux non-proportionnels :

➤ la proposition d'un facteur multiplicateur de charge, pour prédire la durée de vie, ne privilégie pas certaines contraintes par rapport à d'autres. L'analyse de tout le signal est nécessaire :

- ✓ Le facteur multiplicateur de charge expérimental est de 2.56,
- ✓ Les critères de Dang Van, Mataké, Findley, Crossland, Carpinteri et Sines ont prévu un facteur de charge supérieur à 3,
- ✓ Le critère de Qylafku prévoit un facteur de charge de 2.35, valeur plus proche de l'expérience,
- ✓ Le nouveau critère que nous proposons prévoit un facteur de charge de 2.83.

Dans ce type de comparaison, on peut dire que les approches semi-locales donnent de bons résultats pour les chargements non-proportionnels, comparés aux critères locaux et globaux.

➤ La deuxième comparaison de ces différents modèles se fait aux niveaux des contraintes équivalentes de chaque critère (pour un même facteur de charge de 2.56). Pour les essais expérimentaux, la contrainte équivalente de Von Mises, pour un facteur de charge de 2.56, est  $\sigma_{VM} = 196$  MPa. On montre que :

- ✓ Carpinteri, Crossland, Dang Van, Sines et Mataké ont prévu des contraintes inférieures à 196 MPa et justifient leur comportement conservatif. Les erreurs relatives sont de 21.19 % pour Findley, jusqu'à 53.22% pour Sines.
- ✓ Findley prévoit une contrainte équivalente de 152.44 MPa, avec une erreur relative de 22%,

- ✓ Qylafku prévoit une contrainte équivalente de 247 MPa, avec une erreur relative de 26 %,
- ✓ Le nouveau critère prévoit une contrainte équivalente de 204 MPa, avec une erreur relative de 4%.

Ces résultats, exprimés en contraintes équivalentes de Von Mises et en pourcentage de différence, montrent que le nouveau critère donne de bons résultats.

❖ **Pour les essais multiaxiaux proportionnels :**

- la proposition d'un facteur multiplicateur de charge donne :
  - ✓ Le facteur multiplicateur de charge expérimental est de 1.92,
  - ✓ Dang Van, Crossland et le nouveau critère ont prévu le même facteur de charge au dixième près 2.6,
  - ✓ Sines prévoit un facteur de charge de 3.55,
  - ✓ Le critère de Qylafku prévoit un facteur de charge de 2.28,
  - ✓ Palin Luc (critères énergétiques) a prévu un facteur de charge de 2.84.

On constate que tous les critères ne sont pas conservatifs.

La deuxième comparaison de ces différents modèles se fait aux niveaux des contraintes équivalentes de chacun (pour un même facteur de 1.92). La contrainte équivalente de Von Mises d'essai est  $\sigma_{VM}=167$  MPa. On montre que :

- ✓ Crossland et Dang Van ont prévu presque la même contrainte, avec une erreur relative de 22% pour Dang Van et de 24% pour Crossland,
- ✓ Sines a prévu une contrainte équivalente avec une erreur relative de 51%,
- ✓ Qylafku a prévu une contrainte équivalente dont l'erreur relative est de -14.7%,
- ✓ Le nouveau critère prévoit une contrainte équivalente de 162.8 MPa, avec une erreur relative de 3%.

Si on compare les contraintes prédites pour le même facteur multiplicateur de charge, dans les deux cas de figures (proportionnel et non-proportionnel), on constate que :

- ❖ si on prend en considération les critères dont les erreurs relatives sont inférieures à 20 %, dans le cas d'un chargement non-proportionnel, on ne sélectionne que le nouveau critère (4%).
- ❖ si on prend en considération les critères dont les erreurs relatives sont inférieurs à 20 %, en valeur absolue, dans le cas d'un chargement proportionnel, on ne trouve que le nouveau critère avec (3%), suivi du critère de Qylafku (14%) en valeur absolue.

Les deux nouveaux critères (Chamat, Qylafku), basés sur la méthode volumétrique, donnent de bons résultats quel que soit le chargement proportionnel ou non-proportionnel.

L'étude macroscopique et microscopique a montré le caractère ductile de la rupture. Des stries de fatigue sont visualisées et la présence de nombreuses inclusions a facilité la rupture pour les chargements élevés.

Nous avons montré qu'on peut définir un facteur multiplicateur de charge à partir de la mesure de la zone de propagation de fissure.

La projection de ce travail dans l'avenir est l'application de la méthode volumétrique aux éprouvettes entaillées, afin d'étudier l'influence de la taille et la géométrie d'un défaut sur la fiabilité de la roue ferroviaire. Ce travail peut être complété par la prise en compte des contraintes résiduelles (notamment celles dues au procès de fabrication des roues forgées dont les jantes sont trempées), et l'application de la nouvelle méthode proposée par A. Chamat sur structure réelle avec une validation expérimentale sur roue à l'échelle 1 et enfin l'évaluation de la proposition de simplification d'un chargement complexe par un chargement équivalent simplifié sur une tranche de vie d'une roue ferroviaire (3000 Km par exemple).

