



HAL
open science

Modélisation de l'action d'un champ électromagnétique variable sur un métal liquide disposé en nappe peu épaisse :

Melika Hinaje

► To cite this version:

Melika Hinaje. Modélisation de l'action d'un champ électromagnétique variable sur un métal liquide disposé en nappe peu épaisse:. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005. Français. NNT : 2005INPL101N . tel-01752529

HAL Id: tel-01752529

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752529v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Institut National Polytechnique de Lorraine
ECOLE DOCTORALE « Informatique-Automatique-Electronique-Mathématiques »
Département de Formation Doctorale « Electrotechnique-Electronique »
Laboratoire « Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy »

THESE

Présentée à

L'Institut National Polytechnique de Lorraine

en vue de l'obtention du titre de

DOCTORAT DE L'I.N.P.L

Spécialité : Génie Electrique

par

Melika HINAJE

MODELISATION DE L'ACTION D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE VARIABLE SUR UN METAL LIQUIDE DISPOSE EN NAPPE PEU EPAISSE

Soutenue publiquement le 25 novembre 2005 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président :	A. RAZEK
Rapporteurs :	J. ETAY F. PIRIOU
Examineurs :	J.P. BRANCHER S. DUFOUR G. VINSARD

Remerciements

Je tiens à remercier, tout d'abord, mon directeur de thèse monsieur Vinsard pour m'avoir proposer de travailler sur un sujet aussi intéressant que ludique. Je remercie également mon co-encadrant monsieur Dufour, pour sa grande disponibilité et sa bonne humeur. Le travail dans cette équipe sera inoubliable.

Je remercie madame Etay (directeur de recherche au CNRS) et monsieur Razek (directeur de recherche au CNRS) pour avoir examiné cette thèse en qualité de rapporteur

Je remercie monsieur le professeur Brancher et monsieur le professeur Piriou pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour leurs conseils.

Je remercie le Professeur Rezzoug, directeur du laboratoire GREEN, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Je tiens particulièrement à remercier Denis Netter et Smaïl Mézani pour nos fructueuses discussions et leur soutien permanent.

Je remercie Francis Weinachter pour toutes les numérisations des films des essais expérimentaux.

Un grand merci à monsieur Caron pour avoir fait une grande partie des photographies des différentes formes de nappe présentées dans ce manuscrit.

Je remercie également toutes les personnes du GREEN pour la bonne ambiance et leur aide dans les moments difficiles.

Je remercie aussi mon mari pour avoir fait preuve d'une grande patience, pour m'avoir soutenue et encouragée.

A Elias et Jean.

SOMMAIRE

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE	9
I. ETUDE EXPERIMENTALE	11
A. EXPERIMENTATION	11
B. CAS D'UNE NAPPE EPAISSE	18
C. CAS D'UNE NAPPE MINCE	20
II. ETUDE ADIMENSIONNELLE	25
A. DETERMINATION DES GRANDEURS ADIMENSIONNELLES	25
B. DETERMINATION DE S/L^2 POUR DIFFERENTS ETATS DE STABILITE	28
III. MODELE ELECTRIQUE D'UNE NAPPE MINCE DE METAL LIQUIDE	30
A. SPIRES COAXIALES	30
B. DETERMINATION D'UNE POSITION D'EQUILIBRE	35
IV. CONCLUSIONS	39
CHAPITRE II : FORMULATION	40
OBJECTIF	41
I. DECOUPLAGE ENTRE L'ELECTROMAGNETISME ET LA MECANIQUE	41
II. PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE	42
A. RELATIONS CONSTITUTIVES	42
B. POTENTIEL VECTEUR	43
III. SUPERPOSITION SOURCE ET INDUIT	44
IV. MODELE ELECTROMAGNETIQUE	44
A. DECOUPLAGE MAGNETISME ET INDUCTIF	44
B. MODELE	46
V. ANALYSE DU MODELE	50
A. BILAN DE PUISSANCE	50
B. SCHEMA ELECTRIQUE EQUIVALENT	57
C. LA FORCE ELECTROMAGNETIQUE	61
VI. CONCLUSIONS	62
CHAPITRE III : METHODES DE CALCUL	63
I. MODELE NUMERIQUE	64
A. LA METHODE ITERATIVE	64
B. LA METHODE DIRECTE	65
II. VALIDATION PAR UN CAS LIMITE	69
A. MODELE	70
B. METHODE DES INTEGRALES DE FRONTIERE	72
III. BILAN ENERGETIQUE	74
A. ENERGIE PROPRE DE L'INDUCTEUR	74
B. ENERGIE PROPRE DE LA NAPPE	78
C. ENERGIES MUTUELLES	78
D. ENERGIES MECANIQUES	80
IV. CONCLUSIONS	81
CHAPITRE IV : RESULTATS	83
I. REPARTITION DES COURANTS INDUITS DANS LA NAPPE	84
A. FACE SUPERIEURE ET INFERIEURE DE LA NAPPE	84
B. FACE LATERALE DE LA NAPPE	87
II. ETUDE ENERGETIQUE	88

SOMMAIRE

A.	FORME DE LA NAPPE	89
B.	VARIATION DES PARAMETRES DU SYSTEME	94
III.	ETUDE DE L'EVOLUTION DE LA FORME	99
A.	COMPARAISON DES ENERGIES TOTALES	99
B.	EVOLUTION DE L'OUVERTURE	100
IV.	CONCLUSIONS	105
ANNEXE 1 : CIRCUIT ELECTRIQUE EQUIVALENT		107
ANNEXE 2 : VALIDATION DES METHODES DE RESOLUTION		111
ANNEXE 3 : METHODE DES INTEGRALES DE FRONTIERE		116
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		123

NOMENCLATURE

VARIABLE	DEFINITION	UNITES
a	Rayon de la section du fil de la spire considérée	m
A_R, A_R	Potentiel vecteur magnétique de réaction	$A.H.m^{-1}$
A_S, A_S	Potentiel vecteur magnétique source	$A.H.m^{-1}$
A_T, A_T	Potentiel vecteur magnétique total	$A.H.m^{-1}$
α_s	Angle solide	sr
\bar{a}	Potentiel scalaire électrique	V
B_R	Induction magnétique de réaction (ou induite)	T
B_S	Induction magnétique source (ou inductrice)	T
B_T	Induction magnétique totale (ou inductrice)	T
D	Domaine constitué par le métal liquide	
∂D	Frontière délimitant le domaine D	
\bar{D}	Air qui entoure la nappe de métal liquide	
dl	Elément de longueur	m
dS	Elément de surface	m^2
dV	Elément de volume	m^3
δ	Profondeur de pénétration des courants induits dans la nappe	m
e	Epaisseur de la nappe de métal liquide	m
\vec{E}	Champ électrique	$V.m^{-1}$
E_p	Energie potentielle gravitationnelle	J
E_s	Energie de surface	J
E_2	Espace euclidien à deux dimensions	
E_3	Espace euclidien à trois dimensions	
$E(\eta)$	Intégrale elliptique complète du second ordre	
ep	Epaisseur de l'inducteur	m
E_t	Energie total	J
e_t	Energie totale réduite	
f	Fréquence d'alimentation de l'inducteur	Hz
Φ	Fonction de courant	A
Φ_R	Potentiel scalaire magnétique de réaction lié à H_R	$A.m^{-2}$
Φ_s	Potentiel scalaire magnétique source lié à H_s	$A.m^{-2}$
g	Accélération de la pesanteur	$m.s^{-1}$
γ_{ea}	Tension interfaciale entre le métal et l'air	$N.m^{-1}$
γ_{va}	Tension interfaciale entre le verre et l'air	$N.m^{-1}$
γ_{ve}	Tension interfaciale entre le verre et le métal	$N.m^{-1}$
H_S, H_S	Champ magnétique source	$A.m^{-1}$
H_R, H_R	Champ magnétique de réaction	$A.m^{-1}$
H_T, H_T	Champ magnétique total	$A.m^{-1}$
i	Courant circulant dans chacune des spires coaxiales	A
I_c	Courant critique (valeur du courant source à l'ouverture de la nappe)	A
I_s	Courant source (ou inducteur)	A

NOMENCLATURE

$\vec{i} \vec{j} \vec{k}$	Vecteur unitaire du repère cartésien	
J	Densité volumique de courant induit	$A.m^{-2}$
J_s	Densité volumique de courant source	$A.m^{-2}$
K	Densité superficielle de courant induit	$A.m^{-1}$
$K(\eta)$	Intégrale elliptique complète du premier ordre	
l	Périmètre de la nappe	m
L	Inductance propre de la bobine inductrice	H
L_{eq}	Inductance équivalente de deux spires coaxiales	H
L_R	Inductance propre de l'induit	H
L_1	Inductance propre de la spire extérieure (spires coaxiales)	H
L_2	Inductance propre de la spire intérieure (spires coaxiales)	H
m	Masse de métal liquide	kg
M	Inductance mutuelle entre les spires coaxiales	H
μ_o	Perméabilité magnétique du vide	$H.m^{-1}$
μ_r	Perméabilité magnétique relative	
\vec{n}	Vecteur normal à une surface	
ω	Pulsation	$Rad.s^{-1}$
P	Puissance active	W
ϖ	Fonction de Green	
P_γ	Pression de Laplace	$N.m^{-2}$ (Pa)
P_h	Pression hydrostatique	$N.m^{-2}$ (Pa)
P_m	Pression magnétique	$N.m^{-2}$ (Pa)
Ψ_R	Potentiel magnétique total lié à A_R	A.H (Wb)
Ψ_S	Potentiel magnétique source lié à A_s	A.H (Wb)
Ψ_T	Potentiel magnétique total lié à A_T	A.H (Wb)
Q	Puissance réactive	VAR
R	Rayon de la nappe de métal liquide au repos	m
r	Résistance électrique de l'induit	Ω
R_c	Rayon de courbure	m
R_{eq}	Résistance électrique équivalente de deux spires coaxiales	Ω
Ré	Partie réelle de	
R_e	Rayon de la spire extérieure (pour deux spires coaxiales)	m
R_i	Rayon de la spire intérieure (pour deux spires coaxiales)	m
ρ	Masse volumique du métal liquide	$Kg.m^{-3}$
S	Surface de métal liquide à l'interface air-métal	m^2
S_o	Surface de verre à l'interface verre-air	m^2
S_1	Surface latérale de métal à l'interface métal-air	m^2
σ	Conductivité électrique du métal liquide	$(\Omega.m)^{-1}$ (Sm^{-1})
t	Variable de temps	s
θ_c	Angle de contact à l'interface verre-métal	rad
$\vec{\tau}$	Vecteur unitaire tangent à ∂D	
V	Volume de métal liquide	m^3
V_D	Domaine (volumique) de la nappe de métal liquide	m^3
W_1	Energie magnétique propre de l'inducteur	J
W_2	Energie magnétique propre de l'induit	J
$W_3 W_4$	Energie magnétique d'interaction	J

NOMENCLATURE

\bar{W}	Coénergie magnétique	J
W_m	Energie magnétique totale de l'ensemble inducteur plus induit.	J
x	Position de la spire intérieure par rapport à la spire extérieure.	
\vec{X}	Position dans l'espace E_3	
\bar{x}	Position dans l'espace E_2	
$(\zeta, \eta), (\zeta, \eta)$	Repère lié à un élément de discrétisation	
-	Désigne une grandeur complexe	
..		
-*	Désigne le conjugué	
..		
{ }	Vecteur colonne	
< >	Vecteur ligne	
[]	Matrice carrée	

INTRODUCTION GENERALE

La fusion des métaux est une activité industrielle très ancienne. Parmi toutes les méthodes de chauffe qui furent développées, il en est une particulièrement répandue qui suscite toujours intérêts et travaux, il s'agit du chauffage par induction. La preuve en est les travaux de recherche industrielle et universitaire sur les effets électromagnétiques d'un champ inducteur sur du métal liquide. Notre intérêt s'est porté sur un point spécifique de ce domaine d'étude. La thèse de R. Moretti a abouti d'une part à la mise au point d'un dispositif de chauffage par induction et d'autre part à l'étude d'une couche épaisse de métal liquide. L'inducteur est un solénoïde dans lequel est centrée une couche de métal liquide de forme cylindrique. En l'absence de champ magnétique, l'ensemble inducteur et induit est axisymétrique.

Au cours des essais expérimentaux, il est apparu que le comportement d'une nappe mince de métal liquide soumis à un champ magnétique variable est radicalement différent de celui de la nappe épaisse. Dans ce dernier cas, la nappe forme un dôme statique qui conserve donc l'axisymétrie qu'elle avait au départ. Par contre, dans le cas d'une nappe fine, cette symétrie de la forme est rompue à partir d'un seuil de courant inducteur. Nous obtenons des formes qui demeurent stables mais sont asymétriques, ces formes dépendent entre autre de la valeur du courant inducteur.

Dans ce mémoire de doctorat, nous nous proposons d'étudier et de simuler ces formes asymétriques observées expérimentalement sur une nappe mince de métal liquide soumis à un champ magnétique variable.

Le mémoire est divisé en quatre parties.

Dans le premier chapitre, le dispositif de chauffage par induction est décrit. Les résultats expérimentaux obtenus pour une nappe épaisse et pour une nappe mince sont présentés. Une étude expérimentale de quelques paramètres influençant l'apparition d'une rupture de symétrie dans la nappe mince est faite. Un modèle simple de circuit électrique des phénomènes observés est établi.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions une modélisation électromagnétique des phénomènes observés expérimentalement. Le bilan de puissance issu de ce modèle harmonique en courant (nommé modèle $\bar{\varphi}$) permet une représentation du système composé de l'inducteur et de la nappe liquide par le modèle de circuit électrique. Ce lien permet d'utiliser des résultats obtenus dans le chapitre I.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de résolution numérique du modèle $\bar{\varphi}$. Elle permet de calculer l'énergie magnétique emmagasinée dans la nappe de métal liquide à laquelle les énergies mécaniques viennent s'ajouter.

Le dernier chapitre est consacré à établir des résultats. La première partie est dédiée à la validation d'hypothèse. Un bilan énergétique, pour diverses formes de nappe mince de métal liquide, est présenté dans la deuxième partie. Nous vérifions l'hypothèse initiale relative à une configuration énergétique favorable pour expliquer la rupture de symétrie d'une nappe mince de métal liquide soumis à un champ magnétique variable. L'influence de quelques paramètres physiques sur l'asymétrie des formes est également étudiée. Dans la dernière partie, nous effectuons une étude simple de l'évolution de la forme de nappe de métal.

Nous terminons enfin ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

**Chapitre I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN
CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE**

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Une couche de métal liquide est soumise à un champ magnétique variable produit par un solénoïde. Ce métal est contenu dans un bécber de forme cylindrique disposé au centre de l'inducteur comme indiqué sur le schéma de la figure 3. Le dispositif expérimental est donc axisymétrique sauf au niveau des connexions.

Lorsque la couche de métal est épaisse, supérieur à 20 mm, un dôme se forme, la symétrie du système est conservée [1] [2] [5] [6].

En revanche, lorsque la nappe est fine, de l'ordre du millimètre, nous constatons une rupture de la symétrie. Au-delà d'une certaine valeur de courant que nous appellerons courant critique, le dôme s'ouvre. Cette configuration, à courant inducteur donné, correspond à un état stable.



Figure 1 : Dôme et ouverture du dôme au-delà d'un courant seuil

Etant donnée la géométrie du dispositif expérimental, les forces de Laplace exercées sur le métal liquide sont centripètes et ne peuvent expliquer cette rupture de la symétrie de révolution. La question qui se pose est donc : pourquoi la nappe s'ouvre ?

Dans un premier temps, le dispositif expérimental a été mis en cause. Afin d'invalider les différentes hypothèses émises des expériences ont été menées.

- Première hypothèse, le solénoïde n'est pas parfaitement cylindrique. L'inducteur est tourné de quelque degré et l'expérience est à nouveau menée. Nous constatons que l'ouverture ne coïncide pas avec une zone particulière de l'inducteur.
- Deuxième hypothèse, l'axe de la nappe n'est pas confondu avec l'axe de l'inducteur. Si l'axe de la nappe est décalé, une ouverture se crée du côté où les conducteurs du solénoïde sont le plus proche de l'induit mais également à l'opposé.

Le dispositif expérimental est donc mis hors de cause.

Le chauffage par induction et la déformation de cette nappe liquide font intervenir trois phénomènes couplés :

- thermique
- mécanique

- magnétique

Le système, n'étant plus axisymétrique, implique que le problème est en 3 dimensions :

- Déformation suivant l'axe z, axe du solénoïde
- Ouverture de la nappe dans le plan (xOy)

Il semble donc qu'il s'agisse d'un problème Magnétohydrodynamique (MHD) en trois dimensions.

Dans ce mémoire, nous allons nous attacher à montrer que les formes prises par une couche fine de métal liquide correspondent à un minimum d'énergie.

I. Etude expérimentale

A. Expérimentation

L'expérimentation a été montée à la suite d'une étude faite par R. Moretti [1] [2]. Nous présentons donc ici de manière assez brève le dispositif expérimental et les caractéristiques des différentes parties qui le composent.

1. Dispositif expérimental

Une photo du dispositif expérimental est présentée sur la figure 2.

- 1- la bobine inductrice.
- 2- l'arrivée d'eau nécessaire au refroidissement de l'inducteur.
- 3- l'alimentation de l'inducteur dont les caractéristiques sont détaillées un peu plus loin.
- 4- la caméra qui nous permet de visualiser ou de filmer le mouvement du liquide.
- 5- l'oscilloscope qui nous permet de visualiser le courant inducteur.
- 6- un autotransformateur qui nous permet de faire varier le courant dans l'inducteur.

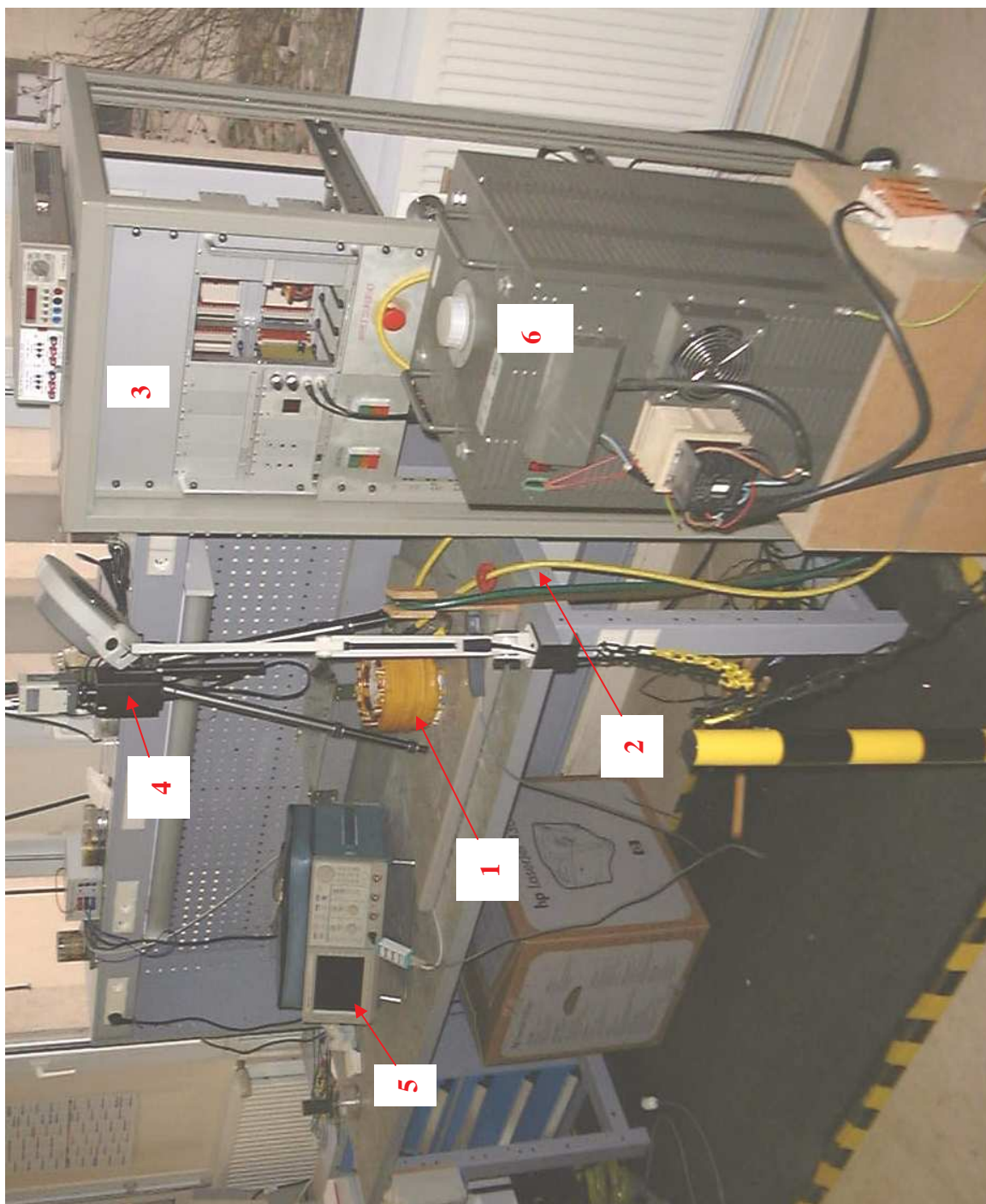


Figure 2 : dispositif expérimental

Tout ce dispositif est schématisé comme indiqué sur la figure 3.

a. Schéma

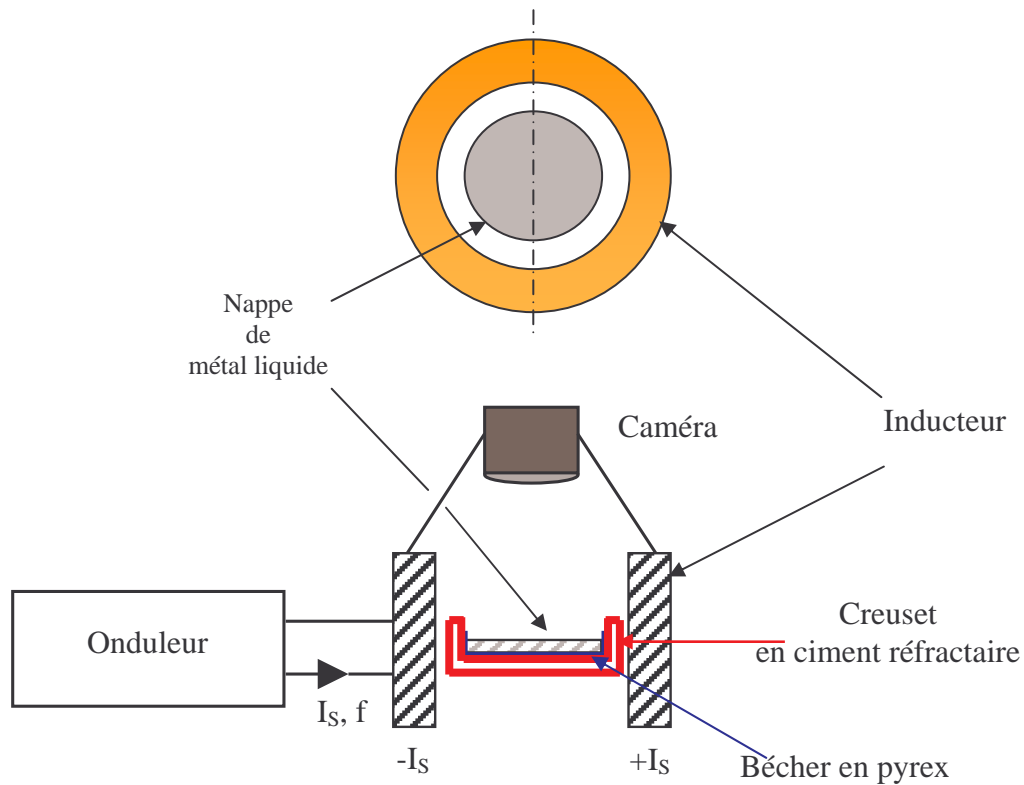


Figure 3 : Schéma représentant le dispositif expérimental

Le schéma présente le dispositif expérimental d'un chauffage par induction. Ce dispositif est composé de deux parties :

- la source
- la charge

La source est constituée de l'alimentation électrique et de l'inducteur. La charge est le métal qui est centré dans le solénoïde.

b. La source

• **Alimentation électrique**

La bobine inductrice est alimentée par un onduleur de tension à résonance. Pour obtenir ce mode de fonctionnement, un condensateur C est placé en série avec l'inducteur. Cette capacité est choisie de telle sorte que la fréquence de résonance du circuit RLC, constitué par le condensateur et l'inducteur, soit égale à la fréquence de découpage de l'onduleur. Dans ce cas, l'impédance de la charge se comporte comme une résistance. L'intérêt de ce montage est que pour une tension onduleur donnée le courant est maximal dans l'inducteur et la tension aux bornes de la bobine inductrice quasi sinusoïdale. La fréquence de résonance varie entre 5,3 kHz (sans charge) et 5,9 kHz (avec une charge de 2 kg).

En pratique, nous avons dû nous éloigner de la résonance, le courant dans l'inducteur vaut donc 3,7 kHz. Nous pouvons constater que le courant est quasi sinusoïdal, comme indiqué sur la figure 4.

La forme du courant inducteur à vide et avec une charge d'étain, ainsi que l'étude harmonique montrent que l'harmonique fondamental est prépondérant : il est de l'ordre de 98%. Le rang 3 est de l'ordre de 3%. Au delà du rang 7, les harmoniques sont négligeables. A vide les harmoniques (hors fondamental) sont légèrement plus élevés. [1]

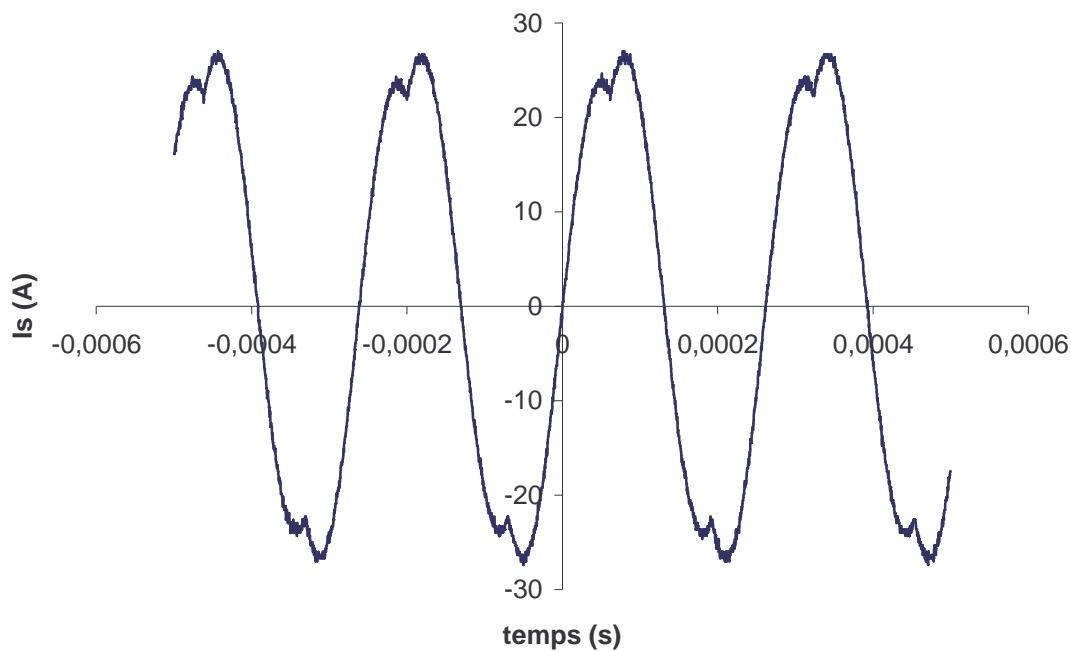


Figure 4 : Forme du courant source à vide

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

- **L'inducteur**

L'inducteur a été dimensionné de manière à supporter du point de vue thermique et mécanique $150 A_{eff}$.

L'inducteur est une bobine circulaire de 30 spires réparties sur 3 couches.

Etant donné le fort courant qui circule dans la bobine et qui entraîne donc un échauffement, les conducteurs qui composent l'inducteur sont creux de manière à pouvoir y faire circuler de l'eau et ainsi assurer le refroidissement du solénoïde.

L'isolation électrique des spires du solénoïde se fait en deux temps.

Tout d'abord, les conducteurs électriques sont isolés entre eux en intercalant des isolant en mat de verre. Ce matériau possède de plus de bonnes propriétés mécaniques à chaud.

Le maintien mécanique de l'ensemble est réalisé par des rubans de fibres de verre (cf. figure 5).

Ensuite, l'inducteur isolé est plongé dans un bain de résine époxy. Ce vernis isolant est aussi utilisé pour l'imprégnation des bobines électriques dans les moteurs.

Ce procédé permet d'améliorer d'une part l'isolation électrique des conducteurs entre eux et vis-à-vis de l'extérieur et d'autre part, de renforcer la tenue mécanique de l'ensemble : après cuisson, le ruban de fibres de verre se durcit.



Figure 5 : Inducteur utilisé dans l'expérience

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

c. La charge

A priori n'importe quel conducteur pourrait convenir, cependant, certains critères devant être respectés, le choix n'est plus aussi large.

Les contraintes sont les suivantes :

- un approvisionnement aisé et à faible coût
- une température de fusion faible, si le métal choisi n'est pas liquide à la température ambiante
- sans danger pour le manipulateur et son environnement
- l'oxydation

Un alliage d'étain-plomb est la charge qui satisfait le mieux ces différents critères. Cet alliage est communément appelé « soudure » et est habituellement amélioré d'une résine facilitant l'étamage d'une pièce. L'alliage qui a été choisi, dans le cadre de notre expérience, est épuré de cette résine pour des raisons de sécurité et de qualité de surface. En effet, cette résine ne supporte pas des températures supérieures à 200°C, au-delà de cette température, elle dégage des fumées nocives et oxyde rapidement le bain, créant ainsi une croûte à la surface.

La charge est contenue dans un bécher en pyrex lui-même disposé dans un creuset en béton réfractaire comme indiqué sur la figure 6.

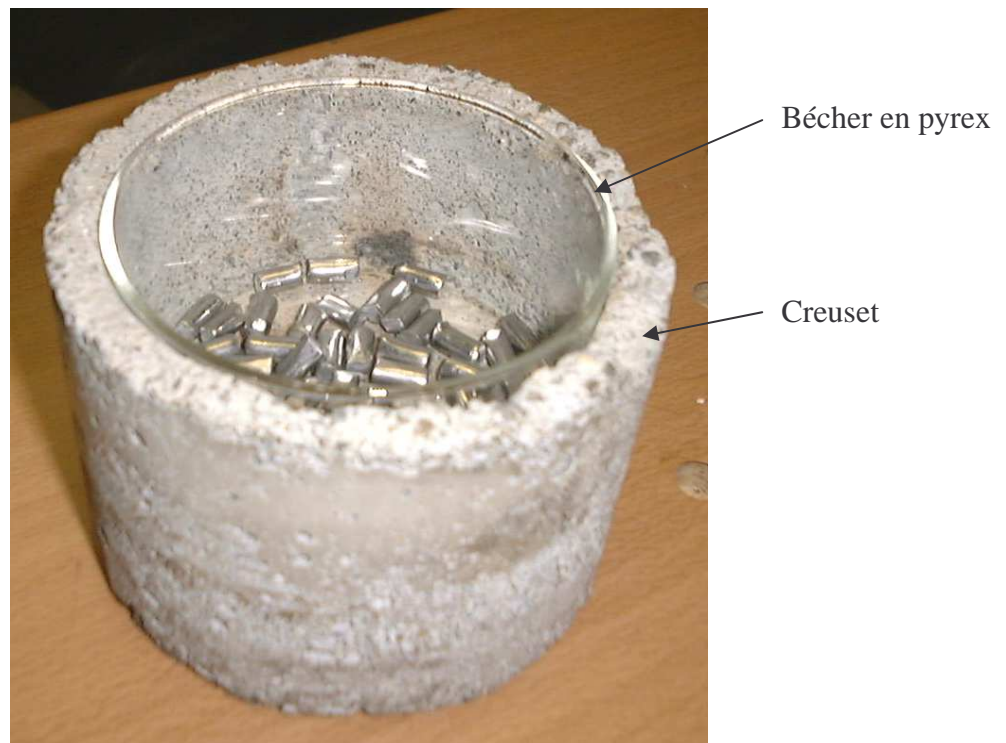


Figure 6 : Contenant de la charge

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Le choix du bécher en pyrex s'explique, d'une part, parce que le pyrex présente une surface lisse minimisant ainsi l'interaction entre la charge et son contenant et d'autre part, parce qu'il tient les températures atteintes par le bain de métal.

Le creuset, quand à lui, permet d'isoler thermiquement la charge de l'inducteur et assure ainsi une meilleure efficacité du chauffage en évitant les pertes par rayonnement, et l'échauffement de l'inducteur.

Les caractéristiques physiques [3] et géométriques de la charge sont présentées ci-dessous :

- Composition Sn63 Pb37
- Masse volumique $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$
- Température de fusion 183°C
- Conductivité électrique $\sigma = 5,7.10^6 (\Omega.\text{m})^{-1}$
- perméabilité magnétique $\mu_r = \mu_o$
- Rayon de la nappe au repos $R = 45,75 \text{ mm}$
- Position de la nappe dans l'inducteur : centrée

2. Protocole expérimental

Le dispositif expérimental se compose d'une source {alimentation + inducteur} qui produit un champ magnétique variable et d'une charge.

