



**HAL**  
open science

**Analyse des performances de systèmes de production  
sujets à des défaillances aléatoires et pouvant engendrer  
des produits non conformes dans un environnement  
incertain**

Mehdi Radhoui

► **To cite this version:**

Mehdi Radhoui. Analyse des performances de systèmes de production sujets à des défaillances aléatoires et pouvant engendrer des produits non conformes dans un environnement incertain. Gestion et management. Université Paul Verlaine - Metz, 2008. Français. NNT : 2008METZ038S . tel-01752604

**HAL Id: tel-01752604**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752604v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

S/13 08/38

Université de Tunis  
Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis  
Université Paul Verlaine de Metz

UNIVERSITE Paul Verlaine - METZ S.C.D.	
N° Inv.	_____
Cote	
Loc	

**THESE EN COTUTELLE**

Présentée à

L'Université Paul Verlaine - Metz  
UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

Pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR**

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur  
Mention : GENIE ELECTRIQUE

Par

**Mehdi RADHOU**

Titre de la thèse

**Analyse des performances de systèmes de production sujets à des défaillances aléatoires  
et pouvant engendrer des produits non conformes dans un environnement incertain**

Soutenue le 03 Avril 2008, devant le jury composé de :

Examineur : Ali GHARBI Professeur à l'École de Technologie Supérieure, Université du Québec.

Rapporteurs : Alexandre DOLGUI Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne.  
Nabil BEN FRADJ Maître de conférences (HDR) à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis.

Président de jury : Benoît IUNG Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy

Directeurs : Anis CHELBI Maître de conférences (HDR) à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis.  
Nidhal REZG Professeur à l'Université Paul Verlaine - Metz.

## Table des Matières

Liste des Tableaux .....	8
Liste des figures.....	10
Introduction générale .....	13
<b>CHAPITRE I.....</b>	<b>17</b>
Étude bibliographique.....	17
I.I Intégration maintenance-production.....	18
I.II Intégration maintenance-qualité et maintenance-production-qualité.....	25
<b>CHAPITRE II .....</b>	<b>32</b>
<b>Modèle intégré production-maintenance pour des systèmes avec dégradation menant à la production de produits non-conformes.....</b>	<b>32</b>
II.I Définition de la stratégie .....	33
II.II Modèle mathématique .....	37
II.II.1 Durée moyenne du cycle de restauration.....	38
II.II.2 Scénario 1: cas où le niveau d'inventaire maximum $Z$ est atteint après $\tau$ (voir figure II.2).....	39
II.II.3 Scénario 2 : cas où le niveau maximum d'inventaire $Z$ est atteint avant $\tau$ .....	43
II.III Procédure Numérique.....	46
II.V Exemple numérique et discussion .....	48
II.V Conclusion.....	51
<b>CHAPITRE III.....</b>	<b>54</b>
<b>Modèle intégré de maintenance préventive, de dimensionnement de stock tampon et de contrôle de la qualité pour un système de production imparfait : Approche analytique combinée à la simulation .....</b>	<b>54</b>
III.I.1 Première stratégie : définition et hypothèses de travail .....	55
III.I.2 Développement du modèle mathématique.....	58
III.I.3 Exemple numérique et modèle de simulation.....	66
III.II.1 Deuxième stratégie : définition et hypothèses de travail.....	72
III.II.2 Développement du modèle mathématique .....	73
III.II.3 Exemple numérique.....	84
III.III Conclusion .....	88

<b>CHAPITRE IV</b> .....	<b>91</b>
<b>Modèle intégré de maintenance préventive, de dimensionnement des stocks tampons et de contrôle de la qualité pour un système de production imparfait : Approche analytique</b> .....	<b>91</b>
IV.I Définition de la stratégie et hypothèses de travail .....	92
IV.II Développement du modèle mathématique .....	95
IV.II.1 Le temps moyen de production entre deux actions de maintenance consécutives $E[W_k]$ .....	97
IV.II.2 Le nombre moyen d'inspections par cycle .....	98
IV.II.3 Le coût moyen d'inventaire .....	98
IV.II.4 Le coût moyen de maintenance .....	101
IV.II.5 Le coût moyen de qualité .....	101
IV.III Exemple numérique .....	102
IV.III.1 La variation du coût unitaire de stockage ( $C_s$ ) .....	108
IV.III.2 La variation du coût unitaire de pénurie ( $C_p$ ) .....	110
IV.III.3 La variation du coût d'inspection ( $C_i$ ) .....	111
IV.IV Conclusion .....	112
<b>CHAPITRE V</b> .....	<b>114</b>
<b>Stratégie conjointe de contrôle de la qualité et de maintenance préventive imparfaite</b> .....	<b>114</b>
V.I Définition de la stratégie .....	115
V.II Modèle de simulation .....	118
V.II.1 Première situation : la machine est arrêtée : .....	119
V.II.2 Deuxième situation : la machine fonctionne : .....	120
V.II.3 Troisième situation : machine Bloquée : .....	120
V.III Optimisation utilisant les plans d'expérience et l'analyse de régression .....	124
V.III.1 Les plans d'expérience .....	124
V.III.2 Analyse de régression et résultats .....	126
V.IV Conclusion .....	138
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>141</b>
<b>Liste bibliographique</b> .....	<b>146</b>

# Liste des Tableaux

Tableau II. 1 Les résultats Numériques .....	49
Tableau III. 1 Résultats du simulateur.....	69
Tableau III. 2 Résultats de la procédure numérique.....	72
Tableau III. 3 valeurs optimales des variables de décision.....	86
Tableau IV. 1 Résultats de la procédure numérique .....	105
Tableau IV. 2 Evolution des coûts de maintenance et de non-conformité .....	107
Tableau IV. 3 Evolution de la politique optimale en fonction du coût unitaire de stockage.....	109
Tableau IV. 4 Evolution de la politique optimale en fonction du coût unitaire de pénurie .....	110
Tableau IV. 5 Evolution de la politique optimale en fonction du coût d'inspection .....	111
Tableau V. 1 Plan d'expérience à trois niveaux et deux variables .....	124
Tableau V. 2 Table d'ANOVA .....	125
Tableau V. 3 Evolution des coûts par unité de temps en fonction de $h$ . .....	131
Tableau V. 4 Evolution des coûts en fonction de $l_m$ pour ( $h=h^*= 54$ unités). .....	134

# Liste des figures

Figure II.1 La stratégie d'exploitation du système.....	34
Figure II.2 Evolution de l'inventaire pendant un cycle de restauration : cas où Z est atteint après le passage à l'état 'hors contrôle'.....	37
Figure II.3 Evolution de l'inventaire pendant un cycle de restauration : cas où Z est atteint avant le passage à l'état 'hors contrôle'.....	38
Figure II.4 Vue détaillée de la zone 4 .....	40
Figure II.5 une vue détaillée des zones des unités non conformes .....	42
Figure II.6 Procédure Numérique.....	47
Figure II.7 Evolution du coût total moyen par unité de temps $CT(Z^*,T)$ .....	50
Figure III.1 Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des produits non-conformes.....	57
Figure III.2 Evolution du niveau du stock tampon.....	59
Figure III.3 Cycle sans pénurie .....	61
Figure III.4 Cycle avec pénurie.....	61
Figure III.5 Modèle de simulation .....	68
Figure III.6 Evolution approximative du taux de rejet en fonction du temps.....	70
Figure III.7 Courbes d'iso-réponses.....	71
Figure III.8 Evolution du niveau d'inventaire : cas 'sans pénurie' .....	74

Figure III. 9 Evolution du niveau d'inventaire : cas avec pénurie .....	74
Figure III. 10 Evolution du niveau d'inventaire : cas 'sans pénurie' .....	78
Figure III. 11 Evolution du niveau d'inventaire: cas 'avec pénurie' .....	78
Figure III. 12 Le cycle dans le cas où aucun stock n'est bâti .....	81
Figure III. 13 Procédure numérique .....	85
Figure III. 14 Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de $l_m$ pour $l_A^*= 0.22$ , $h^*=30$ . .....	86
Figure III. 15 Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de $l_A$ pour $l_m^*= 0.3$ , $h^*=30$ . .....	87
Figure IV. 1 Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des unités non-conformes. ....	95
Figure IV. 2 Evolution du niveau du stock tampon. ....	96
Figure IV. 3 Procédure numérique.....	104
Figure IV. 4 Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de $h$ .....	106
Figure IV. 5 Evolution de la durée moyenne du cycle d'inventaire en fonction de $l_m$ .....	108
Figure V. 1 Système de production considéré .....	116
Figure V. 2 Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des unités non-conformes.....	117
Figure V. 3 Modèle de simulation .....	121
Figure V. 4 Évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de $h$ , pour différentes valeurs de $l_m$ .....	123
Figure V. 5 Courbe en trois dimensions du coût total par unité de temps .....	127
Figure V. 6 Courbes d'iso-réponse .....	128
Figure V. 7 Evolution du nombre des différentes actions en fonction de $l_m$ .....	130
Figure V. 8 Evolution du coût de pénurie par unité de temps en fonction de $h$ .....	132
Figure V. 9 Evolution du coût de stockage par unité de temps en fonction de $h$ .....	132
Figure V. 10 Evolution du coût de non-conformité par unité de temps en fonction de $h$ .....	133
Figure V. 11 Evolution du coût de pénurie par unité de temps en fonction de $l_m$ .....	135
Figure V. 12 Evolution du coût de stockage par unité de temps en fonction de $l_m$ .....	135
Figure V. 13 Evolution du coût de non-conformité par unité de temps en fonction de $l_m$ .....	137
Figure V. 14 Evolution du coût de maintenance par unité de temps en fonction de $l_m$ .....	138





# **I**ntroduction générale

De nos jours, la fonction maintenance joue un rôle essentiel dans l'entreprise industrielle de part sa mission qui consiste à réduire la durée et la fréquence d'occurrence des pannes. En effet, cela permet d'améliorer la compétitivité de l'entreprise en contribuant à assurer le respect des délais de livraison de produits de bonne qualité et au moindre coût.

Toutefois, dans la pratique, il est très difficile de procéder à des actions de maintenance, particulièrement les actions de maintenance préventive, sans la considération de l'activité de production. En effet, il n'est pas toujours évident de rendre disponible l'équipement qui doit subir des actions de maintenance préventive. De plus, à cause de problèmes liés à la logistique et à la disponibilité des ressources, ces actions ont souvent des durées aléatoires.

Tenant compte de ces contraintes, différentes stratégies de maintenance plus ou moins complexes ont été mises en œuvre. Elles prennent en considération à la fois le programme de production et la possibilité d'avoir recours à des stocks tampons en vue d'assurer la continuité de la production lors des interventions de maintenance préventive et corrective sur un équipement donné. Ces stratégies intègrent ainsi dans un même modèle les paramètres reliés à la production et ceux reliés à la maintenance.

Plus récemment, de nouvelles stratégies intégrées sont apparues dans la littérature traitant dans un même modèle, en plus de la maintenance et la production, certains paramètres reliés à

la qualité des produits. Ces modèles ont tous pour objectif de mettre en valeur et de mesurer l'interdépendance de ces trois aspects fondamentaux de tout système industriel.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent justement dans cette perspective de développement de nouveaux modèles intégrés maintenance-production-qualité en vue d'offrir aux industriels de nouvelles stratégies à travers lesquelles il leur serait possible de traiter simultanément les paramètres décisionnels reliés à la fois à la production (taux de production, taille des lots, taille des stocks tampons, etc...), à la maintenance (les instants pour effectuer la maintenance), et à la qualité (taux de non-conformité).

Les nouvelles stratégies intégrées qui seront proposées auront un point commun qui consiste dans le fait que les actions de maintenance à entreprendre sur le système de production sont pilotées par la qualité des produits.

Dans cette perspective, deux démarches seront considérées. Pour la première, les actions de maintenance sont planifiées à partir d'un instant aléatoire auquel le système commence à produire des unités non-conformes. Tandis que pour la deuxième démarche, ce sont les valeurs du taux des unités non-conformes qui indiqueront les instants de déclenchement des actions de maintenance ainsi que leur type. Dans les deux cas, les paramètres de production seront simultanément pris en compte pour diminuer les risques de pénurie durant l'accomplissement des actions de maintenance qui ont des durées aléatoires.

Ce mémoire sera organisé de la manière suivante :

Dans un premier temps, nous présenterons une étude bibliographique qui synthétise différents travaux de recherche qui ont traité de stratégies intégrées de maintenance, production et qualité.

Dans le deuxième chapitre nous proposerons une nouvelle stratégie intégrant dans un même modèle, la production, la maintenance et la qualité en suggérant une politique de maintenance préventive de type âge. Nous considérerons une unité de production soumise à une maintenance préventive après  $T$  unité de temps de bon fonctionnement. Cette maintenance a pour objectif de diminuer le risque de passage aléatoire de la machine à un état 'hors-contrôle' dans lequel elle se met à produire une certaine proportion de produits non-conformes. Si ce passage est détecté, une action de restauration du système à l'état 'sous contrôle' est planifiée.

Les variables de décision caractérisant cette stratégie sont la taille du lot à produire  $Q$  d'une part, et l'âge  $T$  de la maintenance préventive d'autre part. Un modèle mathématique et une procédure numérique seront développés, et un exemple numérique viendra illustrer cette stratégie.

Par la suite, le troisième chapitre présentera deux nouvelles stratégies conjointes de production-qualité-maintenance considérant une politique de maintenance conditionnelle. La première stratégie consiste à contrôler périodiquement la qualité de tous les items produits par la machine. Ce type de contrôle est de plus en plus répandu dans l'industrie, particulièrement dans l'industrie des composants électroniques (les condensateurs) ou alors dans l'industrie des composants automobiles ou l'aviation (contraintes de sécurité). Cette stratégie est caractérisée par deux variables de décision : le niveau seuil du taux de non-conformité sur la base duquel les interventions de maintenance seront entreprises, et la taille du stock tampon à envisager dès le début du cycle pour réduire le risque de pénurie lors des interruptions de service pour maintenance.

Dans la deuxième partie de ce même chapitre, nous présenterons une généralisation de cette stratégie en permettant de retarder la construction du stock tampon par rapport au début du cycle dans un souci d'améliorer les performances économiques. Ce décalage sera considéré comme une variable de décision supplémentaire. Les deux stratégies seront développées en adoptant une approche combinée de modélisation analytique et par simulation.

Dans le quatrième chapitre, nous reprendrons la stratégie proposée dans la première partie du chapitre III, tout en considérant la période de contrôle de la qualité comme une troisième variable de décision. On adoptera une modélisation totalement analytique. Une procédure numérique sera développée, et des résultats numériques seront obtenus et discutés.

Finalement, dans le cinquième chapitre, nous proposerons de relaxer certaines hypothèses plus ou moins restrictives sur lesquelles nous nous sommes appuyés dans les différents modèles proposés. L'une de ces hypothèses est celle qui suppose que les actions de maintenance sont parfaites. Nous adopterons une approche basée sur la simulation et les plans d'expérience pour traiter cette extension.



# CHAPITRE I

## Étude bibliographique

Il a été largement montré dans la littérature que l'implantation de stratégies de maintenance préventive pour des composantes ou des unités de production peut être un moyen efficace pour augmenter leurs durées de vie et réduire le coût d'exploitation. [Barlow et Proschan (1965), Nakagawa (1981), et Wang (2002)].

Dans le cas où deux ou plusieurs machines fonctionnent d'une façon indépendante dans un système de production, il devient plus difficile d'implanter une stratégie de maintenance préventive spécifique pour satisfaire la demande. [(Pintelon et Gelders (1992)].

Wijngaard (1979) a traité le cas d'un système à deux machines dont les durées de vie et de production sont aléatoires. En s'appuyant sur les équations différentielles, il a pu modéliser le

comportement du système en régime permanent pour en extraire des formules explicites des différentes mesures de performance du système.

Plusieurs chercheurs ont adopté la solution de construire des stocks tampons entre les machines pour garantir la continuité de la production durant les interruptions de service générées par les pannes ou par les actions de maintenance préventive entreprises sur les machines en amont. (Groenevelt et al.(1992b), Van der Dayn Schouen et Vneste (1995), Meller Russel et al.(1996), Chelbi et Aït Kadi (2003), Chelbi et Aït Kadi (2004), Groenevelt et al.(1992a)).

Van der Dayn Schouen et Vanneste (1995) considèrent un système constitué de deux machines avec un stock tampon entre elles. Une stratégie de maintenance préventive a été proposée tenant compte à la fois de l'âge des machines et de la taille du stock, pour déterminer la périodicité des interventions préventives.

Meller Russel et David (1996) ont étudié l'impact d'une stratégie de maintenance préventive sur un système de deux machines avec une capacité de stock tampon fixe entre les machines. Ils supposent dans leur modèle que le taux de panne des machines est constant, que le temps de réparation est exponentiellement distribué et que les périodicités des actions de maintenance préventive sont prédéterminées et qu'elles ont une durée constante.

### **I.I Intégration maintenance-production**

Le concept de maintenance intégrée ayant recours au couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de production, est de plus en plus adopté dans le cadre industriel. Cette approche consiste à considérer simultanément les paramètres de production (par exemple : les taux de production, les niveaux des stocks, la demande, etc.) et ceux de la maintenance (par exemple : les instants d'occurrence des pannes, les durées de réparation, les périodicités des actions préventives, etc.). Ainsi, il est possible d'optimiser le fonctionnement global de plusieurs types de systèmes de production, en tenant compte à la fois de la capacité de production, de la demande à satisfaire et de la fiabilité et la maintenance des outils de production. Nous présentons dans ce qui suit, une synthèse de plusieurs travaux de recherche qui ont traité le problème d'intégration maintenance-production.

### Srinivasan et Lee(1996)

Srinivasan et Lee considèrent les effets conjugués de la maintenance préventive et de la production/inventaire sur le coût total d'exploitation de l'outil de production. Ils considèrent un système de production constitué d'une seule machine et fabricant un seul type de produit. Les auteurs déterminent les niveaux optimaux d'inventaire entre lesquels la machine devrait produire de sorte à minimiser le coût total. Dans une deuxième étape, les auteurs considèrent que la machine peut tomber en panne d'une manière aléatoire et qu'elle est sujette à des actions de maintenance préventive à des intervalles prédéterminés. Les auteurs calculent alors les périodes optimales des actions de maintenance préventive.

### Salameh et al (1999)

Dans ce travail, il est supposé que l'unité de production travaille au maximum de sa capacité pendant  $T$  unités de temps avant d'être soumise à des actions de maintenance préventive. Avant la fin de la période  $T$ , un stock tampon  $S$  est bâti à un taux constant  $\alpha$  unités par unité de temps. A la fin de chaque période  $T$ , les actions de maintenance préventive sont lancées et durent un temps  $t$  qui est une variable aléatoire qui dépend du caractère des interventions requises pour rétablir la machine à un niveau acceptable de façon à prévenir avec certitude toutes pannes. Pendant la période  $t$  d'arrêt de la machine pour la maintenance préventive, la demande est satisfaite à partir du stock tampon  $S$  à un taux constant  $\beta$  unités par unité de temps.

Ce modèle montre bien l'importance d'accumuler un stock tampon entre les deux machines pour assurer la continuité de la production. Toutefois, il demeure un modèle restrictif de part ses hypothèses qui estiment, entre autres, que les équipements ne peuvent jamais tomber en panne entre deux actions consécutives de maintenance préventive. Les mêmes chercheurs ont établi un nouveau modèle (décrit ci-dessous) en se basant sur le premier mais en considérant des produits périssables avec le temps.

### Salameh et al (2001)

Il est supposé dans ce travail que l'unité de production travaille au maximum de sa capacité pendant  $T$  unités de temps avant de subir des actions de maintenance préventive qui durent  $\tau$  unités de temps. Avant la fin de cette période  $T$ , un stock tampon est bâti à un taux  $\alpha$  unités



par unité de temps. Une certaine quantité sera perdue à cause de la nature périssable du produit, ce qui ramènerait le stock à un niveau  $S$ .

L'aspect périssable est traduit par un coefficient  $\theta$  qui est le pourcentage de la quantité disponible par unité de temps. La détérioration est visible pendant la construction et la consommation du stock. Le problème fondamental de ce travail est de déterminer la taille du stock tampon qui assure la continuité de la production malgré les perturbations dues aux interventions de maintenance préventive. Pour cela, les chercheurs se sont basés sur les hypothèses de travail suivantes :

- Le stock tampon est sujet aux détériorations,
- La maintenance préventive régulière garantit que la probabilité de panne de l'unité de production est nulle,
- Avant le début des actions de maintenance préventive, un stock tampon  $S$  est bâti,
- La période  $T$  est assez longue par rapport à  $\tau$ , donc durant chaque période  $T$ , la construction du stock commence du niveau zéro,
- Le stock non utilisé pendant  $\tau$  est remis à zéro le cycle suivant.

L'apport de ce modèle par rapport au modèle précédent de Salameh et al.(1999) a été essentiellement la prise en compte de la périssabilité du stock. Cependant, une hypothèse restrictive majeure demeure, celle qui soutient l'absence de pannes entre deux actions de maintenance préventive consécutives.

Chelbi et al. (2008) ont récemment permis de relaxer cette hypothèse en présentant dans ce même contexte de produits périssables, un modèle générique qui tient compte, entre autres, du fait que des pannes aléatoires peuvent survenir.

### El-Kassar et Salameh (2003)

Dans ce travail, El-Kassar et Salameh ont développé un modèle pour déterminer la taille optimale du stock de sécurité pour pallier aux perturbations engendrées par les actions de maintenance préventive et les actions de réparation suite aux pannes.

La logique de ce travail était de déterminer les scénarios possibles et de calculer la probabilité d'occurrence et le coût total moyen par unité de temps qui correspondent à chacun des scénarios. Pour cela, les hypothèses de travail et les notations suivantes ont été adoptées.

1. la maintenance préventive garantit que la majorité des pannes n'auront pas lieu durant la période de construction du stock tampon,
2. s'il y a quand même une panne durant la phase de construction du stock, une réparation minimale est entreprise et le système retrouve son état juste avant la panne,
3. la durée d'une réparation minimale et la probabilité d'avoir plus que deux pannes durant la période de construction sont négligeables,
4. dans le cas d'occurrence d'une panne, les actions de maintenance préventive sont entreprises avec les réparations,
5. la quantité non utilisée du stock durant la maintenance préventive et curative, est remise à zéro.

Dans ce travail, les chercheurs ont traité les deux cas suivants : Cas avec pannes et cas sans pannes.

Le premier cas est traité en deux étapes. La première décrit le fait que la durée de réparation est assez courte par rapport au temps nécessaire pour la consommation de la totalité du stock tampon. Dans ce cas précis, la quantité moyenne en pénurie est nulle. La machine ne reprendra la production que lorsque le niveau moyen de stock tampon ( $S$ ) atteint 0. (Le niveau du stock est toujours nul au début de chaque cycle).

Par ailleurs, la deuxième étape décrit le cas contraire, c'est-à-dire le temps de réparation est supérieur au temps de consommation du stock, auquel cas nous sommes en présence de pénurie. Pour les deux scénarios possibles, des expressions mathématiques ont été développées pour déterminer le coût total moyen par unité de temps en fonction du niveau du stock tampon à réaliser ( $S$ ).

Le deuxième cas (absence de pannes) est traité en deux étapes. La première décrit le cas où la durée d'une maintenance préventive est inférieure à celle nécessaire pour consommer tout le stock ( $S$ ), dans ce cas la quantité moyenne en pénurie est nulle. La deuxième étape traite le cas où la quantité moyenne en pénurie n'est plus nulle. Comme pour le modèle qui tient compte des pannes, les auteurs ont calculé le niveau d'inventaire moyen par unité de temps.

La taille optimale du stock tampon correspond à la valeur de  $S$  qui minimise le coût  $TCU(S)$ . Le modèle a été illustré à l'aide d'un exemple numérique. Cette approche du problème comme celles qui l'ont précédée, a pour objectif de dimensionner d'une façon optimale la taille du stock tampon à placer entre deux unités de production consécutives en présence des actions de maintenance.

Nous présentons dans ce qui suit une autre approche proposée par Chelbi et Aït Kadi (2004) qui ne cherche pas seulement à déterminer la taille optimale du stock tampon mais qui détermine en plus d'une façon simultanée, la meilleure périodicité de maintenance préventive à adopter.

### Chelbi et Aït Kadi (2004)

Cette étude considère un système composé d'une unité de production réparable et d'une ligne d'assemblage avec un stock tampon entre elles. Des actions de maintenance préventive sont réalisées au niveau de l'unité de production à tous les  $T, 2T, 3T, \dots$ . Cela n'empêche pas que cette même unité de production puisse tomber en panne à des instants aléatoires.

En vue de pallier aux perturbations de production causées par les actions de maintenance préventive et corrective entreprises et qui ont des durées aléatoires, un stock tampon est bâti à un taux  $\alpha$ , pour assurer la continuité de la satisfaction de la demande au niveau de la ligne d'assemblage.

La stratégie proposée consiste à construire un stock tampon ( $S$ ) au début de chaque cycle de maintenance préventive, couvrant au minimum la consommation moyenne durant les périodes de réparation suites aux pannes entre 0 et  $T$ . Á l'instant  $T$ , une action de maintenance préventive est entreprise et un certain niveau de stock devrait être encore disponible pour garantir la satisfaction de la demande durant cette action.

Le modèle élaboré est basé sur les hypothèses de travail suivantes :

- les distributions de probabilité des durées de vie et de réparation sont connues,
- les pannes sont détectées instantanément,
- les actions de maintenance sont parfaitement exécutées,
- après avoir subi une action de maintenance préventive, la machine peut satisfaire la demande et bâtir un stock tampon ( $S$ ) avant l'apparition de la prochaine panne,
- tous les coûts reliés à la maintenance et au stockage sont supposés être connus et constants,
- les instants de maintenance préventive sont planifiés à l'avance et ne peuvent être changés,
- le stock n'est pas périssable avec le temps.

Un modèle mathématique et une procédure numérique ont été proposés pour le calcul de la valeur minimale du coût total par unité de temps à laquelle correspondent simultanément les valeurs optimales du niveau de stock (S) et de la période de maintenance préventive (T).

Le modèle que nous venons de décrire est en fait une généralisation des modèles qui ont précédé dans la mesure où il permet la prise en compte des variables reliées au stock tampon (S) et à la maintenance préventive (T) d'une façon simultanée.

Toujours dans le même contexte, Chelbi et Rezg (2006) ne considèrent plus une stratégie de maintenance préventive périodique (systématique). Ils proposent plutôt d'adopter une stratégie de maintenance basée sur l'âge des équipements considérés et ils tiennent compte en plus d'une contrainte sur la disponibilité stationnaire à garantir pour l'outil de production considéré. Cette contribution est décrite ci-dessous.

### Chelbi et Rezg (2006)

Dans le cadre de ce travail, les auteurs ont considéré la situation d'une unité de production réparable et sujette à des pannes aléatoires qui alimente une chaîne d'assemblage. L'unité est soumise à des actions de maintenance préventive dès qu'elle atteint un âge T et à une action corrective à la panne. A l'issue de chaque intervention de maintenance préventive, un stock tampon 'h' est bâti à un taux constant afin de garantir l'alimentation de la chaîne d'assemblage durant les actions de maintenance préventive et corrective qui ont des durées aléatoires. Les auteurs ont développé un modèle mathématique pour trouver le couple optimal ( $h^*$  et  $T^*$ ) qui minimise le coût total moyen par unité de temps d'une part, et qui satisfait une contrainte de disponibilité stationnaire minimale requise pour l'unité de production.

Comme nous pouvons le constater, l'ensemble des travaux cités jusque là se sont basés sur des hypothèses plus ou moins restrictives pour pouvoir élaborer des modèles mathématiques qui demeurent toutefois assez complexes. En vue de relaxer certaines de ces hypothèses et d'élargir les champs d'applications des stratégies proposées, certains auteurs ont adopté l'outil de simulation. Dans ce qui suit, nous présentons certains travaux qui ont traité le même sujet mais avec une approche basée sur la simulation.

### Gharbi et Kenné (2000)

Ce travail traite d'un système constitué de plusieurs machines identiques pouvant subir des pannes aléatoires, des réparations et des actions de maintenance préventive. L'objectif est de

déterminer les taux de production des machines et les actions de maintenance préventive qui minimisent le coût total.

En combinant la modélisation analytique et la simulation statistique fondée sur des outils tels que les plans d'expérience et la méthodologie des courbes de surface, une approximation de la politique optimale de contrôle est obtenue. Un exemple numérique est par la suite présenté pour illustrer l'utilité de l'approche proposée. La résolution du problème devient cependant très difficile lorsque le nombre de machines devient assez élevé.

### Gharbi et Kenné (2005)

Comme pour le travail précédent, les auteurs utilisent une combinaison de la modélisation mathématique, de la simulation statistique, des plans d'expérience et de la méthodologie des courbes de surface. Ils parviennent à approximer instaurer une politique de contrôle optimal pour un système constitué cette fois-ci de  $n$  machines qui ne sont pas identiques. Par la suite les auteurs présentent une analyse concernant les extensions de ce travail en mettant l'accent sur la considération d'un système constitué de plusieurs machines et pouvant fabriquer plusieurs types de produits.

### Kenné et al. (2007)

Dans cet article, les auteurs élaborent un modèle analytique pour la détermination conjointe de la taille optimale d'un stock tampon et l'âge optimal de maintenance préventive pour une unité de production sujette à des défaillances aléatoires.

Kenné et al. proposent un modèle analytique pour étudier l'effet de la politique de maintenance préventive adoptée et de l'âge de l'équipement sur les niveaux des stocks tampons. Le modèle proposé a pour objectif de minimiser le coût global qui inclut les coûts d'inventaire, de maintenance (préventive et curative) et de pertes. Les auteurs supposent qu'après chaque intervention (curative ou préventive) le système retrouve son état initial.

La particularité majeure de ce travail réside dans le fait que les auteurs divisent l'âge de la machine en plusieurs intervalles, et ils présentent le niveau du stock de sécurité optimal correspondant à chaque intervalle. Une étude de sensibilité du modèle est ensuite présentée en faisant varier les valeurs des différents coûts d'entrée.

Plus récemment, Aghezzaf et al. (2007), ont proposé un modèle tenant compte de la relation entre les actions de maintenance et les capacités de production du système. Le paragraphe suivant résume le travail élaboré par ces auteurs.

Aghezzaf et al. (2007)

Dans le cadre de ce travail, les auteurs considèrent une unité produisant un ensemble d'items par lots selon un planning spécifié sur un horizon fini. Ils supposent que le système de production est sujet à des défaillances aléatoires, et que chaque action de maintenance entreprise sur le système durant une période, réduit sa capacité de production durant cette période. L'objectif du travail est d'élaborer une stratégie conjointe de maintenance préventive et de dimensionnement des lots, de sorte à satisfaire la demande pour tous les items sur l'ensemble de l'horizon de travail d'une part, et à minimiser la somme des coûts de production et de maintenance d'autre part. Les auteurs montrent aussi que le problème peut être formulé et résolu pour un système produisant plusieurs articles, qui est périodiquement renouvelé, et qui subit des actions de réparation minimale à la panne.

Il est évident que, dans tous ces travaux et dans plusieurs autres, l'état de l'équipement joue un rôle crucial dans le dimensionnement des stocks tampons. D'un autre point de vue, il est aussi bien connu que l'état de l'équipement de production a un impact certain sur la qualité des articles produits. Malgré cette liaison évidente entre la production, la qualité et la maintenance, peu de travaux de recherche ont essayé de traiter simultanément ces 3 aspects fondamentaux des systèmes industriels à l'aide de modèles intégrés mettant en évidence les différentes interactions entre certains paramètres propres à chaque activité mais qui interagissent directement ou indirectement avec d'autres paramètres des autres activités.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons quelques travaux de recherche qui ont considéré des approches intégrées maintenance-qualité ou maintenance-production-qualité.

## **I.II Intégration maintenance-qualité et maintenance-production-qualité**

Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés à la relation entre l'état de l'équipement et son influence sur la qualité des unités produites. Rosenblatt et Lee (1986) ont analysé la situation dans laquelle un système de production est soumis à un processus aléatoire de détérioration, qui le fait passer à un état 'hors contrôle' caractérisé par le fait qu'il commence à produire des items non-conformes. Les auteurs montrent qu'il est préférable, dans de telles situations, de produire des tailles beaucoup plus petites que celles préconisées par le modèle classique EMQ (Economic Manufacturing Quantity). Porteus (1986) est parvenu à la même

conclusion en explorant diverses options pour améliorer la qualité et réduire les coûts de setup.

En effet, Porteus (1986) estime que le nombre moyen des unités non-conformes dans un lot de taille  $Q$  est  $d(Q) = Q - (1 - q)(1 - (1 - q)Q) / q$ , où  $q$  est la probabilité de passage du système vers un état 'hors contrôle'.

Par exemple, si cette probabilité est de 1% pour un lot de taille  $Q = 100$  unités, alors le nombre moyen d'unités non-conformes est égal à  $d(Q=100) = 100 - (1 - 0.01)(1 - (1 - 0.01)100) / 0.01 = 37$  unités.

L'auteur suggère que si la probabilité de passage vers l'état hors contrôle  $q$  est assez petite, alors le nombre moyen d'unités non-conformes dans un lot de taille  $Q$  peut être approximé par  $d(Q) = qQ^2/2$ . Cette approximation est utilisée dans plusieurs autres travaux de recherche (Khouja (2005); Chand (1989))

### Ben Daya (1999)

Dans le cadre de ce travail, l'auteur développe un modèle intégré pour l'optimisation conjointe de la quantité à produire, de la limite des cartes de contrôle  $\bar{x}$  et du niveau de maintenance à adopter dans un contexte de maintenance imparfaite. Ben Daya considère un processus de production imparfait qui commence à produire des items non-conformes après une certaine période aléatoire de fonctionnement sous contrôle. Le modèle proposé tient compte des coûts suivants : le coût de setup, le coût de maintenance et le coût des inventaires. Il est supposé qu'après les actions de maintenance préventive, l'âge du système est réduit proportionnellement à la qualité de l'intervention. Cette réduction de l'âge affectera la distribution du temps de passage de l'équipement vers l'état hors contrôle et par conséquent il aura un effet direct sur les limites des cartes de contrôle. Cette réduction aura aussi un effet sur la durée cycle et par conséquent sur la quantité économique à produire.

Ce travail peut être considéré comme une intégration du modèle EMQ et de la conception des cartes de contrôle  $\bar{x}$  en considérant comme variables de décision suivantes :  $m$  : nombre d'intervalles d'inspection par cycle,  $n$  : la taille du lot à inspecter,  $k$  : limite de contrôle de la carte de contrôle  $\bar{x}$ . Un exemple numérique tenant compte d'une loi de dégradation de l'équipement de type Weibull est utilisé pour illustrer le modèle proposé.

### Ben Daya (2002)

L'auteur développe dans ce travail un modèle intégré pour l'optimisation conjointe de la quantité à produire et du niveau de maintenance à adopter dans un contexte de maintenance imparfaite. Ben Daya considère un processus de production imparfait qui commence à produire des items non-conformes après une certaine période de fonctionnement sous contrôle. L'instant de passage à l'état 'hors contrôle' est une variable aléatoire qui suit une distribution dont le taux de panne est croissant. Dans le modèle proposé, les actions de maintenance préventive réduisent le taux de passage vers l'état 'hors contrôle' selon le niveau de maintenance adopté. L'auteur montre essentiellement que par rapport au cas où aucune action de maintenance n'est entreprise, le surcoût dû à la maintenance a pour résultat la réduction du coût de contrôle de la qualité qui peut conduire à faire baisser le coût global.

Ben Daya considère qu'après chaque intervention, le système retrouve un état entre son état juste avant arrêt pour maintenance et son état initial.