## Bibliographies

- [1] **J. MARIN**, International on fatigue strengths for combined stresses. Proc. of the int. Conf. on fatigue of metals, Inst. Mech. Engrs, London, 1956, PP. 184-194.
- [2] **J. MARIN**, Mechanical behaviour of engineering materials. Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J. -1962.
- [3] **H. ALTENBACH, A. ZOLOCHEVSKI**, A unified model of low cycle fatigue damage. Fourth Int. Conf. on biaxial / Multiaxial Fatigue, May 31-June 3, 1994, Paris, vol. 2, PP 117-128.
- [4] **H. KAKUNO, Y. KAWADA**, A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion. Fatigue of Engineering Materials and Structures, 1979, vol. 2, PP. 229-236.
- [5] **A. ZEGHLOUL**, Cours de Mécanismes d'endommagement des structures, DEA Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés, 2002-2003.
- [6] **H. DEITMAN et L. ISSLER**, Strength calculation under multiaxial out-of-phase fatigue loading. Proceedings of the international Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, 1956.
- [7] **G. SINES et G. OHGI**, Fatigue criteria under combined stresses or strains. Journal of Engineering Materials and Technology, 1981, vol. 103, PP. 82-90.
- [8] **H. J. GOUGH, H. V. POLLARD et W. J. CLENSHAW**, same experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses. Aeronautical research council reports and memoranda. London, 1951, P. 141.
- [9] **B. CROSSLAND**, The effect of pressure on the fatigue of metals. Mechanical Behaviour of Materials under Pressure, 1970, PP. 299-335.
- [10] **H. J. GOUGH, H. V. POLLARD**, The strength of metals under combined alternating stresses. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1935, vol. 131, N° 3.
- [11] **A. SIMBURGER AND V. GRUBISIC**, Fatigue under combined out of phase multiaxial stresses, Fatigue testing and Design, Society of Environment Engineers, International Conference. City University London, 1976.
- [12] **A. SIMBURGER**, Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen phasenverschobenen schwingbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen hauptspannungsrichtungen. L. B. F., Darmstadt, Bericht, 1975, Nr FB-121, P247.
- [13] **M. FOGUE et J. BAHUAUD**, Fatigue multiaxiale à durée de vie illimitée. 7<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, sept. 1985.

- [14] **SOON-BOOK LEE**, A criterion for fully reversed out-of-phase torsion and bending, ASTM STP 853, K.J Miller and Brow Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985, PP. 553-568.
- [15] **I. O. PAPADOPOULOS**, "Fatigue Poly-cyclique des métaux- Une nouvelle approche » Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées- Décembre 1987.
- [16] **K. DANG VAN, B. GRIVEAU et O. MESSAGE**, On a new multiaxial fatigue criterion. Theory and application. Rapport S.K.F. France 1985.
- [17] **G. SINES**, Behavior of metal under complex static and alternating stresses. Metal Fatigue Mac Graw-Hill Book Company- New York 1959.
- [18] **K. DANG VAN**, Macro-Micro Approach in high-cycle Multiaxial Fatigue. Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191. D. L. McDowell and R. Ellis, EDS., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993, PP. 120-130.
- [19] **F. STULEN et H. CUMMINGS**, A failure criterion for Multiaxial Stresses. Proceedings of American Society for Testing and Materials. Philadelphia, 1954, vol. 54, PP. 822-835.
- [20] **J. SMITH**, The effect of the range of stress on the fatigue strength of Metals. University of Illinois Bulletin, vol XXX-IX, N° 26, Engineering Experiment Station Bulletin Series N° 334, February 17, 1942.
- [21] **J. L. ROBERT**, Etude des critères de Fatigue pour des sollicitations polycycliques multiaxiales en phase et hors phase. Mémoire de DEA de l'INSA de Lyon 1988, 159 p.
- [22] **J. L. ROBERT**, Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires, Thèse, Laboratoire de Mécanique des Solides INSA de Lyon, 1992.
- [23] **T. MATAKE**, An explanation on fatigue limit under combined stress. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1980, vol. 2, N° 1.
- [24] **D. L. MCDIARMID**, A general criterion of Fatigue Failure under Multiaxial Stress. Proceedings of Second International Conference on Pressure Vessel Technology, American Society for Testing and Materials, San Antonio, Texas, U.S.A, 1973.
- [25] **D. L. MCDIARMID**, A new analysis of fatigue under combined bending and twisting. The Aeronautical journal of the Royal Aeronautical Society, 1974, vol. 78, N° 763.
- [26] **W. N. FINDLEY**, Fatigue of metals under combinaisons of stressss. Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, 1957, vol. 79.
- [27] **YOU B.R and LEE S.B.** A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. International Journal of Fatigue, 1996, vol. 18, N° 4, pp. 184-94.
- [28] **STANFIELD, YOKOBORI et NAKANISHI**, Multiaxial fatigue en endurance of 30NCD-16 steel. Journal fatigue, vol.11, N°3, pp 169-175, 1989.