Les caractéristiques de ces différentes parties sont récapitulées ci-dessous :

Caractéristiques de l'alimentation de l'inducteur :

- Alimentation en courant quasi sinusoïdal
- Fréquence 3,7 kHz
- Plage de courant de 0 à $150A_{\text{eff}}$
- Plage de puissance électrique de 0 à 4kW

Caractéristiques de l'inducteur :

- solénoïde de 30 spires réparties sur 3 couches
- conducteurs creux de diamètre 10/8 mm
- hauteur 125 mm
- diamètre de la bobine 208/123 mm
- inductance mesurée $L = 77,92 \mu\text{H}$

Caractéristiques de la nappe :

- Composition Sn63 Pb37
- Masse volumique $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$
- Température de fusion 183°C
- Conductivité électrique $\sigma = 5,7.10^6 (\Omega.\text{m})^{-1}$
- perméabilité magnétique $\mu_r = \mu_o$

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

- Rayon de la nappe au repos $R = 45,75$ mm
- Position de la nappe dans l'inducteur : centrée

Avant de commencer l'expérience, il faut faire fondre la soudure qui est sous forme de granulés (cf. figure 7). La charge est centrée dans le solénoïde et chauffée jusqu'à fusion complète. Une fois le métal liquide obtenu, le courant inducteur est remis à zéro. Cette étape n'est qu'une phase de préparation, l'expérience commence immédiatement après afin de ne pas laisser le temps au métal de refroidir. L'expérience se fait donc sur du métal liquide, dont la surface est à l'air libre.

L'épaisseur de la nappe dépend de la quantité de soudure que nous introduisons initialement dans le bécher.



Figure 7 : Charge avant préchauffage

Le protocole expérimental est le suivant :

- Le courant inducteur est augmenté progressivement de 0A à 140A, un oscilloscope et un ampèremètre permettent de contrôler la valeur du courant.
- Une caméra, disposée au dessus de la nappe, filme le phénomène.

B. Cas d'une nappe épaisse

L'expérience décrite précédemment est faite avec une nappe épaisse, c'est-à-dire dont les dimensions au repos sont :

- $R = 45,75$ mm
- $e = 20$ mm

Les figures 8 et 9 présentent les déformations constatées pour deux valeurs de courant source, prises de façon arbitraire.

Lorsque $I_s = 110$ A, un dôme se forme comme indiqué sur la figure 8, lorsque nous augmentons le courant source, la hauteur du dôme augmente (cf. figure 9).

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Quelle que soit la valeur du courant inducteur imposée, la forme demeure axisymétrique ; nous pouvons donc obtenir une coupe de la déformation dans le sens axial (cf. figure 8 et 9). Pour visualiser le profil du dôme, nous plongeons dans le bain une plaque de cuivre de faible épaisseur [1]. Le dispositif expérimental n'autorisant qu'une vue du dessus des déformations (plan xOy), ce procédé permet d'observer également les déformations dans un autre plan (xOz).

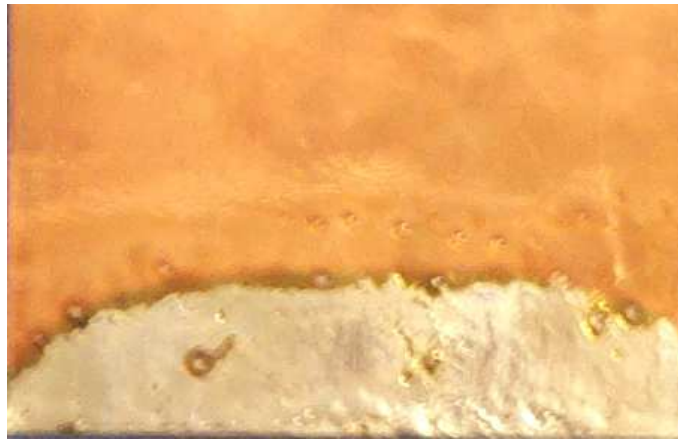


Figure 8 : Profil du dôme à $I_s = 110A$ [1].

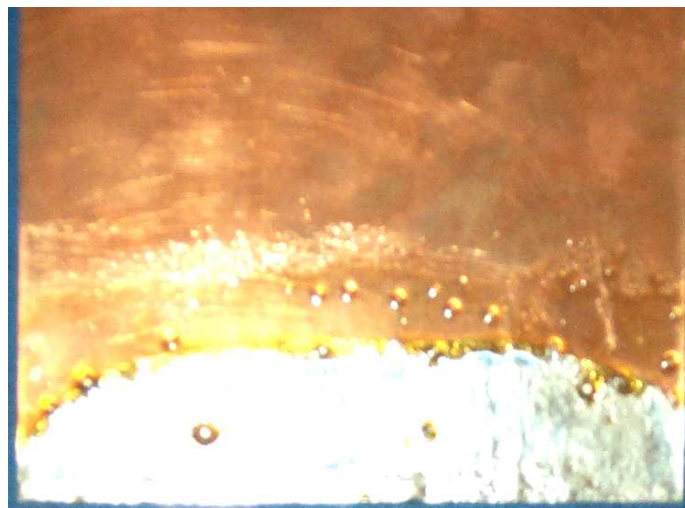


Figure 9 : Profil du dôme à $I_s = 130A$ [1].

Différents modèles analytiques [4] et numériques [2] [5] ont été développés afin de prédire la forme du dôme.

A courant donné, ces formes sont stables, ce qui signifie que la nappe a atteint un état d'équilibre qui correspond à un minimum d'énergie.

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Lorsque le fluide conducteur est soumis à un champ magnétique, les énergies mises en jeu sont :

- l'énergie potentielle gravitationnelle
- l'énergie de surface
- l'énergie magnétique

Le dôme statique correspond donc au minimum de la somme de ces énergies [5] [6] [7] [8].

C. Cas d'une nappe mince

Le cas d'une nappe épaisse a été présenté précédemment, dans cette partie, une étude expérimentale d'une nappe fine est menée.

Nous avons mené trois expériences afin de mieux comprendre le phénomène.

- Tout d'abord, comme dans le cas d'une nappe épaisse, nous faisons varier le courant source, le volume de la nappe demeurant constant.
- Ensuite, une étude sur la stabilité des déformations est menée.
- Enfin, une troisième expérience permet de différencier une nappe fine d'une nappe épaisse.

1. Expérience 1 : I_s varie, le volume de la nappe est constant

Le bécher contient la soudure, sous forme liquide, dont les dimensions au repos sont :

- $R = 45,75$ mm
- $e = 5$ mm

L'épaisseur de peau à la fréquence à laquelle nous travaillons (3,7 kHz) est de 3,5 mm, le champ magnétique pénètre donc complètement la nappe de métal liquide.

Le courant inducteur est augmenté progressivement de 0 à 130 A_{eff} . La nappe se déforme, mais les déformations ne sont plus axisymétriques. Nous constatons que :

- Lorsque que le courant inducteur est inférieur à 30 A_{eff} , un dôme se forme (cf. figure 10, photo n°1). La configuration est identique à celle observée dans le cas d'une nappe de 20mm d'épaisseur.
- Lorsque le courant inducteur est supérieur à cette valeur, le liquide s'ouvre (cf. figure 10, photo n°2).
- Si le courant inducteur continu à augmenter, cette ouverture se développe de manière irrégulière (cf. figure 10, photos n°3 à 6).

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE



1 ($I_s = 10A$) Dôme



2 ($I_s = 30A$) Apparition d'une ouverture



3 ($I_s = 50A$)



4 ($I_s = 80A$)



5 ($I_s = 110A$)



6 ($I_s = 130A$)

Figure 10 : Evolution de la forme prise par le métal liquide pour différentes valeurs de courant inducteur

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Due à la symétrie du problème et aux observations faites avec la nappe épaisse, nous pourrions penser que la nappe formerait un dôme quelque soit la valeur du courant, cependant une ouverture apparaît au-delà d'une certaine valeur de courant que nous appellerons courant critique.

A courant inducteur donné, cette ouverture est stable, c'est-à-dire que le fluide est figé sous cette forme. De manière plus générale, nous avons constaté qu'à chaque valeur de courant source correspond une forme stable de la nappe.

Que se passe-t-il lorsque l'on perturbe cet état de stabilité ?

2. Expérience 2 : Perturbation de l'état stable

Le bécher contient la soudure, sous forme liquide, dont les dimensions au repos sont :

- $R = 45,75 \text{ mm}$
- $e = 4 \text{ mm}$

On applique un courant inducteur de $120 A_{\text{eff}}$, la nappe se déforme jusqu'à atteindre un état d'équilibre (cf. figure 11).

A $120 A_{\text{eff}}$, la forme stable présentée sur la figure 11 est perturbée.

La perturbation consiste à mélanger le fluide avec une spatule de bois tout en laissant le courant source inchangé.

Nous constatons que le fluide atteint une autre forme d'équilibre (cf. figure 12). L'opération de perturbation est renouvelée une seconde fois, la nouvelle forme d'équilibre est présentée sur la figure 13.



Figure 11 : Forme stable de la nappe à $120 A_{\text{eff}}$



Figure 12 : Etat d'équilibre après une première perturbation ($I_S = 120 A_{eff}$)



Figure 13 : Etat d'équilibre après une deuxième perturbation ($I_S = 120 A_{eff}$)

A courant inducteur donné, toutes ces formes sont différentes, il existe donc plusieurs formes stables.

L'expérience montre que les formes prises par la nappe sont très différentes en fonction de son épaisseur. Prenons deux cas extrêmes :

- lorsque la nappe est fine, l'expérience n°1 montre que la nappe s'ouvre.
- lorsque la nappe est épaisse, il se forme un dôme. [1] [2]

Il existe une épaisseur critique au-delà de laquelle la nappe ne s'ouvre plus. Une fois cette épaisseur critique déterminée de manière expérimentale, nous définirons une nappe fine comme toute nappe ayant une épaisseur inférieure à cette épaisseur critique.

3. Expérience 3 : Détermination de l'épaisseur critique

a. Protocole expérimental

Connaissant la masse volumique de la soudure, l'épaisseur de la nappe est calculée de la manière suivante :

$$e = \frac{m}{\rho S}$$

Où ρ est la masse volumique de la soudure

m est la masse de la nappe de métal liquide

S est la surface de la nappe de la nappe de métal liquide

L'expérience débute avec une nappe d'épaisseur $e_1 = 3,87\text{mm}$, le courant inducteur est augmenté jusqu'à ce que le liquide s'ouvre, le courant inducteur à l'ouverture de la nappe est appelé courant critique est noté I_C .

De la soudure est ajoutée afin d'augmenter l'épaisseur de la nappe et l'expérience est reproduite.

Cette expérience est délicate. En chauffant de manière trop intense le métal, celui-ci risque de brûler entraînant d'une part l'émission de fumées nocives et d'autre part, la formation d'impureté dans le bain. Le bain étant altéré non seulement la mesure du courant critique est modifiée mais également la masse du fluide.

Les résultats qui sont présentés ci-dessous ont nécessité de nombreux essais.

b. Observations

Lorsque la nappe atteint une épaisseur de 6,4mm, nous constatons que l'ouverture commence à être instable. En effet, la nappe s'ouvre puis se referme, ces oscillations durent quelques secondes avant que la nappe retrouve un état d'équilibre qui correspond à une nappe ouverte.

Au-delà d'une épaisseur de 6,4mm pour un rayon de $R = 45,75 \text{ mm}$, la nappe ne s'ouvre plus et devient instable. En effet, la forme de la nappe n'est plus statique à courant inducteur donné, celle-ci ne cesse de s'ouvrir et de se refermer sans arriver à atteindre à état d'équilibre.

Nous relevons pour chaque épaisseur la valeur du courant source nécessaire à l'ouverture de la nappe (I_C).

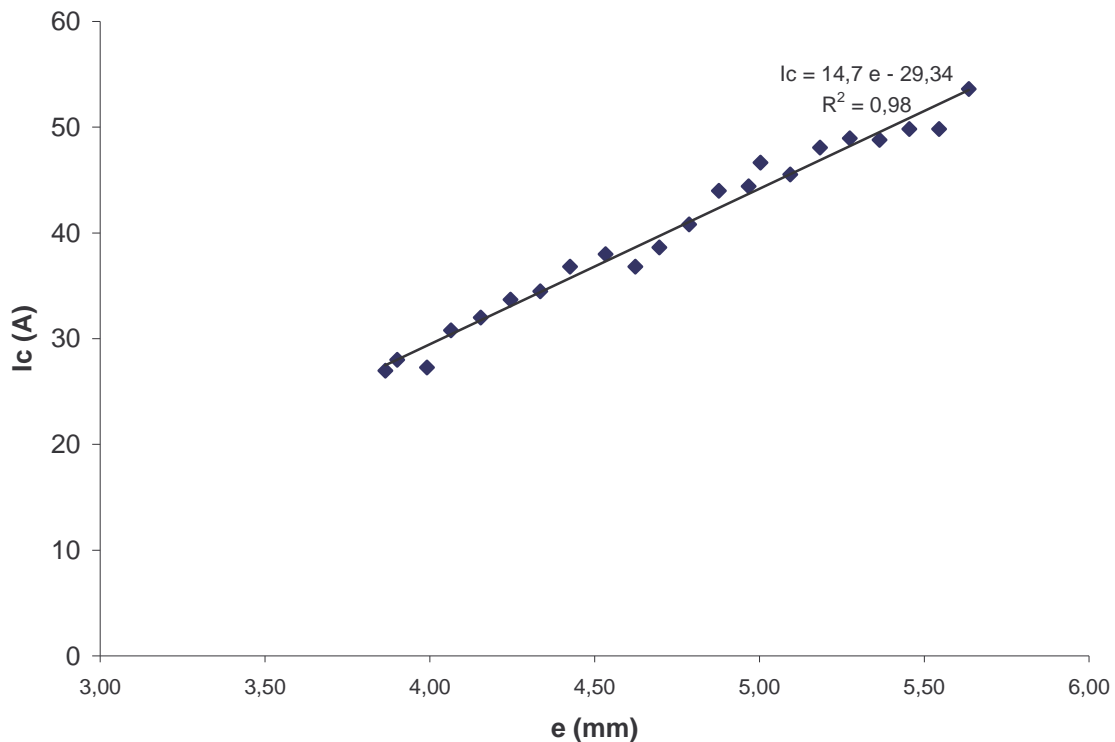


Figure 14 : Courant source à l'ouverture de la nappe en fonction de l'épaisseur

La courbe I_c en fonction de l'épaisseur semble être une droite. Le courant critique mesuré est proportionnel à l'épaisseur de métal liquide.

Cette expérimentation a permis de mettre en évidence l'influence de l'épaisseur de la nappe sur la valeur du courant critique.

Désormais, la couche de métal liquide sera définie comme étant une nappe fine si son épaisseur est inférieure ou égale à 6mm au repos.

II. Etude adimensionnelle

L'expérience a montré que toutes les formes observées sont stables. Nous supposons que ces états d'équilibre correspondent à un extremum d'énergie.

Cette énergie dépend de plusieurs paramètres, dont les dimensions géométriques de la nappe. Une analyse dimensionnelle est menée afin de déterminer les grandeurs adimensionnelles dont dépend l'énergie.

A. Détermination des grandeurs adimensionnelles

Le principe de l'analyse dimensionnelle repose sur le fait que toute grandeur physique peut être exprimée en unité [M] [L] [T] [I] appelée aussi grandeurs fondamentales [9].

Où [M] est la masse

[L] est la longueur

[T] est le temps

[I] est le courant

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Par exemple si une quantité à une dimension $[Q_i]$, celle-ci peut être exprimée en grandeurs fondamentales : $[Q_i] = [M^s, L^t, T^u, I^v]$

Si une quantité Q_1 est fonction de plusieurs paramètres : $Q_1 = \text{fct}(Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$.

Il existe une équation aux dimensions qui s'écrit :

$$[Q_1] = [\text{fct}(Q_2, Q_3, \dots, Q_n)]$$

Toute fonction continue peut être mise sous la forme d'un produit, dont chaque terme est élevé à une certaine puissance. L'équation ci-dessus s'écrit donc :

$$[Q_1] = [Q_2^{a_2} Q_3^{a_3} \dots Q_n^{a_n}]$$

En remplaçant chaque paramètre par sa dimension fondamentale, la quantité Q_i devient :

$$[Q_i] = [M^{a_i s}, L^{a_i t}, T^{a_i u}, I^{a_i v}]$$

Les puissances des dimensions fondamentales de chaque côté de l'équation aux dimensions peuvent être égalisées, ce qui permet d'écrire 4 équations, déterminant ainsi (n-1) des puissances a_i . Nous parvenons ainsi à former (n-5) groupes sans dimensions et l'équation aux dimensions devient :

$$[Q_1] = [Q'_1 \prod_2^{a_2} \dots \prod_{n-4}^{a_{n-4}}]$$

Q'_1 est un paramètre composé ayant la même dimension que Q_1 .

$Q_1 = \text{fct}(Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$ peut donc s'écrire sous une autre forme :

$$\prod_1 = g(\prod_2, \dots, \prod_{n-4}) = \frac{Q_1}{Q'_1}$$

Le système d'unité utilisé est [MLTI]. L'énergie du système étudié dépend de différents paramètres :

- Géométrique : surface S, périmètre l, et épaisseur e de la nappe d'étain.
- Electrique : les courants induits K, la conductivité électrique σ de la nappe, et la fréquence.
- Magnétique : la perméabilité de la nappe μ_o .

Nous appliquons la précédente démarche à notre problème.

$$[E] = \text{fct}[S^a, e^b, l^c, K^d, \sigma^\epsilon, \mu_o^\beta, f^\gamma]$$

Paramètre	Puissance	Dimension de l'énergie			
		M	L	T	I
S	a	0	2	0	0
e	b	0	1	0	0
l	c	0	1	0	0
K	d	0	-1	0	1
σ	ϵ	-1	-3	3	2
μ_o	β	1	1	-2	-2
f	γ	0	0	-1	0
Energie	E	1	2	-2	0

Tableau 1 : Analyse dimensionnelle de l'énergie

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Le tableau 1 nous permet d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \beta - \varepsilon = 1 \\ 2a + b + c - d - 3\varepsilon + \beta = 2 \\ 3\varepsilon - 2\beta - \gamma = -2 \\ d + 2\varepsilon - 2\beta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En sommant la première et la dernière équation du système (1), nous trouvons $d=2$

Le système d'équation se réécrit :

$$\begin{cases} \beta - \varepsilon = 1 \\ 2a + b + c - 3\varepsilon + \beta = 4 \\ 3\varepsilon - 2\beta - \gamma = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Nous avons un système de 3 équations à 6 inconnues, il faut donc fixer 3 variables.

* Nous choisissons arbitrairement de fixer les variables a, c, ε et nous calculons donc b, β, γ .

$$\begin{cases} \beta = 1 + \varepsilon \\ \gamma = \varepsilon \\ b = 3 - 2a - c + 2\varepsilon \end{cases} \quad (3)$$

$$[E] = \text{fct}[S^a, e^{3-2a-c+2\varepsilon}, I^c, K^2, \sigma^\varepsilon, \mu_o^{1+\varepsilon}, f^\varepsilon]$$

$$[E] = \text{fct}\left[\left(\frac{S}{e^2}\right)^a, e^3, \left(\frac{1}{e}\right)^c, K^2, (\sigma\mu_o fe^2)^\varepsilon, \mu_o\right]$$

d'où

$$E = e^3 K^2 \mu_o f_1 \left[\left(\frac{S}{e^2}\right)^a, \left(\frac{1}{e}\right)^c, (\sigma\mu_o fe^2)^\varepsilon \right]$$

Les grandeurs adimensionnelles sont $\left(\frac{S}{e^2}\right), \left(\frac{1}{e}\right), (\sigma\mu_o fe^2)$.

* Nous choisissons arbitrairement de fixer les variables a, b, ε et nous calculons donc c, β, γ .

$$\begin{cases} \beta = 1 + \varepsilon \\ \gamma = \varepsilon \\ c = 3 - 2a - b + 2\varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

$$[E] = \text{fct}[S^a, e^b, I^{3-2a-b+2\varepsilon}, K^2, \sigma^\varepsilon, \mu_o^{1+\varepsilon}, f^\varepsilon]$$

$$[E] = \text{fct}\left[\left(\frac{S}{I^2}\right)^a, \left(\frac{e}{I}\right)^b, I^3, K^2, (\sigma\mu_o fI^2)^\varepsilon, \mu_o\right]$$

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

d'où $E = l^3 K^2 \mu_o f_2 \left[\left(\frac{S}{l^2} \right)^a, \left(\frac{e}{l} \right)^b, (\sigma \mu_o f l^2)^e \right]$

Les grandeurs adimensionnelles sont $\left(\frac{S}{l^2} \right), \left(\frac{e}{l} \right), (\sigma \mu_o f l^2)$.

Il semble intéressant de faire l'étude de l'énergie en fonction des paramètres adimensionnels suivants : $\left(\frac{S}{l^2} \right), \left(\frac{S}{e^2} \right), (\sigma \mu_o f l^2), (\sigma \mu_o f e^2)$ ($\left(\frac{1}{e} \right)$ étant la combinaison de $\left(\frac{S}{l^2} \right)$ et $\left(\frac{S}{e^2} \right)$ n'a pas à être étudié). Si l'on s'interroge sur le lien entre les différentes formes géométriques en occultant l'aspect électromagnétique et mécanique, il faut calculer les facteurs de forme $\left(\frac{S}{l^2} \right)$ et $\left(\frac{S}{e^2} \right)$

Le problème qui devrait être résolu de manière plus générale est le suivant : trouver le rapport S/l^2 (à volume constant) qui minimise l'énergie totale à courant inducteur donné.

Il est à préciser que définir les deux nombres adimensionnels ne permet pas de prédire la forme que prendra la nappe. En effet à S/l^2 et S/e^2 fixé, il existe un grand nombre de forme possible.

B. Détermination de S/l^2 pour différents états de stabilité

Ce rapport est calculé dans le cas de l'expérience n°2 présenté dans le premier chapitre.

Nous avons choisi de présenter le calcul du rapport adimensionnel S/l^2 car les rapports adimensionnels faisant intervenir l'épaisseur de la nappe ne sont pas aisés à déterminer. En effet, le dispositif expérimental ne permet pas d'obtenir de façon précise l'épaisseur de la nappe.

L'étude expérimentale de la stabilité d'une forme de nappe ouverte a mis en évidence qu'à courant inducteur donné, il existait plusieurs formes de nappe stable.

Pour chacune de ces formes, la surface et le périmètre sont mesurés et le rapport S/l^2 calculé. Le calcul de ce rapport se fait pour des formes stables qui ont été obtenues avec un courant inducteur de 119 A_{eff}. Il est important de choisir un courant inducteur élevé afin d'obtenir des ouvertures larges et de faciliter ainsi la mesure du périmètre, l . Ce choix permet également d'obtenir des formes stables très clairement différentes les unes des autres.

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE



$$S_1 \approx 0,00501818 \text{ m}^2$$

$$l_1 \approx 0,50788 \text{ m}$$

$$\frac{S_1}{l_1^2} \approx 0,019$$



$$S_2 \approx 0,005327 \text{ m}^2$$

$$l_2 \approx 0,53252 \text{ m}$$

$$\frac{S_2}{l_2^2} \approx 0,019$$



$$S_3 \approx 0,005088 \text{ m}^2$$

$$l_3 \approx 0,512 \text{ m}$$

$$\frac{S_3}{l_3^2} \approx 0,019$$

Figure 15 : Calcul du rapport S/l^2 pour chaque forme stable

Le rapport S/l^2 est constant bien que les surfaces et les périmètres varient d'une forme à l'autre.

Ainsi, l'expérience montre, qu'à courant inducteur donné, la nappe se déforme jusqu'à atteindre une forme stable. En maintenant le courant constant et si on mélange le métal

liquide, celui-ci reprend une autre forme stable. En conséquence, pour une valeur de courant inducteur et une fréquence donnée, il existe plusieurs formes stables.

Les résultats obtenus ci-dessous indiquent cependant, qu'à courant inducteur donné, ces formes stables ont en commun un rapport S/l^2 constant.

Dans ce paragraphe, nous avons fait une analyse adimensionnelle de l'énergie du système. Cette étude nous a permis de dégager deux jeux de grandeurs adimensionnelles : S/l^2 et S/e^2 .

Nous avons ainsi pu étudier l'évolution du facteur de forme S/l^2 , à courant inducteur donné. Nous avons ainsi constaté que, dans le cas présenté, ce rapport est constant.

III. Modèle électrique d'une nappe mince de métal liquide

A présent, nous recherchons une représentation électrique du phénomène présenté au paragraphe 1.

Dans cette partie, nous nous attachons donc à présenter un modèle simple de la nappe mince de métal liquide à partir de deux spires coaxiales, puis dans une deuxième partie nous exploitons les résultats de cette modélisation.

A. Spires coaxiales

La première partie est dédiée à la représentation de la nappe, puis nous calculons les forces magnétiques s'exerçant sur la nappe et nous terminons par un bilan.

1. Représentation d'une couche mince de métal liquide

Reprenons les formes considérées dans l'expérience 2. A la fréquence à laquelle nous travaillons, le courant induit se concentre au bord de la nappe, En effet, la profondeur de pénétration δ est de 3,5 mm et le rayon de la nappe au repos est de 45,75 mm. Nous supposons que les courants induits ne circulent que dans l'épaisseur de peau ce qui revient à étudier deux spires parcourues par un courant i comme l'indique la figure 16.

Dans l'espace entre les deux spires (de surface S) il n'y a pas de courant qui circule.

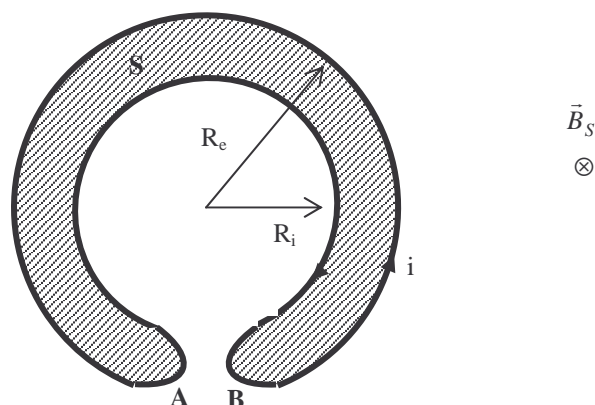


Figure 16 : Schématisation des formes de l'expérience 2

Les extrémités A et B de l'anneau sont très proches, la nappe de métal représentée figure 16 se comporte comme deux spires coaxiales de même courant i et de sens opposé.

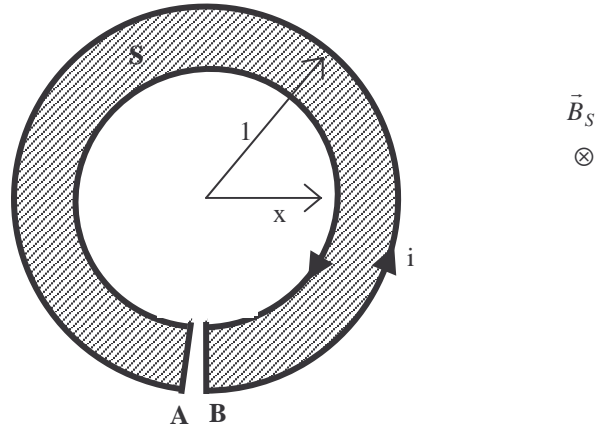


Figure 17 : Spires coaxiales soumises à un champ magnétique variable B_s

Une première approche de ce problème consiste à étudier l'équilibre d'une nappe fine via deux spires coaxiales comme indiqué sur la figure 17.

La spire extérieure est parcourue par un courant i circulant dans le sens trigonométrique et la spire intérieure est parcourue par un courant de même intensité mais de sens contraire. La section des deux spires est identique et vaut πa^2 (a étant le rayon du fil conducteur qui constitue la spire).

Afin de simplifier les calculs, nous normalisons les grandeurs géométriques par rapport au rayon extérieur R_e , la spire extérieure est donc de rayon 1. Le rayon intérieur normalisé $\frac{R_i}{R_e}$ est noté x .

Il s'agit de trouver la valeur du rayon de la spire intérieure, noté x , à l'équilibre c'est-à-dire lorsque l'énergie totale de la nappe est minimum. Ceci revient à trouver à la valeur de x qui annule la variation de l'énergie totale par rapport à x .

2. Modèle

Nous calculons l'énergie dans un système de deux spires coaxiales soumises à un champ magnétique variable. A partir de ce calcul d'énergie totale, nous déduisons les forces électromagnétiques qui s'exercent sur les deux spires.

Dans un deuxième temps, nous évaluons les forces de gravitation et les forces de surface s'exerçant sur un volume d'étain compris dans l'intervalle entre les deux spires.

a. Forces électromagnétiques

La coénergie [36] d'un système de deux spires soumises à un champ magnétique variable de pulsation ω s'écrit de la manière suivante :

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

$$\overline{W}(i, x) = \frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2} L_2(x) i^2 - M(x) i^2 + B_s S(x) i \quad (5)$$

Où L_1 : inductance propre de la spire de rayon 1.

L_2 : inductance propre de la spire de rayon x.

M : mutuelle inductance entre la spire extérieure et intérieure.

B_s : induction magnétique source.

S : surface de la couronne.

i : courant circulant dans les spires.

Le terme $B_s S(x) i$ correspond à l'énergie apportée par l'inducteur au système constitué par les deux spires.

L'inductance globale de l'ensemble est défini comme suit :

$$L_{eq}(x) = L_1 + L_2(x) - 2M(x) \quad (6)$$

Les expressions de L_1 , L_2 et M sont données en annexe 1.

Avec cette simplification d'écriture la relation (5) se réécrit :

$$\overline{W}(i, x) = \frac{1}{2} L_{eq}(x) i^2 + B_s S(x) i \quad (7)$$

La force électromagnétique qui s'exerce sur la nappe est égale à la variation de coénergie par rapport x à courant induit constant. Or la déformation de la nappe ne se fait pas à courant induit constant, il faut donc estimer l'importance du terme supplémentaire provenant de la variation de courant.

* Variation de la coénergie par rapport à x, à i constant

La variation de la coénergie par rapport à x à courant constant, nous donne une expression de la force électromagnétique qui s'exerce sur les conducteurs.

$$F(i, x) = \frac{\partial \overline{W}(i, x)}{\partial x} \quad (8)$$

$$F(i, x) = \frac{1}{2} \partial L_{eq}(x) i^2 + B_s \partial S(x) i \quad (9)$$

Avec

$$i^2 = \frac{|\overline{B}_s|^2 S(x)^2 \omega^2}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \quad (10)$$

$$B_s i = - \frac{|\overline{B}_s|^2 L_{eq}(x) S(x) \omega^2}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \quad (11)$$

R_{eq} est la résistance électrique équivalente des deux spires et vaut

$$R_{eq}(x) = \frac{2(1+x)}{\sigma a^2} \quad (12)$$

Le détail des calculs des relations (10) et (11) est présenté en annexe 1.

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

En substituant les équations (10) et (11) dans l'équation (9), nous obtenons :

$$F(x) = \frac{|\overline{B}_S|^2 S(x) \omega^2}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \left[\frac{1}{2} S(x) \delta L_{eq}(x) - L_{eq}(x) \delta S(x) \right] \quad (13)$$

* Variation de la coénergie par rapport à x, à i variable

Si maintenant, nous faisons varier la coénergie par rapport à x à courant variable, ce qui revient à faire la variation après avoir remplacé i par sa valeur donnée par (10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{W}(x)}{dx} \delta x = & \frac{|\overline{B}_S|^2 S(x) \omega^2}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \left[\frac{1}{2} S(x) \delta L_{eq}(x) - L_{eq}(x) \delta S(x) \right] \\ & + \frac{|\overline{B}_S|^2 S(x) \omega^2}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \left[-\frac{S(x) R_{eq}^2(x)}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \delta L_{eq}(x) + \frac{S(x) L_{eq}(x) R_{eq}(x)}{R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2} \delta R_{eq}(x) \right] \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d\overline{W}(x)}{dx} \delta x = F(x) - \frac{|\overline{B}_S|^2 S^2(x) \omega^2 R_{eq}(x)}{[R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2]^2} (R_{eq}(x) \delta L_{eq}(x) - L_{eq} \delta R_{eq}) \quad (14)$$

Nous constatons que si en plus de la déformation s'ajoute une variation de courant, un terme supplémentaire intervient dans la variation de la coénergie par rapport à x. Ce terme est négligeable si $R_{eq} \ll L_{eq} \omega$.

b. Forces de pesanteur

Dans un premier temps, nous allons évaluer l'énergie due à la pesanteur puis nous en déduirons les forces de gravité. Celles-ci agissent de telle sorte que la couronne de liquide tend à s'étaler.

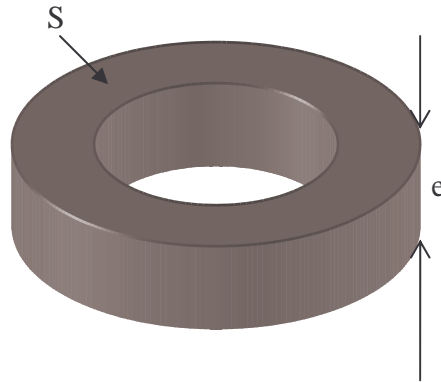


Figure 18 : Anneau de métal liquide de volume V et d'épaisseur e.