L'auteur démontre par la suite que ce type de maintenance a un effet direct sur le temps de passage de l'état 'sous contrôle' vers l'état 'hors contrôle'.

### Ouyang et al. (2002)

Dans cet article, les auteurs établissent un modèle faisant la relation entre la qualité et la taille de lot. Les auteurs considèrent un modèle de dimensionnement de stock, dans lequel la pénurie est tolérée pour un processus de production imparfait. Ils optimisent simultanément la taille des lots, le point de commande et le coût de setup en vue de réduire au minimum les dépenses totales. Ils examinent enfin l'effet conjoint de l'amélioration de la qualité et de la réduction du coût de setup.

Les auteurs considèrent d'abord le cas où les temps inter arrivées des demandes suivent une distribution normale. Ils développent un algorithme pour trouver la solution optimale. Ensuite, ils relaxent cette hypothèse et supposent que seuls le premier et le deuxième moments des arrivées des demandes sont connus.

### Chang (2004)

Cet article examine le problème de dimensionnement des stocks pour des produits de qualité imparfaite. Dans le modèle proposé, tous les items sont soumis à une inspection, et ceux jugés non conformes sont vendus à un prix réduit. L'objectif est de déterminer la taille optimale des lots de commande pour maximiser le profit total. Les auteurs proposent un premier modèle



avec un taux de défaillance aléatoire du système de production. Dans un deuxième temps, ils proposent d'étendre le premier modèle en considérant une demande annuelle aléatoire.

### Jaber (2006)

Jaber étudie le problème de dimensionnement des lots de production pour réduire les coûts de setup avec des arrêts envisagés pour rétablir la qualité du processus.

En utilisant une modélisation analytique, l'auteur démontre, qu'après chaque arrêt et remise en service, le coût de setup est réduit grâce essentiellement à l'effet d'apprentissage, et le taux de production des produits non-conformes est également réduit parce qu'on profite de l'opportunité de chaque setup pour éliminer les défauts.

L'auteur utilise un modèle mathématique et une procédure numérique pour résoudre le problème proposé.

### Chakraborty et al. (2007)

Ce travail constitue une extension de celui de Ben Daya (2002). L'auteur développe un modèle de maintenance intégré pour un système de production imparfait. L'outil de production peut non seulement passer d'un état 'sous contrôle' à un état 'hors contrôle', mais peut aussi tomber en panne à des instants aléatoires. L'outil de production est inspecté périodiquement. Si le système est trouvé dans l'état 'sous contrôle' alors soit aucune intervention n'est entreprise jusqu'à l'instant de la prochaine maintenance préventive (politique d'inspection de type I), soit les actions de maintenance préventive sont enclenchées immédiatement (politique d'inspection de type II). Cependant, si l'équipement est trouvé dans l'état 'hors contrôle' alors des actions de restauration sont entreprises. En vue de trouver la politique d'inspection optimale, les modèles proposés sont formulés en tenant compte de l'aspect aléatoire des temps de passage de l'état 'sous contrôle' à l'état 'hors contrôle', des temps de panne et des temps de réparation.

### Chakraborty et al (2008)

Dans cet article, les auteurs étendent le travail présenté ci-dessus en proposant un modèle de détermination de la quantité économique de production pour un système de production imparfait. L'originalité par rapport au travail précédent réside essentiellement dans le fait que la machine est sujette à des actions préventives à la fin de la production d'un lot parce que les

auteurs supposent que ça coûterait assez cher et que ça serait assez difficile (point de vue processus) de faire des inspections en cours de production.

Le modèle proposé est formulé en supposant que les temps de réparation et de maintenance préventive suivent des distributions aléatoires. Le but de ce travail est de déterminer la durée optimale de production. L'effet de la détérioration du processus, de l'occurrence des pannes de la machine et des durées des interventions (correctives et préventives) sur les résultats trouvés est examiné à travers quelques exemples numériques.

### El-Ferik (2008)

L'auteur considère une unité de production ayant un taux de production constant et devant satisfaire une demande constante. Cette unité, qui a un taux de panne croissant, est sujette à des actions de maintenance préventive de type âge. Les actions de maintenance sont entreprises à la panne ou dès que le système atteint un âge  $T_P$  à la première occurrence de l'un des deux événements. Pour assurer la continuité de service, un stock de sécurité est bâti pour satisfaire la demande.

Un cycle de production commence juste après la remise en marche suite à une panne ou l'accomplissement d'une action de maintenance préventive, une fois que le stock tampon a été totalement consommé. Après  $N$  cycles de production, le système est remplacé. Le but du travail est de trouver le couple optimal  $(T_P, N)$  qui minimise le coût total constitué par la somme des coûts de setup, de stockage, de remplacement, de réparation des pannes et de maintenance préventive. Pour ce faire, l'auteur propose une procédure numérique.

### Zhou et Zhu (2007)

Dans ce travail, les auteurs développent un modèle intégré de carte de contrôle (qualité) et de gestion de maintenance. Dans le modèle proposé, la carte de contrôle est utilisée pour contrôler l'équipement et fournir des signaux qui renseignent sur sa détérioration, tandis qu'une maintenance préventive est prévue à intervalles réguliers. En se basant sur le modèle de coût d'Alexander (1995), les auteurs examinent le comportement du modèle intégré et déterminent les valeurs optimales des quatre variables de décision ( $n$ : la taille de l'échantillon,  $h$ : l'intervalle entre échantillonnage,  $L$ : la limite de la carte de contrôle  $\bar{x}$ ,  $k$ : le nombre d'échantillons pris avant d'entreprendre les actions de maintenance préventive) qui minimisent le coût total moyen par unité de temps.

Un ensemble de quatre scénarios des événements possibles est présenté par les auteurs. Pour chacun de ces scénarios, la durée du cycle et le coût total sont calculés.

### Panagiotidou et Tagaras (2007)

Comme dans le travail de Ben Daya (2002), les auteurs présentent un modèle économique pour l'optimisation de la maintenance préventive pour un processus de production avec deux états ayant un lien direct avec la qualité des produits : état 'sous contrôle' et état 'hors contrôle'.

Le système considéré commence son fonctionnement dans un état 'sous contrôle' mais il peut passer à un état 'hors contrôle' ou tomber en panne à des instants aléatoires. Le but est de déterminer la politique de maintenance optimale qui est définie par la valeur optimale de l'âge de l'équipement sur la base de laquelle l'équipement est déclaré sous contrôle ou hors contrôle ce qui permettra de piloter les actions de maintenance préventive. La contribution majeure de ce travail est le fait que la panne peut avoir lieu à n'importe quel moment, et que le taux de panne est différent selon que l'équipement est dans l'état hors contrôle ou sous contrôle.

A la lumière de cette synthèse des principales études récentes ayant porté sur des modèles intégrés production, maintenance et qualité, il est intéressant de constater qu'il y a eu essentiellement deux approches du problème. Une communauté de chercheurs s'est basée sur le modèle de Rosenblatt et al. 1986 dans lequel les auteurs ont introduit le concept de passage d'une unité de production d'un état où elle produit des unités de qualité acceptable (sous contrôle), vers un état (hors contrôle) où elle produit des unités non-conformes.

D'autres chercheurs se sont intéressés au problème en travaillant essentiellement sur le concept de la qualité. Ils ont développé des modèles qui se basent exclusivement sur des outils de qualité comme par exemple les taux de rejet et les cartes de contrôle.

Toutefois, tous ces travaux s'appuient sur une série d'hypothèses communes et partent du fait que la non-conformité des unités produites est due essentiellement à la dégradation de l'outil de production. C'est à ce niveau que se fait toujours le lien entre la qualité des produits et la maintenance des équipements qui les produisent. La politique de production est intégrée au niveau du dimensionnement de la taille des lots ou des stocks tampon qui servent à diminuer les risques de pénurie durant les période de maintenance consacrées à améliorer l'état des équipements et faire diminuer le risque de produire de la non-qualité.



## CHAPITRE II

### **M**odèle intégré production-maintenance pour des systèmes avec dégradation menant à la production de produits non-conformes.

Le rôle de l'état de santé des équipements de production dans le contrôle de la quantité et de la qualité des produits n'est plus à démontrer aujourd'hui dans l'industrie. Malgré le lien manifeste qui existe dans la pratique entre la production, la maintenance et la qualité, ces aspects fondamentaux de n'importe quel système industriel sont traditionnellement traités dans la littérature comme des problèmes séparés. Peu de tentatives ont été faites pour les intégrer dans un seul modèle qui puisse mettre en valeur et mesurer leur interdépendance. Ces travaux ont été décrits dans le chapitre précédent (Ben Daya (1999) Ben Daya (2002), Chakraborty et al. (2007), et Chakraborty et al. (2008))

Les politiques de maintenance préventive adoptées dans ces travaux consistent en des inspections périodiques et/ou des remplacements préventifs à des périodes fixes. Nous

n'avons retrouvé aucune contribution dans ce contexte qui considère une maintenance préventive basée sur l'âge de l'équipement. Dans ce chapitre nous proposons une stratégie intégrant dans un même modèle, la production, la maintenance et la qualité en se basant sur une politique de maintenance préventive de type âge.

Nous considérons un système de production constitué d'une seule machine qui doit satisfaire une demande constante et continue  $D$  (unités par unité de temps). Après une période aléatoire de fonctionnement dans un état 'sous contrôle' (c'est-à-dire produisant des produits conformes), le système passe à un état 'hors contrôle' et commence à produire des unités non conformes à un taux donné. Une action de maintenance préventive est entreprise dès que le système atteint un âge  $T$  sans être passé par un état 'hors contrôle'. Si ce passage est détecté, une action de restauration du système à l'état 'sous contrôle' est planifiée pour être exécutée  $L$  unités de temps plus tard.

Un modèle mathématique et une procédure numérique sont développés dans le but de déterminer simultanément les valeurs optimales de la taille de lot  $Q$  et de l'âge  $T$  pour la maintenance préventive pour un équipement, une structure de coûts et une logistique de maintenance donnés. Le coût total moyen par unité de temps est considéré comme le critère de performance de la politique proposée.

La section suivante définit la stratégie et présente les hypothèses de travail ainsi que les notations adoptées. Dans la section II, le modèle mathématique est présenté. La troisième section est dédiée à la procédure numérique développée pour trouver la meilleure combinaison de  $Q$  et de  $T$  qui minimise le coût total moyen par unité de temps. Cette procédure est testée dans la dernière partie par un exemple numérique.

### **II.I Définition de la stratégie**

Nous considérons un système de production à une seule machine produisant un produit unique et devant satisfaire une demande constante et continue de  $D$  unités par unité de temps. Un cycle de production commence avec un nouveau système qui est supposé être dans un état 'sous contrôle', produisant des unités de qualité acceptable à un taux de production maximal  $P$  qui est supérieur à la demande  $D$ . A chaque fois que le processus atteint un niveau  $Z$  d'inventaire, le taux de production est ramené égal à  $D$ .

Néanmoins, après une période aléatoire de temps en production, le système peut passer vers un état ‘hors contrôle’ en commençant à produire des unités non conformes à un taux  $\alpha$  supposé constant.

Le temps écoulé  $\tau$  durant lequel le système de production est dans l’état ‘sous contrôle’, avant que le changement n’advienne, est une variable aléatoire qui est supposée suivre une distribution quelconque avec un taux de défaillance croissant.

Afin de réduire la probabilité de passage vers un état ‘hors contrôle’, l’unité de production est soumise à une maintenance préventive parfaite de durée négligeable après  $T$  unité de temps de fonctionnement dans un état ‘sous contrôle’. Le passage vers un état ‘hors contrôle’ est détecté instantanément. Quand ce changement a lieu, une restauration du système à l’état ‘sous contrôle’ (comme neuf) est planifiée pour être exécutée  $L$  unités de temps plus tard. Pendant cette période  $L$  de préparation des différentes ressources nécessaires à la restauration, les unités non-conformes, produites à un taux  $\alpha$ , sont immédiatement rejetées. L’action de restauration a une durée aléatoire.

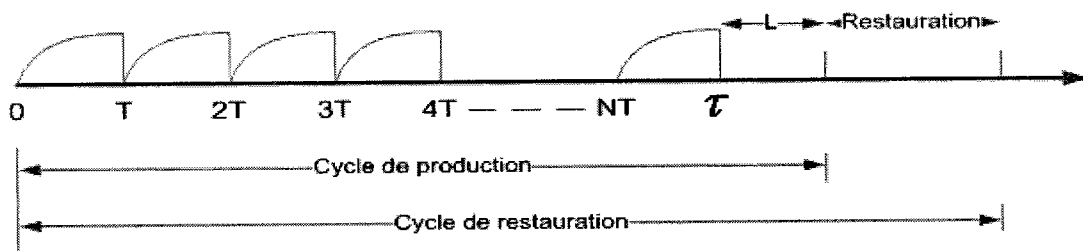


Figure II 1 La stratégie d’exploitation du système

Afin d’assurer une satisfaction continue de la demande  $D$ , la taille de lot  $Q$  doit être établie de façon à compenser la consommation moyenne durant la période aléatoire de restauration, ainsi que les unités non-conformes rejetées au cours de la période  $L$  suivant le passage à l’état hors contrôle.

Ainsi, les variables de décision sont la taille de lot  $Q$  et l’age  $T$  auquel une action de maintenance préventive doit être effectuée. Voici les hypothèses et notations adoptées pour le développement du modèle en vue de la détermination conjointe des valeurs optimales  $Q$  et  $T$  qui minimisent le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini.

1. Le temps  $\tau$  écoulé jusqu'au passage du processus de production à un état 'hors contrôle' est une variable aléatoire qui suit une distribution quelconque avec un taux de défaillance croissant.
2. Le passage à l'état hors contrôle est détecté instantanément.
3. Quand ce changement advient, une restauration du système est planifiée pour être exécutée  $L$  unités de temps plus tard.
4. La durée de restauration est une variable aléatoire  $t$ .
5. L'unité de production ne tombe jamais en panne avant que la restauration ne se réalise.
6. La fonction de distribution de probabilités associée aux temps de restauration de l'unité de production à un état comme neuf est connue.
7. Chaque action de maintenance préventive nécessite un temps négligeable et restaure le système à un état comme neuf.
8. Lorsque le système est dans un état 'hors contrôle', il produit des unités non conformes à un taux  $\alpha$ .
9. Tous les coûts sont supposés être connus et constants.
10. Une pénurie est possible si l'action de restauration dure plus longtemps que la période nécessaire pour la consommation de l'inventaire restant à la fin de la période de préparation  $L$ . Dans ce cas un coût de pénurie est associé à l'effort supplémentaire pour assurer la satisfaction du client.
11. Le stock tampon inutilisé est réduit à zéro après un cycle de restauration. Le temps d'épuisement est considéré négligeable.

### Notation

- $f(\tau)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux temps de passage à l'état hors contrôle.
- $F(\tau)$  : Fonction de distribution de probabilités associé au temps de passage à l'état hors contrôle.
- $F(\tau) = \int_0^\tau f(x) dx$
- $R(\tau) = 1 - F(\tau)$
- $r(\tau) = \frac{f(\tau)}{R(\tau)}$  : Taux de défaillance associé aux temps de changement à l'état hors contrôle.



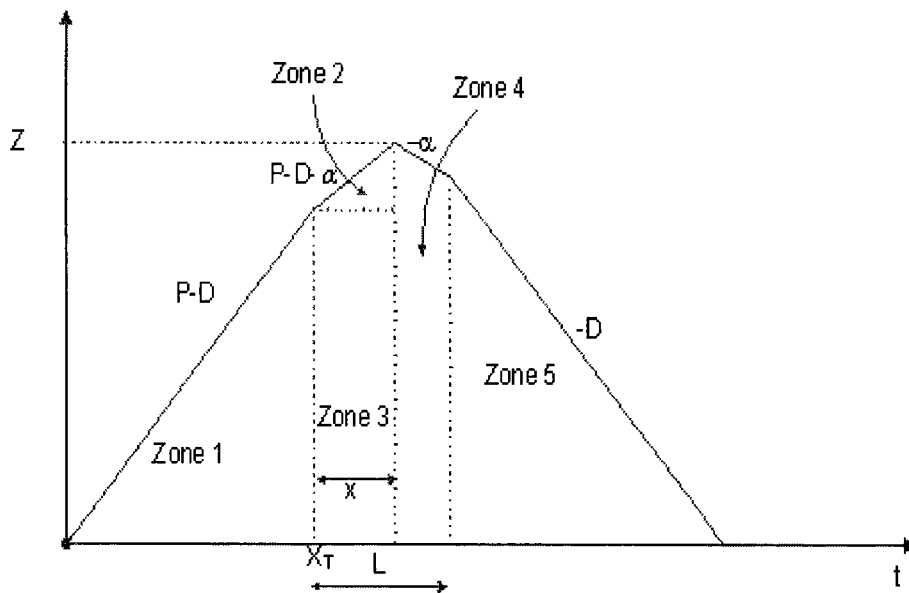
- $h(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées de restauration de l'unité de production.
- $H(t)$ : Fonction de distribution de probabilités associée aux durées de restauration de l'unité de production.
- $H(t)=\int_0^t h(x)dx$
- $\mu=\int_0^{\infty} t dH(t)$  : La durée moyenne de restauration
- $Q$  : La taille de lot
- $Z$  : Le niveau d'inventaire maximal atteint lors d'un cycle de production.
- $P$  : Le taux de production maximal (unités / unité de temps)
- $D$  : La demande. (unités / unité de temps)
- $T$  : L'âge auquel le système est soumis à une action de maintenance préventive. Cette durée correspond à la durée de fonctionnement dans un état 'sous contrôle' avant de subir une action de maintenance préventive.
- $K$  : Coût moyen de set up.
- $C_{cm}$  : Coût moyen d'une action de maintenance corrective.
- $C_{pm}$  : Coût moyen d'une action de maintenance préventive.
- $C_p$  : Coût de pénurie par item.
- $C_s$  : Coût de stockage par item par unité de temps
- $C_{nq}$  : Coût encouru en produisant des unités non conformes par unité de temps.
- $\alpha$  : Taux de production des items non conformes.
- $X_T$  : Variable aléatoire désignant l'instant du passage à un état 'hors contrôle' sous la stratégie de maintenance préventive à l'âge  $T$
- $E(X_T)$  : Le temps moyen de passage à un état 'hors contrôle' sous la stratégie de maintenance préventive à l'âge  $T$
- $L$  : Temps de préparation des différentes ressources nécessaires pour restaurer le système à un état comme neuf.

## II.II Modèle mathématique

Notre objectif est d'établir une expression du coût total moyen par unité de temps. Le coût total moyen correspond à la somme des coûts moyens suivants : le coût de set up ( $K$ ), le coût de maintenance ( $CM$ ), le coût de stockage ( $CS$ ), le coût de pénurie ( $CP$ ) et le coût de non-conformité des items ( $CNQ$ ). Le coût total moyen sera divisé par la durée moyenne du cycle de restauration.

Les figures II.2 et II.3 illustrent les deux scénarios possibles de l'évolution de l'inventaire pendant un cycle de restauration selon que le niveau maximum d'inventaire  $Z$  soit atteint après ou avant le passage à l'état 'hors contrôle'.

Scenario 1:



**Figure II. 2** Evolution de l'inventaire pendant un cycle de restauration : cas où  $Z$  est atteint après le passage à l'état 'hors contrôle'.

Scenario 2:

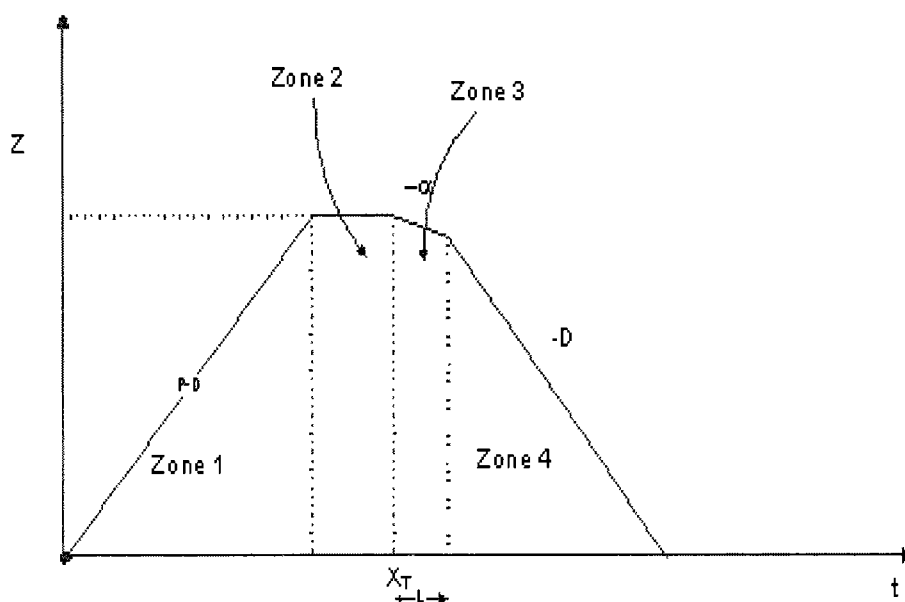


Figure II. 3 Evolution de l’inventaire pendant un cycle de restauration : cas où Z est atteint avant le passage à l’état ‘hors contrôle’.

La condition pour être dans le scénario 1 s’exprime comme suit :  $E(X_T) < \frac{Z}{P-D}$ , et celle pour être dans le scénario 2 est  $E(X_T) > \frac{Z}{P-D}$ . Ces conditions représentent une approximation puisque la fonction de densité de probabilité  $f(\tau)$  n’est pas une impulsion à  $\frac{Z}{P-D}$ .

### II.II.1 Durée moyenne du cycle de restauration.

La durée moyenne du cycle de restauration, RCD, est donnée par :

$$RCD = E(X_T) + L + \mu \tag{II.1}$$

Comme le montre la figure 1, le système est soumis N fois à une maintenance préventive à l’âge T et le passage à l’état hors contrôle advient entre NT et (N+1)T pour N=1,2,3...

Par conséquent,  $E(X_T)$  est donné par l’expression suivante :

$$E(X_T) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_{NT}^{(N+1)T} R(T)^N \cdot R(t - NT) \cdot dt = \frac{\int_0^T R(t) dt}{F(T)} \quad (\text{II.2})$$

Ainsi,

$$RCD = \frac{\int_0^T R(t) \cdot dt}{F(T)} + L + \mu \quad (\text{II.3})$$

## II.II.2 Scénario 1: cas où le niveau d'inventaire maximum Z est atteint après $\tau$ (voir figure II.2)

### II.II.2.1 Le coût moyen de maintenance CM :

Le nombre d'actions de maintenance préventive avant le passage à un état 'hors contrôle' est donné par :

$$NPM = \left\lfloor \frac{X_T}{T} \right\rfloor \quad (\text{II.4})$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  signifie la partie entière.

Le nombre moyen d'actions de maintenance préventive peut être exprimé comme suit:

$$E(NPM) = \frac{1}{T} \sum_{N=0}^{\infty} NT \cdot \text{Prob}\{NT \leq X_T \leq (N+1)T\} = \frac{R(T)}{F(T)} \quad (\text{II.5})$$

Par conséquent, le coût de maintenance sur un cycle de restauration est :

$$CM = C_{pm} \frac{R(T)}{F(T)} + C_{cm} \quad (\text{II.6})$$

### II.II.2.2 Le coût moyen de stockage CS

En se référant à la figure 2, on distingue cinq différentes zones d'inventaire. Soit  $A_i$  le niveau moyen d'inventaire dans la zone  $i$ .

#### Zone 1

$$A_1 = E(X_T) \times (P - D) \times \frac{E(X_T)}{2} \quad (\text{II.7})$$

**Zone 2**

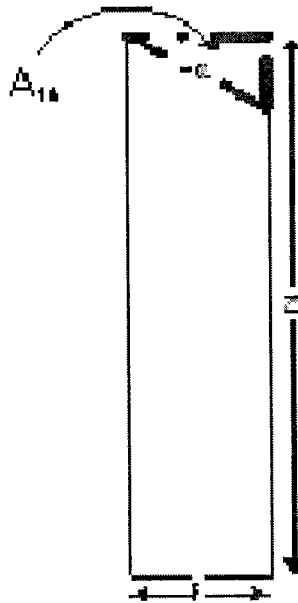
$$A_2 = \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \times \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{2} \quad (\text{II.8})$$

**Zone 3**

$$A_3 = \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \times E(X_T) \times (P - D) \quad (\text{II.9})$$

**Zone 4** (Voir la figure II.4 ci-dessous)

$$A_{14} = L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \times \frac{1}{2} \alpha \left( L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \right) \quad (\text{II.10})$$



**Figure II.4** Vue détaillée de la zone 4

$$F = L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \quad (\text{II.11})$$

$A_4$  est alors exprimée comme suit :

$$A_4 = [Z \times F] - A_{14} \quad (\text{II.12})$$

**Zone 5**

$$A_5 = \frac{1}{2D} \times \left[ Z - \alpha \times \left( L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \right) \right]^2 \quad (\text{II.13})$$

Ainsi, considérant l'ensemble des zones 1 à 5, le coût total moyen d'inventaire est donné par l'expression suivante :

$$CS = C_s (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \quad (\text{II.14})$$

**II.II.2.3 Le coût moyen des unités non conformes CNQ**

En se referant à la figure II.5, le nombre moyen des unités non conformes pour chaque zone est donné par :

$$Q_{NC1} = \left[ \left( \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \right)^2 \times \frac{(P - D)}{2} \right] - \left[ \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \times \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{2} \right] \quad (\text{II.15})$$

$$Q_{NC2} = \left( L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \right) \times \frac{1}{2} \alpha \left( L - \frac{(Z - E(X_T)(P - D))}{(P - D - \alpha)} \right) \quad (\text{II.16})$$

Le coût moyen des unités perdues est alors donné par :

$$CNQ = C_{ng} (Q_{NC1} + Q_{NC2}) \quad (\text{II.17})$$

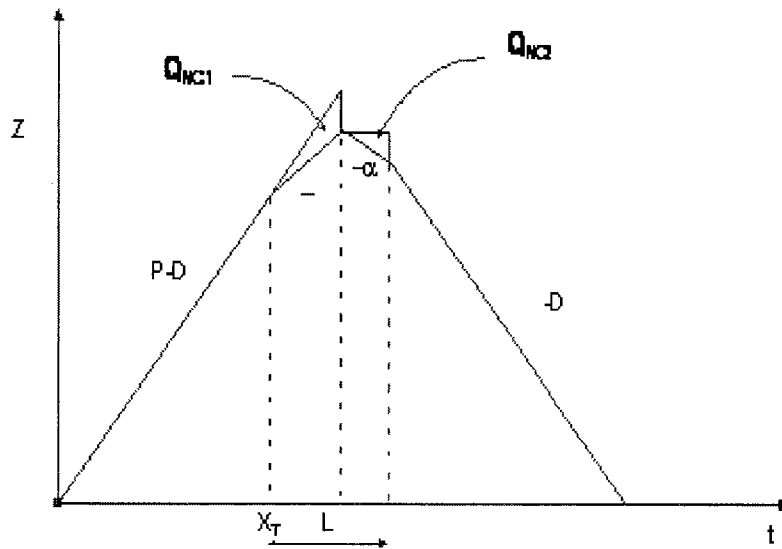


Figure II. 5 une vue détaillée des zones des unités non conformes

#### II.II.2.4 Le coût moyen de pénurie: CP

La pénurie survient si l'action de restauration dure plus longtemps que la période nécessaire pour la consommation de l'inventaire restant à la fin de la période de préparation L. Le coût moyen de pénurie peut être exprimé comme suit :

$$CP = C_p D \int_c^{\infty} (t - t_c) dH(t) \quad (II.18)$$

où  $t_c$  représente la période nécessaire pour la consommation du stock restant disponible au début de l'action de restauration.

$$t_c = \frac{Z}{D} - \frac{\alpha}{D} \left( L - \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{(P - D - \alpha)} \right) \quad (II.19)$$

Ainsi, le coût total moyen pour le scénario 1 est exprimé par la somme des différents coûts détaillés jusque là.

$$C_{tot1}(Z, T) = CM + CS + CP + CNQ + K \quad (II.20)$$

Le coût total moyen par unité de temps est donc donné par :

$$CT(Z, T) = \frac{C_{tot1}}{RCD} \quad (II.21)$$

Il est important de signaler que pour le premier scénario, la taille Q du lot (la quantité produite pendant le temps réel de production pour chaque cycle de restauration) est donnée par l'expression suivante en fonction de l'inventaire maximal Z :

$$Q = P(E(X_T) + x) + D.(L - x) \quad (II.22)$$

avec  $x = \frac{Z - E(X_T)(P - D)}{P - D - \alpha}$  (voir figure II.2)

Cette expression sera utilisée plus tard pour dériver la taille optimale du lot  $Q_{opt}$  de n'importe quelle valeur optimale obtenue du taux maximal d'inventaire  $Z_{opt}$ .

### II.II.3 Scénario 2 : cas où le niveau maximum d'inventaire Z est atteint avant $\tau$ (voir figure II.3)

#### II.II.3.1 Le coût moyen de maintenance CM

Comme pour le scénario 1, ce coût est donné par:

$$CM = C_{pm} \frac{R(T)}{F(T)} + C_{cm} \quad (II.23)$$

#### II.II.3.2 Le coût moyen de stockage CS

Se référant à la figure II.3, nous distinguons 4 zones d'inventaires différentes. Soit  $A_i$  l'inventaire moyen détenu dans la zone i.

##### Zone 1

$$A_1 = \frac{Z^2}{2 \times (P - D)} \quad (II.24)$$



**Zone 2**

$$A_2 = Z \times \left( E(X_T) - \frac{Z}{P-D} \right) \quad (\text{II.25})$$

**Zone 3**

$$A_3 = (Z \times L) - \left( \frac{\alpha \times L^2}{2} \right) \quad (\text{II.26})$$

**Zone 4**

$$A_4 = \frac{[Z - \alpha L]^2}{2 \times D} \quad (\text{II.27})$$

Ainsi, considérant les zones 1 à 4, le coût total moyen de possession d'inventaire est donné par l'expression suivante :

$$CS = C_S (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \quad (\text{II.28})$$

**II.II.3.3 Le coût moyen des unités non-conformes**

Le nombre moyen des unités non conformes est exprimé par (voir figure II.5):

$$Q_{NC} = \frac{\alpha \times L^2}{2} \quad (\text{II.29})$$

Le coût moyen des unités perdues est alors:

$$CNQ = C_{nq} \times Q_{NC} \quad (\text{II.30})$$

**II.II.3.4 Le coût moyen de pénurie CP**

Comme pour la situation du scénario 1, la pénurie survient quand l'action de restauration dure plus longtemps que la période nécessaire pour la consommation de l'inventaire restant à la fin de la période de préparation L. la différence par rapport au scénario 1 est le niveau d'inventaire restant a la fin de la période L, qui est égal dans ce cas à  $Z - \alpha L$ .

Le coût moyen de pénurie peut être alors exprimé comme suit :

$$CP = C_p D \int_{\frac{Z-\alpha L}{D}}^{+\infty} \left( t - \frac{Z - \alpha \times L}{D} \right) dH(t) \quad (\text{II.31})$$

Ainsi, le coût total prévu pour le scénario 2 est exprimé par la somme suivante:

$$C_{tot2}(Z,T) = CM+CS+CP+CNQ+K \quad (II.32)$$

Le coût total prévu par unité de temps est donc donné comme suit

$$CT(Z,T) = \frac{C_{tot2}}{RCD} \quad (II.33)$$

Comme pour le premier scénario, il est possible d'exprimer, pour ce deuxième scénario, la taille de lot Q comme fonction du niveau d'inventaire maximal  $Z_{opt}$ .

$$Q = P.\left(\frac{Z}{P-D}\right) + D.\left(E(X_T) - \frac{Z}{P-D} + L\right) \quad (II.34)$$

Cette expression sera également utilisée plus tard pour dériver la taille optimale du lot  $Q_{opt}$  à partir de n'importe quelle valeur optimale obtenue du taux maximum d'inventaire  $Z_{opt}$ .

Ainsi, nous aboutissons au problème d'optimisation non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \text{Minimizer : } Y = CT(Z, T) \\ \text{sujet à: } 0 < T < \infty \quad \text{et} \quad 0 < Z < Z_{\max} \end{cases}$$

En effet, conformément à la stratégie proposée dans ce travail, le niveau d'inventaire maximal Z ne peut pas être plus grand que  $Z_{\max}$  qui est la somme de la quantité construite avant le passage à l'état hors contrôle et la quantité construite pendant la période L.  $Z_{\max}$  est donné par:

$$Z_{\max} = E(X_T).(P-D) + L.(P-D - \alpha) \quad (II.35)$$

### II.III Procédure Numérique

Étant donnée la complexité du modèle, une procédure numérique itérative (figure II.6) a été développée afin de trouver la meilleure solution  $(Z_{opt}, T_{opt})$  et le couple correspondant  $(Q_{opt}, T_{opt})$ , pour n'importe quelle combinaison de système de production et de configuration de coûts.

Les données d'entrée sont :  $f(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$ ,  $C_{cm}$ ,  $C_{pm}$ ,  $C_p$ ,  $C_s$ ,  $C_{nq}$ ,  $P$ ,  $D$ ,  $L$ ,  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta Z$ ,  $T_i$ ,  $\Delta T$  and  $T_{max}$

Avec  $T_i$  : valeur initiale de T

$T_{max}$  : valeur maximum de T

$\Delta Z$  : Augmentation du niveau d'inventaire maximum

$\Delta T$  : augmentation du temps.

