



**HAL**  
open science

# Modélisation micromécanique et caractérisation expérimentale du comportement des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques : application à la valorisation des polymères recyclés

Mamadou Coulibaly

► **To cite this version:**

Mamadou Coulibaly. Modélisation micromécanique et caractérisation expérimentale du comportement des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques : application à la valorisation des polymères recyclés. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2008. Français. NNT : 2008METZ033S . tel-01752600

**HAL Id: tel-01752600**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752600>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Thèse

*Présentée par*

**Mamadou COULIBALY**

*Pour l'obtention du grade de :*

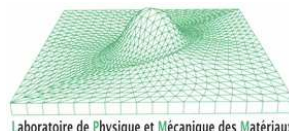
**Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz**

Discipline : MECANIQUE  
Spécialité : MECANIQUE DES MATERIAUX

**Modélisation micromécanique et caractérisation expérimentale du comportement des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques. Application à la valorisation des polymères recyclés.**

Soutenue le 1 juillet 2008 devant le jury composé de :

Saïd AHZI	Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg	Rapporteur
Olivier CASTELNAU	Chargé de recherche, HDR au CNRS, Université Paris 13	Rapporteur
Nadia BAHLOULI	Maître de conférences à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg	Examinatrice
Didier BAPTISTE	Professeur à l'ENSAM de Paris	Examineur
Abdesselam DAHOUN	Professeur à l'Ecole des Mines de Nancy	Examineur
André DRAGON	Directeur de recherche, ENSMA de Poitiers	Examineur
Paul LIPINSKI	Professeur à l'ENIM de Metz	Examineur
Pierre CHEVRIER	Professeur à l'ENIM de Metz	Invité
Hafid SABAR	Professeur à l'ENIM de Metz	Directeur de thèse



Modélisation micromécanique et caractérisation expérimentale  
du comportement des matériaux hétérogènes  
élastoviscoplastiques. Application à la valorisation des  
polymères recyclés

M. Coulibaly



*A mame Mamadou et pépé Jeanneau,*



# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers l'ADEME et le Conseil Régional de Lorraine pour l'aide financière apportée durant les trois premières années de ce travail de thèse. Je remercie tous les membres du LPMM et du LFM qui ont été les laboratoires où s'est déroulée cette thèse. Je tiens à souligner mon attachement particulier envers le groupe très soudé des thésards de l'ENIM qui ont été présents entre 2003 et 2008, ainsi qu'à Yao Koutsawa, Djédjé Sylvain Zézé et Xavier Soldani du LPMM, pour leur gentillesse et leur soutien.

Ce travail n'aurait jamais pu aboutir à des résultats aussi conséquents et satisfaisants sans la présence de Hafid Sabar, qui l'a dirigé avec une exigence et une rigueur remarquable.

J'exprime également ma profonde gratitude envers Pierre Chevrier pour sa collaboration, son soutien et son estime, et je témoigne de ses nombreuses qualités humaines et de sa perspicacité. La partie expérimentale de cette thèse n'aurait pas pu être menée à bien sans l'amabilité de M. Moritz, professeur au Lycée Professionnel Georges Bastide de Creutzwald et de toute son équipe, mais aussi de Sylvain Truche de l'ENIM.

Je suis conscient de la qualité exceptionnelle du jury de cette thèse et je suis très reconnaissant envers ses membres qui m'ont fait l'honneur de se pencher sur mes travaux, notamment Olivier Castelnau et Saïd Ahzi qui ont bien voulu en être les rapporteurs.

Tout au long de cette thèse, ma pensée s'est spécialement dirigée vers mes parents, loin par la distance mais omniprésents dans mon cœur et dans mon esprit. Papa, Maman, vous êtes et serez toujours mes meilleurs exemples et ma plus grande fierté.

Je remercie bien sûr toute ma famille de France, du Sénégal et de Côte d'Ivoire, en particulier mes grandes sœurs chéries Nabou et Nafy (quelle chance de vous avoir!), ainsi que mon oncle Maurice Souchier qui m'a ouvert la voie de l'ingénierie.

Il est une personne que je remercie avant tout. Elle m'a apporté une aide inestimable tout au long de cette thèse. Elle a pris soin de moi, a supporté mon humeur parfois épouvantable, m'a permis de tenir et de garder courage et espoir sans relâche dans les moments difficiles. Il s'agit bien évidemment de ma bien aimée. Aurélie, tu es venue tel un rayon de soleil illuminer ma vie de ta bonté et de ta beauté.



A cela viennent s'ajouter mes remerciements envers toute la future belle famille et notamment papa et maman Petry, Julien (merci pour l'ordi'!) et Nico'.

Enfin, je tiens à remercier tous mes proches qui étaient là et qui m'ont accompagné tout au long de ces quatre dernières années de thèse ; je pense plus particulièrement à mes compagnons "Mimil", Moussa, "Davor" et "Gwada", sans oublier mes frères "Benj", "Moy", "Loulou" et "Abdou".

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Le recyclage des matières plastiques</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Généralités sur les déchets plastiques . . . . .	10
1.2.1 Les déchets plastiques industriels . . . . .	10
1.2.2 Les déchets plastiques de post-consommation . . . . .	11
1.3 La valorisation des matières plastiques . . . . .	13
1.3.1 Le recyclage . . . . .	13
1.3.2 Les matériaux biodégradables . . . . .	17
1.4 La valorisation par le mélange ou "coumpounding" . . . . .	19
1.4.1 Les charges . . . . .	19
1.4.2 La compatibilisation . . . . .	23
1.5 Caractéristiques des polymères recyclés . . . . .	25
1.6 Application au polypropylène . . . . .	26
1.6.1 Synthèse du polypropylène . . . . .	26
1.6.2 Additifs, charges et renforts . . . . .	27
1.6.3 Applications du polypropylènes . . . . .	27
1.6.4 Propriétés . . . . .	28
1.7 Conclusion . . . . .	30
<b>2 Comportement mécanique des matériaux polymères</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	34
2.2 Présentation générale du comportement mécanique des polymères . . . . .	36
2.2.1 Influence de la température . . . . .	37
2.2.2 Influence du temps . . . . .	39
2.2.3 Différents processus de déformation . . . . .	40
2.3 Classes de comportement mécanique . . . . .	43

2.3.1	Thermodynamique des processus irréversibles . . . . .	43
2.3.2	Représentation du comportement . . . . .	45
2.3.3	Viscoélasticité linéaire . . . . .	47
2.3.4	Viscoélasticité non linéaire . . . . .	51
2.3.5	Elastoviscoplasticité . . . . .	53
2.4	Conclusion . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Micromécanique du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Problématique de la transition d'échelle micromécanique des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques . . . . .	72
3.2.1	Analyse de Suquet : "effet mémoire longue" . . . . .	72
3.2.2	Approches de type héréditaire . . . . .	73
3.2.3	Méthodes à variables internes . . . . .	80
3.3	Modèles de transition d'échelle à variables internes . . . . .	82
3.3.1	Modèle de Weng . . . . .	82
3.3.2	Prise en compte de la nature élastoviscoplastique de l'accommodation intergranulaire . . . . .	86
3.3.3	Modèle de Kouddane . . . . .	88
3.3.4	Modèles à champs translatsés . . . . .	91
3.4	Conclusion . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Nouvelle approche micromécanique du comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	100
4.2	Nouvelle formulation intégrale du problème hétérogène viscoélastique linéaire . . . . .	102
4.2.1	Position du problème . . . . .	102
4.2.2	Nouvelle équation intégrale des milieux hétérogènes viscoélastiques linéaires	108
4.3	Problème de l'inclusion viscoélastique linéaire . . . . .	116
4.3.1	Présentation du problème . . . . .	116
4.3.2	Analyse de la nouvelle relation de localisation . . . . .	120
4.4	Approximation autocohérente et estimation de Mori-Tanaka du comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes . . . . .	124
4.4.1	Introduction . . . . .	124

4.4.2	Approximation autocohérente . . . . .	124
4.4.3	Résultats numériques de l'homogénéisation autocohérente . . . . .	130
4.4.4	Homogénéisation de Mori-Tanaka . . . . .	142
4.4.5	Résultats numériques de l'homogénéisation Mori-Tanaka . . . . .	144
4.4.6	Conclusion . . . . .	145
4.5	Conclusion . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Extension au comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes</b>	<b>149</b>
5.1	Introduction . . . . .	150
5.2	Lois de comportement élastoviscoplastiques locales . . . . .	151
5.3	Approche sécante . . . . .	155
5.3.1	Introduction . . . . .	155
5.3.2	Position du problème . . . . .	155
5.3.3	Equation intégrale . . . . .	159
5.3.4	Conclusion . . . . .	161
5.4	Approche tangente . . . . .	162
5.4.1	Introduction . . . . .	162
5.4.2	Position du problème . . . . .	162
5.4.3	Equation intégrale . . . . .	166
5.4.4	Conclusion . . . . .	167
5.5	Analyse et comparaison du modèle proposé avec d'autres modèles . . . . .	169
5.5.1	Introduction . . . . .	169
5.5.2	Présentation de la méthode variationnelle de Lahellec et Suquet . . . . .	170
5.5.3	Résultats numériques et comparaison . . . . .	173
5.5.4	Conclusion . . . . .	180
5.6	Conclusion . . . . .	182
<b>6</b>	<b>Identification expérimentale du comportement mécanique des polymères et validation du nouveau modèle micromécanique</b>	<b>185</b>
6.1	Introduction . . . . .	186
6.2	Présentation du dispositif expérimental . . . . .	187
6.3	Identification du comportement mécanique du polypropylène par une loi de type Schapery . . . . .	189
6.3.1	Introduction . . . . .	189

6.3.2	Détermination des composantes de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire . . . . .	191
6.3.3	Détermination des fonctions de non-linéarité . . . . .	198
6.3.4	Validation de la loi de comportement identifiée . . . . .	205
6.3.5	Conclusion . . . . .	207
6.4	Application du nouveau modèle micromécanique au mélange polypropylène/talc	209
6.4.1	Introduction . . . . .	209
6.4.2	Réécriture de la loi constitutive de Schapery sous une forme différentielle	209
6.4.3	Estimation de Mori-Tanaka du comportement viscoélastique non-linéaire du mélange polypropylène/talc . . . . .	213
6.4.4	Résultats numériques du modèle de Mori-Tanaka et comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	220
6.4.5	Conclusion . . . . .	226
6.5	Conclusion . . . . .	227
<b>Conclusion générale</b>		<b>229</b>
<b>Références bibliographiques</b>		<b>233</b>
<b>Annexe A</b>		<b>241</b>
A-1	Solution de l'équation de Navier : $\Delta X = F$ . . . . .	241
A-2	Détermination de la fonction de Green $G$ par la méthode de la transformée de Fourier . . . . .	241
A-3	calcul de $H = \frac{1}{4\pi r} * \frac{1}{4\pi r}$ . . . . .	243
<b>Annexe B : Formulation intégrale classique d'un problème hétérogène</b>		<b>245</b>
B-1	Comportement élastique pur . . . . .	245
B-1.1	Description du problème . . . . .	245
B-1.2	Tenseur de Green . . . . .	246
B-1.3	Equation intégrale . . . . .	247
B-2	Comportement visqueux pur . . . . .	248
B-3	Opérateurs de Green modifié et tenseurs d'Eshelby . . . . .	249
<b>Table des figures</b>		<b>256</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>257</b>

# Introduction générale

Le XIX<sup>e</sup> et le XX<sup>e</sup> siècles marquent l'apparition des matières plastiques. Ces nouveaux matériaux résultent des progrès de la pétrochimie et suscitent un engouement particulièrement important au lendemain de la seconde guerre mondiale, période durant laquelle l'industrie devait faire face à la demande croissante en matières premières. Dès lors, les propriétés diverses, la facilité de mise en œuvre et les coûts avantageux que présentent ces matériaux encouragent leur application dans tous les domaines de production industrielle afin de satisfaire les besoins croissants des consommateurs. Le choc pétrolier survenant dans les années soixante-dix marque le début des polymères de grande consommation. Toutefois, cette exploitation massive n'est pas dépourvue de conséquences. En effet, le principal inconvénient des matériaux polymères réside dans le fait qu'ils ne sont pas biodégradables et pose ainsi le problème de la gestion de leurs déchets industriels ou de consommation qui s'accumulent de manière inquiétante. Ce n'est que depuis une vingtaine d'années seulement que le traitement des déchets de matières plastiques devient une préoccupation première dans la préservation de l'environnement. La valorisation des matières plastiques fait alors l'objet de toutes les attentions, notamment dans le monde scientifique où de nombreuses études se sont penchées sur ce phénomène mondial. Aujourd'hui, les industries de plasturgie disposent de plusieurs moyens de recyclage des polymères. En dehors de l'incinération ou de la mise en décharge, la valorisation des déchets plastiques repose sur deux voies distinctes : le recyclage mécanique et le recyclage chimique.

Le recyclage mécanique aussi appelé valorisation " matière " consiste à récupérer les polymères issus d'une première utilisation et suite à un ensemble d'opérations mécaniques, à les rendre appropriés pour une seconde application souvent différente de la première. Ce type de recyclage requiert donc une bonne connaissance préalable du comportement mécanique des matériaux considérés, d'où le thème général du travail effectué lors de cette thèse.

La principale difficulté de la modélisation mécanique des matériaux polymères se trouve dans la complexité de leur comportement. Leurs propriétés sont, d'un point de vue global, beaucoup

plus sensibles que celles des métaux. Ces matériaux sont formés d'unités structurales, à savoir les motifs de monomères, liés entre eux par des liaisons intermoléculaires faibles. Ces liaisons assurent la cohésion du polymère aux basses températures. Toutefois, au delà d'une certaine limite de température, les mouvements relatifs des segments des chaînes des macromolécules deviennent possibles et sont à l'origine de phénomènes dissipatifs. Le comportement mécanique des matériaux polymères se décompose en trois composantes mécaniques distinctes :

- un comportement élastique réversible instantané qui prédomine dans les basses températures ;
- une composante viscoplastique irréversible et dissipative dépendant du temps et qui prévaut aux températures élevées
- une contribution viscoélastique ou élastoviscoplastique combinant les caractères précédents à un domaine de température intermédiaire entre les états vitreux et caoutchoutiques.

Chez les thermoplastiques, la composante viscoélastique ou élastoviscoplastique est très prononcée et caractérise toute la spécificité de leur comportement mécanique. Ce dernier dépend fortement des effets de la température et du temps. Plusieurs processus de déformation interviennent dans la réponse d'un polymère et se succèdent le long du trajet de chargement. Ces processus, considérés individuellement, définissent les quatre classes de comportements mécaniques existants :

- l'élasticité linéaire apparaît pour les très petites déformations, au voisinage de l'instant initial de l'application du chargement. Dans ce domaine, le régime est dit à "réversibilité instantanée" ;
- la viscoélasticité linéaire se produit pour les petites déformations durant lesquelles le module de fluage reliant la contrainte et la déformation n'est plus constant et dépend du temps. Le processus de déformation associé à cette classe de comportement est à "réversibilité retardée" ;
- la viscoélasticité non linéaire apparaît dans les petites et moyennes déformations dès lors

que le principe de superposition de Boltzmann n'est plus applicable. Dans ce régime commence à apparaître une déformation résiduelle croissante suivant l'effet grandissant de la viscosité ;

- l'élastoviscoplasticité est souvent assimilée au comportement précédent, mais se distingue par son application pour les grandes déformations.

Chacune des classes de comportements citées peut être représentée par des lois constitutives. En général, ces dernières peuvent être définies suivant deux classes de formulations : les lois différentielles et les relations fonctionnelles.

En ce qui concerne la description du comportement élastoviscoplastique, certaines relations constitutives traitent séparément les contributions élastique et viscoplastique de la déformation, tandis que d'autres s'attachent à décrire ce comportement très complexe dans sa globalité en s'exprimant suivant des termes caractérisant des sensibilités de la contrainte vis à vis de la déformation ou de la vitesse de déformation, ou encore d'un facteur d'échelle.

La littérature fournit un ensemble très large de lois de comportement des matériaux élastoviscoplastiques applicables aux matériaux polymères. Toutefois, les produits issus des matières plastiques se présentent dans presque 100 % des cas sous la forme de matériaux hétérogènes constitués d'une matrice polymère dans laquelle résident des additifs, des charges ou des renforts de natures, de morphologies et de propriétés diverses. Par conséquent, la simple considération des lois constitutives locales élastoviscoplastiques ne permet pas de modéliser le comportement des matériaux polymères. Il est nécessaire de prendre en compte les hétérogénéités en présence, afin de parvenir à décrire le comportement global de ces matériaux. Pour cela, deux types d'approches sont concevables : les approches phénoménologiques et les approches micromécaniques dont le principe est de modéliser le comportement effectif d'un matériau hétérogène, en partant de la description du comportement local à l'échelle des hétérogénéités structurales.

Dans cette étude, les approches micromécaniques seront préférées des premières citées car elles permettent une représentation plus riche du comportement et mieux fondée physiquement. Elles décrivent le comportement local rapporté à un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) devant satisfaire la double condition de "microhétérogénéité" et de "macrohétérogénéité" et procédant par trois étapes :



- la représentation ou la description mécanique, morphologique ou topologique du V.E.R. ;
- la localisation reliant les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques est rendue possible par une formulation intégrale déduite des lois constitutives locales et des équations de champs décrivant le problème hétérogène ;
- l'homogénéisation ou la détermination du comportement macroscopique du Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.) associé au matériau hétérogène étudié.

Toutefois, la complexité du comportement élastoviscoplastique rend difficile la simple transcription du savoir-faire acquis dans la transition d'échelle pour les autres classes de comportement (élasticité, élastoplasticité, viscoplasticité). En effet, le couplage entre l'élasticité et la viscoplasticité est à l'origine du caractère héréditaire du matériau, qui, dans le cas des matériaux hétérogènes, induit un couplage espace/temps. Celui-ci provient de la présence d'interactions mécaniques différées, traduisant l'effet "mémoire longue" que la transition d'échelle doit s'attacher à prendre en compte. Il apparaît donc clairement que les difficultés à surmonter dans la modélisation du comportement élastoviscoplastique sont liées à l'interdépendance espace/temps survenant dans l'étape de localisation. Pour faire face à ce problème, deux voies distinctes peuvent être suivies.

D'une part, les approches de type héréditaire sont basées sur la formulation intégrale des lois constitutives suivant le principe de superposition de Boltzmann. Elles consistent donc à séparer les variables de temps et d'espace durant la transition d'échelle permettant ainsi de résoudre un problème hétérogène élastique symbolique.

D'autre part, les approches à variables internes peuvent être préférées des premières pour leur simplicité numérique. En effet, elles sont basées sur une résolution incrémentale où les variables internes du problème hétérogène à l'instant  $t_{n+1}$  sont déduites uniquement à partir de leurs valeurs à l'instant  $t_n$ .

Parmi ces deux types d'approches micromécaniques, seules les approches de type héréditaire aboutissent à des résultats " exacts " d'un point de vue théorique pour la prédiction du comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement. Néanmoins, ces approches sont confortées à

une lourdeur des calculs lors du retour à l'espace /temps réel par l'inverse de la transformée de Laplace-Carson. De plus, ces approches sont théoriquement limitées au cas de la viscoélasticité linéaire. Une linéarisation de la loi de comportement peut toutefois s'effectuer pas à pas le long du trajet de chargement et rendre possible l'application de telles approches au prix de temps de calculs encore plus longs et fastidieux.

L'objectif de ce travail est de proposer une démarche générale de transition d'échelle à variables internes destinée à la modélisation du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons tout d'abord le cas de la viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. L'originalité de cette nouvelle démarche sera de réaliser un modèle simple d'exécution menant à des résultats qui correspondent à ceux des modèles de référence de type héréditaire.

Puis, le cinquième chapitre sera consacré à l'extension du modèle proposé au comportement élastoviscoplastique. Cette extension nécessite une nouvelle description locale du problème hétérogène lors de laquelle, le système d'équations de champs à résoudre est établi. Puis, deux approches du traitement intégral des équations de Navier de ce système sont présentées suivant que la description du problème utilise une loi de comportement locale sécante ou tangente. Les quatre modèles obtenus par les applications des homogénéisations autocohérente et de Mori-Tanaka aux relations de localisation issues des approches sécante et tangente sont analysés et leurs résultats sont comparés avec ceux des modèles s'inspirant des méthodes variationnelles, ainsi que ceux de la méthode numérique des éléments finis.

Dans le dernier chapitre, il s'agira d'appliquer le nouveau modèle à l'étude du comportement viscoélastique non linéaire des polymères. La loi constitutive locale choisie s'écrit suivant la formulation fonctionnelle de Schapery [1] et les matériaux étudiés sont les mélanges polypropylène/talc. L'identification des paramètres de la loi de comportement s'effectue par un essai uniaxial où l'histoire du chargement est constituée de rampes à vitesse de contrainte constante et de maintiens en contrainte. La validation du modèle est menée par la comparaison de ses résultats à ceux obtenus par deux séries d'essais de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante sur les mélanges polypropylène/talc.



# Chapitre 1

## Le recyclage des matières plastiques

## 1.1 Introduction

Dans le passé, des matériaux de base durables, dits traditionnels, comme les céramique et les métaux, mais également les matières organiques telles que le bois, le cuir, le lin ou la laine, ont joué un rôle important dans la société.

Dans le but de satisfaire la demande croissante des matières premières et de diversifier leurs propriétés, les XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles marquent l'apparition et le début du développement de nouveaux produits : les matières plastiques. Ces dernières sont, en très grande majorité, des matériaux de synthèse provenant du charbon et du pétrole et résultent des progrès spectaculaires de la chimie. Elles présentent des propriétés très diverses et parfois inégalables.

Dans les années 20, au lendemain de la première guerre mondiale, les plastiques entrent dans l'ère industrielle. La pétrochimie devient accessible, permettant la synthèse de nouvelles matières plastiques qui commencent à remplacer de nombreux matériaux durant la seconde guerre mondiale. L'industrie de la construction et de l'automobile, l'industrie alimentaire et le monde médical sont parmi les plus grands consommateurs de ces nouvelles matières qui ont augmenté considérablement le niveau de vie et remplacé avantageusement quantité de "produits naturels" dans diverses applications, ce qui représente souvent, à l'époque, un avantage pour l'environnement. En effet, se passer des matières plastiques signifierait que l'environnement s'appauvrirait à court terme en ressources minérales et naturelles jusque là exploitées.

La grande consommation et la diversification des polymères a ensuite lieu dans les années 50, où on assiste à la naissance du polyéthylène, au polypropylène et au polyester. Notons, au début des années 60, l'apparition de la bouteille d'eau minérale en polychlorure de vinyl (PVC).

Dans les années 70, le choc pétrolier (1973) marque un tournant dans l'histoire de la consommation générale et des produits de la pétrochimie en particulier : les matières plastiques deviennent de plus en plus sophistiqués et leurs propriétés spécifiques.

Aujourd'hui, les polymères sont des produits de haute technologie présents dans tous les domaines : santé, bâtiment, automobile, aérospatiale, emballage, décoration, bureautique, sports... Leurs avantages économiques, leurs performances et leur grande malléabilité ont en fait des matières premières de grande production.

Cependant, l'exploitation massive de la matière plastique, n'étant pas biodégradable, constitue un important problème sur le devenir de notre environnement. Beaucoup de matériaux polymères usagés sont décimés ou stockés un peu partout dans le monde et actuellement sans aucune utilité. Ces déchets de matières plastiques constituent un gisement très important, réparti depuis le secteur industriel jusqu'au niveau du consommateur, en passant par les différents réseaux de distribution et de commercialisation. Cette masse mondiale de matière plastique utilisée ne cesse de s'accroître et le nombre de ses déchets de se multiplier.

Ainsi, le problème de la production et de l'utilisation industrielle et ménagée des polymères devenant de plus en plus étendu et influent, il devient nécessaire de le traiter et de le prendre en considération, afin de prévenir au plus vite de son effet néfaste sur l'environnement et améliorer ainsi nos conditions de vie futures.

Depuis une quinzaine d'années, sous l'impulsion des législations françaises et européennes, le traitement des déchets de matières plastiques est devenu une préoccupation de tout premier plan, tant pour les industriels que pour les consommateurs qui se retrouvent impliqués dans la gestion de leurs déchets par des opérations de tri en amont.

Aujourd'hui, le traitement des déchets de matières plastiques est devenu une réalité industrielle.

## 1.2 Généralités sur les déchets plastiques

On entend par déchet plastique, les résidus de processus de production, de transformation et de consommation, ou encore les produits plastiques destinés à l'abandon.

Il existe donc plusieurs types de déchets plastiques.

### 1.2.1 Les déchets plastiques industriels

Il s'agit de l'ensemble des déchets issus des processus de production des résines (essentiellement trouvés dans les sites pétrochimiques) et de transformation des résines en objets finis (principalement trouvés dans la filière de la plasturgie) :

- Les déchets de production

Ils proviennent des arrêts de réacteur de polymérisation, des purges de réacteurs et des lots déclassés.

Ils sont homogènes et présentent la particularité d'avoir un degré de pollution faible, voire inexistant. On y retrouve, en très grande majorité, les polymères de grande diffusion (PE, PP, PS et PVC).

- Les déchets de transformation

Ils proviennent de toutes les opérations de plasturgie permettant l'obtention de produits finis (extrusion, injection, soufflage, calandrage, ...). On y retrouve, précisément, les carottes, lisières et bordures de ces opérations de thermoformage, les pièces présentant des défauts, ou encore, les chutes de démarrage et d'arrêt de machine.

Ces déchets peuvent être homogènes comme fortement hétérogènes (mélanges provenant de la co-extrusion, co-injection, ...) sont, en général, très peu souillés.

### 1.2.2 Les déchets plastiques de post-consommation

Comme leur nom l'indique, il s'agit de l'ensemble des déchets issus de la consommation industrielle ou des particuliers. On distingue :

- Les déchets agricoles

On retrouve essentiellement les films, sacs, liens, fûts et bidons de produits phytosanitaires. La particularité de ce gisement réside dans ses fortes contamination (terre, cailloux) et pollution.

Il s'agit pour l'essentiel de polyoléfines (PE-bd, PE-hd et PP).

- Les déchets commerciaux ou de distribution

Il s'agit des emballages industriels et commerciaux qui sont en général de bonne qualité. Il y a également les fûts, bidons, sacs de grande contenance, conteneurs présents dans les secteurs de la chimie, l'agroalimentaire, le bâtiment et les travaux publics, pour le conditionnement et le transport de divers autres produits. Ces deux premiers gisements sont le domaine prépondérant des polyoléfines en majorité écrasante.

Enfin, on peut aussi citer le cas des emballages en polystyrène expansé utilisés pour le calage lors du transport de produits fragiles, et dans une proportion moindre, pour les caisses à poisson et les plateaux horticoles.

- Les déchets électriques et électroniques

C'est un gisement issu de la filière de tous les produits électriques et électroniques tels que les ordinateurs, téléphones, appareils électroménagers et câbles en tout genre.

- Les déchets ménagers

Ils sont essentiellement constitués par les emballages.

Pour ce gisement, trois matières principales sont concernées : le PET (bouteilles de boissons gazeuses, eaux minérales, ...), le PE-hd (bouteilles de lait, produits lessiviels, ...), et le PVC (bouteilles d'eau minérale, ...).



La figure 1.1 [2] nous montre la répartition des matières plastiques les plus utilisées dans les emballages ménagers en 2002 sur le territoire français.

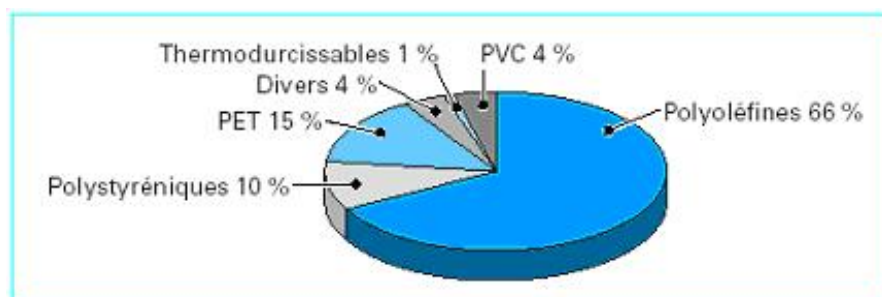


FIG. 1.1 – Répartition des divers types de matières plastiques dans les emballages ménagers

- Les déchets du bâtiment et des travaux publics

On peut citer parmi eux, ceux provenant de l'huissierie, les tuyaux, revêtements de sols, profilés de fenêtre, conduits électriques, câbles, mousses d'isolation, . . .

Ces matériaux sont très fortement mélangés et leur degré de pollution est souvent élevé.

- Les déchets de véhicules de transport

Ils sont représentés par l'ensemble des plastiques constituant les véhicules hors d'usage (VHU) (en moyenne 14% en masse du véhicule).

Ces déchets constituent une fraction très hétérogène par rapport à la nature et l'âge. On y retrouve des polyoléfines, du PVC plastifié et additivé, des polycarbonates, ABS et polystyréniques divers, des polyamides, des polyuréthanes, des résines thermodurcissables diverses, sans oublier les élastomères. Cette fraction ne cesse de croître du fait que les véhicules s'allègent de plus en plus et les équipements de sécurité sont en plein développement.

## 1.3 La valorisation des matières plastiques

La valorisation des matières plastiques prend une ampleur de plus en plus considérable, du fait de l'évolution des réglementations sur l'écologie et les demande sociétale et associative pour la préservation et la qualité de l'environnement.

Cette valorisation s'effectue dans le but de lutter contre la pollution de l'environnement, l'impact néfaste de certaines matières plastiques sur la santé, comme les emballages plastiques en PVC possédant du chlorure, et le gaspillage d'énergie. En effet, la majeure partie des matériaux plastiques sont des dérivés du pétrole et représentent près de 4% de la consommation mondiale des produits pétroliers.

Aujourd'hui, les domaines où la valorisation des déchets plastiques est la plus pratiquée sont l'automobile, avec le recyclage des VHU, l'électrique et l'électronique, l'emballage. D'ailleurs, en ce qui concerne l'industrie automobile, la directive VHU impose qu'en 2005, 85% du véhicule soit recyclable et 95% en 2015.

Outre la valorisation énergétique qui consiste à récupérer, par incinération, l'énergie thermique "stockée" dans le matériau plastique, il existe deux formes de valorisations : le recyclage et l'utilisation des matériaux biodégradables.

### 1.3.1 Le recyclage

Le recyclage est préféré à la valorisation énergétique et est considéré comme l'une des meilleures voies de prise en compte du développement durable et est devenu, à cet effet, une priorité en terme de gestion du développement durable. En Union Européenne, les plastiques recyclés représentent en moyenne 23% de la consommation totale et un sujet particulièrement important dans leur recyclage et la problématique des véhicules en fin de vie. En effet, près de dix millions de véhicules arrivent en fin de vie chaque année en Europe.

Parmi la masse des déchets plastiques, nous retrouvons pratiquement toujours les mêmes polymères qui sont, en toute logique, les thermoplastiques de grande diffusion les plus produits. Les figures 1.2, 1.3 et 1.4 donnent une idée du pourcentage de production des différents polymères, de leurs grandes familles, ainsi que leur présence dans les différents domaines d'application.

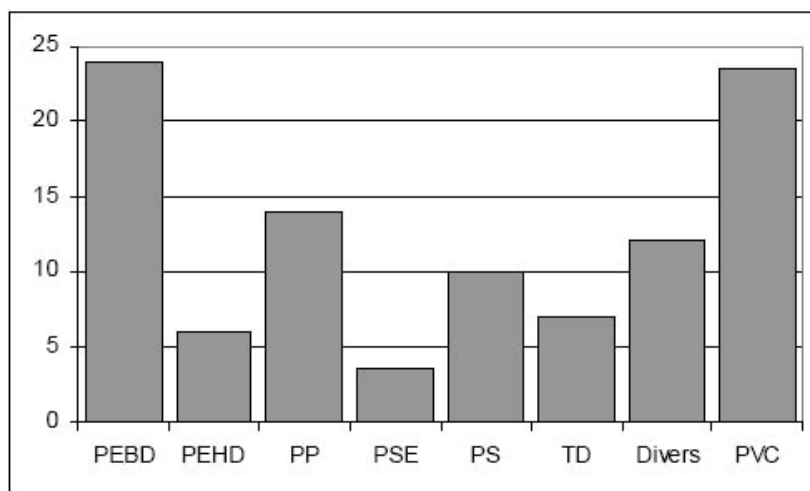


FIG. 1.2 – Répartition de la production de polymères par type de produits en %

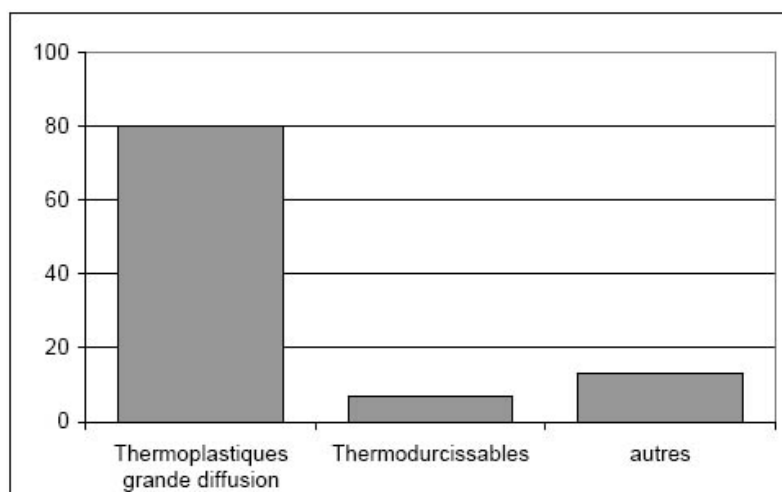


FIG. 1.3 – Répartition de la production des matières plastiques par grandes familles en %

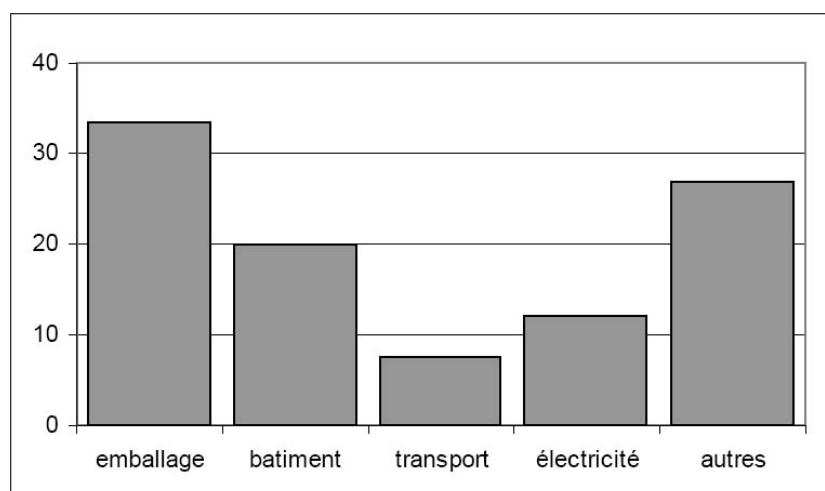


FIG. 1.4 – Principaux domaines d'application des matières plastiques en %

Le recyclage peut lui-même se scinder en deux grandes familles qui sont le recyclage chimique et le recyclage mécanique.

#### **a- Le recyclage chimique**

Le recyclage chimique est un ensemble de techniques chimiques (thermolyse, traitement par solvants) permettant deux procédés différents :

- D'une part, la chaîne polymérisée est cassée pour revenir aux matériaux de base, c'est-à-dire aux monomères qui ont servi à les fabriquer. On parle ici de "recyclage matière premières" ;
- D'autre part, le matériau plastique est dissout grâce à un solvant sélectif, libérant par précipitation les additifs et matériaux secondaires. La matière plastique purifiée (ou régénérée) est ainsi récupérée. Le procédé "Vinyloop" est un exemple de régénération par recyclage chimique.

#### **b- Le recyclage mécanique**

Le recyclage mécanique, aussi appelé "valorisation matière" est un cycle d'opérations mécaniques mis en œuvre dans le but de transformer les polymères usagés en nouveaux produits, soit pour de nouvelles applications, soit pour la même utilisation que précédente, comme les caisses, les palettes, les conteneurs, ou après rénovation dans les équipements automobiles, ou encore, comme les sacs de supermarchés réutilisés comme sacs poubelles.

Suivant les divers procédés intervenant dans le cycle du recyclage mécanique, il existe plusieurs métiers du recyclage :

##### **- La récupération**

Elle consiste à préparer les matières à recycler. Les étapes de cette première phase du recyclage mécanique sont la collecte, le tri et le broyage des déchets qui sont ensuite revendus. Ces activités ne sont pas récentes ; le ramassage des déchets ménagers existant depuis longtemps. Par contre, la valeur ajoutée créée sur ce genre de matières est un

projet dont la pratique effective n'a vu le jour que dans les années 90. Après broyage, les déchets plastiques sont généralement achetés par des "générateurs".

#### - La séparation-régénération

La régénération est une opération qui consiste à éliminer les impuretés présentes dans les polymères. Elle s'accompagne très souvent d'une séparation des différents composants polymères d'un mélange. On obtient ainsi un isolement des différents polymères présents dans le déchet hétérogène et impur de départ, ces polymères étant débarrassés de leurs impuretés à un taux inférieur à 1%. L'inconvénient de cette étape de recyclage est son coût onéreux de mise en œuvre qui constitue, de loin, le plus élevé du cycle du recyclage

Cette opération se divise toujours en quatre étapes principales : le broyage, le lavage, la séparation et le séchage. Il existe une multitude de techniques de régénération qui s'articulent toutes autour des quatre étapes citées ci-dessus. La figure 1.5, à la page suivante, décrit un exemple de processus de régénération-séparation très efficace.

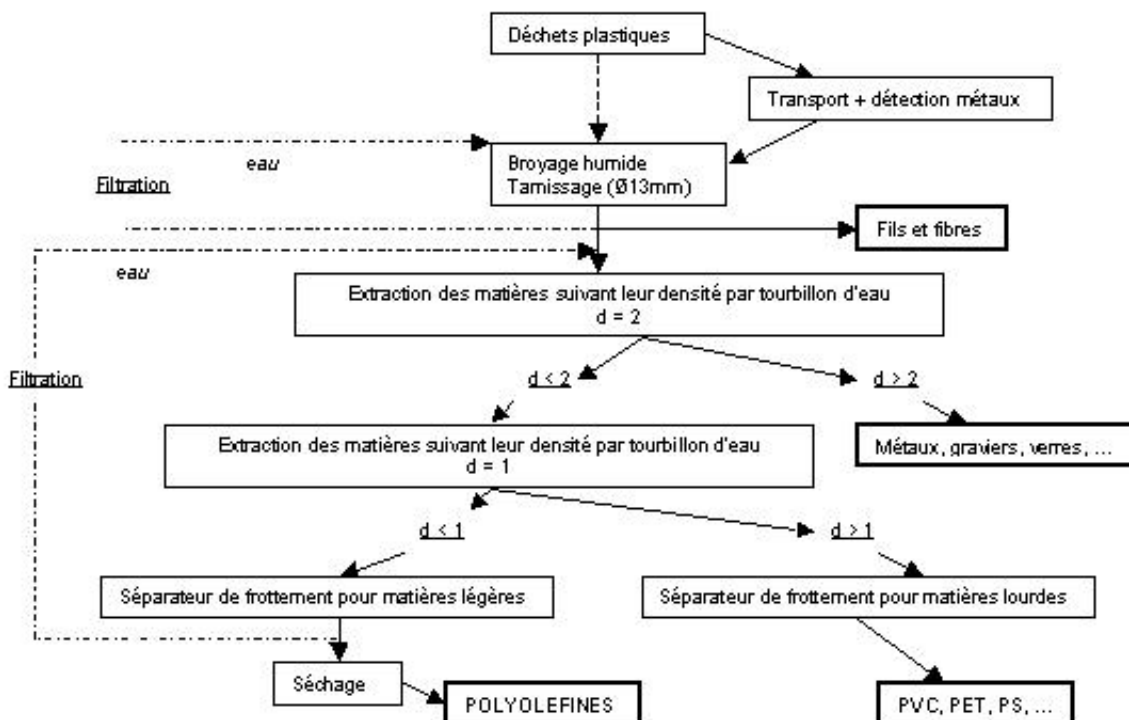


FIG. 1.5 – exemple de processus de régénération-séparation des déchets plastiques

Les matières régénérées sont finalement confectionnées en granulés ou en poudres avant d'être vendus à des transformateurs.

#### - La transformation

Les transformateurs, plus communément appelés "recycleurs", ont le rôle majeur dans la valorisation des déchets puisqu'ils peuvent élaborer de nouveaux produits. Cette étape du recyclage mécanique s'opère par une formulation réalisée par une transformation thermo-mécanique conventionnelle comme l'extrusion ou l'injection plastique. Les résines traitées sont donc principalement des thermoplastiques. Parmi les résines recyclées, on retrouve dans la plupart des cas celles des polymères de grande consommation tels que le polypropylène (PP), le polyéthylène (PE), le polystyrène (PS) ou le polyéthylène téréphtalate (PET). En revanche, les plastiques techniques, plus sensibles à des mises en œuvre thermomécaniques successives intéressent moins les recycleurs.

La formulation conduit à différents types de mélanges hétérogènes qui sont le plus souvent des thermoplastiques chargés. Les charges ont pour rôles d'accomplir diverses fonctions sur les propriétés du produit recyclé par rapport à ses applications futures. Elles peuvent être minérales ou organiques.

Après leur formulation, les produits recyclés à base de polymères sont réduits en granulés et destinés aux producteurs se chargeant de la mise en forme de pièces spécifiques et commerciales.

### **1.3.2 Les matériaux biodégradables**

Les matériaux biodégradables sont des matériaux plastiques dégradés par l'action de micro-organismes aérobies ou anaérobies, directement sous forme d'eau, de méthane ou de  $CO_2$  et, éventuellement, d'une nouvelle biomasse non toxique pour l'environnement. Leurs technologies de production, leur utilisation et leur marché sont en pleine expansion.

L'avantage des matériaux biodégradables réside dans le fait qu'ils sont d'origine agricole, donc apparaissent comme des matières premières renouvelables. Ils permettent également une économie d'énergie dans leur réalisation, car avec des caractéristiques comparables à celles des

polymères de synthèse traditionnels, l'énergie nécessaire à leur création est trois à quatre fois inférieure à celle nécessaire à la fabrication des matériaux plastiques issus de la pétrochimie.

Les polymères biodégradables sont donc bien perçus par le public et répondent aux attentes sociétales, cependant, le coût élevé de ce type de matériaux du fait de leur production encore très faible est un frein à leur utilisation dans le monde de la grande consommation.

## 1.4 La valorisation par le mélange ou "coumpounding"

Dans la majeure partie des cas, les appellations industrielles et commerciales des matières plastiques ne traduisent pas leur composition réelle. En effet, un des exemples que nous pouvons citer est celui du matériau utilisé pour la production de pare-chocs de véhicules, où le matériau de nomination "PP" est en réalité composé de PP, du copolymère du PP, du PE, du copolymère EPDM (éthylène propylène diène monomère) et de talc : [PP/copolymère PP-PE/EPDM/talc]. Ainsi, alors que l'appellation industrielle définit un matériau homogène, il s'agit, la plupart du temps, d'un mélange, avec un constituant polymère majoritaire à plus de 50% (souvent thermoplastique de type polyoléfine), et un autre constituant polymère minoritaire, sans compter les agents compatibilisants et charges de type organique ou minéral.

De la même manière, la formulation par une transformation thermomécanique conventionnelle, qui est une méthode très étendue en vu du recyclage mécanique, vise à reproduire les mêmes type de mélanges, aussi appelés "compounds". D'ailleurs, les procédés de formulation utilisés tant au niveau de la production de matières plastiques neuves que pour le recyclage sont nommés "coumpounding".

Par conséquent, les déchets plastiques et les matières plastiques recyclées sont en réalité des "compounds", constitués d'une résine thermoplastique de base, dans laquelle sont injectés des charges.

### 1.4.1 Les charges

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou organique qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé [3].

Une charge est choisie, pour un polymère donné, en fonction des modifications recherchées pour le produit fini. Dans le cas particulier des matières plastiques, leurs charges doivent satisfaire à un certain nombre d'exigences que sont la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, une action abrasive faible et un bas prix de revient (sauf pour les applications spécifiques de haute performance comme dans l'industrie aéronau-



tique).

De manière générale, les charges de forme sphérique ou sphéroïdale ont une faible action interfaciale avec la matrice polymérique et sont utilisés comme "rembourrage" en remplaçant un certain volume de polymère dans le matériau plastique. De ce fait, les farines et les poudres bon marché sont très utilisées, car elles présentent un intérêt économique en réduisant le coût de l'opération de moulage, diminuant le retrait, et améliorant, parfois même, la résistance mécanique du matériau.

En revanche, les charges de forme fibreuse entraînent une interaction importante entre leur surface et la matrice polymérique et sont souvent employées comme renfort de la matière plastique. Elles permettent d'améliorer les propriétés mécaniques du composite (résistance à la rupture, rigidité) et de mieux conserver ces propriétés à haute température. On leur attribue le nom de renforts ou charges renforçantes.

Il existe six grandes familles de charges en fonction de leur nature :

- Les charges organiques naturelles sont essentiellement d'origine végétale ;
- Les charges organiques synthétiques, sous forme de poudres de polymères, améliorent, dans la plupart des cas, les caractéristiques des résines hôtes. On y retrouve le PE, le PS et les résines phénoliques, ou encore certains polymères fluorés.
- Les charges minérales sont les plus nombreuses sur le marché et leurs applications sont les plus importantes dans l'industrie. Les grandes classes de charges minérales sont les carbonates (craies), les silices, les talcs, la wallostonite, les argiles et les autres poudres minérales.
- Les oxydes et hydrates métalliques dont font partie les céramiques.
- Les verres peuvent se présenter sous forme de fibres, de poudre, de billes creuses ou de microsphères. Ils jouent un rôle de renforts au sein des résines polymériques.
- Le carbone est, à l'instar du verre, un matériau très dur et rigide lorsqu'il est sous forme

de fibre et constitue, par conséquent, un renfort dit de haute performance. Le noir de carbone est aussi utilisé à la fois comme colorant, pigment, barrière anti-UV et antioxydant.

- Les charges métalliques, sous forme de poudres ou de paillettes, sont additionnées aux résines de polymères pour les rendre conductrices d'électricité ou de chaleur. On en a recours en aérospatial et en électronique.

Le tableau 1.1 [3] rassemble les caractéristiques des charges minérales les plus utilisées. Les tableaux 1.2 et 1.3 [3], quant à eux, donnent un bref aperçu des différentes propriétés par l'addition des principaux types de charges, ainsi que les familles de polymères dans lesquelles on peut les incorporer et les taux recommandés.

	CaCO <sub>3</sub>	Silices	Talcs	Wollastonite	Argile (kaolin)	Mica	Al(OH) <sub>3</sub>	Billes de verre
Eau de constitution .....	< 2,0 %	< 0,1 %	4,8 %	0,5 %	< 0,5 %	< 5,0 %	34,6 %	< 0,1 %
Densité .....	2,60 à 2,75	2,65	2,7 à 2,8	2,9	2,5	2,74 à 2,95	2,42	2,48
Dureté Mohs .....	3,0	7,0	1,0	4,5	4,0 à 6,0	2,4 à 3,0	2,5 à 3,5	5,5
Température de fusion ou de décomposition..... (°C)	900	573	380	1 540	1 810	1 300	200 à 600	1 200
Indice de réfraction .....	1,49	1,55	1,59	1,63	1,56	1,54 à 1,69	1,58	1,51
Couleur .....	blanc	blanche	gris blanc	blanche	blanc	or, brun ou blanc	blanc	incolore
Forme .....	prismatique granulaire	sphérique	lamellaire	aciculaire (1)	lamellaire	lamellaire	lamellaire	sphérique
Taux d'humidité .....	< 0,2 %	< 0,1 %	< 0,3 %	< 0,2 %	≤ 0,5 %	< 0,3 %	< 0,3 %	< 0,1 %

(1) qui cristallise en fines aiguilles.

TAB. 1.1 – Propriétés physico-chimiques des principales charges minérales

Type de charges	Propriétés	Utilisation dans les résines	Taux d'incorporation (% en masse)
<b>Produits organiques naturels</b>			
– Farine de bois	Réduit le retrait au moulage. Confère de bonnes propriétés électriques et de résistance aux chocs.	phénoliques, alkydes, mélamine, polyesters insaturés, aminoplastes.	4 à 5
– Farine d'écorces de fruits	Améliore l'écoulement ainsi que la brillance. Diminue l'absorption d'eau.	alkydes, mélamine, phénoliques, polyesters insaturés, PP, PE, ABS.	4 à 5
– Amidon	Permet d'obtenir des matériaux biodégradables.	PVAC, PE.	7
<b>Poudres organiques synthétiques</b>			
– Élastomère styrène/butadiène	Accroît la résistance aux chocs.	phénoliques, polyesters, insaturés, polyacétals, PA, PC, PPS.	1 à 2
– PTFE et polymères fluorés	Améliorent la résistance aux chocs et la lubrification.		
– Acéto-butyrates de cellulose	Réduit le retrait au moulage.	polyesters renforcés.	1 à 2
– Polyéthylène	Améliore l'état de surface.		
<b>Carbone</b>			
– Noir de carbone ( <i>carbon black</i> )	Stabilisant aux ultraviolets. Facilite la réticulation.	PVC, PE, PUR, PI.	jusqu'à 50 (en volume)
– Graphite	Améliore la rigidité et la résistance au fluage.	époxydes, PI, PPS, PTFE.	
– Coke de pétrole	Améliore la résistance en traction et la résistance à la chaleur.	époxydes, phénoliques, PVC.	
– Sphères creuses de carbone (carbosphères)	Abaissent la densité.	polyesters insaturés, époxydes, phénoliques.	30 à 50
<b>Métaux :</b> aluminium, acier, cuivre, zinc, nickel, bronze	Améliorent la résistance à la chaleur et la conductivité électrique.	polyacétals, polyamides, polypropylène.	
<b>Oxydes métalliques</b>			
– Oxyde d'aluminium	Améliore la résistance au feu.	polyesters, insaturés, PVC.	
– Oxyde de magnésium	Augmente la viscosité des <i>prémix</i> , ainsi que la dureté et la rigidité des pièces.	polyesters insaturés.	
– Oxyde de zinc	Augmente la conductivité électrique et la résistance aux rayons ultraviolets.	PP, PUR, polyesters insaturés.	
– Oxyde de béryllium	Augmente la conductivité électrique.	époxydes.	
<b>Silices</b>			
– Sables de silice	Réduisent le retrait au moulage.	époxydes phénoliques, polyesters, silicones.	
– Quartz	Améliore la résistance à l'humidité et la résistance à la fissuration.	époxydes, polyoléfines, PVC, polyamides, polyesters insaturés, phénoliques, polymères fluorés.	
– Farine de diatomées ( <i>trépoli</i> )	Agent <i>glissant</i> pour les films. Augmente la résistance à la compression des produits alvéolaires. Améliore l'isolation thermique, électrique et phonique.	polyuréthanes, polyesters insaturés, PVC, époxydes.	
– Silice thermique (ou de pyrogénéation)	Augmente la viscosité, améliore la thixotropie.	thermodurcissables et thermoplastiques.	
<b>Silicates</b>			
– Talcs	Apportent une pigmentation blanche à gris clair. Améliorent l'écoulement. Accroissent la rigidité des pièces.	PUR, polyesters insaturés, PVC, époxydes. PE, PS, PP et PA.	
– Micas	Accroissent la rigidité et la dureté des pièces. Facilitent le démoulage.	PUR, polyesters insaturés.	> 25
– Kaolin	Améliore le moulage des <i>prémix</i> .	polyesters (SMC), polyesters vinyliques.	20 à 45
Pour les abréviations normalisées des polymères, se reporter à l'article <i>Symboles</i> [A 3 012] dans le présent traité.			

TAB. 1.2 – Propriétés et utilisation des principales charges dans les plastiques

Type de charges	Propriétés	Utilisation dans les résines	Taux d'incorporation (% en masse)
– Wollastonite	Réduit l'absorption d'eau. Améliore la résistance au choc et les propriétés thermiques et diélectriques.	époxydes, polyoléfines, PVC, polyamides.	1 à 50
– Verre (microsphères)	Augmente le module d'Young en compression. Facilite le remplissage du moule.	thermoplastiques et thermo durcissables.	10 à 40
<b>Autres poudres minérales</b>			
– Carbonate de calcium	Améliore la brillance ainsi que la résistance mécanique. Facilite l'extrusion.	polyesters insaturés. PE, PP, PVC, PPS.	5 à 33
– Titanate de potassium	Améliore la stabilité dimensionnelle et réduit le cycle de moulage.	polyamides.	40
– Sulfate de baryum	Accroît la densité et la résistance à la compression.	PUR alvéolaires, PVC.	10 à 25
– Ferrite de baryum	Confère des propriétés magnétiques.	PVC.	jusqu'à 90
Pour les abréviations normalisées des polymères, se reporter à l'article Symboles [A 3 012] dans le présent traité.			

TAB. 1.3 – Propriétés et utilisation des principales charges dans les plastiques (suite)

### 1.4.2 La compatibilisation

La compatibilisation est une technique qui réside sur l'addition, en très faible concentration, d'éléments dans un mélange de polymères, ces éléments ayant pour fonction spécifique de renforcer la cohésion du mélange, autrement dit, d'améliorer la miscibilité entre les différentes phases polymères présentes.

Dans le domaine de la plasturgie, la compatibilisation est un processus essentiel et une pratique très fréquente, car les matériaux polymères sont très rarement miscibles entre eux. En effet, d'ordinaire, les polymères possèdent souvent des structures chimiques trop différentes pour permettre leurs chaînes macromoléculaires de créer des liaisons chimiques ou physiques permettant leur mélange d'être homogène. De plus, rares sont les espèces de polymères dont les mailles sont suffisamment voisines pour permettre une co-cristallisation. Cette rareté de trouver des polymères miscibles est davantage accentuée par l'existence de polymères non-miscibles et de structures chimiques pourtant identiques ; tel est le cas des PEhd et PEbd.

Ainsi, les agents compatibilisants accomplissent plusieurs rôles, en vue d'améliorer la miscibilité d'un mélange de polymères :

- améliorer la dispersion d'une ou plusieurs phase/s présente/s dans une autre ;
- renforcer la cohésion au niveau de l'interface entre les différentes phases présentes.

La compatibilisation est très fréquente dans la préparation ou le recyclage des mélanges de polymères. Elle peut aussi être utilisée dans la formulation de "coumpounds" à base de polymère où les charges ne sont pas de nature polymère. Elle permet à la fois une consolidation interfaciale et une meilleure dispersion des phases en présence en empêchant la réalisation du phénomène de coalescence. Les compatibilisants, ou "émulsifiants", peuvent être regroupés en deux catégories différentes :

– les compatibilisants non-réactifs

Ils permettent la compatibilisation physique, c'est-à-dire l'entremêlement des macromolécules. En effet, ce type de compatibilisant est miscible avec deux ou plusieurs phases du mélange, permettant ainsi de s'intercaler à leur interface et d'assurer leur cohésion physique.

– les compatibilisants réactifs

Ils permettent la compatibilisation chimique, c'est-à-dire la création de liaisons chimiques entre les macromolécules. De la même façon que pour les compatibilisants non-réactifs, ils sont réactifs avec une ou deux phases du mélange, permettant ainsi de se placer à l'interface et d'assurer une cohésion chimique.

Notons que beaucoup de compatibilisants peuvent assurer à la fois les deux modes de compatibilisation, comme certains copolymères greffés qui, comme leur nom l'indique, sont greffés (liaison chimique) à l'une des phases du mélange et peuvent être miscibles (liaison physique) avec une autre.

De ce fait, les compatibilisants que l'on retrouve sur le marché sont exclusivement des copolymères à bloc et des copolymères greffés. Ces copolymères ont le plus souvent, comme monomères de base, ceux des polymères (homopolymères) présents dans le mélange concerné.

## 1.5 Caractéristiques des polymères recyclés

Les caractéristiques générales des déchets plastiques et des polymères recyclés, d'un point de vue mécanique, se manifestent par le fait qu'ils ont subi, lors de leurs utilisations précédentes, deux phénomènes de taille.

D'une part, les résines polymériques usagées ou recyclées ont éprouvé une dégradation due au vieillissement (fatigue, température, ...), à l'oxydation ou à l'absorption d'eau. Cette dégradation se manifeste par des coupures de chaînes et des réticulations survenant au niveau des macromolécules. La conséquence de ces phénomènes est l'altération progressivement des propriétés thermomécaniques des matériaux plastiques.

D'autre part, une pollution dépendant de l'origine propre ou sale de l'utilisation précédente de ces déchets peut entraîner une détention d'impuretés qui influe entre autre, de manière négative, sur leurs propriétés thermiques et mécaniques.

Il faut noter que ces deux facteurs sont intimement liés et que l'on ne peut pas prendre en compte l'un d'eux sans pour autant négliger l'autre. Leur existence plus ou moins étendue dépend, bien entendu, de l'origine des déchets. Par exemple, il est tout à fait logique que les déchets plastiques industriels subissent très peu de dégradation et ont un taux d'impuretés extrêmement faible. Leur existence et leur influence peuvent même s'avérer négligeables concernant les déchets de production (provenant directement des réacteurs de polymérisation).

## 1.6 Application au polypropylène

Dans le chapitre 6, nous avons choisi d'étudier le comportement mécanique des polymères recyclés, à savoir des mélanges à base de polymères. Pour cela, nous avons choisit un mélange à base de polypropylène chargé de talc. Ainsi, cette section est consacrée à la présentation générale du polypropylène.

Parmi les grands polymères, le polypropylène est celui dont le taux de croissance est le plus élevé avec une moyenne en Europe de 5,2 % par an sur la période 1997-2001 et une prévision proche des 6 % pour les années à venir. La raison de ce succès est liée à l'adaptabilité du polypropylène qui peut aussi bien être injecté, extrudé, thermoformé, filé ou soufflé, ce qui lui permet de se substituer aisément aux matériaux traditionnels (bois, aluminium, verre, . . .) ou à d'autres matières plastiques.

Le polypropylène est dans l'ordre de la nomenclature, le deuxième polymère polyoléfine après le polyéthylène. Il est composé d'unités monomères issues de l'alcène à trois carbones, le propène ou propylène.

A l'échelle des macromolécules, leur organisation dans l'espace est fonction de la structure chimique et de l'encombrement stérique des groupes qui les composent. On conçoit que les propylènes isotactique et syndiotactique ont une structure organisée et une tendance à cristalliser, alors que le polypropylène atactique sera amorphe.

### 1.6.1 Synthèse du polypropylène

La synthèse du polypropylène se fait par catalyse de type Ziegler-Natta. Le monomère de polypropylène vient se fixer sur le catalyseur en s'orientant selon le champ électrique qu'il induit. Un autre monomère peut alors venir se placer entre le catalyseur et le premier monomère et faire croître la chaîne. Par ce procédé, les monomères se placent majoritairement de la même façon, ce qui provoque la formation de polypropylène isotactique semi-cristallin.

Les premières synthèses donnaient environ 40 % de polypropylène isotactique et 60 % de polypropylène atactique. Actuellement, de nouveaux catalyseurs permettent de mieux maîtriser la

stéréochimie des additions et d'obtenir jusqu'à 90 % de polypropylène isotactique. De plus, le résidu de polypropylène atactique peut-être éliminé par rinçage avec de l'heptane. Concernant le polypropylène syndiotactique, celui-ci est plus difficile à synthétiser car il faut alterner la stéréochimie de l'addition des monomères de polypropylène.

### 1.6.2 Additifs, charges et renforts

Pour la transformation, les matières premières s'utilisent rarement brutes. Les producteurs disposent d'une gamme de produits divers et adaptés à l'utilisation des produits. Toutes les propriétés du polymère de base peuvent être modifiées sous l'influence de l'adjuvant choisi.

Parmi les additifs du polypropylène, les produits à très faible masse moléculaire sont le plus souvent utilisés, tels que les anti-UV, les plastifiants, les antioxydants, les stabilisants, ...

Les charges que l'on retrouve le plus souvent dans le polypropylène sont des produits minéraux tels que le talc et le mica, dont la fonction est, d'une part, de modifier les propriétés mécaniques, thermiques ou électriques, et d'autre part, de réduire le coût de revient de la matière première. En général, pour le polypropylène, on emploie les charges pour augmenter la rigidité et diminuer le retrait.

Les renforts que l'on rencontre le plus souvent dans le cas du polypropylène sont les fibres de verre, longues ou courtes, ou des billes de verre. Leur fonction se situe essentiellement au niveau des caractéristiques mécaniques. En effet, la présence de renforts en fibres de verre entraîne une nette augmentation des modules et des résistances au déformement, cependant, de la ductilité du matériau qui a tendance à fragiliser.

### 1.6.3 Applications du polypropylène

Le polypropylène fait partie des polymères de grande consommation les plus répandus avec le PVC, le polyéthylène, le PET, le polystyrène, ... Ses applications sont très nombreuses, d'autant plus que le polypropylène se comporte très bien vis à vis des charges et des renforts. De plus, il peut être mis en œuvre par de nombreux procédés : injection, extrusion, thermoformage, extrusion soufflage, ...



Ainsi, le polypropylène et ses copolymères sont utilisés dans des domaines très divers :

- industrie automobile : planches de bord, pare-chocs, garnitures intérieures, ... ;
- les emballages : corps creux, sacs, tupperware, ficelles, films ;
- l'électroménager ;
- l'électricité et l'électronique : gainage, ldots ;
- les jouets

#### **1.6.4 Propriétés**

Le tableau 1.4 présentent les principales caractéristiques mécaniques générales des polypropylènes, copolymères de polypropylène et polypropylènes chargés et renforcés.

Notons par ailleurs que le module d'Young du polypropylène peut varier de 1100 à 1800 MPa et sa température de transition vitreuse se situe au alentours de 0 °C.

Propriétés	PP	PP + 20% verre	PP + 40% verre	PP + 20% talc	PP + 30% talc
densité	0,9	1,1	1,22	1,04	1,21
contrainte au seuil (daN/mm <sup>2</sup> )	3 à 5	3,2		3,3	3,3
allongement au seuil (%)	7 à 10				
contrainte rupture (daN/mm <sup>2</sup> )	2,5 à 4,5	2	10	2,8	2,9
Allongement à la rupture (%)	150 à 600	20	3	20	8
module de flexion (daN/mm <sup>2</sup> )	120 à 130	250	800		400
résistance au choc (charpy) (mJ/mm <sup>2</sup> )	3 à 5	5		5	4

TAB. 1.4 – Propriétés mécaniques de divers polypropylènes

## 1.7 Conclusion

Ce chapitre présente la problématique du recyclage des matières plastiques. Les polymères sont devenus aujourd'hui des produits de grande consommation, en particulier les thermoplastiques ( PE, PVC, PP, PET, PS, ... ), du fait de leurs avantages économiques, leurs performances variées et de leur facilité de mise en œuvre par rapport aux matériaux dits traditionnels. Rares sont les domaines dans lesquels les matières plastiques ne sont pas utilisées.

Toutefois, cette grande diffusion des matières plastiques n'est pas sans conséquence et pose un problème majeur d'un point de vue écologique et environnemental. La cause de ce problème réside dans le fait que les polymères sont, dans la très grande majorité des cas, des matériaux non biodégradables, ce qui pose une difficulté de taille dans la gestion des déchets plastiques.

Les solutions de ce problème environnemental résident alors dans le recyclage des matières plastiques et la valorisation des polymères recyclés. Il existe un grand nombre de voies destinées à cette valorisation. Elles peuvent être classées en deux grandes catégories : le recyclage proprement dit qui consiste à redonner une seconde vie aux polymères recyclés par une réutilisation de leur matière, et le remplacement progressif des polymères de grande consommation par des matériaux polymères biodégradables (pour les sachets plastiques par exemple). Parmi ces deux solutions, la première est de loin, la plus couramment pratiquée et se décompose en deux techniques ; d'une part le recyclage mécanique qui consiste à reconsidérer la matière des polymères recyclés en lui faisant subir une régénération éventuelle et une formulation lors de laquelle des charges y seront incorporées et d'autre part, le recyclage chimique qui procède à une transformation chimique (décomposition de la macromolécule en molécules de base) où les monomères du polymère sont reproduits et utilisés pour d'autres applications (détergents, ... )

Ainsi, notre travail s'intéresse d'un point de vue général au recyclage mécanique des matières plastiques. Comme ces matériaux constituent presque exclusivement des mélanges hétérogènes du fait de la formulation dont ils font l'objet durant leur synthèse et leur mise en forme, on s'attachera à modéliser et caractériser leur comportement mécanique.

Le polymère sur lequel nous nous sommes penchés dans ce travail est le polypropylène. Ce polymère est un polyoléfine généralement semi-cristallin (isotactique) faisant partie des thermoplastiques de grande consommation et dont le taux de croissance est le plus élevé en Europe. Son recyclage est donc devenu une priorité dans le recyclage des déchets plastiques. Etant donné que le polypropylène recyclé se caractérise par la présence d'adjuvants divers (additifs, charges, renforts) suivant son utilisation d'origine, nous choisirons de nous concentrer sur les mélanges de polypropylène chargé en talc, qui sont les produits les plus couramment rencontrés avec

le polypropylène renforcé en fibres de verre dans l'industrie et la consommation utilisant ce thermoplastique.



## Chapitre 2

# Comportement mécanique des matériaux polymères

## 2.1 Introduction

Les caractéristiques distinctives des polymères, tant du point de vue de leur propriétés mécaniques que physico-chimiques, suscitent un enthousiasme et une utilité grandissante dans l'industrie, afin de satisfaire des cahiers de charges avec des contraintes techniques de plus en plus complexes dans des domaines aussi exigeants que l'automobile, l'aéronautique, le sport et les loisirs ou encore le matériel médical. En effet, la grande variété de thermoplastiques, des polymères de grande diffusion (ou consommation) aux "technoplastiques", représente un ensemble primordial pour la réalisation d'un nombre accru de pièces dont l'exigence technique ne peut être fournie par des matériaux plus traditionnels comme les métaux et les céramiques.

L'une des nombreuses conséquences de l'engouement récent pour ce type de matériaux est le développement de la recherche, notamment dans la caractérisation réaliste de leur comportement mécanique. La détermination des caractéristiques mécaniques permet la mise au point d'une modélisation de plus en plus précise des matières plastiques, favorisant ainsi, d'une part, le développement de nouveaux matériaux ou l'amélioration de leurs caractéristiques, et d'autre part, leur valorisation et leur recyclage.

La difficulté majeure de la modélisation mécanique des polymères réside dans la complexité de leur comportement, très sensible à la température et à toute sollicitation mécanique. En effet, les propriétés des matériaux polymères sont beaucoup plus sensibles que celles des métaux aux influences extérieures, telles que la température, la durée de chargement, l'intensité et le type de chargement. Leur rigidité est en général inférieure de deux ordres de grandeur environ à celui des métaux, tandis que leur résistance mécanique peut différer d'un ordre de grandeur [4]. L'hypothèse selon laquelle les matériaux polymères peuvent être étudiés en utilisant la seule loi de Hooke, c'est-à-dire selon une dépendance linéaire entre la contrainte et la déformation, ne peut être satisfaite que dans des cas d'exception, car le comportement spécifique des matériaux polymères est lié au fait que les macromolécules ne réagissent pas toujours instantanément à l'application d'une sollicitation. En effet, la déformation macroscopique n'est que le reflet d'une modification microscopique des configurations des chaînes dans le matériau. Les phénomènes viscoélastiques et élastoviscoplastiques trouveraient donc leur origine dans les mouvements intra ou intermoléculaires des chaînes par rapport à une position d'équilibre statique.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons tout d'abord à présenter, d'un point de vue global, le comportement mécanique des matériaux polymères, afin d'illustrer de façon simple les princi-

---

paux effets agissant sur les réponses mécaniques de ce type de matériaux. Puis nous préciserons les différentes classes de comportement issues des phénomènes intervenant dans les processus de déformation de ces matériaux. Pour cela, une analyse thermodynamique des processus irréversibles en présence est nécessaire, avant de distinguer les différentes classes de comportement mécanique ainsi que les principales lois constitutives, ou modèles représentatifs, mis en œuvre pour les décrire.



## 2.2 Présentation générale du comportement mécanique des polymères

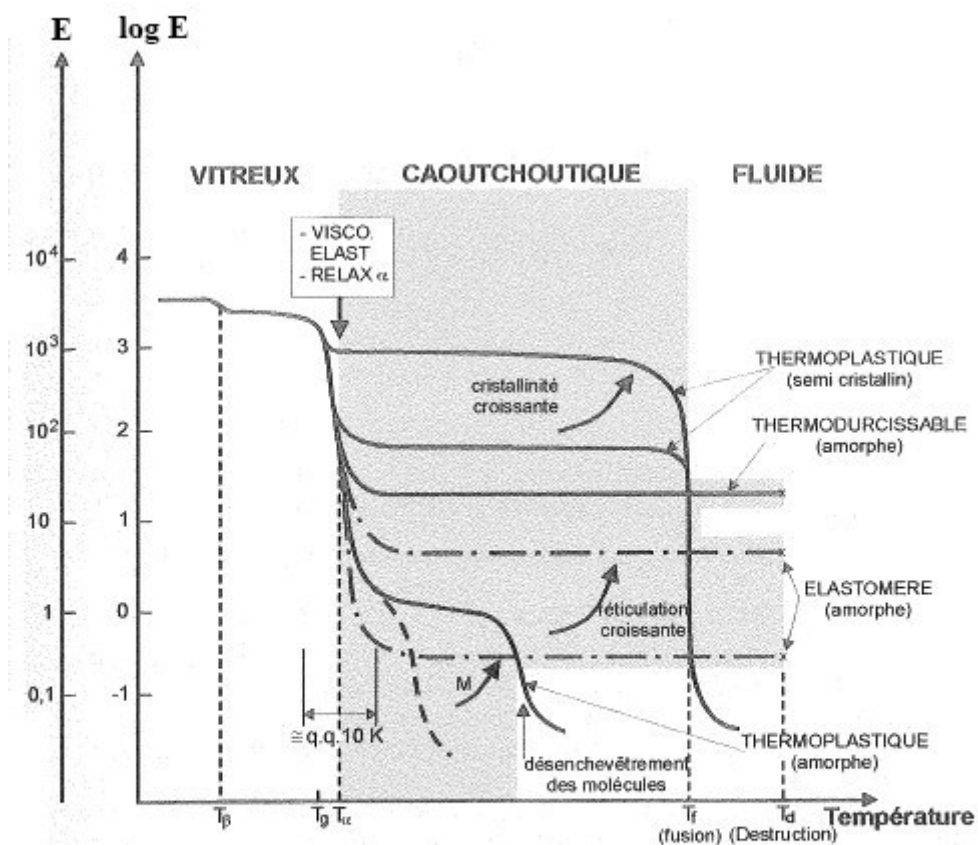
Les matériaux polymères sont formés d'unités structurales qui sont les motifs monomères liés entre eux par des liaisons intermoléculaires faibles appelées liaisons de "Van Der Waals". Ces liaisons assurent la cohésion d'un polymère surtout aux basses températures. De plus, dans la plupart des polymères, principalement les thermoplastiques, qui nous intéressent dans cette étude, les mouvements relatifs de segments macromoléculaires devenant possibles dans un certain domaine d'état lié à la température (manifestations thermiquement activées), font naître des phénomènes dissipatifs traduits globalement par la viscoplasticité. Par conséquent, d'un point de vue mécanique, un matériau polymère se caractérise par un comportement possédant simultanément trois composantes :

- une composante élastique réversible, qui prédomine dans les basses températures, notamment en deçà de la température de transition vitreuse  $Tg$ , pour des vitesses de sollicitation élevées, ou pour des chargements très faibles, avec un module et une loi de comportement de Hooke ( $\sigma = E \epsilon$ );
- une composante viscoplastique irréversible dépendant du temps, qui prévaut aux températures élevées et aux grandes vitesses de sollicitation. Dans ce cas, la contrainte est liée à la vitesse de déformation par la loi de Newton ( $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$ );
- une composante visqueuse ou élastoviscoplastique combinant les deux caractères précédents à un domaine de températures intermédiaires supérieures à la température de transition vitreuse. La déformation est non seulement fonction de la température, mais aussi du temps (ou de la vitesse de déformation). Lorsque la contrainte est supprimée, il subsiste une déformation rémanente qui disparaît au cours du temps parfois lentement (viscoélasticité linéaire) ou tend vers une faible composante irréversible (élastoviscoplasticité).

