HAL
open science

Dispersion thermique dans des milieux granulaires : caractérisation à coeur et en proche paroi

Amélie Testu

To cite this version:

Amélie Testu. Dispersion thermique dans des milieux granulaires : caractérisation à coeur et en proche paroi. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005. Français. NNT : 2005INPL100N . tel-01752511

HAL Id: tel-01752511

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752511v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Institut National Polytechnique de Lorraine
Laboratoire d'**E**nergétique et de **M**écanique **T**héorique et **A**ppliquée

THESE

Présentée à l'INPL
En vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'INPL

Spécialité : Mécanique Energétique

Par

Amélie TESTU

DISPERSION THERMIQUE DANS DES MILIEUX GRANULAIRES

CARACTERISATION A CŒUR ET EN PROCHE PAROI

Soutenue publiquement le 23 novembre 2005 devant le jury :

Rapporteurs :

D. PETIT	Professeur, Laboratoire d'Etudes Thermiques, ENSMA, Poitiers
M. QUINTARD	Directeur de Recherche CNRS, Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse

Examinateurs :

J.C. CHARPENTIER	Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, Nancy
S. DIDIERJEAN	Maître de Conférences, LEMTA Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy
D. MAILLET	Professeur, LEMTA, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy
T. NIASS	Ingénieur de Recherche, Institut Français du Pétrole, Lyon

Invités :

T. METZGER	Maître de Conférences, Otto-Von-Guerike Universität, Magdeburg, Allemagne
G. FERSCHNEIDER	Ingénieur de Recherche, Institut Français du Pétrole, Lyon

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
UMR CNRS 7563
2 avenue de la Forêt de Haye
BP 160
54504 VANDOEUVRE LES NANCY CEDEX

A Karim,
qui m'a soutenue tout au long de mes études et de la thèse
merci pour tout, je n'aurai pas accompli ce travail sans toi

A Kheïla,
qui m'a accompagnée pendant les neufs derniers mois

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'Institut Français du Pétrole qui m'a permis d' effectuer ma thèse dans de bonnes conditions et de m'avoir initiée au domaine de la pétrochimie. Je souhaiterai remercier Messieurs Tidjani Niass, promoteur de ma thèse, et Gilles Ferschneider, de l'I.F.P.

Je tiens également à remercier Monsieur Christian Moyne, directeur de recherche CNRS et directeur du laboratoire, pour m'avoir accueillie au sein du LEMTA.

Ensuite, mes remerciements vont en particulier au Professeur Denis Maillet, directeur de ma thèse qui a su me guider tout au long de ma thèse. En effet, pendant ces trois années, il m'a apporté son aide et son soutien pour mener à bien le travail à effectuer. Je le remercie pour sa disponibilité et la qualité scientifique de ses différentes explications et discussions.
De même, je remercie Madame Sophie Didierjean pour m'avoir co-encadrée.

Je remercie Michel Quintard, directeur de recherche CNRS et le Professeur Daniel Petit d'avoir accepté d'examiner mon travail ainsi que Jean-Claude Charpentier, directeur de recherche CNRS d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse. Je remercie également Monsieur Thomas Metzger pour sa disponibilité et ses explications du sujet lors de ma première année de thèse ainsi que d'avoir accepté de participer au jury.

Enfin, je remercie tout le personnel du LEMTA, les permanents, les doctorants et les post-doctorants, qui m'ont permis de passer ses trois années dans une bonne ambiance et qui m'ont aidée pour mes différents problèmes scientifiques, techniques et administratifs. Je tiens tout particulièrement à remercier les techniciens, Franck, Jean-Pierre et Daniel pour leur disponibilité et leur aide précieuse pour le travail expérimental accompli. Ma reconnaissance va également à Valérie et à Catherine.

Sommaire

Nomenclature **9**

Introduction **11**

Chapitre 1 : Etat de l'art sur la dispersion thermique à cœur ou en proche paroi **13**

1.1 - Applications et définition d'un milieu granulaire **13**
1.1.1 - Position de l'étude 13
1.1.2 - Profil de porosité 15
1.1.3 - Surface spécifique 17
1.1.4 - Tortuosité 17

1.2 - Régime hydraulique en milieu poreux **17**
1.2.1 - Vitesse de Darcy 17
1.2.2 - Nombres adimensionnels et lois d'écoulement 18
1.2.3 - Effets dynamiques en proche -paroi 20
1.2.3 - Effets dynamiques en proche -paroi 21

1.3 - Conductivité thermique équivalente des milieux hétérogènes **23**

1.4 - Modélisation de la dispersion thermique au coeur du milieu granulaire **26**
1.4.1 - Prise de moyenne sur un volume élémentaire représentatif 27
1.4.2 - Modèle à deux températures 28
1.4.3 - Modèle à une température 30

1.5 - Caractérisation de la dispersion thermique : état de l'art **32**
1.5.1 - Détermination théorique 32
1.5.2 - Détermination expérimentale 33

1.6 - Modélisation de la dispersion thermique en proche paroi **37**
1.6.1 - Modèle standard ou modèle à coefficient d'échange convectif 37
1.6.2 - Le modèle dispersif 39

Chapitre 2 : Dispositif de caractérisation en cœur de milieu **43**

2.1 – Caractérisation statique des milieux utilisés **43**
2.1.1 - Milieu billes de verre/air 43
2.1.2 - Milieu support de catalyseur / air 44
2.1.3 – Comparaison des deux systèmes étudiés 47

2.2 – Banc de caractérisation de la dispersion thermique gaz / grain 47
2.2.1 - Milieu poreux 48
2.2.2 - Mesure de température 50
2.2.3 - Chauffage et mesure de la puissance de chauffage 52
2.2.4 - Approvisionnement en air 54
2.2.5 - Mesure de la vitesse 57
2.2.6 - Protocole de mesure 58

Chapitre 3 : Modélisation et conception d'expérience 59

3.1 - Modélisation à cœur et sensibilités 59
3.1.1 - Equation de dispersion thermique 59
3.1.2 - Réponse à une source linéique perpendiculaire à l'écoulement 61
3.1.3 - Etude de sensibilité 65

3.2 – Estimation des paramètres 67
3.2.1 - Le mode α_4 67
3.2.2 - Le mode α_5 67

3.3 - Inversion sur des mesures synthétiques 68

3.4 - Effet du déséquilibre thermique 72

3.5 - Analyse dimensionnelle de la dispersion thermique et formes pertinentes des corrélations 77

Chapitre 4 : Résultats expérimentaux et interprétation 85

4.1 - Pré-traitement des signaux 85

4.2 - Système air / bille de verre 86
4.2.1 - Résultats en mode α_4 pour les thermocouples sur l'axe (y^{nom}=0) 86
4.2.2 - Résultats expérimentaux en mode α_5 pour les thermocouples hors axe (y^{nom} = 2,5 mm) 87
4.2.3 - Représentation des résultats 92
4.2.3.1 - Coefficient de dispersion longitudinal 92
4.2.3.2 - Coefficient de dispersion transversal 97
4.2.3.3 - Anisotropie 100

4.3 - Système air /support de catalyseur ou azote / support de catalyseur 101
4.3.1 - Problèmes rencontrés et solutions apportées 101
4.3.2 - résultats d'estimation 110

4.4 - Cas des billes de verre polydisperses 111

Chapitre 5 : Dispositif de caractérisation – chauffage en paroi 113

5.1 - Modélisation du chauffage en proche-paroi 113
5.1.1 - Modèle de Green 114
5.1.2 - Modèle en Fourier 118

5.2 - Conception du banc expérimental **121**
5.2.1 - Dispositif expérimental 121
5.2.2 - Chauffage électrique 122
5.2.3 - Thermocouples 123

5.3 - Résultats expérimentaux **126**

5.4 - Perspectives **128**

Conclusion et perspectives **129**

Annexe 1 : nouvelle configuration de chauffage **131**

Annexe 2 : prétraitement du signal **135**

Annexe 3 : équations de fermeture **141**

Annexe 4 : solution de l'équation proche-paroi utilisant les fonctions de Green **143**

Annexe 5 : solution du modèle « bicouche » **152**

Références bibliographiques **162**

Nomenclature

A	section, m^2
a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
a_v	surface spécifique, m^{-1}
A_{fs}	interface entre les deux phases, m^2
b	biais
C_p	chaleur massique, $J.K^{-1}kg^{-1}$
d	diamètre des billes, m
g	accélération de pesanteur, $m.s^{-2}$
h	coefficient du modèle à deux températures, $W.K^{-1}.m^{-2}$
h_{fil}	coefficient d'échange thermique avec un fil, $W.K^{-1}.m^{-2}$
h_p	coefficient d'échange thermique à la paroi, $W.K^{-1}.m^{-2}$
H	fonction de Heaviside temporelle,
J	courant électrique, A
$\mathbf{n_{fs}}$	vecteur normal à l'interface entre les deux phases
Nu	nombre de Nusselt, $h_p d/\lambda_f$
p	variable de Laplace
P	pression, Pa
Pe	nombre de Péclet, ud/a_f
Pr	nombre de Prandtl, ν/a
k	perméabilité, m^2
R	constante des gaz parfaits, $J.m^{-1}.K^{-1}$
$\boldsymbol{R}$	vecteur spatial, m
Re	nombre de Reynolds, $\rho ud/\mu$
Q	puissance linéique, $W.m^{-1}$
s	source volumique de chaleur, $W.m^{-3}$
T	température, K ou °C
t	temps, s
x, y, z	coordonnées spatiales

U	tension électrique, V
u ou u_D	vitesse moyenne ou vitesse de Darcy, $m.s^{-1}$
u_f	vitesse interstitielle
V	volume, m^3
W	puissance surfacique, $W.m^{-2}$
α, β	vecteur paramètre
δ	impulsion de Dirac, m
ε	porosité
λ	conductivité thermique, $W.K^{-1}.m^{-1}$
λ, λ_x, λ_y	tenseur ou coefficients de dispersion thermique, $W.K^{-1}.m^{-1}$
λ_{ff}, λ_{fs}	tenseurs du modèle à deux températures
λ_{eq}	conductivité thermique équivalente, $W.K^{-1}.m^{-1}$
μ	viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	viscosité cinématique, $m^2.s$
σ	écart type
Φ	puissance électrique, W
ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
τ	temps caractéristique, s

Indices inférieurs

eq	équivalent
f	fluide
conv	convection
macro	macroscopique
micro	microscopique
pos	position
s	solide
t	total (solide et fluide)

Indices supérieurs

exp	expérimental
nom	nominal

Introduction

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une convention de recherche entre l'Institut Français du Pétrole et le Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée. L'objet de cette étude entre dans le cadre de la modélisation des transferts de chaleur au sein des réacteurs à lit fixe utilisés en génie des procédés pétroliers. Ceux-ci sont généralement constitués de grains poreux recouverts d'un catalyseur empilés dans une enceinte cylindrique pouvant avoir des dimensions importantes. Le lit est traversé par un mélange réactif de fluide pétrolier et il est refroidi ou réchauffé par l'extérieur. Le mécanisme du transfert de chaleur dans un tel lit fixe parcouru par un fluide est complexe. Ce type de transfert de chaleur est appelé dispersion thermique.

L'estimation des profils de température dans les milieux catalytiques granulaires où sont mis en œuvre des réactions fortement exo- ou endothermiques est toujours difficile, comme le montre la dispersion des résultats fournis par les corrélations proposées pour ce type de problème dans la littérature. Industriellement, on contrôle le profil de température en alternant des zones réactionnelles adiabatiques et des zones d'échange de chaleur. Le passage à des réacteurs isothermes, où se déroulerait simultanément la réaction et l'échange de chaleur, suppose que l'on soit capable de déterminer avec précision l'évolution des températures dans le milieu granulaire à l'échelle locale. Les paramètres essentiels permettant de caractériser la dispersion thermique sont les tenseurs de dispersion thermique et la vitesse moyenne de l'écoulement.

Le travail présenté ici doit permettre le développement d'un outil générique intégrant les phénomènes physiques prépondérants au sein du milieu granulaire. Le développement de cet outil s'appuie ici à la fois sur une démarche expérimentale et théorique.
Deux montages expérimentaux ont été utilisés : le premier est destiné à fournir l'expression des deux composantes du tenseur de dispersion de la chaleur et le second doit permettre l'évaluation des phénomènes spécifiques relatifs au transfert thermique en proche paroi.

La thèse récente de T.Metzger au LEMTA a permis de mettre au point une méthode fiable pour caractériser les différents paramètres au sein d'un lit constitué de billes de verre parcouru par de l'eau (sans prise en compte des effets de paroi).
En nous basant sur le même principe, nous avons caractérisé deux milieux granulaires différents traversés par un gaz dans la première partie de ce travail.
Afin de modéliser complètement les transferts thermiques en cœur et en proche paroi d'un réacteur, un banc de caractérisation prenant en compte les effets de la paroi a été construit.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres. Le premier dresse un état de l'art de la dispersion thermique à cœur et en proche paroi d'un milieu granulaire. Dans le deuxième chapitre, le dispositif de caractérisation des transferts au cœur du milieu granulaire est présenté. Puis, dans un troisième chapitre, la modélisation du problème est détaillée et nous étudions l'effet d'un éventuel déséquilibre thermique entre grains et fluides. Nous discutons

également dans cette partie des différentes formes de corrélations que l'on peut établir pour les coefficients de dispersion thermique.

Le quatrième chapitre présente les différents résultats expérimentaux obtenus pour un lit de billes de verre et pour un lit de supports de catalyseur traversé par de l'air ou de l'azote. Une comparaison avec les résultats obtenus par T.Metzger y est effectuée.

Enfin, dans le dernier chapitre, le banc de caractérisation et la modélisation correspondante du transfert en proche paroi sont présentés. Une conclusion et des perspectives terminent ce travail.

Chapitre 1 : Etat de l'art sur la dispersion thermique à cœur ou en proche paroi

Dans ce premier chapitre, nous essaierons de dresser un état de l'art sur la dispersion thermique à cœur et en proche paroi dans un milieu granulaire. Après avoir défini *le milieu granulaire*, nous donnerons les différents régimes hydrauliques existant dans les milieux poreux. Puis, nous évoquerons la notion de conductivité équivalente et les principaux résultats. Dans cette étude, nous allons travailler en cœur du milieu poreux puis en proche paroi : nous distinguerons les « deux zones » du milieu granulaire. Ensuite, nous présenterons aussi les différents modèles de dispersion thermique disponibles et donnerons quelques résultats expérimentaux de la littérature. Enfin, nous ferons le point sur l'étude de la dispersion avec prise en compte des effets en proche paroi.

Cet état de l'art renverra, pour certaines parties, à la thèse de Metzger [Metzger, 2002] qui avait déjà réalisé une bibliographie assez complète sur le sujet, notamment la modélisation et les résultats expérimentaux à cœur de milieu.

1.1 - Applications et définition d'un milieu granulaire

1.1.1 - Position de l'étude

Le comportement thermique d'un milieu granulaire qui est traversé par un fluide intéresse principalement l'industrie chimique et le génie des procédés.
L'application principale, qui nous intéresse, concerne les réacteurs chimiques à lit fixe où la phase solide joue le rôle de support de catalyseur (comme indiqué dans le chapitre 2). Ces réacteurs sont caractérisés par une surface réactive élevée et un mélange important dans la phase fluide. Lorsqu'on met en œuvre des réactions fortement endo- ou exothermiques, la maîtrise des transferts thermique dans le lit granulaire peut revêtir des aspects multiples dont certains ont une incidence directe sur le dimensionnement des réacteurs catalytiques. Une meilleure connaissance des transferts thermiques dans le milieu granulaire peut engendrer un allongement de la durée de vie des catalyseurs, une augmentation de capacité des unités ou une réduction des quantités de catalyseur.
Plus généralement, la maîtrise du transfert de chaleur dans les milieux poreux intéresse d'autres domaines tels que le stockage des déchets radioactifs en site profond, les échangeurs de chaleur ou plus généralement de multiples aspects de la production ou de la transformation de l'énergie.

La description de ce phénomène peut se faire soit à l'échelle microscopique, soit à l'échelle macroscopique.

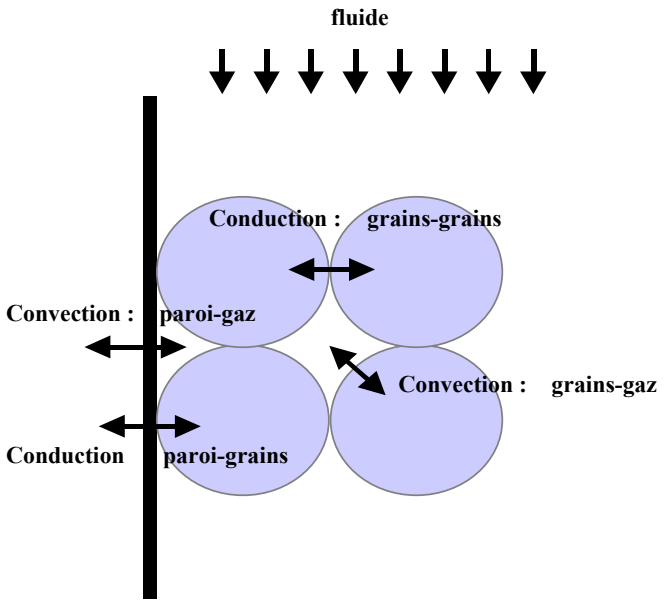


Figure 1.1 : *Echanges dans un lit granulaire*

Nous présentons sur la Figure 1.1 la description du système étudié : un fluide traverse un lit constitué d'un empilement de grains sphériques. Ce lit est nécessairement limité par une paroi solide. En catalyse hétérogène, des réactions chimiques se produisent à l'intérieur des grains et les effluents des réactions sont évacués par un fluide s'écoulant entre les grains. Par conséquent, les trois modes de transferts de chaleur (conduction, convection et rayonnement) sont couplés entre eux et à l'hydrodynamique locale. La direction privilégiée de l'écoulement et le profil de température engendrent des transferts de chaleur entre les grains, entre les grains et le fluide, entre la paroi et les grains et enfin entre la paroi et le fluide. Du fait de l'impossibilité pratique de décrire les échanges au niveau local, les spécialistes du génie chimique ont très tôt utilisé des modèles hétérogènes qui consistent à écrire une équation de conduction dans le solide (sans terme de vitesse), une équation de conduction-convection dans le fluide, avec un terme de vitesse (advection), en utilisant un coefficient d'échange h_{grains} pour caractériser les échanges entre les grains et le fluide en écoulement. De la même façon un autre coefficient d'échange h_{paroi} est couramment utilisé pour représenter les échanges du lit avec la paroi. Cette approche débouche le plus souvent sur la formulation de corrélations dépendant des nombres adimensionnels classiques (Nusselt, Reynolds et Prandtl) et des propriétés du lit granulaire (taille des grains, porosité, etc…).
Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent de la géométrie de la matrice, celle-ci est donc caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques.

Un milieu granulaire ou plus généralement un milieu poreux est un ensemble hétérogène constitué d'au moins une phase solide, déformable ou non, et d'une phase fluide. Ce milieu granulaire se caractérise par différentes grandeurs dont nous citerons ici les plus essentielles.

1.1.2 - Profil de porosité

La porosité se définit comme le rapport du volume des vides au volume apparent du milieu poreux. On distingue la porosité totale qui tient compte des cavités occluses au sein du solide (pores fermés) :

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\text{masse volumique apparente de l'échantillon}}{\text{masse volumique du matériau constitutif}}$$

et la porosité accessible ou espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des fluides :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores accessible}}{\text{volume de l'échantillon}}$$

La porosité peut-être définie localement en un point P, en évaluant le rapport précédent sur un volume, par exemple une sphère de diamètre *D* centrée sur ce point. Il est alors évident que la porosité locale ε(P) dépend de l'échelle *D* qui a servi à ce filtrage spatial, ici une moyenne mobile.
Ce paramètre revêt une importance primordiale en milieu granulaire. En effet, les particules d'un lit fixe, au voisinage de la paroi, ne s'arrangent pas de la même façon qu'au cœur du lit. Cela a pour conséquence une variation spatiale de la porosité. Dans ce cas, la porosité n'est évaluable qu'en considérant non pas une sphère, mais un disque de diamètre *D* parallèle à la paroi et en travaillant avec des rapports de sections pour évaluer cette moyenne mobile.

Giese [Giese, 1997] a récapitulé les résultats expérimentaux de la littérature pour établir des relations pour le profil de porosité dans un lit fixe. La Figure 1.2.a correspond au cas de particules monodisperses qui sont parfaitement sphériques; on observe une porosité ε = 1 à la paroi, et une oscillation spatiale qui s'atténue en s'éloignant de la paroi.

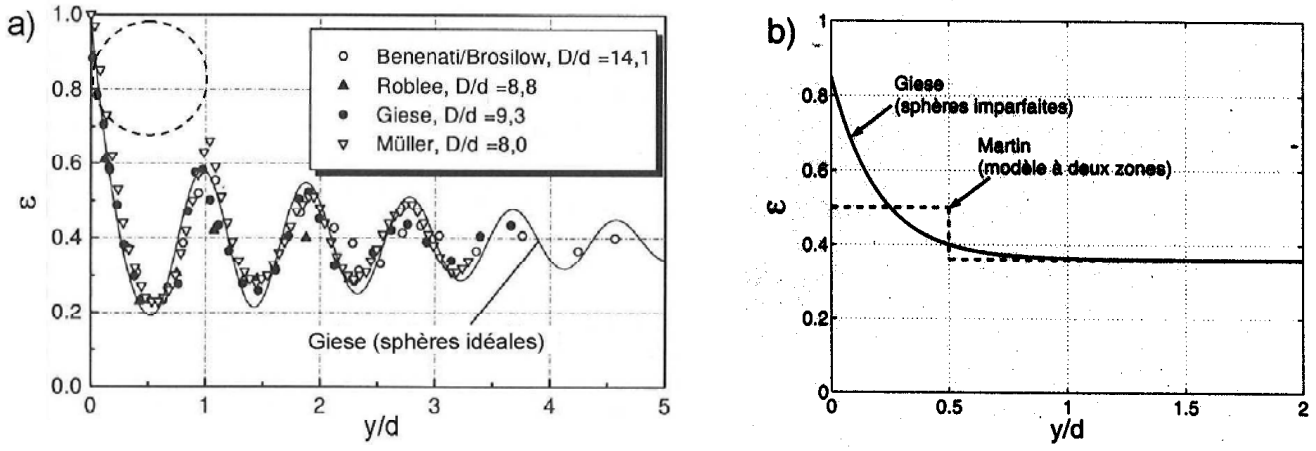


Figure 1.2 : *profil de porosité dans un lit fixe pour des sphères idéales (a) et pour des sphères imparfaites (b) ; y désigne la distance à la paroi, D la largeur du milieu et d le diamètre des particules [Giese, 1997]*

Ces résultats ont été vérifiés par mesures optiques [Stephenson, 1986] et plus récemment confirmés expérimentalement par RMN [Götz, 2002].

Dans la pratique, on a rarement affaire à des sphères parfaites. De nombreux travaux ont proposé des fonctions qui peuvent décrire approximativement le profil de porosité dans ce cas. Nous donnons ici les deux approches les plus répandues. La première est la relation donnée par Giese [Giese, 1997]:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_\infty \left(1 + 1{,}36\, e^{-5y/d}\right) \tag{1.1}$$

avec ε_∞ la porosité au cœur du milieu.
Beaucoup plus tôt, Martin [Martin, 1978] avait lui aussi établi une relation empirique donnant le profil de porosité en proche paroi. Contrairement à Giese, il décrit ce profil par un modèle à deux zones (Figure 1.3).

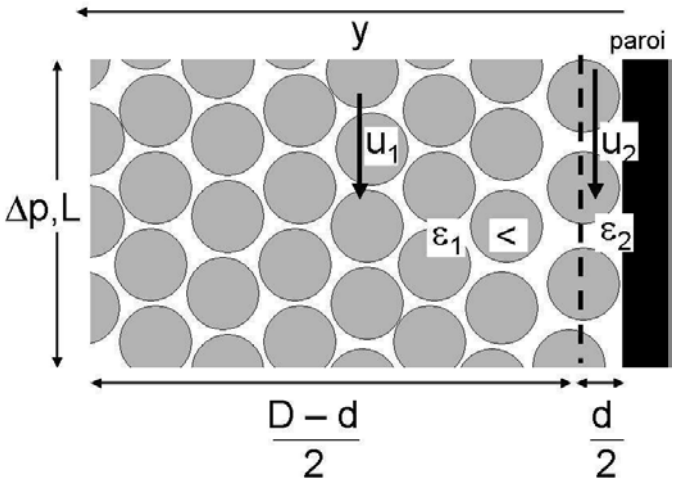


Figure 1.3 : *Modèle à deux zones de Martin*

A partir de la paroi, où ε = 1, la porosité décroît jusqu'à une valeur minimum ε_{min} à une distance $y = \frac{d}{2}$ de la paroi. La porosité est ici décrite par une fonction :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_{\min} + (1 - \varepsilon_{\min}) z^2 \qquad (-1 \le z \le 0) \tag{1.2}$$

avec $z = 2(y/d) - 1$ et $\varepsilon_{\min}$ est la porosité minimale obtenue lors des fluctuations et y la distance à la paroi (Figure 1.2 b).

La deuxième zone est caractérisé par des oscillations avec différents maxima et minima qui apparaissent à une distance supérieure à $y = \frac{d}{2}$. Ces formes d'oscillations sont calculées par une méthode développée par Ridgway et Tarbuck [Ridgway, 1968]. Martin propose pour cette deuxième zone une fonction :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{\min} - \varepsilon_\infty)\, e^{-z/4} \cos\left(\frac{\pi}{T} z\right) \qquad (z \rangle 0) \tag{1.3}$$

avec $T = \sqrt{2/3} \approx 0{,}816$ pour $D/d = \infty$ et $T = 0{,}876$ pour $D/d = 20{,}3$.

Il constate ainsi qu'à une distance de 4 ou 5 diamètres de grains à partir de la paroi, le profil de porosité devient constant et que l'on peut utiliser ainsi la porosité définie au cœur du milieu. Sur la Figure 1.2.b ont été reportés le modèle de Giese –équation (1.1) et le modèle de Martin -équation (1.2) et (1.3)- intégrés sur chacune des deux zones.

1.1.3 - Surface spécifique

La surface spécifique se définit comme le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solide-pores A_{sf} au volume de l'échantillon V :

$$a_v = \frac{A_{sf}}{V} \tag{1.4}$$

Cette grandeur, homogène à l'inverse d'une longueur, joue un rôle capital dans les problèmes d'adsorption. Comme pour la porosité, il convient parfois de distinguer la surface spécifique accessible et la surface spécifique totale comprenant l'aire des parois des cavités occluses (cas du coke).

1.1.4 - Tortuosité

La tortuosité est généralement définie par une équation de la forme :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L}\right) \tag{1.5}$$

τ désigne donc le rapport de la longueur moyenne réelle (L_e) des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon à la longueur L de ce dernier. La signification physique de cette grandeur, dont on voit très bien le sens dans le cas d'une modélisation de l'espace des pores par un réseau de capillaires, est cependant beaucoup moins nette dans le cas des milieux poreux réels.

1.2 - Régime hydraulique en milieu poreux

1.2.1 - Vitesse de Darcy

La vitesse communément utilisée en cœur du milieu granulaire est la vitesse de Darcy u_D. Cette vitesse est définie à partir du débit entrant dans le milieu poreux. Si l'on considère un milieu poreux de section A alimenté par un débit Q, alors la vitesse de Darcy est directement proportionnelle à ce débit :

$$u_D = \frac{Q}{A} \tag{1.6}$$

Elle peut également être définie localement de la même manière que la porosité, à partir d'une moyenne de la vitesse locale sur un volume, ou une sphère de diamètre *D*. Cette vitesse qu'on appelle alors vitesse superficielle ou vitesse de filtration est proportionnelle à la vitesse interstitielle u_f (moyenne de la vitesse sur la seule partie occupée par la phase fluide du volume précédent). La relation liant les deux vitesses est :

$$u_D = \varepsilon \; u_f \tag{1.7}$$

1.2.2 - Nombres adimensionnels et lois d'écoulement

Comme nous le verrons plus loin, les coefficients de dispersion sont donnés dans la littérature en fonction du seul nombre de Péclet. Cependant , il est judicieux de se demander si ces coefficients ne peuvent être donnés en fonction d'autres nombres adimensionnels.
Les régimes d'écoulement en milieu granulaire ou dans les conduites sont caractérisés par différents nombres adimensionnels dont dépendent les paramètres que nous cherchons à caractériser. Trois nombres adimensionnels sont ici particulièrement intéressants : le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl et le nombre de Péclet. Ces trois nombres qui ne sont pas indépendants ont des significations physiques différentes.

Le nombre de Reynolds (*Re*) :

$$Re = \frac{\rho \, u_D \, d}{\mu} = \frac{u_D \, d}{\nu} \tag{1.8}$$

Le nombre de Prandlt (*Pr*) :

$$Pr = \frac{\mu \left(c_p\right)_f}{\lambda_f} = \frac{\nu}{a_f} \tag{1.9}$$

Le nombre de Péclet (*Pe*) :

$$Pe = \frac{\left(\rho \, c_p\right)_f u_D \, d}{\lambda_f} = Re \, Pr \tag{1.10}$$

Dans ces trois définitions, u_D représente la vitesse de Darcy, *d* une dimension caractéristique locale du milieu poreux (diamètre des grains ou des pores), μ et ν sont respectivement les viscosités dynamique et cinématique du fluide (avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ et ρ la masse volumique du fluide). $\left(c_p\right)_f$ est la chaleur massique du fluide et λ_f sa conductivité thermique. Enfin $a_f = \frac{\lambda_f}{\left(\rho \, c_p\right)_f}$ est la diffusivité thermique du fluide.

Le nombre de Reynolds peut-être considéré comme une évaluation du rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Le nombre de Prandtl est le rapport de la diffusivité de quantité de mouvement à la diffusivité thermique : il caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de température. Le nombre de Péclet est le rapport du transfert de chaleur par advection au transfert de chaleur par conduction. Il joue dans l'équation de l'énergie un rôle analogue à celui joué par le nombre de Reynolds dans les équations de Navier-Stokes.

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est régi par différentes lois hydrodynamiques. La plus connue et la plus utilisée en milieu poreux est la loi de Darcy [Darcy, 1856]. Cette loi pour un fluide visqueux et incompressible en écoulement permanant, dans un milieu granulaire de longueur L s'écrit :

$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{\mu}{k} u_D \tag{1.11}$$

où ΔP désigne la perte de pression le long de l'échantillon et k est le coefficient de perméabilité intrinsèque du milieu.

La loi de Darcy est bien vérifiée pour de très faibles débits, par contre lorsque ceux-ci augmentent la loi n'est plus valable.
En faisant varier le débit et donc le nombre de Reynolds, on constate pour un écoulement laminaire 2D dans un milieu poreux périodique constitué de cylindres en quinconce que trois phases d'écoulement existent. Celles-ci sont visualisées sur la Figure 1.4 :

- la première pour de faibles débits, les lignes de courant sont symétriques (Figure 1.4.a et 1.4.b) : il s'agit du régime de Stokes ou régime de Darcy en utilisant la terminologie des milieux poreux
- la deuxième pour des débits plus élevés, où il commence à y avoir des zones de recirculation (1.4.c)
- puis la troisième, où il y a dissymétrie des lignes de courant (1.4.d).

Nous remercions ici G. Radilla, LEMTA, pour avoir réalisé ces simulations.

Si l'on revient sur cette évolution, on observe qu'aux faibles nombres de Reynolds, les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité. La forme de l'écoulement est entièrement déterminée par la forme géométrique du milieu dans lequel s'écoule le fluide.
Pour de plus grands nombres de Reynolds, les forces d'inertie agissent sur les lignes de courant en modifiant leur courbure et la relation n'est alors plus linéaire.

Plusieurs auteurs ont montré expérimentalement [Scheidegger, 1960 ; Schneebeli, 1955] et numériquement que dans un milieu granulaire, la limite d'applicabilité de la loi de Darcy se situe dans une plage de nombre de Reynolds comprise entre 10 et 20. Une étude récente [Fourar, 2004] montre, à l'aide d'une comparaison numérique 2D et 3D de l'écoulement et des pertes de charge dans un assemblage cubique centré de cylindres (2D) ou sphères (3D), que la loi de *Darcy* doit être corrigée par la prise en compte des effets inertiels pour des nombres de *Reynolds* supérieurs à 4 pour les sphères ou supérieurs à 20 pour les cylindres.

Au delà de ce seuil, le régime de Darcy laisse place au régime de Forchheimer [Forchheimer, 1901]. Ce dernier propose une relation quadratique entre la perte de pression et la vitesse débitante :

$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{\mu}{k} u_D + \frac{\rho}{\eta} u_D{}^2 \tag{1.12}$$

Le coefficient η est appelé passabilité intrinsèque du milieu poreux.
Dans le cas d'un fluide compressible (tels les gaz), la loi de Forchheimer prend une forme différente et s'écrit alors :

$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{\frac{Z\,R\,T}{M}}{\frac{\Delta P}{2}}\left(\frac{\mu}{k}G + \frac{1}{\eta}G^2\right) \tag{1.13}$$

où Z est le facteur de compressibilité, R la constante des gaz parfaits, G la vitesse débitante massique du fluide, M la masse molaire et ΔP la différence de pression entre l'entrée et la sortie.

Remarquons ici que, pour que les phénomènes dynamiques puissent être correctement décrits à l'échelle macroscopique à partir de ce qui se passe à l'échelle des pores, il faut utiliser le nombre de Reynolds. Les choses vont évidemment se compliquer en présence d'une source de chaleur et de gradients de température dans le milieu poreux comme nous le verrons plus loin en section 1.3.

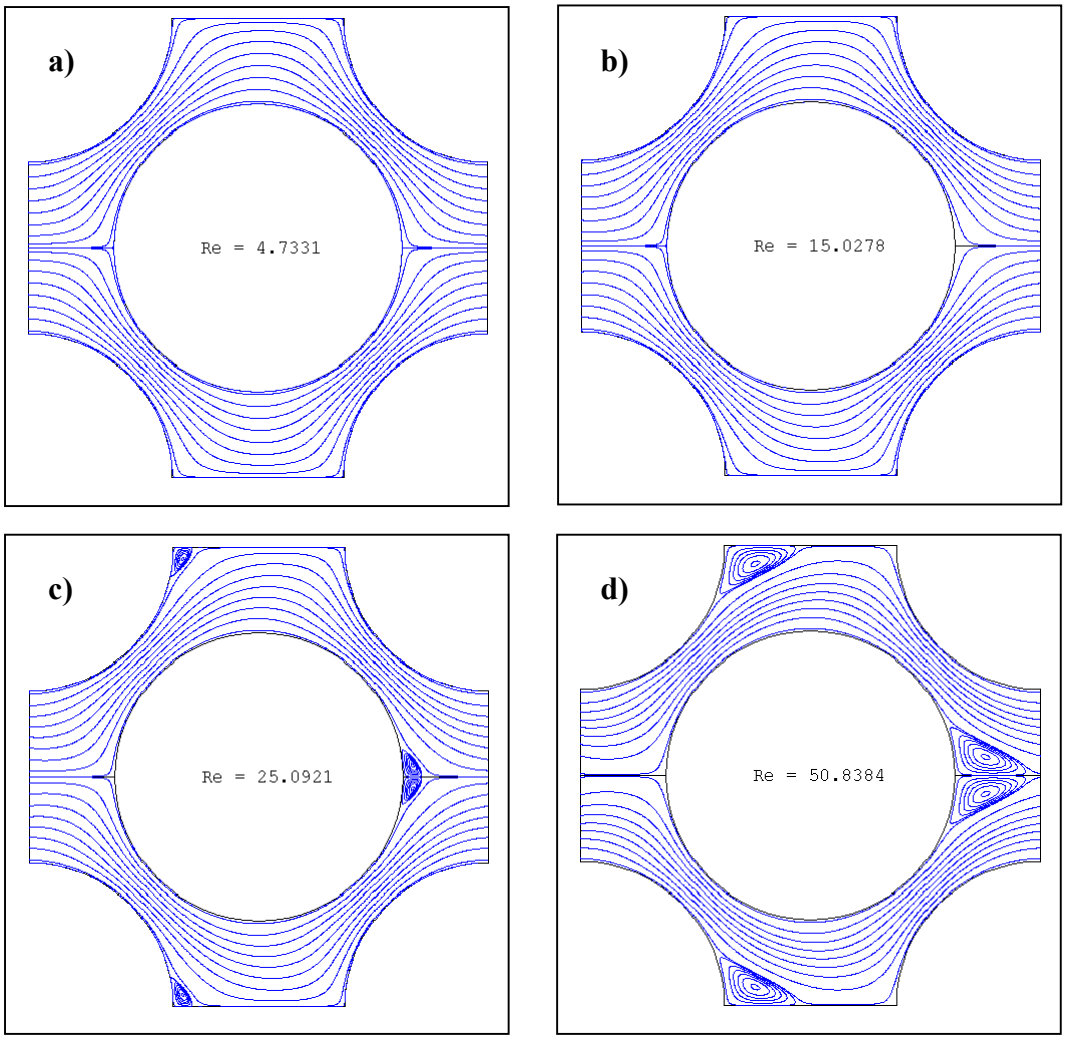


Figure 1.4 : *Ecoulement laminaire autour d'une sphère à quatre nombres de Reynolds différents*

1.2.3 - Effets dynamiques en proche -paroi

La vitesse de filtration va varier localement à proximité de la paroi du fait de la non-uniformité de porosité dans un lit fixe. En effet, le fluide se déplace plus vite au voisinage de la paroi en raison de la porosité plus élevée : « channeling effect ». Cette relation entre vitesse et porosité est bien représentée sur la Figure 1.5 [Götz, 2002]. Götz a montré que le profil de vitesse est directement relié au profil de porosité. Tous les deux sont fonctions de la distance à la paroi. Ce profil correspond à un diamètre de billes égal à 3,5 mm et a été mesuré par RMN (**R**ésonance **M**agnétique **N**ucléaire).

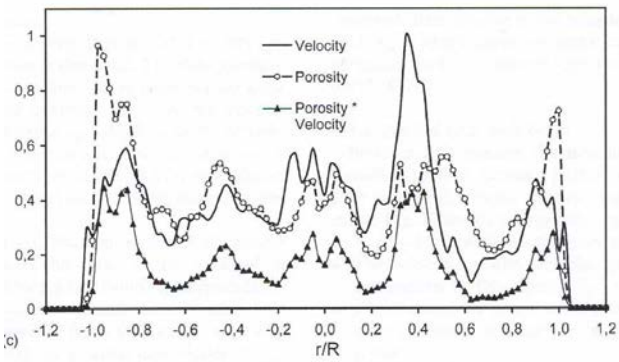


Figure 1.5 :*Profil de vitesse et de porosité proche paroi avec le rayon des billes égal à 1,25 mm et R le rayon du milieu 12,35 mm [Götz, 2002]*

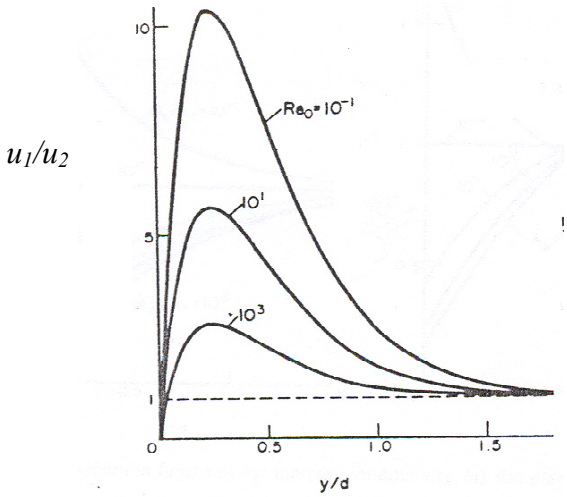


Figure 1.6 : *Dépendance du profil de vitesse avec le nombre de Reynolds [Tsotsas, Schlünder, 1990]*

Pour comprendre le profil de vitesse, nous discutons du modèle de Martin [Martin, 1978]. Ce dernier divise la section du lit en deux zones identiques à celles utilisées pour la porosité où cette dernière prend deux valeurs ε_1 (à cœur) et ε_2 (en proche paroi) (Figure 1.3).
Son étude correspond à un milieu poreux contenu dans une enceinte cylindrique de diamètre *D*. Le rapport des sections des deux zones est donné par $\varphi = \dfrac{d}{D-d}$.

Martin s'est intéressé au rapport des vitesses supposées indépendantes dans les deux zones (1 et 2). L'équation obtenue découle de la loi d'Ergun [Ergun, 1952] :

$$\frac{\Delta P}{L} = A\frac{(1-\varepsilon_i)^2}{\varepsilon_i^3}\frac{\eta_f u_i}{d^2} + B\frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i^3}\frac{\rho_f u_i^2}{d} \quad (i = 1, 2) \tag{1.14}$$

avec *A* et *B* deux constantes.

Martin calcule alors le rapport des vitesses :

$$\omega = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\varphi(1+K)-1+\sqrt{\left[\varphi(1+K)-1\right]^2+4(\varphi+MZ)(1-\varphi+Z)K}}{2(\varphi+MZ)} \tag{1.15}$$

avec : $K = \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^3$, $M = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2}$, $Z = \frac{B}{A}\frac{Re}{1-\varepsilon_1}$, A = 150 et B = 1,75 pour un lit de grains sphériques de diamètres uniformes et $Re = \frac{u_m d}{\nu}$, où u_m est la vitesse moyenne de Darcy de l'écoulement correspondant à la section totale de l'enceinte.

Il constate ainsi la dépendance du rapport des vitesses ω au nombre de Reynolds (Figure 1.6), au rapport des deux porosités et à la porosité moyenne $\bar{\varepsilon} = \frac{\varphi\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{1+\varphi}$.

De même, la vitesse au cœur du milieu granulaire (vitesse moyenne) que nous utilisons (vitesse de Darcy), doit être corrigée du fait de ces effets de paroi : on a alors d'après Martin :

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{1}{(1-\varphi)+\varphi\omega} \tag{1.16}$$

Nous avons calculé les différentes vitesses pour de l'air (ν = 1,15.10^{-6} m^2.s^{-1}) mises en jeu dans un milieu granulaire d'après ces différentes équations, avec $\frac{D}{d} = 50$ et ε_1 = 0,365 (correspondant à notre lit granulaire). Pour la porosité en proche paroi, nous avons utilisé ε_2 = 0,487, valeur correspondant à un lit de diamètre infini selon Martin. La Figure 1.7 montre la variation de ces différentes vitesses en fonction du nombre de Reynolds moyen. La vitesse moyenne et la vitesse réelle au cœur du milieu sont pratiquement égales. Par contre, la différence de ces deux vitesses avec la vitesse en proche paroi décroît en fonction du nombre de Reynolds.

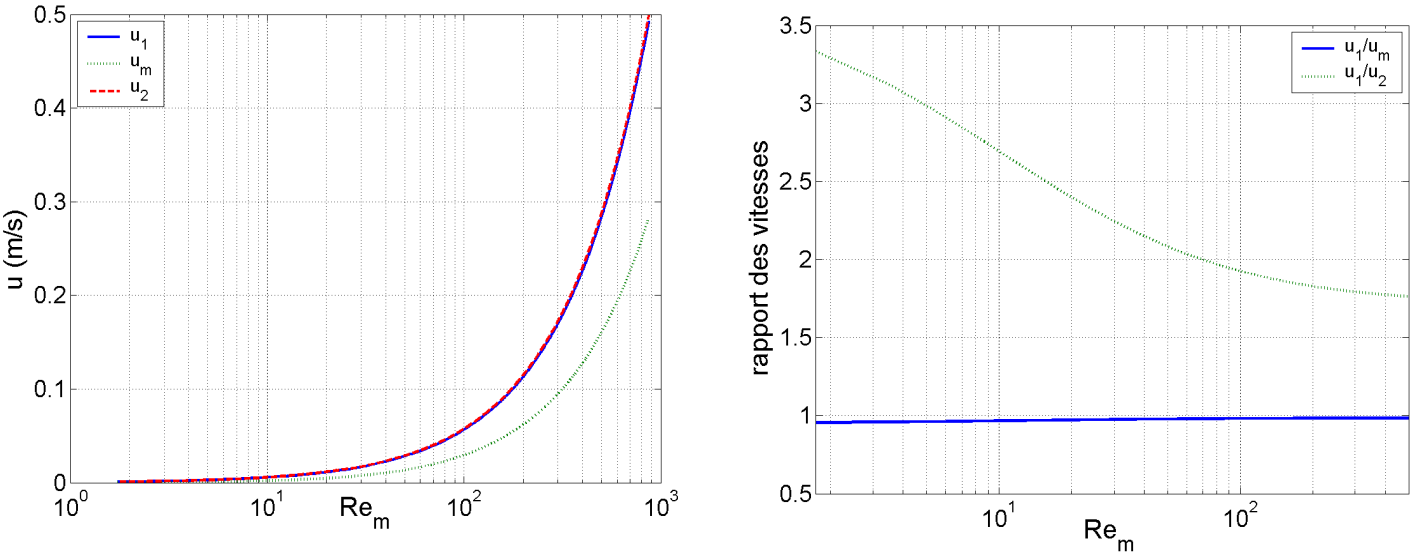


Figure 1.7 : *Différentes vitesses définies par Martin appliquées à de l'air et rapport des vitesses*

1.3 - Conductivité thermique équivalente des milieux hétérogènes

Un autre paramètre essentiel pour caractériser le milieu poreux est la conductivité thermique équivalente ou effective. Lorsqu'un gradient de température moyen uniforme est imposé à un milieu poreux dont l'espace des pores est occupé par une seule phase fluide immobile et non réactive, un régime thermique permanent, auquel correspond une densité de flux thermique uniforme φ s'établit. Il est par suite possible de définir la conductivité thermique effective ou équivalente λ_{eq} en utilisant une relation semblable à la loi de Fourier pour les milieux homogènes, soit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda_{eq} \cdot \nabla \vec{T} \tag{1.17}$$

Cette loi, que les techniques de changement d'échelle permettent de justifier formellement, peut être généralisée au cas des milieux anisotropes; λ_{eq} est alors un tenseur $\overline{\overline{\lambda}}_{eq}$ et dépend des conductivités thermiques λ_s et λ_f des phases solide et fluide constituant le milieu poreux, des fractions volumiques de ces phases (porosité) et de la structure de la matrice solide (continuité, état de surface, points de contacts...). Ses valeurs sont évidemment comprises entre les valeurs λ_s et λ_f des conductivités thermiques des phases en présence. ***La conductivité thermique équivalente ou conductivité thermique effective d'un milieu granulaire désigne donc l'unique coefficient de dispersion thermique du milieu à vitesse nulle***.

Il s'agit d'un paramètre qui est accessible de différentes manières. On peut l'obtenir par exemple :

- ✓ à partir d'un calcul sur une cellule élémentaire lorsque le milieu est périodique [Azizi, 1988],
- ✓ ou encore à partir d'expériences numériques (résolution de l'équation de la chaleur sur un milieu compris entre deux plans parallèles à températures distinctes mais uniformes, suivi du calcul du flux et de la résistance thermique d'une telle couche),
- ✓ ou enfin à partir de la mesure expérimentale de la conductivité du mélange.

Lorsque l'une des phases est un fluide, la mesure est délicate du fait de la convection naturelle qui peut se développer dans l'échantillon : on a alors bien souvent recours à des modèles de conductivité équivalente. Ces modèles sont fondés sur l'assimilation du milieu poreux à une structure géométrique simple régulière.

La conductivité effective λ_{eq}, pour une porosité ε_f, est toujours comprise entre les conductivités de deux milieux formés de strates parallèles entre elles (Figure 1.8). Les strates sont parallèles ou perpendiculaires aux surfaces extrêmes à températures imposées T_1 et T_2 et elles sont isolées latéralement.

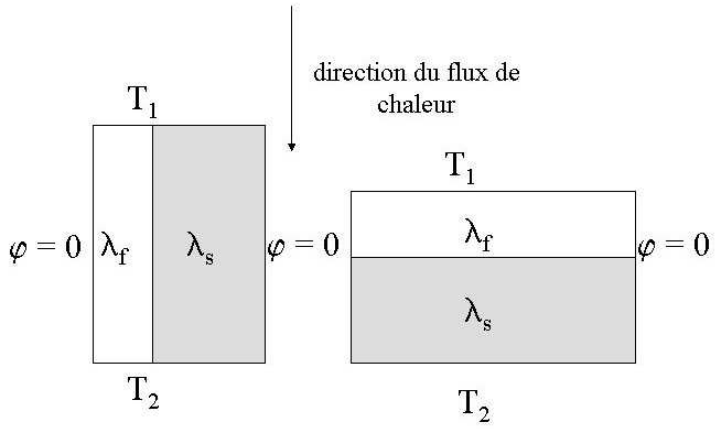


Figure 1.8 : S*trates parallèles et en série*

La conductivité est donc comprise entre deux bornes : la borne inférieure correspond au milieu où le flux de chaleur est perpendiculaire aux strates et la borne supérieure est celle où celui-ci est parallèle aux strates.

$$\frac{1}{\dfrac{\varepsilon_f}{\lambda_f}+\dfrac{\varepsilon_s}{\lambda_s}} < \lambda_{eq} < \varepsilon_s\ \lambda_s + \varepsilon_f\ \lambda_f \tag{1.18}$$

Les modèles de *type Maxwell* ont été établis pour des empilements réguliers formés de particules dispersées dans une matrice continue.
Maxwell [Maxwell, 1873] fait l'hypothèse qu'il n'y a aucune influence mutuelle entre les particules. La conductivité équivalente du milieu est donnée par :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = \frac{3\dfrac{\lambda_s}{\lambda_f} + 2\varepsilon\left(1-\dfrac{\lambda_s}{\lambda_f}\right)}{3-\varepsilon\left(1-\dfrac{\lambda_s}{\lambda_f}\right)} \tag{1.19}$$

Le modèle de Robert et Tobias [Robert, 1969], modèle de type Maxwell, est une amélioration du modèle de Rayleigh [Rayleigh, 1892]. Il est valable pour des empilements réguliers de particules sphériques et prend en compte l'interaction entre les particules. La conductivité équivalente est alors donnée par :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = \frac{A_1 - 2\varepsilon + 0,409\,A_3\,\varepsilon^{7/3} - 2,133\,\varepsilon^{10/3}\,A_2}{A_1 + \varepsilon + 0,409\,A_3\,\varepsilon^{7/3} - 0,906\,\varepsilon^{10/3}\,A_2} \tag{1.20}$$

avec $A_1 = \dfrac{2+\lambda_s/\lambda_f}{1-\lambda_s/\lambda_f}$, $A_2 = \dfrac{3-3\,\lambda_s/\lambda_f}{4+3\,\lambda_s/\lambda_f}$, $A_3 = \dfrac{6+3\,\lambda_s/\lambda_f}{4+3\,\lambda_s/\lambda_f}$

D'autres modèles, que nous ne ferons que citer, existent également :

- Les modèles utilisés dans les milieux périodiques. Avec ces modèles, il faut cependant connaître exactement la structure du milieu poreux, ce qui est un inconvénient. Le calcul de la conductivité se fait sur une cellule unité. Il existe deux approches correspondant soit à l'utilisation de l'analogie électrique, voir Kunii et Smith [Kunii, 1960] soit à la résolution de l'équation de chaleur dans la cellule unité.

- Les modèles statistiques consistent en une description statistique du milieu (nombre et position des points de contact entre les grains). Ainsi Jinn Huie Huang [Jinn Huie Huang, 1971] utilise le calcul probabiliste.

Tous ces différents modèles sont largement détaillés et comparés dans la thèse de Azizi [Azizi, 1988].

Nous nous intéressons ici à un dernier modèle développé par Zehner et Schlünder [Zehner, 1970]. Ceux-ci font l'hypothèse de lignes de flux parallèles. Ils changent ensuite la forme des particules pour compenser l'erreur commise par les différents modèles. La forme du grain modifié dépend de la forme des particules et de la porosité du lit fixe. L'avantage de ce modèle, selon ces auteurs, est de donner de bons résultats dans des cas asymptotiques tels que $\lambda_s = 0$ ou $\lambda_f = \infty$. La conductivité équivalente est alors donnée par :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 1 - \sqrt{1-\varepsilon} + \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\frac{\lambda_f}{\lambda_s}B}\left(\frac{\left(1-\frac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_f}{\lambda_s}B\right)^2}\ln\left(\frac{\lambda_s}{B\lambda_f}\right) - \frac{B+1}{2} - \frac{B-1}{1-\frac{\lambda_f}{\lambda_s}B}\right) \tag{1.21}$$

où le paramètre B suit la loi suivante pour les sphères : $B = 1,25\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{10/9}$

Pour appliquer ces différents modèles, il faut donc s'assurer que les hypothèses sur lesquelles ils reposent correspondent aux milieux que nous étudions. La conductivité équivalente dépend également de la température. Dans le cas où le fluide qui compose le milieu poreux est un gaz, λ_{eq} dépend également de la pression [Hahne, 1990]. Plusieurs facteurs sont donc à prendre en compte pour la détermination de ce coefficient. Le recours à la détermination expérimentale de cette grandeur est généralement plus précis et plus proche de la réalité. Nous avons ici utilisé la méthode flash et celle du fil chaud (cf. chapitre 2).

1.4 - Modélisation de la dispersion thermique au coeur du milieu granulaire

Dans cette partie nous traitons des échanges au cœur du lit, c'est à dire des échanges grain-grain et grain-fluide et de leur modélisation à l'échelle macroscopique.

Approche microscopique

Au niveau local, les équations qui gouvernent les transferts thermiques au sein des phases fluides (V_f) et solide (V_s) et à leur interface sont parfaitement connues.

$$\left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \nabla.\left(\lambda_f \nabla T_f\right) - \left(\rho c_p\right)_f u_f.\nabla T_f \qquad \text{en } V_f \qquad (1.22)$$

$$\left(\rho c_p\right)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla.\left(\lambda_s \nabla T_s\right) \qquad \text{en } V_s \qquad (1.23)$$

$$T_f = T_s \qquad \text{sur } A_{fs} \qquad (1.24)$$

$$\mathbf{n}_{fs}.\lambda_f \nabla T_f = \mathbf{n}_{fs}.\lambda_s \nabla T_s \qquad \text{sur } A_{fs} \qquad (1.25)$$

La conservation de l'énergie de la phase fluide est décrite par l'équation (1.22). Celle-ci prend en compte la conduction et la convection au sein de ce fluide. L'équation (1.23) décrit la conduction pure au sein de la phase solide. Les deux équations sont reliées entre elles par deux conditions limites. A l'interface des deux phases, les températures et les flux sont égaux -équations (1.24) et (1.25).

La résolution de ces équations locales soulève en pratique beaucoup de difficultés, du fait notamment de la méconnaissance de la structure locale du milieu poreux.

Cependant, dans le domaine d'application qui nous intéresse, c'est l'effet macroscopique qui présente un intérêt. La modélisation de la dispersion consiste donc en un passage des équations ci-dessus à une échelle dite échelle macroscopique.

Approche macroscopique

La littérature fournit de nombreux modèles permettant de décrire à l'échelle macroscopique les échanges thermiques dans un milieu poreux. Les plus utilisés sont le modèle à une température macroscopique, le modèle à deux températures avec phase solide continue et le modèle à deux températures avec phase solide dispersée. Ce dernier est en fait un modèle hybride qui utilise une description microscopique pour le solide tandis que la phase fluide est décrite à l'échelle macroscopique. Nous renvoyons ici au livre de Tsotsas [Tsotsas, 1990] qui a analysé ces différents modèles. Ceux-ci ont pu être établis soit par une approche intuitive du processus de dispersion et font alors le plus souvent apparaître des coefficients de transport dont la définition n'est pas rigoureusement établie, soit par l'utilisation des méthodes de changement d'échelle comme la méthode de prise de moyenne volumique.

1.4.1 - Prise de moyenne sur un volume élémentaire représentatif

Nous allons ici présenter les principales caractéristiques de la technique de prise de moyenne, appliquée aux équations locales. La technique de prise de moyenne a été développée en 1967 par Whitaker [Whitaker, 1967], puis par Carbonell et Whitaker [Bear, 1984]. Quintard, Kaviany et Whitaker [Quintard, 1997] l'ont également appliqué à la dispersion thermique en milieu poreux.