- [29] **MOREL et FLACIERE**, The weakest link theory applied to multiaxial high cycle fatigue. New Trends in fatigue and Fracture – Metz 8-9 April 2002.
- [30] **K. DANG VAN et I. O. PAPADOPOULOS**, Multiaxial fatigue failure criterion : a new approach. In: Ritchie RO, Starke Jr EA, editors. Proceedings of Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds, Fatigue 87. UK: EMAS Warley; 1987, PP. 997-1008.
- [31] **CARPINTERI et AL.** Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. Int. J. Fatigue, Vol. 23, 2001, pp. 839-849.
- [32] **CARPINTERI et AL.** A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct 23, 1999, pp. 355-364.
- [33] **CARPINTERI et AL** Expected principal stress directions under multiaxial random loading. Part I : theoretical aspects of the weight function method. Int. J. Fatigue, Vol. 21, 1999, pp. 83-88.
- [34] **A. GALTIER et J. SEGURET**, Critères Multiaxiaux en Fatigue : exploitation en bureau d'études. Proposition d'un nouveau critère. Rev. Français Mécanique 4, 1990, pp. 294-299.
- [35] **A. GALTIER et J. SEGURET**, La fatigue multiaxiale à grand nombre de cycles. Proposition et exploitation d'un critère. I.I.T.T. International. MAT TEC 91. Fatigue et contraintes, Paris 1984, pp. 27-35.
- [36] **De LEIRIS**, Triaxialité des contraintes et critère de non fragilité. Bulletin de l'association Technique Maritime Aéronautique, 1969, pp. 481-491.
- [37] **A. DEPERROIS**, Sur le calcul des limites d'endurance des aciers. Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1991.
- [38] **J. LEMAITRE and J. L. CHABOCHE**, Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [39] **B. LI, J. L. SANTOS and M. DE FREITAS**, Mech., Vol. 28, N° 1, 2000, pp. 85-103.
- [40] **L. G. MELIN**, Cycle Count in Hight Cycle Fatigue of a Multiaxial Random Load : a Comparaison of Different Approches, Proceedings of the 6th Int. Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue & Fracture, Volume I. Edited by M.M. de Freitas, Lisbon, Portugal, 2001.
- [41] **K. DANG VAN, B. GRIVEAU, O. MESSAGE**, On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications. In: MW. Brown, KJ. Mille, editors. Biaxial and multiaxial fatigue, EGF 3. London: Mechanical Engineering Puplications, 1989, pp. 479-496.

- [42] **JL. ZHOU et Al.** Tits. User's guide for FFSQP version 3.7: A fortran code for solving optimization programs, possibly minimax, with general inequality constraints and linear equality constraints, University of Maryland, College Park (MD), 1997.
- [43] **BO WU**, Contribution à l'étude des critères de fatigue multiaxiaux pour les assemblages soudés en alliage d'aluminium. Thèse de l'université de Lille 1, 2003.
- [44] **G. QYLAFKU, Z. AZARI, N. KADI, M. GJONAJ, G. PLUVINAGE**, Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats. *International Journal of Fatigue*, 1999, vol. 21, pp. 753-760
- [45] **Y. WEIXING**, Stress field intensity approach for predicting fatigue life. *International Journal of Fatigue*, 1993, vol. 15, N° 4, pp. 243-245.
- [46] **D. TAYLOR, P. BOLOGNA, K. BEL KNANI**, Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method. *International Journal of Fatigue*, 2000, vol. 22, pp. 735-742.
- [47] **G. QYLAFKU, Z. AZARI, M. GJONAJ, G. PLUVINAGE**, "On the fatigue failure and fatigue life prediction of the notched specimens". *Physicochemical Mechanics of Materials*, *International Scientific-Technical Journal*, Vol. 34,15,1998, pp 17-27.
- [48] **F. ELLYIN, K. GOLOS**, A. total strain energy density as a fatigue damage parameter. *Advances in Fatigue Science Technology*, Kluwer Academic Publisher, February 1989, pp. 849-858.
- [49] **C. FROUSTEY, S. LASSERRE**, Multiaxial fatigue of steel-testing out of phase and in blocks: validity and applicability of some criteria. *Int. J. Fatigue*, 14, 1992, N° 2, pp.113-120.
- [50] **C. FROUSTEY**, Fatigue multiaxiale en endurance de l'acier 30 NCD 16. Thèse de doctorat ENSAM, septembre 1987.
- [51] **T. PALIN-LUC**, Fatigue multiaxiale d'une fonte GS sous sollicitations combinées d'amplitudes variable. Thèse de l'ENSAM de Bordeaux, 1996.
- [52] **A. BANVILLET**, Prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargement réels : vers des essais accélérés. Thèse de l'ENSAM de Bordeaux, 2001.
- [53] **H. DIETMAN, T. BONGHIBAT and A. SCHMID**, A. Multiaxial fatigue behaviour of steels under in-phase and out-of-phase loading including different wave forms and frequencies. In 3rd Int. Conf. On biaxial/Multiaxial Fatigue (Stuttgart, April 1989), pp. (61) 1-17.
- [54] **MIELKE**, Festigkeitsverhalten metallischer werkstoffe unter zweiachsig-schwingender beanspruchung mit verschiedenen spannungszeitverlaufen. PhD thesis, Aachen, 1980. (p. 89).

- [55] **M. BENNEBACH**, Fatigue Multiaxiale d'une fonte GS : l'influence de l'entaille et d'un traitement de surface. Thèse de Doctorat en Mécanique, l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métier 1993.
- [56] **PETERSON, R. E.**, "Stress Concentration Factors" John Wiley and Sons, New-York (1974).
- [57] **A. BRAND et R. SUTTERIN**, Calcul des pièces à la fatigue. Méthode de gradient, Publication Senlis-France CETIM (1980).
- [58] **G. QYLAFKU**, Effet d'entaille en fatigue de grand nombre de cycles. Effet du gradient. Thèse de doctorat en Mécanique, Laboratoire de Fiabilité de Metz, Université de Metz 2000.
- [59] **FINDLEY WN.** A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. J. Engng Ind Trans ASME 1959, 81 : 301-6.
- [60] **VIDAL E.** Prévision de la durée de vie en Fatigue multiaxiale sous sollicitations d'amplitude variable à l'aide d'un critère global. Thèse de Doctorat en Mécanique, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996.
- [61] ) **H. GOUAIR, Z. AZARI, L. TOTH, A. KIFANI.** "Effets d'entailles sur la transition fragile-ductile. Interprétation générale", Revue Française des Mécaniciens, N° 4, pp. 307-312, 1996.
- [62] **A. CHACRONE, Z. AZARI, D. BOUAMI, G. PLUVINAGE.** "Comparaison de la zone plastique et la zone d'élaboration de la rupture dans les structures entaillées", R. F. M, N°1, 2001.
- [63] **ERRI B 169/ RP 19**, Institut Européen de Recherche Ferroviaire, Octobre 2004.
- [64] **A. ZEGHLOUL** Cours de Rupture et Plasticité 2001.