Il est primordial de noter que parmi les différentes catégories de matériaux polymères, la viscoélasticité donne sa nature au comportement mécanique essentiellement chez les matières thermoplastiques. Ainsi, pour cette classe de polymères, l'effet viscoélastique peut être très prononcé et se caractérise par sa forte dépendance de la température et du temps.

### 2.2.1 Influence de la température

Tout d'abord, il faut noter que toutes les propriétés (mécaniques, physiques, chimiques, ...) des thermoplastiques sont entièrement définies par le domaine d'état, lié à la température, dans lequel ils se trouvent. Pour les matières plastiques, on peut distinguer trois états fondamentaux, comme le montre la figure 2.1.



- Les phases amorphes possèdent une transition vitreuse  $T_g$
- Les phases cristallines fondent à  $T_f$  (fusion des lamelles)
- Plus la réticulation est élevée, plus le module augmente (dans l'état caoutchoutique)
- $T_g$  (transition vitreuse) et  $T_\alpha$  (relaxation principale  $\alpha$ ) sont voisines dans les conditions usuelles
- La lettre  $M$  représente la masse moléculaire

FIG. 2.1 – Module d'Young  $E$  des polymères en fonction de la température  $T$  pour une vitesse de déformation constante  $\dot{\epsilon}$

L'état vitreux ou d'élasticité d'origine énergétique, ou état solide, est obtenu lorsque le matériau est refroidi à une température inférieure à la température de transition vitreuse  $Tg$ , et dans lequel les thermoplastiques montrent un comportement fragile de solides vitreux, semblable à celui du verre, et possèdent un module d'élasticité élevé.

A l'état caoutchoutique ou d'élasticité d'origine entropique, les matières plastiques sont ductiles et se comportent de manière analogue au caoutchouc. Les chaînes se déploient dans le sens de la contrainte appliquée. Il est important, pour cet état, de souligner que seul le comportement de la phase amorphe est modifié, car le passage à la zone de température caoutchoutique a pour principale conséquence d'activer le mouvement des segments macromoléculaires. Autrement dit, les enchevêtrements ne sont plus rigides et peuvent glisser les uns par rapport aux autres.

Si la température est très élevée, si les nœuds de réticulation n'existent pas et si les lamelles cristallines ont fondu, le polymère est dans l'état fluide, c'est-à-dire que les chaînes de molécules glissent les unes par rapport aux autres. Le matériau se comporte alors comme un fluide et est caractérisé par sa viscosité.

Le passage de l'état vitreux à l'état caoutchoutique définit la zone de transition vitreuse, lors de laquelle le module d'élasticité peut chuter de plusieurs ordres de grandeurs ; d'un facteur 10 à 100 environ [4]. La température pour laquelle l'évolution des propriétés est la plus nette est la température de transition vitreuse  $Tg$ . Dans le sens du ramollissement, lorsque la température croît pour se rapprocher de la température  $Tg$ , des effets de relaxation secondaire se manifestent par des mouvements localisés et activés thermiquement de quelques unités constitutives de la chaîne principale de la macromolécule. Quand la température atteint la température  $Tg$ , il se produit la relaxation principale où les mouvements des segments de chaîne deviennent collectifs et les effets viscoélastiques sont très importants.

D'une manière plus générale, le comportement d'un même polymère thermoplastique peut être rigide et fragile à basse température, et en revanche souple et très ductile à haute température. Dans un domaine de température transitoire, pour des températures supérieures à la température  $Tg$  et s'étendant sur 10 °C à 40 °C [4], il apparaît de la viscoélasticité intense.

### 2.2.2 Influence du temps

La dépendance du comportement mécanique des polymères au temps est caractérisée par la réversibilité retardée ou différée de leur déformation dans le temps. Cette présence de déformations différées peut être mise en évidence par l'expérience de fluage-recouvrance qui consiste à imposer à un échantillon une contrainte constante  $\sigma_0$  pendant un intervalle de temps donné avant de la supprimer, et à suivre la déformation qui en résulte en fonction du temps (figure 2.2).

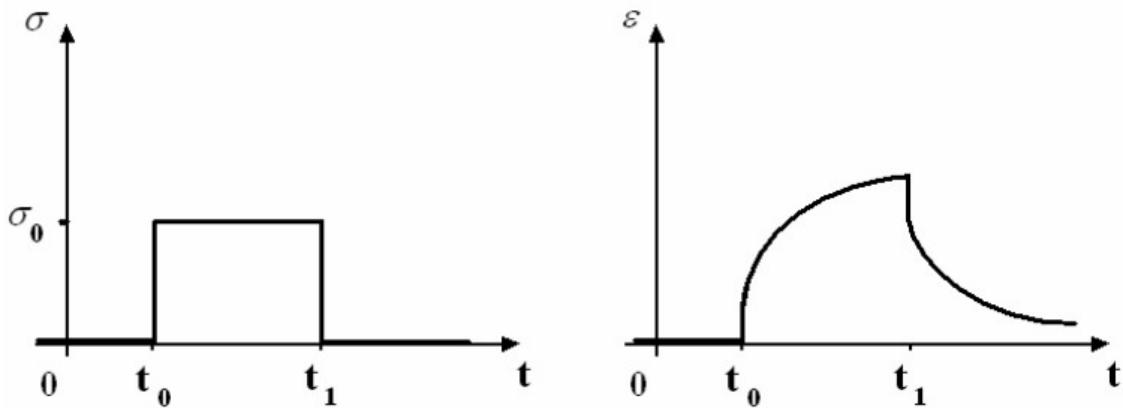


FIG. 2.2 – Réponse d'un matériau élastoviscoplastique lors d'un essai de fluage

Lors d'une telle expérience, on remarque un saut de la déformation correspondant à l'élasticité instantanée du matériau, puis une augmentation progressive dans le temps. En revanche, quand le chargement appliqué est supprimé, on assiste à une contraction élastique immédiate de l'échantillon suivie d'un retour différé vers sa longueur initiale. L'expérience duale, à savoir l'essai de relaxation (figure 2.3), met quant à elle clairement en évidence la réversibilité retardée de la contrainte.

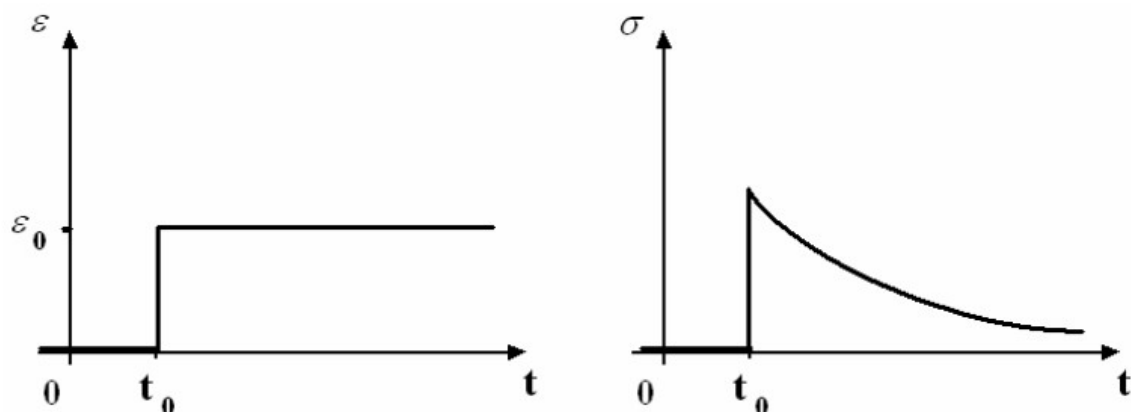


FIG. 2.3 – Réponse d'un matériau élastoviscoplastique lors d'un essai de relaxation

Ces expériences simples montrent que les relations entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\epsilon$  que l'on établit dans les essais mécaniques sont aussi dépendantes de la vitesse de chargement  $\dot{\sigma}$  ou de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ .

### 2.2.3 Différents processus de déformation

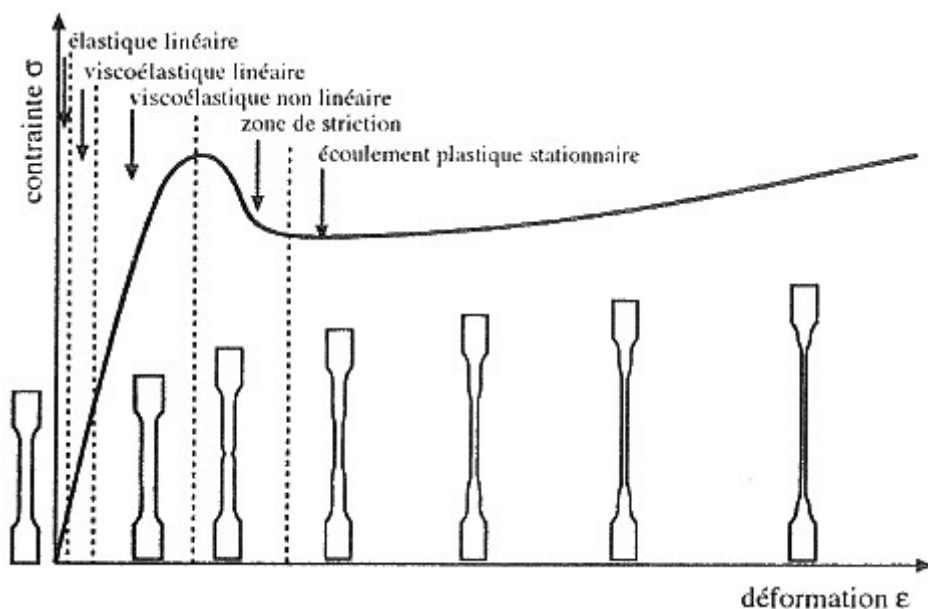


FIG. 2.4 – Courbe contrainte-déformation (essai de traction) d'un thermoplastique semi-cristallin et représentation schématique d'une éprouvette de traction dans les différentes zones

Plusieurs processus de déformation différents interviennent dans la réponse mécanique d'un polymère. Ces processus n'ont pas lieu au même instant et se succèdent le long du trajet de chargement. Ainsi, lors d'un essai de traction à température ambiante, la courbe contrainte-déformation type des matières plastiques (figure 2.4) peut être décomposée en plusieurs domaines définissant le régime de déformation qui y prédomine.

En observant la figure 2.4, on peut définir dans l'ordre, le long du trajet de chargement, les processus de déformation suivants :

- l'élasticité linéaire a lieu pour les très petites déformations au voisinage de l'instant  $t = 0$  du début du chargement. C'est un régime dit à réversibilité instantanée [5] ; c'est-à-dire que le chemin suivi dans le plan  $(\sigma, \epsilon)$  est réversible. La limite de la déformation élastique est reconnaissable sur les courbes contrainte-déformation à la déviation par rapport à la réponse linéaire du matériau.
- la viscoélasticité linéaire se produit pour les petites déformations et, par définition, délimite le domaine d'application du principe de superposition de Boltzmann (que nous verrons plus tard dans la suite de ce chapitre). Dans cette partie du trajet du chargement, le module de fluage n'est pas constant, comme le module d'Young en élasticité linéaire, mais dépend du temps. Ce phénomène est dit à "réversibilité retardée" [5] : lorsque la contrainte est supprimée, il subsiste une déformation rémanente (ou différée) qui disparaît entièrement au cours du temps parfois lentement. La courbe contrainte-déformation pour un cycle de charge et décharge (figure 2.5) présente une hystérésis qui traduit le caractère dissipatif du phénomène.

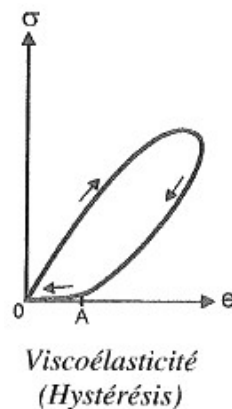


FIG. 2.5 – Courbe d'hystérésis du comportement viscoélastique linéaire lors d'un essai cyclique de traction-compression à vitesse de déformation constante

- Au-delà de la zone de viscoélasticité linéaire, pour les petites et moyennes déformations, la courbe contrainte-déformation parcourt un domaine où le module de fluage ne dépend plus uniquement de la durée du chargement, mais également de l'intensité du chargement ; il s'agit ici de la viscoélasticité non linéaire. Dans cette partie de la courbe, les composantes irréversibles de la déformation totale deviennent non négligeables et dominant de plus en plus. Cette irréversibilité est de nature visqueuse, à savoir issue du glissement entre les segments de chaînes que l'on nomme écoulement plastique.
- Lorsque l'on atteint le seuil d'écoulement  $\sigma_y$ , appelé aussi seuil de plasticité, le phénomène de striction survient et on rentre dans le domaine élastoviscoplastique des grandes déformations. Cette partie de la courbe peut se décomposer en deux zones. La première est une zone d'instabilité plastique où la chute de la contrainte est due à la striction. Il faut noter que le phénomène de striction existe pour certains polymères seulement, alors que pour d'autres, le seuil d'écoulement est inexistant. Cette première zone est suivie d'une seconde qui correspond à un allongement du polymère pratiquement à vitesse constante caractérisant le phénomène d'"étirage" [6] ou d'écoulement plastique stationnaire. Ainsi, à l'écoulement plastique dû à la viscosité, vient s'ajouter un phénomène irréversible vraisemblablement généré par des bandes de cisaillement, c'est-à-dire des déformations plastiques localisées dans une zone étroite.

Par ailleurs, ces processus de déformation intervenant dans le comportement mécanique général des matériaux polymères représentent autant de classes de comportements différentes dont l'étude s'avère nécessaire pour la caractérisation de ces mêmes matériaux. Par conséquent, la section suivante est consacrée à l'étude des classes de comportement mécanique des matériaux polymères.

## 2.3 Classes de comportement mécanique

### 2.3.1 Thermodynamique des processus irréversibles

La description thermodynamique des phénomènes de viscoélasticité et d'élastoviscoplasticité doit être effectuée dans le cadre des processus irréversibles. D'une manière générale on dit qu'un phénomène est irréversible, si une modification infinitésimale des conditions ne permet pas à un système, qui a évolué sous l'influence de ce phénomène, de retrouver son état immédiatement antérieur. Les phénomènes dissipatifs de la viscoélasticité ou de l'élastoviscoplasticité induisent des conversions d'énergies. Ils entraînent une diminution de l'énergie disponible, capable de réaliser un travail macroscopique. Ces conversions caractérisent donc une dégradation spontanée de l'énergie utilisable d'un système et se produisent uniquement dans un seul sens ; elles caractérisent donc une évolution spontanée irréversible du système, ce qui est sous-tendu par le second principe de la thermodynamique basé sur la création d'entropie. Rappelons d'ailleurs qu'il ne faut pas confondre l'appellation "irréversible" associée à la déformation viscoplastique  $\epsilon^{vp}$ , avec le concept important d'irréversibilité en thermodynamique.

La thermodynamique des phénomènes irréversibles admet que l'état thermodynamique d'un matériau est caractérisé par des fonctions des variables d'état (température, déformation, densité moléculaire, etc. ). Ces fonctions d'état se présentent généralement sous forme d'énergie exprimées en Joules. Les variables d'état, quant à elle, se divisent en deux catégories : d'une part les variables observables ou mesurables, comme la déformation ou la température, que nous notons  $q_i$ , et d'autre part, les variables internes ou cachées, qui décrivent les phénomènes internes du comportement mécanique du matériau, comme le mouvement relatif des chaînes dans les polymères, et que nous désignons par  $\alpha$ . Les forces conjuguées associées aux variables d'état sont notées  $Q_i$  et ne dépendent que des variables observables  $q_i$  (cf. Schapery [7]).

Dans cette thèse, nous n'étudierons pas l'effet de la température sur le comportement mécanique. Par conséquent, nous supposons que les processus sont isothermes et que l'application des premier et deuxième principes de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem [7] :

$$T \dot{S} = \left( Q_i - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.1)$$



où  $T$  est la température absolue,  $\dot{S}$  le taux de production d'entropie, et  $\psi = \psi(q_i, \alpha)$  l'énergie libre de Helmholtz qui est une fonction d'état.

En ce qui concerne notre étude, nous considérons logiquement, dans le cadre du comportement mécanique des matériaux, que les variables observables  $q_i$  sont les déformations  $\epsilon$  qui s'exercent sur le matériau et que les forces conjuguées  $Q_i$  sont les contraintes  $\sigma$ . Ainsi, l'équation 2.1 devient :

$$T \dot{S} = \underbrace{\left( \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right)}_{\mathcal{W}} \dot{\epsilon} - \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}}_{\mathcal{H}} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{H}$  sont les forces thermodynamiques représentant les composantes irréversibles des forces s'appliquant sur le système (cf. Schapery [8]).

Notons que dans le cas d'un comportement élastique, le taux de production d'entropie est nul du fait de la réversibilité du processus et que les variables cachées  $\alpha$  restent constantes. La loi constitutive du comportement élastique est alors déduite :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \text{et} \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

où  $C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}}$  est le tenseur des modules élastiques.

Dans le cas de la viscoélasticité ou de l'élastoviscoplasticité, les relations entre les forces thermodynamiques et les flux des variables d'état ont les formes suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{W} = A : \dot{\epsilon} \\ \mathcal{H} = B : \dot{\alpha} \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont des tenseurs. Afin de vérifier la condition d'inégalité (2.2),  $A$  et  $B$  sont positifs et, en vertu du principe d'Onsager [9] sont symétriques.

Par conséquent, en combinant les relations (2.3) et (2.2), viennent les équations suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + A : \dot{\epsilon} = \sigma \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + B : \dot{\alpha} = 0 \quad (2.5)$$

Ces équations représentent les équations de mouvement liées aux contraintes, aux déformations et aux variables internes (cachées) dès lors que l'expression de l'énergie libre d'Helmholtz est

connue. Schapery [9] montre que dans le cas où les contraintes sont imposées et les déformations sont les réponses observées,  $\sigma$  et  $\alpha$  deviennent les variables d'état et  $\epsilon$  la fonction d'état, à condition qu'un chargement soudain (saut) dans l'histoire des contraintes induise des déformations finies. La démonstration de Schapery conduit à poser la condition supplémentaire  $A = 0$ , ce qui implique que l'équation (2.4) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \sigma \quad (2.6)$$

On en déduit alors que les composantes irréversibles des forces s'appliquant sur le système ne dépendent pas du taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  ( $\mathcal{W} = A : \dot{\epsilon} = 0$ ). Notons  $F = B : \dot{\alpha}$  ( $B \geq 0$ ), la force thermodynamique irréversible du processus de déformation du matériau. Cette force est due à l'effet dissipatif du processus et peut s'exprimer en fonction du potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha})$  :

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}} \quad (2.7)$$

où  $\varphi(\dot{\alpha})$  est une fonction d'état positive.

Par conséquent, la formulation thermodynamique générale des comportements viscoélastique et élastoviscoplastique peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations regroupant les conditions (2.5) et (2.6), ainsi que la relation (2.7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

La plupart des modèles viscoélastiques non linéaires et élastoviscoplastiques classiques peuvent être formulés à partir du système (2.8) par des choix appropriés des potentiels  $\psi$  et  $\varphi$  (Germain et al. [10], Chaboche [11]). Rappelons que dans cette étude, on se restreint à la viscoélasticité et à l'élastoviscoplasticité isothermes.

### 2.3.2 Représentation du comportement

De nombreux auteurs [12][13][14][15] montrent que les variables observables capables de définir la rhéologie d'un matériau peuvent être déduites des quatre grandeurs mesurables classiques de la mécanique : déplacement, force, temps et température. Il s'agit dans le cas des matériaux

polymères de :

- les déformation  $\epsilon$  ;
- les vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  ;
- les contraintes  $\sigma$  ;
- la température  $T$  ;
- la pression hydrostatique  $p$  ;
- et le temps ou le nombre de cycles.

Les lois de comportement auront alors la forme générale suivante :

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon}, p, T)$$

Cette forme constitue la loi de comportement d'un matériau dans la mesure où le paramètre de déformation  $\epsilon$  caractérise convenablement l'état structural du matériau. En réalité, cette propriété n'est vérifiée qu'en première approximation car la structure d'un polymère peut évoluer pour une valeur fixée de  $\epsilon$ , du fait de la relaxation des chaînes. Toutefois, on montre [16] qu'en traction, cette restriction ne se présente que durant des périodes transitoires très limitées. Ainsi, d'un point de vue général, on considère que la déformation est un bon indicateur de l'état structural du matériau car elle dépend de la texture d'orientation adoptée par les chaînes.

Par ailleurs, une loi de comportement doit prendre en compte tous les paramètres caractérisant la sollicitation. Dans le cas des polymères ayant une rhéologie complexe, une réduction du nombre de paramètres de la loi de comportement est très souvent faite. En effet, beaucoup d'auteurs présentent des lois de comportement à température donnée.

Dans cette section, nous présentons les principaux modèles de comportement proposés dans la représentation du comportement complexe des polymères ainsi que les lois de comportement qui en dérivent.

De façon générale, il existe deux classes de formulations du comportement viscoélastique ou élastoviscoplastique.

D'une part, la formulation différentielle s'appuie sur la description thermodynamique du comportement en fonction de variables internes. Cette description conduit à des lois de comportement pouvant s'écrire sous la forme d'équations différentielles [17] :

$$F(\sigma, \epsilon, \dot{\sigma}, \dot{\epsilon}, \dots) = 0 \quad (2.9)$$

où les variables internes thermodynamiques considérées apparaissent à des ordres différents de dérivation.

D'autre part, la formulation fonctionnelle cherche à exprimer la correspondance fonctionnelle entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations [17][18] :

$$\sigma(t) = \mathfrak{F} [\epsilon(\tau)_{-\infty}^t] \quad (2.10)$$

$$\epsilon(t) = \mathfrak{F}^{-1} [\sigma(\tau)_{-\infty}^t] \quad (2.11)$$

Les lois constitutives issues d'une formulation fonctionnelle fournissent une représentation mathématique plus simple que celles issues de la formulation différentielle. Néanmoins, les valeurs de chacune des variables  $\epsilon$  et  $\sigma$  à chaque instant  $t$  de la représentation fonctionnelle dépendent des valeurs de l'autre dans l'intervalle  $] - \infty; t]$ . Cette dépendance du paramètre temps  $t$  caractérise le comportement de type héréditaire des matériaux élastoviscoplastiques.

### 2.3.3 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité est dite linéaire si la fonctionnelle  $\mathfrak{F}$  est une application linéaire, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{F}[\lambda_1 \sigma_1(\tau) + \lambda_2 \sigma_2(\tau)] = \lambda_1 \mathfrak{F}[\sigma_1(\tau)] + \lambda_2 \mathfrak{F}[\sigma_2(\tau)] \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

La relation (2.12) définit le principe de superposition de Boltzmann : la réponse à la superposition de deux histoires de sollicitations est égale à la superposition de leurs réponses (figure 2.6).

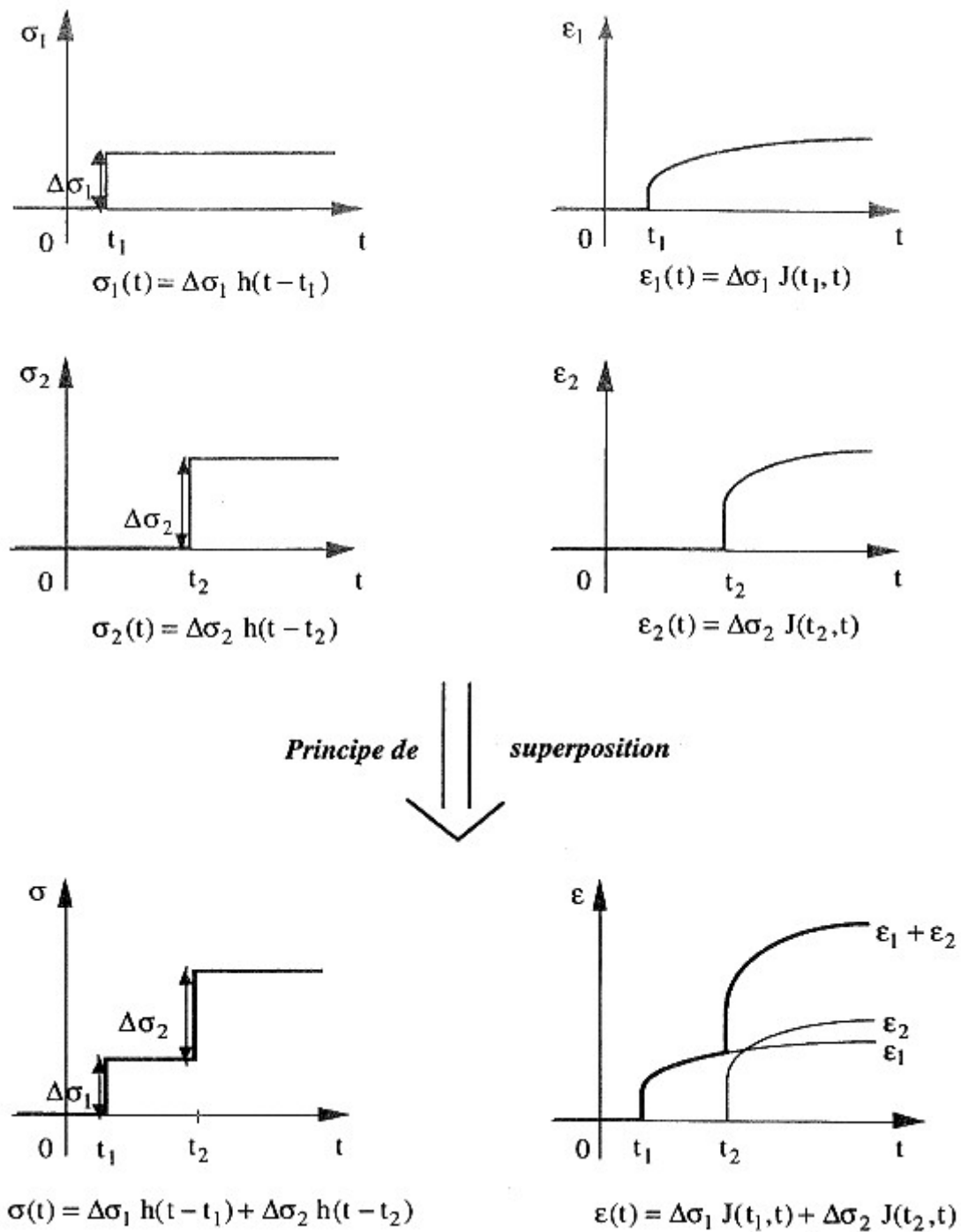


FIG. 2.6 – Illustration du principe de superposition de Boltzmann

En suivant ce principe de superposition, on démontre que pour une variation continue de la contrainte au cours du temps, la fonction  $\sigma(t)$  est la superposition d'échelons infinitésimaux  $d\sigma(\tau)h(t - \tau)$  :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t d\sigma(\tau)h(t - \tau) \quad (2.13)$$

La réponse en déformation  $\epsilon(t)$  devient donc le fruit de la superposition des réponses corres-

pendant à ces échelons de contrainte :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(\tau, t) d\sigma(\tau) \quad (2.14)$$

où  $J(\tau, t)$  est la fonction de fluage (ou de retard) du matériau.

De même, la réponse en contrainte  $\sigma(t)$  est égale à la superposition des réponses correspondant aux échelons de déformation :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(\tau, t) d\epsilon(\tau) \quad (2.15)$$

où  $R(\tau, t)$  est la fonction de relaxation du matériau.

Les deux relations précédentes peuvent aussi s'écrire sous forme d'intégrales de Stieltjes :

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(\tau, t) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \\ \sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(\tau, t) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans le cas de la viscoélasticité non vieillissante et en notant  $\otimes$  la convolution au sens de Stieljes, ces dernières formules peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \epsilon = J \otimes \sigma \\ \sigma = R \otimes \epsilon \end{cases} \quad (2.17)$$

On observe alors que les lois de comportement viscoélastique linéaire non vieillissantes de type fonctionnel peuvent être aisément ramenées à des lois de Hooke symboliques simples dans l'espace convolué de Laplace-Carson.

D'un point de vu formel, l'équation décrivant toutes les situations de la viscoélasticité linéaire est de la forme :

$$A : \sigma + B : \dot{\sigma} + \dots = C : \epsilon + F : \dot{\epsilon} + \dots \quad (2.18)$$

où  $A, B, C, F, \dots$  sont des tenseurs constants.

C'est pour cela qu'il est possible de représenter de façon simplifiée ce comportement à partir d'un assemblage d'éléments mécaniques tels que des ressorts, traduisant l'élasticité linéaire, et des amortisseurs, exprimant la viscosité. Ainsi, plusieurs modèles représentatifs peuvent être réalisés suivant l'agencement des composantes (ressorts et amortisseurs) en parallèle ou en

série. La figure 2.7 nous présente les trois modèles représentatifs de base (éléments de Maxwell, Kelvin-Voigt et Zener) du comportement viscoélastique linéaire.

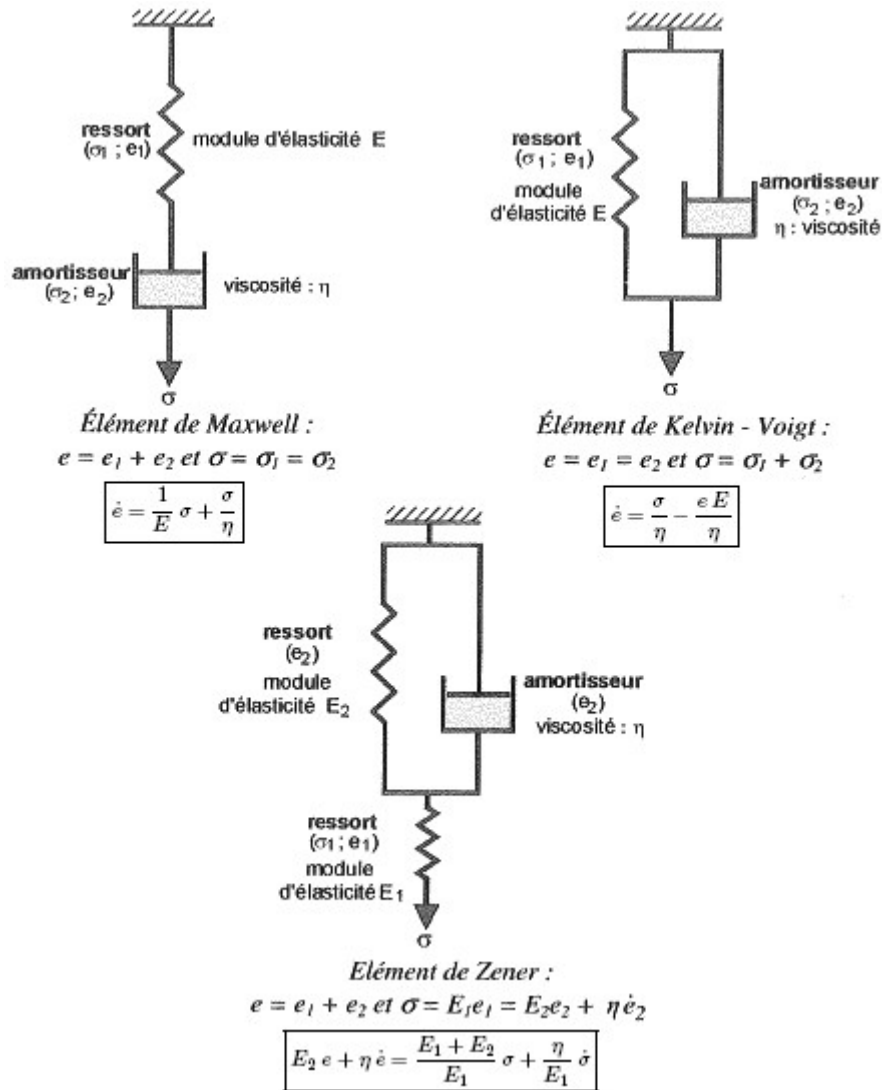


FIG. 2.7 – Modèles représentatifs de la viscoélasticité linéaire ( $e$  est la déformation)

Grâce à la représentation schématique, il devient plus facile de distinguer la viscoélasticité linéaire, représentée par l'association de ressorts et d'amortisseurs linéaires et de raideurs (ou souplesses) constants (figure 2.7), de la viscoélasticité non linéaire et l'élastoviscoplasticité, correspondant à l'association de ressorts et d'amortisseurs non linéaires à laquelle peut éventuellement s'ajouter la notion de seuil d'écoulement de la déformation viscoplastique.

Lors d'un essai mécanique, il est nécessaire de vérifier plusieurs conditions pour se trouver en

viscoélasticité linéaire. En effet, les contraintes et la vitesse de déformation doivent être assez faibles pour que la structure moléculaire à l'état microscopique soit peu modifiée par l'essai mécanique, afin que le temps de relaxation moléculaire, c'est-à-dire le temps de réarrangement d'une portion de molécule sous la sollicitation imposée, reste identique pendant l'expérience. La température, quant à elle, doit permettre le régime viscoélastique; autrement dit, elle ne doit pas trop s'éloigner de la température de transition vitreuse dans le sens du ramollissement ( $T > Tg$ ).

### 2.3.4 Viscoélasticité non linéaire

Nous distinguerons ce type de comportement à l'élastoviscoplasticité par le fait qu'il s'applique aux petites et moyennes déformations. En effet, il existe des lois viscoélastiques visant à reproduire le comportement des polymères à faible déformation. Expérimentalement, on constate souvent que le spectre de relaxation des polymères est large et que leur viscoélasticité est fortement non linéaire.

Dans la plupart des modèles de représentation proposés pour caractériser cette classe de comportement, l'introduction d'une non linéarité est effectuée dans les équations phénoménologiques de la viscoélasticité linéaire [19][20][7]. Cette procédure permet une reproduction plus fidèle des résultats expérimentaux mais nécessite l'introduction de nouveaux paramètres traduisant la non linéarité de comportement.

En suivant cette démarche, Schapery [8][9][21] propose une théorie d'extension du domaine de validité d'une loi de comportement viscoélastique linéaire par l'introduction d'une dépendance non linéaire de la réponse à l'histoire du chargement. La relation constitutive de Schapery provient des principes de la thermodynamique et est similaire à la forme intégrale du principe de superposition de Boltzmann. Depuis lors, cette théorie a été largement reprise par plusieurs auteurs avec succès, notamment pour les matériaux polymères. La loi constitutive qui en découle part de la forme équivalente de relation uniaxiale contrainte-déformation lors d'un test de fluage en viscoélasticité linéaire :

$$\epsilon = l_0 \sigma + \Delta l(t) \sigma \quad (2.19)$$

où  $l_0 = l(0)$  est la valeur à l'instant initial de la complaisance viscoélastique linéaire  $l$ , et  $\Delta l(t) = l(t) - l_0$  est sa composante évolutive.



Schapery applique ensuite le principe de superposition de Boltzmann et transforme l'équation (2.19) de la manière suivante :

$$\epsilon = l_0 \sigma + \int_{0^-}^t \Delta l(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (2.20)$$

où  $\Delta l(t - \tau)$  devient la fonction de retard (ou de fluage). Puis l'auteur étend la loi (2.20) au cas non linéaire en introduisant des fonctions de non linéarité  $g_0, g_1, g_2$  et  $a_\sigma$ , toutes dépendantes de la contrainte :

$$\epsilon = g_0 l_0 \sigma + g_1 \int_{0^-}^t \Delta l(\psi - \psi') \frac{dg_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (2.21)$$

où  $\psi$  est appelé le "temps réduit", défini par :

$$\begin{cases} \psi = \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma[\sigma(t')]} & (a_\sigma > 0) \\ \psi' = \psi(\tau) \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons ici que si  $g_0 = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$ , ce qui est valable pour les petites contraintes, l'équation (2.22) est linéarisée pour devenir (2.20). Ces fonctions de non linéarité définissent les propriétés du matériau et sont le plus souvent identifiées par une série de tests de fluage-recouvrance à différentes valeurs de contrainte imposées.

L'inconvénient des lois constitutives de Schapery réside dans leur formulation uniaxiale. Toutefois, Lévesque [22], propose une procédure d'extension des lois de Schapery en trois dimensions, valable dans le cas isotrope :

$$\epsilon = g_0 l_0 : \sigma + \left( \frac{\partial g_1}{\partial h} l_0 : \sigma \otimes \sigma + g_1 \mathbf{I} \right) : \int_0^t \Delta l(\psi - \psi') g_2 \sigma d\tau \quad (2.23)$$

où  $\otimes$  est le produit tensoriel et :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial h} \text{ et } g_j > 0 \text{ pour } i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 3 \\ h = \frac{1}{2} \sigma : l_0 : \sigma \\ l_0 = s : \text{ tenseur des souplesses élastiques} \end{cases} \quad (2.24)$$

Le domaine de validité des lois constitutives de type Schapery se limite à un comportement viscoélastique non linéaire réversible, c'est-à-dire pour des états de contraintes suffisamment faibles pour que le matériau recouvre sa longueur initiale au bout d'une certaine période plus

ou moins longue après l'annulation des sollicitations. Bien qu'une déformation résiduelle est toujours observable, celle-ci peut être raisonnablement négligée car sa quantité reste tout de même faible pour des sollicitations en petites déformations. Toutefois, certains modèles présents dans la littérature proposent d'introduire dans la relation constitutive un terme additionnel représentant la déformation plastique irréversible. Ce type de loi constitutive sera exploitée et développée plus en détail dans la suite (voir Chapitre 6) pour la représentation du comportement viscoélastique non linéaire du polypropylène.

### 2.3.5 Elastoviscoplasticité

#### a. Représentation du comportement viscoplastique

Le comportement élastoviscoplastique peut être représenté par la dissociation des grandeurs de déformations en une partie élastique décrite par les lois de comportement classiques en élasticité et une autre viscoplastique définie par les relations constitutives en viscoplasticité. De ce point de vue, la difficulté de ce type de représentation additionnant les contributions élastique  $\dot{\epsilon}^e$  et viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp}$$

réside dans la détermination d'une loi de comportement viscoplastique adaptée au matériau considéré.

De nombreuses description de la plasticité sont basées sur l'analyse d'Eyring [23] qui a été le premier à rendre compte des écoulements visqueux thermomécaniquement activés. Eyring définit la vitesse de déformation en cisaillement sous la forme :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp\left(-\frac{\xi_0}{kT}\right) \sinh\left(\frac{v_a \sigma_y}{kT}\right)$$

où le volume d'activation,  $v_a$  est le produit d'une aire par la distance sur laquelle une unité structurale se déplace,  $k$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température absolue et  $\sigma_y$  la contrainte d'écoulement. Aux grandes vitesses ou aux basses températures, cette équation peut s'écrire :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp\left(-\frac{\xi_0 - v_a \sigma_y}{kT}\right)$$

Ces équations permettent de déterminer la contrainte d'écoulement  $\sigma_y$  lors d'un écoulement plastique à vitesse de déformation imposée.

Puis le même formalisme est appliqué au cas de la déformation plastique des métaux par Kauzmann (d'après [24]). Plus tard, plusieurs études ont montré que l'équation d'Eyring est insuffisante pour décrire le comportement des polymères sur un large domaine de températures et de vitesses de déformation. Bauwens [25], entre autres, a alors proposé de considérer la contrainte comme la somme de plusieurs contraintes d'activation de plusieurs types de mouvements moléculaire impliqués dans le processus de déformation des polymères et qui correspondent à la prise en compte de mobilité de différents éléments de chaîne. L'évolution de la contrainte au seuil en fonction de la température et de la vitesse a ainsi pu être décrite.

Robertson [26] a également analysé de la même manière la déformation plastique des polymères mais en considérant des changements conformationnels activés thermiquement (conformations "trans" et "bis"). Ce modèle permet de prédire convenablement les contraintes d'écoulement plastique de plusieurs polymères amorphes pour des températures proches de  $T_g$ . Toutefois, son inconvénient est qu'il ne semble pas valable pour des températures inférieures à  $T_g$  et pour des vitesses suffisamment basses.

Argon [27] développe ensuite un modèle de déformation des polymères solides où intervient des défauts, non pas dus aux dislocations, mais à la formation thermomécaniquement activée de paires de "désinclinaison". L'augmentation d'énergie libre  $\Delta\psi$  provenant de la formation de ces défauts est réduite à une enthalpie  $\Delta G$  par le travail  $\Delta W$  d'une contrainte  $\tau$  appliquée :

$$\Delta G = \Delta\psi - \Delta W$$

En se basant sur les travaux de Li [28] qui détermine l'expression de l'énergie d'activation de ce mécanisme de déformation, Argon en a lors déduit la limite élastique en cisaillement :

$$\sigma_y = s_0 \left[ 1 - \frac{16(1-\nu)}{3\pi\mu v_0} kT \ln \left( \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}} \right) \right]^{6/5} \quad \text{avec} \quad s_0 = \frac{0,077\mu}{1-\nu}$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $v_0$  le volume de la boucle de désinclinaison et  $\dot{\gamma}^0$  le terme préexponentiel. Le modèle de Argon peut être considéré comme un cas particulier de celui d'Eyring, et permet de vérifier que la plasticité des polymères est contrôlée par des mouvements de chaînes coopératifs et thermiquement activés. Cette approche est une solution pour prédire quantitativement la limite élastique, bien que son interprétation

du crochet de traction [29] reste qualitative. Cette restriction a ensuite été partiellement levée par Boyce et al. [30], en exprimant le terme  $s_0$  sous la forme d'une fonction empirique de la pression hydrostatique.

L'analyse thermodynamique de la plasticité des polymères solides est introduite par Escaig et al. [31] qui reprennent la démarche issue des travaux de Kauzman en métallurgie physique.

Ces dernières années, une étape importante a été franchie grâce au développement de nouvelles techniques fondés sur les mécanismes élémentaires intervenant dans les processus de déformation des polymères. Ils permettent une approche quantitative aboutissant à la prédiction des courbes contrainte-déformation et de l'évolution des orientations cristallines. En effet, Dahoun et al. [32] utilisent un modèle autocohérent prenant en compte l'anisotropie structurale des matériaux, en particulier celle liée à la texture cristalline induite par la déformation. Ce modèle décrit localement l'évolution de la texture cristalline jusqu'aux grandes déformations et donne, au niveau macroscopique, la courbe contrainte-déformation caractérisant le comportement mécanique. Dans ce travail, le polymère est considéré comme un agrégat polycristallin constitué de cristallites réparties au hasard. De cette manière, en posant certaines hypothèses sur la microstructure, Dahoun décrit le comportement local plastique d'une lamelle pour un système de glissement donné  $s$  par une loi puissance

$$\tau^s = \tau_0^s \left[ \frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_0} \right]^m$$

reliant la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}^s$  et la cission résolue  $\tau^s$  associées à ce système.  $\tau_0^s$  et  $\dot{\gamma}_0$  sont des grandeurs de référence et  $m$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

En appliquant le modèle autocohérent, Dahoun retrouve un certain nombre de caractéristiques expérimentales. Ainsi, en traction, la texture des fibres est bien reproduite et, en cisaillement, on observe également la tendance à l'alignement des chaînes selon la direction du cisaillement. Le seul désavantage de cette démarche est la non-prise en compte de la contribution de la phase amorphe dans le processus de déformation, ce qui entraîne une sous-estimation du durcissement plastique. Ainsi, la qualité du modèle dépend du taux de cristallinité : plus ce dernier sera faible, moins le modèle sera apte à représenter la réalité.

Pour faire face à cette défaillance du modèle, Dahoun propose ensuite de décrire le comportement mécanique global en traction uniaxiale ou en cisaillement simple sous la forme d'une

combinaison du comportement plastique de la phase cristalline et du comportement caoutchoutique de la phase amorphe selon le modèle de Voigt. Ce modèle a été utilisé dans le cas de l'interprétation du comportement du PEEK à 180 °C et a montré un très bon accord entre la théorie et l'expérience.

Grâce à ces nouveaux modèles, la prédiction du comportement macroscopique à partir des processus microscopiques devient une voie efficace et de plus en plus utilisée dans la caractérisation du comportement viscoplastique des polymères.

### b. Lois de comportement "globales"

La rhéologie des polymères thermoplastiques correspond à un comportement complexe élasto-viscoplastique. Dans la littérature, de nombreuses lois ont tenté de représenter un tel comportement dans sa globalité, c'est-à-dire sans négliger tout ou partie de la déformation élastique, comme il en est souvent le cas. Elles reposent pour la plupart sur un principe de séparation des variables et peuvent être formées de trois termes : une partie  $F$  caractérisant la sensibilité de la contrainte vis-à-vis de la déformation, d'une composante  $G$  traduisant la sensibilité de la contrainte vis à vis de la vitesse de déformation, et éventuellement un facteur d'échelle  $K_p$ . Ces lois peuvent être divisées en trois catégories [33] :

- les lois "multiplicatives" de type :  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) = K_p F(\epsilon) G(\dot{\epsilon})$
- les lois "additives" du type :  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) = F(\epsilon) + G(\dot{\epsilon})$
- les lois "différentielles"

- **Lois "multiplicatives"**

Ces lois sont nombreuses [34] et généralement déterminées dans le cadre unidimensionnel. On peut citer dans l'ordre chronologique :

Norton Hoff	$\sigma = K \dot{\epsilon}_p^m$
Hollomon	$\sigma = K \epsilon_p^n \dot{\epsilon}_p^m$
Marciniak	$\sigma = K(\epsilon_p + \epsilon_0)^n \dot{\epsilon}_p^m$
Green	$\sigma = K \epsilon_p^n (1 + \alpha \dot{\epsilon}_p^m)$
Wagoner	$\sigma = K(\epsilon_p + \epsilon_0)^n (\dot{\epsilon}_p / \dot{\epsilon}_0)$

où  $\epsilon_0$  et  $\dot{\epsilon}_0$  sont respectivement une déformation et une vitesse de déformation de référence,  $m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation et  $n$  est un coefficient d'écrouissage.

Ces lois sont obtenues par des résultats en traction uniaxiale et sont prévues à la base pour la prédiction du comportement plastique des métaux. Elles présentent néanmoins des difficultés à représenter le durcissement des polymères ayant un taux d'écrouissage très différent de celui des métaux. A cette effet, plusieurs approches ont été proposées afin de déterminer des lois plus adaptées aux polymères. La première est menée par G'sell et al. [34] qui montrent que la fonction  $F(\epsilon)$  permet de traduire la viscoplasticité de la majeure partie des polymères :

$$F(\epsilon) = V(\epsilon) C(\epsilon) H(\epsilon)$$

où  $V(\epsilon)$  représente le régime transitoire à la limite élastique,  $C(\epsilon)$  définit un éventuel crochet dans la courbe contrainte déformation et  $H(\epsilon)$  traduit le durcissement structural aux grandes déformations. Concernant le terme  $G(\dot{\epsilon})$ , il conserve une forme de type puissance (Norton Hoff). Ainsi, pour les polymères semi-cristallins, les fonctions  $V(\epsilon)$ ,  $C(\epsilon)$  et  $H(\epsilon)$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} V(\epsilon) &= [1 - e^{-w\epsilon}] \\ C(\epsilon) &= [1 + a e^{-b\epsilon}] \\ H(\epsilon) &= e^{h\epsilon^n} \quad n \approx 2 \text{ pour les polymères} \end{aligned}$$

Une formulation différente décrivant le  $H(\epsilon)$  dans d'autres conditions de sollicitation a été proposée par la suite par Gopez [35] et Grenet [36] (essais de cisaillement).

Pour aller plus loin dans la représentation du comportement mécanique des polymères, G'sell [16] met l'accent sur la forte dépendance à la température et redéfinit alors le facteur d'échelle  $K_p$  en se basant sur une loi de type Arrhénius :

$$K_p = K e^{(\beta/t)}$$

Pour résumé, la loi de comportement de G'sell complète, aussi appelée "loi polymère solide", s'exprime suivant le produit des quatre termes précédents :

$$\sigma = K e^{(\beta/t)} [1 - e^{-w\epsilon}] [1 + a e^{-b\epsilon}] e^{h\epsilon^n} \dot{\epsilon}^m$$

où  $K$  est la consistance du matériau,  $\beta$  est le coefficient de thermodépendance,  $w$  est le coefficient viscoélastique,  $a$  et  $b$  sont les paramètres représentatifs d'un éventuel crochet de traction,  $h$  et  $n$  sont les coefficients caractéristiques du durcissement structural, et  $m$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

- **Lois "additives"**

Comme pour les lois précédentes, elles sont très souvent identifiées sous une forme unidirectionnelle et leur formalisme additif leur apporte une grande souplesse dans la représentation de comportements complexes telle que l'élastoviscoplasticité des polymères. Toutefois, leur inconvénient majeur réside dans leur identification plus délicate. La réponse en contrainte du comportement est considérée en termes d'effet d'activation ou enthalpique et d'orientation ou entropique. L'origine enthalpique qui intervient dans la contrainte représente le caractère héréditaire de la déformation plastique vraie accumulée par le matériau depuis sa création et qui tend à remanier le matériau à son état initial non déformé [37].

Parmi les travaux menés dans ce contexte, Treloar [38] propose une expression simplifiée de la contrainte d'origine enthalpique :

$$\sigma(\epsilon) = K (e^{2\epsilon} - e^{-\epsilon})$$

La contrainte d'origine entropique (ou contrainte effective), quant à elle, caractérise la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation. G'sell [16] propose une loi de formulation "additive" en additionnant les deux partitions enthalpique et entropique de la contrainte :

$$\sigma = K e^{2\epsilon} - m \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)$$

où le deuxième terme désigne la contrainte effective.

En outre, d'autres loi "additives" ont été proposées dans le cadre de l'élastoviscoplasticité et appliquées aux matériaux polymères. Citons les travaux de Belcadi [39] qui propose une loi avec

seuil pour décrire le comportement d'un polycarbonate prédéformé à froid. Cette loi s'inspire de celle de Voce [39] initialement appliquée aux métaux, mais présente la différence d'éviter le phénomène de saturation de la contrainte.

Il est important de noter que les relations constitutives "additives" précédentes, ne permettent pas de modéliser correctement le crochet de traction du durcissement structural en grandes déformations. Pour pallier ce problème, Bisilliat [40] propose une expression élastoviscoplastique où la forme de la contrainte plastique en fonction de la composante plastique de la déformation permet de reproduire correctement le crochet de traction dans le cas du polycarbonate.

- *Lois de comportement "différentielles"*

Elles s'appuient sur les modèles analogiques représentatifs du comportement viscoélastique linéaire, composés de diverses combinaisons possibles de ressorts et d'amortisseurs en série ou en parallèle. Parmi les modèles proposés, celui de Vest Amodeo et al. [41] est issu de l'utilisation d'un ressort modélisant la contribution élastique linéaire, et de trois éléments en parallèle : un amortisseur d'Eyring tenant compte du comportement visqueux, un élément d'élasticité d'origine entropique (caoutchoutique) de Mooney-Rivlin traduisant la composante liée à l'orientation des chaînes de molécule en grandes déformations, et une dernière composante caractérisant le comportement au seuil de plasticité. Ce modèle conduit à une loi élastoviscoplastique de forme différentielle qui nécessite une intégration numérique.

G'sell et Jonas [16] se basent, quant à eux, sur le fait que la déformation plastique serait liée à l'amorçage et à la propagation de défauts et proposent un modèle dans lequel ils supposent que ces défauts linéaires se forment et se propagent sous l'action d'une contrainte effective  $\sigma^*$ . La déformation plastique s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon}_p = \rho(\sigma^*, \epsilon) v(\sigma^*) \bar{b}$$

où  $\rho$  correspond à la longueur de l'onde de plasticité par unité de volume,  $v$  sa vitesse moyenne de propagation et  $\bar{b}$  la distance moyenne caractéristique d'un cisaillement élémentaire causé par le passage de l'onde.



### c. Loi de comportement élastoviscoplastique à partir des potentiels thermodynamiques

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons une loi de comportement élastoviscoplastique formulée à partir des relations constitutives des matériaux standards généralisés et présentée par Lahellec et Suquet [42].

Comme nous l'avons vu à la section 2.3.1. La formulation thermodynamique du comportement élastoviscoplastique résulte de deux potentiels thermodynamiques : l'énergie libre  $w(\epsilon, \alpha)$  et le potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha})$ . Ces potentiels sont tous les deux fonctions de la déformation totale  $\epsilon$ , et des variables internes  $\alpha$ . Cette formulation s'écrit comme (2.8) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

Dans leur étude, Lahellec et Suquet [42] posent les hypothèses selon lesquelles :

- la seule variable interne non observable  $\alpha$  influant dans le processus de déformation est la déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  ;
- le potentiel de dissipation  $\varphi$ , fonction de  $\dot{\epsilon}^{vp}$ , est supposé être une fonction de l'invariant  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$  (déformation équivalente du critère de Von Mises) :

$$\varphi(\dot{\epsilon}^{vp}) = \phi(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}) \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon}_{eq}^{vp} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{vp} : \dot{\epsilon}^{vp} \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

De plus,  $\phi$  est supposée pouvoir s'exprimer comme :

$$\phi(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}) = f(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp 2}) \quad (2.26)$$

où  $f$  est une fonction du carré de  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$  ayant la forme d'une loi puissance :

$$f(x) = \frac{\sigma_0}{(m+1)\dot{\epsilon}_0^m} (x)^{(m+1)/2} \quad (2.27)$$

où  $m$  est l'exposant de sensibilité à la vitesse,  $\sigma_0$  et  $\dot{\epsilon}_0$  sont des constantes du matériau.

Dans ce cas, la viscosité sécante  $\eta_{sct}$ , est définie de la manière suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^{vp}}(\dot{\epsilon}^{vp}) = \sigma_d = 2\eta_{sct} \dot{\epsilon}^{vp} \quad (2.28)$$

où  $\sigma_d$  désigne la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\sigma$ .  $\eta_{sct}$  peut alors s'exprimer par les fonctions  $\phi$  et  $f$  suivant :

$$\eta_{sct}(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}) = \frac{1}{3} \frac{\phi'(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp})}{\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}} = \frac{2}{3} f'(\dot{\epsilon}_{eq}^{vp2}) \quad (2.29)$$

où  $\phi'$  est la dérivée par rapport à  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$  et  $f'$  la dérivée par rapport à  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp2}$ . En dérivant l'expression (2.27) de  $f$  par rapport à la variable  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp2}$ , l'expression de la viscosité sécante est obtenue. Les relations constitutives associées s'expriment alors sous la forme :

$$\dot{\epsilon} = s : \dot{\sigma} + \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^n \frac{\sigma_d}{\sigma_{eq}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma_d : \sigma_d \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

où  $s$  est le tenseur des souplesses élastiques,  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de Von Mises, et  $n$  est l'inverse de exposant de sensibilité à la vitesse  $m$ . On obtient ainsi une loi constitutive de forme sécante, où la déformation viscoplastique  $\epsilon^{vp}$  est incompressible et la complaisance visqueuse est un scalaire ayant pour seule variable la partie déviatorique de la contrainte  $\sigma_d$ .

## 2.4 Conclusion

Le comportement mécanique des matériaux polymères se distingue par sa forte dépendance aux variables de température et de temps. Il se caractérise par un couplage de l'élasticité et de la viscosité très prononcé par rapport aux autres types de matériaux. Cette composante viscoplastique provient de la manifestation des mouvements localisés et activés thermiquement entre les unités de chaînes macromoléculaires lorsque la température se situe au dessus de celle de la transition vitreuse  $T_g$ .

Lorsque l'on impose une sollicitation sur un polymère thermoplastique comme une traction, plusieurs processus de déformation interviennent et se succèdent le long du trajet de chargement. Au voisinage de l'instant initial du chargement, le comportement est élastique pur puis tend très rapidement vers une variation des modules de fluage dans le temps justifiant la non linéarité de la courbe contrainte-déformation. On entre alors dans un régime viscoélastique linéaire qui prédomine aux faibles états de contraintes, où le principe de superposition de Boltzmann est applicable. La viscoélasticité linéaire est un phénomène de déformation réversible retardé où le matériau retrouve sa position initiale au bout d'une certaine durée écoulée après la décharge.

Elle peut être représentée suivant une formulation fonctionnelle en suivant le principe de superposition de Boltzmann, ou par des lois de forme différentielle à partir de modèles analogiques unidimensionnels comme ceux de Maxwell, Kelvin-Voigt, Zener, ou la combinaison de ces derniers en parallèle ou en série.

Toutefois, la prédiction du comportement mécanique des matières plastiques demeure insuffisante si l'on ne tient compte que de la viscoélasticité linéaire, car son domaine de validation ne constitue qu'une partie du comportement global en contrainte et en déformation. En effet, la non linéarité du régime viscoélastique se manifeste très tôt lors de la déformation des polymères et peut se traduire par une dépendance au temps des coefficients des lois constitutives différentielles. La viscoélasticité non linéaire est un processus qui, en plus d'être dissipatif, présente une déformation rémanente ou irréversible, c'est-à-dire que le matériau ne peut plus récupérer sa forme initiale. Toutefois, l'étude du comportement viscoélastique non linéaire a conduit pour une grande part à des lois constitutives où la déformation plastique résiduelle n'est pas pris en compte comme pour le cas des lois de type Schapery. Malgré cette restriction, la littérature montre que ces relations constitutives décrivent très bien la non linéarité du comportement mécanique en petites et moyennes déformations.

En grandes déformations, les effets de l'élasticité disparaissent et laissent place à un comportement viscoplastique pur. Pour représenter le comportement mécanique global, c'est-à-dire de l'instant initial de l'application du chargement au moment de la rupture, deux formulations sont généralement utilisées pour établir les équations constitutives du comportement élastoviscoplastique. La première consiste à décomposer la déformation en la somme, d'une part, d'une composante élastique représentée par une loi classique qui peut être celle de Hooke en élasticité linéaire, et, d'autre part, d'une contribution viscoplastique définie par les relations constitutives en viscoplasticité pure. La deuxième méthode de formulation repose sur l'établissement de lois représentant le comportement élastoviscoplastique dans sa globalité. Ces lois, dites "globales" et peuvent, elles-mêmes, être divisées en trois catégories suivant leurs formes : les lois "multiplicatives", "additives" et "différentielles".

Dans la suite de ce document, nous traiterons le comportement mécanique des matériaux hétérogènes à base de polymères par l'élaboration d'un modèle de prédiction applicable dans les trois processus de déformations précédents : la viscoélasticité linéaire, la viscoélasticité non-linéaire et l'élastoviscoplasticité.



## Chapitre 3

# Micromécanique du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes

### 3.1 Introduction

De nos jours, il existe deux types d'approches concevables dans la modélisation mécanique des matières plastiques. D'une part, les approches phénoménologiques s'appuient sur une formulation thermodynamique pour déterminer des lois de comportement. Ces approches doivent avoir recours à une série d'expériences destinées à identifier les différents paramètres des lois et à fixer ainsi le domaine de validité de ces dernières. Dans le cas particulier des thermoplastiques, les démarches phénoménologiques deviennent beaucoup plus complexes et leur réalisation plus fastidieuse du fait des nombreux paramètres mis en jeu pour la prédiction du comportement. D'autre part, nous préférons les approches micromécaniques aux précédentes considérées comme inadaptées pour ce type de matériaux. La micromécanique est une discipline dont le principe est de modéliser le comportement effectif ou macroscopique d'un matériau hétérogène, en partant de la description du comportement local à l'échelle des hétérogénéités structurales et de la répartition de ces hétérogénéités. Les approches micromécaniques, plus communément appelées approches "micro-macro", évitent le recours systématique à l'identification de paramètres macroscopiques. Elles permettent une représentation plus riche du comportement et mieux fondée physiquement. De plus, elles s'avèrent être un outil puissant d'élaboration de nouveaux matériaux, car traitées par une résolution de problèmes inverses, elles permettent l'optimisation de la microstructure en fonction du comportement effectif recherché.

Les méthodes de transition d'échelles de type micro-macro décrivent le passage d'une échelle microscopique définie par une distance caractéristique des hétérogénéités microstructurales, à l'échelle d'un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) devant satisfaire la double condition de "microhétérogénéité" et de "macrohomogénéité" [43]. Cette condition suppose, d'une part, que la dimension caractéristique des hétérogénéités doit être très inférieure à celle du V.E.R. et, d'autre part, que le V.E.R. soit suffisamment représentatif des hétérogénéités, afin qu'il soit possible de remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène fictif de même dimension que le V.E.R. (même échelle) au comportement mécanique équivalent. En suivant cette logique, d'un V.E.R. à un autre du matériau hétérogène, la microstructure peut varier aléatoirement mais les propriétés mécaniques moyennes sur tout volume élémentaire considéré sont donc supposées constantes. La méthodologie de l'homogénéisation peut être décrite en trois grandes étapes [44] : la représentation, la localisation et l'homogénéisation proprement dite.

Dans l'étape de représentation, on définit l'échelle caractéristique d'hétérogénéités et les paramètres mécaniques et physiques correspondants. Il s'agit donc de décrire au mieux le V.E.R.

d'un point de vue morphologique, topologique et mécanique. Il est à noter que le choix du V.E.R. doit être effectué de manière pertinente en fonction des effets macroscopiques étudiés [45]. En ce qui concerne notre étude, nous cherchons à représenter l'effet global des hétérogénéités (impuretés ou renforts) dans le matériau. Ainsi, l'échelle pertinente d'hétérogénéité que nous prendrons en compte est celle du domaine des phases, chacune d'entre elles étant considérée comme homogène et caractérisée par une loi de comportement.

Lors de l'étape de localisation, il est question de relier les grandeurs mécaniques locales aux grandeurs macroscopiques du V.E.R.. La localisation est rendue possible par une formulation intégrale déduite des lois constitutives locales et de celles de la Mécanique des Milieux Continus (M.M.C.) définissant les équations de champs du problème hétérogène. L'utilisation des techniques de Green est primordiale pour la résolution formelle de ce problème menant à une équation intégrale qui permet d'analyser la réponse mécanique locale de l'assemblage des hétérogénéités à diverses sollicitations mécaniques.

Comme nous l'avons souligné plus haut, le problème de localisation n'a pas de solution aisée du fait du caractère incomplet de la description mécanique et géométrique du matériau hétérogène. Ainsi, les différentes méthodes utilisées tentent chacune de résoudre ce problème, soit par un encadrement, soit par une estimation des propriétés effectives.

L'originalité des modèles de transition d'échelle se révèle lors de la localisation, ce qui en fait l'étape cruciale dont va dépendre la qualité de prédiction du modèle présenté.

La troisième et dernière étape d'une approche micromécanique est l'homogénéisation. Elle vise à déterminer le comportement du Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.) associé au V.E.R. considéré, ou encore le comportement effectif du matériau hétérogène étudié. Elle est basée sur l'établissement des relations selon lesquelles, à chaque instant d'un état de sollicitations donné, la contrainte et la déformation macroscopiques sont les moyennes spatiales sur tout le volume du matériau hétérogène étudié, respectivement des contraintes et des déformations locales.

Les premières tentatives de transition d'échelle micromécaniques sont les méthodes de bornes ou d'encadrement qui sont basées sur des principes variationnels et ont concerné tout d'abord des comportements linéaires. En effet, en élasticité linéaire, lorsque seules les fractions volumiques des différents constituants du matériau hétérogène considéré sont connues, il reste possible de borner ses propriétés effectives. Ainsi, le modèle de Voigt [46] et l'estimation de Reuss [47], se basant sur le théorème de l'énergie potentielle (en l'absence de forces de volume et



d'inertie) et de l'énergie complémentaire, permettent un encadrement des modules effectifs pour des conditions homogènes au contour. Il est également possible d'obtenir des bornes plus resserrées en introduisant des informations supplémentaires sur la distribution des phases comme les bornes de Hashin et Shtrikman [48], s'appuyant sur une formulation introduisant un milieu linéaire de référence équivalent au V.E.R. (même géométrie, mêmes conditions aux limites) et utilisant les techniques de Green (voir annexe B).

Dans le cas d'un comportement non linéaire, les méthodes de localisation ont été menées, dans un premier temps, dans le cadre de la plasticité à froid par Taylor [49] qui proposait de négliger la déformation élastique et de reprendre le raisonnement de Voigt en imposant la condition d'homogénéité du champ de déformations plastiques. Il faut aussi noter que le modèle de Reuss a été étendu à la plasticité lors d'une approche proposée par Batdorf et Budiansky [50]. Ces dernières estimations ont ensuite été étendus à la viscoplasticité et à l'élastoviscoplasticité [51]. Le gros inconvénient de ces modèles est qu'ils imposent des conditions extrémales entraînant de ce fait des évaluations excessivement souples ou raides sur les propriétés effectives.

Les limites de ces premières méthodes de transition d'échelle témoignent de la nécessité d'une considération plus réaliste du rôle de l'hétérogénéité intergranulaire. Dans ce but, le modèle autocohérent est l'un des modèles les plus appropriés. Il a pour principe d'assimiler les interactions entre un élément et tous les autres, à celle entre cet élément et le M.H.E. recherché. Il transforme un problème à  $N$  phases par  $N$  problèmes élémentaires à une phase de type inclusion-matrice traité par Eshelby [52]. Ainsi, la localisation selon le schéma autocohérent est l'estimation exacte d'un milieu "parfaitement désordonné", c'est-à-dire un milieu ne présentant aucune régularité ou périodicité morphologique ou topologique. Elle peut donc s'appliquer à des composites multiphasés dans lesquels aucune phase ne joue le rôle de matrice. En outre, le schéma de Mori-Tanaka [53] est fondé sur le même problème élémentaire de base, de type inclusion-matrice, mais n'est applicable que pour des milieux hétérogènes biphasés ou des inclusions d'une même phase baignant dans une matrice homogène. Ce dernier peut être considéré comme un cas particulier de la méthode autocohérente dans le sens où il définit une hypothèse supplémentaire qui suppose que si la fraction volumique des inclusions est suffisamment petite, le milieu homogène de référence infini peut être assimilable à la phase constituant la matrice.

Pour faire face au problème lié à la prise en compte de l'accommodation intergranulaire, plusieurs extensions du schéma autocohérent ont été menées suivant la nature du comportement étudié. La première extension va à la prédiction du comportement élastoplastique des métaux

et est proposée par Kröner [54]. Ce premier modèle, mis en œuvre par Budiansky et Wu [55], décrit le problème hétérogène comme celui d'une inclusion ellipsoïdale soumise à une déformation plastique uniforme  $\epsilon^P$ , plongée dans un milieu infini soumis à la contrainte macroscopique et possédant une déformation élastoplastique uniforme égale à la déformation plastique macroscopique  $E^P$  (problème de l'inclusion plastique homogène). L'hétérogénéité plastique étant alors considérée comme la déformation libre  $\epsilon^L$ , figée lors de la localisation, la matrice ne peut répondre que de manière élastique de sorte que les interactions entre les différentes phases sont purement élastiques. Il en résulte une surestimation de l'accommodation intergranulaire entraînant des résultats très raides et proches de l'estimation extrême de Taylor.

Une formulation alternative est proposée par Hill [56] quelques années plus tard, dans laquelle il traite le problème en vitesse et parvient à exprimer la loi constitutive du comportement local sous la forme d'une loi tangente pseudo-linéaire  $\dot{\sigma} = l^{ep} : \dot{\epsilon}$ , où le module tangent  $l^{ep}$  instantané traduit simultanément les natures élastique et plastique du comportement. Le problème hétérogène de Hill est de type linéaire élastique, mais est traité en vitesse et caractérisé par des modules tangents instantanés et non plus élastiques. Le modèle autocohérent de Hill, d'inspiration incrémentale et dépendant des conditions de charge et de décharge, parvient ainsi à préserver la nature élastoplastique des interactions. Il conduit donc à assouplir les interactions, si bien que les prédictions sont beaucoup plus réalistes que celles obtenues avec la formulation de Kröner. Une extension de cette formulation au cas des grandes déformations a ensuite été proposée par Lipinski et Berveiller [57].

La méthode introduite par Hill a pu être étendue au cas de la viscoplasticité (ou viscosité non linéaire) par Hutchinson [58], où la loi tangente pseudo-linéaire donne lieu, cette fois-ci, à un module visqueux  $b$  tel que  $\dot{\sigma} = b : \dot{\epsilon}$ .

Toutefois, dans le cas particulier d'une loi de comportement local de type puissance, Hutchinson parvient à intégrer dans le temps les relations incrémentales obtenues. La formulation qui résulte de cette intégration se distingue de celle dont elle est issue en ce sens qu'elle s'exprime par une loi sécante  $\sigma = b_s : \dot{\epsilon}$ , où  $b_s$  désigne le module sécant, à partir de laquelle les vitesses de déformation et les contraintes locales peuvent être estimées indépendamment du trajet de chargement. Ces états mécaniques sont calculés à l'aide d'un système d'équations implicites dont ils sont solutions. Cette formulation, appelée "total formulation", qui n'est plus incrémentale, a inspiré plusieurs formulations dont celle de Molinari et al. [59] qui propose, en 1987, une

nouvelle méthode d'estimation du comportement visqueux des polycristaux dans le cadre des grandes déformations, de sorte que la partie élastique de la déformation soit négligée.