Soit Ψ_σ une grandeur physique définie sur la phase σ (fluide ou solide), sa moyenne $\langle \Psi_\sigma \rangle$ est définie sur un volume élémentaire représentatif V (V.E.R) et s'écrit :

$$\langle \Psi_\sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\sigma} \Psi_\sigma \, \mathrm{d}V \tag{1.26}$$

Le V.E.R. représenté Figure 1.9 est une sphère de rayon r_o.

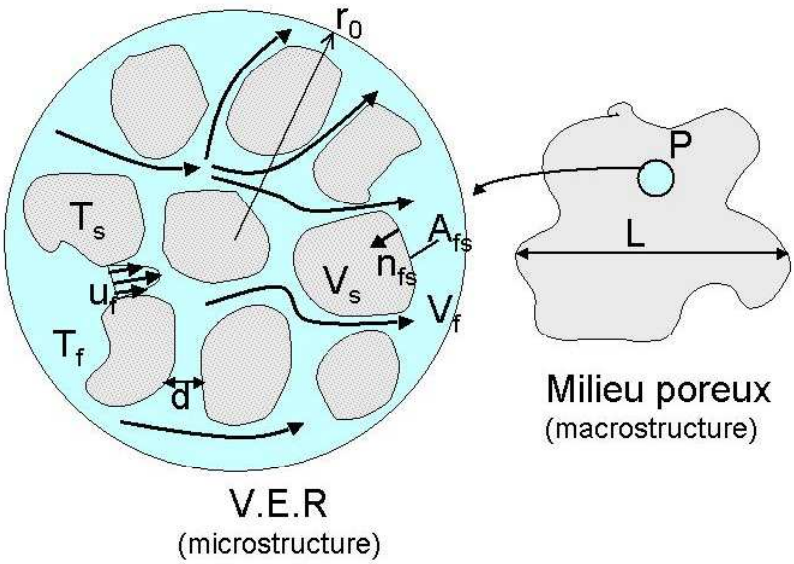


Figure 1.9 : *Approche microscopique, macroscopique et* ***V****olume* ***E****lémentaire* ***R****epréseentatif (V.E.R.)*

La moyenne intrinsèque à la phase *(σ)* est donnée par :

$$\langle \Psi_\sigma \rangle^\sigma = \frac{1}{V_\sigma} \int_{V_\sigma} \Psi_\sigma \, \mathrm{d}V \tag{1.27}$$

Elle vérifie donc $\langle \psi_\sigma \rangle^\sigma = \varepsilon \langle \psi_\sigma \rangle$.

L'application de l'opérateur de prise de moyenne aux équations de conservation de l'énergie écrites à l'échelle microscopique suppose que l'on utilise le théorème de prise de moyenne [Slattery, 1967] :

$$\left\langle \nabla T_f \right\rangle^f = \nabla \left\langle T_f \right\rangle^f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \boldsymbol{n}_{fs} T_f \, \mathrm{d}A \tag{1.28}$$

Les équations de conservation de l'énergie sur les phases solide et fluide permettent de calculer les températures locales T_f ou T_s (x, y, z, t). Le passage à l'échelle macroscopique donne deux équations moyennes pour les deux champs $\left\langle T_f \right\rangle^f$ et $\left\langle T_s \right\rangle^s$ (x, y, z, t) moyennés sur une sphère de centre M(x, y, z) et de rayon r_o, ce qui correspond à un filtrage spatial. L'application de cette technique dans un espace à une dimension correspondrait donc à une moyenne mobile avec une fenêtre de largeur $2r_0$.
Dans le processus de prise de moyenne, la taille du V.E.R, par exemple son diamètre $D = 2\ r_0$ doit vérifier $d << D << L$ où L représente la distance caractéristique du milieu à l'échelle macroscopique et d la distance caractéristique du milieu granulaire (par exemple le diamètre des grains).
Cette condition permet de considérer que les grandeurs moyennes sont indépendantes de la taille du V.E.R. et que les discontinuités microscopiques n'apparaissent pas dans les grandeurs moyennées.

1.4.2 - Modèle à deux températures

Le modèle de dispersion thermique à deux températures moyennes est celui le plus classiquement rencontré dans la littérature. Son établissement est présenté en détail dans les travaux de Levec et Carbonell [Levec, 1985]et de Carbonell et Whitaker [Carbonell, 1984]. Son principe est rappelé ici en quelques mots. La valeur exacte de chaque grandeur (températures et vitesse) est décomposée en une valeur moyenne et une fluctuation, comme par exemple pour T_f :

$$T_f = \left\langle T_f \right\rangle^f + \tilde{T}_f \tag{1.29}$$

où $\left\langle T_f \right\rangle^f$ est donnée par (1.23).
Cette décomposition est opérée dans les équations obtenues par application de l'opérateur prise de moyenne. On montre ensuite que les fluctuations spatiales $\tilde{T}_f$ et $\tilde{T}_s$ qui s'expriment en fonction des températures moyennes et de leurs gradients :

$$\tilde{T}_f = \mathbf{f}_f . \nabla \left\langle T_f \right\rangle^f + \mathbf{g}_f . \nabla \left\langle T_s \right\rangle^s + h_f \left(\left\langle T_s \right\rangle^s - \left\langle T_f \right\rangle^f \right) \tag{1.30}$$

$$\tilde{T}_s = \mathbf{f}_s . \nabla \left\langle T_f \right\rangle^f + \mathbf{g}_s . \nabla \left\langle T_s \right\rangle^s + h_s \left(\left\langle T_s \right\rangle^s - \left\langle T_f \right\rangle^f \right) \tag{1.31}$$

Les fonctions de fermeture ($\mathbf{f}_f$, $\mathbf{f}_s$, $\mathbf{g}_f$, h_f…..) dépendent de la géométrie des pores et du champ de vitesse locale. En remplaçant $\tilde{T}_f$ et $\tilde{T}_s$ par leurs expressions (1.30 et 1.31) dans les équations moyennes pour chaque phase, on obtient le système suivant :

$$\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial\left\langle T_f\right\rangle^f}{\partial t} = \nabla.\left(\boldsymbol{\lambda}_{ff}\nabla\left\langle T_f\right\rangle^f + \boldsymbol{\lambda}_{fs}\left\langle T_s\right\rangle^s\right) - \left(\mathbf{u}_{ff}.\nabla\left\langle T_f\right\rangle^f + \mathbf{u}_{fs}.\nabla\left\langle T_s\right\rangle^s\right) + h\,a_v\left(\left\langle T_s\right\rangle^s - \left\langle T_f\right\rangle^f\right) \tag{1.32}$$

$$(1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s \frac{\partial\left\langle T_s\right\rangle^s}{\partial t} = \nabla.\left(\boldsymbol{\lambda}_{sf}\nabla\left\langle T_f\right\rangle^f + \boldsymbol{\lambda}_{ss}\left\langle T_s\right\rangle^s\right) - \left(\mathbf{u}_{sf}.\nabla\left\langle T_f\right\rangle^f + \mathbf{u}_{ss}.\nabla\left\langle T_s\right\rangle^s\right) - h\,a_v\left(\left\langle T_s\right\rangle^s - \left\langle T_f\right\rangle^f\right) \tag{1.33}$$

Le modèle contient quatre tenseurs de dispersion ($\boldsymbol{\lambda}$), quatre vecteurs vitesse ($\boldsymbol{u}$) et un coefficient h difficile à interpréter et à estimer expérimentalement. Dans le cas d'un milieu granulaire constitué de sphères de diamètre unique d, on peut montrer, à l'aide d'un modèle conductif appliqué sur une seule sphère développée aux temps longs – voir chapitre 3- que le coefficient h prend la valeur suivante : $h = 10\dfrac{\lambda_s}{d}$.

Le paramètre a_v désigne l'aire de l'interface solide / fluide par unité de volume du milieu poreux (surface spécifique). Pour un lit fixe de porosité ε, constitué de particules sphériques de diamètre d on a :

$$a_v = \frac{6(1-\varepsilon)}{d} \tag{1.34}$$

Le modèle à deux températures est assez difficile à utiliser en pratique du fait du nombre important de paramètres. Dans le cas d'une géométrie simplifiée monodimensionnelle, Levec et Carbonell [Levec, 1985] et Zanotti et Carbonell [Zanotti, 1984], ont montré qu'aux temps longs, le modèle à deux températures peut être approché par les équations suivantes :

$$\frac{\partial\left\langle T_\sigma\right\rangle^\sigma}{\partial t} + u\frac{\partial\left\langle T_\sigma\right\rangle^\sigma}{\partial x} = \frac{\lambda_x}{\left\langle \rho c_p\right\rangle_t}\frac{\partial^2\left\langle T_\sigma\right\rangle^\sigma}{\partial x^2} \quad . \tag{1.35}$$

On conserve donc une équation pour chaque phase ($\sigma = f, s$) avec la même vitesse moyenne u et le même coefficient de dispersion λ_x. Cependant il a été montré par ces auteurs que les zones affectées thermiquement dans chaque phase sont décalées spatialement. En pratique aux temps longs, le décalage reste négligeable par rapport aux dimensions spatiales macroscopiques (Levec et Carbonell).

Cette formulation beaucoup plus simple du processus de dispersion thermique peut être rendue plus générale par la mise en place d'un modèle utilisant une seule température moyenne.

1.4.3 - Modèle à une température

Pour obtenir un modèle à une seule température la méthode la plus fréquemment rencontrée dans la littérature consiste à supposer que les phases solide et fluide sont à l'équilibre thermique local, soit : $\langle T \rangle = \langle T_f \rangle^f = \langle T_s \rangle^s$.

Cependant, comme l'ont démontré Moyne *et al* [Moyne, 2000], il ne s'agit pas d'une condition nécessaire. En effet, il suffit de définir une température moyenne $<T_h>$ comme moyenne enthalpique des températures des deux phases, ce qui s'écrit :

$$\langle T_h \rangle = \frac{1}{(\rho c_p)_t \; V} \int_V \rho c_p(r) \;\; T \;\; \mathrm{d}V \tag{1.36}$$

avec $T_h(r) = \dfrac{\rho c_p(r)}{(\rho c_p)_t} T(r)$

Par abus de langage, nous noterons ici $\langle T_h \rangle = \langle T \rangle$, mais la prise de moyenne (1.36) est une intégrale pondérée par le rapport des chaleurs volumiques. On peut alors relier la température moyenne enthalpique aux moyennes intrinsèques des deux phases :

$$(\rho c_p)_t \; \langle T \rangle = \varepsilon \; (\rho c_p)_f \; \langle T_f \rangle^f \; + \; (1-\varepsilon) \; (\rho c_p)_s \; \langle T_s \rangle^s \tag{1.37}$$

où $(\rho c_p)_t$ est la chaleur volumique totale du milieu qui se calcule à partir des chaleurs volumiques des deux phases (fluide et solide) par une loi de mélange :

$$(\rho c_p)_t = \varepsilon \; (\rho c_p)_f \; + \; (1-\varepsilon) \; (\rho c_p)_s \tag{1.38}$$

ε désigne la porosité du milieu. Pour l'établissement du modèle à une équation, les températures locales sont décomposées de la façon suivante :

$$T_s = \langle T \rangle + \tilde{T}_s \quad \text{et} \quad T_f = \langle T \rangle + \tilde{T}_f \tag{1.39}$$

On cherche pour les fluctuations des solutions sous la forme :

$$\tilde{T}_s = \mathbf{g}.\nabla \langle T \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{T}_f = \mathbf{g}.\nabla \langle T \rangle \;, \tag{1.40}$$

La température moyenne enthalpique est alors donnée par l'équation suivante :

$$(\rho c_p)_t \; \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \nabla.(\lambda \nabla \langle T \rangle) \; - \; \varepsilon \, (\rho c_p)_f \; \langle u_f \rangle^f .\nabla \langle T \rangle \tag{1.41}$$

avec $\langle u_f \rangle^f$ la vitesse moyenne intrinsèque de la phase fluide telle que $u_D = \varepsilon \langle u_f \rangle^f$ est la vitesse de Darcy.

Tenseur de dispersion thermique

λ est le tenseur de dispersion thermique qui se décompose classiquement de la façon suivante [Moyne, 2000] :

$$\overline{\overline{\lambda}} = \left(\varepsilon_f \lambda_f + \varepsilon_s \lambda_s\right) \overline{\overline{I}} + \varepsilon_f \lambda_f \overline{\overline{\tau}}_f + \varepsilon_s \lambda_s \overline{\overline{\tau}}_s - \varepsilon_f \left(\rho c_p\right)_f \overline{\overline{D}} \tag{1.42}$$

$\overline{\overline{I}}$ est le tenseur identité, $\overline{\overline{\tau}}_{f,s}$ les tenseurs de tortuosité et $\overline{\overline{D}}$ le tenseur de dispersion hydrodynamique.

$$\overline{\overline{\tau}}_f = \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \vec{n}_{sf} \otimes \vec{f} \, \mathrm{d}A \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\tau}}_s = \frac{1}{V_s} \int_{A_{fs}} \vec{n}_{sf} \otimes \vec{g} \, \mathrm{d}A \tag{1.43}$$

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \vec{u}_f \otimes \vec{f} \, \mathrm{d}V \tag{1.44}$$

f et *g* représentent des fonctions de fermeture [Moyne, 2000].

Les composantes du tenseur de dispersion (que nous chercherons à caractériser) sont constituées :

- ✓ d'un terme constant égal à la conductivité thermique du modèle parallèle
- ✓ d'un terme de tortuosité dépendant de la vitesse moyenne
- ✓ d'un terme résultant de la contribution hydrodynamique du tenseur de dispersion

Généralement les composantes du tenseur de dispersion thermique λ sont représentées sous la forme de corrélations basées sur le nombre de Péclet du type :

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + F_\alpha(Pe) \tag{1.45}$$

avec $\alpha = x$, y ou z et Pe le nombre de Péclet calculé à partir du diamètre des particules, la vitesse moyenne et de la diffusivité thermique du fluide. λ_{eq} est ici la conductivité équivalente du milieu lorsque la vitesse du fluide est nulle car $F_\alpha(0) = 0$. Remarquons que ces corrélations ne prennent pas en compte les propriétés du solide (sauf dans λ_{eq}).

Il est ici utile de noter que c'est le nombre de Reynolds qui permet de caractériser le régime de l'écoulement. Aussi, si on souhaite maintenir la dépendance des coefficients de dispersion à la géométrie de l'écoulement, des corrélations prenant en compte ce dernier sont sans doute plus appropriées. Pour que la mesure à l'échelle macroscopique puisse être une évaluation de ce qui se passe à l'échelle des pores, l'utilisation du nombre de Reynolds paraît alors une bonne solution si on compare les résultats de la dispersion obtenus pour des fluides différents. Si on compare des arrangements de solides différents pour un même fluide, il importe peu d'utiliser le nombre de Péclet ou le nombre de Reynolds.

1.5 - Caractérisation de la dispersion thermique : état de l'art

La détermination du tenseur de dispersion thermique peut se faire soit théoriquement soit expérimentalement. Nous renvoyons ici le lecteur pour de plus amples informations à la thèse de Metzger [Metzger, 2002] qui a réalisé une synthèse des différentes corrélations donnant ce tenseur. Nous mentionnerons ici quelques travaux nous intéressant particulièrement.

1.5.1 - Détermination théorique

Dispersion longitudinale

Les deux études théoriques les plus pertinentes sont celle de Tsotsas [Tsotsas, 1990] et celle de Levec et Carbonell [Levec, 1985]. Nous rappellerons ici les deux corrélations qui en découlent ; nous y ajouterons la loi utilisée en génie des procédés donnant le coefficient de dispersion transversale.

Tsotas s'est basé sur les moments temporels pour établir sa corrélation concernant le coefficient longitudinal :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + \frac{1}{2} Pe + \frac{\kappa^2}{(1+\kappa)^2} \frac{1}{Nu\ a_v\ d} Pe^2 + \frac{\kappa^2}{(1+\kappa)^2} \frac{1}{60\ (1-\varepsilon) \frac{\lambda_s}{\lambda_f}} Pe^2 \qquad (1.46)$$

avec $\kappa = \dfrac{(1-\varepsilon)(\rho c_p)_s}{\varepsilon (\rho c_p)_f}$

La détermination du nombre de Nusselt s'effectue à l'aide d'une loi établie par Gnielinski [Gnielinski, 1978] soit :

$$\begin{aligned} Nu &= \left(1 + 1,5(1-\varepsilon)\right) Nu_{sphère} \\ Nu_{sphère} &= 2 + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2} \\ Nu_{lam} &= 0,664\, \mathrm{Pr}^{1/3}\, \mathrm{Re}^{1/2} \\ Nu_{turb} &= \frac{0,037\, \mathrm{Pr}\, \mathrm{Re}^{0,8}}{1 + 2,433\, \mathrm{Re}^{-0,1} \left(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1\right)} \end{aligned} \qquad (1.47)$$

où *Re* et *Pr* sont respectivement les nombres de Reynolds et de Prandtl.

Après analyse des moments spatiaux, Levec et Carbonell [Levec, 1985] ont établi que les coefficients de dispersion, dépendent de trois contributions, une conductive, une causée par la dispersion hydrodynamique et enfin une dernière provenant de l'échange entre les deux phases. La relation donnant le coefficient longitudinal est :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} \approx \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + \left(\frac{D_x}{D_f} - \frac{D_{eq}}{D_f}\right) + \left(\frac{\kappa}{1+\kappa} + C_2 + \frac{C_3}{Pe}\right)\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{Pe}{Nu' a_v d} + \frac{C_1}{Nu'}\right)Pe \qquad (1.48)$$

avec $\frac{1}{Nu'} = \frac{1}{Nu} + \frac{1}{10\,\lambda_s/\lambda_f}$ et $\left(\frac{D_x}{D_f} - \frac{D_{eq}}{D_f}\right) = 0,231\,Pe^{1,256} \quad 6 < Pe < 600$.

C_1, C_2 et C_3 sont des constantes. C_2 et C_3 sont des constantes provenant de la dispersion hydrodynamique et de la tortuosité. C_1 est déterminé expérimentalement. Dans le cas du milieu poreux nous intéressant $C_i = 0$ (avec i = 1, 2 ou 3).

Dispersion transversale

Le coefficient de dispersion transversal a aussi été déterminé par Levec et Carbonell. Ses deux contributions ont été identifiées comme conductive et hydrodynamique, le terme hydrodynamique a été obtenu par Han [Han, 1985] pour une porosité de lit de 0,365. Ces auteurs obtiennent la corrélation suivante :

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0,194\,Pe^{0,683} \quad \text{pour } 6 < Pe < 600 \qquad (1.49)$$

Cette dernière loi est en contradiction avec la corrélation largement utilisée en génie des procédés celle de Bauer et Schlünder [Bauer, 1978]. Cette dernière corrélation a été établie à partir d'une hypothèse d'écoulement entrelacé sur un réseau périodique de sphères :

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A_y\,Pe \qquad (1.50)$$

Le coefficient $A_y = \frac{1}{8}$ provient du modèle correspondant établi pour la dispersion massique. Ce coefficient vaut $A_y = \frac{1}{7}$ dans le cas de la dispersion thermique pour Bauer et Schlünder [Bauer, 1978]. Cette valeur provient d'expériences effectuées pour des sphères.

1.5.2 - Détermination expérimentale

Les études expérimentales sur la dispersion en transfert de masse en milieu granulaire sont relativement nombreuses dans la littérature [Gunn, 1974].
Il n'en est pas de même pour la dispersion thermique qui n'est pas tout à fait analogue à la dispersion massique car elle met toujours à contribution la diffusion dans la phase solide. Nous mentionnerons cependant les résultats de Levec et Carbonell [Levec, 1985] et ceux de Dixon *et al* [Dixon, 1979]. Il est à noter qu'il existe une forte dispersion des résultats pour la caractérisation de ce phénomène. Nous citerons quelques études expérimentales nous intéressant directement.

Yagi *et al* [Yagi, 1960] ont été les premiers à mesurer les conductivités thermiques axiales des lits granulaires. Leurs mesures du coefficient de dispersion thermique axial ont été réalisées dans un milieu granulaire de billes de verre de 1,6 mm de diamètre confiné dans une enceinte adiabatique constituée de deux tubes de verre (Figure 1.10). Le milieu granulaire a été chauffé au-dessus par une lampe infrarouge pour permettre à la chaleur de pénétrer jusqu'en bas. L'écoulement d'air utilisé était dans le sens contraire au flux de chaleur. Les mesures ont été effectuées pour des nombres de Péclet inférieurs à 10. Les auteurs, d'après leurs résultats expérimentaux, ont établi un modèle linéaire pour déterminer le coefficient longitudinal de dispersion thermique :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A_x\, Pe \qquad \text{pour } 0 \langle Pe \langle 10 \tag{1.51}$$

avec A_x=0,8

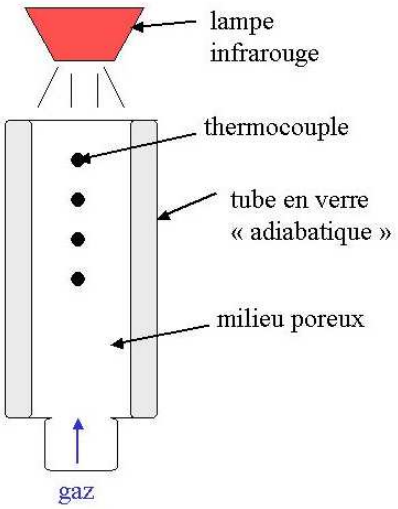


Figure 1.10 : *Dispositif expérimental utilisé par plusieurs auteurs*

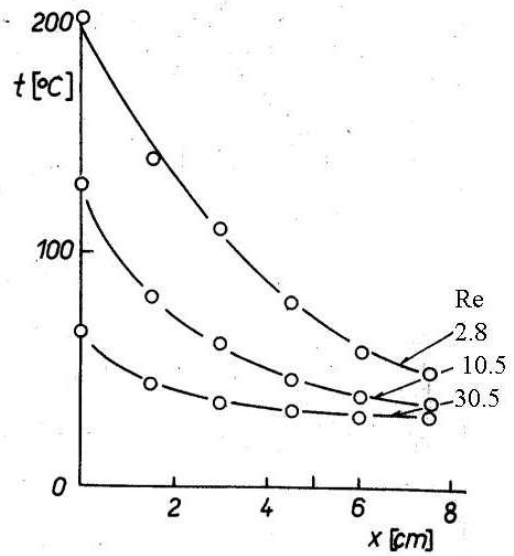


Figure 1.11 : *Profils de température [Votruba, 1972]*

Votruba et al [Votruba, 1972] ont évalué le coefficient de dispersion thermique axial à partir des profils axiaux de température de lits garnis en régime permanent (Figure 1.11). Des mesures des coefficients ont été effectuées à l'aide d'un réacteur à parois en verre semblable à celui de Yagi *et al* [Yagi, 1960] avec des particules solides de différentes tailles, formes et conductivités thermiques différents (Figure 1.10). Leurs résultats ont été exprimés en fonction du nombre de Péclet du transfert de chaleur axial (nombre de Péclet calculé à partir du coefficient de dispersion axial) :

$$\frac{1}{Pe_x} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f}\frac{1}{Re\ Pr} + \frac{14,5}{\left(1+\dfrac{C_3}{Re\ Pr}\right)} \tag{1.52}$$

avec $Pe_x = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_t u_D\, d}{\lambda_x}$ et $C_3 = 2{,}9$

Le problème de cette relation est l'introduction d'une constante arbitraire C_3.
Cependant, ces auteurs sont les premiers à avoir donné le coefficient de dispersion longitudinal en fonction du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds
Dixon et Cresswell [Dixon, 1979] ont un peu plus tard utilisé le même type de relation. Ils ont utilisé pour cela un modèle pseudo-homogéne. Ils basent leur corrélation sur les résultats expérimentaux de Yagi et *al* [Yagi, 1960] et de Gunn et de Souza [Gunn, 1974] :

$$\frac{1}{Pe_x} = \frac{0{,}73\,\varepsilon}{Re\ Pr} + \frac{0{,}5}{\left(1 + \dfrac{9{,}7\,\varepsilon}{Re\ Pr}\right)} \tag{1.53}$$

Gunn et De Souza [Gunn, 1974] ont, eux, effectué dans un milieu granulaire une excitation périodique à l'entrée avec mesure de la réponse en sortie. Le modèle utilisé est le modèle à deux températures avec la phase solide dispersée. Le fluide utilisé est l'air et le solide des billes du verre. Le problème rencontré par Gunn est la faible sensibilité du signal aux paramètres. Les résultats sont imprécis mais permettent cependant de sentir qualitativement la variation du coefficient de dispersion longitudinal avec la vitesse.

Une étude plus récente réalisé par Elsari et Hughes [Elsari, 2002] a été conduit pour déterminer le coefficient de dispersion axiale dans les mêmes conditions expérimentales que Yagi et Votruba (Figure 1.10). Les expériences ont été réalisées pour différents gaz et différents matériaux solides (essentiellement des grains de catalyseur). Les expériences ont été réalisées pour des nombres de Reynolds inférieurs à 30. Les auteurs constatent une forte dépendance du coefficient de dispersion axiale avec la taille des grains mais aucune influence de la nature du gaz sur celui-ci. Avec ces différentes données, ils donnent non pas une corrélation unique mais plusieurs relations linéaires en fonction du nombre de Reynolds. Ce type de relation est souvent utilisé pour le coefficient de dispersion transverse. Par exemple, pour des sphères d'alumine, ils trouvent une relation du type :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = 8{,}63 + 3{,}12\ Re \tag{1.54}$$

Une étude similaire, à celle que nous allons effectuer mais complètement différente des précédentes tant au niveau de la configuration que de l'exploitation des mesures, a été réalisée par Metzger [Metzger, 2002] au L.E.M.T.A. Nous nous baserons sur le même dispositif expérimental et sur la même méthode pour notre étude (cf. chapitre 2 et 3). Il a travaillé avec un lit de billes de verre monodisperses (diamètre d = 2 mm) traversé par un écoulement d'eau et a cherché à valider le modèle à une température. La géométrie de son dispositif expérimental est simple : un fil chauffant est installé perpendiculairement à la vitesse de Darcy (uniforme) au sein du milieu granulaire. Des thermocouples sont positionnés en aval du fil. L'augmentation de température suite à un échelon de puissance électrique pendant les expériences est faible (de l'ordre de 1 à 2 K). Ces faibles élévations de température garantissent une constance des propriétés thermophysiques des deux phases et évitent les effets non linéaires dus à leur thermodépendance. Compte tenu du caractère bidimensionnel du transfert de chaleur, le tenseur de dispersion a deux composantes principales (λ_x et λ_y) qu'il a cherché à estimer.

A partir des thermogrammes obtenus, les coefficients de dispersion thermique ont été estimés par une méthode des moindres carrée spécifique. La qualité de ces estimations a été validée par des simulations de Monte Carlo: le coefficient longitudinal λ_x de dispersion thermique ainsi que la vitesse de Darcy ont pu être estimés avec précision, cependant il a obtenu des valeurs moins précises pour le coefficient transverse λ_y.

Ses résultats (Figure 1.12) lui ont permis de construire une corrélation pour le coefficient longitudinal:

$$\frac{\lambda_x(Pe)}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0{,}0731\,Pe^{1{,}589} \quad \text{pour } 3 < Pe < 130 \tag{1.55}$$

Avec $Pe = ud/a_f$ le nombre de Péclet et a_f est la diffusivité thermique du fluide

Le coefficient transversal est beaucoup plus difficile à évaluer dans le cas eau / billes de verre même si la variation linéaire de ce coefficient avec le nombre de Péclet est justifiée (Figure 1.13). T. Metzger propose la corrélation suivante :

$$\frac{\lambda_y(Pe)}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A_y\,Pe \quad \text{pour } 3 < Pe < 130 \tag{1.56}$$

avec A_y compris entre 0,03 et 0,05.

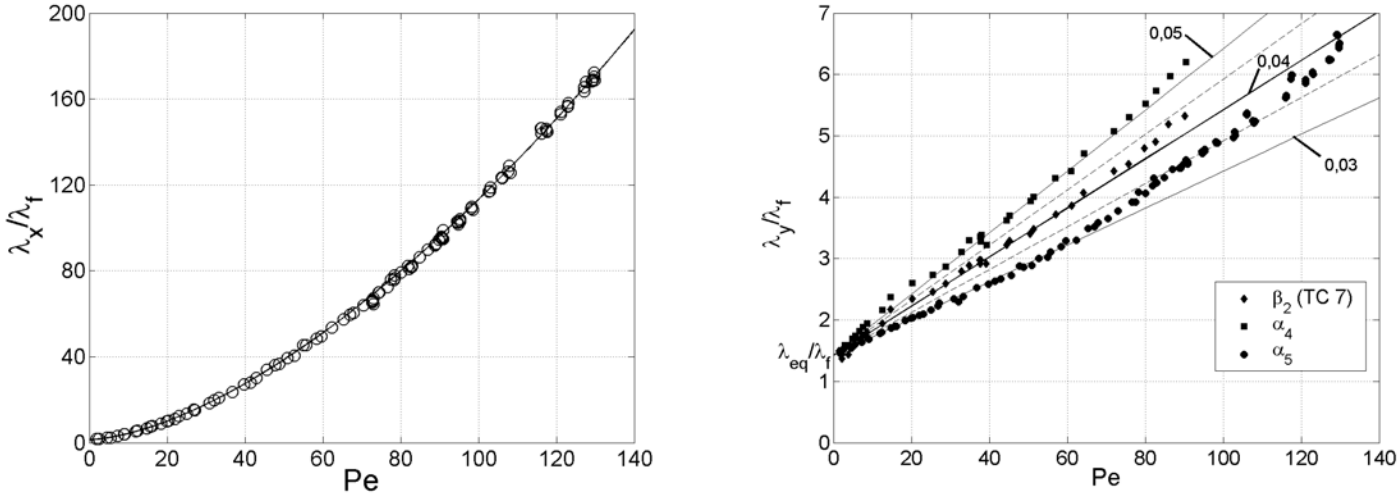


Figure 1.12 : *Résultats expérimentaux et corrélations de Metzger*

En conclusion, la mesure des coefficients de dispersion thermique en milieu granulaire reste assez délicate. D'une façon générale, le coefficient de dispersion longitudinal est largement supérieur au coefficient de dispersion transversal calculé ou mesuré. Il est possible de dégager dans la littérature quelques tendances quant aux variations de ces coefficients en fonction du nombre de Péclet : une loi de puissance avec un exposant compris entre 1 et 2 pour le coefficient longitudinal et un exposant proche de 1 pour le coefficient transversal.

L'étude de Metzger a montré que la fiabilité des résultats était très dépendante du modèle et de la méthode d'inversion de mesures.

La grande faiblesse des différentes études déjà menées se situe essentiellement dans la détermination du coefficient transversal. En effet, les résultats sont approximatifs voire inexistants. La détermination de ce coefficient est difficile du fait de la présence des phénomènes en proche paroi qui apparaissent lorsque l'on utilise une source étendue (phénomènes que nous allons présenter dans la section suivante). Ces effets se font vraisemblablement moins sentir lorsque l'on utilise une excitation pour laquelle l'aire de la paroi est idéalement nulle.

1.6 - Modélisation de la dispersion thermique en proche paroi

La description du transfert de chaleur en proche paroi est rendue délicate par les distorsions locales du profil de porosité (cf. section 1.1.2) et de la nature du transfert (conduction ou convection selon la nature du contact local). Il existe deux grandes classes de méthodes pour modéliser ces phénomènes : les modèles « standards » utilisant un coefficient d'échange convectif et les modèles dispersifs plus cohérents avec l'approche utilisée dans le cœur du milieu granulaire.

1.6.1 - Modèle standard ou modèle à coefficient d'échange convectif

Certains auteurs ont longtemps utilisé un coefficient de dispersion transverse λ_y constant - calculé par exemple à partir de la relation (1.50) - sur toute la section du milieu granulaire couplé à un coefficient de transfert à la paroi h_p. Ce modèle est appelé modèle standard [Tsotsas, Schlünder, 1990] . L'utilisation de ce coefficient h_p est cependant très critiquée dans la littérature même si récemment Bauer et Adler [Bauer, 2002] ont montré qu'avec de bonnes conditions limites ce modèle était applicable.
Un des problèmes de ce modèle est la détermination du coefficient de transfert à la paroi. Lamine [Lamine, 1992] a réalisé des travaux pour caractériser ce transfert en paroi. En chauffant la paroi par des résistances électriques, elle suppose que le flux de chaleur transféré peut s'écrire :

$$\varphi_p = h_p \left(T_p - T \right). \tag{1.57}$$

A partir de la reconstruction des profils de température à l'intérieur du lit (écoulement de plusieurs liquides), différents paramètres (conductivité radiale du lit et le coefficient de transfert de chaleur) à partir d'un modèle homogène. Le coefficient h_p est déduit par extrapolation de la différence de température, de quelques degrés, au sein du lit. Elle trouve donc un coefficient h exprimé en fonction du nombre de Nusselt :

$$Nu = 3\,Re^{-0,25} \quad \text{avec} \quad Nu = \frac{h_p\, d}{\lambda_y} \quad \text{pour} \quad 5 \le Re \le 120 \tag{1.58}$$

En outre, elle remarque que la résistance à la paroi est approximativement égale au rapport du diamètre de particule à la conductivité thermique du lit.

Cependant, la détermination de ce paramètre est délicate. A bas nombre de Reynolds (< 200), les corrélations de la littérature donnent une dispersion énorme de ce coefficient d'échange h_p. La Figure 1.13 montre les résultats de différents auteurs [Tsotsas, Schlünder, 1990] lorsqu'ils utilisent le modèle convectif. On peut voir que pour des nombres de Péclet inférieurs à 10^3, les résultats sont très dispersés. Cette dispersion cesse pour des nombres de Péclet supérieurs à 10^3.

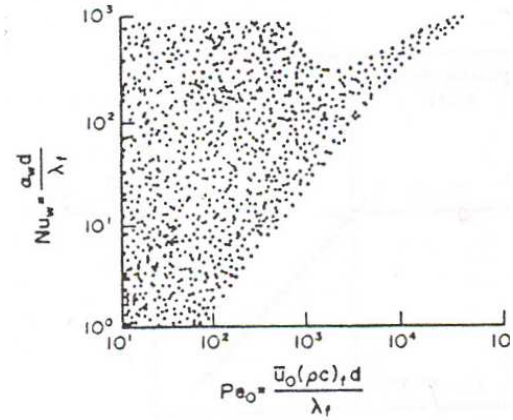


Figure 1.13 : *Résultats obtenus avec le modèle standard à bas nombre de Péclet [Tsotsas, Schlünder, 1990]*

On peut noter que les auteurs qui étudient les transferts transverses avec prise en compte des parois négligent toujours la dispersion axiale. Dixon [Dixon, 1985] a justifié cette hypothèse.
Dixon [Dixon, 1984] a montré qu'à nombre de Reynolds élevé le modèle suivant pour le coefficient de chaleur en paroi (modèle « standard ») peut être utilisé :

$$\frac{h\,d}{\lambda_f} = \left(1 - 1{,}5\,\left(\frac{D}{d}\right)^{-3/2}\right) Pr^{1/3}\, Re^{0{,}59} \qquad (1.59)$$

avec $Re = u_m\, d\, /\, \nu_f$ et u_m la vitesse débitante moyenne dans la conduite de diamètre D. Cette corrélation a été établie à partir de mesures où le fluide est de l'eau. Tsotsas [Tsotsas, Schlünder, 1990] a montré, en s'appuyant sur le modèle de dispersion transverse (1.50), que la corrélation précédente n'était valable que pour des nombres de Péclet élevés c'est à dire pour $Pe = \frac{u_m\ d}{\lambda_f} \rangle\ 8\ \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f}$. Pour des billes de verre de 2 mm de diamètre, ceci correspond à un nombre de Péclet de 100 pour l'air et de 11 pour l'eau.

1.6.2 - Le modèle dispersif

Winterberg et Tsotsas [Winterberg, Tsotsas, 2000] ont adopté une approche différente de celle du modèle standard. Ils utilisent un coefficient de dispersion transversal qui dépend de la distance aux parois.
Loin des parois, Bauer et Schlünder [Bauer, 1978] ont établi sur la base de considérations théoriques la corrélation linéaire (équation (1.50) pour ce coefficient).

En proche paroi, ce coefficient dépend de la variation de la porosité, de la vitesse et de la distance aux parois. Un nouveau modèle dispersif a donc été présenté et validé par Winterberg, Krischke, Tsotsas et Vortmeyer [Winterberg, 1999] et Winterberg et Tsotsas [Winterberg, Tsotsas, Krischke, 2000].

En proche paroi, deux types de régimes asymptotiques sont définis :

- le régime à haut nombre de Péclet où le modèle standard est applicable. Le transfert pariétal se fait alors par mélange hydrodynamique.

- le régime à bas nombre de Péclet où l'écoulement est laminaire. Le modèle standard ne peut s'appliquer du fait de la trop grande dispersion des valeurs du coefficient d'échange pour ce régime (Figure 1.13). Ce régime équivaut à des nombres de Reynolds particulaires inférieurs à 1000.

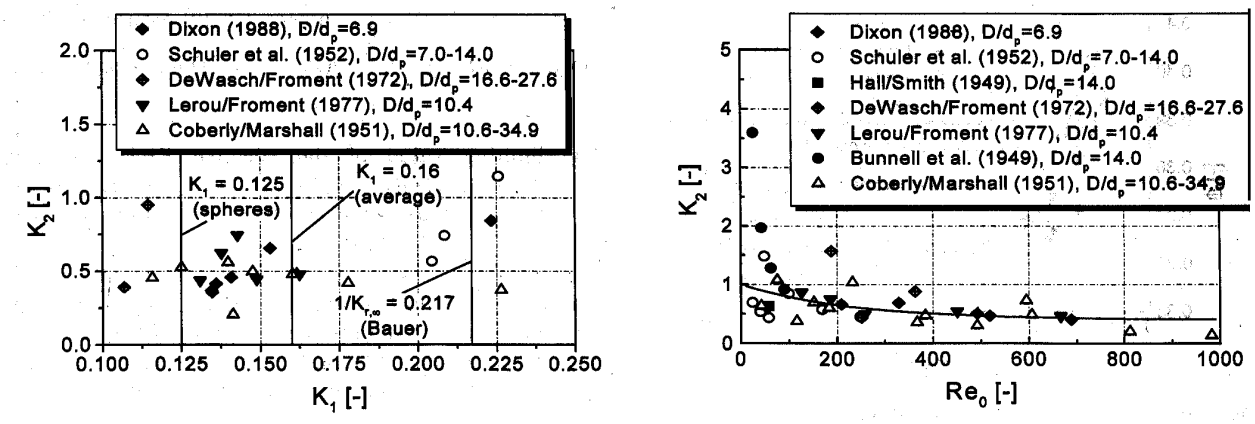


Figure 1.14 : *évolution du coefficient K_2 en fonction du nombre de Reynolds et de la constante K_1 pour un écoulement d'air [Winterberg, Tsotsas, 2000]*

Cette zone en proche paroi est hétérogène, le coefficient de dispersion est donc variable. La corrélation proposée, qui dérive de l'approche de Bauer et Schlünder (1.50), est alors [Winterberg, 1999]:

$$\lambda_y(r) = \lambda_{eq} + A(r)\,\lambda_f\,Pe \qquad (1.60)$$

avec $A(r) = K_1 \frac{u_{coeur}}{u_{moyen}} f(R-r)$ et $f(R-r) = \begin{cases} \left(\frac{R-r}{K_2 d}\right)^n & si \quad R-r < K_2 d \\ 1 & si \quad R-r > K_2 d \end{cases}$..

où u_{moyen} correspond à la vitesse superficielle moyenne et u_{coeur} correspond à la vitesse superficielle au cœur du lit.
K_1, K_2 et n ne sont pas a priori fixés, ils dépendent du nombre de Péclet. La Figure 1.14 donne les valeurs K_1 et K_2 pour différents nombres de Reynolds ($Re = Re_0 = \frac{u_{moyen}\, d_p}{\nu_f}$) qu'ont utilisés différents auteurs[Winterberg, Tsotas, 2000]. Winterberg recommande la corrélation suivante :

$$K_1 = 1/8 \; ; \; n = 2 \text{ et } K_2 = 0,44 + 4\exp\left(-\frac{1}{70} Re\right) \tag{1.61}$$

Ce nouveau modèle est plus riche que le modèle à coefficient convectif : un meilleur ajustement du profil de température (Figure 1.15) est obtenu, ce qui est normal compte tenu du fait que l'on introduit trois nouveaux paramètres. On peut cependant s'interroger sur la signification physique et la pertinence de ces nouveaux paramètres et le caractère prédictif de la modélisation associée. Cette modélisation repose en effet à la fois sur la variation du coefficient de dispersion transversal de Bauer (1.50) et sur son extrapolation à un milieu où les porosités et les vitesses de filtration, varient en fonction de la tranche parallèle à la paroi considérée. Le caractère intrinsèque de cette approche peut être contesté.

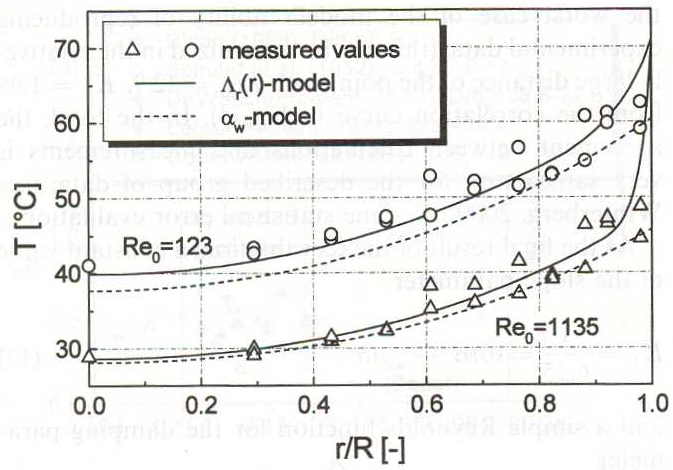


Figure 1.15 : *Comparaison du profil de température entre le modèle standard* α_w *et le nouveau modèle* ($\Lambda(r)$) *[Winterberg, Tsotsas, 2000]*

Nous avons présenté dans ce chapitre les principaux modèles de dispersion thermique en cœur et en proche paroi. Nous baserons la suite de notre étude sur le modèle à une température. Nous tenterons ensuite d'estimer les coefficients de dispersion et chercherons à les présenter sous forme de corrélations. Puis, nous tenterons de présenter un modèle différent de celui de la littérature pour la caractérisation de la dispersion thermique proche de la paroi.

Chapitre 2 : Dispositif de caractérisation en cœur de milieu

Ce deuxième chapitre a pour objet de décrire le dispositif expérimental permettant la caractérisation de la dispersion thermique en cœur de milieu granulaire. Tout d'abord, nous préciserons les différentes propriétés thermophysiques des deux milieux que nous utiliserons : air / billes de verre et support de catalyseur / air. Ensuite nous détaillerons le dispositif expérimental.

2.1 – Caractérisation statique des milieux utilisés

Les propriétés thermophysiques des différents milieux sont considérées comme constantes. En effet, les variations de température pendant les expériences sont de l'ordre de 1 à 2 K.

2.1.1 - Milieu billes de verre/air

Les billes de verre utilisées (de diamètre d = 2 ou 3 mm) sont constituées de : SiO_2 (66%), Na_2O (15%), CaO (7%), Al_2O_3 (5%), B_2O_3 (3%), ZnO (2%), CdO (1%) et MgO (1%). Cette composition nous permet d'obtenir la chaleur massique du verre qui est de 798 $J.kg^{-1}.K^{-1}$. La masse volumique déterminée par Metzger [Metzger, 2002] est de 2600 $kg.m^{-3}$. La conductivité du verre, non connue, est donnée par les tables [Lide, 1998] pour du verre de chimie, elle est de 1 $W.K^{-1}.m^{-1}$.
Pour la phase gazeuse, nous prenons les valeurs de la littérature [Lide, 1998] données pour de l'air à la température de 20°C (cf. Tableau 2.1).

La conductivité équivalente du milieu air-billes de verre a été mesurée expérimentalement par méthode « flash » par Azizi [Azizi, 1988] et vaut 0,2 $W.K^{-1}.m^{-1}$

	air	**verre**	**verre/air**
chaleur massique (C_p) $J.K^{-1}.kg^{-1}$	1007	798	
masse volumique (ρ) $kg.m^{-3}$	1,177	2600	
($\rho\, C_p$) $J.K^{-1}.m^{-3}$	$1,2.10^3$	$2,08.10^6$	$1,32.10^6$
conductivité thermique (λ) $W.m^{-1}.K^{-1}$	0,026	1	0,2
diffusivité (a) $m^2.s^{-1}$	$2,22.10^{-5}$	$4,81.10^{-7}$	$1,52.10^{-7}$
porosité (ε)			0,365
diamètre (d) mm		2 et 3	

Tableau 2.1 : *Propriétés thermophysiques du milieu verre / air à 20°C*

2.1.2 - Milieu support de catalyseur / air

La société Axens nous a fourni un support de catalyseur à matrice d'alumine. Les propriétés du milieu granulaire support de catalyseur/air ont été mesurées expérimentalement soit par nous même soit par l'I.F.P.
La Figure 2.1 (gauche) montre une coupe du grain de catalyseur réalisée au Microscope Electronique à Balayage grossie 40 fois. On voit nettement que le support de catalyseur est poreux à plusieurs échelles et relativement sphérique. Son rapport de circularité est de 1,13. Le diamètre de ces grains varie de 2 à 4 mm. Une analyse granulométrique (réalisée par l'IFP) nous fournit un diamètre moyen de 3,28 mm (il s'agit ici de la moyenne des diamètres).

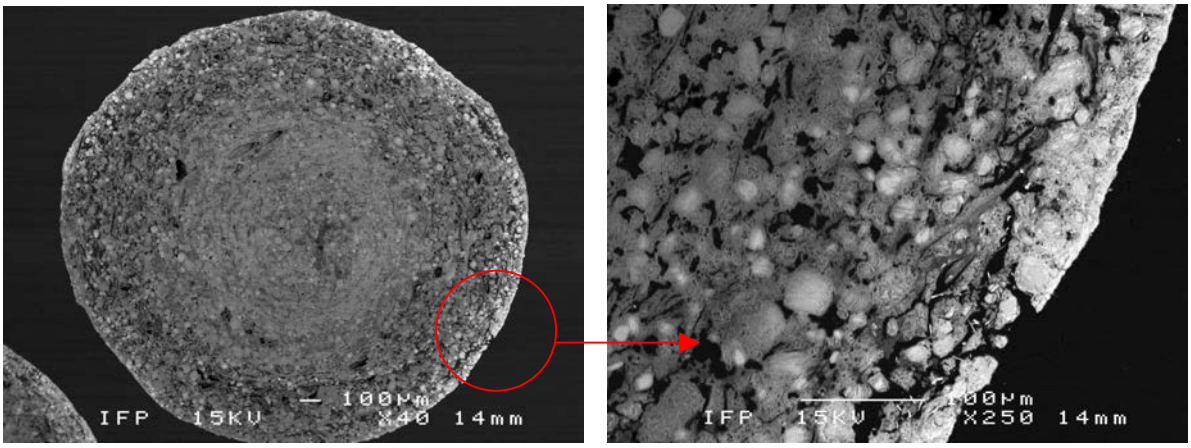


Figure 2.1 : *Photo du grain de support de catalyseur.*

Nous voyons donc que deux porosités seront présentées ici, la porosité externe qui est occupée par l'air en dehors des grains et la micro –voire nano- porosité qui est visible sur la Figure 2.1 (droit, grossissement de 250).

Les propriétés du support catalyseur sont les suivantes :

La masse volumique d'un grain n'a pas été mesurée directement. La densité de grain se calcule, dès lors que le volume des micropores est négligeable, à partir de la densité structure (ρ_{stru}), de la densité de l'alumine « en masse » et du Volume Poreux Total (VPT) par:

$$\rho_s = \frac{m_s}{v_{grain}} = \frac{m_s}{v_{pore} + v_{stru}} = \frac{1}{\frac{v_{pore}}{m_s} + \frac{v_s}{m_s}} = \frac{1}{VPT + \frac{1}{\rho_{stru}}} \tag{2.1}$$

Les valeurs du VPT et de ρ_s sont confidentielles.

La chaleur massique a été mesurée par calorimétrie, non pas sur les grains, mais sur le même solide obtenu à partir d'un gel (Figure 2.2) soumis à un traitement thermique préalable. Des pastilles de ce gel ont été moulées (échantillon cylindrique de 30 mm de

diamètre et de 10 mm d'épaisseur) puis ont subi un traitement de séchage et de solidification dans un four à moufle :

- préchauffage à 60°C pendant 3 heures
- montée à 140°C (5°C/min)
- chauffage à 140°C pendant 3 heures
- montée à 600°C (5°C/min)
- calcination à 600°C pendant 2 heures

On obtient ainsi des pastilles assez friables, n'ayant pas exactement le même aspect que les grains utilisés lors des expériences. Dans ces conditions, la chaleur massique mesurée (Cp_s) au LEMTA à l'aide d'un calorimètre différentiel spécifique est de 916 $J.K^{-1}.kg^{-1}$.

Figure 2.2 : *Gel constituant le support de catalyseur*

La diffusivité thermique et la conductivité apparente du milieu air / support de catalyseur a été mesurée par deux méthodes : la méthode « flash » et la méthode du fil chaud.

La méthode flash

La méthode "*flash*", initialement développée par Parker [Parker, 1961] est une méthode couramment employée pour la mesure de la diffusivité thermique de matériaux. Elle consiste à exciter un échantillon plan cylindrique de petites dimensions par une brève impulsion thermique sur sa face avant. On mesure ensuite sa réponse en température soit du côté de la face irradiée, on parle ainsi de technique "*face-avant*", soit sur la face opposée, il s'agit alors d'une technique de type "*face-arrière*". Dans notre cas, nous avons utilisé la technique "*face-arrière*" et la mesure de température est réalisée à l'aide de thermocouples de type semi-conducteurs (Bi_2Te_3). L'échantillon est supposé homogène, isotrope et opaque. Ses propriétés thermophysiques sont également supposées constantes au cours de l'expérience (faible élévation de température).

Nous avons deux échantillons d'épaisseurs différentes pour valider les résultats. Les grains utilisés sont placés à l'intérieur d'un godet cylindrique de 10 mm ou 15 mm d'épaisseur dont la paroi latérale est un tube cylindrique en PVC de 1 mm d'épaisseur. Ces deux godets sont fermés par deux clinquants en cuivre d'épaisseur 0,20 mm peints en noir

pour assurer l'absorption uniforme de l'énergie. La porosité mesurée des deux échantillons est de 0,45. Le schéma de principe est donné figure 2.3. La mesure de la réponse en température de l'échantillon sur la face opposée au flash (dite face arrière) permet d'identifier la diffusivité thermique du matériau. Une procédure spécifique d'identification de la diffusivité thermique a été mise en place pour prendre en compte l'effet du creuset et des deux clinquants sur le thermogramme.

La diffusivité a été mesurée pour les échantillons de 10 mm et de 15 mm. Les valeurs mesurées varient de moins de 12 %.

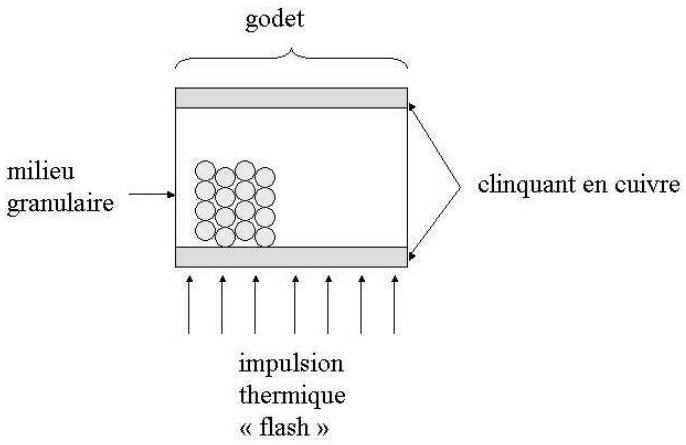


Figure 2.3 : *Schéma de principe de la méthode « flash »*

La méthode du fil chaud

Le principe de la mesure est le suivant : un fil métallique fin est placé au cœur du milieu à caractériser (Figure 2.4). A l'instant pris pour origine, on délivre une puissance Joule constante que l'on mesure. Simultanément, on relève la variation de la température du fil soit par un thermocouple soudé sur le fil (méthode dite du "*croisillon*"), soit directement par la mesure de la résistance du fil. Dans sa forme traditionnelle, l'identification de la conductivité thermique s'effectue aux temps longs (développement asymptotique), ce qui justifie l'appellation de régime quasi-établi. La Figure 2.5 représentant les courbes expérimentales, théoriques et les résidus montrent que ceux-ci sont de bonne qualité. La conductivité équivalente obtenue par cette méthode diffère de 15% de celle obtenue par la méthode *flash*.

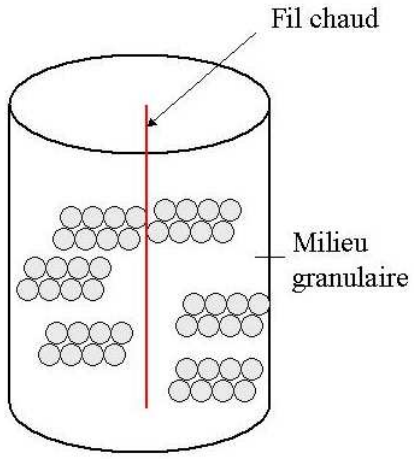


Figure 2.4 : *Schéma de principe du fil chaud*

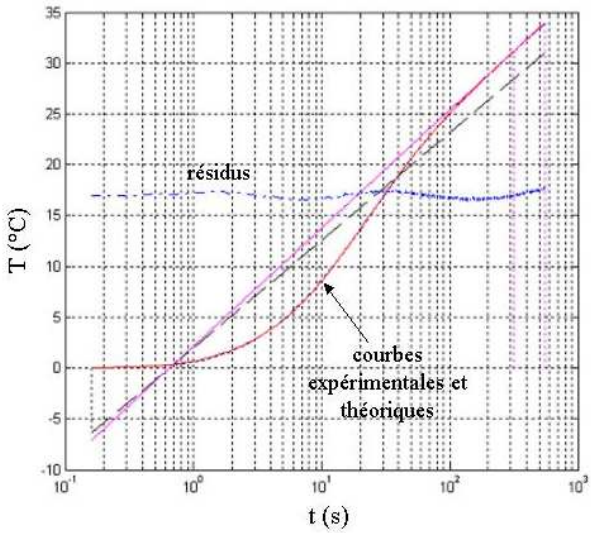


Figure 2.5 : *Températures expérimentales et théoriques de la méthode « fil chaud »*

Nous voyons donc que deux méthodes de caractérisation différentes donnent des conductivités équivalentes égales à 15% prés.

A partir de la conductivité apparente du milieu, on peut obtenir la conductivité effective du solide en inversant les modèles théoriques de la littérature à savoir celui de Robert et Tobias [Robert, 1969] et de Zehner et Schlünder [Zehner, 1970].

2.1.3 – Comparaison des deux systèmes étudiés

Cette partie est confidentielle.

2.2 – Banc de caractérisation de la dispersion thermique gaz / grain

Le dispositif expérimental est représenté sur la Figure 2.6. Il est décrit ci-dessous pour le système billes de verre / air. Pour le système support catalyseur / air, on utilise le même dispositif.
Les billes de verre de diamètre d = 2 mm maintenues par deux plaques perforées en polyméthacrylate de méthyle (Altuglas®) remplissent une enceinte parallélépipédique en Altuglas® dont les dimensions sont indiquées sur la Figure 2.7. Le choix de ces dimensions est dû à plusieurs contraintes. La boite doit être suffisamment longue dans la direction de l'écoulement (x) : le lit s'étend sur 12 cm en amont de la zone de mesure de manière à atténuer les différences locales de vitesse et de température. En aval de la zone de mesure, une distance de 10 cm est nécessaire pour éviter que les hétérogénéités de la sortie ne perturbent la mesure. Dans la direction y, la boite doit être assez large pour que la zone chauffée n'atteigne pas les parois et pour que le milieu puisse être considéré comme infini. Un fil métallique chauffant et 13 thermocouples sont insérés dans le lit.