$T_{max}$  doit être choisie assez large pour pouvoir couvrir un grand intervalle de valeurs de T

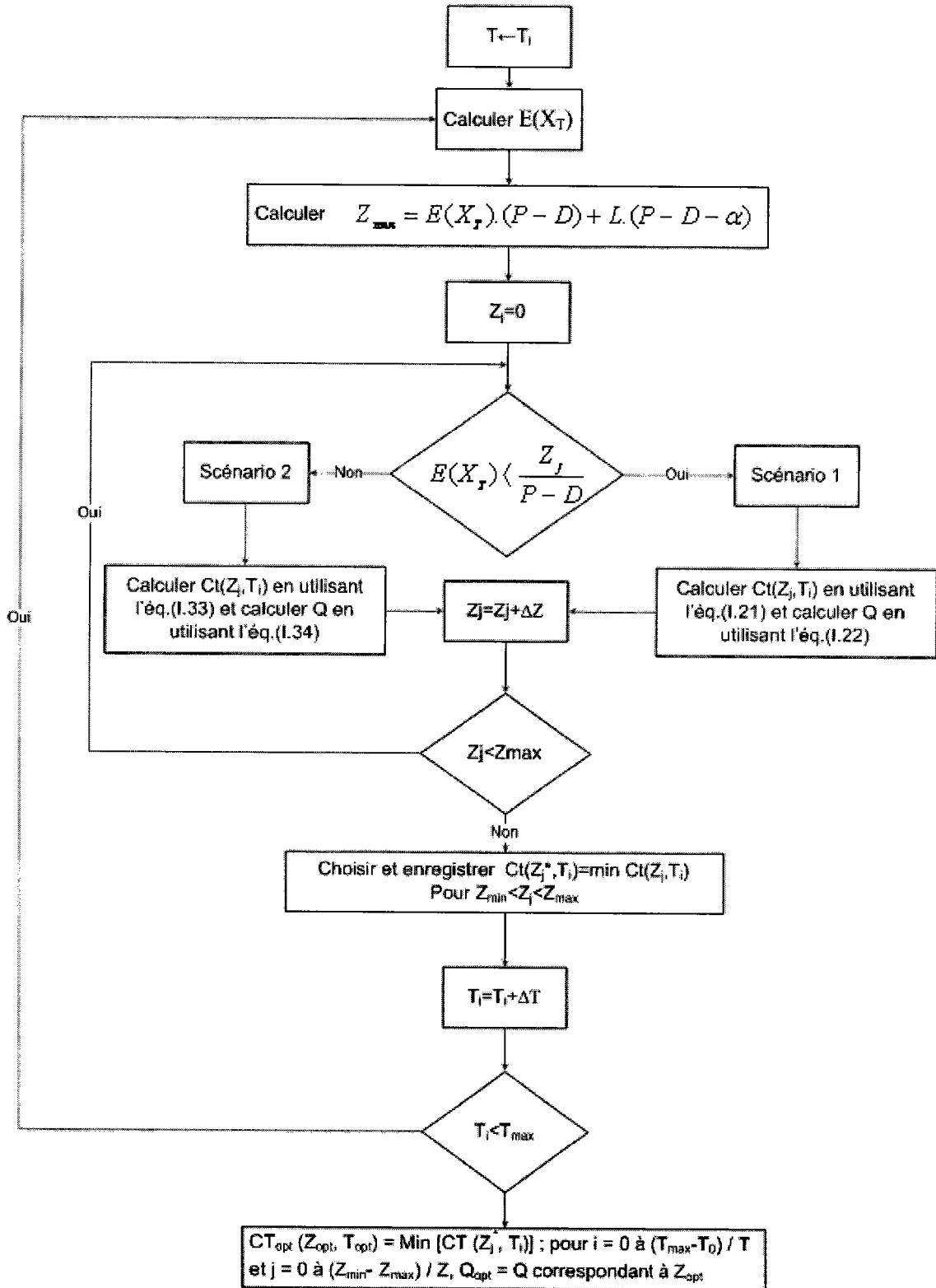


Figure II. 6 Procédure Numérique

## II.V Exemple numérique et discussion

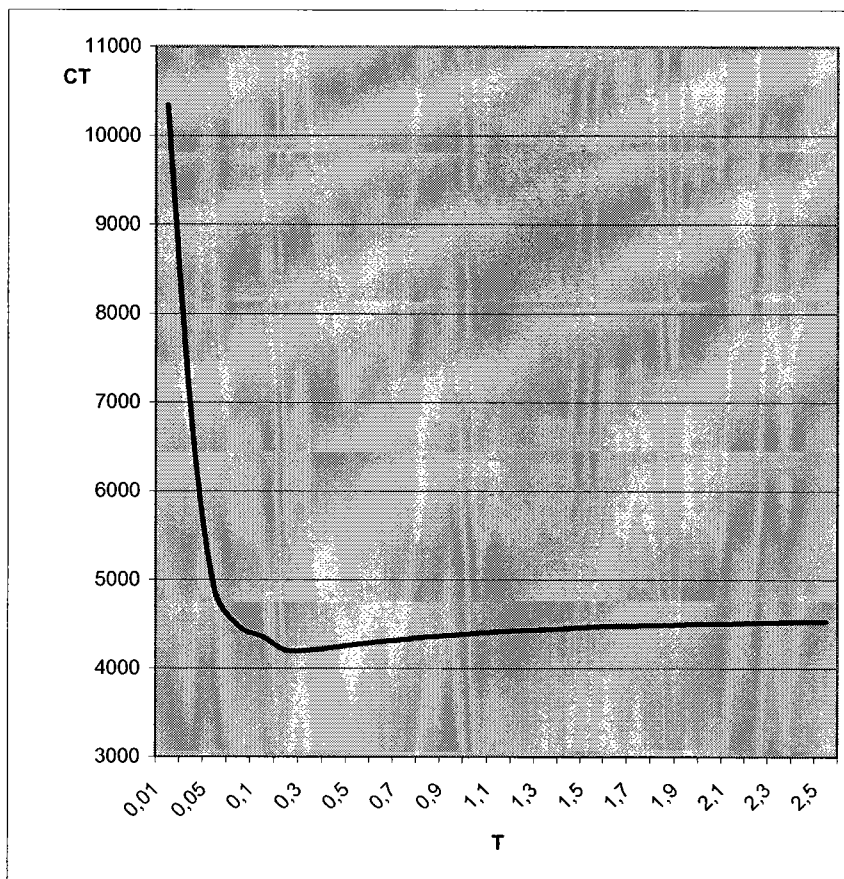
Afin d'illustrer notre approche, nous considérons une situation avec les données d'entrée suivantes qui ont été choisies arbitrairement considérant néanmoins des cadres réalistes.

- La distribution associée aux temps de passage à un état hors contrôle: loi de Weibull avec paramètre de forme 1.25 et paramètre d'échelle 1, donnant une valeur moyenne de 0.93 unité de temps. (une unité de temps = 1 mois).
- Distribution du temps de restauration: loi Gamma avec paramètres de forme 2 et paramètre d'échelle 40 (valeur moyenne = 0.05 mois)
- $C_{cm} = 1000$  \$,  $C_{pm} = 75$  \$,  $K = 500$  \$
- $C_s = 1$  \$/unité/mois,  $C_p = 30$  \$/unite de pénurie
- $C_{nq} = 10$  \$/unité perdue/mois
- $P = 32400$  unités/mois
- $D = 20160$  unités/mois
- $\alpha = 3600$  unités/ mois
- $T_{max} = 2.5$ mois,  $\Delta Z = 5$  unités,  $\Delta T = 0.1$ mois,  $L = 0.03$  mois

Les résultats obtenus sont montrés dans le tableau II.1 et la figure II.7.

T	Q <sub>opt</sub>	Z*	E(X <sub>T</sub> )	E(NPM)	RCD	CS/unité de temps	CM/unité de temps	CNQ/ unité de temps	CP/ unité de temps	Ctot	CT(Z*,T)
0.01	66465	2040	3,16	315,18	3,24	1984,13	7603,84	6,03	596,57	33575,35	10344,64
0.02	56430	2140	2,65	132,45	2,75	2069,38	3986,35	7,14	598,59	18772,09	6843,76
0.05	45640	2300	2,11	41,8	2,19	2202,26	1879,64	8,91	573,49	10760,36	4891,61
0.08	41018	2380	1,88	23	1,96	2265,3	1385,94	9,96	561,07	8804,01	4476,86
0.1	39019	2420	1,78	17,28	1,86	2270,25	1231,14	10,50	553,05	8131,96	4359,405
0.2	33524	2540	1,50	6,98	1,58	2380,06	960,42	12,35	530,94	6670,60	4203,54
0.3	30776	2600	1,36	4,02	1,44	2423,12	899,20	13,54	525,74	6091,18	4207,77
0.4	29033	2640	1,27	2,67	1,35	2448,82	883,10	14,42	523,17	5759,19	4237,41
0.5	27813	2680	1,21	1,91	1,29	2454,98	881,88	15,11	512,27	5536,56	4269,86
0.6	26871	2680	1,16	1,43	1,24	2467,31	886,31	15,68	531,44	5375,57	4300,78
0.7	26180	2720	1,13	1,11	1,21	2495,90	892,83	16,15	511,21	5252,85	4328,07
0.8	25602	2720	1,10	0,88	1,18	2502,12	899,85	16,54	523,58	5157,52	4352,41
0.9	25130	2720	1,07	0,71	1,16	2495,98	906,91	16,87	534,12	5090,19	4374,21
1	24784	2780	1,05	0,58	1,14	2501,32	912,54	17,03	512,54	5015,98	4394,90
1.1	24444	2780	1,04	0,47	1,12	2505,83	917,43	17,61	519,19	4961,41	4411,81
1.2	24157	2780	1,02	0,39	1,11	2510,72	918,10	18,21	523,40	4915,80	4427,19
1.3	23915	2780	1,01	0,33	1,09	2520,08	919,45	18,72	527,18	4877,48	4440,72
1.4	23672	2780	1,00	0,27	1,08	2525,45	920,43	19,19	530,67	4839,97	4455,43
1.5	23486	2780	0,99	0,23	1,07	2530,12	921,32	19,70	535,07	4810,88	4466,79
1.6	23324	2780	0,98	0,19	1,06	2540,07	922,54	20,15	539,21	4784,89	4476,84
1.7	23225	2820	0,97	0,16	1,06	2545,63	923,67	20,61	511,87	4764,32	4485,65
1.8	23105	2820	0,97	0,14	1,05	2550,12	926,76	21,02	525,90	4745,56	4493,25
1.9	23000	2820	0,96	0,12	1,05	2553,23	928,72	21,63	532,82	4729,51	4499,91
2.0	22911	2820	0,96	0,10	1,04	2561,36	930,45	22,14	540,65	4715,53	4505,73
2.1	22854	2840	0,95	0,08	1,04	2570,67	931,92	22,62	512,71	4703,55	4510,73
2.2	22788	2840	0,95	0,07	1,03	2582,30	932,87	23,01	517,84	4692,28	4515,04
2.3	22691	2840	0,95	0,06	1,03	2591,32	932,90	23,55	525,04	4678,72	4522,06
2.4	22638	2840	0,94	0,05	1,03	2597,43	933,43	23,97	527,90	4670,52	4525,68
2.5	22592	2840	0,94	0,04	1,02	2602,42	933,56	24,41	532,62	4663,83	4528,83
2.7	22606	2840	0,94	0,04	1,02	2658,14	935,12	24,91	535,61	4652,08	4522,067
2.9	22634	2840	0,93	0,02	1,01	2677,40	935,52	25,38	538,79	4643,73	4537,73
3.0	22978	2840	0,93	0,02	1,01	2684,54	935,48	25,89	540,12	4630,52	4539,23

Tableau II. 1 Les résultats Numériques



**Figure II. 7** Evolution du coût total moyen par unité de temps  $CT(Z^*, T)$

Ainsi, la meilleure stratégie consiste à entreprendre les actions de maintenance préventive chaque fois que le système restauré atteint l'âge  $T_{opt} = 0.2$  mois. La taille du lot produit entre deux restaurations consécutives est égale à  $Q_{opt}$  (33524 unités). Le niveau maximum d'inventaire qui devrait être atteint durant ce cycle est égal à  $Z^*$  (2540 unités)

Si cette stratégie est adoptée (voir tableau II.1), la période de temps entre deux restaurations du système devrait être égale à 1.58 mois (RCD = 1.58). Durant cette période, une moyenne de 7 actions de maintenance préventive devraient être menées ( $E(NPM) = 6.98$ ), et le passage vers un état 'hors contrôle' devrait se passer en moyenne après un mois et demi ( $E(X_T) = 1.50$ ). Le coût total moyen d'exploitation par unité de temps devrait être égal à 4203,54 \$/mois. Il faut également noter que dans ce cas, nous nous trouverions dans la configuration correspondant au scénario 2 :  $E(X_T) > \frac{Z}{P-D}$  ( $1.50 > 0.21$ ).

Par ailleurs, le temps moyen pour passer à l'état 'hors contrôle' sans maintenance préventive étant de 0.93 (moyenne de la distribution de Weibull utilisée), il est intéressant de mentionner que la politique de maintenance préventive de type age adoptée (avec  $T = 0.2$  mois) retarde le début de production d'unités non conformes (le passage à l'état 'hors contrôle') de  $(1.50-0.93) = 0.57$  mois en moyenne.

Généralement, pour des valeurs très petites de  $T$  (un effort important de maintenance préventive), le temps moyen pour passer à l'état 'hors contrôle' augmente, ce qui signifie que le début de production d'unités non conformes est retardé. D'un autre côté, pour des valeurs de  $T$  très élevées (effort de maintenance préventive négligeable), comparé à la solution optimale, même si les coûts unitaires de maintenance sont bas, les coûts unitaires d'inventaire et de qualité sont assez élevés. Ainsi, il apparait clairement que pratiquer une maintenance préventive génère une réduction des coûts d'inventaire et de qualité.

### II.V Conclusion

Dans ce travail nous avons proposé une stratégie conjointe de maintenance préventive, de production et de contrôle de la qualité pour un système de production constitué d'un seul équipement et qui doit satisfaire une demande  $D$ . Ce système peut aléatoirement passer vers un état 'hors contrôle' et commencer à produire des unités non conformes. Quand ce changement advient, une restauration complète du système est prévue pour  $L$  unités de temps plus tard.

Cette stratégie est caractérisée par deux variables de décision :  $T$  qui représente l'age auquel le système doit subir une action de maintenance préventive visant à diminuer les risques de passage à l'état 'hors contrôle', et la taille du lot de production  $Q$  à construire pour satisfaire la demande et couvrir la consommation moyenne durant la période de restauration ainsi que les unités non conformes rejetées durant la période  $L$  qui suit le passage à l'état hors contrôle.

Un modèle mathématique et une procédure numérique ont été développés pour générer la stratégie optimale  $(Q_{opt}, T_{opt})$  qui minimise le coût total moyen par unité de temps.

Ce travail représente une nouvelle approche d'intégration des trois aspects de tout système industriel à savoir la maintenance, la qualité et la production. L'apport principal de ce travail réside essentiellement dans la prise en considération d'une politique de maintenance préventive systématique de type âge visant à assurer une meilleure assurance qualité en diminuant les risques de passage à l'état 'hors contrôle'.



Dans le chapitre suivant, nous présenterons un autre modèle d'intégration de la maintenance, de la production et de la qualité en se basant sur un autre type de maintenance préventive utilisé dans la pratique qui est la maintenance conditionnelle.



## CHAPITRE III

### **M**odèle intégré de maintenance préventive, de dimensionnement de stock tampon et de contrôle de la qualité pour un système de production imparfait : Approche analytique combinée à la simulation

Dans le chapitre précédent nous avons proposé une stratégie de modélisation intégrée des aspects production, qualité et maintenance sous-jacents à tout système industriel. Nous avons fait cela en préconisant, entre autres, une politique de maintenance préventive systématique de type âge. Cela dit, pour pouvoir mettre en œuvre une telle politique, il faut connaître préalablement les lois de probabilité associées aux durées de vie des équipements considérés, ce qui n'est pas toujours possible.

Dans ce chapitre nous proposons deux nouvelles stratégies conjointes de production-qualité-maintenance considérant une politique de maintenance conditionnelle, pour un système de production imparfait (c'est à dire pouvant produire des items non-conformes à partir d'un certain niveau de dégradation) et dont la loi de probabilité associée aux durées inter-défaillances n'est pas connue.

L'idée principale derrière ces deux stratégies est qu'au lieu d'avoir des actions de maintenance basées sur l'atteinte d'un âge prédéfini du système, ces actions seraient pilotées par la qualité des produits, en l'occurrence par le taux de produits non-conformes révélateurs d'un certain degré de dégradation du système.

Ce chapitre est constitué de deux grandes parties. La première sera consacrée à la définition, à la modélisation et au traitement d'un exemple numérique relatif à la première stratégie. Cette dernière est caractérisée par deux variables de décision qui sont d'une part, le seuil de taux de non-conformité à partir duquel des actions de maintenance doivent être déclenchées, et d'autre part, la taille du stock tampon à prévoir pour diminuer les risques de pénurie durant les périodes d'arrêt du système pour maintenance. Le stock tampon étant bâti au début de chaque cycle de production. Dans la deuxième partie nous présenterons la seconde stratégie qui est une généralisation de la première dans le sens qu'elle considère une troisième variable de décision qui est le seuil de non-conformité à partir duquel, on devrait commencer à constituer le stock tampon.

### III.I.1 Première stratégie : définition et hypothèses de travail

Nous considérons (Radhoui et al. 2008 a) un système de production constitué d'une seule machine et devant satisfaire une demande constante  $d$ . Ce système est sujet à un processus de dégradation avec un taux de panne croissant. Des produits non-conformes apparaissent aléatoirement à partir d'un certain niveau de détérioration de la machine. Le taux des produits non-conformes est parfaitement corrélé avec le processus de dégradation. Chaque lot produit est soumis à un contrôle de qualité automatisé dans son intégralité. Ce contrôle, qui est de durée négligeable, permet de déterminer la quantité des unités non-conformes produites par le système. Nous supposons que l'état de dégradation de la machine représente la cause principale et dominante de non conformités des produits (les causes reliées à la matière première ou autres sont négligeables). Ainsi, selon le taux de rejet observé  $I$ , on décide d'entreprendre ou pas des actions de maintenance. Comme décrit dans la figure III.1, si le taux des unités non-conformes  $I$  est trouvé supérieur à un certain niveau seuil  $I_m$  et

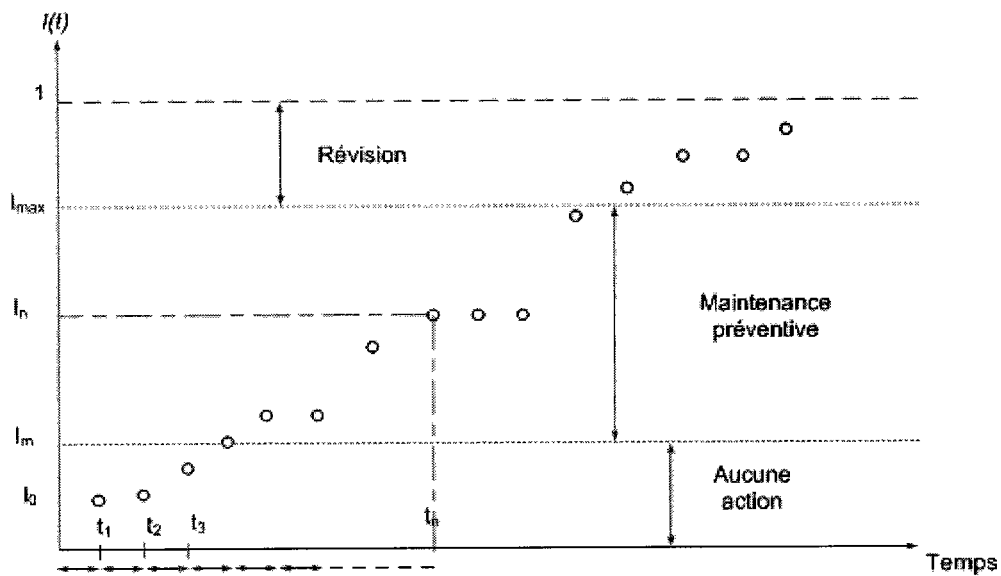
inférieur à une valeur  $l_{max}$  ( $l_m < l < l_{max}$ ), la machine doit être arrêtée pour subir des actions de maintenance préventive.

Si le taux de non-conformité  $l$  est trouvé supérieur à  $l_{max}$ , la machine est considérée dans un état de dégradation assez avancé justifiant la nécessité d'entreprendre des actions de maintenance corrective majeures (révision). Enfin, si  $l$  est trouvé inférieur à  $l_m$ , aucune action n'est entreprise. Les actions de maintenance (préventive et révision) ont des durées aléatoires. Elles ramènent le système à un état comme neuf (as good as new), et elles ramènent le taux de non-conformité à son niveau initial  $l_0$  qui est généralement nul mais qui pourrait dans certains cas être différent de zéro.

Ces deux types d'actions de maintenance ont certes le même but et les mêmes effets sur le système et sur le taux de non-conformité. Cependant, la différence entre les deux réside dans leurs coûts. En effet, si le taux de rebut est trouvé entre  $l_m$  et  $l_{max}$ , seules des actions de maintenance préventive mineures sont requises pour rétablir le système à son état initial. Par contre, si le taux de rebut est supérieur à  $l_{max}$  des actions beaucoup plus chères (révision) sont nécessaires pour que le système retrouve son état comme neuf.

Nous supposons que les actions de maintenance garantissent que le système ne tombe pas en panne avant la prochaine action de maintenance

Par ailleurs, un stock tampon de  $h$  unités est bâti au début de chaque cycle pour diminuer le risque de pénurie pendant que la machine est arrêtée pour subir les actions de maintenance. Le stock tampon est remis à zéro à la fin de chaque action de maintenance.



**Figure III. 1** Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des produits non-conformes.

$t_i$  : temps d'inspection correspondant à la période de construction de chaque lot.

Les hypothèses de travail sont présentées comme suit:

- La fonction de distribution cumulative associée aux durées de vie de l'unité de production est inconnue.
- Les fonctions de densité de probabilités associées aux durées de maintenance préventive et de révision sont connues.
- Les demandes qui ne peuvent pas être satisfaites sont perdues.
- La quantité de stock non utilisée est remise à zéro à la fin de chaque cycle
- Les articles produits sont de nature non périssable avec le temps.
- Les articles non-conformes ne sont pas réinsérés dans le processus de production.
- Tous les coûts liés à la maintenance, la production et la qualité sont connus et constants.
- Toutes les ressources nécessaires pour l'accomplissement des actions de maintenance sont toujours disponibles.
- Le temps d'inspection est négligeable
- La taille du lot sujet au contrôle qualité est connue et constante.
- Les coûts relatifs au contrôle de la qualité sont négligeables.

Les notations suivantes sont utilisées:

- $C_s$  : Coût unitaire de stockage.
- $C_p$  : Coût unitaire de pénurie.
- $C_{nc}$  : Coût encouru en produisant des unités non-conformes par unité de temps
- $h$  : la taille du stock tampon (*variable de décision*).
- $\delta s$  : Coût total de stockage.
- $\delta q$  : Coût total de qualité.
- $M_p$  : Coût d'une action de maintenance préventive.
- $M_c$  : Coût de révision ( $M_c \gg M_p$ ).
- $\delta m$  : Coût total de maintenance.
- $d$  : La demande (unités/unité de temps)
- $l_m$  : Niveau seuil du taux de non-conformité (*variable de décision*).
- $g_p(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive
- $g_c(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision
- $P(l)$  : Fonction de densité de probabilités associée au taux de rejet  $l$ . Nous supposons que cette fonction est continue et bornée par zéro au minimum et 1 au maximum.
- $\mu_c$  : Durée moyenne d'une action de révision
- $\mu_p$  : Durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
- $U_{max}$  : Taux de production maximal.
- $\Pi(h, l_m)$  : Coût total moyen par unité de temps.

D'autres hypothèses seront introduites à travers le modèle mathématique présenté dans la section suivante.

### III.1.2 Développement du modèle mathématique

L'objectif est de déterminer simultanément le niveau seuil optimal du taux de rejet ' $l_m$ ' et la taille optimale du stock tampon ' $h$ ' qui minimisent le coût total moyen par unité de temps. L'analyse que nous présentons, permettra de développer une expression du coût total moyen qui est la somme des coûts moyens relatifs à la maintenance, à l'inventaire et à la qualité encourus sur la durée d'un cycle qui est la durée moyenne entre la fin de deux actions de maintenance consécutives.

Pour un cycle, deux scénarios sont possibles selon que la pénurie a eu lieu ou non. Les deux figures suivantes décrivent l'évolution du stock tampon pour chacun des deux scénarios.

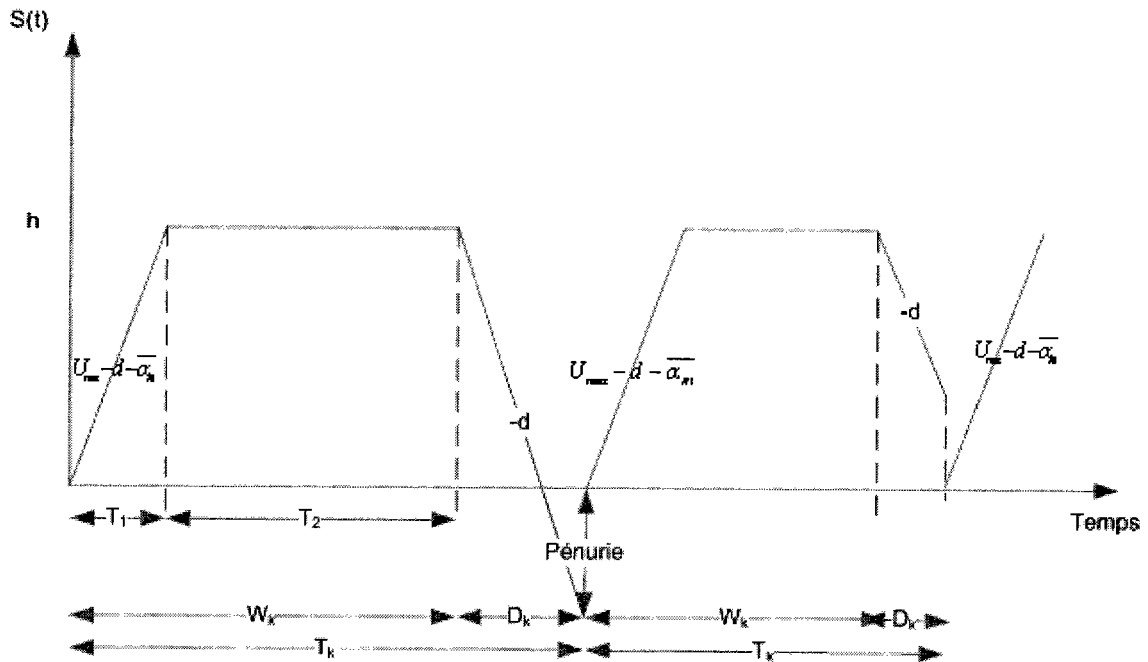


Figure III. 2 Evolution du niveau du stock tampon.

Nous désignons par:

- $W_k$  la période durant laquelle l'unité de production est en fonctionnement dans un cycle de d'inventaire  $T_k$ .
- $D_k$  est le temps d'interruption de service de l'unité de production suite aux actions de maintenance préventive et de révision.
- $\overline{\alpha_{R1}}$  désigne le taux moyen de rejet des unités non-conformes par unité de temps durant la période  $T_1$ , ce qui équivaut au taux de production des unités non-conformes durant  $T_1$ .

Son expression est donnée par :

$$\overline{\alpha_{R1}} = U_{\max} \cdot \int_0^1 [1 - P(l)] dl \quad (\text{III.1})$$



- $\overline{\alpha_{R2}}$  désigne le taux moyen de rejet des unités non-conformes par unité de temps durant la période  $T_2$ , ce qui équivaut au taux de production des unités non-conformes durant  $T_2$ .  $\overline{\alpha_{R2}}$  est égal au produit du taux de production de la machine durant la période  $T_2$  par le pourcentage moyen de rejet durant cette même période. Pour maintenir le niveau du stock à  $h$  durant la période  $T_2$  (figure III.2), la machine doit produire à un taux égal à  $d + \overline{\alpha_{R2}}$

Ainsi :

$$\overline{\alpha_{R2}} = (d + \overline{\alpha_{R2}}) \cdot \int_0^1 [1 - P(l)] dl \quad (III.2)$$

d'où:

$$\overline{\alpha_{R2}} = \frac{d \cdot \int_0^1 [1 - P(l)] dl}{1 - \int_0^1 [1 - P(l)] dl} \quad (III.3)$$

- $T_1$  est le temps nécessaire pour construire un stock de  $h$  unités, et durant lequel la machine produit au maximum de sa capacité  $U_{max}$ .
- $T_2$  est le temps durant lequel la machine ne produit que pour satisfaire la demande. Le taux de production durant cette période est  $d + \overline{\alpha_{R2}}$ ,  $(d + \overline{\alpha_{R2}}) \leq U_{max}$

Formellement, le taux de production s'écrit donc comme suit:

$$\text{Taux de production} = \begin{cases} U_{max} & \text{pour } S(t) < h \\ \frac{d}{1 - \int_0^1 [1 - P(l)] dl} & \text{pour } S(t) = h \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous développons les expressions nécessaires pour évaluer le coût total moyen par unité de temps qui englobe les coûts moyens d'inventaire, de maintenance et de qualité.

### III.I.2.1 Le coût moyen d'inventaire par unité de temps

Pour calculer le coût d'inventaire, il faut tenir compte des scénarios possibles. Le premier cas (décrit dans la figure III.3) représente un cycle sans occurrence de pénurie, dans lequel la période  $D_k$  d'interruption de service n'excède pas le temps nécessaire pour la consommation du stock. Le second

cas (voir figure III.4) décrit un cycle avec occurrence de pénurie due à un temps de maintenance relativement long.

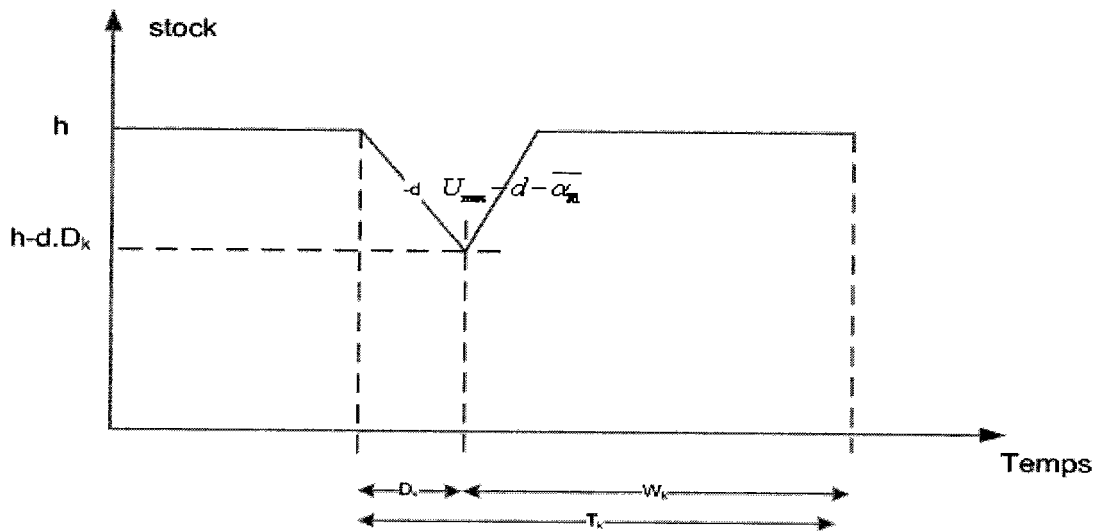


Figure III. 3 Cycle sans pénurie

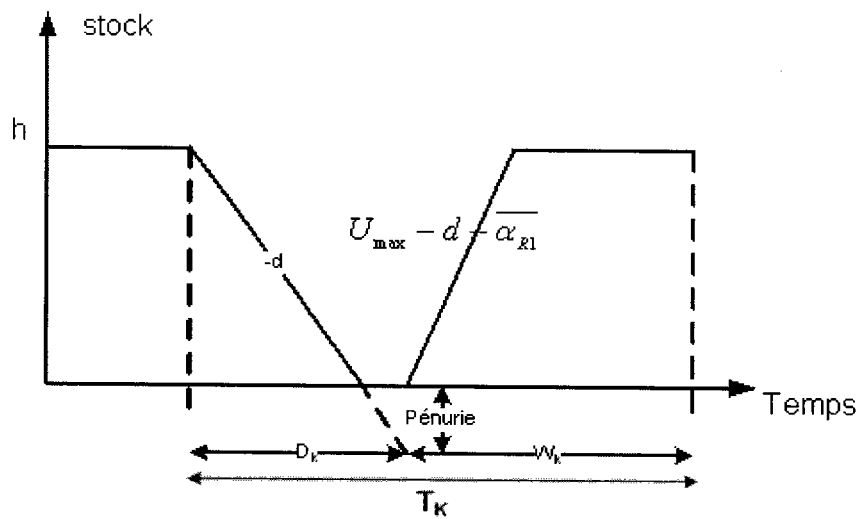


Figure III. 4 Cycle avec pénurie

Le premier cas est celui où la période  $D_k$  d'interruption de service n'excède pas la période de consommation du stock tampon. Dans cette situation, le coût d'inventaire  $\Gamma_{NL}$  est donné par :

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2 \cdot d}{2} + \frac{(D_k \cdot d)^2}{2(U_{\max} - d - \alpha_{R1})} \right] \right] \quad (III.4)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}}) + D_k^2.d^2}{2.(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] \right] \quad (III.5)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.U_{\max} - d^2.D_k^2 - D_k^2.d.\overline{\alpha_{R1}} + D_k^2.d^2}{2.(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] \right] \quad (III.6)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - \overline{\alpha_{R1}})}{2.(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] \right] \quad (III.7)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s h.(W_k + D_k) - C_s \cdot \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - \overline{\alpha_{R1}})}{2.(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] \quad (III.8)$$

Pour un cycle avec pénurie, le coût moyen d'inventaire  $\Gamma_{wL}$  est exprimé comme suit en faisant la somme du coût de stockage et celui de la pénurie :

$$\Gamma_{wL} = C_s \left[ \frac{h^2}{2d} + \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} + h \left( W_k - \frac{h}{U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}}} \right) \right] + C_p.d \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (III.9)$$

$$\Gamma_{wL} = C_s \left[ \frac{h^2}{2d} + \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} + h W_k - \frac{h^2}{U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}}} \right] + C_p.d \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (III.10)$$

$$\Gamma_{wL} = C_s h^2 \left[ \frac{1}{2d} + \frac{1}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} - \frac{1}{U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}}} \right] + (C_s W_k - C_p).h + C_p.d.D_k \quad (III.11)$$

$$\Gamma_{wL} = C_s . h^2 \left[ \frac{U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{R1}}}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] + (C_s W_k - C_p).h + C_p . d . D_k \quad (III.12)$$

Le coût d'inventaire moyen tenant compte les deux scénarios est donné par:

$$\Gamma = \Gamma_{NL} . (1 - R_D(h/d)) + \Gamma_{wL} . R_D(h/d) \quad (III.13)$$

$$\text{avec } R_D(h/d) = \int_{h/d}^{+\infty} g_D(u).du \quad (\text{III.14})$$

$$\text{où } g_D(u) = g_c(u).(1 - P(l_{\max})) + g_p(u).(P(l_{\max}) - P(l_m)) \quad (\text{III.15})$$

ce qui permet d'écrire:

$$\Gamma = (1 - R_D(h/d)) \cdot \left[ C_s h (W_k + D_k) - C_s \cdot \left[ \frac{D_k^2 d (U_{\max} - \overline{\alpha_{Rl}})}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} \right] \right] + R_D(h/d) \cdot \left[ C_s h^2 \left[ \frac{U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{Rl}}}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} \right] + (C_s W_k - C_p) h + C_p d D_k \right] \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & C_s h (W_k + D_k) \frac{C_s D_k^2 d (U_{\max} - \overline{\alpha_{Rl}})}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} - R_D(h/d) C_s h W_k - R_D(h/d) C_s h D_k + R_D(h/d) \frac{C_s D_k^2 d (U_{\max} - \overline{\alpha_{Rl}})}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} \\ & + R_D(h/d) C_s h^2 \frac{(U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{Rl}})}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} + R_D(h/d) h C_s W_k - R_D(h/d) h C_p + C_p d D_k R_D(h/d) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Ainsi, le coût moyen d'inventaire par unité de temps,  $\delta$ , est donné par:

$$\delta = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & C_s E[W_k] + C_s h^2 R_D(h/d) \frac{U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{Rl}}}{2d(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} \\ & + C_s \int_0^{h/d} xh - x^2 \frac{d(U_{\max} - \overline{\alpha_{Rl}})}{2(U_{\max} - d - \alpha_{Rl})} g_D(x) dx \\ & + R_D(h/d) C_p \int_{h/d}^{+\infty} (xd - h) g_D(x) dx \end{aligned} \right] \quad (\text{III.18})$$

Où  $E[T_k]$  est la durée moyenne du cycle de production:

$$E[T_k] = E[W_k] + E[D_k] \quad (\text{III.19})$$

$$E[D_k] = \mu_p [P(l_{\max}) - P(l_m)] + \mu_c [1 - P(l_{\max})] \quad (\text{III.20})$$

et

- $P(l_{\max}) - P(l_m)$  exprime la probabilité d'avoir  $l_m \leq l < l_{\max}$ . C'est à dire la probabilité que le cycle finisse par une intervention préventive.