Au cours des années 80, une étape a été franchie dans le champ de la modélisation micromécanique des comportements non linéaires à travers les méthodes dites "par les potentiels". Elles restent certes limitées à certains types de comportements non linéaires, mais ont tout de même permis de mettre en œuvre des méthodes variationnelles offrant des bornes de type Hashin-Shtrikman plus resserrées que les bornes classiques. De ce fait, il est désormais possible d'appliquer plus finement les méthodes d'estimation élaborées jusque là. Rappelons que l'inconvénient de taille de ces nouvelles méthodes variationnelles est la limitation à des comportements particuliers, le plus souvent à des lois constitutives locales dérivant d'un seul potentiel. Parmi ces méthodes, nous citerons les propositions de Talbot et Willis [60], qui parviennent à étendre le principe de Hashin et Shtrikman posé en élasticité linéaire, et de P. Ponte Castañeda [61] adoptant une procédure variationnelle basée sur un matériau linéaire de référence qui n'est plus homogène.

La modélisation micromécanique des matériaux polymères nécessite la prise en compte du couplage viscoélastique, sachant que l'effet de l'élasticité est fonction du comportement de la déformation imposée tandis que celui de la viscosité dépend du comportement à la vitesse de déformation imposée et est beaucoup plus sensible à la température. Comme il est précisé précédemment, les premières études micromécaniques se sont surtout attachées à décrire le comportement viscoplastique des matériaux. Elles s'appliquent essentiellement à la prédiction de l'évolution des textures cristallographiques en grandes déformations [62][63]. La considération de l'élasticité s'avère donc fondamentale si l'on veut prévoir le comportement du matériau dans le cadre des petites déformations et pour des chargements complexes comme la traction-compression. La difficulté du couplage entre l'élasticité et la viscosité est à l'origine du caractère héréditaire du matériau, qui induit un couplage espace-temps qu'il est très complexe de traiter à partir des connaissances déjà acquises pour les autres types de comportements. La conséquence directe de cette association est la présence d'interactions mécaniques différées entre les constituants du milieu hétérogène, à l'origine de l'"effet mémoire longue". Ainsi, la transition d'échelle est confrontée, dans ce cas, à un couplage espace-temps qui résulte de la nature à la fois hétérogène et héréditaire du matériau. Pour faire face à cette difficulté majeure, deux démarches différentes peuvent être envisagées.

D'une part, les approches de type "héréditaire" sont basées sur la formulation intégrale des lois constitutives linéaires suivant le principe de superposition de Boltzman. Elles consistent, durant la transition d'échelle, à convertir le problème hétérogène viscoélastique en un problème hétérogène élastique symbolique.

D'autre part, les approches à variables internes sont basées sur une démarche incrémentale où l'ensemble des variables internes du problème, dont est fonction la réponse du matériau, au temps  $t_{n+1}$  est déterminé uniquement en fonction de ces mêmes variables internes au pas  $t_n$ .

Dans ce chapitre, on s'attachera à poser la problématique de la transition d'échelle micromécanique des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques en décrivant la notion d'"effet mémoire longue", puis en détaillant les deux principales démarches mises en œuvre pour faire face à cette problématique, à savoir les méthodes de type héréditaires et la transition d'échelle à variables internes. Enfin, nous présenterons les difficultés liées à la prise en compte de l'effet mémoire longue dans la transition d'échelle à variables internes à travers l'analyse des principaux modèles développés en s'appuyant sur la comparaison avec les approches de type héréditaires.

## 3.2 Problématique de la transition d'échelle micromécanique des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques

### 3.2.1 Analyse de Suquet : "effet mémoire longue"

Nous avons vu que les problèmes hétérogènes viscoélastiques et élastoviscoplastiques mettent l'accent sur un problème plus complexe que les autres, principalement du fait de la forme différentielle des lois constitutives servant de point de départ à la transition d'échelle micromécanique. Cela implique, de toute évidence, différents ordres de dérivations par rapport au temps sur les champs de contrainte et déformation  $\sigma$  et  $\epsilon$ .

La spécificité des comportements viscoélastiques et élastoviscoplastique se situe dans la présence simultanée d'une composante élastique instantanée de la déformation et d'une composante viscoplastique dépendant du temps donnant lieu au caractère héréditaire du comportement, c'est-à-dire que la réponse actuelle du matériau dépend non seulement de la sollicitation actuelle mais aussi de toute son histoire. La nature héréditaire du comportement combinée à l'hétérogénéité du matériau engendre un couplage espace-temps qui a pour effet d'induire des interactions mécaniques différées entre les différents constituants du matériau. Ces interactions mécaniques différées définissent la notion de "mémoire longue" décrite par Suquet [64].

En effet, si l'on considère un ensemble de constituants obéissant à la loi de comportement de type Maxwell :

$$\dot{\epsilon} = s^I : \dot{\sigma} + m^I : \sigma$$

où  $s^I$  et  $m^I$  désignent respectivement les tenseurs de complaisances élastique et visqueuse du constituant  $I$ . On constate que si la loi de Maxwell représente la "mémoire courte" du comportement local, Suquet démontre que la loi macroscopique du comportement global n'est plus de type Maxwell et peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{E} = S^{hom} : \dot{\Sigma} + M^{hom} : \Sigma + \underbrace{\int_0^t J(t - \tau) : \dot{\Sigma}(\tau) d\tau}_{\text{terme de mémoire longue}}$$

où les tenseurs  $S^{hom}$  et  $M^{hom}$  découlent de l'homogénéisation respectivement purement élastique et visqueuse sur les tenseurs locaux. Le terme intégrale de "mémoire longue" du matériau,

issu des interactions mécanique différées, traduit la complexité du couplage espace-temps du comportement du matériau hétérogène viscoélastique.

A travers l'analyse de Suquet, on constate que la complexité des interactions viscoélastiques ou élastoviscoplastiques dans les matériaux hétérogènes représente une difficulté de taille pour les méthodes de transition d'échelle. Elle explique les failles importantes dans les premières tentatives de Weng [65], Némat-Nasser et Obata [66].

Il apparaît donc clairement que les difficultés à surmonter, dans le cas de la transition d'échelle du comportement viscoélastique ou élastoviscoplastique, sont liées à l'interdépendance espace-temps survenant dans l'étape de localisation. Pour faire face à ce problème, deux voies distinctes peuvent être utilisées : les approches de type héréditaire et les méthodes à variables internes.

### 3.2.2 Approches de type héréditaire

#### a. Introduction

Les approches de type "héréditaire" sont basées sur la formulation intégrale des lois constitutives linéaires suivant le principe de superposition de Boltzman. Elles reposent sur le principe de correspondance [67], qui exprime le fait que la solution du problème viscoélastique linéaire non-vieillissant peut être obtenue par la résolution du problème élastique symbolique correspondant, où les calculs de l'algèbre de convolution de Stieltjes peuvent être remplacés par des calculs algébriques ordinaires grâce à la transformée de Laplace Carson. En contrepartie, ces approches nécessitent à chaque instant  $t$ , la connaissance de toute l'histoire des sollicitations passées figure 3.1, ce qui les rend limitées du point de vue numérique.

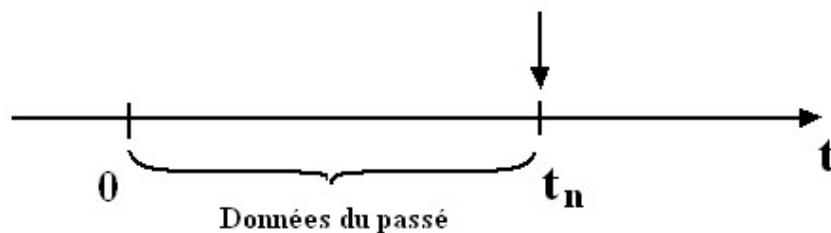


FIG. 3.1 – Schéma du principe des méthodes de type héréditaire

Ainsi, dans le cas de la viscoélasticité linéaire, ce problème a été résolu dans l'espace temps réel

par Laws et McLaughlin [68], par la formulation convoluée au sens de Stieljes. Dans l'espace de Laplace-Carson, les résolutions du problème ont été menées par Hashin [67], Weng [69], puis Rougier [70], par l'application du principe de correspondance.

Malgré que le principe de superposition de Boltzmann soit limité en théorie au cas de la viscoélasticité linéaire, une extension au cas de l'élastoviscoplasticité a été proposée par Rougier [71], qui combine la linéarisation du comportement le long d'un trajet de chargement macroscopique et l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson pas à pas. Suivant ce modèle, Masson et Zaoui [72], puis Masson et al. [73] poursuivent cette extension dans le cadre de la formulation affine.

## b. Problème hétérogène viscoélastique linéaire

- *Formulation intégrale*

Dans un milieu infini hétérogène  $V$ , de modules viscoélastiques  $l(r, t)$ , soumis sur sa frontière  $\partial V$  à une déformation uniforme  $\epsilon^0$ , les équations de champs classiques du problème hétérogène sont données par :

$$\sigma(r, t) = l(r, t) \otimes d\epsilon(r, t) \quad \text{Loi de comportement viscoélastique} \quad (3.1)$$

$$\text{div } \sigma(r, t) = 0 \quad \text{Equation d'équilibre statique} \quad (3.2)$$

$$\epsilon(r, t) = \nabla^s . u(r, t) \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (3.3)$$

$$\vec{u}^d(t) = \epsilon^0(t) . x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (3.4)$$

où  $r$  désigne la position d'un point  $M$  de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  dans l'espace  $V$  et  $\otimes$  est le produit de convolution de Stieltjes.

On introduit un milieu homogène de référence, de tenseur des modules viscoélastiques uniformes  $L$ , tel que :

$$l(r, t) = L(t) + \delta l(r, t) \quad (3.5)$$

Le tenseur  $L$  présente les propriétés de symétrie classiques :

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{klij} \quad (3.6)$$

En appliquant le principe de correspondance sur la formulation intégrale classique du problème hétérogène élastique, l'équation intégrale du problème hétérogène viscoélastique (cf Paquin [74])

peut s'écrire :

$$\epsilon(r, t) = \epsilon^0(t) - \int_V \Gamma^L(r - r', t) \otimes d\delta l(r', t) \otimes d\epsilon(r', t) dV' \quad (3.7)$$

où  $\Gamma^L$  est l'opérateur de Green modifié associé au tenseur des modules viscoélastiques  $L$  de référence.

En appliquant la transformée de Laplace-Carson sur (3.7), l'équation intégrale du problème dans l'espace de Laplace-Carson devient :

$$\hat{\epsilon}(r, p) = \hat{\epsilon}^0(p) - \int_V \hat{\Gamma}^L(r - r', p) : \delta \hat{l}(r', p) : \hat{\epsilon}(r', p) dV' \quad (3.8)$$

De même, la loi de comportement locale (3.1), devient dans l'espace de Laplace-Carson :

$$\hat{\sigma}(r, p) = \hat{l}(r, p) : \hat{\epsilon}(r, p) \quad (3.9)$$

- **Approximation autocohérente**

L'objectif de l'approximation autocohérente est de simplifier l'équation intégrale par la décomposition du tenseur de Green modifié  $\hat{\Gamma}^L$  en une partie locale  $\hat{\Gamma}_l^L$  et une partie non locale  $\hat{\Gamma}_{nl}^L$  :

$$\hat{\Gamma}^L(r - r', p) = \delta(r - r') \hat{\Gamma}_l^L(p) + : \hat{\Gamma}_{nl}^L(r - r', p)$$

Puis le tenseur  $\hat{L}$  est choisi de façon à remplir la condition de moyenne sur le volume :

$$\overline{\delta \hat{l}(r, p) : \hat{\epsilon}(r, p)} = 0 \quad (3.10)$$

L'équation intégrale (3.8) est alors réduite à sa contribution locale :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(r, p) &= \hat{E}(p) - \hat{\Gamma}_l^L(p) : \delta \hat{l}(r, p) : \hat{\epsilon}(r, p) \\ \text{avec } \hat{E} &= \hat{\epsilon}^0 \end{aligned}$$

En appliquant la moyenne sur le volume de la loi de comportement locale (3.9) en s'appuyant sur la condition de moyenne imposée (3.10), on obtient le comportement du matériau homogénéisé étant lui-même supposé viscoélastique linéaire :

$$\hat{\Sigma}(p) = \hat{L}^{eff}(p) : \hat{E}(p) \quad \text{avec} \quad \hat{L}^{eff}(p) = \hat{L}(p) \quad (3.11)$$

Par conséquent, l'équation intégrale (3.10) conduit à la relation de localisation :

$$\hat{\epsilon}(r, p) = \hat{A}^L(r, p) : \hat{E}(p) \quad (3.12)$$

$$\text{avec} \quad \hat{A}^L(r, p) = [I + \hat{\Gamma}_l^L(p) : \delta \hat{l}(r, p)]^{-1} \quad (3.13)$$



$\widehat{A}^L$  est le tenseur de localisation symbolique en déformation.  $\widehat{L}^{eff}(p)$  se déduit de façon habituelle par la relation implicite :

$$\widehat{L}^{eff}(p) = \overline{\widehat{l}(r, p) : \widehat{A}^L(r, p)} \quad (3.14)$$

On remarque bien, ici, que par l'équivalence symbolique, la démarche effectuée à partir de (3.8) correspond au schéma autocohérent classique réalisé en élasticité.

Pour revenir au problème hétérogène viscoélastique dans l'espace temps réel, on applique aux équations (3.12) et (3.14) la transformée de Laplace-Carson inverse.

- **Problème élémentaire de l'inclusion**

Dans le cas du problème élémentaire de l'inclusion d'Eshelby (voir Annexe B), l'équation intégrale symbolique (3.8) devient par analogie :

$$\widehat{\epsilon}^I = \widehat{\epsilon}^0 - \widehat{T}^L : \delta \widehat{l}^I : \widehat{\epsilon}^I \quad (3.15)$$

où  $\widehat{T}^L$  désigne le tenseur d'interaction symbolique d'une inclusion sphérique. Cette équation intégrale permet alors de conclure sur la localisation du problème :

$$\begin{cases} \widehat{\epsilon}^I = \widehat{A}^{LI} : \widehat{\epsilon}^0 \\ \widehat{A}^{LI} = [I + \widehat{T}^L : \delta \widehat{l}^I]^{-1} \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $\widehat{A}^{LI}$  est le tenseur de localisation symbolique de l'inclusion viscoélastique en déformation.

Pour aller plus loin dans l'analyse de la transition d'échelle micromécanique de type héréditaire, examinons le cas où les phases constituant l'inclusion et la matrice ont des comportements viscoélastiques linéaires maxwelliens isotropes. La loi de comportement locale peut s'écrire :

$$\dot{\epsilon}(t) = s : \dot{\sigma}(t) + m : \sigma(t) \quad (3.17)$$

où  $s$  et  $m$  sont respectivement les tenseurs des souplesses élastiques et visqueuses. Ces tenseurs sont indépendants du temps et, dans le cas isotrope, peuvent se projeter en deux composantes déviatorique et sphérique :

$$\begin{cases} s = c^{-1} = \frac{1}{2\mu} J + \frac{1}{3\kappa} L \\ m = b^{-1} = \frac{1}{2\eta} J + \frac{1}{3\kappa^v} L \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\text{avec } \begin{cases} J_{ijkl} = I_{ijkl} - L_{ijkl}, & L_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \text{où } I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) & \text{est le tenseur identité d'ordre 4} \end{cases}$$

L'application de la transformée de Laplace-Carson sur (3.17) conduit à la loi de comportement locale symbolique :

$$\hat{\sigma}(p) = \hat{l}(p) : \hat{\epsilon}(p) \quad (3.19)$$

$$\text{avec } \hat{l}(p) = \left( s + \frac{1}{p} m \right)^{-1} \quad (3.20)$$

Par conséquent, en injectant les expressions (3.18) des tenseurs locaux dans (3.20), on obtient l'expression du tenseur local viscoélastique symbolique suivante :

$$\hat{l}(p) = 2\hat{\mu}(p) J + 3\hat{\kappa}(p) L \quad (3.21)$$

$$\text{avec } \hat{\mu}(p) = \frac{\mu p}{p + \frac{\mu}{\eta}} \quad \text{et} \quad \hat{\kappa}(p) = \frac{\kappa p}{p + \frac{\kappa}{\kappa^v}} \quad (3.22)$$

L'expression du tenseur d'interaction de l'inclusion sphérique étant donnée pour le problème de l'inclusion-matrice élastique isotrope dans l'annexe B, on en déduit le tenseur d'interaction viscoélastique symbolique  $\hat{T}^L$  par le principe de correspondance :

$$\hat{T}^L = \frac{3(\hat{\kappa} + 2\hat{\mu})}{5\hat{\mu}(3\hat{\kappa} + 4\hat{\mu})} J + \frac{1}{3\hat{\kappa} + 4\hat{\mu}} L \quad (3.23)$$

En injectant les expressions (3.21) et (3.23) dans la relation (3.16), on obtient une nouvelle expression de  $\hat{A}^{LI}$  :

$$\hat{A}^{LI} = \frac{5\hat{\mu}(3\hat{\kappa} + 4\hat{\mu})}{5\hat{\mu}(3\hat{\kappa} + 4\hat{\mu}) + 6(\hat{\kappa} + 2\hat{\mu})(\hat{\mu}^I - \hat{\mu})} J + \frac{3\hat{\kappa} + 4\hat{\mu}}{3\hat{\kappa}^I + 4\hat{\mu}} L \quad (3.24)$$

où  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\kappa}$  sont les caractéristiques mécaniques symboliques du milieu de référence, tandis que  $\hat{\mu}^I$  et  $\hat{\kappa}^I$  sont celles de l'inclusion sphérique.

Par conséquent, à travers la forme de l'expression (3.24), on constate que  $\hat{A}^{LI}$  dépend des caractéristiques mécanique symboliques du milieu de référence et de l'inclusion, elles-mêmes fonctions de  $p$  comme le montrent les relation du (3.22). Cela montre toute la difficulté posée par l'inversion de Laplace-Carson sur l'expression du comportement homogénéisé symbolique (contenant nécessairement  $\hat{A}^{LI}$ ).

En effet, si l'inversion de la transformée de Laplace-Carson permet d'obtenir une expression

analytique  $L^{eff}(t)$  dans le cas très simple d'un matériau biphasé constitué d'éléments maxwelliens isotropes et incompressibles (cf. Rougier [70] ou Paquin [74]), la situation se complique sérieusement si la seule hypothèse d'incompressibilité n'est plus appliquée. Déjà dans le cas compressible, on a recours à des méthodes numériques conduisant à une solution inversée approchée, comme la méthode de collocation par points, très délicate à mettre en œuvre et très coûteuse en temps de calcul (cf. Rougier [70] et Masson [72]).

### c. Problème hétérogène viscoélastique non linéaire ou élastoviscoplastique

Dans le cas de la viscoélasticité non linéaire ou de l'élastoviscoplasticité, la loi de comportement locale devient :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = s : \dot{\sigma} + g(\sigma, \alpha) \\ \dot{\alpha} = h(\sigma, \alpha) \end{cases} \quad (3.25)$$

$\alpha$  représente un ensemble de paramètres internes et  $g$  est la contribution viscoplastique du taux de déformation, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. La non linéarité de la fonction  $g$  empêche d'utiliser directement la transformée de Laplace-Carson.

Rougier [70] propose alors de linéariser la loi (3.25) en considérant une formulation tangente autour de l'état courant, le long d'un trajet de chargement macroscopique donné :

$$\ddot{\epsilon} = s : \ddot{\sigma}(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma(t), \alpha(t)) : \dot{\sigma}(t)}_{m(t)} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\sigma(t), \alpha(t)) : h(\sigma(t), \alpha(t))}_{n(t)} \quad (3.26)$$

Par application d'un traitement incrémental tel que, à l'instant courant  $t_n$ , les champs de contraintes et de déformations locaux et globaux sont connus sur  $[0, t_n]$ , la loi tangente locale, au début du pas actuel  $[t_n, t_n + \Delta t]$  s'écrit :

$$\ddot{\epsilon} = s : \ddot{\sigma}(t) + m_n : \dot{\sigma}(t) + \ddot{\epsilon}_n^0(t, t_n) \quad (3.27)$$

$$\text{avec } \begin{cases} m_n = m(t_n) \\ n_n = n(t_n) \\ h_n = h(t_n) \\ \ddot{\epsilon}_n^0(t, t_n) = n_n : h_n + [(m(t) - m_n) : \dot{\sigma}(t) + n(t) : h(t) - n_n : h_n] (1 - H(t - t_n)) \end{cases}$$

La loi (3.27) désigne un comportement viscoélastique linéaire de Maxwell, avec un terme complémentaire ayant le statut d'un taux de déformation initiale constant pas à pas  $\tilde{\epsilon}_n^0(t, t_n) = \tilde{\epsilon}_n^0(t_n, t_n)$ , dépendant du temps mais non du chargement au-delà de  $t_n$ .

En appliquant la transformée de Laplace-Carson sur (3.27), Rougier parvient à la loi de comportement symbolique suivante :

$$\widehat{\epsilon}(p) = \widehat{s}_n(p) : \widehat{\sigma}(p) + \widehat{\epsilon}_n^0(p) \quad (3.28)$$

avec  $\widehat{s}_n(p) = s + \frac{1}{p}m_n$

A travers la loi de comportement (3.28), on constate bien que le problème hétérogène élasto-viscoplastique est ramené à un problème hétérogène élastique symbolique avec déformations initiales (ou "libres") déjà résolu par les tentatives antérieures de "tradition Krönerienne". Par ailleurs, les déformations "libres" symboliques ont maintenant un sens complètement différent que celles définies au départ par Kröner [54].

Ainsi, dans le cas du comportement élastoviscoplastique ou viscoélastique non linéaire, le modèle de transition d'échelle de type héréditaire est mis en œuvre par un schéma incrémental qui consiste à effectuer, pas à pas, une linéarisation de la loi de comportement tangente locale, puis le traitement intégral et l'homogénéisation du problème hétérogène symbolique, suivi de l'inversion pour obtenir la réponse macroscopique dans l'espace temps réel. Les résultats sont stockés ou intégrés à chaque pas.

#### d. Conclusion sur les méthodes de type héréditaire

L'analyse du principe de la démarche de transition d'échelle de type héréditaire montre que, du fait de la séparation des variables d'espace et de temps, les approches de type héréditaire s'avèrent relativement simples sur le plan théorique et leur résolution fait appel à des calculs analytiques aisément maniables et déjà connus. Cependant, elles demeurent très lourdes au niveau numérique, soit du fait d'un calcul de convolution nécessitant un stockage intensif des données qui augmente considérablement les temps de calcul, soit lors du retour à l'espace temps réel qui implique l'inversion de la transformée de Laplace-Carson. Notons aussi que dans le cas de l'élastoviscoplasticité ou de l'élasticité non linéaire, la précision du modèle dépend, d'une part, du nombre d'inversions successives de la transformée de Laplace-Carson elle-même fonction de la discrétisation dans le temps de la loi de comportement linéarisée, et d'autre part, de la méthode numérique d'inversion envisagée qui sera d'autant plus délicate et lourde en calculs

que la qualité de l'inversion souhaitée sera bonne.

### 3.2.3 Méthodes à variables internes

Dans la section 3.2.2, nous montrons l'intérêt des approches de type héréditaire qui permettent une simplification considérable de la procédure de transition d'échelle, en se ramenant à un problème d'homogénéisation pseudo-élastique. Malheureusement, le défaut de ce type de démarche est la lourdeur numérique très importante quant au retour à l'espace temps réel par l'inversion de la transformée de Laplace-Carson, car elle nécessite de connaître toute l'histoire des sollicitations passées.

En revanche, les approches à variables internes consistent à décrire la propriété d'hérédité du matériau par une dépendance instantanée du comportement par rapport à un ensemble de variables internes décrivant l'état actuel du matériau. L'évolution de chacune de ces variables est donnée sous la forme d'une relation de récurrence entre la variable interne au pas  $t_{n+1}$  et l'ensemble des variables au pas précédent  $t_n$ . Cette description instantanée du comportement, ainsi que la méthode incrémentale décrivant son évolution d'un instant donné à l'instant suivant, induisent une simplicité numérique considérable lors de la détermination du comportement effectif. La figure 3.2 montre de manière schématique le principe des méthodes à variables internes.

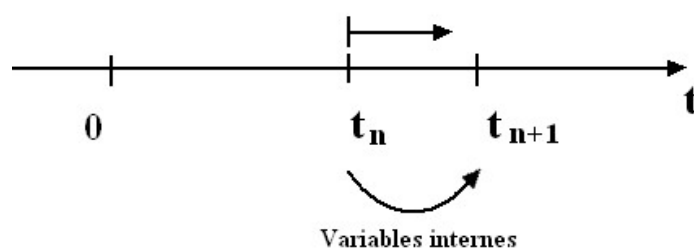


FIG. 3.2 – Schéma du principe des méthodes à variables internes

La difficulté des approches à variables internes réside dans une prise en charge inévitable des effets du couplage espace-temps et de l'accommodation intergranulaire. Cette prise en charge nécessite une formulation intégrale très lourde d'un point de vue théorique, contrairement aux approches de type héréditaire dont la démarche théorique ne suscite pas la description de ces phénomènes de couplage dissimulés lors de la formulation intégrale par le principe de corres-

pondance.

La première tentative d'approche à variables internes en élastoviscoplasticité est venu de Weng [65], inspiré par la transition d'échelle de Kröner [75] en élastoplasticité. Dans son modèle, Weng commet donc deux erreurs qui sont, d'une part, l'uniformité de la vitesse de déformation viscoplastique du milieu de référence, et d'autre part, la considération de la vitesse de déformation viscoplastique "libre de contraintes". Par la suite, des modèles de transition d'échelle à variables internes, basés sur le problème élémentaire de l'inclusion-matrice élastoviscoplastique ont été menés, afin de prendre en compte la nature élastoviscoplastique des interactions. Le modèle de Kouddane [76] permet, grâce à une hypothèse simplificatrice, l'obtention d'une solution qui, dans le cas particulier d'un problème hétérogène au comportement local maxwellien isotrope incompressible, coïncide avec la solution du modèle héréditaire de Rougier [70]. Plus récemment, une approche alternative a été trouvée par Sabar et al. [77], utilisant les opérateurs de projection de Kunin [78] et introduisant les champs translatsés. Dès lors, la transition d'échelle basée sur les champs translatsés s'est illustrée au travers des modèles de Paquin et al. [74] et Berbenni et al. [79].

### 3.3 Modèles de transition d'échelle à variables internes

#### 3.3.1 Modèle de Weng

##### a. Présentation du modèle

Weng considère un matériau hétérogène de module d'élasticité local  $c(r)$  soumis à une vitesse de déformation uniforme  $\dot{E}$  à l'infini et dans lequel s'exerce une vitesse de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$ . Les équations de champs classiques de la Mécanique des Milieux Continus qui régissent le problème s'écrivent :

$$\dot{\sigma}(r) = c(r) : [\dot{\epsilon}(r) - \dot{\epsilon}^{vp}(r)] \quad \text{Loi de comportement} \quad (3.29)$$

$$\text{div } \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre} \quad (3.30)$$

$$\dot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \dot{u} \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (3.31)$$

$$\dot{u}^d = \dot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (3.32)$$

Le milieu homogène de référence, considéré ici, a un module d'élasticité homogène  $C$ , est soumis aux mêmes conditions aux limites, et est le siège d'une vitesse de déformation viscoplastique homogène  $\dot{E}^{vp}$  tels que :

$$\begin{cases} c(r) = C + \delta c(r) \\ \dot{\epsilon}^{vp}(r) = \dot{E}^{vp} + \delta \dot{\epsilon}^{vp}(r) \end{cases}$$

La formulation intégrale classique du problème, à partir du système des équations de champs (3.29) à (3.32), conduit à l'équation intégrale :

$$\dot{\epsilon}(r) = \dot{\epsilon}^0 - \int_V \Gamma^C(r - r') : [\delta c(r') : \dot{\epsilon}^e(r') - C : \delta \dot{\epsilon}^{vp}(r')] dV' \quad (3.33)$$

Dans le cas du problème de l'inclusion sphérique, l'équation intégrale (3.33) est réduite à sa partie locale dans l'inclusion :

$$\dot{\epsilon}^I = \dot{\epsilon}^0 - T^C : [\delta c^I : \dot{\epsilon}^e - C : \delta \dot{\epsilon}^{vp I}] \quad (3.34)$$

En introduisant le tenseur de localisation élastique  $A^C$  défini par :

$$A^C = (I + T^C : \delta c)^{-1} \quad \text{avec} \quad \overline{A^C} = I$$

La relation de localisation, à partir de l'équation intégrale (3.34), devient :

$$\dot{\epsilon}^I = A^C : \dot{\epsilon}^0 + A^C : T^C : [c^I : \dot{\epsilon}^{vpI} - C : \dot{\epsilon}^{vp0}]$$

### b. Approximation autocohérente de Kröner

Kröner applique l'une des propriétés fondamentales de l'approximation autocohérente qui consiste, dans le cas du modèle de Weng, à choisir  $C$  et  $\dot{E}^{vp}$  de façon à affaiblir la contribution non locale du terme intégrale de la formulation intégrale générale (3.33), en imposant la condition de moyenne :

$$\overline{\delta c(r) : \dot{\epsilon}^e(r) - C : \delta \dot{\epsilon}^{vp}(r)} = 0 \quad (3.35)$$

De plus, par le principe d'autocohérence, la relation de localisation devient :

$$\dot{\epsilon} = A^C : \dot{E} + A^C : T^C : [c : \dot{\epsilon}^{vp} - C : \dot{E}^{vp}] \quad (3.36)$$

En appliquant la moyenne spatiale sur la relation de localisation (3.36), il vient :

$$\dot{E}^{vp} = C^{-1} : T^{C^{-1}} : \overline{A^C : T^C : c : \dot{\epsilon}^{vp}} \quad (3.37)$$

En effectuant la moyenne spatiale de la loi de comportement local (3.29), et en tenant compte de la condition de moyenne (3.35), la loi macroscopique est déduite sous la forme suivante :

$$\dot{\Sigma} = C : (\dot{E} - \dot{E}^{vp}) \quad (3.38)$$

En procédant de la même manière avec (3.29), mais en y injectant cette fois-ci la relation de localisation (3.36), on obtient par identification avec la loi macroscopique (3.38) :

$$C = \overline{c : A^C} \quad (3.39)$$

Les équations (3.37), (3.38) et (3.39) permettent ainsi de déterminer, en fonction des données du problème, la contrainte macroscopique  $\Sigma$  en fonction de la déformation macroscopique  $E$ .

Pour le modèle de Weng, les données du problème sont les expressions du tenseur des modules élastiques local  $c$ , ainsi que la loi d'évolution de la vitesse de déformation viscoplastique locale  $\dot{\epsilon}^{vp}$ .



### c. Analyse du modèle de Weng

Le modèle de Weng est testé dans le cas d'un matériau biphasé de constituants maxwelliens isotropes et incompressible dont la structure est formée d'inclusions sphériques, représentant la phase 1, baignant dans une matrice (phase 2). Les propriétés mécaniques et la microstructure sont présentées sur la figure 3.3.

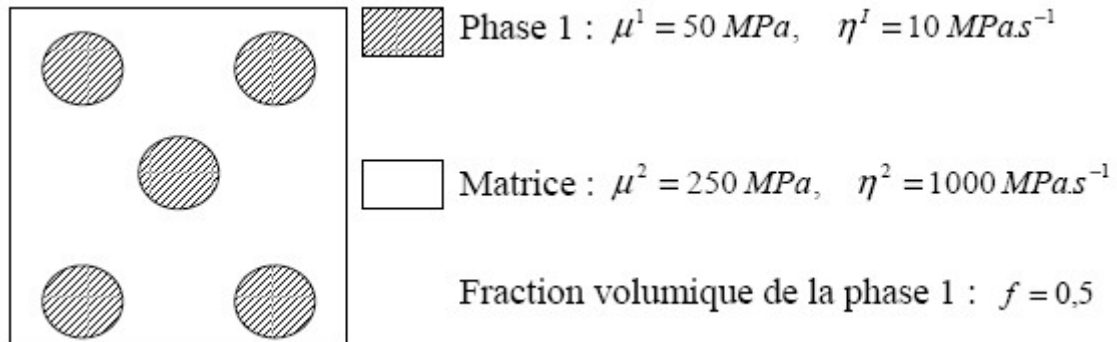


FIG. 3.3 – Propriété micromécanique et microstructure du matériau biphasé maxwellien isotrope incompressible :  $\mu^1$  et  $\mu^2$  sont les coefficients de cisaillement locaux en élasticité,  $\eta^1$  et  $\eta^2$  sont les coefficients de cisaillement locaux en viscoplasticité.

La figure 3.4 représente les résultats obtenus par le modèle de Weng, en comparaison avec la solution analytique autocohérente du modèle de référence de Rougier, pour un essai de traction-compression à vitesse de déformation constante  $\dot{E}$ .

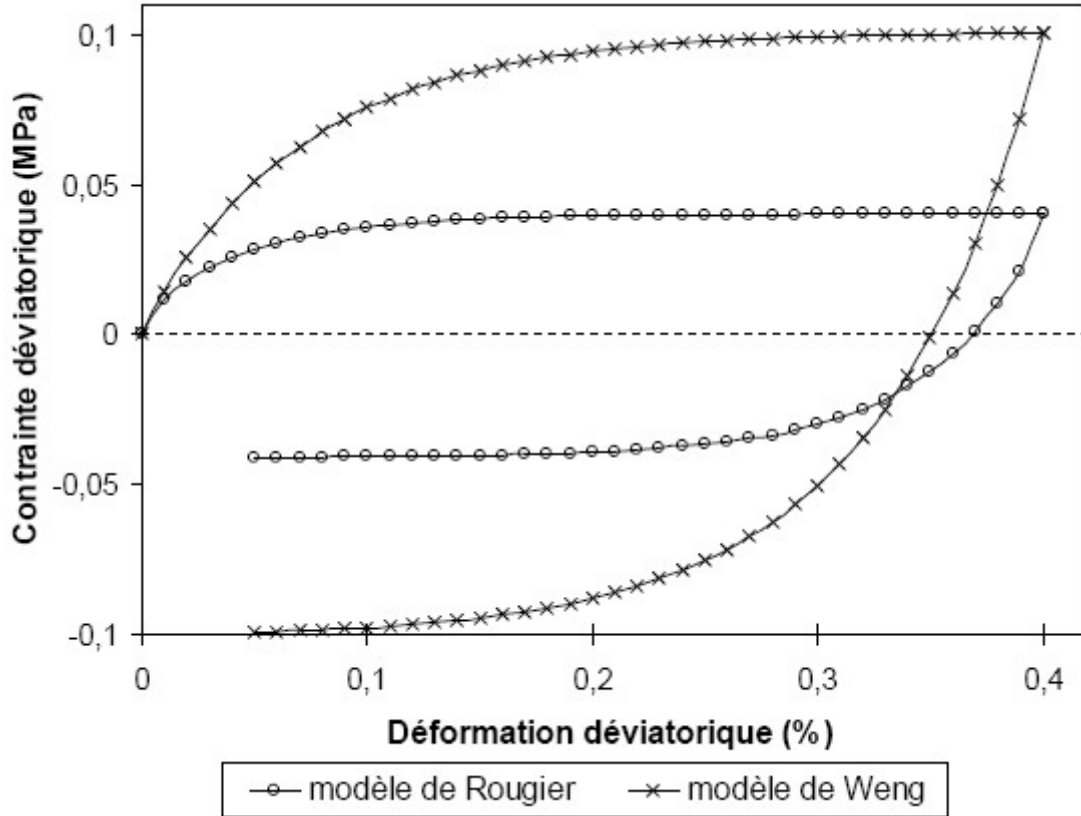


FIG. 3.4 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

On constate, à travers les courbes de la fig. 3.4, que le modèle de Weng représente mal le comportement viscoélastique du matériau du fait d'une forte surestimation des contraintes. De plus, il faut préciser que ce phénomène de surestimation s'accroît plus l'hétérogénéité viscoplastique entre les deux phases est grande.

Dans son approche, Weng reprend le modèle de Kröner en élastoplasticité pour l'étendre à la viscoélasticité en remplaçant la déformation plastique homogène du milieu de référence  $\dot{E}^P$  par  $\dot{E}^{vp}$ , la vitesse de déformation homogène viscoélastique. Par conséquent, Weng commet la même erreur que Kröner en considérant la déformation viscoplastique comme une déformation libre au sens d'Eshelby. Il en résulte une surestimation de l'accommodation intergranulaire décrite par le modèle de Weng, où la nature des interactions entre la matrice et les inclusions est purement élastique, comme le confirme la loi d'interaction (3.38) :

$$\dot{\Sigma} = C : (\dot{E} - \dot{E}^{vp})$$

En effet, il paraît logique que la nature des interactions étant viscoplastique, la vitesse de

déformation viscoplastique ne peut pas être homogène autour de l'inclusion (fig. 3.5), d'où la nécessité de connaître la loi d'évolution de la vitesse de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  et d'en tenir compte dans l'étape de localisation.

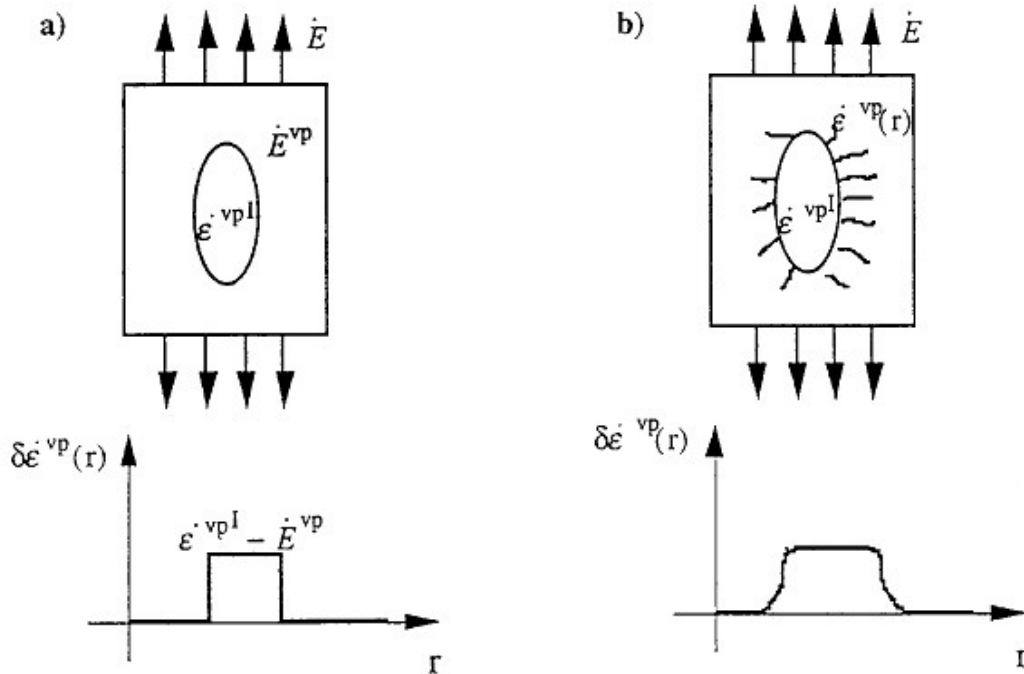


FIG. 3.5 – a) modèle de Weng : interaction inclusion-matrice de nature élastique. b) Interaction inclusion-matrice de nature élastoviscoplastique

### 3.3.2 Prise en compte de la nature élastoviscoplastique de l'accommodation intergranulaire

L'analyse du modèle de Weng affiche clairement la nécessité d'effectuer une formulation complète de la loi de comportement en prenant en compte la loi d'évolution de la déformation viscoplastique. Cette prise en compte permet de décrire la nature élastoviscoplastique de l'accommodation intergranulaire.

Un problème de taille auquel sera confrontée l'étape de localisation du problème hétérogène élastoviscoplastique se trouve dans la formulation intégrale de la loi de comportement thermodynamique de forme différentielle. En effet, il devient impossible de reprendre la formulation tangente d'inspiration "incrémentale" de Hill du type  $\dot{\sigma} = l : \dot{\epsilon}$ , adaptée au problème de l'inclusion inhomogène d'Eshelby.

Par conséquent, il devient nécessaire de mettre en oeuvre une transition d'échelle authentique, basée sur une loi constitutive de forme différentielle traduisant à la fois l'évolution de la déformation élastique et celle de la déformation viscoplastique.

Le traitement intégral classique du problème élémentaire de l'inclusion élastoviscoplastique, où les constituants ont chacun un comportement élastoviscoplastique maxwellien, peut être mené de façon symétrique entre élasticité et viscoplasticité par la méthode des fonctions de Green et peut conduire à deux équations intégrales suivant que l'on considère les fonctions de Green associées à l'élasticité ou celles liées à la viscoplasticité :

$$\epsilon^I = \epsilon^0 + T^C : [\delta c^I : (\dot{\epsilon}^I - m^I : \sigma^I) - C : \delta m^I : \sigma^I] - \underbrace{\Gamma^C * (C : M : \sigma)}_{I^C} \quad (3.40)$$

$$\dot{\epsilon}^I = \dot{\epsilon}^0 + T^B : [\delta b^I : (\dot{\epsilon}^I - s^I : \dot{\sigma}^I) - B : \delta s^I : \dot{\sigma}^I] - \underbrace{\Gamma^B * (B : S : \dot{\sigma})}_{I^B} \quad (3.41)$$

Paquin et al. [74] ont établi une loi d'interaction du problème de l'inclusion élastoviscoplastique dans l'inclusion et dans le milieu de référence à partir de l'équation (3.40) et des équations de champs du problème :

$$\dot{\sigma}^I - \dot{\sigma}^0 = \underbrace{(C - T^{C^{-1}}) : (\dot{\epsilon}^I - \dot{\epsilon}^0)}_{1^{er}terme} + \underbrace{C : M : (\sigma^I - \sigma^0)}_{2^{e}terme} - \underbrace{T^{C^{-1}} : [\Gamma^C * (C : M : \sigma)]}_{3^{e}terme} \quad (3.42)$$

De la même manière, cette fois-ci à partir de l'équation (3.41) et des équations de champs, on peut établir une deuxième forme de la loi d'interaction du problème de l'inclusion élastoviscoplastique :

$$\sigma^I - \sigma^0 = \underbrace{(B - T^{B^{-1}}) : (\dot{\epsilon}^I - \dot{\epsilon}^0)}_{1^{er}terme} + \underbrace{B : S : (\dot{\sigma}^I - \dot{\sigma}^0)}_{2^{e}terme} - \underbrace{T^{B^{-1}} : [\Gamma^B * (B : S : \dot{\sigma})]}_{3^{e}terme} \quad (3.43)$$

En analysant les deux lois d'interaction (3.42) et (3.43) ainsi obtenues, on distingue la présence de trois termes de natures différentes dans chacune d'elles

Les lois d'interaction obtenues attestent de l'importance d'une véritable description élastoviscoplastique du comportement avec une prise en considération de la loi d'évolution de la contribution viscoplastique de la déformation, autorisant de ce fait à exprimer une accommodation intergranulaire qui ne se cantonne pas uniquement à une accommodation purement élastique ou visqueuse.

Néanmoins, les expressions des lois d'interaction élastoviscoplastiques, (3.40) et (3.41), mettent l'accent sur la complexité des interactions viscoélastiques qui font intervenir les termes convolution dans l'espace  $I^C$  et  $I^B$  sur tout le volume du V.E.R.. Ces termes ne pouvant être réduits à leurs parties locales pour le problème de l'inclusion viscoélastique et étant de ce fait mal adaptés aux principe d'autocohérence, leur détermination demeure la priorité essentielle des approches à variables internes [80].

Dans ce qui suit, nous présentons les principales tentatives de résolution de ce problème, à savoir la solution triviale de l'approche de Kouddane, et les approches à champs translatés.

### 3.3.3 Modèle de Kouddane

#### a. Situation du problème

Lorsque l'on considère l'équation intégrale classique du problème hétérogène viscoélastique, une question se pose sur la possibilité d'un choix particulier du milieu de référence, de module d'élasticité  $C$  et de complaisance viscoplastique  $M$ , permettant d'annuler le terme intégrale  $I^C$  :

$$I^C = \Gamma^C * (C : M : \sigma) = 0$$

Autrement dit, le terme intégrale  $I^C$  provenant du terme  $div(C : M : \sigma)$  de l'équation de Navier du problème hétérogène :

$$C : \dot{u} + f = C : \dot{u} + div [\delta c : (\dot{\epsilon} - m : \sigma) - C : \delta m : \sigma] - div (C : M : \sigma) = 0$$

La question peut être posée plus simplement à savoir :

$$\exists C, M / div (C : M : \sigma) = 0 \quad ? \quad (3.44)$$

#### b. Approche de Kouddane

Kouddane et al. [76] proposent une hypothèse conduisant à la solution triviale du problème (3.44). Cette hypothèse stipule que le tenseur  $M$  est choisi de telle sorte à vérifier la condition :

$$C : M = \lambda I, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

La conséquence de ce choix est donc l'annulation du terme  $div (C : M : \sigma) = \lambda div \sigma = 0$ , ce qui entraîne la suppression du terme intégrale  $I^C$  dans l'équation intégrale classique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * \left[ \delta c : (\dot{\epsilon} - m : \sigma) - C : \delta m : \sigma \right] \quad (3.46)$$

Kouddane obtient ainsi une nouvelle équation intégrale simplifiée donnant lieu à une relation de localisation dont une homogénéisation autocohérente adéquate est rendue simple et possible.

Afin de négliger la contribution à distance du terme intégral restant, l'approximation autocohérente impose de façon classique la condition de moyenne :

$$\overline{\delta c : (\dot{\epsilon} - m : \sigma) - C : \delta m : \sigma} = 0 \quad (3.47)$$

ce qui conduit à la relation macroscopique :

$$\dot{\Sigma} = C : \left( \dot{E} - M : \Sigma \right) \quad (3.48)$$

La condition (3.47) permet de réduire l'équation intégrale (3.46) à sa partie locale et d'obtenir la relation de localisation suivante :

$$\dot{\epsilon} = A^C : \dot{E} - A^C : T^C : (c : m : \sigma - C : M : \sigma) \quad (3.49)$$

$$A^C = (I + T^C : \delta c)^{-1}$$

A partir de l'application de la moyenne spatiale sur la relation (3.49) et par identification avec (3.48), on obtient :

$$\overline{A^C : T^C : C : M : \sigma} = \overline{A^C : T^C : c : m : \sigma}$$

$$\text{et } C = \overline{c : A^C}$$

### c. Analyse du modèle de Kouddane

La figure 3.6 représente les résultats du modèle de Kouddane lors du même essai de traction-compression et du même matériau que pour l'analyse du modèle de Weng effectuée dans la section 3.3.1. Ces résultats sont bien entendus comparés avec la solution analytique du modèle de référence de Rougier.

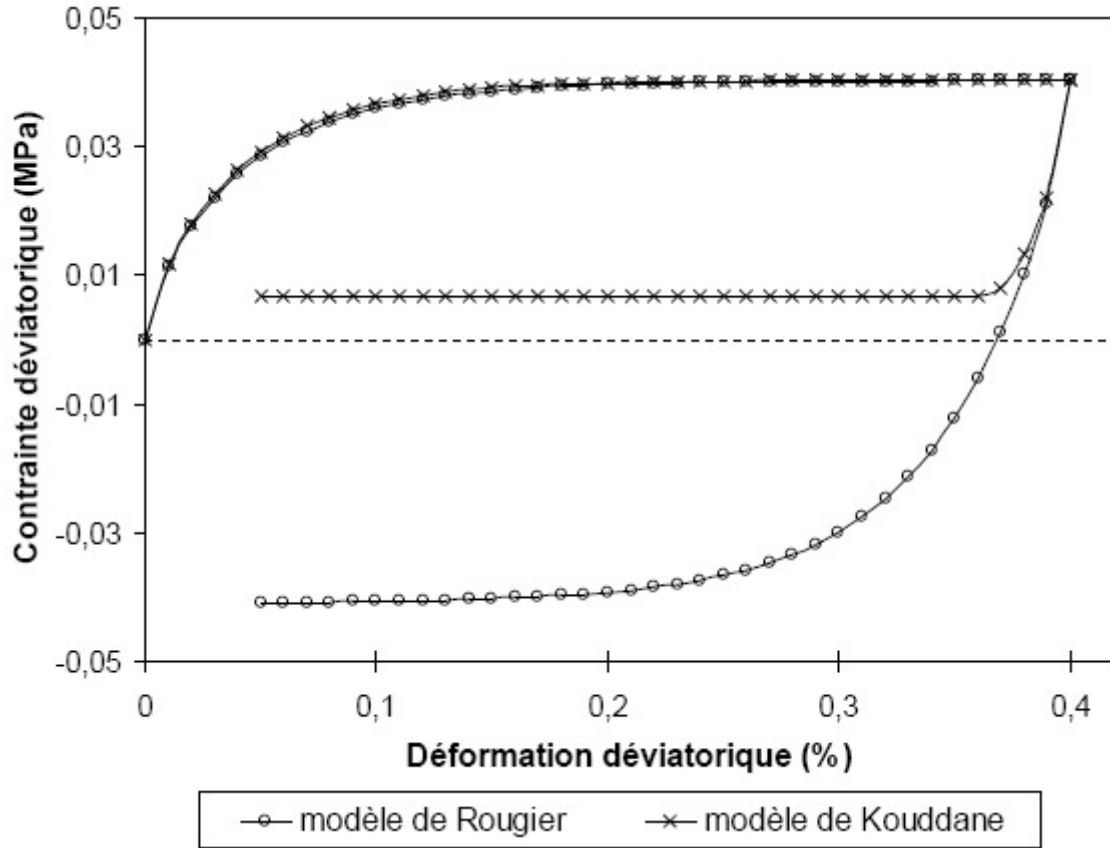


FIG. 3.6 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

On remarque que dans le cas précis d'un comportement isotrope incompressible, l'hypothèse de Kouddane est naturellement vérifiée, ce qui entraîne un très bon accord entre les deux courbes lorsque le matériau est en charge. Cependant, la divergence des deux courbes lors de la décharge montre clairement les instabilités numériques du modèle, du fait que la relation de localisation du modèle de Kouddane n'est pas complètement définie pour certains états de contraintes lors de la décharge, au voisinage de  $\Sigma = 0$ .

L'élimination du terme intégrale  $I^C$  par l'hypothèse de Kouddane impose que les tenseurs  $S$  et  $M$ , caractérisant le comportement du milieu de référence, aient des structures colinéaires :

$$M = \lambda S \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } S = C^{-1}$$

Cette restriction ne trouve son fondement physique que dans le cas particulier de l'isotropie incompressible, où la solution de Kouddane équivaut à la solution exacte de Hashin-Rougier [67][70]. De ce fait, elle demeure inadéquate pour représenter la complexité des interactions

dans de nombreux cas comme celui de l'isotropie compressible ou encore l'anisotropie.

### 3.3.4 Modèles à champs translatés

Les modèles à champs translatés sont basés sur l'utilisation des opérateurs de projection notés  $\Pi^C$  et  $\Pi^B$ , également appelés opérateurs de Kunin [78] :

$$\begin{cases} \Pi^C = \Gamma^C : C \\ \Pi^B = \Gamma^B : B \end{cases}$$

Ces opérateurs de projection ont des propriétés [74][79] permettant d'appliquer la condition d'autocohérence sur des champs translatés particuliers et explicites qui vérifient les conditions de compatibilité cinématique ou les conditions d'équilibre suivant qu'il s'agisse de champs de contraintes ou de déformation.

#### a. Modèle de Paquin et al.

Paquin et al. [74] proposent une résolution par une formulation intégrale respectant la symétrie entre élasticité et viscoplasticité du problème hétérogène élastoviscoplastique, en combinant les propriétés des opérateurs  $\Pi^C$  et  $\Pi^B$ .

Les équations de champs servant de point de départ au modèle de Paquin sont les équations de champs classiques du problème hétérogène élastoviscoplastique basé sur un comportement local maxwellien :

$$\dot{\epsilon}(\vec{r}, t) = s(\vec{r}) : \dot{\sigma}(\vec{r}, t) + m(\vec{r}, \sigma, \dots) : \sigma(\vec{r}, t) \quad \text{Loi de comportement} \quad (3.50)$$

$$\text{div } \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \text{ inconnu} \quad (3.51)$$

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \sigma \text{ connu} \quad (3.52)$$

$$\dot{\epsilon} = \nabla^s \vec{u} \quad \text{relation de compatibilité cinématique} \quad (3.53)$$

$$\vec{u}^d = \epsilon^0 \cdot \vec{x} \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (3.54)$$

On considère un milieu homogène dont les tenseurs  $S$  des modules élastiques, et  $M$  des modules



viscoplastiques sont tels que :

$$\begin{cases} c(\vec{r}) = C + \delta c(\vec{r}) , C^{-1} = S \\ b(\vec{r}) = B + \delta b(\vec{r}) , B^{-1} = M \end{cases}$$

Le système équivalent homogène en déformations, et portant sur les opérateurs  $\Pi^C$  et  $\Pi^B$ , est déterminé grâce aux propriétés de ces derniers :

$$\begin{array}{ll} S : \dot{\sigma} + M : \sigma = \dot{\epsilon} - \delta s : \dot{\sigma} - \delta m : \sigma & \text{Loi de comportement} \\ \Pi^C * (S : \dot{\sigma}) = 0 & \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \\ \Pi^B * (M : \sigma) = 0 & \text{Equation d'équilibre sur } \sigma \\ \Pi^C * \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 & \text{Condition de compatibilité cinématique} \\ \Pi^B * \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 & \text{Condition de compatibilité cinématique} \end{array}$$

L'application de l'opérateur  $\Pi^{CB} = \Pi^C + \Pi^B$  donne alors, suivant la démarche de Paquin, l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 + \Pi^C * (\delta s : \dot{\sigma}) + \Pi^B * (\delta m : \sigma) + (\Pi^C - \Pi^B) * (m : \sigma) \quad (3.55)$$

Cette équation intégrale est riche concernant les interactions mécaniques, puisque l'on peut constater la présence d'un terme de fluctuation  $\delta s : \dot{\sigma}$  de nature élastique lié à  $\Pi^C$ , d'un terme de fluctuation  $\delta m : \sigma$  de nature viscoplastique lié à  $\Pi^B$ , et d'un terme ne comportant aucune fluctuation lié à la différence des opérateurs  $\Pi^C - \Pi^B$  et au champs de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp} = m : \sigma$ .

Puis, en vue de simplifier l'équation intégrale (3.55) dans le but de la rendre plus adaptée au principe de l'approximation autocohérente, Paquin et al. effectuent une translation des champs de déformation élastique et viscoplastique  $\dot{\epsilon}^e(\vec{r})$  et  $\dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r})$  selon :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^e(\vec{r}) = \dot{\epsilon}^e(\vec{r}) + \delta \dot{\epsilon}^e(\vec{r}) \\ \dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) = \dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) + \delta \dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) \end{cases}$$

où  $\dot{\epsilon}^e(\vec{r})$  (respectivement  $\dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r})$ ) représente le champs fictif des vitesses de déformation qui s'établirait si le matériau était purement élastique (respectivement purement viscoplastique) et soumis au même état de contraintes que le matériau hétérogène élastoviscoplastique. Ces champs

s'expriment en fonction des champs des vitesses uniformes inconnus  $\dot{X}$  et  $\dot{Y}$  s'appliquant sur le matériau à l'infini par les relations :

$$\begin{cases} \dot{e}^e(\vec{r}) = A^{C^e} : \dot{X} \\ \dot{e}^{vp}(\vec{r}) = A^{B^e} : \dot{Y} \end{cases}$$

où  $A^{C^e}$  et  $A^{B^e}$  sont respectivement les tenseurs de localisation en déformation du problème purement élastique et du problème viscoplastique pur correspondants.  $C^e$  et  $B^e$  sont respectivement les tenseurs des modules homogènes de référence purement élastiques et purement viscoplastiques.

Les champs  $\dot{e}^e(\vec{r})$  et  $\dot{e}^{vp}(\vec{r})$  vérifient les conditions de compatibilité cinématique. L'application du schéma autocohérent sur le problème translaté aboutit à la relation de localisation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= A^{C^e} : \dot{E} \\ &+ A^{C^e} : T^{C^e} : \left[ \delta c : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma}) - c : A^{C^e} : \overline{{}^t B^{C^e} : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma})} \right] \\ &- A^{C^e} : T^{B^e} : (\delta b : m : \sigma + b : A^{B^e} : \overline{\delta m : \sigma}) \\ &+ A^{C^e} : (T^{C^e} : C^e - T^{B^e} : B^e) : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

avec  $B^{C^e} = {}^t B^{C^e} = c : A^{C^e} : S^e$ .

La relation de localisation en contraintes se détermine en s'appuyant sur la loi de comportement locale élastoviscoplastique (3.50) :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= c : A^{C^e} : \dot{E} - c : m : \sigma \\ &+ c : A^{C^e} : T^{C^e} : \left[ \delta c : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma}) - c : A^{C^e} : \overline{{}^t B^{C^e} : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma})} \right] \\ &- c : A^{C^e} : T^{B^e} : (\delta b : m : \sigma + b : A^{B^e} : \overline{\delta m : \sigma}) \\ &+ c : A^{C^e} : (T^{C^e} : C^e - T^{B^e} : B^e) : (m : \sigma - A^{B^e} : \overline{m : \sigma}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

## b. Modèle de Berbenni et al.

Berbenni et al. [79] suivent la même démarche à champs translatsés que Paquin et al., à la différence qu'ils simplifient le problème en ne le traitant non plus en respectant la symétrie

entre élasticité et viscoplasticité du problème hétérogène, mais en ne translatant uniquement que la déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  non uniforme :

$$\dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) = \dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) + \delta\dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r})$$

$$\text{avec } \dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r}) = A^{B^e} : \dot{Z}$$

où  $\dot{Z}$  est un champs uniforme inconnu. Pour cela, Berbenni et al. partent des mêmes équations de champs du problème hétérogène et opèrent par un traitement intégral, d'une part en utilisant la forme  $\dot{\epsilon}^{vp}(\vec{r})$  du taux de déformation viscoplastique sans l'expression de sa loi d'évolution en fonction des variables thermodynamiques observables et internes, et d'autre part, en ne considérant que l'opérateur de Green modifié liée à l'élasticité  $\Gamma^C$ . Ils obtiennent ainsi l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 + \Pi^C * (\delta s : c : \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp}) \quad (3.58)$$

en rappelant que :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^e = s : \dot{\sigma} \\ \Pi^C = \Gamma^C : C \end{cases}$$

L'idée vient ensuite de choisir comme milieu de référence  $C$ , le milieu effectif  $C^e$  issu de l'opérateur de Navier et de l'approximation autocohérente en élasticité. L'équation (3.58) devient alors :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 + \Pi^{C^e} * (\delta s^e : c : \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp})$$

$$\text{où } \delta s^e(\vec{r}) = s(\vec{r}) - S^e, \quad S^e = C^{-1}, \quad \Pi^{C^e} = \Gamma^{C^e} : C^e.$$

$\Gamma^{C^e}$  est associé à  $C^e$ . En procédant ensuite à l'approximation autocohérente sur le problème translaté, la relation de localisation est obtenue :

$$\dot{\epsilon} = A^{C^e} : (\dot{E} - \dot{E}^{vp}) + A^{C^e} : A^{B^e} : \dot{E}^{vp^e} + A^{C^e} : T^{C^e} : \left( c : \dot{\epsilon}^{vp} - C^e : A^{B^e} : \dot{E}^{vp^e} \right) \quad (3.59)$$

$$\text{avec } \dot{E}^{vp^e} = \dot{X} = \overline{t B^{C^e} : \dot{\epsilon}^{vp}}$$

Grâce à la loi de comportement locale du problème hétérogène, l'équation de localisation (3.59) peut être écrite sous forme de loi d'interaction en contraintes :

$$\dot{\sigma} = c : A^{C^e} : S^e : \dot{\Sigma} - c : A^{C^e} : \left( I - S^{Esh} \right) : \left( \dot{\epsilon}^{vp} - A^{B^e} : \dot{E}^{vp^e} \right) \quad (3.60)$$

où  $S^{Esh} = T^{C^e} : C^e$  est le tenseur d'Eshelby (cf. Annexe B).

### c. Analyse des modèles à champs translétés

Les modèles de Paquin et al. et Berbenni et al. sont basés sur une approche autocohérente à variables internes du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes. Bien que la relation de localisation (3.59) obtenue par Berbenni et al. apparaît plus simple que (3.56), obtenue par Paquin et al. quelques années plus tôt, le modèle le plus récent reste, comme son prédécesseur, une estimation rigoureuse sur le plan mécanique, prenant en compte la nature élastoviscoplastique de l'accommodation intergranulaire.

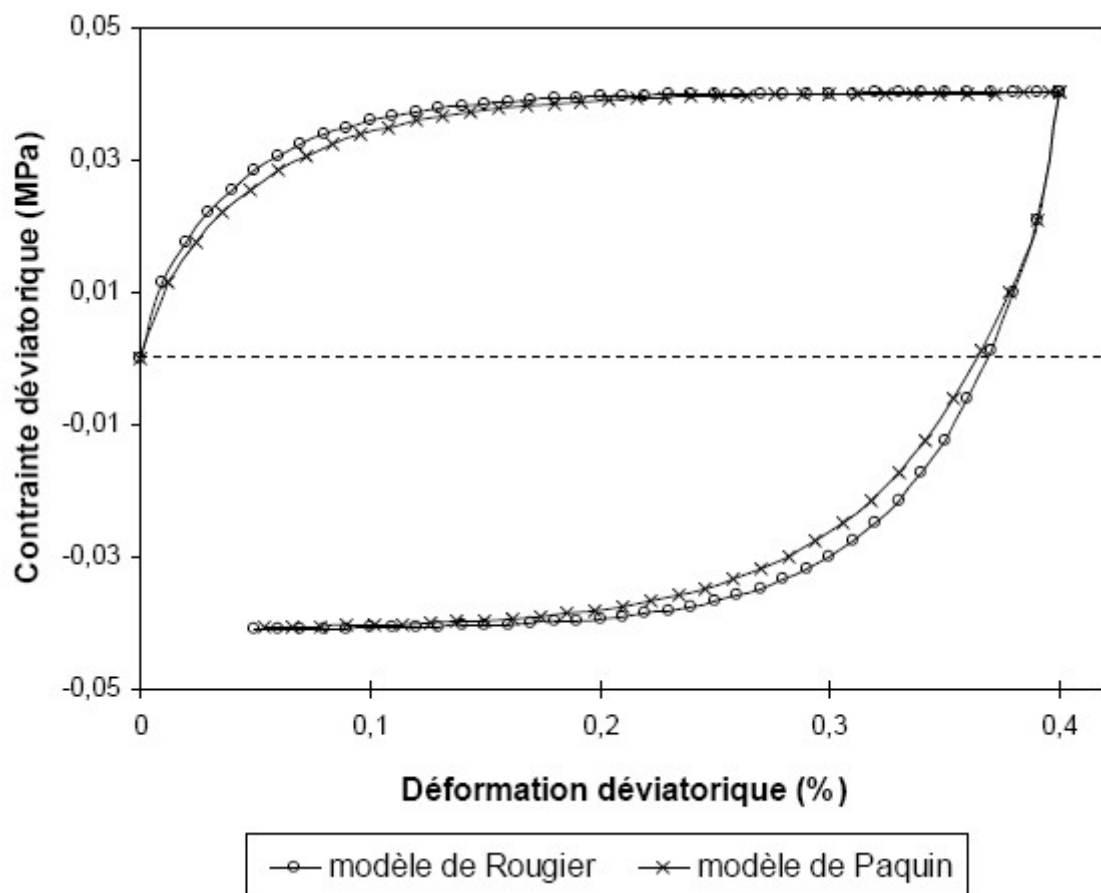


FIG. 3.7 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

La simulation réalisée sur le modèle de Paquin et al. lors du même essai et sur le même matériau (voir figure 3.3) que lors des analyses des modèles de Weng et Kouddane est présentée sur la figure 3.7 et comparée avec la solution analytique du modèle de référence de Hashin-Rougier. Les résultats montrent la prise en compte réaliste des interactions viscoélastiques dans le matériau hétérogène. Cependant, un écart entre le modèle de Paquin et la solution autocohérente de Hashin-Rougier subsiste. En effet, bien que la méthode des champs translatés donne lieu à des calculs numériques fortement réduits par rapport à ceux de l'approche héréditaire de Rougier, les résultats de Paquin tendent à s'éloigner de la solution exacte, principalement au niveau du coude de la courbe contrainte-déformation macroscopique, témoignant d'une légère imprécision du modèle concernant le couplage viscoélastique. De plus, il faut noter que l'application du cas compressible souligne un écart accentué du modèle à champs translatés avec la solution de référence, le premier tendant à surestimer ou sous-estimer (suivant les cas) les résultats dans le domaine d'état purement viscoplastique, c'est-à-dire pour des temps de chargement relativement longs.

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de retracer en quelques lignes l'évolution des approches de transition d'échelle micromécaniques, puis de mettre l'accent sur les difficultés engendrées par l'effet "mémoire longue" induit par le couplage spatio-temporel spécifique au comportement élastoviscoplastique.

Les modèles de type héréditaire apportent une résolution théorique relativement simple car ils permettent de séparer les variables de temps et d'espace en transformant le problème hétérogène élastoviscoplastique en un problème hétérogène élastique symbolique par le principe de correspondance. Cependant, leur résolution numérique s'avère très complexe à cause de l'inversion de la transformée de Laplace-Carson qui doit faire appel, dans la plupart des cas, à des méthodes numériques complexes et délicates à mettre en œuvre pour obtenir la solution macroscopique approchée. De plus, le stockage et l'intégration intensifs des données, depuis le début de l'histoire du chargement, se compliquent davantage lorsqu'il faut traiter la non linéarité du comportement. Dans ce cas, une linéarisation et une résolution du problème hétérogène doivent être exécutées pas à pas par discrétisation dans le temps, le long du trajet de chargement.

En ce qui concerne les approches à variables internes, nous avons vu que la difficulté de leur mise en œuvre réside dans la préservation de la nature élastoviscoplastique des interactions pendant la transition d'échelle. Weng aborde ce problème en traitant la déformation viscoplastique comme une déformation libre à l'instar du traitement de Kröner en élastoplasticité. Ainsi, le défaut de taille du modèle de Weng se trouve dans la représentation d'une accommodation de nature élastique, et non élastoviscoplastique, ce qui entraîne une forte surestimation des contraintes. Le manque de précision du modèle témoigne de la nécessité de prendre en compte la nature réelle de l'accommodation intergranulaire en faisant abstraction de l'hypothèse simpliste d'une déformation viscoplastique libre.

La complexité de la loi de comportement élastoviscoplastique, de nature différentielle, rend difficile la transition d'échelle classique s'appliquant, pour les autres classes de comportement, à des relations biunivoques entre les grandeurs de contrainte et de déformation.

Une idée simple a été trouvée par Kouddane, dont l'approche consiste à éliminer le terme intégral de nature "volumique"  $I^C$  rencontré dans l'équation intégrale classique (3.40) du problème élémentaire inclusion-matrice élastoviscoplastique. Cependant, le modèle de Kouddane, construit

sur une solution très particulière du problème, entraîne des incohérences qui remettent en question la validité de ce type d'approches.

La démarche de la transition d'échelle à champs translatsés reste, à ce jour, l'une des solutions les plus abouties dans le domaine des approches à variables internes pour traiter le comportement élastoviscoplastique. Même si les modèles de Paquin et Berbenni n'apportent pas de solutions "exactes", par comparaison avec la solution de référence de l'approche de type héréditaire de Rougier (ou Hashin dans le cas isotrope incompressible), elles restent tout de même satisfaisantes et constituent un compromis acceptable entre les temps de calculs réduits et la fiabilité des résultats.

Dans le chapitre suivant, l'approche à variables internes sera reconsidérée à travers la mise en place d'une nouvelle démarche de transition d'échelle, dans le but d'obtenir des résultats aussi rigoureux et précis que ceux observés par les approches de type héréditaire.

## Chapitre 4

# Nouvelle approche micromécanique du comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes



## 4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les approches micromécaniques des matériaux hétérogènes s'avèrent être de bons outils de description des interactions intergranulaires qui interviennent dans des comportements classiques où les lois constitutives peuvent être "linéarisées", tels que l'élasticité, la viscosité, la viscoplasticité et l'élastoplasticité. Toutefois, la connaissance acquise à partir des nombreux modèles proposés dans le cadre des comportements précédemment cités ne permet pas la prise en compte du couplage espace/temps lorsqu'il s'agit de traiter les cas de la viscoélasticité linéaire ou non linéaire ou encore de l'élastoviscoplasticité.

En effet, la complexité de la viscoélasticité et de l'élastoviscoplasticité réside dans le couplage entre l'élasticité et la viscosité ou viscoplasticité, induisant inévitablement un couplage espace-temps traduisant l'effet "mémoire longue" à l'origine du caractère héréditaire des matériaux. Ainsi, la difficulté se situe dans la prise en compte réaliste et rigoureuse des interactions à la fois élastiques et visqueuses (ou viscoplastiques) qui dépendent de l'espace et du temps.

De nos jours, seules les approches de type héréditaire telles que les modèles de Hashin et Rougier, s'appuyant sur une transition d'échelle dans l'espace de Laplace-Carson, aboutissent à des résultats "exacts" d'un point de vue théorique et sont considérées comme les modèles de référence (Hashin [67] et Rougier [70]) pour la prédiction du comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement des matériaux hétérogènes. Néanmoins, ces approches sont confrontées à une lourdeur des calculs lors du retour à l'espace/temps réel par l'inverse de la transformée de Laplace-Carson, qui s'accroît considérablement dans le cas non linéaire.

Le but de ce chapitre est de proposer une nouvelle approche de transition d'échelle à variables internes destinée à la modélisation du comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes. Les impératifs que nous nous sommes fixés sont de pouvoir réaliser un modèle simple d'exécution dont les résultats correspondent à ceux des modèles de référence de Hashin et Rougier.

Tout d'abord, l'étude consiste à décrire rigoureusement le problème hétérogène viscoélastique linéaire afin d'établir un nouveau système d'équations de champs complet traduisant le comportement local du matériau et à partir duquel, deux équations de Navier sont définies.