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Les forces de gravité agissant sur cette couronne s'écrivent :

$$F_p = -\vec{\nabla} E_p \quad \text{avec } E_p \text{ l'énergie potentielle gravitationnelle} \quad (15)$$

$$F_p = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho g S(x) e(x)^2 \right) \quad (16)$$

Où ρ est la masse volumique du métal

$$V \text{ est le volume de la couronne et égale à : } V(x) = S(x) e(x) \quad (17)$$

$$S \text{ est la surface de la couronne et s'écrit : } S(x) = \pi(1 - x^2) \quad (18)$$

La relation (16) peut être réécrite en fonction de V et de x , en utilisant l'équation (17) et (18) :

$$F_p = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho g \frac{V^2}{\pi(1 - x^2)} \right) \quad (19)$$

Après dérivation, nous obtenons :

$$F_p = -\frac{\rho g V^2}{\pi} \frac{x}{(1 - x^2)^2} \quad (20)$$

c. Tension superficielle

Nous procédons comme ci-dessus, c'est-à-dire que nous déterminons d'abord l'énergie de surface E_S puis nous calculons sa variation par rapport x .

$$E_S(x) = (\gamma_{ea} + \gamma_{ve})S(x) + \gamma_{ve}l(x) \frac{V}{S(x)} + \gamma_{va}S_o \quad (21)$$

où

γ_{ve} est la tension interfaciale entre l'étain et le verre.

γ_{ea} est la tension interfaciale entre l'étain et l'air.

γ_{va} est la tension interfaciale entre le verre et l'air [32].

γ_{ve} , γ_{ea} et γ_{va} sont des constantes (cf. hypothèse de température constante)

S_o est la surface du verre en contact avec l'air.

S est la surface de la couronne.

l est le périmètre de la couronne de liquide, à savoir $2\pi(1 + x)$

Les forces de surface s'écrivent donc

$$F_S = \frac{\partial E_S}{\partial x} \quad (22)$$

B. Détermination d'une position d'équilibre

Les données du problème sont les suivantes :

- L'induction magnétique source $B_S = 28$ mT
- La fréquence est de 3,7 kHz
- La conductivité électrique est de $5,7 \cdot 10^6$ S
- La masse volumique du métal est de 8420 kg.m⁻³
- Le volume normalisé de la couronne est de 0,27

Le volume normalisé de la couronne est obtenu en divisant le volume de métal liquide par le rayon extérieur élevé au cube : $\frac{\pi \times 0.04575^2 \times 4 \cdot 10^{-3}}{0.04575^3} \approx 0.27$.

Nous choisissons trois sections de spires de l'ordre de grandeur de la profondeur de peau ($\delta = 3,5$ mm) et nous les normalisons ce qui donne trois valeurs de a :

- a=0,04 soit 1,83 mm
- a=0,06 soit 2,75 mm
- a=0,1 soit 4,6 mm

1. Effet de la force électromagnétique

Pour ces diverses sections de spires, nous examinons pour quelle valeur de x nous avons équilibre, c'est-à-dire la force électromagnétique nulle. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

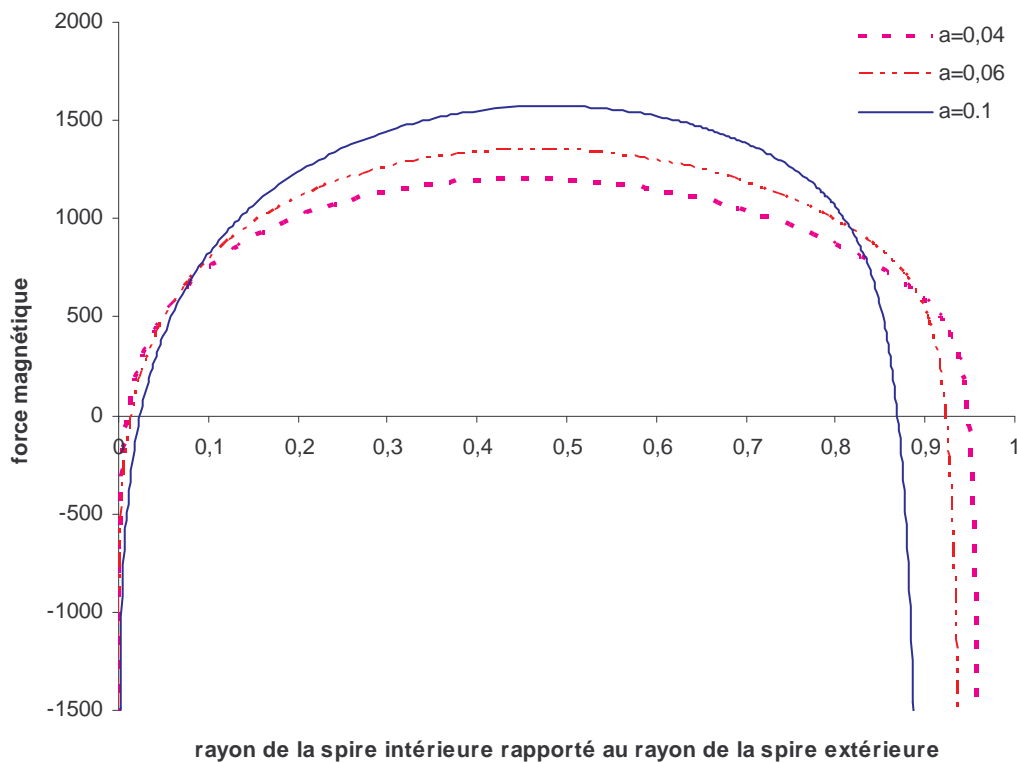


Figure 19 : module de la force électromagnétique en fonction de x pour différentes valeurs de a.

CHAPITRE I : METAL LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Nous observons que la force est nulle pour un x soit très proche de zéro soit proche de l'unité. Dans le premier cas, la valeur trouvée correspond à un équilibre instable, seules les valeurs proches de l'unité sont donc à retenir soit :

- $x_0(0,04) = 0,95$
- $x_0(a=0,06) = 0,92$
- $x_0(a=0,1) = 0,87$

Ce calcul a été mené sous l'hypothèse $R_{eq} \ll L_{eq} \omega$, celle-ci est vérifiée pour les trois positions d'équilibre définies ci-dessus. En effet, nous obtenons

- Pour une section de 0,04, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$
- Pour une section de 0,06, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 6,22 \cdot 10^{-3}$
- Pour une section de 0,1, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 2,36 \cdot 10^{-3}$

Par conséquent, le terme $\frac{|\overline{B_s}|^2 S^2(x) \omega^2 R_{eq}(x)}{[R_{eq}^2(x) + (L_{eq}(x)\omega)^2]^2}$ est négligeable et la variation de la coénergie par rapport à la position x est quasiment égale à la force électromagnétique.

Ajoutons les forces de gravité et regardons quelle est la nouvelle position d'équilibre prise par la spire.

2. Effet des forces électromagnétiques et de pesanteur

Nous recommençons la même étude en sommant les forces électromagnétiques et de gravitation.

Le rapport $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega}$ est tout d'abord calculé pour chacune des positions d'équilibre indiquées sur la figure 20 afin de vérifier si l'hypothèse émise reste valide.

- Pour une section de 0,04, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 2,62 \cdot 10^{-3}$
- Pour une section de 0,06, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 1,38 \cdot 10^{-3}$
- Pour une section de 0,1, $\frac{R_{eq}}{L_{eq} \omega} \approx 6,54 \cdot 10^{-4}$

$R_{eq} \ll L_{eq} \omega$ est vérifiée.

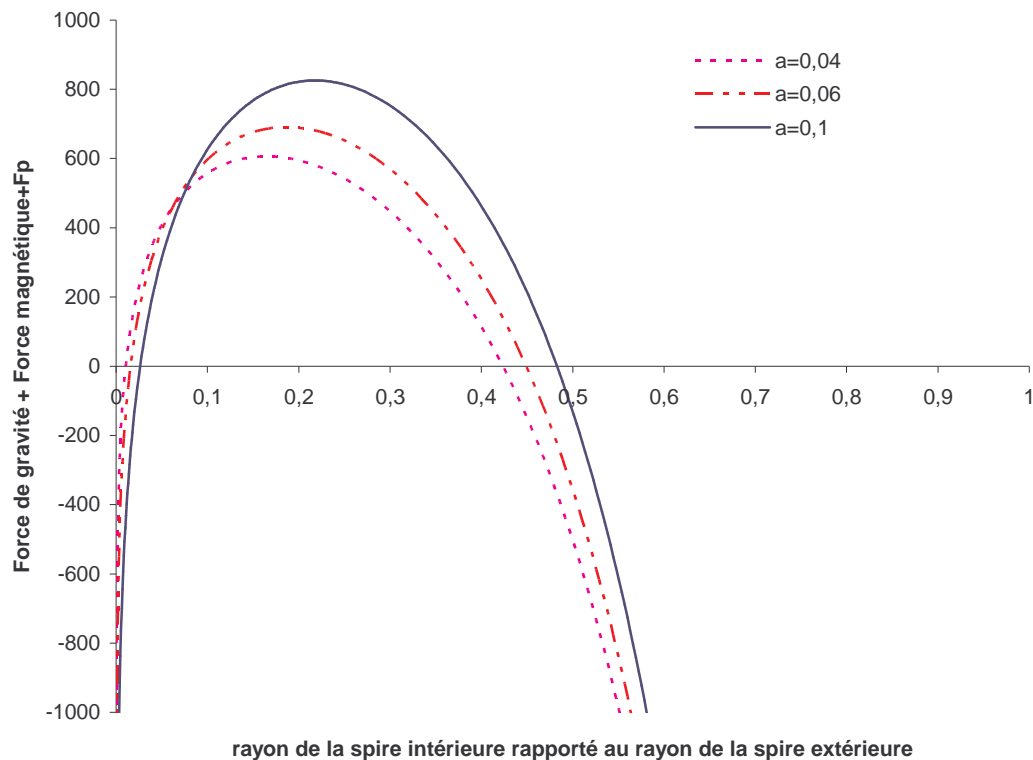


Figure 20 : Module des forces s'exerçant sur la couronne de liquide en fonction de x

La valeur de x diminue, concrètement cela se traduit par un étalement de la nappe, c'est-à-dire que la couronne de liquide est plus large.

Si maintenant, nous ajoutons l'effet des tensions superficielles aux forces précédentes, comment varie le rayon de la spire intérieure x ?

3. Effet de la tension superficielle, des forces de pesanteur et des forces électromagnétiques

Les résultats obtenus en ajoutant l'effet de la tension superficielle sont ceux obtenus précédemment et présentés sur la figure 20. Dans notre modèle, il apparaît que l'effet de la tension superficielle est négligeable. Les positions d'équilibre trouvées sont donc identiques à celles trouvées dans le paragraphe 2, c'est-à-dire :

- $x_o(a=0,04) = 0,43$
- $x_o(a=0,06) = 0,45$
- $x_o(a=0,1) = 0,49$

Le rayon de la spire intérieure obtenu par simulation ($x_o \approx 0,5$) est comparable au rayon intérieur des formes observées dans l'expérience 2 (cf. figure 21).

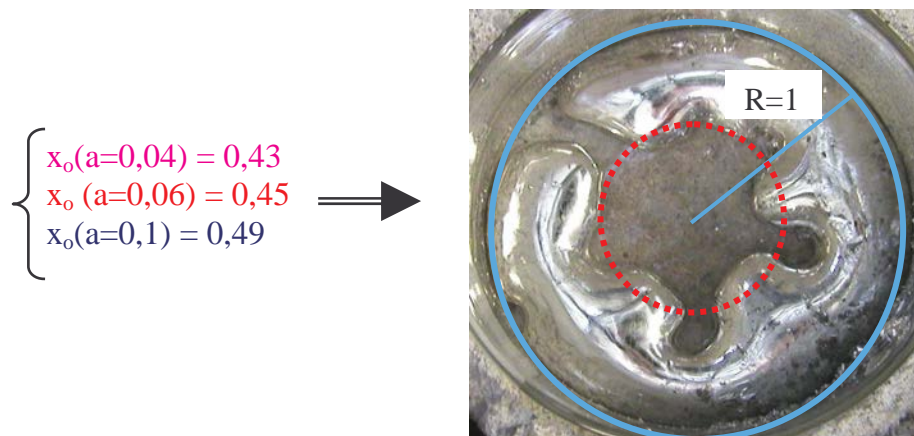


Figure 21 : Comparaison entre le rayon de la spire intérieure x_o obtenu par calcul et la valeur du rayon de la spire intérieure observé expérimentalement.

Les résultats obtenus par ce modèle sont en accord avec l'expérience. Ce modèle nous a permis de montrer que la déformation de la nappe correspond à une énergie minimale du système. Cependant, ce type de représentation ne permet pas de comparer deux formes expérimentales ensemble ni de prévoir la forme que prendra la nappe de métal liquide soumise à un champ magnétique variable, une étude magnétique plus approfondie est donc nécessaire.

IV. Conclusions

L'expérience 1 montre qu'à chaque valeur de courant inducteur correspond une déformation, ce qui laisse supposer que le phénomène est électromagnétique.

L'expérience 2 indique que les différentes formes prises par la nappe sont parfaitement stables et qu'à courant source donné, elles ne sont pas uniques.

Enfin, l'expérience 3 définit la limite entre une nappe fine et une nappe épaisse. Elle souligne également l'influence de l'épaisseur sur la valeur du courant critique, courant pour lequel la nappe s'ouvre.

L'exploitation des résultats obtenus par les expériences 1, 2 et 3, nous a permis de mieux comprendre le phénomène.

Une analyse dimensionnelle nous a permis de mettre en évidence des groupes adimensionnels caractéristiques du phénomène étudié.

Nous avons aussi montré à l'aide d'une modélisation simple basée sur la représentation de la nappe par deux spires couplées que le phénomène observé est dû à un extremum d'énergie mais nous ne pouvons comparer les formes entre elles ni prévoir l'évolution de la nappe mince d'étain.

La deuxième partie de ce manuscrit traite donc de la formulation et des hypothèses à adopter afin de calculer les différentes énergies intervenant dans la déformation d'une nappe mince de métal liquide.

La méthode de résolution choisie est présentée dans la troisième partie de ce manuscrit.

Enfin, dans la dernière partie, les résultats obtenus par simulation sont présentés et comparés aux observations expérimentales.

Chapitre II : FORMULATION

Objectif

L'objectif aurait été de dégager une modélisation électromagnétique dont l'entrée serait la géométrie de l'induit liquide et la sortie une énergie dont la variation par rapport à cette géométrie correspondrait à la force de Laplace dans l'induit.

La réalisation de cet objectif aurait permis alors de sommer cette énergie, l'énergie potentielle et l'énergie de tension superficielle pour obtenir une énergie totale dont le minimum correspondrait à la forme prise par la couche de métal liquide.

Cet objectif, étant trop ambitieux, n'a pu être réalisé complètement. On a, en fait tenté, de l'approcher au mieux. On a donc simplifié le problème en tentant de ne pas le dénaturer, ni de perdre de vue les aspects physiques.

I. Découplage entre l'électromagnétisme et la mécanique

L'inducteur est alimenté par un courant sinusoïdal de pulsation ω . Par conséquent, si l'induit est immobile, le champ électromagnétique est composé de grandeurs sinusoïdales de pulsation ω . Ceci reste vrai si l'induit est un métal liquide qui ne change pas de forme et que son champ de vitesse interne est stationnaire.

En revanche, s'il y a un changement de forme trop rapide par rapport à la fréquence d'alimentation, le champ de vitesse devient instationnaire ce qui a pour conséquence de modifier la dépendance temporelle du champ électromagnétique. La forme du champ électromagnétique dans ce cas est une sinusoïde d'amplitude modulée par une fonction du temps dont les variations en temps sont voisines de celles du changement de forme.

Ce fait s'accorde mal avec l'objectif de dégager une énergie associée à la force électromagnétique. Cependant, comme les vitesses sont faibles, on retient l'hypothèse de découplage mécanique pour laquelle il devient possible de considérer le métal liquide comme immobile. Le mouvement du liquide est suffisamment lent (de l'ordre de la seconde), en comparaison de la variation temporelle du champ électromagnétique (0,3 ms), pour être négligé.

Inversement et corrélativement, on supposera que l'effet de la partie pulsatoire de la densité de force de Laplace sur l'induit est nul.

Les amplitudes complexes du champ électromagnétique peuvent alors être utilisées et, par conséquent, le problème peut être directement posé dans le domaine fréquentiel.

Les notations suivantes sont adoptées :

$$\begin{aligned}j^2 &= -1 \\ \bar{X}^* &\text{ est le conjugué du complexe } \bar{X} \\ J &= \sqrt{2}\text{Ré}[\bar{J} e^{j\alpha}] \\ H &= \sqrt{2}\text{Ré}[\bar{H} e^{j\alpha}] \\ B &= \sqrt{2}\text{Ré}[\bar{B} e^{j\alpha}]\end{aligned}$$

Où « Ré » signifie partie réelle.

Les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (26)$$

Où \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{D} et \vec{J} désignent respectivement le champ magnétique, l'induction magnétique, le champ électrique, l'induction électrique et la densité de courant électrique.

L'effet du courant de déplacement (supprimé dans l'équation (23)) et des densités de charges d'espace (supprimées dans l'équation (26)) est supposé négligeable aux fréquences sources (de l'ordre du kHz) utilisées.

La densité de force de Laplace intervenant dans la déformation du bain n'est composée que de la moyenne temporelle :

$$\vec{F} = \text{Ré}[\vec{J} \times \vec{B}^*] \quad (27)$$

Dans ce qui suit, la couche de métal liquide est supposée immobile (pas de mouvement global et pas de mouvement interne [10]).

II. Problème électromagnétique

La nappe de métal liquide est soumise à un champ magnétique produit par un solénoïde alimenté par une densité de courant \vec{J}_s sinusoïdale. Sous l'action du champ magnétique variable, des courants sont induits dans le fluide conducteur.

A. Relations constitutives

Les relations constitutives des matériaux en présence, sont la loi d'Ohm locale et la relation magnétique. On les adjoint aux équations (23), (24), (25), et (26).

La loi d'Ohm locale et la densité de courant source sont traduites par :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (28)$$

Où σ est une fonction de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 0 \quad \text{en dehors de l'induit} \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 5,7 \cdot 10^6 \text{ S dans l'induit} \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\text{et } \vec{J}_s = \vec{0} \text{ en dehors de l'inducteur.} \quad (31)$$

Dans l'induit constitué d'un mélange étain-plomb et partout ailleurs, le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (32)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide.

B. Potentiel vecteur

Le problème d'électromagnétisme est exprimé en potentiel vecteur magnétique total \vec{A}_T comme variable de calcul.

Du fait de la conservation du champ magnétique, il existe un champ \vec{A}_T tel que

$$\vec{B}_T = \vec{\nabla} \times \vec{A}_T \quad (33)$$

avec \vec{B}_T l'induction magnétique totale

Il faut imposer une condition supplémentaire pour déterminer de manière unique \vec{A}_T . Comme la relation de Biot et Savart sera utilisée par la suite, on choisit la jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T = 0 \quad (34)$$

En substituant l'équation (33), qui lie l'induction magnétique au potentiel vecteur, dans l'équation (24) de Maxwell-Faraday, il vient

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + j\omega \vec{A}_T \right) = \vec{0} \quad (35)$$

et donc le champ électrique et le potentiel vecteur magnétique satisfont à

$$\vec{E} + j\omega \vec{A}_T = -\vec{\nabla} \bar{\alpha} \quad (36)$$

où $\bar{\alpha}$ est un potentiel scalaire électrique est introduit dans le passage de (35) à (36).

En utilisant l'équation (23) et les relations constitutives décrites en (28) et (32), le problème exprimé en potentiel vecteur devient : trouver \vec{A}_T satisfaisant à

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_T = \vec{J}_s - \sigma (j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \bar{\alpha}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T = 0 \end{array} \right. \quad (37)$$

dans tout l'espace E_3 , l'espace Euclidien tout entier.

III. Superposition source et induit

En l'absence d'un induit, l'inducteur est alimenté par une densité de courant sinusoïdal \vec{J}_s . Un potentiel vecteur magnétique source \vec{A}_s est ainsi produit qui satisfait à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_s = \vec{J}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_s = 0 \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_s = 0 \end{array} \right. \quad (40)$$

On suppose la solution de ce problème connue.

Lorsque l'induit est placé dans l'inducteur, celui-ci devient le siège de courant induit produisant un champ de réaction \vec{A}_R . Le champ résultant \vec{A}_T est alors la superposition du champ source et du champ de réaction :

$$\vec{A}_T = \vec{A}_s + \vec{A}_R \quad (41)$$

Et le problème de départ (37)-(38) devient : trouver \vec{A}_R tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_R = \sigma (-j\omega \vec{A}_s - j\omega \vec{A}_R + \vec{\nabla} \alpha) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_R = 0 \end{array} \right. \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_R = 0 \end{array} \right. \quad (43)$$

dans tout E_3 .

Ces équations vont maintenant être transformées en séparant les aspects magnétiques et inductifs.

IV. Modèle électromagnétique

A. Découplage magnétisme et inductif

Si la densité de courant \vec{J} dans le métal liquide était donnée, le champ magnétique serait alors solution du problème de magnétostatique : trouver \vec{A}_R tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_R = \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_R = 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_R = 0 \end{array} \right. \quad (45)$$

dans tout E_3 .

La solution d'un tel système peut être calculée par la formule de Biot et Savart

$$\vec{A}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\vec{J}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \quad (46)$$

où les positions dans E_3 sont notées $\vec{X} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $\vec{Y} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$ et l'élément de volume $dV = dx' dy' dz'$.

Pour calculer maintenant cette densité de courant \vec{J} à partir de \vec{A}_R (et connaissant \vec{A}_S), on dispose du problème : trouver \vec{J} et α tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma(-j\omega\vec{A}_S - j\omega\vec{A}_R + \vec{\nabla}\alpha) \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right. \quad (48)$$

dans tout E_3 (On rappelle que σ est la fonction de l'espace (29)-(30))

Il est possible à ce stade de procéder de deux façons :

1. On élimine \vec{J} en appliquant directement (48) à (47) et on calcule α comme solution de

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \alpha) - \vec{\nabla} \cdot (\sigma (j\omega\vec{A}_S + j\omega\vec{A}_R)) = 0 \quad (49)$$

dans tout E_3 .

Compte tenu que σ est une fonction de l'espace (29)-(30), ce problème se transforme, en introduisant $V_D = \{ \vec{X} \text{ tel que } \sigma(\vec{X}) \neq 0 \}$, en

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \alpha - j\omega \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_S + \vec{A}_R) = 0 \text{ dans } V_D \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial n} = j\omega (\vec{A}_S + \vec{A}_R) \cdot \vec{n} \text{ sur la frontière de } V_D \end{array} \right. \quad (51)$$

où \vec{n} est la normale extérieure au domaine V_D .

Si α est trouvé par (50) et (51), on obtient \vec{J} par (47).

2. Inversement, on peut aussi éliminer α . Pour cela, on écrit

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} + j\omega\vec{A}_S + j\omega\vec{A}_R = \vec{\nabla}\alpha \text{ dans } V_D \quad (52)$$

et on prend le rotationnel de cette expression, ce qui conduit à trouver directement \vec{J} solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} + j\omega\vec{A}_S + j\omega\vec{A}_R \right) = \vec{0} \text{ dans } V_D \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \text{ dans } V_D \end{array} \right. \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur la frontière de } V_D \end{array} \right. \quad (55)$$

où \vec{A}_R et \vec{A}_S sont supposés connus.

La particularisation géométrique du problème, qui va être faite, suggère de plutôt choisir cette dernière façon de procéder.

B. Modèle

1. Equations électriques

Le domaine de métal liquide, de volume V_D et d'épaisseur e , a une géométrie qui peut être décrite (cf. figure 22) comme le produit cartésien d'un domaine D du plan (\vec{i}, \vec{j}) (pas nécessairement un disque) et d'un segment de longueur e suivant \vec{k} .

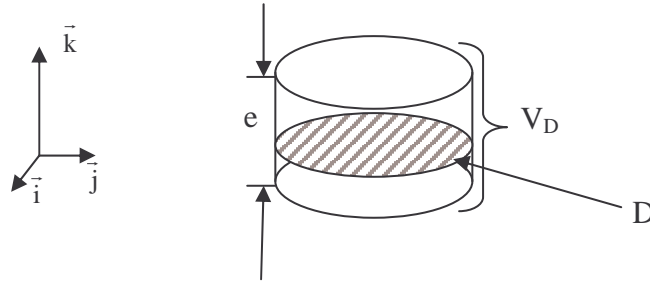


Figure 22 : représentation de la nappe dans l'espace

Même si l'expérience montre que ce n'est pas vrai en toute rigueur, on fait l'approximation géométrique que l'épaisseur est la même en tout point de la nappe (cf. figure 23).

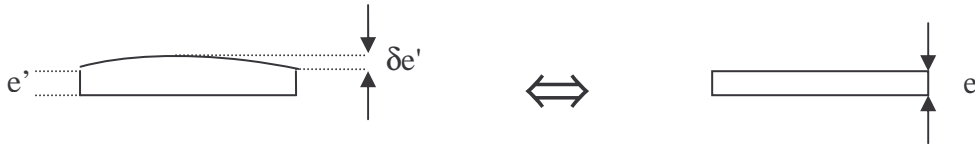


Figure 23 : approximation de l'épaisseur de la nappe d'étain

A cette approximation, on ajoute l'hypothèse de pénétration complète et de répartition homogène du courant induit dans la direction normale à la nappe liquide (\vec{k}).

Ainsi, si on note $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$ la projection de $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sur le plan (\vec{i}, \vec{j}) , on obtient

$$\vec{J}(\vec{X}) = \begin{cases} \frac{\vec{K}(\vec{x})}{e} & \text{si } 0 < z < e \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (56)$$

\vec{K} est une densité de courant feuille. Elle est toujours normale à \vec{k} ($\vec{K} = Kx \vec{i} + Ky \vec{j}$) et comme elle ne dépend que de x et de y sa divergence est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \partial_x Kx + \partial_y Ky \quad (57)$$

La divergence de la paramétrisation (56) de \vec{J} ne comporte aucune singularité puisqu'elle ne comporte de discontinuités que tangentielles en $z = 0$, $z = e$ et sur les bords latéraux de V_D . On obtient donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{X}) = \begin{cases} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{K}(\vec{x})}{e} & \text{si } 0 < z < e \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (58)$$

Comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{X}) = 0$ dans E_3 , on a donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{K}(\vec{x}) = 0$ dans E_2 et alors $\vec{K}(\vec{x})$ est un rotationnel bidimensionnel qui peut alors s'écrire :

$$\vec{K}(\vec{x}) = -\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) \quad \text{dans } D \quad (59)$$

Où $\bar{\varphi}$ est la fonction de courant et D une section du domaine V_D de normale \vec{k} comme indiquée sur la figure 22.

La densité de courant définie par l'équation (58) prend donc la forme

$$\vec{J}(\vec{X}) = \frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x})}{e} \quad \text{dans } V_D \quad (60)$$

Maintenant, la condition aux limites (55) est automatiquement satisfaite sur les bases de V_D et elle est équivalente à $\vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = 0$ sur le bord latéral (soit ∂D) ce qui est assurée par

$$\bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \quad (61)$$

Finalement, le problème (53)-(54)-(55) qui permet de trouver \vec{J} à partir de \vec{A}_T se transforme en (\vec{A}_R et \vec{A}_S étant connus) : trouver $\bar{\varphi}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x})}{\sigma \cdot e} + j\omega \vec{A}_S(\vec{X}) + j\omega \vec{A}_R(\vec{X}) \right) = \vec{0} \quad \text{dans } V_D \\ \bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right. \quad (62)$$

La densité de courant volumique \vec{J} est calculée à partir de $\bar{\varphi}$ par la relation (60).

Le problème (62)-(63) n'a de sens que si la nappe est suffisamment mince (e petit) pour que l'hypothèse de pénétration homogène soit valable.

2. Equations magnétiques

Si ϕ est une fonction définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C} alors on peut définir

$$\vec{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \quad (64)$$

et on a aussi [11]

$$\vec{\nabla}_{\vec{X}} \bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{Y}} \bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \quad (65)$$

où les positions dans E_3 sont notées $\vec{X} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $\vec{Y} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$ et l'élément de volume $dV = dx' dy' dz'$.

D'où on retire que

$$-\vec{k} \times \vec{\nabla}_{\vec{X}} \bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{E_3} \frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla}_{\vec{Y}} \bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \quad (66)$$

$$\text{En posant } \bar{\phi}(\vec{Y}) = \begin{cases} \frac{\bar{\phi}(\vec{y})}{e} & \text{dans } V_D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (67)$$

où $\vec{y} = x \vec{i} + y \vec{j}$ est la projection de $\vec{Y} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ sur le plan (\vec{i}, \vec{j}) , on obtient

$$-\vec{k} \times \vec{\nabla}_{\vec{X}} \bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\vec{J}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \quad (68)$$

Ce second membre est la forme Biot et Savart (46) de (44)-(45) d'où

$$\vec{A}_R(\vec{X}) = -\vec{k} \times \vec{\nabla}_{\vec{X}} \bar{\psi}_R(\vec{X}) \quad (69)$$

$\bar{\psi}_R \vec{k}$ est ainsi le potentiel vecteur magnétique du potentiel vecteur magnétique de réaction \vec{A}_R qu'on nommera par potentiel dans ce qui suit.

$\bar{\psi}_R$ est calculé par

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R(\vec{X}) &= \frac{\mu_o}{4\pi e} \int_{V_D} \frac{\bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{Y}|} dV \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi e} \int_0^e dz' \int_D \frac{\bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{y} - z' \vec{k}|} dS \quad \text{avec } dS = dx' dy' \end{aligned}$$

Comme l'épaisseur de la nappe e est petite par rapport à \sqrt{S} , on peut écrire

$$\int_0^e dz' \int_D \frac{\bar{\phi}(\vec{Y})}{|\vec{X} - \vec{y} - z' \vec{k}|} dS \approx e \int_D \frac{\bar{\phi}(\vec{y})}{|\vec{X} - \vec{y}|} dS$$

et finalement :

$$\bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\phi}(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|} dS \quad (70)$$

On obtient de cette manière une expression liant directement le potentiel de réaction à la fonction de courant.

3. Couplage équations magnétiques et équations électriques

En combinant (62)-(63) et (69)-(70), on arrive au problème complet qui est de trouver $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}_R$ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x})}{\sigma e} - j\omega \vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\psi}_R(\vec{X}) + j\omega \vec{A}_S(\vec{X}) \right) = \vec{0} \text{ dans } V_D \end{array} \right. \quad (71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\varphi}(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|} dS \quad \text{dans } E_3 \end{array} \right. \quad (72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial D \end{array} \right. \quad (73)$$

En introduisant l'induction magnétique source :

$$\vec{B}_S = \vec{\nabla} \times \vec{A}_S \quad (74)$$

le problème devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x})}{\sigma e} - j\omega \vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\psi}_R(\vec{X}) \right) - j\omega \vec{B}_S = \vec{0} \text{ dans } V_D \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_R(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\varphi}(\vec{x})}{|\vec{X} - \vec{x}|} dS \quad \text{dans } E_3 \end{array} \right. \quad (76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial D \end{array} \right. \quad (77)$$

Dans le cas où l'inducteur est un solénoïde d'axe normal à la nappe, celle-ci étant placée en son centre, on a $\vec{B}_S = \bar{B}_S \vec{k}$, où \bar{B}_S est une constante.

Dans ce cas, le problème (71)-(72)-(73) peut être simplifié en utilisant, pour $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}_R$, la formule

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\bar{\varphi} \vec{k}) = (\partial_{xz}^2 \bar{\varphi} \vec{i} + \partial_{yz}^2 \bar{\varphi} \vec{j} + \partial_{zz}^2 \bar{\varphi} \vec{k}) - (\partial_{xx}^2 \bar{\varphi} + \partial_{yy}^2 \bar{\varphi} + \partial_{zz}^2 \bar{\varphi}) \vec{k}$$

En ne retenant que la composante suivant \vec{k} de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{e\sigma} \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) + j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R(\vec{x}) \right) - j\omega \bar{B}_S = 0 \text{ dans } D \\ \bar{\psi}_R(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS \quad \text{dans } E_2 \\ \bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right.$$

où $\vec{\nabla}$ est le nabla bidimensionnel.

On peut simplifier le système en introduisant une équation intégro-différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{e\sigma} \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) + j\omega \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} dS \right) - j\omega \bar{B}_s = 0 \quad \text{dans } D \end{array} \right. \quad (78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right. \quad (79)$$

Cette équation intégral-différentielle est le cœur de la formulation utilisée pour les calculs effectifs.

On trouve la fonction de courant $\bar{\varphi}$ en résolvant ce système, on déduit le potentiel $\bar{\psi}_R$ par la relation (76) et on retrouve la densité de courant feuille et le potentiel vecteur magnétique de réaction respectivement par les expressions (59) et (69).

V. Analyse du modèle

Dans le paragraphe 3 du chapitre I, une première approche du problème magnétique a consisté à faire un modèle électrique équivalent de la nappe de métal liquide qui est plus simple à étudier.

Ici, on propose d'établir un circuit électrique équivalent à partir de notre formulation magnétique de manière à pouvoir réutiliser certains résultats obtenus dans le paragraphe 3 du chapitre I. Pour cela, on va, premièrement, à partir du modèle magnétique, faire un bilan de puissance. Deuxièmement, ayant identifié les puissances active et réactive, le problème magnétique sera interprété en terme de circuit électrique.

A. Bilan de puissance

On fait tout d'abord un bilan de puissance « classique » à partir de la formulation en potentiel vecteur magnétique. Puis, on va s'aider de la méthode utilisée pour faire un bilan de puissance sur la nouvelle formulation. L'interprétation des termes trouvés dans la nouvelle formulation sera ainsi éclairée par la comparaison avec ceux de la formulation en potentiel vecteur magnétique.

1. Formulation faible des problèmes source et induit

On commence par un bilan de puissance sur la formulation en potentiel vecteur. Dans un premier temps, le bilan est fait en considérant le potentiel vecteur magnétique total.

On reprend la formulation en potentiel vecteur magnétique de départ (37)-(38).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_T = \vec{J}_s - \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \bar{\alpha}) \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_T = 0 \end{array} \right. \quad (81)$$

dans tout l'espace E_3 . On rappelle que \vec{A}_T est le potentiel vecteur magnétique total.