- $1 - P(l_{\max})$  exprime la probabilité d'avoir  $l_{\max} \leq l$ . C'est à dire la probabilité que le cycle finisse par une action de révision de la machine.

$E[W_k]$  sera exprimé plus loin (à la suite de l'équation III.29).

### III.1.2.2 Le coût moyen de maintenance par unité de temps

Le coût moyen de maintenance par unité de temps est donné par :

$$\delta m = \frac{1}{E[T_k]} (M_p \cdot [P(l_{\max}) - P(l_m)] + M_c \cdot [1 - P(l_{\max})]) \quad (III.21)$$

### III.1.2.3 Le coût moyen de qualité par unité de temps

Le coût moyen de qualité correspond au coût relatif au nombre moyen des unités rejetées durant un cycle

Tel que montré à la figure III.2, le temps de fonctionnement est divisé en deux parties  $T_1$  et  $T_2$  :

$$T_2 = W_k - T_1 \quad (III.22)$$

La valeur moyenne de  $T_2$  est donnée par:

$$E[T_2] = E[W_k] - E[T_1] \quad (III.23)$$

$$\text{avec } E[T_1] = \frac{h}{U_{\max} - d - \overline{\alpha}_{R1}} \quad (III.24)$$

Le nombre moyen des unités rejetées durant la période  $T_1$  est exprimé comme suit:

$$Qp_1 = \overline{\alpha}_{R1} \cdot E[T_1] \quad (III.25)$$

Le nombre moyen des unités rejetées durant la période  $T_2$  est donné par:

$$Qp_2 = \overline{\alpha}_{R2} \cdot E[T_2] = \overline{\alpha}_{R2} \cdot (E[W_k] - E[T_1]) \quad (III.26)$$

Ainsi, en utilisant les équations (III.23), (III.25), (III.26) et en faisant la somme de  $Q_{p1}$  et  $Q_{p2}$ , nous obtenons le coût moyen de qualité par unité de temps :

$$\delta q = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} [Q_{p1} + Q_{p2}] = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} \left[ \overline{\alpha_{R1}} \cdot E[T_1] + \overline{\alpha_{R2}} \cdot (E[W_k] - E[T_1]) \right] \quad (III.27)$$

En utilisant l'équation (III.24), nous pouvons écrire:

$$\delta q = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} \left[ \overline{\alpha_{R1}} \cdot \frac{h}{U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}}} + \overline{\alpha_{R2}} \cdot (E[W_k] - \frac{h}{U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}}}) \right] \quad (III.28)$$

En combinant les équations (III.18), (III.21) et (III.28), l'expression du coût total moyen par unité de temps est obtenue comme suit :

$$\Pi(h, l_m) = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & C_s \cdot E[W_k] + C_s \cdot h^2 \cdot R_D(h/d) \cdot \frac{U_{max} - 2d - \overline{\alpha_{R1}}}{2d \cdot (U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \\ & + C_s \cdot R_D(h/d) \cdot \int_{h/d}^{+\infty} xh - x^2 \cdot \frac{d \cdot (U_{max} - \overline{\alpha_{R1}})}{2(U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} g_D(x) dx \\ & + R_D(h/d) \cdot C_p \int_{h/d}^{+\infty} (x \cdot d - h) g_D(x) dx \\ & + M_p \cdot [P(l_{max}) - P(l_m)] + M_c \cdot [1 - P(l_{max})] \\ & + C_{nc} \left[ \overline{\alpha_{R1}} \cdot \frac{h}{U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}}} + \overline{\alpha_{R2}} \cdot (E[W_k] - \frac{h}{U_{max} - d - \overline{\alpha_{R1}}}) \right] \end{aligned} \right] \quad (III.29)$$

Dans cette équation, l'expression de la durée moyenne de fonctionnement  $E[W_k]$  doit être établie pour pouvoir calculer le coût total moyen par unité de temps pour n'importe quelles valeurs des paramètres d'entrée.

Selon la stratégie proposée, on remarque bien que la fin de la période  $W_k$  coïncide avec le moment où le taux de rejet est trouvé supérieur au niveau seuil  $l_m$ . Nous désignons cet instant par  $t_m$ .

Soit  $l(t)$  une fonction continue et croissante qui traduit l'évolution du taux de rejet en fonction du temps. En supposant que les instants d'inspection de la qualité sont assez proches les uns des autres, on peut dire que  $l(t)$  vérifie la relation suivante:

$$l(t_m) = l_m \tag{III.30}$$

ainsi,  $E[W_k]$  correspond à  $t_m$  qui peut être obtenue comme suit:

$$t_m = l^{-1}(l_m) \tag{III.31}$$

A cause de la difficulté d'obtenir une expression analytique exacte de  $E[W_k]$ , nous proposons de l'exprimer en utilisant la simulation. Pour ce faire, nous développerons dans la prochaine section un modèle de simulation qui nous permettra d'estimer la fonction  $l(t)$  pour n'importe quels paramètres d'entrée. Une fois que cette estimation est trouvée, l'expression de  $E[W_k]$  peut facilement être déterminée en utilisant l'équation (III.31)

### III.I.3 Exemple numérique et modèle de simulation

Pour illustrer notre approche, nous considérons une situation avec les paramètres d'entrée suivants qui ont été arbitrairement choisis tout en prenant soin d'avoir une certaine cohérence avec la réalité en général.

- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision : loi Normale de moyenne 2 heures et d'écart type 0.5 heure.
- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive: loi Normale de moyenne 0.5 heure et d'écart type 0.1 heure.
- $C_s = 5$  \$/unité/heure,  $C_p = 45$  \$/unité manquante,  $M_p = 500$  \$,  $M_C = 2000$  \$,  $l_{max} = 0.95$ ,  $l_0 = 0$ .
- $C_{nc} = 70$  \$ /unité,  $U_{max} = 100$  unités/heure,  $d = 20$  unités/ heure.
- P est la loi Bêta dont l'expression est la suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p, q)} \cdot \frac{(x - \min)^{p-1} (\max - x)^{q-1}}{(\max - \min)^{p+q-1}}$$

Où  $\beta(p, q)$  est la fonction bêta de paramètre p et q.

avec :  $\min = 0$ ,  $\max = 1$ ,  $p = 3$ ,  $q = 3$ . Le choix de la distribution Bêta pour le taux de rejet  $l$  est justifié par le fait qu'il s'agit d'une variable aléatoire continue bornée (les bornes étant 0 et 1). La fonction de densité de la fonction Bêta peut s'approcher de

zéro ou l'infini à chacune de ses bornes, avec  $p$  contrôlant la borne inférieure et  $q$  contrôlant la borne supérieure. Les fonctions de distribution Uniforme et Triangulaire pourraient également être associées au taux de rejet  $l$ .

L'expression du coût total moyen par unité de temps donnée par l'équation (III.29) doit être utilisée pour déterminer les valeurs optimales des variables de décision  $h^*$  et  $l_m^*$ . Comme mentionné à la fin de la section précédente, nous avons besoin d'estimer la période moyenne de fonctionnement de la machine durant un cycle en utilisant l'équation III.31 qui est basée sur la fonction  $l(t)$  exprimant l'évolution du taux de rejet en fonction du temps.

En vue d'estimer cette fonction  $l(t)$ , pour n'importe quels paramètres d'entrée, nous avons développé un modèle de simulation du processus de production considéré dans ce travail. Le simulateur considère un système de production produisant, sur un horizon infini, des lots d'une taille donnée et générant des produits non-conformes suivant la relation :

$$L(t + \Delta t) = L(t).(1 + \xi) \quad (\text{III.32})$$

où

$L(t)$  désigne la quantité cumulée d'unités non-conformes à l'instant  $t$ .

$\xi$  est une variable aléatoire entre 0 et 1 suivant une distribution Bêta.

$\Delta t$  désigne le temps nécessaire pour produire un lot sujet à contrôle.

Le taux de rejet est calculé comme suit:

$$l(t) = \frac{L(t)}{m.x} \quad (\text{III.33})$$

où :  $m$  est le nombre de lots produits jusqu'à l'instant  $t$ , la taille du lot étant égale à  $x$ .

Le détail de la procédure de simulation est décrit dans la figure III.5 dans laquelle les notations suivantes ont été adoptées :

$L^0$ : la quantité non-conforme à l'instant  $t=0$

$n_{\text{rep}}$  : nombre de réplifications.

$Cd$  : cadence de production. (unités /unité de temps)



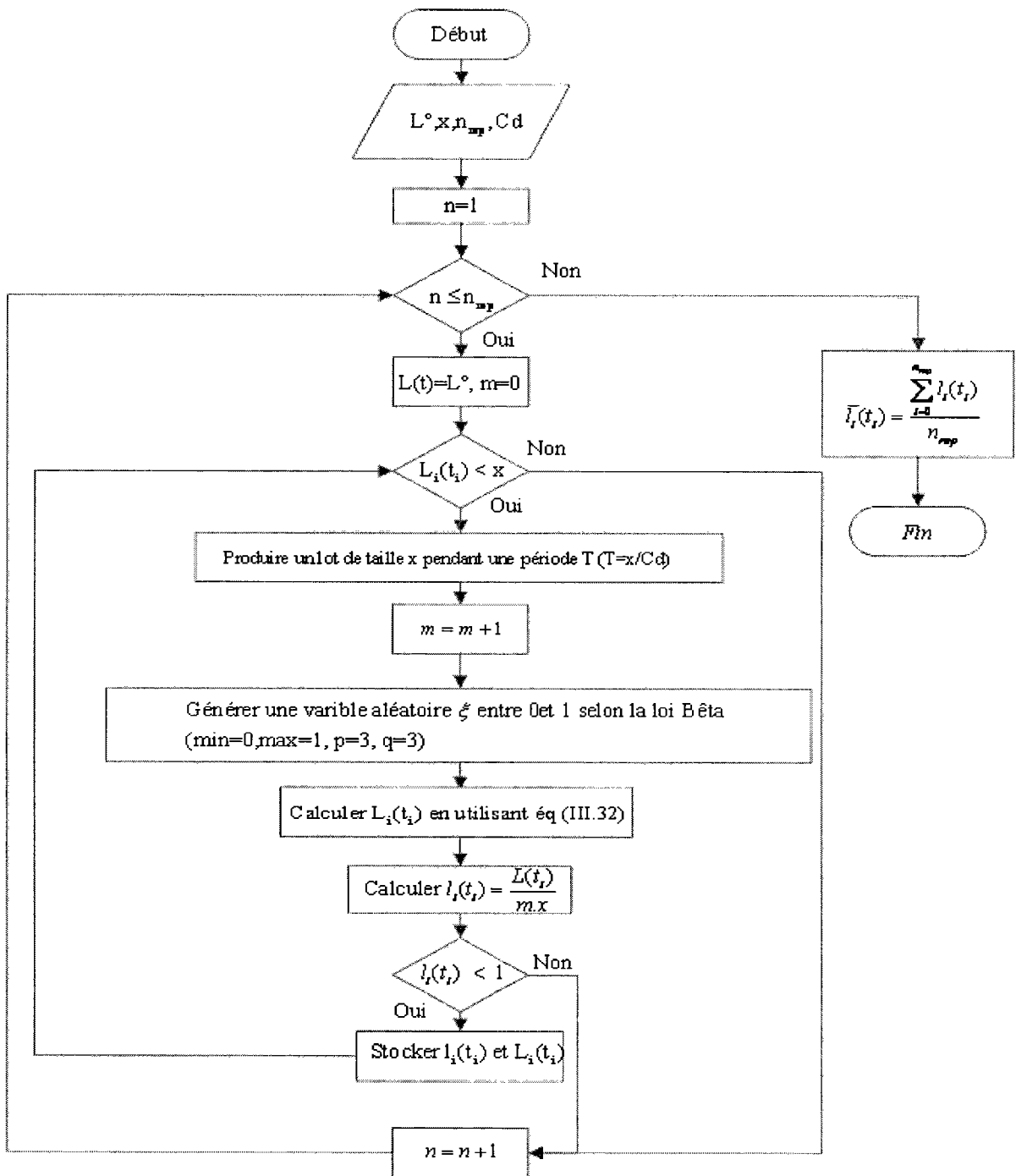


Figure III. 5 Modèle de simulation

Un lot de taille  $x$  est produit durant une période  $T$ , une quantité d'unités non-conformes est alors générée d'un manière aléatoire selon l'équation (III.32) et le taux de rejet correspondant est calculé en utilisant l'équation (III.33). Cette procédure est répétée pour  $m$  périodes  $T$  tant que le taux de rejet

n'excède pas 1. Un total de  $n_{rep}$  réplifications est entrepris. Finalement, les valeurs moyennes de  $l(iT)$  pour  $(i=1, \dots, n_{rep})$  sont prises en considération pour trouver une approximation de la fonction  $l(t)$  en utilisant la méthode des moindres carrées.

A partir de là, une fois que  $l(t)$  est obtenue, une estimation de la période moyenne de fonctionnement  $E[W_k]$  peut être trouvée en utilisant l'équation (III.31) pour n'importe quelle valeur du seuil  $l_m$

Nous considérons les valeurs des paramètres suivants comme exemple:

$$L^o = 0$$

$$x = 50 \text{ units}$$

$$n_{rep} = 10$$

$$m = 7$$

$$Cd = 100 \text{ unités /heure}$$

$$T = x/Cd = 0.5 \text{ heure}$$

Les résultats suivants sont donnés par le simulateur

	$l(t)$ rep 1	$l(t)$ rep 2	$l(t)$ rep 3	$l(t)$ rep 4	$l(t)$ rep 5	$l(t)$ rep 6	$l(t)$ rep 7	$l(t)$ rep 8	$l(t)$ rep 9	$l(t)$ rep 10	Moyenne $l(t)$
$T$	0,074	0,066	0,057	0,055	0,067	0,067	0,068	0,065	0,069	0,071	<b>0,066</b>
$2^*T$	0,123	0,116	0,089	0,084	0,116	0,105	0,120	0,123	0,123	0,101	<b>0,111</b>
$3^*T$	0,172	0,207	0,148	0,152	0,224	0,172	0,204	0,223	0,191	0,205	<b>0,188</b>
$4^*T$	0,305	0,385	0,252	0,217	0,360	0,314	0,347	0,375	0,337	0,335	<b>0,321</b>
$5^*T$	0,514	0,595	0,475	0,323	0,601	0,514	0,635	0,678	0,515	0,602	<b>0,539</b>
$6^*T$	0,804	0,887	0,807	0,490	0,959	0,955			0,827	0,906	<b>0,818</b>
$7^*T$	0,834	0,900	0,843	0,884							<b>0,865</b>

Tableau III. 1 Résultats du simulateur

La figure suivante montre la forme de la fonction  $l(t)$  ainsi que la forme de son estimation par la méthode des moindres carrées. L'expression de l'estimation obtenue est donnée par :

$$l(t) = 0.4328 \ln(t) - 0.1089$$

(III.34)

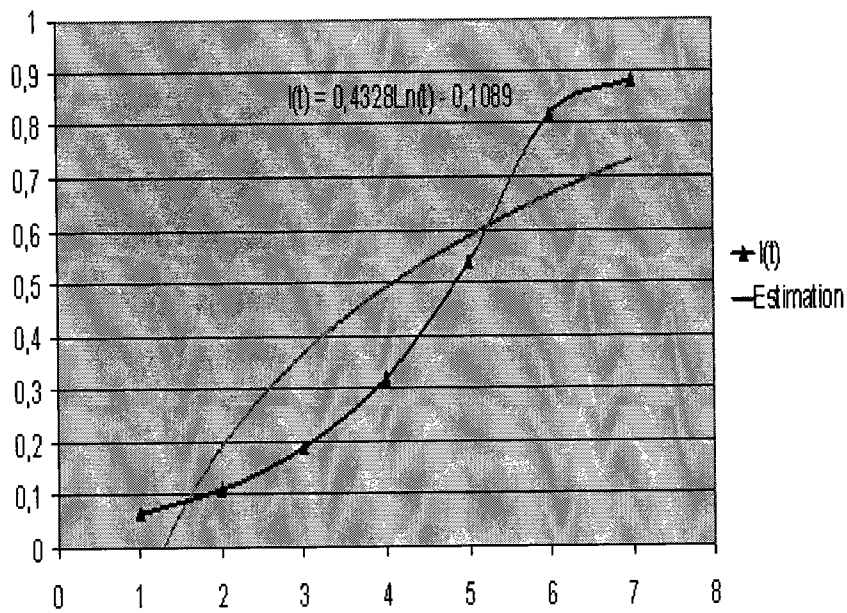


Figure III. 6 Evolution approximative du taux de rejet en fonction du temps

Ainsi, en utilisant l'équation (III.31), pour un  $l_m$  donné,  $E[W_k]$  peut être trouvé comme suit :

$$E[W_k] \approx \exp\left(\frac{l_m + 0.1089}{0.4328}\right) \quad (III.35)$$

Par conséquent, tous les termes de l'expression du coût total moyen par unité de temps (équation III.29) sont définis pour n'importe quelles valeurs des variables de décision  $h$  et  $l_m$ . En considérant les données numériques d'entrée présentées au début de cette section, nous utilisons une simple procédure d'énumération pour trouver le couple optimal  $(h^*, l_m^*)$  qui minimise le coût total moyen par unité de temps. La figure III.7 présente les courbes d'iso réponses du coût total moyen par unité de temps  $\prod(h, l_m)$ .

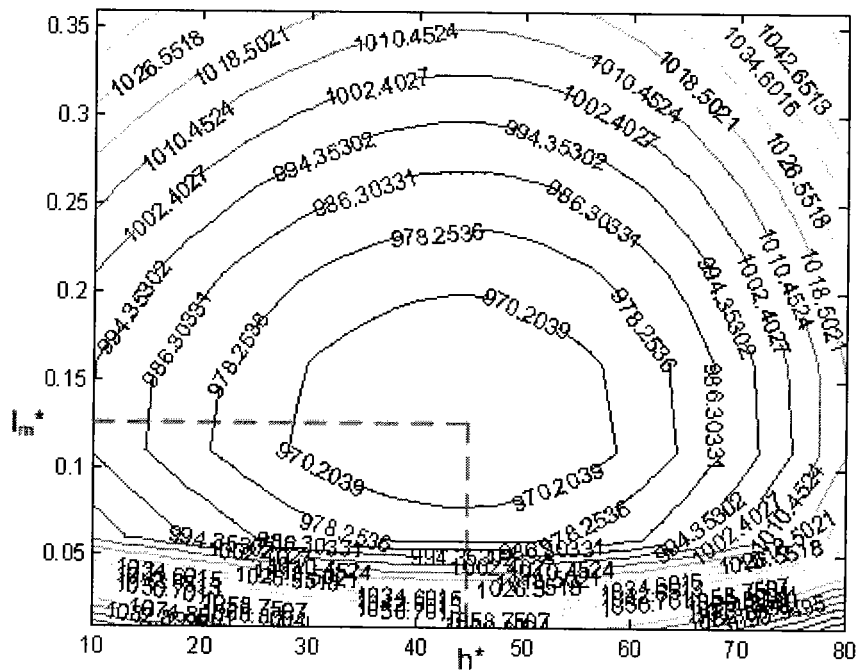


Figure III. 7 Courbes d'iso-réponses

Il apparaît clairement sur cette figure que la stratégie optimale consiste à entreprendre les actions de maintenance préventive seulement si le taux de rejet de produits non-conformes observé est trouvé supérieur ou égal à  $l_m^* = 14\%$ . Il serait en même temps nécessaire de construire un stock tampon de taille  $h^* = 55$  unités pour assurer la continuité de service (satisfaire la demande) pendant que l'unité est à l'arrêt pour subir les actions de maintenance. En adoptant cette stratégie, il en coûterait en moyenne 970,20 (\$/ heure).

$l_m$	$h$	E[Wk]	E[Tk]	$\delta s$	$\delta p$	$\Pi(h, l_m)$
0,01	50	2,86	3,13	744,96	93,12	1852,29
0,08	50	5,88	6,15	388,02	49,02	1003,50
<b>0,13</b>	<b>45</b>	<b>6,59</b>	<b>6,84</b>	260,28	31,29	<b>970,20</b>
0,20	45	7,21	7,46	240,09	22,95	992,60
0,25	50	7,59	7,84	310,02	47,46	1027,44
0,30	50	7,80	8,04	300,15	40,83	1070,49
0,35	50	8,03	8,26	292,59	35,91	1118,79
0,50	50	8,54	8,77	276,54	33,42	1281,79
0,60	50	8,81	9,03	269,61	32,85	1399,13

**Tableau III. 2** Résultats de la procédure numérique

Nous pouvons constater d'après les résultats du tableau III.2 que plus  $l_m$  augmente, plus le temps moyen de production  $E[W_k]$  augmente, ce qui était logiquement prévisible. Pour les valeurs correspondantes à la stratégie optimale, la durée moyenne de production est de 6,59 heures et la durée moyenne d'un cycle est de 6,84 heures, ce qui donne une durée moyenne d'arrêt pour maintenance d'un quart d'heure.

Force est de constater d'après les résultats montrés dans le tableau III. 2 et d'après plusieurs autres cas que nous avons traités que les coût moyens de stockage et de pénurie sont ceux qui contribuent le plus au coût total moyen par unité de temps. En vue de rendre la politique proposée plus performante du point de vue coût, nous proposons dans la section suivante de retarder l'instant de début de construction du stock durant le cycle en vue de minimiser le temps total de stockage et par conséquent le coût de stockage.

### III.II.1 Deuxième stratégie : définition et hypothèses de travail

Nous nous proposons dans cette partie (Radhoui et al 2007 a) de généraliser la stratégie présentée dans la section précédente en n'imposant plus que le stock tampon soit construit au début de chaque

cycle. En effet, nous proposons que l'initiation de la construction du stock soit conditionnée par l'atteinte d'un seuil de taux de non-conformité  $l_A$ . Tout le reste demeurant à l'identique par rapport à la première stratégie. Nous nous baserons dans notre développement sur les mêmes hypothèses de travail et nous adopterons les mêmes notations à l'exception des deux notations additionnelles suivantes :

- $l_A$  : Niveau seuil du taux de non-conformité à partir duquel la construction stock tampon devrait débiter (*nouvelle variable de décision*).
- $\Gamma_{NLSi}$  : Coût d'inventaire moyen au cas où il n'y a pas de pénurie dans le scénario  $i$ .
- $\Gamma_{WLSi}$  : Coût d'inventaire moyen au cas où il y a pénurie dans le scénario  $i$ .
- $\Pi(h, l_m, l_A)$  : Coût total moyen par unité de temps.

### III.II.2 Développement du modèle mathématique

Notre objectif est de déterminer simultanément les taux de rejet optimaux  $l_A^*$  et  $l_m^*$ , et la taille optimale du stock tampon  $h^*$  à bâtir qui minimisent le coût total moyen par unité de temps. Ce dernier correspond à la somme du coût de maintenance, du coût d'inventaire et de celui de la qualité. L'expression trouvée sera par la suite divisée par la durée moyenne d'un cycle qui, rappelons le, représente le temps moyen entre la fin de deux actions de maintenance consécutives.

Durant ce cycle, trois scénarios sont possibles selon que le stock tampon de taille  $h$  soit atteint ou pas.

Dans la suite, nous considérerons ces possibilités en traitant un scénario à la fois.

#### III.II.2.1 Scénario 1: le stock tampon est atteint

##### III.II.2.1.1 Le coût total moyen d'inventaire pour le scénario 1

Dans la situation où le stock tampon est atteint, deux cas sont possibles : soit que le temps de consommation du stock est supérieur au temps d'arrêt de la machine (il n'y a pas de pénurie, ce cas sera appelé par la suite : cas 'sans pénurie'), soit, au contraire, la durée de consommation du stock est inférieure à celle de l'arrêt (présence de pénurie, ce cas sera appelé par la suite cas 'avec pénurie')). Les figures III.8 et III.9 décrivent l'évolution du niveau d'inventaire respectivement pour le cas 'sans pénurie' et pour le cas 'avec pénurie'.

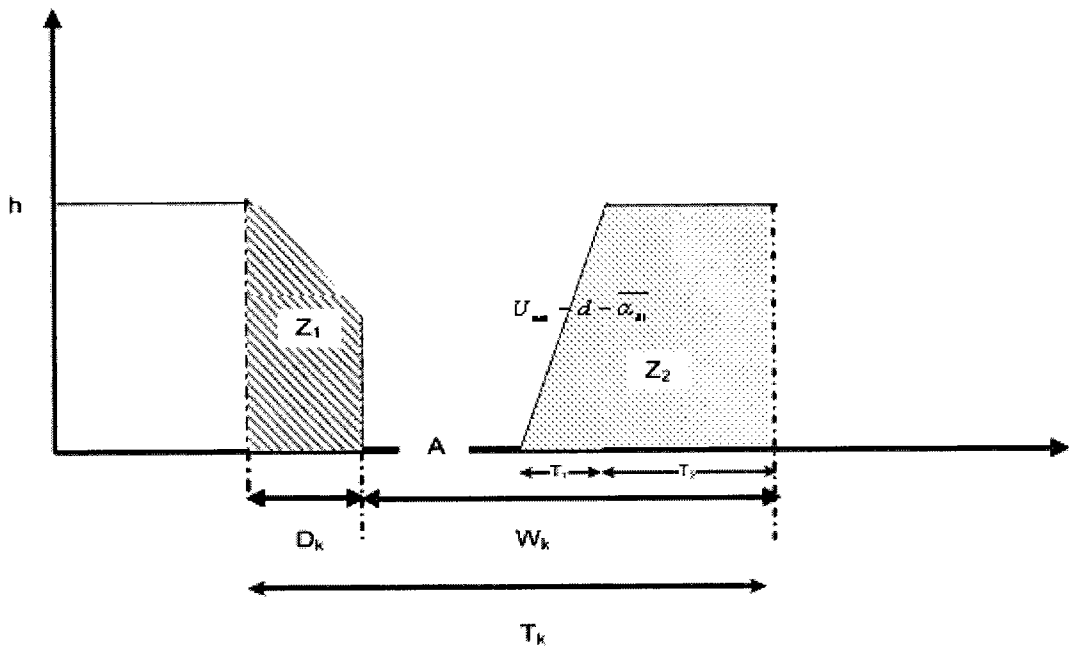


Figure III. 8 Evolution du niveau d'inventaire : cas 'sans pénurie'

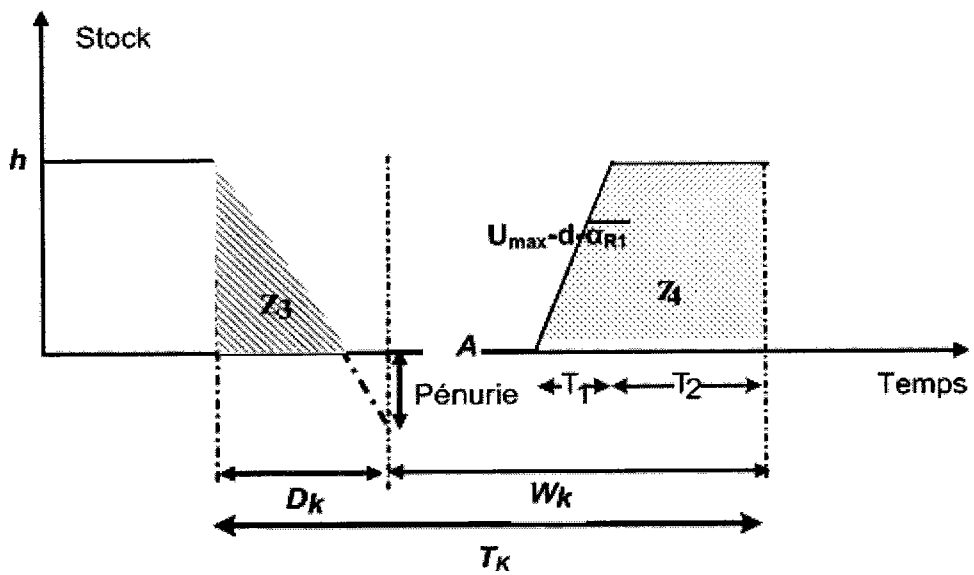


Figure III. 9 Evolution du niveau d'inventaire : cas avec pénurie

- 'A' désigne la période de temps entre le début du cycle et le début de la construction du stock tampon. La fin de cette période correspond au fait que le contrôle de la qualité révèle que le taux de rejet a atteint un niveau supérieur ou égal à  $l_A$
- 'Zi' désigne l'aire des zones hachurées Zi

Rappelons par ailleurs les autres termes suivants relatifs aux figures:

- $W_k$  désigne la période durant laquelle l'unité de production est en fonctionnement durant un cycle
- $D_k$  est le temps d'interruption de service de l'unité de production pour subir les actions de maintenance préventive ou les actions de révision.
- $\overline{\alpha_{R1}}$  désigne le taux moyen de rejet des unités non-conformes par unité de temps durant la construction du stock, qui n'est autre que le taux de production des unités non-conformes durant cette période. Son expression est donnée par l'équation III.1
- $\overline{\alpha_{R2}}$  représente le taux moyen de rejet des unités non-conformes par unité de temps durant la période  $T_2$ . Son expression est donnée par l'équation III.3

Les notations suivantes seront adoptées

Le premier cas est celui où la période d'interruption de service ne dépasse pas la période de consommation du stock tampon. Dans cette situation le coût d'inventaire moyen  $\Gamma_{NLS1}$  est donné par:

$$\Gamma_{NLS1} = C_s [Z_1 + Z_2] \quad (III.36)$$

$$Z_1 = D_k \cdot h - \frac{D_k^2 \cdot d}{2} \quad (III.37)$$

$$Z_2 = (W_k - A) \cdot h - \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \quad (III.38)$$

$$\Gamma_{NLS1} = C_s \left[ D_k \cdot h - \frac{D_k^2 \cdot d}{2} + (W_k - A) \cdot h - \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] \quad (III.39)$$

Pour un cycle avec pénurie, le coût total moyen d'inventaire  $\Gamma_{WLS1}$  est exprimé en faisant la somme du coût de stockage et de celui de la pénurie :



$$\Gamma_{WLS1} = C_s [Z_3 + Z_4] + C_p \cdot d \cdot \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (\text{III.40})$$

$$Z_3 = \frac{h^2}{2 \cdot d} \quad (\text{III.41})$$

$$Z_4 = (W_k - A) \cdot h - \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \quad (\text{III.42})$$

$$\Gamma_{WLS1} = C_s \left[ \frac{h^2}{2d} + (W_k - A)h - \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} \right] + C_p \cdot d \cdot \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$\Gamma_{WLS1} = \frac{C_s \cdot h^2 \cdot (U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{R1}})}{2 \cdot d \cdot (U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} + [C_s \cdot (W_k - A) - C_p] h + C_p \cdot d \cdot D_k \quad (\text{III.44})$$

Le coût total d'inventaire  $\Gamma_{Si}$ , pour chaque scénario  $Si$  ( $i=1,2$ ), est exprimé par :

$$\Gamma_{Si} = \Gamma_{NLSi} \cdot (1 - R_D(h/d)) + \Gamma_{WLSi} \cdot R_D(h/d) \quad (\text{III.45})$$

$$\text{avec } R_D(h/d) = \int_{h/d}^{+\infty} g_D(u) \cdot du \quad (\text{III.46})$$

$$\text{et } g_D(x) = g_c(x) \cdot (1 - P(l_{\max})) + g_p(x) \cdot (P(l_{\max}) - P(l_m)) \quad (\text{III.47})$$

d'où,

$$\Gamma_{S1} = C_s \left[ \frac{D_k \cdot h - \frac{D_k^2 \cdot d}{2} + (W_k - A) \cdot h}{h^2} \right] \cdot (1 - R_D(h/d)) + \left( \frac{C_s \cdot h^2 \cdot (U_{\max} - 2d - \overline{\alpha_{R1}})}{2 \cdot d \cdot (U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}})} + [C_s \cdot (W_k - A) - C_p] h \right) \cdot R_D(h/d) + C_p \cdot d \cdot D_k \quad (\text{III.48})$$

En divisant par la durée moyenne du cycle, nous obtenons le coût total moyen d'inventaire par unité de temps pour le scénario 1.

$$\delta_{S1} = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & C_s \cdot h \cdot E[W_k] - C_s \cdot h \cdot E[A] + \\ & C_s \int_0^{h/d} g_D(x) dx \cdot \int_{h/d}^{+\infty} (x \cdot h + \frac{d}{2} x^2) \cdot g_D(x) dx \\ & - \frac{C_s \cdot h^2}{2(U_{\max} - d - \alpha_{R1})} \int_0^{h/d} g_D(x) dx \\ & + \frac{C_s \cdot h^2 \cdot (U_{\max} - 2d - \alpha_{R1})}{2 \cdot d \cdot (U_{\max} - d - \alpha_{R1})} \int_{h/d}^{+\infty} g_D(x) dx \\ & + C_p \int_0^{h/d} g_D(x) dx \int_{h/d}^{+\infty} (dx - h) g_D(x) dx \end{aligned} \right] \quad (III.49)$$

Les expressions de  $E[W_k]$  et de  $E[A]$  seront données plus loin.

### III.II.2.1.2 Le coût total moyen de qualité pour le scénario 1

Le coût moyen de qualité correspond au coût du nombre moyen des unités rejetées durant un cycle.

En se référant aux figures III.8, et III.9, le temps de fonctionnement est divisé en deux parties  $T_1$  et  $T_2$ . Comme dans la première partie de ce chapitre les équations III.25, III.23 et III.24 sont vérifiées. Donc pour ce scénario 1 le coût total moyen de non-conformité est donné par l'équation III.28 dont nous rappelons l'expression :

$$\delta q_{S1} = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} \left[ \alpha_{R1} \cdot \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}} + \alpha_{R2} \cdot (E[W_k] - \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}}) \right]$$

### III.II.2.2 Scénario 2: le stock tampon n'est pas atteint

Comme dans le scénario 1, dans celui-ci deux cas sont possibles selon que la durée de consommation du stock dépasse celle de l'arrêt de l'unité pour maintenance ou non. Les figures III.10 et III.11 décrivent l'évolution du niveau d'inventaire respectivement pour le cas 'sans pénurie' et pour celui 'avec pénurie'.