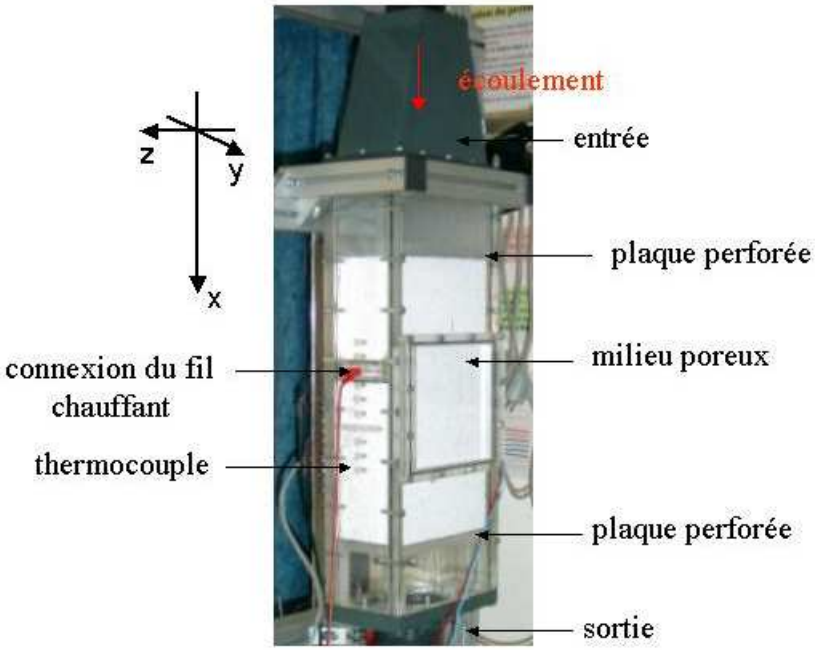


Figure 2.6 : *Dispositif expérimental*

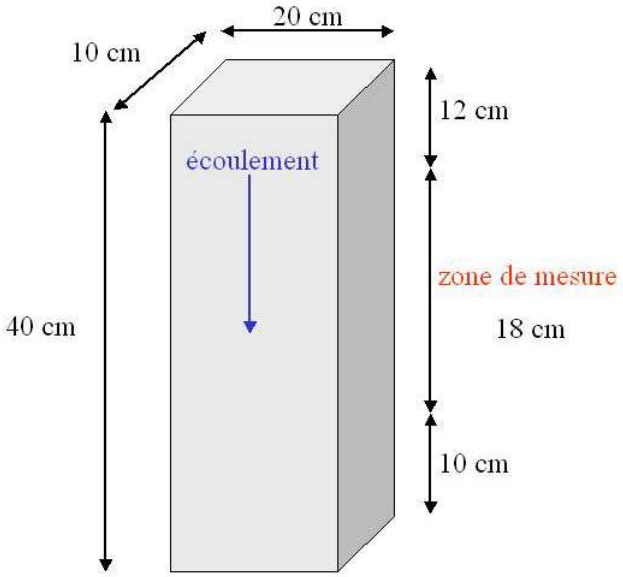


Figure 2.7 : *Dimensions du dispositif expérimental*

2.2.1 - Milieu poreux

Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, nous avons décidé de travailler avec des billes de verre monodisperses. Le choix de leur diamètre est soumis à deux contraintes antagonistes :

- la première est liée aux méthodes de changement d'échelle utilisées pour établir le modèle : $d << L$ où L est une longueur caractéristique du système. Nous prendrons L de l'ordre du décimètre. Le diamètre d doit donc être inférieur au centimètre. Il faut éviter que la zone à cœur soit soumise aux effets thermiques de paroi (cf. section 1.5)
- la deuxième est de tester le modèle pour des nombres de Péclet élevés. Plus le diamètre des billes est grand, plus le nombre de Péclet est élevé à débit donné.

Les billes choisies ont un diamètre de 2 mm. Nous avons également réalisé des expériences, en respectant encore la première contrainte, avec des billes de verre de 3 mm et des grains de support de catalyseur de 2 à 4 mm.

2.2.1.1 - Mise en place du milieu poreux

Afin de disposer d'un milieu granulaire homogène et consolidé, il faut disposer d'une procédure de construction du lit fixe. Nous nous sommes inspirés du système de chargement utilisé en milieu industriel par l'IFP. Les systèmes industriels utilisent des distributeurs tournants pour provoquer une pluie régulière de particules [Trambouze, 2002]. On peut obtenir un résultat similaire en chargeant les billes de verre à travers un plateau perforé au diamètre des billes (ici 2 mm). Le chargement est ainsi dense et présente les avantages suivants :

- le tassement du lit n'évolue plus après son chargement initial
- la répartition du fluide est plus homogène
- l'écoulement est plus proche du type « piston » (en moyenne).

Le chargement doit, en outre, répondre à des exigences qui « garantissent » cette bonne répartition des billes tout au long de celui-ci ; ces « conditions » nous ont été fournies par l'IFP. La procédure que nous détaillerons ci –dessous permet de réaliser un chargement dense et une quasi parfaite distribution des grains.
Durant le chargement aux points 1/3 (à 13,3 cm de hauteur) 2/3 (à 26,6 cm de hauteur) et au final (à 40 cm de hauteur), la planéité de la surface de chargement doit être vérifiée. Puis on relève la masse (m) et la hauteur (h) totale chargée à chaque étape. Ces deux grandeurs doivent respecter deux critères. Ces derniers correspondent au contrôle de la quasi-constance de la masse volumique apparente de la portion construite du lit au cours du chargement :

1er critère : un écart de 5% maximum est toléré entre deux mesures consécutives, ce qui signifie que :

$$c_1 = \left| \frac{\left[m_{2/3}/h_{2/3} - m_{1/3}/h_{1/3} \right]}{\left(m_{1/3}/h_{1/3} \right)} \right| \langle\, 5\,\% \quad \text{et} \quad c_2 = \left| \frac{\left[m_{totale}/h_{totale} - m_{2/3}/h_{2/3} \right]}{\left(m_{2/3}/h_{2/3} \right)} \right| \langle\, 5\,\% \qquad (2.7)$$

2ème critère : un écart de 2,5% maximum est toléré entre une mesure intermédiaire et la moyenne du lit :

$$c_3 = \left| \frac{\left[m_{totale}/h_{totale} - m_{1/3}/h_{1/3} \right]}{\left(m_{totale}/h_{totale} \right)} \right| \langle\, 2,5\,\% \quad \text{et} \quad c_4 = \left| \frac{\left[m_{totale}/h_{totale} - m_{2/3}/h_{2/3} \right]}{\left(m_{totale}/h_{totale} \right)} \right| \langle\, 2,5\,\% \qquad (2.8)$$

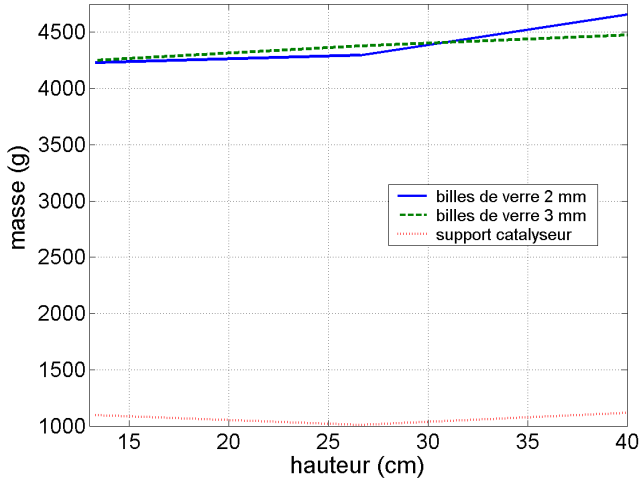


Figure 2.8 : *Courbes de chargement*

Si ces critères ne sont pas respectés le lit est déchargé et on recommence le chargement. La Figure 2.8 représente les différentes courbes de chargement correspondant aux différents milieux poreux utilisés. Ces chargements valident les critères demandés (équations 2.7 et 2.8).

2.2.1.2 - Porosité

Une fois le milieu poreux mis en place, il nous faut calculer la porosité du milieu pour pouvoir le caractériser. Le volume total de la boite est $V_t = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 8.10^{-3}\,m^3$. La masse totale de billes versées dans la boite (cf. Figure 2.8) m_{lit} est mesurée. Ces données nous permettent de calculer la porosité du milieu : $\varepsilon = 1 - \frac{m_{lit}}{V_{lit}\ \rho_s}$. On trouve une porosité de 0,365 pour les billes de verre de 2 mm, de 0,366 pour les billes de verre de 3 mm et de 0,411 pour le support de catalyseur.

2.2.2 - Mesure de température

Toutes les températures sont mesurées par des thermocouples de type E. Le couple Chromel / Constantan a été choisi à cause de sa force électromotrice élevée (60 µV/K). Les fils ont un diamètre de 127 µm et sont recouverts d'une gaine isolante en Téflon®. La soudure des thermocouples, d'environ 0,5 mm, est faite à partir d'un alliage contenant de l'argent et de l'étain. Les deux fils sont dénudés torsadés et soudés au fer, les extrémités sont ensuite coupées. On obtient ainsi une soudure très fine qui résiste à nos sollicitations mécaniques (Figure 2.9).

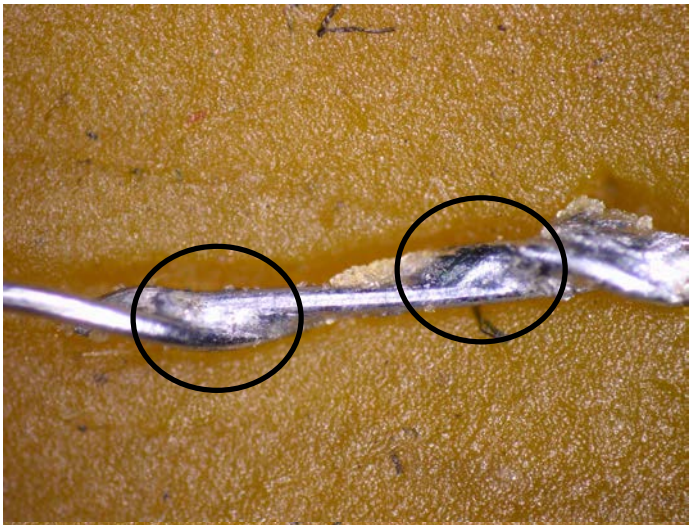


Figure 2.9 : *Soudure de la jonction du thermocouple (grossissement = ×10)*

Nous avons essayé de souder ces mêmes thermocouples par fusion acétylène-oxygène au chalumeau. La soudure obtenue a l'avantage de ne pas posséder de métal d'apport et d'être encore plus fine que précédemment mais présente l'inconvénient de ne pas être solide mécaniquement. La soudure à l'étain est donc la solution retenue ici.

Ces thermocouples sont utilisés d'une façon classique (thermocouple simple) pour mesurer la différence température entre une jonction de référence et une jonction de mesure (la soudure). La jonction de référence est installée au centre d'une boite remplie de mousse isolante et d'un cube de cuivre de 5 cm de coté dont la température est mesurée par une sonde à résistance de platine de type Pt100 (Figure 2.10). La résistance de platine est de 100 Ω à T = 0°C et a une dépendance en température normalisé (norme IEC 751). Une résistance de 100 Ω est mise en série et ce circuit est raccordé à la carte d'acquisition. Les deux chutes de tension sont alors mesurées

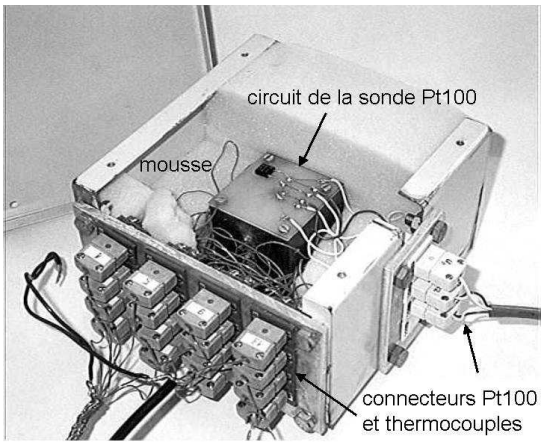


Figure 2.10 : *Boite avec mousse isolante*

L'erreur sur la mesure de la résistance de précision (± 10 mΩ) entraîne une erreur sur la température absolue d'environ 25 mK. La mesure des tensions introduit un bruit de mesure d'environ 20 mK.
Les thermocouples sont ensuite étalonnés classiquement grâce à un bain-marie. L'erreur obtenue est du même ordre de grandeur : 1%.
Le temps de réponse de ces thermocouples a été évalué par T. Metzger par simulation et par l'expérience. Ce temps de réponse est de 15 ms, ce qui est bien inférieur au temps caractéristique de montée en température qui est de quelques secondes.

Il y a 13 thermocouples au sein du lit, 1 thermocouple à l'entrée du milieu poreux et 1 thermocouple en sortie (dans la conduite). La Figure 2.11 montre les positions de ces thermocouples.

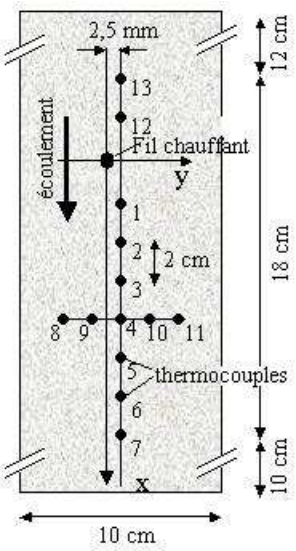


Figure 2.11 : *Positions des thermocouples*

Les thermocouples 12 et 13 permettent de vérifier la stabilité de la température d'entrée et servent également comme température de référence pour soustraire le bruit de mesure. Les thermocouples 8 et 11 permettent de vérifier que le flux de chaleur n'atteint pas les parois. Les soudures chaudes des thermocouples sont placées dans le plan de symétrie *xy*. L'écoulement d'air est descendant.

Les positions des thermocouples (x_i, y_i) données ici sont les positions nominales. Les positions exactes ne sont évidemment pas connues car le remplissage du lit a pu modifier ces positions.

2.2.3 - Chauffage et mesure de la puissance de chauffage

La source de chaleur est assurée par un fil de KANTHAL D®, un alliage peu conducteur (Cr-Al-Fe) dont la résistivité électrique est $\rho_e = 1{,}35.10^{-6}\ \Omega/\mathrm{m}$. Le fil a un diamètre de 260 µm, d'où une résistance électrique linéique de 25,1 Ω/m. Il est isolé

électriquement par une couche de « polyestérimide » d'environ 5 µm d'épaisseur. Le fil de chauffage mesure 17,9 cm et est soudé aux connexions électriques en dehors de la boite. On utilise une alimentation stabilisée continue de 120 V de tension maximale et de 10 A de courant maximal.

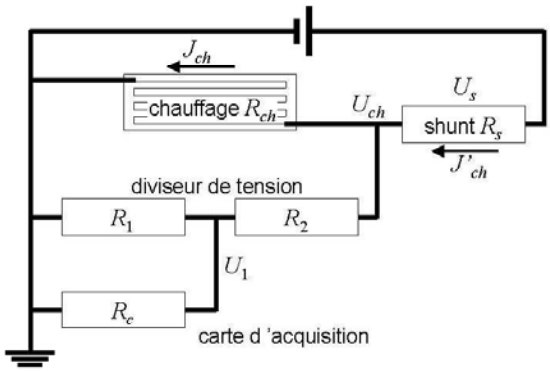


Figure 2.12 : *Mesure de la puissance électrique du fil chauffant*

Les différentes tensions et intensités de la Figure 2.12 sont calculées d'après les équations (2.9) et (2.10) :

$$J'_{ch} = \frac{U_s}{R_s}$$
$$U'_{ch} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\, U_1 \qquad (2.9)$$

$$J_{ch} = J'_{ch}\left(1 + \frac{R_{ch}}{R_2 + \dfrac{R_1 R_c}{R_1 + R_c}}\right)$$
$$U_{ch} = U'_{ch}\left(1 + \frac{R_1}{R_c\left(R_1 + R_2\right)}\right) \qquad (2.10)$$

Pendant les expériences, la puissance de chauffage Φ (c'est à dire $Q \times l_{fil}$)est enregistrée en continu pour identifier l'instant du début et la durée du chauffage ainsi que pour vérifier le niveau constant de celui-ci . Elle se calcule à partir de la mesure de deux tensions (U_s et U_1), comme indiqué sur la Figure 2.8. Pour obtenir le courant électrique, une carte d'acquisition (PCI-6035^{E} de National Instrument^{TM}, 16 bits) mesure la tension U_s à travers un shunt R_s = 5 mΩ. La tension électrique du chauffage est mesurée à travers un diviseur de tension, branché en parallèle sur le fil chauffant. Les deux résistances du diviseur R_1 (3,3 kΩ)et R_2 (33 kΩ) ont été choisies grandes par rapport à la résistance chauffante (R_{ch} = 5,35 Ω) et petites comparées à la résistance de la carte d'acquisition (R_c = 5 MΩ). La carte

d'acquisition mesure la tension partielle U_1 sans amplification et avec une bonne précision. La mesure de la puissance linéique Q devrait avoir une incertitude d'environ 1%.

2.2.4 - Approvisionnement en air

Dans une première configuration expérimentale, l'air est aspiré directement dans la pièce où se situe le lit de billes de verre par un ventilateur situé en aval. La conduite d'amenée d'air a un diamètre de 80 mm (Figure 2.13.a). Les premiers résultats (Figure 2.14.a) ne sont pas satisfaisants, le bruit est important et les fluctuations de température sont de l'ordre de 0,5 K. Ceci n'est pas acceptable puisque nous travaillons avec des différences de température de 1 Kelvin et le modèle ne peut pas reproduire ces fluctuations.

Nous avons donc amélioré le système en ajoutant un divergent au-dessus du lit et en prélevant l'air dans une pièce de volume plus important éloignée du ventilateur et du milieu poreux (Figure 2.13.b). De plus, pour faire varier la vitesse, nous avons installé un système de deux vannes (soupapes à siège oblique) dont une en court circuit en amont du ventilateur.

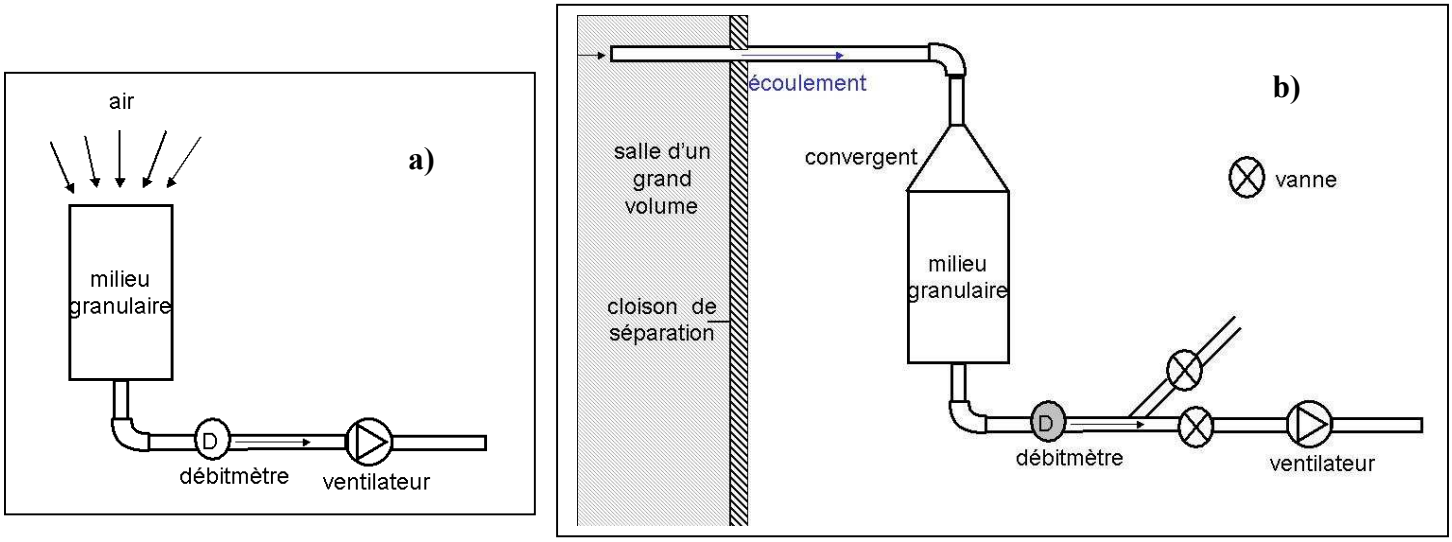


Figure 2.13 *: Dispositif expérimental avant modification (a) et après modification (b)*

Après la modification apportée, le signal est bien meilleur (Figure 2.14 b). Ainsi, le signal du thermocouple d'entrée dans le lit (thermocouple 14) très bruité avant modification (fluctuations de l'ordre de 0,5 K) est maintenant lissé et présente des fluctuations de l'ordre de 0,001 K. Les thermogrammes sont désormais exploitables.

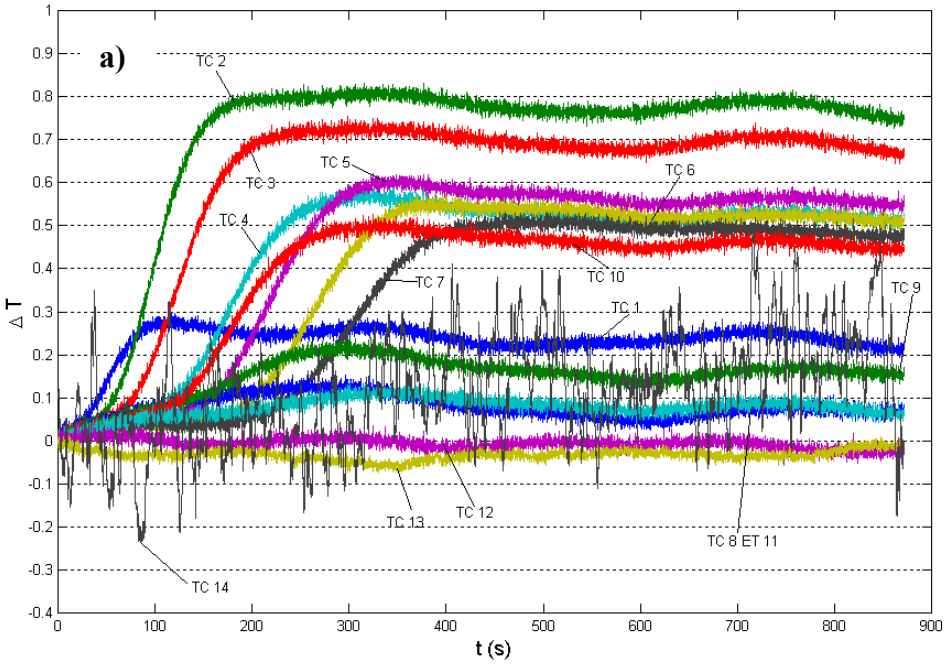


Figure 2.14.a *: Températures expérimentales avant modification pour Pe ≈ 30*

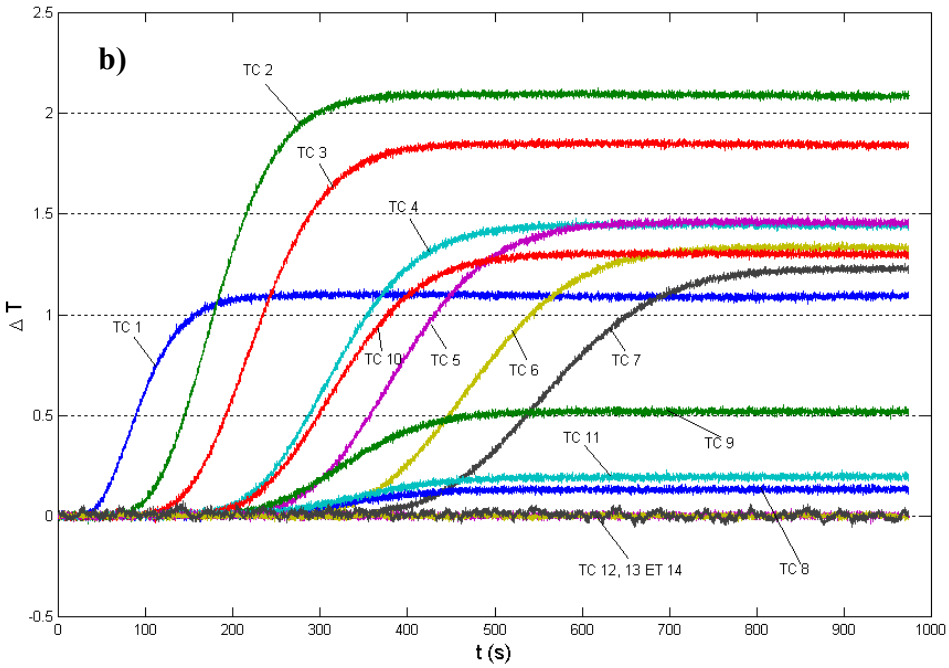


Figure 2.14.b *: Températures expérimentales après modification pour Pe ≈ 30*

➢ *Premier ventilateur (1ère série)*

Le ventilateur utilisé ici est un ventilateur radial (MT 90 L2-Delta-Neu).
La vitesse maximale *u* que l'on peut atteindre grâce à ce ventilateur est de l'ordre de 0,5 $m.s^{-1}$ (limitation due au rendement du ventilateur).
La vitesse, tout d'abord, mesurée à l'aide d'un tube de Pitot sur la conduite aval, dont la mesure s'est révélée peu précise, a été par la suite mesurée grâce à un manomètre à flotteur (débitmètre) pour des vitesses inférieures à 0,2 $m.s^{-1}$. Nous n'avons plus utilisé par la suite ce manomètre car il générait de trop fortes pertes de charge qui limitaient la vitesse à 0,2 $m.s^{-1}$ contre 0,4 $m.s^{-1}$ précédemment.
Nous n'avons donc utilisé aucun système de mesure pour des vitesses supérieures à 0,2 $m.s^{-1}$ dans le milieu poreux. Pour ces mesures, nous avons décidé de nous reposer sur les valeurs estimées par l'inversion des thermogrammes car aucun des débitmètres commerciaux ne nous permettait d'atteindre une précision équivalente dans la gamme de débits réalisables avec notre installation.

➢ *Deuxième ventilateur (2ème série)*

Nous avons remédié à la limitation en débit du ventilateur, en faisant l'acquisition d'un deuxième ventilateur plus performant (Figure 2.15). Il s'agit d'un ventilateur radial 42-0,25 (Delta-Neu) d'une puissance de 1,5 kW soit 3000 tr/min. Ce ventilateur est muni d'un régulateur de vitesse qui permet de supprimer le système de dérivation en aval du lit.

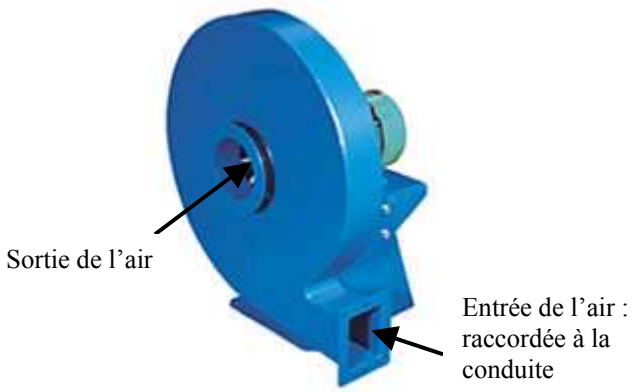


Figure 2.15 : *Ventilateur radial*

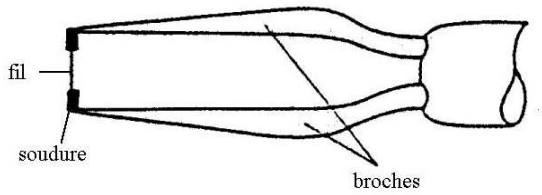


Figure 2.16 : *Fil chaud simple*

2.2.5 - Mesure de la vitesse

Le circuit d'air muni du deuxième ventilateur a été équipé d'un anémomètre à fil chaud. Celui-ci est portatif et digital (AM 4204) et installé à 2 m de la sortie du lit sur la conduite d'évacuation en PVC (diamètre intérieur 80 mm). Le fil chaud utilisé est une sonde à fil simple. Pour ce type de sonde, on fait en sorte que la vitesse soit proche de la normale au fil. On suppose en général que la seule composante de vitesse moyenne est $\overline{v}=\overline{v}_x$ et $\overline{v}_y=\overline{v}_z=0$. Le fil est soudé à 2 broches en forme de fourche. Ces deux broches sont elles-mêmes fixées dans un support (Figure 2.16). Le fil est parcouru par un courant constant élevant sa température. L'élément de mesure est chauffé en continu.

L'anémomètre utilisé est muni d'une sonde télescopique. Nous pouvons ainsi balayer la hauteur de la conduite pour vérifier l'uniformité de la vitesse. Les profils de vitesse mesurés, sont plats (Figure 2.18). La vitesse est donc bien uniforme dans la section.

La plage de mesure de l'anémomètre est de 0,2 à 20 m.s^{-1} et ce dernier permet d'afficher également la température du gaz (de 0 à 50°C). La résolution est de 0,1 m.s^{-1}. Le fil chaud indique la vitesse instantanée ponctuelle, vitesse qui n'est donc pas enregistrée en continu lors de la manipulation. Le cycle de la mesure est de 0,8 s.

Le bon fonctionnement du fil chaud a été vérifié grâce à un étalonnage effectué à l'aide d'un autre fil chaud Velocicalc (tolérance de ± 3%) lui-même étalonné dans un de tunnel de calibration à l'INRS. L'erreur relative sur la mesure est représentée en Figure 2.17. La tolérance est de ± 10% de la valeur lue. On remarque cependant que le fil présente une dérive importante pour des vitesses allant de 3 à 5 m.s^{-1}.
La vitesse obtenue est convertie en vitesse de Darcy qui est une moyenne sur toute la section du lit :

$$u_D = \frac{s_{conduite}}{s_{lit}} v_x \tag{2.11}$$

L'erreur sur les cotés ou le diamètre des deux sections est de l'ordre du millimètre. L'erreur maximale possible est donc de 14% sur la vitesse de Darcy. De plus, la vitesse de Darcy dans

le cœur du lit est inférieure à la valeur moyenne du fait de l'effet de paroi. Cet effet engendre une erreur supplémentaire d'environ 2%.

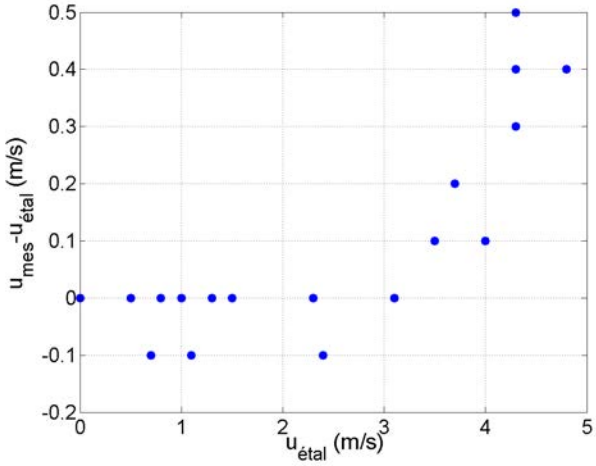


Figure2.17 : *Erreur relative de l'anémomètre à fil chaud*

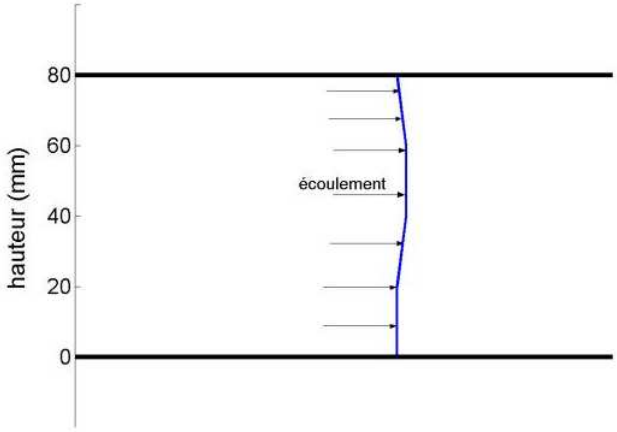


Figure 2.18 : *Profil de vitesse dans la conduite*

La mesure de vitesse se fait avant de déclencher le chauffage et une deuxième mesure est faite en fin de manipulation.

2.2.6 - Protocole de mesure

L'obtention de thermogrammes exploitables (réponses en température à une excitation en échelon temporel du chauffage) nécessite une procédure expérimentale spécifique.
Le logiciel LABVIEW® a été programmé pour gérer l'acquisition des données. Les températures des 15 thermocouples et la puissance de chauffage sont enregistrées en continu. Cette acquisition se fait à une fréquence de 8 points par seconde.
Pour chaque expérience, une phase préparatoire est nécessaire. Le niveau de la puissance de chauffage est réglé pour que les thermocouples mesurent une augmentation de température de 1 à 2 K. Les mesures sont faites tôt le matin pour éviter toute variation importante de température de l'air ambiant. Avant toute acquisition de données, il est indispensable de mettre en marche le ventilateur au moins une heure à l'avance, afin d'obtenir un équilibre thermique satisfaisant (l'air ambiant est ainsi brassé). Lorsque toutes les températures sont stationnaires et égales, nous commençons l'acquisition pendant environ 30 secondes avant de déclencher le chauffage.

Chapitre 3 : Modélisation et conception d'expérience

Ce troisième chapitre a pour objet de modéliser la dispersion thermique dans notre banc et de mettre en place les outils permettent de caractériser le milieu. Tout d'abord, nous allons expliciter la modélisation utilisée au cœur du milieu granulaire et une étude des sensibilités des paramètres sera ensuite effectuée. Puis nous détaillerons la méthode d'estimation utilisée et montrerons des simulations d'inversion sur des mesures simulées. Enfin, nous étudierons l'effet d'un éventuel déséquilibre thermique et ferons une analyse dimensionnelle du problème pour présenter les résultats des estimations sous la forme de corrélations bâties sur des groupements adimensionnels pertinents.

3.1 - Modélisation à cœur et sensibilités

3.1.1 - Equation de dispersion thermique

L'application du modèle à une température nécessite l'introduction de la définition de la température moyenne enthalpique $\langle T \rangle$ du milieu granulaire :

$$\left(\rho c_p\right)_t \langle T \rangle = \varepsilon \left(\rho c_p\right)_f \langle T_f \rangle + (1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s \langle T_s \rangle \tag{3.1}$$

avec $\langle T_f \rangle$ et $\langle T_s \rangle$ les températures moyennes du fluide et du solide sur leurs volumes respectifs et $\left(\rho c_p\right)_t$ la chaleur volumique totale calculée par une loi de mélange :

$$\left(\rho c_p\right)_t = \varepsilon \left(\rho c_p\right)_f + (1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s \tag{3.2}$$

où ε est la porosité, c'est à dire la fraction volumique de la phase fluide.

Cette température moyenne évolue selon l'équation de dispersion :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \nabla.\left(\boldsymbol{\lambda}\, \nabla \langle T \rangle\right) - \left(\rho c_p\right)_f \boldsymbol{u_D}.\nabla \langle T \rangle \; + \; s(\boldsymbol{r},t) \tag{3.3}$$

avec $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

$s(\boldsymbol{r},t)$ est une source volumique (puissance thermique par unité de volume) dissipée dans le milieu granulaire homogénéisé. Dans le cas général, c'est une fonction de l'espace $\boldsymbol{r}$ et du temps t. $\boldsymbol{\lambda}$ est ici le tenseur de dispersion thermique et $\boldsymbol{u_D}$ la vitesse de Darcy.

Dans le cas d'un milieu granulaire isotrope et homogène, de porosité externe ε, traversé par un écoulement de vitesse u_D selon l'axe Ox et contenant une source, le modèle à une température s'écrit :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \left(\rho c_p\right)_f u_D \frac{\partial T}{\partial x} + s \tag{3.4}$$

où T est la température moyenne enthalpique définie par l'équation (3.1) pour laquelle nous avons enlevé les crochets pour simplifier la notation.

Une transformation exponentielle telle que (avec $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$) :

$$T(\boldsymbol{r},t) = F(\boldsymbol{r},t)\ f(\boldsymbol{r},t) \tag{3.5}$$

$$\text{avec } f(\boldsymbol{r},t) = e^{ax - bt} \tag{3.6}$$

où $a = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f u_D}{2\ \lambda_x}$ et $b = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f^2 u_D^2}{4\ \left(\rho c_p\right)_t \lambda_x}$.

permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial F}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + S \tag{3.7}$$

avec le terme source $S = \dfrac{s}{f}$. Dans l'équation (3.11) le terme convectif n'apparaît plus.

Cette fonction F peut être ici considérée comme une fonctionnelle c'est à dire qu'elle dépend de l'excitation $s(\boldsymbol{r},t)$. Nous écrirons donc dorénavant $F(\boldsymbol{r},t;s(\boldsymbol{r},t))$.

Pour un milieu infini avec une condition limite $F(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$, une condition initiale $F(\boldsymbol{r},\ t=0) = 0$, et une source, qui est une impulsion de Dirac spatiale et temporelle $s_\delta = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\ \delta(t - t')$, la fonction de Green du problème est donnée par :

$$F(r,t;\ s_\delta) = G(\boldsymbol{r},t/\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{8\ \sqrt{\lambda_x \lambda_y \lambda_z \pi^3 B^3 (t-t')}^{\ 3}}\ e^{-\frac{\frac{(x-x')^2}{\lambda_x} + \frac{(y-y')^2}{\lambda_y} + \frac{(z-z')^2}{\lambda_z}}{4\ B\ (t-t')}} \tag{3.8}$$

avec $B = \dfrac{1}{\left(\rho c_p\right)_t}$

La fonction de Green G permet de calculer la solution de l'équation (3.3) pour n'importe quelle source par l'intégration suivante :

$$T(\boldsymbol{r},t) = f(\boldsymbol{r},t)\ F(\boldsymbol{r},\ t;s(\boldsymbol{r},t)) = e^{ax-bt}\int_0^t\int_{\Re^3} G(\boldsymbol{r},\ t/\boldsymbol{r}',\ t')\ \frac{B\ s}{f}(\boldsymbol{r}',\ t')\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}t' \tag{3.9}$$

3.1.2 - Réponse à une source linéique perpendiculaire à l'écoulement

Une source linéique perpendiculaire à l'écoulement moyen, parallèle à l'axe Oz (Figure 3.1) est décrite par la fonction :

$$s\ = Q\ \ H(t)\delta(x'-0)\ \ \delta(y'-0) \tag{3.10}$$

où Q (W.m^{-1}) est la densité linéique de puissance et δ (m^{-1}) l'impulsion de Dirac spatiale et $H(t)$ la fonction de Heaviside temporelle (échelon).

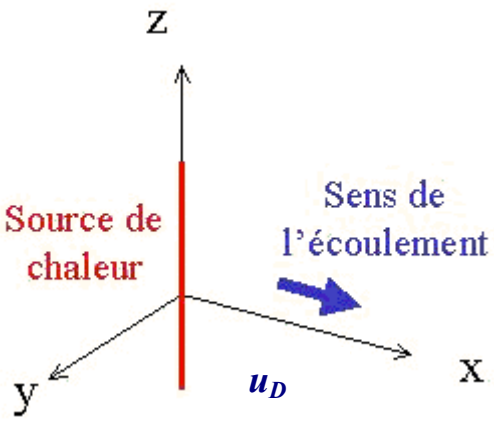


Figure 3.1 : *position de la source de chaleur*

Compte tenu de la forme du terme source, les variations de la température selon l'axe Oz seront nulles. Nous supposons le milieu en équilibre thermique initial $T(\boldsymbol{r},t=0)=T_0$. La variation de température (réponse en température) $\Delta T\ = T-\ T_0$ est donnée par l'équation (3.11) c'est à dire :

$$\Delta T(x,y,t) = \frac{Q}{4\ \pi\ \sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\ e^{\frac{(\rho\ c_p)_f\ u_D\ x}{2\ \lambda_x}}\int_0^{\frac{(\rho\ c_p)_f^2\ u_D^2\ t}{4\ (\rho\ c_p)_t\ \lambda_x}} e^{-\left(\frac{x^2}{\lambda_x}+\frac{y^2}{\lambda_y}\right)\frac{(\rho\ c_p)_f^2\ u_D^2}{16\ \lambda_x}\frac{1}{\theta}-\theta}\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} \tag{3.11}$$

Il est possible d'obtenir cette solution dans l'espace de Laplace et de procéder ensuite à une inversion numérique de la transformée de Laplace [Gradshteyn, 1980] :

$$\Delta\tilde{T}(x,y,p) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{\lambda_x \ \lambda_y}} \ \frac{e^{\frac{(\rho c_p)_f \ u_D \ x}{2\,\lambda_x}}}{p} \ K_0\left(\left[(\rho c_p)_t \left(\frac{x^2}{\lambda_x} + \frac{y^2}{\lambda_y}\right)\right]^{1/2} \sqrt{p + \frac{(\rho c_p)_f^2 \ u_D^{\ 2}}{4\ (\rho c_p)_t \ \lambda_x}}\right) \tag{3.12}$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre 0 et $\tilde{T}$ La transformée de Laplace de la température.

Ce sont ces expressions analytiques (équation 3.11 ou 3.12) qui vont être utilisées comme modèle pour estimer les différents paramètres λ_x, λ_y, u_D, ...du modèle, à partir des mesures de température.

Nous allons examiner les réponses théoriques en température du système air / billes de verre pour différentes vitesses ($u = u_D$) et les comparer au système eau / billes de verre étudié par T. Metzger. Les propriétés thermophysiques des fluides, du verre et des milieux équivalents à 20°C sont rappelées dans le Tableau 3.1.

	λ (W.m^{-1}.K^{-1})	(ρc_p) (J.K^{-1}.m^{-3})	a (m^2.s^{-1})
air	0,026	1200	2.10^{-5}
eau	0,604	4170.10^3	$1,45.\ 10^{-7}$
verre	1	$2,08\ .10^6$	$4,81.10^{-7}$

	air / billes de verre	**eau / billes de verre**
$(\rho c_p)_t$ (J.K^{-1}.m^{-3})	$1,32.10^6$	$2,84.10^6$
ε	0,365	0,365

Tableaux 3.1 : *Propriétés thermophysiques des différentes phases a 20°C et paramètres nominaux des milieux granulaires*

Le nombre de Péclet utilisé est donné par : $Pe = u\,d / a_f$ avec d = 2 mm, le diamètre des billes monodisperses et $a_f = \lambda_f / (\rho c_p)_f$, la diffusivité. Le Tableau 3.2 donne les différents paramètres qui vont être utilises pour les simulations. Les valeurs numériques des coefficients de dispersion thermique ont été calculées à partir des corrélations de Metzger [Metzger, 2002] établies pour le couple eau / billes de verre. Les valeurs de la puissance linéique Q ont été choisies pour obtenir des échauffements de l'ordre de 1 à 2 K.

	air		eau	
u **(m.s^{-1})**	9,7 .10^{-2}	9,7 .10^{-1}	0,655.10^{-3}	6,55.10^{-3}
Pe	9,06	90,6	9,06	90,6
λ_x **(W.m^{-1}.K^{-1})**	0,26	2,6	2,4	60
λ_y **(W.m^{-1}.K^{-1})**	0,19	0,28	1	3
Q **(W.m^{-1})**	7,5	21,45	70	300

Tableau 3.2 *: Vitesses et paramètres correspondant aux cas tests*

Pour simuler au mieux l'acquisition des données expérimentales avec des sondes de température, on représente sur les Figures 3.2 et 3.3, l'évolution temporelle de la température ΔT, à trois distances x de la source linéique pour l'air (thermocouples 2, 4 et 6 de la Figure 2.11) pour des mesures sur axe (y = 0) et hors axe (y = 2,5 mm). Nous expliquerons plus loin dans la même section la raison de cet encadrement.

Naturellement, le signal arrive le plus tôt à l'endroit le plus proche de la source. Lorsqu'on s'éloigne de la source, la montée devient de moins en moins abrupte à cause de la dispersion longitudinale et le niveau final de température décroît à cause de la dispersion transversale.

Les puissances linéiques dissipées Q ont été calculées de telle manière que les niveaux de température finaux sur l'axe soient pratiquement les mêmes pour les deux fluides. Remarquons que les échelles des temps diffèrent d'un facteur 10 pour les deux fluides sur ces figures réalisées pour un même nombre de Péclet.

Le temps de montée en température est dix fois plus important dans le cas de l'air, ce qui impliquera un temps de manipulation dix fois plus long. Ceci correspond certainement à un moins bon couplage fluide / solide dans le cas de l'air par rapport à celui de l'eau. Ce facteur 10 est facilement explicable.
En effet, on peut à partir des équations (3.3) ou (3.4) faire apparaître une vitesse de déplacement convective. Il suffit de diviser ces deux équations par la chaleur massique totale $\left(\rho c_p\right)_t$. On trouve ainsi une équation de convection diffusion dans un fluide pur anisotrope :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - v_h \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{s}{\left(\rho c_p\right)_t} \tag{3.13}$$

On y voit apparaître une nouvelle vitesse « enthalpique » uniforme v_h définit par :

$$v_h = \frac{\left(\rho c_p\right)_f}{\left(\rho c_p\right)_t} u_D \tag{3.14}$$

et une diffusivité équivalente :

$$a_{x,y\,ou\,z} = \frac{\lambda_{x,y\,ou\,z}}{\left(\rho c_p\right)_t} \tag{3.15}$$

Le rapport de ces vitesses, évalué pour les systèmes eau / verre et air/verre, pour un même nombre de Péclet, vaut alors :

$$\frac{v_{h(eau)}}{v_{h(air)}} = \frac{\lambda_{eau}}{\lambda_{air}} \frac{\left(\rho c_p\right)_{t\ air/verre}}{\left(\rho c_p\right)_{t\ eau/verre}} \cong 10 \tag{3.16}$$

On retrouve donc bien le facteur 10 existant entre les temps de réponse des deux systèmes pour un nombre de Péclet donné.

Sur l'axe (y = 0), lorsqu'on s'éloigne de la source, la montée est plus abrupte dans le cas de l'eau pour un niveau final identique.

Hors axe (y = 2,5 mm), on s'aperçoit que les niveaux finaux ne sont pas identiques, l'élévation de température de l'air est plus importante que celle de l'eau.

La Figure 3.3 montre la variation transverse de température pour deux nombres de Péclet différents à un temps infini. On constate que l'étalement latéral est plus faible pour le nombre de Péclet le plus grand. Par ailleurs, cet effet est plus important pour l'eau que pour l'air. Ceci laisse présager que la détermination du coefficient de dispersion transverse, qui était très difficile dans le cas de l'eau, sera probablement plus aisée dans le cas de l'air.

Toutes ces différences de comportement entre les deux systèmes proviennent du fait qu'à Péclet égal les coefficients de dispersion sont nettement plus importants dans le cas de l'eau que de celui de l'air. Ceci est valable si les corrélations de T. Metzger établies pour l'eau sont bien transposables à un écoulement d'air. Remarquons que les valeurs des coefficients de dispersion obtenues à partir des corrélations (équations (4.6) et (4.12) au chapitre 4) que nous avons établies expérimentalement pour le système air / billes de verre sont λ_x = 0,33 et λ_y = 0,2 pour Pe = 9,06 et λ_x = 3,9 et λ_y = 0,42 pour Pe = 90,6, ce qui ne change pas fondamentalement les observations précédentes.

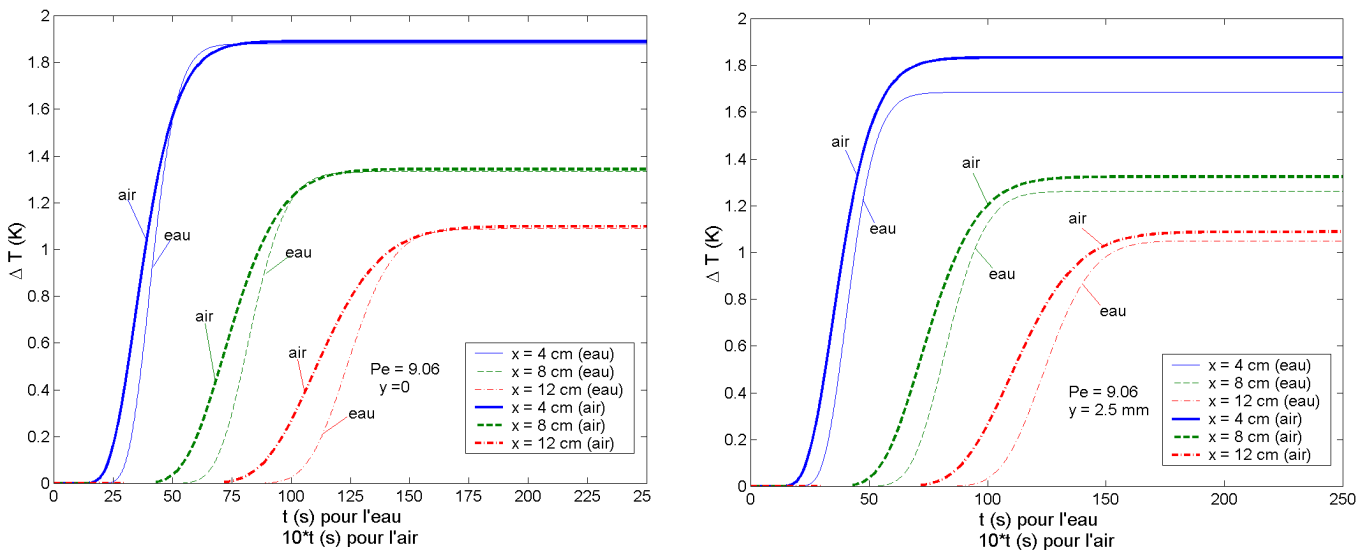


Figure 3.2 : *Evolution temporelle de la température sur axe et hors axe à Pe =9,06*

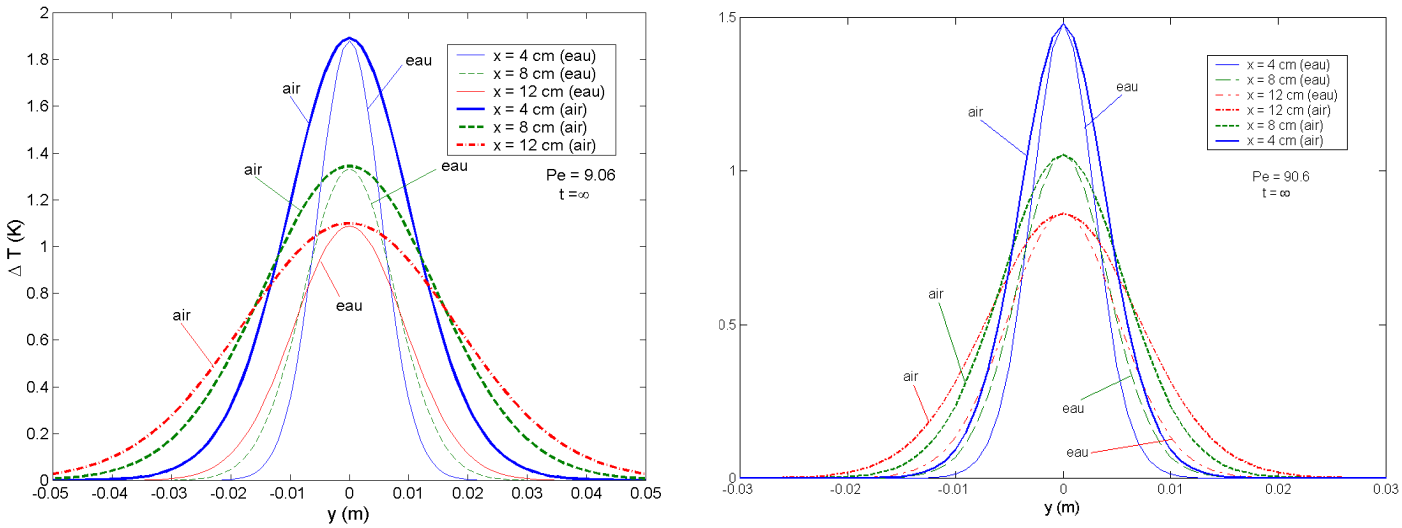


Figure 3.3 *: Champs de température en aval d'une source linéaire en échelon temporel pour différents Pe à des distances différentes.*

3.1.3 - Etude de sensibilité

Un des objectifs de ce travail est de déterminer les coefficients de dispersion thermique par estimation de paramètres à partir de thermogrammes expérimentaux. L'outil fondamental permettant de savoir si, à partir des mesures *a priori* bruitées et d'un modèle, il est possible d'accéder à une estimation des paramètres de ce modèle, est l'étude des coefficients de sensibilité. Le coefficient de sensibilité, de la température T du modèle, à un paramètre β_j de celui-ci est défini par : $X_j = \dfrac{\partial T}{\partial \beta_j}$.

En pratique si l'on veut accéder aux valeurs de ces paramètres, il faut que les coefficients de sensibilité aient une valeur suffisante et ne soient pas linéairement dépendants dans le temps (sensibilités décorrélées).

Pour pouvoir comparer des coefficients de sensibilité qui n'ont pas la même unité, on utilise des sensibilités réduites $\beta_j \dfrac{\partial T}{\partial \beta_j}$ qui évaluent une variation absolue du signal de température δT causée par une variation relative du paramètre $\dfrac{\delta \beta_j}{\beta_j}$.

Remarquons ici qu'il nous est absolument nécessaire d'estimer non seulement λ_x et λ_y mais aussi la vitesse de Darcy u_D (en cœur de lit, loin des parois) et également les positions en x et en y des thermocouples. Ceux-ci vont nécessairement différer de leurs valeurs nominales lors de la mise en place du lit granulaire. Nous allons donc travailler avec 5 coefficients de sensibilités.

On peut montrer facilement que la sensibilité à l'ordonnée y est nulle sur l'axe : l'équation (3.11) fait intervenir y^2. Il est donc mathématiquement impossible d'estimer ces 5 paramètres sur l'axe. C'est pour cette raison que nous effectuons cette étude de sensibilité avec un

décalage y = 2,5 mm. Cette valeur de 2,5 mm correspond à un compromis entre sensibilité non nulle et signal de niveau suffisant (Figure 3.3). Les évolutions temporelles des différentes sensibilités sont représentées sur la Figure 3.4.a.

La sensibilité à λ_x est la plus faible. Elle est cependant suffisante en valeur absolue (extrema supérieur à 0,1°C). Pour les temps plus longs cette sensibilité devient presque nulle.
La sensibilité à λ_y est un peu plus grande et reste, contrairement à λ_x, élevée en régime stationnaire. La sensibilité la plus grande est celle liée à la vitesse autant en zone transitoire qu'en régime stationnaire.
Pour représenter les sensibilités aux positions x et y, il a fallu choisir une grandeur caractéristique : L = 1 cm. La position en x a une plus grande influence que la position en y sur la réponse en température aux temps courts.
On peut enfin remarquer que les sensibilités à λ_y et à y sont pratiquement proportionnelles. Il en est de même pour les sensibilités à u et à x, mais seulement pour les temps courts. Ceci souligne l'évidente nécessité d'introduire une information complémentaire sur les positions des thermocouples si l'on veut estimer proprement les paramètres qui nous intéressent (λ_x, λ_y et u)

Si l'on compare (Figure 3.4.a et b) les sensibilités de l'eau et de l'air dans les mêmes conditions (même nombre de Péclet, mêmes positions x et y), on constate qu'elles varient de manière analogue. Il est intéressant de remarquer que la sensibilité à λ_y est supérieure à celle à y dans le cas de l'air alors que c'est l'inverse dans le cas de l'eau. Ceci laisse présager une estimation plus facile de λ_y dans le cas de l'air, l'incertitude sur la position en y étant moins pénalisante dans ce cas.