(80) peut être transformée en faisant le produit scalaire de cette relation par un champ $\vec{\zeta}$ quelconque. On obtient

$$\forall \vec{\zeta} \int_{\Sigma} \vec{J}_S \cdot \vec{\zeta} dV = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_T \cdot \vec{\zeta} dV + \int_{\Sigma} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\zeta} dV \quad (82)$$

Comme (80) contient l'information selon laquelle $\vec{\nabla} \cdot \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) = 0$, une autre façon de traduire cette information est d'affirmer que pour tout scalaire $\bar{\beta}$, $\sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha})$ est orthogonal au gradient de $\bar{\beta}$, soit

$$\forall \bar{\beta} \int_{E_3} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\nabla} \bar{\beta} dV = 0 \quad (83)$$

On intègre par partie le terme $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_T \cdot \vec{\zeta} dV$ pour obtenir

$$\int_{\Sigma} \vec{J}_S \cdot \vec{\zeta} dV = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_T) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) dV + \int_{\partial \Sigma} \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \times \vec{A}_T) \times \vec{\zeta}] \cdot \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\zeta} dV \quad (84)$$

Où on note dV l'élément de volume dans Σ , dS l'élément de surface sur la surface $\partial \Sigma$ et \vec{n} le champ de normales à $\partial \Sigma$ orientés vers l'extérieur de $\partial \Sigma$.

Les intégrales de surfaces s'annulent lorsque Σ tend vers E_3 , l'espace Euclidien tout entier.

(84) devient : trouver \vec{A}_T tel que

$$\forall \vec{\zeta} \int_{E_3} \vec{J}_S \cdot \vec{\zeta} dV = \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_T) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) dV + \int_{E_3} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\zeta} dV \quad (85)$$

et on a encore

$$\forall \bar{\beta} \int_{E_3} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\nabla} \bar{\beta} dV = 0 \quad (86)$$

L'équation (85) est la forme faible (ou forme variationnelle) correspondant à la forme forte (80).

Si on choisit $\vec{\zeta} = (-j\omega \vec{A}_T)^*$ et $\bar{\beta} = \vec{\alpha}^*$, les équations (85) et (86) deviennent

$$\int_{E_3} \vec{J}_S \cdot (-j\omega \vec{A}_T)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_T|^2 dV + \int_{E_3} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot (-j\omega \vec{A}_T)^* dV \quad (87)$$

$$\int_{E_3} \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\nabla} \vec{\alpha}^* dV = 0 \quad (88)$$

La relation (87) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{E_3} \vec{J}_S \cdot (-j\omega \vec{A}_T)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_T|^2 dV + \int_{E_3} [\sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot (-j\omega \vec{A}_T - \vec{\nabla} \vec{\alpha})^* + \sigma(j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\nabla} \vec{\alpha}^*] dV \quad (89)$$

Et l'identité (88) permet de simplifier l'équation (89) qui se réécrit alors

$$\int_{E_3} \vec{J}_S \cdot (-j\omega \vec{A}_T)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_T|^2 dV - \int_{E_3} \sigma |j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \bar{\alpha}|^2 dV \quad (90)$$

Finalement, en prenant le conjugué de l'équation (90), on obtient

$$\int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_T) dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_T|^2 dV + \int_{E_3} \sigma |j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \bar{\alpha}|^2 dV \quad (91)$$

qui est susceptible d'interprétations.

D'abord, le terme $\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_T|^2 dV$ représente la puissance réactive notée Q, puis le terme $\int_{E_3} \sigma |j\omega \vec{A}_T + \vec{\nabla} \bar{\alpha}|^2 dV$ représente les pertes joules (puissance active notée P).

D'où

$$\int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_T) dV = jQ + P \quad (92)$$

On en déduit que le terme $\int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_T) dV$ représente la puissance issue des sources que l'on peut noter \bar{S} .

A présent, un bilan des puissances, en séparant l'induit et la source, est effectué. On procède de la même manière que ci-dessus mais en appliquant le principe de superposition en séparant la source de l'induit, on travaille donc sur les équations (39) et (44).

Ces deux équations peuvent être transformées en faisant le produit scalaire par des champs quelconques \vec{u} et \vec{v} et on obtient

$$\forall \vec{u} \int_{E_3} \vec{J}_S \cdot \vec{u} dV = \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_S) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) dV \quad (93)$$

et

$$\forall \vec{v} \int_{E_3} \vec{J} \cdot \vec{v} dV = \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_R) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) dV \quad (94)$$

Si on choisit $\vec{u} = (-j\omega \vec{A}_R)^*$ dans (93), on obtient

$$\int_{E_3} \vec{J}_S \cdot (-j\omega \vec{A}_R)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_S) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}_R^*) dV \quad (95)$$

Si on choisit $\vec{v} = (-j\omega \vec{A}_S)^*$ dans (94), on obtient

$$\int_{E_3} \vec{J} \cdot (-j\omega \vec{A}_S)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_R) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}_S^*) dV \quad (96)$$

D'où la relation de réciprocité

$$\int_{E_3} \vec{J}_S \cdot (-j\omega \vec{A}_R)^* dV = - \int_{E_3} \vec{J}^* \cdot (-j\omega \vec{A}_S) dV \quad (97)$$

En reprenant (92), la puissance \bar{S} s'écrit

$$\bar{S} = \int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_T) dV \quad (98)$$

Le potentiel vecteur magnétique total \vec{A}_T est la superposition du potentiel vecteur magnétique source \vec{A}_S et du potentiel vecteur magnétique de réaction \vec{A}_R , (98) s'écrit alors

$$\bar{S} = \int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_S) dV + \int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_R) dV \quad (99)$$

En injectant la relation de réciprocité (97) dans le second terme du second membre, on arrive à

$$\bar{S} = \underbrace{\int_{E_3} \vec{J}_S^* \cdot (j\omega \vec{A}_S) dV}_{\substack{\text{Puissance réactive} \\ \text{en l'absence d'induit}}} + \underbrace{\int_{E_3} \vec{J} \cdot (j\omega \vec{A}_S)^* dV}_{\substack{\text{Puissance active dans l'induit} \\ + \\ \text{la contribution de la puissance réactive} \\ \text{due à la présence de l'induit}}} \quad (100)$$

Finalement, si on pose $\vec{v} = (-j\omega \vec{A}_R)^*$, (94) devient

$$\int_{E_3} \vec{J} \cdot (-j\omega \vec{A}_R)^* dV = j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_R|^2 dV \quad (101)$$

qui représente la puissance réactive correspondant au courant induit qu'il y aurait en présence du courant induit seul.

On a terminé le bilan des puissances sur la formulation en potentiel vecteur magnétique. A présent, on va faire le bilan des puissances sur la formulation en fonction de courant $\bar{\phi}$.

2. Analyse de notre formulation

La formulation adoptée pour calculer les courants induits dans le métal liquide est

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \bar{\phi}(\vec{x})}{\sigma \cdot e} + j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R(\vec{x}) \right) - j\omega \bar{B}_S = 0 \text{ dans } D \end{array} \right. \quad (102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_R(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\phi}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS \text{ dans } E_2 \end{array} \right. \quad (103)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} = 0 \text{ sur } \partial D \end{array} \right. \quad (104)$$

La traduction des potentiels $\bar{\phi}$ et $\bar{\psi}_R$ en notation plus courante est

$$\vec{J}(\vec{X}) = \begin{cases} \frac{-\vec{k} \times \vec{\nabla} \vec{\varphi}(x)}{e} & \text{dans } V_D \\ \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (105)$$

$$\vec{A}_R(\vec{X}) = -\vec{k} \times \vec{\nabla} \vec{\psi}(\vec{X}) \quad (106)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_S(\vec{X}) = \vec{B}_S \vec{k} = \vec{B}_S(\vec{X}) \quad (107)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_R(\vec{X}) = \vec{B}_R(\vec{X}) \quad (108)$$

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{\vec{J}(\vec{X})}{\sigma} \quad (109)$$

La forme faible correspondant à (102) est

$$\forall \vec{\beta} \quad \int_D \frac{\vec{\nabla} \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\beta}^*}{\sigma \cdot e} dS + \int_D j \omega \vec{\nabla} \vec{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \vec{\beta}^* dS + \int_D j \omega \vec{B}_S \cdot \vec{\beta}^* dS = \int_{\partial D} \left(\frac{\vec{\nabla} \vec{\varphi}}{\sigma \cdot e} + j \omega \vec{\nabla} \vec{\psi}_R \right) \cdot \vec{n} \vec{\beta}^* dl \quad (110)$$

où dl est un élément de longueur de la frontière ∂D .

On effectue des choix pour $\vec{\beta}$.

a. Si $\vec{\beta} = 1$

Dans un premier temps, la formulation est vérifiée en fixant $\vec{\beta}$ à 1.

(110) se réduit à

$$\int_D j \omega \vec{B}_S dS = \int_{\partial D} \left(\frac{\vec{\nabla} \vec{\varphi}}{\sigma \cdot e} + j \omega \vec{\nabla} \vec{\psi}_R \right) \cdot \vec{n} dl \quad (111)$$

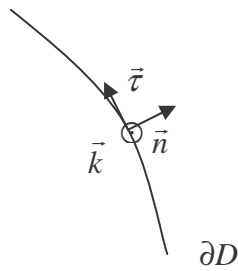


Figure 24 : orientation de la normale et de la tangente à ∂D

$$\vec{n} = \vec{\tau} \times \vec{k} \quad (112)$$

En substituant (112) dans (111), celle-ci se réécrit

$$\int_D j\omega \bar{\mathbf{B}}_S \cdot \bar{\mathbf{k}} dS = \int_{\partial D} \bar{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}}{\sigma \cdot e} + j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} dl \quad (113)$$

On voit apparaître la densité de courant volumique $\vec{\mathbf{J}}$, donnée par la relation (105), et le potentiel vecteur de réaction rappelé par (106) :

$$\int_D j\omega \bar{\mathbf{B}}_S \cdot \bar{\mathbf{k}} dS = \int_{\partial D} \left(\frac{\vec{\mathbf{J}}}{\sigma} + j\omega \vec{\mathbf{A}}_R \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} dl \quad (114)$$

En appliquant la formule de Stokes, le second membre devient

$$- \int_{\partial D} \left(\frac{\vec{\mathbf{J}}}{\sigma} + j\omega \vec{\mathbf{A}}_R \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} dl = - \int_D \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\mathbf{J}}}{\sigma} + j\omega \vec{\mathbf{A}}_R \right) \cdot \bar{\mathbf{k}} dS \quad (115)$$

Soit en introduisant dans l'expression ci-dessus, l'induction magnétique de réaction et le champ électrique, donnés respectivement par (108) et (109)

$$\int_D j\omega \bar{\mathbf{B}}_S \cdot \bar{\mathbf{k}} dS = - \int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + j\omega \vec{\mathbf{B}}_R \right) \cdot \bar{\mathbf{k}} dS \quad (116)$$

En faisant apparaître l'induction magnétique totale $\vec{\mathbf{B}}_T = \vec{\mathbf{B}}_S + \vec{\mathbf{B}}_R$

$$- \int_D j\omega \vec{\mathbf{B}}_T \cdot \bar{\mathbf{k}} dS = \int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \right) \cdot \bar{\mathbf{k}} dS \quad (117)$$

On trouve la relation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale sur la surface du domaine D.

Cette vérification étant faite, on étudie le cas intéressant où $\vec{\beta} = \vec{\varphi}$.

b. Si $\vec{\beta} = \vec{\varphi}$

Si on choisit $\vec{\beta} = \vec{\varphi}$, (110) devient

$$\int_D \frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi} \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^*}{\sigma \cdot e} dS + \int_D j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS + \int_D j\omega \bar{\mathbf{B}}_S \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}^* dS = \int_{\partial D} \left(\frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}}{\sigma \cdot e} + j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \right) \cdot \bar{\mathbf{n}} \bar{\varphi}^* dl \quad (118)$$

Le second membre de l'équation est nul car $\bar{\varphi} = 0$ sur ∂D et donc (118) se simplifie comme

$$\int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{\varphi}|^2}{\sigma \cdot e} dS + j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS + j\omega \int_D \bar{\mathbf{B}}_S \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}^* dS = 0 \quad (119)$$

qui est susceptible d'interprétations

D'abord, le terme réel $\int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{\varphi}|^2}{\sigma \cdot e} dS$ correspond à la puissance joule dissipée dans la charge.

En effet, on retrouve l'expression des pertes joules provenant d'un bilan de puissance fait sur une formulation en potentiel vecteur magnétique par (105)

$$\int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{\varphi}|^2}{\sigma \cdot e} dS = e \int_D \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} dS \quad (\text{cf. (60)}) \quad (120)$$

$$= \int_{V_D} \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} dV \quad (121)$$

Ensuite, le terme $\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS$ peut être exprimé uniquement en fonction de $\bar{\varphi}$ en remplaçant le potentiel $\bar{\psi}_R$ par sa forme (103), ce qui donne

$$\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS = \omega \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{D D'} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\bar{\varphi}(\vec{x}))^* \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}} \bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS' dS \quad (122)$$

On en déduit que $\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS$ est donc une quantité réelle.

De la même manière, pour le terme $j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS$, on peut faire le lien avec le bilan de puissance fait sur une formulation en potentiel vecteur magnétique (cf. paragraphe (1)).

Maintenant, $j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS$ peut être traduit en terme de potentiel vecteur magnétique de réaction \vec{A}_R et de densité de courant surfacique \vec{K} . On a

$$j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS = j\omega \int_D (-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\psi}_R) (-\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}^*) dS \quad (123)$$

En substituant (106) et (59) dans (123), il vient

$$j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS = j\omega \int_D \vec{A}_R \cdot \vec{K}^* dS \quad (124)$$

Soit en fonction de la densité de courant volumique \vec{J}

$$j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS = j\omega \int_{V_D} \vec{A}_R \cdot \vec{J}^* dV \quad (125)$$

En utilisant le conjugué de (101), on arrive à

$$\begin{aligned} j\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS &= \int_{E_3} \vec{J}^* \cdot (j\omega \vec{A}_R) dV \\ &= j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu_0} |\vec{\nabla} \times \vec{A}_R|^2 dV \end{aligned} \quad (126)$$

Et on trouve donc que $\omega \int_D \vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* dS$ est la puissance réactive qui correspond au courant induit seul.

Finalement, $j\omega \int_D \vec{B}_S \cdot \vec{\varphi}^* dS$ peut se réécrire sous la forme

$$j\omega \int_D (\vec{\nabla} \times \vec{A}_S) \cdot \vec{\varphi}^* \vec{k} dS = j\omega \int_{V_D} \vec{A}_S \cdot \vec{J}^* dV \quad (127)$$

qui correspond au second terme de (100) du bilan de puissance du paragraphe (1).

On trouve donc que (118) est exactement un bilan de puissance au même titre que (100).

B. Schéma électrique équivalent

Le bilan de puissance permet d'affirmer que le système composé de l'inducteur et de la nappe liquide peut être représenté par le modèle de circuit de deux bobines couplées dans lesquelles on ne s'intéresse qu'au secondaire.

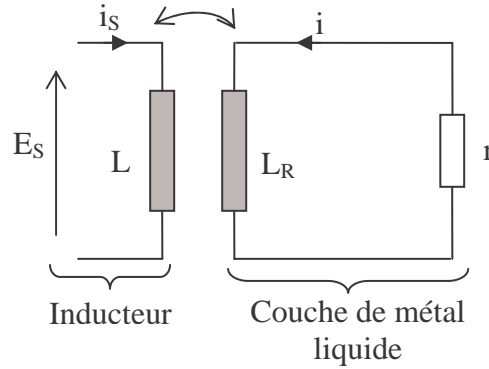


Figure 25 : Schéma électrique équivalent

Où

L est l'inductance propre de l'inducteur.

L_R est l'inductance propre de l'induit (nappe de métal liquide).

r est la résistance électrique de l'induit.

$\vec{\Phi}_S$ est le flux magnétique source qui traverse l'induit.

Connaissant i_S , on peut écrire directement :

$$\vec{\Phi}_S = (r + jL_R\omega) \vec{I}_R \quad (128)$$

Dans la partie I de ce mémoire, on a établi un modèle électrique de la nappe de métal liquide. Dans ce paragraphe, le problème magnétique est interprété en terme de circuit électrique en se basant sur le bilan de puissance qui a été fait. Pour cela, on sépare les courants induits en intensité i et en support $\vec{u}(\vec{x})$.

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{i} \vec{u}(\vec{x}) \quad (129)$$

1. Puissance Joule

En substituant (129) dans l'expression de la puissance joule donnée par le premier terme de (119), les pertes joules s'écrivent

$$\int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{\varphi}|^2}{\sigma \cdot e} dS = |\bar{i}|^2 \int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{u}|^2}{\sigma \cdot e} dS \quad (130)$$

Et, on voit apparaître une expression de la résistance électrique

$$r = \int_D \frac{|\vec{\nabla} \bar{u}|^2}{\sigma \cdot e} dS \quad (131)$$

où encore lorsque e est très petit comme on l'a supposé,

$$r = \int_{V_D} \frac{|\vec{\nabla} \bar{u}|^2}{\sigma} dV \quad (132)$$

2. Puissance réactive

En substituant là encore (129) dans l'expression de la puissance réactive (122) (celle qui correspond au courant induit seul), celle-ci devient

$$\omega \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{D D'} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\bar{\varphi}(\vec{x}))^* \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}} \bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS' dS = \omega \frac{\mu_o}{4\pi} |\bar{i}|^2 \iint_{D D'} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\bar{u}(\vec{x}))^* \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}} \bar{u}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS' dS \quad (133)$$

Si on pose

$$\bar{v}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{u}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS' \quad (134)$$

L'expression (133) se réécrit de manière simplifiée

$$|\bar{i}|^2 \omega \int_D \vec{\nabla} \bar{u}^* \cdot \vec{\nabla} \bar{v} dS \quad (135)$$

où encore

$$|\bar{i}|^2 L_R \omega \quad (136)$$

où L_R est l'inductance propre de la nappe.

$$L_R = \int_D \vec{\nabla} \bar{u}^* \cdot \vec{\nabla} \bar{v} dS \quad (137)$$

3. Identification du terme source

Le terme source dans notre formulation s'écrit :

$$\int_D \overline{B}_S \cdot \overline{\varphi}^* dS \quad (138)$$

En substituant la décomposition (129) dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\overline{i}^* \int_D \overline{B}_S \cdot \overline{u}^* dS \quad (139)$$

L'induction magnétique source étant uniforme, (139) se réécrit

$$\overline{i}^* \overline{B}_S \int_D \overline{u}^* dS = \overline{i}^* \overline{B}_S S_D \quad (140)$$

Pour obtenir une cohérence de l'interprétation faite, S_D devrait être la surface S du domaine D .

On a laissé une certaine indétermination dans la séparation entre courant \overline{i} et support \overline{u} faite en (129). Le courant peut être multiplié par un facteur et le support divisé par ce même facteur. Et en levant cette indétermination par le choix

$$\overline{i} = \frac{\int_D \overline{\varphi} dS}{S} \quad (141)$$

c'est-à-dire que \overline{i} est la moyenne de $\overline{\varphi}$ sur D , on obtient que

$$S_D = \int_D \overline{u}^* dS = \int_D 1 dS \quad (142)$$

Ceci entraîne que $S_D=S$, en effet,

$$\int_D \overline{\varphi} dS = \int_D \overline{i} \overline{u} dS \quad (143)$$

En conséquence, on obtient

$$\int_D \overline{B}_S \cdot \overline{\varphi}^* dS = \overline{i}^* \overline{\Phi}_S \quad (144)$$

où $\overline{\Phi}_S$ le flux de \overline{B}_S à travers la surface S du domaine D .

Pour illustrer ceci, on peut écrire que la fonction de courant $\overline{\varphi}$ est homogène à un courant. Dans un premier temps, on suppose que $\overline{\varphi} = \overline{i}$ dans D et nulle à l'extérieur, l'équation (138) devient

$$\overline{i}^* \int_D \overline{B}_S dS = \overline{i}^* \overline{\Phi}_S \quad (145)$$

avec $\overline{\Phi}_S$ le flux magnétique source.

Supposons maintenant que dans $D = D_1 \cup D_2$, la fonction de courant $\overline{\varphi}$ soit constante par morceau et s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi} = \bar{i}_1 \text{ dans } D_1 \\ \bar{\varphi} = \bar{i}_2 \text{ dans } D_2 \\ \bar{\varphi} = 0 \text{ à l'extérieur de } D \end{array} \right.$$

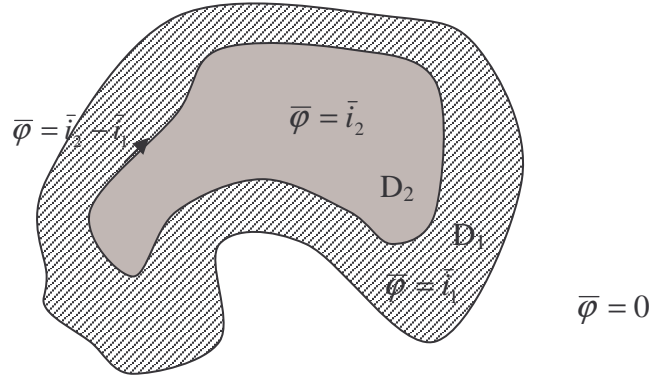


Figure 26 : Représentation des domaines D_1 et D_2 .

L'équation (138) se réécrit :

$$\bar{i}_1^* \int_{D_1+D_2} \bar{B}_S dS + (\bar{i}_2^* - \bar{i}_1^*) \int_{D_2} \bar{B}_S dS = \bar{i}_1^* \bar{\Phi}_{S_1} + (\bar{i}_2^* - \bar{i}_1^*) \bar{\Phi}_{S_2} \quad (146)$$

On voit apparaître la somme des flux magnétiques qui traverse les différents domaines. Ce procédé peut être généralisé à n domaines.

4. Bilan de puissance

Le bilan de puissance correspond alors

$$r|\bar{i}|^2 + jL_R\omega|\bar{i}|^2 + j\omega\bar{\Phi}_S\bar{i}^* = 0 \quad (147)$$

soit après avoir simplifié par \bar{i}^*

$$r\bar{i} + jL_R\omega\bar{i} + j\omega\bar{\Phi}_S = 0 \quad (148)$$

ce qui est exactement le modèle électrique du paragraphe III du chapitre I.

C. La force électromagnétique

Finalement, on devrait déduire la densité de force électromagnétique de la formulation (102)-(103)-(104) en extrayant d'elle une coénergie magnétique dont la variation par rapport à la position donnerait cette densité de force.

Toutefois le travail n'est pas si facile dans la mesure où il nécessiterait de revenir aux grandeurs temporelles, puis, après avoir expliqué en terme de champ le sens qu'on donne au découplage électromagnétique, de repasser encore aux grandeurs complexes afin d'exprimer une densité de force moyenne.

Cette force devrait ensuite être séparée en partie gradiente et rotationnelle et on retiendrait que la partie gradiente qui est liée au déplacement.

Le bilan de puissance, son interprétation en terme de circuit, et les résultats obtenus au chapitre I permettent de court-circuiter cette analyse. Mais c'est au prix d'approximation.

Si on prend le calcul mené dans le chapitre I en III.A..2.a, on voit que la variation de la coénergie par rapport à x (position d'une spire par rapport à l'autre) avec une variation du courant induit est égale à la force électromagnétique plus un terme qui s'annule si $R_{eq} \ll L_{eq}\omega$.

Dans le cas d'un conducteur liquide, l'analyse des forces demande à faire la variation de la coénergie magnétique par rapport à la forme du domaine. C'est un travail délicat qui peut être évité au prix d'une hypothèse supplémentaire $r \ll L_R\omega$ qui permet d'accepter que le travail de la force dans un déplacement soit la variation de la coénergie dans ce déplacement.

En effet, comme on a interprété le problème de champ en terme de circuit électrique, on peut utiliser les résultats du circuit électrique (cf. paragraphe III, chapitre I).

VI. Conclusions

La nappe de métal liquide est soumise à un champ magnétique produit par un solénoïde alimenté par une densité de courant \vec{J}_s sinusoïdale. Sous l'action du champ électromagnétique variable, des courants sont induits dans le fluide conducteur. Déterminer la répartition des courants induits dans la nappe revient à résoudre un modèle d'inconnue vectorielle \vec{J} , densité de courant volumique induit.

Dans ce chapitre, nous avons montré comment à partir de certaines hypothèses, notamment d'invariance du courant induits dans l'épaisseur, ce modèle se simplifie en un modèle d'inconnue scalaire $\bar{\varphi}$, la fonction de courant. Cette formulation va nous permettre d'obtenir d'une part la répartition des courants induits pour des formes de nappe plus complexes, que celles présentées dans le chapitre I, et d'autre part de calculer l'énergie magnétique, à courant inducteur donnée.

La méthode de résolution choisie est présentée dans la première partie du chapitre suivant.

Comme il a été précisé précédemment, notre formulation repose entre autre sur l'hypothèse d'une pénétration complète et d'une répartition homogène des courants dans l'épaisseur de la nappe. En effet, à la fréquence à la quelle on travaille et à la vue de l'épaisseur de la nappe, le courant pénètre complètement dans la nappe. Par contre, la validité de l'hypothèse de répartition uniforme des courants dans l'épaisseur de la nappe reste à être vérifiée ; une étude est menée dans ce sens dans la deuxième partie du chapitre III.

Enfin, la dernière partie du chapitre qui suit est consacrée au calcul de l'énergie totale.

CHAPITRE III : METHODES DE CALCUL

La résolution numérique du système d'équations (75)-(76) -(77), rappelé ci-dessous, se fait par la méthode des éléments finis.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'application de la méthode des éléments finis au cas de la couche mince de métal liquide.

Dans la deuxième partie, l'hypothèse de répartition homogène des courants induits dans l'épaisseur de la couche de métal liquide est vérifiée. Pour cela, un modèle 3D est établi et résolu par la méthode des intégrales de frontière.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre traite du calcul de l'énergie totale.

I. Modèle numérique

Le système d'équations à résoudre est rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{e\sigma} \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) + j\omega \vec{\nabla} \bar{\psi}_R(\vec{x}) \right) - j\omega \bar{B}_S(\vec{x}) = 0 & \text{dans } D & (149) \\ \bar{\varphi} = 0 & \text{sur } \partial D & (150) \\ \bar{\psi}_R(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS & \text{dans } E_2 & (151) \end{cases}$$

L'équation (149) est résolue par la méthode des éléments finis pour déterminer $\bar{\varphi}$ dans D .

Pour résoudre le système d'équations (149)-(150)-(151), on peut procéder de manière itérative ou directe.

A. La méthode itérative

La résolution du système (149)-(150)-(151) peut se faire de manière itérative en décomposant ce système en deux sous-systèmes :

- on calcule $\bar{\varphi}$ en supposant $\bar{\psi}_R$ connu par (149)-(150).
- on calcule ensuite $\bar{\psi}_R$ connaissant $\bar{\varphi}$ par (151).

Le processus est initialisé par $\bar{\psi}_R^0 = 0$ dans D .

Pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}^{n+1}(\vec{x})}{\sigma e} \right) = j\omega \bar{B}_S(\vec{x}) - j\omega \Delta \bar{\psi}_R^n(\vec{x}) & \text{dans } D & (152) \\ \bar{\varphi}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial D & (153) \\ \bar{\psi}_R^{n+1}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\varphi}^{n+1}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS & \text{dans } E_2 & (154) \end{cases}$$

La résolution par éléments finis du premier sous-système (152)-(153) n'est pas coûteuse car la matrice de raideur est la même à chaque itération : on la construit et on l'inverse une seule fois, seule une partie du second membre change, ce qui permet de raccourcir les temps de calcul. De plus, l'inversion est plus rapide car la matrice est creuse.

De même la matrice reliant $\bar{\psi}_R$ à $\bar{\varphi}$ est calculée une fois.

Cependant, un inconvénient de cette méthode est de ne plus converger lorsque l'on fait varier certains paramètres physique (la fréquence, conductivité électrique) ou géométrique (épaisseur de la nappe).

On a donc choisi une méthode de résolution directe.

B. La méthode directe

1. Construction des matrices

Il faut résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{e\sigma} \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) + j\omega \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} dS \right) - j\omega \bar{B}_s(\vec{x}) = 0 \quad \text{dans } D \\ \bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right. \quad (155)$$

$$\bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \quad (156)$$

par la méthode des éléments finis [13] [14] [15] [16]. Nous détaillerons simplement pour cette application la construction des matrices.

Le domaine D est discrétisé en éléments de Lagrange P1. Résoudre l'équation (149) revient donc à calculer les valeurs de la fonction courant $\bar{\varphi}$ aux n nœuds par la résolution du système linéaire (157). La densité de courant volumique source est une donnée, l'induction magnétique source \bar{B}_s est calculée, par la formule de Biot et Savart, en chaque nœud du domaine D de manière préliminaire.

$$[\bar{G}_a] \{\bar{\varphi}\} + [\bar{G}_b] \{\bar{\varphi}\} = [\bar{G}_{SM}] \{\bar{B}_s\} \quad (157)$$

où [] est une matrice carrée de dimensions $n \times n$

{ } est un vecteur colonne de dimensions n

$\bar{\varphi}$ et \bar{B}_s sont approximés par des fonctions linéaires par morceaux.

La construction des matrices $[\bar{G}_a]$ et $[\bar{G}_{SM}]$ se fait à partir de matrices élémentaires $[\bar{M}_a]^e$ et $[\bar{SM}]^e$ (de dimensions 3×3).

La matrice $[\bar{M}_a]^e$ est une matrice élémentaire de raideur à coefficients réels constants.

$[\bar{SM}]^e$ est une matrice élémentaire de masse.

Ces deux matrices apparaissent lorsque nous écrivons la partie du résidu spécifique à l'élément e :

$$\frac{1}{e\sigma} [\overline{M}_a]^e \{\overline{\varphi}\}^e + j\omega [\overline{M}_a]^e \{\overline{\psi}_R\}^e - j\omega [\overline{SM}]^e \{\overline{B}_S\}^e \quad (158)$$

où $\{\overline{\varphi}\}^e = \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi}_2 \\ \overline{\varphi}_3 \end{Bmatrix}^e$ est un vecteur colonne qui contient la valeur de $\overline{\varphi}$ aux nœuds 1, 2 et 3 de

l'élément e.

$\{\overline{B}_S\}^e = \begin{Bmatrix} \overline{B}_{S_1} \\ \overline{B}_{S_2} \\ \overline{B}_{S_3} \end{Bmatrix}^e$ est un vecteur colonne qui contient la valeur de \overline{B}_S aux nœuds 1, 2 et 3 de

l'élément e.

Pour construire la matrice $[\overline{G}_b]$, il faut calculer le potentiel $\overline{\psi}_R$ en chaque nœud en utilisant la relation (159). Cette construction est coûteuse en temps de calcul d'autant plus qu'il faut traiter une intégrale en $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$. La matrice $[\overline{G}_b]$ est pleine ce qui requiert un espace mémoire important.

Le domaine D est discrétisé en m éléments, l'intégrale (151) est donc approchée par :

$$\overline{\psi}_{Rj}^e = \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\overline{\varphi}^i}{|\vec{x}_j^e - \vec{y}^i|} dS_i \quad (159)$$

où Δ_i désigne l'élément i

$\overline{\psi}_{Rj}^e$ est la valeur du potentiel $\overline{\psi}_R$ au nœud j appartenant à l'élément e.

$\overline{\varphi}^i$ est la valeur de la fonction de courant sur l'élément i obtenue par interpolation linéaire.

$|\vec{x}_j^e - \vec{y}^i|$ est la distance entre le nœud j et l'élément i.

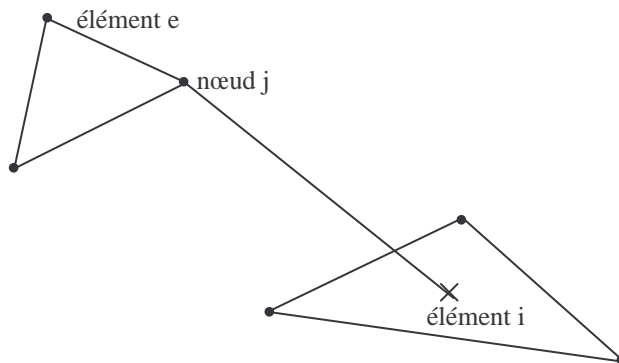


Figure 27 : distance $|\vec{x}_j^e - \vec{y}^i|$.

L'assemblage de $[\bar{G}_b]$ est décrite ci-dessous.

La contribution élémentaire à $[\bar{G}_b]$ est $j\omega[\bar{M}_a]^e \{\bar{\psi}\}^e$, soit

$$j\omega \begin{cases} \bar{M}_{a_{11}}^e \bar{\psi}_{R1}^e + \bar{M}_{a_{12}}^e \bar{\psi}_{R2}^e + \bar{M}_{a_{13}}^e \bar{\psi}_{R3}^e \\ \bar{M}_{a_{21}}^e \bar{\psi}_{R1}^e + \bar{M}_{a_{22}}^e \bar{\psi}_{R2}^e + \bar{M}_{a_{23}}^e \bar{\psi}_{R3}^e \\ \bar{M}_{a_{31}}^e \bar{\psi}_{R1}^e + \bar{M}_{a_{32}}^e \bar{\psi}_{R2}^e + \bar{M}_{a_{33}}^e \bar{\psi}_{R3}^e \end{cases} \quad (160)$$

où $\bar{M}_{a_{11}}^e$ est le coefficient de la première ligne première colonne de la matrice $[\bar{M}_a]^e$.