Puis, une nouvelle démarche de formulation intégrale du comportement viscoélastique linéaire

est présentée, basée sur le traitement des équations de Navier précédentes notamment à l'aide des techniques des fonctions de Green en élasticité et en viscosité. Cette nouvelle démarche permet d'obtenir une équation intégrale originale présentant l'avantage de s'exprimer en fonction des opérateurs de Green classiques et de termes de fluctuations élastiques et visqueuses. Cette nouvelle relation de localisation appliquée au problème élémentaire de l'inclusion est adaptée aux méthodes d'homogénéisation.

Ainsi, le problème de l'inclusion viscoélastique linéaire est ensuite traité à partir de la nouvelle équation intégrale. Une relation de localisation dans l'inclusion est obtenue et comparée avec celle issue du modèle de référence d'Hashin dans le cas viscoélastique linéaire isotrope compressible.

Deux schémas classiques d'homogénéisation sont ensuite effectués à partir de la relation de localisation de la nouvelle approche. Les résultats du nouveau modèle sont analysés et comparés avec ceux des autres modèles de transition d'échelle, notamment ceux du modèle de référence de Rougier, pour des simulations d'essais de traction-compression à vitesse de déformation constante et sur des matériaux hétérogènes biphasés de constituants maxwelliens isotropes.

## 4.2 Nouvelle formulation intégrale du problème hétérogène viscoélastique linéaire

### 4.2.1 Position du problème

Dans cette section, une nouvelle démarche de formulation intégrale est présentée, basée sur la décomposition du problème hétérogène viscoélastique classique en deux systèmes d'équations de champs dont les formulations intégrales sont menées puis combinées pour obtenir une nouvelle équation intégrale contenant des champs de fluctuations élastiques et visqueuses traduisant la nature des interactions viscoélastiques.

On considère un milieu hétérogène de volume  $V$  soumis à une vitesse de déformation uniforme  $\dot{\epsilon}^0$  de complaisances élastiques locales  $s(r)$  (modules élastiques locaux  $c(r) = s(r)^{-1}$ ) et de complaisances visqueuses locales  $m(r)$  (modules visqueux locaux  $b(r) = m(r)^{-1}$ ). Le problème est traité dans le cadre de l'équilibre quasi-statique sans forces de volume. Dans le cas non linéaire,  $m(r)$  dépend du tenseur des contraintes, du tenseur des déformations viscoplastiques  $\epsilon^{vp}$  et éventuellement d'autres variables d'état comme la température.

Afin de décrire au mieux cette nouvelle méthode, nous énoncerons tout d'abord la résolution du problème de base dans le cas du comportement viscoélastique linéaire de type Maxwell. Dans ce cas, le tenseur des souplesses visqueuses  $m(r)$  est indépendant de la contrainte  $\sigma$  et dépend uniquement de la position  $r$  dans le volume  $V$ . Les équations de champs pour un milieu hétérogène viscoélastique linéaire s'écrivent :

#### *problème 1*

$$\dot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \dot{\sigma}(r, t) + m(r) : \sigma(r, t) \quad \text{Loi de comportement Maxwellien} \quad (4.1)$$

$$\text{div } \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \text{ inconnu} \quad (4.2)$$

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \sigma \text{ connu} \quad (4.3)$$

$$\dot{\epsilon} = \nabla^s . v \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (4.4)$$

$$v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (4.5)$$

Dans le système des équations de champs allant de (4.1) à (4.5), que nous notons "problème 1",

les inconnues sont les vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  et les vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$ . Les contraintes  $\sigma$  qui apparaissent dans l'équation de comportement sont supposées connues. Ce sont des variables internes qui représentent la mémoire du matériau et qu'il faut donc réactualiser à chaque pas. Elles ont la propriété supplémentaire d'être auto-équilibrées.

Ce problème consiste alors à trouver les champs de vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  et de vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  satisfaisant l'ensemble des équations du problème 1 à chaque instant. Pour cela, on peut discerner dans le système constitué par les équations (4.1) à (4.5) le sous-système  $(S_1)$  associé à la condition d'équilibre (4.3) sur le champs  $\sigma$  :

$$(S_1) \quad \begin{cases} \sigma(r, t) = b(r) : [\dot{\epsilon}(r, t) - s(r) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \sigma = 0 \\ \dot{\epsilon} = \nabla^s . v \\ v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Introduisons maintenant un milieu de référence de complaisances élastiques homogènes  $S$  et de complaisances visqueuses homogènes  $M$  permettant de décrire les propriétés  $s(r)$  et  $m(r)$  en termes de fluctuations :

$$\begin{cases} s(r) = S + \delta s(r) \\ m(r) = M + \delta m(r) \end{cases} \quad (4.6)$$

De la même façon, on décrit également les tenseurs inverses  $c(r)$  et  $b(r)$  comme des fluctuations autour des modules homogènes  $C$  et  $B$  :

$$\begin{cases} c(r) = C + \delta c(r) \\ b(r) = B + \delta b(r) \end{cases} \quad (4.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= s^{-1}, & C &= S^{-1} \\ b &= m^{-1}, & B &= M^{-1} \end{aligned}$$

En substituant les expressions de  $s(r)$  et  $b(r)$  dans (4.1), on obtient :

$$\sigma = B : \dot{\epsilon} + \delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma} - B : S : \dot{\sigma} \quad (4.8)$$

En appliquant la condition d'équilibre (4.3) à la contrainte  $\sigma$  qui apparaît dans l'équation (4.8), on obtient l'équation de Navier du sous-système  $(S_1)$  :

$$\operatorname{div}(B : \dot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}] - \operatorname{div}(B : S : \dot{\sigma}) = 0 \quad (4.9)$$

La résolution de cette équation différentielle de Navier fournit les champs de vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  et de vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  du problème 1. Ces équations comportent trois termes de nature différentes :

- le premier terme désigne l'opérateur de Navier associé à la viscosité et appliqué au champ des vitesses  $v_i$  ;
- le deuxième terme représente des forces de volume fictives dépendant des fluctuations élastiques et visqueuses. Ce terme est adapté à la transition d'échelle classique puisqu'il peut se ramener à un problème élémentaire de l'inclusion (Ce terme est nul pour tout point en dehors du domaine de l'inclusion) ;
- le troisième terme, comme nous l'avons vu précédemment dans le chapitre 3 à la section 3.3.2, est un terme de nature "volumique" ne contenant pas de fluctuations et dont la détermination doit être menée sur l'ensemble du volume  $V$ . Ainsi, ce terme nécessite la connaissance du champs de vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  en tout point du volume ; or  $\dot{\sigma}$  est un champs complexe dans le matériau hétérogène. Ce terme ne peut pas être ramené au simple domaine de l'inclusion car celui-ci ne peut être nul dans la matrice.

L'analyse des termes de nature différente apparaissant dans l'équation de Navier (4.9), permet d'identifier la difficulté de la transition d'échelle à variables internes qui repose sur le traitement intégrale du terme de nature "volumique", en l'occurrence  $\operatorname{div}(B : S : \dot{\sigma})$  dans notre cas.

Par conséquent, l'idée est d'exprimer ce terme de nature "volumique" sous la forme des termes de fluctuations élastiques et visqueuses, afin de pouvoir ramener l'équation intégrale du problème hétérogène viscoélastique obtenue à un problème d'inclusion. Pour cela, il devient nécessaire de déterminer une deuxième équation différentielle de Navier indépendante de la première (4.9) et contenant un terme de même nature "volumique" également lié au champs de vitesse de contraintes  $\dot{\sigma}$ .

Pour cela, considérons un deuxième problème dont les équations de champs sont déduites par la dérivée par rapport au temps des équations de champs du problème 1 :

**problème 2**

$$\ddot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \ddot{\sigma}(r, t) + m(r) : \dot{\sigma}(r, t) \quad \text{Loi de comportement Maxwellien} \quad (4.10)$$

$$\text{div } \ddot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \ddot{\sigma} \text{ inconnu} \quad (4.11)$$

$$\text{div } \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \text{ connu} \quad (4.12)$$

$$\ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (4.13)$$

$$\dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (4.14)$$

Le nouveau système des équations allant de (4.10) à (4.14), ainsi obtenu, constitue le "problème 2" dont les champs inconnus sont  $\ddot{\sigma}$  et  $\ddot{\epsilon}$ . Les vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  qui apparaissent dans l'équation de comportement sont supposées connues.

Comme pour le problème 1, on s'intéresse au sous-système ( $S_2$ ) provenant du problème 2 et associé à la condition d'équilibre (4.11) sur le champs inconnu  $\ddot{\sigma}$  :

$$(S_2) \quad \begin{cases} \ddot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - m(r) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \ddot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{cases}$$

En substituant les expressions de  $m(r)$  et  $c(r)$  (4.6) et (4.7), l'équation de comportement provenant du sous-système ( $S_2$ ) devient :

$$\ddot{\sigma} = C : \ddot{\epsilon} + \delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma} - C : M : \dot{\sigma} \quad (4.15)$$

En appliquant maintenant la condition d'équilibre (4.11) aux vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  qui apparaissent dans l'équation (4.15), on obtient l'équation de Navier suivante :

$$\text{div} (C : \ddot{\epsilon}) + \text{div} [\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}] - \text{div} (C : M : \dot{\sigma}) = 0 \quad (4.16)$$

Cette équation (4.16) fournit les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\ddot{\sigma}$  en fonction du champ  $\dot{\sigma}$  et se décompose, de la même manière que pour l'équation de Navier (4.9), en trois termes de nature différentes :

- le premier terme désigne l'opérateur de Navier élastique associé à l'élasticité et appliqué au champ  $\dot{v}$  ;

- le deuxième terme, de même nature que celui de l'équation de Navier (4.9) s'exprime en termes de fluctuations élastiques et visqueuses ;
- le troisième terme est un terme "volumique" de même nature que le troisième terme de l'équation de Navier (4.9), lié au champ des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$ .

Ainsi, en comparant les équations de Navier (4.9) et (4.16), on constate que le champ des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  apparaît comme :

- un champ donné pour tout instant  $t$  du problème 2 ;
- la solution du problème 1 en fonction du champ de contrainte  $\sigma$  qui représente une donnée du problème 1.

Par conséquent, la démarche consiste donc à établir un système complet d'équations de champs ( $S_3$ ) regroupant les équations des systèmes ( $S_1$ ) du problème 1 et ( $S_2$ ) du problème 2, sans oublier l'équation d'équilibre sur le champ de vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$  (4.2) :

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} \sigma(r, t) = b(r) : [\dot{\epsilon}(r, t) - s(r) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \ddot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - m(r) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \ddot{\sigma} = 0 \\ \text{div } \dot{\sigma} = 0 \\ \text{div } \sigma = 0 \\ \dot{\epsilon} = \nabla^s . v \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \\ v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

où les inconnus du problème sont les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\ddot{\sigma}$ , tandis que le champ de contrainte  $\sigma$  apparaît comme une donnée du problème. En effet, le champs de vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$ , étant à la fois solution du problème 1 et donnée du problème 2, dépend entièrement de l'histoire du chargement donnée par le champ  $\sigma$ . De plus, le champ  $\dot{\epsilon}$ , qui est fonction de  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$ , ne constitue pas une inconnue du système ( $S_3$ ).

Les conditions d'équilibre (4.3), sur le champ  $\sigma$ , et (4.11), sur le champ  $\ddot{\sigma}$ , fournissent les

équations différentielles de Navier (4.9) et (4.16) du nouveau problème donné par le système  $(S_3)$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(B : \dot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}] - \operatorname{div}(B : S : \dot{\sigma}) = 0 \\ \operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}] - \operatorname{div}(C : M : \dot{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

Dans ces équations différentielles de Navier, les termes "volumiques" de même nature sont fonction du même champ  $\dot{\sigma}$ . Ainsi, la double formulation intégrale des équations de Navier (4.9) et (4.16) permet de remplacer ces termes volumiques par leurs expressions en fonction des autres termes du système, autrement dit des termes de fluctuations élastiques et visqueuses et des champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\dot{\epsilon}$ .

Pour résumer, la résolution du problème hétérogène viscoélastique linéaire est basée sur une double formulation intégrale de deux équations différentielles de Navier issues de l'union des deux problèmes hétérogènes 1 et 2. Les problèmes 1 et 2 peuvent se distinguer suivant deux aspects. Tout d'abord, ils sont symétriques du point de vue des traitements duals, d'une part, du comportement visqueux  $\sigma = b : \dot{\epsilon}^{vp}$  décrit par la loi constitutive du système  $(S_1)$ , et d'autre part, du comportement élastique  $\ddot{\sigma} = c : \ddot{\epsilon}^e$  défini par la loi constitutive du système  $(S_2)$ . Puis, les problèmes 1 et 2 se différencient également par le degré de dérivation par rapport au temps qui les départage; à savoir que les équations de champs du problème 2 sont les dérivées par rapport au temps de celles du problème 1.

La double formulation intégrale du nouveau système  $(S_3)$  est présentée dans la section suivante. Elle permet, grâce à la substitution du champ  $\dot{\sigma}$  présent dans les termes "volumiques" des deux équations différentielles de Navier du problème, de déterminer une seule équation intégrale ayant l'avantage d'exprimer les forces volumiques fictives en terme de fluctuations élastiques et visqueuses adaptées aux méthodes de transition d'échelle des milieux hétérogènes.



### 4.2.2 Nouvelle équation intégrale des milieux hétérogènes viscoélastiques linéaires

Dans cette étude, nous nous limiterons à présenter la nouvelle méthode de formulation intégrale dans le cas de la viscoélasticité linéaire, où les tenseurs des modules homogènes élastiques  $C$  et visqueux  $B$  du milieu de référence sont isotropes et se décomposent en parties déviatoriques et sphériques :

$$\begin{cases} C = 2\mu J + 3\kappa L & \text{et} & S = \frac{1}{2\mu} J + \frac{1}{3\kappa} L \\ B = 2\eta J + 3\kappa^v L & \text{et} & M = \frac{1}{2\eta} J + \frac{1}{3\kappa^v} L \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\text{avec} \begin{cases} J_{ijkl} = I_{ijkl} - L_{ijkl}, & L_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \text{où } I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) & \text{est le tenseur identité d'ordre 4} \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $\kappa$ ,  $\mu$  désignent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement pour l'élasticité et  $\kappa^v$  et  $\eta$  respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement pour la viscosité.

On rappelle que l'objectif de ce chapitre est de parvenir à résoudre le système complet ( $S_3$ ) constitué des deux équations de Navier que nous reprenons ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{div}(B : \dot{\epsilon}) + \text{div}[\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}] - \text{div}(B : S : \dot{\sigma}) = 0 \\ \text{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \text{div}[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}] - \text{div}(C : M : \dot{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on cherche à expliciter les termes  $\text{div}(B : \dot{\epsilon})$ ,  $\text{div}(C : \ddot{\epsilon})$ ,  $\text{div}(B : S : \dot{\sigma})$  et  $\text{div}(C : M : \dot{\sigma})$  dans le cas où les modules  $C$  et  $B$  sont définis par (4.17).

#### a. Calcul des termes $\text{div}(B : \dot{\epsilon})$ et $\text{div}(C : \ddot{\epsilon})$

En s'appuyant sur les décompositions (4.17), il vient :

$$\begin{aligned} \text{div}(B : \dot{\epsilon}) &= 2\eta \dot{\epsilon}_{ij,j} + (3\kappa^v - 2\eta) L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl,j} \\ &= 2\eta \dot{\epsilon}_{ij,j} + \frac{1}{3}(3\kappa^v - 2\eta) \delta_{ij} \delta_{kl} \dot{\epsilon}_{kl,j} \\ &= 2\eta \dot{\epsilon}_{ij,j} + (3\kappa^v - 2\eta) \dot{\epsilon}_{s,i} \end{aligned} \quad (4.19)$$

De plus, le tenseur des vitesses de déformation étant la partie symétrique du gradient du tenseur des vitesses de déplacement, le divergent donne :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij,j} &= \frac{1}{2}(v_{i,jj} + v_{j,ij}) \\ &= \frac{1}{2}v_{i,jj} + \frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{s,i}\end{aligned}\quad (4.20)$$

En injectant (4.19) dans (4.18), le terme  $div(B : \dot{\epsilon})$  s'écrit sous la forme :

$$div(B : \dot{\epsilon}) = \eta v_{i,kk} + (3\kappa^v + \eta) \dot{\epsilon}_{s,i} \quad (4.21)$$

De même, en procédant pareillement pour le calcul du terme  $div(C : \ddot{\epsilon})$ , on obtient :

$$div(C : \ddot{\epsilon}) = \mu \dot{v}_{i,kk} + (3\kappa + \mu) \ddot{\epsilon}_{s,i} \quad (4.22)$$

où  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$  désignent les parties sphériques des tenseurs  $\dot{\epsilon}$  et  $\ddot{\epsilon}$ .

A partir des expressions (4.21) et (4.22) des opérateurs de Navier associés à la viscosité et à l'élasticité, les équations de Navier (4.9) et (4.16) deviennent :

$$\eta v_{i,kk} + (3\kappa^v + \eta) \dot{\epsilon}_{s,i} + \underbrace{[\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}]}_R]_{ij,j} - (B : S : \dot{\sigma})_{ij,j} = 0 \quad (4.23)$$

$$\mu \dot{v}_{i,kk} + (3\kappa + \mu) \ddot{\epsilon}_{s,i} + \underbrace{[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}]}_{R'}]_{ij,j} - (C : M : \dot{\sigma})_{ij,j} = 0 \quad (4.24)$$

## b. Calcul de $\dot{\epsilon}_s$ et $\ddot{\epsilon}_s$

Pour déterminer les parties sphériques  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$ , procédons à une dérivation dans l'espace des équations (4.23) et (4.24) par rapport à  $x_i$  :

$$(3\kappa^v + 4\eta) \dot{\epsilon}_{s,kk} + R_{ij,ij} - (B : S : \dot{\sigma})_{ij,ij} = 0 \quad (4.25)$$

$$(3\kappa + 4\mu) \ddot{\epsilon}_{s,kk} + R'_{ij,ij} - (C : M : \dot{\sigma})_{ij,ij} = 0 \quad (4.26)$$

En effectuant l'inverse du Laplacien des termes dans les équations (4.25) et (4.26), on obtient (voir Annexe A) :

$$(3\kappa^v + 4\eta) (\dot{\epsilon}_s - \dot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R_{ij,ij} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * (B : S : \dot{\sigma})_{ij,ij} \quad (4.27)$$

$$(3\kappa + 4\mu) (\ddot{\epsilon}_s - \ddot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R'_{ij,ij} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * (C : M : \dot{\sigma})_{ij,ij} \quad (4.28)$$

où  $\dot{\epsilon}_s^0$  et  $\ddot{\epsilon}_s^0$  désignent les champs à l'infini de  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$ .

Par ailleurs, à partir de (4.17), on peut écrire les termes  $div(B : S : \dot{\sigma})$  et  $div(C : M : \dot{\sigma})$  comme :

$$\begin{aligned} (B : S : \dot{\sigma})_{ij,ij} &= \left[ \frac{\eta}{\mu} I_{ijkl} + \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\sigma}_{kl,ij} \\ &= \left[ \frac{\eta}{\mu} \dot{\sigma}_{ij,ij} + \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,kk} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

et

$$\begin{aligned} (C : M : \dot{\sigma})_{ij,ij} &= \left[ \frac{\mu}{\eta} I_{ijkl} + \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\sigma}_{kl,ij} \\ &= \left[ \frac{\mu}{\eta} \dot{\sigma}_{ij,ij} + \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,kk} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

De plus, d'après la condition d'équilibre (4.2) sur le champ  $\dot{\sigma}$  ( $\dot{\sigma}_{ij,j} = 0$ ), les expressions (4.29) et (4.30) se réduisent à :

$$(B : S : \dot{\sigma})_{ij,ij} = \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,kk} \quad (4.31)$$

$$(C : M : \dot{\sigma})_{ij,ij} = \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,kk} \quad (4.32)$$

Puis en injectant ces expressions dans (4.27) et (4.28), on obtient :

$$(3\kappa^v + 4\eta) (\dot{\epsilon}_s - \dot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R_{ij,ij} - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \left( \frac{1}{|r|} * \dot{\sigma}_{s,kk} \right) \quad (4.33)$$

$$(3\kappa + 4\mu) (\ddot{\epsilon}_s - \ddot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R'_{ij,ij} - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \left( \frac{1}{|r|} * \dot{\sigma}_{s,kk} \right) \quad (4.34)$$

Sachant que (voir Annexe A) :

$$\frac{1}{|r|} * \dot{\sigma}_{s,kk} = -4\pi (\dot{\sigma}_s - \dot{\sigma}_s^0)$$

$\dot{\sigma}_s^0$  désigne la grandeur à l'infini de  $\dot{\sigma}_s$

Les parties sphériques  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$  peuvent finalement s'écrire :

$$(3\kappa^v + 4\eta) (\dot{\epsilon}_s - \dot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R_{ij,ij} + \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_s \quad (4.35)$$

$$(3\kappa + 4\mu) (\ddot{\epsilon}_s - \ddot{\epsilon}_s^0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R'_{ij,ij} + \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_s \quad (4.36)$$

L'application du gradient aux équations (4.35) et (4.36) permet l'obtention des termes  $\dot{\epsilon}_{s,i}$  et  $\ddot{\epsilon}_{s,i}$  suivant les expressions :

$$(3\kappa^v + 4\eta) \dot{\epsilon}_{s,i} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R_{kl,kl} + \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \quad (4.37)$$

$$(3\kappa + 4\mu) \ddot{\epsilon}_{s,i} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R'_{kl,kl} + \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \quad (4.38)$$

Les grandeurs  $\dot{\epsilon}_s^0$ ,  $\ddot{\epsilon}_s^0$  et  $\dot{\sigma}_s^0$  étant uniformes, leurs gradients dans l'espace est nul.

À présent, substituons les termes en  $\dot{\epsilon}_{s,i}$  et  $\ddot{\epsilon}_{s,i}$  par leurs expressions (4.37) et (4.38) dans les équations de Navier (4.23) et (4.24) du problème :

$$\eta v_{i,kk} + \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R_{kl,kl} + \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \right] + R_{ik,k} - (B : S : \dot{\sigma})_{ik,k} = 0 \quad (4.39)$$

$$\mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R'_{kl,kl} + \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \right] + R'_{ik,k} - (C : M : \dot{\sigma})_{ik,k} = 0 \quad (4.40)$$

En procédant de la même façon que lors du passage des expressions (4.29) à (4.31), ou de (4.30) à (4.32), il vient :

$$(B : S : \dot{\sigma})_{ik,k} = \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \quad (4.41)$$

$$(C : M : \dot{\sigma})_{ik,k} = \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \quad (4.42)$$

Ainsi, en utilisant (4.41) et (4.42), les équations de Navier (4.39) et (4.40) peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\eta v_{i,kk} + \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R_{kl,kl} \right] + R_{ik,k} - \frac{3\eta}{3\kappa^v + 4\eta} \left( \frac{\kappa^v}{\kappa} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,i} = 0 \quad (4.43)$$

$$\mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R'_{kl,kl} \right] + R'_{ik,k} - \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa}{\kappa^v} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_{s,i} = 0 \quad (4.44)$$

### c. Nouvelle équation intégrale

Dans les équations différentielles de Navier du problème (4.43) et (4.44) ainsi obtenues, on peut clairement noter la présence dans chacune d'elles du même champ  $\dot{\sigma}_{s,i}$ . Ces deux équations étant

indépendantes, il devient donc possible de les regrouper en substituant  $\dot{\sigma}_{s,i}$  de l'équation (4.44) par son expression déduite de l'équation (4.43) :

$$\begin{aligned} & \mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R'_{kl,kl} \right] + R'_{ik,k} \\ & + \frac{\mu^2 \kappa (3\kappa^v + 4\eta)}{\eta^2 \kappa^v (3\kappa + 4\mu)} \left[ \eta v_{i,kk} + \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * R_{kl,kl} \right) + R_{ik,k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Il est à noter que l'équation (4.45) ne dépend que des termes en  $R$  et  $R'$ , qui sont des termes de fluctuations élastiques et visqueuses  $\delta c$ ,  $\delta s$ ,  $\delta b$  et  $\delta m$ , ainsi que des laplaciens de  $v$  et  $\dot{v}$ . En effectuant l'inverse du laplacien dans cette équation, on trouve (voir Annexe A) :

$$\begin{aligned} & \mu (\dot{v}_i - \dot{v}_i^0) - \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{|r|} * \frac{1}{|r|} * R'_{kl,kli} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R'_{ik,k} \\ & + \frac{\mu^2 \kappa (3\kappa^v + 4\eta)}{\eta^2 \kappa^v (3\kappa + 4\mu)} \left[ \eta (v_i - v_i^0) - \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{|r|} * \frac{1}{|r|} * R_{kl,kli} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r|} * R_{ik,k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

où  $\dot{v}_i^0$  et  $v_i^0$  sont les champs à l'infini de  $\dot{v}_i$  et  $v_i$ .

En outre, en effectuant le calcul de la convolution dans l'espace de  $1/4\pi|r|$  par lui-même, en s'aidant notamment de la méthode de la transformée de Fourier, on trouve (voir Annexe A) :

$$\frac{1}{4\pi|r|} * \frac{1}{4\pi|r|} = -\frac{|r|}{8\pi} \quad (4.47)$$

La relation (4.47) permet de réécrire l'équation (4.46) qui devient :

$$\begin{aligned} & \dot{v}_i - \dot{v}_i^0 + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \frac{1}{8\pi\mu} (|r| * R'_{kl,kli}) - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{|r|} * R'_{ik,k} \\ & + \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ v_i - v_i^0 + \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \frac{1}{8\pi\eta} (|r| * R_{kl,kli}) - \frac{1}{4\pi\eta} \frac{1}{|r|} * R_{ik,k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Sachant de plus que :

$$\begin{cases} |r| * R_{kl,kli} = |r|_{,kli} * R_{kl} & \text{et} & |r| * R'_{kl,kli} = |r|_{,kli} * R'_{kl} \\ \frac{1}{|r|} * R_{ik,k} = \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,k} * R_{ik} & \text{et} & \frac{1}{|r|} * R'_{ik,k} = \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,k} * R'_{ik} \end{cases}$$

(4.48) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i - \dot{v}_i^0 + \left( \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \frac{|r|_{,kli}}{8\pi\mu} - \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,k} \delta_{il} \right) * R'_{kl} \\ + \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ v_i - v_i^0 + \left( \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \frac{|r|_{,kli}}{8\pi\eta} - \frac{1}{4\pi\eta} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,k} \delta_{il} \right) * R_{kl} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Appliquons à présent le gradient à l'équation (4.49) :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,j} - \dot{v}_{i,j}^0 + \left( \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \frac{|r|_{,klij}}{8\pi\mu} - \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,kj} \delta_{il} \right) * R'_{kl} \\ + \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ v_{i,j} - v_{i,j}^0 + \left( \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \frac{|r|_{,klij}}{8\pi\eta} - \frac{1}{4\pi\eta} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,kj} \delta_{il} \right) * R_{kl} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

On considère les fonctions de Green  $G^C$  et  $G^B$  respectivement associées aux tenseurs des modules homogènes élastiques  $C$  et visqueux  $B$ . Ces fonctions sont définies dans le cas de matériaux isotropes par [81] :

$$\begin{aligned} G_{ij}^C(|r|) &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{|r|} - \frac{|r|_{,ij}}{16\pi\mu(1 - \nu_e)} \\ &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{|r|} - \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \frac{|r|_{,ij}}{8\pi\mu} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \text{et } G_{ij}^B(|r|) &= \frac{1}{4\pi\eta} \frac{\delta_{ij}}{|r|} - \frac{|r|_{,ij}}{16\pi\eta(1 - \nu_v)} \\ &= \frac{1}{4\pi\eta} \frac{\delta_{ij}}{|r|} - \frac{3\kappa^v + \eta}{3\kappa^v + 4\eta} \frac{|r|_{,ij}}{8\pi\eta} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Rappelons que  $\nu_e$  et  $\nu_v$  sont respectivement les coefficients de Poisson en élasticité et en viscosité.

Dans l'équation (4.50), on remarque la présence des expressions (4.51) et (4.52) des tenseurs de Green  $G^C$  et  $G^B$  :

$$\dot{v}_{i,j} - \dot{v}_{i,j}^0 - G_{il,kj}^C * R'_{kl} + \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} [v_{i,j} - v_{i,j}^0 - G_{il,kj}^B * R_{kl}] = 0 \quad (4.53)$$

Finalement, en tenant compte des propriétés de symétrie des tenseurs de Green et en introduisant les opérateurs de Green modifiés associés à l'élasticité  $\Gamma^C$  et à la viscosité  $\Gamma^B$  tels que :

$$\begin{cases} \Gamma_{ijkl}^C = -\frac{1}{2} (G_{il,kj}^C + G_{jl,ki}^C) \\ \Gamma_{ijkl}^B = -\frac{1}{2} (G_{il,kj}^B + G_{jl,ki}^B) \end{cases} \quad (4.54)$$

la symétrisation de (4.53), qui consiste à prendre la partie symétrique du gradient  $v_{i,j}$ , permet d'obtenir l'équation intégrale en déformations :

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = \ddot{\epsilon}_{ij}^0 - \Gamma_{ijkl}^C * R'_{kl} - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} [\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \Gamma_{ijkl}^B * R_{kl}] \quad (4.55)$$

En substituant les termes  $R$  et  $R'$  définis dans (4.23) et (4.24), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} = & \ddot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * (\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}) \\ & - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 + \Gamma^B * (\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma})] \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'équation ainsi obtenue représente l'équation intégrale du problème hétérogène viscoélastique linéaire qui traduit les interactions entre les différentes hétérogénéités du matériau : les champs de déformations  $\ddot{\epsilon}(r)$  et  $\dot{\epsilon}(r)$  au point  $r$  dépendent du chargement extérieur  $\ddot{\epsilon}^0$  et  $\dot{\epsilon}^0$ , des hétérogénéités élastiques  $c(r)$  et visqueuses  $b(r)$  en tout point  $r$  du volume  $V$ , et du champ des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$ . Ce champ dépend lui-même des tenseurs  $\sigma$  et de  $\dot{\epsilon}$  par la loi de comportement locale (4.1) du problème 1.

L'avantage de la nouvelle équation intégrale (4.56) se trouve dans la présence de termes de convolution dans l'espace comportant, d'une part, les opérateurs de Green classiques associés aux tenseurs des modules élastiques  $C$  et visqueux  $B$  du milieu homogène de référence, et d'autre part, des fluctuations élastiques et visqueuses. En effet, on ne retrouve plus les termes de nature "volumique" présents dans les équations intégrales classiques du problème hétérogène viscoélastique et qui témoignent de toute la difficulté de la transition d'échelle à variables internes en viscoélasticité.

Par conséquent, la nouvelle démarche de formulation intégrale présentée ici, permet de déterminer une équation (4.56) pouvant se ramener au problème de l'inclusion viscoélastique. Cette nouvelle méthode est donc parfaitement adaptée aux méthodes d'homogénéisation telles que l'approximation autocohérente et l'estimation de Mori-Tanaka.

Dans ce travail, cette démarche a été développée dans le cas d'un milieu de référence isotrope viscoélastique. Par ailleurs, l'extension au cas général d'un milieu de référence viscoélastique anisotrope ne pose pas de difficulté, car en explicitant les termes de nature "volumique", on obtient des termes en  $\dot{\sigma}$  qu'il est facile d'éliminer en suivant le même raisonnement que celui de

la présente formulation intégrale.

Dans la suite de ce chapitre, on présentera la solution du problème de l'inclusion viscoélastique linéaire. Cette solution sera comparée à la solution exacte de Hashin utilisant la méthode de la transformée de Laplace-Carson [67]. Ensuite, à l'échelle macroscopique, deux schémas d'homogénéisation (autocohérent et Mori-Tanaka) sont utilisés pour déterminer le comportement effectif d'un matériau hétérogène viscoélastique linéaire. Les résultats obtenus seront comparés à ceux issus de la méthode de la transformée de Laplace-Carson [70][67].



### 4.3 Problème de l'inclusion viscoélastique linéaire

Le problème de l'inclusion a été abordé par plusieurs auteurs depuis plusieurs années dans des buts divers : modélisation du comportement des polycristaux, calcul des concentrations des contraintes, amorçage de l'endommagement, etc. Une revue intéressante des travaux concernant ce problème a été faite par Gilormini [82].

Le but de cette section est de décrire le comportement viscoélastique linéaire d'une inclusion plongée dans une matrice viscoélastique linéaire. La solution de ce problème sera un outil de base dans la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques hétérogènes.

A l'origine, ce problème a été résolu par Hashin [67] en utilisant la transformée de Laplace-Carson. Il sera considéré ici en utilisant les fonctions de Green car ces dernières sont beaucoup plus générales et peuvent être appliquées à des cas où la transformée de Laplace-Carson s'avère inopérante (exemple du comportement viscoélastique non linéaire ou élastoviscoplastique).

C'est pourquoi la relation de localisation (4.56) obtenue dans la section précédente sera utilisée et appliquée au problème de l'inclusion viscoélastique linéaire. Afin de valider cette localisation, la solution obtenue de ce problème sera comparée à celle obtenue par Hashin [67] utilisant la transformée de Laplace-Carson.

#### 4.3.1 Présentation du problème

On considère un milieu de volume  $V$ , constitué d'une inclusion de comportement viscoélastique linéaire maxwellien de domaine  $V^I$  et de modules élastiques  $c^I$  et visqueux  $b^I$ , immergée dans une matrice infinie de comportement viscoélastique linéaire maxwellien de modules élastiques  $C$  et visqueux  $B$  (figure 4.1).

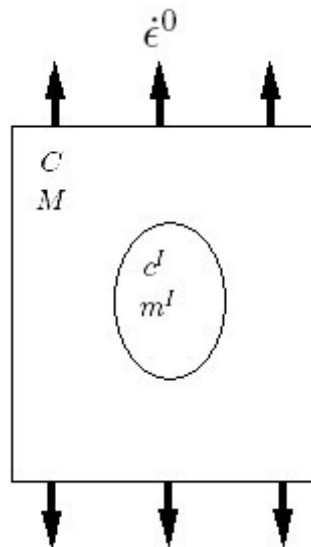


FIG. 4.1 – Problème de l'inclusion viscoélastique

Le problème est le suivant : on impose à la matrice une vitesse de déformation uniforme  $\dot{\epsilon}^0$  et on cherche à connaître les champs des vitesses de déformations et de contraintes dans l'inclusion.

Dans ce cas, les fluctuations élastiques  $\delta c(r)$  ( $s = c^{-1}$ ) et visqueuses  $\delta b(r)$  ( $m = b^{-1}$ ) s'écrivent comme :

$$\delta c(r) = \Delta c^I \theta^I(r) \quad \text{et} \quad \delta b(r) = \Delta b^I \theta^I(r)$$

$$\text{où} \quad \Delta c^I = c^I - C \quad \text{et} \quad \Delta b^I = b^I - B$$

$$\Delta s^I = s^I - S \quad \text{et} \quad \Delta m^I = m^I - M$$

$\theta^I(r)$  est la fonction d'Heaviside définie par :

$$\theta^I(r) = \begin{cases} 1, & r \in V^I \\ 0, & r \notin V^I \end{cases}$$

L'hétérogénéité est considérée ici comme une inclusion ellipsoïdale pour laquelle Eshelby a montré en 1957 que les champs de contraintes et de déformations sont uniformes [52]. Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre d'une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice infinie homogène. La relation de localisation (4.56) en déformation pour le problème d'inclusion ellipsoïdale viscoélastique linéaire noyée dans une matrice, elle-même viscoélastique linéaire, est donnée dans le domaine de l'inclusion par :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}^I &= \ddot{\epsilon}^0 - T^C : \left( \Delta c^I : (\ddot{\epsilon}^I - m^I : \dot{\sigma}^I) - C : \Delta m^I : \dot{\sigma}^I \right) - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ \dot{\epsilon}^I - \dot{\epsilon}^0 \right. \\ &\quad \left. + T^B : \left( \Delta b^I : (\dot{\epsilon}^I - s^I : \dot{\sigma}^I) - B : \Delta s^I : \dot{\sigma}^I \right) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

où  $T^C = - \int_{V^I} \Gamma^C(r - r') dV'$   $r \in V^I$  et  $T^B = - \int_{V^I} \Gamma^B(r - r') dV'$   $r \in V^I$  représentent respectivement les tenseurs d'Eshelby associés à l'élasticité  $C$  et à la viscosité  $B$  de la matrice infinie (voir annexe B).

En considérant les tenseurs de localisation cinématiques élastiques  $A^{C^I}$  et visqueux  $A^{B^I}$  de l'inclusion, l'équation (4.57) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} A^{C^I} : \ddot{\epsilon}^I &= \ddot{\epsilon}^0 + T^C : \left( c^I : m^I - C : M \right) : \dot{\sigma}^I - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ A^{B^I} : \dot{\epsilon}^I - \dot{\epsilon}^0 \right. \\ &\quad \left. - T^B : \left( b^I : s^I + B : S \right) : \dot{\sigma}^I \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A^{C^I} = (I + T^C : \Delta c^I)^{-1} \\ A^{B^I} = (I + T^B : \Delta b^I)^{-1} \end{cases} \quad (4.59)$$

Dans le but d'obtenir des résultats simples, on considère le cas d'une inclusion sphérique et d'un comportement viscoélastique linéaire isotrope de l'inclusion et de la matrice. Le comportement isotrope de chaque phase est défini respectivement par les coefficients de Lamé pour l'inclusion ( $\lambda^I$  et  $\mu^I$  pour l'élasticité,  $\alpha^I$  et  $\eta^I$  pour la viscosité) et pour la matrice ( $\lambda$  et  $\mu$  pour l'élasticité,  $\alpha$  et  $\eta$  pour la viscosité). Les tenseurs des modules élastiques  $c$ ,  $C$  et visqueux  $b$ ,  $B$  sont définis par :

$$c^I = 2\mu^I J + 3K^I L \quad \text{et} \quad b^I = 2\eta^I J + 3K^{vI} L \quad \text{pour l'inclusion I} \quad (4.60)$$

et par :

$$C = 2\mu J + 3K L \quad \text{et} \quad B = 2\eta J + 3K^v L \quad \text{pour la matrice} \quad (4.61)$$

On introduit les modules de compressibilité élastique et visqueux de chaque phase définis par :

$$3K^I = 3\lambda^I + 2\mu^I \quad ; \quad 3K = 3\lambda + 2\mu \quad (4.62)$$

$$3K^{vI} = 3\alpha^I + 2\eta^I \quad ; \quad 3K^v = 3\alpha + 2\eta \quad (4.63)$$

Les tenseurs d'Eshelby  $T^C$  et  $T^B$  pour un milieu isotrope et une inclusion sphérique sont donnés par [54] :

$$T^C = T_d^C J + T_s^C L \quad (4.64)$$

$$T^B = T_d^B J + T_s^B L \quad (4.65)$$

où :

$$T_d^C = \frac{3(K + 2\mu)}{5\mu(3K + 4\mu)} \quad ; \quad T_s^C = \frac{1}{3K + 4\mu} \quad (4.66)$$

$$T_d^B = \frac{3(K^v + 2\eta)}{5\eta(3K^v + 4\eta)} \quad ; \quad T_s^B = \frac{1}{3K^v + 4\eta} \quad (4.67)$$

Dans ces situations et avec les notations précédentes, l'équation de localisation (4.58) peut se décomposer en deux équations. La première équation regroupe les composantes déviatoriques des tenseurs de déformations et de contraintes et la seconde s'écrit en fonction de leurs parties sphériques :

$$A_d^{C^I-1} \ddot{\epsilon}_d^I = \ddot{\epsilon}_d^0 + T_d^C \left( \frac{\mu^I}{\eta^I} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_d^I - \frac{\mu\kappa T_s^C}{\eta\kappa^v T_s^B} \left[ A_d^{B^I-1} \dot{\epsilon}_d^I - \dot{\epsilon}_d^0 - T_d^B \left( \frac{\eta^I}{\mu^I} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_d^I \right] \quad (4.68)$$

$$A_s^{C^I-1} \ddot{\epsilon}_s^I = \ddot{\epsilon}_s^0 + T_s^C \left( \frac{\kappa^I}{\kappa^{vI}} - \frac{\kappa}{\kappa^v} \right) \dot{\sigma}_s^I - \frac{\mu\kappa T_s^C}{\eta\kappa^v T_s^B} \left[ A_s^{B^I-1} \dot{\epsilon}_s^I - \dot{\epsilon}_s^0 - T_s^B \left( \frac{\kappa^{vI}}{\kappa^I} - \frac{\kappa^v}{\kappa} \right) \dot{\sigma}_s^I \right] \quad (4.69)$$

où  $\ddot{\epsilon}_d$ ,  $\dot{\epsilon}_d$  et  $\dot{\sigma}_d$  désignent respectivement les déviateurs des tenseurs  $\ddot{\epsilon}$ ,  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\sigma}$ ,  
et où  $\ddot{\epsilon}_s$ ,  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\dot{\sigma}_s$  représentent respectivement leurs parties sphériques.

De cette façon, en combinant les relations (4.59), (4.66) et (4.67), on exprime les déviateurs  $A_d^{C^I}$  et  $A_d^{B^I}$  et les parties sphériques  $A_s^{C^I}$  et  $A_s^{B^I}$  des tenseurs de localisation  $A^{C^I}$  et  $A^{B^I}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_d^{C^I} = \frac{5\mu(3\kappa + 4\mu)}{5\mu(3\kappa + 4\mu) + 6(\kappa + 2\mu)(\mu^I - \mu)} \\ A_d^{B^I} = \frac{5\eta(3\kappa^v + 4\eta)}{5\eta(3\kappa^v + 4\eta) + 6(\kappa^v + 2\eta)(\eta^I - \eta)} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_s^{C^I} = \frac{3\kappa + 4\mu}{3\kappa^I + 4\mu} \\ A_s^{B^I} = \frac{3\kappa^v + 4\eta}{3\kappa^{vI} + 4\eta} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Cas de la viscoélasticité isotrope incompressible :

Dans le cas où le comportement de chaque phase est incompressible ( $\nu^{C^I} = 0,5$  et  $\nu^{V^I} = 0,5$ ), la loi de comportement est réduite sous sa forme déviatorique :

$$\dot{\sigma}_d^I = 2\mu^I \left( \dot{\epsilon}_d^I - \frac{\sigma_d^I}{2\eta^I} \right)$$

Dans ces conditions, l'équation de localisation viscoélastique écrite en termes déviatoriques devient :

$$A^{C^I-1} \ddot{\epsilon}_d^I = \ddot{\epsilon}_d^0 + \frac{1}{5\mu} \left( \frac{\mu^I}{\eta^I} - \frac{\mu}{\eta} \right) \dot{\sigma}_d^I - \frac{\mu}{\eta} \left[ A^{B^I-1} \dot{\epsilon}_d^I - \dot{\epsilon}_d^0 - \frac{1}{5\eta} \left( \frac{\eta^I}{\mu^I} - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{\sigma}_d^I \right]$$

Les tenseurs de localisation  $A^{C^I}$  et  $A^{B^I}$  s'écrivent comme :

$$A^{C^I} = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu^I} \quad ; \quad A^{B^I} = \frac{5\eta}{3\eta + 2\eta^I}$$

Si on considère maintenant un matériau isotrope incompressible dont l'élasticité est homogène, c'est-à-dire que  $\mu^I = \mu$  et  $A^{C^I} = 1$ , la loi d'interaction se simplifie et donne :

$$\ddot{\epsilon}_d^I = \ddot{\epsilon}_d^0 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{\eta^I} - \frac{1}{\eta} \right) \dot{\sigma}_d^I - \frac{\mu}{\eta} \left[ \dot{\epsilon}_d^I - \dot{\epsilon}_d^0 - \frac{1}{5} \left( \frac{1}{\eta^I} - \frac{1}{\eta} \right) \dot{\sigma}_d^I \right]$$

### 4.3.2 Analyse de la nouvelle relation de localisation

#### a. Etats asymptotiques

La relation de localisation (4.56) est valable à tout instant  $t$  du chargement. Examinons les états asymptotiques au temps courts et au temps longs de cette relation.

- aux temps courts :  $t \rightarrow 0$

Les viscosités  $b(r)$  et  $B$  tendent vers l'infini ( $m \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow 0$ ) et on aboutit à l'équation suivante :

$$\ddot{\epsilon}^I = A^{C^I} : \ddot{\epsilon}^0 \quad (4.71)$$

Cette relation est analogue à la loi incrémentale de Kröner pour le problème de l'inclusion élastique. En outre (4.71) décrit la réponse instantanée quand un saut de vitesse de déformation

est appliqué.

- aux temps longs :  $t \rightarrow \infty$

Pour une vitesse de déformation macroscopique donnée, une relaxation visqueuse sera dominante pour des temps longs. Considérons que cet état est atteint asymptotiquement, les élasticité  $c(r)$  et  $C$  tendent alors vers l'infini ( $s \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow 0$ ) et (4.56) devient :

$$\dot{\epsilon}^I = A^{B^I} : \dot{\epsilon}^0 \quad (4.72)$$

Cette expression est similaire à (4.71) qui décrit la réponse différée pour une vitesse de déformation donnée.

Finalement, il apparaît que la loi d'interaction (4.56) tient compte d'une part de la réponse élastique instantanée décrite par (4.71) et de la relaxation visqueuse différée décrite par (4.72).

### b. Comparaison avec la solution exacte de Hashin [67]

Afin de montrer la fiabilité de la nouvelle méthode de formulation intégrale présentée dans ce travail, on choisit d'appliquer la transformée de Laplace-Carson sur les équations intégrales (4.68) et (4.69) et de comparer les résultats obtenus dans l'espace de Laplace-Carson avec la solution de référence de Hashin. Ainsi, lorsque l'on soumet (4.68) et (4.69) à la transformée de Laplace-Carson, il vient :

$$p A_d^{C^I-1} \hat{\epsilon}_d^I = p \hat{\epsilon}_d^0 - T_d^C \left( \frac{\mu^I}{\eta^I} - \frac{\mu}{\eta} \right) \hat{\sigma}_d^I - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ A_d^{B^I-1} \hat{\epsilon}_d^I - \hat{\epsilon}_d^0 + T_d^B \left( \frac{\eta^I}{\mu^I} - \frac{\eta}{\mu} \right) \hat{\sigma}_d^I \right] \quad (4.73)$$

$$p A_s^{C^I-1} \hat{\epsilon}_s^I = p \hat{\epsilon}_s^0 - T_s^C \left( \frac{\kappa^I}{\kappa^{v^I}} - \frac{\kappa}{\kappa^v} \right) \hat{\sigma}_s^I - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ A_s^{B^I-1} \hat{\epsilon}_s^I - \hat{\epsilon}_s^0 + T_s^B \left( \frac{\kappa^{v^I}}{\kappa^I} - \frac{\kappa^v}{\kappa} \right) \hat{\sigma}_s^I \right] \quad (4.74)$$

La loi de comportement dans l'espace de Laplace-Carson étant donnée au chapitre 3 par les équations (3.19), (3.21) et (3.22), on en déduit  $\hat{\sigma}_d^I$  en fonction de  $\hat{\epsilon}_d^I$  et  $\hat{\sigma}_s^I$  en fonction de  $\hat{\epsilon}_s^I$  :

$$\hat{\sigma}_d^I = \frac{2\mu^I\eta^I p}{\eta^I p + \mu^I} \hat{\epsilon}_d^I \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_s^I = \frac{3\kappa^I\kappa^{v^I} p}{\kappa^{v^I} p + \kappa^I} \hat{\epsilon}_s^I \quad (4.75)$$

L'insertion des expressions (4.75) dans les équations (4.73) et (4.74) permet d'obtenir une relation de localisation qui est fonction de la variable  $p$  et qui relie le champ de déformation symbolique de l'inclusion à celui du milieu homogène de référence :

$$\widehat{\epsilon}_d^I = \mathcal{G}_d^I(p) \widehat{\epsilon}_d^0 \quad \text{et} \quad \widehat{\epsilon}_s^I = \mathcal{G}_s^I(p) \widehat{\epsilon}_s^0 \quad (4.76)$$

Après développement des fonctions  $\mathcal{G}_d^I(p)$  et  $\mathcal{G}_s^I(p)$ , on identifie dans leurs expressions les coefficients de cisaillement et de compressibilité symboliques définis par les expressions (3.22) du chapitre précédent que nous rappelons :

$$\widehat{\mu} = \frac{\mu p}{p + \frac{\mu}{\eta}}, \quad \widehat{\mu}^I = \frac{\mu^I p}{p + \frac{\mu^I}{\eta^I}}, \quad \widehat{\kappa} = \frac{\kappa p}{p + \frac{\kappa}{\kappa^v}}, \quad \widehat{\kappa}^I = \frac{\kappa^I p}{p + \frac{\kappa^I}{\kappa^{v^I}}}$$

Après identification de  $\widehat{\mu}$ ,  $\widehat{\mu}^I$  et  $\widehat{\kappa}$ ,  $\widehat{\kappa}^I$  dans  $\mathcal{G}_d^I(p)$  et  $\mathcal{G}_s^I(p)$ , la nouvelle relation de localisation dans l'espace de Laplace-Carson devient :

$$\widehat{\epsilon}_d^I = \frac{5\widehat{\mu}(3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu})}{5\widehat{\mu}(3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu}) + 6(\widehat{\kappa} + 2\widehat{\mu})(\widehat{\mu}^I - \widehat{\mu})} \widehat{\epsilon}_d^0 \quad \text{et} \quad \widehat{\epsilon}_s^I = \frac{3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu}}{3\widehat{\kappa}^I + 4\widehat{\mu}} \widehat{\epsilon}_s^I$$

où encore :

$$\widehat{\epsilon}^I = \left( \frac{5\widehat{\mu}(3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu})}{5\widehat{\mu}(3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu}) + 6(\widehat{\kappa} + 2\widehat{\mu})(\widehat{\mu}^I - \widehat{\mu})} J + \frac{3\widehat{\kappa} + 4\widehat{\mu}}{3\widehat{\kappa}^I + 4\widehat{\mu}} L \right) : \widehat{\epsilon}^0 \quad (4.77)$$

On constate que la relation de localisation (4.77) du problème élémentaire de l'inclusion viscoélastique linéaire obtenue à partir de la transformée de Laplace-Carson de la nouvelle équation intégrale (4.56) est la même que celle obtenue par le modèle de référence de Hashin. En effet, l'expression (3.24) (voir chapitre 3) du tenseur de localisation symbolique  $\widehat{A}^{LI}$  obtenue par l'approche héréditaire de Hashin dans le cas isotrope est la même que celle de la relation (4.77).

Par conséquent, nous pouvons conclure que dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, l'équation intégrale, provenant de la nouvelle méthode de transition d'échelle à variables internes, fournit la solution exacte du problème de l'inclusion viscoélastique linéaire obtenue, jusqu'alors, par les approches de type héréditaires.

L'avantage que l'on tire de ce dernier résultat se trouve dans la simplicité de la résolution numérique du nouveau modèle à variables internes et sa rapidité d'exécution lors de l'étape d'homogénéisation, en comparaison avec la lourdeur des calculs numériques que nécessitent les

méthodes de type héréditaire du fait de l'inversion de la transformée de Laplace-Carson. Nous avons vu, dans le chapitre 3, que même dans le cadre d'un comportement viscoélastique linéaire isotrope, le retour à l'espace réel de la loi macroscopique du matériau se complique sérieusement dès que l'on sort de l'hypothèse des solides incompressibles. Dans le cas échéant, on a le plus souvent recours à des méthodes numériques d'approximation permettant d'aboutir à la solution approchée. Le modèle proposé ici utilise la résolution incrémentale classique de la transition d'échelle à variables internes et se distingue par sa solution correspondant à celle donnée comme référence en viscoélasticité linéaire.

Afin de valider le modèle à variables internes au niveau des propriétés effectives du matériau hétérogène viscoélastique, on propose une méthode d'homogénéisation selon l'approximation autocohérente et l'estimation de Mori-Tanaka. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par le modèle de référence de type héréditaire de Rougier [70] ainsi que celles de modèles à variables internes comme celui de Weng [69] et de Paquin [74].



## 4.4 Approximation autocohérente et estimation de Mori-Tanaka du comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes

### 4.4.1 Introduction

Ce paragraphe a pour but de présenter les résultats fournis à partir de la loi de localisation issue du problème de la transition d'échelle à variables internes en viscoélasticité linéaire présentée précédemment dans ce chapitre. Ces résultats seront comparés dans le cas du comportement viscoélastique linéaire des matériaux biphasés isotropes, en utilisant le modèle autocohérent et celui de Mori-Tanaka, avec les modèles à champs translétés de Paquin [74], Kröner-Weng [69] et avec les modèles de type héréditaire qui font office de modèles de références [67][70].

En théorie, le modèle autocohérent ou celui de Mori-Tanaka concerne les matériaux hétérogènes parfaitement désordonnés, c'est-à-dire les matériaux constitués d'hétérogénéités de forme sphériques. Pour les matériaux composites, polycristallins ou les polymères semi-cristallins, les hétérogénéités sont considérées comme des inclusions sphériques, dans lesquelles les contraintes et les déformations sont supposées uniformes [52]. Ainsi, les moyennes spatiales sur le volume du milieu hétérogène se ramènent à une somme discrète sur l'ensemble des hétérogénéités.

### 4.4.2 Approximation autocohérente

#### a. Principe du schéma autocohérent

Cette méthode d'homogénéisation, mise en œuvre au départ pour les polycristaux, consiste à considérer chaque phase du matériau hétérogène comme une inclusion ellipsoïdale en interaction avec une matrice, homogène et infinie qui possède un comportement identique à celui du M.H.E. recherché :

$$\epsilon^0 = E \quad ; \quad C = C^{eff} \quad (S = S^{eff}) \quad ; \quad M = M^{eff} \quad (B = B^{eff})$$

Autrement dit, le principe d'autocohérence est d'assimiler les interactions entre un élément et tous les autres, à celle entre cet élément et le Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.) recherché.

Il transforme un problème à  $N$  phases à  $N$  problèmes élémentaires à une phase. Le milieu de référence étant une inconnue du problème, le schéma autocohérent est une méthode de résolution implicite, c'est-à-dire que les propriétés du M.H.E. recherchées sont exprimées en fonction d'elles-mêmes en plus des autres variables du problème.

L'approximation autocohérente a pour but de parvenir à simplifier l'équation à laquelle aboutit la formulation intégrale d'un problème hétérogène, du type :

$$\dot{\epsilon}(r) = \dot{E} - \int_V \Gamma^L(r - r') : g(r') dV' \quad (4.78)$$

où  $\Gamma^L$  est le tenseur de Green modifié associé au milieu homogène de référence  $L$  et  $g(r)$  est un terme de fluctuations par rapport à un milieu de référence inconnu.

Le principe du schéma autocohérent repose sur la propriété du tenseur de Green modifié, qui se décompose, pour tout milieu homogène infini  $L$ , en une partie singulière, dite locale  $\Gamma_l^L$ , et une partie régulière, dite à distance ou non locale  $\Gamma_{nl}^L$ , telles que :

$$\Gamma^L(r - r') = \Gamma_l^L \delta(r - r') + \Gamma_{nl}^L(r - r') \quad (4.79)$$

En remplaçant (4.79) dans l'équation intégrale (4.78), il vient :

$$\dot{\epsilon}(r) = \dot{E} - \Gamma_l^L : g(\vec{r}) - \int_V \Gamma_{nl}^L(r - r') : g(r') dV' \quad (4.80)$$

Le principe du schéma autocohérent consiste alors à affaiblir la partie non locale des interactions. Compte tenu du fait que  $\Gamma_{nl}^L$  décroît rapidement en  $1/R^3$  ( $R = |r - r'|$ ), celle-ci peut raisonnablement être négligée en imposant la condition de moyenne :

$$\overline{g(r)} = 0 \quad (4.81)$$

$g(r)$  étant un terme de fluctuations par rapport à un milieu de référence, cette condition conduit à choisir ce milieu de référence pour satisfaire la moyenne (4.81). L'équation intégrale peut alors se réduire à sa partie locale :

$$\dot{\epsilon}(r) = \dot{E} - \Gamma_l^L : g(\vec{r}) \quad (4.82)$$

Sachant que  $\Gamma_l^L$  désigne le tenseur d'interaction d'une inclusion sphérique, on comprend pourquoi il s'agit là du modèle autocohérent à inclusions sphériques (dit à 1 site), qui prend la

signification d'un modèle de matériau hétérogène parfaitement désordonné.

Après l'énonciation du principe de l'approximation autocohérente, on propose de l'appliquer à la nouvelle relation de localisation (4.56).

### b. Schéma complet de résolution

L'approximation autocohérente de l'équation intégrale (4.56) repose sur la décomposition des fonctions de Green  $\Gamma^C$  et  $\Gamma^B$  en une partie locale et une partie non locale telles que :

$$\Gamma^C(r - r') = \Gamma_l^C \delta(r - r') + \Gamma_{nl}^C(r - r') \quad (4.83)$$

et

$$\Gamma^B(r - r') = \Gamma_l^B \delta(r - r') + \Gamma_{nl}^B(r - r') \quad (4.84)$$

En remplaçant (4.83) et (4.84) dans (4.56), il vient :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} = & \ddot{E} - \underbrace{\Gamma_l^C : (\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma})}_{X'} - \underbrace{\Gamma_{nl}^C * (\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma})}_{X''} \\ & - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ \dot{\epsilon} - \dot{E} - \underbrace{\Gamma_l^B : (\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma})}_{Y'} \right. \\ & \left. - \underbrace{\Gamma_{nl}^B * (\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma})}_{Y''} \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

Dans l'équation intégrale (4.85), seuls les termes intégraux  $X''$  et  $Y''$  sont difficiles à calculer. Ainsi, l'approximation autocohérente consiste alors à affaiblir la contribution de ces termes non locaux. Pour cela, elle conduit à imposer les conditions de moyenne :

$$\begin{cases} \overline{\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}} = 0 \\ \overline{\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}} = 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

Ainsi, les conditions autocohérentes (4.86) permettent de réduire l'équation intégrale (4.85) aux contributions locales  $X'$  et  $Y'$  :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} = & \ddot{E} - \Gamma_l^C : (\delta c : (\ddot{\epsilon} - m : \dot{\sigma}) - C : \delta m : \dot{\sigma}) \\ & - \frac{\mu\kappa(3\kappa^v + 4\eta)}{\eta\kappa^v(3\kappa + 4\mu)} \left[ \dot{\epsilon} - \dot{E} - \Gamma_l^B : (\delta b : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B : \delta s : \dot{\sigma}) \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

où les phases du matériaux hétérogène jouent chacune le rôle d'inclusions de forme sphérique. Dans ce cas,  $\Gamma_l^C = T^C$  et  $\Gamma_l^B = T^B$  ( $T^C$  et  $T^B$  sont les tenseurs d'Eshelby définis en (4.57)).

- Réécriture de la relation de localisation (4.87) en fonction des variables internes définies dans la résolution numérique

La relation (4.87) peut être présentée sous une équation de forme :

$$M_1 : \ddot{\epsilon} + M_2(r) : \dot{\epsilon} + M_3 : \dot{\sigma} + M_4 : \sigma = \ddot{E} + M_5 : \dot{E} \quad (4.88)$$

où les tenseurs  $M_i$  sont fonctions des tenseurs locaux  $c(r)$ ,  $s(r)$ ,  $b(r)$ ,  $m(r)$ , et effectifs  $C = C^{eff}$ ,  $S = S^{eff}$ ,  $B = B^{eff}$  et  $M = M^{eff}$ . Précisons par ailleurs que les tenseurs homogènes effectifs élastiques et visqueux sont des inconnues du problème.

L'équation (4.88) représente la relation de localisation du problème hétérogène suivant le schéma autocohérent, reliant les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques. En injectant les expressions des tenseurs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\dot{\epsilon}$  en fonction des champs  $\ddot{\sigma}$ ,  $\dot{\sigma}$  et  $\sigma$ , obtenues à partir des lois de comportement (4.1) et (4.10), dans l'équation (4.88), on obtient :

$$\boxed{N_1 : \ddot{\sigma} + N_2 : \dot{\sigma} + N_3 : \sigma = \ddot{E} + N_4 : \dot{E}} \quad (4.89)$$

Comme les tenseurs  $M_i$ , les tenseurs  $N_i$  sont fonctions des tenseurs locaux  $c(r)$ ,  $s(r)$ ,  $b(r)$ ,  $m(r)$ , et effectifs  $C = C^{eff}$ ,  $S = S^{eff}$ ,  $B = B^{eff}$  et  $M = M^{eff}$ .

Le nature implicite de l'homogénéisation autocohérente se traduit ici par le fait que les tenseurs  $N_i$  s'expriment en fonction des propriétés recherchées du M.H.E. Ces derniers tenseurs sont des inconnues dont la détermination en fonction des autres variables internes du problème hétérogène implique l'établissement d'équations supplémentaires.

- Détermination des tenseurs élastiques effectifs  $C^{eff}$  ou  $S^{eff}$

Dans le modèle présenté dans cette thèse et en raison de l'indépendance de la vitesse de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp} = m : \sigma$  par rapport aux propriétés effectives élastiques du M.H.E. viscoélastique, on choisit comme milieu de référence  $C$ , le milieu effectif  $C^e$  issu de l'approximation autocohérente en élasticité. Par conséquent,  $C$  peut être définie classiquement par :

$$\boxed{C = C^e = \overline{c : A^{C^e}}} \quad (4.90)$$

où  $A^{C^e}$  est le tenseur de localisation du cas élastique pur :

$$A^{C^e} = (I - T^{C^e} : \delta c^e)^{-1} \quad , \quad \overline{A^{C^e}} = I \quad (4.91)$$

- Détermination des tenseurs visqueux effectifs  $B^{eff}$  ou  $M^{eff}$

Pour déterminer les tenseurs visqueux effectifs, on effectue la moyenne spatiale sur la relation de localisation définie par l'équation (4.89) :

$$\boxed{\overline{N_1 : \ddot{\sigma}} + \overline{N_2 : \dot{\sigma}} + \overline{N_3 : \sigma} = \ddot{E} + \overline{N_4} \dot{E}} \quad (4.92)$$

Le développement de (4.92) conduit à un système d'équations, où les propriétés effectives visqueuses sont exprimées en fonctions des variables internes  $\ddot{\sigma}$ ,  $\dot{\sigma}$  et  $\sigma$ .

Les grandeurs macroscopiques sont déduites à partir des grandeurs locales par les relations de moyennes dans le volume  $V$  :

$$E = \overline{\epsilon} \quad , \quad \dot{E} = \overline{\dot{\epsilon}} \quad , \quad \ddot{E} = \overline{\ddot{\epsilon}} \quad (4.93)$$

$$\Sigma = \overline{\sigma} \quad , \quad \dot{\Sigma} = \overline{\dot{\sigma}} \quad , \quad \ddot{\Sigma} = \overline{\ddot{\sigma}} \quad (4.94)$$

- Schéma de résolution numérique

Les équations (4.89), (4.90) et (4.92) permettent la résolution numérique de l'homogénéisation autocohérente. Les variables internes macroscopiques  $\Sigma$ ,  $\dot{\Sigma}$ , et  $\ddot{\Sigma}$  sont déterminées en fonction des variables internes locales  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$ , et  $\ddot{\sigma}$  en effectuant la moyenne spatiale des lois de comportement (4.1) et (4.10) du problème hétérogène.

Cette résolution consiste à déterminer pour un temps  $t_{n+1}$  donné, chaque variable interne du problème en connaissant les valeurs à l'instant  $t_n$ . Le schéma de résolution est résumé suivant un organigramme représenté dans la figure 4.2. Ce schéma est une application pour le cas où les déformations  $E$  sont imposées : les tenseurs  $\dot{E}$  et  $\ddot{E}$  constituent donc des données du problème.

La méthode de résolution appliquée ici est donc explicite. Sa mise en œuvre numérique est simple et rapide d'exécution. De plus on choisit un pas de temps  $\Delta t$  optimal de l'ordre du millièème de seconde afin d'assurer une bonne précision de résolution.

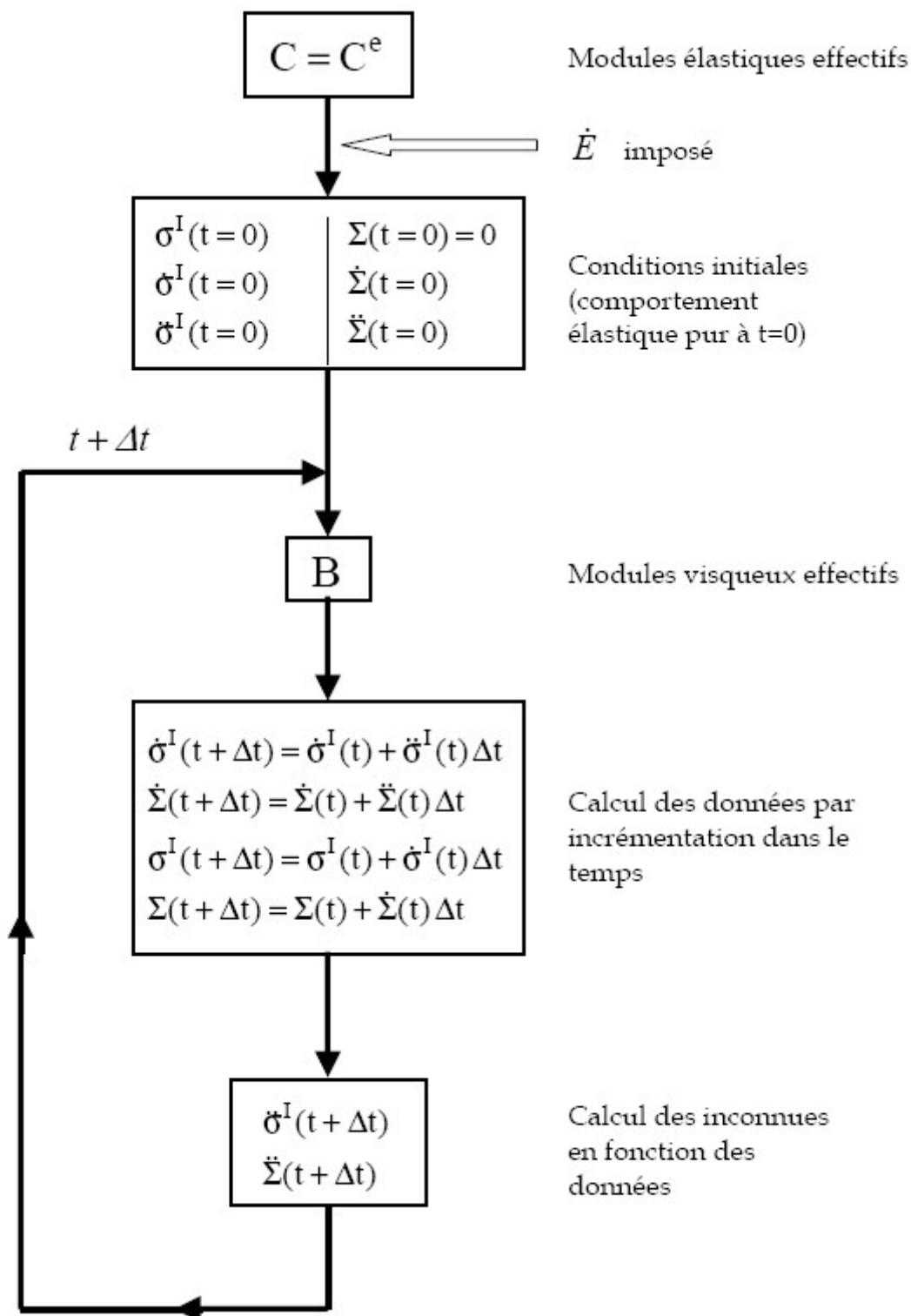


FIG. 4.2 – Organigramme de la résolution numérique de l'approximation autocohérente du modèle micromécanique proposé

### 4.4.3 Résultats numériques de l'homogénéisation autocohérente

Les matériaux considérés dans les simulations suivantes sont des matériaux biphasés de constituants maxwelliens isotropes :

$$\begin{cases} c^\alpha = 2\mu^\alpha J + 3\kappa^\alpha L & \text{et } s^\alpha = \frac{1}{2\mu^\alpha} J + \frac{1}{3\kappa^\alpha} L \\ b^\alpha = 2\eta^\alpha J + 3\kappa^{v\alpha} L & \text{et } m^\alpha = \frac{1}{2\eta^\alpha} J + \frac{1}{3\kappa^{v\alpha}} L \end{cases}$$

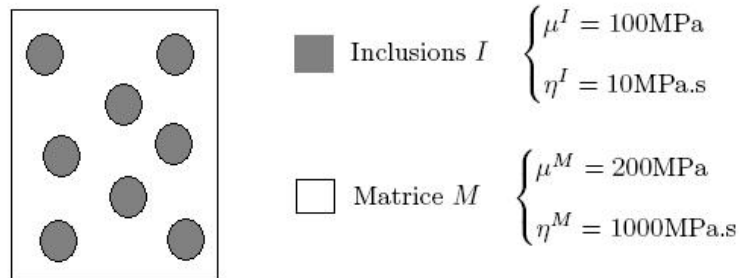
où  $\alpha$  représente la phase ( $\alpha = I$  pour l'inclusion,  $\alpha = M$  pour la matrice),  $C$ ,  $S$ ,  $B$  et  $M$  sont définis au début de la section 4.2.2 ainsi que les tenseurs de projection  $J$  et  $L$ . On définit également  $\nu_e$  et  $\nu_v$ , les coefficients de Poisson respectifs pour l'élasticité et la viscosité :

$$\begin{cases} \nu_e^\alpha = \frac{3\kappa^\alpha - \mu^\alpha}{2(3\kappa^\alpha + \mu^\alpha)} \\ \nu_v^\alpha = \frac{3\kappa^{v\alpha} - \eta^\alpha}{2(3\kappa^{v\alpha} + \eta^\alpha)} \end{cases}$$

#### a. Cas d'un matériau isotrope incompressible

Dans le cas où le comportement est incompressible ( $\nu_e^\alpha = \nu_v^\alpha = 0,5$ ), les relations de comportement peuvent s'écrire sous forme déviatorique. Les caractéristiques mécaniques et microstructurales du matériau testé, dans ce cas, sont présentées à la figure 4.3.

On choisit ici d'importantes hétérogénéités élastiques et visqueuses de façon à mettre l'accent sur l'effet des interactions dans le matériau.



fraction volumique des inclusions  $f = 0,5$

FIG. 4.3 – Propriétés mécaniques et microstructure du matériau test dans le cas incompressible

- *Essai de traction-compression*

La figure 4.4 représente les résultats des simulations du modèle présenté et de la solution de référence de Hashin-Rougier [67][70] pour un essai de traction-compression à vitesse de déformation constante. On observe que les courbes sont confondues, ce qui vérifie bien que le modèle présenté donne la solution exacte en viscoélasticité linéaire.