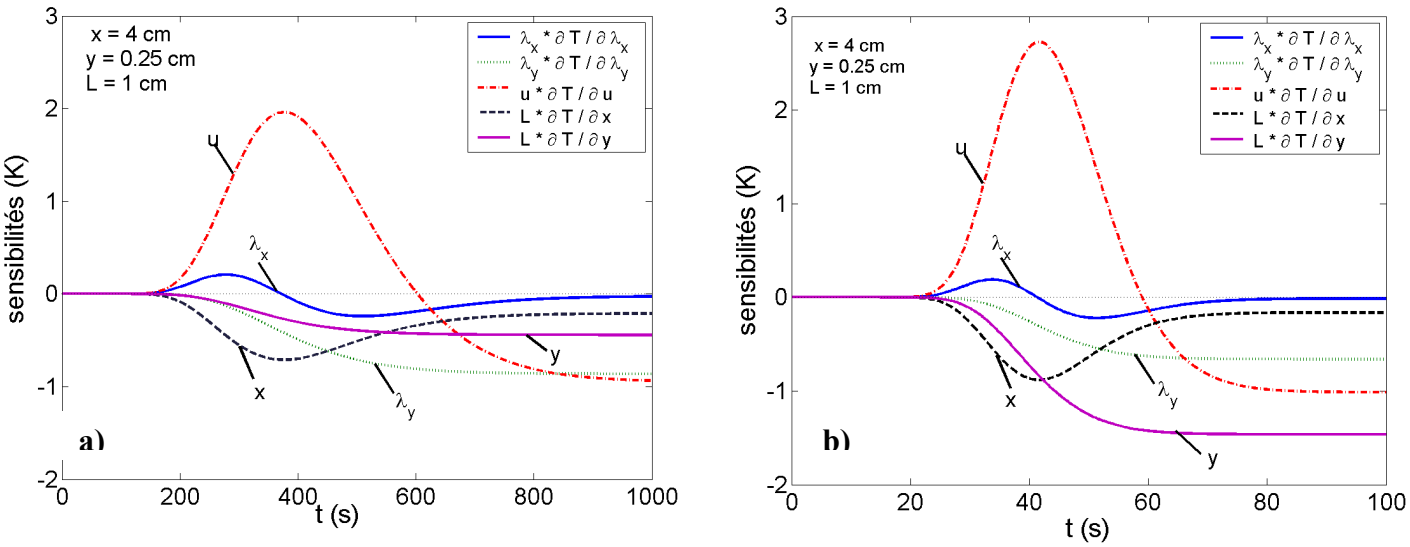


Figure 3.4 : *Sensibilités relatives hors axe à Pe = 9,06, a) dans le cas de l'air (Q = 7,5 W.m^{-1}) et b) dans le cas de l'eau (Q = 70 W.m^{-1})*

3.2 – Estimation des paramètres

Nous utiliserons ici les deux modes d'estimation déjà utilisés par T. Metzger : le mode α_4 et α_5.

3.2.1 - Le mode α_4

La méthode classique pour déterminer des paramètres consiste à minimiser la somme des écarts entre un modèle et les mesures expérimentales :

$$S(\beta) = \left(T^{\exp} - T(\beta)\right)^T \left(T^{\exp} - T(\beta)\right) \text{ avec } \beta = \left[\lambda_x \ \lambda_y \ u\right]^T \tag{3.17}$$

avec β le vecteur paramètre, T^{exp} et T étant les vecteurs colonnes des mesures (thermocouples) et des sorties du modèle (3.11) aux différents instants.
Le mode α_4, qui permet de prendre en compte une incertitude sur l'implantation en x des thermocouples, utilise la somme des carrés où les signaux sont normés par leurs écarts types respectifs. On ajoute à la somme des moindres carrés classique un terme prenant en compte l'incertitude sur la position en x des thermocouples. La somme à minimiser devient donc :

$$S'(\alpha_4) = \frac{1}{\sigma_T^{\ 2}} \sum_i \sum_k \left(T_{ik}^{\exp} - T_{ik}(\alpha_4)\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{pos}^{\ 2}} \sum_i \left(x_i^{nom} - x_i\right)^2 \tag{3.18}$$

avec $\alpha_4 = [\ \lambda_x \quad \lambda_y \ u \ x_i \ ]^T$
Le mode α_4, qui correspond à un estimateur Gauss Markov sur un signal groupant températures expérimentales et positions nominales permet donc d'estimer quatre types de paramètres simultanément : la vitesse, les deux coefficients de dispersion thermique et la position des thermocouples en x_i.
Cette méthode ne permet pas de prendre en compte l'incertitude sur les positions y_i.

Le mode α_4 est utilisé avec des mesures sur axe c'est à dire en y = 0 pour lesquelles la sensibilité à y est nulle.
Il a l'inconvénient de ne pas prendre en compte les incertitudes en ***deux*** dimensions sur les positions x et y, ce qui engendre des résidus généralement signés.

3.2.2 - Le mode α_5

Le mode α_5 nous permet d'estimer cinq types de paramètres : la vitesse, les coefficients de dispersion thermique transversal et longitudinal, les positions x_i et y_i.
Le principe de ce mode d'estimation est de placer les sondes hors axe pour que le signal soit sensible à y. Nous choisissons de prendre un décalage nominal par rapport à l'axe de y = 2,5 mm. Par souci de cohérence, nous prendrons dans notre cas la même distance nominale.
Ce mode repose sur le même principe que le mode α_4 : il rajoute à la somme à minimiser l'incertitude sur la position en y des thermocouples. La somme à minimiser devient :

$$S'(\alpha_5) = \frac{1}{\sigma_T^{\ 2}} \sum_i \sum_k \left(T_{ik}^{\exp} - T_{ik}(\alpha_5)\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{pos}^{\ 2}} \sum_i \left(x_i^{nom} - x_i\right)^2 + \frac{1}{\sigma_{pos}^{\ 2}} \sum_i \left(y_i^{nom} - y_i\right)^2 \tag{3.19}$$

avec $\alpha_5 = [\ \lambda_x \quad \lambda_y \ u \ x_i \ y_i\ ]^T$

σ_{pos} est l'écart type sur les positions et σ_T est l'écart-type du bruit de mesure des températures.
Nous connaissons l'écart type (σ_T = 0,02°C) du bruit sur les températures et nous avons pris un écart type égal à un rayon de bille (σ_{pos} = 1 mm) pour les positions. On peut montrer que la minimisation de cette somme (ici effectuée à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton), conduit à un estimateur de Gauss-Markov, de variance minimale, pour le vecteur paramètre. Metzger et *al* [Metzger, 2003 ; Metzger, 2004 ; Maillet, 2003] ont montré que les valeurs estimées des différents paramètres dépendent assez peu de σ_{pos}, dès que cet hyperparamètre dépasse une fraction de millimètre. Une valeur faible de σ_{pos} (inférieure au micromètre) conduit à de mauvais résidus en température avec des estimations en position proches des valeurs nominales ($\hat{x}_i \approx x_i^{nom}$; $\hat{y}_i \approx y_i^{nom}$) ; des valeurs de σ_{pos} comprises entre le micromètre et quelques dixièmes de millimètres conduisent à une baisse des résidus et à une évolution des valeurs estimées des paramètres. A partir de σ_{pos} = 1 mm, les résidus sont bons et n'évoluent plus, tout comme les valeurs estimées des paramètres. Enfin pour σ_{pos}> 1 m, on se retrouve en pratique dans le cas des moindres carrés ordinaires sur les seules températures et l'algorithme d'inversion ne converge plus.

3.3 - Inversion sur des mesures synthétiques

Il est possible de réaliser des simulations de Monte Carlo [Beck, 1977]. On calcule ici les réponses théoriques de 6 thermocouples (thermocouples 2 à 7) qui sont bruitées 400 fois avec des séquences de bruit gaussien non corrélés (écart-type σ_T = 0,02 K) et l'on bruite également les positions nominales des thermocouples (écart-type σ_c = 1 mm). Ces mesures simulées sont inversées et la minimisation de la somme $S'(\alpha_5)$ permet d'obtenir 400 estimations de chacun des paramètres.
Ces deux modes sont testés ici dans le cas de l'air. Les valeurs exactes des paramètres sont issues des résultats expérimentaux.

Si 400 simulations de ce type sont réalisées avec ce type d'inversion, 400 estimations $\hat{\alpha}_j^{(n)}$ sont réalisées pour le $j^{ème}$ paramètre. Il est ainsi possible de réaliser une distribution statistique de chacun des paramètres (histogramme) et de calculer la dispersion (s_j) de chaque estimation ainsi que le biais (b_j) correspondant:

$$b_j = \bar{\hat{\alpha}}_j - \alpha_j \quad \text{and} \quad s_j = \frac{1}{400} \sum_{n=1}^{400} \left(\hat{\alpha}_j^{(n)}\right)^2 - \left(\bar{\hat{\alpha}}_j\right)^2 \quad \text{with} \quad \bar{\hat{\alpha}}_j = \frac{1}{400} \sum_{n=1}^{400} \hat{\alpha}_j^{(n)}$$

On montrera ici les simulations effectuées en mode α_4 et en mode α_5 Puis nous comparerons les résultats obtenus en mode α_5 dans le cas air / billes de verre et eau / billes de verre.

Sur les Figures 3.5.a et 3.5.b, les histogrammes sur des simulations d'estimation pour un nombre de Péclet égal à 35 sont présentés. Les histogrammes portent sur les deux coefficients de dispersion thermique, la vitesse et six positions des thermocouples 2 à 7 (numérotés ici 1 à 6). Des simulations à nombre de Péclet beaucoup plus faible ont été

également réalisées. Elles traduisent les mêmes tendances même si l'écart est plus élevé pour le mode α_4.
Nous avons fait figurer sur le Tableau 3.4 les biais et les écarts-types des coefficients estimés rapportés à leur valeur exacte.

		Valeur exacte α_j	Valeur estimée $\overline{\hat{\alpha}}_j$ (α_4)	Valeur estimée $\overline{\hat{\alpha}}_j$ (α_5)
air	λ_x (W.K^{-1}.m^{-1})	0,962	1,008 ± 0,009	0,984 ± 0,008
	λ_y (W.K^{-1}.m^{-1})	0,256	0,251± 0,003	0,246 ± 0,003
	u (m.s^{-1})	0,353	0,360 ± 0,004	0,355 ± 0,004

Tableau 3.4 *: Résultats de 400 simulations de Monte Carlo dans le cas billes de verre / air*

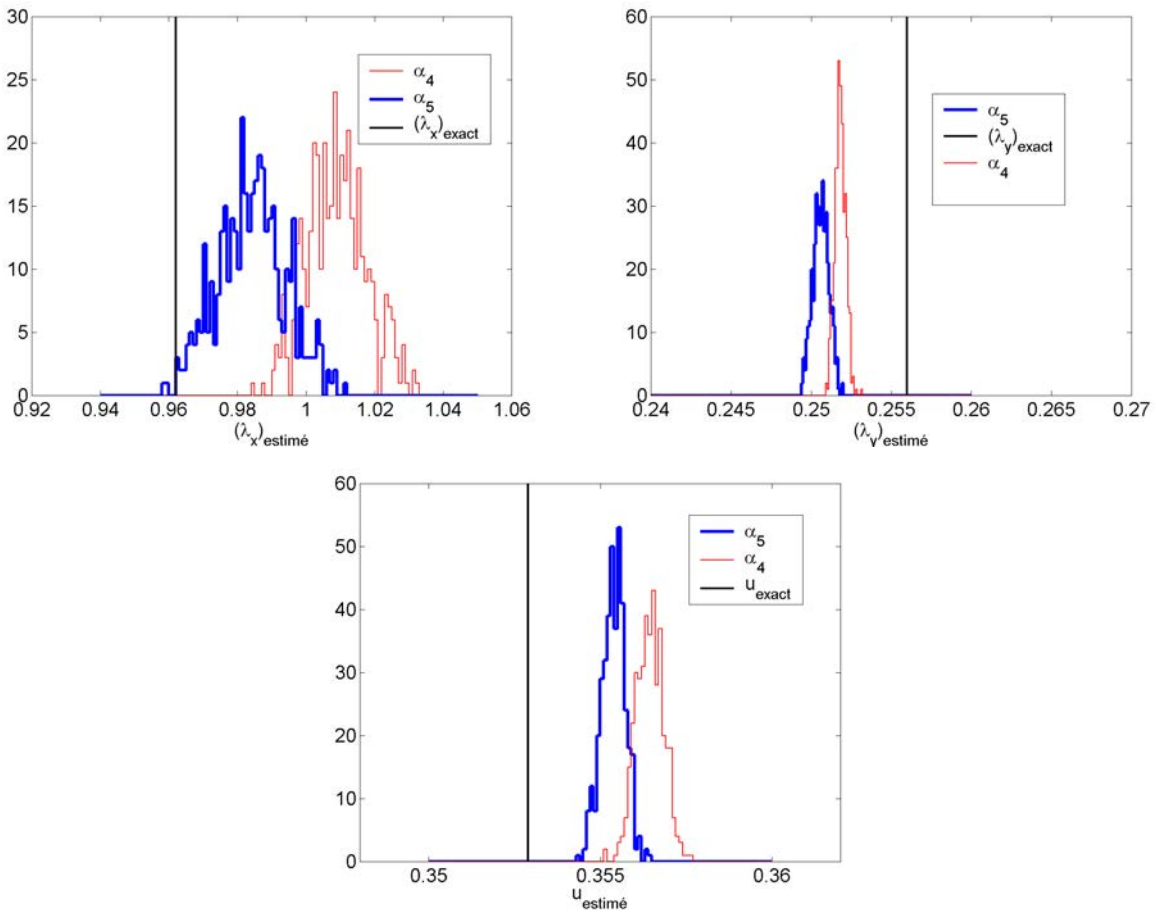


Figure 3.5.a *: Histogrammes des simulations d'inversion de Monte Carlo en mode α_4 et α_5 pour Pe = 35 dans le cas billes de verre / air. Les effectifs (nombres d'estimations simulées) sont portés en ordonnées*

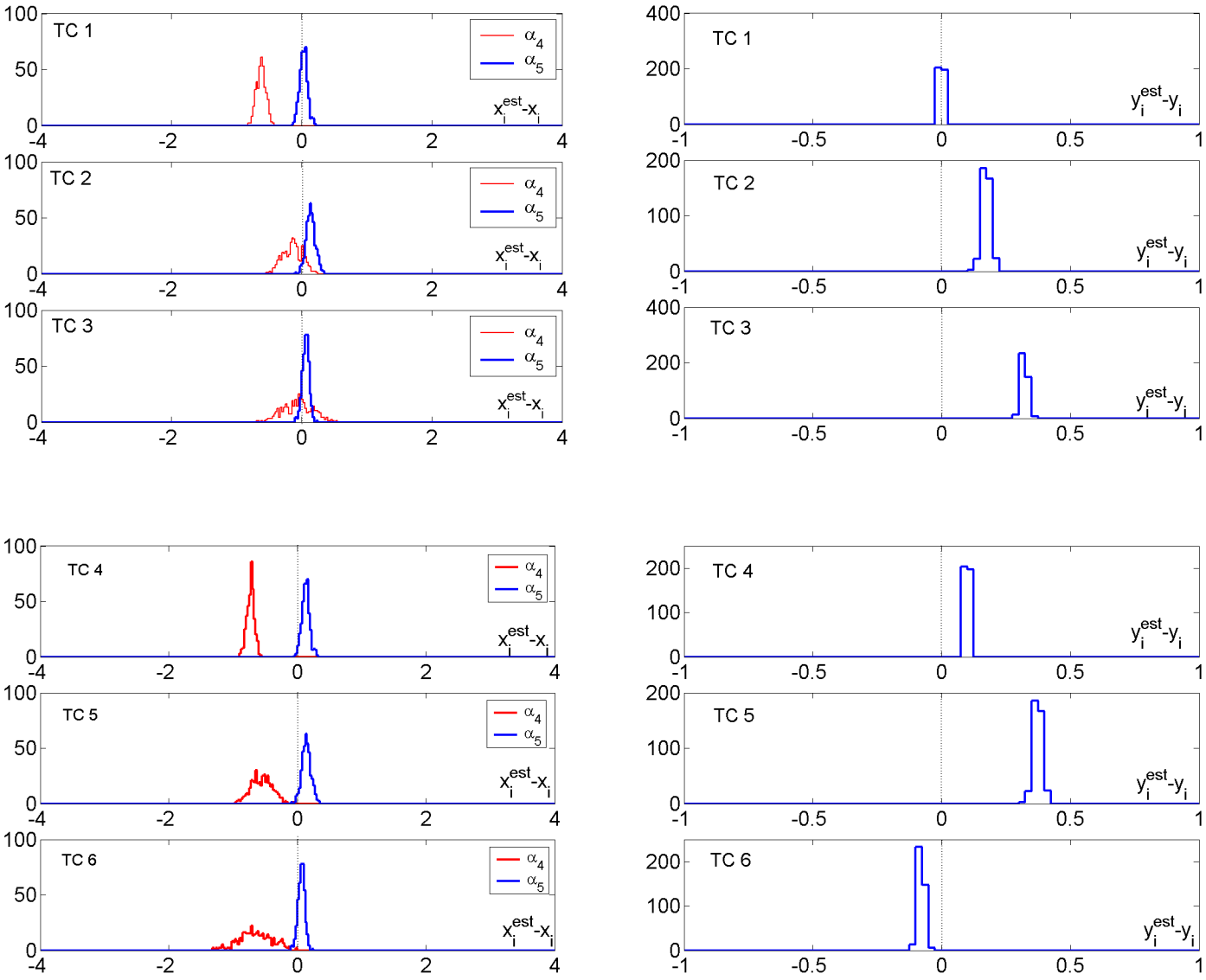


Figure 3.5.b : *Histogrammes des simulations d'inversion de Monte Carlo en mode α_4 et α_5 pour Pe = 35 dans le cas billes de verre / air. Les effectifs (nombres d'estimations simulées) sont portés en ordonnées*

Les résultats du tableau ci-dessus montrent que le mode α_5 a des avantages sur le mode α_4.

En effet :

- ✓ Pour λ_x : La dispersion des valeurs est identique pour les deux modes. La surestimation du coefficient est moindre pour le mode α_5.

- ✓ Pour λ_y : La dispersion des mesures est un peu plus forte en mode α_5. Le coefficient est sous-estimé pour les deux modes.

- ✓ Pour u : La dispersion des estimations est quasi identique dans les deux cas. Mais le mode α_5 permet une surestimation plus faible de la vitesse.

- ✓ Pour les positions : Le mode α_5 permet une très bonne estimation des positions avec une légère surestimation de y, la dispersion des mesures est très faible. Le mode α_4 sous-estime légèrement les positions. Les positions des points de mesure sont estimées avec une erreur qui ne dépend pas en moyenne de la valeur de la vitesse.

Des résultats similaires ont été trouvés pour l'eau entre les deux modes d'estimation. Nous allons donc ici nous concentrer uniquement sur l'estimation en mode α_5. Ce mode d'estimation était de bonne qualité dans le cas de l'eau (sauf pour l'estimation du coefficient de dispersion transverse). Nous avons donc réalisé une comparaison des simulations d'inversion entre les deux fluides (Pe = 35 pour l'air et Pe = 86 pour l'eau).

	paramètre (j)	Valeur exacte α_j	Valeur estimée $\bar{\hat{\alpha}}_j$	biais b_j	dispersion s_j	biais /dispersion $\lvert b_j \rvert / s_j$	Erreur relative $(\lvert b_j \rvert + s_j)/\alpha_j$
air	λ_x (W.K^{-1}.m^{-1})	0.962	0.984	+0.022	0.008	275 %	3 %
	λ_y (W.K^{-1}.m^{-1})	0.256	0.246	-0.010	0.003	336 %	5.2 %
	u (m.s^{-1})	0.353	0.355	+0.002	0.004	50 %	1.7 %
eau	λ_x (W.K^{-1}.m^{-1})	60	60.321	+0.321	1.009	32 %	2.2 %
	λ_y (W.K^{-1}.m^{-1})	3	2.681	-0.329	0.310	106 %	21 %
	u (mm.s^{-1})	6.288	6.306	+0.018	0.033	55 %	0.8 %

Tableau 3.5 : *Résultats d'estimation en mode α_5 pour l'air et pour l'eau*

L'estimation de λ_x est de la même qualité dans le cas de l'air et dans le cas de l'eau avec une erreur relative inférieur à 3 % dans les deux cas: le biais est plus grand pour l'air mais il est compensé par une faible dispersion. De même l'estimation de la vitesse de Darcy est quasi identique dans les deux cas (l'erreur relative est en dessous de 2 %), la vitesse est bien identifiée. L'estimation de λ_y est biaisée avec des sous estimations des valeurs exactes dans les deux cas. L'erreur d'estimation est acceptable pour l'air (5 %) mais est très grande pour l'eau (21 %). Cette comparaison confirme la possibilité d'estimer certains paramètres du modèle à une température avec une bonne précision comme Metzger [Metzger, 2004] l'a montré. Elle a, en plus, l'avantage de montrer qu'avec de l'air nous estimerons également le coefficient de dispersion transverse.

Une autre configuration d'excitation à deux sources (Annexe 1) a été étudiée pour voir si une amélioration des estimations du coefficient de dispersion transversal était possible pour l'air. Mais cette autre configuration s'est avérée être de même qualité que celle étudiée, nous l'avons donc abandonnée.

3.4 - Effet du déséquilibre thermique

Le modèle à une température semble pouvoir être utilisé dans le cas de l'air. Nous nous sommes demandés lors des expérimentations s'il y avait une réelle différence entre la température du solide et la température du fluide. La température mesurée lors des expériences n'est pas la température moyenne du modèle à une température mais bien la température du fluide qui échange avec le solide car les soudures des thermocouples sont immergées dans l'air.
Dans le cas d'un écoulement d'air, le temps de diffusion en phase fluide est très court et c'est donc le temps de diffusion dans la phase solide qui peut poser problème pour l'équilibre thermique.

Pour essayer de quantifier un écart éventuel entre les températures des deux phases, on peut grâce à un modèle analytique conductif reconstituer les réponses en température moyenne et en température de chacune des deux phases (solide et fluide).

Utilisation du modèle analytique :

Le modèle analytique utilisé prend en compte la conduction transitoire à l'intérieur d'un élément de géométrie sphérique, ici le grain. Nous construisons ce modèle à l'aide de la méthode des quadripôles thermiques [Maillet et col., 2000, p. 104].
La température moyenne à l'intérieur d'un grain sphérique de rayon R, de conductivité λ_s, de chaleur volumique $\left(\rho c_p\right)_s$ et de diffusivité $a_s = \dfrac{\lambda_s}{\left(\rho c_p\right)_s}$, chauffé uniformément dans son volume (source uniforme), est alors donnée par la relation matricielle exacte (quadripôle) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_S \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_f \\ \Phi_f \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

avec $T_s(t) = \dfrac{1}{V_{sphère}} \int_{sphère} 4\, T(\boldsymbol{r},t)\, \pi r^2 \,\mathrm{d}r$ et $T_f(t) = T(\boldsymbol{r},t)$,

avec $A' = 1$, $C' = \left(\rho c_p\right)_s V_{sphère}\, p$, $V_{sphère} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $D' = \dfrac{s^2}{3\ \left(s \coth(s) - 1\right)}$, $A'D' - B'C' = 1$ et

$s = \sqrt{\dfrac{p}{a_s}}\ R$

où Q_s représente la transformée de Laplace de la puissance générée uniformément dans le solide et ϕ_f la transformée de Laplace du flux sortant du grain.

Dans notre cas le grain est uniquement chauffé grâce au flux transmis par le fluide donc $Q_s = 0$ (Figure 3.6).

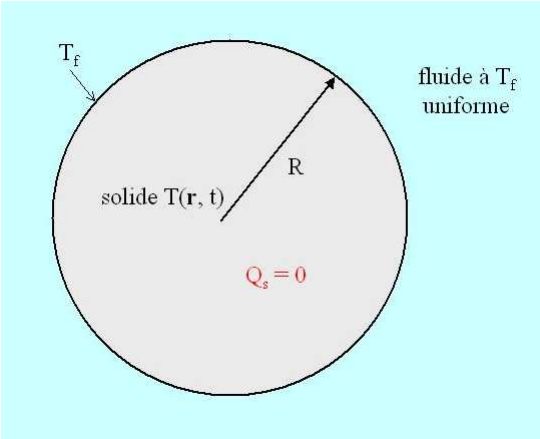


Figure 3.6 : *grain chauffé par le fluide et modélisé*

On a supposé ici que la diffusion de la chaleur était unidimensionnelle (radiale) et que la surface du grain était à la température moyenne T_f du fluide (modèle à deux températures). $\tilde{T}_f$ et $\tilde{T}_s$ représentent alors les transformées de Laplace des températures moyennes intrinsèques des deux phases, p étant la variable de Laplace.

Grâce au quadripôle (équation 3.20), nous pouvons relier les températures moyennes du solide et du fluide :

$$\tilde{T}_s = \frac{1}{D'} \tilde{T}_f \tag{3.21}$$

La température moyenne du modèle à une température s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\tilde{T} = \frac{(\rho c_p)_f \ \varepsilon}{(\rho c_p)_t} \tilde{T}_f + \frac{(\rho c_p)_s \ (1-\varepsilon)}{(\rho c_p)_t} \tilde{T}_s \tag{3.22}$$

Nous avons ici simplifié la notation en enlevant les symboles de prise de moyenne (< >) dans l'équation (3.22).

La combinaison des équations (3.21) et (3.22) nous permet d'exprimer les températures moyennes des deux phases en fonction de la température moyenne T :

$$\tilde{T}_f = \frac{\tilde{T}(\boldsymbol{r}, p) \ (\rho c_p)_t \ D'}{D'\varepsilon(\rho c_p)_f + (\rho c_p)_s (1-\varepsilon)} \tag{3.23}$$

$$\tilde{T}_s = \frac{\tilde{T}(\boldsymbol{r}, p)\ \left(\rho c_p\right)_t}{D'\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f + \left(\rho c_p\right)_s (1-\varepsilon)} \tag{3.24}$$

Il est donc possible de simuler les trois réponses (T, T_S, T_f) à partir de la température moyenne calculée à partir de l'équation (3.12), c'est à dire à partir de la réponse en température en un point (x , y) à l'échelon d'excitation linéique d'intensité Q.

Les trois évolutions de ces températures sont représentées dans le cas billes de verre / air pour un nombre de Péclet de 35 sur la Figure 3.7 (seuls sont représentés pour plus de lisibilité les thermogrammes à x = 4 cm et à x = 12 cm). Les paramètres utilisés - coefficients de dispersion et quantité de chaleur - correspondent aux valeurs expérimentales (cf. chapitre 4) et à Q = 10 W.m^{-1}.

Les trois courbes se superposent. La température du fluide est quasiment égale à la température du solide et à la température moyenne utilisée dans le modèle. La Figure 3.8 montre la différence de température entre la température du fluide et la température du solide. Pour un échauffement d'approximativement 1 K, la différence maximum est de 2.10^{-3} K à x = 4 cm, ce qui est très faible. La différence maximale de température se situe au temps de demi-montée en température (approximativement 50 s pour x = 4 cm, 110 s pour x = 8 cm et 170 s pour x = 12 cm). Cette différence diminue ensuite et devient nulle en régime permanent.

Des simulations ont été également effectuées pour voir dans quelles conditions cet écart serait significatif et nécessiterait l'utilisation d'un autre modèle. Nous avons ainsi fait diminuer la conductivité du solide.

Il faudrait une conductivité de solide quasi-identique à celle de l'air pour atteindre des différences de température de l'ordre du dixième de Kelvin pour un même niveau Q d'excitation. La Figure 3.9 montre le cas où la conductivité du solide égale à celle de l'air (λ_s = 0,026 W.m^{-1}.K^{-1}). Les températures du solide et du fluide sont différentes lors du chauffage pour ensuite se confondre lorsqu'on atteint le régime permanent. Le matériau qui pourrait se rapprocher le plus de cette valeur de conductivité de 0,026 W.m^{-1}.K^{-1} est la laine de verre (λ_s = 0,034 W.m^{-1}.K^{-1}) ou plutôt les aérogels de silice dont la porosité nanoscropique donne naissance à un effet Knudsen (conduction dans un gaz raréfié).

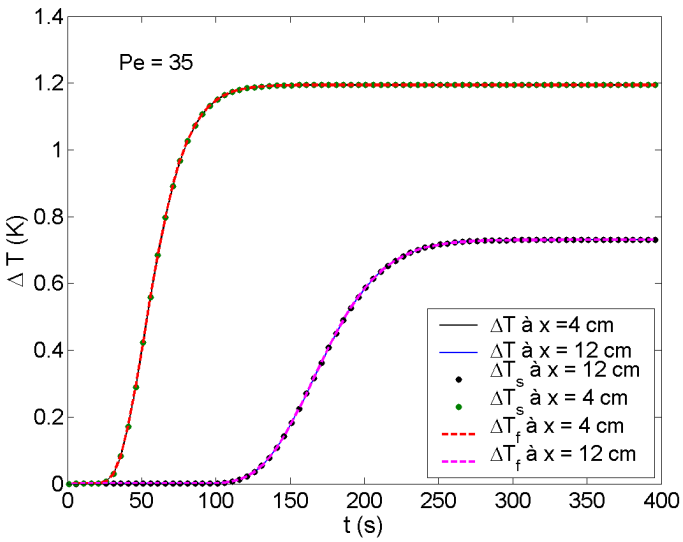


Figure 3.7 : *Températures théoriques du solide, du fluide et moyenne*

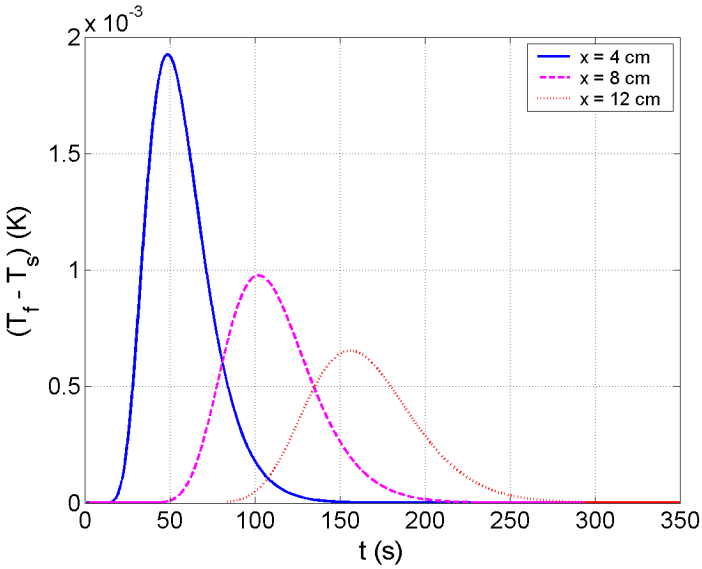


Figure 3.8 : *Ecart de température entre la température du solide et la température du fluide*

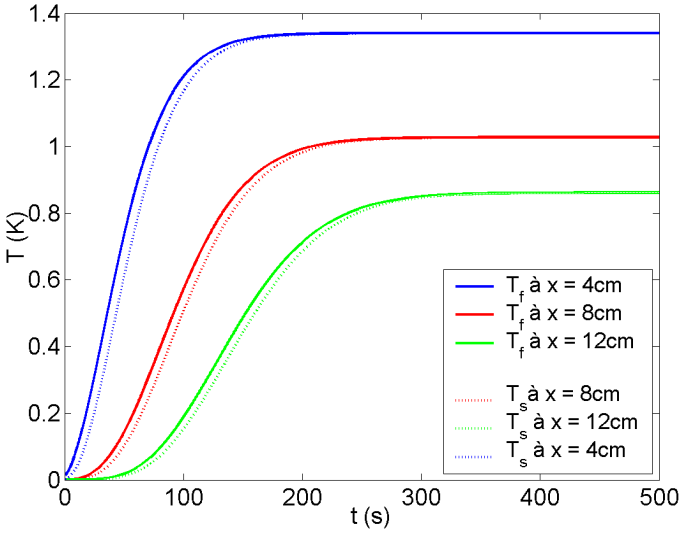


Figure 3.9 : *Températures du solide et du fluide pour λ_s = 0,026 $W.m^{-1}.k^{-1}$*

On peut retrouver ces résultats en utilisant le modèle de Coats-Smith [Coats-Smith, 1964] (modèle à « deux températures). Ce modèle utilise deux équations, une équation pour la phase fluide :

$$\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \lambda_{xf} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \lambda_{yf} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} - u_f \left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial T_f}{\partial x} - h\ a_{fs}\left(T_f - T_s\right) + s\left(x,y,t\right) \quad (3.25)$$

et une équation pour la phase solide qui est ici discontinue :

$$\left(1-\varepsilon\right)\left(\rho c_p\right)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = h\, a_{fs}\left(T_f - T_s\right) \quad (3.26)$$

h est le coefficient d'échange entre phases et a_{fs} désigne la surface spécifique par unité de volume du lit et est égale à $a_{fs} = \dfrac{6\left(1-\varepsilon\right)}{d}$.

Le coefficient d'échange h entre phases, qui n'est absolument pas un coefficient de transfert convectif, peut être calculé à partir de l'équation (3.20) pour $Q_s = 0$:

$$\tilde{\phi}_f = H\left(\tilde{T}_f - \tilde{T}_s\right) \quad (3.27)$$

avec $H = \dfrac{C'}{1-D'} = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_s V_{sphère}\, p\left(s\coth s - 1\right)}{3\left(s\coth s - 1\right) - s^2}$.

On cherche un équivalent de H pour les faibles valeurs de p (régime quasi-permanent), en utilisant le développement limité :

$$s\coth s = 1 + \frac{s^2}{3} + \frac{s^4}{45} + O\left(s^6\right) \quad \text{quand} \quad s \to 0 \quad (3.28)$$

d'où

$$H = 15\,\frac{\lambda_s}{R^2}\left(1 + O\left(s^2\right)\right) = H_0\left(1 + O\left(s^2\right)\right) \quad (3.29)$$

Si l'on considère la transformée de la densité de flux à la paroi $\varphi_f = \dfrac{\phi_f}{S_{sphère}}$ avec $S_{sphère} = 4\pi R^2$, le coefficient d'échange entre phases h apparaît directement :

$$h = \frac{H_0}{S_{sphère}} = 5\frac{\lambda_s}{R} = 10\frac{\lambda_s}{d} \quad (3.30)$$

La réponse en température de la phase fluide pour une impulsion de Dirac est alors égale à :

$$\tilde{T}_f = \frac{Q\, e^{\frac{\left(\rho c_p\right)_f u_D\, x}{2\lambda_{xf}}}}{2\pi\sqrt{\lambda_{xf}\,\lambda_{yf}}}\,\frac{1}{p}\,K_0\left[\left(l^2 + \frac{\left(\rho c_p\right)_f^2 u_D^{\,2}}{4\lambda_{xf}}\right)^{1/2}\left(\frac{x^2}{\lambda_{xf}} + \frac{y^2}{\lambda_{yf}}\right)^{1/2}\right] \quad (3.31)$$

avec $l^2 = p\left[\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f + (1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s \dfrac{a_{fs}\, h}{(1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s\, p + a_{fs}\, h}\right]$

De même la réponse en température pour la phase fluide s'écrit :

$$\tilde{T}_s = \left[\frac{a_{fs}\, h}{(1-\varepsilon)\left(\rho c_p\right)_s\, p + a_{fs}\, h}\right]\tilde{T}_f \tag{3.32}$$

En utilisant les expressions (3.25) et (3.26), nous retrouvons les résultats obtenus avec les équations (3.23) et (3.24) pour $\lambda_{xf} = \lambda_x$ et $\lambda_{yf} = \lambda_y$.

Dans le cas de nos expériences, on peut considérer que les phases solide et fluide sont donc à l'équilibre thermique et que l'utilisation du modèle à une température est tout à fait légitime ici.

3.5 - Analyse dimensionnelle de la dispersion thermique et formes pertinentes des corrélations

Les valeurs des coefficients de dispersion qui entrent dans le modèle à une température (équation 3.4) dérivent des équations de fermeture du problème dont la solution peut être trouvée numériquement seulement si le milieu et son écoulement interne sont parfaitement connus. Il est donc nécessaire de connaître la structure du milieu, les propriétés thermophysiques des deux phases ainsi que la structure du champ de vitesse local.

Pour un nombre très limité de cas une expression analytique peut être trouvée: tel est le cas pour le coefficient de dispersion longitudinal λ_x dans un milieu poreux périodique où la cellule unité correspond à un écoulement entièrement développé entre deux plaques parallèles [Moyne, 2000]. La structure interne des milieux poreux est généralement inconnue à l'échelle locale, ce qui rend la résolution des problèmes de fermeture difficile. Il faut dans ce cas considérer le milieu poreux comme un milieu stochastique dont la structure est connue seulement en termes de moments et de longueurs caractéristiques.

C'est une autre approche qui sera suivie ici pour la construction des corrélations du transfert thermique. Ces corrélations ne porteront pas sur un coefficient h, comme pour l'écoulement dans les couches limites ou dans l'écoulement interne en conduite, mais sur les coefficients de dispersion thermique eux-mêmes. Afin de définir les paramètres adimensionnels qui expliquent la variation de ces coefficients, nous écrirons d'abord les deux équations du problème local de conduction-convection et du modèle à une température correspondant. Dans une deuxième étape, celles-ci seront écrites sous une forme sans dimension en utilisant des adimensionnements adaptés pour toutes les grandeurs, afin de faire apparaître de manière naturelle la structure des corrélations pour les coefficients de dispersion.

On fait l'hypothèse d'un fluide incompressible en écoulement laminaire traversant un milieu granulaire infini. Les propriétés thermophysiques des deux phases solide et fluide sont considérées comme constantes. On se place en convection forcée avec les dissipations visqueuses négligées et avec une source interne de chaleur s (W.m^{-3}). On écrit les équations de conservation, de Navier Stokes et de l'énergie. On cherche une solution formelle du champ local de température suite à une excitation transitoire en partant de l'équilibre initial (on suppose que l'excitation n'affecte pas les limites du système). Les équations sont données pour la phase fluide Ω_f et la phase solide Ω_s :

$$\nabla . v = 0 \qquad \text{sur } \Omega_f \tag{3.33a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla \hat{p} + \nu_f \nabla^2 v \qquad \text{sur } \Omega_f \tag{3.33b}$$

$$\left(\rho c_p\right)_f \frac{\mathrm{d}T_f}{\mathrm{d}t} = \lambda_f \nabla . \nabla T_f + s_f \qquad \text{sur } \Omega_f \tag{3.33c}$$

$$\left(\rho c_p\right)_s \frac{\partial T_f}{\partial t} = \lambda_s \nabla . \nabla T_s + s_s \qquad \text{sur } \Omega_s \tag{3.33d}$$

où $\boldsymbol{v}$ désigne le vecteur local de vitesse, $\hat{p}$ la pression motrice, ρ_f et ν_f la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide et s_f et s_s les sources volumiques de chaleur dans chacune des deux phases. Les conditions d'interface et les conditions initiales et limites sont :

$$T_s = T_f \quad \text{et} \quad -\lambda_s \nabla T_s . n_s = \lambda_f \nabla T_f . n_s \quad \text{sur } \partial\Omega_{sf} \tag{3.33e}$$

$$T_s - T_f \to 0 \text{ et } T_s \to T_{ref} \qquad \text{quand } \|\boldsymbol{r}\| \to \infty \tag{3.33f}$$

$$T_s = T_f = T_{ref} \quad \text{à} \quad t = 0 \qquad \text{pour } \Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \tag{3.33g}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le vecteur position, $\boldsymbol{n_s}$ est le vecteur local unité à l'interface solide / fluide (dirigé vers l'extérieur du solide), T_{ref} est la température de référence qui est égale à la température (uniforme) initiale et à la température aux frontières du milieu infini. Naturellement, afin de fermer complètement le problème, il est nécessaire d'ajouter les conditions limites et initiales sur la pression et/ou la vitesse. La réduction des équations suivantes peut être faite en utilisant une échelle locale de longueur, ici le diamètre moyen d des pores ou des grains, une vitesse moyenne de référence v_∞, et une différence de température de référence ΔT_{ref}. Les nouvelles quantités sans dimension sont alors:

$$r^* = r/d; \quad v^* = v/v_\infty; \; t^* = v_\infty t/d; \quad \hat{p}^* = \hat{p}/\rho_f v_\infty^2$$
$$T^* = (T - T_{ref})/\Delta T_{ref}; \quad s^*_{sou\,f} = d\, s_{sou\,f} \Big/ \left(\left(\rho c_p\right)_f v_\infty \Delta T_{ref}\right) \tag{3.34}$$

Les équations (3.33) deviennent:

$$\nabla^* . v^* = 0 \qquad \text{sur } \Omega^*_f \tag{3.35a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} = -\nabla^* \hat{p}^* + \frac{1}{Re}\nabla^{*2} v^* \quad \text{sur } \Omega^*_f \tag{3.35b}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_f^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T_f^*}{\partial t} + v^*.\Delta T_f^* = \frac{1}{Re\,Pr}\nabla^*.\nabla^* T_f^* + s_f^* \quad \text{sur} \quad \Omega_f^* \tag{3.35c}$$

$$\frac{\partial T_s^*}{\partial t^*} = \frac{1}{Re\,Pr}\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_s}\frac{\lambda_s}{\lambda_f}\nabla^*.\nabla^* T_s + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_s} s_s^* \quad \text{sur } \Omega_s^* \tag{3.35d}$$

$$T_s^* = T_f^* \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda_s}{\lambda_f}\nabla^* T_s^*.n_s = \nabla T_f^*.n_s \quad \text{sur } \partial\Omega_{sf}^* \tag{3.35e}$$

$$T_s^* - T_f^* \to 0 \quad \text{et} \quad T_s^* \to 0 \qquad \|r^*\| \to \infty \tag{3.35f}$$

$$T_s^* = T_f^* = 0 \quad \text{à} \quad t^* = 0 \qquad \text{avec } \Omega^* = \mathrm{R}^3 = \Omega_f^* \cup \Omega_s^* \tag{3.35g}$$

avec Re_d (= $v_\infty d / \nu_f$) et Pr $\left(=(\rho c_p)_f \nu_f / \lambda_f\right)$ les nombres de Reynolds et de Prandtl. La solution des équations (3.35) peut s'écrire alors sous la forme :

$$T^*(r^*,t^*) = \int_{t'^*=0}^{\infty}\int_{r'^*\in\Omega^*} f_{loc}\left(r^*, t^* \middle| r'^*, t'^*;\, Re_d,\, Pr,\, \lambda_s/\lambda_f,\, (\rho c_p)_s \big/ (\rho c_p)_f\right) s_{loc}^*(r'^*, t'^*)\,\mathrm{d}V^*(r'^*)\,\mathrm{d}t'^* \tag{3.36}$$

où $\quad T^* = T_f^* \quad$ et $\quad s_{loc}^* = s_f^* \quad$ si $\quad r^* \in \Omega_f^*$

et $\quad T^* = T_s^* \quad$ *et* $\quad s_{loc}^* = s_s^* \quad$ si $\quad r^* \in \Omega_s^*$

Le volume réduit élémentaire est ici $\mathrm{d}V^* = \mathrm{d}V / d^3$.

L'équation (3.36) montre que la température réduite peut être calculée à l'aide d'une intégration sur l'espace et le temps du produit de la source de chaleur réduite et de la fonction locale, qui est la fonction de Green correspondante du système. Ceci provient du fait que le problème de mécanique des fluides(3.35 a-b avec ses conditions limites et initiales), non linéaire, peut être résolu en terme de champ réduit de vitesse, qui peut être considéré comme un coefficient non-uniforme dans le système linéaire d'équation de la chaleur (3.35 c à g).

Dans notre cas, tous les coefficients thermophysiques sont constants, ce qui signifie que l'intégrale sur le temps peut devenir un produit de convolution (système invariable en temps). La définition de la température enthalpique moyenne du modèle à une température peut alors être écrite:

$$\langle T\rangle(r,t) = T_{ref} + \Delta T_{ref}\langle T^*\rangle = T_{ref} + \frac{\Delta T_{ref}\, d^3}{(\rho c_p)_t V(r,D)}\int_{V^*(r,D)} \rho c_p(r'')\, T^*(r''^*, t^*)\,\mathrm{d}V^*(r''^*) \tag{3.37}$$

ou en utilisant l'équation (3.36) :

$$\langle T\rangle(r,t) = T_{ref} + \frac{\Delta T_{ref}\, d^3}{(\rho c_p)_t V(r,D)}\int_{r''^*\in V^*(r,D)} \rho c_p(r'')\int_{t'^*=0}^{\infty}\int_{r'^*\in\Omega^*} f_{loc}\left(r''^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\beta}\right)$$
$$s_{loc}^*(r'^*, t'^*)\,\mathrm{d}V^*(r'^*)\,\mathrm{d}t'^*\,\mathrm{d}V^*(r''^*)$$

(3.38)

où $\boldsymbol{\beta} = \left(Re_d, Pr, \lambda_s / \lambda_f, (\rho c_p)_s / (\rho c_p)_f\right)$ est un vecteur regroupant les quatre paramètres qui sont des arguments de f_{loc}. En changeant l'ordre d'intégration dans (3.38), on obtient :

$$\langle T \rangle (r,t) = T_{ref} + \Delta T_{ref} \int_{t'^*=0}^{\infty} \int_{r'^* \in \Omega^*} \frac{d^3}{\left(\rho c_p\right)_t (r) V(r,D)} \int_{r''^* \in V^*(r,D)} \rho c_p (r'') f_{loc}\left(r'''^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \beta\right) s^*_{loc}(r'^*, t'^*) \, \mathrm{d}V^*(r'''^*) \, \mathrm{d}V^*(r'^*) \, \mathrm{d}t'^* \tag{3.39}$$

Nous introduisons maintenant une nouvelle réduction du modèle (3.3) dont la solution est $\langle T \rangle$. Nous utilisons une longueur caractéristique D du problème macroscopique, la même vitesse de référence v_∞, et la même différence de température de référence. Les nouveaux paramètres adimensionnés sont :

$$r^\circ = r / D = (d/D)\, r^*; \; u_D^\circ = u_D / v_\infty; \quad t^\circ = v_\infty t / D = (d/D)\, t^*$$
$$\langle T \rangle^\circ = \left(\langle T \rangle - T_{ref}\right) / \Delta T_{ref}; \quad s^\circ = Ds \Big/ \left[\left(\rho c_p\right)_f v_\infty \Delta T_{ref}\right] = (D/d) \; s^* \tag{3.40}$$

où s^* correspond à la même normalisation que s^*_{loc}, s^*_f et s^*_s.
Avec cet nouvel adimensionnement, il est possible d'écrire l'équation (3.3) sous la forme :

$$\frac{\partial \langle T \rangle^\circ}{\partial t^\circ} = \nabla^\circ \left(\frac{1}{\left(\rho c_p\right)_t v_\infty D} \boldsymbol{\lambda} \quad \nabla^\circ \langle T \rangle^\circ \right) - \frac{\left(\rho c_p\right)_f}{\left(\rho c_p\right)_t} \boldsymbol{u_D^\circ} \nabla^\circ \langle T \rangle^\circ + s^\circ \tag{3.41}$$

Nous exprimons la solution de cette équation sous la forme :

$$\langle T \rangle (r,t) = T_{ref} + \Delta T_{ref} \int_{t'^\circ=0}^{\infty} \int_{\Omega^\circ} k_{moy}\left(r^\circ, t^\circ \middle| r'^\circ, t'^\circ; u_D^\circ, \alpha\right) s^\circ(r'^\circ, t'^\circ) \, \mathrm{d}V^\circ(r'^\circ) \, \mathrm{d}t'^\circ \tag{3.42}$$

avec :
$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{\left(\rho c_p\right)_t v_\infty D} \boldsymbol{\lambda}, \left(\rho c_p\right)_f \Big/ \left(\rho c_p\right)_t \right) \tag{3.43}$$

avec comme volume élémentaire $\mathrm{d}V^\circ = \mathrm{d}V / D^3$, k_{moy} étant alors la fonction de Green associée.

Il est alors possible d'utiliser les mêmes arguments que dans l'équation (3.39):

$$\langle T\rangle(r,t) = T_{ref} + \Delta T_{ref} \int_{t'^*=0}^{\infty} \int_{\Omega^*} \frac{d^3}{D^3} k_{moy}\left(\frac{d}{D}r^*, t^* \middle| \frac{d}{D}r'^*, \frac{d}{D}t'^*; \overset{\circ}{u}_D, \boldsymbol{\alpha}\right) \; s^*(r'^*, t'^*)\,\mathrm{d}V \quad (r'^*)\,\mathrm{d}t'^* \tag{3.44}$$

ou

$$\langle T\rangle(r,t) = T_{ref} + \Delta T_{ref} \int_{t'^*=0}^{\infty} \int_{\Omega^*} m_{moy}\left(r^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\gamma}\right) s^*(r'^*, t'^*)\,\mathrm{d}V \quad (r'^*)\,\mathrm{d}t'^* \tag{3.45}$$

avec: $m_{moy} = \frac{d^3}{D^3} k_{moy}\left(\frac{d}{D}r^*, t^* \middle| \frac{d}{D}r'^*, \frac{d}{D}t'^*; \overset{\circ}{u}_D, \boldsymbol{\alpha}\right)$ et $\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{u_D}{v_\infty}, \frac{d}{D}, \boldsymbol{\alpha}\right)$.

La comparaison des équations (3.45) et (3.39), qui donnent la même température moyenne, si l'on suppose le modèle à une température applicable permet d'écrire :

$$m_{moy}\left(r^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\gamma}\right) s^*(r'^*, t'^*) = \frac{d^3}{\left(\rho c_p\right)_t (r)\, V(r,D)} \int_{r''^* \in V^*(r,D)} \rho c_p(r'') \quad f_{loc}\left(r''^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\beta}\right) s^*_{loc}(r'^*, t'^*)\,\mathrm{d}V^*(r''^*) \tag{3.46}$$

On peut également écrire cette équation sous la forme dimensionnelle :

$$\frac{s(r',t')}{s_{loc}(r',t')} = \frac{\int_{r'' \in V(r,D)} \rho c_p(r'') \quad f_{loc}\left(r''^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\beta}\right) \mathrm{d}V\,(r'')}{\left(\rho c_p\right)_t (r) \quad V(r,D) \quad m_{moy}\left(r^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\gamma}\right)} \tag{3.47}$$

Le membre de gauche de cette équation doit être égal à l'unité puisque les intégrales sur n'importe quel volume et sur n'importe quel intervalle de s et de s_{loc} doivent être égale, si le modèle à une-température est applicable. Par conséquent, on peut écrire l'identité suivante:

$$m_{moy}\left(r^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\gamma}\right) = \int_{r'' \in V(r,D)} \frac{\rho c_p(r'')}{\left(\rho c_p\right)_t (r)} \quad f_{loc}\left(r''^*, t^* \middle| r'^*, t'^*; \boldsymbol{\beta}\right) \frac{\mathrm{d}V(r'')}{V(r,D)} \tag{3.48}$$

Il est intéressant d'étudier cette expression dans le cas d'un écoulement piston (dans la direction x) dans un milieu poreux homogène. Dans cette configuration, la vitesse de filtration u_D est uniforme et égale à la vitesse de référence v_∞ ($\overset{\circ}{u}_D = u_D / v_\infty = x$ dans $\boldsymbol{\gamma}$). Par conséquent la vitesse de filtration réduite $\overset{\circ}{u}_D$ peut être remplacée dans l'expression (3.48). En outre nous supposons ici que le milieu poreux est homogène, ce qui signifie que les fractions volumiques locales (et la porosité ε), les trois capacités volumétriques de l'équation (3.1), ainsi que les conductivités du solide et du fluide, ne changent pas dans l'espace. En conséquence, les différentes composantes du vecteur paramètre $\boldsymbol{\gamma}$ dans le membre de gauche de (3.48)

dépendent des différentes composantes du vecteur paramètre $\boldsymbol{\beta}$ présent dans son membre de droite :

$$\frac{1}{\left(\rho c_p\right)_t v_\infty D}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{k}\left(Re_d, Pr, \lambda_s / \lambda_f, (\rho c_p)_s /(\rho c_p)_f\right) \tag{3.49}$$

où $\boldsymbol{k}$ est une fonction vectorielle, qui représente la variation des trois coefficients principaux du tenseur de dispersion. Cette fonction dépend de la forme de l'interface entre phases fluide et solide. Ceci signifie que cette fonction dépend de la structure particulière du milieu poreux et de la valeur particulière du rapport entre les différentes échelles caractéristiques *d/D*.

Nous nous intéressons plus particulièrement ici au cas où la structure du milieu granulaire est isotrope (cas d'un lit de grains sphériques ou de grains ellipsoïdes de directions principales aléatoires). Dans ce cas, si x est la direction privilégiée de l'écoulement, le coefficient de dispersion est entièrement caractérisé par la dispersion longitudinale λ_x et un unique composant transversal $\lambda_y = \lambda_z$.

Afin de faire apparaître ces deux coefficients de dispersion, on multiplie l'équation (3.49) par le nombre de Péclet $Pe_d = Re_d Pr = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f v_\infty d}{\lambda_f}$:

$$\frac{1}{\lambda_f}\frac{d}{D}\frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_t}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{k}\left(Re_d, Pr, \lambda_s / \lambda_f, (\rho c_p)_s /(\rho c_p)_f\right) \tag{3.50}$$

ou encore

$$\lambda_{x\,ou\,y} / \lambda_f = g_{x\,ou\,y}\left(Re_d, Pr, \lambda_s / \lambda_f, (\rho c_p)_s /(\rho c_p)_f, d / D\right) \tag{3.51}$$

Nous considérons que le rapport *d/D* (idéalement égal à zéro) est suffisamment petit pour disparaître dans l'expression du rapport $\lambda_{x\ \mathrm{ou}\ y} / \lambda_f$. L'équation (3.51) devient alors :

$$\lambda_{x\,ou\,y} / \lambda_f = g_{x\,ou\,y}\left(Re_d, Pr,\ \lambda_s / \lambda_f, (\rho c_p)_s /(\rho c_p)_f\right) \tag{3.52}$$

La fonction g représente alors la corrélation qui doit être cherchée pour corréler les coefficients de dispersion thermique. Ses arguments dépendent de la vitesse de filtration, de la viscosité du fluide et des propriétés thermiques de la phase fluide et solide. Cependant, a priori, cette fonction doit être changée si la structure du milieu granulaire est changée (changement de granulométrie ou changement de la forme des grains).

On peut bien évidemment mettre en évidence ces mêmes nombres caractéristiques dans l'équation (3.11) de la réponse à la source linéique :

$$\Delta T\left(x,y,t\right) = \frac{Q\sqrt{Pe_x\, Pe_y}}{4\ \pi\left(\rho\ \ c_p\right)_f\ \ u_D\ \ d}\ e^{\frac{Pe_x\, x^\circ}{2}} \int_0^{\frac{(\rho\, c_p)_f}{(\rho\, c_p)_t}\frac{Pe_x\, t^\circ}{4}} e^{-\left(Pe_x^2\, x^{\circ 2} + Pe_y Pe_x\, y^{\circ 2}\right)\frac{1}{16\theta} - \theta}\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} \tag{3.53}$$

avec $Pe_x = \dfrac{(\rho c_p)_f u_D d}{\lambda_x}$ et $Pe_y = \dfrac{(\rho c_p)_f u_D d}{\lambda_y}$

Cet adimensionnement nous permet de constater que nous devons trouver des corrélations incluant ces différents paramètres. Le nombre adimensionnel choisi dépend surtout des régimes dans lesquels nous travaillons ; pour un régime de Darcy, le nombre de Péclet est le plus approprié. Par contre pour le régime inertiel et pour une comparaison de différents fluides, le nombre de Reynolds est le plus adéquate.
Evidemment, nous devons avoir, si notre corrélation est prolongeable jusqu'à une vitesse nulle $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{eq}$ pour $Re_d = 0$.

Les corrélations seront donc en fonction du nombre de Reynolds et de la conductivité équivalente du milieu qui dépend de la porosité et des rapports de conductivité des deux phases solide et fluide.

Nous choisissons donc la forme suivante pour les corrélations donnant les coefficients de dispersion :

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A_\alpha \mathrm{Re}^{B_\alpha} \tag{3.54}$$

Enfin, afin de trouver une corrélation unique entre différents fluides et différents solides, on pourra pondérer le coefficient de dispersion, non pas par la conductivité du fluide (qui est spécifique à chaque fluide) mais par la conductivité équivalente du milieu qui dépend de la porosité et des rapports de conductivité des deux phases solide et fluide.

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{eq}} = 1 + \frac{\lambda_f}{\lambda_{eq}} A_\alpha \mathrm{Re}^{B_\alpha} \tag{3.55}$$

Chapitre 4 : Résultats expérimentaux et interprétation

Nous allons présenter et discuter les résultats expérimentaux. Nous détaillerons d'abord le pré-traitement des signaux. Nous montrerons ensuite les résultats obtenus avec le système air / billes de verre puis ceux obtenus dans le cas air / support de catalyseur. Finalement, nous présenterons les résultats obtenus dans le cas d'un milieu granulaire constitué de billes de verre polydisperses.