En remplaçant $\bar{\psi}_R$ par son expression définie en (159) dans le système d'équation (160), ce dernier se réécrit :

$$j\omega \begin{cases} \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\bar{M}_{a_{11}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_1^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{12}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_2^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{13}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_3^e - \vec{y}^i|} dS_i \right) \\ \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\bar{M}_{a_{21}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_1^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{22}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_2^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{23}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_3^e - \vec{y}^i|} dS_i \right) \\ \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\bar{M}_{a_{31}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_1^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{32}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_2^e - \vec{y}^i|} dS_i + \bar{M}_{a_{33}}^e \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_3^e - \vec{y}^i|} dS_i \right) \end{cases} \quad (161)$$

où $|\vec{x}_j^e - \vec{y}^i|$ est la distance du nœud j de l'élément e à l'élément i

$\bar{\varphi}^i$ est la valeur de $\bar{\varphi}$ sur l'élément i.

Pour construire $[\bar{G}_b]$, les intégrales $\int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\vec{x}_j^e - \vec{y}^i|} dS_i$ présentent des singularités, ce qui nécessite un traitement numérique particulier.

2. Traitement des singularités

Nous avons choisi de mettre en œuvre deux méthodes d'intégration numérique et de les comparer

- la Quadrature de Gauss [17] [18]
- la méthode de Monte Carlo [19] [20]

a. Calcul des intégrales par la quadrature de Gauss

L'intégrale (159) sur un élément de discrétisation se fait de manière numérique en utilisant une quadrature de Gauss.

L'idée des formules de Gauss est de choisir k points d'intégration, $x_1 \dots x_k$, non régulièrement espacés, de sorte que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré $2k-1$.

La fonction à intégrer est développée dans une base de polynômes orthogonaux (Gauss-Legendre). Les x_k sont alors les racines de ces polynômes.

Nous avons choisi de mettre en œuvre une formulation « produit », c'est-à-dire que l'on prend p points dans chaque direction. L'intégrale $\int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}_i(\bar{y})}{|\bar{x}_j - \bar{y}|} dS_i = \int_{\Delta_i} f(\bar{y}) dS_i$ est donc approchée par une double somme :

$$\int_{\Delta_i} f(\bar{y}) dS_i = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^p W_\alpha W_\beta f(\bar{y}_{\alpha\beta}) \quad (162)$$

Le nombre de points de Gauss doit être suffisant pour que la précision sur le calcul de l'intégrale soit correcte. En particulier, lorsque $\bar{x}_j \in \Delta_i$, cette intégrale présente une singularité. Dans ce cas le nombre de points de Gauss est augmenté jusqu'à ce que la valeur de l'intégrale tende vers une limite [17] [18].

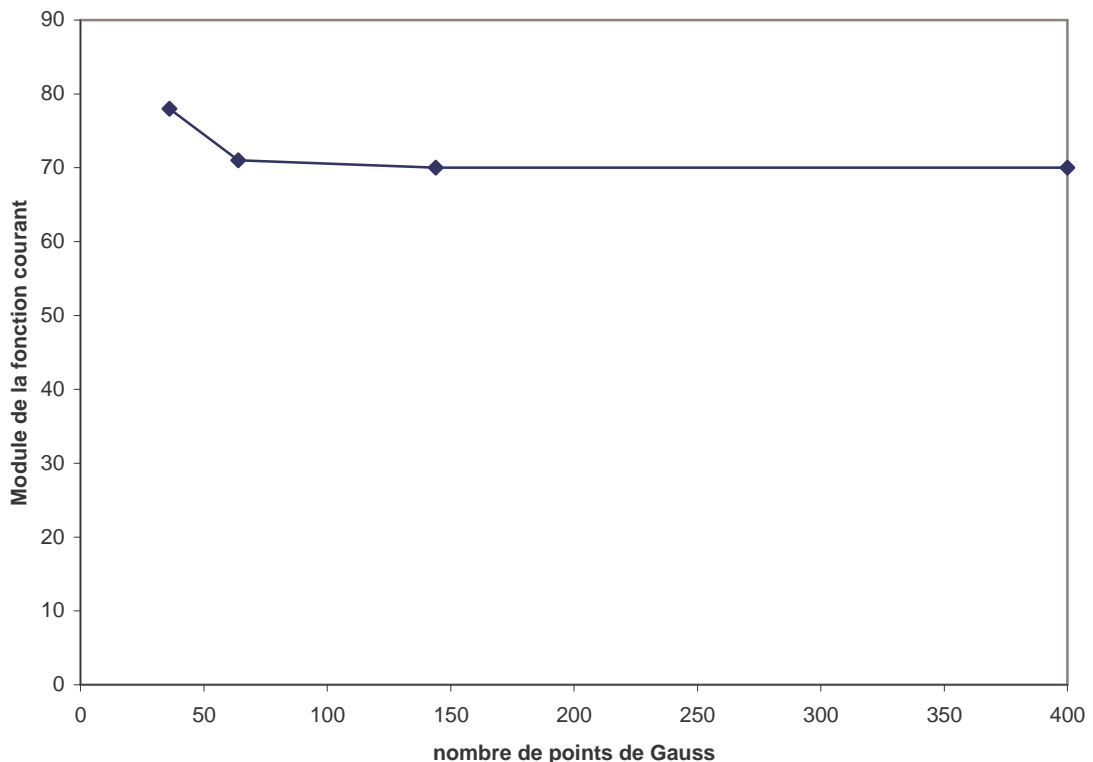


Figure 28 : module de $\bar{\varphi}$ sur un noeud j en fonction du nombre de points de Gauss

D'après la figure 28 , 64 points de Gauss sont suffisants pour pouvoir calculer l'intégrale

$$\int_{\Delta_i} \frac{\bar{\varphi}^i}{|\bar{x}_j^e - \bar{y}^i|} dS_i \text{ et l'utiliser pour cette application.}$$

b. Calcul des intégrales par la méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo présente la particularité d'intégrer de manière très précise les intégrales mêmes singulières.

Cette méthode consiste à tirer de manière aléatoire, dans une région d'aire A contenant le domaine d'intégration, un nombre C de couples de points. Seuls les points contenus dans le domaine d'intégration sont conservés et l'intégrale est approximée de la façon suivante :

$$\int_A f(\bar{y}) dS_i \approx \frac{A}{C} \sum_{i=1}^C f(\bar{y}_i) \quad (163)$$

Nous l'avons mise en œuvre avec 10 000 couples de points afin de vérifier la précision du calcul de l'intégrale par la quadrature de Gauss. Les deux méthodes de calcul nous donnent le même résultat à 1% près sur le nœud j. Cependant, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul. Les coefficients de la matrice $[\bar{G}_b]$ sont donc calculés par une quadrature de Gauss.

3. Assemblage

Les matrices globales $[\bar{G}_a]$, $[\bar{G}_{SM}]$ et $[\bar{G}_b]$ sont ainsi assemblées ce qui nous permet d'obtenir le système linéaire

$$[\bar{A}]\{\bar{\varphi}\} = [\bar{B}] \quad (164)$$

$$\text{où } [\bar{A}] = [\bar{G}_a] + [\bar{G}_b] \text{ et } [\bar{B}] = [\bar{G}_{SM}]\{\bar{B}_s\}.$$

Pour tenir compte de la condition aux limites $\bar{\varphi} = 0$ sur ∂D , la méthode du terme unité sur la diagonale a été utilisée [15].

Le système linéaire est résolu par la méthode du gradient conjugué [29] en séparant partie réelle et partie imaginaire.

II. Validation par un cas limite

Nous devons nous assurer que l'hypothèse de répartition homogène des courants induits dans l'épaisseur est vérifiée. Pour cela, une formulation en trois dimensions est nécessaire.

Afin de simplifier l'étude, le champ source considéré est de fréquence infinie. En effet, la connaissance de phénomènes se produisant à une fréquence infinie peut donner une idée de ce qui se passe en haute fréquence [21] [22].

Dans cette partie, nous traitons donc le cas d'une nappe soumise à un champ magnétique variable de fréquence infinie. L'épaisseur de la nappe est supposée être la même en tout point du liquide.

L'inconnue à calculer est le potentiel scalaire magnétique.

A. Modèle

1. Expression des courants induits

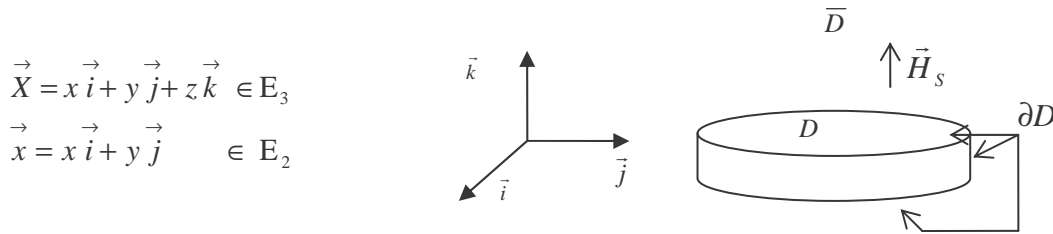
Pour cette partie, les notations suivantes sont modifiées :

- le domaine de la nappe, noté D , est un volume
- sa frontière, notée ∂D , est une surface
- l'air est noté \bar{D} .

Le champ magnétique source \vec{H}_S est une donnée du problème : il a été calculé par la formule de Biot et Savart.

A une fréquence infinie correspond une profondeur de peau nulle : les courants ne se développent qu'en surface du liquide, soit sur la frontière ∂D du domaine liquide D , comme montré sur la figure 29.

Ces courants induits, définis sur E_2 , sont appelés courants feuille et notés \vec{K} .



$$\begin{aligned}\vec{X} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \in E_3 \\ \vec{x} &= x \vec{i} + y \vec{j} \in E_2\end{aligned}$$

Figure 29 : Système considéré

La conservation du courant nécessite que la divergence de \vec{K} soit nulle dans D :

2. Expression des grandeurs magnétiques dans \bar{D}

Il n'y a pas de courant dans la région \bar{D} , par conséquent le champ magnétique \vec{H}_T est irrotationnel et dérive d'un potentiel.

La perméabilité magnétique du métal est égale à celle de l'air, ce champ peut donc être décomposé en une somme de deux champs, le champ magnétique source \vec{H}_S et un champ magnétique de réaction \vec{H}_R , crée par les courants induits dans la nappe. Ces deux champs sont tous deux irrotationnels dans \bar{D} :

$$\vec{H}_T(\vec{X}) = \vec{H}_S(\vec{X}) + \vec{H}_R(\vec{X}) \quad (165)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_S(\vec{X}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_S(\vec{X}) = -\vec{\nabla} \Phi_S(\vec{X}) \quad (166)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_R(\vec{X}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_R(\vec{X}) = -\vec{\nabla} \Phi_R(\vec{X}) \quad (167)$$

où

Φ_S est le potentiel scalaire magnétique lié à \vec{H}_S .

Φ_R est le potentiel scalaire magnétique lié à \vec{H}_R .

D'un autre côté, la conservation du champ, nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_R(\vec{X}) = 0 \quad (168)$$

En remplaçant \vec{H}_R par son expression définie en (167) dans l'équation (168), nous obtenons la relation suivante :

$$\Delta \Phi_R(\vec{X}) = 0 \quad \text{dans } \bar{D} \quad (169)$$

Les courants induits dans la nappe et le champ magnétique de réaction sont à présent définis. Il faut maintenant exprimer les conditions de passage du champ magnétique à la traversée de la nappe.

3. Conditions aux limites

- A l'infini

Le potentiel Φ_R , dont dérive le champ magnétique de réaction \vec{H}_R , est défini à une constante près. Nous pouvons choisir cette constante nulle, nous aurons donc une condition supplémentaire à l'infini :

$$\Phi_R = 0 \quad (170)$$

- Continuité de la composante normale du champ magnétique

Comme la fréquence du champ magnétique est supposée infinie, la nappe de courant forme un écran magnétique parfait. Aucun champ magnétique ne peut donc pénétrer à l'intérieur de la nappe ; ceci signifie que la composante normale du champ magnétique est nulle à la surface de la nappe :

$$\vec{H}_T \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D \quad (171)$$

En substituant l'expression du champ total défini par l'équation (165) dans l'équation (171), nous obtenons la condition sur Φ_R :

$$\vec{H}_S \cdot \vec{n} = -\vec{H}_R \cdot \vec{n} \quad (172)$$

$$\vec{H}_S \cdot \vec{n} = -\vec{\nabla} \Phi_R \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial D \quad (173)$$

- Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique

A l'intérieur de la nappe, il n'y a pas de champ magnétique. La composante tangentielle du champ sur la surface extérieure de la nappe est donc égale à la densité superficielle de courant :

$$\vec{n} \times \vec{H}_T = \vec{K} \quad (174)$$

Soit en remplaçant \vec{H}_T par la somme $\vec{H}_R + \vec{H}_S$, nous obtenons :

$$\vec{n} \times \vec{H}_S + \vec{n} \times \vec{H}_R = \vec{K} \quad (175)$$

Substituant la relation (167), liant \vec{H}_R à Φ_R , dans l'équation (175), celle-ci devient :

$$\vec{n} \times \vec{H}_S - \vec{n} \times \vec{\nabla} \Phi_R = \vec{K} \quad \text{sur } \partial D \quad (176)$$

Cette relation peut être simplifiée lorsque l'on considère la face supérieure et inférieure de la nappe. En effet, le champ magnétique inducteur étant normal à ces faces de la nappe, le produit vectoriel $\vec{n} \times \vec{H}_S$ est nul :

$$-\vec{n} \times \vec{\nabla} \Phi_R = \vec{K} \quad (177)$$

Les conditions aux limites sont établies. Le problème est maintenant complètement formulé, il est présenté dans ce qui suit.

4. Modèle Φ_R

Le potentiel scalaire magnétique de réaction Φ_R doit donc vérifier :

$$\begin{cases} \Delta \Phi_R = 0 & \text{dans } \bar{D} \\ \vec{\nabla} \Phi_R \cdot \vec{n} = \vec{H}_S \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial D \\ \Phi_R = 0 & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (178)$$

Le système ci-dessus est un problème de Dirichlet extérieur qui est résolu par une méthode intégrale de frontière.

B. Méthode des intégrales de frontière

Cette méthode est adaptée à notre problème car les phénomènes se situent à la surface du liquide (fréquence infinie). De plus, elle présente l'avantage de ne mailler que les frontières et par conséquent, les éléments de discrétisation sont réduits d'une dimension.

Tout d'abord, $\Delta \Phi_R = 0$ doit être réécrit sous forme d'une équation intégrale reliant seulement les valeurs aux frontières ∂D [25] [26] [27] (cf. annexe 3).

$$\alpha_S \Phi_R(\vec{x}) + \int_{\partial D} \Phi_R(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) dS = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_R(\vec{y})}{\partial n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} dS \quad (179)$$

Ensuite, pour permettre une résolution numérique, les frontières de la nappe sont discrétisées comme le montre la figure 30 et l'équation intégrale est écrite en chaque nœud i .

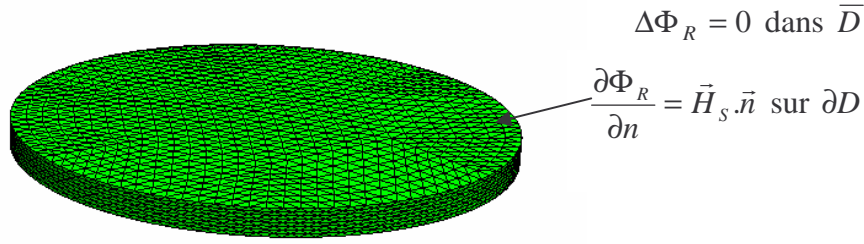


Figure 30 : maillage des frontières de la nappe

$$\alpha_{S_i} \Phi_R(\bar{x}_i) + \sum_{e=1}^m \{a\}_e^t \{\Phi_R\}_e = \sum_{e=1}^m \{b\}_e^t \{\bar{H}_S \cdot \bar{n}\}_e \quad (180)$$

où

$$\Phi_R(\zeta, \eta) = \zeta \Phi_{R1} + \eta \Phi_{R2} + (1 - \zeta - \eta) \Phi_{R3} \quad (181)$$

est la valeur de Φ_R sur l'élément e.

$$\bar{y}(\zeta, \eta) = \zeta \bar{y}_1 + \eta \bar{y}_2 + (1 - \zeta - \eta) \bar{y}_3 \quad (182)$$

est la position dans le repère local (ζ, η) associé à un élément de discrétisation Δ_e .

m est le nombre total d'éléments de discrétisation.

$$\{a\}_e = 2S_e \int_{\Delta_e} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \\ 1 - \zeta - \eta \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\bar{x}_i - \bar{y}|} \right) \right\} d\zeta d\eta \quad (183)$$

$$\{b\}_e = 2S_e \int_{\Delta_e} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \\ 1 - \zeta - \eta \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{|\bar{x}_i - \bar{y}|} \right\} d\zeta d\eta \quad (184)$$

sont des vecteurs colonnes contenant chacun 3 intégrales de surface.

S_e est la surface de l'élément e.

Il faut donc calculer les intégrales (183) et (184) afin d'écrire (180) sous la forme :

$$[G]\{\Phi_R\} = [B] \quad (185)$$

avec $G_{ii} = 4\pi - \sum_{i \neq j} G_{ij}$

$$[B] = \sum_{e=1}^m \{b\}_e^t \{\bar{H}_S \cdot \bar{n}\}_e$$

[G] est une matrice carrée à coefficients constants et $\{\Phi_R\}$ est un vecteur contenant les inconnues Φ_R .

Le système linéaire (185) est résolu par la méthode du gradient conjugué [29] pour déterminer Φ_R en chaque nœud du maillage.

Une fois le potentiel scalaire magnétique de réaction connu, les courants induits se déduisent de l'équation (176). L'homogénéité des courants induits dans l'épaisseur de la nappe peut ainsi être vérifiée, les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre IV.

III. Bilan énergétique

La résolution par éléments finis du modèle d'inconnue scalaire $\bar{\varphi}$ (nommé modèle $\bar{\varphi}$), défini par (149)-(150)-(151), permet de calculer l'énergie magnétique emmagasinée.

La coénergie et l'énergie magnétique étant égales dans notre cas, nous calculons l'énergie magnétique à partir du produit $\vec{A} \cdot \vec{J}$.

L'inducteur et la nappe sont couplés, l'énergie magnétique totale du système se compose donc des énergies propres et des énergies mutuelles.

L'énergie magnétique totale s'écrit donc en temporel:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \vec{A}_S(t) \cdot \vec{J}_S(t) d\tau + \frac{1}{2} \int_D \vec{A}_R(t) \cdot \vec{K}(t) dS + \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \vec{A}_R(t) \cdot \vec{J}_S(t) d\tau + \frac{1}{2} \int_D \vec{A}_S(t) \cdot \vec{K}(t) dS$$

$$W_m = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \quad (186)$$

Où $\vec{A}_R(t) = \sqrt{2} \text{Ré} [\vec{A}_R e^{j\alpha t}]$: potentiel vecteur magnétique crée par le courant induit

$\vec{A}_S(t) = \sqrt{2} \text{Ré} [\vec{A}_S e^{j\alpha t}]$: potentiel vecteur magnétique crée par le courant inducteur

$\vec{J}_S(t) = \sqrt{2} \text{Ré} [\vec{J}_S e^{j\alpha t}]$: densité de courant volumique source.

$\vec{K}(t) = \sqrt{2} \text{Ré} [\vec{K} e^{j\alpha t}]$: densité superficielle de courant induit dans la nappe

A. Energie propre de l'inducteur

L'inducteur étudié est composé de 3 couches de 10 spires le tout en série. Il est modélisé par N_r couches N_z spires en court circuit de telle sorte que le nombre d'ampère tours total soit le même. Le courant dans les spires fictives est calculé à partir de la densité de courant réelle de l'inducteur [30].

\vec{a}_s crée par une spire est calculé en appliquant la formule de Biot et Savart [31]; le potentiel vecteur magnétique \vec{A}_S crée par la totalité des spires est

$$\vec{A}_S = \sum_{N_r} \sum_{N_z} \vec{a}_s \quad (187)$$

$$\text{Pour une spire } \vec{a}_s(\vec{X}) = \frac{\mu_o I_s}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{d\vec{y}}{|\vec{X} - \vec{y}|} \quad (188)$$

Le potentiel vecteur magnétique, crée par une spire, n'a qu'une composante suivant θ en raison de la symétrie.

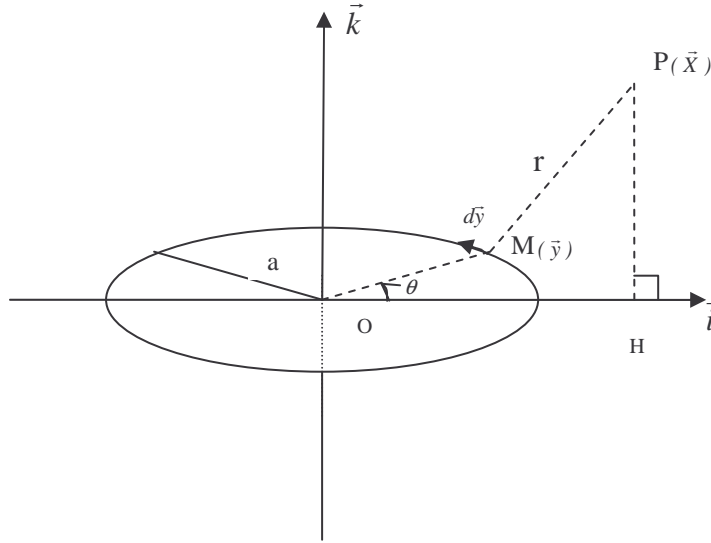


Figure 31 : spire parcourue par un courant I_s

$$\text{Soit } \vec{a}_s(\vec{X}) = \frac{\mu_o I_s}{\eta \pi} \sqrt{\frac{a}{\overline{OH}}} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) K(\eta) - E(\eta) \right] \vec{e}_\theta \quad (189)$$

Où $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$E(\eta)$ et $K(\eta)$ sont les intégrales elliptiques suivantes :

$$E(\eta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$K(\eta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\text{avec } \eta = \sqrt{\frac{4 a \overline{OH}}{(a + \overline{OH})^2 + z^2}}$$

Il existe une singularité lorsque le point de calcul P se situe sur la spire ($z=0, \overline{OH} = a$), en effet dans ce cas η tend vers 1 et donc l'intégrale elliptique K diverge. Afin de mieux visualiser le problème le potentiel vecteur magnétique est calculé le long de AB, comme indiqué sur la figure 32.

1. Exemple :

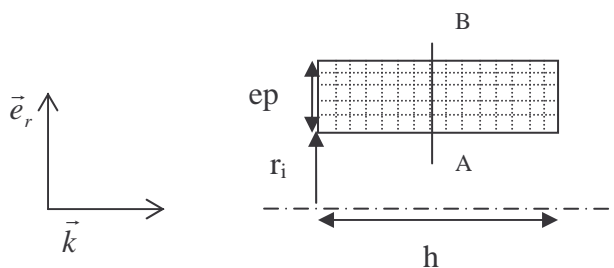


Figure 32 : coupe transverse d'un solénoïde

Chaque point de quadrillage de la figure 32 correspond à une spire.

Le solénoïde est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 125 \text{ mm} \\ r_i = 61,45 \text{ mm} \\ ep = 43 \text{ mm} \\ J_s = 1.10^6 \text{ A.m}^{-2} \\ N_z = 11 \\ N_r = 11 \end{array} \right.$$

Où N_r et N_z sont les points de discrétisation (11 couches \times 11 spires).

Le courant circulant dans les spires fictives s'écrit :

$$I_{fv} = J_s \frac{h ep}{N_r N_z} \tag{190}$$

La figure 33 représente le potentiel vecteur magnétique créé par le solénoïde le long du segment [AB] qui traverse des bobinages (cf. figure 32).

potentiel vecteur magnétique

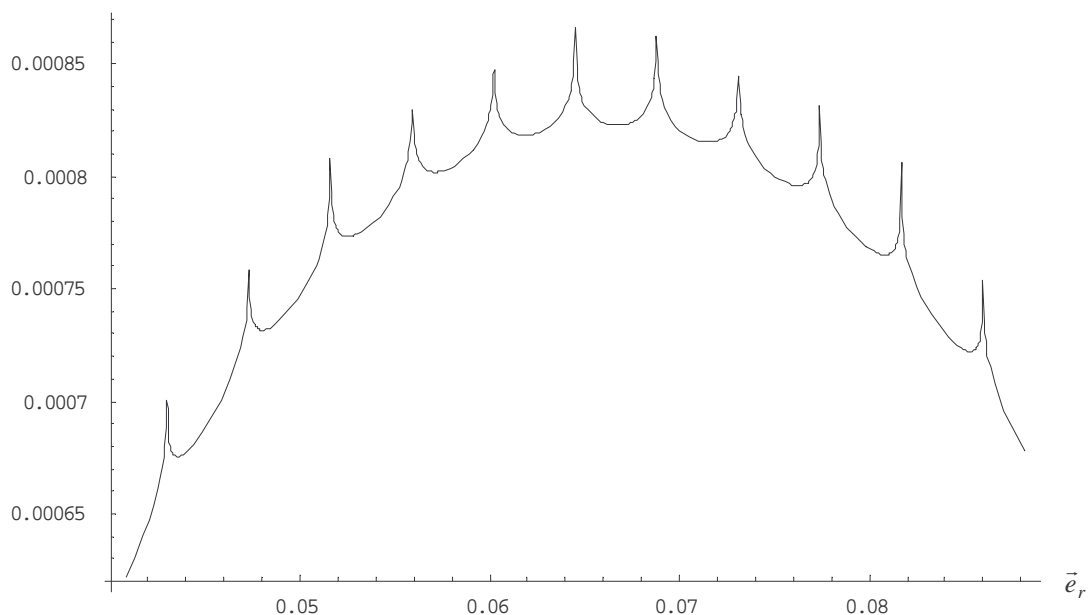


Figure 33 : potentiel vecteur magnétique source le long d'un axe traversant les conducteurs

Le potentiel vecteur magnétique présente des singularités sur chaque spire correspondant aux pics de la figure 33. Plutôt que d'augmenter le nombre de spires fictives, le potentiel vecteur magnétique est calculé entre deux spires [30]. Le résultat de ce calcul est présenté figure 34.

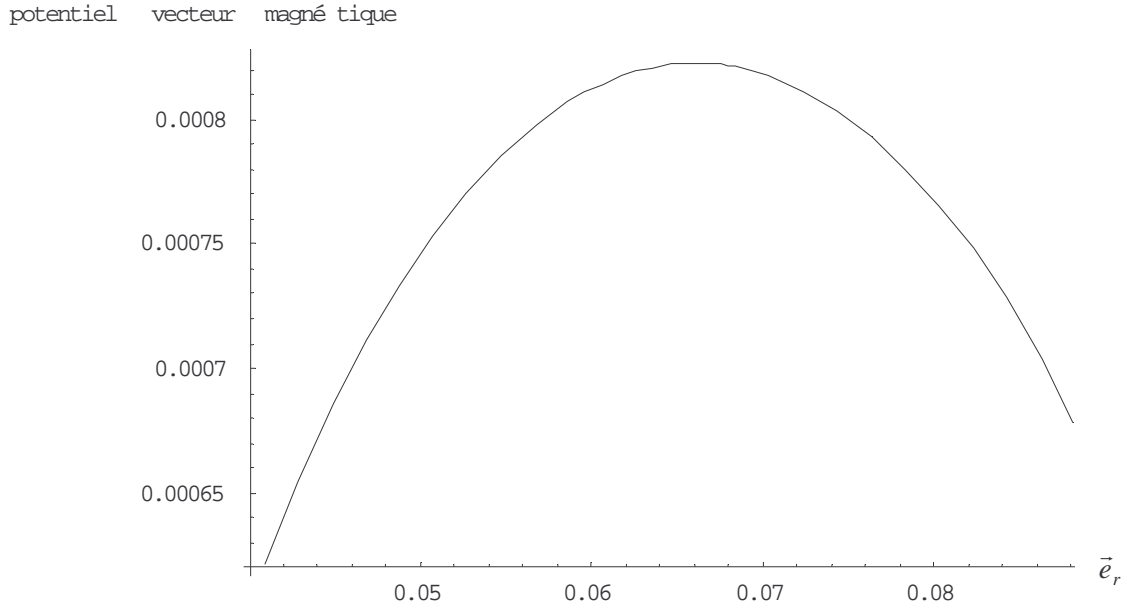


Figure 34 : potentiel vecteur magnétique source après lissage

Le calcul de l'énergie magnétique propre E_1 se fait de la manière suivante :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \text{Ré}[\vec{A}_s \cdot \vec{J}_s^*] d\tau + \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \text{Ré}[\vec{A}_s \cdot \vec{J}_s e^{2j\omega\tau}] d\tau \quad (191)$$

L'énergie W_1 contient un terme constant et un terme fluctuant de pulsation 2ω . D'après les hypothèses faites, seule la partie constante de l'énergie magnétique contribue à la déformation du fluide, c'est pourquoi nous ne retiendrons que la valeur moyenne de W_1 .

2. Calcul de l'inductance propre

Nous vérifions que $L = \frac{2W_1}{I_s^2}$ correspond à l'inductance mesurée par R. Moretti [1], nous obtenons $L \approx 81.9\mu\text{H}$. Ces résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Inductance mesurée (μH)	77,92
Inductance calculée (μH)	81,9
Erreur relative	5%

Tableau 2 : comparaison des inductances mesurée et calculée

Nous constatons une bonne corrélation entre les calculs et la mesure. L'écart entre la mesure et le calcul vient probablement du pas d'hélice des spires qui n'est pas pris en compte dû à l'idéalisation de l'inducteur.

B. Energie propre de la nappe

L'énergie s'écrit en fonction de $\bar{\varphi}$ et de $\bar{\psi}_R$, en négligeant le terme fluctuant de pulsation 2ω :

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_D \vec{A}_r(t) \cdot \vec{K}(t) dS = \frac{1}{2} \int_D \text{Re} \left[\vec{\nabla} \bar{\psi}_R \cdot \vec{\nabla} \bar{\varphi}^* \right] dS \quad (192)$$

C. Energies mutuelles

1. Energie mutuelle : W_3

L'énergie mutuelle entre l'inducteur et l'induit est

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \vec{A}_r(t) \cdot \vec{J}_s(t) d\tau \quad (193)$$

L'inducteur est discrétisé suivant r , z et θ (cf. figure 35).

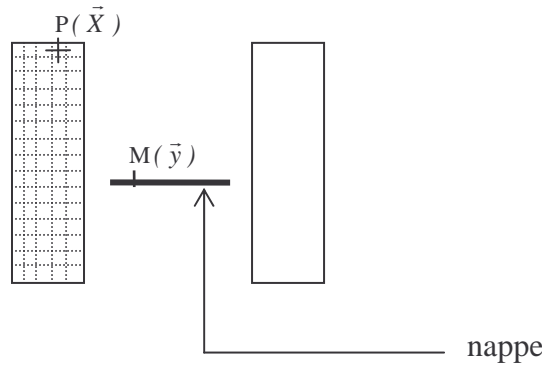


Figure 35 : Discrétisation de l'inducteur

Le potentiel vecteur magnétique induit \vec{A}_R , créée par la densité de courant surfacique \vec{K} situé sur la nappe, est calculé en chaque point P de l'inducteur par la formule de Biot et Savart :

$$\vec{A}_r(\vec{X}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\vec{K}(\vec{y})}{|\vec{X} - \vec{y}|} dS \quad (194)$$

où $\vec{K}(\vec{y}) = -\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{y})$

$\vec{X} \in \text{inducteur}$

$\vec{y} \in D$

Cette intégrale ne présente pas de singularité. L'énergie mutuelle E_3 se calcule par

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_{\text{inducteur}} \text{Re} \left[\vec{A}_R(\vec{X}) \cdot \vec{J}_S^*(\vec{X}) \right] d\tau \quad (195)$$

2. Energie mutuelle : W_4

L'énergie mutuelle est calculée, à présent, à partir du produit $\vec{A}_S \cdot \vec{K}$.

\vec{A}_S est calculé, comme dans le cas de l'énergie propre de l'inducteur en décomposant l'inducteur en N_r N_z spires en court-circuit, par la formule de Biot et Savart :

$$\vec{A}_S(\vec{x}) = \sum_{N_r} \sum_{N_z} \vec{a}_S(\vec{x}) = \sum_{N_r} \sum_{N_z} \frac{\mu_o I_s}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

avec $\vec{a}_S(\vec{x}) = \frac{\mu_o I_s}{\eta\pi} \sqrt{\frac{a}{OH}} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{2} \right) \mathbf{K}(\eta) - \mathbf{E}(\eta) \right] \vec{e}_\theta$ (cf. figure 31)

Il existe une singularité lorsque le point P est au centre de la spire, en effet dans ce cas $\overline{OH} = 0$. Cette singularité est évitée en décalant le point P d'une distance ε du point O.

$$W_4 = \frac{1}{2} \int_D \vec{A}_S(t) \cdot \vec{K}(t) dS = \frac{1}{2} \int_D \left(\text{Re} \left[\left(\vec{A}_S \times \vec{\nabla} \vec{\varphi}^* \right) \cdot \vec{k} \right] \right) dS \quad (196)$$

Les énergies mutuelles W_4 et W_3 sont égales.

D. Energies mécaniques

On suppose que :

- L'épaisseur de la nappe est la même en tout point du liquide.
- La température est homogène.
- Le fluide est incompressible.

Les énergies mécaniques intervenant dans le bilan sont :

$$\text{- l'énergie potentielle } Ep = \frac{1}{2} \rho g S e^2 \quad (197)$$

avec S : surface de la nappe d'étain
 g : accélération de la pesanteur
 e : épaisseur de la nappe
 ρ : masse volumique

- l'énergie due aux tensions superficielles [32]:

$$E_S = \gamma_{ve} S + \gamma_{ea} (S + S_1) + \gamma_{va} S_o \quad (198)$$

où

γ_{ve} est la tension interfaciale entre l'étain et le verre.