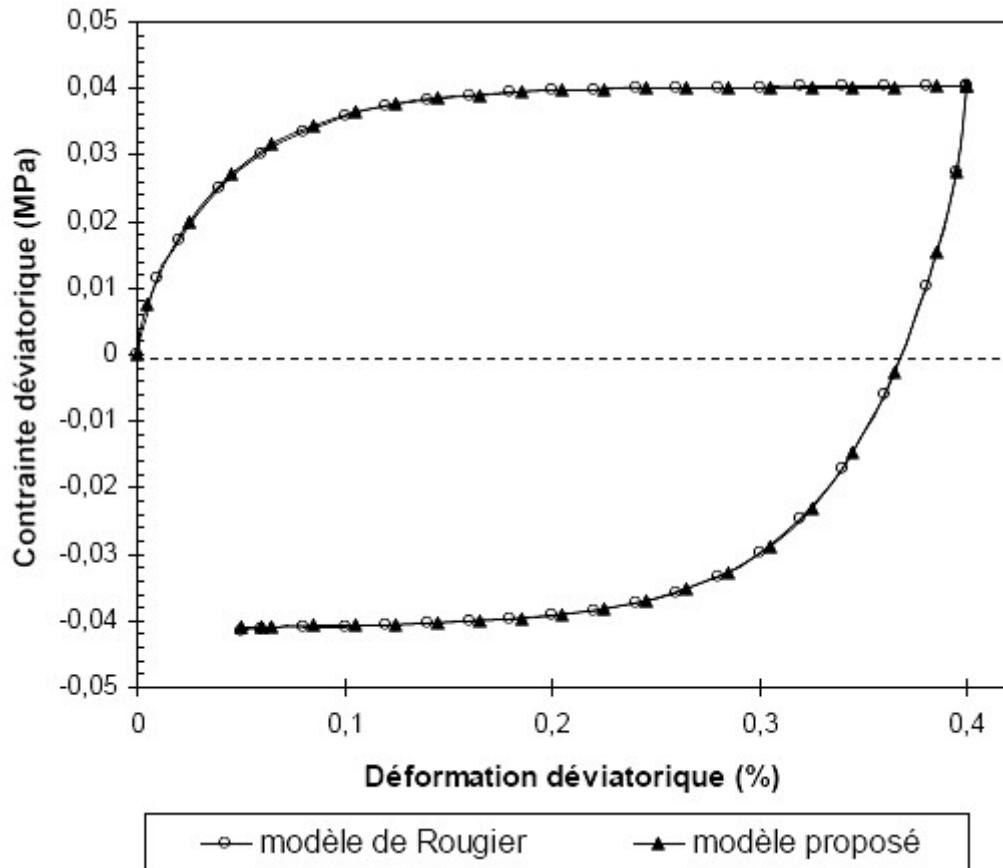


FIG. 4.4 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression

à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$



- *Essai cyclique*

Un chargement cyclique de traction-compression à vitesse de déformation imposée  $|\dot{\epsilon}| = 10^{-4}$  est effectué sur le matériau test. La séquence de chargement est décrite sur la figure 4.5 ci-dessous :

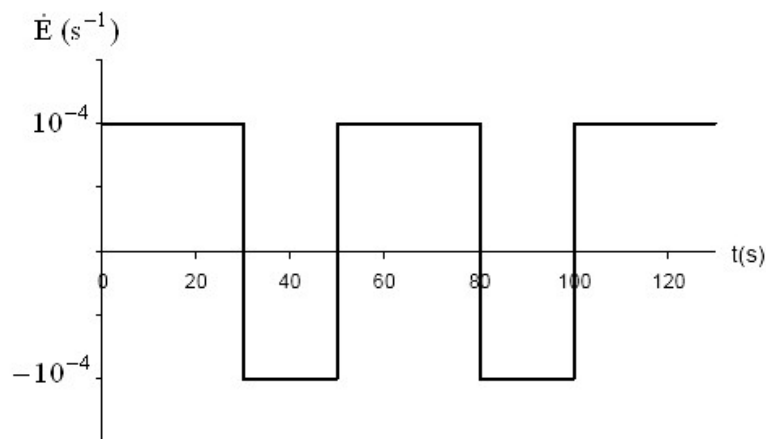


FIG. 4.5 – Description du chargement cyclique imposé au matériau test

Les résultats obtenus par le modèle sont comparés à ceux du modèle de référence de Hashin-Rougier et présentés à la figure 4.6 :

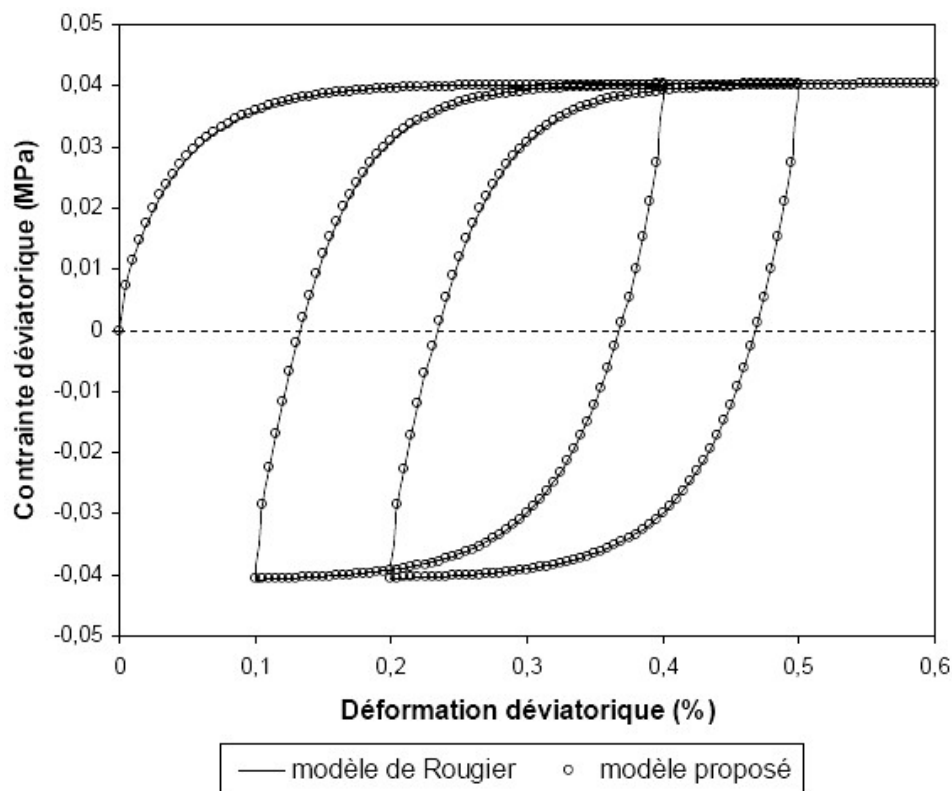


FIG. 4.6 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai cyclique à  $|\dot{\epsilon}| = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Comme pour le cas de l'essai de traction-compression, l'excellente concordance entre les deux courbes témoigne une fois de plus de la justesse du modèle proposé traduisant les interactions viscoélastiques aussi rigoureusement que la solution de référence proposée par le modèle de type héréditaire de Hashin-Rougier pour des cycles de charge et de décharge successifs.

- *Effet de la vitesse*

Les figures 4.7 et 4.8 attestent bien que la solution proposée prend en compte l'effet de la vitesse de déformation imposée sans aucune difficulté. En outre, on peut également remarquer que la réponse du matériau hétérogène est proportionnelle à la vitesse de déformation, tant sur le plan des contraintes enregistrées, que sur celui des déformations.

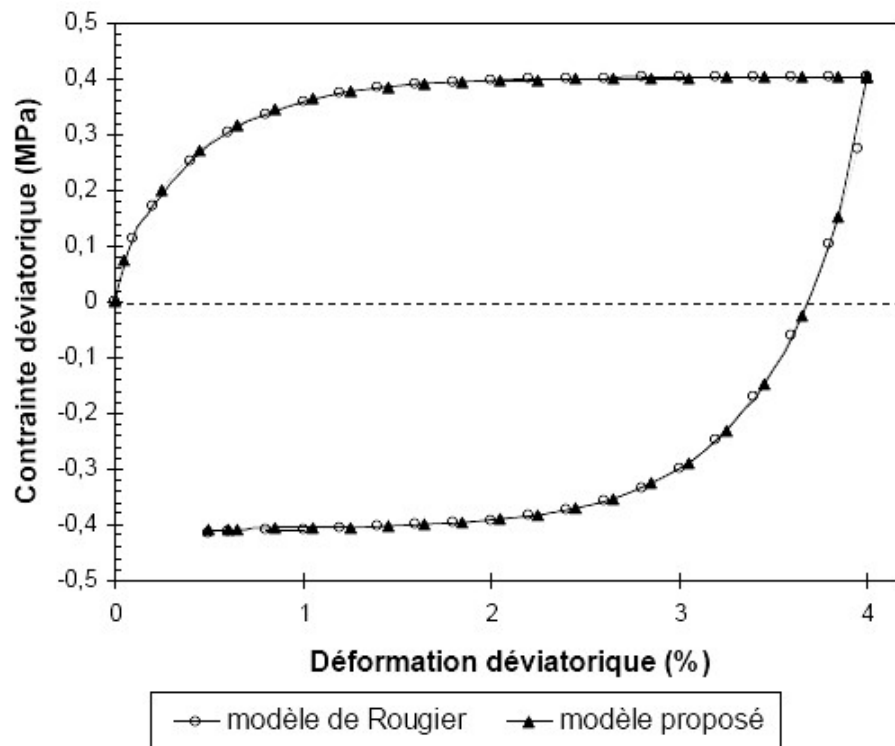


FIG. 4.7 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-3} s^{-1}$

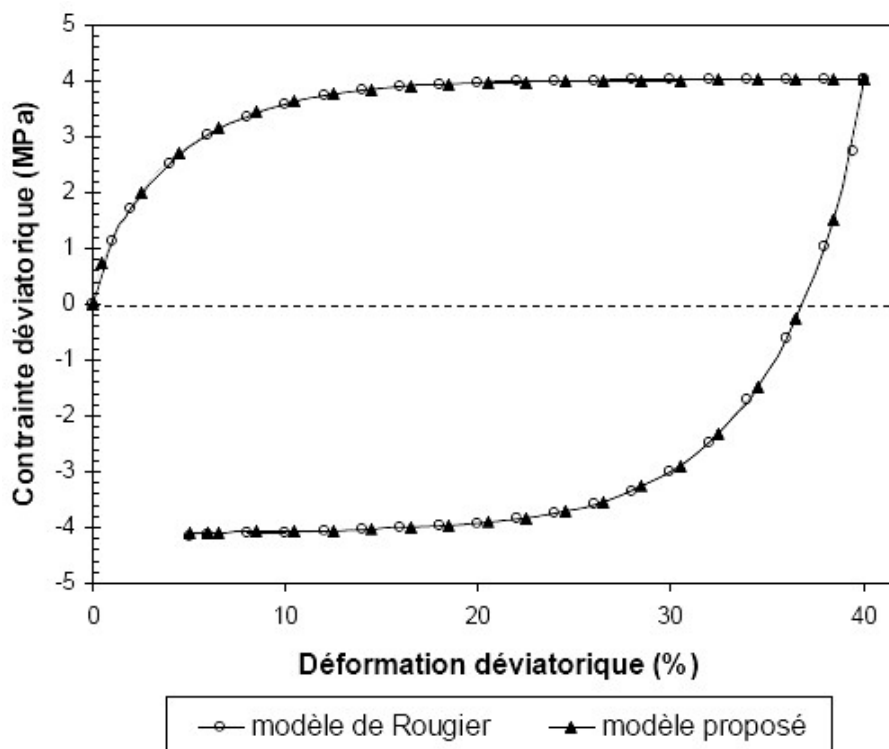


FIG. 4.8 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} s^{-1}$

- *Comparaison avec les autres modèles à variables internes*

Après avoir comparé le modèle proposé au modèle autocohérent de référence de Hashin-Rougier, évaluons-le maintenant par rapport aux autres modèles à variables internes déjà présentés au chapitre 3. La figure 4.9 fournit donc les résultats du modèle proposé et de celui à champs translatsés de Paquin, tandis que la figure 4.10 expose les résultats du présent modèle et des résultats de Weng et Kouddane.

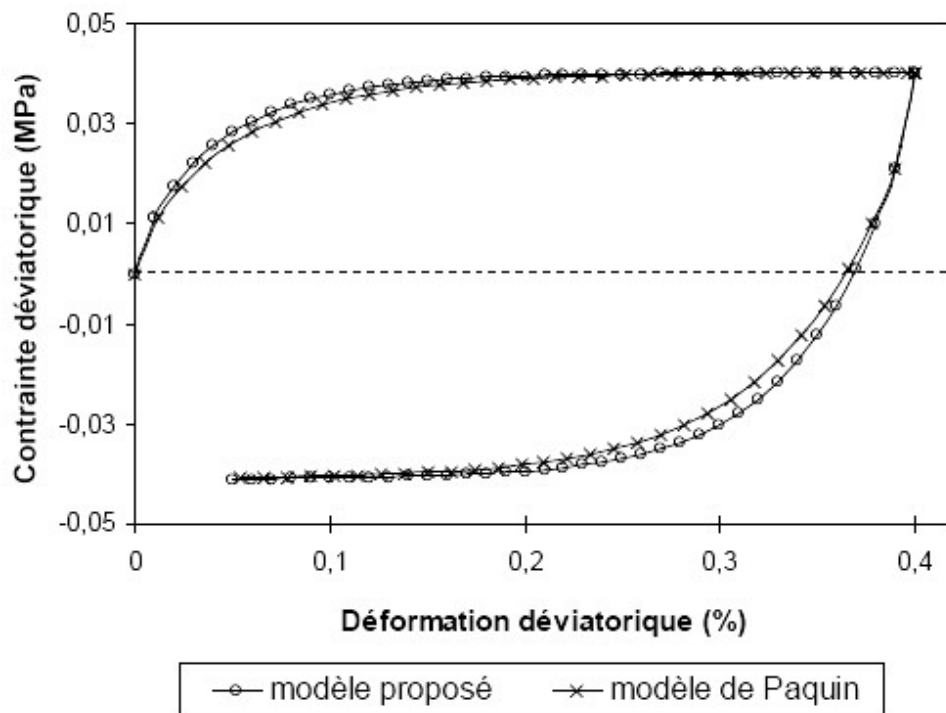


FIG. 4.9 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

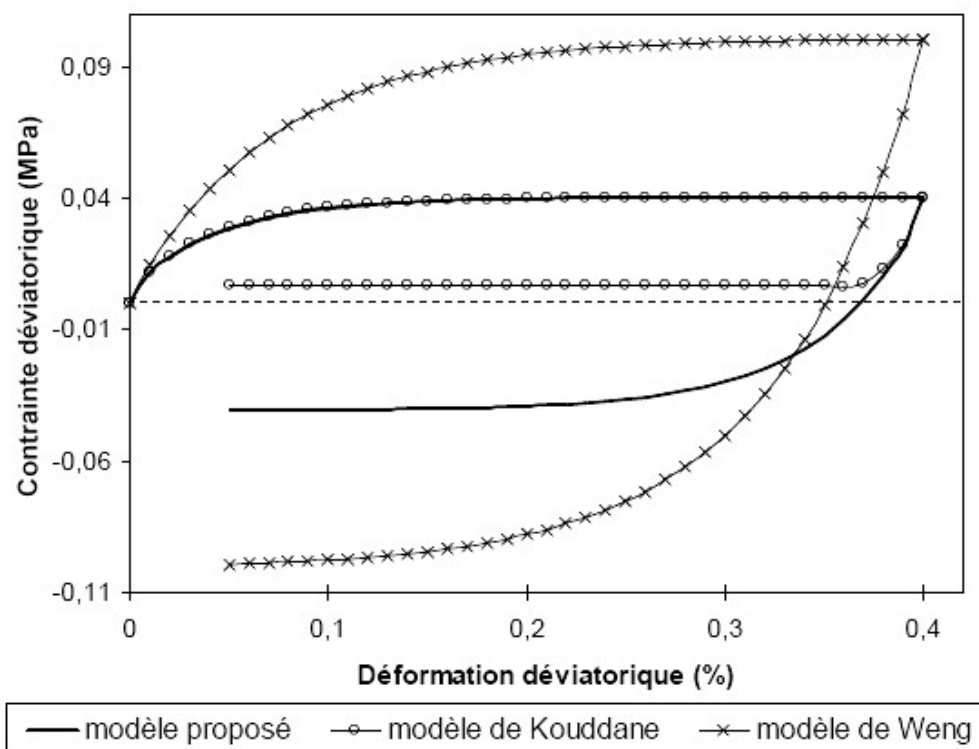


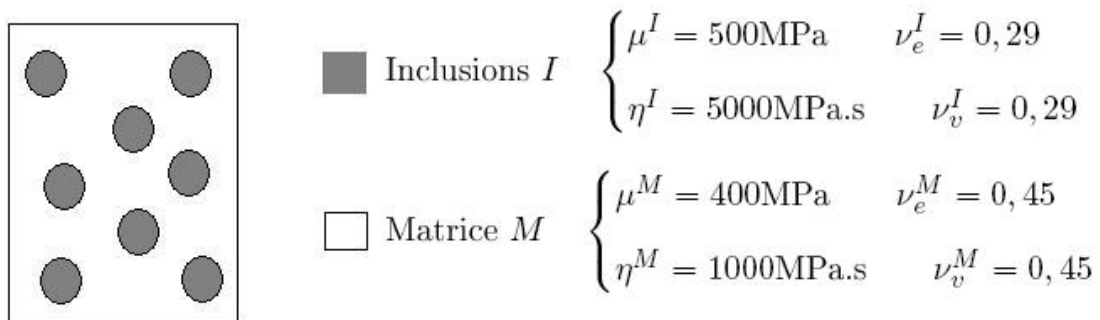
FIG. 4.10 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

La comparaison des résultats des différents modèles à variables internes met l'accent sur la qualité du modèle proposé par rapport aux lacunes des autres approches à variables internes. En effet, le modèle de Paquin concède un léger écart avec la solution exacte, notamment aux temps "intermédiaires" entre les deux états asymptotiques aux temps "courts" (élasticité pure) et aux temps "longs" (viscosité pure). Le modèle de Kouddane, quant à lui, traduit de façon "exacte" le comportement en charge, mais devient instable et n'est plus valable lorsque la contrainte se rapproche de zéro. De plus, le modèle de Weng, commettant la même erreur que Kröner en élastoplasticité (voir chapitre 3), surestime considérablement la réponse du matériau hétérogène étudié.

Par ailleurs, le modèle proposé ne présente aucun des défauts attribués aux autres approches de transition d'échelle à variables internes.

### b. Cas d'un matériau isotrope compressible

On s'intéresse maintenant à la détermination du comportement effectif d'un matériau hétérogène biphasé maxwellien isotrope compressible, dont les propriétés mécaniques et microstructurales sont présentées à la figure 4.11 ci-après.



fraction volumique des inclusions  $f = 0,5$

FIG. 4.11 – Propriétés mécaniques et microstructure du matériau test dans le cas compressible

- *Essai de traction-compression*

Les courbes obtenues par le modèle proposé et la solution de référence de Rougier pour un essai de traction-compression uniaxial (suivant l'axe 1) à vitesse de déformation constante sont données par la figure 4.12.

La concordance des deux réponses confirme que dans le cas compressible, le modèle réalisé dans ce travail atteint aussi la solution exacte en viscoélasticité linéaire.

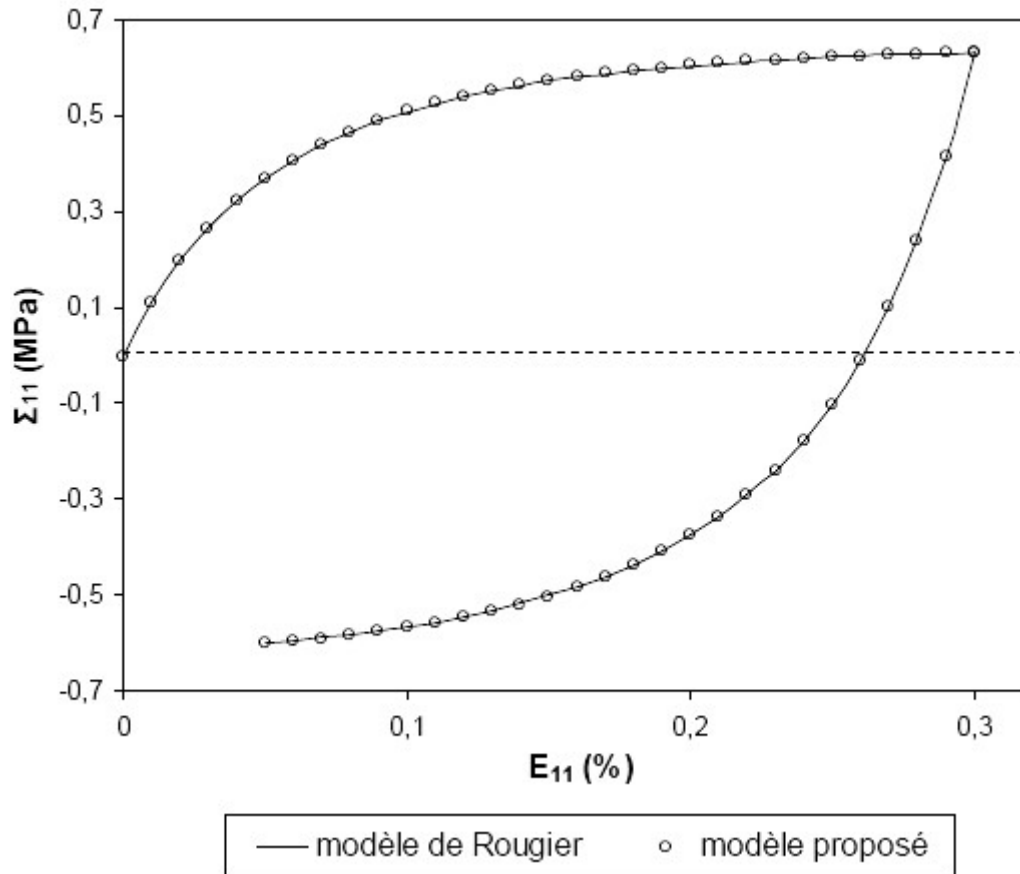


FIG. 4.12 - Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

- *Essai cyclique*

Un chargement cyclique de traction-compression uniaxiale identique à celui effectué pour le cas incompressible (voir figure 4.5) est mené sur le matériau test. Les résultats obtenus (figure 4.13) démontrent la bonne tenue de la solution du modèle présenté qui reste égale à la solution de référence tout au long des cycles successifs.

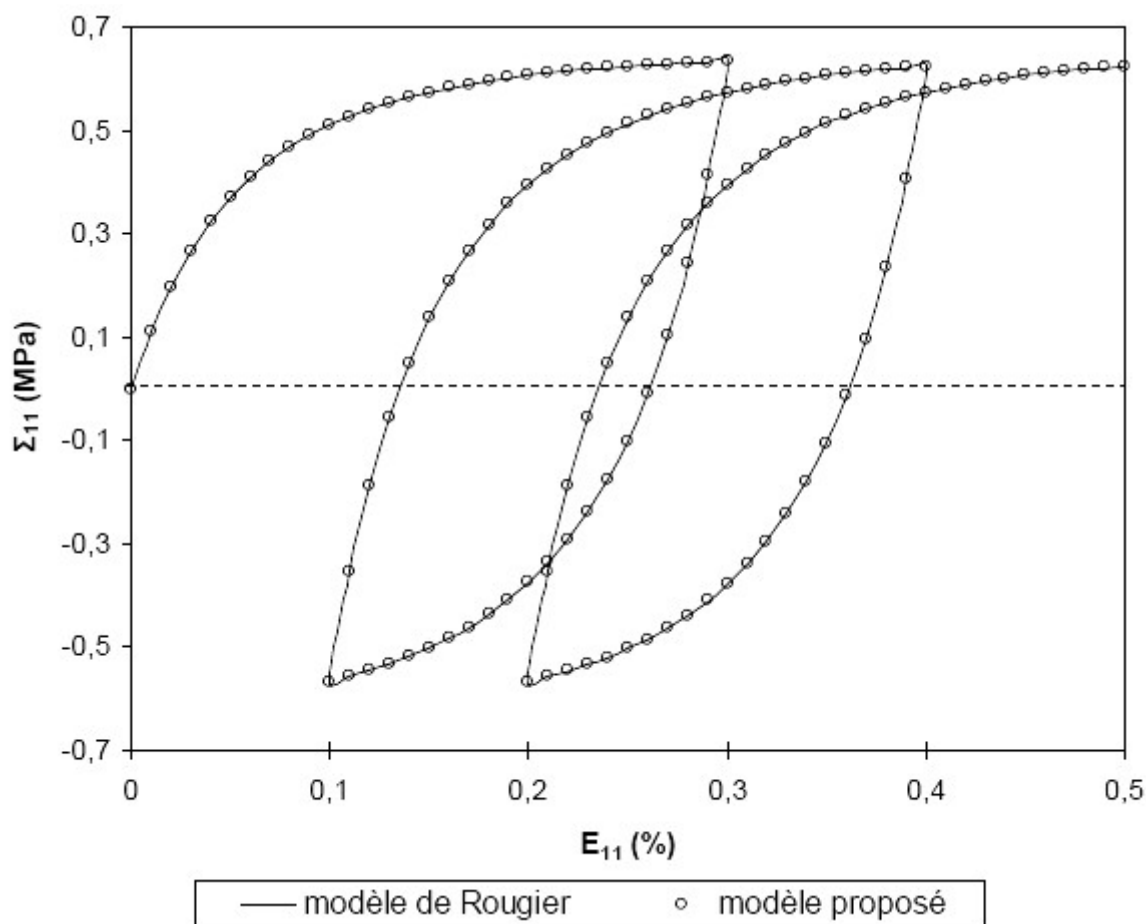


FIG. 4.13 – *Comportement macroscopique du matériau test pour un essai cyclique à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$*

- *Effet de la compressibilité*

Dans ce paragraphe, l'objectif est de mettre en évidence l'effet important de la compressibilité dans les matériaux viscoélastiques. Dans ce but, une série d'essais est effectuée sur le matériau compressible test, en fonction d'une part, de la compressibilité visqueuse ( $\nu_e^M = 0.45$  et  $\nu_v^M$  variable) présentée à la figure 4.14, et d'autre part, de la compressibilité élastique ( $\nu_v^M = 0.45$  et  $\nu_e^M$  variable) (figure 4.15).

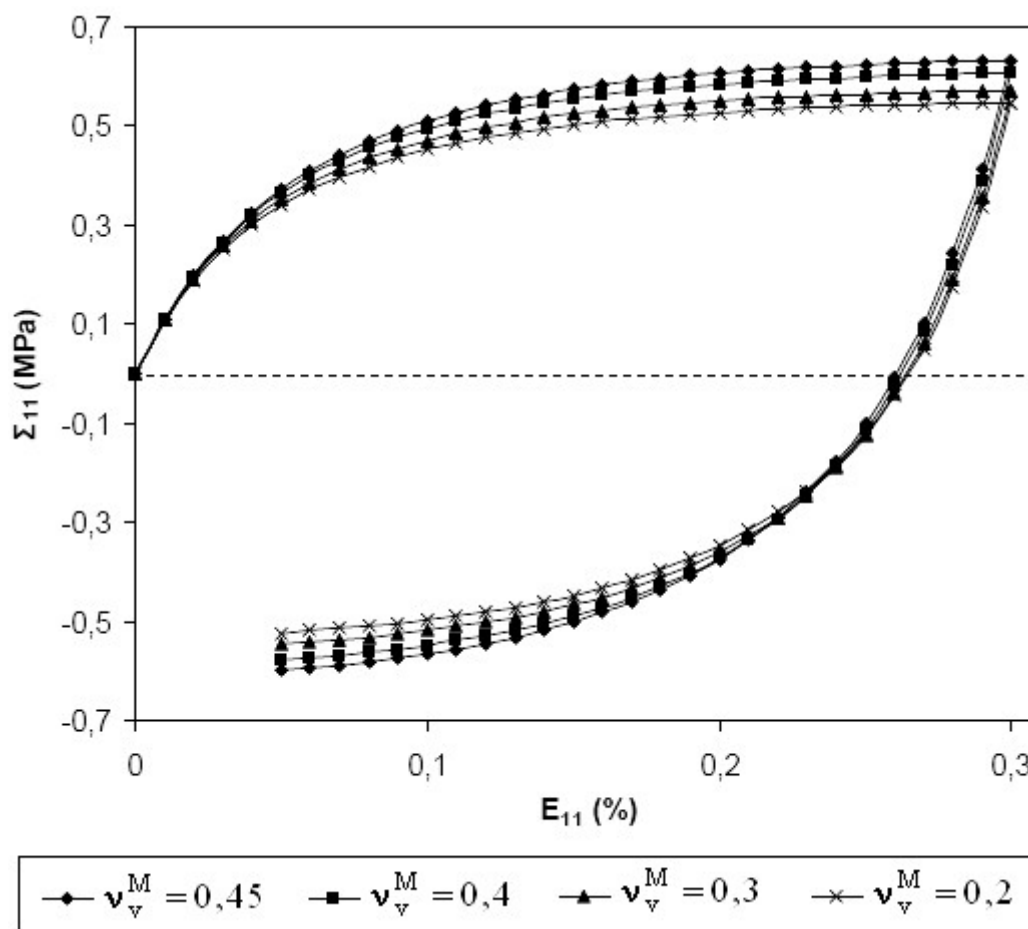


FIG. 4.14 - Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} s^{-1}$

La figure 4.14 met l'accent sur l'influence considérable de la compressibilité visqueuse agissant sur le niveau de contrainte : plus la viscosité est compressible, plus l'état de contrainte est faible.

D'un autre côté, la figure 4.15 montre l'influence moins importante de la compressibilité élastique qui intervient uniquement dans la réponse en contrainte aux temps "intermédiaires" : une augmentation notable de la compressibilité élastique entraîne une légère diminution de l'état de



contrainte au niveau du "coude" de la loi de comportement macroscopique du matériau.

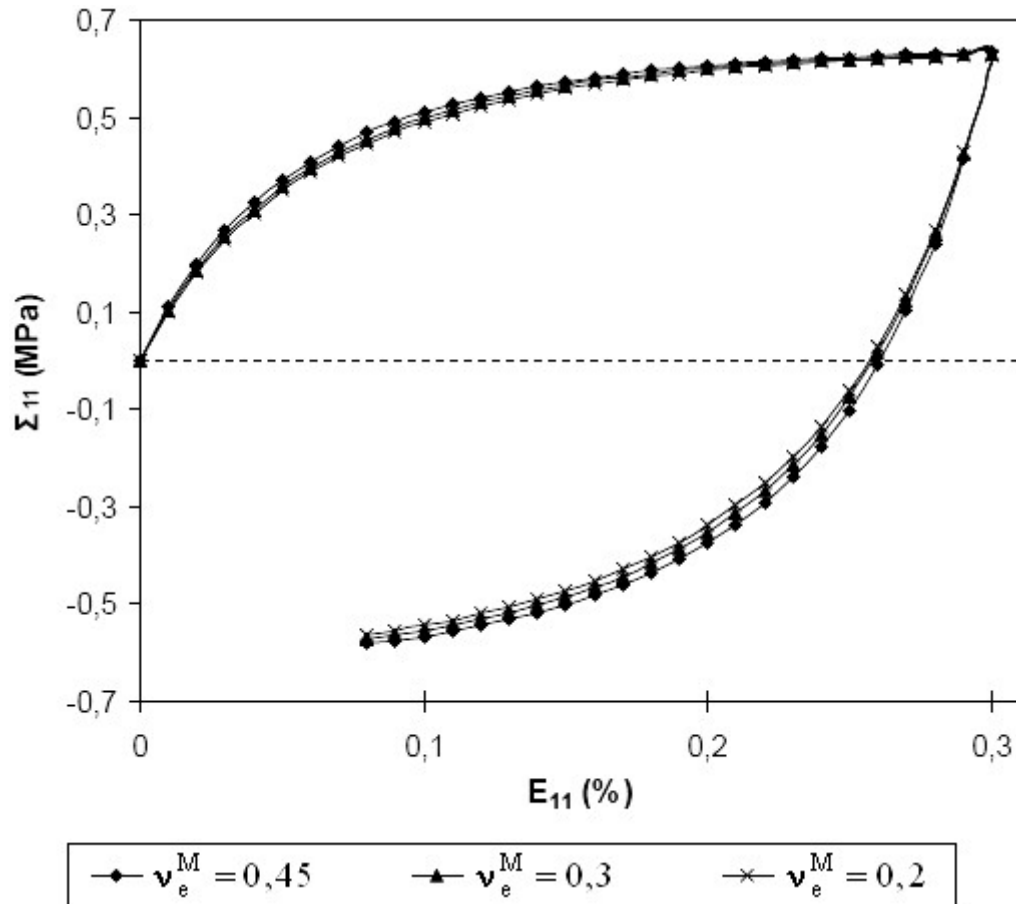


FIG. 4.15 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

- *Comparaison avec les autres modèles à variables internes*

La figure 4.16 montre la comparaison entre les résultats obtenus par le modèle présenté et les autres schémas de transition d'échelle à variables internes, à savoir le modèle de Paquin et le modèle de Weng.

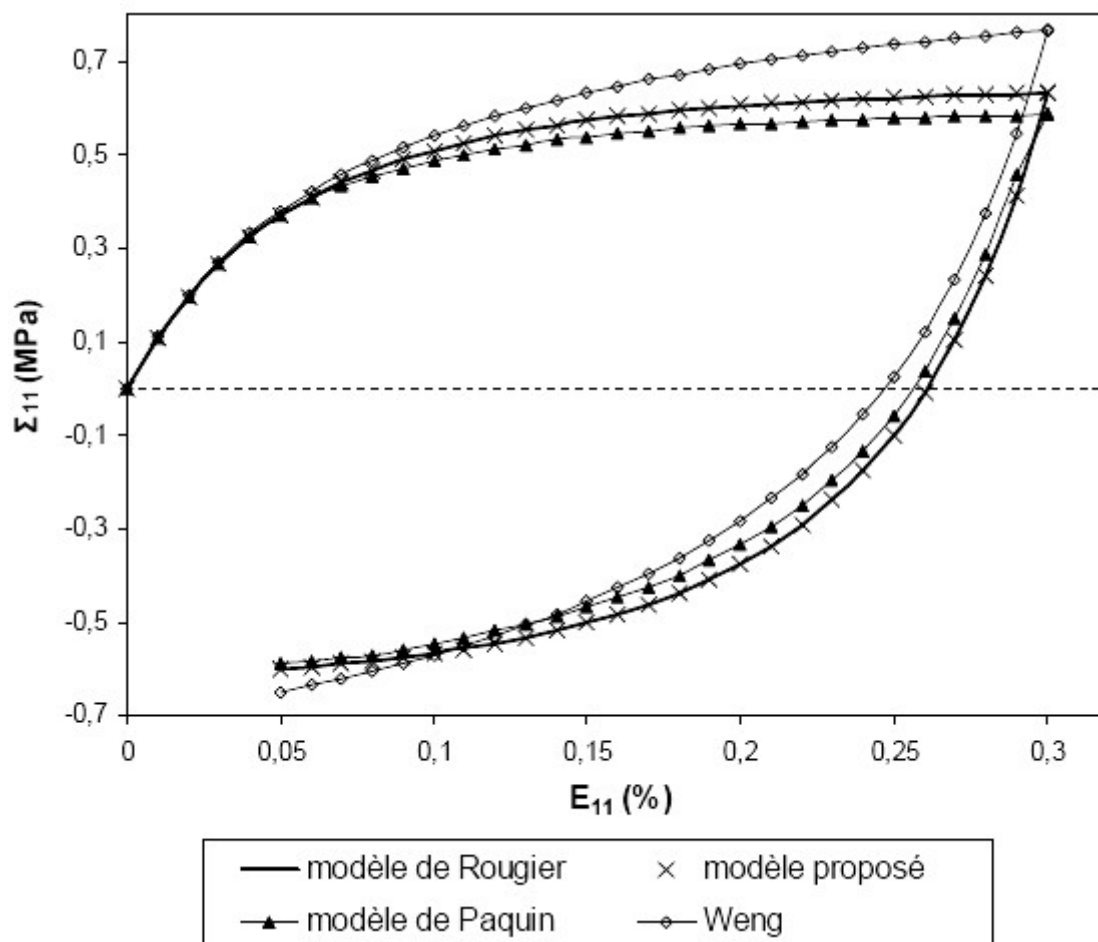


FIG. 4.16 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Comme pour le cas incompressible, on remarque que le modèle de Weng entraîne une surrestimation de la réponse mécanique, alors que le modèle à champs translétés de Paquin présente un écart avec la solution exacte du fait de son manque de précision dans la prédiction du comportement effectif et notamment aux temps "longs".

#### 4.4.4 Homogénéisation de Mori-Tanaka

##### a. Présentation du modèle de Mori-Tanaka

Le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [53] se fonde, comme pour le modèle autocohérent, sur le problème de l'inclusion. Cette estimation est le plus souvent utilisée pour des matériaux hétérogènes biphasés où des inclusions d'une même phase sont immergées dans une phase matrice supposée homogène. Toutefois, l'approche de Mori-Tanaka peut éventuellement s'appliquer à des milieux hétérogènes à plus de deux phases en subdivisant les inclusions en sous-familles de propriétés mécaniques différentes.

Le principe de la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka consiste à considérer la phase "hôte" du matériau hétérogène, c'est-à-dire la matrice, comme étant assimilable au milieu homogène de référence :

$$\epsilon^0 = \epsilon^M \quad ; \quad C = c^M (S = s^M) \quad ; \quad M = m^M (B = b^M)$$

où  $M$  représente la matrice.

Ainsi, à l'opposé du schéma autocohérent, la résolution de ce modèle est explicite, car le milieu de référence du problème est donné par la phase représentant la matrice. Par conséquent, la détermination du comportement effectif ne sollicite pas la condition d'annulation des moyennes spatiales des fluctuations  $g(r)$  dont se sert le principe autocohérent pour calculer les tenseurs  $B$  ou  $M$  du milieu homogène de référence. Le principe de Mori-Tanaka permet donc une résolution numérique plus simple et rapide d'exécution relativement à l'approximation autocohérente.

Toutefois, il est important de souligner que le principal inconvénient de l'homogénéisation de Mori-Tanaka réside dans le fait qu'elle ne demeure suffisamment fiable que pour de faibles fractions volumiques d'inclusions. En effet, en assimilant le milieu de référence à la matrice, l'erreur d'estimation commise par le modèle de Mori-Tanaka sur le comportement effectif est accrue par rapport à celle de l'homogénéisation autocohérente, particulièrement quand la fraction volumique des inclusions est importante et le contraste des hétérogénéités est grand (différence entre les propriétés mécaniques de la matrice et des inclusions).

### b. Schéma complet de résolution

Par le principe de l'estimation de Mori-Tanaka, la relation de localisation (4.57) dans le domaine de l'inclusion s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}^I &= \ddot{\epsilon}^M - T^{c^M} : \left( \Delta c^I : (\ddot{\epsilon}^I - m^I : \dot{\sigma}^I) - c^M : \Delta m^I : \dot{\sigma}^I \right) - \frac{\mu^M \kappa^M (3\kappa^{v^M} + 4\eta^M)}{\eta^M \kappa^{v^M} (3\kappa^M + 4\mu^M)} \left[ \dot{\epsilon}^I - \dot{\epsilon}^M \right. \\ &\quad \left. + T^{b^M} : \left( \Delta b^I : (\dot{\epsilon}^I - s^I : \dot{\sigma}^I) - b^M : \Delta s^I : \dot{\sigma}^I \right) \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

avec  $\Delta c^I = c^I - c^M$ ,  $\Delta s^I = s^I - s^M$ ,  $\Delta b^I = b^I - b^M$  et  $\Delta m^I = m^I - m^M$ .

$I$  représente les phases constituant les inclusions. En s'appuyant sur les relations de moyennes :

$$\dot{E} = f\dot{\epsilon}^I + (1-f)\dot{\epsilon}^M \quad \text{et} \quad \ddot{E} = f\ddot{\epsilon}^I + (1-f)\ddot{\epsilon}^M$$

où  $f$  est la fraction volumique des inclusions, on exprime l'équation (4.93) en fonction des champs relatifs aux déformations  $\dot{\epsilon}^I$ ,  $\dot{E}$ ,  $\ddot{\epsilon}^I$  et  $\ddot{E}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-f} (\ddot{\epsilon}^I - \ddot{E}) &= T^{c^M} : \left( \delta c^I : (\ddot{\epsilon}^I - m^I : \dot{\sigma}^I) - c^M : \delta m^I : \dot{\sigma}^I \right) - Q_{isot}^M \left[ \frac{1}{1-f} (\dot{\epsilon}^I - \dot{E}) \right. \\ &\quad \left. - T^{b^M} : \left( \delta b^I : (\dot{\epsilon}^I - s^I : \dot{\sigma}^I) - b^M : \delta s^I : \dot{\sigma}^I \right) \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\text{où} \quad Q_{isot}^M = \frac{\mu^M \kappa^M (3\kappa^{v^M} + 4\eta^M)}{\eta^M \kappa^{v^M} (3\kappa^M + 4\mu^M)} \quad (4.97)$$

Grâce aux lois de comportement local (4.1) et (4.10), les tenseurs  $\ddot{\epsilon}^I$  et  $\dot{\epsilon}^I$  sont remplacés par leurs expressions en fonction de  $\ddot{\sigma}^I$ ,  $\dot{\sigma}^I$  et  $\sigma^I$  dans (4.94). Le champ inconnu  $\ddot{\sigma}^I$  s'exprime alors en fonction des autres variables internes du problème :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{1-f} I - T^{c^M} : \delta c^I \right) : s^I : \ddot{\sigma}^I &= \frac{1}{1-f} \ddot{E} + \frac{1}{1-f} Q_{isot}^M \dot{E} - \left[ \left( \frac{1}{1-f} I - T^{c^M} : \delta c^I \right) : m^I \right. \\ &\quad \left. + T^{c^M} : (\delta c^I : m^I + C : \delta m^I) + Q_{isot}^M \left( \left( \frac{1}{1-f} I - T^{b^M} : \delta b^I \right) : s^I \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + T^{b^M} : (\delta b^I : s^I + B : \delta s^I) \right) \right] : \dot{\sigma}^I - Q_{isot}^M \left( \frac{1}{1-f} I - T^{b^M} : \delta b^I \right) : m^I : \sigma^I \end{aligned} \quad (4.98)$$

Ensuite, pour déterminer l'inconnu  $\ddot{\Sigma}$  en fonction des données du problème, on applique la moyenne spatiale à la loi de comportement (4.10) du problème 2 :

$$\ddot{E} = f s^I : \ddot{\sigma}^I + (1 - f) s^M : \ddot{\sigma}^M + f m^I : \dot{\sigma}^I + (1 - f) m^M : \dot{\sigma}^M \quad (4.99)$$

Puis on utilise les relations de moyenne :

$$\dot{\Sigma} = f \dot{\sigma}^I + (1 - f) \dot{\sigma}^M \quad \text{et} \quad \ddot{\Sigma} = f \ddot{\sigma}^I + (1 - f) \ddot{\sigma}^M$$

dans (4.97) :

$$\ddot{\Sigma} = \ddot{E} - m^M : \dot{\Sigma} - f (s^I - s^M) : \ddot{\sigma}^I - f (m^I - m^M) : \dot{\sigma}^I \quad (4.100)$$

Les équations (4.96) et (4.98) permettent la résolution complète du schéma de Mori-Tanaka par la méthode incrémentale à variables internes. Le schéma de cette résolution numérique est le même que celui de l'approximation autocohérente (figure 4.2), à l'exception que les tenseurs  $C$  et  $B$  étant donnés par la matrice  $c^M$  et  $b^M$ , il n'y a pas de calcul de  $B^{eff}$  à chaque itération dans le temps :  $B^{eff}$  est fixé dès le début des calculs tout comme  $C^{eff}$ . De même, ce schéma est une application pour le cas où la déformation macroscopique est imposée et représente ainsi une donnée du problème à tout instant  $t$ .

Le programme numérique de la méthode de Mori-Tanaka est plus simple et rapide d'exécution que celui du schéma autocohérent. De même, on choisit un pas de temps  $\Delta t$  optimal de l'ordre du millième de seconde.

#### 4.4.5 Résultats numériques de l'homogénéisation de Mori-Tanaka

Le matériau test pour la simulation numérique de l'homogénéisation de Mori-Tanaka est le même que celui utilisé pour les résultats numériques du schéma autocohérent en viscoélasticité linéaire isotrope compressible (voir figure 4.11), mais de fraction volumique des inclusions de  $f = 0,2$ .

La précision du modèle proposé, ainsi que la comparaison de ce dernier avec les autres modèles de transition d'échelle ayant déjà été observées précédemment dans le cadre de l'homogénéisation autocohérente, nous nous limiterons, dans ce paragraphe, à valider l'homogénéisation de Mori-Tanaka sur la nouvelle relation de localisation obtenue par une simulation d'un essai de traction-compression à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4}$  sur le matériau test. La figure 4.17 présente les résultats obtenus en comparaison avec ceux issus de l'homogénéisation de Mori-Tanaka sur la solution de référence du modèle de Rougier.

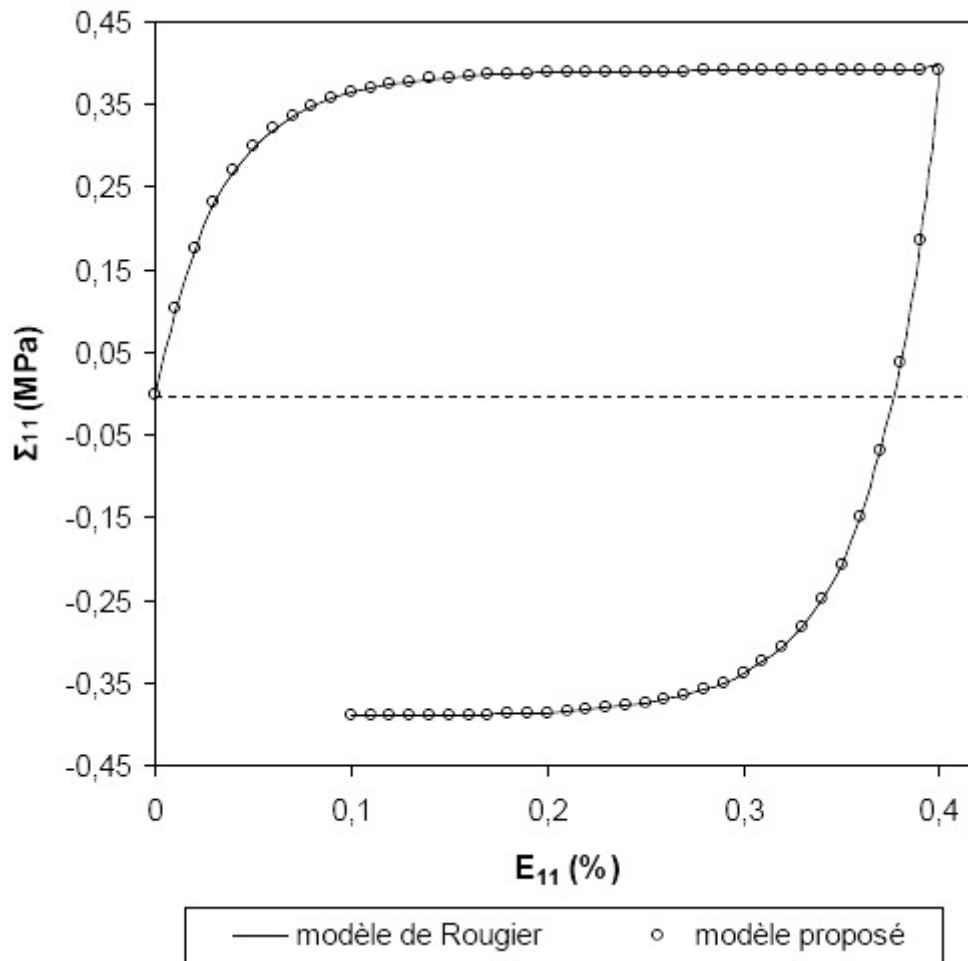


FIG. 4.17 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

On observe que l'application de l'homogénéisation de Mori-Tanaka n'a aucune influence sur la précision et la fiabilité du modèle proposé par lequel, la solution exacte en viscoélasticité linéaire est une fois de plus atteinte. Cela s'explique du fait que l'acuité du modèle proposé est entièrement définie dans l'étape de localisation du problème hétérogène, où la nouvelle équation intégrale équivaut dans l'espace temps réelle à celle obtenue par les modèles de référence de type héréditaire.

#### 4.4.6 Conclusion

Les résultats numériques des applications des homogénéisations autocohérente et de Mori-Tanaka permettent de vérifier l'équivalence entre la réponse du modèle proposé et la solution

exacte des modèles de référence de Hashin-Rougier [67][70]. Ces résultats montrent bien l'avantage de la nouvelle démarche par rapport aux autres approches à variables internes [69][76][74]. De plus, la nouvelle méthode propose une résolution numérique plus simple dont l'exécution s'avère considérablement plus rapide que celle des approches de type héréditaire confrontées au problème d'inversion de la transformée de Laplace-Carson.

En outre, il est important de noter que bien que cette étude soit limitée à la viscoélasticité linéaire et pour un milieu homogène de référence isotrope, l'extension à la viscoélasticité non-linéaire et à l'élastoviscoplasticité anisotropes, suivant la même démarche de transition d'échelle que celle présentée dans ce document, ne pose aucun problème.

## 4.5 Conclusion

La nouvelle démarche de formulation intégrale du problème hétérogène viscoélastique linéaire permet l'obtention d'une équation intégrale pouvant s'exprimer, d'une part, par les opérateurs de Green classiques en élasticité et en viscosité, et d'autre part, par des fluctuations élastiques et visqueuses. Les termes de nature "volumique", qui représentent la principale difficulté rencontrée dans la transition d'échelle du comportement viscoélastique, n'apparaissent plus dans cette nouvelle équation. La méthode proposée peut donc parfaitement se ramener au problème de l'inclusion viscoélastique linéaire. Notons, par ailleurs, que par souci de simplicité, cette démarche a été développée dans le cas d'un milieu de référence isotrope viscoélastique.

L'analyse de la nouvelle relation de localisation du problème de l'inclusion viscoélastique permet de vérifier la correspondance entre la démarche proposée et le modèle de référence de Hashin. En effet, en appliquant la transformée de Laplace-Carson à l'équation de localisation du modèle proposé, on retrouve la localisation de Hashin.

Cette correspondance entre la nouvelle approche et le modèle de Hashin explique les bons résultats numériques des homogénéisations autocohérente et de Mori-Tanaka appliquées à l'équation intégrale proposée. On remarque, en effet, que les résultats du présent modèle coïncident parfaitement avec ceux du modèle de référence de Rougier.

Finalement, les objectifs fixés dans ce chapitre ont donc été atteints :

- la nouvelle méthode propose une résolution numérique incrémentale à variables internes plus simple et nettement plus rapide d'exécution que celle des approches de type héréditaire ;
- les résultats du modèle correspondent à ceux des modèles de référence de Hashin et Rougier.

Le chapitre suivant sera consacré à l'extension de la nouvelle démarche de transition d'échelle proposée au cas de l'élastoviscoplasticité.





## Chapitre 5

# Extension au comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes

## 5.1 Introduction

Après avoir proposé une nouvelle démarche de transition d'échelle s'appliquant au comportement viscoélastique linéaire des matériaux hétérogènes, il s'agit, dans ce chapitre, d'étudier le cas plus général de l'élastoviscoplasticité en suivant la procédure de formulation intégrale faisant l'objet de notre étude, afin de proposer une résolution plus complète et d'enrichir davantage la méthode proposée.

Dans la première partie de ce chapitre, on présente les lois constitutives du comportement élastoviscoplastique en distinguant les formulations sécante et tangente. La possibilité d'exprimer les lois de comportement locales suivant ces deux écritures (sécante et tangente) entraîne alors une formulation intégrale suivant deux approches différentes : l'approche sécante et l'approche tangente.

Par la suite, deux sections de ce chapitre sont consacrées chacune à une de ces deux approches de résolution du problème hétérogène (sécante ou tangente) dans lesquelles la démarche de formulation intégrale présentée dans le chapitre précédent est étendue au cas de l'élastoviscoplasticité. Deux nouvelles équations intégrales sont alors obtenues suivant les lois de comportement locales sécante ou tangente à partir desquelles les équations du problème de base sont définies.

Enfin, l'application des méthodes d'homogénéisation autocohérente et de Mori-Tanaka sur les deux nouvelles équations intégrales précédemment obtenues donne lieu à la mise en œuvre de quatre modèles d'estimation du comportement effectif des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques : les deux modèles autocohérents issus des approches sécante et tangente, et les deux modèles de Mori-Tanaka correspondant également au deux types d'approches présentées. Ces quatre modèles proposés sont analysés et leurs résultats sont comparés avec ceux de la méthode variationnelle présentée par Lahellec et Suquet [42], ainsi que ceux de la méthode numérique exacte des éléments finis, dans le cadre d'une simulation d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante sur un matériau test hétérogène élastoviscoplastique.

## 5.2 Lois de comportement élastoviscoplastiques locales

Afin de définir le comportement des matériaux élastoviscoplastiques hétérogènes, présentons tout d'abord les potentiels suivant lesquels s'écrivent les lois constitutives des comportements élastique et viscoplastique [83].

Rappelons que, par définition, un matériau élastique est un matériau pour lequel il existe une fonction dérivable  $U(r, \sigma)$  telle que la loi constitutive s'écrit :

$$\epsilon(r, t) = \frac{\partial U}{\partial \sigma}(r, \sigma(r, t)) \quad (5.1)$$

où la fonction  $U$  est le potentiel élastique en contrainte,  $\sigma(r, t)$  est le tenseur des contraintes et  $\epsilon(r, t)$  est le tenseur des déformations.

L'analyse faite précédemment est la même en ce qui concerne les matériaux viscoplastiques non linéaires pour lesquels la loi constitutive s'écrit :

$$\dot{\epsilon}(r, t) = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}(r, \sigma(r, t)) \quad (5.2)$$

Dans ce cas,  $\Omega$  est le potentiel viscoplastique en contrainte,  $\sigma(r, t)$  est le tenseur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}(r, t)$  est la dérivée par rapport au temps du tenseur des déformations.

Toutefois, il existe des matériaux pour lesquels la relation constitutive ne peut pas s'écrire suivant (5.1) ou (5.2), tel est le cas des matériaux élastoviscoplastiques. Pour ces matériaux, le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}$  dépend à la fois du tenseur des contraintes  $\sigma$  et du tenseur des vitesses de contrainte  $\dot{\sigma}$  suivant :

$$\dot{\epsilon}(r, t) = \frac{\partial U}{\partial \dot{\sigma}}(r, \dot{\sigma}(r, t)) + \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}(r, \sigma(r, t)) \quad (5.3)$$

où  $U$  est le potentiel élastique et  $\Omega$  le potentiel viscoplastique.

Les lois constitutives des matériaux élastoviscoplastiques ont donc la particularité de s'écrire suivant deux potentiels au lieu d'un, comme pour les matériaux purement élastiques ou purement viscoplastiques.

Dans la suite, on considérera alors que le tenseur des vitesses de déformation total  $\dot{\epsilon}$  du comportement élastoviscoplastique est la somme de deux contributions : le tenseur des vitesses de déformation élastique  $\dot{\epsilon}^e$  et le tenseur des vitesses de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$ . De plus, la contribution élastique est donnée par :

$$\dot{\epsilon}^e(r, t) = \frac{\partial U}{\partial \dot{\sigma}}(r, \dot{\sigma}(r, t)) \quad \text{avec} \quad U(r, \dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}(r, t) : s(r) : \dot{\sigma}(r, t) \quad (5.4)$$

où  $s(r)$  est le tenseur local des souplesses élastiques. En intégrant (5.4) par rapport au temps, on retrouve la loi de Hooke en élasticité linéaire :

$$\epsilon^e(r, t) = s(r) : \sigma(r, t) \quad (5.5)$$

Dans cette étude, nous n'incluerons pas les effets élastiques non linéaires. Le tenseurs  $s(r)$  est donc indépendant du temps.

Par conséquent, selon (5.3), (5.4) et (5.5) les lois constitutives à partir desquelles se basera la nouvelle démarche de formulation intégrale du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes sont de la forme :

$$\dot{\epsilon}(r, t) = s : \dot{\sigma}(r, t) + g(r, \sigma(r, t)) \quad (5.6)$$

où  $g(\sigma(r, t)) = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}(r, \sigma(r, t))$ .

Si l'on isole maintenant la déformation viscoplastique de la loi de comportement (5.6), le tenseur des vitesses de déformation viscoplastique ne dépend que du tenseur des contraintes locales selon :

$$\dot{\epsilon}^{vp}(r, t) = g(r, \sigma(r, t)) \quad (5.7)$$

Notons que dans ce chapitre, afin de se concentrer essentiellement sur la méthode de résolution de la nouvelle démarche, nous nous limiterons aux matériaux dont le tenseur des vitesses de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  ne dépend que du tenseur des contraintes  $\sigma$ . En effet, dans le cas général, la fonction  $g$  peut aussi dépendre des variables thermodynamiques non observables  $\alpha$  (voir chapitre 2) comme les déformations viscoplastiques  $\epsilon^{vp}$ , la température  $T$ , ...

A partir de la loi viscoplastique (5.7), on peut introduire de deux manières différentes les tenseurs viscoplastiques qui caractérisent le comportement viscoplastique du matériau :

- une loi dite "sécante" qui suppose que la fonction  $g(r, \sigma)$  peut s'écrire sous la forme suivante [58] [59] :

$$g(r, \sigma) = m_s(r, \sigma) : \sigma \quad (5.8)$$

où  $m_s$  est le tenseur des souplesses viscoplastiques sécantes qui dépend du champ de contraintes  $\sigma$ . Cette écriture est valable notamment dans le cas où la fonction  $g(r, \sigma)$  a la forme d'une loi puissance suivant  $\sigma$  [58] [59]. Dans le cas particulier de la viscoélasticité linéaire,  $m_s$  est constant dans le temps et ne dépend pas de  $\sigma$ . On retrouve alors la loi de comportement viscoélastique linéaire de type Maxwell traitée dans le chapitre 4.

- une loi dite "tangente" qui s'obtient par la dérivation dans le temps de la relation (5.7) :

$$\ddot{\epsilon}^{vp} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma \partial \sigma} : \dot{\sigma} = m_t : \dot{\sigma} \quad (5.9)$$

où  $m_t(\sigma(t))$  désigne le tenseur des souplesses viscoplastiques tangentes :

$$m_t = \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma \partial \sigma} \quad (5.10)$$

Cette loi tangente se distingue de la forme sécante en ce sens qu'elle s'applique à toute forme de  $g(r, \sigma)$ . Cette loi est d'inspiration incrémentale comme en élastoplasticité où Hill [56] a proposé une approche incrémentale de type  $\dot{\sigma} = l : \dot{\epsilon}$  où  $l$  est le tenseur des modules tangents élastoplastiques et comme en viscoplasticité où Hutchinson [58] a proposé une loi tangente de type  $\dot{\sigma} = b_t : \ddot{\epsilon}$  où  $b_t$  est le tenseur viscoplastique tangent.

La différence fondamentale entre les deux lois sécante et tangente est que la première est une équation implicite en  $\sigma$ , tandis que dans la deuxième,  $m_t$  dépend directement de  $\sigma$  mais pas des grandeurs en vitesses et représente donc une donnée explicite dans la résolution du problème hétérogène.

Dans la section suivante, nous présenterons la nouvelle démarche de formulation intégrale appliquée aux lois de comportement élastoviscoplastiques, en distinguant :

- la formulation construite à partir de la relation sécante (5.8) entre le tenseur  $\dot{\epsilon}^{vp}$  et le champs  $\sigma$  :

$$\dot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \dot{\sigma}(r, t) + m_s(r, \sigma) : \sigma(r, t) \quad (5.11)$$

- puis la formulation basée sur la forme tangente de la relation (5.9) entre les tenseurs  $\ddot{\epsilon}^{vp}$  et  $\dot{\sigma}$  :

$$\ddot{\epsilon}^{vp}(r, t) = s : \ddot{\sigma}(r, t) + m_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t) \quad (5.12)$$

Les deux formulations distinctes menées à partir de (5.11) et (5.12) sont respectivement appelées "approche sécante" et "approche tangente".

## 5.3 Approche sécante

### 5.3.1 Introduction

L'objectif de cette section est d'établir une nouvelle formulation intégrale, à la lumière de l'étude menée précédemment en viscoélasticité linéaire, à partir de la description du comportement local élastoviscoplastique du problème hétérogène.

Dans la section précédente, on définit les lois constitutives du comportement élastoviscoplastique suivant leur forme sécante (5.11) ou tangente (5.12). Ainsi, nous nous intéresserons tout d'abord à appliquer la procédure de formulation intégrale à partir de la loi de comportement locale sécante (5.11) :

$$\dot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \dot{\sigma}(r, t) + m_s(r, \sigma) : \sigma(r, t)$$

De la même manière que le développement effectué lors de la formulation intégrale du chapitre 4, on présente l'approche sécante par l'analyse du problème hétérogène élastoviscoplastique permettant de définir le système d'équations de champs à résoudre dans l'étude, puis par l'équation intégrale du problème reliant les grandeurs locales à celles du milieu homogène de référence.

### 5.3.2 Position du problème

A partir de la loi de comportement sécante (5.11), les équations de champs classiques du problème hétérogène élastoviscoplastique peuvent s'écrire :

#### *problème 1'*

$$\dot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \dot{\sigma}(r, t) + m_s(r, \sigma) : \sigma(r, t) \quad \begin{array}{l} \text{Loi de comportement élastoviscoplastique} \\ \text{sécante} \end{array} \quad (5.13)$$

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \text{ inconnu} \end{array} \quad (5.14)$$

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equation d'équilibre sur } \sigma \text{ connu} \end{array} \quad (5.15)$$

$$\dot{\epsilon} = \nabla^s . v \quad \begin{array}{l} \text{Condition de compatibilité cinématique} \end{array} \quad (5.16)$$

$$v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \quad \begin{array}{l} \text{Conditions aux limites} \end{array} \quad (5.17)$$



Dans le problème 1', défini par les équations de champs allant de (5.13) à (5.17),  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  désignent les inconnus, tandis que  $\sigma$  est une donnée. Dans ce problème, considérons les sous-systèmes  $(S_1')$  et  $(S_2')$  respectivement associés aux conditions d'équilibre (5.14) sur le champ  $\dot{\sigma}$  et (5.15) sur le champ  $\sigma$  :

$$(S_1') \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\dot{\epsilon}(r, t) - m_s(r, \sigma) : \sigma(r, t)] \\ \text{div } \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\epsilon} = \nabla^s . v \\ v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{cases}$$

$$(S_2') \quad \begin{cases} \sigma(r, t) = b_s(r, \sigma) : [\dot{\epsilon}(r, t) - s(r) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \sigma = 0 \\ \dot{\epsilon} = \nabla^s . v \\ v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{cases}$$

En introduisant le milieu de référence dont les tenseurs  $C$ ,  $S$ ,  $B_s$  et  $M_s$  vérifient les décompositions (4.6) et (4.7) (voir chapitre 4) :

$$\begin{cases} s(r) = S + \delta s(r) \\ b_s(r, \sigma) = B_s + \delta b_s(r, \sigma) \\ c(r) = C + \delta c(r) \\ m_s(r, \sigma) = M_s + \delta m_s(r, \sigma) \end{cases}$$

les équations de comportement des systèmes  $(S_1')$  et  $(S_2')$  s'écrivent alors :

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\epsilon} + \delta c : (\dot{\epsilon} - m_s : \sigma) - C : \delta m_s : \sigma - C : M_s : \sigma \quad (5.18)$$

$$\sigma = B_s : \dot{\epsilon} + \delta b_s : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B_s : \delta s : \dot{\sigma} - B_s : S : \dot{\sigma} \quad (5.19)$$

Puis en appliquant les conditions d'équilibre (5.14) et (5.15) respectivement aux lois (5.18) et (5.19), on obtient les équations de Navier du problème 1' suivantes :

$$\text{div}(C : \dot{\epsilon}) + \text{div}[\delta c : (\dot{\epsilon} - m_s : \sigma) - C : \delta m_s : \sigma] - \text{div}(C : M_s : \sigma) = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{div}(B_s : \dot{\epsilon}) + \text{div}[\delta b_s : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B_s : \delta s : \dot{\sigma}] - \text{div}(B_s : S : \dot{\sigma}) = 0 \quad (5.21)$$

Afin d'exprimer les termes de nature "volumique"  $div(C : M_s : \sigma)$  et  $div(B_s : S : \dot{\sigma})$  sous la forme de termes de fluctuations de natures élastique et visqueuse, l'idée est alors de déterminer une troisième équation différentielle de Navier indépendante contenant des termes de même nature "volumique" également liés au champs  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$ .

En suivant la nouvelle démarche déjà présentée en viscoélasticité linéaire, on considère un deuxième problème dont les équations de champs sont déduites par la dérivée par rapport au temps des équations de champs du problème 1' :

**problème 2'**

$$\ddot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \ddot{\sigma}(r, t) + m_s(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t) + \dot{m}_s(r, \sigma) : \sigma(r, t) \quad (5.22)$$

$$div \ddot{\sigma} = 0 \quad (5.23)$$

$$div \dot{\sigma} = 0 \quad (5.24)$$

$$div \sigma = 0 \quad (5.25)$$

$$\ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \quad (5.26)$$

$$\dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \quad (5.27)$$

Dans le problème 2', les champs inconnus sont  $\ddot{\sigma}$  et  $\ddot{\epsilon}$  et les champs donnés sont  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$ . On s'intéresse à présent au sous-système ( $S_3'$ ) provenant du problème 2' et associé à la condition d'équilibre (5.23) sur le champ inconnu  $\ddot{\sigma}$  :

$$(S_3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - m_s(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t) - \dot{m}_s(r, \sigma) : \sigma(r, t)] \\ div \ddot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

Le tenseur  $M_s$ , vérifiant la décomposition (4.6), sa dérivée par rapport au temps  $\dot{M}_s$  se décompose alors de la même manière :

$$\dot{m}_s(r) = \dot{M}_s + \delta \dot{m}_s(r) \quad (5.28)$$

En utilisant les relations (4.6), (4.7) et (5.28), la loi de comportement local du système ( $S_2'$ ) devient alors :

$$\ddot{\sigma} = C : \ddot{\epsilon} + \delta c : (\ddot{\epsilon} - m_s : \dot{\sigma} - \dot{m}_s : \sigma) - C : \delta m_s : \dot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_s : \sigma - C : M_s : \dot{\sigma} - C : \dot{M}_s : \sigma \quad (5.29)$$

On applique ensuite la condition d'équilibre (5.23) sur la loi (5.29) et on obtient l'équation de Navier du problème 2' suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_s : \dot{\sigma} - \dot{m}_s : \sigma) - C : \delta m_s : \dot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_s : \sigma] \\ - \operatorname{div}(C : M_s : \dot{\sigma}) - \operatorname{div}(C : \dot{M}_s : \sigma) = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Le schéma de la nouvelle démarche consiste donc à établir un système complet d'équations de champs ( $S_4'$ ) regroupant les équations des systèmes ( $S_1'$ ) et ( $S_2'$ ) du problème 1' et ( $S_3'$ ) du problème 2' :

$$(S_4') \left\{ \begin{array}{l} \sigma = b_s : [\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}] \\ \dot{\sigma} = c : [\dot{\epsilon} - m_s : \sigma] \\ \ddot{\sigma} = c : [\ddot{\epsilon} - m_s : \dot{\sigma} - \dot{m}_s : \sigma] \\ \operatorname{div} \ddot{\sigma} = 0 \\ \operatorname{div} \dot{\sigma} = 0 \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \\ \dot{\epsilon} = \nabla^s . v \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \\ v^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

où les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\ddot{\sigma}$  constituent les inconnus, tandis que le champ  $\sigma$  est une donnée du problème. Le champ  $\dot{\sigma}$ , étant à la fois solution du problème 1' et donnée du problème 2', dépend entièrement du champ  $\sigma$  et le champ  $\dot{\epsilon}$  est déterminé par  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$ .

Par conséquent, les conditions d'équilibre (5.14) et (5.15) et (5.23) fournissent les équations différentielles de Navier (5.20), (5.21) et (5.30) du nouveau problème donné par le système ( $S_4'$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(C : \dot{\epsilon}) + \text{div} \left[ \underbrace{\delta c : (\dot{\epsilon} - m_s : \sigma) - C : \delta m_s : \sigma}_{Q} \right] - \text{div}(C : M_s : \sigma) = 0 \\ \text{div}(B_s : \dot{\epsilon}) + \text{div} \left[ \underbrace{\delta b_s : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B_s : \delta s : \dot{\sigma}}_{Q'} \right] - \text{div}(B_s : S : \dot{\sigma}) = 0 \\ \text{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \text{div} \left[ \underbrace{\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_s : \dot{\sigma} - \dot{m}_s : \sigma) - C : \delta m_s : \dot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_s : \sigma}_{Q''} \right] \\ - \text{div}(C : M_s : \dot{\sigma}) - C : \dot{M}_s : \sigma = 0 \end{array} \right.$$

On observe que l'extension à l'élastoviscoplasticité nécessite la considération d'une équation de Navier supplémentaire par rapport au cas viscoélastique linéaire. Autrement dit, la non linéarité du comportement implique une triple formulation intégrale sur chaque équation différentielle de Navier du problème hétérogène défini par le système  $(S_4')$ . Les termes "volumiques" de même nature dépendent alors des champs  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$ . La triple formulation intégrale des équations de Navier (5.20), (5.21) et (5.30) permet ainsi de déterminer une seule équation intégrale faisant apparaître les forces volumiques fictives sous forme de fluctuations élastiques et visqueuses adaptées, rappelons-le, aux méthodes de transition d'échelle des milieux hétérogènes.