4.1 - Pré-traitement des signaux

Afin de disposer d'un signal exploitable pour une inversion ultérieure, il est nécessaire d'effectuer au préalable un prétraitement des thermogrammes bruts obtenus. La Figure 4.1 montre un exemple de thermogrammes bruts pour le couple air / billes de verre. Le thermocouple 14 a été ajouté dans la conduite cylindrique d'air en amont du lit. Ces thermogrammes doivent être traités pour que toutes les températures soient égales à l'instant initial.

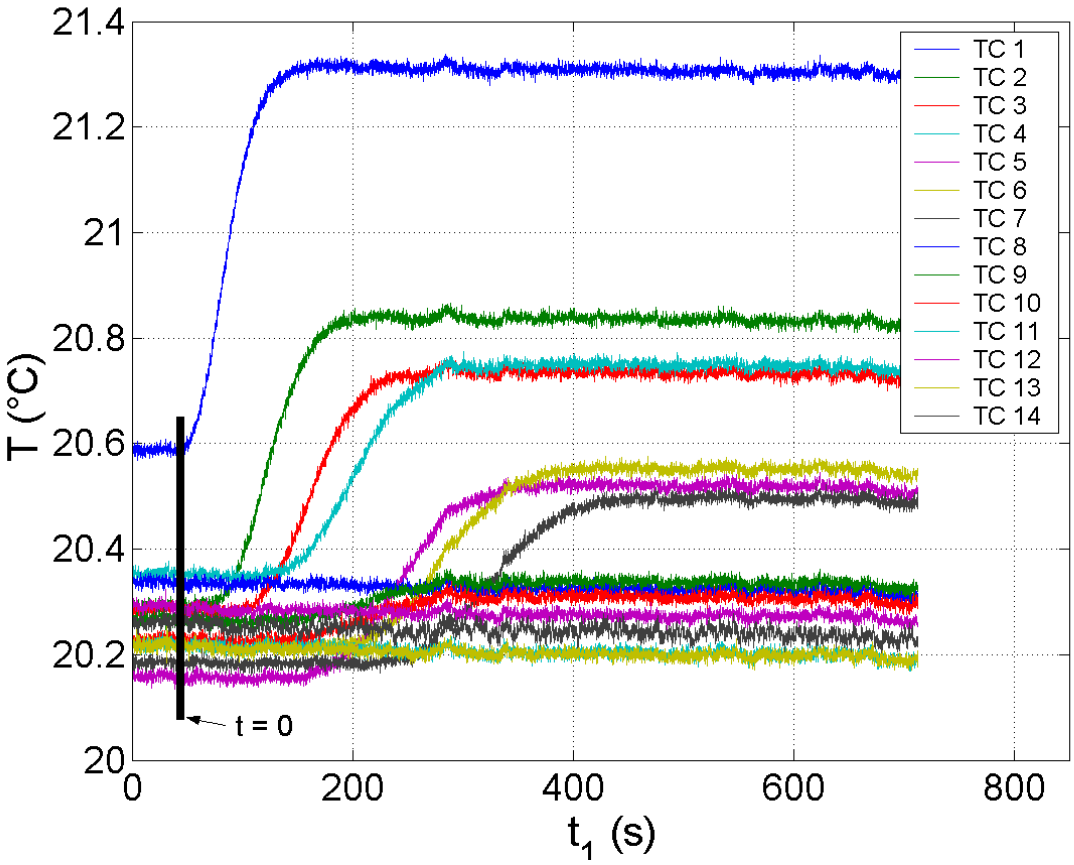


Figure 4.1 : *Températures brutes*

Nous avons donc effectué des corrections de dérive et d'offset adaptées, corrections qui sont détaillées en Annexe 2. Les thermogrammes ainsi traités sont présentés sur la Figure 4.2.

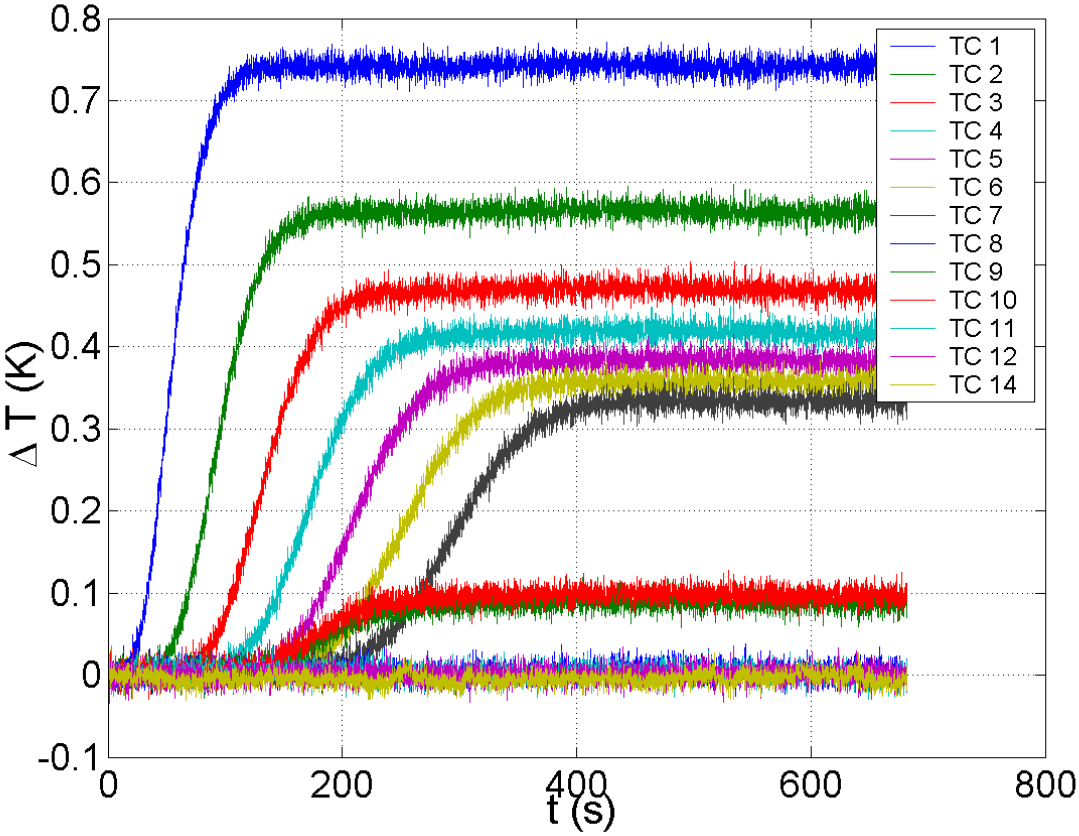


Figure 4.2 : *Températures corrigées (données de la Figure 4.1)*

4.2 - Système air / bille de verre

4.2.1 - Résultats en mode α_4 pour les thermocouples sur l'axe (y^{nom}=0)

Nous montrons les résultats obtenus avec ce mode (mesures sur l'axe) en Figure 4.3.a. Les thermogrammes théoriques (thermocouples 2 à 7) s'ajustent bien aux thermogrammes expérimentaux mesurés avec l'écoulement d'air. Un léger décalage entre courbes théoriques et expérimentales est cependant visible. Il est mis en évidence sur les résidus (T_{exp} - T_{th}). Le problème de la signature des résidus est dû à la non-estimation de la position y_i. Les résultats confirment l'observation de T.Metzger : il est nécessaire d'estimer les positions en x et en y. L'affichage dense des résidus est dû à l'acquisition qui se fait à une fréquence de 8 points par seconde.

4.2.2 - Résultats expérimentaux en mode α_5 pour les thermocouples hors axe (y^{nom} = 2,5 mm)

Les mêmes types de thermogrammes sont représentés en mode α_5 (Figure 4.3.b). Les résidus sont très faibles. Ils sont proches du bruit de mesure et ne contiennent pas de structure visible à l'exception d'une petite perturbation qui correspond à un biais de l'ordre de 0,02 K, maximum au début de la phase de montée de chaque thermogramme. Cette perturbation est trop forte pour être imputée au déséquilibre entre phases (cf. section 3.5). Il pourrait s'agir d'un effet d'inertie thermique du fil métallique chauffant.

Nous calculons donc le temps de réponse du fil. Pour le calcul, nous avons besoin d'un coefficient de transfert thermique *h*. Nous utilisons des corrélations de la littérature [Kreith, 1973] basées sur le nombre de Nusselt dans le cas de la convection forcée:

$$Nu = \frac{h_{fil}\, d_{fil}}{\lambda_f} = 0,90\, Re^{0,385} Pr^{0,31} \quad \text{pour } 4 \langle Re \langle 70 \tag{4.1}$$

Le nombre de Prandlt de l'air est égal à 0,7. La vitesse de Darcy utilisée est celle correspondant à un nombre de Péclet de 30 soit un nombre de Reynolds de 43. On obtient donc un coefficient : $h_{fil} = 342,85$ W.m^{-2}.K^{-1}. Le temps de réponse du fil de longueur *w* se calcule alors grâce à l'équation d'un petit corps :

$$\pi R_{fil}^2 \left(\rho c_p\right)_{fil} w \frac{\mathrm{d}T_{fil}}{dt} = -2\pi R_{fil}\, h_{fil}\, w\left(T_{fil} - T_\infty\right) \tag{4.2}$$

D'où le temps caractéristique :

$$\tau_{fil} = \frac{\left(\rho c_p\right)_{fil} R_{fil}}{2\, h_{fil}} \tag{4.3}$$

avec $\left(\rho c_p\right)_{fil} \cong 3.10^6$ J.K^{-1}.m^{-3} et R_{fil} = 130 µm, on trouve un « temps d'inertie thermique » égal à *0,57 s*. Ce temps est très faible et ne peut visiblement pas expliquer la petite perturbation visible sur les Figures 4.3. La signature des résidus provient donc d'autre chose ; celle-ci n'est pas due à une variation de ρ_f et donc de $\left(\rho c_p\right)_f$ avec la température ambiante du jour de mesure (de l'ordre de 0,3 % par degré Celsius) car ce paramètre est complètement corrélé avec la vitesse de Darcy qui est estimé par ailleurs.
Une autre explication peut être recherchée dans un éventuel effet résiduel de paroi, le fil chauffant de surface rigoureusement non nulle peut générer de très légères survitesses dans l'écoulement aval.

Le modèle arrive donc à bien décrire la mesure, ce qui n'exclut pas pour autant le biais sur les paramètres estimés. Les thermogrammes sont ici présentés pour les billes de 2 mm, les profils sont identiques pour des billes de 3 mm.

La Figure 4.4 montre les positions estimées en deux dimensions pour des vitesses différentes. La position nominale est indiquée pour chaque thermocouple. Une bille a été dessinée pour donner l'échelle. Sur les six positions des sondes, une seule s'éloigne de sa

position nominale (la dernière). Les résultats d'estimation des positions sont distribués quasi-uniformément dans les 4 cadrans. Cela semble indiquer que la variation estimée de la position des soudures par rapport à leurs positions nominales est isotrope, ce qui est normal et correspond bien aux simulations de la section 3.3. On constate que la position estimée d'un thermocouple varie au maximum d'un diamètre de billes (2 mm). Par contre, cette position peut-être très proche de la position nominale, ce qui est le cas du thermocouple 6.

Les estimations des coefficients de dispersion longitudinal et transversal sont tracées en fonction du nombre de Péclet estimé pour les billes de 2 et de 3 mm sur la Figure 4.6. On constate que les points correspondant aux diamètres de 2 mm et de 3 mm s'intercalent parfaitement. Les coefficients de dispersion thermique ne semblent pas dépendre de la taille des billes, ce qui correspond à la théorie.

De plus, la composante aléatoire de l'erreur d'estimation, évaluable grossièrement à partir d'un lissage visuel, est supérieure à celle calculée par la méthode de Monte-Carlo ($\sigma_{\bar{\lambda}_x/\lambda_x} = 1\%$ et $\sigma_{\bar{\lambda}_y/\lambda_y} = 1\%$ dans le Tableau 3.5 pour $Pe \approx 35$). Ceci peut provenir des fluctuations de température ambiante qui n'ont pas été prises en compte dans le tracé de la Figure 4.6 : la conductivité de l'air varie en effet de l'ordre de 0,3 % par degré Celsius .

Cette technique permet ici d'estimer précisément la vitesse de Darcy de l'écoulement (u^{est}) qui est mesurée également par un fil chaud (u^{mes}).

Dans le cas des billes de verre de 3 mm, le rapport moyen (u^{est} / u^{mes}) est de 90% tandis que pour les billes de verre de 2 mm, on constate un rapport moyen de 80% ce qui correspond à un écart important. Une explication possible est une légère variation du débit pendant la durée de l'expérience. En effet, nous ne contrôlons que « grossièrement » le débit d'air. L'air est aspiré dans une pièce voisine au dispositif expérimental et cette aspiration peut être légèrement fluctuante (thermique, rendement). Une autre cause d'erreur est l'imprécision sur les aires de la section rectangulaire du lit de la section cylindrique de la conduite avale (cf. chapitre 2). Les différentes simulations (Monte Carlo) ont démontré que nous estimions avec une très grande précision la vitesse de Darcy, nous faisons donc ici confiance à l'estimation qui est plus précise et moins biaisée que la mesure au fil chaud (cf. section 2.2.5).

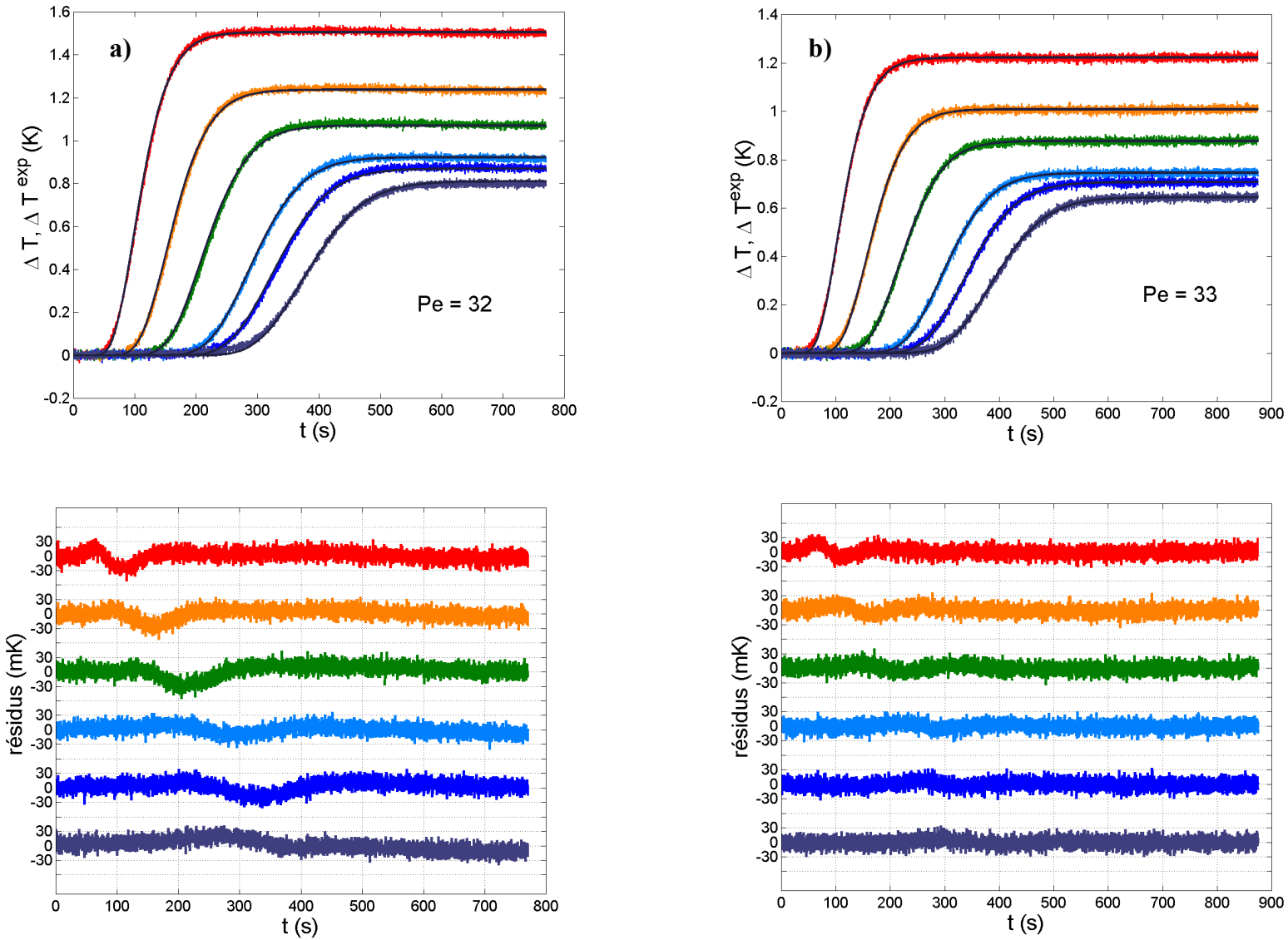


Figure 4.3 : *Températures expérimentales ΔT^{exp} et recalculées ΔT ainsi que les résidus pour le mode d'estimation α_4 (a) et α_5 (b) pour le système billes de verre / air (2 mm)*

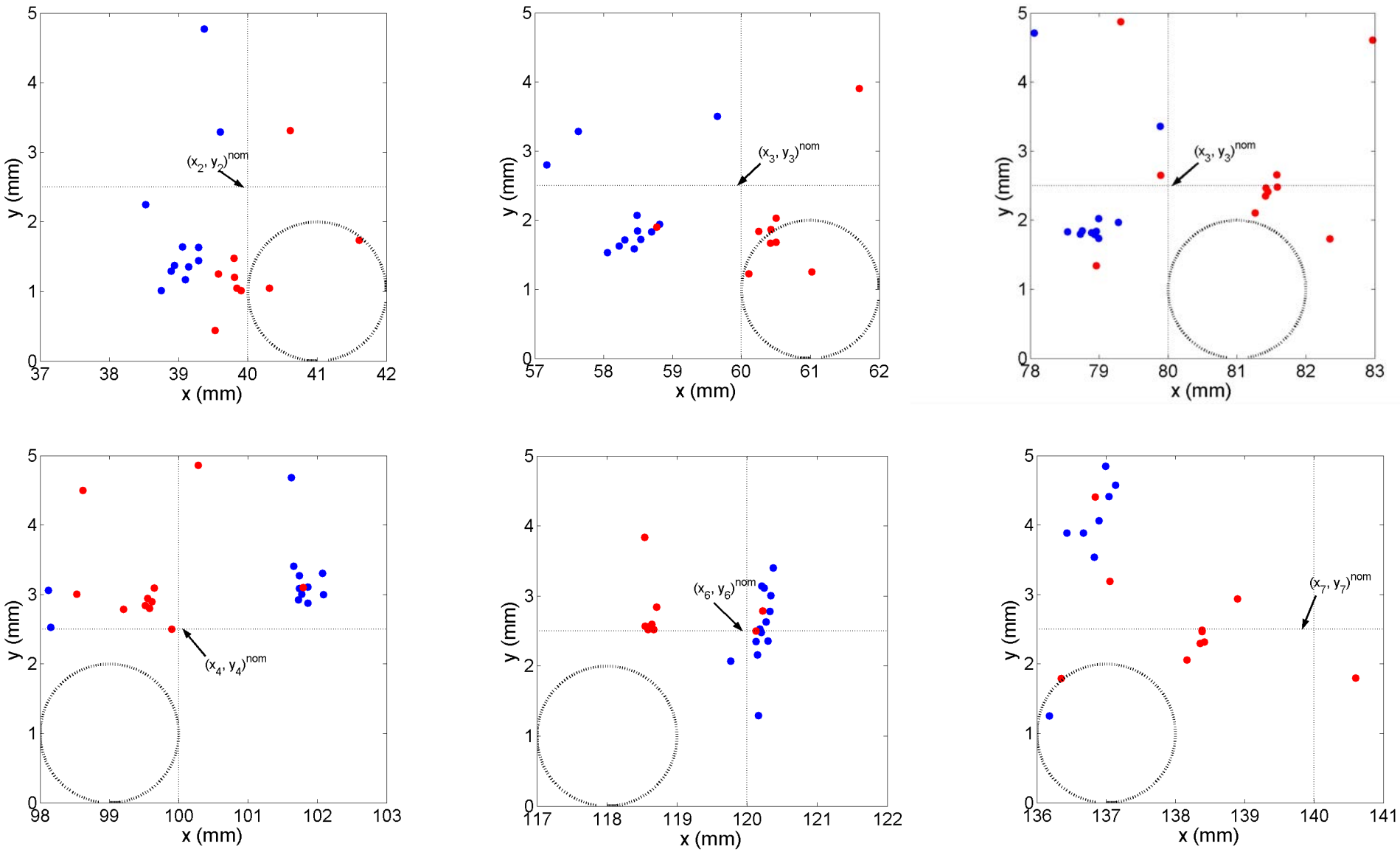


Figure 4.4 *: Positions estimées des thermocouples en mode α_5 et représentation d'une bille à l'échelle (une position est estimée par vitesse), les points bleus représentent la série 1 et les points rouges représentent la série 2*

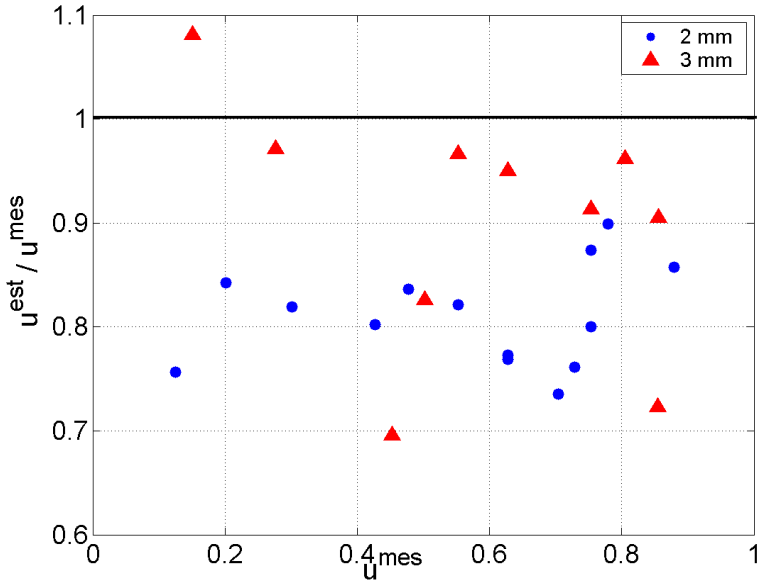


Figure 4.5 : *Estimation de la vitesse de Darcy pour des billes de verre*

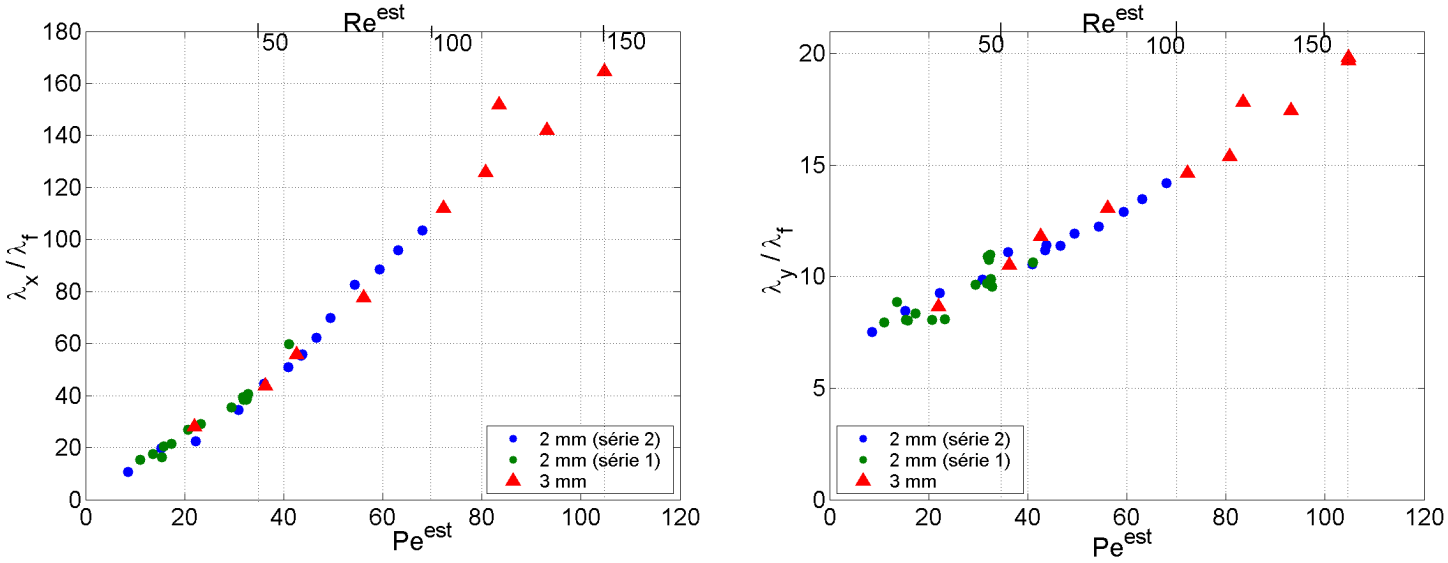


Figure 4.6 : *Résultats d'estimation des coefficients longitudinaux et transversaux de dispersion thermique*

4.2.3 - Représentation des résultats

4.2.3.1 - Coefficient de dispersion longitudinal

Nous allons essayer de chercher des corrélations, non pas en fonction du nombre de Péclet, mais en fonction du nombre de Reynolds ($Pe = Pr.Re$ avec $Pr = 0{,}7$) afin de comparer les résultats avec ceux de l'eau ($Pr = 7{,}02$) .
Nous cherchons une relation λ_x (Re) et adoptons une loi de puissance :

$$\frac{\lambda_x(Re)}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A_x\ Re^{B_x} \tag{4.4}$$

Dans cette fonction, il y a 2 inconnues : A_x et B_x. Les deux termes sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires.

Les deux paramètres A_x et B_x estimés sont fortement corrélés. Nous effectuons le calcul pour les résultats obtenus avec les billes de verre 2 et 3 mm. La relation trouvée est :

$$\frac{\lambda_x(Re)}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0{,}1259 Re^{1{,}4512} \tag{4.5}$$

avec λ_{eq} la conductivité équivalente du milieu égale à 0,2 W.m^{-1}.K^{-1}.

L'équation est représentée sur la Figure 4.7. Dans le Tableau 4.1 sont donnés les écarts types des deux paramètres A_x et B_x. Ils correspondent à une dispersion apparente $\sigma_{\lambda_x} \cong 0{,}04$ W.m^{-1}.K^{-1}

	Billes de verre
A_x	0,1259 ± 0,0002
B_x	1,4512 ± 0,0006

Tableau 4.1 : *Ecarts-types sur les paramètres d'estimation*

Nous voyons que ceux-ci sont extrêment faibles et sont probablement masqués par les causes de « bruit » sur λ_x qui peuvent provenir notamment des variations de température ambiante (effet sur la conductivité de l'air par exemple). Celles-ci constituent une cause de dispersion probablement plus forte. Nous proposons donc la corrélation suivante pour le système air / billes de verre ($Pr = 0{,}7$) :

$$\boxed{\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0{,}126\ Re^{1{,}45} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0{,}211\ Pe^{1{,}45}} \quad \text{pour } 12 < Re < 130 \tag{4.6}$$

La corrélation est valable pour des nombres de Reynolds de 12 à 130. Au-delà de cette limite seuls deux points expérimentaux correspondant aux billes de verre de 3 mm sont présents et la

corrélation reste à confirmer par d'autres mesures. Comme nous voyons que les résidus ne sont pas signés notamment aux faibles nombres de Reynolds, nous pensons qu'il est possible d'étendre cette corrélation à tout l'intervalle [0 130].

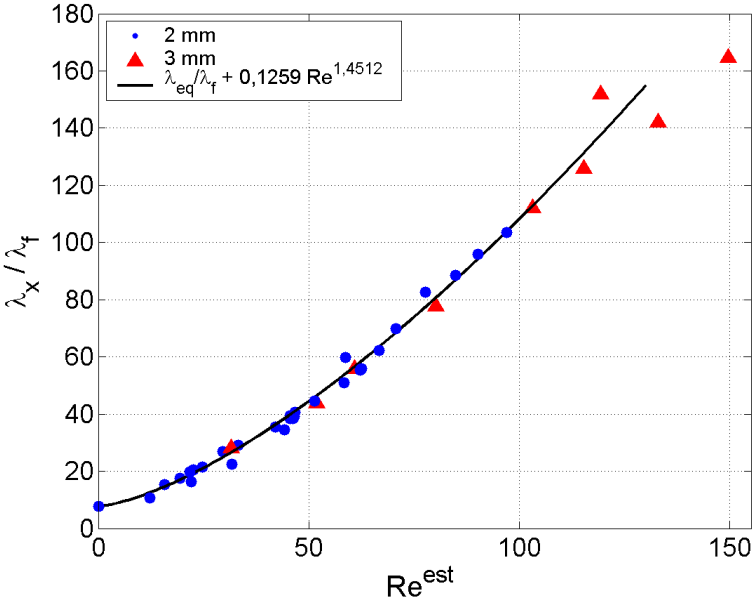


Figure 4.7 : *Résultats d'estimation pour λ_x*

Nous disposons de la corrélation établie par T.Metzger pour le même lit traversé par de l'eau :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 0,0731\, Pe^{1,59} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + 1,61\, Re^{1.59} \qquad \text{pour} \quad 0,5 < Re < 18 \qquad (4.7)$$

La conductivité équivalente est prise égale à 0,860 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Le nombre de Prandtl de l'eau à 20°C est pris égal à 7,02.

Nous avons représenté sur la Figure 4.8 les résultats pour le même solide : les billes de verre. Les résultats pour l'air et pour l'eau sont dans des gammes de Reynolds complètement différentes. Les expériences pour l'eau ont été réalisées pour des nombres de Reynolds de 0,5 à 18 ce qui correspond au régime de Darcy ou régime de Stokes. Les expériences de l'air ont été effectuées pour des nombres de Reynolds de 12 à 130, ce qui correspond au régime inertiel. Les phénomènes hydrodynamiques sont différents dans les deux cas (cf. chapitre1), les deux corrélations trouvées sont valables dans leur gamme de nombre de Reynolds ; on ne peut donc pas les comparer et les généraliser à l'ensemble des nombres de Reynolds. Il faudrait des résultats expérimentaux pour l'eau à des nombres de Reynolds supérieurs à 18 afin de comparer les deux fluides.

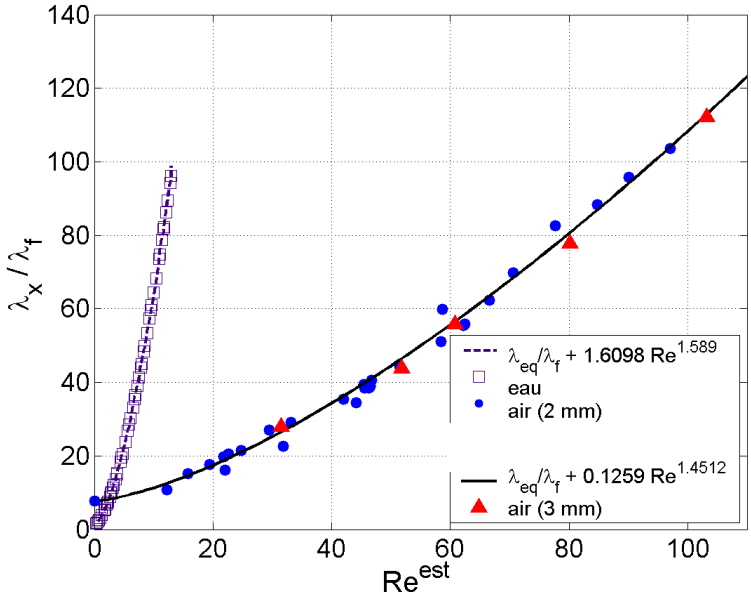


Figure 4.8 : *Résultats d'estimation et corrélation pour l'air et l'eau*

Cependant, on constate que pour un même nombre de Reynolds ($Re \approx 15$), le rapport $\frac{\lambda_x}{\lambda_f}$ pour l'eau est beaucoup plus important (10 fois plus important) que ce même rapport pour l'air. Ceci signifie que pour la même géométrie, la dispersion longitudinale est plus importante dans le cas de l'eau que dans le cas de l'air (facteur supérieur à 200 sur les λ_x). Cet écart peut-être observé sur les équations de fermeture du modèle à une température (Annexe 3).
Ainsi, à nombre de Reynolds fixé, le coefficient de dispersion dans l'air est plus faible que celui de l'eau parce que la chaleur volumique (ρc_p) de l'air est faible.

Possédant des résultats pour deux fluides différents, nous avons tenté d'établir une corrélation générale pour tous les résultats obtenus par Metzger et par nous même. Les coefficients de dispersion longitudinale ont toujours été représentés en les normant par la conductivité du fluide. Or cette représentation n'est peut-être pas judicieuse lorsque l'on a deux fluides différents en présence. Dans le chapitre 3, nous avons montré la dépendance de ce coefficient à plusieurs paramètres dont le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl, la porosité et la conductivité équivalente. Nous avons donc essayé d'intégrer tous ces paramètres pour réaliser une corrélation unique. Nous allons désormais normer le coefficient de dispersion non plus par la conductivité du fluide mais par la conductivité équivalente du milieu poreux.
Nous cherchons donc ici une loi de la forme :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{eq}\left(\varepsilon, \frac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)} = 1 + \frac{\lambda_f}{\lambda_{eq}} \varepsilon(1-\varepsilon) Re^{C_X} \left[\frac{D_x(Pr - Pr_{air}) - F_x(Pr - Pr_{eau})}{(Pr_{eau} - Pr_{air})} \right] \tag{4.8}$$

La difficulté ici est de déterminer trois paramètres. C'est pourquoi nous fixons C_x = 1,5, exposant intermédiaire entre la corrélation de l'air (1,45) et de l'eau (1,59). Nous utilisons donc, pour les deux autres paramètres, une régression à partir de tous les points expérimentaux (air et eau). Nous obtenons la corrélation suivante :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{eq}\left(\varepsilon, \frac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)} = 1 + \frac{\lambda_f}{\lambda_{eq}} \varepsilon(1-\varepsilon) Re^{1.5} \left[\frac{1.387(Pr - Pr_{air}) - 0.543(Pr - Pr_{eau})}{(Pr_{eau} - Pr_{air})} \right] \quad (4.9)$$

Remarquons que cette forme permet de retrouver les conductivités monophasiques du fluide et du solide (ε = 1 et ε = 0). Evidemment, cette corrélation ne correspond rigoureusement qu'au cas de sphères monodisperses.
Cette équation est représentée sur la Figure 4.9. La corrélation unique trouvée est valable pour les deux fluides et permet de décrire correctement le comportement des coefficients de dispersion longitudinaux.

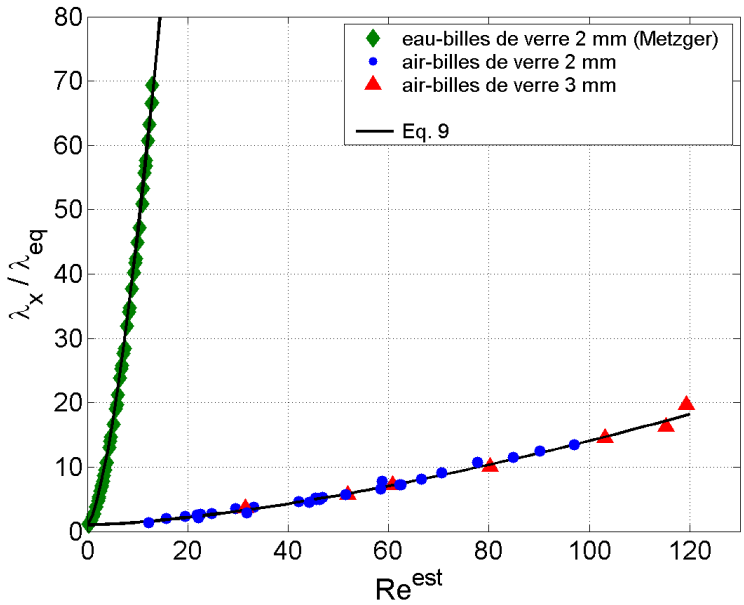


Figure 4.9 : *Coefficient de dispersion longitudinal et corrélation unique pour les différents couples*

Un dernier mode de représentation des résultats, qui fait abstraction du régime hydraulique de l'écoulement, est intéressant. Il est possible de tracer $\frac{(\lambda_x - \lambda_{eq})}{\lambda_f}$ en fonction du nombre de Péclet. Cette représentation est pertinente car elle permet de traduire les effets de vitesse. La Figure 4.10 traduit cet effet sur le coefficient de dispersion longitudinal, effet qui est ici plus important pour l'air que pour l'eau.

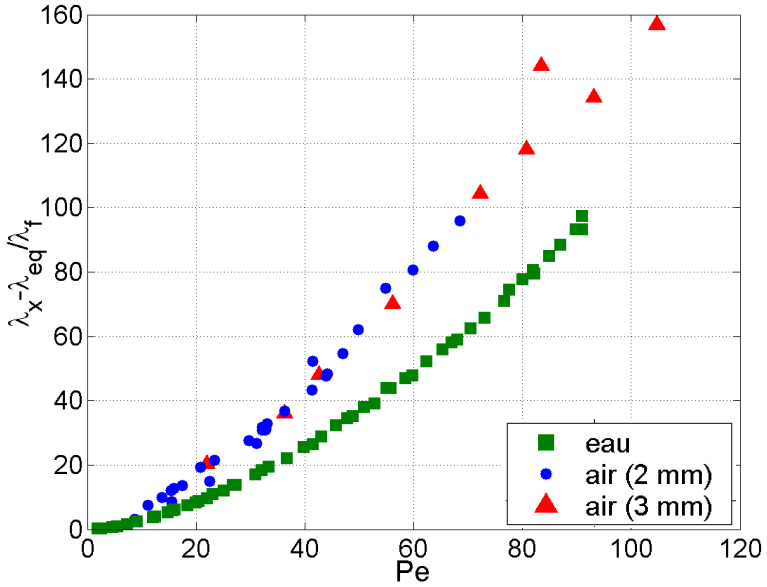


Figure 4.10 : *Représentation de* $\frac{\lambda_x - \lambda_{eq}}{\lambda_f}$ *en fonction du nombre de Péclet*

La Figure 4.11 montre nos résultats expérimentaux billes de verre / air (pour les billes de 2 mm) en fonction du nombre de Péclet comparés avec le modèle de Tsotas [Tsotas, 1990], celui de Levec et Carbonnell [Levec, 1985] et les résultats expérimentaux, pour des systèmes billes de verre / air, de Gunn [Gunn, 1974] et de Yagi et *al* [Yagi, 1960]. Nous constatons une bonne concordance de nos résultats avec les deux modèles jusqu'à un Péclet de 50. Au-delà, le modèle de Levec et Carbonnell décrit mieux nos résultats. La comparaison avec les résultas expérimentaux de Yagi, se résume en un seul point qui est cohérent mais pas significatif pour le comparer. Les résultats obtenus par Gunn ne sont pas du tout en accord avec nos résultats mais ne le sont pas non plus avec les deux autres modèles.

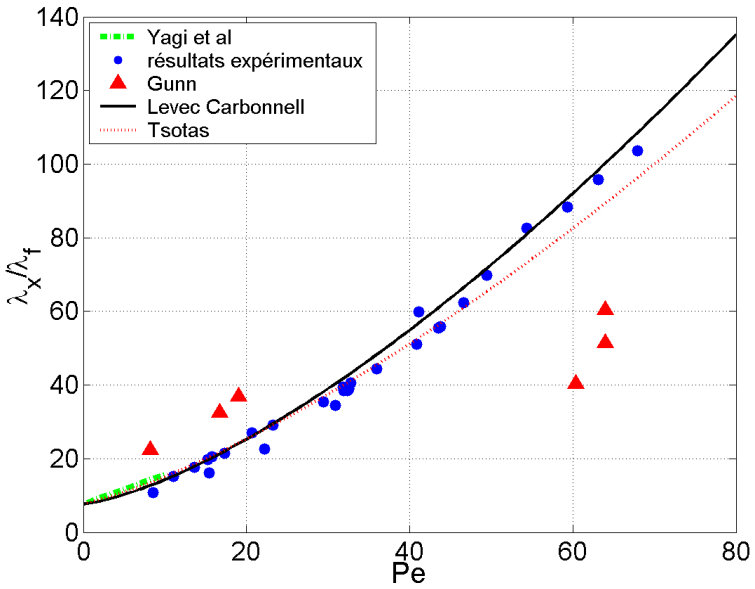


Figure 4.11 : *Comparaison de nos résultats avec la littérature*

4.2.3.2 - Coefficient de dispersion transversal

La Figure 4.12.a présente les résultats d'estimation du coefficient de dispersion transversal ainsi que le coefficient à nombre de Reynolds nul (conductivité équivalente du milieu). Les résultats d'estimation montrent clairement que nous pouvons établir une relation linéaire. Cependant cette relation ne sera valable que pour des nombres de Reynolds compris entre 12 et 130. Le comportement du coefficient transversal ne peut être décrit pour des nombres de Reynolds sur]0-12[. Cet intervalle correspond au régime de Darcy. On peut imaginer qu'à l'intérieur de cet intervalle le coefficient est quasi-constant. Cette hypothèse est justifiée par l'observation des lignes de courant en régime de Stokes qui sont insensibles à une variation de débit (cf. section 1.2.2). Il n'existe pas ou peu de dispersion hydrodynamique dans ce régime et la conductivité moléculaire est seule responsable de la dispersion. Nous avons donc établi une relation donnant le coefficient de dispersion transversal du type :

$$\frac{\lambda_y(Re)}{\lambda_f} = A_y + B_y\ Re \tag{4.10}$$

Donc pour obtenir une corrélation linéaire, il n'est pas possible de prendre $A_y = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f}$. La corrélation est la suivante :

$$\frac{\lambda_y(Re)}{\lambda_f} = 6,398 + 0,0788\,Re \qquad \text{pour } 12 < Re < 130 \tag{4.11}$$

$$\text{et} \quad \lambda_y(Re) = \lambda_{eq} \qquad \text{pour } 0 \le Re \le 12$$

A vitesse nulle ($Re = 0$), on retrouve la conductivité équivalente $\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = \frac{0,2}{0,026} \cong 7,7$.

Le Tableau 4.2 donne l'incertitude obtenue sur les paramètres estimés.

	Billes de verre
A_y	6,398 ± 0,001
B_y	0,0788 ± 0,0002

Tableau 4.2 : *Ecarts-types sur les paramètres d'estimation*

Pour la même raison que précédemment (λ_x), nous présentons notre corrélation air / billes de verre sous la forme :

$$\boxed{\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = 6,4 + 0,079\,Re = 6,4 + 0,11\,Pe} \qquad \text{pour } 16<Re<130 \tag{4.12}$$

$$\text{et} \quad \lambda_y = \lambda_{eq} \qquad \text{pour } 0 \le Re \le 16$$

Nous avons pris ici un critère de nombre de Reynolds égal à 16 et non à 12 comme précédemment pour qu'il y ait continuité sur les deux expressions de λ_y et pour que λ_{eq} constitue bien un plancher.

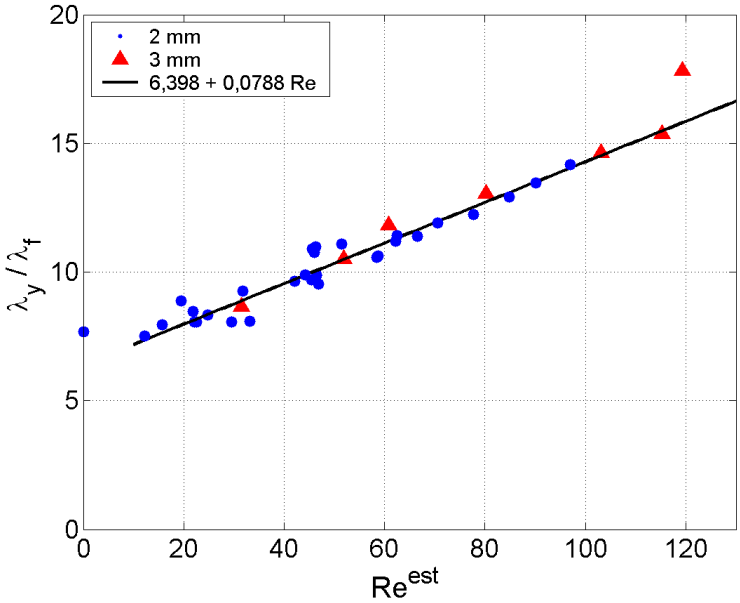


Figure 4.12.a : *Coefficient de dispersion transversal*

Nous avons placé sur la Figure 4.12.b la corrélation de Metzger obtenue pour des billes de verre avec les valeurs extrêmes et médianes de A'_y = 0,03 ; 0.04 ; 0,05 :

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_f} = \frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} + A'_y \, Pr \, Re \qquad (4.13)$$

Nous avons représenté sur la même figure, les modèles de Schlünder et Bauer et de Levec et Carbonell.
Il est manifeste que le modèle de Schlünder et Bauer surestime nos valeurs tandis que celui de Levec et Carbonell est plus proche mais avec une non-linéarité qui l'en fait s'en éloigner pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds.

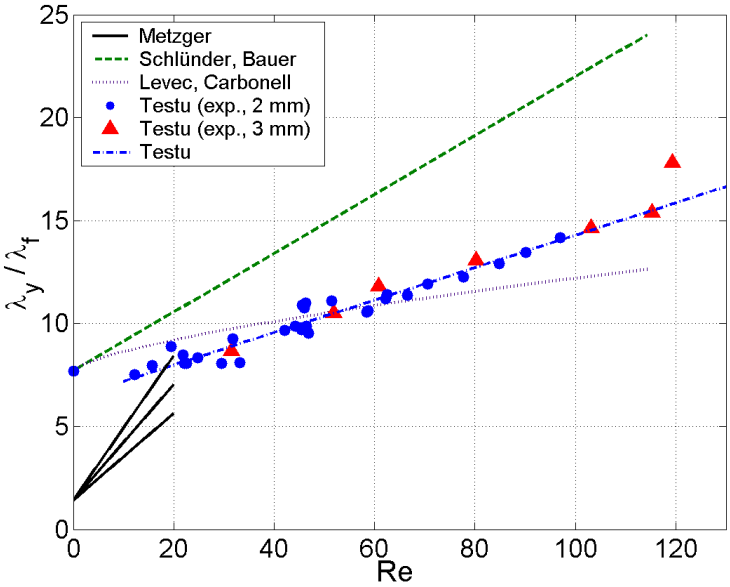


Figure 4.12.b : *Comparaison du coefficient de dispersion transversal avec la littérature*

Nous avons également présenté nos résultats sous la forme du rapport $\frac{(\lambda_y - \lambda_{eq})}{\lambda_f}$ en fonction du nombre de Péclet ainsi que ceux de T. Metzger pour l'eau sur la Figure 4.13. On constate encore que comme pour la dispersion longitudinale, l'effet de vitesse est plus important pour l'air que pour l'eau dans ce mode de représentation en fonction du nombre de Péclet.

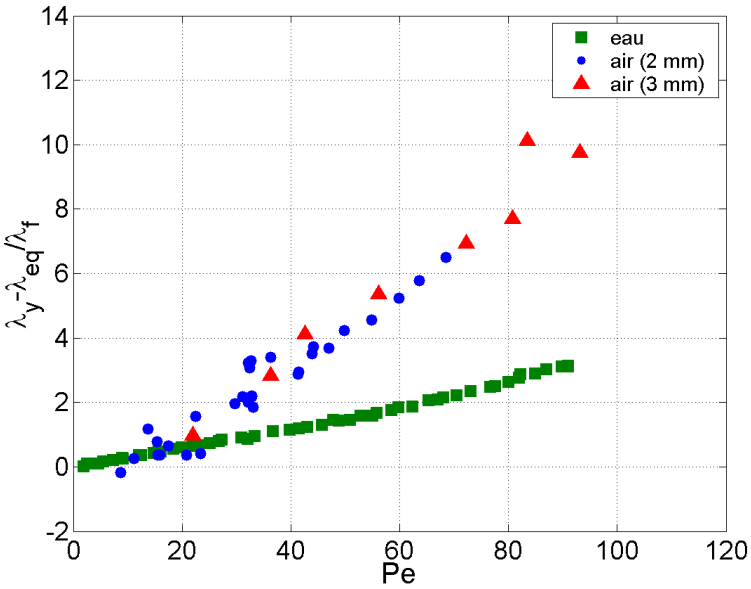


Figure 4.13 : *Représentation de* $\frac{\lambda_y - \lambda_{eq}}{\lambda_f}$ *en fonction du nombre de Péclet*

4.2.3.3 - Anisotropie

Nos résultats nous permettent d'évaluer expérimentalement l'évolution de l'anisotropie du tenseur des coefficients de dispersion thermique avec le nombre de Reynolds ou celui de Péclet. Ceci est fait sur la Figure 4.14 où le rapport $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$ est tracé en fonction du nombre de Reynolds. Il semble que ce rapport évolue linéairement aux faibles nombres de Reynolds. Par contre, il est difficile de se prononcer aux nombres de Reynolds plus élevés, du fait d'un nombre de mesures insuffisant dans cette gamme.

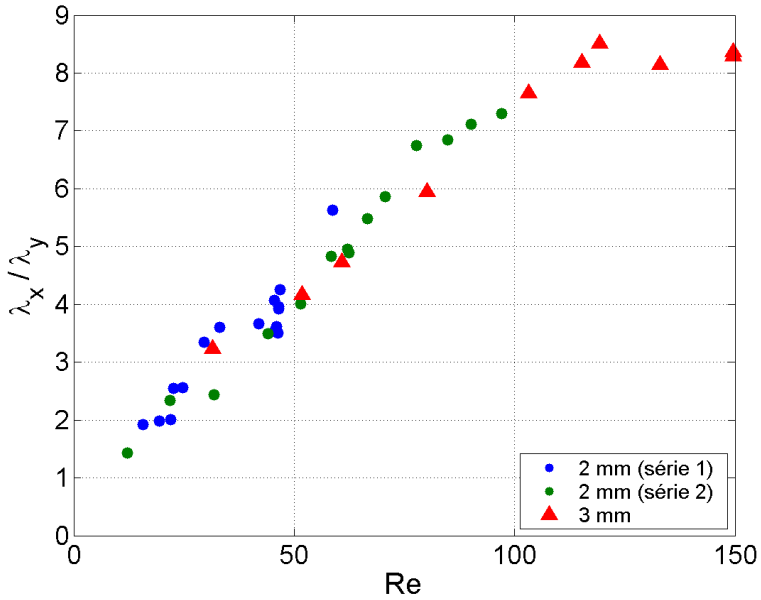


Figure 4.14 : *Anisotropie des résultats*

4.3 - Système air /support de catalyseur ou azote / support de catalyseur

4.3.1 - Problèmes rencontrés et solutions apportées

La même procédure expérimentale a été adoptée que pour le système air/billes de verre.
Les premiers résultats expérimentaux obtenus à deux dates différentes sont montrés sur les Figures 4.15.a et 4.15.b pour la totalité des thermocouples pour ce support de catalyseur traversé par de l'air.
Contrairement aux thermogrammes des billes de verre, la montée en température se fait en deux temps :

- Entre $t = 0$ et $t = 50$ à 80 s (selon la position du thermocouple), la montée en température est rapide (quasi linéaire).

- Pour les thermocouples situés le plus en aval (thermocouples 4 et supérieurs) de la source thermique, la température se stabilise sur 200 s, puis augmente à nouveau et il n'y pas de stabilisation de la température aux temps longs.

Ces formes différentes ne permettent pas d'effectuer d'inversion avec le modèle à une température. La Figure 4.16 montre l'inversion que nous avons tentée d'effectuer. On constate clairement que les températures recalculées et les températures expérimentales ne se superposent pas, le modèle à une température n'arrive pas à décrire convenablement ce qui se passe.

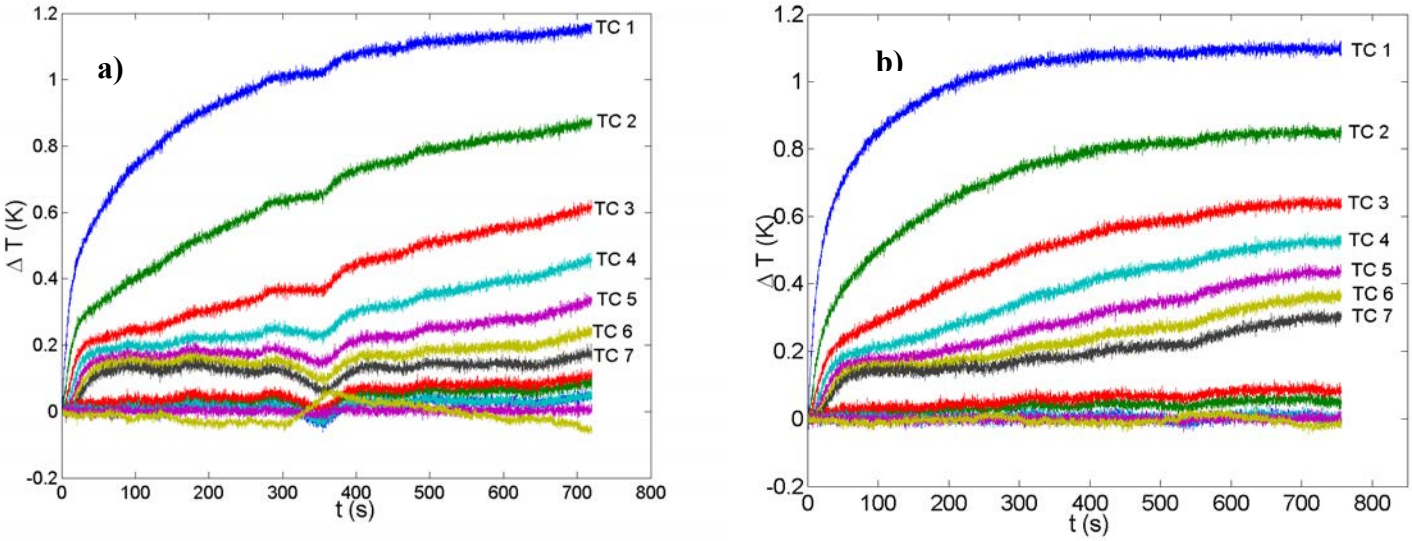


Figure 4.15 *: Températures expérimentales dans le cas air / support catalyseur : reproductibilité des mesures effectuées à des dates différentes.*

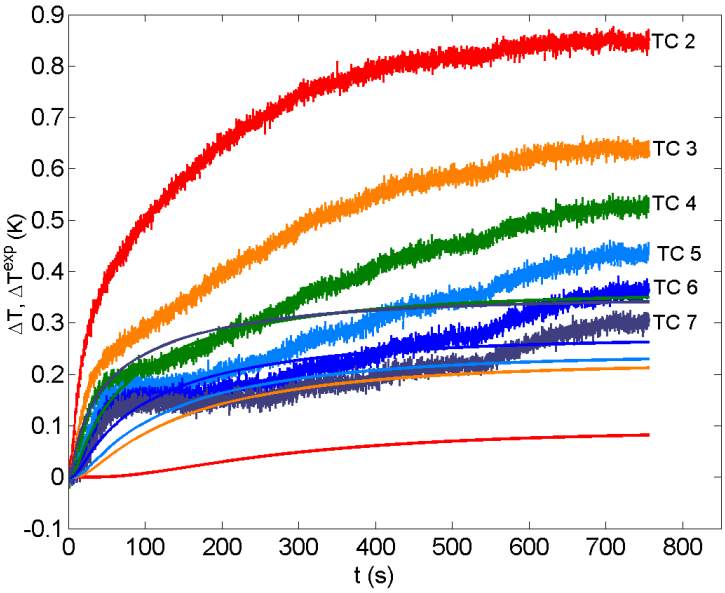


Figure 4.16 : *Thermogrammes expérimentaux et recalculés dans le cas air / support de catalyseur*

Plusieurs explications et hypothèses ont été envisagées pour expliquer ce phénomène :

- La **première** explication est liée aux propriétés thermophysiques du solide. En effet, la température mesurée par les thermocouples est plutôt celle du fluide et non la température moyenne enthalpique de notre modèle. Un éventuel écart de température entre phases solide et fluide pourrait expliquer nos réponses. Cette hypothèse provenant du calcul des temps caractéristiques effectué au chapitre 2 et qui montre que le temps caractéristique de la phase solide peut-être limitant. La mise en œuvre d'un modèle analytique à deux températures (cf. chapitre 3) pour différencier les deux températures et calculer exactement les temps de réponse dans chacune des phases est très instructive. La différence n'est visible que pour un solide ayant une conductivité thermique très faible. Cette explication n'est donc pas envisageable ici.