γ_{ea} est la tension interfaciale entre l'étain et l'air.

γ_{va} est la tension interfaciale entre le verre et l'air [32].

γ_{ve} , γ_{ea} et γ_{va} sont des constantes (cf. hypothèse de température constante)

S_o est la surface du verre.

S est la surface d'étain en contact avec le fond du bécher.

S_1 est la surface latérale d'étain.

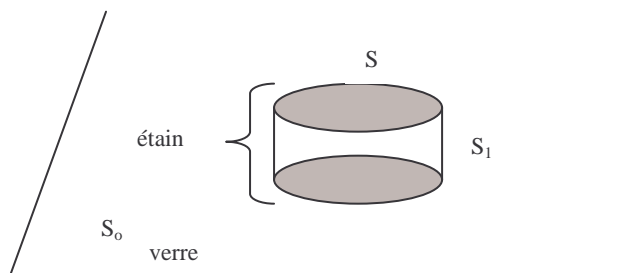


Figure 36 : nappe volumique d'étain posée sur son support.

Une fois les différentes énergies calculées, il ne reste plus qu'à les sommer de manière à obtenir l'énergie totale du système :

$$E_t = W_m + Ep + E_S \quad (199)$$

IV. Conclusions

La validation de l'hypothèse d'une pénétration homogène des courants dans l'épaisseur de la nappe a nécessité le développement d'un modèle de dimension trois, nommé modèle Φ_R . L'avantage de ce modèle simple est tenir compte de l'air, ce qui nous permet d'envisager une évolution de forme. Par conséquent, en plus de la validation de cette approximation, nous exploiterons ce modèle afin d'en tirer des tendances. Ceci suppose qu'une fréquence élevée peut être assimilée à une fréquence infinie lorsque l'épaisseur de peau est très petite devant les dimensions de la nappe.

Le tableau ci-dessous récapitule les différences entre ces deux modèles, ce qu'ils apportent, leurs avantages et leurs inconvénients.

	Modèle Φ_R	Modèle $\bar{\varphi}$
Système considéré	{ Air+nappe }	{ nappe }
formulation	simple	compliquée
inconnues	Potentiel scalaire magnétique de réaction Φ_R	Fonction de courant $\bar{\varphi}$
Prise en compte des caractéristiques physiques de la nappe (σ, μ)	non	oui
fréquence	infinie	Fréquence réelle
Courant induit	En surface de la nappe	Pénétration complète et homogène dans l'épaisseur de la nappe
problème	Magnétostatique	Harmonique
dimension	3	2
avantages	* Prise en compte de l'air ce qui permet d'envisager une évolution de forme * Visualisation des courants latéraux.	Permet de faire varier la fréquence d'alimentation et les caractéristiques physiques de la nappe
inconvénients	Les paramètres physiques de la nappe n'interviennent pas dans la formulation.	Le modèle contient une intégrale en $1/r$.

Tableau 3 : Formulations permettant le calcul des courants induits dans le métal liquide

Deux méthodes de résolution numérique, qui sont adaptées aux deux modèles établis, sont décrites.

La méthode de résolution choisie pour le modèle Φ_R est une méthode intégrale de frontière, celle choisie pour le modèle $\bar{\varphi}$ est une méthode d'éléments finis.

Dans le tableau ci-dessous, une comparaison, dans le cas le plus général, des deux méthodes est faite.

Méthode intégrale de frontière	Méthode des éléments finis
Seules les frontières sont maillées	Tout le domaine est maillé
Seules les conditions aux frontières sont approximés	L'équation différentielle est approximée
La méthode introduit des intégrales singulières	Les intégrales provenant de la méthode sont simples à évaluer
Implémentation assez compliquée	Implémentation plus simple

Tableau 4 : comparaison des méthodes de calcul

Dans notre cas, certains des points indiqués dans le tableau ci-dessus sont à corriger. Par exemple, il est vrai que la méthode intégrale de frontière introduit des intégrales singulières, cependant on retrouve des intégrales singulières dans la méthode des éléments finis qui sont quand elles introduites par le modèle.

Le modèle $\bar{\varphi}$ étant plus compliqué, il s'avère que l'implémentation de la méthode des éléments finis devient peu aisée.

Les différentes méthodes de résolution ayant été validées (cf. annexe 2), elles sont mises en œuvre afin de résoudre les deux modèles proposés. Les résultats obtenus, pour le modèle Φ_R puis pour le modèle $\bar{\varphi}$, sont présentés et commentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV : RESULTATS

Dans un premier temps, les courants induits dans la nappe sont calculés en utilisant le modèle Φ_R (à fréquence infinie) pour vérifier leur homogénéité suivant l'épaisseur de la nappe.

Une fois cette hypothèse validée, les énergies correspondant aux différentes formes de la nappe obtenues expérimentalement (cf. figure 10) sont calculées par le modèle $\bar{\varphi}$, puis comparées entre elles. Une étude paramétrique est également menée afin de connaître l'influence de certaines grandeurs telles que l'épaisseur de la nappe, sa conductivité électrique et la fréquence du champ magnétique, sur la valeur du courant inducteur à l'ouverture de la nappe (I_c).

Nous terminons ce chapitre en présentant, pour différentes valeurs de courant inducteur, les formes stables obtenues par simulation du modèle Φ_R .

I. Répartition des courants induits dans la nappe

L'étude des courants induits par le modèle Φ_R va nous permettre de valider l'hypothèse de pénétration homogène des courants dans l'épaisseur de la nappe.

A. Face supérieure et inférieure de la nappe

1. Maillage

Le maillage est un maillage de surface comme indiqué sur la figure 37. La résolution est faite sur un maillage assez fin, tout particulièrement sur le bord latéral de la nappe, de manière à avoir une bonne précision.

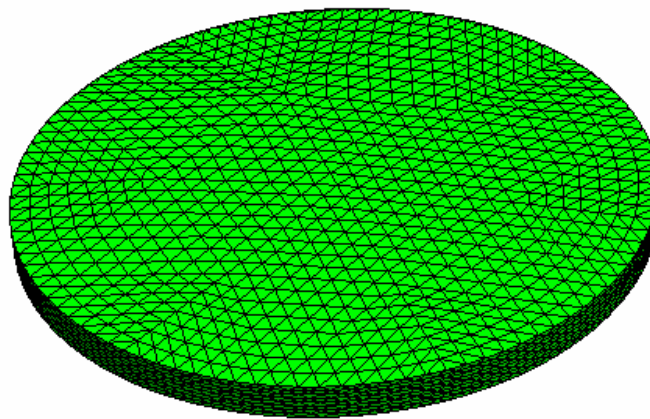
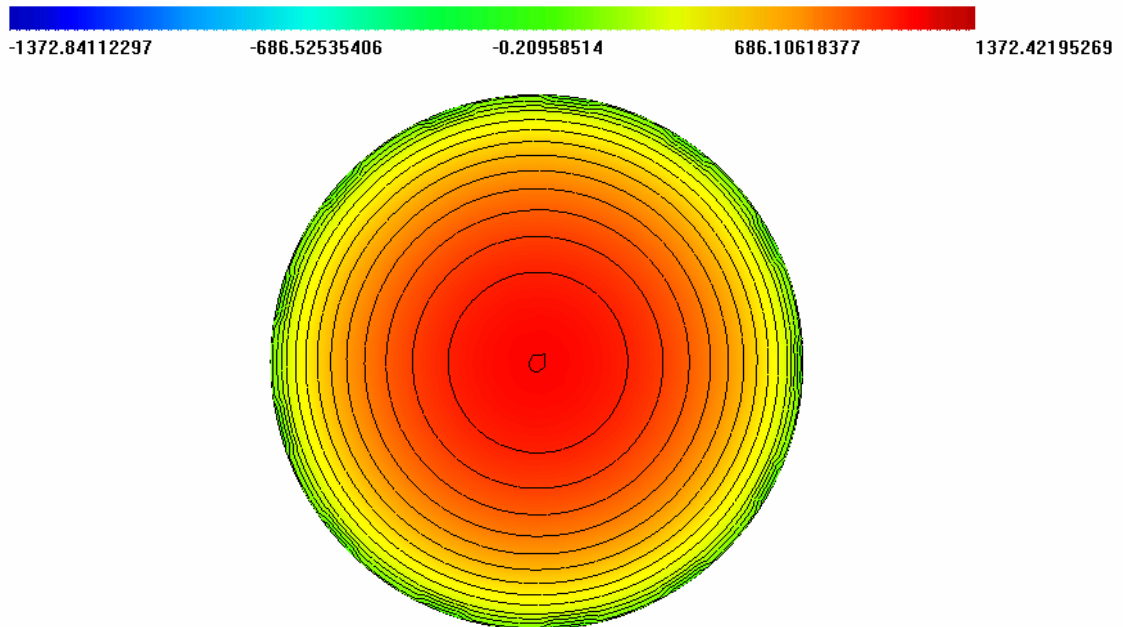


Figure 37 : maillage d'une nappe pleine [37]

2. Potentiel scalaire magnétique et courant induit

En raison de la symétrie, seul le bord supérieur est représenté (cf. figure 38).

Les courants induits sont déduits de Φ_R par $\vec{K} = -\vec{n} \times \vec{\nabla} \Phi_R$. Ils se concentrent à la périphérie des faces supérieure et inférieure.



Netaen 4.3

Figure 38 : isovaleurs de Φ_R sur une nappe pleine [37]

Pour une nappe de forme axisymétrique, les isovaleurs de Φ_R sont des cercles, il est possible de tracer $\Phi_R(r)$ du centre $r=0$ jusqu'à $r=0.08$ m ($r=0.04575$ m étant le rayon de la nappe).

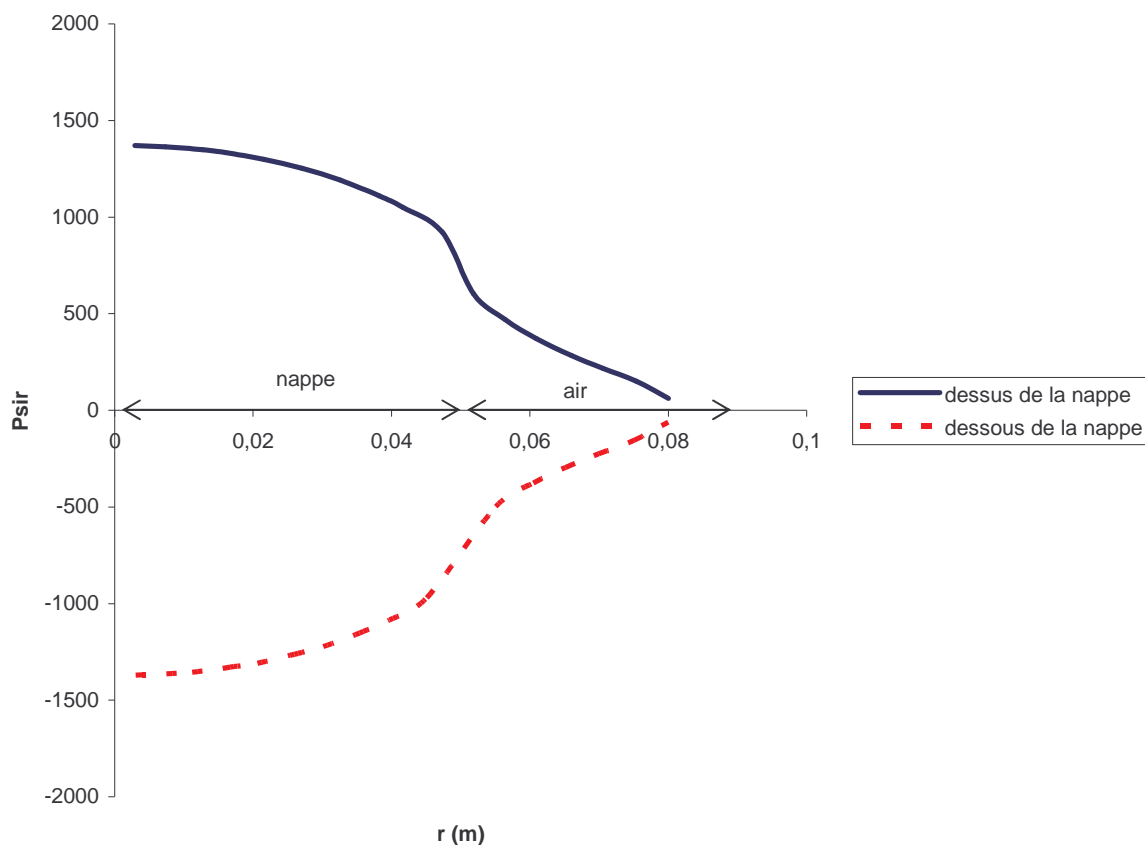


Figure 39 : évolution de Φ_R depuis le centre jusqu'à l'extérieur de la nappe pleine

Le modèle étudié impose que le potentiel scalaire magnétique Φ_R s'annule à l'infini, nous voyons que les résultats sont sur ce point en accord avec la théorie. Sachant que les courants induits sont plus intenses en périphérie de la nappe et nuls au centre et au vu de l'équation (176) liant le courant induit \vec{K} à Φ_R , le potentiel Φ_R doit être élevé (en valeur absolue) au centre de la nappe.

La figure 40 représente en valeur normalisée le module du courant induit \vec{K} sur la face inférieure de la nappe : les courants induits se concentrent en périphérie. Il n'y pas de courant induits au centre.

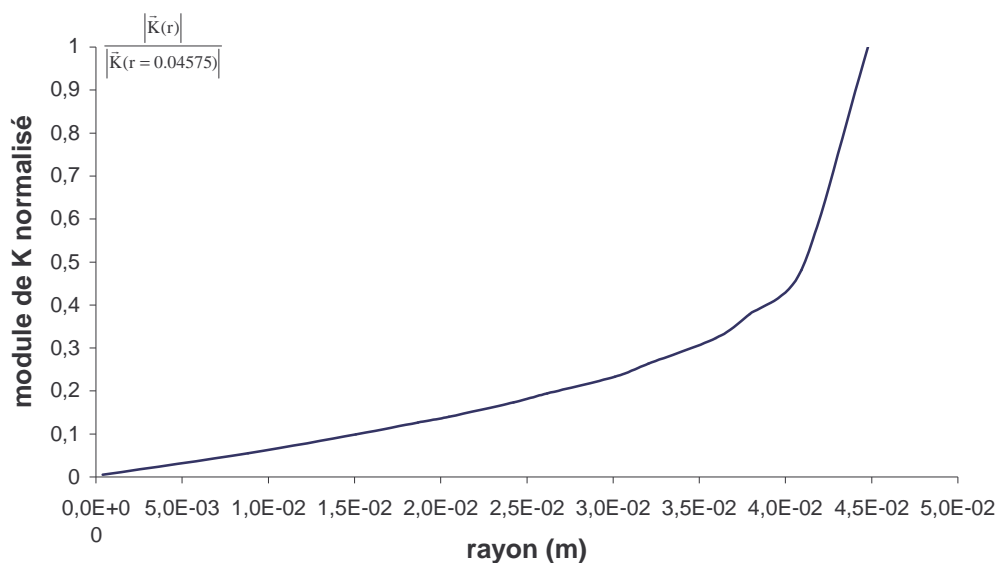


Figure 40 : évolution du module normalisé de \vec{K} sur la face inférieure de la nappe ($z=e$)

B. Face latérale de la nappe

Afin d'estimer l'homogénéité des courants dans l'épaisseur de la nappe, une représentation du module normalisé de \vec{K} est faite.

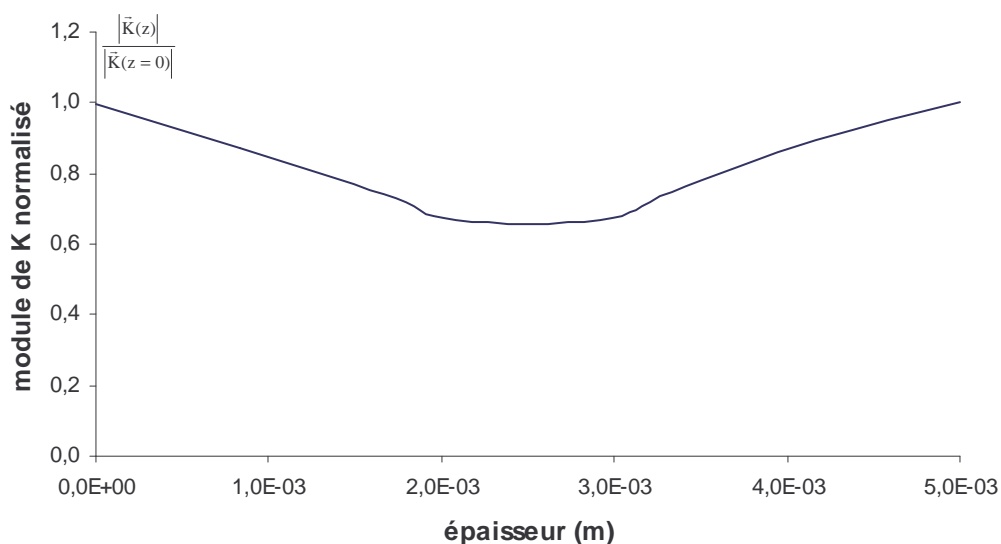


Figure 41 : évolution du module normalisé de \vec{K} dans l'épaisseur de la nappe ($r=0.04575$)

Le courant induit varie de 30% entre le bord supérieur et le centre de la nappe. Cette variation est faible par rapport à la variation du courant sur la face inférieure (respectivement supérieure) de la couche de métal liquide. Nous allons donc considérer que le courant est homogène dans l'épaisseur de la nappe.

II. Etude énergétique

Le modèle $\bar{\varphi}$ est décrit par les équations (149) et (150) que nous rappelons ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{e\sigma} \vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{x}) + j\omega \frac{\mu_o}{4\pi} \int_D \frac{\vec{\nabla} \bar{\varphi}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} dS \right) - j\omega \bar{B}_s(\vec{x}) = 0 \quad \text{dans } D \\ \bar{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (149) \\ (150) \end{array}$$

Ce modèle étant plus précis sur certains points que le modèle précédent, l'exploitation de ces résultats nous permettra d'expliquer les phénomènes constatés lors des expériences, c'est-à-dire :

- l'ouverture de la nappe
- l'évolution des formes
- l'existence de plusieurs formes stables pour un courant inducteur donné.
- l'influence de l'épaisseur de la nappe sur la valeur du courant inducteur critique.

$\bar{\varphi}$ est calculé pour la nappe pleine de forme axisymétrique (le métal liquide occupe tout le fond du béccher), d'épaisseur homogène qui sert de nappe de référence ainsi que pour une nappe ouverte (nommée 2lobes). Les deux nappes sont évidemment de même volume pour que les trois premiers phénomènes énoncés ci-dessus.

Les courants induits, les différentes énergies magnétiques, et l'énergie totale sont calculées pour les deux formes de nappe.

Dans une première partie, nous allons nous attacher à comparer les énergies totales des formes obtenues expérimentalement.

Dans une seconde partie, une analyse des différentes formes stables, correspondant à un courant source donné, sera faite.

Dans une troisième partie, nous ferons varier divers paramètres afin d'en déterminer l'influence.

A. Forme de la nappe

1. Représentations des courants induits d'une nappe pleine et d'une nappe ouverte

Dans cette partie, nous calculons les courants induits dans une nappe pleine et une nappe avec simple ouverture (2lobes). Les formes pleine et ouverte correspondent à des formes observées expérimentalement (cf. figure 10, page 19). Le dessin de la nappe pleine correspond à la photo n°1 et celui de la nappe de forme 2lobes correspond à la photo n°3.

La résolution des équations (149) et (150) sur ces deux formes de nappe permet de tracer la partie réelle des lignes de courant $\bar{\varphi}$ et en dégradé le module de la partie réelle de la densité superficielle de courant [38].

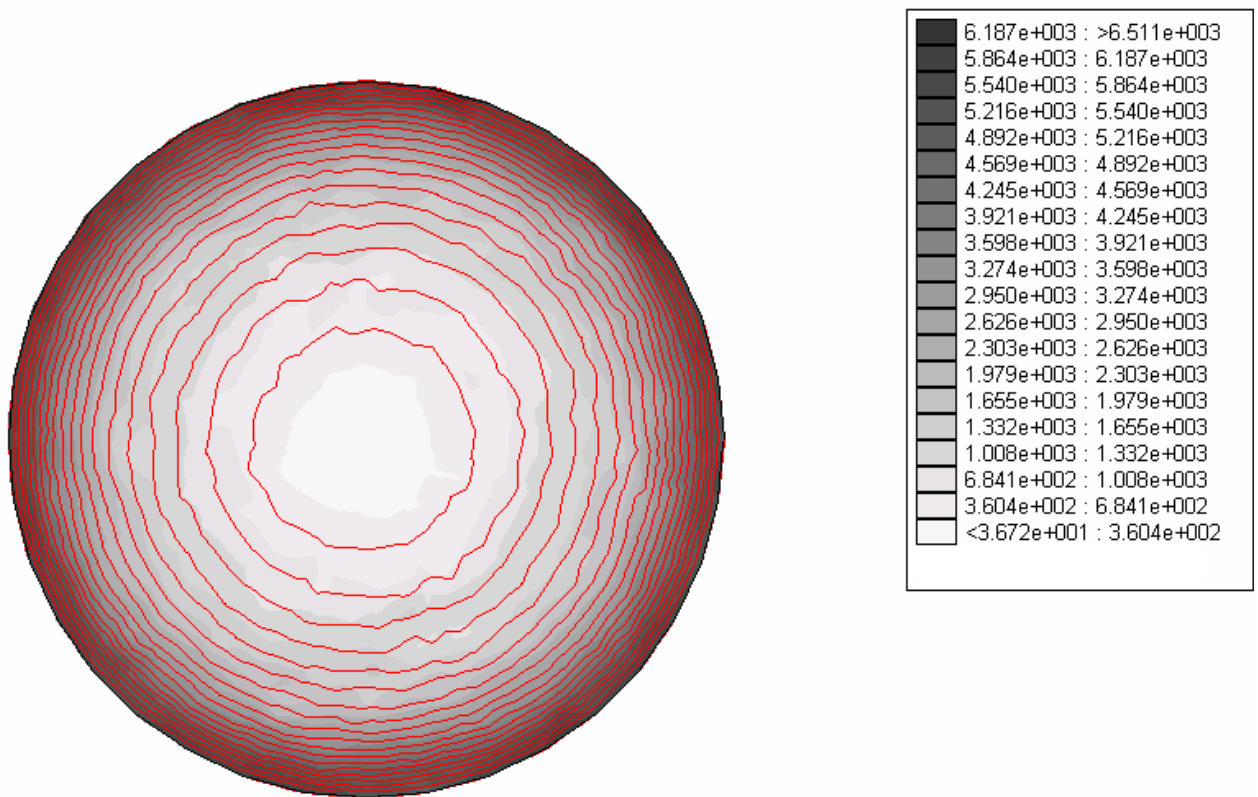


Figure 42 : Lignes de courant $\text{Ré}[\bar{\varphi}]$ et courants induits $|\text{Ré}[\bar{\mathbf{K}}]|$ en dégradé de gris pour une nappe pleine. Courant inducteur de 10A, $\bar{B}_s \approx 1,6 \text{ mT}$.

Les isovaleurs de $\text{Im}[\bar{\varphi}]$ ont la même forme que $\text{Ré}[\bar{\varphi}]$.

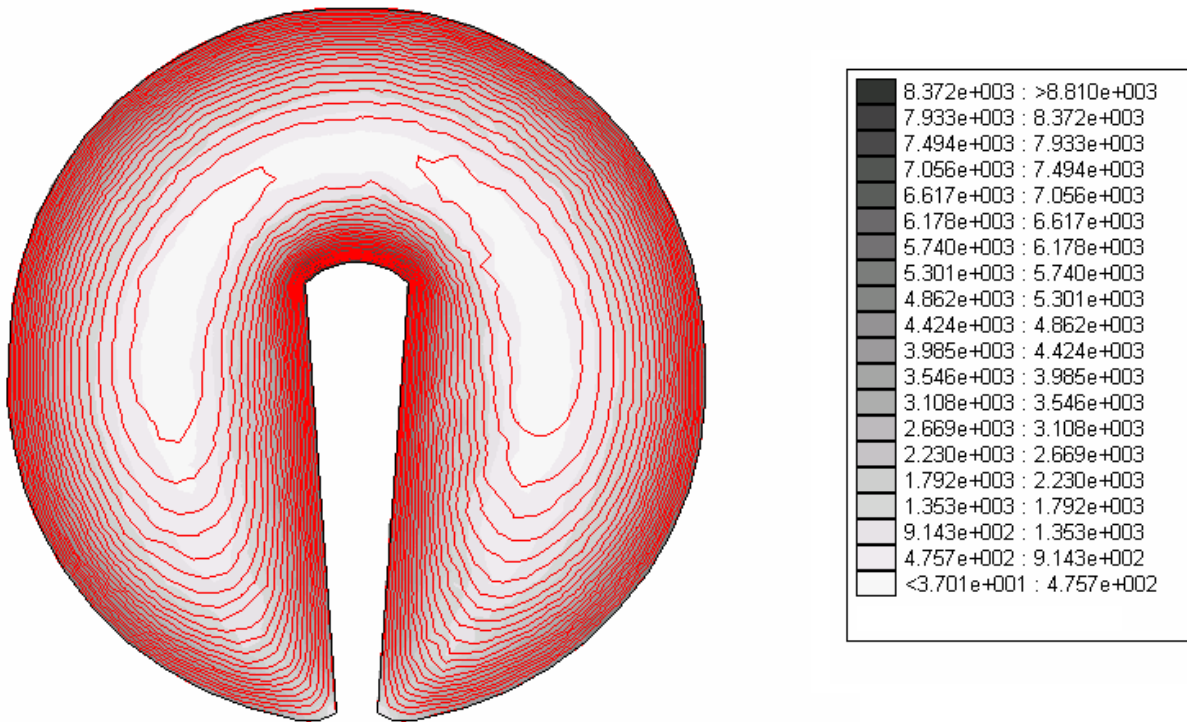


Figure 43 : Lignes de courant $\text{Re}[\vec{\varphi}]$ et courants induits $|\text{Re}[\vec{K}]|$ en dégradé de gris pour une nappe ouverte (2lobes). Courant inducteur de 10A, $\bar{B}_s \approx 1,6 \text{ mT}$.

Lorsque la nappe est pleine (figure 42), les isovaleurs sont des cercles concentriques, les courants induits sont plus intenses en périphérie qu'au centre (cf. modèle Φ_R).

Lorsque la nappe s'ouvre (figure 43) le courant est plus intense sur la pointe de l'ouverture ainsi que sur la périphérie de la nappe.

Expérimentalement, nous constatons que pour une épaisseur de nappe de 5mm, la nappe pleine existe pour un courant inducteur compris entre 0 et $20A_{\text{eff}}$. La nappe "2lobes" existe pour un courant inducteur de $50A_{\text{eff}}$.

L'ouverture de la nappe peut s'expliquer en faisant un bilan d'énergie pour chacune des formes.

2. Explication de l'ouverture

Sur le graphique (figure 44) est présenté le tracé de l'énergie totale de la nappe pleine et de la nappe ouverte pour différentes valeurs de courant inducteur.

La nappe pleine et la nappe ouverte sont bien évidemment de même volume.

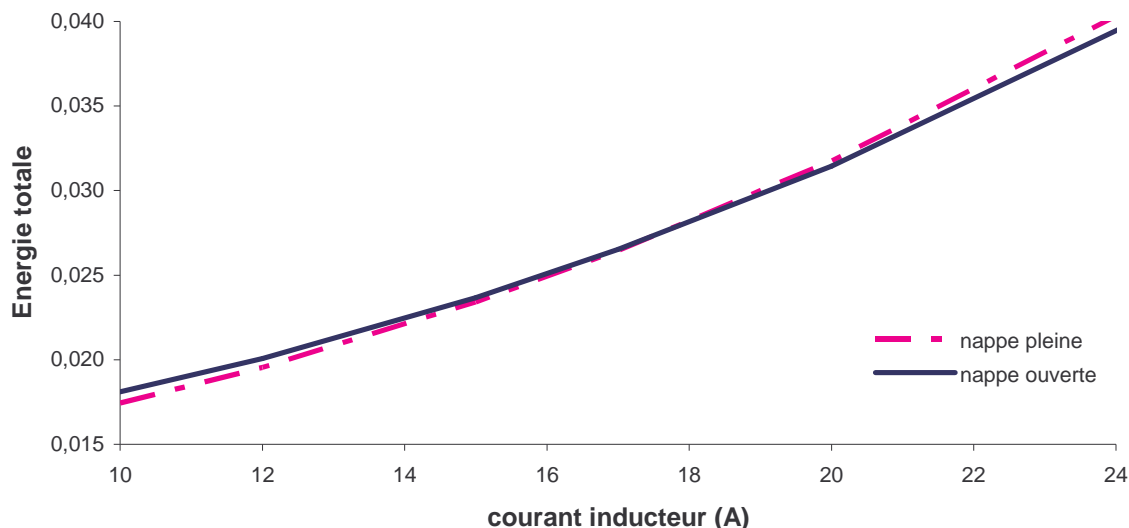


Figure 44 : Comparaison énergie totale nappe pleine et nappe ouverte.

Lorsque que le courant inducteur est inférieur à environ 17,5A, l'énergie totale de la nappe pleine est plus faible que l'énergie totale de la nappe ouverte. Au-delà de ce courant inducteur, la nappe pleine présente une énergie totale supérieure à celle de la nappe ouverte, par conséquent la nappe pleine ne peut exister (cf. tableau 5).

Courant inducteur (A)	$0A \leq I_s < 17,5A$	$I_s \geq 17,5$
Energie totale (J)	Et (pleine) < Et (ouverte)	Et (pleine) \geq Et (ouverte)
Forme présentant l'énergie la plus faible	Nappe pleine	Nappe ouverte

Tableau 5 : Configuration énergétique la plus favorable

Cette même démarche peut être utilisée afin d'expliquer l'évolution des formes.

3. Evolution de l'ouverture

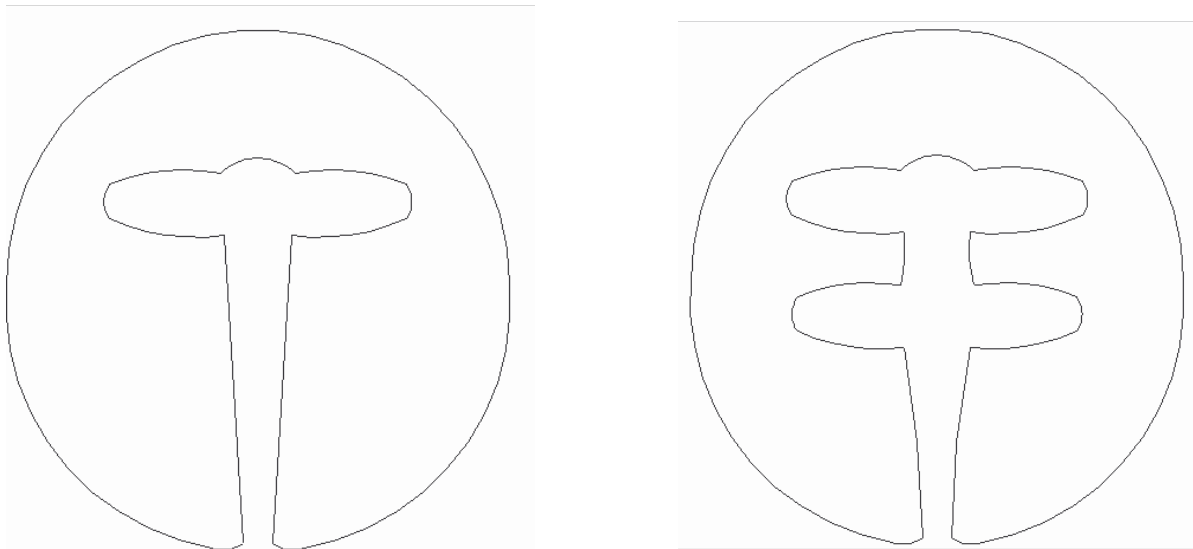
Nous avons choisi des formes qui étaient inspirées de l'expérimentation (cf. figure 10, page 16) :

- Le dessin de la nappe pleine correspond à la photo n°1.
- Le dessin de la nappe de forme 2lobes correspond à la photo n°3.
- Le dessin de la nappe de forme marteau correspond à la photo n°4.
- Le dessin de la nappe de forme trèfle correspond à la photo n°6.

L'évolution de l'ouverture concerne ces deux dernières formes (la figure 45). Ces deux formes ont été idéalisées, comme le montre la figure 46, en vue du calcul de l'énergie.



Figure 45 : présentation des formes de l'expérience



ouverture : marteau

ouverture : trèfle

Figure 46 : Schématisation de ces formes pour la simulation

La forme d'ouverture que nous nommerons "marteau" est obtenue pour un courant inducteur d'environ 80A, la forme dite en "trèfle" apparaît pour un courant d'environ 130A.

La résolution de l'équation (149), pour ces deux formes, nous permet de tracer les lignes de courant $\text{Ré}[\varphi]$, présentées sur les figures 47 et 48.