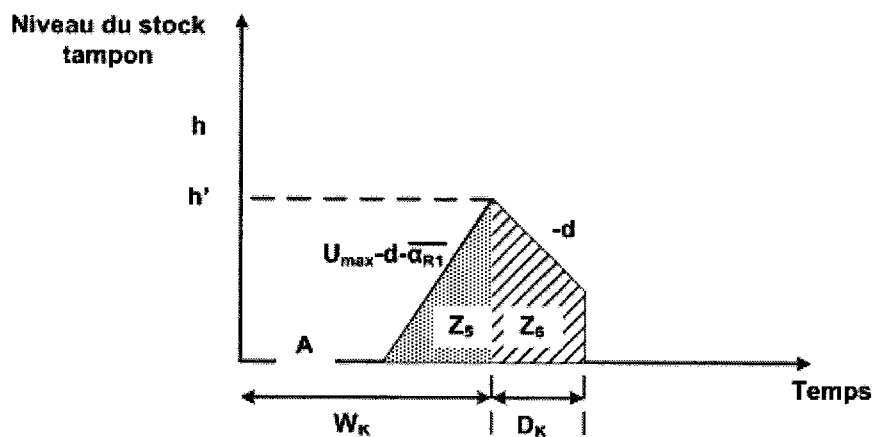


Figure III. 1 Evolution du niveau d'inventaire : cas 'sans pénurie'

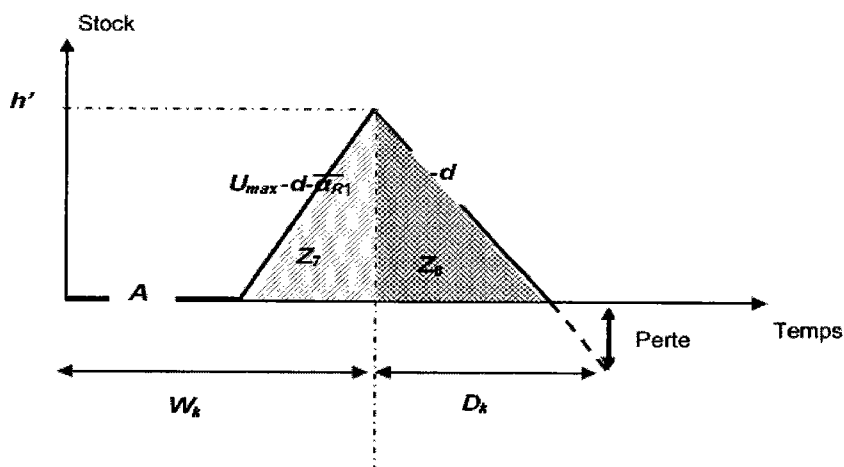


Figure III. 2 Evolution du niveau d'inventaire: cas 'avec pénurie'

- $h'$  Niveau d'inventaire moyen atteint avant arrêt de la production pour maintenance ( $h' < h$ )

### III.II.2.2.1 Le coût total moyen d'inventaire pour le scénario 2

Nous commençons cette analyse en considérant le cas où la période  $D_k$  d'interruption de service ne dépasse pas celle de consommation du stock

$h'$  étant le niveau moyen d'inventaire atteint avant l'arrêt de la production, son expression est donnée par :

$$h' = (E[W_k] - E[A])(U_{\max} - d - \overline{\alpha_{R1}}) \quad (\text{III.50})$$

$$Z_5 = (W_k - A) \cdot \frac{h'}{2} \quad (\text{III.51})$$

$$Z_6 = h' \cdot D_k - \frac{D_k^2}{2} \cdot d \quad (\text{III.52})$$

$$\Gamma_{NLS2} = C_s \left[ (W_k - A) \cdot \frac{h'}{2} + h' \cdot D_k - \frac{D_k^2}{2} \cdot d \right] \quad (\text{III.53})$$

Pour un cycle avec pénurie,  $\Gamma_{WLS2}$  est exprimé comme suit:

$$\Gamma_{WLS2} = C_s [Z_7 + Z_8] + C_p \cdot d \left( D_k - \frac{h'}{d} \right) \quad (\text{III.54})$$

où :

$$Z_7 = (W_k - A) \cdot \frac{h'}{2} \quad (\text{III.55})$$

$$Z_8 = \frac{h'^2}{2 \cdot d} \quad (\text{III.56})$$

$$\Gamma_{WLS2} = C_s \left[ (W_k - A) \cdot \frac{h'}{2} + \frac{h'^2}{2 \cdot d} \right] + C_p \cdot d \left( D_k - \frac{h'}{d} \right) \quad (\text{III.57})$$

Tout comme le premier scénario, le coût total d'inventaire  $\Gamma_{Si}$ , pour un scénario  $Si$ , tenant compte des deux scénarios est exprimé par :

$$\Gamma_{Si} = \Gamma_{NLSi} \cdot (1 - R_D(h'/d)) + \Gamma_{WLSi} \cdot R_D(h'/d) \quad (\text{III.58})$$

$$\text{avec } R_D(h'/d) = \int_{h'/d}^{+\infty} g_D(u) \cdot du \quad (\text{III.59})$$

En utilisant l'équation (III.58) et en divisant par la durée moyenne du cycle, nous obtenons le coût total d'inventaire moyen par unité de temps pour le scénario 2 :

$$\delta_{S2} = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & C_s \cdot \frac{h'}{2} \cdot (E[W_k] - E[A]) + \\ & C_s \int_0^{h/d} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (xh' - \frac{d}{2} x^2) g_D(x) dx \\ & + C_s \cdot \frac{h^2}{2d} \int_{h/d}^{\infty} g_D(x) dx + C_p \int_{h/d}^{\infty} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (dx - h') g_D(x) dx \end{aligned} \right] \quad (III.60)$$

### III.II.2.2.2 Le coût total moyen de qualité pour le scénario 2

Tout comme le premier scénario, le coût moyen de qualité correspond au coût du nombre moyen des unités rejetées durant un cycle. Dans ce scénario,  $h$  n'est pas atteint, donc la durée  $T_2$  est nulle et les unités non-conformes ne sont produites que durant :

$$E[T_1] = \frac{h'}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}} \quad (III.61)$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que le coût total moyen de qualité par unité de temps pour le scénario 2 est donné par:

$$\delta_{q_{S2}} = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} \left[ \frac{h'}{\alpha_{R1} \cdot (U_{\max} - d - \alpha_{R1})} \right] \quad (III.62)$$

### III.II.2.3 Scénario 3: Aucun stock n'est bâti

Ce scénario représente le cas où la période de temps passée avant la construction du stock est tellement grande qu'aucun stock n'est bâti. La figure suivante décrit le cycle correspondant à ce scénario.

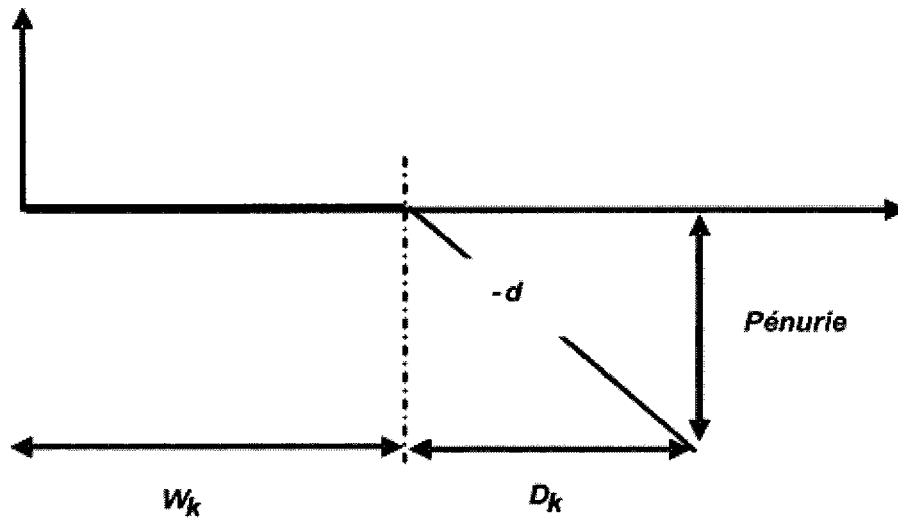


Figure III. 12 Le cycle dans le cas où aucun stock n'est bâti

### III.II.2.3.1 Le coût total moyen d'inventaire pour le scénario 3

Pour ce cas, le coût total d'inventaire n'est autre que le coût de pénurie

$$\Gamma_{WLS3} = C_p \cdot d \frac{D_k^2}{2} \quad (III.63)$$

En utilisant les expressions des deux équations III.58 et III. 63, les le coût total d'inventaire moyen par unité de temps est donné par :

$$\delta_{S3} = \frac{1}{E[T_k]} \left[ C_p \frac{d}{2} \int_{h/d}^{+\infty} x^2 g_D(x) dx \right] \quad (III.64)$$

### II.II.2.3.2 Le coût total moyen de qualité pour le scénario 3

Pour ce scénario, la machine produit seulement pour satisfaire la demande, dans ce cas précis le nombre moyen des unités rejetées est:

$$Qp_2 = \overline{\alpha_{R2}} \cdot E[W_k] \quad (III.65)$$

En multipliant l'équation précédente par le coût unitaire de non-conformité et en divisant par la durée moyenne d'un cycle, nous obtenons :

$$\delta q_{S3} = C_{nc} \frac{E[W_k]}{\alpha_{R2} E[T_k]} \quad (III.66)$$

### III.II.2.4 Le coût total moyen de maintenance par unité de temps

L'expression du coût total moyen de maintenance est exprimée comme suit pour tous les scénarios:

$$\delta_m = \frac{1}{E[T_k]} (M_p [P(l_{\max}) - P(l_m)] + M_c [1 - P(l_{\max})]) \quad (III.67)$$

où:

- $P(l_{\max}) - P(l_m)$  exprime la probabilité d'avoir  $l_m \leq l < l_{\max}$ . C'est à dire la probabilité que le cycle finisse par une intervention préventive.
- $1 - P(l_{\max})$  exprime la probabilité d'avoir  $l_{\max} \leq l$ . C'est à dire la probabilité que le cycle finisse par une action de révision de la machine.

Afin de pouvoir obtenir une expression globale du coût total moyen par unité de temps tenant compte des trois scénarios décrits jusque là, nous définissons les fonctions indicatrices suivantes :

$$ind(A < W_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } A < W_k \\ 0 & \text{si } A \geq W_k \end{cases} \quad (III.68)$$

Cette fonction indique si un stock tampon est bâti ou pas.

$$ind\left(\frac{W_k - A}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}} > \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } (W_k - A) > \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}} \\ 0 & \text{si } (W_k - A) \leq \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}} \end{cases} \quad (III.69)$$

Cette fonction indique si le niveau du stock tampon à construire est atteint ou pas.

En combinant les équations (III.29), (III.49), (III.60), (III.62), (III.64), (III.66) et (III.67), et en considérant les équations (III.68) et (III.69), l'expression du coût total moyen par unité de temps est obtenue comme suit :

$$\Gamma(h, l_m, l_A) = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & \left( \text{ind}((W_k - A) > \frac{h}{(U_{\max} - d - \alpha_{R1})}) \text{ind}(A < W_k) \right) \left( \begin{aligned} & C_s h E[W_k] - C_s h E[A] \\ & + C_s \int_0^{h/d} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (xh - \frac{d}{2} x^2) g_D(x) dx \\ & + \frac{C_s h^2 (d - R_D(h/d))}{2d (U_{\max} - d - \alpha_{R1})} (U_{\max} - d - \alpha_{R1}) \\ & + C_p \int_0^{h/d} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (dx - h) g_D(x) dx \\ & + C_{nc} \left[ \frac{h}{\alpha_{R1} (U_{\max} - d - \alpha_{R1})} + \alpha_{R2} (E[W_k] - \frac{h}{U_{\max} - d - \alpha_{R1}}) \right] \end{aligned} \right) \\ & + \left( 1 - \text{ind}((W_k - A) > \frac{h}{(U_{\max} - d - \alpha_{R1})}) \right) \text{ind}(A < W_k) \left( \begin{aligned} & C_s \frac{h'}{2} (E[W_k] - E[A]) + \\ & C_s \int_0^{h/d} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (xh' - \frac{d}{2} x^2) g_D(x) dx \\ & + C_s \frac{h'^2}{2d} \int_{h/d}^{\infty} g_D(x) dx \\ & + C_p \int_{h/d}^{\infty} g_D(x) dx \int_{h/d}^{\infty} (dx - h') g_D(x) dx \\ & + C_{nc} \left[ \frac{h'}{\alpha_{R1} (U_{\max} - d - \alpha_{R1})} \right] \end{aligned} \right) \\ & + (1 - \text{ind}(A < W_k)) \left[ C_p \frac{d}{2} \int_{h/d}^{\infty} x^2 g_D(x) dx + C_{nc} \alpha_{R2} E[W_k] \right] \\ & + M_c [1 - P(l_{\max})] + M_p [P(l_{\max}) - P(l_m)] \end{aligned} \right] \quad (III.70)$$

Dans cette équation, l'expression de la durée moyenne de fonctionnement  $E[W_k]$  et celle de  $E[A]$  doivent être établies en vue de calculer le coût total moyen par unité de temps pour n'importe quelle configuration des paramètres d'entrée.

Pour ce faire, nous avons utilisé le modèle de simulation décrit dans la section précédente qui traitait de la première stratégie (Radhoui et al. 2008 a).. Ceci nous a permis de trouver :

$$t_m = \exp\left(\frac{l_m + 0.1089}{0.4328}\right) = E[W_k] \quad (III.71)$$



$$t_A = \exp\left(\frac{l_A + 0.1089}{0.4328}\right) = E[A] \quad (\text{III.72})$$

### III.II.3 Exemple numérique

Afin d'illustrer la stratégie proposée et mettre en évidence les éventuelles améliorations par rapport à la première stratégie, nous considérons le même exemple numérique que celui présenté dans la première section. Nous présentons dans la suite un rappel de l'exemple en question

- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision : loi Normale de moyenne 2 heures et d'écart type 0.5 heure.
- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive: loi Normale de moyenne 0.5 heure et d'écart type 0.1heure.
- $C_s = 5$  \$/unité/heure,  $C_p = 45$  \$/unité manquante,  $M_p = 500$  \$,  $M_C = 2000$  \$,  $l_{\max} = 0.95$ .  
 $l_0 = 0$
- $C_{nc} = 70$  \$ /unité,  $U_{\max} = 100$  unités/heure,  $d = 20$  unités/ heure.
- P est la loi Bêta avec un minimum 0, maximum 1,  $p=3$ ,  $q=3$ .

Etant donnée la complexité du modèle, une procédure numérique itérative a été développée pour obtenir la solution optimale  $(h^*, l_m^*, l_A^*)$ , pour n'importe quelle configuration des paramètres d'entrée. Cette procédure est décrite dans la figure III.13, où nous considérons les incréments suivants:  $\Delta h = 2$  unités,  $\Delta l_m = 1\%$ ,  $\Delta l_A = 1\%$

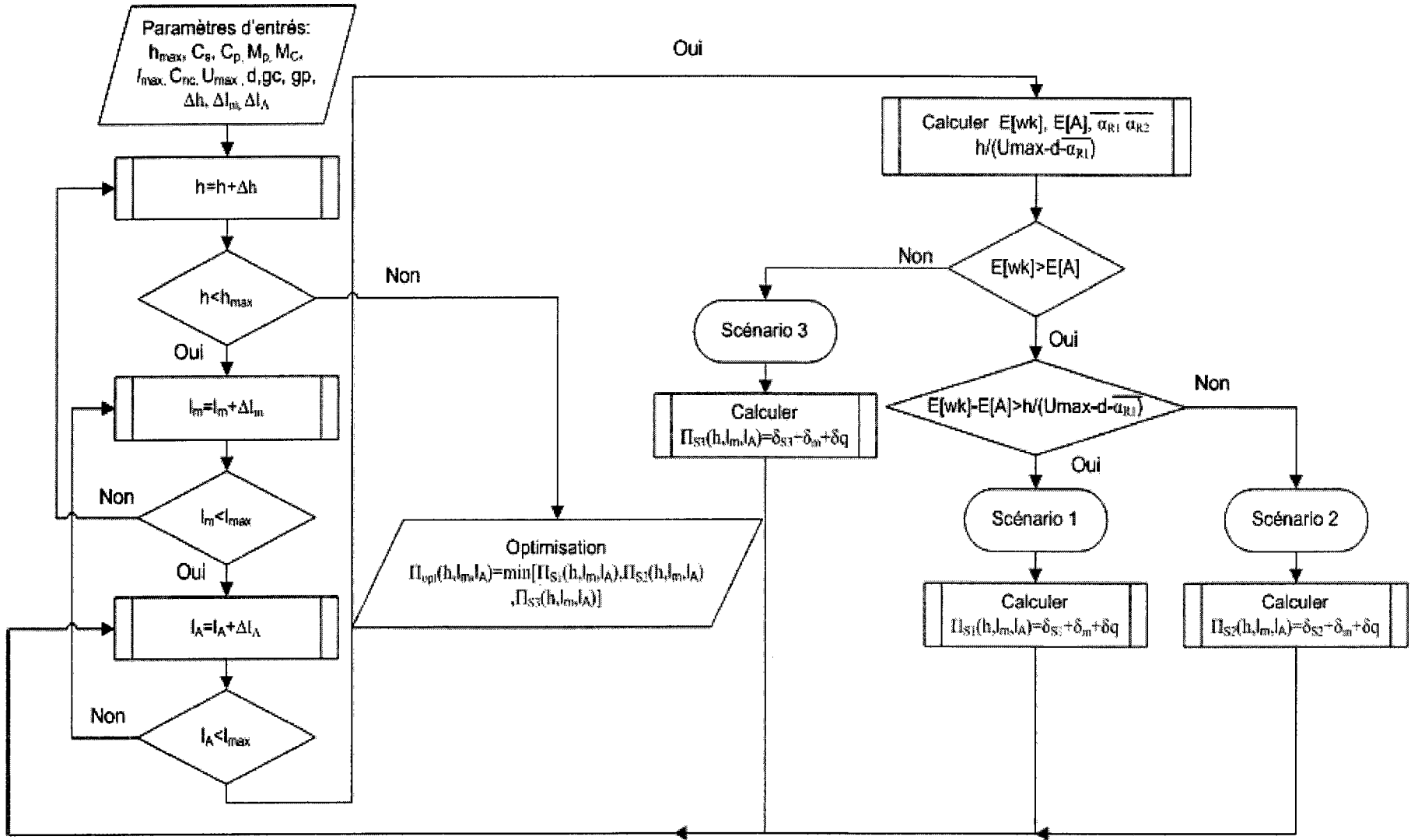


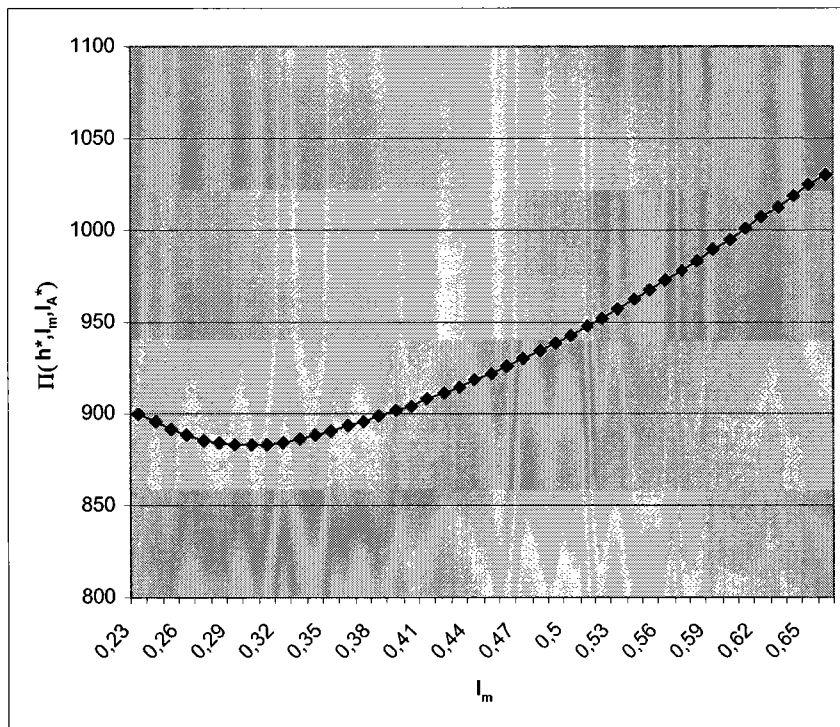
Figure III. 13 Procédure numérique

La stratégie optimale donnée par la procédure numérique est présentée dans le tableau suivant :

$h^*$	$l_m^*$	$l_A^*$	$\Pi^*(h, l_m, l_A)$ \$/heure
30	0.30	0.22	882,88

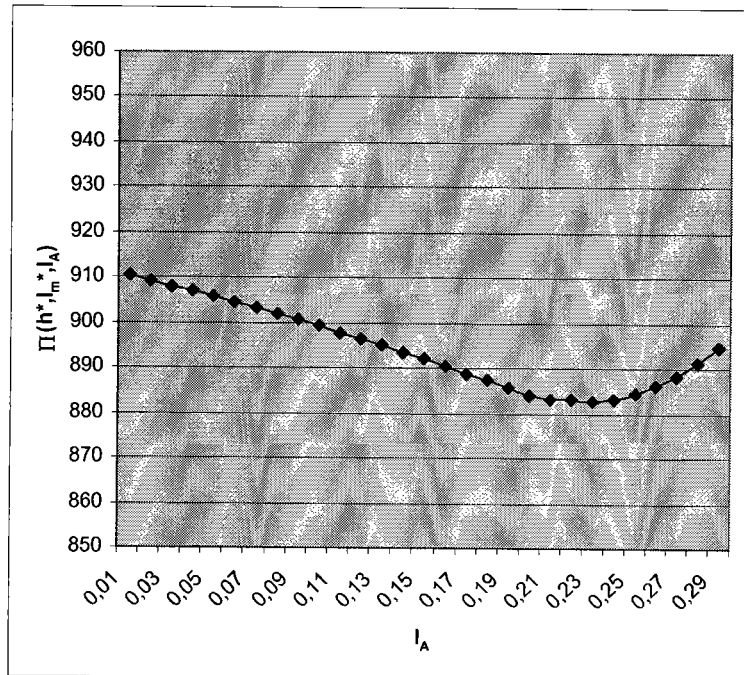
**Tableau III. 3** valeurs optimales des variables de décision

La figure suivante décrit l'évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de  $l_m$  pour  $l_A=l_A^*$  et  $h=h^*$



**Figure III. 14** Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de  $l_m$  pour  $l_A^*=0.22, h^*=30$ .

La figure III.15, décrit l'évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de  $l_A$  pour  $l_m=l_m^*$  et  $h=h^*$ .



**Figure III. 15** Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de  $l_A$  pour  $l_m^*=0.3, h^*=30$ .

Nous pouvons donc conclure que la stratégie optimale obtenue préconise d’entreprendre des actions de maintenance préventive seulement lorsque le taux de rejet est trouvé supérieur à  $l_m^*=30\%$ . Il serait aussi nécessaire de commencer à construire un stock tampon de taille  $h^*=30$  unités lorsque le taux de rejet atteint un seuil  $l_A^*=22\%$ , pour satisfaire la demande pendant les interruptions de services. En adoptant cette stratégie, il en coûterait en moyenne 882,88 (\$/heure).

Il est clair que par rapport à la première stratégie qui préconisait que le stock soit construit au début de chaque cycle ( $l_A=0$ ), la deuxième est économiquement plus avantageuse. En effet, pour les mêmes données d’entrée, en adoptant la première stratégie il en coûterait 970,20 (\$/heure). Comparée à la deuxième stratégie, nous avons un gain moyen de 87,32 (\$/heure).

Nous avons testé cette stratégie en prenant le cas où  $l_A=0$  (le stock est construit au début du cycle, ce qui correspond à la première stratégie), le coût total moyen par unité de temps obtenu est égal à 935,8 (\$/heure). Nous retrouvons ainsi une valeur très proche de celle retrouvée pour la première stratégie pour le même exemple (970,20 \$/heure). Ceci confirme que la deuxième stratégie est bien une généralisation de la première permettant de l’améliorer.

Enfin, Il est intéressant de noter que les améliorations que nous venons d'apporter à la première stratégie, auraient un effet encore plus accentué dans les situations où les produits seraient périssables avec le temps. En effet, en diminuant la durée moyenne de stockage, le nombre moyen d'unités perdues à cause de la périssabilité diminuera, et par conséquent le coût total moyen par unité de temps sera moins important. Nous avons eu l'occasion de traiter des produits périssables dans un contexte de dimensionnement de stocks tampons dans (Chelbi et al., 2008).

### **III.III Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons proposé deux nouvelles stratégies intégrées de maintenance préventive, de dimensionnement de stock tampon et de contrôle de la qualité pour un processus de production imparfait pouvant engendrer des unités non-conformes à partir d'un certain niveau aléatoire de détérioration. Les unités produites sont périodiquement soumises à un contrôle qualité automatisé qui permet de déterminer le taux des unités non-conformes produites.

L'idée sous-jacente à ces deux stratégies est qu'au lieu d'avoir des actions de maintenance systématiques ou bien basées sur l'atteinte d'un âge prédéfini du système, ces actions sont pilotées par la qualité des produits, en l'occurrence par le taux de produits non-conformes révélateurs d'un certain degré de dégradation du système.

La première stratégie proposée est caractérisée par deux variables de décision qui sont d'une part, le seuil de taux de non-conformité à partir duquel des actions de maintenance doivent être déclenchées, et d'autre part, la taille du stock tampon à prévoir pour diminuer les risques de pénurie durant les périodes d'arrêt du système pour maintenance. Le stock tampon étant bâti au début de chaque cycle de production. La seconde stratégie est une amélioration de la première dans le sens qu'elle considère un potentiel de gain en terme de stockage en n'imposant plus le fait que le stock tampon commence à être construit dès le début d'un cycle. Elle introduit plutôt une troisième variable de décision qui est le seuil de non-conformité à partir duquel, on devrait commencer à constituer le stock tampon. Ainsi, comme l'ont

démontré les résultats numériques obtenus, le fait de retarder la constitution du stock durant le cycle, la deuxième stratégie s'est avérée plus avantageuse du point de vue économique.

Pour chacune des deux stratégies, un modèle mathématique combiné à un modèle de simulation et à une procédure numérique ont été développés afin de pouvoir déterminer à chaque fois les valeurs optimales des variables de décision.



## CHAPITRE IV

### **M**odèle intégré de maintenance préventive, de dimensionnement des stocks tampons et de contrôle de la qualité pour un système de production imparfait : Approche analytique

Dans le chapitre précédent nous avons proposé deux stratégies conjointes de maintenance préventive, de contrôle de qualité et dimensionnement du stock tampon. Pour pouvoir calculer la durée moyenne d'un cycle pour ces deux stratégies, nous avons opté pour une approche combinant une modélisation analytique et une modélisation par simulation.

Dans ce chapitre (Radhoui et al 2007 b) nous considérons de nouveau la stratégie traitée dans la première section du chapitre précédent. Rappelons que cette stratégie supposait que le contrôle de la qualité avait un coût négligeable et se faisait selon une périodicité fixe



préalablement déterminée. Dans ce chapitre, nous proposons de relaxer cette hypothèse et de mettre en évidence la périodicité du contrôle de la qualité comme une variable de décision qu'il faudra déterminer simultanément avec les deux autres (le seuil de non-conformité  $l_m^*$  déclenchant les actions de maintenance préventive et la taille  $h$  du stock tampon). Pour ce faire, nous adopterons une approche de modélisation totalement analytique.

Dans un premier temps, nous rappelons la stratégie en question en tenant compte de l'hypothèse principale à relaxer. Ensuite nous présenterons le modèle mathématique correspondant et la procédure numérique permettant de retrouver les valeurs optimales des variables de décision. Enfin, un exemple numérique sera traité et les résultats correspondants seront discutés.

### IV.1 Définition de la stratégie et hypothèses de travail

Nous considérons une unité de production imparfaite avec un taux de défaillance croissant, produisant des produits conformes et non-conformes selon son état de dégradation. Cette unité est assimilée à une seule machine qui devra satisfaire une demande constante. Les unités produites sont soumises entièrement à un contrôle qualité automatisé de durée négligeable à tous les  $x$  unités de temps pour déterminer le nombre de produits non-conformes. Le taux de non-conformité  $I(t)$  observé à un instant  $t$  est une variable aléatoire. Après chaque inspection, et selon le taux de rebut observé, on décide d'entreprendre ou pas des actions de maintenance. Si  $I$  est trouvé supérieur à un certain niveau seuil  $l_m$ , et inférieur à une valeur maximale  $l_{max}$  ( $l_m < I \leq l_{max}$ ), la machine est arrêtée pour subir les actions de maintenance préventive. Si  $I$  est trouvé supérieure à  $l_{max}$ , la machine est considérée comme étant dans un état proche de la défaillance et par conséquent des actions de maintenance curative majeure (révision) sont envisagées. Finalement, si  $I$  est trouvé inférieur à  $l_m$ , aucune action ne sera entreprise (voir figure IV.1). Après une action de maintenance (préventive ou de révision) le système retrouve son état d'origine (état neuf) et le taux de non-conformité redevient égal à 0. Nous supposons que les actions de maintenance permettent de garantir zéro défaillance entre deux actions consécutives.

Un stock tampon de  $h$  unités est construit pour diminuer le risque de non satisfaction de la demande pendant que l'unité de production est à l'arrêt pour subir les actions de maintenance (préventive ou de révision).

D'autres hypothèses sont présentées comme suit :

- La fonction de distribution cumulative associée aux durées inter-défaillances de l'unité de production est inconnue.
- Les fonctions de densité de probabilités associées aux durées de maintenance préventive et de révision sont connues.
- Les demandes qui ne peuvent pas être satisfaites sont perdues.
- La quantité de stock non utilisée est remise à zéro à la fin de chaque cycle de production.
- Les articles produits sont de nature non périssable avec le temps.
- Les articles non-conformes ne sont pas réinsérés dans le processus de production.
- Tous les coûts liés à la maintenance, la production et la qualité sont des coûts moyens connus et constants.
- Toutes les ressources nécessaires pour l'accomplissement des actions de maintenance sont toujours disponibles.
- Le temps d'inspection est négligeable
- La première inspection est faite une fois que le stock tampon est construit.

Les notations suivantes seront utilisées.

- $C_s$  : Coût unitaire de stockage.
- $C_i$  : Coût d'un contrôle de la qualité (inspection). Ce coût est relatif à l'acquisition et à la maintenance du matériel d'inspection automatisée.
- $C_p$  : Coût unitaire de pénurie.
- $C_{nc}$  : Coût d'une unité non-conforme.
- $h$  : Taille du stock tampon (variable de décision).
- $\delta_s$  : Coût total moyen de stockage.
- $\delta_{nc}$  : Coût total moyen de non-conformité.
- $\delta_q$  : Coût total moyen de qualité.
- $M_p$  : Coût d'une action de maintenance préventive.
- $M_c$  : Coût de révision ( $M_c \gg M_p$ ).
- $C_m$  : Coût total de maintenance
- $d$  : La demande (unités/unité de temps)
- $l_m$  : Niveau seuil du taux de non-conformité (variable de décision).
- $g_p(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive

- $g_c(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision
- $x$  : période d'inspection des unités produites (variable de décision)
- $\mu_c$  : durée moyenne de révision
- $\mu_p$  : durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
- $U_{\max}$  : Taux de production maximal.
- $\prod (h, l_m, x)$  : Coût total moyen par unité de temps.
- $p(l(t))$  : Fonction de densité de probabilité associée au taux de rejet  $l(t)$ .  
Nous supposons que cette fonction est continue, non stationnaire, et bornée par 0 au minimum et par 1 au maximum.  $l \in [0,1]$  et  $t \in [0, \infty[$ .
- $P(l(t))$  : Fonction de distribution de probabilités associée au taux de rejet  $l(t)$ .

$P_{ti}(l)$  représente la probabilité qu'à l'instant d'inspection  $t_i$ , le taux de non-conformité soit inférieur ou égal à  $l$ .

Enfin, on notera  $t_m$  l'instant de la  $m^{\text{ème}}$  inspection à laquelle le taux de rejet est trouvé supérieur à la valeur seuil  $l_m$

Etant donné que les actions de contrôle de la qualité sont entreprises aux instants  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$ , et que le taux de détérioration du système est croissant,  $P_{ti}(l)$  devrait satisfaire la relation suivante pour un taux de rejet  $l$  donné:

$$P_{t_1}(l) > P_{t_2}(l) > P_{t_3}(l) > \dots > P_{t_m}(l) \tag{IV.1}$$

D'autres notations seront introduites dans le modèle mathématique présenté dans la prochaine section.

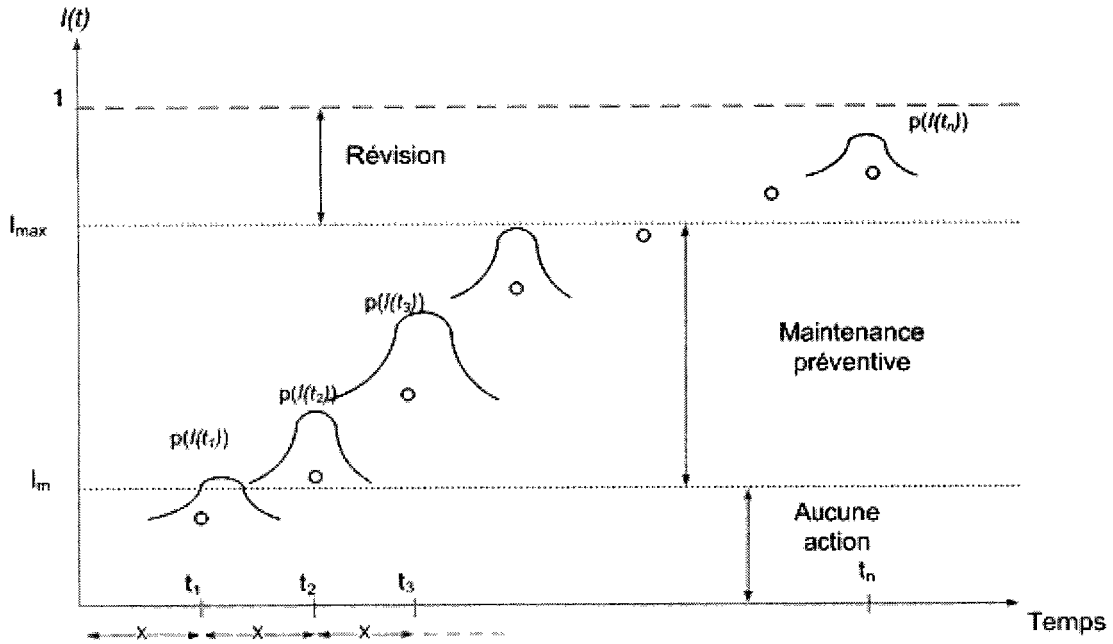


Figure IV. 1 Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des unités non-conformes.

## IV.2 Développement du modèle mathématique

Notre objectif est de déterminer simultanément le niveau optimal du seuil de non-conformité  $I_m^*$ , la taille optimale du stock tampon  $h^*$ , et la période optimale d'inspection  $x^*$  qui minimisent le coût total moyen par unité de temps. L'analyse suivante permettra de retrouver l'expression de ce coût, qui correspond à la somme des coûts de maintenance, d'inventaire, et de qualité. Ce coût sera ensuite divisé par la durée moyenne du cycle de production qui correspond au temps moyen entre deux actions de maintenance consécutives.

Pour une période de cycle d'inventaire  $T_K$ , deux scénarios sont possibles selon que la pénurie a lieu ou non. La figure suivante décrit l'évolution du stock tampon 'S(t)' prenant en compte les deux scénarios.

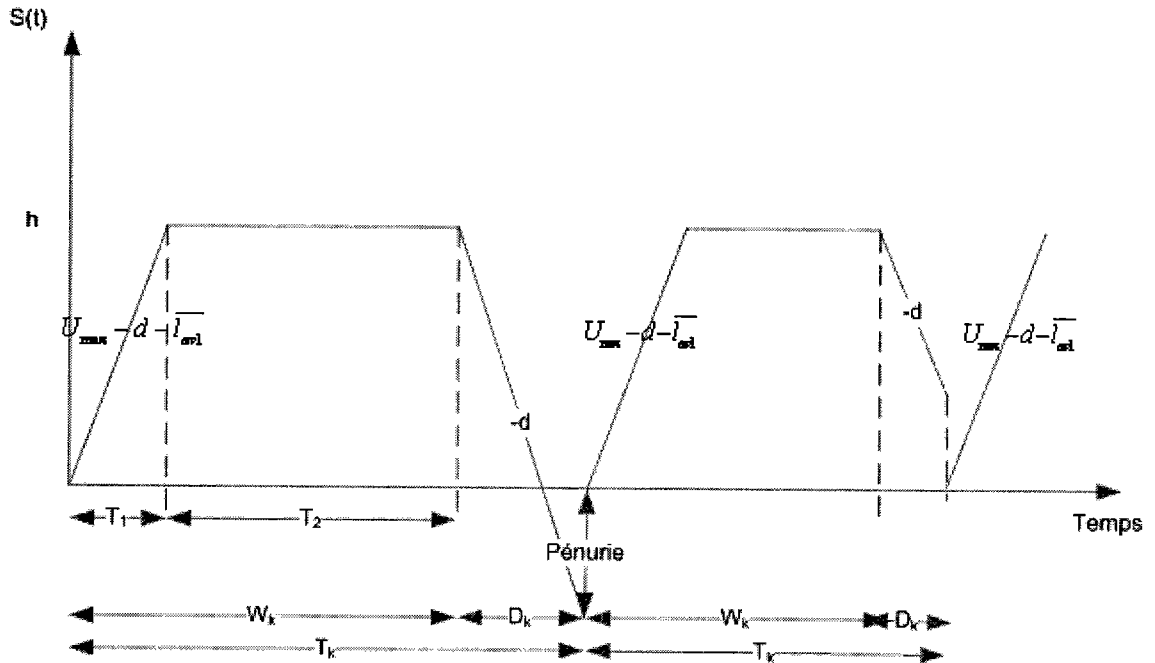


Figure IV. 2 Evolution du niveau du stock tampon.