  Nous avons également réalisé une expérience pour comparer les températures des deux phases. Nous avons inséré dans un grain de catalyseur un thermocouple de 50 µm de diamètre et avons positionné un second thermocouple à 1 mm de la surface du grain. L'expérience s'est faite à l'air ambiant et nous avons excité l'ensemble à l'aide d'un sèche-cheveux. L'excitation n'est certes pas identique à celle que l'on utilise dans notre modèle mais cela nous a permis de comparer les deux thermogrammes. Les Figures 4.17 a et 4.17.b montrent les deux températures. Le signal est évidemment plus bruité pour le thermocouple se trouvant à l'extérieur qui est soumis à la turbulence générée par le débit d'air. On constate que les signaux sont identiques en régime permanent si l'on ne considère que les échauffements depuis le début du chauffage. Un écart de l'ordre du degré Celcius apparaît entre 50 et 100 s (aux temps courts). Ce décalage peut-être lié au fait que le thermocouple extérieur ne touche pas la surface du grain.

Il aurait été intéressant d'insérer l'ensemble du dispositif (en collant le thermocouple « extérieur » sur la surface du grain) dans le lit mais nous aurions été confrontés à l'incertitude sur la position relative des deux soudures.

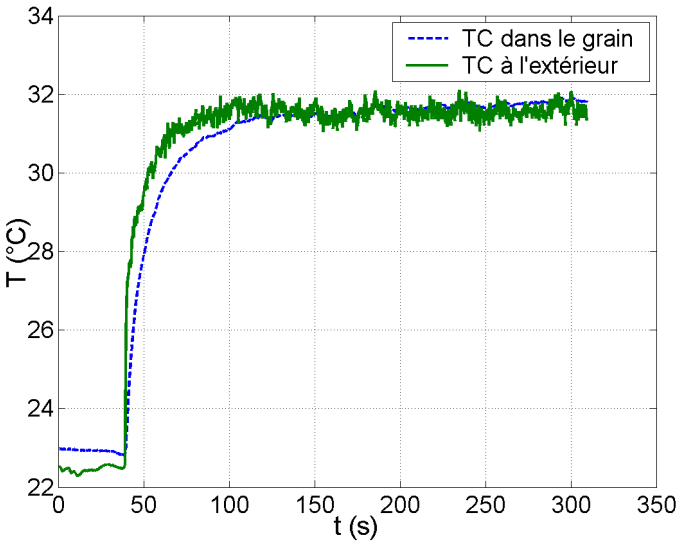


Figure 4.17 a : *Thermogrammes expérimentaux*

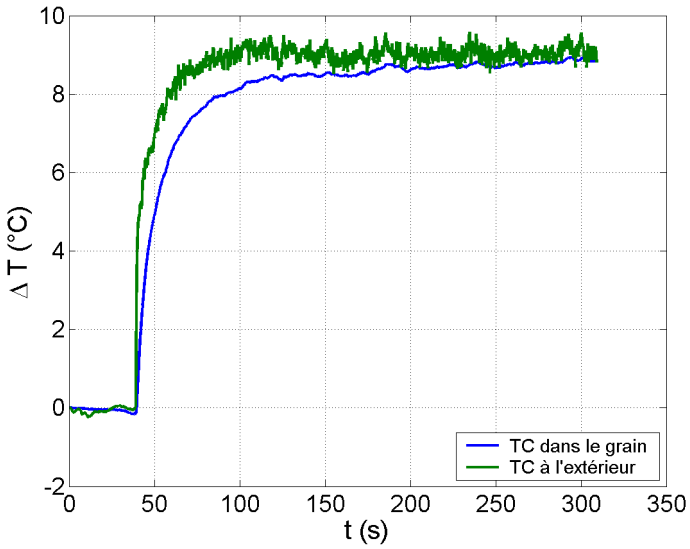


Figure 4.17 b : *Thermogrammes expérimentaux*

➢ La **deuxième** explication est une augmentation des pertes de charges durant les expériences qui pourrait induire une variation de la vitesse de Darcy. Nous avons donc mesuré les pertes de charges lors des expériences. Nous avons percé deux orifices à l'entrée et à la sortie du milieu granulaire reliés à un capteur de pression à membrane. Les pertes de charge sont représentées sur la Figure 4.18. La chute de pression est de l'ordre de 15 Pa sur environ 1 heure. Un glissement identique a été observé pour le cas d'un lit de billes de verre. Cette variation est très petite et ne peut pas expliquer un changement de vitesse significatif qui expliquerait la forme des thermogrammes.

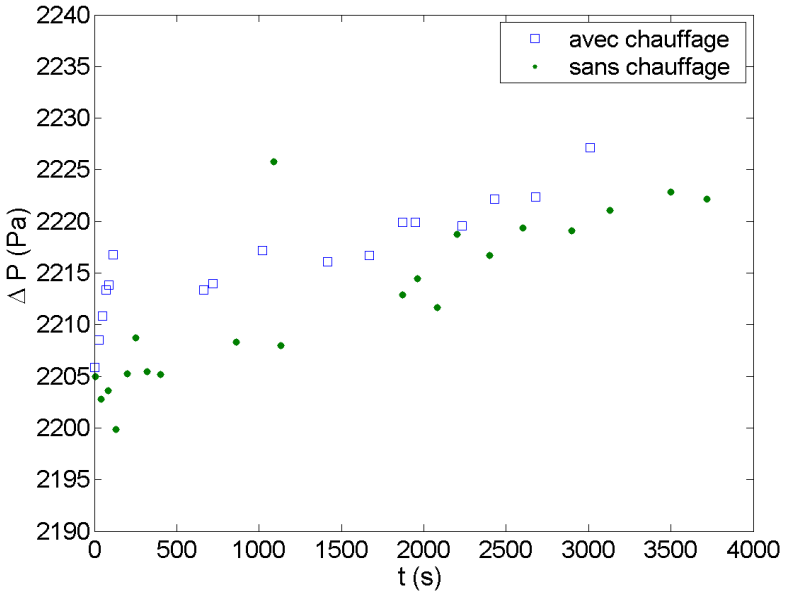


Figure 4.18 : *Perte de charge au sein du milieu granulaire*

➢ La **troisième** hypothèse correspond à l'apparition d'un phénomène de désorption d'humidité au sein des micropores internes aux grains. Les courbes 4.15 ressemblent fortement à des courbes de séchage. En effet, quand la température du milieu varie, l'enthalpie à fournir ne correspond plus alors seulement à l'échauffement du produit (grains) mais également à la mise en équilibre massique de son humidité qui, sur le plan thermique, s'accompagne de la condensation ou de l'évaporation de l'eau mettant ainsi en jeu la chaleur latente de vaporisation.

Sur la Figure 4.19.a, on remarque que les thermogrammes atteignent un niveau constant aux temps longs. Une nouvelle expérience a été effectuée avec une puissance de chauffage trois fois plus importante. Les thermogrammes ont la même forme mais leur montée en température se fait différemment (Figure 4.19.b). Les thermocouples 3 et 4 arrivent au même palier que le thermocouple 2 pour une variation de température de 3K. Or leur comportement est différent lors d'une montée en température de 1K : le thermocouple 2 n'arrive pas ici au même niveau que les deux autres (Figure 4.19.a). La montée en température ne dépend donc pas linéairement de la puissance injectée. La même expérience effectuée dans le cas billes de verre / air a montré que le signal des différents thermocouples était toujours proportionnel à la puissance de chauffe. Il y a donc bien un nouvel effet qui est mis en évidence dans ces expériences. En chauffant, nous réalisons un séchage des grains.

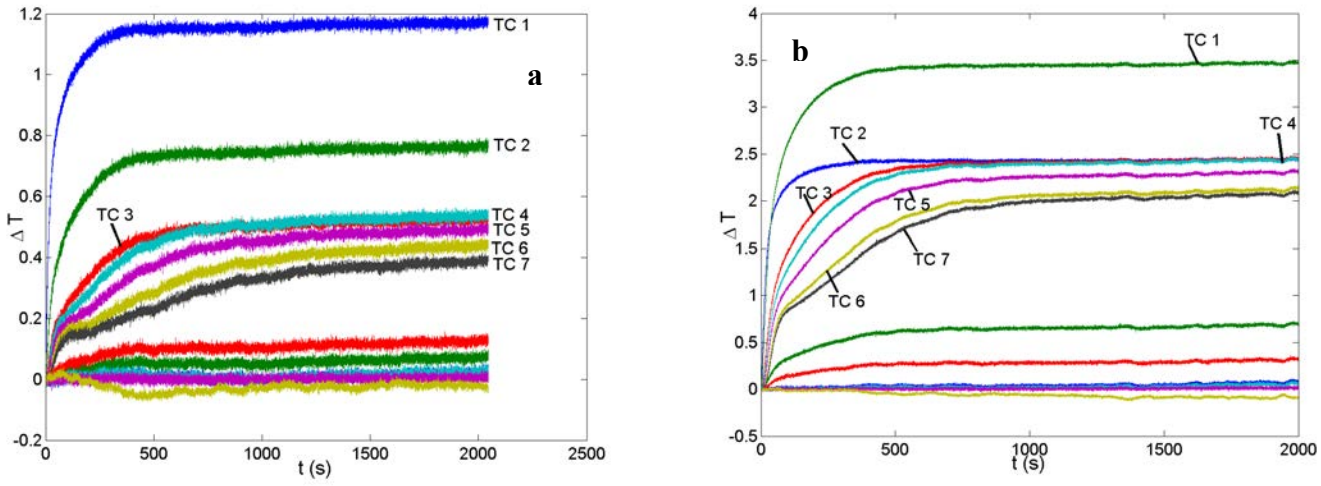


Figure 4.19 : *Effet non linéaire de la puissance de chauffage*

L'air utilisé pour réaliser les expériences est l'air ambiant chargé d'humidité. Il faut donc sécher les grains, pour retirer toute humidité, avant toute expérience avec un gaz sec. Le gaz choisi est de l'azote (gaz sec dont les caractéristiques sont proches de l'air). Le temps nécessaire pour sécher les grains, dans un process dit de « stripage », est calculé grâce à une formule empirique fournie par l'IFP.

Nous avons dû effectuer des modifications sur le dispositif expérimental initial (Figure 4.20). Le dispositif est désormais alimenté grâce à des bouteilles d'azote destinées à sécher les grains. L'azote utilisé est d'une pureté de 99 %. Ces bouteilles sont stockées à l'extérieur du local et sont raccordées au dispositif par l'intermédiaire d'un détendeur et d'un tuyau souple (P.V.C. tressé) de 13 mm de diamètre et de 50 m de longueur (pour permettre une meilleure détente du gaz). Ce tuyau est raccordé à la conduite en P.V.C. rigide au-dessus du lit granulaire. Un tuyau souple est également raccordé en sortie du lit afin de rejeter l'azote à l'extérieur.
La température de l'azote mesurée au sein du milieu granulaire est de l'ordre de 20 ° C. Nous travaillons donc dans les mêmes conditions qu'avec de l'air. L'air étant formé de 79% d'azote, ses propriétés sont quasi-identiques à celle de l'air. Nous avons donc utilisé les propriétés thermophysiques de l'air.

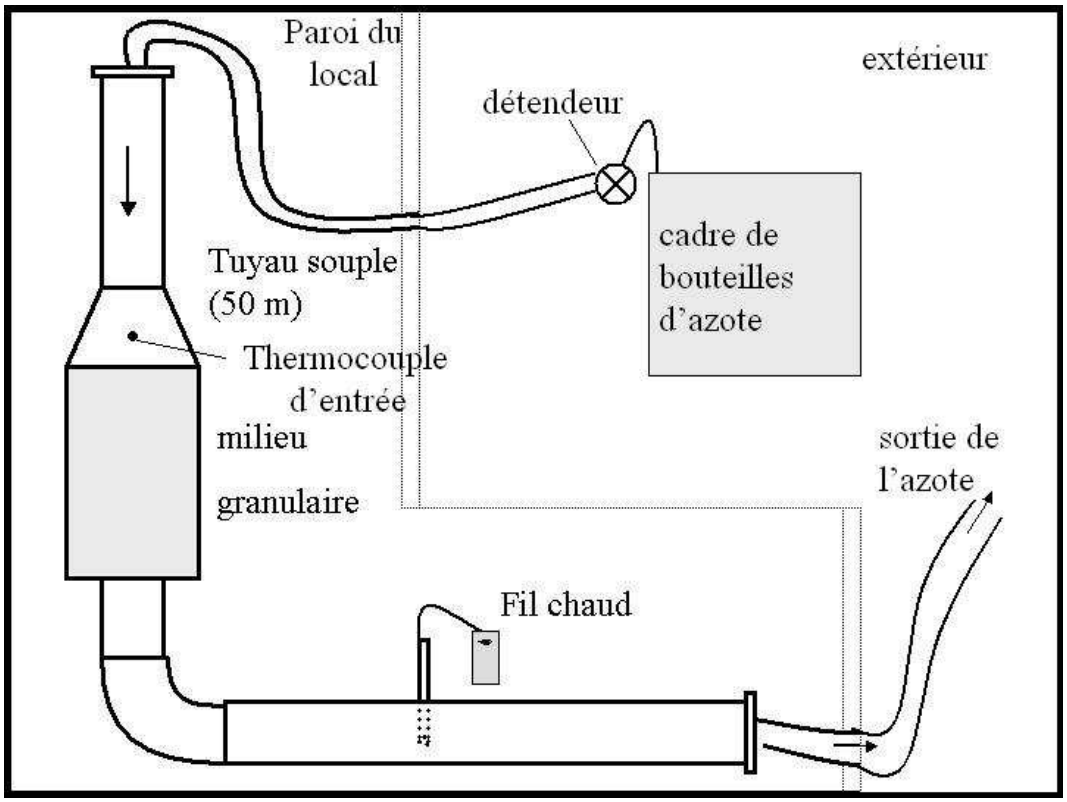


Figure 4.20 : *Dispositif expérimental de l'azote*

<u>*Mode opératoire*</u> :

A l'instant initial, on fait passer un débit d'azote que l'on ajuste par un réglage de la pression de sortie du détendeur. L'écoulement est maintenu pendant environ 5000 s (stripage) pour la plus grande vitesse. La Figure 4.21 représente l'évolution de la température en fonction du temps du thermocouple situé à l'entrée du lit granulaire (ce thermocouple n'est pas dans le milieu, Figure 4.20). Il mesure donc la température de l'azote seul. Le refroidissement initial (Figure 4.21) est probablement dû à l'effet de détente. La remontée ensuite observée est due à un réchauffement des bouteilles d'azote qui sont à l'extérieur et qui ont été exposées au gel la nuit précédente (effet « météo »).

La Figure 4.22 montre l'évolution de la température au sein du milieu granulaire lorsque l'azote débite au travers du lit (données brutes). Le chauffage par le fil s'effectue aux alentours du temps t = 5000 s. Les niveaux initiaux de température sont différents pour les différents thermocouples. On constate que le milieu n'est pas en équilibre thermique initial et que la température dans le milieu granulaire dérive au fil du temps.

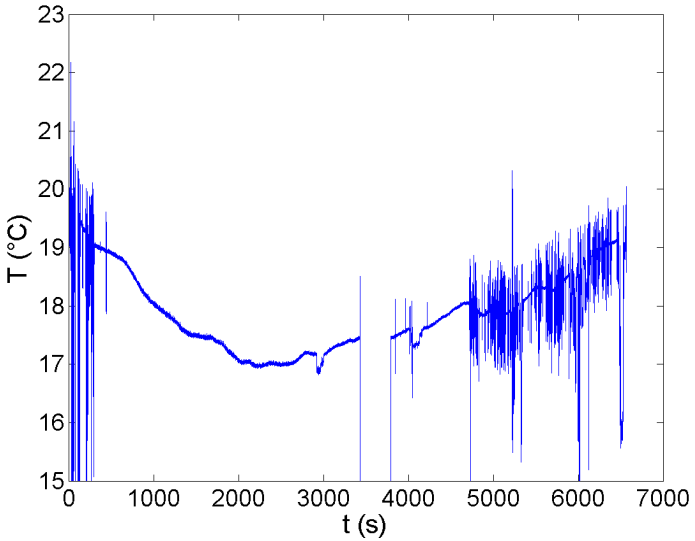


Figure 4.21 : *Thermogramme brut du thermocouple à l'entrée du milieu granulaire*

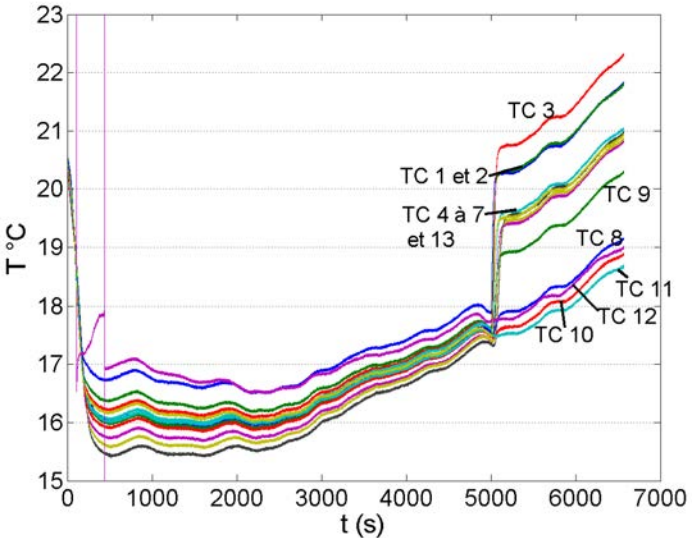


Figure 4.22 : *Thermogrammes bruts (azote / support de catalyseur)*

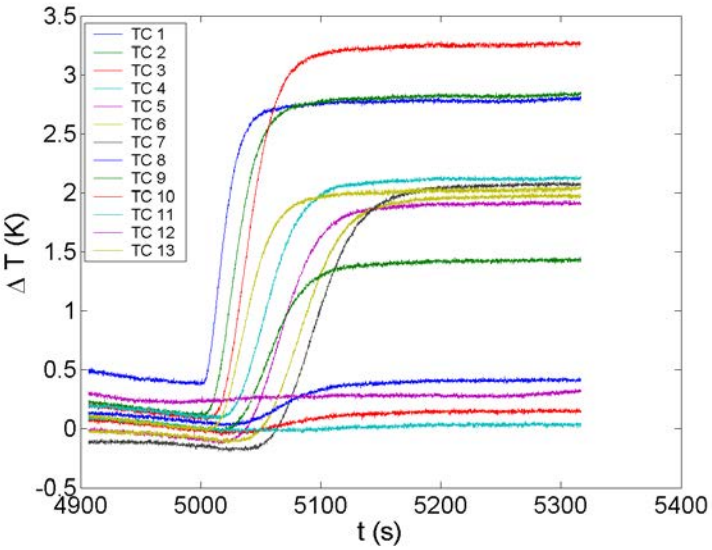


Figure 4.23 : *Thermogrammes traités :* $T_i^{'}(t)$

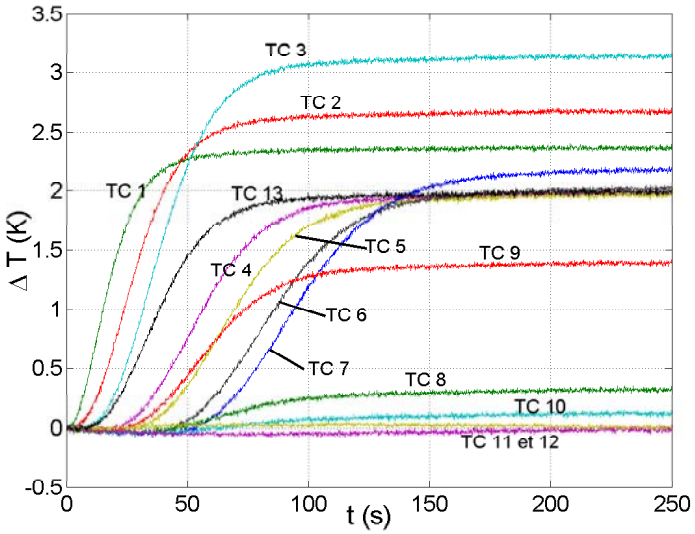


Figure 4.24 : *Thermogrammes traités :* $T_i^{''}(t)$

Le thermogramme de la Figure 4.21 va permettre de corriger les autres thermogrammes, il est en fait le thermogramme de référence $T_{réf}(t)$.
On effectue à partir des différents thermogrammes les traitements suivants :

1) Afin de filtrer ce thermogramme, on effectue une moyenne glissante sur trois points de $T_{réf}(t)$ (acquisition à quatre points par seconde), d'où une courbe résultante :

$$\overline{T}_{ref}(t_k) = \frac{1}{3}\sum_{m=-1}^{1} T_{ref}(t_k + m \quad \Delta t) \tag{4.14}$$

2) On soustrait $\overline{T}_{réf}(t)$ de chacun des thermogrammes afin de corriger l'offset « dynamique » correspondant à la variation de température du gaz à l'injection dans le lit :

$$T_i'(t_k) = T_i(t_k) - \overline{T}_{ref}(t_k) \tag{4.15}$$

Les courbes obtenues (Figure. 4.23) comprennent encore une dérive visible (entre 4900 et 5000 s) avant l'excitation et ne partent pas d'une température nulle.

3) On effectue donc une dernière correction de dérive et d'offset « statique » calculée sur les 30 secondes avant chauffage ($t = t_{déb}$ au démarrage du chauffage) :

$$T_i''(t_k) \;=\; T_i'(t_k) - a_i(t_k - t_{déb}) - T_i'(t_{déb}) \tag{4.16}$$

$$a_i = \frac{1}{\sum_{t_k \langle t_{déb}} (t_k - t_{déb})^2} \sum_{t \langle t_k} (t_k - t_{déb})\; T_i'(t_k)$$

L'offset correspond donc ici au niveau ponctuel à l'instant initial tandis que la pente est calculée par simple régression linéaire.
La Figure 4.24 représente les mesures $T_i''(t)$ après ce dernier traitement. Une légère dérive de la température aux temps longs subsiste encore mais n'a pas été corrigée. Ces thermogrammes vont nous permettre d'effectuer les inversions et d'estimer les paramètres.

On effectue l'inversion des 6 thermocouples habituels (cas 1). La Figure 4.25.a représente les six courbes expérimentales et recalculées ainsi que les résidus correspondants. On constate que les températures recalculées et expérimentales du dernier thermocouple (thermocouple 7) différent fortement. Son résidu est de l'ordre de 6 fois le bruit de mesure. L'inversion est alors faite sur 5 thermocouples (thermocouple 2 à 6) (cas 2). Les résidus des deux premiers thermocouples sont de moins bonne qualité au temps court (jusqu'à 40 s) puis ils se rapprochent du bruit de mesure (Figure 4.25.b). Ceci est probablement dû aux corrections qui ne sont ici que linéaires. Il aurait été possible d'effectuer une correction prenant en compte la variation de température d'alimentation du lit en azote en construisant une fonction de Green 1 D sur ce type d'excitation. Par contre le champ thermique initial dans le lit, avant injection d'azote, n'est probablement pas uniforme, ce qui rend quasiment impossible toute correction plus sophistiquée basée sur l'équation de l'énergie du modèle à une température.

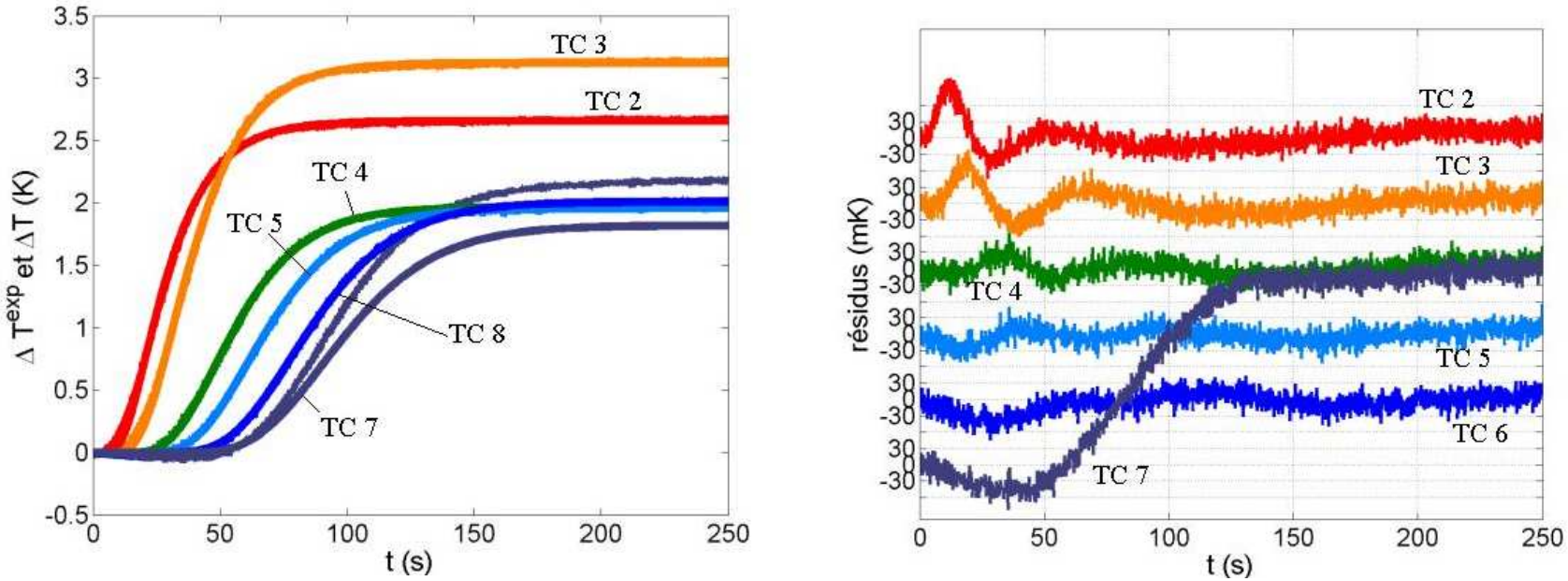


Figure 4.25.a : *Températures expérimentales et recalculées et résidus dans le cas azote / support de catalyseur (cas 1)*

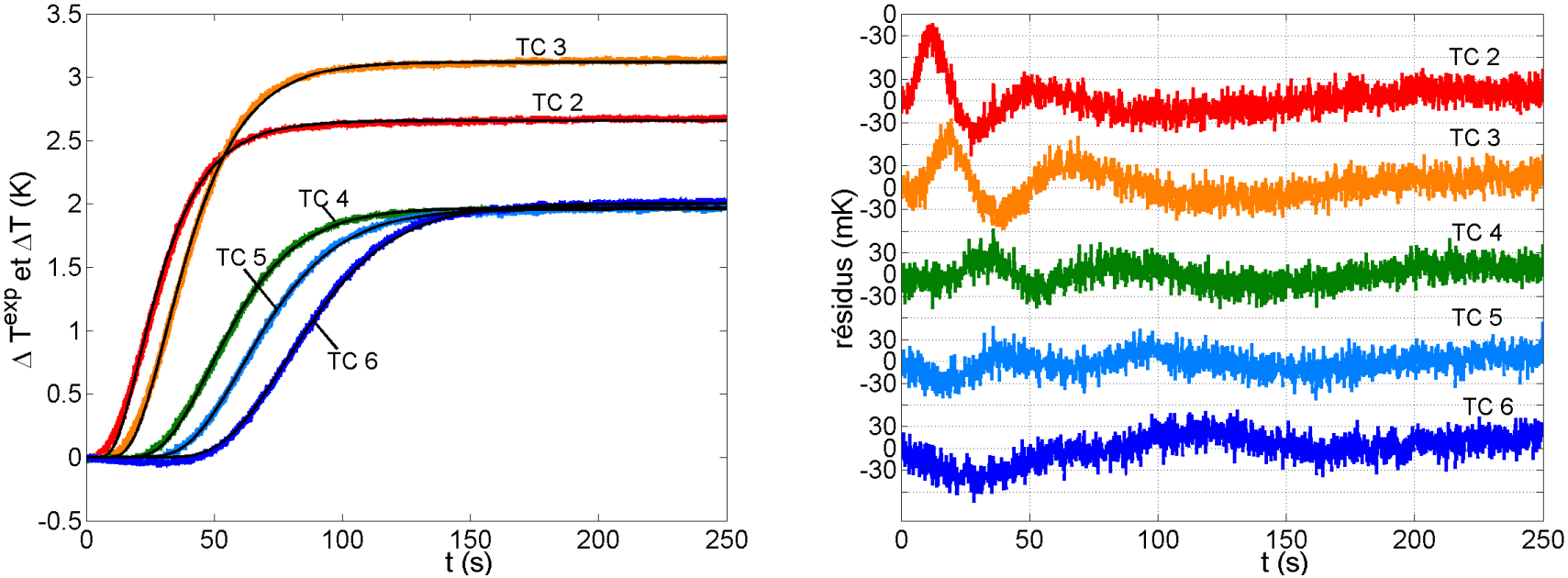


Figure 4.25.b : *Températures expérimentales et recalculées et résidus dans le cas azote / support de catalyseur (cas 2)*

Les températures expérimentales et recalculées se superposent de manière satisfaisante pour ce cas « pathologique » pour les 5 thermogrammes pris en compte. Les résidus sont satisfaisants au vu des corrections faites (l'échauffement est maintenant de l'ordre de 3 K au lieu de 1 K pour le cas air / billes de verre). Le rapport signal sur bruit est sensiblement le même que pour les expériences air/billes de verre.

Ces expériences ont été réalisées avec le plus grand des débits. Une autre série de mesure avec un autre cadre de bouteilles d'azote a été faite. Pour cette série, il n'a pas fallu faire un tel traitement, le traitement classique réalisé sur le système air/billes de verre est suffisant. L'équilibre thermique était atteint lors du démarrage du chauffage. Les résidus sont du même type que le système air / billes de verre (Figure 4.26).

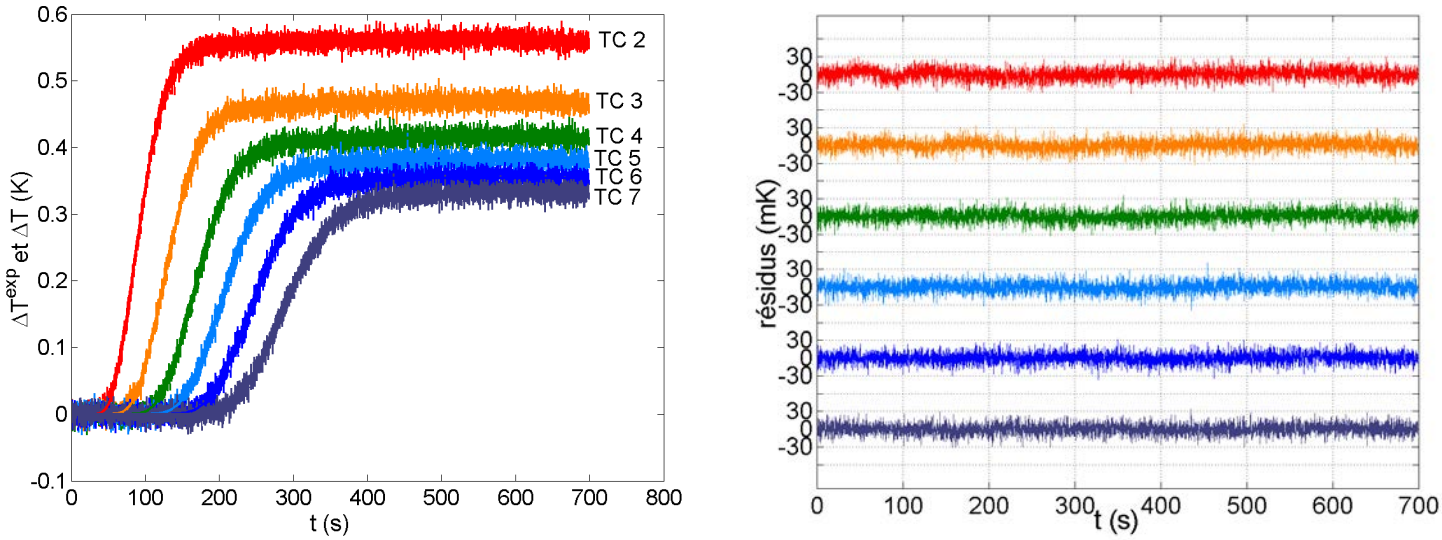


Figure 4.26 : *Températures expérimentales et recalculées et résidus pour le système azote / support de catalyseur à Re = 40*

4.3.2 - résultats d'estimation

Cette partie est confidentielle.

4.4 - Cas des billes de verre polydisperses

Cette partie est confidentielle.

Chapitre 5 : Dispositif de caractérisation – chauffage en paroi

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème du transfert en proche paroi. Tout d'abord une configuration permettant de caractériser la dispersion thermique en proche paroi sera modélisée, le dispositif expérimental correspondant sera ensuite présenté et enfin les premiers résultats expérimentaux seront discutés.

5.1 - Modélisation du chauffage en proche-paroi

Nous avons vu au chapitre 1 qu'au niveau des parois de notre lit, les billes de verre sont en contact ponctuel avec celles-ci. Dans cette zone, la porosité du lit est globalement supérieure à celle qui règne à cœur. L'écoulement va donc être logiquement modifié. D'un point de vue macroscopique, nous n'avons accès qu'au débit de l'écoulement. Ce débit nous renseigne seulement sur la vitesse superficielle moyenne de l'écoulement (vitesse de Darcy) et non sur la vitesse locale.

Si nous voulons caractériser thermiquement les effets de ces survitesses, il est nécessaire de chauffer le lit par une paroi à l'aide par exemple d'une source surfacique. En fait, il s'agit de tenter d'exploiter une configuration inverse de ce qui se passe souvent dans les réacteurs à lit fixe où la source est plutôt localisée à cœur et où les parois sont refroidies.

La première idée est donc de construire un nouveau modèle permettant de prendre en compte une vitesse, une porosité et des coefficients de dispersion en proche paroi différents des valeurs de ces grandeurs en cœur du milieu poreux. Le nouveau modèle qui va en résulter sera appelé modèle bicouche. Il correspondra à une séparation de l'écoulement en deux zones : une zone proche des parois où il existe une survitesse et une zone au cœur de l'écoulement où la vitesse est légèrement moins grande (Figure 5.1).

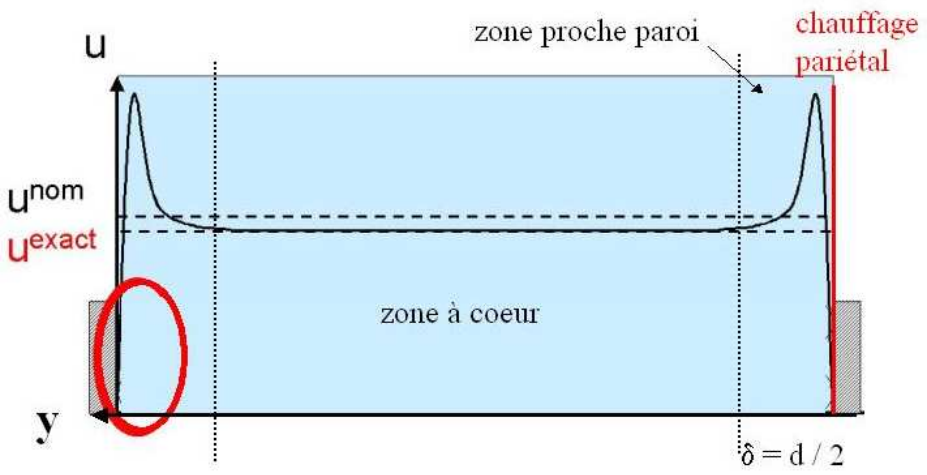


Figure 5.1 : *Représentation des phénomènes proche de la paroi*

Pour modéliser cette configuration bicouche, l'équation de l'énergie du modèle à une température va être écrite dans deux domaines avec des propriétés différentes. Pour résoudre le problème direct analytiquement, une résolution par la méthode de Green n'est plus possible. On utilisera une variante de la méthode des quadripôles [Maillet et col., 2000] qui repose sur une transformation spatiale de Fourier dans la direction parallèle aux parois.

Mais avant de développer cette méthode de résolution du modèle bicouche, on va tout d'abord s'assurer que l'on est capable de résoudre numériquement le modèle à une seule couche par cette méthode de Fourier. On va donc tenter de valider cette méthode de résolution par une comparaison avec une solution obtenue par convolution de l'excitation avec une fonction de Green.

5.1.1 - Modèle de Green

La modélisation se fera ici en supposant uniforme les différents paramètres du milieu (vitesse, porosité, coefficients de dispersion…). Nous utilisons une résolution par la méthode des fonctions de Green. On va donc résoudre l'équation de la dispersion thermique (équation 3.1) de la même façon que dans le chapitre 3 (cf. Annexe 4). La source s est ici constituée de deux résistances électriques pelliculaires dissipant une puissance surfacique totale 2 W, c'est à dire créant un flux uniforme pariétal de densité W égale dans chaque demi-espace, la paroi étant parallèle à l'écoulement (Figure 5.2). La largeur l de la zone de chauffage est dans la direction de celui-ci et son extension est infinie dans l'autre direction.

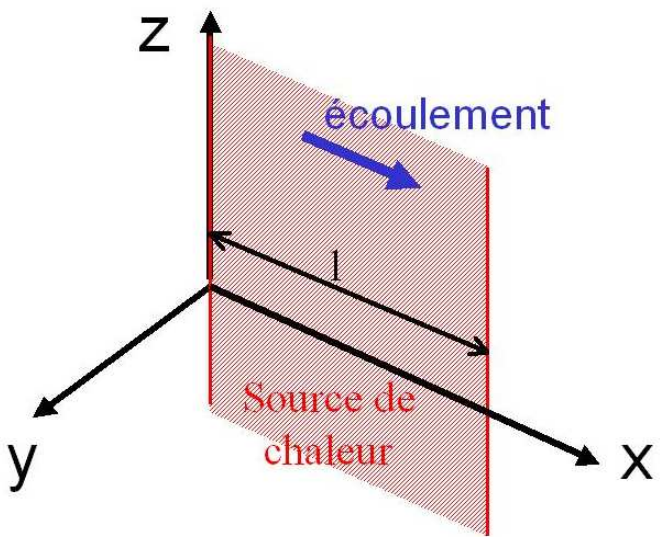


Figure 5.2 : *Emplacement de la source de chaleur*

$$s(\boldsymbol{r},t) = W\ \delta(y)\left[H(x) - H(x-l)\right]H(t) \tag{5.1}$$

où W (W.m^{-2}) est la densité de flux, δ(m^{-1}) l'impulsion de Dirac spatiale et $H(t)$ la fonction de Heaviside temporelle (échelon). Il s'agit donc ici d'un problème transitoire bidimensionnel en x et en y.

La réponse en température est alors donnée par convolution (cf. équation (3.9) au chapitre 3) :

$$\Delta T = \frac{W}{2\left(\rho c_p\right)_f u\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\int_0^{\frac{(\rho c_p)_f^2 u^2 t}{4(\rho c_p)_t \lambda_x}} \exp\left(-\frac{1}{16}\frac{\left((\rho c_p)_f u\right)^2}{\lambda_x \lambda_y}\frac{y^2}{\theta}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\left(\rho c_p\right)_f u\, x}{4\lambda_x\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\left(\rho c_p\right)_f u\,(l-x)}{4\lambda_x\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta \tag{5.2}$$

Nous prenons ici une longueur de chauffe l = 10 cm. Le point de coordonnées (0,0,0) représente le début de la plaque (Figure 5.2) c'est à dire une sorte de « bord d'attaque thermique ». L'équation 5.2 est résolue par quadrature numérique du terme intégral, de la même façon que pour l'excitation linéique (cf. chapitre 3). Les coefficients de dispersion thermique utilisés sont ceux issus des corrélations trouvées précédemment (chapitre 4).

Les Figures 5.3 représentent les réponses en température. La forme de la montée en température dépend beaucoup de la distance au « bord d'attaque » du chauffage (Figure 5.3.a). Le niveau de température aux temps longs augmente selon x pour atteindre son maximum aux 4/5 de la plaque (x = 8 cm). Il se stabilise ensuite à une abscisse de 12 cm pour redescendre (x =14 cm) pour y fixé.

Si l'on trace les thermogrammes en fixant x (Figure 5.3.b), on constate que les niveaux de température diminuent en fonction de la distance à la paroi (plus la distance est grande moins le niveau est élevé).

Sur la Figure 5.4.a sont représentés les profils longitudinaux de température (selon x) pour différentes distances y à la paroi en faisant tendre le temps vers l'infini (régime permanent). On représente en rouge la zone chauffée expérimentalement. Comme sur la Figure 5.3.b, le niveau de température décroît en fonction de la distance à la paroi chauffante.

La Figure 5.4.b. représente également les différents profils longitudinaux de température à y fixé pour différents nombres de Péclet (différentes vitesses de Darcy). Pour un même niveau W de chauffage, le niveau de température décroît en fonction de la vitesse. Le retour à zéro s'effectue en 2,5 longueurs de la source pour un nombre de Péclet de 10. Pour des nombres de Péclet importants, la baisse de température s'étend sur des distances supérieures en aval.

La Figure 5.4.c représente les profils de température transverses aux temps longs (à x fixé). Les profils ont des formes similaires pour les positions de thermocouple se trouvant en face de la résistance chauffante. Le profil de température correspondant à la position x = 120 mm (en aval de la zone chauffée) est différent. Le niveau de température initial est le même qu'en x = 50 mm mais la baisse de température est moins importante avec une concavité différente.

Nous avons donc été capables de simuler les réponses en température du modèle monocouche de Green. Le problème de ce modèle est qu'il n'est pas utilisable en bicouche. En effet, nous ne disposons pas des fonctions de Green dans cette configuration.

Nous avons donc recours ici à la méthode des transformées de Fourier, méthode que nous allons maintenant expliciter.

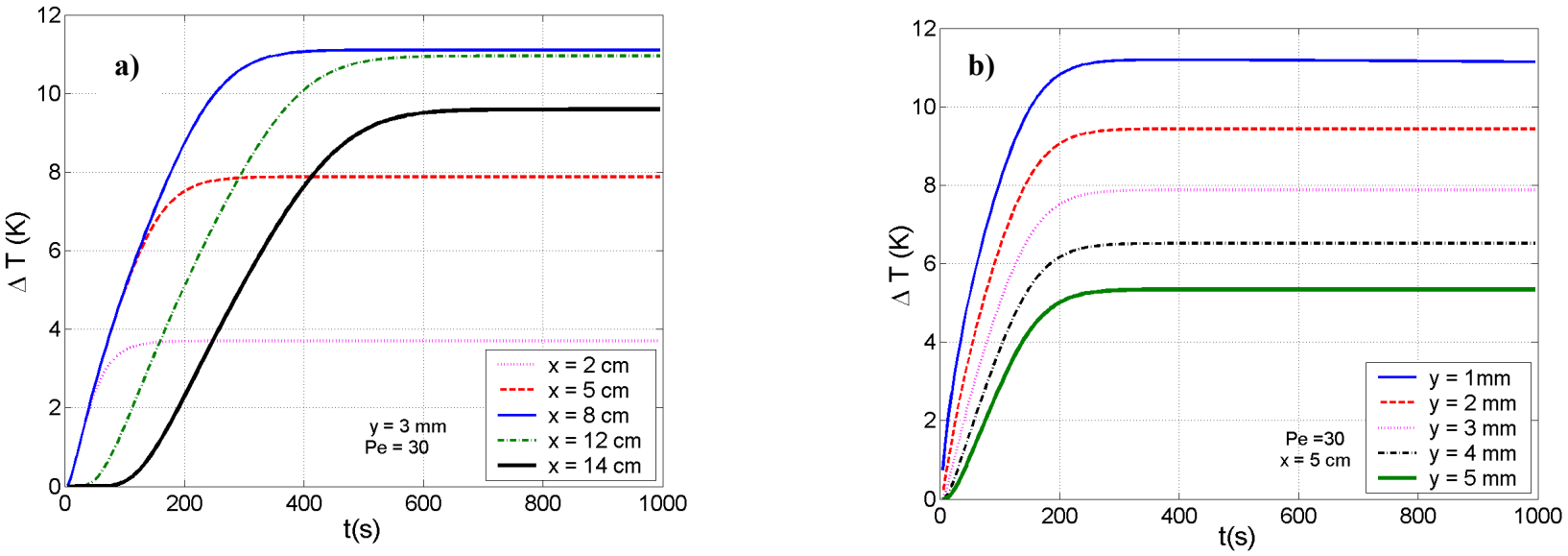


Figure 5.3 a,b : *Thermogrammes du modèle de Green, W = 1000 W.m^{-2} (5.2)*

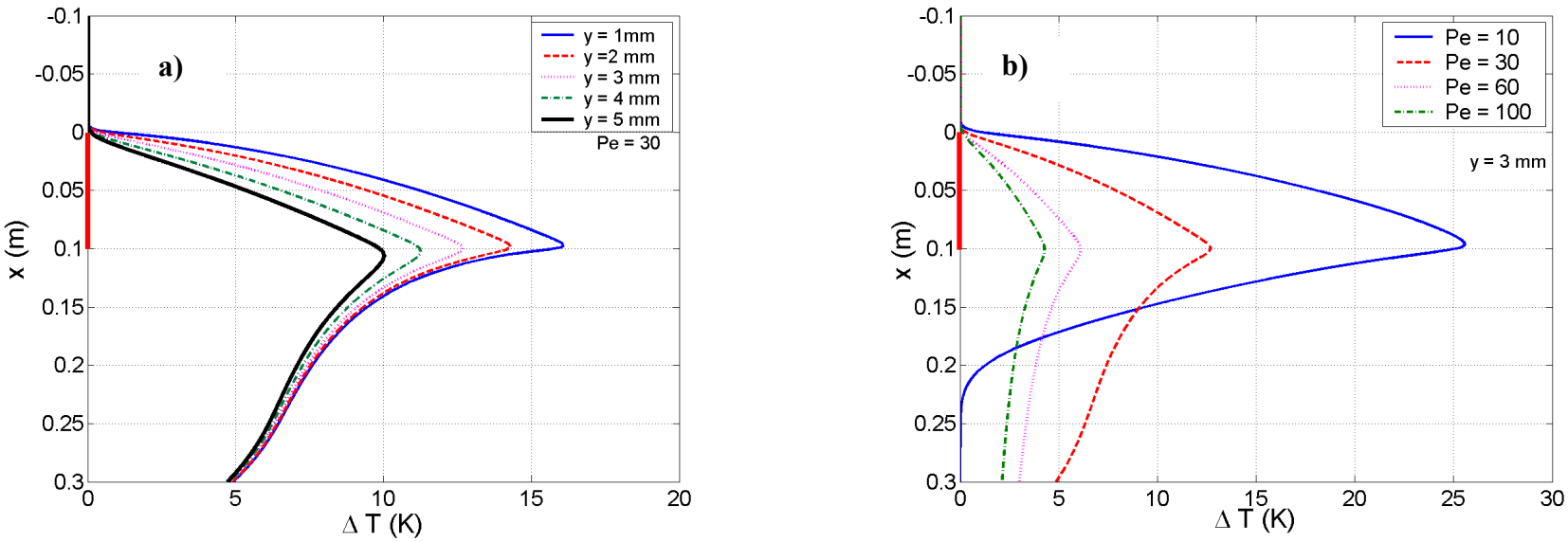


Figure 5.4 a,b : *Profil spatial du modèle de Green, W = 1000 W.m^{-2} (5.2)*

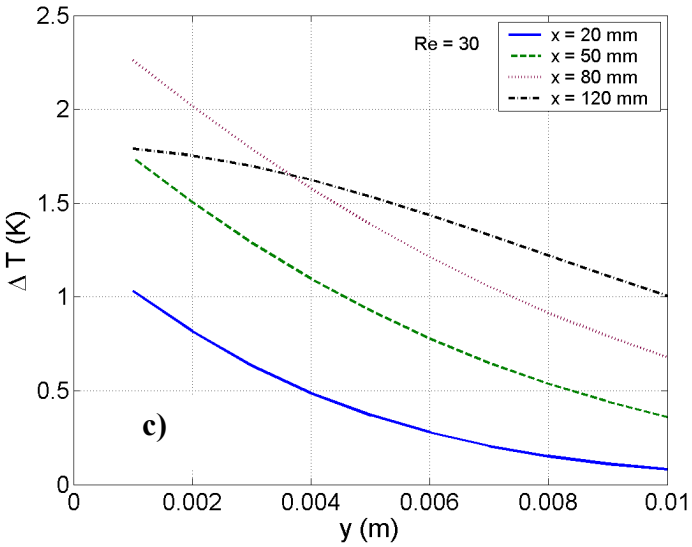


Figure 5.4.c : *Profil spatial de température, W = 197 W.m^{-2}, Pe = 21*

5.1.2 - Modèle en Fourier

Pour utiliser ce modèle, il faut écrire de nouvelles conditions limites pour résoudre l'équation de la dispersion thermique (3.4) avec s = 0 (la source est reportée en condition limite).

Les conditions limites fixées sont :

$$-\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} = W\left[H(x) - H(x-l)\right]H(t) \text{ en } y = 0$$

$$T = 0 \qquad \text{à } t = 0$$

$$T \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \text{ et } x \to -\infty$$

$$T \to 0 \text{ quand } y \to +\infty \tag{5.3}$$

En pratique $T = 0$ en $x = -L$ et $x = L$ avec $L >> l$ (l correspond à la longueur du plan chauffant)

On effectue une transformation de Laplace sur T

$$\overline{T}(x,y,p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, T(x,y,t)\, dt \tag{5.4}$$

On effectue une transformation de Fourier sur l'intervalle [-L L] :

$$\theta_n(y,p)=\tilde{\bar{T}}(\alpha_n,y,p)=\int_{-L}^{L} e^{-i\alpha_n x}\,\bar{T}(x,y,p)\,dx \text{ avec } \alpha_n=\frac{n\pi}{L} \tag{5.4.a}$$

Ces deux transformations successives appliquées à l'équation (3.4), nous permettent d'écrire:

$$\frac{d^2\theta_n}{dy^2}=\left(\alpha_n^{\,2}\frac{\lambda_x}{\lambda_y}+\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_y}p+i\,\alpha_n\frac{(\rho c_p)_f\,u}{\lambda_y}\right)\theta_n=k_n^{\,2}\,\theta_n \tag{5.5}$$

L'équation (5.5) intégrée sur [0 y] donne naissance à une relation quadripolaire entre les vecteurs température-flux (dans l'espace transformé) aux bornes de cet intervalle :

$$\begin{bmatrix}\theta_n(0,p)\\ \phi_n(0,p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_n(y,p) & B_n(y,p)\\ C_n(y,p) & D_n(y,p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_n(y,p)\\ \phi_n(y,p)\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

avec $A_n=D_n=\cosh(k_n\,y)$, $B_n=\dfrac{1}{\lambda_y\,k_n}\sinh(k_n\,y)$, $C_n=\lambda_y\,k_n\sinh(k_n\,y)$ et en considérant la transformée de l'excitation pariétale $\phi_n(0,p)=\dfrac{W}{i\,p\,\alpha_n}\left(1-e^{-i\alpha_n l}\right)$

L'équation (5.6) s'écrit (en omettant l'argument p) et en reliant les conditions limites en y = 0 et +∞ :

$$\begin{aligned}\theta_n(0)&=B_n(\infty)\phi_n(\infty)\\ \phi_n(0)&=D_n(\infty)\phi_n(\infty)\end{aligned}\quad \text{d'où } \theta_n(0)=\frac{B_n(\infty)}{D_n(\infty)}\phi_n(0) \tag{5.7}$$

$$\frac{B_n(\infty)}{D_n(\infty)}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\lambda_y\,k_n}\tanh(k_n\,y)=\frac{1}{\lambda_y\,k_n}$$

On peut donc écrire grâce aux différentes relations précédentes :

$$\theta_n(y,p)=\frac{1}{\lambda_y\,k_n}e^{-k_n y}\,\phi_n(0,p)=F_n(y,p)\;\phi_n(0,p) \tag{5.8}$$

On revient dans l'espace temporel :

$$T_n(y,t)=\tilde{T}(\alpha_n,y,t)=L^{-1}\left[\theta_n(y,p)\right]=\int_0^t f_n(y,\tau)\,\varphi_n(y=0,\,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.9}$$

avec $f_n(y,t)=L^{-1}\left[F_n(y,p)\right]$ et $\varphi_n(0,t)=\dfrac{W\,\mathrm{H}(t)}{i\,\alpha_n}\left(1-e^{-i\alpha_n l}\right)$

On a ici $F_n(y,p) = \dfrac{1}{\lambda_y \left(\dfrac{(\rho c_p)_t}{\lambda_y}\right)^{1/2} (p+K_n)^{1/2}} \exp\left[-\left(\dfrac{(\rho c_p)_t}{\lambda_y}\right)^{1/2} (p+K_n)^{1/2}\, y\right]$

avec $K_n = \dfrac{\lambda_x \alpha_n^2}{(\rho c_p)_t} + \dfrac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} i\alpha_n u$.

On peut écrire cette équation sous la forme : $G_{yn}(p+K_n) = F_n(y,p)$ ce qui permet d'utiliser la propriété suivante de la transformation de Laplace :

$$L^{-1}\left[G(p+K)\right] = e^{-Kt} L^{-1}\left[G(p)\right] \tag{5.10}$$

D'où : $$T_n(y,t) = \int_0^t e^{-K_n t} g_{yn}(\tau) \frac{W\,\mathrm{H}(t-\tau)}{i\alpha_n}\left(1-e^{-i\alpha_n l}\right) \mathrm{d}\tau \tag{5.11}$$

avec $g_{yn} = L^{-1}\left[G_{yn}\right] = \dfrac{1}{\left(\lambda_y (\rho c_p)_t\right)^{1/2}} \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{X^2}{4t}\right)$ et $X = \left(\dfrac{(\rho c_p)_t}{\lambda_y}\right)^{1/2} y$

On peut donc écrire :

$$T_n(y,t) = \frac{W}{i\alpha_n \sqrt{\pi \lambda_y (\rho c_p)_t}}\left(1-e^{-i\alpha_n l}\right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(\rho c_p)_t}{4\lambda_y}\frac{y^2}{\tau}} e^{-\left(\frac{\lambda_x}{(\rho c_p)_t}\alpha_n^2 + i\alpha_n \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u\right)\tau} \mathrm{d}\tau \tag{5.12}$$

Le retour dans le domaine spatial s'écrit alors :

$$T(x,y,t) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-N+1}^{N} T_n(y,t)\, e^{i\alpha_n x} \tag{5.13}$$

Nous obtenons alors les mêmes thermogrammes représentés sur la Figure 5.3.b. Les résidus (différence entre la température du modèle de Green et du modèle de Fourier) sont représentés sur la Figure 5.4.d pour le thermogramme de la Figure 5.3.b à y = 3 mm. On constate que ceux-ci sont nuls. Le temps de calcul de ce dernier modèle est plus long que pour le modèle de Green. De plus, pour obtenir une convergence complète du modèle (5.13), il faut choisir les bons paramètres N et L. Pour obtenir une convergence complète, nous avons pris ici L = 50 cm et $N = 200$.