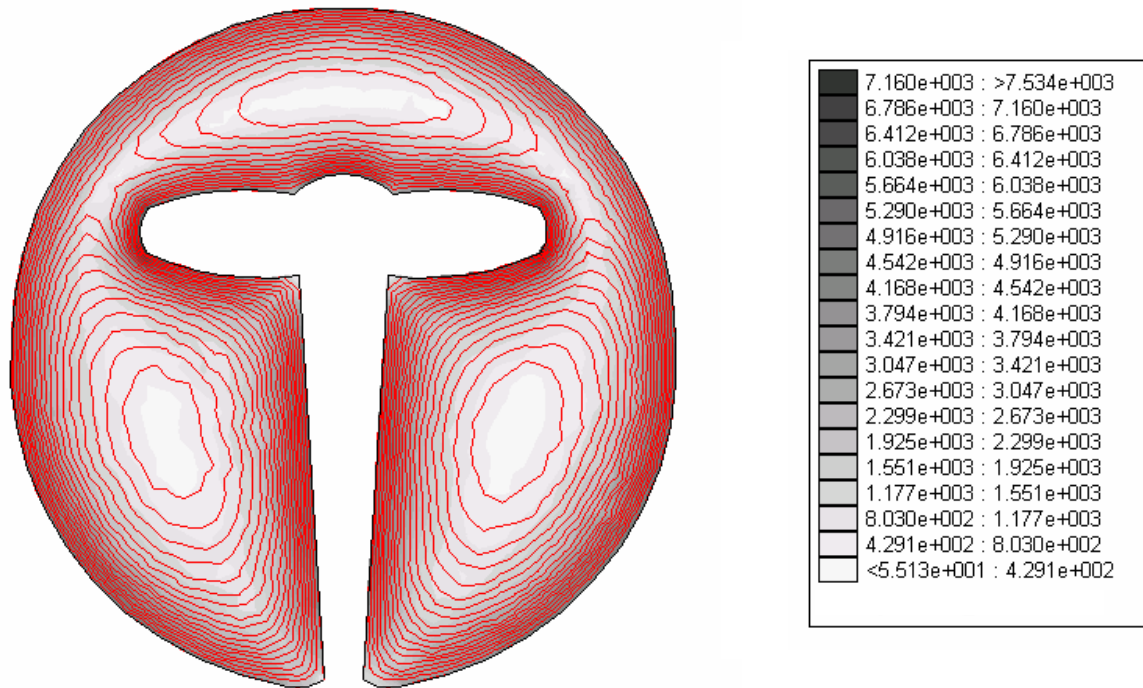


Figure 47 : Lignes de courant $\text{Ré}[\vec{\varphi}]$ et courants induits $|\text{Ré}[\vec{K}]|$ en dégradé de gris pour une nappe ouverte (marteau). Courant inducteur de 10A.

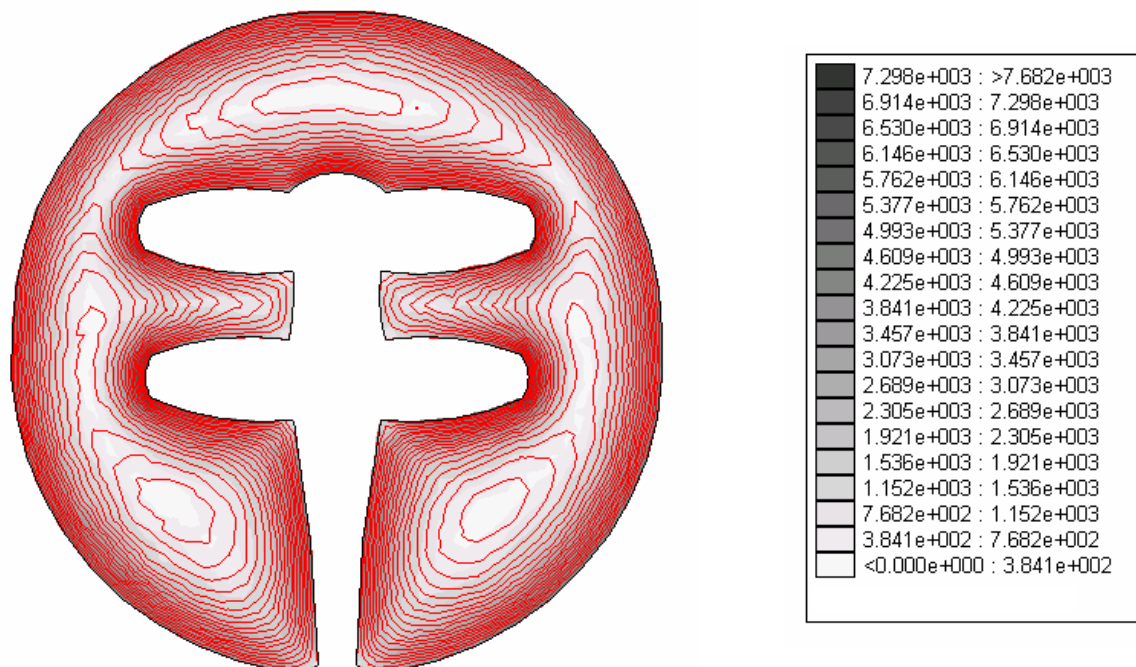


Figure 48 : Lignes de courant $\text{Ré}[\vec{\varphi}]$ et courants induits $|\text{Ré}[\vec{K}]|$ en dégradé de gris pour une nappe ouverte (trèfle). Courant inducteur de 10A.

L'énergie totale est calculée pour ces deux nouvelles formes d'ouverture (marteau et trèfle).

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 6. Pour chaque ligne, la plus faible énergie totale pour un courant inducteur donné est représentée en fond gris. Pour un courant source de 10A, la forme qui présente l'énergie totale la plus faible est la nappe pleine. Lorsque nous augmentons le courant jusqu'à atteindre 70A, la forme trèfle est celle qui présente l'énergie la plus faible.

	Forme de la nappe			
	<i>trèfle</i>	<i>marteau</i>	<i>2lobes</i>	<i>pleine</i>
courant inducteur = 10A	1,97E-02 J	1,89E-02 J	1,81E-02 J	1,75E-02 J
courant inducteur = 20A	3,25E-02 J	3,19E-02 J	3,14E-02 J	3,17E-02 J
courant inducteur = 30A	5,38E-02 J	5,34E-02 J	5,36E-02 J	5,56E-02 J
courant inducteur = 70A	2,24E-01 J	2,27E-01 J	2,32E-01 J	2,46E-01 J

Tableau 6 : Comparaison des énergies totales en fonction des formes à courant donné.

En augmentant le courant inducteur, la succession des formes prises par la nappe (nappe pleine → trèfle) est conforme à ce qui a été observée expérimentalement. Néanmoins les ordres de grandeurs des courants limites varient :

	<i>expérience</i>	<i>calcul</i>
Pleine → 2lobes	50 A	17,5 A
2lobes → marteau	80 A	30 A
marteau → trèfle	130 A	70 A

Tableau 7 : Valeur du courant inducteur au changement de forme.

Les courants correspondant à chaque forme ne sont pas égaux aux courants constatés lors de l'expérience, cependant les ordres de grandeurs sont respectés. Les formes sur lesquelles est fait le calcul ne sont pas rigoureusement identiques ce qui peut expliquer la différence.

De même certains phénomènes ne sont pas pris en compte dans le modèle notamment les frottements entre le fluide et son contenant ainsi que les impuretés dues à la surchauffe du métal. Nous avons également négligé la déformation suivant z ce qui nous impose d'avoir un angle de mouillage de 90°, ce qui ne correspond pas aux déformations expérimentales. Les hypothèses simplificatrices qui ont été faites peuvent donc expliquer cet écart.

B. Variation des paramètres du système

L'influence de l'épaisseur sur la valeur du courant critique a été mise en évidence dans l'expérience. Est-ce que le modèle établi donne les mêmes tendances ?

D'autres paramètres, tels que la fréquence d'alimentation, la conductivité électrique, et la nature du métal sont déterminantes dans le développement des courants induits.

Nous allons étudier leur influence sur la valeur du courant critique ainsi que sur les formes de la nappe.

1. Influence de l'épaisseur

L'épaisseur de la nappe est définie en l'absence de champ magnétique, la nappe est au repos dans le bécher.

L'expérience a mis en évidence l'influence de l'épaisseur de la nappe sur la valeur du courant inducteur critique (valeur du courant à l'ouverture de la nappe). En effet, plus la nappe est épaisse, plus élevé est le courant inducteur à partir duquel une ouverture se forme (cf. chapitre I, partie III-C).

Pour connaître l'influence de l'épaisseur de la nappe sur la valeur du courant critique, celui-ci est calculé pour différentes épaisseurs de nappes.

L'énergie totale d'une nappe pleine et d'une nappe ouverte est donc calculée pour différentes valeurs d'épaisseur, et le courant critique I_c est déterminé.

Nous faisons varier l'épaisseur entre e_1 inclus et e_2 exclus.

e_2 est l'épaisseur pour laquelle la nappe n'est plus stable (cf. Chapitre I), c'est-à-dire 6,4 mm. Cette épaisseur a été définie expérimentalement.

e_1 est l'épaisseur minimale de la nappe, celle-ci reste à déterminer.

En l'absence de champ magnétique, le métal liquide va s'étaler jusqu'à toucher les bords du bécher ou jusqu'à atteindre l'équilibre (sans toucher les bords du bécher). L'épaisseur d'équilibre e_1 ainsi atteinte résulte de l'interaction entre la tension de surface, qui tend à rétracter le liquide et la gravité qui tend à l'étaler [33] :

$$\gamma_{ea} (1 - \cos \theta_c) = \frac{1}{2} \rho g e_1^2 \quad (200)$$

Où

ρ est la masse volumique du métal liquide

θ_c est l'angle de contact représenté sur la figure 49

γ_{ea} est le coefficient de tension superficielle du métal liquide

g est l'accélération de la pesanteur.

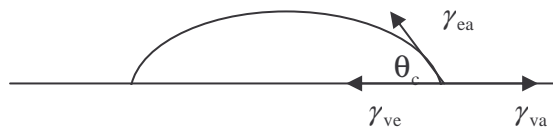


Figure 49 : Nappe de métal posée sur son support

Pour que l'épaisseur de la nappe soit la même en tout point du liquide, l'angle de contact θ_c doit être de 90° , l'épaisseur minimum e_1 est alors de 4 mm.

Nous faisons donc varier l'épaisseur entre 4 et 6 mm.

La figure 50 représente I_c en fonction de l'épaisseur de la nappe.

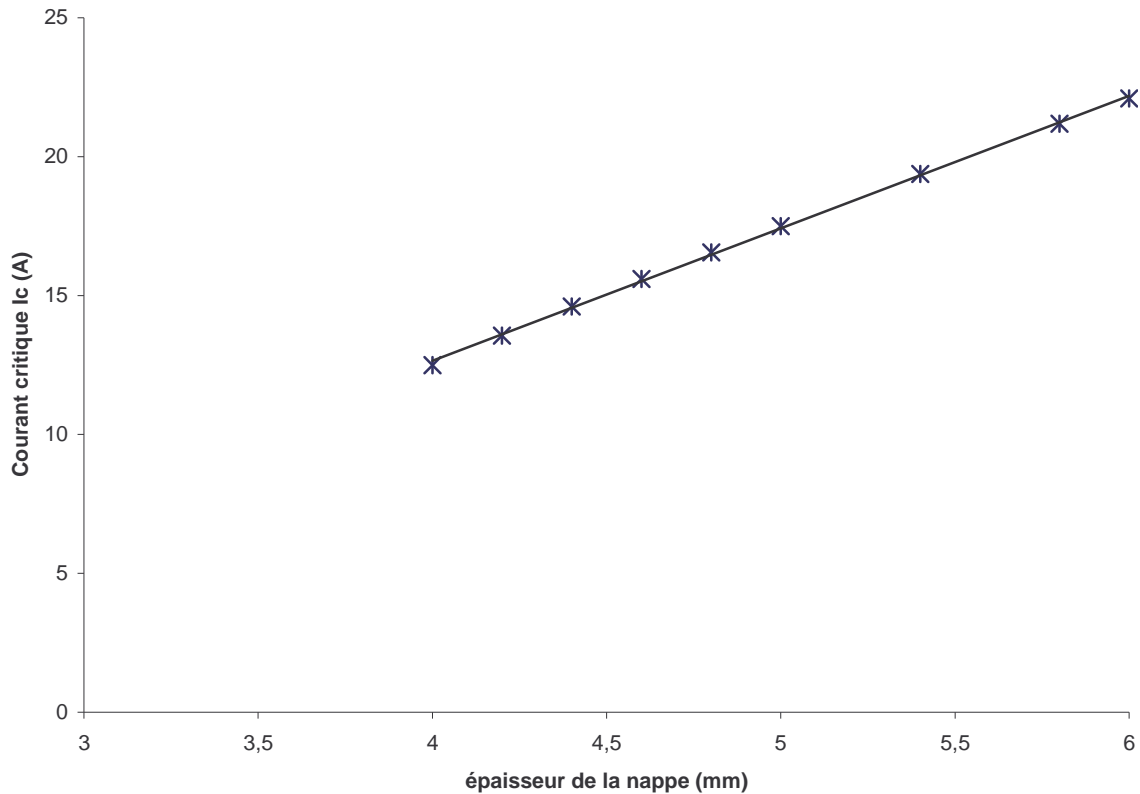


Figure 50 : courant critique en fonction de l'épaisseur de la nappe

Le courant critique évolue de manière linéaire avec l'épaisseur. Lorsque l'épaisseur de la nappe augmente le courant critique augmente.

Les résultats de nos simulations sont donc qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux.

2. Influence de la conductivité électrique de la nappe

A volume donné de métal, l'énergie totale du système est calculée pour différentes formes de nappe et pour différentes valeurs de conductivité électrique.

Les données du calcul sont :

- Masse volumique $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$
- Fréquence d'alimentation $f = 3,7 \text{ kHz}$
- Rayon de la nappe au repos $R = 45,75 \text{ mm}$
- Epaisseur au repos $e = 5 \text{ mm}$

Lorsque la conductivité électrique varie de plus ou moins 20% par rapport à la conductivité électrique de la soudure, la valeur du courant critique n'est pas affectée.

De même, cette variation ne modifie pas la succession des différentes formes d'ouverture.

3. Influence de la fréquence d'alimentation

Les données du calcul sont :

- Masse volumique $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$
- Conductivité électrique $\sigma = 5,7.10^6 (\Omega.m)^{-1}$
- Rayon de la nappe au repos $R = 45,75 \text{ mm}$
- Epaisseur au repos $e = 5\text{mm}$

La valeur du courant critique est définie comme étant le courant pour lequel l'énergie totale de la nappe pleine est égale à l'énergie totale de la nappe ouverte, nommée 2lobes.

En augmentant la fréquence, l'épaisseur de peau dans laquelle se concentrent les courants induits devient plus petite. Le maillage à cet endroit doit donc être particulièrement fin.

La courbe ci-dessous représente la valeur du courant critique en fonction de la fréquence.

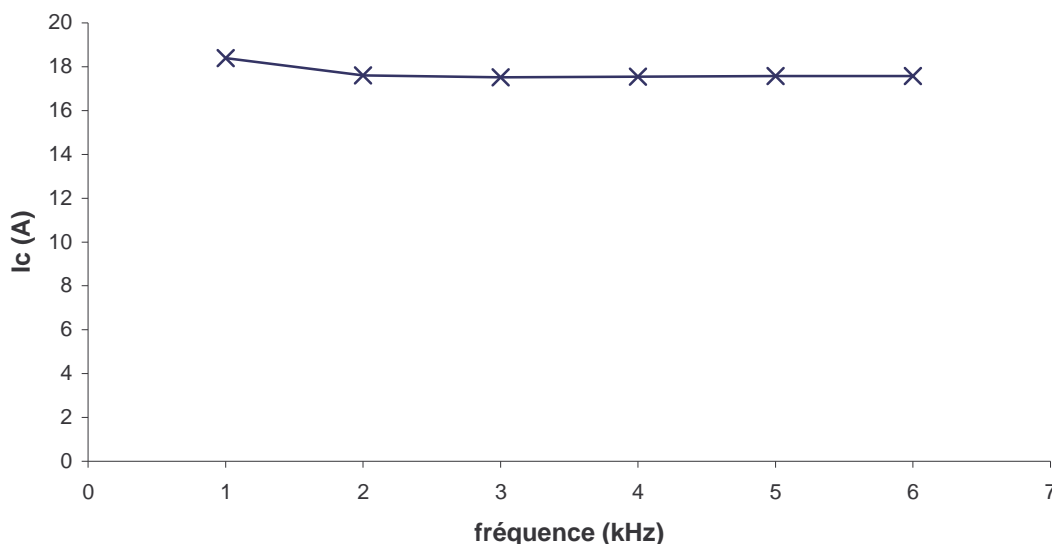


Figure 51 : Valeur du courant critique en fonction de la fréquence

Nous faisons varier la fréquence entre 1kHz et 6Khz car en dehors de cet intervalle le modèle $\bar{\varphi}$ n'est plus valide.

En effet, si la fréquence est inférieure à 1kHz, la composante rotationnelle de la force de Laplace n'est plus négligeable [10].

Si la fréquence est supérieure à 6kHz, l'hypothèse de pénétration complète des courants induits dans une nappe d'épaisseur 5mm (au repos) n'est plus valable.

Nous constatons que dans cet intervalle la valeur du courant à l'ouverture de la nappe varie peu avec la fréquence.

A volume donné, l'énergie totale du système est calculée pour différentes formes de nappe à différentes fréquences et courant inducteur. En faisant varier la fréquence de 1kHz à 6kHz, nous constatons que la succession des différentes formes reste inchangée.

Par conséquent, la succession des différentes formes et le courant critique sont indépendants de la fréquence sur la plage de fréquence étudiée.

4. Influence de la nature du métal

Les simulations vont être cette fois faites sur du Galinstan, qui est composé de Gallium, Indium et d'étain (GaInSn). Une particularité de ce métal est qu'il est liquide à la température ambiante, ses caractéristiques physiques sont les suivantes [34] :

- Masse volumique $\rho = 6440 \text{ kg.m}^{-3}$
- Conductivité électrique $\sigma = 3,4.10^6 (\Omega.m)^{-1}$
- Point de fusion : -19°C

La fréquence d'alimentation est de 3,7 kHz et les dimensions géométriques de la nappe au repos sont :

- Rayon de la nappe au repos $R = 45,75 \text{ mm}$
- Epaisseur au repos $e = 5 \text{ mm}$

Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec la soudure.

Nature du métal	Courant à l'ouverture (A)
soudure	17,5
Galinstan	14,4

Tableau 8 : Valeur du courant source à l'ouverture en fonction de la nature du métal

Ces deux métaux présentent deux grandeurs physiques très différentes :

- La densité
- La conductivité électrique

Le Galinstan est moins dense que la soudure ce qui se traduit par une énergie mécanique plus faible.

La conductivité électrique du Galinstan est plus faible que la conductivité électrique de la soudure ce qui implique, qu'à courant source donné, l'énergie magnétique du Galinstan est inférieure à l'énergie magnétique de la soudure.

Par conséquent, à courant source donné, l'énergie totale de la nappe de Galinstan est plus faible que celle de la nappe de soudure, ce qui se traduit par un courant critique plus faible pour le Galinstan.

Les formes se succèdent de la même manière pour le Galinstan et la soudure.

En faisant varier la conductivité électrique et la nature du métal, nous constatons que ces paramètres n'influent pas sur l'ouverture de la nappe ou sur l'évolution de cette ouverture.

L'expérience a montré que la valeur du courant source à l'ouverture de la nappe dépend de l'épaisseur de celle-ci, les simulations faites avec une épaisseur de nappe variable sont en accord avec l'expérience.

La valeur du courant source à l'ouverture de la nappe dépend également de la nature du métal.

III. Etude de l'évolution de la forme

Le calcul énergétique peut être également mené en utilisant le modèle Φ_R (à fréquence infinie). L'étude de ce cas va nous permettre de tirer des tendances, en supposant qu'une fréquence élevée peut être assimilée à une fréquence infinie lorsque l'épaisseur de peau est très inférieure aux dimensions de la nappe.

Dans un premier temps, l'énergie totale d'une nappe pleine et ouverte est calculée afin de s'assurer que les résultats obtenus par le modèle $\bar{\varphi}$ restent vrais.

Ensuite, une forme stable est recherchée pour différentes valeurs de courant source.

Enfin, les formes obtenues par simulation sont comparées qualitativement aux formes expérimentales.

A. Comparaison des énergies totales

Les énergies totales d'une nappe pleine et d'une nappe ouverte (d'ouverture arbitraire, présentée figure 52), à volume constant, sont calculées pour deux valeurs de courant inducteur.

Le tableau ci-dessous présente les énergies totales réduites e_t définies par :

$$e_t = \frac{Et(\text{de la nappe considérée})}{Et(\text{de la nappe pleine})} \quad (201)$$

	Nappe pleine	Nappe ouverte	Configuration la plus favorable d'un point de vue énergétique.
$I_S=1 A_{\text{eff}}$	1	1,04	La nappe ouverte ne peut exister.
$I_S=10 A_{\text{eff}}$	1	0,63	La nappe pleine ne peut exister.

Tableau 9 : Energie totale réduite de la nappe

Nous constatons qu'à faible courant la nappe pleine présente la forme la plus favorable d'un point de vue énergétique. Lorsque le courant inducteur est plus élevé, la nappe ouverte est celle qui présente l'énergie totale la plus faible. L'hypothèse initiale est donc vérifiée.

Le modèle Φ_R permet donc de mettre en évidence l'ouverture ; en revanche il ne permet pas de déterminer l'influence paramétrique, c'est-à-dire certains paramètres, notamment la conductivité électrique du matériau, ne peuvent être variés puisqu'ils n'interviennent pas dans la formulation du problème.

B. Evolution de l'ouverture

Les modèles qui ont été établis, ont permis d'expliquer les déformations.

Nous supposons que l'ouverture se crée à un endroit fragilisé de la frontière.

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier l'évolution de cette ouverture (à volume V_D constant). L'état initial de la nappe et donc une nappe ouverte.

Le modèle choisi pour faire l'évolution de forme est le modèle Φ_R . En effet, dans ce cas, le système étudié est la nappe de métal et son environnement.

La stabilité de la nappe résulte d'un équilibre des différentes pressions mises en jeu, soit :

$$P_h - P_m = \pm P_\gamma \quad (202)$$

où

P_h est la pression hydrostatique

P_m est la pression magnétique

P_γ est la pression de Laplace

L'équation (202) se réécrit :

$$\frac{\rho g e}{2} - \left\| \vec{K} \times \vec{B}_s \right\| = \pm \frac{\gamma_{ea}}{R_c} \quad (203)$$

avec R_c le rayon de courbure de la couche de métal liquide

ρ la masse volumique du fluide

g l'accélération terrestre

e l'épaisseur de la couche de métal

γ_{ea} le coefficient de tension superficielle à l'interface air liquide

+ si la forme, vue de l'intérieur du fluide, est concave

- si la forme, vue de l'intérieur du fluide, est convexe

Comme il a été précisé précédemment, la hauteur de liquide est supposée uniforme en tout point du fluide et est calculée de la manière suivante :

$$e = \frac{V}{S} \quad (204)$$

V et S étant respectivement le volume et la surface de métal liquide.

Lorsque le fluide a atteint une forme stable, il y a équilibre en tout point du fluide. L'équation (203) est écrite en chaque nœud de la frontière de la nappe de métal liquide.

Si $P_m > \pm P_\gamma + P_h$, l'ouverture va s'agrandir. Si la pression magnétique est inférieure aux autres pressions la nappe de métal va s'étaler.

L'état initial de la nappe [37] est présenté sur la figure 52.

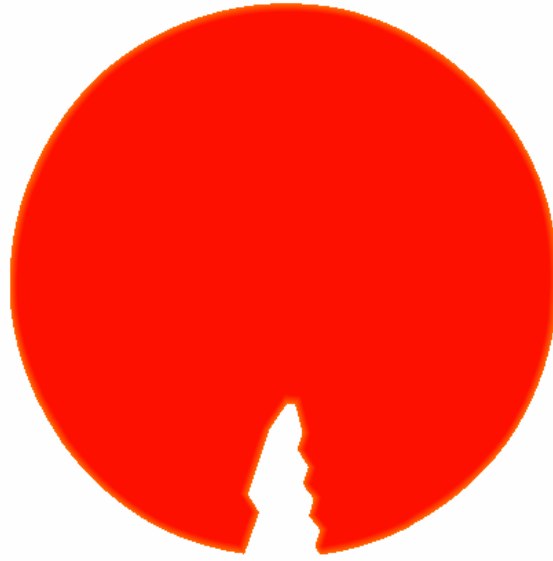


Figure 52 : Etat initial considéré

L'évolution de la forme est étudiée pour 3 valeurs de courants sources différentes : 10A, 20A et 45A.

A partir de la figure 52, une frontière est définie (cf. figure 53).

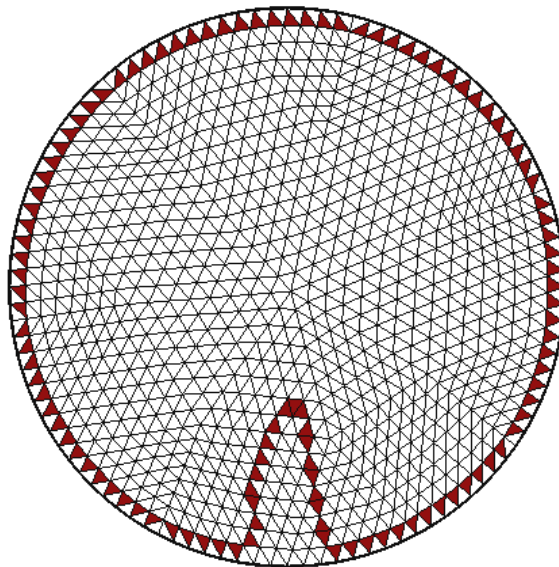


Figure 53 : frontière de la nappe où l'algorithme est appliqué

L'algorithme, présenté sur le schéma 54, est appliqué sur cette frontière.

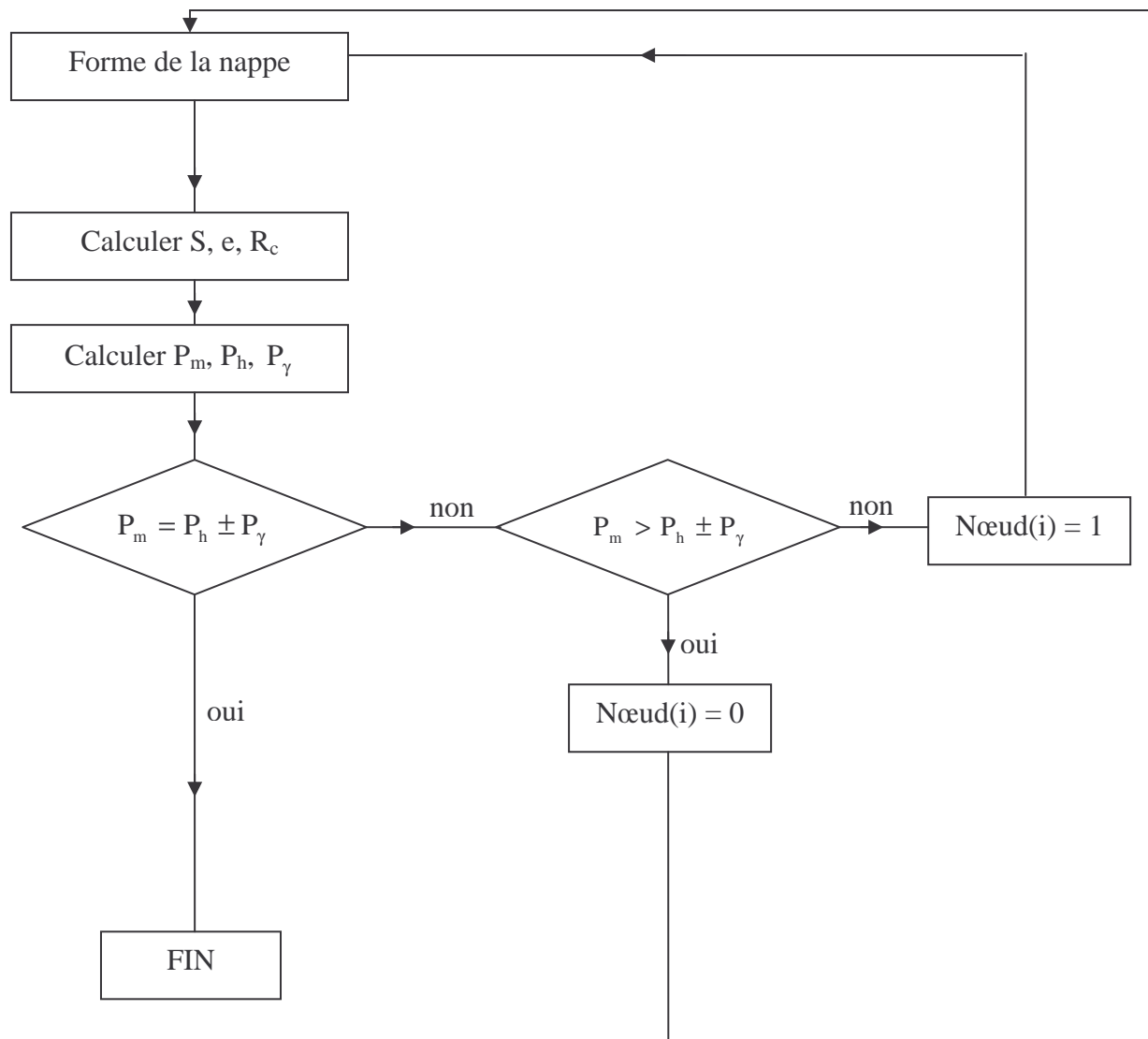


Figure 54 : Algorithme de programmation

Nœud(i) = 1 signifie que le nœud i est du métal est que la condition aux limites $\frac{\partial \Phi_R}{\partial n} = \vec{H}_s \cdot \vec{n}$ doit lui être appliquée.

Nœud(i) = 0 signifie que le nœud i est de l'air est que la condition aux limites $\frac{\partial \Phi_R}{\partial n} = 0$ doit lui être appliquée.

En appliquant cet algorithme, une forme stable est atteinte,

- après 3 itérations lorsque l'inducteur est alimenté par un courant de 10A.
- après 10 itérations lorsque l'inducteur est alimenté par un courant de 20A.
- après 13 itérations lorsque l'inducteur est alimenté par un courant de 45A.

Les formes stables obtenues pour ces trois valeurs de courants inducteurs sont présentées ci-dessous [37] :

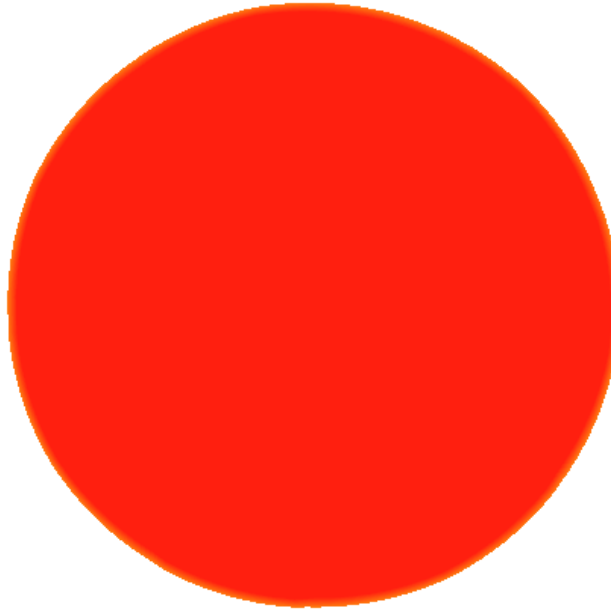


Figure 55 : Forme d'équilibre correspondant à un courant source de 10A.

Lorsque l'inducteur est alimenté par un courant d'intensité 10A, l'ouverture se referme. La forme correspondant à un état d'équilibre est la nappe pleine. L'expérience a montré, qu'à cette intensité, la forme prise par la nappe est un dôme.

Le courant inducteur est augmenté, jusqu'à atteindre 20A, la nappe de métal se stabilise sous la forme d'une nappe ouverte comme indiqué sur la figure 56.



Figure 56 : Forme d'équilibre correspondant à un courant source de 20A.

Lorsque le courant source est de 45A, l'ouverture s'élargit et les bords de la nappe se rétractent.



Figure 57 : Forme d'équilibre correspondant à un courant source de 45A.

Les résultats de simulations coïncident avec les observations expérimentales pour des courant inducteur de 10 et 20A comme le montre le tableau ci-dessous. Mais lorsque que le courant inducteur est de 45 A, la forme obtenue par calcul ne correspond pas à celle obtenue expérimentalement.

Simulation	Expérience
à $I_s = 10A$, la nappe est pleine	à $I_s = 10A$, la nappe est un dôme
à $I_s = 20 A$, la nappe est ouverte	à $I_s = 30 A$, le dôme s'ouvre
à $I_s = 45A$, la nappe est ouverte et les côtés se rétractent.	La périphérie de la nappe reste toujours en contact avec les bords du bécher.

Tableau 10 : Comparaison entre résultats expérimentaux et simulations sur une nappe de 5 mm d'épaisseur au repos

Cet écart provient de la méthode utilisée qui présente deux inconvénients majeurs.

- Le premier étant que la forme de la nappe dépend fortement du maillage. Pour que la forme finale de la nappe ne dépende pas du maillage, il faut que celui-ci soit homogène et fin, soit adaptatif.
- Le second inconvénient est que l'état final stable dépend de l'état initial, c'est-à-dire de la forme de l'ouverture au départ de la simulation.

Cependant, elle permet de montrer qu'il existe une forme pour laquelle il y a équilibre des pressions ; en améliorant le maillage, il est possible d'avoir des formes de nappe plus exactes.

Les résultats obtenus vont dans le sens des hypothèses faites à savoir

- que le dôme s'ouvre parce qu'il ne présente plus l'énergie totale la plus faible
- que chaque forme prise par la nappe correspond à un minimum d'énergie (ou à un équilibre mécanique).