### 5.3.3 Equation intégrale

Comme en viscoélasticité linéaire, l'application de la nouvelle démarche de formulation intégrale à l'élastoviscoplasticité est présentée dans le cas d'un milieu homogène de référence isotrope, où  $C$ ,  $S$ ,  $B_s$  et  $M_s$  se décomposent en parties déviatoriques et sphériques suivant (4.17) (voir section 4.2.2). Suivant cette décomposition, le tenseur  $\dot{M}_s$ , dérivée par rapport au temps du tenseur  $M_s$ , est également isotrope et s'écrit :

$$\dot{M}_s = -\frac{\dot{\eta}_s}{2\eta_s^2} J - \frac{\dot{\kappa}_s^v}{3\kappa_s^{v2}} L \quad (5.31)$$

En suivant le processus de résolution de la nouvelle formulation intégrale, déjà présentée à la section 4.2.2 du chapitre 4, sur les équations des termes sphériques en  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$ , il vient :

$$\mu v_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q_{kl,kl} \right] + Q_{ik,k} - \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa}{\kappa_s^v} - \frac{\mu}{\eta_s} \right) \sigma_{s,i} = 0 \quad (5.32)$$

$$\eta_s v_{i,kk} + \frac{3\kappa_s^v + \eta_s}{3\kappa_s^v + 4\eta_s} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q'_{kl,kl} \right] + Q'_{ik,k} - \frac{3\eta_s}{3\kappa_s^v + 4\eta_s} \left( \frac{\kappa_s^v}{\kappa} - \frac{\eta_s}{\mu} \right) \dot{\sigma}_{s,i} = 0 \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q''_{kl,kl} \right] + Q''_{ik,k} - \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa}{\kappa_s^v} - \frac{\mu}{\eta_s} \right) \dot{\sigma}_{s,i} \\ + \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa \dot{\kappa}_s^v}{\kappa_s^{v2}} - \frac{\mu \dot{\eta}_s}{\eta_s^2} \right) \sigma_{s,i} = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Les trois équations précédentes étant indépendantes, l'idée consiste maintenant à substituer les expressions de  $\sigma_{s,i}$  et  $\dot{\sigma}_{s,i}$ , obtenues par les deux premières équations (5.32) et (5.33), dans la troisième (5.34) :

$$\begin{aligned} \mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q''_{kl,kl} \right] + Q''_{ik,k} \\ + \frac{\mu^2 \kappa (3\kappa_s^v + 4\eta_s)}{\eta_s^2 \kappa_s^v (3\kappa + 4\mu)} \left[ \eta_s v_{i,kk} + \frac{3\kappa_s^v + \eta_s}{3\kappa_s^v + 4\eta_s} \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q'_{kl,kl} \right) + Q'_{ik,k} \right] \\ - \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_s^v} - \frac{\mu}{\eta_s} \right| \right] \left[ \mu v_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * Q_{kl,kl} \right) + Q_{ik,k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

L'équation (5.35) ne dépend que des forces volumiques fictives  $Q$ ,  $Q'$  et  $Q''$  qui représentent des termes de fluctuations élastiques et visqueuses  $\delta c$ ,  $\delta s$ ,  $\delta b_s$ ,  $\delta m_s$  et  $\delta \dot{m}_s$  ainsi que des laplaciens de  $v$  et  $\dot{v}$ .

En procédant de la même manière que celle permettant de passer de (4.44) à (4.54) (voir chapitre 4), c'est-à-dire en calculant l'inverse du divergent de (5.35) et en indentifiant les tenseurs de Green en élasticité et en viscoplasticité, il vient finalement :

$$\ddot{\epsilon} = \ddot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * Q'' - \frac{\mu \kappa (3\kappa_s^v + 4\eta_s)}{\eta_s \kappa_s^v (3\kappa + 4\mu)} \left( \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 + \Gamma^{B_s} * Q' \right) + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_s^v} - \frac{\mu}{\eta_s} \right| \right] \left( \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 + \Gamma^C * Q \right) \quad (5.36)$$

En remplaçant les termes de fluctuations  $Q$ ,  $Q'$  et  $Q''$  par leurs expressions définies à partir des équations de Navier (5.20), (5.21) et (5.30), la nouvelle équation intégrale devient :

$$\begin{aligned}
\ddot{\epsilon} &= \ddot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * [\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_s : \dot{\sigma} - \dot{m}_s : \sigma) - C : \delta m_s : \dot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_s : \sigma] \\
&\quad - \frac{\mu \kappa (3\kappa_s^v + 4\eta_s)}{\eta_s \kappa_s^v (3\kappa + 4\mu)} [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 + \Gamma^{B_s} * (\delta b_s : (\dot{\epsilon} - s : \dot{\sigma}) - B_s : \delta s : \dot{\sigma})] \\
&\quad + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_s^v} - \frac{\mu}{\eta_s} \right| \right] [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^0 + \Gamma^C * (\delta c : (\dot{\epsilon} - m_s : \sigma) - C : \delta m_s : \sigma)] \quad (5.37)
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Conclusion

La nouvelle équation intégrale (5.37) issue de la formulation intégrale par l'approche sécante du problème hétérogène élastoviscoplastique exprime les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\dot{\epsilon}$  en fonction du champ des vitesses de contraintes  $\dot{\sigma}$ . Le champ  $\dot{\sigma}$  dépend de l'état de contrainte  $\sigma$  et du tenseur des vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  par la loi de comportement locale sécante (5.11) du problème 1'. Comme l'équation intégrale (4.56) obtenue dans le cas de la viscoélasticité linéaire, (5.37) s'exprime en fonction des termes de convolution dans l'espace où apparaissent, d'une part, les opérateurs de Green classiques associés aux tenseurs élastiques  $C$  et viscoplastiques  $B_s$ , et d'autre part, des forces volumiques fictives s'écrivant sous la forme de fluctuations élastiques et viscoplastiques adaptées aux méthodes de transition d'échelle des milieux hétérogènes.

## 5.4 Approche tangente

### 5.4.1 Introduction

Dans cette section, une nouvelle formulation intégrale est établie, en utilisant toujours la démarche de transition d'échelle proposée, basée cette fois-ci sur la loi de comportement tangente locale (5.12) :

$$\ddot{\epsilon}^{vp}(r, t) = s : \ddot{\sigma}(r, t) + m_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t)$$

Cette nouvelle formulation intégrale est appelée "approche tangente" et se distingue de l'approche sécante présentée à la section précédente par la résolution du système d'équations de champs formé à partir de la loi constitutive tangente (5.12) du comportement élastoviscoplastique.

Cette approche tangente est présentée tout d'abord par la position du problème hétérogène considéré, à savoir la définition du système d'équations de champs à résoudre, puis par l'équation intégrale définissant la relation de localisation du problème.

Mis à part l'utilisation du module tangent  $m_t$  au lieu du module sécant  $m_s$ , et en dehors de l'ordre de dérivée dans le temps plus élevé d'un degré pour les équations de champs formant le système à résoudre dans l'approche tangente, cette dernière s'exécute de manière quasi identique à l'approche sécante.

### 5.4.2 Position du problème

Les équations de champs classiques du problème hétérogène élastoviscoplastique basé sur la loi de comportement (5.12) s'écrivent :

$$\ddot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \ddot{\sigma}(r, t) + m_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t) \quad \text{Loi de comportement tangente} \\ \text{élastoviscoplastique} \quad (5.38)$$

$$\text{div } \ddot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \ddot{\sigma} \text{ inconnu} \quad (5.39)$$

$$\text{div } \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Equation d'équilibre sur } \dot{\sigma} \text{ connu} \quad (5.40)$$

$$\ddot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \dot{v} \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (5.41)$$

$$\dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (5.42)$$

Les inconnus du problème 1" des équations allant de (5.38) à (5.42) sont les champs  $\ddot{\sigma}$  et  $\ddot{\epsilon}$  et la donnée est le tenseur  $\dot{\sigma}$ . Les sous-systèmes ( $S_1$  ") et ( $S_2$  ") respectivement associés aux conditions d'équilibre (5.39) sur le champs  $\ddot{\sigma}$  et (5.40) sur le champs  $\dot{\sigma}$  sont :

$$(S_1 \text{ ''}) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - m_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \ddot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \dot{v} \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

$$(S_2 \text{ ''}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}(r, t) = b_t(r, \sigma) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - s(r) : \ddot{\sigma}(r, t)] \\ \text{div } \dot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \dot{v} \\ \dot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

En introduisant le milieu de référence dont les tenseurs  $C$ ,  $S$ ,  $B_t$  et  $M_t$  vérifient les décompositions (4.6) et (4.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} s(r) = S + \delta s(r) \\ b_t(r) = B_t + \delta b_t(r) \\ c(r) = C + \delta c(r) \\ m_t(r) = M_t + \delta m_t(r) \end{array} \right.$$

les équations de comportement des systèmes ( $S_1$  ") et ( $S_2$  ") deviennent :

$$\ddot{\sigma} = C : \ddot{\epsilon} + \delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \dot{\sigma} - C : M_t : \dot{\sigma} \quad (5.43)$$

$$\dot{\sigma} = B_t : \ddot{\epsilon} + \delta b_t : (\ddot{\epsilon} - s : \ddot{\sigma}) - B_t : \delta s : \ddot{\sigma} - B_t : S : \ddot{\sigma} \quad (5.44)$$



Les équations de Navier du problème 1" s'obtiennent ensuite par l'application des conditions d'équilibre (5.39) et (5.40) respectivement sur les lois (5.43) et (5.44) :

$$\operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \dot{\sigma}] - \operatorname{div}(C : M_t : \dot{\sigma}) = 0 \quad (5.45)$$

$$\operatorname{div}(B_t : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta b_t : (\ddot{\epsilon} - s : \ddot{\sigma}) - B_t : \delta s : \ddot{\sigma}] - \operatorname{div}(B_t : S : \ddot{\sigma}) = 0 \quad (5.46)$$

La procédure est alors de déterminer une troisième équation différentielle de Navier indépendante contenant des termes de même nature "volumique" et liés au champs  $\ddot{\sigma}$  et  $\dot{\sigma}$ , comme les termes  $\operatorname{div}(C : M_t : \dot{\sigma})$  et  $\operatorname{div}(B_t : S : \ddot{\sigma})$  des équations (5.45) et (5.46). Ainsi, le problème 2" dont les équations de champs sont déduites par la dérivée par rapport au temps des équations de champs du problème 1" est défini :

$$\ddot{\epsilon}(r, t) = s(r) : \ddot{\sigma}(r, t) + m_t(r, \sigma) : \ddot{\sigma}(r, t) + \dot{m}_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t) \quad (5.47)$$

$$\operatorname{div} \ddot{\sigma} = 0 \quad (5.48)$$

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} = 0 \quad (5.49)$$

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} = 0 \quad (5.50)$$

$$\ddot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \ddot{v} \quad (5.51)$$

$$\ddot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \quad (5.52)$$

Les champs inconnus du problème 2" sont  $\ddot{\sigma}$  et  $\ddot{\epsilon}$  et les champs donnés sont  $\dot{\sigma}$  et  $\ddot{\sigma}$ . On pose ensuite le sous-système ( $S_3'$ ) dérivant du problème 2" et associé à la condition d'équilibre (5.48) sur le champs inconnu  $\ddot{\sigma}$  :

$$(S_3') \quad \begin{cases} \ddot{\sigma}(r, t) = c(r) : [\ddot{\epsilon}(r, t) - m_t(r, \sigma) : \ddot{\sigma}(r, t) - \dot{m}_t(r, \sigma) : \dot{\sigma}(r, t)] \\ \operatorname{div} \ddot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \ddot{v} \\ \ddot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \end{cases}$$

Comme le tenseur  $M_t$  vérifie la décomposition (4.6), sa dérivée par rapport au temps  $\dot{M}_t$  peut s'écrire suivant la même décomposition :

$$\dot{m}_t(r) = \dot{M}_t + \delta \dot{m}_t(r) \quad (5.53)$$

En injectant les relations (4.6), (4.7) et (5.53) dans la loi de comportement local de ( $S_2''$ ) on obtient :

$$\ddot{\sigma} = C : \ddot{\epsilon} + \delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \ddot{\sigma} - \dot{m}_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \ddot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_t : \dot{\sigma} - C : M_t : \ddot{\sigma} - C : \dot{M}_t : \dot{\sigma} \quad (5.54)$$

La loi (5.54) vérifiant la condition d'équilibre (5.48), permet d'écrire l'équation de Navier du problème 2'' :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \ddot{\sigma} - \dot{m}_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \ddot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_t : \dot{\sigma}] \\ - \operatorname{div}(C : M_t : \ddot{\sigma}) - \operatorname{div}(C : \dot{M}_t : \dot{\sigma}) = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Finalement, on établit le système complet d'équations de champs ( $S_4''$ ) à résoudre, regroupant les équations des systèmes ( $S_1''$ ), ( $S_2''$ ) et ( $S_3''$ ) :

$$(S_4'') \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = b_t : [\ddot{\epsilon} - s : \ddot{\sigma}] \\ \ddot{\sigma} = c : [\ddot{\epsilon} - m_t : \dot{\sigma}] \\ \ddot{\sigma} = c : [\ddot{\epsilon} - m_t : \ddot{\sigma} - \dot{m}_t : \dot{\sigma}] \\ \operatorname{div} \ddot{\sigma} = 0 \\ \operatorname{div} \ddot{\sigma} = 0 \\ \operatorname{div} \dot{\sigma} = 0 \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \ddot{v} \\ \ddot{\epsilon} = \nabla^s . \dot{v} \\ \ddot{v}^d = \ddot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \\ \dot{v}^d = \dot{\epsilon}^0 . x \quad \text{sur } \partial V \end{array} \right.$$

où les inconnus sont les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\ddot{\sigma}$  tandis que  $\dot{\sigma}$  est donné. Comme le champs  $\ddot{\sigma}$  est à la fois inconnue du problème 1'' et donnée du problème 2'', il dépend entièrement du champs  $\dot{\sigma}$  et constitue alors une donnée du système ( $S_4''$ ).

Les équations différentielles de Navier (5.45), (5.46) et (5.55) associées aux conditions d'équilibre (5.48) et (5.49) et (5.50) constituent les équations de Navier du système ( $S_4''$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\underbrace{\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \dot{\sigma}}_P] - \operatorname{div}(C : M_t : \dot{\sigma}) = 0 \\ \operatorname{div}(B_t : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\underbrace{\delta b_t : (\ddot{\epsilon} - s : \ddot{\sigma}) - B_t : \delta s : \ddot{\sigma}}_{P'}] - \operatorname{div}(B_t : S : \ddot{\sigma}) = 0 \\ \operatorname{div}(C : \ddot{\epsilon}) + \operatorname{div}[\underbrace{\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \ddot{\sigma} - \dot{m}_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \ddot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_t : \dot{\sigma}}_{P''}] \\ - \operatorname{div}(C : M_t : \ddot{\sigma}) - C : \dot{M}_t : \dot{\sigma} = 0 \end{array} \right.$$

Comme on a pu déjà le constater dans l'approche sécante, l'extension à l'élastoviscoplasticité implique l'établissement d'une équation de Navier supplémentaire par rapport au cas viscoélastique linéaire. Par la suite, une triple formulation intégrale est menée sur les équations de Navier du problème hétérogène défini par le système  $(S_4'')$  et permet d'aboutir à une seule équation intégrale ne faisant apparaître que des termes de fluctuations élastiques et viscoplastiques.

### 5.4.3 Equation intégrale

En se plaçant dans le cas d'un milieu homogène de référence isotrope, où  $C$ ,  $S$ ,  $B_t$  et  $M_t$  se décomposent en parties déviatoriques et sphériques suivant (4.17), le tenseur  $\dot{M}_t$ , dérivée par rapport au temps du tenseur  $M_t$  s'écrit :

$$\dot{M}_t = -\frac{\dot{\eta}_t}{2\eta_t^2} J - \frac{\dot{\kappa}_t^v}{3\kappa_t^{v2}} L \quad (5.56)$$

L'application de la procédure présentée à la section 4.2.2 du chapitre 4, sur les équations des termes sphériques en  $\dot{\epsilon}_s$  et  $\ddot{\epsilon}_s$  permet d'obtenir trois équations à partir de (5.45), (5.46) et (5.55) :

$$\mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P_{kl,kl} \right] + P_{ik,k} - \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa}{\kappa_t^v} - \frac{\mu}{\eta_t} \right) \dot{\sigma}_{s,i} = 0 \quad (5.57)$$

$$\eta_t \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa_t^v + \eta_t}{3\kappa_t^v + 4\eta_t} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P'_{kl,kl} \right] + P'_{ik,k} - \frac{3\eta_t}{3\kappa_t^v + 4\eta_t} \left( \frac{\kappa_t^v}{\kappa} - \frac{\eta_t}{\mu} \right) \ddot{\sigma}_{s,i} = 0 \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P''_{kl,kl} \right] + P''_{ik,k} - \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa}{\kappa_t^v} - \frac{\mu}{\eta_t} \right) \ddot{\sigma}_{s,i} \\ + \frac{3\mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{\kappa \dot{\kappa}_t^v}{\kappa_t^{v2}} - \frac{\mu \dot{\eta}_t}{\eta_t^2} \right) \dot{\sigma}_{s,i} = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

En déterminant les expressions de  $\dot{\sigma}_{s,i}$  et  $\ddot{\sigma}_{s,i}$  dans les équations (5.57) et (5.58), et en injectant ces mêmes expressions dans (5.59), on obtient une unique relation :

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P''_{kl,kl} \right] + P''_{ik,k} \\ + \frac{\mu^2 \kappa (3\kappa_t^v + 4\eta_t)}{\eta_t^2 \kappa_t^v (3\kappa + 4\mu)} \left[ \eta_t \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa_t^v + \eta_t}{3\kappa_t^v + 4\eta_t} \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P'_{kl,kl} \right) + P'_{ik,k} \right] \\ - \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_t^v} - \frac{\mu}{\eta_t} \right| \right] \left[ \mu \dot{v}_{i,kk} + \frac{3\kappa + \mu}{3\kappa + 4\mu} \left( \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|r|} \right)_{,i} * P_{kl,kl} \right) + P_{ik,k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

où l'équation (5.60) ne dépend que des termes  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  formés de fluctuations élastiques et viscoplastiques  $\delta c$ ,  $\delta s$ ,  $\delta b$ ,  $\delta m$  et  $\delta \dot{m}$  et des laplaciens de  $\dot{v}$  et  $\ddot{v}$ .

En appliquant le même cheminement que celui permettant de passer de (4.45) à (4.55) en viscoélasticité linéaire (calcul de l'inverse du divergent de (5.60) et indentation des tenseurs de Green en élasticité et en viscoplasticité) on détermine l'équation intégrale :

$$\ddot{\epsilon} = \ddot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * P'' - \frac{\mu\kappa(3\kappa_t^v + 4\eta_t)}{\eta_t\kappa_t^v(3\kappa + 4\mu)} \left( \ddot{\epsilon} - \ddot{\epsilon}^0 + \Gamma^{B_t} * P' \right) + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_t^v} - \frac{\mu}{\eta_t} \right| \right] (\ddot{\epsilon} - \ddot{\epsilon}^0 + \Gamma^C * P) \quad (5.61)$$

En remplaçant les termes de fluctuations  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  par leurs expressions définies dans les équations de Navier (5.45), (5.46) et (5.55), la nouvelle relation de localisation devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} = & \ddot{\epsilon}^0 - \Gamma^C * [\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \ddot{\sigma} - \dot{m}_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \ddot{\sigma} - C : \delta \dot{m}_t : \dot{\sigma}] \\ & - \frac{\mu\kappa(3\kappa_t^v + 4\eta_t)}{\eta_t\kappa_t^v(3\kappa + 4\mu)} [\ddot{\epsilon} - \ddot{\epsilon}^0 + \Gamma^{B_t} * (\delta b_t : (\ddot{\epsilon} - s : \ddot{\sigma}) - B_t : \delta s : \ddot{\sigma})] \\ & + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left| \frac{\kappa}{\kappa_t^v} - \frac{\mu}{\eta_t} \right| \right] [\ddot{\epsilon} - \ddot{\epsilon}^0 + \Gamma^C * (\delta c : (\ddot{\epsilon} - m_t : \dot{\sigma}) - C : \delta m_t : \dot{\sigma})] \end{aligned} \quad (5.62)$$

#### 5.4.4 Conclusion

La nouvelle équation intégrale (5.62) du problème hétérogène élastoviscoplastique exprime les champs  $\ddot{\epsilon}$  et  $\dot{\epsilon}$  en fonction du champ  $\ddot{\sigma}$ . Ce champ dépend lui-même du champ de taux de contrainte donné  $\dot{\sigma}$  et de  $\ddot{\epsilon}$  par la loi de comportement locale (5.38) du problème 1".

Comme l'équation intégrale (4.56) obtenue dans le cas de la viscoélasticité linéaire, (5.62) présente la commodité de s'exprimer en fonction de termes de convolution dans l'espace comportant, d'un côté, les opérateurs de Green classiques associés aux tenseurs élastiques  $C$  et viscoplastiques  $B_t$ , et de l'autre, des fluctuations élastiques et visqueuses. Les termes de nature "volumique", inadéquats aux transitions d'échelle classiques à variables internes, ont été substitués durant la formulation intégrale et n'apparaissent plus dans l'équation finale.

En plus de l'avantage d'atteindre la solution exacte [70] dans le cas du problème de l'inclusion viscoélastique linéaire, l'approche tangente présentée dans ce travail, au même titre que l'approche sécante, permet d'obtenir une solution du problème élastoviscoplastique sans avoir recours à la linéarisation du comportement mécanique (formulation d'un problème viscoélastique linéaire) pas à pas le long du trajet de chargement indispensable pour l'application du

principe de correspondance des approches de type héréditaires. La conséquence en est que la non linéarité du comportement accroît davantage l'écart entre la simplicité et la rapidité d'exécution de la résolution numérique du modèle proposé, et la lourdeur des calculs numériques (inversion pas à pas de la transformée de Laplace-Carson) du modèle de référence de Rougier [70] en élastoviscoplasticité.

Les modèles issus des applications de l'approximation autocohérente et de l'estimation de Mori-Tanaka sur les nouvelles équations intégrales (5.37) et (5.62) sont analysés et comparés avec les modèles de transition d'échelle en élastoviscoplasticité utilisant les méthodes variationnelles présentées par Lahellec et Suquet [42] ainsi que la solution issue de la méthode des éléments finis (FEM).

## 5.5 Analyse et comparaison du modèle proposé avec d'autres modèles

### 5.5.1 Introduction

A partir des équations intégrales (5.37) et (5.62) déduites respectivement des développements des deux nouvelles approches sécante et tangente du problème hétérogène élastoviscoplastique, l'étape d'homogénéisation est menée de deux manières différentes, suivant l'approximation autocohérente et l'estimation de Mori-Tanaka.

La résolution numérique des deux méthodes d'homogénéisation étudiées s'effectue selon les mêmes schémas de calcul que ceux présentés dans le cas de la viscoélasticité linéaire (voir chapitre 4). Cette résolution est exécutée par une discrétisation dans le temps, où les variables internes du problème hétérogène élastoviscoplastique à l'instant  $t_{n+1}$  sont calculées par leurs valeurs au pas précédent  $t_n$ .

En ce qui concerne l'homogénéisation autocohérente du comportement élastoviscoplastique, notons que la différence par rapport au cas de la viscoélasticité linéaire est l'apparition de variables internes supplémentaires  $\dot{B}_s$  (ou  $\dot{B}_t$ ) qui sont les dérivées par rapport au temps du tenseur des modules viscoplastiques sécant  $B_s$  (ou tangent  $B_t$ ) du milieu homogène de référence. Grâce à l'application du calcul de la moyenne spatiale, sur l'ensemble du volume du matériau hétérogène, aux relations de localisation (5.37) ou (5.62), on parvient à déterminer la relation reliant  $\dot{B}_s$  (ou  $\dot{B}_t$ ) et  $B_s$  (ou  $B_t$ ). Cette dernière relation nous permet, à chaque incrément du temps, de déterminer  $B_s$  (ou  $B_t$ ) puis  $\dot{B}_s$  (ou  $\dot{B}_t$ ) en résolvant le système d'équations implicites :

$$B_s(t_{n+1}) = B_s(t_n) + \dot{B}_s(t_n) \Delta t$$

ou  $B_t(t_{n+1}) = B_t(t_n) + \dot{B}_t(t_n) \Delta t$

L'homogénéisation de Mori-Tanaka dans le cas de l'élastoviscoplasticité, quant à elle, conserve le même nombre de variables internes, à déterminer pas à pas, que dans le cas viscoélastique linéaire, car le tenseur des modules viscoplastiques est assimilable à celui de la phase matrice qui est une donnée du problème :

$$B_s = b_s^M \quad \text{et} \quad \dot{B}_s = \dot{b}_s^M$$

$$\text{ou } B_t = b_t^M \quad \text{et} \quad \dot{B}_t = \dot{b}_t^M$$

Afin d'analyser les résultats obtenus par les deux méthodes d'homogénéisation étudiées dans ce travail et appliquées aux nouvelles équations intégrales (5.37) et (5.62) obtenues, leurs résultats numériques sont présentés et comparés avec ceux des modèles issus de la méthode variationnelle présentée par Lahellec et Suquet [42], ainsi que ceux tirés de la méthode numérique des éléments finis.

### 5.5.2 Présentation de la méthode variationnelle de Lahellec et Suquet

Lahellec et Suquet [42] proposent une méthode variationnelle de détermination du comportement macroscopique des matériaux hétérogènes composés de constituants élastoviscoplastiques. Comme les approches à variables internes, l'étude présentée est une procédure pas à pas dans le temps, où la déformation  $\epsilon$  et les variables thermodynamiques non observables  $\alpha$  (voir chapitre 2 section 2.3.1) dans le matériau hétérogène sont déterminées au temps  $t_{n+1}$  par leur valeurs à l'instant  $t_n$  et par les conditions de chargement à l'instant  $t_{n+1}$ .

Cette discrétisation implicite dans le temps permet de donner les équations d'évolution décrivant le comportement constitutif des phases à partir de deux potentiels, l'énergie libre  $\psi(\epsilon, \alpha)$  et le potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha})$  (voir chapitre 2 section ...); puis de réduire le problème à la minimisation d'un seul potentiel, appelé potentiel incrémental  $J(\epsilon, \alpha)$ .

Ce problème de minimisation est rigoureusement équivalent à un problème thermoélastique à déformations libres non uniformes même dans le domaine des phases constituant le matériau. L'approximation consiste alors à remplacer les déformations libres non uniformes par des déformations libres uniformes dans chaque phase, et à linéariser pas à pas dans le temps le problème hétérogène thermoélastique en définissant un matériau hétérogène linéaire de comparaison. Cette approximation est menée par une procédure proche de la méthode sécante modifiée de Suquet [84] et équivalente à la méthode variationnelle de Ponte Castañeda [61].

Le modèle de Lahellec et Suquet [42] s'applique aux matériaux élastoviscoplastiques auxquels on s'intéresse dans cette thèse, où les effets élastiques et viscoplastiques sont couplés. Les constituants formant ces matériaux hétérogènes sont considérés comme étant des milieux standards gé-

néralisés, c'est-à-dire que leurs relations constitutives décrivant leur comportement proviennent de deux potentiels thermodynamiques  $\psi$  et  $\varphi$  définis précédemment (voir section 2.3.1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}(\epsilon, \alpha) = \sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\epsilon, \alpha) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}) = 0 \end{cases} \quad (5.63)$$

Afin de simplifier le problème pour mieux comprendre leur démarche, Lahellec et Suquet considèrent le cas où les variables d'état non observables  $\alpha$  ne désignent uniquement que les déformations viscoplastiques  $\epsilon^{vp}$ . De plus ils limitent leur attention sur des énergie libres  $\psi$  s'écrivant comme :

$$\psi(\epsilon, \alpha) = \frac{1}{2}(\epsilon - \alpha) : c : (\epsilon - \alpha) \quad (5.64)$$

où  $c$  est le tenseur des modules élastiques du constituant. Leur limitation se poursuit en traitant le cas du comportement isotrope et en étudiant des potentiels de dissipation  $\varphi$  s'écrivant sous la forme de lois puissance :

$$\varphi(\dot{\alpha}) = \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0}{k+1} \left( \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{k+1} \quad (5.65)$$

où  $\sigma_0$  et  $\dot{\epsilon}_0$  sont des constantes caractérisant chaque constituant du milieu hétérogène [42],  $k$  est l'exposant de sensibilité à la vitesse (en anglais "rate-sensibility exponent"), et  $\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}$  est la vitesse de déformation viscoplastique équivalente selon le critère de Von Mises :

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{vp} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{vp} : \dot{\epsilon}^{vp} \right)^{1/2} \quad (5.66)$$

En définissant la viscosité sécante  $\eta_s$  du constituant comme :

$$\sigma_d = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^{vp}}(\dot{\epsilon}^{vp}) = 2 \eta_s (\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}) \dot{\epsilon}^{vp} \quad (5.67)$$

où  $\sigma_d$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\sigma$ , la loi constitutive élastoviscoplastique prise en compte dans le modèle de Lahellec et Suquet est la suivante (voir chapitre 2) :

$$\dot{\epsilon} = s : \dot{\sigma} + \frac{1}{2\eta_s} \sigma_d \quad (5.68)$$

où :

$$\frac{1}{2\eta_s} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{\sigma_0^n} \right) \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{k} \quad (5.69)$$

$\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de Von Mises :



$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma_d : \sigma_d \right)^{1/2} \quad (5.70)$$

En introduisant le tenseur des souplesses viscoplastiques sécantes  $m_s$  tel que :

$$m_s = \frac{1}{2\eta_s} : J \quad (5.71)$$

où  $J$  est l'opérateur de projection d'ordre 4 défini dans (4.18), la relation (5.68) devient la loi sécante du comportement élastoviscoplastique du problème hétérogène considéré :

$$\dot{\epsilon} = s : \dot{\sigma} + m_s \sigma \quad , \quad m_s = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{\sigma_0^n} \right) J \quad (5.72)$$

En dérivant maintenant la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\sigma_d$  dans (5.67), on définit la viscosité tangente  $\eta_t$  :

$$\dot{\sigma}_d = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^{vp2}} (\dot{\epsilon}^{vp}) \ddot{\epsilon}^{vp} = 2 \eta_t (\dot{\epsilon}_{eq}^{vp}) \ddot{\epsilon}^{vp} \quad (5.73)$$

où  $\dot{\sigma}_d$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\dot{\sigma}$ . La loi de comportement élastoviscoplastique de l'étude peut alors s'écrire selon :

$$\ddot{\epsilon} = s : \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\eta_t} \dot{\sigma}_d \quad (5.74)$$

où l'on retrouve bien la relation présentée par Molinari [85] entre les viscoplasticités tangente et sécante :

$$\eta_t = k \eta_s \quad (5.75)$$

En introduisant le tenseur des souplesses viscoplastiques tangentes  $m_t$  tel que :

$$m_t = \frac{1}{2\eta_t} : J \quad (5.76)$$

l'équation constitutive (5.74) devient la loi tangente du comportement élastoviscoplastique du problème hétérogène considéré :

$$\ddot{\epsilon} = s : \ddot{\sigma} + m_t \dot{\sigma} \quad , \quad m_t = \frac{3n}{2} \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{\sigma_0^n} \right) J \quad (5.77)$$

### 5.5.3 Résultats numériques et comparaison

Dans ce paragraphe, des simulations numériques sont menées dans le but de comparer les résultats du modèle proposé avec ceux du modèle de Lahellec et Suquet [42] ainsi que la solution dite "exacte" obtenue par la méthode numérique des éléments finis (MEF).

Dans les résultats extraits de l'article de Lahellec et Suquet [42], leur modèle, utilisant la méthode variationnelle incrémentale sur des matériaux hétérogènes élastoviscoplastiques décrivant une loi constitutive locale sécante (5.72), a été mené de deux manières différentes :

- D'un côté, en plus de la linéarisation sécante, l'approximation du champs de déformations libres non uniforme  $\alpha_n$  (ici  $\epsilon_n^{vp}$ ) à l'instant  $t_n$  par une "variable interne effective" (VIE) uniforme dans chaque phase est effectuée, puis le problème thermoélastique résultant de cette approximation est résolu numériquement par la méthode des éléments finis (MEF). Cette première version du modèle de Lahellec et Suquet sera intitulé "VIE + MEF" par la suite.
- D'autre part, l'énergie effective du matériau hétérogène thermoélastique utilisant également l'approximation par la "variable interne effective" (VIE) est estimée par la borne inférieure de Hashin-Shtrikman [48] pour les composites isotropes. Cette prédiction du modèle de Lahellec et Suquet est nommée "VIE + HS".

La solution dite "exacte" est également présentée dans l'article de Lahellec et Suquet [42] et est obtenue par la méthode numérique des éléments finis. Le modèle obtenu par cette dernière sera appelé "MEF".

Dans le cadre des simulations numériques, le matériau test est un matériau composite renforcé dont les inclusions sphériques, représentant les renforts, ont un comportement élastique, et la matrice possède un comportement local dont la loi constitutive est de la forme (5.72) ou (5.77), suivant que l'on applique l'approche sécante ou tangente. Notons que ces deux formes différentes de la loi constitutive locale traduisent le même comportement mécanique du matériau test, mais impliquent toutefois des approches intégrales et des résolutions numériques différentes du problème hétérogène. Les propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test sont données par la figure 5.1 ci-après.

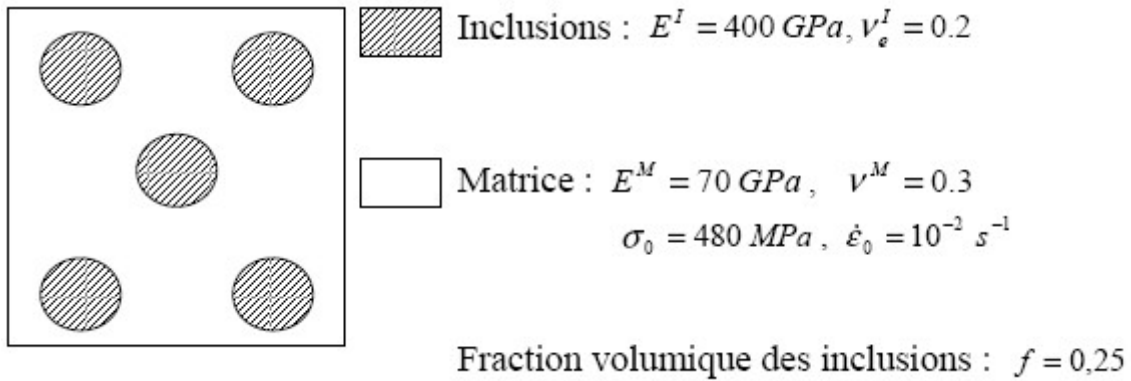


FIG. 5.1 – Propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test

Les résultats numériques présentés dans ce chapitre traduisent la prédiction de la réponse macroscopique en contrainte du matériau test lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E}_{11} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

La figure 5.2 représente le cas viscoélastique linéaire, c'est-à-dire pour un exposant de sensibilité  $k = 1$  des lois constitutives locales (5.72) ou (5.77). Les solutions issues de la nouvelle démarche de formulation intégrale du chapitre 5 sont obtenues par l'approximation autocohérente ("modèle autocohérent") et par l'estimation de Mori-Tanaka ("modèle de Mori-Tanaka"). Rappelons dans ce cas que les formes sécante (5.72) et tangente (5.77) de l'équation constitutive du comportement local sont identiques et que leur approches respectives sont par conséquent les mêmes.

On observe, selon la figure 5.2, que la réponse du "modèle autocohérent" proposé correspond raisonnablement bien avec la solution de la méthode des éléments finis "MEF", tandis que la courbe du "modèle Mori-Tanaka" suit celle du modèle variationnel incrémental utilisant la borne inférieure de Hashin-Strickmann "VIE + HS".

L'accord constaté entre les courbes du "modèle Mori-Tanaka" et du modèle variationnel de Lahellec et Suquet [42] "VIE + HS" s'explique par le fait que lors de l'estimation de Mori-Tanaka, les modules homogènes élastiques  $C$  et viscoplastiques  $B$  du milieu de référence sont respectivement assimilés aux modules élastiques  $c^M$  et viscoplastiques  $b^M$  de la phase matrice qui correspond, par ailleurs, au constituant le plus souple du matériau test (voir figure 5.1).

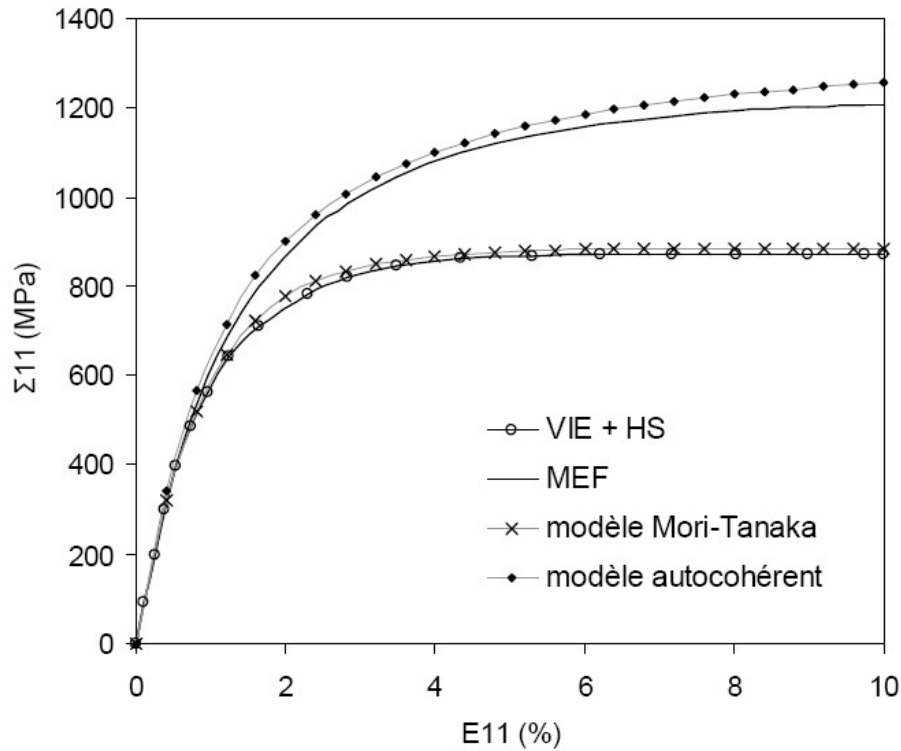


FIG. 5.2 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} s^{-1}$  :  $k = 1$

Par conséquent, dans ce cas précis où les inclusions élastiques représentent la phase la plus rigide, le principe de Mori-Tanaka revient à considérer la borne inférieure de Hashin-Shtrikman durant l'étape d'homogénéisation, d'où la correspondance entre les courbes du "modèle Mori-Tanaka" et de l'estimation par la borne inférieure de Hashin-Shtrikman de la procédure variationnelle "VIE + HS".

Les observations faites à partir des courbes de la figure 5.2 nous permettent donc de vérifier que la nouvelle démarche proposée dans le cas de l'élastoviscoplasticité peut également s'appliquer à la viscoélasticité linéaire en considérant les modules locaux élastiques  $c(r)$  et viscoplastiques  $b(r)$  comme des constantes dans le temps, indépendantes de l'histoire du chargement définie par l'état des contraintes  $\sigma(r)$ . Dans ce cas, on retrouve les mêmes courbes du modèle proposé en appliquant la démarche présentée dans le chapitre 4 du cas de la viscoélasticité linéaire.

Les figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 montrent les résultats obtenus en élastoviscoplasticité pour des valeurs de  $k$  de 0,2 et 0,1.

Sur les figures 5.3 et 5.4, on s'attache à comparer les solutions du modèle proposé issues de l'homogénéisation autocohérente sur l'approche sécante ("SEC + Autocohérent") et sur l'approche tangente ("TAN + Autocohérent").

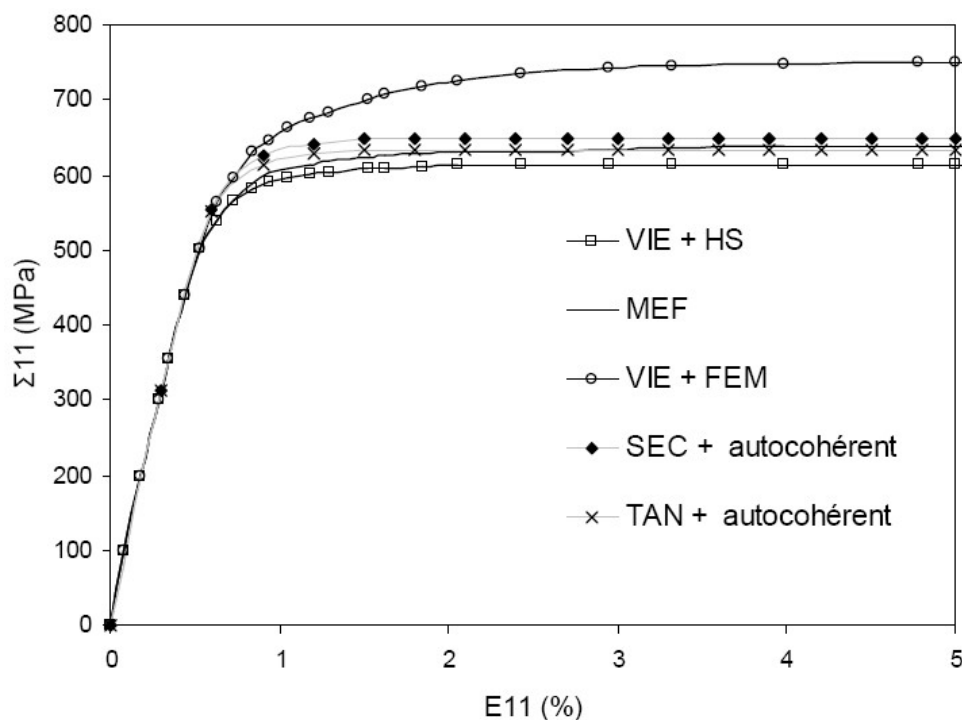


FIG. 5.3 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} s^{-1}$  :  $k = 0,2$

Tout d'abord, d'un point de vue général, toutes les courbes peuvent être schématiquement décomposées en trois régimes différents. Le premier régime correspond à la réponse initiale purement élastique du composite. Dans ce régime, le seul potentiel qui influe sur le comportement est l'énergie libre  $\psi$ . Dans ce premier régime, les observations indiquent que les propriétés élastiques du matériau test sont prédites de manière rigoureuse et précise par tous les modèles en considération.

Dans la troisième partie de la courbe contrainte-déformation, correspondant relativement à la première aux grandes déformations, la réponse du composite est purement dissipative et est

donc gouvernée par le potentiel de dissipation  $\varphi$ , alors que les effets élastiques sont négligés. Ce domaine de la courbe contrainte-déformation est régi par un régime asymptotique aux temps longs.

Entre ceux deux régimes, on rencontre une zone intermédiaire ou transitoire correspondant au régime où les effets élastiques et dissipatifs sont couplés. Ce régime est précisément celui qui nous intéresse dans cette étude, et notons que l'étendue de ce domaine viscoélastique dépend fortement de l'exposant de sensibilité  $k$  et augmente avec ce dernier.

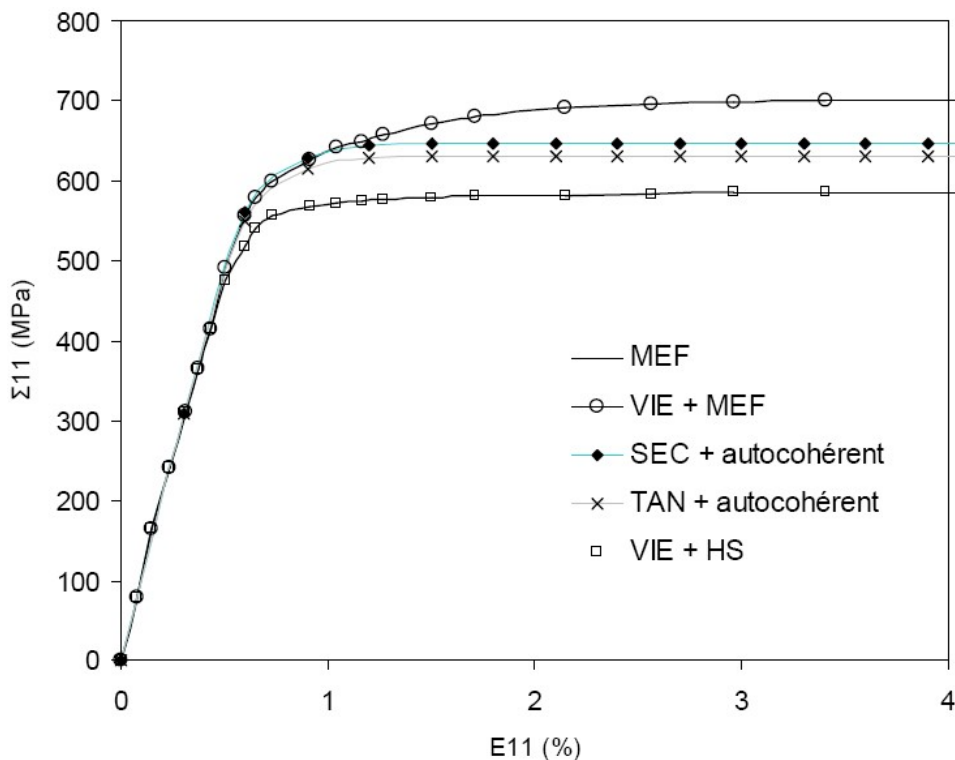


FIG. 5.4 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  :  $k = 0, 1$

A travers les figures 5.3 et 5.4, on constate donc le bon accord entre le modèle autocohérent proposé, aussi bien par l'approche sécante que par l'approche tangente, avec les autres modèles de comparaison. Les courbes "SEC + autocohérent" et "TAN + autocohérent" se situent, dans les deux cas ( $k = 0, 2$  et  $k = 0, 1$ ), entre la solution du modèle variationnel de Lahellec et Suquet utilisant la méthode des éléments finis "VIE + MEF" et les courbes des autres modèles pris en considération.

Par ailleurs, les résultats des modèles proposés se rapprochent de ceux de la méthode des éléments finis "MEF" lorsque l'étendue du domaine transitoire de couplage viscoélastique augmente (augmentation de l'exposant de sensibilité  $k$ ), alors que l'écart entre le modèle variationnel "VIE + MEF" et la solution "MEF" semble rester sensiblement le même. On en déduit donc que les modèles sécant et tangent proposés traduisent d'une manière plus rigoureuse le comportement macroscopique du matériau test plus le domaine transitoire viscoélastique est important.

On peut également noter un très léger décalage dans le domaine asymptotique viscoplastique, entre les courbes de l'approche sécante "SEC + autocohérent" et de l'approche tangente "TAN + autocohérent" proposées. L'apparition de ce léger intervalle qui demeure constant dans les deux cas de figures ( $k = 0, 2$  et  $k = 0, 1$ ), débute à la fin du régime élastique linéaire du comportement macroscopique, là où les effets du couplage entre l'élasticité et la viscosité entrent en jeu dans le processus de déformation. Ce léger écart est dû à la différence des résolutions numériques du problème du problème hétérogène élastoviscoplastique entre l'approche sécante et l'approche tangente, qui se traduit par une divergence minimale des deux courbes lors du passage au régime transitoire représenté par le coude de la courbe contrainte-déformation. Cette différence des résolutions entre les deux approches présentées n'est pas de nature physique, mais bien de caractère purement calculatoire, c'est -à-dire que la distinction fondamentale entre les formes des lois constitutives sécante et tangente engendre inévitablement deux procédés de résolution numériques disjointes ne menant pas obligatoirement aux mêmes résultats.

Sur les figures 5.5 et 5.6, les résultats du modèle proposé provenant de l'homogénéisation de Mori-Tanaka sur l'approche sécante ("SEC + Mori-Tanaka") et sur l'approche tangente ("TAN + Mori-Tanaka") sont présentés et comparés.

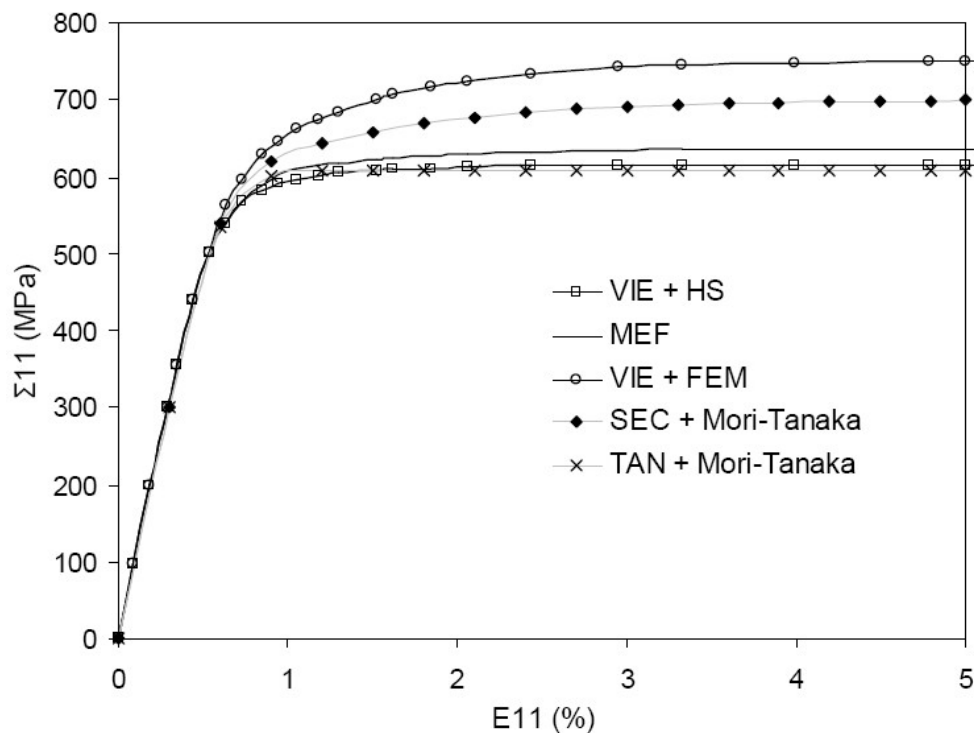


FIG. 5.5 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  :  $k = 0,2$

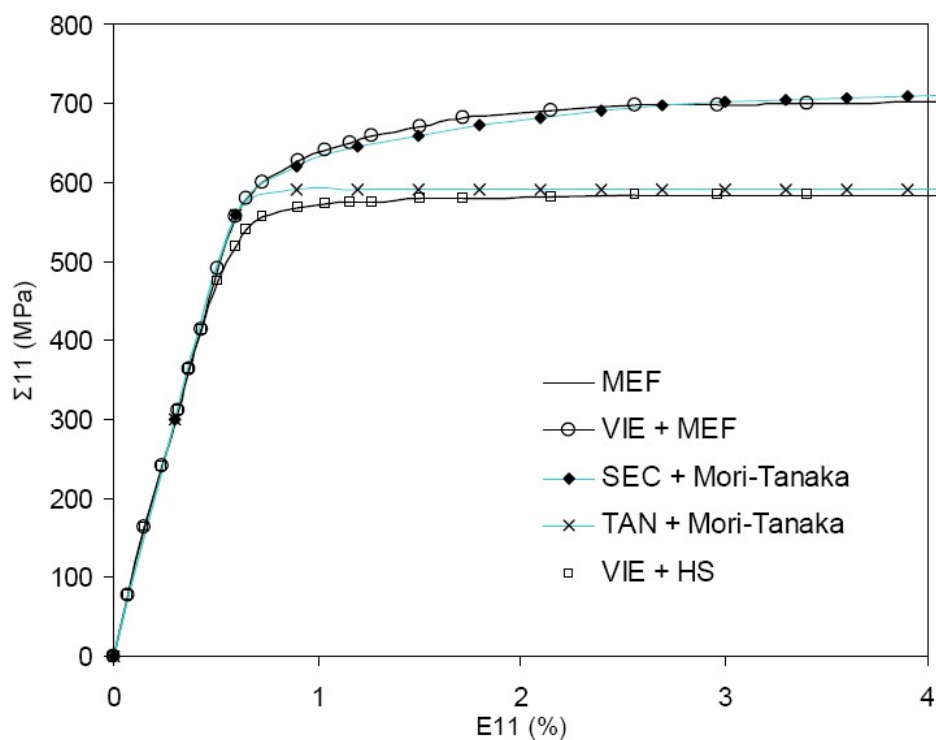


FIG. 5.6 – Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à  $|\dot{E}| = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  :  $k = 0,1$



En ce qui concerne l'homogénéisation de Mori-Tanaka sur les deux approches proposées "SEC + Mori-Tanaka" et "TAN + Mori-Tanaka", les mêmes constats peuvent être observés que dans le cas de l'approximation autocohérente (voir figures 5.3 et 5.4), à l'exception que l'écart existant entre les approches sécante et tangente est bien plus marqué dans le régime asymptotique viscoplastique. On en déduit donc que la différence entre ces deux approches (sécante et tangente) dépend fortement de la méthode d'homogénéisation utilisée. En effet, en effectuant l'estimation de Mori-Tanaka, la réponse sécante "SEC + Mori-Tanaka" met beaucoup plus de temps à se stabiliser à atteindre l'état asymptotique, contrairement à la courbe tangente "TAN + Mori-Tanaka".

En outre, on constate que l'approche tangente suivant la méthode de Mori-Tanaka est plus précise et donne des résultats satisfaisant, en accord avec ceux du modèle de la méthode des éléments finis "MEF", et plus encore avec ceux du modèle variationnel utilisant la borne inférieure de Hashin-Shtrikman "VIE + HS". L'approche sécante, quant à elle, se traduit par une courbe "SEC + Mori-Tanaka" de même tendance (surrestimation des contraintes en régime asymptotique aux temps longs) que celle observée par le modèle variationnel "VIE + MEF" partant lui aussi de la formulation sécante du problème hétérogène (méthode variationnelle du premier ordre [42]).

#### 5.5.4 Conclusion

Les résultats numériques de simulation du comportement macroscopique du matériau test, lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E}_{11} = 10^{-2} s^{-1}$ , montrent le bon accord entre les modèles issus de la nouvelle démarche de formulation intégrale en élastoviscoplasticité et les autres modèles de comparaison.

La véracité de la méthode proposée dans ce chapitre est tout d'abord vérifiée lors de l'application au cas de la viscoélasticité linéaire pour un exposant de sensibilité  $k = 1$ . Cette application témoigne, par ailleurs, la correspondance existant entre l'homogénéisation de Mori-Tanaka et celle de la borne de Hashin-Shtrikman, ainsi que la précision satisfaisante du modèle autocohérent avec celui de la méthode des éléments finis.

Dans le cas général de l'élastoviscoplasticité, où l'exposant de sensibilité  $k$  prend les valeurs de 0,2 ou 0,1, on constate le bon accord entre les résultats des modèles proposées et ceux des

autres modèles de comparaison. Cet accord est observable tant au niveau des deux méthodes d'homogénéisation utilisées, que des deux approches, sécante et tangente, de la nouvelle méthode de transition d'échelle proposée.

Le décalage entre les courbes des deux approches sécante et tangente, survenant au passage du régime transitoire du couplage entre l'élasticité et la viscosité, et se stabilisant dans le régime asymptotique dissipatif, est dû à la différence des résolutions numériques partant de deux lois constitutives (5.72) et (5.77) de formes distinctes, mais caractérisant pourtant le même comportement mécanique local. Cet écart entre modèles sécant et tangent dépend fortement de la méthode d'homogénéisation utilisée : très faible dans le cas de l'approximation autocohérente, et plus accentué lors de l'estimation de Mori-Tanaka.

## 5.6 Conclusion

Dans le but d'étendre la nouvelle démarche de formulation intégrale proposée dans le cadre plus général de l'élastoviscoplasticité, la méthode de résolution du problème viscoélastique linéaire traité dans le chapitre 4 a été reprise et développée au cas du comportement non linéaire élastoviscoplastique.

Premièrement, nous avons décrit les lois constitutives élastoviscoplastiques étudiées dans ce chapitre en définissant les deux potentiels élastique et viscoplastique dont elles proviennent. La limitation au cas simple des lois constitutives dont le potentiel viscoplastique est fonction uniquement de l'état de contrainte  $\sigma$  est faite dans un souci d'orienter la concentration sur la procédure de transition d'échelle énoncée dans ce travail. Par ailleurs, nous avons vu que ces lois de comportement locales peuvent s'écrire suivant deux formes : la formulation sécante dans le cas où la fonction  $g(\sigma)$  désignant les vitesses de déformation viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  peut être "linéarisée" avec l'utilisation d'un module viscoplastique sécant  $m_s$  (cas des lois viscoplastiques de type puissance); et la formulation tangente obtenue quelque soit  $g(\sigma)$  en dérivant les lois constitutives dans le temps avec l'introduction du tenseur viscoplastique tangent  $m_t$ .

Ensuite, la nouvelle méthode de formulation intégrale est présentée, en s'inspirant de celle développée dans le chapitre 4, et donne lieu à deux approches suivant les deux formes des lois constitutives élastoviscoplastiques à partir desquelles sont définis les systèmes du problème hétérogène à résoudre : l'approche sécante et l'approche tangente. La différence entre ces deux approches se situe, d'une part, dans l'utilisation de l'un ou l'autre des tenseurs viscoplastiques sécant ou tangent, et d'autre part, dans l'ordre de dérivation dans le temps des résolutions des formulations intégrales, qui est supérieur d'un degré dans l'approche tangente.

Puis, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse des deux approches de formulation intégrale proposées. L'application du schéma autocohérent et de l'estimation de Mori-Tanaka, déjà présentés dans le chapitre 4, à chacune des équations intégrales obtenues à partir des deux approches sécante et tangente, donne lieu à l'élaboration de quatre modèles : sécant autocohérent, tangent autocohérent, sécant Mori-Tanaka et tangent Mori-Tanaka. Des simulations d'un essai de traction à vitesse de déformation constante sur un matériau test sont menées et les résultats des modèles de la nouvelle méthode de transition d'échelle proposée sont analysés et

comparés avec ceux des modèles variationnels présentés par Lahellec et Suquet [42] ainsi que ceux de la méthode des éléments finis. L'observation des résultats témoigne du bon accord entre les courbes des modèles proposés avec celles des autres modèles de comparaison, notamment celle issue de la méthode des éléments finis. La nouvelle démarche de formulation intégrale est donc adaptée au cas de l'élastoviscoplasticité et fournit des prédictions satisfaisantes du comportement effectif non linéaire des matériaux hétérogènes.

Les lois de comportement de type puissance nous ont permis de mesurer l'acuité du modèle de transition d'échelle proposé en élastoviscoplasticité. Dans le chapitre suivant, une application de la nouvelle démarche micromécanique proposée sera présentée dans le cas des mélanges polypropylène/talc où les résultats théoriques du nouveau modèle seront comparés avec ceux de l'expérience. Une loi constitutive plus adaptée au comportement viscoélastique non linéaire du polypropylène est utilisée. Pour cela, nous verrons que la loi de type Schapery semble convenir de manière satisfaisante à la description du comportement mécanique des matériaux polymères thermoplastiques et en particulier le polypropylène.



## Chapitre 6

# Identification expérimentale du comportement mécanique des polymères et validation du nouveau modèle micromécanique

## 6.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'appliquer le modèle issu de la nouvelle démarche de transition d'échelle proposée dans ce travail au comportement viscoélastique non linéaire des mélanges à base de polymères. Le matériau sur lequel nous concentrons notre étude est un mélange polypropylène/talc fourni par la société SORECO sous forme de granulés. Les éprouvettes de traction de ce mélange, ainsi que celles du polypropylène vierge, sont mises en forme par un procédé de moulage par injection plastique au lycée Georges Bastide de Creutzwald. Les différents essais mécaniques ont été réalisés au laboratoire de plasturgie de l'E.N.I.M..

Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire de déterminer une loi adaptée à la caractérisation du comportement mécanique du polypropylène. Nous choisissons alors d'utiliser une relation constitutive de type Schapery en s'inspirant des travaux de Lévesque [22] qui reprend l'approche thermodynamique initiale de Schapery [7], afin d'écrire une loi de comportement tridimensionnelle spécifique au comportement du polypropylène. L'identification de cette loi est menée suivant deux procédures, l'une permettant de déterminer les composantes de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire, l'autre consistant à calculer l'expression de la fonction de non linéarité à partir d'un essai uniaxial où une histoire du chargement imposé est judicieusement définie. La loi de comportement identifiée est ensuite analysée et validée par une comparaison de ses résultats avec les courbes expérimentales obtenues dans le cadre de deux essais de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante effectués sur le polypropylène disponible dans notre étude.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la prédiction du comportement mécanique du mélange polypropylène/talc par l'application du nouveau modèle de transition d'échelle présenté dans les chapitres 4 et 5. Pour cela, la loi constitutive de type Schapery a été réécrite sous une forme différentielle adaptée aux approches micromécaniques à variables internes. Suite à cette réécriture, on établit le nouveau système des équations de champs du problème hétérogène à partir duquel la formulation intégrale est menée. L'homogénéisation de Mori-Tanaka est alors exécutée suivant le même schéma de résolution que celui qui a été spécifié dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Enfin, les résultats du modèle proposé sont comparés avec les mesures expérimentales recueillies à l'issue d'une campagne d'essais de traction uniaxiales à vitesse de déformation constante lors de laquelle l'influence de la fraction volumique du talc est étudiée.

## 6.2 Présentation du dispositif expérimental

Les matières de l'étude sont le polypropylène et les mélanges polypropylène/talc. Ces matériaux ont été fournis par la société SORECO sous forme de granulés répartis dans quatre sacs de 25 kg contenant chacun un des matériaux suivants : le polypropylène, les trois mélanges polypropylène/talc avec respectivement 10 %, 20 % et 30 % en volume de talc. Le polypropylène est un homopolymère issu de chutes de production ayant subi une régénération puis une regranulation. Les mélanges polypropylène/talc proviennent de la formulation ("compounding") du même polypropylène avec du talc par un procédé d'extrusion. Les fils sortant de la filère de l'extrudeuse sont ensuite découpés sous forme de granulés.

Les éprouvettes de traction ISO 527 des matériaux étudiés ont été réalisées au Lycée professionnel Georges Bastide de Creutzwald. Les granulés ont été transformés par injection plastique. La presse utilisée est une SANDRETTO Haute Précision de 60 T avec une capacité maximale de  $177\text{ cm}^3$  de matière injectée sous une pression de 1000 bars. Le diamètre de la vis est de 40 mm et le temps de cycle, comprenant l'ouverture et la fermeture du moule, l'éjection, l'injection, la plastification (ou refroidissement) et le mouvement du ponton, est de 37 s. La figure 6.1 présente le profil de température le long du cylindre de la machine à injecter qui se divise en quatre compartiments. L'injection proprement dite, dont la durée est de 4 s, se déroule en trois phases pour des pressions successives de 70 MPa, 25 MPa et 15 MPa. Le refroidissement des moules est effectué sans régulation de température pendant 30 s.

doseur	175°C	190°C	210°C	230°C	moule
--------	-------	-------	-------	-------	-------

FIG. 6.1 – Profil des températures le long du cylindre d'injection

Les essais effectués sur les éprouvettes se sont déroulés au laboratoire de plasturgie de l'E.N.I.M. situé à Faulquemont et spécialisé dans la caractérisation des propriétés mécaniques, physiques et thermomécaniques des polymères.

Les différents essais mécaniques ont été réalisés sur la machine de traction-compression Instron 5866 5T destinée à analyser le comportement à l'étirage et à la compression. Les contraintes et



l'allongement à la rupture et au seuil d'écoulement, ainsi que le module d'Young et le coefficient de Poisson peuvent être directement mesurés par le programme. Cette machine peut s'appliquer pour les caractérisations en grandes déformations, pour mesurer l'influence de la vitesse de déformation, pour des essais cycliques, pour des contrôles en force ou en déplacement, ou encore pour effectuer des programmes d'essais spécifiques.

La machine de traction-compression utilisée possède un système de vidéo-traction Apollor analysant les déformations par extensiométrie optique et permettant ainsi de mesurer les déformations longitudinales et transversales, le module d'Young, le coefficient de Poisson et la variation de volume. Les domaines d'application de cet équipement optique sont variés : petites et grandes déformations, influence de la vitesse de déformation, contrôle en force ou en déplacement, pilotage en fonction de la réponse du matériau, fluage, suivi de fissure, etc. Les éprouvettes destinées à la vidéo-traction peuvent être de différentes formes : altère, barreau, film, sablier.

## 6.3 Identification du comportement mécanique du polypropylène par une loi de type Schapery

### 6.3.1 Introduction

Parmi les différentes relations constitutives disponibles dans la littérature pour prédire le comportement des matériaux polymères, nous proposons de reprendre celle proposée par Schapery [7][8][9] pour la caractérisation des matériaux viscoélastiques non linéaires. Cette loi se base sur une approche thermodynamique phénoménologique développée dans le même cadre que celui introduit par Biot [86] et qui peut être interprétée comme une extension du domaine de validité d'une loi de comportement viscoélastique linéaire par l'introduction d'une dépendance non linéaire de la réponse à l'histoire du chargement, introduite par le biais de fonctions scalaires du tenseur des contraintes.

Cette théorie a fait l'objet de nombreuses investigations qui montrent que les lois de type Schapery ne se limitent pas à une classe particulière de matériaux. En effet, ces dernières peuvent s'adapter à la prédiction du comportement de différents matériaux tels que la glace, le bitume, les polymères, etc.

La formulation initiale de la relation constitutive de Schapery [7], introduite dans le chapitre 2 sur le comportement mécanique des matériaux polymères, a été réalisée dans le cadre unidimensionnel :

$$\epsilon = g_0 l_0 \sigma + g_1 \int_0^t \Delta l(\psi - \psi') \frac{d(g_2 \sigma)}{d\tau} d\tau \quad (6.1)$$

où  $l_0 = l(0)$  est la valeur à l'instant initial de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire  $l(t)$ , et  $\Delta l(t) = l(t) - l_0$  est sa composante évolutive. L'auteur introduit les fonctions de non linéarité  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  et  $a_\sigma$  afin de traduire la dépendance non linéaire de la réponse à l'histoire de chargement. Ces fonctions sont donc toutes dépendantes de la contrainte  $\sigma$ .  $\psi$  est appelé le "temps réduit", défini par :

$$\begin{cases} \psi = \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma(\sigma(t'))} & (a_\sigma > 0) \\ \psi' = \psi(\tau) \end{cases} \quad (6.2)$$

Plusieurs auteurs [87] [88] [89] ont proposé des expressions tridimensionnelles de la loi de com-

portement en généralisant l'expression unidimensionnelle. Dans le cadre de son travail de thèse, Lévesque [22] affirme que ces généralisations tridimensionnelles peuvent conduire à des lois ne respectant pas les principes de la thermodynamique. Ainsi, face à cette difficulté, il reprend les développements initiaux de Schapery [1] à partir des deux premiers principes de la thermodynamique afin d'écrire une loi de comportement tridimensionnelle adaptée aux matériaux viscoélastiques non linéaires :

$$\epsilon = g_0 l_0 : \sigma + \left( \frac{\partial g_1}{\partial h} l_0 : \sigma \otimes \sigma + g_1 I \right) : \int_0^t \Delta l(\psi - \psi') : \frac{d(g_2 \sigma)}{d\tau} d\tau \quad (6.3)$$

où  $I$  est le tenseur identité d'ordre 4 :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad ; \quad (6.4)$$

$\otimes$  est le produit tensoriel ;

$$\text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial h} \text{ et } g_j > 0 & \text{pour } i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1, 2, 3. \\ h = \frac{1}{2} \sigma : l_0 : \sigma \\ l_0 : \text{tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires à l'instant initial} \end{cases} \quad (6.5)$$

Rappelons avant de poursuivre que, à l'instant initial, en très petites déformations, le processus de déformation engendre un comportement élastique linéaire où le tenseur des complaisances viscoélastiques initial  $l_0$  est rigoureusement identique au tenseur des souplesses élastiques  $s$  du matériau :

$$l_0 = s \quad (6.6)$$

Après avoir déterminé une loi constitutive tridimensionnelle de type Schapery, Lévesque [22] procède ensuite à l'identification de ses différents paramètres afin de prédire le comportement mécanique d'un polypropylène semi-cristallin. Il obtient ainsi une loi de comportement identifiée ayant la forme suivante :

$$\epsilon = s : \sigma + \int_0^t \Delta l(t - \tau) : \frac{d(g_2 \sigma)}{d\tau} d\tau \quad (6.7)$$

où les composantes évolutives du tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires  $\Delta l(t)$  se décomposent en séries de Prony [22] [90] :

$$\Delta l(t) = l_0 \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad (6.8)$$

où les constantes  $\alpha_i$  et  $\tau_i$  sont positives et représentent respectivement les amplitudes et les temps caractéristiques (ou constantes de temps) des séries de Prony.

Par ailleurs, comme  $\Delta l(t) = l(t) - l_0$  par définition, alors :

$$l(t) = \Delta l(t) + l_0 \quad (6.9)$$

et le tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires s'exprime en fonction des séries de Prony par :

$$l(t) = l_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right) \right] \quad (6.10)$$

En considérant les résultats satisfaisants obtenus par Lévesque [22] sur l'étude du comportement du polypropylène, nous nous inspirons de la loi de comportement (6.7) et de la décomposition du tenseur  $l(t)$  en séries de Prony (6.10), afin de caractériser le comportement viscoélastique non linéaire du polypropylène étudié dans ce chapitre.

Toutefois, afin de garantir une caractérisation réaliste et rigoureuse du comportement du polypropylène sujet à notre étude, les valeurs des paramètres identifiés par Lévesque [22] ne peuvent pas être repris dans ce travail. Dans cette section, le but est donc d'identifier les différents paramètres définissant la loi constitutive (6.7) en distinguant, d'une part, les constantes des séries de Prony (6.8) intervenant dans l'expression du tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires, et d'autre part, la fonction de non linéarité  $g_2$  dépendante de l'état de contrainte  $\sigma$ .