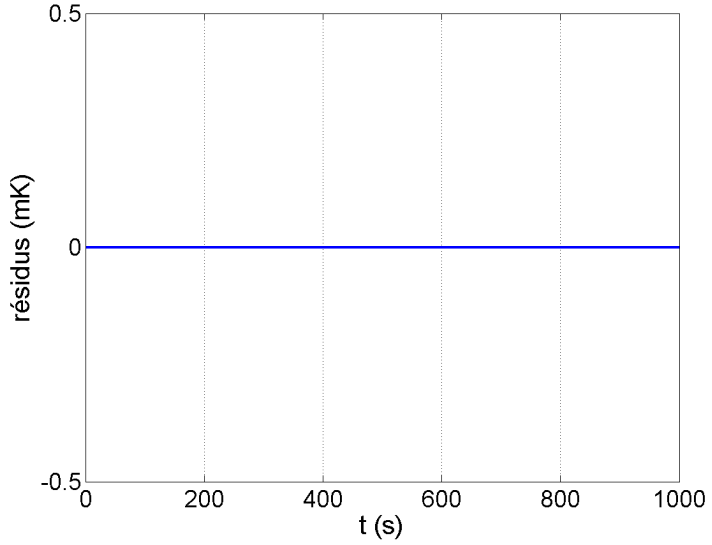


Figure 5.4.d : *Résidus entre le modèle de Green et de Fourier*

5.2 - Conception du banc expérimental

5.2.1 - Dispositif expérimental

Nous avons utilisé une conception similaire à celle utilisée pour le dispositif expérimental précédent (cf. chapitre 2). Le milieu poreux (lit consolidé de billes de verre) est contenu dans une boite ($60 \times 15 \times 20$ cm^3) en Altuglas® coulé (et non plus extrudé), ce qui permet de disposer d'un matériau plus résistant (Figure 5.5). Les billes sont tenues en place par deux grilles en acier inoxydable et deux plaques perforées en Altuglas® dans un volume de $40 \times 15 \times 20$ cm^3. Le choix de ces dimensions est justifié de la même façon que dans le dispositif expérimental précédent. La différence réside dans la largeur de la boite. La boite sera séparée en deux par une paroi amovible. Chacune des deux zones de mesures a pour dimensions environ $40 \times 7{,}5 \times 20$ cm^3. On aura donc une complète symétrie. Cette symétrie permettra de contrôler complètement le flux de chaleur.
Un bouchon de vidange a été ajouté pour permettre de vider rapidement la boite.
L'air est aspiré grâce au ventilateur décrit précédemment (cf. chapitre 2). La boite étant plus volumineuse que la précédente, la vitesse risque d'être moins importante (d'où des nombres de Reynolds plus faibles). Pour essayer de limiter cet effet, nous avons augmenté la section de passage de l'air. Les tuyaux en PVC utilisés ont désormais un diamètre intérieur de 150 mm.

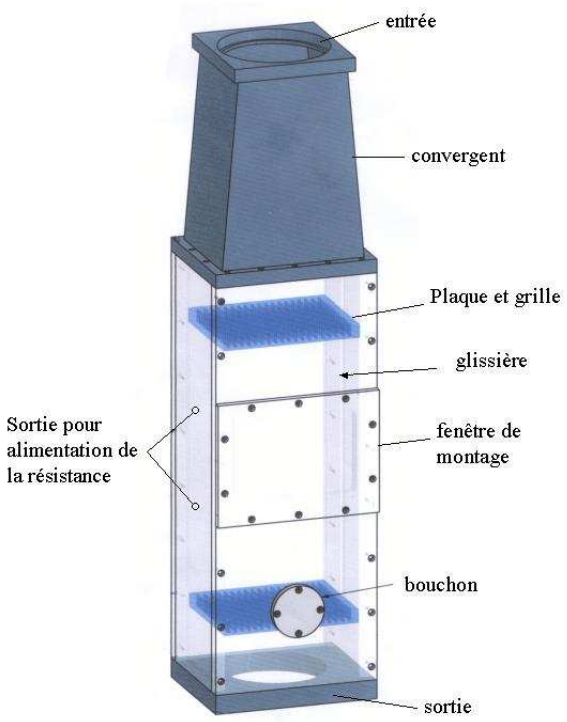


Figure 5.5 : *Dispositif expérimental*

La paroi interne est réalisée à l'aide d'une plaque de carbone-epoxy de 2 mm d'épaisseur. Ses dimensions sont de 40 × 20,4 cm^2. Celle-ci est insérée dans une glissière usinée dans les parois de la boite en Altuglas. Les contraintes liées au choix du matériau constituant cette paroi concernent sa rigidité et son caractère isolant (un matériau souple aurait, au contact du poids des billes, fléchi au centre). La plaque est donc constituée d'un composite de carbone-epoxy tressé. Les tresses de carbone permettent d'obtenir une grande résistance mécanique ; le matériau est ainsi homogène et isotrope dans son plan (même propriétés mécaniques dans toutes les directions). Le module de Young dans les deux directions du plan est de 70 Gpa, la conductivité thermique dans la direction normale au plan serait comprise entre 7,7 et 13,3 $W.m^{-1}.K^{-1}$ selon le constructeur et la chaleur massique est comprise entre 863 et 929 $J.kg^{-1}.K^{-1}$.

5.2.2 - Chauffage électrique

Pour assurer un chauffage en paroi, nous avons fait coller de chaque coté de la plaque deux fines résistances électriques chauffantes (Figure 5.6) déposées sur un film polyamide (le collage se fait sous vide pour qu'il y ait une meilleure adhérence). Ce matériau est un matériau fin, semi-transparent dans l'infrarouge et bénéficiant d'une excellente rigidité diélectrique. L'épaisseur de chacune de ces deux résistances est de 250 µm. Les deux résistances de 30 Ω chacune ont une dimension de 10 × 20 cm^2. La valeur de la résistance est indépendante de la température et la résistance chauffante a une bonne tenue jusque 250°C. Comme pour le banc expérimental précédent, la puissance de chauffage est enregistrée en continu. Le dispositif électrique est le même, nous avons juste connecté les deux résistances en parallèle au circuit afin d'obtenir une seule résistance équivalente de 15 Ω. La puissance

mesurée grâce à notre système d'acquisition est alors divisée par 2 pour obtenir, la puissance surfacique fournie (*W*) de chaque coté de la plaque.

La résistance chauffante est recouverte sur ses deux faces par un film polyimide KAPTON® (épaisseur de l'ordre de 50 µm). Le KAPTON® peut être utilisé tant aux hautes qu'aux basses températures. Il s'agit d'un bon isolant électrique. Sa conductivité thermique est de 0,12 $W.m^{-1}.K^{-1}$ et sa chaleur spécifique est de 1,09 $J.g^{-1}.K^{-1}$.

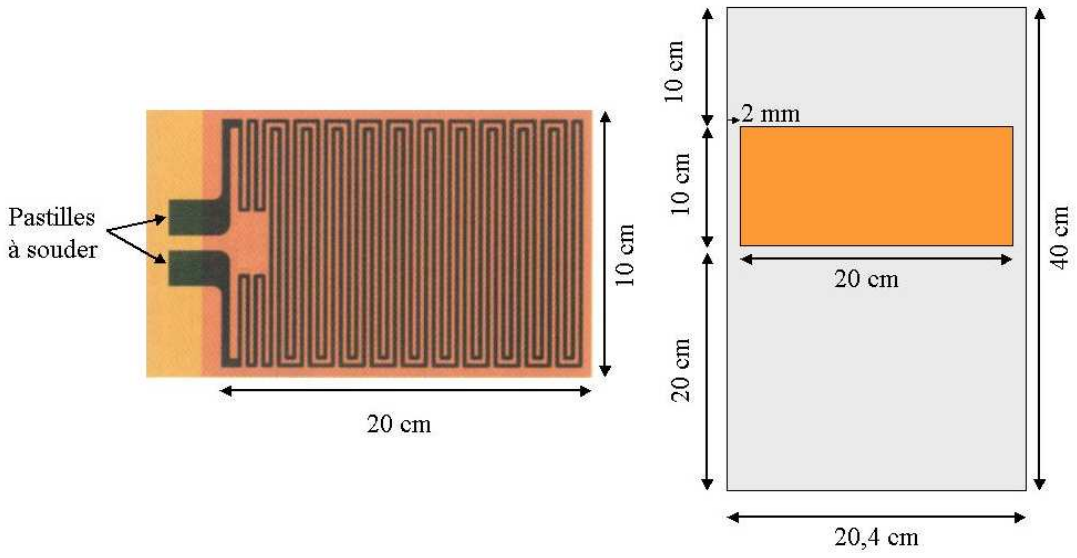


Figure 5.6 : *Résistance chauffante et emplacement de la résistance sur la plaque (paroi)*

5.2.3 - Thermocouples

Les températures sont toujours mesurées par des thermocouples de type E de 127 µm de diamètre.
Les thermocouples sont étalonnés de la même façon que précédemment.
Le but du dispositif expérimental est de quantifier les phénomènes qui se passent près de la paroi, il faut donc que les thermocouples soient très proches de la paroi. Les survitesses en paroi surviennent à une distance de l'ordre d'un rayon de billes et donc à 1 mm de la paroi (pour les billes de 2 mm). Le premier thermocouple sera placé à 1 mm de la paroi puis les thermocouples suivants seront espacés de 1 mm jusqu'à atteindre 4 mm. Pour mesurer la température de la résistance chauffante, 3 thermocouples ont été collés sur le film de KAPTON®. 5 thermocouples sont placés à une distance de 3,5 cm de la paroi. Enfin, un thermocouple (numéroté 32) est placé à l'entrée du lit sur son axe de symétrie (dans l'écoulement du fluide d'alimentation). Le placement de ces différents thermocouples est indiqué sur la Figure 5.7.

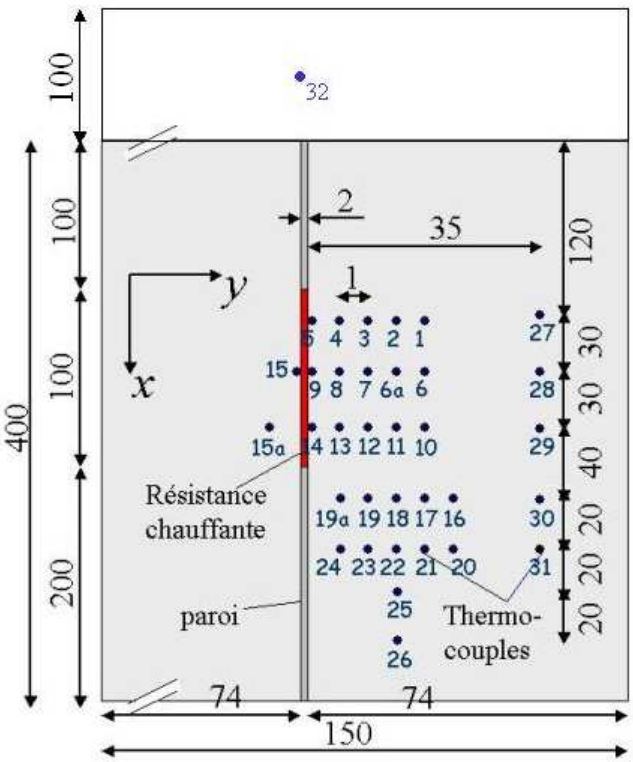


Figure 5.7 : *Positions des thermocouples dans le milieu poreux, les dimensions sont données en mm*

Nous avons placé au total 34 thermocouples au sein du milieu poreux et 1 en dehors. Une des difficultés dans la réalisation du banc concerne le positionnement des thermocouples. Les thermocouples sont séparés de 1 mm : la fixation par vis utilisée pour le dispositif expérimental précédent n'est plus envisageable.
La traversée de la paroi se fait par des trous très fins de 130 µm de diamètre, pour des thermocouples de 127 µm. Les thermocouples sont enfilés au travers d'un joint de caoutchouc assurant l'étanchéité et puis enfilés ensuite au travers d'une bride (il y a une bride par série de thermocouples) (Figure 5.8). Les thermocouples sont regroupés par séries de 6 ou 5 et sont tout d'abord légèrement tendus. Après le remplissage de la boite par les billes de verre, les fils sont tendus et on vient fixer les brides par des vis de fixation.
Les thermocouples placés à y = 35 mm et les thermocouples 25 et 26 sont fixés grâce au système de vis utilisé dans le dispositif expérimental précédent.

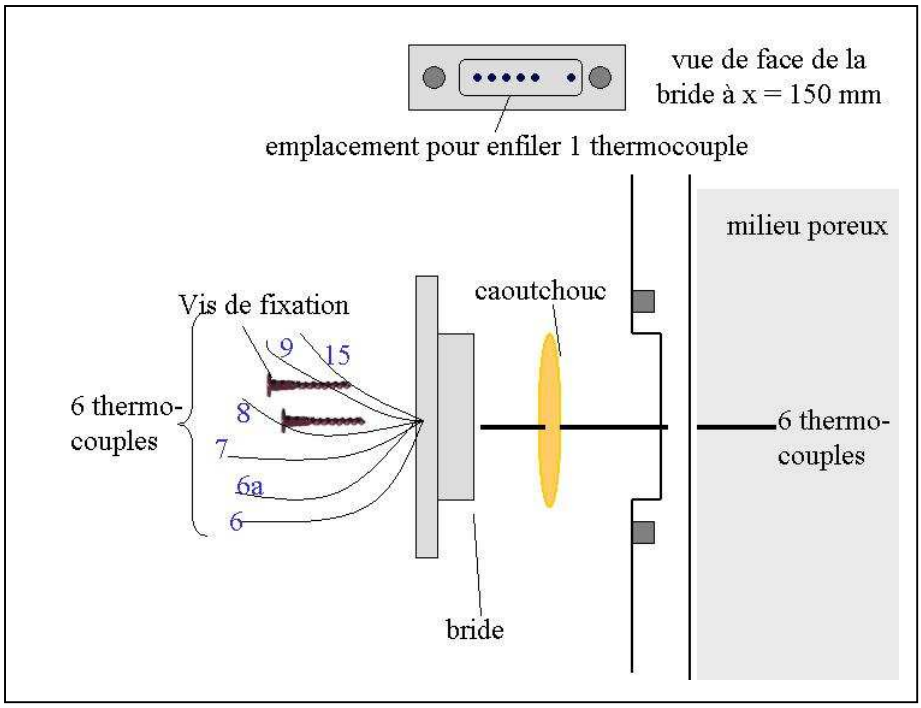


Figure 5.8 : *Système de fixation des thermocouples*

Le dispositif expérimental complet est montré en Figure 5.9. La procédure expérimentale pour réaliser les expériences est alors la même que celle décrite au chapitre 2.

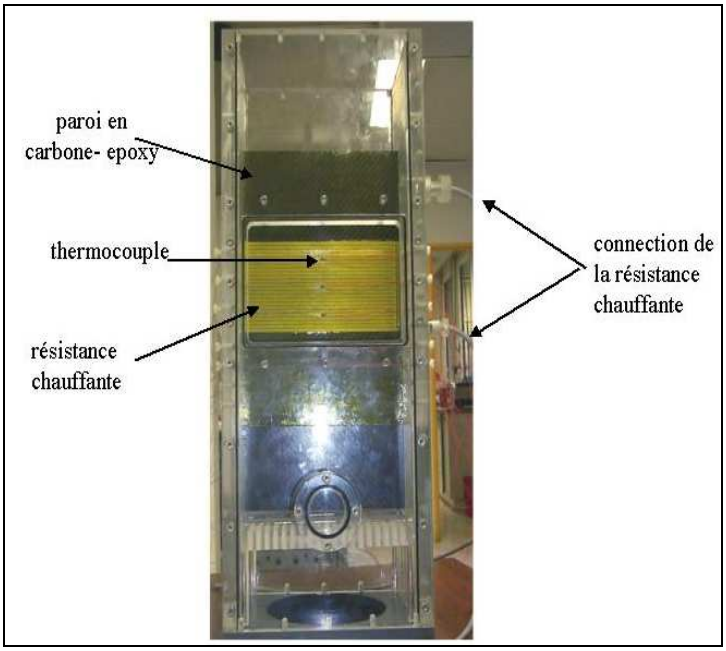


Figure 5.9 : *Dispositif expérimental complet*

5.3 - Résultats expérimentaux

La Figure 5.10 présente les premiers résultats expérimentaux. Les thermogrammes ont une forme similaire à ceux mesurés précédemment au cœur du milieu.

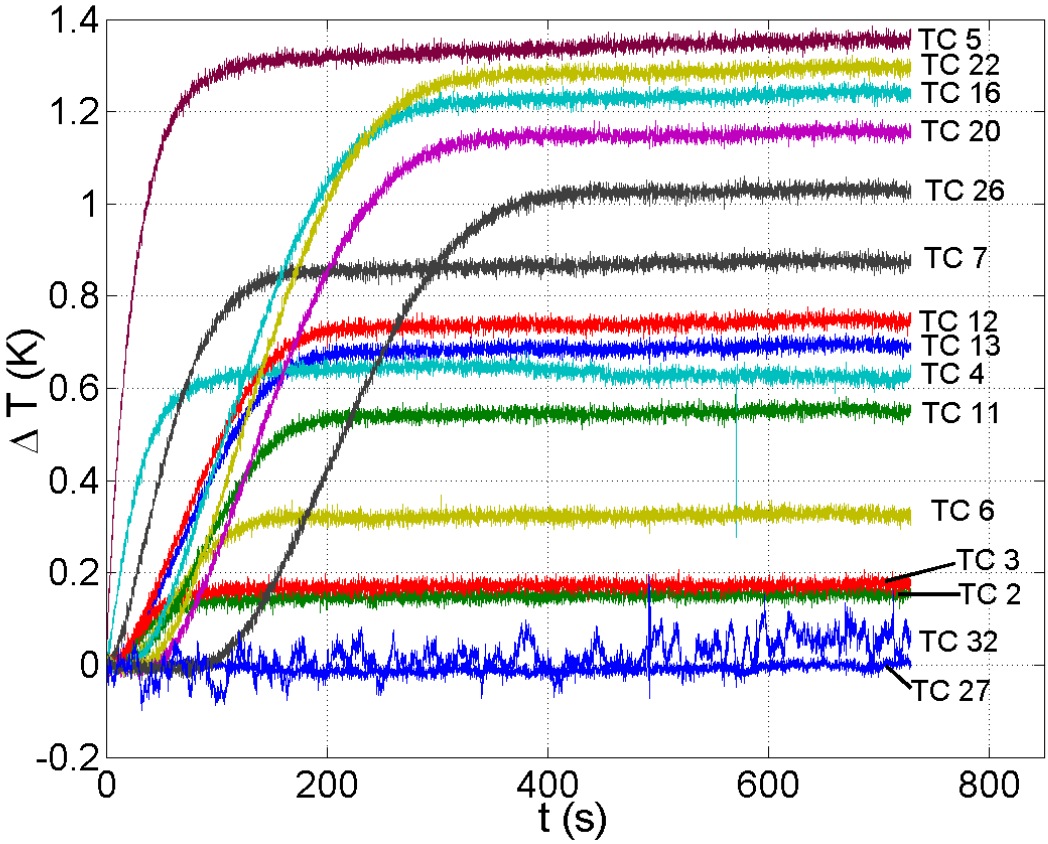


Figure 5.10 : *Températures expérimentales « proche paroi », u = 0,71(± 0,11) m.s^{-1} et W = 126,5 W.m^{-2}*

Afin de mettre en évidence un « effet de paroi », les courbes théoriques de l'équation (5.2) et expérimentales sont superposées sur la Figure 5.11. Les positions des thermocouples utilisés dans le modèle (5.2) sont les positions nominales, les coefficients de dispersion sont ceux calculés précédemment (chapitre 4) et la vitesse est la vitesse de Darcy qui est mesurée avec le fil chaud. Les courbes ne se superposent pas. Il y a une réelle différence entre les deux séries de courbes même si la vitesse mesurée est très imprécise, l'écart de température entre mesure et modèle est positif ou négatif selon les thermocouples. Sur la Figure 5.12, est représenté le signal d'un même thermocouple (TC 2) à différentes vitesses (le lit n'a pas subi de reconstruction entre ces différentes expériences). Pour les nombres de Reynolds égaux à 60 et 90, la puissance est de 126 W.m^{-2} et pour des nombres de Reynolds de 30 et 75, la puissance est de 197 W.m^{-2}. La Figure 5.12 représente les thermogrammes recalculés et expérimentaux, les courbes ne se superposent pas.

Les Figures 5.13 et 5.14 montrent les résidus pour différents nombres de Reynolds pour les thermocouples 2 et 13. On constate que le signe (négatif ou positif) des résidus n'est corrélé ni

à la vitesse ni à la position du thermocouple. Ceci est certainement une signature des effets de survitesse en paroi.

Le modèle à une température ne permet pas de décrire les phénomènes observés pour le chauffage en paroi, il est donc nécessaire d'utiliser un modèle plus complet.

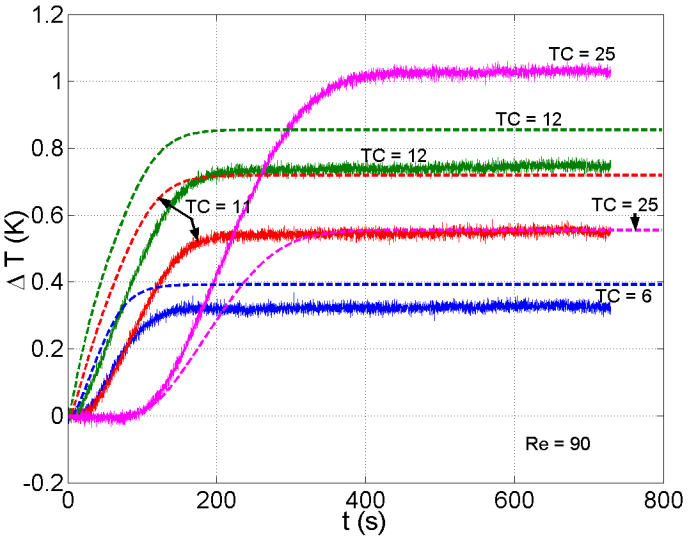


Figure 5.11 : *Températures expérimentales (traits pleins) et recalculées (traits en pointillés)*

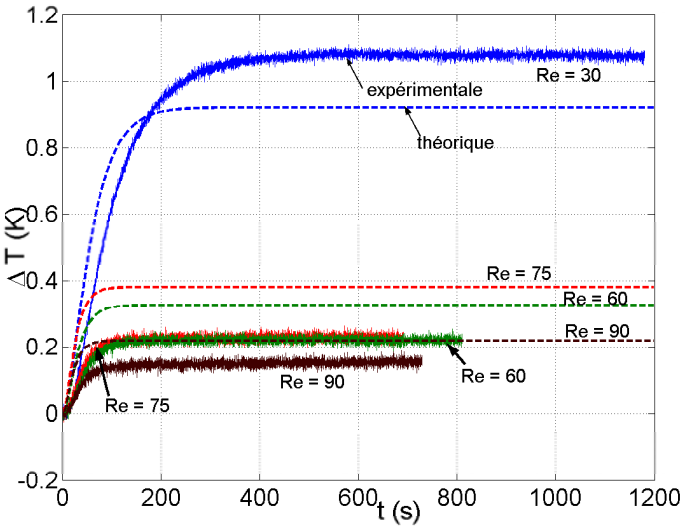


Figure 5.12 : *Températures expérimentales et recalculées pour le thermocouple 2*

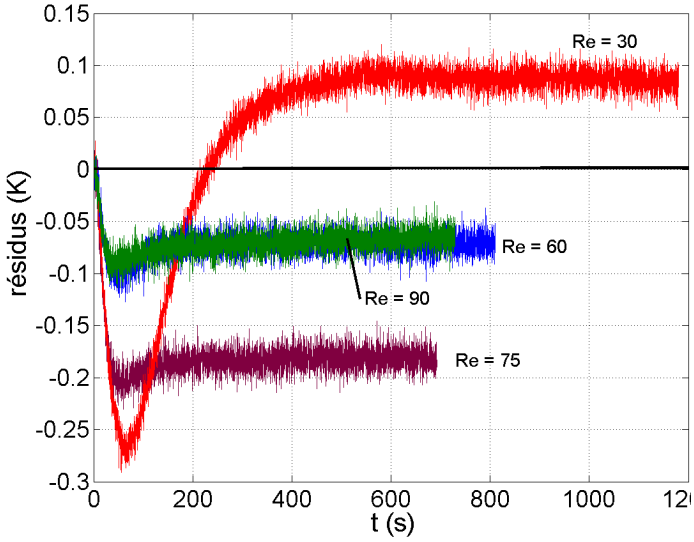


Figure 5.13 : *Résidus à différents nombres de Reynolds pour le thermocouple 2 (x = 20 mm et y = 3 mm)*

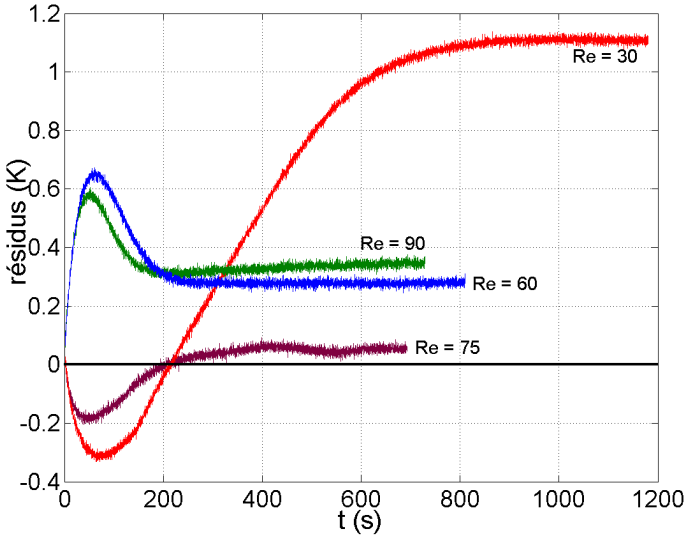


Figure 5.14 : *Résidus à différents nombres de Reynolds pour le thermocouple 13 (x = 80 mm et y = 1mm*

5.4 - Perspectives

Le dispositif expérimental avec chauffage en paroi permet de produire des thermogrammes de bonne qualité. Les mesures que nous avons réalisées, permettent de mettre clairement en évidence les effets thermiques en proche paroi. Le modèle de Green mis en place donne une idée générale du profil de température que nous observons mais ne permet pas de décrire complètement le phénomène. Le modèle de Fourier « une couche » a été validé. Il ne prend pas en compte les différents phénomènes se produisant près de la paroi décrits dans la littérature (cf. chapitre 1). Il est donc nécessaire à partir du modèle simple « monocouche » de réaliser un modèle « bicouche » qui permettrait de coupler la zone à cœur, dont les propriétés ont été identifiées (cf. chapitre 4) et la zone en proche paroi (Figure 5.15).

Ce nouveau modèle fera apparaître de nouveaux paramètres qu'il faudra estimer avec la même technique que nous avons utilisé au cœur du milieu. Ces nouveaux paramètres sont :

- ✓ la largeur de la « pseudo-couche limite » δ de l'ordre du rayon des grains
- ✓ la vitesse en proche paroi : u'
- ✓ la porosité en proche paroi : ε'
- ✓ les coefficients de dispersion en proche paroi : λ_x' et λ_y'
- ✓ les positions des thermocouples

Ce modèle bicouche est déjà écrit (cf. Annexe 5) ; une étude de sensibilité serait nécessaire afin de savoir quels paramètres peuvent être estimés correctement.

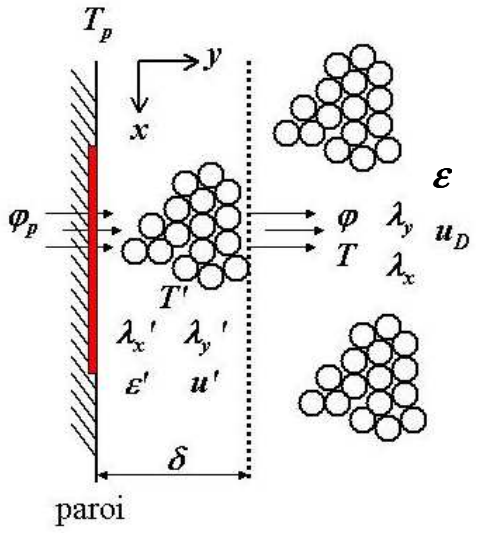


Figure 5.15 : *Modélisation avec le modèle « bicouche »*

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons adapté le banc de caractérisation de la dispersion en cœur du milieu granulaire du laboratoire à un écoulement gazeux. Un lit fixe constitué soit de billes de verre de 2 ou de 3 mm soit d'un grain poreux (support de catalyseur) est parcouru par un écoulement d'air ou d'azote. Ce lit est soumis à un chauffage linéique qui permet d'éviter les effets thermiques en proche paroi lorsque l'on mesure des températures à cœur. Ces différents lits granulaires ont été caractérisés. Nous avons estimé avec une bonne précision les différents paramètres du problème: coefficients de dispersion longitudinal et transversal, la vitesse de Darcy et les positions des thermocouples. La qualité de ces estimations a pu être validée par des simulations de Monte Carlo. Cette étude a également permis de valider le modèle à une température pour des grains non poreux (billes de verre) et aussi pour des grains poreux (support de catalyseur) parcourus par un écoulement gazeux.

Nos résultats ont été comparés avec ceux effectués, dans la même configuration, pour un écoulement d'eau au travers d'un lit de billes de verre. Cela nous a permis de proposer une corrélation unique donnant le coefficient de dispersion longitudinal pour trois systèmes différents en fonction du nombre de Reynolds. Nos résultats sont ici en adéquation avec ceux de la littérature. Il serait intéressant de procéder à des caractérisations plus larges en utilisant différents fluides et différents solides afin de valider ou d'améliorer cette corrélation.

Le coefficient de dispersion transversal a pu être estimé avec une très bonne précision (contrairement au cas eau / billes de verre). Nos résultats nous ont permis d'établir une corrélation linéaire pour des nombres de Reynolds de 15 à 100. Cet intervalle correspond au régime inertiel. Il semble que pour le régime de Darcy (nombre de Reynolds de 0 à 15), le coefficient de dispersion transversal soit constant. Il est à noter que nos résultats ne sont pas en accord avec la littérature où ce coefficient est mal estimé. Pour confirmer la constance de ce paramètre en régime de Darcy, il serait possible de réaliser les mêmes expériences à de très faibles débits avec non plus un système d'alimentation par aspiration d'air mais en utilisant des bouteilles d'air comprimé. Ceci permettrait peut-être d'atteindre un régime impossible à avoir avec notre type d'installation et ceci pour des nombres de Reynolds de 5 à 15, niveaux pour lesquels la convection naturelle ne doit pas encore trop se faire sentir.

La maîtrise du coefficient transverse est cruciale en situation industrielle car c'est celui-ci qui assure le refroidissement vers la paroi du lit lorsque ce dernier est le siège d'une réaction exothermique. Il serait intéressant de réaliser des expériences avec des mélanges de billes de diamètres différents.

Enfin dans cette partie sur la caractérisation thermique en cœur du milieu granulaire, il serait certainement intéressant d'effectuer de mesures sur un réacteur permettant de mieux

s'approcher du process industriel. Il serait alors possible de valider plus complètement notre approche.

Nous avons également mis au point un banc de caractérisation des effets thermiques en proche paroi en excitant le lit par un chauffage en paroi. Les premiers résultats expérimentaux sont de bonne qualité et indiquent que le modèle à une température tel que nous l'utilisions ne permet pas encore de décrire les phénomènes causés par la paroi (survitesses créées par des variations locales de porosité). Un nouveau modèle analytique basé sur une transformation de Fourier spatiale doit pouvoir permettre de prendre en compte les effets proches paroi en utilisant une description « bicouche » du milieu (couche semi-infinie à cœur et couche en proche paroi). Il serait intéressant de le tester et de le l'appliquer sur nos premières mesures. Il faudrait, en parallèle, étudier l'identifiabilité de tous les paramètres de ce modèle bicouche et tenter de dégrader la couche en proche paroi en une condition limite couplant thermiquement couche à cœur et paroi du lit.

Annexe 1 : nouvelle configuration de chauffage

Nous avons étudié une autre configuration d'excitation (Figure 2.1) pour voir si une amélioration des estimations était possible pour l'air.

L'abscisse des thermocouples (y) a été optimisée. Plusieurs profils de sensibilité et de simulations de Monte Carlo ont été effectués, il est apparu qu'à y = 5 mm, nous avions les meilleurs résultats.
Nous avons superposé deux fils chauffant. Les deux sources sont perpendiculaires à l'écoulement (Figure 2.1) et sont décrites par :

$$s_0 = Q\,\delta(x'-0)\,\delta(y'-0)$$
$$s_1 = Q\,\delta(x'-x_1')\,\delta(y'-y_1')$$

Nous utilisons la même méthode que celle utilisée dans le paragraphe 1.1 et 1.2 et nous obtenons la réponse en température :

$$\Delta T(x,y,x_1,y_1,t) = \frac{Q}{4\pi\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\left[\int_0^{\frac{(\rho c_p)_f^2\,u^2\,t}{4\,(\rho\,c_p)_t\,\lambda_x}}\left(e^{\frac{(\rho c_p)_f\,u\,x}{2\lambda_x}}\,e^{-\left(\frac{x^2}{\lambda_x}+\frac{y^2}{\lambda_y}\right)\frac{(\rho c_p)_f^2\,u^2}{16\lambda_x}\frac{1}{\theta}-\theta} + e^{\frac{(\rho c_p)_f\,u\,(x-x_1)}{2\lambda_x}}\,e^{-\left(\frac{(x-x_1)^2}{\lambda_x}+\frac{(y-y_1)^2}{\lambda_y}\right)\frac{(\rho c_p)_f^2\,u^2}{16\lambda_x}\frac{1}{\theta}-\theta}\right)\frac{d\theta}{\theta}\right]$$

L'évolution temporelle de la température a la même allure que celle de la Figure 2.2 de la Partie 1. Par contre, les profils des sensibilités changent légèrement (figure 2.2).
Nous avons fait figurer ici 2 nouveaux paramètres x_1 et y_1 (position du thermocouple de la source S_1) qui sont estimés et qui sont également à associer à une contrainte sur leur valeur nominale (comme les thermocouples) en mode α_5.

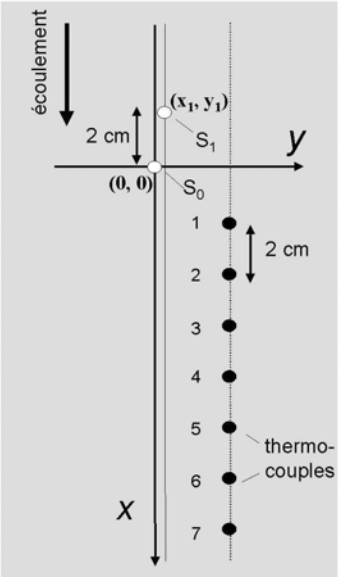


Figure 2.1 *: nouvelle configuration d'excitation avec deux fils chauffants et positions des thermocouples*

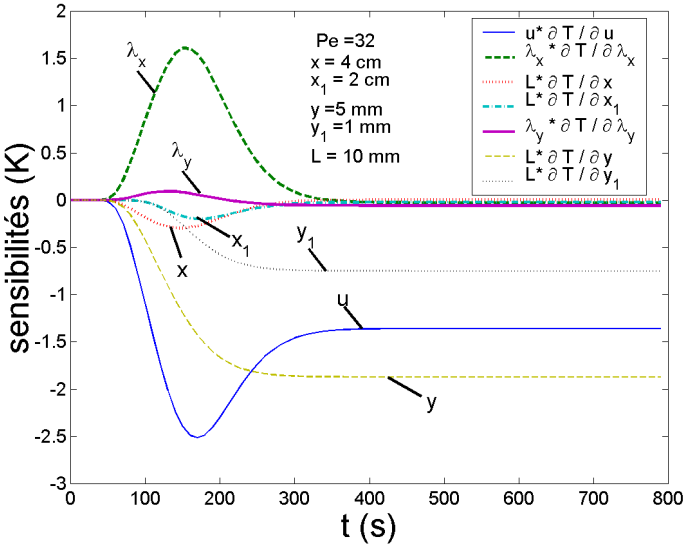


Figure 2.2 *: sensibilités à Pe = 32 pour deux sources parallèles*

On constate que la sensibilité au coefficient λ_y est désormais positive et que la sensibilité à la vitesse est négative. De plus, on constate que le signal est plus sensible à λ_x et que les sensibilités à λ_y et à y ne semblent plus être corrélées.

Simulations de Monte Carlo

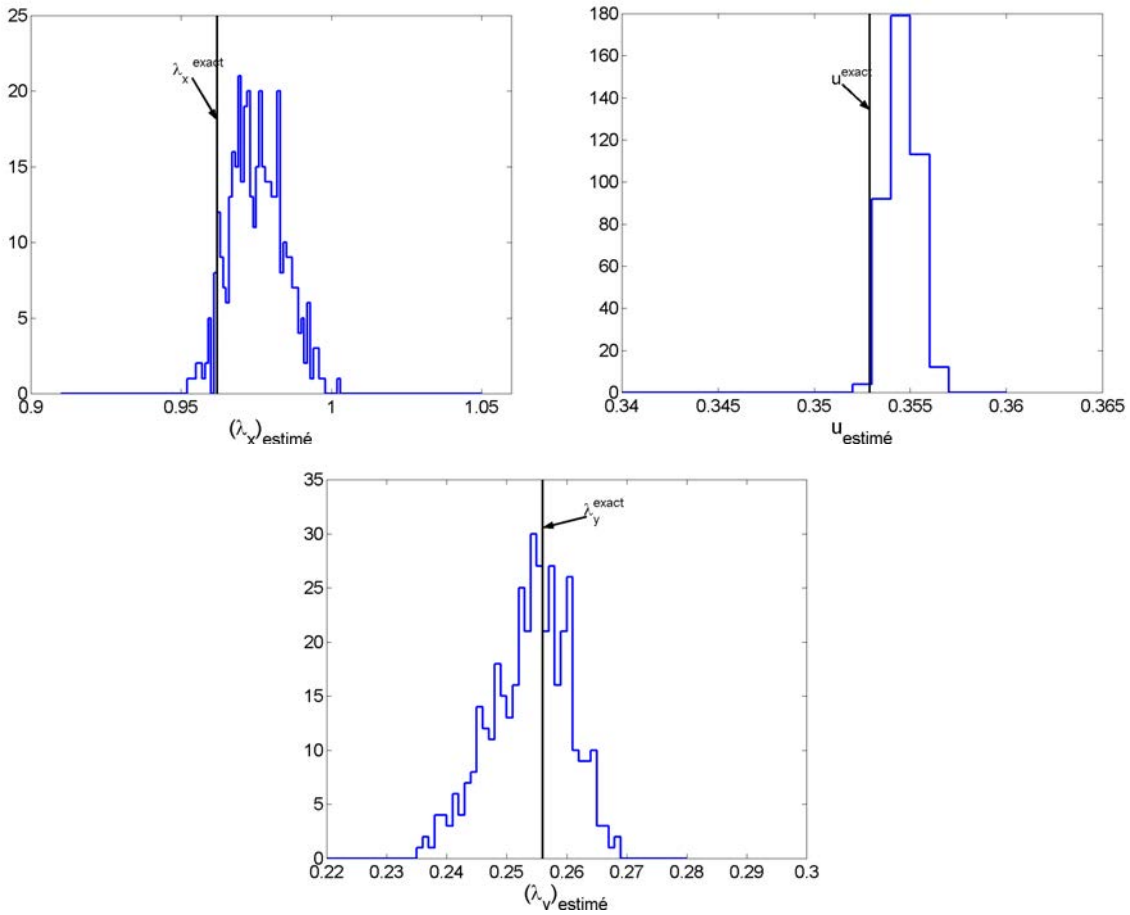
Des simulations d'inversion par la méthode de Monte Carlo ont été effectuées.
On constate, par rapport aux simulations de Monte Carlo effectuées sur une seule source, que les trois paramètres λ_x, λ_y et u sont moins biaisés. Par contre λ_y est plus dispersé, la dispersion est deux fois plus importante et le biais est 5 fois moins important.

L'estimation du coefficient transversal étant satisfaisante dans le cas d'une seule source, nous ne pensons pas que la réalisation expérimentale de la configuration à deux sources soient nécessaire.

	Biais (%)	Ecart type (%)
λ_x	1	1
λ_y	1	4
u	0.3	0.3

Ecart - type et biais de 400 simulations de Monte Carlo

En conclusion, ce type d'excitation permet d'améliorer l'estimation sur λ_x (biais diminué) et sur la vitesse (biais diminué). Par contre il y a une dégradation de l'estimation pour le coefficient transverse λ_y (dispersion augmentée).



Résultats de 400 simulations de Monte Carlo en mode α_5

Annexe 2 : prétraitement du signal

(extrait de la thèse de Thomas Metzger)

Chapitre 3

Résultats pour trois dispositions expérimentales

Dans ce chapitre, les résultats expérimentaux seront présentés et discutés. D'abord nous allons discuter le prétraitement du signal expérimental. Ensuite, les différents modes d'estimation – classiques (β_2 et β_3) ou de Gauss-Markov (α_4) – seront utilisés afin d'obtenir des résultats pour des coefficients de dispersion thermique. La discussion de ces résultats mettra en évidence une insuffisance de la méthode actuelle. Ce problème sera résolu par une modification légère mais cruciale de la géométrie du dispositif. Nous présenterons enfin les résultats d'estimation obtenus par cette nouvelle méthode ; ceux-ci seront validés par des mesures avec un chauffage plan.

3.1 De la mesure aux signaux utiles : prétraitement du signal

Avant d'appliquer la méthode d'estimation de paramètres aux données expérimentales, les signaux bruts en température doivent être mis dans le bon référentiel et le bruit qui est d'origine électrique doit être corrigé. Afin d'illustrer la démarche nous montrons une mesure représentative avant tout traitement sur la figure 3.1. On comprend tout de suite que ces signaux ne peuvent pas directement servir pour le calcul d'estimation de paramètres, car ni le temps ni la température ne sont ceux du modèle théorique : le chauffage a été allumé à l'instant $t' \approx 37$ s et les températures mesurées à l'équilibre thermique autour de $T = 23,3°C$ ne sont pas rigoureusement les mêmes pour chaque thermocouple, alors que dans le modèle la température est uniforme partout avant la mise en marche du chauffage à l'instant $t = 0$.

3.1.1 Puissance de chauffage et instant d'allumage

Comme il a été déjà précisé, la puissance électrique de chauffage Φ est mesurée et enregistrée en continu pendant chaque expérience. Ceci permet d'un côté d'identifier l'instant et la durée de la mise en marche et d'un autre côté de mesurer la puissance linéique Q et de vérifier sa constance. La figure 3.3 montre l'évolution de la puissance électrique $\Phi(t')$ en fonction du temps pour l'expérience de la figure 3.1 pendant l'allumage.

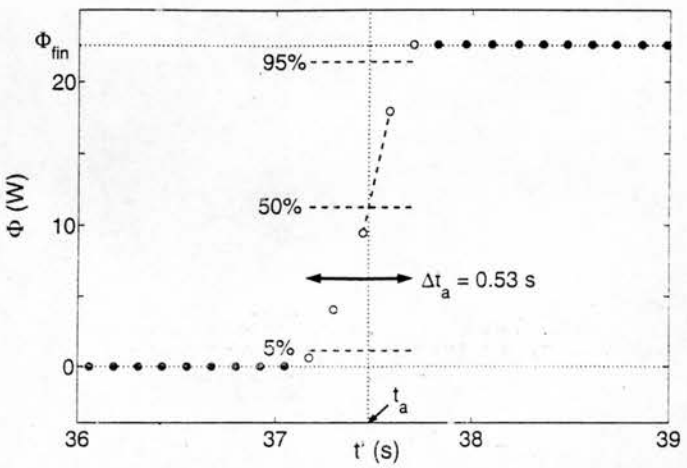


FIG. 3.3 – Puissance électrique dégagée pour l'expérience de la figure 3.1. (Les grandeurs caractéristiques de la mise en marche et leur définition sont représentées.)

L'*instant de la mise en marche* est déterminé de la manière suivante : on prend comme seuil la moitié du niveau final Φ_{fin} ; puis, on fait passer une droite reliant le dernier point en dessous de ce seuil au premier au-dessus ; l'intersection de cette droite avec le seuil donne le temps d'allumage t_a, qui définit alors le nouveau repère de temps $t = t' - t_a$. La *durée de la mise en marche* Δt_a est définie par le temps entre le dernier point de mesure en dessous de 5% de Φ_{fin} et le premier point au-dessus de 95% de ce niveau final. Cette durée est d'environ 0,5 s pour toutes les mesures effectuées.

Pour toutes les mesures effectuées, la puissance électrique Φ était constante après la mise en marche ; l'écart-type maximal d'un point de mesure $\Phi(t_k)$ autour de la moyenne $\overline{\Phi(t_k > 0)}$ étant 1‰. La puissance linéique Q est calculée à partir de cette moyenne et de la longueur du fil l_{fil}.

3.1.2 Températures : l'équilibre thermique et correction du bruit électrique et de la dérive

Après avoir trouvé la bonne origine de temps, nous cherchons maintenant à déterminer la température d'équilibre thermique afin de définir la bonne origine des températures : chaque thermocouple doit être à $\Delta T = 0$ avant le chauffage.

Les températures affichées sur la figure 3.1 ont été obtenues à partir des tensions U_i mesurées aux bornes des thermocouples et la température de la sonde Pt100 par l'équation (2.34). On constate d'abord que les niveaux initiaux de température sont différents pour les différents thermocouples. Le milieu étant en équilibre thermique, il s'agit de légères variations de l'offset des différentes voies de la carte d'acquisition.

Pour corriger cet effet, nous calculons pour chaque thermocouple la moyenne de $N_0 \approx 300$ mesures avant la mise en marche du chauffage (à l'instant $t = 0$) :

$$T_{i,0} := \frac{1}{N_0} \sum_{t_k<0} T_i(t_k) \tag{3.1}$$

Cette température est affectée à l'instant $t = -\frac{t_a}{2}$ (afin de tenir compte de la dérive qui sera discutée tout de suite).

Deuxièmement, on voit un changement rapide et de courte durée sur toutes les températures à l'instant de la mise en marche du chauffage. Il ne peut être que d'origine électrique car tout effet thermique serait beaucoup plus long et non simultané pour tous les thermocouples. Pendant que le chauffage est allumé ($t > 0$), ce bruit synchrone se répète de temps en temps – surtout pour des mesures à grande puissance de chauffe (voir aussi page 81).

Une troisième observation concerne la légère dérive des températures mesurées (malgré toutes les précautions qui ont été prises). Celle-ci touche tous les thermocouples et provient très probablement d'une dérive de la température de référence (voir figure 2.18c). Une autre raison possible serait une dérive de la température d'entrée du milieu poreux. Dans les deux cas, on a le droit de la corriger, car elle n'est pas liée à l'excitation du fil chaud. (Nous rappelons que la linéarité du modèle (2.4) permet de soustraire une dérive de la température ambiante.)

Afin d'éliminer ces perturbations du signal qui n'ont aucun lien avec le phénomène physique en cause, on peut se servir du thermocouple 13 (voir figure 2.17). Celui-ci ne ressent pas d'échauffement, même pour des très faibles vitesses. Dans le seul cas de l'eau stagnante, il mesure une augmentation de température. Pour la plus petite vitesse utilisée ($Pe \approx 1$), l'augmentation de température en amont du chauffage atteint seulement le thermocouple 12. Donc, le thermocouple 13 n'est sensible qu'aux seuls effets perturbateurs d'origine non thermique. La figure 3.4 montre le signal du thermocouple 13 extrait de la figure 3.1.

Afin de sélectionner les points bruités électriquement, nous nous servons du bruit de mesure avant la mise en marche du chauffage :

$$\sigma_0 := \frac{1}{N_0 - 1} \sum_{t_k<0} (T_{13,0} - T_{13}(t_k))^2 \tag{3.2}$$

Un point de mesure à l'instant t_k est éliminé si le critère suivant n'est pas satisfait :

$$|T_{13}(t_k) - T_{13,0}| < 4\sigma_0 \quad \text{pour} \quad 0 < t_k < 1 \text{ s} \tag{3.3}$$

$$\left| T_{13}(t_k) - \frac{1}{4} \sum_{\substack{l=-2 \\ l \neq 0}}^{2} T_{13}(t_{k+l}) \right| < 4\sigma_0 \quad \text{pour} \quad t_k \geq 1 \text{ s} \tag{3.4}$$

La perturbation (d'une plus grande durée) pendant la mise en marche du chauffage peut être identifiée en absolu par rapport à la température initiale (3.3), car l'effet de la dérive est encore petit à $t = 0$. Pour les perturbations suivantes, qui sont d'une très courte durée, chaque point est comparé à la moyenne (glissante) de ses 4 voisins (3.4). Dans les deux cas, nous avons considéré comme significatif un écart de $4\sigma_0$. Naturellement, les points

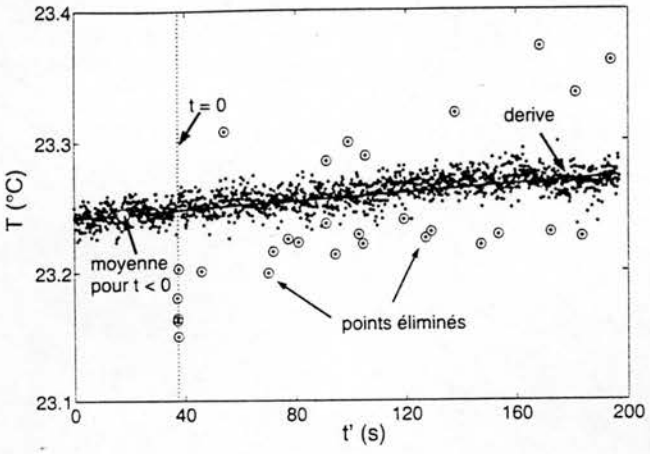


FIG. 3.4 – Signal agrandi du thermocouple 13 et correction des effets perturbateurs (mesure de la figure 3.1).

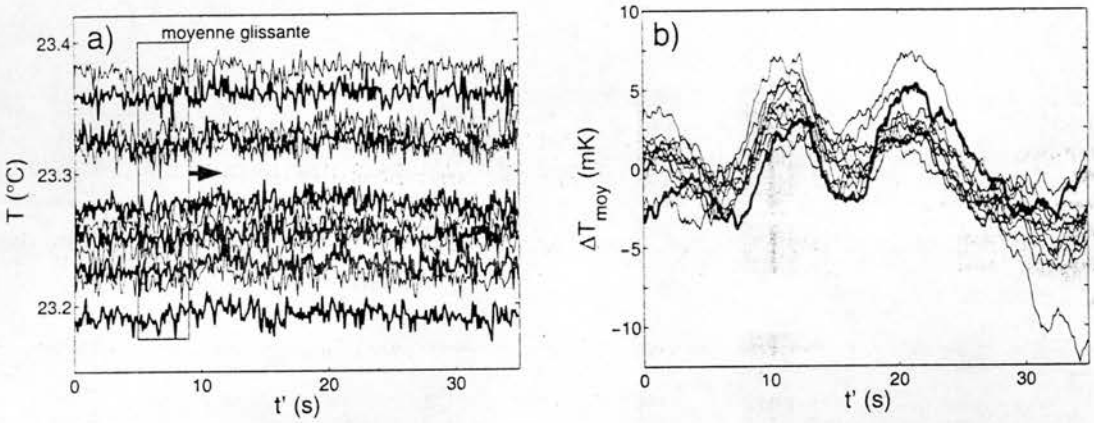


FIG. 3.5 – Correlation du bruit de basse fréquence entre les thermocouples.

qui sont identifiés de cette manière grâce au thermocouple 13 sont ensuite éliminés pour *tous* les thermocouples.

La pente de la dérive est déterminée à partir du signal nettoyé du thermocouple 13 par une droite des moindres carrés classiques. Pour chaque thermocouple, on soustrait du signal la droite qui passe par le point $(-\frac{t_a}{2}, T_{i,0})$ avec la pente de la dérive. La figure 3.4 tente d'illustrer toutes ces corrections.

La dernière correction concerne les variations de basse fréquence que subissent tous les thermocouples. La figure 3.5 tente de les montrer : les signaux avant chauffage (a) sont d'abord transformés par une moyenne glissante (sur 4 s ou 32 points de mesure), puis on soustrait les températures $T_{i,0}$ pour afficher les variations corrélées $\Delta T_{i,moy}$ des thermocouples (b).

L'origine de ce bruit n'est pas expliqué. La correlation nécessite une raison commune pour tous les thermocouples. Du côté thermique, nous ne trouvons pas d'explication : des variations de température du bloc du cuivre seraient beaucoup plus lentes ; et une variation de la température au niveau de la connection des fils des thermocouples aux bornes de la carte produirait une tension thermoélectrique qui serait symétrique sur les deux bornes (voisines) de chaque voie et qui s'annulerait. Reste une raison électrique, car tous les signaux passent par le même circuit électronique (derrière le multiplexeur). Ou il se pourrait aussi que la fréquence d'acquisition en cours de mesure soit légèrement différente de sa valeur nominale, impliquant que les données seraient moyennées sur des cycles non-entiers de la fréquence du réseau (voir page 80) provoquant alors des battements.

L'effet étant petit et l'effort nécessaire pour identifier sa vraie cause étant grand, nous nous contentons de constater que le bruit touche tous les thermocouple simultanément ; il peut alors être corrigé par soustraction du signal du thermocouple 13 des signaux de tous les autres thermocouples. L'augmentation du bruit à plus haute fréquence d'un facteur $\sqrt{2}$ (propagation d'erreur dans la différence $T_i - T_{13}$) est accepté, car l'élimination du bruit à basse fréquence est plus importante pour une bonne interprétation des résidus (voir figure 3.7 ou 3.9).

$Pe < 5$	6 mK
$5 < Pe < 50$	9 mK
$Pe > 50$	13 mK

TAB. 3.1 – Bruit du signal de température σ_T (après corrections) .

Pour notre exemple de mesure, des températures ainsi corrigées sont affichées sur la figure 3.2. Le bruit typique de ces signaux (nettoyés) est donné sur le tableau 3.1 ; il varie en fonction de la vitesse, car le nombre de points dont on prend la moyenne pendant l'acquisition est plus grand pour des petites vitesses (voir page 80).

Il est arrivé deux fois que, pendant la mesure, le signal du thermocouple 13 subisse un effet tel que celui montré sur la figure 2.21b ; dans ces cas, le signal du thermocouple 12 a pu être utilisé à la place pour la correction. (Les vitesses étaient assez élevées pour que ce signal ne contienne pas d'effet de chauffe.)

Annexe 3 : équations de fermeture

Les équations de fermeture et les conditions limites associées ainsi que l'expression correspondante du tenseur de dispersion sont rappelées ci-dessous :
Les fonctions $\vec{f}$ et $\vec{g}$, sont les solutions de :

$$\left(\rho C_p\right)_\beta \vec{v}_\beta.\vec{\nabla}\otimes\vec{f}-\lambda_\beta\nabla^2\vec{f}=-\left(\rho C_p\right)_\beta\left[\vec{v}_\beta-\frac{\varepsilon_\beta\left(\rho C_p\right)_\beta}{\left\langle\rho C_p\right\rangle}\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta\right], \tag{A}$$

$$-\lambda_\sigma\nabla^2\vec{g}=\left(\rho C_p\right)_\sigma\frac{\varepsilon_\beta\left(\rho C_p\right)_\beta}{\left\langle\rho C_p\right\rangle}\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta, \tag{B}$$

avec sur $A_{\beta\sigma}$: $\vec{f}=\vec{g}$ et $\vec{n}_{\beta\sigma}.\lambda_\beta\vec{\nabla}\otimes\vec{f}=\vec{n}_{\beta\sigma}.\lambda_\sigma\vec{\nabla}\otimes\vec{g}+\vec{n}_{\beta\sigma}\left(\lambda_\beta-\lambda_\sigma\right)$. (C)

$$\overline{\overline{\lambda}}_{eff}=\left(\varepsilon_\beta\lambda_\beta+\varepsilon_\sigma\lambda_\sigma\right)\overline{\overline{I}}+\varepsilon_\beta\lambda_\beta\frac{1}{V_\beta}\int_{A_{\beta\sigma}}\vec{n}_{\beta\sigma}\otimes\vec{f}\,dA+\varepsilon_\sigma\lambda_\sigma\frac{1}{V_\sigma}\int_{A_{\beta\sigma}}\vec{n}_{\sigma\beta}\otimes\vec{g}\,dA-\varepsilon_\beta\left(\rho C_p\right)_\beta\frac{1}{V_\beta}\int_{V_\beta}\vec{v}_\beta\otimes\vec{f}\,dV \tag{D}$$

On procède ensuite à une analyse des ordres de grandeur pour comparer les cas eau-verre et air-verre.