Annexe 1

Techniques d'observations

Chaque technique d'observation de la microstructure d'un matériau est caractérisée par son pouvoir de résolution appelé "limite de résolution spatiale", qui représente la distance minimale entre deux points non confondus et vus distinctement l'un de l'autre. On peut donc comparer les diverses techniques d'observation, en utilisant soit une échelle de grossissement, soit une échelle de pouvoir de résolution (fig. 2.11).

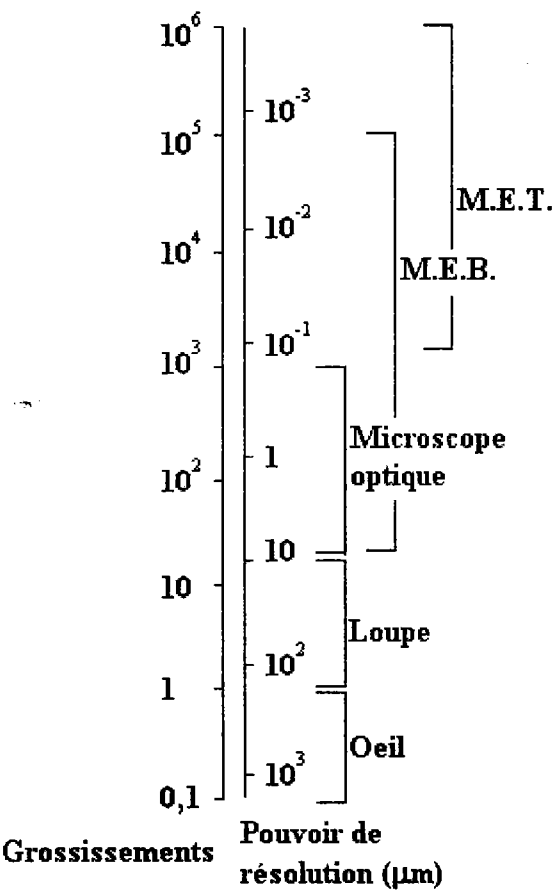


Figure 2.11 : Différents moyens d'observation

Le pouvoir de résolution de l'œil humain est de l'ordre de 0.2 mm , qui ne permet de voir que des structures grossières. Grâce à une loupe ou à une Macroscopie, on peut atteindre un grossissement de 20 fois. Le Microscope optique à un pouvoir de résolution de 0.2 μm et permet d'obtenir des grossissements de 1000 fois. Le Microscope Electronique à Balayage a un pouvoir de résolution théorique voisin de 2 nm , qui permet d'atteindre un grossissement jusqu'à 100000 fois. Enfin, le Microscope Electronique à Transmission à un pouvoir de résolution de 0.1 nm .

## Principe du Microscopie utilisant le Microscope Electronique à Balayage

Les parties constitutives essentiellement d'un Microscope Electronique à Balayage (fig.2.18) sont :

- ❖ Canon à électron primaire,
- ❖ Lentilles condensatrices,
- ❖ Lentilles objectives,
- ❖ Module de balayage,
- ❖ Détecteur,
- ❖ Amplificateur vidéo.

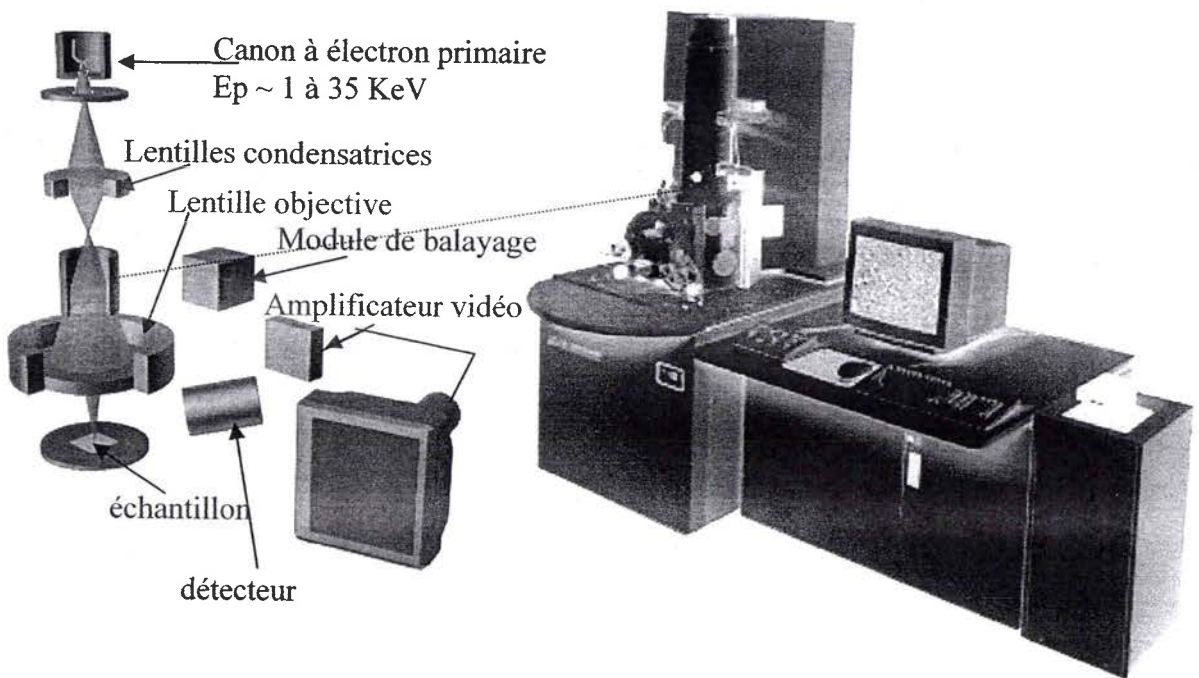


Figure 2.18 : Microscope Electronique à Balayage.