$T_1$  est le temps nécessaire pour construire un stock tampon de taille  $h$  et durant lequel la machine produit à un taux  $U_{max}$ . La première inspection des unités produites est faite à cet instant.

- $T_2$  est le temps durant lequel la machine produit pour satisfaire la demande.
- $W_k$  est la période durant laquelle l'unité de production est en fonctionnement dans un cycle d'inventaire  $T_k$ .
- $D_k$  est le temps d'interruption de service de l'unité de production pour cause de maintenance (préventive ou révision).
- $\overline{l_{avl}}$  est le taux moyen des unités non-conformes par unité de temps durant la période  $T_1$ , qui est équivalent au taux moyen de production des unités non-conformes durant la période  $T_1$ . Etant donné que l'on ne mesure pas le taux de non-conformité avant l'instant  $t_1$  à la fin de la période  $T_1$ , nous approximations ce taux par sa valeur moyenne à la fin de cette période c'est-à-dire par la moyenne de la fonction de distribution  $P(l(t))$  à l'instant  $t_1$ :  $E[P(l(t_1))]$ .

$$\text{Ainsi, } \overline{l_{avl}} = U_{max} \cdot E[P(l(t_1))] \quad (IV.2)$$

Soit  $\overline{l_{av2}}$  le taux moyen des unités non-conformes par unité de temps durant la période  $T_2$ . Ce qui est équivalent au taux moyen de production des unités non-conformes durant la période  $T_2$ .  $\overline{l_{av2}}$  est égal au produit du taux de production de la machine durant la période  $T_2$  par le pourcentage moyen de rejet durant cette même période. Or, pour maintenir le niveau du stock à  $h$  durant la période  $T_2$  (figure IV.2), la machine doit produire à un taux égal à  $d + \overline{l_{av2}}$

Ainsi,

$$\overline{l_{av2}} = (d + \overline{l_{av2}}) \cdot \frac{\sum_{i=1}^m E[P(l(t_i))]}{m} \quad (IV.3)$$

Ce qui donne après quelques manipulations:

$$\overline{l_{av2}} = \frac{d \cdot \frac{\sum_{i=1}^m E[P(l(t_i))]}{m}}{\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m E[P(l(t_i))]}{m}\right)} \quad (IV.4)$$

Formellement, le taux de production s'écrit comme suit:

$$\text{Taux de production} = \begin{cases} U_{\max} & \text{pour } S(t) < h \\ d + \overline{l_{av2}} = \frac{d}{1 - \frac{\sum_{i=1}^m E[P(l(t_i))]}{m}} & \text{pour } S(t) = h \end{cases}$$

### IV.2.1 Le temps moyen de production entre deux actions de maintenance consécutives $E[W_k]$

Selon la stratégie proposée, nous pouvons constater que la fin de la période  $W_k$  coïncide avec l'inspection à laquelle le taux de rejet est trouvé supérieur à la valeur seuil  $l_m$ . Nous considérerons, qu'en moyenne, la période  $E[W_k]$  correspond au premier instant d'inspection  $t_i$  pour lequel la probabilité de trouver un taux de rejet supérieur à  $l_m$ , dépasse 50%.

Ceci est exprimé comme suit :

$$\text{Prob} \{l(t_i) > l_m\} = 1 - P_{i_i}(l_m) > 50\% \quad (\text{IV.5})$$

Donc pour une valeur seuil du taux de rebut  $l_m$ , l'instant  $t_m$  ( $t_m = E[W_k]$ ) peut être déterminé en trouvant le premier instant d'inspection qui satisfait l'équation (IV.5).

Nous désignons aussi par  $P_{PM}$  la probabilité que le cycle de production finisse par une action de maintenance préventive et  $P_{OV}$  la probabilité que le cycle de production finisse par une action de révision.

$$P_{PM} = [P_{t_m}(l_{\max}) - P_{t_m}(l_m)] \quad (\text{IV.6})$$

$$P_{OV} = [1 - P_{t_m}(l_{\max})] \quad (\text{IV.7})$$

## IV.2.2 Le nombre moyen d'inspections par cycle

Comme montré dans la figure IV.2, le temps d'opération ( $W_k$ ) est divisé en deux périodes  $T_1$  et  $T_2$ .

$$E[T_1] = \frac{h}{U_{\max} - d - l_{av1}} \quad (\text{IV.8})$$

$$E[T_2] = E[W_k] - E[T_1] \quad (\text{IV.9})$$

Soit  $I$  une variable aléatoire associée au nombre d'inspections des unités produites durant un cycle d'opération. Puisque les inspections sont entreprises à tous les  $x$  unités de temps sur la période  $T_2$ , le nombre moyen d'inspections,  $E[I]$ , est donné par :

$$E[I] = \frac{E[T_2]}{x} \quad (\text{IV.10})$$

Dans ce qui suit, nous développons les expressions dont nous avons besoin pour évaluer le coût total moyen par unité de temps qui inclut les coûts d'inventaire, de maintenance et de qualité.

## IV.2.3 Le coût moyen d'inventaire

Pour calculer le coût moyen d'inventaire, nous devons prendre en compte les deux scénarios (cas avec pénurie, et cas sans pénurie)

Le premier cas (sans pénurie) est celui où la période  $D_k$  d'interruption de service, ne dépasse pas la période de consommation du stock tampon. Dans cette situation, le coût d'inventaire moyen  $\Gamma_{NL}$  est donné par :

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d}{2} + \frac{(D_k.d)^2}{2(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \right] \right] \quad (IV.11)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1}) + D_k^2.d^2}{2.(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \right] \right] \quad (IV.12)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.U_{\max} - d^2.D_k^2 - D_k^2.d.\bar{l}_{av1} + D_k^2.d^2}{2.(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \right] \right] \quad (IV.13)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s \left[ h.(W_k + D_k) - \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - \bar{l}_{av1})}{2.(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \right] \right] \quad (IV.14)$$

$$\Gamma_{NL} = C_s h.(W_k + D_k) - C_s \cdot \left[ \frac{D_k^2.d.(U_{\max} - \bar{l}_{av1})}{2.(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \right] \quad (IV.15)$$

Pour un cycle de production avec pénurie, le coût d'inventaire moyen  $\Gamma_{wL}$  est exprimé en faisant la somme du coût de stockage et celui des pénuries dues à la pénurie :

$$\Gamma_{wL} = C_s \left[ \frac{h^2}{2d} + \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} + h \cdot \left( W_k - \frac{h}{U_{\max} - d - \bar{l}_{av1}} \right) \right] + C_p \cdot d \cdot \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (IV.16)$$

$$\Gamma_{wL} = C_s \left[ \frac{h^2}{2d} + \frac{h^2}{2(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} + h.W_k - \frac{h^2}{U_{\max} - d - \bar{l}_{av1}} \right] + C_p \cdot d \cdot \left( D_k - \frac{h}{d} \right) \quad (IV.17)$$

$$\Gamma_{wL} = C_s \cdot h^2 \left[ \frac{1}{2d} + \frac{1}{2(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} - \frac{1}{U_{\max} - d - \bar{l}_{av1}} \right] + (C_s W_k - C_p) \cdot h + C_p \cdot d \cdot D_k \quad (IV.18)$$



$$\Gamma_{wL} = C_s \cdot h^2 \left[ \frac{U_{\max} - 2d - \overline{l_{av1}}}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} \right] + (C_s W_k - C_p) \cdot h + C_p \cdot d \cdot D_k \quad (IV.19)$$

Le coût total moyen d'inventaire tenant compte des deux scénarios est donné par:

$$\Gamma = \Gamma_{NL} \cdot (1 - R_D(h/d)) + \Gamma_{wL} \cdot R_D(h/d) \quad (IV.20)$$

$$\text{avec } R_D(h/d) = \int_{h/d}^{+\infty} g_D(u) \cdot du \quad (IV.21)$$

$$\text{et } g_D(x) = g_c(x) \cdot P_{OV} + g_p(x) \cdot P_{PM} \quad (IV.22)$$

Nous pouvons donc écrire,

$$\Gamma = (1 - R_D(h/d)) \cdot \left[ C_s \cdot h \cdot (W_k + D_k) - C_s \cdot \left[ \frac{D_k^2 \cdot d \cdot (U_{\max} - \overline{l_{av1}})}{2 \cdot (U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} \right] \right] + R_D(h/d) \cdot \left[ C_s \cdot h^2 \left[ \frac{U_{\max} - 2d - \overline{l_{av1}}}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} \right] + (C_s W_k - C_p) \cdot h + C_p \cdot d \cdot D_k \right] \quad (IV.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= C_s \cdot h \cdot (W_k + D_k) - \frac{C_s \cdot D_k^2 \cdot d \cdot (U_{\max} - \overline{l_{av1}})}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} - R_D(h/d) \cdot C_s \cdot h \cdot W_k \\ &- R_D(h/d) \cdot C_s \cdot h \cdot D_k + R_D(h/d) \frac{C_s \cdot D_k^2 \cdot d \cdot (U_{\max} - \overline{l_{av1}})}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} \\ &+ R_D(h/d) \cdot C_s \cdot h^2 \frac{(U_{\max} - 2 \cdot d - \overline{l_{av1}})}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} + R_D(h/d) \cdot h \cdot C_s \cdot W_k \\ &- R_D(h/d) \cdot h \cdot C_p + C_p \cdot d \cdot D_k \cdot R_D(h/d) \end{aligned} \quad (IV.24)$$

En divisant par la durée moyenne du cycle de production, nous obtenons le coût d'inventaire moyen par unité de temps, qui est donné par l'expression suivante :

$$\delta = \frac{1}{E[T_k]} \left[ C_s \cdot E[W_k] + C_s \cdot h^2 \cdot R_D(h/d) \frac{U_{\max} - 2 \cdot d - \overline{l_{av1}}}{2 \cdot d \cdot (U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} + C_s \int_0^{h/d} xh - x^2 \frac{d \cdot (U_{\max} - \overline{l_{av1}})}{2(U_{\max} - d - \overline{l_{av1}})} g_D(x) dx + C_p \int_{h/d}^{+\infty} (x \cdot d - h) g_D(x) dx \right] \quad (IV.25)$$

avec

$$E[T_k] = E[W_k] + E[D_k] \quad (IV.26)$$

et

$$E[D_k] = \mu_p \cdot P_{PM} + \mu_c \cdot P_{OV} \quad (IV.27)$$

## IV.2.4 Le coût moyen de maintenance

Le coût total moyen de maintenance est donné par:

$$C_m = \frac{M_p \cdot P_{PM} + M_c \cdot P_{OV}}{E[T_k]} \quad (IV.28)$$

## IV.2.5 Le coût moyen de qualité

### IV.2.5.1 Coût moyen de non-conformité:

Durant  $T_1$ , le taux de production de la machine est  $U_{max}$ , et durant  $T_2$  il est remis à  $(d+I_{av2})$  pour continuer à satisfaire la demande  $d$ .

Etant donné que la première inspection est entreprise à l'instant  $T_1$ , le nombre moyen de produits non-conformes rejetés suite à cette inspection est donné par

$$Qp_1 = \overline{l_{av1}} \cdot E[T_1] \quad (IV.29)$$

Durant  $T_2$ , le nombre moyen des unités rejetées est donné par :

$$Qp_2 = \overline{l_{av2}} \cdot E[T_2] \quad (IV.30)$$

Donc, en utilisant les équations (IV.29) et (IV.30) nous obtenons l'expression suivante du coût total moyen de non-conformité par unité de temps :

$$\delta_{nc} = \frac{C_{nc}}{E[T_k]} \left[ \overline{l_{av1}} \cdot E[T_1] + \overline{l_{av2}} \cdot E[T_2] \right] \quad (IV.31)$$

### IV.2.5.2 Coût moyen de contrôle de qualité:

Durant un cycle de production, le nombre moyen de contrôle de qualité étant égal à  $E[I]$  (équation (IV.10)), le coût de contrôle de qualité moyen est donné par :

$$\delta i = C_i \cdot E[I] \quad (IV.32)$$

Donc, le coût total moyen de qualité est donné par:

$$\delta q = \delta nc + \delta i \quad (IV.33)$$

En combinant les équations (IV.25), (IV.28) et (IV.33), l'expression du coût total moyen par unité de temps est obtenue comme suit :

$$\prod(h, l_m, x) = \frac{1}{E[T_k]} \left[ \begin{aligned} & C_s \cdot E[W_k] + C_s \cdot h^2 \cdot R_D(h/d) \frac{U_{\max} - 2d - \bar{l}_{av1}}{2d \cdot (U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} \\ & + C_s \cdot R_D(h/d) \cdot \int_0^{h/d} xh - x^2 \frac{d \cdot (U_{\max} - \bar{l}_{av1})}{2(U_{\max} - d - \bar{l}_{av1})} g_D(x) dx \\ & + C_p \cdot R_D(h/d) \cdot \int_{h/d}^{\infty} (xd - h) g_D(x) dx + M_p \cdot [P(l_{\max}) - P(l_m)] + M_c \cdot [1 - P(l_{\max})] \\ & + C_{nc} [\bar{l}_{av1} \cdot E[T_1] + \bar{l}_{av2} \cdot E[T_2]] + C_i \cdot E[I] \end{aligned} \right] \quad (IV.34)$$

Cette équation exprime le coût total moyen par unité de temps en fonction des paramètres d'entrée et des trois variables de décision  $h$ ,  $l_m$  et  $x$ . Une procédure numérique a été développée pour calculer ce coût pour n'importe quelles valeurs des paramètres d'entrée, en vue de générer les valeurs optimales  $h^*$ ,  $l_m^*$  et  $x^*$ . Un exemple numérique est présenté dans la section suivante.

### IV.3 Exemple numérique

Pour illustrer notre approche, nous considérons une situation avec les paramètres d'entrée suivants qui ont été arbitrairement choisis

- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision : loi Normale de moyenne 20 et d'écart type 2 (unités de temps)
- Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive: loi Normale de moyenne 4 et d'écart type 0.5 (unités de temps)
- $C_s = 10$  unités monétaires/unité/unité de temps,  $C_p = 450$  unités monétaires/unité manquant,  $M_p = 500$  unités monétaires,  $M_c = 4000$  unités monétaires,  $l_{\max} = 0.95$
- $C_{nc} = 30$  unités monétaires /unité,  $C_i = 5$  unités monétaires,  $U_{\max} = 100$  unités/unité de temps,  $d = 20$  unités/ unité de temps.

- $x_{\max}=1$  unité de temps,  $h_{\max}=200$  unités
- $\Delta x= 0.01$  unité de temps ;  $\Delta l_m=0.05$  ;  $\Delta h= 2$  unités.
- $h_{\min}= 0$  unité (pas de stock tampon)

$P(l(t))$  a été prise pour cet exemple comme une distribution Bêta non stationnaire donnée par:

$$F(l|p(t),q(t)) = \frac{\Gamma(p(t)+q(t))}{\Gamma(p(t)).\Gamma(q(t))} \int_0^l u^{p(t)-1} \cdot (1-u)^{q(t)-1} du$$

avec  $l \in [0,1]$ ,  $t \in [0, \infty[$  et  $\Gamma$  étant la fonction Gamma.

$p(t) = t$  et  $q(t) = 2$ . Ces expressions de  $p(t)$  et de  $q(t)$  ont été choisies de façon à satisfaire la relation (IV.1).

Plus généralement, étant données les caractéristiques de la distribution Bêta, et pour satisfaire la relation (IV.1),  $p(t)$  devrait être une fonction non décroissante et  $q(t)$  devrait être fonction non croissante

Considérant la distribution non stationnaire Bêta et en se référant à l'équation (IV.4), l'expression du taux de non-conformité moyen durant la période  $T_2$  est :

$$\overline{l_{av2}} = \frac{d \cdot \frac{\sum_{i=1}^m \frac{p(t_i)}{p(t_i)+q(t_i)}}{m}}{1 - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{p(t_i)}{p(t_i)+q(t_i)}}{m}}$$

où les  $t_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) représentent les instants d'inspection.

D'autre part, l'expression du taux de non-conformité moyen durant la période  $T_1$  est donnée par :

$$\overline{l_{av1}} = U_{\max} \cdot \frac{p(t_1)}{p(t_1)+q(t_1)}$$

Des calculs ont été effectués en utilisant une procédure numérique à trois dimensions (Figure IV.3) pour obtenir  $h^*$ ,  $l_m^*$  et  $x^*$ . Le tableau IV.1 présente les résultats obtenus.

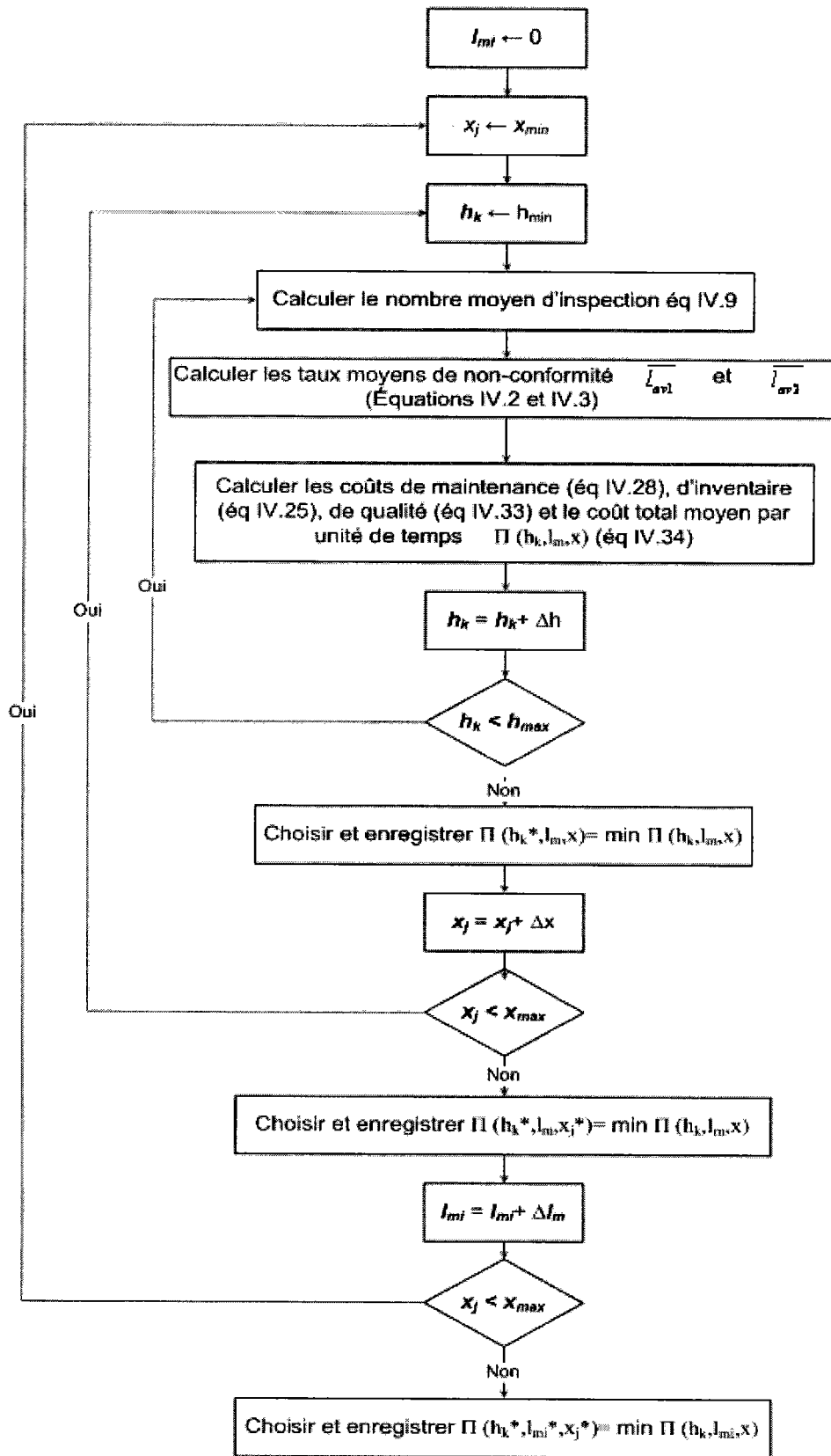


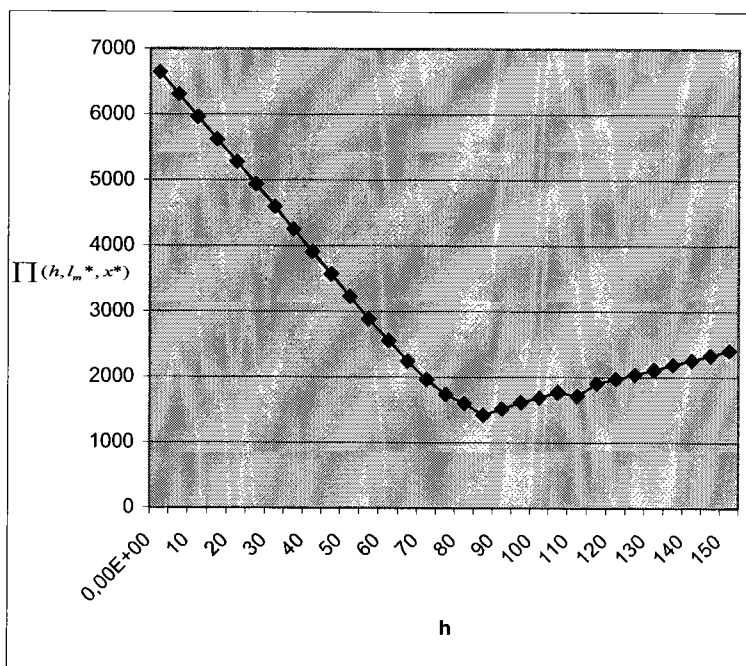
Figure IV. 3 Procédure numérique

$x$	$l_m$	$h$	E[Wk]	E[Tk]	E[I]	P <sub>PM</sub> (%)	P <sub>Ov</sub> (%)	$\Pi(h, l_m, x)$
0,5	0,05	110	0,5	5,34	1	66,7	1,09	3006,68
0,5	0,10	110	0,5	4,82	1	53,9	1,09	2947,33
0,5	0,15	110	1	4,45	2	44,7	1,13	2541,78
0,45	0,20	85	1	3,81	2	62,5	1,68	1743,54
<b>0,33</b>	<b>0,25</b>	<b>85</b>	<b>1</b>	<b>3,49</b>	<b>3</b>	<b>55,2</b>	<b>1,68</b>	<b>1422,30</b>
0,25	0,30	85	1,5	3,65	6	56,9	1,89	1532,21
0,26	0,35	85	1,5	4,2	6	51,2	2,7	1782,71
0,4	0,50	130	2	4,49	8	47,1	4,2	1911,41
0,40	0,60	130	3	5,9	8	45,2	8,2	3446,73
0,16	0,70	110	4,5	10,4	13	8,2	50,4	5394,09
0,15	0,85	110	10	16,86	67	2,3	55,3	5435,66

Tableau IV. 1 Résultats de la procédure numérique

Ainsi, nous pouvons conclure que la stratégie optimale consiste à faire un contrôle de la qualité à chaque  $x^* = 0.33$  unité de temps et à n'entreprendre les actions de maintenance préventive que lorsque le taux de rejet est trouvé supérieur à  $l_m^* = 25\%$ . Il serait aussi nécessaire de construire un stock tampon de  $h^* = 85$  unités pour continuer à satisfaire la demande quand la production est arrêtée pour entreprendre les actions de maintenance. En procédant ainsi, il en coûterait en moyenne 931,71 unités monétaires/ unité de temps.

La figure suivante décrit l'évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de la taille du stock tampon  $h$ , pour un taux de rejet  $l_m = l_m^* = 25\%$ , et une période d'inspection  $x = x^* = 0.33$  unités de temps.



**Figure IV. 4** Evolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de h

Nous pouvons facilement conclure d'après le tableau IV.1 qu'en adoptant la stratégie optimale obtenue, la probabilité que le cycle finisse par une action de révision  $P_{OV}$  est de 1,68%, et la probabilité que le cycle finisse par une action préventive  $P_{pm}$  est de 55,2%. Ceci conforte bien l'intérêt du recours à une forme de maintenance conditionnelle par rapport à une maintenance systématique.

Plus généralement, il apparaît clairement dans le même tableau que pour des petites valeurs du seuil  $l_m$ ,  $P_{pm} > P_{OV}$  ce qui était logiquement prévisible d'après la définition même de la stratégie (figure IV.1). On remarque également qu'au fur et à mesure qu'on devient moins exigeant en termes de qualité ( $l_m$  augmente) la probabilité de faire du préventif diminue

Le tableau IV.2 représente l'évolution des coûts moyens de maintenance et de non-conformité, en fonction du seuil  $l_m$  pour des valeurs de  $h$  et de  $x$  égales aux valeurs optimales ( $h=h^*=85, x=x^*=0.33$ )

$l_m$	Coût de maintenance	Coût de non-conformité
5%	143,83	3,51
10%	142,81	3,89
15%	140,38	4,54
20%	99,24	6,91
25%	99,14	8,01
30%	98,4	9,89
35%	95,15	10,54
40%	90,85	13,51
45%	87,16	20,65
50%	85,75	53,49
55%	83,21	83,13
60%	79,85	105,70
65%	76,43	200,54

**Tableau IV. 2** Evolution des coûts de maintenance et de non-conformité

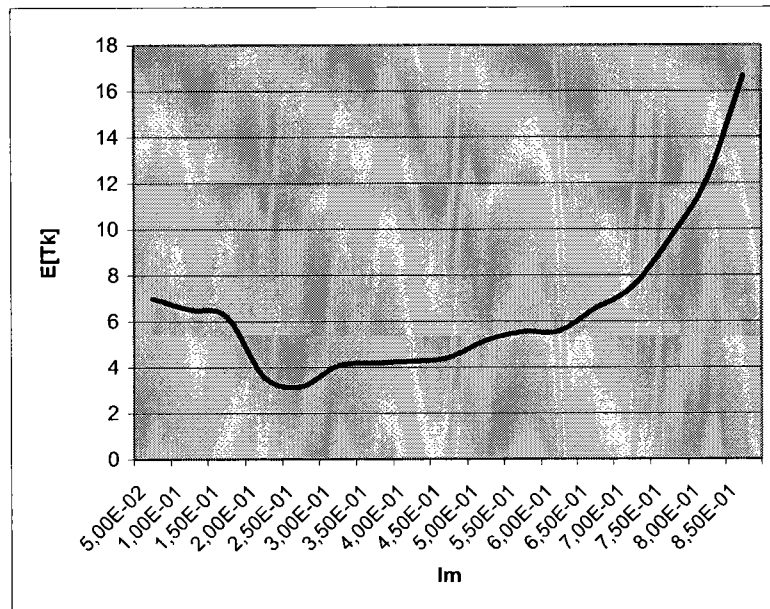
Il est intéressant de noter que le coût de maintenance diminue lorsque le seuil  $l_m$  augmente. Cette diminution est due au fait que le nombre d'actions de maintenance préventive diminue. En effet, comme montré dans la figure IV.1, lorsque  $l_m$  augmente, la zone 'Aucune action' est de plus en plus large, ce qui veut dire que la machine demeure en fonctionnement plus longtemps. Par ailleurs, le coût de non-conformité augmente lorsque  $l_m$  augmente. Ceci était logiquement prévisible car plus le seuil  $l_m$  est grand, plus le nombre d'actions de maintenance diminue et moins on est sévère en terme de qualité.

La figure IV.5 décrit l'évolution de la durée moyenne du cycle d'inventaire en fonction du seuil du taux de non-conformité  $l_m$  pour des valeurs de  $h$  et de  $x$  égales aux valeurs optimales ( $h=h^*=85$ ,  $x=x^*=0.33$ ). Force est de constater que pour des petites valeurs du seuil  $l_m$ , la durée moyenne du cycle est assez élevée. Ceci est dû au fait qu'avec des faibles seuils, nous sommes plus exigeants en terme de qualité, et par conséquent la machine est souvent arrêtée pour subir les actions de maintenance préventive.

En suivant la même logique, la durée moyenne du cycle diminue lorsque le seuil  $l_m$  augmente jusqu'à une certaine valeur autour de 30%. Cela s'explique par le fait que la machine est de



moins en moins stoppée pour subir les actions de maintenance préventive. A partir de cette valeur, la durée moyenne du cycle commence à croître parce que la probabilité d'arrêter la machine pour subir les actions de révision (dont les durées sont plus importantes que celles des actions de maintenance préventive) devient relativement grande (voir le tableau IV.1).



**Figure IV. 5** Evolution de la durée moyenne du cycle d'inventaire en fonction de  $l_m$

Nous nous proposons dans la suite d'analyser l'effet des paramètres d'entrée suivants:  $C_s$  (le coût unitaire de stockage,  $C_p$  (le coût unitaire de pénurie) et  $C_i$  (le coût d'inspection) évoluant à partir de leurs valeurs nominales. On fera varier un seul paramètre à la fois.

### IV.3.1 La variation du coût unitaire de stockage ( $C_s$ )

Nous nous penchons sur l'effet de  $C_s$  sur la politique optimale. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau IV.3

$C_s$	$h^*$	$x^*$	$l_m^*$	$\Pi(h, l_m, x)$
5	85	0,33	0,25	1331,55
10 (valeur nominale)	85	0,33	0,25	1422,30
50	80	0,33	0,25	1871,17
100	75	0,33	0,25	1992,43
150	70	0,25	0,20	2100,32
200	65	0,25	0,20	2472,14
250	65	0,18	0,15	2623,25
350	65	0,18	0,15	2841,06

**Tableau IV. 3** Evolution de la politique optimale en fonction du coût unitaire de stockage

Comme on peut le voir, le coût optimal augmente lorsque le coût unitaire moyen de stockage augmente.

Aussi, au fur et à mesure que  $C_s$  augmente, la taille optimale du stock tampon  $h^*$  diminue. Cependant,  $h^*$  se stabilise à 65 unités. Ceci est dû essentiellement au coût de pénurie qui est relativement élevé ( $C_p = 450$  unités monétaires par unité manquante). Avec un coût de pénurie aussi élevé, il s'avère être toujours utile d'avoir un stock tampon sous la main même avec un coût de stockage assez élevé.

Notons aussi que  $l_m^*$  diminue au fur et à mesure que le coût unitaire de stockage augmente. Comme il revient de plus en plus cher de stocker, le seuil de qualité  $l_m$  diminue afin d'arrêter la machine le plus souvent pour entreprendre les actions de maintenance préventive. C'est-à-dire qu'on a tendance à arrêter la machine le plus souvent pour diminuer la durée moyenne du cycle et par conséquent la durée moyenne de stockage (même si le coût de pénurie est relativement grand). Cependant, le seuil se stabilise autour de la valeur de 15% parce que, comme nous l'avons indiqué précédemment, si la machine est arrêtée trop souvent, la probabilité de tomber en pénurie augmente et le coût engendré par cette pénurie est relativement élevé.

D'autre part, nous remarquons que les périodes de contrôle de la qualité sont de plus en plus courtes au fur et à mesure que le coût unitaire de stockage augmente. Ceci s'explique par le fait que puisque le seuil de qualité  $l_m$  est de plus en plus petit (pour arrêter plus souvent la machine), on procède à de plus en plus d'inspections pour mieux voir l'évolution du taux de rebut (pour déceler le plus vite possible le dépassement du seuil).

### IV.3.2 La variation du coût unitaire de pénurie ( $C_p$ )

Nous nous penchons sur l'effet de  $C_p$  sur la politique optimale. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau IV.4

$C_p$	$h^*$	$x^*$	$l_m^*$	$\Pi(h, l_m, x)$
10	65	0,15	0,05	174,67
50	65	0,15	0,05	305,65
100	80	0,18	0,15	429,27
150	80	0,25	0,20	729,78
200	80	0,25	0,20	907,87
450 (valeur nominale)	85	0,33	0,25	1422,30
550	90	0,33	0,30	1923,48

**Tableau IV. 4** Evolution de la politique optimale en fonction du coût unitaire de pénurie

Les résultats obtenus indiquent que lorsque le coût unitaire de pénurie augmente, le coût optimal augmente. Il était également prévisible de constater que la taille optimale du stock tampon  $h^*$  augmente lorsque le coût unitaire de pénurie devient de plus en plus élevé.

Ces résultats confirment par ailleurs le fait que lorsque le coût de pénurie devient de plus en plus élevé, il est préférable d'arrêter moins souvent la machine pour réduire la probabilité de tomber en pénurie.

Par conséquent, si  $l_m$  croît, les périodes d'inspection augmentent aussi ( $x$  augmente) parce qu'on est moins exigeant en terme de qualité.

### IV.3.3 La variation du coût d'inspection ( $C_i$ )

Nous nous penchons sur l'effet de  $C_i$  sur la politique optimale. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau IV.5

$C_i$	$h^*$	$x^*$	$l_m^*$	$\Pi(h^*, l_m^*, x^*)$
2	85	0,33	0,25	1419,17
5 (valeur nominale)	85	0,33	0,25	1422,30
20	85	0,33	0,25	1500,57
50	85	0,33	0,25	1670,29
150	85	0,4	0,33	1835,89
350	85	0,45	0,33	2004,52
550	85	0,5	0,42	2442,72

**Tableau IV. 5** Evolution de la politique optimale en fonction du coût d'inspection

Il est clair à partir de ce tableau que lorsque le coût d'un contrôle de la qualité augmente, le coût optimal augmente aussi. Nous pouvons aussi remarquer que les intervalles d'inspection sont de plus en plus grands ce qui était logiquement prévisible. Par conséquent, comme nous l'avions souligné à partir des tableaux IV.3 et IV.4, lorsque les intervalles d'inspection augmentent le taux de non-conformité augmente aussi (moins d'exigence en termes de qualité)

Nous constatons enfin que la taille optimale du stock tampon ne varie pas en fonction du coût d'inspection. Cela est dû à l'hypothèse de travail qui stipulait dans notre modèle que les durées d'inspection sont négligeables. Si ce n'était pas le cas, les inspections auraient eu une influence directe sur les coûts de stockage et de pénurie, et par conséquent une influence directe sur la taille optimale du stock tampon.

## IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une politique conjointe de maintenance et de production basée sur le contrôle de qualité, pour une unité de production imparfaite pouvant produire des unités non-conformes selon son état de dégradation. Les unités produites sont soumises périodiquement à un contrôle de qualité automatisé qui permet de déterminer le pourcentage de produits non-conformes.

Trois variables de décision caractérisent la stratégie proposée : le taux,  $l_m$ , des unités non-conformes à partir duquel des actions de maintenance devraient être entreprises, la période d'inspection  $x$  selon laquelle le taux de non-conformité doit être mesuré, et la taille  $h$ , du stock tampon à construire pour pallier aux perturbations causées par les arrêts de la production pour effectuer les actions de maintenance qui sont de durées aléatoires.