- On suppose la vitesse moyenne fixée ainsi que les propriétés thermophysiques de la phase solide.

D'après l'équation (B), on a :

$$-\lambda_\sigma\nabla^2\vec{g}=O\left(\frac{\lambda_\sigma}{d^2}g\right)$$

Dans le cas de l'eau : $\left(\rho C_p\right)_\sigma\frac{\varepsilon_\beta\left(\rho C_p\right)_\beta}{\left\langle\rho C_p\right\rangle}\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta=O\left(\left(\rho C_p\right)_\sigma\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta\right)$ puisque $\frac{\left(\rho C_p\right)_{eau}}{\left\langle\rho C_p\right\rangle_{eau}}=1.47$

Dans le cas de l'air : $\left(\rho C_p\right)_\sigma\frac{\varepsilon_\beta\left(\rho C_p\right)_\beta}{\left\langle\rho C_p\right\rangle}\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta<<O\left(\left(\rho C_p\right)_\sigma\left\langle\vec{v}_\beta\right\rangle^\beta\right)$ puisque $\frac{\left(\rho C_p\right)_{air}}{\left\langle\rho C_p\right\rangle_{air}}\approx 10^{-3}$.

A l'interface solide-fluide, $\vec{f}=\vec{g}$ soit $O(f)=O(g)$ (en accord avec l'analyse des ordres de grandeur opérée au paragraphe II.1. du chapitre I eq.(19)).
On en déduit facilement que : $g_{air}<<g_{eau}$ et que $f_{air}<<f_{eau}$.
En reportant dans la relation (D), on obtient, pour $\vec{v}_\beta$ fixée : $\overline{\overline{\lambda}}_{eff,air}<<\overline{\overline{\lambda}}_{eff,eau}$ (avec en plus $\lambda_{air}<\lambda_{eau}$).

- On fixe le nombre de *Péclet*

Avec $a_{air} \approx 100\, a_{eau}$ alors $\langle v_\beta \rangle_{air}^{\beta} \approx 100 \langle v_\beta \rangle_{eau}^{\beta}$

Dans ce cas, les ordres de grandeur des fonctions *f* et *g* calculées pour l'eau et pour l'air sont pratiquement les mêmes.

- Si on fixe la valeur du nombre de *Reynolds*

Avec $\nu_{air} \approx 15\, \nu_{eau}$, $\langle v_\beta \rangle_{air}^{\beta} \approx 15 \langle v_\beta \rangle_{eau}^{\beta}$, on retrouve à peu près le cas de comparaison à vitesse fixée.

Annexe 4 : solution de l'équation proche-paroi utilisant les fonctions de Green

La température moyenne évolue selon l'équation de dispersion :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \nabla.\left(\boldsymbol{\lambda}\, \nabla \langle T \rangle\right) - \left(\rho c_p\right)_f \boldsymbol{u_D}.\nabla \langle T \rangle \; + \; s(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

$s(\boldsymbol{r},t)$ est une source volumique (puissance thermique par unité de volume) dissipée dans le milieu granulaire homogénéisé. Dans le cas général, c'est une fonction de l'espace $\boldsymbol{r}$ et du temps t. $\boldsymbol{\lambda}$ est ici le tenseur de dispersion thermique et $\boldsymbol{u_D}$ la vitesse de Darcy (notée ici u).
Dans le cas d'un milieu granulaire isotrope et homogène, de porosité externe ε, traversé par un écoulement de vitesse u_D selon l'axe Ox et contenant une source, le modèle à une température s'écrit :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \left(\rho c_p\right)_f u_D \frac{\partial T}{\partial x} + s \tag{2}$$

où T est la température moyenne enthalpique définie par l'équation (1) pour laquelle nous avons enlevé les crochets pour simplifier la notation.

Une transformation exponentielle telle que (avec $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$) :

$$T(\boldsymbol{r},t) = F(\boldsymbol{r},t)\ f(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

$$\text{avec } f(\boldsymbol{r},t) = e^{ax - bt} \tag{4}$$

où $a = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f \ u_D}{2 \ \lambda_x}$ et $b = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f^2 \ u_D^{\ 2}}{4 \ \left(\rho c_p\right)_t \ \lambda_x}$.

permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial F}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \ S \tag{5}$$

avec le terme source $S = \dfrac{s}{f}$.

Cette fonction F peut être ici considérée comme une fonctionnelle c'est à dire qu'elle dépend de l'excitation $s(\boldsymbol{r},t)$. Nous écrirons donc dorénavant $F\left(\boldsymbol{r},t;s(\boldsymbol{r},\ t)\right)$.

$$F(r,t)=\int_{x'=0}^{\infty}\int_{y'=0}^{\infty}\int_{t'=0}^{t}\frac{((\rho C_p)_t)^{3/2}}{8\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\frac{1}{(t-t')^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t K_2^2(r,r')}{4(t-t')}\right) \tag{6a}$$

$$\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_z}}\int_{z'=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t(z-z')^2}{4\lambda_z(t-t')}\right)dz'}_{I_z}\times\frac{s(x',y',t')}{(\rho C_p)_t e(x',y',t')}dx'dy'dt'$$

Pour un milieu infini avec une condition limite $F(\boldsymbol{r}\to\infty)=0$, une condition initiale $F(\boldsymbol{r},\ t=0)=0$, et une source, qui est une impulsion de Dirac spatiale et temporelle $s_\delta=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ \delta(t-t')$, la fonction de Green du problème est donnée par :

$$F(r,t;\,s_\delta)=G(\boldsymbol{r},t/\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{8\ \sqrt{\lambda_x\,\lambda_y\,\lambda_z\,\pi^3B^3(t-t')}^{\ 3}}\ e^{-\frac{\frac{(x-x')^2}{\lambda_x}+\frac{(y-y')^2}{\lambda_y}+\frac{(z-z')^2}{\lambda_z}}{4\,B\,(t-t')}} \tag{6b}$$

avec $B=\dfrac{1}{(\rho\,c_p)_t}$

La fonction de Green G permet de calculer la solution de l'équation (2) pour n'importe quelle source par l'intégration suivante :

$$T(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)\ F(\boldsymbol{r},\ t;s(\boldsymbol{r},t))=e^{ax-bt}\int_0^t\int_{\Re^3}G(\boldsymbol{r},\ t/\boldsymbol{r}',\ t')\ \frac{B\ s}{f}(\boldsymbol{r}',\ t')\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}t' \tag{7}$$

La source de chaleur est ici égale à :

$$s(\boldsymbol{r},t)=W\delta(y)\left[H(x)-H(x-l)\right]H(t)$$

avec H la fonction de Heaviside,
δ la distribution de Dirac.

On introduit le terme source dans l'équation 7 et on obtient :

$$T(\boldsymbol{r},t)=\frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\int_{t'=0}^{t}\frac{\exp(-b(t-t'))}{(t-t')}H(t')\int_{y'=0}^{\infty}\delta(y')\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t(y-y')^2}{4\lambda_y(t-t')}\right)dy'$$
$$\int_{x'=0}^{\infty}\exp(a(x-x'))\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t(x-x')^2}{4\lambda_x(t-t')}\right)\left[H(x')-H(x'-l)\right]dx'dt' \tag{8}$$

On intègre l'équation (8) sur *y'* :

$$T(\boldsymbol{r},t)=\frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\int_{t'=0}^{t}\frac{\exp\left(-b(t-t')\right)}{(t-t')}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y(t-t')}\right)$$
$$\underbrace{\int_{x'=0}^{\infty}\exp(a(x-x'))\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t(x-x')^2}{4\lambda_x(t-t')}\right)dx'dt'}_{I_x(x,t')} \tag{9}$$

On rappelle ici que :

$$erf(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w \exp(-z^2)\,dz$$

et on pose :

$$k=\frac{(\rho c_p)_t}{4\lambda_x(t-t')} \quad \Rightarrow \quad I_x=\int_{x'=-x}^{l-x}\exp(-(kv^2+av))\,dv$$
$$v=x'-x$$

On obtient donc :

$$kv^2+av=k(v^2+\frac{a}{k}v)=k\left[(v+\frac{a}{2k})^2-\frac{a^2}{4k^2}\right]=Z^2-\frac{a^2}{4k} \text{ avec } Z=\sqrt{k}\left(v+\frac{a}{2k}\right) \tag{10}$$

et l'on peut désormais calculer l'intégrale I_x :

$$I_x=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{Z_1}^{Z_2}\exp(-Z^2+\frac{a^2}{4k^2})\quad dZ$$

$$I_x=\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda_x(t-t')}{(\rho c_p)_t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t}u(t-t')\right)^2\left[erf(Z_1)+erf(Z_2)\right] \tag{11}$$

Les termes Z_1 et Z_2 sont définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{k}\left(\dfrac{a}{2k} - x\right) \\ Z_2 = \sqrt{k}\left(l - x + \dfrac{a}{2k}\right) \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u\,(t-t')\right]$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[l - x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u\,(t-t')\right]$$

On obtient ici

$$\Delta T = \frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x \lambda_y}}\sqrt{\pi}\int_{t'=0}^{t}\frac{1}{(t-t')}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y (t-t')}\right)\left(\frac{\lambda_x (t-t')}{(\rho c_p)_t}\right)^{1/2}\left[erf(Z_1) + erf(Z_2)\right]dt' \quad (12)$$

Ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta T = {} & \frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x \lambda_y}}\sqrt{\pi}\int_{t'=0}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-t')}}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y (t-t')}\right) \\ & \left[erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u(t-t')\right]\right) + erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[l - x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u(t-t')\right]\right)\right]dt' \end{aligned}}$$

(13)

Il est enfin possible de faire le changement de variable : $\theta = \dfrac{(\rho c_p)_f^2 u^2}{4 (\rho c_p)_t \lambda_x} t'$, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\Delta T = \frac{W}{2 (\rho c_p)_f u \sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\int_0^{\frac{(\rho c_p)_f^2 u^2 t}{4 (\rho c_p)_t \lambda_x}}\exp\left(-\frac{1}{16}\frac{((\rho c_p)_f u)^2}{\lambda_x \lambda_y}\frac{y^2}{\theta}\right) \left[\mathrm{erf}\left(\frac{(\rho c_p)_f u x}{4 \lambda_x \sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{(\rho c_p)_f u (l-x)}{4 \lambda_x \sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta \quad (14)$$

Annexe 4 : solution de l'équation proche-paroi utilisant les fonctions de Green

La température moyenne évolue selon l'équation de dispersion :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \nabla.\left(\boldsymbol{\lambda}\, \nabla \langle T \rangle\right) - \left(\rho c_p\right)_f \boldsymbol{u_D}.\nabla \langle T \rangle \; + \; s(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

$s(\boldsymbol{r},t)$ est une source volumique (puissance thermique par unité de volume) dissipée dans le milieu granulaire homogénéisé. Dans le cas général, c'est une fonction de l'espace $\boldsymbol{r}$ et du temps t. $\boldsymbol{\lambda}$ est ici le tenseur de dispersion thermique et $\boldsymbol{u_D}$ la vitesse de Darcy (notée ici u).
Dans le cas d'un milieu granulaire isotrope et homogène, de porosité externe ε, traversé par un écoulement de vitesse u_D selon l'axe Ox et contenant une source, le modèle à une température s'écrit :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \left(\rho c_p\right)_f u_D \frac{\partial T}{\partial x} + s \tag{2}$$

où T est la température moyenne enthalpique définie par l'équation (1) pour laquelle nous avons enlevé les crochets pour simplifier la notation.

Une transformation exponentielle telle que (avec $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$) :

$$T(\boldsymbol{r},t) = F(\boldsymbol{r},t)\ f(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

$$\text{avec } f(\boldsymbol{r},t) = e^{ax - bt} \tag{4}$$

où $a = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f \ u_D}{2 \ \lambda_x}$ et $b = \dfrac{\left(\rho c_p\right)_f^2 \ u_D^{\ 2}}{4 \ \left(\rho c_p\right)_t \ \lambda_x}$.

permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial F}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \ S \tag{5}$$

avec le terme source $S = \dfrac{s}{f}$.

Cette fonction F peut être ici considérée comme une fonctionnelle c'est à dire qu'elle dépend de l'excitation $s(\boldsymbol{r},t)$. Nous écrirons donc dorénavant $F\left(\boldsymbol{r},t;s(\boldsymbol{r},\ t)\right)$.

$$F(r,t)=\int_{x'=0}^{\infty}\int_{y'=0}^{\infty}\int_{t'=0}^{t}\frac{((\rho C_p)_t)^{3/2}}{8\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\frac{1}{(t-t')^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t K_2^2(r,r')}{4(t-t')}\right) \tag{6a}$$

$$\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda_z}}\int_{z'=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t(z-z')^2}{4\lambda_z(t-t')}\right)dz'}_{I_z}\times\frac{s(x',y',t')}{(\rho C_p)_t e(x',y',t')}dx'dy'dt'$$

Pour un milieu infini avec une condition limite $F(\boldsymbol{r}\to\infty)=0$, une condition initiale $F(\boldsymbol{r},\ t=0)=0$, et une source, qui est une impulsion de Dirac spatiale et temporelle $s_\delta=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ \delta(t-t')$, la fonction de Green du problème est donnée par :

$$F(r,t;\ s_\delta)=G(\boldsymbol{r},t/\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{8\ \sqrt{\lambda_x\,\lambda_y\,\lambda_z\,\pi^3 B^3\,(t-t')}^{\ 3}}\ e^{-\frac{\frac{(x-x')^2}{\lambda_x}+\frac{(y-y')^2}{\lambda_y}+\frac{(z-z')^2}{\lambda_z}}{4\ B\ (t-t')}} \tag{6b}$$

avec $B=\dfrac{1}{(\rho\,c_p)_t}$

La fonction de Green G permet de calculer la solution de l'équation (2) pour n'importe quelle source par l'intégration suivante :

$$T(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)\ F(\boldsymbol{r},\ t;s(\boldsymbol{r},t))=e^{ax-bt}\int_0^t\int_{\Re^3}G(\boldsymbol{r},\ t/\boldsymbol{r}',\ t')\ \frac{B\ s}{f}(\boldsymbol{r}',\ t')\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}t' \tag{7}$$

La source de chaleur est ici égale à :

$$s(\boldsymbol{r},t)=W\delta(y)\left[H(x)-H(x-l)\right]H(t)$$

avec H la fonction de Heaviside,
δ la distribution de Dirac.

On introduit le terme source dans l'équation 7 et on obtient :

$$T(\boldsymbol{r},t)=\frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\int_{t'=0}^{t}\frac{\exp(-b(t-t'))}{(t-t')}H(t')\int_{y'=0}^{\infty}\delta(y')\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t(y-y')^2}{4\lambda_y(t-t')}\right)dy'$$
$$\int_{x'=0}^{\infty}\exp(a(x-x'))\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t(x-x')^2}{4\lambda_x(t-t')}\right)\left[H(x')-H(x'-l)\right]dx'dt' \tag{8}$$

On intègre l'équation (8) sur *y'* :

$$T(\boldsymbol{r},t)=\frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x\lambda_y}}\int_{t'=0}^{t}\frac{\exp\left(-b(t-t')\right)}{(t-t')}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y(t-t')}\right)$$
$$\underbrace{\int_{x'=0}^{\infty}\exp(a(x-x'))\exp\left(-\frac{(\rho C_p)_t(x-x')^2}{4\lambda_x(t-t')}\right)dx'dt'}_{I_x(x,t')} \tag{9}$$

On rappelle ici que :

$$erf(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w \exp(-z^2)\,dz$$

et on pose :

$$k=\frac{(\rho c_p)_t}{4\lambda_x(t-t')} \quad \Rightarrow \quad I_x=\int_{x'=-x}^{l-x}\exp(-(kv^2+av))\,dv$$
$$v=x'-x$$

On obtient donc :

$$kv^2+av=k(v^2+\frac{a}{k}v)=k\left[(v+\frac{a}{2k})^2-\frac{a^2}{4k^2}\right]=Z^2-\frac{a^2}{4k} \text{ avec } Z=\sqrt{k}\left(v+\frac{a}{2k}\right) \tag{10}$$

et l'on peut désormais calculer l'intégrale I_x :

$$I_x=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{Z_1}^{Z_2}\exp(-Z^2+\frac{a^2}{4k^2})\quad dZ$$

$$I_x=\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda_x(t-t')}{(\rho c_p)_t}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t}u(t-t')\right)^2\left[erf(Z_1)+erf(Z_2)\right] \tag{11}$$

Les termes Z_1 et Z_2 sont définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{k}\left(\dfrac{a}{2k} - x\right) \\ Z_2 = \sqrt{k}\left(l - x + \dfrac{a}{2k}\right) \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[x - \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u\,(t-t')\right]$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[l - x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u\,(t-t')\right]$$

On obtient ici

$$\Delta T = \frac{W}{4\pi\sqrt{\lambda_x \lambda_y}}\sqrt{\pi}\int_{t'=0}^{t}\frac{1}{(t-t')}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y (t-t')}\right)\left(\frac{\lambda_x (t-t')}{(\rho c_p)_t}\right)^{1/2}\left[erf(Z_1) + erf(Z_2)\right]dt' \quad (12)$$

Ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta T = {} & \frac{W}{4\sqrt{\pi\,(\rho c_p)_t\,\lambda_y}}\int_{t'=0}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-t')}}\exp\left(-\frac{(\rho c_p)_t y^2}{4\lambda_y (t-t')}\right) \\ & \left[erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[x - \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u(t-t')\right]\right) + erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho c_p)_t}{\lambda_x (t-t')}}\left[l - x + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_t} u(t-t')\right]\right)\right]dt' \end{aligned}}$$

(13)

Il est enfin possible de faire le changement de variable : $\theta = \dfrac{(\rho\, c_p)_f^{\,2}\, u^2}{4\,(\rho\, c_p)_t\,\lambda_x}\,(t-t')$, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} T(r,t) = {} & \frac{W\sqrt{\lambda_x}}{2\left(\rho\, c_p\right)_f u\sqrt{\pi\,\lambda_y}}\int_0^{\frac{\left(\rho c_p\right)_f^{\,2} u^2 t}{4\left(\rho c_p\right)_t \lambda_x}} e^{-\frac{y^2\left(\rho c_p\right)_f^{\,2} u^2}{16\lambda_y \lambda_x}\frac{1}{\theta}} \\ & \left[erf\left(\frac{\left(\rho\, c_p\right)_f u\, x}{4\,\lambda_x\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\right) + erf\left(\frac{\left(\rho\, c_p\right)_f u}{4\,\lambda_x\sqrt{\theta}}(l-x) + \sqrt{\theta}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,d\theta \end{aligned}}$$

(14)

Annexe 5 : solution du modèle « bicouche »

On considère le problème bidimensionnel représenté en Figure 1 : une paroi ($y = 0$) limite un

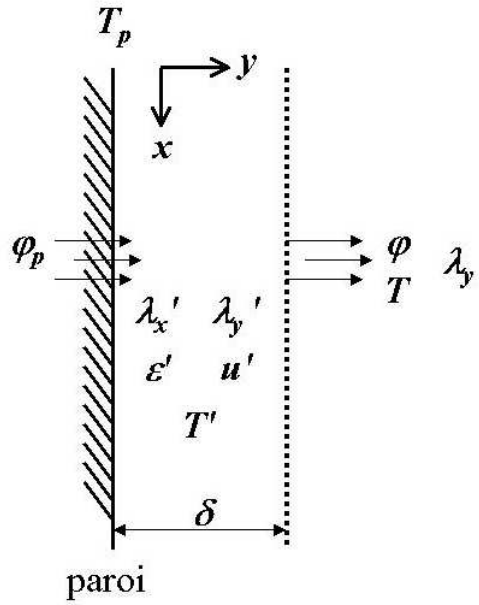


Fig. 1 Géométrie du problème : zone à cœur et zone en proche paroi

milieu granulaire semi-infini ($y > 0$).Loin de la paroi ($y > \delta$) le milieu granulaire homogène, traversé par un écoulement fluide de vitesse superficielle uniforme u parallèle à l'axe des x, peut être modélisé par le modèle à une température T, avec des coefficients de dispersion λ_x et λ_y et une porosité ε. On appelle ρc_f et ρc_s les chaleurs volumiques respectives du fluide et du solide et ρc_t ($=\varepsilon \rho c_f + (1 - \varepsilon) \rho c_s$) la chaleur volumique totale. En régime thermique transitoire, l'équation de convection-diffusion du modèle à deux températures dans ce milieu ($y \geq \delta$) s'écrit :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\rho c_p\right)_t \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\rho c_p\right)_f u \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (1)$$

A proximité de la paroi, du fait des variations locales de porosité, la vitesse ne peut plus être considérée comme uniforme et elle varie avec y. Il en est probablement de même avec les deux coefficients de dispersion. Néanmoins nous modélisons la zone en proche paroi par une couche homogène de porosité ε' et de vitesse u' uniformes et de coefficients de dispersion λ_x' et λ_y' constants. On appelle $\rho c_t'(=\varepsilon' \rho c_f + (1 - \varepsilon') \rho c_s)$ la chaleur volumique totale de cette couche. Il s'agit là d'une *couche homogène équivalente*, d'épaisseur δ, dont les porosités et vitesse superficielle équivalentes, pour un lit de sphères monodisperses de diamètre d,

peuvent être calculées d'après les travaux de Holger Martin [Martin, 1978], qui a supposé $\delta = d/2$ et qui a alors intégré le profil de porosité sur la couche hétérogène pour lui affecter une porosité équivalente:

$$\varepsilon' = 0{,}487 \text{ (lit d'extension infinie en } y\text{)} \tag{2}$$

En écrivant les pertes de pression sur chacune des deux couches à l'aide d'une loi d'Ergun, Holger Martin a pu calculer le rapport des vitesses superficielles, qui s'écrit de la manière suivante, lorsque la couche homogène est d'épaisseur infinie :

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{2M\,Z}\left(-1+\left(1+4MZ\,(1+Z)K\right)^{1/2}\right) \tag{3}$$

avec :

$$K = \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 \qquad M = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'} \qquad Z = \frac{B}{A\,(1-\varepsilon')}\frac{u\,d}{\nu_f} \qquad A = 150 \qquad B = 1{,}75$$

L'équation de convection dispersion à laquelle obéit la température T' dans la couche homogène équivalente en proche paroi s'écrit alors (pour $0 \le y \le \delta$) :

$$\lambda_x'\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \lambda_y'\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \rho c_f\, u'\,\frac{\partial T'}{\partial x} = \rho c_t'\frac{\partial T'}{\partial t} \tag{4}$$

On excite la paroi à l'aide d'un flux imposé sur une hauteur ℓ de la paroi, ce qui correspond à la condition limite suivante :

$$-\lambda_y'\frac{\partial T'}{\partial y} = \left|\begin{array}{lll} \varphi_p(x,t) & \text{pour} & 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{pour} & x < 0 \text{ et } x > \ell \end{array}\right. \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{5}$$

On suppose que φ_p est nul à l'instant initial et on se donne également une condition initiale uniforme :

$$T = T' = 0 \qquad \text{à} \qquad t = 0 \tag{6}$$

On se donne une condition limite de milieu semi-infini :

$$T \to 0 \qquad \text{quand} \qquad y \to +\infty \tag{7}$$

Les conditions limites en x pour les deux couches s'écrivent rigoureusement de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} T \to 0 & \text{quand} & x \to +/-\infty \\ T' \to 0 & \text{quand} & x \to +/-\infty \end{array} \tag{8}$$

La condition en $x = +\infty$ correspond au fait que le chauffage pariétal s'effectue sur une hauteur limitée, ce qui signifie que, pour un milieu infiniment épais en y, les températures des deux couches vont revenir à un niveau zéro loin en aval de la zone chauffée.

Afin de permettre une résolution numérique de ce problème, nous allons remplacer les conditions limites précédentes par :

$$\begin{array}{llll} T = 0 & \text{en} & x = 0 \text{ et} & x = L \\ T' = 0 & \text{en} & x = 0 \text{ et} & x = L \end{array} \qquad (9)$$

avec : $L >> \ell$. Ceci signifie que la vitesse u est suffisamment grande pour que l'échauffement ne diffuse pas en amont de la zone de chauffe. La longueur L devra en outre être prise suffisamment grande pour que l'échauffement du fluide en un point de la zone à cœur, où l'on va observer la température T, ne soit pas affecté par son éventuelle augmentation. Ceci signifie qu'il faudra que L dépasse un certain seuil qui sera déterminé par simulation numérique.

Les conditions d'interface entre la couche à cœur et la couche en proche paroi sont les suivantes (égalités des températures et des flux dispersifs transverses) :

$$\begin{array}{lll} T = T' & \text{en} & y = \delta \\ \lambda_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = \lambda_y' \dfrac{\partial T'}{\partial y} & \text{en} & y = \delta \end{array} \qquad (10)$$

2. Résolution semi-analytique du problème

On va chercher à résoudre le système couplé des deux champs de température vérifiant les équations (1)-(4) et les conditions aux limites et aux interfaces (5, 7, 9, 10) et la condition initiale (6).

2.1 Traitement de la zone à coeur

On fait tout d'abord le changement de fonction inconnue suivant (transformation dite « exponentielle ») :

$$T = T^* \exp(a\,x - b\,t) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\rho\, c_f\, u}{2\,\lambda_x} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4\,\lambda_x} \frac{(\rho\, c_f\, u)^2}{\rho\, c_t} \qquad (10)$$

Ceci permet de supprimer le terme convectif dans l'équation (1) qui devient :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = \rho\, c_t \frac{\partial T^*}{\partial t} \qquad (11)$$

avec les conditions initiale et limites suivantes :

$$T^*(x,\, y,\, t=0) = 0 \qquad T^*(x,\, y = +\infty,\, t) = 0 \qquad T^*(x = 0 \text{ ou } L,\, y,\, t) = 0 \quad (12)$$

On effectue ensuite une transformation de Laplace :

$$\widetilde{T}^* (x, y, p) = \int_0^\infty T^* (x, y, t) \exp(-p\,t)\, \mathrm{d}t \tag{12}$$

qui transforme l'équation (11) en :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \widetilde{T}^*}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \widetilde{T}^*}{\partial y^2} - \rho c_t\, p\, \widetilde{T}^* = 0 \tag{13}$$

avec les conditions initiale et limites suivantes :

$$\widetilde{T}^* (x,\ y = +\infty,\ p) = 0 \tag{14a}$$

$$\widetilde{T}^* (x = 0 \text{ ou } L,\ y, p) = 0 \tag{14b}$$

Les fonctions propres en x du problème (13)-(14b) sont les fonctions :

$$\sin(\alpha_n x) \qquad \text{avec} \quad \alpha_n = n\pi / L \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

On effectue donc une transformation intégrale à l'aide de ces fonctions, avec la température transformée :

$$\widehat{\widetilde{T}}_n^* (y, p) = \int_0^L \widetilde{T}^* (x, y, p) \sin(\alpha_n x)\, \mathrm{d}x \tag{15}$$

Cette nouvelle température vérifie l'équation (13) qui ,une fois transformée, s'écrit, en tenant compte des conditions aux limites (14b):

$$\frac{\partial^2 \widehat{\widetilde{T}}^*}{\partial y^2} - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha_n^2 + \frac{\rho c_t}{\lambda_y} p \right) \widehat{\widetilde{T}}^* = 0 \tag{20}$$

Si l'on introduit la triple transformée $\widehat{\widetilde{\varphi}}_n^*$ de la densité de flux dispersif transverse :

$$\widehat{\widetilde{\varphi}}_n^* (y,\ p) = \int_0^L \int_0^\infty \varphi\ (x,\ y, t) \exp(-a\,x + b\,t) \exp(-p\,t)\ \sin(\alpha_n x)\, \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \tag{21}$$

$$\text{avec :} \quad \varphi\ (x,\ y, t) = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

il est possible d'écrire une relation quadripôlaire entre les vecteurs température-densité de flux transformés correspondant à une couche d'épaisseur $e = (y - \delta)$ dans la zone à cœur :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}_n^* \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^* \end{bmatrix}_\delta = \begin{bmatrix} A_n(e) & B_n(e) \\ C_n(e) & D_n(e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}_n^* \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^* \end{bmatrix}_y \tag{22}$$

avec :

$A_n(e) = D_n(e) = \cosh(e\gamma_n)$; $B_n(e) = \dfrac{1}{\lambda_y \gamma_n} \sinh(e\gamma_n)$; $C_n(e) = \lambda_y \gamma_n \sinh(e\gamma_n)$

et : $$\gamma_n = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha_n^2 + \frac{\rho c_t}{\lambda_y} p \right)^{1/2}$$

Si l'on écrit l'équation (22) pour y tendant vers l'infini, en transformant la condition (14a) qui devient $\widetilde{\widehat{T}}_n^*(y = +\infty) = 0$, on obtient un système de deux équations qui s'écrit, après élimination de $\widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(y = +\infty)$, en omettant dorénavant l'argument p pour les transformées:

$$\widetilde{\widehat{T}}_n^*(\delta) = Z_n \, \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^* \qquad \text{avec} \quad Z_n = \lim_{\text{quand } e \to \infty} \left(B_n(e) / D_n(e) \right) = \frac{1}{\lambda_y \gamma_n} \tag{23}$$

Z_n est donc ici une impédance de couche semi-infinie. On peut réécrire cette équation sous la forme suivante (en omettant l'argument p pour les transformées):

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}_n^*(\delta) \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(\delta) \end{bmatrix} \tag{24}$$

ce qui permet, par inversion matricielle de l'équation (22), de calculer les vecteurs température-flux en tout point $y > \delta$ de la zone à cœur à partir du flux à l'interface $\widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(\delta)$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}_n^*(y) \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n(\delta - y) & -B_n(\delta - y) \\ -C_n(\delta - y) & A_n(\delta - y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}_n^*(\delta) \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}_n^*(\delta) \end{bmatrix} \tag{25}$$

2.1 Raccordement avec la zone en proche paroi

On peut utiliser exactement la même démarche pour relier les vecteurs température-flux en paroi ($y = 0$) aux mêmes vecteurs à la limite ($y = \delta$) de la zone en proche paroi. Il suffit cette fois-ci de partir sur une transformation exponentielle de la température T' :

$$T' = T'^* \exp(a'x - b't) \qquad \text{avec} \quad a' = \frac{\rho c_f u'}{2 \lambda_x'} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4 \lambda_x'} \frac{(\rho c_f u')^2}{\rho c_t} \tag{26}$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$\lambda_x' \frac{\partial^2 T'^*}{\partial x^2} + \lambda_y' \frac{\partial^2 T'^*}{\partial y^2} = \rho c_t' \frac{\partial T'^*}{\partial t} \tag{27}$$

On utilise ensuite exactement les mêmes transformées (Laplace et Fourier sinus) de la température T'^*, ce qui conduit à l'équation suivante, en utilisant les conditions (6) et (9) :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\widehat{T}}'^*}{\partial y^2} - \left(\frac{\lambda_x'}{\lambda_y'} \alpha_n^2 + \frac{\rho c_t}{\lambda_y'} p \right) \widetilde{\widehat{T}}'^* = 0 \tag{28}$$

Les transformées de la température et du flux sont alors définies par :

$$\widetilde{\widehat{T}}'^*_n, \widetilde{\widehat{\varphi}}'^*_n (y, p) = \int_0^L \int_0^\infty T', \varphi' (x, y, t) \exp(-a'x + b't) \exp(-pt) \sin(\alpha_n x) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

ce qui permet d'introduire le quadripôle de la couche en proche paroi :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}'^*_n \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}'^*_n \end{bmatrix}_{y=0} = \begin{bmatrix} A_n'(\delta) & B_n'(\delta) \\ C_n'(\delta) & D_n'(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{T}}'^*_n \\ \widetilde{\widehat{\varphi}}'^*_n \end{bmatrix}_{y=\delta} \tag{29}$$

avec :

$$A_n'(\delta) = D_n'(\delta) = \cosh(\delta \gamma_n') \quad ; \quad B_n(e) = \frac{1}{\lambda_y' \gamma_n'} \sinh(\delta \gamma_n') \quad ; \quad C_n(e) = \lambda_y' \gamma_n' \sinh(\delta \gamma_n')$$

et: $$\gamma_n' = \left(\frac{\lambda_x'}{\lambda_y'} \alpha_n^2 + \frac{\rho c_t'}{\lambda_y'} p \right)^{1/2} \tag{30}$$

Il reste à raccorder les équations (25) et (29) par les conditions d'interface (10). La condition d'égalité des températures s'écrit, après une transformation exponentielle différente de chaque côté de l'interface :

$$T^*(x, \delta, t) = T'^*(x, \delta, t) \exp((a'-a)x) \exp((b-b')t) \tag{31}$$

Après transformation de Laplace, on obtient :

$$\widetilde{T}^*(x, \delta, p) = \widetilde{T}'^*(x, \delta, p+b'-b) \exp((a'-a)x) \tag{32}$$

On effectue alors la transformation de Fourier sinus en x :

$$\widetilde{\widehat{T}}^*_n(\delta, p) = \int_0^L \widetilde{T}'^*(x, \delta, p+b'-b) \sin(\alpha_n x) \exp((a'-a)x) \, \mathrm{d}x \tag{33}$$

et on exprime alors $\widetilde{T}'^*$ par son spectre en Fourier-sinus $\left(\widetilde{\widehat{T}}_k'^*\right)_{k=1,\ldots,\infty}$, à l'aide de la relation d'inversion :

$$\widetilde{T}'^{*}\ (x,\ \delta,\ p+b'-b) = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{T}}_k'^{*}(\delta,\ p+b'-b)\ \sin(\alpha_k\, x) \tag{34}$$

La substitution de (34) dans le terme à intégrer de l'équation (33) conduit à :

$$\widetilde{\widetilde{T}}_n^{*}(\delta,\ p) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{n\,k}\ \widetilde{\widetilde{T}}_k'^{*}(\delta,\ p+b'-b) \tag{35}$$

$$\text{avec : } E_{n\,k} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\alpha_n x)\sin(\alpha_k\, x)\ \exp\big((a'-a)\,x\big)\ \mathrm{d}x \tag{36}$$

On trouve, après intégration :

$$E_{nk} = \frac{a'-a}{L}\ \frac{4\ \alpha_n\,\alpha_k}{\big((a'-a)^2+(\alpha_n-\alpha_k)^2\big)\big(a'-a)^2+(\alpha_n+\alpha_k)^2\big)}\Big[(-1)^{n+k}\exp((a'-a)\,L)\ -1\Big] \tag{37}$$

si $k \neq n$ et :

$$E_{nn} = \frac{4\ \alpha_n^2}{L\,(a'-a)\big[(a'-a)^2+4\alpha_n^2\big]}\ \big(\exp((a'-a)\,L)-1\big) \qquad \text{si } k=n \tag{38}$$

Dans le cas particulier où les deux couches ont les mêmes propriétés, on a $a = a'$ et l'on retrouve bien : $E_{nk} = 0$ si si $k \neq n$ et $E_{nn} = 1$ (en passant à la limite).

Pour exploiter la relation (35), il faut tout d'abord tronquer la longueur des spectres utilisés, c'est à dire remplacer l'infini par un nombre fini N d'harmoniques dans la somme (34) et introduire ensuite des vecteurs spectres des doubles transformées (exponentielles et de Laplace) des températures et des densités de flux dans les deux couches :

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^{*} &= \begin{bmatrix}\widetilde{\widetilde{T}}_1^{*} & \widetilde{\widetilde{T}}_2^{*} & \cdots & \widetilde{\widetilde{T}}_N^{*}\end{bmatrix}^t & \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}^{*} &= \begin{bmatrix}\widetilde{\widetilde{\varphi}}_1^{*} & \widetilde{\widetilde{\varphi}}_2^{*} & \cdots & \widetilde{\widetilde{\varphi}}_N^{*}\end{bmatrix}^t \\ \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{T}}}'^{*} &= \begin{bmatrix}\widetilde{\widetilde{T}}_1'^{*} & \widetilde{\widetilde{T}}_2'^{*} & \cdots & \widetilde{\widetilde{T}}_N'^{*}\end{bmatrix}^t & \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}'^{*} &= \begin{bmatrix}\widetilde{\widetilde{\varphi}}_1'^{*} & \widetilde{\widetilde{\varphi}}_2'^{*} & \cdots & \widetilde{\widetilde{\varphi}}_N'^{*}\end{bmatrix}^t \end{aligned} \tag{39}$$

Ici l'exposant t désigne l'opération de transposition d'une matrice. Pour simplifier l'écriture des transformées, on va poser maintenant :

$$\boldsymbol{\theta} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{T}}}^{*} \qquad \boldsymbol{\phi} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}^{*} \qquad \boldsymbol{\theta}' = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{T}}}'^{*} \qquad \boldsymbol{\phi}' = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}' \tag{40}$$

La relation (33) de couplage des modes de part et d'autre de l'interface peut alors s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\ (\delta,p)\\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta,p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}'\ (\delta,p+b'-b)\\ \boldsymbol{\phi}'\ (\delta,p+b'-b)\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}'\ (\delta,p+b'-b)\\ \boldsymbol{\phi}'\ (\delta,p+b'-b)\end{bmatrix} \tag{41}$$

où $\boldsymbol{E}$ est une matrice carrée, dite « matrice de conversion de spectre » et $\boldsymbol{0}$ la matrice nulle, ces deux matrices ayant la taille (N x N).

On peut alors réécrire les équations (24), (25) et (29) en transformant tous les coefficients apparaissant dans les matrices quadripôlaires (2 x 2) par des matrices diagonales $\boldsymbol{F}$ (= $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$, $\boldsymbol{C'}$ ou $\boldsymbol{D'}$), de tailles (N x N) et de coefficients $F_{n\,k} = \delta_{n\,k}\, F_k$, $\delta_{n\,k}$ étant le symbole de Kronecker. L'équation (24) devient ainsi :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (\delta, p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_\infty \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} \tag{42}$$

L'équation (25) s'écrit de même :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (y, p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (y, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}\ (\delta - y, p) & -\boldsymbol{B}\ (\delta - y, p) \\ -\boldsymbol{C}\ \ (\delta - y, p) & \boldsymbol{A}\ (\delta - y, p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (\delta, p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (\delta, p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} \tag{43}$$

L'équation (29) devient :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}'\ (0, p + b' - b) \\ \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}'(\delta,\ p + b' - b) & \boldsymbol{B}'(\delta,\ p + b' - b) \\ \boldsymbol{C}'(\delta,\ p + b' - b)) & \boldsymbol{D}'(\delta,\ p + b' - b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}'\ (\delta, p + b' - b) \\ \boldsymbol{\phi}'\ \ (\delta, p + b' - b) \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}'\ (\delta, p + b' - b) \\ \boldsymbol{\phi}'\ \ (\delta, p + b' - b) \end{bmatrix}$$

(44)

Les équations (41) et (43) permettent d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (\delta, p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{M}'^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}'\ (0, p + b' - b) \\ \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) \end{bmatrix} \tag{45}$$

En exprimant de deux façons différentes les vecteurs spectres à l'interface, côté cœur, les équations (42) et (45) conduisent à :

$$\boldsymbol{H}_\infty \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{M}'^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}'\ (0, p + b' - b) \\ \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) \end{bmatrix} \tag{46}$$

Cette équation permet d'exprimer, en termes de spectres, la température de paroi et le flux à l'interface, côté cœur, en fonction du flux de chauffage en paroi :

$$\boldsymbol{\theta}'\ (0, p + b' - b) = \left(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{C}'\right)^{-1} \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}'\right) \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) = \boldsymbol{Z}_\delta\, \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\phi}\ (\delta, p) = \left(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{C}'\ \left(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{C}'\right)^{-1} \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{A}'\right)\right) \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) = \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\phi}'\ (0, p + b' - b) \tag{48}$$

Physiquement la matrice $\boldsymbol{Z}_\delta$ représente l'impédance du milieu poreux vue de la paroi et la matrice $\boldsymbol{R}$, qui n'est pas égale à priori à l'identité $\boldsymbol{I}$ (sauf si l'épaisseur d de la zone en proche paroi est nulle avec des transformées exponentielles identiques : $a = a'$ et $b = b'$), représente la non conservation entre le flux de chaleur injecté en paroi et le flux effectivement reçu par la zone à cœur : il n'y a donc pas conservation du flux en proche paroi dans la direction transverse.

Les équations (42) et (43) permettent alors de calculer le spectre de la température en tout point du cœur :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}\ (y,p) \\ \boldsymbol{\phi}\ (y,p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}^{-1}\ \boldsymbol{H}_{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi}\ (\delta,p) \end{bmatrix} \tag{49}$$

On a donc, en utilisant (48) :

$$\boldsymbol{\theta}\ (y,p) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{\phi}\ (\delta,p) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{\phi}'\ (0,p+b'-b) = \boldsymbol{S}(p)\ \boldsymbol{\phi}'\ (0,p+b'-b) \tag{50}$$

où $\boldsymbol{S}$ (p) est une matrice dépendant de p par l'intermédiaire des définitions des différentes matrices $\boldsymbol{Z}$ (p), $\boldsymbol{A}$ ($y-\delta$, p) , $\boldsymbol{B}$ ($y-\delta$, p), $\boldsymbol{C}$ ($y-\delta$, p), $\boldsymbol{D}$ ($y-\delta$, p), $\boldsymbol{A'}$ (δ, $p+b'-b$), $\boldsymbol{B'}$(δ, $p+b'-b$), $\boldsymbol{C'}$(δ, $p+b'-b$) et $\boldsymbol{D'}$(δ, $p+b'-b$).

2.2 Exemple de résolution pour une excitation particuliaire

Si le flux pariétal φ_p, voir l'équation (5), est un échelon temporel uniforme en espace, on a :

$$\varphi_p\ (x,t) = \varphi_0\, H(t) \Rightarrow \varphi'^{*}(x,y=0,\,t) = \left| \begin{array}{ll} \varphi_0\, H(t)\ \exp(-a'x+b't) & \text{pour} \quad 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{pour} \quad x<0 \text{ et } x>\ell \end{array} \right. \tag{51}$$

où H (t) est la fonction de Heaviside. On en déduit, suite à la transformation de Laplace :

$$\tilde{\varphi}'^{*}(x,y=0,\,p) = \left| \begin{array}{ll} \varphi_0\ \exp(-a'x)/(p-b') & \text{pour} \quad 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{pour} \quad x<0 \text{ et } x>\ell \end{array} \right. \tag{52}$$

et l'on effectue ensuite la transformation de Fourier sinus :

$$\phi_n'(0,p) = \tilde{\tilde{\varphi}}_n'^{*}(0,p) = \int_0^L \tilde{\varphi}'^{*}(x,y=0,\,p)\sin(\alpha_n x)\ \mathrm{d}x = \frac{\varphi_0}{(p-b')}\int_0^{\ell}\exp(-a'x)\sin(\alpha_n x)\ \mathrm{d}x \tag{53}$$

$$\phi_n'(0,p) = \frac{\varphi_0}{(p-b')(\alpha_n^2+a'^2)}\left(\alpha_n\left(1-\exp(a'\ell)\cos(\alpha_n\,\ell)\right)+a'\exp(a'\ell)\ \sin(\alpha_n\,\ell)\right) \tag{54}$$

Cette dernière expression permet de calculer les composantes du spectre $\boldsymbol{\phi}'$ présent dans le dernier terme de l'équation (50) :

$$\phi_n'(0,p+b'-b) = \frac{\varphi_0}{(p-b)(\alpha_n^2+a'^2)}\left(\alpha_n\left(1-\exp(a'\ell)\cos(\alpha_n\,\ell)\right)+a'\exp(a'\ell)\ \sin(\alpha_n\,\ell)\right) \tag{55}$$

Une fois calculées les différentes composantes du spectre de température $\boldsymbol{\theta} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{T}}}^{*} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{T}}}^{*}$ donné par (50) et (55), on effectue d'abord une transformée numérique inverse de Laplace sur

chacune de ses harmoniques. Si l'on utilise l'inversion de Gaver-Stehfest, le vecteur spectre de la transformée exponentielle de la température, *à un instant donné*, s'écrit :

$$\widehat{\boldsymbol{T}}^*(y,t) = \frac{\ln(2)}{t}\sum_{j=1}^{10} v_j\,\boldsymbol{\theta}\,(y,p_j) = \frac{\ln(2)}{t}\sum_{j=1}^{10} v_j\,\boldsymbol{S}\,(p_j)\boldsymbol{\phi}'(0,p_j+b-b') \qquad (56)$$

avec $p_j = j\,\dfrac{\ln(2)}{t}$, les v_j étant les coefficients de l'inversion de Gaver Stehfest à 10 termes, voir [2]. On effectue ensuite l'inversion de Fourier sinus et l'on repasse à la vraie température T (sans transformée exponentielle) :

$$T(x,y,t) = \exp(ax)\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{N}\sin(\alpha_n x)\;\;\widehat{T}_n^*(y,t) = \frac{2}{L}\;\;\exp(ax)\;\;\boldsymbol{g}(x)\;\;\widehat{\mathbf{T}}^*(y,t) \qquad (57)$$

où $\boldsymbol{g}\,(x)$ est le vecteur ligne des fonctions propres :

$$\boldsymbol{g}(x) = \left[\sin(\alpha_1 x)\quad \sin(\alpha_2 x)\quad \cdots\quad \sin(\alpha_N x)\right] \qquad (58)$$

Références bibliographiques

[Azizi, 1988]
Azizi S, *Conductivité thermique des matériaux poreux humides ; mesure par méthode flash et interprétation*, Thèse de l'I.N.P.L., 25 Mars 1988.

[Bauer, 1978]
Bauer, R., Schlünder, E.-U., *Effective radial thermal conductivity of packings in gas flow, Part I : convective transport coefficient*, Int. Chem. Eng., vol. 18, pp. 181-188, 1978.

[Bauer, 2002]
Bauer, M., Adler, R., *Novel method for investigation and evaluation of heat transfer in fixed bed tubular reactors with gas flow,* Heat and Mass Transfer, 2002.

[Bear, 1984]
Bear, J., Corapcioglu, M.Y., *Fundamentals of transport phenomena in porous media,* pp. 122-198, Nijhoff, Dondrecht, 1984.

[Beck, 1977]
Beck, J.V., Arnold, K.J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, John Wiley and Sons, Chichester, 1977.

[Carbonell, 1984]
Carbonell, R.G., Whitaker, S., *Heat and mass transfer in porous media*, Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1984.

[Coats-Smith,1964]
K. H Coats, B. D. Smith, *Dead end Pore Volume and Dispersion in Porous Media*, Society of Petroleum Engineers Journal, vol. 4, p. 73-84, 1964.

[Darcy, 1856]
Darcy,H., *Fontaines publiques de la ville de Dijon*, Librairie des Corps Impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines, Paris, 1856.

[Dixon, 1979]
Dixon, A.G., Cresswell, D.L., *Theorical Prediction of Effective Heat Transfer Parameters in Packed Beds,* AIChE Journal, vol. 25, p. 663, juillet 1979.

[Dixon, 1985]
Dixon, A.G., *The length effect on packed bed effective heat transfer parameters*, Chem. Eng J., 31, pp 163-173, 1985.

[Elsari, 2002]
Elsari, M., Hughes, R., *Axial effective thermal conductivities of packed beds, Applied Thermal Engineering*, vol. 22, pp. 1969-1980, 2002.

[Ergun, 1952]
Ergun S. *Fluid Flow through Packed columns*, Chem. Eng. Prog. Vol. 43 (2) p. 89-94, 1952.

[Forchheimer, 1901]
Forchheimer, P., *Wasserberwegung durch Boden*, Z. Vereines deutscher Ing , 45 (50), 1782-8, 1901.

[Fourar, 2004].
Fourar, M., Radilla, G., Lenormand, R., Moyne, C., *On the non-linear bahavior of a laminar single-phase flow through two and three-dimensional porous media*, Advances in Water Resources, pp. 669-677, 2004.

[Giese, 1997]
Giese, M., *Untersuchung der Strömung in porösen Medien unter Berücksichtigung effektiver Viskositäten,* Dissertation, TU München, 1997.

[Gnielinski, 1978]
Gnielinski, V., *Gleichungen zur Berechnung des Wärme- und Stoffaustausches in durchströmten ruhenden Kugelschüttungen bei mittleren und grossen Pecletzahlen*, vt Verfahrenstechnik, Nr. 6, 1978.

[Götz, 2002]
Götz, J., Zick, K., Heinen, C., König, T., *Visualisation of flow processes in packed beds with NMR imaging : determination of the local porosity, velocity vector and local dispersion coefficients*, Chem. Engng and Processing, vol. 41, pp611-629, 2002.

[Gradshteyn, 1980]
Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series, and Products*, edition Academics Press, 1980.

[Gunn, 1974]
Gunn, D.J., De Souza, J.F.C., *Heat transfer and axial dispersion in packed beds*, Chem. Eng. Sci, vol. 29, pp. 1363-1371, 1974.

[Hahne, 1990]
Hahne, H., Strong, Y.W., Gross, U., *Measurement of thermal conductivity in porous media*, Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, pp. 849-865, 1990.

[Han, 1985]
Han, N.-W., Bhakta, J., Carbonell, R.G., *longitudinal and lateral dispersion in packed beds : effect of column length and particle size distribution*, AIChE Journal, vol. 32, pp. 277-288, 1985.

[Jinn Huie Huang, 1971]
Jin Huie Huang, *effective thermal conductivity of porous rocks*, J. Geop. Res., vol 76, pp 648-655, 1978.

[Kreith, 1973]
Kreith, F., *Principles of heat Transfer*, 3rd Edition, Intext Education Publishers, 1973

[Kunii, 1960]
Kunii, D.,Smith, J.M., *Heat transfer characteristics of porous racks*, AichE Journal, vol. 6, pp 71-78, 1960.

[Lamine, 1992]
Lamine, A. S., Colli Serrano, M. T., Wild, G., *Hydrodynamics and heat transfer in packed beds with liquid upflow*, Chem. Engng and Processing, vol. 31, pp385-394, 1992.

[Levec, 1985]
Levec, J., Carbonell, R.G., *Longitudinal and lateral thermal dispersion in packed beds,* AIChE Journal, vol. 31, p. 581-601, 1985.

[Maillet et col., 2000]
Maillet, D.,André, S., Batsale, J.C., Degiovanni, A., Moyne, C., *Thermal quadrupoles. Solving the heat equation through integral transforms,* John Wiley & Sons Ltd, ISBN 0 471 98320 9, 370 pages, 2000.

[Maillet, 2003]
Maillet, D., Didierjean, S., Metzger, T., *Integrating the error in the independent variable for optimal parameter estimation - Part I : Different estimation strategies on academic cases,* Inverse Problems in Engineering, vol. 11, 3, pp. 175-186, 2003.

[Martin, 1978]
Martin, H., *Low peclet number particle-to-fluid heat and mass transfer in packed beds*, Chemical Engineering Science, vol. 33, pp. 913-919, 1978.

[Maxwell, 1873]
Maxwell, J.C., *A treatise on electricity and magnetism, Clarendon Press*, Oxford, 1873.

[Metzger, 2004]
Metzger, T., Didierjean, S., Maillet, D., *Optimal experimental estimation of thermal coefficients in porous media*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 47, pp. 3341-3353, 2004.

[Metzger, 2003]
Metzger, T., Didierjean, S., Maillet, D., *Integrating the error in the independent variable for optimal parameter estimation Part II: Implementation to experimental estimation of the thermal dispersion coefficients in porous media with not precisely known thermocouple locations,* Inverse Problems in Engineering, vol. 11, 3, pp. 187-200, 2003.

[Metzger, 2002]
Metzger, T., *Dispersion Thermique en Milieux Poreux : Caractérisation expérimentale par Technique Inverse*, Thèse de l'I.N.P.L., 28 Octobre 2002.

[Moyne, 2000]
Moyne, C, Didierjean. S, Amaral Souto da Silveira H.P, *Thermal dispersion in porous media : One-equation model*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 43, p 3853-3867, 2000.

[Parker, 1961]
Parker, W.J., Jenkins, R.J., Butler, C.P., Abbot, G.L., *Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity*, J. Appl. Physics, vol. 32, n. 9, pp. 1679-1684, 1961.

[Quintard, 1997]
Quintard, M., Kaviany, M., Whitaker, S., *Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties*, Advances in Water Resources, vol. 20, p. 77-94, 1997.

[Rayleigh, 1892]
Rayleigh, *On the influence of the obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium,* Phil. Mag., vol. 34, pp. 481-502, 1892.

[Ridgway, 1968]
Ridgway, K., and Tarbuck K. J. , *Voidage fluctuations in randomly-packed beds of spheres adjacent to a containing wall, Chemical Engineering Science, Volume 23,* p. 1147-1155, 1968.

[Robert, 1969]
Robert, E., Meredith, Tobias, W., *Resistance to potential flow through a cubical arrangement of spheres*, J. App. Phys., vol. 37, n°7, pp1270-1273, 1969.

[Scheidegger, 1960]
Scheidegger, A.E., *The physics of flow through porous media*, University of Toronto Press, 1960.

[Schneebeli, 1955]
Schneebeli, G., *Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration*, La Houille Blanche, 2 (10), 141-9, 1955.

[Slattery, 1967]
Slattery J.C., Flow of viscoelastic fluid through porous media, AIChE Journal, 13, p. 1066-1071, 1967.

[Stephenson, 1986]
Stephenson, J.L, end Stewart, W.E., *Optical measurements of porosity and fluid motion in packed beds*, Chem. Engng Sci, vol. 41, pp 2161-2170, 1986.

[Trambouze, 2002]
Trambouze, P., Euzen, J.P., *Les réacteurs chimiques : de la conception à la mise en oeuvre,* I.F.P. Publications, p. 458-460, 2002.

[Tsotsas, 1990]
Tsotsas, E., *Über die Wärme-und Stoffübertragung in durchströmten Festbetten, Fortschrittberichte*, Reihe 3, Nr. 223, VDI, Düsseldorf, 1990

[Tsotsas, Schlünder, 1990]
Tsotsas, E., Schlünder, E.U, *Heat Transfer in packed beds with fluid flow : Remarks on the meaning and the calculation of a heat transfer coefficient at the wall,* Chem. Eng. Sci. Vol. 45, p. 819-837, 1990.

[Votruba, 1972]
Votruba, J., Hlavacek, V., Marek, M., *Packed bed axial thermal conductivity*, Chem. Eng. Sci. 27, 1845-1851, 1972.

[Wakao, 1982]
Wakao, Naguei, *Heat and Mass Transfer in Packed Beds,* Gordon and Breach Science Publishers, 1982.

[Whitaker, 1967]
Whitaker, S., *Diffusion and dispersion in porous media,* AIChE Journal, vol. 13, p. 420-427, 1967.

[Winterberg, 1999]
Winterberg, M., Krischke, A., Tsotsas, E., Vortmeyer, D., *On the invariability of transport parameters in packed beds upon catalytic reaction*, Récents Progrès en Génie des Procédés, 65, p. 205-212, 1999.

[Winterberg, 2000]
Winterberg, M., *Modellierung des Wärme-und Stofftransports in durchströmten Festbetten mit homogenen Einphasenmodellen,* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 3, Nr. 654, 2000.

[Winterberg, Tsotsas, Krischke, 2000]
Winterberg, M., Tsotsas, E., Krischke, A., Vortmeyer, D., *A simple and coherent set of coefficients for modelling of heat and mass transport with and without chemical reaction in tubes filled with spheres*, Chem. Eng. Sci, vol. 55, p. 967-979, 2000

[Winterberg, Tsotsas, 2000]
Winterberg, M., Tsotsas, E., *Modelling of heat transport in beds packed with spherical particles for various bed geometries and / or thermal boundary conditions*, International Journal of Thermal Science, vol. 39, p. 556-570, 2000.

[Yagi, 1960]
Yagi, S., Kunii, D., Wakao, N., *Studies on axial effective thermal conductivities in packed beds*, AIChE Journal, vol. 6, p. 543-546, 1960.

[Zanotti, 1984]
Zanotti, F., Carbonell, R.G., *Development of transport equations for multiphase systems-III*, Chem. Enng. Sci., vol. 39, p. 299-311, 1984.

[Zehner, 1970]
Zehner, P., Schlünder, E-U., *Wârmeleitfähigkeit von Schüttungen bei mäßigen Temperaturen,* Chemie-Ing.-Techn., vol.14, p.933-941, 1970.