Le canon à électron primaire produit un faisceau électronique d'énergie d'environ 1 à 25 KeV. Le système des lentilles condensatrices permet de réduire la taille du faisceau primaire. Une lentille objective dont le rôle est de réduire à nouveau le faisceau primaire et de le focaliser sur un échantillon massif. Grâce au module de balayage, ce faisceau primaire balaye une petite largeur "l" de l'échantillon. Un des signaux produit par les bombardements de l'échantillon par les électrons primaires est capté par un détecteur approprié et amplifié. Ce signal amplifié module d'une brillance de l'écran cathodique de largeur "L" et dans la fréquence de balayage est identique à celle utiliser pour la balayage de faisceau d'électron primaire sur l'échantillon. Donc, pour tous points de coordonnées (x,y) de la zone balayait de

l'échantillon correspond un point homologue de coordonnées (X,Y) sur l'écran cathodique et le grossissement obtenu est égale au rapport de "L" sur "l".

## Annexe II

### Deuxième invariant du tenseur déviateur

$$\sqrt{J_{2a}}$$

Le calcul du cet invariant dépend du trajet de charge :

Si le trajet est radial, le tenseur des contraintes se met sous la forme :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} + \sigma_{ija} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{alors } J_{2a} = 1/2 \cdot S_{ija} \cdot S_{ija}.$$

Si le trajet est complexe :

On calcule le centre d'un hyper sphère circonscrit à la courbe dans l'espace déviateur :

$$z^* : \min_z \max_t \sqrt{(S(t) - z)(S(t) - z)}$$

Pour cela, on a introduit le vecteur S défini par Ilyshin.

$$S = \begin{cases} S1 = (S11 - S22) / 2 \\ S2 = (S11 + S22) * \sqrt{3} / 2 \\ S3 = S12 \\ S4 = S13 \\ S5 = S23 \end{cases}$$

Le calcul du centre d'hyper sphère est donné par  $S^*$  :

$$S^* = \min_S \max_t (\sqrt{(S(t) - S)(S(t) - S)})$$

Une fois  $S^*$ , on calcule  $z^*$  par :

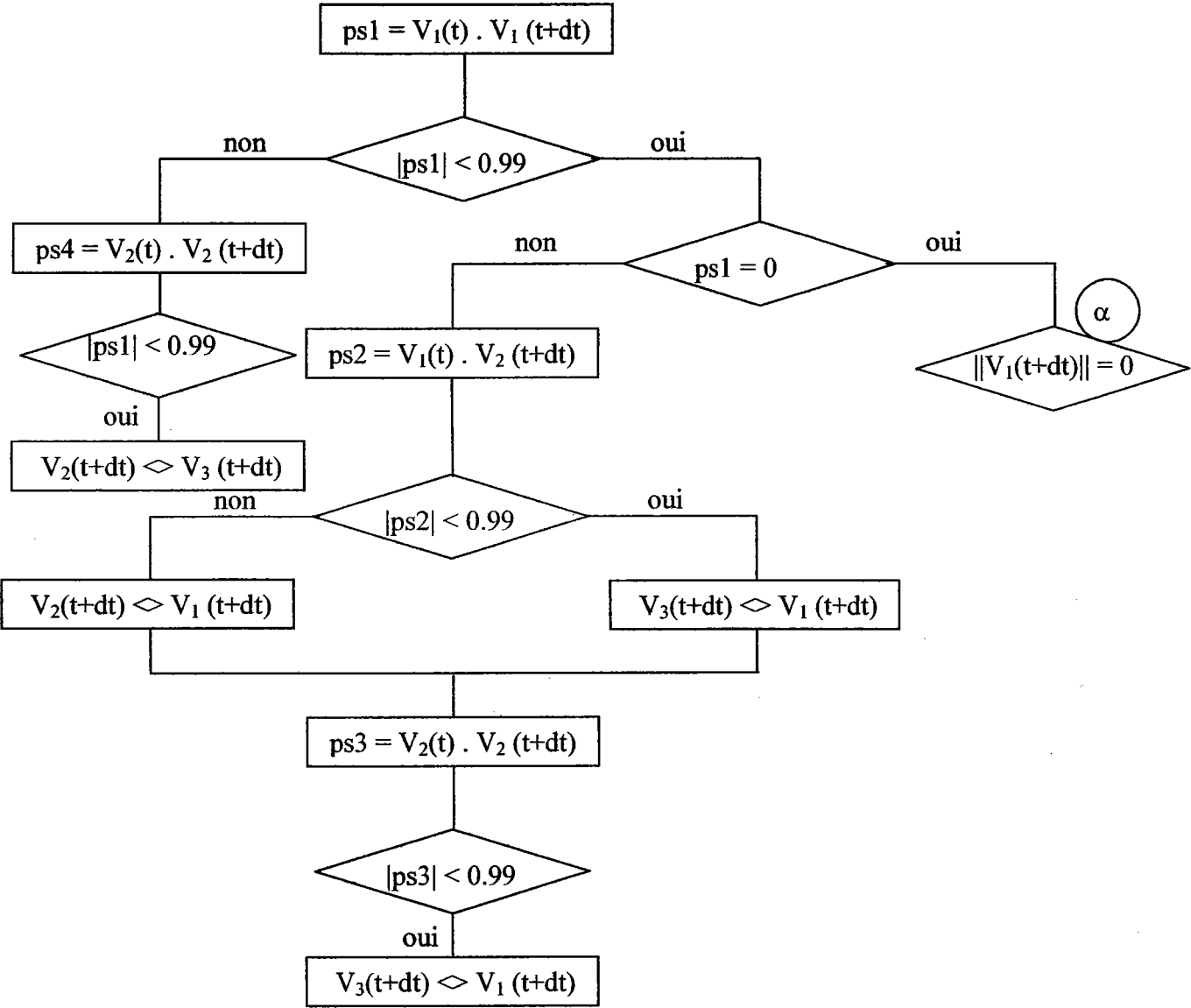
$$\begin{cases} z^*_{11} = S1 + S2 / \sqrt{3} \\ z^*_{22} = -S1 + S22 / \sqrt{3} / 2 \\ z^*_{33} = -2S2 / \sqrt{3} \\ z^*_{12} = S3 \\ z^*_{13} = S4 \\ z^*_{23} = S5 \end{cases} \quad \text{donc : } S_m = \begin{cases} S_m_{11} = S1 + S2 / \sqrt{3} \\ S_m_{22} = -S1 + S22 / \sqrt{3} / 2 \\ S_m_{33} = -2S2 / \sqrt{3} \\ S_m_{12} = S3 \\ S_m_{13} = S4 \\ S_m_{23} = S5 \end{cases}$$