Un modèle mathématique a été développé pour déterminer la stratégie optimale  $(h^*, l_m^*, x^*)$  qui minimise le coût total moyen par unité de temps qui inclut le coût d'inventaire, le coût de maintenance et le coût de qualité.

Le modèle proposé présente toutefois certaines limites relatives à quelques hypothèses de travail qui pourraient sembler restrictives dans une certaine mesure. Citons par exemple le fait que les actions de maintenance sont toujours parfaites. Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de traiter le problème dans une perspective plus large en se basant essentiellement sur une approche par simulation. Cette approche nous permettra d'aller au-delà de certaines hypothèses, et surtout celle qui suppose qu'après chaque action de maintenance, le système retrouve son état initial (comme neuf).



## CHAPITRE V

### **S**tratégie conjointe de contrôle de la qualité et de maintenance préventive imparfaite

Dans les chapitres précédents nous avons proposé des stratégies conjointes intégrant la maintenance, la qualité et la production. Nous nous sommes appuyés sur des approches analytiques combinées à la simulation dans certaines situations, pour modéliser ces stratégies sous certaines hypothèses de travail quelques fois restrictives (maintenance parfaite, arrêt de la machine uniquement pour maintenance, etc...). Afin de pouvoir relaxer certaines de ces hypothèses, l'une des approches les plus utilisées dans la littérature est l'utilisation de la simulation et du design expérimental [Kenné et Gharbi (2001), Gharbi et Kenné (2000), Rezg et al (2005)].

Nous proposons dans ce chapitre (Radhoui et al. 2008 b) d'utiliser la simulation et les plans d'expérience pour étudier une nouvelle stratégie d'exploitation d'un système de production intégrant les aspects qualité, maintenance et production, en considérant, contrairement aux modèles précédents,

un contexte de maintenance imparfaite. Nous examinons un système de production composé d'une seule machine ayant un taux de panne croissant. La fonction de distribution associée aux durées de vie de l'équipement est inconnue. Chaque lot produit par la machine est entièrement soumis à un contrôle de qualité automatisé pour déterminer le nombre d'unités non-conformes produites. Selon le pourcentage d'unités non conformes trouvées, on décide d'entreprendre ou pas des actions de maintenance. Nous supposons que les non-conformités sont principalement causées par la dégradation de condition de la machine.

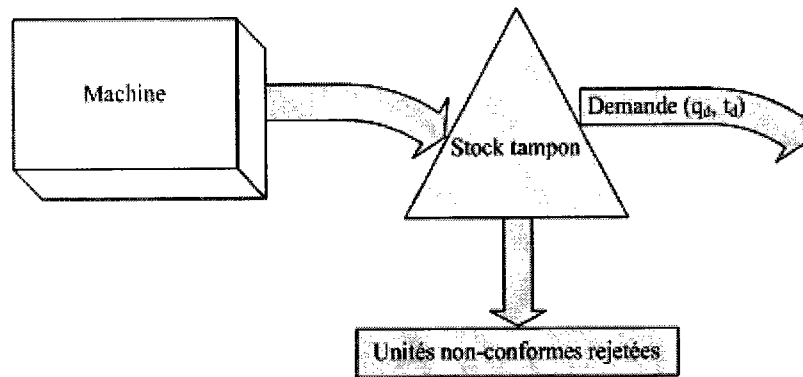
La production doit être arrêtée pour que la machine soit soumise aux actions de maintenance. Pour pallier à ces perturbations, un stock tampon est créé. L'objectif principal est de déterminer les valeurs optimales des deux variables de décision qui sont : le taux d'unités non conformes sur la base duquel des actions de maintenance préventive doivent être exécutées, et la taille du stock tampon. Les valeurs optimales sont celles qui réduisent au minimum le coût total moyen par unité de temps, incluant les coûts liés au stockage, à la pénurie, à la maintenance et à la qualité. Une approche de modélisation basée sur la simulation et les plans d'expérience sera adoptée.

Dans un premier temps, nous présenterons la stratégie proposée. Dans la deuxième section, le modèle de simulation est décrit et un exemple numérique est traité pour illustrer la démarche d'optimisation adoptée basée sur les plans d'expérience et l'analyse de régression.

### **V.I Définition de la stratégie**

Nous considérons une unité de production soumise à un processus de détérioration avec un taux de panne croissant et pouvant produire des articles non-conformes à partir d'un certain niveau de dégradation. Cette unité doit alimenter une autre unité en aval avec un flux constant  $q_d$ , à chaque période de temps  $t_d$  (voir figure V.1).





**Figure V. 1** Système de production considéré

Chaque lot produit est systématiquement soumis à un contrôle de qualité automatisé de coût et de durée négligeables. Si le taux d'unités non-conformes  $I$  est trouvé plus haut qu'un certain seuil  $I_m$  et plus bas qu'une valeur maximale  $I_{max}$  ( $I_m \leq I < I_{max}$ ), alors la machine est arrêtée pour subir une action de maintenance préventive. Si  $I$  est trouvé plus élevé que  $I_{max}$ , nous considérons que la machine est dans un état de quasi-défaillance et par conséquent une maintenance curative majeure (révision) est entreprise. Finalement, si  $I$  est trouvé entre un niveau  $I^0$  minimal et  $I_m$ , aucune action n'est entreprise. La figure V.2 présente l'allure générale de l'évolution du taux de rejet  $I$  avec le temps ainsi que les actions de maintenance à entreprendre selon cette évolution.

Nous considérons que le taux d'unités non-conformes (taux de rejet) augmente aléatoirement selon l'expression suivante :

$$I(t+\Delta t) = I(t).(1 + x_t) \quad (V.1)$$

Où  $x_t$  est une variable aléatoire entre 0 et 1

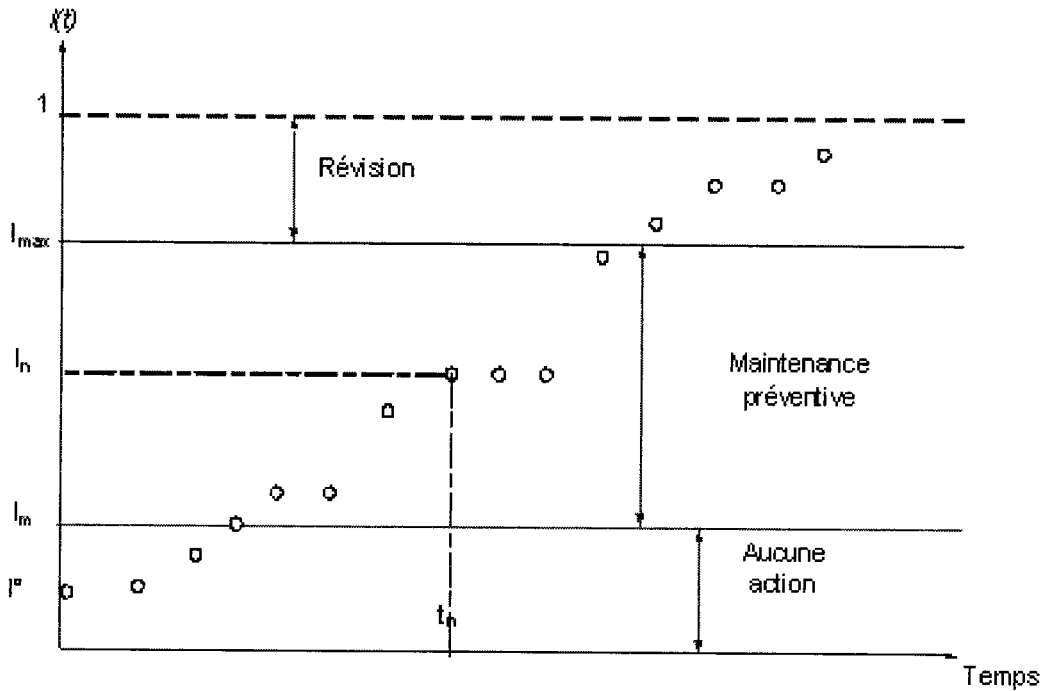


Figure V. 2 Actions à entreprendre selon l'évolution du taux des unités non-conformes.

Pour pallier aux perturbations causées par les actions de maintenance dont les durées sont aléatoires, un stock tampon de taille  $h$  est créé pour assurer la continuité de satisfaction de la demande. On peut tomber en pénurie si jamais la durée d'une action de maintenance dépasse la durée de consommation du stock tampon  $h$ . Le stock tampon est renouvelé à chaque fois qu'il est totalement consommé.

Après une révision, la machine retourne à son état initial (comme neuve), tandis qu'après une action de maintenance préventive, la machine se retrouve dans un état aléatoire qui est entre son état juste avant le début de l'action préventive et son état initial (comme neuve).

Les actions de maintenance préventive ont une durée aléatoire  $y_{PM}$ . Ces actions améliorent l'état de la machine faisant baisser le taux des d'unités non-conformes de  $\Delta^{PM}$ . Pour un contrôle ayant lieu à l'instant  $t$  et pour  $l_m \leq l(t) < l_{max}$ , nous avons :

$$l(t + y_{PM}) = l(t) - \Delta^{PM} \tag{V.2}$$

Avec

$$\begin{cases} \Delta_{max}^{PM} = l(t) - l^0 \\ \Delta_{min}^{PM} = 0 \end{cases}$$

Cette réduction du taux d'articles rejetés après une action de maintenance préventive varie entre 0 (aucune réduction) et  $l(t) - l^0$  (la réduction vers l'état initial : état neuf).

L'objectif principal de ce travail est de déterminer simultanément le seuil optimal du taux de non-conformité  $l_m^*$  sur la base duquel des actions de maintenance préventive seront entreprises, et la taille optimale  $h^*$  du stock tampon à construire pour diminuer le risque de pénurie durant les arrêts de la production pour maintenance.

La section suivante spécifie les hypothèses de travail et présente le modèle de simulation développé pour la stratégie proposée.

### V.II Modèle de simulation

Un modèle de simulation a été développé pour permettre de reproduire et d'étudier le comportement du système pour n'importe quelles combinaisons des paramètres d'entrée, et par suite permettre la détermination de la politique optimale  $(l_m^*, h^*)$ .

Les hypothèses de travail et les notations suivantes sont considérées pour le développement du modèle de simulation.

- ◆ La fonction de distribution cumulative associée aux durées de vie de l'unité de production est inconnue.
- ◆ La fonction de densité de probabilités associée aux durées de maintenance préventive est connue.
- ◆ La fonction de densité de probabilités associée aux durées de maintenance curative majeure (révision) est connue.
- ◆ Les demandes qui ne peuvent pas être satisfaites sont perdues.
- ◆ Les articles produits sont de nature non périssable avec le temps.
- ◆ Les articles non-conformes ne sont pas réinsérés dans le processus de production
- ◆ Tous les coûts reliés à la maintenance, la production et la qualité sont connus et constants.
- ◆ Toutes les ressources nécessaires pour l'accomplissement des actions de maintenance sont toujours disponibles.
- ◆ La taille du lot soumis au contrôle de qualité est connu et constant.

Les notations suivantes sont utilisées:

- $C_s$  : Coût unitaire de stockage.
- $C_{stock}$  : Coût total de stockage.

- $C_p$  : Coût unitaire de pénurie.
- $N_p$  : Quantité en pénurie.
- $N_s$  : Quantité en stock.
- $C_{pen}$  : Coût total de pénurie.
- $C_{nc}$  : Coût d'une unité non-conforme.
- $C_{pp}$  : Coût total des unités non-conformes rejetées.
- $M_p$  : Coût d'une action de maintenance préventive.
- $M_c$  : Coût de révision ( $M_c \gg M_p$ ).
- CT : Coût total moyen par unité de temps.
- $h$  : taille du stock tampon (variable de décision)
- $x$  : Taille du lot sujet à un contrôle de qualité
- $P_t$  : Temps de production d'un lot
- $q_d$  : Quantité demandée
- $t_d$  : Fréquence de la demande ( $q_d$  unités à tous les  $t_d$  unités de temps)
- $I_m$  : Niveau seuil du taux de non-conformité (variable de décision)
- $g_p(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de maintenance préventive ;
- $g_c(t)$  : Fonction de densité de probabilités associée aux durées des actions de révision.
- $T_{sim}$  : Temps (horizon) de simulation.

Le modèle de simulation développé est décrit dans la figure V.3. Nous l'avons programmé en langage C. Trois situations sont possibles : ' machine à l'arrêt ', ' machine en marche ' et ' machine Bloquée '. Le paragraphe suivant décrit la logique du modèle de simulation à l'occurrence de chaque événement.

### V.II.1 Première situation : la machine est arrêtée :

Deux événements sont possibles :

- Arrivée d'une demande : le programme calcule alors le coût de stockage; il détermine ensuite si la quantité en stock est plus grande que la quantité demandée. Si c'est le cas, le programme calcule la quantité restante, et si c'est le cas contraire le coût de pénurie est calculé et le stock est remis à zéro.
- Fin de l'arrêt : le modèle complète la construction du lot s'il n'est pas encore complété.

## V.II.2 Deuxième situation : la machine fonctionne :

Le programme génère un taux de rejet  $I$  selon l'équation (1) et en utilisant une loi uniforme entre 0 et 1 pour la variable  $x_i$ . Trois cas sont alors possibles :

- $I(t)$  entre  $I_{max}$  et  $I_m$  : la machine est arrêtée pour subir des actions de maintenance préventive. Le programme calcule ensuite le coût de maintenance et le coût engendré par la production d'articles non-conformes. Ensuite il génère un nouveau taux de rejet toujours selon l'équation (1).
- $I(t)$  est plus grand que  $I_{max}$  : la machine est arrêtée pour révision. Le modèle calcule le coût de maintenance et le coût engendré par la production d'articles non-conformes, il remet ensuite  $I(t)$  à  $I^0$ .
- $I(t)$  est inférieur à  $I_m$  : Deux cas sont possibles :
  - Le programme calcule le coût de stockage, il vérifie ensuite si la quantité dans le stock excède la demande. S'il en est ainsi il calcule la quantité restante, autrement, il calcule le coût de pénurie et remet le stock à zéro.
  - Un lot de taille  $x$  est produit, ensuite le programme calcule le coût de stockage et le coût engendré par la production d'articles non-conformes. Une nouvelle valeur de  $I(t)$  plus grande que la précédente est ensuite générée selon l'équation (1); Le modèle vérifie si la quantité en stock est plus grande que  $h$ , si tel est le cas la machine est bloquée. Sinon il ajoute les  $x$  unités produites à la quantité en stock.

## V.II.3 Troisième situation : machine Bloquée :

Seul un événement est possible dans cette situation : l'arrivée d'une demande. Le modèle vérifie si la quantité en stock est plus grande que la quantité demandée. Si tel est le cas, il calcule le coût de stockage ainsi que la nouvelle quantité en stock. Dans le cas contraire, il calcule le coût de pénurie.



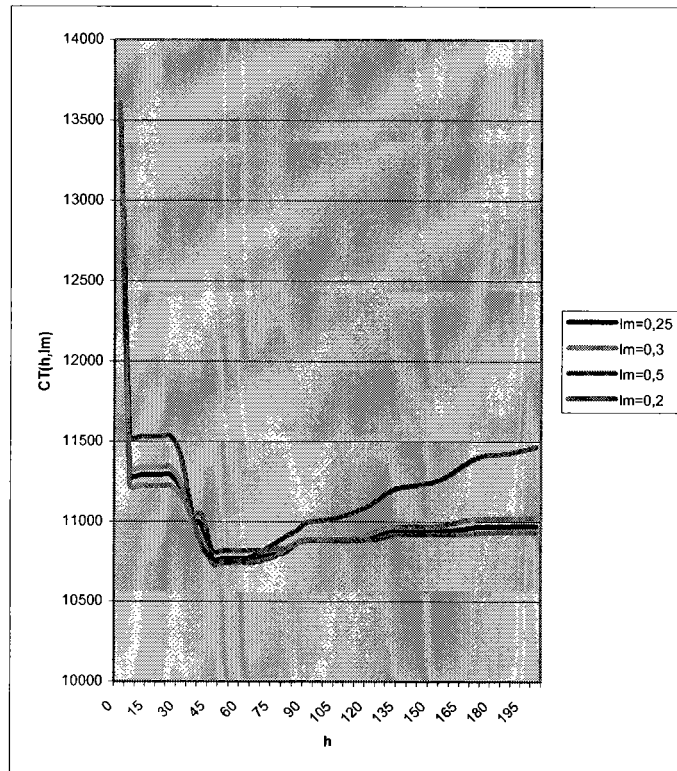
Sans perte de généralité, nous présentons dans ce qui suit un exemple d'utilisation du programme de simulation développé. Ceci dans le but de calculer le coût total moyen par unité de temps pour une configuration spécifique des paramètres d'entrée. Une approche basée sur les plans d'expérience sera ensuite développée pour établir une relation polynomiale simple exprimant le coût le coût total moyen par unité de temps comme une fonction des deux variables de décision  $l_m$  et  $h$ . Les valeurs optimales de ces variables pourront être déterminées à partir de cette fonction.

Nous avons adopté les données numériques suivantes des paramètres d'entrée qui ont été arbitrairement choisies:

- $C_s$  : 250 (unités monétaires /unité produite/unité de temps).
- $C_p$  : 450 (unités monétaires /unité en pénurie).
- $C_{nc}$  : 50 (unités monétaires / unité rejetée)
- $M_p$  : 800 (unités monétaires).
- $M_c$  : 2000 (unités monétaires).
- $x$  : 50 unités.
- $q_d$  : 30 unités.
- $t_d$  : 1 unité de temps.
- $l^0$  : 0.1
- $l_{m_{ax}}$  : 0.7
- $P_t$  : 1.5 unités de temps
- $g_p$  : distribution Normale (4,0.5)
- $g_c$  : distribution Normale (10,2)
- $T_{sim}$  : 1000000 unités de temps.

Nous avons utilisé le programme de simulation pour différentes combinaison de valeurs des variables de décision  $h$  et  $l_m$ . Des essais 'off line' nous ont permis de conclure qu'un nombre de répliques égal à 5 était suffisant pour obtenir des résultats stables.

La figure V.4 montre quelques exemples de l'évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de la taille du stock tampon  $h$ , pour des valeurs différentes du niveau du seuil de taux de non-conformité  $l_m$ .



**Figure V. 4** Évolution du coût total moyen par unité de temps en fonction de  $h$ , pour différentes valeurs de  $I_m$ .

Il est clair que les fonctions du coût total moyen par unité de temps, pour chaque valeur du seuil  $I_m$ , ont des tendances semblables montrant une valeur minimale pour une taille du stock autour de 50 unités. D'une façon générale, les résultats obtenus montrent les tendances suivantes : pour des petites valeurs de  $I_m$ , la machine est arrêtée fréquemment pour subir des actions de maintenance préventive. Cela engendre d'une part un coût élevé de maintenance, et augmente d'autre part la probabilité d'arrêt qui engendre aussi un coût de pénurie plus élevé. Pour de grandes valeurs de  $I_m$ , la machine est arrêtée assez souvent pour subir les actions de révision qui engendrent un coût relativement élevé.

Les courbes de la figure V. 4 sont assez proches l'une de l'autre sauf celle correspondant à un niveau de seuil  $I_m = 0,5$ . Ceci est essentiellement dû au fait que  $I_m$  est assez proche de la valeur seuil  $I_{max}$  (0,7) ce qui engendre un coût de maintenance relativement élevé (le nombre d'actions de révision est plus grand que le nombre d'actions de maintenance préventive). De plus, le coût engendré par les unités non-conformes rejetées est relativement élevé par rapport à celui engendré lorsque les valeurs de  $I_m$  sont relativement peu élevées.



Par ailleurs, pour des petites valeurs de  $h$  (des petites tailles de stock tampon), le coût total moyen par unité de temps est relativement élevé. Ceci est du essentiellement à l'effet prévisible du coût de pénurie. Au fur et à mesure que la taille du stock augmente, le coût de pénurie diminue et inversement ceux du stockage et de la qualité augmentent, ceci fait que les courbes passent par un minimum avant de se stabiliser autour d'une valeur asymptotique pour des grandes tailles de stock.

### V.III Optimisation utilisant les plans d'expérience et l'analyse de régression

Les plans d'expérience et l'analyse multifactorielle de la variance (ANOVA) seront utilisés dans ce qui suit pour faire varier simultanément les deux variables  $h$  et  $l_m$  et déterminer leur interaction et leur signification pour la variable dépendante qui est le coût total moyen par unité de temps. L'analyse de régression sera alors adoptée pour déduire une relation simple entre le coût et les variables significatives. La relation obtenue sera finalement utilisée pour déterminer les valeurs optimales  $h^*$  et  $l_m^*$ .

#### V.III.1 Les plans d'expérience

Nous considérons  $h$  et  $l_m$  comme les variables d'entrée pour le modèle de simulation, la variable de sortie dépendante étant le coût total moyen par unité de temps  $CT_{sim}(h, l_m)$ . Des essais préliminaires faits en mode 'off line', en fixant  $h$  et en variant  $l_m$  et vice versa nous ont permis de choisir les domaines d'intérêt pour  $h$  et  $l_m$ , pour lesquels la fonction coût admet une forme quadratique.  $h$  varie entre 40 et 60 unités et  $l_m$  varie entre 0.2 et 0.5.

En plus de ces valeurs minimales et maximales de  $h$  et  $l_m$ , nous avons envisagé une valeur centrée pour chacune de ces variables nous permettant d'avoir un plan d'expérience à 3 niveaux et 2 variables. Ceci donne  $3^2 = 9$  essais expérimentaux (voir le tableau V.1 ci-dessous)

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
$h$	40	50	60
$l_m$	0.2	0.35	0.5

**Tableau V. 1** Plan d'expérience à trois niveaux et deux variables

À partir de ce tableau, on définit les relations de correspondance (Sado et Sado (1991)), soit :

$$\begin{cases} X_h = \frac{1}{10}h - 5 \\ X_{l_m} = \frac{100}{15}l_m - \frac{5}{7} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

En raison de la propriété de convexité de la fonction de coût, le modèle de premier ordre est rejeté. Nous choisissons un modèle de second ordre donné par :

$$CT_{ih}(X_h, X_{l_m}) = a_0 + a_1.X_h + a_2.X_{l_m} + a_3.X_h^2 + a_4.X_{l_m}^2 + a_5.X_{l_m}.X_h \quad (\text{V.4})$$

Quant au nombre de réplifications, après des essais préliminaires de simulation testant la variabilité des résultats de sortie, nous avons remarqué que 10 reproductions étaient suffisantes pour chaque combinaison. De là, 90 (9x10) essais de simulation ont été réalisés.

En vue d'étudier les effets des deux variables indépendantes ( $h$  et  $l_m$ ) sur la variable dépendante ( $CT_{sim}$ ), nous avons procédé à une analyse multifactorielle de la variance (ANOVA). Le tableau V.2 présente les résultats obtenus.  $F_{exp}$  désigne le critère de test qui est le résultat de la division de la signification moyenne de chaque source par le résidu.  $F_{the}$  est le ratio théorique donné par la table de Fisher-Snedecor (Sado et Sado (1991)). Un facteur sera jugé significatif si et seulement si  $F_{exp} > F_{the}$

Source	Signification	dl	Signification moyenne	$F_{exp}$	$F_{the}$	Effet
<b>h</b>	45920	1	45920	15.70	10.1	S
<b>l<sub>m</sub></b>	14534	1	14534	4.97	10.1	NS
<b>h<sup>2</sup></b>	27856	1	27856	10.52	10.1	S
<b>l<sub>m</sub><sup>2</sup></b>	69428	1	69428	23.74	10.1	S
<b>h.l<sub>m</sub></b>	347.82	1	347.82	0.11	10.1	NS
<b>Résidu</b>	8770.7	3	2923,5			
<b>Total</b>	158085,82	8				

**Tableau V. 2** Table d'ANOVA

**S:** Effet significatif

**NS:** Effet non significatif

**dl :** Degrés de liberté

Dans la section suivante, nous explorerons l'approche d'analyse de régression qui servira à établir la relation entre le coût et les facteurs significatifs.

### V.III.2 Analyse de régression et résultats

La modélisation mathématique de la fonction du coût se base sur l'hypothèse qu'il existe une fonction continue  $CT_{th}$  de  $l_m$  et  $h$  qui donne la valeur du coût total moyen par unité de temps correspondant à n'importe quelle combinaison donnée des niveaux des facteurs.

En nous basant sur la méthode d'analyse de régression et sur les résultats de l'ANOVA, et en éliminant les facteurs non significatifs nous obtenons la relation suivante:

$$CT_{th}(X_h, X_{l_m}) = 10679 - 87.X_h + 118.X_h^2 + 186.X_{l_m}^2 \quad (V.5)$$

Partant de la relation de correspondance établie dans l'équation (V.3), nous trouvons la relation suivante :

$$CT_{th}(h, l_m) = 15072.12 - 126.7.h - 5771.58.l_m + 1.18.h^2 + 8249.1.l_m^2 \quad (V.6)$$

#### V.III.2.1 Optimisation du coût total moyen par unité de temps

En se basant sur l'équation V.6, la figure V. 5 montre la courbe en trois dimensions du coût total moyen par unité de temps  $CT_{th}(l_m, h)$  en fonction des variables indépendantes  $l_m$  et  $h$ .

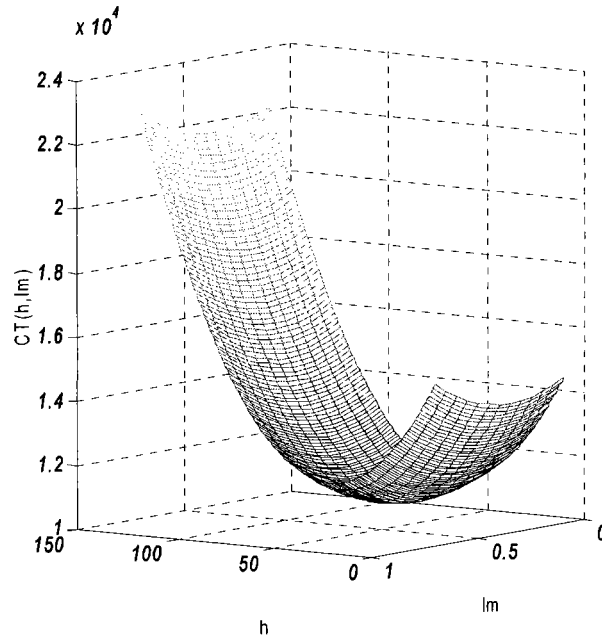


Figure V. 5 Courbe en trois dimensions du coût total par unité de temps

La stratégie optimale peut facilement être trouvée en résolvant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial CT_{th}(h, l_m)}{\partial h} \right|_{h=l^*} = 2.36.h - 126.7 = 0 \\ \left. \frac{\partial CT_{th}(h, l_m)}{\partial l_m} \right|_{l_m=l_m^*} = 16498.2l_m - 5771.58 = 0 \end{cases} \quad (V.7)$$

Le coût total moyen minimum par unité de temps correspond au couple optimal ( $h^* = 54$  unités et  $l_m^* = 0.35$ ), il est égal à 10660.74 unités monétaires par unité de temps. Autrement dit, la stratégie optimale correspondant aux paramètres d'entrée adoptés, consiste à entreprendre les actions de maintenance préventive seulement lorsqu'à l'issue d'un contrôle de la qualité d'un lot, le taux de rejet est trouvé entre  $l_m^* = 35\%$  et  $l_{max} = 70\%$ . Il sera aussi nécessaire de construire un stock tampon de taille  $h^* = 54$  unités pour diminuer le risque de ne pas satisfaire la demande de la ligne de production en aval durant les actions de maintenance. Ce stock devra être construit de nouveau à chaque fois qu'il sera totalement consommé. En procédant ainsi, il en coûtera en moyenne  $CT_{th}^* = 10660.74$  (u.m/u.t).

La figure suivante représente les courbes d'iso-réponse des résultats trouvés.



L'estimation de la variance est donnée par:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (CT_i - CT_{sim})^2}{9} \quad (V.9)$$

$CT_i$  est le coût total par unité de temps correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  réplication.

Finalement, en utilisant les équations (V.8) et (V.9) nous trouvons:

$$10655 < CT_{th}^* = 10660.74 < 10682 \quad (V.10)$$

Ainsi, nous pouvons conclure que le modèle quadratique du coût  $C_{th}$  obtenu (équation V.6 et figure V.5) est représentatif à 95%.

### V.III.2.2 Analyse des résultats de la simulation

La simulation nous permettant de générer un grand nombre de résultats exploitables pour l'interprétation de ce qui se passe en rapport à la stratégie intégrée objet de cette étude, la partie suivante présente une analyse de certains de ces résultats pour le même exemple traité. La courbe suivante présente l'évolution des quantités suivantes en fonction du seuil  $l_m$  pour un niveau de stock tampon correspondant au niveau optimal ( $h=h^*$ ) :

- le nombre d'actions de maintenance préventive (nombre de fois où un contrôle de la qualité révèle un taux de non-conformité compris entre  $l_m$  et  $l_{max}$ ),
- le nombre de révisions (nombre de fois où un contrôle de la qualité révèle un taux de non-conformité supérieur à  $l_{max}$ ),
- le nombre de fois où un contrôle de la qualité révèle un taux de non-conformité compris entre  $l^0$  et  $l_m$ . On appellera cet état comme un état de fonctionnement normal.

Ceci sur un horizon de simulation  $T_{sim} = 1000000$  unités de temps.

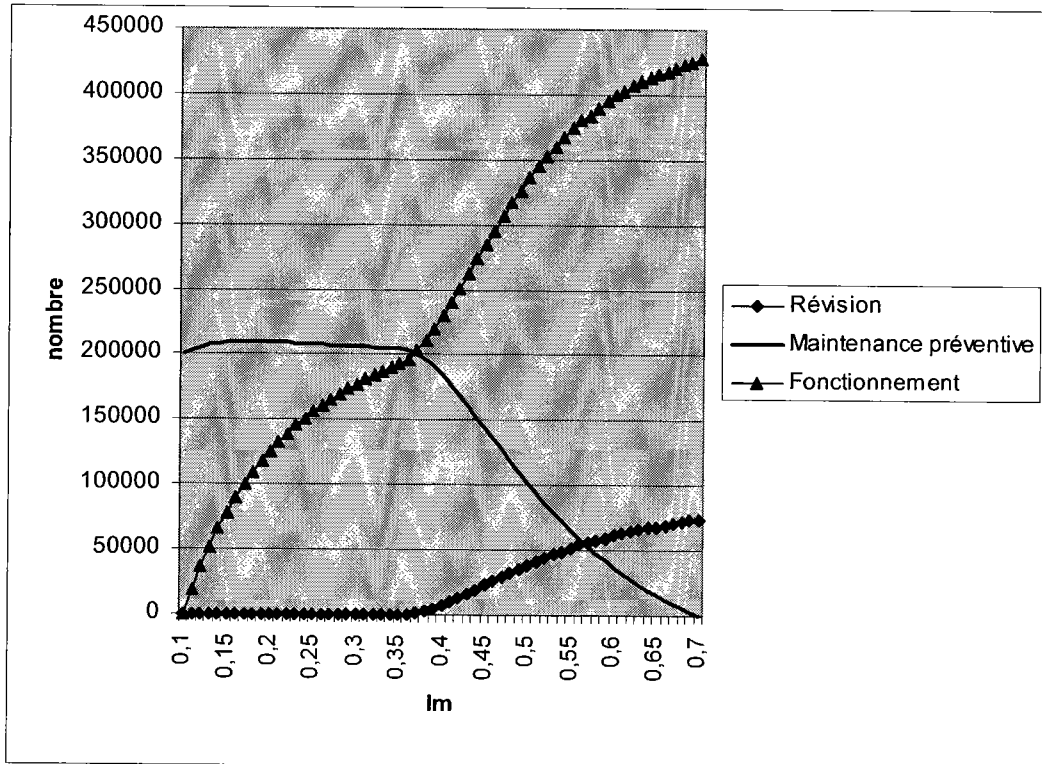


Figure V. 7 Evolution du nombre des différentes actions en fonction de  $I_m$

Nous pouvons aisément remarquer à partir de cette figure que pour des petites valeurs de  $I_m$ , le nombre d'actions de maintenance préventive est beaucoup plus important que celui des actions de révision ou de fonctionnement normal.

En se référant à la figure V.2, ceci était logiquement prévisible. En effet, si  $I_m$  prend de faibles valeurs, la zone des actions de maintenance préventive s'élargit d'où les probabilités respectives pour que le système fonctionne normalement et que le système soit arrêté pour subir les actions de révision deviennent assez faibles.

Plus  $I_m$  augmente, plus les probabilités de ne rien faire ou d'entreprendre les actions de révision augmentent. Autour de la valeur  $I_m = 0,58$ , le nombre d'actions de révision devient plus grand que celui des actions de maintenance préventive. Cela est dû au fait que nous nous approchons de la valeur  $I_{max} = 0,7$ .

Il apparaît également à partir de la figure V.7 que le nombre d'états de fonctionnement normal augmente lorsque les valeurs de  $I_m$  augmentent, ce qui est expliqué par le fait que la zone de fonctionnement normal (figure V.2) s'élargit. Même lorsque  $I_m$  est au voisinage de  $I_{max}$ , le nombre d'états de fonctionnement normal ne cesse d'augmenter. Cela s'explique par le fait qu'autour de ces grandes valeurs de  $I_m$ , les actions de maintenance préventive ne sont presque plus entreprises. Pour pouvoir effectuer une seule action de révision (tomber dans le

cas où un taux de rebut  $l$  dépasse  $l_{max}$ ), plusieurs cycles de fonctionnement normal sont nécessaires.

Dans ce qui suit, nous présentons une analyse de l'évolution des différents coûts en fonction des variables de décision.

$h$	$CT_{sim}$	$C_{pénurie}$	$C_{stockage}$	$C_{nc}$
0	13611,80	13611,8	0	0
10	11382,27	11283	50,23	24,52
20	11432,82	11283,4	100,34	24,54
30	11205,62	10917,5	228,70	29,71
40	10778,43	9966,05	743,16	34,61
50	10668,33	9732,93	865,41	34,99
60	10670,28	9731,82	868,49	34,98
70	10709,84	9567,95	1069,49	36,20
80	10791,10	9163,33	1550,81	38,48
90	10833,77	9048,65	1707,78	38,67
100	10834,97	9042,34	1715,17	38,73
110	10851,72	8987,47	1786,05	39,10
120	10899,40	8849,75	1969,73	39,96
130	10932,54	8797,25	2055,01	40,14
140	10934,40	8796,13	2058,01	40,13
150	10947,04	8778,55	2087,95	40,27

**Tableau V. 3** Evolution des coûts par unité de temps en fonction de  $h$ .

$CT_{sim}$  : Coût total moyen par unité de temps

$C_{pénurie}$  : Coût moyen de pénurie par unité de temps

$C_{stockage}$  : Coût moyen de stockage par unité de temps

$C_{nc}$  : Coût moyen de non-conformité par unité de temps

Le tableau V.3 présente l'évolution des différents coûts en fonction du niveau de stock  $h$  pour  $l_m = l_m^*$ . Les figures V.8, V.9, et V.10 reprennent avec plus de détail les résultats du tableau V.3.