### 6.3.2 Détermination des composantes de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire

Afin de déterminer les coefficients de la représentation sous forme de séries de Prony (6.10) de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire  $l(t)$ , on se place tout d'abord dans le domaine où les déformations sont suffisamment petites pour que le comportement du matériau soit viscoélastique linéaire. Dans ce cas, la fonction de non linéarité  $g_2$  est égale à 1 et la loi constitutive (6.7) devient :

$$\epsilon = l_0 : \sigma + \int_0^t \Delta l(t - \tau) : \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (6.11)$$

en décomposant la composante évolutive  $\Delta l(t)$  dans (6.11) on obtient :

$$\epsilon = l_0 : \sigma - l_0 : \int_0^t \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau + \int_0^t l(t-\tau) : \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau = \int_0^t l(t-\tau) : \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (6.12)$$

En injectant ensuite l'expression (6.10) de  $l(t)$  dans l'équation précédente, il vient :

$$\epsilon = l_0 : \int_0^t \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right) \right] \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (6.13)$$

De plus, la relation (6.6) permet de remplacer le tenseur initial de la complaisance de fluage viscoélastique linéaire  $l_0$  par le tenseur des souplesses élastiques  $s$  :

$$\epsilon = s : \int_0^t \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right) \right] \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (6.14)$$

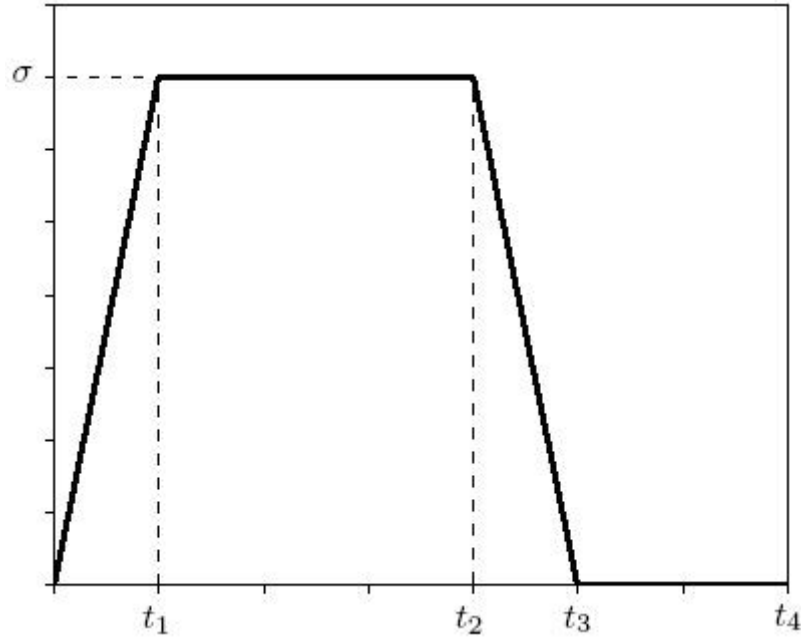
Dans l'équation (6.14), les paramètres à déterminer sont alors les constantes  $\alpha_i$  et  $\tau_i$  du nombre  $i$  de séries de Prony en viscoélasticité linéaire.

#### a. Procédure d'identification des paramètres de linéarité

L'identification des paramètres de linéarité repose donc sur la détermination des constantes des séries de Prony définissant le comportement viscoélastique linéaire du matériau. Pour cela, la procédure sera d'inclure une histoire de chargement constituée d'une charge et d'une décharge permettant, par une analyse par régression non linéaire [90], de déterminer les séries de Prony. Le modèle résultant est alors capable de simuler des segments de fluage aussi bien que des segments de recouvrance très utile pour la modélisation des effets d'hystérésis.

Ainsi, l'histoire du chargement sur laquelle est mise en œuvre la procédure d'identification utilisée ici est présentée à la figure 6.2.

Le procédé permettant d'imposer une telle histoire de chargement est un essai uniaxial de charge et de décharge à vitesse de contrainte constante  $|\dot{\sigma}|$  avec un premier maintien à contrainte constante  $\sigma$  et un deuxième maintien à contrainte nulle. Il se divise en quatre segments pour lesquels les fonctions de contrainte et de vitesse de contrainte sont définies :

FIG. 6.2 – Histoire de chargement utilisée pour l'identification des paramètres  $\alpha_i$ 

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma t/t_1 = \dot{\sigma} t & 0 < t \leq t_1 \\ \sigma & t_1 < t \leq t_2 \\ -\sigma t/(t_3 - t_2) = -\dot{\sigma} t & t_2 < t \leq t_3 \\ 0 & t_3 < t \leq t_4 \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma/t_1 = \dot{\sigma} & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \leq t_2 \\ -\sigma/(t_3 - t_2) = -\dot{\sigma} & t_2 < t \leq t_3 \\ 0 & t_3 < t \leq t_4 \end{cases} \quad (6.16)$$

Dans ce cas, la loi de comportement (6.14) décrivant le comportement uniaxial du matériau s'écrit sous sa forme unidimensionnelle :

$$\epsilon = \frac{1}{E} \int_0^t \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right) \right] \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (6.17)$$

où  $E$  est le module d'Young. Les fonctions de la déformation deviennent alors pour chaque segment du procédé de chargement :

Etape 1 :  $0 < t < t_1$

$$\epsilon^{th}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_0^t 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau \quad (6.18)$$

Etape 2 :  $t_1 < t < t_2$

$$\epsilon^{th}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_0^{t_1} 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau \quad (6.19)$$

Etape 3 :  $t_2 < t < t_3$

$$\epsilon^{th}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_0^{t_1} 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau - \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_{t_2}^t 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau \quad (6.20)$$

Etape 4 :  $t_3 < t < t_4$

$$\epsilon^{th}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_0^{t_1} 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau - \frac{1}{E} \dot{\sigma} \int_{t_2}^{t_3} 1 + \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] d\tau \quad (6.21)$$

Les quatre expressions analytiques de la déformation forment ainsi un système d'équations à partir duquel on établit la procédure d'identification des paramètres du comportement linéaire.

Ce schéma consiste en une succession d'étapes :

- Tout d'abord, on détermine le module d'élasticité  $E$  en calculant l'inverse de la pente de la courbe expérimentale contrainte-déformation obtenue à l'instant initial  $t = 0$ .
- On choisit convenablement  $N$  valeurs positives de constantes de temps  $\tau_i$ .
- Puis  $N$  valeurs de déformations  $\epsilon_j^{exp} = \epsilon^{exp}(t_j)$  sont mesurées à partir de l'expérience à  $N$  instants  $t_j$  de l'essai. Les temps  $t_j$  doivent être réparties uniformément sur chacune des étapes au cours de l'essai, afin de garantir une interpolation satisfaisante de la réponse expérimentale à partir du modèle théorique développé.
- On détermine ensuite les  $N$  expressions analytiques  $\epsilon_j^{th} = \epsilon^{th}(t_j)$  aux instants  $t_j$  définis dans l'étape précédente, suivant les expressions (6.18) à (6.21).

- le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues  $\alpha_i$  :

$$\epsilon_j^{exp} = \epsilon_j^{th}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (6.22)$$

On en déduit l'ensemble  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  où  $\alpha_j > 0$  pour  $j = 1, \dots, N$ .

### b. Résultats et validation expérimentale des paramètres

On réalise un essai uniaxial dont l'histoire du chargement imposé est illustrée à la figure 6.3. Le domaine de validité de la loi de comportement (6.17) étant celui de la viscoélasticité linéaire, la contrainte constante de la première étape de maintien est fixée à  $\sigma = 4$  MPa, sachant que le comportement du polypropylène étudié est viscoélastique linéaire pour des contraintes inférieures ou égales à environ 5 MPa (limite vérifiée expérimentalement). La vitesse de contrainte constante durant les phases de charge et de décharge est  $|\dot{\sigma}| = 0,14$  MPa/s.

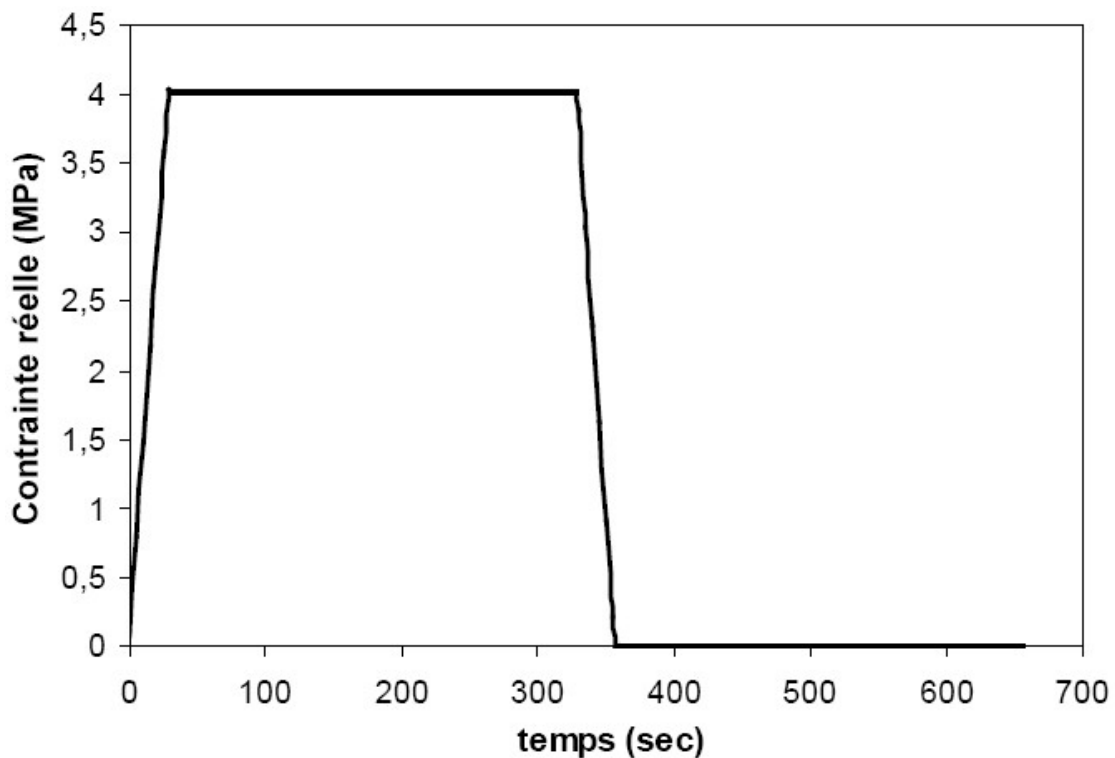


FIG. 6.3 – essai uniaxial de charge et décharge à vitesse de contrainte  $|\dot{\sigma}| = 0,14$  MPa/s avec maintiens à  $\sigma = 4$  MPa et 0 MPa

En exécutant la première étape de la procédure d'identification des paramètres linéaires, on trouve  $E = 1200$  MPa. En se basant sur les travaux récents effectués sur les lois de type Schapery appliquées au comportement mécanique du polypropylène [22] [91], on choisit trois



valeurs  $\tau_i$  :

$$\tau_1 = 3,5 \text{ s} , \quad \tau_2 = 35 \text{ s} , \quad \tau_3 = 350 \text{ s} \quad (6.23)$$

En choisissant les instants  $t_j$  auxquels on mesure les valeurs expérimentales des déformations et leurs expressions analytiques correspondantes :

$$t_1 = 28,5 \text{ s} , \quad t_2 = 100 \text{ s} , \quad t_3 = 328,5 \text{ s}$$

on résout le système d'équations (6.22) et on trouve les inconnues  $\alpha_i$  :

$$\alpha_1 = 5,21 \cdot 10^{-2} , \quad \alpha_2 = 1,563 \cdot 10^{-1} , \quad \alpha_3 = 3,717 \cdot 10^{-1} \quad (6.24)$$

La figure 6.4 montre la réponse en déformation obtenue par la loi constitutive uniaxiale (6.17) dans laquelle les valeurs (6.23) et (6.24) des paramètres  $\tau_i$  et  $\alpha_i$ , ainsi que le module d'Young  $E = 1200 \text{ MPa}$ , sont injectés. Cette courbe théorique est comparée avec la réponse expérimentale en déformation dans le cadre de l'essai effectué pour l'identification des composantes de la complaisance viscoélastique linéaire dont l'histoire du chargement est illustrée à la figure 6.3.

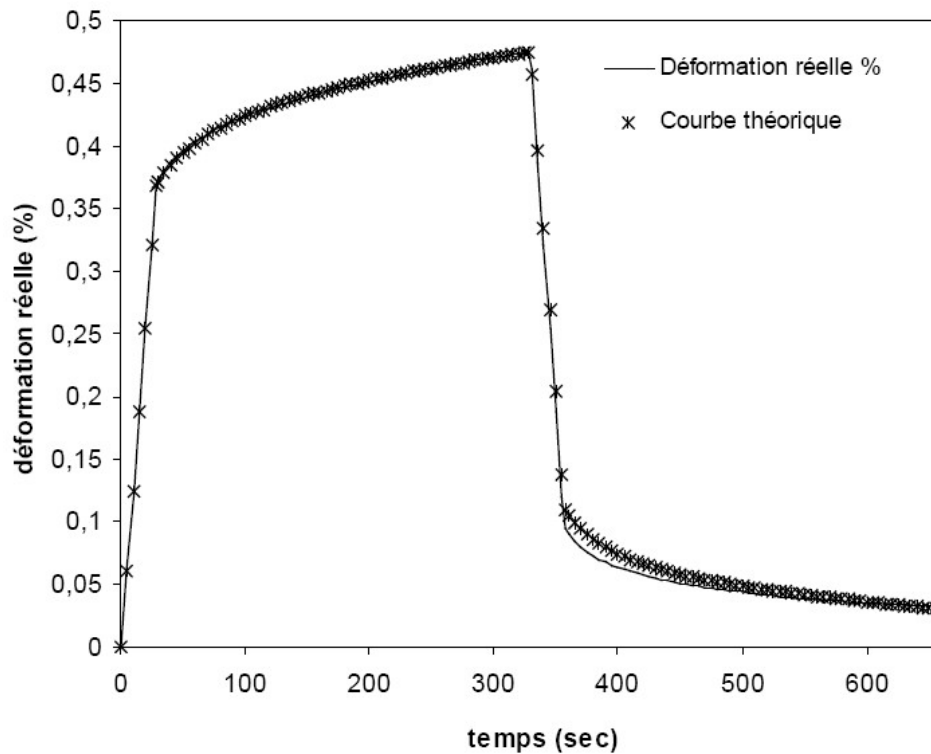


FIG. 6.4 – Déformation expérimentale observée et déformation théorique déterminée lors de l'essai uniaxial d'identification des paramètres de linéarité

On observe le bon accord entre la courbe du modèle et la réponse expérimentale, ce qui nous permet de valider les paramètres trouvés et de les incorporer définitivement dans la loi consti-

tutive (6.17).

Par ailleurs, d'autres essais uniaxiaux, où l'histoire de chargement imposé est du même type que celle présentée à la figure 6.2, ont été effectués en conservant la même vitesse de charge et décharge  $|\dot{\sigma}| = 0,14$  MPa/s et pour des contraintes  $\sigma$  lors de la première étape de maintien différentes. Ainsi, les figures 6.5 et 6.6 comparent les résultats issus de la loi constitutive (6.17) identifiée avec la réponse expérimentale respectivement pour  $\sigma = 7$  MPa et  $\sigma = 10$  MPa.

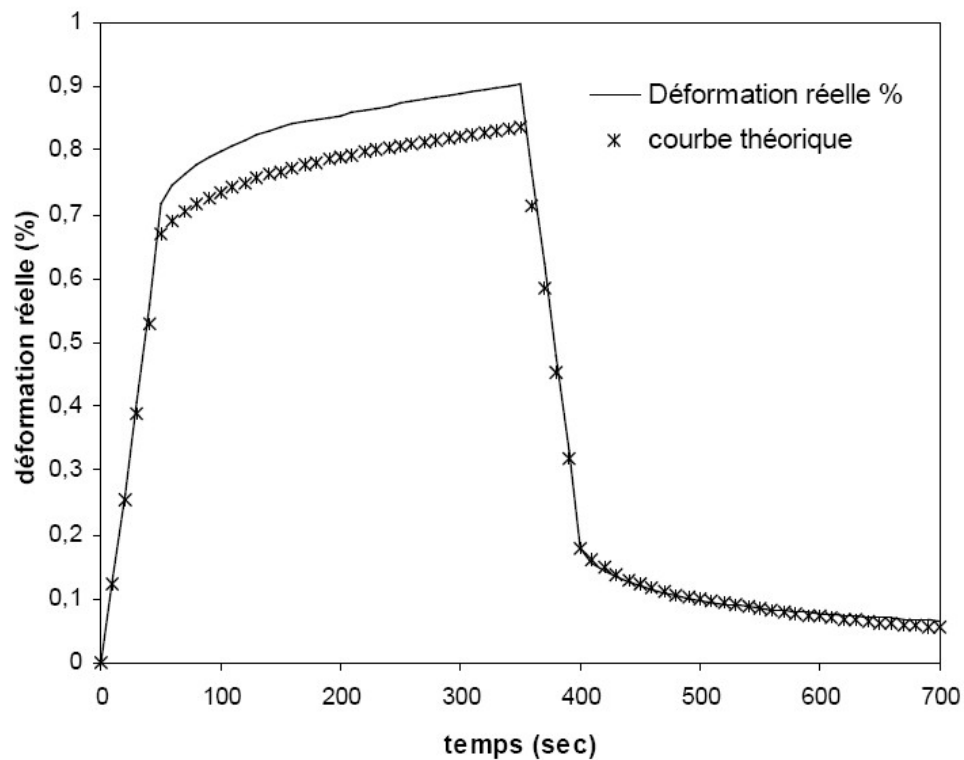


FIG. 6.5 – Déformation expérimentale observée et déformation issue de la loi (6.17) identifiée : contrainte de maintien en charge  $\sigma = 7$  MPa

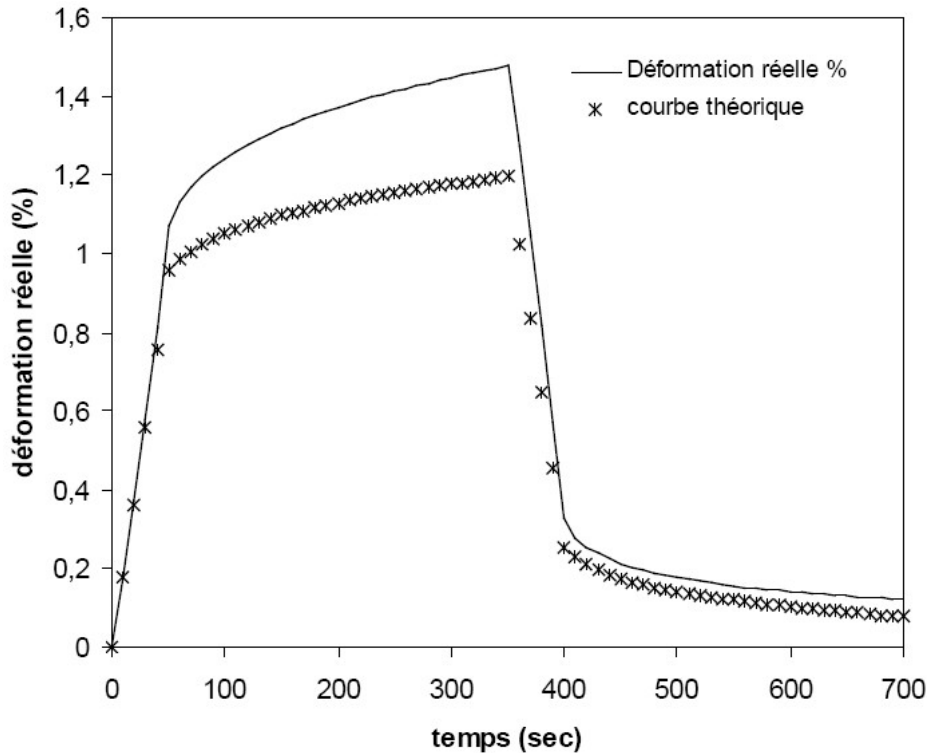


FIG. 6.6 – Déformation expérimentale observée et déformation issue de la loi (6.17) identifiée : contrainte du maintien en charge  $\sigma = 10$  MPa

Les résultats des figures 6.5 et 6.6 montrent bien que la loi constitutive établie précédemment ne peut plus prédire de manière convenable le comportement mécanique du matériau considéré pour des états de contraintes supérieurs à la limite du domaine viscoélastique linéaire. En effet, pour ces niveaux de contrainte (7 MPa et 10 MPa) les effets de la non linéarité du comportement viscoélastique entrent en jeu et il devient d'ores et déjà nécessaire de les prendre en compte dans la caractérisation du comportement du polypropylène étudié.

### 6.3.3 Détermination des fonctions de non-linéarité

Cette section consiste à présenter la procédure d'identification de la fonction  $g_2$  de non linéarité. Pour cela, on considère la forme générale tridimensionnelle (6.7) de la loi constitutive de type Schapery obtenue par Lévesque [22] où le tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires se décompose en séries de Prony suivant (6.8) :

$$\epsilon = l_0 : \sigma + l_0 : \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left[ \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right] \frac{d(g_2 \sigma)}{d\tau} d\tau \quad (6.25)$$

Rappelons que les valeurs des paramètres de linéarité  $\tau_i$  et  $\alpha_i$  sont données dans le section

précédente en (6.23) et (6.24). En intégrant par parties l'intégrale de (6.25), on obtient :

$$\epsilon = l_0 : \sigma - l_0 : \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left( -\frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) g_2 \sigma \, d\tau + l_0 : \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right) g_2 \sigma \right]_0^t \quad (6.26)$$

Comme la contrainte  $\sigma$  est nulle à l'instant initial  $t = 0$  du chargement :

$$l_0 : \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \alpha_i \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) \right) g_2 \sigma \right]_0^t = 0 \quad (6.27)$$

D'où (6.26) devient :

$$\epsilon = l_0 : \sigma + l_0 : \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \right) g_2 \sigma \, d\tau \quad (6.28)$$

En tenant compte de l'égalité (6.6) entre le tenseur des complaisances viscoélastiques linéaires initial  $l_0$  et le tenseur des souplesses élastiques  $s$ , (6.28) s'écrit :

$$\epsilon = s : \sigma + s : \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} g_2 \sigma \, d\tau \quad (6.29)$$

A travers les études menées sur l'identification des lois de type Schapery, la fonction positive  $g_2$  de  $\sigma$  peut être exprimée suivant plusieurs formes différentes : linéaire par tronçon  $[\sigma(t_n); \sigma(t_{n+1})]$ , polynomiale de degrés 2, ou encore fonction linéaire de  $h(\sigma)$ , définie dans (6.5), par tronçon  $[h(\sigma(t_n)); h(\sigma(t_{n+1}))]$  [22].

De manière générale,  $g_2$  doit vérifier la condition thermodynamique  $g_2 > 0$  quelque soit l'état de contrainte  $\sigma$ . Mis à part cette condition,  $g_2$  peut être supposé avoir n'importe quelle forme du moment que la fonction reste positive le long du trajet de chargement. Toutefois, en généralisant le loi constitutive de Schapery à l'espace tridimensionnel, Lévesque [22] démontre que les fonctions de non linéarité  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sont des fonctions de  $h(\sigma)$  définie dans (6.5) :

$$h = \frac{1}{2} \sigma : l_0 : \sigma$$

Par conséquent, on suppose dans le présent travail que la fonction  $g_2$  est une fonction positive quelque soit l'état de contrainte dans le matériau, et fonction non seulement du champs  $\sigma$  mais aussi du tenseur  $h(\sigma)$  :

$$g_2(\sigma) = g_2(h(\sigma)) = g_2(\sigma : s : \sigma) \quad (6.30)$$

### a. Procédure d'identification de la fonction $g_2$

La plupart des auteurs qui ont proposé des méthodes d'identification de la loi de comportement de Schapery se sont appuyés sur des essais uniaxiaux de fluage-recouvrance illustrés à la figure 6.7. De cette manière, il est possible de connaître les fonctions de non linéarité  $g_i$  pour des valeurs ponctuelles de la contrainte appliquée  $\sigma_n = \sigma(t_n)$ . Cependant, cette approche comporte deux inconvénients. Le premier est qu'il est difficile de reproduire expérimentalement de façon exacte des essais de fluage-recouvrance, car il est difficile d'appliquer ou de retirer une force instantanément. Les algorithmes d'identification utilisent donc les données obtenues aux sauts de contrainte en supposant que l'essai est idéal. Par conséquent, il est fort probable que les valeurs numériques des paramètres identifiés afficheront des erreurs plus ou moins considérables. Le deuxième désavantage est lié au fait que les essais de fluage-recouvrance sont généralement traités séparément. Cela implique l'obtention de fonctions  $g_i(\sigma_n)$  qui oscillent en fonction de  $\sigma_n$ , ce qui n'a pas de sens physique.

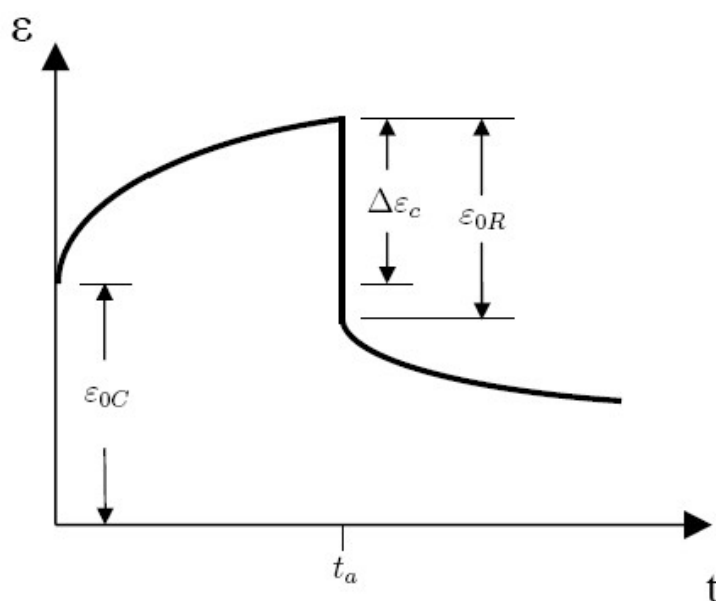


FIG. 6.7 – Représentation schématique de la réponse en déformation lors d'un essai de fluage-recouvrance

Par conséquent, afin d'éviter ces difficultés, le protocole expérimental permettant d'identifier la valeur de  $g_2$  que nous choisirons suit celui proposé par Lévesque [22] lors de sa thèse. Ainsi, au lieu d'effectuer des chargements de fluage-recouvrance, nous avons utilisé une histoire de chargement uniaxiale constituée de charges et de décharges à vitesse de contrainte constante

ainsi que des maintiens à différents paliers de contrainte. Ce type d'histoire de chargement est reproduite à la figure 6.8.

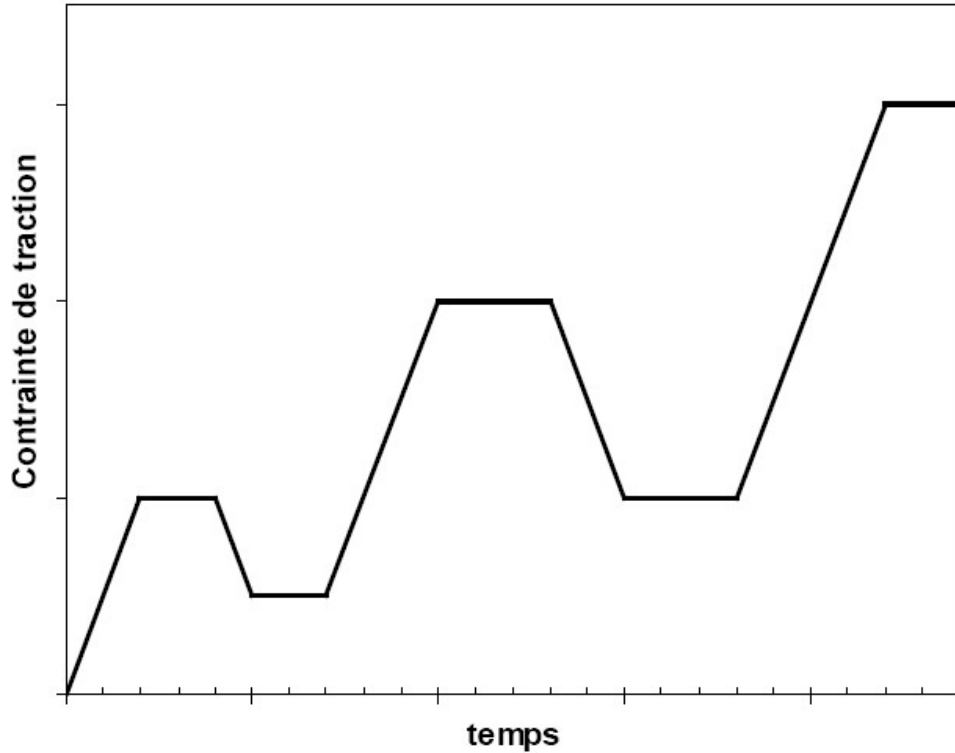


FIG. 6.8 – Histoire de chargement utilisée pour l'identification de la fonction  $g_2$  de non linéarité

Dans ce cas, la loi de comportement (6.29) décrivant le comportement uniaxial du matériau s'écrit sous sa forme unidimensionnelle :

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{1}{E} \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} g_2(\sigma^2) \sigma d\tau \quad (6.31)$$

où d'après (6.30),  $g_2$  est fonction de  $h(\sigma)$  définie dans (6.5). Par conséquent, dans le cas d'un essai uniaxial,  $g_2$  est fonction du carré de la contrainte longitudinale  $\sigma^2$ .

De ce fait nous supposons que la fonction  $g_2$  à déterminer est continue dans le temps, et a une forme polynomiale en fonction du carré de la contrainte  $\sigma^2$  :

$$g_2(\sigma^2) = X_n \sigma^n + X_{n-2} \sigma^{n-2} + \dots + X_2 \sigma^2 + 1 \quad \text{avec } n \text{ entier pair} \quad (6.32)$$

où les coefficients  $X_k$  ( $k = 2, 4, \dots, n-2, n$ ) sont des constantes positives.

En injectant l'expression supposée (6.32) de  $g_2$  dans la loi de comportement (6.31), on obtient :

$$\begin{aligned}
\epsilon(t) &= s : \sigma(t) + s : \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} (X_n \sigma^n + X_{n-2} \sigma^{n-2} + \dots + X_2 \sigma^2 + 1) \sigma d\tau \\
&= s : \sigma(t) + s : \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\alpha_i}{\tau_i} \left( X_n \underbrace{\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \sigma^{n+1} d\tau}_{f_n(t,\sigma)} + X_{n-2} \underbrace{\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \sigma^{n-1} d\tau}_{f_{n-2}(t,\sigma)} + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X_2 \underbrace{\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} \sigma^3 d\tau}_{f_2(t,\sigma)} + \underbrace{\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}} d\tau}_{f_0(t,\sigma)} \right) \right] \tag{6.33}
\end{aligned}$$

où les fonctions  $f_k(t, \sigma)$  sont données par l'histoire du chargement et les inconnus  $X_k$  sont les paramètres à déterminer pour identifier la fonction  $g_2$ .

Comme pour la procédure d'identification des paramètres de linéarité, on détermine à partir de (6.33) les expressions des fonctions de la déformation pour chaque segment de l'histoire de chargement appliqué :

$$\epsilon^{th}(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{E} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\alpha_i}{\tau_i} \left( X_n f_n(t, \sigma) + X_{n-2} f_{n-2}(t, \sigma) + \dots + X_2 f_2(t, \sigma) + f_0(t, \sigma) \right) \right] \tag{6.34}$$

Les expressions analytiques (ou théoriques) de la déformation pour chaque segment de l'histoire de chargement appliqué forment ainsi un système d'équations à partir duquel on établit la procédure d'identification des coefficients  $X_k$  de la fonction  $g_2$ . Ce schéma consiste en une succession d'étapes :

- On choisit tout d'abord le nombre  $n/2$  de coefficients  $X_k$  de  $g_2(\sigma^2)$  à déterminer.
- On mesure ensuite  $n/2$  valeurs de déformations  $\epsilon_l^{exp} = \epsilon^{exp}(t_l)$  sur la courbe expérimentale obtenue lors de l'essai à  $n/2$  instants  $t_l$  de l'histoire du chargement. Les valeurs recueillies doivent être uniformément réparties sur toute l'étendue de la courbe afin d'obtenir une approximation optimale de la réponse réelle du matériau.
- Les  $n/2$  expressions analytiques  $\epsilon_l^{th} = \epsilon^{th}(t_l)$  sont ensuite déterminées aux instants  $t_l$

définis dans l'étape précédente, suivant l'expression (6.34).

- On résout le système de  $n/2$  équations à  $n/2$  inconnues  $X_k$  :

$$\epsilon_l^{exp} = \epsilon_l^{th}(X_2, X_4, \dots, X_{n-2}, X_n) \quad l = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} \quad (6.35)$$

On en déduit l'ensemble  $(X_2, X_4, \dots, X_{n-2}, X_n)$  définissant la fonction  $g_2(\sigma^2)$  tels que  $g_2(\sigma^2) > 0$ .

## b. Résultats et validation expérimentale

La loi constitutive de type Schapery ne prenant pas en compte l'irréversibilité du comportement [1] [22], le domaine de validité est déterminé par la réalisation d'une série d'essais où l'histoire du chargement, du même type que celle illustrée à la figure 6.2, est imposée jusqu'à un niveau de contrainte  $\sigma$  croissant d'un essai à l'autre. Dans chacun de ces essais, l'étape de maintien à contrainte nulle est prolongée pendant une période suffisamment longue afin de permettre au matériau de reprendre sa forme initiale. On admet que la contrainte de maintien  $\sigma$  à partir de laquelle une déformation résiduelle est observée à la fin de la durée de l'essai définit la limite supérieure du domaine de validité de la loi de comportement utilisée. Suite à cette série d'essais, le seuil de contrainte délimitant le domaine de validité de la loi est évalué à approximativement 19 MPa (contrainte pour laquelle la déformation résiduelle en fin d'essai est très faible).

En tenant compte des résultats du paragraphe précédent, on réalise alors un essai uniaxial dont l'histoire du chargement imposé est illustrée à la figure 6.9. Ce chargement est composé de rampes de charge et de décharge à vitesse de contrainte constante  $|\dot{\sigma}| = 0,02$  MPa/s entre lesquelles on impose des maintiens. La contrainte maximale atteinte lors de cet essai est fixée à 16 MPa, afin de réaliser l'identification de la fonction  $g_2$  en respectant le domaine de validité de la loi (6.33).



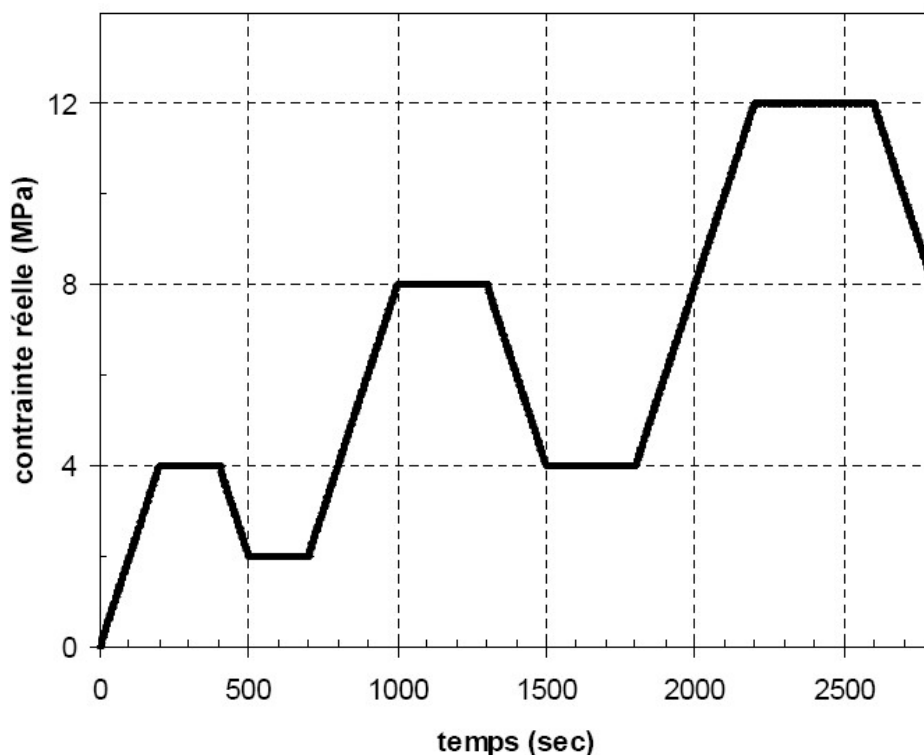


FIG. 6.9 – Histoire de chargement utilisée pour l'identification des paramètres de non linéarité

Après avoir effectué de nombreuses fois la procédure d'identification de la fonction  $g_2$  en faisant varier le nombre de coefficients  $X_k$ , les résultats ont révélé qu'une interpolation convenable des courbes expérimentales pouvait être obtenue en choisissant 2 inconnues  $X_k$  à déterminer :  $X_4$  et  $X_2$ .

En choisissant les instants  $t_l$  auxquels on mesure les valeurs expérimentales des déformations et leurs expressions analytiques correspondantes :

$$t_1 = 1200 \text{ s} , \quad t_2 = 2400 \text{ s}$$

on résout le système d'équations (6.35) et on trouve les inconnues  $X_k$  :

$$X_4 = 1.100943995 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-4} , \quad X_2 = 7.155217422 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-2} , \quad g_2(\sigma) = X_4 \sigma^4 + X_2 \sigma^2 + 1 \quad (6.36)$$

La fonction  $g_2$  ainsi déterminée en fonction de  $\sigma$  est continue, égale à 1 à l'instant initial et positive tout au long du trajet de chargement imposé.

La figure 6.10 montre la réponse en déformation obtenue par la loi constitutive uniaxiale (6.33) dans laquelle les résultats numériques (6.36) ont été injectés. Cette courbe théorique est comparée avec la réponse expérimentale en déformation dans le cadre de l'essai effectué pour l'identification de l'expression de la fonction de non linéarité  $g_2$  en fonction de  $\sigma$  et dont l'histoire du chargement est illustrée à la figure 6.9.

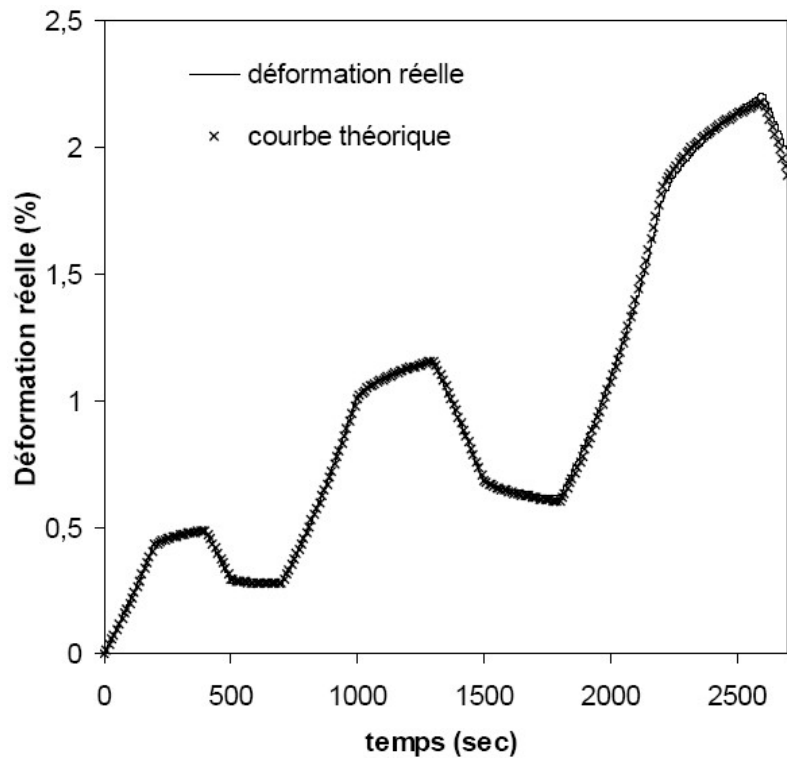


FIG. 6.10 – Déformation expérimentale observée et déformation théorique déterminée lors de l'essai uniaxial d'identification des paramètres de non linéarité

On remarque une très bonne adéquation entre la courbe issue de la loi de comportement identifiée et la réponse expérimentale. Ces résultats nous permettent alors de valider les valeurs identifiées précédemment. Dans la section suivante, nous effectuerons deux essais de traction uniaxiale afin d'analyser la loi de comportement identifiée et de mesurer son domaine de validité par rapport au comportement expérimental du polypropylène étudié.

#### 6.3.4 Validation de la loi de comportement identifiée

Dans le but d'apprécier la précision de la loi constitutive de type Schapery identifiée par nos soins dans le cadre de la caractérisation du comportement du matériau étudié, deux essais de traction

uniaxiale à vitesses de déformation longitudinales constantes  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$  et  $\dot{E} = 10^{-3} s^{-1}$  ont été menés. Les figures 6.11 et 6.12 comparent les courbes de traction contrainte-déformation observées expérimentalement et obtenue par la loi de comportement identifiée.

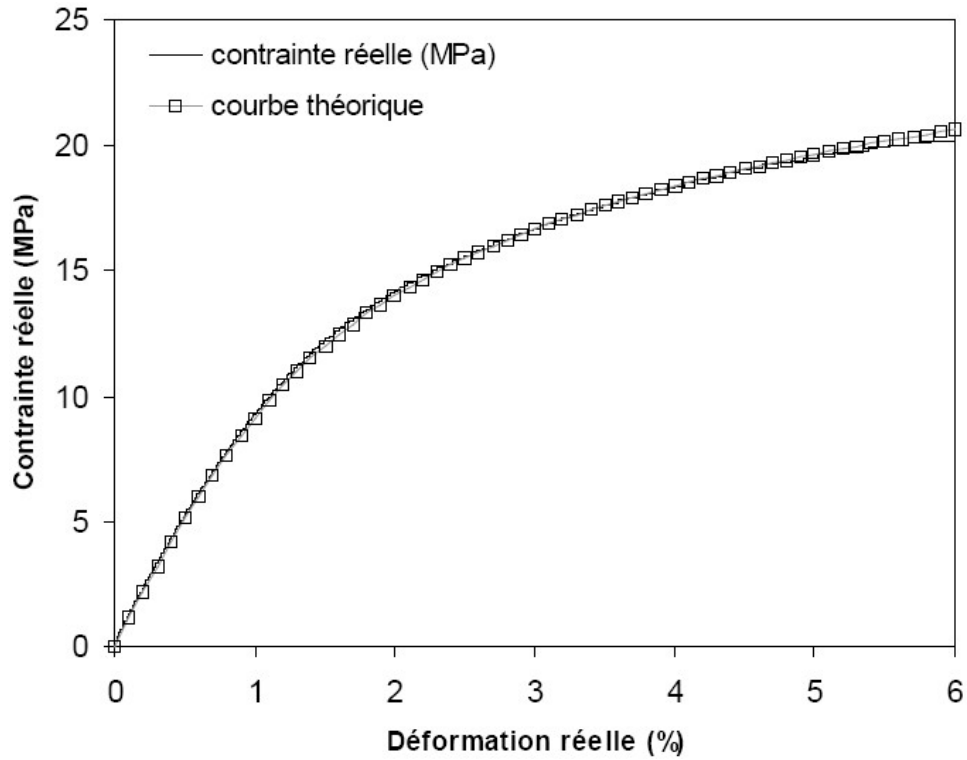


FIG. 6.11 – Comportement du polypropylène étudié en traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$

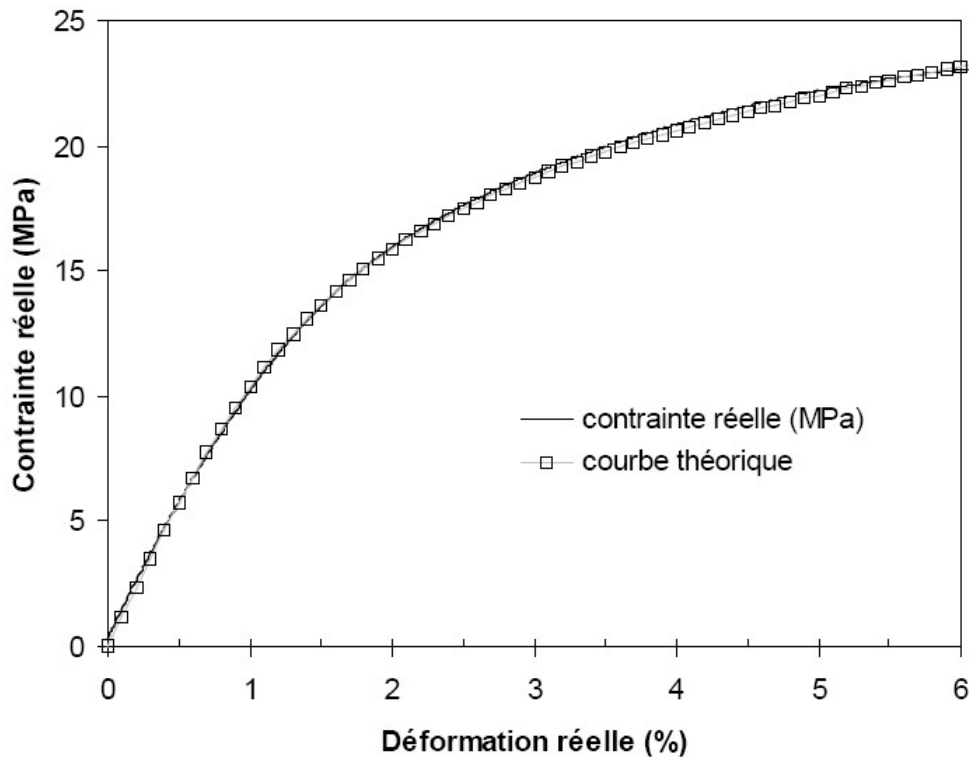


FIG. 6.12 – Comportement du polypropylène étudié en traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

On constate que pour des déformations allant jusqu'à 6% (petites et moyennes déformations), la loi constitutive permet de prédire le comportement viscoélastique non linéaire du matériau considéré avec une précision remarquable. De plus, cet excellent accord entre les courbes expérimentale et théorique est constaté dans les deux cas de vitesses de déformation imposées.

En outre, on remarque que dans le cas d'un essai de traction à vitesse de déformation constante, l'excellente précision de la loi de type Schapery définie dans ce travail dépasse son domaine de validité déterminé précédemment pour une contrainte maximale de 19 MPa.

### 6.3.5 Conclusion

Afin d'étudier le comportement mécanique du polypropylène, nous avons choisi une loi constitutive de type Schapery qui s'avère, selon les travaux déjà menés auparavant [1] [22][92], adaptée aux matériaux polymères.

Dans ce travail, l'identification de cette loi de comportement implique deux étapes différentes

de calcul : une étape destinée à la détermination des composantes de la complaisance viscoélastique linéaire, suivie d'une procédure d'identification de la fonction  $g_2(\sigma)$  de non linéarité.

La première étape d'identification s'effectue dans le domaine de la viscoélasticité linéaire, c'est-à-dire pour des contraintes faibles où les fonctions de non linéarité  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  et  $a_\sigma$  de la loi de Schapery ont des valeurs présumées égales à 1.

La seconde étape s'inspire de la loi de Schapery observée par Lévesque [22] sur le comportement du polypropylène. Elle est résolue grâce à un unique essai uniaxial, plutôt qu'une série d'essais de fluage-recouvrance, où l'histoire du chargement imposé est composée de rampes de charges et de décharges à vitesse de contrainte constante et de maintiens.

Les résultats issus d'essais uniaxiaux de traction à vitesse de déformation constante montrent clairement que la loi constitutive identifiée convient à la prédiction du comportement mécanique du polypropylène.

## 6.4 Application du nouveau modèle micromécanique au mélange polypropylène/talc

### 6.4.1 Introduction

Après avoir identifié les différents paramètres de la loi constitutive de Schapery du comportement viscoélastique non linéaire du polypropylène, l'objectif est maintenant de prédire le comportement effectif des mélanges hétérogènes formés de polypropylène et de talc.

L'application du nouveau modèle micromécanique au mélange étudié nécessite une réécriture de la loi constitutive de type Schapery. En effet, les modèles de transition d'échelle s'inspirant des méthodes à variables internes utilisent des lois de comportement de formes différentielles (voir chapitre 2) et ne sont pas adaptés aux lois ayant une formulation fonctionnelle où apparaissent des intégrales de convolution dans le temps. Il est donc nécessaire de procéder au préalable à une transformation de la relation constitutive de Schapery en une loi de comportement différentielle.

La nouvelle forme de la loi de comportement obtenue permet de définir le problème hétérogène viscoélastique non linéaire à partir duquel le modèle micromécanique proposé peut être appliqué. Le mélange polypropylène/talc est alors représenté par un matériau test hétérogène de type inclusion-matrice pour lequel le schéma de résolution de l'estimation de Mori-Tanaka est mené.

Les résultats issus du modèle sont ensuite comparés avec les résultats expérimentaux dans le cadre d'essais de traction à vitesse de déformation constante, afin de pouvoir apprécier la qualité de la loi constitutive et du modèle dans la prédiction du comportement effectif du matériau hétérogène de l'étude.

### 6.4.2 Réécriture de la loi constitutive de Schapery sous une forme différentielle

Le modèle de transition d'échelle proposé dans ce travail s'applique aux lois de comportement de forme différentielle. De ce fait, afin de pouvoir l'appliquer à la loi constitutive de Schapery utilisée dans ce chapitre, il est nécessaire de procéder au préalable à une réécriture de cette loi

de comportement de formulation fonctionnelle (voir chapitre 2) sous une forme différentielle.

Pour cela, on posant  $\lambda_m = \frac{1}{\tau_m}$ , on rappelle la loi de comportement (6.29) s'écrivant :

$$\epsilon(t) = s : \sigma(t) + s : \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} g_2(\sigma) \sigma(\tau) d\tau \quad (m = 1, 2, 3) \quad (6.37)$$

Si l'on considère une fonction  $f(t)$  s'écrivant comme :

$$f(t) = \int_0^t u(t-\tau) v(\tau) d\tau$$

La dérivée par rapport au temps de cette fonction peut s'exprimer comme :

$$\dot{f}(t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} v(\tau) d\tau + u(0) v(t) - u(t) v(0) \quad (6.38)$$

En posant :

$$\begin{cases} u = e^{-\lambda_m(t-\tau)} \\ v = g_2(\sigma) \sigma \end{cases} \quad (6.39)$$

la dérivée par rapport au temps de la loi (6.37) devient alors selon (6.39) :

$$\dot{\epsilon}(t) = s : \dot{\sigma}(t) + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \sigma(t) - s : \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} g_2(\sigma) \sigma(\tau) d\tau \quad (6.40)$$

De la même manière, en suivant (6.39), la dérivée dans le temps de (6.40) donne :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}(t) &= s : \ddot{\sigma}(t) + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) [g_2(\sigma) \dot{\sigma}(t) + \dot{g}_2(\sigma) \sigma(t)] - s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) g_2(\sigma) \sigma(t) \\ &\quad + s : \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^3 \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} g_2(\sigma) \sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.41)$$

On applique à niveau la dérivée par rapport au temps de la loi de comportement précédente pour obtenir une troisième relation constitutive exprimée par la dérivée troisième du champs de déformations :

$$\begin{aligned} \ddot{\dot{\epsilon}}(t) &= s : \ddot{\dot{\sigma}}(t) + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) [\dot{g}_2(\sigma) \dot{\sigma}(t) + g_2(\sigma) \ddot{\sigma}(t) + \ddot{g}_2(\sigma) \sigma(t) + \dot{g}_2(\sigma) \dot{\sigma}(t)] \\ &\quad - s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) [g_2(\sigma) \dot{\sigma}(t) + \dot{g}_2(\sigma) \sigma(t)] + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^3 \right) g_2(\sigma) \sigma(t) \\ &\quad - s : \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^4 \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} g_2(\sigma) \sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.42)$$

On obtient ainsi quatre équations traduisant le comportement du matériau sous quatre ordres de dérivée du tenseur  $\epsilon$  différentes dans le temps. Dans chacune de ces équations, on remarque la présence des intégrales  $Y_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) :

$$Y_m = \alpha_m \lambda_m \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} g_2(\sigma) \sigma(\tau) d\tau \quad (6.43)$$

L'idée est alors d'utiliser le système formé par les équations (6.37), (6.40) et (6.41) dans le but d'exprimer les termes  $Y_m$ , considérés comme inconnues, en fonction des autres composantes du système. Autrement dit, il s'agit de résoudre le système de trois équations à trois inconnues  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  suivant :

$$\begin{cases} \epsilon = s : \sigma + s : (Y_1 + Y_2 + Y_3) \\ \dot{\epsilon} = s : \dot{\sigma} + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \sigma - s : (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3) \\ \ddot{\epsilon} = s : \ddot{\sigma} + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) [g_2(\sigma) \dot{\sigma} + \dot{g}_2(\sigma) \sigma] - s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) g_2(\sigma) \sigma \\ \quad + s : (\lambda_1^2 Y_1 + \lambda_2^2 Y_2 + \lambda_3^2 Y_3) \end{cases} \quad (6.44)$$

ou encore :

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 + Y_3 = c : \epsilon - \sigma \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = -c : \dot{\epsilon} + \dot{\sigma} + \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \sigma \\ \lambda_1^2 Y_1 + \lambda_2^2 Y_2 + \lambda_3^2 Y_3 = c : \ddot{\epsilon} - \ddot{\sigma} - \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) [g_2(\sigma) \dot{\sigma} + \dot{g}_2(\sigma) \sigma] \\ \quad + \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) g_2(\sigma) \sigma \end{cases} \quad (6.45)$$

où  $c = s^{-1}$  est le tenseur des modules élastiques locaux. Après résolution du système (6.45), les termes  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  sont substitués par leurs expressions dans la quatrième équation du comportement (6.42). On obtient finalement l'équation suivante :



$$\begin{aligned}
\ddot{\epsilon} + \mathcal{A} \ddot{\epsilon} + \mathcal{B} \dot{\epsilon} + \mathcal{D} \epsilon &= s : \ddot{\sigma} + \mathcal{A} s : \dot{\sigma} + \mathcal{B} s : \dot{\sigma} + \mathcal{D} s : \sigma + s : \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \ddot{\sigma} \\
&+ s : \left[ 2 \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) \dot{g}_2(\sigma) - \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) g_2(\sigma) + \mathcal{A} \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \right] \dot{\sigma} \\
&+ s : \left[ \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) \ddot{g}_2(\sigma) - \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) \dot{g}_2(\sigma) + \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^3 \right) g_2(\sigma) \right. \\
&\left. + \mathcal{A} \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) \dot{g}_2(\sigma) - \mathcal{A} \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) g_2(\sigma) + \mathcal{B} \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) g_2(\sigma) \right] \sigma
\end{aligned} \tag{6.46}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \frac{\lambda_1^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_3^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_3^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \mathcal{B} = (\lambda_2 + \lambda_3) \mathcal{A} - \frac{\lambda_2^3 - \lambda_3^3}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ \mathcal{D} = \lambda_3 \left( \lambda_2 \mathcal{A} - \frac{\lambda_2^3 - \lambda_3^3}{\lambda_2 - \lambda_3} + \lambda_3^2 \right) \end{cases}$$

L'équation (6.46) représente une nouvelle loi constitutive du comportement du matériau, obtenue à partir de la formulation fonctionnelle de la loi de Schapery, et contenant :

- quatre ordres de dérivées successifs des grandeurs de contrainte  $\ddot{\sigma}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\sigma$  et de déformation  $\ddot{\epsilon}$ ,  $\ddot{\epsilon}$ ,  $\dot{\epsilon}$ ,  $\epsilon$  ;
- le tenseur des souplesses élastiques  $s$  ;
- les coefficients constants  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$  dépendant exclusivement des inverses des constantes de temps  $\lambda_m$  ;
- les sommes des produits  $\sum_{m=1}^3 (\alpha_m \lambda_m)$ ,  $\sum_{m=1}^3 (\alpha_m \lambda_m^2)$ ,  $\sum_{m=1}^3 (\alpha_m \lambda_m^3)$  ;
- et la fonction de non linéarité  $g_2$  ainsi que ses dérivées  $\dot{g}_2$  et  $\ddot{g}_2$ .

Cette nouvelle équation a l'avantage de s'écrire sous une forme différentielle, permettant ainsi, l'application de la nouvelle démarche de transition d'échelle proposée.

### 6.4.3 Estimation de Mori-Tanaka du comportement viscoélastique non-linéaire du mélange polypropylène/talc

#### a. Equations de champs du problème hétérogène

Dans le but d'appliquer le modèle micromécanique présenté dans les chapitres 4 et 5 au mélange polypropylène/talc, on définit tout d'abord les équations de champs du problème hétérogène correspondant.

Avant de décrire le problème hétérogène, on pose :

$$\begin{cases} \beta_1 = \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m \right) \\ \beta_2 = \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^2 \right) \\ \beta_3 = \left( \sum_{m=1}^3 \alpha_m \lambda_m^3 \right) \end{cases} \quad (6.47)$$

On introduit également le champ des vitesses de déformation fictif  $\dot{\epsilon}^*$  et le tenseur des vitesses de contrainte fictif  $\dot{\sigma}^*$  tels que :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^* = \ddot{\epsilon} + \mathcal{A} \ddot{\epsilon} + \mathcal{B} \dot{\epsilon} + \mathcal{D} \epsilon \\ \dot{\sigma}^* = \ddot{\sigma} + \mathcal{A} \ddot{\sigma} + \mathcal{B} \dot{\sigma} + \mathcal{D} \sigma \end{cases} \quad (6.48)$$

$\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{D}$  étant des coefficients constants, le champ  $\dot{\epsilon}^*$  est cinématiquement admissible et  $\dot{\sigma}^*$  est statiquement admissible :

$$\begin{cases} \text{div } \dot{\sigma}^* = 0 \\ \dot{\epsilon}^* = \nabla^s . v^* \\ v^{*d} = \dot{\epsilon}^{*0} . x \end{cases} \quad (6.49)$$

où  $v^* = \mathcal{A} \ddot{v} + \mathcal{B} \dot{v} + \mathcal{D} v$ .

On définit le tenseur non linéaire local  $m$  s'exprimant de la manière suivante :

$$m(r, \sigma) = \beta_1 g_2(r, \sigma) s(r) \quad (6.50)$$

Défini comme le produit d'une fonction scalaire avec le tenseur des souplesses élastiques,  $m$  est un tenseur d'ordre 4 qui possède les mêmes propriétés de symétrie que  $s$  à savoir :

$$m_{ijkl} = m_{jikl}, \quad m_{ijkl} = m_{ijlk}, \quad m_{ijkl} = m_{klij} \quad (6.51)$$

De plus, comme  $m$  dépend de la fonction  $g_2$ , ce tenseur traduit le comportement local viscoélastique non linéaire du matériau hétérogène et peut être considéré comme un tenseur de souplesses viscoélastiques.

Les relations (6.47), (6.48) et (6.50) permettent de réécrire la loi (6.46) suivant la forme :

$$\dot{\epsilon}^* = s : \dot{\sigma}^* + m : \ddot{\sigma} + \left[ 2 \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m \right] : \dot{\sigma} + \left[ \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m \right] : \sigma \quad (6.52)$$

L'équation (6.52) représente la loi constitutive du comportement local viscoélastique non linéaire provenant de la loi de Schapery considérée dans cette étude.

On considère donc un milieu hétérogène de volume  $V$ , de tenseur des complaisances élastiques locales  $s(r)$  (où  $s = c^{-1}$ ) et de tenseur des complaisances viscoélastiques non linéaires locales  $m(r, \sigma)$ . Dans le cadre des petites déformations et de l'équilibre quasi-statique, les équations de champs de ce problème sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}^* = c : \dot{\epsilon}^* - c : m : \ddot{\sigma} + c : \left[ 2 \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m \right] : \dot{\sigma} \\ \quad + c : \left[ \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m \right] : \sigma \quad \text{Loi de comportement locale} \\ \text{div } \dot{\sigma}^* = 0, \quad \text{div } \ddot{\sigma} = 0, \quad \text{div } \dot{\sigma} = 0, \quad \text{div } \sigma = 0 \quad \text{conditions d'équilibre} \\ \dot{\epsilon}^* = \nabla^s . v^* \quad \text{équation de compatibilité} \\ \quad \text{cinématique} \\ v^{*d} = \dot{\epsilon}^{*0} . x \quad \text{conditions aux limites} \end{array} \right. \quad (6.53)$$

Introduisons maintenant un milieu homogène de référence de complaisances élastiques  $S$  et de fonction de non linéarité  $g_2^0$  permettant d'écrire les décompositions sur le tenseur local  $s(r)$  et la fonction scalaire locale  $g_2(r, \sigma)$  qui suivent :

$$\begin{cases} s(r) = S + \delta s(r) \\ g_2(r, \sigma) = g_2^0 + \delta g_2(r, \sigma) \end{cases} \quad (6.54)$$

En dérivant  $g_2$  par rapport au temps dans (6.54), il vient :

$$\begin{cases} \dot{g}_2(r, \sigma) = \dot{g}_2^0 + \delta \dot{g}_2(r, \sigma) \\ \ddot{g}_2(r, \sigma) = \ddot{g}_2^0 + \delta \ddot{g}_2(r, \sigma) \end{cases} \quad (6.55)$$

D'après les décompositions précédentes et en tenant compte de la définition (6.50) du tenseur local  $m$ , on en déduit les décompositions :

$$\begin{cases} m(r, \sigma) = M + \delta m(r, \sigma) & \text{ou } M = \beta_1 g_2^0 S \\ \dot{m}(r, \sigma) = \dot{M} + \delta \dot{m}(r, \sigma) & \text{ou } \dot{M} = \beta_1 \dot{g}_2^0 S \\ \ddot{m}(r, \sigma) = \ddot{M} + \delta \ddot{m}(r, \sigma) & \text{ou } \ddot{M} = \beta_1 \ddot{g}_2^0 S \end{cases} \quad (6.56)$$

En substituant les décompositions (6.54), (6.55) et (6.56) dans la loi de comportement (6.52), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^* &= C : \dot{\epsilon}^* + \delta c : \left[ \dot{\epsilon}^* - m : \ddot{\sigma} - \left[ 2 \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m \right] : \dot{\sigma} - \left[ \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m \right] : \sigma \right] - C : \left[ \delta m : \ddot{\sigma} + \left[ 2 \delta \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \dot{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \delta \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \sigma \right] - C : M : \ddot{\sigma} - 2C : \dot{M} : \dot{\sigma} \\ &\quad - \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) C : M : \dot{\sigma} - C : \ddot{M} : \sigma - \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) C : \dot{M} : \sigma \\ &\quad - \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) C : M : \sigma \end{aligned} \quad (6.57)$$

Notons par ailleurs que :

$$\begin{aligned} K_1 &= \dot{\epsilon}^* - m : \ddot{\sigma} - \left[ 2 \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m \right] : \dot{\sigma} - \left[ \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m} \right. \\ &\quad \left. + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m \right] : \sigma \\ K_1 &= s : \dot{\sigma}^* \end{aligned} \quad (6.58)$$

En posant :

$$\begin{aligned}
K = \delta c : K_1 - C : & \left[ \delta m : \ddot{\sigma} + \left[ 2 \delta \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \dot{\sigma} \right. \\
& \left. + \left[ \delta \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \sigma \right]
\end{aligned} \quad (6.59)$$

et en appliquant la condition d'équilibre (6.49) sur le champ de contraintes fictif  $\dot{\sigma}^*$  sur l'équation (6.57), l'équation de Navier du problème hétérogène est obtenue :

$$\begin{aligned}
div(C : \dot{\epsilon}^*) + div K - div(C : M : \ddot{\sigma}) - 2 div(C : \dot{M} : \dot{\sigma}) - \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) div(C : M : \dot{\sigma}) \\
- div(C : \ddot{M} : \sigma) - \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) div(C : \dot{M} : \sigma) - \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) div(C : M : \sigma) = 0
\end{aligned} \quad (6.60)$$

Or, d'après les expressions (6.56) des tenseurs  $M$ ,  $\dot{M}$  et  $\ddot{M}$  on a :

$$\begin{cases} C : M = \beta_1 g_2^0 I \\ C : \dot{M} = \beta_1 \dot{g}_2^0 I \\ C : \ddot{M} = \beta_1 \ddot{g}_2^0 I \end{cases} \quad (6.61)$$

On injecte alors les expressions (6.61) dans (6.60) et on obtient :

$$\begin{aligned}
div(C : \dot{\epsilon}^*) + div K - \beta_1 g_2^0 div \ddot{\sigma} - 2 \beta_1 \dot{g}_2^0 div \dot{\sigma} - \beta_1 g_2^0 \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) div \dot{\sigma} \\
- \beta_1 \ddot{g}_2^0 div \sigma - \beta_1 \dot{g}_2^0 \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) div \sigma - \beta_1 g_2^0 \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) div \sigma = 0
\end{aligned} \quad (6.62)$$

Les conditions d'équilibre du système (6.53) permettent de réduire l'équation de Navier (6.62) :

$$div(C : \dot{\epsilon}^*) + div K = 0 \quad (6.63)$$

La relation linéaire entre les tenseurs  $M$  et  $S$  du milieu homogène de référence permet d'annuler les termes de nature "volumiques" de l'équation (6.60). On se retrouve finalement avec une équation de Navier (6.63) composée de l'opérateur de Navier élastique appliqué au champ  $v^*$  et d'un terme représentant des forces volumiques fictives dépendant uniquement des fluctuations élastiques et visqueuses. Cette équation de Navier est donc adaptée à la transition d'échelle classique.

## b. Equation intégrale

En suivant la démarche classique de formulation intégrale par les techniques des fonctions de Green associées au tenseur des modules élastiques homogène  $C$  sur l'équation de Navier (6.63), on obtient l'équation intégrale du problème hétérogène :

$$\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}^{*0} + \Gamma^C * K \quad (6.64)$$

En injectant à présent les expressions (6.48), (6.58) et (6.59) dans (6.64), il vient :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + \mathcal{A} \dot{\epsilon} + \mathcal{B} \epsilon + \mathcal{D} \epsilon &= \ddot{\epsilon}^0 + \mathcal{A} \dot{\epsilon}^0 + \mathcal{B} \epsilon^0 + \mathcal{D} \epsilon^0 \\ &+ \Gamma^C * \delta c : s : (\ddot{\sigma} + \mathcal{A} \dot{\sigma} + \mathcal{B} \sigma + \mathcal{D} \sigma) \\ &- \Gamma^C * C : \delta m : \ddot{\sigma} - \Gamma^C * C : \left[ 2 \delta \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \dot{\sigma} \\ &- \Gamma^C * C : \left[ \delta \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \sigma \end{aligned} \quad (6.65)$$

Notons par ailleurs que :

$$\delta c : s : (\ddot{\sigma} + \mathcal{A} \dot{\sigma} + \mathcal{B} \sigma + \mathcal{D} \sigma) = -C : \delta s : (\ddot{\sigma} + \mathcal{A} \dot{\sigma} + \mathcal{B} \sigma + \mathcal{D} \sigma) \quad (6.66)$$

La relation (6.66) permet finalement d'écrire (6.65) sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + \mathcal{A} \dot{\epsilon} + \mathcal{B} \epsilon + \mathcal{D} \epsilon &= \ddot{\epsilon}^0 + \mathcal{A} \dot{\epsilon}^0 + \mathcal{B} \epsilon^0 + \mathcal{D} \epsilon^0 \\ &- \Gamma^C * C : \delta s : (\ddot{\sigma} + \mathcal{A} \dot{\sigma} + \mathcal{B} \sigma + \mathcal{D} \sigma) \\ &- \Gamma^C * C : \delta m : \ddot{\sigma} - \Gamma^C * C : \left[ 2 \delta \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \dot{\sigma} \\ &- \Gamma^C * C : \left[ \delta \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \delta m \right] : \sigma \end{aligned} \quad (6.67)$$

L'équation (6.67) représente l'équation intégrale du problème hétérogène traduisant les interactions entre les hétérogénéités du matériau considéré. Cette équation peut se ramener au problème de l'inclusion viscoélastique non linéaire et est adaptée aux méthodes d'homogénéisation déjà présentées dans les chapitres 4 et 5, à savoir l'approximation autocohérente et l'estimation de Mori-Tanaka.

### c. Problème de l'inclusion viscoélastique non-linéaire

La relation de localisation reliant les grandeurs locales de l'inclusion et les grandeurs homogènes du milieu de référence est obtenue en ramenant l'équation intégrale (6.67) dans le domaine de l'inclusion :

$$\begin{aligned}
\ddot{\epsilon}^I + \mathcal{A} \ddot{\epsilon}^I + \mathcal{B} \dot{\epsilon}^I + \mathcal{D} \epsilon^I &= \ddot{\epsilon}^0 + \mathcal{A} \ddot{\epsilon}^0 + \mathcal{B} \dot{\epsilon}^0 + \mathcal{D} \epsilon^0 \\
&- T^C : C : \Delta s^I : (\ddot{\sigma}^I + \mathcal{A} \ddot{\sigma}^I + \mathcal{B} \dot{\sigma}^I + \mathcal{D} \sigma^I) \\
&- T^C : C : \Delta m^I : \dot{\sigma}^I - T^C : C : \left[ 2 \Delta \dot{m}^I \right. \\
&+ \left. \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \Delta m^I \right] : \dot{\sigma}^I - T^C : C : \left[ \Delta \ddot{m}^I + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \Delta \dot{m}^I \right. \\
&+ \left. \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \Delta m^I \right] : \sigma^I
\end{aligned} \tag{6.68}$$

où  $T^C$  est le tenseur d'Eshelby et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta s^I = s^I - S \\ \Delta m^I = m^I - M \\ \Delta \dot{m}^I = \dot{m}^I - \dot{M} \\ \Delta \ddot{m}^I = \ddot{m}^I - \ddot{M} \end{array} \right. \tag{6.69}$$

### d. Homogénéisation de Mori-Tanaka

Rappelons que le principe de Mori-Tanaka consiste à assimiler le milieu de référence à la phase matrice :

$$\epsilon^0 = \epsilon^M, \quad C = c^M, \quad M = m^M \tag{6.70}$$

En injectant les relations de moyenne spatiale sur les grandeurs de déformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = f \epsilon^I + (1-f) \epsilon^M \\ \dot{E} = f \dot{\epsilon}^I + (1-f) \dot{\epsilon}^M \\ \ddot{E} = f \ddot{\epsilon}^I + (1-f) \ddot{\epsilon}^M \\ \dddot{E} = f \dddot{\epsilon}^I + (1-f) \dddot{\epsilon}^M \end{array} \right. \tag{6.71}$$

et en appliquant le principe de Mori-Tanaka selon les relations (6.70) à la relation de localisation (6.68), on obtient, dans le cas d'inclusions au comportement purement élastique ( $m^I = 0$ ,  $\dot{m}^I = 0$  et  $\ddot{m}^I = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-f} s^I : (\ddot{\sigma}^I + \mathcal{A} \ddot{\sigma}^I + \mathcal{B} \dot{\sigma}^I + \mathcal{D} \sigma^I) &= \frac{1}{1-f} (\ddot{E} + \mathcal{A} \ddot{E} + \mathcal{B} \dot{E} + \mathcal{D} E) \\
 - T^C : C : \Delta s^I : \ddot{\sigma}^I - T^C : C : (\mathcal{A} \Delta s^I + \Delta m^I) : \ddot{\sigma}^I & \\
 - T^C : C : \left[ \mathcal{B} \Delta s^I + 2 \Delta \dot{m}^I + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \Delta m^I \right] : \dot{\sigma}^I & \\
 - T^C : C : \left[ \mathcal{D} \Delta s^I + \Delta \ddot{m}^I + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \Delta \dot{m}^I + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) \Delta m^I \right] : \sigma^I &
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Puis on applique la moyenne sur le volume  $V$  à la loi de comportement (6.52) du problème hétérogène. Après calcul, il vient :

$$\begin{aligned}
 (\ddot{E} + \mathcal{A} \ddot{E} + \mathcal{B} \dot{E} + \mathcal{D} E) &= f(s^I - s^M) : (\ddot{\sigma}^I + \mathcal{A} \ddot{\sigma}^I + \mathcal{B} \dot{\sigma}^I + \mathcal{D} \sigma^I) \\
 + s^M : (\ddot{\Sigma} + \mathcal{A} \ddot{\Sigma} + \mathcal{B} \dot{\Sigma} + \mathcal{D} \Sigma) + m^M : \dot{\Sigma} + \left[ 2 \dot{m}^M + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m^M \right] : \dot{\Sigma} & \\
 + \left[ \ddot{m}^M + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m}^M + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m^M \right] : \Sigma &
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

Les équations (6.72) et (6.73) définissent un système de relations entre les différentes variables internes du problème hétérogène :

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}^I = F(\ddot{\sigma}^I; \dot{\sigma}^I; \sigma^I; \ddot{\Sigma}; \dot{\Sigma}; \dot{\Sigma}; \Sigma) \\ \ddot{\Sigma} = G(\ddot{E}; \ddot{E}; \dot{E}; E; \ddot{\Sigma}; \dot{\Sigma}; \Sigma; \ddot{\sigma}^I; \dot{\sigma}^I; \sigma^I) \end{cases} \tag{6.74}$$

Le schéma de résolution de l'estimation de Mori-Tanaka est effectué à partir du système d'équations (6.74) par une discrétisation dans le temps où les variables internes sont déterminées à l'instant  $t_{n+1}$  par leurs valeurs à l'instant  $t_n$  de la même manière qu'en viscoélasticité linéaire.