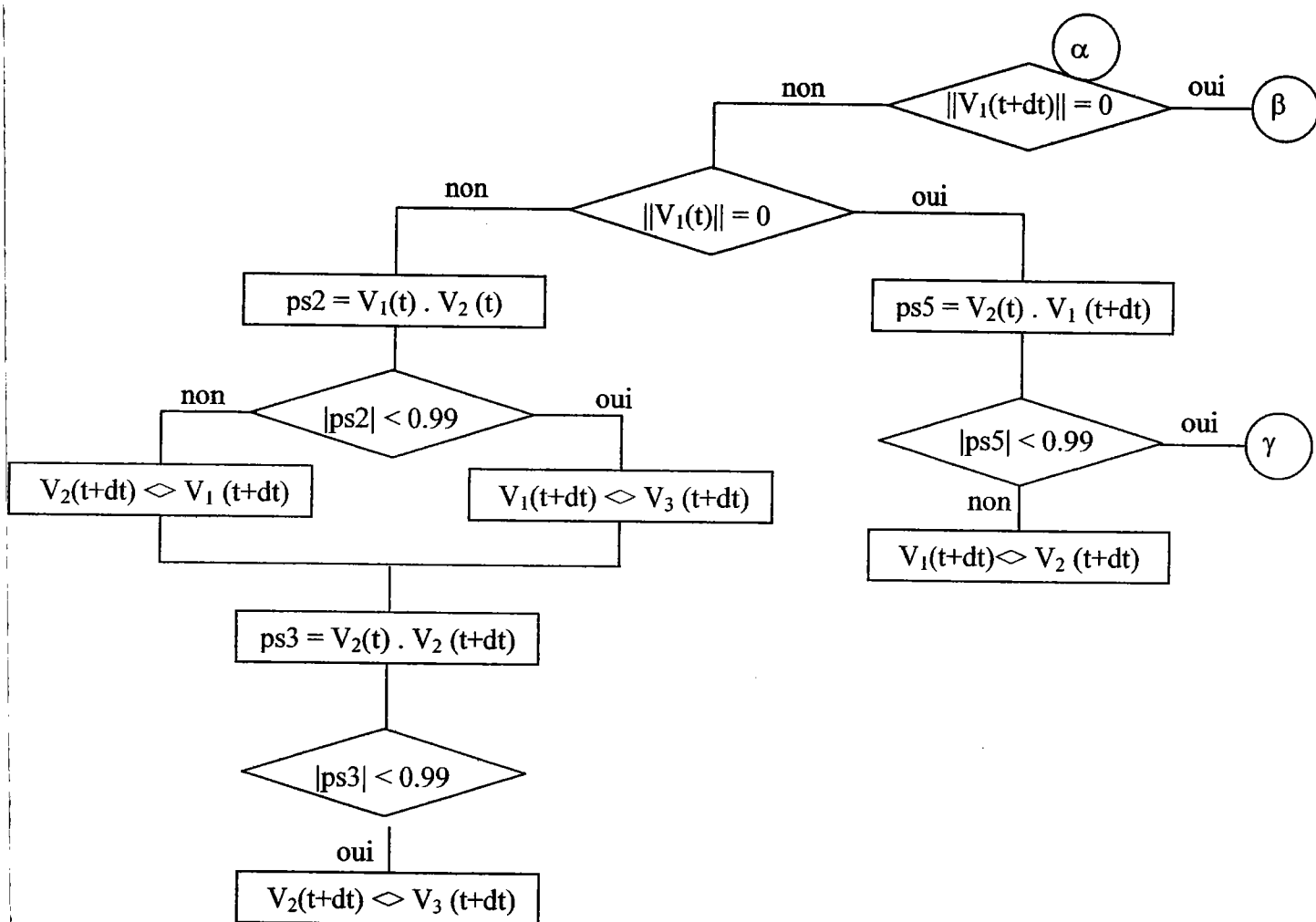
$$\sqrt{J_2} = \max_t \sqrt{\frac{1}{2} (S - Z^*)(S - Z^*)}$$