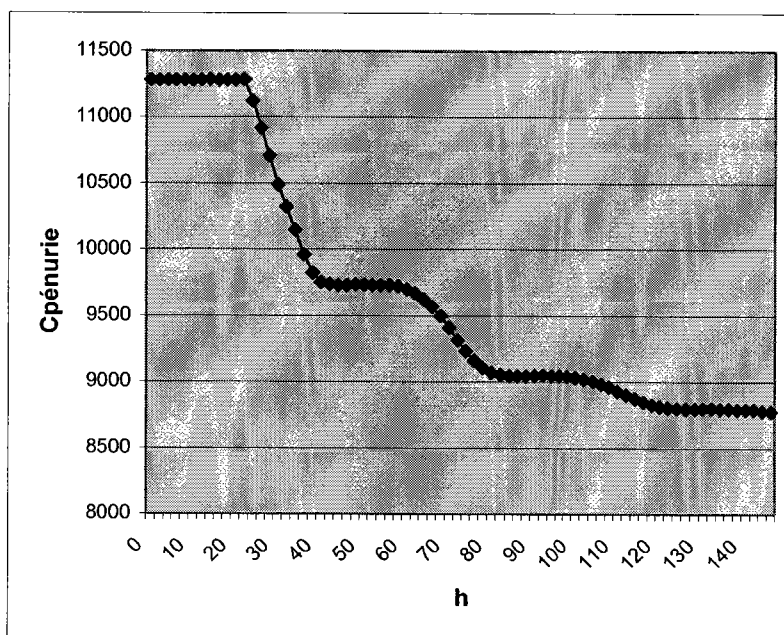


Figure V. 8 Evolution du coût de pénurie par unité de temps en fonction de  $h$

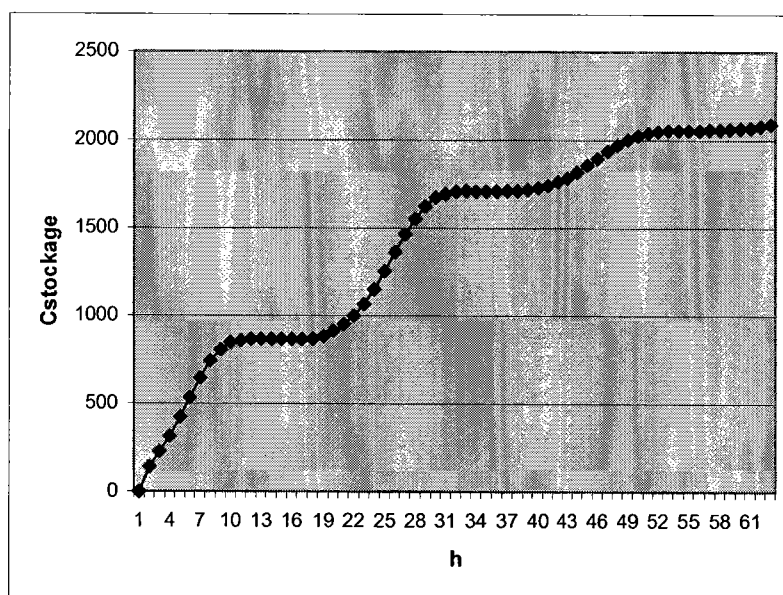
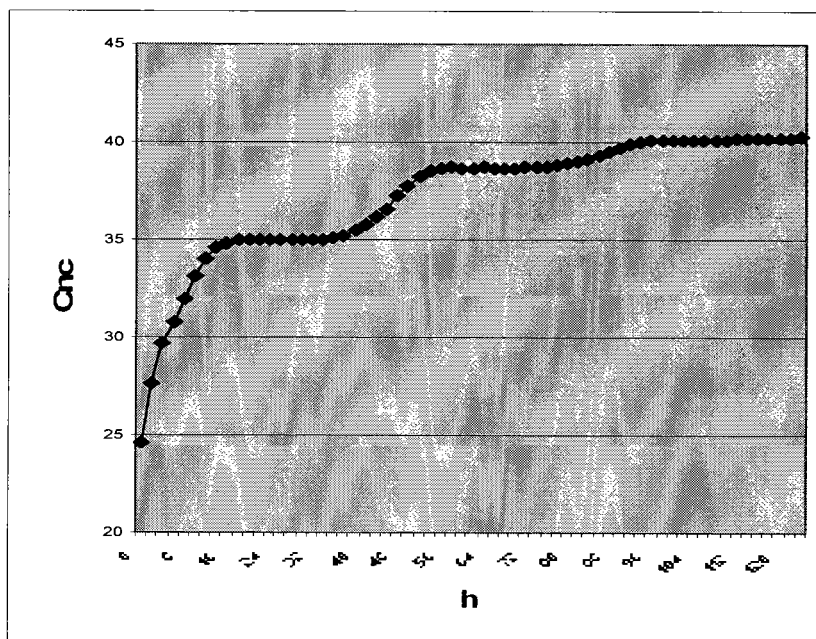


Figure V. 9 Evolution du coût de stockage par unité de temps en fonction de  $h$



**Figure V. 10** Evolution du coût de non-conformité par unité de temps en fonction de  $h$

Il est clair à partir de la figure V.8 que le coût de pénurie diminue lorsque la taille du stock tampon augmente ce qui était logiquement prévisible. D'autre part, la figure V.9 montre bien que plus la taille du stock augmente, plus élevé est le coût de stockage. Par ailleurs, le seuil du taux de non-conformité demeurant constant ( $l_m = l_m^*$ ), nous remarquons d'après la figure V.10 que plus la taille du stock est importante, plus le coût de non-conformité est élevé.

Dans la suite nous regardons la variation des différents coûts en fonction du taux de non-conformité  $l_m$  pour une taille de stock tampon fixe ( $h=h^*= 54 \text{ unités}$ ). Les résultats obtenus sont montrés dans le tableau suivant :

$l_m$	$CT_{sim}$	$C_{pénurie}$	$C_{stockage}$	$C_{nc}$	$CM$
0,1	10947,2	10877,4	0	0	79,92
0,15	10886,2	10227,2	567,87	8,72	83,66
0,2	10819,5	9949,23	770,09	16,43	83,78
0,25	10770,2	9822,93	840,15	23,26	83,09
0,3	10740	9759,94	863,894	29,41	82,42
0,35	10720,3	9731,99	866,587	35,02	81,90
0,4	10750,7	9633,9	962,831	42,84	76,90
0,45	10826,6	9450,94	1162,22	52,21	66,68
0,5	10903,6	9253,73	1381,2	60,28	56,05
0,55	10979,8	9111,05	1552,1	66,328	46,95
0,6	10961,9	8982,04	1627,16	70,03	39,41
0,65	10986,7	9006,66	1599,59	72,64	33,80

**Tableau V. 4** Evolution des coûts en fonction de  $l_m$  pour ( $h=h^*= 54$  unités).

$CT_{sim}$  : Coût total moyen par unité de temps

$C_{pénurie}$  : Coût moyen de pénurie par unité de temps

$C_{stockage}$  : Coût moyen de stockage par unité de temps

$C_{nc}$  : Coût moyen de non-conformité par unité de temps

$CM$  : Coût de maintenance moyen par unité de temps

Nous nous proposons d'approfondir ces résultats en gardant le même horizon ( $l_m$  allant de 0.1 à 0.7) mais avec un pas plus petit. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures V.11, V.12, V.13 et V.14.

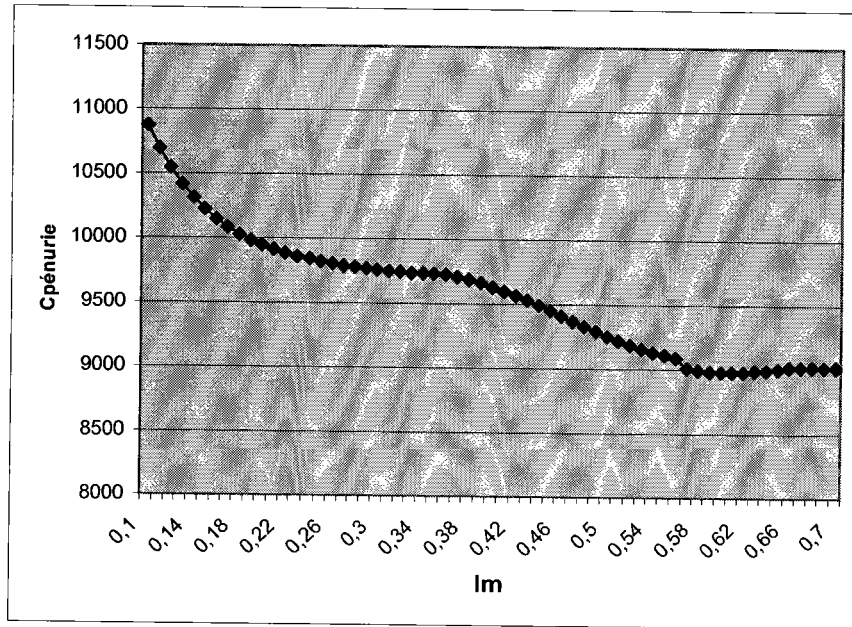


Figure V. 11 Evolution du coût de pénurie par unité de temps en fonction de  $l_m$

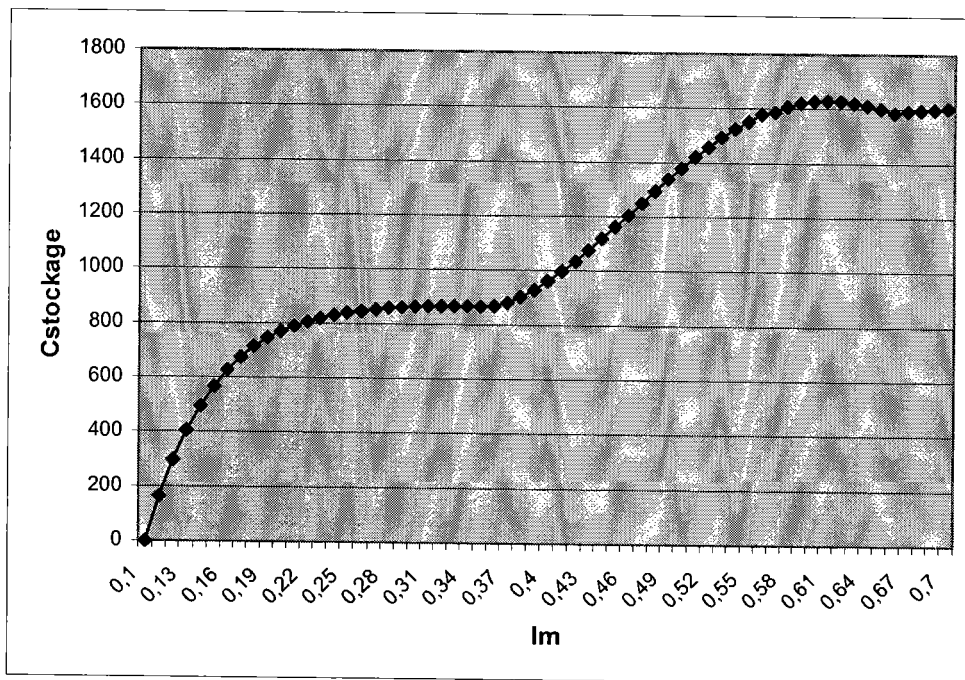


Figure V. 12 Evolution du coût de stockage par unité de temps en fonction de  $l_m$

Il apparaît clairement que pour des petites valeurs de  $l_m$ , c'est-à-dire on fait plus de préventif que de curatif, le coût moyen de pénurie est assez élevé. Cela est dû au cumul des périodes d'arrêt pour maintenance préventive qui est assez important engendrant des pénuries importantes (le niveau du stock tampon demeurant constant bien évidemment).

Plus  $I_m$  est grand, plus le nombre d'actions de maintenance préventive diminue et celui des actions de révision augmente, ceci jusqu'à un certain niveau  $I_m$  qui se situe autour de 0,5. A partir de ce niveau, la durée de chaque arrêt ne varie pas beaucoup puisque la majorité des actions sont des révisions (certes ces durées ne sont pas égales) d'où le coût de pénurie a de plus en plus tendance à se stabiliser.

D'autre part, nous remarquons d'après la figure V.11 que plus le seuil  $I_m$  augmente, plus le coût de stockage est grand, jusqu'à un certain niveau. Ceci malgré le fait que la tille du stock tampon demeure la même. En effet, il faut rappeler que le coût de stockage est calculé durant trois phases : la phase de fonctionnement normal, au cours des arrêts pour maintenance préventive et au cours des arrêts pour maintenance curative.

$$TS = TSF + TSP + TSC$$

TS : temps de stockage

TSF : temps de stockage pendant le fonctionnement normal

TSP : temps de stockage pendant les actions préventives

TSC : temps de stockage pendant les actions correctives

Cette évolution est due au fait que le temps de stockage diffère. Au début (pour des petites valeurs de  $I_m$ ) on a un petit temps de stockage puisque la machine est vite arrêtée pour subir les actions de maintenance. Plus  $I_m$  augmente (c'est-à-dire que la machine travaille plus longtemps avant arrêt) plus le coût de stockage augmente vu que le temps de stockage augmente (TSF très grand).

Autour de la valeur de  $I_m = 0.55$ , le coût de stockage commence à se stabiliser parce que le temps total de stockage commence aussi à se stabiliser.

Par ailleurs, la figure V.13 qui présente l'évolution du coût de non-conformité en fonction de  $I_m$  confirme bien que plus  $I_m$  est grand (c'est-à-dire plus on tolère des périodes plus longues de productions d'items non-conformes), plus élevé est le coût engendré par la production d'unités non-conformes.

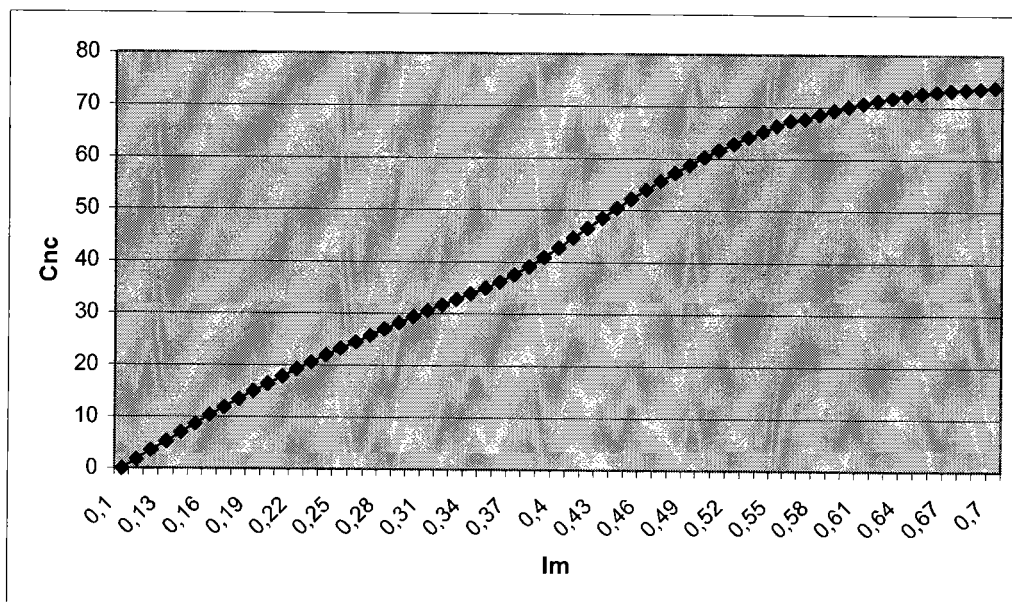


Figure V. 13 Evolution du coût de non-conformité par unité de temps en fonction de  $l_m$

D'après la figure V.14, nous constatons que le coût de maintenance diminue lorsque  $l_m$  augmente (c'est-à-dire lorsqu'on est moins exigeant en terme de qualité), toujours pour un niveau de stock  $h$  fixe ( $h=h^*=54$ ). L'allure de cette courbe est due au fait que plus les valeurs de  $l_m$  sont petites, plus la zone du préventif est grande (voir la figure V.2).

En d'autres termes, au fur et à mesure que  $l_m$  augmente, la zone de fonctionnement normal augmente et par conséquent celle de maintenance préventive diminue d'où la diminution du coût de maintenance.

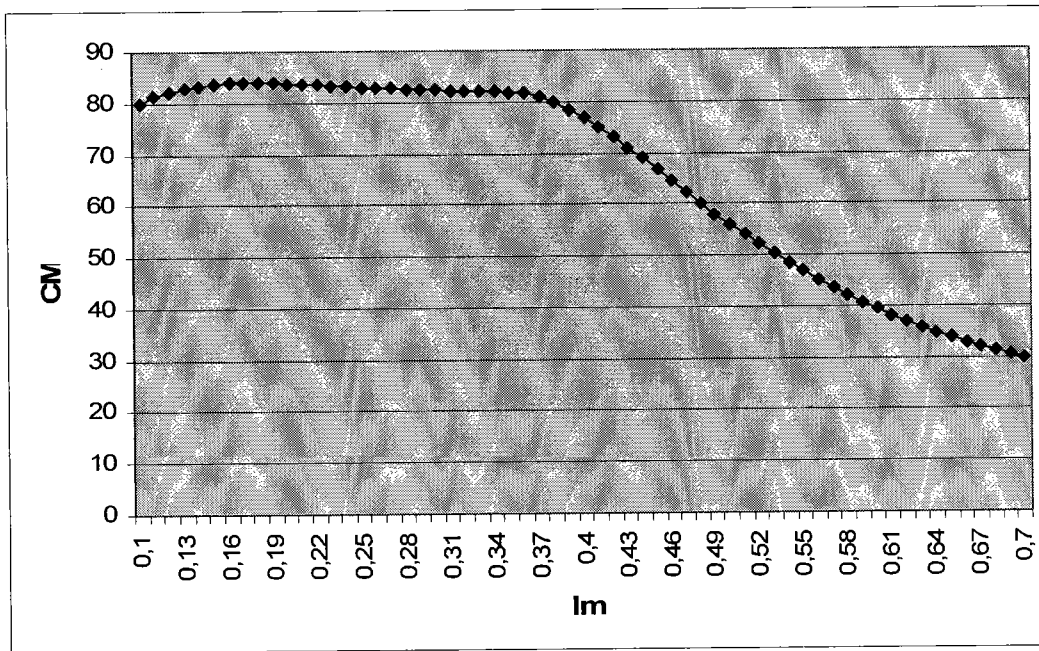


Figure V. 14 Evolution du coût de maintenance par unité de temps en fonction de  $l_m$

## V.IV Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons repris la stratégie intégrée de contrôle de qualité et de maintenance préventive traitée dans les chapitres précédents. Dans une perspective plus réaliste, nous avons considéré un contexte où les actions de maintenance préventive sont des actions imparfaites permettant simplement d'améliorer l'état de la machine pour diminuer le taux de produits non-conformes sans pour autant remettre la machine à l'état comme neuf.

L'approche de modélisation proposée combine la simulation, les plans d'expérience et l'analyse de régression pour fournir, pour n'importe quelle situation donnée, une estimation de la fonction de coût total par unité de temps, qui inclut le coût de qualité, le coût de maintenance et celui de l'inventaire. La modélisation par simulation et les plans d'expérience ont été utilisés pour examiner les effets des variables de décision sur le coût total moyen par unité de temps. L'analyse de régression a été ensuite utilisée pour exprimer la fonction coût en termes des variables significatives et des interactions données par l'approche expérimentale.

De là, les valeurs optimales du seuil du taux de non-conformité  $l_m$  et la taille du stock tampon  $h$  ont été facilement déterminées à partir de l'estimation obtenue de la fonction de coût.

Enfin, il est important de souligner que la puissance de la simulation nous a permis d'une part, de relaxer l'hypothèse d'une maintenance préventive parfaite adoptée jusque là dans les chapitres précédents, et d'autre part de visualiser aisément et d'interpréter le comportement du système pour plusieurs combinaisons de plusieurs paramètres. L'utilisateur dispose ainsi d'un véritable outil d'aide à la décision lui permettant de répondre à toutes les questions de type 'que se passerait-il si tel ou tel paramètre augmente ou diminue ?'.





## Conclusion générale

Nous avons traité dans cette thèse le problème de l'intégration des activités de maintenance, de production, et de contrôle de la qualité pour des unités de production imparfaites, pouvant produire des unités non-conformes à partir d'un certain degré aléatoire de dégradation.

Dans cette perspective, nous avons présenté dans un premier temps, une nouvelle stratégie intégrée, pour une unité de production devant satisfaire une demande constante et qui passe d'une façon aléatoire à un état 'hors contrôle' dans lequel elle commence à produire des items non-conformes. Une maintenance préventive de type âge a été proposée dans ce contexte pour diminuer le risque de passage à l'état 'hors contrôle' engendrant de la non-qualité. La modélisation de la stratégie a conduit au développement d'un modèle mathématique relativement complexe. Ce modèle tient compte à la fois des coûts de maintenance, d'inventaire (coût de stockage et coût de pénurie) et celui lié à la perte des produits non conformes. Étant donnée la complexité du modèle, une procédure numérique a été mise au point et un exemple numérique a été traité. Les résultats obtenus ont montré que le fait d'entreprendre des actions de maintenance préventive engendre des réductions en termes de coût de qualité et de coût d'inventaire.

Une des hypothèses de travail sur lesquelles nous nous sommes basés dans notre modélisation, stipule que la fonction de densité de probabilités associée aux instants de passage à l'état 'hors contrôle' est connue (cette hypothèse est d'ailleurs utilisée dans la

majorité des travaux parus sur le même sujet). La connaissance a priori de ces distributions de probabilités n'est pas chose courante dans l'industrie en général. En effet, les informations données par les fournisseurs d'équipements de production ne sont pas suffisantes, les fabricants se contentent généralement de fournir des valeurs moyennes. Ils donnent très rarement les fonctions de distribution de durées de vie de leurs équipements ou composants. De plus, pour des raisons souvent liées à la bonne volonté et au niveau de connaissance des responsables des usines, il n'est pas toujours évident dans la pratique de collecter et de traiter statistiquement les données concernant les historiques des pannes ou des passages à des états 'hors contrôle'. De là est née l'idée de développer de nouvelles stratégies pour lesquelles le déclenchement des actions de maintenance ne serait pas déterminé, comme dans la majeure partie de la littérature, via un traitement statistique de l'historique des défaillances, mais plutôt en exploitant le niveau du taux de non-conformité constaté à l'issue de chaque contrôle de la qualité.

Dans cette perspective, nous avons proposé dans la suite du mémoire, une nouvelle stratégie, où nous avons considéré une unité de production imparfaite pouvant engendrer des unités non-conformes. Toutes les unités produites par la machine sont soumises à un contrôle de la qualité d'une façon automatisée. Selon le taux de rebut observé et comparé à un niveau seuil  $I_m$  (première variable de décision), on décide du type d'action de maintenance à entreprendre. En vue de diminuer le risque de pénurie pendant les interruptions de service pour maintenance, un stock tampon de taille  $h$  (deuxième variable de décision) est bâti au début de chaque cycle.

Une approche analytique combinée avec une approche par simulation nous ont permis de modéliser la stratégie proposée. Une procédure de calcul de la stratégie optimale pour n'importe quelle situation donnée a été ensuite développée. La robustesse de cette procédure a été vérifiée par le traitement de plusieurs exemples numériques et par l'analyse de sensibilité des solutions optimales par rapport à la variation de certains paramètres d'entrée. Un exemple complet a été présenté en se basant sur des données arbitrairement choisies mais cohérentes par rapport à ce que l'on pourrait rencontrer dans la réalité.

Les résultats obtenus ont montré, entre autres, que le coût d'inventaire a une influence majeure sur le coût total d'exploitation. Ceci nous a conduits à généraliser la stratégie proposée en permettant de retarder la construction du stock tampon par rapport au début du cycle dans un souci de diminuer la période de stockage et de baisser par conséquent les coûts

d'inventaire. La construction du stock tampon de débute que lorsque le taux de rebut atteint un autre niveau seuil  $I_A$  (nouvelle variable de décision).

Par la suite, nous avons considéré la situation où les actions de contrôle de la qualité n'ont pas un coût négligeable. Les variables de décision deviennent: le niveau seuil de non-conformité  $I_m$  sur la base duquel les actions de maintenance devraient être entreprises, la taille du stock tampon, et les périodes  $X$  de contrôle de la qualité. Pour modéliser cette stratégie, nous nous sommes basés sur une approche analytique. Comme pour les autres stratégies proposées, un exemple numérique et une série de tests sur les valeurs des intrants ont été réalisés. Il a été clairement démontré à partir des résultats numériques que le niveau seuil du taux de non-conformité déclenchant la maintenance, et la périodicité de contrôle de la qualité sont fortement liés. En effet, on a pu constater que plus on est exigeant en terme de qualité (des petites valeurs du niveau seuil de taux de non-conformité), plus proches sont les instants d'inspection.

Enfin, dans le dernier chapitre, toujours dans le même contexte, nous avons tenu compte du fait que les actions de maintenance peuvent préventive ne sont pas forcément des actions parfaites qui remettraient l'équipement de production à un état comme neuf, à l'instar d'une action de révision complète. Nous avons utilisé pour cela la simulation et les plans d'expérience. L'outil de simulation nous a permis de visualiser et d'interpréter aisément le comportement du système pour plusieurs combinaisons de plusieurs paramètres.

Cette recherche a débouché sur plusieurs contributions intéressantes dans le domaine de la maintenance. Plusieurs extensions possibles des modèles développés peuvent être envisagées. En effet, on pourrait considérer simultanément quatre variables de décision, à savoir le seuil de taux non-conformité  $I_m$ , la taille du stock tampon  $h$ , la période de contrôle de la qualité,  $X$  et le décalage de la construction du stock tampon  $I_A$ .

Il serait aussi intéressant de prendre en considération la possibilité d'occurrence de panne de l'unité de production au cours d'un cycle. Une telle considération devrait mettre encore plus en valeur l'importance des actions de maintenance préventive, et aurait une influence directe sur la taille du stock tampon.

Il serait également très intéressant de considérer des situations fréquemment rencontrées, entre autres, dans l'industrie agro-alimentaire où les items produits par l'équipement sont de nature périssable avec le temps. Ceci permettrait de mettre mieux en évidence les améliorations entre le cas où le stock tampon est bâti au début de chaque cycle, et le cas où la construction serait retardée.

Ce travail devrait aussi être poursuivi au niveau de la validation des modèles et des procédures de calcul développés. En effet, tous les tests de validation ont été faits avec des données arbitrairement choisies. Il est souhaitable de pouvoir valider ces modèles à l'aide de données issues de situations réelles. Des contacts ont été établis avec des industriels du secteur de l'automobile qui utilisent la politique de contrôle de la qualité sur tous les items produits, pour avoir accès aux données nécessaires sur les différents coûts liés à la maintenance (maintenance préventive, révision), à la qualité (inspection, coût des items perdus) et à l'inventaire (coût de stockage, coût de pénurie) pour pouvoir procéder à des tests de validation.



## Liste bibliographique

- (Aghezzaf et al 2007)** Aghezzaf E.H., Jamali M.A., Ait-Kadi D. (2007) ‘An integrated production and preventive maintenance planning model’ *European Journal of Operational Research*, **181**, pp 679–685
- (Alexander 1995)** Alexander S.M., Dillman M.A., Usher J.S., Damodaran B. (1995), ‘Economic design of control charts using the Taguchi loss function’, *Computers and Industrial Engineering*, **28**, pp 671–679.
- (Barlow et al. 1963)** Barlow, R.E., Hunter, L.C. et Proschan, F., (1963), “Optimum Cheking Procedures”. *Journal of Society of Industrial Applied Mathematics*, **11** (4), pp 1078-1095
- (Ben-Daya 1999)** Ben-Daya M (1999) ‘Integrated production maintenance and quality model for imperfect processes’ *IIE Transactions* **31**, pp 491-501
- (Ben-Daya 2002)** Ben-Daya. M (2002) ‘The economic production lot-sizing problem with imperfect production processes and imperfect maintenance’ *International Journal of Production Economics*, **76**, pp 257–264

- (Chakraborty et al 2007)** Chakraborty T, B.C. Giri, K.S. Chaudhuri (2007) 'Production lot sizing with process deterioration and machine breakdown under inspection schedule'. *Omega*, doi: 10.1016/j.omega.2006.12.001
- (Chakraborty et al 2008)** Chakraborty. T, B.C. Giri , K.S. Chaudhuri (2008) 'Production lot sizing with process deterioration and machine breakdown' *European Journal of Operational Research*, **185**, pp 606–618
- (Chand 1989)** Chand, S. (1989). 'Lot sizes and setup frequency with learning and process quality'. *European Journal of Operational Research*, **42**, (2), pp 190–202.
- (Chang 2004)** Chang H C (2004) 'An application of fuzzy sets theory to the EOQ model with imperfect quality items' *Computers & Operations Research*, **31**, pp 2079–2092
- (Chelbi et Aït-Kadi 2003)** Chelbi A, Aït-Kadi D, (2003), "Joint Optimal Buffer Inventory and Preventive Maintenance Strategy for a Randomly Failing Production Unit". *Journal of decision systems*, **12**, (1), pp 21-30.
- (Chelbi et Aït-Kadi 2004)** Chelbi A., Ait-Kadi D. (2004) "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance", *European Journal of Operational Research*, vol 156/3, pp 712-718.
- (Chelbi et Rezg 2006)** Chelbi A., Rezg N. (2006). 'Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit subjected to a minimum required availability level', *International Journal of Production Economics*. **99**, pp 131-143.
- (Chelbi et al. 2008)** Chelbi A, Aït-Kadi D, Radhoui M (2008), " An integrated production and maintenance model for one failure prone machine-finite capacity buffer system for perishable products with constant demand" A paraître dans *International Journal of Production Research*
- (El-Ferik 2008)** El-Ferik, S. (2008) 'Economic production lot-sizing for an unreliable machine under imperfect age-based maintenance policy' *European Journal of Operational Research*, **186**, pp 150–163



- (El-Kassar et Salameh 2003)** El-Kassar.A.N, Salameh.M.K., (2003), "Safety Buffer for Preventive Maintenance and Breakdown" "; *Int. Conf. on Industrial Engineering and Production Management*.
- (Gharbi et Kenné 2000)** Gharbi, J.P. Kenné (2000) 'Production and preventive maintenance rates control for a manufacturing system: An experimental design approach' *International Journal of Production Economics*, **65**, pp 275-287
- (Gharbi et Kenné 2005)** Gharbi, J.-P. Kenné (2005) 'Maintenance scheduling and production control of multiple-machine manufacturing systems' *Computers & Industrial Engineering*, **48**, pp 693–707
- (Groenevelt et al 1992 a)** Groenevelt, H., Pintelon, L., Seidmann, A., (1992), "Production Lot Sizing with Machine Breakdowns"; *Management Science*, **38**, (1), pp 104-123.
- (Groenevelt et al 1992 b)** Groenevelt, H., Pintelon, L., Seidmann, A., (1992), "Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks"; *Operations Research*, **40**, (5), pp 959-971.
- (Jaber 2006)** Jaber. M Y (2006) 'Lot sizing for an imperfect production process with quality corrective interruptions and improvements, and reduction in setups' *Computers & Industrial Engineering*, **51**, pp 781–790
- (Kenné et al 2007)** Kenne' J.-P., Gharbi A., M. Beit (2007) 'Age-dependent production planning and maintenance strategies in unreliable manufacturing systems with lost sale' *European Journal of Operational Research*, **178**, pp 408–420
- (Khouja 2005)** Khouja, M. (2005). 'The use of minor setups within production cycles to improve product quality and yield'. *International Transactions in Operational Research*, **12**, (4), pp 403–416.
- (Meller et al 1996)** Meller Russell, D., David, S. Kim, (1996), "The Impact of Preventive Maintenance on System Cost and Buffer Size"; *European Journal of Operational Research*, (95) pp 577-591.
- (Nakagawa 1981)** Nakagawa, T. (1981), "A summary of Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure", *J.of the Ops. Res. Society of Japan* **24** (3) pp 213-227

- (Ouyang et al 2002)** Ouyang L Y, Cheng-Kang Chen, Hung-Chi Chang (2002) ‘Quality improvement, setup cost and lead-time reductions in lot size reorder point models with an imperfect production process’ *Computers & Operations Research*, **29**, pp 1701–1717
- (Panagiotidou et Tagaras 2007)** Panagiotidou, S. Tagaras,G. (2007) ‘Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distributions’ *European Journal of Operational Research*, **180**, pp 329–353
- (Pintelon et Gelders 1992)** Pintelon, L.M., and Gelders, L.F, (1992), “Maintenance Management Decision Making”. *European Journal of Operation Research*, **58**, 301-317.
- (Porteus 1986)** Porteus E.L. (1986) “Investing in new parameter values in the discounted EOQ model”. *Naval research logistics*, vol. 33, pp 39-48.
- (Radhoui et al 2007a)** Radhoui M, Rezg N, Chelbi A, ‘Integrated maintenance policy based on quality control’ *The 37th International Conference on Computers and Industrial Engineering (CIE’37)*. October 20-23, 2007, Alexandria -Egypt.
- (Radhoui et al 2007b)** Radhoui M, Chelbi A, Rezg N, ‘Integrated model of preventive maintenance and quality control for deteriorating production units’ *International Conference on industrial engineering and systems management*. May 30 - June 2, 2007, Beijing – China.
- (Radhoui et al 2008a)** Radhoui M, Rezg N, Chelbi A, ‘Integrated model of preventive maintenance, quality control and buffer sizing for unreliable and imperfect production systems’ A paraître dans *International Journal of Production Research*
- (Radhoui et al 2008b)** Radhoui M, Rezg N, Chelbi A, ‘Joint quality control and preventive maintenance strategy for imperfect production processes’ A paraître dans *Journal of Intelligent Manufacturing*
- (Rezg et al 2005)** Rezg N., Chelbi A., Xiaolan X (2005), ‘Modeling and optimizing a joint buffer inventory and preventive maintenance strategy for a randomly failing production unit: Analytical and simulation approaches’. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, Vol 18, No 2-3, pp 225-235

- (Rosenblatt et Lee 1986)** Rosenblatt M.J., Lee H.L. (1986) "Economic production cycles with imperfect production process". *IIE Transactions*, vol. 18, pp 48-55.
- (Sado et Sado 1991)** Sado G., Sado M-C. (1991). Les plans d'expériences (de l'expérimentation à l'assurance qualité) Publisher: *AFNOR technique ISBN 2-12-450311-1*.
- (Salameh et al 1999)** Salameh M. K., Ghattas R. E., Maddah B. S., (1999), "Optimal Just-In-Time Buffer Inventory For Regular Preventive Maintenance"; *Int. Conf. on Industrial Engineering and Production Management*, **1**, pp 194-200
- (Salameh et al 2001)** Salameh M.K., Ghattas R.E., Maddah B.S., (2001), "Just-In-Time Reserve of Deteriorating Items for Regular preventive Maintenance"; *Int. Conf. on Industrial Engineering and Production Management*.
- (Srinivasan et Lee 1996)** Mandyam M. Srinivasan, Hyo-Seong Lee (1996) 'Production-inventory systems with preventive maintenance' *IIE Transactions* **28**, pp 879-890
- (Van der Dayn Schouen et Vanneste 1995)** Van der Dayn Schouen, F.A., Vanneste, S.G., (1995), "Maintenance Optimization of a Production System with Buffer Capacity"; *European Journal of Operational Research*, **82**, (2), pp 323-338.
- (Wang 2002)** Wang H (2002). 'A survey of maintenance policies of deteriorating systems', *European Journal of Operational Research*, **139**, pp 469-489
- (Wijingraad 1979)** Wijingraad, J, (1979), "The Effect of Interstage on the Output of two Unreliable Production unit in Series, with Different Production Rates", *AIE Transactions*, pp 42-47.
- (Zhou et Zhu 2007)** Zhou, W.-H. Zhu, G.-L (2007) 'Economic design of integrated model of control chart and maintenance management', *Mathematical and Computer Modelling*, doi:10.1016/j.mcm.2007.09.008