#### 6.4.4 Résultats numériques du modèle de Mori-Tanaka et comparaison avec les résultats expérimentaux

##### a. Description mécanique et microstructurale du matériau test

Le matériau test sur lequel sont appliquées les simulations du modèle micromécanique représente le mélange polypropylène/talc. On suppose dans la suite de ce travail, que le comportement local de ce matériau hétérogène est isotrope compressible. Nous verrons dans la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux, que l'hypothèse d'isotropie peut être raisonnablement posée dans le cadre de la prédiction du comportement du mélange polypropylène/talc étudié. Ce matériau test est donc un mélange hétérogène biphasé formé d'une phase matrice  $M$  dans laquelle se trouvent des inclusions d'un même constituant  $I$ . La loi de comportement locale du matériau test est la relation constitutive de forme différentielle (6.52) :

$$\dot{\epsilon}^* = s : \dot{\sigma}^* + m : \ddot{\sigma} + \left[ 2 \dot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) m \right] : \dot{\sigma} + \left[ \ddot{m} + \left( \mathcal{A} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \dot{m} + \left( \mathcal{B} - \mathcal{A} \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) m \right] : \sigma$$

où  $s$  est le tenseur local des souplesses élastiques isotrope pouvant être entièrement défini par son module d'Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ ,  $m$  est le tenseur des souplesses visqueuses non linéaires défini comme (6.50) par :

$$m(r, \sigma) = \beta_1 g_2(r, \sigma) s(r)$$

où  $g_2$  désigne la fonction locale de non linéarité et dépend du champ  $\sigma$ . Les champs locaux fictifs  $\dot{\epsilon}^*$  et  $\dot{\sigma}^*$  sont donnés par les relations (6.48), tandis que les constantes de (6.52) dépendent toutes des paramètres de linéarité  $\lambda_m$  et  $\alpha_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ).

La phase matrice  $M$  représente le polypropylène du mélange étudié qui est le même que celui dont les paramètres de la loi de comportement (6.50) ont été identifiés dans la première partie de ce chapitre. Toutefois, les essais uniaxiaux réalisés et destinés à l'identification de la loi de type Schapery du comportement du polypropylène ne permettent pas de déterminer son coefficient de Poisson  $\nu^M$ . Pour cela, nous avons effectué des essais de vidéo-traction sur des éprouvettes de polypropylène lors desquels on impose une vitesse de déformation longitudinale constante  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$  et on mesure les déformations longitudinale  $\epsilon_t^M$  et transversale  $\epsilon_t^M$ . En calculant le rapport :

$$\nu^M = - \frac{\epsilon_t^M}{\epsilon_t^M} \quad (6.75)$$

on observe que le coefficient de compressibilité  $\nu^M$  du polypropylène est relativement constant et égal à environ 0,45.

D'autre part, les inclusions  $I$  représentent le talc du mélange étudié. Le talc est un matériau inorganique dont le comportement est fragile et élastique linéaire. La loi de comportement locale (6.52) appliquée au talc devient alors :

$$\epsilon^* = s^I : \dot{\sigma}^* \quad \text{avec} \quad m^I = 0$$

$s^I$  est le tenseur des souplesses élastiques isotrope entièrement défini par le module d'Young  $E^I = 70$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu^I = 0,29$  du talc étudié.

La figure 6.13 représente les propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test correspondant au mélange polypropylène/talc à partir duquel le modèle micromécanique est appliqué.

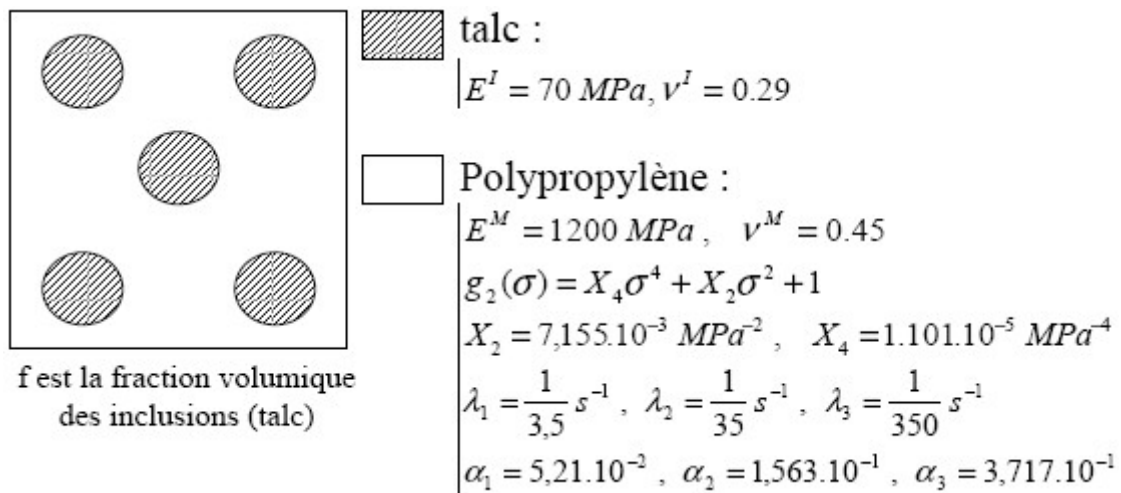


FIG. 6.13 – Propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test correspondant au mélange PP/talc

**b. Résultats du modèle proposé et comparaison avec les résultats expérimentaux**

Après l'application du modèle de transition d'échelle proposé sur le matériau test présenté sur la figure 6.13, les résultats numériques sont comparés avec les résultats expérimentaux obtenus en réalisant deux séries d'essais de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante sur les éprouvettes du mélange polypropylène/talc. Les échantillons du mélange sont classés en trois catégories de fractions volumiques de talc différentes ( $f = 0.1$ ,  $f = 0.2$  et  $f = 0.3$ ).

La première série d'essais est réalisée en imposant une vitesse de déformation longitudinale  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$ . Les figures 6.14, 6.15 et 6.16 illustrent les courbes contrainte-déformation issues de l'expérience et les courbes théoriques résultant des simulations du modèle sur le matériau test pour les fractions volumiques du talc  $f = 0.1$ ,  $f = 0.2$  et  $f = 0.3$ .

Cette comparaison entre l'expérience et le modèle est faite dans le cadre des petites déformations et ne prennent en compte théoriquement que les résultats se trouvant dans le domaine de validité du modèle, c'est-à-dire pour des contraintes inférieures à 19 MPa (comportement viscoélastique non linéaire réversible). Pour cette raison, les résultats obtenus au delà du seuil d'écoulement ne sont pas représentés.

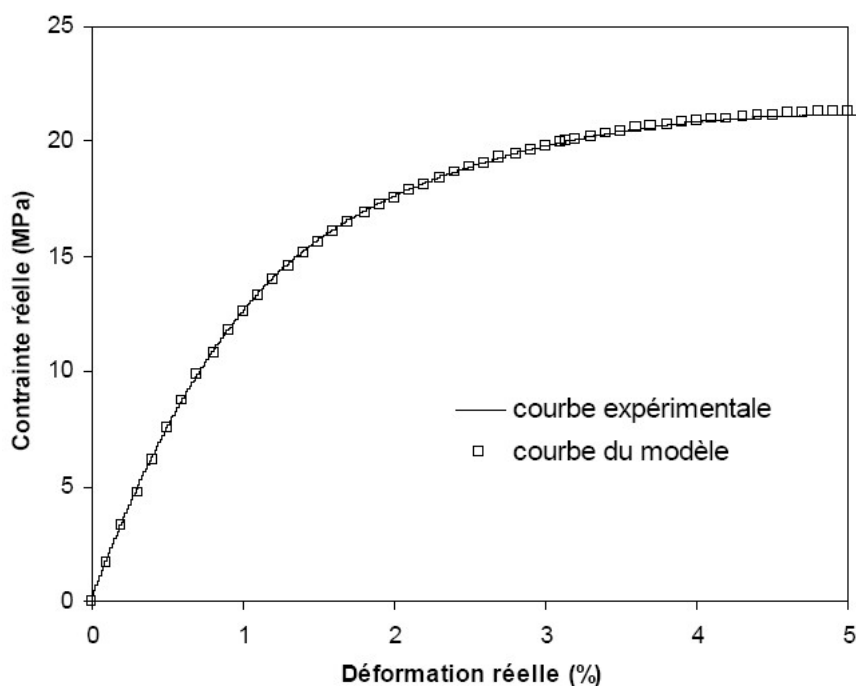


FIG. 6.14 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$  :  $f = 0,1$

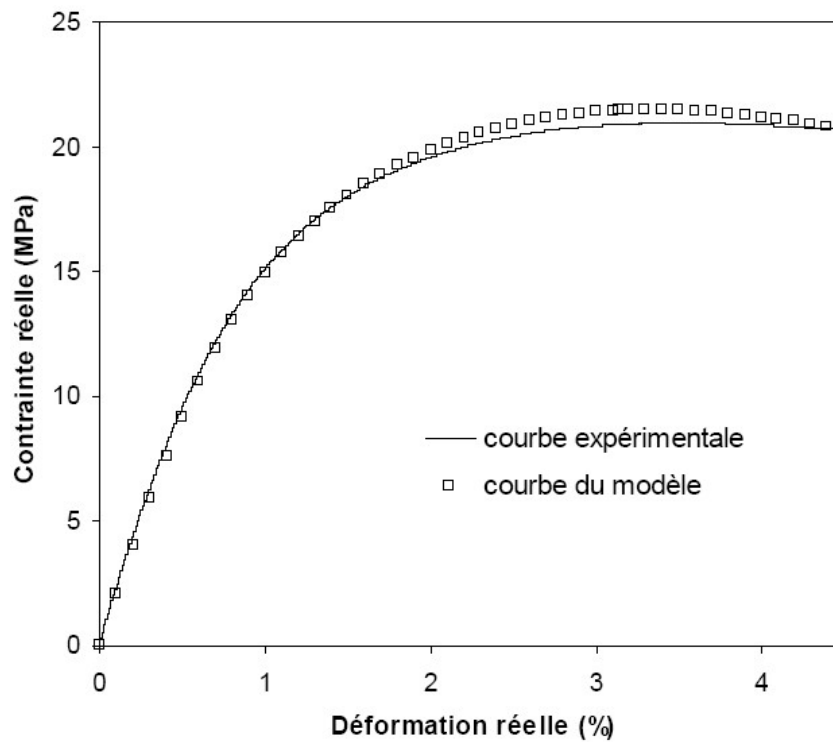


FIG. 6.15 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$  :  $f = 0,2$

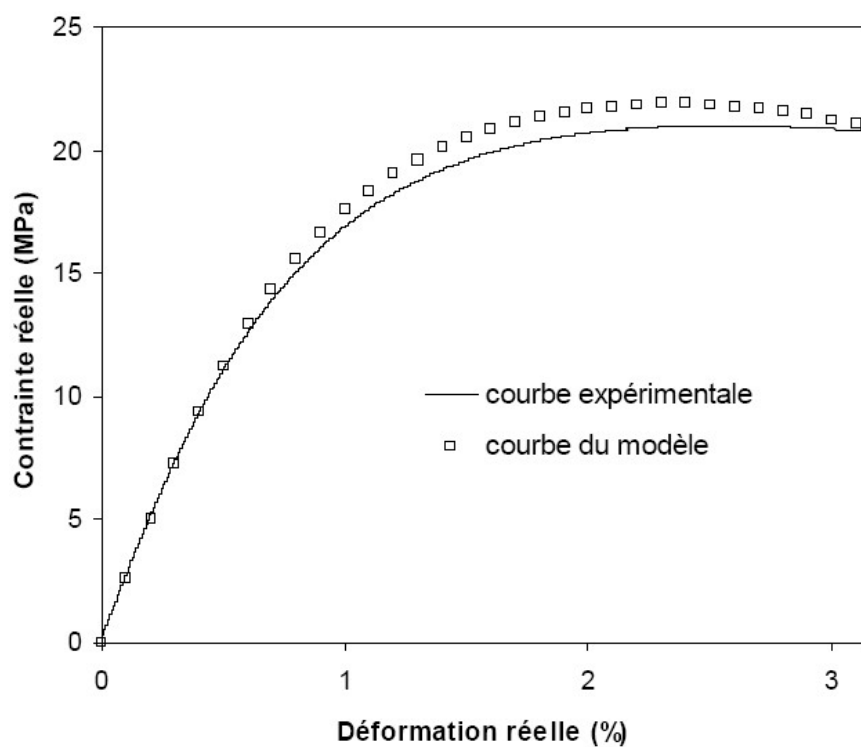


FIG. 6.16 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} s^{-1}$  :  $f = 0,3$

On constate globalement le bon accord entre l'expérience et le modèle, qui parvient à décrire correctement le comportement viscoélastique non linéaire du mélange en fonction de la fraction volumique du talc, en particulier dans le domaine de validité de la loi de comportement de Schapery. Une légère détérioration de la qualité de la prédiction du modèle est toutefois remarquée avec l'augmentation de la fraction volumique du talc. Ce constat peut s'expliquer, d'une part, par le fait que l'apparition de ces écarts se manifeste en grande partie en dehors du domaine de validité de la loi de comportement utilisée, et d'autre part, par une précision de moins en moins fiable de l'estimation de Mori-Tanaka pour des fractions volumiques d'inclusions de plus en plus élevées. En effet, le principe de Mori-Tanaka ne peut être satisfaisant que dans l'hypothèse de petites fractions volumiques d'inclusions.

La deuxième série d'essais est effectuée en imposant une vitesse de déformation longitudinale 10 fois plus élevée que la première :  $\dot{E} = 10^{-3} s^{-1}$ . Dans les figures 6.17, 6.18 et 6.19 on compare les courbes contrainte-déformation provenant de l'expérience et les courbes du modèle appliqué au matériau test pour les fractions volumiques du talc  $f = 0.1$ ,  $f = 0.2$  et  $f = 0.3$ .

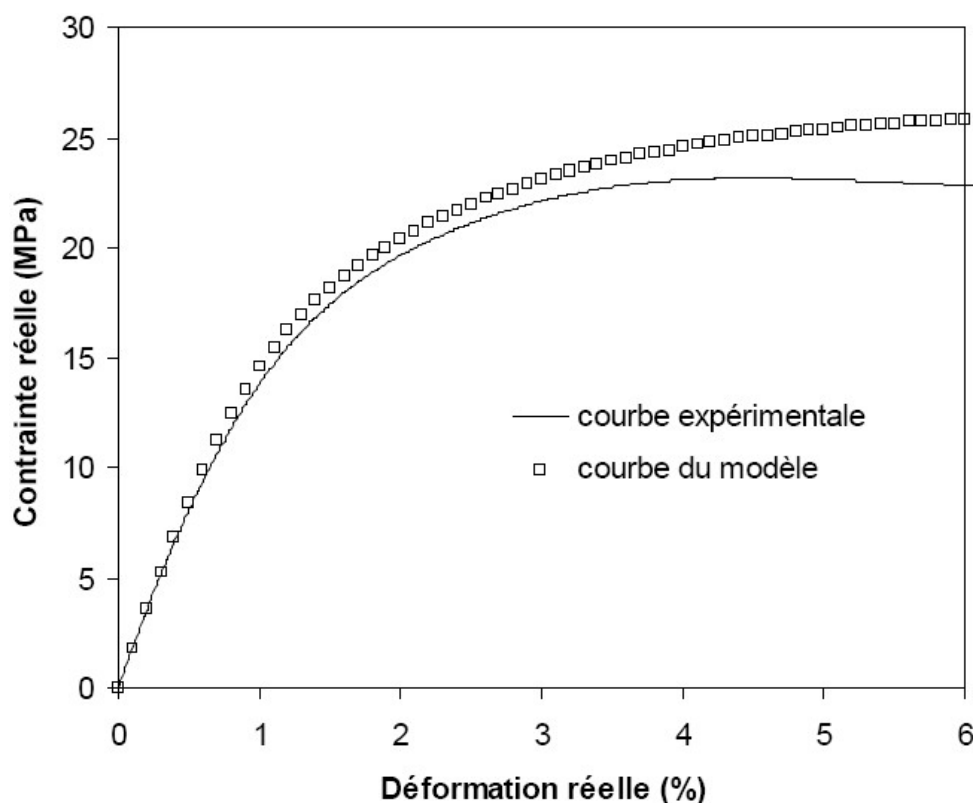


FIG. 6.17 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} s^{-1}$  :  $f = 0,1$

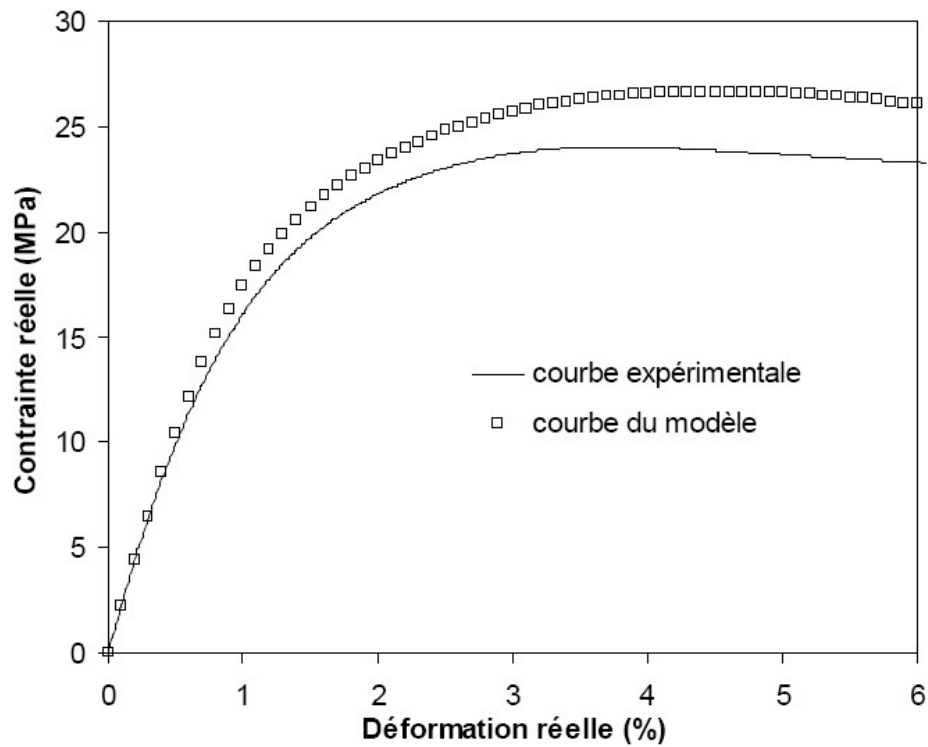


FIG. 6.18 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} s^{-1}$  :  $f = 0,2$

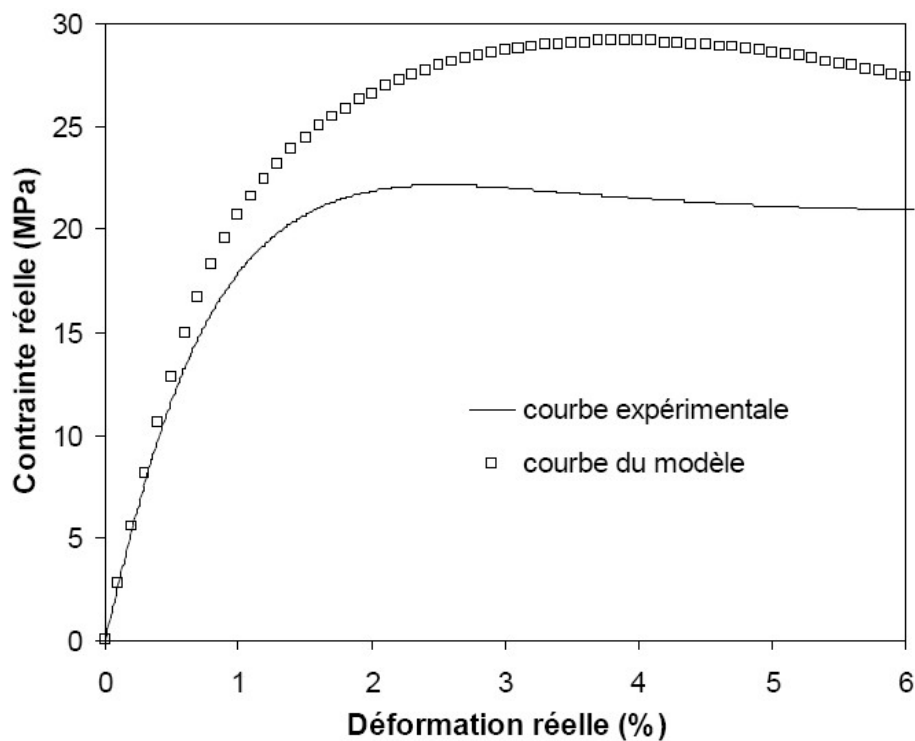


FIG. 6.19 – Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} s^{-1}$  :  $f = 0,3$

Les résultats fournis par la deuxième série d'essais de traction uniaxiale permettent de constater une aggravation des écarts entre l'expérience et le modèle pour des vitesses de déformation imposées plus élevées. Pour les mêmes raisons que précédemment, ces écarts sont d'autant plus prononcés que la fraction volumique des inclusions est grande. La raison de l'augmentation de la divergence entre le modèle et l'expérience, pour des vitesses de déformation plus élevées, réside dans l'hypothèse des petites déformations posée lors de la description du problème hétérogène du modèle micromécanique. Dans le cas où la vitesse de chargement augmente, notamment pour une fraction volumique  $f = 0,3$ , le problème hétérogène doit être résolu pour les grandes déformations en utilisant une loi de comportement élastoviscoplastique dont la formulation est plus appropriée que celle de Schapery. Notons, par ailleurs, que l'écart entre les résultats expérimentaux et théoriques est beaucoup plus restreint dans le domaine de validité de la loi de Schapery ( $\sigma \leq 19$  MPa), où l'acuité du modèle reste satisfaisante pour les fractions volumiques  $f = 0,1$  et  $f = 0,2$ .

#### 6.4.5 Conclusion

Le travail réalisé dans cette section a pour principal objectif d'analyser la précision du modèle de transition d'échelle proposé dans la prédiction du comportement mécanique effectif du mélange polypropylène/talc. Les résultats nous permettent d'observer le bon accord entre l'expérience et le modèle d'un point de vue global.

La légère altération de la qualité du modèle avec l'augmentation de la fraction volumique du talc peut s'expliquer par le fait que les écarts entre courbes expérimentales et courbes du modèle se manifestent principalement hors du domaine de validité de la loi de comportement utilisée, et par le principe même de l'estimation de Mori-Tanaka rendant l'homogénéisation de moins en moins fiable pour des fractions volumiques d'inclusions de plus en plus élevées. On constate aussi que le modèle a tendance à perdre de sa précision pour de grandes vitesses de déformation. Cette dernière observation permet de mettre en évidence les limites des lois constitutives de type Schapery dans le traitement des problèmes hétérogènes viscoélastiques non linéaires. En effet, celles-ci sont non seulement inadaptées pour les grandes déformations, mais aussi de moins en moins appropriées pour des vitesses de déformation croissantes.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'objectif était d'établir une loi constitutive adaptée au comportement visco-élastique non linéaire du polypropylène, et de valider le modèle micromécanique proposé dans l'application aux matériaux hétérogènes à matrice polymère.

A la lumière des travaux menés dans le cadre de la caractérisation du comportement mécanique des matériaux polymères, nous avons choisi d'utiliser une loi de type Schapery. L'identification de cette loi de comportement a été menée grâce aux exécutions successives de deux procédures : la détermination des composantes de la complaisance viscoélastique linéaire et l'identification de la fonction de non linéarité. La comparaison entre les résultats issus d'essais uniaxiaux de traction à vitesse de déformation constante et ceux obtenus par la loi de comportement identifiée permettent d'analyser les performances de cette loi constitutive dans la prédiction du comportement mécanique du polypropylène.

Puis l'analyse des résultats du modèle micromécanique proposé, appliqué au mélange polypropylène/talc, nécessite une réécriture de la loi de comportement sous une forme différentielle. Malgré les apparitions d'écarts prévisibles entre la réponse du modèle et les résultats expérimentaux avec l'augmentation de la fraction volumique du talc ou l'élévation de la vitesse de déformation imposée, nous observons que le modèle parvient à décrire de façon efficace et satisfaisante le comportement du mélange polypropylène/talc considéré, tant sur le plan macroscopique que local.

Cette première application du modèle micromécanique proposé laisse ainsi entrevoir des perspectives intéressantes dans le domaine des composites à matrice polymère, mais aussi dans le cadre plus général des matériaux hétérogènes au comportement élastoviscoplastique.





# Conclusion générale

La grande diffusion des matières plastiques pose un problème de taille pour l'environnement concernant la gestion de leurs déchets. Les solutions de ce problème résident dans la valorisation des polymères recyclés. Parmi les différentes voies de valorisation, le recyclage mécanique permet de redonner une seconde vie aux polymères grâce à une série de procédés mécaniques ( broyage, régénération, formulation, mise en forme, . . . ). Afin de contribuer à la valorisation matière des polymères recyclés, il est primordial de pouvoir modéliser leur comportement mécanique.

Ce travail nous a donc permis de cerner les différents processus de déformation intervenant dans le comportement mécanique des polymères. Celui-ci est complexe et se caractérise d'une part, par sa forte dépendance à la température et à la vitesse de sollicitation, et d'autre part, par un important couplage entre les effets de l'élasticité et de la viscoélasticité donnant lieu au comportement élastoviscoplastique.

Afin de modéliser convenablement le comportement élastoviscoplastique des polymères, nous avons choisi une approche micromécanique afin de prendre en compte des hétérogénéités présentes dans ce type de matériaux. Toutefois, la transition d'échelle en élastoviscoplasticité se heurte à la complexité de la loi de comportement de nature différentielle, qui empêche l'application directe des schémas de résolution classiques des problèmes hétérogènes issus des lois de comportement reliant de façon biunivoque les déformations et les contraintes (élasticité, élastoplasticité, viscoplasticité).

Une voie de résolution possible réside dans les approches de type héréditaire qui conduisent à un traitement autocohérent rigoureux en viscoélasticité linéaire et peuvent être étendues au cas de l'élastoviscoplasticité par une procédure de linéarisation tangente du comportement. Leur mise en œuvre reste toutefois confrontée à la lourdeur numérique imposée par l'inversion de la transformée de Laplace-Carson de la solution homogénéisée.

Face à cette première voie possible, nous avons choisi la résolution du problème par les approches à variables internes qui consistent à traiter le couplage espace/temps dans le matériau hétérogène élastoviscoplastique par l'introduction de variables internes décrivant le comportement. Ce type de démarche est nettement plus simple sur le plan numérique que les approches de type héréditaire, mais doit faire face à la difficulté majeure de trouver une solution rigoureuse au problème de transition d'échelle en élastoviscoplasticité.

Dans ce contexte, ce travail avait pour principal objectif de mettre en œuvre une nouvelle démarche de transition d'échelle à variables internes présentant une solution plus rigoureuse du problème hétérogène élastoviscoplastique.

Le modèle micromécanique proposé repose sur l'établissement original d'un nouveau système d'équations de champs complet à partir duquel les équations de Navier présentent des termes de nature "volumique" de mêmes formes. Dans le cas viscoélastique linéaire, deux équations de Navier peuvent être posées pour le traitement intégral, tandis qu'en élastoviscoplasticité, une équation de Navier supplémentaire doit être définie. La démarche consiste ensuite à effectuer une formulation intégrale lors de laquelle les équations de Navier sont regroupées grâce à la substitution des termes communs de nature "volumiques". On aboutit alors à une unique équation intégrale où les termes de convolution dans l'espace contiennent, d'une part, les opérateurs de Green modifiés, associés à l'élasticité ou la viscoplasticité, et d'autre part, des termes de fluctuations élastiques et visqueuses adaptés aux méthodes d'homogénéisation classiques.

En viscoélasticité linéaire, la nouvelle relation de localisation obtenue est équivalente à celle du modèle de référence de Hashin. Du point de vue du comportement global, les résultats numériques de la nouvelle démarche confirment cette équivalence qui témoigne de la rigueur du modèle proposé.

Après avoir apprécié la qualité de l'approche élaborée dans ce travail, nous procédons ensuite à son extension au cas élastoviscoplastique. Les résultats vérifient une fois de plus l'excellente précision du modèle dont les courbes obtenues sont en accord avec celles des méthodes variationnelles et des éléments finis.

De plus, l'application du modèle à une loi de comportement viscoélastique non-linéaire de type Schapery sur un mélange polypropylène/talc nous permet d'en déduire que la nouvelle démarche

de transition d'échelle est adaptée à la prédiction du comportement mécanique des polymères recyclés ou des mélanges à base de polymères. Rappelons par ailleurs que la méthode que nous avons mise au point s'applique à tous les comportements mécaniques en petites déformations et ne se limite pas seulement à l'étude des matériaux polymères.

La richesse et la complexité du problème de transition d'échelle en élastoviscoplasticité laissent entrevoir des perspectives passionnantes tant sur le plan théorique que sur le plan des applications industrielles. Dans ce travail, nous nous sommes limités (par souci de simplicité dans la présentation du schéma de résolution) à une formulation intégrale où le milieu de référence est supposé isotrope. Il sera intéressant d'étendre le modèle au cas général anisotrope afin d'étendre ses applications à un plus grand nombre de matériaux.

D'autre part, la qualité des résultats obtenus concernant l'application du modèle aux mélanges à base de polymères ouvre des perspectives très encourageantes pour des applications plus diversifiées, à partir de lois constitutives adaptées au comportement mécanique des matériaux étudiés.

Enfin, on peut entrevoir de reformuler la nouvelle démarche de transition d'échelle pour un problème élastoviscoplastique en grandes déformations, afin de mieux étudier les effets de la plasticité dans la réponse mécanique des matériaux hétérogènes.



# Références bibliographiques

- [1] SCHAPERY, R. A.. *On the characterization of nonlinear viscoelastic materials*. Polymer Engineering and Science, 9, 4 : p 295-310, 1969.
- [2] ROBIN, J. J.. *Recyclage des thermoplastiques*. Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites.
- [3] NAUDIN, C. A. ; CLOZZA, C.. *Charges*. Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites.
- [4] CARREGA, M.. *Matériaux polymères*. L'usine nouvelle 2, Paris, 2007.
- [5] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J. L.. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2, Paris, 1988.
- [6] COMBETTE, P. ; ERNOULT, I.. *Physique des polymères*. Herman Editeurs, 2, Paris, 2006.
- [7] SCHAPERY, R. A.. *On a thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials*. Proceedings of IUTAM Symposium, p 259-285, 1968.
- [8] SCHAPERY, R. A.. *Application of thermodynamics to thermomechanical, fracture, and birefringent phenomena in viscoelastic media*. Journal of Applied Physics, 35, 5, p 1451-1465, 1964.
- [9] SCHAPERY, R. A.. *Further development of a thermodynamic constitutive theory : stress formulation*. Purdue University, School of Aeronautics, Indiana, 1969.
- [10] GERMAIN, P. ; NGUYEN, Q. ; SUQUET, P.. *Continuum thermodynamics*. J. Appl. Mech. 50, p 1010-1020, 1983.
- [11] CHABOCHE, J. ; KRUCH, S. ; MAIRE, J. ; POTTIER, T.. *Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites*. Int. J. Plasticity, 17, p 411-439, 2001.
- [12] G'SELL, C. ; MARQUEZ-LUCERO, A.. *Plastic Instability*. Presses de l'Ecole des Ponts et Chaussées, p 159, Paris, 1985.
- [13] G'SELL, C.. *Instabilités de déformation pendant l'étirage des polymères solides*. Revue Phys. Appl., 23, p 1085-1101, 1988.

- [14] ALY-HELAL, N. A.. *Etude et simulation du développement de la striction dans le polyéthylène haute densité*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 1982.
- [15] FERRANDEZ, P.. *Adaptation de l'essai de bipoinçonnement à l'étude des polymères. Influence des conditions de cristallisation sur le comportement rhéologique et tribologique d'un polyéthylène haute densité*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1987.
- [16] G'SELL, C. ; JONAS, J. J.. *Yield and Transient Effects during the Plastic Deformation of Solid Polymers*. J. Mater. Sci., 16, p 1956, 1981.
- [17] MANDEL, J.. *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [18] SALENÇON, J.. *Viscoélasticité. Cours de calcul des structures anélastiques*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [19] SOUISSI, A.. *Description du comportement des métaux à chaud à l'aide d'une loi intégrale*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 1969.
- [20] SIDOROF, F.. *Variables internes en viscoélasticité et viscoplasticité*. Thèse d'Etat de l'Université Paris VI, 1976.
- [21] SCHAPERY, R. A.. *Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations based on thermodynamics*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 1, p 209-240, 1997.
- [22] LÉVESQUE, M.. *Modélisation du comportement mécanique de matériaux viscoélastiques non linéaires par une approche d'homogénéisation*. Thèse de Doctorat de l'ENSAM de Paris, 2004.
- [23] EYRING, H.. *Viscosity, Plasticity, and Diffusion as Examples of Absolute Reaction Rates*. J. Chem. Phys., 4, p 283, 1936.
- [24] HAUDIN, J.M. ; G'SELL, C.. *Mécanismes microscopiques de déformation des polymères semicristallins*. C. G'sell et J. M. Haudin eds INPL, p 251-273, 1995.
- [25] BAUWENS, J. C.. *Relation between the Compression Yield Stress of PVC and the loss peak in the  $\beta$  relaxation range*. J. Polym. Sci., 33, p 123-133, 1971.
- [26] ROBERTSON, R. E.. *Theory for the Plasticity of Glassy Polymers*. J. Chem. Phys., 44, p 3950, 1966.
- [27] ARGON, A. S. ; BESSENOV, M. I.. *Plastic flow in glassy polymers*. Polym. Eng. Sci., 17, p 174, 1977.
- [28] LI, J. C. M.. *Physical Chemistry of some Microstructural Phenomena*. Metall. Trans. A, 9, p 1353-1380, 1978.

- [29] EL BARI, H.. *Etude des mécanismes de la déformation en cisaillement simple des polymères vitreux*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 1987.
- [30] BOYCE, M. C. ; PARKS, D. M. ; ARGON, A. S.. *Large Inelastic Deformation of Glassy Polymers, Part 1 : Rate Dependent Constitutive model*. Mech. Mater., 7, p 15, 1988.
- [31] ESCAIG, B. ; LEFEBVRE, J. M.. *Thermodynamic and Kinetic Analysis of Non-elastic Deformation in Polymeric Glasses*. Revue de Physique Appliquée, 13, 6, p 285-292, 1978.
- [32] DAHOUN, A. ; CANOVA, G. R. ; MOLINARI, A. ; PHILIPPE, M. J. ; G'SELL, C.. *The Modelling of Large Strain Textures and Stress-Strain Relations of Polyethylene*. Textures and Microstructures, p 14-18, p 347-354, 1991.
- [33] THILLIET, Y.. *Identification par analyse inverse du comportement mécanique des polymères solides ; application aux sollicitations multiaxiales et rapides*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [34] PRIADI, D.. *Etude expérimentale et théorique des lois de comportement et de la striction de tôles d'acier pour la simulation de l'emboutissage*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993.
- [35] GOPEZ, A. J. R.. *Etude de la déformation du polycarbonate en cisaillement simple*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 1983.
- [36] GRENET, J. ; G'SELL, C.. *Observation and Modelling of Shear-Band Propagation in Glassy Polycarbonate*. Polymer, 31, p 2057-2065, 1990.
- [37] FOTHERIGHAM, D. G. ; CHERRY, B. W.. *Strain rate effects on the ratio of recoverable to non-recoverable strain in linear polyethylene*. J. Mater. Sci., 13, 2, 1978.
- [38] TRELOAR, L. R. G.. *The elasticity and related properties of rubbers*. Rep. Prog. Phys., 36, p 755, 1973.
- [39] BELCADI, M.. *Comportement mécanique d'un polycarbonate prédéformé par laminage*. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, ENSMA, 1990.
- [40] BISILLIAT, M. L. *Comportement mécanique d'un polycarbonate à grande vitesse de sollicitation - Etude expérimentale et simulation*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [41] VEST, T. A. ; AMOEDO, J. ; LEE, D.. *Effects of Thermal History, Crystallinity, and Solvent on the Transitions and Relaxations in Poly(bisphenal - A carbonate)* . J. Polym. Sci., 20, p 141-154, 1982.
- [42] LAHELLEC, N. ; SUQUET, P.. *On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles* . J. Mech. Phys. of Sol., 55, 9, p 1932-1963, 2007



- [43] BERVEILLER, M. ; ZAOUI, A.. *Modélisation du comportement mécanique des solides microhétérogènes*. In : G'sell, C. ; Haudin, J.M. Introduction à la mécanique des polymères, p 225-249. Institut Nationale Polytechnique de Lorraine, 1995.
- [44] FRANÇOIS, D. ; PINEAU, A. ; ZAOUI, A.. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, 1995.
- [45] ZAOUI, A.. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, 1995.
- [46] VOIGT, W.. *Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper*. Ann. Phys., 38, p 573-587. 1889.
- [47] REUSS, A.. *Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals*. Z. angew. Math. Mech., 9, p 49-58. 1929.
- [48] HASHIN, Z. ; SHTRIKMAN, S.. *A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, 10, p 343-352. 1962.
- [49] TAYLOR, G. I.. *Plastic Strain in metals*. J. Inst. Metals, 61, p 307-324. 1938.
- [50] BATDROF, S. B. ; BUDIANSKY, B.. *A material theory of plasticity based the concept of slip*. NACA TN, 1971.
- [51] ASARO, R. J. ; NEEDLEMAN, A.. *Texture development and strain hardening in rate dependant polycrystals*. Acta. Metall. Mater., 33, p 923-953, 1985.
- [52] ESHELBY, J. D.. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. In : Sneddon, I.W. ; Hill, R. Proc. R. Soc. London. A241, p 376-396, 1957.
- [53] MORI, T. ; TANAKA, K.. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica, 21, 5, p 571-574, 1973.
- [54] KRÖNER, E.. *Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls*, Z. Phys., 151, p 504, 1958.
- [55] BUDIANSKY, B. ; WU, T.. *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals*. 4th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ASME, p 1175-1185, 1962.
- [56] HILL, R.. *Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids 13, p 89-101, 1965.
- [57] LIPINSKI, P. ; BERVEILLER, M.. *Elastoplasticity of micro-inhomogeneous metals at large strains*. Int. J. Plasticity, 5, p 149-172, 1989.
- [58] HUTCHINSON, J.W.. *Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials*. Proc. R. Soc. London. A348, p 101-127, 1976.
- [59] MOLINARI, A. ; CANOVA, G. R. ; AHZI, S. *A self-consistent approach of the large deformation polycrystals viscoplasticity*. Acta. Metall. Mater., 35, 12 , p 2983-2994, 1987.

- [60] TALBOT, D. ; WILLIS, J. R.. *Variational principles for inhomogeneous nonlinear media*. IMA J. Appl. Math., 35, p 39-54, 1985.
- [61] PONTE CASTAÑEDA, P.. *New variational principles in plasticity and their application to composite materials*. J. Mech. Phys. Solids, 40, p 1757-1788, 1992.
- [62] DAHOUN, A. ; G'SELL, C ; MOLINARI, A ; CANOVA, G. R.. *Plastic behaviour and deformation textures of poly(ether ether ketone) under uniaxial tension and simple shear*. Annual winter meeting of ASME, New Orleans, USA, 1993.
- [63] DAHOUN, A.. *Comportement plastique et texture de déformation des polymères semi-cristallins en traction uniaxiale et en cisaillement simple*. Thèse de doctorat de l'INPL, 1992.
- [64] SUQUET, P.. *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. In : Sanchez-Palencia, E. ; Zaoui, A., Homogenization techniques for composite media, p 193-278, Berlin, 1985.
- [65] WENG, C. J.. *A self-consistent scheme for the relaxation behavior of metals*. Trans. ASME J. App. Mech., 48, p 779-784, 1981.
- [66] NEMAT-NASSER, S. ; OBATA, M.. *Rate dependent finite elastoplastic deformation of polycrystals*. Proc. R. Soc. London., A407, p 343-375, 1986.
- [67] HASHIN, Z.. *The inelastic inclusion problem*. Int. J. Eng. Sci., 7, p 11-36, 1969.
- [68] LAWS, N. ; MCLAUGHLIN, R.. *Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliance of composite materials*. Proc. R. Soc. London., A359, p 251-273, 1978.
- [69] WENG, G. J.. *A unified, self-consistent theory for the plastic deformation of metals*. J. Appl. Mech., 49, p 728-734, 1982.
- [70] ROUGIER, Y.. *Etude du comportement sous irradiation : modélisation micromécanique de l'élastoviscoplasticité*. Thèse de doctorat à l'école Polytechnique, 1994.
- [71] ROUGIER, Y. ; STOLZ, C. ; ZAOU, A.. *Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals*. C. R. Acad. Sci. Paris, 318, p 145-151, 1994.
- [72] MASSON, R.. *Estimations non-linéaires du comportement global de matériaux hétérogènes en formulation affine - Application aux alliages de zirconium*. Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique de Paris, 1998.
- [73] MASSON, R. ; BORNERT, M. ; SUQUET, P. ; ZAOU, A.. *An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, 48, p 1203-1227, 2000.

- [74] PAQUIN, A. ; SABAR, H. ; BERVEILLER, M.. *Integral formulation and self-consistent modelling of elastoviscoplastic behavior of heterogeneous materials*. Arch. Appl. Mechanics, 69, p 14-35, 1999.
- [75] KRÖNER, E.. *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls*. Acta metall., 9, p 155-161, 1961.
- [76] KOUDDANE, R. ; MOLINARI, A. ; CANOVA, G. R.. *Self-consistent modelling of heterogeneous viscoelastic and elastoplastic materials*. In : MECAMAT'91 Teodosiu, C. ; Raphanel, J.L. ; Sidoroff, F. Large plastic deformations, fundamentals and application to metal forming, p 129-141, Rotterdam, 1993.
- [77] SABAR, H. ; BERVEILLER, M. ; FAVIER, V ; BERBENNI, S.. *A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials*. Int. J. Solids Struct, 39, p 3257-3276, 2002.
- [78] KUNIN, I. A.. *Elastic media with microstructure II : three-dimensional models*. Springer Series in Solid-State Sciences, 44, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1983.
- [79] BERBENNI, S.. *Elastoviscoplasticité des aciers polycristallins : Modélisation micromécanique et physique. Applications au comportement dynamique et à l'effet Bake-Hardening*. Thèse de doctorat de l'ENSAM de Metz, 2002.
- [80] ZAOU, A. ; RAPHANEL, J. L.. *On the nature of the intergranular accommodation in the modeling of elastoviscoplastic behavior of polycrystalline aggregates*. In : MECAMAT'91 Teodosiu, C. ; Raphanel, J.L. ; Sidoroff, F. Large plastic deformations, fundamentals and application to metal forming, p 185-192, Rotterdam, 1993.
- [81] MURA, T.. *Micromechanics of defects in solids*. Kluwer Academic Pub., Boston, 1991.
- [82] GILORMINI, P.. *Le problème de l'inclusion en viscoplasticité. Application à l'amorçage de l'endommagement*. Thèse d'état de l'Université de Grenoble, 1985.
- [83] LEGOLL, F.. *Numerical homogenization of non linear viscoplastic two-dimensional polycrystals*. Symposium Multi-Scale, Brazil, 2002.
- [84] SUQUET, P.. *Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure*. C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb, 320, p 563-571, 1995.
- [85] MOLINARI, A.. *Self-consistent modelling of plastic and viscoplastic polycrystalline materials*. Large Plastic Deformation of Crystalline Aggregates, CISM Courses and Lectures, C. Teodosiu, Springer Wien. New-York, p 173-246, 1997.

- [86] BIOT, M.A.. *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*. Journal of Applied Physics, 25, 11, p 1385-1391, 1954.
- [87] HAJ-ALI, R.M. ; MULIANA, A. H.. *Numerical finite element formulation of the Schapery non-linear viscoelastic material model*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 59, p 25-45, 2004.
- [88] HENRIKSEN, M.. *Nonlinear viscoelastic stress analysis - A finite element approach*. Computers and Structures, 18, 1, p 133-139, 1984.
- [89] ZHANG, L. ; ERNST, L.J ; BROUWER, H.R.. *A study of nonlinear viscoelasticity of an unsaturated polyester resin*. Part 2. 3D Model, Mechanics of Materials, 26, 3, p 167-195, 1997.
- [90] CHEN, T.. *Determining a Prony series for a viscoelastic material from time varying strain data*. U.S. Army Research Laboratory, 2000.
- [91] LÉVESQUE, M. ; DERRIEN, K. ; MISHNAEVSKI TR., L. ; BAPTISTE, D. ; GILCHRIST, M.D.. *A micromechanical model for nonlinear viscoelastic particle reinforced polymeric composite materials - undamaged state*. Composite Structures, 60, 1, p 67-72, 2003.
- [92] SÉGARD, E. ; BENMEDAKHENE, S. ; LAKSIMI, A. ; LAY, D.. *Influence of the fibre-matrix interface on the behavior of polypropylene reinforced by short glass fibres above glass transition temperature*. Elsevier Science, 2002.



# Annexe A

## A-1 Solution de l'équation de Navier : $\Delta X = F$

C'est l'équation différentielle dont les inconnues sont  $X$ , et  $F$  est une fonction donnée du problème :

$$\Delta X = X, pp = F \quad (\text{A-1})$$

Cette équation peut être résolue par la méthode des fonctions de Green, solutions de l'équation différentielle suivante :

$$G, pp(r - r') = \delta(r - r') \quad (\text{A-2})$$

Nous considérons que le milieu est infini et on suppose qu'à l'infini  $G = 0$ . La fonction  $\delta(r - r')$  est la distribution de Dirac en  $r'$ .

La solution  $X$  de l'équation différentielle (A-1) s'écrit sous la forme suivante :

$$X = X^0 + G * F \quad (\text{A-3})$$

où "\*" représente le produit de convolution :

$$G * F = \int_{V'} G(r - r') F(r') dV' \quad (\text{A-4})$$

et  $X^0$  est la valeur de  $X$  à l'infini.

## A-2 Détermination de la fonction de Green $G$ par la méthode de la transformée de Fourier

On introduit la transformée de Fourier  $\tilde{G}(k)$  de la fonction de Green  $G(r)$  par :

$$\tilde{G}(k) = \int_V G(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dV \quad (\text{A-5})$$

et la transformée de Fourier inverse s'écrit comme :

$$G(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_K} \tilde{G}(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dV_K \quad (\text{A-6})$$

à partir de (A-5), l'équation (A-2) dévient :

$$\tilde{G}_{,pp}(k) = 1 \quad (\text{A-7})$$

avec la transformée de Fourier de la distribution de Dirac  $\tilde{\delta}(k) = 1$ .

Le vecteur  $k$  est décrit avec les coordonnées sphériques  $K, \theta, \varphi$  par :

$$\vec{k} = k\vec{X} \quad (\text{A-8})$$

où :

$$\vec{X} = \begin{cases} X_1 = \sin\theta \cos\varphi \\ X_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ X_3 = \cos\theta \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

avec :  $\|\vec{k}\| = k \in [0; +\infty]$  ,  $\theta \in [0; \pi]$  ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Par conséquent (A-6) devient :

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2} \quad (\text{A-10})$$

La transformée de Fourier inverse de  $\tilde{G}(\vec{k})$  s'obtient à partir de (A-5) et (A-8) :

$$\tilde{G}(r) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (\text{A-11})$$

La solution  $X$  de l'équation différentielle (A-1) s'obtient finalement par :

$$\boxed{X = X^0 - \frac{1}{4\pi r} * F} \quad (\text{A-12})$$

**A-3** calcul de  $H = \frac{1}{4\pi r} * \frac{1}{4\pi r}$

La transformée de Fourier de la quantité  $H$  s'obtient à partir de (A-5) par :

$$\tilde{H} = \widetilde{\frac{1}{4\pi r}} \cdot \widetilde{\frac{1}{4\pi r}} \quad (\text{A-13})$$

D'après (A-8) et (A-9),  $\tilde{H}$  s'écrit comme :

$$\tilde{H} = \left(-\frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^4} \quad (\text{A-14})$$

et la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{H}$  s'obtient à partir des équations (A-5) et (A-7) par :

$$\boxed{H(r) = -\frac{r}{8\pi}} \quad (\text{A-15})$$





# Annexe B : Formulation intégrale classique d'un problème hétérogène

La formulation intégrale d'un problème hétérogène est le traitement des équations de champs de la mécanique des milieux continus d'un milieu hétérogène donné. Parmi les équations de champs, on retrouve les lois constitutives du comportement local et les équations classiques de la mécanique des milieux continus : l'équation d'équilibre, la relation de compatibilité cinématique, les conditions aux limites. A partir du système constitué des équations de champs régissant le problème, la formulation intégrale conduit à une équation reliant les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques à l'échelle du V.E.R.. Le traitement de cette formulation s'appuie sur les techniques de Green appliquées aux équations de Navier, où l'influence des hétérogénéités est traduite par la présence de forces réparties fictives. L'équation intégrale obtenue en déformation ou en contrainte met en évidence les tenseurs d'interaction, dont la nature dépend de l'accommodation intergranulaire, et permet la localisation du problème.

## B-1 Comportement élastique pur

### B-1.1 Description du problème

Soit un milieu hétérogène  $V$ , dont le tenseur des modules d'élasticité local en tout point est noté  $c(r)$ , soumis sur son contour  $\partial V$  à des conditions aux limites cinématiques  $u^d$ .

Les équations de champs décrivant le problème hétérogène s'écrivent :

$$\sigma(r) = c(r) : \epsilon(r) \quad \text{Loi de comportement élastique} \quad (\text{B-1})$$

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{Equation d'équilibre statique} \quad (\text{B-2})$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\text{grad}(u) + {}^t\text{grad}(u)] = \nabla^s . u \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (\text{B-3})$$

$$u^d = \epsilon^0 . x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (\text{B-4})$$

Grâce aux propriétés du tenseur des modules  $c$ , nous pouvons écrire d'après (B-1) et (B-3) :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad (\text{B-5})$$

Introduisons un milieu de référence de modules uniformes  $C$  tel que :

$$c(r) = C + \delta c(r) \quad (\text{B-6})$$

où  $\delta c$  est la fluctuation de  $c$  autour de  $C$ .

L'équation (B-5) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (C_{ijkl} + \delta c_{ijkl}) u_{k,l} \\ \sigma_{ij,j} &= [(C_{ijkl} + \delta c_{ijkl}) u_{k,l}]_{,j} = 0 \\ \Rightarrow \quad C_{ijkl} u_{k,lj} + (\delta c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

Dans l'équation de Navier (B-7), en l'absence de forces de volume, on peut définir des forces de volume fictives comme :

$$f_i = (\delta c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \quad (\text{B-8})$$

L'équation de Navier (B-7) devient :

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + f_i = 0 \quad (\text{B-9})$$

## B-1.2 Tenseur de Green

Pour un milieu infini homogène sans contrainte interne et pour des conditions de déplacement nulles au contour, l'application d'une force ponctuelle unité au point  $r'$  produit un déplacement au point  $r$  défini par :

$$u_i(\vec{r}) = G_{ij}^C(r - r') f_j(r') \quad (\text{B-10})$$

où  $G^C$  est le tenseur de Green associé au tenseur des modules  $C$  du milieu de référence. Ce tenseur est solution de l'équation :

$$C_{ijkl} G_{km,lj}^C + \delta_{im} \delta(r - r') = 0 \quad (\text{B-11})$$

où  $G^C = 0$  sur la frontière infinie.

### B-1.3 Equation intégrale

La solution de l'équation de Navier (B-9) est donc :

$$u_i(r) = u_i^0 + \int_V G_{ij}^C(r - r') f_j(r') dV' \quad (\text{B-12})$$

où  $u^0$  est la réponse du milieu de référence aux conditions aux limites et  $\int_V G_{ij}^C(r - r') f_j(r') dV'$  est la réponse produite par l'application de l'ensemble des forces fictives  $f$ . En remplaçant  $f_j$  par son expression (B-8) dans la solution (B-12), on obtient :

$$u_i(r) = u_i^0 + \int_V G_{ij}^C(r - r') (\delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r'))_{,k'} dV' \quad (\text{B-13})$$

On emploie ici  $k'$  parce que l'on dérive par rapport à  $r'$  et non par rapport à  $r$  :

$$\text{on a } A_{,k} = \frac{\partial A}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad A_{,k'} = \frac{\partial A}{\partial x_{k'}}.$$

De plus, il est essentiel de noter que  $\forall r, r' \in V$ , le tenseur de Green vérifie :

$$G_{ij,k}^C = -G_{ij,k'}^C$$

L'intégration par parties de la solution (B-13) s'écrit :

$$\begin{aligned} u_i(r) &= u_i^0 + \int_V (G_{ij}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r'))_{,k'} dV' \\ &\quad - \int_V G_{ij,k'}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

L'application du théorème de divergence de Gauss sur (B-14) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u_i(r) &= u_i^0 + \int_{\partial V} G_{ij}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') n_{k'}(r') dS' \\ &\quad - \int_V G_{ij,k'}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

Comme  $G^C$  est nul sur  $\partial V$  selon (B-11), il vient :

$$u_i(r) = u_i^0 - \int_V G_{ij,k'}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV'$$

il en résulte :

$$u_i(r) = u_i^0 + \int_V G_{ij,k}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \quad (\text{B-16})$$

En dérivant le déplacement  $u_i$  par  $x_n$ , (B-15) devient :

$$\begin{aligned} u_{i,n}(r) &= u_{i,n}^0 + \int_V G_{ij,kn}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \\ (\text{B-3}) \Rightarrow \epsilon_{in}(r) &= \epsilon_{in}^0 + \int_V \frac{1}{2} [G_{ij,kn}^C(r - r') + G_{nj,ki}^C(r - r')] \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \\ \Rightarrow \epsilon_{in}(r) &= \epsilon_{in}^0 + \int_V \Gamma_{injk}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') u_{l,m}(r') dV' \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

où  $\Gamma^C$  est le tenseur de Green modifié associé à  $C$  :

$$\Gamma_{injk}^C = \frac{1}{2} [G_{ij,kn}^C(r - r') + G_{nj,ki}^C(r - r')] \quad (\text{B-18})$$

Grâce aux propriétés de symétrie du tenseur des modules  $c$ , et donc de  $\delta c$ , nous pouvons réécrire (B-17) :

$$\boxed{\epsilon_{in}(r) = \epsilon_{in}^0 + \int_V \Gamma_{injk}^C(r - r') \delta c_{jklm}(r') \epsilon_{lm}(r') dV'} \quad (\text{B-19})$$

où (B-19) est l'équation intégrale de l'élasticité des milieux hétérogènes en déformation.

## B-2 Comportement visqueux pur

Considérons maintenant un milieu hétérogène  $V$ , dont le tenseur des modules de viscosité local variable est noté  $b(r)$ , soumis sur son contour  $\partial V$  à des conditions aux limites cinématiques  $\dot{u}^d$ .

Les équations de champs décrivant le problème hétérogène s'écrivent :

$$\sigma(r) = b(r) : \dot{\epsilon}(r) \quad \text{Loi de comportement visqueux} \quad (\text{B-20})$$

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{Equation d'équilibre statique} \quad (\text{B-21})$$

$$\dot{\epsilon} = \nabla^s \cdot \dot{u} \quad \text{Condition de compatibilité cinématique} \quad (\text{B-22})$$

$$\dot{u}^d = \dot{\epsilon}^0 \cdot x \quad \text{sur } \partial V \quad \text{Conditions aux limites} \quad (\text{B-23})$$

En admettant un milieu de référence de modules uniformes  $B$  tels que :

$$b(r) = B + \delta b(r) \quad (\text{B-24})$$

où  $\delta b$  est la fluctuation de  $b$  autour de  $B$ , et en procédant de la même manière qu'en élasticité, l'équation de Navier suivante est obtenue :

$$B_{ijkl} \dot{u}_{k,lj} + f_i = 0 \quad (\text{B-25})$$

avec  $f_i = (\delta b_{ijkl} \dot{u}_{k,l}),_j$  et  $f$  est la densité des forces fictives liées aux hétérogénéités de  $b$ .

De la même manière qu'en élasticité pure, on introduit  $G^B$ , le tenseur de Green associé au tenseur des modules visqueux  $B$  du milieu de référence.

La solution de cette équation de Navier s'écrit donc :

$$\dot{u}_i(r) = \dot{u}_i^0 + \int_V G_{ij}^B(r - r') f_j(r') dV'$$

En procédant toujours pareillement qu'en élasticité pure, l'équation intégrale de la viscosité des milieux hétérogènes en déformation s'exprime comme :

$$\boxed{\dot{\epsilon}_{in}(r) = \dot{\epsilon}_{in}^0 + \int_V \Gamma_{injk}^B(r - r') \delta b_{jklm}(r') \dot{\epsilon}_{lm}(r') dV'} \quad (\text{B-26})$$

où  $\Gamma^B$  est le tenseur de Green modifié associé à  $B$  :

$$\Gamma_{injk}^B = \frac{1}{2} [G_{ij,kn}^B(r - r') + G_{nj,ki}^B(r - r')]$$

### B-3 Opérateurs de Green modifiés et tenseurs d'Eshelby

Comme nous pouvons le constater plus haut, les équations intégrales obtenues lors de la formulation des problèmes hétérogènes classiques en élasticité ou en viscosité peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$a(r) = a^0 - \int_V \Gamma^L(r - r') : g(r') dV' \quad (\text{B-27})$$

Ces équations mettent donc en évidence des termes intégrales  $\int_V \Gamma^L(r - r') : g(r') dV'$  traduisant la nature de l'accommodation intergranulaire. Ces intégrales contiennent l'opérateur fondamental de Green  $\Gamma^L$  (opérateur de Green modifié) associé à un milieu homogène de référence de

module  $L$  et un terme de fluctuation  $g(r)$  par rapport au milieu de référence inconnu.

Le principe des estimations basées sur le problème élémentaire inclusion-matrice, comme les approximations autocohérente et de Mori-Tanaka, repose sur la propriété essentielle de décomposition de l'opérateur de Green modifié en une partie singulière, dite locale  $\Gamma_l^L$ , et une partie régulière, dite à distance ou non locale  $\Gamma_{nl}^L$ , telles que :

$$\Gamma^L(r - r') = \Gamma_l^L : \delta(r - r') + \Gamma_{nl}^L(r - r') \quad (\text{B-28})$$

où  $\Gamma_{nl}^L$  décroît comme  $\frac{1}{|r-r'|}$  et  $\Gamma_l^L$  est un tenseur du quatrième ordre. D'après cette décomposition, la forme de l'équation intégrale (B-27) devient :

$$\begin{aligned} a(r) &= a^0 - \int_V \Gamma_l^L(r) : \delta(r - r') : g(r') dV' - \int_V \Gamma_{nl}^L(r - r') : g(r') dV' \\ &= a^0 - \int_V \Gamma_l^L : g(r) dV - \int_V \Gamma_{nl}^L(r - r') : g(r') dV' \end{aligned}$$

Dans un milieu infini, l'intégrale de  $\Gamma_{nl}^L$  dans tout le volume est nulle et celle de  $\Gamma_l^L$  se réduit à  $T^L$ . De plus, l'intégrale de  $\Gamma_{nl}^L$  est uniforme et nulle dans une sphère si  $r$  est à l'intérieur de cette sphère.

Par conséquent, dans le cas d'une inclusion sphérique, la formulation intégrale (B-27) peut alors être réduite à sa partie locale :

$$\begin{aligned} a(r) &= a^0 - \left( \int_{V^I} \Gamma_l^L(r) dV \right) : g(r) \quad r \in V^I \\ \Rightarrow \quad a^I &= a^0 - T^L : g^I \end{aligned} \quad (\text{B-29})$$

où  $T^L = \int_{V^I} \Gamma_l^L(r) dV$  et désigne le tenseur d'interactions d'une inclusion sphérique.

La formulation intégrale par les techniques de Green et le problème élémentaire de l'inclusion d'Eshelby permet d'établir la correspondance entre le tenseur d'interactions  $T_l^L$  et le tenseur d'Eshelby  $S^{Esh}$ , dans le cas d'une inhomogénéité sphérique :

$$S^{Esh} = - \left( \int_{V^I} \Gamma_l^L(r) dV \right) : L = T^L : L \quad (\text{B-30})$$

Dans le cas d'un comportement élastique isotrope, le tenseur d'interaction  $T^C$  d'une inclusion sphérique associé au milieu de référence de modules d'élasticité  $C$  s'écrit :

$$T^C = - \frac{3(\kappa + 2\mu)}{5\mu(3\kappa + 4\mu)} J - \frac{1}{3\kappa + 4\mu} L \quad (\text{B-31})$$

Dans le cas d'un comportement visqueux isotrope, le tenseur d'interaction  $T^B$  de l'inclusion sphérique associé au milieu de référence de modules visqueux  $B$  devient :

$$T^B = -\frac{3(\kappa^v + 2\eta)}{5\eta(3\kappa^v + 4\eta)} J - \frac{1}{3\kappa^v + 4\eta} L \quad (\text{B-32})$$

Il est important de noter que le principe de l'approximation autocohérente consiste à affaiblir la partie non locale des interactions en imposant le choix du milieu de référence satisfaisant la condition de moyenne :

$$\overline{g(r)} = 0$$

L'équation intégrale (B-27) peut alors être réduite, en tout point  $r$  du V.E.R., à sa partie locale, c'est-à-dire sans avoir à prendre en compte la morphologie de la structure du milieu hétérogène :

$$a(r) = a^0 - T^L : g(r)$$

Dans le cas particulier du problème de l'inclusion sphérique, le principe autocohérent permet d'écrire en tout point  $r$  du V.E.R. :

$$a(r) = a^0 - T^L : g(r) \quad (\text{B-33})$$





# Table des figures

1.1	<i>Répartition des divers types de matières plastiques dans les emballages ménagers</i>	12
1.2	<i>Répartition de la production de polymères par type de produits en % . . . . .</i>	14
1.3	<i>Répartition de la production des matières plastiques par grandes familles en % .</i>	14
1.4	<i>Principaux domaines d'application des matières plastiques en % . . . . .</i>	14
1.5	<i>exemple de processus de régénération-séparation des déchets plastiques . . . . .</i>	16
2.1	<i>Module d'Young <math>E</math> des polymères en fonction de la température <math>T</math> pour une vitesse de déformation constante <math>\dot{\epsilon}</math> . . . . .</i>	37
2.2	<i>Réponse d'un matériau élastoviscoplastique lors d'un essai de fluage . . . . .</i>	39
2.3	<i>Réponse d'un matériau élastoviscoplastique lors d'un essai de relaxation . . . . .</i>	40
2.4	<i>Courbe contrainte-déformation (essai de traction) d'un thermoplastique semi-cristallin et représentation schématique d'une éprouvette de traction dans les différentes zones . . . . .</i>	40
2.5	<i>Courbe d'hystérésis du comportement viscoélastique linéaire lors d'un essai cyclique de traction-compression à vitesse de déformation constante . . . . .</i>	41
2.6	<i>Illustration du principe de superposition de Boltzmann . . . . .</i>	48
2.7	<i>Modèles représentatifs de la viscoélasticité linéaire (<math>e</math> est la déformation) . . . . .</i>	50
3.1	<i>Schéma du principe des méthodes de type héréditaire . . . . .</i>	73
3.2	<i>Schéma du principe des méthodes à variables internes . . . . .</i>	80
3.3	<i>Propriété micromécanique et microstructure du matériau biphasé maxwellien isotrope incompressible : <math>\mu^1</math> et <math>\mu^2</math> sont les coefficients de cisaillement locaux en élasticité, <math>\eta^1</math> et <math>\eta^2</math> sont les coefficients de cisaillement locaux en viscoplasticité.</i>	84
3.4	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}</math> . . . . .</i>	85
3.5	<i>a) modèle de Weng : interaction inclusion-matrice de nature élastique. b) Interaction inclusion-matrice de nature élastoviscoplastique . . . . .</i>	86

3.6	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	90
3.7	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	95
4.1	<i>Problème de l'inclusion viscoélastique</i> . . . . .	117
4.2	<i>Organigramme de la résolution numérique de l'approximation autocohérente du</i>	
	<i>modèle micromécanique proposé</i> . . . . .	129
4.3	<i>Propriétés mécaniques et microstructure du matériau test dans le cas incompressible</i>	130
4.4	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	131
4.5	<i>Description du chargement cyclique imposé au matériau test</i> . . . . .	132
4.6	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai cyclique à <math> \dot{E}  =</math></i>	
	$10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	132
4.7	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	133
4.8	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	134
4.9	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	135
4.10	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	135
4.11	<i>Propriétés mécaniques et microstructure du matériau test dans le cas compressible</i>	136
4.12	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	137
4.13	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai cyclique à <math> \dot{E}  =</math></i>	
	$10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	138
4.14	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	139
4.15	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	140
4.16	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	141
4.17	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression</i>	
	à $ \dot{E}  = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	145

5.1	<i>Propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test . . . . .</i>	174
5.2	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1} : k = 1</math> . . . . .</i>	175
5.3	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1} : k = 0, 2</math> . . . . .</i>	176
5.4	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1} : k = 0, 1</math> . . . . .</i>	177
5.5	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1} : k = 0, 2</math> . . . . .</i>	179
5.6	<i>Comportement macroscopique du matériau test pour un essai de traction-compression à <math> \dot{E}  = 10^{-2} \text{ s}^{-1} : k = 0, 1</math> . . . . .</i>	179
6.1	<i>Profil des températures le long du cylindre d'injection . . . . .</i>	187
6.2	<i>Histoire de chargement utilisée pour l'identification des paramètres <math>\alpha_i</math> . . . . .</i>	193
6.3	<i>essai uniaxial de charge et décharge à vitesse de contrainte <math> \dot{\sigma}  = 0,14 \text{ MPa/s}</math> avec maintiens à <math>\sigma = 4 \text{ MPa}</math> et <math>0 \text{ MPa}</math> . . . . .</i>	195
6.4	<i>Déformation expérimentale observée et déformation théorique déterminée lors de l'essai uniaxial d'identification des paramètres de linéarité . . . . .</i>	196
6.5	<i>Déformation expérimentale observée et déformation issue de la loi (6.17) identi- fiée : contrainte de maintien en charge <math>\sigma = 7 \text{ MPa}</math> . . . . .</i>	197
6.6	<i>Déformation expérimentale observée et déformation issue de la loi (6.17) identi- fiée : contrainte du maintien en charge <math>\sigma = 10 \text{ MPa}</math> . . . . .</i>	198
6.7	<i>Représentation schématique de la réponse en déformation lors d'un essai de fluage-recouvrance . . . . .</i>	200
6.8	<i>Histoire de chargement utilisée pour l'identification de la fonction <math>g_2</math> de non li- néarité . . . . .</i>	201
6.9	<i>Histoire de chargement utilisée pour l'identification des paramètres de non linéarité</i>	204
6.10	<i>Déformation expérimentale observée et déformation théorique déterminée lors de l'essai uniaxial d'identification des paramètres de non linéarité . . . . .</i>	205
6.11	<i>Comportement du polypropylène étudié en traction uniaxiale à vitesse de défor- mation constante <math>\dot{E} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}</math> . . . . .</i>	206
6.12	<i>Comportement du polypropylène étudié en traction uniaxiale à vitesse de défor- mation constante <math>\dot{E} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}</math> . . . . .</i>	207
6.13	<i>Propriétés mécaniques et microstructurales du matériau test correspondant au mélange PP/talc . . . . .</i>	221

- 6.14 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,1$  . 222*
- 6.15 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,2$  . 223*
- 6.16 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,3$  . 223*
- 6.17 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,1$  . 224*
- 6.18 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,2$  . 225*
- 6.19 *Comportement macroscopique du mélange polypropylène/talc lors d'un essai de traction uniaxiale à vitesse de déformation constante  $\dot{E} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  :  $f = 0,3$  . 225*

# Liste des tableaux

1.1	<i>Propriétés physico-chimiques des principales charges minérales . . . . .</i>	21
1.2	<i>Propriétés et utilisation des principales charges dans les plastiques . . . . .</i>	22
1.3	<i>Propriétés et utilisation des principales charges dans les plastiques (suite) . . . . .</i>	23
1.4	<i>Propriétés mécaniques de divers polypropylènes . . . . .</i>	29