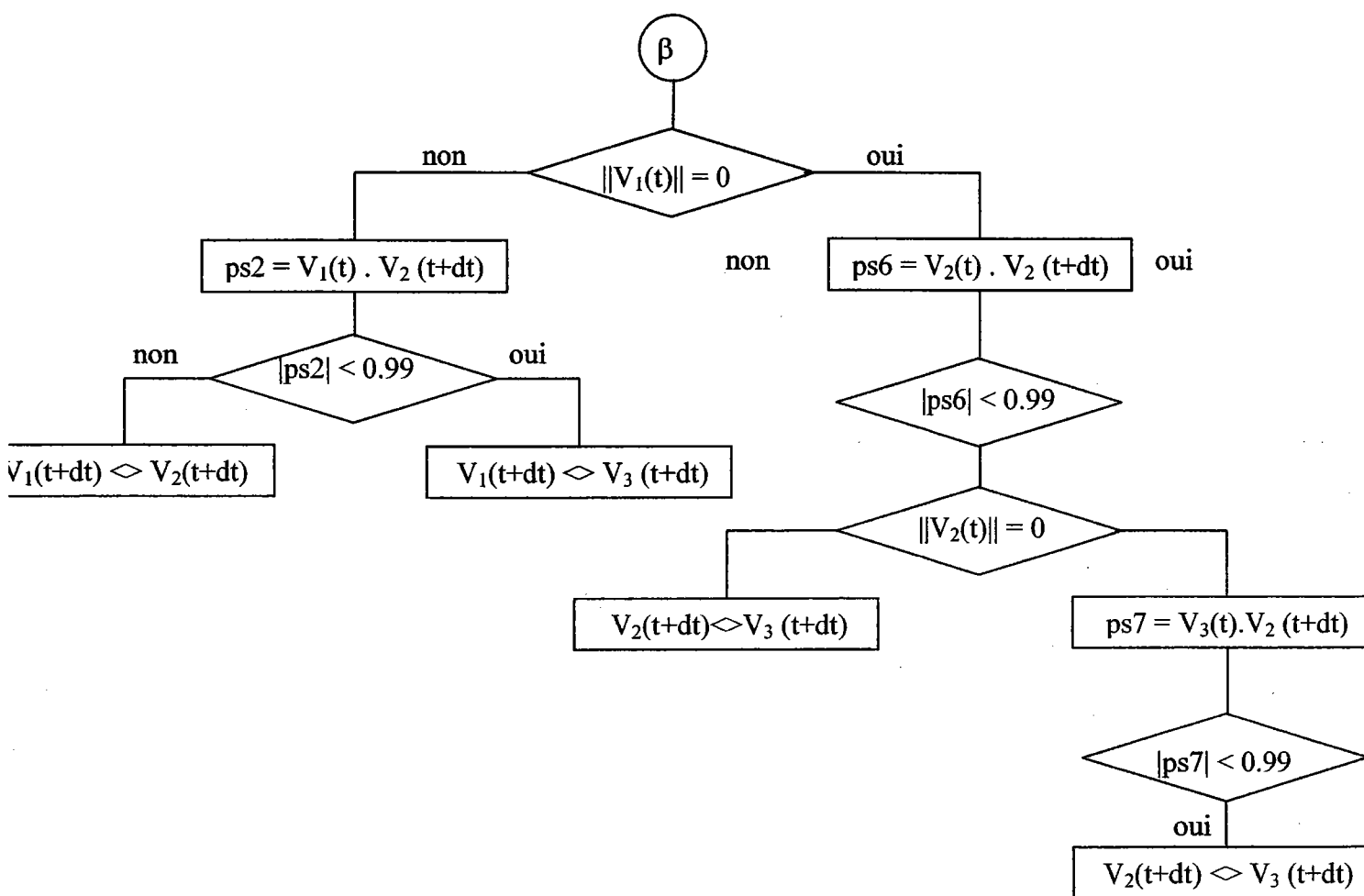
Le critère de Crossland s'écrit :