IV. Conclusions

La formulation en fonction de courant $\bar{\varphi}$ est basée sur l'hypothèse de répartition homogène des courants induits dans l'épaisseur de la couche de métal liquide. La résolution du modèle Φ_R (modèle de dimension 3) a permis de valider cette hypothèse.

L'exploitation du modèle $\bar{\varphi}$ indique que la nappe d'étain s'ouvre au-delà d'un certain seuil de courant. L'expérimentation et les calculs montrent que ce seuil d'ouverture varie linéairement avec l'épaisseur de la nappe.

La succession des formes dans l'ordre observé expérimentalement est également obtenue par le calcul des énergies totales.

Le modèle Φ_R étant un modèle en trois dimensions qui fait intervenir la nappe et son environnement, nous avons cherché, à courant inducteur donné, des formes stables qui correspondent à un équilibre des pressions mises en jeu. Les résultats ainsi obtenus montrent que lorsque $I_S < I_c$ la forme ouverte se referme. Inversement, l'ouverture s'agrandit lorsque l'on dépasse ce seuil.

L'étude des deux modèles valide donc l'hypothèse d'une ouverture de la nappe pour minimiser l'énergie totale du système. Cependant, les deux modèles ne permettent pas d'obtenir par calcul l'ouverture de la nappe de métal. Un phénomène similaire à celui que nous avons observé expérimentalement, est présenté par C. Karcher et J. U. Mohring de l'université d'Ilmenau [34] [35]. Leurs travaux ont mis en évidence, des ondes de surfaces invisibles. L'amplitude de ces ondes dépend fortement de la valeur du courant inducteur.

L'ouverture serait due à l'instabilité de ces ondes. Lorsque l'amplitude de l'onde est supérieure à la profondeur de peau, le liquide s'ouvre au creux de l'onde.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif général était d'expliquer l'ouverture de la nappe de métal liquide en se basant sur une méthode de minimum d'énergie.

Une première approche du problème indique que la forme prise par la nappe correspond effectivement à un minimum d'énergie. Les résultats obtenus par ce modèle coïncident de très près avec les résultats expérimentaux. Cependant, la représentation de la déformation de la nappe de métal liquide par deux spires coaxiales, parcourues par un courant induit i , devient trop complexe lorsque les déformations sont plus torturées. En effet, le calcul de l'inductance propre de chacune des spires et de la mutuelle entre les spires en analytique n'est plus aussi aisé.

Un modèle plus approfondi permettant l'étude de formes plus compliquées a donc été développé. Des hypothèses ont été faites afin de ramener l'inconnue vectorielle \vec{J} , densité de courant volumique induit, à une inconnue scalaire $\bar{\varphi}$, la fonction de courant.

Pour chacune des formes observées expérimentalement, l'énergie totale est calculée. La succession des formes observées expérimentalement, lorsque le courant inducteur est augmenté, se retrouve dans la succession des minima d'énergie. Autrement dit, l'ordre dans lequel apparaissent les différentes formes expérimentales correspond à la succession des formes obtenue par calcul. Nous avons également montré que le courant à l'ouverture de la nappe, I_c , dépend linéairement de l'épaisseur de la nappe. Cette variation de courant seuil en fonction de l'épaisseur se retrouve également dans nos mesures expérimentales.

Dans la continuité de ce travail, il reste à trouver la forme de la nappe qui minimise l'énergie totale. En effet, l'étude telle qu'elle a été menée a consisté à comparer l'énergie totale de formes obtenues expérimentalement.

La formulation en fonction de courant $\bar{\varphi}$ repose sur un découplage du problème de magnétohydrodynamique. L'analyse du phénomène s'est faite d'un point de vue électrique en simplifiant l'aspect mécanique (hydrostatique). Une complémentarité peut être envisagée en reprenant des études faites d'un point de vue mécanique.

ANNEXE 1 : Circuit électrique équivalent

Cette annexe a pour objectif de compléter le calcul présenté dans le chapitre I. partie III.A.
 Nous présentons dans un premier temps le calcul de la coénergie pour une spire soumise à un champ magnétique variable puis pour deux spires.

- Variation de la coénergie pour une spire

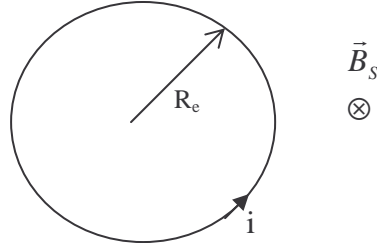


Figure 58 : Spire soumise à un champ magnétique variable.

La coénergie est :

$$\bar{W}(i) = \frac{1}{2} L_1 i^2 + b_s S_1 i \quad (205)$$

L_1 est l'inductance propre de la spire

S_1 est la surface de la spire.

b_s est le champ magnétique extérieur.

i est le courant dans la spire.

Sous l'action du champ magnétique, la spire va se déformer. Cette déformation, à courant constant, va entraîner une variation de la coénergie :

$$\delta \bar{W}(i) = \frac{1}{2} \delta L_1 i^2 + b_s i \delta S_1 \quad (206)$$

Nous voulons exprimer i^2 et $b_s i$ en fonction des autres grandeurs du système.

Le champ magnétique source a une impulsion ω . Nous écrivons la représentation complexe de b_s et de i :

$$b_s(t) = \sqrt{2} \text{Ré}[\bar{B}_s e^{j\omega t}] \quad (207)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \text{Ré}[\bar{I} e^{j\omega t}] \quad (208)$$

La loi de Faraday nous permet d'obtenir une expression de \bar{I} :

$$\bar{I} = \frac{-j\omega \bar{B}_s S_1}{R_1 + j\omega L_1} \quad (209)$$

Où R_1 est la résistance de la spire

$$i^2 = \sqrt{2} \text{Ré}[\bar{I} e^{j\omega t}] \sqrt{2} \text{Ré}[\bar{I} e^{-j\omega t}] \quad (210)$$

En remplaçant l'expression de \bar{I} décrit par l'équation (209) dans l'équation ci-dessus et après simplification, nous obtenons :

$$i^2 = \frac{|\bar{B}_s|^2 (S_1)^2 \omega^2}{(R_1)^2 + (L_1 \omega)^2} - \text{Re} \left[\frac{\bar{B}_s S_1 \omega}{R_1 + jL_1 \omega} e^{2j\alpha t} \right] \quad (211)$$

Le produit b_{si} s'écrit de la manière suivante :

$$b_s i = \sqrt{2} \text{Re} [\bar{B}_s e^{j\alpha t}] \sqrt{2} \text{Re} [\bar{I} e^{j\alpha t}] \quad (212)$$

Soit après développement et simplification, nous obtenons :

$$b_s i = -\frac{|\bar{B}_s|^2 S_1 \omega^2}{(R_1)^2 + (L_1 \omega)^2} - \text{Re} \left[j \frac{(\bar{B}_s)^2 S_1 \omega}{R_1 + jL_1 \omega} e^{2j\alpha t} \right] \quad (213)$$

En substituant les expressions de i^2 et de b_{si} décrites respectivement par les équations (211) et (213), dans l'expression de la variation de la coénergie, celle-ci se réécrit :

$$\delta \bar{W}(i) = \left(\frac{1}{2} S_1 \delta L_1 - L_1 \delta S_1 \right) \frac{|\bar{B}_s|^2 S_1 \omega^2}{(R_1)^2 + (L_1 \omega)^2} + \text{un terme fluctuant de pulsation } 2\omega \quad (214)$$

- Variation de la coénergie pour deux spires

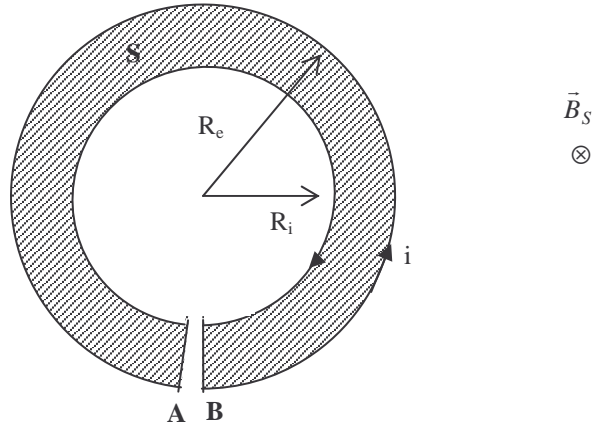


Figure 59 : Spires soumises à un champ magnétique variable.

En procédant par analogie, nous trouvons que la variation de la coénergie s'écrit :

$$\delta \bar{W} = \frac{1}{2} \partial L_{eq} i^2 + B_s \partial S i \quad (215)$$

Avec

$$i^2 = \frac{|\bar{B}_s|^2 S^2 \omega^2}{R_{eq}^2 + (L_{eq} \omega)^2} \quad (216)$$

$$B_s i = - \frac{|\overline{B}_s|^2 L_{eq} S \omega^2}{R_{eq}^2 + (L_{eq} \omega)^2} \quad (217)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (218)$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \quad (219)$$

L'inductance propre équivalente L_{eq} ainsi que la résistance équivalente se calcule de manière suivante [31] :

$$L_{eq} = \mu_o R_e \left[\text{Log} \left(8 \frac{R_e}{a} \right) - \frac{7}{4} \right] + \mu_o R_i \left[\text{Log} \left(8 \frac{R_i}{a} \right) - \frac{7}{4} \right] - 2 \mu_o \frac{2}{\eta} \sqrt{R_e R_i} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{2} \right) K(\eta) - E(\eta) \right]$$

$$\text{avec } \eta = \sqrt{\frac{4R_e R_i}{(R_e + R_i)^2}}$$

$$R_{eq} = 2 \frac{(R_e + R_i)}{a^2}$$

a est le rayon de la section du conducteur.

ANNEXE 2 : Validation des méthodes de résolution

La méthode intégrale de frontière, implémentée pour le calcul de la couche mince, est validée en résolvant un problème d'électrostatique dont la solution exacte est connue.

La méthode des éléments finis est validée en comparant les solutions obtenues par un logiciel d'éléments finis « femm » et les solutions obtenues par notre programme.

Nous commencerons par valider l'implémentation de la méthode intégrale de frontière puis celle des éléments finis.

Méthode intégrale de frontière

1. Présentation du problème de référence

L'exemple test que nous allons traiter est un problème d'électrostatique.

Nous considérons une sphère conductrice chargée dans l'espace infini (cf. figure 60)

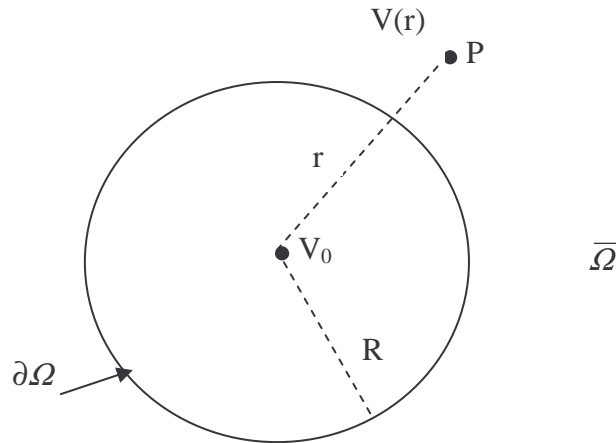


Figure 60 : Sphère conductrice chargée

Le potentiel électrique V vérifie :

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{dans } \bar{\Omega} & (220) \\ V = V_0 & \text{sur } \partial\Omega & (221) \\ V = 0 & \text{à l'infini} & (222) \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Dirichlet extérieur. L'inconnue est la dérivée normale de V sur $\partial\Omega$.

2. Résolution du problème de référence par la méthode intégrale de frontière

a. La solution analytique

Tout se passe à l'extérieur de la sphère comme s'il n'y avait pas de sphère mais seulement une charge ponctuelle en son centre.

$$\left. \begin{array}{l} V(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r = R) = V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow V(r) = V_0 \frac{R}{r} \quad (223)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide
q est une charge électrique.

Le champ électrique est radial :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r = -\vec{\nabla} V \quad (224)$$

Il vérifie pour $r \geq R$

$$E(r) = -V_0 \frac{R}{r^2} \quad (225)$$

Sur la surface de la sphère, on a

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = -\frac{V_0}{R} = -\vec{\nabla} V \cdot \vec{n} \quad (226)$$

avec $\vec{n} = \vec{e}_r$

Considérons le cas d'une sphère de rayon $R = 0,5$ m, chargé par un potentiel $V_0 = 1$ V.
Le module du champ électrique, à la surface de la sphère, vaut : $E = 2$ V.m⁻¹.

b. La solution approchée

L'équation (220) est mise sous forme intégrale de frontière.

Le traitement numérique se fait comme indiqué précédemment ce qui nous conduit à résoudre le système suivant :

$$[A_v] \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial n} \end{bmatrix} = [V_0] \quad (227)$$

Une méthode de résolution de type gradient conjugué, appliqué à (227), nous permet d'obtenir le module du champ électrique en chaque nœud du maillage.

Le tableau 11 présente la solution obtenue par la méthode intégrale de frontière, lorsque les intégrales $\int_{\Delta_c} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{y}|} \right) d\zeta d\eta$ et $\int_{\Delta_c} \left(\frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{y}|} \right) d\zeta d\eta$ sont calculées avec 64, 144 et 400 points de Gauss.

L'approximation des intégrales se fait sur un même maillage.

	64 points	144 points	400 points
$\ \vec{E}_{min}\ $	1.86 V.m ⁻¹	1.94 V.m ⁻¹	1.98 V.m ⁻¹
$\ \vec{E}_{max}\ $	2.36 V.m ⁻¹	2.16 V.m ⁻¹	2.07 V.m ⁻¹
erreur	18%	8%	3%

Tableau 11 : erreur commise due à l'approximation des intégrales

$\|\vec{E}_{min}\|$ est la plus petite valeur du champ électrique obtenu et $\|\vec{E}_{max}\|$ la plus grande.

La valeur du module du champ électrique varie d'un nœud à l'autre entre ces deux valeurs.

L'erreur relative est calculée de la manière suivante : $\frac{\|\vec{E}_{max}\| - E}{E} * 100$.

E est la valeur exacte du champ électrique et vaut $E = 2\text{V.m}^{-1}$.

Nous avons précisé précédemment qu'une bonne approximation des intégrales singulières est très importante. Si celles-ci sont mal évaluées, le résultat risque d'en être fortement affecté. Nous constatons, en effet, qu'avec 64 points de Gauss, l'erreur commise est de 18%.

La méthode avec 400 points de Gauss est le meilleur compromis temps de résolution et erreur faible. L'approximation du champ électrique obtenu est assez bonne.

Méthode des éléments finis

1. Equation à résoudre

Dans la deuxième formulation du problème, nous nous intéressons au régime harmonique établi, c'est pourquoi le modèle est écrit sous forme complexe puis résolu par la méthode des éléments finis.

Il nous faut donc vérifier si le programme, qui a été construit à cet effet, ne contient pas d'erreur.

Le support, qui sert à cette validation, est l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta\vec{A} + j\omega\mu_o\sigma\vec{A} = 0 & \text{dans } D \\ \vec{A} = 10 e^{j78} & \text{dans } \partial D \end{cases} \quad (228)$$

où $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x})\vec{k}$ et $\omega = 2\pi \times 3700$

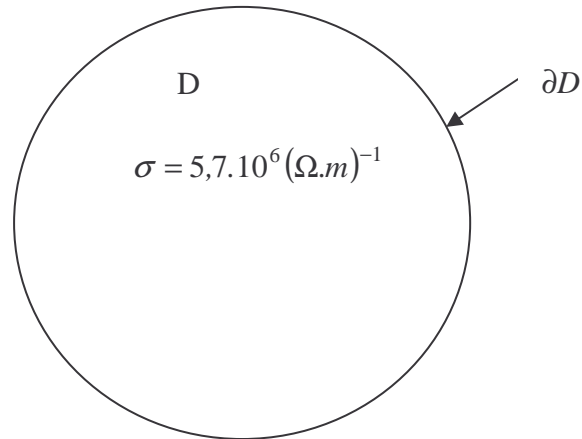


Figure 61 : représentation du domaine de résolution

La condition à la limite est choisie de manière parfaitement arbitraire.

2. Résolution

Le problème défini par (228) et (229) résolue par le logiciel FEMM et par notre programme, celui-ci utilise le maillage de FEMM. Une valeur de \bar{A} en chaque nœud, du même maillage, est ainsi calculée. L'écart relatif par nœud des solutions obtenues est donné sur le tableau ci-dessous :

	$Re[\bar{A}]$ sous FEMM	$Re[\bar{A}]$ par notre programme	erreur sur la partie réelle	$Im[\bar{A}]$ sous FEMM	$Im[\bar{A}]$ par notre programme	erreur sur la partie imaginaire
Valeur minimale	-1.2016	-1.2014	0.017%	-4.3471	-4.3465	0.014%
Valeur maximale	2.7224	2.7219	0.018%	9.7815	9.7800	0.015%

Tableau 12 : comparaison des résultats obtenus par le logiciel FEMM et notre programme

L'erreur est très faible, notre programme est donc validé.

Jusqu'à présent, deux modèles ont été établis. A chacun des modèles, une méthode de résolution adaptée a été développée et leur programmation validée.

Les solutions ainsi obtenues vont nous permettre de calculer l'énergie magnétique et les autres énergies intervenant dans le phénomène.

ANNEXE 3 : Méthode des intégrales de frontière

Principe de la méthode intégrale de frontière

Les étapes de base sont assez similaires à celle des éléments finis.

Cette méthode consiste à transformer l'équation de Laplace, décrivant le comportement du potentiel magnétique, en une équation intégrale reliant seulement les valeurs aux frontières. Cette équation est discrétisée puis résolue numériquement.

Résoudre notre problème décrit par les équations (178) revient donc à résoudre un système algébrique.

Dans cette partie, nous allons décrire, de manière générale, comment aboutir à ce système d'équations.

1. Etablissement des équations intégrales de frontière

Dans un volume Ω délimité par des surfaces $\partial\Omega$, nous cherchons à résoudre $\Delta\Phi_R = 0$ dans Ω , en tenant compte des conditions aux limites. Il existe deux manières de transformer $\Delta\Phi_R = 0$ en une équation intégrale de frontières. La première méthode est basée sur les identités de Green, la seconde sur la théorie des distributions. Ces deux méthodes conduisent à des équations analogues.

Nous allons utiliser la première méthode.

Pour toute fonction de pondération ϖ , nous avons :

$$\int_{\Omega} \varpi \Delta\Phi_R d\Omega = 0 \quad (230)$$

Nous intégrons cette dernière équation par partie, ce qui nous donne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_R}{\partial n} \varpi d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla}\Phi_R \cdot \vec{\nabla}\varpi d\Omega = 0 \quad (231)$$

C'est aussi le point de commencement de la méthode des éléments finis. Pour bifurquer depuis cette équation vers la méthode des éléments de frontières, la première identité de Green est utilisée.

Pour n'avoir que des intégrales de frontières, nous appliquons la première identité de Green à la seconde intégrale. L'équation (231) se réécrit de la manière suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_R}{\partial n} \varpi d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varpi}{\partial n} \Phi_R d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta\varpi \Phi_R d\Omega = 0 \quad (232)$$

Par ailleurs, la solution fondamentale de $\Delta\Phi_R = 0$ est aussi solution de

$$\Delta\varpi(\vec{y}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \quad (233)$$

Où δ est une fonction de Dirac centrée en \vec{x} .

ϖ est une fonction de Green de la forme

$$\varpi = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (234)$$

En utilisant les propriétés de la fonction de Dirac, l'équation (232) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \Delta \varpi \Phi_R d\Omega = - \int_{\Omega} \Phi_R \delta d\Omega$$

soit

$$\int_{\Omega} \Delta \varpi \Phi_R d\Omega = -\Phi_R(\vec{x}) \quad (235)$$

avec $\vec{x} \in \Omega$

Le domaine intégral est remplacé par la valeur en un point, l'équation (232) devient donc :

$$\Phi_R(\vec{x}) + \int_{\partial\Omega} \Phi_R(\vec{y}) \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_R(\vec{y})}{\partial n} \varpi d\Gamma \quad (236)$$

Cette dernière équation relie la valeur de Φ_R en \vec{x} situé dans le volume Ω , aux intégrales de frontière.

Une expression plus utilisée est celle reliant la valeur de Φ_R , en un point de la frontière $\partial\Omega$, aux intégrales de frontière

Il faut donc réévaluer $\int_{\Omega} \Delta \varpi \Phi_R d\Omega$, dans ce cas. Pour ce faire, le domaine d'intégration Ω est agrandi et noté Ω' de manière à inclure un disque de rayon ε autour du point de coordonnées \vec{x} [19] [27].

\vec{x} est donc à l'intérieur de Ω' et l'équation (236) est vérifiée dans le domaine Ω' .

Lorsque nous faisons tendre ε vers 0, l'équation (236) devient :

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \Phi_R(\vec{x}) + \int_{\partial\Omega} \Phi_R(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \right) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_R(\vec{y})}{\partial n} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d\Gamma \quad (237)$$

où α_s est l'angle solide sous lequel la surface $\partial\Omega$ est vue depuis \vec{x} .

$\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω .

Cette équation est simplifiée par 4π

$$\alpha_s \Phi_R(\vec{x}) + \int_{\partial\Omega} \Phi_R(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_R(\vec{y})}{\partial n} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} d\Gamma \quad (238)$$

2. Traitement numérique

Il n'existe pas de solution analytique des équations intégrales. Il faut donc chercher des solutions approchées par des méthodes adaptées au problème étudié. La démarche de notre résolution est la suivante :

1. la frontière $\partial\Omega$ est discrétisée en m éléments de Lagrange P1 sur lequel le potentiel Φ_R est approximé par une interpolation linéaire des valeurs aux nœuds.
2. l'équation (238) est écrite pour les n nœuds.
3. les intégrales sont calculées sur chaque élément.
4. le système linéaire est assemblé.

Dans ce qui suit, nous appliquons les étapes 1, 2, 3 et 4 afin de pouvoir écrire le système à résoudre.

a) Ecriture du problème discrétisé

Un nombre fini de points singuliers P_i , $i=1,\dots,n$, de coordonnées \vec{x}_i , est choisi sur la frontière. Les intégrales de surface sont calculées pour chaque point P_i . Nous obtenons ainsi un système de n équations à n inconnues [14] [24] [28].

L'équation (238), sur le domaine discrétisé, s'écrit :

$$\alpha_{S_i} \Phi_R(\vec{x}_i) + \sum_{e=1}^m \{a\}'_e \{\Phi_R\}_e = \sum_{e=1}^m \{b\}'_e \left\{ \frac{\partial \Phi_R}{\partial n} \right\}_e \quad (239)$$

où

$$\Phi_R(\zeta, \eta) = \zeta \Phi_{R1} + \eta \Phi_{R2} + (1 - \zeta - \eta) \Phi_{R3} \quad (240)$$

est la valeur de Φ_R sur l'élément e .

$$\vec{y}(\zeta, \eta) = \zeta \vec{y}_1 + \eta \vec{y}_2 + (1 - \zeta - \eta) \vec{y}_3 \quad (241)$$

est la position dans le repère local (ζ, η) associé à un élément de discrétisation Δ_e .

m est le nombre total d'éléments de $\partial\Omega$.

Les vecteurs élémentaires associés à l'élément e sont

$$\{a\}'_e = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 2S_e \int_{\Delta_e} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \\ 1 - \zeta - \eta \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{y}|} \right) \right\} d\zeta d\eta \quad (242)$$

$$\{b\}'_e = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = 2S_e \int_{\Delta_e} \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \\ 1 - \zeta - \eta \end{Bmatrix} \left(\frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{y}|} \right) d\zeta d\eta \quad (243)$$

S_e est la surface de l'élément e .

Il faut donc calculer les intégrales élémentaires (242) et (243) afin d'écrire (239) sous forme matricielle:

$$[G][\Phi_R] = [H] \left[\frac{\partial \Phi_R}{\partial n} \right] \quad (244)$$

Où [G] et [H] sont des matrices carrées de taille $n \times n$.

b) Calcul des intégrales

Les six intégrales que nous devons calculer présentent deux types de singularité qui, si elles sont mal traitées, peuvent fausser les résultats.

Le calcul des intégrales (242) et (243) nécessite de distinguer deux cas :

- *Cas n°1 : \bar{x} et \bar{y} ne sont pas sur le même élément*

La précision est suffisante avec un nombre de points de Gauss faible [17] [18].

- *Cas n°2 : \bar{x} et \bar{y} sont sur le même élément*

Si $\bar{x} - \bar{y}$ est orthogonal au vecteur \vec{n} (la normale extérieure à la surface $\partial\Omega$), alors les intégrales (242) sont nulles.

Dans le cas des intégrales (243), la singularité est traitée en choisissant judicieusement les points de Gauss et en les prenant suffisamment nombreux [19].

Le choix des points de Gauss et de leur nombre à été défini en résolvant un problème dont la solution exacte est connue. Ce problème est présenté en annexe 2.

c) Calcul de l'angle solide

Nous avons vu, dans le cas n°2, que les intégrales (242) sont nulles ce qui signifie que la diagonale de [G] ne contient que la valeur de l'angle solide.

Le calcul de l'angle solide nécessite de deux types de domaines, la région finie et infinie [28].

- *Ω est une région finie :*

Dans ce cas, le calcul des éléments diagonaux de la matrice [G] peut être basé sur la résolution d'un problème fictif [24].

Dans une région finie, la valeur du potentiel et de sa dérivée normale sur la frontière est

$$\text{défini par : } \begin{cases} \Phi_R = 1 \\ \frac{\partial \Phi_R}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (245)$$

En introduisant la valeur de Φ_R et $\frac{\partial \Phi_R}{\partial n}$ dans l'équation (239), nous obtenons :

$$\alpha_{S_i} = - \sum_{e=1}^m \left\{ a_e^t \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \quad (246)$$

qui se traduit sur la matrice [G] par :

$$G_{ii} = -\sum_{i \neq j} G_{ij} \quad (247)$$

où i et j sont respectivement les indices de ligne et de colonne.

Les éléments diagonaux de [G], constitués par l'angle solide, ne sont qu'une somme des coefficients non diagonaux.

- Ω est une région infinie :

Dans ce cas, Ω peut être considéré comme une région intérieure à la sphère de surface $\partial\Omega^*$ dont on fait tendre le rayon R vers l'infini [25] [26] [27] (cf. figure 62).

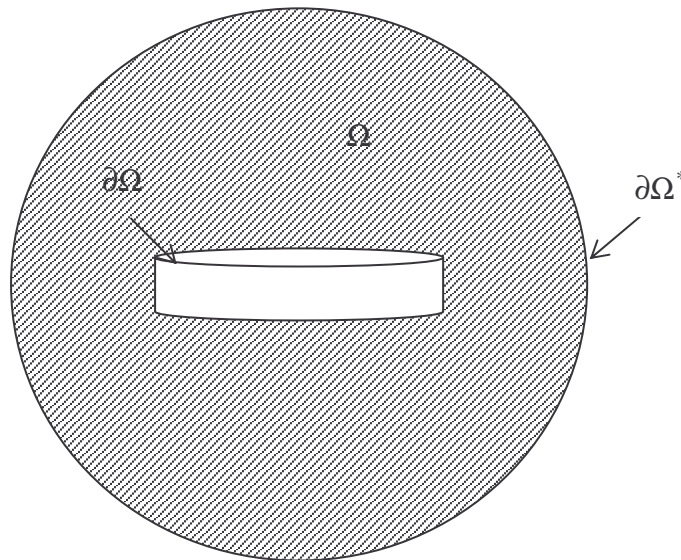


Figure 62 : représentation du domaine infini

Le potentiel décroissant en $1/r$ et sa dérivée normale en $1/r^2$, l'intégrale de surface (238) sur $\partial\Omega^*$ tend vers 0, cependant il faut tenir compte de :

$$-\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega^*} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega^*} d\alpha = 4\pi \quad (248)$$

L'angle solide est donc égal à :

$$\alpha_s = 4\pi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (249)$$

et les coefficients diagonaux de la matrice s'écrivent :

$$G_{ii} = 4\pi - \sum_{i \neq j} G_{ij} \quad (250)$$

Cette méthode de calcul de l'angle solide présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et très peu coûteuse en temps de calcul puisque les coefficients G_{ii} sont calculés à partir des autres coefficients de la matrice [G].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. Moretti, “Eléments d’analyse de l’action mécanique d’un dispositif inducteur sur une charge conductrice liquide. Expérimentation et modélisation numérique”, Thèse de l’Institut Polytechnique de Lorraine, 21 octobre 2002.
- [2] R. Moretti, S. Dufour, G. Vinsard, B. Laporte, “Equilibrium shape of a liquid metal subject to electromagnetic forces”, IEEE Trans. Mag., vol. 40, pp585-588, March 2004.
- [3] “Metal handbook. Properties and selection : Nonferrous alloys and special-purpose materials”, volume 2, ASM, 1991.
- [4] V. Kocourek, M. Conrath, Ch. Karcher, “Shaping of a liquid metal drop using high-frequency magnetic fields”, 5th International Pamir conference, Ramatuelle, France, I 199-204, 2002.
- [5] O. E. Séro-Guillaume, D. Zouaoui, D. Bernardin, J. P. Brancher, “The shape of magnetic liquid drop”, J. Fluid Mech., vol. 241, pp. 215-232, 1992.
- [6] D. Zouaoui, “Equilibre des liquides magnétiques avec interface libre”, Thèse de l’institut National Polytechnique de Lorraine, 15 février 1991.
- [7] R. Moreau, “Magnetohydrodynamics”, Kluwer academic publisher, 1990.
- [8] P.A Davidson, “An introduction to magnetohydrodynamics”, Cambridge University Press, 2001.
- [9] R. L. Stoll, “Analysis of eddy currents”, Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [10] D. Perrier, “Mise en oeuvre et caractérisation d’un nouveau procédé électromagnétique destiné à favoriser les transferts de masse aux interfaces entre métal liquide et un sel fondu”, Thèse de l’Institut Polytechnique de Grenoble, 7 novembre 2002.
- [11] L. Pinchard, “Electromagnétisme classique et théorie des Distributions”, ellipses, 1990.
- [12] S. Dufour, G. Vinsard, M. Hinaje, B. Laporte “A computation of an Induction Problem by Using a Continuation Method”, CEFC, Séoul, 2004.
- [13] O. C. Zienkiewicz, “La méthode des éléments finis”, Paris Ediscience, p 533, 1973.
- [14] L. J. Segerlind, “Applied finite element analysis”, John Wiley & Sons, 1976.
- [15] G. Dhatt, G. Touzout, “Une présentation de la méthode des éléments finis”, Maloine, 1984.
- [16] B. Mohammadi, J.-H. Saïac, “Pratique de la simulation numérique”, Dunod, 2003.
- [17] A. H. Stroud, “Approximate calculation of multiple integrals”, Prentice-Hall, 1971.
- [18] A. H. Stroud, D. Secrest, “Gaussian quadrature formulas”, Prentice-Hall, 1966.

- [19] P. Hunter, A. Pullan, "FEM-BEM Notes", University of Auckland, February 2002.
- [20] J. P. Nougier, "Méthodes de calcul numérique", Masson, 1983.
- [21] B. Ancelle, A. Nicolas, J.C. Sabonnadière, "A boundary integral equation for High frequency eddy currents", IEEE Trans. Mag., vol. 17, pp. 2568-2570, November 1981.
- [22] A. Nicolas, "Application de la méthode des équations intégrales de frontière à la modélisation des phénomènes d'induction", Thèse de l'école centrale de Lyon, 24 juin 1983.
- [23] J. C. Maxwell, "A Treatise on electricity and magnetism", volume 2, Dover publications, 1954
- [24] J. A. Liggett, P. L-F Liu, "The boundary integral equation method for porous media flow", Allen and Unwin Publishers, 1983.
- [25] P. K. Kythe, "An introduction to boundary element methods", Masson, 1995.
- [26] C. A. Brebbia, J. Dominguez, "Boundary Elements. An introductory course", second edition, Mc Graw-Hill Book Company and Computational Mechanics Publications, 1992.
- [27] L. Krähenbühl, "La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problème de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique ", Thèse école centrale de Lyon, 16 décembre 1983.
- [28] G. Beer, "Programming the boundary element method", John Wiley & Sons, 2001.
- [29] F. Jędrzejewski "Introduction aux méthodes numériques.", Springer-Verlag, 2001.
- [30] D. Netter, "Etude théoriques et pratiques des phénomènes liés à la transition des bobines supraconductrices en régime de décharge impulsionnelle.", Thèse de l'Université Henri Poincaré, Nancy I, 10 janvier 1997.
- [31] E. Durand, "Magnétostatique", Masson, 1968.
- [32] J. Mouette d'après le cours d'E. Charlaix, "Physique des surfaces et des interfaces", 2002.
- [33] T. Podgorski, "Ruissellement en conditions de mouillage partiel", Thèse Paris VI, 18 octobre 2000.
- [34] Ch. Karcher, V. Kocourek, D. Schulze, "Experimental investigations of electromagnetic instabilities of free surfaces in a liquid metal drop", International Scientific Colloquium, Modelling for Electromagnetic Processing, pp. 105-110, Hannover, March 24-26, 2003.
- [35] Ch. Karcher, J.-U. Möring, "Stability of liquid metal interface affected by a high-frequency magnetic field", Magnetohydrodynamics, vol. 39, N°3, pp. 267-276, 2003.
- [36] B. Saint-Jean, "Electrotechnique et machines électriques", édition Eyrolles, 1976.

- [37] J. Schöberl, J. Gerstmayr, R. Gaisbauer, “ NETGEN 4.3.1 ”, avril 2003.
- [38] D. Meeker, “Femm 4.0”, novembre 1998.