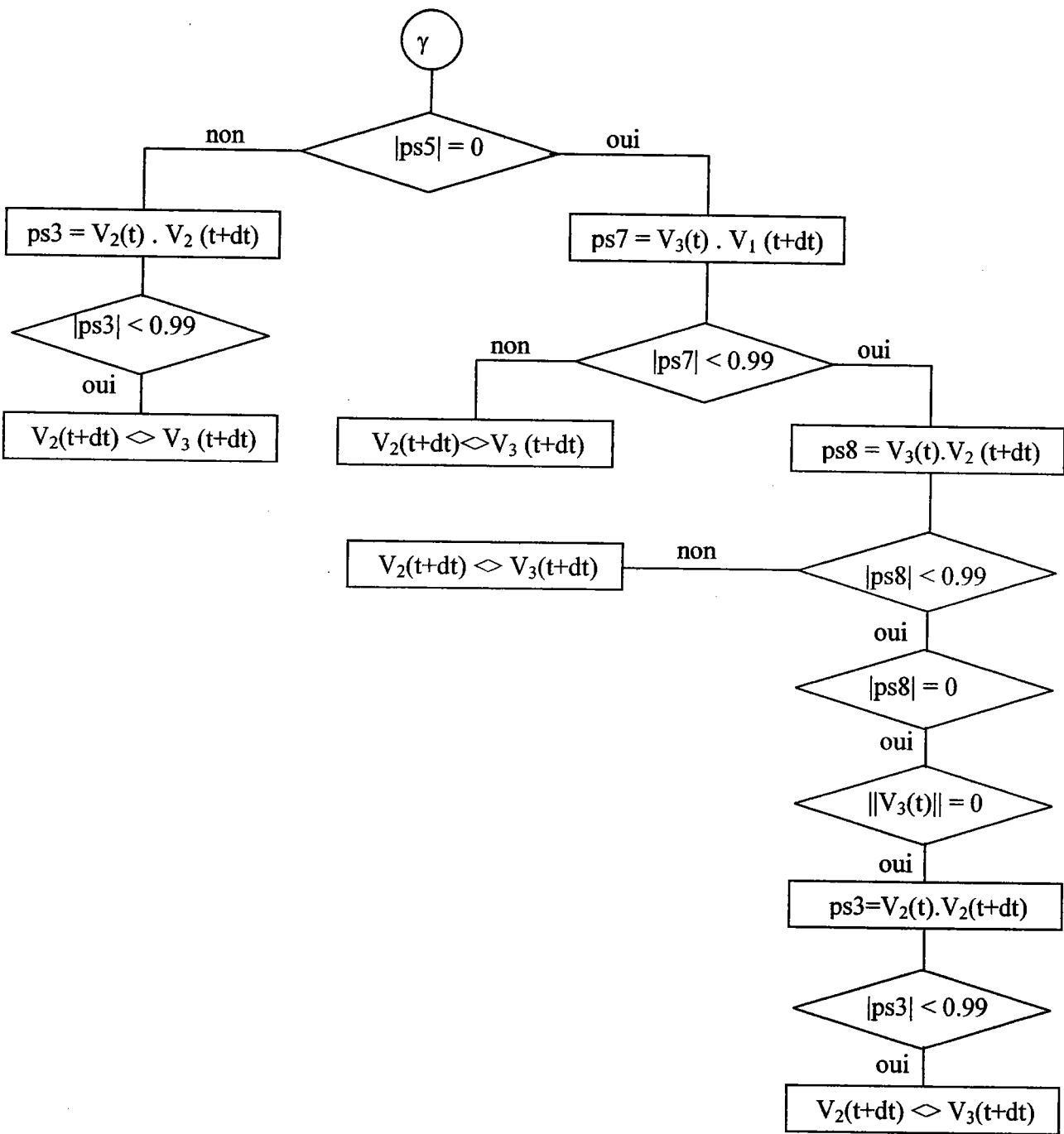
$$\sqrt{\Delta J_2} + \alpha \cdot p_{\max} \leq \beta$$

Annexe 1.1 – Organigramme de la procédure de suivi des directions principales des contraintes









# **Prévision de la durée de vie en fatigue des roues ferroviaires sous sollicitations multiaxiales proportionnelle et non proportionnelle**

**CHAMAT Abderrahim**

## **Résumé:**

L'expérience industrielle montre que la rupture des pièces de machines ou de structures en fonctionnement normal est souvent due à la fatigue.

Le but de ce travail est de proposer un critère prévisionnel de la durée de vie de la roue ferroviaire en fatigue illimitée. Pour cela, un signal a été relevé à partir d'essais effectués sur une roue ferroviaire. Ce signal a été appliqué à des éprouvettes prélevées sur la roue.

La machine de type INSTRON dont on dispose n'est pas prédisposée pour la réalisation de ce type de chargement. C'est pourquoi, toute une programmation par le biais de logiciel labview a été nécessaire afin d'introduire ce signal point par point. Les résultats expérimentaux sont comparés aux prévisions des divers critères.

L'application, des derniers critères, a donné des prévisions non concordantes et différentes des résultats expérimentaux. Dans cette perspective, un modèle semi local basé sur l'application de l'approche volumétrique a été proposé.

Pour représenter les essais sur la courbe de résistance de fatigue, deux méthodes ont été proposées. La première consiste à introduire un facteur multiplicateur de charge en fonction du nombre cycles à rupture. La deuxième consiste à représenter la contrainte de von Mises maximale en fonction du nombre de cycles à rupture.

De nombreuses études ont conclu l'influence du signal en domaine d'endurance. Nos résultats expérimentaux ont confirmé ces propos. L'effet du chargement sur la durée de vie ne devient négligeable qu'à partir d'une durée de vie  $10^{19}$  cycles, c'est-à-dire pour des faibles valeurs.

Mots clés : Fiabilité, Fatigue Multiaxiale, Chargement non proportionnel, Chargement proportionnel, Approches globales, Approches énergétiques, Approches semi-locales, Approches locales, Fatigue à grande nombre de cycles.

## **Prediction of the life duration of the railway wheel under non proportional and proportional multiaxial loadings**

The experience shows that the fracture of the components or structures in normal working conditions is often due to fatigue. The aim of this works is to propose a criterion which predicts the life duration in endurance fatigue. For this purpose, a signal has been raised during the tests. In order to apply this signal the specimens are extracted from the wheel.

Our Instron machine is not predisposed for the realization of this type of loading; therefore a Labview program has been set which enables to introduce all points of the cycle. The experimental results are compared to the prediction of the various criteria. The application of the various criteria predicted results different from the experimental data. In this perspective, a semi local approach based on the application of the volumetric method has been proposed.

Two methods have been proposed to depict the test results in fatigue strength diagram. The first consists in depicting a load factor as a function of the number of cycles to fracture. While the second consists in representing the maximal von Mises stress versus the number of cycles to fracture diagram. Numerous studies showed the influence of the signal in the endurance domain. Experimental results of the present study confirmed these findings. It is noted, the effect of the loading on the life duration becomes negligible from a life duration of  $10^{19}$  cycles i.e. low values.